

М. С. МОЛОДЕНСКИЙ

М. С. МОЛОДЕНСКИЙ

Избранные труды

ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ

ФИГУРА И ВНУТРЕННЕЕ

СТРОЕНИЕ ЗЕМЛИ

ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ

ФИГУРА И ВНУТРЕННЕЕ СТРОЕНИЕ ЗЕМЛИ

**РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК**  
**СЕКЦИЯ НАУК О ЗЕМЛЕ**  
**ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ**  
**ФИЗИКИ ЗЕМЛИ им. О. Ю. ШМИДТА**



Μακρυγιάννης,

**М. С. МОЛОДЕНСКИЙ**

Избранные труды

**ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ  
•  
ФИГУРА И ВНУТРЕННЕЕ  
СТРОЕНИЕ ЗЕМЛИ**



МОСКВА «НАУКА» 2001

УДК 550.3  
ББК 26.11  
М 75

Ответственные редакторы:  
академик В.Н. СТРАХОВ  
доктор физико-математических наук С.М. МОЛОДЕНСКИЙ

Рецензенты:  
кандидат технических наук Н.Л. МАКАРЕНКО  
доктор физико-математических наук В.Н. ЖАРКОВ

Составитель:  
кандидат физико-математических наук М.В. КУЗНЕЦОВ

### **Молоденский М.С.**

Гравитационное поле, фигура и внутреннее строение Земли. – М.: Наука, 2001. – 569 с.; ил. (Серия "Избранные труды").

ISBN 5-02-002331-0

В книгу включены избранные труды выдающегося российского ученого, члена-корреспондента Академии наук СССР, лауреата Ленинской и Государственных премий Михаила Сергеевича Молоденского в области геофизики, геодезии, теории фигуры Земли, геомеханики и геодинамики.

Для научных работников, аспирантов и студентов, специализирующихся в области наук о Земле, специалистов в области астрономии.

ТП 1999-11-169

### **Molodensky M.S.**

Field of gravity, figure and internal structure of the Earth. – М.: Nauka, 2001. – 569 p. (Selected works).

ISBN 5-02-002331-0

This book includes most important research results in the field of geodesy and geophysics theory of the figure of the Earth, geomchanics and geodynamics of the outstanding Russian scientist M.S. Molodensky (1909–1991), corresponding member of the USSR Academy of Sciences, Lenin- and State Prize Laureate.

Readership: scientific workers, post-graduate and high-school students, specialists in the field of Earth sciences and astronomy.

ISBN 5-02-002331-0

© Издательство "Наука", 2001  
© Российская академия наук  
и издательство "Наука",  
серия "Избранные труды"  
(разработка, оформление),  
1932 (год основания), 2001

# МИХАИЛ СЕРГЕЕВИЧ МОЛОДЕНСКИЙ, ЖИЗНЬ И ТВОРЧЕСТВО

*В.В. Бровар, М.И. Юркина*

Михаил Сергеевич Молоденский, выдающийся геодезист и геофизик XX века, прожил долгую, насыщенную творческую жизнь, оставив огромное научное наследие, учеников и последователей.

Родился Михаил Сергеевич 15 июня 1909 г. в уездном городе Епифани Тульской губернии в семье Сергея Михайловича и Надежды Михайловны Молоденских. Умер 12 ноября 1991 г. на 83 году жизни. Отец Михаила Сергеевича был священником. В семье росло шестеро детей: Николай, Мария, Сергей, Владимир, Михаил и Елена.

Подробных сведений о происхождении родителей Михаила Сергеевича в семье не сохранилось. Фамилия Молоденских возникла по названию села Молодёнки Епифанского уезда, теперь Кимовского района, и писалась через «ё» (кто-то из первых Молоденских служил в притче Введенской церкви). Но этот факт произошел, по всей вероятности, до 1862 г. — начала издания Тульских епархиальных ведомостей, откуда взяты приводимые сведения и где точки над буквой «е» уже опущены.

В существующем до сих пор большом селе Молодёнки ранее было две церкви: Введения Богородицы во храм (построена в 1803 г. на месте деревянной владением тогда селом графом Кириллом Григорьевичем Разумовским) и церковь, возведенная в честь святого князя Александра Невского (устроена в каменном здании в 1882 г. Петром Федоровичем Самаринным, владением усадьбой близ села). Эти сведения приведены В.И. Чернопятовым (1911 г.), а также в книге «Приходы и церкви Тульской епархии» (1895 г.). До недавнего времени на окраине села еще можно было видеть руины первой церкви, вторая совсем не сохранилась.

К моменту, когда Михаил Сергеевич стал студентом, в стране заканчивался первый советский период комплексного изучения Курской магнитной аномалии — отработка методов и инструментов для полевых геофизических разведочных исследований, включая гравиметрические. К этому же времени Ф.Н. Красовский заканчивал разработку схемы построения государственной астрономо-геодезической сети Советского Союза, а в Голландии Ф.В. Венинг-Мейнес получил формулу для вычисления составляющих уклонения отвеса по гравиметрической съемке и без должного обоснования утверждал, что при этом аномалии силы тяжести достаточно знать в ограниченной области, что давало основание для начала практических работ.

Все эти обстоятельства подготавливали начало планомерного геодезического и геологического изучения территории всей страны, содействовали развитию геофизических методов разведки полезных ископаемых. Необходимы стали ученые и преподаватели новых профилей. На физико-математическом факультете МГУ была введена геофизическая специальность. Вопросы по геодезии входили в программу работ университетской астрономической обсерватории со времени ее организации в начале XIX в. При университете был создан Астрономо-геодезический институт, так что для расширения подготовки по высшей геодезии и гравиметрии существовала хорошая база. Было даже намерение заменить астрономическую специальность специальностью «геодезия и грави-

метрия». В такую именно группу поступил Михаил Сергеевич. Воспоминания об этом периоде жизни ученого оставили М.С. Зверев (1959 г.), учившийся с М.С. Молоденским в одной группе, и Н.Б. Григорьева (1994 г.), учившаяся на астрономическом отделении тремя годами позже М.С. Молоденского и М.С. Зверева. Курсы гравиметрии, теории фигуры Земли и сфероидальной геодезии читал им А.А. Михайлов, раздел триангуляции — М.Д. Соловьев, а градусные измерения — специально приглашенный студентами Ф.Н. Красовский. Астрономические курсы читали С.Н. Блажко и С.А. Казаков, курс математического анализа — Н.Н. Лузин и А.Я. Хинчин, теорию дифференциальных уравнений преподавал В.В. Степанов, курс вычислительной математики вел С.А. Казаков, дифференциальную геометрию и теорию поверхностей — С.П. Фиников. Воспоминания о московском физмате начала 20-х годов опубликовал Н.М. Бескин (1993 г.).

М.С. Зверев в упомянутых воспоминаниях, которые очень интересны, пишет об исключительно уважительных отношениях группы с Феодосием Николаевичем Красовским и в особенности старосты — М.С. Молоденского. А.А. Михайлов работал в те годы над переводом известной монографии П. Пицетти (1913 г.), и Михаил Сергеевич с удовольствием вспоминал, как они по предложению Александра Александровича проверяли выводы и исправляли многочисленные опечатки подлинника. Так, русский перевод 1933 г. оказался значительно лучше итальянского оригинала. И неудивительно, что, как впоследствии выяснилось, в Италии эту монографию знают хуже, чем у нас.

Потребность творчества искала выхода, и еще студентом М.С. Молоденский усовершенствовал обработку пар Певцова для определения широт и опубликовал об этом статью в «Астрономическом журнале» (1931 г.). В январе 1931 г. С.Н. Блажко, любимый учитель Михаила Сергеевича, пригласил его на работу в Астрономо-геодезический научно-исследовательский институт (АГНИИ) МГУ. Вскоре произошло слияние этого института, Астрономической обсерватории МГУ, Государственного астрофизического института и Астрофизической обсерватории в Кучино в Государственный астрономический институт имени П.К. Штернберга (ГАИШ). М.С. Молоденского переводят в Кучино к В.Г. Фесенкову. Там пришлось заниматься фотометрией темных туманностей. В это же время по приглашению Ф.Н. Красовского и И.А. Казанского М.С. Молоденский по совместительству с увлечением работает в гравиметрической секции будущего ЦНИИГАиК.

В Кучино он получил, наконец, комнату в общежитии. В этой комнате с ним стал жить отец, а мать — у дочери Елены в Туле. Но спокойная жизнь продолжалась недолго: на собрании, посвященном партийной чистке, в присутствии всех сотрудников и аспирантов ГАИШ «общественность» возмутилась, что рядом живет бывший священник. Н.Д. Моисеев смог поддержать М.С. Молоденского только морально, В.Г. Фесенков помочь не смог.

Вскоре представилась возможность перейти на основную работу в ЦНИИГАиК, находившийся тогда в Ленинграде. Михаил Сергеевич и Александра Михайловна поженились в 1933 г. и жили в ленинградской гостинице, оплачиваемой институтом. Через несколько лет ЦНИИГАиК снова вернулся в Москву, семье Молоденского была предоставлена комната в бараке на Потылихе. До войны отец Михаила Сергеевича жил с ними, он скончался во время войны у дочери в Туле.

В 1932 г. постановлением Совета Труда и Оборона были определены принципы проведения государственной гравиметрической съемки, и Михаил Сергеевич сразу стал одним из авторов первой «Инструкции по гравиметрическим работам для общей основной гравиметрической (маятниковой) съемки СССР» (1935 г.). Годом раньше, в 1934 г., была опубликована его работа об учете сокачания штатива при колебаниях пары маятников с различными амплитудами и произвольными фазами. Сохранилось письмо М.С. Молоденского

к В.Ф. Еремееву, написанное в 1935 г. из Ленинграда: первый опыт вычислений поправок за сокачания привел к улучшению сходимости и уменьшению разностей средних периодов вдвое. Была подтверждена достоверность поправок и необходимость их учета, способ вычисления упрощен.

Кроме практических и теоретических работ по маятниковой съемке и важнейших работ по теории геодезии, о чем будет сказано ниже, М.С. Молоденский в 1938 г. приступил к совершенно новой работе — созданию отечественного гравиметра (теория, конструкция, технология изготовления, полевые испытания). В личном деле в отделе кадров Института физики Земли (ИФЗ) хранится автобиография М.С. Молоденского, в которой он написал: «с 1938 по 1941 гг. мне пришлось заниматься вопросами гравиметрического инструментостроения». Выражение «мне пришлось» появилось, вероятно, потому, что душа стремилась к теоретическим работам. Но гравиметр был крайне необходим, и М.С. Молоденский создал прибор своей системы. Так еще во время войны появился первый в нашей стране пружинный гравиметр кольцевой Молоденского (ГКМ). После войны Михаил Сергеевич принял участие в создании на базе ГКМ гравиметра кольцевого астазированного (ГКА). Инструментальные и методические работы Молоденского подробнее описаны М.Е. Хейфецем (1992 г.).

За создание гравиметра ГКА в 1951 г. М.С. Молоденский совместно с коллективом соавторов был удостоен Государственной премии во второй раз. Ранее, в 1946 г., Государственную премию Михаил Сергеевич получил за монографию «Основные вопросы геодезической гравиметрии» (Труды ЦНИИГАиК, вып. 42, 1945 г.). Работа была защищена автором в МИИГАиК как диссертация на соискание степени доктора технических наук (ученую степень кандидата он получил без защиты в 1938 г.). Один из оппонентов — Н.Н. Парийский — справедливо утверждал, что каждая из пяти первых глав книги достойна степени доктора наук. А оппонент А.А. Михайлов отметил, что работа опережает свое время, открывает новую страницу в геодезии и полностью будет оценена лет через пятьдесят. Труд был действительно выдающимся, и не случайно через год его автор был избран членом-корреспондентом Академии наук СССР.

Еще во время войны Михаил Сергеевич начал работать по совместительству доцентом кафедры гравиметрии и геофизики МИИГАиК (лекции и семинары со студентами и аспирантами). Незадолго до ухода с кафедры в 1947 г. он предложил радикальное усиление подготовки студентов астрономо-геодезической специальности по математике и физике, но поддержки не получил.

С 1943 по 1956 гг. М.С. Молоденский был руководителем лаборатории гравиметрии в ЦНИИГАиК. С 1946 г. по совместительству стал заведующим отдела гравиметрии в Геофизическом институте АН СССР. С 1956 г. этот институт, преобразованный в Институт физики Земли, стал основным местом работы Михаила Сергеевича. В 1956 г. он — беспартийный — по настоянию ЦК КПСС был назначен директором этого института, хотя по складу характера такая работа была Молоденскому противопоказана. В следующем году она привела к тяжелой болезни, от которой он так и не оправился, но тем не менее продолжал интенсивную творческую работу, в частности, по геодезической тематике, с 1960 г. — без оплаты.

Исследования М.С. Молоденского охватывали основные теоретические разделы геодезии. Их результаты представлены в монографии «Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли» (Труды ЦНИИГАиК, вып. 131, 1960 г.), в подготовке этой книги М.С. Молоденскому помогали В.Ф. Еремеев и М.И. Юркина. Она является фундаментальным трудом, на основе которого развивается современная геодезия. За исследования, описанные в этой книге, а также за работы, выполненные по тематике ИФЗ по



упругим приливам и свободной нутации Земли, в 1963 г. М.С. Молоденский был удостоен Ленинской премии.

Чтобы правильно оценить место работ М.С. Молоденского в геодезии, необходимо вспомнить основные этапы ее развития за последние два столетия.

Градусные измерения позволяют, как известно, приближенно определять средние кривизны уровенной поверхности Земли на изучаемых отрезках дуг. В результате распространения этого метода в Европе во второй половине XVIII в. и начале XIX в. стало очевидно, что кривизны исследуемых дуг меняются не так, как следовало бы на эллипсоидальной уровенной поверхности. Гравиметрические наблюдения выявили непостоянство силы тяжести вдоль параллелей и неправильное ее изменение на меридианах. В частности, это было подтверждено геодезическими, астрономическими и гравиметрическими наблюдениями Био и Араго, выполненными как продолжение французских градусных измерений в XVIII в., которые составили дополнительный том «Основ метрической системы» (Recueil, 1821).

В результате этих экспериментально установленных фактов в геодезии появился новый объект изучения — «поверхность Земли в геометрическом смысле» (К.Ф. Гаусс, 1823 г.), названный позднее геоидом. Необходимость изучения геоида казалась очевидной, так как согласовывалась со всеобщим, хотя и не всегда четко формулируемым убеждением, что топографические съемки определяют видимую земную поверхность относительно единой уровенной поверхности — уровня моря (сферы или эллипсоида прежде, а теперь — геоида). Без всяких упрощений можно констатировать, что все усилия, предпринятые в области геодезии в течение последующего столетия, были направлены на совершенствование триангуляционного и гравиметрического методов изучения не Земли, а именно геоида.

Важнейшие теоретические работы по определению геоида по гравиметрическим данным принадлежат Дж.Г. Стоксу (1849 г.). Обобщая теорию А.К. Клеро (1743 г.), Стокс доказал, что для теоретического изучения поверхности планеты важно определить не состояние гидростатического равновесия, а постоянство потенциала силы тяжести на ней, и уровенная поверхность может иметь не только эллипсоидальную, но и произвольную форму. В менее общем виде, с точностью до первых членов разложений по сферическим функциям, этот факт был известен П.С. Лапласу (ряды Лапласа, 1785 г.). Вполне оригинальной была теорема Стокса: общей массе планеты, потенциалу центробежной силы и внешней уровенной поверхности планеты соответствует единственный гравитационный потенциал во внешнем пространстве и, следовательно, единственное распределение силы тяжести на этой поверхности.

Методы вычисления гравитационного потенциала и силы тяжести на известной поверхности геоида основаны, как мы теперь скажем, на решении первой внешней краевой задачи теории потенциала. Однако было принято считать, что для геодезии нужно решение обратной задачи: определение геоида по измерениям на нем силы тяжести. Ее тоже решил Стокс, предполагая, что геоид близок к уровенной поверхности выбранного вращающегося эллипсоида малого сжатия. Задачу тем самым оказалось возможным свести к определению лишь возмущающего потенциала, а вместе с ним и небольших высот геоида над эллипсоидом. В такой постановке определение геоида сводится к решению третьей внешней краевой задачи, и решением служат известный ряд и интегральная формула Стокса.

Решение Стокса основывалось на двух существенных допущениях: во-первых, вне геоида нет никаких гравитирующих масс и, во-вторых, сила тяжести должна быть изменена именно на этом геоиде. Таким образом, теория Стокса поставила перед геодезией две проблемы: проблему регуляризации геоида, делающей геоид внешней уровенной поверх-

ностью, и редуционную проблему — проблему приведения силы тяжести, измеренной на земной поверхности и исправленной за период регуляризации, на поверхность регуляризованного геоида. Стокс тогда же дал приближенное решение этих задач, но должное внимание к этим задачам было проявлено только к концу XIX века.

Основным же методом изучения геоида в XIX в. и начале XX в. был метод астрономо-геодезических сетей, градусных измерений. Задача редуцирования на геоид измеренных горизонтальных углов, базисов, астрономических широт и долгот представлялась достаточно простой. Измеренные горизонтальные углы было принято считать равными углам, приведенным на геоид, и вопрос в то время стоял только о редуцировании базисов и астрономических широт и долгот. Считалось, что обе редукции можно достаточно точно определить только по высотам точек измерения над геоидом (ортометрическим высотам), а они, в свою очередь, могут быть определены только в результате геометрического нивелирования и тоже достаточно точно. Проблема регуляризации геоида обычно не рассматривалась или рассматривалась иногда в связи с каким-либо частным вопросом, например, выводом при нивелировании ортометрической поправки. Все это приводило к тому, что вопрос о редуцировании силы тяжести не стал еще существенным для геодезии. Фактически же он рассматривался изолированно от редуцирования всего комплекса астрономических и триангуляционных измерений, приобретая характер геофизической задачи (работы Дж.Г. Прагга, Дж.Б. Эри и др.).

Интерес к редуционной проблеме в целом резко усилился в начале 30-х годов, когда в СССР приступили к практическому использованию гравиметрических уклонений отвеса в астрономо-геодезических сетях и сразу же обнаружили их недостаточную точность, особенно в горах. По инициативе А.А. Михайлова и по его общим указаниям была выполнена серия исследований по обобщению теории Стокса на случай, когда определению подлежит реальный геоид Земли — нерегуляризованный геоид. Решение этой задачи предложили один за другим Н.Д. Моисеев (1933 г., 1934 г., 1935 г.), Н.Р. Малкин (1934 г., 1935 г.) и М.С. Молоденский в двух статьях 1936 г.

Попытка улучшить теорию Стокса не принесла заметного практического успеха: проблема редуцирования измеренных величин на геоид не была решена. По этому поводу Ф.Н. Красовский (1944 г.) писал: «В тяжелом вопросе о редуциях силы тяжести вряд ли можно отметить определенные достижения, несмотря на большие достоинства выполненных исследований; нам кажется, что здесь нередко блестящие математические подходы не дают, однако, результата из-за отсутствия и неучета обстоятельств геофизического характера».

В монографии 1945 г. М.С. Молоденский внес некоторые дополнения в результаты Н.Д. Моисеева, что облегчило сравнение всех трех исследований, позволило четко интерпретировать все варианты решения проблемы регуляризации и редуцирования и конкретно сравнить с усовершенствованным методом конденсации, предложенным А.А. Михайловым в статье 1940 г. и подробно, с таблицами описанным в книге 1945 г. Оказалось, что для определения геоида нужно знать не только силу тяжести на нем, но отдельно и ту ее часть, которая вызвана притяжением только континентальных масс. Молоденский писал в монографии 1945 г.: «Сколько-нибудь строгое» решение возможно, если известна «плотность в каждой точке для всех масс, которые находятся вне геоида». В статье 1948 г. добавлено: «Даже при наличии исчерпывающих геологических данных достаточно точное редуцирование на геоид связано с решением сложной задачи теории потенциала, так как редуцирование ведется на неизвестную поверхность геоида с весьма сложной и также неизвестной физической поверхности Земли, на которой краевые значения определяются непосредственно наблюдениями».

Многих геодезистов такое зависимое от геологии положение геодезии не смущало, считали даже, что это хорошо, ибо геодезия вторгается в геологию, значит нужно работать «на стыке» этих наук. Так, например, полагал Ф.Н. Красовский (1944 г.). Был и подкрепляющий исторический пример — геодезия указала геологии на изостатическую компенсацию. Одновременно развивались теории совместного использования разного рода данных при решении конкретных задач. В.А. Магницкий привлек высоты геоида, определяемые в астрономо-геодезической сети, для отделения местных влияний в аномалиях силы тяжести (1945 г.).

В такой обстановке в 1945 г. появилась статья Молоденского «Роль геофизики и геологии в исследовании фигуры Земли». В ней автор утверждал, что при полной гравиметрической съемке дополнительные данные астрономо-геодезической сети или иные сведения о внешнем поле силы тяжести ничего нового не дадут и для редуцирования внутрь масс окажутся бесполезными, что физические исследования типа полученных Праттом, Эри и другими могут интересовать геодезистов с точки зрения объяснения полученных ими результатов, но их можно не принимать во внимание при изучении формы Земли. Все геодезические измерения выполняются на земной поверхности, вне нее нет притягивающих масс, но потенциал силы тяжести на ней меняется, что и приводит к существенным осложнениям. Поэтому теорию Стокса непосредственно применить нельзя, теорию следует обобщить на этот случай: использовать земную поверхность в качестве краевой при определении возмущающего потенциала. Геодезия должна быть не столько физической, сколько аналитической.

Вслед за статьей появляется замечательная во всех отношениях монография (1945 г.), где в главе III было дано детальное обоснование: задача геодезии состоит в определении внешнего гравитационного поля и поверхности Земли. С изменением задачи автору пришлось вводить понятия о новых реальностях, заменяющих или обобщающих старые. Появились нормальные (вспомогательные) высоты, очень близкие к ортометрическим, но их можно вычислять только по измеряемым данным. Аномалии высот, строго согласованные с нормальными высотами и определяемые внешним возмущающим потенциалом, стали играть роль высот геоида, но относиться стали к точкам земной поверхности, а не к геоиду, и приобрели смысл во всем внешнем пространстве. Аномалии силы тяжести формально (по способу вычисления) не изменились, но это произошло потому, что на геоиде аномалии вычислялись только с редукцией в свободном воздухе, т.е. слишком просто, без учета аномалии вертикального градиента реальной силы тяжести.

Теперь же аномалии силы тяжести должны быть определены на земной поверхности и редуцировать следовало не реальную, а нормальную силу тяжести. Тем самым редукция в свободном воздухе оказалась необходимой и достаточной. Аналогично обстояло дело и с вычислением составляющих уклонения отвеса: следовало редуцировать не направление реальной силовой линии на геоид для сравнения с направлением нормали к эллипсоиду, а направление касательной к силовой линии в самой точке измерения следовало сравнивать с направлением нормали к эллипсоиду или с направлением нормальной силы тяжести. Различию этих двух способов вычисления меридиональной составляющей уклонения отвеса соответствовала известная поправка Гаусса:  $0'', 171 H \sin 2B$ . Было принято считать, что она приближенно определяет кривизну реальной силовой линии и приближенно редуцирует наблюдаемую астрономическую широту пункта на геоид. Но в теории Молоденского оказалось, что именно поправка Гаусса и нужна, так как направление силы тяжести следовало сравнивать с направлением нормальной силы тяжести в той же точке. И вообще любые измеряемые величины никуда не следует редуцировать, ибо сделать это принципиально невозможно без каких-то дополнительных сведений, обычно неизвест-

ных. Для сравнения измеряемых величин с нормальными последние следует вычислять по возможности в местах измерения.

Это был новый взгляд на метод редуцирования, из которого вытекало, что краевое условие для возмущающего потенциала должно относиться не к поверхности геоида, а к поверхности реальной Земли, где выполняются все геодезические измерения. Поэтому и возмущающий потенциал определяется только вне земной поверхности или на ней. Задачу можно решать опять в линейном приближении, но теперь не на геоиде, как ее решал Стокс, а на поверхности Земли. При определении возмущающего потенциала вновь возникает третья внешняя краевая задача, но теперь с косою производной. В краевых условиях Стокса и Молоденского стоит производная возмущающего потенциала по отвесной линии, но у Стокса отвес вполне строго совпадает с нормалью к краевой поверхности (геоиду), а в условии Молоденского возникает усложнение: отвесная линия не совпадает с нормалью к новой краевой поверхности (земной поверхности). Поэтому вертикальная производная возмущающего потенциала становится косою относительно краевой поверхности. Необходимость учета этого обстоятельства приводит к появлению не только производной по нормали к эллипсоиду, которую легко выразить через аномалию силы тяжести и возмущающий потенциал, но и двух производных в ортогональной плоскости, двух составляющих уклонения отвеса. Удивительно изящным методом автор избавляется от этих членов под знаком интеграла и находит точное в линейном приближении линейное интегральное уравнение, содержащее одно неизвестное — возмущающий потенциал на земной поверхности, а свободный член определен аномалиями силы тяжести. С решением уравнения определяется как поверхность Земли и внешнее гравитационное поле, так и все остальное, что может интересовать геодезистов.

Отметим, кстати, одну деталь теории Молоденского, выходящую, можно сказать, за пределы геодезии, но представляющую интерес в математике. Интегральное уравнение, относящееся к неизвестной земной поверхности, автор перенес на поверхность, определяемую нормальными высотами, ее называют теперь теллуroidом. Возникшая при этом погрешность им оценена, она оказалась пренебрежимо малой, если оставаться в рамках линейной задачи. Сейчас операция переноса с земной поверхности на теллуroid практически может быть устранена. Для этого достаточно использовать пункты космической триангуляции, высоты которых над эллипсоидом определены очень точно, а в иных пунктах к нормальным высотам можно прибавить аномалии высот, известные обычно с погрешностью не более 3 м. Тогда медленно изменяющиеся погрешности высот земной поверхности при решении краевой задачи даже в будущем окажутся совершенно неощутимыми. Тем не менее возникшая задача и ее исследование привлекли внимание математиков Краупа (T. Kraup, 1969), Хёрмандера (L. Hörmander, 1976), Сансо (F. Sansó, 1978).

В этих работах с точки зрения геодезиста преувеличено значение нелинейности задачи Молоденского, не принята во внимание хорошая точность определения земной поверхности методом геометрического нивелирования, а также с использованием формулы Стокса, не говоря уже о космической триангуляции и GPS. Но и с математической точки зрения также не принята во внимание теория Жиро (G. Giraud, 1939), которая не только устанавливает существование решения, но и выражает его в явном виде через простой слой на земной поверхности. Решение задачи сводится к решению соответственного интегрального уравнения. Нелинейность задачи играет тем меньшую роль, чем менее высокие производные гравитационного потенциала нужно определить. Играет роль и отмеченная М.У. Сагитовым (1983 г.) связь между детальностью распределения плотности и номерами производных потенциала. Теория Жиро предполагает непрерывное распределение исходных данных на краевой поверхности, а также дискретность гравиметрических наблюдений. Но съемка должна быть выполнена с такой плотностью, чтобы результаты

измерений можно было интерполировать между гравиметрическими пунктами. Соотношения между плотностью съемки и точностью выводов с учетом характеристик местности хорошо изучены, так что в пределах заданной точности можно считать исходные данные непрерывными.

Критика подхода Хёрмандера содержится в книге В.Д. Купрадзе и др. (1976 г.). В более точном решении простой слой следует распределять не на теллуриде, а на земной поверхности, поправки за нелинейность решения можно определять методом Ньютона–Канторовича (Л.В. Канторович, Г.П. Акилов, 1977 г.). Подробнее этот круг вопросов изложен М.И. Юркиной (1981 г.). Но вернемся к работам М.С. Молоденского по теоретической геодезии.

В статье 1948 г. составлено новое, более простое интегральное уравнение для плотности простого слоя на земной поверхности, потенциал которого вне Земли равен возмущающему потенциалу. Исследуя это уравнение, М.С. Молоденский пришел к выводу, что его частное решение существует при сферическом отсчетном поле, если исходные данные не содержат ошибок. Координаты центра масс Земли и потенциал силы тяжести в начале счета высот входят в общее решение неизвестными. Эти дополнительные четыре неизвестные, как описано в книге 1960 г., можно определить на основе гравиметрической съемки всей Земли и материалов обширных астрономо-геодезических сетей. Последние, приближенно решавшие прежде задачу градусных измерений, теперь совместно с мировой гравиметрической съемкой приобрели новый смысл, а старая задача градусных измерений при дополнительной местной гравиметрической съемке решается очень точно методом астрономо-гравиметрического нивелирования.

Упомянутое условие безошибочности аномалий не возникает в эллипсоидальном отсчетном поле, т.е. частное решение задачи существует при произвольно заданных аномалиях силы тяжести (В.Ф. Еремеев, М.И. Юркина, 1972 г.), и тем самым снимается требование об отсутствии на сфере гармоника первой степени в разложении аномалий силы тяжести.

В последующие годы автор предложил несколько решений уравнения 1948 г. и в монографии 1960 г. изложил очень общий эффективный метод, нашедший практическое применение в иных решениях краевой задачи (В.В. Бровар, 1993 г.). Описанный здесь цикл теоретических исследований сводится практически к подготовке, исследованию и решению основной задачи геодезии — задачи Молоденского. Ее можно сформулировать следующим образом: по измеренным на земной поверхности силе тяжести и приращениям ее потенциала определить поверхность Земли и ее внешний гравитационный потенциал, если известны еще потенциал центробежной силы и масса Земли или расстояние между двумя удаленными точками (В.В. Бровар, В.А. Магницкий, Б.П. Шимбирев, 1961 г.). Доказано, что решение задачи всегда существует и оно единственное. Математики (M. Günther, 1987; M.C. Jorge, 1987) подтвердили корректность решения, включая возможность поправок в линейное приближение.

Выполненное исследование основной геодезической задачи приводит к естественному объединению задачи Молоденского с первой и второй краевыми задачами в более общую задачу (подобно объединению прямой задачи с обратной) о взаимоотношениях решений трех задач математической физики.

Исходные данные в задаче Молоденского можно варьировать, приближая их к потребностям практики. В совместном выводе на разных участках поверхности можно использовать краевые данные разного вида: смешанные аномалии на суше и чистые на морской поверхности. Каждому виду данных соответствует свой тип интегральных уравнений, их можно решать совместно. Обоснование условий разрешимости такой смешанной задачи дано М.И. Вишиком и О.А. Ладыженской (1956 г.), и данные спутниковой альтиметрии

естественно включаются в число краевых. Возможно решение переопределенной задачи. Результаты лазерного слежения спутников и GPS могут заменить данные градусных измерений. Таким образом, новая задача геодезии получила математическое обоснование и заняла в математической физике соответствующее место.

В 30-х годах помимо необходимости строгого решения проблемы теоретической геодезии перед советской геодезией возникли и другие насущные задачи, вызванные размерами нашей астрономо-геодезической сети. С продвижением триангуляции за Урал прежде всего стала ясна практическая непригодность эллипсоида Бесселя, который служил в качестве отсчетного эллипсоида с ориентировкой в Пулково. А.А. Изотов под руководством Ф.Н. Красовского начал вывод большой полуоси и сжатия нового эллипсоида, пригодного, по возможности, для всей Земли. Началась систематическая обработка материалов советских и зарубежных триангуляций. В 1940 г. размер и степень сжатия земного эллипсоида были определены.

Другим источником ошибок сетей, по мнению Феодосия Николаевича, стал несовершенный метод обработки — метод развертывания. Красовский указал на необходимость перехода к методу проектирования, сводившемуся тогда к дополнительному редуцированию базисов с геоида на эллипсоид. Для этих целей, по расчетам Ф.Н. Красовского, точность астрономического нивелирования для нашей страны оказывалась недостаточной. В небольших странах погрешности метода развертывания не проявлялись, а при необходимости повышение точности передачи высот геоида достигалось в результате уменьшения расстояния между астрономическими пунктами, что в наших условиях было невозможно. В работах гравиметристов ЦНИИГАиК была выяснена возможность определения уклонений отвеса по гравиметрическим данным с достаточной точностью, отработан метод вычислений, и Красовский поставил перед Молоденским задачу — повысить точность астрономического нивелирования без увеличения общего объема астрономических наблюдений, привлекая гравиметрическую съемку. И.А. Казанский и В.Ф. Еремеев вспоминали, что возможность решения задачи Феодосий Николаевич первоначально связывал с использованием изостатических редуций. Затем стал придавать большее значение использованию гравиметрической съемки вообще в астрономо-геодезических работах и, в частности, в астрономическом нивелировании.

Это изменение взглядов можно проследить и по его публикациям. Идею уточнения астрономического нивелирования вместо использования топографо-изостатических редуций Ф.Н. Красовский стал связывать в 1934 г. с гравиметрическими данными. А в 1935 г. он писал: «К счастью, мы располагаем компетентными и даже талантливыми работниками для продвижения в этом направлении». В 1936 г. он уже кратко описывает бифокальную палетку и схему выполнения астрономо-гравиметрического нивелирования. Подробно идея метода с оценкой радиуса минимальной области учитываемых аномалий силы тяжести и расчетом палетки изложена М.С. Молоденским в статье 1937 г., в заключении которой автор отмечает: «Настоящая работа выполнена в Научно-исследовательском институте геодезии, картографии и аэросъемки<sup>1</sup> в 1935 г.<sup>2</sup> под общим наблюдением проф. Ф.Н. Красовского, по инициативе которого она включена в план научно-исследовательских работ института, и проф. И.А. Казанского, руководителя астрономо-гравиметрической секции института». Статья о первой практической реализации астрономо-гравиметрического нивелирования, выполненного совместно с А.М. Лозинской, опубликована в 1939 г. Продолженные вслед за этим в 1939 г. более

<sup>1</sup> Институт вскоре стал называться Центральным научно-исследовательским институтом геодезии, аэросъемки и картографии (ЦНИИГАиК).

<sup>2</sup> Понятно теперь, кого Феодосий Николаевич (1935 г.) назвал «компетентным и даже талантливым работником».

полные по объему работы Б.В.Дубовского охватили значительную территорию, позволили более обоснованно редуцировать базисы на эллипсоид Бесселя и перейти к новой обработке астрономо-геодезической сети.

В 1943 г. астрономо-гравиметрическое нивелирование было повторено на новом эллипсоиде Красовского с прежней ориентировкой в Пулково. Редуцирование базисов на этот эллипсоид позволило устранить в первую очередь систематическое влияние ошибки размеров эллипсоида Бесселя и несколько позже выполнить новое уравнивание сети с выводом новой оптимальной ориентировки «референц-эллипсоида Красовского» (А.А.Изотов, 1948 г.).

В 1944 г. М.С.Молоденский обратил внимание на еще одно глубинное отличие двух методов обработки. При развертывании триангуляции неполное и, следовательно, неправильное редуцирование базисов (как бы на геоид вместо эллипсоида) приводило к неправильному вычислению длин, а способ обработки принудительно укладывал (развертывал) эти длины на эллипсоидальной поверхности. Из-за этого вычисленные приращения геодезических координат оказывались систематически искаженными. Астрономические широты и долготы и вычисленные геодезические координаты оказывались относящимися к разным точкам эллипсоида и не характеризовали угол между отвесом и нормалью эллипсоида.

М.С.Молоденский установил связь между координатами, полученными двумя способами, были найдены связи между «смешанными» и «чистыми» отклонениями отвеса. В качестве примера были аналитически вычислены вдоль параллели поправки координат при переходе от одного метода обработки к другому. Результаты буквально потрясли сотрудников ЦНИИГАиК: трудоемкое переуравнивание сети как бы заменялось интегралом по параллели, и расхождения в долготах почти во всех пунктах не превосходили  $0,04''$ , а несколько большие разности относились к пунктам, отстоящим от выбранной параллели. В 1959 г. Айрин Фишер (I.Fischer) описала применение этого метода для исправления результатов развертывания сети при составлении карт высот геоида по гигантским дугам от Канады до Чили и от Скандинавии до Южной Африки. Описываемые поправки были малы, в пределах углового расстояния в  $\sim 30^\circ$  от исходного пункта, затем быстро начинали возрастать и приобретали порядок определяемых величин: геодезические координаты в методе развертывания оказываются хуже астрономических. В астрономическом нивелировании Америки на расстоянии  $40^\circ$  (от *Meades Ranch* до экватора) поправка составляла несколько метров, но в южном полушарии на  $30^\circ$  ю.ш. доходила до 40 м, а на широте  $-40^\circ$  — уже 60 м. В Африке на широте  $-34^\circ$  поправка достигла 100 м при начале дуги на широте  $+65^\circ$ .

Поправки Молоденского описаны в книге Л.П.Пеллинена (1978 г.), исследования продолжены в его статье 1983 г. Подтвердилось, что при вычислении высот квазигеоида на обширных территориях косвенные эффекты могут превысить влияние прямых. Сейчас найденные зависимости используются у нас при обработке каждого звена. Кроме продольного сдвига учитывается и поперечный, вызванный искажением азимута Лапласа из-за неправильной геодезической долготы.

На протяжении многих лет Михаил Сергеевич занимался различными вопросами геометрического изучения земной поверхности. Новые предложения описаны в работе 1954 г. [51]. В цельном виде это направление представлено в книге 1960 г. В этом цикле работ важна его прямая связь с общим новым взглядом на задачи геодезии: необходимость пространственного изучения земной поверхности и отказ в этой связи от решения геометрических задач на поверхности эллипсоида при помощи геодезических линий. Новая постановка задач геодезии несколько осложнила только переход от измеряемых

в триангуляции горизонтальных углов к углам между прямыми, соединяющими пункты, но затруднение это лишь вычислительного характера.

Новый подход позволил отказаться в сфероидической геодезии в основном от методов дифференциальной геометрии и использовать простые методы аналитической геометрии преобразования координат. Специфика метода состояла в использовании пространственных геодезических координат. Вместо эллиптических интегралов или рядов, неизбежно применяемых в геодезии, появлялись пригодные для любых расстояний точные формулы, содержащие только элементарные функции. Предварительное редуцирование на эллипсоид также можно использовать, но только как вычислительный прием, для удобства. Такой подход логично соединялся с геометрическим методом космической геодезии.

Но современники переход к хордам одобрили не сразу. Между тем еще в градусных измерениях от Дюнкерка до Барселоны, послуживших основой для установления метра (конец XVIII в.), Деламбер решал как сферические треугольники, пользуясь теоремой Лежандра 1789 г., так и плоские треугольники из хорд эллипсоидальной поверхности. В последнем случае пришлось использовать специальные таблицы. Простота теоремы Лежандра, поддержка его Гауссом (1841 г.) и теория Клеро–Гаусса геодезических линий, развитая Гауссом дифференциальная геометрия поверхностей, подтверждая роль личности в истории, вытеснили использование хорд и усложнили обработку триангуляции, а вместе с тем и основы геодезического образования в течение более чем 150 лет. Доказательство Грунертом (1855 г.) теоремы синусов для треугольника со сторонами из хорд (измеренные углы должны быть уменьшены на четверть сферического избытка), вполне аналогичной теореме Лежандра, не вернуло интереса к хордам. В России хорды были так основательно забыты, что сообщение Милана Бурши о теореме Грунерта было воспринято с удивлением. Теперь в правоте Молоденского нет сомнений.

Все сказанное о трудах Молоденского в геодезии охватывает, надо думать, главное, но далеко не все содержание его исследований. Некоторые работы носят более частный характер, хотя касаются буквально всех областей современной геодезии, и частность их относительна. Сейчас хотелось бы их упомянуть и кратко сказать об их использовании и дальнейшем развитии.

1. Единым новым методом на сфере решены все краевые задачи, которые могут найти применение в геодезии. Устранены ошибки некоторых решений. Одна из новых формул используется для выражения аномалии силы тяжести через высоты геоида (на практике — через измеряемые высоты морской поверхности над отсчетным эллипсоидом). Эта формула опубликована почти одновременно В.А.Магницким и М.С.Молоденским в 1945 г. Как отмечено В.А.Магницким, Рао в 1935 г. выразил решение этой задачи расходящимся интегралом. Другая новая формула Молоденского выражает высоту геоида через уклонение отвеса, она решает задачу, поставленную Калландро (Callandreau, 1901), решение самого Калландро выражено также расходящимся интегралом.

2. Теория и практика астрономо-гравиметрического нивелирования усовершенствованы (О.М.Остач, 1970 г., 1994 г.), область учета аномалий уменьшена.

3. Указаны ошибки в исследовании де Грааф-Хантера и разработан строгий метод оценки влияния отсутствующих аномалий силы тяжести в дальних зонах на возмущающий потенциал и отклонения отвеса, основанный на ускорении сходимости ряда Стокса. Теперь эти формулы служат для вычисления влияния дальних зон на названные величины. Они упрощают и ускоряют счет, позволяют естественно разделить наземную и спутниковую информацию. Получены их многочисленные модификации, им посвящена обширная литература у нас и за рубежом, они применяются повсеместно.

4. Дано решение задачи Стокса для эллипсоида с относительной погрешностью порядка квадрата сжатия (1956 г.). Решение легло в основу многочисленных методических



разработок, использовано в поисках новых решений, нашло продолжение в создании более точной теории изучения земной поверхности, а также при решении иных вопросов геодезии, связанных с учетом сжатия Земли.

5. Исследование ошибок гравиметрической съемки, пути их уменьшения через косвенную интерполяцию при учете влияния рельефа; влияние ошибок съемки и ее отсутствия на точность вычисления уклонов отвеса (1945 г.) — это направление исследований, начатое де Грааф-Хантером (1935 г.) в последующие годы, нашло значительное развитие и более других усовершенствовано благодаря привлечению статистических методов обработки наблюдений.

Иногда встречается мнение, что теория Молоденского состоит в решении краевой задачи или даже в решении интегрального уравнения. Конечно, это впечатление поверхностно. Оно показывает, что оценены лишь некоторые стороны трудов Молоденского, упускается их целостность, единство созданной теории и, главное, новизна их предназначения. Теория Молоденского — новая теория геодезии, а не дополнение прежней теории. Если теория Клеро (геодезическая) исходит из того, что форма земной поверхности зависит от одного параметра (земного сжатия) и устанавливает связь его с изменениями силы тяжести на этой поверхности, а теория Стокса отказывается от гипотезы Клеро и задачу видит в определении геоида как заменяющего земную поверхность, то теория Молоденского определяет именно эту поверхность. Она поставила перед геодезией новую цель, и методы решения основаны только на двух предположениях: справедливости гравитационного закона Ньютона и неизменности во времени всех исходных данных.

Конечно, до 1945 г. в геодезии было понимание, что имеются некоторые погрешности теории (неопределенность редуцирования наблюдаемых астрономических широт и долгот на геоид, разнообразие способов вычисления ортометрических поправок в нивелирных сетях, редуцирование базисов и т.п.), но все они рассматривались изолированно друг от друга и считались несущественными. Для практики того времени такой взгляд на «мелкие» теоретические недоработки еще был в какой-то мере оправдан, с ним мирились.

Теория Молоденского объединила такие изолированные разделы геодезии, как, например, триангуляцию и нивелирование, установила их взаимосвязь, освободила геодезию от принципиальной приближенности ее решений. При современном быстром усовершенствовании измерений это просто необходимо. Только М.С. Молоденский впервые четко поставил перед геодезистами и решил подлинно научную проблему — не приближенно изучать геоид, а изучать поверхность Земли и ее внешнее гравитационное поле в единой системе координат и изучать их настолько точно, насколько позволяют измерения. Предшествующая теория изучения регуляризованного геоида должна была приспособиться к нуждам геодезии, а по существу не имела прямого отношения к геодезической практике. Поэтому по мере развития геодезических измерений появляются различные уточнения, дополнения, обобщения теории Стокса. Гармоничное слияние геодезических измерений с решением геодезических задач осуществлено только в теории Молоденского. Она рассматривает и использует именно те измерения, которые можно реально выполнить теперь или в будущем.

Из такого понимания теории Молоденского следует, что она не может устареть от замены одного способа решения другим или от усовершенствования способов обработки, или при появлении нового вида измерений. Новые виды измерений (GPS, спутниковое нивелирование морской поверхности) или планируемые (измерения градиентов притяжения на спутниках) прекрасно вписываются в эту теорию, предъявляя лишь повышенные требования к ее точности. Повысить точность теории Молоденского всегда можно. И это не будет новой теорией, а всего лишь развитием теории Молоденского.

Новое понимание задач геодезии позволяет рассматривать любую конкретную задачу как составную часть общей задачи геодезии. Например, в локальных геодезических работах высшей точности ( $10^{-6}$ ) при переносе проекта в натуру необходимо учитывать аномалии высот и другие реальности общей теории. Существенно также, что каждую задачу можно решать с той точностью, какую позволяют измерения. Так, например, редкая маятниковая съемка позволяла интерполировать астрономические широты и долготы, а современная гравиметрическая съемка позволяет во многих случаях отказываться от использования измеренных астрономических координат из-за их малой точности. Или другой пример: в работах Молоденского принято, что потенциал силы тяжести во всех начальных пунктах изолированных нивелирных сетей одинаков и для его определения было предложено использовать астрономо-геодезические сети разных континентов. Теперь совмещение пунктов космических наблюдений с пунктами изолированных нивелирных сетей открывает возможность определения потенциалов в исходных пунктах каждой нивелирной сети и возможность в ней независимого контроля. Понятно, что общая теория Молоденского при этом только пополняется.

Ценность теории проявляется в ее единстве. Определяемые величины образуют систему, и пренебрежение этим обстоятельством может нарушить единство теории. Так, например, в некоторых странах до сих пор не придают значения системе нормальных высот, рассматривая ее как одну из нескольких возможных. Общее значительное повышение точности измерений заставляет западных геодезистов внимательнее отнестись к системе нормальных высот и использовать ее как естественную составляющую общей теории (Grooten, 1995; М.И. Юркина, 1996).

Измерения и методы решения, конечно, будут совершенствоваться, учитывая все более и более тонкие эффекты. Оба отмеченных предположения, лежащих в основе теории, уже сейчас стараются как-то принять во внимание. Принципы совместного определения движений измерительных точек и изменений поля силы тяжести охарактеризованы Молоденским в статье еще 1958 г. Переход к глобальному изучению переменной силы тяжести на изменяющейся земной поверхности приблизит геодезию (по Молоденскому — кинематическую геодезию) к геодинاميке и астрономии, а опора на теорию гравитации позволит в принципе охватить единой теорией источники других видов энергии, позволит будущей теории геодезии влиться в будущую теорию геофизики.

Для полноты освещения роли Молоденского в становлении современного взгляда на задачи теоретической геодезии остановимся еще на работах предшественников. Это тем более нужно, что бытуют определенные неясности в этом вопросе.

Все исследования по теории изучения фигуры Земли до 1931 г. опирались на предварительное упрощение самой постановки задачи — Земля была принята за геоид, изменения предполагались выполненными на нем. Последствия такого упрощения установить затруднительно. Г. Джеффрис (Jeffreys, 1931, 1932) впервые как исходную взял формулу Грина, определяющую внешний гравитационный потенциал Земли по значениям его и его нормальной производной на земной поверхности. Молоденский придавал строгой математической методологии большое значение, всегда сам ей следовал и по достоинству оценил заслугу Джеффриса в своей монографии 1945 г.

Но Джеффрис, как и все, задачу геодезии по-прежнему видел в определении потенциала на геоиде, а формула Грина была использована им для обоснования редукции в свободном воздухе при пересчете измеренной силы тяжести на геоид. Джеффрис отметил при этом, что необходимость и достаточность упомянутой редукции понимал сам Стокс, специально подчеркнувший это обстоятельство при перепечатке своей работы в 1883 г. В других местах работы Стокса также есть подобные указания. Тем не менее, когда монография Молоденского с упоминанием работ Джеффриса стала известна на Западе,

появились попытки называть теорию Молоденского теорией Джеффриса–Молоденского или просто новой теорией; подразумевалось при этом, что в ее развитии принимали участие многие. Беспочвенность такой оценки вскоре стала понятна и давно всеми оставлена.

Как отмечено, первая теория изучения геоида нерегуляризированной (реальной) Земли была разработана Н.Д. Моисеевым, Н.Р. Малкиным, М.С. Молоденским.

Важный шаг к новому пониманию задач геодезии сделал Н.Д. Моисеев. В статье 1933 г. он писал: «...неоднократно было показано, что при некоторых вполне разумных допущениях геоид регуляризированной Земли будет весьма мало отличаться от геоида Земли истинной. Однако это еще ничего не говорит о том, насколько заметно будет отличие поля силы тяжести, обусловленного регуляризированной Землей, от такового же, обусловленного истинной Землей на протяжении пространства между поверхностью геоида и поверхностью Земли. А этот вопрос следует признать вполне уместным. Дело в том, что практика геодезии зачастую требует не предлагаемых ей теоретической гравиметрией соотношений *на геоиде*, а соотношений *на физической поверхности Земли*: примером может служить отклонение отвеса.

На основе всего изложенного следует признать не лишенной интереса попытку изучения схемы, более близкой к истинной Земле, чем общепринятая схема регуляризированной Земли. Элементарному решению одного из предварительных вопросов, связанных с названной попыткой, как раз и посвящено содержание настоящей статьи». Эта же мысль высказана в немецком варианте публикации Н.Д. Моисеева (N.D. Moisseiev, 1934).

И сейчас, по прошествии стольких лет, потребности что-то уточнить, подправить в цитате не возникает. Николай Дмитриевич еще не пытался определить внешний потенциал Земли, хотя и видел необходимость решения этой задачи, по крайней мере для вычисления уклонения отвеса. Как следует поступать с высотой геоида, если определен внешний возмущающий потенциал, Моисеев еще, по-видимому, не знал. Цитата показывает также, что только сложность решения заставляла его использовать вновь гладкую поверхность геоида в качестве краевой. Н.Р. Малкин и М.С. Молоденский в последующих публикациях дали другие, более полные решения, явно выражающие высоту нерегуляризованного геоида (Н.Д. Моисеев составил только интегральное уравнение относительно этой высоты). Методология оставалась прежней, но Н.Р. Малкин видел необходимость ее улучшения и в своих статьях об определении нерегуляризованного геоида отметил целесообразность совершенствования математического аппарата настолько, чтобы не требовалось изменять Землю, хотя бы ценою усложнения в вычислениях (Н.Р. Малкин, 1934 г.; N.R. Malkin, 1935). Можно сказать, что эти работы завершили попытку Джеффриса определить геоид, используя внешний потенциал реальной Земли.

К рассматриваемому вопросу относятся также две статьи Н.К. Мигалья 1939 г. В первой дан вывод краевого условия для возмущающего потенциала  $T$  в точке  $A$  физической поверхности Земли:

$$\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{2T}{R} \Big|_A = -g_A + \gamma_0 - \frac{2g_n H}{R},$$

где  $g_n$  — среднее значение силы тяжести внутри материковых масс на отрезке между геоидом и земной поверхностью. Искомой предполагается высота  $N$  нерегуляризованного геоида над сферой (эллипсоидом). С потенциалом  $T_A$  и ортометрической высотой  $H$  она связана равенством

$$\gamma_{cp} N = T_A + (g_n - \gamma_{cp}) H,$$

где  $\gamma_{cp}$  — средняя нормальная сила тяжести на отрезке  $H$ . Решения краевой задачи для земной поверхности автор фактически не дает, предлагая пользоваться обычной формулой Стокса.

Во второй статье Н.К. Мигаль дает новую интерпретацию аномалии в свободном воздухе, а именно: вместо обычно используемой редукции силы тяжести  $g$  на геоид  $+ \frac{2g}{R}H$  предложена редукция нормальной силы тяжести  $\gamma$  на земную поверхность  $-\frac{2\gamma}{R}(H+N)$ , позволяющая рассматривать аномалию силы тяжести на земной поверхности в виде

$$g - \left[ \gamma_0 - \frac{2\gamma}{R}(H+N) \right] \text{ или } g - \left[ \gamma_{\text{ср.}} - \frac{2\gamma}{R}H \right].$$

Достоинство такой интерпретации автор справедливо видел в том, что массы никуда не перемещаются, что существенно для гравиразведки. Этот взгляд на аномалии сохранен в теории Молоденского.

Попытку определить внешний потенциал Земли предпринял Н.Р. Малкин (1939 г.) в кратком Примечании 2 к статье «Об определении фигуры геоида по наблюдениям силы тяжести». Текст примечания в переводе с французского приводим почти полностью, опущены только две последние фразы как относящиеся к основному тексту статьи и лишенные здесь интереса.

«Примечание 2. К определению формы физической поверхности Земли без редукций и конденсаций. Поскольку можно предположить известной высоту точки наблюдения над уровнем моря (то есть независимую от истинного знания геоида), ошибка в определении фигуры геоида вызывает подобную ошибку в определении физической поверхности Земли. Пусть  $n$  — нормаль к этой поверхности  $S$ ,  $g_n$  и  $\delta g_n$  — проекции силы тяжести и ее аномалии на это направление и направление отвеса. Можно написать интегральное уравнение

$$\zeta = \frac{\cos(n, \nu)}{2\pi g_n} \left\{ \int_S \frac{\delta g_n}{r} dS + \int_S \zeta \left[ -\frac{g_n}{\cos(n, \nu)} \cdot \frac{\partial(1/r)}{\partial n} + \frac{\partial g_n}{\partial n} \cdot \frac{\cos(n, \nu)}{r} \right] dS \right\},$$

где все величины отнесены к физической поверхности Земли, а поэтому не следует редуцировать силу тяжести на уровень моря».

В приведенном уравнении автор отдает предпочтение  $g_n = g \cos(n, \gamma)$  перед непосредственно измеряемой  $g$ . В последующей работе 1949 г., сданной в печать в 1944 г., уравнение переписано в более удобном виде:

$$\zeta = \frac{1}{2\pi g} \int_S \left\{ \int_S \frac{\delta g}{r} dS + \int_S \zeta \left[ g \frac{\partial(1/r)}{\partial n} + \frac{\partial g_n}{\partial n} \cdot \frac{\cos(n, \nu)}{r} \right] dS \right\},$$

и указано, что его вывод следует из формулы Грина для возмущающего потенциала:

$$T = \frac{1}{2\pi} \int_S \left[ T \frac{\partial(1/r)}{\partial n} - \frac{\partial T}{\partial n} \cdot \frac{1}{r} \right] dS.$$

Это разъяснение позволяет утверждать, что в выводе интегрального уравнения при вычислении  $\partial T / \partial n$  допущена ошибка. В последней статье автор прямо определяет величину  $\partial g_n / \partial n$  как «вторую производную силы тяжести по нормали к физической поверхности Земли». Здесь опять очевидная путаница: сразу можно предположить, что автор имел в виду вторую производную потенциала силы тяжести, а еще лучше было бы сказать — «вторую производную потенциала нормальной силы тяжести». Во всяком случае основания и для последней интерпретации в авторском тексте есть. Впрочем, и с такими

исправлениями уравнение все-таки было бы ошибочным. Нет нужды здесь приводить правильный вывод интегрального уравнения Молоденского, тем более, что о нем ранее уже говорилось.

Бóльший интерес представляет другая статья Николая Романовича Малкина, сданная в печать и опубликованная одновременно с предыдущей (1944 и 1949 гг.), — «О вычислении уклонений отвеса по аномалиям силы тяжести в горах». Возмущающий потенциал представлен в виде двух членов — решения Стокса и потенциала  $T$  простого слоя, распространенного по поверхности Земли в окрестности точки, где нужно определить уклонения отвеса. Окончательные формулы для этого упрощенного случая получены правильно, измеренная смешанная аномалия силы тяжести предполагается равной чистой аномалии, как это обычно делают в гравиразведке.

Отметим здесь же, что в том же 1944 г. в научно-техническом отчете ЦНИИГАиК М.С. Молоденский не только изложил основные идеи монографии 1945 г., но кроме того, дополнительно дал несколько вариантов преобразования формулы Грина, высказав интересные суждения об их сравнительных достоинствах, а также их связи с аналитическим продолжением потенциала внутрь масс, затронув и другие вопросы. В опубликованные труды Молоденского эта часть отчета, к сожалению, не вошла.

Идея об уточнении подхода Г. Джеффриса возникла у М.С. Молоденского еще раньше. Сохранилось письмо Михаила Сергеевича к Владимиру Федоровичу Еремееву, датированное 2 января 1943 г., с заголовком «План диссертации на тему:

«Теоретические основы геодезической гравиметрии» (мы сохраняем орфографию подлинника). Вот это письмо:

#### «1) Анализ формулы Стокса:

- а) бесконечный ряд Стокса;
- б) вывод Пицетти;
- в) смешанная задача теории потенциала;
- г) вывод Джеффриса;
- д) связь с интегральными уравнениями — вывод из формул Молоденского, Малкина, Моисеева;
- е) из сравнения всех выводов — почему неизбежно условие  $g_1 = 0$  (физически?)

#### 2) Модели, анализ теории:

- а) Почему в формуле Моисеева неучет  $(\partial g)/(\partial z)$  дает меньшие ошибки, чем в формуле Стокса?
- б) Дополнить вывод Моисеева влиянием аномалии вертикального градиента и сравнить результат с форм. Молоденского.
- в) Обратить внимание на вывод Джеффриса, попробовать его без дополнительных погрешностей, развить далее и сравнить с ф. Молоденского и Моисеева.
- г) Нельзя ли выводы Джеффриса применить к Земле Прея?
- д) Попробовать решить уравнение Молоденского.
- е) В какой мере  $(\partial g)/(\partial z)$  может сказаться на выводах типа уравнения Хирвонена или даже на выводе сжатия по Клеро?
- ж) Почему влияние топографии и  $(\partial g)/(\partial z)$  на уклон отвеса входит с разными знаками? Не связано ли это явление с «изостазией» — вернее, не является ли изостазия отчасти результатом пренебрежения аномалиями вертикального градиента?
- з) Если уравнение Молоденского решить не удастся, доказать сходимость процесса последовательных приближений.

- и) Правильно ли предположение, что вопрос о редукции силы тяжести к уровню моря может и не решаться строго в общем виде (если, например, удастся решить ур. Молоденского, да и без этого — например, топографическая поправка). Выяснить соотношение между «топографической поправкой» и «Geländereduktion».

### 3) Выводы:

- а) Можно ли пользоваться форм. Клеро, и если нельзя, какие внести в нее изменения, поскольку речь идет только о выводе сжатия?
- б) Можно ли пользоваться форм. Стокса при исследовании общей фигуры геоида и нужно ли в нее внести исправления?
- в) Правильный подход при исследовании местной фигуры геоида».

Далее следует приписка: «Составил для Володи Михаил. Если не придется этими вопросами заниматься вместе — постарайся о них не забыть и разобраться в этих делах сам».

По-видимому, М.С. Молоденский сообщил В.Ф. Еремееву первоначальный план своей собственной диссертации — монографии 1945 г. М.С. Молоденский предлагал В.Ф. Еремееву заняться тем кругом вопросов, которые привлекали внимание его самого. Почти все поставленные вопросы нашли решение в монографии 1945 г. и в последующих работах. Необходимость развития и уточнения подхода Джеффриса (пункт 2в) была ясна Молоденскому в начале 1943 г., а вероятнее всего, и раньше.

Анализ работ предшественников показывает, что идею изучения земной поверхности нельзя считать полностью принадлежащей М.С. Молоденскому. Предложения Джеффриса, Моисеева и Малкина также не оригинальны. Дж.Г. Стокс еще в 1849 г. писал: «Однако значения потенциала во внутренних точках для нашего исследования не требуются; фактически мы и не могли бы их вовсе определить, не сделав каких-либо допущений относительно распределения масс внутри Земли».

Но, по-видимому, замечательные слова Стокса были основательно забыты. Выдающиеся геодезисты прошлого понимали, что определение фигуры Земли и ее внешнего гравитационного поля нельзя реализовать через геоид и ортометрические высоты. Это отмечено Гельмертом (Helmert, 1884, с.502) и Пицетти (Pizzetti, с.206, статьи в энциклопедии 1906–1925 гг.). В наше время только Г. Джеффрис, А.А. Михайлов, Н.Д. Моисеев, Н.Р. Малкин, Н.К. Мигаль в той или иной мере осознали необходимость усовершенствования теории Стокса изучения геоида и делали попытки хотя бы частичного ее решения. Однако никто из них даже близко не подошел к решению задачи и тем более к созданию единой теории для всей современной геодезии. Эта грандиозная задача в полном объеме разработана почти исключительно трудами Михаила Сергеевича Молоденского.

Теперь теория Молоденского признана. Но признание продвигалось трудно, доставив Молоденскому много горьких минут. А.С. Чеботарев, тогда один из ведущих профессоров МИИГАиК, после доклада Михаила Сергеевича бросил реплику: «Материя исчезла, остались одни формулы», а на одном из заседаний геодезической секции ученого совета ЦНИИГАиК он же заметил: «Вместе с водой из ванны выбросили ребенка» (А.С. Чеботарев имел в виду отказ от использования геоида как основной поверхности, представляющей фигуру Земли). На эти замечания Молоденский отвечал спокойно, без пафоса: «Материки остались на месте», «Работа основана на законе Ньютона».

Уже после защиты докторской диссертации работа Молоденского была послана из МИИГАиК на экспертизу в Академию наук СССР. Работа получила высокую оценку экспертов, а доклад Молоденского в президиуме Академии наук способствовал избранию его в члены-корреспонденты Академии.

Первыми были официально признаны преимущества нормальных высот по сравнению с ортометрическими. На специальном заседании геодезической секции ученого совета ЦНИИГАиК при положительных отзывах В.В. Данилова, Д.А. Ларина и А.С. Чеботарева была одобрена работа В.Ф. Еремеева, опубликованная в 1951 г., о практическом вычислении нормальных высот и сопоставлении их с ортометрическими и динамическими, и нормальные высоты вошли в геодезическую практику СССР. Система нормальных высот официально введена во Франции (M. Kasser, 1984) и в Германии (T. Grote, H. Denker, W. Torge, 1995). В последней статье указано, что введение нормальных высот в скором времени следует ожидать в Европе. Даже если обсуждают определение геоида, как правило, имеют в виду применение теории Стокса как первого приближения теории Молоденского, никаких дополнительных редукиций, кроме необходимых, в теории Молоденского не рассматривают. Топографо-изостатические редукиции используют как интерполяционный прием. Насколько это известно авторам, только в Австрии составляют специальную карту распределения плотностей в земной коре для вычисления ортометрических высот и фигуры геоида, так как неучет таких поправок ведет к ошибкам высот геоида и уклонов отвеса до 20 см и 3'' (H. Suenke, 1986).

Труды М.С. Молоденского оставили неизгладимый след не только в геодезии. Вторую половину жизни он, не прекращая изучения геодезии, особенно интенсивно занимался физикой Земли, конкретно — упругими колебаниями, вращением и определением строения Земли по ее свободным колебаниям. Необходимость такого направления исследований понятна и как задача теоретической геодинамики, и как средство для определения необходимых данных для иных дисциплин, занимающихся глобальным изучением тех или иных явлений на Земле. Американцы этот круг вопросов справедливо относят к геодезии.

Изучение движения и деформаций Земли следовало бы вести в неподвижной системе координат. В противном случае неучитываемые ее собственные движения будут ошибочно рассматриваться как результат воздействия каких-то реальных сил. Квазары, удаленные от Солнечной системы не менее, чем на 700 млн световых лет, являются наиболее неподвижными объектами на небесной сфере. На их основе построена небесная система координат с точностью до 0'',002. Другая система координат — земная — определена пунктами на земной поверхности благодаря лазерному слежению за спутниками с погрешностями около 5 см. Для связи небесной и земной систем координат необходимы элементы их взаимной пространственной ориентировки. При этом существенна роль оси вращения Земли, необходимо знать движение самой Земли относительно оси вращения (движение полюса) и угловую скорость вращения. Специфическая сложность этой задачи состоит в том, что, располагая только измерениями на земной поверхности, нельзя отделить движение полюса от деформации земной поверхности и от элементов ориентировки (углов прецессии и нутации). Поэтому нельзя теории нутации и прецессии проверять наблюдениями. Для расчетов пространственного движения Земли необходимы данные о ее внутреннем строении и отражающая особенности реальной Земли теория пространственного движения ее оси вращения. В современных расчетах используют наиболее точные данные по распределению плотности внутри Земли, их получают по результатам наблюдений свободных колебаний и распространения сейсмических волн. Учитывают форму границы земного ядра и мантии (перепады высот этой поверхности по некоторым оценкам достигают 10 км). Принимают во внимание отличие деформаций Земли от описываемых законом Гука с коэффициентами упругости Ламе, влияние морских приливов и другие эффекты. Привлечение космических методов при съемке рельефа Земли из космоса (или при аэросъемке) для определения движения полюса относительно земного рельефа подобно тому, как Я.Л. Зиман, Б.В. Непоклонов и Б.Н. Родионов (1970 г.) предложили это делать для планет, позволило бы исключить смещения полюса

относительно рельефа и только одни астрономические наблюдения непосредственно использовать для определения пространственной ориентировки Земли. Но такой подход не освоен.

Конечно, точность теории должна соответствовать точности наблюдений, а лучше — превосходить их точность. Существенный этап в разработке такой теории составили работы М.С. Молоденского 1953–1989 гг.

Силы, действующие значительно дольше времени рассасывания напряжений, можно рассматривать как гидростатические, и Землю для таких сил можно считать жидкой. Если также известно изменение плотности с глубиной, то можно вычислить сжатия слоев постоянной плотности и возникающие напряжения. Эти решения (теория Клеро–Радо) в теории Молоденского рассматриваются как начальные условия. Далее изучению подлежат малые упругие колебания вращающейся сферически-симметричной Земли с жидким ядром в системе координат, имеющей нутационное движение (прецессионное движение для жидкой и твердой Земли одинаково).

В работе 1953 г. описан принцип решения этой задачи в виде разложения по шаровым функциям. Элементарные составляющие колебания выражены через радиальное смещение, объемное расширение и изменение потенциала притяжения, пропорциональные присоединенным функциям Лежандра. В работе 1961 г., отказавшись от вариационного метода, развитого Джеффрисом и Висенте в работах 1957 г., Молоденский описал новый путь построения теории нутации Земли и суточных земных приливов.

На реальных моделях Земли М.С. Молоденскому и М.В. Крамер удалось получить хорошее согласие с наблюдаемыми данными. Например, для периода чандлерова колебания полюса получено 433 дня (модель I) и 436 дней (модель II). Это теоретическое определение чандлерова колебания полюса до сих пор остается наиболее точным. Для сравнения укажем, что по пулковским данным было найдено  $434,3 \pm 0,7$  сут (Л.Д. Костина, В.И. Сахаров, 1979 г.), по данным МСШ/МСДП за 1900–1973 гг. методом максимальной энтропии Карри (R. Currie, 1974) нашел  $432,95 \pm 1,02$  средних солнечных суток.

Решение Молоденского 1961 г. детально описано Г. Морицем (H. Moritz, 1980–1982 гг.) в отчетах Геодезического отдела Университета штата Огайо, США. Это описание вошло в книгу Г. Морица и А. Мюллера 1992 г.

Способ Молоденского расчета нутации был рекомендован Международным астрономическим союзом на генеральной ассамблее в Монреале в августе 1979 г. Но принятое в расчете Молоденского распределение плотности в Земле неточно соответствует современным данным, поэтому потребовались уточнения. Как отметил Смит (M.I. Smith, 1981), развитие метода Молоденского 1961 г., в частности, в работах Сасао, Окубо, Саито (T. Sasao, Sh. Okubo, M. Saito, 1980) и Уора (J. Wahr, 1981), в основном состояло в уточнении модели Земли. Результаты Молоденского, пересчитанные при уточненных данных о строении Земли, приводят к хорошему согласию с результатами, основанными на более поздних и более полных теориях. Такое согласие отметил, в частности, Уор (J. Wahr, 1981). Различия между результатами Уора и Молоденского составляют  $\sim 10\%$  поправки за нетвердость, или  $0,002''$  за 6 месяцев или 18,6 лет. Уор объясняет эти расхождения в основном несовершенством модели Земли, использованной Молоденским, и в меньшей степени — уточнением теории. Эти расхождения немного больше динамического влияния океанов на нутацию и, вероятно, больше взаимодействий ядра и оболочки.

В книге Г. Морица и А. Мюллера (1992, с.147) теория Молоденского расчета нутации оценена как исходная практически для всех последующих работ, а его численные результаты названы превосходными даже по существующим стандартам.

В 1961 г. Молоденский рассчитал также период почти суточной нутации оболочки, вызываемой воздействием жидкого ядра. Во многих последующих статьях Молоденский



продолжал совершенствовать теорию. В уравнения включены силы Кориолиса для учета вращения системы координат, связанной с Землей (1970 г.). Это делает теорию применимой для изучения низкочастотных колебаний, когда силы Кориолиса имеют основное значение. Построено решение без предварительного разделения колебаний на сферические и крутильные (1972 г.). Единый метод исследований охватил колебания всех видов и всех частот, включая вынужденную и свободную нутацию оси вращения и изменения угловой скорости вращения Земли. Решение сведено к системам обыкновенных дифференциальных уравнений относительно элементарных составляющих колебания для каждой гармоники (1974 г., 1976 г., 1977 г.). В решение каждой системы уравнений входят пять постоянных. Они характеризуют некоторые проявления на поверхности упругих колебаний всей толщи Земли и сходны по смыслу с числами Лява. Традиционное использование последних связано с недоказанным допущением, что было отмечено Лявом. За этими новыми пятью постоянными автор предложил сохранить прежний термин — числа Лява.

Усовершенствованная теория колебаний изложена автором в его последней монографии 1989 г., которая содержит также новые результаты. В частности, для учета отклонений в строении Земли от сферически-симметричного строения М.С. Молоденским развита теория возмущений. Результаты распространены на случай вязкого земного ядра. Определение строения Земли по частотам свободных колебаний относится к некорректным задачам с неустойчивым решением. Молоденским предложен способ исключения нереальных флуктуаций плотности. Последние подходы еще не нашли применения. Работы Молоденского опережают время, они создают базу для повышения точности теории, что необходимо для сближения точностей современной новой техники и теории, а потому логика развития геофизики неизбежно приведет к использованию последних идей М.С. Молоденского.

Исследования по теории вращения деформирующейся Земли, ее колебаниям, теории фигуры и гравитационного поля вносят неоценимый вклад в развитие фундаментальных наук о Земле, они необходимы для полноценного использования новой техники. Кроме астрономо-геодезического использования теории упругих колебаний Молоденского она найдет применение и в других областях знания: в геотектонике и в теории фигур больших планет.

Михаила Сергеевича Молоденского отличали преданность науке, деликатность в отношении к людям, приветливость, неприхотливость в быту. Он был прекрасным семьянином, вместе с Александрой Михайловной они вырастили двух дочерей и двух сыновей. Коллеги Михаила Сергеевича благодарны своей судьбе. Он не переставал удивлять смелостью идей, изяществом, строгостью, полнотой своих исследований.

Научная мировая общественность высоко ценит труды Михаила Сергеевича, вклад, внесенный им в развитие наук о Земле.

В заключение выражаем благодарность Сергею Васильевичу Кусакину, краеведу и учителю епифанской школы, в которой учился М.С. Молоденский, за сведения об учителях Михаила Сергеевича и об Епифани.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бескин Н.М.* Воспоминания о московском физмате начала 20-х годов // Историко-математические исследования. 1993. Вып. 34. С. 163–184.
2. *Блажко С.Н.* История Астрономической обсерватории Московского университета // Астрономия. 1940. Вып. 58. С. 7–106.
3. *Бровар В.В.* Сравнение аналитических методов вычислений возмущающего потенциала Земли // Геодезия и картография. 1993. №1.

4. *Бровар В.В., Магницкий В.А., Шимберев Б.П.* Теория фигуры Земли. — М.: Изд-во геодезической литературы. 1961. 256 с.
5. *Вишик М.И., Ладыженская О.А.* Краевые задачи для уравнений в частных производных // Успехи математических наук. 1956. №6. С. 41–97.
6. *Гаусс К.Ф.* Письмо Шумахеру // Избранные геодезические сочинения. — М.: Изд-во геодезической литературы. 1958. Т. 2.
7. *Григорьева Н.Б.* Сорок лет в Московской университетской обсерватории // Историко-астрономические исследования «На рубежах познания Вселенной». 1994. Вып. 24. С. 352–370.
8. *Еремеев В.Ф.* Теория ортометрических, динамических и нормальных высот. // Труды ЦНИИГАиК. 1951. Вып. 86. С. 11–51.
9. *Еремеев В.Ф., Юркина М.И.* Интегральные уравнения для плотности простого слоя // В кн.: Интегральные уравнения Молоденского для теории фигуры Земли. Уравнения градусных измерений. // Труды ЦНИИГАиК. 1972. Вып. 198. С. 57–178.
10. *Еремеев В.Ф., Юркина М.И.* Определение гравитационного поля Земли через простой слой на ее поверхности по изменениям параметров спутникового движения и наземным гравиметрическим данным. // Труды ЦНИИГАиК. 1977. Вып. 205. С. 164.
11. *Зверев М.С.* Ф.Н. Красовский в Московском университете. // Труды МИИГАиК. 1959. Вып. 37. С. 81–84.
12. *Зиман Я.Л., Непоклонов Б.В.* Определение вектора вращения планет // Астрономический журнал. 1970. Т. 47. №6. С. 1277–1281.
13. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. — М.: Наука, 1977. 742 с.
14. *Костина Л.Д., Сахаров В.И.* Период Чандлера по наблюдениям с 1890 по 1968 гг. и сравнение его с рассчитанными М.С. Молоденским для двух моделей внутреннего строения Земли // Известия ГАО в Пулково. 1979. №196. С. 149–152.
15. *Кастомаров Г.Н.* Епифань в моей жизни. — М. 1992. 84 с.
16. *Красовский Ф.Н.* Главные направления в работе секторов геодезии и картографии ЦНИИГАиК // Технический бюллетень «Аэросъемка». 1935. №7.
17. *Красовский Ф.Н.* Обзор и результаты градусных измерений // Избранные сочинения. — М.: Геодезиздат, 1953. Т. 1.
18. *Красовский Ф.Н.* Руководство по высшей геодезии. — М.: Изд-во геодезической и картографической литературы. 1942. Ч. 11. 560 с.
19. *Купрадзе В.Д., Гегелия Т.Г.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. — М.: Наука, 1976.
20. *Магницкий В.А.* О структурных аномалиях силы тяжести. — М.: Изд-во геодезической литературы ГУТК при СНК СССР, 1945.
21. *Малкин Н.Р.* Об определении фигуры геоида регуляризованной и нерегуляризованной Земли // АЖ. 1934. Т. 11. №5. С. 497–503.
22. *Малкин Н.Р.* О выборе поверхности редукции гравитационных и геодезических измерений // АЖ. 1935. Т. 12. №4. С. 360–367.
23. *Малкин Н.Р.* Об определении фигуры геоида по наблюдениям силы тяжести // АЖ. 1939. Т. 16. №1.
24. *Малкин Н.Р.* О вычислении уклонений отвеса по аномалиям силы тяжести в горах // Труды ЦНИИГАиК. 1949. Вып. 68.
25. *Мигаль Н.К.* Два слова о редукциях силы тяжести // Доклады АН СССР. 1939. Т. 23. №12. С. 146–147.
26. *Михайлов А.А.* О применении формулы Стокса для определения фигуры геоида // АЖ. 1940. Т. 17. №1.
27. *Михайлов А.А.* Таблицы для приведения силы тяжести по методу компенсации // Ученые записки МГУ. 1945. Вып. 101.
28. *Моисеев Н.Д.* Об определении фигуры геоида нерегуляризованной Земли // АЖ. 1933. Т. 10. №4.

29. *Моисеев Н.Д.* Об определении отклонения отвеса для нерегуляризированной Земли // АЖ. 1934. Т. 11. №4.
30. *Моисеев Н.Д.* О проблеме нерегуляризированной Земли // АЖ. 1935. Т. 12. №4.
31. *Мориц Г., Мюллер А.* (1922) Вращение Земли: теория и наблюдения. — Киев: Наукова думка. 1987.
32. *Остач О.М.* К методике астрономо-гравиметрического нивелирования. // Реф. сборник ЦНИИГАиК. 1970. №6.
33. *Пеллинен Л.П.* Высшая геодезия. — М.: Недра. 1978. 264 с.
34. *Пеллинен Л.П.* Взаимное влияние ошибок высот квазигеоида и плановых координат пунктов в астрономо-геодезических сетях // Геодезия и картография. 1983. №11.
35. *Пицетти П.* Основы механической теории фигуры планет. — М.-Л.: Государственное технико-теоретическое изд-во. / Перевод А.А. Михайлова с итальянского издания 1913 г., 1933.
36. *Сагитов М.У.* Неоднородность гравитационного поля помещений и ее влияние на определение фундаментальных гравиметрических констант // Доклад на Комиссии по неприливным изменениям силы тяжести 15–17.03.1983 г. Москва. 1983.
37. *Стокс Д.* (1849) О силе тяжести на земной поверхности. М.: Изд-во геодезической литературы. 1961.
38. *Хейфец М.Е.* М.С. Молоденский и его путь в науке // Геодезия и картография. 1992. №9.
39. *Черноплатов В.И.* Дворянское сословие Тульской губернии. — М.: Типография Л.В.Пожидаевой. 1911. Т. 6.
40. *Юркина М.И.* Вопросы счета высот в зарубежных публикациях. // Геодезия и картография. 1996. №7.
41. *Currie R.G.* Period and Q of the Chandler wobble // G. J. of the Royal Astron. Soc. 1974. 38.
42. *Giraud G.* Nouvelle methode pour trailer certains problemes relatifs aux equations du type elliptique // Journal de mathematiques pures et appliquees. 1939. T. 18.
43. *Grote T., Denker H.* Stellungnahme zu NN-Undulationen oder Geoidun Dulationen? // Allgemeine Vermessung-Nachrichten. 1995. 102.
44. *Groten E.* Fragen zum Vertikaldatum «Vertikales Datum». // Allgemeine Vermessung-Nachrichten. 1995. 8/9.
45. *Günther M.* Ein einfacher Existenzbeweis fuer das nichtlineare Molodensky-problem // Mathematische Nachrichten. 1987. 130.
46. *Hormander L.* The boundary problems of physical geodesy // Archive for rationale mechanics and analysis. 1976. 62.
47. *Jorge M.C.* Local existence of the solution to a nonlinear inverse problem in gravitation // Quarterly of applied mathematics. 1987. 45. №2.
48. *Moritz H.* 1980–82 Theories of nutation and polar motion 1. Report 309. 1980, 11. Report 318. 1981, 111. Report 342. 1982.
49. *Sanso F.* Molodensky problem in gravity space a review of the first results // Bulletin geodesique. 1978. 52.
50. *Wahr J.M.* A normal mode expansion... // Geophysical Journal of Royail Astronomical Society. 1981. 64.
51. *Молоденский М.С.* Новый метод решения геодезических задач // Труды ЦНИИГАиК. 1954. Вып. 103.

# Часть I

## ГЕОДЕЗИЯ И ГРАВИМЕТРИЯ

---

### О РЕДУКЦИИ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ К УРОВНЮ МОРЯ ДЛЯ НЕРЕГУЛЯРИЗИРОВАННОЙ ЗЕМЛИ\*

§ 1. При решении основной задачи теоретической гравиметрии — задачи определения фигуры Земли по значениям силы тяжести на ее поверхности — мы сталкиваемся с большими затруднениями принципиального характера, выдвигающими фундаментальный вопрос о редукции силы тяжести к уровню моря. Как известно, классическое решение этого вопроса, данное Стоксом, требует предварительного знания силы тяжести на одной из уровенных поверхностей Земли, вне которой не должно быть никаких притягивающих масс. В качестве такой поверхности, казалось бы, проще всего взять уровенную поверхность Земли, проходящую над уровнем моря на расстоянии высочайшей горной вершины. Однако в этом случае редукции силы тяжести были бы настолько велики, что для вычисления их потребовалось бы знание по крайней мере двух первых производных от ускорения силы тяжести по направлению вертикали. Кроме того, в результате мы знали бы форму уровенной поверхности, настолько далекой от всей физической поверхности Земли, за исключением отдельных ее точек, что практическая ценность этих знаний была бы ничтожна, а переход от соотношений на этой уровенной поверхности к соотношениям на уровенной поверхности, проходящей вблизи физической поверхности Земли, представляет собой задачу не менее сложную, чем основная задача теоретической гравиметрии.

В силу этих обстоятельств за основную уровенную поверхность берут поверхность, совпадающую на океанах с уровнем воды и, следовательно, расположенную на материке почти всюду ниже физической поверхности Земли. Поэтому решение основной задачи возможно или ценой отказа от решения Стокса, но с сохранением реальной нерегуляризированной Земли, или путем замены реальной Земли, для которой условия Стокса не выполняются, Землей искусственной («регуляризированной»), для которой эти условия выполняются, но так, чтобы исследуемая уровенная поверхность при этом как можно меньше деформировалась.

Отсюда видно, что при решении задачи методом Стокса основные трудности переносятся на задачу «регуляризации» Земли, т.е. такую замену масс внешних (по отношению к исследуемой уровенной поверхности) на массы внутренние, при которых эта поверхность по возможности не деформируется. В результате решения этой задачи должен быть указан достаточно точный способ вычисления по наблюдаемым значениям силы тяжести на физической поверхности реальной Земли значений силы тяжести на уровенной поверхности регуляризированной Земли, т.е. способ «редукции к уровню моря».

Решению проблемы для нерегуляризированной Земли, насколько мне известно, посвящена только одна работа, а именно: работа проф. Н.Д. Моисеева. Понятно, что и в этом методе центр тяжести всех затруднений падает на задачу вычисления редукций силы тяжести к уровню моря, но только для реальной (нерегуляризированной) Земли.

---

\* Труды ЦНИИГАиК. 1936. Вып. 11. С. 73–81.

Тот или иной метод решения основной задачи теоретической гравиметрии, приводя к определенным интегральным уравнениям, решающим эту задачу, вместе с тем требует определенных типов редукиций силы тяжести. Исследование точности числовых соотношений, получаемых из этих интегральных уравнений, возможно только при условии четкой постановки вопроса о редукициях силы тяжести, показывающей степень приближения этих редукиций к требованиям теории и возможность достаточно точного их вычисления на практике.

Настоящая работа и ставит своей целью разобрать вопрос о редукиции силы тяжести к уровню моря, исходя из схемы Земли нерегуляризированной, и показывает те уточнения к редукиции в свободном воздухе, которые можно получить при избранном нами способе вывода основного интегрального уравнения.

§ 2. Прежде всего выведем интегральное уравнение, определяющее расстояние геоида от поверхности относимости через измеренные значения силы тяжести на поверхности Земли для нерегуляризированной Земли, и покажем, что это уравнение при определенных допущениях приводится к известному уравнению Стокса для Земли регуляризированной.

В основу этого вывода кладется известная из теории потенциала теорема Шаля. Применительно к нашему случаю эту теорему можно формулировать следующим образом.

Если всю массу Земли распределить на какой-либо из поверхностей уровня ее потенциала в виде простого слоя с поверхностной плотностью, равной  $g_i/4\pi$ , то этот слой будет действовать на точки, находящиеся вне поверхности уровня, так же, как на них действуют массы, находящиеся внутри этой поверхности уровня. Здесь  $g_i$  означает ускорение силы тяжести в соответствующих точках урвенной поверхности от всех масс Земли (т.е. те ускорения, которые фактически наблюдались бы, если бы можно было их измерить в соответствующих точках этой урвенной поверхности).

Идея последующих выводов в кратком изложении заключается в следующем. Через точку, находящуюся на поверхности Земли, для которой вычисляется расстояние геоида от поверхности относимости, проведем урвенную поверхность, которая разделит все массы Земли на массы по отношению к ней внутренние и внешние. Если затем мы определим ускорения силы тяжести  $g_i$  на этой поверхности уровня, то, пользуясь теоремой Шаля, сможем определить потенциал всех внутренних масс Земли на внешние точки. Прибавляя сюда потенциал от всех внешних масс, получим результирующий потенциал от всех масс Земли. Параллельно с реальной Землей введем в рассмотрение «Землю сравнения», которую можем вообразить себе получившейся в результате некоторого перераспределения масс Земли, при котором одна из урвенных поверхностей имеет заданную форму, а все массы Земли заключены внутри этой поверхности. В таком случае по теореме Стокса во всем пространстве вне этой поверхности уровня потенциал Земли сравнения определен однозначно. Вычислив разность между потенциалом реальной Земли и Земли сравнения, т.е. образовав «аномальный потенциал», далее без труда получим расстояние геоида от поверхности уровня Земли сравнения или, как мы ее будем называть, от поверхности относимости.

§ 3. Итак, пусть  $M$  есть точка на физической поверхности Земли, для которой мы вычисляем расстояние от геоида<sup>1</sup>  $G$ , проходящего через эту точку, до поверхности относимости  $\Sigma'$ . Положение поверхности  $\Sigma'$  определяется тем, что значение потенциала  $V_{\Sigma'}$  на ней равно значению потенциала  $V_G$  Земли на поверхности геоида.

<sup>1</sup>Обычно под термином «геоид» понимают одну определенную урвенную поверхность Земли, совпадающую на поверхности океана с его средним уровнем. Мы будем называть эту поверхность «основным геоидом», а поверхность уровня, проведенную через произвольную точку  $M$ , будем называть геоидом точки  $M$ .

Тогда по теореме Шаля потенциал  $V_i$  на точку  $M$  от всех внутренних масс определится следующим интегралом, выражающим потенциал простого слоя («слоя Шаля») на точку  $M$ :

$$V_i = \frac{1}{4\pi} \int_G \frac{g_i d\sigma}{r_G},$$

где  $d\sigma$  — элемент поверхности геоида  $G$ ,  $r_G$  — расстояние от этого элемента до точки  $M$ . Интеграл распространен на всю поверхность  $G$ , нам неизвестную.

Потенциал  $V_e$  всех внешних масс на точку  $M$  определится следующим интегралом, распространенным по всему объему внешних масс, ограниченных поверхностью  $I$ :

$$V_e = k^2 \int \frac{\mu d\tau}{r_\tau},$$

где  $\mu$  — объемная плотность, вообще говоря, разная для разных точек,  $r_\tau$  — расстояние от элемента объема до точки  $M$ ,  $d\tau$  — элемент объема,  $k^2$  — постоянная тяготения.

Подсчитаем теперь значение потенциала  $V_\Sigma$  на поверхности относимости  $\Sigma$ , проходящей через точку  $M$ . В наших целях удобно его выразить, пользуясь теоремой Грина, как потенциал простого слоя поверхностных масс, расположенных на поверхности  $\Sigma$  с плотностью  $\gamma'/4\pi$ , где  $\gamma'$  обозначает ускорение силы тяжести в различных точках поверхности  $\Sigma$  от масс Земли сравнения.

Получим

$$V_\Sigma = \frac{1}{4\pi} \int_\Sigma \frac{\gamma' d\Sigma}{r},$$

где  $r$  — расстояние от элемента  $d\Sigma$  поверхности  $\Sigma$  до точки  $M$ .

Соединяя предыдущие результаты, получаем выражение для возмущающего потенциала  $\Delta V$ :

$$\Delta V = V_i + V_e - V_\Sigma = \frac{1}{4\pi} \int_G \frac{g_i d\sigma}{r_G} + k^2 \int \frac{\mu d\tau}{r_G} - \frac{1}{4\pi} \int_\Sigma \frac{\gamma' d\Sigma}{r}. \quad (1)$$

Откуда по системе Брунса

$$\zeta_M = \frac{\Delta V}{\gamma'_M},$$

где  $\zeta_M$  — искомое расстояние в точке  $M$  от геоида, проходящего через эту точку, до поверхности относимости, соответствующей тому же значению потенциала.

Это уравнение, выведенное пока для любой системы поверхностей относимости, является основным для дальнейших выкладок.

§ 4. Перейдем теперь к преобразованию интегралов, входящих в это уравнение, предполагая, что поверхность относимости есть сфера.

Каждый из этих интегралов преобразуем в интеграл, распространенный по поверхности сферы  $\Sigma$ .

Начнем с первого интеграла.

Употребляя обозначения, иллюстрированные на рисунке, имеем

$$\frac{r_G}{r} = \frac{\sin \omega}{\sin(\omega - \beta)},$$

откуда

$$\frac{1}{r_G} = \frac{1}{r} (\cos \beta - \operatorname{ctg} \omega \sin \beta).$$

Во всех дальнейших выкладках мы будем пренебрегать величинами порядка квадрата уклонения отвеса (аномалии силы тяжести также будем считать за величины порядка малости уклонения отвеса).

Обозначив через  $\zeta$  расстояние в любой точке (на рисунке — в точке  $N$ ) от геоида  $G_M$  до сферы относимости  $\Sigma'$  и принимая во внимание, что  $\beta$  имеет порядок малости уклонения отвеса, находим

$$\beta = (\zeta - \zeta_M) \sin \omega \cdot \frac{1}{r}, \quad (2)$$

поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_G} &= \frac{1}{r} - \frac{(\zeta - \zeta_M)}{r^2} \cos \omega = \\ &= \frac{1}{r} - \frac{1}{2R_\Sigma} \cdot \frac{\zeta - \zeta_M}{r}, \end{aligned}$$

где  $R_\Sigma$  — радиус сферы  $\Sigma$ . Далее

$$d\Sigma = d\sigma \cos \alpha \cdot \frac{R_\Sigma^2}{(R_\Sigma + \zeta - \zeta_M)^2}, \quad (3)$$

$\alpha$  — угол между нормальными к сфере и к геоиду в точке  $N$ , т.е. уклонение отвеса в точке  $N$ . С точностью до первых степеней уклонения отвеса имеем

$$d\sigma = \left( 1 + 2 \frac{\zeta - \zeta_M}{R_\Sigma} \right) d\Sigma. \quad (4)$$

Подставляя эти значения в интеграл для  $V_i$ , получаем

$$V_i = \frac{1}{4\pi} \int_\Sigma \frac{g_i d\Sigma}{r} + \frac{3\gamma}{8\pi R_\Sigma} \int_\Sigma \frac{\zeta - \zeta_M}{r} d\Sigma. \quad (1a)$$

Переходим к преобразованию интеграла  $V_e$ . Разобьем поверхность сферы  $\Sigma$  на элементы поверхности  $d\Sigma$  и через контуры элемента проведем систему лучей  $R$ , проходящих через центр сферы  $\Sigma$ . В таком случае весь объем интегриации разобьется на части, представляющие собой отрезки конусов, ограниченные с боков этими лучами, снизу — поверхностью геоида  $G$  и сверху — поверхностью Земли. Обозначим расстояния от центра сферы:

$$\left. \begin{aligned} &\text{до элементов объема — через } R_\tau, \\ &\text{до поверхности геоида — через } R_G, \\ &\text{до поверхности Земли — через } R_E, \\ &\text{до поверхности сферы — через } R_\Sigma. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Тогда

$$d\tau = d\Sigma \frac{R_\tau^2}{R_\Sigma^2} dR. \quad (6)$$

Если введем обозначение

$$P = 4\pi k^2 r \int_{R_G}^{R_E} \mu \frac{R_\tau^2}{R_\Sigma^2 r_\tau} dR, \quad (7)$$

получим

$$V_e = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{P}{r} d\Sigma. \quad (16)$$

Займемся теперь последним интегралом для  $V_\Sigma$ . Под знак интеграла входит  $\gamma'$  — ускорение силы тяжести от масс Земли сравнения на поверхности уровня — сфере  $\Sigma$ . Очевидно,  $\gamma'$  может быть представлено как ускорение  $\gamma$  силы тяжести на сфере относимости  $\Sigma_0$  (значение потенциала на которой равно значению потенциала на поверхности основного геоида), уменьшенное на изменение этого ускорения на расстоянии  $H_M + \zeta_M$ , соответствующем расстоянию между сферами  $\Sigma$  и  $\Sigma_0$ :

$$\gamma' = \gamma - (H_M + \zeta_M) \frac{2\gamma}{R_\Sigma}. \quad (8)$$

Таким образом, получаем

$$V_\Sigma = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{\gamma - \frac{2\gamma}{R_\Sigma} H_M}{r} \cdot d\Sigma - \frac{\zeta_M \gamma}{2\pi R_\Sigma} \int_{\Sigma} \frac{d\Sigma}{r}. \quad (9)$$

Возвращаясь к равенству (1) и соединяя вместе преобразованные интегралы, имеем

$$\zeta_M = \frac{1}{4\pi\gamma} \int_{\Sigma} \frac{g_i + \frac{2\gamma}{R_\Sigma} H_M - \gamma + P}{r} d\Sigma + \frac{3}{8\pi R_\Sigma} \int_{\Sigma} \frac{\zeta d\Sigma}{r} + \frac{\zeta_M}{8\pi R_\Sigma} \int_{\Sigma} \frac{d\Sigma}{r}. \quad (10)$$

Но так как

$$\int_{\Sigma} \frac{d\Sigma}{r} = 4\pi R_\Sigma,$$

получаем

$$\zeta_M = \frac{1}{2\pi\gamma} \int_{\Sigma} \frac{g_i + \frac{2\gamma}{R_\Sigma} H_M - \gamma + P}{r} d\Sigma + \frac{3}{4\pi R_\Sigma} \int_{\Sigma} \frac{\zeta d\Sigma}{r}. \quad (11)$$

В нашем случае сама сущность проблемы подсказывает одно преобразование интегрального уравнения. Мы придем к нему путем следующих рассуждений.

Повторим все предыдущие рассуждения для схемы Земли, регуляризированной по теореме Стокса с редукцией в свободном воздухе. Точка  $M$  будет тогда находиться на поверхности основного геоида, следовательно

$$H_M = 0,$$

и так как  $\mu = 0$ , то

$$V_e = 0.$$



Кроме того,

$$g_i = g + \frac{2H\gamma}{R} = g_0,$$

где  $R$  — средний радиус Земли.

Уравнение (11) может быть приведено к следующему виду:

$$\zeta' = \frac{1}{2\pi\gamma} \int_{\Sigma} \frac{g_0 - \gamma}{r} d\Sigma + \frac{3}{4\pi R} \int_{\Sigma} \frac{\zeta' d\Sigma}{r}. \quad (12)$$

Но, с другой стороны, по Стоксу:

$$\zeta' = \frac{1}{4\pi\gamma R_{\Sigma}} \int_{\Sigma} (g_0 - \gamma) S(\psi) d\Sigma, \quad (13)$$

где

$$S(\psi) = \frac{1}{\sin(\psi/2)} - 6 \sin(\psi/2) - 3 \cos \psi \ln(\sin(\psi/2) - \sin^2(\psi/2)) + 1 - 5 \cos \psi.$$

Наше уравнение (11) отличается от (12) только обкладкой интеграла, и поэтому оно может быть приведено к виду (13) в результате замены  $g_0 - \gamma$  на  $g_i + \frac{2\gamma}{R_{\Sigma}} H_M - \gamma + P$ . Таким образом, из (11) получаем

$$\zeta = \frac{1}{4\pi\gamma R_{\Sigma}} \int_{\Sigma} \left( g_i + \frac{2\gamma}{R_{\Sigma}} H_M - \gamma + P \right) S(\psi) d\Sigma. \quad (14)$$

В докладе Идельсона на 7-й конференции Балтийской геодезической комиссии имеется указание на то, что Малкин в своей неопубликованной работе<sup>1</sup> преобразовал уравнение Стокса (13) к виду (12).

§ 5. Таким образом, решение задачи приводится к определению для всех точек Земли значений обкладки интеграла:

$$\Delta g = g_i + \frac{2\gamma}{R_{\Sigma}} H_M - \gamma + P, \quad (15)$$

где

$$P = 4\pi k^2 \int_{R_G}^{R_E} \mu \frac{R_{\tau}^2 r}{R_{\Sigma}^2 r_{\tau}} dR.$$

Здесь пока остаются неизвестными  $g_i$  и  $P$ .

Применим формулу Брунса:

$$\frac{\partial g}{\partial R} = \frac{2g}{\rho} - 4\pi k^2 \mu,$$

<sup>1</sup> Когда настоящая работа была готова для печати в «Астрономическом журнале» (т. XI, вып. 5, 1934 г.), была опубликована работа Малкина, которая по своим результатам совпадает с первой половиной настоящей работы. Однако во второй половине мною данное исследование проведено дальше, благодаря чему некоторые возражения, которые могут быть выставлены против результатов работы Малкина, здесь отпадают, а числовые вычисления получаются много проще. Сокращать или изменять содержание первой половины я счел нецелесообразным, поскольку от этого пострадала бы цельность работы.

имеем

$$g_i = g + g \int_{R_G}^{R_E} \frac{2dR}{\rho} - 4\pi k^2 \int_{R_G}^{R_E} \mu dR.$$

Здесь  $\rho$  — средняя кривизна уровенной поверхности для переменной точки интеграции, остальные обозначения приведены выше. Отсюда получаем

$$\Delta g = g + \frac{2\gamma}{R_\Sigma} H_M - \gamma + 2g \int_{R_G}^{R_E} \frac{dR}{\rho} + 4\pi k^2 \int_{R_G}^{R_E} \mu \left[ \frac{R_\tau r}{R_\Sigma^2 r_\tau} - 1 \right] dR. \quad (16)$$

В последнем интеграле по причине его малости заменим  $\mu$  его средним значением  $\mu$  на участке интеграции. Тогда в результате интеграции, выполняемой путем подстановки

$$r_\tau = R_\tau \sin \psi \operatorname{ch} u,$$

получим

$$4\pi k^2 \mu^- \left[ 2 \sin \frac{\psi}{2} (r_E - r) \left( 2 \cos \psi + \frac{R_E - R_\Sigma \cos \psi}{2R_E} \right) + \frac{(R_E - R_\Sigma)r}{R_\Sigma} \sin \frac{\psi}{2} + \right. \\ \left. + r \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 \psi \right) \ln \frac{r_E + r \sin(\psi/2) + R_E - R_\Sigma}{r(1 + \sin(\psi/2))} - (R_E - R_\Sigma) \right].$$

Исследование этого выражения показывает, что оно может быть по причине малости отношения  $\frac{R_E - R}{R_\Sigma}$  сведено к более простому, которое можно было бы получить непосредственно, предполагая Землю плоской, а именно:

$$\left. \begin{aligned} & 4\pi k^2 \mu^- r \left[ \operatorname{arc sh} \frac{\Delta H}{r} - \frac{\Delta H}{r} \right], \\ & \Delta H = R_E - R_G - (R_E - R_G)_M \end{aligned} \right\}, \quad (17)$$

где  $\mu^-$  — средняя плотность Земли над элементом интеграции  $d\Sigma$ .

Как видим, этот член имеет характер «топографической поправки» и обычно исчезающе мал.

В выражении (16) остается исследовать величину интеграла  $\int \frac{dR}{\rho}$ .

Средняя кривизна Земли ни для пространства вне Земли, ни внутри масс Земли нам не известна. Кажется вероятным, что больших аномалий в величине  $\rho$  и там не может быть, хотя следующий пример заставляет относиться к подобным допущениям с большим подозрением.

Вообразим себе на поверхности Земли возвышенность равномерной плотности  $\mu$ , ограниченную слева вертикальной плоскостью высотой  $H$ . Возьмем две точки  $A$  и  $A'$ , находящиеся бесконечно близко друг к другу и расположенные по разные стороны от плоскости вверху «стены» и такую же пару точек  $B$  и  $B'$  внизу «стены». В силу непрерывности производной от потенциала изменение силы тяжести от  $A$  до  $B$ , считаемое через массу воздуха, и изменение от  $A'$  до  $B'$ , считаемое через массу возвышенности с плотностью  $\mu$ , должны быть равны, откуда по формуле Брунса получаем

$$2g \int_0^H \left( \frac{1}{\rho_n} - \frac{1}{\rho_n} \right) dH = 4\pi k^2 \mu H$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{\bar{\rho}_n} - \frac{1}{\bar{\rho}_l} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\mu}{\mu_0} \cdot \frac{1}{R},$$

где  $\bar{\rho}_n$  и  $\bar{\rho}_l$  — средние радиусы кривизны справа и слева от плоскости раздела,  $\rho_n$  и  $\rho_l$  — их средние значения на участке  $AB$ ,  $R$  — средний радиус Земли,  $\mu_0$  — средняя плотность Земли.

Таким образом, в этом частном случае разность между средними кривизнами в двух смежных точках Земли оказывается величиной порядка средней кривизны Земли.

Следовательно, рискованно полагаться на то, что даже с требуемой для наших целей точностью средняя кривизна Земли остается нормальной на всем протяжении от поверхности Земли до рассматриваемой нами поверхности геоида.

§ 6. Во всех предыдущих рассуждениях речь шла не об одной цельной уровенной поверхности, а о «кусках» геоидов, проходящих через разные точки поверхности Земли. Значения  $\zeta$ , даваемые уравнением (14), определяют собой поверхность, составленную из элементов поверхностей уровня, проходящих через соответствующие точки физической поверхности Земли. Это было сделано намеренно, поскольку доступные измерению соотношения (примером может служить отклонение отвеса) относятся именно к этому «кусочному» геоиду. Однако, как в этом нетрудно убедиться, пересмотрев все наши рассуждения, подобное же интегральное уравнение получилось бы, если бы мы искали величину  $\bar{\zeta}$  расстояния основного геоида от его поверхности относимости. Действительно, в этом случае мы должны были бы брать точку  $M$  всегда на поверхности этого геоида; «внешними» были бы все массы (одинаково для любого положения точки  $M$ ), расположенные вне этой поверхности, и поэтому главные изменения свелись бы к изменению пределов интеграции. Повторив все прежние рассуждения для новых положений точки  $M$ , убедимся, что изменится только обкладка интеграла на следующее выражение:

$$\Delta g' = g - \gamma + 2g \int_{R_{G_0}}^{R_E} \frac{1}{\rho} dR + 4\pi k^2 \bar{\mu} r \left( \operatorname{arc sh} \frac{H}{r} - \frac{H}{r} \right). \quad (18)$$

Таким образом,  $\Delta H$  в топографическом члене теперь изменилось на  $H$ , а среднее значение  $\bar{\mu}$  нужно знать вдоль линии от поверхности основного геоида до физической поверхности Земли.

Если в этом выражении для  $\Delta g'$  положим

$$\int_{R_{G_0}}^{R_E} \frac{dR}{\rho} = \frac{H}{R},$$

то тогда

$$\Delta g = g + \frac{2gH}{R} - \gamma + 4\pi k^2 \bar{\mu} r \left( \operatorname{arc sh} \frac{H}{r} - \frac{H}{r} \right), \quad (19)$$

и получим формулу Стокса, с той лишь разницей, что «Geländereduktion», которой, по Стоксу, должно исправляться значение ускорения силы тяжести на каждом пункте наблюдения, заменяется здесь нашей «топографической» поправкой.

§ 7. Воспользуемся результатами предыдущего параграфа для приближенного вычисления интеграла  $\int \frac{dR}{\rho}$ . Если мы допустим, что формула, полученная в предыдущем

параграфе, передает в основном фигуру геоида (т.е. допустим, что аномалии в  $\rho$  невелики), то из этой же формулы мы можем вывести выражение для средней кривизны геоида в любой из его точек.

Действительно, из соотношения

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{1}{2g} \left[ \frac{\partial^2(V_{\Sigma} + \Delta V)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(V_{\Sigma} + \Delta V)}{\partial y^2} \right],$$

где  $V_{\Sigma}$  — потенциал «Земли сравнения» и  $\Delta V$  — возмущающий потенциал, имеем выражение для аномалии средней кривизны:

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R} = -2 \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right). \quad (20)$$

Воспользовавшись для  $\zeta$  приближенным выражением из предыдущего параграфа и считая  $\rho$  постоянным на участке интеграции, получаем

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R} - \frac{1}{8\pi\gamma R^3} \int P(\psi) \Delta g' d\Sigma, \quad (21)$$

где

$$P(\psi) = \frac{d^2 S(\psi)}{d\psi^2} + \frac{dS(\psi)}{d\psi} \operatorname{ctg} \psi.$$

Таким образом, мы получаем практическую возможность для решения нашего основного интегрального уравнения, прибегая при этом, в сущности, только к одному допущению — к допущению о постоянстве  $\rho$  на отрезках интеграции.

§ 8. Однако можно получить значение обкладки этого же интеграла, прибегая к допущению существенно иного характера, связанному с законом распределения масс в земной коре, а именно: допустим, что для всех мест на Земле совершенно точно осуществляется полная изостатическая компенсация с известной глубиной поверхности компенсации (берем изостазию в форме Пратта). Тогда в результате исправления поля тяготения Земли изостатическими поправками все аномалии в нем должны исчезнуть. Следовательно, если значение силы тяжести во всех точках  $M'$  поверхности Земли исправить изостатическими поправками, то значения силы тяжести  $M$  на поверхности геоида совершенно точно получим с помощью редукции в свободном воздухе с нормальным значением среднего радиуса кривизны. Остается ввести с обратным знаком изостатическую поправку на точку  $M'$ , чтобы получить искомое выражение для  $g_i$ . Можно было бы написать здесь формулы, соответствующие такому типу редукции, однако вывод их никаких затруднений не содержит и только может отвлечь нас от основной темы в сторону техники вычислений.

§ 9. Поскольку наше основное интегральное уравнение имеет решение (14), отличающееся от решения Стокса только обкладкой интеграла, вопрос об отклонениях отвеса решается чрезвычайно просто путем замены в интегралах, полученных Венинг-Мейнецом, аномалий в свободном воздухе нашими значениями  $\Delta g$  по формуле (15).

Таким образом, получим отклонение отвеса по меридиану

$$\xi = \frac{1}{4\pi\gamma} \int_0^{2\pi} \cos \alpha d\alpha \int_0^{\pi} \Delta g \frac{dS(\psi)}{d\psi} \sin \psi d\psi, \quad (22)$$

отклонение отвеса по первому вертикалу

$$\eta = \frac{1}{4\pi\gamma} \int_0^{2\pi} \sin \alpha d\alpha \int_0^{\pi} \Delta g \frac{dS(\psi)}{d\psi} \sin \psi d\psi,$$

где

$$\frac{dS(\psi)}{d\psi} \sin \psi = \cos^2 \frac{\psi}{2} \left[ \frac{1}{\sin(\psi/2)} + 12 \sin \frac{\psi}{2} - 3 \sin^2 \frac{\psi}{2} + \right. \\ \left. + \frac{3}{1 + \sin(\psi/2)} - 12 \sin^2 \frac{\psi}{2} \ln \left( \sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right) \right].$$

Следует сделать еще одно замечание. Все вычисления, начиная с § 4, можно было бы без труда также проделать для поверхности относимости — эллипсоида вращения — и получить поправочные члены к нашим результатам. Эти поправочные члены по отношению к полученным нами главным членам будут иметь малость порядка сжатия земного эллипсоида. Однако мы эти выкладки опускаем, поскольку принципиального и существенного практического значения они не имеют.

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФИГУРЫ ГЕОИДА ПРИ СОВМЕСТНОМ ИСПОЛЬЗОВАНИИ АСТРОНОМО-ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ УКЛОНЕНИЙ ОТВЕСА И КАРТЫ АНОМАЛИЙ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ\*

§ 1. Конечной целью теоретической геодезии является детальное изучение фигуры геоида — той поверхности уровня силы тяжести, которая на пространствах океанов совпадает с их средним уровнем. Знание фигуры геоида имеет огромное практическое значение, так как позволяет путем элементарных подсчетов получить для любой точки отклонение отвеса, а следовательно, использовать определенные астрономическим путем широты и долготы для целей картографии.

Известны два метода изучения фигуры геоида: 1) чисто геометрический (или астрономо-геодезический), осуществляемый посредством измерений на поверхности Земли взаимных положений точек и направлений вертикали (триангуляция и астрономические определения, дающие материал для астрономического нивелирования); 2) физический (или гравиметрический), осуществляемый посредством измерений ускорений силы тяжести.

Эти методы существенно различны: первый дает возможность только на основе измерений, произведенных на ограниченном участке Земли, изучить фигуру соответствующего участка геоида; второй применим в полной строгости только тогда, когда известны значения ускорений силы тяжести во всех точках Земли, и дает в этом случае фигуру всего геоида в целом.

Применение как одного, так и другого метода для изучения фигуры геоида сталкивается с затруднениями практического характера. Астрономическое нивелирование строго применимо только тогда, когда известно отклонение отвеса в каждой точке исследуемой области геоида. Практически это достигается посредством интерполирования отклонений отвеса, определенных через большие или меньшие интервалы. Для уверенного интерполирования отклонения отвеса должны быть определены в равнинных местах через 10–20 км, в горных — еще чаще<sup>1</sup>. Проведение подобных работ требует очень значительного объема дополнительных астрономических определений по сравнению с теми, которые нормально выполняются по рядам триангуляции. Поэтому астрономическое нивелирование до сих пор не получило широкого применения.

Основным препятствием к осуществлению исследования фигуры геоида гравиметрическим методом до сих пор является малая гравиметрическая изученность Земли, особенно ее водных и необжитых районов. Несмотря на то, что каждый год определяется несколько тысяч новых гравиметрических пунктов (из них большая часть в СССР), еще далеко то время, когда можно будет получить достаточно точную гравиметрическую карту мира.

Р. Хирвонен в своей работе<sup>2</sup> для гравиметрически необследованных районов принимает гипотетические значения аномалий, полученные из соображений полной изостатической компенсации. Подобный путь не может претендовать на точность, и при его использовании можно получить только общее представление об основных чертах геоида в целом.

\* Труды ЦНИИГАиК. 1937. Вып. 17. С. 9–30.

<sup>1</sup> Красовский Ф.Н. Высшая геодезия. — Л.: 1932, 686 с.

<sup>2</sup> Hirvonen R.A. The continental undulations of the Geoid. — Helsinki, 1934.

Поскольку астрономо-геодезический и гравиметрический методы детального изучения фигуры геоида, каждый в отдельности, встречают затруднения для их практического использования, естественно встает вопрос об их комбинированном применении. Совместное использование тех результатов наблюдений, с которыми имеет дело тот и другой метод, а именно: уклонений отвеса и ускорений силы тяжести — должно значительно облегчить практическое выполнение исследования геоида.

При таком сочетании может быть использована положительная сторона каждого метода: астрономо-геодезические уклонения отвеса позволят ограничить размеры необходимого гравиметрического материала, так как позволят учесть влияние на фигуру геоида зон, отдаленных от исследуемого района, распределения аномалий в которых можно будет не знать; с другой стороны, карта аномалий силы тяжести в районах, близлежащих к исследуемому, поможет ограничиться значительно меньшим числом пунктов астрономического нивелирования. В результате придем к методу, который можно назвать методом «астрономо-гравиметрического» нивелирования, по аналогии с астрономическим нивелированием, естественным развитием которого он является.

§ 2. Чтобы использовать астрономо-геодезические уклонения отвеса для учета влияния на фигуру геоида неизвестных нам аномалий силы тяжести в отдаленных зонах, казалось бы, самым естественным было бы воспользоваться разложением уклонений отвеса в ряд Тэйлора, имея в виду, что при определении коэффициентов этого ряда отдаленные зоны будут иметь настолько ничтожное влияние, что им можно пренебречь. Однако при ближайшем рассмотрении этот путь оказывается на практике громоздким, не очень точным, а также далеко не безупречным принципиально. Поэтому в настоящей работе был избран другой путь, идею которого можно охарактеризовать следующим образом.

Пусть в некотором районе определены астрономо-геодезические уклонения отвеса для нескольких точек и нужно получить уклонение отвеса для любой точки  $K$ , лежащей внутри области  $\sigma$ . Область  $\sigma$  ограничена сторонами выпуклого многоугольника, у которого все вершины совпадают с некоторыми из пунктов, для которых астрономо-геодезические уклонения отвеса известны.

Поверхность всей Земли разделим на две области: 1)  $\Sigma$ , включающую в себя  $\sigma$ ; 2)  $\Sigma'$ , охватывающую остальную часть поверхности Земли. Астрономо-геодезическое уклонение отвеса в какой-либо точке  $K$  области  $\sigma$  можно разложить на три составляющие: а) составляющая, определяемая аномалиями в области  $\Sigma$ ; б) составляющая, определяемая аномалиями в области  $\Sigma'$ ; в) угол в точке  $K$  между референц-эллипсоидом, принятым в триангуляции, и эллипсоидом или сфероидом, положенным в основу вывода нормальной формулы распределения силы тяжести.

Границу между областями  $\Sigma$  и  $\Sigma'$  определим из тех соображений, чтобы составляющая, определяемая аномалиями в области  $\Sigma'$ , внутри  $\sigma$  менялась линейно в пределах заданной степени точности. Иными словами, чтобы составляющую отклонения геоида от нормального сфероида, вызываемую аномалиями области  $\Sigma'$ , при любом направлении секущей плоскости внутри  $\sigma$  в пределах нужной точности можно было бы считать за кривую второго порядка.

Когда такое разграничение на области  $\Sigma$  и  $\Sigma'$  произведено, то внутри  $\sigma$  может быть выполнено интерполирование уклонений отвеса, если известно распределение силы тяжести только внутри  $\Sigma$ .

Действительно, вычтя из астрономо-геодезических уклонений отвеса составляющую, определяемую аномалиями в области  $\Sigma$ , получим в остатке действие аномалий области  $\Sigma'$ , сложенное с углом в соответствующей точке между нормальными эллипсоидов, принятых в триангуляции и в гравиметрическом выводе. Вспоминая условие разграничения Земли на области  $\Sigma$  и  $\Sigma'$ , а также принимая во внимание, что угол между эллипсо-

идами мал и изменяется очень плавно, убедимся, что остаточные отклонения отвеса мы имеем право определять для всех точек исследуемой области  $\sigma$  линейным интерполированием. Прибавляя сюда, к этим проинтерполированным остаточным отклонениям, действие аномалий области  $\Sigma$  на соответствующую точку  $K$ , получим с заданной степенью приближения в каждой точке  $K$  области  $\sigma$  проинтерполированное гравиметрическим путем астрономо-геодезическое отклонение отвеса. В отличие от непосредственно наблюдаемого астрономо-геодезического отклонения будем называть его интерполированным или астрономо-гравиметрическим.

§ 3. Для того чтобы изложенные выше операции вывода интерполированных отклонений отвеса выразить формулой и подвергнуть количественной оценке в отношении размеров областей  $\sigma$  и  $\Sigma$  и достижимой точности результата, условимся относительно тех обозначений, которые будут применяться в дальнейшем.

Говоря об отклонениях отвеса, мы всегда будем иметь в виду его составляющую по одному определенному направлению, общему для опорных пунктов и интерполированных. Это упростит обозначения.

Уклонения отвеса всегда будем обозначать через  $\vartheta$ , отмечая подстрочным индексом его происхождение ( $\vartheta_a$  — астрономо-геодезическое,  $\vartheta_g$  — гравиметрическое,  $\vartheta_i$  — интерполированное) и характеризуя его как функцию той точки, к которой оно относится, и той области, в которой учтены при его выводе аномалии силы тяжести (последнее относится к гравиметрическим и интерполированным уклонениям отвеса). Таким образом, будем иметь:

$\vartheta_a(A)$  — составляющая астрономо-геодезического отклонения отвеса в точке  $A$  в заданном азимуте;

$\vartheta_g(A\Sigma)$  — то же для гравиметрического отклонения отвеса, полученного при учете аномалии только внутри области  $\Sigma$ ;

$\vartheta_g(A\Sigma')$  — то же для гравиметрического отклонения отвеса в точке  $A$ , полученного при учете аномалий только внутри области  $\Sigma'$ ;

$\vartheta_g(A) = \vartheta_g(A\Sigma') + \vartheta_g(A\Sigma) = \vartheta_g(A\Sigma + \Sigma')$  — составляющая полного гравиметрического отклонения отвеса (при учете аномалий по всей Земле) в точке  $A$  в заданном азимуте;

$\vartheta_i(A\Sigma)$  — составляющая интерполированного отклонения отвеса в точке  $A$  в заданном азимуте, выведенная с учетом аномалий только в области  $\Sigma$ ;

$\Delta\vartheta(A) = \vartheta_a(A) - \vartheta_g(A)$  — составляющая в заданном азимуте в точке  $A$  угла между нормальными к референц-эллипсоиду и нормальному (гравиметрическому) эллипсоиду;  $r$  — расстояние по прямой линии от исследуемого пункта до элемента площади интеграции;  $\alpha$  — азимут направления  $r$ .

Азимуты для удобства написания формул будем отсчитывать от того направления, для которого заданы и ищутся составляющие  $\vartheta$  отклонения отвеса. Вводя это условие, можем сказать, что  $\vartheta$  есть составляющая отклонения отвеса в нулевом азимуте (т.е. при  $\alpha = 0$ ).

§ 4. Условившись относительно обозначений, выведем формулу для вычисления интерполированных отклонений отвеса. Начнем с частного случая, который позволит в дальнейшем без труда обобщить полученное решение.

Пусть известны: 1) астрономо-геодезические отклонения отвеса в точках  $A$  и  $B$   $\vartheta_a(A)$  и  $\vartheta_a(B)$ ; 2) распределение аномалий в области  $\Sigma$ , которую для простоты представим себе ограниченной окружностью радиуса  $\rho$  с центром  $C$  в середине отрезка  $AB$ . Интерполированное отклонение отвеса в какой-либо точке  $D$ , лежащей на отрезке  $AB$ , в соответствии с высказанными выше соображениями о способе интерполяции отклонений отвеса может



быть представлено следующей формулой:

$$\vartheta_i(D\Sigma) = \vartheta_g(A\Sigma') + \frac{AD}{AB} [\vartheta_g(B\Sigma') - \vartheta_g(A\Sigma')] + \vartheta_g(D\Sigma) + \Delta\vartheta(D); \quad (1)$$

подставляя

$$\vartheta_g(A\Sigma') = \vartheta_g(A) - \vartheta_g(A\Sigma) = \vartheta_a(A) - \Delta\vartheta(A) - \vartheta_g(A\Sigma),$$

$$\vartheta_g(B\Sigma') = \vartheta_a(B) - \Delta\vartheta(B) - \vartheta_g(B\Sigma),$$

приведем (1) к такому виду:

$$\begin{aligned} \vartheta_i(D, \Sigma) = & \left[ \frac{DB}{AB} \vartheta_a(A) + \frac{AD}{AB} \vartheta_a(B) \right] + \left[ \vartheta_g(D, \Sigma) - \frac{DB}{AB} \vartheta_g(A\Sigma) - \frac{AD}{AB} \vartheta_g(B, \Sigma) \right] + \\ & + \left[ \Delta\vartheta(D) - \frac{DB}{AB} \Delta\vartheta(A) - \frac{AD}{AB} \Delta\vartheta(B) \right]. \quad (2) \end{aligned}$$

В выражении (2) все члены известны, кроме последнего в квадратных скобках. Ограничимся замечанием, что он имеет ничтожно малую величину даже при относительно больших расстояниях между пунктами  $A$  и  $B$ , порядка 100–200 км; поэтому его можно отбросить.

Избранный нами способ интерполирования принципиально был бы строг, если бы область  $\Sigma$  охватывала всю Землю. Ошибка  $\varepsilon$  интерполированного уклонения отвеса в той ее части, которая зависит от размеров области  $\Sigma$ , получится как разность  $\vartheta_i(D\Sigma)$  и  $\vartheta_i(D\Sigma + \Sigma')$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon(D\Sigma) = \vartheta_i(D\Sigma + \Sigma') - \vartheta_i(D\Sigma) = & \left[ \vartheta_g(D) - \frac{DB}{AB} \vartheta_g(A) - \frac{AD}{AB} \vartheta_g(B) \right] - \\ - \left[ \vartheta_g(D, \Sigma) - \frac{DB}{AB} \vartheta_g(A\Sigma) - \frac{AD}{AB} \vartheta_g(B, \Sigma) \right] = & \vartheta_g(D, \Sigma') - \frac{DB}{AB} \vartheta_g(A\Sigma') - \frac{AD}{AB} \vartheta_g(B, \Sigma'). \quad (3) \end{aligned}$$

Понятно, что точное значение  $\varepsilon$  могло бы быть известно только в том случае, если бы было известно распределение силы тяжести в области  $\Sigma'$ . Мы поставим своей задачей оценить предельную величину  $\varepsilon(D\Sigma)$  в функции размера области  $\Sigma$ .

Для этого заметим, что для всех значений  $r > l$  (где  $l = (AB)/2$  и  $r$  — расстояние от  $C$  до элемента интеграции) имеют место следующие разложения  $\vartheta_g$  в бесконечные ряды:

$$\begin{aligned} \vartheta_g(A\Sigma') &= \vartheta_g(C\Sigma') + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^n \vartheta(C\Sigma')}{\partial l^n} \frac{l^n}{n!}, \\ \vartheta_g(B\Sigma') &= \vartheta_g(C\Sigma') + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^n \vartheta(C\Sigma')}{\partial l^n} \frac{(-l)^n}{n!}, \\ \vartheta_g(D\Sigma') &= \vartheta_g(C\Sigma') + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^n \vartheta(C\Sigma')}{\partial l^n} \frac{(CD)^n}{n!}, \end{aligned}$$

откуда

$$\varepsilon(D\Sigma) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\partial^n \vartheta(C\Sigma')}{\partial l^n} \left[ (CD)^n - \frac{DB}{AB} l^n - \frac{AD}{AB} (-l)^n \right] \frac{1}{n!}. \quad (4)$$

Для того чтобы получить значения последовательных производных от  $\vartheta$ , напомним два выражения для  $1/r$ :

$$\frac{1}{r_A} = \frac{1}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^n (1/r)}{\partial l^n} \frac{(-l)^n}{n!} \quad (\text{ряд Тэйлора});$$

$$\frac{1}{r_A} = \frac{1}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n(\cos a)}{r^{n+1}} l^n \quad (\text{разложение в ряд по сферическим функциям}), \text{ где } \alpha \text{ — угол}$$

между  $l$  и  $r$ ,  $P_n(\cos a)$  — полином Лежандра  $n$ -го порядка.

Из сравнения этих двух рядов получаем известное равенство:

$$\frac{\partial^n (1/r)}{\partial l^n} = (-1)^n n! \frac{P_n(\cos a)}{r^{n+1}}. \quad (5)$$

Для расстояния от геоида до нормального сфероида воспользуемся интегральным уравнением<sup>1</sup>:

$$N = \frac{1}{2\pi\gamma} \int \frac{\Delta g' d\sigma}{r},$$

где

$$\Delta g' = \Delta g + \frac{3}{2} \frac{N}{R} \gamma.$$

Если  $\vartheta$  есть составляющая уклонения отвеса в направлении  $m$ , то

$$\frac{\partial^n \vartheta}{\partial l^n} = \frac{\partial^n}{\partial l^n} \left( \frac{\partial N}{\partial m} \right) = \frac{\partial}{\partial m} \left( \frac{\partial^n N}{\partial l^n} \right) = (-1)^n \frac{n!}{2\pi\gamma} \int \Delta g' \frac{\partial}{\partial m} \left( \frac{P_n(\cos a)}{r^{n+1}} \right) d\sigma.$$

Если направление  $m$  совпадает с  $l$ , то

$$\frac{\partial}{\partial m} \left( \frac{P_n(\cos a)}{r^{n+1}} \right) = -(n+1) \frac{P_{n+1}(\cos a)}{r^{n+2}}.$$

Заметим, что в настоящем параграфе речь идет о производных по прямой линии, соединяющей две точки  $A$  и  $B$  на сфере; если брать производные по дуге большого круга, то равенство это заменяется следующим:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{d\vartheta} \left( \frac{P_n}{r^{n+1}} \right) = - \left[ \frac{P_{n+1}}{r^{n+2}} (n+1) + \frac{P'_n}{2r^n R^2} \right].$$

Отсюда видно, что те и другие производные разнятся на величины практически ничтожные.

Если направление  $m$  перпендикулярно к  $l$ , то

$$\frac{\partial}{\partial m} \left( \frac{P_n(\cos a)}{r^{n+1}} \right) = - \frac{(n+1) \cos b P_n(\cos a)}{r^{n+2}} - \frac{P'_n(\cos a) \cos a \cos b}{r^{n+2}} = - \frac{\cos b}{r^{n+2}} P'_{n+1}(\cos a). \quad (6)$$

<sup>1</sup>См., например, *Астрономический журнал*. Т. XIII. Вып. 4. С. 352, формула (5).

При выводе этой формулы приняты во внимание следующие соотношения:

$$\frac{\partial(1/r)}{\partial m} = \cos b; \quad \cos b = \cos \frac{\psi}{2} \cos \left( \alpha - \frac{\pi}{2} \right);$$

$$\frac{\partial \cos a}{\partial m} = -\frac{1}{r} \cos a \cos b; \quad (n+1)P_n + P'_n x = P_{n+1}.$$

Поэтому, если направление  $m$  составляет угол  $\beta$  с  $l$ , получим

$$\frac{\partial}{\partial m} \left( \frac{P_n(\cos a)}{r^{n+1}} \right) = -(N+1) \frac{P_{n+1}(\cos a)}{r^{n+2}} \cos \beta - \frac{P'_{n+1}(\cos a)}{r^{n+2}} \cos b \sin \beta \quad (7)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial^n \vartheta}{\partial l^n} = (-1)^{n+1} \frac{n!}{2\pi\gamma} \int \Delta g' \left[ \frac{P_{n+1}(\cos a)}{r^{n+2}} (n+1) \cos \beta + \right. \\ \left. + \frac{P'_{n+1}(\cos a)}{r^{n+2}} \cos b \sin \beta \right] d\sigma, \quad (8)$$

отсюда

$$\varepsilon(D\Sigma) = \frac{1}{2\pi\gamma} \sum_{n=2}^{\infty} \int \Delta g' \left[ \frac{P_{n+1}(\cos a)}{r^{n+2}} (n+1) \cos \beta + \frac{P'_{n+1}(\cos a)}{r^{n+2}} \cos b \sin \beta \right] d\sigma \times \\ \times \left[ (CD)^n - \frac{DB}{AB} l^n - \frac{AD}{AB} (-l)^n \right]$$

или

$$\varepsilon(D\Sigma) = \frac{1}{2\pi\gamma} \sum_{n=2}^{\infty} \left[ (CD)^n - \frac{DB}{AB} l^n - \frac{AD}{AB} (-l)^n \right] \times \\ \times \int \frac{dr}{r^{n+1}} \left[ (n+1) \cos \beta \int \Delta g' P_{n+1}(\cos a) da + \sin \beta \int \Delta g' dP_{n+1}(\cos a) \right], \quad (9)$$

так как

$$d\Sigma = r dr d\alpha = r dr \frac{\sin a da}{\cos b}.$$

В тех случаях, которые будут рассмотрены в дальнейшем,  $l/r \leq 1/3$ .

Нас интересует порядок величины  $\varepsilon$ , и представление об этом может быть получено из рассмотрения первого члена того бесконечного ряда, которым представлено  $\varepsilon$ .

Очевидно, этот член может быть приведен к следующему виду:

$$\frac{1}{2\pi\gamma} [(CD^2) - l^2] \int \frac{dr}{r^3} \left[ 3 \cos \beta \int \Delta g' P_3(\cos a) d\alpha + \sin \beta \int \Delta g' dP_3(\cos a) \right].$$

Оценим предельную величину  $\varepsilon(D\Sigma)$ . Нетрудно убедиться, что

$$\int_0^{2\pi} |3P_3(\cos a)| d\alpha = 6,6; \quad \int_0^{2\pi} |dP_3(\cos a)| = 2,9$$

и, следовательно,

$$|\varepsilon(D\Sigma)| < \frac{1}{2\pi\gamma} [l^2 - (CD)^2] \frac{1}{2\rho^2} [\Delta g_{\max} |\cos \beta| \cdot 6,6 + \\ + \Delta g_{\max} |\sin \beta| \cdot 2,9] < \frac{1}{4\pi\gamma} \frac{l^2 - (CD)^2}{\rho^2} \cdot 7,2\Delta g_{\max}.$$

Обозначая предельную величину  $\varepsilon(D\Sigma)$  через  $E(D\Sigma)$ , получим в числах:

$$E(D\Sigma) = 0'', 12\Delta g_{\max} \cdot \frac{l^2 - (CD)^2}{\rho^2}, \quad (10)$$

где  $\Delta g_{\max}$  — максимальное значение аномалий в области  $\Sigma'$ .

Для уточнения смысла предельной ошибки  $E(D\Sigma)$  подчеркнем те предположения, при которых она выведена:

1)  $\Delta g'$  повсюду имеет только значения  $+\Delta g_{\max}$  и  $-\Delta g_{\max}$ , переходя от положительных значений к отрицательным скачком;

2) знак  $\Delta g_{\max}$  меняется таким образом, чтобы каждый из двух интегралов, учтенных в  $E(D\Sigma)$ , имел максимальное значение;

3) эти предположения о характере распределения аномалий относятся существенным образом только к ближайшим зонам области  $\Sigma'$ . Действительно, как видно из выражения для  $E$ ,  $3/4$  всей величины  $E$  приходится на зону от  $r = \rho$  до  $r = 2\rho$ ,  $8/9$  — на зону от  $r = \rho$  до  $r = 3\rho$  и т.д. Таким образом, под  $\Delta g_{\max}$  следует понимать максимальную предполагаемую аномалию в ближайших к  $\Sigma$  участках области  $\Sigma'$  (а не максимальное значение аномалий на Земле вообще). Кроме того, так как в выражении для  $\varepsilon$  все значения  $\Delta g'$  можно изменить на постоянную величину, под  $\Delta g'$  можно понимать  $\Delta g_0$  — аномалию в свободном воздухе, отбрасывая член  $\frac{3N}{2R}\gamma$ , который изменяется очень медленно, или на том же основании можно связывать  $\Delta g_{\max}$  с предполагаемым колебанием в ближайших частях области  $\Sigma'$  аномалий  $\Delta g_0$ .

В зависимости от степени точности, предъявляемой к результату интерполирования, будет определена величина  $E$ , а следовательно, и отношение  $l/\rho$  при заданной характеристике аномальности района  $\Delta g_{\max}$ .

Например, при интерполировании уклонений отвеса, точность определения которых характеризуется средней ошибкой  $\pm 0'',3$ , предельная ошибка может быть оценена величиной порядка  $1''$ , поэтому при интерполировании на середину ( $CD = 0$ ) и при  $\Delta g_{\max} = 75$  миллигал можно примириться с величиной  $E$  того же порядка и ограничиться радиусом  $\rho$  области  $\Sigma$ , равным  $3l$ , предельная ошибка от игнорирования аномалий в области  $\Sigma'$  в этом случае не может быть более  $1''$ . Имея в виду, что эта ошибка преувеличена даже как предельная и что положенная в основу ее вычисления схема распределения аномалий имеет ничтожно малую вероятность на практике, имеем достаточное основание думать, что действительная ошибка в огромнейшем большинстве случаев будет по крайней мере в 4–5 раз меньше этой величины.

§ 5. Нетрудно теперь распространить эти результаты, полученные для случая интерполирования уклонений отвеса по прямой между двумя точками, на общий случай.

Пусть в исследуемой области  $\sigma$  известно несколько уклонений отвеса (не менее чем в трех точках, не лежащих на прямой), область  $\sigma$  — по-прежнему ограничена периферией выпуклого многоугольника, у которого все вершины совпадают с пунктами, имеющими известные уклонения отвеса. Опишем окружность как можно меньшего радиуса  $l$ , целиком охватывающую область  $\sigma$ , и вторую окружность с тем же центром, но радиусом  $\rho$ ,

равным  $3l$ . Эта окружность радиуса  $\rho$  разобьет поверхность всей Земли на две области:  $\Sigma$  — область, заключенную внутри окружности, и  $\Sigma'$  — вне окружности. На основании изложенных выше результатов рассмотрения точности вывода интерполированных уклонений отвеса при интерполяции по прямой можем утверждать, что влияние аномалий в области  $\Sigma'$  на фигуру геоида внутри  $\sigma$  таково, что вызываемые ими уклонения отвеса можно интерполировать линейно по любому отрезку, заключенному внутри  $\sigma$  с предельной ошибкой такого интерполирования менее  $E$  (формула (10)). Это вытекает из того факта, что расстояние от середины любого такого отрезка до любой точки области  $\Sigma'$  больше полуторной длины этого отрезка.

Таким образом, функция  $\vartheta_g[M(x, y)\Sigma']$ , выражающая влияние области  $\Sigma'$  на уклонение отвеса в произвольной точке  $M$  области  $\sigma$  с прямоугольными координатами  $x$  и  $y$ , а следовательно, и функция  $\vartheta_g(M\Sigma') + \Delta\vartheta(M)$  с указанной выше степенью точности может быть представлена формулой

$$\vartheta_g[M(x, y)\Sigma'] + \Delta\vartheta[M(x, y)] = Ax + By + C, \quad (11)$$

где  $A$ ,  $B$  и  $C$  — постоянные величины внутри всей области  $\sigma$ .

Принимая во внимание равенство

$$\Delta\vartheta(M) + \vartheta_g(M\Sigma') = \vartheta_a(M) - \vartheta_g(M\Sigma),$$

убеждаемся, что правая часть в равенстве (11) известна для тех точек, для которых известно  $\vartheta_a$ . При наличии не менее трех таких точек, не лежащих на одной прямой, определяются все три неизвестные  $A$ ,  $B$  и  $C$  по способу наименьших квадратов из условных уравнений типа

$$Ax + By + C = \vartheta_a(M) - \vartheta_g(M\Sigma). \quad (12)$$

Определив таким образом  $A$ ,  $B$  и  $C$  для любой точки области  $\sigma$ , можно по этой формуле получить

$$\vartheta_a(M) - \vartheta_g(M\Sigma),$$

а следовательно, и интерполированное уклонение отвеса.

Из предыдущего изложения должна быть ясна последовательность вычислительных операций для определения интерполированных уклонений отвеса. В основном они сводятся: 1) к вычислению гравиметрических уклонений отвеса, вызываемых областью  $\Sigma$  для всех точек, для которых известны уклонения отвеса астрономо-геодезические и ищутся интерполированные; 2) к вычислению коэффициентов  $A$ ,  $B$  и  $C$  уравнения (12); при вычислении используются все пункты с известными  $\vartheta_a$ ; 3) к вычислению  $\vartheta_i$  для всех определяемых пунктов по формуле

$$\vartheta_i[M(x, y)\Sigma] = \vartheta_g[M(x, y)\Sigma] + Ax + By + C.$$

В заключение заметим: а) границей области  $\Sigma$  не обязательно должна быть окружность: при любой замкнутой линии, охватывающей эту окружность, очевидно, ошибка интерполирования будет не больше, чем при ограничении  $\sigma$  этой окружностью. Но по смыслу наших рассуждений граница области  $\Sigma$  должна быть определена одинаково для всех пунктов, входящих в рассмотрение, и все аномалии внутри этой области, и только внутри нее, должны учитываться каждый раз при вычислении  $\vartheta_g(M\Sigma)$ ; б) при больших размерах исследуемой области  $\sigma$  для уменьшения площади области  $\Sigma$ , подлежащей гравиметрическому обследованию, или в целях уменьшения отношения  $l/\rho$  целесообразно

разбить  $\sigma$  на участки с 3–5 известными  $\vartheta_a$  и интерполировать отклонения отвеса внутри каждого участка самостоятельно; в) легко можно было бы построить методику интерполирования, исходя из требования, чтобы внутри исследуемой области остаточные отклонения отвеса представлялись функцией второго порядка:

$$Ax + By + C + Dx^2 + 2Exy + Fy^2.$$

Однако в этом случае потребовалось бы на каждом участке как минимум шесть точек с известными  $\vartheta_a$ , что привело бы на практике к увеличению площади  $\sigma$ , а следовательно, и  $\Sigma$ . Это увеличение в значительной мере компенсировало бы то сокращение площади  $\Sigma$ , которое можно было бы извлечь из применения параболического приема интерполирования.

§ 6. Перейдем к оценке ожидаемой точности вывода интерполированных отклонений отвеса. Точность получения интерполированного (астрономо-гравиметрического) отклонения отвеса определяется: а) точностью опорных астрономо-геодезических отклонений отвеса; б) величиной  $E$ , зависящей от отношения радиусов  $l/\rho$ ; в) ошибкой определения горизонтальных градиентов аномалий силы тяжести во всех опорных пунктах; г) достоверностью карты изоаномал; д) ошибкой определения горизонтального градиента аномалии силы тяжести в определяемом пункте.

При избыточном числе астрономо-геодезических отклонений отвеса в области  $\sigma$  (более трех) представление о суммарном влиянии на результат первых четырех из перечисленных факторов может быть получено из рассмотрения средних квадратических ошибок определения коэффициентов  $A$ ,  $B$  и  $C$ .

*A priori* ошибку интерполированного отклонения отвеса  $\varepsilon_i$  ориентировочно можно подсчитать по следующей формуле:

$$\varepsilon_i \sqrt{\frac{\varepsilon_a^2}{n} + \left(\frac{E}{4}\right)^2 + \frac{n+1}{n} \varepsilon_{\text{grad}}^2 + \varepsilon_{\Delta g}^2},$$

где  $\varepsilon_a$  — средняя квадратическая ошибка астрономо-геодезического отклонения отвеса;  $\varepsilon_{\text{grad}}$  — средняя квадратическая ошибка поправки отклонения отвеса за горизонтальный градиент;  $\varepsilon_{\Delta g}^2$  — средняя квадратическая ошибка, обусловленная несоответствием действительности карты изоаномал (главным образом ошибка интерполирования силы тяжести);  $n$  — число известных астрономо-геодезических отклонений отвеса в области  $\sigma$ , использованных при интерполировании.

Для численного подсчета ожидаемой средней ошибки интерполированного отклонения отвеса  $\varepsilon_i$  нужно задать численные значения ошибок  $\varepsilon_{ag}$ ,  $E$ ,  $\varepsilon_{\text{grad}}$  и  $\varepsilon_{\Delta g}^2$ . Из них первая всегда более или менее точно известна. Порядок величины  $E$  приближенно дается формулой (10). Значительно сложнее обстоит дело с  $\varepsilon_{\text{grad}}$  и  $\varepsilon_{\Delta g}^2$ .

Величина этих ошибок зависит: а) от характера исследуемого района (высотного рельефа и степени гравитационной аномальности); б) от степени его гравиметрической изученности (густоты покрытия гравиметрическими пунктами); в) от того, насколько целесообразно, при данной густоте, расположены эти пункты; г) от наличия различных систематических ошибок между определениями силы тяжести, произведенными в разное время или разными партиями (здесь существенное значение имеет рациональный план общей гравиметрической съемки); д) от метода интерполяции силы тяжести.

Последнее обстоятельство не играет существенной роли в равнинных областях и, наоборот, имеет огромное значение в областях горных. Точно так же в горных районах особенно большое значение имеет правильный выбор мест гравиметрических пунктов.

Действительно, аномалии в свободном воздухе обычно значительно возрастают с увеличением высоты пункта над уровнем моря. Поэтому непосредственная интерполяция этих аномалий между пунктами без учета рельефа может привести к совершенно неверной картине распределения силы тяжести. Но правильный выбор метода интерполяции возможен только при наличии правильно собранного гравиметрического материала, т.е. если горная область охвачена пунктами равномерно не только по площади, но и в высотном направлении. Для этого пункты должны быть поставлены как в долинах, так и на соседних горных вершинах, склонах, перевалах и т.д.

При проведении общей гравиметрической съемки СССР для равнинных районов нормально принята плотность съемки в один пункт на  $1000 \text{ км}^2$ . По-видимому, в этом случае ориентировочно можно оценить  $\Delta\epsilon$  величиной порядка  $\pm 0'',4 - \pm 0'',5$ ,  $\epsilon_{\text{grad}}$  — величиной  $\pm 0'',2 - \pm 0'',5$  и при  $E = \pm 1'',1$ ,  $\epsilon_{ag} = \pm 0,4''$  получим  $\epsilon_i = \pm 0'',5 - \pm 0'',8$  как ориентировочное значение для равнинного района.

§ 7. В самом начале этой статьи мы указывали, что исследование фигуры геоида методом астрономического нивелирования имеет слабой стороной то обстоятельство, что при интерполировании уклонений отвеса могут возникать довольно значительные ошибки систематического характера. Однако на предыдущих страницах мы показали, что при использовании результатов гравиметрической съемки — карты изоаномал для района очень ограниченной площади — можно интерполировать уклонения отвеса, не опасаясь заметных систематических погрешностей в результате. Случайная ошибка такого интерполирования *a priori* была нами оценена величиной порядка  $\pm 0'',5 - \pm 0'',8$ . Таким образом, показана принципиальная возможность построения фигуры геоида при совместном использовании астрономо-геодезических и гравиметрических результатов.

Однако если идти к фигуре геоида, непосредственно характеризуемой расстояниями от геоида до эллипсоида сравнения, через уклонения отвеса, пришлось бы вычислять интерполированные уклонения отвеса для достаточно большого числа точек, расположенных настолько часто, чтобы не оставалось никакого сомнения в том, что между этими точками можно принять изменение уклонений отвеса линейным, а затем получать высоты геоида численным интегрированием. При этом помимо большой затраты вычислительного труда происходило бы значительное накапливание ошибок вычислений. Лучше поэтому задаться целью избежать интерполирования уклонений отвеса как промежуточной стадии и получить сразу разность высот геоида для точек с известными астрономо-геодезическими уклонениями отвеса. В частности, этот путь представляется наиболее простым и точным для определения высот геоида над эллипсоидом, принятым в триангуляции по профилям вдоль рядов триангуляции.

Итак, пусть в точках  $A$  и  $B$  известны составляющие астрономо-геодезических уклонений отвеса в направлении  $AB$ : —  $\vartheta_a(A)$  и  $\vartheta_a(B)$ . Для каждой точки  $D$  отрезка  $AB$  мы можем, как было показано выше, получить интерполированное уклонение отвеса  $\vartheta(D\Sigma)$ . Вместо того чтобы вычислять эти  $\vartheta_i(D\Sigma)$  для различных положений точки  $D$  на отрезке  $AB$  и вычислять превышение геоида в точке  $B$  над точкой  $A$  по формуле

$$\Delta N = \int_A^B \vartheta(D\Sigma) dl \quad (13)$$

численным интегрированием, постараемся получить значение этого интеграла непосредственно через  $\vartheta_a(A)$ ,  $\vartheta_a(B)$  и распределение аномалий в области  $\Sigma$ .

В этом интеграле  $D$  — точка с текущей координатой, пробегающая по прямой линии все значения от  $A$  до  $B$ ,  $dl$  — элемент длины отрезка  $AB$ .

Введем прямоугольную систему координат с осью  $X$ , совпадающей с отрезком  $AB$  и началом координат в середине этого отрезка. Длину отрезка положим равной  $2l$ .

Тогда для разности высот геоида в точках  $B$  и  $A$  над принятым в триангуляции эллипсоидом, если заменим  $\vartheta_i(D\Sigma)$  его значением из (1) и перейдем к обозначениям настоящего параграфа, получим

$$\Delta N = \int_{-l}^{+l} \left[ \frac{x+l}{2l} \vartheta_g(A\Sigma') + \frac{l-x}{2l} \vartheta_g(B\Sigma') + \vartheta_g(D\Sigma) + \Delta\vartheta(D) \right] dx \quad (14)$$

или, выполняя интегрирование:

$$\Delta N = l[\vartheta_g(A\Sigma') + \vartheta_g(B\Sigma')] + \Delta N_\Sigma + \Delta N_s, \quad (15)$$

где  $\Delta N_\Sigma$  — разность высот от основного эллипсоида для точек  $B$  и  $A$  геоида в той ее части, которая обуславливается аномалиями внутри области  $\Sigma$ ;  $\Delta N_s$  — изменение высоты нормального эллипсоида по отношению к референц-эллипсоиду на участке  $AB$ . Выражая  $\vartheta_g(A\Sigma')$  и  $\vartheta_g(B\Sigma')$  через  $\vartheta_a(A)$  и  $\vartheta_a(B)$ , получаем

$$\Delta N = [\vartheta_a(A) + \vartheta_a(B)]l + \{\Delta N_\Sigma - l[\vartheta_g(A\Sigma) + \vartheta_g(B\Sigma)]\} + \{\Delta N_s - l[\Delta\vartheta(A) + \Delta\vartheta(B)]\}. \quad (16)$$

В правой части равенства первый член представляет собой результат обычного астрономического нивелирования при линейном интерполировании астрономо-геодезических уклонений отвеса и дается нам из триангуляции и астрономических наблюдений; второй член зависит от распределения силы тяжести и представляет, таким образом, гравиметрическую поправку астрономического нивелирования. Третий член представляет собой разность двух величин: первая из них — точное значение изменения расстояния между эллипсоидами основным (гравиметрическим) и принятым в триангуляции на участке  $AB$ ; вторая — приближенное значение той же величины, выраженное через производные на концах интервала. При имеющихся в виду расстояниях  $AB$  величина этого члена ничтожно мала, и мы им пренебрегаем.

Второй член в правой части последнего выражения для  $\Delta N$  — гравиметрическая поправка к  $\Delta N$ , которую для сокращения письма обозначим через  $\Delta N_g$ , она имеет порядок величины второй производной от уклонения отвеса и убывает как  $1/r^4$ . Поэтому, не опасаясь за потерю точности, выражая  $\Delta N_g$  в явном виде через аномалии силы тяжести, можно воспользоваться формулами Стокса и Венинг-Мейнеца для плоскости даже при расстояниях  $AB$  порядка 100 и более километров.

Таким образом, получим

$$\Delta N_g = \int_{\Sigma} \Delta g L d\Sigma, \quad (17)$$

где

$$L = \frac{1}{2\pi\gamma} \left[ \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} - \left( \frac{x-l}{r_2^3} + \frac{x+l}{r_1^3} \right) \right], \quad (18)$$

$r_2$  и  $r_1$  — расстояния от элемента  $d\Sigma$  с прямоугольными координатами  $(x, y)$  соответственно до точек  $B$  и  $A$ .



§ 8. Однако в таком виде выражение для  $L$  очень неудобно для математических операций над ним, так как здесь употреблены две системы полярных координат с полюсами в  $A$  и  $B$ . Желательно преобразовать все выражения так, чтобы все члены были выражены в одной и той же системе координат, но при этом *a priori* очевидно, что полярная или прямоугольная система координат удобных результатов не дадут, поскольку функция  $L$  имеет два полюса  $A$  и  $B$ , в которых она обращается в бесконечность.

Очевидно, самый простой результат следует ожидать тоже в двухполюсной системе координат. Наиболее удобной оказалась система координат, образованная системой софокусных эллипсов и гипербол с фокусами в полюсах функции  $L$  — в точках  $A$  и  $B$ . Как известно, в этой системе координатные линии образуют ортогональную систему; положение точки характеризуется числами  $a$  и  $b$ , полуосями эллипса и гиперболы, проходящими через эту точку.

Переход к новым координатам  $a$  и  $b$  осуществляется с помощью следующих формул:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{1}{2}(r_1 + r_2) \\ b &= \frac{1}{2}(r_1 - r_2) \end{aligned} \right\}, \quad (19)$$

где  $a = \text{const}$  — эллипс,  $b = \text{const}$  — гипербола.

Нетрудно видеть, что уравнения новых координатных линий в прямоугольных координатах примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} &= 1 \\ \frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{d^2} &= 1 \end{aligned} \right\}, \quad (20)$$

где

$$\left. \begin{aligned} c^2 &= a^2 - l^2 \\ d^2 &= l^2 - b^2 \end{aligned} \right\}. \quad (21)$$

В дальнейшем иногда удобнее будет выражать  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  через вспомогательные углы  $\varphi$  и  $\psi$  с помощью следующих равенств:

$$\left. \begin{aligned} \frac{a}{l} &= \sec \varphi; & \frac{c}{l} &= \text{tg } \varphi; & 0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \\ \frac{b}{l} &= \cos \psi; & \frac{d}{l} &= \sin \psi; & 0 < \psi < 2\pi \end{aligned} \right\}. \quad (22)$$

Ограничивая пределы изменения  $\psi$  и  $\varphi$ , мы тем самым ввели условие относительно знаков  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$ , а именно:  $a$  и  $c$  считаются существенно положительными,  $b$  положительно в I и IV четвертях,  $d$  — в I и II четвертях.

Из (20) и (21) определяем  $x$  и  $y$  в функции  $a$  и  $b$ :

$$x = \frac{ab}{l}, \quad y = \frac{cd}{l}, \quad (23)$$

а также

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{a^2 - d^2} = \sqrt{b^2 + c^2}.$$

Используя результаты настоящего параграфа, без труда приведем выражение для  $L$  к следующему виду:

$$L = \frac{1}{2\pi\gamma} \left\{ \frac{2b}{a^2 - b^2} - \left[ \frac{ab - l^2}{(a - b)^3} + \frac{ab + l^2}{(a + b)^3} \right] \right\}. \quad (24)$$

Напишем также выражение для элемента площади в наших координатах:

$$d\Sigma = dx dy = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} \end{vmatrix} da db.$$

Стоящий в правой части функциональный определитель Якоби в настоящем случае может быть очень просто выражен в функции  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$ :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} \end{vmatrix} = \frac{b^2 - a^2}{cd},$$

следовательно<sup>1</sup>,

$$d\Sigma = \frac{b^2 - a^2}{cd} \delta a \delta b = \frac{a^2 - b^2}{ab} \delta c \delta d. \quad (25)$$

Выражение для  $\Delta N_g$  приведем к такому виду:

$$\Delta N_g = \int_{\Sigma} \Delta g M(a, b) \delta c \delta d, \quad (26)$$

где

$$M(a, b) = L \frac{a^2 - b^2}{ab} = \frac{1}{2\pi\gamma} \left\{ \frac{2}{a} - \left[ \frac{ab - l^2}{(a - b)^3} + \frac{ab + l^2}{(a + b)^3} \right] \frac{a^2 - b^2}{ab} \right\}. \quad (27)$$

§ 9. Интеграл (27) может быть вычислен с использованием механических квадратур. Затруднение возникает только для двух точек: фокусов координатных линий  $A$  и  $B$ , где  $M$  обращается в бесконечность. Однако это затруднение отпадает, если мы поступим в данном случае подобно тому, как поступают с центральной зоной при вычислении отклонений отвеса.

Интеграл, которым определяется  $\Delta N_g$ , разобьем на три:  $\Delta N_A$ ,  $\Delta N_B$  и  $\Delta N_C$ . Первые два ( $\Delta N_A$  и  $\Delta N_B$ ) распространены на площади околотокальных отсеков, ограничены координатными линиями  $a_0$  и  $b_0$ , третий ( $\Delta N_C$ ) — на всю остальную часть области  $\Sigma$ .

Рассмотрим первый интеграл, распространенный на околотокальный отсек, включающий в себя  $B$ .

На основании (17) имеем

$$\Delta N_B = \frac{1}{2\pi\gamma} \int \Delta g \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) d\Sigma - \frac{l}{2\pi\gamma} \int \Delta g \frac{\cos \alpha}{r_2^2} d\Sigma - \frac{l}{2\pi\gamma} \int \Delta g \frac{\cos \beta}{r_1^2} d\Sigma \quad (28)$$

или

$$\Delta N_B = -\frac{l}{2\pi\gamma} I_1 - \frac{l}{2\pi\gamma} I_2 + \frac{l}{2\pi\gamma} I_3, \quad (29)$$

где  $\alpha$  — полярный угол с полюсом  $B$  и полярной осью  $AB$  (угол между  $r_1$  и  $AB$ );  $\beta$  — полярный угол с полюсом  $A$  и полярной осью  $AB$  (угол между  $r_2$  и  $AB$ );

$$I_1 = \int \Delta g \frac{\cos \alpha}{r_2^2} d\Sigma; \quad I_2 = \int \Delta g \frac{\cos \beta}{r_1^2} d\Sigma; \quad I_3 = \iint \frac{2\Delta g}{a} \delta c \delta d. \quad (30)$$

<sup>1</sup>Чтобы отличить от координаты  $d$ , в тех выражениях, где встречается  $d$ , дифференциал обозначается через  $\delta$ .

При вычислении  $I_1$  полагаем

$$\Delta g = \Delta g_B + \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)_B r_1 \cos \alpha + \left( \frac{\partial g}{\partial y} \right)_B r_1 \sin \alpha.$$

Тогда

$$I_1 = \Delta g_B \iint \frac{\cos \alpha}{r_1} dr d\alpha + \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)_B \iint \cos^2 \alpha dr d\alpha + \left( \frac{\partial g}{\partial y} \right)_B \iint \cos \alpha \sin \alpha dr d\alpha, \quad (31)$$

так как  $d\Sigma = r_1 dr r\alpha$ .

Область интегриации симметрична относительно оси  $x$ , поэтому в правой части этого равенства первый и второй интегралы сводятся к удвоенным интегралам по верхней половине этой области, а третий равен нулю.

Поэтому, выполняя также интегрирование по  $r_1$ , получаем

$$I_1 = 2\Delta g_B \int_0^\pi \ln \frac{r_1}{0} \cos \alpha d\alpha + 2 \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)_B \int_0^\pi r_1 \cos^2 \alpha d\alpha, \quad (32)$$

где  $\rho$  — радиус любой окружности, заключенной целиком внутри области интегрирования. Для выполнения интегрирования по  $\alpha$  необходимо определить  $r_1$  в функции  $\alpha$ . Принимая для сокращения письма  $l$  за единицу длины (т.е. полагая  $l = 1$ ), получаем

$$\cos \alpha = \frac{x-1}{r_1} = \frac{ab-1}{a-b},$$

откуда

$$b = \frac{1+a \cos \alpha}{a + \cos \alpha}; \quad a = \frac{b \cos \alpha - 1}{\cos \alpha - b}.$$

Поэтому на линии  $a = a_0$  имеем

$$r_1 = \frac{a_0^2 - 1}{a_0 + \cos \alpha}, \quad (33)$$

на линии  $b = b_0$  имеем

$$r_1 = \frac{1 - b_0^2}{b_0 - \cos \alpha}. \quad (34)$$

Значение  $\alpha$ , соответствующее точке с криволинейными координатами  $a_0$  и  $b_0$ , получится из

$$\alpha_0 = \arccos \left( \frac{a_0 b_0 - 1}{a_0 - b_0} \right).$$

Таким образом, разбивая в  $I_1$  каждый из интегралов правой части на два, с пределами от 0 до  $\alpha_0$  и от  $\alpha_0$  до  $\pi$ , и подставляя  $r_1$  из (33) и (34), получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} I_1 = & \Delta g_B \int_0^{\alpha_0} \ln \frac{a_0^2 - 1}{\rho(a_0 + \cos \alpha)} \cdot \cos \alpha d\alpha + \Delta g_B \int_{\alpha_0}^\pi \ln \frac{1 - b_0^2}{\rho(b_0 - \cos \alpha)} \cdot \cos \alpha d\alpha + \\ & + \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right) (a_0^2 - 1) \int_0^{\alpha_0} \frac{\cos^2 \alpha}{a_0 + \cos \alpha} d\alpha + (1 - b_0^2) \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)_B \int_{\alpha_0}^\pi \frac{\cos^2 \alpha}{b_0 - \cos \alpha} d\alpha. \quad (35) \end{aligned}$$

Принимая во внимание следующие равенства:

$$\left. \begin{aligned}
 \int_0^{\alpha_0} \ln \frac{a_0^2 - 1}{\rho(a_0 + \cos \alpha)} \cos \alpha d\alpha &= \left( \ln \frac{r_0}{\rho} \right) \sin \alpha_0 - (a_0 \alpha_0 - \sin \alpha_0) + \\
 &+ (a_0^2 - 1) \int_0^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{a_0 + \cos \alpha}, \\
 \int_{\alpha_0}^{\pi} \ln \frac{1 - b_0^2}{\rho(b_0 - \cos \alpha)} \cdot \cos \alpha d\alpha &= - \left( \ln \frac{r_0}{\rho} \right) \sin \alpha_0 + b_0(\pi - \alpha_0) - \\
 &- \sin \alpha_0 + (1 - b_0^2) \int_{\alpha_0}^{\pi} \frac{d\alpha}{b_0 + \cos \alpha}, \\
 \int_0^{\alpha_0} \frac{\cos^2 \alpha}{a_0 + \cos \alpha} d\alpha &= -a_0 \alpha_0 + \sin \alpha_0 + a_0^2 \int_0^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{a_0 + \cos \alpha}, \\
 \int_{\alpha_0}^{\pi} \frac{\cos^2 \alpha}{b_0 - \cos \alpha} d\alpha &= -b_0(\pi - \alpha_0) + \sin \alpha_0 + b_0 \int_{\alpha_0}^{\pi} \frac{d\alpha}{b_0 + \cos \alpha}, \\
 \int_{\alpha_0}^{\pi} \frac{d\alpha}{a_0 + \cos \alpha} &= \frac{2}{c_0} \arctg \left( \operatorname{tg} \frac{\alpha_0}{2} \frac{a_0 - 1}{c_0} \right) + c_1, \\
 \int_{\alpha_0}^{\pi} \frac{d\alpha}{b_0 - \cos \alpha} &= \frac{1}{d_0} \ln \frac{d_0 \operatorname{tg} \frac{\alpha_0}{2} - (1 - b_0)}{d_0 \operatorname{tg} \frac{\alpha_0}{2} + (1 - b_0)} + c_2, \\
 \operatorname{tg} \frac{\alpha_0}{2} &= \frac{(a_0 + 1)(1 - b_0)}{c_0 d_0}, \\
 \arctg \left( \frac{(a_0 - 1)}{c_0} \operatorname{tg} \frac{\alpha_0}{2} \right) &= \arctg \frac{1 - b_0}{d_0} = \frac{\psi_0}{2}, \\
 \ln \frac{d_0 \operatorname{tg} \frac{\alpha_0}{2} - (1 - b_0)}{d_0 \operatorname{tg} \frac{\alpha_0}{2} + (1 - b_0)} &= \ln \frac{1 + a_0 - c_0}{1 + a_0 + c_0},
 \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

получаем

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} I_1 = \Delta g_B \left[ b_0(\pi - \alpha_0) - a_0 \alpha_0 + c_0 \psi_0 - d_0 \ln \frac{1 + a_0 - c_0}{1 + a_0 + c_0} \right] + \\
 + \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)_B \left[ c_0^2 \left( \sin \alpha_0 - \alpha_0 a_0 + a_0^2 \frac{\psi_0}{c_0} \right) + \right. \\
 \left. + d_0^2 \left( \sin \alpha_0 - b_0(\pi - \alpha_0) - \frac{b_0^2}{d_0} \ln \frac{1 + a_0 - c_0}{1 + a_0 + c_0} \right) \right]. \quad (37)
 \end{aligned}$$

Переходим к  $I_2$ . Так как в этом интеграле подынтегральная функция в области интегрирования в бесконечность не обращается и, наоборот, имеет малые значения, доста-

точно принять  $\Delta g = \Delta g_B$  во всем отсеке. Поступая так же, как описано выше, получим

$$\frac{1}{2}I_2 = \Delta g_B \left( \int_0^{\beta_0} \ln r''_2 \cos \beta d\beta - \int_0^{\beta_0} \ln r'_2 \cos \beta d\beta \right), \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \arccos \left( \frac{a_0 b_0 + 1}{a_0 + b_0} \right), \\ r''_2 &= \frac{c_0^2}{\alpha_0 - \cos \beta} \quad (r_2 \text{ скользит по эллипсу}), \\ r'_2 &= \frac{d_0^2}{\cos \beta - b_0} \quad (r_2 \text{ скользит по гиперболе}). \end{aligned}$$

Выполняя вычисления и используя полученные ранее равенства, имеем

$$\frac{1}{2}I_2 = \Delta g_B \left[ (a_0 - b_0)\beta_0 - c_0\psi_0 - d_0 \ln \frac{c_0 - a_0 + 1}{c_0 + a_0 - 1} \right]. \quad (39)$$

$I_3$  вычисляется очень просто. Полагая  $\Delta g = \Delta g_B$ , имеем

$$\frac{1}{2}I_3 = \Delta g_B 2d_0 \ln(a_0 + c_0). \quad (40)$$

Наконец,

$$\begin{aligned} I_3 - I_1 - I_2 &= 2\Delta g_B \left[ b_0\pi - 2a_0 \arctg \frac{d_0}{c_0} - 2b_0 \arctg \frac{a_0 d_0}{b_0 c_0} \right] + \\ &+ 2 \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)_B \left[ c_0 d_0 (a_0 + b_0) + \alpha_0 (b_0 d_0^2 - a_0 c_0^2) - b_0 d_0^2 \pi + c_0 a_0^2 \psi_0 - b_0^2 d_0 \ln \frac{1+a_0-c_0}{1+a_0+c_0} \right] \end{aligned}$$

или, после простых преобразований:

$$\begin{aligned} I_3 - I_1 - I_2 &= 4\Delta g_B \left[ b_0 \arctg \frac{b_0 c_0}{a_0 d_0} - a_0 \arctg \frac{d_0}{c_0} \right] + 2 \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)_B [c_0 d_0 (a_0 + b_0) + \\ &+ \alpha_0 (b_0 d_0^2 - a_0 c_0^2) - b_0 d_0^2 \pi + c_0 a_0^2 \psi_0 + b_0^2 d_0 \ln(a_0 + c_0)]. \quad (41) \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Delta N_B &= \frac{2\Delta g_B}{\pi\gamma} \left[ b_0 \arctg \frac{b_0 c_0}{a_0 d_0} - a_0 \arctg \frac{d_0}{c_0} \right] + \frac{1}{\pi\gamma} \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)_B [c_0 d_0 (a_0 + b_0) + \\ &+ \alpha_0 (b_0 d_0^2 - a_0 c_0^2) - b_0 d_0^2 \pi + c_0 a_0^2 \psi_0 + d_0 b_0^2 \ln(a_0 + c_0)]. \quad (42) \end{aligned}$$

Такое же выражение получим для действия отсека, включающего в себя фокус  $A$ .

Складывая, получим

$$\begin{aligned} \Delta N_B + \Delta N_A &= (\Delta g_B + \Delta g_A) \frac{2}{\pi\gamma} \left[ b_0 \arctg \frac{b_0 c_0}{a_0 d_0} - a_0 \arctg \frac{d_0}{c_0} \right] + \left[ \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)_B + \right. \\ &+ \left. \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)_A \right] \frac{1}{\pi\gamma} [c_0 d_0 (a_0 + b_0) + \alpha_0 (b_0 d_0^2 - a_0 c_0^2) - b_0 d_0^2 \pi + \\ &+ c_0 a_0^2 \psi_0 + b_0^2 d_0 \ln(a_0 + c_0)]. \quad (43) \end{aligned}$$

§ 10. Значения  $a_0$  и  $b_0$  в (43) можем задать произвольные, ограничивая их выбор только тем, что внутри определяемой ими площади изменение  $\Delta g$  можно считать линейным. Поэтому можно выбрать их таким образом, чтобы множитель при  $(\Delta g_B + \Delta g_A)$  обратился в нуль.

Принимая во внимание (22), условие это можно написать следующим образом:

$$b_0 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{b_0 c_0}{a_0 d_0} - a_0 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{d_0}{c_0} = \cos \psi_0 \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\operatorname{ctg} \psi_0 \sin \varphi_0) - \\ - \sec \varphi_0 \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\operatorname{ctg} \varphi_0 \sin \psi_0) = 0.$$

Мы остановились на следующей системе значений, удовлетворяющей этому уравнению:

$$\varphi_0 = 25^\circ 18', \quad \psi_0 = 30^\circ 00',$$

откуда

$$b_0 = 0,9041; \quad a_0 = 1,1547; \quad d_0 = 0,4274; \quad c_0 = 0,5774.$$

Отсюда делаем вывод, что каждый из отсеков заключен внутри прямоугольника со следующими сторонами: 0,2506 по оси  $X$  и 0,4936 по оси  $Y$ . При  $AB = 100$  км ( $l = 50$  км) сторона по оси  $X$  достигает 12,5 км, по оси  $Y$  — 25 км.

Таким образом, выбор для  $\varphi_0$  значения в  $30^\circ$  приводит к тому, что для наибольших значений  $l$ , которые будут употребляться на практике, размеры центрального отсека выбраны такого же порядка, как у проф. Казанского при его выводе уклонений отвеса в Московской области (там взято  $r_0 = 5$  км). То обстоятельство, что по оси  $Y$  получается протяженность отсека в 2 раза больше, не имеет существенного значения, так как расположенные выше и ниже  $B$  аномалии оказывают на составляющую уклонения отвеса в  $B$  по направлению  $X$  незначительное действие. Уменьшение же площади отсека представляется нерациональным, так как вблизи полюса функция  $l$  меняется настолько быстро, что при численном интегрировании могут возникнуть ошибки большего порядка, чем при аппроксимировании линейного изменения  $\Delta g$  внутри отсека.

С этими значениями  $\varphi_0$  и  $\psi_0$  для коэффициента при  $\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_A + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_B$  получаем численное значение, равное  $0''{,}0151$  (если  $\Delta g$  выражено в миллигалах,  $l$  и  $x$  — в одной и той же мере).

§ 11. Перейдем к  $\Delta N_c$ . Напомним, что на основании (17) и (25)

$$\Delta N_c = \int \Delta g L d\Sigma = \iiint \Delta g M \delta c \delta d,$$

причем интеграция распространена на всю площадь  $\Sigma$ , за исключением околофокальных отсеков, учтенных членами  $\Delta N_A$  и  $\Delta N_B$ .

Конечно, здесь придется прибегнуть к численному интегрированию. Применение способа разбивки поля интеграции на отсеки равного действия нам представляется в данном случае менее точным и более сложным при практическом применении, чем использование простого двукратного интегрирования с помощью интерполяционной функции достаточно высокого порядка, например, по формулам Гаусса, которыми мы в данном случае и воспользовались. Как известно, если при интеграции применяется  $n$  значений функции, формула Гаусса дает точный результат, если интегрируемая функция есть полином степени ниже  $2n$ . Используя интерполирующий полином столь высокого порядка,

легче представить ход функции  $\Delta gL$ , сложный даже при плавном изменении  $\Delta g$  вследствие быстрого изменения  $L$  и тем более сложный в условиях неправильной картины изоаномал.

Формула Гаусса, как известно<sup>1</sup>, имеет следующий вид:

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx = H_1^{(n)} f(h_1) + H_2^{(n)} f(h_2) + \dots + H_n^{(n)} f(h_n),$$

где  $h_1, h_2, h_3, \dots, h_n$  — корни полинома Лежандра порядка  $n$  (т.е. корни уравнения  $P_n(h) = 0$ ) и

$$H_i^{(n)} = \frac{1}{p'_n(h_i)} \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(x)}{x - h_i} dx$$

или, с измененными пределами интегриации:

$$\int_0^1 \psi(x) dx + A_1^{(n)} \psi(x_1^{(n)}) + A_2^{(n)} \psi(x_2^{(n)}) + \dots + A_n^{(n)} \psi(x_n^{(n)}),$$

где

$$A_i^{(n)} = \frac{1}{2} H_i^{(n)}; \quad x_i^{(n)} = 0,5 + 0,5h_i.$$

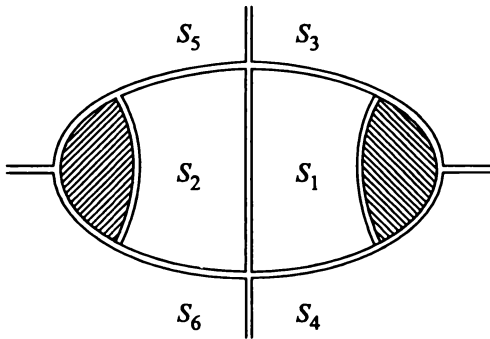


Рис. 1

Для выполнения интегрирования в нашем случае разобьем всю область интегрирования на шесть участков:  $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$  и  $S_6$ . Схема разбивки представлена на рис. 1, где заштрихованные участки соответствуют околофокальным отсекам, уже учтенным посредством членов  $\Delta N_A$  и  $\Delta N_B$ . Тогда интеграл, дающий значение  $\Delta N_c$ , будет разбит на шесть интегралов,  $\Delta N_c(S_1), \Delta N_c(S_2), \dots$ , каждый из которых будет распространен на площадь одного из участков.

Для краткости дальнейших записей допустим, что

$$\Delta g L d\Sigma = G(c, d) \delta c \delta d. \quad (44)$$

Тогда

$$\Delta N_c(S_1) = \int_{-0,5774}^{+0,5774} \delta c \int_{0,4247}^1 G(c, d) \delta d. \quad (45)$$

После выполнения численной интегрирования по переменной  $d$  при постоянном  $c$  должна быть выполнена вторично численная интегрирование по переменной  $c$ . Поэтому интеграл

$$\int_{0,4247}^1 G(c, d) \delta d,$$

<sup>1</sup>См. Уиттекер Э.Т. и Робинсон Г. Математическая обработка результатов наблюдений — М.: ОНТИ. 1935. С.153.

являющийся функцией  $c$ , должен быть вычислен для тех значений, которые войдут в формулу Гаусса интегриации по  $c$ .

Для интегриации по  $d$  решено было ограничиться  $n = 4$  (интерполирующий полином 7-й степени), а по  $c$  — ограничиться  $n = 5$  (интерполирующий полином 9-й степени).

Отсюда получаем те значения  $d$  и  $c$ , для которых должна быть вычислена подынтегральная функция:

$$c_i = 0,5774(2x_{i+3}^{(5)} - 1); \quad (i = -2; -1; 0; +1; +2), \quad d_j = 0,5726x_j^{(4)} + 0,4274.$$

Таким образом,

$$\int_{0,4274}^1 G(c_i d) \delta d = (1 - 0,4274) \sum_{i=1}^4 A_j^{(4)} G(c_i d_j),$$

$$\Delta N_c(S_1) = 1,1548 \times 0,5726 \sum_{i=-2}^{+2} \sum_{j=1}^4 A_{i+3}^{(5)} A_j^{(4)} G(c_i d_j) = \sum_{i=-2}^{+2} \sum_{j=-1}^4 2A_{ij} \Delta g(c_i d_j), \quad (46)$$

где

$$2A_{ij} = 1,1548 \times 0,5726 A_{i+3}^{(5)} A_j^{(4)} M(c_i d_j). \quad (47)$$

На участках  $S_3$ ,  $S_4$ ,  $S_5$  и  $S_6$   $d$  изменяется по модулю от 0 до 1 и  $c$  — от 0,5774 до 2,828. Для интегриации как по  $c$ , так и по  $d$  принято, что  $n = 5$ . Поступая так же, как в рассмотренном случае, получим

$$d_i = x_i^{(5)}; \quad c_i = 2,251x_{i-2}^{(5)} + 0,5777;$$

$$\Delta N_c(S_3) = 2,251 \sum_{i=3}^7 \sum_{j=1}^5 A_{i-2}^{(5)} A_j^{(5)} G(c_i d_j) = \sum_{i=3}^7 \sum_{j=1}^5 2A_{ij} \Delta g(c_i d_j);$$

$$2A_{ij} = 2,251 A_{i-2}^{(5)} A_j^{(5)} M(c_i d_j). \quad (48)$$

Таким образом, получены выражения для численных значений  $\Delta N_c(S_1)$  и  $\Delta N_c(S_3)$ .

Остальные 4 интеграла:  $\Delta N_c(S_2)$ ,  $\Delta N_c(S_4)$ ,  $\Delta N_c(S_5)$  и  $\Delta N_c(S_6)$  сводятся к этим двум, так как: 1) множители  $A_{ij}$  для  $S_2$  отличаются от соответствующих множителей для  $S_1$  только знаком; 2) множители  $A_{ij}$  для  $S_5$  и  $S_6$  отличаются от соответствующих множителей для  $S_3$  только знаком; 3) множители  $A_{ij}$  для  $S_4$  те же, что и для соответствующих точек  $S_3$ . Кроме того, для  $S_1$   $A_{2j} = A_{-2j}$ ;  $A_{1j} = A_{-ij}$ .

Принимая это во внимание и соединяя вместе результат по всем шести областям, получим

$$\Delta N_c = 2 \sum_{ij} A_{ij} \bar{\Delta} g, \quad (49)$$

где  $\bar{\Delta} g = [\Delta g(x, y) + \Delta g(x, -y) - \Delta g(-x, y) - \Delta g(-x, -y)]$  (если  $i \neq 0$ ) и  $\bar{\Delta} g = [\Delta g(x, 0) - \Delta g(-x, 0)]$  (если  $i = 0$ ).





части — полусумма наклона касательных к профилю в точках  $A$  и  $B$ . Второй и третий члены в правой части — поправочные члены в результат обычного астрономического нивелирования, зависящие от распределения силы тяжести. Именно наличие этих членов определяет разницу между астрономическим и астрономо-гравиметрическим нивелированием.

Масштаб палетки, с помощью которой вычисляется гравиметрическая поправка в результате астрономического нивелирования, зависит от линейного расстояния на карте изоаномал между пунктами  $A$  и  $B$ . Таким образом, казалось бы, для каждой пары точек  $A$  и  $B$  следует заново строить палетку в нужном масштабе. Однако практически можно ограничиться набором палеток разных масштабов, с изменением масштаба на 10–20 % при переходе к следующей палетке (такой набор может быть изготовлен проще всего фотографическим путем). Ошибка от несоответствия масштаба палетки расстоянию  $AB$  может быть существенно понижена следующими приемами: 1) при отсчете аномалий в правой половине палетки совмещаем правый фокус палетки с точкой  $B$ ; 2) при отсчете аномалий в левой половине палетки совмещаем левый фокус палетки с точкой  $A$ .

Оценим получающуюся при этом погрешность. Пусть расстояние между полюсами используемой палетки  $2l$ , тогда как следовало применять палетку с расстоянием между полюсами  $2l'$ . Расстояние между соответствующими точками в правых частях обеих палеток равно:

по оси абсцисс

$$\Delta x = abl' + (l - l') - abl = r_2 \cos \alpha (l - l'),$$

по оси ординат

$$\Delta y = cdl - cd'l' = r_2 \sin \alpha (l - l').$$

Следовательно, разница в отсчетах аномалий по обеим палеткам получится такая:

$$\delta(\Delta g) = \frac{\partial \Delta g}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \Delta g}{\partial y} \Delta y = \frac{\partial \Delta g}{\partial r_2} r_2 (l - l').$$

Для левых половин палеток также получим

$$\delta(\Delta g) = \frac{\partial \Delta g}{\partial r_1} r_1 (l - l').$$

Отсюда получаем погрешность в  $\Delta N$ :

$$\delta(\Delta N) = \frac{l - l'}{l} \sum_{ij} A_{ij} \left( r_2 \frac{\partial \Delta g}{\partial r_2} - r_1 \frac{\partial \Delta g}{\partial r_1} \right).$$

Следовательно, величина этой погрешности пропорциональна  $\frac{l - l'}{l}$ ; она вообще невелика и может быть исключена, если повторить вычисления с масштабом палетки, лежащим по другую сторону от нужного (второе вычисление вместе с тем явится хорошим контролем и может заменить вторую руку).

§ 12. Среднюю квадратическую ошибку  $\delta(\Delta N)$  передачи высоты геоида от  $A$  к  $B$  можно ориентировочно представить следующей формулой:

$$\delta(\Delta N) = \sqrt{\frac{\varepsilon_a^2}{2} + (0'',015 l \varepsilon_{\text{grad}})^2 + (0'',038 \varepsilon_{\Delta g})^2 + \left(\frac{1}{3} E\right)^2} \cdot 2l. \quad (51)$$

Подставляя сюда данные, принятые ранее при подсчете ошибки интерполированного уклонения отвеса, получим ошибку среднего наклона  $\varepsilon_N = \frac{\delta(\Delta N)}{2l}$  порядка  $\pm 0'',6-0'',7$  при одном интерполировании, что соответствует в линейной мере примерно 1:300 000 расстояния между смежными астрономическими пунктами.

Случайная же часть ошибки передачи высоты геоида на расстояние  $S$  (систематическая часть определяется накоплением ошибок геодезических координат) при расстояниях между пунктами  $2l$  определится отсюда формулой

$$\delta N = \varepsilon_N \sqrt{2lS}. \quad (52)$$

Если, например,  $S = 10000$  км,  $2l = 70$  км, то  $\delta N = \pm 2,5$  м, а при  $2l = 35$  км  $\delta N = \pm 1,8$  м.

§ 13. Отсчеты аномалий силы тяжести и горизонтальных градиентов аномалий, используемые для вычисления  $\Delta N$ , также могут быть применены для вычисления разности уклонений отвеса в точках  $B$  и  $A$ . Действительно, в криволинейных координатах  $(a, b)$  получим

$$\vartheta(B) - \vartheta(A) = \frac{1}{2\pi\gamma} \iint \Delta g \left[ \frac{ab + l^2}{(a+b)^3} - \frac{ab - l^2}{(a-b)^3} \right] \frac{a^2 - b^2}{ab} \delta c \delta d \quad (53)$$

или, применяя способ, подобный использованному при вычислении  $\Delta N$ , приведем (53) к такому виду:

$$\begin{aligned} \vartheta(B) - \vartheta(A) = & \frac{2}{\pi\gamma} \left( b_0 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{c_0}{d_0} - a_0 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a_0 d_0}{b_0 c_0} + c_0 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{d_0}{b_0} \right) (\Delta g_B + \Delta g_A) + \\ & + \frac{1}{\pi\gamma} \left[ c_0 d_0 (a_0 + b_0) + 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{(a_0 + 1)(1 - b_0)}{c_0 d_0} (b_0 d_0^2 - a_0 c_0^2) - b_0^2 d_0 \ln \frac{1 + a_0 - c_0}{1 + a_0 + c_0} \right] \times \\ & \times \left[ \left( \frac{\partial \Delta g}{\partial x} \right)_A - \left( \frac{\partial \Delta g}{\partial x} \right)_B \right] + \sum_{i,j} 2B_{ij} \bar{\Delta} g. \quad (54) \end{aligned}$$

Переходя к численным значениям палетки для вычисления  $\Delta N$ , получим

$$\begin{aligned} \vartheta(B) - \vartheta(A) = & -0'',0314 (\Delta g_B + \Delta g_A) + \\ & + 0'',015l \left[ \left( \frac{\partial \Delta g}{\partial x} \right)_B - \left( \frac{\partial \Delta g}{\partial x} \right)_A \right] + \sum_{i,j} 2B_{ij} \bar{\Delta} g. \quad (55) \end{aligned}$$

Численные значения коэффициентов  $B_{ij}$  в стотысячных долях секунды проставлены в прилагаемой схеме палетки (рис. 2) рядом с соответствующими точками, для которых должны браться аномалии  $\Delta g$  с карты изоаномал.

Вычисление разности астрономо-геодезических уклонений отвеса по этой формуле для астропунктов астрономо-гравиметрического нивелирования, если оно выполняется попутно с вычислением  $\Delta N$ , требует незначительного объема дополнительной работы. Поэтому можно рекомендовать эти добавочные небольшие вычисления выполнять всегда. Сопоставления наблюдаемых разностей уклонений отвеса с вычисленными по этой формуле служат некоторым контролем и дают добавочный материал для оценки достоверности результата.

Разбор методики астрономо-гравиметрического нивелирования закончим следующими замечаниями.

1. Астрономические широты и долготы должны быть предварительно редуцированы к уровню моря с помощью следующих известных формул<sup>1</sup>:

$$\Delta\varphi_H = -0''{,}17 H \sin 2\varphi - 0''{,}21 \frac{\partial\Delta g}{\partial x} H, \quad \Delta\gamma_H \cos \varphi = 0''{,}21 \frac{\partial\Delta g}{\partial y} H,$$

в которых горизонтальный градиент аномалий выражен в миллигалах на километр,  $H$  — высота астропункта над уровнем моря в километрах, положительный конец оси  $X$  направлен на север, оси  $Y$  — на восток.

2. В районах равнинных и слаботорных вопрос о редукации силы тяжести решается путем применения редукации в свободном воздухе.

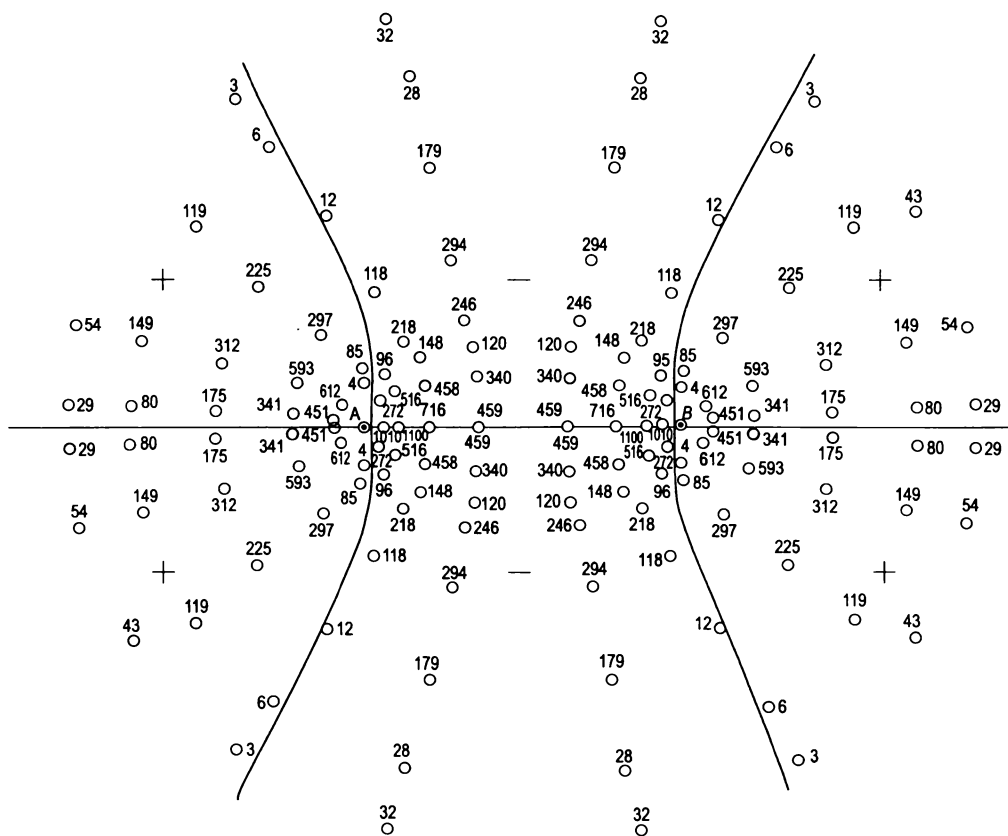


Рис. 3

§ 14. Результаты настоящей работы показывают, что для нахождения расстояний от геоида до принятого в триангуляции эллипсоида можно в равнинных районах ограничиться сравнительно небольшим числом астропунктов, используя результаты общей гравиметрической съемки Советского Союза. Астропункты по рядам триангуляции, вдоль которых будет производиться передача высот геоида, могут быть распределены в таких

<sup>1</sup>См., например, *Пицетти П.* Основы механической теории фигуры планет. — М.: ГТТИ. 1935. С. 23.

районах с интервалом до 70–100 км вместо интервала в 10–20 км, требуемого при астрономическом нивелировании. При этом распределение силы тяжести должно быть известно вдоль полосы шириной в 100–150 км в каждую сторону от ходовой линии астрономо-гравиметрического нивелирования. В центральной части этой полосы, по-видимому, желательна густота съемки несколько выше нормальной, по краям можно ограничиться густотой ниже нормальной.

В районах, покрытых сплошной гравиметрической съемкой, можно выполнить передачу высот геоида, опираясь на имеющиеся астропункты триангуляции. Там, где сплошная съемка еще не произведена, надлежит сгустить цепь астрономических пунктов так, чтобы они следовали приблизительно через 70 км (в районах равнинных и слаботорных), и произвести гравиметрическую съемку в полосе шириной 210 км, покрывая эти полосы в первую очередь в порядке общей гравиметрической съемки СССР.

Настоящая работа выполнена в Научно-исследовательском институте геодезии, картографии и аэросъемки в 1935 г. под общим наблюдением проф. Ф.Н. Красовского, по инициативе которого она включена в план научно-исследовательских работ института, и проф. И.А. Казанского, руководителя астрономо-гравиметрической секции института.

# АСТРОНОМО-ГРАВИМЕТРИЧЕСКОЕ НИВЕЛИРОВАНИЕ ПО 51-й И 55-й ПАРАЛЛЕЛЯМ ОТ 30-го ДО 56-го МЕРИДИАНА \*

Настоящая работа представляет собой первый опыт применения метода астрономо-гравиметрического нивелирования к исследованию фигуры геоида на основании совокупности астрономо-геодезических и гравиметрических материалов. Этот метод появился в результате поисков путей исследования фигуры геоида при современной, далеко не достаточной, гравиметрической изученности Земли. Подробное изложение этого метода содержится в статье М.С. Молоденского «Определение фигуры геоида при совместном использовании астрономо-геодезических уклонений отвеса и карты аномалий силы тяжести» (см. Труды ЦНИИГАиК, вып. 17, изд. 1937 г.). Преимущество этого метода по сравнению с известным методом астрономического нивелирования заключается в том, что здесь можно ограничиться редко расположенными астрономическими пунктами, нормально имеющимися по рядам триангуляции. Редкая сеть астрономических пунктов восполняется гравиметрическими поправками, для вывода которых используются результаты общей гравиметрической съемки.

Сущность этих поправок сводится к следующему. Пусть сечение геоида вдоль ходовой линии нивелирования высот геоида изображается волнистой линией  $PQ$ , сечение эллипсоида, принятого для вычисления триангуляции, — дугой эллипса  $RS$  (рис. 1). В таком случае проекция уклонения отвеса на ходовую линию в какой-либо точке  $M$  будет представлена углом в этой точке между нормалью к  $PQ$  и к  $RS$ . Если дугу эллипса  $RS$  мы спрямим (рис. 2), оставив всюду без изменения расстояния от  $PQ$  до  $RS$ , то составляющая уклонения отвеса в любой точке  $M$  примет вид угла наклона касательной к  $R'Q'$  в этой точке.

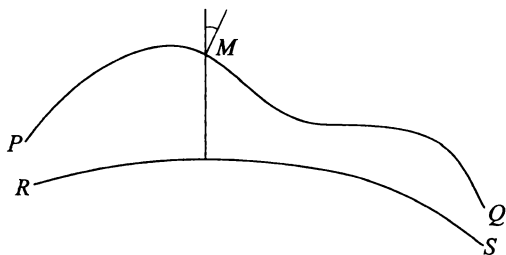


Рис. 1

Очевидно, изменение высоты геоида от точки  $A$  к точке  $B$  (рис. 3) можно выразить несколькими способами:

1) Приближенно (численно интегрируя по формуле трапеций с двумя ординатами) через производные на концах:

$$\Delta N_0 = l[\vartheta_a(A) + \vartheta_a(B)],$$

где  $\vartheta_a(A)$  и  $\vartheta_a(B)$  — проекции астрономо-геодезического уклонения отвеса на ходовую линию в точках  $A$  и  $B$ ; длина ходовой линии равна  $2l$ .

Это соответствует обычному астрономическому нивелированию.

Если  $l$  велико, так что изменение уклонения отвеса от  $A$  до  $B$  нельзя считать линейным, то пользоваться астрономическим нивелированием принципиально нельзя.

\* Совместно с Лозинской А.М. // В сб.: Исследования по гравиметрии. — М.: Геодезиздат. 1939. Вып. 3. С. 10–26.

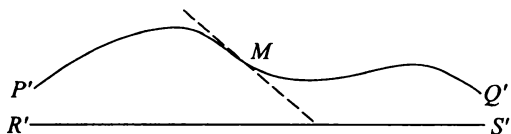


Рис. 2

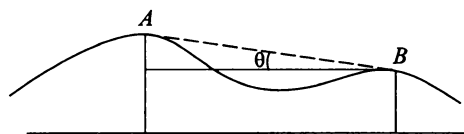


Рис. 3

2) Даже при очень большом  $l$  имеет место достаточно точное соотношение (рис. 3):

$$N_B - N_A = 2l\Theta,$$

где  $\Theta$  — угол среднего наклона профиля геоида на участке  $AB$ . Это геометрическое соотношение соответствует идее астрономо-гравиметрического нивелирования.

Таким образом, результат астрономического нивелирования должен быть исправлен на величину

$$\Delta N_g = 2l \left[ \Theta - \frac{1}{2}(\vartheta_a(A) + \vartheta_a(B)) \right],$$

которую будем называть гравиметрической поправкой, ибо она определяется с помощью карты аномалий силы тяжести.

Следует подчеркнуть, во избежание недоразумений, что астрономо-гравиметрическое нивелирование, как и астрономическое, определяет высоту геоида по отношению к эллипсоиду, принятому в триангуляции (а не к эллипсоиду гравиметрическому, положенному в основу вывода нормальной формулы для силы тяжести).

В упомянутой выше статье было показано, что

$$\Delta N_g = \frac{1}{2\pi\gamma} \iint \Delta g_0 \left[ \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} - l \left( \frac{x-l}{r_2^3} + \frac{x+l}{r_1^3} \right) \right] d\sigma,$$

где  $\Delta g_0$  — полная аномалия (аномалия в свободном воздухе),  $r_2$  и  $r_1$  — расстояния от элемента площади интеграции  $d\sigma$  с прямоугольными координатами  $x$  и  $y$ , соответственно, до точек  $B$  и  $A$ . Начало прямоугольных координат помещено в середине отрезка  $AB$ , ось  $Y \perp AB$ .

Для вычисления гравиметрической поправки нужно знать распределение аномалий только в непосредственной близости к  $AB$ . Это важное обстоятельство определяется быстрой убыванием функции, на которую множится  $\Delta g_0$  под знаком интеграла в выражении для  $\Delta N_g$ .

Это наглядно иллюстрируется следующими сопоставлениями:

- функция Стокса убывает как  $1/r$ ,
- функция Венинг-Мейнеса убывает как  $1/r^2$ ,
- функция, входящая в  $\Delta N_g$ , убывает как  $1/r^4$ .

В результате использования методов численного интегрирования выражение для  $\Delta N$  для практического применения сведено к такому виду:

$$\frac{N_B - N_A}{2l} = \frac{\Delta N_0}{2l} + \sum A \Delta g_0 + 0'' , 0076l \left[ \left( \frac{\partial \Delta g_0}{\partial x} \right)_A + \left( \frac{\partial \Delta g_0}{\partial x} \right)_B \right].$$

Этим выражением мы пользовались в настоящей работе. Значения аномалий  $\Delta g_0$  снимаются с помощью палетки с карты изоаномал во вполне определенных точках, положение

которых зависит от положения точек  $A$  и  $B$ , и умножаются на соответствующие коэффициенты. При изменении расстояния  $AB$  масштаб палетки должен быть соответственно изменен. Множители от масштаба не зависят.

Надежность вывода гравиметрической поправки всецело определяется достоверностью используемой карты изоаномал. Последняя зависит: 1) от характера исследуемого района (высотного рельефа и степени гравитационной аномальности); 2) от степени и качества его гравиметрической изученности; 3) от метода интерполяции силы тяжести между пунктами, определенными в ходе наблюдений.

Первые два обстоятельства не зависят от нас; здесь только можно фиксировать факты, и это будет сделано в дальнейшем. Выбор метода интерполяции силы тяжести, напротив, — дело исследователя, производящего обработку материала.

Насколько осторожно надо относиться к этому вопросу, показывает следующий пример. В 1935 г. ряд лиц пытался вычислить гравиметрическим способом отклонения отвеса для астрономических пунктов в Крыму. И у всех отклонения отвеса, вычисленные гравиметрическим путем, получились для Южного берега Крыма почти вдвое меньше наблюдаемых. Все эти лица проводили изоаномалы одинаковым способом — формально интерполируя полные аномалии.

В поисках причины таких больших расхождений между наблюдаемыми и вычисленными величинами М.С. Молоденский заметил следующее: можно получить карты полных аномалий косвенным путем, если перейти в качестве промежуточного звена к аномалиям Буге. Для этого нужно составить карту аномалий Буге формальным интерполированием (это, по-видимому, законно, так как аномалий Буге в Крыму не показывают заметной зависимости от рельефа) и, пользуясь гипсометрической картой, перейти затем к карте полных аномалий. Карты, составленные косвенным и прямым путем, различаются только в интервалах между наблюдаемыми пунктами (обе дают полные аномалии, обе составлены по одному и тому же материалу, различаются же они только методом интерполяции аномалий).

Однако для Крыма в некоторых местах разница между обеими картами доходит до 100 мгл, а максимальная аномалия повышается со 180 до 250 мгл. Гравиметрические наблюдения, проведенные в Крыму по нашим указаниям летом 1936 г., вполне — и качественно, и количественно — подтвердили правильность косвенной интерполяции. Проведенные нами пробные приближенные подсчеты гравиметрических отклонений отвеса с этой картой дали достаточное согласие с наблюдаемыми величинами. Все это, безусловно, является свидетельством того, что прямая интерполяция полных аномалий в этом случае дала совершенно негодный результат.

Конечно, такое большое влияние на результат, как получившееся в Крыму, способ интерполяции аномалий оказывает в горном районе; в местах равнинных аномалии, составленные в разных редукциях, меняются сходно от места к месту, и поэтому разница, зависящая только от приема интерполяции, не может быть очень велика. И тем не менее она может иметь существенное значение в некоторых случаях, в частности для центральных зон, при выводе гравиметрических отклонений отвеса или гравиметрических поправок в астрономическое нивелирование. Это обуславливается большим действием центральных зон; значительная часть этого действия выражается через горизонтальный градиент аномалий, который может существенно измениться в зависимости от способа интерполяции силы тяжести, даже в условиях слабо выраженного рельефа.

Действительно, пренебрегая «Geländereduktion», которая для равнинных мест достаточно мала, имеем

$$\Delta g_0 = \Delta g_0'' + kH,$$



где  $\Delta g_0$  — полная аномалия,  $\Delta g_0''$  — аномалия Буге,  $H$  — высота данного места  $M$  над уровнем моря,  $k$  — постоянный коэффициент, зависящий от средней плотности верхних пластов земли.

Очевидно, разница в значениях аномалии при прямой и косвенной интерполяции аномалий может быть выражена так:

$$k(H_i - H),$$

где  $H_i$  — высота того же места  $M$ , полученная интерполяцией по высотам окружающих гравиметрических пунктов. При расстоянии между гравиметрическими пунктами порядка 30 км этот член имеет величину порядка колебания редукции Буге. (Чтобы убедиться в этом, достаточно взглянуть на гипсометрическую карту.) Конечно, часть этого влияния погашается случайным расположением гравиметрических пунктов, если в этом расположении нет неправильной системы (как это часто бывает в горных районах, где определяют пункты там, куда легче добраться, т.е. в долинах). Но это относится только к дальним зонам, отражающим влияние больших площадей. Наоборот, центральные зоны целиком принимают на себя это влияние и вследствие большого «действия» центральных зон это особенно заметно скажется на результате.

Таким образом, даже в равнинных районах разные приемы интерполяции аномалий могут привести к заметно различным результатам. Косвенному приему интерполяции, безусловно, нужно отдать предпочтение, если интерполяция проводится через редукции, которые уничтожают зависимость аномалий от рельефа и делают их течение значительно более правильным и плавным.

Можно заранее предполагать, что выравнивание аномалий в соседних пунктах наилучшим образом достигается применением изостатической или топографической редукции. В изостатически компенсированных областях (Северная Америка, Индия, отчасти Кавказ) зависимость полных аномалий от рельефа снимается лучше всего введением топографо-изостатических редукций, поэтому в качестве средства интерполяции в таких областях лучше применять изостатические аномалии. Однако при расстоянии между пунктами, на которых сила тяжести определяется наблюдениями, порядка 30 км действие компенсации от пункта к пункту должно меняться довольно плавно, особенно если отказаться от физически абсурдного представления о «локальной» компенсации. Основные же быстрые и неправильные колебания редукций должны быть отнесены за счет топографической поправки. Это обстоятельство обычно проявляется четко и может быть продемонстрировано на любом примере.

Соотношение

$$\Delta g_0 = \Delta g_0'' + kH$$

показывает, что или аномалии  $\Delta g_0$ , или  $\Delta g_0''$ , или и те и другие изменяются так же быстро и неправильно, как рельеф. Что именно так ведут себя полные аномалии, вытекает с очевидностью из их физического смысла. Зависимость аномалий Буге от рельефа тоже представляет собой известный факт, являющийся одним из основных для теории изостазии. Впрочем, эта зависимость совсем иного характера — не местного, а регионального. Быстрые же и неправильные колебания аномалий Буге отражают невидимый глазу рельеф подземный, геологический, не менее сложный, чем географический.

Таким образом, если в горных районах целесообразность применения косвенной интерполяции не вызывает сомнений, то дело с местами равнинными обстоит иначе. С одной стороны, применяя прямую интерполяцию аномалий, мы вводим в качестве составной части ошибки интерполяции ошибку интерполяции рельефа, которая может оказаться систематической, например, при гравиметрическом выводе уклонов отвеса для пунктов

триангуляции, расположенных, как правило, в наиболее возвышенных местах. С другой стороны, косвенная интерполяция не избавляет от ошибок интерполяции аномалий от «подземного рельефа» и вносит новые ошибки, величины которых зависят от надежности применяемой гипсометрической карты; кроме того, она почти удваивает объем работы.

Однако затраты на технико-вычислительную обработку материалов общей гравиметрической съемки Советского Союза ничтожны по сравнению со стоимостью самих материалов; поэтому мы полагаем, что в дальнейшем следует вести обработку всех материалов как с прямой, так и с косвенной интерполяцией. Сравнение тех и других результатов покажет, какой путь дает более точный и надежный результат.

В настоящей работе мы решили применять косвенную интерполяцию. Для нашей работы, охватывающей обширную область от западной границы СССР до Западной Сибири, мы воспользовались гипсометрической картой масштаба 1:1 500 000 («Гипсометрическая карта средней и южной полосы Европейской части СССР», составленная и изданная Военно-картографическим отделом Военно-топографического управления Штаба РККА в 1926 г.). Горизонталы на этой карте проведены для следующих высот: -25, 0, 25, 50, 75, 100, 125, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 600, 800, 900, 1000, 1500 и 2000 метров.

Эта карта содержит вполне достаточные для наших целей интервалы между горизонтальными сечениями до высоты 500–1000 м. Однако масштаб ее слишком мелок, вследствие чего рельеф значительно обобщен. Это обстоятельство может явиться источником заметных ошибок. Но характер рельефа эта карта передает, хотя и обобщенно, но верно; поэтому при использовании мелкомасштабной карты лучше мириться с погрешностями, происходящими от обобщения рельефа на такой карте, случайный характер которых очевиден, чем с ошибками прямой интерполяции, которые могут оказаться систематическими.

**Материал.** Для практического выполнения астрономо-гравиметрического нивелирования нужно было начать с подбора для всей изучаемой территории следующих материалов: а) астрономо-геодезических, б) гравиметрических, в) картографических. Первая часть этой задачи была уже ранее выполнена Д.А. Лариным для других целей, и нам была предоставлена возможность воспользоваться составленным им списком уклонений отвеса. Уклонения отвеса в этом списке отнесены к принятому для триангуляции СССР эллипсоиду Бесселя, ориентированному по астрономическим наблюдениям в Пулково. В списке содержатся уклонения отвеса всего для 248 пунктов. Из этого числа для наших целей использовано около половины (не использованы пункты, которые не имеют долготных составляющих, и часть пунктов, расположенных вне исследуемого района; в первом решении в базисных сетях использованы уклонения отвеса на одном пункте). Кроме пунктов, содержащихся в этом списке использованы 20 астрономических пунктов, определенных ЦНИИГАиК в 1935 г. между Пулково и Оршей.

Из картографических материалов мы воспользовались для косвенной интерполяции аномалий упомянутой гипсометрической картой масштаба 1:1 500 000. Иначе обстояло дело с подбором гравиметрических материалов. Главная часть этих материалов почерпнута из Карточного каталога гравиметрического цеха Московского аэрогеодезического предприятия ГУГК. Напечатанный каталог («Каталог гравиметрических пунктов, определенных в СССР до 1933 г.», ГНИ, 1934 г.) сверен с Карточным, причем обнаружено несколько ошибок. Часть материалов, на которые почему-либо карточек еще не имелось, использована по данным, полученным от начальников партий. Таким образом, удалось использовать материалы всех экспедиций, работавших до 1935 г. включительно, за исключением примерно 200 пунктов, которые оказались еще не обработанными.

Собранный материал позволил поставить вопрос о выполнении астрономо-гравиметрического нивелирования по астропунктам, расположенным на листах 0–35, 0–36, N–35, N–41, M–36, M–41 миллионной карты. Однако в ряде районов количество гравиметрических пунктов оказалось явно недостаточным (например, для листа N–38).

Степень насыщенности исследуемой территории гравиметрическими пунктами колеблется в довольно широких пределах.

Чтобы несколько заполнить пустые места, не покрытые пока гравиметрической съемкой, пришлось в двух районах использовать не вполне доброкачественные результаты (по партиям б. ВТОГиГР, работавшим в 1934 г. в районе Уфы и в 1935 г. к югу от Пулково и в районе Пскова). К этим аномалиям мы относились с осторожностью, не принимая во внимание сильно «отскакивающих» значений. Там, где совсем не было наблюдений, даже забракованных, изоаномалы проведены еще более неуверенно, методом интерполирования между далеко расположенными пунктами, руководствуясь общим ходом изоаномал в соседних районах.

Результаты определений силы тяжести содержатся в карточном каталоге МАГП в том виде, как они вычислены начальниками партий по материалам только своей экспедиции. Все определения не сведены в одну систему, и карточный каталог представляет собой, таким образом, собрание первичного сырого материала. Действующая в настоящее время инструкция по производству определений силы тяжести маятниками предусматривает специальные контрольные пункты, в которых наблюдения проводятся работающими по соседству партиями. По идее эти пункты должны способствовать выявлению и учету систематических ошибок в результатах наблюдений отдельных партий. При сопоставлении результатов, полученных различными партиями в таких общих пунктах, выявились большие расхождения, достигающие иногда до 20 и более миллигал. Расхождения же порядка 10 миллигал встречаются часто. Часть этих расхождений может быть отнесена за счет случайных ошибок, но большая часть, безусловно, указывает на наличие больших систематических погрешностей в результатах некоторых партий. Это последнее обстоятельство вносит значительные ошибки при исследовании формы геоида; поэтому все систематические различия между материалами разных партий должны быть тщательно изучены и надежно устранены.

Однако каждая партия, как правило, имела не более одного–двух общих с другими партиями пунктов. Поэтому выявить ту величину, на которую нужно исправить наблюдения для исключения систематической части ошибки, оказалось по имеющимся материалам очень трудно. Уверенно эти поправки удалось учесть только в двух случаях: именно значения аномалий, полученные в 1933 г. партией ЛОНГРИ, работавшей в районе Актюбинска, должны быть уменьшены на 14 мгл и на 14 мгл должны быть уменьшены значения аномалий, полученные в 1933 г. партией ЦНИГРИ, работавшей в районе Кустаная.

Для установления систематических погрешностей всех экспедиций нужно, с одной стороны, тщательно изучить подлинные материалы этих экспедиций, с другой стороны, по-видимому, придется провести специально для этой цели полевые работы. Вопрос этот достаточно сложен и выходит за рамки настоящей работы.

Все это говорит о том, что существующая система выполнения общей гравиметрической съемки СССР, построенная в основном по принципу «исходных», «местных исходных» и «контрольных» пунктов, не является удовлетворительной. Получаемые в результате этой съемки материалы чрезвычайно трудно свести в единую прочную систему, гарантированную от систематических ошибок на отдельных участках. Необходимо эту систему пересмотреть в том направлении, чтобы обеспечить надежную связь результатов работ отдельных партий в однородное целое. Может быть, для этого достаточно провести следующие мероприятия.

1. Вести систему пунктов I класса, которые привязываются непосредственно к Москве, Пулкову, Полтаве и Казани лучшими приборами и наблюдателями по расширенной программе. Каждый из этих пунктов определяется по меньшей мере два раза разными маятниками и в разное время. Пункты I класса определяются рейсами, включающими в себя не более 5–10 пунктов, длительностью не более 1–2 месяцев.

2. В программу работ полевых партий должно включать не менее 4–5 пунктов I класса, распределенных равномерно между определяемыми пунктами; местный исходный пункт обязательно должен быть пунктом I класса.

**Технико-вычислительная часть.** Приступая к выполнению большой по объему технико-вычислительной части этой работы, мы учитывали, что работа эта должна быть переделана в отдельных своих частях по мере накопления новых астрономических и гравиметрических материалов, а также по мере выявления систематических ошибок отдельных экспедиций. Поэтому вся работа ставилась так, чтобы в дальнейшем в любой своей части она могла быть переделана с минимумом усилий. В качестве картографической основы для карт аномалий использована международная миллионная карта. Нанесение пунктов производилось независимо на двух экземплярах карты с последующим контролем, списки пунктов тщательно корректировались. Из двух экземпляров карт один был использован для нанесения изоаномал и вычислений, другой сохранялся для последующего использования. Палетки для вычисления гравиметрической поправки в разных масштабах изготовлены фотографическим путем, несоответствие масштаба употребляемой палетки расстоянию между астропунктами было не более 5%; погрешность от этого практически устранена тем приемом, который изложен в указанной выше статье М.С. Молоденского. При больших расстояниях между астропунктами изображение палетки проектировалось на карту с помощью проекционного аппарата.

В связи с выбором косвенного приема интерполяции полных аномалий рабочая формула может быть приведена к такому виду:

$$\frac{N_B - N_A}{2l} = \frac{\Delta N_0}{2l} + \sum A \Delta g_0'' + 0,09 \sum AH + 0'' ,0076l \left[ \left( \frac{\partial \Delta g_0''}{\partial x} \right)_A + \left( \frac{\partial \Delta g_0''}{\partial x} \right)_B \right] + 0'' ,00068l \left[ \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)_A + \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)_B \right],$$

где  $\Delta g_0''$  — аномалия Буге,  $H$  — высота над уровнем моря, коэффициент  $k$  принят равным 0,09, что соответствует плотности верхних слоев земли, равной 2,15;  $\frac{\partial \Delta g_0''}{\partial x}$  и  $\frac{\partial H}{\partial x}$  считаются положительными, если аномалии и высоты возрастают от  $B$  к  $A$ .

**Результаты.** Изложенным способом получены разности высот геоида для 128 пар астрономических пунктов. Результаты представлены в табл. 1. В первом столбце указаны номера астропунктов (сохранена нумерация списка Д.А. Ларина; координаты этих пунктов даны в табл. 2). Во втором столбце дано изменение высоты геоида на соответствующем звене (в сантиметрах).

На рис. 4 изображена схема расположения астрономических пунктов, использованных нами для этой работы. Сплошными линиями соединены те пары пунктов, для которых вычислено изменение высот геоида с учетом всех членов формулы. Пунктиром соединены звенья (в табл. 1 они отмечены звездочкой), для которых не вычислены поправки по гипсометрической карте. Можно думать, что введение этих поправок очень больших изменений не внесет, тем не менее к востоку от 56-го меридиана по этой причине результаты следует считать предварительными.

Крупными римскими цифрами на схеме проставлены номера основных полигонов, на которые разбита нами вся сеть астрономо-гравиметрического нивелирования. С данными табл. 1, при обходе каждого полигона по часовой стрелке, получаются результаты, приведенные в табл. 3.

Таблица 1

Пункты	$\Delta N$	Пункты	$\Delta N$	Пункты	$\Delta N$
16-255	-68	267-57	+38	147-154 <sup>b</sup>	+574
255-257	-80	57-58	-25	154 <sup>b</sup> -151	+501
257-259	-2	58-56	+111	151-148	-32
259-261	+135	56-61	+137	148-59	-527
261-263	+88	61-63	+33	59-58	-630
263-265	+84	63-64	+37	148-149	+195
265-253	+10	64-69	-146	151-152	+179
253-251	-15	69-71	-27	64-62	-24
251-249	-2	71-72	+70	62-67	+22
249-267	+2	72-147	+204	67-66	+68
66-70	+53	163-154	+24	84-87	+13
70-75	-46	168-173	+791	182-178	-75
75-73	-82	173-242	-8	178-180	+214
73-69	-73	242-241	+43	180-185	-250
75-78	+116	241-172	+81	185-187	+99
78-159	+190	172-167	-812	187-188	+50
159-155	+2	70-76	+35	188-192	+50
155-157	-24	76-78	+90	192-191	+240
157-154	-49	66-80	-44	191-183	-68
154-77	-45	80-81	+51	183-164	+4
77-147	+21	81-87	+382	84-85	+74
159-161	+102	87-182	+171	85-92	+32
161-164	+226	182-175	-18	92-94	-70
164-169	+119	175-156	-131	94-100	-31
169-168	-111	156-159	+30	100-88	-27
168-167	+33	81-83	+189	88-89	-100
167-163	-190	83-84	+131	89-174	+45
174-177	+9	198-179	+188	37-44*	-163
177-182	+107	179-177	+114	44-48*	+92
84-79	+79	89-179	-44	48-49*	+7
79-85	+24	169-170	+128	49-113*	+36
94-96	+132	72-77	+149	113-117*	+62
		154-147	-69		
96-97	+97	178-174	-44	117-118*	+68
97-98	+142	92-90	-47	117-119*	-8
98-93	-12	90-33	+163	119-120*	-51
93-108	-17	33-35	+159	120-122*	+116
108-109	+7	35-32	-19		
109-111	+67	108-104	+34	44-46*	+166
111-112	+56	104-105	+321		
112-202	-114	108-103	-3		
202-201	-102	103-42	+58		
201-196	-230	42-40*	+159		
196-195	-234	40-41*	+54		
195-194	-125	41-36*	+242		
194-198	-63	36-37*	+214		

В последнем столбце табл. 3 для сравнения проставлены невязки, полученные астрономическим нивелированием, ошибка угла среднего наклона вычислена по формуле

$$\varepsilon = \frac{v}{L\sqrt{n} \sin 1''},$$

где  $v$  дано в табл. 3,  $n$  — число звеньев в полигоне,  $l$  — средняя квадратическая длина звена.

Прежде всего бросаются в глаза при взгляде на эту таблицу поразительно малые невязки, которые получаются при астрономическом нивелировании высот геоида. Это заранее трудно было предполагать, учитывая большие расстояния между астропунктами.

Следует заметить, что гравиметрические поправки в результаты по отдельным звеньям вносили очень существенные изменения, как это видно из чисел, приведенных в табл. 4.

Таблица 2

№	B	L	№	B	L	№	B	L
16	59° 46',3	30° 19',6	69	54° 2',8	38° 15',4	159	51° 34',1	40° 10',8
255	59 16,1	29 55,9	71	53 36,0	37 36,2	155	51 43,1	39 10,7
257	58 47,9	29 53,5	72	53 11,9	36 28,7	157	51 35,4	37 58,5
259	58 17,6	29 59,8	147	51 56,1	35 52,1	154	51 46,0	36 58,2
261	57 46,8	29 59,0	154 <sup>b</sup>	50 23,1	33 50,4	77	52 4,6	36 8,4
263	57 20,5	29 59,0	151	49 31,3	31 49,7	161	50 47,5	39 46,1
265	56 55,0	29 58,6	148	50 1,3	31 32,5	164	50 3,2	40 27,8
253	56 28,7	30 1,6	59	52 7,8	30 58,9	169	49 37,0	40 8,5
251	56 10,3	29 55,4	149	49 56,9	30 1,2	168	49 33,1	38 18,0
249	55 42,1	29 54,1	152	48 47,4	32 8,6	167	49 36,2	37 14,6
267	55 17,3	29 59,8	62	54 43,5	39 28,5	163	50 18,0	36 26,8
57	54 44,8	30 24,0	67	54 17,9	40 28,7	173	48 4,0	38 40,1
58	53 40,8	31 41,3	66	54 21,4	41 32,2	242	47 22,5	39 50,1
56	55 20,3	34 6,7	70	53 41,4	41 41,8	241	47 48,9	38 25,4
61	54 54,1	36 20,7	75	52 58,7	41 6,4	172	48 1,2	36 27,7
63	54 39,2	36 59,2	73	53 7,8	39 18,2	76	52 59,0	41 19,7
64	54 36,0	38 8,7	78	52 13,6	40 59,1	80	54 5,8	42 23,1
81	54 2,9	43 23,8	94	54 20,6	49 21,4	195	51 31,7	52 7,9
87	52 48,0	44 12,3	100	53 13,8	48 46,5	194	51 23,7	51 25,2
182	51 38,9	44 32,2	88	52 37,3	47 55,5	198	51 16,7	48 54,7
175	51 29,0	43 19,5	89	52 8,8	47 9,7	179	51 35,2	46 33,7
156	51 40,3	41 34,8	174	51 56,2	46 21,8	170	48 52,7	40 30,7
83	54 12,5	44 37,9	177	51 33,2	45 58,1	90	55 3,9	48 57,2
84	54 0,4	45 30,2	79	54 43,7	46 33,5	33	56 05,6	49 18,9
178	51 24,2	46 7,5	96	54 20,6	50 34,9	35	56 11,7	51 5,8
180	50 29,1	45 11,7	97	54 20,4	51 37,2	32	56 37,6	53 3,2
185	49 52,5	45 37,7	98	54 28,7	52 44,4	104	55 1,6	56 40,6
187	49 9,5	47 31,0	93	54 41,2	53 43,5	105	55 1,4	57 59,2
188	48 48,6	46 33,1	108	54 35,4	55 20,8	103	55 18,4	55 43,1
192	48 26,2	45 33,1	109	53 58,7	55 4,5	42	56 30,1	55 57,3
191	48 37,2	43 56,4	111	53 24,7	55 21,3	40	57 38,5	56 7,1
183	49 45,1	43 6,9	112	52 42,6	55 38,3	41	57 24,0	57 14,0
85	53 59,0	47 7,5	202	51 42,5	55 7,8	36	58 23,7	58 15,7
92	54 13,9	48 4,5	201	51 42,9	54 0,8	46	57 35,8	63 39,6
37	58 21,7	59 50,6	196	51 27,1	53 7,6			
44	57 42,5	61 46,3	117	55 3,8	61 50,0			
48	56 52,3	62 49,6	118	55 18,4	63 25,3			
49	56 24,1	61 50,2	119	54 15,5	61 35,0			
113	55 33,9	61 35,8	120	53 35,0	61 45,0			
			122	52 27,1	61 37,4			

В линейной мере гравиметрическая поправка на одном звене достигает иногда 5 м. Однако обычно на разных звеньях эти поправки включаются с разным знаком, поэтому на длинном участке их суммарный эффект получается незначительным. Исключение в этом отношении представляет только VIII полигон, но как раз здесь гравиметрические поправки значительно исправили результат. Затем табл. 3 показывает, что невязки получились почти во всех полигонах значительно меньше ожидаемых. *A priori* ошибка угла среднего наклона геоида была нами раньше (в упоминавшейся статье М.С. Молоденского) оценена величиной  $\pm 0'',6 - \pm 0'',7$ . Получилось фактически в среднем  $\pm 0'',5$ . Нужно заметить, что самая большая ошибка ( $\pm 1'',2$ ) получилась для первого полигона, который имеет среднюю квадратическую длину звена около 150 км. Некоторые звенья в этом по-

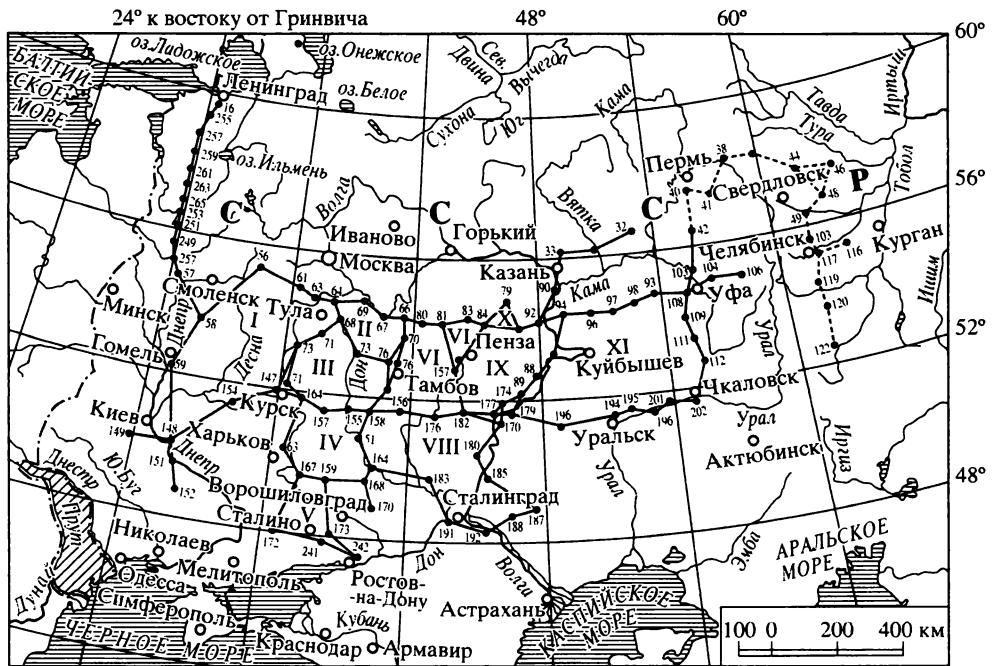


Рис. 4

Таблица 3

№ полигона	Длина его периметра в километрах	Невязка в сантиметрах, $v$	Ошибка угла среднего наклона	Невязка при астрономическом нивелировании
I	1754	+ 305	$\pm 1'',2$	+ 99
II	709	+ 64	$\pm 0'',5$	+ 130
III	994	+ 119	$\pm 0'',8$	- 6
IV	942	+ 160	$\pm 0'',9$	- 63
V	791	+ 62	$\pm 0'',3$	+ 135
VI	1045	+ 73	$\pm 0'',4$	+ 90
VII	452	- 49	$\pm 0'',4$	- 31
VIII	1530	+ 57	$\pm 0'',3$	- 484
IX	1051	- 145	$\pm 0'',8$	- 48
X	301	+ 29	$\pm 0'',3$	+ 78
XI	1801	- 6	$\pm 0'',1$	+ 152

лигоне имеют длину около 240 км (59–148, 154–147, 56–58) и проходят при этом через районы, для которых карта аномалий составлена неуверенно вследствие недостаточности гравиметрических материалов. Если не считать этого полигона, ошибка среднего наклона во всех случаях окажется меньше  $\pm 0'',9$ . Таким образом, точность вывода высот геоида астрономо-гравиметрическим нивелированием оказалась, судя по невязкам полигонов, значительно выше той, которая ожидалась заранее. В западных полигонах все невязки положительные, в восточных — отрицательные. Трудно сказать, закономерно или случайно это явление. Если бы оно оказалось закономерным и была бы найдена

причина систематических невязок в полигонах, то после внесения соответствующих поправок невязки еще значительно уменьшились бы. Это предположить трудно, так как невязки и без этого неожиданно малы. Скорее, эта комбинация знаков невязок есть дело случая.

Таблица 4

Число звеньев	Размеры гравиметрической поправки в угол среднего наклона (по абсолютной величине)	
	от 0'', 0	до 0'',25
31	0'',25	0'',50
23	0'',50	1'', 0
42	1'', 0	2'', 0
23	2'', 0	3'', 0
6	3'', 0	4'', 0
2	4'', 0	5'', 0
1		

Чтобы однозначно получить высоты геоида для всех астропунктов, через которые прошло астрономо-гравиметрическое нивелирование, сеть полигонов должна быть увязана. Мы сочли излишним прибегать здесь к точным методам уравнивания, поскольку дальнейшие изменения и дополнения в гравиметрическом материале не позволяют считать наши результаты окончательными. Увязка полигонов была выполнена произвольно, примерно по такому принципу. Если соседние полигоны имели противоположные знаки невязок, невязка распределялась между их общими звеньями. В остальных случаях невязки выносились ближайшим путем на внешний контур. Между звеньями невязки распределялись приблизительно пропорционально квадратам их длин.

Максимальные поправки получились, естественно, в первом полигоне (до 0,9 м в превышении геоида или до 0'',7 в среднем наклоне). Большинство звеньев (97 из 128) оставлены без поправок. Из исправленных звеньев 64 % получили поправку менее 0,3 м.

Для оценки точности астрономо-гравиметрического нивелирования, кроме невязок полигонов, мы воспользовались также специально проведенными для проверки метода наблюдениями по тридцатому меридиану от Пулково до Орши. На этом участке в 1935 г. были выполнены астрономическими партиями ЦНИИГАиК определения широт и долгот на 23 пунктах триангуляции первого и второго классов. Одновременно три гравиметрические партии (одна ЦНИИГАиК и две ВТОГиГР) произвели гравиметрическую съемку вдоль полосы шириной около 100 км в обе стороны от 30-го меридиана. К сожалению, материалы, полученные одной из партий ВТОГиГР (работавшей на среднем участке, широты 56–58°), оказались плохими. Хотя мы ими по необходимости и воспользовались, но к гравиметрическим поправкам на этом участке следует относиться с сомнением.

Так как астрономические пункты между Пулково и Оршей идут часто (расстояния между пунктами от 16 до 35 км, в среднем 20–25 км), здесь можно достаточно уверенно построить профиль геоида астрономическим нивелированием. Затем, выбрасывая часть астропунктов и привлекая к решению той же задачи карту аномалий силы тяжести, можем построить тот же профиль астрономо-гравиметрическим нивелированием. Сопоставляя превышения геоида по отдельным звеньям, вычисленные тем и другим способом, получаем материал для суждения о точности астрономо-гравиметрического нивелирования. Используя все астропункты, получаем астрономическим нивелированием следующие значения для высот геоида (табл. 5).



Таблица 5

№ пункта по списку	<i>B</i>	<i>L</i>	<i>N</i>	№ пункта по списку	<i>B</i>	<i>L</i>	<i>N</i>
16	59° 46',3	30° 19'',6	0	263	57° 20',5	29° 59'',0	+ 83
18	59 35,7	30 46,9	- 8	264	57 11,1	29 57,7	+ 109
255	59 16,1	29 55,9	- 58	265	56 55,0	29 58,6	+ 146
256	59 4,2	29 55,2	- 93	254	56 43,6	30 1,8	+ 163
257	58 47,9	29 53,5	- 124	253	56 28,7	30 1,6	+ 160
258	58 28,9	29 57,1	- 148	252	56 18,9	29 57,8	+ 154
259	58 17,6	29 59,8	- 140	251	56 10,3	29 55,4	+ 149
260	58 2,0	29 59,5	- 79	250	55 52,8	30 1,9	+ 123
261	57 46,8	29 59,0	- 4	249	55 42,1	29 54,1	+ 132
262	57 32,4	29 58,8	+ 47	248	55 33,4	30 1,5	+ 130

Выбрасывая половину астропунктов (через один) и выполняя по этой разреженной сети пунктов астрономо-гравиметрическое и (для сравнения) астрономическое нивелирования, получаем данные табл. 6.

Таблица 6

Звено	$\Delta N$ астрономо-гравиметрическое	$\Delta N$ астрономическое	$\Delta N$ из табл. 4	Разности		Ошибка среднего наклона
				2-4	3-4	
16-255	- 68	- 43	- 58	- 10	+ 15	- 0'',4
255-257	- 80	- 62	- 66	- 14	+ 4	- 0'',6
257-259	- 2	+ 5	- 16	+ 14	+ 21	+ 0'',5
259-261	+ 135	+ 99	+ 136	- 1	- 37	- 0'',03
261-263	+ 88	+ 94	+ 87	+ 1	+ 7	+ 0'',04
263-265	+ 84	+ 71	+ 63	+ 21	+ 8	+ 0'',9
265-253	+ 10	+ 5	+ 14	- 4	- 9	- 0'',2
253-251	- 15	- 15	- 11	- 4	- 4	- 0'',2
251-249	- 2	- 16	- 17	+ 15	+ 1	+ 0'',6
Сумма квадратов . . . . .				1192	2262	

Таким образом, включение в обработку гравиметрических поправок (т.е. переход к астрономо-гравиметрическому нивелированию) уменьшало сумму квадратов отклонений почти в 2 раза. Ошибки среднего наклона получились того же порядка, как по невязкам в полигонах. Самая большая ошибка  $\pm 0'',9$  приходится на участок, где использованы неудовлетворительные гравиметрические наблюдения.

Нужно отметить, что участок Пулковско-Орша для опробования методики астрономо-гравиметрического нивелирования выбран не вполне удачно. Здесь течение геоида очень плавно, гравиметрические поправки невелики, а поэтому не получается бросающегося в глаза эффекта от введения гравиметрических поправок. Совершенно иное получилось бы, если эти работы поставить в районах неправильных и быстро изменяющихся аномалий (например, около Гомеля, Сталинграда, в Крыму, на Кавказе), где астрономический метод даст значительно худшие результаты.

Выбрасывая три четверти всех астрономических пунктов, подобно тому, как это было сделано в предыдущем случае, мы получили табл. 7.

Таким образом, здесь астрономо-гравиметрическое нивелирование уменьшило сумму квадратов отклонений более чем в 3 раза. Наибольшая ошибка среднего наклона, равная

$-1'',0$ , опять приходится на тот же район, где использованы материалы неудовлетворительной гравиметрической съемки. Следовательно, как невязки полигонов, так и обработка опытного участка Пулково—Орша согласно дают для ошибки среднего наклона геоида, выводимого комбинированным астрономо-гравиметрическим нивелированием, величину около  $\pm 0'',4-0'',5$ . Величина этой ошибки, по-видимому, мало зависит от расстояния между астропунктами (при расстоянии между пунктами от 30 до 100 и более километров). Конечно, эти выводы не относятся к горным районам, поскольку мы пока не располагаем опытом астрономо-гравиметрического нивелирования в таких районах.

Таблица 7

Звено	$\Delta N$ астрономо-гравиметрическое	$\Delta N$ астрономическое	$\Delta N$ из табл. 4	Разности		Ошибка среднего наклона
				2-4	3-4	
255-259	- 54	- 18	- 82	+ 28	+ 64	+ 0'',5
259-263	+ 216	+ 152	+ 223	- 7	- 71	- 0'',1
263-253	+ 30	+ 29	+ 77	- 47	- 48	- 1'',0
253-249	- 49	- 21	- 28	- 21	+ 7	- 0'',5
Сумма квадратов . . . . .				3483	11490	

В табл. 8 приведены вычисленные после разброски невязок высоты геоида для всех астропунктов, вошедших в нашу работу. Эти же результаты, с округлением до 0,1 м, представлены на карте (рис. 5). Для наглядности на ней проведены линии равных высот

Таблица 8

Пункт	$N$	Пункт	$N$	Пункт	$N$	Пункт	$N$	Пункт	$N$
16	0	69	+ 199	159	+ 660	81	+ 344	94	+ 729
255	- 68	71	+ 190	155	+ 662	87	+ 687	100	+ 698
257	- 148	72	+ 295	157	+ 638	182	+ 779	88	+ 671
259	- 150	147	+ 565	154	+ 589	175	+ 761	89	+ 571
261	- 15	154	+ 1049	77	+ 544	156	+ 630	174	+ 626
263	+ 73	151	+ 1500	161	+ 762	83	+ 533	177	+ 635
265	+ 157	148	+ 1462	164	+ 988	84	+ 664		
253	+ 167	59	+ 845	169	+ 1097	178	+ 677	79	+ 743
251	+ 152	149	+ 1657	168	+ 937	180	+ 891	96	+ 861
249	+ 150	152	+ 1679	167	+ 970	185	+ 641	97	+ 958
267	+ 152	62	+ 299	163	+ 760	187	+ 740	98	+ 1100
57	+ 190	67	+ 300	173	+ 1715	188	+ 790	93	+ 1088
58	+ 165	66	+ 347	242	+ 1694	192	+ 840	108	+ 1071
56	+ 186	70	+ 400	241	+ 1725	191	+ 1080	109	+ 1078
61	+ 287	75	+ 354	172	+ 1794	183	+ 1012	111	+ 1145
63	+ 314	73	+ 272	76	+ 408	85	+ 767	112	+ 1201
64	+ 345	78	+ 470	80	+ 303	92	+ 799	202	+ 1087
201	+ 985	36	+ 1581	35	+ 1074	122	+ 1886		
196	+ 755	37	+ 1795	32	+ 1055	46	+ 1798		
195	+ 521	44	+ 1632	104	+ 1105				
194	+ 396	48	+ 1724	105	+ 1426				
198	+ 333	49	+ 1731	103	+ 1068				
179	+ 521	113	+ 1767	42	+ 1126				
170	+ 1225	117	+ 1829	40	+ 1285				
166		118	+ 1897	41	+ 1339				
90	+ 752	119	+ 1821						
33	+ 915	120	+ 1770						

геоида над эллипсоидом Бесселя через 2 метра. Эта карта в наглядной форме концентрирует конечные результаты настоящей работы. Весьма наглядно выделяется на ней депрессия геоида к югу от Москвы и большая депрессия около Сталинграда (последней соответствует обширная область отрицательных аномалий Прикаспийской впадины). Характерно быстрое нарастание высот геоида к югу и востоку от Пулково, так как эллипсоид Бесселя в этих направлениях уходит вниз.

Интересно сопоставить наши результаты с работами Хирвонена и Аккерля. Конечно, при этом надо иметь в виду, что их вывод относится к гравиметрическому эллипсоиду Хейфорда. «Гравиметрическим» мы называем эллипсоид с заданным сжатием, центр которого совмещен с центром тяжести Земли, малая ось параллельна оси вращения Земли, масса равна массе Земли (последнее почти равносильно равенству объемов эллипсоида и геоида).

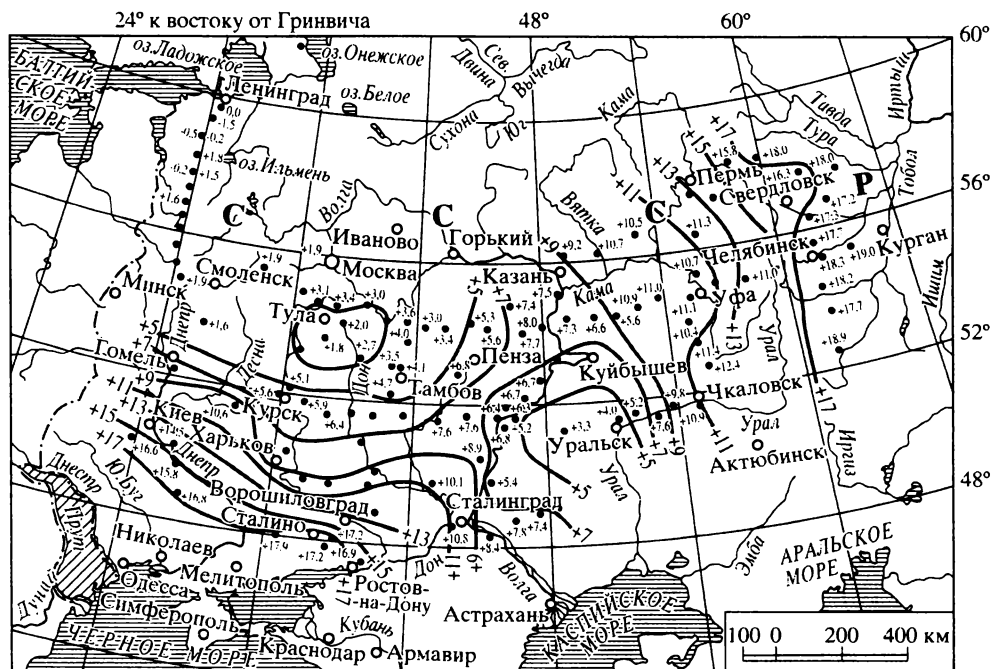


Рис. 5

Как и следовало ожидать, наши выводы коренным образом противоречат выводам Аккерля. По Аккерлю, геоид на востоке исследованного нами района (около Кустаная,  $\varphi = 52^\circ$ ,  $\lambda = 62^\circ$ ) по сравнению с Пулково должен повыситься приблизительно на 300 м. У нас получилось по отношению к эллипсоиду Бесселя повышение от Пулково к Кустаная на 18 м. Но так как большая полуось эллипсоида Бесселя по выводам проф. Ф.Н. Красовского заведомо мала (меньше метров на 800), сам эллипсоид Бесселя по отношению к гравиметрическому эллипсоиду около Кустаная уходит вниз на несколько десятков метров. Таким образом, если наши высоты геоида отнести к гравиметрическому эллипсоиду, то получим здесь понижение по сравнению с Пулково. О повышении же геоида, а тем более на 300 метров, как это должно быть по Аккерлю, говорить не приходится.

По Хирвонену, в том же месте должно быть понижение геоида по отношению к Пулково приблизительно на 80 м. Принимая во внимание ориентировочный характер выводов Хирвонена, согласие с нашими результатами, по крайней мере с качественной стороны, нужно признать удовлетворительным.

Как это было указано проф. Ф.Н. Красовским в его докладе на 7-й конференции Балтийской геодезической комиссии в 1934 г., знание высот геоида над эллипсоидом триангуляции открывает новые возможности для определения элементов эллипсоида, который наилучшим образом подходит к геоиду на данной территории. В этом же докладе дан вывод формулы, решающей эту задачу. Можно было бы использовать полученные нами здесь результаты для решения этой задачи. Решение это не представит затруднений как с принципиальной стороны, так и со стороны объема вычислительной работы. Однако заниматься этим мы считаем пока преждевременным. Нужно охватить астрономо-гравиметрическим нивелированием большие пространства, и это будет сделано по мере накопления материалов общей гравиметрической съемки.

# ОСНОВНЫЕ ВОПРОСЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ГРАВИМЕТРИИ\*

## ВВЕДЕНИЕ

Термин «геодезическая гравиметрия» впервые появился в тех же «Трудах ЦНИИГАиК», где публикуется и настоящая работа. Это наименование достаточно точно характеризует основное содержание старейшего раздела науки о гравитационном поле Земли, получившего свое развитие в классических исследованиях Клеро, Стокса, Брунса, Пуанкаре, Гельмерта, Пицетти, Венинг-Мейнеса, Прея, де Грааф-Хантера и других выдающихся математиков и геодезистов. В работах названных ученых развита стройная теория «физической геодезии», устанавливающая связь между объектами геодезического и физического исследования — фигурой геоида и силой тяжести.

Наиболее благоприятную почву для развития и применения на практике эта теория нашла на нашей родине. Этому способствовало:

- 1) плановое проведение общей гравиметрической съемки СССР, начатое в 1932 г. по постановлению Совета Труда и Оборона;
- 2) большая протяженность нашей страны, которая приводит к невозможности ее геодезического изучения традиционными, старыми способами;
- 3) неотложные задачи быстрого картографирования тех районов, которые до последнего времени являлись малообжитыми и начали бурно развиваться за последние годы.

Совокупность этих причин привела к тому, что физическая геодезия прочно вросла у нас в геодезическую практику. Работы проф. Ф.Н. Красовского убедительно доказали, что гравиметрические работы являются неотъемлемой частью в общей системе основных геодезических работ. Далее работы автора настоящей статьи, проф. И.А. Казанского и научного сотрудника ЦНИИГАиК Б.В. Дубовского теоретически и на большом опытном материале доказали возможность эффективного практического использования гравиметрической съемки для астрономо-гравиметрического нивелирования и при развитии опорной сети для топографических съемок путем исправления астрономических координат гравиметрическими поправками. Разработанные при этом методы использованы для градусных измерений при выводе элементов размера и ориентировки нового эллипсоида триангуляции СССР. Строгий метод обработки триангуляции путем проектирования измеренных геодезических элементов на эллипсоид, разработанный проф. Ф.Н. Красовским, практически не осуществим без привлечения гравиметрических данных. Таким образом, классические методы «физической геодезии» впервые получили прочную практическую базу, и тесная связь с практикой незамедлительно повысила в СССР интерес к теории и направила ее на новые пути исследования. Именно в силу этой причины в настоящей работе нам приходится чаще всего ссылаться на исследования соотечественников.

Задачей геодезической гравиметрии является изучение взаимных связей между фигурой Земли и различными элементами земного гравитационного поля, которые можно измерять на ее поверхности. При этом, конечно, большую роль играет вопрос о той точности, с которой в заданных конкретных условиях один из элементов гравитационного поля может быть получен по известным другим элементам.

\* Труды ЦНИИГАиК. 1945. Вып. 42. С. 3–107.

Основным направлением, к которому относятся результаты всех геодезических измерений, является направление вектора силы тяжести в соответствующих точках физической поверхности Земли. Оно определяется на основе астрономических наблюдений. Одним из наиболее важных видов геодезических работ являются нивелировки, дающие представление о значении потенциала силы тяжести на поверхности Земли. При отнесении результатов измерений на эллипсоид для их математической обработки необходимо знать истинную фигуру Земли, чтобы получить расстояние от места наблюдения до эллипсоида, и направление нормали к эллипсоиду, которое может быть задано в форме отклонения отвесной линии. Если к этим элементам добавить еще напряженность поля силы тяжести, то мы исчерпаем перечень тех основных гравитационных элементов, с которыми в первую очередь приходится иметь дело геодезистам. Далее можно было бы добавить известные элементы, определяемые гравитационным вариометром, и, с еще большим основанием, неопределяемую пока из наблюдений вторую вертикальную производную от потенциальной функции.

Таким образом, первым и наиболее трудным вопросом геодезической гравиметрии является установление соотношений между фигурой Земли, потенциалом и силой тяжести. Ему посвящена первая часть настоящей работы. Мы считаем, что читатель знаком с основными относящимися сюда исследованиями, и ограничиваемся краткими напоминаниями, так как целью нашего изложения является не обзор проделанных ранее работ, а изложение полученных нами результатов. Менее всего нового читатель найдет в главе I, в которой излагается теория взаимной связи элементов гравитационного поля регуляризированной Земли. Это естественно, поскольку этот вопрос является и наиболее простым, и наиболее старым. Однако, по-видимому, этот вопрос нам удалось изложить с единой точки зрения, более строго и просто, чем где бы то ни было из известных нам работ.

Включение этой главы вызвано не только ее связью с последующими, но и тем, что в некоторых из ранее известных выводов обнаружены весьма существенные ошибки, которые в нашем изложении, конечно, исправлены. Это относится к выводу формул Малкина и Каландро, определяющих силу тяжести и высоту геоида через отклонение отвесной линии. При составлении этой главы были внимательно изучены работы Н.Р. Малкина. Нами избран более прямой и простой метод исследования, не требующий применения бесконечных рядов.

От простейшего случая регуляризированной Земли в главе II мы переходим к проблеме геоида нерегуляризированной Земли. Решение проблемы Стокса для нерегуляризированной Земли привело у различных исследователей к различным результатам, кратко изложенным в этой главе. Открывшаяся в связи с этим дискуссия не выяснила, какой результат можно считать более точным и в каком отношении все они находятся к формуле Стокса.

В главе II исправлена одна неточность в исследованиях проф. Н.Д. Моисеева и показано, что при надлежащей трактовке вопроса получается полное согласие между исследованиями Стокса и результатами, полученными Моисеевым, Малкиным и Молоденским. Обращено внимание на то, что при элементарной трактовке формула Стокса в горных районах может дать неприемлемые результаты, особенно если приведение силы тяжести к уровню моря проводится с нормальным значением ее вертикального градиента.

В следующей III главе прежде всего рассматривается основной комплекс представлений, в который входят тесно между собой связанные понятия о высоте точек поверхности Земли над уровнем моря, о редукции силы тяжести и астрономических координат к уровню геоида и связь этих вопросов с геологическим строением земной коры. Обычная трактовка этих вопросов разбивает единую проблему на частные, в связи с чем теряется глубина понимания отдельных вопросов и возникают неоправданные усложнения.

Изложенный в главе II метод, основанный на исследовании фигуры геоида нерегуляризированной Земли, при применении его к указанным выше взаимосвязанным вопросам вносит неопределенность, которая может быть сведена к невозможности достаточно точного вычисления редукции Прея и производных от нее. Это связано с тем, что без знания геологического строения верхних (лежащих выше геоида) областей земной коры нельзя строго определить фигуру геоида через элементы гравитационного поля, наблюдаемые на поверхности Земли. Зато на физической поверхности Земли, где проводятся все геодезические измерения, связь между потенциалом, силой тяжести, отклонением отвеса и фигурой Земли может быть достаточно строго установлена и притом без использования каких-либо геологических сведений.

Очень важно отметить также, что, кроме перечисленных здесь, нет необходимости привлекать к решению задачи какие-либо другие элементы (например, в решение не входит вторая радиальная производная от потенциальной функции). Установление такой связи принципиально дает все, что может интересовать геодезиста при обработке триангуляции или при решении других практических задач. Геоид как промежуточная поверхность редукции геодезических измерений при таком подходе к вопросу исключается, в связи с чем отпадают связанные с ним неопределенности. Нами получено довольно сложное линейное интегральное уравнение типа уравнения Фредгольма, дающее ответ на поставленную здесь задачу; впрочем, оно всегда может быть разрешено численными методами. Дальнейшее исследование этого уравнения может идти по нескольким направлениям:

- 1) можно упростить его путем отбрасывания малых членов, не имеющих практического значения;
- 2) из полученного уравнения можно исходить при исследовании погрешностей применяемых в настоящее время упрощенных методов решения задачи;
- 3) с его помощью можно изучать вопросы о редукциях, причем строгое отправное уравнение обеспечит согласованность в постановке вопроса о редукции различных элементов.

Этими тремя главами исчерпывается содержание первой части, посвященной вопросам применения теории потенциала к решению задач геодезической гравиметрии. Во второй части, естественно, встает задача исследования основных ошибок, возникающих вследствие отступления фактических данных о земном гравитационном поле от требований теории. Требования эти, как известно, сводятся к тому, что потенциал и сила тяжести должны быть известны в каждой точке на всей поверхности Земли. Из наблюдений же мы получаем значения силы тяжести в дискретных точках, причем еще небольшая часть всей поверхности Земли изучена в гравиметрическом отношении. Последнее обстоятельство приводит к тому, что наиболее важные задачи оказываются пока неразрешимыми.

В первую очередь это относится к такой фундаментальной задаче, как установление взаимной связи изолированных систем градусных измерений. При ориентировании триангуляционных сетей по астрономо-гравиметрическим данным при современном положении они оказываются отнесенными не к общему эллипсоиду, а к неизвестной поверхности, степень отклонения которой от эллипсоида вращения заранее неизвестна. Предельные и средние величины возможных отклонений (по высоте и в углу между нормальными) оказалось возможным оценить, используя соответственно среднее квадратическое значение аномалий силы тяжести на земной поверхности и разложение этих аномалий по сферическим функциям. Исследованию этих вопросов посвящена глава IV, в которой впервые излагается несколько громоздкий, но достаточно строгий, по нашему мнению, метод решения этой задачи. Простое решение, ранее данное де Грааф-Хантером, основано на недоразумении.

Мы пришли к выводу, что практически вполне приемлемая точность решения указанной задачи может быть обеспечена в том случае, когда в разложении аномалий по сферическим функциям определены первые 10 коэффициентов. Разработанный здесь метод окажется полезным не только для оценки возможного влияния аномалий в дальних зонах на вывод уклонений отвеса и высот геоида, но и для достаточно точного учета этого влияния, если указанные 10 коэффициентов определены.

Помимо разобранных задач, в которых использование материалов мировой гравиметрической съемки неизбежно, большое практическое значение получили задачи другого рода (глава V), которые могут решаться при наличии только местной гравиметрической съемки. Это те задачи, решение которых приводит к интегрированию аномалий, умноженных на функции, которые очень быстро убывают с удалением от исследуемого пункта. К их числу относится в первую очередь задача интерполирования астрономо-геодезических уклонений отвеса. На ее решении основано астрономо-гравиметрическое нивелирование и развитие опорной сети для топографических съемок путем подсчета гравиметрических поправок, вносимых в астрономические координаты для перевода их в геодезические.

Главным практическим вопросом подобных задач является установление таких минимальных размеров области местной съемки, которые еще могут обеспечить желаемую точность результатов. Этому посвящена первая половина главы V. Во второй ее половине выяснена необходимость учета весьма существенной систематической поправки в результаты астрономо-гравиметрического нивелирования, охватывающего большую территорию. Эта поправка должна вводиться, если триангуляция обработана методом развертывания геодезических линий с геоида на эллипсоид с сохранением их длин. Полученные выводы применены к конкретным случаям, взятым из обработки градусных измерений и из материалов астрономо-гравиметрического нивелирования. Поправочные члены оказались большими, но учитываются очень уверенно. Результаты этого исследования представляют интерес и с другой стороны. Они устанавливают связь между геодезическими координатами, получаемыми при вычислении триангуляции двумя методами — методом проектирования и методом развертывания. Таким образом можно совершить переход от одной из указанных систем координат к другой (конечно, при этом получается только главный член, так как ряд второстепенных эффектов не учитывался).

Мы уже отметили, что вторым основным фактором, нарушающим соответствие между требованиями теории и данными, получаемыми из наблюдений, является неизбежная дискретность точек, в которых сила тяжести определяется непосредственным наблюдением.

Таким образом встает задача интерполяции силы тяжести, от степени успеха решения которой весьма существенно зависит точность результативных гравиметрических выводов. Эти вопросы отражены в последней главе. Нами в одной из более ранних работ было указано, что при небольшом по сравнению с глубиной компенсации расстоянии между пунктами применение для интерполяции гипотезы изостазии вносит ничем не оправданные усложнения задачи. Поэтому ввиду плотности гравиметрической съемки СССР ошибка интерполяции изостатических аномалий не исследовалась. Рассмотрены только аномалии в свободном воздухе и аномалии Буге. Приведенные рассуждения освещают принципиальную сторону тех расчетов, которые должны выполняться при проектировании размещения гравиметрических пунктов, и точности определения аномалий силы тяжести в них для решения тех или иных геодезических задач.

Метод де Грааф-Хантера, основанный на рассмотрении «ошибки представительства», дополнен расчетами о влиянии аномалий в ближайших окрестностях астрономического пункта, так как этот пробел в исследованиях де Грааф-Хантера не позволял решать до конца соответствующие задачи. Для случая, когда пункты гравиметрической съемки рав-



номерно размещены по площади, как это имеет место в съемке СССР, получено простое соотношение между точностью вывода уклонения отвеса и ошибкой представительства площадки, соответствующей единичному пункту. Эти простые исследования, может быть, недостаточно строгие, восполняют пробел в важном техническом вопросе, который ранее приходилось решать интуитивно.

Указанными шестью главами исчерпывается содержание настоящей работы. Мы видим, что в них преимущественно рассматривается принципиальная сторона дела и совсем не затронуты вопросы техники соответствующих вычислений, которые в настоящее время очень обстоятельно разработаны, хотя еще не опубликованы.

Ряд важных вопросов геодезической гравиметрии здесь не отражен или отражен частично, так как соответствующие работы нами или опубликованы, или не закончены. Сюда относится теория астрономо-гравиметрического нивелирования, вопросы применения гравиметрии для развития основы топографических съемок, методика вывода уклонений отвеса в горных районах, разработка научных требований к распределению и точности гравиметрических пунктов разных классов и другие.

При составлении настоящей работы из научного архива ЦНИИГАиК использованы нами (конечно, с соответствующими оговорками в тексте) числовые материалы из отчетов научных сотрудников ЦНИИГАиК Б.В. Дубовского, А.М. Лозинской и В.Ф. Еремеева.

## ИССЛЕДОВАНИЕ ОСНОВНЫХ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ГРАВИМЕТРИИ

### Глава I

#### ВЗАИМНАЯ СВЯЗЬ ЭЛЕМЕНТОВ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ РЕГУЛЯРИЗИРОВАННОЙ ЗЕМЛИ

##### § 1. Некоторые соотношения между значениями гармонической функции и ее производных

При изучении ряда работ, в которых устанавливается связь между различными элементами гравитационного поля, в большинстве выводов (приводимых далее в исправленном виде) нами обнаружен ряд ошибок. Кроме того, оказалось возможным всю проблему изложить с одной общей точки зрения и чрезвычайно упростить вычисления, связанные с выводом основных формул.

Учитывая известные соображения, которые приводятся при выводе формулы Стокса, мы будем считать в настоящей главе краевые условия отнесенными к сфере, а эффект вращения Земли исключенным.

В основу последующих выводов кладем известное преобразование Грина:

$$U(M) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} - (U - U_0) \frac{\partial / r}{\partial n} \right) d\sigma, \quad (1.1)$$

где  $U$  — гармоническая вне поверхности сферы  $\sigma$  и регулярная на бесконечности функция,  $n$  — направление внешней нормали к сфере,  $r$  — расстояние от точки  $M$ , для которой определяется значение  $U$ , до элемента поверхности сферы  $d\sigma$ .

В (1.1) мы намеренно изменили обычное написание формулы Грина, введя вместо  $U$  под знак интеграла разность  $U - U_0$ , понимая под  $U_0$  значение  $U$  в точке пересечения сферы с радиусом-вектором точки  $M$ . При такой записи формула (1.1) сохраняет свое написание при переходе  $M$  на сферу перемещением по прямой к ее центру, так как

устраняется скачок непрерывности потенциала двойного слоя, плотность которого в точке разрыва непрерывности обращается в нуль. Действительно, учитывая постоянство  $U_0$  относительно интегриации по  $\sigma$  и значения интеграла Гаусса ( $-4\pi$ , когда  $M$  вне  $\sigma$ , и  $-2\pi$ , когда  $M$  на  $\sigma$ ), можем вернуться от (1.1) к обычной записи.

Чтобы облегчить предельный переход к сфере после дифференцирования, к которому нам далее придется прибегнуть, произведем подобное же преобразование и в первом члене, содержащем  $1/r$ :

$$U(M) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial U}{\partial n} - \frac{\partial U_0}{\partial n} \right) - (U - U_0) \frac{\partial/r}{\partial n} \right] d\sigma - \frac{R^2}{\rho} \frac{\partial U_0}{\partial n}. \quad (1.2)$$

Здесь  $R$  — радиус сферы,  $\rho$  — расстояние от точки  $M$  до центра этой сферы,  $\frac{\partial U_0}{\partial n}$  — значение  $\frac{\partial U}{\partial n}$  в точке пересечения сферы с радиусом-вектором  $\rho$  точки  $M$ .

Для проверки равенства (1.2) учтем, что производная  $\frac{\partial U_0}{\partial n}$  при интегрировании по  $\sigma$  должна рассматриваться как постоянная и

$$\int_{\sigma} \frac{1}{r} d\sigma = \frac{4\pi R^2}{\rho},$$

так как левую часть можно рассматривать как потенциал, развиваемый на точку  $M$  массами, равномерно распределенными на поверхности сферы и имеющими плотность, равную единице.

$1/r$  можно выразить через  $\rho$ ,  $R$  и  $\psi$ :

$$\frac{1}{r} = (\rho^2 + R^2 - 2\rho R \cos \psi)^{-1/2},$$

где  $\psi$  — угол между радиусом-вектором  $\rho$  точки  $M$  и направлением от  $R$  к переменному элементу поверхности  $d\sigma$ .

Образует производные от  $1/r$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial/r}{\partial n} &= -(R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \psi)^{-3/2} (R - \rho \cos \psi), \\ \frac{\partial/r}{\partial \rho} &= -(R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \psi)^{-3/2} (\rho - R \cos \psi), \\ \frac{\partial^2/r}{\partial n \partial \rho} &= \frac{\cos \psi}{r^3} + \frac{3}{r^5} (R - \rho \cos \psi)(\rho - R \cos \psi). \end{aligned}$$

Для положения точки  $M$  на поверхности сферы берем предельное значение предыдущих выражений при  $\rho$ , стремящемся к  $R$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial/r}{\partial n} &= \frac{\partial/r}{\partial \rho} = -\frac{1}{2rR}, \\ \frac{\partial^2/r}{\partial n \partial \rho} &= \frac{1}{r^3} + \frac{1}{4R^2 r} = \frac{1}{r^3} - \frac{1}{2R} \frac{\partial/r}{\partial n}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

причем в последних формулах под  $r$  понимается, конечно, расстояние между двумя точками сферы:

$$r = 2R \sin \frac{\psi}{2}.$$

Берем производную по  $\rho$  от обеих частей (1.2):

$$\frac{\partial U(M)}{\partial \rho} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \left[ \frac{\partial/r}{\partial \rho} \left( \frac{\partial U}{\partial n} - \frac{\partial U_0}{\partial n} \right) - (U - U_0) \frac{\partial^2/r}{\partial n \partial \rho} \right] d\sigma + \frac{R^2}{\rho^2} \frac{\partial U_0}{\partial n}. \quad (1.4)$$

Когда точка  $M$  переходит на поверхность сферы, первый интегральный член, на основании (1.3), можно рассматривать как потенциал двойного слоя, который сохраняет непрерывность, так как плотность его в предельной точке равна нулю.

Второй интеграл является несобственным и имеет смысл, если значение  $U$  на поверхности сферы можно дважды дифференцировать и разложить в ряд Тейлора вблизи значения  $U = U_0$ :

$$U - U_0 + (a_1 \cos \alpha + b_1 \sin \alpha)r + (a_2 \cos^2 \alpha + b_2 \sin^2 \alpha + c_2 \sin 2\alpha)r^2 \dots$$

Тогда при интегрировании по азимуту  $\alpha$  останутся члены порядка не ниже  $r^2$ . образуем функцию

$$F = \frac{\partial U(M)}{\partial \rho} + \frac{1}{2R} U(M)$$

и найдем ее предельное значение, когда  $\rho$  стремится к  $R$ , используя при этом равенства (1.2) и (1.4). Получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_0}{\partial n} + \frac{1}{2R} U_0 = -\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \left[ \left( \frac{\partial/r}{\partial \rho} + \frac{1}{2Rr} \right) \left( \frac{\partial U}{\partial n} - \frac{\partial U_0}{\partial n} \right) - \right. \\ \left. - (U - U_0) \left( \frac{\partial^2/r}{\partial n \partial \rho} + \frac{1}{2R} \frac{\partial/r}{\partial \rho} \right) \right] d\sigma + \frac{\partial U_0}{\partial n} - \frac{1}{2} \frac{\partial U_0}{\partial n}. \end{aligned}$$

На основании (1.3) делаем заключение, что первый интеграл обращается в нуль и

$$\frac{\partial^2(1/r)}{\partial n \partial \rho} + \frac{1}{2R} \frac{\partial(1/r)}{\partial \rho} = \frac{1}{r^3}.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial U_0}{\partial n} + \frac{1}{R} U_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{U - U_0}{r^3} d\sigma. \quad (1.5)$$

Эта формула решает задачу, обратную внешней сферической задаче Неймана. Она определяет значение нормальной производной для гармонической функции, заданной на поверхности сферы.

Применим формулу (1.5) к функции  $\rho \frac{\partial U_0}{\partial \rho}$ , которая, как известно, также является гармонической и регулярной на бесконечности.

Очевидно,

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) = \frac{\partial U}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2}.$$

Следовательно, вместо (1.5) получим в этом случае

$$\left( \frac{\partial U_0}{\partial \rho} + R \frac{\partial^2 U_0}{\partial \rho^2} \right) + \frac{\partial U_0}{\partial \rho} = \frac{R}{2\pi} \int \frac{\frac{\partial U}{\partial n} - \frac{\partial U_0}{\partial n}}{r^3} d\sigma,$$

т.е.

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial \rho^2} = -\frac{2}{R} \frac{\partial U_0}{\partial \rho} + \frac{1}{2\pi} \int \frac{\frac{\partial U}{\partial n} - \frac{\partial U_0}{\partial n}}{r^3} d\sigma. \quad (1.6)$$

Эта формула позволяет определить вторую радиальную производную гармонической функции по значениям первой производной, заданным на сфере.

Теперь перейдем к соответствующим задачам гравиметрии.

## § 2. Основные задачи гравиметрии для регуляризированной Земли

Обозначим высоту геоида — расстояние от геоида до поверхности относимости — через  $\zeta$ , а значение потенциала на геоиде через  $C$ . При перемещении единицы массы с геоида на сферу по радиальному направлению производится работа  $\gamma\zeta$  (с точностью до  $\zeta^2$ , если под  $\gamma$  понимать нормальное значение силы тяжести на сфере). Поэтому потенциал регуляризированной Земли на сфере равен

$$V = C + \gamma\zeta,$$

а нормальный потенциал равен  $C$  (как обычно, мы понимаем под поверхностью относимости такую сферу, на которой все массы Земли, будучи сосредоточенными в ее центре, развивают тот же потенциал, что и массы регуляризированной Земли на поверхности геоида).

Следовательно, возмущающий потенциал  $U$  на поверхности сферы определяется так (формула Брунса):

$$U = C + \gamma\zeta - C = \gamma\zeta. \quad (1.7)$$

Точно так же, если сила тяжести на поверхности геоида регуляризированной Земли равна  $g_0$ , то нормальное значение силы тяжести на той же поверхности равно

$$\gamma - \frac{2\gamma\zeta}{R}$$

(приведение в свободном воздухе), и аномалия силы тяжести (которую можем считать отнесенной к сфере) равна

$$-\frac{\partial U}{\partial n} = g_0 - \left( \gamma - \frac{2\gamma\zeta}{R} \right) = \Delta g + \frac{2\gamma\zeta}{R}. \quad (1.8)$$

Подставляя эти значения в (1.1), получаем

$$U(M) = +\frac{1}{4\pi} \int \left[ \frac{1}{r} \left( \Delta g + \frac{2\gamma\zeta}{R} \right) + \gamma\zeta \frac{\partial(1/r)}{\partial n} \right] d\sigma.$$

Как указывалось, интеграл справа не терпит разрыва непрерывности при переходе  $M$  на поверхность сферы, а потому после предельного перехода получаем

$$U_0 = \frac{1}{2\pi} \int \left[ \frac{1}{r} \left( \Delta g + \frac{2\gamma\zeta}{R} \right) + \gamma\zeta \frac{\partial(1/r)}{\partial n} \right] d\sigma$$

или, с помощью (1.3) и (1.7),

$$\zeta = \frac{1}{2\pi\gamma} \int \frac{\Delta g}{r} d\sigma + \frac{3}{4\pi R} \int \frac{\zeta}{r} d\sigma. \quad (1.9)$$

Мы получили интегральное уравнение, решение которого приводит к известной формуле Стокса.

Подставляя (1.7) и (1.8) в (1.5), получаем формулу

$$\Delta g + \frac{\gamma \zeta}{R} + \frac{\gamma}{2\pi} \int \frac{\zeta - \zeta_0}{r^3} d\sigma = 0, \quad (1.10)$$

которая определяет аномалию силы тяжести через высоты геоида.

Точно так же (1.6) дает

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} = \frac{2\Delta g_0}{R} + \frac{4\gamma \zeta}{R^2} - \frac{1}{2\pi} \int \frac{\Delta g - \Delta g_0}{r^3} d\sigma - \frac{\gamma}{\pi R} \int \frac{\zeta - \zeta_0}{r^3} d\sigma.$$

Исключая отсюда последний интеграл с помощью (1.10), получаем формулу

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} = \frac{4\Delta g}{R} + \frac{6\gamma \zeta}{R^2} - \frac{1}{2\pi} \int \frac{\Delta g - \Delta g_0}{r^3} d\sigma, \quad (1.11)$$

которая определяет вторую радиальную производную потенциала через аномалии силы тяжести на поверхности сферы (высота геоида входит сюда очень слабо).

Формулу Каландро, которая дает интегральную связь между отклонением отвеса и высотой геоида, можно получить из самых элементарных соображений. Данную точку на сфере примем за полюс, а положение любой другой определим ее угловым расстоянием  $\psi$  от первой и азимутом  $\alpha$ , отсчитанным от любого фиксированного направления. Тогда  $\frac{1}{R} \frac{\partial \zeta}{\partial \psi}$  есть составляющая отклонения отвеса в направлении  $\psi$ , а

$$\int_0^\pi \frac{\partial \zeta}{\partial \psi} d\psi = \zeta_\pi - \zeta_0,$$

где  $\zeta_0$  — высота геоида для данной точки, а  $\zeta_\pi$  — для ее антипода.

Умножая обе части последнего равенства на  $d\alpha$  и интегрируя по  $\alpha$  в пределах от 0 до  $2\pi$ , получаем

$$\zeta_\pi - \zeta_0 = \frac{1}{2\pi R^2} \int \frac{\partial \zeta}{\partial \psi} \operatorname{cosec} \psi d\sigma. \quad (1.12)$$

Полученная формула соответствует идее астрономического нивелирования, при котором высоты геоида получаются с точностью до произвольной постоянной. Для исключения этой постоянной привлечем обычное условие

$$\int_\sigma \zeta d\sigma = 0.$$

Путем интегрирования по частям это условие выразим через отклонение отвеса:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\sigma \zeta d\sigma = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi \zeta \sin \psi d\psi = \int_0^{2\pi} d\alpha \left[ \zeta_\pi + \zeta_0 + \int_0^\pi \frac{\partial \zeta}{\partial \psi} \cos \psi d\psi \right] = \\ &= 2\pi(\zeta_\pi + \zeta_0) + \frac{1}{R^2} \int \frac{\partial \zeta}{\partial \psi} \operatorname{ctg} \psi d\sigma. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\zeta_{\pi} + \zeta_0 = -\frac{1}{2\pi R^2} \int \frac{\partial \zeta}{\partial \psi} \operatorname{ctg} \psi d\sigma. \quad (1.13)$$

Исключая из (1.12) и (1.13)  $\zeta_{\pi}$ , получаем формулу, которая имеет тот же смысл, что и формула Каландро, но значительно проще нее:

$$\zeta_0 = -\frac{1}{4\pi R^2} \int \frac{\partial \zeta}{\partial \psi} \operatorname{ctg} \frac{\psi}{2} d\sigma. \quad (1.14)$$

Поскольку исходные предпосылки вывода последней формулы можно отнести к  $\Delta g$  и  $\frac{\partial \Delta g}{\partial \psi}$ , по аналогии с (1.14) имеем

$$\Delta g = -\frac{1}{4\pi R^2} \int \frac{\partial \Delta g}{\partial \psi} \operatorname{ctg} \frac{\psi}{2} d\sigma. \quad (1.15)$$

Формулу, обратную формуле Венинг-Мейнеса, т.е. определяющую аномалию силы тяжести через уклонения отвеса, заданные на поверхности сферы, легко получить из (1.10) путем интегрирования по частям.

Действительно, вместо (1.10) можем написать

$$\Delta g = -\frac{\gamma}{2\pi} \int (\zeta - \zeta_0) \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{2R^3} \right) d\sigma = \frac{\gamma}{2\pi} \int d\alpha \int (\zeta - \zeta_0) \left( d\frac{1}{r} - \frac{1}{4R^3} dr^2 \right), \quad (1.16)$$

а после интегрирования по частям получаем

$$\Delta g = \frac{3\gamma}{2R} (\zeta_{\pi} - \zeta_0) - \frac{3\gamma}{2\pi} \int \frac{\partial \zeta}{\partial r} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{r}{4R^3} \right) d\sigma.$$

Подобным же путем можно получить все другие формулы, связывающие какой-либо один элемент гравитационного поля с любым другим, заданным на всей сфере. Мы ограничились разбором тех формул, которые имеют сравнительно большие шансы на применение. Вывод формулы Венинг-Мейнеса мы опускаем, так как он общеизвестен.

### § 3. Нормальный потенциал силы тяжести

Изложим решение проблемы Стокса для случая, когда заданной уровенной поверхностью является сжатый эллипсоид вращения. Уравнение этого эллипсоида в декартовых координатах, отнесенное к его центру, зададим следующим образом:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad (1.17)$$

где  $a$  — большая полуось и  $b$  — малая полуось эллипсоида. Кроме уравнения поверхности уровня мы должны считать заданными массу планеты  $M$  и угловую скорость вращения  $\omega$ .

Уравнение эллипсоида (1.17) в криволинейных координатах удобно выражается через параметры  $u$  и  $v$ :

$$\left. \begin{aligned} x &= a \sin u \sin v, \\ y &= a \sin u \cos v, \\ z &= b \cos u. \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

Здесь  $x, y, z$  — координаты произвольной точки эллипсоида, причем параметр  $v$  изменяется от 0 до  $2\pi$ , а  $u$  — от 0 до  $\pi$ .  $u$  представляет собой дополнение до  $90^\circ$

приведенной широты, а  $v$  — долготу. Если мы в (1.18)  $a$  и  $b$  будем рассматривать как переменные величины, зависящие от параметра  $w$ :

$$\left. \begin{aligned} a &= c \operatorname{ch} w, \\ b &= c \operatorname{sh} w, \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

то при постоянном  $w = w_0$  получим уравнение эллипсоида (1.17).

Для этого нужно  $c$  и  $w_0$  определить следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} c^2 &= a^2 - b^2, \\ \operatorname{th} w_0 &= b/a. \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

Считая  $w$  третьим переменным параметром, мы переходим от декартовых координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  к криволинейным  $u$ ,  $v$ ,  $w$ .

Формулы перехода получаются из (1.18) и (1.19):

$$\left. \begin{aligned} x &= c \sin u \sin v \operatorname{ch} w, \\ y &= c \sin u \cos v \operatorname{ch} w, \\ z &= c \cos u \operatorname{sh} w. \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

Заметим, что поверхность  $v = \operatorname{const}$  является плоскостью;  $w = \operatorname{const}$  — эллипсоидом;  $u = \operatorname{const}$  — гиперboloидом вращения. Все эллипсоиды и гиперboloиды софокусны.

Образует частные производные от декартовых координат по криволинейным:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= c \cos u \sin v \operatorname{ch} w; & \frac{\partial x}{\partial v} &= c \sin u \cos v \operatorname{ch} w; & \frac{\partial x}{\partial w} &= c \sin u \sin v \operatorname{sh} w; \\ \frac{\partial y}{\partial u} &= c \cos u \cos v \operatorname{ch} w; & \frac{\partial y}{\partial v} &= -c \sin u \sin v \operatorname{ch} w; & \frac{\partial y}{\partial w} &= c \sin u \cos v \operatorname{sh} w; \\ \frac{\partial z}{\partial u} &= -c \sin u \operatorname{sh} w; & \frac{\partial z}{\partial v} &= 0; & \frac{\partial z}{\partial w} &= c \cos u \operatorname{ch} w. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} &= 0, \\ \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial w} &= 0, \\ \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial z}{\partial w} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

$$\left. \begin{aligned} h_1^2 &= \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 = c^2 (\operatorname{ch}^2 w - \sin^2 u), \\ h_2^2 &= \left( \frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 = c^2 \sin^2 u \operatorname{ch}^2 w, \\ h_3^2 &= \left( \frac{\partial x}{\partial w} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial w} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial w} \right)^2 = c^2 (\operatorname{ch}^2 w - \sin^2 u). \end{aligned} \right\} \quad (1.23)$$

Анализируя первую группу уравнений, приходим к выводу, что координатные поверхности образуют взаимно ортогональную систему. Следовательно, дифференциал длины линии может быть определен из квадратичной формы:

$$ds^2 = h_1^2 du^2 + h_2^2 dv^2 + h_3^2 dw^2, \quad (1.24)$$

а оператор Лапласа — выражен известной формулой:

$$\Delta U = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial U}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial U}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial U}{\partial w} \right) \right\}. \quad (1.25)$$

Используя значения  $h_1, h_2, h_3$  из (1.23), получаем уравнение Лапласа в наших координатах:

$$\frac{\partial}{\partial u} \left( \sin u \operatorname{ch} w \frac{\partial U}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\operatorname{ch}^2 w - \sin^2 u}{\sin u \operatorname{ch} w} \frac{\partial U}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left( \sin u \operatorname{ch} w \frac{\partial U}{\partial w} \right) = 0. \quad (1.26)$$

Теперь, когда подготовлены все необходимые формулы для избранной криволинейной координатной системы, перейдем к решению интересующей нас задачи.

На поверхности эллипсоида (1.17) потенциал силы тяжести  $W$  по условию постоянен и, положим, равен  $W_0$ . Таким образом, потенциал тяготения равен

$$U_0 = W_0 - \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2)_0.$$

Из (1.21) получаем

$$(x^2 + y^2)_0 = c^2 \sin^2 u \operatorname{ch}^2 w_0, \quad (1.27)$$

где индекс «0» всюду относится к поверхности исходного эллипсоида  $w = w_0$ .

Следовательно, в криволинейных координатах

$$U_0 = W_0 - \frac{1}{2} \omega^2 c^2 \sin^2 u \operatorname{ch}^2 w_0. \quad (1.28)$$

Функция  $U$  вне поверхности  $w = w_0$  является гармонической, а на бесконечности — регулярной. На поверхности  $w = w_0$  она принимает значение  $U_0$ , определяемое равенством (1.28).

Таким образом нужно решить внешнюю задачу Дирихле при задании краевых условий (1.28) на поверхности эллипсоида. Тогда мы определим потенциал тяготения в любой точке вне исходного эллипсоида. Добавив к нему известный потенциал центробежной силы, получим потенциал силы тяжести. Продифференцировав последний по  $w$ , поделив на  $h_3$  и осуществив после этого предельный переход к поверхности  $w = w_0$ , получим силу тяжести на эллипсоиде (1.17). Таков в основных чертах путь решения задачи.

Задача Дирихле, как известно, имеет единственное решение. Поэтому достаточно найти гармоническую и регулярную на бесконечности функцию, которая на поверхности  $w = w_0$  принимает значения (1.28).

Поскольку краевое условие (1.28) не зависит от  $v$ , будем искать решение задачи в виде суммы частных решений вида

$$A_n \varphi_n(u) \psi_n(w), \quad (1.29)$$

причем каждое частное решение должно удовлетворять уравнению Лапласа (1.26):

$$\psi_n(w) \operatorname{ch} w \frac{d}{du} \left( \sin u \frac{d\varphi_n(u)}{du} \right) + \varphi_n(u) \sin u \frac{d}{dw} \left( \operatorname{ch} w \frac{d\psi_n(w)}{dw} \right) = 0.$$

Это уравнение после разделения переменных примет следующий вид:

$$-\frac{1}{\varphi_n(u) \sin u} \frac{d}{du} \left( \sin u \frac{d\varphi_n(u)}{du} \right) = \frac{1}{\varphi_n(w) \operatorname{ch} w} \frac{d}{dw} \left( \operatorname{ch} w \frac{d\psi_n(w)}{dw} \right) = k.$$



Левая часть равенства не зависит от  $w$ , а правая — от  $u$ . Следовательно, обе равны одной и той же постоянной  $k$ , выбор которой зависит от нас.

В развернутой форме получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \varphi_n}{du^2} + \operatorname{ctg} u \frac{d\varphi_n}{du} + k\varphi_n &= 0, \\ \frac{d^2 \psi_n}{dw^2} + \operatorname{th} w \frac{d\psi_n}{dw} - k\psi_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.30)$$

Уравнение (1.30) при  $k = n(n+1)$  представляет собой дифференциальное уравнение Лежандра, которому удовлетворяют функции Лежандра  $P_n(\cos u)$  первого и  $Q_n(\cos u)$  второго рода. Следовательно, мы можем принять

$$\varphi_n(u) = P_n(\cos u),$$

а за частное решение уравнения Лапласа

$$A_n \psi_n(w) P_n(\cos u). \quad (1.31)$$

Теперь  $\psi_n(w)$  должно удовлетворять уравнению

$$\frac{d^2 \psi_n}{dw^2} + \operatorname{th} w \frac{d\psi_n}{dw} - n(n+1)\psi_n = 0, \quad (1.32)$$

а частное решение (1.31) должно быть регулярным на бесконечности.

Функция  $\psi_n(w)$ , удовлетворяющая всем поставленным условиям, будет определена в конце. Теперь мы можем положить

$$U = \Sigma A_n P_n(\cos u) \psi_n(w). \quad (1.33)$$

Чтобы удовлетворить краевым значениям, нужно коэффициенты определить так, чтобы при  $w = w_0$  (1.33) приводилось к (1.28), т.е.

$$U_0 = \Sigma A_n P'_n(\cos u) \psi_n(w_0) = W_0 - \frac{1}{2} \omega^2 c^2 \sin^2 u \operatorname{ch}^2 w_0.$$

Поскольку

$$\sin^2 u = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} P_2(\cos u),$$

убеждаемся, что в правую часть (1.33) входят только полиномы Лежандра нулевого и второго порядка. Поэтому все  $A_n$ , кроме  $A_0$  и  $A_2$ , равны нулю.

Чтобы перейти к потенциалу силы тяжести, нужно к  $U$  добавить потенциал центробежной силы (1.27):

$$W = A_0 \psi_0(w) + A_2 \psi_2(w) P_2(\cos u) + (\omega^2/2) c^2 \sin^2 u \operatorname{ch}^2 w. \quad (1.34)$$

Таково решение поставленной задачи. При соответствующем выборе  $\psi_n(w)$  оно удовлетворяет всем поставленным условиям и, как указывалось, является единственным.

#### § 4. Формулы Сомильяна и Клеро

Чтобы из (1.34) получить значение силы тяжести, достаточно  $W$  продифференцировать по направлению нормали к поверхности уровня, т.е. к эллипсоиду (1.17), и положить затем  $w = w_0$ . Учитывая еще (1.24), получим

$$\gamma = \left( -\frac{\partial W}{\partial n} \right)_0 = \left( -\frac{1}{h_3} \frac{\partial W}{\partial w} \right)_0 = \frac{-1}{c \sqrt{\operatorname{ch}^2 w_0 - \sin^2 u}} \times$$

$$\times [A_0 \psi'_0(w_0) + A_2 \psi'_2(w_0) P_2(\cos u) + \omega^2 ab \sin^2 u]. \quad (1.35)$$

Отсюда видно, что закон изменения силы тяжести на эллипсоиде можно представить формулой

$$\gamma = \frac{A \cos^2 u + B \sin^2 u}{\sqrt{\text{ch}^2 w_0 - \sin^2 u}},$$

где  $A$  и  $B$  постоянные, подлежащие определению.

Полагая  $u = \pi/2$ , получим силу тяжести на экваторе:

$$\gamma_e = \frac{B}{\text{sh } w_0} = \frac{Bc}{b},$$

а при  $u = 0$  — на полюсе:

$$\gamma_p = \frac{A}{\text{ch } w_0} = \frac{Ac}{a}.$$

Поэтому через  $\gamma_e$  и  $\gamma_p$  можно представить  $\gamma$  так:

$$\gamma = \frac{\gamma_p a \cos^2 u + \gamma_e b \sin^2 u}{\sqrt{a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u}}. \quad (1.36)$$

Если перейти к географической широте  $\varphi$ , получим

$$\gamma = \frac{\gamma_e a \cos^2 \varphi + \gamma_p b \sin^2 \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Мы получили формулу Сомильяна. Эта формула выражает точный закон изменения силы тяжести на поверхности уровня, имеющей форму сжатого эллипсоида вращения.

$\gamma_e$  и  $\gamma_p$  в этой формуле можно выразить через  $\omega$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $M$  (это следует из теоремы Стокса). С другой стороны,  $M$  является функцией  $\gamma_e$ ,  $\gamma_p$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $\omega$  (это следует из формулы Гаусса). Следовательно, должна существовать функциональная зависимость между  $\omega$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $\gamma_e$  и  $\gamma_p$ . Для установления этой зависимости (формулы Клеро) вернемся к (1.35).

Полагая  $u = 0$  и  $u = \pi/2$ , из (1.35) получим  $\gamma_p$  и  $\gamma_e$ :

$$\gamma_p = -\frac{1}{c \text{ch } w_0} [A_0 \psi'_0(w_0) + A_2 \psi'_2(w_0)],$$

$$\gamma_e = -\frac{1}{c \text{sh } w_0} \left[ A_0 \psi'_0(w_0) - \frac{1}{2} A_2 \psi'_2(w_0) + \omega^2 ab \right].$$

Исключим  $W_0$ , входящее в эти равенства через  $A_0$ , причем примем во внимание:

$$\gamma_p a - \gamma_e b = \omega^2 ab - \frac{3}{2} A_2 \psi'_2(w_0).$$

$A_2$  определяем из (1.33):

$$A_2 = \frac{1}{3} \omega^2 a^2 \frac{1}{\psi_2(w_0)}.$$

Следовательно,

$$\gamma_p a - \gamma_e b = \omega^2 ab \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{a \psi'_2(w_0)}{b \psi_2(w_0)} \right]. \quad (1.37)$$

Остается определить функцию  $\psi_2(w)$ . Для этого получаем общий интеграл уравнения (1.32) при  $n = 2$ :

$$\psi_2(w) = C_1 \left( \frac{3}{2} \operatorname{sh}^2 w + \frac{1}{2} \right) + C_2 \left[ \left( \frac{3}{2} \operatorname{sh}^2 w + \frac{1}{2} \right) \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\operatorname{sh} w) - \frac{3}{2} \operatorname{sh} w \right]. \quad (1.38)$$

Исследуем поведение функции  $\psi_2(w)$  на бесконечности. Функция при  $C_1$  возрастает как  $\operatorname{sh}^2 w$ , т.е. пропорционально квадрату расстояния. Функция при  $C_2$  при  $\operatorname{sh} w > 1$  разлагается в ряд

$$\frac{a}{\operatorname{sh}^3 w} + \dots$$

Таким образом, эта функция убывает и на бесконечности безусловно регулярна. Поэтому, чтобы частное решение (1.29) было регулярно на бесконечности, нужно положить  $C_1 = 0$ .

Тогда

$$\frac{\psi_2'(w)}{\psi_2(w)} = \frac{3 \operatorname{sh} w \operatorname{ch} w \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\operatorname{sh} w) - 3 \operatorname{ch} w + \frac{1}{\operatorname{ch} w}}{\left( \frac{3}{2} \operatorname{sh}^2 w + \frac{1}{2} \right) \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\operatorname{sh} w) - \frac{3}{2} \operatorname{sh} w}.$$

Следовательно,

$$\gamma_p a - \gamma_e b = \omega^2 ab \left[ 1 + \frac{3e' + 2e'^3 - 3(1 + e'^2) \operatorname{arc} \operatorname{tg} e'}{(3 + e'^2) \operatorname{arc} \operatorname{tg} e' - 3e'} \right], \quad (1.39)$$

где  $e' = \frac{1}{\operatorname{sh} w_0} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}$  представляет собой так называемый второй эксцентриситет.

Это соотношение позволяет, зная  $a$ ,  $b$ ,  $\omega$  и  $\gamma_e$ , получить  $\gamma_p$ , а следовательно, по (1.36)  $\gamma$  для любой точки эллипсоида. Оно представляет собой точное выражение теоремы Клеро для поверхности уровня, имеющей форму сжатого эллипсоида вращения. Разложение его в ряд приводит к обычной формулировке теоремы Клеро:

$$\frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_p} + \frac{a - b}{a} = \frac{5}{2} \frac{\omega^2 a}{\gamma_e}. \quad (1.40)$$

В заключение заметим, что решение (1.38) уравнения (1.32) можно получить из таких соображений. Путем замены переменной  $x = \pi/2 - wi$  уравнение (1.32) приводится к уравнению Лежандра.

Следовательно,

$$\psi_n(w) = C_1 P_n(\sin iw) + C_2 Q_n(\sin iw).$$

Требование регулярности на бесконечности приводит к тому, что  $C_1$  нужно положить равным нулю. При  $n = 2$

$$Q_2(z) = P_2(z) \operatorname{arc} \operatorname{cth} z - \frac{3}{2} z,$$

если  $z$  комплексное переменное, не лежащее на отрезке действительной оси от  $-1$  до  $+1$ . В нашем случае

$$z = \sin wi = i \operatorname{sh} w,$$

$$\operatorname{arc} \operatorname{cth} z = -i \operatorname{arc} \operatorname{ctg} (\operatorname{sh} w)$$

з. таким образом,

$$\varphi_2(w) = C_2 Q_2(z) = C_2 \left[ \left( \frac{3}{2} \operatorname{sh}^2 w + \frac{1}{2} \right) \operatorname{arc} \operatorname{ctg} (\operatorname{sh} w) - \frac{3}{2} \operatorname{sh} w \right] i,$$

что совпадает со вторым членом в (1.38).

## Глава II

### ГЕОИД НЕРЕГУЛЯРИЗИРОВАННОЙ ЗЕМЛИ

Стокс доказал, что форма внешней поверхности уровня, заключающей в себе все притягающие массы, при известной общей массе и скорости вращения Земли однозначно определяет величину силы тяжести в любой точке вне этой поверхности или на ней. Однозначность решения обратной задачи не доказана. Можно только отметить, что до настоящего времени известно единственное решение, именно — решение Стокса. В последнее время иными методами оно было получено Пицетти [1] (сведением проблемы к задаче Дирихле), Джеффрисом [2] (уравнение, основанное на применении формулы Грина), Моисеевым [3] (линейное интегральное уравнение, полученное сведением проблемы к внешней и внутренней задаче Неймана), Кошляковым [4] (построение функции Грина для смешанной задачи теории потенциала), Малкиным [5] и Молоденским [6] (линейное интегральное уравнение, полученное в результате применения теоремы Шаля), Идельсоном и Малкиным [7] (метод Дини, тот же, что у Пицетти), де Грааф-Хантером [8] (применение формул Грина, компенсированный геоид).

Другой путь решения той же задачи — определения фигуры геоида из распределения силы тяжести по земной поверхности — впервые намечен Джеффрисом [2]. Но Джеффрис имел целью только обосновать применение редукции в свободном воздухе. Задача определения фигуры геоида нерегуляризированной Земли в полном объеме была впервые поставлена и решена Н.Д. Моисеевым [3]. Позднее Малкин [5] и Молоденский [6] также получили формулы для определения фигуры геоида нерегуляризированной Земли, отличные от формулы Моисеева. В связи с этим на страницах «Астрономического журнала» между Малкиным и Моисеевым возникла дискуссия [9, 10].

Мы ниже покажем, что все перечисленные формулы становятся идентичными, если исправить одно место в выводе Моисеева, а результаты по ним вполне согласуются со строгим толкованием формулы Стокса и не приводят к каким-либо неожиданностям (утверждение Малкина [10], что поправка за деконденсацию должна вводиться в двойном размере и с обратным знаком, неосновательно).

#### § 5. Формула Моисеева

Принципиальная сторона подхода Н.Д. Моисеева [3] к решению задачи определения фигуры геоида нерегуляризированной Земли в кратком изложении такова. Поверхность сферы относимости разграничивает все массы Земли на внешние относительно этой сферы и внутренние. Допустим, что для поверхности сферы известны значения радиальных градиентов потенциала отдельно от внешних масс (схема  $e$ , потенциал  $P_e$ , радиальный градиент  $\delta_e$ ) и отдельно от аномалий внутренних масс (схема  $i$ ,  $P_i$ ,  $\delta_i$ ). Тогда из раздельного решения внешней и внутренней задачи Неймана будут определены соответственно значения потенциальной функции, обусловленные внешними и отдельно внутренними массами. Суммируя оба решения, получаем аномальное значение потенциальной функции от всех масс Земли и, по теореме Брунса, высоту геоида  $\zeta$ .

Таким образом, задача сводится к тому, чтобы выразить  $\delta_e$  и  $\delta_i$  через  $\zeta$  и величины, которые можно считать известными из наблюдений. В качестве известных величин Моисеев

сеев исходит из «смешанных» аномалий Прея ( $-\Delta^P$ ) и Буге ( $-\Delta^B$ ), понимая под этими величинами их точные значения: аномалия Прея есть разность между значением силы тяжести на поверхности геоида (реальная Земля, схема  $e + i$ ) и нормальным значением на поверхности сферы относимости; аномалия Буге представляет собой значение той же разности после удаления всех масс, расположенных вне геоида. Следовательно, величина  $\Delta_B^P = \Delta^P - \Delta^B$  представляет собой радиальный градиент потенциала масс, расположенных вне геоида.

Для  $\delta_e$  на поверхности сферы Моисеев пользуется следующим соотношением (в его статье [3] формула (4.6)):

$$\delta_e(\Sigma) = \Delta^P - \Delta^B + 2\pi k^2 \mu_e \zeta.$$

Последний член этой формулы учитывает притяжение слоя плотностью  $\mu_e$ , расположенного между геоидом и сферой. Это соотношение, как уже заметил Малкин, неточно. В дальнейшем выводе я заменяю его более точным:

$$\delta_e(\Sigma) = \Delta^P - \Delta^B + 4\pi k^2 \mu_e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \zeta_n}{2n+1}. \quad (2.1)$$

Здесь последний член представляет собой точное значение притяжения конденсированного слоя масс, расположенных между геоидом и сферой, на внутреннюю точку сферы (таким образом, погрешность нашего выражения — порядка  $\zeta^2$ ).

Подобным же образом меняется выражение для  $\delta_i$ :

$$\delta_i(\Sigma) = \Delta^B + 4\pi k^2 \mu_e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1) \zeta_n}{2n+1} - \frac{2\gamma \zeta}{R}. \quad (2.2)$$

Разлагая  $\delta_e(\Sigma)$  и  $\delta_i(\Sigma)$  в ряд сферических функций, получаем для аномалии потенциала схемы  $e$  и схемы  $i$  следующие выражения:

$$\begin{aligned} \Pi_e(\Sigma) &= \Pi_e(0) + R \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\delta_e)_n}{n} \quad (\text{решение внутренней задачи Неймана}), \\ \Pi_i(\Sigma) &= -R \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\delta_i)_n}{n+1} \quad (\text{решение внешней задачи Неймана}). \end{aligned}$$

Теперь по теореме Брунса получаем

$$\zeta = \frac{\Pi_e(\Sigma) + \Pi_i(\Sigma)}{\gamma} = \frac{(\Pi_i + \Pi_e)_0}{\gamma} + \frac{R}{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(\Delta^P - \Delta^B)_n}{n} - \frac{(\Delta^B)_n}{n+1} + \frac{2\gamma}{R} \frac{\zeta_n}{n+1} \right]. \quad (2.3)$$

Отсюда при  $n = 0$

$$\zeta_0 = \frac{(\Pi_i + \Pi_e)_0}{\gamma}$$

и при  $n \neq 0$

$$\frac{n-1}{n+1} \zeta_n = \frac{R}{\gamma} \left[ \frac{(\Delta^P - \Delta^B)_n}{n} - \frac{(\Delta^B)_n}{n+1} \right]. \quad (2.4)$$

Заметим, что Салтыков [12], решая уравнение Моисеева, получил более сложное и, как показано, менее точное (и грубо неверное при малых значениях  $n$ ) соотношение:

$$\zeta_n = \frac{R}{2\pi\gamma} \frac{4\pi}{2n^2 - 2n - 3\mu'} [(\Delta^P - \Delta^B)_n - n\Delta_n^F].$$

Как и при любом другом методе решения, здесь необходимо, чтобы выполнялось дополнительное условие — обращалась в 0 функция первого порядка в разложении аномалий:

$$\left( \Delta^P - \frac{3}{2} \Delta^B \right)_1 = 0.$$

Тогда при  $n > 1$  будем иметь

$$\frac{\gamma}{R} \zeta_n = \frac{(\Delta^P - 2\Delta^B)_n}{n-1} + \frac{(\Delta^P - \Delta^B)_n}{n(n-1)} \quad (2.5)$$

и, суммируя  $\zeta_n$  от 0 до  $\infty$ , получаем исправленное решение уравнения Моисеева:

$$\zeta = \zeta_0 + \frac{R}{4\pi\gamma} \int (\Delta^P - 2\Delta^B) S(\psi) d\sigma + \frac{R}{4\pi\gamma} \int (\Delta^P - \Delta^B) F(\psi) d\sigma, \quad (2.6)$$

где  $S(\psi)$  — функция Стокса.

$$\begin{aligned} F(\psi) &= \sum_2^{\infty} \left( \frac{2n+1}{n-1} - \frac{2n+1}{n} \right) P_n(\cos \psi) = \\ &= (1 - 3 \cos \psi) \ln \left( \sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right) - 6 \sin \frac{\psi}{2} + 1 - 5 \cos \psi. \end{aligned} \quad (2.7)$$

### § 6. Формула Малкина [5]

В основе этого вывода — известная теорема Шаля. Геоид делит массу Земли на внутреннюю и внешнюю, лежащую вне геоида. Потенциал, создаваемый вне геоида всеми внутренними массами, по теореме Шаля определяется через значение силы тяжести на поверхности уровня реальной Земли. Прибавляя сюда потенциал от всех внешних масс, получим результирующий потенциал от всех масс реальной Земли. Далее обычным способом, выделяя нормальные значения, переходим к «смешанным» аномалиям силы тяжести и к аномалии потенциальной функции. Интегральное уравнение получается вначале отнесенным к поверхности геоида, а затем преобразуется к поверхности сферы.

Результат, в обозначениях Моисеева, получается следующий:

$$\zeta = 2\zeta_e + \frac{R}{2\pi\gamma} \int -\frac{\Delta^P}{r} d\sigma + \frac{3R}{4\pi} \int \frac{\zeta d\sigma}{r},$$

где  $\zeta_e$  — смещение уровневой поверхности от притяжения масс, находящихся вне геоида.

Переходя к сферическим функциям, получаем соотношение

$$\zeta_n = 2(\zeta_e)_n - \frac{2R}{\gamma} \frac{(\Delta^P)_n}{2n+1} + \frac{3}{2n+1} \zeta_n$$

или

$$\zeta_n \frac{n-1}{2n+1} = (\zeta_e)_n - \frac{R}{\gamma} \frac{(\Delta^P)_n}{2n+1}.$$

Условие, накладываемое на сферические функции первого порядка:

$$(\zeta_e)_1 = \frac{R}{3\gamma} (\Delta^P)_1,$$

кроме того,

$$+\zeta_0 = -(\zeta_e)_0 + \frac{R}{\gamma}(\Delta^P)_0.$$

При  $n \neq 1$  имеем

$$\zeta_n = \frac{2n+1}{n-1}(\zeta_e)_n - \frac{R}{\gamma} \frac{(\Delta^P)_n}{n-1}. \quad (2.8)$$

Суммируя все  $\zeta_n$  от  $n = 0$  до  $n = \infty$ , получаем

$$\zeta = \zeta_0 + 2\zeta_e - 2(\zeta_e)_1 + \frac{R}{4\pi\gamma} \int \left( -\Delta^P + \frac{3\gamma\zeta_e}{R} \right) S(\psi) d\sigma - 2(\zeta_e)_0. \quad (2.9)$$

### § 7. Сравнение формул Моисеева и Малкина

Для этого, очевидно, нужно установить связь между величинами  $\zeta_e$  (Малкин) и  $\Delta^P - \Delta^B$  (Моисеев), так как различие формул сводится к тому, что кроме аномалий Прея у Малкина еще считается известным потенциал, вызываемый внешними массами, а у Моисеева — радиальный градиент этого потенциала на внутреннюю точку.

Решая внутреннюю задачу Неймана при заданных значениях  $\Delta^P - \Delta^B$ , очевидно, получим соотношение

$$(\zeta_e)_n = \frac{(\Delta^P - \Delta^B)_n}{n} \frac{R}{\gamma} \quad \text{при } n \neq 0. \quad (2.10)$$

Теперь основное соотношение между сферическими функциями (2.8), получающееся из формулы Малкина, после исключения  $(\zeta_e)_n$  примет такой вид:

$$\zeta_n = \frac{R}{\gamma} \frac{2n+1}{n(n-1)} (\Delta^P - \Delta^B)_n - \frac{R}{\gamma} \frac{(\Delta^P)_n}{n-1} = \frac{R}{\gamma} \left[ \frac{(\Delta^P - 2\Delta^B)_n}{n-1} + \frac{(\Delta^P - \Delta^B)_n}{n(n-1)} \right],$$

что в точности совпадает с результатами Моисеева, см. формулу (2.5).

Последнее соотношение можно записать также в ином виде, исключая  $\Delta^P$ :

$$\zeta_n = (\zeta_e)_n + \frac{R}{\gamma} \frac{(-\Delta^B)_n + \frac{2\gamma}{R}(\zeta_e)_n}{n-1} \quad (2.11)$$

или, суммируя по всем значениям  $n$ , кроме  $n = 1$ , получим в интегральной форме:

$$\zeta = \zeta_e - (\zeta_e)_1 = \frac{R}{4\pi\gamma} \int \left( -\Delta^B + \frac{2\gamma}{R}\zeta_e \right) \left( S(\psi) - \frac{1}{2} \right) d\sigma, \quad (2.12)$$

где  $S(\psi)$  — функция Стокса.

Это решение, очевидно, можно интерпретировать следующими операциями:

1) Все массы, находящиеся вне геоида, убираются. В связи с этим в наблюдаемые значения силы тяжести вводится точная поправка Буге (с учетом рельефа всей Земли). Заметим, что редуцирование силы тяжести к поверхности геоида должно производиться с учетом аномалий вертикального градиента силы тяжести, причем вычисление этих аномалий должно выполняться по карте изоаномал Буге. (Здесь, по-видимому, неизбежен процесс последовательных приближений.) Таким образом будет получено  $-\Delta^B$ .

2) Редуцирование силы тяжести производится на поверхность уровня, соответствующую деформированному геоиду после удаления наружных масс (поправка  $(2\gamma/R)\zeta_e$ ).

3) С полученными таким образом аномалиями Буге на деформированном геоиде вычисляются высоты геоида Буге по формуле Стокса.

4) После этого учитывается поправка  $\zeta_e - (\zeta_e)_1$  на деформацию геоида в результате удаления внешних масс (переход от регуляризированной к реальной Земле).

Здесь мы, исходя из последней формулы, получили совокупность операций, подобную той, которая указана де Графф-Хантером при использовании изостатических аномалий (роль «геоида Буге» там играет «компенсированный геоид»). В сущности говоря, все это вытекает непосредственно из строгого толкования формулы Стокса.

Изложенная выше программа действий для определения высот геоида приведена нами только для характеристики формул. Очевидно, с практической стороны она нерациональна. Если определять фигуру геоида подобным методом, то лучше пользоваться методом инверсии или конденсации.

### § 8. Формула Молоденского [6]

Формула Молоденского от разобранных выше формул по существу, конечно, отличаться не может. Отличие может быть только по форме. А это отличие заключается в том, что она ближе по своей форме к классической формуле Стокса, нежели формулы Малкина и Моисеева. В выводе Молоденского наиболее важным является то, что он обратил внимание на необходимость учета аномалий вертикального градиента силы тяжести и делает попытку более точного вычисления аномалий Проя. Формулы Молоденского опубликованы в таком виде:

$$\zeta = \frac{1}{2\pi\gamma} \int -\frac{\Delta^P + P}{r} d\sigma + \frac{3}{4\pi\gamma} \int \frac{\zeta}{r} d\sigma,$$

где

$$-\Delta^P + P = g - \gamma + 2\gamma \int \frac{dR}{\rho} + Q, \quad (2.13)$$

$$Q = 4\pi k^2 \int \mu_e \left( \frac{R^2 \tau}{R^2} \frac{r}{r\tau} - 1 \right) dR.$$

Заметим, что решение этого уравнения, данное автором в таком виде:

$$\zeta = \frac{1}{4\pi\gamma R} \int (-\Delta^P + P) S(\psi) d\sigma, \quad (2.14)$$

строго говоря, неверно, хотя степень приближения этого решения к точному на практике, вероятно, достаточна (упрощение допущено в поправке за деконденсацию в сферических зонах). Для плоскости имеем строгое решение:

$$\zeta = \frac{1}{2\pi\gamma} \int \frac{\Delta g_0 + H \left( \frac{dg}{dz} \right)_m + 4\pi k^2 \mu_e r \left( \operatorname{arsh} \frac{H}{r} - \frac{H}{r} \right)}{r} d\sigma.$$

Формулу (2.14) нетрудно уточнить.

Основное соотношение между сферическими функциями (2.5) легко привести к такому виду:

$$\zeta_n = \frac{R}{\gamma} \frac{\left( \Delta^P - 2\Delta^B + \frac{\gamma\zeta_e}{R} \right)_n}{n-1},$$



которому соответствует следующая интегральная формула:

$$\zeta = \frac{1}{4\pi\gamma} \int \left[ \Delta^P - 2\Delta^B + \frac{\gamma\zeta_e}{R} \right] \left[ S(\psi) - \frac{1}{2} \right] d\sigma. \quad (2.15)$$

Для практических целей, если составить специальные таблицы, эта форма, вероятно, окажется наиболее удобной.

### § 9. Сравнение прямого метода решения («нерегуляризированной Земли») с методом конденсации

Итак, формулы Моисеева, Малкина и Молоденского приводят к общему соотношению между сферическими функциями:

$$\frac{\gamma}{R} \zeta_n = \frac{(\Delta^P - 2\Delta^B)_n}{n-1} + \frac{(\Delta^P - \Delta^B)_n}{n(n-1)},$$

причем

$$\frac{(\Delta^P - \Delta^B)_n}{n} = \frac{\gamma}{R} (\zeta_e)_n.$$

Введем величины:  $(\Delta_B^P)^c$  — радиальный градиент притяжения конденсированных внешних масс на внутреннюю точку;  $(\zeta_e)^c$  — смещение уровневой поверхности от конденсированных внешних масс. Очевидно, что

$$(\Delta_B^P)_n^c = 4\pi k^2 \mu_e \frac{nH_n}{2n+1}.$$

Преобразуем  $\zeta_n$  следующим образом:

$$\begin{aligned} (\gamma/R)(n-1)\zeta_n = & (-\Delta^P)_n + 4\pi k^2 \mu_e H_n + [\Delta_B^P - (\Delta_B^P)^c]_n + \\ & + [(n-1)(\zeta_e - \zeta_e^c)]_n + 2(\zeta_e - \zeta_e^c)_n (\gamma/R). \end{aligned}$$

Суммируя все значения  $\zeta_n$  от  $n=0$  до  $n=\infty$  ( $\zeta_1=0$ ), получим, переходя к интегральной форме:

$$\begin{aligned} \zeta = \zeta_e - \zeta_e^c - (\zeta_e - \zeta_e^c)_1 + \frac{R}{4\pi\gamma} \int \left[ -\Delta^P + 4\pi k^2 \mu_e H + \right. \\ \left. + \Delta_B^P - (\Delta_B^P)^c + \frac{2(\zeta_e - \zeta_e^c)\gamma}{R} \right] \left( S(\psi) - \frac{1}{2} \right) d\sigma. \quad (2.16) \end{aligned}$$

Пользуясь формулой Брунса, получаем

$$-\Delta^P + 4\pi k^2 \mu_e H = \Delta g_0 + H \left( \frac{\partial \Delta g}{\partial z} \right)_m,$$

причем  $\frac{1}{2\gamma} \left( \frac{\partial \Delta g}{\partial z} \right)_m$  — среднее значение аномалии средней кривизны на участке  $H$ , от поверхности геоида до физической поверхности Земли.

Теперь имеем окончательно:

$$\begin{aligned} \zeta = \zeta_e - \zeta_e^c - (\zeta_e - \zeta_e^c)_1 + \frac{R}{4\pi\gamma} \int \left[ \Delta g_0 + H \left( \frac{\partial \Delta g}{\partial z} \right)_m + \Delta_B^P - (\Delta_B^P)^c + \right. \\ \left. + \frac{2(\zeta_e - \zeta_e^c)\gamma}{R} \right] \left( S(\psi) - \frac{1}{2} \right) d\sigma. \quad (2.17) \end{aligned}$$

Это решение сводится к следующим операциям:

1) В аномалию Фая вводится поправка за аномалию вертикального градиента силы тяжести  $H \left( \frac{\partial \Delta g}{\partial z} \right)_m$  и за конденсацию внешних масс  $\Delta_B^P - (\Delta_B^P)^c$ .

2) Редуцирование силы тяжести производится к поверхности геоида, деформированного в результате конденсации наружных масс:

$$\left( \text{член } \frac{2(\zeta_e - \zeta_e^c)\gamma}{R} \right).$$

3) С исправленными после указанных операций аномалиями вычисляются высоты геоида по формуле Стокса.

4) В окончательный результат вводится поправка за конденсацию внешних масс  $[\zeta_e - \zeta_e^c - (\zeta_e - \zeta_e^c)_1]$ .

Последняя поправка, вопреки замечаниям Малкина, вводится с ее естественным знаком [10].

Полученный результат совпадает с точкой зрения А.А. Михайлова [11].

## § 10. Выводы

В результате разбора формул, выведенных для нерегуляризированной Земли, и их сравнения с формулой Стокса мы приходим к следующим выводам:

- 1) Все эти формулы, после исправления формулы Моисеева, оказываются между собой тождественными при строгом толковании входящих в них величин (например,  $\Delta^P$ ,  $\Delta_B^P$  у Моисеева,  $\Delta^P$ ,  $\zeta_e$  — у Малкина).
- 2) Они приводят к процессу вычислений высот геоида, который можно интерпретировать той или иной формой регуляризации Земли. Этот процесс складывается из следующих основных операций:
  - а) вычисление аномалий силы тяжести, соответствующих данному методу регуляризации;
  - б) приведение силы тяжести к уровню геоида регуляризированной Земли;
  - в) вычисление высот регуляризованного геоида по формуле Стокса и, наконец,
  - г) исправление результата поправкой, учитывающей изменение высоты геоида вследствие регуляризации Земли.
- 3) Регуляризация Земли, которая должна предшествовать применению формулы Стокса, может выполняться любым методом: конденсацией наружных масс на поверхность геоида, простым их удалением методом инверсии, распределением наружных масс между поверхностью геоида и «изостатической поверхностью». Если правильно получено значение силы тяжести на поверхности геоида регуляризированной Земли, то формула Стокса определит форму этого геоида. Если после этого правильно будут учтены деформации геоида, возникшие в результате регуляризации, то конечный результат — фигура геоида реальной Земли — должен получиться одним и тем же, независимо от выбора пути решения этой задачи.
- 4) При исследовании фигуры геоида в горных районах учет аномалий вертикального градиента силы тяжести является обязательным. Вычисление этой поправки должно проводиться на основе фактического распределения аномалий силы тяжести. Замена фактического материала какой-либо гипотезой, напр., изостатической, иногда может ухудшить результат (например, в Крыму).

### Глава III

## ФИГУРА РЕАЛЬНОЙ ЗЕМЛИ

### § 11. Редукции на геоид.

#### Сравнение методов, изложенных в главах I и II

Ни один из вопросов теоретической и прикладной гравиметрии не привлекал к себе такого внимания, как вопрос о редукции силы тяжести к уровню моря. Этому вопросу посвящены сотни работ, трактующих его с различных точек зрения. К способу редуцирования силы тяжести геодезисты, геологи и геофизики предъявляют различные требования, вытекающие из особенностей разрешаемых ими задач. В связи с этим предложено значительное число методов редуцирования, каждый из которых обладает известными преимуществами и недостатками, более или менее существенными в условиях той или иной конкретной задачи. При оценке этих методов приходится принимать во внимание целый ряд обстоятельств, начиная с соображений теоретического порядка и кончая чисто практическими мотивами, связанными, например, с современной точностью определения гравиметрических пунктов, их распределением, с объемом вычислительных работ и пр. Мы не имеем возможности осветить этот вопрос всесторонне и в дальнейшем будем исключительно иметь в виду ту его сторону, которая связана с задачей изучения формы и размеров Земли.

При таком ограниченном подходе рассматриваемый вопрос становится частью проблемы Стокса, и с принципиальной стороны его решение полностью должно вытекать из решения этой общей проблемы. Но путь решения может быть выбран далеко не единственным образом, и этот выбор должен быть подчинен соображениям, вытекающим из современных технических, производственных и вычислительных возможностей.

Возможны два пути для выяснения принципиальной стороны вопроса о редукции силы тяжести. Первый путь, являвшийся до последнего времени главным и почти единственным, берет свое начало от Стокса. Он характерен тем, что с самого начала условия задачи упрощаются: вместо реальной Земли рассматривается Земля, у которой массы, лежащие вне геоида, тем или иным способом перемещены вовнутрь геоида или на его поверхность. Тогда всюду вне геоида потенциал становится функцией регулярной. Таким образом, исходным объектом исследования является регуляризованная Земля, а способ регуляризации определяет метод редуцирования силы тяжести к уровню моря. Можно сказать иначе: заданным здесь можно считать метод редукции, а исследованию подлежат связь редуцированных значений силы тяжести с формой геоида, вывод необходимых добавочных поправок, учитывающих начальное упрощение задачи, достоверность полученного результата.

Второй путь, впервые намеченный Джеффрисом в 1932 г. и развитый в работах советских ученых, изложенный нами в главе II, характерен тем, что рассматривается реальная Земля, без предварительной ее регуляризации. Идя по этому пути, можно не задаваться заранее определенным типом редукции и даже не считать этот вопрос отдельным и самостоятельным. Те операции, которые нужно выполнить с измеренными значениями силы тяжести, чтобы получить высоту геоида или уклонение отвеса, или другой какой-либо элемент гравитационного поля Земли, при такой постановке вопроса должны вытекать из построения исходных уравнений и их последующих преобразований. Этот путь позволяет глубже понять существо проблемы и выявить такие поправочные члены, которые иначе могут остаться незамеченными.

Но при более внимательном рассмотрении обсуждаемого вопроса обнаруживаются такие моменты, в результате учета которых грань между проблемами «регуляризированной» и «нерегуляризированной» Земли значительно стирается и выявляются слабые стороны второго, казалось бы, лучшего метода.

К построению уравнений, определяющих фигуру геоида нерегуляризированной Земли, привело стремление к уточнению формулы Стокса. Проведенный нами в предыдущей главе анализ этих уравнений показывает, что они могут быть интерпретированы той или иной формой регуляризации Земли. При такой интерпретации регуляризация входит как промежуточная стадия вывода, а все связанные с ней обстоятельства должны последовательно учитываться как в стадии перехода от реальной к регуляризированной Земле, так и при обратном переходе. Чтобы конкретизировать и сократить дальнейшие рассуждения, перечислим и отметим буквами последовательность тех операций, которые должны выполняться при регуляризации конденсацией масс на поверхность геоида:

А. Переход от реальной к регуляризированной Земле, в результате которого должны быть получены значения ускорения силы тяжести на внешней уровенной поверхности регуляризированной Земли. Сюда входят следующие операции:

- а) в измеренные значения силы тяжести, относящиеся к точкам физической поверхности Земли, вводятся поправки, учитывающие изменения в результате конденсации;
- б) определяется смещение геоида вследствие конденсации масс, чтобы получить расстояние от точек физической поверхности Земли до поверхности геоида регуляризированной Земли;
- в) на основе предыдущих данных устанавливаются значения силы тяжести на уровенной поверхности (геоиде) регуляризированной Земли.

Б. Определение формы геоида регуляризированной Земли по формуле Стокса.

В. Возвращение к геоиду реальной Земли (путем учета ранее полученных деформаций геоида вследствие конденсации масс).

Сколько-нибудь строгое выполнение указанных операций связано с большими принципиальными (и тем более практическими) трудностями, которые мы кратко отметим в последовательности перечисленных операций. Прежде всего для выполнения операций «Аа» и «Аб» нужно знать:

- 1) плотность в каждой точке для всех масс, которые находятся вне геоида;
- 2) действительную форму физической поверхности Земли и регуляризованного геоида.

Допустим, что первое нам известно, а вторым в этой задаче или можно пренебречь, или учесть последовательными приближениями. Тогда можно перейти к операции «Ав». Эта операция не возникла бы, если бы решалась краевая задача с заданием краевых условий на физической поверхности Земли. Следовательно, указанная краевая задача и операция «Ав» эквивалентны и одинаково трудны. Операция «Ав» должна привести к построению такой совокупности краевых значений на уровенной поверхности, которая для внешнего пространства определит те же значения потенциала, что и исходные краевые значения на поверхности Земли. Эту задачу можно пытаться решить методом аналитического продолжения потенциала из внешнего пространства в ту область, которую до регуляризации занимали внешние притягивающие массы. Однако приемлемые способы решения этой задачи неизвестны. Можно только предполагать возможность ее решения последовательными приближениями, заранее мирясь с медленной сходимостью этого процесса в горных районах Земли. Сама возможность аналитического продолжения не вызывала бы особых сомнений, если бы притяжение масс, подвергнутых конденсации, было учтено полностью, а для этого опять необходимо знать плотность притягивающих масс в каждой точке вне геоида. Однако и здесь приходится ограничиваться принятием некоторой постоянной

средней плотности не только для облегчения вычислений, но и потому, что с нужной полнотой геологическое строение даже интересующих нас поверхностных слоев земной коры известно только для отдельных, и притом небольших, районов. Но в этом случае возможность аналитического продолжения потенциала становится более чем сомнительной. Все это приводит к большому осложнению проблемы и вносит в нее значительную неопределенность.

Может показаться, что указанные осложнения вызываются тем, что уравнения, выведенные для нерегуляризированной Земли, здесь интерпретируются посредством промежуточной регуляризации. Казалось бы, что структура уравнений, построенных для нерегуляризированной Земли, снимает наиболее трудную операцию «Ав». Однако кажущееся упрощение задачи обусловлено тем, что в эти уравнения входит сила тяжести в точках поверхности геоида. Считая ее известной, мы предполагаем операцию «Ав» уже выполненной, чем и вызывается кажущаяся простота уравнений. На самом деле сила тяжести на поверхности реальной Земли весьма сложно связана с измеренными значениями силы тяжести и геологическим строением земной коры. Редукция Прёя в ее простейшей форме, когда не учитывается аномалия второй вертикальной производной потенциала, явно не достигает цели, как это следует из рассмотрения простейших примеров. Даже предполагая  $\frac{\partial g}{\partial z}$  известным (измеренным) вблизи поверхности Земли, мы должны с большой осторожностью пользоваться этой величиной для редукции (вследствие прерывности вторых производных потенциальной функции, сильной подверженности их местным возмущениям, учитывая возможность расходимости ряда, выражающего разложение редукции, и пр.). Если мы можем в крайнем случае считать известными плотности внешних масс, то никак не можем отнести это и к внутренним массам. А в таком случае, чтобы при редукции силы тяжести учесть аномалии плотностей внутри геоида, вряд ли можно обойтись без промежуточной регуляризации, которая позволит или использовать измеренное значение  $\frac{\partial g}{\partial z}$  (если бы такое измерение оказалось возможным, но и в этом случае — после соответствующих исправлений и с большой осторожностью), или перейти к указанной ранее операции «Ав».

Таким образом, указанные осложнения присущи самой рассматриваемой проблеме и сохраняются при любой трактовке уравнений, выведенных для определения фигуры геоида нерегуляризированной Земли. В той постановке вопроса, с которой мы начали, они проявляются только в менее завуалированной форме.

Нельзя не согласиться с изложенными затруднениями, но может показаться, что они носят больше теоретический, а не практический характер, так что игнорирование их не приведет на практике к заметным ошибкам. С этим в известной степени можно согласиться, когда речь идет об исследовании фигуры геоида в местах равнинных. В горных же районах ограничение обычной формой редукции Прёя означает пренебрежение основным фактором, уточняющим элементарную трактовку теории Стокса. Тогда не будут иметь особого смысла и все дальнейшие уточнения, достигаемые в теории нерегуляризированной Земли.

При более детальном подходе к рассматриваемой проблеме обнаруживаются новые трудности. Обычно исходят из того, что известны высоты мест наблюдения — точек физической поверхности Земли — относительно геоида. Однако из нивелирных работ, проводимых на поверхности Земли, непосредственно получаются только величины  $dH$  — элементарные превышения двух соседних точек, измеренных при одной установке нивелира, относительно поверхности уровня, проходящей через нивелир. Чтобы получить элементарное превышение рассматриваемых точек относительно геоида, необходимо было

бы учесть искривление силовой линии от поверхности Земли до геоида. Если вдоль нивелирного хода всюду измерено ускорение силы тяжести  $g$ , то, как известно, этими данными определяется только разность потенциалов

$$W_B - W_A = - \int_A^B g dH.$$

Пусть точка  $A$  находится одновременно и на поверхности геоида, и на поверхности Земли (океана), а предыдущий интеграл берется по замкнутому контуру — по кривой  $AB$ , целиком лежащей на поверхности Земли, затем по силовой линии  $BC$  до точки геоида  $C$  и, наконец, по поверхности геоида от  $C$  до  $A$ .

Тогда

$$W_B - W_A = - \int_A^B g dH = - \int_C^B g dH = -g_m H, \quad (3.1)$$

где  $H$  — длина дуги  $BC$  (или высота  $B$  над уровнем геоида), а  $g_m$  — значение  $g$  в некоторой неизвестной точке линии  $BC$ .

Последнюю величину ( $g_m$ ) можно было бы точно вычислить только в том случае, если бы так же точно мы умели вычислять редукцию Прёя для любой точки силовой линии  $BC$ . Следовательно, вычисление ортометрической поправки к значению высоты содержит в себе тот же элемент неопределенности, который был отмечен для уравнений, определяющих геоид нерегуляризированной Земли.

Заметим, что при вычислении ортометрической поправки к значению высоты обычно предполагают:

1) что плотность слоя земной коры выше геоида известна во всех точках (или предполагается постоянной известной величиной);

2) что игнорируется аномалия второй вертикальной производной потенциала. Кроме того, делаются и другие необязательные предположения, которые служат только для упрощения задачи (например, пренебрегают поправкой, связанной с рельефом, предполагают линейность изменения  $g$  с высотой и пр.). Обычно второе предположение не формулируется, хотя и принципиально, и практически оно наиболее существенно.

При таком упрощенном подходе к вычислению ортометрической поправки вычисленные подобным способом ортометрические высоты будут являться функцией не только положения точки, но и пути интегрирования, а следовательно, вряд ли удовлетворительно будет достигаться основная цель введения этих поправок. Таким образом, обычные ортометрические высоты при строгом решении задачи не могут считаться отсчитанными от поверхности геоида.

Обратимся к третьей задаче, которую приходится решать при обработке геодезических измерений, именно к редуцированию на поверхность геоида направления вертикали. Дифференцируя (3.1) по направлению касательной к поверхности относимости, получим

$$\left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)_B - \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)_C = - \int_C^B \frac{\partial g}{\partial x} dH,$$

где  $g$  — опять значение ускорения силы тяжести в переменной точке силовой линии внутри притягивающих масс. Рассматриваемая величина пропорциональна производной по горизонтальным направлениям от ортометрической поправки к значению высоты, а следовательно, неопределенность и неточность решения предыдущей задачи здесь проявятся

в усиленном виде: изменение плотности внешних масс и вариации второй вертикальной производной потенциала приведут к погрешностям, которые могут быть много больше тех значений, которые можно получить с помощью элементарной теории.

Таким образом, во всех задачах, связанных как с уточненным определением фигуры Земли, так и с редукцией измеренных геодезических элементов (базисов, астрономических координат, горизонтальных направлений и пр.) на геоид или референц-эллипсоид, мы сталкиваемся с общей неопределенностью и неточностью, возникающей при продолжении силы тяжести вовнутрь масс, лежащих между геоидом и физической поверхностью Земли. Даже после регуляризации Земли, сопровождаемой учетом истинных плотностей всех масс, задача остается очень сложной, поскольку необходимо учитывать эффект изменения притяжения неизвестных внутренних масс.

Все указанные затруднения вполне закономерны: они связаны с тем, что невозможно определить форму геоида, располагая только результатами геодезических измерений на поверхности Земли. Это следует из очевидного утверждения, что можно указать такие конфигурации масс, которые будут создавать одинаковые поля тяготения вне физической поверхности Земли, но будут развивать различный потенциал на отдельных участках геоида. Учитывая изложенные затруднения, должна представлять интерес попытка исключения геоида как основной поверхности редукции всех геодезических измерений.

Если удастся определить форму физической поверхности Земли и потенциал вне этой поверхности, располагая только данными, получаемыми из наблюдений на этой поверхности, то все производственные и основные научные геодезические задачи могут быть решены без привлечения каких-либо гипотез. Такое решение окажется последовательным и свободным от тех темных мест, которые возникают при выборе геоида в качестве основной редукционной поверхности.

Учитывая изложенные соображения, в дальнейших построениях мы будем исходить только из тех величин, которые можно считать известными из измерений, выполненных на поверхности Земли. Следовательно, заданными из наблюдений нужно принимать только значения потенциала силы тяжести и его градиента  $g$  на поверхности Земли. Значения тех же величин в точках, занятых притягивающими массами, не определены, поскольку мы не привлекли к решению задачи какие-либо геологические сведения. Поэтому краевые условия задачи должны задаваться на поверхности Земли.

## **§ 12. Переход в формуле Грина к производным по направлениям координатных линий**

Для облегчения чтения формул, которые будут выводиться при дальнейшем изложении, мы составим таблицу основных обозначений, которые будут употребляться в этой главе. Далее в тексте эти обозначения будут пояснены более подробно. Нам придется иметь дело с величинами, заданными на трех поверхностях:

- 1) на поверхности Земли  $S'$ , форма которой неизвестна и подлежит определению;
- 2) на вспомогательной поверхности  $S$ , которую, как увидим, можно будет считать известной;

3) на поверхности относимости  $S_0$ , которая является поверхностью уровня нормального потенциала. Кроме того, некоторые величины будут относиться к исследуемой точке («ауфпункту»). Одни и те же величины будут обозначаться одинаковыми буквами, а индекс укажет, к какой поверхности они отнесены. Надстрочные штрихи будут отмечать, что данная величина относится к поверхности  $S'$  и зависит от неизвестной формы поверхности Земли; надстрочная черта, как правило, будет обозначать функции, относящиеся к элементу соответствующей поверхности интегрирования и зависящие от переменных интегрирования.

Таким образом, получим табл. 1.

Таблица 1

Обозначаемый элемент	Обозначение элемента			
	в исследуемой точке	в переменной точке		
		на $S'$	на $S$	на $S_0$
1. Криволинейные координаты	$q, q_1, q_2$	$\bar{q}', q'_1, q'_2$	$\bar{q}, q_1, q_2$	$q = 0; q_1, q_2$
2. Астрономические (или геодезические) криволинейные координаты	$q_1^0, q_2^0$	$q_1^0, q_2^0$	—	—
3. Коэффициенты первой квадратичной формы	—	$h', h'_1, h'_2$	$h, h_1, h_2$	$h^0, h_1^0, h_2^0$
4. Потенциал силы тяжести реальной Земли	$W$	$\bar{W}$	—	—
5. Потенциал притяжения реальной Земли	$V'$	$\bar{V}'$	—	—
6. Ускорение силы тяжести реальной Земли	$g$	$\bar{g}$	—	—
7. Нормальный потенциал силы тяжести	$U'$	$\bar{U}'$	$\bar{U}$	const
8. Его градиент	$-\gamma'$	$-\bar{\gamma}'$	$-\bar{\gamma}$	$-\gamma_0$
9. Возмущающий потенциал	$T$	$\bar{T}$	—	—
10. Расстояние между исследуемой и переменной точками	$r = 0$	$r'$	$r$	$r_0$

Наше дальнейшее изложение будет исходить из формулы Грина, с помощью которой Джеффрис [2] доказал необходимость применения редукции в свободном воздухе при исследовании фигуры геоида. Но Джеффрис ограничился только выводами качественного порядка. С рассуждениями Джеффриса у нас общим будет то, что мы также будем интегрирование в формуле Грина вести по поверхности Земли, но интересоваться будем наиболее точным результатом, которого сможем достигнуть. Наша главная задача будет заключаться в том, чтобы исключить неопределенность, связанную с редукциями на геоид, и построить уравнение, связывающее фигуру реальной Земли в таких функциях, численное значение которых получается из геодезических измерений на поверхности Земли.

В примечании к одной из работ Н.Р. Малкина [19] без вывода приведено уравнение, которое решает сходную задачу. Это уравнение определяет «фигуру физической поверхности Земли по силе тяжести, используемой там, где она наблюдается без всяких редукций». Но в это уравнение входит вторая производная от потенциала по направлению нормали к физической поверхности Земли. Интегрирование по поверхности Земли искомой функции входит дважды. Таким образом, уравнение это относится к очень сложному, неизученному типу и связывает интересующий нас элемент с функциями, которые из наблюдений получить невозможно. Конечно, практической ценности оно иметь не может.

Итак, будем исходить из формулы Грина, примененной к потенциалу  $W$  силы тяжести реальной Земли, вращающейся с угловой скоростью  $\omega$ :

$$V = -\frac{1}{4\pi} \int_{S'} \left[ \frac{1}{r'} \frac{\partial \bar{W}'}{\partial n} - (\bar{W} - W) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r'} \right] dS' + 2\omega^2 \int_{S'} \frac{d\tau}{r_\tau}, \quad (3.2)$$

$r_\tau$  — расстояние от исследуемой точки до элемента объема  $d\tau$ .

Как было указано в главе I на стр. 78, при таком написании формулы Грина исследуемая точка может находиться и на поверхности  $S'$ , и вне этой поверхности.



Аналогичное этому уравнение можно составить и для нормального потенциала, взяв для него ту же поверхность интегрирования  $S'$ . Тогда вторые интегралы справа будут одинаковы. Образовав разность и вводя возмущающий потенциал  $T$  (потенциал центробежной силы из него исключается), получим

$$T = -\frac{1}{4\pi} \int_{S'} \left[ \frac{1}{r'} \frac{\partial \bar{T}}{\partial n} - (\bar{T} - T) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r'} \right] dS'. \quad (3.3)$$

Напомним, что здесь  $r'$  означает расстояние от исследуемой точки до элемента поверхности  $dS'$ , а производные берутся по направлению внешней нормали к физической поверхности Земли. Последнюю мы можем считать сглаженной настолько, чтобы в каждой точке она имела определенные конечные кривизны.

Если бы поверхность  $S'$  была известна, то написанное преобразование можно было бы рассматривать как интегральное уравнение, которое могло бы служить для определения  $\frac{\partial T}{\partial n}$  по заданным значениям  $T$  или для решения обратной задачи. В наших условиях его нужно рассматривать как уравнение относительно неизвестной поверхности  $S'$ .

Мы ставим своей целью показать, что уравнение (3.3) можно привести к линейному интегральному уравнению типа уравнения Фредгольма, которое определит форму поверхности  $S'$ .

Введем в рассмотрение криволинейную ортогональную систему координат  $q, q_1, q_2$ . Для определенности будем считать ее эллиптической, имея в виду получение достаточного приближения к фигуре Земли, но при желании под  $q, q_1, q_2$  можно понимать любые взаимно ортогональные координаты. Пусть  $q = \text{const}$  есть уравнение эллипсоида в этих координатах, а  $q_1 = \text{const}$  и  $q_2 = \text{const}$  — уравнения однополостного и двуполостного гиперboloидов. Наконец, пусть искомое уравнение физической поверхности Земли выражается так:

$$q = \bar{q}'(q_1, q_2), \quad (3.4)$$

где  $\bar{q}'$  — неизвестная функция  $q_1$  и  $q_2$ .

Пусть в этой системе координат квадрат элемента дуги выражается так:

$$dl^2 = h^2 dq^2 + h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2. \quad (3.5)$$

Следовательно, через прямоугольные декартовы координаты  $x, y, z$  коэффициенты  $h, h_1$  и  $h_2$  определяются известным образом:

$$\left. \begin{aligned} h^2 &= \left( \frac{\partial x}{\partial q} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial q} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial q} \right)^2, \\ h_1^2 &= \left( \frac{\partial x}{\partial q_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial q_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial q_1} \right)^2, \\ h_2^2 &= \left( \frac{\partial x}{\partial q_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial q_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial q_2} \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Рассмотрим произвольную кривую на поверхности Земли. Очевидно, дифференциалы ее координат должны удовлетворять уравнению (3.4):

$$dq = \frac{\partial \bar{q}'}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \bar{q}'}{\partial q_2} dq_2. \quad (3.7)$$

Обозначим проекции дифференциала дуги  $dl$  этой кривой на направления координатных линий в данной точке через  $dl_0, dl_1, dl_2$ . Тогда из (3.5) получим

$$\begin{aligned} dl_0 &= h dq, \\ dl_1 &= h_1 dq_1, \\ dl_2 &= h_2 dq_2, \end{aligned}$$

и, следовательно, через эти проекции уравнение (3.7) выразится следующим образом:

$$\frac{dl_0}{h} - \frac{\partial \bar{q}'}{\partial q_1} \frac{dl_1}{h_1} - \frac{\partial \bar{q}'}{\partial q_2} \frac{dl_2}{h_2} = 0. \quad (3.8)$$

Направление  $n$  нормали к поверхности Земли перпендикулярно к элементу  $dl$ , так как он расположен на поверхности Земли. Поэтому

$$\cos(qn) dl_0 + \cos(q_1 n) dl_1 + \cos(q_2 n) dl_2 = 0.$$

(3.8) представляет собой уравнение элемента касательной плоскости к поверхности Земли. Поэтому косинусы углов нормали  $n$  к поверхности Земли с направлениями координатных линий в данной точке соответственно равны

$$\begin{aligned} \cos(qn) &= \frac{1}{Mh}, \\ \cos(q_1 n) &= -\frac{1}{Mh_1} \frac{\partial \bar{q}'}{\partial q_1}, \\ \cos(q_2 n) &= -\frac{1}{Mh_2} \frac{\partial \bar{q}'}{\partial q_2}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где

$$M^2 = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h_1^2} \left( \frac{\partial \bar{q}'}{\partial q_1} \right)^2 + \frac{1}{h_2^2} \left( \frac{\partial \bar{q}'}{\partial q_2} \right)^2.$$

Составим выражение для производной по направлению нормали к поверхности Земли от какой-либо функции криволинейных координат  $F(q, q_1, q_2)$ . Пусть проекции элемента нормали  $dn$  на направления координатных линий соответственно будут  $dn_0, dn_1$  и  $dn_2$ , т.е.

$$\left. \begin{aligned} dn_0 &= \cos(qn) dn = h dq, \\ dn_1 &= \cos(q_1 n) dn = h_1 dq_1, \\ dn_2 &= \cos(q_2 n) dn = h_2 dq_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial n} dn &= \frac{\partial F}{\partial n_0} dn_0 + \frac{\partial F}{\partial n_1} dn_1 + \frac{\partial F}{\partial n_2} dn_2 = \\ &= \left[ \frac{\partial F}{\partial n_0} \cos(qn) + \frac{\partial F}{\partial n_1} \cos(q_1 n) + \frac{\partial F}{\partial n_2} \cos(q_2 n) \right] dn = \\ &= \left[ \frac{1}{h} \frac{\partial F}{\partial q} \cos(qn) + \frac{1}{h_1} \frac{\partial F}{\partial q_1} \cos(q_1 n) + \frac{1}{h_2} \frac{\partial F}{\partial q_2} \cos(q_2 n) \right] dn. \end{aligned}$$

Принимая во внимание (3.9), получим

$$\frac{\partial F}{\partial n} = \left( \frac{1}{h} \frac{\partial F}{\partial q} - \frac{h}{h_1^2} \frac{\partial F}{\partial q_1} \frac{\partial \bar{q}'}{\partial q_1} - \frac{h}{h_2^2} \frac{\partial F}{\partial q_2} \frac{\partial \bar{q}'}{\partial q_2} \right) \cos(qn). \quad (3.11)$$

Рассмотрим элемент поверхности Земли  $dS'$ , заключенный между координатными линиями  $q_1$  и  $q_1 + dq_1$ ,  $q_2$  и  $q_2 + dq_2$ . Из (3.5) следует

$$dS' \cos(qn) = h_1 h_2 dq_1 dq_2. \quad (3.12)$$

Теперь из (3.11) и (3.12) получаем

$$\frac{\partial F}{\partial n} dS' = \left[ \frac{1}{h} \frac{\partial F}{\partial q} - \frac{h}{h_1^2} \frac{\partial F}{\partial q_1} \frac{\partial \bar{q}'}{\partial q_1} - \frac{h}{h_2^2} \frac{\partial F}{\partial q_2} \frac{\partial \bar{q}'}{\partial q_2} \right] h_1 h_2 dq_1 dq_2. \quad (3.13)$$

Для сокращения дальнейших записей введем дифференциальный оператор  $D(F\bar{q}')$ , определив его следующим образом:

$$D(F\bar{q}') = \frac{h}{h_1^2} \frac{\partial F}{\partial q_1} \frac{\partial \bar{q}'}{\partial q_1} + \frac{h}{h_2^2} \frac{\partial F}{\partial q_2} \frac{\partial \bar{q}'}{\partial q_2}. \quad (3.14)$$

Тогда (3.13) можно записать в более кратком виде:

$$\frac{\partial F}{\partial n} dS' = \left[ \frac{\partial F}{\partial \nu} - D(F\bar{q}') \right] h_1 h_2 dq_1 dq_2, \quad (3.15)$$

так как в соответствии с (3.5)

$$\frac{1}{h} \frac{\partial F}{\partial q} = \frac{\partial F}{\partial \nu}, \quad (3.16)$$

где  $\partial \nu$  есть линейный элемент внешней нормали к поверхности  $q = \text{const}$  в точке с координатами  $\bar{q}'$ ,  $q_1$ ,  $q_2$ .

Возвращаясь к формуле Грина (3.3) и принимая во внимание (3.15), получаем

$$T = -\frac{1}{4\pi} \iint_{S'} \left[ \frac{1}{r'} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \nu} - (\bar{T} - T) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r'} - \frac{1}{r'} D(\bar{T}, \bar{q}') + \right. \\ \left. + (\bar{T} - T) D\left(\frac{1}{r'}, \bar{q}'\right) \right] h'_1 h'_2 dq_1 dq_2. \quad (3.17)$$

Таким образом, от производных по нормали к физической поверхности Земли мы перешли к производным по направлениям координатных линий.

### § 13. Переход к интегрированию по поверхности $S$ (известной формы)

В уравнении (3.17) интегрирование ведется по поверхности Земли  $S'$ , форма которой нам неизвестна и подлежит определению. Теперь мы намерены перейти к такой новой поверхности  $S$ , форму которой можем считать известной.

В уравнении (3.17) кроме формы поверхности  $S'$  неизвестными являются также функция  $\bar{q}'(q_1, q_2)$ ,  $\bar{T}$ ,  $\frac{\partial \bar{T}}{\partial \nu}$ , а также  $r'$ ,  $h'_1$ ,  $h'_2$ , которые зависят от  $\bar{q}'$ .

Прежде всего от  $\bar{q}'$  мы перейдем к новой неизвестной  $C$ , которая, как увидим, мала по сравнению с  $\bar{q}'$ . Функция  $\bar{q}'$  определена равенством (3.4), причем координата  $q$  отсчитывается от эллипсоида, уравнение которого таково:

$$q = 0.$$

Введем в рассмотрение нормальный потенциал  $U(q, q_1, q_2)$ , определяемый теми условиями, что для него эллипсоид  $q = 0$  является внешней поверхностью уровня, заключающей в себе массу, равную массе реальной Земли. Угловую скорость вращения, как и для

реальной Земли, примем равной  $\omega$  (тогда, как мы видели, в возмущающий потенциал не входит потенциал центробежной силы). Поставленные условия согласно теореме Стокса определяют единственную функцию. Для случая сжатого эллипсоида вращения решение соответствующей задачи изложено во второй половине первой главы.

Как мы уже выяснили ранее, высоты точек поверхности Земли ни над эллипсоидом, ни над уровнем моря, вообще говоря, нельзя считать известными. Известны только потенциал (с точностью до аддитивной постоянной) и величина его градиента — ускорение силы тяжести. Известная величина — потенциал — является функцией трех неизвестных координат  $\bar{q}'$ ,  $q_1$ ,  $q_2$ . Последние две координаты приходится считать неизвестными вследствие наличия уклонения отвесной линии.

Определим углы между направлением силовой линии, проходящей через данную точку поверхности Земли, и направлениями координатных линий в этой точке.

Путем рассуждений, аналогичных приведенным при выводе формул (3.9), получим

$$\cos(qg) : \cos(q_1g) : \cos(q_2g) = \frac{1}{h} \frac{\partial W}{\partial q} : \frac{1}{h_1} \frac{\partial W}{\partial q_1} : \frac{1}{h_2} \frac{\partial W}{\partial q_2}.$$

Очевидно, что

$$\left( \frac{1}{h} \frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial W}{\partial q_1} \right)^2 + \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial W}{\partial q_2} \right)^2 = g^2,$$

где  $g$  — ускорение силы тяжести в данной точке.

Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} \cos(qg) &= -\frac{1}{g} \frac{\partial W}{\partial \nu}, \\ \cos(q_1g) &= -\frac{1}{gh_1} \frac{\partial W}{\partial q_1}, \\ \cos(q_2g) &= -\frac{1}{gh_2} \frac{\partial W}{\partial q_2} \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

и аналогично

$$\left. \begin{aligned} \cos(q\gamma) &= -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial U}{\partial \nu}, \\ \cos(q_1\gamma) &= -\frac{1}{\gamma h_1} \frac{\partial U}{\partial q_1}, \\ \cos(q_2\gamma) &= -\frac{1}{\gamma h_2} \frac{\partial U}{\partial q_2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Положим

$$\bar{q}' = \bar{q} + \frac{\zeta}{h'},$$

где  $\zeta$  — новая неизвестная функция, а  $\bar{q}$  будет определено ниже. Пусть из астрономических наблюдений для положения данной точки мы получили координаты  $q_1^0$  и  $q_2^0$ , которые должны быть исправлены поправками  $\delta q_1$  и  $\delta q_2$ , связанными с уклонением отвесной линии, чтобы получить истинные координаты  $q_1$  и  $q_2$ , так что

$$q_1 = q_1^0 + \delta q_1, \quad q_2 = q_2^0 + \delta q_2.$$

Значение нормального потенциала в данной точке можно представить так:

$$U(\bar{q}', q_1, q_2) = U(\bar{q}, q_1^0, q_2^0) + \frac{\partial U}{\partial \nu} \zeta + \frac{\partial U}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2} \delta q_2. \quad (3.20)$$

Функция  $\bar{q}$  нами еще не определена; выберем ее так, чтобы выполнялось условие

$$U(\bar{q}, q_1^0, q_2^0) = \bar{W}(q_1, q_2) = W(\bar{q}', q_1, q_2). \quad (3.21)$$

Это условие означает, что по известному в данном месте (из наблюдений) потенциалу реальной Земли, зная астрономические координаты этого места, мы вычисляем координату  $\bar{q}$  так, как если бы возмущения потенциала и направления силовой линии не было. Очевидно, такое вычисление соответствует естественному первому приближению, когда возмущающие члены не учитываются.

Так как функциональная зависимость  $U$  от всех трех координат известна, причем  $q_1^0$  и  $q_2^0$  получаются, как сказано, из астрономических наблюдений, а правая часть (потенциал) — из нивелирных и гравиметрических работ, мы из последнего уравнения можем определить  $\bar{q}$ . Поэтому эту функцию в дальнейшем будем считать известной.

Вспомним определение возмущающего потенциала:

$$T(\bar{q}', q_1, q_2) = W(q, q_1, q_2) - U(q, q_1, q_2). \quad (3.22)$$

Используя (3.20) и (3.21), получаем

$$T(\bar{q}', q_1, q_2) = -\frac{\partial U}{\partial \nu} \zeta - \frac{\partial U}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2} \delta q_2,$$

а с помощью (3.19)

$$T(\bar{q}', q_1, q_2) = \bar{T} = \gamma[\zeta \cos(q\gamma) + h_1 \delta q_1 \cos(q_1\gamma) + h_2 \delta q_2 \cos(q_2\gamma)]. \quad (3.23)$$

На поверхности  $q = 0$ ; очевидно,  $\cos(q\gamma) = 1$  и  $\cos(q_1\gamma) = \cos(q_2\gamma) = 0$ . Для эллипсоида вращения в любой точке пространства  $\cos(q_2\gamma) = 0$ , а  $\cos(q_1\gamma)$  есть величина порядка нормального искривления силовой линии с высотой. Как известно, это искривление составляет менее  $10^{-9}$  на 1 метр, т.е. при любых условиях менее  $10^{-5}$ . Множители  $h_1 \delta q_1$  и  $h_2 \delta q_2$  представляют собой линейные погрешности в горизонтальных координатах, вызванные уклонением отвеса, и, следовательно, порядок их близок к порядку  $\zeta$ .

Поэтому совершенно спокойно мы можем принять, что

$$T(\bar{q}', q_1, q_2) = \gamma(\bar{q}, q_1^0, q_2^0)\zeta,$$

или короче:

$$\bar{T} = \gamma\zeta. \quad (3.24)$$

Подставим это выражение для  $\bar{T}$  в (3.17) и примем во внимание (3.18) и (3.19). Получим

$$\begin{aligned} \gamma\zeta = \frac{1}{4\pi} \iint_{S'} \left[ \frac{1}{r'} (g \cos(qg) - \gamma' \cos(q\gamma)) + (\bar{\gamma}\bar{\zeta} - \gamma\zeta) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r'} + \right. \\ \left. + \frac{1}{r'} D(\bar{T}, \bar{q}') - (\bar{\gamma}\bar{\zeta} - \gamma\zeta) D\left(\frac{1}{r'}, \bar{q}'\right) \right] h_1' h_2' dq_1 dq_2. \quad (3.25) \end{aligned}$$

Пренебрегая величинами порядка  $\zeta^2$ , произведения  $\zeta$  на уклонение отвеса и квадрата уклонения отвеса, можно это уравнение значительно упростить.

Прежде всего,  $\cos(qg)$  и тем более  $\cos(q\gamma)$  отличаются от единицы на величину порядка квадрата уклонения отвеса и, следовательно, могут быть заменены единицей.

Далее, при  $1/r'$  или ее производных всюду входят множители порядка или  $\zeta$ , или аномалии  $g - \gamma$ . Конечно,  $1/r'$  зависит от  $\zeta$  и от  $\bar{\zeta}$  в переменной точке; от  $\delta q_1$  и  $\delta q_2$ ;  $\delta \bar{q}_1$  и  $\delta \bar{q}_2$  при разложении  $1/r'$  в ряд Тейлора по степеням  $\bar{\zeta} - \zeta$ ,  $\zeta$ ,  $\delta \bar{q}_1 - \delta q_1$ ,  $\delta \bar{q}_2 - \delta q_2$ , все члены разложения, кроме первого, можно в соответствии со сделанным замечанием не учитывать, так как они будут умножаться на величины порядка  $\zeta$  и дадут члены второго порядка малости. Следовательно, мы можем теперь вместо  $1/r'$  подставить первый член разложения  $1/r$ , который от всех перечисленных малых величин не зависит и, следовательно, известен, поскольку для любой точки с координатами  $q_1^0$  и  $q_2^0$  третья координата  $\bar{q}$  определена (3.21).

На том же основании в третьем и четвертом члене можем  $\bar{q}'$  заменить на  $\bar{q}$ , а  $h_1'$  и  $h_2'$  — на  $h_1$  и  $h_2$ . Теперь вместо формулы (3.25) получаем

$$\gamma\zeta = \frac{1}{4\pi} \iint_{S'} \left[ \frac{\bar{g} - \bar{\gamma}'}{r} + (\bar{\gamma}\bar{\zeta} - \gamma\zeta) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r'} + \frac{1}{r'} D(\bar{\gamma}, \bar{\zeta}, \bar{q}) - (\bar{\gamma}\bar{\zeta} - \gamma\zeta) D\left(\frac{1}{r'}, \bar{q}\right) \right] h_1 h_2 dq_1 dq_2. \quad (3.26)$$

В точках поверхности  $S'$   $g$  получено из наблюдений, но  $\gamma'$  неизвестно. Остается установить зависимость  $\gamma'$  от  $\zeta$ . Очевидно,

$$\bar{\gamma}'\left(\bar{q} + \frac{\zeta}{h}, q_1^0 + \delta q_1, q_2^0 + \delta q_2\right) = \bar{\gamma}(\bar{q}, q_1^0, q_2^0) + \zeta \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial \nu} + \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial q_2} \delta q_2. \quad (3.27)$$

Два последних члена очень малы (из них второй для эллипсоида вращения равен нулю, так как в этом случае  $\bar{\gamma}$  не зависит от долготы). Поэтому, беря вместо радиусов кривизны координатной поверхности  $q$  средний радиус Земли  $R$  и принимая во внимание (3.18), можем написать приближенные соотношения:

$$h_1 \delta q_1 \approx -\frac{R}{\gamma_0} \frac{1}{h_1} \frac{\partial \bar{T}}{\partial q_1} = -\frac{R}{\gamma_0} \frac{\partial(\bar{\gamma}\zeta)}{h_1 \partial q_1} \quad (3.28)$$

и аналогично для  $h_2 \delta q_2$ . Используя эти равенства, получаем

$$\bar{\gamma}' = \gamma + \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial \nu} \zeta - D\left(\bar{\gamma}\zeta, \frac{(\bar{\gamma} - \gamma_0)R}{\gamma_0 h}\right) \quad (3.29)$$

и после подстановки в (3.26) имеем

$$\gamma\zeta = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[ \frac{\bar{g} - \bar{\gamma} - \bar{\zeta}(\partial \bar{\gamma} / \partial \nu)}{r} + (\bar{\gamma}\bar{\zeta} - \gamma\zeta) \left( \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r} - D\left(\frac{1}{r}, \bar{q}'\right) \right) + \frac{1}{r} D\left(\bar{\gamma}\bar{\zeta}, \bar{q} + \frac{R}{\gamma_0 h}(\gamma - \gamma_0)\right) \right] h_1 h_2 dq_1 dq_2. \quad (3.30)$$

На основании (3.15), поскольку  $T = \gamma\zeta$  вычисляется для точек поверхности  $S$  и интеграл Гаусса равен  $-2\pi$ , получаем

$$\gamma\zeta = \frac{1}{2\pi} \iint_S \left[ \frac{\bar{g} - \bar{\gamma} - \bar{\zeta}(\partial \bar{\gamma} / \partial \nu)}{r} + \bar{\gamma}\bar{\zeta} \left( \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r} - D\left(\frac{1}{r}, \bar{q}\right) \right) + \frac{1}{r} D\left(\bar{\gamma}\bar{\zeta}, \bar{q} + \frac{R}{\gamma_0 h}(\gamma - \gamma_0)\right) \right] h_1 h_2 dq_1 dq_2. \quad (3.31)$$

В этом уравнении единственной неизвестной функцией является  $\zeta$ . Все элементы неопределенности, которые входили в связи с интегрированием по неизвестной поверхности, здесь выявлены и сведены к этой неизвестной функции, которая должна удовлетворять уравнению (3.31).

Заметим, что  $r$  связано той же функциональной зависимостью с координатами  $\bar{q}$ ,  $q_1^0$ ,  $q_2^0$ , какой  $r'$  связано с  $\bar{q}'$ ,  $q_1'$ ,  $q_2'$ . С этой точки зрения можно сказать, что мы построили новую поверхность и перешли к интегрированию по этой поверхности.

Поверхность  $S$  определяется функцией  $\bar{q}(q_1^0, q_2^0)$ ; ее можно считать известной, так как равенством (3.21) она однозначно связана с потенциалом  $\bar{W}$ , который получается из нивелировок и гравиметрических наблюдений;  $q_1^0$  и  $q_2^0$  могут определяться из астрономических наблюдений.

Уравнение (3.31) является интегродифференциальным. Далее мы покажем, что оно может быть приведено к линейному интегральному уравнению типа уравнения Фредгольма с несимметричным ядром. Если окажется, что это уравнение имеет решение и притом единственное, то из этого будет следовать, что фигура реальной Земли может быть определена из совокупности гравиметрических, нивелирных и астрономических работ, причем никаких других результатов наблюдений для решения этой задачи не требуется.

Все наше рассуждение шло в предположении, что нам известны только астрономические координаты; но с таким же успехом под  $q_1^0$  и  $q_2^0$  можно понимать геодезические координаты. Тогда  $\delta q_1$  и  $\delta q_2$  будут представлять собой разности между геодезическими и истинными координатами и будут зависеть от элементов размера и ориентировки референц-эллипсоида.

Формула (3.21), определяющая  $\bar{q}$ , сохранит свое написание, но изменит смысл, ибо  $q_1^0$  и  $q_2^0$  теперь будут геодезическими координатами. Вычисление высот по ней с успехом может исключить обычные ортометрические поправки к значению высоты. Формула (3.24), конечно, не изменится. Вместо (3.28) получим

$$\left. \begin{aligned} h_1 \delta q_1 &= -R \frac{\partial N}{h_1 \partial q_1}, \\ h_2 \delta q_2 &= -R \frac{\partial N}{h_2 \partial q_2}, \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

где  $N$  — расстояние от нашей поверхности относимости  $q = 0$  до геодезического референц-эллипсоида. Поэтому вместо (3.29) будем иметь

$$\bar{\gamma}' = \bar{\gamma} + \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial \nu} \zeta - \frac{R}{h} D(\bar{N}, \bar{\gamma}). \quad (3.33)$$

Следовательно, в (3.31) под знак интеграла вместо члена

$$\frac{1}{r} D\left(\bar{\gamma}\bar{\zeta}, \bar{q} + \frac{R}{\gamma_0 h}(\gamma - \gamma_0)\right)$$

мы должны включить следующий член:

$$\frac{1}{r} D(\bar{N}, \bar{\gamma}) \frac{R}{h}. \quad (3.34)$$

Интересно отметить, что рассматриваемый поправочный член внесет в  $\bar{g}$  сферическую гармонику третьего порядка; если угол между эллипсоидами в какой-либо точке Земли может достигать  $10''$ , то соответствующая ошибка в  $\zeta$  может превысить 0,6 м.

Как видно из приведенных рассуждений, этот член получается потому, что нормальное значение силы тяжести вычисляется по аргументу систематически неверной (геодезической) широты. Различие в системе геодезических координат отдельных континентов может, с этой точки зрения, внести новые эффекты, влияние которых на отклонение отвесной линии должно быть исследовано, так как оно может оказаться более существенным, чем влияние на  $\zeta$ .

#### § 14. Вывод линейного интегрального уравнения для $\zeta$

Чтобы перейти от интегродифференциального уравнения (3.31) к линейному интегральному уравнению, нужно из (3.31) исключить производные от  $\bar{\gamma}\bar{\zeta}$  по координатам  $q_1$  и  $q_2$ .

Чтобы сократить написание формул, мы будем исходить из неразвернутого (и притом вполне точного) уравнения (3.17) для возмущающего потенциала  $T$  и уже после необходимых преобразований перейдем к единственной неизвестной функции  $\zeta$  подобно тому, как мы выполнили это в предыдущем случае.

Итак, исходное уравнение будет таким:

$$T = -\frac{1}{4\pi} \iint_{S'} \left[ \frac{1}{r'} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \nu} - (\bar{T} - T) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r'} - \frac{1}{r'} D(\bar{T}, \bar{q}') + \right. \\ \left. + (\bar{T} - t) D\left(\frac{1}{r'}, \bar{q}'\right) \right] h'_1 h'_2 dq_1 dq_2. \quad (3.35)$$

Входящий в него оператор  $D$  включает дифференцирование по направлениям, параллельным координатной поверхности  $q$ .

Чтобы была возможность преобразования оператора  $D$  интегрированием по частям по переменным  $q_1$  или  $q_2$ , нужно рассматривать  $\bar{T}$  и  $1/r'$  как функцию только этих двух координат, перейдя к производным по направлениям, параллельным поверхности  $S'$ . В частности, условимся символом  $\frac{d\bar{T}}{dq_1}$  обозначать дифференцирование  $\bar{T}$  по  $q_1$  при условии, что  $q = q'(q_1, q_2)$  и  $q_2 = \text{const}$ , т.е. дифференцирование по направлению касательной к поверхности  $S'$  в плоскости  $q_2 = \text{const}$ . Тогда получим следующее тождество:

$$\frac{d\bar{T}}{dq_1} = \frac{\partial \bar{T}}{\partial q_1} + \frac{\partial \bar{T}}{\partial q} \frac{\partial \bar{q}'}{\partial q_1}, \quad (3.36)$$

и аналогичные выражения для производных по второй координате и для функции  $1/r'$ . По аналогии с (3.14) определим оператор  $\bar{D}(\bar{T}, \bar{q}')$ :

$$\bar{D}(\bar{T}, \bar{q}') = \frac{h}{h_1^2} \frac{d\bar{T}}{dq_1} \frac{\partial \bar{q}'}{\partial q_1} + \frac{h}{h_2^2} \frac{d\bar{T}}{dq_2} \frac{\partial \bar{q}'}{\partial q_2}. \quad (3.37)$$

Тождество (3.36) устанавливает связь между операторами  $D(\bar{T}, \bar{q}')$  и  $\bar{D}(\bar{T}, \bar{q}')$ :

$$D(\bar{T}, \bar{q}') = \bar{D}(\bar{T}, \bar{q}') - \frac{\partial \bar{T}}{\partial q} D(\bar{q}', \bar{q}'). \quad (3.38)$$

Теперь вместо (3.15) получаем

$$\frac{\partial F}{\partial n} dS' = \left[ \frac{\partial F}{\partial \nu} (1 + hD(\bar{q}', \bar{q}')) - \bar{D}(F, \bar{q}') \right] h'_1 h'_2 dq_1 dq_2. \quad (3.39)$$



Заметим, что из (3.9) и (3.14) следует, что

$$1 + hD(\bar{q}', \bar{q}') = \sec^2(q, n). \quad (3.40)$$

Поэтому для  $\frac{\partial F}{\partial n}$  напомним другое выражение:

$$\frac{\partial F}{\partial n} dS' = \left[ \frac{\partial F}{\partial \nu} \sec^2(q, n) - \bar{D}(F, \bar{q}') \right] h'_1 h'_2 dq_1 dq_2. \quad (3.41)$$

Возвращаясь теперь к формуле Грина и используя формулу (3.39) для  $T$  и  $1/r'$ , можем представить ее в криволинейных координатах в следующем виде:

$$T = -\frac{1}{4\pi} \iint_{S'} \left[ \left( \frac{1}{r'} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \nu} - (\bar{T} - T) \frac{1}{r'} \right) (1 + hD(\bar{q}', \bar{q}')) - \right. \\ \left. - \frac{1}{r'} \bar{D}(\bar{T}, \bar{q}') + (\bar{T} - T) \bar{D}\left(\frac{1}{r'}, \bar{q}'\right) \right] h'_1 h'_2 dq_1 dq_2. \quad (3.42)$$

Напомним, что  $\bar{T}$  и  $1/r'$  при дифференцировании по  $q_1$  и  $q_2$  теперь считаются функциями только этих переменных; дифференцируются значения указанных функций на поверхности Земли.

Введем в рассмотрение второй дифференциальный оператор, определив его следующим образом:

$$\Delta_2 F = \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{hh_2}{h_1} \frac{\partial F}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{hh_1}{h_2} \frac{\partial F}{\partial q_2} \right) \right] \frac{1}{h_1 h_2}. \quad (3.43)$$

Очевидно, что

$$\Delta_2 F = h\Delta F - \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{h_1 h_2}{h} \frac{\partial F}{\partial q} \right), \quad (3.44)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа. Последнее соотношение следует из известного выражения для оператора Лапласа в криволинейных координатах:

$$\Delta F = \frac{1}{hh_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{h_1 h_2}{h} \frac{\partial F}{\partial q} \right) + \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{hh_2}{h_1} \frac{\partial F}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{hh_1}{h_2} \frac{\partial F}{\partial q_2} \right) \right].$$

Принимая во внимание определение операторов  $\bar{D}$  (3.37) и  $\Delta_2$  (3.44), убеждаемся в справедливости тождества

$$\Delta_2(F\Phi) = F\Delta_2\Phi + \Phi\Delta_2 F + 2\bar{D}(F, \Phi). \quad (3.45)$$

Пользуясь интегрированием по частям, преобразуем интеграл

$$\iint_S \bar{D}(F, \Phi) h_1 h_2 dq_1 dq_2,$$

взятый по всем значениям  $q_1$  и  $q_2$  замкнутой поверхности  $S$ , и получим

$$\iint_S \bar{D}(F, \Phi) h_1 h_2 dq_1 dq_2 = \int dq_2 \int \left( \frac{hh_2}{h_1} \frac{\partial F}{\partial q_1} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial q_1} dq_1 +$$

$$\begin{aligned}
& + \int dq_1 \int \left( \frac{hh_1}{h_2} \frac{\partial F}{\partial q_2} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} dq_2 = - \iint \Phi \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{hh_2}{h_1} \frac{\partial F}{\partial q_1} \right) dq_1 dq_2 - \\
& - \iint \Phi \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{hh_1}{h_2} \frac{\partial F}{\partial q_2} \right) dq_1 dq_2 = - \iint_S \Phi \Delta_2 F h_1 h_2 dq_1 dq_2.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\iint_S \bar{D}(F, \Phi) h_1 h_2 dq_1 dq_2 = - \iint_S \Phi \Delta_2 F h_1 h_2 dq_1 dq_2 = - \iint_S F \Delta_2 \Phi h_1 h_2 dq_1 dq_2. \quad (3.46)$$

Теперь в (3.42) перейдем от оператора  $\bar{D}$  к оператору  $\Delta_2$ .

В соответствии с (3.37) получим

$$\frac{1}{r'} \bar{D}(\bar{T}, \bar{q}') - (\bar{T}' - T) \bar{D}\left(\frac{1}{r'}, \bar{q}'\right) = \bar{D}\left(\frac{\bar{T} - T}{r'}, \bar{q}'\right) - 2(\bar{T} - T) \bar{D}\left(\frac{1}{r'}, \bar{q}'\right). \quad (3.47)$$

Умножая обе стороны последнего равенства на  $h'_1 h'_2 dq_1 dq_2$ , интегрируя по всем значениям  $q_1$  и  $q_2$  и принимая во внимание (3.46), получим

$$\begin{aligned}
& \iint \left[ \frac{1}{r'} \bar{D}(\bar{T}, \bar{q}') - (\bar{T}' - T) \bar{D}\left(\frac{1}{r'}, \bar{q}'\right) \right] h'_1 h'_2 dq_1 dq_2 = \\
& = - \iint \left[ \frac{\bar{T} - T}{r'} \Delta_2 \bar{q} + 2(\bar{T} - T) \bar{D}\left(\frac{1}{r'}, \bar{q}'\right) \right] h'_1 h'_2 dq_1 dq_2. \quad (3.48)
\end{aligned}$$

С помощью этого равенства из (3.42) получаем

$$\begin{aligned}
T = & -\frac{1}{4\pi} \iint_{S'} \left[ \left( \frac{1}{r'} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \nu} - (\bar{T}' - T) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r'} \right) \sec^2(\nu n) + \right. \\
& \left. + (\bar{T}' - T) \left( \frac{1}{r'} \Delta_2 \bar{q}' + 2\bar{D}\left(\bar{q}', \frac{1}{r'}\right) \right) \right] h'_1 h'_2 dq_1 dq_2. \quad (3.49)
\end{aligned}$$

Таким образом, производные возмущающего потенциала исключены. Уравнение (3.49) точное. Принимая во внимание, что  $T$  есть величина порядка  $\zeta$ , а  $\frac{\partial T}{\partial \nu}$  — порядка аномалии силы тяжести, можем, как и ранее,  $1/r'$  заменить на  $1/r$ ,  $\bar{b}'$  — на  $\bar{b}$ ,  $h'_1$  и  $h'_2$  — на  $h_1$  и  $h_2$ ,  $\sec^2(\nu n')$  — на  $\sec^2(\nu n)$ , допуская ошибку порядка  $\zeta^2$ , квадрата уклонения отвесной линии и т.д.

Далее используем готовые формулы:

$$\bar{T} = \gamma \zeta, \quad (3.24)$$

$$-\frac{\partial \bar{T}}{\partial \nu} = g - \bar{\gamma}' = g - \bar{\gamma} - \zeta \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} + \frac{R}{h} D(N, \gamma), \quad (3.33)$$

и вместо (3.49) получим

$$\gamma \zeta = \frac{1}{4\pi} \iint \left[ \frac{1}{r} \left( g - \bar{\gamma} - \zeta \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} + \frac{R}{h} D(N, \gamma) \right) \sec^2(\nu n) + \right.$$

$$+(\bar{\gamma}\bar{\zeta} - \gamma\zeta) \left( \frac{\partial/r}{\partial\nu} \sec^2(\nu n) - \frac{1}{r} \Delta_2 \bar{q} - 2\bar{D} \left( \bar{q}, \frac{1}{r} \right) \right) h_1 h_2 dq_1 dq_2. \quad (3.50)$$

Множитель при  $\gamma\zeta$  в правой части этого уравнения можно преобразовать. На основании (3.41) получаем

$$\begin{aligned} \iint_S \left( \frac{\partial/r}{\partial\nu} \sec^2(\nu n) - 2\bar{D} \left( \bar{q}, \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \Delta_2 \bar{q} \right) h_1 h_2 dq_1 dq_2 = \\ = \int_S \frac{\partial/r}{\partial n} dS - \iint_S \left( \bar{D} \left( \bar{q}, \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \Delta_2 \bar{q} \right) h_1 h_2 dq_1 dq_2. \end{aligned}$$

Первый интеграл справа есть интеграл Гаусса для поверхности  $S$ ; поскольку нас интересует значение  $\zeta$  на поверхности  $S$ , он равен  $-2\pi$ ; второй интеграл равен нулю на основании (3.46). Таким образом, в правой части (3.50) получаем  $\frac{1}{2}\gamma\zeta$ ; перенося этот член влево и умножая на 2, получаем

$$\begin{aligned} \gamma\zeta = \frac{1}{2\pi} \iint \frac{1}{r} \left( g - \bar{\gamma} - \bar{\zeta} \frac{\partial\bar{\gamma}}{\partial\nu} + \frac{R}{h} D(N, \gamma) \right) \sec^2(\nu n) h_1 h_2 dq_1 dq_2 + \\ + \frac{1}{2\pi} \iint \bar{\gamma}\bar{\zeta} \left( \frac{\partial/r}{\partial\nu} \sec^2(\nu n) - 2\bar{D} \left( \bar{q}, \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \Delta_2 \bar{q} \right) h_1 h_2 dq_1 dq_2. \quad (3.51) \end{aligned}$$

Второй интеграл является несобственным (ядро обращается в  $\infty$  при  $r = 0$ ); однако неопределенность легко раскрывается обычными приемами.

Таким образом, мы получили линейное интегральное уравнение типа уравнения Фредгольма с несимметричным ядром; все входящие в него функции, кроме  $\zeta$ , известны. Нахождение  $\zeta$  сводится к решению этого уравнения.

Мы оставляем в стороне вопрос о существовании решения уравнения (3.51); этот вопрос достаточно сложен, и, если удастся его разрешить, мы надеемся вернуться к нему в одной из следующих работ. По аналогии с проблемой Стокса можно думать, что при некоторых условиях (близких к тем, которые рассмотрены во второй главе) решение должно существовать. Но в таком случае это решение всегда может быть получено численными методами, например, последовательными приближениями; хорошее первое приближение дает формула Стокса. Тогда следующие задачи, связанные с уравнением (3.51), будут относиться к технике его численного решения. Принципиальных трудностей, конечно, здесь нет, но практическая трудность существенна: решение этого уравнения требует большого труда вычислителей. В целях экономии этого труда уравнение (3.50) было бы желательно упростить без существенного ущерба для его точности.

Очень возможно, что при решении последовательными приближениями проще окажется исходить из интегродифференциального уравнения (3.31), так как приближенные значения уклонений отвеса легко получить по формуле Вининг-Мейнеса (а в СССР везде, где позволяет наличие гравиметрического материала, это уже выполнено). В той части области интегрирования, которая значительно удалена от исследуемого пункта, подынтегральное выражение можно весьма сильно упростить и привести к такому виду, который не затруднит вычислителя; некоторые упрощения возможны и вблизи исследуемого пункта.

Несколько вариантов упрощенных уравнений нами получено, но изложение этого вопроса не входит в план настоящей работы, поскольку вопросы техники вычислений здесь не рассматриваются.

## ИССЛЕДОВАНИЕ ОСНОВНЫХ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ГРАВИМЕТРИИ

### *Глава IV*

#### ЗАДАЧИ, ТРЕБУЮЩИЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МИРОВОЙ ГРАВИМЕТРИЧЕСКОЙ СЪЕМКИ

##### § 15. Введение. Критика выводов де Грааф-Хантера

Хорошо известно, что наиболее важные для геодезистов элементы, именно отклонения отвесной линии и возвышения геоида относительно эллипсоида, по результатам гравиметрических наблюдений определяются только в том случае, если известно ускорение силы тяжести  $g$  во всех точках Земли. Очевидно, что измерения  $g$  могут выполняться только в отдельных, более или менее удаленных друг от друга точках. Это приводит к необходимости получать силу тяжести для промежуточных точек путем интерполирования или предполагать ее неизменность на соответствующих площадках. Такое предположение вносит в результат большие ошибки; исследование их отнесено нами в последнюю главу. Ошибки эти носят случайный характер и легко могут быть снижены путем увеличения числа и повышения точности определения пунктов местной съемки; сейчас их рассматривать не будем. Значительно сложнее обстоит дело со вторым, пока неизбежным нарушением требования теории, вытекающим из незавершенности мировой гравиметрической съемки.

Для некоторых задач это обстоятельство несущественно, как это будет показано в следующей главе. Но в наиболее важных случаях оно мешает получить полноценное решение и значительно снижает эффективность гравиметрического метода. Особенно это относится к вопросам определения размеров и ориентировки общего земного эллипсоида, или, другими словами, к задаче отнесения изолированных триангуляционных сетей к общей отсчетной поверхности, что позволило бы установить связь между ними.

В этих случаях игнорирование или неправильный учет аномалий в неизученных областях приводят к ошибкам, которые почти постоянны внутри небольшого района и систематически меняются при большой протяженности исследуемых территорий. Эти ошибки накладываются на так называемые региональные и континентальные волны геоида. Наиболее сильно они входят, естественно, в поднятия и опускания геоида. Несколько слабее, но существенно сказываются на отклонении отвесной линии; с ними можно почти не считаться при подсчете относительных отклонений отвесной линии, т.е. разностей отклонений отвеса для пунктов, расстояние между которыми мало по сравнению с расстоянием до гравиметрически неизученных областей; наконец, их влияние практически неощутимо при гравиметрическом интерполировании отклонений отвеса. Это связано с тем обстоятельством, что при интегрировании аномалия умножается на некоторую функцию, которая в различных задачах по-разному убывает с удалением учитываемых аномалий от исследуемого пункта.

В первом случае это убывание происходит пропорционально первой степени расстояния, а во втором, третьем и четвертом соответственно пропорционально второй, третьей и четвертой степени расстояния. Поэтому задачи двух последних типов, как это будет по-

казано далее, не требуют наличия мировой гравиметрической съемки, и их исследование отнесено в следующую главу.

Что же касается задач первых двух типов, то единственное известное нам их исследование проведено де Грааф-Хантером [8]. Введенная де Грааф-Хантером числовая характеристика поля аномалий, «ошибка представительства», оказалась очень полезным средством для анализа точности гравиметрических выводов уклонения отвеса и высот геоида. Но, по самому ее определению, ошибка представительства — достаточно надежное средство для ориентировочной оценки точности в тех областях, где имеются «представляющие» гравиметрические пункты, и вовсе непригодное, если этих пунктов нет. Поэтому выводы де Грааф-Хантера, по крайней мере ориентировочно, верны там, где они связываются с наличием общей мировой или местной съемки, и принципиально неверны, когда делаются заключения об ошибках, возникающих при отсутствии пунктов общей мировой съемки.

Действительно, чтобы оценить среднюю ошибку, возникающую от пренебрежения влиянием аномалий за пределами области интеграции, одной величины — ошибки представительства для всей Земли (по де Грааф-Хантеру, 113 мЛг) явно недостаточно. При очень большом значении этой величины влияние дальних зон может быть малым (волны аномалий большой амплитуды, но короткопериодические) и при малом значении — очень большим (например, эффект трехосности Земли, который может за пределами  $\psi^\circ = 20^\circ$  дать поправку к значениям уклонения отвеса более  $5''$ ).

На самом деле де Грааф-Хантер мог дать какую-то оценку влияния дальних зон только потому, что исходил из определенной разбивки поверхности Земли (на 1654 части) для размещения пунктов мировой съемки. Но если бы он разбил Землю, например, на  $1654 \times 4$  участка, то все его оценки влияния дальних зон уменьшались бы в 2 раза. Действительно, в выводе неявно предполагалось, что в каждом отсеке имеется по одному пункту с ошибкой представительства  $\pm 113$  мЛг, а теперь нужно будет допустить, что в том же отсеке имеется 4 пункта с той же ошибкой, что равносильно одному пункту с ошибкой  $\pm 56$  мЛг.

Тот же результат получится, если рассуждать по-другому. От разбивки каждого отсека на 4 части при суммировании квадратов влияний отсеков число слагаемых увеличится в 4 раза, величина каждого слагаемого уменьшится в 16 раз, следовательно, сумма (квадрат ошибки) уменьшится в 4 раза, а сама ошибка — в 2 раза. Таким образом, никакой оценки влияния дальних зон де Грааф-Хантером не дано, и метод применения ошибки представительства дать этой оценки не может.

Выводы де Грааф-Хантера в отношении точности вывода уклонений отвеса справедливы только при такой их формулировке: вероятная ошибка  $\xi = \pm 0'',352$  при наличии 134 местных и 1654 пунктов общей мировой съемки, если центральная зона радиуса 8,75 мили учтена безошибочно. Если мировая съемка на значительной площади Земли отсутствует, никаких заключений о точности вывода так называемого «абсолютного» уклонения отвеса, исходя из рассмотренной ошибки представительства, сделать нельзя.

Добавим, что, по нашим подсчетам, вероятная ошибка зоны от 0 до 8,75 мили, если там нет дополнительной местной съемки, составит около  $\pm 1'',7$ . Оценка точности  $\zeta$  делается только в предположении наличия мировой съемки, поэтому оценки вероятных ошибок  $\pm 10,4$  м (1654 пункта мировой съемки) и  $\pm 7,0$  м (добавление к мировой 84 пунктов местной съемки) должны быть ориентировочно верны.

## § 16. Общая характеристика земного гравитационного поля

Чтобы получить верные выводы о влиянии поля аномалий за пределами области их интеграции на уклонение отвеса и высоту геоида, надо прежде всего иметь фактический

материал, характеризующий (хотя бы ориентировочно) общее распределение силы тяжести на земной поверхности. Конечно, какая-то одна универсальная величина нужного материала для суждения дать не может. Попытка де Грааф-Хантера получить оценку точности вывода  $\xi$  и  $\eta$ , исходя только из ошибки представительства для всей Земли, конечно, не могла увенчаться успехом, так как одному и тому же среднему квадратическому колебанию аномалий может соответствовать различная периодичность и быстрота их изменения; а последнее обстоятельство имеет решающее значение. И действительно, мы уже показали, что соответствующая часть выводов де Грааф-Хантера основана на недоразумении.

Поэтому в качестве общей характеристики поля аномалий силы тяжести по всей Земле в целом мы берем разложение аномалий в ряд по сферическим функциям. Вследствие того, что большие области Земли вовсе лишены наблюдений, коэффициенты этого разложения получаются, конечно, с малой (и, вообще говоря, неизвестной) точностью, но для общих суждений этот материал надо полагать достаточным.

Излагаемая ниже работа по разложению аномалий в ряд сферических функций выполнена в ЦНИИГАиК Б.В. Дубовским в 1937 г. Для этой работы им использовано около 7200 гравиметрических пунктов по СССР и около 7000 пунктов в других государствах (повторные наблюдения в это число не вошли). Явно нехарактерные для данной площади аномалии (например, на изолированных островах, часть береговых и др.) при этом отбрасывались. Для территории СССР средние аномалии получены очень уверенно по картам аномалий масштаба 1:1 000 000 и 1:10 000 000.

Разложение аномалий проведено по способу Неймана, с использованием при этом вспомогательного табличного материала, опубликованного Преем. Выбор этого метода диктовался наличием подробных таблиц, позволяющих свести до минимума объем всей работы. Вычисления настолько просты, что основная часть их была выполнена вычислительной фабрикой.

Применение таблиц Прея, рассчитанных на разложение до 16 порядка, обязывает получить средние аномалии для точек пересечения 17-ти параллелей ( $\varphi = 0^\circ; \pm 10^\circ 17', \pm 20^\circ 34', \pm 30^\circ 52', \pm 41^\circ 17', \pm 51^\circ 24', \pm 61^\circ 40', \pm 71^\circ 56', \pm 82^\circ 08'$ ) и 32-х меридианов (впрочем, число меридианов можно взять и иным). Всего нужно знать 512 средних значений аномалий, однако из фактических данных удалось образовать только 192 значения (около 38%). Следовательно, оставшимся 62% точек надо приписать какие-то «гипотетические» аномалии. Эти гипотетические аномалии мы получили в двух вариантах: 1) полагали аномалию в свободном воздухе равной нулю; 2) подобно Хирвонену полагали изостатические аномалии по Пратту при глубине компенсации 113,7 км равной нулю (следовательно, аномалия в свободном воздухе принята равной изостатической редукции с обратным знаком). Для аномалий второго варианта использованы вычисления Прея [22].

В результате сравнения гипотетических аномалий с наблюдаемыми на 192 площадках, после выделения средних разностей, получили ошибку гипотетической аномалии второго варианта  $\pm 34$  мгл (изостазия). Средняя разность между аномалиями, выведенными из наблюдений и из второй гипотезы, получилась равной 20 мгл.

В табл. 2 и 3 даны коэффициенты разложения аномалий по сферическим функциям до 6-го порядка соответственно для первой и второй гипотез. Эти коэффициенты соответствуют записи разложения в такой форме:

$$\Delta g = \sum_n \sum_m (A_n^m \cos m\lambda + B_n^m \sin m\lambda) P_n^m(\cos \vartheta), \quad \vartheta = 90^\circ - \varphi,$$

где  $P_n^m(\cos \vartheta)$  — присоединенные функции Лежандра.

При рассмотрении коэффициентов разложения по обоим вариантам обращаем внимание на то, что порядок величины одноименных коэффициентов и их знак, как правило, получаются сходными и довольно близкими. Это обстоятельство позволяет надеяться, что несмотря на указанную условность этих разложений выводы из них, по крайней мере в отношении порядка величин, должны быть близки к действительности. Особенно убедительно это проявляется при следующих сравнениях. Определим по первому и второму варианту разложения среднее квадратическое значение сферической функции порядка  $n$  в аномалии и высоте геоида.

Таблица 2

$n$	$A_n^0$	$A_n^1$	$A_n^2$	$A_n^3$	$A_n^4$	$A_n^5$	$A_n^6$
0	+7,32						
1	+0,391	-0,370					
2	-7,87	+0,830	+2,12				
3	-0,543	+1,805	-0,0421	+0,142			
4	+2,16	+0,755	+0,326	+0,157	-0,00429		
5	-2,58	+1,28	+0,402	-0,0633	-0,0141	-0,00205	
6	-0,707	+0,0811	+0,250	+0,00120	-0,00234	-0,0000268	+0,000158
$n$	$B_n^0$	$B_n^1$	$B_n^2$	$B_n^3$	$B_n^4$	$B_n^5$	$B_n^6$
0	0						
1	0	+2,00					
2	0	-0,719	-1,69				
3	0	-2,96	-0,252	+0,457			
4	0	+1,04	+0,060	-0,117	+0,0212		
5	0	+1,09	+0,0707	+0,0410	-0,00431	-0,00239	
6	0	+0,229	-0,139	+0,0393	-0,00351	-0,00383	+0,0000039

Таблица 3

$n$	$A_n^0$	$A_n^1$	$A_n^2$	$A_n^3$	$A_n^4$	$A_n^5$	$A_n^6$
0	+14,9						
1	-4,80	-1,70					
2	-6,28	+0,632	+2,61				
3	+1,30	+1,44	+0,375	+0,110			
4	+8,97	+0,159	+0,285	+0,128	-0,0158		
5	-5,96	+0,934	+0,323	-0,0494	-0,00763	-0,000523	
6	+3,32	+0,387	-0,243	-0,0176	-0,00150	-0,000337	+0,000188
$n$	$B_n^0$	$B_n^1$	$B_n^2$	$B_n^3$	$B_n^4$	$B_n^5$	$B_n^6$
0	0						
1	0	+0,550					
2	0	-0,739	-1,407				
3	0	-1,859	-0,334	+0,465			
4	0	+0,528	+0,00594	-0,103	+0,0186		
5	0	+1,606	-0,107	+0,0192	-0,00272	-0,00101	
6	0	+0,0799	+5,181	+0,0433	-0,00578	-0,00356	+0,000119

Следовательно, дальнейшие выводы, основанные на средних значениях, получатся практически одинаковыми, если исходить из первого или второго варианта. В дальнейшем изложении используются числовые данные второго варианта.

В 1942 г. опубликована очень интересная статья Джеффриса [20], который определил часть коэффициентов в разложении аномалий до третьего порядка и оценил ошибки вывода этих коэффициентов (см. табл. 4).

Таблица 4

Порядок сферической функции	Среднее квадратическое значение для поверхности Земли			
	Аномалии, мгл		Высоты геоида, м	
	Вариант I	Вариант II	Вариант I	Вариант II
2	±5,5	±5,4	±35	±34
3	±4,8	±4,3	±16	±14
4	±4,0	±4,4	± 9	±10
5	±4,6	±3,6	± 8	± 6
6	±5,8	±5,9	± 8	± 8

В качестве исходного материала им взяты значения аномалий силы тяжести с редукцией в свободном воздухе для площадок размером  $1^\circ \times 1^\circ$ . Из этих данных получены средние значения для 139 квадратов размером  $10^\circ \times 10^\circ$  и, путем дальнейшего объединения, для 32 квадратов размером  $30^\circ \times 30^\circ$ . Каждому квадрату приписаны соответствующие веса, которые установлены Джеффрисом после тщательного обсуждения исходных материалов. Сначала последовательными пробными вычислениями проводился отбор тех коэффициентов, которые могут быть определены с ошибкой, меньшей их величины; только эти коэффициенты далее и определялись.

В результате Джеффрисом получена следующая формула для распределения силы тяжести (в Потсдамской системе):

$$979\,772,5 \pm 1,9 + (3439,9 \pm 5,0)P_2 + 5,3 P_4 + (4,0 \pm 1,4) P_2^2 \cos 2\lambda + \\ + (1,30 \pm 0,68)P_3^2 \cos 2\lambda + (4,2 \pm 2,4) P_3^1 \cos \lambda + (0,46 \pm 0,26) P_3^3 \sin 3\lambda,$$

которой соответствует сжатие  $1 : 296,17 \pm 0,68$  и разность полуосей экваториального эллипса 26 м.

В разложениях Дубовского аномалии отнесены к формуле Гельмерта 1901–1909 гг. Учтя это обстоятельство, сравним коэффициенты при одинаковых членах (табл. 5).

Таблица 5

	$A_0^0$	$A_2^0$	$A_2^2$	$A_3^1$	$A_3^2$	$B_3^3$	$\frac{1}{\alpha}$
Джеффрис	+17,6	-14,5	+4,0	+4,2	+1,30	+0,46	296,2
	±1,9	±5,0	±1,4	±2,4	±0,68	±0,26	±0,68
Дубовский а)	+7,3	-7,9	+2,1	+1,8	-0,04	+0,46	297,1
б)	+14,9	-6,3	+2,6	+1,4	+0,38	+0,46	297,3

Как и следовало ожидать, три различные гипотезы дают несколько различные результаты (разложение Джеффриса соответствует предположению, что гравиметрически изученные районы характеризуют гравитационное поле Земли в целом, т.е. аномалии можно экстраполировать).



Соответствие между собой этих трех вариантов удовлетворительно, особенно с точки зрения порядка величин коэффициентов. Но именно только порядок величины коэффициентов имеет значение для надежности наших последующих выводов.

### § 17. Метод исследования погрешностей, возникающих из-за отсутствия мировой гравиметрической съемки

Когда учитываются аномалии только до сферического расстояния  $\psi_0$  от исследуемого пункта, принято говорить, что учитываются местные волны геоида. Это означает, что результат интегрирования остальных аномалий от  $\psi_0$  до  $\pi$  даст функцию, которая с перемещением исследуемого пункта будет меняться более плавно, т.е. даст волны большего периода. Понятие о волнах связано с возможностью разложения высот геоида в ряд Пуанкаре–Стокса, составленный из сферических гармоник разных порядков. «Местным» волнам соответствуют гармоники высоких порядков.

Известно, что ряд Стокса сходится очень медленно, так как в разложении функции Стокса по полиномам Лежандра

$$S(\psi) = \sum_2^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi) = \frac{1}{\sin(\psi/2)} - 3 \cos \psi \ln \left( \sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right) - 6 \sin \frac{\psi}{2} + 1 - 5 \cos \psi \quad (4.1)$$

при увеличении  $n$  коэффициент при  $P_n(\cos \psi)$  почти не убывает, стремясь в пределе к 2. Это связано с тем, что при  $\psi = 0$  функция  $S(\psi) = \infty$ .

Когда местные волны  $\zeta_0$  учитываются отдельно (интегрированием аномалий до  $\psi_0$ ), то остаток  $\Delta\zeta$ , соответствующий общим волнам, определяет собою ту отсечную поверхность, к которой отнесены значения  $\zeta_0$ . Предполагая при решении какой-либо задачи, что  $\zeta_0$  отсчитано от сфероида, мы делаем ошибку, равную  $\Delta\zeta$ .

Очевидно, что  $\Delta\zeta$  также можно представить в виде ряда сферических гармоник.

Как сказано, гармоники высших порядков, вошедшие в  $\zeta_0$ , почти исключены из  $\Delta\zeta$ , т.е. ряд для  $\Delta\zeta$  сходится быстрее, чем ряд для  $\zeta$ . Если бы оказалось, что ряд для  $\Delta\zeta$  сходится достаточно быстро, то имело бы смысл исследовать эту функцию разложением ее в ряд сферических гармоник; мало того, имело бы смысл учитывать и  $\Delta\zeta$ , когда аномалии известны, с помощью подобного ряда.

В связи с этим появляется желание путем некоторого изменения смысла величины  $\Delta\zeta$  получить для нее наиболее быстро сходящийся ряд. Когда мы обрываем интегрирование на расстоянии  $\psi_0$ , то можно считать, что  $\Delta\zeta$  определено формулой

$$\Delta\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \Delta g S_2(\psi) \sin \psi d\psi d\alpha, \quad (4.2)$$

в которой интегрирование ведется по всей сфере, но  $S_2(\psi)$  — разрывная функция, равная 0 при  $\psi < \psi_0$  и равная  $S(\psi)$  при  $\psi \geq \psi_0$ . Значения  $S_2(\psi)$  при  $\psi \geq \psi_0$  мы менять не можем, но при  $\psi < \psi_0$  мы можем установить вид этой функции по своему усмотрению: например, мы можем устранить разрыв непрерывности  $S_2(\psi)$  в точке  $\psi_0$  или также устранить разрыв непрерывности ее первых производных, т.е. принять меры к тому, чтобы разложение  $S_2(\psi)$  по полиномам Лежандра, зависящим от  $\cos(\psi)$ , сходилось быстрее; это приведет к повышению сходимости  $\Delta\zeta$  по сферическим гармоникам. Конечно, при этом

надо соответственным образом изменить определение  $\zeta_0$ , положив

$$\zeta_0 = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_0^{\psi_0} \int_0^{2\pi} S_1(\psi) \sin \psi \, d\psi \, d\alpha, \quad (4.3)$$

где

$$S_1(\psi) = S(\psi) - S_2(\psi).$$

Теперь интегрирование не будет резко обрываться на расстоянии  $\psi_0$ , так как  $S_1(\psi)$  при приближении  $\psi$  к  $\psi_0$  будет плавно стремиться к 0.

Таким образом, уравнение для  $\Delta\zeta$  (4.2) можно рассматривать как уравнение той неизвестной, но вполне определенной отсчетной поверхности, к которой фактически будут отнесены высоты геоида  $\zeta_0$  и уклонения отвеса, если интегрирование аномалий ведется всегда точно до  $\psi_0$ . Если  $S_2(\psi)$  разложить в бесконечный ряд полиномов Лежандра, зависящих от  $\cos(\psi)$ , то после почленного интегрирования уравнение этой поверхности будет разложено в ряд, составленный из сферических функций, причем сходимость этого ряда может быть очень сильно повышена по сравнению со сходимостью ряда Стокса.

Чем быстрее будет сходимость этого ряда, чем быстрее будут убывать его коэффициенты, тем глаже будет отсчетная поверхность  $\Delta\zeta$ . Чтобы достигнуть этого, не нужно заранее стеснять разложение  $S_2(\psi)$  заданием значений этой функции в области  $\psi < \psi_0$ , а принимать во внимание только ее значения при  $\psi \geq \psi_0$ , которые должны совпадать со значениями функции Стокса. Когда такое разложение в интервале от  $\psi_0$  до  $\pi$  будет выполнено, его можно будет аналитически продолжить в интервал от  $\psi_0$  до 0 и полученные значения приписать функции  $S_1(\psi)$ .

Таким образом, речь идет о том, чтобы в разложении функции Стокса произвести такую перегруппировку членов, при которой вновь образованный ряд будет значительно быстрее сходиться в интересующем нас интервале от  $\psi_0$  до  $\pi$  (и, конечно, медленнее в интервале от 0 до  $\psi_0$ , но последнее для нас безразлично).

Очевидно, сходимость нового ряда будет улучшаться с увеличением  $\psi_0$ , т.е. с увеличением сферического радиуса, внутри которого учитываются аномалии. Далее можно оценить предельную ошибку, которая может иметь место, если в этом разложении мы удержим только члены порядка  $m$ . Если с практической точки зрения с такой ошибкой можно мириться, то мы можем величину  $S_2(\psi)$  заменить ее приближением порядка  $m$ , которое назовем  $S_m(\psi)$ . Тогда получим

$$S_1(\psi) = S(\psi) - S_m(\psi),$$

причем замена в интервале  $0-\psi_0$  функции Стокса  $S(\psi)$  на функцию  $S(\psi) - S_m(\psi)$  хотя мало изменит результат при вычислении  $\zeta_0$ , но изменит его в лучшую сторону в том смысле, что отсчетная поверхность  $\Delta\zeta$  будет наиболее гладкой и наиболее легко определяемой путем разложения на сферические гармоники.

Далее, зная порядок величины коэффициентов в разложении по сферическим функциям аномалий, можно без труда подсчитать соответствующие средние значения высот отсчетной поверхности  $\Delta\zeta$  и ее наклонов (последнее соответствует оценке погрешности вывода уклонения отвеса). Таково общее направление исследования, которое будет проведено ниже.

### § 18. Улучшение сходимости ряда Стокса после выделения центральной зоны

С осуществлением изложенного выше метода исследования связаны хотя и несложные, но утомительные вычисления, в ходе которых читатель легко может потерять основную

линию исследования. Чтобы избежать этого, наиболее длинные преобразования мы вынесли в приложение, на которое, по мере надобности, будем ссылаться.

В соответствии с изложенным в предыдущем параграфе планом исследования первая наша задача заключается в том, чтобы разложить функцию Стокса  $S(\psi)$  по полиномам Лежандра в интервале изменения  $\psi$  от  $\psi_0$  до  $\pi$ . Введем новую переменную  $x$ , связанную с  $y = \cos \psi$  линейной зависимостью и принимающую на концах интервала  $\psi_0 - \pi$  значения  $+1$  и  $-1$ . Для этого достаточно положить

$$y = kx + k - 1,$$

где

$$k = \frac{1 + \cos \psi_0}{2} = \cos^2 \frac{\psi_0}{2}.$$

Функцию Стокса, выраженную через  $y$ , будем обозначать символом  $S(y)$ ; переходя от  $y$  к  $x$ , получим функцию  $S(kx + k - 1)$ , заданную в интервале изменения  $x$  от  $-1$  до  $+1$ .

Ограничиваясь приближением порядка  $m$ , разлагаем  $S(y)$  в ряд по полиномам Лежандра, зависящим от  $x$ , и получаем (см. приложение, формула (7.18))

$$S_m(kx + k - 1) = \sum_{n=0}^m \frac{2n+1}{2} K_n(S) P_n(x),$$

причем коэффициенты  $K_n(S)$  в функции  $k = \cos^2 \frac{\psi_0}{2}$  и  $t = \sin \frac{\psi_0}{2}$  даны формулами (7.21).

Нетрудно далее оценить погрешность приближения порядка  $m$  к функции  $S(kx + k - 1)$ , характеризуя его величиной  $R_m(S)$ , равной интегральному среднему квадратическому значению разности  $S(kx + k - 1) - S_m(kx + k - 1)$  во всем интервале изменения  $x$  от  $-1$  до  $+1$ . Соответствующие результаты даются формулами (7.22) и (7.24) приложения.

Таблица 6

	$t = 0, r = 0$		$t = 0,01, r = 127,4$		$t = 0,1, r = 1274$		$t = 0,2, r = 2548$		$t = 0,3, r = 3822$	
$n$	$K_n(S)$	$R_n(S)$	$K_n(S)$	$R_n(S)$	$K_n(S)$	$R_n(S)$	$K_n(S)$	$R_n(S)$	$K_n(S)$	$R_n(S)$
0	0	$\infty$	-0,0423	3,956	-0,4806	2,098	-0,9292	1,656	-1,2169	1,563
1	0	$\infty$	-0,0423	3,955	-0,4870	2,056	-0,9828	1,420	-1,4007	0,986
2	2	$\infty$	+1,9583	2,461	+1,5613	1,085	+1,1650	0,566	+0,8401	0,301
3	1	$\infty$	+0,9591	2,008	+0,6253	0,703	+0,3695	0,285	+0,2089	0,119
4	2/3	$\infty$	+0,6264	1,887	+0,3361	0,490	+0,1588	0,157	+0,0712	0,053
5	1/2	$\infty$	+0,4603	1,726	+0,2049	0,343	+0,0774	0,091	+0,0276	0,026
6	2/5	$\infty$	+0,3608	1,599	+0,1322	0,260	+0,0405	0,055	+0,0116	0,017
7	1/3	$\infty$	+0,2946	1,494	+0,0894	0,194	+0,0222	0,035	+0,0051	0,012

С помощью полученных формул можно рассчитать таблицы, которые наглядно показывают, насколько улучшается сходимость ряда Стокса после выделения зоны сферического радиуса  $\psi_0$ . Результаты вычислений представлены в табл. 6. Для четырех значений  $t$  (0,01; 0,1; 0,2; 0,3) вычислены коэффициенты  $K_n(S)$  и ошибки  $R_m(S)$  соответствующих приближений для  $n$  от 0 до 7. Для сравнения приведены значения тех же величин для  $t = 0$ . Так как  $t = \sin \frac{\psi_0}{2} = \frac{r}{2R}$ , где  $r$  — расстояние по прямой от аупункта до

границы выделенной зоны, этим значениям соответствуют значения соответственно 127,4, 1274, 2548 и 3822 км.

Коэффициенты  $K_n(S)$  убывают тем быстрее, чем больше  $t$ . Чтобы лучше проследить это, составим отношения этих коэффициентов при данном значении  $t$  к их величине при  $t = 0$ ; полученные данные приведены в табл. 7.

Таблица 7

$n$	$t = 0,01$		$t = 0,1$		$t = 0,2$		$t = 0,3$	
	2	0,979		0,781		0,582		0,420
		0,98		0,80		0,64		0,50
3	0,959		0,625		0,370		0,209	
		0,98		0,81		0,64		0,51
4	0,940		0,504		0,238		0,107	
		0,98		0,81		0,65		0,51
5	0,921		0,410		0,155		0,055	
		0,98		0,80		0,65		0,53
6	0,902		0,330		0,101		0,029	
		0,98		0,81		0,66		0,52
7	0,884		0,268		0,067		0,015	

Между строчками выписано отношение последующего числа к предыдущему. Мы видим, что отношения  $\frac{K_n(t)}{K_n(0)}$  с увеличением  $n$  убывают почти точно в геометрической прогрессии со знаменателем  $(1 - t)^2$ . Мы убеждаемся в том, что выделение центральной зоны существенно улучшает сходимость ряда Стокса.

С возрастанием  $t$  быстро убывает средняя квадратическая ошибка приближения  $R_n(s)$ . Седьмое приближение при  $t = 0,1$  дает результат, который хуже, чем четвертое приближение при  $t = 0,2$ , а это последнее дает ошибку, лежащую между вторым и третьим приближением для  $t = 0,3$ .

### § 19. Оценка предельного влияния дальних зон

Теперь мы можем произвести оценку предельного влияния дальних зон на гравиметрические выводы высоты геоида и отклонения отвесной линии.

Будем исходить из известного неравенства Шварца

$$\int_{\sigma} \varphi \psi d\sigma \leq \left( \int_{\sigma} \varphi^2 d\sigma \int_{\sigma} \psi^2 d\sigma \right)^{1/2},$$

где  $\varphi$  и  $\psi$  — две действительные функции действительного переменного, заданные в области  $\sigma$ . Знак равенства соответствует только тому случаю, когда  $\varphi = C\psi$ , где  $C$  — некоторая постоянная.

Применяя это неравенство к поправке в высоту геоида, обусловленной влиянием дальних зон за пределами  $\psi_0 = \arccos k$ , если учитываются аномалии до порядка  $n$  в сферических функциях, получаем

$$\Delta\zeta = \frac{k}{4\pi\gamma} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \Delta g(S - S_n) dx d\alpha \leq \frac{k}{\gamma} R_n \bar{\Delta}g,$$

так как

$$\int_0^{2\pi} d\alpha \int_{-1}^{+1} (S - S_n)^2 dx = 2\pi 2R_n^2,$$

$$\int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \Delta g^2 dx d\alpha = 4\pi \bar{\Delta} g^2,$$

где  $\bar{\Delta} g$  — среднее квадратическое значение аномалии с редукцией в свободном воздухе.  $R_n$  определено ранее (формула (7.22) приложения и табл. 6).

Чтобы получить результат для уклонений отвеса, нужно вывести некоторые вспомогательные формулы. Используя дифференциальное уравнение Лежандра

$$(1 - x^2)P''_n(x) - 2xP'_n(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

и формулу (7.18) приложения, путем интегрирования по частям получаем

$$J_n^I = \int_{-1}^{+1} (2S' - S'_n)S'_n(1 - x^2) dx = \sum_1^n \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} K_n^2,$$

$$J_n^{II} - J_{n-1}^{II} = \int_{-1}^{+1} (2S' - S'_n)S'_n(1+x) dx - \int_{-1}^{+1} (2S' - S'_{n-1})S'_{n-1}(1+x) dx =$$

$$= 2 [(S'_n - S'_{n-1})(2S - S_n - S_{n-1})]_{x=1},$$

причем

$$(S_n)_{x=1} = \sum_1^n \frac{(2n+1)}{2} K_n,$$

$$(S'_n)_{x=1} = \sum_1^n \frac{n(n+1)(2n+1)}{4} K_n.$$

В результате простых, но довольно длинных вычислений получаем

$$J_0 = \int_{2\arcsin t}^{\pi} \left( \frac{dS}{d\psi} \right)^2 \sin \psi d\psi = \frac{1}{2t^2} + \frac{6}{t} - 12 \ln^2 t - 26 \ln t +$$

$$+ (12 - 36t^4 + 74t^6) \ln^2(t + t^2) + (48t^2 + 56t^3 - 168t^4 - 48t^5 + 112t^6) \ln(t + t^2) +$$

$$+ 34 \ln \frac{1+t}{2} - 24t + 56t^2 + \frac{392}{3}t^3 - 176t^4 - 112t^5 + \frac{400}{3}t^6 + 24 \left( \frac{\pi^2}{12} + \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n^2} \right).$$

Применяя теперь неравенство Шварца к  $\Delta \xi$  (или, что то же самое, к  $\Delta \eta$ ), получаем

$$\Delta \xi = \frac{1}{2\pi\gamma} \int_{\sigma} \Delta g \frac{d(S - S_n)}{d\psi} \cos \alpha d\sigma \leq 0'', 210 \bar{\Delta} g D_n,$$

где

$$D_n^2 = kJ_0 - 2k^2 \bar{J}_n,$$

$$\bar{J}_n = \frac{1}{2} J_n^I + \frac{1-k}{k} J_n^{II}.$$

Проще всего  $\bar{J}_n$  вычисляется с помощью соотношения

$$\bar{J}_n - \bar{J}_{n-1} = (S'_n - S'_{n-1}) \left[ K_n + \frac{2(1-k)}{k} (2S - S_n - S_{n-1}) \right]_{x=1}.$$

Используя табл. 6 со значениями  $K_n$  и  $R_n$ , получаем следующую таблицу предельных значений  $\Delta\zeta$  и  $\Delta\xi$ ,  $\Delta\eta$  при  $\overline{\Delta g} = 1$  мгл (см. табл. 8).

Таблица 8

n	$\Delta\xi$ , м			$\Delta\xi''$ , $\Delta\eta''$		
	$\psi_0 = 11^\circ,5$	$\psi_0 = 23^\circ,1$	$\psi_0 = 34^\circ,9$	$\psi_0 = 11^\circ,5$	$\psi_0 = 23^\circ,1$	$\psi_0 = 34^\circ,9$
0	13,5	10,33	9,25	2'',51	1'',54	1'',09
2	6,98	3,53	1,78	2,06	0,97	0,53
3	4,52	1,78	0,70	1,78	0,70	0,30
4	3,15	0,98	0,31	1,56	0,50	0,17
5	2,21	0,57	0,15	1,36	0,36	0,10
6	1,67	0,34	0,10	1,18	0,26	0,06
7	1,25	0,22	0,07	1,02	0,18	0,03

Таким образом, первая строчка табл. 8 характеризует предельную величину полного влияния дальних зон на гравиметрические выводы высоты геоида и отклонения отвеса при среднем квадратическом значении аномалии в этих зонах в 1 мгл. Этот предел может достигаться только в том случае, например для  $\Delta\xi$ , если

$$\Delta g = \frac{\overline{\Delta g}}{\sqrt{\pi J_0}} \cdot \frac{dS}{d\psi} \cos \alpha.$$

Последующие строки табл. 8 определяют предельные величины поправок для тех случаев, когда учтено влияние сферических функций до порядка  $n$  включительно.

Эта таблица показывает, что влияние дальних зон на вывод отклонения отвеса может быть значительным. Распространенное мнение о малой величине этого влияния, основанное на быстром убывании функции Венинг-Мейнеса вблизи начала координат, не подтверждается.

Следует еще остановиться на вопросе о том, как следует понимать здесь  $\overline{\Delta g}$ . Поскольку речь идет о влиянии дальних зон, под  $\overline{\Delta g}$  можно понимать среднее квадратическое значение аномалий, уже усредненных на площадках значительного размера, причем выбор величины площадки окажется существенным. Такое усреднение сводится к гашению гармоник высокого порядка в аномалиях  $\Delta g$ . Каким же порядком сферических функций можно ограничиться, устанавливая значения  $\overline{\Delta g}$ ? Здесь можно рассуждать таким образом. Пусть предельная ошибка, вычисленная с помощью описанных приемов для  $\zeta$ ,  $\xi$  или  $\eta$ , составит  $E(n, \psi_0) \overline{\Delta g}$ , где  $E(n, \psi_0)$  — одно из чисел табл. 8.

Пусть  $n$  — наименьшее число, удовлетворяющее условию

$$E(n, \psi_0) \overline{\Delta g} < \varepsilon,$$

причем  $\varepsilon$  есть величина, которой можно пренебречь, а  $\overline{\Delta g}$  пока понимается как среднее квадратическое значение не усредненной аномалии. Тогда с ошибкой, много меньшей, чем  $\varepsilon$ , т.е. по нашему допущению вполне пренебрегаемой, для дальних зон функцию  $S(\psi)$  можно заменить ее приближением порядка  $n$   $S_n(\psi)$ , а потому в тех же зонах учет аномалий порядка выше  $n$  становится ненужным. Следовательно, под  $\overline{\Delta g}$  нужно понимать  $\overline{\Delta g_n}$ , где  $\Delta g_n$  есть  $n$ -е приближение к  $\Delta g$ , полученное путем учета первых  $n$  сферических функций в разложении  $\Delta g$ .

Поэтому теперь можно ограничиться меньшим значением  $n$ , определяя его из условия

$$E(n, \psi_0) \overline{\Delta g_n} < \varepsilon.$$

В приведенных нами двух примерах разложения аномалий по сферическим функциям среднее квадратическое значение каждой из первых сферических функций получилось равным около 5 мгл. Для функций высоких порядков оно должно убывать. Поэтому для ориентировочных суждений можно предположить, что

$$\overline{\Delta g_n} < 5\sqrt{n}.$$

Например:

$\psi_0$	$n$	$\Delta \zeta$	$\Delta \xi$ и $\Delta \eta$
$34^\circ,9$	6	$< 1,2$ м	$< 0'',7$
$23^\circ,1$	6	$< 4,1$ м	$< 3'',2$

## § 20. Оценка среднего квадратического влияния дальних зон

Пределы, о которых шла речь, являются наивысшими, которые могут иметь место при заданном виде функций  $S(\psi)$  и заданной величине  $\overline{\Delta g}$ , но при наиболее неблагоприятном распределении аномалий. Фактически влияние дальних зон должно быть во много раз меньше. Но для суждения о средней величине этого влияния одной величины  $\overline{\Delta g}$  недостаточно — неизбежно придется задаться законом распределения аномалий по земной поверхности. Для ориентировочных суждений по этому вопросу используем приведенное в § 16 разложение.

Прежде всего оценим среднее квадратическое значение отклонения отвеса для всей Земли, обусловленное первыми сферическими функциями в разложении аномалий.

Дифференцируя ряд Стокса, получим

$$\xi_n = \frac{1}{\gamma \sin 1''} \sum_2^n \frac{1}{n-1} \frac{\partial g_n}{\partial \vartheta},$$

$$\eta_n = \frac{1}{\gamma \sin 1''} \sum_2^n \frac{1}{n-1} \frac{\partial g_n}{\partial \lambda} \operatorname{cosec} \vartheta.$$

Мы желаем получить

$$\bar{\xi}_n^2 = \frac{1}{4\pi} \int \xi_n^2 d\sigma; \quad \bar{\eta}_n^2 = \frac{1}{4\pi} \int \eta_n^2 d\sigma.$$

Из формулы

$$(2n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x),$$

дифференцируя ее  $m$  раз, определяем  $\frac{P_n^m}{\sin^m \vartheta}$ :

$$\frac{P_n^m}{\sin^m \vartheta} = (2n-1)P_{n-1}^{m-1} + (2n-5)P_{n-3}^{m-1} + \dots$$

Теперь легко получаем интегральные формулы:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{P_n^m}{\sin^2 \vartheta} dx = 2(2n-1) \frac{(n+m-2)!}{(n-m)!} + 2(2n-5) \frac{(n+m-4)!}{(n-m-2)!} \dots = C_n^m,$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{P_n^m P_l^m}{\sin^2 \vartheta} dx = \begin{cases} C_l^m, & \text{если } n-l \text{ четное число, } l < n. \\ 0, & \text{если } n-l \text{ нечетное число.} \end{cases}$$

Далее, исходя из дифференциального уравнения для присоединенных функций Лежандра

$$(x^2 - 1)P_n^{m''} + 2xP_n^{m'} = n(n+1)P_n^m - \frac{m^2 P_n^m}{1-x^2}$$

и используя полученные выше интегральные формулы, имеем

$$\int_{-1}^{+1} \left( \frac{dP_n^m}{d\vartheta} \right)^2 dx = \frac{2n(n+1)(n+m)!}{2n+1(n-m)!} = m^2 C_n^m,$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dP_n^m}{d\vartheta} \frac{dP_l^m}{d\vartheta} dx = \begin{cases} -m^2 C_l^m, & \text{если } n-l \text{ четное число, } l < n. \\ 0, & \text{если } n-l \text{ нечетное число.} \end{cases}$$

Выполнив расчет по всем этим формулам и присоединяя ранее полученные данные, получаем табл. 9, характеризующую поле аномалий силы тяжести до 6-го порядка включительно.

Таблица 9

n	Влияние аномалий порядка n				$\overline{\Delta g_n}$ , мгл	$\bar{\zeta}_n$ , м	$\bar{\xi}_n$	$\bar{\eta}_n$
	$\Delta g$ , мгл	$\zeta$ , м	$\xi$	$\eta$				
2	$\pm 5,4$	$\pm 34,3$	$\pm 1'',76$	$\pm 2'',17$	$\pm 5,4$	$\pm 34,3$	$\pm 1,76$	$\pm 2,17$
3	$\pm 4,3$	$\pm 14,0$	$\pm 0,91$	$\pm 1,30$	$\pm 7,9$	$\pm 37,0$	$\pm 1,98$	$\pm 2,53$
4	$\pm 4,4$	$\pm 9,6$	$\pm 1,12$	$\pm 0,83$	$\pm 8,3$	$\pm 39,2$	$\pm 2,30$	$\pm 2,69$
5	$\pm 3,6$	$\pm 5,8$	$\pm 0,87$	$\pm 0,58$	$\pm 9,0$	$\pm 39,6$	$\pm 2,47$	$\pm 2,76$
6	$\pm 5,9$	$\pm 7,7$	$\pm 0,98$	$\pm 1,28$	$\pm 10,8$	$\pm 40,4$	$\pm 2,62$	$\pm 3,01$

Цифры последней строчки правой половины табл. 9 определяют нижние пределы: среднее квадратическое значение высоты геоида не менее  $\pm 40$  м, а отклонения отвеса не менее  $\pm 3''$ .

Теперь можем оценить порядок средних квадратических величин поправок, которые должны учитывать поле аномалий силы тяжести за пределами области интеграции по



формуле (7.25) приложения:

$$\Delta\zeta = \frac{R}{2\gamma} \sum_2^m g_n K_n = \frac{R}{\gamma} \sum_2^m M_n \frac{g_n}{n-1},$$

где

$$M_n = \frac{n-1}{2} K_n(S_m).$$

Соответствующие формулы для  $\xi$  и  $\eta$  получаются из последних формул путем дифференцирования.

Внося множители  $M_n$  в соответствующие числа предыдущей таблицы, получаем средние величины поправок  $\zeta$ ,  $\xi$  и  $\eta$ , обусловленные влиянием аномалий за пределами радиуса интеграции  $\psi_0$ , которые приведены в табл. 10.

Таблица 10

$\psi_0$	$\Delta\zeta$ , м				$\Delta\xi''$				$\Delta\eta''$			
	$0^\circ$	$11^\circ,5$	$23^\circ,1$	$34^\circ,9$	$0^\circ$	$11^\circ,5$	$23^\circ,1$	$34^\circ,9$	$0^\circ$	$11^\circ,5$	$23^\circ,1$	$34^\circ,9$
Влияние аномалий, выражаемых сферическими функциями порядка от 2 до $n$												
2	34,3	30,3	27,4	25,1	1,76	1,51	1,37	1,25	2,17	1,86	1,68	1,55
3	37,0	31,9	28,5	26,0	1,98	1,65	1,46	1,32	2,53	2,08	1,84	1,67
4	39,2	32,4	28,8	26,1	2,30	1,78	1,53	1,35	2,69	2,14	1,87	1,68
5	39,6	32,6	28,8	26,1	2,47	1,82	1,54	1,36	2,76	2,16	1,87	1,68
6	40,4	32,7	28,8	26,1	2,62	1,85	1,55	1,36	3,01	2,20	1,88	1,68
Влияние аномалий, выражаемых сферическими функциями порядка от 4 до $n$												
4	9,6	5,7	3,7	2,6	1,12	0,66	0,44	0,31	0,83	0,49	0,32	0,23
5	11,2	6,3	4,0	2,7	1,42	0,78	0,49	0,33	1,01	0,56	0,35	0,24
6	13,6	6,9	4,1	2,7	1,72	0,85	0,50	0,33	1,63	0,72	0,39	0,25

Первая половина таблицы (аномалии учитываются начиная со 2-го порядка) соответствует обычному случаю, когда поверхностью относимости является эллипсоид. Вторая половина той же табл. 10 характеризует результаты, получающиеся на хорошо подобранной поверхности третьего порядка в сферических функциях.

Эта таблица наглядно показывает эффект, получающийся в результате убыстрения сходимости функции Стокса. Уже при  $\psi_0 = 11^\circ,5$  заметно значительное ослабление в скорости прироста поправок с увеличением  $n$  по сравнению с тем, что имело место при  $\psi_0 = 0$ . Для  $\psi_0 = 23^\circ,1$  и  $34^\circ,9$  это обстоятельство проявляется с еще большей четкостью.

Принимая во внимание результаты, полученные при исследовании предельных ошибок, можно прийти к таким заключениям. Если непосредственным интегрированием учитываются аномалии до сферического расстояния в  $34^\circ,9$  или  $23^\circ,1$  от аупункта, то среднее квадратическое влияние всех дальних зон выражается следующими величинами:

	$34^\circ,9$	$23^\circ,1$
по $\zeta$	26 м	29 м
по $\xi$	1'',4	1'',6
по $\eta$	1'',7	1'',9

Предельные ошибки от замены функции Стокса шестым приближением к ней при этом получаются соответственно:

$$\begin{array}{r} \text{по } \zeta \\ \text{по } \xi \text{ и } \eta \end{array} \begin{array}{cc} 34^{\circ},9 & 23^{\circ},1 \\ \hline 1,2 \text{ м} & 4,1 \text{ м} \\ 0'',7 & 3'',2 \end{array}$$

При тех же предельных ошибках (за счет упрощения функции Стокса) среднее квадратическое влияние аномалий от 4-го до 6-го порядка при учете дальних зон определится величинами

$$\begin{array}{r} \text{по } \zeta \\ \text{по } \xi \text{ и } \eta \end{array} \begin{array}{cc} 34^{\circ},9 & 23^{\circ},1 \\ \hline 3 \text{ м} & 4 \text{ м} \\ 0'',3 & 0'',4 \end{array}$$

Если можно пренебречь этими величинами, то при учете дальних зон достаточно принять во внимание сферические функции только 2-го и 3-го порядка в аномалии. Для этого необходимо определить 10 входящих в них коэффициентов. Такую задачу можно считать выполнимой.

В заключение подчеркнем, что достоверность полученных числовых выводов зависит от того, насколько верно получен порядок величины коэффициентов разложения аномалий по сферическим функциям. Приведенное выше сравнение двух вариантов разложения Дубовского с вариантом Джеффриса позволяет надеяться, что в данном вопросе степень неопределенности не очень велика. Во всяком случае пока нет другого, более достоверного материала для характеристики влияния дальних зон на гравиметрические выводы.

Изложенная методика, основанная на убыстрении сходимости ряда Стокса, можно думать, окажется полезной в практических работах для учета влияния дальних зон при массовых вычислениях. Упрощая вычислительные работы, этот способ позволяет просто исправить результаты, если коэффициенты, входящие в первые сферические функции разложения аномалий, будут определены заново более уверенно.

Но если даже влияние дальних зон не учитывать, имеет смысл в центральной зоне видоизменить функцию Стокса изложенным приемом, поскольку после этого высоты геоида и уклонения отвеса будут соответствовать наиболее простой поверхности относимости, которая на практике легче всего может быть определена.

## *Глава V*

### **ЗАДАЧИ, РАЗРЕШАЕМЫЕ ПРИ НАЛИЧИИ ТОЛЬКО МЕСТНОЙ ГРАВИМЕТРИЧЕСКОЙ СЪЕМКИ**

#### **§ 21. Идея астрономо-гравиметрического способа развития опорной геодезической сети**

Гравиметрический вывод уклонений отвеса и особенно высот геоида осложнен тем, что гравиметрической съемкой охвачена сравнительно небольшая часть всей поверхности Земли. В лучшем случае при подобных выводах удается учесть аномалии до расстояния в 1000–1500 км от исследуемого пункта. Но и тогда за счет неучтенных аномалий в уклонения отвеса войдет ошибка свыше  $\pm 2''$ , а в высоту геоида — более  $\pm 30$  м (в обоих случаях имеются в виду средние ошибки). Для близких пунктов эти ошибки почти постоянны: их изменение от пункта к пункту происходит медленно и плавно. Правильный характер изменения эффекта дальних аномалий позволяет интерполировать его и в некоторых задачах исключать путем привлечения дополнительных данных. Такими данными являются астрономо-геодезические уклонения отвесной линии.

При совместном использовании астрономо-геодезических и гравиметрических материалов желательно исключить влияние неизвестных дальних аномалий настолько, чтобы с ним можно было не считаться. Вместе с тем, область учитываемых аномалий, внутри которой должны быть выполнены гравиметрические работы, желательно ограничить минимальными размерами.

Чем в большей степени требуется исключить влияние дальних аномалий, тем в большей области, естественно, аномалии должны учитываться. Существует связь между радиусом учитываемой области и соответствующей остаточной ошибкой, обусловленной всеми неучтенными аномалиями. Установление этой связи является основным принципиальным вопросом астрономо-гравиметрического нивелирования и астрономо-гравиметрического способа развития опорной сети картографических съемок.

Для решения указанного вопроса достаточно оценить предельную ошибку того или иного вывода в зависимости от радиуса той области, внутри которой оказалось возможным учесть аномалии. Но для этой предельной ошибки желательно дать возможно точную оценку, чтобы, с одной стороны, не преувеличивать ошибку результата, а с другой — без нужды не требовать выполнения лишних гравиметрических работ. С последней точки зрения уточнение предельной ошибки имеет большое практическое значение.

Полученную нами ранее предельную ошибку интерполирования уклонения отвеса («Труды ЦНИИГАиК», вып. 17) в результате более тщательной оценки можно значительно снизить. Точно так же мы получим более точно величину соответствующей ошибки для астрономо-гравиметрического нивелирования и оценим верхний предел накопления рассматриваемых ошибок при передаче высоты геоида на значительное расстояние.

Напомним принципиальную сторону вывода интерполированных уклонений отвеса и гравиметрических поправок в астрономическое нивелирование. Это необходимо для уточнения прежних расчетов. Астрономо-геодезические уклонения отвеса считаются заданными в нескольких точках области  $\sigma$ . Если речь идет об интерполяции по площади, то число таких точек (с известными обеими составляющими) должно быть не менее трех. При интерполяции по прямой достаточно иметь две точки — на концах отрезка. При наличии большего числа точек будем располагать дополнительными данными, которые позволят снизить случайную часть ошибки результата. За границу области  $\sigma$  возьмем стороны выпуклого многоугольника, каждая из вершин которого совпадает с одним из астрономических пунктов триангуляции (в случае двух пунктов  $A$  и  $B$  областью  $\sigma$  будет являться отрезок  $AB$ ).

Всю поверхность Земли делим на две области:

1) область  $\Sigma$ , в каждой точке которой можем считать аномалию силы тяжести известной;

2) область  $\Sigma'$ , к которой относим всю остальную часть поверхности Земли. Для дальнейших выводов необходимо предположить, что область  $\sigma$  целиком заключена в области  $\Sigma$ . Основная наша задача заключается в том, чтобы при заданных размерах  $\sigma$  определить минимальные размеры области  $\Sigma$  при заданной точности интерполяции уклонений отвеса.

Астрономо-геодезическое уклонение отвеса  $\vartheta_a(K)$  в любой точке  $K$  области  $\sigma$  можем представить как сумму

$$\vartheta_a(K) = \vartheta_g(K) + \Delta\vartheta(K)$$

гравиметрического уклонения отвеса  $\vartheta_g(K)$  и  $\Delta\vartheta(K)$ , где  $\Delta\vartheta(K)$  есть угол между референц-эллипсоидом, принятым при обработке триангуляции, и эллипсоидом, положенным в основу при вычислении аномалий силы тяжести. Это равенство можно понимать либо как векторное, либо как скалярное для соответствующих составляющих произвольного, но всюду одинакового направления.

Точно так же гравиметрическое уклонение отвеса представим в виде суммы:

$$\vartheta_g(K) = \vartheta_g(\Sigma, K) + \vartheta_g(\Sigma', K),$$

где первое слагаемое определяется только аномалиями в области  $\Sigma$  (и, следовательно, считается известным), а второе зависит от неизвестных аномалий в области  $\Sigma'$ .

Таким образом,

$$\vartheta_a(K) - \vartheta_g(\Sigma, K) = \vartheta_g(\Sigma', K) + \Delta\vartheta(K), \quad (5.1)$$

причем левая сторона равенства известна, если точка  $K$  совпадает с астрономо-геодезическим пунктом. Она может считаться известной и в любом промежуточном пункте, если ее изменение настолько правильно, что окажется возможной интерполяция с заранее установленной точностью. Поскольку угол между эллипсоидами  $\Delta\vartheta(K)$  меняется по известному закону (очень медленно и плавно), задача сводится к выбору границы между областями  $\Sigma$  и  $\Sigma'$  в функции размеров области  $\sigma$  и допустимой ошибки интерполяции.

Изложенные соображения передают основную идею астрономо-гравиметрического способа развития опорной сети для картографических съемок.

## § 22. Оценка предельной ошибки, связанной с ограничением радиуса интегрирования

Возьмем точку  $O$  в центральной части области  $\sigma$ . Граница областей  $\Sigma$  и  $\Sigma'$  должна быть настолько удалена от границы  $\sigma$  и  $\Sigma$ , чтобы минимальное расстояние от точки  $O$  до первой границы было больше максимального расстояния от той же точки  $O$  до второй границы (как увидим далее, из соображений точности интерполяции отношение этих расстояний должно быть около двух).

При этом условии  $\vartheta_g(K\Sigma')$  можно разложить в ряд:

$$\vartheta_g(K\Sigma') = \vartheta_g(O\Sigma') + \frac{\partial\vartheta_g(O\Sigma')}{\partial x}x + \frac{\partial\vartheta_g(O\Sigma')}{\partial y}y + \dots, \quad (5.2)$$

и этот ряд будет абсолютно сходиться во всей области  $\sigma$ . Здесь  $x$  и  $y$  — прямоугольные координаты точки  $K$  при начале координат в  $O$ .

Написанные члены разложений, линейные относительно координат, полностью учитываются линейной интерполяцией. Ошибка интерполяции величины  $\vartheta_g(K\Sigma')$  определится величиной последующих членов, зависящих от вторых и высших степеней координат. Очевидно, их исследование (в случае линейной интерполяции) должно определить границу между областями  $\Sigma$  и  $\Sigma'$ , т.е. ту границу, до которой должны учитываться аномалии силы тяжести. Если в качестве интерполяционной функции избрать функцию второго порядка, то ошибка интерполирования определилась бы членами третьего и более высокого порядка. Но нет смысла в подобном осложнении интерполяции, так как при решении такой задачи число неизвестных удваивается и надежность их определения сильно понижается. С практической точки зрения лучше вместо этого область  $\sigma$  разбить на части, что также приведет к уменьшению области  $\Sigma$ . Поэтому нет нужды дальнейшие выводы усложнять учетом сферических членов, которые, как известно, в формуле Вининг-Мейнеса мало сказываются при интегрировании даже до расстояния в 1000 км и имеют ничтожную величину в формулах для вторых производных от уклонения отвеса.

По этой причине мы можем исходить из предельного вида формулы Стокса (случай плоского поля аномалий бесконечного простиранья):

$$\zeta = \frac{1}{2\pi\gamma} \int \frac{\Delta g}{r} d\sigma,$$

и пользоваться следующими соотношениями:

$$\frac{\partial^n \zeta}{\partial x^n} = (-1)^n \frac{n!}{2\pi\gamma} \int \Delta g \frac{P_n(\cos \alpha)}{r^{n+1}} d\sigma, \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial^{n+1} \zeta}{\partial x^n \partial y} = (-1)^{n+1} \frac{n!}{2\pi\gamma} \int \Delta g \frac{P'_n(\cos \alpha) \sin \alpha}{r^{n+2}} d\sigma, \quad (5.4)$$

понимая под  $\alpha$  угол между осью  $x$  и направлением радиуса-вектора  $r$ , проведенного к элементу плоскости  $d\sigma$ .

Таким образом, члены второго порядка (сумму их назовем  $\delta_2$ ) в разложении (5.2) при интерполяции составляющей уклонения отвеса по  $x$  можно представить так:

$$\begin{aligned} \delta_2 = & \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} \frac{x^2}{2} + \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3 \partial y} xy + \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3 \partial y} \frac{y^2}{2} = -\frac{3x^3}{2\pi\gamma} \int_{\Sigma'} \frac{\Delta g P_3(\cos \alpha)}{r^4} d\sigma - \\ & - \frac{xy}{\pi\gamma} \int_{\Sigma'} \frac{\Delta g P'_3(\cos \alpha) \sin \alpha}{r^4} d\sigma - \frac{y^2}{2\pi\gamma} \int_{\Sigma'} \frac{\Delta g P'_3(\sin \alpha) \cos \alpha}{r^4} d\sigma, \end{aligned}$$

или, если  $R$  — минимальное расстояние от  $O$  до границы  $\Sigma$  и  $\Sigma'$ :

$$\begin{aligned} \delta_2 \leq \left| \frac{1}{4\pi\gamma} \int_R^\infty d \left( \frac{1}{r^2} \right) \int_0^{2\pi} \Delta g \left[ 3x^2 P_3(\cos \alpha) + \right. \right. \\ \left. \left. + 2xy P'_3(\cos \alpha) \sin \alpha + y^2 P'_3(\sin \alpha) \cos \alpha \right] d\alpha \right|. \end{aligned}$$

Оценим предельную величину результата интегрирования по  $\alpha$ , пользуясь неравенством Шварца.

Прежде всего убеждаемся, что

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} P_3(\cos \alpha) P'_3(\cos \alpha) \sin \alpha d\alpha = 0, \\ \int_0^{2\pi} P'_3(\cos \alpha) P'_3(\sin \alpha) \sin \alpha \cos \alpha d\alpha = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, на основании неравенства Шварца

$$\begin{aligned} I = \int_0^{2\pi} \Delta g \left[ 3x^2 P_3(\cos \alpha) + 2xy P'_3(\cos \alpha) \sin \alpha + y^2 P'_3(\sin \alpha) \cos \alpha \right] d\alpha \leq \\ \leq \left\{ \int_0^{2\pi} \Delta g^2 d\alpha \int_0^{2\pi} \left[ 9x^4 P_3^2(\cos \alpha) + 4x^2 y^2 P_3'^2(\cos \alpha) \sin^2 \alpha + \right. \right. \\ \left. \left. + y^4 P_3'^2(\sin \alpha) \cos^2 \alpha + 6x^2 y^2 P_3(\cos \alpha) P'_3(\sin \alpha) \cos \alpha \right] d\alpha \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

Далее получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} P_3^2(\cos \alpha) d\alpha &= \frac{17}{32}\pi, \\ \int_0^{2\pi} P_3'^2(\cos \alpha) \sin^2 \alpha d\alpha &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{dP_3(\cos \alpha)}{d\alpha} \right)^2 d\alpha = \frac{117}{32}\pi, \\ \int_0^{2\pi} P_3'^2(\sin \alpha) \cos^2 \alpha d\alpha &= \frac{117}{32}\pi, \\ \int_0^{2\pi} P_3(\cos \alpha) P_3'(\sin \alpha) \cos \alpha d\alpha &= -\frac{33}{32}\pi. \end{aligned}$$

Подставляя эти значения в предыдущее неравенство, имеем

$$I \leq \left[ \int_0^{2\pi} \Delta g^2 d\alpha \right]^{1/2} \left( \frac{9\pi}{32} (17x^4 + 30x^2y^2 + 13y^4) \right)^{1/2} < \frac{3\sqrt{17}\pi}{8} (x^2 + y^2) \Delta g_m, \quad (5.5)$$

где

$$\Delta g_m^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta g^2 d\alpha.$$

Поэтому

$$|\delta_2| < \frac{3\sqrt{17} x^2 + y^2}{16} \int_{\infty}^R \Delta g_m d\left(\frac{1}{r^2}\right) < \frac{3\sqrt{17} x^2 + y^2}{16} \frac{\overline{\Delta g_m}}{R^2} \frac{1}{\gamma}. \quad (5.6)$$

В неравенстве (5.5)  $\Delta g_m$  представляет собой среднее квадратическое значение колебания аномалии на окружности радиуса  $r$  (с центром в  $O$ ).  $\overline{\Delta g_m}$  при буквальном понимании (5.6) должно бы пониматься как максимальное значение  $\Delta g_m$ . Однако, поскольку  $\Delta g_m$  множится на  $\frac{1}{r^3}$ , интеграл в (5.6) убывает чрезвычайно быстро, и его величина определяется почти исключительно аномалиями вблизи его нижнего предела. Поэтому под  $\overline{\Delta g_m}$  можно понимать среднее квадратическое значение колебания аномалии вблизи границы областей  $\Sigma$  и  $\Sigma'$ .

Выражая  $\delta_2$  в секундах, получаем вместо (5.6)

$$|\delta_2| < 0'',16 \frac{x^2 + y^2}{R^2} \overline{\Delta g_m}, \quad \text{или} \quad |\delta_2| < 0'',16 \frac{\overline{\Delta g_m}}{\rho^2}, \quad (5.7)$$

где  $\rho$  — отношение радиусов областей  $\Sigma$  и  $\sigma$ , а  $\overline{\Delta g_m}$  выражено в миллигалах.

Мы не будем оценивать предельную величину членов третьего и следующих порядков в разложении (5.2); заранее можно ожидать, что они окажутся малыми. В этом мы убедимся, когда перейдем к соответствующим расчетам для астрономо-гравиметрического нивелирования. Влияние этих членов, как увидим, будет учтено в формуле

$$\delta < \frac{0'',16}{\rho^2 - 1} \overline{\Delta g_m}. \quad (5.8)$$

Эта формула дает предельную ошибку разложения (5.2), т.е. она определяет предельную величину полного изменения на участке  $\sigma$  тех нелинейных членов, которые при развитии опорной астрономо-геодезической сети изложенным способом дадут систематическую часть деформации этой сети. Эта величина ( $\delta$ ) распределится в области  $\sigma$  по-разному, в зависимости от расположения опорных пунктов. Например, если все опорные пункты расположены на контуре  $\sigma$ , то это значение ( $\delta$ ) является предельным для центра  $\sigma$ , убывая от центра пропорционально квадрату расстояния (таким образом, во всех остальных точках оно будет значительно меньше).

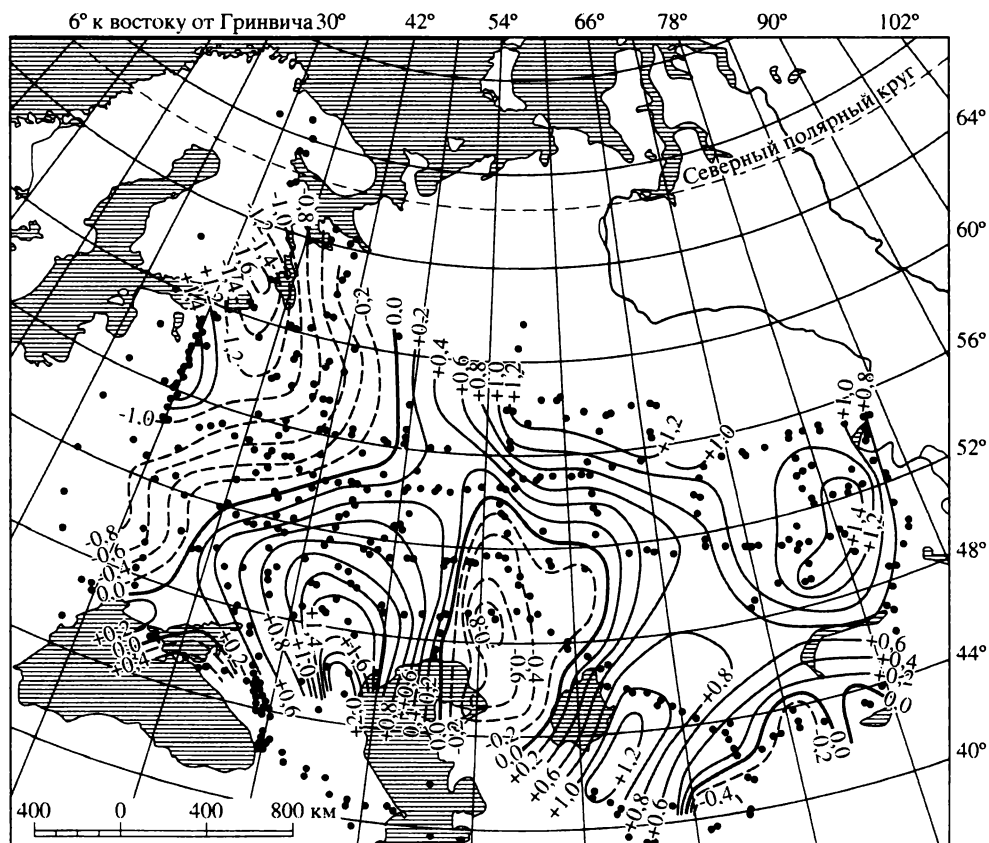


Рис. 1. Схема, характеризующая влияние аномалий в зонах от 300 до 1000 км при выводе гравиметрического уклонения отвесной линии в первом вертикале

В качестве примера применения формулы (5.8) рассмотрим тот случай, когда области  $\sigma$  соответствует лист карты масштаба 1:200 000, т.е. радиус этой области составляет  $\sim 50$  км. Можно принять из осторожности, что  $\Delta g_m$  будет тогда приблизительно равно двойной ошибке представительства контура  $\Sigma$ , т.е.

$$\overline{\Delta g_m} \approx 1,1 \sqrt{2\pi \cdot 50\rho} \approx 20\sqrt{\rho} \text{ мгл.}$$

Задаваясь предельной величиной  $\delta < 1'', 2$ , получаем

$$\rho^2 - 1 = 2,6\sqrt{\rho}, \quad \rho \approx 2,1,$$

т.е. гравиметрическая съемка должна от центра листа распространяться не менее чем на 100 км.

При оценке  $\overline{\Delta g_m}$  в конкретных случаях надежнее пользоваться гравиметрической картой. Достаточно ограничиться довольно грубой глазомерной оценкой.

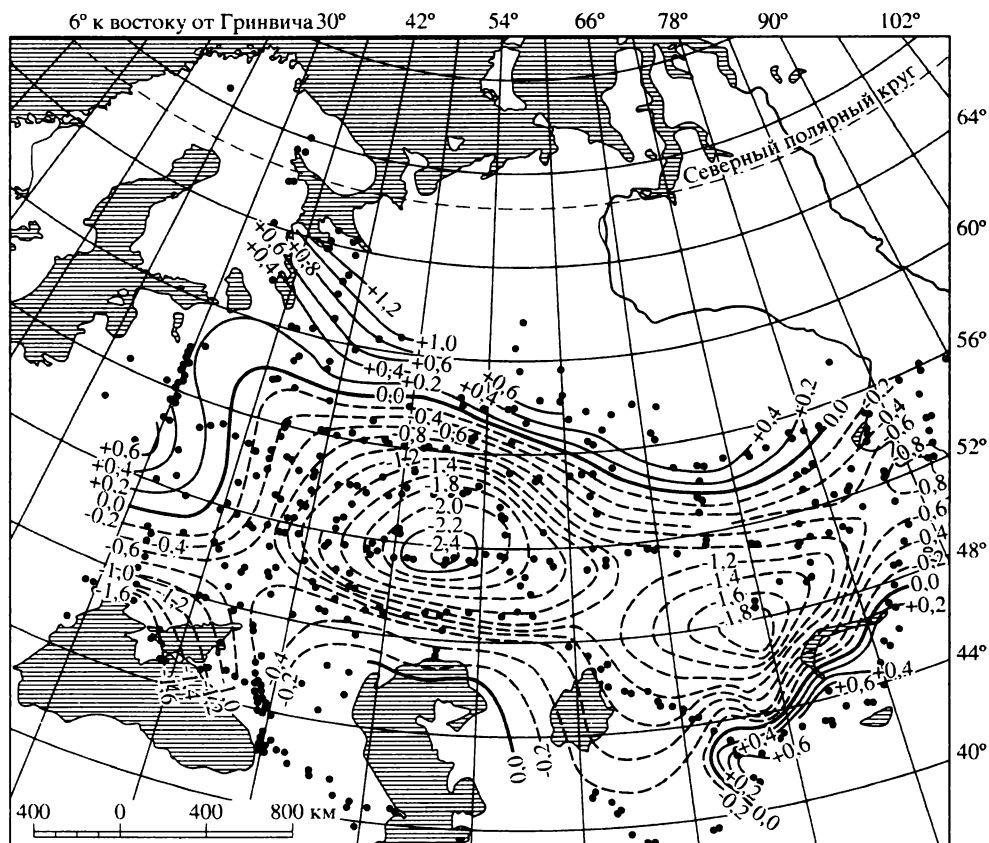


Рис. 2. Схема, характеризующая влияние аномалий в зонах от 300 до 1000 км при выводе гравиметрического уклонения отвесной линии в меридиане

Когда съемочный участок  $\sigma$ , внутри которого интерполируются уклонения отвеса, велик, то соответственно очень большими окажутся и размеры той области, которая должна быть заполнена местной гравиметрической съемкой. В этом случае для более благоприятного решения вопроса можно привлечь дополнительные данные. Такими данными являются результаты большого опыта, накопленного в ЦНИИГАиК при вычислении гравиметрических уклонений отвеса более чем для 500 пунктов. Некоторые итоги этого опыта, в интересующей нас сейчас части, отображены на картах (рис. 1, 2), где в изолиниях через  $0''$ , 2 представлена та часть уклонения отвеса, которая вызывается аномалиями силы тяжести внутри кольца с внутренним радиусом 300 км и внешним 1000 км. Мы видим, что влияние этого кольца не очень велико и меняется от места к месту довольно плавно. С известным основанием можно ожидать, что и в неизученных районах, сходных по рельефу, общая картина существенно не изменится. В таком случае по этой карте можно судить о порядке величины погрешности, которую можно предполагать, если местная съемка не распространяется далее 300 км от границ съемочного участка.



Сравним формулу (5.8) с формулой (10) в моей статье, помещенной в 17-м выпуске «Трудов ЦНИИГАиК»:

$$\delta < 0'', 12 \frac{\Delta g_{\max}}{\rho^2} \quad (5.9)$$

(обозначения в ней приведены в соответствие с обозначениями настоящей статьи);  $\Delta g_{\max}$  есть полуразность между максимальным и минимальным значением аномалии на границе  $\Sigma$  и  $\Sigma'$ .

Как видим, разница в коэффициентах той и другой формулы незначительная. При учете членов выше второго порядка в (5.9) также появился бы делитель  $\rho^2 - 1$  вместо  $\rho^2$ . Следовательно, различие сводится в основном к тому, что вместо  $\Delta g_{\max}$  теперь входит  $\overline{\Delta g_m}$ , т.е. вместо максимального колебания аномалии входит среднее квадратическое колебание на контуре, которое в 2–3 раза меньше первого. Таким образом, формула (5.8) дает значительно более точную оценку ( $\delta$ ), чем (5.9).

### § 23. Оценка предельной ошибки для астрономо-гравиметрического нивелирования

Обратимся к исследованию гравиметрической поправки астрономического нивелирования. Как известно, эта поправка получается из рассмотрения того случая, когда уклонение отвеса интерполируется между двумя астрономо-геодезическими пунктами  $A$  и  $B$  и областью  $\sigma$  является отрезок  $AB$ . Интегрирование интерполированного уклонения отвеса в пределах от  $A$  до  $B$  приводит к следующему выражению [16] для гравиметрической поправки:

$$\Delta \zeta_g(\Sigma) = \zeta(B, \Sigma) - \zeta(A, \Sigma) - l \left[ \frac{\partial \zeta(A, \Sigma)}{\partial l} + \frac{\partial \zeta(B, \Sigma)}{\partial l} \right]. \quad (5.10)$$

Ошибка этой величины в той ее части, которая зависит от размеров области  $\Sigma$ , очевидно, равна

$$\Delta \zeta_g(\Sigma') = \zeta(B, \Sigma') - \zeta(A, \Sigma') - l \left[ \frac{\partial \zeta(A, \Sigma')}{\partial l} + \frac{\partial \zeta(B, \Sigma')}{\partial l} \right]. \quad (5.11)$$

Поскольку отрезок  $AB$  целиком расположен в области  $\Sigma$ , каждый из членов правой части (5.11) можно разложить в ряд для оценки максимальной величины  $\Delta \zeta_g(\Sigma')$ :

$$\zeta(B, \Sigma') = \zeta(O, \Sigma') + l \frac{\partial \zeta(O, \Sigma')}{\partial l} + \frac{l^2}{2!} \frac{\partial^2 \zeta(O, \Sigma')}{\partial l^2} + \frac{l^3}{3!} \frac{\partial^3 \zeta(O, \Sigma')}{\partial l^3} + \dots,$$

$$\zeta(A, \Sigma') = \zeta(O, \Sigma') - l \frac{\partial \zeta(O, \Sigma')}{\partial l} + \frac{l^2}{2!} \frac{\partial^2 \zeta(O, \Sigma')}{\partial l^2} - \frac{l^3}{3!} \frac{\partial^3 \zeta(O, \Sigma')}{\partial l^3} + \dots,$$

$$l \frac{\partial \zeta(B, \Sigma')}{\partial l} = l \frac{\partial \zeta(O, \Sigma')}{\partial l} + l^2 \frac{\partial^2 \zeta(O, \Sigma')}{\partial l^2} + \frac{l^3}{2!} \frac{\partial^3 \zeta(O, \Sigma')}{\partial l^3} + \dots,$$

$$l \frac{\partial \zeta(A, \Sigma')}{\partial l} = l \frac{\partial \zeta(O, \Sigma')}{\partial l} - l^2 \frac{\partial^2 \zeta(O, \Sigma')}{\partial l^2} + \frac{l^3}{2!} \frac{\partial^3 \zeta(O, \Sigma')}{\partial l^3} + \dots$$

С помощью этих равенств из (5.11) получаем равномерно сходящийся ряд для  $\Delta \zeta_g(\Sigma')$ :

$$\Delta \zeta_g(\Sigma') = -2 \left[ \frac{2l^3}{3!} \frac{\partial^3 \zeta(O, \Sigma')}{\partial l^3} + \frac{4l^5}{5!} \frac{\partial^5 \zeta(O, \Sigma')}{\partial l^5} + \frac{6l^7}{7!} \frac{\partial^7 \zeta(O, \Sigma')}{\partial l^7} \dots \right]. \quad (5.12)$$

Подставляя значения производных из (5.3), получаем

$$|\Delta \zeta_g(\Sigma')| = \left| \frac{1}{\pi \gamma} \int_{\Sigma'} \Delta g \left[ \frac{2l^3}{r^4} P_3(\cos \alpha) + \frac{4l^5}{r^6} P_5(\cos \alpha) + \dots \right] d\sigma \right| \leq \left| \int_R^\infty J dr \right|, \quad (5.13)$$

где

$$J = \frac{1}{\pi\gamma} \int_0^{2\pi} \Delta g \left[ \frac{2l^3}{r^3} P_3(\cos \alpha) + \frac{4l^5}{r^5} P_5(\cos \alpha) + \frac{6l^7}{r^7} P_7(\cos \alpha) + \dots \right] d\alpha.$$

Очевидно,

$$|\pi\gamma J| \leq \left| \int_0^{2\pi} \frac{2l^3}{r^3} P_3(\cos \alpha) d\alpha \right| + \left| \int_0^{2\pi} \Delta g \frac{4l^5}{r^5} P_5(\cos \alpha) d\alpha \right| + \dots$$

Теперь применим к каждому члену неравенство Шварца и получим

$$|\pi\gamma J| < \left[ \int_0^{2\pi} \Delta g^2 d\sigma \right]^{1/2} \left\{ \frac{2l^3}{r^3} \left[ \int_0^{2\pi} P_3^2(\cos \alpha) d\alpha \right]^{1/2} + \frac{4l^5}{r^5} \left[ \int_0^{2\pi} P_5^2(\cos \alpha) d\alpha \right]^{1/2} + \dots \right\}.$$

Примем во внимание, что

$$\int_0^{2\pi} P_3^2(\cos \alpha) d\alpha = \frac{34}{64}\pi > \int_0^{2\pi} P_5^2(\cos \alpha) d\alpha > \int_0^{2\pi} P_7^2(\cos \alpha) d\alpha > \dots$$

Получаем

$$|J| < \sqrt{\frac{17}{16} \frac{\Delta g_m}{\gamma}} \left( \frac{2l^3}{r^3} + \frac{4l^5}{r^5} + \frac{6l^7}{r^7} + \dots \right).$$

Возвращаясь к (5.13) и используя последнее неравенство, после интегрирования по  $r$  получаем

$$\Delta\zeta_g(\Sigma') < \sqrt{\frac{17}{16} \frac{\Delta g_m}{\gamma}} l \left( \frac{l^2}{R^2} + \frac{l^4}{R^4} + \frac{l^6}{R^6} + \dots \right) = \sqrt{\frac{17}{16} \frac{\Delta g_m}{\gamma}} \frac{l}{\rho^2 - 1}, \quad (5.14)$$

где

$$\rho = \frac{R}{l}.$$

Здесь под  $\overline{\Delta g_m}$  можно, как и ранее, понимать среднюю квадратическую аномалию вблизи контура  $\Sigma$ .

Поделим обе части (5.14) на  $2l$  (т.е. на длину отрезка  $AB$ ),  $\overline{\Delta g_m}$  выразим в миллигалах, а угловые величины — в дуговых секундах. Получим

$$\left| \frac{\Delta\zeta_g(\Sigma')}{2l} \right| < 0''{,}11 \frac{\overline{\Delta g_m}}{\rho^2 - 1}. \quad (5.15)$$

При астрономо-гравиметрическом нивелировании по астрономическим пунктам, отстоящим друг от друга на 70 км, и при использовании рассчитанной ранее [16] эллиптической палетки

$$\rho = 3, \quad R = 105, \quad \overline{\Delta g_m} \approx 0,55\sqrt{2\pi \cdot 105} \approx 15 \text{ мгл},$$

где 0,55 — коэффициент, входящий в формулу ошибки представительства. Поэтому средняя ошибка (5.15), обусловленная неучтенными зонами, безусловно, меньше  $\pm 0''{,}2$ . В

конкретных условиях заданной пары пунктов значение на контуре  $\Sigma$  величины  $\overline{\Delta g}_m$  можно найти на карте. Соответствующая предельная ошибка (5.15) в этих условиях, вероятно, будет близка к  $\pm 0''{,}2$ ,  $\pm 0''{,}3$  (а не к  $\pm 1''{,}0$ , как предполагалось ранее при более грубой оценке предельной ошибки). С этой точки зрения вполне можно вместо  $\rho = 3$  вести интегрирование при  $\rho = 2$ .

#### § 24. Верхний предел накопления систематических ошибок в гравиметрических поправках при астрономо-гравиметрическом нивелировании

Формула (5.15) определяет предельную величину влияния неучтенных аномалий на вывод превышения геоида на одном звене линии астрономо-гравиметрического нивелирования. Возникает вопрос о допустимых пределах этой величины. Это, конечно, зависит от характера ее изменения: будут ли рассматриваемые ошибки накапливаться быстро и систематически или на разных звеньях войдут с разными знаками и взаимно погасятся.

Наибольшего систематического накопления ошибок можно ожидать в том случае, когда ходовая линия нивелирования приближается или удаляется от большой области значительных аномалий одного знака. Эффект накопления систематических ошибок мы усилим, если предположим, что аномальные области расположены полосами бесконечной длины, перпендикулярными к линии нивелирования, причем в каждой полосе предположим аномалию постоянной и равной ее максимальному значению. Когда линия нивелирования пересекает такую полосу, то вызываемые ею ошибки после прохождения середины полосы будут действовать в другую сторону и постепенно погашаться. Таким образом, заметный остаточный эффект дадут те полосы, которые не пересекаются линией нивелирования, а расположены на ее концах.

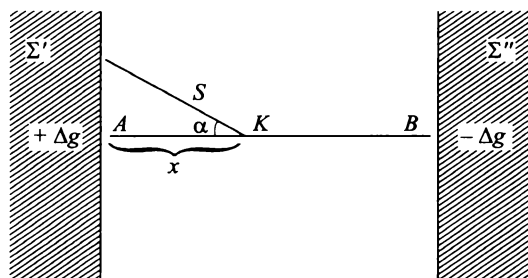


Рис. 3

Следовательно, наиболее неблагоприятным случаем будет, например, тот, когда на одном конце  $A$  (рис. 3) ходовой линии такая полоса положительных аномалий имеет бесконечное простираение влево, а на конце  $B$  полоса отрицательных аномалий — бесконечное простираение вправо. Мы можем считать, что от краев полос точки  $A$  и  $B$  удалены на расстояние  $\rho l = R$ , где  $R$  — радиус той области  $\Sigma$ , аномалии в которой учитываются палеткой. Посмотрим, какое накопление ошибок рассмотренного типа (ошибок за счет ограничения области интеграции  $\Sigma$ ) может получиться в условиях данной схемы. Возьмем на линии  $AB$  точку  $K$  на расстоянии  $x$  от левой вертикальной линии. Вычислим  $\Delta \zeta_g(\Sigma')$  с помощью формулы (5.13), ограничиваясь учетом только первого члена, который, как мы видели, имеет доминирующее значение. Получим

$$\Delta \zeta_g(\Sigma') = \frac{2\Delta g l^3}{\pi\gamma} \int_{\Sigma'} \frac{P_3(\cos \alpha)}{r^4} d\sigma = \frac{2\Delta g l^3}{\pi\gamma} \int_S \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{P_3(\cos \alpha)}{r^3} dr d\alpha, \quad (5.16)$$

где  $S$  — расстояние от  $K$  до левой вертикальной линии по направлению  $\alpha$ . Очевидно, что

$$S = x \sec \alpha.$$

Интегрируя по  $r$ , получаем

$$\Delta\zeta_g(\Sigma') = \frac{\Delta gl^3}{\pi\gamma} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{1}{S^2} P_3(\cos \alpha) d\alpha = \frac{\Delta gl^3}{\pi\gamma x^2} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos^2 \alpha P_3(\cos \alpha) d\alpha.$$

Последний интеграл в правой части равен  $\frac{2}{3}$ . Поэтому

$$\Delta\zeta_g(\Sigma') = \frac{2\Delta gl^3}{3\pi\gamma x^2}.$$

Ошибка в среднем наклоне профиля геоида на одном звене

$$\frac{\Delta\zeta_g(\Sigma')}{2l} = \frac{\Delta gl^2}{3\pi\gamma x^2}$$

даст ошибку в превышении на дифференциале длины  $dx$ :

$$\frac{\Delta gl^2}{3\pi\gamma x^2} dx.$$

Полная величина накопления этих ошибок от  $A$  до  $B$  составит

$$\delta\zeta = \int_{\rho l}^{2lN} \frac{\Delta gl^2}{3\pi\gamma} \frac{dx}{x^2},$$

где  $N$  — общее число звеньев нивелирования.

Выполнив интегрирование, получаем

$$\delta\zeta = \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{2N} \right) \frac{\Delta gl}{3\pi\gamma},$$

или

$$\delta\zeta < \frac{\Delta gl}{3\pi\gamma\rho}.$$

так как  $2N \gg \rho$ .

Такую же ошибку внесет область  $\Sigma''$ , расположенная справа. Поэтому

$$|\delta\zeta| < \frac{2(\Delta g)l}{3\pi\gamma\rho},$$

или в числах, выражая  $\Delta g$  в миллигалах, а  $l$  и  $\zeta$  — в одних и тех же единицах:

$$|\delta\zeta| < 2,10^{-7} \frac{(\Delta g)}{\rho} l. \quad (5.17)$$

Например, при  $\Delta g = 50$  мгл,  $\rho = 2$  и  $l = 100$  км получаем

$$|\delta\zeta| < 0,5 \text{ метра.}$$

Эту оценку можно считать верхним пределом накопления систематических ошибок за счет ограничения области интеграции на каждом звене радиусом  $\rho l$ . Отсюда видно,

что значение  $\rho = 2$  не приводит к такому накоплению ошибок, которое можно было бы считать чрезмерным. Следовательно, увеличение ошибки на каждом звене по формуле (5.15) не опасно, так как увеличенная ошибка все же остается значительно меньше тех случайных ошибок, которые обусловлены в первую очередь малой плотностью гравиметрических станций вблизи астропунктов (среднее значение последних близко к  $\pm 1''$ ).

Мы приходим к выводу, что при выполнении астрономо-гравиметрического нивелирования аномалии силы тяжести достаточно знать в полосе шириной  $4l$ . Например, при расстоянии между астрономическими пунктами в 100 км достаточно иметь гравиметрическую съемку на 100 км в каждую сторону от ходовой линии. Увеличение ширины полосы на точности нивелирования заметно не скажется. Как увидим далее, для повышения точности необходимо сгущение сети гравиметрических пунктов вокруг каждого из астропунктов до расстояния в 15–20 км. Такое мероприятие может повысить точность по меньшей мере в 2–3 раза по сравнению с тем, что мы имеем сейчас в условиях равномерной общей гравиметрической съемки СССР.

Приведенные здесь рассуждения относятся также к влиянию тех систематических ошибок в аномалиях больших областей, которые могут возникнуть вследствие ошибок определения опорных пунктов. На результатах астрономо-гравиметрического нивелирования они практически не скажутся.

### § 25. Два типа астрономо-геодезических уклонений отвеса и связь между ними

Мы видели, что при астрономо-гравиметрическом нивелировании гравиметрическая поправка не вносит в результат заметной систематической ошибки. Иначе может обстоять дело в отношении астрономо-геодезических данных, существенным образом используемых при решении этой задачи в форме астрономо-геодезических уклонений отвеса. Для выяснения этого вопроса нам придется несколько уклониться в сторону от основной линии изложения и более внимательно отнестись к смыслу астрономо-геодезических уклонений отвеса, соответствующих двум основным методам обработки триангуляции.

Начнем с того, что определим расстояние между двумя близкими по форме и положению эллипсоидами; далее от расстояния перейдем к углу между нормальными.

Это расстояние  $h$  является некоторой функцией положения точки на эллипсоиде и, с достаточным приближением, линейной функцией разностей элементов этих эллипсоидов. Зависимость же  $h$  от широты и долготы может быть представлена сферическими функциями до 2-го порядка включительно. Именно сферической функции нулевого порядка будет соответствовать поправка объема исходного эллипсоида. Три элемента поправок ориентировки определяются сферической функцией 1-го порядка; поправка сжатия и два элемента трехосности определяются тремя первыми коэффициентами функции 2-го порядка.

Формула для  $h$  получена в двух различных вариантах проф. Ф.Н. Красовским [14] и де Граф-Хантером [15], а много ранее — Ф.А. Слудским [18]. Ф.Н. Красовский, крупнейший специалист по вопросам градусных измерений, с полным основанием приписывает ей роль исходной формулы нового метода градусных измерений. Формулы Красовского и де Граф-Хантера относятся к двухосному эллипсоиду. Однако при выводе элементов эллипсоида и в ряде других исследований с фактором трехосности следует считаться, особенно если мы желаем получить наилучшие элементы не только для той территории, для которой фигура геоида исследована, но и для тех огромных территорий, которые геодезически пока еще не освещены.

Поэтому начнем наше изложение с вывода формулы для взаимного расстояния двухосного и трехосного эллипсоида. Возьмем прямоугольную систему координат с началом в центре исходного (двухосного) эллипсоида. Ось  $z$  совместим с его малой осью, предпо-

лагая ее параллельность оси вращения Земли. Ось  $x$  предположим совмещенной с большой осью экваториального эллипса и от нее будем отсчитывать долготы  $\omega$ ; геодезическую широту точек на этом эллипсоиде назовем  $B$ , геоцентрическую —  $\Phi$ . Очевидно, в этой системе координат уравнения для двухосного и трехосного эллипсоидов могут быть записаны так:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} &= 1, \\ \frac{(\bar{x} - \bar{x}_0)^2}{(a + \Delta a)^2} + \frac{(\bar{y} - \bar{y}_0)^2}{(a + \Delta c)^2} + \frac{(\bar{z} - \bar{z}_0)^2}{(b + \Delta b)^2} &= 1, \end{aligned} \quad (5.18)$$

где  $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0$  — координаты центра нового эллипсоида,  $\Delta a, \Delta b, \Delta c$  — поправки его полуосей.

Пусть  $l, m, n$  — направляющие косинусы радиуса-вектора, соединяющего точку  $x, y, z$  на исходном эллипсоиде с началом координат; тогда

$$\begin{aligned} x &= l\rho, \quad l = \cos \Phi \cos \omega, \\ y &= m\rho, \quad m = \cos \Phi \sin \omega, \\ z &= n\rho, \quad n = \sin \Phi, \\ \frac{l^2 + m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} &= \frac{1}{\rho^2}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Радиус-вектор, имеющий направление  $(l, m, n)$ , встречает искомый эллипсоид в точке  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ , причем

$$\begin{aligned} \bar{x} &= l(\rho + \Delta\rho), \\ \bar{y} &= m(\rho + \Delta\rho), \\ \bar{z} &= n(\rho + \Delta\rho), \end{aligned}$$

где  $\Delta\rho$  — расстояние между обоими эллипсоидами, отсчитанное вдоль радиуса-вектора.

Подстановка этих значений в уравнение (5.18) дает

$$\frac{(l\rho + l\Delta\rho - \bar{x}_0)^2}{(a + \Delta a)^2} + \frac{(m\rho + m\Delta\rho - \bar{y}_0)^2}{(a + \Delta c)^2} + \frac{(n\rho + n\Delta\rho - \bar{z}_0)^2}{(b + \Delta b)^2} = 1.$$

Ограничиваясь представлением результата линейной функции от  $\Delta\rho, \bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0, \Delta a, \Delta b, \Delta c$  и принимая во внимание (5.18) и (5.19), получаем

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{l\rho}{a^2}\bar{x}_0 + \frac{m\rho}{a^2}\bar{y}_0 + \frac{n\rho}{b^2}\bar{z}_0 + \frac{l^2\rho^2}{a^2}\frac{\Delta a}{a} + \frac{m^2\rho^2}{a^2}\frac{\Delta c}{a} + \frac{n^2\rho^2}{b^2}\frac{\Delta b}{b}. \quad (5.20)$$

Очевидно, отброшенные члены второго и высших порядков дадут ничтожный эффект, даже если в качестве исходного принять эллипсоид Бесселя (а именно: погрешность порядка 1:10 000 от величин поправок полуосей и ориентировки).

С той же степенью приближения, порядка квадрата сжатия, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{a} &= 1 - \alpha \sin^2 B \dots; \quad \left(\frac{\rho}{a}\right)^2 l = \cos B \cos \omega \dots; \\ \frac{\rho}{b} &= 1 + \alpha \cos^2 B^2 \dots; \quad \left(\frac{\rho}{a}\right)^2 m = \cos B \sin \omega \dots; \\ B - \Phi &= \alpha \sin 2B \dots; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\rho}{a}\right)^3 l^2 &= \cos^2 B \cos^2 \omega + \frac{\alpha}{4} \sin^2 2B \cos^2 \omega \dots; \\ \left(\frac{\rho}{a}\right)^3 m^2 &= \cos^2 B \sin^2 \omega + \frac{\alpha}{4} \sin^2 2B \sin^2 \omega \dots; \quad \left(\frac{\rho}{a}\right)^2 n = \sin B \dots; \\ \left(\frac{\rho}{b}\right)^3 n^2 &= \sin^2 B - \frac{\alpha}{4} \sin^2 2B \dots; \\ \delta\rho &= h \cos(\Phi - B) = h \dots \end{aligned}$$

Поэтому уравнение (5.20) можем записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} h &= \cos B \cos \omega \bar{x}_0 + \cos B \sin \omega \bar{y}_0 + \sin B \bar{z}_0 + \\ &+ \left( \frac{\Delta a - \Delta c}{2} \cos 2\omega + \frac{\Delta a + \Delta c - 2\Delta b}{2} \right) \left( \cos^2 B + \frac{\alpha}{4} \sin^2 2B \right) + \Delta b. \end{aligned}$$

Переходя к обычному счету долгот, получаем

$$\begin{aligned} h &= \cos B \cos Lx_0 + \cos B \sin Ly_0 + \sin Bz_0 + \left[ \frac{\Delta a - \Delta c}{2} \cos 2(L - L_0) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Delta a + \Delta c - 2\Delta b}{2} \right] \left( \cos^2 B + \frac{\alpha}{4} \sin^2 2B \right) + \Delta b, \quad (5.21) \end{aligned}$$

где  $L_0$  — долгота наибольшего меридиана трехосного эллипсоида,  $x_0, y_0, z_0$  — координаты центра искомого эллипсоида в системе координат с обычным счетом долгот.

Из (5.21) получаем обычным способом проекцию угла между эллипсоидами на направления меридиана и первого вертикала:

$$\begin{aligned} \Delta\xi &= -\frac{1}{M} \frac{\partial h}{\partial B} = \sin B \cos L \frac{x_0}{M} + \sin B \sin L \frac{y_0}{M} - \cos B \frac{z_0}{M} + \\ &+ \sin 2B \left[ \frac{\Delta a - \Delta c}{2M} \cos 2(L - L_0) + \frac{\Delta a + \Delta c - 2\Delta b}{2M} \right] (1 - a \cos 2B), \quad (5.22) \end{aligned}$$

$$\Delta\eta = -\frac{1}{N} \sec B \frac{\partial h}{\partial L} = \sin L \frac{x_0}{N} - \cos L \frac{y_0}{N} + \frac{\Delta a - \Delta c}{N} \sin 2(L - L_0) \cos^2 B (1 + a \sin^2 B).$$

Здесь  $M$  и  $N$  — радиусы кривизны меридиана и сечения эллипсоида плоскостью первого вертикала. Следует отметить, что формула (5.21) по написанию похожа на формулу де Грааф-Хантера, если отбросить член, зависящий от трехосности. Отличие заключается в том, что в (5.21) входят не приведенные, а геодезические широты. Замена геодезических координат приведенными только понижает точность формул, внося ошибки порядка сжатия.

Формула (5.21) содержит в общем случае семь неизвестных:  $x_0, y_0, z_0, \Delta a, \Delta b, \Delta c, L_0$ . Определив тем или иным способом все или часть этих неизвестных, мы получаем возможность по формулам (5.22) для любой точки получить поправки к геодезическим координатам  $B$  и  $L$  для перечисления их в систему координат на новом эллипсоиде с новыми исходными данными:

$$B' = B - \Delta\xi, \quad L' = L - \sec B \Delta\eta.$$

Необходимо подчеркнуть, что такой способ перечисления должен применяться только в том случае, если триангуляция обработана методом проектирования. Эти формулы непригодны, если триангуляция вычислена методом «развертывания».

Мы здесь подошли к очень важному вопросу о связи между координатами, получаемыми тем и иным методом. Для выяснения практической важности этого вопроса при исследовании фигуры геоида остановимся на одном примере. Чтобы яснее подчеркнуть принципиальную сторону дальнейших рассуждений и не отвлекать внимания на вычисления, не имеющие принципиального значения, пример этот по возможности упростим.

Пусть элементы размеров референц-эллипсоида безошибочны. Допустим также, что волнистости геоида отсутствуют. Тогда возвышения геоида над эллипсоидом будут обусловлены только ошибками ориентировки референц-эллипсоида. Это относится и к уклонам отвесной линии.

Пусть ряд триангуляции от исходного пункта идет в меридиональном направлении. Тогда для этой дуги из (5.21) и (5.22) получим

$$\begin{aligned} h &= \cos(B_0 - B)h_0 + \sin(B_0 - B)M_0\Delta\xi_0, \\ \Delta\xi &= \sin(B_0 - B)(h_0/M_0) + \cos(B_0 - B)\Delta\xi_0. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Применим теперь к нашей схеме обычные приемы вычисления триангуляции (развертыванием). Очевидно, для  $\Delta\xi$  мы получим

$$\Delta\xi = \Delta\xi_0, \quad (5.24)$$

так как при использовании метода развертывания широты, при откладывании на двух равных эллипсоидах вдоль меридиана одной и той же дуги, изменятся и здесь и там на одинаковые величины (с точностью до величин порядка  $\alpha\Delta\xi$ ), независимо от длины дуги  $S$ . Если теперь мы определим  $h$ , применяя обычные формулы астрономического нивелирования, то получим

$$h = h_0 - M \int_{B_0}^B \Delta\xi dB = h_0 + (B_0 - B)M\Delta\xi_0. \quad (5.25)$$

Сравнивая (5.23) с (5.24) и (5.25), мы приходим к противоречию, которое особенно велико при больших протяженностях дуг градусных измерений, как это видно из табл. 11.

Таблица 11

$B_0 - B$	$h$		$\Delta\xi$	
	по (5.23)	по (5.25)	по (5.23)	по (5.23)
$90^\circ$	$M_0\Delta\xi_0$	$h_0 + (\pi/2)M\Delta\xi_0$	$h_0/M$	$\Delta\xi_0$
$180^\circ$	$-h_0$	$h_0 + \pi M\Delta\xi_0$	$-\Delta\xi_0$	$\Delta\xi_0$
$360^\circ$	$+h_0$	$h_0 + 2\pi M\Delta\xi_0$	$+\Delta\xi_0$	$\Delta\xi_0$

Отсюда приходится сделать заключение, что при большом удалении от исходного пункта ошибки элементов ориентировки, если триангуляция обработана по методу развертывания, сказываются на выводе высот геоида в совершенно искаженном виде, вплоть до перемены знака отдельных слагаемых. Следовательно, классическая формула астрономического нивелирования

$$\zeta = - \int (\xi dB + \eta \cos B dL) \quad (5.26)$$

при исследовании фигуры геоида на большой территории требует внесения дополнительных поправочных членов.



Разобранный пример помогает уяснить причину получившихся противоречий. Действительно, в формулах (5.23)  $\Delta\xi$  понимается как меридиональная составляющая угла между двумя эллипсоидами, в то время как  $\Delta\xi$  формулы (5.24) соответствует понятию о меридиональной составляющей уклонения отвеса при обычной обработке триангуляции по методу развертывания. Обычно эти понятия не разграничивались, и уклонение отвеса всегда определялось как угол между нормальми к эллипсоиду и геоиду. Это положение лежит в основе вывода формулы (5.26). Но верно оно только в том случае, если уклонения отвеса выведены из обработки триангуляции по методу проектирования. Применение же формулы (5.26) к обычным уклонениям отвеса, если исследуемая территория велика, приводит к противоречию, которое иллюстрировано приведенной выше табл. 11.

Уклонения отвеса, полученные методом развертывания, следовало бы называть «смешанными» уклонениями отвеса, чтобы подчеркнуть тот факт, что они получены как разность координат точек, не лежащих на одной нормали к эллипсоиду. Использование их для построения фигуры геоида на большой территории без дополнительных поправок недопустимо.

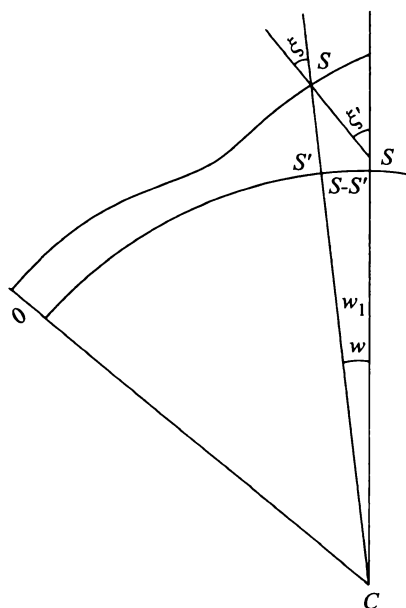


Рис. 4

Перейдем к вопросу о том, как с достаточной точностью получить эти поправки. Очевидно, для этого необходимо: 1) учитывать волнистости геоида; 2) знать путь, по которому производилась укладка звеньев при вычислении триангуляции; 3) учитывать эти поправки до уравнивания триангуляции, так как после уравнивания эти систематические ошибки перераспределяются между звеньями очень сложным и, вообще говоря, неизвестным образом. Если приходится оперировать с уравненными данными, то можно ограничиться приближенными поправками, вычисленными по некоторой средней ходовой линии. К счастью, в триангуляции СССР вдали от Пулково, где эти поправки велики, последние трудности отпадают, так как триангуляция идет там цепью в долготном направлении.

Допуская в поправке относительную ошибку порядка сжатия, решим эту задачу на сфере. Рассмотрим дугу градусных измерений длиной  $S$ , начинающуюся от исходного пункта. Эта длина получена на геоиде. Если ее спроектировать на сферу, получим

$$S' = \int_0^S \frac{dS}{1 + \zeta} = S - \int_0^S \zeta dS. \quad (5.27)$$

Здесь радиус сферы принят равным единице, и все линейные величины выражены в долях радиуса сферы;  $\zeta$  — расстояние между геоидом и референц-эллипсоидом.

Обозначим через  $\xi$  проекцию истинного уклонения отвеса на направление дуги  $S$ , через  $\xi'$  — проекцию «смешанного» уклонения отвеса, полученную в результате вычислений по методу развертывания. Очевидно, что

$$\left. \begin{aligned} \xi &= d\zeta/dS, \\ \xi' - \xi &= S - S', \end{aligned} \right\} \quad (5.28)$$

как это видно из рис. 4. Действительно, рассмотрим сечение геоида нормальной плоскостью в азимуте ходовой линии. Здесь  $\xi'$  есть угол между нормалью к геоиду на расстоянии  $S$  от исходного пункта, считая по поверхности геоида, и нормалью к сфере в точке, лежащей на том же расстоянии  $S$  от исходного пункта, считая по поверхности сферы.

Пусть мы имеем еще величины  $h$ , полученные обычным способом по формуле

$$h = h_0 + \int_0^S \xi' dS. \quad (5.29)$$

Следовательно,

$$\xi' = \frac{dh}{dS}. \quad (5.30)$$

С помощью (5.28) и (5.30) получаем из (5.27)

$$\xi' - \xi = \frac{dh}{dS} - \frac{d\zeta}{dS} = \int_0^S \zeta dS. \quad (5.31)$$

Это уравнение путем дифференцирования по  $S$  может быть приведено к простому дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2\zeta}{dS^2} + \zeta = \frac{d^2h}{dS^2}. \quad (5.32)$$

Полагая  $\zeta - h = y$ , получим

$$\frac{d^2y}{dS^2} = -(y + h).$$

Соответствующее однородное уравнение

$$\frac{d^2y}{dS^2} + y = 0$$

имеет решение

$$y = A \sin S + B \cos S. \quad (5.33)$$

Варьируя произвольные постоянные обычным способом, приходим к следующим уравнениям:

$$\frac{dA}{dS} \sin S + \frac{dB}{dS} \cos S = 0, \quad \frac{dA}{dS} \cos S - \frac{dB}{dS} \sin S = -h,$$

откуда получаем

$$A = A_0 - \int_0^S h \cos l dl, \quad B = B_0 + \int_0^S h \sin l dl$$

и после подстановки в (5.33)

$$\zeta - h = A_0 \sin S + B \cos S + \int_0^S h \sin(l - S) dl. \quad (5.34)$$

Определим постоянные интеграции из начальных условий: при  $S = 0$   $\zeta = \zeta_0$  и  $h = h_0$ , поэтому

$$B_0 = \zeta_0 - h_0.$$

Для определения  $A_0$  дифференцируем (5.34) по  $S$ :

$$\xi - \xi' = A_0 \cos S - B_0 \sin S - \int_0^S h \cos(l - S) dl; \quad (5.35)$$

при  $S = 0$   $\xi = \xi_0$  и  $\xi' = \xi'_0$ , поэтому

$$A_0 = \xi_0 - \xi'_0.$$

После подстановки значений  $A_0$  и  $B_0$  в (5.34) и (5.35) получаем окончательно:

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= h + (\xi_0 - \xi'_0) \sin S + (\zeta_0 - h_0) \cos S + \int_0^S h \sin(l - S) dl, \\ \xi &= \xi' + (\xi_0 - \xi'_0) \cos S - (\zeta_0 - h_0) \sin S - \int_0^S h \cos(l - S) dl. \end{aligned} \right\} \quad (5.36)$$

Формулы (5.36) устанавливают взаимную связь между уравнениями градусных изменений, соответствующими двум методам обработки триангуляции (метод проектирования и метод развертывания).

Для перехода от координат, полученных методом развертывания, к соответствующим координатам метода проектирования, интегрируя по частям в правой части (5.36), получим

$$\xi - \xi' = (\xi_0 - \xi'_0) \cos S - \zeta_0 \sin S + \int_0^S \xi' \sin(l - \zeta) dl. \quad (5.37)$$

Формула (5.36) дает поправку в проекцию уклонения отвеса на направление ходовой линии развертывания триангуляции (или, что то же самое, в длину геодезической линии) в функции величин  $h$  неисправленных высот геоида. Формула (5.37) дает ту же величину в функции  $\xi'$  — «смешанных» уклонений отвеса, т.е. уклонений отвеса, вычисленных по методу развертывания.

Высоты геоида  $\zeta$  через величины  $h$  определяются формулой (5.36), а через  $\xi'$  формулой

$$\zeta = \zeta_0 \cos S + (\xi_0 - \xi'_0) \sin S + \int_0^S \xi' \cos(l - \zeta) dl \quad (5.38)$$

(вместо обычной  $\zeta = \zeta_0 + \int_0^S \xi' dl$ ).

Для обратного перехода — от элементов, полученных методом проектирования, к соответствующим элементам, полученным методом развертывания, — мы имеем

$$\left. \begin{aligned} h &= h_0 + (\zeta - \zeta_0) + \int_0^S dl \int_0^S \zeta dl, \\ \xi' &= \xi'_0 + (\xi - \xi_0) + \int_0^S \zeta dS. \end{aligned} \right\} \quad (5.39)$$

Все эти формулы имеют относительную точность порядка сжатия.

Рассмотрим следующий пример. Для случая перехода от эллипсоида Бесселя к новому эллипсоиду СССР (но с ориентировкой  $\xi_0 = \eta_0 = \zeta_0 = 0$  в Пулково) вычислим по ним поправки к величине уклонения отвеса в первом вертикале для параллели с широтой  $52^\circ 30'$ , соответствующие двум методам обработки триангуляции. Значения, соответствующие методу развертывания, сравним с теми, которые были получены А.А.Изотовым прямым путем, с помощью обычных уравнений градусных измерений.

При этом предположим, что развертывание триангуляции на эллипсоид Бесселя производилось вдоль параллели  $52^\circ 30'$  с запада на восток, начиная от меридиана Пулково.

В этом случае

$$\zeta = \cos B \cos Lx_0 + \sin Bz_0 + (\Delta a - \Delta b) \cos^2 B + \Delta b,$$

так как  $y_0 = 0$ . Кроме того,  $\eta_0 = \eta'_0$  и  $\eta = -\sin Lx_0$ .

Следовательно,

$$\eta' = -\sin Lx_0 + \int_0^L [\cos B \cos Lx_0 + \sin Bz_0 + (\Delta a - \Delta b) \cos^2 B + \Delta b] \cos B dL,$$

так как  $dS = \cos B dL$ .

Выполнив интеграцию, получим  $\eta'$  (в метрах):

$$\eta' = -x_0 \sin^2 B \sin L + L \cos B [\sin Bz_0 + (\Delta a - \Delta b) \cos^2 B + \Delta b]. \quad (5.40)$$

Для перевода в секунды дуги следует поделить на радиус кривизны в первом вертикале для широты  $52^\circ 30'$  и на  $\sin 1''$ .

Результаты вычислений для 19 астрономических пунктов, лежащих вблизи этой параллели, приведены ниже в табл. 12. Положение пункта по его номеру можно найти на карте (рис. 5).

Таблица 12

№ пункта	$L$ от Пулково	$\eta$	$\eta'$	$\eta'$ по Изотову	Расхождения
338	$-0^\circ 27',9$	$+0'',10$	$+0'',12$	$+0'',12$	0,00
47	$+5 32,1$	$-1,23$	$-1,41$	$-1,41$	0,00
110	$8 50,7$	$-1,96$	$-2,26$	$-2,25$	$+0,01$
168	$13 06,4$	$-2,89$	$-3,34$	$-3,33$	$+0,01$
170	$16 49,7$	$-3,69$	$-4,28$	$-4,26$	$+0,02$
235	$21 47,8$	$-4,73$	$-5,50$	$-5,47$	$+0,03$
268	$27 49,7$	$-5,95$	$-6,96$	$-6,92$	$+0,04$
298	$31 17,3$	$-6,62$	$-7,77$	$-7,74$	$+0,03$
303	$34 59,3$	$-7,31$	$-8,63$	$-8,62$	$+0,01$
328	$40 02,1$	$-8,19$	$-9,75$	$-9,74$	$+0,01$
529	$45 26,9$	$-9,08$	$-10,91$	$-10,90$	$+0,01$
533	$50 23,8$	$-9,82$	$-11,92$	$-11,89$	$+0,03$
539	$55 08,9$	$-10,45$	$-12,84$	$-12,83$	$+0,01$
427	$72 50,9$	$-12,17$	$-15,78$	$-15,78$	0,0
432	$77 17,4$	$-12,43$	$-16,39$	$-16,47$	$-0,08$
439	$83 14,7$	$-12,65$	$-17,13$	$-17,24$	$-0,11$
448	$88 51,1$	$-12,74$	$-17,73$	$-17,82$	$-0,09$
453	$95 54,0$	$-12,67$	$-18,36$	$-18,44$	$-0,08$
558	$99 35,0$	$-12,56$	$-18,64$	$-18,84$	$-0,20$

Приведенные в последнем столбце расхождения могут быть связаны с тем, что вычисление коэффициентов уравнений градусных измерений А.А.Изотовым выполнялось

путем последовательных исключений  $\xi$  и  $\eta$  по ходовой линии, не совпадающей с параллелью  $52^{\circ}30'$ . Мы видим, что различие между  $\eta$  и  $\eta'$  велико и надежно устанавливается рассмотренным способом. Следовательно, обсуждавшиеся здесь систематические поправки должны учитываться при астрономо-гравиметрическом нивелировании.

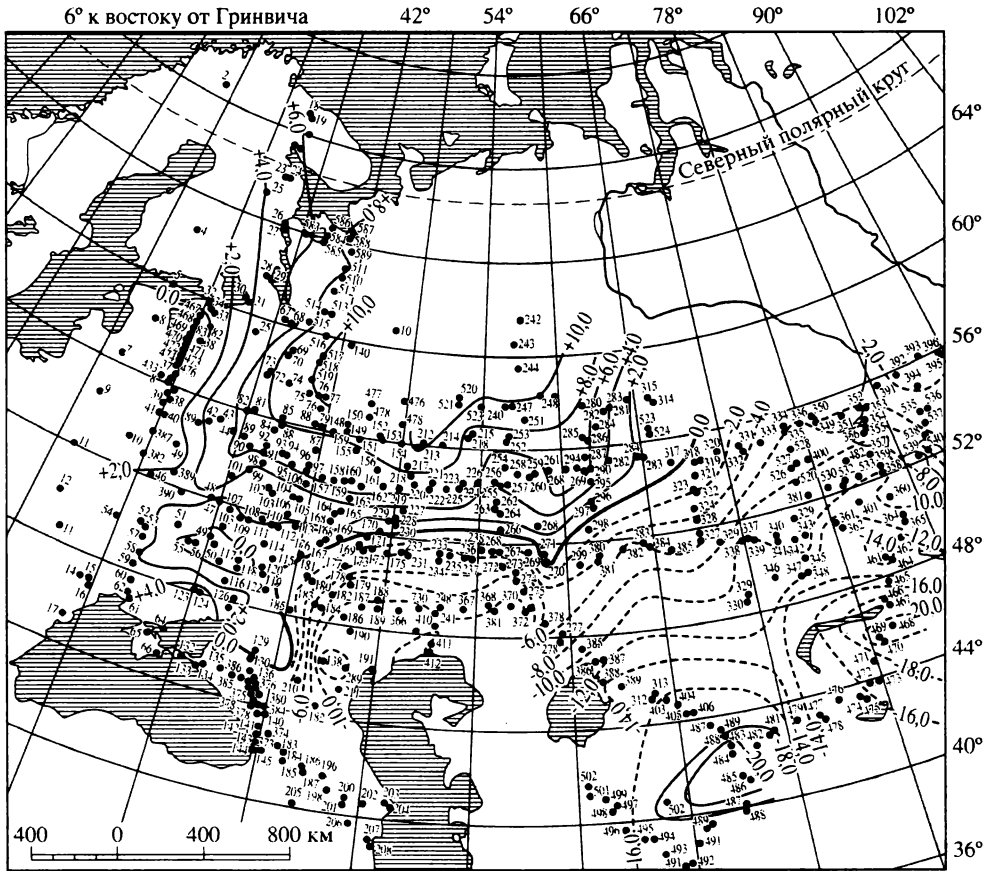


Рис. 5. Схематическая карта высот геоида над эллипсоидом с элементами  $a = 6\ 378\ 245$ ,  $\alpha = 1\ 298,3$ ;  $\varphi - B = -0^{\circ},16$ ,  $\lambda - L = -3^{\circ},54$ ,  $N = 0$  в Пулково

## § 26. Исправление результатов астрономо-гравиметрического нивелирования

Для иллюстрации разобранной методики вывода высот геоида по материалам большой астрономо-геодезической сети обратимся к рассмотрению результатов астрономо-гравиметрического нивелирования по СССР, полученных в 1939 г. и 1943 г. в ЦНИИГАиК.

В 1939 г. астрономо-гравиметрическое нивелирование было выполнено Б.В. Дубовским на эллипсоиде Бесселя, являвшемся тогда референц-эллипсоидом государственной триангуляции СССР. Триангуляционная сеть обрабатывалась по методу «развертывания». Рассмотренные выше поправки, исправляющие в результате систематические ошибки, не вводились.

В 1943 г. астрономо-гравиметрическое нивелирование было повторено заново. Основное назначение этой работы заключалось в том, чтобы вычислить высоты базисов над новым референц-эллипсоидом СССР, а также чтобы получить положение эллипсоида по высоте в исходном пункте триангуляции. Эта работа была проведена на основе дополненного и, главное, заново целиком переработанного гравиметрического материала (переработка производилась в связи с составлением нового каталога гравиметрических пунктов СССР). Для вычисления ориентировки нового эллипсоида астрономо-геодезические уклоны отвеса А.А. Изотовым были перечислены с эллипсоида Бесселя на новый эллипсоид триангуляции СССР ( $1:\alpha = 298,3; a = 6\,378\,245$ ), ориентированный по астрономическим данным в Пулково. Высота геоида в 1943 г. вычислялась на основе этих уклонов отвеса, т.е. относительно нового эллипсоида с ориентировкой  $\xi_0 = \eta_0 = \zeta_0 = 0$ , в Пулково.

Вся сеть астрономо-гравиметрического нивелирования уравнивалась методом последовательных приближений. Прежде всего уравнивание велось для узловых точек полигонов. Веса звеньям придавались обратно пропорциональными квадратам их длин. В тех случаях, когда встречались звенья астрономического нивелирования (не обеспеченные гравиметрической съемкой), вся невязка развертывалась между этими звеньями.

Таким образом, нивелирование 1943 г. было произведено по сравнению с 1939 г., насколько возможно, независимо: на разных эллипсоидах, с другой разбивкой всей сети на полигоны, по вновь переработанным гравиметрическим материалам, вновь составленным картам изоаномалий; уравнивание результатов нивелирования проведено иным методом. Поэтому очень интересно сравнить между собой результаты той и другой работы. Для этого мы выбрали профиль геоида по параллели  $52^\circ 30'$  от меридиана Пулково до меридиана  $100^\circ$  от Пулково. В дальнейшем будем предполагать, что «развертывание» триангуляции при ее вычислении велось с запада на восток, вдоль этой параллели. Это допущение в западной части параллели «незаконно», но там малы поправки; в восточной же части оно близко к истине.

Формулы (5.36) выведены для дуги большого круга. В нашем же случае, как мы допустили, триангуляция развертывалась вдоль параллели. Вообразим себе конус с вершиной в центре сферы, секущий сферу по данной параллели. Развернем этот конус на плоскость. При развертывании высоты геоида сохраняются, условия вывода исходного дифференциального уравнения (5.32) не нарушатся, следовательно, окончательная формула остается справедливой, если  $S = L \cos B_0$  ( $L$  — долгота,  $B$  — широта). Таким образом, для дуги параллели формула (5.36) может быть записана в таком виде:

$$\zeta = h + (\eta_0 - \eta'_0) \sin(L \cos B_0) + (\zeta_0 - h_0) \cos(L \cos B_0) + \int_0^L h \sin[(l - L) \cos B_0] \cos B_0 dl,$$

$$\eta = \eta' + (\eta_0 - \eta'_0) \cos(L \cos B_0) + (\zeta_0 - h_0) \sin(L \cos B_0) - \int_0^L h \cos[(l - L) \cos B_0] \cos B_0 dl,$$

где  $B_0$  — значение широты на этой параллели, а счет долгот точки с заданными значениями  $\eta_0 = \eta'_0$ ,  $\zeta_0 - h_0$ .

Мы примем в начальной точке профиля  $\eta_0 = \eta'_0$  и  $\zeta_0 = h_0$ , так как накопление ошибок от Пулково до этой точки очень мало. Тогда

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= h + \int_0^L h \sin [(l-L) \cos B_0] \cos B_0 dl, \\ \eta &= \eta' - \int_0^L h \cos [(l-L) \cos B_0] \cos B_0 dl. \end{aligned} \right\} \quad (5.41)$$

Снятые с карты 1939 г. значения величин  $h$  вдоль параллели с широтой  $52^\circ 30'$ , отнесенные к эллипсоиду Бесселя, помещены в табл. 13 (2-й столбец). Значения  $h$ , заключенные в скобки, получены приближенно (экстраполяцией), так как в этих местах ряд триангуляции уходит от параллели  $52^\circ 30'$  к северу. Чтобы точнее выполнить интеграцию, основную часть  $h$  представим в аналитическом виде, совершив переход к эллипсоиду Ф.Н. Красовского. Тогда

$$h = \Delta\zeta + h'_k,$$

где

$$\Delta\zeta = \cos B \cos L x_0 + \cos B \sin L y_0 + \sin B z_0 + (\Delta a - \Delta b) \cos^2 B + \Delta b, \quad (5.42)$$

$$x_0 = -450,8 \text{ м}, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = -663,8 \text{ м},$$

$$\Delta a = +868,0 \text{ м}, \quad \Delta b = +784,4 \text{ м}.$$

Таким образом получим табл. 13.

Таблица 13

$L$	$h$	$\Delta\zeta$	$h'_k$
$0^\circ$	+ 8,9	+ 6,91	+ 2,0
$10^\circ$	+ 8,2	+ 11,08	- 2,9
$20^\circ$	+ 12,3	+ 23,46	- 11,2
$30^\circ$	+ 24,5	+ 43,68	- 19,2
$40^\circ$	+ 40,0	+ 71,13	- 31,1
$50^\circ$	+ 61,8	+ 104,94	- 43,1
$60^\circ$	(+ 98,5)	+ 144,12	(- 45,6)
$70^\circ$	(+ 147,9)	(+ 187,48)	(- 39,6)
$80^\circ$	+ 208,9	+ 233,70	- 24,8
$90^\circ$	+ 279,4	+ 281,34	- 1,9
$100^\circ$	+ 350,0	+ 328,98	- 21,0

Возвращаясь к формуле (5.41) и интегрируя первый член, получим

$$\zeta = \int_0^L h' \sin [(l-L) \cos B_0] \cos B_0 dl + \frac{x_0 \cos^3 B_0}{\sin^2 B_0} (\cos L - 1) +$$

$$+ [\cos (l \cos B_0) - 1] (\sin B_0 z_0 + (\Delta a - \Delta b) \cos^2 B_0 + \Delta b). \quad (5.43)$$

Первое слагаемое получаем численным интегрированием. Исправленные высоты геоида вдоль параллели  $52^\circ 30'$  по результатам астрономо-гравиметрического нивелирования

1939 г. и 1943 г. представлены в табл. 14. В последних трех столбцах даны: значения  $h$ , полученные в 1943 г.; поправка в  $h$ ; высота геоида — по результатам 1943 г.

Для контроля можем воспользоваться формулой (5.39):

$$\zeta = h - \int_0^S dS \int_0^S \zeta dS,$$

или для облегчения численной интеграции:

$$\zeta = h - \int_0^S dS \int_0^S \Delta\zeta dS - \int_0^S dS \int_0^S \zeta_{\kappa} dS,$$

причем

$$\int_0^S dS \int_0^S \Delta\zeta dS = \cos^2 B_0 \left[ x_0(1 - \cos L) \cos B_0 + \right. \\ \left. + \frac{L^2}{2} (\sin B_0 z_0 + (\Delta a - \Delta b) \cos^2 B_0 + \Delta b) \right].$$

Таблица 14

$L$	$(\zeta - h)_1$	$(\zeta - h)_2$	$\zeta - h$	$\zeta_5$	$(\zeta_{\kappa})_{1939}$	$h_{1943}$	$(\zeta - h)_{1943}$	$(\zeta_{\kappa})_{1943}$
0°	0,00	0,00	0,00	+ 8,9	+ 2,0	+ 2,3	0,00	+ 2,3
10°	- 0,02	0,00	- 0,02	+ 8,2	- 2,9	- 2,3	0,00	- 2,3
20°	- 0,24	+ 0,05	- 0,19	+ 12,1	- 11,4	- 11,1	+ 0,04	- 11,1
30°	- 0,67	+ 0,25	- 0,42	+ 24,1	- 19,6	- 16,0	+ 0,19	- 15,8
40°	- 1,61	+ 0,65	- 0,96	+ 39,0	- 32,1	- 28,0	+ 0,54	- 27,5
50°	- 3,32	+ 1,40	- 1,92	+ 59,9	- 45,0	- 38,9	+ 1,20	- 37,7
60°	- 6,25	+ 2,60	- 3,65	+ 34,9	(- 49,2)	(- 37,0)	+ 2,25	(- 35,8)
70°	- 10,66	+ 4,26	- 6,40	+ 141,5	(- 46,0)	(- 39,0)	+ 3,71	(- 35,3)
80°	- 17,08	+ 6,28	- 10,80	+ 191,1	- 35,6	- 33,8	+ 5,54	- 28,3
90°	- 25,96	+ 8,50	- 17,46	+ 261,9	- 19,4	- 20,3	+ 7,68	- 12,6
100°	- 37,77	+ 10,64	- 27,13	+ 322,9	- 6,1	- 11,2	+ 9,96	- 1,2

Результаты вычислений приведены ниже в табл. 15.

Таким образом, в пределах точности численной интеграции поправки совпадают.

Рассчитаем теперь величину ожидаемой ошибки определения высот геоида астрономо-гравиметрическим нивелированием (формулу, выведенную нами ранее в 17-м выпуске «Трудов ЦНИИГАиК», можно теперь уточнить).

Если представить превышение на звене в таком виде:

$$\Delta\zeta = l [\vartheta_a(A) - \vartheta_g(A\Sigma) + \vartheta_a(B) - \vartheta_g(B\Sigma)] + \frac{1}{2\pi\gamma R} \int \Delta g \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) d\sigma,$$

то нетрудно убедиться, что основная часть ошибки, нарастающая от звена к звену, определяется первым членом. Ошибка за счет второго члена мала и притом в значительной степени погашается при суммировании по звеньям. Если звенья расположены по параллели (или по меридиану, или вдоль одной дуги большого круга), то для соседних



звеньев  $\vartheta_a(B) = \vartheta_a(A)$  и  $\vartheta_g(B\Sigma) \approx \vartheta_g(A\Sigma)$ . Поэтому при оценке точности можно перегруппировать слагаемые между звеньями, считая условно каждый астропункт отнесенным к середине нового звена:

$$\Sigma \Delta \zeta = l [\vartheta_a(1) - \vartheta_g(1, \Sigma_1)] + 2l [\vartheta_a(2) - \vartheta_g(2, \Sigma_2)] + \dots + \Sigma \frac{1}{2\pi\gamma R} \int \Delta g \left( \frac{1}{r_{n+1}} - \frac{1}{r_n} \right) d\sigma.$$

Но ошибку каждого из множителей, стоящих в квадратных скобках, в условиях гравиметрической съемки СССР можно оценить величиной около  $\pm 1''$ ,4, как это будет установлено в следующей главе.

Таблица 15

$L$	$-\int_0^S dS \int_0^S \Delta \zeta dS$	$-\int_0^S dS \int_0^S \zeta_k dS$	$\zeta - h$	Расхождение в поправке, м
0°	0,00	0,00	0,00	0,00
10°	- 0,04	0,00	- 0,04	- 0,02
20°	- 0,22	+ 0,05	- 0,17	+ 0,02
30°	- 0,67	+ 0,22	- 0,45	- 0,03
40°	- 1,61	+ 0,63	- 0,98	- 0,02
50°	- 3,36	+ 1,40	- 1,96	- 0,04
60°	- 6,31	+ 2,66	- 3,65	0,00
70°	- 10,88	+ 4,45	- 6,43	- 0,03
80°	- 17,57	+ 6,74	- 10,83	- 0,03
90°	- 26,91	+ 9,42	- 17,49	- 0,03
100°	- 39,41	+ 12,32	- 27,09	+ 0,04

Таблица 16

$L$	0°	10°	20°	30°	40°	50°
$h_{1943} - h_{1939}, \text{ м}$	+ 0,3	+ 0,6	+ 0,1	+ 3,2	+ 3,1	+ 4,2
$\zeta_{1943} - \zeta_{1939}$	+ 0,3	+ 0,6	+ 0,3	+ 3,8	+ 4,6	+ 7,3
$\zeta_{1943}$	+ 2,3	- 2,3	- 11,1	- 15,8	- 27,5	- 37,7
$\delta \zeta$	$\pm$	1,0	1,4	1,7	2,0	2,2

$L$	60°	70°	80°	90°	100°
$h_{1943} - h_{1939}, \text{ м}$	(+ 0,86)	(+ 0,6)	(- 9,0)	(- 18,4)	(- 32,2)
$\zeta_{1943} - \zeta_{1939}$	(+ 13,4)	(+ 10,7)	(+ 7,3)	(+ 6,8)	(+ 4,9)
$\zeta_{1943}$	(- 35,8)	(- 35,3)	(- 28,3)	(- 12,6)	(- 1,2)
$\delta \zeta$	—	—	—	—	—

Следовательно, ошибку в  $\zeta$  можно оценить так:

$$\delta \zeta = \pm [\Sigma(2l)^2]^{1/2} \sin 1''$$
,4,

или, считая звенья равными, а длину линии нивелирования обозначая через  $S$ , получим

$$\delta \zeta = \pm \sqrt{2lS} \sin 1''$$
,4. (5.44)

Для параллели с широтой  $52^\circ 30'$  можно считать в среднем, что мы имеем дело с двумя цепочками астропунктов, поэтому величину (5.44) нужно разделить приблизительно

на  $\sqrt{2}$ . В табл. 16 сопоставляются результаты 1939 г. и 1943 г. В первой строке указаны долготы (от Пулково). Во второй — помещены разности между результатами 1943 г. и 1939 г. после отнесения их к общему референц-эллипсоиду, но без учета тех поправок, о которых шла речь выше. Третья строка содержит разности результатов после внесения всех поправок. В четвертой строке приведены высоты геоида по данным 1943 г. для соответствующих долгот параллели  $52^{\circ}30'$  при ориентировке эллипсоида под условием  $\zeta = \eta = 0$  в Пулково. Высоты геоида по нашим результатам относительно нового эллипсоида триангуляции СССР представлены на карто-схеме (рис. 5). Последняя строка дает приближенную оценку средней квадратической ошибки вывода высоты геоида для разных долгот. Эта ошибка вычислена по формуле (5.44), т.е. в предположении, что превышения по всем звеньям получены путем астрономо-гравиметрического нивелирования.

Как видим, основные расхождения между результатами 1939 г. и 1943 г. возникли на участках  $20^{\circ}-30^{\circ}$  (Урал) и  $40^{\circ}-50^{\circ}$  (долгота Омска). Восточнее  $L = 60^{\circ}$  большинство звеньев не обеспечено гравиметрической съемкой; геодезические данные также несколько сомнительны; эти результаты надо считать предварительными, и в табл. 16 они заключены в скобки. Поправка, рассмотренная нами здесь, существенно исправляет результат; без ее учета возникло бы вопиющее противоречие между результатами вычислений 1939 г. и 1943 г. Величина этой поправки в данном случае оказалась порядка определяемой величины  $\zeta$ . Однако мы видели, что получается она достаточно точно, так как выражается интегральной формулой, а при интегрировании случайные ошибки заметно погашаются.

## Глава VI

### ИНТЕРПОЛЯЦИЯ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ И СУЖДЕНИЕ О ТОЧНОСТИ ГРАВИМЕТРИЧЕСКИХ ВЫВОДОВ

#### § 27. Ошибка представительства и ошибка интерполяции силы тяжести

Для определения гравиметрических уклонений отвеса и высот геоида нужно знать распределение аномалий силы тяжести для области, на которую распространяют интегрирование. Однако, выполняя гравиметрическую съемку, мы получаем аномалии силы тяжести в отдельных пунктах. Обычно по этим отдельным пунктам съемки строят карту изоаномал и по карте получают значение аномалии для любой точки области интегрирования. Затем производят интегрирование тем или иным численным методом. Чтобы оценить точность получаемых таким образом гравиметрических уклонений отвеса, необходимо оценить ошибку аномалий, снятых с карты, т.е. среднюю квадратическую разность между истинными значениями аномалий и принятыми при интегрировании. Эту величину будем называть «полной ошибкой интерполяции силы тяжести». Она складывается из двух частей: с одной стороны, в нее входят ошибки наблюдения пунктов, по которым построена карта изоаномал; с другой стороны — погрешности из-за предположения о плавном (линейном) изменении силы тяжести между пунктами, на которых производились измерения аномалий (последнюю величину будем называть «чистой ошибкой интерполяции»). Термины «полная ошибка интерполяции» и «чистая ошибка интерполяции» введены нами по аналогии с терминами «полная» и «чистая» ошибка представительства, введенными де Грааф-Хантером.

Численное значение ошибки интерполяции определяется следующим образом. В исследуемом районе отбрасывается часть гравиметрических пунктов (напр.,  $1/2$ ,  $2/3$ ,  $3/4$  и т.д.) и по оставшимся пунктам строится карта изоаномал. По этой карте, интерполяцией

между изолиниями, определяются аномалии в местах отброшенных пунктов и сравниваются с наблюдаемыми аномалиями этих пунктов. Из получаемых таким образом разностей определяется ошибка интерполяции для данной плотности съемки.

В 1937 г. А.М. Лозинская в ЦНИИГАиК определила ошибку интерполяции для района от  $27^\circ$  до  $42^\circ$  по долготе и от  $48^\circ$  до  $56^\circ$  по широте. Для сравнения ею определена для того же района ошибка представительства тем же способом, который применялся де Граф-Хантером. Получились результаты, приведенные в табл. 17. В первом столбце за единицу принято среднее расстояние между гравиметрическими пунктами.

Таблица 17

А. Полная ошибка интерполяции				
Плотность съемки относит. нормальной	Аномалии с редукцией в свободном воздухе		Аномалии с редукцией Буге	
	Число точек	Ошибка интерполяции	Число точек	Ошибка интерполяции
1/4	1167	$10,7 \pm 0,9$	842	$11,6 \pm 1,9$
1/3			626	$13,5 \pm 2,2$

Б. Ошибка представительства							
Размеры прямо- угольника, км	Плотность съемки относит. нормальной	Аномалии в свободном воздухе			Аномалии с редукцией Буге		
		Число площ.	Ошибка предста- вительства полная   чистая		Число площ.	Ошибка предста- вительства полная   чистая	
2 × 2	1/4	408	$10,1 \pm 1,5$	9,2	162	$10,6 \pm 1,6$	9,9
2 × 4	1/8	186	$12,4 \pm 2,5$	11,8			
2 × 6	1/12	118	$13,2 \pm 2,7$	12,7	42	$15,1 \pm 2,4$	14,6
4 × 4	1/16	92	$13,3 \pm 2,5$	12,8			
4 × 8	1/32	37	$15,1 \pm 4,0$	14,6			
6 × 6	1/36	30	$15,4 \pm 3,7$	14,9	16	$16,0 \pm 3,5$	15,6
4 × 12	1/48	23	$15,2 \pm 4,1$	14,7			
8 × 8	1/64	7	$15,8 \pm 5,6$	15,4	4	$16,3 \pm 4,3$	15,9

Если, следуя де Граф-Хантеру, чистую ошибку представительства представить формулой  $E = C(\sqrt{x} + \sqrt{y})$ , то  $C$  получается равным 0,54, если  $x$  и  $y$  выражены в километрах (у де Граф-Хантера  $C = 0,55$ ). Совпадение это случайно, так как рельеф Индии несравнимо сложнее рельефа исследованных здесь районов СССР, и следовало бы ожидать в условиях Индии большей величины ошибки представительства. По-видимому, увеличение ошибки представительства в Индии вследствие большей сложности рельефа компенсировалось применением изостатических редукций.

Строя кривую чистой ошибки представительства в зависимости от размера прямоугольников (в функции  $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ ), мы кроме эмпирически полученных точек (которые лежат вправо от нормальной плотности съемки) имеем еще одну добавочную точку в начале координат. Проводя по всем этим точкам плавную кривую, определяем искомую ошибку представительства для нужной нам плотности (рис. 6).

Сравнивая две предыдущие таблицы, приходим к довольно неожиданному результату, а именно: несмотря на то, что метод интерполяции в какой-то мере учитывает изменения аномалий (по крайней мере, плавную часть этого изменения), ошибка интерполяции все же получилась не меньше, чем ошибка представительства. В пределах точности определения этих ошибок оба результата можно считать одинаковыми. Это обстоятельство указывает на то, что в аномалиях правильно меняющаяся часть имеет значительно меньший градиент, чем быстро колеблющаяся часть, которая не поддается интерполяции при рассмотренных расстояниях между пунктами. Изучение районов, заснятых вариометрами, где можно считать известной аномалию в любой точке, подтверждает это.

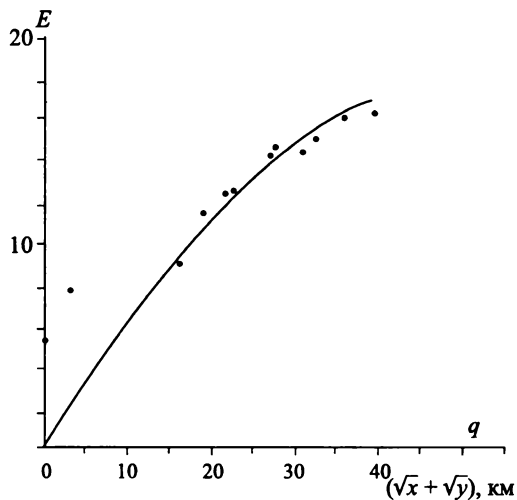


Рис. 6

К сожалению, вариометрические работы производились почти исключительно в специфических районах (главным образом в нефтеносных). Кроме того, материала так мало, что рискованно полученные по этим районам выводы обобщать и принимать за типичные для обычных районов.

Таблица 18

Район	Размер квадрата в километрах	
	8 × 8	16 × 16
Стерлитамакско–Мелеузский район	2,4	1,9
	1,7	
	1,8	
Чусовский район	2,5	
	1,1	
Туркменнефть (к югу от Нефтедага)	4,3	
	3,5	
Район Каировка–Желтое (Востокнефть)	2,1	5,9
	4,0	
	2,2	
	4,7	
	2,5	
Ромны (Черниговская область)	4,9	4,8
	4,5	
	4,0	
	1,8	
Башкирия	0,9	2,6
	1,1	
	2,2	
	2,5	

Несмотря на указанную условность выводов, основанных на анализе вариометрических работ, мы попытались по картам изоаномал, составленным на основании работ с вариометром, оценить ошибку представительства для малых площадок. В табл. 18 пред-

ставлены результаты оценки ошибки представительства для квадратов размером  $8 \times 8$  и  $16 \times 16$  километров для некоторых нефтеносных районов.

Средние квадратические величины ошибок представительства получились соответственно равными  $\pm 3,0$  и  $\pm 4,2$ , а по формуле  $0,54 (\sqrt{x} + \sqrt{y})$  — значениям  $\pm 3,1$  и  $\pm 4,3$ . Следовательно, мы имеем основания утверждать, что эмпирическая формула де Грааф-Хантера с коэффициентом  $0,54$  достаточно близко характеризует величину ошибки представительства и при расстоянии между пунктами в  $8$  и  $16$  км.

### § 28. Точность определения гравиметрических уклонений отвеса в условиях равномерной площадной съемки

Полученные результаты позволяют оценить точность определения уклонения отвеса, которая должна получаться, если пользоваться результатами общей гравиметрической съемки СССР. Для ближайших зон, оказывающих основное влияние на точность вывода уклонения отвеса, можно воспользоваться предельной формой формулы Венинг-Мейнеса для плоскости:

$$\xi'' = \frac{1}{2\pi\gamma \sin 1''} \iint \frac{\Delta g}{r} \cos \alpha \, dr \, d\alpha,$$

или в прямоугольных координатах:

$$\xi'' = \frac{1}{2\pi\gamma \sin 1''} \iint \frac{\Delta g x \, dx \, dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Величина ошибки интерполяции получилась у нас такой же, что и ошибки представительства. Поэтому, не внося дополнительных ошибок, мы можем представить  $\xi''$  в таком виде:

$$\begin{aligned} \xi'' &= \frac{1}{2\pi\gamma \sin 1''} \sum_i \Delta g_i \iint \frac{\cos \alpha}{r} \, dr \, d\alpha = \\ &= \frac{1}{2\pi\gamma \sin 1''} \Sigma 2\Delta g_i \ln \frac{r_{i+1}}{r_i} \cos \alpha_m \sin \Delta \alpha, \end{aligned} \quad (6.1)$$

или в прямоугольных координатах:

$$\begin{aligned} \xi'' &= \frac{1}{2\pi\gamma \sin 1''} \Sigma \Delta g_i \left[ \text{Arsh} \frac{y_2}{x_1} + \text{Arsh} \frac{y_1}{x_2} - \text{Arsh} \frac{y_1}{x_1} - \text{Arsh} \frac{y_2}{x_2} \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi\gamma \sin 1''} \Sigma \Delta g_i f_i. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Каждый из суммируемых интегралов распространен на всю площадь, от которой «представляет» данный пункт с аномалией  $\Delta g_i$ . Число этих интегралов под знаком суммы равно числу гравиметрических пунктов.

Средняя квадратическая ошибка результата составит

$$\delta \xi'' = \frac{1}{2\pi\gamma \sin 1''} (\Sigma f_i^2 \delta g_i^2)^{1/2},$$

где  $\delta g_i$  — ошибка представительства для площадки  $i$ . Рассмотрим несколько схем:

**Схема А.** Гравиметрические пункты расположены в шахматном порядке. Расстояние между пунктами равно  $2l$ . Уклонение отвеса ищется для точки, совпадающей с одним из гравиметрических пунктов. По формуле (6.2) рассчитываем следующую табл. 19 (см. также рис. 7).

Таблица 19

Пояс	Средняя квадратическая ошибка, вносимая поясом	Средняя ошибка всех предыдущих поясов
$l - 3l$	$\pm 0'',059 \delta g$	
$3l - 5l$	0,019	$\pm 0'',059 \delta g$
$5l - 7l$	0,010	0,062
$7l - 9l$	0,007	0,063
$9l - 11l$	0,005	0,063

Схема А

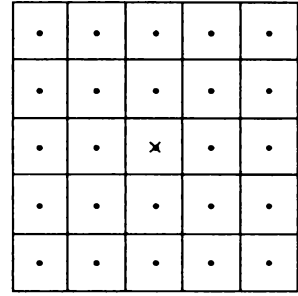


Рис. 7

**Схема В.** Отличие от схемы А заключается в том, что уклонение отвеса ищется для точки, лежащей посередине между гравиметрическими пунктами (табл. 20, рис. 8).

Таблица 20

Пояс	Средняя квадратическая ошибка, вносимая поясом	Средняя ошибка всех предыдущих поясов
$2l - 4l$	$\pm 0'',030 \delta g$	
$4l - 6l$	0,013	$\pm 0'',030 \delta g$
$6l - 8l$	0,009	0,033
$8l - 10l$	0,006	0,034

Схема В

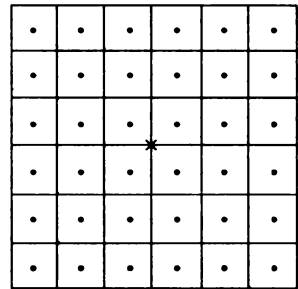


Рис. 8

**Схема С.** Расположение гравиметрических пунктов и разбивка на элементарные площадки пояснены рис. 9. Радиусы окружностей равны  $(2m \pm 1)/l$ , где  $m$  — номер зоны.

Таблица 21

$m$	Пояс	Средняя квадратическая ошибка, вносимая поясом	Средняя ошибка всех предыдущих поясов
1	$l - 3l$	$\pm 0'',058 \delta g$	
2	$3l - 5l$	0,019	$\pm 0'',058 \delta g$
3	$5l - 7l$	0,010	0,061
4	$7l - 9l$	0,007	0,062
5	$9l - 11l$	0,004	0,062

Схема С

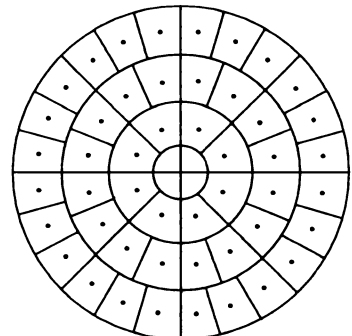


Рис. 9

Число пунктов в зоне равно  $8m$  (табл. 21). Для ошибки, вносимой зоной  $m$ , получаем

$$\delta \xi'' = \frac{1}{2\pi\gamma \sin 1''} \ln \frac{2m+1}{2m-1} (\sum \cos^2 \alpha_m (\Delta\alpha)^2)^{1/2} \delta g = \frac{1}{4\gamma \sin 1''} m^{-1/2} \ln \frac{2m+1}{2m-1} \delta g.$$

**Схема D.** Радиусы окружностей равны  $2ml$  и  $2(m+1)l$ , где  $m$  — номер зоны. Число пунктов в зоне равно  $4(2m+1)$ .

Ошибка, вносимая зоной  $m$ , может быть представлена следующим образом (табл. 22, рис. 10):

$$\delta\xi'' = \frac{1}{2\gamma \sin 1''} \ln \frac{m+1}{m} (4m+2)^{-1/2} \delta g.$$

Таблица 22

$m$	Пояс	Средняя квадратическая ошибка, вносимая поясом	Средняя ошибка всех предыдущих поясов
1	$2l - 4l$	$\pm 0'',030 \delta g$	
2	$4l - 6l$	0,013	$\pm 0'',030 \delta g$
3	$6l - 8l$	0,007	0,033
4	$8l - 10l$	0,005	0,033
5	$10l - 12l$	0,004	0,034

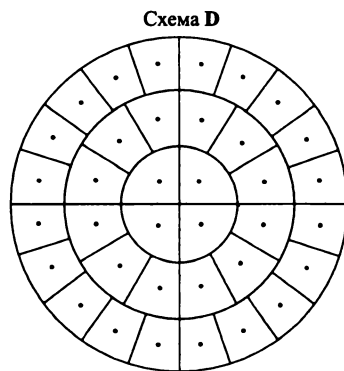


Рис. 10

Сравнивая между собой эти схемы, мы видим, что **A** и **C** приводят к одной и той же оценке; то же относится к **B** и **D**. Отличие схем **A** и **B**, или **C** и **D**, заключается в том, что в одном случае учитывается ошибка, вносимая всеми зонами, начиная от  $l$ , а в другом — начиная от  $2l$ . Положение астропункта относительно гравиметрических пунктов существенную роль играть не может. Действительно, можно совершить переход от одного крайнего случая к другому, а именно: от схемы **A** к **B** или от **C** к **D**. Представим себе, что линейный размер схемы **D** уменьшен вдвое. Тогда величина  $\pm 0'',034\delta g$  будет соответствовать ошибке учета всех зон, начиная от  $2l$ , но при съемке, сгущенной в четыре раза. Это сгущение приводит, поскольку ошибка представительства оставлена неизменной, к повышению точности в  $\sqrt{4} = 2$  раза, и, следовательно, при начальной плотности съемки ошибка всех зон, начиная от  $2l$ , должна составить около  $\pm 0'',068\delta g$ . По схеме **C** получилось  $\pm 0'',062\delta g$ .

Итак, средняя квадратическая ошибка в отклонении отвеса, вносимая областью за пределами  $l$ , равна  $\pm 0'',063\delta g$ , а ошибка, вносимая областью за пределами  $2l$ , равна  $\pm 0'',034\delta g$ . Порядок величины этой ошибки определяется первой зоной. Средние квадратические ошибки по зонам убывают приблизительно пропорционально номеру зоны в степени  $3/2$ , так как

$$\ln \frac{m+1}{m} \approx \ln \frac{2m+1}{2m-1} \approx \frac{1}{m}.$$

Совершенно особо должен ставиться вопрос в отношении центральной зоны от 0 до  $l$ . Один пункт, «представительствующий» от этой зоны, ничего не может дать для учета ее влияния. Следовательно, здесь речь должна идти не об ошибке ее учета, а о полном ее влиянии, которое должно войти составной частью в ошибку вывода отклонения отвеса. Понятно, что строгий подход в решению этой задачи едва ли возможен, и мы только делаем первую попытку ориентировочной, более или менее правдоподобной, оценки среднего значения этой величины.

Сравним средние квадратические значения для большого района производных от возмущающего потенциала по различным направлениям, исключив предварительно влияния систематического характера или так называемые региональные поля. Такое исключение может быть произведено с помощью карты, составленной по сравнительно редкой сети гравиметрических пунктов. Ошибка интерполяции возникает от «локальных» полей, размеры которых одного порядка с расстоянием между пунктами. Этим локальным полям соответствует остаточная часть возмущающего потенциала. Можно думать, что средние квадратические значения величин производных от этого остаточного возмущающего потенциала не должны зависеть от того направления в пространстве, по которому берутся эти производные. Рассматриваемый случай можно пояснить следующими рассуждениями.

В этом случае влияния явных асимметрий района (например, направление простирания, высоты и глубины надземных или погребенных горных хребтов и пр.) окажутся исключенными вместе с региональным полем и соответствующие им возмущающие массы можно не рассматривать. Следовательно, не останется места для асимметрии гравитационного поля в горизонтальном направлении. Кроме того, возмущающие массы положительного и отрицательного знака будут встречаться одинаково часто, а влияние аномалий плотностей удаленных масс настолько ослабится, что можно будет ограничиться рассмотрением только ближайших аномалий масс и не считаться с кривизной Земли. С точки зрения влияния этих аномалий на вертикальный градиент можно все отрицательные массы заменить положительными, перенесенными на соответствующую высоту вверх, заметно не меняя при этом средней величины их влияния на горизонтальные производные. Поскольку характер распределения положительных и отрицательных аномалий плотностей одинаков, все направления становятся после этого равноправными, так как направление вертикали перестает занимать как бы исключительное положение.

Таким образом выясняется простая связь между ошибкой интерполяции силы тяжести и точностью соответствующего вывода уклонения отвесной линии. Если мы говорим, что ошибка интерполяции равна  $\pm \delta g$ , это означает, что не учтена часть поля возмущающего потенциала, причем вертикальный градиент неучтенного поля характеризуется средней величиной  $\pm \delta g$ .

В соответствии с предыдущими рассуждениями мы можем считать, что неучтенный горизонтальный градиент остаточного поля возмущающего потенциала будет характеризоваться той же величиной  $\pm \delta g$ , что повлечет за собой в уклонении отвесной линии ошибку  $\pm \frac{\delta g}{g}$ , если выражать ее в радиальной мере. Переводя в дуговые секунды, получим

$$\delta \xi'' = \delta \eta'' = \pm \frac{\delta g}{g \sin 1''} = \pm 0'',21 \delta g. \quad (6.3)$$

Далее будет показано, что в нормальных условиях общей гравиметрической съемки СССР гравиметрическое уклонение отвеса фактически получается со средней ошибкой  $\pm 1'',3$  (эта величина получена из многочисленных сопоставлений с астрономо-геодезическими уклонениями отвеса). Подставляя в последнюю формулу полученную ранее величину ошибки представительства (или интерполяции)  $\delta g = \pm 6,5$  мгл, убеждаемся в полном соответствии предыдущей формулы с результатами опыта. Это соответствие подтверждает, что в основу вывода формулы (6.3) положены предпосылки, близкие к истине.

Полезно заметить, что полученное соотношение между  $\delta g$  и  $\delta \xi$  может служить для ориентировочной оценки точности вывода уклонения отвеса в зависимости от случайных ошибок определения аномалий силы тяжести. Для этого достаточно предположить, что ошибки эти создают фиктивное гравитационное поле, налагающееся на поле возмущаю-



шего потенциала. Тогда под  $\delta g$  можно понимать корень квадратный из суммы квадратов рассматриваемой ошибки и ошибки интерполяции.

При малом значении последней ошибки наблюдения при интерполяции будут заметно ослабляться. Например, для центра круга, описанного вокруг трех пунктов, по которым производится интерполирование, ошибка наблюдения уменьшается в  $\sqrt{3}$ , т.е. примерно в 1,7 раза, в то время как для самих мест карты, соответствующих этим пунктам, она войдет полностью. Для середины каждого отрезка, соединяющего любую пару пунктов, она уменьшится в 1,4 раза. Мы не сделаем большой ошибки, если последнее значение примем за среднее и посчитаем в этом случае, что ошибка в 1 мгл в измеренной аномалии приведет к ошибке в  $\pm 0'',15$  в отклонении отвеса. Заметим, что эта приближенная оценка хорошо согласуется с результатами, полученными численным методом Б.В. Дубовским в ЦНИИГАиК в 1938 г.

Ранее мы видели, что при равномерной съемке с расстоянием между пунктами  $2l$  влияние на результат центральной зоны, имеющей радиус  $l$ , не может быть учтено. Вместе с тем все остальные зоны, характеризующиеся случайной неучтенной аномалией в каждом отсеке  $\pm \delta g$ , вносят ошибку в  $\pm 0'',063 \delta g$ . Следовательно, почти вся полученная нами величина ошибки падает на долю неучтенной центральной зоны, так что

$$\delta \xi_l'' = \pm \sqrt{(0,21)^2 - (0,063)^2} \delta g = \pm 0'',20 \delta g.$$

В данном случае

$$\delta g = \pm 0,54 \cdot 2\sqrt{2l} = \pm 1,6\sqrt{l},$$

поэтому

$$\delta \xi_l'' = \pm 0'',32 \sqrt{l}.$$

Очевидно, это соотношение остается справедливым только при таких  $l$ , при которых недоучтенное поле возмущающего потенциала носит случайный характер. Последнее обстоятельство не будет иметь места как при очень больших  $l$ , так и при очень малых. К этому вопросу мы еще вернемся.

Позволим себе привести здесь другое рассуждение, которое еще раз подтверждает исключительное значение учета центральной зоны для снижения ошибки вывода отклонений отвеса. Это рассуждение еще менее, чем предыдущее, претендует на строгость и приводится только для того, чтобы на этот практически важный вопрос посмотреть с другой точки зрения. Из соображений случайного характера распределения градиентов аномалий вдоль любой линии де Грааф-Хантер принимает следующий средний закон изменения аномалий вдоль линии:

$$\Delta g = k\sqrt{x},$$

где  $x$  — расстояние от начальной точки отрезка.

Мы будем исходить из предположения, что в центральной зоне закон изменения аномалий в функции расстояния от начальной точки  $\rho$  и азимута  $\alpha$  может быть в среднем представлен следующей формулой:

$$\Delta g = \Delta g_0 + \sqrt{\rho} \sum_0^{\infty} k_n \cos n(\alpha - \alpha_0). \quad (6.4)$$

Наше предположение сводится к тому, что по любому радиусу-вектору прирост аномалий пропорционален  $\sqrt{\rho}$ , изменение же коэффициента пропорциональности в зависимости от направления остается произвольным. Заметим, что для очень малых  $\rho$  имеет место строгий закон

$$\Delta g = \Delta g_0 + k\rho \cos(\alpha - \alpha_0).$$

Однако, судя по картам детальных гравиметрических съемок, это соотношение справедливо только для  $\rho < 1-3$  км. Входящие в формулу (6.4) коэффициенты  $k_n$  свяжем с ошибкой представительства.

Этот закон распределения аномалий для площади круга даст среднюю истинную аномалию  $\Delta g_0$ , а отклонение аномалий от средней для любой наудачу выбранной точки будет равно  $\Delta g - \Delta g_0$ . Среднее квадратическое значение этой величины есть ошибка представительства  $E$  для площади круга:

$$E^2 = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r \int_0^{2\pi} (\Delta g - \Delta g_0)^2 \rho d\rho d\alpha = \frac{1}{3} r \Sigma k_n^2.$$

Для приближенной оценки заменим этот круг равновеликим квадратом, для которого  $E^2 = (0,54 \cdot 2)^2 \sqrt{\pi r^2}$  (коэффициент 0,54 нами подтвержден для площадок размером  $8 \times 8$  км; мы предполагаем, что он сохранится и для меньших площадок).

Следовательно,  $\Sigma k_n^2 = 3(0,54 \cdot 2)^2 \sqrt{\pi} = 6,23$ ,

$$k_1 = 2,50 - C_1^2.$$

Теперь получим среднее значение  $\Delta \xi''$  для центральной зоны радиуса  $r$ :

$$\bar{\Delta \xi}'' = \frac{1}{2\pi \gamma \sin 1''} \int_0^r \int_0^{2\pi} \rho^{-1/2} \cos \alpha (\Sigma k_n \cos n(\alpha - \alpha_0)) d\rho d\alpha = \frac{k_1}{\gamma \sin 1''} \sqrt{r} \cos \alpha_1,$$

$\alpha_1$  может принимать все значения, поэтому среднее квадратическое значение  $\bar{\Delta \xi}''$  таково:

$$\bar{\Delta \xi}'' = \frac{k_1}{\gamma \sin 1'' \sqrt{2}} \sqrt{r} = (0'',37 - C^2) \sqrt{r}.$$

Следовательно, при наших предположениях о характере распределения аномалий в центральной зоне и при коэффициенте ошибки представительства, равном 0,54, среднее квадратическое влияние центральной зоны на уклонение отвеса равно  $\pm(0'',37 - C^2) \sqrt{r}$ , т.е. менее  $\pm 0'',37 \sqrt{r}$ .

Таблица 23

Плотность гравиметр. съемки в радиусе 70 км	За пределами этого радиуса имеется съемка на расстоянии	Категория
Нормальная	свыше 600 км	I
	от 300 до 600 км	II
	от 150 до 300 км	III
	менее 150 км	IV
Ниже нормальной	свыше 600 км	II
	от 300 до 600 км	III
	менее 300 км	IV
Нет пунктов	—	III или IV

Величину  $C^2$  мы определим из фактической точности вывода гравиметрических уклонений отвеса в условиях общей гравиметрической съемки СССР. В 1937 г. были вычислены уклонения отвеса для 325 пунктов. Обеспеченность этих пунктов гравиметрической

съемкой была довольно различной. С этой точки зрения все пункты Б.В. Дубовским были разбиты на 4 категории примерно по тем правилам, которые приведены в табл. 23.

Разности между астрономо-геодезическими и гравиметрическими уклонениями отвеса помимо случайных ошибок включают систематическую часть с ярко выраженным ходом по долготе для  $\eta$  и по широте для  $\xi$ . Это объясняется: 1) несовпадением эллипсоида Бесселя с поверхностью относимости гравиметрических выводов; 2) неучтенным влиянием дальних зон. Выделяя эту систематическую часть по остаточным отклонениям, Дубовской подсчитал средние ошибки для пунктов разных категорий. Получились результаты, представленные в табл. 24.

Таблица 24

Категория	Число пунктов	Средняя ошибка одного определения		Распределение ошибок				
		$\xi''$	$\eta''$	0-1''	1''-2''	2''-3''	3''-4''	> 4''
I	56	$\pm 1'',48$	$\pm 1'',32$	62	32	15	3	—
II	138	$\pm 1,80$	$\pm 1,60$	146	74	32	16	8
III	89	$\pm 2,24$	$\pm 2,16$	69	55	32	10	12
IV	26	$\pm 2,73$	$\pm 2,07$	17	13	12	7	3
Всего	309	$\pm 1,94$	$\pm 1,75$					

Ошибки по  $\eta$  меньше и, вероятно, ближе к истине, так как в этой составляющей систематическая часть выделяется более полно. Учитывая еще ошибку астрономических определений ( $\pm 0'',3$ ), для пунктов первой категории ошибку гравиметрического вывода будем считать равной  $\pm 1'',3$ . Эта ошибка складывается: из ошибки всех зон за пределами  $l$ , равной  $\pm 0'',063 \delta g = \pm 0'',46$  (так как  $\delta g$  для съемки СССР равно  $\pm 7,3$  мгл); из ошибки, возникшей вследствие того, что не учтена центральная зона радиуса  $l$ , среднее влияние которой равно

$$(0'',37 - C^2)\sqrt{l} \approx 4(0'',37 - C^2),$$

поэтому

$$(1'',3)^2 = (0'',46)^2 + 16(0'',37 - C^2)^2, \quad C^2 = 0'',07,$$

а влияние центральной зоны получается равным  $\pm 0'',30\sqrt{\rho}$  км.

Для малых  $\rho$  эта оценка должна быть преувеличена, так как влияние зоны, для которой

$$\Delta g = \Delta g_0 + \left( \frac{\partial g}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial g}{\partial y} \sin \alpha \right) \rho,$$

равно

$$\frac{1}{2\gamma \sin 1''} \frac{\partial g}{\partial x} \rho = 0'',105 \frac{\partial g}{\partial x} \rho.$$

Если бы можно было считать последнюю формулу пригодной для  $\rho$  до 16 км, то мы получили бы

$$\left( 0'',105 \frac{\partial g}{\partial x} \rho \right)^2 + (0'',46)^2 = (1'',3)^2,$$

а влияние центральной зоны — равным  $\pm 0'',076\rho$ , причем для малых  $\rho$  надо ожидать, что эта оценка будет преуменьшена. Обе оценки совпадают при  $\rho = 0$  и  $\rho = 16$  км, а наибольшее расхождение между ними имеет место при  $\rho = 4$  км и равно  $0'',3$ .

Следовательно, надо думать, что:

1) формула  $\pm 0'',30\sqrt{\rho}$  дает завышенную оценку для малых значений  $\rho$  и правильную для  $\rho = 16$  км;

2) формула  $\pm 0'',076\rho$  дает заниженную оценку для малых  $\rho$  и правильную для  $\rho = 16$  км.

Поэтому среднее геометрическое из обеих формул

$$\bar{\Delta\xi''} = \pm 0'',15\rho\frac{3}{4} \quad (6.5)$$

должно достаточно близко передавать среднее значение влияния центральной зоны для  $\rho$  от 0 до 16 и более км (может быть, до 30 км). Так, например, для влияния пятикилометровой зоны получим по последней формуле:

$$\Delta\xi_5'' \pm 0'',50.$$

По материалам вариометрической съемки в 1937 г. Лозинской было получено уклонение отвеса от влияния ближайшей 5-километровой зоны (см. табл. 25), равное  $\Delta\xi_5'' \pm 0'',40$ , а Дубовским для Московской аномалии —  $\Delta\xi_5'' \pm 0'',59$ .

Таблица 25

Районы	Уклонение отвеса	
	$\xi''$	$\eta''$
$\varphi = 53^\circ 27'$ , $\lambda = 56^\circ 0'$	+0'',02	-0'',20
	+0'',32	-0'',10
Туркмения	-0'',48	-1'',04
Чусовской район	+0'',20	+0'',25
Стерлитамакско-Мелеузовский район	-0'',23	-0'',07
	-0'',21	+0'',19
	+0'',24	+0'',51
	+0'',05	+0'',25
Каировский район (Востокнефть)	-0'',28	+0'',26
	+0'',10	-1'',07
	-0'',12	+0'',42
Среднее квадратическое	+0'',40	

### § 29. Пример Московской аномалии

Интересный материал для проверки предыдущих соображений о точности вывода уклонений отвеса получен Дубовским для района Московской аномалии. Этот район пока является единственным у нас, где имеется довольно подробная и точная гравиметрическая съемка, а также большое количество астрономических определений на пунктах триангуляции. Поэтому он является весьма ценным для проверки различных методических выводов. Но с этой стороны район Москвы имеет существенный недостаток: он исключительно аномален, ошибка представительства для него значительно больше средней, следовательно, предвычисленные ошибки, основанные на среднем коэффициенте ошибки представительства, должны оказаться заниженными.

Дубовской для 15 пунктов в районе Московской аномалии вычислил уклонение отвеса в 5 вариантах: 1) сохранив при проведении изоаномал все пункты, что соответствовало среднему расстоянию между пунктами в 6 км; 2) отбросив часть пунктов так, что среднее

расстояние между ними повысилось до 9 км; 3) то же до 12 километров; 4) до 17 км; 5) до 33 км (стандартная плотность гравиметрической съемки СССР).

Для вариантов, представленных в табл. 26, он получил такие средние квадратические расхождения первым.

Таблица 26

Зоны, км	Среднее расстояние между пунктами			
	9	12	17	33
0-5	$\pm 0'',24$	$\pm 0'',42$	$\pm 0'',46$	$\pm 0'',59$
0-27	$\pm 0'',50$	$\pm 1'',10$	$\pm 1'',25$	$\pm 1'',80$
0-56	$\pm 0'',51$	$\pm 1'',12$	$\pm 1'',30$	$\pm 1'',88$

Для ошибки основного варианта (6 км) из сравнения гравиметрических уклонений отвеса с астрономо-геодезическими Дубовской получил

$$\delta\xi'' = \pm 0'',69, \quad \delta\eta'' = \pm 0'',50.$$

Образуя среднее и исключая ошибку астроопределений (приблизительно  $\pm 0'',3$ ), получим  $\pm 0'',52$ .

Для района Московской аномалии ошибку наблюдения в среднем примем равной  $\pm 2,5$  мгл, учитывая большую тщательность наблюдений в этом районе, а также то, что часть наблюдений выполнена гравиметрами. Рассчитаем теперь ошибку вывода уклонения отвеса для расстояний между пунктами 6, 9, 12, 17 и 33 км (табл. 27).

Таблица 27

Среднее расстояние между пунктами	Чистая ошибка представительства	Полная ошибка представительства	Влияние зоны за пределами $l$	$l^{3/4}$	Влияние центральной зоны	Ошибка уклонения отвеса, $\epsilon$	Получено Дубовским, $\epsilon$	$\frac{3}{2}\epsilon$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
6	$\pm 2,6$	$\pm 3,6$	$\pm 0'',23$	2,3	$\pm 0,34$	$\pm 0,41$	$\pm 0,52$	$\pm 0,60$
9	3,2	4,1	0,26	3,1	0,46	0,53	0,73	0,80
12	3,8	4,5	0,28	3,8	0,57	0,64	1,23	0,96
17	4,5	5,1	0,32	5,0	0,75	0,82	1,4	1,23
33	6,2	6,7	0,40	8,2	1,23	1,29	1,95	1,94

В столбце 8 приведены соответствующие значения ошибок из табл. 26 после включения ошибки основного варианта ( $\pm 0'',52$ ). Все расчетные оценки ошибок, как и следовало ожидать, преуменьшены (вследствие особой аномальности района Москвы).

Для стандартной плотности съемки (33 км) в графе 7, в сущности говоря, мы имеем не предвычисленную ошибку, а фактически установленную среднюю величину ( $\pm 1'',3$ ), так как из нее мы исходили при определении коэффициента формулы (6.5). Поэтому то обстоятельство, что для Московской аномалии при нормальной плотности гравиметрической съемки ошибка вывода уклонения отвеса получается на 50 % выше средней, не зависит от метода расчета, а только от того, что ошибка представительства для этого района примерно на 50 % выше средней. Учитывая это обстоятельство, мы в графе 9 даем для сравнения  $\frac{3}{2}\epsilon$ . Тогда соответствие предвычисленных и фактических результатов становится достаточно удовлетворительным.

Нами рассмотрен вопрос о точности получения уклонений отвеса при наличии равномерной площадной гравиметрической съемки. Методика расчета ожидаемых величин ошибок для этого случая ясна из предыдущего примера. Вопросы об оптимальном распределении гравиметрических пунктов мы намеренно не касались, так как этот вопрос достаточно подробно разобран де Грааф-Хантером [8]. В его расчетах оставался только один пробел, именно вопрос о влиянии на точность вывода  $\xi$  и  $\eta$  центральной зоны. Этот вопрос им и не мог быть решен, ибо он располагал только материалами очень редкой съемки (1 пункт на 10 000 кв. км). Мы показали, что эмпирическая формула де Грааф-Хантера для ошибки представительства остается практически пригодной даже при расстоянии между гравиметрическими пунктами до 8 км. Следовательно, объединяя результаты де Грааф-Хантера и наши, можно без труда решить оба типа задач, которые могут встретиться при проектировании гравиметрических съемок: 1) зная расположение гравиметрических пунктов и их точность, определить ожидаемую ошибку вывода уклонения отвеса; 2) задаваясь требуемой точностью уклонения отвеса и точностью измерения силы тяжести, рассчитать оптимальное расположение гравиметрических пунктов.

## Глава VII

### ПРИЛОЖЕНИЕ: ВЫВОД ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ФОРМУЛ К ГЛАВЕ IV

#### § 30. Вывод исходных формул

Введем в рассмотрение функции  $K_n$  и  $L_n$ , определяемые следующими равенствами:

$$K_n = \int_{-1}^{+1} F(y) P_n(x) dx, \quad (7.1)$$

$$L_n = \int_{-1}^{+1} F'(y) P_n(x) dx, \quad (7.2)$$

где

$$y = kx + b \quad \text{и} \quad b = f(k), \quad (7.3)$$

$P_n(x)$  — полином Лежандра порядка  $n$ .

Нетрудно установить некоторые соотношения, связывающие между собой эти функции. Из (7.2), интегрируя по частям, получаем

$$kL_n = |f(y)P_n(x)|_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} F(y)P'_n(x) dx. \quad (7.4)$$

Воспользуемся известным соотношением

$$P'_n(x) = P'_{n-2}(x) + (2n-1)P_{n-1}.$$

Подставляя его в (7.4) и интегрируя по частям выражение

$$\int_{-1}^{+1} F(y)P'_{n-2}(x) dx,$$

получим

$$L_n = L_{n-2} - (2n-1)K_{n-1}k^{-1}. \quad (7.5)$$

$L_0$  и  $L_1$  можно получить непосредственно. Нагляднее вместо  $L_1$  задать  $L_{-1}$ , чтобы подчеркнуть общее между четными и нечетными функциями. Получим

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{1}{k}[F(k+b) - F(k-b)], \\ L_{-1} &= \frac{1}{k}[F(k+b) + F(k-b)]. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Таким образом, функции  $L_n$  для всех целых положительных  $n$  определяются через функции  $K_n$  и  $F$  без дополнительных интеграций.

Дифференцируя (7.1) по  $k$  и принимая во внимание (7.2), получим

$$\frac{dK_n}{dk} = \int_{-1}^{+1} F(y)xP_n(x) dx + \frac{df}{dk}L_n.$$

Учитывая известное соотношение:

$$(2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x),$$

получим

$$\frac{dK_n}{dk} = \frac{n+1}{2n+1}L_{n+1} + \frac{n}{2n+1}L_{n-1} + \frac{df}{dk}L_n,$$

или на основании (7.5)

$$\frac{dK_n}{dk} = L_{n+1} + nK_nk^{-1} + \frac{df}{dk}L_n. \quad (7.7)$$

Теперь из (7.5) и (7.7) получаем

$$k \left( \frac{dK_n}{dk} - \frac{dK_{n-2}}{dk} \right) = nK_n - (n-2)K_{n-2} - (2n+1)K_n - \frac{df}{dk}(2n-1)K_{n-1}.$$

Последнее равенство легко приводится к такому виду:

$$\frac{d}{dk} = (K_n k^{n+1}) = k^{2n-1} \frac{d}{dk} (K_{n-2} k^{2-n}) - (2n-1)k^n K_{n-1} \frac{df}{dk}. \quad (7.8)$$

Интегрируя обе части этого выражения по  $k$  в пределах от 0 до  $k$ , после интегрирования по частям первого члена в правой части получаем

$$K_n k^{n+1} = K_{n-2} k^{n+1} - (2n-1) \int_0^k \left[ K_{n-2} + \frac{df}{dk} K_{n-1} \right] k^n dk. \quad (7.9)$$

Если обе стороны равенства (7.8) умножить на  $k^{1-2n}$  и после этого проинтегрировать в пределах от 1 до  $k$ , то получится

$$K_{n-1} k^{2-n} = K_n k^{2-n} + (2n-1) \int_0^k \left[ K_n + K_{n-1} \frac{df}{dk} \right] k^{1-n} dk + K_{n-2}(1) - K_n(1). \quad (7.10)$$

Равенства (7.9) и (7.10) представляют собой рекуррентные формулы для определения  $K_n$ . Из них первая служит для перехода от функций с меньшим значением  $n$  к функциям с большим  $n$ ; вторая служит для обратного перехода.

Таким образом, достаточно иметь функции  $K_n$  для двух смежных значений  $n$ , чтобы получить  $K_n$  и  $L_n$  для любого целого положительного  $n$  с помощью формул (7.9), (7.10), (7.5) и (7.6). При этом при переходе от больших к меньшим  $n$  дополнительно нужно знать  $K_n(1)$ ; практически это обычно не вызывает затруднений.

Покажем одно свойство функций  $K_n$ , важное для контроля их вычислений. Вблизи значения  $k = 0$  разложим  $F(y)$  в степенной ряд:

$$F(y) = F(b) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} k^m x^m F^m(b).$$

Так как

$$\int_{-1}^{+1} x^m P_n(x) dx = 0, \quad \text{если } m < n,$$

имеем

$$K_n k^{1-n} = k \int_{-1}^{+1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} k^{m-n} x^m F^m(b) P_n(x) dx,$$

поэтому

$$\lim_{k \rightarrow 0} (K_n k^{1-n}) = 0. \quad (7.11)$$

Следовательно, разложение  $K_n$  в степенной ряд должно начинаться с  $k^n$ .

### § 31. Частный случай применения формулы (7.10)

Воспользуемся формулой (7.10) и вычислим систему функций  $K_n$  для функции

$$P_n \left( \frac{x+1-k}{k} \right);$$

$P_n$  — полином Лежандра порядка  $n$ .

Очевидно, в этом случае

$$K_{n+m}(P_n) = 0 \quad (m > 0);$$

при  $k = 1$

$$\begin{aligned} K_n(P_n) &= \frac{2}{2n+1}, \\ K_m(P_n) &= 0. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Роль  $k$  в (7.10) играет  $1/k$  и

$$\frac{df}{d(1/k)} = 1;$$

условия (7.12) дают все необходимое для вычисления  $K_m(P_n)$  при любых  $m$  и  $n$ .

В данном случае можно было бы непосредственно применить формулу (7.10), положив  $1/k = k_1$ .





Рекуррентной формуле (7.15) соответствует такое решение:

$$B_l^m = \frac{1}{l} \frac{p(p-1)\dots(p+2-l)}{(l-1)!} \cdot \frac{q(q-1)\dots(q+2-l)}{(l-1)!}. \quad (7.16)$$

В этом можно убедиться, подставив (7.15) в (7.16).

Таким образом,

$$\frac{1}{2} K_r(P_n) k^n = t^2 + \frac{1}{2} t^4 pq + \frac{1}{3} t^6 \frac{p(p-1)}{2!} \frac{q(q-1)}{2!} + \frac{1}{4} t^8 \frac{p(p-1)(p-2)}{3!} \frac{q(q-1)(q-2)}{3!} \dots \quad (7.17)$$

$$t^2 = 1 - k, \quad p = n - r - 1, \quad q = n + r.$$

До  $n = 7$  получаем следующие разложения для  $P_n \left( \frac{y+1-k}{k} \right)$ :

$$kP_1 = t^2 + P_1(y),$$

$$k^2P_2 = (t^2 + t^4) + 3t^2P_1(y) + P_2(y),$$

$$k^3P_3 = (t^2 + 3t^4 + t^6) + 3(t^2 + 2t^4)P_1(y) + 5t^2P_2(y) + P_3(y),$$

$$k^4P_4 = (t^2 + 6t^4 + 6t^6 + t^8) + 3 \left( t^2 + 5t^4 + \frac{10}{3} t^6 \right) P_1(y) + 5(t^2 + 3t^4)P_2(y) + 7t^2P_3(y) + P_4(y),$$

$$k^5P_5 = (t^2 + 10t^4 + 20t^6 + 10t^8 + t^{10}) + 3(t^2 + 9t^4 + 15t^6 + 5t^8)P_1(y) + 5(t^2 + 7t^4 + 7t^6)P_2(y) + 7(t^2 + 4t^4)P_3(y) + 9t^2P_4(y) + P_5(y),$$

$$k^6P_6 = (t^2 + 15t^4 + 50t^6 + 50t^8 + 15t^{10} + t^{12}) + 3(t^2 + 14t^4 + 42t^6 + 35t^8 + 7t^{10})P_1(y) + 5(t^2 + 12t^4 + 28t^6 + 14t^8)P_2(y) + 7(t^2 + 9t^4 + 12t^6)P_3(y) + 9(t^2 + 5t^4)P_4(y) + 11t^2P_5(y) + P_6(y),$$

$$k^7P_7 = (t^2 + 21t^4 + 105t^6 + 175t^8 + 105t^{10} + 21t^{12} + t^{14}) + 3 \left( t^2 + 20t^4 + \frac{280}{3}t^6 + 140t^8 + 70t^{10} + \frac{28}{3}t^{12} \right) P_1(y) + 5 \left( t^2 + 18t^4 + 72t^6 + 84t^8 + \frac{126}{5}t^{10} \right) P_2(y) + 7(t^2 + 15t^4 + 45t^6 + 30t^8)P_3(y) + 9 \left( t^2 + \frac{55}{3}t^6 \right) P_4(y) + 11(t^2 + 6t^4)P_5(y) + 13t^2P_6(y) + P_7(y).$$

### § 32. Разложение функции Стокса по полиномам Лежандра в интервале изменения $\cos \psi$ от $-1$ до $\cos \psi_0$

Хорошо известно разложение функции Стокса в ряд по полиномам Лежандра в интервале для  $\cos \psi$  от  $-1$  до  $+1$ . Теперь мы ставим себе целью получить подобное же разложение для интервала изменения  $\cos \psi$  от  $-1$  до  $\cos \psi_0$ .

$S(\psi)$  в функции  $y = \cos \psi$  будет представлена следующим образом:

$$S(y) = \sqrt{\frac{2}{1-y}} - 3y \ln \left( \sqrt{\frac{1-y}{2}} + \frac{1-y}{2} \right) - 6\sqrt{\frac{1-y}{2}} + 1 - 5y.$$

Введем новое переменное  $x$ , связанное с  $y$  линейной зависимостью:

$$y = kx + k - 1, \quad \text{где } k = (1 + y_0)/2.$$

Тогда, при изменении  $x$  от  $-1$  до  $+1$   $y$  меняется от  $-1$  до  $2k - 1 = y_0$ .

Ограничиваясь приближением порядка  $m$ , разложение  $S(y)$  по полиномам Лежандра в интервале  $-1, 2k - 1$  представим в следующей форме:

$$S(kx + k - 1) = \sum_0^m \frac{2n + 1}{2} K_n(S) P_n(x). \quad (7.18)$$

Умножив обе части этого равенства на  $P_n(x)$  и интегрируя по  $x$  в пределах от  $-1$  до  $+1$ , получим

$$K_n(S) = \int_{-1}^{+1} S(kx + k - 1) P_n(x) dx.$$

Последнее выражение относится к рассмотренному типу (7.1).

Чтобы определить  $K_n(S)$  для любого  $n$ , пользуясь формулой (7.9), необходимо прежде всего знать  $K_0(S)$  и  $K_1(S)$ . Эти величины определяются по следующим формулам:

$$K_0(S) = k^{-1} \int_{-1}^{2k-1} S(y) dy, \quad K_1(S) = \frac{1-k}{k} K_0(S) + k^{-2} \int_{-1}^{2k-1} S(y) y dy.$$

Выполнив интегрирование, получаем

$$\left. \begin{aligned} \int S(y) dy &= y - \frac{7}{4}y^2 + \sqrt{2(1-y)} \left( -\frac{3}{2}y - \frac{1}{2} \right) + \\ &+ \frac{3}{2}(1-y^2) \ln \frac{1-y + \sqrt{2(1-y)}}{2}, \\ \int S(y) y dy &= y + \frac{1}{2}y^2 - \frac{4}{3}y^3 + \frac{1}{3}\sqrt{2(1-y)}(1-y-3y^2) - \\ &- y^3 \ln \frac{1-y + \sqrt{2(1-y)}}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (7.19)$$

Следовательно,

$$K_0(S)k = -2(1-k) + 7k(1-k) + 2(1-3k)\sqrt{1-k} + \\ + 6k(1-k) \ln(1-k + \sqrt{1-k}),$$

$$K_1(S)k^2 = -\frac{4}{3}(1-k) + \frac{5}{3}k(1-k) + \frac{11}{3}k^2(1-k) + \\ + \frac{2}{3}(-3k^2 - 2k + 2)\sqrt{1-k} + (1-k^3) \ln(1-k) - \\ - 2k^3 \ln(1 + \sqrt{1-k}).$$

Дальнейшее вычисление сводится к механическому применению формулы (7.9). Ее в данном случае можно написать так:

$$K_n(S)k^{n+1} = K_{n-1}k^{n+1} - 2n \int_0^k K_{n-1}k^n dk,$$

так как  $b = k - 1$ .

Выполнив интегрирование, последовательно получаем

$$\begin{aligned}
 K_0(S)k &= -7k^2 + 9k - 2 + \ln(1-k)(-3k^2 + 3k) + \\
 &\quad + (2 - 6k)\sqrt{1-k} + (6k - 6k^2) \ln(1 + \sqrt{1-k}), \\
 K_1(S)k^2 &= -\frac{11}{3}k^3 + 2k^2 + 3k - \frac{4}{3} + (1 - k^3) \ln(1 - k) + \\
 &\quad + \left(-2k^2 - \frac{4}{3}k + \frac{4}{3}\right) \sqrt{1-k} - 2k^3 \ln(1 + \sqrt{1-k}), \\
 K_2(S)k^3 &= -\frac{1}{2}k^4 - k^3 - \frac{7}{2}k^2 + 7k + (3 - 3k^2) \ln(1 - k) - 4k\sqrt{1-k}, \\
 K_3(S)k^4 &= \frac{1}{10}k^5 + \frac{1}{2}k^4 + \frac{7}{2}k^3 - \frac{37}{2}k^2 + 9k + \frac{32}{5} + \\
 &\quad + (6k^2 - 15k + 9) \ln(1 - k) + \left(\frac{28}{5}k^2 - \frac{16}{5}k - \frac{32}{5}\right) \sqrt{1-k}, \\
 K_4(S)k^5 &= -\frac{1}{30}k^6 - \frac{3}{10}k^5 - \frac{7}{2}k^4 + \frac{217}{6}k^3 - 49k^2 - \frac{84}{5}k + \frac{512}{15} + \\
 &\quad + (-10k^3 + 45k^2 - 63k + 28) \ln(1 - k) + \\
 &\quad + \left(-\frac{36}{5}k^3 + \frac{48}{5}k^2 + \frac{416}{15}k - \frac{512}{15}\right) \sqrt{1-k}, \\
 K_5(S)k^6 &= \frac{1}{70}k^7 + \frac{1}{5}k^6 + \frac{7}{2}k^5 - \frac{121}{2}k^4 + 156k^3 - \frac{139}{5}k^2 - \frac{1086}{5}k + \\
 &\quad + \frac{1024}{7} + (15k^4 - 105k^3 + 252k^2 - 252k + 90) \ln(1 - k) + \\
 &\quad + \left(\frac{44}{5}k^4 - \frac{704}{35}k^3 - \frac{2816}{35}k^2 + \frac{8192}{35}k - \frac{1024}{7}\right) \sqrt{1-k}, \\
 K_6(S)k^7 &= -\frac{1}{140}k^8 - \frac{1}{7}k^7 - \frac{7}{2}k^6 + \frac{912}{10}k^5 - \frac{1527}{4}k^4 + \frac{1632}{5}k^3 + \\
 &\quad + \frac{1389}{2}k^2 - \frac{9185}{7}k + \frac{4096}{7} + (-21k^5 + 210k^4 - 756k^3 + \\
 &\quad + 1260k^2 - 990k + 297) \ln(1 - k) + \left(-\frac{52}{5}k^5 + \frac{1248}{35}k^4 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{19968}{105}k^3 - \frac{6656}{7}k^2 + \frac{27648}{21}k - \frac{4096}{7}\right) \sqrt{1-k}, \\
 K_7(S)k^8 &= \frac{1}{252}k^9 + \frac{3}{28}k^8 + \frac{7}{2}k^7 - \frac{1307}{10}k^6 + \frac{15899}{20}k^5 - \frac{5371}{4}k^4 - \\
 &\quad - \frac{7733}{6}k^3 + \frac{88121}{14}k^2 - \frac{46241}{7}k + \frac{20480}{9} + (28k^6 - 378k^5 + \\
 &\quad + 1890k^4 - 4620k^3 + 5940k^2 - 3861k + 1001) \ln(1 - k) + \\
 &\quad + (12k^6 - \frac{400}{7}k^5 - \frac{24800}{63}k^4 + \frac{185600}{63}k^3 - \frac{140800}{21}k^2 + \\
 &\quad + \frac{407552}{63}k - \frac{20480}{9}) \sqrt{1-k}.
 \end{aligned} \tag{7.20}$$

В формулу для  $K_n(S)$ , как видим, входят  $3n + 3$  коэффициента. Эти коэффициенты связаны между собой рядом соотношений.

1) Вблизи значения  $k = 0$  выражение  $K_n(S)k^{n+1}$  может быть разложено в сходящийся ряд по степеням  $k$ .

На основании (7.11) разложение должно начинаться с  $k^{2n+1}$ . Следовательно, первые  $2n + 1$  коэффициенты разложения должны тождественно равняться нулю, а потому коэффициенты, входящие в  $K_n(S)k^{n+1}$ , связаны  $2n + 1$  соотношениями линейного вида.

2) Если  $k$  стремится к единице,  $K_n \rightarrow \frac{2}{n-1}$ . Но  $\ln(1-k) \rightarrow \infty$ , поэтому коэффициент при  $\ln(1-k)$  должен стремиться к нулю. Таким образом, имеем еще два линейных соотношения между коэффициентами.

Еще некоторые связи между коэффициентами обнаружатся в дальнейшем. Но уже теперь мы видим, что  $3n + 3$  коэффициента, входящие в  $K_n(S)$ , связаны  $2n + 3$  известными нам линейными соотношениями, которые могут служить для проверки вычисления коэффициентов при интегрировании. Например, при  $n = 7$  мы уже имеем 17 линейных соотношений для контроля 24-х коэффициентов.

Для большего удобства численных вычислений придадим (7.20) иной вид. Положим

$$\sqrt{1-k} = t.$$

После преобразований получим

$$\left. \begin{aligned} K_0(S)k &= -4t + 5t^2 + 6t^3 - 7t^4 + (6t^2 - 6t^4) \ln(t + t^2), \\ K_1(S)k^2 &= -2t + 4t^2 + \frac{16}{3}t^3 - 9t^4 - 2t^5 + \frac{11}{3}t^6 + 2 \ln t - \\ &\quad - 2(1-t^2)^3 \ln(t + t^2), \\ K_2(S)k^3 &= 2 - 4t + 5t^2 + 4t^3 - \frac{19}{2}t^4 + 3t^6 - \frac{1}{2}t^8 + 6t^2 \ln t, \\ K_3(S)k^4 &= 1 - 4t + 15t^2 - 8t^3 - 4t^4 + \frac{28}{5}t^5 - \frac{13}{2}t^6 + t^8 - \\ &\quad - \frac{1}{10}t^{10} + (6t^2 + 12t^4) \ln t, \\ K_4(S)k^5 &= \frac{2}{3} - 4t + 22t^2 - \frac{76}{3}t^3 + 35t^4 - 12t^5 - \frac{37}{2}t^6 + \frac{36}{5}t^7 - \\ &\quad - \frac{11}{2}t^8 + \frac{1}{2}t^{10} - \frac{1}{30}t^{12} + (6t^2 + 30t^4 + 20t^6) \ln t, \\ K_5(S)k^6 &= \frac{1}{2} - 4t + 28t^2 - 48t^3 + \frac{231}{2}t^4 - 88t^5 + \frac{93}{2}t^6 - \frac{538}{35}t^7 - \\ &\quad - \frac{79}{2}t^8 + \frac{44}{5}t^9 - 5t^{10} + \frac{3}{10}t^{12} - \frac{1}{70}t^{14} + \\ &\quad + (6t^2 + 54t^4 + 90t^6 + 30t^8) \ln t, \\ K_6(S)k^7 &= \frac{2}{5} - 4t + \frac{67}{2}t^2 - 76t^3 + \frac{493}{2}t^4 - \frac{1352}{5}t^5 + 357t^6 - \\ &\quad - \frac{1144}{5}t^7 + \frac{79}{4}t^8 - \frac{572}{35}t^9 - \frac{135}{2}t^{10} + \frac{52}{5}t^{11} - \frac{47}{10}t^{12} + \\ &\quad + \frac{1}{5}t^{14} - \frac{1}{140}t^{16} + (6t^2 + 84t^4 + 252t^6 + 210t^8 + 42t^{10}) \ln t, \\ K_7(S)k^8 &= \frac{1}{3} - 4t + \frac{387}{10}t^2 - \frac{328}{3}t^3 + 437t^4 - 620t^5 + \frac{2391}{2}t^6 - \\ &\quad - 1040t^7 + 802t^8 - \frac{31460}{63}t^9 - \frac{363}{4}t^{10} - \frac{104}{7}t^{11} - \\ &\quad - \frac{1543}{15}t^{12} + 12t^{13} - \frac{9}{2}t^{14} + \frac{1}{7}t^{16} - \frac{1}{252}t^{18} + \\ &\quad + (6t^2 + 120t^4 + 560t^6 + 840t^8 + 420t^{10} + 56t^{12}) \ln t. \end{aligned} \right\} (7.21)$$

Заметим, что начиная с  $n = 2$  коэффициент при  $t$  равен  $-4$ , в многочлене при  $\ln t$  коэффициент при первом члене равен  $6$ , при последнем равен  $n(n + 1)$ .

Сумма

$$S_m(kx + k - 1) = \sum_{n=0}^m \frac{2n + 1}{2} K_n(S) P_n(x)$$

представляет собой  $m$ -ное приближение к  $S(y)$ .

Оценим квадратическую ошибку  $m$ -го приближения  $R_m(S)$ . Известно, что

$$2R_m^2(S) = \int_{-1}^{+1} S^2(kx + k - 1) dx - \sum_0^m \frac{2n + 1}{2} K_n^2(S), \quad (7.22)$$

$R_m(S)$  — средняя квадратическая ошибка  $m$ -го приближения к функции  $S(kx + k - 1)$  в интервале  $-1 \leq x \leq +1$ .

Выполнив замену переменных, получим

$$\int_{-1}^{+1} S^2(kx + k - 1) dx = \frac{1}{k} \int_{-1}^{2k-1} S^2(y) dy = \frac{4}{k} \int_t^1 S^2(z) z dz, \quad (7.23)$$

где

$$z^2 = \frac{1 - y}{2}; \quad y = kx + k - 1,$$

$$S(z) = \frac{1}{2} - 3(1 - 2z^2) \ln(z + z^2) - 6z - 5(1 - 2z^2) + 1.$$

Интегрируя (7.23), получим

$$\begin{aligned} k \int_{-1}^{+1} S^2(kx + k - 1) dx &= \frac{k}{2} (K_0^2(S) - \bar{K}_0^2(S)) + \frac{3k}{2} (K_1^2(S) - \bar{K}_1^2(S)) + \\ &+ 6 \ln^2 t - 4 \ln t + 12 \ln t \ln(1 + t) + 8 \ln(1 + t) + \pi^2 - 8 \ln 2 + \\ &+ 5t^2 - 64t^3 + \frac{123}{4}t^4 + \frac{6352}{100}t^5 - 45t^6 + 12 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n^2}, \end{aligned} \quad (7.24)$$

где

$$k\bar{K}_0(S) = -4t + 5t^2 + 6t^3 - 7t^4,$$

$$k\bar{K}_1(S) = -2t + 4t^2 + \frac{16}{3}t^3 - 9t^4 - 2t^5 + \frac{11}{3}t^6 - 2 \ln t.$$

Ряд (7.24) получился в результате разложения по степеням  $t$  интеграла

$$\int_t^1 \frac{\ln(1 + t)}{t} dt = \frac{\pi^2}{12} - \int_0^t \frac{\ln(1 + t)}{t} dt = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n^2}.$$

Таким образом, задача разложения функции Стокса по полиномам Лежандра в интервале

$$-1 \leq x \leq 2k - 1 \quad (k \leq 1)$$

полностью решена. Коэффициенты разложения даются формулой (7.21). С помощью (7.9) этот ряд формул может быть продлен до любого  $n$ . Остаточная квадратическая ошибка разложения может быть получена с помощью формулы (7.24).

### § 33. Формулы Стокса и Вининг-Мейнеса в преобразованной форме

Формула (7.18) дает разложение  $S(y)$  по полиномам Лежандра  $P_n(x)$  в интервале изменения

по  $x$  от  $-1$  до  $+1$ ,

по  $y$  от  $-1$  до  $2k-1$ .

Тождественным преобразованием можно левую часть (7.18) свести к ряду, составленному из полиномов Лежандра, зависящих от  $y$ .

В функции  $y$  (7.18) будет преобразована к следующему виду:

$$S_m(y) = \sum_0^m \frac{2n+1}{2} K_n(S) P_n \left( \frac{y}{k} + \frac{1}{k} - 1 \right).$$

Умножим обе части последнего равенства на  $P_n(y)$  и проинтегрируем по  $y$  от  $-1$  до  $+1$ . Получим

$$K_r(S_m) = \sum_{n=0}^m \frac{2n+1}{2} K_n(S) K_r(P_n),$$

причем  $K_r(P_n)$  было получено раньше (формула (7.17)).

Таким образом, имеем

$$S_m(y) = \sum_{r=0}^m \frac{2r+1}{2} K_r(S_m) P_r(y).$$

Разность  $S(y) - S_m(y)$  близка к  $S(y)$  при  $y$ , близком к единице, и характеризуется средним квадратическим значением  $R_m(S, t)$  в интервале  $2k-1 \geq y \geq -1$ .

Теперь формулу Стокса можем представить в ином виде:

$$\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint \Delta g [S(y) - S_m(y)] d\omega + \frac{R}{4\pi\gamma} \iint \Delta g \left[ \sum_0^m \frac{2n+1}{2} K_r(S_m) P_r(y) \right] d\omega,$$

или, разлагая во втором интеграле  $\Delta g$  на сферические гармоники  $g_r$  и интегрируя, получим

$$\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint \Delta g [S(y) - S_m(y)] d\omega + \frac{R}{2\gamma} \sum_2^m g_r K_r(S_m). \quad (7.25)$$

Формулы для уклонения отвеса получим путем дифференцирования (7.25) по  $\varphi$  и  $\lambda$ :

$$\zeta'' = \frac{R}{4\pi\gamma \sin 1''} \int \Delta g \frac{d}{d\psi} [S(y) - S_m(y)] \cos \alpha d\omega - \frac{1}{2\gamma \sin 1''} \sum_2^m K_r(S_m) \frac{\partial g_r}{\partial \varphi},$$

$$\eta'' = \frac{R}{4\pi\gamma \sin 1''} \int \Delta g \frac{d}{d\psi} [S(y) - S_m(y)] \sin \alpha d\omega - \frac{1}{2\gamma \sin 1''} \sum_2^m K_r(S_m) \frac{\partial g_r}{\partial \lambda} \sec \varphi. \quad (7.26)$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пицетти П.* Механические основы теории фигуры планет. — М.: 1933.
2. *Jeffreys H.* // GB. 1931. Bd.31; 1932. Bd. 36.
3. *Моисеев Н.Д.* // АЖ. 1933. Т.Х. С.4; GB. 1934. Bd. 42, Н. 2–3.
4. *Кошляков Н.С.* Применение метода Грина к основной задаче гравиметрии. // Труды Математического ин-та им. В.А. Стеклова. 1933. Т.IV.
5. *Малкин Н.Р.* // АЖ. 1934. Т.XI. С.5; GB. 1935. Bd.45. Н. 1–2.
6. *Молоденский М.С.* Исследования по геодезической гравиметрии. — М.–Л.: 1936; АЖ. 1934. Т.XI.
7. *Идельсон Н.И., Малкин Н.Р.* // GB. 1931. Bd.29.
8. *De Graaf Hunter.* // J. Phil. Trans. A. 1935. 234.
9. *Моисеев Н.Д.* АЖ. 1935. Т.XII. 4.
10. *Малкин Н.Р.* // АЖ. 1940. Т.XVIII. 4–5.
11. *Михайлов А.А.* // АЖ. Т.XVII. I.
12. *Салтыков В.Н.* // ДАН. 1937. Т.XVI. 3.
13. GB. Bd. 38. Н. I. P.61.
14. *Красовский Ф.Н.* // Доклады VII конф. Балт. геод. ком. 1934. Вып. 2.
15. Geodetic Report. 1934. P.142.
16. *Молоденский М.С.* // Труды ЦНИИГАиК. Вып.17.
17. *Красовский Ф.Н.* Руководство по высшей геодезии. — М. 1942.
18. *Слудский Ф.А.* Лекции по высшей геодезии. — М. 1891.
19. *Малкин Н.Р.* // АЖ. 1939. Т.XVI. 1.
20. *Jeffreys H.* // M. N. R. A. S. Geophys Suppl. 1943. 5. No.3.
21. *Малкин Н.Р.* // GB. 1933. Bd.38. Н.1.
22. *Prey A.* // GB. 1932. Bd.36.



# ПРУЖИННЫЙ ГРАВИМЕТР. ТЕОРИЯ ГРАВИМЕТРА С ЛЕНТОЧНОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПРУЖИНОЙ\*

Работа над гравиметром, о котором будет идти речь в настоящей статье, начата автором в 1938 г. в Центральном научно-исследовательском институте геодезии, аэро съемки и картографии и прервалась с началом войны в 1941 г. Поскольку сроки полного завершения работы отодвинулись, мы решили кратко изложить результаты, полученные до настоящего времени. Ознакомление с принципами, положенными в основу устройства нашего гравиметра, может быть, принесет некоторую пользу лицам, занимающимся подобными вопросами.

## § 1. Принципиальные установки

В 1938 г., когда мы приступали к этой работе, было опубликовано еще очень мало материалов об устройстве известных тогда гравиметров. Из тех гравиметров, которые применяются в настоящее время, наибольшие подробности можно было узнать о гравиметре Исинга, кое-что было известно о гравиметре Линдблада и Мальмквиста и совсем мало о гравиметрах Хаалька, Тиссена, Графа, Хартля и Мот-Смита. Поэтому мы поставили себе целью создать рациональную конструкцию того прибора, которым надлежит заниматься, исходя из некоторой группы общих принципов. Конечно, таким образом нельзя придти к единственному типу прибора, но по крайней мере можно было исключить из рассмотрения схемы с нежелательными признаками и тем самым сосредоточить внимание в нужном направлении.

Эти принципы, положенные в основу при выборе типа прибора, приводим ниже:

1. Мы считали обязательным, чтобы малым был не только «эффективный» температурный коэффициент гравиметра, который может быть результатом взаимной компенсации нескольких эффектов различных знаков. Необходимо также, чтобы любой взятый изолированно элемент, существенным образом входящий в систему гравиметра, был в слабой степени зависим от температурных влияний. Если это условие соблюдено, то точность поддержания одинаковой температуры в различных местах прибора в меньшей мере будет лимитировать точность прибора.

С этой точки зрения мы исключили из рассмотрения газовые гравиметры (мы не имели в виду задачу построения прибора для наблюдения на море). В меньшей мере, но с известным основанием это относится и к гравиметрам, в которых используются упругие свойства плавленого кварца. Следовательно, нам надлежало делать выбор между возможными типами приборов, в которых упругая система изготовлена из сплавов типа «элинвар».

2. Прибор должен слабо реагировать на изменение его наклона, так как иначе:

а) усложнится его установка в полевых условиях;

б) потребуется очень надежное соединение упругой системы с уровнями.

Поэтому мы отказались от «астазированных» систем, в которых облегчается измерение деформации пружины ценой внесения огромной чувствительности прибора к наклону.

Последнего можно было избежать путем комбинации двух «зеркально отображенных» систем, подобно тому, как поступил Тиссен. Этого мы предпочли не делать, так как

\* Прикладная геофизика. Сб. статей по геофизическим методам разведки нефти. — М.: Государственное научно-техн. изд-во нефтяной и горно-топливной лит-ры. 1945. С. 11–29.

если соединять в общем футляре два прибора, то предпочтительнее от каждого получать независимый результат для целей контроля.

3. Следует предпочесть приборы с линейной шкалой в широком интервале. Это облегчает их калибрование (эталонирование) и вместе с тем предохраняет от некоторых возможных систематических ошибок.

Это второй довод в пользу того, чтобы избегать астазированных систем. Действительно, главное преимущество последних — простота оперирования с отсчетной системой — при современном развитии измерительной техники без труда может быть достигнуто даже при измерении очень малых деформаций.

4. Измеряемые при изменении силы тяжести смещения упругой системы не должны быть очень малы по сравнению с размерами рамы. Это условие мы выдвигаем не потому, что опасаемся ошибок измерения, хотя и это соображение должно играть известную роль, по крайней мере в части ошибок систематического характера, меняющихся от станции к станции. Более существенным нам кажется то, что при очень малых деформациях в большей степени возрастает роль рамы гравиметра. Обеспечить ее стабильность нам представляется делом довольно сложным, поскольку рама неизбежно должна сопрягаться с большим количеством дополнительных, обслуживающих узлов (арретиры, уровни, подъемные винты, термостат и пр.).

Поэтому мы ставили своей задачей получить от пружины максимальную деформацию, конечно, не переходя допустимых пределов напряжения в материале, из которого изготовлена пружина. Вся эта деформация должна быть полезной, т.е. должна быть вызвана только силой или моментом, пропорциональными силе тяжести. С этой точки зрения мы исключили из рассмотрения варианты, подобные осуществленному в гравиметре фирмы «Болиден».

5. Оценивая условия работы пружины гравиметра с точки зрения напряжений в ней, мы должны ориентироваться на места пружины, подверженные наибольшему напряжению. Но если мы считаем рациональным получить наибольшие деформации пружины при наименьшем максимальном напряжении в ней, нам следует предпочесть такие варианты прибора, которые по возможности обеспечат одинаковое распределение напряжений по всей длине пружины.

6. Большая деформация пружины не должна приводить к чрезмерному увеличению размеров прибора. Особенно важно, чтобы не была велика высота прибора во избежание заметной слоистости в распределении температуры. По этой причине мы остановили свое внимание на ленточных пружинах и решили воздержаться от применения винтовых пружин. Специальные пружины не входили в рассмотрение вследствие трудности изготовления их в наших условиях работы.

7. Приведенные выше соображения уже в общих чертах определяют тот тип гравиметра, который мы решили разрабатывать. Итак, мы останавливаемся на неастазированной системе, имеющей в качестве упругого элемента ленточную пружину, причем напряжения в любом сечении пружины распределены примерно одинаково. Чтобы последнее обстоятельство имело место, необходимо, чтобы нейтральная линия пружины имела постоянную кривизну, а толщина пружины была постоянной. Следовательно, пружина, которая до деформации имела постоянную кривизну (в простейшем случае была прямой), после деформации должна изогнуться по кривой, форма которой близка к окружности. Поэтому к свободному концу пружины должен быть приложен только момент, пропорциональный силе тяжести.

8. Следующее условие, которое мы выставляем, заключается в том, чтобы всякие изменения в раме, поддерживающей упругую систему и отсчетное устройство, по возможности мало входили в результат измерений. Для осуществления этого прежде всего

естественно сблизить свободный конец пружины и место крепления к раме второго конца, придав пружине форму по возможности полной окружности. Другие меры, направленные к достижению той же цели, будут ясны из разбираемой ниже теории этого гравиметра.

9. К отсчетному устройству мы предъявляем следующие требования:

а) единичный отсчет положения упругой системы должен обеспечивать нужную точность; следовательно, не должно быть никакой необходимости прибегать к сериям отсчетов для уменьшения случайной ошибки результата;

б) нуль-пункт гравиметра не должен быть связан с отсчетным устройством, чтобы смена измерительной установки не меняла отсчета прибора;

в) отсчетная система должна обеспечивать возможность выполнения измерений в большом диапазоне (500–1000 мгл) с равной точностью в любом интервале этого диапазона.

Выполнение этих требований может быть достигнуто многими способами, и мы остановились, как будет указано далее, на одном из простейших.

Изложенными девятью пунктами дается характеристика принципов, положенных в основу при выборе общей схемы гравиметра. Схема эта изображена на рис. 1. Плоская прямая пружина постоянной толщины и ширины одним своим концом *D* заделана в подставку, а другим концом *E* — в рычаг *EOC*. К подставке рычаг подвешен в *A* на двух тонких металлических нитях. Под действием момента (момент создается весом рычага и реакцией нитяного подвеса) пружина принимает форму, близкую к окружности. Соотношение размеров пружины и приложенного момента от веса рычага берется таким, чтобы пру-

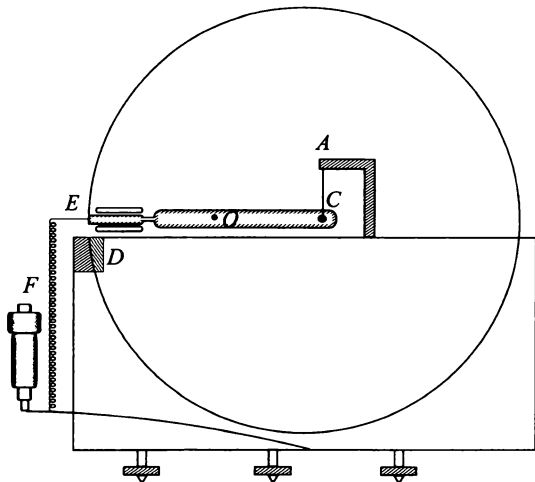


Рис. 1

жина изгибалась почти до полной окружности (несмыкание концов определяется только конструктивными соображениями). Углы крепления пружины к подставке и рычагу, а также места крепления нитей подвеса выбираются таким образом, что нити получают направление, близкое к вертикальному. Изменение рычага изменяет его положение равновесия (конец рычага *E* опускается при увеличении силы тяжести и поднимается при уменьшении). При помощи некоторого дополнительного устройства (на рис. 1 изображено в виде добавочной, очень эластичной винтовой пружины *F*, растяжение которой измеряется микрометром) можно восстановить первоначальное положение рычага. Тогда изменение веса рычага будет пропорционально дополнительному моменту, который ему сообщен для возвращения к исходному положению.

## § 2. Теория гравиметра

Переходим теперь к теории гравиметра рассмотренного типа. Для наших расчетов мы можем отказаться от строгой постановки соответствующей очень сложной и до конца не решаемой задачи теории упругости. Мы применим элементарную теорию Эйлера, которая исходит из понятия об упругой линии. К этому мы имеем достаточные основания, так как толщина пружины составляет примерно  $1/1000$  ее длины. Заменяя в своих рассуждениях пружину упругой линией, мы всю задачу будем трактовать как плоскую. Нашу задачу мы

будем ставить таким образом, чтобы получить выводы хотя и приближенные, но такие, которые позволили бы рациональным образом выбрать основные параметры прибора.

Возьмем прямоугольную систему координат  $XY$ , начало которой совместим со свободным концом пружины. Ось  $Y$  направим по касательной к пружине, причем будем полагать, что она составляет малый угол  $\gamma$  с направлением вертикали (см. рис. 2). В этой системе координат отметим положение трех точек: центра тяжести рычага  $O(X_0, Y_0)$ , места крепления нити к рычагу  $C(X_c, Y_c)$ , места крепления нити к раме  $A(X_a, Y_a)$ . Координаты упругой линии в переменной точке  $D$  пусть будут  $X$  и  $Y$ . К центру тяжести рычага  $O$  приложена сила с компонентами  $X_0$  и  $Y_0$  (вес рычага), а к точке  $C$  — сила с компонентами  $X_c$ ,  $Y_c$  (реакция нити подвеса). Нить подвеса будем считать идеально гибкой, а направление ее — близким к вертикальному.

Допуская, что плоское сечение и после изгиба пружины остается плоским, мы будем исходить из известного уравнения<sup>1</sup>:

$$\rho = \frac{EI}{M} = \frac{B}{M}, \quad (1)$$

где  $\rho$  — радиус кривизны упругой линии;  $E$  — модуль упругости Юнга материала, из которого изготовлена пружина;  $I$  — момент инерции поперечного сечения пружины относительно нейтральной линии;  $M$  — изгибающий момент внешних сил, приложенный к рассматриваемому сечению пружины;  $B = EI$  — так называемая жесткость пружины.

Обозначая угол касательной к пружине с осью  $Y$  через  $\vartheta$ , а элемент длины упругой линии через  $dl$ , напишем исходное дифференциальное уравнение (1) в таком виде:

$$B \frac{d\vartheta}{dl} = M. \quad (2)$$

Здесь левая часть представляет собой момент, развиваемый внутренними силами (напряжением в пружине), и приравнивается к моменту, создаваемому всеми внешними силами.

Если пренебречь собственным весом пружины, полагая, что обусловленный им момент мал по сравнению с моментом рычага, мы, очевидно, получим

$$M = (x_0 - x)Y_0 - (y_0 - y)X_0 + (x_c - x)Y_c - (y_c - y)X_c.$$

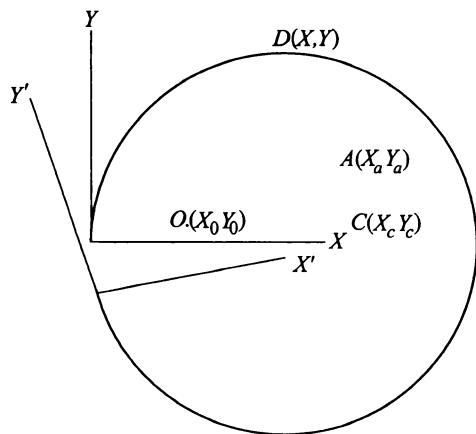
Если бы мы пожелали учесть вес пружины, следовало бы еще добавить новый член, выражающий момент, создаваемый весом той части пружины, которая лежит влево от точки  $D$ . Это сильно усложнило бы дальнейшие расчеты, а поэтому мы воздерживаемся от соответствующих вычислений и укажем в дальнейшем без вывода только результаты.

Выражение для  $M$  перепишем теперь иначе:

$$M = M_0 + X_y + Y(\rho_0 - X),$$

<sup>1</sup> См., например, А.Фенпель. Техническая механика. Т. III, гл. 3.

Рис. 2



где

$$\begin{aligned} M_0 &= x_0 Y_0 - y_0 X_0 + x_c Y_c - y_c X Y_c - \rho_0, \\ Y &= Y_0 + Y_c, \quad X = X_0 + X_c. \end{aligned} \quad (3)$$

Очевидно, здесь  $M_0$  — постоянная величина, равная моменту сил  $X_0 Y_0 X_c Y_c$  относительно центра окружности, точнее, относительно точки с координатами  $O$  и  $\rho_0$ , где

$$\rho_0 = \frac{B}{M_0}.$$

Теперь необходимо себе уяснить, что  $X$  и  $Y$  — величины малые, порядка угла  $\gamma$ , который ось  $Y$  составляет с вертикалью. Действительно, если  $X$  и  $Y$  не малы, форма пружины не может быть близка к окружности, так как радиус кривизны будет значительно меняться, как это вытекает из уравнений (1) и (3). В идеальном случае, когда мы рассматриваем невесомую однородную упругую линию,  $X$  и  $Y$  могут быть сколь угодно малы при правильном закреплении концов пружины и нитей подвеса. Но практически, вследствие ряда причин (влияние веса пружины, дефекты ее прокатки, неточности юстировки прибора, погрешности его нивелировки и пр.), силы  $X$  и  $Y$  свести к нулю не удастся, хотя можно сделать их достаточно малыми.

В дальнейшем мы будем считать величины  $\gamma$ ,  $\frac{\rho X}{M_0}$ ,  $\frac{\rho Y}{M_0}$  малыми и будем пренебрегать их квадратами и произведениями.

Итак, исходное уравнение (2) представим теперь так:

$$B \frac{d\vartheta}{dl} = M_0 + Xy + Y(\rho_0 - X). \quad (4)$$

Вследствие малости  $Xy$  и  $Y(\rho_0 - X)$  по сравнению с  $M_0$  мы делаем заключение, что в первом приближении

$$B \frac{d\vartheta}{dl} = M_0$$

и, следовательно,

$$y = \rho_0 \sin \frac{l}{\rho_0}, \quad x = \rho_0 \left( 1 - \cos \frac{l}{\rho_0} \right).$$

Подставляя теперь эти значения  $y$  и  $x$  в уравнение (4), получим

$$\frac{d\vartheta}{dl} = \frac{1}{\rho_0} + \frac{X}{M_0} \sin \frac{l}{\rho_0} + \frac{Y}{M_0} \cos \frac{l}{\rho_0}. \quad (5)$$

Проинтегрировав уравнение (5), имеем

$$\vartheta = \frac{l}{\rho_0} + \frac{Y \rho_0}{M_0} \sin \frac{l}{\rho_0} + \frac{X \rho_0}{M_0} \left( 1 - \cos \frac{l}{\rho_0} \right). \quad (6)$$

Воспользуемся известными соотношениями:

$$\sin \vartheta = \frac{dx}{dl}, \quad \cos \vartheta = \frac{dy}{dl},$$

которые очевидны геометрически.

С помощью (6) с нужной нам точностью получаем

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dl} &= \sin \frac{l}{\rho_0} + \cos \frac{l}{\rho_0} \left[ \frac{Y\rho_0}{M_0} \sin \frac{l}{\rho_0} + \frac{X\rho_0}{M_0} \left( 1 - \cos \frac{l}{\rho_0} \right) \right], \\ \frac{dy}{dl} &= \cos \frac{l}{\rho_0} - \sin \frac{l}{\rho_0} \left[ \frac{Y\rho_0}{M_0} \sin \frac{l}{\rho_0} + \frac{X\rho_0}{M_0} \left( 1 - \cos \frac{l}{\rho_0} \right) \right].\end{aligned}$$

Интегрируя эти уравнения, получим  $x$  и  $y$  в функции  $l$ , т.е. получим уравнение упругой линии (в параметрической форме).

Таким образом, принимая во внимание, что при  $l = 0$  также  $x = y = 0$ , приходим к следующим формулам:

$$\begin{aligned}x &= \rho_0 \left( 1 - \cos \frac{l}{\rho_0} \right) + \frac{Y\rho_0^2}{4M_0} \sin \frac{2l}{\rho_0} + \frac{X\rho_0^2}{M_0} \left[ \sin \frac{l}{\rho_0} - \frac{1}{2} \frac{l}{\rho_0} - \frac{1}{4} \sin \frac{2l}{\rho_0} \right]; \\ y &= \rho_0 \sin \frac{l}{\rho_0} + \frac{Y\rho_0^2}{4M_0} \left[ \frac{1}{4} \sin \frac{2l}{\rho_0} - \frac{1}{2} \frac{l}{\rho_0} \right] + \frac{X\rho_0^2}{M_0} \left[ \cos \frac{l}{\rho_0} - \frac{1}{4} \cos \frac{2l}{\rho_0} - \frac{3}{4} \right].\end{aligned}\quad (7)$$

Определим теперь координаты второго (закрепленного) конца пружины и угол касательной к пружине с осью  $Y$ . Обозначим длину пружины через  $L$ ; очевидно,  $\frac{L}{\rho_0}$  близко к  $2\pi$ . На этом основании в функциях, на которые умножаются малые величины  $Y$  и  $X$ , примем  $\frac{L}{\rho_0} = 2\pi$ . Тогда получим

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \rho_0 \left( 1 - \cos \frac{L}{\rho_0} \right) - \pi \frac{X\rho_0^2}{M_0}, \\ \bar{y} &= \rho_0 \sin \frac{L}{\rho_0} - \pi \frac{Y\rho_0^2}{M_0}, \\ \bar{\vartheta} &= \frac{L}{\rho_0} - 2\pi.\end{aligned}\quad (8)$$

Для определения компонент реакции нити подвеса  $X_c$  и  $Y_c$ , входящих в  $M_0$ ,  $X$  и  $Y$ , к этим уравнениям необходимо присоединить уравнения связей. В наших условиях (подвес на идеально гибкой нити) характер связи можно полностью определить следующими двумя условиями:

1. Расстояние между точками  $A$  и  $C$  равно длине нити подвеса, т.е.

$$(x_a - x_c)^2 + (y_a - y_c)^2 = S^2.\quad (9)$$

2. Вектор силы реакции направлен вдоль линии  $AC$ , т.е. вдоль нити подвеса, следовательно, момент его относительно точки  $A$  равен 0:

$$(x_a - x_c) - Y_c - (y_a - y_c)X_c = 0.\quad (10)$$

Пять уравнений (8), (9) и (10) дают все необходимые условия для решения задачи.

Заметим, что уравнение (9) можно заменить более простым. Действительно, с помощью (10) его можно написать так:

$$\frac{S^2}{(y_a - y_c)^2} = 1 + \left( \frac{x_a - x_c}{y_a - Y_c} \right)^2 = 1 + \frac{X_c^2}{Y_c^2}.$$

Но, поскольку мы условились пренебрегать величинами порядка вторых степеней  $X$  и  $Y$ , а следовательно, и  $x_c$ , последнее равенство дает

$$y_a - y_c = S. \quad (9')$$

Координаты  $y_a$  и  $x_a$  зависят от  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  и  $\bar{\vartheta}$ .

Для выяснения характера этой зависимости перейдем к новой системе координат  $x'$ ,  $Y'$ , у которой начало совместим с закрепленным концом пружины, а ось  $Y'$  направим по касательной к пружине в точке ее крепления к раме, т.е. в точке, соответствующей новому началу координат. Положение точки  $A$  в этой системе пусть определяется координатами  $a$  и  $b$ .

Очевидно,  $a$ ,  $b$ ,  $x_a$  и  $y_a$  будут связаны следующими формулами преобразования координат:

$$\begin{aligned} x_a &= (a + \bar{x}) \cos \bar{\vartheta} + (b + \bar{y}) \sin \bar{\vartheta}, \\ y_a &= -(a + \bar{x}) \sin \bar{\vartheta} + (b + \bar{y}) \cos \bar{\vartheta}. \end{aligned}$$

Вследствие малости  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  и  $\bar{\vartheta}$ , пренебрегая произведениями этих величин и их квадратами, можем последние уравнения упростить:

$$\begin{aligned} x_a &= a + \bar{x} + b\bar{\vartheta}, \\ y_a &= -a\bar{\vartheta} + b + y. \end{aligned} \quad (11)$$

С той же степенью точности уравнения (8), (9) и (10) заменяются следующими:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= -\pi \frac{X\rho_0^2}{M_0}, \quad \bar{y} = \rho_0\bar{\vartheta} - \pi \frac{Y\rho_0^2}{M}, \quad \bar{\vartheta} = \frac{LM_0}{B} - 2\pi, \\ S + y_c + a\bar{\vartheta} - b - \bar{y} &= 0, \quad a + \bar{x} + b\bar{\vartheta} - x_c = 0, \\ \frac{B}{\rho_0} &= M_0 = x_0Y_0 - y_0X_0 + x_cY_c - y_cX_c - Y\rho_0 = (x_0 - x_c)Y_0 - \\ &\quad - (y_0 - y_c)X_0 + (x_c - \rho_0)Y - y_cX. \end{aligned} \quad (12)$$

Последнее уравнение написано на основании (3) и (4).

В систему шести уравнений группы (12) входят четыре неизвестных, которые для нас не представляют интереса — именно  $x$ ,  $y$ ,  $\bar{x}$  и  $M_0$ . Первые три величины можем исключить сразу, используя уравнения (1), (2), (5) и (6).

Результат исключения может быть представлен детерминантом

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{\pi\rho_0^2}{M_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\pi\rho_0^2}{M_0} & \bar{y} - \bar{\rho}'_0\bar{\vartheta} \\ 1 & 0 & 0 & a - x_c + b\bar{\vartheta} \\ 0 & y_c & (x_c - \rho_0) & (x_0 - x_c)Y_0 - (y_0 - y_c)X_0^{-M_0} \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда определяем  $M_0$ :

$$M_0 = (x_0 - x_c)Y_0 - (y_0 - y_c)X_0 - \frac{M_0}{\pi\rho_0^2} [(x_c - \rho_0)(\bar{y} - \rho_0\bar{\vartheta}) + y_c(a - x_c + b\bar{\vartheta})],$$

и подставляем в третье уравнение системы (12), которая сводится теперь к двум уравнениям:

$$\bar{\vartheta} = \frac{L}{B}[(x_0 - x_c)Y_0 - (y_0 - y_c)X_0] - \frac{2}{\rho_0^2}[(x - \rho_0)(\bar{y} - \rho_0\bar{\vartheta}) + y_c(a - x_c + b\bar{\vartheta})] - 2\pi,$$

$$a\bar{\vartheta} - \bar{y} = b - S - y_c. \quad (13)$$

Исследуем уравнения (13). Мы желаем выбрать параметры прибора таким образом, чтобы всякие деформации рамы, от чего бы они ни происходили, по возможности не сказывались на результатах измерений. Абсцисса  $a$  точки крепления нити подвеса к раме входит только в первое уравнение с множителем  $y_c$ . Следовательно, изменение  $a$  не будет сказываться ни на  $\bar{\vartheta}$ , ни на  $\bar{y}$ , если  $y_c = 0$ .

Вторая координата точки крепления нити к раме — ордината  $b$  — теперь будет входить только во второе из уравнений (13), причем вместе с величинами  $S$  и  $y_c$  в такой комбинации:

$$b - S = y_c.$$

Эта величина характеризует положение по высоте оси вращения рычага. Так и следовало ожидать: изменение длины нити подвеса, например, должно давать такой же эффект, как перемещение вдоль нити места ее крепления к раме.

Принимая теперь, что  $y_c = 0$ , напомним уравнение (13) в форме, более удобной для дальнейших рассуждений:

$$\begin{aligned} \bar{\vartheta} \left[ 1 - \frac{2}{\rho_0}(x_c - \rho_0) \right] + \frac{2}{\rho_0^2}(x_c - \rho_0)\bar{y} = \\ = \frac{L}{B}[(x_0 - x_c)Y_0 - (y_0 - y_c)X_0] - 2\pi a\bar{\vartheta} - \bar{y} = b - S - y_c. \end{aligned} \quad (14)$$

Нет необходимости решать эти уравнения относительно  $\bar{\vartheta}$  и  $\bar{y}$ , так как уже теперь видно, что каждое из неизвестных  $\bar{\vartheta}$  и  $\bar{y}$  только в одном случае может быть определено независимо от  $b - S - y_c$ , т.е. без привлечения второго уравнения.

Эти случаи таковы:

1) если  $x_c = \rho_0$ , то определится  $\bar{\vartheta}$ :

$$\bar{\vartheta} = \frac{L}{B}[(x_0 - x_c)Y_0 - (y_0 - y_c)X_0] - 2\pi;$$

2) если  $1 - \frac{2}{\rho_0}(x_c - \rho_0) = 0$ , т.е. если  $x_c = \frac{3}{2}\rho_0$ , то определится  $\bar{y}$ :

$$\bar{y} = \left[ \frac{L}{B}[(x_0 - x_c)Y_0 - (y_0 - y_c)X_0] - 2\pi \right] \rho_0.$$

Следовательно, в первом случае, когда ось вращения помещена в центре окружности, ее смещения не должны влиять на угол  $\bar{\vartheta}$  между концами пружины, но вертикальная компонента расстояния между концами в соответствии со вторым уравнением (14) изменится полностью на величину

$$d\bar{y} = -d(b - S - y_c).$$



Во втором же случае, когда  $y_c = 0$  и  $x_c = \frac{3}{2}\rho_0$ ,

$$d\bar{y} = 0 \quad \text{и} \quad d\bar{\vartheta} = \frac{2}{3\rho_0} d(b - S - y_c).$$

Поэтому, если измеряются углы поворота рычага, целесообразно иметь  $x_c = \rho$ , если же измеряются линейные смещения конца рычага, то следует поместить подвес на расстоянии полоторного радиуса пружины от ее конца.

Наконец, может иметь место третий случай, когда измеряется вертикальное перемещение не конца рычага, а точки с координатами  $x, 0$ . В этом случае измеряется величина

$$y = \bar{y} - x\bar{\vartheta}.$$

В таком случае первое из уравнений (14) после исключения  $\bar{y}$  примет такой вид:

$$\begin{aligned} \bar{\vartheta} \left[ 1 - \frac{2}{\rho_0^2} (x_c - \rho_0)(\rho_0 - x) \right] + \frac{2}{\rho_0^2} (x_c - \rho_0)\bar{y} = \\ = \frac{L}{B} [(x_0 - x_c)Y_0 - (y_0 - y_c)X_0] - 2\pi. \end{aligned} \quad (15)$$

Следовательно, в этом случае надо стремиться к тому, чтобы

$$\begin{aligned} 1 - \frac{2}{\rho_0^2} (x_c - \rho_0)(\rho_0 - x) = 0, \\ x_c = \frac{3}{2}\rho_0 \left[ 1 + \frac{x}{3(\rho_0 - x)} \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Поэтому при  $x > 0$  нужно брать  $x_c > \frac{3}{2}\rho_0$ , а при  $x < 0$  должно быть  $x_c < \frac{3}{2}\rho_0$  в соответствии с равенством (16).

Посмотрим теперь, какие условия должны быть предъявлены к устройству прибора, чтобы упругая система как можно меньше реагировала на изменение наклона прибора. При изменении наклона прибора меняются компоненты сил  $X_c, Y_c, X_0$  и  $Y_0$ . Первые две компоненты в уравнение (15) не входят — они уже исключены. Что же касается двух последних —  $X_0$  и  $Y_0$ , то они просто связаны с наклоном прибора  $\gamma$ . Очевидно,

$$\begin{aligned} X_0 = mg \sin \gamma; \quad \frac{\partial X_0}{\partial \gamma} mg \cos \gamma; \\ Y_0 = -mg \cos \gamma; \quad \frac{\partial Y_0}{\partial \gamma} mg \sin \gamma, \end{aligned} \quad (17)$$

где  $m$  — масса рычага,  $g$  — ускорение силы тяжести.

Следовательно, при изменении наклона прибора, при  $\gamma$ , близком к 0, сильно меняется компонента  $X_0$ , а потому следует выбрать параметры прибора таким образом, чтобы она была исключена.

Для этого достаточно, чтобы  $Y_0 = Y_c = 0$ , т.е. центр тяжести рычага и место крепления подвеса к нему должны лежать на горизонтальном диаметре упругой линии, проходящем через подвижный конец пружины.

Таким образом, нами получены условия, при выполнении которых деформации рамы и неточность нивелировки не сказываются на показаниях гравиметра. Эти условия относятся к тому случаю, когда мы пренебрегли собственным весом пружины. Если учитывать собственный вес пружины, то, как показали исследования В.Я. Горошко, сохраняется только условие  $Y_c = 0$ .

Чтобы изменение нивелировки не меняло отсчета, в этом случае необходимо соблюдать условие

$$y_0 = \frac{w(x_c - x_0)}{4\pi M} (3\rho + x_c),$$

где  $w$  — вес пружины.

Точно так же вертикальное перемещение оси вращения рычага не скажется на отсчете, если

$$x_c = \frac{3}{2}\rho + w \frac{\rho y_0}{x_c 4M} (3\rho + x_c). \quad (18)$$

От учета собственного веса поправки в  $y_0$  могут достигать 6 мм, а в  $x_c$  — до 14 мм. Конечно, при расчете конструкции эти обстоятельства обязательно нужно учитывать. Принимая во внимание (16), (17) и (18), приводим теперь (15) к такому виду:

$$y = + \left[ \frac{L}{B} (x_c - x_0) mg \cos \gamma - 2\pi \right] (\rho_0 - x). \quad (19)$$

Теперь посмотрим, как скажется на  $y$  изменение величин  $g$ ,  $L$ ,  $B$ ,  $x_c - x_0$ . Дифференцируя (19), получаем

$$dy = 2\pi(\rho_0 - x) \left[ \frac{dg}{g} + \frac{dL}{L} - \frac{dB}{B} + \frac{d(x_c - x_0)}{x_c - x_0} \right].$$

Если изменение  $L$ ,  $B$  и  $(x_c - x_0)$  вызвано изменением температуры пружины на величину  $dt_1$  и температуры рычага на  $dt_2$ , то тогда

$$\frac{dL}{L} = \alpha_1 dt_1, \quad \frac{d(x_c - x_0)}{x_c - x_0} = \alpha_2 dt_2; \quad \frac{dB}{B} = \beta dt_1,$$

где  $\alpha_1$  — линейный коэффициент расширения материала пружины;  $\alpha_2$  — та же величина для материала рычага;  $\beta$  — температурный коэффициент величины  $B$  — жесткости пружины:

$$\beta dt_1 = \frac{dB}{B} = \frac{dE}{E} + \frac{dJ}{J} = \beta_1 dt_1 + 4\alpha_1 dt_1,$$

где  $\beta_1$  — термоэластический коэффициент модуля Юнга.

Следовательно,

$$dy = 2\pi(\rho_0 - x) \left[ \frac{dg}{g} + (\alpha_1 - \beta) dt_1 + \alpha_2 dt_2 \right]. \quad (20)$$

Таким образом, температурный коэффициент гравиметра без компенсации будет определен в галах на градус величиной

$$-g(\alpha_1 + \alpha_2 - \beta),$$

а изменение положения рычага по высоте в месте отсчета (с абсциссой  $x$ ) при изменении силы тяжести на 1 мгл приблизительно равно  $2\pi(\rho_0 - x) \cdot 10^{-6}$ .

Например, если  $\rho_0 = 10$  см и  $x = 0$ , то одному миллигалу будет соответствовать смещение конца пружины на  $0,6 \mu$ .

С точки зрения влияния температурных погрешностей наиболее благоприятным будет тот случай, когда  $\alpha_1 - \beta = 0$  и  $\alpha_2 = 0$ , т.е. когда как рычаг, так и пружина, каждый в отдельности, имеют нулевые эффективные температурные коэффициенты. К этим условиям можно приблизиться, если рычаг изготовлен из плавленного кварца или хорошего инвара и соответствующим образом подобрана пружина.

Анализируя уравнение (19), видим, что эталонирование прибора можно выполнять известным способом, исходя из зависимости между углом наклона прибора и отсчетом гравиметра. Можно также воспользоваться добавлением грузика, подсчитав вызываемое им изменение момента рычага. В этом случае нужно знать также полный момент рычага. Но наиболее надежным остается прямой путь — эталонирование по пунктам с известной силой тяжести (это правило, мы думаем, относится ко всем гравиметрам).

### § 3. Регистрация деформаций

На этом мы заканчиваем разбор принципиальной схемы гравиметра. Перейдем теперь к отсчетному устройству. Первый вопрос, который здесь возникает, это вопрос о том, что предпочтительнее измерять — углы поворота рычага ( $\vartheta$ ) или линейное смещение какого-либо места рычага ( $y$ ). Если измерять углы поворота, то изменению силы тяжести на 1 мгл будет соответствовать приращение угла в  $1,3''$ , в то время как линейное смещение мы оценивали величиной порядка  $0,6 \mu$  (при  $\rho_0 = 10$  см).

Для измерения и угловых, и линейных перемещений с нужной нам точностью имеется очень много возможностей (методы оптические, фотоэлектрические, емкостные и др.). После рассмотрения ряда вариантов мы остановились на измерении линейных смещений емкостным методом, причем выбрали один из простейших вариантов этого метода.

Наиболее точный способ измерения малых перемещений — емкостный метод — мы стремились применить в таком варианте, который полностью обеспечивал бы независимость результата измерений от параметров электроизмерительной установки, а следовательно, и от вариации этих параметров. Этого удалось достичь благодаря применению самого простого приема. С рычагом соединена горизонтальная плоскопараллельная (приблизительно) металлическая пластинка. Параллельно плоскостям этой пластины, с обеих сторон и на малом от них расстоянии, помещены две другие металлизированные плоскости, изолированные от других частей прибора, но соединенные между собой. Вся эта система — пластина рычага и упомянутые плоскости — образуют конденсатор, емкость которого изменяется с перемещением рычага.

При правильной юстировке описанной системы положение пластины рычага посередине между изолированными плоскостями должно соответствовать минимуму емкости; при перемещении рычага в ту и другую сторону от этого положения емкость должна возрастать одинаково. Кривая, изображающая изменение емкости в зависимости от положения рычага, будет иметь ось симметрии. Используя это обстоятельство, можно легко все отсчеты относить к этой оси симметрии, положение которой не зависит от любых параметров электроизмерительной схемы. Конечно, изолированные плоскости, относительно которых ведутся измерения, должны быть надежно соединены с закрепленным концом пружины.

При таком устройстве конденсатора гравиметра роль электроизмерительной схемы сводится к минимуму. Ее назначение можно ограничить ролью индикатора, который показывает положение рычага, соответствующее минимальной емкости конденсатора гравиметра. Наилучшие результаты дали описываемые ниже два способа измерений. Каждый способ соответствует определенному типу устройства микрометра гравиметра. Рассмо-

трим сначала первый случай, когда устройство микрометра позволяет плавно менять момент рычага в рабочем положении, т.е. в том положении, когда рычаг не арретирован. В этом случае с помощью микрометра рычагу можно придать любое положение. Положим, что электроизмерительная схема может только реагировать на очень малые изменения емкости, вблизи некоторого значения емкости составляют  $C_0$  (например вблизи точки резонанса). Тогда мы с высокой степенью точности можем найти такие два отсчета микрометра, которые соответствуют одной и той же емкости конденсатора гравиметра. Полусумма этих отсчетов определит положение «оси симметрии», т.е. мы получим отсчет, соответствующий минимальной емкости конденсатора. Изменение этого отсчета, связанное с изменением силы тяжести (при прочих равных условиях), будет пропорционально изменению силы тяжести. Если устройство микрометра не позволяет непрерывно перемещать рычаг через все возможные положения, то этот способ оказывается непригодным.

При таком устройстве микрометра мы с успехом применяли второй способ. Он заключается в том, что измеряется изменение емкости конденсатора гравиметра при перемещении рычага на малую постоянную величину. Это постоянное перемещение создается добавлением к рычагу постоянного малого момента путем навески дополнительного грузика. Далее будет показано, что удаление рычага от положения «минимум емкости» пропорционально разности емкостей в обоих положениях — с грузиком и без грузика. Эта разность емкостей измеряется градуированным подстроечным конденсатором малой емкости с помощью той же «индикаторной» электроизмерительной установки. Как в предыдущем, так и в этом случае к «индикатору» предъявляется единственное и легко выполнимое требование — необходимо, чтобы фиксируемая им емкость сохраняла свое значение в течение времени, когда берется пара отсчетов, по которым выводится положение «минимум емкости», т.е. в течение промежутка времени менее минуты. К подстроечному конденсатору предъявляется единственное требование — плавность его шкалы, так как он служит только средством интерполяции отсчетов.

Чтобы приведенные рассуждения были понятнее, приведем соответствующие им простые расчеты. Характер изменения емкости конденсатора гравиметра в зависимости от положения рычага вблизи середины можно достаточно точно представить параболической функцией:

$$C = D + En + Fn^2,$$

где  $C$  — емкость, выраженная в делениях подстроечного измерительного конденсатора;  $D$ ,  $E$ ,  $F$  — некоторые постоянные конденсатора гравиметра;  $n$  — отсчеты микрометра, однозначно и линейно связанные с положением рычага.

Отсчет  $n_0$ , соответствующий минимуму емкости, может быть определен из условия

$$\frac{dC}{dn} = 0.$$

Следовательно,

$$n_0 = -\frac{E}{2F}.$$

Далее, пусть  $C_0$  — емкость, фиксируемая индикаторным электроизмерительным устройством, а  $C_1$  и  $C_2$  — отсчеты подстроечного конденсатора, которые соответствуют положению рычага без грузика и с подвешенным грузиком. Эти отсчеты дополняют емкость конденсатора гравиметра до той величины емкости, которая фиксируется индикатором. Следовательно,

$$C_0 = C_1 + D + En_1 + Fn_1^2 = C_2 + D + En_2 + Fn_2^2.$$

Отсюда получаем

$$n_0 = -\frac{E}{2F} = \frac{n_1 + n_2}{2} + (C_1 - C_2)k; \quad k = \frac{1}{2F(n_1 - n_2)}.$$

В первом из рассмотренных способов измерения  $C_1 = C_2$  и, как указывалось,

$$n_0 = \frac{n_1 + n_2}{2}.$$

Во втором способе разность  $C_1 - C_2$  известна, а множитель  $k = \frac{1}{2F(n_1 - n_2)}$  есть величина постоянная, так как навеска грузика эквивалентна изменению отсчета микрометра на постоянную величину. Значение множителя  $k$  можно легко получить, меняя положение микрометра и каждый раз измеряя разность  $(C_1 - C_2)$ .

Таким образом, деления конденсатора сразу переводятся в деления микрометра. Микрометр устанавливается так, чтобы разность  $(C_1 - C_2)$  была мала, и тогда неточность  $k$  на результате заметно не скажется.

Перейдем теперь к индикаторному электроизмерительному устройству. Мы выяснили, что к этому прибору предъявляется единственное существенное требование: он должен реагировать на очень малые изменения емкости. Кроме того, желательно, чтобы его устройство было просто и удобно в обращении. Всем этим требованиям удовлетворяет известная

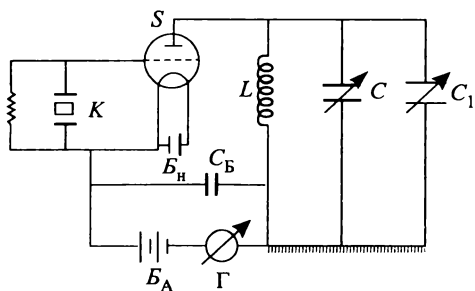


Рис. 3

в радиотехнике осцилляторная схема Пирса — генератор малой мощности, частота которого стабилизируется пьезокварцем. Схема его приведена на рис. 3 (на рис. 3  $S$  — лампа,  $K$  — кварц,  $C, C_1$  — конденсаторы,  $C_B$  — конденсатор блокировочный,  $\Gamma$  — гальванометр,  $L$  — катушка самоиндукции,  $B_A$  — батарея анодная,  $B_H$  — батарея накала). В колебательный контур генератора включается конденсатор гравиметра  $C_1$  и параллельно ему — подстроечный конденсатор  $C_2$ . Меняя емкость одного из этих конденсаторов, можно частоту колебательного контура уравнивать с частотой пьезокварцевой пластины. Вблизи этого по-

ложения возникает генерация. При возникновении генерации очень резко (практически скачкообразно) меняется сила анодного тока, фиксируемая миллиамперметром. Надо заметить, что при подходе к возникновению генерации со стороны больших емкостей генерация возникает при строго фиксированной величине емкости колебательного контура, причем величина этой емкости очень слабо зависит от накала лампы и анодного напряжения, а также от параметров лампы для ламп с малой междуэлектродной емкостью. Мы всегда стремились к тому, чтобы генератор развивал минимальную мощность, а потому подключали пониженное анодное напряжение (до 20–30 В) и минимальный накал. Это сделано для того, чтобы в колебательном контуре возникали меньшие переменные напряжения, которые вызывают электростатическое взаимодействие между рычагом и неподвижными обкладками того конденсатора, в систему которого они входят. Впрочем, это обстоятельство имеет значение только для удобства наблюдений. Если генерация не возникла, никаких электрических сил взаимодействия нет, эти силы появляются после того, как отсчет произведен (точнее говоря, хотя практически это ничего не меняет,

силы взаимодействия появляются одновременно с отсчетом, который производится при появлении генерации).

Можно еще отметить, что на рычаг действует разность электростатического притяжения верхней и нижней плоскостей конденсатора и при положении «минимум емкости», вблизи которого производятся наблюдения, эти силы почти уравниваются.

Таким образом, индикатором в узком смысле этого слова является стрелка миллиамперметра, которая при возникновении генерации резко меняет свое положение. Можно миллиамперметр заменить неоновой лампочкой, но в этом случае потребуется несколько большее анодное напряжение. В этой схеме можно применять любые лампы (например универсальные). Но следует предпочесть малогабаритные (наилучшие результаты мы получали с лампой типа «желудь»).

В зависимости от лампы вес генератора составляет от 50 до 300 г (без батарей и миллиамперметра). Потребление электроэнергии на один пункт определяется величиной около 0,01 ватт-часа. Эта простая, компактная и высокоточная установка испытана нами в лабораторных и полевых условиях и дала всюду прекрасные результаты.

Рассмотрим теперь общие соображения, связанные с микрометренным устройством гравиметра. В сущности говоря, устройства подобного рода можно было бы не вводить по примеру гравиметров Линдблада и Тиссена. Но в этом случае трудно (и вряд ли вообще возможно) располагать широким диапазоном для измерения силы тяжести без переустановки прибора, приводящей к изменению его нуль-пункта. С другой стороны, очень просто присоединить к гравиметру такой механизм, который компенсирует изменение веса (или момента) рычага и дает возможность наблюдать так называемым «нулевым» методом — методом приведения к избранным начальным условиям. Диапазон шкалы такого механизма практически неограничен, шкала легко может быть сделана линейной с высокой степенью точности и достаточно крупной для того, чтобы отсчитывать десятые и сотые доли миллигала.

Простейший вид такого микрометренного устройства в нашем случае — это груз, перемещающийся вдоль рычага на точной резьбе. Если вес груза достаточно мал и резьба имеет малый шаг, то перемещению груза на шаг винта, т.е. полному обороту, будет соответствовать изменение момента, эквивалентное изменению силы тяжести, например на 10–20 мгл. Этого вполне достаточно, чтобы уверенно получить 0,1 мгл, если резьба нарезана достаточно точно. При таком устройстве микрометра нельзя с его помощью непрерывно менять положение рычага в рабочем положении гравиметра. К этому случаю приурочен описанный выше способ измерения, когда измеряется разность емкостей в двух положениях рычага.

Другой столь же очевидный способ представлен на рис. 1. Против него имеется единственное возражение — опасение, что изменения в пружине микрометра, создающей дополнительный момент, могут сказаться на плавности «векового хода» гравиметра. Трудно сказать, насколько это возражение обосновано; мы пользовались этой системой, как и предыдущей, и в обоих случаях микрометр работал хорошо. Во всяком случае, второй способ устраняет необходимость иметь отсчетный конденсатор.

На этом мы можем закончить обсуждение вопросов, связанных с принципами, которые положены в основу устройства нашего гравиметра. В соответствии с этими принципами к началу 1939 г. в Центральном научно-исследовательском институте геодезии, аэросъемки и картографии был построен макет прибора, который был подвергнут основательным сначала лабораторным, а потом и полевым испытаниям. Мы предполагали, что к началу 1940 г. будет изготовлен первый экземпляр прибора, однако изготовление его задержалось до весны 1941 г., а потом, в связи с начавшейся войной, работы собственно инструментального характера прекратились. Здесь уместно заметить, что наша

работа протекала в несколько неблагоприятных условиях главным образом по следующим причинам.

1. Мастерская, в которой изготовлялся макет, отдельные узлы и опытный экземпляр прибора, не имела возможности уделить нам достаточно внимания, так как была загружена другими работами. Поэтому сроки выполнения заказов растягивались на многие месяцы и даже годы.

2. Мы не имели опыта при решении многих задач, главным образом технологических и отчасти конструктивных.

3. Мы не имели оборудованной лаборатории для проведения испытаний образчиков материала даже для надлежащего исследования прибора.

В силу этих причин, а особенно в связи с трехлетним перерывом, вызванным обстоятельствами военного времени, нам пока не удалось получить результатов желаемой точности, поскольку с прибором, изготовленным надлежащим образом, нам работать не пришлось. Находившийся в нашем распоряжении прибор, имеющий ряд существенных дефектов, испытывался в полевых условиях в 1940 г. и 1942 г. Мы получили с его помощью среднюю ошибку единичного измерения силы тяжести от 1 до 1,5 мгл (без термостата) при среднем расстоянии между пунктами порядка 7 км.

Изложению результатов упомянутых лабораторных и полевых испытаний будет посвящено продолжение этой статьи.

# ТРИДЦАТЬ ЛЕТ СОВЕТСКОЙ ГРАВИМЕТРИИ (1917–1947)\*

## I

Гравиметрия развилась в самостоятельную отрасль прикладного знания только в последние десятилетия. Правда, ее истоки содержатся в работах основоположников классической механики — Галилея и Ньютона, а многочисленные приложения теории потенциала к изучению земного поля тяготения были развиты в XVIII и XIX вв. Клеро, Стоксом, Пуанкаре и др., однако термин «гравиметрия» вошел в научный обиход только в XX в.

Гравиметрия, в современном виде, почти ровесница Великой Октябрьской социалистической революции, и ее успехи за тридцать лет существования советского государства довольно полно отражают основное содержание этой новой научной отрасли.

Гравиметрия тесно соприкасается с геодезией, которую интересует форма геоида, с геофизикой, рассматривающей физическое строение твердой оболочки Земли, и, наконец, с геологией, так как гравиметрия — один из методов исследования верхних слоев земной коры и поисков полезных ископаемых.

Изучение фигуры Земли и ее внешнего гравитационного поля, исследование строения недоступных недр, где находятся источники мощных и важных в жизни нашей планеты тектонических движений, формирующих земную поверхность, и использование гравиметрии для разведки полезных ископаемых, в том числе таких важных в народном хозяйстве, как нефть, газ, уголь, руды, — вот три основные задачи современной гравиметрии.

Развитие гравиметрии в Советском Союзе было подготовлено предшествующими работами русских ученых XVIII и XIX вв. Еще великий Ломоносов указал на важность и возможность точнейшего измерения периодических изменений силы тяжести. Идея, положенная гениальным ученым в основу гравиметра, который он построил, почти на два века предвосхитила принципы современных газовых гравиметров.

Русские путешественники и геодезисты в XIX и XX вв. многократно измеряли силу тяжести на территории нашей страны. Литке, Рейнеке и Паррот были первыми русскими гравиметристами. В конце XIX в. в России было определено около 50 пунктов поворотными маятниками Репсольда (А. Савич, Р. Ленц, А. Вилькицкий, П. Кульберг, И. Иверонов и др.). Русские военные геодезисты при помощи маятников Штернека, а затем Штюкрата провели многочисленные (и весьма точные по тому времени) определения силы тяжести на Кавказе, в Средней Азии и в других пунктах России (Павлов, Корзун, Залесский, Гедеонов, Шеткин). Немало гравиметрических пунктов определили русские астрономы (А.П. Ганский, А.Д. Дубяго, В.А. Беренов, А.Я. Орлов и др.). До революции было определено около 400 гравиметрических пунктов; это была первая гравиметрическая рекогносцировка территории нашего Отечества.

По сравнению с огромным объемом работ, проведенных в советское время, наследство это кажется нам теперь небольшим, но это было необходимое начало, которое позволило успешно провести новые определения силы тяжести в наше время. Физический смысл наблюдаемых значений силы тяжести и связь их со строением земной коры и отклоне-

---

\* Совместно с Федькинским В.В. Известия Академии наук СССР. Серия географическая и геофизическая. 1947. Т. XI. №5. С.395–408.



ниями отвеса также получили некоторое освещение в старых дореволюционных работах (И.И. Стебницкий, Ф.А. Слудский, Б. Швейцер и др.).

Астроном-большевик П.К. Штернберг накануне революции провел гравиметрические работы, имевшие своей целью выяснение строения земной коры в Московской области.

Великий русский ученый Д.И. Менделеев, будучи во главе Палаты мер и весов, уделял большое внимание определению ускорения силы тяжести как одной из основных физических постоянных. Работы, начатые Д.И. Менделеевым, продолжаются и в наши дни.

Однако несмотря на большое значение дореволюционных научных работ они не создали гравиметрии как самостоятельной отрасли прикладного знания. Это были разрозненные попытки, не объединенные ни идейно, ни организационно и еще не имевшие ясно выраженной цели.

## II

Едва утихла гражданская война, как в Советской России возобновились гравиметрические работы по измерению силы тяжести, проведенные А.А. Михайловым в Мурманской области (1920 г.). Затем, по почину В.И. Ленина, была создана особая комиссия по исследованию Курской магнитной аномалии, и в 1921 г. начались замечательные исследования, имевшие своей целью разведку столь необходимой для Советской Республики железной руды. Это и было началом настоящей советской гравиметрии, перед которой молодое рабоче-крестьянское государство поставило первую важную народнохозяйственную задачу.

При разведке Курской магнитной аномалии впервые советские геологи (А.Д. Архангельский, И.М. Губкин), а также физики и математики (П.П. Лазарев и О.Ю. Шмидт) встретились для совместной работы с советскими гравиметристами (А.А. Михайлов, П.М. Никифоров, Л.В. Сорокин).

В дальнейшем советская гравиметрия развивалась, имея своей целью решение подобных же больших задач народного хозяйства; в советском государстве она получила для этого чрезвычайно благоприятные условия.

Можно выделить, пусть несколько условно, три периода развития советской гравиметрии. Первый период (1920–1932 гг.) является временем освоения дореволюционного и заграничного опыта, разрозненной пробы сил в многочисленных новых научных и технических центрах Советской России. В этот период осваивается техника и разрабатывается теория измерения с маятниками и вариометрами, посылаются экспедиции в самые различные районы СССР, ставящие своей задачей главным образом применение гравиметрии для разведки полезных ископаемых. Многие организации в этот период выполняют оригинальные по своему замыслу и результатам работы и выявляют большое прикладное и научное значение гравиметрии. Работы в основном ведутся еще не специализированными научно-исследовательскими учреждениями и наряду с другими — астрономическими или геодезическими организациями.

Астрономический институт в Ленинграде (А.М. Гижицкий, П.И. Савкевич и др.) ведет работы в Урало-Эмбенском районе по разведке соляно-купольных нефтеносных структур, по изучению Урала, прилегающих частей Западно-Сибирской низменности и других районов; Астрономический институт им. Штернберга (А.А. Михайлов, Л.В. Сорокин, И.А. Казанский) также содействует внедрению гравиметрии для разведки на нефть в Азербайджане, на Северном Кавказе, проводит первые морские измерения силы тяжести (Л.В. Сорокин) и является одним из инициаторов общей маятниковой съемки СССР. Полтавская гравиметрическая обсерватория (А.Я. Орлов, З.Н. Аксентьева, Е.В. Лаврентьева, В.А. Елистратов, Д.В. Пясковский) осуществляет планомерную съемку Днепровско-Донецкой впадины, где вскоре было открыто месторождение нефти. Активно участвуют в об-

шей работе также Ташкентская астрономическая обсерватория (П.А. Савицкий, В.Б. Цукерваник) и университеты в Ленинграде (П.М. Горшков), Казани (И.А. Дюков, Н.А. Чудовичев) и некоторые другие организации.

Общегосударственного плана гравиметрических работ во время первого периода еще нет. Задачи геодезические и разведочные формулируются недостаточно четко. Аппаратура применяется по преимуществу импортная. Новые кадры готовятся от случая к случаю, когда появляются интересующиеся гравиметрией студенты на астрономических отделениях университетов. Конец первого периода совпадает с периодом воплощения в жизнь пятилетних планов развития народного хозяйства СССР, ставящих новые, более широкие задачи перед наукой и, в частности, перед гравиметрией.

Возникает необходимость организационной и технической перестройки гравиметрических исследований в нашей стране. Началом второго периода следует считать 1932 г. На геолого-геодезической конференции, созванной Госпланом СССР весной 1932 г., специалисты единодушно высказались за проведение общей гравиметрической съемки всей территории Советского Союза и рекомендовали размещать для этой цели примерно, по одному пункту на каждые 1000 кв. км площади. Мнение конференции было одобрено Правительством, и 20 сентября 1932 г. было издано специальное постановление Совета Труда и Оборона, возложившее выполнение этой работы на основное геофизическое учреждение страны, называемое теперь Главным управлением геодезии и картографии при Совете Министров. Это мероприятие совпало с централизацией геологического дела, которое к тому времени было организовано в общегосударственном масштабе.

Второй период развития советской гравиметрии (1932–1937 гг.) был периодом наибольшего размаха общей гравиметрической съемки с маятниками, а также бурного роста разведочных работ с гравитационным вариометром. В это время создаются ячейки геофизической службы нефтяной промышленности, где гравиметрический метод с каждым годом развивался со все большим успехом.

Общая стандартная маятниковая съемка и многочисленные, но крайне разрозненные работы с вариометром, характерные для второго периода, недолго удовлетворяли практическим запросам. Вскоре возникла потребность в значительной специализации гравиметрических работ, усовершенствовании и дифференциации методики исследования и комплексном использовании гравиметрии со смежными дисциплинами.

Именно эти черты, вместе с развитием геодезических и разведочных методов гравиметрии, определяют третий период, охватывающий последнее десятилетие, с 1938 по 1947 гг., включая четыре года Отечественной войны (1941–1945 гг.). В связи с военными событиями центр тяжести гравиметрических работ в военные годы был временно перенесен в восточные районы СССР. С 1943 г., следуя на запад за победоносной Советской Армией, гравиметрические работы развернулись вновь по всему Советскому Союзу, помогая восстановлению и развитию народного хозяйства, особенно в областях, подвергавшихся немецко-фашистской оккупации (Сев. Кавказ, Украина, Молдавия, Ленинградская область, Прибалтика). Тесная связь гравиметрических работ с планами и запросами народного хозяйства сделала эти работы жизнеспособными, выдержавшими трудности военных лет, несмотря на материальные потери и гибель некоторых советских гравиметристов на фронтах Отечественной войны. Развитие гравиметрии не прекращалось ни на один год, несмотря на военные события.

Общая маятниковая съемка продолжается и во время третьего периода; основное внимание уделяется определению более точных опорных пунктов второго класса и съемке необжитых районов Сибири, Дальнего Востока и Средней Азии. В это же время осознается необходимость в выработке новой, более современной программы общегосударственной гравиметрической съемки.

Для двух последних периодов характерно наличие серьезной государственной организации всех работ, подготовки специализированных кадров в высших учебных заведениях (Московский и Ленинградский университеты; Московский институт инженеров геодезии, аэро съемки и картографии; Московский геолого-разведочный институт; Военно-инженерная академия им. Куйбышева; Львовский политехнический институт; Московский нефтяной институт и др.), техникумах и на краткосрочных курсах по устанавливаемому уже профилю и, наконец, переход к отечественной гравиметрической аппаратуре. За последние 15 лет в СССР овладевают техникой производства маятниковых приборов — вариометров и, наконец, гравиметров.

В процессе большой работы в области гравиметрии складываются специализированные центры ее применения и развития. Общую государственную маятниковую съемку ведет Главное управление геодезии и картографии (С.Г. Судаков) и его Московское аэрогеодезическое предприятие. Крупные гравиметрические работы по разведке месторождений нефти ведет Союзный геофизический трест (П.А. Поспелов). Научно-исследовательские работы осуществляются в Институте геофизики (О.Ю. Шмидт), Центральном научно-исследовательском институте геодезии и картографии (А.Ш. Татевян), Научно-исследовательском институте прикладной геофизики ГСГТ (В.В. Федьнский), Всесоюзном институте разведочной геофизики в Ленинграде (А.А. Логачев) и др. Разведочные гравиметрические работы в масштабах, уступающих размаху съемки в нефтяной промышленности, но все же весьма значительные, ведут Главное геофизическое управление Министерства геологии (Н.М. Ступак), Геофизическая служба углеразведки (А.А. Девяткин) и некоторые другие организации.

В этом всестороннем развитии гравиметрии большую роль сыграла как общая съемка, так и охват разведкой больших площадей, в различных аспектах показавшие огромные преимущества плановой работы в крупных масштабах и создавшие большое число практических работников, способных осуществлять гравиметрические работы в нашей стране.

Научные работники, инженеры и техники гравиметрических экспедиций и разведочных партий, работая зачастую в крайне тяжелых условиях безводной пустыни, иногда вдалеке от населенных мест, демонстрировали образцы высокой производительности труда, сознательности и даже героизма и внесли ценный вклад в изучение природных ресурсов страны и в мировую науку (М.А. Бондарчук, Н.В. Жуков, С.П. Кобозева, В.А. Кочетков, В.Г. Маурер, В.А. Рязанов, В.П. Тарасов, А.И. Фролов, М.Е. Хейфец, П.Ф. Шокин, А.Ш. Шахвердов, Г.М. Шлефендорф, А.А. Шрейдер и др.). Особенно следует напомнить о беспримерных в истории науки определениях силы тяжести на дрейфующей станции «Северный полюс», выполненных Героем Советского Союза Е.К. Федоровым, и определениях, выполненных при дрейфе ледоколов «Садко» и «Седов» И.А. Жонголовичем и Героем Советского Союза Н.К. Буйницким. Необходимо вспомнить и такие работы, как съемка Арктики, пустынь Средней Азии, тайги и тундры Якутии, горных хребтов Тянь-Шаня, где не отдельные ученые, а десятки советских гравиметристов проявили подлинный исследовательский энтузиазм и трудовой героизм, отзываясь на задание родины напряжением всех своих сил.

В результате этих усилий в Советском Союзе создан крупнейший массив общей гравиметрической съемки, который во многих отношениях не имеет себе равного во всем мире. На площади свыше 15 млн. кв. км довольно равномерно размещено около 15000 гравиметрических пунктов, определенных единообразным методом, что составляет около 60 % общего числа подобных измерений на всем земном шаре.

Достаточно указать несколько случаев, имевших место в годы Отечественной войны. В песках Кара-Кума погиб от жажды в 1942 г. техник А.А. Комаров; С.В. Дубавин и А.А. Моцюкан в 1943–1944 гг. с тяжелым маятниковым прибором форсировали перевалы

Памира и Тянь-Шаня высотой до 5700 м, при этом погибли все лошади экспедиции, но работа была выполнена; партия И.Э. Зоммера разбилась на порогах Витима (Якутия), однако приборы из воды были подняты и работа продолжена; Н.В. Жуков в 1943 г. на лодках произвел съемку Олекмы (Якутия), но при этом погибла его жена, постоянная спутница в экспедициях, техник Зоя Иванова.

### III

Прежде всего сделаем краткий обзор тех исследований, которые обеспечили рациональную постановку общей гравиметрической съемки и последующую обработку результатов наблюдений.

Единообразие нашей гравиметрической съемки и ее надежная связь с принятой пока потсдамской системой была обеспечена фундаментальной работой Н.Н. Парийского, который на основе тщательного анализа гравиметрических связей между пунктами Потсдам, Пулково, Москва, Полтава и Казань получил наиболее вероятные значения силы тяжести для последних четырех пунктов, на которых базируются все гравиметрические определения в Советском Союзе.

Н.Н. Парийским и М.С. Зверевым был разработан достаточно простой метод оценки точности маятниковых пунктов, позволивший при составлении «Каталога гравиметрических пунктов СССР» разбить эти пункты на несколько разрядов в зависимости от их точности. Сходный метод разработан также Ю.Д. Буланже.

Много интересных исследований было посвящено усовершенствованию метода относительных изменений силы тяжести при помощи маятников. Многочисленные работы Ю.Д. Буланже посвящены вопросам высокоточных измерений силы тяжести при помощи маятников; они завершились фундаментальным определением пункта первого класса в Оби-Гарме. Им же в результате тщательных лабораторных работ установлено наличие значительного квадратичного коэффициента в температурной динамической поправке для инварных маятников и исследован ряд других тонких эффектов. А.И. Фролов успешно продолжил исследования В.А. Елистратова и доказал, что большие ошибки при измерении силы тяжести возникают вследствие неправильного учета температуры маятника, если внутри прибора наблюдается слоистость в распределении температуры.

Н.Н. Парийский дал приближенную теорию температурного динамического эффекта. Н.П. Грушинский, Н.Ф. Журавлев и В.Г. Маурер выполнили ее экспериментальную проверку. Теорией сокачания маятникового прибора занимался М.С. Молоденский. Экспериментальная проверка различных теорий выполнена Ю.Д. Буланже. Для исключения влияния сокачания В.В. Федынский применил метод фиктивного маятника. Над теорией минимальных маятников и маятниковых ножей работали Г.С. Раздымаха и Д.Н. Храмов. Работы по абсолютным определениям силы тяжести, очень важные не только для гравиметрии, но и для метрологии, были начаты еще в 1907 г. Д.И. Менделеевым и продолжены А.А. Ивановым, В.Д. Басковым, В.И. Старцевым и П.Н. Агалецким. Эти работы велись с длинными маятниками (25 и 30 м). В последнее время П.Н. Агалецкий разрабатывает метод свободно падающего тела, а П.В. Вьюшковым предложено использовать маятник с поступательно перемещающимся грузом.

Особо важное место в общей маятниковой съемке занимают измерения силы тяжести на морях, омывающих Советский Союз. Морские гравиметрические исследования были успешно начаты в 1930 г. Л.В. Сорокиным, остроумно применившим для этой цели обычный четырехмаятниковый прибор Штюкрата. В последующие годы гравиметрические исследования по методу Венинг-Мейнеса велись на морях Черном, Каспийском, Охотском и в Северном Ледовитом океане. Все эти работы происходили в различной обстановке: наблюдения велись на подводной лодке (Л.В. Сорокин); на Каспийском море

измерения силы тяжести были выполнены на обычных надводных судах в условиях относительно сильного поверхностного волнения (В.В. Федьинский); в Северном Ледовитом бассейне многочисленные определения силы тяжести были проведены на дрейфующих во льдах и плавающих судах («Садко», «Седов»), а также непосредственно во время дрейфа экспедиции Папанина («Северный полюс»).

Важность измерений силы тяжести на морях вполне очевидна. С одной стороны, они раскрывают природу участков земной коры, покрытых морем, с другой стороны, они дают необходимые и притом единственные данные о форме геоида на морях и океанах.

Для разведчиков нефти и других полезных ископаемых морские измерения в таких бассейнах, как Каспийское, Азовское моря, и в тихоокеанских водах, примыкающих к Сахалину и Камчатке, представляют непосредственный интерес.

Кроме измерений силы тяжести на морях необходимо упомянуть об интересной работе с маятниками и вариометрами, проведенной на льду оз. Байкал в 1936–1941 гг. (В. Арест, И. Зоммер, А. Иванов). Измерения силы тяжести на морях и озерах имеют большие перспективы в ближайшем будущем.

Успехи советской гравиметрии были бы невозможны без создания отечественных приборов. Огромный размах всех видов гравиметрических работ привел к развитию отечественного приборостроения, которого совершенно не было в дореволюционной России. Опираясь на достижения молодой советской науки и техники, удалось в сравнительно короткий срок создать советскую гравиметрическую аппаратуру. Начиная с 1932 г. существенно сократилось использование зарубежных приборов, которые ранее ввозились преимущественно из Германии, отчасти из Англии. Отдельные образцы лучшей современной зарубежной аппаратуры продолжали поступать все время, но это были единичные приборы, позволяющие познакомиться с уровнем иностранной техники. Массовую же работу необходимо было обеспечить отечественной аппаратурой высокого качества. Такая аппаратура и была создана многолетним упорным трудом ряда лиц и коллективов.

В 1925 г. в Физико-математическом институте Академии наук под руководством П.М. Никифорова было начато изготовление гравитационного вариометра. Впоследствии гораздо более совершенные приборы выпускались заводом «Геологоразведка» (М. Абельский, С.А. Поддубный). Изготовление нитей для вариометров было налажено в 1938 г. гравиметрической лабораторией Союзного геофизического треста (П.И. Лукавченко, Е.А. Мудрецова). В 1927 г. в Астрономическом институте в Ленинграде С.Е. Александров начал конструирование и изготовление маятниковых приборов. Немного позднее несколько типов легких маятниковых штативов весьма удачной конструкции по указаниям Л.В. Сорокина было изготовлено в Астрономическом институте им. Штернберга. Опыт этих работ помог заводу «Аэрогеоприбор» (С.М. Лизунов, И.А. Казанский) выпустить серию маятниковых приборов, с помощью которых была выполнена значительная часть гравиметрической съемки Советского Союза.

Много интересных вспомогательных приборов, предназначенных для повышения точности измерения периода колебания маятника и приема радиосигналов времени, было осуществлено Л.В. Сорокиным (резонансное реле, хроноскоп, оптический счетчик и т.д.). Им же была изготовлена аппаратура для измерения силы тяжести на море по способу Венинг-Мейнеса. Позднее под руководством С.Е. Александрова в Ленинградском астрономическом институте также были построены приборы, специально предназначенные для этой цели.

Первые гравиметрические приборы нового типа — упругие маятники Леже — были изготовлены в Центральном научно-исследовательском институте геодезии, аэросъемки и картографии (Г.И. Рудаковский). Приборы с успехом применяются при выполнении общей гравиметрической съемки.

Долгое время попытки построить советский гравиметр были безуспешными. Хотя важность этого дела и была осознана давно, однако первые попытки, предпринятые рядом институтов и организаций, оставались безуспешными. Только в 1938 г. Центральному научно-исследовательскому институту геодезии, аэросъемки и картографии удалось построить оригинальный прибор по идее, предложенной М.С. Молоденским (А.М. Лозинская, Н.П. Грушинский, П.И. Соловьев).

Первые приборы были скорее лабораторными макетами, чем настоящими гравиметрами, предназначенными для полевой съемки, но уже они обеспечивали измерения силы тяжести с точностью  $\pm 1-2$  мкг, т.е. с точностью лучших маятниковых измерений.

Во время Великой Отечественной войны в 1943 г. Научно-исследовательский институт прикладной геофизики ГСГТ начал работу по усовершенствованию и внедрению в производство гравиметров системы Молоденского с учетом опыта использования иностранных гравиметров. В результате упорной работы большого коллектива гравиметристов (А.М. Лозинская, Н.Б. Сажина и др.), конструкторов и приборостроителей удалось создать первый вполне пригодный для полевой съемки советский гравиметр.

В 1947 г. на одном из наших заводов заканчивается выпуск первой серии этих приборов в количестве нескольких десятков экземпляров. Таким образом, в настоящее время Советский Союз располагает собственным гравиметром оригинальной конструкции, выполненным из отечественных материалов.

В последнее время интересные работы по изготовлению упругих систем для гравиметров из плавленого кварца успешно ведутся во Всесоюзном институте разведочной геофизики (С.А. Поддубный, Н.Н. Самсонов, И.А. Серов). В Институте теоретической геофизики Академии наук изготавливаются два разных гравиметра стационарного типа для изучения периодических вариаций силы тяжести (С.Е. Александров).

Несмотря на значительные успехи в постройке советских гравиметров, следует все же признать, что перед отечественным приборостроением стоит ряд серьезных задач по улучшению качества гравиметров и по созданию вспомогательной аппаратуры, прежде всего надежных и простых приборов для определения высот гравиметрических пунктов. Работы в этом направлении ведутся в ряде научно-исследовательских институтов.

#### IV

Очень успешно развивались в Советском Союзе и теоретические, и практические работы в области применения гравиметрии к изучению фигуры Земли, непосредственно опирающиеся на результаты общей маятниковой съемки. Огромная протяженность нашей страны и наличие обширных и малоисследованных районов вынуждают искать новые, более эффективные пути ее изучения и в картографо-геодезическом отношении. Наличие же единого массива гравиметрической съемки, самого большого во всем мире, позволило впервые в широком масштабе не только с успехом экспериментально проверить теорию, но и широко использовать эту теорию при картографировании страны. Только в Советском Союзе геодезическая гравиметрия из стадии рассмотрения абстрактных возможностей метода перешла в практическую стадию и стала неотъемлемой частью топографо-геодезической службы страны.

Инициатором и активным поборником этого направления прежде всего был А.А. Михайлов. Его «Курс гравиметрии и теории фигуры Земли» и изданный позднее курс Н.И. Идельсона «Теория потенциала с применениями к теории фигуры Земли и геофизике» послужили основой для формирования советского направления в этой области науки. Большое значение для подготовки новых кадров гравиметристов будет иметь недавно вышедший оригинальный курс теории потенциала Л.Н. Сретенского. Ведущая роль в привлечении внимания гравиметристов к наиболее актуальным вопросам современной

геодезии принадлежала Ф.Н. Красовскому, выдвинувшему новые вопросы и своим авторитетом поддерживавшему начинающиеся исследования. Наконец, И.А. Казанский в созданной им группе первым приступил к широкой проверке теории на фактическом материале.

Из теоретических исследований наибольший интерес представляет направление, начатое работами Н.Д. Моисеева и немного позднее опубликованными работами Н.Р. Малкина и М.С. Молоденского. В классической теории, берущей свое начало от Стокса, подлежащая исследованию уровенная поверхность (геоид) предполагается охватывающей все притягивающие массы. Таким образом, все массы, расположенные выше уровня моря, считаются устраненными, для чего в измеренные значения силы тяжести должны вводиться редукции в соответствии с принятым заранее способом регуляризации Земли. Новый путь исследования характерен тем, что здесь рассматривается нерегуляризованная Земля, т.е. теория строится с учетом лежащих вне геоида масс, которые никуда не перемещаются, а потому геоид не искажается. Разные пути исследования у Н.В. Моисеева, Н.Р. Малкина и М.С. Молоденского не привели к одинаковому результату. Последовавшая затем дискуссия не выяснила взаимной связи между результатами новых исследований и отношения их к классической формуле Стокса, однако во всех исследованиях были обнаружены небольшие неточности. После этого М.С. Молоденскому удалось показать, что все полученные результаты можно привести к одному общему виду, вполне согласующемуся с классической формулой Стокса, дополненной членами, учитывающими искажение геоида при его регуляризации. Таким образом, исследование геоида нерегуляризованной Земли может быть выполнено путем промежуточной регуляризации. Этой точки зрения придерживался А.А. Михайлов еще до того, как была доказана эквивалентность разных путей построения теории. Для определения фигуры геоида путем промежуточной строгой конденсации масс (с учетом конденсации на всей Земле, чего ранее не делалось) им составлены таблицы, после опубликования которых способ конденсации можно считать прекрасно и детально разработанным. Ранее Н.П. Макаров рассмотрел вопрос о регуляризации путем инверсии, однако достаточно удобных таблиц им не дано, и этот способ практического применения не получил.

Иное направление в изучении фигуры Земли возникло в результате стремления использовать в качестве исходных только такие данные, которые получаются непосредственно из точных измерений без привлечения каких-либо гипотез (например, о постоянной плотности масс, расположенных выше уровня моря, или о характере распределения компенсирующих масс и т.д.). Поскольку приходится считать геологическое строение даже поверхностных слоев недостаточно известным, от определения фигуры геоида при такой постановке задачи приходится отказаться, ибо одно и то же внешнее по отношению к дневной поверхности гравитационное поле может соответствовать геоидам разной формы. Поэтому приходится изучать непосредственно форму дневной поверхности, конечно, достаточно сглаженной. М.С. Молоденский исследовал вопрос об условиях разрешимости полученного им интегрального уравнения, к которому в первом приближении приводится решение этой задачи. Н.Р. Малкин составил уравнение для более частного случая.

Указанные выше исследования велись в предположении, что форма Земли близка к сферической (еще Пицетти показал, что это допущение вносит в результат вычислений относительную ошибку порядка сжатия). Исходя из рассмотрения эллипсоидной поверхности относимости, Д.В. Загребин, Н.Р. Малкин, Н.К. Мигаль получили для случая регуляризованной Земли более точные формулы.

А.А. Михайлов впервые выполнил числовую проверку формулы Стокса, рассматривая примеры, в которых задается близкое к сферическому распределение масс. В этом случае «фигуру геоида» можно рассчитать как непосредственно, так и по формуле Стокса, пред-

варительно вычислив необходимые для этого аномалии. Совпадение тех и других результатов оказалось прекрасным, когда формула Стокса применялась к регуляризированным моделям. Подобные исследования продолжал Д.Н. Храмов и особенно полно В.Ф. Еремеев.

Много работ было посвящено вопросу о взаимной связи разных элементов земного гравитационного поля: возмущающего потенциала, аномалий силы тяжести, уклонения отвесной линии, вторых производных от потенциала (Н.И. Идельсон, А.А. Заморев, Н.Р. Малкин, Н.К. Мигаль, В.А. Магницкий, М.С. Молоденский). Ряд принципиальных вопросов, связанных с применением формулы Стокса, обсуждался в статьях А.А. Михайлова, Н.И. Идельсона, Н.Р. Малкина, Н.К. Мигалья, И.А. Жонголовича.

Разработка эффективных методов применения общей теории к решению многообразных практических задач более 15 лет ведется в Центральном научно-исследовательском институте геодезии, аэросъемки и картографии. Исследования начались с детальной разработки способов численного интегрирования для вычисления уклонений отвесной линии и высоты геоида (М.С. Зверев и Н.В. Киселев, позднее Б.В. Дубовской и В.Ф. Еремеев). Далее был разработан метод ступенчатости сети астрономо-геодезических уклонений отвеса при помощи гравиметрической карты (М.С. Молоденский), получивший широкое применение для замены триангуляции в некоторых районах астрономическими опорными пунктами, координаты которых исправляются гравиметрическими поправками (Б.В. Дубовской, В.Ф. Еремеев, М.С. Молоденский). Дальнейшая разработка этого метода привела к очень эффективному способу для исследования фигуры геоида на больших территориях (М.С. Молоденский), что позволило составить карту высот геоида от западных границ СССР до Красноярска и даже (менее уверенно) до восточных границ (М.С. Молоденский, Б.В. Дубовской, В.Ф. Еремеев, А.М. Лозинская). Большая принципиальная и практическая значимость подобных исследований много раз отмечалась Ф.Н. Красовским; некоторые из них были предприняты по его рекомендации. Результаты этих работ сделали возможным переход к более совершенному методу обработки триангуляции, предложенному Красовским, и способствовали успешному завершению многолетней работы по выводу элементов принятого теперь для геодезических работ СССР эллипсоида Красовского (А.А. Изотов).

Изучение фигуры геоида в горных районах связано с рядом осложнений; в связи с чем произведены специальные исследования способов интерполяции силы тяжести (М.С. Молоденский) и учета аномалии вертикального градиента силы тяжести (Б.Л. Очаповский). М.С. Молоденский предложил упрощенный способ регуляризации, проверка которого путем вычисления уклонений отвесной линии на Кавказе (Б.В. Дубовской, М.С. Зверев), в Крыму (О.Е. Шишелова, М.С. Молоденский) и позднее во многих других районах (В.Ф. Еремеев) подтвердила его эффективность и достаточную (при современной плотности сети гравиметрических пунктов) точность.

Очень важный вопрос о точности получения уклонения отвесной линии гравиметрическим методом рассматривался с двух точек зрения: Б.В. Дубовской исходил из сопоставления с астрономо-геодезическими уклонениями отвеса, используя очень обширный материал; М.С. Молоденский произвел расчеты, исходя из величин, характеризующих точность гравиметрической карты; кроме того, им рассмотрены ошибки, возникающие вследствие ограничения области интеграции из-за незавершенности гравиметрической съемки.

Уже второе десятилетие в Центральном научно-исследовательском институте гравиметрии, аэросъемки и картографии ведутся работы по подбору и систематизации гравиметрических определений по всему миру; в результате этой работы составлены: карточный каталог, содержащий почти 25 000 пунктов; гравиметрическая карта мира в масштабе 1:5 000 000; гравиметрическая карта СССР и Западной Европы в масштабе 1:1 000 000 и 1:10 000 000 (А.И. Байбородин, Б.К. Дубовской, В.Ф. Еремеев, М.С. Молоденский).



Следует еще упомянуть о работе В.А. Казинского, получившего уклонения отвесной линии для нескольких пунктов Московской гравитационной аномалии, используя наблюдения, произведенные при помощи вариометра.

## V

Огромный размах в Советском Союзе получили гравиметрические работы, имеющие целью поиски полезных ископаемых. В 1921 г. было определено всего 15 пунктов с вариометром, а затем число их быстро увеличивалось. По данным Л.В. Сорокина, до 1932 г. включительно было определено около 59000 пунктов вариометрами, и объем этих работ возрастал с каждым годом. Так, для геофизической службы нефтяной промышленности (ГСГТ), где было произведено наибольшее количество гравиметрических работ (от 40 до 80 % общего объема работ в разные годы), мы имеем следующее количество пунктов:

1925–1930 гг. —	11,6 тыс.
1931–1935 гг. —	47,7 тыс.
1936–1940 гг. —	76,0 тыс.
1941–1945 гг. —	81,9 тыс.

Из этой таблицы видно, что во время войны объем работ не только не уменьшился, но даже возрос, что было связано с необходимостью срочной разведки нефтяных месторождений в восточных районах Советского Союза.

Значительная часть пунктов общей гравиметрической съемки (2 100 из 15 000) была определена в 1929–1941 гг. партиями геофизической службы нефтяной промышленности со специальным назначением рекогносцировки нефтеносных районов. За шесть лет (1941–1946 гг.) для разведки нефтяных месторождений при помощи гравиметров было определено около 16 000 пунктов.

Многочисленный коллектив гравиметристов-разведчиков нефти выполнил ряд выдающихся по научной и практической ценности работ в Европейской части СССР (Л.П. Смирнов, А.И. Храмой, А.Д. Серова, С.М. Субботин, А.В. Петров, С.Л. Шершевская и др.); на Кавказе (Д.Л. Терешко, П.И. Лукавченко), в Средней Азии (Ю.Н. Годин, А.М. Ивонин, В. Арест, А.А. Шрейдер), в Сибири и Якутии (П.М. Бороздин, А.И. Гершанок), Казахстане (Э.Э. Фотиади, И. Котляревский) и т.д.

В системе Главсевморпути гравиметрическая разведка месторождений нефти велась в суровых условиях Арктики (Б.А. Кашигин, Н.Н. Самсонов и др.).

Развитие полевых работ в разведочных целях потребовало соответствующих теоретических исследований. Первые теоретические работы были посвящены интерпретации гравиметрических наблюдений на Курской магнитной аномалии и в Кривом Роге с целью определения глубины и характера залегания пластов кварцита в кристаллическом фундаменте (П.М. Никифоров, Л.В. Сорокин, О.Ю. Шмидт). Г.А. Гамбурцев, Л.Н. Сретенский, А.А. Заморев, Б.А. Андреев и А.П. Казанский усиленно разрабатывали обратную задачу гравиметрии и дали ряд решений, относящихся к определению массы, координат центра тяжести и особых точек потенциала возмущающей массы.

Важные результаты получены П.С. Новиковым, доказавшим однозначность решения обратной задачи для тел звездообразной формы известной постоянной плотности. А.Н. Тихонов установил устойчивость решения обратной задачи.

Большое практическое значение имеет решение обратной задачи путем подбора распределения масс при помощи палеток. Удобные палетки были составлены для этой цели Г.А. Гамбурцевым, Н.Н. Самсоновым, Н.Н. Черепановым, О.А. Шванком. Вместо палеток можно подбирать искомые формы и элементы залегания возмущающих масс квадратами, используя механические интеграторы, теория и устройство которых были даны

Г.А. Гамбурцевым и Е.Н. Люстихом. Важный частный случай решения обратной задачи в случае одной разделяющей поверхности разбирался О.А. Шванком, Н.Р. Малкиным и А.К. Маловичко. Методы выделения региональных полей в аномалиях силы тяжести, имеющие существенное значение для разведки, разработаны Г.А. Гамбурцевым, А.Н. Тихоновым, Б.Л. Шнеерсоном и В.А. Долицким.

Все эти теоретические исследования создали необходимую базу для качественной, а иногда и количественной математической интерпретации результатов разведочных работ.

Наиболее успешно гравиметрическая разведка применяется для решения структурных задач, связанных с поисками и разведкой месторождений нефти и газа. Это, прежде всего, тектоническое районирование, т.е. выделение крупных и однородных в структурном отношении областей, которое делается по преимуществу на основе маятниковых и гравиметрических наблюдений. Достижением в этой области является выделение ряда перспективных в нефте- или газоносном отношении районов и сосредоточение в них более детальных работ по геофизической и буровой разведке. Более детальная задача, поставленная нефтяной геологией перед гравиметрией, состоит в прослеживании основных структурных тектонических линий. В Поволжье, Средней Азии, Башкирском Приуралье гравиметрия выделила ряд таких тектонических линий, вдоль которых расположены потенциально нефтеносные структуры. В благоприятных случаях можно оконтуривать отдельные структуры и даже выяснять их главные особенности, например, определять границы соли в соляных куполах или положение свода антиклинали, или, наконец, найти элементы крупного сброса и т.д.

В зависимости от характера задач, решаемых гравиметрической съемкой, последние ведутся с различной детальностью и требуют различной точности измерений силы тяжести.

Установлено, что для успеха гравиметрической разведки месторождений нефти необходимы: во-первых, охват большой площади, позволяющей провести сравнительный анализ, выяснить общую структурную обстановку и правильно наметить наиболее перспективные направления и участки; во-вторых, охват гравиметрической съемкой областей с горным или холмистым рельефом, чтобы уверенно найти на равнине, покрытой немymi для геолога отложениями, продолжение тех структур и направлений, которые отчетливо видны во вскрытом виде в горах; в-третьих, большая точность измерений, так как аномалии силы тяжести, связанные со структурами в осадочной толще, обычно не превышают нескольких миллигал, которые необходимо выявить на сложном фоне сильных региональных аномалий. Все эти три условия вполне могут быть реализованы лишь при применении гравиметров, которым, таким образом, принадлежит большое будущее и которые уже сейчас в значительной мере вытесняют другие методы измерений (маятники, вариометры), ранее широко применявшиеся в разведочной гравиметрии.

Для того чтобы интерпретировать геологическое значение аномалий силы тяжести, разведчик в настоящее время использует результаты других методов геофизической разведки: данные магнитометрии, позволяющие легко отличать осадочные породы от изверженных или кристаллических; результаты электроразведки, с помощью которых проверяют реальность тектонических линий, выступающих в аномалиях силы тяжести. За последние годы для разведки нефтяных и газовых месторождений все чаще применяется чрезвычайно эффективный комплекс гравиметрии и сейсморазведки, причем гравиметрия играет роль рекогносцировочно-поискового метода, а при помощи сейсморазведки ведутся детальные исследования. Только в комплексе с другими методами геофизической разведки выясняются все возможности разведочной гравиметрии, занимающей ныне почетное место среди этих методов (около четверти всего объема геофизических разведочных работ по поиску нефти).

Для того чтобы правильно истолковать аномалии силы тяжести, нужно перевести их значения на геологический язык. Это может быть сделано путем совместной работы геологов и гравиметристов, с использованием результатов изучения плотности горных пород.

Исследования плотности горных пород, слагающих нефтеносные области, начатые впервые Центральным научно-исследовательским геолого-разведочным институтом (Б.А. Нестеров), широко развернулись в Союзном геофизическом тресте за последние десять лет. Они дали чрезвычайно интересные материалы по Кавказу (Б.С. Молдавский, А.Н. Корнев), Средней Азии (П.П. Чекунов, Терентьева), Поволжью (О.А. Шванк), Украине (И.А. Балабушевич, Л.С. Романов, С.М. Субботин), Башкирии (А.А. Глухов) и по другим районам, показав всю сложность тех закономерностей, которые связывают плотность с геологической характеристикой разрезов. Изучение плотностей наглядно показало причину тех трудностей, которые возникают при количественном анализе аномалий силы тяжести, при отрыве их от других физических и геологических данных, относящихся к изучаемому району.

В угольной промышленности гравиметрическая разведка также нашла широкое применение. В Донецком бассейне были проведены многочисленные успешные работы, позволившие выяснить условия залегания угленосных свит (Н.Н. Самсонов, А.И. Дюков, Л.В. Петров и др.). Чрезвычайно интересные работы по поиску угля велись также на восточных склонах Урала, в Челябинском бурогольном бассейне. При исследовании гравитационным методом Донецкого бассейна Н.Н. Самсоновым и позднее А.Т. Донабедовым была проделана большая (одна из первых по времени) работа по исследованию плотности пород, слагающих Донбасс.

Классическим примером разведки рудных месторождений гравитационным методом являются работы на Курской магнитной аномалии (Л.В. Сорокин) и в Кривом Роге (П.М. Никифоров). Геологическая обстановка рудных месторождений весьма сложна, и поэтому гравиметрия и здесь должна использоваться во всестороннем геологическом комплексе.

Гравиметрическая разведка применялась также к поискам изолированных рудных залежей — хромитов, сульфидов (Б.А. Андреев, А.А. Юньков). Вследствие чрезвычайно малого размера искоемых тел и небольшой глубины их залегания эти работы велись крайне детально (с расстояниями между точками в 25 и даже 10 м). Разведка изолированных рудных залежей наиболее успешно проводится вариометрами, так как аномалии чрезвычайно невелики, а градиенты вблизи возмущающих тел, лежащих на малой глубине, значительны. Однако слабая сторона вариометров — их способность отзываться на близкие влияния — очень усложняет получаемую картину. Следует ожидать, что с повышением точности гравиметров, применяемых в Советском Союзе для разведки, рудные залежи будут разведываться путем комбинированного применения высокоточных гравиметров и вариометров.

Из всего сказанного следует, что круг вопросов разведки, которые гравиметрия решала в течение последних тридцати лет, был чрезвычайно широк и что гравиметрическая разведка непрерывно продолжает развиваться и совершенствоваться, предъявляя в ходе своего развития все большие требования к аппаратуре и комплексной методике геолого-геофизического исследования.

Изучение распределения силы тяжести на обширных участках земной поверхности обнаруживает большое значение гравиметрии для решения общих вопросов структурной геологии. Впервые отчетливо это значение было разъяснено в ряде выдающихся работ А.Д. Архангельского. Связь гравиметрии и геология была предметом работ И.М. Губкина, Н.С. Шатского, В.А. Сельского, В.В. Федынского, А.А. Борисова, В.В. Белоусова,

Е.Н. Люстиха, Э.Э. Фотиади, В.А. Магницкого и др. Часть этих авторов составила подробные гравиметрические карты СССР и Европы.

Топографо-изостатические редукции широко использовались в Советском Союзе для анализа причин происхождения гравитационных аномалий в горах. Большие работы были проведены по Кавказу и Средней Азии (Е.А. Мудрецова, С.Евсеев), Крыму (С.С. Товчи-гречко), Прибайкалью (Н.И. Панфилова, В.В. Федьинский). В результате всех этих работ был получен богатый материал для южных окраин Советского Союза, опоясанных крупнейшими горными системами. Результаты этих исследований подтвердили, что приблизительное равновесие масс соблюдается на отдельных участках земной коры, что соответствует многим общеизвестным фактам. Однако сколько-нибудь точного закона распространения подземных масс в зависимости от внешнего рельефа в большинстве случаев не найдено. Вопреки изостазии движения в земной коре совершаются во многих районах. Характерен пример Средней Азии. Относительно более легкая Ферганская депрессия погружается, в то время как окаймляющие ее более тяжелые хребты поднимаются. То же самое происходит в районе Юго-Восточного Кавказа, в Прибайкалье и т.д.

Таким образом, советские исследования по вопросам изостазии дают чрезвычайно поучительный материал, позволяющий критически отнестись к крайним увлечениям этой гипотезой.

Строение наиболее глубоких недр земного шара может быть сколько-нибудь понято лишь при помощи двух методов исследования: гравиметрии и так называемой «большой» сейсмологии, изучающей распространение упругих волн землетрясений.

Основоположник русской сейсмологии Б. Голицын метко назвал землетрясения «фонарем, освещающим недра земли». Гравиметрические данные дополнительно освещают эти глубокие недра земного шара. От Карпат на западе через Крым и Кавказ, горные сооружения Туркмении, Средней Азии и до самых берегов Тихого океана тянется зона крупных гравитационных аномалий, совпадающая с зоной сильных землетрясений. Таким образом, наиболее сейсмичные зоны земного шара являются в то же время областями крупных гравитационных аномалий. Эта закономерность могла быть установлена благодаря охвату общей гравиметрической съемкой огромной территории и сопоставлению ее результатов с данными сейсмических наблюдений вдоль всей южной границы Советского Союза.

Тесная связь между гравиметрическими аномалиями и сейсмической активностью была использована Сейсмологическим институтом Академии наук при сейсмическом районировании (Г.П. Горшков) и помогла правильно установить границы зон, в которых должно применяться сейсмостойкое строительство.

Накануне 30-й годовщины Великой Октябрьской революции перед советской гравиметрией стоят многочисленные и важные задачи, которые выдвинуты перед ней пятилетним планом восстановления и развития народного хозяйства. Во всех отраслях применения перед гравиметрией открыты перспективы дальнейшего роста. Этот рост может быть достигнут только благодаря развитию научно-исследовательской работы, которая должна обеспечить надлежащие темпы и глубину многочисленных практических применений гравиметрии.

# ВНЕШНЕЕ ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ И ФИГУРА ФИЗИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ\*

Исследуются условия разрешимости и единственности решения интегрального уравнения, с помощью которого определяются внешнее гравитационное поле и фигура физической поверхности Земли.

## 1. Геоид Листинга и квазигеоид

Все геодезические измерения — нивелировки, триангуляция, астрономические и гравиметрические определения — в подавляющем большинстве выполняются на поверхности Земли. При последующей обработке они прежде всего редуцируются к значительно более гладкой поверхности геоида. Если эти измерения охватывают большую площадь, то необходимо второе редуцирование с геоида на удобную для математической обработки поверхность эллипсоида.

Принятая в настоящее время система редуцирования на геоид и через посредство геоида на эллипсоид очень несовершенна. В ней вполне возможны внутренние противоречия, так как разные взаимно связанные элементы земного гравитационного поля редуцируются на основе различных гипотез, иногда противоречивых. Происходящие вследствие этого несоответствия могут носить систематический характер; в горных районах или после переброски геодезических сетей через горные районы эти несоответствия могут заметно снизить точность результата.

По нашему мнению, редуциционная проблема в геодезии усложнена традиционным стремлением прежде всего приводить наблюдения к одной уровенной поверхности, именно к геоиду Листинга, совпадающему со средним уровнем океанов (еще сложнее приведение к геоиду Бриллюэна, охватывающему все массы Земли, но слишком отдаленному от большей части физической поверхности Земли). Надо признать, что редуцирование на геоид Листинга было рациональным приемом, но лишь до тех пор, пока к обработке геодезических наблюдений не привлекались результаты гравиметрических работ и триангуляция вычислялась методом «развертывания» геодезических линий с геоида на эллипсоид при сохранении их длин, так что повторного проектирования геодезических сетей с геоида на эллипсоид не производилось. Наличие же гравиметрической съемки на больших площадях и, в недалекой перспективе, на всем земном шаре позволило внести существенные коррективы в методы изучения фигуры Земли. Своевременно также пересмотреть вопрос о целесообразности сохранения геоида Листинга в качестве основной поверхности, на которую или через посредство которой редуцируются на эллипсоид измеренные геодезические элементы. При рассмотрении этого вопроса надо иметь в виду следующие основные обстоятельства:

1. Фигура геоида Листинга принципиально не определима, если не известны плотности и положение лежащих вне геоида масс. Поэтому изучение фигуры геоида Листинга является отчасти задачей геологической, поскольку она, строго говоря, не может быть разрешена до завершения геологического изучения всех континентов.

2. Даже при наличии исчерпывающих геологических данных достаточно точное редуцирование на геоид связано с решением сложной задачи теории потенциала, так как

\* Известия Академии наук СССР. Серия географическая и геофизическая. 1948. Т. XII. №3. С. 193–211.

редуцирование ведется на неизвестную поверхность геоида с весьма сложной и также неизвестной физической поверхности Земли, на которой крайвые значения определяются непосредственно наблюдениями.

3. При обработке триангуляции принятым теперь в СССР методом проектирования геоид является промежуточной редуционной поверхностью, которая должна исключаться при переходе на референц-эллипсоид (и, тем не менее, оставляет неприятные остаточные несоответствия за счет несогласованности методов редуцирования).

4. Геодезистам очень редко приходится проводить наблюдения достаточной точности на поверхности геоида; положение места наблюдения относительно геоида, строго говоря, не известно, так как даже ортометрические высоты только с известным приближением можно считать отсчитываемыми от поверхности геоида Листинга.

5. Нет нужды основную научную задачу высшей геодезии связывать с изучением геоида Листинга. Было бы осмотнительнее стремиться к изучению внешнего гравитационного поля и фигуры физической поверхности Земли.

Далее будут обоснованы еще следующие положения:

6. Форма физической поверхности Земли достаточно надежно может быть определена на основе только тех данных, которые получаются при точных измерениях (именно, из результатов нивелировок и измерений силы тяжести, отнесенных к точкам с известными приближенными астрономическими или геодезическими координатами). Любые геологические или геофизические данные при принципиальном решении этой задачи привлекать нет нужды (это обстоятельство не исключает их полезности, например при интерполяции силы тяжести и во многих других случаях).

7. Знание фигуры физической поверхности Земли в этих условиях дает необходимые данные для решения всех практических задач геодезии, в частности, возникающих при обработке высокоточных градусных измерений. Вопросы редуцирования на эллипсоид всех измеренных геодезических элементов решаются тогда принципиально безупречно.

Однако применение геоида имело одну несомненно положительную сторону: из единой, очень сложной физической поверхности Земли выделялась наиболее неправильная часть, представление о которой дают почти только одни нивелировки (высоты над уровнем моря), и оставалась вторая часть, несравненно более гладкая (высоты геоида над эллипсоидом). Такое разделение вполне естественно и рационально, а геоид обоим разделяемым величинам придает простой физический смысл. Но известно, что при практическом выполнении такого разделения возникает множество неясностей и непреодолимых трудностей. Далее будет показано, что подобное разделение формы поверхности Земли на неправильную «гипсометрическую» и гладкую «геоидальную» части можно последовательно провести и минуя геоид Листинга, путем рассмотрения некоторой поверхности, близкой к геоиду. Поверхность эта, в отличие от геоида, определяется на основе использования только материалов точных геодезических измерений, независимо от тех или иных представлений о строении Земли.

Как увидим далее, рассматриваемая поверхность характеризуется значениями возмущающего потенциала на поверхности Земли, и ее высоты получаются как частное от деления возмущающего потенциала в данной точке поверхности Земли на нормальное значение силы тяжести, соответствующим образом вычисленное для этой точки. Для определенности мы вынуждены ввести новый термин для наименования рассматриваемой поверхности; условимся называть ее квазигеоидом. В рассматриваемой задаче квазигеоид вводится для разделения менее гладкой и более гладкой частей в фигуре Земли, из которых первая определяется интегрированием по контуру, а вторая — путем решения краевой задачи теории потенциала.

На поверхности океанов квазигеоид совпадает с геоидом, а на материках он может приниматься, если это нужно, за приближенное выражение фигуры геоида.

Прежде всего мы должны рассмотреть, каким образом можно выделить неправильную часть в фигуре Земли, которую условимся называть высотой точки поверхности Земли относительно квазигеоида или, короче, вспомогательной высотой. Желательно вспомогательные высоты определить так, чтобы они были достаточно близки к ортометрическим высотам. Однако обычная ортометрическая поправка полностью не снимает зависимости результата нивелирования между двумя фиксированными точками от положения соединяющей их ходовой линии, что должно сказаться на несхождении высот при замыкании полигонов высокоточного нивелирования. Вспомогательные высоты легко можно определить таким образом, что они полностью будут свободны от этого недостатка.

## 2. Вспомогательные высоты

Рассмотрим нормальное потенциальное поле  $U$ , создаваемое «Землей сравнения», у которой все массы заключены внутри эллипсоидальной поверхности уровня, характеризующейся размерами полуосей  $a$ ,  $a$ ,  $b$ , угловой скоростью вращения  $\omega$ , значением силы тяжести на ее экваторе  $\gamma_e$ . Тогда потенциал в любой внешней точке пространства однозначно определится координатами этой точки. Такие координаты для наших целей удобно выбрать описанным ниже способом. Проведем через рассматриваемую точку координатную линию, которая будет линией пересечения проходящих через эту точку меридианной плоскости и гиперболоида, софокусного уровенному эллипсоиду. Тогда положение определяемой точки в пространстве может быть описано углом касательной к этой линии (проведенной в точке ее пересечения с основным уровенным эллипсоидом) с плоскостью экватора и углом меридианной плоскости, в которой лежит эта касательная, с плоскостью начального меридиана (широтой  $B^*$ , долготой  $L^*$ ), а также длиной  $H^*$  отрезка силовой линии от данной точки до уровенного эллипсоида.

Потенциал реальной Земли

$$W(B^*, L^*, H^*) = W_0 - \int g dH$$

мы можем считать известным (с точностью до аддитивной постоянной  $W_0$ ) во всех точках физической поверхности Земли и только на этой поверхности, тогда как во всех остальных точках пространства он не определим без знания фигуры Земли (и плотностей притягивающих масс, если бы речь шла о внутренних точках).

Таким образом, аналитическое выражение для возмущающего потенциала  $T = W - U$  мы также можем составить только для точек физической поверхности Земли. Но так как фигура Земли неизвестна, то истинные координаты этих точек  $B^*$ ,  $L^*$ ,  $H^*$  нам неизвестны. Однако приближенные значения координат  $B$ ,  $L$ ,  $H$  можем считать известными, причем величины

$$\left. \begin{aligned} \Delta B &= B^* - B, \\ \Delta L &= L^* - L, \\ \zeta &= H^* - H \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

малы настолько, что их вторыми степенями и произведениями можно смело пренебречь. На этом основании во всех дальнейших вычислениях удерживаются лишь члены первого порядка относительно  $\Delta B$ ,  $\Delta L$ ,  $\zeta$ . При этих допущениях разложим выражение нормаль-

ного потенциала в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} T(B^*, L^*, H^*) &= W(B^*, L^*, H^*) - U(B^*, H^*) = \\ &= W_0 - \int g dH - U(B, H) - \frac{\partial U(B, H)}{\partial H} \zeta - \frac{\partial U(B, H)}{\partial B} \Delta B. \end{aligned} \quad (2)$$

В этом выражении мы можем пренебречь членом

$$\frac{\partial U(B, H)}{\partial B} \Delta B \approx \frac{\partial^2 U(B, 0)}{\partial H \partial B} H \Delta B,$$

так как даже при  $\Delta B = 0',6$  этим будет внесена ошибка менее  $10^{-6} H$ . Целесообразно вспомогательную высоту  $H$  определить с помощью уравнения

$$- \int g dH = U(B, H) - U(B, 0) = U(B, H) - U_0, \quad (3)$$

которое имеет простой физический смысл. Оно означает, что при вычислении вспомогательной высоты  $H$  по заданной разности потенциалов мы полагаем потенциальное поле Земли нормальным. При условии (3) из (2) получаем соотношение, аналогичное известной формуле Брунса:

$$T(B^*, L^*, H^*) = \frac{\partial U(B, H)}{\partial H} \zeta + W_0 - U_0 = \gamma(B, H) \zeta + W_0 - U_0, \quad (4)$$

где  $\gamma(B, H)$  — нормальное значение ускорения силы тяжести в точке  $B, H$ , а постоянный член  $W_0 - U_0$  можно при желании свести к нулю соответствующим выбором поверхности относимости.

Уравнение (3), поскольку левую часть его можно считать известной, непосредственно может служить для вычисления  $H$ , если воспользоваться точным аналитическим выражением для нормального потенциала, вытекающим из теории Пицетти и Сомильяна. Однако для облегчения вычислений лучше прибегнуть к разложению в ряд, который сходится в данном случае очень быстро (кроме того, для коэффициентов этого ряда имеются достаточно подробные таблицы).

Таким образом, для определения  $H$  получим уравнение

$$- \int g dH = H \frac{\partial U}{\partial H} + \frac{1}{2} H^2 \frac{\partial^2 U}{\partial H^2} + \frac{1}{6} H^3 \frac{\partial^3 U}{\partial H^3} + \dots$$

Допуская даже при  $H = 10$  км относительную ошибку не более  $1 \cdot 10^{-6}$ , мы можем в членах второго и третьего порядка не считаться со сжатием и с указанной степенью точности принять

$$- \int g dH = - \frac{H}{1 - H/R} \gamma(B, 0), \quad (5)$$

где, как известно,

$$\gamma(B, 0) = \gamma_e (1 + \beta \sin^2 B - \beta_1 \sin^2 2B),$$

а  $R$  — средний радиус Земли.



Исходя из (5), нетрудно получить удобную для вычислений формулу поправки, переводящей разность наблюдаемых высот двух пунктов в разность их вспомогательных высот:

$$\delta(H_2 - H_1) = \frac{1}{\gamma_m} \left[ \sum \Delta g_0 \Delta H + \sum (\gamma - \gamma_m) \Delta H + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2)(H_1 + H_2) \right] - \frac{H_2^2 - H_1^2}{R} \quad (6)$$

или

$$\delta(H_2 - H_1) = \frac{1}{\gamma_m} \left[ \sum \Delta g_B \Delta H + \sum (\gamma - \gamma_m) \Delta H + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2)(H_1 + H_2) + \frac{K}{2}(H_2^2 - H_1^2) \right] - \frac{H_2^2 - H_1^2}{R}, \quad (7)$$

где  $\Delta g_0$  — аномалия в свободном воздухе, вычисленная относительно нормальной формулы  $\gamma(B, 0)$ ;  $\Delta g_B$  — аномалия Буге, вычисленная относительно той же нормальной формулы с коэффициентом зависимости аномалий от высоты  $K$ ;  $\gamma_2, \gamma_1$  и  $\gamma_m = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}$  — нормальное ускорение силы тяжести в конечной, начальной и промежуточных точках.

Аномалии «в свободном воздухе», или «аномалии Буге», служат в последних формулах только для интерполяции наблюдаемых в дискретных точках значений силы тяжести на все промежуточные точки, находящиеся на поверхности Земли. Поэтому различие формул (6) и (7) заключается только в различии способов интерполяции аномалий, так что при очень плотной сети гравиметрических пунктов они должны давать идентичные результаты. Однако в горных районах при заданной плотности пунктов формула (7) приведет к лучшим результатам.

Таким образом, мы показали, что вспомогательные высоты вполне определяются только результатами одних геодезических измерений и вычисляются проще, чем ортометрические высоты. Разность вспомогательных высот представляет собой вполне определенную функцию положения начальной и конечной точек нивелирования и не зависит от положения ходовой линии.

### 3. Интегральное уравнение, определяющее фигуру квазигеоида

Теперь следует показать, что фигура квазигеоида также определяется результатами одних геодезических измерений, без привлечения любых других данных. При нашем определении вспомогательных высот высоты квазигеоида определяются равенством

$$\zeta = \frac{T}{\gamma} + \frac{U_0 - W_0}{\gamma}. \quad (8)$$

Значение нормального потенциала  $U_0$  на эллипсоиде относимости можно считать известным, если заданы полуоси этого эллипсоида, угловая скорость вращения и нормальное значение силы тяжести в одной из его точек (например на экваторе).

Значение потенциала  $W_0$  реальной Земли в исходном пункте нивелировок (средний уровень океанов) неизвестно. Так как размерность потенциала выражается произведением ускорения на длину, то очевидно, что чисто гравиметрическим путем, без дополнительного привлечения результатов линейных измерений, определить  $W_0$  нельзя (по величине

центробежного ускорения размер поверхности относимости устанавливается весьма не точно). Поэтому Стокс отсчитывал возвышения геоида от поверхности относимости, имеющей равный объем с геоидом, а Пицетти — от поверхности относимости, для которой  $U_0 = W_0$ . В обоих случаях действительные размеры поверхности относимости остаются неизвестными и подлежат определению при помощи градусных измерений, в которых линейные измерения занимают одно из главных мест; от значений, вычисленных одним путем, легко перейти к значениям, полученным другим путем.

В наличии члена  $U_0 - W_0$  в формуле Брунса Н.Р. Малкин [1] усматривает неоднозначность решения проблемы Стокса. С этим можно согласиться, но только в изложенном выше толковании, связывая это обстоятельство с очевидным фактом невозможности определения размеров Земли из одних гравиметрических наблюдений. Вводимый Малкиным в формулу Стокса добавочный член, зависящий от  $U_0 - W_0$ , имеет простой смысл: он выражает изменение возвышений геоида при переходе от отсчетной поверхности, на которой потенциал равен  $U_0$ , к поверхности, на которой потенциал равен  $W_0$ . Возникающий отсюда добавочный эффект в уклонении отвесной линии выражает искривление силовой линии нормального поля на отрезке от одной отсчетной поверхности до другой.

Нормальное значение силы тяжести  $\gamma$ , при заданной ее величине на экваторе и в данном сжатии, практически не зависит от неточности большой полуоси нормального эллипсоида. Поэтому, не меняя  $\gamma$  и, следовательно, оставляя без изменения вспомогательные высоты, мы можем считать, что  $a$  имеет такое значение, при котором в (8)  $U_0 = W_0$ .

Этим мы выражаем факт практической невозможности определения  $W_0$  или  $a$  без привлечения результатов линейных измерений, а  $\zeta$  отсчитываем от эллипсоида с неизвестной большой полуосью, на поверхности которого нормальный потенциал равен  $W_0$ . Определив возвышения квазигеоида относительно этого эллипсоида, мы при желании можем перейти к другому эллипсоиду, например такому, объем которого равен объему квазигеоида.

В соответствии с этим замечанием мы пока будем принимать, что  $U_0 = W_0$ ; освободиться от этого допущения можно без особого труда, и это будет сделано в дальнейшем.

Тогда отыскание  $\zeta$  сводится к определению  $T$  на физической поверхности Земли, ибо теперь

$$\zeta = \frac{T}{\gamma}. \quad (9)$$

Из определения возмущающего потенциала следует

$$\frac{\partial T}{\partial \nu} = \frac{\partial W}{\partial \nu} - \frac{\partial U}{\partial \nu}.$$

Здесь производные взяты по направлению координатной линии  $\nu$ . С относительной ошибкой, порядка квадрата уклонения отвеса, значение  $-\frac{\partial W}{\partial \nu}$  на поверхности Земли совпадает с наблюдаемым значением силы тяжести  $g$  и, следовательно,

$$\left( \frac{\partial T}{\partial \nu} - \gamma \right)_{H+\zeta} = -g.$$

С той же степенью точности получаем

$$\left( \frac{\partial T}{\partial \nu} \right)_{H+\zeta} = \left( \frac{\partial T}{\partial \nu} \right)_H, \quad (\gamma)_{H+\zeta} = (\gamma)_H + \zeta \frac{\partial \gamma}{\partial \nu},$$

так что

$$-(g - \gamma) = \left( \frac{\partial T}{\partial \nu} - \frac{T}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} \right)_H. \quad (10)$$

Теперь нахождение  $T$  приводится к решению третьей краевой задачи теории потенциала: ищется функция  $T$ , которая на поверхности  $S$  удовлетворяет условию (10), вне  $S$  является гармонической функцией координат и на бесконечности регулярна. Поверхность  $S$  представляет собой в этой задаче первое приближение к фигуре Земли, получающееся путем отсчитывания только вспомогательных высот над эллипсоидом относимости.

Путь решения этой задачи в общих чертах таков [2]. Предполагая, что изучаемая точка находится на поверхности  $S$ , применяем к возмущающему потенциалу формулу Грина:

$$T = -\frac{1}{2\pi} \int_S \left( \frac{\partial T}{\partial \nu} \frac{1}{r} - T \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right) dS.$$

Производную  $\frac{\partial}{\partial n}$  по направлению нормали к  $S$  выражаем через производную по направлению координатной линии  $\frac{\partial}{\partial \nu}$  и производную по направлению  $\tau$  той касательной к  $S$ , которая лежит в одной плоскости с направлениями  $n$  и  $\nu$ :

$$\frac{\partial}{\partial n} = \sec \alpha \frac{\partial}{\partial \nu} - \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial}{\partial \tau},$$

где  $\alpha$  — угол между направлениями  $n$ ,  $\nu$ .

В ортогональных криволинейных координатах  $H$ ,  $B$ ,  $L$ , в которых дифференциал линейного элемента  $dl$  выражается квадратичной формой вида

$$dl^2 = h^2 dH^2 + h_1^2 dB^2 + h_2^2 dL^2,$$

а  $H$  связано с  $B$  и  $L$  уравнением поверхности  $S$ , производная по  $\tau$  определяется формулой

$$\operatorname{tg} \alpha \frac{\partial F}{\cos \alpha \partial \tau} = \frac{h}{h_1^2} \frac{\partial F}{\partial B} \cdot \frac{\partial H}{\partial B} + \frac{h}{h_2^2} \frac{\partial F}{\partial L} \cdot \frac{\partial H}{\partial L};$$

здесь функция  $F$  при дифференцировании по  $B$  и  $L$  рассматривается как функция только двух этих аргументов (поскольку зависимость  $H$  от  $B$  и  $L$  определяется формой поверхности  $S$ ).

Вводя для сокращения письма оператор  $\bar{D}(F, H)$ , символизирующий действия над  $F$  и  $H$ , выполняемые в правой части последнего равенства, получаем

$$\operatorname{tg} \alpha \frac{\partial F}{\partial \tau} = \bar{D}(F, H) \cos \alpha,$$

так что

$$\frac{\partial F}{\partial n} = \sec \alpha \frac{\partial F}{\partial \nu} - \bar{D}(F, H) \cos \alpha. \quad (11)$$

Если ввести еще второй дифференциальный оператор

$$\Delta_2 F = \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial B} \left( \frac{h h_2}{h_1} \frac{\partial F}{\partial B} \right) + \frac{\partial}{\partial L} \left( \frac{h h_1}{h_2} \frac{\partial F}{\partial L} \right) \right],$$

то можно доказать справедливость тождества

$$\int_S \bar{D}(F, H) \cos \alpha dS = - \int_S F \Delta_2 H \cos \alpha dS. \quad (12)$$

Теперь в формуле Грина можно выразить  $\frac{\partial T}{\partial \tau}$  через  $T$  и получить, таким образом, линейное интегральное уравнение для  $T$ .

Используя еще краевое условие (10), мы указанным путем привели рассматриваемую задачу к следующему интегральному уравнению типа уравнения Фредгольма 2-го рода с несимметричным особым ядром:

$$T = \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{g - \gamma}{r} \sec \alpha dS + \frac{1}{2\pi} \int_S T \left[ \frac{\partial/r}{\partial \nu} \sec \alpha - \frac{1}{r\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} \sec \alpha - \right. \\ \left. - 2\bar{D} \left( \frac{1}{r}, H \right) \cos \alpha - \frac{1}{r} \Delta_2 H \cos \alpha \right] dS. \quad (13)$$

#### 4. Условия существования решения

Исследование уравнения (13) осложняется тем, что ядро его обращается в бесконечность при  $r = 0$  и входящий в уравнение интеграл существует только в смысле главного значения Коши. Поэтому не всегда можно переставлять порядок двух последовательных интегрирований и, главным образом по этой причине, выводы общей теории к данному случаю следует применять с большой осторожностью. (Поскольку особая точка ядра представляет собой полюс второй кратности, нельзя утверждать, что после конечного числа итераций итерированное ядро будет ограниченным.)

С помощью (11) можно исследуемое уравнение написать в таком виде:

$$2\pi T - \int_S T \left[ \frac{\partial/r}{\partial \nu} - \frac{1}{r\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} \sec \alpha - \bar{D} \left( \frac{1}{r}, H \right) \cos \alpha - \right. \\ \left. - \frac{1}{r} \Delta_2 H \cos \alpha \right] dS = - \int_S \frac{g - \gamma}{r} \sec \alpha dS. \quad (14)$$

Составим однородное интегральное уравнение, союзное данному, т.е. такое, в котором интегрирование ведется по второму аргументу (по координатам изучаемой точки), первый же аргумент в отношении интегрирования по поверхности рассматривается как фиксированный параметр.

Напомним, что  $1/r$  в этом уравнении представляет собой функцию двух аргументов: функцию координат текущей точки, к которой относится элемент поверхности  $dS$ , и функцию положения изучаемой точки, координаты которой входят в  $1/r$  в качестве параметров. Что же касается величин  $\alpha$ ,  $H$ ,  $\gamma$ ,  $\frac{\partial \gamma}{\partial \nu}$ , а также операторов  $\frac{\partial}{\partial \nu}$  и  $\bar{D}$ , то все они, конечно, зависят только от координат элемента интеграции и не зависят от второго аргумента.

Принимая во внимание эти замечания и обозначая через  $\mu$  неизвестную функцию союзного уравнения, получаем

$$2\pi\mu = \int_S \mu \left( \frac{\partial/r}{\partial n_0} \right) dS - \left( \frac{1}{\gamma} \frac{\partial\gamma}{\partial\nu} \sec\alpha + \cos\alpha \Delta_2 H \right) \int_S \frac{\mu}{r} dS - \\ - \cos\alpha \int_S \mu \bar{D} \left( \frac{1}{r}, H \right) dS.$$

Под  $\frac{\partial}{\partial n_0}$  понимается теперь дифференцирование по направлению нормали к поверхности Земли в изучаемой точке, а оператор  $\bar{D}_0$  — символ дифференцирования по второму аргументу (являющемуся параметром в союзном уравнении) в постоянной плоскости, касающейся поверхности Земли в изучаемой точке.

Меняя порядок интегрирования и дифференцирования по параметрам в последнем уравнении, можно записать его иначе:

$$2\pi\mu = \frac{\partial}{\partial n_0} \int_S \frac{\mu}{r} dS - \left( \frac{1}{\gamma} \frac{\partial\gamma}{\partial\nu} \sec\alpha + \cos\alpha \Delta_2 H \right) \int_S \frac{\mu}{r} dS - \\ - \cos\alpha \bar{D} \left( \int_S \frac{\mu}{r} dS, H \right). \quad (15)$$

Для существования решения уравнения (14) необходимо, чтобы любое решение уравнения (15) было ортогонально к свободному члену уравнения (14), т.е. необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\int \mu \left[ \frac{g-\gamma}{r} \sec\alpha dS \right] dS = 0. \quad (16)$$

Действительно, умножая уравнение (14) на  $\mu$  и интегрируя по всей поверхности  $S$ , получаем

$$2\pi \int \left\{ T\mu - \mu \int T \left[ \frac{\partial/r}{\partial n} - \frac{1}{r\gamma} \frac{\partial\gamma}{\partial\nu} \sec\alpha - \frac{\cos\alpha}{r} \Delta_2 H - \bar{D} \left( \frac{1}{r}, H \right) \cos\alpha \right] dS \right\} dS = \\ = \int \mu \left[ \int \frac{g-\gamma}{r} \sec\alpha dS \right] dS.$$

Меняя в левой части порядок интегрирования (что возможно, так как один из интегралов обыкновенный), т.е. выполняя сначала интегрирование по второму аргументу (по координатам изучаемой точки), мы убеждаемся, что, если  $\mu$  удовлетворяет уравнению (15), левая часть обращается в нуль и, следовательно, должно иметь место условие (16). Отсюда вытекает необходимость этого условия.

Значительно сложнее обстоит дело с доказательством достаточности условия (16) для разрешимости уравнения (14).

В статье В.Д. Купрадзе «О некоторых сингулярных уравнениях математической физики» [3] изложены основные результаты исследований Жиро (G. Giraud). Жиро распространил на уравнения подобного типа следующие теоремы, известные из теории регулярных уравнений:

1. Всякому полюсу резольвенты соответствует конечное число линейно независимых решений однородного уравнения.
2. Союзное уравнение имеет то же число линейно независимых решений.
3. Необходимое и достаточное условие разрешимости неоднородного уравнения заключается в ортогональности правой части уравнения ко всем решениям однородного союзного уравнения.

Из последней теоремы следует как отмеченная выше необходимость выполнения условия (16) для существования решения уравнения (13), так и достаточность этого условия.

Меняя порядок интегрирования в условии (16), мы можем представить его в следующем виде:

$$\int \lambda(g - \gamma) \sec \alpha dS = 0, \quad (17)$$

где

$$\lambda = \int \frac{\mu}{r} dS. \quad (18)$$

Теперь уравнение (15) может быть записано так:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial n_0} - 2\pi\mu = \left( \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} \sec \alpha + \cos \alpha \Delta_2 H \right) \lambda - \cos \alpha \bar{D}(\lambda, H). \quad (19)$$

Постараемся исключить  $\mu$  из этого уравнения, так как в условии (17) входит только  $\lambda$ . Для этого примем во внимание, что  $\lambda$  можно толковать как значение на поверхности  $S$  потенциала простого слоя с плотностью  $\mu$ , как это следует из уравнения (18). Производные от потенциала простого слоя в направлении касательных к поверхности непрерывны. Нормальная производная от потенциала простого слоя на поверхности  $S$  терпит разрыв непрерывности, причем скачок непрерывности и значение  $\frac{\partial \lambda}{\partial n_0}$  на поверхности определяются известными формулами Пуассона и Племели:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial n_i} - \frac{\partial \lambda}{\partial n_e} = 4\pi\mu, \quad \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \lambda}{\partial n_i} + \frac{\partial \lambda}{\partial n_e} \right] = \frac{\partial \lambda}{\partial n_0}.$$

Следовательно, левая часть уравнения (19) равна  $\frac{\partial \lambda}{\partial n_e}$ .

Значения  $\lambda$  и  $\frac{\partial \lambda}{\partial n_e}$  на поверхности  $S$  связаны формулой Грина:

$$\lambda = -\frac{1}{2\pi} \int \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial n_e} - \lambda \frac{\partial}{\partial n} \right] dS.$$

Подставляя сюда вместо  $\frac{\partial \lambda}{\partial n_e}$  правую часть из (19), получаем линейное интегральное уравнение, которому должна удовлетворять функция  $\lambda$ :

$$\lambda = -\frac{1}{2\pi} \int \left\{ \lambda \left[ \frac{1}{r\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} \sec \alpha + \frac{\cos \alpha}{r} \Delta_2 H - \frac{\partial}{\partial n} \right] - \frac{\cos \alpha}{r} \bar{D}(\lambda, H) \right\} dS.$$

Это уравнение нетрудно значительно упростить. Действительно, в силу (12)

$$\int \frac{\lambda}{r} \cos \alpha \Delta_2 H dS = - \int \bar{D} \left( \frac{\lambda}{r}, H \right) \cos \alpha dS.$$

Из определения оператора  $\bar{D}$  следует

$$\bar{D}\left(\frac{\lambda}{r}, H\right) = \lambda \bar{D}\left(\frac{1}{r}, H\right) + \frac{1}{r} \bar{D}(\lambda, H).$$

Принимая это во внимание и подставляя вместо  $\frac{\partial/r}{\partial n}$  его значение, получаемое в соответствии с формулой (11), находим

$$2\pi\lambda = \int \lambda \left( \frac{\partial/r}{\partial\nu} - \frac{1}{r\gamma} \frac{\partial\gamma}{\partial\nu} \right) \sec\alpha dS \quad (20)$$

— линейное интегральное уравнение относительно  $\lambda$  (опять с особым ядром). Теперь функция  $\mu$  нас может больше не интересовать. Действительно, каждому решению уравнения (15) соответствует единственное значение функции  $\lambda$ , так как задание поверхностной плотности во всех точках поверхности однозначно определяет потенциал простого слоя. С другой стороны, отыскание  $\mu$  по заданным значениям  $\lambda$ , т.е. плотности поверхностного слоя по значению его потенциала на поверхности, сводится к решению внешней и внутренней задачи Дирихле, так как плотность слоя можно выразить через разность внешней и внутренней производной от потенциалов этого слоя. Как известно, эта задача всегда имеет решение и притом единственное при достаточно широких предположениях о свойствах поверхности  $S$ . Таким образом,  $\lambda$  и  $\mu$  связаны между собой однозначно и число линейно независимых решений уравнений (15) и (20) одинаково. Последнее обстоятельство имеет для нас существенное значение. Поскольку число линейно независимых решений однородного уравнения, соответствующего полному уравнению (14), и число таких же решений союзного к нему уравнения (15) одинаково, можно утверждать, что число линейно независимых решений уравнения (20) равно числу линейно независимых решений однородного уравнения, получающегося из (14) путем отбрасывания свободного члена. Так как при исследовании условий разрешимости уравнения (14) вопрос о решениях соответствующего однородного уравнения имеет существенное значение, то в дальнейшем мы выясним число таких линейно независимых решений уравнения (20). Для этого составим уравнение, союзное к (20). Поступая аналогично тому, как делали ранее, и обозначая неизвестную функцию союзного уравнения через  $\varphi$ , имеем

$$2\pi\varphi = \sec\alpha \frac{\partial}{\partial\nu} \int \frac{\varphi}{r} dS - \sec\alpha \frac{1}{\gamma} \frac{\partial\gamma}{\partial\nu} \int \frac{\varphi}{r} dS. \quad (21)$$

Рассматривая  $\varphi$  как поверхностную плотность простого слоя и вводя функцию  $\psi$  — потенциал этого слоя в точках поверхности  $S$ , получаем

$$2\pi\varphi = \sec\alpha \frac{\partial\psi}{\partial\nu} - \frac{\sec\alpha}{\gamma} \frac{\partial\gamma}{\partial\nu} \psi. \quad (22)$$

Примем во внимание, что скачок непрерывности производной от потенциала простого слоя по направлению, составляющему угол  $\alpha$  с нормалью, равен  $4\pi\varphi \cos\alpha$ . Поэтому

$$\frac{\partial\psi}{\partial\nu} - 2\pi\varphi \cos\alpha = \frac{\partial\psi}{\partial\nu_e}. \quad (23)$$

Поскольку  $\cos\alpha \neq 0$ , вместо (22) получаем

$$\frac{\partial\psi}{\partial\nu_e} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial\psi}{\partial\nu_e} \psi. \quad (24)$$

Это уравнение эквивалентно (21) в том смысле, что каждому решению одного из этих уравнений соответствует единственное решение другого уравнения, что (как и ранее) следует из единственности решения задачи Дирихле.

Из (24) находим

$$\frac{\partial \ln \psi}{\partial \nu_e} = \frac{\partial \ln \gamma}{\partial \nu_e} \quad (25)$$

или

$$\psi = \Phi(B^*, L^*)\gamma. \quad (26)$$

(Решение  $\psi = 0$  нас, понятно, не интересует.)

Таким образом, уравнение (21) имеет решения, отличные от нуля, если существуют гармонические функции, удовлетворяющие условию (25). Каждой такой гармонической функции соответствует отличное от нуля решение однородного уравнения, получающегося из (14). Достаточность этого условия легко усмотреть и непосредственно из исходного уравнения (14). Пусть гармоническая функция удовлетворяет уравнению (25), а следовательно, (24). Эта функция будет удовлетворять также уравнению (14), если соответствующим образом вычислены аномалии.

Действительно, поскольку

$$g - \gamma = -\frac{\partial T}{\partial \nu} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} T, \quad (10')$$

убеждаемся, что при  $T = \psi$  на основании (24)  $g - \gamma = 0$ , следовательно,  $\psi$  есть решение однородного уравнения, соответствующего левой части уравнения (14).

В общем случае, когда поверхность относимости и, следовательно,  $\gamma$  имеют сложную структуру, вопрос о существовании гармонического решения, отвечающего условию (25), нами до конца не исследован. Наибольшее практическое значение имеет простейший случай, когда производная  $\frac{\partial \gamma}{\partial \nu}$  принимается постоянной (коэффициент приведения в свободном воздухе). К исследованию этого случая мы и переходим. В чистом виде он соответствует предположению, что поверхность относимости есть сфера.

Итак, если поверхностью относимости является сфера, то  $\gamma = \frac{M}{\rho^2}$ , где  $\rho$  — расстояние от начала координат и  $M$  — постоянная, пропорциональная массе Земли. Так как потенциал  $\psi$  вне  $S$  должен удовлетворять уравнению Лапласа, то мы должны принять в этом случае

$$\Phi(B^*, L^*) = \frac{Y_1}{M} \quad \text{и} \quad \psi = \frac{Y_1}{\rho^2},$$

где  $Y_1$  — любая сферическая функция первого порядка. Значит, для  $\psi$  мы имеем три линейно независимых решения, так как произвольная сферическая функция первого порядка складывается из трех линейно независимых функций.

Итак, уравнение (24), а следовательно, и (21), (20), (15) и, наконец, однородное уравнение, получающееся из (14), имеют в этом случае каждое по три линейно независимых решения.

## 5. Физический смысл условий разрешимости

Таким образом, когда поверхность относимости есть сфера, существуют три линейно независимые функции  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , удовлетворяющие уравнению (20). Заданная на поверхности совокупность значений  $g - \gamma$  для разрешимости уравнения (14) должна удовлетворять трем условиям типа (17). Значения  $g - \gamma$  фактически получаются из наблюдений: из



измерений силы тяжести, из нивелирных и астрономических работ. Будут ли выполнены условия (17), если измерения произведены совершенно точно?

Чтобы ответить на этот вопрос, проведем дальнейшее исследование уравнения (20). Перейдем к сферической системе координат и вместо  $\lambda$  введем новую функцию  $\sigma$ , связанную с  $\lambda$  соотношением

$$\lambda \sec \alpha = \rho \sigma. \quad (27)$$

В результате будем иметь

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} = -\frac{2}{\rho}.$$

Теперь уравнение (20) можно привести к следующему виду:

$$2\pi\sigma \cos \alpha = \frac{1}{\rho_0} \int \sigma \left( \frac{2}{r} + \rho \frac{\partial /r}{\partial \rho} \right) dS. \quad (28)$$

Обозначив через  $\rho_0$  значение радиуса-вектора для изучаемой точки и через  $\psi$  угол между  $\rho_0$  и  $\rho$ , воспользуемся известным соотношением между этими величинами и  $\rho$ :

$$r^2 = \rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos \psi.$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial /r}{\partial \rho} &= \frac{\rho_0 \cos \psi - \rho}{r^3}, & \frac{\partial /r}{\partial \rho_0} &= \frac{\rho \cos \psi - \rho_0}{r^3}, \\ \frac{1}{r} + \rho \frac{\partial /r}{\partial \rho} &= -\rho_0 \frac{\partial /r}{\partial \rho_0}. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Теперь вместо (28) получаем

$$2\pi\sigma \cos \alpha = \frac{1}{\rho_0} \int \frac{\sigma}{r} dS - \frac{\partial}{\partial \rho} \int \frac{\sigma}{r} dS. \quad (30)$$

Член  $2\pi\sigma \cos \alpha$ , стоящий в левой части, равен половине скачка непрерывности производной потенциала простого слоя плотности  $\sigma$  по направлению, составляющему угол  $\alpha$  с нормалью, т.е. по направлению  $\rho_0$ . Поэтому, вводя вспомогательную функцию  $U_i$  — потенциал простого слоя плотности  $\sigma$  на точку, лежащую внутри  $S$ , уравнению (30) придаем такой вид:

$$U_i = \int \frac{\sigma}{r} dS, \quad (31)$$

где

$$\frac{\partial U_i}{\partial \rho} = \frac{U_i}{\rho}.$$

В левой части второго равенства берется внутренняя производная. Функция

$$U_i = Y_1 \rho \quad (32)$$

внутри поверхности удовлетворяет решению Лапласа и уравнению (31). Игрет Лапласа  $Y_1$  зависит от трех линейно независимых функций. Каждой из этих трех функций соответствует единственное и вполне определенное значение плотности  $\sigma$ .

Действительно,

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\partial U_i}{\partial n} - \frac{\partial U_e}{\partial n} \right), \quad (33)$$

где  $U_e$  — решение внешней задачи Дирихле, соответствующее граничным значениям  $U_i$ . Так как заданной совокупности значений  $U_i$  на поверхности  $S$  соответствует единственная совокупность значений  $\frac{\partial U_e}{\partial n}$ , то каждому значению  $U_i$  будет соответствовать единственное и вполне определенное значение  $\sigma$ .

К такому же результату можно прийти, если исследовать уравнение, получающееся из (30) и (32):

$$2\pi\sigma \cos \alpha = Y_1 - \frac{\partial}{\partial \rho} \int \frac{\sigma}{r} dS. \quad (34)$$

В результате перехода от  $\lambda$  к  $\sigma$  с помощью (27) условие разрешимости представим в следующем виде:

$$\int \sigma(g - \gamma)\rho dS = 0, \quad (35)$$

или, исключая  $\sigma$  с помощью (33), в виде

$$\int \left( \frac{\partial U_i}{\partial n} - \frac{\partial U_e}{\partial n} \right) (g - \gamma)\rho dS = 0. \quad (36)$$

Рассмотрим функцию

$$V = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 T). \quad (37)$$

На поверхности  $S$  в силу (10)

$$V = -(g - \gamma)\rho; \quad (38)$$

вне поверхности  $S$

$$\Delta V = 0. \quad (39)$$

Если предположить существование трех производных у функции  $T$ , т.е. предположить, что объемная плотность масс, развивающих потенциал  $T$ , представляет собой дифференцируемую непрерывную функцию координат, то можно показать, что для объема, ограниченного поверхностью  $S$ ,

$$\int \rho Y_1 \Delta V d\tau = 0. \quad (40)$$

Действительно, используя равенство

$$\rho \Delta \left( \rho \frac{\partial T}{\partial \rho} \right) = \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 \Delta T),$$

легко проверяемое с помощью известного выражения для оператора Лапласа в сферических координатах, получаем

$$\Delta V = 4\Delta T + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \Delta T. \tag{41}$$

Подставляя (41) в (40) и принимая во внимание, что

$$d\tau = \rho^2 d\rho d\omega,$$

где  $d\omega$  — элемент телесного угла, находим

$$\int \rho Y_1 \Delta V d\tau = 4 \iint \rho^3 Y_1 \Delta T d\rho d\omega + \iiint \rho^4 Y_1 \frac{\partial}{\partial \rho} \Delta T d\rho d\omega.$$

Второй интеграл справа преобразуем интегрированием по частям:

$$\int_0^\rho \rho^4 Y_1 \frac{\partial}{\partial \rho} \Delta T d\rho = |\rho^4 Y_1 \Delta T|_0^\rho - 4 \int_0^\rho \rho^3 Y_1 \Delta T d\rho,$$

в результате получаем

$$\int \rho Y_1 \Delta V d\tau = \int_S \rho^4 Y_1 \Delta T d\omega.$$

На основании предположения о непрерывности  $\Delta T$  мы должны принять, что  $\Delta T = 0$  и на поверхности  $S$ , а потому правая часть последнего равенства оказывается равной нулю; этим доказывается справедливость утверждения, выраженного формулой (40).

Вернемся к исследованию условия (36), записав его с помощью (38) в следующем виде:

$$\int \left( \frac{\partial U_i}{\partial n} - \frac{\partial U_e}{\partial n} \right) V dS = 0.$$

Гармонические вне  $S$  функции  $V$  и  $U_e$  регулярны на бесконечности, поэтому

$$\int \left( V \frac{\partial U_e}{\partial n} - U_e \frac{\partial V}{\partial n} \right) dS = 0.$$

Складывая два последних равенства и принимая во внимание, что  $U_i = U_e$  на поверхности  $S$ , мы исключаем неизвестную функцию  $\frac{\partial U_e}{\partial n}$  и получаем

$$\int \left( V \frac{\partial U_i}{\partial n} - U_i \frac{\partial V}{\partial n} \right) dS = 0.$$

Преобразуя с помощью формулы Грина этот интеграл в объемный и принимая во внимание гармоничность функции  $U_i$  внутри  $S$ , приводим исследуемое условие к виду

$$\int U_i \Delta V d\tau = 0. \tag{42}$$

Но мы показали, что  $U_i = Y_1 \rho$ , а поэтому условие (42) совпадает с доказанным равенством (40). Поскольку в  $Y_1$  входят три произвольных параметра, постольку все три условия накладываемые на аномалии  $g - \gamma$ , как видим, выполняются сами собой.

Итак, если краевые значения  $g - \gamma$  заданы не произвольно, а имеют определенный физический смысл (т.е. получены из наблюдений и, следовательно, соответствуют какому-то распределению масс), то условия существования решения рассматриваемой нами задачи должны выполняться; эти условия могут контролировать правильность тех наблюдений, из которых получены краевые значения.

Возможно, что от предположения о дифференцируемости объемной плотности путем усложнения доказательства можно освободиться. Однако в данной физической задаче это предположение кажется нам вполне допустимым. Действительно, число поверхностей разрыва плотности внутри Земли конечно, и, следовательно, в достаточно тонком слое вблизи этих поверхностей можно перераспределить массы таким образом, что плотность в любой точке будет дифференцируема. Вместе с тем изменение внешнего потенциального поля в результате перераспределения масс будет меньше любой наперед заданной величины, если толщина слоя, в котором перераспределяются массы, выбрана достаточно малой.

### 6. Условия единственности решения

Возвращаясь к уравнению (14), мы можем теперь утверждать, что при правильно полученных краевых значениях это уравнение всегда разрешимо, но общее решение его включает в себя три произвольные постоянные в соответствии с тем, что решение однородного уравнения складывается из трех линейно независимых функций. Нетрудно получить это общее решение.

Пусть  $T_1$  — частное решение уравнения (14), а  $T_2$  — общее решение соответствующего ему однородного уравнения. Тогда общее решение (14) будет равно сумме:

$$T = T_1 + T_2.$$

Причина появления второго члена очевидна. Действительно, сместим сферу относимости в каком-либо направлении; очевидно, для этого смещения мы располагаем тремя степенями свободы. Тогда потенциал, развиваемый Землей сравнения в любой точке пространства на  $S$  и вне  $S$ , изменится на величину  $\frac{Y_1}{\rho^2}$ , где  $Y_1$  — игрек Лапласа первого порядка, зависящий от трех постоянных: трех координат центра смещенной поверхности относимости относительно начального положения ее центра. Новому положению поверхности относимости будет соответствовать новое значение возмущающего потенциала и новое значение  $\frac{\partial T}{\partial \rho}$ .

Однако сумма

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} + \frac{2T}{\rho} = -(g - \gamma)$$

при этом не изменится. Следовательно, для нового положения поверхности относимости

$$2\pi \left( T_1 + \frac{Y_1}{\rho^2} \right) = \int \frac{g - \gamma}{r} \sec \alpha \, dS + \int \left( T_1 + \frac{Y_1}{\rho^2} \right) \left( \frac{\partial/r}{\partial n} + \dots \right) dS.$$

Вычитая отсюда уравнение (14), которому по условию удовлетворяет функция  $T_1$ , убеждаемся, что соответствующему однородному уравнению удовлетворяет функция  $\frac{Y_1}{\rho^2}$ . Таким образом,

$$T_2 = \frac{Y_1}{\rho^2}$$

и общее решение уравнения (14) таково:

$$T = T_1 + \frac{Y_1}{\rho^2}. \quad (43)$$

Правильность полученного результата нетрудно проверить непосредственным вычислением; мы этого делать не будем.

Из последнего уравнения, дающего общее решение исходного уравнения (14), освобождаясь от условия  $U_0 = W_0$ , получаем общее выражение для  $\zeta$ :

$$\zeta = \frac{T_1}{\gamma} + Z_1 + \frac{U_0 - W_0}{\gamma}, \quad (44)$$

где  $T_1$  — частное решение уравнения (14),  $Z_1$  — произвольная сферическая функция первого порядка.

Физический смысл полученной многозначности решения ясен: как и в обычной задаче, здесь остаются неопределенными размер и положение поверхности относимости. Следовательно, и в этом случае можно ввести условие равенства объемов квазигеоида и поверхности относимости (такое условие геометрически более ясно, чем равенство потенциалов  $U_0$  и  $W_0$  или равенство масс). Кроме того, можно потребовать совмещения центров масс или, опять в интересах геометрической наглядности, можно совместить центры объемов квазигеоида и поверхности относимости. Эти геометрические условия нетрудно выразить в аналитической форме.

Условие равенства объемов

$$\int \zeta d\sigma = \int \frac{T_0 + (U_0 - W_0)}{\gamma} d\sigma = 0$$

позволяет определить  $U_0 = W_0$  (член с  $Z_1$  выпадает). Здесь  $d\sigma$  — элемент поверхности сферы.

Условие совмещения центров объемов

$$\int \zeta \cos \psi d\sigma = \int \left( \frac{T_1}{\gamma} + Z_1 \right) \cos \psi d\sigma + (U_0 - W_0) \int \frac{\cos \psi}{\gamma} d\sigma$$

(где  $\psi$  отсчитывается от произвольной точки на сфере) позволяет определить все три коэффициента, входящих в  $Z_1$ . Величина второго интеграла в правой части равенства ничтожна, вследствие чего положение центра объема определяется почти независимо от  $U_0 = W_0$ .

Однако при совмещении центров объемов не совпадут оси вращения реальной Земли и Земли сравнения и в возмущающий потенциал войдет потенциал центробежной силы (хотя и в малой степени). Поэтому лучше ввести требование о совпадении центра инерции Земли с центром сферы относимости.

Это условие выражается следующим образом:

$$\int \Delta T \rho Z_1 d\tau = 0,$$

где  $Z_1$  — любая сферическая функция первого порядка. С помощью формулы Грина объемный интеграл в левой части можно преобразовать в интеграл по поверхности:

$$\int \left[ \frac{\partial T}{\partial n} \rho Z_1 - T \frac{\partial}{\partial n} (\rho Z_1) \right] dS = 0.$$

Подставляя сюда  $T$  из (43), исключая  $\frac{\partial T}{\partial n}$ , как это делали ранее, и пользуясь тем, что три коэффициента, входящих в  $Z_1$ , произвольны, получаем три уравнения для определения трех произвольных постоянных, входящих в (43).

### 7. Представление через плотность поверхностного слоя

Вернемся к уравнению (21) и наряду с ним рассмотрим неоднородное уравнение

$$2\pi\varphi \cos \alpha - \frac{\partial}{\partial \nu} \int \frac{\varphi}{r} dS + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} \int \frac{\varphi}{r} dS = g - \gamma. \quad (45)$$

Очевидно, что союзным с ним будет уравнение (20); условие же разрешимости (формула (17)) — общее для этого и для исходного уравнения (13).

Следовательно, все выводы, полученные при исследовании уравнения (13), полностью применимы также к уравнению (45).

Введем вспомогательную функцию  $T'$  — потенциала простого слоя, распределенного на поверхности  $S$  и имеющего плотность  $\varphi$ :

$$T' = \int \frac{\varphi}{r} dS. \quad (46)$$

Значение на поверхности  $S$  производной от  $T'$  по направлению  $m$ , составляющему угол  $(n, m)$  с направлением  $n$  внешней нормали к  $S$ , выражается известной формулой:

$$\frac{\partial T'}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m} \int \frac{\varphi}{r} dS - 2\pi\varphi \cos(n, m). \quad (47)$$

С помощью (46) и (47) уравнение (45) записывается следующим образом:

$$\frac{\partial T'}{\partial \nu_e} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} T' = -(g - \gamma). \quad (48)$$

Вычитая (48) из (10) и повторяя рассуждения, изложенные в конце раздела 4, мы убеждаемся, что в подробно исследованном нами случае сферической поверхности относимости

$$T - T' = \frac{Y_1}{\rho^2}.$$

Сравнивая этот результат с (43), приходим к выводу, что любое решение уравнения (45) после подстановки в (46) приводит к частному решению уравнения (13). Таким образом, два уравнения (45) и (46) эквивалентны уравнению (13).

Для сферической поверхности относимости с помощью (29) получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} &= -\frac{2}{\rho}, \\ \frac{\partial / r}{\partial \rho_0} + \frac{1}{2\rho_0 r} &= \frac{\rho^2 - \rho_0^2}{2\rho_0 r^3}. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Теперь уравнение (45) значительно упрощается:

$$2\pi\varphi \cos \alpha = (g - \gamma) + \frac{3}{2\rho_0} \int \frac{\varphi}{r} dS + \frac{1}{2\rho_0} \int \frac{\rho^2 - \rho_0^2}{r^3} \varphi dS. \quad (50)$$

После того как из решения этого уравнения будет найдено  $\varphi$ , можно из (46) получить высоту квазигеоида, а (47) позволит определить составляющие уклонения отвесной линии на физической поверхности Земли.

Определив высоты квазигеоида и уклонения отвесной линии, мы сможем от поверхности  $S$ , представляющей фигуру Земли в первом приближении, перейти к новой поверхности  $S'$ , получающейся путем добавления высот квазигеоида к вспомогательным высотам, а также путем исправления астрономических координат полученными величинами уклонения отвесной линии. Новая поверхность  $S'$  будет характеризовать фигуру Земли во втором приближении; если бы это было нужно, можно получить следующие приближения.

В заключение выражаю свою благодарность Н.Н. Парийскому за ценные указания.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Малкин Н.Р.* // Доклады АН СССР. 1942. Т. XXXV. №6.
2. *Молоденский М.С.* // Труды ЦНИИГАиК. 1935. Вып. 42 (гл. III).
3. *Купрадзе В.Д.* // Успехи математических наук. 1936. Вып. II.

## ПРИБЛИЖЕННЫЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ, ОПРЕДЕЛЯЮЩЕГО ФИГУРУ КВАЗИГЕОИДА \*

В предыдущих работах мною был рассмотрен вопрос об определении формы физической поверхности Земли без изучения фигуры геоида. Расстояния от точек физической поверхности Земли до поверхности относимости оказалось удобным рассматривать как сумму двух величин, из которых одна была названа «вспомогательной высотой», а другая — высотой «квазигеоида». Было выяснено, что вспомогательные высоты определяются чрезвычайно просто через приращения потенциала силы тяжести от исходного пункта нивелировок до рассматриваемой точки земной поверхности. Определение же формы квазигеоида требует решения граничной задачи теории потенциала и приводит к линейному интегральному уравнению типа уравнения Фредгольма 2-го рода с особым несимметричным ядром. Исследование этого уравнения позволило утверждать, что оно разрешимо, если граничные значения удовлетворяют трем условиям (приводящимся в классическом случае регуляризированной сферической Земли к известным условиям отсутствия в аномалии сферической функции первого порядка).

Затем было показано, что если граничные значения заданы не произвольно, а получены, например, из наблюдений (так что соответствуют какому-то определенному распределению масс внутри граничной поверхности), то указанные три условия должны выполняться. Тогда общее решение интересующего нас интегрального уравнения включает три произвольные постоянные, для определения которых нужно ввести дополнительные условия (например, можно потребовать, чтобы центры инерции Земли и поверхности относимости совпадали).

Это исследование доказало принципиальную возможность определения гравиметрическим методом формы физической поверхности Земли с использованием только величин, которые при существующих технических средствах измеряются непосредственно и с достаточной точностью. Привлекать какие-либо гипотезы при решении этой задачи не приходится, ибо гравитационное поле внутри притягивающих масс здесь не рассматривается.

После рассмотрения принципиальной стороны проблемы можно перейти к практическим вопросам, связанным с выбором наиболее рациональных способов численного решения интегрального уравнения. Рассмотрению этих вопросов посвящена настоящая статья.

Напомним основные формулы. Высота квазигеоида  $\zeta$  выражается через возмущающий потенциал  $T$  весьма просто:

$$\zeta = \frac{T}{\gamma} + z_1 + \frac{\Delta W}{\gamma}. \quad (1)$$

Здесь  $\gamma$  — нормальное значение силы тяжести, вычисленное для точки, лежащей на высоте  $H$  над поверхностью относимости ( $H$  — вспомогательная высота);  $z_1$  — произвольная сферическая функция 1-го порядка;  $\Delta W$  — некоторая постоянная.

Возмущающий потенциал проще всего определяется с помощью вспомогательной функции  $\varphi$ , которая имеет физический смысл плотности простого слоя, распределен-

\* Труды ЦНИИГАиК. 1949. Вып. 68. С.5–11.



ного на поверхности «Земли первого приближения»  $S^1$ :

$$T = \int_S \frac{\varphi}{r} dS, \quad (2)$$

где  $r$ , как обычно,— расстояние между двумя точками поверхности  $S$ .

Нахождение  $\varphi$  требует решения уравнения:

$$2\pi\varphi \cos \alpha = (g - \gamma) + \frac{3}{2\rho_0} \int_S \frac{\varphi}{r} dS + \frac{1}{2\rho_0} \int_S \frac{\rho^2 - \rho_0^2}{r^3} \varphi dS. \quad (3)$$

Таким образом, наибольшие трудности возникают при определении вспомогательной функции  $\varphi$ .

Наиболее рациональным мне представляется такой путь решения, который позволит выделить в высоте  $\zeta$  квазигеоида основную часть, соответствующую обычному приближенному решению. В этом случае следует ожидать, что для равнинных районов поправки будут очень малы и зачастую ими можно пренебречь. Такое приближенное решение мы получим, если значения  $(g - \gamma)$  будем считать отнесенными к сфере. Чтобы этой совокупности значений аномалий на сфере отвечало какое-то значение возмущающего потенциала  $T_0$ , должно соблюдаться известное условие (в разложении  $g - \gamma$  должна отсутствовать сферическая функция 1-го порядка). Однако всегда можно определить такую сферическую функцию 1-го порядка  $y_1$ , что после добавления ее к  $(g - \gamma)$  требуемое условие будет выполнено. Нетрудно убедиться в том, что в окончательный результат  $y_1$  не войдет; поэтому с самого начала можно не затруднять себя переписыванием этого члена.

Рассматриваемая совокупность отнесенных к сфере смешанных аномалий определит «геоид первого приближения» и соответствующее ему гравитационное поле для всего пространства вне сферы и, следовательно, для всех точек поверхности  $S$  (радиус сферы относимости можно выбрать таким, чтобы поверхность  $S$  охватывала сферу). Таким образом, не представит труда определить смешанные аномалии  $\overline{\Delta g}$ , соответствующие геоиду первого приближения, для всех точек поверхности  $S$ :

$$\begin{aligned} -\overline{\Delta g} &= \left( \frac{\partial T}{\partial \rho} + \frac{2T}{\rho} \right), \\ \overline{\Delta g} &= \frac{\rho^2 - R^2}{4\pi\rho} \int_{\sigma} -\frac{g - \gamma}{r_0^3} d\sigma = \frac{R^2}{\rho^2} (g - \gamma)_0 + \frac{\rho^2 - R^2}{4\pi\rho} \int_{\sigma} \frac{(g - \gamma) - (g - \gamma)_0}{r_0^3} d\sigma. \end{aligned} \quad (4)$$

Соответственно этому случаю потенциал вне  $S$  опять может быть представлен с помощью простого слоя, распределенного на  $S$ , плотность которого обозначим через  $\bar{\varphi}$ , а уравнение, связывающее  $\overline{\Delta g}$ ,  $\varphi$  и  $S$ , можно написать по аналогии с исходным уравнением (3):

$$2\pi\bar{\varphi} \cos \alpha = \overline{\Delta g} + \frac{3}{2\rho_0} \int_S \frac{\bar{\varphi}}{r} dS + \frac{1}{2\rho_0} \int_S \frac{\rho^2 - \rho_0^2}{r^3} \bar{\varphi} dS. \quad (5)$$

Из этого уравнения, поскольку  $\overline{\Delta g}$  следует теперь считать известным, можно определить  $\bar{\varphi}$ , однако в данном случае решать его нет нужды, как это будет показано ниже.

<sup>1</sup>Т.е. поверхность  $S$  получается путем откладывания от поверхности относимости только вспомогательных высот.

Вычитая уравнение (5) из уравнения (3) и обозначая через  $\delta\varphi$ ,  $\delta g$  и  $\delta T$  разности

$$\left. \begin{aligned} \delta\varphi &= \varphi - \bar{\varphi}, \\ \delta T &= T - \bar{T}, \\ \delta g &= g - \gamma - \overline{\Delta g}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

получаем

$$2\pi\delta\varphi \cos \alpha = \delta g + \frac{3}{2\rho_0} \int_S \frac{\delta\varphi}{r} dS + \frac{1}{2\rho_0} \int_S \frac{\rho^2 - \rho_0^2}{r^3} \delta\varphi dS; \quad (7)$$

$$\delta T = \int_S \frac{\delta\varphi}{r} dS. \quad (8)$$

Таким образом, мы пришли к уравнению прежнего типа, но только с измененным свободным членом.

Свободный член нового уравнения (7) имеет величину порядка  $\frac{\partial \Delta g}{\partial z} H$ . Чем меньше его величина, тем в большей степени можно упростить уравнения (7) и (8). Систему аномалий для «геоида первого приближения» можно задавать по-разному, главное, чтобы в них отсутствовала сферическая гармоника первого порядка. Нельзя ли (например, путем проб) подобрать такие значения аномалий на сфере, чтобы  $\delta g$  можно было приравнять к нулю? Иначе говоря, нельзя ли на поверхности сферы построить такую систему аномалий, которая определяла бы внешнее гравитационное поле, совпадающее на поверхности  $S$  (следовательно, и вне  $S$ ) с гравитационным полем реальной Земли? Тогда  $\delta\varphi$ , а следовательно, и  $\delta T$  можно было бы положить равными нулю. Таким образом, возмущающий потенциал полностью определился бы лишь через подобранные таким образом аномалии, минуя сложный процесс вычисления плотности  $\delta\rho$  вспомогательного поверхностного слоя.

Подобная попытка может увенчаться успехом только тогда, когда потенциал из области, лежащей вне  $S$ , можно аналитически продолжить через притягивающие массы до сферы  $\sigma$ . В частных случаях это возможно, но можно указать и такие примеры, когда подобные попытки безнадежны. Например, если мы имеем точечную (или шаровую) массу, лежащую между двумя концентрическими сферами, то ее потенциал на любую точку вне внешней сферы нельзя выразить через потенциал слоя, распределенного на поверхности внутренней сферы. Поэтому попытки построения системы аномалий на сфере, сводящей к нулю все значения  $\delta\varphi$ , вообще говоря, обречены на неудачу.

Таким образом, значения возмущающего потенциала  $T$  реальной Земли мы разложили на две части:  $\bar{T}$  и  $\delta T$ . Часть  $\bar{T}$  регулярна всюду вне сферы  $\sigma$  и определяется граничными значениями на сфере, а потому выражается не только через плотности  $\bar{\varphi}$  на поверхности  $S$ , но и через аномалии на сфере  $g - \gamma$ . Значение  $\bar{T}$  в любой внешней точке получаем с помощью обобщенной формулы Стокса, данной Венинг-Мейнесом:

$$\bar{T}(S) = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} (g - \gamma) S(\rho, \psi) d\sigma, \quad (9)$$

где

$$S(\rho, \psi) = \frac{2}{r} - 3 \frac{r}{\rho^2} + \frac{1}{\rho} - 5 \frac{R}{\rho^2} \cos \psi - \frac{3R}{\rho^2} \cos \psi \ln \frac{r + \rho - R \cos \psi}{2\rho}.$$

Часть  $\delta T$ , вообще говоря, мала по сравнению с  $\bar{T}$  и выражается через плотности  $\delta\varphi$ , которые можно получить путем решения уравнения (7).

Непосредственное решение этого уравнения последовательными приближениями наиболее затруднено наличием первого интегрального члена в правой части, так как медленное убывание  $1/r$  вынуждает каждый раз выполнять интегрирование по всей поверхности Земли. С этой точки зрения значительно лучше обстоит дело со вторым интегральным членом, ядро которого убывает очень быстро. Поэтому здесь целесообразно прибегнуть к специальному приему, идея которого изложена ниже.

Рассмотрим вспомогательное уравнение:

$$2\pi\delta\varphi_1 \cos \alpha = \delta g + \frac{1}{2\rho_0} \int_S \frac{\rho^2 - \rho_0^2}{r^3} \delta\varphi_1 dS. \quad (10)$$

Для его решения не обязательно (с практической точки зрения) считать остаточные аномалии  $\delta g$  известными для всей поверхности  $S$ ; достаточно иметь эти значения лишь для ближайших окрестностей исследуемой точки. Можно доказать, что это уравнение имеет единственное решение (доказательство это приводится так же, как для уравнения (3), и здесь опущено).

Положим, что тем или иным способом  $\delta\varphi_1$  определено. Тогда останется определить  $\delta\varphi_2$ :

$$\delta\varphi_2 = \delta\varphi - \delta\varphi_1.$$

Теперь из (7) с помощью (10) получаем

$$2\pi\delta\varphi_2 \cos \alpha = \frac{3}{2\rho_0} \int_S \frac{\delta\varphi_1}{r} dS + \frac{3}{2\rho_0} \int_S \frac{\delta\varphi_2}{r} dS + \frac{1}{2\rho_0} \int_S \frac{\rho^2 - \rho_0^2}{r^3} \delta\varphi_2 dS. \quad (11)$$

В этом уравнении свободный член

$$\frac{3}{2\rho_0} \int_S \frac{\delta\varphi_1}{r} dS \quad (12)$$

чрезвычайно мал. Действительно, он носит характер поправки к члену Брунса, получающейся от учета той части возмущающего потенциала, которая не учитывается при обычном решении. Особенно же существенно для нас то, что изменение этого члена от точки к точке происходит очень плавно (как изменение и основного члена Брунса), так как при интегрировании все местные колебания плотности  $\delta\varphi_1$  взаимно компенсируются и «размазываются». Таким образом, члену  $\delta\varphi_2$  соответствует правильная часть плотности  $\delta\varphi$ , и здесь с успехом можно повторить прием, примененный при построении геоида первого приближения. Именно, составим уравнение для поверхностной плотности такого простого слоя, распределенного по поверхности  $S$ , внешнее гравитационное поле которого одинаково с полем, соответствующим аномалии (12) на поверхности сферы  $\sigma$ . Соответствующие рассуждения ничем не будут отличаться от тех, которые мы привели к формулам (5) и (4). Рассматривая разность  $\delta\varphi_3$  между плотностью образованного таким образом слоя и плотностью слоя, входящего в уравнение (11), придем к уравнению, которое от (7) будет отличаться только свободным членом и неизвестной функцией:

$$2\pi\delta\varphi_3 = \delta g_2 + \frac{3}{2\rho_0} \int_S \frac{\delta\varphi_3}{r} dS + \frac{1}{2\rho_0} \int_S \frac{\rho^2 - \rho_0^2}{r^3} \delta\varphi_3 dS,$$

где

$$\delta g_2 = \delta g_1 - \left[ \frac{R^2}{\rho^2} \delta g_1 + \frac{\rho^2 - R^2}{4\pi\rho} \int_{\sigma} \frac{\delta g_1 - (\delta g_1)_0}{r_0^3} d\sigma \right];$$

$$\delta g_1 = \frac{3}{2\rho_0} \int_S \frac{\delta\varphi_1}{r} dS.$$

Если можно (из соображений точности результата) не считаться с отличием  $\delta g_2$  от нуля, то внешнее гравитационное поле слоя  $\delta\varphi_2$  на поверхности  $S$  окажется одинаковым с тем полем, которому соответствует аномалия  $\delta g_1$  на сфере  $\sigma$ .

Убедиться в чрезвычайной малости аномалии  $\delta g_2$  можно при помощи ориентировочной оценки порядка ее величины. Если интеграл, которым определяется  $\delta g_1$ , а также интегрируемые функции считать отнесенными к поверхности сферы, то между сферическими функциями порядка  $n$  в разложении  $\delta g_1$  и  $\delta\varphi_1$  легко устанавливается соотношение

$$(\delta g_1)_n = \frac{6\pi}{2n+1} (\delta\varphi_1)_n.$$

С другой стороны,

$$(\delta g_2)_n = (n+2) \frac{\rho - R}{R} (\delta g_1)_n.$$

Следовательно,

$$(\delta g_2)_n = 6\pi \frac{n+2}{2n+1} \frac{\rho - R}{R} (\delta\varphi_1)_n$$

и

$$\delta g_2 \approx 3\pi \frac{H}{R} \delta\varphi_1.$$

Отсюда следует, что разность  $\delta\varphi_2 - \delta\bar{\varphi}_2$  можно принять равной нулю, а потому соответствующую  $\delta\varphi_2$  часть возмущающего потенциала можно выразить через  $\delta\varphi_1$ , т.е. через выражение (12), минус вычисление плотности  $\delta\varphi_2$ , подобно тому, как  $\bar{T}(S)$  выражено через  $g - \gamma$  в формуле (9). Итак, та часть возмущающего потенциала, которая обусловлена плотностью  $\delta\varphi_2$ , может быть учтена добавлением (12) к аномалии в формуле (9). Полная же величина возмущающего потенциала получится путем добавления к этому результату члена, зависящего от  $\delta\varphi_1$ :

$$T(S) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[ g - \gamma + \frac{3}{2\rho_0} \int_S \frac{\delta\varphi_1}{r} dS \right] S(\rho, \psi) d\sigma + \int_S \frac{\delta\varphi_1}{r} dS, \quad (13)$$

где  $\delta\varphi_1$  есть решение уравнения (10).

Таким образом, в рассматриваемой задаче остается указать рациональные пути решения уравнения (10). Все необходимые данные для нахождения  $\delta\varphi_1$  численными методами имеются; нетрудно составить таблицы и другие вспомогательные средства, облегчающие вычисления. Наибольшие затруднения практического характера возникнут при определении угла  $\alpha$ . Конечно, форма физической поверхности Земли  $S$  с самого начала при теоретическом рассмотрении вопроса предполагалась достаточно сглаженной. Для облегчения вычислений целесообразно произвести наибольшее сглаживание, но, конечно, без ущерба желаемой точности окончательного результата. Практическим критерием возможной степени сглаживания может служить требование, что расстояние сглаженной

поверхности от действительной не должно превышать того отрезка, на протяжении которого изменение аномалии может оказаться одного порядка с точностью ее определения (при наибольшей возможной величине второй радиальной производной от возмущающего потенциала). Если же учесть другую сторону исходных гравиметрических материалов — неизбежную дискретность отдельных определений, — то придется равняться уже не на точность измерения, а на ошибку интерполяции аномалии на все промежуточные точки. Более того, картина гравитационного поля, получаемая по редкой сети пунктов, неизбежно выглаживается, а потому неправильная часть возмущающего потенциала, которая выражается через плотность  $\delta\varphi_1$ , такой съемкой не улавливается. Таким образом, возможная степень сглаживания поверхности  $S$  в первую очередь будет зависеть от расстояния между гравиметрическими пунктами. В соответствии с этим следует выбирать и масштаб гипсометрической карты.

Таким образом, в уравнении (10) свободный член, даже в горных районах, будет составлять малую часть аномалии ( $g - \gamma$ ), а углы  $\alpha$  будут невелики. Это позволяет упростить уравнение (10) путем отбрасывания членов порядка  $\alpha^2$  и выше.

Из тождества

$$r^2 = \rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \left(1 - \frac{r_0^2}{2R^2}\right) = (\rho - \rho_0)^2 + r_0^2 \frac{\rho\rho_0}{R^2} \quad (14)$$

следует, что с той же степенью приближения  $r$  (расстояние между двумя точками поверхности  $S$ ) можно заменить на  $r_0$  (расстояние между проекциями этих точек на сферу  $\sigma$ ), так как  $\frac{\rho - \rho_0}{r_0}$ , вообще говоря, меньше  $\alpha$ , а  $\frac{\rho\rho_0}{R^2} - 1$  имеет величину порядка  $\alpha^2$  или даже  $\alpha^3$ .

Путем указанных упрощений вместо (10) получаем более удобное уравнение:

$$2\pi \delta\varphi_1 = \delta g + \int \frac{\rho - \rho_0}{r_0^3} \delta\varphi_1 d\sigma, \quad (15)$$

в котором интегрирование ведется по поверхности сферы. Вероятно, при его решении можно будет ограничиться вторым приближением:

$$2\pi \delta\varphi_1 = \delta g + \frac{1}{2\pi} \int \frac{\rho - \rho_0}{r_0^3} \delta g d\sigma, \quad (16)$$

но нет нужды предрешать этот вопрос заранее.

Если  $\delta\varphi_1$  определено, то высота квазигеоида получится при помощи выражения для возмущающего потенциала (13). Правая часть этой формулы состоит, как видим, из двух членов: первый является функцией, регулярной всюду вне сферы  $\sigma$ , второй член представляет собой потенциал простого слоя, распределенного на поверхности  $S$ , и, конечно, обладает всеми особенностями потенциала такого слоя; последнее обстоятельство необходимо учитывать при дифференцировании  $T$  с целью построения формул для уклонения отвесной линии. Принимая это во внимание и обозначая через  $\lambda$  направление, параллельное поверхности относимости, мы без труда получим

$$\begin{aligned} \xi = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial T}{\partial \lambda} = \frac{1}{4\pi\gamma} \int \left( g - \gamma + \frac{3}{2\rho_0} \int \frac{\delta\varphi_1}{r} dS \right) \frac{\partial S(\rho, \psi)}{\rho \partial \psi} \cos \alpha d\sigma - \\ - \frac{1}{\gamma} \int \frac{\delta\varphi_1}{r^2} \cos(\tau, \lambda) dS - \frac{2\pi \delta\varphi_1}{\gamma} \cos(n, \lambda). \end{aligned}$$

# ИЗУЧЕНИЕ ФИГУРЫ ФИЗИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ (АСТРОНОМО-ГЕОДЕЗИЧЕСКИМ) МЕТОДОМ\*

1. Изучение фигуры физической поверхности Земли гравиметрическим методом является задачей более простой, чем изучение геоида Листинга. Переход от первой задачи ко второй равносильен переходу от изучения только внешнего гравитационного поля Земли к изучению также и ее внутреннего поля. Поэтому первую задачу можно решить путем использования только результатов точных геодезических и гравиметрических измерений. К решению второй задачи приходится дополнительно привлекать геологические и геофизические данные или гипотезы. Решение первой задачи полностью обеспечивает все практические запросы геодезии, решение второй — не нужно для практики и вряд ли актуально для науки. Эти положения обоснованы в работах [1] и [2].

2. Принципиальная сторона вопроса об изучении внешнего гравитационного поля и фигуры физической поверхности Земли гравиметрическим методом достаточно ясна. Необходимо тот же вопрос рассмотреть с точки зрения возможностей геометрического метода, имея в виду дальнейшее совместное использование обоих методов. Исследуя геометрический метод с принципиальной стороны, мы имеем право отвлечься от технических приемов, назначение которых заключается в получении результата наивысшей точности, а также от инструментальных, метеорологических и иных источников ошибок. Учет этих обстоятельств, ограничивая практическую значимость некоторых вариантов, конечно, не может расширить возможности метода.

Простыми рассуждениями мы покажем, что геометрическим методом можно изучить лишь форму физической поверхности Земли и ее внешнее гравитационное поле. Следовательно, геометрический и гравиметрический метод оказываются в известном смысле эквивалентными; на это обстоятельство указывал Пуанкаре в простейшем случае регуляризированной Земли. В понятие «геометрический метод» мы будем включать совокупность линейных и угловых измерений (триангуляция, тригонометрическое и геометрическое нивелирование, астрономические определения координат и азимутов).

3. Возможность изучения формы физической поверхности Земли чисто геометрическим методом очевидна. Простейшим является тот случай, когда во всех пунктах измерения направлений относятся к системам прямоугольных координат, имеющим всюду одинаковые направления соответствующих координатных осей. Тогда прямоугольные координаты всех точек земной поверхности будут получены путем последовательных пространственных засечек на основе исходного базиса, определяющего линейный масштаб.

4. В действительности геодезисты пользуются системой координат, имеющей в каждой точке наблюдения свою собственную ориентировку, связанную с направлением силовой линии гравитационного поля в данной точке (так как основным и наиболее точным геодезическим инструментом является уровень). Это обстоятельство не меняет принципиальной стороны вопроса, если предположить, что каждое направление, соединяющее смежные координатные системы, измеряется в каждой из этих систем. В самом деле, ориентировка системы координат в пространстве определяется тремя параметрами; из-

\* Труды ЦНИИГАиК. 1950. Вып. 75. С.3–10.

мерение в новой системе координат одного направления, уже определенного в старой системе, связывает эти три параметра двумя условиями; наличие второго подобного направления позволяет найти третий параметр и тем самым установить ориентировку новой системы по отношению к старой (одно условие остается избыточным, но при идеально точных измерениях оно не может противоречить остальным). Для повторения подобной операции достаточно иметь в общей системе координаты двух точек. Исходными точками являются концы базиса. Следовательно, все местные координатные системы связываются между собой, и после поворота на известные углы мы возвращаемся к простейшему случаю.

5. Дальнейшее усложнение действительной обстановки по сравнению с той, которая рассматривалась выше, вносится определением астрономических координат некоторых или всех пунктов. В этом случае положение одной из координатных осей (именно той, которая совпадает с направлением силовой линии в данной точке) определяется относительно общей для всех пунктов географической системы координат. Если кроме широт и долгот определяется также астрономический азимут, то направления всех трех координатных осей соответствующей местной системы оказываются связанными с единой системой географических координат. Поворотом координатных осей всем местным системам можно придать общую ориентировку, и мы снова возвращаемся к простейшему случаю, с которого начали.

Не лишне отметить, что из сопоставления пунктов 4 и 5 можно сделать заключение, впрочем, довольно очевидное, о том, что если пункты *A* и *B* соединены триангуляцией с двусторонним измерением горизонтальных и вертикальных углов для всех направлений, причем на пункте *A* определены астрономические координаты и азимут, то можно вычислить астрономические координаты пункта *B*. Осуществить это практически, конечно, нельзя из-за ошибок рефракции.

6. Присоединение к рассмотренным видам геодезических работ геометрического нивелирования не вносит принципиальных изменений, поскольку оно является частным, упрощенным видом тригонометрического нивелирования. Астрономические определения и геометрическое нивелирование с геометрической точки зрения либо дают избыточные данные, либо освобождают от необходимости производить двусторонние измерения направлений. Практически они служат целям повышения точности результата.

Представление о геометрическом нивелировании как о методе получения высот над уровнем моря (над геоидом Листинга) не может быть обосновано геометрически. Это замечание относится также к астрономическому нивелированию.

7. В предыдущих, чисто геометрических рассуждениях никакой роли не играло то обстоятельство, что ориентировка местных координатных систем связана с направлением силовых линий единого гравитационного поля. Учет этого обстоятельства приводит к новым выводам.

Наличие триангуляции и астрономических определений на всей поверхности Земли (включая поверхности морей и океанов) в принципе позволяет определить не только фигуру физической поверхности Земли, но и ее внешнее гравитационное поле (с точностью до некоторой постоянной). Действительно, при известной фигуре физической поверхности Земли можно ввести в рассмотрение поверхность относимости и понятия об отклонении отвесной линии и возмущающем потенциале. Совокупность широтных определений может быть заменена совокупностью значений меридиональной производной от возмущающего потенциала. Эти данные можно использовать для определения плотности поверхностного слоя с помощью интегрального уравнения, полученного ранее [1]. Аномалии силы тяжести и возмущающий потенциал в любой внешней точке весьма просто выражаются через плотность этого слоя.

Следовательно, присоединение к геометрическим измерениям гравиметрических не открывает принципиально новых возможностей<sup>1</sup> (кроме определения массы Земли). Отсюда еще раз, с иной и более общей точки зрения, становится ясно, что без использования геологических фактов и гипотез можно исследовать лишь форму поверхности и внешнее гравитационное поле Земли. Данные же геологии и геофизики, как известно, в количественном отношении малонадежны.

8. Геоид Листинга в проведенных рассуждениях не мог рассматриваться; выпал из них и квазигеоид. Последнее также естественно, поскольку роль квазигеоида, характеризующего «аномалию высоты», является вспомогательной, подобно роли возмущающего потенциала, с которым он тесно связан. Однако такое вспомогательное построение, не обязательное при абстрактном сравнении возможностей различных методов, весьма полезно и даже необходимо для практики. В первую очередь это относится к важнейшему для инженерной геодезии понятию высоты над уровнем моря, которое принято отождествлять с понятием ортометрической высоты.

При всей внешней простоте такого представления оно приводит к очень серьезному и ненужному усложнению вопроса. Действительно, от фигуры физической поверхности Земли, которая определяется достаточно строго и надежно, зависит сумма ортометрической высоты и высоты геоида Листинга; следовательно, задача определения ортометрической высоты тождественна с проблемой определения фигуры геоида нерегуляризированной Земли. Эту проблему геодезисты, занимающиеся теорией геометрического нивелирования, ставят в недопустимо упрощенном виде и именуют задачей определения ортометрических поправок. Вместо ортометрических высот у нас фигурируют вспомогательные высоты (или динамические, так как переход от одних к другим осуществляется умножением на вполне известный множитель).

9. В теории астрономического и астрономо-гравиметрического нивелирования высот геоида Листинга камнем преткновения является вопрос о редукции астрономических координат к уровню моря (также приводящийся к проблеме исследования геоида нерегуляризированной Земли). Следует ожидать, что с изменением постановки вопроса, а именно: если рассматривать астрономическое нивелирование как средство изучения фигуры физической поверхности Земли, эта задача будет решена так же точно и просто, как был решен вопрос о вспомогательных высотах. В самом деле, из пункта 5 следует, что астрономическое нивелирование корректирует результаты геометрического нивелирования путем сведения всех местных координатных систем к общей ориентировке; следовательно, задача носит чисто геометрический характер и может быть решена точно.

Дадим чрезвычайно простое геометрическое решение этой задачи и далее покажем, что оно находится в полном соответствии с основными теоремами и методами, разработанными при исследовании гравиметрического метода в работах [1] и [2].

Предварительно условимся относительно обозначений:  $S$  — физическая поверхность Земли;  $A$  — произвольная точка на поверхности  $S$ ,  $H$  — вспомогательная высота точки  $A$ ;  $W$ ,  $U$ ,  $T$  — потенциал силы тяжести, его нормальное значение и возмущающий потенциал в точке  $A$ ;  $g$  и  $\gamma_S$  — ускорение силы тяжести и его нормальное значение в точке  $A$ ;  $dh_W$  — элементарное приращение высоты поверхности  $S$ , соответствующее смещению по поверхности на отрезок  $dl$ , отсчитываемое по силовой линии поля  $W$

---

<sup>1</sup>Напоминаем, что пока все рассуждения носят абстрактный характер. Невозможность с нужной точностью определить астрономические и геодезические координаты на поверхности океана, малая точность измерения вертикальных углов на пунктах триангуляции и другие обстоятельства подобного рода не меняют принципиальной стороны разбираемых вопросов.



(элементарное нивелирное превышение):

$$dh_W = dl \cos(dl, g);$$

$dh_U$  и  $dH$  — то же элементарное приращение высоты, но отнесенное к силовой линии поля  $U$  и к координатной линии  $H$ :

$$\begin{aligned} dh_U &= dl \cos(dl, \gamma), \\ dH &= dl \cos(dl, dH); \end{aligned}$$

$dl_W$ ,  $dl_U$  и  $dl_H$  — проекции  $dl$  на касательные плоскости к поверхностям  $W = \text{const}$ ,  $U = \text{const}$ ,  $H = \text{const}$ ;  $\zeta$  — высота квазигеоида в точке  $A$ ;  $\gamma$  — нормальное ускорение силы тяжести (для потенциала  $U$ ), вычисленное по аргументу  $H$ .

10. Элементы  $dh_W$  и  $dl_W$ ,  $d(H + \zeta)$  и  $dl_H$  представляют собой проекции элемента  $dl$  на координатные оси двух различных систем. У первой системы ось  $Z$  совпадает с силовой линией поля  $W$ , у второй — с координатной линией, по которой отсчитывается вспомогательная высота  $H$ . Для установления зависимости между  $dh_W$  и  $d(H + \zeta)$  достаточно спроектировать на направление, например вертикали, замкнутую ломаную линию, составленную из всех четырех элементов. Очевидно:

$$\begin{aligned} \cos(dh_W, g) &= -1, & \cos(H, g) &\approx 0, \\ \cos(dl_W, g) &= 0, & \cos(dl_H, g) &\approx -(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

Угол  $(\alpha + \beta)$  представляет собой ту компоненту угла между вертикалью и координатной линией  $H$ , которая приходится на плоскость, содержащую в себе элемент  $dl$ , а  $\alpha$  — уклонение отвесной линии в той же плоскости. Следовательно,

$$dh_W = d(H + \zeta) - (\alpha + \beta) dl_H. \quad (1)$$

В общем случае поверхности уровня нормального потенциала  $U = \text{const}$  и поверхности  $H = \text{const}$  не совпадают. Всегда

$$\beta = \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial l_H}, \quad (2)$$

и в частном случае может быть  $\beta = 0$  (если координатные линии  $H$  являются силовыми линиями поля  $U$ ).

Формула (1) устанавливает связь между приращением нивелирной высоты и высоты точек поверхности Земли относительно эллипсоида, которому соответствует нормальный потенциал  $U$  и система значений уклонов отвеса  $\alpha$ . Эта формула является обобщением обычной формулы астрономического нивелирования, но при ее применении вопроса о редукции за искривление силовой линии не возникает.

11. Теперь получим основную формулу астрономического нивелирования, хотя и более длинным путем, но с использованием основных теорем гравиметрического метода исследования и в терминах этого метода. Возможность такого подхода к решению задачи и эквивалентность ожидаемого результата с формулой (1) вытекают из пункта 7. Рассмотрение вопроса с другой точки зрения позволит выяснить некоторые интересные подробности.

Будем исходить ([1] и [2]) из обобщенной формулы Брунса:

$$T = W - U = \gamma\zeta, \quad (3)$$

и краевого условия:

$$\frac{\partial T}{\partial h_U} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h_U} T = -(g - \gamma). \quad (4)$$

К этим уравнениям следует добавить определение вспомогательной высоты:

$$W = U(H, B) + C. \quad (5)$$

Нам нужно получить приращение высоты точки  $S$  относительно основного уровенного эллипсоида, т.е.  $d(H + \zeta)$ . Для этого, очевидно, нужно продифференцировать выражения (3) и (5), из (3) определить  $d\zeta$ , из (5) —  $dH$  и образовать сумму  $d\zeta + dH$ . Выполнив эти операции, из формулы (3) получаем

$$\gamma d\zeta = \left( \frac{\partial T}{\partial l_U} - \zeta \frac{\partial \gamma}{\partial l_U} \right) dl_U + \left( \frac{\partial T}{\partial h_U} - \zeta \frac{\partial \gamma}{\partial h_U} \right) dh_U, \quad (6)$$

а из формулы (5)

$$-\gamma \cos(dH, \gamma) dH + \frac{\partial U}{\partial l_H} dl_H = -g dh_W. \quad (7)$$

В формуле (7)  $\cos(dH, \gamma)$  отличается от единицы на величину меньшую, чем квадрат уклонения отвесной линии, а потому в дальнейшем он заменен на единицу.

На основании (3) и (4) равенство (6) можно записать в такой форме:

$$\gamma d\zeta = \left( \frac{\partial T}{\partial l_U} - \zeta \frac{\partial \gamma}{\partial l_U} \right) dl_U - (g - \gamma) dh_U. \quad (8)$$

Теперь находим из выражений (7) и (8)

$$d(H + \zeta) = \frac{g}{\gamma} \left( dh_W - dh_U + \frac{1}{g} \frac{\partial T}{\partial l_U} dl_U \right) - \frac{\zeta}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial l_U} dh_U + dh_U + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial U}{\partial l_H} dl_H. \quad (9)$$

Покажем, что множитель в скобках при  $g/\gamma$  равен нулю.  $dh_W$  и  $dh_U$  определены таким образом, что при смещении на  $dl$  по поверхности  $S$  приращения потенциала поля  $W$  и поля  $U$  соответственно равны

$$dW = -g dh_W, \quad (10)$$

$$dU = -\gamma_S dh_U, \quad (11)$$

так как перемещения  $dl_W$  в поле  $W$  и  $dl_U$  в поле  $U$  совпадают с соответствующими поверхностями уровня.

Но на основании формулы (3)

$$dW - \frac{\partial T}{\partial l_U} dl_U = dU + \frac{\partial T}{\partial h_U} dh_U.$$

Подставляя в правую часть  $dU$  из выражения (11) и  $\frac{\partial T}{\partial h_U}$  из выражения (4), получаем

$$dW - \frac{\partial T}{\partial l_U} dl_U = -g dh_U$$

и при помощи формулы (10) приходим к искомому равенству:

$$dh_U = dh_W + \frac{1}{g} \frac{\partial T}{\partial l_U} dl_U. \quad (12)$$

Таким образом, формула (9) примет следующий вид:

$$d(H + \zeta) = dh_U - \frac{\zeta}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial l_U} dl_U + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial U}{\partial l_H} dl_H. \quad (13)$$

Остается из выражения (13) исключить  $dh_U$  при помощи формулы (12) и  $T$  — при помощи формулы (3). Выполнив эти действия, получаем

$$d(H + \zeta) = dh_W + \frac{\partial \zeta}{\partial l_U} dl_U + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial U}{\partial l_H} dl_H. \quad (14)$$

Исходные уравнения (3) и (4), а также (1) точны лишь до первых степеней аномалии или высоты геоида, или уклонения отвеса (все величины характеризуются одним порядком малости). Такова же точность уравнения (14), и в пределах этой точности уравнения (14) и (1) полностью совпадают, так как

$$\alpha \approx \frac{\partial \zeta}{\partial l_U}, \quad \beta \approx \frac{1}{\gamma} \frac{\partial U}{\partial l_H}.$$

С той же степенью точности вместо формулы (14) можно написать:

$$d(H + \zeta) = dh_W + \frac{1}{g} \frac{\partial W}{\partial l_H} dl_H, \quad (15)$$

или

$$d(H + \zeta) = dh_W + \frac{1}{g} \frac{\partial T}{\partial l_H} dl_H + \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial l_H} dl_H. \quad (16)$$

Формула (16) дает полный ответ на поставленный вопрос. Она указывает, каким образом высоты точек физической поверхности Земли получаются из результатов геометрического и астрономического нивелирования. Приращения этих высот получаются путем добавления к неисправленной нивелирной высоте двух поправочных членов, учитывающих изменение ориентировки местных координатных систем от пункта к пункту. Первый поправочный член выражается через наблюдаемое на поверхности Земли уклонение отвесной линии, а второй, меньший член учитывает непараллельность уровенных поверхностей нормального потенциала и координатных поверхностей  $H = \text{const}$ .

12. Высоты  $H + \zeta$ , полученные по формуле (16), отнесены к эллипсоиду с той ориентировкой, которой соответствуют использованные уклонения отвеса, т.е. к референц-эллипсоиду. Это вытекает из вывода формулы (1), а также (16), так как во втором случае исходные уравнения (3), (4) и (5) остаются в силе при любой ориентировке эллипсоида, а возмущающий потенциал должен быть вычислен относительно референц-эллипсоида, к которому отнесены уклонения отвесной линии. Сжатие же должно быть принято одинаковым при вычислении  $H$  и  $\zeta$ .

Интересно отметить, что  $dH$  и  $d\zeta$ , каждое в отдельности (см. формулы (7) и (8)), зависят от ускорения силы тяжести, сумма же  $d(H + \zeta)$  не зависит. Это находится в полном соответствии с нашими исходными рассуждениями, из которых следует, что фигура

физической поверхности Земли определяется одними геометрическими элементами, тогда как фигура квазигеоида связана с гравитационным полем.

Отсюда вытекает, что в теории астрономического нивелирования следует различать два случая: астрономическое (чисто геометрическое) нивелирование высот физической поверхности Земли, соответствующее формуле (16) или (1), и астрономическое нивелирование высот квазигеоида, соответствующее формуле (8); связующим и строго согласованным звеном между ними являются вспомогательные высоты, вследствие чего выбор между формулами (8) и (16) принципиально безразличен и должен определяться лишь соображениями практического характера.

13. Основная идея астрономо-гравиметрического нивелирования заключается в использовании гравиметрических измерений для интерполяции астрономо-геодезических уклонений отвесной линии на любую промежуточную точку между двумя астрономическими пунктами для последующего точного интегрирования элементарных превышений. Очевидно, что идея астрономо-гравиметрического нивелирования может быть применена к нивелированию высот как физической поверхности Земли (по формуле (16)), так и квазигеоида (по формуле (9)).

Отличие разбираемого случая от обычного [2], относящегося к регуляризованному геоиду, состоит в том, что уклонение отвесной линии выражено теперь не через аномалии силы тяжести, а через плотность простого слоя, связанную с аномалиями линейным интегральным уравнением. Кроме того, положение каждого из астрономических пунктов определяется теперь не двумя, а тремя координатами. Эти затруднения, не имеющие принципиального значения, легко преодолены нами при разработке практических способов решения основного интегрального уравнения [3]. Упрощение же принципиальной стороны задачи весьма существенно, так как вопрос о редукциях силы тяжести или уклонения отвесной линии здесь, конечно, не возникает. Астрономо-гравиметрическое нивелирование высот квазигеоида или высот поверхности Земли может быть выполнено безупречно в районе с любыми рельефом и аномальностью.

14. Наконец, следует обратить внимание геодезистов еще на одно важное обстоятельство.

И принципиально, и практически исследованию квазигеоида должно предшествовать выглаживание поверхности Земли в значительно большей степени, чем это делается при составлении топографических карт. От степени выглаживания зависит точность и детальность окончательного результата, а также большая или меньшая сложность вычислительных операций. Можно выгладить поверхность Земли даже до эллипсоидальной формы, и тогда все вычислительные процессы для квазигеоида совпадут с теми упрощенными приемами вычислений, которые приняты у нас при использовании гравиметрической съемки для обработки триангуляции. Характерными для этих вычислений являются следующие черты: использование аномалий в свободном воздухе без дополнительных поправок; игнорирование поправок за приведение широт и долгот к уровню моря; отсутствие во всех редукциях к геоиду каких-либо поправочных членов, определяемых при помощи геологической карты. Все эти моменты характерны для вычисления фигуры квазигеоида и находятся в явном противоречии с физическими особенностями геоида Листинга.

Таким образом, смысл получаемых принятыми у нас способами результатов ясно связывается лишь с квазигеоидом, соответствующим предельному случаю полного выглаживания рельефа, а не с геоидом Листинга. С другой стороны, многие факты и примеры говорят о том, что упрощенные методы вычисления, о которых шла речь выше, дают для уклонения отвесной линии результат, близкий к его значению на поверхности Земли и очень далекий от значения на геоиде. Например, вычисления гравиметрических уклонений отвесной линии для Кавказа, выполненные Б.В. Дубовским и М.С. Зверевым, давшие

очень хороший результат, были бы испорчены введением поправки за искривление силовой линии от поверхности Земли до геоида.

Еще более убедительный пример дают вычисления, выполненные В.Ф. Еремеевым для специальной модели. Из работы В.Ф. Еремеева следует, что:

1) результаты, полученные по формуле Венинг-Мейнеса теми способами, которые получили практическое применение (все другие способы очень сложны), не имеют ничего общего со значением уклонения отвесной линии на поверхности геоида;

2) эти же результаты приблизительно характеризуют значения уклонений отвесной линии на поверхности модели;

3) уклонения отвесной линии, специально вычисленные для поверхности Земли по формулам, вывод которых дан в работе [1], даже при приближенном решении хорошо согласуются с предвычисленными точными значениями.

Следовательно, не приходится сомневаться в том, что все выполненные существующими способами вычисления являются приближенной характеристикой квазигеоида. Считать эти результаты отнесенными к геоиду Листинга мы не имеем оснований; мы даже не располагаем материалами, которые характеризовали бы точность вывода уклонений отвеса на геоиде.

Очень важно, чтобы значение указанных выше обстоятельств было правильно понято геодезистами. Если достигнутая точность выводов нас удовлетворяет, понимание высказанных замечаний позволит правильно истолковать значение получаемых результатов и не ухудшать их введением ненужных редуций (вроде поправки за аномальную часть кривизны силовой линии). При необходимости же повысить точность результата рекомендуемый нами путь, без привлечения каких-либо гипотез, вернее и с меньшими затратами труда приведет к поставленной цели.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Молоденский М.С.* Внешнее гравитационное поле и фигура физической поверхности Земли. // Известия АН СССР, серия географическая и геофизическая. 1948. Т. XII, №3.
2. *Молоденский М.С.* Основные вопросы геодезической гравиметрии. // Труды ЦНИИГАиК. — М.: Геодиздат. 1945. Вып. 42.
3. *Молоденский М.С.* Приближенный способ решения уравнения, определяющего фигуру квазигеоида. // Труды ЦНИИГАиК. — М.: Геодиздат. 1949. Вып. 68.

## К ПОСТАНОВКЕ АСТРОНОМО-ГРАВИМЕТРИЧЕСКОГО НИВЕЛИРОВАНИЯ В СССР\*

1. Астрономо-гравиметрическое нивелирование, применяемое для изучения фигуры геоида на больших территориях, основано на идее астрономического нивелирования с привлечением гравиметрической съемки для учета нелинейности изменения уклонов отвесной линии между соседними астрономо-геодезическими пунктами. Наличие гравиметрической съемки избавляет от необходимости иметь частую сеть астрономических пунктов, позволяя обходиться в равнинных местах лишь астрономическими пунктами базисных сетей и пунктами Лапласа. В этом заключается преимущество астрономо-гравиметрического нивелирования по сравнению с чисто астрономическим. Общий недостаток обоих методов состоит в том, что высоты геоида получаются путем суммирования последовательных превышений по звеньям, что, конечно, приводит к накоплению ошибок. Меры борьбы с этим явлением должны стоять в центре внимания, когда речь идет о такой большой стране, как Советский Союз. Характер необходимых мер с достаточной очевидностью подсказывается опытом обычных государственных нивелировок, где основными средствами борьбы с накоплением ошибок являются образование замкнутых полигонов с их последующим уравниванием и проложение линий высокоточного нивелирования по главным магистралям. Подобные меры целесообразны и в данном случае.

В настоящей статье будет указана желательная и возможная степень повышения точности астрономо-гравиметрического нивелирования по главным магистралям и те дополнительные полевые работы, которые предположительно, по расчетным данным, могут обеспечить нужную точность. При этом придется рассмотреть три основных случая: нивелирование в равнинных районах, в горных и, наконец, в непосредственной близости от государственных границ. Первый случай является наиболее частым у нас. Особенность второго заключается в трудности решения редуционной проблемы при приведении силы тяжести и направления вертикали к уровню моря [1]. Последний случай приходится выделить потому, что иногда оказывается невозможным выполнить гравиметрические определения в достаточно широкой полосе по обе стороны от ходовой линии.

Начнем с краткого изложения результатов тех исследований, которые служат принципиальной основой при выборе распределения и необходимой точности измерений на гравиметрических пунктах.

2. Характерная черта астрономо-гравиметрического нивелирования заключается в использовании астрономических и геодезических координат пунктов триангуляции вместе с результатами гравиметрической съемки. Ошибки всех этих работ входят в результаты нивелирования.

Наиболее опасными с точки зрения накопления ошибок являются систематические ошибки в триангуляции. Их влияние будет снижаться лишь по мере улучшения качества триангуляции и методов ее обработки. Происхождение и величина систематических ошибок в существующей триангуляции еще далеко не изучены. Порядок же их влияния на вывод высоты геоида (при заданной их величине) подсчитывается весьма просто по

---

\* Труды ЦНИИГАНК. 1950. Вып. 75. С.78–84.

следующей формуле:

$$\Delta\zeta = \frac{\alpha s^2}{2R},$$

где  $\alpha$  — относительная систематическая ошибка,  $s$  — длина линии нивелирования,  $R$  — радиус Земли. Например, при  $s = R$  и  $\alpha = 1 \cdot 10^{-6}$   $\Delta\zeta = 3$  м.

При составлении программ астрономо-гравиметрического нивелирования не следует ориентироваться на предполагаемую величину коэффициента  $\alpha$  и по нему рассчитывать возможную точность  $\zeta$ . Если нивелирование выполнено тщательно, то оно не потеряет своего значения и в будущем, когда будут изучены и учтены систематические ошибки в триангуляции, а следовательно, можно будет исправить и результаты астрономо-гравиметрического нивелирования. Этому будут способствовать такие мероприятия, как создание фундаментальных пунктов Лапласа.

3. Астрономические определения не могут внести существенных систематических ошибок, постепенно накапливающихся от звена к звену. Однако грубые ошибки в отдельных звеньях затем сохраняются во всех последующих высотах геоида.

Подобные ошибки чаще можно ожидать в долготных определениях, где они возникают от резких колебаний личной разности наблюдателя. При наличии хорошей гравиметрической съемки такие отскоки легко обнаруживаются и повторными астрономическими определениями результаты могут быть исправлены. Этот контроль астрономических определений следует иметь в виду.

Случайная часть ошибок  $\Delta\zeta$ , вносимая в высоту геоида ошибками астрономических координат, легко подсчитывается по заданному среднему расстоянию  $2l$  между астрономическими пунктами:

$$\Delta\zeta \approx \pm\sqrt{2sl} \Delta\varphi \text{ (по меридиану)}$$

или

$$\Delta\zeta \approx \pm\sqrt{2sl} \Delta\lambda \cos \varphi \text{ (по параллели)[2].}$$

Например, при  $s = R$ ,  $\Delta\varphi = \Delta\lambda \cos \varphi = 0''{,}3$  и  $2l = \frac{1}{100}R \approx 64$  км получим  $\Delta\zeta = \pm 0{,}9$  м.

Таким образом, точность определения астрономических координат при существующем среднем расстоянии между астрономическими пунктами триангуляции дает еще широкие возможности для повышения точности астрономо-гравиметрического нивелирования.

4. Следует считать доказанным, что гравиметрические определения также не могут быть источником существенных систематических ошибок при астрономо-гравиметрическом нивелировании, если гравиметрическая поправка вычисляется правильно [3], т.е. с учетом аномалий в полосе достаточной ширины и с сохранением определенных границ области учета аномалий для каждой пары астрономических пунктов во всех стадиях вычисления. Эти условия выполняются, например, при применении эллиптической палетки, если все ее точки попадают в гравиметрически изученную область.

Верхний предел накопления систематических ошибок за счет ограничения области интегрирования расстоянием  $\rho l$  от середины звена дается формулой

$$|\Delta g| < 2 \cdot 10^{-7} \frac{(\Delta g)}{\rho} l,$$

где под  $\Delta g$  можно понимать половину систематической части изменения поля аномалий от начала к концу ходовой линии нивелирования, выраженную в миллигалах. Таким образом, величина ошибки не возрастает с увеличением длины ходовой линии и, даже при  $\Delta g = 50$  мгл и  $\rho = 2$ , остается менее  $5 \cdot 10^{-6}l$ .

Однако большие случайные погрешности в определении гравиметрической поправки входят во все последующие высоты геоида. Это обстоятельство может иметь место при пересечении горных районов, где скажутся увеличенная ошибка интерполяции аномалий (примерно в 2–3 раза большая, чем в равнинных местах) и ошибки за приведение силы тяжести и направления вертикали к уровню моря. О мерах ослабления подобных влияний будет сказано ниже.

5. Случайная часть ошибки гравиметрической поправки для отдельного звена обусловлена двумя обстоятельствами: ограничением области интегрирования расстоянием  $\rho l$  от середины звена и ошибками интерполяции аномалий силы тяжести.

Первое приводит к ошибке [2], предельная величина которой менее

$$0'',11 \frac{\bar{\Delta}g_m}{\rho^2 - 1},$$

где  $\bar{\Delta}g_m$  — среднее квадратическое значение аномалии на контуре окружности с радиусом  $\rho l$ , выраженное в миллигалах.

Очевидно, что в условиях гравиметрической съемки СССР за счет увеличения  $\rho$  этот член можно сделать достаточно малым, кроме тех случаев, когда линия нивелирования проходит вблизи государственной границы СССР.

Ошибка интерполяции аномалий любого типа для нашей территории, исключая горные районы, может быть представлена приближенно следующей формулой:

$$E = \pm 0,54[\sqrt{x} + \sqrt{y}] \text{ мгл},$$

где  $x$  и  $y$  — стороны соответствующего прямоугольника, в км.

В горных районах ошибка интерполяции всегда значительно больше, причем для аномалий Буге увеличение ее меньше, чем для аномалий в свободном воздухе. Это видно из табл. 1, характеризующей значения ошибок представительства и интерполяций для площади в 1000 кв. км.

Таблица 1

	Ошибка представительства для аномалий		Ошибка интерполяции для аномалий	
	в своб. воздухе	Буге	в своб. воздухе	Буге
Кавказ	±23	±12	±23	±9
Урал	±10	±11	±11	±10

Приближенно можно считать, что случайная ошибка определения единичного превышения геоида при достаточно большом  $\rho$  определяется простым соотношением:

$$\Delta\zeta = \pm 2l \Delta\vartheta,$$

где  $\Delta\vartheta$  — ошибка гравиметрического вывода уклонения отвесной линии в направлении ходовой линии; она может быть подсчитана при заданном расположении пунктов, если известны ошибки интерполяции и ошибка определения аномалий.

О величине ошибки интерполяции достаточное представление для ориентировочных подсчетов можно составить по приведенной выше табл. 1. Ошибка же определения аномалий для пунктов общей съемки в среднем близка к 4 мгл. При определении силы



тяжести гравиметрами ошибку наблюдения можно значительно уменьшить — в 5–10 и даже большее число раз.

Если съемка не доведена до той полноты, при которой можно уверенно получать горизонтальные градиенты аномалий, приходится считаться также с тем, что центральная зона вблизи астрономических пунктов остается вне учета. Это обстоятельство вносит погрешность, в среднем порядка  $\pm 0'',15r^{3/4}$  ( $r$  — радиус неучтенной зоны) [2]. При равномерной съемке с расстоянием между пунктами  $2h$  полная величина ошибки вывода уклонения отвеса получится путем добавления к этому члену второго, выражающего влияние ошибки интерполяции:

$$\Delta\vartheta = \pm 0,0039 \delta g + 0,02h^{3/2},$$

где  $\delta g$  — полная ошибка интерполяции (т.е. включающая также ошибку наблюдения).

Для равнинных мест  $\Delta\vartheta = \pm 1'',3$ ; следовательно, при  $2l = 70$  км  $\Delta\zeta = \pm 0,45$  м. При  $s = R = 6370$  км

$$\delta\zeta = \pm 0,45 \sqrt{\frac{6370}{70}} \approx 5 \text{ м},$$

без учета повышения ошибки при пересечении горных районов. Следовательно, предельную ошибку можно оценить в 10–15 м, без учета систематических ошибок.

6. Ошибки в определении высот геоида, как систематические, так и накопившиеся случайные, вызывают, в свою очередь, появление систематических ошибок масштабного характера в триангуляции. Относительная величина этих ошибок порядка  $\frac{\Delta\zeta}{R}$  в рассмотренном случае будет превышать  $1 \cdot 10^{-6}$  и, в свою очередь, явится источником новых систематических ошибок в определении высот геоида. Поэтому следует целиком присоединиться к мнению крупнейшего русского геодезиста Ф.Н. Красовского, который считает, что «...необходимо знать для базиса высоту  $h_T$  геоида над эллипсоидом, и, конечно, с ошибкой, не превышающей 2–3 м» [4].

Следовательно, величину ошибки  $\Delta\zeta$  необходимо снизить по крайней мере в 3–4 раза.

При образовании системы замкнутых полигонов астрономо-гравиметрического нивелирования в результате последующего уравнивания некоторое снижение ошибок, конечно, произойдет. Развивая нивелирование на восток, следует также рассчитывать по меньшей мере на две параллельные линии нивелирования, которые меридиональными перемычками превращаются в цепочку из полигонов. При этом случайные ошибки уменьшатся примерно в  $\sqrt{2}$  раз, систематические — существенно не изменятся. Главным же образом такое мероприятие совершенно необходимо потому, что позволяет осуществить контроль получаемых результатов путем изучения невязок в высотах геоида при замыкании полигонов.

7. Дальнейшее повышение точности определения высот геоида проще всего достигается путем уменьшения ошибки  $\Delta\vartheta$ . Эту ошибку можно было бы снизить в 4–5 раз, но (чтобы не прибегать к чрезмерному увеличению объема гравиметрических работ) ее достаточно довести до  $\pm 0'',5$ . Тогда, если  $2l = 70$  км,  $s = R$ , то при двух параллельных линиях нивелирования получим  $\Delta\zeta = \pm 1,4$  м; если же  $s = 2R$ , то  $\Delta\zeta \approx \pm 2$  м; эта величина уже лежит на пределе допустимого, так как здесь не учтены систематические ошибки.

Расчет числа, наилучшего расположения и точности определения дополнительных к общей съемке гравиметрических пунктов, требуемых для определения уклонения отвеса с точностью в  $\pm 0'',4$ , принципиальных трудностей не представляет. В табл. 2 дана

одна из возможных схем расположения гравиметрических пунктов с указанием необходимой точности их определения. Приведенные выше формулы позволяют путем простого расчета убедиться в том, что эта схема должна обеспечить определение уклонения отвесной линии с нужной точностью. Ее можно принять за типовую.

Гравиметрический пункт может быть определен в любой точке соответствующей части зоны, но по возможности ближе к ее середине. Поскольку зона с радиусом 23–48 км охватывает площадь более 5000 кв. км, на нее должно падать 5–6 пунктов общей съемки. Если расположение этих пунктов благоприятно и если они отнесены в каталоге к первому разряду III класса, то их можно рассматривать как пункты сгущения.

Два близких (10–20 км) астрономических пункта одной базисной сети целесообразно объединить в один общий пункт, выполняя съемку сгущения сразу вокруг обоих пунктов. Это потребует добавления к типовой схеме лишь 5–10 новых пунктов в частях неперекрывающихся зон, точность же результата повысится почти в 1,5 раза.

Для облегчения дальнейшего использования пунктов гравиметрической съемки сгущения следует наносить их положение на карту масштаба 1:25 000 или 1:50 000, составлять описание их местонахождения, кроки и т.п.

Таблица 2

Радиусы зоны, км	Число пунктов	Ошибка определения, мгл
0–2 (центр)	1	1
2–9	5	1,5
9–23	7	2
23–48	9	3

8. Возможен другой путь для снижения случайных ошибок астрономо-гравиметрического нивелирования, а именно: сгущение сети астрономических пунктов триангуляции. Однако такой путь менее эффективен. Действительно, чтобы добиться того результата, который соответствует приведенной выше типовой схеме сгущения сети гравиметрических пунктов, т.е. повысить точность с  $1'',3$  до  $0'',5$ , пришлось бы число астрономических пунктов триангуляции увеличить в 7 раз  $\left[ \left( \frac{1'',3}{0'',5} \right)^2 \approx 7 \right]$ .

Однако в отдельных случаях к некоторому сгущению сети астрономических пунктов придется прибегать, например, в случае, если линия астрономо-гравиметрического нивелирования проходит настолько близко к государственной границе, что точность определения гравиметрической поправки начинает лимитироваться недостаточной шириной полосы гравиметрической съемки (малое значение  $\rho$ ). Особенно это относится к тем случаям, когда поблизости имеются горы, сопровождающиеся всегда большими аномалиями силы тяжести (большое значение  $\Delta g_m$ ). В этих случаях сгущение сети астрономических пунктов может оказаться неизбежным.

9. Для основных магистралей астрономо-гравиметрического нивелирования значение  $\rho$  лучше повысить до 4, чтобы снизить предельную ошибку до  $0,007 \Delta g_m$  (т.е. считать нормальной ширину полосы покрытия съемкой в  $8l \approx 280$  км), так как при наличии общей съемки это ни к чему не обязывает, кроме небольшого увеличения камеральных работ. Во всех остальных случаях  $\rho$  не должно быть менее 2, т.е. при расстоянии между астрономическими пунктами в 70 км гравиметрическая съемка должна распространяться в каждую сторону от ходовой линии нивелирования на расстояние не менее 70 км. Если

$\rho < 2$ , то в случае, когда нельзя расширить гравиметрическую съемку, придется сгущать сеть астрономических пунктов настолько, чтобы  $\rho$  было не менее 2.

10. Поскольку к точности определения дополнительных к общей съемке гравиметрических пунктов предъявляются весьма умеренные требования (около 1 мгл), вопрос об обеспечении инструментами разрешается вполне удовлетворительно. В частности, можно рассчитывать на применение гравиметров отечественного производства серийного выпуска (ГКМ, ВИРГ и др.). Чтобы ошибка определения высоты не сказывалась заметным образом на точности аномалии силы тяжести, достаточно определять высоты с такой точностью, при которой ошибка редукции за высоту составляет половину ошибки измерения силы тяжести. Например, при точности измерения в 1 мгл высота должна быть известна с ошибкой до  $\pm 1,5$  м, при точности в 2 мгл —  $\pm 3$  м и т.д. (по отношению к любому пункту, общему для всех гравиметрических пунктов одной группы сгущения). Предъявлять к точности определения высот более строгие требования не следует, так как с применением гравиметров определение силы тяжести становится задачей более легкой, чем измерение высоты.

Точность определения координат должна быть рассчитана в рассматриваемой задаче не на точность учета нормальной силы тяжести, а на правильность передачи взаимного положения пунктов съемки сгущения без существенного искажения величин горизонтальных градиентов. Абсолютная величина ошибки в положении близко расположенных друг от друга пунктов должна быть меньше, чем для пунктов удаленных. Поэтому естественно исходить из относительной погрешности во взаимном положении пунктов, задавшись разумной величиной этой погрешности и не предъявляя завышенных требований, которые могут без нужды усложнить всю работу. Если ошибка во взаимном положении пунктов не будет превышать 5%, то требуемая точность получения гравиметрической поправки будет обеспечена, даже при величине поправки до 5–10". Эти соображения должны определять способы получения высот и координат.

11. Необходимо обратить внимание еще на одно обстоятельство. Главной частью гравиметрической поправки при астрономо-гравиметрическом нивелировании является разность уклонений отвеса для соседних астрономических пунктов. Главный член получится правильно, если каждая из групп гравиметрических пунктов, концентрирующаяся вокруг соответствующего астрономического пункта, даже совсем гравиметрически не связана с другой (и если учитывается влияние областей, ограниченных окружностью с центром в астрономическом пункте). Второй член гравиметрической поправки определяет разность высот геоида по формуле Стокса для тех же астрономических пунктов. С точки зрения учета этого члена разность средних аномалий  $\delta g$  между соседними группами уже имеет существенное значение. Действительно, ей в гравиметрической поправке к среднему наклону будет соответствовать выражение

$$\frac{\delta g}{\gamma} \frac{r}{2l},$$

где  $r$  — радиус области, для которой получено  $\delta g$  (в данном случае  $r$  — радиус области сгущения сети гравиметрических пунктов), приблизительно  $r = l$ . Этот член составляет менее 0",2 при  $\delta g < 2$  мгл.

Таким образом, следует предъявить требование, чтобы соседние группы съемок сгущения имели взаимную гравиметрическую связь с ошибкой не более 3 мгл. Такое требование относится только к соседним группам, обслуживающим концы одного звена. По мере наращивания таких звеньев ошибки будут накапливаться; для устранения этого обстоятельства и для привязки к системе общей съемки следует привязывать съемки сгущения к 2–4 пунктам общей съемки, приходящимся на область сгущения, выбирая такие пункты,

которые могут быть уверенно опознаны и отнесены в каталоге к более высокому классу или категории. Это обеспечит привязку специальных пунктов к общей сети с точностью не ниже 3 мгл, что следует считать достаточным. Очевидно, что и ошибки исходных высотных отметок соседних групп могут различаться до 3 м.

12. При проектировании географического размещения линий астрономо-гравиметрического нивелирования повышенной точности пока, до накопления опыта в проведении подобных работ, нет нужды проектировать то, что не является делом ближайшего будущего. Ближайшая же, первоочередная задача определяется огромной протяженностью Советского Союза в направлении с запада на восток и вполне очевидна: нужно прежде всего создать цепь полигонов от западной границы Союза до побережья Тихого океана, так как уже одно это мероприятие, необходимость которого бесспорна, принесет существенную пользу и будет способствовать уменьшению систематических ошибок в триангуляции.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Молоденский М.С.* // Труды ЦНИИГАиК. 1950. Вып. 75.
2. *Молоденский М.С.* Основные вопросы геодезической гравиметрии. // Труды ЦНИИГАиК. 1945. Вып. 42.
3. *Еремеев В.Ф.* Сравнение двух способов астрономо-гравиметрического нивелирования. // Труды ЦНИИГАиК. 1950. Вып. 75.
4. *Красовский Ф.Н.* Руководство по высшей геодезии. — М.: Геодиздат. 1942. Ч. II. С.309.

# МЕТОД СОВМЕСТНОЙ ОБРАБОТКИ ГРАВИМЕТРИЧЕСКИХ И ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ И ЕЕ ФИГУРЫ\*

1. Для изучения фигуры и гравитационного поля Земли в целом гравиметрические и астрономо-геодезические материалы используются раздельно и приводят к независимым выводам. Однако еще Ф.А.Слудский [5] рекомендовал использовать их в совместной обработке, что восполняет пробелы в гравиметрической и геодезической изученности мира и согласует в одном выводе все имеющиеся материалы.

До настоящего времени не было предложено способов, от применения которых можно ожидать успеха при современном состоянии гравиметрических и геодезических работ во всем мире. В работах [2, 3] астрономо-геодезические материалы используются в форме уклонений отвесной линии или высот геоида, в связи с чем каждая изолированная геодезическая сеть вносит в решение задачи три дополнительные неизвестные величины, зависящие от ориентировки местного референц-эллипсоида. Вместе с неизвестными, характеризующими гравитационное поле в неизученных областях Земли, общее количество подлежащих определению неизвестных становится столь большим, что на сколько-нибудь надежное решение задачи надеяться не приходится. В работе [1] гравиметрические материалы использованы только для учета местных влияний на уклонение отвесной линии. Это привело лишь к лучшему согласованию соседних групп астрономических пунктов и уменьшению случайных ошибок, окончательный же вывод остается геометрическим, поскольку гравиметрические материалы играли в нем вспомогательную роль и существенно не влияли на характер решения.

Такое положение нельзя признать нормальным, так как выполненная часть мировой гравиметрической съемки покрывает уже настолько большую площадь, что вес ее в выводах о фигуре Земли не может быть меньше веса существующих градусных измерений мира.

2. Рассматриваемая задача настолько важна, что несмотря на неудачу имевшихся попыток следует предпринять новые. В условиях геодезических работ, проводимых в Советском Союзе, при наличии общей гравиметрической съемки страны знание первых десяти коэффициентов в разложении гравитационных аномалий по сферическим функциям имело бы большое практическое значение, так как позволило бы перейти к полным гравиметрическим уклонениям отвесной линии и к установлению связи между изолированными триангуляциями [4]. Не менее важно значение этих коэффициентов для характеристики общих черт строения земной коры на материках и в океанах. Задачу целесообразно ставить таким образом, чтобы определялись непосредственно эти коэффициенты и только они, без дополнительных неизвестных. Но в таком случае геодезические материалы ни в форме уклонений отвесной линии, ни в форме высот геоида использовать нельзя. Надо перейти к таким геодезическим характеристикам, которые не зависят от ориентировки

---

\* Труды ЦНИИГАиК. 1951. Вып. 86.

От редакции. Здесь воспроизводится с небольшими исправлениями текст статьи М.С.Молоденского, опубликованной в Сборнике ГУТК, вып. XXX. С. 3–10.

местных отсчетных систем, т.е., в первую очередь, к радиусам кривизны геоида. Конечно, поскольку речь идет об исследовании лишь первых сферических гармоник, должны использоваться средние кривизны геоида для достаточно больших площадей.

Такой подход к задаче является совершенно естественным. Действительно, определение двух полуосей эллипсоида вращения, наиболее подходящего к данной территории, эквивалентно нахождению значений средней кривизны геоида для этой территории в направлении меридиана и первого вертикала. Таким образом, уже выполненные определения элементов местных эллипсоидов можно использовать для определения значений средней кривизны геоида для этих территорий.

3. Нетрудно получить соотношения, связывающие кривизны геоида с его отклонениями от эллипсоида относимости по высоте и с соответствующими аномалиями силы тяжести.

Обозначим через  $\rho(\vartheta, \lambda)$  расстояние от точек геоида до центра эллипсоида относимости, заданное в функции геоцентрического полярного расстояния  $\vartheta$  и долготы  $\lambda$ . В таком случае радиус кривизны сечения геоида плоскостью меридиана ( $\lambda = \text{const}$ ) выражается известной формулой:

$$M = \frac{(\rho^2 + \rho'_{\vartheta})^{3/2}}{\rho^2 + 2\rho'_{\vartheta}{}^2 - \rho\rho''_{\vartheta\vartheta}}. \quad (1)$$

Представим  $\rho(\vartheta, \lambda)$  суммой расстояния  $\rho_0(\vartheta, \lambda)$  от центра эллипсоида относимости до его поверхности и  $\sigma(\vartheta, \lambda)$  — расстояния от его поверхности до геоида:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \sigma, \\ M &= \frac{[(\rho_0 + \sigma)^2 + (\rho'_0 + \sigma'_{\vartheta})^2]^{3/2}}{(\rho_0 + \sigma)^2 + 2(\rho'_0 + \sigma'_{\vartheta})^2 - (\rho_0 + \sigma)(\rho''_{\vartheta\vartheta} + \sigma''_{\vartheta\vartheta})}. \end{aligned} \quad (2)$$

Разлагая  $M$  в ряд Тейлора по степеням  $\sigma$ ,  $\sigma'_{\vartheta}$ ,  $\sigma''_{\vartheta\vartheta}$  и обозначая через  $M_0$  значение  $M$  при  $\sigma = \sigma'_{\vartheta} = \sigma''_{\vartheta\vartheta} = 0$ , получим

$$\begin{aligned} M &= M_0 + \left(\frac{\partial M}{\partial \sigma}\right)_0 \sigma + \left(\frac{\partial M}{\partial \sigma'_{\vartheta}}\right)_0 \sigma'_{\vartheta} + \left(\frac{\partial M}{\partial \sigma''_{\vartheta\vartheta}}\right)_0 \sigma''_{\vartheta\vartheta} + \dots = \\ &= M_0 + M_0 \left[ \frac{3\rho}{\rho^2 + \rho'^2} - \frac{2\rho - \rho''_{\vartheta\vartheta}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''} \right] \sigma + \\ &+ M_0 \left[ \frac{3\rho'}{\rho^2 + \rho'^2} - \frac{4\rho'}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''} \right] \sigma'_{\vartheta} + M_0 \left[ \frac{\rho}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''} \right] \sigma''_{\vartheta\vartheta} \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Следующие члены ряда не превышают величин порядка  $(\sigma/\rho_0)^3$ . Принимая во внимание, что  $\rho'_0$  и  $\rho''_0$  — величины порядка сжатия эллипсоида (для сферы эти производные исчезают), и ограничиваясь той точностью, которую дает формула Стокса и ряд Стокса–Пуанкаре (т.е. отбрасывая члены порядка произведения высоты геоида на сжатие), получаем

$$M = M_0 \left( 1 + \frac{\sigma}{R} + \frac{\sigma''_{\vartheta\vartheta}}{R} \right), \quad (4)$$

где  $R$  — средний радиус Земли.

4. Радиус кривизны  $N$  сечения геоида плоскостью первого вертикала эллипсоида относимости (такое сечение в пределах точности наших выводов можно считать для

геоида нормальным) по теореме Менье просто выражается через кривизну  $L$  наклонного сечения, проходящего через центр эллипсоида:

$$N = L \sec(90^\circ - \vartheta - \varphi),$$

где  $\varphi$  — геодезическая широта.

$L$  через  $\sigma$  и угол  $\psi$ , отсчитываемый от направления на исследуемую точку в плоскости рассматриваемого сечения, может быть выражен так же, как  $M$ , через  $\sigma$  и  $\vartheta$  (формула (4)):

$$L = L_0 \left( 1 + \frac{\sigma}{R} + \frac{\sigma''_{\psi\psi}}{R} \right).$$

Следовательно,

$$N = N_0 \left( 1 + \frac{\sigma}{R} + \frac{\sigma''_{\psi\psi}}{R} \right), \quad (5)$$

так как

$$L_0 \sec(90^\circ - \vartheta - \varphi) = N_0.$$

Остается от производных по  $\psi$  перейти к производным по геоцентрическому полярному расстоянию  $\vartheta$  и долготе  $\lambda$ .  $\psi$  является функцией от  $\vartheta$  и  $\lambda$ , поэтому

$$\begin{aligned} \sigma'_{\psi} &= \sigma'_{\vartheta} \vartheta'_{\psi} + \sigma'_{\lambda} \lambda'_{\psi}, \\ \sigma''_{\psi\psi} &= \sigma''_{\lambda\lambda} \lambda'^2_{\psi} + 2\sigma_{\lambda\vartheta} \lambda'_{\psi} \vartheta'_{\psi} + \sigma''_{\vartheta\vartheta} \vartheta'^2_{\psi} + \sigma'_{\lambda} \lambda''_{\psi\psi} + \sigma'_{\vartheta} \vartheta''_{\psi\psi}. \end{aligned} \quad (6)$$

Применяя формулы сферической тригонометрии к треугольнику, изображенному на рисунке, получаем

$$\vartheta'_{\psi} = \cos \beta, \quad \lambda'_{\psi} = \sin \beta \operatorname{cosec} \vartheta, \quad \beta'_{\psi} = -\sin \beta \operatorname{ctg} \vartheta,$$

$$\lambda''_{\psi\psi} = -\frac{\sin 2\beta \cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta}, \quad \vartheta''_{\psi\psi} = \sin^2 \beta \operatorname{ctg} \vartheta.$$

Для точки  $A$   $\psi = 0$  и  $\beta = \pi/2$ , поэтому

$$\vartheta'_{\psi} = 0, \quad \lambda'_{\psi} = \operatorname{cosec} \vartheta, \quad \vartheta''_{\psi\psi} = \operatorname{ctg} \vartheta, \quad \lambda''_{\psi\psi} = 0.$$

Подставляя эти значения в формулу (6), получаем

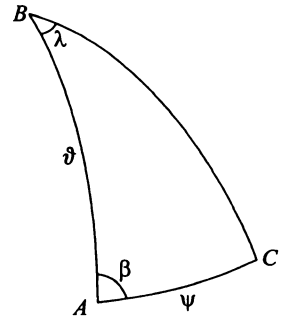
$$\sigma''_{\psi\psi} = \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \sigma''_{\lambda\lambda} + \sigma'_{\vartheta} \operatorname{ctg} \vartheta. \quad (7)$$

Следовательно, формула (5) через производные по  $\lambda$  и  $\vartheta$  может быть записана так:

$$N = N_0 \left( 1 + \frac{\sigma}{R} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\sigma''_{\lambda\lambda}}{R} + \operatorname{ctg} \vartheta \frac{\sigma'_{\vartheta}}{R} \right). \quad (8)$$

5. Из (8) и (4) получаем выражения для аномалии средней кривизны:

$$\left( \frac{1}{M} + \frac{1}{N} \right) - \left( \frac{1}{M_0} + \frac{1}{N_0} \right) = -\frac{1}{R^2} \left[ \frac{\sigma''_{\lambda\lambda}}{\sin^2 \vartheta} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \sigma'_{\vartheta}) + 2\sigma \right], \quad (9)$$



и для аномалии разности значений кривизны:

$$\left(\frac{1}{M} - \frac{1}{N}\right) - \left(\frac{1}{M_0} - \frac{1}{N_0}\right) = -\frac{1}{R^2} \left[ \frac{\sigma''_{\lambda\lambda}}{\sin^2 \vartheta} + \operatorname{ctg} \vartheta \sigma'_\vartheta - \sigma''_{\vartheta\vartheta} \right]. \quad (10)$$

Введем в рассмотрение пространственную функцию  $\Sigma(r, \vartheta, \lambda)$ , на сфере радиуса  $R$  совпадающую с функцией  $\sigma(\vartheta, \lambda)$ :

$$\Sigma(R, \vartheta, \lambda) = \sigma(\vartheta, \lambda).$$

Из выражения для оператора Лапласа в сферических координатах для точек сферы радиуса  $R$  получаем

$$\left[ \Delta \Sigma - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial r} \right) \right]_{r=R} = \frac{1}{R^2} \left[ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial \Sigma}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \lambda^2} \right]. \quad (11)$$

Правая часть этого равенства входит в формулу (9) и может быть заменена левой частью. Наиболее простой результат получится в том случае, когда функция  $\Sigma$  является гармонической (внутри или вне сферы  $R$  — безразлично).

Чтобы построить такую функцию, разложим  $\sigma$  по сферическим функциям:

$$\sigma = \sum_0^{\infty} \sigma_n,$$

и определим  $\Sigma$  следующим образом:

$$\Sigma = \sum_0^{\infty} \frac{R^{n+1}}{r^{n+1}} \sigma_n.$$

6. Следовательно,

$$\Delta \Sigma = 0, \quad \left[ -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial r} \right) \right]_{r=R} = \sum_0^{\infty} -n(n+1) \sigma_n \frac{1}{R^2}. \quad (12)$$

Теперь из выражения (9) с помощью (11) и (12) получаем

$$\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{N}\right) - \left(\frac{1}{M_0} + \frac{1}{N_0}\right) = \frac{1}{R^2} \sum_0^{\infty} [n(n+1) - 2] \sigma_n = \frac{1}{R^2} \sum_0^{\infty} (n-1)(n+2) \sigma_n, \quad (13)$$

а из (10) с помощью тех же формул имеем

$$\left(\frac{1}{M} - \frac{1}{N}\right) - \left(\frac{1}{M_0} - \frac{1}{N_0}\right) = -\frac{1}{R^2} \left( \sum_0^{\infty} n(n+1) \sigma_n + 2\sigma''_{\vartheta\vartheta} \right). \quad (14)$$

Как и следовало ожидать, формулы (13) и (14) не содержат сферической функции первого порядка  $\sigma_1$ .

Выражение (13) для аномалии средней кривизны можно вывести из известных теорем гравиметрии.

Напишем формулу Брунса для точки, лежащей на геоиде:

$$g_r \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{N} \right) + \left( \frac{\partial g}{\partial n} \right)_r = -2\omega^2. \quad (15)$$



Здесь  $g_r$  — ускорение силы тяжести на поверхности геоида в исследуемой точке,  $n$  — направление внешней нормали к геоиду,  $\omega$  — угловая скорость вращения Земли, остальные обозначения прежние. Для проекции той же точки на эллипсоид имеем

$$\gamma_3 \left( \frac{1}{M_0} + \frac{1}{N_0} \right) + \left( \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} \right)_3 = -2\omega^2. \quad (16)$$

Здесь  $\gamma_3$  — нормальное ускорение силы тяжести на эллипсоиде,  $\nu$  — направление внешней нормали к эллипсоиду. Различия между направлениями  $n$  и  $\nu$  можно в дальнейшем не делать, так как это приводит к относительной погрешности порядка лишь квадрата отношения аномалии к полному значению силы тяжести.

Вычитая из (15) выражение (16), получим

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{N} \right) - \left( \frac{1}{M_0} + \frac{1}{N_0} \right) &= -\frac{g_r - \gamma_3}{\gamma} \left( \frac{1}{M_0} + \frac{1}{N_0} \right) - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial(g_r - \gamma_3)}{\partial \nu} \approx \\ &\approx \frac{-2(g_r - \gamma_3)}{R\gamma} - \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\partial g}{\partial R} \right)_r + \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\partial \gamma}{\partial R} \right)_3. \end{aligned} \quad (17)$$

Все члены этой формулы — малые величины порядка аномалии, поэтому можно не считаться со сжатием и принимать поверхность относимости за сферу.

Выразим величины, входящие в правую часть формулы (17), через возмущающий потенциал  $T$ . Как известно,

$$\begin{aligned} g_r - \gamma_3 &= - \left( \frac{\partial T}{\partial R} + \frac{2T}{R} \right), \\ \left( \frac{\partial \gamma}{\partial R} \right)_3 &= \left( \frac{\partial \gamma}{\partial R} \right)_r - \zeta \frac{\partial^2 \gamma}{\partial R^2} = \left( \frac{\partial \gamma}{\partial R} \right)_r - \frac{6T}{R^2}, \\ \left( \frac{\partial g}{\partial R} \right)_r &= \left( \frac{\partial \gamma}{\partial R} \right)_r - \frac{\partial^2 T}{\partial R^2}. \end{aligned}$$

Используя эти выражения, получаем

$$\left( \frac{1}{M} + \frac{1}{N} \right) - \left( \frac{1}{M_0} + \frac{1}{N_0} \right) = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial^2 T}{\partial R^2} + \frac{2}{R\gamma} \frac{\partial T}{\partial R} - \frac{2T}{R^2\gamma}. \quad (18)$$

Если возмущающий потенциал вычислен относительно того референц-эллипсоида, которому соответствует  $\sigma$ , то  $T = \gamma\sigma$  и после разложения по сферическим функциям формула (18) совпадает с (13).

7. С помощью известных формул высшей геодезии левые части формул (13) и (14) легко выражаются через элементы эллипсоида, наилучшим образом подходящего к геоиду на данной территории. Как известно,

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{M} &= \frac{(1 - e^2 \cos^2 \vartheta)^{3/2}}{a(1 - e^2)}, \\ \frac{1}{N} &= \frac{(1 - e^2 \cos^2 \vartheta)^{1/2}}{a}, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

где  $e$  — эксцентриситет, а  $a$  — большая полуось эллипсоида.

Если полуоси  $a_0$  и эксцентриситету  $e$  соответствуют на данной широте радиусы кривизны  $M_0$  и  $N_0$ , а полуоси  $a_0 + \Delta a$  и эксцентриситету  $e + \Delta e$  — радиусы  $M$  и  $N$ , то путем дифференцирования формулы (19) устанавливаем связь между этими величинами:

$$\begin{aligned}\frac{1}{M} &= \frac{1}{M_0} + \frac{1}{a}(2 - 3 \cos^2 \vartheta) e \Delta e - \frac{\Delta a}{a^2}, \\ \frac{1}{N} &= \frac{1}{N_0} - \frac{1}{a} \cos^2 \vartheta e \Delta e - \frac{\Delta a}{a^2}.\end{aligned}$$

Принимая во внимание, что  $e \Delta e = \Delta \alpha$  ( $\alpha$  — сжатие), получаем

$$\left. \begin{aligned}\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{N}\right) - \left(\frac{1}{M_0} + \frac{1}{N_0}\right) &= -\frac{2}{a} \cos 2\vartheta \Delta \alpha - \frac{2 \Delta a}{a^2}, \\ \left(\frac{1}{M} - \frac{1}{N}\right) - \left(\frac{1}{M_0} - \frac{1}{N_0}\right) &= \frac{2}{a} \sin^2 \vartheta \Delta \alpha.\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Таким образом, уравнения (13) и (14) можно записать так:

$$\cos 2\vartheta \Delta \alpha + \frac{\Delta a}{a} = -\frac{1}{2R} \sum_0^{\infty} (n-1)(n+2)\sigma_n, \quad (21)$$

$$\sin^2 \vartheta \Delta \alpha = -\frac{1}{2R} \left[ \sum_0^{\infty} n(n+1)\sigma_n + 2\sigma''_{\vartheta\vartheta} \right]. \quad (22)$$

8. Высоты геоида  $\sigma$ , отсчитанные от местной поверхности относимости, могут отличаться от высот  $\zeta$ , полученных гравиметрическим путем, только из-за различия: 1) ориентировки эллипсоидов, 2) их сжатия, 3) размера больших полуосей, 4) из-за наличия случайных и систематических ошибок в гравиметрических и астрономо-геодезических материалах.

Первое обстоятельство в нашем методе никакой роли играть не может, т.к. от ориентировки эллипсоидов значения кривизны геоида не зависят. Второе не будет играть роли, если аномалии силы тяжести и аномалии значений кривизны вычисляются с общим значением сжатия. Наконец, гравиметрические и астрономо-геодезические высоты полностью совпадут, если относить астрономо-геодезические высоты к эллипсоиду, имеющему равный с геоидом объем, а аномалии силы тяжести вычислять с таким значением экваториальной постоянной, которая правильно характеризует массу Земли. Иначе говоря, в уравнении (21) мы должны под  $\Delta$  подразумевать следующую величину:

$$\Delta a = a(\vartheta, \lambda) - \bar{a} = [a(\vartheta, \lambda) - a_0] + (a_0 - \bar{a}) = \Delta a(\vartheta, \lambda) + \Delta \bar{a}, \quad (23)$$

где  $\bar{a}$  — полуось общего земного эллипсоида, равного по своему объему геоиду,  $\Delta a(\vartheta, \lambda)$  — известная величина и  $\Delta \bar{a}$  — искомая поправка (величина постоянная).

Точно так же мы должны написать:

$$\overline{\Delta g} = g_0 - \bar{\gamma} = (g_0 - \gamma) + (\gamma - \bar{\gamma}) = \Delta g + \Delta \gamma, \quad (24)$$

где  $\Delta \gamma$  — поправка к экваториальной постоянной нормальной формулы. После этого можно будет положить

$$\sigma = \zeta = \frac{T}{\gamma}, \quad \overline{\Delta g} = \Delta g + \Delta \gamma = \frac{1}{R} \sum_2^{\infty} (n-1)T_n.$$

Таким образом, мы получаем следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\gamma} \sum_2^{\infty} (n-1)(n+2)T_n + \Delta\bar{a} &= -\cos 2\vartheta \cdot R\Delta\alpha - \Delta a, \\ \frac{1}{2\gamma} \sum_2^{\infty} n(n+1)T_n + 2T''_{\vartheta\vartheta} &= -\sin^2 \vartheta \cdot R\Delta\alpha, \\ \frac{1}{R} \sum_2^{\infty} (n-1)T_n - \Delta\gamma &= \Delta g. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

9. Как уже говорилось вначале, можно считать большим успехом, если удастся надежно определить коэффициенты, входящие в сферические функции 2-го и 3-го порядка разложения потенциала. В этом случае система (25) будет содержать всего 12 неизвестных:  $\Delta\bar{a}$ ,  $\Delta\gamma$ , три коэффициента сферической функции 2-го порядка и семь — 3-го порядка.

Уравнения (25) получат следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\gamma} (4T_2 + 10T_3) + \Delta\bar{a} &= -\cos 2\vartheta \cdot R\Delta\alpha - \Delta a, \\ \frac{1}{2\gamma} \left( 6T_2 + 2\frac{\partial^2 T_2}{\partial\vartheta^2} + 12T_3 + 2\frac{\partial^2 T_3}{\partial\vartheta^2} \right) &= -\sin^2 \vartheta \cdot R\Delta\alpha, \\ \frac{1}{R} (T_2 + 2T_3) - \Delta\gamma &= \Delta g, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

где

$$\left. \begin{aligned} T_2 &= a_{20}P_2 + a_{22}P_2^2 \cos 2\lambda + b_{22}P_2^2 \sin 2\lambda, \\ T_3 &= a_{30}P_3 + a_{31}P_3^1 \cos \lambda + b_{31}P_3^1 \sin \lambda + a_{32}P_3^2 \cos 2\lambda + \\ &+ b_{32}P_3^2 \sin 2\lambda + a_{33}P_3^3 \cos 3\lambda + b_{33}P_3^3 \sin 3\lambda, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$P_n^M$  — присоединенные функции Лежандра.

10. В последнем из уравнений (26) под  $\delta g$  подразумевается, конечно, усредненное значение аномалии в свободном воздухе. Размер площади, для которой выводится среднее значение, должен соответствовать размеру участка геоида, для которых получены значения полюси и сжатия соответствующего эллипсоида. Вместе с тем эти площади должны быть достаточно малы по сравнению с протяженностью волн 3-го порядка (например, 8–10° по широте и соответственно больше по долготе).

Вопрос о соотношении весов первых двух уравнений с третьим подлежит специальному изучению.

После того как все неизвестные, входящие в уравнения (26), будут определены, можно вычислить положение местных эллипсоидов относительно общего (центрально расположенного) земного эллипсоида и, следовательно, свести в общую систему изолированные геодезические сети.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Изотов А.А.* Форма и размеры Земли по современным данным. // Труды ЦНИИГАиК. 1950. Вып. 73.
2. *Магницкий В.А.* Исследование широких волн геоида путем совместного использования геодезических и гравиметрических данных. // Известия АН СССР, серия географическая и геофизическая. 1948. Т. XII. №3.
3. *Мигаль Н.К.* Об определении аномалий силы тяжести по астрономо-геодезическим уклонениям отвеса. // Доклады АН СССР, нов. серия. 1938. Т. XXI. №5.
4. *Молоденский М.С.* Основные вопросы геодезической гравиметрии. // Труды ЦНИИГАиК. 1945. Вып. 42.
5. *Слудский Ф.А.* Общая теория фигуры Земли. — М. 1888.

# НОВЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ\*

## Введение

В пределах очень небольшого участка земной поверхности направления отвесных линий можно считать перпендикулярными общей для всего участка горизонтальной плоскости. По мере увеличения размера территории приходится считаться с непараллельностью отвесных линий. В первом приближении принимают, что отвесные линии сходятся в одной точке, во втором приближении — что они нормальны к поверхности некоторого эллипсоида и, наконец, приходится изучать гравитационное поле Земли и учитывать его отличие от «эллипсоидального» поля. В соответствии с этим «геодезия плоскости» уступает место «сферической», затем «сфероидической» геодезии. Общий случай редуцируется к сфероидическому (точнее говоря, используется сфероидическая система координат).

Для плоскости и сферы решение всех геодезических задач выражается простыми и точными формулами. В сфероидической геодезии приходится прибегать к бесконечным рядам. Как правило, структура этих рядов сложна, общий член ряда остается неизвестным. С изменением длин сторон сфероидического треугольника обычно меняется не только структура рядов, но и методы решения задач. Поэтому очень простая в принципиальном отношении геометрия сфероида загромождается многочисленными вариантами решения одних и тех же задач. Такое положение является результатом построения фигур с помощью кривых линий, целиком лежащих на поверхности эллипсоида (обычно с помощью геодезических линий эллипсоида). В этом случае применение специальных функций. практически же бесконечных рядов, становится неизбежным.

Необходимость знания длин геодезических линий или длин каких-либо других кривых на эллипсоиде встречается в технике сравнительно редко, а требования к точности в этих случаях бывают невысоки. Замена же сфероидических треугольников соответствующими им плоскими треугольниками, состоящими из хорд эллипсоида, должна привести к замене решений в виде бесконечных рядов точными решениями замкнутого вида в элементарных функциях. Такая замена будет способствовать упрощению всех выводов и сосредоточению внимания на принципиальной стороне дела.

В настоящей статье эта точка зрения проводится последовательно на всех этапах обработки геодезических материалов, начиная с редуцированных задач и кончая градусными измерениями.

## 1. Геодезическая система ортогональных криволинейных координат

Положение в пространстве точки  $A(x, y, z)$  определим ее криволинейными координатами  $H$ ,  $B$  и  $L$ . За координату  $H$  примем расстояние точки  $A$  от эллипсоида вращения («отсчетного эллипсоида»):

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad (1)$$

$a$  и  $b$  — полуоси эллипсоида.

\* Труды ЦНИИГАиК. 1954. Вып. 103. С. 3–21.

Направление нормали к эллипсоиду (1), проходящей через точку  $A$ , вдоль которой отсчитывается высота  $H$ , определим углом с плоскостью  $z = 0$  (геодезической широтой  $B$ ) и углом меридианной плоскости точки  $A$  с плоскостью  $y = 0$  (геодезической долготой  $L$ ). Прямоугольные координаты  $x_0, y_0, z_0$  основания отрезка  $H$ , лежащего на эллипсоиде (1), выражаются через  $B$  и  $L$  известными формулами:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= N \cos B \cos L, \\ y_0 &= N \cos B \sin L, \\ z_0 &= \frac{b^2}{a^2} N \sin B, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где

$$N = \frac{a^2}{p}, \quad p^2 = a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B. \quad (3)$$

Из уравнения прямой, проходящей через точку  $(x_0, y_0, z_0)$  и нормальной к эллипсоиду (1):

$$\frac{x - x_0}{\cos B \cos L} = \frac{y - y_0}{\cos B \sin L} = \frac{z - z_0}{\sin B} = H, \quad (4)$$

непосредственно получаются формулы перехода от криволинейных координат к прямоугольным:

$$\left. \begin{aligned} x &= (N + H) \cos B \cos L, \\ y &= (N + H) \cos B \sin L, \\ z_0 &= \left( \frac{b^2}{a^2} N + H \right) \sin B. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Покажем, что система координат (5) является ортогональной. С помощью формулы (3) получаем две вспомогательные формулы:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dB} (N \cos B) &= -M \sin B, \\ \frac{d}{dB} \left( \frac{b^2}{a^2} N \sin B \right) &= M \cos B, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где

$$M = \frac{a^2 b^2}{p^3}.$$

Эти формулы позволяют легко определить производные от  $x, y, z$  по  $B, L$  и  $H$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial B} &= -(M + H) \sin B \cos L; \\ \frac{\partial x}{\partial L} &= -(N + H) \cos B \sin L; \quad \frac{\partial x}{\partial H} = \cos B \cos L; \\ \frac{\partial y}{\partial B} &= -(M + H) \sin B \sin L; \\ \frac{\partial y}{\partial L} &= +(N + H) \cos B \cos L; \quad \frac{\partial y}{\partial H} = \cos B \sin L; \\ \frac{\partial z}{\partial B} &= (M + H) \cos B; \quad \frac{\partial z}{\partial L} = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial H} = \sin B. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Из формул (7) получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial B} \cdot \frac{\partial x}{\partial L} + \frac{\partial y}{\partial B} \cdot \frac{\partial y}{\partial L} + \frac{\partial z}{\partial B} \cdot \frac{\partial z}{\partial L} &= 0, \\ \frac{\partial x}{\partial L} \cdot \frac{\partial x}{\partial H} + \frac{\partial y}{\partial L} \cdot \frac{\partial y}{\partial H} + \frac{\partial z}{\partial L} \cdot \frac{\partial z}{\partial H} &= 0, \\ \frac{\partial x}{\partial H} \cdot \frac{\partial x}{\partial B} + \frac{\partial y}{\partial H} \cdot \frac{\partial y}{\partial B} + \frac{\partial z}{\partial H} \cdot \frac{\partial z}{\partial B} &= 0, \\ \left( \frac{\partial x}{\partial B} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial B} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial B} \right)^2 &= (M + H)^2, \\ \left( \frac{\partial x}{\partial L} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial L} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial L} \right)^2 &= (N + H)^2 \cos^2 B, \\ \left( \frac{\partial x}{\partial H} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial H} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial H} \right)^2 &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Из первых трех формул следует, что система координат  $B, L, H$  является ортогональной. Тогда из последних трех формул выражение для дифференциала длины  $ds$  любой пространственной кривой получится следующим:

$$ds^2 = (M + H)^2 (dB)^2 + (N + H)^2 \cos^2 B (dL)^2 + (dH)^2. \quad (9)$$

Направление элемента длины  $ds$  можно определить его зенитным расстоянием  $z$  и азимутом  $A$  нормальной плоскости (в которой лежит это направление), отсчитываемыми от геодезических зенита и меридиана. Проектируя отрезок  $ds$  на координатные линии и принимая во внимание (9), получаем

$$\left. \begin{aligned} \cos z \, ds &= dH, \\ \sin z \cos A \, ds &= (M + H) \, dB, \\ \sin z \sin A \, ds &= (N + H) \cos B \, dL. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Следовательно,

$$\sin z \, ds = (M + H) \cos A \, dB + (N + H) \sin A \cos B \, dL. \quad (11)$$

Радиусы кривизны поверхности  $H = \text{const}$  выражаются через коэффициенты второй квадратичной формы:

$$\begin{aligned} \frac{(ds)^2}{R} &= \left( \frac{\partial x}{\partial B} \cdot \frac{\partial n_x}{\partial B} + \frac{\partial y}{\partial B} \cdot \frac{\partial n_y}{\partial B} + \frac{\partial z}{\partial B} \cdot \frac{\partial n_z}{\partial B} \right) (dB)^2 + \\ &+ \left( \frac{\partial x}{\partial L} \cdot \frac{\partial n_x}{\partial L} + \frac{\partial y}{\partial L} \cdot \frac{\partial n_y}{\partial L} + \frac{\partial z}{\partial L} \cdot \frac{\partial n_z}{\partial L} \right) (dL)^2 + \\ &+ 2 \left( \frac{\partial x}{\partial L} \cdot \frac{\partial n_x}{\partial B} + \frac{\partial y}{\partial L} \cdot \frac{\partial n_y}{\partial B} + \frac{\partial z}{\partial L} \cdot \frac{\partial n_z}{\partial B} \right) dL \, dB, \end{aligned}$$

где  $n_x, n_y, n_z$  — направляющие косинусы нормали к этой поверхности (формула (4)):

$$n_x = \cos B \cos L, \quad n_y = \cos B \sin L, \quad n_z = \sin B.$$

Выполнив вычисления, получим

$$\frac{(ds)^2}{R} = (M + H)(dB)^2 + (N + H) \cos^2 B (dL)^2.$$

При  $H = \text{const}$  в формулах (10)  $\sin z = 1$ , следовательно,

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 A}{M + H} + \frac{\sin^2 A}{N + H}. \quad (12)$$

Итак, радиус кривизны меридиана ( $A = 0$ ) равен  $M + H$ , радиус кривизны сечения поверхности  $H = \text{const}$  плоскостью первого вертикала ( $A = \pi/2$ ) равен  $N + H$ .

## 2. Основные формулы

Направление и длину отрезка  $s_{12}$ , соединяющего точки  $(x_1, y_1, z_1)$  и  $(x_2, y_2, z_2)$ , можно получить с помощью известной формулы

$$s_{12} = \frac{x_2 - x_1}{l_{12}} = \frac{y_2 - y_1}{m_{12}} = \frac{z_2 - z_1}{n_{12}}, \quad (13)$$

где  $l_{12}$ ,  $m_{12}$  и  $n_{12}$  — направляющие косинусы отрезка (косинусы углов с координатными осями  $x$ ,  $y$  и  $z$ ).

Плоскость  $y = 0$  совместим с меридианом первой точки и перейдем к криволинейным координатам с помощью формул (5), тогда получим

$$s_{12}l_{12} = (N_2 + H_2) \cos B_2 \cos(L_2 - L_1) - (N_1 + H_1) \cos B_1, \quad (14)$$

$$s_{12}m_{12} = (N_2 + H_2) \cos B_2 \sin(L_2 - L_1), \quad (15)$$

$$s_{12}n_{12} = \left( \frac{b^2}{a^2} N_2 + H_2 \right) \sin B_2 - \left( \frac{b^2}{a^2} N_1 + H_1 \right) \sin B_1. \quad (16)$$

Возведем каждое из написанных выражений в квадрат и сложим результаты. После простых преобразований получим

$$\begin{aligned} s_{12}^2 = & (N_1 + H_1)^2 + (N_2 + H_2)^2 - 2(N_1 + H_1)(N_2 + H_2) \cos \psi - \\ & - \frac{a^4 - b^4}{a^4} (N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1)^2 - \\ & - 2 \frac{a^2 - b^2}{a^2} (N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1)(H_2 \sin B_2 - H_1 \sin B_1), \end{aligned} \quad (17)$$

где  $\psi$  — угол между координатными линиями  $H_1$  и  $H_2$ , определяемый выражением

$$\cos \psi = \sin B_1 \sin B_2 + \cos B_1 \cos B_2 \cos(L_2 - L_1).$$

Если обе точки лежат на эллипсоиде, то  $H_1 = H_2 = 0$  и

$$s_{12}^2 = 4N_1N_2 \sin^2 \frac{\psi}{2} - \frac{a^4 - b^4}{a^4} (N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1)^2 + (N_2 - N_1)^2, \quad (18)$$



где

$$\sin^2 \frac{\psi}{2} = \sin^2 \frac{B_2 - B_1}{2} + \cos B_1 \cos B_2 \sin^2 \frac{L_2 - L_1}{2}. \quad (19)$$

В правой части равенства (18) первый член является главным, а каждый последующий — малым, порядка сжатия по сравнению с предыдущим.

Определим направление отрезка  $s_{12}$  в геодезической горизонтальной системе координат, т.е. выразим направляющие косинусы этого отрезка через зенитное расстояние  $z_{12}$  направления из первой на вторую точку (отсчитанное от геодезического зенита первой точки) и через геодезический азимут  $A_{12}$  этого направления (т.е. азимут плоскости, проходящей через отрезок  $s_{12}$  и геодезический зенит первой точки).

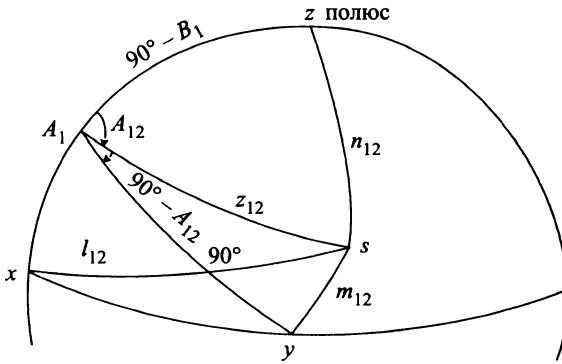


Рис. 1

На рис. 1 изображена сфера единичного радиуса. Точкой  $A_1$  отмечено положение геодезического зенита первой точки; точка  $s$  соответствует направлению отрезка  $s_{12}$ ; точки  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответствуют направлениям координатных осей.

Из сферического треугольника  $A_1xs$  получаем

$$l_{12} = \cos B_1 \cos z_{12} - \sin B_1 \sin z_{12} \cos A_{12}. \quad (20)$$

Из треугольника  $A_1ys$ :

$$m_{12} = \sin z_{12} \sin A_{12}. \quad (21)$$

Из треугольника  $A_1zs$ :

$$n_{12} = \sin B_1 \cos z_{12} + \cos B_1 \sin z_{12} \cos A_{12}. \quad (22)$$

Формулы (20), (21) и (22) можно записать в удобном для логарифмического вычисления виде. Введем вспомогательные функции:

$$h_{12} = \sin z_{12} \cos A_{12}, \quad (23)$$

$$\operatorname{tg} F_{12} = \frac{\cos z_{12}}{h_{12}}. \quad (24)$$

Тогда

$$l_{12} = \frac{h_{12}}{\cos F_{12}} \sin (F_{12} - B_1), \quad (25)$$

$$m_{12} = \sin z_{12} \sin A_{12}, \quad (26)$$

$$n_{12} = \frac{h_{12}}{\cos F_{12}} \cos (F_{12} - B_1). \quad (27)$$

Формулы (20)–(22) выражают направляющие косинусы отрезка  $s_{12}$  через горизонтальные координаты  $z_{12}$  и  $A_{12}$ . Разрешая эти формулы относительно  $z_{12}$  и  $A_{12}$ , получаем формулы для обратного перехода:

$$\cos z_{12} = \cos B_1 l_{12} + \sin B_1 n_{12}, \quad (28)$$

$$h_{12} = \sin z_{12} \cos A_{12} = \cos B_1 n_{12} - \sin B_1 l_{12}, \quad (29)$$

$$\operatorname{ctg} A_{12} = \frac{h_{12}}{m_{12}} = \frac{\cos B_1 n_{12} - \sin B_1 l_{12}}{m_{12}}. \quad (30)$$

Подставляя в последнюю формулу выражения направляющих косинусов через криволинейные координаты из (14), (15) и (16), получаем

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ctg} A_{12} &= \operatorname{ctg} \alpha_{12} + \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot \frac{N_1 \sin B_1 - N_2 \sin B_2}{(N_2 + H_2) \cos B_2 \sin(L_2 - L_1)} \cos B_1, \\ \operatorname{ctg} \alpha_{12} &= \cos B_1 \operatorname{tg} B_2 \operatorname{cosec}(L_2 - L_1) - \sin B_1 \operatorname{ctg}(L_2 - L_1) = \\ &= \frac{\sin(B_2 - B_1)}{\cos B_2 \sin(L_2 - L_1)} + \sin B_1 \operatorname{tg} \frac{L_2 - L_1}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Меняя местами индексы 1 и 2, получаем

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ctg} A_{21} &= \operatorname{ctg} \alpha_{21} + \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot \frac{N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1}{(N_1 + H_1) \cos B_1 \sin(L_1 - L_2)} \cos B_2, \\ \operatorname{ctg} \alpha_{21} &= \frac{\sin(B_1 - B_2)}{\cos B_1 \sin(L_1 - L_2)} + \sin B_2 \operatorname{tg} \frac{L_1 - L_2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Формула (32) определяет азимут хорды  $s_{21}$  относительно геодезического меридиана и геодезического зенита второй точки («обратный азимут» хорды  $s_{12}$ ).

До сих пор всюду, кроме равенства (18), рассматривались две произвольные точки. Если обе точки лежат на поверхности эллипсоида (1), то отрезок  $\bar{s}_{12}$  является хордой этого эллипсоида и его длина зависит от  $\bar{z}_{12}$  и  $A_{12}$ . В этом случае прямоугольные координаты обеих точек должны удовлетворять уравнению (1):

$$\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{z_1}{b}\right)^2 = 1$$

и

$$\left(\frac{x_1 + \bar{s}_{12} l_{12}}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_1 + \bar{s}_{12} m_{12}}{a}\right)^2 + \left(\frac{z_1 + \bar{s}_{12} n_{12}}{b}\right)^2 = 1.$$

Вычитая из второго уравнения первое, получаем

$$\bar{s}_{12} \left(1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2} n_{12}^2\right) + 2 \left(x_1 l_{12} + y_1 m_{12} + \frac{a^2}{b^2} z_1 n_{12}\right) = 0.$$

После перехода от прямоугольных координат к криволинейным, используя затем формулу (28), приходим к следующему результату:

$$\bar{s}_{12} \left(1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2} n_{12}^2\right) = -2N_1 (\cos B_1 l_{12} + \sin B_1 n_{12}) = -2N_1 \cos \bar{z}_{12}. \quad (33)$$

Введем обозначение:

$$\frac{1}{N_1} \left( 1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2} n_{12}^2 \right) = \frac{1}{R_{12}}. \quad (34)$$

Предельное значение  $R_{12}$  при  $\bar{s}_{12} \rightarrow 0$  равно радиусу кривизны  $R_{12}^0$  сечения эллипсоида (1) нормальной плоскостью, содержащей хорду  $\bar{s}_{12}$ . Действительно, так как в этом случае  $\cos \bar{z}_{12} \rightarrow 0$ , а  $\sin \bar{z}_{12} \rightarrow 1$ , получаем

$$n_{12} \rightarrow \cos B_1 \cos A_{12}, \quad \frac{1}{R_{12}} \rightarrow \frac{1}{R_{12}^0} = \frac{\cos^2 A_{12}}{M_1} + \frac{\sin^2 A_{12}}{N_1}. \quad (35)$$

Учитывая принятые обозначения (34), формулу (33) запишем так:

$$\cos \bar{z}_{12} = -\frac{\bar{s}_{12}}{2R_{12}}. \quad (36)$$

Приближенное значение  $\cos \bar{z}_{12}$ :

$$\cos \bar{z}_{12} = -\frac{\bar{s}_{12}}{2R_{12}} \left( 1 - \frac{a^2 - b^2}{b^2} n_{12}^2 \cdot \frac{\bar{s}_{12}}{2R_{12}} \sin 2B_1 \cos A_{12} \right). \quad (37)$$

Отметим еще формулы, связывающие криволинейные координаты концов хорды эллипсоида с ее направлением. Из выражения (33)

$$\frac{\cos \bar{z}_{12}}{\cos z_{12}} = \frac{N_2}{N_1}. \quad (38)$$

Из формул (15) и (21) получаем

$$N_1 \sin \bar{z}_{12} \sin A_{12} \cos B_1 = -N_2 \cos B_2 \sin \bar{z}_{21} \sin A_{21}. \quad (39)$$

Далее,  $n_{12} = -n_{21}$ , а поэтому

$$\frac{N_2 \sin B_1 + N_1 \sin B_2}{N_1 \operatorname{ctg} A_{21} - N_2 \operatorname{ctg} A_{12}} = \cos B_1 \operatorname{tg} \bar{z}_{12} \sin A_{12}. \quad (40)$$

### 3. Обратная задача

Зная криволинейные координаты двух точек, надо определить длину соединяющего их отрезка прямой линии  $s$  и его азимуты относительно геодезических меридианов и зенитов обеих точек.

Решение этой задачи при любых  $s$  и высотах  $H$  непосредственно выражается формулами (17), (31) и (32).

Если обе точки лежат на отсечном эллипсоиде и расстояние между ними не превышает тысячи километров, вычисления можно упростить. Прежде всего вычисляем<sup>1</sup>

$$m_{12}s = N_2 \cos B_2 \sin(L_2 - L_1), \quad (15')$$

$$h_{12}s = N_2 \sin(B_2 - B_1) + \\ + m_{12}s \sin B_1 \operatorname{tg} \frac{L_2 - L_1}{2} - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cos B_1 (N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1), \quad (29')$$

<sup>1</sup>Для упрощения записи черточку над  $s$  и  $z$  писать не будем.

$$\operatorname{ctg} A_{12} = \frac{h_{12}s}{m_{12}s}. \quad (30')$$

Определив  $A_{12}$ , вычисляем

$$s \sin z_{12} = \frac{m_{12}s}{\sin A_{12}} = \frac{h_{12}s}{\cos A_{12}}, \quad (26' \text{ и } 27')$$

используя из этих двух формул ту, по которой  $s \sin z_{12}$  можно определить более точно.

Далее, по формуле (37) получаем

$$\sin 2z_{12} = -\frac{s \sin z_{12}}{R_{12}^\circ} \left( 1 - \frac{a^2 - b^2}{b^2} \frac{s \sin z_{12}}{2R_{12}^\circ} \sin 2B_1 \cos A_{12} \right),$$

находим  $\cos z_{12}$ , необходимый только для вычисления  $\sin z_{12}$  ( $\sin z_{12} \approx 1$ ), и определяем  $s$ . Обратный азимут получится по формуле

$$A_{21} \approx A_{12} + (\alpha_{21} - \alpha_{12}), \quad (41)$$

где

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha_{12} - \alpha_{21}}{2} = \sin \frac{B_1 + B_2}{2} \sec \frac{B_2 - B_1}{2} \operatorname{tg} \frac{L_2 - L_1}{2}.$$

Остается пояснить формулы (41).

На рис. 2  $P$  — северный полюс,  $z_1$  — геодезический зенит первой точки,  $z_2$  — второй, точка  $s$  отмечает направление отрезка  $s$  (считая от первой ко второй точке). Согласно рис. 2

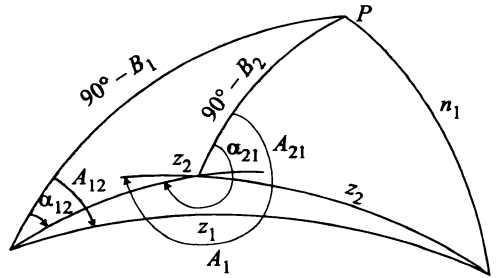


Рис. 2

$$\angle Pz_1s = A_{12}; \quad \angle Pz_1z_2 = \alpha_{12}; \quad z_1s = z_{12};$$

$$Pz_1 = 90^\circ - B_1; \quad \angle z_1Pz_2 = L_2 - L_1,$$

$$\angle Pz_2s = A_{21} - \pi; \quad \angle Pz_2z_1 = 2\pi - \alpha_{21};$$

$$z_2s = \pi - z_{21}; \quad Pz_2 = 90^\circ - B_2.$$

Следовательно,

$$\angle z_2z_1s = A_{12} - \alpha_{12}; \quad \angle z_1z_2s = \pi - (A_{21} - \alpha_{21}).$$

По теореме синусов получаем

$$\frac{\sin(A_{12} - \alpha_{12})}{\sin(A_{21} - \alpha_{21})} = \frac{\sin z_{21}}{\sin z_{12}} \approx 1 + \frac{1}{2}(\cos^2 z_{12} - \cos^2 z_{21}) \approx 1 +$$

$$+ \frac{1}{2} \cos^2 z_{12} \left( 1 - \frac{N_1^2}{N_2^2} \right) \approx 1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2} \cdot \frac{s^2}{8b^2} \sin(B_2 - B_1) \sin(B_2 + B_1) \dots$$

и приходим к формуле (41).

Такой же результат можно получить с помощью формул (31) и (32), определяя из них  $\sin(A_{12} - \alpha_{12})$  и  $\sin(A_{21} - \alpha_{21})$  и образуя отношение этих величин.

Из треугольника  $z_1 P z_2$ , используя аналогии Непера, получаем

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha_{12} - \alpha_{21}}{2} = \sin \frac{B_1 + B_2}{2} \sec \frac{B_2 - B_1}{2} \operatorname{tg} \frac{L_2 - L_1}{2}, \quad (42)$$

$$-\operatorname{ctg} \frac{\alpha_{12} + \alpha_{21}}{2} = \cos \frac{B_1 + B_2}{2} \operatorname{cosec} \frac{B_2 - B_1}{2} \operatorname{tg} \frac{L_2 - L_1}{2}. \quad (43)$$

#### 4. Прямая задача

Известны геодезические координаты первой точки, длина и азимут прямой, соединяющей первую точку со второй. Надо найти координаты второй точки и «обратный азимут» этой прямой.

В принципе, эту задачу, как и обратную, решают при помощи формул (17), (31) и (32), из которых последовательными приближениями можно определить все три интересующие нас величины. Прямой путь решения изложен ниже для частного случая, когда обе точки лежат на отсечном эллипсоиде.

Вычисляем  $z_{12}$  по формуле (37), затем  $h_{12}$ ,  $l_{12}$ ,  $m_{12}$ ,  $n_{12}$  по формулам (23)–(27). Разность долгот определяем из формул (14) и (15):

$$\operatorname{ctg} (L_2 - L_1) = \frac{N_1 \cos B_1}{m_{12} s} + \frac{l_{12}}{m_{12}}. \quad (44)$$

Формулу для определения разности широт получаем следующим образом. Умножим формулу (15) на  $-\sin B_1 \operatorname{cosec} (L_2 - L_1)$ , а (16) на  $\frac{a_2}{b^2} \cos B_1$  и сложим результаты, тогда получим

$$N_2 \sin (B_2 - B_1) = N_1 \sin B_1 \cos B_1 + \frac{a_2}{b^2} n_{12} s \cos B_1 - \frac{\sin B_1}{\sin (L_2 - L_1)} m_{12} s,$$

причем  $N_1 \cos B_1$  подставляем из формулы (44). Окончательно получаем

$$N_2 \sin (B_2 - B_1) = s \left( h_{12} - \sin B_1 \operatorname{tg} \frac{L_2 - L_1}{2} m_{12} + \frac{a^2 - b^2}{b^2} \cos B_1 n_{12} \right). \quad (45)$$

Обратный азимут вычисляем по формулам (41).

#### 5. Дифференциальные формулы обратной и прямой задач

При решении прямой или обратной задачи задаются четыре величины, а три подлежат определению. Как упоминалось, решение обеих задач при  $H_1 = H_2 = 0$  можно получить из формул (17), (31) и (32). Следовательно, из этих же формул можно получить дифференциальные формулы, позволяющие исправить результаты решения ценой малых изменений исходных данных задачи.

Дифференцируя формулу (18) и упрощая вид коэффициентов  $dB_1$  и  $dB_2$  с помощью формул (31) и (32), получаем

$$\frac{s ds}{\sin \Delta L} = N_1 N_2 \cos B_1 \cos B_2 dL + M_2 N_1 \cos B_1 \operatorname{ctg} A_{21} dB_2 -$$

$$N_2 M_1 \cos B_2 \operatorname{ctg} A_{12} dB_1 \quad (46)$$

или

$$ds = (N_1 \cos B_1 \sin A_{12} dL - M_1 \cos A_{12} dB_1) \sin z_{12} - M_2 \cos A_{21} \sin z_{21} dB_2. \quad (47)$$

В результате дифференцирования формул (31) сначала получаем

$$\begin{aligned} -\frac{m_{12}s}{\sin^2 A_{12}} dA_{12} = & -(M_1 + n_{12}s \sin B_1 + l_{12} \cos B_1) dB_1 + \\ & + M_2(\cos B_1 \cos B_2 + \sin B_1 \sin B_2 \cos \Delta L + \sin B_2 \sin \Delta L \operatorname{ctg} A_{12}) dB_2 + \\ & + N_2 \cos B_2(\sin B_1 \sin \Delta L - \operatorname{ctg} A_{12} \cos \Delta L) dL. \end{aligned}$$

Множители при  $dA_{12}$ ,  $dB_1$  и  $dB_2$  преобразуются к окончательному виду непосредственно с помощью формул (21), (28) и (31). Для преобразования множителя при  $dL$  используем сферическую формулу

$$\cos \Delta L \operatorname{ctg} \alpha_{12} - \sin B_1 \sin \Delta L = \frac{\cos B_1}{\cos B_2} \operatorname{ctg} \alpha_{21}, \quad (48)$$

в которую вместо  $\operatorname{ctg} \alpha_{12}$  и  $\operatorname{ctg} \alpha_{21}$  подставим выражения (31) и (32). В результате всех указанных преобразований получим

$$\begin{aligned} -\frac{s \sin z_{12}}{\sin A_{12}} dA_{12} = & -(M_1 + s \cos z_{12}) dB_1 + M_2 \frac{\cos B_1}{\cos B_2} \left( 1 - \frac{a^2 - b^2}{b^2} \frac{n_{12}s}{N_2} \sin B_2 \right) dB_2 - \\ & - N_2 \cos B_1 \left( \operatorname{ctg} A_{21} - \frac{a^2 - b^2}{b^2} \frac{l_{21}n_{21}s}{m_{21}N_2} \right) dL. \quad (49) \end{aligned}$$

Формулы (47) и (49) решают вопрос о введении дифференциальных поправок в результат решения обратной задачи. Формула для поправки в обратный азимут получается из формулы (49) путем перестановки индексов 1 и 2. Те же формулы можно использовать при решении прямой задачи, если разрешить их относительно  $dB_2$  и  $dL_2$ .

С этой целью вводим вспомогательные неизвестные

$$\left. \begin{aligned} \tau_s &= \cos A_{21} M_2 dB_2 + \sin A_{21} N_2 \cos B_2 dL, \\ \tau_A &= \sin A_{21} M_2 dB_2 - \cos A_{21} N_2 \cos B_2 dL, \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

являющиеся компонентами тангенциального смещения второй точки в направлении на первую ( $\tau_s$ ) и в перпендикулярном направлении ( $\tau_A$ ).

Из формулы (47) с помощью (39) получаем

$$\tau_s = -\frac{1}{\sin z_{21}} (ds + \sin z_{12} \cos A_{12} M_1 dB_1). \quad (51)$$

В формуле (49)  $dB_2$  и  $dL_2$  выражаем через  $\tau_s$  и  $\tau_A$  из выражений (50). Принимая во внимание, что

$$\frac{l_{12} \cos A_{21} - \sin A_{21} m_{21} \sin B_2}{\sin z_{21}} = -\sin B_2 + \cos B_2 \cos A_{21} \operatorname{ctg} z_{21},$$

получаем

$$\begin{aligned} \tau_A \left( 1 - \frac{a^2 - b^2}{b^2} \frac{n_{12}s}{N_2} \sin B_2 \right) - \frac{a^2 - b^2}{b^2} \frac{n_{12}s}{N_2} \cos B_2 \operatorname{ctg} z_{21} (\tau_s \sin A_{21} - \tau_A \cos A_{21}) = \\ = \frac{\operatorname{ctg} z_{21}}{\operatorname{ctg} z_{12}} [s \sin z_{12} dA_{12} - \sin A_{12} (M_1 + s \cos z_{12}) dB_1]. \quad (52) \end{aligned}$$

Из формулы (51) определяем  $\tau_s$ , после этого из (52) получаем  $\tau_A$  и затем

$$dB_2 = \frac{1}{M_2} (\cos A_{21} \tau_s + \sin A_{21} \tau_A), \quad (53)$$

$$dL_2 = \frac{1}{N_2 \cos B_2} (\sin A_{21} \tau_s - \cos A_{21} \tau_A). \quad (54)$$

Формулу поправки в обратный азимут получаем из формулы (52) путем перестановки индексов 1 и 2:

$$\begin{aligned} s \sin z_{21} dA_{21} = \sin A_{21} (M_2 + s \cos z_{21}) dB_2 + \frac{\operatorname{ctg} z_{21}}{\operatorname{ctg} z_{12}} (\sin A_{12} M_1 dB_1 + \\ + \cos A_{12} N_1 \cos B_1 dL) \left( 1 - \frac{a^2 - b^2}{b^2} \frac{n_{21}s}{N_1} \sin B_1 \right) + \\ + \frac{a^2 - b^2}{b^2} n_{21}s \operatorname{ctg} z_{21} \cos^2 B_1 dL. \quad (55) \end{aligned}$$

Формулами (51)–(55) можно решить задачу о введении дифференциальных поправок в результат решения прямой задачи.

## 6. Дифференциальные формулы для перехода к новой координатной системе. Градусные измерения

Связь Земли с геодезической координатной системой можно осуществить путем следующих построений. Задаем координатную систему, т.е. полуоси  $a$  и  $b$  отсчетного эллипсоида. На этом эллипсоиде отмечаем положение начального меридиана. Некоторую фиксированную точку земной поверхности («исходный пункт» триангуляции) обозначаем по своему усмотрению через координаты  $B_0, L_0, H_0$ . Совмещаем точку  $(B_0, L_0, H_0)$  координатной системы с исходным пунктом. Таким образом, в положении координатной системы остаются три степени свободы, соответствующие трем компонентам вращения ее как твердого тела вокруг неподвижной точки. Направляем ось  $b$  параллельно полярной оси инерции Земли. Остается еще одна степень свободы — вращение вокруг оси, проходящей через исходный пункт и параллельной оси  $b$ . Используя это вращение, можем одному из направлений, жестко связанному с Землей, придать по своему усмотрению некоторое значение геодезического азимута  $A_0$  («исходный азимут»). Теперь положение координатной системы относительно Земли вполне определено. Однако параметры, характеризующие координатную систему (всего их восемь —  $a, b, B_0, L_0, A_0, H_0$ , параллельность оси  $b$  полярной оси инерции Земли), не обеспечивают параллельности осей вращения эллипсоида и Земли (ввиду движения полюсов) и параллельности начальных геодезического и астрономического меридианов.

Установим зависимость между изменением прямоугольных координат точки  $(x, y, z)$  и изменением как ее криволинейных координат  $B, L, H$ , так и параметров, характеризующих размеры и положение в пространстве координатной системы. С этой целью продифференцируем формулы (5), считая переменными все входящие в них величины. Кроме того, учтем поступательное перемещение эллипсоида на  $dx_0$  по оси  $x$ ,  $dy_0$  по оси  $y$ ,  $dz_0$  по оси  $z$  и поворот эллипсоида вокруг некоторой фиксированной точки  $x_0, y_0, z_0$  (вокруг «исходного пункта») на малые углы  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  относительно осей  $x, y$  и  $z$ .

Принимая во внимание формулу (6) и приводимые ниже:

$$\left. \begin{aligned} a \frac{\partial N}{\partial a} &= N + M \sin^2 B, \\ b \frac{\partial(b^2/p)}{\partial b} &= \frac{b^2}{p} + M \cos^2 B, \\ b \frac{\partial N}{\partial b} &= -M \sin^2 B, \\ a \frac{\partial(b^2/p)}{\partial a} &= -M \cos^2 B, \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

получаем

$$\left. \begin{aligned} dx &= dx_0 + (y - y_0)\varepsilon_z - (z - z_0)\varepsilon_y - M \sin B \cos L dB - ydL + \\ &+ \cos B \cos L dH + N \cos B \cos L \frac{da}{a} + M \sin^2 B \cos B \cos L \left( \frac{da}{a} - \frac{db}{b} \right), \\ dy &= dy_0 + (z - z_0)\varepsilon_x - (x - x_0)\varepsilon_z - M \sin B \sin L dB - xdL + \\ &+ \cos B \sin L dH + N \cos B \sin L \frac{da}{a} + M \sin^2 B \cos B \sin L \left( \frac{da}{a} - \frac{db}{b} \right), \\ dz &= dz_0 + (x - x_0)\varepsilon_y - (y - y_0)\varepsilon_x + M \cos B dB + \sin B dH + \\ &+ \frac{b^2}{p} \sin B \frac{db}{b} - M \cos^2 B \sin B \left( \frac{da}{a} - \frac{db}{b} \right). \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Эти формулы равносильны следующим трем:

$$\left. \begin{aligned} \cos B \cos L dx + \cos B \sin L dy + \sin B dz &= dH + \cos B \cos L d\bar{x} + \\ &+ \cos B \sin L d\bar{y} + \sin B d\bar{z} + \frac{a}{N} da + \\ &+ \frac{b^2}{a^2} N \sin^2 B \left( \frac{db}{b} - \frac{da}{a} \right) + \frac{a^2 - b^2}{p} \sin B \cos B (\varepsilon_y \cos L - \varepsilon_x \sin L), \\ - \sin L dx + \cos L dy &= (N + H) \cos B (dL - \varepsilon_z) + \cos L d\bar{y} - \\ - \sin L d\bar{x} + z(\varepsilon_x \cos L + \varepsilon_y \sin L), \\ - \sin B \cos L dx - \sin B \sin L dy + \cos B dz &= \\ = M dB - \sin B \cos L d\bar{x} - \sin B \sin L d\bar{y} + \cos B d\bar{z} - \\ - M \left( \sin 2B - \frac{a^2 - b^2}{2a^2} \sin^2 B \right) \left( \frac{da}{a} - \frac{db}{b} \right) - \\ - N \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin B \cos B \frac{da}{a} + (p + H)(\varepsilon_y \cos L - \varepsilon_x \sin L), \end{aligned} \right\} \quad (58)$$



где

$$\left. \begin{aligned} d\bar{x} &= dx_0 + \varepsilon_y z_0 - \varepsilon_z y_0, \\ d\bar{y} &= dy_0 + \varepsilon_x x_0 - \varepsilon_x z_0, \\ d\bar{z} &= dz_0 + \varepsilon_x y_0 - \varepsilon_y x_0. \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Пусть система прямоугольных координат  $x, y, z$  жестко связана с Землей, т.е. не получает относительно Земли ни поступательных, ни вращательных перемещений. Тогда при любом преобразовании криволинейных координат

$$dx = dy = dz = 0.$$

В формулах (58) левые части обращаются в нули, а из правых частей определяются  $dH, dB$  и  $dL$  — это такие изменения криволинейных координат, при которых взаимное положение всех точек пространства сохраняется неизменным.

В эти формулы входят восемь произвольных параметров: шесть параметров определяют изменение положения координатной системы в пространстве — ее поворот ( $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ ) и поступательное перемещение центра отсчетного эллипсоида ( $d\bar{x}, d\bar{y}, d\bar{z}$ ); два параметра ( $da$  и  $db$ ) характеризуют изменение фигуры отсчетного эллипсоида.

При сравнении геодезических и астрономических координат ось координатной системы удобно принять параллельной оси вращения Земли. Для этого геодезическую систему координат следует повернуть на такие углы  $\varepsilon_x$  и  $\varepsilon_y$ , которые должны быть равны соответствующим компонентам угла между направлениями мгновенной оси вращения Земли и ее полярной оси инерции в данный момент времени. Соответствующие такому повороту изменения  $B, L$  и  $H$  получаются из формул (58):

$$\left. \begin{aligned} dB &= \frac{p+H}{M} (\varepsilon_x \sin L - \varepsilon_y \cos L), \\ dL &= -\frac{z}{N+H} \sec B (\varepsilon_x \cos L + \varepsilon_y \sin L), \\ dH &= \frac{a^2 - b^2}{p} \sin B \cos B (\varepsilon_x \sin L - \varepsilon_y \cos L). \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Вместо поворота координатной системы соответствующие поправки можно ввести (с обратным знаком) в астрономические координаты  $\varphi$  и  $\lambda$ . Упрощая предыдущие формулы, можем принять

$$\begin{aligned} d\varphi &= \varepsilon_y \cos L - \varepsilon_x \sin L, \\ d\lambda &= (\varepsilon_x \cos L + \varepsilon_y \sin L) \operatorname{tg} B. \end{aligned} \quad (61)$$

Если астрономические и геодезические значения долготы и широты отсчитываются от взаимно параллельных плоскостей начальных меридианов и взаимно параллельных осей вращения Земли и отсчетного эллипсоида, разности

$$\xi = \varphi - B \quad (62)$$

и

$$\eta = (\lambda - L) \cos B \quad (63)$$

во всех точках являются компонентами угла между отвесной линией и нормалью к отсчетному эллипсоиду, проходящими через рассматриваемую точку, т.е. являются компонентами уклонения отвесной линии. Только в этом случае значения астрономических и геодезических азимутов и зенитных расстояний связаны между собой хорошо известными геометрическими соотношениями:

$$A = \alpha - \eta \operatorname{tg} B - (\xi \sin A - \eta \cos A) \operatorname{ctg} z, \quad (64)$$

$$z = z_a + \xi \cos A + \eta \sin A. \quad (65)$$

Поворот  $\varepsilon_z$ , зависящий от значения исходного геодезического азимута  $A_0$ , при неизменных  $d\bar{x}$ ,  $d\bar{y}$  и  $d\bar{z}$  сказывается только на начале счета значений долготы и не влияет на широты и высоты, так как в формулах (58)  $dL = \varepsilon_z$ ;  $dB = dH = 0$ .

Несогласование счета астрономических и геодезических значений долготы ( $\varepsilon_z = \lambda_0 - L_0 - \eta_0 \sec B_0 \neq 0$ ) приводит к тому, что для любого направления

$$\alpha - \eta \operatorname{tg} B - (\xi \sin A - \eta \cos A) = A - \varepsilon_z (\sin B - \cos B \cos A \operatorname{ctg} z) \neq A. \quad (66)$$

Следовательно, условие Лапласа (64) должно удовлетворяться на всех без исключения направлениях или всюду должно быть заведомо нарушено, если оно не выполнено хотя бы на одном направлении (например, на исходном),

Задача градусных измерений заключается в установлении наилучших значений параметров рассмотренной геодезической координатной системы или более сложной (например, базирующейся на трехосном отсчетном эллипсоиде). Как указывалось, все восемь параметров координатной системы могут задаваться произвольно (единственное ограничение возможной степени произвола заключалось в том, что величины  $\xi$  и  $\eta$  предполагались настолько малыми, что их вторые степени не учитывались). В задаче градусных измерений понятие «наилучшие» значения параметров связывается с точно установленным принципом. Обычно выдвигается условие минимума функции

$$\Sigma(\xi^2 + \eta^2) \quad (67)$$

или функции

$$\int (H - H_n)^2 d\sigma. \quad (68)$$

В первом случае суммирование распространяется на все астрономические пункты, входящие в состав триангуляции; во втором случае — на всю территорию, на которой известны разности между высотами  $H$  точек земной поверхности и нормальными высотами  $H_n$  тех же точек.

Уравнения градусных измерений, соответствующие принципу (67) или (68), очень просто получаются из формул (58) путем применения хорошо известных правил нахождения минимума функции нескольких аргументов.

При нахождении минимума той или другой функции углы  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  и  $\varepsilon_z$  обычно не варьируются, так как применение «перекошенной» системы координат связано с многими неудобствами. Условия  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$  практически реализуются с помощью равносильных им условий (63), (64) к (65), применяемых всюду, где имеются необходимые для этого результаты наблюдений. Таким образом, поскольку поворот координатной системы

не производится, какие-либо «азимутальные уравнения» при градусных измерениях не могут возникнуть.

## 7. Редукционные задачи

Зенитные расстояния, азимуты и горизонтальные углы измеряют в астрономической (т.е. связанной с направлением отвесной линии) горизонтальной системе координат. Для перехода к геодезической горизонтальной системе координат необходимо знать положение геодезического зенита относительно астрономического, т.е. две компоненты уклонения отвесной линии в месте наблюдения. Соответствующие поправки в направления вычисляются по формулам (64) и (65), если оси вращения отсчетного эллипсоида и Земли взаимно параллельны.

Высоты  $H$  всегда малы, поэтому удобно путем редуцирования к нулевой высоте (т.е. к отсчетному эллипсоиду) функции трех аргументов заменить функциями двух аргументов. Поправка к значению азимута получается на основе формулы (31). Образуя разность между котангенсами азимута при данном значении  $H$  и  $H = 0$ , получаем

$$\begin{aligned} \sin [A_{12}(H) - A_{12}(0)] &= \\ &= -\frac{a^2 - b^2}{b^2} \frac{H_2}{N_2} \cos B_1 \sin A_{12}(0) (\cos B_1 \cos A_{12} + \sin B_1 \operatorname{ctg} z_{12}). \end{aligned} \quad (69)$$

Зависимость зенитного расстояния от высоты будет рассмотрена в разделе, относящемся к тригонометрическому нивелированию.

Редуцирование базисных измерений можно выполнить с помощью формул (11). Ортогональную проекцию элемента  $ds$  длины базиса на отсчетный эллипсоид назовем  $ds_0$ . Из формулы (11) получаем

$$ds_0 = M \cos A dB + N \sin A \cos B dL.$$

Следовательно,

$$ds_0 = \sin z ds - H(\cos A dB + \sin A \cos B dL) = \sin z ds - H d\psi, \quad (70)$$

где  $d\psi$  — угол между координатными линиями  $H$ , проходящими через концы отрезка  $ds$ .

Остается  $\sin z$  выразить через нивелирное превышение  $dh_W$ .

Как известно,

$$dH = dh_W + \vartheta ds_0 = dh_W + \vartheta \sin z ds, \quad \vartheta = \xi \cos A + \eta \sin A,$$

где  $\vartheta$  — компонента угла между отвесной линией и координатной линией  $H$ , т.е. компонента уклонения отвеса, приходящаяся на плоскость базиса<sup>1</sup>.

Таким образом,

$$\cos z = \frac{\partial H}{\partial s} = \frac{\partial h_W}{\partial s} + \sin z \vartheta.$$

<sup>1</sup>При таком определении уклонения отвеса

$$\xi = \varphi - B = -\frac{1}{g} \frac{\partial T}{M \partial B} + \frac{H}{a} \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e} \sin 2B,$$

$$\eta = (\lambda - L) \cos \varphi = -\frac{1}{g} \frac{\partial T}{N \cos B \partial L}.$$

Отбрасывая члены, содержащие величины порядка  $\vartheta^2$  и произведения  $\vartheta$  на третью степень наклона элемента длины  $ds$ , получаем

$$\sin z \approx \sqrt{1 - \left(\frac{\partial h_W}{\partial s}\right)^2} - \vartheta \frac{\partial H}{\partial s}.$$

Теперь формула (70) принимает вид

$$ds_0 = \sqrt{1 - \left(\frac{\partial h_W}{\partial s}\right)^2} ds - d(\vartheta H) - Hd(\psi - \vartheta).$$

В результате интегрирования от начала базиса  $A$  до конца  $B$  получаем

$$s_0 = \int_A^B \sqrt{1 - \left(\frac{\partial h_W}{\partial s}\right)^2} ds - H_m(\psi_B - \psi_A) - (H_B - H_m)\vartheta_B + (H_A - H_m)\vartheta_A,$$

$N_m$  — среднее значение высоты на длине базиса.

Переход от длины нормального сечения  $s_0$  к длине хорды  $s$ , если бы отсчетная поверхность была сферой, может быть сделан с помощью формулы

$$s = s_0 \left(1 - \frac{1}{24}\psi^2 \dots\right).$$

При длине базиса до 20 км ( $\psi \approx 0,003$ ) поправочный член, зависящий от  $\psi$ , составляет менее  $(1/2) \cdot 10^{-6} s_0$ . Следовательно, при вычислении длины хорды по длине базиса обычной величины сжатие можно не учитывать.

Чтобы использовать длину базисной хорды для вычисления длин хорд, соединяющих прочие пункты триангуляции, необходимо располагать углами между этими хордами. Разность азимутов двух направлений после введения всех редукиций определяет двугранный угол между нормальными сечениями, содержащими в себе соответствующие хорды. Если длины хорд невелики, этот угол близок к плоскому углу между хордами.

На рис. 3 буквой  $z$  отмечено положение геодезического зенита первой точки, буквами  $s_2$  и  $s_3$  — направления на вторую и третью точки. Таким образом, в сферическом треугольнике  $zs_2s_3$  дуга  $zs_2$  является зенитным расстоянием  $z_{12}$  направления с первой на вторую точку, дуга  $zs_3$  — зенитным расстоянием  $z_{13}$  направления на третью точку, сферический угол  $s_2zs_3$  — углом между нормальными сечениями  $A_{23}$ , дуга  $s_2s_3$  — углом  $\alpha_{23}$  между хордами.

Из рис. 3 следует, что

$$\cos \alpha_{23} = \cos z_{12} \cos z_{13} + \sin z_{12} \sin z_{13} \cos A_{23}. \quad (71)$$

Для получения точного результата зенитные расстояния должны определяться по формуле (33). Достаточно точный результат даже при очень больших длинах хорд (порядка многих сотен километров) получится по приближенной формуле (37).

Формула (71), в принципе, полностью и точно решает вопрос о переходе от угла между нормальными сечениями к углу между хордами при любом расстоянии между пунктами.

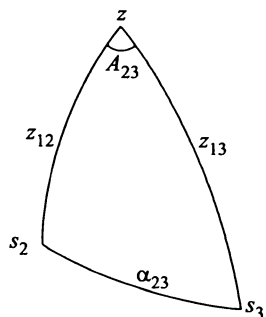


Рис. 3

Если длины хорд малы, можно воспользоваться простым приемом, аналогичным известному способу Лежандра.

Отбрасывая члены порядка четвертой степени отношения длины хорды к диаметру Земли, из формулы (71) получаем

$$A_{23} - \alpha_{23} = \frac{\cos \alpha_{23} - \cos A_{23}}{\sin \alpha_{23}} = \frac{\cos z_{12} \cos z_{13}}{\sin \alpha_{23}} \left[ 1 - \frac{\cos \alpha_{23}}{2} \left( \frac{\cos z_{12}}{\cos z_{13}} + \frac{\cos z_{13}}{\cos z_{12}} \right) \right].$$

На основании формулы (36)

$$\cos z_{12} = -\frac{s_{12}}{2R_{12}}, \quad \cos z_{13} = -\frac{s_{13}}{2R_{13}}.$$

Используя еще теорему синусов, получаем

$$A_{23} - \alpha_{23} = \frac{s_{12}s_{13}}{4R_{12}R_{13} \sin \alpha_{23}} \left[ 1 - \frac{\cos \alpha_{23}}{2} \left( \frac{\sin \alpha_{12} R_{13}}{\sin \alpha_{13} R_{12}} + \frac{\sin \alpha_{13} R_{12}}{\sin \alpha_{12} R_{13}} \right) \right].$$

Углы между хордами  $\alpha_{12}$ ,  $\alpha_{13}$  и  $\alpha_{23}$  в сумме составляют  $\pi$ , поэтому

$$\frac{\sin \alpha_{12}}{\sin \alpha_{13}} + \frac{\sin \alpha_{13}}{\sin \alpha_{12}} = \frac{\sin^2 \alpha_{23}}{\sin \alpha_{13} \sin \alpha_{12}} + 2 \cos \alpha_{23},$$

$$\frac{\sin \alpha_{12}}{\sin \alpha_{13}} - \frac{\sin \alpha_{13}}{\sin \alpha_{12}} = \frac{\sin(\alpha_{12} - \alpha_{13}) \sin \alpha_{23}}{\sin \alpha_{12} \sin \alpha_{13}}.$$

Кроме того, с относительной ошибкой порядка квадрата сжатия

$$\frac{R_{12}}{R_{13}} + \frac{R_{13}}{R_{12}} \approx 2.$$

С помощью последних трех формул получаем

$$A_{23} - \alpha_{23} = \frac{s_{12}s_{13} \sin \alpha_{23}}{8R_{12}R_{13}} \left[ 1 + \operatorname{ctg} \alpha_{12} \operatorname{ctg} \alpha_{13} - \frac{\cos \alpha_{23}}{2} \frac{\sin(\alpha_{12} - \alpha_{13})}{\sin \alpha_{12} \sin \alpha_{13} \sin \alpha_{23}} \left( \frac{R_{13}}{R_{12}} - \frac{R_{12}}{R_{13}} \right) \right]. \quad (72)$$

Относительная погрешность этой формулы — порядка квадрата отношения большей из хорд к диаметру Земли или порядка квадрата сжатия.

Если длины хорд невелики, можно принять

$$R_{12} \approx R_{13} \approx R_{23} = \frac{R_{12} + R_{13} + R_{23}}{3} = R, \quad \frac{s_{12}s_{13} \sin \alpha_{23}}{2R^2} = \varepsilon,$$

$$A_{23} - \alpha_{23} = \frac{\varepsilon}{4} (1 + \operatorname{ctg} \alpha_{12} \operatorname{ctg} \alpha_{13}), \quad (73)$$

$\varepsilon$  — «сферический избыток».

При вычислении длин сторон по теореме синусов получаем

$$\begin{aligned} \ln s_{12} - \ln s_{13} &= \ln \sin \alpha_{12} - \ln \sin \alpha_{13} = \\ &= \ln \sin A_{12} - (A_{12} - \alpha_{12}) \operatorname{ctg} \alpha_{12} - \ln \sin A_{13} + (A_{13} - \alpha_{13}) \operatorname{ctg} \alpha_{13} = \\ &= \ln \sin A_{12} - \ln \sin A_{13} - \frac{\varepsilon}{4} (\operatorname{ctg} \alpha_{12} - \operatorname{ctg} \alpha_{13}) = \ln \sin \left( A_{12} - \frac{\varepsilon}{4} \right) - \ln \sin \left( A_{13} - \frac{\varepsilon}{4} \right), \end{aligned}$$

так что

$$\frac{s_{12}}{s_{13}} = \frac{\sin \left( A_{12} - \frac{\varepsilon}{4} \right)}{\sin \left( A_{13} - \frac{\varepsilon}{4} \right)}. \quad (74)$$

Если в треугольнике с короткими сторонами из углов между нормальными сечениями отнять по одной четверти сферического избытка, то отношение синусов исправленных таким образом углов получится равным отношению соответствующих хорд.

Формулы (74) — для малых треугольников, (72) — для треугольников среднего размера и (71) — для треугольников сколь угодно больших решают вопрос о вычислении длин хорд. Зная эти длины, геодезические координаты исходного пункта и азимут исходного направления, из решения прямой задачи получим геодезические координаты всех пунктов и азимуты всех хорд.

### 8. Тригонометрическое нивелирование

Наряду с направлением отрезка  $s$ , соединяющего точки  $(B_1, L_1, H_1)$  и  $(B_2, L_2, H_2)$ , рассмотрим некоторое направление  $\tau$ . Из формул (14), (15) и (16) следует, что

$$\begin{aligned} s \cos(s, \tau) &= sl \cos(x, \tau) + sm \cos(y, \tau) + sn \cos(z, \tau) = \\ &= \bar{s} \cos(\bar{s}, \tau) + H_2 \cos(n_2, \tau) - H_1 \cos(n_1, \tau), \end{aligned}$$

где  $n_2$  — направление отрезка  $H_2$ ,  $n_1$  — отрезка  $H_1$ ,  $\bar{s}$  — хорда, соединяющая основания отрезков  $H_1$  и  $H_2$ .

Эта формула имеет очевидный геометрический смысл: проекция отрезка  $s$  на любое направление  $\tau$  равна сумме проекций отрезков  $H_1$ ,  $\bar{s}$  и  $H_2$  на то же направление.

Если  $\tau$  совпадает с  $n_1$ , получаем

$$s \cos z_{12} = \bar{s} \cos \bar{z}_{12} + H_2 \cos \psi - H_1.$$

Если  $\tau$  совпадает с  $n_2$ ,

$$-s \cos z_{21} = -\bar{s} \cos \bar{z}_{21} + H_2 - H_1 \cos \psi.$$

Вычитая из первого выражения второе, с помощью (33) получаем

$$H_2 - H_1 = \frac{s}{2 \cos^2(\psi/2)} (\cos z_{12} - \cos z_{21}) + \frac{(N_2 - N_1) \bar{s}^2}{4 N_1 N_2 \cos^2(\psi/2)} \left( 1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2} \bar{n}^2 \right). \quad (75)$$

С помощью выражения (18) получаем приближенную формулу

$$H_2 - H_1 = \frac{s}{2} (\cos z_{12} - \cos z_{21}) + (N_2 - N_1 + H_2 - H_1) \sin^2 \frac{\psi}{2}.$$

Второй член может достигать нескольких сантиметров при  $s$ , равном  $\sim 70$  км. Наибольший из отброшенных членов по сравнению с ним является малым, порядка сжатия.

После перехода к астрономическому зениту (формула (65)) и дальнейших упрощений получаем

$$H_2 - H_1 = s \frac{(z_{21})_a - (z_{12})_a}{2} - s \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}, \quad (76)$$

где  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_2$  — компоненты уклонения отвесной линии в направлении  $s$  в первой и второй точке, а  $(z_{12})_a$  и  $(z_{21})_a$  — зенитные расстояния относительно астрономических зенитов этих точек.

Приношу благодарность М.И. Юркиной и Б.П. Перцеву за проверку формул и устранение замеченных ошибок.

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СТОКСА С ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТЬЮ ПОРЯДКА КВАДРАТА СЖАТИЯ ЗЕМЛИ\*

Формула Стокса, с помощью которой определяется расстояние от регуляризованного геоида до эллипсоида, как известно [3], определяет это расстояние с относительной погрешностью порядка сжатия. Такая же относительная погрешность получается и в высоте квазигеоида (поскольку основная ее часть вычисляется по формуле Стокса), и в уклонении отвесной линии (формула Венинг-Мейнеса является результатом дифференцирования формулы Стокса).

В докторской диссертации Д.В. Загребина [1] задача Стокса решена для случая, когда высоты регуляризованного геоида отсчитываются от эллипсоида вращения. В формулах Д.В. Загребина не учитывались величины порядка квадрата сжатия. Вывод этих формул связан с большими вычислениями, так как Д.В. Загребин приводит сначала разложение решения в ряд по функциям Ламе, которые для эллипсоида вращения вырождаются в сферические функции, а затем суммирует несколько рядов, которыми выражается окончательное решение. Полученный Д.В. Загребиним результат неудобен для приложений, так как включает девять интегрирований по поверхности Земли аномалий, умноженных на функции, зависящие не только от расстояния до элемента поверхности, но и от азимута направления на этот элемент.

Приведем простой вывод, который дает удобный результат для применения на практике.

Рассматриваемая задача Стокса заключается в отыскании возмущающего потенциала  $T$ , удовлетворяющего уравнению Лапласа всюду вне эллипсоида:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad (1)$$

и граничному условию [2]

$$\frac{\partial T}{\partial \nu} - \frac{T}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} = -\Delta g \quad (2)$$

на поверхности этого эллипсоида. Функция  $T$  должна быть правильной в бесконечности. Здесь  $a$  и  $b$  — полуоси эллипсоида  $S$  ( $a > b$ ),  $\nu$  — направление внешней нормали к  $S$ ,  $\gamma$  — нормальное значение ускорения силы тяжести на  $S$ ,  $\Delta g$  — заданная функция, зависящая от положения рассматриваемой точки на поверхности  $S$  (аномалия ускорения силы тяжести на поверхности регуляризованного геоида).

К функции  $T$  и поверхности  $S$  применим формулу Грина:

$$-2\pi T = \int_S \left( \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \nu} - T \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r} \right) \partial S,$$

$r$  — расстояние от аупункта до элемента поверхности  $dS$ .

\* Труды ЦНИИГАиК. 1956. Вып. 112. С. 3–8.



Исключив  $\frac{\partial T}{\partial \nu}$  при помощи граничного условия (2), получим линейное интегральное уравнение:

$$2\pi T = \int_S \Delta g \frac{dS}{r} + \int_S T \left( \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} \right) dS. \quad (3)$$

На основании формулы Брунса [1] имеем

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \nu} = -\gamma \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{N} + \frac{2\omega^2}{\gamma} \right), \quad (4)$$

где  $N$  и  $M$  — главные радиусы кривизны эллипсоида (1),  $\omega$  — угловая скорость вращения.

Как известно, для эллипсоида вращения

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r} = -\frac{1}{2Nr} (1 + e^2 n^2), \quad (5)$$

где

$$n = \frac{1}{r} (N \sin B - N_0 \sin B_0), \quad e^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2},$$

$B$  — геодезическая широта элемента  $dS$ ,  $B_0$  — аффпункт.

При помощи формул (4) и (5) приводим (3) к виду

$$2\pi T = \int_S \frac{\Delta g}{r} dS + \int_S T \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{2N} + \frac{2\omega^2}{\gamma} - \frac{e^2 n^2}{2N} \right) \frac{dS}{r}. \quad (6)$$

Таково точное интегральное уравнение рассматриваемой задачи для эллипсоида вращения.

Решение будем искать в геоцентрической системе координат  $\rho$ ,  $\Phi$ ,  $L$ , где  $\rho$  — расстояние от центра эллипсоида,  $\Phi$  — геоцентрическая широта,  $L$  — долгота.

Связь геоцентрических с прямоугольными и геодезическими координатами выражается известными формулами:

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \Phi \cos L, \\ y &= \rho \cos \Phi \sin L, \\ z &= \rho \sin \Phi, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \Phi &= \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg} B, \\ \frac{1}{\rho^2} &= \frac{1}{a^2} \cos^2 \Phi + \frac{1}{b^2} \sin^2 \Phi. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Введем вспомогательную величину  $q$ :

$$\frac{1}{q^4} = \frac{1}{a^4} \cos^2 \Phi + \frac{1}{b^4} \sin^2 \Phi, \quad q^4 = a^4 \cos^2 \Phi + b^4 \sin^2 \Phi.$$

В результате простых вычислений получим следующие сначала точные, а затем приближенные формулы:

$$\left. \begin{aligned}
 \sin B &= \frac{q^2}{b^2} \sin \Phi, \quad dS = \frac{\rho^4}{q^2} \cos \Phi d\Phi dL \approx a^2(1 - e^2 \sin^2 \Phi) \cos \Phi d\Phi dL, \\
 \cos B &= \frac{q^2}{a^2} \cos \Phi, \quad \sin(B - \Phi) = e^2 \frac{q^2}{a^2} \sin \Phi \cos \Phi \approx \frac{1}{2} e^2 \sin 2\Phi, \\
 N &= \frac{a^2 \rho}{q^2} \approx a \left( 1 + \frac{1}{2} e^2 \sin 2\Phi \right), \\
 r &= \left[ 4\rho\rho_0 \sin^2 \frac{\psi}{2} + (\rho - \rho_0)^2 \right]^{1/2} \approx 2 \sin \frac{\psi}{2} \sqrt{\rho\rho_0}, \\
 M &= \frac{a^2 b^2 \rho^3}{q^6} \approx a \left( 1 - e^2 + \frac{3}{2} e^2 \sin^2 \Phi \right), \\
 \cos \psi &= \cos \Phi \cos \Phi_0 + \sin \Phi \sin \Phi_0 \cos(L - L_0), \\
 d\Phi &= \frac{a^2 b^2}{q^4} dB, \quad \frac{dS}{r} \approx 2a \sin \frac{\psi}{2} \left( 1 - \frac{1}{4} e^2 \sin^2 \Phi_0 - \frac{1}{4} e^2 \sin^2 \Phi \right) \cos \Phi d\Phi dL.
 \end{aligned} \right\} (9)$$

При помощи этих формул преобразуем выражение, входящее в уравнение (6):

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{2N} + \frac{2\omega^2}{\gamma} - \frac{e^2 n^2}{2N} \right) \frac{dS}{r} &\approx \left( 1 + \frac{1}{4} e^2 \sin^2 \Phi_0 \right) \times \\
 &\times \left[ 1 + \frac{4}{3} m + e^2 \left( \frac{2}{3} - \frac{23}{12} \sin^2 \Phi - \frac{(\sin \Phi - \sin \Phi_0)^2}{12 \sin^2(\psi/2)} \right) \right] \frac{3d\omega}{4 \sin(\psi/2)},
 \end{aligned}$$

где

$$m = \frac{\omega^2 a}{\gamma}, \quad d\omega = \cos \Phi d\Phi dL.$$

Для сокращения записи вводим вспомогательные функции  $\overline{\Delta g}$  и  $\overline{T}$ :

$$\left. \begin{aligned}
 \overline{\Delta g} &= \Delta g \left( 1 - \frac{3}{4} e^2 \sin^2 \Phi \right), \\
 \overline{T} &= T \left( 1 - \frac{1}{4} e^2 \sin^2 \Phi \right).
 \end{aligned} \right\} (10)$$

Теперь уравнение (6) легко приводится к виду

$$2\pi \overline{T} = \int \frac{a \overline{\Delta g}}{2 \sin(\psi/2)} d\omega + \int \overline{T} (f_0 + e^2 f_1) d\omega, \quad (11)$$

где

$$f_0 = \frac{3}{4 \sin^2(\psi/2)}, \quad f_1 = \left( \frac{2}{3} - \frac{5}{3} \sin^2 \Phi + \frac{4}{3} \frac{m}{e^2} - \frac{(\sin \Phi - \sin \Phi_0)^2}{12 \sin^2(\psi/2)} \right) f_0. \quad (12)$$

Здесь члены, включающие  $e^4, e^6, \dots$ , отброшены.

Решение уравнения (11) ищем в форме разложения по степеням малого параметра  $e^2$ :

$$\overline{T} = \overline{T}_0^2 + e^2 \overline{T}_1 + e^4 \overline{T}_2 + \dots \quad (13)$$

Подставив это выражение в уравнение (11) и приравняв члены при равных степенях  $e^2$ , стоящие в обеих частях равенства, получим систему уравнений, из которой можно последовательно определить все неизвестные функции:

$$\left. \begin{aligned} 2\pi\bar{T}_0 &= \int \frac{a\bar{\Delta g}}{2 \sin(\psi/2)} d\omega + \int \bar{T}_0 f_0 d\omega, \\ 2\pi\bar{T}_1 &= \int \bar{T}_0 f_1 d\omega + \int \bar{T}_1 f_0 d\omega, \\ 2\pi\bar{T}_2 &= \int \bar{T}_1 f_1 d\omega + \int \bar{T}_2 f_0 d\omega, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Так как в уравнении (11) члены с  $e^4$  уже отброшены, то бесполезно отыскивание функций  $\bar{T}_2, \bar{T}_3$ . Следовательно, нужно определить только  $\bar{T}_0$  и  $\bar{T}_1$  из первых двух уравнений системы (14).

Эти уравнения, на основании формулы (12), таковы:

$$2\pi\bar{T}_0 = \int \frac{a\bar{\Delta g}}{2 \sin(\psi/2)} d\omega + \frac{3}{4} \int \frac{\bar{T}_0}{\sin(\psi/2)} d\omega, \quad (15)$$

$$2\pi\bar{T}_1 = \int \frac{3\bar{T}_0}{4 \sin(\psi/2)} \left( \frac{2}{3} - \frac{5}{3} \sin^2 \Phi + \frac{4m}{3e^2} - \frac{(\sin \Phi - \sin \Phi_0)^2}{12 \sin(\psi/2)} \right) d\omega + \frac{3}{4} \int \frac{\bar{T}_1}{\sin(\psi/2)} d\omega. \quad (16)$$

Решение уравнения (15) имеет вид

$$\bar{T}_0 = \frac{a}{4\pi} \int \bar{\Delta g} S(\psi) d\omega, \quad (17)$$

где  $S(\psi)$  — функция Стокса.

В уравнение (16) введем вспомогательную функцию  $\varphi$ , значение которой определяется через известную теперь функцию  $\bar{T}_0$  путем интегрирования:

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \int \bar{T}_0 \left( \frac{1}{2} - \frac{5}{4} \sin^2 \Phi + \frac{m}{e^2} \right) \frac{d\omega}{\sin(\psi/2)} - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\bar{T}_0 (\sin \Phi - \sin \Phi_0)^2}{(2 \sin(\psi/2))^3} d\omega. \quad (18)$$

Уравнение (16) примет вид

$$2\pi\bar{T}_1 = 2\pi\varphi + \frac{3}{4} \int \frac{\bar{T}_1}{\sin(\psi/2)} d\omega. \quad (19)$$

Разлагая  $\varphi$  и  $\bar{T}_1$  по сферическим функциям, приходим к соотношению между функциями порядка  $n$ :

$$(\bar{T}_1)_n = \varphi_n + \frac{3}{2} \frac{\varphi_n}{n-1}.$$

Следовательно, решение уравнения (19) таково:

$$\bar{T}_1 = \varphi + \frac{3}{8\pi} \int \varphi S(\psi) d\omega. \quad (20)$$

Объединяя вместе формулы (10), (17), (18) и (20), можем решение уравнения (6) представить в следующем виде (с относительной погрешностью порядка  $e^4$ ):

$$T = \left(1 + \frac{1}{4} e^2 \sin^2 \Phi\right) T_0 + e^2 \left[ \varphi + \frac{3}{8\pi} \int \left( \varphi - \frac{1}{2} a \Delta g \sin^2 \Phi \right) S(\psi) d\omega \right], \quad (21)$$

где

$$T_0 = \frac{a}{4\pi} \int \Delta g S(\psi) d\omega, \quad (22)$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \int T_0 \left(1 - \frac{5}{2} \sin^2 \Phi + \frac{2m}{e^2}\right) \frac{d\omega}{\sin(\psi/2)} - \frac{1}{4\pi} \int \frac{T_0 (\sin \Phi - \sin \Phi_0)^2}{8 \sin^3(\psi/2)} d\omega. \quad (23)$$

Высота геоида  $\zeta$  получится по формуле Брунса  $\zeta = \frac{T}{\gamma}$ .

Уклонение отвесной линии определится путем дифференцирования уравнений (21), (22) и (23), т.е.

$$\left. \begin{aligned} \xi &= -\frac{\partial \zeta}{M \partial B} = -\frac{q^2}{\rho^3} \frac{\partial \zeta}{\partial \Phi} \approx -\frac{1 + \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \Phi}{\gamma a} \left( \frac{\partial T}{\partial \Phi} - \zeta \frac{\partial \gamma}{\partial \Phi} \right), \\ \eta &= -\frac{\partial \zeta}{N \cos B \partial L} = -\frac{\partial \zeta}{\rho \cos \Phi \partial L} \approx -\left(1 + \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \Phi\right) \frac{\partial T}{\gamma a \cos \Phi \partial L}. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Загребин Д.В. Теория регуляризованного геоида. // Труды ИТА. 1952. Вып. 1.
2. Молоденский М.С. Внешнее гравитационное поле и фигура физической поверхности Земли. // Известия АН СССР, серия географическая и геофизическая. 1948. XII. №3.
3. Пицетти П. Основы механической теории фигуры планет. — М.: ГГТИ, 1933.

# ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СТОКСА С ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТЬЮ ПОРЯДКА КВАДРАТА СЖАТИЯ ЗЕМЛИ\*

Задачу изучения фигуры и внешнего гравитационного поля Земли в общем случае формулируют следующим образом.

Предположим, что известны: а) значение силы тяжести и ее потенциала во всех точках некоторой поверхности  $S$ , близкой к поверхности Земли, в функции направления отвесной линии в соответствующей точке; б) фигура поверхности  $S_0$ , близкой к  $S$ ; в) угловая скорость вращения Земли и направление оси вращения относительно  $S_0$ ; г) все притягивающие массы, находящиеся вне  $S_0$ .

Необходимо определить поверхность  $S$  и гравитационное поле Земли всюду вне  $S$ . В зависимости от постановки задачи, определяемой поверхностью  $S$ , может быть регуляризованный или нерегуляризованный геоид, сглаженная физическая поверхность Земли или какая-либо другая поверхность.

Вспомогательной поверхностью  $S_0$  может быть сфера, эллипсоид или поверхность, получаемая наслоением на сферу или эллипсоид нормальных высот, иногда высот геоида или квазигеоида, определенных в предыдущем приближении. Учет влияния притягивающих масс, находящихся вне  $S_0$ , не вызывает затруднений принципиального характера, если распределение этих масс известно, и невозможен, если распределение масс неизвестно.

Предположим, что влияние внешних масс учтено и последние как бы отсутствуют. Главная задача заключается в определении  $S$ . Если поверхность  $S$  определена, внешнее гравитационное поле может быть найдено из решения задачи Дирихле, детально изученной в теории потенциала.

Классический путь нахождения  $S$  исходит из построения нормального гравитационного поля. Для этого строится теоретическая модель Земли (нормальная земля), для которой поверхность  $S_0$  известной формы является урванной и внешней относительно всех масс. Скорость вращения и масса берутся у модели равными соответствующим величинам у Земли, поверхности  $S$  и  $S_0$  ограничивают равные объемы. Использование нормального поля позволяет перейти от полных значений потенциала и силы тяжести к малым аномалиям той и другой величины, упрощая тем самым последующие числовые расчеты, но ничего не меняя в характере решения задачи.

Поверхность  $S_0$  может быть и не урванной, но в этом случае на ней должны быть заданы значения нормального потенциала [3]. Можно не вводить в рассмотрение нормальное поле [2]<sup>1</sup> и использовать в качестве известной поверхности  $S_0$  любую, близкую к  $S$ .

Каким бы ни был путь построения теории, окончательный результат должен выражаться в совокупности малых величин, характеризующих отличие  $S$  от предварительно выбранной поверхности  $S_0$ . Величины эти должны быть не только малы, но и мало

\* Труды ЦНИИГАиК. 1956. Вып. 112. С. 13–21.

<sup>1</sup>Н.К. Мигаль считает метод, основанный на использовании нормального поля, порочным и только предлагаемый им — правильным. Однако невозможно так противопоставлять два пути, ведущих к одной и той же цели, поскольку они различаются только малым и детально изученным участком.

меняться от места к месту. Иначе их нельзя интерполировать и пришлось бы определять непосредственно в очень большом числе точек. Таким образом, можно ограничиться знанием приближенных координат точек, к которым они относятся. Поэтому, имея в виду определение «геоидальной» поправки к фигуре, изображаемой на обычных картах, в первом приближении можно говорить о чисто гравиметрическом методе изучения фигуры Земли<sup>1</sup>.

Теория этого метода детально рассмотрена в предположении, что поверхность  $S_0$  является сферической и уральной,  $S$  — поверхность регуляризованного геоида или сглаженной физической поверхности Земли. В этих условиях высоту геоида или квазигеоида определяем с относительной ошибкой порядка сжатия Земли.

Задача значительно усложняется, когда поверхность принимается за эллипсоид вращения. Приближенное решение этой задачи с относительной погрешностью порядка квадрата сжатия известно [1,4], но не исследовано. Также не исследован случай, когда  $S_0$  — поверхность, близкая к физической поверхности Земли (отличающейся от нее на высоты квазигеоида).

Этот пробел в теории частично восполнен настоящей статьёй.

При математической формулировке рассматриваемой задачи составляют дифференциальное уравнение для возмущающего потенциала  $T$  (или потенциала силы тяжести  $W$  целиком, без выделения нормальной части  $U$  [2]), граничные условия на  $S_0$  и на бесконечности. Рассмотрим внимательнее эти исходные данные. Дифференциальное уравнение для  $W$  вытекает из условия, что вне  $S_0$  нет притягивающих масс:

$$\Delta W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 2\omega^2,$$

$\omega$  — угловая скорость вращения Земли. По тем же соображениям  $\Delta U = 2\omega^2$ .

В оба выражения положение оси вращения в пространстве не входит. Таким образом,

$$\Delta T = \Delta(W - U) = 0$$

при любом взаимном расположении осей вращения.

Пусть  $\rho$  — расстояние от какой-либо точки Земли до удаленной точки пространства. В общем случае возмущающий потенциал может возрастать как  $\rho^2$ . Если оси вращения заведомо параллельны, но не совпадают,  $T$  должен возрастать как  $\rho$ . И только при совпадении осей вращения  $T$  убывает как  $1/\rho$ , как  $1/\rho^2$  (массы равны) или как  $1/\rho^3$  (равны массы, совмещены центры инерции).

Следовательно, «условия применимости» теории Стокса связаны с условиями на бесконечности, налагаемыми на возмущающий потенциал при построении теории.

Рассмотрим граничное условие на поверхности  $S_0$ . Обычно [4] оно записывается в виде

$$\frac{\partial T}{\partial \nu} - \frac{T}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} = -g(S) + \gamma(S_0), \quad (1)$$

где  $\gamma(S_0)$  — нормальное ускорение силы тяжести на поверхности  $S_0$ ,  $g(S_0)$  — наблюдаемое на  $S$ ,  $d\nu$  — элемент длины силовой линии поля  $U$  или  $W$  (безразлично),  $T$  — возмущающий потенциал.

Более точное условие, полученное в работе [3], учитывает еще и то обстоятельство, что  $\gamma(S_0)$  вычисляется по аргументу астрономической широты (и долготы, если в нормальный

<sup>1</sup> В том смысле, что ошибка определения горизонтальных координат может быть в  $1/\alpha$  раз больше ошибки определения высоты геоида,  $\alpha$  — величина порядка сжатия Земли.

потенциал входит эффект трехосности). Поправка в астрономическую широту выражается формулой

$$\delta\varphi = +\frac{1}{\gamma} \frac{\partial T}{\partial \tau},$$

где  $\partial\tau$  — элемент длины касательной к уровенной поверхности, лежащей в плоскости меридиана и направленной на север. Следовательно,

$$\gamma(S_0, \varphi, +\delta\varphi) = \gamma(S_0, \varphi) - \frac{\partial\gamma}{\partial\nu} \frac{\partial T}{\partial\tau} \frac{1}{\gamma}. \quad (2)$$

Вновь появившийся член по отношению к основным является величиной порядка сжатия. Очевидно, что при решении с погрешностью порядка квадрата сжатия он должен учитываться (если только нормальное значение ускорения силы тяжести вычисляется по аргументу астрономической широты, как предполагалось вначале). Понятно, что этот член не появился бы при совпадении уровенного эллипсоида потенциала  $U$  с геодезическим референц-эллипсоидом, а нормальное значение силы тяжести вычислялось по аргументу геодезической широты.

Исследование решения в случае сферической уровенной поверхности относимости приводит к двум основным выводам [4]. Распределение аномалий силы тяжести на земной поверхности не может быть произвольным. Оно должно удовлетворять трем интегральным условиям (например, в простейшем случае регуляризованного геоида, близкого к сфере, — в разложении аномалий по сферическим функциям должны отсутствовать три члена первого порядка). Далее, фигура Земли определяется с точностью до параллельного переноса (если не требовать, чтобы на бесконечности  $T$  убывал как  $1/\rho^3$ ). Заметим, что в этом случае  $\frac{1}{\gamma} \frac{\partial\gamma}{\partial\nu}$  не зависит от широты (и долготы).

Таким образом, при составлении граничного условия положение нормальной Земли не фиксировалось. Это обстоятельство и проявилось при исследовании решения, предупредив заранее его неоднозначность, которая устраняется лишь путем усиления требований к поведению возмущающего потенциала на бесконечности:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} (\rho^2 T) = 0. \quad (3)$$

Это условие означает совпадение центров инерции Земли и ее модели, соответствующей нормальному потенциалу.

На решение с большей точностью эти выводы переносить, конечно, нельзя. Может оказаться, что сферические функции первого порядка в аномалиях равны не нулю, а малым величинам, которыми при менее точном решении пренебрегли. Точно так же, если поступательный перенос поверхности относимости раньше не менял решения, может оказаться, что это справедливо только в пределах той точности, с которой строилась теория.

Итак, допускает ли граничное условие (2) поступательный перенос нормальной Земли? Конечно, речь идет о малом смещении, порядка  $T/\gamma$ , так как вся теория построена с учетом только первых степеней величин этого порядка. Если такой перенос возможен и  $T$  является частным решением рассматриваемой здесь задачи, то решением (условия на бесконечности пока не рассматриваем) должно быть и выражение

$$T = T_1 + \varepsilon \frac{\partial U}{\partial s}, \quad (4)$$

где  $\varepsilon$  — постоянная малая величина порядка  $T/\gamma$ , а  $s$  — произвольное фиксированное направление

Как  $T_1$ , так и  $T$  удовлетворяют уравнению Лапласа вне  $S_0$ . Подставим  $T$  в условие (2) и примем во внимание, что  $T_1$  удовлетворяет этому условию, тогда получим

$$\varepsilon \left( \frac{\partial^2 U}{\partial \nu \partial s} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial U}{\partial s} \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau \partial s} \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad (5)$$

если граничному условию могут удовлетворять два различных решения вида (4).

После преобразований получим

$$\begin{aligned} \varepsilon \left( -\frac{\partial \gamma}{\partial s} + \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} \cos(\nu, s) - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \{\gamma \cos(\nu, s)\}}{\partial \tau} \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} \right) = \\ = -\varepsilon \left( +\frac{\partial \gamma}{\partial \tau} \cos(\tau, s) + \frac{1}{\gamma} \cos(\nu, s) \frac{\partial \gamma}{\partial \tau} \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} + \frac{\partial \cos(\nu, s)}{\partial \tau} \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} \right), \end{aligned}$$

$\frac{\partial \gamma}{\partial \tau}$  и  $\frac{\partial \gamma}{\partial \varphi}$  — величины порядка сжатия. Поэтому второй член в скобках не имеет смысла сохранять.

Теперь можно написать

$$-\varepsilon \frac{\partial \gamma}{\partial \tau} \left( \cos(\tau, s) + \frac{\partial \cos(\nu, s)}{\partial \varphi} \right) = -\varepsilon \frac{\partial \gamma}{\partial \tau} \left( \cos(\tau, s) - \sin(\nu, s) \frac{\partial(\nu, s)}{\partial \varphi} \right). \quad (6)$$

Пересечение направлений  $s$ ,  $\nu$  и  $\tau$  со сферой единичного радиуса определяет три точки, которые примем за вершины сферического треугольника. Стороны треугольника равны углам  $(s, \nu)$ ,  $(s, \tau)$  и  $(\nu, \tau) = \pi/2$ . Направление оси вращения Земли определяет точку, лежащую на продолжении стороны  $(\nu, \tau)$ . Углы сферического треугольника обозначим через  $(\nu)$ ,  $(\tau)$  и  $(s)$ . Очевидно,

$$\frac{\partial(\nu, s)}{\partial \varphi} = \cos(\nu), \quad \cos(\tau, s) = \cos(\nu) \sin(\nu, s).$$

Подставляя эти выражения в (6), убеждаемся, что равенство (5) выполняется.

Таким образом, параллельный перенос отсчетной поверхности относительно Земли и в этом случае оказывается совместимым с граничным условием на  $S_0$  и уравнением Лапласа.

Это объясняется тем, что при составлении граничного условия, по существу, положение отсчетной поверхности не фиксируется, так как расстояние до этой поверхности и направление нормали к ней считаются неизвестными и выражаются через искомым возмущающий потенциал.

Частное решение для возмущающего потенциала  $T$  можно выразить через частное решение  $\varphi$  для плотности простого слоя, распределенного на  $S_0$ . Общее решение  $T$ , если оси вращения масс, развивающих потенциалы  $W$  и  $U$ , параллельны, принимает вид

$$T = \int \frac{\varphi}{r} dS + c_1 \frac{\partial U}{\partial x} + c_2 \frac{\partial U}{\partial y} + c_3 \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (7)$$

Потенциал силы тяжести всей Земли равен

$$W = U + T = U + \int \frac{\varphi}{r} dS + c_1 \frac{\partial U}{\partial x} + c_2 \frac{\partial U}{\partial y} + c_3 \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (8)$$



Выясним физический смысл постоянных  $c_1, c_2, c_3$ . Известно только направление оси вращения Земли; ее положение определяется из механических соображений, в силу которых она должна проходить через центр инерции Земли. Поместим начало координат в центре инерции Земли. Координаты центра уровненного эллипсоида, развивающего потенциал  $U$ , обозначим через  $x_0, y_0, z_0$ , его массу — через  $M$ , постоянную тяготения — через  $f$ . Общий центр инерции, соответствующий всем слагаемым формулы (8), должен находиться в начале координат. Следовательно,

$$fM(x_0 - c_1) + \int \varphi_x dS = 0, \quad fM(y_0 - c_2) + \int \varphi_y dS = 0, \quad fM(z_0 - c_3) + \int \varphi_z dS = 0.$$

Из этих равенств определяем

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= x_0 + \frac{1}{fM} \int \varphi_x dS, \\ c_2 &= y_0 + \frac{1}{fM} \int \varphi_y dS, \\ c_3 &= z_0 + \frac{1}{fM} \int \varphi_z dS. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Таким образом, постоянные  $c_1, c_2$  и  $c_3$  являются координатами общего центра инерции нормальной Земли и слоя.

Подставим формулы (9) в (8):

$$\begin{aligned} W &= \left[ U + \frac{\partial U}{\partial x} x_0 + \frac{\partial U}{\partial y} y_0 + \frac{\partial U}{\partial z} z_0 \right] + \int \frac{\varphi}{r} dS + \frac{1}{fM} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial x} - \omega^2 x \right) \int \varphi_x dS + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial U}{\partial y} - \omega^2 y \right) \int \varphi_y dS + \frac{\partial U}{\partial z} \int \varphi_z dS \right] + \frac{\omega^2}{fM} \left( x \int \varphi_x dS + y \int \varphi_y dS \right). \quad (10) \end{aligned}$$

Заметим, что интегралы, входящие в формулы (9), в сферическом случае равны нулю и, следовательно, в общем случае являются малыми величинами порядка сжатия по сравнению с  $T$ . Поэтому последний член в формуле (10), содержащий еще множителем  $\omega^2$ , следует отбросить.

В предпоследнем члене по этой же причине можно принять

$$\frac{1}{fM} \left( \frac{\partial U}{\partial x} - \omega^2 x \right) = -\frac{x}{\rho^3}, \quad \frac{1}{fM} \left( \frac{\partial U}{\partial y} - \omega^2 y \right) = -\frac{y}{\rho^3},$$

где  $\rho$  — расстояние внешней точки от центра инерции Земли.

Первый член в формуле (10) соответствует выражению для нормального потенциала  $U_0$ , когда центр нормальной Земли перенесен в центр инерции Земли:

$$U_0 = U + x_0 \frac{\partial U}{\partial x} + y_0 \frac{\partial U}{\partial y} + z_0 \frac{\partial U}{\partial z}, \quad (11)$$

а соответствующий  $U_0$  возмущающий потенциал  $T$  будет определен совокупностью оставшихся членов:

$$T_0 = \int \frac{\varphi}{r} dS - \frac{1}{\rho^3} \left[ x \int \varphi_x dS + y \int \varphi_y dS + z \int \varphi_z dS \right]. \quad (12)$$

Из этого выражения следует, что каждое частное решение  $\varphi$  позволяет определить возмущающий потенциал  $T_0$  относительно центрального эллипсоида. Разные частные решения различаются только положением центра инерции слоя. Поправочный член в формуле (11) смещает центр инерции слоя в центр инерции Земли.

Если аномалии силы тяжести заданы в функции геодезических координат, т.е. уровень эллипсоид нормальной Земли совмещен с референц-эллипсоидом, поправочный член в формуле (2) становится излишним и граничное условие (1) остается в силе. В этом случае поступательный перенос нормальной Земли не совместим с граничным условием. Действительно, подставляя в условие (1) выражение (4) и предполагая, что  $T$  удовлетворяет условию (1), получаем

$$\frac{\partial T}{\partial \nu} \frac{T}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} + (g - \gamma) = -\varepsilon \frac{\partial \gamma}{\partial \tau} \cos(\tau, s) \neq 0. \quad (13)$$

Так как оси вращения Земли и ее модели (нормальной Земли) не совпадают (например, за счет неточности определения положения центра инерции Земли при выборе ориентировки референц-эллипсоида), граничное условие (2) несовместимо с условием на бесконечности (4). На бесконечности возмущающий потенциал может возрастать как  $\rho$  и не будет обладать свойствами потенциала притяжения. Из аномалии силы тяжести необходимо выделить ту часть, которая обусловлена действием центробежной силы, так как аналитические свойства потенциалов притяжения и центробежной силы различны. Полагая

$$T = \bar{T} + \omega^2(x_0x + y_0y),$$

где  $\bar{T}$  — потенциал притяжения, из условия (1) получаем

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \nu} - \frac{\bar{T}}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} = -g + \gamma - 3\omega^2(x_0 \cos(\nu, x) + y_0 \cos(\nu, y)). \quad (14)$$

На бесконечности  $T$  должен убывать как  $1/\rho$  или  $1/\rho^2$  (если равны массы). Заранее можно сказать, что такая постановка задачи не приведет к надежному решению. Действительно, смещение центра инерции входит в аномалию с множителем порядка сжатия, поэтому оно не может быть определено достаточно точно по аномалиям. Дополнительные условия для определения положения центра инерции не совместимы с (14). Поэтому заранее перейдем к центральному уровенному эллипсоиду с помощью формулы (11), считая координаты центра инерции  $x_0, y_0, z_0$  неизвестными постоянными величинами. Подставив формулу (11) в (1), получаем

$$\frac{\partial T_0}{\partial \nu} - \frac{T_0}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} = -g + \gamma + \frac{\partial \gamma}{\partial \tau} (x_0 \cos(\tau, x) + y_0 \cos(\tau, y) + z_0 \cos(\tau, z)). \quad (15)$$

Это условие совместимо с выражением (4), так как  $x_0, y_0, z_0$  могут и должны быть определены на основании (4).

Относительная погрешность условия (1) выражается величиной порядка  $\frac{g - \gamma}{\gamma}$  на поверхности  $S$ . Однако оно используется так, как если бы относилось к поверхности  $S_0$ . Сохраняется ли и на  $S_0$  та же относительная погрешность?

Условие на  $S_0$  должно быть получено с учетом изменения аномалии от  $S$  до  $S_0$ :

$$\left( \frac{\partial T}{\partial \nu} - \frac{T}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} \right)_{S_0} = -(g - \gamma)_S + \zeta \frac{\partial}{\partial \nu} (g - \gamma), \quad (16)$$

т.е.

$$\frac{\partial T}{\partial \nu} - \frac{T}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} = -(g - \gamma) \quad (17)$$

или

$$\frac{\partial T}{\partial \nu} - \frac{T}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} + \frac{T}{\gamma} \frac{\partial^2 T}{\partial \nu^2} = -(g - \gamma). \quad (18)$$

Дополнительный член имеет порядок квадрата возмущающего потенциала. Отбросив его, возвращаемся к граничному условию (1). Однако это означало бы, что в члене Брунса допущена относительная погрешность  $\frac{\partial g / \partial \nu - \partial \gamma / \partial \nu}{\partial \gamma / \partial \nu}$ , т.е. по меньшей мере порядка сжатия, а как правило, — значительно большая, так как аномалии вертикального градиента силы тяжести могут во много раз превосходить нормальное изменение этого градиента с широтой.

Тем не менее именно неточное граничное условие (1) использовалось при решении задачи Стокса с относительной погрешностью порядка квадрата сжатия. Возникает вопрос: имеют ли какую-либо ценность полученные таким путем решения?

Чтобы ответить на этот вопрос, примем во внимание, что

$$\frac{\frac{\partial g}{\partial \nu} - \frac{\partial \gamma}{\partial \nu}}{\frac{\partial \gamma}{\partial \nu}} \approx - \sum_2^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2(n-1)} \frac{\Delta g_n}{\gamma},$$

$\Delta g_n$  — сферическая функция порядка  $n$  в разложении аномалий.

Множитель, зависящий от порядка функции, неограниченно возрастает с увеличением  $n$ . Отсюда так же, как из прямых физических соображений, следует, что основное влияние на аномалию вертикального градиента оказывают члены высоких порядков. Влияние членов низких порядков остается в пределах квадрата сжатия (например, если  $\Delta g_8 = 5$  мгл, то его влияние составляет менее  $35 \cdot 10^{-6}$ ). Таким образом, при исследовании региональной формы геоида, когда используются весьма усредненные значения аномалий, можно исходить из упрощенного граничного условия (1) или (2).

Условие (18) не линейно относительно  $T$ , поэтому хорошо разработанные методы решения линейных граничных задач в данном случае не применимы. Остается путь последовательных приближений.

В первом приближении можем получить решение с относительной погрешностью порядка первой степени сжатия. Определим соответствующую этому приближению функцию  $\varphi$  — плотность простого слоя, распределенного на  $S_0$ . Примем за нормальное поле  $U + T_0$ , где

$$T_0 = \int_{S_0} \frac{\varphi}{r} dS, \quad (19)$$

причем интегрирование ведется уже с учетом членов порядка сжатия, функция  $\varphi$  фиксируется с той же точностью.

Нормальному полю  $U + T_0$  соответствует новая поверхность  $S'_0$ , новое поле аномалий силы тяжести  $\delta g$  и возмущающего потенциала  $\delta T$ . Очевидно,  $\delta g$  можно получить из условия (1); подставив туда

$$T = T_0 + \delta T,$$

получим

$$\frac{\partial \delta T}{\partial \nu} - \frac{\delta T}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} = -g(S') + \gamma(S'_0) = \frac{\partial T_0}{\partial \nu} + \frac{T_0}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} + \frac{T_0}{\gamma} \frac{\partial^2 T_0}{\partial \nu^2} = -\delta g. \quad (20)$$

Члены, содержащие  $\delta T \frac{\partial^2 T_0}{\partial \nu^2}$  и  $T_0 \frac{\partial^2 \delta T}{\partial \nu^2}$ , отброшены, так как они сказались бы лишь при решении с относительной погрешностью порядка куба сжатия. Ясно также, что  $\frac{\partial^2 T_0}{\partial \nu^2}$  нужно знать с относительной погрешностью порядка сжатия, что не вызовет каких-либо затруднений.  $T_0$  и  $\frac{\partial T_0}{\partial \nu}$  нужно получить с относительной погрешностью порядка квадрата сжатия. Для этой цели следует использовать выражение (19) и формулу, получающуюся из него путем дифференцирования по направлению  $\nu$ . Вычисление  $\delta T$  по  $\delta g$  не вызовет затруднений, так как этот член нужно получить с относительной ошибкой порядка первой степени сжатия.

Такой путь решения нелинейной задачи можно применить и к линейному граничному условию (1). Он пригоден для определения фигуры как геоида, так и квазигеоида и является более общим, чем путь, рассмотренный в ранее опубликованных работах.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Загребин Д.В.* Теория регуляризованного геоида. // Труды Института теоретической астрономии АН. 1952. Вып. 1.
2. *Мигаль Н.К.* Теория совместного определения фигуры и размеров Земли. // Научные записки Львовского политехнического института. серия геодезическая. 1948. Вып. XV. №1.
3. *Молоденский М.С.* Основные вопросы геодезической гравиметрии. // Труды ЦНИИГАиК. 1945. Вып. 42.
4. *Молоденский М.С.* Внешнее гравитационное поле и фигура физической поверхности Земли. // Известия АН СССР, серия геофизическая. 1948. Т. XLI. №3.

# НОВЫЕ МЕТОДЫ ИЗУЧЕНИЯ ФИГУРЫ ЗЕМЛИ\*

1. Расстояние  $H$  точек поверхности Земли от референц-эллипсоида можно получить на основе геометрического и астрономического нивелирования без использования гравиметрических материалов.

Величина  $dH = dh + (\xi \cos A + \eta \sin A)dl$  является полным дифференциалом. Здесь  $dh$  — нивелирное превышение,  $\xi$  и  $\eta$  — компоненты уклонения отвесной линии на поверхности Земли,  $dl$  — горизонтальное проложение перемещения,  $A$  — его азимут. Следовательно, редукции в нивелирные превышения и в уклонения отвесных линий должны быть строго согласованы между собой.

С другой стороны,  $H$  является суммой ортометрической высоты и высоты геоида  $N$ . Таким образом, поправки в нивелирные превышения должны находиться в полном соответствии с методом вычисления высот геоида.

Фигура геоида не связана однозначным образом с гравитационным полем Земли. Чтобы связь была однозначной, необходимо еще установить значения плотностей всюду вне геоида. Эти значения плотностей, определенные при помощи геологической карты или принятые гипотетически, должны быть использованы при редуцировании на геоид силы тяжести и уклонений отвеса при вычислении как ортометрических высот, так и высот геоида.

2. Нами разработан другой путь исследования фигуры Земли, исключающий необходимость знать плотности масс, расположенных вне геоида. При этом, конечно, не может идти речь об определении ортометрических высот и высот геоида. Оказывается необходимым ввести новое понятие о «нормальной высоте». Нормальную высоту  $H_n$  определяют при помощи нормальной формулы распределения силы тяжести, предполагая, что измеренное приращение потенциала получено в поле нормального потенциала  $U$ . По определению,

$$-\int g dh = U(H_n) - U(0).$$

Можно показать, что при таком определении нормальной высоты величина  $\zeta = T/\gamma$  имеет смысл аномалии высоты ( $H = H_n + \zeta$ ).

Здесь  $T$  — значение возмущающего потенциала на поверхности Земли (не на геоиде),  $\gamma$  — нормальное ускорение силы тяжести (там же);  $\zeta$  определяется через аномалии силы тяжести следующим образом:

$$\zeta = \frac{1}{\gamma} \int \frac{\varphi}{r} dS;$$

$$2\pi\varphi \cos \alpha = (g - \gamma) + \frac{3}{2R} \int \frac{\varphi}{r} dS + \int \frac{(H_n - H_n^0)\varphi}{r^3} dS.$$

3. Интегрирование всюду ведется по поверхности Земли  $S$ ,  $\alpha$  — наклон земной поверхности,  $r$  — расстояние от элемента интеграции (где нормальная высота равна  $H_n$ ) до исследуемой точки (высота  $H_n^0$ ),  $g - \gamma$  — аномалия в свободном воздухе, вычисленная для поверхности Земли,  $\varphi$  — вспомогательная функция.

Формула Стокса получается как частный случай, когда  $H_n \equiv 0$ ,  $\cos \alpha \equiv 1$ .

\* Труды ЦНИИГАиК. 1954. Вып. 103. С. 28–30.

4. Обработка результатов геометрического и астрономо-геодезического нивелирования в целях получения нормальных высот и высот квазигеоида может выполняться по простым точным формулам:

$$dH_n = dh + \frac{g - \gamma}{\gamma} dh - \frac{H_n}{R} \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e} \sin 2B \cos A dl;$$

$$d\zeta = (\xi \cos A + \eta \sin A) - \frac{g - \gamma}{\gamma} dh + \frac{H_n}{R} \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e} \sin 2B \cos A dl.$$

Новые обозначения  $\gamma_p$  и  $\gamma_e$  — нормальные значения силы тяжести на полюсе и экваторе,  $B$  — широта. Конечно, соблюдается условие

$$dH_n + d\zeta = gH.$$

Никаких редуционных проблем здесь не возникает. Уклонения отвесной линии выражаются через значения силы тяжести на поверхности Земли и получаются непосредственно на этой поверхности. Все связи между отдельными элементами гравитационного поля однозначны и не содержат плотности притягивающих масс.

Существенное принципиальное упрощение проблемы достигнуто за счет того, что не исследуется гравитационное поле внутри притягивающих масс.

Изложенные методы опробованы на моделях и применены в реальных условиях горных районов. Разработаны приемы вычислений, оказавшиеся удобными для практического использования.

В СССР теперь приняты система нормальных высот и изложенные выше методы обработки. Отличие квазигеоида от геоида имеет значение на практике только в горных районах.

## МЕТОДЫ ИЗУЧЕНИЯ ФИГУРЫ И ВНЕШНЕГО ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ\*

Для составления точных карт нужно на каждом листе карты иметь координаты хотя бы трех пунктов в системе координат, общей для всех листов, т.е. в системе, общей для всей Земли. Определение таких координат является основной задачей геодезии. В настоящее время для расчета свободного движения ракет стало необходимым знать гравитационное поле всей Земли. Эта вторая задача неотделима от первой, т.е. от изучения фигуры Земли.

Фигуру Земли можно изучить геометрическим способом. Для этого достаточно непосредственно измерить расстояние между двумя пунктами и углы между линиями, соединяющими каждый пункт со всеми соседними. Но этот способ совсем не точен, так как вертикальные компоненты углов определяются не точно (вертикальная рефракция около горизонта велика и подвержена большим изменениям). Поэтому в точных работах измерение вертикальных углов заменено геометрическим нивелированием и определением астрономических координат. Тогда третью геодезическую координату  $H$  (расстояние от точки земной поверхности до референц-эллипсоида) можно получить с помощью следующего дифференциального соотношения, практически точного:

$$dH = dh + (\xi \cos A + \eta \sin A) dl. \quad (1)$$

Здесь  $dH$  — приращение высоты  $H$  над референц-эллипсоидом при смещении на поверхности Земли на расстояние  $dl$  ( $l$  — горизонтальное положение перемещения в направлении, азимут которого равен  $A$ );  $dh$  — измеренное нивелирное превышение;  $\xi$  и  $\eta$  — компоненты уклонения отвесной линии на поверхности Земли (т.е. угла между отвесной линией и нормалью к референц-эллипсоиду). Все эти величины входят в формулу (1) без редуций. Для возможности использования этой формулы необходима частая сеть астрономических пунктов, обеспечивающая нужную точность интерполяции уклонений отвеса, т.е. такая же, как при астрономическом нивелировании.

В формуле (1) только  $dH$  является полным дифференциалом. Результат интегрирования одного первого (или одного второго) слагаемого правой части зависит от пути интегрирования. Но сумма ортометрических высот и высот геоида получается без вычисления ортометрических поправок и без приведения значений широты и долготы к уровню моря.

Геометрическое нивелирование получает физический смысл только тогда, когда оно рассматривается как метод определения значений потенциала силы тяжести на поверх-

\* Физика Земли. 1967. №11. С. 122–125.

От редакции. Основными задачами современной геодезии являются определение размеров и фигуры нашей планеты и ее внешнего гравитационного поля. Без достаточно точного решения этих задач в настоящее время невозможны построение точных топографических карт, определение точек земной поверхности в единственной системе координат, определение точного положения космических тел и гравитационных сил, действующих на них во время свободного их полета и многих других. Решение названных задач или подобных им со все возрастающей точностью диктуется всем развитием научной и практической деятельности человека.

Советские ученые немало сделали в области геодезии. Однако гордостью советской геодезической науки является метод определения фигуры Земли и ее внешнего гравитационного поля, разработанный членом-корреспондентом АН СССР М.С. Молоденским. Метод М.С. Молоденского получил мировое признание и в последние годы широко используется в практике геодезических работ многих стран.

Ниже мы публикуем статью М.С. Молоденского, в которой излагаются основы разработанного им метода.

ности Земли. Действительно, приращение потенциала от уровня моря до данной точки определяется известной простой и точной формулой:

$$w_B - w_A = - \int_B^A g dH, \quad (2)$$

где  $dh$  — нивелирное превышение,  $g$  — ускорение силы тяжести в той же точке. Интегрирование ведется по ходовой линии нивелирования.

Если бы Земля не вращалась, а фигура земной поверхности была бы известна, то по значениям потенциала на этой поверхности определился бы потенциал притяжения во всем пространстве вне поверхности, так как все условия в этом случае соответствовали бы внешней задаче Дирихле. Вращение Земли легко учитывается, если известны положение оси вращения и скорость вращения, так как тогда потенциал центробежной силы известен во всем пространстве. Следовательно, потенциал силы тяжести и его градиент — ускорение силы тяжести в этих условиях определяются всюду вне Земли и, в частности, на ее поверхности. Поскольку фигура поверхности и значения потенциала на ней определяют градиент потенциала, возможна постановка обратной задачи: считая заданными потенциал и ускорение силы тяжести во всех точках земной поверхности, зная положение оси и угловую скорость вращения Земли, можно пытаться определить форму земной поверхности. В отличие от известной задачи Стокса здесь внешняя поверхность Земли — не урвненная, но зато во всех ее точках заданы значения потенциала.

При решении этой задачи, как и при выводе формулы Стокса, удобно иметь дело с возмущающим потенциалом. Для этого расстояние  $H$  от земной поверхности до основной урвненной поверхности нормального потенциала (до отсчетной поверхности) представляется в виде суммы двух слагаемых. Первое слагаемое (нормальная высота  $H_n$ ) определяется через значение потенциала только в рассматриваемой точке земной поверхности следующим условием ( $U$  — нормальный потенциал):

$$U_A(H_n) - U_A(0) = W_A - W_0, \quad (3)$$

т.е. по измеренному в реальном поле приращению потенциала нормальная высота вычисляется так, как если бы поле было нормальным. Такое определение нормальной высоты оказывается очень удобным в двух отношениях. Во-первых, второе слагаемое, которое назовем «высотой квазигеоида», в этом случае получается по формуле, аналогичной формуле Брунса:

$$\zeta = H - H_n = \frac{T}{\gamma}, \quad (4)$$

с той лишь разницей, что здесь  $T$  и  $\gamma$  — возмущающий потенциал и нормальное ускорение силы тяжести на поверхности Земли (а не на геоиде). Во-вторых, простой вид приобретает краевое условие, выражающее связь между возмущающим потенциалом  $T$  и ускорением силы тяжести  $g$  на поверхности Земли:

$$\frac{\partial T}{\partial \nu} - \frac{T}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} = -(g - \gamma), \quad (5)$$

где  $\nu$  — направление нормали к отсчетной поверхности. Кроме того, высота  $H_n$  вычисляется точно, просто и близка по своей величине к привычным для геодезистов ортометрическим высотам.



Определение высоты квазигеоида  $\zeta$  приводится теперь к решению третьей краевой задачи теории потенциала: необходимо найти гармоническую вне поверхности Земли функцию  $T$ , в бесконечности регулярную, а на поверхности Земли удовлетворяющую краевому условию (5). Так как по сравнению с радиусом Земли  $H_n$  — величина малая (порядка квадрата сжатия), при решении краевой задачи в первом приближении можно принять  $H$  равным  $H_n$ , т.е. фигуру земной поверхности можно считать заданной нормальными высотами.

Решение краевой задачи с помощью простого слоя, распределенного на земной поверхности с плотностью  $\varphi$ , подлежащей определению, приводит к линейному интегральному уравнению

$$2\pi\varphi \cos \alpha = (g - \gamma) + \frac{3}{2R} \int \frac{\varphi}{r} dS + \int \frac{(H_n - H_{n0})\varphi}{r^3} dS. \quad (6)$$

Здесь  $r$  — расстояние от исследуемой точки до элемента земной поверхности  $dS$ ;  $\alpha$  — угол между нормальными к отсчетной поверхности и к поверхности Земли (наклон земной поверхности);  $R$  — средний радиус Земли. Интегрирование в этой и последующих формулах ведется по всей земной поверхности.

Определив из уравнения (6) функцию  $\varphi$ , легко получим  $T$ ,  $\xi$  и компоненту уклонения отвесной линии в направлении  $m$ :

$$T = \gamma\zeta = \int \frac{\varphi}{r} dS, \quad (7)$$

$$\frac{\partial T}{\partial m} = \int \varphi \frac{\partial/r}{\partial m} dS - 2\pi \cos(\nu, m)\varphi. \quad (8)$$

Эти величины фигуру земной поверхности определяют полностью, и не только на континентах, но и на океанах. Уравнение (6) разрешается путем разложения по степеням высот.

Вернемся к формуле (1). Используя определение нормальной высоты (формула (3)), а также формулы (4) и (5), можно теперь получить две новые формулы, соответствующие идеям «геометрического» и «астрономического» нивелирования по отдельности. Эти формулы таковы:

$$dH_n = dh + \frac{g - \gamma}{\gamma} dh - \frac{H_n}{R} \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e} \sin 2B \cos A dl, \quad (9)$$

$$d\zeta = (\xi \cos A + \eta \sin A) + \frac{H_n}{R} \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e} \sin 2B \cos A dl - \frac{g - \gamma}{\gamma} dh. \quad (10)$$

Здесь добавлены новые обозначения:  $\gamma_p$  и  $\gamma_e$  — ускорения силы тяжести на полюсе и экваторе уровненного эллипсоида, задающего нормальное поле;  $B$  — широта.

При суммировании формул (9) и (10) ускорение силы тяжести исключается, и мы возвращаемся к формуле (1). Так и должно быть, ибо фигуру земной поверхности можно получить чисто геометрическими построениями, тогда как квазигеоид неразрывно связан с гравитационным полем Земли. Гравиметрический метод изучения фигуры Земли не только позволяет, но и делает необходимым разделение высот земной поверхности на две части: на гипсометрическую часть  $H_n$ , зависящую от значения потенциала только в данной точке и меняющуюся от точки к точке неправильно и быстро; и на часть геоидального

типа  $\zeta$ , обусловленную распределением силы тяжести по всей Земле и меняющуюся несравненно медленнее. При такой постановке задачи ортометрические высоты заменяются нормальными, а геоид — «квазигеоидом», т.е. поверхностью, высота которой над отсчетной поверхностью равна  $\zeta$ . В противоположность ортометрическим нормальные высоты вычисляются просто и точно. На поверхности океанов они равны нулю (геоид совпадает с квазигеоидом). Отличие их от ортометрических высот на континентах характеризуется величиной порядка  $\frac{g-\gamma}{\gamma}H_n$ , т.е. величиной порядка  $1 \cdot 10^{-4}$  высоты. Этот же порядок величины характеризует степень неуверенности вычисления ортометрических высот и порядок отступлений геоида от квазигеоида.

Отметим еще одно очень важное обстоятельство. После того как из уравнения (6) определен потенциал  $T$ , формула (7) позволяет определить возмущающий потенциал во всем внешнем пространстве. Таким образом оказываются полностью известными не только геометрическая форма поверхности, но и все внешнее гравитационное поле Земли без использования каких-либо сведений или гипотез о характере распределения притягивающих масс.

Итак, основная геодезическая задача (изучение фигуры и внешнего гравитационного поля Земли) четко отделяется от основной геофизической задачи (изучение внутреннего строения Земли). Изучение фигуры геоида следует связывать с решением обратной задачи потенциала, заключающейся в нахождении плотностей и потенциала в области, занятой притягивающими массами, по их внешнему гравитационному полю. Изучение же фигуры квазигеоида приводит, как мы видели, к краевой задаче. Исследование уравнения (6) привело к выводу, что в условиях рассматриваемой задачи оно разрешимо. Фигура квазигеоида определяется из (6), (7) и (8) с точностью до параллельного переноса. Размер и положение квазигеоида определяются геометрическим способом.

Физическая поверхность Земли, по которой производится интегрирование в формулах (6), (7) и (8), конечно, предполагается сглаженной, точно так же, как сглаживается (генерализуется) эта поверхность при ее изображении на топографических и гипсометрических картах всех масштабов. Допустимая степень сглаживания, т.е. масштаб карт, используемых при решении интегрального уравнения, зависит от детальности, а следовательно, и точности гравиметрической съемки, иначе говоря, зависит от требований, предъявляемых к точности окончательного результата. Полное сглаживание, т.е. полное игнорирование рельефа, возвращает к теории Стокса.

# ТОЧНОСТЬ ВЫЧИСЛЕНИЯ АНОМАЛЬНОЙ ЧАСТИ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ВНЕ ЗЕМЛИ\*

1. Численное интегрирование при вычислении элементов аномальной части гравитационного поля вне Земли всегда можно выполнить так, чтобы оно не вносило дополнительных ошибок. Примем Землю за сферу и не будем учитывать ее вращение. Влияние пренебрежения наклонами мы здесь рассматривать не будем. Ошибки последнего тем больше, чем ближе горные районы лежат к исследуемой точке. Основным источником случайных ошибок являются тогда ошибки интерполяции измеренных значений силы тяжести на промежуточные точки. На поверхности Земли квадрат этой ошибки, как показывает опыт, пропорционален расстоянию между гравиметрическими пунктами.

Оценим влияние этой ошибки на вывод компоненты притяжения в зависимости от высоты в условиях равномерной по площади съемки, когда на площадь  $\sigma$  приходится один пункт. Разобьем поверхность Земли на площадки линиями  $r = \text{const}$  и  $\alpha = \text{const}$  так, чтобы все они имели площадь  $\sigma$ . Для этого нужно выполнить условие

$$\int_{\sigma} d\sigma = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{R}{\rho} r dr d\alpha = \frac{R}{2\rho} (\alpha_2 - \alpha_1) (r_2^2 - r_1^2) = \sigma,$$

$\rho$  — расстояние от центра сферы до исследуемой точки,  $R$  — радиус сферы,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — азимуты дуг большого круга, ограничивающих площадку с двух сторон, а  $r_2$  и  $r_1$  — радиусы сфер, описанных из исследуемой точки, пересечения которых с земной сферой ограничивают площадку с двух других сторон.

Для той же площадки получаем

$$\int_{\sigma} \frac{d\sigma}{r^3} = \frac{R}{\rho} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) (\alpha_2 - \alpha_1). \quad (1)$$

Полную аномалию  $\overline{\Delta g}$  силы тяжести (аномалию в свободном воздухе) или чистую аномалию  $\overline{\delta g}$  на площади  $\sigma$ , содержащей один пункт, можно считать постоянной. Это допущение не вносит дополнительной ошибки при расстояниях между пунктами более 15–20 км. При меньших расстояниях произойдет небольшое увеличение ошибки, с которым можно не считаться, так как сама ошибка в этих случаях очень мала.

Для радиальной компоненты притяжения

$$T_{\rho} = \frac{R^2 - \rho^2}{4\pi\rho} \int \frac{\overline{\delta g}}{r^3} d\sigma \quad (2)$$

представим интеграл в виде суммы интегралов, каждый из которых охватывает площадь  $\sigma$ , заключающую один пункт. Тогда в каждом из этих интегралов значение  $\overline{\delta g} = (T_{\rho})_0$  можно будет считать постоянной величиной, которую можно вынести из-под знака интеграла. Выполнив интегрирование, с помощью (1) получим

$$T_{\rho} = \frac{(R^2 - \rho^2)R}{4\pi\rho^2} \sum \sum (T_{\rho})_0 \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) (\alpha_2 - \alpha_1). \quad (3)$$

\* Труды ЦНИИГАиК. 1960. Вып. 131. С. 4–8.

Случайная ошибка значения  $(T_\rho)_0$  (обозначим ее через  $\varepsilon(T_\rho)_0$ ) одинакова для всех слагаемых, поскольку одинаковы соответствующие им площади  $\sigma$ . Поэтому случайная ошибка значения  $T_\rho$  равна

$$\varepsilon(T_\rho) = \pm \frac{(R^2 - \rho^2)R}{4\pi\rho^2} \varepsilon(T_\rho)_0 \left[ \sum \sum \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)^2 (\alpha_2 - \alpha_1)^2 \right]^{1/2} \quad (4)$$

Одной и той же паре значений  $r_1$  и  $r_2$  соответствует  $\frac{2\pi}{\alpha_2 - \alpha_1}$  равных площадок. Выполним суммирование по всем этим площадкам и выразим  $(\alpha_2 - \alpha_1)$  через  $\sigma$ . Получим

$$\varepsilon(T_\rho) = \pm \sqrt{\frac{R\sigma}{4\pi\rho} \frac{R^2 - \rho^2}{\rho}} \varepsilon(T_\rho)_0 \left[ \sum \frac{r_2 - r_1}{r_1^2 r_2^2 (r_2 + r_1)} \right]^{1/2} \quad (5)$$

Если разности  $r_2 - r_1$  малы по сравнению с  $r_1$  и  $r_2$ , то с достаточной точностью можно принять

$$\sum \frac{r_2 - r_1}{r_1^2 r_2^2 (r_2 + r_1)} = \int_{\rho-R}^{\rho+R} \frac{dr}{2r^5} = \frac{R\rho(\rho^2 + R^2)}{(\rho^2 - R^2)^4}.$$

Тогда из (5) получим

$$\varepsilon(T_\rho) = \pm \frac{R\sqrt{\sigma(\rho^2 + R^2)}}{\sqrt{4\pi\rho(\rho^2 - R^2)}} \varepsilon(T_\rho)_0. \quad (6)$$

Эта формула тем точнее, чем больше значения  $\rho - R$  по сравнению с  $\sqrt{\sigma}$ . В общем случае в выражении (5) первые члены суммы можно вычислить непосредственно, а сумму всех остальных, для которых отношение заведомо мало, можно заменить интегралом. Таким образом, с выделением в (6) зоны первого пункта получим следующую формулу:

$$\varepsilon(T_\rho) = \pm \frac{R(\rho + R)}{2\rho^2} \varepsilon(T_\rho)_0 \left[ 1 + \frac{1}{1+k} - \frac{2}{\sqrt{1+k}} + \frac{k}{8(1+k)^2} \right]^{1/2}, \quad (7)$$

где

$$k = \frac{\sigma\rho}{\pi R(\rho - R)^2},$$

при выводе которой допущена дополнительная относительная ошибка

$$\frac{(\rho - R)^4}{16R\rho(\rho^2 + R^2)}.$$

2. Ограничение области интегрирования в формуле (2) сферическим радиусом  $\psi_0$  является источником ошибки, величина которой равна

$$\delta T_\rho(\psi_0) = \frac{R^2 - \rho^2}{4\pi\rho} R^2 \int_0^{2\pi} \int_{\psi_0}^{\pi} \frac{T_\rho}{r^3} \sin \psi \, d\psi \, d\alpha. \quad (8)$$

Для оценки этой ошибки представим  $T_\rho$  в виде разложения по сферическим функциям по аргументам  $\psi$  и  $\alpha$ . При интегрировании по  $\alpha$  все присоединенные сферические

функции выпадут. Отличный от нуля результат дадут только члены, содержащие основные полиномы Лежандра. После интегрирования по  $\alpha$ , используя выражение

$$R^2 \sin \psi d\psi = \frac{R}{\rho} r dr, \quad (9)$$

получим

$$\delta T_\rho(\psi_0) = \frac{(R^2 - \rho^2)R}{2\rho^2} \sum_0^\infty A_n \int_r^{R+\rho} \frac{1}{r^2} P_n(\cos \psi) dr. \quad (10)$$

Введем новые переменные:

$$\left. \begin{aligned} y^2 &= \frac{r^2}{2\rho R}, & t^2 &= 2 \sin^2 \frac{\psi}{2}, \\ h^2 &= \frac{(\rho - R)^2}{2\rho R}, & s^2 &= \frac{(\rho + R)^2}{2\rho R} = 2 + h^2. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Используя зависимость  $r^2 = R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \psi$ , получим

$$y^2 = t^2 + h^2. \quad (12)$$

Заменяя  $r$ ,  $\rho$ ,  $R$  и  $\psi$  на  $y$ ,  $h$ ,  $s$  и  $t$ , найдем

$$\delta T_\rho(\psi_0) = -\frac{sh}{8}(s-h)^3 \sum A_n [I_n(s) - I_n(y)], \quad (13)$$

где

$$I_n(y) = 2 \int_y^s \frac{1}{y^2} P_n(1 - y^2 + h^2) dy. \quad (14)$$

Пользуясь известной рекуррентной формулой

$$nP_n(\cos \psi) + (n-1)P_{n-2}(\cos \psi) - (2n-1) \cos \psi P_{n-1}(\cos \psi) = 0, \quad (15)$$

можно  $I_n(y)$  представить так:

$$\begin{aligned} I_n(y) &= -\frac{2(n-1)}{n} \int_y^s \frac{1}{y^2} P_{n-2}(1 - y^2 + h^2) dy + \\ &+ \frac{2(2n-1)}{n} (1+h^2) \int_y^s \frac{1}{y^2} P_{n-1}(1 - y^2 + h^2) dy - 2\frac{2n-1}{n} \int_y^s P_{n-1}(1 - y^2 + h^2) dy. \end{aligned} \quad (16)$$

Последний интеграл этого выражения можно преобразовать с помощью другой известной зависимости:

$$P_{n-1}(x) = \frac{1}{2n-1} \frac{dP_n(x)}{dx} - \frac{1}{2n-1} \frac{dP_{n-2}(x)}{dx}, \quad (17)$$

где

$$x = \cos \psi = 1 + h^2 - y^2.$$

Теперь из (16) получаем рекуррентную формулу для  $I_n(y)$ :

$$I_n(y) = 2(1 + h^2)I_{n-1}(y) - I_{n-2}(y) + \frac{2}{2n-1} \frac{P_n(x) - P_{n-2}(x)}{y}. \quad (18)$$

По этой формуле получены следующие выражения для  $I_n$ :

$$I_0(y) = -\frac{2}{y},$$

$$I_1(y) = -\frac{2}{y} - 2y - \frac{2h^2}{y},$$

$$I_2(y) = -\frac{2}{y} - 6y + y^3 - h^2 \left( \frac{6}{y} + 6y \right) - \frac{3h^4}{y},$$

$$I_3(y) = -\frac{2}{y} - 12y + 5y^3 - y^5 + h^2 \left( -\frac{12}{y} - 30y + 5y^3 \right) + h^4 \left( -\frac{15}{y} - 15y \right) - \frac{5h^6}{y},$$

$$I_4(y) = -\frac{2}{y} - 20y + 15y^3 - 7y^5 + \frac{5}{4}y^7 + h^2 \left( -\frac{20}{y} - 90y + 35y^3 - 7y^5 \right) + \\ + h^4 \left( -\frac{45}{y} - 105y + \frac{35}{2}y^3 \right) + h^6 \left( -\frac{35}{y} - 35y \right) - \frac{35}{4} \frac{h^8}{y},$$

$$I_5(y) = -\frac{2}{y} - 30y + 35y^3 - 28y^5 + \frac{45}{4}y^7 - \frac{7}{4}y^9 + h^2 \left( -\frac{30}{y} - 210y + 140y^3 - \\ - 63y^5 + \frac{45}{4}y^7 \right) + h^4 \left( -\frac{105}{y} - 420y + \frac{315}{2}y^3 - \frac{63}{2}y^5 \right) + \\ + h^6 \left( -\frac{140}{y} - 315y + \frac{105}{2}y^3 \right) + h^8 \left( -\frac{315}{4y} - \frac{315}{4}y \right) - \frac{63}{4y} h^{10},$$

$$I_6(y) = -\frac{2}{y} - 42y + 70y^3 - 84y^5 + \frac{225}{4}y^7 - \frac{77}{4}y^9 + \frac{21}{8}y^{11} + \\ + h^2 \left( -\frac{42}{y} - 420y + 420y^3 - 315y^5 + \frac{495}{4}y^7 - \frac{77}{4}y^9 \right) + \\ + h^4 \left( -\frac{210}{y} - 1260y + \frac{1575}{2}y^3 - \frac{693}{2}y^5 + \frac{495}{8}y^7 \right) + \\ + h^6 \left( -\frac{420}{y} - 1575y + \frac{1155}{2}y^3 - \frac{231}{2}y^5 \right) + h^8 \left( -\frac{1575}{4y} - \frac{3465}{4}y + \frac{1155}{8}y^3 \right) + \\ + h^{10} \left( -\frac{693}{4y} - \frac{693}{4}y \right) - \frac{231}{8} \frac{h^{12}}{y}.$$

При  $y = s$  и  $y = h$  последний член формулы (18) равен нулю. Легко убедиться, что формулы

$$I_n(s) = -\frac{1}{2^n s h} [(s+h)^{2n+1} - (s-h)^{2n+1}], \quad (19)$$

$$I_n(h) = -\frac{1}{2^n s h} [(s+h)^{2n+1} + (s-h)^{2n+1}] \quad (20)$$

справедливы при  $n = 0$  и  $n = 1$ . Поскольку и при подстановке (19) и (20) в (18) образуются тождества, приведенные формулы для  $I_n(s)$  и  $I_n(h)$  справедливы при любом  $n$ . С помощью этих формул составлена следующая таблица значений  $\frac{\delta T_\rho(\psi_0)}{T_\rho}$  в процентах для различных номеров  $n$  сферических функций и различных значений аргументов  $\frac{\rho - R}{R}$  и  $\psi_0$ .

Таблица

$\psi_0 = 8^\circ,9$						$\psi_0 = 18^\circ,2$				
$\frac{\rho - R}{R}$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
0,025	11	9,0	7,3	5,8	4,3	3,0	1,6	0,50	-0,28	-0,80
0,05	22	18	15	12	9,3	6,1	3,3	1,1	-0,65	-1,8
0,075	32	27	23	18	14	9,4	5,2	1,7	-1,1	-3,1
0,1	40	35	30	24	19	13	7,1	2,2	-1,7	-4,7
0,2	63	56	48	40	30	25	14	3,8	-5,8	-14
0,3	74	66	57	46	32	34	19	3,2	-13	-29
0,4	79	71	60	46	27	40	22	0,12	-25	-51
0,5	82	73	61	43	18	45	23	-5,3	-40	-80

Из этой таблицы следует, что при интегрировании аномалий силы тяжести в пределах сферического радиуса  $18^\circ,2$  их влияние, начиная с третьего порядка до высот 0,20 радиуса Земли, будет учтено не менее чем на 90 %, а до высот 0,075 радиуса — не менее чем на 95 %. При среднем квадратическом значении аномалии на высоте 700 км в  $\pm 20$  мгл (и несколько менее на высоте 0,15R) рассматриваемая ошибка в среднем не превысит  $\pm 2$  мгл.

При использовании комбинированного способа вычисления компоненты притяжения (путем вычисления части поля по разложению, а остатка — по интегральным формулам) рассматриваемые здесь ошибки еще уменьшатся, так как все известные на Земле крупные поля аномалий силы тяжести будут учтены.

## ЗАВИСИМОСТЬ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ ОТ ИЗМЕНЕНИЯ СКОРОСТИ ЕЕ ВРАЩЕНИЯ\*

Принято считать, что изменение скорости  $\omega$  вращения Земли приводит к изменению земного сжатия и среднего значения силы тяжести на земной поверхности. Основы этой теории заложены Клеро, развита она главным образом Ляпуновым.

Более общий подход к той же задаче изложен Л. Лихтенштейном [1]. Он исходил из начальной конфигурации и скорости  $\omega_1$  вращения, принимая, что современное состояние Земли близко к равновесному. Этот факт надежно подтверждается астрономическими, геодезическими и геофизическими наблюдениями и положен в основу геологических представлений о строении Земли. Напряжения сдвига внутри Земли расслаиваются (релаксируют), поэтому интенсивность современных землетрясений мала по сравнению с той, которая была бы при отсутствии релаксации. Лихтенштейн поставил вопрос об изменении гравитационного поля Земли при малом медленном изменении скорости вращения до значения  $\omega_2$ . При этом происходит изменение состояния Земли от первого равновесного до второго, тоже равновесного, сила тяжести изменяется в точках поверхности на малую величину  $\delta g$ . Ее нужно определить в зависимости от распределения силы тяжести на поверхности Земли и в соответствии с предположением о состоянии равновесия внутри Земли. Для решения этой задачи Лихтенштейн получил интегральное уравнение, которое до сих пор почти не использовано. Его результат изложен в монографии математического, а не геофизического характера.

Рассмотрев движение планетарной жидкой массы, подверженной только силе взаимного тяготения и одинаковому давлению на поверхности, Пицетти [2] отметил, что единственное движение как твердого тела в этом случае есть равномерное вращение около неизменной оси. Изменение угловой скорости ведет к нарушению состояния равновесия и возникновению течений вещества внутри планеты, что в свою очередь может вызывать и поддерживать как горизонтальные, так и вертикальные движения точек земной поверхности.

Мне кажется полезным изложить свои взгляды на пути решения задачи Лихтенштейна исходя из общей теории упругих колебаний Земли.

При изменении скорости вращения внутри Земли (от поверхности до центра) возникают сложные движения, только часть которых можно представить как изменение угловой скорости, т.е. как вращение твердого тела. Эти движения ведут к изменению момента инерции Земли относительно оси вращения или проекции кинетического момента на ту же ось, по какой бы причине такое изменение ни происходило. Смещения, описываемые вращением твердого тела, будут полностью учтены, если уравнения теории упругости составлены в подвижной системе координат, которая вращается с угловой скоростью  $\omega$ , зависящей от времени, с частотой  $\sigma$  производной  $\omega$  по времени вокруг оси, мало меняющей направление в пространстве. При известном характере этого движения в уравнения колебаний входят только параметры, полностью определяющие движение. При изменении модуля вектора  $\bar{\omega}$  угловой скорости этим параметром является  $\dot{\omega}$  — производная от угловой скорости по времени; при изменении направления вектора  $\bar{\omega}$  в пространстве (нутаии) — компоненты этого вектора по двум координатным осям. Эти величины можно

\* Геодезия и картография. 1988. № 5. С. 11–13.



найти из дополнительных условий, определяющих выбор подвижной системы координат. Этот простейший эффект усложнен наложением на него упругих смещений внутри Земли, более сложных, но вполне закономерных, подчиненных закону Гука.

Поэтому возникает задача о колебаниях и изменении гравитационного поля упругой Земли, строение которой в каждой точке определено значениями плотности  $\rho$  и модулей упругости  $\mu$  и  $k$  ( $\mu$  — модуль сдвига;  $k$  — модуль всестороннего сжатия). В отдельных полостях возможны значения  $\mu = 0$ , т.е. жидкое состояние. Задача значительно упрощается, так как форма и строение Земли близки к сферически-симметричным, т.е. в хорошем приближении зависят только от расстояния  $r$  до центра инерции Земли. Необходимо принять во внимание огромные силы взаимного притяжения частиц (гравитационные силы), малую центробежную силу, играющую в этой задаче основную роль, и переносные ускорения (силы Кориолиса) — основные при  $\mu = 0$  и малой частоте колебания.

С формальной стороны здесь возникает граничная (краевая) задача, подобная хорошо известной геодезистам краевой задаче, связанной с определением фигуры и внешнего гравитационного поля Земли по наблюдениям силы тяжести и другим геодезическим измерениям. Теперь краевая задача связана с более сложными, чем уравнение Лапласа, дифференциальными уравнениями упругости. Радикальное упрощение задачи возникает из-за независимости или слабой зависимости граничных условий от времени. Вращение Земли входит в уравнение и граничные условия через параметры. Сначала следует решить дифференциальные уравнения колебаний при простейших граничных условиях, а на основе этих решений найти частоты колебаний, возможных при отсутствии источников возбуждения (частоты свободных колебаний), и соответствующие им упругие смещения. После этого для каждой частоты находят взаимно независимые свободные колебания, которые могут происходить одновременно. Наконец, следует найти колебания, согласные со всеми граничными условиями на заданной частоте  $\sigma$ .

В целом задача много проще, чем это может показаться на первый взгляд, так как характер движений внутри Земли при  $\partial\omega/\partial t = 0$  ( $t$  — время) довольно хорошо изучен. Известно, что колебания с малыми периодами быстро затухают, а охватывающие всю Землю (прецессия, нутация, вековое замедление земного вращения, смещения Северного и Южного полюсов) — выделены и достаточно изучены.

Изменение абсолютной величины  $\omega$  мало. Давно известно медленное (вековое) изменение, вызываемое лунными приливами в океанах (особенно в мелководье) и приводящее к медленному удалению Луны от Земли. Кроме того, внутреннее строение Земли (функции  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $k$ ) в течение последних 10–20 лет детально изучено. Точность измерений времени, силы тяжести, деформаций земной поверхности возросла в сотни раз. Современный обзор состояния измерительной техники, результатов наблюдений и теории содержится в книге [3].

Если внутри Земли возникают движения, то только некоторые из них могут повлиять на изменение вращения ее в целом как твердого тела (такое вращение не приводит к упругим напряжениям внутри Земли). Отдельно должны быть рассмотрены движения, происходящие вблизи поверхности Земли и подчиненные более сложным закономерностям (осадки, разрушение гор и вынос продуктов разрушения реками на дно морей и океанов, сезонные изменения в циркуляции атмосферы, а также циклоны, тайфуны, ураганы, приливы в океанах, землетрясения, результаты деятельности человека и т.д.). Внутри же Земли нужно выделить наиболее крупные глубинные землетрясения, связанные с источниками меняющихся со временем упругих напряжений. Исключив эти явления, изучаемые отдельно, движения внутри Земли можно представить уравнениями теории упругости с указанными выше дополнениями и упрощениями. В эти уравнения должны входить параметры, допускающие возможность вращения Земли как твердого тела, т.е. без

упругих напряжений. При заданном строении Земли искомое сложное упругое колебание нужно представить суммой простейших гармонических колебаний, каждое из которых может происходить независимо от других. Нужно определить внешние силы, вызывающие колебание (силы притяжения Луны и Солнца и поверхностные силы — давление на поверхность Земли, тангенциальные силы, возникающие от ветровой нагрузки на горы, леса, поля). Все эти воздействия на Землю входят в решение задачи через граничные условия.

Граничные условия можно разложить в ряд, состоящий из слагаемых типа

$$\tau_{nm\sigma} = P_n^m(\cos \vartheta) \cos(\sigma t - m\varphi),$$

где  $P_n^m$  — присоединенный полином Лежандра степени  $n$  и порядка  $m$ ;  $\vartheta$  — полярное расстояние;  $\sigma$  — частота колебания;  $\varphi$  — долгота.

Поэтому каждое простейшее и независимое колебание содержит множитель  $\tau_{nm\sigma}$ . Когда свободные колебания известны, колебания на любой частоте  $\sigma$  можно представить суммой колебаний на частоте  $\sigma = 0$  и на частотах свободных колебаний. Таким образом, не требуется интегрировать уравнение на всех частотах (от нуля до бесконечности, хотя в решение в общем случае войдут все частоты). При заданных значениях  $\sigma$ ,  $n$ ,  $m$  и  $\mu = 0$  (неоднородная сжимаемая жидкость) уравнения в частных производных заменяются системой обыкновенных дифференциальных уравнений 4-го порядка при четырех граничных условиях. Этот результат является основным.

Таким образом, значительно упрощается самая трудоемкая работа, а именно: определение собственных частот и функций. В граничные условия, как и в условия непрерывности решения при разрыве  $\rho$ ,  $\mu$  и  $k$ , входит уравнение поверхности разрыва. Упрощение достигается выбором типа искомого решения, при котором не приходится вычислять интегралы произведения трех сферических функций.

Зависимость  $\rho$ ,  $\mu$  и  $k$  от широты и долготы выражена слабо, но ее нужно учитывать добавлением малых возмущений. Комплексное значение частоты  $\sigma$  вводит в рассмотрение затухание колебаний.

Собственные частоты и функции определяются с помощью числовых методов. Результаты можно использовать для выделения той части изменения гравитационного поля, которую можно объяснить изменением скорости вращения Земли. Интересно также полученное решение для сравнения ввести в уравнение Лихтенштейна. Рассмотренная здесь задача может служить примером тех задач, которые встанут перед геодезистами, когда от карт изменений высот и силы тяжести во времени они перейдут к геофизическому истолкованию этих результатов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лихтенштейн Л.* Фигуры равновесия вращающейся жидкости. / Перевод с немецкого издания 1933 г. В. К. Абалакина. — М.: Наука, 1965. — 252 с.
2. *Пицетти П.* Основы механической теории фигуры планет. / Перевод с итальянского издания 1913 г. А. А. Михайлова. — М.-Л.: Гостехиздат, 1933. — 170 с.
3. *Moritz H., Mueller I.* Earth rotation Theory and observation. — N. Y.: The Ungar Publishing Company, 1987. — 617 p.

# Часть II

## ГЕОФИЗИКА

---

### УПРУГИЕ ПРИЛИВЫ, СВОБОДНАЯ НУТАЦИЯ И НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ СТРОЕНИЯ ЗЕМЛИ\*

Методом численного интегрирования системы дифференциальных уравнений упругого равновесия для нескольких моделей Земли рассчитаны те деформации и напряжения, которые возникают при воздействии сил приливного типа (лунно-солнечные приливы, движение полюсов, изменения скорости вращения). Во всех моделях оболочка Земли принимается упругой, сжимаемой, гравитирующей, неоднородной по плотности и упругим характеристикам, причем скорости сейсмических волн соответствуют наблюдаемым в оболочке Земли, а распределение плотностей меняется от модели к модели. В ядре меняется модуль сдвига. Оценивается влияние сжимаемости и неоднородности ядра. Между числами Лява  $k$  и  $h$  установлена зависимость:  $k = \frac{1}{2}h$ .

Результаты теоретических расчетов сравниваются с результатами наблюдения приливных наклонов, вариаций силы тяжести и с периодом свободной нутации. Пересмотрена теория поправок, учитывающих подвижность вод океанов. Существующие материалы позволяют основывать выводы только на периоде свободной нутации. По этому периоду оценивается среднее значение модуля сдвига в земном ядре.

#### ВВЕДЕНИЕ

Еще в 1863 г. В. Томсон обратил внимание на уменьшение высоты двухнедельного прилива в океанах до двух третей его теоретической высоты и объяснил это явление упругой деформацией Земли, вызываемой той же приливообразующей силой, которая является причиной прилива в океанах. Позднее в результате обработки наблюдений за изменениями широт Чандлер пришел к выводу, что в движении полюса вместо 305-дневного периода Эйлера, соответствующего свободной нутации абсолютно твердой Земли, обнаруживается период около 430 дней. Ньюкомб объяснил это явление упругой деформацией Земли, возникающей вследствие изменения потенциала центробежной силы при свободной нутации. С тех пор оба эти явления: упругие приливы и увеличение периода свободной нутации — изучаются совместно и охватываются общей теорией, так как главные члены потенциала силы, деформирующей Землю, в обоих случаях представляются гармоническими многочленами второго порядка.

Результаты определения амплитуды упругих приливов и периода свободной нутации многими исследователями использовались для оценки среднего модуля сдвига Земли и общего характера его изменения с глубиной. Новое направление исследований предложено Л.С. Лейбензоном [1]: «определить модуль твердости земной коры по данным о скорости распространения сейсмических волн и на основании теории упругих приливов сделать заключение о строении Земли». В цитируемой работе Лейбензона, опубликованной в 1910 г., сделана первая попытка в этом направлении. Ввиду сложности анализа при рассмотрении вопроса о деформации сферы из сжимаемого тяготеющего вещества Лейбензон принимает вещество сферы несжимаемым. Модуль сдвига в оболочке принимается постоянным ( $13,8 \cdot 10^{11}$  дин/см<sup>2</sup>). Конечный вывод работы формулируется следующим

\* Труды Геофизического института АН СССР. 1953. №19(146). С. 3-52.

образом: «Земля не имеет тонкой каменной оболочки, но на глубине половины радиуса материя находится в магматическом состоянии».

Успехи сейсмологии и геофизики в целом за истекшие 40 лет позволяют выполнить подобное исследование на современном материале о скоростях распространения сейсмических волн на разных глубинах, используя современные значения чисел, характеризующих упругие приливы. Трудности математического анализа теперь легко преодолеваются благодаря применению численных методов интегрирования дифференциальных уравнений, поэтому нет нужды снижать достоверность выводов предположениями о несжимаемости вещества Земли и о постоянстве модуля сдвига. Сведения о внутреннем строении Земли остаются все еще очень скудными, несмотря на очевидный прогресс в этом направлении, достигнутый за последние десятилетия. Достоверных числовых данных, характеризующих внутреннее строение Земли, все еще очень мало. Поэтому из чисел, полученных в результате изучения упругих приливов, следует постараться извлечь все возможные геофизические следствия. Все это, вместе взятое, побудило меня продолжить исследование, начатое Л.С. Лейбензоном, положив в его основу излагаемые ниже геофизические предпосылки.

Скорости распространения сейсмических волн определяют отношения двух коэффициентов упругости (модуля сдвига и модуля объемной упругости) к плотности. Следовательно, для определения самих коэффициентов упругости необходимо знать скорости распространения сейсмических волн и плотности на всех глубинах.

Достоверных данных о плотностях внутри Земли нет. Твердо установлена лишь средняя плотность и величина момента инерции Земли относительно ее оси вращения. Известно также, что плотность поверхностных слоев Земли приблизительно в два раза меньше средней плотности Земли. Если предположить, что плотность внутри Земли зависит только от давления, т.е. что Земля «построена» из одинакового вещества, только в различной степени сжатого, то изменение плотности с глубиной можно определить с помощью сейсмических материалов, используя отношение модуля объемной упругости к плотности. Но допущение, на котором основаны такие расчеты, неправдоподобно.

Прохождение поперечных волн прослежено только до границы ядра, расположенной на глубине около 2900 км. Достоверных данных о прохождении поперечных волн через ядро и, тем более, о скорости их в ядре нет. Таким образом, нет данных для суждения о величине модуля сдвига в ядре. Весьма вероятно, что он близок к нулю или, по крайней мере, в несколько раз меньше модуля сдвига в оболочке. Скорость продольных волн резко убывает с переходом из оболочки в ядро. Поэтому несомненно резкое изменение на этой границе модуля сдвига, или плотности, или же обеих этих величин вместе.

Законно ли приливную деформацию Земли считать упругой? Какую роль в этих явлениях может играть вязкость и внутреннее трение? Коэффициент вязкости оболочки оценивается величиной порядка  $10^{22}$  пуаз, коэффициент внутреннего трения —  $10^9 - 10^{10}$  пуаз. Поэтому при величине модуля сдвига оболочки порядка  $3 \cdot 10^{12}$  дин/см<sup>2</sup> релаксация напряжений сдвига может сказаться при периодах порядка сотни лет, а внутреннее трение — при периодах порядка долей секунды. Следовательно, лунно-солнечные приливы и свободная нутация, характеризующиеся периодами от полусуток до 1,2 года, вряд ли могут сопровождаться заметным рассеянием энергии в оболочке. Расчеты, выполненные Джеффрисом, привели к чрезвычайно малым величинам рассеяния энергии и сдвига фазы, что согласуется также с наклономерными наблюдениями, не обнаружившими сдвига фазы наблюдаемого прилива по сравнению с фазой приливной силы. Таким образом, оболочку можно считать идеально упругой. В ядре вязкость может снизиться до величины порядка  $10^{10}$  пуаз (а по теоретическим расчетам даже до 0,1 пуаза), что может уже существенно сказаться на нутации.

Влияние внутреннего трения на скорость распространения волн землетрясений может привести к неправильной оценке отношений упругих констант к плотности. Но это влияние мало, и к тому же дисперсии объемных волн не обнаружено.

По отношению к силам, действующим длительное время (значительно больше периода релаксации напряжений сдвига), Землю можно считать «жидкой», т.е. находящейся в состоянии гидростатического равновесия. Это обстоятельство позволяет, исходя из той или иной гипотезы об изменении плотности с глубиной, рассчитать действующие в Земле «начальные» напряжения и оправдывает применение теории Клеро–Радо, устанавливающей связь между моментом инерции, массой и сжатием.

Изучение лунно-солнечных упругих приливов (вариаций наклонов и ускорения силы тяжести) и свободной нутации земной оси позволяет определить три интегральные характеристики внутреннего строения Земли: числа Лява  $h$  и  $k$ , характеризующие деформации дневной поверхности и уроненной поверхности потенциала силы тяжести, и период свободной нутации  $T$  (чандлеровский период движения полюса). При некоторых предположениях о строении Земли по  $T$  определяется  $k$ .

В дальнейшем изложении величины  $h$ ,  $k$  и  $T$  будут рассчитаны в нескольких вариантах, соответствующих разным гипотезам. Данные о внутреннем строении Земли, которые мы считаем достаточно обоснованными, будут сохранены общими во всех вариантах. К ним мы относим следующие: 1) деформация оболочки является упругой; 2) дисперсия объемных упругих волн незначительна в интервале периодов от секунд до года; 3) начальные напряжения в Земле (т.е. при отсутствии возмущающей силы) носят гидростатический характер. Конечно, Земля в недеформированном состоянии принимается за сферу, а все характеристики ее строения — зависящими только от расстояния до центра сферы. Закон изменения плотности с глубиной и характеристики строения ядра, как менее всего известные, будут от варианта к варианту меняться. Вопрос о внутреннем ядре Земли не затрагивается, так как влияние этого ядра на рассматриваемые здесь явления мало.

## §1. ДЕФОРМАЦИЯ УПРУГОЙ, НЕОДНОРОДНОЙ, СЖИМАЕМОЙ И ГРАВИТИРУЮЩЕЙ СФЕРЫ

Состояние сферы при отсутствии деформирующей силы определяется значениями коэффициентов упругости Ламе  $\mu$  и  $\lambda$ , плотности  $\rho$  и шести компонент начального напряжения ( $X_x, Y_y, Z_z, X_y, Y_z, Z_x$ ) в каждой точке сферы. В дальнейшем рассматривается только тот случай, когда  $\lambda$ ,  $\mu$  и  $\rho$  зависят только от расстояния от центра сферы  $r$ , а начальные напряжения носят гидростатический характер, т.е.

$$\text{grad}(\lambda, \mu, \rho) = \frac{d(\lambda, \mu, \rho)}{dr}, \quad (1.1)$$

$$X_y = Y_z = Z_x = 0; \quad X_x = Y_y = Z_z = P. \quad (1.2)$$

Предполагается, что внешняя деформирующая сила имеет потенциал  $\omega$ ; внутри сферы  $\omega$  является однородным гармоническим многочленом степени  $n$  от координат  $x, y, z$  (начало прямоугольной системы координат совмещено с центром сферы). Следовательно:

$$\Delta\omega = \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial z^2} = 0, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}x + \frac{\partial\omega}{\partial y}y + \frac{\partial\omega}{\partial z}z = n\omega. \quad (1.4)$$

Из-за смещения и сжатия масс при деформации начальный потенциал сферы  $V$  изменится на величину  $V_i$ . Потенциал после деформации будет следующим:

$$\bar{V} = V + \omega + V_i. \quad (1.5)$$

Точка  $(x_0, y_0, z_0)$  в результате деформации получает смещение  $(u, v, w)$ . Ее новые координаты будут таковы:

$$\begin{aligned}x &= x_0 + u, \\y &= y_0 + v, \\z &= z_0 + w.\end{aligned}$$

Деформация вызывает изменение объема и плотности. Объемное расширение равно

$$\delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (1.6)$$

Элемент массы в результате сжатия получает новое значение плотности:

$$\bar{\rho} = \rho(1 - \delta). \quad (1.7)$$

В точке  $(x, y, z)$  после деформации окажется элемент массы, находившейся в точке  $(x - u, y - v, z - w)$ . Поэтому плотность после деформации в точке  $(x, y, z)$

$$\bar{\rho}(x, y, z) = \rho(x - u, y - v, z - w)(1 - \delta). \quad (1.8)$$

Напряжения  $\bar{X}_x, \bar{Y}_y, \bar{Z}_z, \bar{X}_y, \bar{Y}_z, \bar{Z}_x$  в точке  $(x, y, z)$  после деформации состояются из начальных напряжений  $X_x, Y_y, Z_z$ , которые фиксированный элемент массы имел в своем исходном положении  $(x - u, y - v, z - w)$ , и тех добавочных напряжений, которые возникают от деформации этого элемента и могут быть выражены через смещения  $u, v, w$  и коэффициенты упругости  $\lambda$  и  $\mu$ . Результирующее напряжение с достаточной точностью получается путем простого сложения обеих указанных частей.

Используя (1.2), получаем

$$\begin{aligned}\bar{X}_x(x, y, z) &= X_x(x - u, y - v, z - w) + \lambda\delta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \\ \bar{X}_y(x, y, z) &= \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \\ &\dots\dots\dots\end{aligned} \quad (1.9)$$

Равенствами (1.5), (1.6), (1.8) и (1.9) охарактеризовано состояние деформированной сферы с помощью величин, зависящих от ее начального состояния и смещений. Дифференциальные уравнения, определяющие смещения, получаются из условий равновесия сферы до и после деформации. До деформации, в соответствии с допущением (1.2) о гидростатическом характере начальных напряжений, выполнялись три условия равновесия следующего вида:

$$\rho(x, y, z)\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial X_x(x, y, z)}{\partial x} = 0. \quad (1.10)$$

После деформации

$$\bar{\rho}(x, y, z)\frac{\partial \bar{V}(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial \bar{X}_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial \bar{X}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{X}_z}{\partial z} = 0. \quad (1.11)$$

Исключая из 6 уравнений (1.10) и (1.11) и 6 уравнений (1.9) все 9 компонент напряжений (3 начальные, 6 после деформации), получаем 3 уравнения для определения трех

компонент смещения:

$$\bar{\rho}(x, y, z) \frac{\partial \bar{V}(x, y, z)}{\partial x} - \rho(x - u, y - v, z - w) \frac{\partial V(x - u, y - v, z - w)}{\partial x} + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \delta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] = 0. \quad (1.12)$$

Остальные два уравнения можно написать по этому образцу.  $\bar{V}$  и  $\bar{\rho}$  исключаем из этих уравнений с помощью (1.5) и (1.8). Тогда первые два члена в (1.12) примут следующий вид:

$$\rho(x - u, y - v, z - w)(1 - \delta) \cdot \frac{\partial}{\partial x} [V(x, y, z) + \omega + V_i] - \\ - \rho(x - u, y - v, z - w) \frac{\partial V(x - u, y - v, z - w)}{\partial x} = \rho(x - u, y - v, z - w) \times \\ \times \left[ \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x} - \frac{\partial V(x - u, y - v, z - w)}{\partial x} + \frac{\partial (V_i + \omega)}{\partial x} - \delta \frac{\partial V}{\partial x} \right].$$

Здесь  $\omega$  и  $V_i$  — малые величины порядка смещений; члены порядка квадрата смещений отброшены. Примем во внимание, что

$$V(x, y, z) - V(x - u, y - v, z - w) = \frac{\partial V}{\partial x} u + \frac{\partial V}{\partial y} v + \frac{\partial V}{\partial z} w = \frac{\zeta}{r} \frac{dV}{dr}, \quad (1.13)$$

где

$$\zeta = xu + yv + zw,$$

а  $\frac{\zeta}{r}$  — радиальная компонента смещения. Вместо (1.12) получаем

$$\rho \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \omega + V_i + \frac{\zeta}{r} \frac{dV}{dr} \right) - \frac{x}{r} \delta \frac{dV}{dr} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \delta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] = 0. \quad (1.14)$$

Наконец, после дифференцирования и преобразований получаем

$$\rho \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \omega + V_i + \frac{\zeta}{r} \frac{dV}{dr} \right) - \frac{x}{r} \delta \frac{dV}{dr} \right] + (\lambda + \mu) \frac{\partial \delta}{\partial x} + 2\mu \Delta u + \\ + \frac{x}{r} \delta \frac{d\lambda}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d\mu}{dr} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} - u + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0, \quad (1.15)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа.

В три уравнения типа (1.15) кроме компонент смещения  $u$ ,  $v$  и  $w$  входит еще одна неизвестная функция, именно  $V_i$ , характеризующая изменение потенциала от перемещения и объемного расширения притягивающих масс. Эта функция связана с изменением плотности уравнением Пуассона:

$$\Delta V_i = \Delta \bar{V} - \Delta V = 4\pi \kappa [\rho(x, y, z) - \bar{\rho}(x, y, z)],$$

где  $\kappa$  — постоянная тяготения.

С помощью (1.8) и (1.13) получаем

$$\Delta V_i = 4\pi\kappa [\rho(x, y, z) - (1 - \delta)\rho(x - u, y - v, z - w)] = 4\pi\kappa \left( \rho\delta + \frac{\zeta}{r} \frac{d\rho}{dr} \right). \quad (1.16)$$

Уравнения (1.15) и (1.16) вместе с условиями на границе сферы и в ее центре (или на границах сферического слоя) определяют состояние сферы (или сферического слоя) после деформации. Краевые условия будут рассмотрены позднее.

Система уравнений в частных производных (1.15) и (1.16) приводится к системе обыкновенных уравнений методом Лява [2,3]; ищем решение в следующем виде:

$$\begin{aligned} u &= H \frac{x}{r} \frac{\bar{\omega}}{r^n} + T \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right), \\ v &= H \frac{y}{r} \frac{\bar{\omega}}{r^n} + T \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right), \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} w &= H \frac{z}{r} \frac{\bar{\omega}}{r^n} + T \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right), \\ V_i + \omega &= R \frac{\bar{\omega}}{r^n}; \quad \bar{\omega} = \frac{\omega a^{n-1}}{g_0}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Здесь  $a$  — радиус сферы,  $g_0$  — ускорение силы тяготения на ее поверхности,  $H$ ,  $T$  и  $R$  — три вспомогательные неизвестные функции, зависящие только от  $r$ . Из (1.13) и (1.6) с помощью (1.3) и (1.4) получаем

$$\begin{aligned} \zeta &= H \frac{\bar{\omega}}{r^{n-1}}, \\ \delta &= f \frac{\bar{\omega}}{r^n}, \end{aligned} \quad (1.19)$$

где

$$f = H' = \frac{2}{r}H - \frac{n(n+1)}{r^2}T. \quad (1.20)$$

Далее получаем

$$\begin{aligned} \Delta u &= (T'' - H' + f) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \left[ (n+1)T' - (n+1)H + \frac{r^2}{n}f' \right] \cdot n \cdot \frac{\bar{\omega}x}{r^{n+3}}, \\ x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} &= (rT' - T) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + H' \frac{\bar{\omega}x}{r^n}, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x} - u + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} &= (rT' - 2T + rH) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + 2H' \frac{\bar{\omega}x}{r^n}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Подстановка этих выражений и (1.19) в уравнение (1.15) приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} \left[ \rho(R + HV') + (\lambda + 2\mu)f - \mu H' + \mu' \left( T' + H - \frac{2}{r}T \right) + \mu T'' \right] \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \\ + \left[ (R' + V'H + V''H - Vf')\rho + n(n+1)\mu \frac{T' - H}{r^2} + \right. \\ \left. + \lambda'f + 2\mu'H' + (\lambda + 2\mu)f' \right] \frac{\bar{\omega}x}{r^{n+1}} = 0. \end{aligned} \quad (1.22)$$



Два других уравнения получаются в результате замены  $x$  на  $y$  и  $z$ . Чтобы все три уравнения были удовлетворены, при  $n \neq 0$  необходимо и достаточно, чтобы обращались в нуль выражения, стоящие в квадратных скобках. Следовательно, функции  $R$ ,  $H$  и  $T$  должны удовлетворять двум обыкновенным уравнениям:

$$-\left[\mu\left(T' + H - \frac{2}{r}T\right)\right]' = \rho(R + V'H) + \lambda f + 2\frac{\mu}{r}\left[2H + T' - \frac{n^2 + n + 1}{r}T\right], \quad (1.23)$$

$$-(\lambda f + 2\mu H')' = \rho(R + V'H)' - \rho V'f + 4\frac{\mu}{r}\left(H' - \frac{H}{r}\right) - \frac{n(n+1)}{r^2}\mu\left(T' + H - 4\frac{T}{r}\right). \quad (1.24)$$

Четвертое уравнение в частных производных (1.16) с помощью (1.18), (1.19), (1.1), (1.3) и (1.4) принимает следующий вид:

$$\Delta V_i = \Delta\left(R\frac{\bar{\omega}}{r^n}\right) = 4\pi\kappa(\rho f + \rho'H)\frac{\bar{\omega}}{r^n}.$$

В результате преобразований и после сокращения на  $\frac{\bar{\omega}}{r^n}$  это уравнение приводится к обыкновенному уравнению:

$$R'' = -\frac{2}{r}R' + \frac{n(n+1)}{r^2}R + 4\pi\kappa(\rho f + \rho'H). \quad (1.25)$$

Уравнения (1.23), (1.24) и (1.25) вместе с краевыми условиями, которые будут получены ниже, определяют все три вспомогательные функции:  $H$ , характеризующую радиальное смещение,  $T$  — тангенциальное смещение и  $R$  — изменение потенциала в результате деформации сферы.

В задачах, рассматриваемых ниже, часть краевых условий определяется напряжениями на поверхности сферы. Компонента этого напряжения по оси  $x$  получается из (1.9):

$$N_x = \bar{X}_x \cdot \frac{x}{r} + \bar{X}_y \cdot \frac{y}{r} + \bar{X}_z \cdot \frac{z}{r} = X_x(x - u, y - v, z - w) \cdot \frac{x}{r} + \lambda\delta\frac{x}{r} + \frac{\mu}{r}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} - u + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

или на основании (1.21) и (1.20):

$$N_x = \bar{X}_x(x - u, y - v, z - w)\frac{x}{r} + (\lambda f + 2\mu H')\frac{\bar{\omega}x}{\mu^{n+1}} + \mu\left(T' - \frac{2}{r}T + H\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\bar{\omega}}{r^n}\right). \quad (1.26)$$

Отсюда для нормальной компоненты  $\bar{P}$  с помощью (1.2) получаем

$$\bar{P}(x, y, z) = N_x\frac{x}{r} + N_y\frac{y}{r} + N_z\frac{z}{r} = P(x - u, y - v, z - w) + N\frac{\bar{\omega}}{r^n},$$

$$N = \lambda f + 2\mu H' = (\lambda + 2\mu)H' + \lambda\left(\frac{2}{r}H - \frac{n(n+1)}{r^2}T\right). \quad (1.27)$$

Исключая из  $N_x$  нормальную компоненту, получаем проекции тангенциальной компоненты по осям координат:

$$\begin{aligned} M_x &= N_x - \bar{P}(x, y, z) \frac{x}{r} = Mr \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right), \\ M &= \mu \left( T' - \frac{2}{r} T + H \right). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Краевые условия для потенциала деформированной сферы получаются путем использования известных свойств потенциала притяжения. Функцию

$$V_i + \omega = R \frac{\bar{\omega}}{r^n},$$

выражающую изменение потенциала сферы в результате деформации, с достаточным приближением можно рассматривать как сумму потенциала объемных масс и простых сферических слоев, помещенных на границах разрыва плотности (на поверхности сферы, на границе ядра и т.п.). Кроме того, имея в виду различие в аналитических свойствах потенциала притяжения внешних и внутренних масс, разобьем потенциал  $V_i + \omega$  на три части:  $V_n$ , создаваемую наружными объемными и поверхностными массами, лежащими вне сферы  $r = b$ ;  $V_b$  — создаваемую всеми лежащими внутри этой сферы массами;  $V_c$  — создаваемую простым слоем, расположенным на сфере  $r = b$ . Плотность этого слоя равна  $(\rho_i - \rho_e) H \frac{\bar{\omega}}{r^n}$ , где  $\rho_i$  — значение объемной плотности на внутренней поверхности сферы  $r = b$ , а  $\rho_e$  — на внешней. Если в точке  $b$  плотность непрерывна, то  $\rho_i - \rho_e = 0$  и  $V_c = 0$ .

Таким образом,

$$V_i + \omega = V_n + V_b + V_c.$$

Внутри сферы  $r = b$

$$V_n = V_n(b) \frac{r^n}{b^n}; \quad V_c = V_c(b) \frac{r^n}{b^n}.$$

Вне сферы  $r = b$

$$V_b = V_b(b) \frac{b^{n+1}}{r^{n+1}}; \quad V_c = V_c(b) \frac{b^{n+1}}{r^{n+1}}.$$

Производные от потенциала объемных масс непрерывны, поэтому

$$\left[ \frac{\partial}{\partial r} (V_i + \omega) \right]_{b-0} = \frac{n}{b} (V_n + V_c) - \frac{n+1}{b} V_b = \frac{2n+1}{b} (V_n + V_c) - \frac{n+1}{b} (V_i + \omega).$$

Потенциал слоя

$$V_c = \frac{4\pi\kappa}{2n+1} (\rho_i - \rho_e) H \frac{\bar{\omega}}{b^{n-1}},$$

поэтому

$$\left[ \frac{\partial}{\partial r} (V_i + \omega) \right]_{b-0} = -\frac{n+1}{b} (V_i + \omega) + \frac{2n+1}{b} V_n + 4\pi\kappa (\rho_i - \rho_e) H \frac{\bar{\omega}}{r^n}, \quad (1.29)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial r} (V_i + \omega) \right]_{b-0} - \left[ \frac{\partial}{\partial r} (V_i + \omega) \right]_{b+0} = 4\pi\kappa (\rho_i - \rho_e) H \frac{\bar{\omega}}{r^n}. \quad (1.30)$$

Уравнение (1.30) следует из формулы Пуассона. Подставляем

$$V_i + \omega = R \frac{\bar{\omega}}{r^n}$$

и из (1.30) получаем

$$(R')_{b-0} - (R')_{b+0} = 4\pi\kappa(\rho_i - \rho_e)H. \quad (1.31)$$

Для поверхности сферы  $r = a$ ,  $\rho_e = 0$ ,  $V_{ii} = \omega$ , и формула (1.29) дает

$$(R')_{a-0} = -\frac{n+1}{a}R + 4\pi\kappa\rho H + (2n+1)g_0. \quad (1.32)$$

## §2. ДЕФОРМАЦИЯ ЖИДКОЙ СФЕРЫ

В уравнениях (1.23), (1.24) и (1.25) в случае жидкой сферы нужно принять  $\mu = 0$ . Получим

$$\rho(R + HV') + \lambda f = 0, \quad (2.1)$$

$$\rho(R + HV')' + (\lambda f)' - \rho f V' = 0, \quad (2.2)$$

$$R'' + \frac{2}{r}R' - \frac{n(n+1)}{r^2}R - 4\pi\kappa(\rho f + \rho' H) = 0. \quad (2.3)$$

При  $n = 0$  (например, в случае, когда внешние массовые силы отсутствуют и каждый элемент поверхности сферы испытывает одинаковое давление) уравнение (2.1) отпадает, так как тогда в (1.22)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) = 0.$$

Дифференцируя по  $r$  первое из написанных уравнений и вычитая из результата второе, получаем новое уравнение, которым можно заменить (2.2):

$$\rho'(R + HV') + \rho f V' = 0.$$

Исключая из него  $R + HV'$  с помощью (2.1), получаем

$$f \left( \rho V' - \frac{\lambda \rho'}{\rho} \right) = 0. \quad (2.4)$$

Множитель, заключенный в скобки, вообще говоря, отличен от нуля, поэтому при  $\frac{1}{\lambda} \neq 0$

$$f = 0,$$

т.е. каждый фиксированный элемент массы при деформации сохраняет свой объем. Поэтому вместо (2.1), (2.2) и (2.3) получаем

$$R + HV' = 0, \quad (2.5)$$

$$R'' + \frac{2}{r}R' + \left( 4\pi\kappa \frac{\rho'}{V'} - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) R = 0. \quad (2.6)$$

Если жидкость несжимаема, то  $f = 0$ ,  $\lambda = \infty$ ,  $f\lambda = -p$ , причем из (1.27) следует, что  $p \frac{\bar{\omega}}{r^n}$  есть изменение гидростатического давления на соответствующий элемент жидкости. Тогда из (2.4) получаем

$$f\lambda = -p = 0$$

и снова приходим к уравнениям (2.5) и (2.6).

Наконец, возможен случай, когда  $\lambda$  и  $\rho$  заданы таким образом, что

$$\rho V' - \frac{\lambda \rho'}{\rho} = 0. \quad (2.7)$$

В этом случае уравнение (2.2) является следствием (2.1) и  $f$  не определяется. Исключая  $\lambda$  из (2.1) с помощью (2.7), получаем

$$R + \left( H + f \frac{\rho}{\rho'} \right) V' = 0. \quad (2.8)$$

Из (2.8) и (2.3) и в этом случае получим (2.6).

В двух первых случаях  $f = 0$ , и поэтому деформация не сопровождалась изменением плотности фиксированного элемента массы. Поэтому функция  $H$  характеризовала радиальное смещение поверхности постоянной плотности, являющейся одновременно уровнями поверхностью для потенциала притяжения деформированной жидкой массы, как это следует из уравнения (2.5), и поверхностью равных значений гидростатического давления, так как  $\lambda f = -p = 0$ .

В случае, когда имеет место равенство (2.7), роль  $H$  играет функция

$$H^* = H + \frac{\rho}{\rho'} f,$$

которая также характеризует радиальное смещение поверхности постоянной плотности.

Действительно,

$$H^* \frac{\bar{\omega}}{r^n} = \frac{\zeta}{r} - \frac{\rho \delta}{\rho'},$$

т.е. в правой части к радиальному смещению фиксированного элемента массы прибавляется величина того добавочного перемещения, на протяжении которого изменение плотности из-за сжатия элемента компенсируется радиальным изменением плотности.

Таким образом, во всех случаях, когда  $n > 0$ , можно пользоваться уравнениями (2.5) и (2.6). Естественно, что в эти уравнения не входит  $T$ , так как тангенциальная компонента смещения теряет смысл.

Вернемся к уравнению (2.6). Нетрудно убедиться в том, что при  $n \geq 2$  в области  $0 \leq r \leq r_0$  может существовать только одно решение этого уравнения, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1)  $R(r_0) = C \neq 0$ ,
- 2)  $R$  и  $R'$  конечны в этой области.

Допустим, что таких решений существует два,  $R_1$  и  $R_2$ . В таком случае из (2.6) получим

$$R_2'' R_1 - R_1'' R_2 + \frac{2}{r} (R_2' R_1 - R_1' R_2) = 0.$$

Это выражение после умножения на  $r^2$  интегрируется:

$$(R_2' R_1 - R_1' R_2) r^2 = C_1,$$

где  $C_1$  — постоянная. При  $r = 0$  на основании условия 2 левая часть обращается в нуль, следовательно,

$$C_1 = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} R_2' R_1 - R_1' R_2 &= 0, \\ R_2 &= C_2 R_1, \end{aligned}$$

где  $C_2$  — новая постоянная.

На основании первого условия  $C_2 = 1$  и, следовательно,

$$R_2 = R_1,$$

т.е. двух различных решений быть не может.

Уравнение (2.6) линейно и однородно, поэтому порядок его легко снижается на единицу. Для этого введем вспомогательную функцию  $\gamma$ :

$$R' = R \left( \gamma + \frac{n}{r} \right); \quad (2.9)$$

тогда

$$R'' = R \left( \gamma' + \gamma^2 + \frac{2n}{r} \gamma + \frac{n^2 - n}{r^2} \right).$$

Уравнение (2.6) может быть приведено к нелинейному уравнению первого порядка:

$$\gamma' + \gamma^2 + \frac{2(n+1)}{r} \gamma + 4\pi\kappa \frac{\rho'}{V'} = 0. \quad (2.10)$$

Может существовать только одно решение этого уравнения, не обращающееся в бесконечность при  $r = 0$ . В частности, если  $\rho' = 0$ , то

$$\gamma = 0; \quad R = C r^n. \quad (2.11)$$

Так же просто получается интеграл уравнения (2.6), если плотность изменяется в соответствии с гипотезой Лежандра:

$$4\pi\kappa \frac{\rho'}{V'} = \beta^2, \quad (2.12)$$

где  $\beta$  — постоянная. В этом случае получаем уравнение Бесселя:

$$R'' + \frac{2}{r} R' + \left( \beta^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) R = 0. \quad (2.13)$$

Его решение

$$\begin{aligned} R = \frac{C}{\sqrt{r}} I_{\frac{2n+1}{2}}(\beta r) &= C_1 \beta^n r^n \left( 1 - \frac{\beta^2 r^2}{2(2n+3)} + \right. \\ &\left. + \frac{\beta^4 r^4}{2 \cdot 4 \cdot (2n+3)(2n+5)} - \frac{\beta^6 r^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot (2n+3)(2n+5)(2n+7)} + \dots \right) \end{aligned}$$

при  $n = 2$  имеет следующий вид:

$$R = C_1 \left[ \left( \frac{3}{\beta^2 r^2} - 1 \right) \frac{\sin \beta r}{\beta r} - \frac{3}{\beta^2 r^2} \cos \beta r \right]. \quad (2.14)$$

С помощью подстановки

$$\frac{R'}{R} = \frac{\eta}{r} - \frac{1}{r} - 4\pi\kappa \frac{\rho}{V'} \quad (2.15)$$

общее уравнение (2.6) приводится к известному дифференциальному уравнению Клеро в форме Радо:

$$\eta' - 8\pi\kappa \frac{\rho}{V'} (1 + \eta) + \frac{(\eta - n - 1)(\eta + n)}{r} = 0. \quad (2.16)$$

Из этого уравнения при  $n = 2$  Радо получил

$$\frac{c(r)}{\frac{2}{3}m(r) \cdot r^2} \approx 1 - \frac{2}{5} \sqrt{1 + \eta(r)}, \quad (2.17)$$

где  $c(r)$  — центральный момент инерции массы, заключенной внутри сферы  $r = \text{const}$ , а  $m(r)$  — величина этой массы. Последнее равенство с достаточной точностью определяет функцию  $\eta$  при достаточно широких предположениях о законе изменения плотности с глубиной. Например, если плотность изменяется в соответствии с гипотезой Лежандра, то точное значение для  $\eta'$  на основании (2.14) и (2.15) таково:

$$\eta = \frac{\frac{1}{3}\beta^4 r^4}{3 - \beta^2 r^2 - 3\beta r \text{ctg} \beta r} - \frac{\beta^2 r^2}{1 - \beta r \text{ctg} \beta r} + \frac{1}{3}\beta^2 r^2 - 2, \quad (2.18)$$

а теория Радо дает

$$\sqrt{1 + \eta} = \frac{15}{\beta^2 r^2} - \frac{5}{1 - \beta r \text{ctg} \beta r}. \quad (2.19)$$

Для Земли  $r\beta \leq 2,5$ .

При значениях  $r\beta < 3$  расхождение в результатах, получаемых по формулам (2.18) и (2.19), не превышает 1% определяемой величины.

Итак, деформация жидкой неоднородной сферы определяется одной из трех функций: функцией  $R$  (уравнение (2.6)), функцией  $\gamma$  (уравнение (2.10)) или функцией  $\eta$  (уравнение (2.16)). Значения  $\gamma$  и  $\eta$  определяются только строением сферы (законом изменения плотности с глубиной) и условием конечности в центре сферы. Приближенное решение уравнения (2.16) при  $n = 2$  дается формулой Радо (2.17);  $\gamma$  определяется через  $\eta$  следующим образом:

$$\gamma r = \eta - n - 1 - 4\pi\kappa \frac{\rho}{V'} r. \quad (2.20)$$

Значение  $R$  на поверхности сферы получается с помощью общего условия (1.32).

Подставляя в (1.32)  $R'$  из (2.15), получаем

$$\frac{R}{g_0 a} = \frac{H}{a} = \frac{2n + 1}{n + \eta}; \quad \frac{R - g_0 a}{g_0 H} = \frac{n + 1 - \eta}{2n + 1}. \quad (2.21)$$

Если плотность постоянная, то  $\gamma = 0$ ,  $\eta = n - 2$  и, следовательно,

$$\frac{R}{g_0 a} = \frac{2n + 1}{2(n - 1)}; \quad \frac{R - g_0 a}{g_0 H} = \frac{3}{2n + 1}. \quad (2.22)$$

### §3. УПРУГАЯ ОБОЛОЧКА И ЖИДКОЕ ЯДРО

Рассмотрим случай, когда упругая оболочка с внешним радиусом  $r = a$  и внутренним  $r = b$  заключает внутри себя вещество, для которого модуль сдвига  $\mu = 0$ . Задача состоит в согласовании решений, которые получаются для ядра и оболочки в отдельности. таким образом, чтобы выполнялись краевые условия на поверхности сферы, а на границе раздела  $r = b$  смещения, напряжения, потенциал притяжения и его первые производные сохраняли непрерывность.

Составим все краевые условия для случая, разбираемого в дальнейшем, когда на поверхности сферы  $r = a$  тангенциальные напряжения отсутствуют, а радиальная компонента равна  $C \frac{\bar{\omega}}{a^n}$ , где  $C$  — некоторая постоянная.

Тангенциальные компоненты напряжения обращаются в нуль, если на основании (1.28)

$$M = \left[ \mu \left( T' - \frac{2}{r} T + H \right) \right]_a = 0. \quad (3.1)$$

Нормальная компонента напряжения определяется формулой (1.27), в которой следует положить

$$P(x - u, y - v, z - w)_a = 0,$$

так как гидростатическое давление на поверхности сферы до деформации отсутствовало. Следовательно,

$$N(a) = \left[ (\lambda + 2\mu) H' + \mu \left( \frac{2}{r} H - \frac{n(n+1)}{r^2} T \right) \right]_a = C. \quad (3.2)$$

Третье уравнение на поверхности сферы вытекает из формулы (1.32):

$$\left[ R' - (2n+1) g_0 + \frac{n+1}{r} R - 4\pi\kappa\rho H \right]_a = 0. \quad (3.3)$$

На границе оболочки и жидкого ядра не могут существовать тангенциальные напряжения, поэтому

$$\left( T' - \frac{2}{r} T + H \right)_b = 0. \quad (3.4)$$

В дальнейшем изложении величины, относящиеся к ядру, условимся отмечать подстрочным индексом  $i$ .

Гидростатическое давление  $-P(b)$ , существовавшее до деформации жидкости на поверхности сферы  $r = b$ , после деформации сохранит ту же величину на поверхности:

$$r = b + H_i(b) \frac{\bar{\omega}}{r^n}.$$

На границе ядра и оболочки, где

$$r = b + H(b) \frac{\bar{\omega}}{r^n},$$

гидростатическое давление равно

$$-P(b) + [V' \rho_i (H - H_i)]_b \frac{\bar{\omega}}{r^n}$$

я должно уравниваться нормальной компонентой напряжения на внутренней поверхности упругого слоя. Поэтому с помощью (1.27) получаем

$$P(b) + N(b) \frac{\bar{\omega}}{r^n} = P(b) - [V' \rho_i (H - H_i)]_b \frac{\bar{\omega}}{r^n}.$$

Используя (2.5) и принимая во внимание, что  $R_i = R$ , получаем

$$[N + \rho_i (HV' + R)]_b = 0. \quad (3.5)$$

Последнее условие вытекает из формулы (1.31). С помощью (2.9)  $R'_i(b)$  выражается через  $\gamma$ , а  $R = R_i$ , поэтому

$$\left[ R' - \gamma R - \frac{n}{r} R + 4\pi \kappa (\rho_i - \rho_e) \right]_b = 0. \quad (3.6)$$

Итак, случай неоднородной сжимаемой оболочки и жидкого ядра приводится к неоднородной краевой задаче шестого порядка (обыкновенные однородные дифференциальные уравнения (1.23), (1.24) и (1.25) содержат производные до второго порядка от каждой неизвестной функции  $H$ ,  $T$  и  $R$ ). Половина краевых условий задана на верхней границе интервала  $a \geq r \geq b$  (условия (3.1), (3.2) и (3.3); последнее условие неоднородное). Вторая половина условий задана на нижней границе  $r = b$  (формулы (3.4), (3.5) и (3.6)).

Для учета влияния ядра необходимо знать лишь две величины: плотность на границе ядра  $\rho_i$  и значение функции  $\gamma$  (или  $\eta$ ) на той же границе. Точное значение  $\gamma$  определяется законом изменения плотности внутри ядра и получается из решения дифференциального уравнения первого порядка (2.10) при условии конечности  $\gamma$  в центре сферы. Для ядра постоянной плотности  $\gamma = 0$ ; при изменении плотности по гипотезе Лежандра (2.12)  $\gamma$  определено формулами (2.9) и (2.14). В общем случае приближенное значение  $\gamma$  получается из (2.20) и (2.17) и определяется массой ядра, центральным моментом инерции ядра и значением плотности на его границе.

#### §4. УПРУГОЕ, ОДНОРОДНОЕ И НЕСЖИМАЕМОЕ ЯДРО

Как сказано выше, для несжимаемого вещества

$$f = 0; \quad \lambda = \infty; \quad \lambda f = -p.$$

Здесь  $p$  — новая неизвестная функция. Кроме того,  $\rho' = \mu' = 0$ .

Уравнения (1.23), (1.24), (1.25) и (1.20) принимают следующий вид:

$$T = \frac{(r^2 H)'}{n(n+1)}, \quad (4.1)$$

$$-\lambda f = p = \rho(R + HV') + \mu(T'' - H'), \quad (4.2)$$

$$p' = \rho(R + V'H)' + \mu \left[ \frac{1}{r^2} (r^2 H)'' - \frac{n(n+1)}{r^2} H \right], \quad (4.3)$$

$$R'' + \frac{2}{r} R' - \frac{n(n+1)}{r^2} R = 0. \quad (4.4)$$

Исключая  $p$  из (4.2) и (4.3), получаем

$$H^{IV} + 8H'''r^{-1} - 2(n+3)(n-2)r^{-2}H'' - 4n(n+1)r^{-3}H' + \\ + (n+2)(n+1)n(n-1)r^{-4}H = 0.$$



Решение ищем в следующем виде:

$$H = cr^s.$$

Для определения  $s$  получаем уравнение четвертой степени:

$$s(s-1)(s-2)(s-3) + 8s(s-1)(s-2) - 2(n+3)(n-2)s(s-1) - 4n(n+1)s + (n+2)(n+1)n(n-1) = 0$$

или

$$(s-n-1)(s-n+1)(s+n)(s+n+2) = 0.$$

Отсюда получаем общий интеграл для  $H$ :

$$H = C_1 r^{n-1} + C_2 r^{n+1} + C_4 r^{-n-2} + C_5 r^{-n}.$$

Из уравнений (4.4) и (4.1) получаем  $R$  и  $T$ :

$$R = C_3 r^n + C_6 r^{-n-1},$$

$$T = \frac{1}{n} C_1 r^n + \frac{n+3}{n(n+1)} C_2 r^{n+2} - \frac{1}{n+1} C_4 r^{-n-1} - \frac{n-2}{n(n+1)} C_5 r^{-n+1}. \quad (4.5)$$

Три постоянные интегрирования определяются из условий конечности смещений и потенциала в центре сферы:

$$C_4 = C_5 = C_6 = 0.$$

Остальные три постоянные определяются условиями на поверхности ядра.

Функции  $M$  и  $N$ , характеризующие тангенциальные и нормальные напряжения, определяются на основании (1.27), (1.28) и (4.2):

$$M = \mu \frac{2(n^2-1)C_1 r^{n-1} + 2(n+2)C_2 r^{n+1}}{n(n+1)} = \mu \left[ \frac{2n+1}{r} T - \frac{3}{n} H \right], \quad (4.6)$$

$$N = -\rho(R + V'H) + \mu(3H' - T'') = -\rho(R + V'H) + 2\mu \left[ (n-1)C_1 r^{n-2} + \frac{n^2-n-3}{n} C_2 r^n \right] = -\rho(R + V'H) + \mu \left[ \frac{2n^2+n+3}{nr} H - 3 \frac{n+1}{r^2} T \right]. \quad (4.7)$$

## §5. УПРУГАЯ ОБОЛОЧКА И УПРУГОЕ ОДНОРОДНОЕ НЕСЖИМАЕМОЕ ЯДРО

На границе ядра и оболочки смещения, напряжения и потенциал притяжения сохраняют непрерывность, поэтому при  $r = b$  ( $b$  — радиус ядра) значения  $H$ ,  $T$ ,  $R$ ,  $M$  и  $N$  для ядра совпадают со значениями соответствующих функций для оболочки. Эти условия позволяют исключить постоянные интегрирования  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$ . Индексом  $i$  отметим функции, относящиеся к ядру, функции же, относящиеся к оболочке, оставим без подстрочного индекса.

Таким образом, из (4.6) и (4.7) получим

$$\left[ M - \mu_i \left( \frac{2n+1}{r} T - \frac{3}{n} H \right) \right]_b = 0, \quad (5.1)$$

$$\left[ N + \rho_i (R + V'H) - \mu_i \left( \frac{2n^2+n+3}{nr} H - 3 \frac{n+1}{r^2} T \right) \right]_b = 0. \quad (5.2)$$

Третье условие на внутренней границе оболочки, как и в случае жидкого ядра, получим из условия непрерывности радиальной производной потенциала притяжения объемных масс (формула (1.31)):

$$R'_i = nC_3 r^{n-1} = \frac{n}{r} R, \quad (5.3)$$

т.е.

$$\left[ R' - \frac{n}{r} R + 4\pi\kappa(\rho_i - \rho_e) H \right]_b = 0.$$

Полученные три условия совпадают с теми, которые были получены для жидкого ядра, если в уравнениях (5.1) и (5.2) положить  $\mu = 0$ , а в (3.6) положить  $\gamma = 0$ , как это должно быть для ядра однородного. Однако случай жидкого ядра рассмотрен в общем случае ядра сжимаемого и неоднородного, здесь же для упрощения предполагаем несжимаемость и однородность по плотности и модулю сдвига.

Итак, краевая задача в случае однородного упругого ядра в принципе не отличается от задачи, рассмотренной в предыдущем параграфе. Лишь условия (3.4), (3.5) и (3.6) заменяются условиями (5.1), (5.2) и (5.3) в той же точке  $r = b$ .

Применение формул (5.1), (5.2) и (5.3) к шару со свободной от тангенциальных напряжений поверхностью приводит к следующему результату:

$$\frac{R - g_0 a}{g_0 H} = \frac{k}{h} = \frac{3}{2n + 1}, \quad (5.4)$$

$$\frac{T}{aH} = \frac{l}{h} = \frac{3}{n(2n + 1)}, \quad (5.5)$$

$$\frac{H}{a} = h = \frac{2n + 1}{2(n - 1)} \frac{1 + \frac{N}{\rho g_0 a}}{1 + \frac{2n^2 + 4n + 3}{n} \frac{\mu}{\rho g_0 a}}, \quad (5.6)$$

где  $k$ ,  $h$  и  $l$  — известные числа Лява.

Наконец, для ядра абсолютно твердого ( $\mu_i = \infty$ ) из (5.1), (5.2) и (3.6) получим очевидные условия:

$$\begin{aligned} H(b) = T(b) &= 0, \\ \left( R' - \frac{n}{r} R \right)_b &= 0. \end{aligned} \quad (5.7)$$

## §6. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Нетрудно построить систему интегральных уравнений, заключающую в себе все условия рассмотренной краевой задачи.

При  $n = 2$  эти уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} -\mu r T &= a_1 + b_1 r + r I_1 + I_2, \\ -(\lambda + 2\mu) H &= a_2 + b_2 r + r I_3 + I_4, \\ r^3 R &= r^5 \frac{g_0}{a} + b_3 + I_5 + r^5 I_6, \end{aligned} \quad (6.1)$$

где  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  и  $b_3$  зависят от краевых условий.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_c^r \left[ (\lambda + 3\mu - r\lambda' + r\rho V') H - \left( \mu' + \frac{6}{r}\lambda + \frac{12}{r}\mu \right) T + r\rho R \right] dr, \\
I_2 &= \int_r^a \left[ (2r\mu - r^2\lambda' + r^2\rho V') H - (6\lambda + 10\mu) T + r^2\rho R \right] dr, \\
I_3 &= \int_c^r \left[ (-6\mu - 4r\mu' + r^2\rho V'' - 2r\rho V') H + 6 \left( \frac{2}{r}\mu + \mu' + \rho V' \right) T - r^2\rho' R \right] \frac{dr}{r^2}, \\
I_4 &= \int_r^a \left[ (-2\lambda - 10\mu + r\lambda' - 2r\mu' + r^2\rho V'' - 2r\rho V') H + \right. \\
&\quad \left. + 6 \left( \frac{3}{r}\mu + \frac{1}{r}\lambda + \mu' + \rho V' \right) T - (r\rho + r^2\rho') R \right] \frac{dr}{r}, \\
I_5 &= \frac{4\pi\kappa}{5} \int_c^r (2r^3\rho H + 6r^2\rho T) dr, \\
I_6 &= -\frac{12\pi\kappa}{5} \int_r^a \left( \rho H - \frac{2}{r}\rho T \right) \frac{dr}{r^2},
\end{aligned} \tag{6.2}$$

$c$  — постоянная, равная  $b$  или  $a$  (в зависимости от типа задачи).

Нетрудно убедиться, что после двукратного дифференцирования каждого из уравнений (6.1) (третье уравнение после первого дифференцирования следует умножить на  $r^{-4}$ ) получаются исходные дифференциальные уравнения (1.23), (1.24) и (1.25) при  $n = 2$ . Связь же с краевыми условиями осуществляется следующим образом. Дифференцируя все уравнения по одному разу и определяя из полученных таким образом шести уравнений все  $I_m$  ( $m = 1, 2, \dots, 6$ ), получаем

$$\begin{aligned}
I_1 + b_1 &= -\mu (rT' - T + rH) - r\lambda H, \\
I_2 + a_1 &= \mu (r^2T' - 2rT + r^2H) + r^2\lambda H, \\
I_3 + b_2 &= -(\lambda + 2\mu) \left( H' + \frac{2}{r}H - \frac{6}{r^2}T \right) - \frac{6}{r^2}\mu T - \rho R, \\
I_4 + a_2 &= (\lambda + 2\mu) \left( rH' + H - \frac{6}{r}T \right) + \frac{6}{r}\mu T + r\rho R, \\
I_5 + b_3 &= \frac{2}{5}r^3R - \frac{1}{5}r^4R' + \frac{4\pi\kappa}{5}\rho Hr^4, \\
5rI_6 &= R' + \frac{3}{r}R - 5r\frac{g_0}{a} - 4\pi\kappa\rho H.
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Полагая в последнем выражении  $r = a$ , получим условие (3.3) для потенциала на поверхности сферы. Остальные пять условий можно удовлетворить соответствующим выбором пяти постоянных:  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  и  $b_3$ . Интегралы с нечетными индексами

обращаются в нуль при  $r = c$ , с четными — при  $r = a$ . Следовательно:

$$\begin{aligned}
 b_1 &= - \left[ \mu(rT' - T + Hr) + r\lambda H \right]_c, \\
 a_1 &= \left[ \mu(r^2T' - 2rT + r^2H) + r^2\lambda H \right]_a, \\
 b_2 &= \left[ -(\lambda + 2\mu) \left( H' + \frac{2}{r}H - \frac{6}{r^2}T \right) - \frac{6}{r^2}\mu T - \rho R \right]_c, \\
 a_2 &= \left[ (\lambda + 2\mu) \left( rH' + H - \frac{6}{r}T \right) + \frac{6}{r}\mu T + \rho r R \right]_a, \\
 b_3 &= \frac{1}{5} \left[ 2r^3 R - r^4 R' + 4\pi\kappa\rho Hr^4 \right]_c.
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

В эти выражения входят 12 значений определяемых функций и их первых производных в точках  $a$  и  $c$ . Из них 6 величин мы можем исключить с помощью шести краевых условий. Таким образом, останутся только 6 величин. Например, для случая, когда мы имеем упругую оболочку со свободной наружной поверхностью и жидким ядром, три условия задаются в точке  $r = a$  и три — в точке  $r = b$ . Полагая  $c = b$  и используя условия (3.1) — (3.6), получаем

$$\begin{aligned}
 a_1 &= (r^2\lambda H)_a, \\
 a_2 &= \left[ (2\mu - \lambda)H - \frac{6}{r}\mu T + r\rho R \right]_a, \\
 b_1 &= -(r\lambda H + \mu T)_b, \\
 b_2 &= \left[ \frac{6}{r^2}\mu T - \frac{4}{r}\mu H + \rho_i V' H + (\rho_i - \rho_e)R \right]_b, \\
 b_3 &= \frac{1}{5} \left[ 4\pi\kappa r^4 \rho_i H - r^4 \gamma R \right]_b.
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

Если наружная поверхность свободна от напряжений, а ядро — упругое, однородное и несжимаемое, то с помощью (5.1), (5.2) и (5.3) получим

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \left[ \left( \frac{3}{2}\mu_i - \lambda \right) rH - (5\mu_i + \mu)T \right]_b, \\
 b_2 &= \left[ \left( -\frac{4}{r}\mu - \frac{13}{2r}\mu_i + V'\rho_i \right) H + \left( \frac{6}{r^2}\mu + \frac{9}{r^2}\mu_i \right) T + (\rho_i - \rho_e)R \right]_b, \\
 b_3 &= \frac{4\pi\kappa}{5} (r^4 \rho_i H)_b.
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

Постоянные  $a_1$  и  $a_2$  зависят только от условий на наружной поверхности сферы и поэтому сохраняют те же значения, что и в предыдущем случае.

Если все граничные условия заданы на поверхности сферы, то в (6.2) полагаем  $c = a$  и получаем

$$\begin{aligned}
 a_1 &= [r^2 M + r^2 \lambda H]_a, \\
 ab_1 &= -a_1 - (r \mu T)_a, \\
 a_2 &= \left[ r N - \frac{6}{r} \mu T + (2\mu - \lambda) H + r \rho R \right]_a, \\
 ab_2 &= -a_2 - [(\lambda + 2\mu) H]_a, \\
 b_3 &= \left[ r^2 \left( R - \frac{g_0}{a} r^2 \right) \right]_a, \\
 \left[ R' + \frac{3}{r} R - 5 \frac{g_0}{a} r - 4\pi \kappa \rho H \right]_a &= 0.
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

Полученные здесь результаты использованы для контроля интегрирования дифференциальных уравнений упругого равновесия численным методом. Формулы (6.7) служат для контроля тех частных интегральных кривых, все начальные условия для которых заданы в точке  $r = a$ . Формулы (6.5) и (6.6) использованы для контроля окончательного результата вычислений для случая жидкого неоднородного и однородного упругого несжимаемого ядра, когда половина граничных условий задана в точке  $r = a$ , а вторая половина — в точке  $r = b$ .

Заметим, что систему (6.1) можно привести к системе интегральных уравнений типа уравнения Фредгольма с разрывным ядром. Для этого в уравнениях (6.3) полагаем  $c = b$  и затем  $r = a$  и  $r = b$ ; к полученным таким образом 12 уравнениям присоединяем 5 краевых условий (шестое условие совпадает с одним из 12 уравнений). Из системы 17 уравнений определяются 12 значений вспомогательных функций  $H$ ,  $T$  и  $R$  и их первых производных в точках  $a$  и  $b$  и 5 коэффициентов, входящих в (6.1). Каждая из этих величин выражается линейной функцией от интегралов (6.2), распространенных на весь интервал  $a \geq r \geq b$ . Подстановка в (6.1) приведет к системе неоднородных интегральных уравнений с ядром, теряющим непрерывность только на диагонали квадрата со сторонами  $a - b$ .

## §7. ГИПОТЕЗЫ ОБ ИЗМЕНЕНИИ ПЛОТНОСТИ С ГЛУБИНОЙ

В уравнения равновесия упругой гравитирующей сферы (1.23), (1.24) и (1.25) входят функции  $\mu$ ,  $\lambda$ ,  $\rho$  и  $V'$ . Отношения  $\frac{\mu}{\rho}$  и  $\frac{\lambda}{\rho}$  определяются скоростями распространения сейсмических волн, а  $V'$  выражается через  $\rho$ . Поэтому все коэффициенты рассматриваемых дифференциальных уравнений окажутся известными, как только будет принята определенная гипотеза о зависимости плотности от глубины.

Все гипотезы, устанавливающие распределение плотностей внутри Земли, опираются прежде всего на известные значения для массы и момента инерции Земли. Масса Земли  $m$  является стоксовой постоянной, т.е. вполне определяется гравитационным полем и размером Земли. Поэтому произведение средней плотности Земли  $\rho_m$  на постоянную тяготения  $\kappa$  известно очень точно:

$$\begin{aligned}
 \kappa \rho_m &= 3,6797 \cdot 10^{-7} \text{ с}^{-2}. \\
 \rho_m &= 5,517 \text{ г/см}^3.
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

Центральный полярный момент инерции Земли  $C$  определяется с помощью постоян-

ной прецессии  $H$ . По де Ситтеру:

$$H = \frac{C - A}{C} = 0,003279. \quad (7.2)$$

Разность между полярным и экваториальными моментами инерции  $C - A$  также является стоксовой постоянной и выражается через сжатие земного эллипсоида  $\alpha$ , его большую полуось  $a$  и угловую скорость вращения Земли  $s$ :

$$\begin{aligned} C - A &= \frac{2}{3}ma^2\varepsilon, \\ \varepsilon &= \alpha - \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{2s^2a^3(1-\alpha)^3}{15\kappa m} \cdot \frac{i^5}{(3+i^2)\arctg i - 3i}, \\ i^2 &= (1-\alpha)^{-2} - 1. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Погрешность величины  $\varepsilon$  определяется в основном погрешностью принятого значения сжатия  $\alpha$ , так как все остальные величины, входящие в (7.3), известны со значительно более высокой относительной точностью.

Разность  $\varepsilon - \alpha$  мало зависит от ошибки сжатия и равна следующей величине:

$$\varepsilon - \alpha = -0,001729.$$

Таким образом,

$$\frac{C}{\frac{2}{3}ma^2} = \frac{\varepsilon}{H} = \frac{\alpha - 0,001729}{0,003279}. \quad (7.4)$$

Другой метод, устанавливающий зависимость между  $C$  и  $\alpha$ , основан на допущении, что Земля по отношению к гравитационным силам и силам центробежным, возникающим от ее вращения, находится в состоянии гидростатического равновесия. Предположение это достаточно обосновано, так как время релаксации напряжений сдвига внутри Земли весьма мало по сравнению с тем временем, когда угловая скорость вращения Земли может измениться на заметную величину, выходящую за пределы точности теории Клеро–Радо.

Используя формулу (2.17), имеем

$$\frac{C}{\frac{2}{3}ma^2} = \frac{\varepsilon}{H} = 1 - \frac{2}{5}\sqrt{1 + \eta(a)}.$$

Принимая во внимание, что для Земли  $R = \frac{\alpha g_0}{2s^2a}g_0a$ , из (2.21) получаем

$$\eta(a) = \frac{5}{2\alpha} \cdot \frac{s^2a}{g_0} - 2. \quad (7.5)$$

На основе (7.4) и (7.5) можно определить  $\alpha$  и  $C$ .

Средняя плотность Земли  $\rho_m$  и параметр неоднородности Земли  $\frac{\varepsilon}{H}$  являются двумя основными количественными характеристиками распределения плотностей внутри Земли. Кроме того, известно, что плотность поверхностных слоев Земли примерно в два раза меньше средней плотности Земли. Очевидно, что плотность должна возрастать с глубиной. Этим исчерпываются достоверные данные о распределении плотностей в Земле.

Далее пока неизбежно привлечение гипотез. Кратко остановимся на тех из них, которые будут использованы в дальнейшем изложении.

Предполагая наличие гидростатического равновесия, Лежандр определил  $\rho$  с помощью гипотезы, что приращение плотности прямо пропорционально приращению гидростатического давления и обратно пропорционально плотности (см. формулу (2.12)):

$$d\rho = \frac{\beta^2}{4\pi\kappa} \cdot \frac{dP}{\rho} = \frac{\beta^2}{4\pi\kappa} V' dr.$$

Здесь  $\frac{\beta^2}{4\pi\kappa}$  — коэффициент пропорциональности. Из условия ограниченности  $\rho$  в центре сферы получается (радиус сферы принят за единицу)

$$\frac{\rho}{\rho_m} = \frac{\beta^2 \sin \beta r}{3r (\sin \beta - \beta \cos \beta)}, \quad (7.6)$$

при этом  $\beta$  определяется значением параметра неоднородности:

$$1 - \frac{6}{\beta^2} + \frac{2}{1 - \beta \operatorname{ctg} \beta} = \frac{\varepsilon}{H}. \quad (7.7)$$

Буллен [4] предположил, что состояние вещества в пределах оболочки Земли отличается только величиной гидростатического давления; химический состав, физико-химическое состояние и температура остаются неизменными. То же относится и к ядру. В этом случае

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{K} dP,$$

где  $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$  есть модуль объемной упругости. Следовательно:

$$\frac{\rho'}{V'} = \rho \frac{\rho}{K}. \quad (7.8)$$

Функция  $\rho/K$  известна, поэтому (7.8) легко приводится к дифференциальному уравнению второго порядка относительно  $m(r)$ :

$$m(r) = \int_0^r \rho r^2 dr. \quad (7.9)$$

Разрыв непрерывности функции  $\rho/K$  на границе ядра и оболочки приводит к необходимости интегрировать два подобных уравнения: одно для оболочки, другое для ядра. Поэтому в решение войдут четыре постоянные интегрирования. Для их определения два условия берутся из непрерывности потенциала на границе ядра и оболочки и из конечности плотности в центре сферы. Остальные два условия задаются величиной массы и момента инерции Земли. Добавление каждой новой поверхности разрыва непрерывности плотности вносит в решение две новые постоянные интегрирования и лишь одно условие для их определения (условие непрерывности потенциала).

С гипотезой (7.8) согласиться трудно, так как гравитационная дифференциация вещества внутри Земли должна привести к повышению концентрации более тяжелых элементов с увеличением глубины, температура же при господствующих внутри Земли давлениях не может сколько-нибудь значительно повлиять на плотность [5]. Поэтому плотность с увеличением  $r$  должна убывать быстрее, чем это следует из уравнения (7.8), т.е.

$$\frac{\rho'}{V'} > \rho \frac{\rho}{K}. \quad (7.10)$$

В силу малой достоверности всех имеющихся гипотез о распределении плотностей внутри Земли в дальнейших вычислениях взяты крайние варианты, удовлетворяющие несомненным условиям (7.1) и (7.4). Одним крайним случаем (совершенно неправдоподобным) является тот, когда скачок плотности на границе ядра максимален: в оболочке  $\rho_e = 4,199$ , в ядре  $\rho_i = 12,128$ . Другим крайним случаем мы считаем распределение плотности по Лежандру, когда на границе ядра скачок плотности отсутствует. К этим крайним добавлен «средний» случай, а именно: неравенство (7.10) заменено уравнением

$$\frac{\rho'}{V'} = \tau \rho \frac{\rho}{K}, \quad (7.11)$$

где  $\tau$  — положительная величина, большая единицы. Мы взяли

$$\tau = \frac{K}{\lambda}, \quad (7.12)$$

так как в этом случае часть коэффициентов в уравнениях (1.23) и (1.24) обращается в нуль. В оболочке  $1,47 > \tau > 1,34$ , т.е.  $\tau \approx 1,40$ . Иначе говоря, принято, что прирост плотности за счет изменения химического состава составляет около 40% от прироста за счет сжимаемости. Случай постоянной плотности интерпретируется значением  $\tau = 0$ , а распределение плотности по Лежандру — значением  $\tau \approx 3,2$  (в оболочке  $3,5 > \tau > 2,9$ ). В гипотезе Лежандра прирост плотности за счет гравитационной дифференциации более чем в два раза превышает прирост за счет сжимаемости.

## §8. СТРОЕНИЕ УПРУГОЙ СФЕРЫ, МОДЕЛИРУЮЩЕЙ ЗЕМЛЮ

При интегрировании дифференциальных уравнений численными методами удобно иметь дело с величинами порядка единицы. С этой целью примем:

— за единицу длины — радиус  $a$  сферы, объем которой равен объему Земли,  $a = 6,371 \cdot 10^8$  см;

— за единицу плотности — среднюю плотности Земли,  $\rho_m = 5,517$  г/см<sup>3</sup>;

— за единицу ускорения — ускорение силы тяготения на поверхности сферы радиуса  $a$  и плотности  $\rho_m$ :  $g_0 = 982,0$  см/с<sup>2</sup>. Следовательно,

— единица давления (напряжения)  $g_0 \rho_m a = 3,547 \cdot 10^{12}$  дин/см<sup>2</sup>;

— единица потенциала  $ag_0 = 6,256 \cdot 10^{11}$  см<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>.

В этой системе единиц постоянная тяготения  $\kappa = \frac{3}{4\pi}$ , масса Земли  $m = \frac{4\pi}{3}$ .

Для функций, характеризующих деформированное состояние сферы, переход к системе CGS осуществляется с помощью следующих множителей:

$H$  — множитель в выражении для радиальной компоненты смещения  $a$ , см;

$T$  — для тангенциальной компоненты смещения  $a^2$ , см<sup>2</sup>;

$N$  — для радиальной компоненты напряжения  $g_0 \rho_m a$ , дин/см<sup>2</sup>;

$M$  — для тангенциальной компоненты напряжения  $g_0 \rho_m a^2$ , дин/см;

$R$  — для изменения потенциала притяжения  $ag_0$ , см<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>;

$f$  — для объемного расширения, 1.

Чтобы при численном интегрировании дифференциальных уравнений упругого равновесия получить более плавный ход разностей, функции  $\frac{\mu}{\rho}$  и  $\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$ , заданные в первоис-



точниках таблицами, представлены следующими интерполяционными формулами:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mu}{\rho} &= -0,45 + 4,14r - 3,44r^2 \\ \frac{K}{\rho} &= \frac{\lambda + \frac{2}{3}\mu}{\rho} = 0,97 + 4,32r - 4,72r^2 \end{aligned} \right\} 1 \geq r > 0,55. \quad (8.1)$$

$$\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} = 2,13 - 1,13r - 1,72r^2, \quad 0,55 > r \geq 0. \quad (8.2)$$

Скорости продольных и поперечных волн в км/с, рассчитанные по этим формулам, приведены в табл. 1. Для суждения о степени приближения к наблюдаемым значениям рядом выписаны скорости волн по Джеффрису [6].

Таблица 1  
Скорости продольных и поперечных волн

r	Скорости продольных волн, км/с		Скорости поперечных волн, км/с	
	вычислено	по Джеффрису	вычислено	по Джеффрису
1,00	7,50	7,75	3,96	4,35
0,95	9,07	8,76	4,87	4,85
0,90	10,27	10,52	5,53	5,84
0,85	11,21	11,40	6,04	6,34
0,80	11,95	11,85	6,43	6,56
0,75	12,54	12,29	6,71	6,74
0,70	12,99	12,71	6,91	6,90
0,65	13,32	13,08	7,02	7,04
0,60	13,52	13,46	7,06	7,20
0,55	13,62	13,64	7,01	7,30
0,55	7,86	8,10		
0,50	8,45	8,48		
0,40	9,39	9,33		
0,30	10,14	9,95		
0,20	10,75	*		
0,10	11,21	11,27		
0,00	11,57	11,31		

\* Эффект внутреннего ядра сглажен.

Для наших целей такого приближения вполне достаточно.

Как уже указывалось, все последующие вычисления выполнены для трех гипотез об изменении плотности с глубиной, причем средняя плотность (масса) Земли и сжатие (момент инерции) ее во всех вариантах сохранены одинаковыми. В той системе единиц, которая принята в настоящем параграфе, средняя плотность Земли  $\rho_m$  принята равной единице, т.е. плотности выражены в долях средней плотности Земли. Поэтому  $\rho_m$  войдет только при выражении плотностей в системе единиц CGS, определяя таким образом масштаб плотностей и некоторых других величин в этой системе единиц.

Центральный момент инерции Земли с относительной ошибкой порядка сжатия определяется формулой

$$C = \frac{8\pi}{3} \int_0^1 \rho r^4 dr.$$

Следовательно, из (7.4) получаем

$$\frac{\varepsilon}{H} = \frac{\alpha - 0,001729}{0,003279} = 3 \int_0^1 \rho r^4 dr. \quad (8.3)$$

Безразмерная величина  $\varepsilon/H$  характеризует степень неоднородности Земли. Для однородной Земли  $\rho = 1$  и  $\varepsilon/H = 3/5$ ; если вся масса заключена в центре,  $\varepsilon/H = 0$ ; сжатие  $\alpha = 1 : 297$  (эллипсоид Хэйфорда) соответствует  $\varepsilon/H = 0,500$ , а сжатие  $\alpha = 1 : 298,3$  (эллипсоид Красовского) соответствует  $\varepsilon/H = 0,495$ . Последнее значение и принято нами в последующих вычислениях.

Таким образом, на  $\rho$  наложено условие:

$$3 \int_0^1 \rho r^4 dr = 0,495, \quad (8.4)$$

которое не зависит от каких-либо гипотез о внутреннем строении Земли, так как и теория Стокса, и теория прецессии свободны от необходимости прибегать к гипотезам.

Для случая наибольшего скачка плотности ( $\rho$  постоянно как в ядре, так и в оболочке), принимая для границы ядра значение 0,55 земного радиуса, из (8.4) непосредственно получаем

$$\begin{aligned} \rho_e &= 0,742, \\ \rho_i &= 2,198. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Для гипотезы Лежандра из (7.7) с помощью (8.4) получаем

$$\beta = 2,5308.$$

После этого из (2.18) и (2.20) имеем

$$\gamma(0,55) = -0,520. \quad (8.6)$$

$\rho$  для всех значений  $r$  дается формулой (7.6) и приведено в табл. 2.

Таблица 2

Интегральные кривые уравнения  $y'' = -\frac{4}{r}y' - (ry' + 3y)y\frac{\rho}{\lambda}$

$r$	$\rho(1) = 0,6$	$\rho(1) = 0,7$	$r$	$\rho(0) = 2,0$	$\rho(0) = 2,5$
1,00	+1,000	+1,000	0,00	+2,000	+2,500
0,95	0,910	0,894	0,05	1,999	2,497
0,90	0,821	0,790	0,10	1,994	2,490
0,85	0,735	0,690	0,15	1,987	2,478
0,80	0,654	0,596	0,25	1,962	2,439
0,75	0,579	0,509	0,30	1,944	2,412
0,70	0,510	0,430	0,35	1,922	2,379
0,65	0,447	0,358	0,40	1,896	2,340
0,60	0,391	0,295	0,45	1,866	2,294
0,55	0,341	0,240	0,50	1,831	2,241
			0,55	1,790	2,180
$2 \int_{0,55}^1 yr^4 dr$	0,4652	0,4272	$2 \int_0^{0,55} yr^4 dr$	0,0372	0,0460

Несколько сложнее обстоит дело с третьим вариантом (7.11), (7.12). Введем вспомогательную функцию:

$$y = \frac{3}{r^3} \int_0^r \rho r^2 dr. \quad (8.7)$$

$\rho$  и  $V'$  через  $y$  выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{3}(ry' + 3y), \\ V' &= -ry. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Поэтому вместо (7.11) и (7.12) получаем

$$y'' + \frac{4}{r}y' + y(ry' + 3y)\frac{\rho}{\lambda} = 0. \quad (8.9)$$

Функция  $\rho/\lambda$  терпит разрыв непрерывности в точке  $r = b = 0,55$ , однако решение  $y$ , как и  $V'$ , должно быть непрерывным, поэтому

$$y(b+0) = y(b-0). \quad (8.10)$$

$y$ , а следовательно, и плотность  $\rho$  остаются конечными в центре сферы, как это видно из (8.9), только в том случае, когда

$$y'(0) = 0. \quad (8.11)$$

На поверхности сферы  $V' = -1$ ,  $r = 1$ , поэтому

$$y(1) = 1. \quad (8.12)$$

Четвертое условие на  $y$  накладывается значением параметра неоднородности:

$$\frac{\varepsilon}{H} = 3 \int_0^1 \rho r^4 dr = 1 - 2 \int_0^1 y r^4 dr = \frac{\alpha - 0,001729}{0,003279}. \quad (8.13)$$

При численном интегрировании уравнения (8.9) эти условия использованы следующим образом. Вычислены две пары отрезков интегральной кривой при следующих начальных условиях:

$$\left. \begin{array}{ll} y_1(1) = 1; & y'_1(1) = -1,2 \\ y_2(1) = 1; & y'_2(1) = -0,9 \end{array} \right\} 1 \geq r \geq 0,55, \quad \begin{array}{l} \rho(1) = 0,6 \\ \rho(1) = 0,7 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{ll} y'_3(0) = 0; & y_3(0) = 2,0 \\ y'_4(0) = 0; & y_4(0) = 2,5 \end{array} \right\} 0,55 \geq r \geq 0. \quad \begin{array}{l} \rho(0) = 2,0 \\ \rho(0) = 2,5 \end{array}$$

Результаты вычислений представлены в табл. 2.

Комбинация любого отрезка первой пары с любым отрезком второй пары удовлетворяет условиям (8.11) и (8.12), но не удовлетворяет (8.10) и (8.13). Для четырех возможных комбинаций получаем:

$$\text{если } \rho(1) = 0,6, \rho(0) = 2,0, \text{ то } y(b+0) - y(b-0) = +0,259, \frac{\varepsilon}{H} = 0,4976;$$

$$\text{если } \rho(1) = 0,6, \rho(0) = 2,5, \text{ то } y(b+0) - y(b-0) = -0,131, \frac{\varepsilon}{H} = 0,4888;$$

$$\text{если } \rho(1) = 0,7, \rho(0) = 2,0, \text{ то } y(b+0) - y(b-0) = -0,348, \frac{\varepsilon}{H} = 0,5356;$$

$$\text{если } \rho(1) = 0,7, \rho(0) = 2,5, \text{ то } y(b+0) - y(b-0) = -0,738, \frac{\varepsilon}{H} = 0,5268.$$

Все эти числа точно представляются следующими интерполяционными формулами:

$$\begin{aligned} y(b+0) - y(b-0) &= +5,461 - 6,07\rho(1) - 0,780\rho(0), \\ \frac{\varepsilon}{H} &= +0,3048 + 0,380\rho(1) - 0,0176\rho(0). \end{aligned} \quad (8.14)$$

Отсюда легко находятся те значения  $\rho(0)$  и  $\rho(1)$ , которые удовлетворяют условиям (8.10) и (8.13). Для этого подставляем вместо левых частей в (8.14) соответствующие им значения 0 и (8.13) и разрешаем полученные таким образом два уравнения относительно  $\rho(0)$  и  $\rho(1)$ . Получаем<sup>1</sup> в результате

$$\begin{aligned} \rho(1) &= \frac{\alpha - 0,002324}{0,001695}, \\ \rho(0) &= \frac{0,003849 - \alpha}{0,0002178}. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Таким образом, сжатию  $\alpha = 1 : 298,3$  соответствуют

$$\begin{aligned} \rho(1) &= 0,606, \\ \rho(0) &= 2,28. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Интегральная кривая, удовлетворяющая всем четырем условиям (8.10), (8.11), (8.12) и (8.13), получена интерполированием данных табл. 2 на начальные условия (8.16) и уточнена непосредственным численным интегрированием. После перехода к плотностям в системе *CGS* получены числа, помещенные в первых столбцах табл. 3.

Наконец, из (2.17) с помощью (8.8) и (8.7) получаем

$$\sqrt{1 + \eta} = \frac{6}{yr^5} \int_0^r yr^4 dr. \quad (8.17)$$

Эта формула дает приближенное решение уравнения (2.10), позволяющее определить  $\gamma$  с помощью (2.20):

$$\gamma = \frac{\eta}{r} + \frac{y'}{y}. \quad (8.18)$$

Численное интегрирование уравнения (2.10) и формула (8.18) приводят к практически одинаковому результату:

$$\begin{aligned} \gamma(0,55) &= -0,398, \\ \gamma(0,30) &= -0,166. \end{aligned} \quad (8.19)$$

<sup>1</sup>Если в уравнении (7.11) принять  $\tau = 1$ , получается следующий результат:

$$\rho(1) = \frac{\alpha - 0,00231}{0,00161}, \quad \rho(0) = \frac{0,00387 - \alpha}{0,000217}.$$

Таблица 3

Плотность  $\rho$  и ускорение силы тяжести  $V'$  в зависимости от расстояния  $r$  до центра сферы ( $\alpha = 1 : 298,3$ )

$r$	$\rho' = \rho V' \frac{\rho}{\lambda}$		$\rho' = \frac{\beta^2}{4\pi x} V'$	
	$\rho$	$-\frac{V'}{g_0}$	$\rho$	$-\frac{V'}{g_0}$
1,00	3,344	1,000	2,516	1,000
0,95	3,715	1,007	3,119	1,028
0,90	4,025	1,011	3,736	1,047
0,85	4,297	1,013	4,362	1,057
0,80	4,546	1,016	4,991	1,058
0,75	4,779	1,020	5,618	1,050
0,70	5,002	1,029	6,238	1,032
0,65	5,220	1,042	6,843	1,006
0,60	5,434	1,067	7,431	0,970
0,55	5,657	1,104	7,995	0,925
0,55	9,953	1,104	7,995	0,925
0,50	10,475		8,53	
0,45	10,919			
0,40	11,298		9,49	
0,35	11,611			
0,30	11,878		10,28	
0,25	12,096			
0,20	12,267		10,86	
0,15	12,398			
0,10	12,490		11,23	
0,05	12,544			
0,00	12,562		11,35	

### §9. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ УПРУГОГО РАВНОВЕСИЯ СФЕРЫ ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДОМ

Задача определения упругой деформации сферического сжимаемого неоднородного и гравитирующего слоя, находящегося под воздействием силы с потенциалом  $\omega$  (внутри сферы  $\omega$  представляется гармоническим однородным многочленом степени  $n$ ), как мы видели, приводится к неоднородной краевой задаче 6-го порядка.

Общее решение однородной линейной системы уравнений (1.23), (1.24) и (1.25) может быть представлено в следующем виде:

$$H = C_1 H_1 + \dots + C_6 H_6,$$

$$T = C_1 T_1 + \dots + C_6 T_6,$$

$$R = C_1 R_1 + \dots + C_6 R_6,$$

где  $(H_i T_i R_i)$  — фундаментальная система решений рассматриваемой системы дифференциальных уравнений,

Таким образом, если численное интегрирование системы дифференциальных уравнений выполнено шесть раз при начальных условиях, обеспечивающих линейную независимость частных интегралов, то решение краевой задачи сведется к отысканию постоянных интегрирования  $C_1, C_2, \dots, C_6$ , т.е. к решению системы алгебраических уравнений. У нас эта система уравнений линейна, так как линейны граничные условия, и неоднородна, так как неоднородно одно из граничных условий.

Три условия на поверхности сферы  $r = 1$  остаются неизменными при всех предположениях о строении ядра, а именно: условия отсутствия тангенциальных напряжений, нормальных напряжений, непрерывность производных от потенциала притяжения объемных масс). Это обстоятельство позволяет не отыскивать всей системы фундаментальных

решений, а ограничиться лишь отысканием семейства решений, удовлетворяющих указанным условиям на поверхности.

Действительно, пусть эти условия выполнены для каждого из  $n$  первых линейно независимых частных интегралов. Тогда для интегральной кривой

$$\begin{aligned} H &= C_1 H_1 + \dots + C_n H_n, \\ T &= C_1 T_1 + \dots + C_n T_n, \\ R &= C_1 R_1 + \dots + C_n R_n, \end{aligned} \quad (9.1)$$

все условия в точке  $r = 1$  будут выполнены в том случае, если

$$C_1 + \dots + C_n = 1, \quad (9.2)$$

так как одно из краевых условий неоднородно.

Чтобы удовлетворить (9.2) и трем условиям на внутренней границе сферического слоя, необходимо располагать свободой выбора четырех коэффициентов  $C_i$ . Таким образом, можно ограничиться вычислением четырех линейно независимых частных интегралов.

Если при вычислении частных интегральных кривых выполнены три условия в точке  $r = b$ , то уравнение (9.2) отпадает, поскольку краевые условия в точке  $r = b$  однородны, и достаточно построить лишь три линейно независимых решения. Однако в этом случае результаты интегрирования не могут быть полностью использованы при других предположениях о строении ядра. Например, добавление случая упругого ядра потребовало бы построения двух новых частных интегральных кривых, а присоединение еще одного варианта строения ядра привело бы к построению всей фундаментальной системы решений. Выгода заключалась бы лишь в удобстве изменять условия на поверхности сферы. Например, в этом случае легко исследуется вопрос о деформации сферы под влиянием поверхностной нагрузки или тангенциальных напряжений. В силу этих соображений из трех вариантов изменения плотности с глубиной, указанных выше, лишь в одном (в случае гипотезы Лежандра) интегрирование велось от границы ядра и оболочки. В остальных двух случаях интегрирование начиналось от поверхности сферы.

Результаты интегрирования системы дифференциальных уравнений (1.23), (1.24) и (1.25) при  $n = 2$  представлены в табл. 4, 5 и 6. В графе « $\rho$ » указаны принятые значения плотностей для соответствующих значений  $r$ . Каждая из четырех интегральных кривых табл. 4 и 5 в точке  $r = 1$  удовлетворяет условиям (3.1), (3.3) и (3.2) при  $C = 0$ . Интегральные кривые табл. 6 в точке  $r = 0,55$  подчинены условиям (3.4), (3.5) и (3.6); для  $\gamma$  использовано значение (8.6).

В этих таблицах через  $\theta$  обозначена следующая величина:

$$\theta = 10rT.$$

Интегрирование производилось с шагом 0,025 методом Рунге. В третьем знаке после запятой возможна ошибка на несколько единиц.

С помощью числовых данных табл. 4, 5 и 6 легко получается решение всех тех краевых задач, о которых шла речь выше. В качестве примера вычислим приливную деформацию сферы, когда поверхность ее свободна от напряжений, плотности в оболочке соответствуют принятым при вычислении табл. 5, в ядре (при  $r < 0,55$ )  $\mu_i = 0$ ,  $\gamma = -0,398$  [см. (8.19)],  $\rho_i/\rho_c = 1,76$  (табл. 3, первый столбец). Скорости сейсмических волн заданы формулами (8.1) и (8.2).

Все функции  $R$ ,  $H$ ,  $T$  ( $\theta = 10rT$ ) табл. 5 удовлетворяют дифференциальным уравнениям (1.23), (1.24) и (1.25) и, на поверхности сферы, краевым условиям (3.1), (3.2) при  $C = 0$  (3.3). Остается выполнить условия (3.4), (3.5) и (3.6).

Таблица 4

Система интегральных кривых при постоянной плотности  $\rho = 4,199$  в оболочке ( $\alpha = 1 : 298,3$ )

$r$	$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R_4$	$R'_1$	$R'_2$	$R'_3$	$R'_4$
1,00	+1,350	+1,300	+1,250	+1,150	+2,320	+2,242	+3,077	+3,605
0,95	1,239	1,193	1,100	0,971	2,093	2,041	2,930	3,548
0,90	1,141	1,096	0,957	0,795	1,844	1,820	2,794	3,530
0,85	1,056	1,011	0,820	0,619	1,566	1,575	2,678	3,572
0,80	0,986	0,939	0,689	0,437	1,251	1,297	2,592	3,702
0,75	0,933	0,883	0,561	0,246	0,880	0,971	2,548	3,958
0,70	0,900	0,844	0,433	0,038	0,426	0,574	2,564	4,397
0,65	0,893	0,828	0,302	-0,199	-0,155	0,065	2,667	5,112
0,60	0,919	0,841	0,163	-0,481	-0,937	-0,615	2,906	6,255
0,55	0,992	0,895	0,007	-0,836	-2,047	-1,677	3,360	8,037

$r$	$H_1$	$H_2$	$H_3$	$H_4$	$H'_1$	$H'_2$	$H'_3$	$H'_4$
1,00	+0,600	+0,500	+0,800	+0,900	-0,293	-0,178	-0,551	-0,587
0,95	0,611	0,506	0,823	0,924	0,175	-0,068	0,390	-0,391
0,90	0,619	0,508	0,840	0,941	0,126	-0,016	0,319	-0,284
0,85	0,625	0,508	0,855	0,954	0,109	+0,012	0,286	-0,203
0,80	0,631	0,507	0,869	0,963	0,114	+0,025	0,274	-0,122
0,75	0,637	0,505	0,883	0,966	0,140	+0,026	0,275	-0,019
0,70	0,645	0,504	0,897	0,964	0,191	+0,015	0,285	+0,138
0,65	0,656	0,504	0,911	0,951	0,277	-0,011	0,295	+0,406
0,60	0,673	0,506	0,925	0,919	0,412	-0,057	0,284	+0,891
0,55	0,698	0,511	0,938	0,854	0,626	-0,131	0,209	+1,816

$r$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\theta'_1$	$\theta'_2$	$\theta'_3$	$\theta'_4$
1,00	+0,900	+1,000	+0,600	+0,800	-3,300	-2,000	-6,200	-6,600
0,95	1,010	1,055	0,846	1,069	-1,359	-0,362	-3,829	-4,342
0,90	1,047	1,050	0,996	1,245	-0,227	+0,519	-2,246	-2,765
0,85	1,038	1,009	1,077	1,352	+0,539	+1,064	-1,071	-1,579
0,80	0,997	0,946	1,108	1,407	+1,078	+1,425	-0,183	-0,693
0,75	0,933	0,869	1,100	1,425	+1,454	+1,645	+0,474	-0,076
0,70	0,854	0,783	1,064	1,419	+1,701	+1,760	+0,930	+0,285
0,65	0,765	0,694	1,010	1,401	+1,844	+1,798	+1,198	+0,382
0,60	0,671	0,605	0,947	1,386	+1,904	+1,767	+1,284	+0,183
0,55	0,575	0,518	0,884	1,389	+1,892	+1,681	+1,178	-0,385

Для каждой из четырех интегральных кривых табл. 5 вычислим следующие величины;

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= (rT'_i - 2T_i + rH_i)_{0,55} = \left( \frac{1}{10}\theta' - \frac{3}{10r}\theta_i + rH_i \right)_{0,55}, \\
 P_i &= \left[ \frac{N_i}{\rho} + \frac{\rho_i}{\rho} (V'H_i + R_i) \right]_{0,55} = \left[ \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} H'_i + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\lambda}{\rho} \left( \frac{2}{r} H_i - \frac{3}{5r^2} \theta_i \right) + \frac{\rho_i}{\rho} \left( R_i - \frac{g}{g_0} H_i \right) \right]_{0,55}, \quad (9.3) \\
 S_i &= \left[ R'_i - \frac{2}{r} R_i - \alpha R_i + 3(\rho_i - \rho_e) H_i \right]_{0,55}.
 \end{aligned}$$

В результате получим

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= -0,032; & Q_2 &= -0,290; & Q_3 &= +0,189; & Q_4 &= +0,175, \\
 P_1 &= +0,217; & P_2 &= +0,773; & P_3 &= +0,433; & P_4 &= -1,075, \\
 S_1 &= -0,252; & S_2 &= +7,848; & S_3 &= -5,636; & S_4 &= -0,393.
 \end{aligned} \quad (9.4)$$

Решение краевой задачи ищем в виде линейной комбинации из четырех интегральных

Таблица 5

Система интегральных кривых для случая, когда  $\rho' = V' \rho \frac{\rho}{\lambda}$  ( $\alpha = 1 : 298,3$ )

$r$	$\rho$	$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R_4$	$R'_1$	$R'_2$	$R'_3$	$R'_4$
1,00	3,344	+1,314	+1,150	+1,314	+1,314	+2,189	+2,681	+1,785	+2,189
0,95	3,715	1,207	1,014	1,228	1,207	2,100	2,704	1,626	2,092
0,90	4,025	1,104	0,878	1,152	1,105	1,981	2,728	1,426	1,962
0,85	4,297	1,009	0,741	1,087	1,011	1,840	2,776	1,180	1,808
0,80	4,546	0,921	0,600	1,035	0,925	1,679	2,868	0,878	1,630
0,75	4,779	0,841	0,452	1,000	0,848	1,497	3,030	0,500	1,427
0,70	5,002	0,772	0,294	0,986	0,783	1,288	3,302	0,013	1,189
0,65	5,220	0,713	0,119	1,000	0,730	1,043	3,744	-0,637	0,904
0,60	5,436	0,668	0,084	1,053	0,693	0,742	4,453	-1,539	0,548
0,55	5,657	0,640	-0,333	1,161	0,677	0,354	5,594	-2,848	0,078
0,55	9,953	+0,640	-0,333	+1,161	+0,677	+1,832	+6,778	-1,869	+1,813
0,50	10,475	0,551	0,721	1,293	0,588	1,744	8,886	3,516	1,742
0,45	10,919	0,466	1,248	1,531	0,503	1,642	12,436	6,188	1,638
0,40	11,298	0,387	2,011	1,944	0,424	1,545	18,696	10,779	1,509
0,35	11,611	0,312	3,209	2,673	0,352	1,475	30,560	19,287	1,366
0,30	11,878	+0,238	-5,273	+4,017	+0,288	+1,496	+55,140	-36,653	+1,225

$r$	$\rho$	$H_1$	$H_2$	$H_3$	$H_4$	$H'_1$	$H'_2$	$H'_3$	$H'_4$
1,00	3,344	+0,622	+0,622	+0,400	+0,622	-0,299	-0,299	-0,102	-0,366
0,95	3,715	0,633	0,632	0,402	0,636	-0,175	-0,152	-0,013	0,245
0,90	4,025	0,641	0,637	0,402	0,648	-0,118	-0,070	+0,023	0,198
0,85	4,297	0,646	0,639	0,400	0,658	-0,084	-0,005	+0,035	0,183
0,80	4,546	0,649	0,638	0,398	0,668	-0,058	+0,066	+0,033	0,187
0,75	4,779	0,651	0,633	0,396	0,678	-0,032	+0,159	+0,017	0,207
0,70	5,002	0,652	0,622	0,396	0,689	+0,006	+0,299	-0,017	0,241
0,65	5,220	0,650	0,601	0,398	0,702	+0,073	+0,530	-0,077	0,289
0,60	5,436	0,644	0,566	0,404	0,718	+0,202	+0,933	-0,178	0,352
0,55	5,657	0,628	0,503	0,416	0,737	+0,462	+1,670	-0,349	0,422
0,55	9,953	+0,628	+0,503	+0,416	+0,737	+0,647	+2,217	-0,431	-0,535
0,50	10,475	0,578	0,338	0,455	0,770	1,430	4,567	1,177	0,788
0,45	10,919	0,471	+0,004	0,548	0,816	3,019	9,208	2,690	1,070
0,40	11,298	+0,245	-0,666	0,752	0,875	6,457	18,821	5,874	1,284
0,35	11,611	-0,250	2,075	1,200	0,937	14,503	40,600	13,072	-1,078
0,30	11,878	-1,409	-5,254	+2,231	+0,956	+35,251	+95,300	-31,012	+0,820

$r$	$\rho$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\theta'_1$	$\theta'_2$	$\theta'_3$	$\theta'_4$
1,00	3,344	+1,951	+0,951	+0,951	+0,700	-3,367	-3,367	-1,147	-4,120
0,95	3,715	1,068	0,075	0,965	0,850	-1,532	-1,725	+0,326	-2,098
0,90	4,025	1,117	1,136	0,930	0,923	-0,495	-0,764	+1,000	-0,925
0,85	4,297	1,124	1,158	0,870	0,949	+0,192	-0,120	+1,370	-0,122
0,80	4,546	1,102	1,153	0,795	0,940	+0,661	+0,313	+1,578	+0,455
0,75	4,779	1,060	1,130	0,713	0,907	+0,966	+0,575	+1,686	+0,865
0,70	5,002	1,007	1,098	0,627	0,856	+1,131	+0,680	+1,727	+1,138
0,65	5,220	0,949	1,065	0,541	0,794	+1,167	+0,624	+1,721	+1,295
0,60	5,436	0,893	1,038	0,456	0,727	+1,073	+0,392	+1,685	+1,347
0,55	5,657	0,844	1,028	0,373	0,660	+0,833	-0,059	+1,635	+1,295
0,55	9,953	+0,844	+1,028	+0,373	+0,660	+0,516	-2,959	+3,523	+3,044
0,50	10,475	0,827	1,187	0,196	0,527	0,126	3,480	3,560	2,291
0,45	10,919	0,837	1,388	0,014	0,430	-0,557	4,665	3,720	1,574
0,40	11,298	0,890	1,670	-0,181	0,369	1,651	6,795	4,126	0,858
0,35	11,611	1,012	2,094	0,406	0,345	3,372	10,511	4,988	+0,077
0,30	11,878	+1,246	+2,769	-0,694	+0,365	-6,281	-17,172	+6,768	-0,910

кривых табл. 5:

$$\begin{aligned}
 R &= C_1 R_1 + C_2 R_2 + C_3 R_3 + C_4 R_4, \\
 H &= C_1 H_1 + C_2 H_2 + C_3 H_3 + C_4 H_4, \\
 T &= C_1 T_1 + C_2 T_2 + C_3 T_3 + C_4 T_4.
 \end{aligned}
 \tag{9.5}$$

Чтобы удовлетворялись все шесть краевых условий, необходимо и достаточно выпол-



Таблица 6

Система интегральных кривых для случая, когда плотность  
меняется по Лежандру ( $\beta = 2,531, \alpha = 1 : 298,3$ )

$r$	$\rho$	$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R'_1$	$R'_2$	$R'_3$
1,00	2,516	-0,376	+0,176	+1,307	-2,014	+0,264	+1,953
0,95	3,119	-0,281	0,164	1,210	-1,783	0,209	1,917
0,90	3,736	-0,198	0,155	1,115	-1,536	0,171	1,871
0,85	4,362	-0,127	0,147	1,023	-1,291	0,144	1,823
0,80	4,991	-0,068	0,141	0,933	-1,053	0,128	1,773
0,75	5,618	-0,021	0,135	0,845	-0,822	0,123	1,724
0,70	6,238	+0,014	0,129	0,760	-0,595	0,132	1,677
0,65	6,843	+0,038	0,122	0,677	-0,365	0,160	1,637
0,60	7,431	+0,051	0,113	0,596	-0,122	0,215	1,610
0,55	7,995	+0,050	0,100	0,516	+0,156	0,312	1,608

$r$	$\rho$	$H_1$	$H_2$	$H_3$	$H'_1$	$H'_2$	$H'_3$
1,00	2,516	+1,245	+0,726	+0,579	+6,451	+0,670	-0,334
0,95	3,119	1,006	0,705	0,592	3,552	+0,267	-0,210
0,90	3,737	0,864	0,697	0,602	2,277	+0,100	-0,161
0,85	4,362	0,769	0,694	0,610	1,583	+0,015	-0,137
0,80	4,991	0,701	0,695	0,616	1,161	-0,031	-0,122
0,75	5,618	0,650	0,697	0,622	0,890	-0,056	-0,108
0,70	6,238	0,610	0,700	0,627	0,727	-0,062	-0,087
0,65	6,843	0,575	0,703	0,630	0,662	-0,044	-0,044
0,60	7,431	0,541	0,704	0,631	0,720	+0,019	+0,047
0,55	7,995	0,500	0,700	0,624	0,979	+0,175	+0,0241

$r$	$\rho$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta'_1$	$\theta'_2$	$\theta'_3$
1,00	2,516	+12,356	-3,205	+0,624	+114,047	-41,776	-4,874
0,95	3,119	8,164	-1,651	0,798	61,712	-23,092	-2,421
0,90	3,736	5,723	-0,738	0,885	38,470	-14,275	-1,169
0,85	4,362	4,148	-0,162	0,923	25,637	-9,143	-0,383
0,80	4,991	3,079	+0,207	0,928	17,707	-5,842	+0,148
0,75	5,618	2,333	+0,440	0,911	12,464	-3,613	+0,508
0,70	6,238	1,806	+0,580	0,880	8,832	-2,083	+0,736
0,65	6,843	1,433	+0,657	0,840	6,218	-1,042	+0,846
0,60	7,431	1,173	+0,691	0,798	4,257	-0,379	+0,843
0,55	7,995	1,000	+0,700	0,759	2,704	-0,032	+0,708

нение следующих равенств:

$$\begin{aligned}
 Q &= C_1 Q_1 + C_2 Q_2 + C_3 Q_3 + C_4 Q_4 = 0, \\
 P &= C_1 P_1 + C_2 P_2 + C_3 P_3 + C_4 P_4 = 0, \\
 S &= C_1 S_1 + C_2 S_2 + C_3 S_3 + C_4 S_4 = 0, \\
 C_1 + C_2 + C_3 + C_4 &= 1.
 \end{aligned}
 \tag{9.6}$$

Подставляя в (9.6) значения (9.4) и разрешая полученную систему четырех линейных уравнений, определим все  $C$ :

$$C_1 = +0,7375; \quad C_2 = +0,0487; \quad C_3 = +0,0214; \quad C_4 = +0,1924.
 \tag{9.7}$$

Теперь формулы (9.5) позволяют вычислить значения  $R$ ,  $H$  и  $T$  и их производных. Результаты этих и некоторых других вычислений приведены в табл. 7.

Таблица 7

## Индивидуальные характеристики моделей

Мо- дель	Модуль сдвига в ядре, дин/см <sup>2</sup>	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$k$	$h$	$l$	$\gamma$	$k - \frac{h}{2}$
1	0,0	+1,6557	-0,4176	-0,9165	+0,6783	0,327	0,662	0,107	0,665	-0,004
2	$0,0367 \cdot 10^{12}$	+1,4705	-0,2665	-0,8359	+0,6318	0,320	0,649	0,106	0,671	-0,004
3	$0,3675 \cdot 10^{12}$	+0,1822	+0,1768	-0,2813	+0,3124	0,276	0,559	0,103	0,717	-0,004
4	$1,04 \cdot 10^{12}$	-1,4250	+2,1001	+0,4117	-0,0868	0,221	0,446	0,100	0,775	-0,002
5	$\infty$	-5,8687	+5,7297	+2,3319	-1,1929	0,069	0,136	0,089	0,933	+0,001
6	0,0	+0,7867	+0,0273	+0,0159	+0,1704	0,310	0,619	0,091	0,691	0,000
7	$0,073 \cdot 10^{12}$	+0,6127	+0,0965	+0,1177	+0,1732	0,298	0,596	0,091	0,702	0,000
8	$0,73 \cdot 10^{12}$	-0,4547	+0,5176	+0,7362	+0,2008	0,229	0,458	0,090	0,771	0,000
9	$1,4 \cdot 10^{12}$	-1,0576	+0,7522	+1,0806	+0,2248	0,191	0,382	0,089	0,809	0,000
10	$\infty$	-3,1737	+1,5465	+2,2453	+0,3819	0,060	0,124	0,086	0,936	-0,002
11	$1,4 \cdot 10^{12}$	-1,0721	+0,7467	+1,0622	+0,2632	0,192	0,386	0,088	0,806	-0,001
12	0,0	+0,7375	+0,0487	+0,0214	+0,1924	0,306	0,617	0,090	0,689	-0,002
13	0,0	+1,484	-0,183	-0,275	-0,026	0,344	0,683	0,096	0,661	+0,002
14	0,0	+1,942	+5,913	-0,568	-6,287	0,314	0,622	0,095	0,692	+0,003
15	0,0					0,315	0,628	0,088	0,687	+0,001
16	0,0	+0,0057	-0,0175	-0,9887	—	0,287	0,567	0,074	0,720	+0,003

## §10. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Напомним, что потенциал приливообразующей силы, вызываемой как притяжением Луны и Солнца, так и свободной нутацией оси вращения, выражается внутри Земли гармоническим многочленом второго порядка  $\omega_2$ . В статической теории упругих приливов все наблюдаемые на поверхности Земли явления характеризуются тремя числами ( $h$ ,  $k$  и  $l$ ). Конечно, при этом предполагается, что коэффициенты упругости, плотность и начальные напряжения зависят только от расстояния до центра Земли, принимаемой за сферическую, а дневная поверхность свободна от напряжений. В этом случае радиальные смещения урвонной поверхности и дневной поверхности Земли пропорциональны значениям  $\omega_2$  в соответствующих точках ее поверхности. Если такая пропорциональность существует, т.е. если радиальное смещение дневной поверхности равно  $h \frac{\omega_2}{g}$ , а урвонной поверхности —  $(1+k)\omega_2$ , то без каких-либо предположений о внутреннем строении Земли, только из геометрических соображений и из решения краевой задачи теории потенциала, получаются следующие формулы:

1) изменение потенциала на дневной поверхности:

$$(1 + k - h)\omega_2;$$

2) изменение наклона, т.е. угла между нормальми к урвонной и дневной поверхностям (компонента в направлении  $s$ ):

$$(1 + k - h) \frac{1}{g_0} \frac{\partial \omega_2}{\partial s};$$

3) изменение силы тяжести на дневной поверхности<sup>1</sup>:

$$- \left( 1 + h - \frac{3}{2}k \right) \frac{2\omega_2}{a};$$

4) изменение направления отвесной линии (компонента в направлении  $s$ ):

$$(1 + k - l) \frac{1}{g} \frac{\partial \omega_2}{\partial s}.$$

<sup>1</sup>Эта формула аналогична известной формуле Клеро, связывающей сжатие Земли с изменением силы тяжести от полюса к экватору.

В нашем случае, когда приливы являются упругими,

$$k = R(1) - 1,$$

$$h = H(1),$$

$$l = T(1).$$

Числа  $k$ ,  $h$  и  $l$  рассчитаны нами для нескольких моделей Земли, различающихся строением ядра и распределением плотностей. Способ вычислений уже достаточно подробно изложен в предыдущих параграфах. Во всех моделях отношения модулей упругости к плотности в оболочке определены по формулам (8.1). Если это не оговорено особо, параметр неоднородности модели соответствует сжатию  $1 : 298,3$ , радиус ядра составляет  $0,55$  земного радиуса. Масса и средняя плотность во всех случаях равны массе и средней плотности Земли.

Ниже даны индивидуальные характеристики всех моделей.

Модели 1, 2, 3, 4 и 5. Плотности в оболочке и ядре постоянны ( $4,199$  и  $12,128$  г/см<sup>3</sup>). Модуль сдвига в ядре равен  $0$  (модель 1),  $0,037 \cdot 10^{12}$  (модель 2),  $0,368 \cdot 10^{12}$  (модель 3),  $1,04 \cdot 10^{12}$  дин/см<sup>2</sup> (модель 4) и  $\infty$  (модель 5). Ядро несжимаемо (краевые условия §5).

Модели 6, 7, 8, 9 и 10. Плотности в оболочке указаны в первой половине табл. 3. Модуль сдвига в ядре равен  $0$  (модель 6),  $0,073 \cdot 10^{12}$  (модель 7),  $0,73 \cdot 10^{12}$  (модель 8),  $1,4 \cdot 10^{12}$  дин/см<sup>2</sup> (модель 9) и  $\infty$  (модель 10). Ядро однородно и несжимаемо (краевые условия §5).

Модель 11. Здесь по сравнению с моделью 9 учтена сжимаемость и неоднородность ядра до расстояния  $0,30$  земного радиуса. Плотности взяты из левой половины табл. 3,  $\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$  вычислено по формуле (8.2),  $\mu = 1,4 \cdot 10^{12}$  дин/см<sup>2</sup>. При  $r < 0,30$  принято  $\lambda = \infty$ ,  $\rho = \text{const}$ .

Модель 12. Отличается от модели 6 только тем, что ядро неоднородное (см. пример в конце §9).

Модель 13. Радиус жидкого ядра модели 12 увеличен до  $0,575$  земного радиуса.

Модель 14. Сохранены все принципы построения модели 12; параметр неоднородности значительно изменен (вычислен для сжатия  $1 : 293$ ).

Модель 15. По сравнению с моделью 14 изменены только плотность и коэффициенты упругости в слое, толщиной  $1/8$  земного радиуса. Плотность слоя принята равной  $2,7$  г/см<sup>3</sup>.

Модель 16. Плотности в ядре и оболочке заданы в соответствии с гипотезой Лежандра (правая половина табл. 3). Ядро жидкое.

В табл. 7 представлены значения  $k$ ,  $h$ ,  $l$  и  $\gamma = 1 + k - h$  для всех моделей. Для части моделей значения функций  $R$ ,  $H$  и  $T$  рассчитаны во всей оболочке. Результаты приведены в табл. 8. В последних двух столбцах табл. 8 помещены значения функций  $N$  и  $\frac{M}{r}$ , вычисленные по формулам (1.28) и (1.27) при  $n = 2$ , выраженные в дин/см<sup>2</sup>. С помощью этих функций легко рассчитываются напряжения, возникающие в Земле (если ее строение совпадает со строением соответствующей модели) при воздействии на нее любой силы, потенциал которой внутри Земли выражается гармоническим многочленом второго порядка  $\omega_2$ .

Из табл. 7 видно, что наибольшее влияние на  $k$  и  $h$  оказывает изменение гипотезы о величине модуля сдвига в ядре, а на  $l$  — гипотезы о распределении плотностей в оболочке. Для наиболее правдоподобной из трех рассмотренных гипотез ( $\tau = 1,4$ ) переход в ядре от  $\mu = 0$  к  $\mu = 0,73 \cdot 10^{12}$  дин/см<sup>2</sup> (модели 6 и 8) приводит к уменьшению  $k$  на  $0,08$

и  $h$  на 0,16, тогда как  $l$  изменяется только на 0,001. Неуверенность в вычислении  $k$  из-за незнания закона плотностей вряд ли превышает 0,01, так как при переходе от 12-й модели к 1-й и 16-й  $k$  меняется только на 0,02. По той же причине  $h$  вряд ли может измениться более чем на 0,02.

Масса Земли известна довольно точно; к тому же ошибочность ее значения мало скажется на результатах. В сжатии же, которым определяется момент инерции Земли, не исключена возможность ошибки до 1%. Сравнение моделей 14 и 12, различающихся только принятой величиной сжатия (примерно на 2%), обнаруживает ничтожное изменение  $k$  и  $h$  и заметное относительное изменение  $l$ . Этот вывод согласуется с выводом о

Таблица 8  
Результаты расчета функций

$r$	$\rho$	$R$	$R'$	$H$	$H'$	$\theta$	$\theta'$	$\frac{M}{r} \cdot 10^{-10}$	$N \cdot 10^{-10}$
Модель 1									
1,00	4,199	+1,327	+2,530	+0,662	-0,304	+1,065	-3,423	0	0
0,95	4,199	1,204	2,334	0,673	0,169	1,181	1,535	+12	+28
0,90	4,199	1,094	2,127	0,681	0,102	1,227	0,410	26	45
0,85	4,199	0,995	1,904	0,686	0,061	1,227	+0,359	40	59
0,80	4,199	0,905	1,665	0,690	0,031	1,195	0,887	52	64
0,75	4,199	0,829	1,401	0,690	0,004	1,140	1,234	62	59
0,70	4,199	0,767	1,098	0,689	+0,032	1,074	1,422	67	50
0,65	4,199	0,721	0,739	0,686	0,092	1,001	1,463	64	43
0,60	4,199	0,695	0,285	0,679	0,206	0,930	1,362	45	46
0,55	4,199	0,695	-0,325	0,662	0,442	0,868	1,090	0	80
Модель 2									
1,00	4,199	+1,320	+2,520	+0,649	-0,294	+1,061	-3,307	0	0
0,95	4,199	1,198	2,326	0,660	0,160	1,172	1,445	+12	+28
0,90	4,199	1,088	2,121	0,667	0,094	1,214	0,342	26	45
0,85	4,199	0,989	1,901	0,672	0,053	1,211	+0,407	39	60
0,80	4,199	0,900	1,666	0,675	0,022	1,177	0,921	52	64
0,75	4,199	0,823	1,406	0,674	+0,005	1,121	1,256	61	60
0,70	4,199	0,761	1,108	0,673	0,041	1,054	1,435	67	53
0,65	4,199	0,714	0,755	0,670	0,099	0,981	1,472	64	46
0,60	4,199	0,687	0,309	0,662	0,210	0,910	1,371	46	49
0,55	4,199	0,686	-0,289	0,646	0,436	0,846	1,106	3	83
Модель 3									
1,00	4,199	+1,276	+2,447	+0,559	-0,222	+1,032	-2,493	0	0
0,95	4,199	1,158	2,271	0,567	0,098	1,110	0,812	+12	+27
0,90	4,199	1,049	2,085	0,570	0,034	1,126	+0,135	24	48
0,85	4,199	0,951	1,887	0,571	+0,007	1,102	0,743	36	63
0,80	4,199	0,861	1,676	0,570	0,038	1,054	1,153	48	71
0,75	4,199	0,784	1,444	0,567	0,066	0,990	1,402	57	73
0,70	4,199	0,718	1,182	0,563	0,100	0,916	1,122	63	73
0,65	4,199	0,667	0,870	0,559	0,151	0,839	1,533	63	73
0,60	4,199	0,633	0,482	0,548	0,238	0,765	1,433	52	78
0,55	4,199	0,622	-0,032	0,532	0,409	0,698	1,216	23	106
Модель 6									
1,00	3,344	+1,310	+2,197	+0,619	-0,307	+0,908	-3,461	0	0
0,95	3,715	1,202	2,108	0,630	0,184	1,030	1,605	+11	+22
0,90	4,025	1,099	1,990	0,638	0,128	1,082	0,552	24	39
0,85	4,297	1,004	1,850	0,644	0,097	1,091	+0,149	38	49
0,80	4,546	0,915	1,691	0,648	0,075	1,071	0,631	53	51
0,75	4,779	0,834	1,512	0,651	0,056	1,031	0,950	66	45
0,70	5,002	0,764	1,306	0,654	0,028	0,978	1,130	74	36
0,65	5,220	0,704	1,067	0,654	+0,021	0,920	1,183	72	21
0,60	5,436	0,658	0,774	0,651	0,122	0,862	1,111	53	19
0,55	5,657	0,628	0,399	0,640	0,332	0,810	0,900	0	55

Таблица 8 (продолжение)

$r$	$\rho$	$R$	$R'$	$H$	$H'$	$\theta$	$\theta'$	$\frac{M}{r} \cdot 10^{-10}$	$N \cdot 10^{-10}$
Модель 7									
1,00	3,344	+1,298	+2,189	+0,596	-0,287	+0,908	-3,236	0	0
0,95	3,715	1,191	2,101	0,606	0,166	1,019	1,430	+11	+22
0,90	4,025	1,088	1,985	0,614	0,111	1,063	0,420	24	40
0,85	4,297	0,993	1,847	0,618	0,080	1,067	+0,246	38	50
0,80	4,546	0,904	1,691	0,622	0,058	1,043	0,700	52	54
0,75	4,779	0,824	1,516	0,624	0,038	1,000	0,996	64	49
0,70	5,002	0,753	1,315	0,625	0,011	0,945	1,159	72	39
0,65	5,220	0,692	1,082	0,625	+0,037	0,885	1,202	72	30
0,60	5,436	0,645	0,798	0,621	0,132	0,827	1,127	54	29
0,55	5,657	0,614	0,435	0,610	0,330	0,774	0,921	5	63
Модель 8									
1,00	3,344	+1,229	+2,146	+0,458	-0,167	+0,900	-1,884	0	0
0,95	3,915	1,122	2,062	0,463	0,058	0,952	0,378	+10	+22
0,90	4,025	1,022	1,955	0,464	0,005	0,950	+0,380	21	40
0,85	4,297	0,928	1,832	0,464	+0,025	0,919	0,835	33	57
0,80	4,546	0,840	1,695	0,462	0,047	0,870	1,114	46	68
0,75	4,779	0,758	1,542	0,459	0,068	0,810	1,273	57	74
0,70	5,002	0,684	1,372	0,455	0,091	0,744	1,338	65	99
0,65	5,220	0,620	1,176	0,450	0,126	0,678	1,319	68	77
0,60	5,436	0,567	0,944	0,442	0,189	0,613	1,226	61	86
0,55	5,657	0,527	0,654	0,429	0,313	0,556	1,054	35	110
Модель 12									
1,00	3,344	+1,308	+2,205	+0,621	-0,311	+0,902	-3,501	0	0
0,95	3,715	1,200	2,118	0,632	0,187	1,025	1,639	+11	+22
0,90	4,025	1,096	2,002	0,641	0,131	1,079	0,580	24	40
0,85	4,297	1,000	1,865	0,647	0,100	1,090	+0,126	39	49
0,80	4,546	0,910	1,709	0,651	0,078	1,071	0,613	53	51
0,75	4,779	0,829	1,535	0,654	0,059	1,031	0,936	66	45
0,70	5,002	0,757	1,337	0,657	0,031	0,979	1,119	74	34
0,65	5,220	0,696	1,107	0,657	+0,019	0,921	1,175	73	20
0,60	5,436	0,647	0,830	0,652	0,118	0,864	1,104	52	14
0,55	5,657	0,614	0,478	0,643	0,330	0,812	0,894	0	56
Модель 16									
1,00	2,516	+1,287	+1,915	+0,567	-0,305	+0,743	-3,438	0	0
0,95	3,119	1,192	1,882	0,579	0,192	0,864	1,770	+8	+18
0,90	3,736	1,099	1,838	0,588	0,148	0,921	0,760	21	32
0,85	4,362	1,008	1,793	0,595	0,127	0,939	-0,118	36	41
0,80	4,991	0,920	1,745	0,601	0,113	0,931	+0,320	53	43
0,75	5,618	0,833	1,698	0,606	0,001	0,906	0,616	69	34
0,70	6,238	0,749	1,652	0,611	0,001	0,870	0,774	80	17
0,65	6,843	0,667	1,614	0,614	0,039	0,327	0,390	85	-3
0,60	7,431	0,588	1,587	0,615	+0,050	0,784	0,864	65	-11
0,55	7,995	0,509	1,585	0,608	0,241	0,744	0,716	0	+29

влиянии на  $k$ ,  $h$  и  $l$  вариаций закона плотностей, так как уменьшение сжатия приводит к уменьшению плотности на поверхности сферы (см. (8.15)) и приближает средний вариант распределения плотностей к лежандровскому.

Точно так же изменение плотности и упругих свойств в тонком наружном слое (в земной коре), не учтенное во всех предыдущих моделях, почти не сказывается на  $k$  и  $h$ , а  $l$  уменьшает на 7% (модели 14 и 15).

Сравнение моделей 13 и 12 характеризует ошибку, которая может получиться из-за неверности определения границы ядра. Увеличение радиуса ядра на 0,01 земного радиуса увеличивает  $k$  на  $0,038/2,5 = 0,015$ ,  $h$  на 0,026 и  $l$  на 0,0025. При переходе от сейсмических волн к полусуточным и 14-месячным приливным волнам эффективный радиус «жидкого» ядра если и изменится, то только в сторону его увеличения, т.е. существование этого эффекта могло бы привести лишь к незначительному увеличению  $h$  и  $k$ .

Для выяснения эффекта сжимаемости и неоднородности ядра рассчитана модель 11. Из сравнения с моделью 9 следует, что при  $\mu = 1,4 \cdot 10^{12}$  дин/см<sup>2</sup> (в ядре) этот эффект ничтожен. При  $\mu = 0$  сжимаемость на результат не влияет.

Из совокупности моделей 1–5 и 6–10 получается следующая интерполяционная формула, характеризующая зависимость  $k$  от модуля сдвига в ядре:

$$k = k_{\infty} + \frac{k_0 - k_{\infty}}{1 + 0,65 \cdot 10^{-12} \mu}, \quad (10.1)$$

где  $k_0$  — значение  $k$  для жидкого ядра,  $k_{\infty}$  — для абсолютно твердого. Подобные интерполяционные формулы с тем же самым числовым коэффициентом выражают зависимость от  $\mu$  величин  $h$ ,  $l$  и  $C_i$ .

Наиболее важный и интересный вывод вытекает из анализа последнего столбца табл. 7: разность между  $k$  и  $1/2h$  во всех без исключения моделях близка к нулю. Отличие этой разности от нуля лежит в пределах точности численного решения рассмотренных краевых задач. Таким образом, наши модели приводят к выводу, что  $k/h = 1/2$ .

Теоретическое значение отношения  $k/h$  известно для двух простейших случаев, а именно: для жидкой неоднородной и однородной несжимаемой упругой сферы (формулы (2.21) и (5.4)). Оба случая описываются формулой

$$\frac{k}{h} = \frac{3 - \eta}{5} \quad (10.2)$$

( $\eta = 0$ , если плотность постоянна).

И по постоянной прецессии, и по сжатию (формулы (7.5)) для Земли получается  $\eta = 9/16$ , так что для жидких приливов  $k/h = 39/80 = 0,49$ , т.е. практически тоже около  $1/2$ . Таким образом, отношения  $k/h$ , рассчитанные нами для моделей Земли с упругой неоднородной сжимаемой оболочкой и жидким, упругим и абсолютно твердым ядром, при разных предположениях об изменении плотности в оболочке и ядре, довольно точно представляются формулой (10.2). Иначе говоря, из наших моделей следует, что отношение  $k/h$  при упругих приливах в Земле близко к значению этого отношения при приливах «жидких», рассматриваемых в теории Клеро. В случае упругой однородной несжимаемой сферы это утверждение вытекает из сравнения формул (2.21) и (5.4).

Создается впечатление, что часть теории Клеро–Радо может быть обобщена на случай упругой сферы. Следует, однако, иметь в виду, что во всех рассчитанных нами моделях скорости сейсмических волн в оболочке сохранены одинаковыми (близкими к наблюдаемым скоростям). Поэтому отношение  $k/h$  может зависеть от вида функций  $\mu/\rho$  и  $\lambda/\rho$ , хотя и в очень слабой степени. В качестве примера сошлемся на расчеты Прея [7] для несжимаемой сферы ( $\lambda = \infty$ ), когда плотность меняется по закону Роша, а  $\mu$  задано формулой  $\mu = \mu_0(1 - cr^2)$ , где  $\mu_0$  и  $c$  — постоянные. По нашим подсчетам, в 26 моделях Прея, за исключением одной, где вероятна вычислительная ошибка, при изменении  $\mu_0$  от  $32 \cdot 10^{11}$  до  $4 \cdot 10^{11}$  дин/см<sup>2</sup>, а  $c$  от 0 до 0,9  $k/h$  заключено в пределах от 0,52 до 0,53. Если же  $\mu$  задано формулой  $\mu = \mu_0 r^2(1 - cr^2)$ , то  $k/h$  оказывается близким к 0,545.

В моделях Прея, как и в наших моделях,  $\eta$  близко к  $9/16$ . Поэтому различие в значениях  $k/h$  на 0,02 – 0,05 следует приписать различию в виде функций  $\lambda/\rho$  и  $\mu/\rho$ . Как видим, при варьировании скоростей распространения волн в очень широких пределах отношение  $k/h$  меняется очень мало.

## §11. ПОПРАВКИ ЗА ПОДВИЖНОСТЬ ВОД ОКЕАНОВ

Итак, мы пришли к выводу, что наблюдаемому распределению скоростей продольных и поперечных сейсмических волн по глубинам при разных гипотезах о распределении

плотностей и строении ядра соответствует  $k/h = 1/2$ . Поэтому  $k$ , а следовательно, и  $h$ , можно определить из наблюдений тремя следующими независимыми методами:

1. Из наблюдений высоты приливов или наклонов земной поверхности определяется  $\gamma = 1 + k - h$ . Следовательно,

$$k_\gamma = 1 - \gamma. \quad (11.1)$$

2. Из амплитуды приливных вариаций силы тяжести получается

$$\beta = 1 + h - \frac{3}{2}k, \quad \text{т.е.} \quad k_\beta = 2(\beta - 1). \quad (11.2)$$

3. По периоду  $T_c$  свободной нутации Земли  $k$  определяется формулой

$$k_n = k_0 \left( 1 - \frac{T_0}{T_c} \nu \right), \quad (11.3)$$

где  $T_0 = \frac{C}{C-A}$  — период Эйлера;  $\nu$  — коэффициент, зависящий от динамических свойств ядра (твердому ядру соответствует  $\nu = 1$ ); далее,

$$k_0 = \frac{3 - \eta}{2 + \eta} = \frac{39}{41} \quad \text{при} \quad \eta = \frac{9}{16}. \quad (11.4)$$

$\eta$  определяется формулой (7.5). Из формулы (2.21) следует, что  $k_0$  есть предельное значение  $k$  для «жидкой» Земли ( $k_0$  определяет деформацию Земли под воздействием возмущающего потенциала, действующего очень длительное время, в частности, сжатие Земли, вызываемое ее вращением).

Формулы (11.1) и (11.2) позволили бы определить два значения  $k$ , отдельно по вариациям наклонов и по вариациям силы тяжести, если бы только на упругих приливах не сказывались приливы в океанах. Теоретически учесть это влияние пока невозможно, так как нет динамической теории приливов, учитывающей действительное распределение суши и глубин. Нет также данных наблюдений, характеризующих приливы в открытых океанах (а не вблизи береговых линий). Поэтому для определения  $k$  по  $\beta$  и  $\gamma$  приходится искать другие пути.

Заметим, что высоту прилива  $h_{\text{пр}}$  можно представить в виде суммы элементарных приливных волн:

$$\begin{aligned} h_{\text{пр}}(\vartheta, \lambda, t) \psi &= \sum_n \sum_v [A_n(\vartheta, \lambda) \cos \nu t + B_n(\vartheta, \lambda) \sin \nu t] = \\ &= \sum_n \sum_m \sum_v [A_n^m(\vartheta, \lambda) \cos(\nu t + m\lambda + \varphi_{nm}) + \\ &\quad + B_n^m(\vartheta, \lambda) \cos(\nu t - m\lambda + f_{nm})], \quad (11.5) \end{aligned}$$

где  $\vartheta$  и  $\lambda$  — сферические координаты рассматриваемой точки (полярное расстояние и долгота),  $t$  — время,  $\nu$  — частота элементарной волны,  $A_n(\vartheta, \lambda)$  и  $B_n(\vartheta, \lambda)$  — сферические функции порядка  $n$ ,  $A_n^m(\vartheta, \lambda)$  и  $B_n^m(\vartheta, \lambda)$  — присоединенные сферические функции порядка  $n$ ,  $\varphi_{nm}$  и  $f_{nm}$  — постоянные,  $\psi = 1$  на поверхности океанов и  $\psi = 0$  на поверхности суши.

Каждая из элементарных волн прилива в океанах оказывает на поверхность Земли давление и на все массы Земли притяжение. Возникающие в результате упругой деформации радиальное смещение поверхности и изменение на ней потенциала притяжения

Земли в каждый момент времени пропорциональны той сферической функции, какой выражается смещение частиц в элементарной приливной волне. Частота и фаза в обоих приливах одинаковы, так как упругий прилив можно считать статическим. Таким образом, каждая из элементарных волн прилива в океанах оказывает влияние только на такую же волну упругого прилива.

Из общей картины приливных вариаций наклона и ускорения силы тяжести путем совместной обработки результатов наблюдений на всех станциях, где измерялись эти вариации, выделим одну интересующую нас элементарную волну, амплитуда которой выражается сферической функцией второго порядка (например, выделим главную лунную полусуточную волну, софазную с потенциалом приливообразующей силы). Определим по этой волне  $\bar{\beta}$  и  $\bar{\gamma}$ . Поправки, учитывающие действие прилива в океанах, обозначим через  $\Delta\beta$  и  $\Delta\gamma$ . На основании (11.1) и (11.2) имеем

$$k_\gamma = k_\beta = 1 - (\bar{\gamma} + \Delta\gamma) = 2(\bar{\beta} + \Delta\beta - 1).$$

Отсюда получаем

$$\Delta\gamma = \frac{3 - \bar{\gamma} - 2\bar{\beta}}{1 + 2\frac{\Delta\beta}{\Delta\gamma}}, \quad (11.6)$$

$$k_{\beta\gamma} = 1 - \bar{\gamma} - \frac{3 - \bar{\gamma} - 2\bar{\beta}}{1 + 2\frac{\Delta\beta}{\Delta\gamma}}. \quad (11.7)$$

Следовательно,  $k$  можно вычислить по  $\bar{\beta}$  и  $\bar{\gamma}$ , если известно  $\Delta\beta/\Delta\gamma$ . Отношение  $\Delta\beta/\Delta\gamma$  для каждой элементарной волны в известных пределах не зависит от ее амплитуды, фазы и частоты, а зависит только от порядка той сферической функции, которой представляется амплитуда данной волны. Это отношение можно вычислить теоретически. В результате определяется значение  $k$  для Земли без водной оболочки.

Величина  $\Delta\beta/\Delta\gamma$  представляет собой отношение приращений  $\beta$  и  $\gamma$  в результате воздействия на сферу давления  $\rho_0 g A_2^2(\vartheta, \lambda) \cos(\nu t + 2\lambda + \varphi_{22}) \cos \nu t$  и притяжения простого слоя с плотностью  $\rho_0 A_2^2(\vartheta, \lambda) \cos(\nu t + 2\lambda + \varphi_{22}) \cos \nu t$ , расположенного на поверхности сферы ( $\rho_0$  — плотность воды). При достаточно малых величинах плотности этого слоя и давления отношение  $\Delta\beta/\Delta\gamma$ , как указывалось, зависит только от строения сферы и от порядка сферической функции, которой представляются плотность слоя и давление. Поэтому  $\Delta\beta$  и  $\Delta\gamma$  можно вычислить при частном предположении о величине амплитуды прилива, а именно: при статическом приливе в океане, полностью покрывающем всю Землю.

Пусть строение сферы соответствует одной из рассмотренных ранее моделей, а поверхность ее сплошь покрыта тонкой водной оболочкой. Вычислим  $\bar{\beta}$  и  $\bar{\gamma}$  для новой модели и на основе сравнения новых значений этих величин со старыми определим  $\Delta\beta$ ,  $\Delta\gamma$  и их отношение. Для новой модели нужно заново составить краевые условия и с новыми условиями заново решить краевую задачу.

Водную оболочку предполагаем настолько тонкой, что изменением  $R$ ,  $R'$ ,  $V'$  и  $r$  от внешней к внутренней ее поверхности можно пренебречь. На поверхности воды должно выполняться единственное условие (2.21):

$$\left[ \bar{R}' = \frac{n+1}{n} \bar{R} - (2n+1)g_0 + 4\pi\kappa\rho_0 \frac{\bar{R}}{V'} \right]_a = 0, \quad (11.8)$$



$\rho_0$  — плотность воды,  $\bar{R}$  и  $\bar{R}'$  характеризуют потенциал и притяжение внутри водной оболочки.

Из-за непрерывности компонент упругого напряжения следует, что на границе водной и упругой оболочек должны выполняться следующие условия, вытекающие из (1.27), (1.28) и (2.1):

$$(rT' - 2T + rH)_a = 0, \quad (11.9)$$

$$[\lambda j + 2\mu H' + \rho_0 (R + V'H)]_a = 0. \quad (11.10)$$

Условие (1.31) также должно выполняться во всех случаях:

$$[R' - \bar{R}' - 4\pi\kappa(\rho - \rho_0)H]_a = 0. \quad (11.11)$$

Из-за непрерывности потенциала простого слоя (создаваемого приливной волной)  $\bar{R} = R$ . Исключая из (11.8)  $\bar{R}'$ , с помощью (11.11) получаем

$$\left[ R' + \frac{n+1}{a}R - (2n+1)g_0 - 4\pi\kappa\rho H + 4\pi\kappa\rho_0 \frac{R+V'H}{V'} \right]_a = 0. \quad (11.12)$$

Итак, при наличии тонкой водной оболочки на поверхности упругой оболочки должны выполняться условия (11.9), (11.10) и (11.12). Из этих трех условий только одно сохранилось старым, и, казалось бы, для решения рассматриваемой задачи нужно рассчитать еще две частные интегральные кривые, так как теперь только одно условие удовлетворено заранее. Однако путем простого преобразования функций  $R$ ,  $H$  и  $T$  можно условию (11.12) придать прежний вид. Действительно, его можно представить в следующей форме:

$$\left[ \frac{R'}{\zeta} + \frac{n+1}{a} \frac{R}{\zeta} - (2n+1)g_0 - 4\pi\kappa\rho \frac{H}{\zeta} \right]_a = 0, \quad (11.13)$$

где

$$\zeta = \left[ 1 - \frac{4\pi\kappa\rho_0}{(2n+1)g_0} \frac{R+V'H}{V'} \right]_a.$$

Отсюда

$$\zeta = \frac{1}{1 - \frac{3}{2n+1} \frac{\rho_0}{\rho_m} \frac{\bar{\gamma}}{\zeta}}. \quad (11.14)$$

Все краевые условия, кроме (11.12), а также сами дифференциальные уравнения упругого равновесия однородны. После деления на  $\zeta$  в них войдут функции  $R/\zeta$ ,  $H/\zeta$  и  $T/\zeta$ . Нетрудно видеть, что краевая задача для сферы с водной оболочкой с неизвестными функциями  $R/\zeta$ ,  $H/\zeta$  и  $T/\zeta$  отличается от краевой задачи для той же сферы без оболочки с неизвестными  $R$ ,  $H$  и  $T$  только одним граничным условием ((11.10) в первом случае и (3.2) во втором). Следовательно, если при решении задачи упругого равновесия сферы для какой-либо из рассмотренных ранее моделей только одно условие (3.2) заменим условием (11.10), мы получим функции  $R/\zeta$ ,  $H/\zeta$  и  $T/\zeta$  для той же модели, но при наличии на ее поверхности тонкой водной оболочки. Определив эти функции и

$$\frac{\bar{\gamma}}{\zeta} = \left( \frac{R}{\zeta} - \frac{H}{\zeta} \right)_a,$$

по формуле (11.14) определим  $\zeta$ , а затем  $R$ ,  $H$  и  $T$ .

Таблица 9

## Результаты вычислений плотностей

$r$	$R$	$R'$	$H$	$H'$	$\theta$	$\theta'$
1,00	+1,325	+2,528	+0,659	0,000	+1,064	-3,398
0,95	1,204	2,302	0,658	+0,058	1,174	1,256
0,90	1,095	2,069	0,654	0,088	1,203	0,016
0,85	0,998	1,823	0,649	0,108	1,182	+0,806
0,80	0,913	1,557	0,643	0,120	1,127	1,366
0,75	0,843	1,259	0,637	0,126	1,049	1,735
0,70	0,789	0,911	0,631	0,126	0,956	1,954
0,65	0,754	0,485	0,625	0,120	0,855	2,052
0,60	0,743	-0,067	0,619	0,108	0,753	2,045
0,55	0,764	-0,828	0,614	0,094	0,653	1,944
$\rho' = \frac{\rho}{\lambda} V' \rho$						
$r$	$R$	$R'$	$H$	$H'$	$\theta$	$\theta'$
1,00	0,000	+5,000	0,000	+1,000	0,000	0,000
0,95	-0,261	5,489	-0,046	0,880	-0,022	+0,751
0,90	0,552	6,169	0,090	0,879	0,067	0,973
0,85	0,883	7,108	0,135	0,940	0,116	0,987
0,80	1,269	8,406	0,185	1,053	0,164	0,891
0,75	1,732	10,220	0,241	1,228	0,204	0,727
0,70	2,304	12,793	0,309	1,489	0,235	0,512
0,65	3,030	16,508	0,392	1,879	0,254	0,251
0,60	3,984	22,005	0,500	2,479	0,259	-0,066
0,55	5,278	30,383	0,646	3,437	0,246	0,459

Для варианта, в котором плотность задана в соответствии с гипотезой Лежандра в частных интегралах табл. 6, условия на поверхности сферы не фиксировались. Поэтому для модели 16 эффект тонкой водной оболочки может быть вычислен с помощью табл. 6. В остальных двух вариантах гипотезы плотностей необходимо вычислить по одному дополнительному частному интегралу, так как все частные интегралы, приведенные в табл. 4 и 5, получены в предположении, что нормальная компонента напряжения на поверхности сферы отсутствует. Результаты вычислений приведены в табл. 9.

Теперь с помощью табл. 4, 5, 6 и 9 можно вычислить числа  $k$  и  $h$  для упругой сферы, окруженной тонкой водной оболочкой, а затем образовать разности  $\Delta k$  и  $\Delta h$  с числами, приведенными в табл. 7. Вычисления выполнены для моделей 1, 6 и 16 (жидкое ядро в трех вариантах распределения плотностей) и 4 и 9 (в ядре  $\mu \approx 10^{12}$  дин/см<sup>2</sup>). Наличие водной оболочки во всех случаях увеличивает  $k$  и уменьшает  $h$  (табл. 10).

Таблица 10

Результаты вычисления  $h$  и  $k$  для упругой сферы

Модель	$\Delta k$	$\Delta h$	$\delta k$
1	+0,064	-0,088	-0,028
6	+0,069	-0,088	-0,026
16	+0,070	-0,094	-0,029
Среднее		-0,090	-0,028
4	+0,083	-0,080	-0,022
9	+0,090	-0,080	-0,020
Среднее		-0,080	-0,021

В последнем столбце табл. 10 указан результат, получающийся после выделения из  $\Delta k$  основного эффекта водной оболочки — потенциала приливной волны:

$$\delta k = \Delta k - \frac{2}{5} \frac{\rho_0}{\rho_m} \bar{\gamma},$$

где  $\bar{\gamma}$  — значение  $\gamma$  при наличии водной оболочки,  $\Delta h$  и  $\delta k$  очень мало зависят от распределения плотностей в упругой сфере. Зависимость от величины модуля сдвига в ядре выражена резче.

Из первой группы чисел табл. 10 (ядро жидкое) получаем

$$\begin{aligned}\Delta\gamma &= \delta k + \frac{3}{5} \frac{\rho_0}{\rho_m} \bar{\gamma} - \Delta h = +0,062 + \frac{3}{5} \frac{\rho_0}{\rho_m} \bar{\gamma}, \\ \Delta\beta &= \Delta h - \frac{3}{2} \delta k - \frac{9}{10} \frac{\rho_0}{\rho_m} \bar{\gamma} = -0,048 - \frac{9}{10} \frac{\rho_0}{\rho_m} \bar{\gamma}.\end{aligned}\quad (11.15)$$

Из второй группы (в ядре  $\mu \approx 1 \cdot 10^{12}$  дин/см<sup>2</sup>):

$$\begin{aligned}\Delta\gamma &= +0,059 + \frac{3}{5} \frac{\rho_0}{\rho_m} \bar{\gamma}, \\ \Delta\beta &= -0,048 - \frac{9}{10} \frac{\rho_0}{\rho_m} \bar{\gamma}.\end{aligned}\quad (11.16)$$

Таким образом, зависимость  $\Delta\gamma$  и  $\Delta\beta$  от строения упругой сферы проявляется главным образом через  $\gamma$ , числовые же коэффициенты формул при значениях модуля сдвига в ядре от 0 до  $1 \cdot 10^{12}$  дин/см<sup>2</sup> изменяются очень мало. Поэтому для всех случаев можно принять

$$\frac{\Delta\beta}{\Delta\gamma} = -\frac{0,048 + \frac{9}{10} \frac{\rho_0}{\rho_m} \bar{\gamma}}{0,060 + \frac{3}{5} \frac{\rho_0}{\rho_m} \bar{\gamma}}.\quad (11.17)$$

Возвращаясь к формуле (11.7), получаем

$$\begin{aligned}k_{\gamma\beta} &= 1 - \bar{\gamma} + (3 - \bar{\gamma} - 2\bar{\beta}) \frac{\frac{\rho_0}{\rho_m} \bar{\gamma} + 0,100}{2 \frac{\rho_0}{\rho_m} \bar{\gamma} + 0,060} = \\ &= 2(\bar{\beta} - 1) + (3 - \bar{\gamma} - 2\bar{\beta}) \frac{3 \frac{\rho_0}{\rho_m} \bar{\gamma} + 0,100}{2 \frac{\rho_0}{\rho_m} \bar{\gamma} + 0,060}.\end{aligned}\quad (11.18)$$

Итак, каждая элементарная приливная волна второго порядка изменяет  $\beta$  и  $\gamma$  таким образом, что отношение этих изменений определяется формулой (11.17). Значение  $k$ , свободное от влияния приливов в океанах (соответствующее Земле без водной оболочки), можно получить по  $\bar{\beta}$  и  $\bar{\gamma}$ , определенным по одной и той же волне упругого прилива (формула (11.18)).

Теперь рассмотрим вопрос о поправке к значению  $k$ , вычисляемому по периоду свободной нутации. В прекрасной работе Е.П. Федорова [8] не учтено изменение произведений инерции Земли из-за давления, создаваемого приливными волнами в океанах, и из-за притяжения перемещающимися массами этих волн внутренних масс Земли. Эти эффекты мы можем учесть с помощью формул (11.15) или (11.16).

Учет действительного распределения суши и моря при вычислении  $k$  по периоду свободной нутации, т.е. в статической теории приливов, особых затруднений не вызывает. В этом случае высота прилива  $h_{np}$  определяется по формуле

$$h_{np} = \left( \frac{\gamma}{g_0} \omega_2 - C \right) \psi.\quad (11.19)$$

Таблица 11

## Коэффициенты разложения функции

$$\psi = \sum_0^{\infty} [a_{nm} P_n^m(\cos \vartheta) \cos m\lambda + b_{nm} P_n^m(\cos \vartheta) \sin m\lambda]^*$$

$a_{nm}$					
$m \setminus n$	0	1	2	3	4
0	+0,688	-0,217	-0,112	+0,193	-0,0425
1		-0,213	-0,0724	+0,0472	+0,0442
2			-0,0291	+0,0211	+0,0154
3				-0,00049	-0,00279
4					+0,00035
$b_{nm}$					
$m \setminus n$	0	1	2	3	4
1		-0,123	-0,0790	-0,0386	+0,0225
2			-0,0137	-0,0373	-0,0052
3				-0,01266	-0,00022
4					-0,00192
* $\psi = 0$ на суше, $\psi = 1$ на поверхности океанов и морей					

Здесь  $C$  — постоянная, вводимая для сохранения общего количества воды в океане. На результат эта постоянная влияет очень мало.

Разложим высоту приливной волны в ряд по сферическим функциям и выделим из этого ряда член, выражающийся той же функцией, что и возмущающий потенциал. Все остальные члены на движение полюса влияния не окажут, следовательно, их можно не вычислять. Как указывалось,  $\psi = 1$  на поверхности океанов и сообщаемых с ними морей,  $\psi = 0$  на поверхности суши. Разложение  $\psi$  по сферическим функциям до четвертого порядка представлено в табл. 11. Члены разложения выше четвертого порядка нас интересовать не будут.

При свободной нутации

$$\omega_2 = -s(pxz + qyz) = -\frac{a^2 s}{3} (pP_2^1 \cos \lambda + qP_2^1 \sin \lambda), \quad (11.20)$$

$\lambda$  — долгота, отсчитываемая от положительного направления оси  $x$ ,  $\varphi$  — широта места. Присоединенные функции Лежандра зависят от  $\cos \vartheta$ ,  $\vartheta = 90^\circ - \varphi$ .

Условие постоянства воды в океанах определяет  $C$ :

$$\int h_{np} d\sigma = \frac{4\pi a s^2}{5 g_0} \gamma \left( \frac{p}{s} a_{21} + \frac{q}{s} b_{21} \right) a^3 + 4\pi a^2 a_{00} C = 0. \quad (11.21)$$

Следовательно,

$$h_{np} = -\frac{1}{3} \frac{a^2 s}{g_0} \gamma \left[ p \left( P_2^1 \cos \lambda - \frac{3}{5} \frac{a_{21}}{a_{00}} \right) + q \left( P_2^1 \sin \lambda - \frac{3}{5} \frac{b_{21}}{a_{00}} \right) \right] \psi. \quad (11.22)$$

В разложении  $h_{np}$  по сферическим функциям нас интересуют только коэффициенты при  $P_2^1 \cos \lambda$  и  $P_2^1 \sin \lambda$ . Назовем их  $A_{21}$  и  $B_{21}$ . Как известно,

$$A_{21} = \frac{5}{12\pi a^2} \int h_{np} P_2^1 \cos \lambda d\sigma,$$

$$B_{21} = \frac{5}{12\pi a^2} \int h_{np} P_2^1 \sin \lambda d\sigma.$$

Путем простых преобразований получаем

$$h_{\text{пр}} P_2^1 \cos \lambda = -\frac{a^2 s}{5g_0} \gamma \psi \left[ p \left( 1 + \frac{5}{7} P_2 - \frac{12}{7} P_4 + \frac{5}{14} P_2^2 \cos 2\lambda + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{7} P_4^2 \cos 2\lambda - \frac{a_{21}}{a_{00}} P_2^1 \cos \lambda \right) + q \left( \frac{5}{14} P_2^2 \sin 2\lambda + \frac{1}{7} P_4^2 \sin 2\lambda - \frac{b_{21}}{a_{00}} P_2^1 \cos \lambda \right) \right],$$

$$h_{\text{пр}} P_2^1 \sin \lambda = -\frac{a^2 s}{5g_0} \gamma \psi \left[ q \left( 1 + \frac{5}{7} P_2 - \frac{12}{7} P_4 - \frac{5}{14} P_2^2 \cos 2\lambda - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{7} P_4^2 \cos 2\lambda - \frac{b_{21}}{a_{00}} P_2^1 \cos \lambda \right) + p \left( \frac{5}{14} P_2^2 \sin 2\lambda + \frac{1}{7} P_4^2 \sin 2\lambda - \frac{a_{21}}{a_{00}} P_2^1 \sin \lambda \right) \right].$$

Следовательно,

$$A_{21} = -\frac{a^2 s}{5g_0} \gamma (\sigma p + \sigma_1 q + \sigma_2 p),$$

$$B_{21} = -\frac{a^2 s}{3g_0} \gamma (\sigma q + \sigma_1 p - \sigma_2 p),$$

где

$$\begin{aligned} \sigma &= a_{00} + \frac{1}{7} a_{20} - \frac{4}{21} a_{40} - \frac{3}{10} \frac{a_{21}^2 + b_{21}^2}{a_{00}}, \\ \sigma_1 &= \frac{6}{7} b_{22} + \frac{20}{7} b_{42} - \frac{3}{5} \frac{a_{21} b_{21}}{a_{00}}, \\ \sigma_2 &= \frac{6}{7} a_{22} + \frac{20}{7} a_{42} + \frac{3}{10} \frac{b_{21}^2 - a_{21}^2}{a_{00}}. \end{aligned} \quad (11.23)$$

Итак,

$$h_{\text{пр}} = \frac{\gamma a^2 s}{3g_0} \left[ \sigma (p P_2^1 \cos \lambda + q P_2^1 \sin \lambda) + \sigma_1 (q P_2^1 \cos \lambda + p P_2^1 \sin \lambda) + \right. \\ \left. + \sigma_2 (p P_2^1 \cos \lambda - q P_2^1 \sin \lambda) \dots \right]. \quad (11.24)$$

Здесь сохранены все члены, которые могут оказать влияние на период свободной нутации. Можно показать, что влияние второго и третьего членов ничтожно. Поэтому можно принять

$$h_{\text{пр}} = \frac{\gamma}{g_0} \omega_2 \sigma, \quad (11.25)$$

т.е. подвижность вод океанов учитывается путем введения множителя  $\sigma$ . Главную роль в  $\sigma$  играет первый член  $a_{00}$  (отношение площади океанов к площади всей сферы). С помощью табл. 11 получаем

$$\sigma = 0,675.$$

Теперь следовало бы заново решить краевую задачу упругого равновесия сферы с измененной в  $\sigma$  раз величиной радиального смещения водной оболочки. Однако из-за малости изменений  $k$  и  $h$  практически тот же результат для  $\Delta k$  и  $\Delta h$  получится и в том

случае, если величины, найденные ранее для полной амплитуды статического прилива, умножить на  $\sigma$ . Следовательно, в этом случае

$$\Delta k_n = \sigma \delta k + \frac{3}{5} \frac{\rho_0}{\rho_m} \sigma \bar{\gamma}. \quad (11.26)$$

Из табл. 10 следует, что  $\sigma \delta k = -0,019$  для жидкого ядра и  $\sigma \delta k = -0,014$  для ядра с модулем сдвига около  $1,4 \cdot 10^{12}$  дин/см<sup>2</sup>.

## §12. СРАВНЕНИЕ С РЕЗУЛЬТАТАМИ НАБЛЮДЕНИЙ И ВЫВОДЫ

Итак, имеются две практически осуществимые возможности для вывода числа  $k$ , характеризующего приливы Земли в чистом виде (без влияния приливов в океанах):

1) по периоду свободной нутации  $T_c$  с введением теоретической величины поправки за подвижность вод океанов (и за динамический эффект ядра, если в ядре  $\mu = 0$ );

2) по амплитудам элементарных приливных волн второго порядка в вариациях силы тяжести и наклонов путем исключения поправок за приливы в океанах.

Лучшее определение  $k_n$  первым способом выполнено Е.П. Федоровым [8]. Принимая, как у Федорова,  $T_c = 433$  дням,  $\nu = 1$ , по формуле (11.3) получаем  $\bar{k}_n = 0,281$ . Поправка за подвижность вод океанов  $\Delta k_\sigma$  вычисляется по формуле (11.26). Принимая  $\sigma = 0,675$ ,  $\bar{\gamma} = 0,69$ , в ядре  $\mu = 0$ , получаем  $\Delta k_\sigma = -0,038$ ; если же в ядре  $\mu = 0,6 \cdot 10^{12}$  дин/см<sup>2</sup>, то  $\Delta k_\sigma = -0,039$ . Различие между обоими числами не превосходит точности их вычисления. Примем  $\Delta k_\sigma = -0,038$ , тогда  $\bar{k}_n + \Delta k_\sigma = 0,243$ . Этому значению  $k$  в наиболее вероятном среднем варианте гипотезы плотностей соответствует  $\mu_i = 0,56 \cdot 10^{12}$  дин/см<sup>2</sup>. Эти значения  $k$  и  $\mu_i$  можно было бы считать окончательными, однако поправка за динамический эффект жидкого ядра положительна, поэтому после ее учета  $k$  может попасть в область значений, характеризующих жидкое ядро (0,29 – 0,32). Тогда одному и тому же периоду свободной нутации будут соответствовать два возможных значения модуля сдвига в ядре. Эта поправка вычисляется очень просто в том случае, когда оболочка принимается абсолютно твердой. В этом случае

$$\nu = \frac{C - c}{C}, \quad (12.1)$$

$$\Delta k = \frac{c}{C} (k_0 - k_\sigma),$$

где  $c/C$  — отношение моментов инерции ядра и всей Земли,  $k_0 = 39/41$ . В нашем среднем варианте распределения плотностей  $C = 11,7c$ , поэтому  $\Delta k = +0,060$ ,  $k_n = 0,303$ . Это число близко к теоретическому значению (модель 14, табл. 7).

Попытка вычисления рассматриваемой поправки с учетом упругости оболочки сделана Джеффрисом [9] для частного случая однородной и несжимаемой оболочки. Рассмотренный Джеффрисом пример трудно и рискованно использовать для наших целей, но из него следует, что учет упругости оболочки может заметно уменьшить  $\Delta k$ . В том же направлении и, может быть, еще сильнее должен действовать учет вязкости ядра. Однако вопрос о периоде свободной нутации упругого сфероида со сфероидической полостью малого сжатия, заполненной вязкой жидкостью, еще теоретически не рассмотрен. Поэтому пока мы можем лишь утверждать, что периоду свободной нутации  $T_c = 433$  дня соответствует

$$0,243 \leq k < 0,303, \quad (12.2)$$

т.е. в ядре  $\mu \approx 0,6 \cdot 10^{12}$  дин/см<sup>2</sup> или, может быть,  $\mu = 0$ . Ошибка первого значения  $\mu$ , по-видимому, не превышает 20–30%, так как изменению его на  $0,1 \cdot 10^{12}$  дин/см<sup>2</sup> соответствует в  $k$  0,01, а в периоде свободной нутации — 5 дней.

Переходим ко второму способу определения  $k$ . В формуле (11.18) положим

$$\begin{aligned}k_{\beta\gamma} &= 0,243 + \delta k, \\ \bar{\gamma} &= 0,69 + \delta\gamma, \\ \bar{\beta} &= 1,20 + \delta\beta.\end{aligned}$$

Числа в правой части этих равенств — приближенные значения  $k$ ,  $\bar{\gamma}$  и  $\bar{\beta}$ , а  $\delta k$ ,  $\delta\gamma$  и  $\delta\beta$  — небольшие поправки к предварительно принятым значениям. Получим

$$\delta k = -1,56 (\delta\gamma + \delta\beta) - 0,15 (\delta\gamma - \delta\beta). \quad (12.3)$$

Следовательно, изменение суммы  $\delta\gamma + \delta\beta$  на 0,04 изменяет  $k$  от наименьшего до наибольшего значения в неравенстве (12.2).

Достаточно взглянуть на сводную таблицу определений  $\bar{\gamma}$  в разных местах, опубликованную З.Н. Аксентьевой [10], чтобы убедиться в невозможности в настоящее время получить достаточно точное среднее значение  $\bar{\gamma}$ . Как известно, наиболее точно  $\bar{\gamma}$  определяется по главной лунной полусуточной волне  $M_2$ . Тем не менее в результатах, полученных по этой волне, разброс достигает 0,48 (от 0,34 до 0,82) и притом для пунктов, удаленных друг от друга менее чем на  $0^\circ,5$  (Гейдельберг и Дурлах). Среднее значение  $\bar{\gamma}$  из наблюдений, выполненных до 1930 г., получается равным 0,60 с разбросом от 0,34 до 0,82, а более поздние наблюдения дают 0,70 с разбросом от 0,49 до 0,83. Лучшие измерения, выполненные Майкельсоном, а также Аксентьевой и Орловым [10], дают для  $\gamma$  значение 0,69 с ошибкой около 2%. Одной из причин большого разброса в значениях  $\gamma$  являются погрешности измерения и многочисленные помехи (температурные, барические и т.п.). Далее, значения  $\gamma$  должны меняться от места к месту из-за приливов в океанах, о чем речь шла выше. Наконец, в отдельных местах могут сказываться местные особенности строения земной коры.

Величину  $\bar{\beta}$  начали определять лишь в последние годы. Наблюдения выполнены в большом числе пунктов (порядка 40), но результат получен из коротких серий (чаще всего — двухнедельных). Среднее значение  $\bar{\beta}$  близко к 1,20, разброс индивидуальных значений велик.

Таким образом,  $\bar{\gamma}$  и  $\bar{\beta}$  с точностью, необходимой для наших целей, получить пока невозможно. Можно лишь сказать, что результаты наблюдений за вариациями наклонов и силы тяжести не находятся в противоречии с периодом свободной нутации; вместе с тем эти наблюдения еще не позволяют получить решающее заключение в пользу «жидкого» или «твердого» ядра. Необходимы дополнительные наблюдения, характеризующие величину той ошибки, с которой единичная станция представляет среднее значение  $\bar{\beta}$  и  $\bar{\gamma}$  на прилегающей к ней площади. Без таких исследований нельзя оценить реальную ошибку амплитуды элементарной приливной волны, получаемой по  $\bar{\gamma}$  и  $\bar{\beta}$ .

Известно, что амплитуда вынужденной нутации для Земли с жидким ядром должна быть больше, чем для Земли с ядром твердым. Принимая оболочку абсолютно твердой, а вещество ядра жидким и лишенным вязкости, Джеффрис [11] вычислил амплитуду 19-летней нутации. Расхождение между теоретическим и наблюдаемым значением амплитуды изменило знак и возросло в два раза. Как при свободной нутации, так и здесь необходим учет упругости оболочки и вязкости ядра. Уточнение теории и определение из наблюдений амплитуд вынужденной нутации различных периодов позволят окончательно решить, является ли ядро жидким или твердым. Вместе с тем можно будет оценить вязкость и сжатие ядра, появятся дополнительные данные для уточнения гипотезы плотностей.

\* \* \*

Приношу благодарность Г.П. Башарину, И.Г. Зеленецкой, М.В. Крамер и Б.П. Перцеву за вычисления, выполненные ими в разное время для этой работы, а Е.П. Федорову за ценные советы.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лейбензон Л.С.* Деформация упругой сферы в связи с вопросом о строении Земли. — М. 1910.
2. *Ляв А.* Математическая теория упругости. — М.-Л.: ОНТИ. 1935.
3. *Лейбензон Л.С.* Курс теории упругости. — М.-Л.: ОГИЗ. 1947.
4. *Bullen K.E.* // Bull. Seism. Soc. Amer. 1940. 30. 235; 1942. 32. 19.
5. *Френкель Я.И.* Введение в теорию металлов. — М.-Л.: ГИТТЛ. 1950.
6. *Jeffreys H.* // Monthly Not. R. A. S., Geoph. Suppl. 1939. 4. 498; 1939. 4. 594.
7. *Prey A.* // Gerl. Beitr. zur Geoph. 1929. 23. 379.
8. *Федоров Е.П.* // ДАН СССР. 1949. 67. 647.
9. *Jeffreys H.* // Monthly Not. R. A. S. 1949. 109. 670; 1950. 110. 460.
10. *Аксентьева З.Н.* // Труды Полтавской гравим. обс. 1948. Т. II. С. 121.
11. *Jeffreys H.* // Monthly Not. R. A. S. 1948. 108, 206; 1949. 109. 670.



# ПЛОТНОСТЬ И УПРУГОСТЬ ВНУТРИ ЗЕМЛИ\*

Значения модулей упругости на всех глубинах могут быть выражены через скорости распространения сейсмических волн, если известны плотности. Верхние и нижние пределы плотности, определенные Радо, значительно сближаются, если учесть, что полная величина прироста плотности с глубиной не может быть меньше прироста за счет чистой сжимаемости. Пределы становятся еще ближе, если имеются указания на величину скачка плотности на границе ядра. При отсутствии гравитационной дифференциации скачок плотности наибольший ( $4,6 \text{ г/см}^3$ ), верхние и нижние пределы плотности повсюду совпадают. Предположению о непрерывности модуля объемной упругости на границе ядра соответствует скачок плотности не менее  $4 \text{ г/см}^3$ , верхние и нижние пределы плотности от поверхности до  $0,3$  радиуса Земли близки между собой. Использование чисел, характеризующих упругие приливы, позволяет определить модуль сдвига в ядре или, в случае жидкого ядра, его момент инерции.

§1. В XIX–начале XX вв. исследования плотности и упругости внутри Земли проводились независимо друг от друга. Для установления зависимости плотности от глубины использовались значения средней плотности Земли, плотности ее поверхностных слоев и момента инерции относительно оси вращения.

Первые исследователи (Лаплас, Лежандр, Рош) исходили из представления о непрерывном и очень плавном характере увеличения плотности с глубиной. Предполагая, что плотность с глубиной возрастает непрерывно и что по мере увеличения глубины прирост плотности замедляется, исходя из значений массы и момента инерции Земли (без каких-либо дополнительных гипотез), Радо рассчитал пределы, внутри которых должна быть заключена плотность на различных расстояниях от центра Земли. Результаты расчета [3] представлены в табл. 1.

Таблица 1  
Пределы Радо

Расстояние от центра в долях радиуса Земли, $r$	Пределы плотности		Расстояние от центра в долях радиуса Земли, $r$	Пределы плотности	
	верхний	нижний		верхний	нижний
0,00	12,9	8,4	0,60	7,8	7,0
0,10	12,0		0,70	6,6	6,0
0,20	11,0		0,80	5,4	5,1
0,30	10,0		0,90	4,3	4,0
0,40	9,3		1,00	3,1	2,7
0,50	8,7	7,9			

Как видно из табл. 1, начиная с расстояния, большего  $0,3$  земного радиуса, любые частные гипотезы, совместимые с предположениями Радо (например, Лежандра и Роша), не могут существенно различаться между собой. Таким образом, распределение плотностей внутри Земли казалось тогда достаточно хорошо установленным.

Установление сейсмических границ разрыва первого порядка (границ скачкообразного изменения скоростей волн) поставило вопрос о скачкообразном изменении плотности на этих границах (гипотезы Вихерта и Клузмана). Указанные в табл. 2 пределы Радо, которые

\* Труды Геофизического института АН СССР. 1955. №26(153). С. 421-430.

соответствуют скачкообразному изменению плотности, оказались настолько широки, что вопрос о распределении плотностей внутри Земли встал вновь в очень острой форме.

Таблица 2

Пределы Радо, соответствующие скачкообразному изменению плотности

r	Пределы плотности		r	Пределы плотности	
	верхний	нижний		верхний	нижний
0,00	∞	4,7	0,60	10,7	4,1
0,20	123	4,6	0,80	7,9	3,0
0,40	21,4	4,4	1,00	4,6	2,7

Для определения модуля сдвига всей Земли в целом Кельвин предложил использовать наблюдения за приливными деформациями Земли, вызываемыми притяжением Луны и Солнца. Для однородной по плотности и модулю сдвига несжимаемой модели Земли расчеты выполняются очень просто. Исходя из отношения наблюдаемой и теоретической амплитуд двухнедельных приливов в океанах (2/3), Кельвин пришел к выводу, что Земля в целом имеет твердость порядка твердости стали. Этот вывод позднее был подтвержден более точными наблюдениями над приливными изменениями наклонов (Швейдар, Орлов и др.) и величиной периода свободной нутации Земли (Ньюкомб и др.).

Крупные успехи были достигнуты в самом начале XX в. благодаря трудам основоположника сейсмологии акад. Б.Б. Голицына. Удалось определить скорости продольных и поперечных сейсмических волн на разных глубинах и, таким образом, установить связь между плотностью и модулями упругости. К отдельным числовым и, как правило, интегральным характеристикам внутреннего строения Земли были добавлены две функции, позволяющие исследовать строение Земли по отдельным слоям и глубинам. Достаточно точно было установлено положение границ разрыва (основное ядро, обнаруженное в последнее время внутреннее ядро). Старое представление о непрерывном и очень плавном изменении физических свойств вещества Земли с глубиной оказалось совершенно несостоятельным.

В последнее десятилетие сделаны первые попытки подойти к расчету плотности и модулей упругости Земли, опираясь на теорию твердого тела. Развитие этого направления сулит большие перспективы в познании закономерностей внутреннего строения Земли. К сожалению, теоретические расчеты носят пока характер грубых прикидок как из-за несовершенства теории, рассматривающей в основном случаи предельных (больших и малых) давлений, так и в силу того, что состав отдельных геосфер далеко не ясен.

Таким образом, исходные данные для изучения плотности и упругости внутри Земли существенно пополнились, а представление о строении Земли усложнилось. Задача в целом стала значительно более сложной.

§2. Основой как старых, так и современных представлений о плотности внутри Земли остаются две главные механические характеристики Земли: ее масса и момент инерции.

Масса Земли определяется из гравиметрических и геодезических измерений с помощью известной формулы Грина–Остроградского, которую применительно к интересующему нас случаю можно написать так:

$$4\pi f \int_T \rho U d\tau = \int_S \left( U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds, \quad (1)$$

где  $V$  — потенциал тяготения,  $U$  — любая гармоническая внутри Земли функция,  $f$  — постоянная тяготения,  $\rho$  — плотность,  $d\tau$  — элемент объема,  $ds$  — элемент поверхности,

$n$  — направление внешней нормали. Интегрирование ведется по всему объему  $T$  (слева) и по всей поверхности Земли  $S$  (справа).

Из гравиметрических измерений определяются  $\frac{\partial V}{\partial n}$  (сила тяжести), из геодезических —  $V$  (потенциал), размер и форма поверхности  $S$ .

При  $U = 1$  получается произведение массы Земли  $M$  на постоянную тяготения  $f$  [1]:

$$fM = (39862 \pm 0,3) \cdot 10^{16} \text{ см}^3/\text{с}^2.$$

(Ошибка оценена без учета возможной неточности полуоси земного эллипсоида.)

В результате деления этого числа на постоянную тяготения  $f = 667 \cdot 10^{-10} \text{ см}^3/\text{г}\cdot\text{с}^2$  и на объем Земли получается средняя плотность Земли:  $\rho_m = 5,517 \text{ г}/\text{см}^3$ , причем ошибка  $\rho_m$  целиком обусловлена точностью определения постоянной тяготения.

Помимо  $\rho_m$  при анализе распределения плотностей мы используем так называемый «параметр неоднородности»  $\frac{\varepsilon}{H}$ :

$$\frac{\varepsilon}{H} = \frac{C}{\frac{2}{3}Ma^2}.$$

Здесь  $C$  — центральный полярный момент инерции,  $H$  — механическое сжатие Земли,  $\varepsilon$  — параметр, определяемый гравитационным полем Земли (выражающийся через сжатие и входящий в теорию движения Луны). Параметр неоднородности может изменяться от 0 (вся масса заключена в центре) до 3/5 (однородная Земля).

Механическое сжатие Земли определяется по постоянной лунно-солнечной прецессии. По де Ситтеру,

$$H = \frac{C - A}{C} = 0,003279,$$

где  $A$  — центральный экваториальный момент инерции.

Параметр  $\varepsilon$  можно найти несколькими методами. Во-первых, он выражается через разность моментов инерции Земли. Поскольку эта разность является, как и масса, стоксовой постоянной, т.е. определяется независимо от каких-либо гипотез о строении Земли, сам параметр определяют на основе гравиметрических измерений. Согласно последним вычислениям [2]  $\varepsilon = (1643 \pm 6) \cdot 10^{-6}$ .

Кроме того, довольно точно  $\varepsilon$  определяется из неравенства в широте Луны и из движения перигея и узла лунной орбиты.

Параметр неоднородности может быть получен также с помощью теории фигур равновесия вращающихся жидких масс (теория Клеро и преобразование Радо). Возможность применения этой теории к Земле основана на оценке времени релаксации напряжений сдвига

$$\tau = \frac{\nu}{\mu},$$

где  $\nu$  — вязкость в паузах,  $\mu$  — модуль сдвига. Если релаксация напряжений происходит достаточно быстро (т.е. если даже период релаксации выражается сотнями тысяч лет, в течение которых длительность суток может измениться всего на десятки секунд), то напряжениями сдвига при оценке сжатия можно пренебречь и применить к Земле, несмотря на ее значительную твердость, уравнения гидростатики. Более детально останавливаться на этом вопросе в нашем случае нет нужды, так как и данный метод приводит к тому же самому значению параметра неоднородности.

Наконец, параметр неоднородности можно определить, исходя из сжатия Земли, по геодезическим данным. Этот путь наименее надежен, так как определяется сжатие на континентах, а не среднее его значение для всей Земли.

Разные методы приводят к согласным между собой результатам. С ошибкой, вряд ли превышающей две–три единицы последнего знака, можно принять, что

$$\frac{\varepsilon}{H} = -0,501.$$

Это значение не связано с какими-либо допущениями о состоянии вещества внутри Земли, так как прецессия модели жидкой и твердой Земли практически одинакова.

Средняя плотность задает масштаб плотностей внутри Земли в системе CGS. Параметр неоднородности накладывает существенное ограничение на распределение плотностей, а именно:

$$\frac{\varepsilon}{H} = 3 \int_0^1 \frac{\rho}{\rho_m} r^4 dr = 0,501. \quad (2)$$

§3. По времени пробега сейсмических волн устанавливается зависимость скорости продольных и поперечных волн от глубины и определяются отношения модуля всестороннего сжатия и модуля сдвига к плотности.

Если бы плотность зависела только от давления, т.е. если бы Земля была однородна по составу и повсюду имела одинаковую температуру, то приращение плотности было бы обусловлено только сжимаемостью и, следовательно,

$$\rho' = \rho \cdot V' \frac{\rho}{K}, \quad (3)$$

где  $K$  — модуль всестороннего сжатия,  $\frac{\rho}{K}$  — известная функция  $r$ .

Это уравнение легко приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка относительно вспомогательной функции  $m(r)$  ( $m(r)$  — масса, заключенная внутри сферы радиуса  $r$ ).

На каждом участке, где плотность является дифференцируемой функцией  $r$ , можно путем численного интегрирования найти интегральную кривую уравнения (3), если заданы два граничных условия. Так, в отсутствие скачков плотности достаточно двух граничных условий:

$$\begin{aligned} m(r) &= 0 & \text{при} & \quad r = 0, \\ m(r) &= M & \text{при} & \quad r = R, \end{aligned}$$

где  $M$  и  $R$  — масса и радиус Земли.

Поскольку функция  $m(r)$  по определению непрерывна, то, допустив скачок плотности в какой-нибудь точке, необходимо добавить всего одно новое условие.

Если предполагается разрыв непрерывности плотности в одной точке, то таким условием может явиться значение параметра неоднородности, если в двух или трех точках (например, на границе коры, основного ядра и внутреннего ядра), — то необходимыми дополнительными условиями мы еще не располагаем.

Буллен, интегрируя уравнение (3) и стремясь к детализации, с нашей точки зрения не оправданной имеющимися данными, делил область интегрирования на три интервала, прибегая к несколько произвольным допущениям. Каковы эти допущения, не так уж важно, поскольку само основное уравнение, несомненно, неточно, потому что учитывает изменение плотности только за счет сжимаемости, не учитывая гравитационной дифференциации, несомненно, имеющей место: каким бы образом Земля ни произошла, все равно легкие элементы должны были всплывать, а тяжелые — погружаться.

Так как изменение плотности за счет повышения температуры с глубиной действительно несущественно (при высоких давлениях, господствующих внутри Земли, этот эффект должен быть незначителен), то уравнение, использованное Булленом, следует заметить неравенством:

$$\rho' \leq \rho V' \frac{\rho}{K} \quad (3')$$

(учитывая знак, по абсолютной величине  $\rho'$ , конечно, больше).

Знак равенства может относиться лишь к центральным областям Земли, где из-за малой величины силы тяжести гравитационная дифференциация может быть весьма слабой. Конечно, замена дифференциального уравнения дифференциальным неравенством вновь усложняет проблему. Поэтому Буллен в одной из последних работ выдвинул новую гипотезу, предположив непрерывное и плавное (параболическое) изменение модуля объемной упругости в зависимости от гидростатического давления. Это предположение в общем соответствует его прежним результатам, согласно которым изменение модуля объемной упругости на границе ядра ничтожно (конечно, такое соответствие является не доводом в пользу новой гипотезы, а лишь указывает, что обе гипотезы должны давать близкие результаты).

Буллен подтверждает свое предположение грубыми прикидками, основанными на теории твердого тела. Желательно, чтобы изменение модуля объемной упругости на границе ядра было подвергнуто теоретическому исследованию, так как решение этого вопроса исключительно важно для установления зависимости плотности и модуля упругости от глубины.

Поскольку неравенство (3') достаточно надежно, напрашивается мысль об использовании его для установления предельных значений плотности на разных глубинах. С этой целью используем немного измененный метод Радо. Наряду с неизвестной функцией  $\rho(r)$ , характеризующей истинное распределение плотностей, рассмотрим вспомогательную функцию  $D(r)$ , соответствующую одному из «возможных» распределений, т.е. такую функцию, которая дает нужное значение для массы и момента инерции Земли.

Подчиним функцию  $D(r)$  еще двум условиям: во-первых, пусть производная  $\frac{dD}{dr}$  соответствует тому случаю, когда изменение плотности вызвано только сжимаемостью, следовательно  $\frac{dD}{dr} > \frac{d\rho}{dr}$ ; во-вторых, пусть функция  $D(r)$  будет непрерывна всюду, кроме той фиксированной точки  $r$ , для которой ищутся предельные значения плотности. Перечисленные условия определяют функцию  $D$  и ее скачок в точке  $r$ .

Рассуждая далее аналогично Радо, нетрудно убедиться в том, что разность  $D - \rho$  в интервале от центра до поверхности Земли должна проходить через 0 не менее 2 раз и что поэтому неизвестная функция  $\rho(r)$  должна пройти между двумя значениями функции  $D(r)$  в точке ее разрыва. Эти значения определяют нижний и верхний пределы неизвестной функции  $\rho$ , дающей истинное распределение плотности внутри Земли.

Изложенное рассуждение не теряет силы и в том случае, когда заданы скачки вспомогательной функции  $D$  в тех местах, где заведомо имеются скачки функции  $\rho$ , если только скачки функции  $D$  заведомо не превосходят скачков функции  $\rho$ . Не излагая методов расчета, приведем лишь окончательные результаты для трех случаев (табл. 3). В первом случае не делалось никаких предположений о скачках функции  $\rho$ . Во втором случае предполагалось, что на границе основного ядра имеет место скачок плотности, не меньший чем  $4 \text{ г/см}^3$ . В третьем случае на границе ядра предполагалось наличие максимально возможного скачка плотности —  $4,6 \text{ г/см}^3$  (разность между верхним и нижним пределом  $\rho$  в этой точке в первом общем случае).

Таблица 3

Варианты расчета плотности на разных глубинах

$r$	Общий случай		$\Delta\rho \geq 4 \text{ г/см}^3$		$\Delta\rho = 4,6 \text{ г/см}^3$
	нижний	верхний	нижний	верхний	верхний= =нижнему
0,0	8,0	$\infty$	11,9	$\infty$	12,5
0,1	8,0	552	11,8	77	12,4
0,2	8,0	78	11,6	20	12,2
0,3	7,4	29,3	11,2	14,3	11,8
0,4	6,7	16,7	10,6	12,0	11,2
0,5	5,8	11,6	9,7	10,6	10,4
0,55	5,3	9,9	5,3	9,9	9,9
0,6	5,1	9,0	5,1	5,7	5,3
0,7	4,6	7,6	4,8	5,2	5,1
0,8	3,8	6,7	4,4	4,8	4,8
0,9	2,7	6,0	3,5	4,4	4,5
1,0	2,7	4,6	2,7	3,8	4,1
					3,6

Важно отметить, что в третьем случае верхний и нижний пределы повсюду совпадают между собой. Таким образом, неравенство (3') обращается для этого случая в равенство (3), из чего следовала бы при нулевом давлении одинаковость плотности на всех глубинах.

Естественно, что малым  $r$  соответствуют широкие пределы плотности. Это обстоятельство, однако, не должно нас смущать, потому что как раз при малых  $r$  (в пределах, например, внутреннего ядра) трудно ожидать заметной гравитационной дифференциации и от неравенства (3') можно перейти к равенству (3). Исходя из сделанного допущения, можно еще более сузить пределы плотности на всех глубинах.

Если теперь принять предположение Буллена о непрерывности модуля объемной упругости и по сейсмическим данным определить отношение  $\frac{K}{\rho}$  по обе стороны границы ядра, то оказывается, что отношение плотностей внутри и вне границы ядра равно или больше 1,75. (Знак равенства соответствует допущению, что в ядре модуль сдвига равен нулю.)

Отсюда, используя верхний предел плотности, получаем, что скачок плотности на границе ядра должен превышать  $4 \text{ г/см}^3$ , но, как следует из табл. 3, при таком значении скачка плотности ее предельные значения до 0,3 радиуса настолько близки, что прибегать к другим специальным гипотезам, как это делает Буллен, излишне.

Доказательство непрерывности модуля объемной упругости на границе ядра означало бы, что прирост плотности за счет изменения химического состава составляет в среднем около 40% от прироста плотности за счет чистой сжимаемости.

§4. Рассмотрим теперь, какие новые возможности в исследуемом вопросе открывает изучение упругих приливов, а также свободной и вынужденной нутации земной оси.

Как известно, из наблюдений упругих приливов получают два числа:  $k$  и  $h$ , из которых первое равно отношению изменения потенциала притяжения, вызванного приливной деформацией Земли, к потенциалу приливообразующей силы, а второе — отношению радиального смещения земной поверхности к высоте статического прилива в той же точке в случае абсолютно твердой Земли. По периоду свободной нутации определяется число  $k$ , если модуль сдвига в ядре отличен от нуля. Амплитуда вынужденной нутации зависит от состояния вещества в ядре.

Старые методы, сводившиеся к оценке по  $k$  и  $h$  среднего значения модуля сдвига для Земли в целом или, в лучшем случае, общего характера изменения этого модуля с глубиной, потеряли теперь значение. Как бы плохо мы ни знали зависимость плотности от глубины, все же по ней можно судить о модулях объемной упругости и сдвига лучше,

чем исходя только из двух чисел  $k$  и  $h$  (фактически приходится судить только по одному числу, так как второе зависит от первого).

Нами был применен следующий метод [2]. Принимая для распределения плотностей одну из возможных гипотез и используя отношения модулей упругости к плотности, получаемые из сейсмических наблюдений, мы задавали тем самым строение упругой сферы и, рассчитав затем общую картину упругих приливов, могли сравнить теоретические характеристики упругих приливов с наблюдаемыми. Таким образом, мы могли контролировать и, в известных пределах, корректировать положенные в основу вычислений представления о строении Земли.

На этом пути встречаются два серьезных затруднения. Во-первых, скорости поперечных волн внутри ядра неизвестны; во-вторых, рассматриваемую задачу имело смысл решать только для общего случая гравитирующей сжимаемой неоднородной сферы, когда она приводится к краевой задаче шестого порядка с довольно сложной структурой дифференциальных уравнений.

Второе затруднение было преодолено путем решения краевой задачи численным методом. Первое же привело к тому, что основным неизвестным оказалось значение модуля сдвига в ядре, влияющее на постоянные упругих приливов больше, чем распределение плотностей.

В общей сложности нами было рассчитано около 20 вариантов, различающихся распределением плотности, модулем сдвига в ядре (от нуля до бесконечности), сжимаемостью ядра, значением параметра неоднородности, учетом влияния коры, условиями на поверхности и т.п.

Во всех случаях отношение чисел  $k$  и  $h$  в пределах точности вычислений совпадает со значением параметра неоднородности ( $1/2$ ). Для жидкой сферы любого строения и однородной несжимаемой упругой сферы равенство отношения  $k/h$  к параметру неоднородности доказывается аналитически. В общем случае это отношение зависит от скоростей распространения сейсмических волн. В данном случае для нас важно лишь то несомненное обстоятельство, что из наблюдения упругих приливов получается не два, а лишь один независимый параметр, связанный с внутренним строением Земли.

После проведенных вычислений можно было с полной определенностью установить, о каких именно параметрах и насколько уверенно можно судить по числу  $k$ . Оказалось, что наиболее тесно  $k$  связано со значением модуля сдвига в ядре: изменение последнего на  $0,09 \cdot 10^{12}$  дин/см<sup>2</sup> меняет  $k$  на 0,01.

Остальные источники некоторой неопределенности расчетов отступают на второй план. Так, незнание истинного закона плотностей вряд ли меняет  $k$  более чем на 0,01. Влияния сжимаемости ядра (при  $\mu < 10^{12}$  дин/см<sup>2</sup>), неточности параметра неоднородности, земной коры и других причин ничтожны.

Обратимся к рассмотрению результатов тех наблюдений, из которых может быть получено  $k$ . Из наклономерных наблюдений получается  $\gamma = 1 + k - h = 1 - k$ . Уже беглого просмотра сводки значений  $\gamma$ , опубликованной З.Н. Аксентьевой, достаточно, чтобы убедиться в колоссальном разбросе отдельных значений  $\gamma$  (от 0,46 до 0,82). Отчасти это обусловлено ошибками наблюдения, отчасти местными особенностями строения земной коры, отчасти влиянием приливных волн в океане, проявляющемся как в их гравитационном эффекте, так и в вызываемом ими давлении, деформирующем Землю. В то время как первые два источника ошибок носят как бы случайный характер и могут быть ослаблены усреднением результатов, с влиянием приливов в океанах дело обстоит много хуже. Его нельзя учесть, потому что нет динамической теории приливов в реальных океанах; нельзя рассчитывать и на усреднение. Можно надеяться, что этот эффект будет исключен из совокупности наблюдений за приливными вариациями наклонов и вариаци-

ями силы тяжести, но только тогда, когда таких наблюдений будет накоплено достаточное количество.

Таким образом, для вывода значений  $k$  с необходимой нам точностью остается использовать значение периода свободной нутации (так называемого чандлеровского периода в движении полюсов). Большой период (1,2 года, а не 12 часов, как в случае главной лунной волны) позволяет в этом случае уверенно учесть эффект приливных явлений в океанах.

Однако и здесь возникает существенное затруднение. Дело в том, что по периоду Чандлера число  $k$  определяется просто и надежно, если ядро и оболочка «твердые» (т.е.  $\mu \neq 0$ ) или если ядро хотя и «жидкое», но вязкость его сравнительно мала, а оболочку можно считать абсолютно твердой (в этом случае, разобранном Слудским, нужно знать момент инерции ядра). Если же ядро жидкое и очень вязкое, а оболочка упругая, задача весьма усложняется.

В первом варианте (в ядре  $\mu \neq 0$ , напряжения сдвига не релаксируют) периоду Чандлера (433 дня) после введения поправок за подвижность вод океана соответствует значение  $k = 0,246$ . Модуль сдвига в ядре по нашим вычислениям получается около  $0,6 \cdot 10^{12}$  дин/см<sup>2</sup> (т.е. уменьшается приблизительно в 6 раз) с погрешностью, вряд ли превосходящей 20–30%.

Во втором варианте (теория Слудского), приняв момент инерции ядра равным  $1/12$  общего момента инерции Земли, что вполне правдоподобно, вновь получаем для  $k$  значение, близкое к 0,246. Это происходит потому, что от уменьшения модуля сдвига в ядре (от  $0,6 \cdot 10^{12}$  дин/см<sup>2</sup> до 0)  $k$  увеличивается на 0,06, а за счет динамического эффекта ядра — на те же 0,06 уменьшается. Следовательно, и этот вариант оказывается возможным. Правда, учет деформируемости оболочки, а также вязкости ядра должен нарушить совпадение: теоретическое значение  $k$  при том же значении момента инерции ядра в этом случае несколько увеличится; однако окажется ли после точных расчетов эта разность достаточной, чтобы уверенно решить, какой из двух указанных вариантов следует предпочесть, — пока сказать нельзя; этот вопрос должен быть рассмотрен отдельно.

Решающие аргументы в пользу второго варианта (жидкое ядро), по-видимому, может доставить изучение амплитуд вынужденной нутации.

В последнее время внимание астрономов и геофизиков привлекает вопрос о влиянии строения Земли на амплитуды нутационных членов разных периодов, так как с несомненностью выяснилось значительное расхождение между теоретическими и наблюдаемыми значениями этих амплитуд. В 1948 г. Джеффрис попытался объяснить эти расхождения, исходя из упомянутой теории Слудского (приписанной им Пуанкаре, который через 15 лет после Слудского рассмотрел тот же вопрос). Однако после введения поправки на жидкое ядро расхождение с теорией увеличилось почти вдвое и привело к изменению знака.

Джеффрис приписывает расхождение влиянию упругости оболочки, но возможно, что заметную роль играет и вязкость ядра. Особенно сильно строение ядра должно сказываться на полумесячной нутации, амплитуда которой, по определению Е.П. Федорова, оказалась на 30% больше теоретического значения. Если на основании гипотезы «жидкого» ядра удастся согласовать наблюдаемые и теоретические значения нутационных членов, это будет, по-видимому, решающим соображением в ее пользу. Достигнуть этого можно только в результате уточнения теории нутации.

Таким образом, изучение движения полюса позволяет пока оценить значение модуля сдвига в ядре либо момент инерции ядра с точностью порядка 20%. Если в будущем удастся измерить очень малые приливные изменения широт, то откроются новые возможности, так как амплитуда этих вариаций заметно зависит от распределения плотности в оболочке (и мало зависит от строения ядра).



## §5. Подведем итоги.

1. Так как полное изменение плотности с глубиной не может быть меньше изменения плотности за счет сжимаемости, то пределы Радо могут быть сужены. Вычисленные заново пределы Радо таковы, что на границе основного ядра скачок плотности не может превышать  $4,6 \text{ г/см}^3$ .

2. Если на границе ядра скачок плотности равен своему максимальному значению  $4,6 \text{ г/см}^3$ , то верхний и нижний пределы Радо повсюду совпадают. Это распределение плотности (булленовское) является одним крайним случаем и соответствует отсутствию гравитационной дифференциации.

3. Если скачок плотности на границе ядра равен 0, прирост плотности в оболочке за счет гравитационной дифференциации более чем вдвое превышает прирост за счет сжимаемости. Это распределение, очень близкое к распределениям Лежандра или Роша, является вторым крайним случаем и соответствует максимальной гравитационной дифференциации.

4. В общем случае характер изменения плотности с глубиной существенным образом зависит от принятой величины скачка плотности на границе ядра. Например, вторая гипотеза Буллена не отличается существенно от первой, так как приводит примерно к той же величине скачка плотности. Поэтому для уточнения зависимости плотности и модуля упругости от глубины необходимо главное внимание обратить на теоретическое и опытное исследование величины скачка плотности или модуля объемной упругости на границе основного ядра. О характере изменения плотности на границе внутреннего ядра бесполезно говорить до тех пор, пока удовлетворительно не разрешен вопрос об основном ядре.

5. Модули упругости на разных глубинах точнее определяются по скоростям сейсмических волн и по плотности, чем по амплитудам упругих приливов или периоду Чандлера. Вместе с тем амплитуда упругих приливов и период движения полюса хорошо согласуются с данными о скоростях распространения сейсмических волн.

По периоду Чандлера получаются два возможных значения для модуля сдвига в ядре:  $0,6 \cdot 10^{12} \text{ дин/см}^2$  и 0.

Отличие теоретических значений амплитуд вынужденной нутации от наблюдаемых говорит в пользу того, что в ядре модуль сдвига равен 0. Вопрос может быть решен окончательно после уточнения теории нутации и наблюдаемой величины нутационных членов. Желательно, чтобы астрономические учреждения вели работу в этом направлении. Вместе с тем следует продолжать поиски поперечных волн, прошедших через ядро.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жонголович И.Д.* // Труды Института теоретической астрономии. 1952. Вып. III.
2. *Молоденский М.С.* // Труды Геофизического института. 1953. №19(146).
3. *Пицетти П.* Основы механической теории фигуры планет. — М.: Гостехиздат. 1933.

# ТЕОРИЯ НУТАЦИИ И СУТОЧНЫХ ЗЕМНЫХ ПРИЛИВОВ\*

1. Теория нутации вращающейся жидкой массы эллипсоидальной формы, заключенной в твердую оболочку, дана Пуанкаре [1]. На геофизическое значение этой теории и ее значительное усложнение, связанное с необходимостью учета упругости оболочки, впервые обратил внимание Джеффрис [2]. Он же совместно с Висентом разработал теорию с учетом упругости оболочки применительно к двум моделям Земли [3,4]. Результаты этой теории Джеффрис [5] сравнил с наблюдаемыми амплитудами главной и двухнедельной нутаций, полученными Федоровым [6] по материалам международной службы широт, и полугодичной нутации, определенной Поповым по наблюдениям зенитной звезды в Полтаве.

В теории Джеффриса и Висента применен вариационный метод, затрудняющий возможность составить ясное представление о степени приближения к точному решению задачи. Автор настоящей статьи пытался воспроизвести и уточнить эту теорию, однако неясных мест было так много, что пришлось от этого метода отказаться.

Излагаемая ниже теория мне кажется достаточно простой и общей; ясно виден характер упрощений задачи и, если бы это понадобилось, пути повышения точности теории. Исходной является система двух дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, определяющая малые колебания вращающейся сжимаемой жидкости в системе координат, имеющей нутационное движение. Решение этих уравнений, удовлетворяющее граничным и динамическим условиям задачи, построено на основе решения для однородной несжимаемой жидкости путем введения в решение малых «корректирующих» членов. Без заметного увеличения числа формул удалось избежать применения функций комплексного аргумента. Наглядность изложения от этого выиграла. Результаты теории существенно отличаются от опубликованных Джеффрисом и Висентом.

2. Уравнения упругости при существовании потенциала и объемных сил имеют следующий вид:

$$\rho \frac{Dr}{Dt} = \rho \operatorname{grad} U + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial z}. \quad (1)$$

Здесь  $r$  — радиус-вектор текущей точки  $(x, y, z)$ ,  $\rho$  — плотность,  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{Z}$  — векторы давления, действующие на элементы плоскости  $YZ$ ,  $ZX$  или  $XY$ . Надстрочная точка означает частную производную по времени:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial}{\partial y} + \dot{z} \frac{\partial}{\partial z}.$$

В системе координат, вращающейся с угловой скоростью  $\omega$ , левая часть уравнения (1) выражается следующим образом:

$$\frac{D\dot{r}}{Dt} = \frac{\tilde{D}}{Dt} \left[ \dot{\mathbf{r}} + [\omega \mathbf{r}] \right] + \left[ \omega \left[ \dot{\mathbf{r}} + [\omega \mathbf{r}] \right] \right] = \frac{\tilde{D}\dot{\mathbf{r}}}{Dt} + 2 \left[ \omega \dot{\mathbf{r}} \right] + \left[ \dot{\omega} \mathbf{r} \right] + (\omega \mathbf{r}) \omega - \omega^2 \mathbf{r}. \quad (2)$$

\* В кн.: Молоденский М.С., Крамер М.В. Земные приливы и нутация Земли. — М.: Изд-во АН СССР. 1961. С. 3–25.

Волнистая надстрочная черта отмечает, что производная по времени берется в подвижной системе координат.

Если в подвижной системе координат смещения являются малыми, то

$$\frac{\tilde{D}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}, \quad (3)$$

так как произведения скорости смещения на деформации являются малыми второго порядка.

При исследовании приливов и нутации в потенциал  $U$  включается гравитационный потенциал всех масс Земли  $W_0$ , потенциал приливообразующей силы  $V_e$  и потенциал от деформации Земли  $V_i$ . Потенциал  $V_e$  в подвижной системе координат имеет следующий вид:

$$V_e = \frac{1}{3} \kappa \frac{g}{a} P_2^m r^2 \cos(\sigma t - m\lambda), \quad (4)$$

где  $\sigma$  — частота приливообразующей силы,  $P_2^m$  — присоединенный полином Лежандра,  $\lambda$  — долгота,  $\kappa$ ,  $\frac{g}{a}$ ,  $m$  — постоянные ( $m = 1$  для суточного прилива,  $m = 2$  для полусуточного и  $m = 0$  для двухнедельного прилива).

Для  $\omega$  в подвижной системе координат примем выражение

$$\omega = \omega (\varepsilon \cos \sigma t \mathbf{i} + \varepsilon \sin \sigma t \mathbf{j} + \mathbf{k}), \quad (5)$$

где  $\omega$ ,  $\varepsilon$  — постоянные,  $\varepsilon$  — малая величина, пока произвольная. В этом случае из (2) и (3) получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{D\dot{x}}{Dt} &= \ddot{u} - 2\omega\dot{v} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \varphi_0 + \frac{\sigma + \omega}{\omega} \varphi \right), \\ \frac{D\dot{y}}{Dt} &= \ddot{v} + 2\omega\dot{u} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \varphi_0 + \frac{\sigma + \omega}{\omega} \varphi \right), \\ \frac{D\dot{z}}{Dt} &= \ddot{w} + \frac{2\sigma}{\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \varphi_0 + \frac{\sigma + \omega}{\omega} \varphi \right), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= -\varepsilon \omega^2 z l \cos(\sigma t - \lambda), \\ \varphi_0 &= \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) = \frac{1}{2} \omega^2 l^2, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$u$ ,  $v$ ,  $W$  — смещения в подвижной системе координат,  $\varphi_0$  — потенциал центробежной силы.

Как и в статическом случае [7], для определения начальных напряжений необходимо допустить, что в поле постоянно действующих сил с потенциалом  $W = W_0 + \varphi_0$  напряжения носят гидростатический характер, т.е.

$$\rho_0 \text{grad } W = \text{grad } P, \quad (8)$$

где  $P$  — гидростатическое давление,  $\rho_0$  — невозмущенное значение плотности, соответствующее  $V_e = V_i = 0$ .

Теперь преобразуем правую часть уравнения (1), предварительно записав ее в виде суммы трех членов:

$$\begin{aligned} \rho \operatorname{grad} U + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial z} = \\ = -\rho \operatorname{grad} \varphi_0 + [\rho \operatorname{grad} W - \operatorname{grad} P(x - u, y - v, z - w)] + \\ + \left[ \operatorname{grad} P(x - u, y - v, z - w) + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial z} \right]. \end{aligned}$$

Первый член перенесем в левую часть уравнения. Второй член преобразуем при помощи (8), учитывая изменение плотности в результате деформации:

$$\left. \begin{aligned} \rho(x, y, z) &= \rho_0(x - u, y - v, z - w)(1 - \delta), \\ \delta &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Получаем

$$\begin{aligned} \rho \operatorname{grad} W - \operatorname{grad} P(x - u, y - v, z - w) = \\ = \rho_0(1 - \delta) \operatorname{grad} W(x + u, y + v, z + w) - \operatorname{grad} P = \\ = \rho \operatorname{grad} (V_e + V_i + \eta) - \rho \delta \operatorname{grad} W, \end{aligned}$$

где

$$\eta = \frac{\partial W}{\partial x} u + \frac{\partial W}{\partial y} v + \frac{\partial W}{\partial z} w. \quad (10)$$

Последний член выражается через смещения при помощи известных уравнений упругости [7]. Мы считаем, что поверхности постоянного значения потенциала, плотности и коэффициентов упругости  $\lambda$  и  $\mu$  совпадают. Однако эти поверхности принимаем не сферическими, а сфероидальными. Фигура сфероидов определяется теорией равновесия вращающейся неоднородной планеты. В результате вычислений получаем

$$\left. \begin{aligned} \ddot{u} - 2\omega \dot{v} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} + \left( \frac{\lambda \rho'}{\rho^2 W'} - 1 \right) \delta \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left( \Delta u + \frac{\partial \delta}{\partial x} \right) + \\ &+ \frac{\mu'}{W' \rho} \left[ u' W' + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial z} \right], \\ \ddot{v} + 2\omega \dot{u} &= -\frac{\partial \psi}{\partial y} + \left( \frac{\lambda \rho'}{\rho^2 W'} - 1 \right) \delta \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left( \Delta v + \frac{\partial \delta}{\partial y} \right) + \\ &+ \frac{\mu'}{W' \rho} \left[ v' W' + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial z} \right], \\ \ddot{w} + \frac{2\sigma}{\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= -\frac{\partial \psi}{\partial z} + \left( \frac{\lambda \rho'}{\rho^2 W'} - 1 \right) \delta \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \left( \Delta w + \frac{\partial \delta}{\partial z} \right) + \\ &+ \frac{\mu'}{W' \rho} \left[ w' W' + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z} \right], \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$-\psi = V_e + \frac{\sigma + \omega}{\omega} \varphi + V_i + \eta + \frac{\lambda \delta}{\rho}. \quad (12)$$

Надстрочный штрих означает производную по направлению внешней нормали к поверхности уровня потенциала.

К уравнениям (11) необходимо еще добавить уравнение Пуассона. Полное изменение плотности в фиксированной точке пространства определяется уравнением неразрывности:

$$\dot{\rho} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0,$$

следовательно,

$$-\dot{\rho} = \rho\delta + \frac{\rho'}{W'}\eta,$$

поэтому

$$\Delta V_i = 4\pi f \left( \rho\delta + \frac{\rho'}{W'}\eta \right), \quad (13)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $f$  — постоянная тяготения.

Система уравнений (9)–(13) достаточна для определения всех функций.

3. При  $\mu = 0$  получаются гидродинамические уравнения. Если, кроме того, принять, что плотность зависит только от гидростатического давления, то, поскольку  $\mu = 0$ ,

$$\lambda\rho' = \rho^2 W' \quad (14)$$

и вместо (11) получаем

$$\begin{aligned} \ddot{u} - 2\omega\dot{v} &= -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \\ \ddot{v} + 2\omega\dot{u} &= -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \\ \ddot{w} + \frac{2\sigma}{\omega} \frac{\partial\varphi}{\partial z} &= -\frac{\partial\psi}{\partial z}. \end{aligned} \quad (15)$$

Эти уравнения совпадают с обычными, если  $\varphi = 0$  и  $V_i = 0$ .

Изменение гидростатического давления в фиксированной точке пространства (назовем его  $p$ ) получается путем добавления к изменению давления фиксированного элемента жидкости ( $-\lambda\delta$ ) изменения давления за счет его перемещения ( $-\eta\rho$ ). Поэтому

$$-p = \lambda\delta + \eta\rho, \quad (16)$$

а уравнения (12) и (13) равносильны следующим:

$$-\frac{W'}{4\pi f\rho'}\Delta V_i = \psi + V_e + \frac{\sigma + \omega}{\omega}\varphi + V_i = \frac{p}{\rho}. \quad (17)$$

Величины  $\eta$ ,  $\delta$  и  $p$  можно выразить через  $\psi$ . Для этого выразим через  $\psi$  смещения  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , которые, как видно из (4) и (5), при установившемся движении являются гармоническими колебаниями с частотой  $\sigma$ , поэтому

$$\frac{d^2}{dt^2} = -\sigma^2. \quad (18)$$

Продифференцируем первые две формулы (15) по времени, используем (18) и исключим  $\dot{u}$  и  $\dot{v}$ . Мы получим

$$\left. \begin{aligned} (\sigma^2 - 4\omega^2) u &= \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{2\omega}{\sigma^2} \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial y}, \\ (\sigma^2 - 4\omega^2) v &= \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{2\omega}{\sigma^2} \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial x}, \\ \sigma^2 w &= \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{2\sigma}{\omega} \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

С помощью этих значений смещений из (9) и (10) найдем

$$\left. \begin{aligned} (\sigma^2 - 4\omega^2) \delta &= \Delta \psi - 4 \frac{\omega^2}{\sigma^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, \\ (\sigma^2 - 4\omega^2) \eta &= \psi' W' - 4 \frac{\omega^2}{\sigma^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z} + 2 \frac{\omega^2}{\sigma^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \\ &+ \frac{2(\sigma^2 - 4\omega^2)}{\sigma \omega} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Второе выражение можно упростить. Потенциал  $W$  зависит только от  $z$  и  $l$ , поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial y} &= \frac{y}{l} \frac{\partial W}{\partial l}, \\ \frac{\partial W}{\partial x} &= \frac{x}{l} \frac{\partial W}{\partial l}. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$x \frac{\partial \psi}{\partial y} - y \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = -\frac{m}{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (21)$$

так как в функцию  $\psi$  время и долгота входят только в линейной комбинации  $\sigma t - m\lambda$ .

Таким образом,

$$(\sigma^2 - 4\omega^2) \eta = \psi' W' - \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{2\omega m}{\sigma l} \psi \frac{\partial W}{\partial l} + \frac{2(\sigma^2 - 4\omega^2)}{\sigma \omega} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z}. \quad (22)$$

Теперь системе уравнений (17) можно придать следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{4W'}{4\pi f \rho_i} \Delta V_i &= \psi + V_e + \frac{\sigma + \omega}{\omega} \varphi + V_i = \frac{1}{\omega^2} F(\psi) - \frac{2}{\sigma \omega} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z}, \\ F(\psi) &= \frac{\omega^2}{4\omega^2 - \sigma^2} \left[ \frac{\rho W'}{\rho'} \left( \Delta \psi - \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + \psi' W' - \right. \\ &\left. - \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial l} - \frac{2\omega m}{\sigma l} \psi \frac{\partial W}{\partial l} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Мы получили систему двух уравнений в частных производных второго порядка с неизвестными функциями  $\psi$  и  $V_i$ . Граничные условия определяются непрерывностью напряжений, потенциала и его производных, а также нормальной к границе жидкости компоненты смещений. Подробно эти условия будут рассмотрены ниже.

4. Наиболее трудным является решение уравнений (9)–(13) для оболочки. К счастью, здесь можно допустить относительную погрешность порядка сжатия оболочки и, следуя примеру Джеффриса и Висента [3], использовать решение для сферической оболочки при  $\sigma = \omega = 0$ . Для чисел Лява относительная погрешность порядка сжатия допустима, а нутация очень слабо зависит от упругости оболочки. Следует заметить, что более точное решение невозможно из-за погрешностей порядка выше сжатия в функциях  $\rho, \frac{\mu}{\rho}, \frac{\lambda}{\rho}$ , входящих в (11).

Основная трудность решения системы уравнений (23) для жидкого ядра заключается в близости частот вынужденных и собственных колебаний для суточного прилива и необходимости учитывать сжатие ядра, так как частота собственных колебаний существенным образом зависит от сжатия.

Решение системы уравнений (23) будем искать в следующем виде:

$$V + \psi = \alpha\Phi + \omega^2 (V_1 + \psi_1), \quad (24)$$

$$\psi = (2\omega + \sigma) \sigma \beta l z \cos(\sigma t - \lambda) + \omega^2 \psi_1, \quad (25)$$

где

$$\Phi = -\frac{W'}{4\pi f \rho'} \Delta \Phi,$$

$$V = V_e + \frac{\sigma + \omega}{\omega} \Phi + V_i. \quad (26)$$

Далее убедимся, что при  $\rho' = 0$  можно удовлетворить системе уравнений (23) и граничным условиям, приняв  $\psi_1 = V_1 = 0$ . В общем случае суточный прилив отличается от статического только тогда, когда частота вынужденных колебаний  $\sigma$  близка к частоте собственных колебаний, близкой к  $\omega$ . Вблизи резонанса функция  $\psi$  быстро возрастает вследствие увеличения параметра  $\beta$  от значений порядка единицы до значений порядка нескольких сотен (для прилива  $K_1$ ). Параметр  $\alpha$  и функции  $\Phi, V_1, \psi_1$  с изменением  $\sigma$  меняются незначительно. Этими соображениями оправдывается переход к новым неизвестным функциям  $V_1$  и  $\psi_1$ .

Внося (24)–(26) в (23), получаем два уравнения для определения  $V_1$  и  $\psi_1$ :

$$\begin{aligned} \alpha\Phi - \frac{\omega^2 W'}{4\pi f \rho'} \Delta V_1 = \alpha\Phi + \omega^2 (V_1 + \psi_1) = \\ = \left[ \beta \left( l \frac{\partial W}{\partial z} - z \frac{\partial W}{\partial l} \right) - 2 \left( \frac{\sigma + \omega}{\sigma} \beta - \frac{\omega}{\sigma} \varepsilon \right) l \frac{\partial W}{\partial z} \right] \cos(\sigma t - \lambda) + F(\psi). \end{aligned} \quad (27)$$

В решении для оболочки, как упоминалось, неизбежна относительная погрешность порядка  $q$  — отношения центробежной силы к силе тяжести (или порядка сжатия). Такая же относительная погрешность сохранится в условиях на границе ядро–оболочка и, следовательно, неизбежна в решении для ядра. Поэтому в (27) можно отбросить члены порядка  $q$  и не считаться со сжатием уроченных поверхностей в членах, которые не содержат в виде множителя параметр  $\beta$ . Из двух уравнений (27) одно в этом приближении совпадает с (26), другое приводится к следующему:

$$F(\psi_1) = \alpha\Phi - \beta \left( l \frac{\partial W}{\partial z} - z \frac{\partial W}{\partial l} \right) \cos(\sigma t - \lambda) + \nu l \frac{\partial W}{\partial z} \cos(\sigma t - \lambda), \quad (28)$$

где

$$\nu = 2 \left( \frac{\sigma + \omega}{\sigma} \beta - \frac{\omega}{\sigma} \varepsilon \right).$$

С принятым приближением уравнение (26) приводится к обыкновенному уравнению 2-го порядка относительно новой функции  $K(r)$ . Если в (26) принять

$$\Phi = K \frac{lz}{r^2} \cos(\sigma t - \lambda), \quad (29)$$

то получим

$$K'' + \frac{2}{r} K' + \left( \frac{4\pi f \rho'}{W'} - \frac{6}{r^2} \right) K = 0. \quad (30)$$

Нетрудно убедиться, что второй член в (28) удовлетворяет уравнению (26) и, следовательно, может быть представлен формулой (29) при специальном выборе функции  $K$ . Пусть

$$l \frac{\partial W}{\partial z} - z \frac{\partial W}{\partial l} = K_1 \frac{lz}{r^2}.$$

Функция  $K_1$  является ограниченной при  $r = 0$  и удовлетворяет уравнению (30), поэтому полностью определяется ее значением на границе ядро-оболочка:

$$K_1(b) = [e^2 W' r]_{r=b}, \quad (31)$$

где  $e$  — эксцентриситет границы оболочки. Вместо (28), внося  $F(\psi)$  из (23), получаем

$$\begin{aligned} & \left[ (\alpha K - \beta K_1) r^{-2} + \nu \frac{W'}{r} \right] lz \cos(\sigma t - \lambda) = \\ & = \frac{\omega^2}{4\omega^2 - \sigma^2} \frac{W'}{\rho'} \left[ \rho \left( \Delta \psi_1 - \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} \right) + \frac{\rho'}{r} \left( r \psi_1' - \frac{4\omega^2}{\sigma^2} z \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \frac{2\omega}{\sigma} \psi_1 \right) \right]. \quad (32) \end{aligned}$$

В это уравнение параметр  $\beta$  входит только с малыми множителями  $\frac{\sigma + \omega}{\sigma}$  и  $K_1$  (порядка  $e^2$ ).

Учитывая характер зависимости свободного члена от времени и долготы, будем искать решение в виде бесконечного ряда следующего вида:

$$\psi_1 = \cos(\sigma t - \lambda) \sum_{n=2}^{\infty} \chi_n r^n P_n^1, \quad (33)$$

где  $\chi_n$  — неизвестные функции только  $r$ ,  $P_n^1$  — присоединенные полиномы Лежандра, зависящие от  $\cos \vartheta$  ( $\vartheta$  — дополнение широты до  $\frac{\pi}{2}$ ). Это выражение является общим, так как функции  $P_n^1$  образуют полную систему.

Используя рекуррентные формулы

$$\left. \begin{aligned} (2n+1) \cos \vartheta P_n^1 &= n P_{n+1}^1 + (n+1) P_{n-1}^1, \\ \sin^2 \vartheta (P_n^1)' &= -n P_{n+1}^1 + (n+1) \cos \vartheta P_n^1, \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin^2 \vartheta}{r} \frac{\partial}{\partial \cos \vartheta}, \end{aligned} \right\} \quad (34)$$



получаем

$$(2n+1)z \frac{\partial}{\partial z} (\chi_n r^n P_n^1) = \frac{n}{2n+3} [(n+1)P_{n+1}^1 + (n+2)P_n^1] r^{n+1} \chi_n' + \\ + \frac{n+1}{2n-1} [(n-1)P_n^1 + nP_{n-2}^1] r^{-n} (\chi_n r^{2n+1})',$$

$$(2n+1) \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\chi_n r^n P_n^1) = \frac{n(n+2)}{2n+3} (\chi_n' r^{2n+2})' r^{-n-2} P_n^1 + \\ + \frac{(n-1)(n+1)}{2n-1} [(\chi_n r^{2n+1})' r^{-2n}]' r^{n-1} P_n^1 + \\ + \frac{n(n+1)}{2n+3} \left(\frac{\chi_n'}{r}\right)' r^{n+1} P_{n+2}^1 + \frac{n(n+1)}{2n-1} \left[(\chi_n r^{2n+1})' \frac{1}{r}\right]' r^{-n} P_{n-1}^1.$$

После подстановки этих выражений в (32) и преобразований находим

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[ \frac{\sigma - 2\omega}{\sigma} \chi_n r^{n-1} \rho' + \left(1 - \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \frac{n}{2n+3}\right) \frac{n+2}{2n+1} (\rho \chi_n' r^{2n+2})' r^{-n-2} + \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \frac{n+1}{2n-1}\right) \frac{n-1}{2n+1} \left(\frac{\rho}{r^{2n}} (\chi_n r^{2n+1})'\right)' r^{n-1} - \right. \\ \left. - \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \frac{(n-2)(n-1)}{(2n-3)(2n-1)} \left(\frac{\rho}{r} \chi_{n+2}'\right)' r^{n-1} - \right. \\ \left. - \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \frac{(n+2)(n+3)}{(2n+3)(2n+5)} \left((\chi_{n+2} r^{2n+5})' \frac{\rho}{r}\right)' r^{-n-2} \right] P_n^1 = \\ = \frac{4\omega^2 - \sigma^2}{3\omega^2} \frac{\rho'}{W'} (\alpha K - \beta K_1 + \nu W' r) P_2^1. \quad (35)$$

Из (25) и (22) следует

$$\eta = (\nu W' r - \beta K_1) \frac{lz}{r^2} \cos(\sigma t - \lambda) - \frac{W'}{3} \left( \psi_1' - \frac{2\omega}{\sigma} \frac{\psi_1}{r} - 4 \frac{\omega^2}{\sigma^2} \frac{z}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \right).$$

При помощи (34) получаем

$$\eta = \cos(\sigma t - \lambda) \sum_{n=2}^{\infty} r^n \eta_n P_n^1,$$

где

$$\eta_2 = \frac{W'}{3r} \left[ \nu - \frac{K_1}{W' r} \beta - \left(1 - \frac{12\omega^2}{7\sigma^2}\right) \chi_2' r + \frac{80\omega^2}{63\sigma^2} (\chi_4 r^9)' r^{-6} + \right. \\ \left. + \frac{2(\omega + \sigma)(2\omega - \sigma)}{\sigma^2} \chi_2 \right]. \quad (36)$$

Приравнивая множители при  $P_n^1$  в обеих частях (35), получаем бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно функций

$\chi_n$ . Эта система приводится к конечной, если плотность задана в виде многочлена от  $r$ . Бесконечная система, как видно из (34), получилась из-за наличия в (32) членов  $z \frac{\partial \psi_1}{\partial z}$  и  $\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2}$ , приводящих к тому, что смещения в ядре не пропорциональны  $P_2^1$ , как в статическом случае. Приливу второго порядка сопутствуют приливы 4-го, 6-го и других порядков (очень слабые).

В дальнейшем нам понадобится только основное уравнение, соответствующее  $n = 2$ . Его можно привести к следующему виду:

$$\left[ \left( \frac{12 \omega^2}{7 \sigma^2} - 1 \right) \rho \chi_2' r^6 + \frac{2(\omega + \sigma)(2\omega - \sigma)}{\sigma^2} \rho \chi_2 r^5 + \frac{80 \omega^2}{63 \sigma^2} (\chi_4 r^9)' \frac{\rho}{r} + \nu \rho r^5 - \right. \\ \left. - \frac{1}{4\pi f} \left( \frac{\alpha K - \beta K_1}{r^2} \right)' r^6 \right] = \frac{2(\omega + \sigma)(2\omega - \sigma)}{\sigma^2} \rho (\chi_2 r^5)' + 5\nu \rho r^4.$$

При помощи (36) это уравнение можно записать так:

$$\left[ \frac{3}{W'} \rho r^6 \eta_2 + \frac{\beta}{W'} \rho r^4 K_1 - \frac{1}{4\pi f} \left( \frac{\alpha K - \beta K_1}{r^2} \right)' r^6 \right]' = \\ = \frac{2(\omega + \sigma)(2\omega - \sigma)}{\sigma^2} \rho (\chi_2 r^5)' + 5\nu \rho r^4. \quad (37)$$

Правая часть зависит от  $\chi_2$  и  $\chi_2'$ . Из (33) следует, что добавление к  $\chi_2$  постоянного слагаемого равносильно изменению параметра  $\beta$  в формуле (25). Поэтому мы можем уточнить смысл  $\beta$  и функции  $\chi_2$  следующим дополнительным условием:

$$\int_c^b \rho (\chi_2 r^5)' dr = 0, \quad (38)$$

где  $b$  и  $c$  — внешняя и внутренняя границы жидкой части ядра (если внутреннего ядра нет, то  $c = 0$ ).

Интегрируя (37) в пределах от  $c$  до  $b$ , теперь получаем

$$\left| \frac{3}{W'} \rho r^6 \eta_2 + \frac{\beta}{W'} \rho r^4 K_1 - \frac{1}{4\pi f} \left( \frac{\alpha K - \beta K_1}{r^2} \right)' r^6 \right|_c^b = 5\nu \int_c^b \rho r^4 dr. \quad (39)$$

Общий интеграл уравнения (30) легко находится в том случае, когда плотность в ядре задана простым выражением, например, меняется по закону Лежандра или Роша. В общем случае функцию  $K$  можно получить путем численного интегрирования. Вычислив два линейно независимых частных интеграла  $K_1$  и  $K_2$ , найдем

$$\alpha K = \alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2, \quad (40)$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — произвольные постоянные, определяемые граничными условиями. Можно принять, что функция  $K_1$  ограничена в центре.

Функцию  $K_2$  можно получить из  $K_1$  путем квадратуры

$$K_2 = K_1 \int_b^r K_1^{-2} r^{-2} dr, \quad (40')$$

так как  $K_2$  удовлетворяет уравнению (30), если удовлетворяет этому уравнению  $K_1$ . В приближении Радо функция  $K_1$  выражается через параметр Радо следующим образом:

$$\frac{K'_1}{K_1} = \frac{\xi - 1}{r} - \frac{4\pi f \rho_i}{W'} = \frac{\xi - 1}{r} + \frac{m'}{m}, \quad (41)$$

где  $m$  — масса, заключенная внутри сферы радиуса  $r$ ;  $\xi$  определяется из уравнения

$$\frac{C}{\frac{2}{3}mr^2} = 1 - \frac{2}{5}\sqrt{1 + \xi},$$

где  $C$  — центральный момент инерции той же массы.

5. Рассмотрим граничные условия. Решение системы дифференциальных уравнений (11) для статического прилива в упругой сферической оболочке Земли получено численным интегрированием и подробно описано в работах [7] и [8]. Эти уравнения приводятся к системе шести линейных однородных уравнений первого порядка относительно функций

$$\left. \begin{aligned} R &= \left(1 + \frac{V_i}{V_e + \frac{\sigma + \omega}{\omega} \varphi}\right) \frac{r^2}{a} g, \\ H &= \frac{\eta}{V_e + \frac{\sigma + \omega}{\omega} \varphi} \frac{g}{W'} \frac{r^2}{a}, \\ L &= (R' - 4\pi f \rho H) r^2, \\ M &= \left(T' + H - \frac{2T}{r}\right) r^2 \mu, \\ N &= (\lambda + 2\mu) H' + \lambda \left(\frac{2H}{r} - \frac{6T}{r^2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Шестая функция  $T$  входит множителем в компоненты тангенциального смещения. Все эти функции, кроме  $T$ , сохраняют непрерывность на границе скачкообразного изменения плотности и коэффициентов упругости.

Общий интеграл рассматриваемой линейной однородной системы дифференциальных уравнений имеет следующий вид:

$$\Phi(r) = h \frac{\partial \Phi}{\partial h} + l \frac{\partial \Phi}{\partial l} + (1 + k) \frac{\partial \Phi}{\partial k} + N_0 \frac{\partial \Phi}{\partial N_0} + M_0 \frac{\partial \Phi}{\partial M_0} + L_0 \frac{\partial \Phi}{\partial L_0}.$$

Здесь  $\Phi(r)$  — одна из функций  $H$ ,  $T$ ,  $R$ ,  $N$ ,  $M$  или  $L$ ; числа  $h$ ,  $l$ ,  $1 + k$ ,  $N_0$ ,  $M_0$ ,  $L_0$  — произвольные постоянные интегрирования, пропорциональные значениям соответствующих функций на поверхности сферы, функции  $\frac{\partial \Phi}{\partial h}$ ,  $\frac{\partial \Phi}{\partial k}$ ,  $\frac{\partial \Phi}{\partial l}$ ,  $\frac{\partial \Phi}{\partial N_0}$ ,  $\frac{\partial \Phi}{\partial M_0}$ ,  $\frac{\partial \Phi}{\partial L_0}$  (общее их число равно 36) получены путем численного интегрирования (например,  $\frac{\partial \Phi}{\partial h}$  является частным интегралом, соответствующим условиям  $h = 1$ ;  $l = 1 + k = N_0 = M_0 = L_0 = 0$ ).

На поверхности сферы нормальные и тангенциальные напряжения отсутствуют. Поэтому  $N_0 = M_0 = 0$ . Производная от потенциала должна быть непрерывна, поэтому [7]

$$L_0 = 2 - 3k. \quad (43)$$

С учетом этих условий получаем

$$\Phi(r) = h \frac{\partial \Phi}{\partial h} + l \frac{\partial \Phi}{\partial l} + (1+k) \frac{\partial \Phi}{\partial k} + (2-3k) \frac{\partial \Phi}{\partial L_0}. \quad (44)$$

Сюда входят три числа Лява, которые должны быть определены из условий на внутренней границе оболочки  $r = b$ .

Если бы ядро было упругим, то на этой границе следовало бы обеспечить непрерывность всех шести функций  $\Phi(r)$ . Но ядро жидкое, поэтому тангенциальная компонента смещения, пропорциональная  $T$ , может быть разрывной. Остальным пяти условиям непрерывности функций (42) нужно удовлетворить путем соответствующего выбора параметров, входящих в (44), (24) и (25).

1. Функция  $M$  непрерывна. В ядре имеем  $\mu = 0$ , поэтому

$$M(b) = 0. \quad (45)$$

2. Функция  $R$  непрерывна. Из (24), (25), (29) и (40) следует

$$V = \alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 - (2\omega + \sigma) \sigma \beta r^2 = \kappa R \frac{lz}{r^2} \cos(\sigma t - \lambda). \quad (46)$$

Как указывалось, член  $\omega^2 V_1$  удерживать не имело смысла. Таким образом,

$$R(b) = \left[ \frac{\alpha_1}{\kappa} K_1 + \frac{\alpha_2}{\kappa} K_2 - (2\omega + \sigma) \sigma \frac{\beta}{\kappa} r^2 \right]_{r=b}. \quad (47)$$

3. Функция  $L$  непрерывна. Дифференцируя (46), получаем

$$V' = [\alpha_1 K_1' + \alpha_2 K_2' - 2(2\omega + \sigma) \sigma \beta r] \frac{lz}{r^2} \cos(\sigma t - \lambda) = \kappa R_i' \frac{lz}{r^2} \cos(\sigma t - \lambda),$$

где  $R_i'$  — внутренняя производная от  $R$ , следующим образом связанная с производной  $R'$  внутри упругого слоя:

$$R' - R_i' = 4\pi f (\rho - \rho_i) H,$$

где  $\rho_i$  — плотность в ядре.

Исключая  $R_i'$ , получаем

$$\frac{1}{b^2} L(b) + 4\pi f \rho_i H(b) = \left[ \frac{\alpha_1}{\kappa} K_1' + \frac{\alpha_2}{\kappa} K_2' - 2(2\omega + \sigma) \sigma \frac{\beta}{\kappa} r \right]_{r=b}. \quad (48)$$

4. Функция  $H$  непрерывна. Сравнивая (42) с (36) и учитывая (4), находим

$$\frac{3\eta_2}{W'} r^2 = \kappa H. \quad (49)$$

Внесем это значение в (39), исключим  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  при помощи (47) и выразим  $R'$  через  $L$  при помощи (42). В результате получим

$$\left[ Lr^2 - 2Rr^3 - \frac{\beta}{\kappa} r^4 \left( K_1' - \frac{2K_1}{r} + \frac{4\pi f \rho}{W'} K_1 \right) \right]_c^b = -20\pi f \frac{\nu}{\kappa} \int_c^b \rho r^4 dr. \quad (50)$$

5. Функция  $N$  непрерывна. Ее значение в жидком ядре выражается через  $\delta$  формулой (20). Проще же использовать (12), так как эквивалентность (20) и (12) обеспечена дифференциальным уравнением (23) и выражением (22), уже использованными при выводе условия (50).

Внося в (12) значения входящих туда функций из (42) и (25), отбрасывая  $\omega^2\psi_1$ , будем иметь

$$\left[ R + W'H + \frac{N}{\rho_i} + (2\omega + \sigma) \sigma \frac{\beta}{\kappa} r^2 \right]_b = 0. \quad (51)$$

6. В граничное условие (50) входит параметр  $\nu$ , зависящий от  $\varepsilon$ . Параметр  $\varepsilon$  определяет вращение системы координат в пространстве. Значение этого параметра можно получить из уравнения моментов

$$\widetilde{\mathbf{M}} + [\omega \mathbf{M}] = \mathbf{L}, \quad (52)$$

где  $\mathbf{M}$  — кинетический момент,  $\mathbf{L}$  — момент внешних сил в подвижной системе координат,  $\omega$  задана выражением (4). Чтобы не учитывать моменты сил взаимодействия между оболочкой и ядром (давление на границе и гравитационное взаимодействие), применим уравнение моментов ко всей Земле. Проекция кинетического момента на подвижные оси при малых значениях  $\varepsilon$  и произведений инерции  $I_{xz}$ ,  $I_{yz}$ ,  $I_{xy}$  таковы:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \omega (A\varepsilon \cos \sigma t - \varepsilon I_{xy} \sin \sigma t - I_{xz}) + \Delta M_x \approx \omega (A\varepsilon \cos \sigma t - I_{xz}) + \Delta M_x, \\ M_y &= \omega (B\varepsilon \sin \sigma t - \varepsilon I_{yz} - \varepsilon I_{yx} \cos \sigma t) + \Delta M_y \approx \omega (A\varepsilon \sin \sigma t - I_{yz}) + \Delta M_y, \\ M_z &= \omega (C - \varepsilon I_{xz} \cos \sigma t - \varepsilon I_{zy} \sin \sigma t) + \Delta M_z \approx \omega C + \Delta M_z, \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

где  $A$ ,  $B$ ,  $C$  — главные моменты инерции ( $A = B$ ),  $\Delta M_x$ ,  $\Delta M_y$ ,  $\Delta M_z$  — компоненты кинетического момента относительно подвижной системы координат.

Уравнения (53) справедливы при произвольно малом  $\varepsilon$ . От  $\varepsilon$  зависит система скоростей смещений в подвижных координатах, следовательно, компоненты кинетического момента. Можно  $\varepsilon$  выбрать таким, что эти компоненты исчезнут. Но тогда подвижная система координат была бы связана с осями кинетического момента всей деформирующейся Земли. Однако астрономические наблюдения характеризуют нутацию вектора кинетического момента одной оболочки (если учтены приливные поправки в направлении вертикали). Поэтому в (53) в  $\Delta M_x$  и  $\Delta M_y$  не должна учитываться часть (очень малая), обусловленная скоростями только в оболочке.

Тогда все значения  $\Delta M_x$  (и  $\Delta M_y$ ) определятся движениями в жидком ядре. Для вычисления преобразуем первую формулу (19) при помощи (21):

$$(\sigma^2 - 4\omega^2) u = \left( 1 - \frac{2\omega}{\sigma} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{2\omega}{\sigma^2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} - \sigma \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{\sigma + 2\omega}{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{2\omega}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right).$$

Аналогично преобразуем вторую формулу:

$$\begin{aligned} \sigma(\sigma + 2\omega) u &= \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{2\omega}{2\omega - \sigma} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right), \\ \sigma(\sigma + 2\omega) v &= \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{2\omega}{2\omega - \sigma} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right), \\ \sigma^2 w &= \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{2\sigma}{\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \end{aligned} \quad (54)$$

Члены, содержащие производные по  $\lambda$ , в  $\Delta M_x$  и  $\Delta M_y$  не войдут (при интегрировании по  $\lambda$  дадут нуль). Поэтому получаем

$$-\frac{2\omega + \sigma}{\omega} \Delta M_x = 2 \int \rho y \frac{\partial \psi}{\partial z} d\tau + \frac{2\sigma(2\omega + \sigma)}{\omega^2} \int \rho y \frac{\partial \varphi}{\partial z} d\tau + \frac{\sigma}{\omega} \int \rho \left( y \frac{\partial \psi}{\partial z} - z \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) d\tau. \quad (55)$$

Если использовать (21) и интегрирование по частям, то можно из выражений типа (55) получить

$$\begin{aligned} \Delta M_x &= -\sigma \Delta M_y, \\ \Delta M_y &= \sigma \Delta M_x, \end{aligned}$$

поэтому

$$\Delta M_y = \frac{2\omega}{\sigma(2\omega + \sigma)} \int \rho y \frac{\partial \psi}{\partial z} d\tau + \frac{2}{\omega} \int \rho y \frac{\partial \psi}{\partial z} d\tau + \frac{1}{2\omega + \sigma} \int \rho \left( y \frac{\partial \psi}{\partial z} - z \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) d\tau. \quad (56)$$

Внося сюда  $\psi$  из (25) и  $\varphi$  из (7), находим

$$\frac{1}{\omega} \Delta M_y = \left[ (\beta - \varepsilon) C_1 + \frac{\sigma}{\omega} \beta (C_1 - A_1) \right] \sin \sigma t + \frac{2\omega^2}{\sigma(2\omega + \sigma)} \int \rho y \frac{\partial \psi_1}{\partial z} d\tau, \quad (57)$$

где  $C_1$  и  $A_1$  — моменты инерции ядра.

Преобразуем интегральный член. Путем интегрирования по частям получаем

$$\int_{\tau} \rho y \frac{\partial \psi_1}{\partial z} d\tau = \int_s \frac{\rho}{r} \psi_1 z y ds - \int_r \frac{\rho'}{r} \psi_1 z y d\tau. \quad (58)$$

Функция  $\psi_1$  выражается бесконечным рядом (33). При интегрировании по сфере  $r = \text{const}$  только первый член этого ряда даст результат, отличный от нуля, так как все последующие члены ряда пропорциональны сферическим функциям выше второго порядка и ортогональны к функции второго порядка  $\frac{zy}{r^2}$ , входящей множителем в (58).

Поэтому на основании (38)

$$\begin{aligned} \int_{\tau} \rho y \frac{\partial \psi_1}{\partial z} d\tau &= 3 \sin \sigma t \int_{\tau} \rho y \frac{\partial}{\partial z} (\chi_2 z y) d\tau = 3 \sin \sigma t \int_{\tau} \rho y^2 \left( \chi_2 + \frac{z^2}{r} \chi_2' \right) d\tau = \\ &= \frac{4\pi}{5} \sin \sigma t \int_c^b \rho (\chi_2 r^5)' d\tau = 0. \end{aligned} \quad (59)$$

Теперь вместо (57) находим

$$\frac{1}{\omega} \Delta M_y = \left[ (\beta - \varepsilon) A_1 + \frac{\sigma \nu}{2\omega} (C_1 - A_1) \right] \sin \sigma t, \quad (60)$$

$$\frac{1}{\omega} \Delta M_x = \left[ (\beta - \varepsilon) A_1 + \frac{\sigma \nu}{2\omega} (C_1 - A_1) \right] \cos \sigma t. \quad (61)$$

Произведения инерции нужно вычислить для всей Земли. Кроме изменения объемного распределения масс, определяемого уравнением Пуассона (13), нужно принять во внимание смещение границ скачка плотности, равносильное добавлению на каждой такой границе простого слоя с плотностью  $\frac{\rho\eta}{W'}$ . Таким образом,

$$I_{yz} = -\frac{1}{4\pi f} \int_{\tau} \Delta V yz d\tau + \int_s \frac{\rho\eta}{W'} yz ds. \quad (62)$$

Предполагается, что поверхностный интеграл распространен по внешней границе скачка плотности (плотность  $\rho_e$ ) и внутренней (плотность  $\rho_i$ ) с учетом изменения знака  $ds$  и непрерывности  $\eta$  и  $W'$ .

Преобразуя объемный интеграл при помощи формулы Грина и учитывая гармоничность функции  $yz$ , получаем

$$\begin{aligned} I_{yz} &= -\frac{1}{4\pi f} \int_{\tau} \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial n} - 4\pi f \frac{\rho\eta}{W'} \right) yz - V \frac{\partial(yz)}{\partial n} \right] ds \approx \\ &\approx -\frac{1}{4\pi f} \frac{V' - 4\pi f \frac{\rho\eta}{W'} - \frac{2V}{r}}{yz} \int_s y^2 z^2 ds. \end{aligned}$$

Теперь интегрирование должно выполняться только по поверхности Земли, так как интегралы по внутренним границам скачка плотности равны нулю из-за непрерывности функции  $V' - 4\pi f \frac{\rho\eta}{W'}$ .

Учитывая условие на поверхности (43), получаем

$$I_{yz} = \frac{\kappa}{3} ma^2 k \sin \sigma t. \quad (63)$$

Внося (61) и (63) в (54), находим

$$\left. \begin{aligned} M_x &= m \cos \sigma t, \\ M_y &= m \sin \sigma t, \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

где

$$\frac{m}{\omega} = (A - A_1) \varepsilon + \beta A_1 + \frac{\sigma\nu}{2\omega} (C_1 - A_1) - \frac{\kappa}{3} ma^2 k. \quad (65)$$

Проекция на подвижные координатные оси момента внешних сил находим из (4):

$$\left. \begin{aligned} L_x &= L \sin \sigma t, \\ L_y &= -L \cos \sigma t, \\ L &= \frac{g}{a} \kappa (C - A). \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

Внося (64)–(66) в уравнение моментов (52), получаем одно уравнение, не содержащее времени:

$$\varepsilon - \frac{\sigma + \omega}{\omega} \left[ \frac{A - A_1}{C} \varepsilon + \frac{A_1}{C} \beta + \frac{\sigma\nu}{2\omega} \frac{(C_1 - A_1)}{C} - \frac{\kappa}{3} \frac{ma^2}{C} k \right] = \kappa \frac{C - A}{Cq}. \quad (67)$$

Если бы Земля была абсолютно твердой, то соответствующее значение  $\varepsilon_0$  определилось бы из уравнения

$$\varepsilon_0 - \frac{\sigma + \omega}{\omega} \frac{A}{C} \varepsilon_0 = \varkappa \frac{C - A}{Cq}. \quad (68)$$

При отсутствии внутреннего ядра из уравнений (45), (47), (48), (50), (51), (67), (68) можно определить числа Лява  $h$ ,  $k$  и  $l$ , параметры  $\beta_1$ ,  $\alpha_1$  и отношение  $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$  для суточных приливов ( $\alpha_2 = 0$ ).

7. Для модели Земли с твердым внутренним ядром отпадают условия центра для функций  $\chi_n$  и  $K$  и добавляются новые условия на границе внутреннего ядра. Меняется также уравнение моментов.

Учитывая малую достоверность сведений о внутреннем ядре, ничтожность его момента инерции, примем для упрощения вычислений это ядро однородным и несжимаемым. Тогда для внутреннего ядра можно использовать хорошо известное простое аналитическое решение:

$$H = C_1 r + C_2 r^3; \quad T = \frac{1}{2} C_1 r^2 + \frac{5}{6} C_2 r^4; \quad R = C_3 r^2.$$

Поэтому

$$R' = \frac{2}{r} R, \quad (69)$$

$$M = \bar{\mu} r^2 \left( \frac{5}{r} T - \frac{3}{2} H \right), \quad (70)$$

$$N + \bar{\rho} (R + W' H) = \bar{\mu} \left( \frac{13}{2} \frac{H}{r} - 9 \frac{T}{r^2} \right), \quad (71)$$

где  $\bar{\mu}$  и  $\bar{\rho}$  — соответственно модуль сдвига и плотность в ядре.

На границе  $r = c$  внутреннего ядра с жидкостью должны выполняться условия непрерывности  $M$ ,  $N$ ,  $R$ ,  $L$  и  $H$ . Условия непрерывности первых четырех функций такие же, как (45), (47), (48), (50) для границы основного ядра. Упрощение заключается в возможности использования (69)–(71).

Напишем эти условия.

1. Непрерывность  $M$ . Из (70) получаем

$$\left( \frac{5}{r} T - \frac{3}{2} H \right)_{r=c} = 0. \quad (72)$$

2. Непрерывность  $R$ . Из (47) находим

$$[R]_{r=c} = \left[ \frac{\alpha_1}{\varkappa} K_1 + \frac{\alpha_2}{\varkappa} K_2 - (2\omega + \sigma) \sigma \frac{\beta}{\varkappa} r^2 \right]_{r=c}. \quad (73)$$

3. Непрерывность  $L$ . Из (48) и (69) получаем

$$\left[ \frac{2}{r} R + 4\pi f (\rho_i - \bar{\rho}) H \right]_{r=c} = \left[ \frac{\alpha_1}{\varkappa} K'_1 + \frac{\alpha_2}{\varkappa} K'_2 - 2(2\omega + \sigma) \sigma \frac{\beta}{\varkappa} r \right]_{r=c}. \quad (74)$$

4. Непрерывность  $N$ . Из (49), (71) и (72) находим

$$\left[ (\rho_i - \rho) (R + H N') + \frac{19}{5} \mu \frac{H}{r} + (2\omega + \sigma) \sigma \frac{\beta}{\varkappa} \rho_i r^2 \right]_{r=c} = 0. \quad (75)$$



5. Непрерывность  $H$ . Из-за сжатия внутреннего ядра возможно его вращение относительно оболочки, которое можно представить формулой

$$\omega_1 = \omega \varepsilon_2 (\cos \sigma t i + \sin \sigma t j). \quad (76)$$

Поэтому скорости относительных смещений  $[\omega_1 \mathbf{r}]$  имеют компоненты, нормальную к границе внутреннего ядра, равную величине

$$\frac{1}{W'} ([\omega_1 \mathbf{r}] \text{grad } W) = \omega \varepsilon_2 \sin(\sigma t - \lambda) e^2 r \frac{lz}{r^2}.$$

Следовательно, дополнительная компонента смещения равна

$$\frac{\omega}{\sigma} \varepsilon_2 e^2 r \cos(\sigma t - \lambda) \frac{lz}{r^2}.$$

Однако этот член лежит за пределами точности граничного условия. Поэтому условие непрерывности  $H$  выражается формулой (49).

Наличие внутреннего ядра меняет уравнение моментов, выраженное формулой (67). Из-за изменения пределов интегрирования в (56) в формулу (67) вместо  $C_1$  и  $A_1$  войдут моменты инерции жидкого слоя, заключенного между границами основного и внутреннего ядра  $C_1 - C_2$  и  $A_1 - A_2$ , где  $C_2$  и  $A_2$  — моменты инерции внутреннего ядра. Вместе с тем к  $m$  нужно добавить кинетический момент  $\varepsilon_2 \omega A_2$ , возникающий вследствие вращения внутреннего ядра относительно средних осей оболочки. Поэтому вместо (65) получим

$$\frac{m}{\omega} = A\varepsilon + (\beta - \varepsilon)(A_1 - A_2) + \frac{\sigma \nu}{\omega} [(C_1 - C_2) - (A_1 - A_2)] - \frac{\varkappa}{3} ma^2 k + A_2 \varepsilon_2. \quad (77)$$

Для исключения  $\varepsilon_2$  следовало бы использовать уравнение, подобное (67), составленное для одного внутреннего ядра. Однако в этом нет необходимости, так как  $A_2 \approx 10^{-3} A$ ,  $\varepsilon_2 < \varepsilon$ , поэтому член  $A_2 \varepsilon_2$  можно отбросить. Кроме того, мал третий член по сравнению с первым ( $\approx \frac{1}{3} 10^{-3} A\varepsilon$ ). В результате этих упрощений вместо (67) находим

$$\varepsilon - \frac{\sigma + \omega}{C\omega} [A\varepsilon + (\beta - \varepsilon)(A_1 - A_2) - \frac{\varkappa}{3} ma^2 k] = \varkappa \frac{C - A}{Cq}. \quad (78)$$

Этим уравнением и условием (50) определяется частота свободных колебаний, соответствующих чандлеровскому периоду движения полюса. Из (50) следует, что при малом значении  $\sigma = \sigma_0$

$$\frac{\varepsilon}{\beta} = \frac{\sigma_0 + \omega}{\omega}.$$

Из (20) следует, что при  $V_e = 0$

$$V = \frac{\sigma_0 + \omega}{\omega} \varphi + V_i = -\omega(\sigma_0 + \omega) \varepsilon \frac{lz}{r^2} \cos(\sigma t - \lambda) + V_i,$$

т.е. при свободных колебаниях в левой части (78) нужно принять

$$\varkappa = -\frac{\sigma_0 + \omega}{\omega} q\varepsilon \approx -q\varepsilon.$$

Кроме того,

$$\frac{1}{3} ma^2 q = \frac{C - A}{k_0},$$

где

$$k_0 = \left( \frac{3 - \xi}{2 + \xi} \right)_a = \left( \frac{e^2}{q} - 1 \right)_a \quad (79)$$

— значение  $k$  для целиком жидкой Земли. Внося эти значения в левую часть (78) и приравнивая ее к нулю, получаем

$$\varepsilon \left[ (C - A) \left( 1 - \frac{k}{k_0} \right) - \frac{\sigma_0}{\omega} \left( A - A_1 + A_2 + (C - A) \frac{k}{k_0} \right) \right] = 0.$$

Отсюда с достаточным приближением имеем

$$\frac{\sigma_0}{\omega} = \frac{C - A}{A - A_1} \left( 1 - \frac{k}{k_0} \right). \quad (80)$$

Это выражение было использовано автором в работе [7], но без достаточного обоснования. Входящее в него значение  $k$  следует брать из статической теории, так как

$$\beta = \varepsilon, \quad \frac{\sigma_0(\sigma_0 + 2\omega)\beta}{\varkappa} \approx -\frac{2\sigma_0}{\omega},$$

следовательно,  $\psi \approx 0$ .

8. Вычисления выполнены в двух вариантах. В первом варианте модель Земли построена без внутреннего ядра. Модель и функции  $\Phi(r)$ , характеризующие смещения, напряжения и потенциал, взяты из работы [7] и там подробно описаны. В оболочке прирост плотности принят немного больше (в среднем на 40%) прироста в результате сжимаемости. Ядро построено с нормальным изменением плотности, соответствующим адиабатической сжимаемости. Сжатие Земли принято равным 1 : 298,3. На границе основного ядра

$$V' = -1,104g, \quad \frac{C_1}{C} = 0,1180, \quad e^2 = 5092 \cdot 10^{-6}.$$

Для второго варианта использовано новое интегрирование уравнений (11), выполненное автором и М.В.Краммер на электронной счетной машине «Урал-1». В этом варианте плотности в оболочке практически совпадают со значениями Буллена, поэтому построено внутреннее ядро (со значениями плотности заметно большими, чем у Буллена). Сжатие Земли принято равным 1 : 297. На границе основного ядра  $V' = -1,044g$ ,  $\frac{C_1}{C} = 0,1060$ ,  $e^2 = 5072 \cdot 10^{-6}$ .

Таблица 1

Значения функций  $\Phi(r)$  при  $r = 0,55$

	Модель II				(II-1) · 10 <sup>3</sup>			
	$\frac{\partial\Phi}{\partial k} + 2 \frac{\partial\Phi}{\partial L_0}$	$\frac{\partial\Phi}{\partial k} - 3 \frac{\partial\Phi}{\partial L_0}$	$\frac{\partial\Phi}{\partial h}$	$\frac{\partial\Phi}{\partial l}$	$\frac{\partial\Phi}{\partial k} + 2 \frac{\partial\Phi}{\partial L_0}$	$\frac{\partial\Phi}{\partial k} - 3 \frac{\partial\Phi}{\partial L_0}$	$\frac{\partial\Phi}{\partial h}$	$\frac{\partial\Phi}{\partial l}$
R	+0,3861	+5,9046	-2,3903	-1,6023	+10	-30	-44	-128
T	-0,1390	-0,1910	+0,3836	+1,2986	+9	+14	-2	-36
H	+0,1848	+0,7283	+0,9171	-4,0549	-19	-29	-37	-288
L	-0,0783	-10,3068	+3,5559	+7,4964	+5	+70	+79	+126
M	+0,3833	+0,7053	-0,4793	-3,7155	-4	+6	-39	-71
N	-3,2203	-12,7988	+5,5007	+47,767	+114	-86	+381	+1100

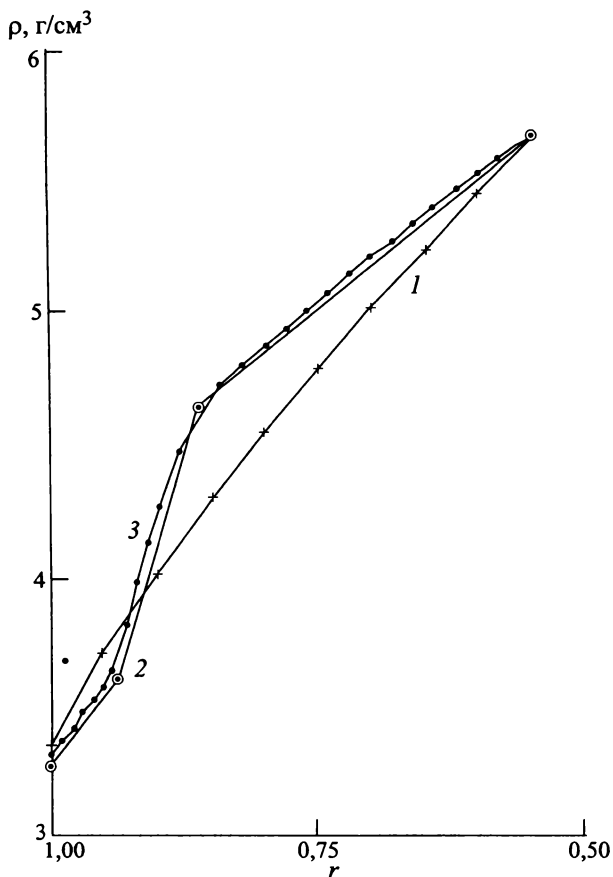


Рис. 1. Плотности в оболочке, рассчитанные для моделей I, II и по Буллену.  
 1 — модель I; 2 — модель II; 3 — по Буллену.

Далее из формулы (40') получено

$$\begin{aligned} K_2(0,55) &= 0, & K'_2(0,55) &= +3,306, \\ K_2(0,20) &= -7,094, & K'_2(0,20) &= +106,24. \end{aligned}$$

Далее использованы условия (45), (47), (48) и (51), в которые частота  $\sigma$  входит только в комбинации  $\sigma(\sigma + 2\omega)\beta$ . На основе этих уравнений  $h, k, l, \alpha$  выражены через  $\beta$  (и  $\alpha_2$  для второй модели) и получено

$$\left. \begin{aligned} h &= 0,6206 + 0,4711 \cdot 10^{-3} \frac{\sigma(\sigma + 2\omega)}{\omega^2} \beta, \\ k &= 0,3070 + 0,2384 \cdot 10^{-3} \frac{\sigma(\sigma + 2\omega)}{\omega^2} \beta, \\ l &= 0,0904 - 0,0112 \cdot 10^{-3} \frac{\sigma(\sigma + 2\omega)}{\omega^2} \beta, \\ \alpha_1 &= 0,6092 + 0,3264 \cdot 10^{-3} \frac{\sigma(\sigma + 2\omega)}{\omega^2} \beta, \end{aligned} \right\} \text{Модель I}$$

Плотности в оболочке для обеих моделей приведены на рис. 1. Для сравнения приведены плотности по Буллену. Более подробные данные о моделях содержатся в работах [7] и [8].

Значения функций  $\Phi(r)$  входят в условия на границе основного ядра  $r = b = 0,55$ . В табл. 1 даны значения этих функций для модели II и разности значений для второй и первой модели, умноженные на  $10^3$ . Здесь даны значения только тех частных интегралов, которые входят в граничные условия. Значения  $\frac{\partial \Phi}{\partial M_0}$  и  $\frac{\partial \Phi}{\partial N_0}$  не используются из-за отсутствия напряжений на поверхности Земли.

Для модели I из-за условия центра  $\alpha_2 = 0$  и  $\left(\frac{K'_1}{K'}\right)_b$  вычислены по формуле (41). Для модели II (с внутренним ядром) функции  $K_1$  и  $K_2$  получены численным интегрированием уравнения (30). В точке  $r = b = 0,55$  принято  $K_1(0,55) = 1$  и по формуле (41) получено  $K'_1(0,55) = 3,261$ . Интегрирование уравнения (30) дало

$$\begin{aligned} K_1(0,20) &= +0,1894, \\ K'_1(0,20) &= +0,688. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} h &= 0,6168 + 0,4276 \cdot 10^{-3} \frac{\sigma(\sigma + 2\omega)}{\omega^2} \beta - 0,0916\alpha_2, \\ k &= 0,3015 + 0,2109 \cdot 10^{-3} \frac{\sigma(\sigma + 2\omega)}{\omega^2} \beta - 0,1125\alpha_2, \\ l &= 0,0808 - 0,0152 \cdot 10^{-3} \frac{\sigma(\sigma + 2\omega)}{\omega^2} \beta - 0,0095\alpha_2, \\ \alpha_1 &= 0,5625 + 0,2475 \cdot 10^{-3} \frac{\sigma(\sigma + 2\omega)}{\omega^2} \beta - 0,4300\alpha_2. \end{aligned} \right\} \text{ Модель II}$$

Из этих уравнений получаем

$$k = 0,495h + 0,0054 \cdot 10^{-3} \frac{\sigma(\sigma + 2\omega)}{\omega^2} \beta, \quad \text{Модель I}$$

$$k = 0,489h + 0,0019 \cdot 10^{-3} \frac{\sigma(\sigma + 2\omega)}{\omega^2} \beta - 0,0677\alpha. \quad \text{Модель II}$$

Таким образом, отношение  $\frac{k}{h}$  очень слабо зависит от  $\beta$  и практически равно его статическому значению (при  $\beta = 0$ ).

Значение  $\alpha_2$  для второй модели определяется условиями на границе внутреннего ядра (73)–(75). Вычисления выполнены для двух крайних случаев: во внутреннем ядре принято  $\mu = \infty$  и  $\mu = 0$ . Получено

$$\left. \begin{aligned} \alpha_2 &= +0,0038 + 0,0087 \cdot 10^{-3} \frac{\sigma(\sigma + 2\omega)}{\omega^2} \beta \quad (\mu = \infty), \\ \alpha_2 &= -0,0015 + 0,0139 \cdot 10^{-3} \frac{\sigma(\sigma + 2\omega)}{\omega^2} \beta \quad (\mu = 0). \end{aligned} \right\} \text{ Модель II}$$

Отсюда видно, что влияние внутреннего ядра на приливные коэффициенты незначительно. Это влияние будет еще меньше, если снизить значение плотности во внутреннем ядре до более правдоподобного значения. Но так как значения модуля сдвига и плотности установить очень трудно, с достаточным приближением можно принять  $\alpha_2 = 0$  (это приближение непригодно для вычисления деформации внутреннего ядра, но не скажется на числах Лява и амплитуде нутации).

Теперь остается использовать условия (50) и (67). Так как функции  $\Phi(b)$ , определяемые формулой (44), зависят теперь только от  $\beta$ , в условия (50) и (67) войдут только  $\beta$  и  $\varepsilon$ . Разрешая эти уравнения и отбрасывая члены, которые не скажутся на результатах вычислений, получаем

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{41,87}{0,2136 - 100 \frac{\sigma + \omega}{\sigma}} + 1,9, \\ \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} &= 1 + \frac{C_1 q}{C - A} (\beta - 4,3) \frac{\sigma + \omega}{\omega}, \end{aligned} \right\} \text{ Модель I}$$

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{41,15}{0,2159 - 100 \frac{\sigma + \omega}{\sigma}} + 1,7, \\ \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} &= 1 + \frac{C_1 q}{C - A} (\beta - 4,1) \frac{\sigma + \omega}{\omega}. \end{aligned} \right\} \text{ Модель II}$$

Параметр  $\frac{C_1 q}{C - A}$  равен 0,1250 для модели I и 0,1124 для модели II. Различие этих чисел является наибольшим для обеих моделей. Частоты свободных колебаний

$$\frac{\sigma_0 + \omega}{\sigma_0} = 2136 \cdot 10^{-6}, \quad \text{Модель I}$$

Таблица 2  
Значения  $\beta$  и  $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$

$\frac{\sigma + \omega}{\sigma}$	$\beta$		$\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1\right) \cdot 10^3$			
	Модель I	Модель II	Модель I	Модель II	Модель I (Джонс)	Модель II (Джонс)
$-\frac{1}{13,7}$	-4,5	-4,6	+80	+71	+76,8	+67
$-\frac{1}{183}$	-125,1	-123,9	+88,4	+78,6	+89,5	+142
$-\frac{1}{6800}$	+212,4	+206,4	-3,83	-3,34	-3,6	-1,11
$+\frac{1}{6800}$	+185,3	+180,3	-3,33	+2,91	+3,6	+1,20
$+\frac{1}{183}$	+56,8	+55,5	+35,9	+31,6	+35,0	-29,3
$+\frac{1}{13,7}$	+7,1	+6,8	+26	+22	+26,9	+26,6

$$\frac{\sigma_0 + \omega}{\sigma_0} = 2159 \cdot 10^{-6}$$

Модель II

различаются приблизительно на 2 с.

В табл. 2 даны значения  $\beta$  и  $\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1\right) \cdot 10^3$  для основных суточных волн. Для сравнения приведены значения  $\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1\right) \cdot 10^3$ , полученные Джеффрисом и Висентом для двух моделей (ядро однородное — модель I, плотность в ядре меняется по закону Роша — модель II). Значения  $h, k, l, \gamma$  и  $\delta$  для основных суточных волн приведены в табл. 3. На рис. 2 представлены значения  $\delta$  для модели II в функции  $\frac{\sigma + \omega}{\sigma}$ .

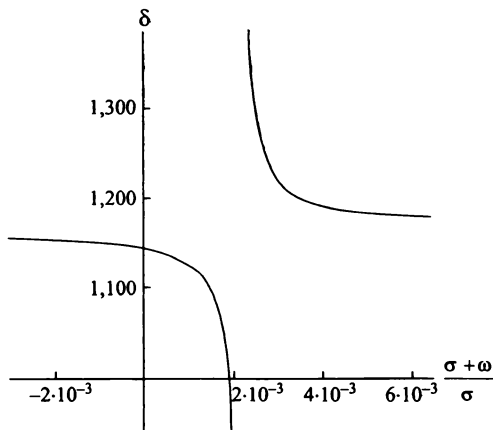


Рис. 2. Изменение  $\delta$  в зависимости от частот приливных волн

эпохи 1900,0). Вместе с тем мы используем значение параллакса Раабе, а не Спенсера-Джонса. Таким образом, получаем теоретические значения для абсолютно твердой Земли

Сравним вычисленные нами амплитуды нутационных членов с их наблюдаемыми значениями, полученными Федоровым [6] по материалам Международной службы широт. Теоретические значения амплитуд нутации для абсолютно твердой Земли  $\varepsilon_0$  возьмем из работы Джеффриса [5]. Однако эти значения нуждаются в исправлении, так как у Джеффриса использовано явно ошибочное значение синуса угла наклона экватора к эклиптике (0,39738 — вместо правильного значения 0,39799 для

Таблица 3

## Числа Лява для суточных приливов

Модель	$\frac{\sigma + \omega}{\omega}$	$-\frac{1}{13,7}$	$-\frac{1}{183}$	$-\frac{1}{6800}$	0,0	$+\frac{1}{6800}$	$+\frac{1}{183}$	$+\frac{1}{13,7}$
I Мол.	h	0,623	0,680	0,521		0,533	0,594	0,617
II Мол.		0,611	0,670	0,528		0,540	0,593	0,614
I Дж.		0,590	0,523	0,490	0,492	0,494	0,555	0,584
II Дж.		0,597	0,710		0,551		0,568	0,603
I Мол.	k	0,308	0,337	0,256		0,263	0,294	0,305
II Мол.		0,302	0,328	0,258		0,264	0,290	0,300
I Дж.		0,244	0,218	0,205	0,206	0,207	0,231	0,242
II Дж.		0,258	0,298		0,244		0,264	0,261
I Мол.	l	0,0904	0,0890	0,0927		0,0924	0,0910	0,0905
II Мол.		0,0807	0,0789	0,0840		0,0836	0,0817	0,0809
I Дж.		0,082	0,084	0,086	0,086	0,086	0,082	0,082
II Дж.		0,070	0,072		0,082		0,084	0,078
I Мол.	δ	1,161	1,174	1,136		1,139	1,154	1,159
II Мол.		1,165	1,178	1,142		1,145	1,158	1,164
I Дж.		1,224	1,196	1,182	1,183	1,184	1,209	1,221
II Дж.		1,210	1,263		1,185		1,172	1,211
I Мол.	γ	0,685	0,658	0,734		0,728	0,699	0,688
II Мол.		0,684	0,658	0,730		0,724	0,697	0,686
I Дж.		0,654	0,695	0,715	1,714	0,713	0,676	0,658
II Дж.		0,661	0,588		0,693		0,696	0,658
Приливная волна: 00		K <sub>1</sub>			P <sub>1</sub>		O <sub>1</sub>	
Нутационная волна:		Главная 19-летняя			Главная полугодичная		Главная двухнедельная	

## нутаии в наклонности

$$9'',2232 \cos \Omega + 0'',0944 \cos 2 \mathcal{D} + 0'',5558 \cos 2 \odot$$

## и долготе

$$6'',8672 \sin \Omega + 0'',0876 \sin 2 \mathcal{D} + 0'',5104 \sin 2 \odot$$

## вместо принятых Джеффрисом:

$$9'',2262 \cos \Omega + 0'',0945 \cos 2 \mathcal{D} + 0'',5528 \cos 2 \odot,$$

$$6'',8594 \sin \Omega + 0'',0875 \sin 2 \mathcal{D} + 0'',5068 \sin 2 \odot,$$

## и Федоровым:

$$9'',220 \cos \Omega + 0'',0834 \cos 2 \mathcal{D} + 0'',552 \cos 2 \odot,$$

$$6'',869 \sin \Omega + 0'',0812 \sin 2 \mathcal{D} + 0'',5075 \sin 2 \odot.$$

Кажется очевидным, что все использованные Федоровым материалы службы широт обработаны со значением нутационной постоянной по Ньюкомбу ( $9'',210$ ) и полученные Федоровым поправки ( $-0'',0128 \cos \Omega$  и  $-0'',0120 \sin \Omega$ ) относятся к полюсам нутационного эллипса Ньюкомба. В таком случае постоянной нутации  $9'',2232$  должны соответствовать следующие поправки к полюсам:  $-0'',0128 - 0'',0132 = -0'',0260$  и  $-0'',0120 - 0'',0132 \frac{6,87}{9,22} = -0'',0218$ . Эти величины мы считаем более достоверными, чем полные значения полюсов.

Тогда разности между теоретическими значениями и наблюдаемыми (с учетом исправления, которое Федоров сообщил в письме к Джеффрису [5]) получаются следующими:

$$\begin{aligned} &(-0'',0260 \pm 0'',002) \cos \varOmega + (+0'',005 \pm 0'',001) \cos 2 \mathcal{D} + (+0'',022 \pm 0'',004) \cos 2 \odot, \\ &(-0'',0218 \pm 0'',002) \sin \varOmega + (+0'',0042 \pm 0'',001) \sin 2 \mathcal{D} + (+0'',023 \pm 0'',004) \sin 2 \odot. \end{aligned}$$

Разложим движения полюса на круговые, используем таблицу значений  $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$  и получим следующие теоретические значения тех же разностей: для рассмотренных двух моделей не идеально твердой Земли:

$$\left. \begin{aligned} &-0'',0269 \cos \varOmega + 0'',0025 \cos 2 \mathcal{D} + 0'',0212 \cos 2 \odot, \\ &-0'',0347 \sin \varOmega + 0'',0023 \sin 2 \mathcal{D} + 0'',0170 \sin 2 \odot \end{aligned} \right\} \text{ Модель I}$$

и

$$\left. \begin{aligned} &-0'',0235 \cos \varOmega + 0'',0021 \cos 2 \mathcal{D} + 0'',0187 \cos 2 \odot, \\ &-0'',0303 \sin \varOmega + 0'',0019 \sin 2 \mathcal{D} + 0'',0151 \sin 2 \odot. \end{aligned} \right\} \text{ Модель II}$$

Числа, относящиеся к модели II, приблизительно на 10% меньше, так как на 10% меньше момент инерции ядра во второй модели. Наибольшее расхождение между наблюдаемым и теоретическим значениями поправки получается в малой полуоси нутационного эллипса ( $0'',0085 \pm 0'',002$  и  $0'',0129 \pm 0'',002$  для моделей II и I). Расхождение еще уменьшилось бы с уменьшением момента инерции ядра. Значения постоянной нутации по Ситтеру ( $9'',2075 \pm 0,0020$ ) и Спенсеру Джонсу ( $9'',2134 \pm 0'',0042$ ) лучше согласуются с еще меньшим моментом инерции ядра.

Период Чандлера получим по формуле (80). Статическое значение  $k$  равно 0,3070 (модель I) и 0,3015 (модель II), поправки к значению  $k$  за подвижность вод океанов равны +0,0465 (модель I) и +0,0506 (модель II).

Таким образом, исправленные значения  $k$  равны соответственно 0,3535 и 0,3521. Далее получаем  $k_0 = 0,934$  (модель I) и  $k_0 = 0,942$  (модель II),  $T_c = 433$  дня (модель I) и  $T_c = 436$  дней (модель II). Эти значения близки к принимавшемуся ранее значению  $T_c = 433$  дня, но заметно отличаются от значения Джеффриса  $T_c = 448 \pm 7$  дней. Вычисленные нами значения периода Чандлера увеличатся с уменьшением момента инерции ядра.

Полученное Федоровым запаздывание фаз вынужденной нутации и наблюдаемое запаздывание фаз земных приливов ставят вопрос об учете влияния вязкости оболочки. Этот вопрос нуждается в специальном рассмотрении.

Приношу благодарность Л.В. Парийской и М.В. Крамер за вычисления, выполненные для этой работы, и Н.Н. Парийскому за ценные советы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лэмб Г. Гидродинамика. — М.: Гостехиздат. 1947. С.913–918.
2. Jeffreys H. // Mon. Not. 1949. 109. P.670–687.
3. Jeffreys H., Vicente R. // Mon. Not. 1957. 117. P.142–161.
4. Jeffreys H., Vicente R. // Mon. Not. 1957. 117. P.162–173.
5. Jeffreys H. // Mon. Not. 1959. 119. P.75–80.
6. Федоров Е. П. Нутация и вынужденные движения полюса Земли. — Киев: Изд. АН УССР. 1958.
7. Молоденский М.С. // Труды Геофизического института АН СССР. 1953. № 19(146). С.3–52.
8. Молоденский М.С., Крамер М.В. Земные приливы и нутация Земли. — М.: Изд-во АН СССР. 1961. С.26.

## ЧИСЛА ЛЯВА ДЛЯ СТАТИЧЕСКИХ ЗЕМНЫХ ПРИЛИВОВ 2-ГО И 3-ГО ПОРЯДКОВ\*

В теории приливов потенциал приливообразующей силы разлагается на элементарные гармонические члены, пропорциональные основным и присоединенным полиномам Лежандра, начиная со 2-го порядка. Члены второго порядка являются основными; однако и члены 3-го порядка сказываются на результатах наблюдений и могут быть определены с повышением точности измерений.

Приливные вариации силы тяжести, наклонов и направления отвесной линии на поверхности Земли выражаются через числа Лява  $h$ ,  $k$  и  $l^1$ . Для приливов 2-го порядка эти числа наиболее надежно получены путем численного интегрирования уравнений теории упругости для нескольких моделей Земли. Такеучи [1] выполнил интегрирование для двух вариантов распределения плотности в оболочке. В первом варианте плотности взяты по Буллину [2], во втором варианте Такеучи изменил модель Буллена и на глубине 500 км плотность возрастает скачком, а далее имеет немного меньшие значения. Молоденский [3] произвел вычисления для трех вариантов распределения плотности в оболочке: 1) плотность определена из дифференциального уравнения  $\rho' = \frac{\rho^2}{\lambda} V'$ , поэтому прирост плотности в среднем на 40% больше, чем за счет чистой сжимаемости; 2) плотность в оболочке постоянна; 3) внутри всей Земли плотность меняется непрерывно по закону Лежандра. Последние два варианта рассчитаны для выявления степени зависимости чисел Лява от принятого закона распределения плотности в оболочке. Альтерман, Ярош и Пекерис [4] выполнили вычисления еще для трех вариантов распределения плотности: 1) модель Булларда I; 2) модель Булларда II и 3) модель Буллена B. Значения чисел Лява получены этими авторами также с учетом инерционных членов для приливов с периодом  $6,6\sqrt{2}$  и 12 часов. Однако при этом не учтены члены, представляющие ускорения Кориолиса, величина которых имеет один порядок с инерционными членами для полусуточного прилива. Поэтому только статистические значения чисел Лява у этих авторов имеют реальное значение.

В табл. 1 сопоставлены основные результаты выполненных вычислений (см. также рис. 1 и 2). Значения, полученные Джеффрисом и Висентом [5] для модели Такеучи, в таблицу не включены, так как отличаются от значений Такеучи главным образом за счет приближенности теории.

Числа для модели, помещенной в табл. 1 под № 3, взяты из статьи [6]. Вычисления выполнены на электронной счетной машине «Урал-1» приблизительно в 10 раз точнее, чем это сделано в работе [3]. Программа вычислений составлена М.В. Крамер. В этом варианте плотности в оболочке очень близки к плотностям по Буллину [2], однако точно не совпадают с ними. Скорости сейсмических волн также близки к наблюдаемым, но точно им не равны. В самом деле, вычисление приливных деформаций оболочки требует решения системы шести дифференциальных уравнений 6-го порядка, в которой коэффициенты зависят от скоростей сейсмических волн и плотности. Так как эта система эквивалентна одному уравнению 6-го порядка, то в вычислениях будут играть роль ше-

\* Совместно с Крамер М.В. Земные приливы и нутация Земли. — М.: Изд-во АН СССР. 1961. С. 26.

<sup>1</sup> Их называют также числом Ламберта или числом Шидо.



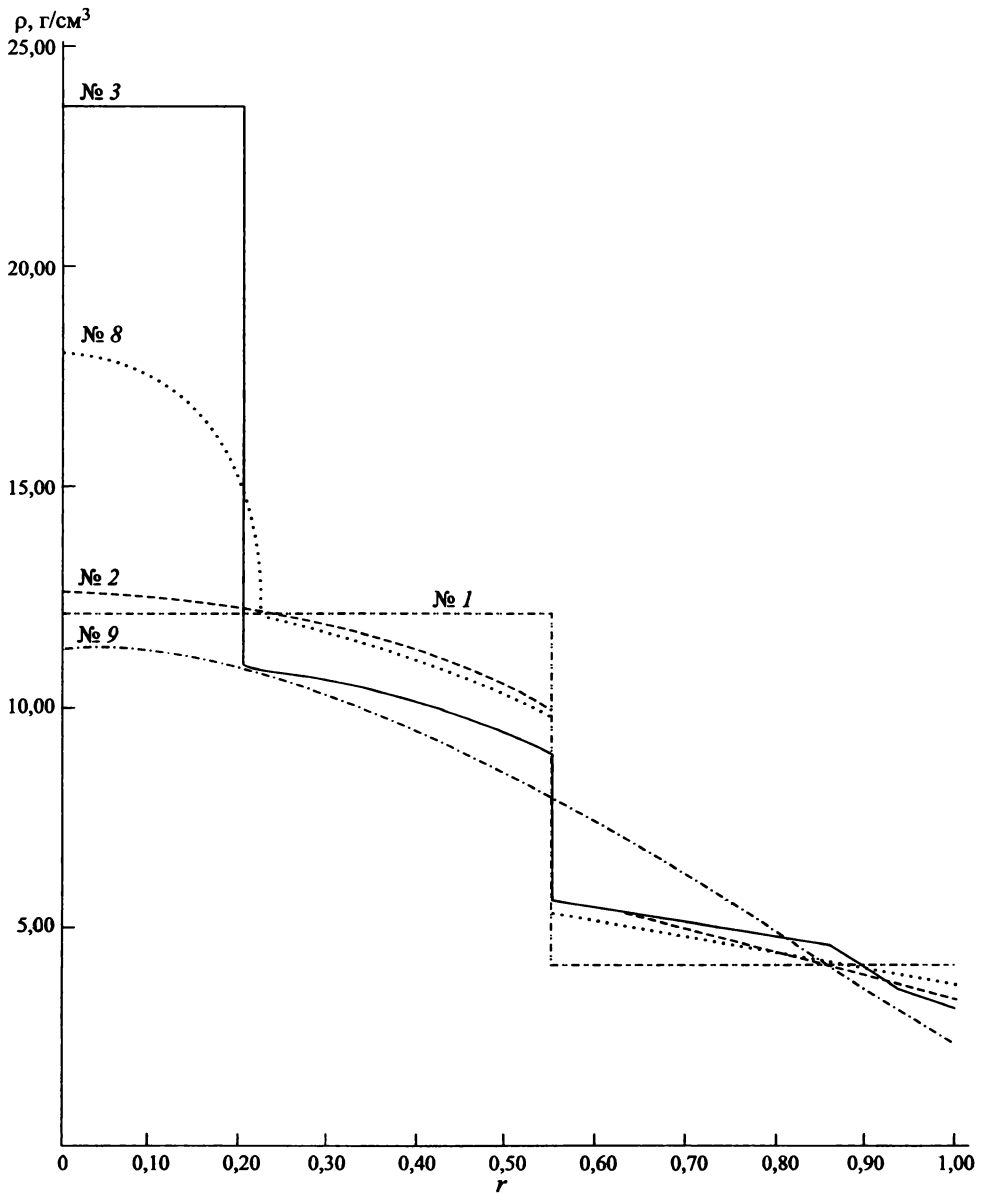


Рис. 1. Значения плотностей, принятых для моделей №№ 1, 2, 3, 8 и 9.

Таблица 1

Числа Лява для статических приливов второго порядка, полученные численным интегрированием

№ п/п	Плотность	$h$	$k$	$l$	Автор
1	Рис. 1, кривая № 1	0,662	0,327	0,107	Молоденский [3]
2	Рис. 1, кривая № 2	0,621	0,307	0,090	Молоденский [6]
3	Рис. 1, кривая № 3	0,617	0,302	0,081	Молоденский [6]
4	Рис. 2, кривая № 4	0,587	0,290	0,068	Такеучи [1]
5	Рис. 2, кривая № 5	0,610	0,281	0,082	Такеучи [1]
6	Рис. 2, кривая № 6	0,591	0,275	0,086	Альтерман, Ярош и Пекерис [4]
7	Рис. 2, кривая № 7	0,577	0,275	0,078	Альтерман и др. [4]
8	Рис. 1, кривая № 8	0,590	0,275	0,086	Альтерман и др. [4]
9	Рис. 1, кривая № 9	0,567	0,287	0,074	Молоденский [3]

стые производные от коэффициентов, определяемые шестью разностями таблицы значений коэффициентов. Если коэффициенты представлены эмпирической таблицей, то с увеличением порядка разностей в них начнут доминировать незаконмерные колебания, связанные с неточностью исходных данных. Поэтому как плотности, так и скорости волн нами несколько сглажены и представлены простыми формулами. Этого принципа мы придерживались в работе [3] и считали необходимым сохранить его.

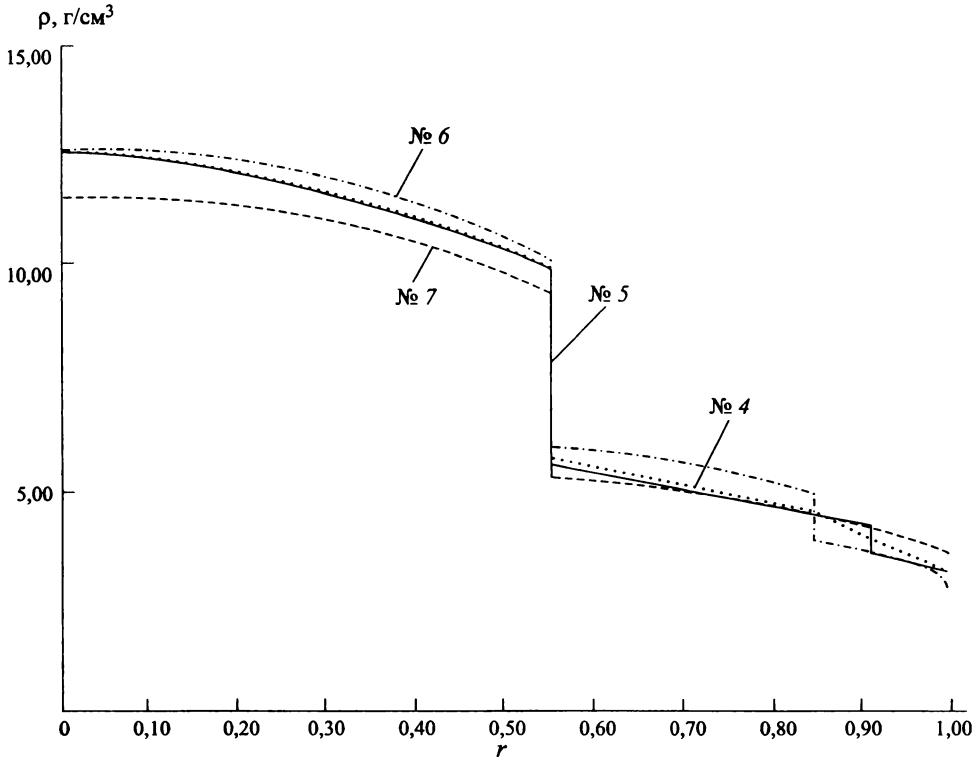


Рис. 2. Значения плотностей, принятых для моделей №№ 4, 5, 6 и 7.

В варианте № 3 плотности в оболочке по Буллину и функции  $\mu/\rho$  и  $\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$  представлены тремя прямолинейными отрезками, соединяющими следующие точки:

$r$	$\rho$ , г/см <sup>3</sup>	$\mu/\rho$ , км <sup>2</sup> /с <sup>2</sup>	$(\lambda + 2\mu)/\rho$ , км <sup>2</sup> /с <sup>2</sup>
1,00	3,28	18,26	58,03
0,94	3,62	25,27	82,20
0,86	4,64	40,16	129,25
0,55	5,69	54,24	190,90

Интегрирование начиналось с шагом 0,0025 (в долях радиуса Земли), затем шаг увеличивался до 0,01. В точках скачка производной от плотности интегрирование начиналось вновь с малым шагом. Пренебрежение этим правилом привело бы к заметным ошибкам. На рис. 3 показаны разности значений функций, полученные при «сквозном» счете (не обращая внимания на скачок  $\rho'$ ) с точными значениями, рассчитанными с использованием только левых производных слева и только правых справа от точки скачка  $\rho'$ . При сквозном счете у функций появляется фиктивный всплеск, оставляющий след на последующих значениях функции.

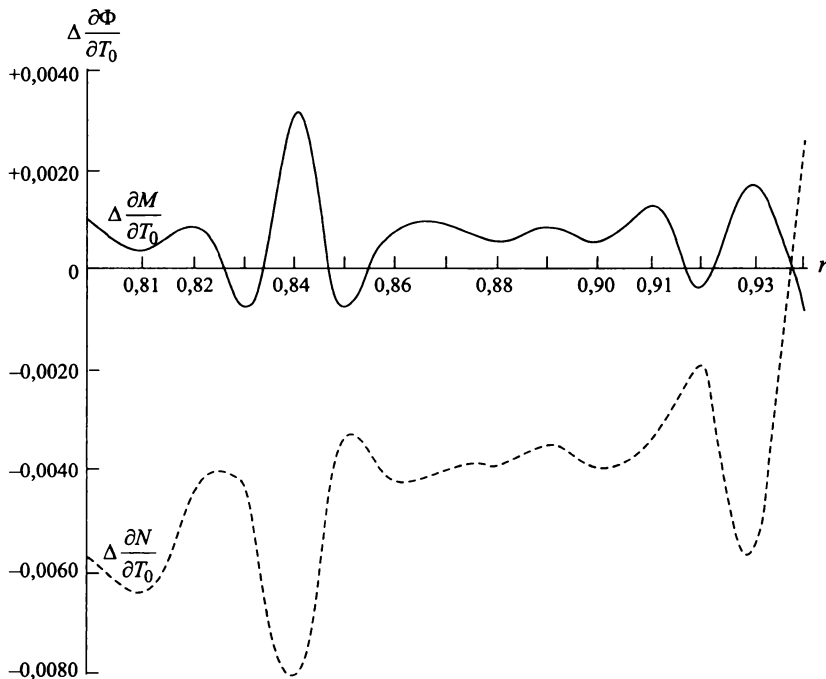


Рис. 3. Погрешности интегрирования при «сквозном» счете через точки скачка производных.

Если бы коэффициенты уравнений были заданы таблицей с невыравненными разностями, то подобное явление проявилось бы в более сложной форме. Не является ли это обстоятельство одной из причин некоторой противоречивости чисел, собранных в табл. 1?

Исходной системе дифференциальных уравнений придан следующий вид:

$$M = r^2 \mu \left( T' + H - \frac{2}{r} T \right), \quad (1)$$

$$N = (\lambda + 2\mu) H' + \lambda \left( \frac{2}{r} H - \frac{n(n+1)}{r^2} T \right), \quad (2)$$

$$L = r^2 (R' - 4\pi\kappa\rho H), \quad (3)$$

$$M' = -Nr^2 - \rho r^2 (R + N'H) + 2\mu [H'r^2 - Hr + (n^2 + n - 1) T], \quad (4)$$

$$N' = \frac{n(n+1)}{r^2} M - \frac{\rho}{r^2} [L - 4N'rH + n(n+1)TW'] - \frac{2\mu}{r} \left( 2H' - \frac{2H}{r} + \frac{n(n+1)}{r^2} T \right), \quad (5)$$

$$L' = n(n+1) (R - 4\pi\kappa\rho T). \quad (6)$$

В этих уравнениях функции  $H$ ,  $T$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $R$  и  $L$  сохраняют непрерывность на границах скачка плотности  $\rho$  или коэффициентов упругости  $\mu$  и  $\lambda$ , так как  $H$  и  $T$  пропорциональны компонентам смещения,  $M$  и  $N$  — компонентам напряжения,  $R$  — потенциалу; функция  $L$  непрерывна на основании известных свойств производной от потенциала объемных масс и простого слоя.

Общий интеграл этой однородной системы уравнений можно представить в виде

$$\Phi(r) = H_0 \frac{\partial \Phi}{\partial H_0} + T_0 \frac{\partial \Phi}{\partial T_0} + R_0 \frac{\partial \Phi}{\partial R_0} + L_0 \frac{\partial \Phi}{\partial L_0} + M_0 \frac{\partial \Phi}{\partial M_0} + N_0 \frac{\partial \Phi}{\partial N_0}, \quad (7)$$

где  $\Phi(r)$  — одна из функций  $H$ ,  $T$ ,  $R$ ,  $L$ ,  $M$  или  $N$ ;  $H_0$ ,  $T_0$ ,  $R_0$ ,  $L_0$ ,  $M_0$  и  $N_0$  — произвольные постоянные;  $\frac{\partial \Phi}{\partial H_0}$ ,  $\frac{\partial \Phi}{\partial T_0}$ ,  $\dots$ , — частные интегралы.

Таким образом, частный интеграл  $\frac{\partial \Phi}{\partial H_0}$  получен при следующих граничных условиях в точке  $r = 1$ :  $H = 1$ ,  $T = R = L = M = N = 0$ . Интеграл  $\frac{\partial \Phi}{\partial T_0}$  получен при граничных условиях:  $T = 1$ ;  $H = R = L = M = N = 0$ , и т.д. Так были вычислены значения всех шести функций, входящих в каждый частный интеграл. Вычисления выполнены при  $n = 2$  (прилив 2-го порядка) и при  $n = 3$  (прилив 3-го порядка). Результаты представлены в табл. 2 (прилив 2-го порядка) и в табл. 3 (прилив 3-го порядка).

Для сравнения интегральных кривых, соответствующих моделям №№ 2 и 3 табл. 1, мы использовали табл. 5 и вторую половину табл. 9 на стр. 46 работы [3]. В них содержатся пять частных интегралов, полученных при условии  $M(1) = 0$ , поэтому из них нельзя получить частный интеграл, который мы символически обозначаем как  $\frac{\partial \Phi}{\partial M_0}$ . Из табл. 5 получены интегралы  $\frac{\partial \Phi}{\partial H_0}$ ,  $\frac{\partial \Phi}{\partial T_0}$ ,  $\frac{\partial \Phi}{\partial R_0}$ ,  $\frac{\partial \Phi}{\partial L_0}$ . После этого интегральная кривая со стр. 46 работы [3] определила  $\frac{\partial \Phi}{\partial N_0}$ .

**Таблица 2**  
**Частные интегралы для приливов 2-го порядка**

$\tau$	$\frac{\partial H}{\partial H_0}$	$\frac{\partial H}{\partial T_0}$	$\frac{\partial H}{\partial R_0}$	$\frac{\partial H}{\partial L_0}$	$\frac{\partial H}{\partial M_0}$	$\frac{\partial H}{\partial N_0}$	$\frac{\partial T}{\partial H_0}$	$\frac{\partial T}{\partial T_0}$	$\frac{\partial T}{\partial R_0}$
1,00	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000
0,99	1,0073	-0,0224	0,0000	-0,0001	0,0012	-0,0176	0,0099	0,9807	-0,0002
0,98	1,0144	-0,0454	0,0000	-0,0002	0,0045	-0,0341	0,0197	0,9627	-0,0006
0,97	1,0213	-0,0688	0,0001	-0,0004	0,0101	-0,0496	0,0294	0,9460	-0,0013
0,96	1,0280	-0,0929	0,0002	-0,0008	0,0178	-0,0644	0,0389	0,9304	-0,0023
0,95	1,0345	-0,1177	0,0004	-0,0011	0,0252	-0,0784	0,0482	0,9159	-0,0034
0,94	1,0409	-0,1433	0,0006	-0,0016	0,0402	-0,0917	0,0574	0,9024	-0,0048
0,93	1,0471	-0,1696	0,0010	-0,0021	0,0517	-0,1041	0,0664	0,8897	-0,0062
0,92	1,0531	-0,1967	0,0015	-0,0027	0,0672	-0,1156	0,0753	0,8777	-0,0077
0,91	1,0589	-0,2245	0,0020	-0,0033	0,0839	-0,1263	0,0840	0,8663	-0,0093
0,90	1,0646	-0,2532	0,0027	-0,0039	0,1026	-0,1362	0,0925	0,8554	-0,0110
0,89	1,0702	-0,2828	0,0035	-0,0046	0,1221	-0,1455	0,1009	0,8452	-0,0126
0,88	1,0755	-0,3135	0,0044	-0,0053	0,1439	-0,1542	0,1092	0,8355	-0,0143
0,87	1,0808	-0,3453	0,0055	-0,0061	0,1667	-0,1623	0,1173	0,8263	-0,0161
0,86	1,0858	-0,3784	0,0067	-0,0069	0,1915	-0,1700	0,1252	0,8177	-0,0178
0,85	1,0907	-0,4130	0,0081	-0,0077	0,2178	-0,1775	0,1330	0,8101	-0,0197
0,84	1,0954	-0,4496	0,0098	-0,0087	0,2474	-0,1848	0,1407	0,8039	-0,0217
0,83	1,1000	-0,4883	0,0117	-0,0097	0,2786	-0,1920	0,1482	0,7989	-0,0238
0,82	1,1043	-0,5294	0,0138	-0,0108	0,3128	-0,1991	0,1557	0,7953	-0,0261
0,81	1,1083	-0,5730	0,0163	-0,0120	0,3504	-0,2060	0,1630	0,7930	-0,0286
0,80	1,1121	-0,6194	0,0191	-0,0133	0,3906	-0,2129	0,1703	0,7921	-0,0311
0,79	1,1156	-0,6688	0,0223	-0,0147	0,4346	-0,2195	0,1775	0,7925	-0,0339
0,78	1,1188	-0,7214	0,0260	-0,0162	0,4821	-0,2260	0,1847	0,7942	-0,0367
0,77	1,1217	-0,7776	0,0300	-0,0178	0,5336	-0,2323	0,1918	0,7973	-0,0397
0,76	1,1241	-0,8377	0,0346	-0,0195	0,5893	-0,2383	0,1989	0,8017	-0,0429
0,75	1,1261	-0,9019	0,0397	-0,0214	0,6497	-0,2441	0,2060	0,8076	-0,0462
0,74	1,1275	-0,9707	0,0454	-0,0233	0,7151	-0,2497	0,2131	0,8148	-0,0497
0,73	1,1284	-1,0445	0,0518	-0,0255	0,7858	-0,2550	0,2203	0,8235	-0,0534
0,72	1,1287	-1,1237	0,0589	-0,0278	0,8625	-0,2599	0,2275	0,8337	-0,0572
0,71	1,1283	-1,2089	0,0668	-0,0302	0,9454	-0,2645	0,2348	0,8454	-0,0612
0,70	1,1272	-1,3004	0,0756	-0,0329	1,0353	-0,2686	0,2422	0,8586	-0,0654
0,69	1,1251	-1,3990	0,0854	-0,0357	1,1327	-0,2723	0,2497	0,8735	-0,0698
0,68	1,1222	-1,5054	0,0962	-0,0387	1,2382	-0,2755	0,2573	0,8900	-0,0744
0,67	1,1181	-1,6201	0,1081	-0,0420	1,3527	-0,2782	0,2651	0,9082	-0,0792
0,66	1,1128	-1,7440	0,1214	-0,0455	1,4769	-0,2802	0,2731	0,9282	-0,0843
0,65	1,1062	-1,8780	0,1360	-0,0493	1,6117	-0,2815	0,2813	0,9501	-0,0895
0,64	1,0980	-2,0231	0,1523	-0,0534	1,7582	-0,2820	0,2897	0,9740	-0,0951
0,63	1,0882	-2,1803	0,1702	-0,0578	1,9175	-0,2816	0,2985	0,9999	-0,1009
0,62	1,0764	-2,3509	0,1900	-0,0625	2,0909	-0,2803	0,3076	1,0281	-0,1070
0,61	1,0626	-2,5362	0,2119	-0,0677	2,2794	-0,2778	0,3170	1,0585	-0,1134
0,60	1,0463	-2,7377	0,2362	-0,0732	2,4853	-0,2741	0,3268	1,0914	-0,1201
0,59	1,0273	-2,9571	0,2630	-0,0792	2,7095	-0,2690	0,3371	1,1269	-0,1272
0,58	1,0054	-3,1963	0,2927	-0,0857	2,9546	-0,2623	0,3478	1,1651	-0,1347
0,57	0,9800	-3,4573	0,3255	-0,0927	3,2225	-0,2539	0,3591	1,2063	-0,1426
0,56	0,9507	-3,7427	0,3619	-0,1004	3,5157	-0,2434	0,3710	1,2508	-0,1509
0,55	0,9171	-4,0549	0,4022	-0,1087	3,8371	-0,2307	0,3836	1,2986	-0,1598

$\frac{\partial T}{\partial L_0}$	$\frac{\partial T}{\partial M_0}$	$\frac{\partial T}{\partial N_0}$	$\frac{\partial R}{\partial H_0}$	$\frac{\partial R}{\partial T_0}$	$\frac{\partial R}{\partial R_0}$	$\frac{\partial R}{\partial L_0}$	$\frac{\partial R}{\partial M_0}$	$\frac{\partial R}{\partial N_0}$
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	-0,0554	-0,0002	-0,0180	-0,0003	1,0003	-0,0101	0,0000	0,0002
0,0000	-0,1066	-0,0007	-0,0366	-0,0014	1,0012	-0,0204	0,0000	0,0006
0,0000	-0,1542	-0,0016	-0,0556	-0,0031	1,0028	-0,0309	0,0001	0,0014
0,0000	-0,1984	-0,0027	-0,0751	-0,0056	1,0051	-0,0417	0,0002	0,0025
0,0000	-0,2429	-0,0041	-0,0952	-0,0088	1,0080	-0,0527	0,0003	0,0039
0,0000	-0,2763	-0,0058	-0,1159	-0,0129	1,0117	-0,0640	0,0007	0,0056
0,0000	-0,3163	-0,0076	-0,1374	-0,0177	1,0162	-0,0756	0,0012	0,0076
0,0001	-0,3439	-0,0095	-0,1600	-0,0233	1,0215	-0,0874	0,0016	0,0099
0,0001	-0,3754	-0,0116	-0,1837	-0,0298	1,0277	-0,0996	0,0027	0,0126
0,0001	-0,3991	-0,0137	-0,2084	-0,0371	1,0347	-0,1120	0,0034	0,0156
0,0001	-0,4230	-0,0160	-0,2345	-0,0453	1,0427	-0,1249	0,0049	0,0189
0,0002	-0,4435	-0,0183	-0,2617	-0,0546	1,0516	-0,1381	0,0062	0,0226
0,0002	-0,4629	-0,0206	-0,2903	-0,0648	1,0616	-0,1517	0,0082	0,0267
0,0002	-0,4803	-0,0230	-0,3203	-0,0761	1,0727	-0,1657	0,0103	0,0312
0,0002	-0,4967	-0,0255	-0,3514	-0,0887	1,0849	-0,1802	0,0129	0,0359
0,0003	-0,5158	-0,0281	-0,3835	-0,1026	1,0983	-0,1951	0,0161	0,0410
0,0003	-0,5314	-0,0308	-0,4167	-0,1179	1,1130	-0,2106	0,0196	0,0465
0,0005	-0,5505	-0,0336	-0,4510	-0,1347	1,1290	-0,2265	0,0240	0,0522
0,0006	-0,5682	-0,0365	-0,4865	-0,1530	1,1465	-0,2431	0,0287	0,0584
0,0007	-0,5874	-0,0395	-0,5234	-0,1729	1,1655	-0,2603	0,0344	0,0649
0,0008	-0,6063	-0,0426	-0,5617	-0,1944	1,1860	-0,2781	0,0405	0,0718
0,0009	-0,6261	-0,0459	-0,6015	-0,2178	1,2083	-0,2966	0,0476	0,0791
0,0009	-0,6462	-0,0492	-0,6430	-0,2429	1,2323	-0,3159	0,0553	0,0869
0,0009	-0,6671	-0,0527	-0,6862	-0,2700	1,2583	-0,3360	0,0640	0,0952
0,0010	-0,6885	-0,0563	-0,7313	-0,2991	1,2863	-0,3569	0,0736	0,1040
0,0012	-0,7107	-0,0600	-0,7785	-0,3304	1,3164	-0,3787	0,0841	0,1133
0,0015	-0,7336	-0,0638	-0,8279	-0,3640	1,3488	-0,4016	0,0958	0,1232
0,0017	-0,7573	-0,0678	-0,8797	-0,3999	1,3837	-0,4254	0,1085	0,1337
0,0019	-0,7819	-0,0719	-0,9340	-0,4384	1,4212	-0,4504	0,1225	0,1448
0,0022	-0,8074	-0,0761	-0,9911	-0,4797	1,4615	-0,4766	0,1378	0,1567
0,0025	-0,8340	-0,0805	-1,0511	-0,5238	1,5048	-0,5041	0,1545	0,1693
0,0029	-0,8617	-0,0850	-1,1144	-0,5711	1,5513	-0,5330	0,1728	0,1827
0,0032	-0,8906	-0,0897	-1,1811	-0,6216	1,6013	-0,5635	0,1927	0,1970
0,0036	-0,9208	-0,0946	-1,2517	-0,6757	1,6549	-0,5955	0,2144	0,2122
0,0040	-0,9525	-0,0997	-1,3262	-0,7336	1,7125	-0,6293	0,2380	0,2284
0,0045	-0,9857	-0,1049	-1,4052	-0,7956	1,7745	-0,6650	0,2637	0,2456
0,0049	-1,0205	-0,1104	-1,4890	-0,8619	1,8410	-0,7028	0,2917	0,2641
0,0055	-1,0572	-0,1161	-1,5780	-0,9331	1,9126	-0,7428	0,3221	0,2838
0,0060	-1,0958	-0,1220	-1,6726	-1,0094	1,9895	-0,7852	0,3552	0,3048
0,0066	-1,1366	-0,1282	-1,7733	-1,0912	2,0723	-0,8302	0,3913	0,3274
0,0073	-1,1796	-0,1347	-1,8807	-1,1791	2,1615	-0,8781	0,4304	0,3515
0,0080	-1,2252	-0,1414	-1,9954	-1,2735	2,2576	-0,9291	0,4731	0,3774
0,0087	-1,2734	-0,1485	-2,1181	-1,3751	2,3611	-0,9835	0,5196	0,4053
0,0095	-1,3247	-0,1559	-2,2494	-1,4845	2,4729	-1,0415	0,5702	0,4352
0,0104	-1,3792	-0,1638	-2,3903	-1,6023	2,5935	-1,1037	0,6253	0,4674

Таблица 2 (продолжение)

$r$	$\frac{\partial L}{\partial H_0}$	$\frac{\partial L}{\partial T_0}$	$\frac{\partial L}{\partial R_0}$	$\frac{\partial L}{\partial L_0}$	$\frac{\partial L}{\partial M_0}$	$\frac{\partial L}{\partial N_0}$	$\frac{\partial M}{\partial H_0}$	$\frac{\partial M}{\partial T_0}$	$\frac{\partial M}{\partial R_0}$
1,00	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,99	0,0011	0,1068	-0,0600	1,0003	-0,0030	0,0000	0,0002	-0,0259	0,0059
0,98	0,0043	0,2135	-0,1201	1,0012	-0,0120	-0,0001	0,0004	-0,0534	0,0119
0,97	0,0098	0,3202	-0,1803	1,0028	-0,0266	-0,0003	0,0008	-0,0825	0,0178
0,96	0,0176	0,4270	-0,2408	1,0049	-0,0450	-0,0006	0,0012	-0,1134	0,0237
0,95	0,0278	0,5340	-0,3015	1,0078	-0,0660	-0,0012	0,0017	-0,1459	0,0297
0,94	0,0403	0,6414	-0,3626	1,0113	-0,0980	-0,0021	0,0021	-0,1802	0,0357
0,93	0,0554	0,7503	-0,4241	1,0155	-0,1340	-0,0033	0,0024	-0,2172	0,0418
0,92	0,0731	0,8617	-0,4861	1,0204	-0,1720	-0,0048	0,0028	-0,2575	0,0481
0,91	0,0937	0,9756	-0,5486	1,0260	-0,2230	-0,0069	0,0032	-0,3015	0,0545
0,90	0,1172	1,0920	-0,6118	1,0323	-0,2760	-0,0094	0,0035	-0,3491	0,0612
0,89	0,1437	1,2109	-0,6758	1,0394	-0,3322	-0,0125	0,0038	-0,4006	0,0681
0,88	0,1734	1,3325	-0,7405	1,0473	-0,3952	-0,0161	0,0038	-0,4561	0,0752
0,87	0,2064	1,4568	-0,8061	1,0561	-0,4606	-0,0204	0,0036	-0,5156	0,0826
0,86	0,2428	1,5838	-0,8727	1,0656	-0,5322	-0,0254	0,0030	-0,5793	0,0902
0,85	0,2826	1,7123	-0,9402	1,0760	-0,6072	-0,0311	0,0018	-0,6454	0,0981
0,84	0,3256	1,8414	-1,0089	1,0873	-0,6840	-0,0375	-0,0001	-0,7123	0,1060
0,83	0,3718	1,9714	-1,0787	1,0996	-0,7679	-0,0447	-0,0027	-0,7801	0,1141
0,82	0,4214	2,1026	-1,1498	1,1127	-0,8513	-0,0526	-0,0059	-0,8488	0,1223
0,81	0,4744	2,2353	-1,2224	1,1269	-0,9418	-0,0614	-0,0098	-0,9187	0,1307
0,80	0,5310	2,3697	-1,2964	1,1421	-1,0334	-0,0711	-0,0145	-0,9897	0,1393
0,79	0,5911	2,5063	-1,3721	1,1583	-1,1309	-0,0817	-0,0199	-1,0621	0,1481
0,78	0,6548	2,6452	-1,4495	1,1757	-1,2314	-0,0933	-0,0261	-1,1360	0,1571
0,77	0,7224	2,7868	-1,5289	1,1942	-1,3370	-0,1059	-0,0331	-1,2115	0,1664
0,76	0,7939	2,9315	-1,6103	1,2138	-1,4466	-0,1196	-0,0409	-1,2887	0,1760
0,75	0,8694	3,0796	-1,6939	1,2349	-1,5613	-0,1345	-0,0496	-1,3678	0,1858
0,74	0,9490	3,2315	-1,7798	1,2570	-1,6806	-0,1505	-0,0592	-1,4490	0,1961
0,73	1,0330	3,3876	-1,8683	1,2807	-1,8053	-0,1678	-0,0698	-1,5325	0,2067
0,72	1,1214	3,5482	-1,9594	1,3058	-1,9353	-0,1865	-0,0813	-1,6184	0,2177
0,71	1,2145	3,7138	-2,0535	1,3323	-2,0710	-0,2065	-0,0938	-1,7069	0,2292
0,70	1,3124	3,8848	-2,1506	1,3605	-2,2126	-0,2280	-0,1073	-1,7983	0,2412
0,69	1,4154	4,0617	-2,2510	1,3903	-2,3605	-0,2511	-0,1220	-1,8927	0,2536
0,68	1,5236	4,2449	-2,3550	1,4219	-2,5150	-0,2757	-0,1378	-1,9905	0,2667
0,67	1,6373	4,4351	-2,4628	1,4553	-2,6764	-0,3021	-0,1548	-2,0919	0,2803
0,66	1,7567	4,6327	-2,5746	1,4906	-2,8452	-0,3303	-0,1731	-2,1972	0,2946
0,65	1,8823	4,8383	-2,6907	1,5280	-3,0217	-0,3604	-0,1927	-2,3066	0,3096
0,64	2,0142	5,0526	-2,8114	1,5676	-3,2063	-0,3926	-0,2137	-2,4206	0,3254
0,63	2,1528	5,2762	-2,9371	1,6095	-3,3997	-0,4268	-0,2361	-2,5394	0,3419
0,62	2,2985	5,5097	-3,0681	1,6537	-3,6023	-0,4633	-0,2601	-2,6633	0,3594
0,61	2,4517	5,7541	-3,2048	1,7006	-3,8146	-0,5022	-0,2857	-2,7929	0,3777
0,60	2,6128	6,0100	-3,3476	1,7502	-4,0373	-0,5436	-0,3130	-2,9286	0,3971
0,59	2,7824	6,2784	-3,4969	1,8026	-4,2711	-0,5877	-0,3422	-3,0708	0,4176
0,58	2,9608	6,5602	-3,6532	1,8582	-4,5167	-0,6347	-0,3733	-3,2200	0,4392
0,57	3,1488	6,8563	-3,8171	1,9171	-4,7749	-0,6846	-0,4064	-3,3768	0,4621
0,56	3,3469	7,1680	-3,9890	1,9795	-5,0464	-0,7378	-0,4417	-3,5417	0,4864
0,55	3,5559	7,4964	-4,1697	2,0457	-5,3324	-0,7945	-0,4793	-3,7155	0,5121

Примечание: Интегральные кривые  $\frac{\partial \varphi}{\partial M}$  получены «сквозным» счетом (без итераций в точке скачка  $\rho'$ ).

$\frac{\partial M}{\partial L_0}$	$\frac{\partial M}{\partial M_0}$	$\frac{\partial M}{\partial N_0}$	$\frac{\partial N}{\partial H_0}$	$\frac{\partial N}{\partial T_0}$	$\frac{\partial N}{\partial R_0}$	$\frac{\partial N}{\partial L_0}$	$\frac{\partial N}{\partial M_0}$	$\frac{\partial N}{\partial N_0}$
0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000
0,0000	1,0006	0,0037	0,0115	0,0030	-0,0004	0,0061	-0,0617	1,0125
-0,0001	1,0026	0,0074	0,0227	0,0112	-0,0015	0,0125	-0,1272	1,0248
-0,0002	1,0060	0,0111	0,0335	0,0251	-0,0035	0,0192	-0,1971	1,0369
-0,0003	1,0100	0,0148	0,0439	0,0454	-0,0065	0,0264	-0,2721	1,0488
-0,0005	1,0150	0,0184	0,0540	0,0729	-0,0105	0,0338	-0,3461	1,0606
-0,0007	1,0220	0,0221	0,0638	0,1082	-0,0156	0,0417	-0,4429	1,0722
-0,0010	1,0330	0,0257	0,0736	0,1526	-0,0220	0,0502	-0,5328	1,0837
-0,0013	1,0480	0,0292	0,0829	0,2092	-0,0300	0,0592	-0,6393	1,0951
-0,0016	1,0652	0,0328	0,0916	0,2797	-0,0396	0,0689	-0,7559	1,1064
-0,0021	1,0856	0,0363	0,0997	0,3660	-0,0511	0,0794	-0,8848	1,1176
-0,0026	1,1090	0,0398	0,1072	0,4705	-0,0648	0,0906	-1,0293	1,1286
-0,0031	1,1336	0,0432	0,1142	0,5951	-0,0809	0,1027	-1,1900	1,1396
-0,0038	1,1627	0,0468	0,1207	0,7428	-0,0998	0,1158	-1,3705	1,1503
-0,0045	1,1962	0,0503	0,1270	0,9162	-0,1217	0,1298	-1,5725	1,1608
-0,0053	1,2332	0,0539	0,1344	1,1128	-0,1469	0,1448	-1,7968	1,1707
-0,0061	1,2720	0,0577	0,1429	1,3330	-0,1754	0,1607	-2,0401	1,1799
-0,0070	1,3140	0,0616	0,1528	1,5790	-0,2077	0,1776	-2,3137	1,1883
-0,0079	1,3560	0,0657	0,1643	1,8534	-0,2441	0,1956	-2,6117	1,1958
-0,0089	1,3990	0,0699	0,1779	2,1590	-0,2851	0,2147	-2,9400	1,2022
-0,0100	1,4446	0,0743	0,1940	2,4990	-0,3311	0,2351	-3,3030	1,2073
-0,0111	1,4945	0,0789	0,2130	2,8770	-0,3827	0,2569	-3,7025	1,2109
-0,0122	1,5463	0,0838	0,2354	3,2969	-0,4404	0,2802	-4,1440	1,2127
-0,0135	1,6013	0,0888	0,2620	3,7630	-0,5050	0,3051	-4,6310	1,2124
-0,0147	1,6589	0,0941	0,2934	4,2804	-0,5773	0,3316	-5,1691	1,2096
-0,0161	1,7196	0,0997	0,3303	4,8545	-0,6579	0,3604	-5,7638	1,2041
-0,0174	1,7834	0,1056	0,3738	5,4915	-0,7479	0,3911	-6,4216	1,1954
-0,0189	1,8507	0,1117	0,4249	6,1983	-0,8484	0,4242	-7,1495	1,1829
-0,0205	1,9213	0,1183	0,4848	6,9828	-0,9605	0,4600	-7,9556	1,1660
-0,0221	1,9957	0,1252	0,5548	7,8537	-1,0855	0,4986	-8,8489	1,1441
-0,0239	2,0740	0,1325	0,6365	8,8208	-1,2251	0,5403	-9,8396	1,1164
-0,0257	2,1565	0,1402	0,7318	9,8954	-1,3809	0,5856	-10,939	1,0821
-0,0276	2,2432	0,1484	0,8427	11,090	-1,5548	0,6347	-12,161	1,0400
-0,0296	2,3346	0,1571	0,9716	12,419	-1,7491	0,6881	-13,519	0,9891
-0,0318	2,4308	0,1663	1,1212	13,898	-1,9662	0,7462	-15,031	0,9280
-0,0340	2,5322	0,1760	1,2946	15,546	-2,2089	0,8097	-16,714	0,8550
-0,0364	2,6391	0,1864	1,4956	17,384	-2,4806	0,8790	-18,592	0,7685
-0,0388	2,7518	0,1974	1,7281	19,435	-2,7849	0,9548	-20,697	0,6663
-0,0415	2,8707	0,2091	1,9971	21,726	-3,1259	1,0380	-23,027	0,5460
-0,0442	2,9962	0,2216	2,3082	24,289	-3,5085	1,1294	-25,659	0,4048
-0,0471	3,1286	0,2349	2,6677	27,159	-3,9382	1,2299	-28,590	0,2395
-0,0502	3,2687	0,2490	3,0831	30,376	-4,4213	1,3407	-31,884	0,0464
-0,0535	3,4166	0,2640	3,5632	33,987	-4,9652	1,4631	-35,583	-0,1789
-0,0569	3,5731	0,2801	4,1179	38,046	-5,5781	1,5986	-39,744	-0,4416
-0,0605	3,7387	0,2972	4,7592	42,616	-6,2699	1,7488	-44,430	-0,7475
-0,0644	3,9142	0,3154	5,5007	47,767	-7,0517	1,9157	-49,717	-1,1036



**Таблица 3**  
**Частные интегралы для приливов 3-го порядка**

$r$	$\frac{\partial H}{\partial H_0}$	$\frac{\partial H}{\partial T_0}$	$\frac{\partial H}{\partial R_0}$	$\frac{\partial H}{\partial L_0}$	$\frac{\partial H}{\partial M_0}$	$\frac{\partial H}{\partial N_0}$	$\frac{\partial T}{\partial H_0}$	$\frac{\partial T}{\partial T_0}$	$\frac{\partial T}{\partial R_0}$
1,00	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000
0,99	1,0072	-0,0449	0,0000	-0,0001	0,0023	-0,0175	0,0099	0,9814	-0,0002
0,98	1,0139	-0,0909	0,0001	-0,0002	0,0092	-0,0340	0,0197	0,9654	-0,0006
0,97	1,0202	-0,1382	0,0002	-0,0004	0,0203	-0,0496	0,0294	0,9518	-0,0013
0,96	1,0261	-0,1871	0,0004	-0,0008	0,0356	-0,0642	0,0390	0,9406	-0,0023
0,95	1,0314	-0,2380	0,0008	-0,0012	0,0551	-0,0781	0,0485	0,9315	-0,0035
0,94	1,0364	-0,2910	0,0013	-0,0016	0,0786	-0,0912	0,0578	0,9244	-0,0048
0,93	1,0408	-0,3462	0,0020	-0,0021	0,1060	-0,1035	0,0671	0,9190	-0,0063
0,92	1,0447	-0,4036	0,0029	-0,0027	0,1367	-0,1146	0,0764	0,9147	-0,0078
0,91	1,0481	-0,4634	0,0040	-0,0033	0,1708	-0,1249	0,0855	0,9115	-0,0094
0,90	1,0509	-0,5260	0,0054	-0,0040	0,2082	-0,1343	0,0946	0,9095	-0,0111
0,89	1,0531	-0,5916	0,0070	-0,0047	0,2490	-0,1430	0,1036	0,9085	-0,0128
0,88	1,0548	-0,6604	0,0089	-0,0054	0,2932	-0,1509	0,1126	0,9087	-0,0146
0,87	1,0558	-0,7329	0,0111	-0,0062	0,3409	-0,1582	0,1215	0,9100	-0,0164
0,86	1,0561	-0,8093	0,0136	-0,0070	0,3923	-0,1649	0,1305	0,9125	-0,0183
0,85	1,0556	-0,8908	0,0165	-0,0079	0,4482	-0,1712	0,1395	0,9170	-0,0202
0,84	1,0541	-0,9785	0,0199	-0,0089	0,5096	-0,1772	0,1486	0,9244	-0,0224
0,83	1,0517	-1,0731	0,0238	-0,0100	0,5770	-0,1828	0,1579	0,9348	-0,0247
0,82	1,0482	-1,1755	0,0284	-0,0112	0,6509	-0,1881	0,1674	0,9482	-0,0273
0,81	1,0434	-1,2865	0,0336	-0,0125	0,7320	-0,1930	0,1771	0,9645	-0,0300
0,80	1,0372	-1,4069	0,0395	-0,0139	0,8209	-0,1974	0,1870	0,9840	-0,0329
0,79	1,0295	-1,5380	0,0463	-0,0154	0,9184	-0,2012	0,1973	1,0065	-0,0360
0,78	1,0200	-1,6807	0,0540	-0,0171	1,0252	-0,2045	0,2079	1,0324	-0,0393
0,77	1,0086	-1,8364	0,0627	-0,0189	1,1422	-0,2072	0,2189	1,0615	-0,0429
0,76	0,9950	-2,0063	0,0726	-0,0209	1,2706	-0,2091	0,2304	1,0940	-0,0467
0,75	0,9789	-2,1921	0,0837	-0,0231	1,4113	-0,2102	0,2423	1,1302	-0,0507
0,74	0,9601	-2,3954	0,0962	-0,0254	1,5656	-0,2104	0,2549	1,1700	-0,0550
0,73	0,9381	-2,6182	0,1104	-0,0280	1,7349	-0,2095	0,2680	1,2137	-0,0596
0,72	0,9128	-2,8624	0,1262	-0,0308	1,9207	-0,2075	0,2818	1,2616	-0,0645
0,71	0,8835	-3,1305	0,1440	-0,0338	2,1248	-0,2042	0,2964	1,3137	-0,0696
0,70	0,8499	-3,4249	0,1639	-0,0371	2,3490	-0,1994	0,3118	1,3704	-0,0752
0,69	0,8113	-3,7487	0,1862	-0,0407	2,5955	-0,1930	0,3281	1,4320	-0,0811
0,68	0,7672	-4,1051	0,2111	-0,0446	2,8668	-0,1847	0,3455	1,4987	-0,0873
0,67	0,7169	-4,4977	0,2391	-0,0488	3,1654	-0,1743	0,3639	1,5710	-0,0941
0,66	0,6595	-4,9306	0,2703	-0,0535	3,4944	-0,1615	0,3836	1,6492	-0,1012
0,65	0,5942	-5,4085	0,3052	-0,0586	3,8574	-0,1461	0,4046	1,7337	-0,1089
0,64	0,5199	-5,9366	0,3443	-0,0642	4,2580	-0,1277	0,4271	1,8252	-0,1171
0,63	0,4354	-6,5206	0,3880	-0,0703	4,7008	-0,1058	0,4513	1,9240	-0,1259
0,62	0,3394	-7,1674	0,4369	-0,0770	5,1906	-0,0800	0,4772	2,0310	-0,1354
0,61	0,2304	-7,8844	0,4917	-0,0844	5,7330	-0,0498	0,5051	2,1467	-0,1456
0,60	0,1065	-8,6802	0,5530	-0,0926	6,3345	-0,0147	0,5352	2,2719	-0,1565
0,59	-0,0342	-9,5647	0,6217	-0,1015	7,0023	+0,0262	0,5677	2,4076	-0,1684
0,58	-0,1940	-10,5489	0,6988	-0,1114	7,7447	0,0736	0,6029	2,5548	-0,1811
0,57	-0,3757	-11,646	0,7854	-0,1223	8,5712	0,1283	0,6410	2,7145	-0,1949
0,56	-0,5823	-12,870	0,8826	-0,1345	9,4927	0,1915	0,6824	2,8880	-0,2099
0,55	-0,8174	-14,237	0,9920	-0,1479	10,5218	0,2645	0,7274	3,0768	-0,2262

$\frac{\partial T}{\partial L_0}$	$\frac{\partial T}{\partial M_0}$	$\frac{\partial T}{\partial N_0}$	$\frac{\partial R}{\partial H_0}$	$\frac{\partial R}{\partial T_0}$	$\frac{\partial R}{\partial R_0}$	$\frac{\partial R}{\partial L_0}$	$\frac{\partial R}{\partial M_0}$	$\frac{\partial R}{\partial N_0}$
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	-0,0554	-0,0002	-0,0181	-0,0007	1,0006	-0,0101	0,0000	0,0002
0,0000	-0,1067	-0,0007	-0,0366	-0,0027	1,0025	-0,0204	0,0001	0,0006
0,0000	-0,1544	-0,0016	-0,0557	-0,0062	1,0056	-0,0310	0,0002	0,0014
0,0000	-0,1990	-0,0027	-0,0753	-0,0112	1,0102	-0,0418	0,0004	0,0025
0,0000	-0,2408	-0,0041	-0,0956	-0,0177	1,0161	-0,0529	0,0009	0,0039
0,0000	-0,2801	-0,0058	-0,1166	-0,0259	1,0235	-0,0643	0,0015	0,0056
0,0000	-0,3164	-0,0076	-0,1386	-0,0356	1,0326	-0,0760	0,0024	0,0076
0,0001	-0,3491	-0,0096	-0,1618	-0,0469	1,0432	-0,0880	0,0036	0,0100
0,0001	-0,3789	-0,0117	-0,1862	-0,0600	1,0556	-0,1004	0,0052	0,0127
0,0001	-0,4062	-0,0139	-0,2121	-0,0750	1,0698	-0,1133	0,0072	0,0158
0,0001	-0,4314	-0,0162	-0,2394	-0,0919	1,0859	-0,1266	0,0097	0,0192
0,0002	-0,4549	-0,0186	-0,2683	-0,1109	1,1041	-0,1403	0,0128	0,0230
0,0002	-0,4769	-0,0210	-0,2988	-0,1321	1,1244	-0,1546	0,0165	0,0273
0,0002	-0,4977	-0,0236	-0,3312	-0,1556	1,1470	-0,1695	0,0209	0,0319
0,0003	-0,5185	-0,0262	-0,3653	-0,1819	1,1720	-0,1849	0,0262	0,0369
0,0003	-0,5404	-0,0290	-0,4009	-0,2113	1,1996	-0,2010	0,0326	0,0423
0,0004	-0,5634	-0,0319	-0,4382	-0,2438	1,2300	-0,2178	0,0402	0,0482
0,0005	-0,5876	-0,0350	-0,4774	-0,2797	1,2633	-0,2354	0,0490	0,0544
0,0006	-0,6131	-0,0383	-0,5186	-0,3192	1,2996	-0,2539	0,0591	0,0611
0,0007	-0,6399	-0,0418	-0,5620	-0,3624	1,3394	-0,2732	0,0706	0,0684
0,0008	-0,6682	-0,0454	-0,6078	-0,4097	1,3826	-0,2935	0,0836	0,0761
0,0009	-0,6981	-0,0493	-0,6563	-0,4613	1,4297	-0,3149	0,0984	0,0845
0,0011	-0,7297	-0,0533	-0,7076	-0,5175	1,4809	-0,3374	0,1149	0,0934
0,0013	-0,7631	-0,0575	-0,7621	-0,5786	1,5365	-0,3612	0,1333	0,1031
0,0015	-0,7984	-0,0620	-0,8201	-0,6450	1,5969	-0,3863	0,1539	0,1134
0,0017	-0,8359	-0,0668	-0,8818	-0,7171	1,6623	-0,4129	0,1768	0,1246
0,0019	-0,8756	-0,0718	-0,9475	-0,7953	1,7332	-0,4411	0,2022	0,1366
0,0022	-0,9178	-0,0771	-1,0178	-0,8801	1,8101	-0,4711	0,2303	0,1496
0,0024	-0,9627	-0,0827	-1,0930	-0,9721	1,8935	-0,5029	0,2614	0,1636
0,0028	-1,0104	-0,0886	-1,1735	-1,0720	1,9838	-0,5368	0,2958	0,1787
0,0031	-1,0613	-0,0948	-1,2599	-1,1803	2,0817	-0,5730	0,3337	0,1950
0,0035	-1,1155	-0,1015	-1,3527	-1,2978	2,1878	-0,6117	0,3755	0,2126
0,0039	-1,1735	-0,1086	-1,4526	-1,4255	2,3029	-0,6531	0,4216	0,2318
0,0043	-1,2354	-0,1161	-1,5602	-1,5642	2,4278	-0,6974	0,4725	0,2525
0,0048	-1,3017	-0,1241	-1,6763	-1,7150	2,5633	-0,7449	0,5285	0,2749
0,0053	-1,3728	-0,1327	-1,8019	-1,8791	2,7105	-0,7961	0,5902	0,2993
0,0059	-1,4491	-0,1418	-1,9377	-2,0577	2,8705	-0,8511	0,6583	0,3259
0,0065	-1,5311	-0,1516	-2,0850	-2,2525	3,0446	-0,9105	0,7334	0,3547
0,0072	-1,6193	-0,1621	-2,2448	-2,4651	3,2340	-0,9746	0,8162	0,3862
0,0080	-1,7144	-0,1734	-2,4186	-2,6972	3,4405	-1,0439	0,9075	0,4206
0,0088	-1,8170	-0,1855	-2,6078	-2,9511	3,6657	-1,1190	1,0085	0,4581
0,0097	-1,9279	-0,1985	-2,8141	-3,2292	3,9116	-1,2005	1,1200	0,4992
0,0107	-2,0480	-0,2126	-3,0395	-3,5341	4,1805	-1,2892	1,2434	0,5442
0,0118	-2,1781	-0,2278	-3,2860	-3,8683	4,4748	-1,3857	1,3801	0,5936
0,0131	-2,3195	-0,2443	-3,5561	-4,2370	4,7973	-1,4910	1,5315	0,6479

Таблица 3 (продолжение)

$r$	$\frac{\partial L}{\partial H_0}$	$\frac{\partial L}{\partial T_0}$	$\frac{\partial L}{\partial R_0}$	$\frac{\partial L}{\partial L_0}$	$\frac{\partial L}{\partial M_0}$	$\frac{\partial L}{\partial N_0}$	$\frac{\partial M}{\partial H_0}$	$\frac{\partial M}{\partial T_0}$	$\frac{\partial M}{\partial R_0}$
1,00	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,99	0,0022	0,2137	-0,1200	1,0006	-0,0061	0,0000	0,0000	-0,0553	0,0059
0,98	0,0087	0,4276	-0,2403	1,0024	-0,0240	-0,0002	-0,0002	-0,1142	0,0119
0,97	0,0197	0,6421	-0,3610	1,0055	-0,0532	-0,0005	-0,0007	-0,1768	0,0178
0,96	0,0354	0,8581	-0,4823	1,0099	-0,0935	-0,0013	-0,0015	-0,2432	0,0239
0,95	0,0557	1,0759	-0,6045	1,0156	-0,1444	-0,0024	-0,0029	-0,3135	0,0299
0,94	0,0809	1,2964	-0,7279	1,0226	-0,2057	-0,0041	-0,0047	-0,3881	0,0361
0,93	0,1113	1,5222	-0,8525	1,0310	-0,2780	-0,0066	-0,0074	-0,4689	0,0425
0,92	0,1472	1,7557	-0,9788	1,0408	-0,3614	-0,0097	-0,0107	-0,5579	0,0492
0,91	0,1889	1,9973	-1,1070	1,0522	-0,4557	-0,0138	-0,0150	-0,6556	0,0562
0,90	0,2367	2,2473	-1,2372	1,0650	-0,5609	-0,0189	-0,0204	-0,7624	0,0635
0,89	0,2910	2,5064	-1,3698	1,0794	-0,6767	-0,0252	-0,0271	-0,8789	0,0713
0,88	0,3519	2,7750	-1,5050	1,0954	-0,8032	-0,0326	-0,0352	-1,0055	0,0796
0,87	0,4199	3,0537	-1,6432	1,1132	-0,9404	-0,0414	-0,0451	-1,1429	0,0883
0,86	0,4954	3,3432	-1,7847	1,1327	-1,0882	-0,0516	-0,0569	-1,2917	0,0977
0,85	0,5782	3,6411	-1,9296	1,1540	-1,2453	-0,0632	-0,0708	-1,4478	0,1075
0,84	0,6682	3,9461	-2,0784	1,1773	-1,4107	-0,0764	-0,0866	-1,6077	0,1176
0,83	0,7657	4,2596	-2,2314	1,2025	-1,5850	-0,0912	-0,1042	-1,7720	0,1282
0,82	0,8711	4,5830	-2,3890	1,2298	-1,7689	-0,1078	-0,1239	-1,9412	0,1392
0,81	0,9846	4,9177	-2,5517	1,2594	-1,9629	-0,1262	-0,1457	-2,1159	0,1507
0,80	1,1067	5,2650	-2,7199	1,2912	-2,1678	-0,1465	-0,1697	-2,2967	0,1628
0,79	1,2377	5,6266	-2,8941	1,3254	-2,3843	-0,1690	-0,1961	-2,4844	0,1756
0,78	1,3782	6,0041	-3,0748	1,3622	-2,6132	-0,1937	-0,2250	-2,6796	0,1890
0,77	1,5286	6,3991	-3,2626	1,4016	-2,8553	-0,2209	-0,2566	-2,8832	0,2032
0,76	1,6894	6,8134	-3,4581	1,4439	-3,1116	-0,2506	-0,2909	-3,0960	0,2183
0,75	1,8613	7,2490	-3,6619	1,4892	-3,3832	-0,2830	-0,3282	-3,3188	0,2342
0,74	2,0449	7,7078	-3,8747	1,5376	-3,6709	-0,3184	-0,3688	-3,5527	0,2512
0,73	2,2409	8,1919	-4,0973	1,5894	-3,9762	-0,3570	-0,4127	-3,7986	0,2693
0,72	2,4501	8,7037	-4,3305	1,6448	-4,3001	-0,3989	-0,4602	-4,0577	0,2885
0,71	2,6735	9,2455	-4,5750	1,7040	-4,6442	-0,4443	-0,5116	-4,3312	0,3091
0,70	2,9118	9,8201	-4,8320	1,7672	-5,0098	-0,4937	-0,5672	-4,6205	0,3310
0,69	3,1662	10,430	-5,1023	1,8348	-5,3987	-0,5472	-0,6273	-4,9268	0,3545
0,68	3,4378	11,079	-5,3871	1,9070	-5,8126	-0,6051	-0,6921	-5,2518	0,3797
0,67	3,7279	11,769	-5,6876	1,9841	-6,2534	-0,6679	-0,7622	-5,5971	0,4067
0,66	4,0377	12,505	-6,0051	2,0666	-6,7233	-0,7357	-0,8378	-5,9646	0,4356
0,65	4,3689	13,290	-6,3410	2,1546	-7,2246	-0,8091	-0,9194	-6,3562	0,4667
0,64	4,7231	14,128	-6,6969	2,2488	-7,7598	-0,8885	-1,0075	-6,7741	0,5002
0,63	5,1021	15,025	-7,0744	2,3496	-8,3317	-0,9744	-1,1027	-7,2206	0,5361
0,62	5,5079	15,984	-7,4755	2,4574	-8,9433	-1,0672	-1,2056	-7,6985	0,5749
0,61	5,9428	17,012	-7,9021	2,5729	-9,5981	-1,1676	-1,3167	-8,2104	0,6167
0,60	6,4092	18,115	-8,3566	2,6987	-10,2996	-1,2761	-1,4369	-8,7597	0,6618
0,59	6,9097	19,298	-8,8415	2,8295	-11,0521	-1,3936	-1,5669	-9,3497	0,7105
0,58	7,4476	20,570	-9,3594	2,9719	-11,860	-1,5208	-1,7077	-9,9842	0,7631
0,57	8,0259	21,939	-9,9134	3,1250	-12,728	-1,6585	-1,8603	-10,667	0,8201
0,56	8,6486	23,413	-10,507	3,2896	-13,663	-1,8077	-2,0257	-11,404	0,8817
0,55	9,3197	25,002	-11,144	3,4667	-41,669	-1,9694	-2,2052	-12,200	0,9486

$\frac{\partial M}{\partial L_0}$	$\frac{\partial M}{\partial M_0}$	$\frac{\partial M}{\partial N_0}$	$\frac{\partial N}{\partial H_0}$	$\frac{\partial N}{\partial T_0}$	$\frac{\partial N}{\partial R_0}$	$\frac{\partial N}{\partial L_0}$	$\frac{\partial N}{\partial M_0}$	$\frac{\partial N}{\partial N_0}$
0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000
0,0000	1,0014	0,0037	0,0115	0,0078	-0,0007	0,0061	-0,1234	1,0124
-0,0001	1,0056	0,0074	0,0228	0,0300	-0,0030	0,0125	-0,2546	1,0243
-0,0002	1,0130	0,0112	0,0340	0,0683	-0,0071	0,0193	-0,3951	1,0358
-0,0003	1,0239	0,0149	0,0452	0,1250	-0,0130	0,0264	-0,5465	1,0467
-0,0005	1,0384	0,0187	0,0565	0,2024	-0,0210	0,0340	-0,7110	1,0572
-0,0007	1,0568	0,0225	0,0684	0,3030	-0,0313	0,0420	-0,8905	1,0671
-0,0010	1,0800	0,0264	0,0813	0,4306	-0,0443	0,0506	-1,0876	1,0763
-0,0013	1,1089	0,0304	0,0953	0,5933	-0,0604	0,0599	-1,3069	1,0848
-0,0017	1,1440	0,0345	0,1108	0,7969	-0,0800	0,0699	-1,5523	1,0926
-0,0021	1,1858	0,0388	0,1283	1,0476	-0,1036	0,0809	-1,8281	1,0994
-0,0026	1,2348	0,0433	0,1486	1,3526	-0,1317	0,0927	-2,1396	1,1050
-0,0032	1,2915	0,0480	0,1725	1,7201	-0,1649	0,1056	-2,4924	1,1092
-0,0039	1,3564	0,0530	0,2013	2,1594	-0,2041	0,1196	-2,8932	1,1118
-0,0046	1,4300	0,0585	0,2362	2,6810	-0,2499	0,1349	-3,3494	1,1123
-0,0054	1,5104	0,0643	0,2791	3,2833	-0,3027	0,1514	-3,8620	1,1103
-0,0063	1,5956	0,0706	0,3309	3,9714	-0,3632	0,1692	-4,4358	1,1053
-0,0072	1,6861	0,0773	0,3932	4,7553	-0,4322	0,1883	-5,0780	1,0970
-0,0082	1,7821	0,0845	0,4677	5,6460	-0,5106	0,2089	-5,7972	1,0847
-0,0093	1,8841	0,0923	0,5567	6,6562	-0,5997	0,2312	-6,6026	1,0677
-0,0104	1,9925	0,1007	0,6625	7,8002	-0,7005	0,2554	-7,5050	1,0454
-0,0116	2,1076	0,1097	0,7879	9,0940	-0,8147	0,2816	-8,5164	1,0169
-0,0129	2,2301	0,1194	0,9360	10,5559	-0,9437	0,3100	-9,6505	0,9810
-0,0143	2,3603	0,1299	1,1107	12,207	-1,0895	0,3410	-10,923	0,9366
-0,0158	2,4989	0,1413	1,3161	14,070	-1,2541	0,3748	-12,351	0,8824
-0,0174	2,6464	0,1535	1,5570	16,174	-1,4399	0,4118	-13,955	0,8169
-0,0190	2,8036	0,1667	1,8392	18,547	-1,6497	0,4522	-15,758	0,7380
-0,0208	2,9711	0,1810	2,1691	21,225	-1,8865	0,4965	-17,787	0,6439
-0,0227	3,1497	0,1964	2,5542	24,249	-2,1538	0,5452	-20,069	0,5316
-0,0248	3,3402	0,2131	3,0032	27,664	-2,4559	0,5988	-22,641	0,3993
-0,0270	3,5436	0,2312	3,5261	31,522	-2,7972	0,6579	-25,541	0,2427
-0,0293	3,7608	0,2507	4,1345	35,884	-3,1831	0,7231	-28,814	0,0583
-0,0318	3,9930	0,2718	4,8421	40,819	-3,6199	0,7952	-32,511	-0,1584
-0,0345	4,2413	0,2946	5,6643	46,406	-4,1145	0,8752	-36,692	-0,4126
-0,0373	4,5070	0,3194	6,6196	52,738	-4,6751	0,9640	-41,425	-0,7104
-0,0404	4,7915	0,3462	7,7292	59,920	-5,3112	1,0627	-46,789	-1,0588
-0,0437	5,0965	0,3752	9,0179	68,076	-6,0338	1,1728	-52,877	-1,4662
-0,0472	5,4235	0,4066	10,515	77,349	-6,8553	1,2956	-59,793	-1,9423
-0,0510	5,7746	0,4406	12,254	87,903	-7,7907	1,4330	-67,662	-2,4986
-0,0551	6,1517	0,4776	14,275	99,932	-8,8571	1,5870	-76,627	-3,1484
-0,0595	6,5572	0,5176	16,625	113,66	-10,074	1,7600	-86,855	-3,9076
-0,0642	6,9937	0,5611	19,358	129,35	-11,466	1,9546	-98,542	-4,7948
-0,0692	7,4638	0,6083	22,542	147,32	-13,060	2,1740	-111,92	-5,8321
-0,0747	7,9707	0,6596	26,251	167,92	-14,888	2,4220	-127,25	-7,0454
-0,0806	8,5179	0,7155	30,577	191,57	-16,988	2,7028	-144,86	-8,4659
-0,0870	9,1091	0,7762	35,629	218,80	-19,405	3,0215	-165,12	-10,1303

Таблица 4

Разности значений функций для моделей №№ 2 и 3 из табл. 1

$r$	$\Delta \frac{\partial H}{\partial H_0}$	$\Delta \frac{\partial H}{\partial T_0}$	$\Delta \frac{\partial H}{\partial R_0}$	$\Delta \frac{\partial H}{\partial L_0}$	$\Delta \frac{\partial H}{\partial N_0}$	$\Delta \frac{\partial T}{\partial H_0}$	$\Delta \frac{\partial T}{\partial T_0}$
1,00	0,000	0,00	0,000	0,000	0,00	0,000	0,00
0,95	-0,004	0,01	-0,001	0,002	-0,03	-0,001	0,00
0,90	-0,012	0,03	-0,001	0,003	-0,04	-0,002	-0,00
0,85	-0,017	0,06	-0,002	0,003	-0,03	-0,001	-0,01
0,80	-0,018	0,14	-0,006	0,002	0,02	-0,003	-0,02
0,75	-0,022	0,17	-0,005	0,000	0,00	-0,003	-0,01
0,70	-0,026	0,17	-0,008	0,000	-0,01	-0,002	0,00
0,65	-0,029	0,18	-0,012	0,001	-0,02	-0,002	0,00
0,60	-0,035	0,21	-0,016	0,002	-0,04	-0,001	0,00
0,55	-0,037	0,29	-0,028	0,002	-0,06	-0,002	-0,04

$r$	$\Delta \frac{\partial T}{\partial R_0}$	$\Delta \frac{\partial T}{\partial L_0}$	$\Delta \frac{\partial T}{\partial N_0}$	$\Delta \frac{\partial R}{\partial H_0}$	$\Delta \frac{\partial R}{\partial T_0}$	$\Delta \frac{\partial R}{\partial R_0}$	$\Delta \frac{\partial R}{\partial L_0}$
1,00	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,95	0,000	0,000	0,000	0,007	0,002	-0,001	0,001
0,90	0,001	0,000	0,000	0,008	0,003	-0,002	0,002
0,85	0,003	-0,001	-0,002	0,000	-0,009	-0,002	0,003
0,80	0,006	0,000	-0,003	-0,010	-0,013	-0,002	0,003
0,75	0,005	-0,001	-0,004	-0,015	-0,020	-0,004	0,004
0,70	0,005	-0,001	-0,012	-0,027	-0,042	-0,003	0,007
0,65	0,005	-0,001	-0,024	-0,034	-0,057	-0,004	0,007
0,60	0,007	-0,001	-0,042	-0,039	-0,095	-0,004	0,007
0,55	0,011	-0,001	-0,072	-0,044	-0,128	-0,006	0,008

$r$	$\Delta \frac{\partial R}{\partial N_0}$	$\Delta \frac{\partial L}{\partial H_0}$	$\Delta \frac{\partial L}{\partial T_0}$	$\Delta \frac{\partial L}{\partial R_0}$	$\Delta \frac{\partial L}{\partial L_0}$	$\Delta \frac{\partial L}{\partial N_0}$	$\Delta \frac{\partial M}{\partial H_0}$
1,00	0,00	0,000	0,00	0,000	0,000	0,00	0,000
0,95	-0,01	-0,001	0,02	0,001	-0,005	0,02	-0,002
0,90	-0,02	0,000	0,02	0,003	-0,009	0,08	-0,002
0,85	-0,02	0,008	0,00	0,007	-0,009	0,08	-0,001
0,80	-0,02	0,009	-0,04	0,013	-0,004	0,04	-0,002
0,75	-0,03	0,023	-0,03	0,013	-0,004	0,04	-0,010
0,70	-0,06	0,038	-0,02	0,016	-0,006	0,05	-0,013
0,65	-0,05	0,045	0,02	0,022	-0,007	0,06	-0,019
0,60	-0,04	0,064	0,07	0,025	-0,011	0,10	-0,026
0,55	-0,05	0,079	0,13	0,031	-0,013	0,13	-0,039

$r$	$\Delta \frac{\partial M}{\partial T_0}$	$\Delta \frac{\partial M}{\partial R_0}$	$\Delta \frac{\partial M}{\partial L_0}$	$\Delta \frac{\partial M}{\partial N_0}$	$\Delta \frac{\partial N}{\partial H_0}$	$\Delta \frac{\partial N}{\partial T_0}$	$\Delta \frac{\partial N}{\partial R_0}$	$\Delta \frac{\partial N}{\partial L_0}$	$\Delta \frac{\partial N}{\partial N_0}$
1,00	0,00	0,000	0,000	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,95	0,00	-0,001	0,000	0,00	0,00	-0,02	0,00	0,00	0,00
0,90	0,01	-0,003	0,001	-0,01	0,01	0,03	-0,01	0,00	0,00
0,85	-0,02	-0,001	0,001	-0,02	0,00	0,14	-0,01	0,01	0,00
0,80	-0,03	0,001	-0,001	-0,01	0,01	0,34	-0,02	0,00	0,08
0,75	-0,04	0,001	-0,001	-0,02	0,03	0,40	-0,02	0,01	0,13
0,70	-0,04	0,000	-0,001	-0,02	0,06	0,44	-0,02	0,01	0,23
0,65	-0,03	-0,002	0,000	-0,04	0,11	0,53	-0,01	0,03	0,20
0,60	-0,03	-0,003	-0,001	-0,03	0,18	0,53	0,02	0,04	0,36
0,55	-0,07	0,000	-0,002	-0,04	0,38	1,10	0,02	0,05	0,68

В табл. 4 помещены разности значений функций для старой и новой модели (при  $n = 2$ ). Наибольшие разности (от 4 до 62%) получились в интегралах  $\frac{\partial \Phi}{\partial N_0}$ , которые не используются при вычислении чисел Лява. В остальных интегральных кривых расхождения не превышают 8%, а их влияние на числа  $h$  и  $k$  меньше верхнего предела расхождений. Числа, помещенные в табл. 1 под №№ 2 и 3, взятые из статьи [6], — статические значения чисел Лява для моделей I и II этой статьи. Они получены при помощи табл. 2 и 4.

При помощи табл. 3 просто получаются числа Лява для приливов 3-го порядка. Для оценки влияния неоднородности жидкого ядра мы приняли, что плотность в ядре меняется по закону Лежандра и параметр Радо  $\eta = 0,240$  — максимальное значение, соответствующее кривой № 3 на рис. 1. В этом случае функция  $R$  в ядре определяется точным выражением из работы [3] (формула после (2.13)). Значению  $\eta = 0,240$  соответствует  $\left(\frac{R'}{R}\right)_i = 2,61$ , а значению  $\eta = 0$  (однородное ядро) —  $\left(\frac{R'}{R}\right)_i = 3$ . Используя граничные условия (3.1)–(3.6) работы [3], при  $n = 3$  получаем

		$h_3$	$k_3$	$l_3$	$\delta_3$
$\eta = 0$	однородное ядро	0,293	0,095	0,0135	1,069
$\eta = 0,240$ ;	$\rho_i = 9,30 \text{ г/см}^3$	0,294	0,095	0,0134	1,069
$\eta = 0,240$ ;	$\rho_i = 10,30 \text{ г/см}^3$	0,294	0,096	0,0134	1,068

Влияние неоднородности ядра получается еще меньшим, чем для прилива 2-го порядка. Это можно было ожидать заранее.

Числа, помещенные в табл. 1, согласуются между собой только в общих чертах. При более внимательном рассмотрении обнаруживается, что результаты, полученные разными авторами для близких моделей Земли (№№ 3, 4, 8), различаются больше, чем этого можно было ожидать на основе сравнения очень разных моделей (№ 1 и № 9). Значения  $k$  для №№ 6—8 меньше, чем для № 9. Модели № 4 и № 5 различаются между собой почти так же, как модели № 6 и № 7, но значения  $h$  возрастают в первом случае и убывают во втором.

Таким образом, теоретические значения чисел Лява расходятся приблизительно на 0,02. Весьма вероятно, что главный источник ошибки — это не различие моделей, а наличие систематических ошибок при численном интегрировании дифференциальных уравнений. Анализ результатов очень облегчится при полной и однообразной публикации результатов интегрирования. Мы считаем наиболее удобным представлением общего интеграла в виде, соответствующем формуле (7).

Выражаем благодарность Н.Н. Парийскому за ценные советы.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Takeuchi H.* // Trans. Amer. Geoph. Union. 1950. 31. P.651–689.
2. *Bullen K.* // Mon. Not. (Geoph. Suppl.). 1950. 6. P.50.
3. *Молоденский М. С.* Труды Геофизического института АН СССР. 1953. № 19(146). С.3–52.
4. *Alterman Z., Jarosch H., Pekeris C.* // Proc. R. Soc. London. Ser. A. 1959. 252. № 1268. P.80–95.
5. *Jeffreys H., Vicente R.* // Mon. Not. 1957. 117. P.142–173.
6. *Молоденский М.С.* В кн.: *Молоденский М.С., Крамер М.В.* Земные приливы и нутация Земли. — М.: Изд-во АН СССР. 1961. С.3–25.

# ВЛИЯНИЕ ВЯЗКОСТИ НА ФАЗУ ЗЕМНЫХ ПРИЛИВОВ\*

Дана общая теория влияния вязкости оболочки, рассматриваемой как максвелловское тело, на фазу земных приливов и затухание движения полюса.

1. Влияние вязкости на фазу приливов в Земле можно оценить методом вариации произвольных постоянных, беря за исходное решение задачи о приливах в упругой Земле.

В дифференциальных уравнениях упругого равновесия будем считать комплексными модуль сдвига  $\bar{\mu}$  и искомые функции, одну из которых назовем  $\bar{\Phi}_i$ :

$$\begin{aligned}\bar{\mu} &= \mu + im, \\ \bar{\Phi}_i &= \Phi_i + i\psi_i.\end{aligned}\tag{1}$$

Модуль объемной упругости  $\lambda + \frac{2}{3}\mu$  считаем величиной действительной. Для периодического процесса эти допущения вряд ли могут вызвать сомнение.

Дифференциальные уравнения линейны относительно  $\bar{\mu}$  и  $\bar{\Phi}_i$  и однородны относительно  $\bar{\Phi}_i$ :

$$\sum_i [A_i (\Phi_i + i\psi_i) + B_i (\mu + im) (\Phi_i + i\psi_i)] = 0.\tag{2}$$

Из этого уравнения получаем два:

$$\sum_i^n (A_i + B_i\mu) \Phi_i = m \sum_i B_i \Psi_i,\tag{3}$$

$$\sum_i^n (A_i + B_i\mu) \Psi_i = -m \sum_i B_i \Phi_i.\tag{4}$$

Если  $m = 0$ , то обе системы дифференциальных уравнений совпадают и имеют порядок  $n$ ; при  $m \neq 0$  порядок уравнений удваивается; при малом значении  $m$ , как увидим далее, нужно проинтегрировать систему порядка  $n$  и выполнить  $n$  квадратур.

Считая  $m$  малым, в первом приближении пренебрегаем правой частью в уравнении (3), т.е. используем решение для идеально упругой сферы. Таким образом, становятся известными функции  $\Phi_i$  и правая часть уравнений (4). Теперь (4) отличаются от (3) только тем, что они неоднородны.

Для уравнения типа (3) считаем известным общий интеграл, т.е. все функции  $\Phi_i$  (в аналитической или числовой форме). Поэтому для интегрирования уравнений типа (4) можно применить метод вариации произвольных постоянных.

Решение ищем в следующем виде:

$$\Psi_j = \sum_{i=1}^{i=n} C_i \Phi_i + \sum_{i=1}^{i=n} D_i \Phi_i,\tag{5}$$

\* Известия Академии наук СССР, серия геофизическая. 1963. №10. С. 1469–1482.

$C_i$  — постоянные, и, следовательно, первая сумма является общим решением системы (3),  $D_i$  — функции  $r$ .

2. Уравнения равновесия для идеально упругой сферы возьмем в той форме, которая использована в статье [1]. Общий интеграл в системе переменных  $H, T, R, L, M, N$  был получен при помощи вычислительной машины и дан в таблицах на с. 32–39 работы [1]. При представлении эффекта вязкости формулой (1) уравнения типа (4) примут следующий вид:

$$\begin{aligned}
 N - \left( \lambda + \frac{2}{3}\mu \right) \left( H' + \frac{2}{r}H - \frac{6}{r^2}T \right) - \mu \left( \frac{4}{3}H' - \frac{4}{3}\frac{H}{r} + \frac{4}{r^2}T \right) = \\
 = \frac{4}{3}m \left( H' - \frac{H}{r} + \frac{3}{r^2}T \right)_0 = m\chi_1, \\
 M - r^2\mu \left( T' + H - \frac{2}{r}T \right) = \left( \frac{M}{\mu} \right)_0 m = m\chi_2, \\
 R' - 4\pi\kappa\rho H - \frac{L}{r^2} = 0, \\
 L' - 6(R - 4\pi\kappa\rho T) = 0,
 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
 M' + Nr^2 + \rho r^2 (R + V'H) - 2\mu (H'r^2 - Hr + 5T) = \\
 = 2m (H'r^2 - Hr + 5T)_0 = m\chi_5,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N' - \frac{6}{r^2}M + \frac{\rho}{r^2} (L - 4V'rH + 6V'T) + \frac{4\mu}{r} \left( H' - \frac{1}{r}H + \frac{3}{r^2}T \right) = \\
 = -\frac{4m}{r} \left( H' - \frac{H}{r} + \frac{3}{r^2}T \right)_0 = m\chi_6.
 \end{aligned}$$

Индексом «0» отмечен частный интеграл, соответствующий заданным граничным условиям при  $m = 0$ .

Для вычисления  $\chi_i$  удобно вместо производных внести сами функции из соответствующих дифференциальных уравнений. В результате получим

$$\begin{aligned}
 \chi_1 = \frac{4}{3} \left[ \frac{1}{\lambda + 2\mu} N - 3 \frac{\lambda + \frac{2}{3}\mu}{\lambda + 2\mu} \left( \frac{1}{r}H - \frac{3}{r^2}T \right) \right]_0, \\
 \chi_2 = \left( \frac{M}{\mu} \right)_0, \\
 \chi_3 = \chi_4 = 0, \\
 \chi_5 = \frac{2}{3}r^2\chi_1 + 4T_0, \\
 r\chi_6 = -3\chi_1.
 \end{aligned} \tag{7}$$

В результате подстановки (5) в (4) получим систему алгебраических уравнений относительно  $dD_i/dr = D'_i$  (сами функции  $D_i$  и постоянные  $C_i$  в эту систему не войдут, так



как  $\Phi_i$  — частное решение однородной системы). Уравнения эти таковы:

$$\left( D'_H \frac{\partial}{\partial H_0} + D'_T \frac{\partial}{\partial T_0} + D'_R \frac{\partial}{\partial R_0} + D'_L \frac{\partial}{\partial L_0} + D'_M \frac{\partial}{\partial M_0} + D'_N \frac{\partial}{\partial N_0} \right) \times \\ \times (H, T, R, L, M, N) = -m \left( \frac{1}{\lambda + 2\mu} \chi_1, \frac{1}{r^2 \mu} \chi_2, 0, 0, - \right. \\ \left. - \left( \frac{3}{2} r^2 \chi_1 \frac{\lambda + \frac{2}{3} \mu}{\lambda + 2\mu} + 4T_0 \right), \frac{3}{r} \frac{\lambda + \frac{2}{3} \mu}{\lambda + 2\mu} \chi_1 \right). \quad (8)$$

Разрешая эти уравнения относительно  $D'_H$ , получаем

$$D'_H = m \sum \frac{A_{Hi}}{\Delta} \chi_i = -m \left[ \frac{\chi_1}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial \bar{H}}{\partial H_0} + \frac{\chi_2}{r^2 \mu} \frac{\partial \bar{T}}{\partial H_0} + 4T_0 \frac{\partial \bar{M}}{\partial H_0} \right], \quad (9)$$

исходные выражения для  $D'_T$ ,  $D'_R$ ,  $D'_L$ ,  $D'_M$ , и  $D'_N$ .

Здесь  $\partial \bar{H} / \partial H_0$  — минор определителя, составленного из коэффициентов левой части системы (8), который соответствует столбцу  $H$  и строке  $H$ ,  $\Delta$  — определитель системы. Все миноры определяются только строением оболочки Земли и не зависят от граничных условий (от условий на поверхности и строения ядра). Функции  $\chi_i$  зависят и от граничных условий.

Теперь для вычисления  $D'_i$  нужно задать  $m$  как функцию от  $r$ . Можно принять

$$D_i = \int_b^r D'_i dr, \quad (10)$$

так как в (5) включены члены с  $C_i$ . Здесь  $b$  — граница ядра.

3. Для определения шести постоянных интегрирования  $C_i$  используем комплексные граничные условия, а именно: вносим в обычные граничные условия комплексные значения модуля сдвига и определяемых функций и считаем, как и ранее, действительным модуль объемной упругости  $\lambda + \frac{2}{3} \mu$ . Для модели № 3 [1] получаем

$$\left. \begin{aligned} M &= 0, \\ N &= -m \chi_1, \\ L + 3rR &= 0 \end{aligned} \right\} r = a, \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} M &= 0, \\ N + \rho_i (R + HV') &= -m \chi_1, \\ L - \gamma r^2 R - 2rR + 4\pi \kappa \rho_i r^2 H &= 0 \end{aligned} \right\} r = b. \quad (12)$$

Внося граничные условия (11) в общий интеграл (5), получаем

$$\Psi_i(r) = (C_H + D_H) \frac{\partial \Psi_i}{\partial H_0} + (C_T + D_T) \frac{\partial \Psi_i}{\partial T_0} + \\ + (C_R + D_R) \left( \frac{\partial \Psi_i}{\partial R_0} - 3 \frac{\partial \Psi_i}{\partial L_0} \right) - (m \chi_1)_n \frac{\partial \Psi_i}{\partial N_0}. \quad (13)$$

Эта формула определяет любую функцию, удовлетворяющую дифференциальным уравнениям (6) и граничным условиям на поверхности (11), через частные интегралы  $\partial \Psi / \partial H_0$ ,

$\partial\Psi/\partial T_0$ ,  $\partial\Psi/\partial R_0$ ,  $\partial\Psi/\partial L_0$ , значения которых даны в таблицах [1]. На границе ядра  $D_H = D_R = D_T = 0$ , поэтому в условия (12) нужно внести

$$\Psi_i(b) = \left[ C_H \frac{\partial\Psi_i}{\partial H_0} + C_T \frac{\partial\Psi_i}{\partial T_0} + C_R \left( \frac{\partial\Psi_i}{\partial R_0} - 3 \frac{\partial\Psi_i}{\partial L_0} \right) - (m\chi_1)_a \times \frac{\partial\Psi_i}{\partial N_0} \right]_b. \quad (14)$$

Из полученных уравнений (12) определяются постоянные  $C_H$ ,  $C_T$  и  $C_R$ . После этого формула (13) со значениями  $D_i$ , определяемыми формулой (10), позволит определить значения  $\psi$  во всей оболочке и, в частности, на поверхности сферы:

$$\left. \begin{aligned} \Psi_H &= C_H + D_H, & \bar{h} &= h + (C_H + D_H) i, \\ \Psi_T &= C_T + D_T, & \bar{l} &= l + (C_T + D_T) i, \\ \Psi_R &= C_R + D_R, & \bar{k} &= k + (C_R + D_R) i \end{aligned} \right\} r = a. \quad (15)$$

Таким образом, становятся известными комплексные значения чисел Лява и, следовательно, смещения (из-за вязкости) фазы приливных волн в вариациях силы тяжести и наклонов.

4. Итак, задача учета влияния вязкости на фазу прилива (при представлении ее влияния формулой (1)) существенно не отличается от соответствующей задачи теории упругости. Расчет влияния на амплитуду прилива, как и уточнения фазы, можно получить в следующем приближении. Для этого берем  $\Psi_i$  из первого приближения и используем при вычислении правой части в (3); новые значения  $\Phi_i$  используем для вычисления правой части в (4).

Изложенный здесь способ можно применить для вычисления малых изменений в общем или частном интеграле при малом изменении упругости или плотности. В этом случае правые части уравнений типа (4), а также граничных условий, представляют собой вариации левых частей (с измененным знаком) при заданных изменениях коэффициентов Ламе и плотности.

5. Для модели, описанной в статье [1], соответствующей значениям  $h = 0,617$ ,  $l = 0,091$  и  $k = 0,302$ , М.В. Крамер вычислила таблицы, при помощи которых вычисление влияния вязкости на фазу прилива сводится к квадратурам и решению трех линейных алгебраических уравнений. В табл. 1 приведены значения частного интеграла  $H_0$ ,  $T_0$ ,  $R_0$ ,  $L_0$ ,  $M_0$  и  $N_0$  при  $m = 0$ . В табл. 2 представлены значения всех миноров, входящих в (9), вычисленные с интервалом 0,01 радиуса Земли. Далее вычислены  $\chi_1$  и  $\chi_2$ , по формулам (9) — отношения типа  $D'_i/m$  и по формулам Ньютона–Котеса —  $\Delta D_i/m$  ( $\sum \Delta D_i = D_i$ ). Результаты помещены в табл. 3. Все таблицы могут быть использованы при любом законе изменения  $m$  с глубиной.

Далее при помощи (14) получаем уравнения (12) в числах в следующем виде:

$$\begin{aligned} -0,4793C_H - 3,7155C_T + 0,7053C_R &= -0,2738m_a, \\ -0,9578C_H + 53,222C_T - 3,118C_R &= -0,2317m_a + 0,7521m_b, \\ +25,669C_H + 7,520C_T - 51,397C_R &= +4,896m_a. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь  $m_b$  и  $m_a$  — значения  $m$  на границах оболочки.

На основе решения этих уравнений получены

$$\begin{aligned} C_H &= +0,8292m_a - 0,1721m_b, \\ C_T &= +0,0429m_a + 0,0061m_b, \\ C_R &= +0,3341m_a - 0,0850m_b. \end{aligned} \quad (17)$$

Таблица 1

$\tau$	$\rho$	$\mu$	$\lambda + 2\mu$	$H_0$	$T_0$	$R_0$	$L_0$	$M_0$	$N_0$
1,00	0,594	0,1734	0,5510	0,617	0,081	1,302	1,094	0,0000	0,0000
0,99	0,6046	0,1878	0,5998	0,6196	0,0853	1,2802	1,0255	0,0057	0,0135
0,98	0,6151	0,2026	0,6499	0,6220	0,0894	1,2585	0,9589	0,0113	0,0266
0,97	0,6257	0,2177	0,7014	0,6243	0,0931	1,2373	0,8943	0,0168	0,0392
0,96	0,6363	0,2333	0,7543	0,6261	0,0964	1,2162	0,8313	0,0221	0,0512
0,95	0,6468	0,2493	0,8084	0,6281	0,0995	1,1953	0,7704	0,0274	0,0625
0,94	0,6574	0,2657	0,8640	0,6297	0,1023	1,1747	0,7111	0,3224	0,0734
0,93	0,6812	0,2956	0,9593	0,6313	0,1050	1,1542	0,6537	0,0372	0,0840
0,92	0,7040	0,3265	1,0575	0,6328	0,1076	1,1338	0,5983	0,0421	0,0938
0,91	0,7269	0,3587	1,1602	0,6342	0,1100	1,1133	0,5450	0,0469	0,1030
0,90	0,7498	0,3924	1,2672	0,6356	0,1121	1,09331	0,4935	0,0513	0,1115
0,89	0,7727	0,4274	1,3784	0,6369	0,1144	1,0726	0,4440	0,0557	0,1190
0,88	0,7956	0,4638	1,4940	0,6381	0,1167	1,0522	0,3965	0,0599	0,1257
0,87	0,8184	0,5014	1,6136	0,6394	0,1186	1,0319	0,3512	0,0638	0,1314
0,86	0,8413	0,5405	1,7378	0,6405	0,1205	1,0116	0,3076	0,0674	0,1361
0,85	0,8464	0,5497	1,7752	0,6416	0,1222	0,9914	0,2661	0,0708	0,1402
0,84	0,8526	0,5598	1,8154	0,6427	0,1240	0,9716	0,2260	0,0736	0,1436
0,83	0,8587	0,5701	1,8557	0,6438	0,1255	0,9521	0,1876	0,0760	0,1460
0,82	0,8649	0,5804	1,8966	0,6446	0,1271	0,9330	0,1506	0,0782	0,1477
0,81	0,8710	0,5909	1,9377	0,6455	0,1282	0,9142	0,1150	0,0800	0,1483
0,80	0,8772	0,6014	1,9794	0,6463	0,1295	0,8958	0,0811	0,0813	0,1482
0,79	0,8834	0,6121	2,0215	0,6471	0,1304	0,8776	0,0484	0,0824	0,1472
0,78	0,8895	0,6227	2,0638	0,6480	0,1315	0,8600	0,0172	0,0831	0,1454
0,77	0,8957	0,6336	2,1067	0,6487	0,1322	0,8425	-0,0127	0,0833	0,1427
0,76	0,9018	0,6444	2,1497	0,6494	0,1328	0,8255	-0,0414	0,0835	0,1389
0,75	0,9080	0,6554	2,1934	0,6500	0,1335	0,8089	-0,0686	0,0829	0,1347
0,74	0,9142	0,6665	2,2374	0,6507	0,1341	0,7926	-0,0949	0,0824	0,1295
0,73	0,9203	0,6776	2,2816	0,6512	0,1347	0,7765	-0,1197	0,0812	0,1237
0,72	0,9265	0,6889	2,3264	0,6517	0,1353	0,7610	-0,1433	0,0798	0,1174
0,71	0,9326	0,7002	2,3715	0,6522	0,1357	0,7459	-0,1660	0,0781	0,1106
0,70	0,9388	0,7117	2,4171	0,6526	0,1362	0,7311	-0,1873	0,0760	0,1032
0,69	0,9450	0,7232	2,4631	0,6530	0,1367	0,7168	-0,2075	0,0735	0,0958
0,68	0,9511	0,7348	2,5093	0,6534	0,1371	0,7028	-0,2268	0,0708	0,0882
0,67	0,9573	0,7465	2,5561	0,6534	0,1377	0,6893	-0,2450	0,0676	0,0809
0,66	0,9634	0,7583	2,6030	0,6536	0,1379	0,6762	-0,2623	0,0640	0,0739
0,65	0,9696	0,7702	2,6507	0,6535	0,1384	0,6635	-0,2784	0,0602	0,0678
0,64	0,9758	0,7822	2,6987	0,6535	0,1387	0,6514	-0,2935	0,0559	0,0628
0,63	0,9819	0,7942	2,7468	0,6532	0,1392	0,6396	-0,3077	0,0513	0,0591
0,62	0,9881	0,8063	2,7955	0,6527	0,1398	0,6284	-0,3211	0,0463	0,0577
0,61	0,9942	0,8185	2,8444	0,6520	0,1402	0,6176	-0,3334	0,0409	0,0591
0,60	1,0004	0,8308	2,8940	0,6513	0,1409	0,6074	-0,3449	0,0352	0,0638
0,59	1,0066	0,8433	2,9440	0,6501	0,1416	0,5977	-0,3556	0,0289	0,0729
0,58	1,0127	0,8557	2,9940	0,6488	0,1423	0,5886	-0,3654	0,0222	0,0874
0,57	1,0189	0,8684	3,0448	0,6470	0,1431	0,5800	-0,3744	0,0115	0,1087
0,56	1,0250	0,8810	3,0956	0,6448	0,1441	0,5722	-0,3825	0,0077	0,1381
0,55	1,0312	0,8938	3,1471	0,6422	0,1452	0,5647	-0,3898	-0,0004	0,1775

Для вычисления  $D_H$ ,  $D_T$  и  $D_R$  нужно задать функцию  $m$ .

6. Оценим декремент затухания амплитуды чандлеровского движения полюса для той же модели Земли. Интересно было бы учесть еще вязкость ядра, однако задача значительно усложнилась бы. Роль вязкости может быть значительной при малом времени релаксации в ядре.

Таблица 2

$r$	$\frac{\partial H}{\partial H_0}$	$\frac{\partial T}{\partial H_0}$	$\frac{\partial R}{\partial H_0}$	$\frac{\partial L}{\partial H_0}$	$\frac{\partial M}{\partial H_0}$	$\frac{\partial N}{\partial H_0}$	$\frac{\partial H}{\partial T_0}$	$\frac{\partial T}{\partial T_0}$	$\frac{\partial R}{\partial T_0}$	$\frac{\partial L}{\partial T_0}$	$\frac{\partial M}{\partial T_0}$	$\frac{\partial N}{\partial T_0}$
1,00	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,99	0,9923	0,0226	0,0000	0,0000	0,0011	0,0172	-0,0100	1,0209	-0,0001	0,0000	0,0565	-0,0002
0,98	0,9842	0,0463	0,0000	-0,0002	0,0047	0,0328	-0,0203	1,0440	-0,0007	0,0000	0,1110	-0,0008
0,97	0,9756	0,0708	-0,0001	-0,0005	0,0102	0,0467	-0,0309	1,0692	-0,0015	0,0000	0,1639	-0,0016
0,96	0,9666	0,0962	-0,0002	-0,0008	0,0178	0,0594	-0,0418	1,0970	-0,0026	0,0000	0,2155	-0,0028
0,95	0,9572	0,1229	-0,0005	-0,0013	0,0297	0,0707	-0,0532	1,1283	-0,0042	0,0000	0,2699	-0,0042
0,94	0,9474	0,1497	-0,0006	-0,0019	0,0381	0,0810	-0,0649	1,1612	-0,0056	0,0000	0,3140	-0,0057
0,93	0,9372	0,1785	-0,0012	-0,0025	0,0538	0,0900	-0,0774	1,2001	-0,0079	0,0000	0,3674	-0,0077
0,92	0,9268	0,2075	-0,0017	-0,0033	0,0678	0,0978	-0,0906	1,2406	-0,0100	-0,0001	0,4071	-0,0096
0,91	0,9162	0,2379	-0,0023	-0,0042	0,0850	0,1046	-0,1048	1,2888	-0,0128	-0,0002	0,4541	-0,0118
0,90	0,9053	0,2689	-0,0032	-0,0052	0,1019	0,1103	-0,1196	1,3402	-0,0154	-0,0002	0,4927	-0,0139
0,89	0,8939	0,3014	-0,0042	-0,0063	0,1216	0,1152	-0,1362	1,3988	-0,0186	-0,0002	0,5335	-0,0162
0,88	0,8825	0,3353	-0,0054	-0,0076	0,1419	0,1194	-0,1541	1,4644	-0,0222	-0,0005	0,5729	-0,0186
0,87	0,8706	0,3710	-0,0069	-0,0089	0,1642	0,1228	-0,1734	1,5375	-0,0257	-0,0005	0,6119	-0,0212
0,86	0,8585	0,4084	-0,0085	-0,0104	0,1872	0,1257	-0,1942	1,6182	-0,0297	-0,0005	0,6496	-0,0238
0,85	0,8458	0,4483	-0,0104	-0,0120	0,2122	0,1282	-0,2164	1,7047	-0,0336	-0,0006	0,6866	-0,0263
0,84	0,8325	0,4909	-0,0125	-0,0136	0,2391	0,1304	-0,2408	1,8024	-0,0382	-0,0009	0,7309	-0,0292
0,83	0,8188	0,5358	-0,0148	-0,0154	0,2673	0,1323	-0,2652	1,8986	-0,0422	-0,0009	0,7681	-0,0318
0,82	0,8041	0,5863	-0,0176	-0,0174	0,2998	0,1339	-0,2928	2,0114	-0,0474	-0,0014	0,8165	-0,0351
0,81	0,7889	0,6392	-0,0204	-0,0195	0,3334	0,1352	-0,3216	2,1297	-0,0522	-0,0017	0,8650	-0,0383
0,80	0,7725	0,6981	-0,0238	-0,0216	0,3715	0,1362	-0,3530	2,2594	-0,0578	-0,0020	0,9184	-0,0418
0,79	0,7557	0,7593	-0,0272	-0,0239	0,4102	0,1370	-0,3854	2,3944	-0,0628	-0,0023	0,9711	-0,0453
0,78	0,7376	0,8270	-0,0313	-0,0264	0,4532	0,1375	-0,4208	2,5431	-0,0687	-0,0027	1,0295	-0,0490

Таблица 2 (продолжение)

$r$	$\frac{\partial \bar{H}}{\partial H_0}$	$\frac{\partial \bar{T}}{\partial H_0}$	$\frac{\partial \bar{R}}{\partial H_0}$	$\frac{\partial \bar{L}}{\partial H_0}$	$\frac{\partial \bar{M}}{\partial H_0}$	$\frac{\partial \bar{N}}{\partial H_0}$	$\frac{\partial \bar{H}}{\partial T_0}$	$\frac{\partial \bar{T}}{\partial T_0}$	$\frac{\partial \bar{R}}{\partial T_0}$	$\frac{\partial \bar{L}}{\partial T_0}$	$\frac{\partial \bar{M}}{\partial T_0}$	$\frac{\partial \bar{N}}{\partial T_0}$
0,77	0,7190	0,8977	-0,0349	-0,0286	0,4982	0,1377	-0,4572	2,6961	-0,0730	-0,0019	1,0884	-0,0528
0,76	0,6987	0,9774	-0,0396	-0,0314	0,5478	0,1376	-0,4974	2,8689	-0,0793	-0,0026	1,1542	-0,0568
0,75	0,6776	1,0618	-0,0442	-0,0341	0,6002	0,1373	-0,5396	3,0510	-0,0850	-0,0027	1,2225	-0,0609
0,74	0,6547	1,1561	-0,0498	-0,0374	0,6576	0,1367	-0,5855	3,2521	-0,0918	-0,0033	1,2967	-0,0653
0,73	0,6304	1,2580	-0,0556	-0,0407	0,7190	0,1359	-0,6346	3,4692	-0,0990	-0,0043	1,3756	-0,0699
0,72	0,6047	1,3681	-0,0616	-0,0441	0,7847	0,1347	-0,6867	3,7014	-0,1059	-0,0048	1,4597	-0,0746
0,71	0,5770	1,4891	-0,0683	-0,0478	0,8558	0,1333	-0,7423	3,9512	-0,1130	-0,0052	1,5489	-0,0794
0,70	0,5474	1,6200	-0,0752	-0,0516	0,9316	0,1316	-0,8025	4,2243	-0,1208	-0,0060	1,6451	-0,0846
0,69	0,5158	1,7637	-0,0828	-0,0558	1,0137	0,1297	-0,8662	4,5181	-0,1285	-0,0068	1,7483	-0,0898
0,68	0,4811	1,9244	-0,0915	-0,0606	1,1031	0,1273	-0,9357	4,8421	-0,1378	-0,0083	1,8601	-0,0955
0,67	0,4445	2,0967	-0,0999	-0,0651	1,1986	0,1248	-1,0094	5,1887	-0,1461	-0,0090	1,9792	-0,1013
0,66	0,4048	2,2874	-0,1090	-0,0700	1,3026	0,1220	-1,0885	5,5665	-0,1547	-0,0008	2,1089	-0,1073
0,65	0,3616	2,4980	-0,1195	-0,0756	1,4157	0,1190	-1,1750	5,9821	-0,1654	-0,0115	2,2514	-0,1134
0,64	0,3152	2,7297	-0,1301	-0,0813	1,5371	0,1154	-1,2671	6,4340	-0,1754	-0,0129	2,4030	-0,1201
0,63	0,2638	2,9887	-0,1414	-0,0873	1,6714	0,1116	-1,3643	6,9119	-0,1848	-0,0138	2,5642	-0,1266
0,62	0,2108	3,2596	-0,1536	-0,0941	1,8109	0,1078	-1,4738	7,4577	-0,1975	-0,0162	2,7472	-0,1340
0,61	0,1506	3,5743	-0,1663	-0,1008	1,9682	0,1032	-1,5852	8,0240	-0,2077	-0,0173	2,9346	-0,1411
0,60	0,0861	3,9152	-0,1803	-0,1084	2,1372	0,0985	-1,7124	8,6758	-0,2208	-0,0194	3,1516	-0,1492
0,59	0,0157	4,2936	-0,1957	-0,1170	2,3224	0,0936	-1,8464	9,3716	-0,2351	-0,0226	3,3827	-0,1570
0,58	-0,0608	4,7148	-0,2107	-0,1251	2,5249	0,0881	-1,9919	10,145	-0,2476	-0,0242	3,6383	-0,1656
0,57	-0,1428	5,1711	-0,2265	-0,1339	2,7425	0,0824	-2,1445	10,964	-0,2595	-0,0253	3,9079	-0,1742
0,56	-0,2329	5,6789	-0,2446	-0,1441	2,9806	0,0763	-2,3130	11,877	-0,2754	-0,0286	4,2068	-0,1834
0,55	-0,3325	6,2516	-0,2632	-0,1547	3,2487	0,0700	-2,4977	12,899	-0,2908	-0,0315	4,5494	-0,1927

Таблица 2 (продолжение)

$r$	$\frac{\partial \bar{H}}{\partial R_0}$	$\frac{\partial \bar{T}}{\partial R_0}$	$\frac{\partial \bar{R}}{\partial R_0}$	$\frac{\partial \bar{L}}{\partial R_0}$	$\frac{\partial \bar{M}}{\partial R_0}$	$\frac{\partial \bar{N}}{\partial R_0}$	$\frac{\partial \bar{H}}{\partial L_0}$	$\frac{\partial \bar{T}}{\partial L_0}$	$\frac{\partial \bar{R}}{\partial L_0}$	$\frac{\partial \bar{L}}{\partial L_0}$	$\frac{\partial \bar{M}}{\partial L_0}$	$\frac{\partial \bar{N}}{\partial L_0}$
1,00	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000
0,99	0,0179	-0,0004	1,0003	0,0101	0,0000	0,0001	0,0011	-0,1090	0,0600	1,0003	-0,0030	0,0000
0,98	0,0360	-0,0014	1,0012	0,0204	0,0000	0,0006	0,0044	-0,2223	0,1201	1,0012	-0,0117	0,0001
0,97	0,0544	-0,0033	1,0028	0,0309	-0,0001	0,0013	0,0100	-0,3403	0,1803	1,0028	-0,0257	0,0003
0,96	0,0728	-0,0059	1,0049	0,0417	-0,0002	0,0021	0,0180	-0,4637	0,2408	1,0051	-0,0465	0,0006
0,95	0,0916	-0,0096	1,0078	0,0527	-0,0004	0,0031	0,0284	-0,5935	0,3018	1,0080	-0,0769	0,0012
0,94	0,1107	-0,0142	1,0113	0,0640	-0,0009	0,0042	0,0414	-0,7277	0,3627	1,0117	-0,1008	0,0018
0,93	0,1301	-0,0200	1,0155	0,0756	-0,0012	0,0055	0,0573	-0,8715	0,4244	1,0162	-0,1370	0,0028
0,92	0,1504	-0,0271	1,0204	0,0874	-0,0016	0,0068	0,0764	-1,0242	0,4865	1,0215	-0,1717	0,0038
0,91	0,1713	-0,0358	1,0260	0,0996	-0,0021	0,0082	0,0987	-1,1872	0,5489	1,0277	-0,2088	0,0052
0,90	0,1929	-0,0461	1,0323	0,1120	-0,0021	0,0095	0,1241	-1,3606	0,6118	1,0347	-0,2454	0,0066
0,89	0,2154	-0,0587	1,0394	0,1249	-0,0031	0,0110	0,1543	-1,5483	0,6761	1,0427	-0,2904	0,0084
0,88	0,2387	-0,0729	1,0474	0,1381	-0,0034	0,0124	0,1883	-1,7483	0,7408	1,0518	-0,3345	0,0102
0,87	0,2629	-0,0901	1,0561	0,1517	-0,0046	0,0138	0,2270	-1,9653	0,8063	1,0616	-0,3852	0,0126
0,86	0,2881	-0,1094	1,0656	0,1657	-0,0055	0,0152	0,2704	-2,1969	0,8729	1,0727	-0,4360	0,0150
0,85	0,3139	-0,1311	1,0760	0,1802	-0,0063	0,0168	0,3182	-2,4421	0,9400	1,0847	-0,4899	0,0176
0,84	0,3404	-0,1561	1,1087	0,1951	-0,0088	0,0184	0,3722	-2,7094	1,0094	1,0983	-0,5596	0,0210
0,83	0,3670	-0,1818	1,0995	0,2106	-0,0095	0,0200	0,4283	-2,9754	1,0781	1,1127	-0,6180	0,0238
0,82	0,3946	-0,2119	1,1128	0,2265	-0,0125	0,0218	0,4929	-3,2762	1,1503	1,1292	-0,7012	0,0280
0,81	0,4226	-0,2439	1,1269	0,2431	-0,0149	0,0235	0,5609	-3,5845	1,2223	1,1467	-0,7823	0,0320
0,80	0,4515	-0,2803	1,1422	0,2603	-0,0187	0,0255	0,6365	-3,9218	1,2972	1,1657	-0,8792	0,0370
0,79	0,4810	-0,3190	1,1584	0,2781	-0,0221	0,0275	0,7166	-4,2716	1,3723	1,1862	-0,9770	0,0420
0,78	0,5114	-0,3619	1,1757	0,2966	-0,0267	0,0296	0,8047	-4,6512	1,4499	1,2083	-1,0890	0,0476

Таблица 2 (продолжение)

$r$	$\frac{\partial \bar{H}}{\partial R_0}$	$\frac{\partial \bar{T}}{\partial R_0}$	$\frac{\partial \bar{R}}{\partial R_0}$	$\frac{\partial \bar{L}}{\partial R_0}$	$\frac{\partial \bar{M}}{\partial R_0}$	$\frac{\partial \bar{N}}{\partial R_0}$	$\frac{\partial \bar{H}}{\partial L_0}$	$\frac{\partial \bar{T}}{\partial L_0}$	$\frac{\partial \bar{R}}{\partial L_0}$	$\frac{\partial \bar{L}}{\partial L_0}$	$\frac{\partial \bar{M}}{\partial L_0}$	$\frac{\partial \bar{N}}{\partial L_0}$
0,77	0,5426	-0,4079	1,1941	0,3158	-0,0314	0,0317	0,8972	-5,0438	1,5267	1,2303	-1,2051	0,0535
0,76	0,5749	-0,4599	1,2139	0,3359	-0,0376	0,0338	0,9997	-5,4801	1,6086	1,2567	-1,3383	0,0600
0,75	0,6082	-0,5155	1,2347	0,3567	-0,0443	0,0361	1,1083	-5,9374	1,6907	1,2836	-1,4788	0,0669
0,74	0,6429	-0,5766	1,2570	0,3785	-0,0518	0,0384	1,2274	-6,4388	1,7770	1,3140	-1,6349	0,0746
0,73	0,6790	-0,6447	1,2810	0,4015	-0,0606	0,0409	1,3557	-6,9786	1,8662	1,3471	-1,8040	0,0829
0,72	0,7162	-0,7174	1,3058	0,4252	-0,0703	0,0433	1,4924	-7,5532	1,9565	1,3813	-1,9868	0,0916
0,71	0,7549	-0,7970	1,3324	0,4501	-0,0809	0,0459	1,6396	-8,1726	2,0498	1,4183	-2,1845	0,1011
0,70	0,7955	-0,8850	1,3606	0,4764	-0,0937	0,0485	1,7988	-8,8460	2,1467	1,4585	-2,4005	0,1112
0,69	0,8377	-0,9807	1,3903	0,5038	-0,1077	0,0512	1,9689	-9,5716	2,2462	1,5014	-2,6354	0,1218
0,68	0,8818	-1,0848	1,4219	0,5327	-0,1232	0,0540	2,1538	-10,366	2,3514	1,5487	-2,8921	0,1335
0,67	0,9286	-1,2016	1,4556	0,5633	-0,1416	0,0568	2,3519	-11,223	2,4584	1,5982	-3,1706	0,1458
0,66	0,9774	-1,3263	1,4908	0,5953	-0,1613	0,0598	2,5649	-12,153	2,5686	1,6511	-3,4750	0,1586
0,65	1,0290	-1,4653	1,5286	0,6292	-0,1845	0,0628	2,7968	-13,175	2,6868	1,7097	-3,8121	0,1721
0,64	1,0829	-1,6165	1,5677	0,6647	-0,2092	0,0660	3,0445	-14,287	2,8064	1,7712	-4,1735	0,1873
0,63	1,1397	-1,7794	1,6096	0,7025	-0,2372	0,0691	3,3089	-15,475	2,9296	1,8365	-4,5657	0,2022
0,62	1,2015	-1,9676	1,6544	0,7427	-0,2712	0,0726	3,6027	-16,816	3,0639	1,9099	-5,0066	0,2191
0,61	1,2639	-2,1596	1,7009	0,7850	-0,3037	0,0759	3,9068	-18,227	3,1971	1,9851	-5,4672	0,2362
0,60	1,3333	-2,3667	1,7507	0,8299	-0,3473	0,0796	4,2495	-19,839	3,3414	2,0681	-6,0000	0,2552
0,59	1,4054	-2,6276	1,8037	0,8782	-0,3919	0,0832	4,6134	-21,572	3,4942	2,1599	-6,5716	0,2743
0,58	1,4828	-2,8986	1,8590	0,9290	-0,4442	0,0871	5,0084	-23,500	3,6478	2,2541	-7,2061	0,2955
0,57	1,5640	-3,1878	1,9176	0,9832	-0,5007	0,0909	5,4252	-25,554	3,8069	2,3548	-7,8836	0,3167
0,56	1,6505	-3,5069	1,9795	1,0410	-0,5636	0,0949	5,8816	-27,834	3,9792	2,4667	-8,6330	0,3398
0,55	1,7461	-3,8752	2,0465	1,1036	-0,6413	0,0992	6,3859	-30,413	4,1605	2,5880	-9,4980	0,3635

Таблица 2 (продолжение)

$r$	$\frac{\partial \bar{H}}{\partial M_0}$	$\frac{\partial \bar{T}}{\partial M_0}$	$\frac{\partial \bar{R}}{\partial M_0}$	$\frac{\partial \bar{L}}{\partial M_0}$	$\frac{\partial \bar{M}}{\partial M_0}$	$\frac{\partial \bar{N}}{\partial M_0}$	$\frac{\partial \bar{H}}{\partial N_0}$	$\frac{\partial \bar{T}}{\partial N_0}$	$\frac{\partial \bar{R}}{\partial N_0}$	$\frac{\partial \bar{L}}{\partial N_0}$	$\frac{\partial \bar{M}}{\partial N_0}$	$\frac{\partial \bar{N}}{\partial N_0}$
1,00	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000
0,99	-0,0005	0,0264	-0,0059	0,0000	1,0006	-0,0037	-0,0113	-0,0010	-0,0003	-0,0060	0,0608	0,9872
0,98	-0,0017	0,0556	-0,0119	0,0000	1,0024	-0,0072	-0,0218	-0,0028	-0,0015	-0,0122	0,1232	0,9742
0,97	-0,0039	0,0877	-0,0178	-0,0001	1,0054	-0,0108	-0,0315	-0,0052	-0,0033	-0,0185	0,1873	0,9609
0,96	-0,0070	0,1232	-0,0237	-0,0003	1,0106	-0,0143	-0,0404	-0,0079	-0,0059	-0,0251	0,2533	0,9474
0,95	-0,0110	0,1622	-0,0298	-0,0005	1,0182	-0,0177	-0,0487	-0,0121	-0,0090	-0,0317	0,3147	0,9338
0,94	-0,0160	0,2047	-0,0358	-0,0007	1,0252	-0,0212	-0,0564	-0,0134	-0,0136	-0,0386	0,3934	0,9196
0,93	-0,0221	0,2523	-0,0419	-0,0009	1,0337	-0,0246	-0,0636	-0,0171	-0,0184	-0,0458	0,4591	0,9056
0,92	-0,0296	0,3048	-0,0480	-0,0013	1,0390	-0,0278	-0,0701	-0,0201	-0,0243	-0,0533	0,5329	0,8914
0,91	-0,0387	0,3649	-0,0543	-0,0017	1,0482	-0,0311	-0,0758	-0,0236	-0,0312	-0,0612	0,6072	0,8769
0,90	-0,0493	0,4310	-0,0606	-0,0020	1,0561	-0,0342	-0,0806	-0,0271	-0,0390	-0,0695	0,6830	0,8624
0,89	-0,0621	0,5053	-0,0672	-0,0025	1,0662	-0,0373	-0,0848	-0,0300	-0,0478	-0,0781	0,7616	0,8478
0,88	-0,0769	0,5893	-0,0742	-0,0031	1,0793	-0,0404	-0,0883	-0,0306	-0,0577	-0,0872	0,8436	0,8330
0,87	-0,0938	0,6818	-0,0810	-0,0036	1,0926	-0,0437	-0,0912	-0,0294	-0,0687	-0,0968	0,9278	0,8181
0,86	-0,1130	0,7837	-0,0880	-0,0042	1,1063	-0,0467	-0,0937	-0,0260	-0,0808	-0,1067	1,0136	0,8032
0,85	-0,1339	0,8922	-0,0950	-0,0048	1,1202	-0,0496	-0,0968	-0,0169	-0,0940	-0,1171	1,1020	0,7882
0,84	-0,1568	1,0096	-0,1023	-0,0057	1,1395	-0,0529	-0,1000	-0,0043	-0,1080	-0,1278	1,1905	0,7732
0,83	-0,1804	1,1274	-0,1090	-0,0064	1,1549	-0,0558	-0,1041	0,0164	-0,1233	-0,1388	1,2844	0,7582
0,82	-0,2072	1,2594	-0,1166	-0,0075	1,1799	-0,0592	-0,1093	0,0452	-0,1399	-0,1503	1,3825	0,7429
0,81	-0,2358	1,3988	-0,1241	-0,0086	1,2073	-0,0625	-0,1158	0,0839	-0,1576	-0,1622	1,4860	0,7275
0,80	-0,2668	1,5480	-0,1319	-0,0097	1,2388	-0,0661	-0,1237	0,1329	-0,1768	-0,1744	1,5947	0,7119
0,79	-0,2992	1,7018	-0,1392	-0,0108	1,2698	-0,0696	-0,1321	0,1864	-0,1967	-0,1872	1,7032	0,6965
0,78	-0,3346	1,8686	-0,1471	-0,0122	1,3062	-0,0732	-0,1427	0,2541	-0,2182	-0,2006	1,8188	0,6808



Таблица 2 (продолжение)

$r$	$\frac{\partial \bar{H}}{\partial \Lambda_0}$	$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \Lambda_0}$	$\frac{\partial \bar{R}}{\partial \Lambda_0}$	$\frac{\partial \bar{L}}{\partial \Lambda_0}$	$\frac{\partial \bar{M}}{\partial \Lambda_0}$	$\frac{\partial \bar{N}}{\partial \Lambda_0}$	$\frac{\partial \bar{H}}{\partial N_0}$	$\frac{\partial \bar{T}}{\partial N_0}$	$\frac{\partial \bar{R}}{\partial N_0}$	$\frac{\partial \bar{L}}{\partial N_0}$	$\frac{\partial \bar{M}}{\partial N_0}$	$\frac{\partial \bar{N}}{\partial N_0}$
0,77	-0,3713	2,0399	-0,1538	-0,0126	1,3439	-0,0769	-0,1544	0,3293	-0,2403	-0,2141	1,9376	0,6652
0,76	-0,4118	2,2292	-0,1621	-0,0143	1,3881	-0,0806	-0,1686	0,4198	-0,2642	-0,2286	2,0633	0,6495
0,75	-0,4543	2,4272	-0,1697	-0,0155	1,4350	-0,0845	-0,1845	0,5225	-0,2890	-0,2435	2,1940	0,6336
0,74	-0,5006	2,6432	-0,1784	-0,0174	1,4877	-0,0886	-0,2037	0,6435	-0,3160	-0,2595	2,3322	0,6175
0,73	-0,5501	2,8739	-0,1873	-0,0195	1,5454	-0,0928	-0,2252	0,7797	-0,3440	-0,2760	2,4774	0,6016
0,72	-0,6027	3,1189	-0,1959	-0,0213	1,6081	-0,0971	-0,2499	0,9340	-0,3731	-0,2930	2,6299	0,5853
0,71	-0,6589	3,3809	-0,2048	-0,0232	1,6761	-0,1015	-0,2783	1,1091	-0,4044	-0,3112	2,7911	0,5690
0,70	-0,7194	3,6642	-0,2142	-0,0254	1,7508	-0,1062	-0,3102	1,3048	-0,4367	-0,3300	2,9610	0,5525
0,69	-0,7837	3,9673	-0,2236	-0,0277	1,8326	-0,1109	-0,3459	1,5250	-0,4706	-0,3500	3,1410	0,5360
0,68	-0,8534	4,2987	-0,2345	-0,0308	1,9226	-0,1161	-0,3876	1,7775	-0,5073	-0,3713	3,3337	0,5191
0,67	-0,9275	4,6519	-0,2445	-0,0332	2,0200	-0,1213	-0,4336	2,0567	-0,5449	-0,3935	3,5372	0,5021
0,66	-1,0068	5,0341	-0,2547	-0,0359	2,1276	-0,1266	-0,4855	2,3703	-0,5840	-0,4165	3,7555	0,4849
0,65	-1,0933	5,4523	-0,2670	-0,0395	2,2475	-0,1321	-0,5443	2,7230	-0,6267	-0,4419	3,9898	0,4678
0,64	-1,1852	5,9046	-0,2787	-0,0429	2,3763	-0,1382	-0,6095	3,1157	-0,6703	-0,4680	4,2384	0,4500
0,63	-1,2819	6,3807	-0,2899	-0,0460	2,5140	-0,1440	-0,6880	3,5827	-0,7176	-0,4962	4,5182	0,4317
0,62	-1,3910	6,9238	-0,3043	-0,0506	2,6738	-0,1506	-0,7624	4,0326	-0,7648	-0,5257	4,7907	0,4144
0,61	-1,5013	7,4829	-0,3163	-0,0542	2,8365	-0,1570	-0,8592	4,6090	-0,8168	-0,5572	5,1116	0,3953
0,60	-1,6275	8,1259	-0,3313	-0,0589	3,0286	-0,1643	-0,9594	5,2114	-0,8704	-0,5908	5,4437	0,3767
0,59	-1,7600	8,8094	-0,3474	-0,0648	3,2338	-0,1713	-1,0720	5,8905	-0,9279	-0,6274	5,8070	0,3578
0,58	-1,9036	9,5670	-0,3621	-0,0693	3,4624	-0,1791	-1,1972	6,6543	-0,9859	-0,6646	6,2032	0,3383
0,57	-2,0541	10,368	-0,3762	-0,0736	3,7046	-0,1869	-1,3352	7,4941	-1,0476	-0,7049	6,6282	0,3185
0,56	-2,2199	11,258	-0,3943	-0,0800	3,9748	-0,1953	-1,4882	8,4291	-1,1146	-0,7492	7,0900	0,2983
0,55	-2,4013	12,252	-0,4122	-0,0865	4,2865	-0,2037	-1,6594	9,4861	-1,1834	-0,7958	7,6051	0,2780

Воспользуемся основными выводами и обозначениями, изложенными в статье [1]. Дополнительно нужно учесть только сдвиги фаз смещений в оболочке по отношению к фазе полюса главной оси инерции. Значение числа Лява  $k$ , как выяснено в работе [1], близко к его статическому значению. Поэтому можно воспользоваться изложенной теорией.

Примем, как это следует из теории малых колебаний, что амплитуда свободной нутации убывает со временем как  $e^{-\lambda t}$ . При свободной нутации правая часть в (78) равна нулю, а при вычислении произведений инерции по формуле (62) и в формуле (78) [1] нужно принять

$$V_e + \frac{\sigma + \omega}{\omega} \varphi = \frac{\sigma + \omega}{\omega} \varphi.$$

Это эквивалентно замене

$$\frac{1}{3} m a^2 \kappa = - \frac{\sigma + \omega}{\omega} \frac{C - A}{k_0} \varepsilon.$$

Из (50) [1] следует, что  $\nu$  и  $\kappa$  — величины одного порядка, т.е.  $\nu$  имеет порядок  $\frac{C - A}{C} \varepsilon$ , поэтому

$$\beta = \frac{\omega}{\omega + \sigma} \varepsilon + \frac{\nu \sigma}{2(\sigma + \omega)} \approx \frac{\omega}{\omega + \sigma} \varepsilon.$$

Для компонент кинетического момента теперь получаем

$$\begin{aligned} M_x &= \omega \varepsilon e^{-\lambda t} (m_1 \cos \sigma t + m_2 \sin \sigma t), \\ M_y &= \omega \varepsilon e^{-\lambda t} (m_1 \sin \sigma t - m_2 \cos \sigma t), \\ M_z &= \omega C, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} m_1 &= A - \frac{\sigma}{\omega + \sigma} A_1 + (C - A) \frac{k}{k_0} \frac{\omega + \sigma}{\omega} \cos \varphi, \\ m_2 &= (C - A) \frac{k}{k_0} \frac{\omega + \sigma}{\omega} \sin \varphi, \end{aligned} \quad (18)$$

$k_0$  — значение  $k$  для целиком жидкой Земли. Уравнения моментов удовлетворяются, если

$$\begin{aligned} \lambda m_1 &= (\omega + \sigma) m_2, \\ \lambda m_2 &= \omega C - (\omega + \sigma) m_1. \end{aligned} \quad (19)$$

Из этих уравнений получаем

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{\omega} &= \frac{C - A}{A} \frac{k}{k_0} \sin \varphi, \\ \frac{C}{m_1} &= \frac{(\omega + \sigma)^2 + \lambda^2}{\omega(\omega + \sigma)} \approx \frac{\omega + \sigma}{\omega}. \end{aligned} \quad (20)$$

Следовательно,

$$\frac{\sigma}{\omega} = \frac{C - A}{A - A_1} \left( 1 - \frac{k}{k_0} \cos \varphi \right). \quad (21)$$

Таблица 3

$\tau$	$\chi_1$	$\chi_{ii}$	$\frac{D'_{II}}{m}$	$\frac{D'_I}{m}$	$\frac{D'_T}{m}$	$\frac{D'_R}{m}$	$\frac{D'_L}{m}$	$\frac{D'_M}{m}$	$\frac{D'_N}{m}$	$\frac{\Delta D'_{II}}{m}$	$\frac{\Delta D'T}{m}$	$\frac{D'_{II}}{m}$
1,00	+0,8681	0,0000	-1,5755	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	+1,0798	-1,5115	-9,58	0,00	0,00
0,98	0,7764	+0,0558	-1,2298	-0,0434	-0,1617	-0,0434	+0,0465	1,0100	-1,2017	-35,64	-4,69	-1,26
0,96	0,7048	0,0947	-1,0054	-0,0683	-0,2341	-0,0683	0,1421	0,9390	-0,9422	-10,78	2,51	0,73
0,94	0,6480	0,1219	-0,8522	-0,0816	-0,2597	-0,0816	0,2523	0,8706	-0,7125	-20,64	6,29	1,98
0,92	0,6029	0,1289	-0,6786	-0,0824	-0,1574	-0,0824	0,2786	0,8220	-0,5125	-16,44	3,81	2,00
0,90	0,5662	0,1307	-0,5505	-0,0795	-0,0625	-0,0795	0,2877	0,7828	-0,3263	-5,90	-0,67	0,85
0,88	0,5278	0,1292	-0,4411	-0,0740	+0,0206	-0,0740	0,2749	0,7494	-0,1394	-12,78	+0,60	2,14
0,86	0,4949	0,1247	-0,3485	-0,0678	+0,0965	-0,0678	0,2428	0,7236	+0,0374	-7,22	+2,00	1,40
0,81	0,3980	0,1354	-0,2591	-0,0317	-0,0132	-0,0317	0,5485	0,5054	0,4650	-19,99	-1,02	-2,45
0,76	0,3093	0,1296	-0,1626	+0,0265	-0,0869	+0,0265	0,7941	0,3028	0,8301	-1,57	0,84	+0,26
0,71	0,2071	0,1115	-0,0457	0,1099	-0,1533	0,1099	0,9927	+0,1124	1,1522	-4,44	14,89	10,68
0,66	0,0614	0,0844	+0,1356	0,2127	-0,1633	0,2127	1,0155	-0,0151	1,4866	+1,31	1,57	2,05
0,61	-0,1793	0,0500	0,4614	0,3237	-0,0286	0,3237	0,6369	+0,0078	1,9556	+35,59	2,21	24,97
0,56	-0,6232	0,0087	1,1082	0,4170	+0,4399	0,4170	-0,6409	0,3619	2,8500	+21,77	8,64	8,19
0,55	-0,7521	-0,0004	1,3064	0,4278	+0,6078	0,4278	-1,0958	0,5061	3,1310	+6,53	3,04	2,14

7. Мнимая часть  $m$  модуля сдвига определяется реологическими свойствами Земли. Обычно предполагают, что Земля обладает свойствами максвелловского тела, т.е. что напряжение сдвига  $p$  и деформация сдвига  $\varepsilon$  связаны дифференциальным уравнением

$$2\mu \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{dp}{dt} + \frac{p}{\tau}, \quad (22)$$

где  $\tau$  — время релаксации [2].

При гармоническом колебании с частотой  $\nu$  это уравнение приводит к закону Гука с комплексным значением модуля сдвига  $\bar{\mu}$ , причем

$$\bar{\mu} = \mu_{\infty} \frac{1 + \frac{i}{\tau\nu}}{1 + \left(\frac{1}{\tau\nu}\right)^2} = \mu + im, \quad (23)$$

или

$$\bar{\mu} = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\psi + i \sin 2\psi) \mu_{\infty}, \quad (24)$$

где  $\operatorname{tg} \psi = 1/\tau\nu$ .

При изменении времени релаксации от  $\infty$  ( $\psi = 0$ ) до 0 ( $\psi = \pi/2$ ) действительная часть модуля сдвига меняется от  $\mu_{\infty}$  (статическое значение) до 0. Мнимая часть возрастает от 0 до  $1/2\mu_{\infty}$  (при  $\tau\nu = 1$ ) и затем убывает до нуля.

По Жаркову [3], изменение  $m$  с глубиной можно выразить формулой

$$m = \left(\frac{\mu}{\tau\nu}\right)_{r=1} \cdot 10^{\alpha(r-1)}. \quad (25)$$

Далее при помощи табл. 3 вычислены мнимые части в  $h$ ,  $k$  и  $l$ , а затем тангенсы углов сдвига фаз. Результаты приведены в табл. 4 ( $\tau/T$  — отношение времени релаксации к периоду колебания). В столбце « $\tau/T$  по  $\delta$ » это отношение вычислено для сдвига фазы в  $1/57,3$ , а в столбце « $\tau/T$  по  $k$ » — при сдвиге фазы в  $1/16,5$  [4].

8. Время релаксации  $\tau$  позволяет сравнивать колебательные процессы с разными частотами, параметр  $\alpha$  — сравнивать разнородные наблюдения.

Фактические данные, на основе которых можно судить о сдвигах фаз или рассеянии энергии, пока очень бедны. Вековое замедление вращения Земли позволяет оценить верхний предел рассеяния энергии в оболочке (главным образом за счет полусуточных приливов). Вариации силы тяжести наблюдаются теперь настолько точно, что наличие сдвига фазы в оболочке становится почти несомненным. В ближайшие годы эти материалы станут основными для изучения вязкости Земли. Затухание чандлеровского движения полюса, период которого почти в 1000 раз больше периода полусуточных приливов, позволит судить о том диапазоне частот, который можно охватить формулой (23). Сдвиг фазы в вариациях наклонов определяется неуверенно. По знаку он должен быть противоположен сдвигу фазы в вариациях силы тяжести (см. табл. 4).

Таблица 4

$\alpha$	$\delta$	$\gamma$	$k$	$l$	$\tau/T$ по $\delta$	$\tau/T$ по $k$
0	$25 \cdot 10^{-3}$	$-20 \cdot 10^{-3}$	$26 \cdot 10^{-3}$	$85 \cdot 10^{-4}$	1,4	0,43
2	$38 \cdot 10^{-3}$	$-16 \cdot 10^{-3}$	$29 \cdot 10^{-3}$	$92 \cdot 10^{-4}$	2,2	0,48
4	$43 \cdot 10^{-3}$	$-17 \cdot 10^{-3}$	$30 \cdot 10^{-3}$	$106 \cdot 10^{-4}$	2,5	0,50
8	$47 \cdot 10^{-3}$	$-18 \cdot 10^{-3}$	$30 \cdot 10^{-3}$	$121 \cdot 10^{-4}$	2,7	0,50

Запаздывание фазы в вариациях силы тяжести получается около  $4^m$ , т.е. около  $1/57,3$  по суточным приливам (или меньше, если будет обнаружено запаздывание инструментального происхождения). Это дает время релаксации (табл. 4) от 1,4 до 2,7 дней (или больше).

Вековое замедление вращения Земли указывает на запаздывание фазы полусуточного прилива не более  $1/16,5$  [4]. Основную роль играют полусуточные приливы, и тогда  $\tau$  получается примерно равным 1 дню (или более).

Максимальное значение декремента затухания движения полюса получаем из (20) при  $\sin \varphi = 1$ :

$$\lambda = \frac{C - A}{A} \frac{k}{k_0} \omega,$$

т.е. затухание в  $e$  раз за 800 дней (2,2 года) или более.

В этом случае при  $\tau$  порядка дня

$$m = \frac{\tau \sigma}{1 + (\tau \sigma)^2} \mu \approx \tau \sigma \mu = 0,0276 \frac{\tau}{T_\sigma},$$

и если  $\mu$  в (3) взято по сейсмическим частотам, то с формальной стороны применение изложенного метода оправдано. Но в этом случае оболочку уже не считаем максвелловским телом, так как следовало бы действительную часть (интегралы  $\Phi_i$ ) определить для частоты  $\nu$ .

При  $\tau$ , равном одному дню, затухание ничтожно. Иной результат получится или при наличии нескольких времен релаксации, или в точной теории максвелловского тела с одним временем релаксации (если сохранится значение чандлеровского периода). Повидимому, результаты наблюдений не находятся в противоречии с выводом об очень малом значении декремента затухания.

Время релаксации возрастет, если сдвиг фазы вариаций силы тяжести в основном связан с запаздыванием в приборе, а замедление вращения Земли — с приливным трением в ее водной оболочке. Малые времена релаксации, получающиеся из современных наблюдений вариаций силы тяжести, заставляют вспомнить о теории Миланковича [5], объяснявшего вековое движение полюса перемещением земной коры относительно оболочки (точнее — относительно вектора кинетического момента Земли).

\* \* \*

Выражаю благодарность Н.Н. Парийскому и М.В. Крамер за ценные замечания и за проверку формул и вычисления.

Академия наук СССР  
Институт физики Земли

Поступила  
28.V.1963

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Молоденский М.С., Крамер М.В. Земные приливы и нутация Земли. — М.: Изд-во АН СССР. 1961.
2. Джеффрис Г. Земля, ее происхождение, история и строение. — М.: ИЛ. 1960.
3. Жарков В.Н. Вязкость недр Земли. // Труды Института физики Земли. 1960. № 11(178).
4. Парийский Н.Н. Земные приливы и внутреннее строение Земли. — М.: Изв. АН, серия геофизическая. 1963. № 2.
5. Milankovič M. Der Mechanismus der Polverlagerungen. // Gerlands Beitr. Geophys. 1934. 42.

# НАПРАВЛЕНИЕ ГЛАВНЫХ ОСЕЙ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПРИ ЗЕМНЫХ ПРИЛИВАХ\*

Даны формулы для расчета напряжений, возникающих внутри Земли при приливах и изменениях скорости или направления оси вращения Земли.

1. В изотропном упругом теле направляющие косинусы  $l$ ,  $m$  и  $n$  главных осей напряженного состояния определяются из условия совместности системы уравнений [1]:

$$\begin{aligned} (2u'_x - \bar{\sigma})l + (u'_y + v'_x)m + (u'_z + w'_x)n &= 0, \\ (u'_y + v'_x)l + (2v'_y - \bar{\sigma})m + (v'_z + w'_y)n &= 0, \\ (u'_z + w'_x)l + (v'_z + w'_y)m + (2w'_z - \bar{\sigma})n &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $u$ ,  $v$ ,  $w$  — компоненты смещения по осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Из условия совместности получаются три действительных значения  $\bar{\sigma}$ , каждое значение  $\bar{\sigma}$  определяет направление одной главной оси. Разности главных напряжений равны разностям соответствующих величин  $\mu\bar{\sigma}$ , где  $\mu$  — модуль сдвига.

В упругом теле сферической формы, строение которого симметрично относительно центра, если деформирующие силы имеют потенциал, выражающийся однородным гармоническим многочленом степени  $n$ , компоненты смещения выражаются следующими формулами:

$$u = \omega xG + \omega'_x F, \quad v = \omega yG + \omega'_y F, \quad w = \omega zG + \omega'_z F, \quad (2)$$

где  $G$  и  $F$  зависят только от  $r$ .

В уравнения (1) вместо смещений можно ввести  $G$ ,  $F$  и  $\omega$ . Вычисления очень упрощаются, если ось  $z$  прямоугольной системы координат совместим с радиусом сферы, проходящим через исследуемую точку. Тогда в этой точке  $x = y = 0$ ,  $z = r$ . Используя однородность и гармоничность многочлена  $\omega$ , получим

$$\begin{aligned} u'_y + v'_x &= \frac{2T}{r^n} \omega''_{xy}, & u'_x &= G\omega + F\omega''_{xx}, \\ u'_z + w'_x &= \frac{M}{\mu r^n} \omega'_x, & v'_y &= G\omega + F\omega''_{yy}, \\ v'_z + w'_y &= \frac{M}{\mu r^n} \omega'_y, & w'_z &= \frac{H'}{r^n} \omega, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$H = Gr^{n+1} + nFr^{n-1}, \quad T = Fr^n, \quad M = \mu \left( T' - \frac{2}{r}T + H \right). \quad (4)$$

Уравнения (1) после подстановки в них выражений (3) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} (\omega''_{xx} - \sigma)l + \omega''_{xy}m + \omega'_x Bn &= 0, \\ \omega''_{xy}l + (\omega''_{yy} - \sigma)m + \omega'_y Bn &= 0, \\ \omega'_x Bl + \omega'_y Bm + (A\omega - \sigma)n &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

\* Известия Академии наук СССР, серия геофизическая. 1963. №10. С. 1483-1485.

где

$$\sigma = \frac{r^n}{2T} \bar{\sigma} - \frac{r^n G}{T} \omega, \quad A = \frac{H'}{T} - \frac{H}{rT} + \frac{n}{r^2}, \quad B = \frac{M}{2\mu T}. \quad (6)$$

После исключения  $l$ ,  $m$  и  $n$  получаем кубическое уравнение:

$$\begin{aligned} \sigma^3 - \left( A - \frac{n(n-1)}{r^2} \right) \omega \sigma^2 - [B(\omega_x^{z'} + \omega_y^{z'}) + \\ + An(n-1) \frac{\omega^2}{r^2} + \omega_{xy}^{2''} - \omega_{xx}'' \omega_{yy}'' ] \sigma - \\ - B^2 \begin{vmatrix} \omega_{xx}'' & \omega_{xy}'' & \omega_x' \\ \omega_{xy}'' & \omega_{yy}'' & \omega_y' \\ \omega_x' & \omega_y' & \frac{A}{B^2} \omega \end{vmatrix} = 0. \quad (7) \end{aligned}$$

Сумма квадратов главных касательных напряжений выражается через коэффициенты этого уравнения следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\mu^2}{4} [(\bar{\sigma}_3 - \bar{\sigma}_2)^2 + (\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_3)^2 + (\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_1)^2] = \frac{2\mu^2 T^2}{r^{2n}} [(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 - \\ - 3(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)] = 2\mu^2 T^2 \left[ \left( A^2 + \frac{n(n-1)}{r^2} A + \frac{n^2(n-1)}{r^4} \right) \left( \frac{\omega}{r^n} \right)^2 + \right. \\ \left. + 3 \frac{B^2}{r^{2n}} (\omega_x^{2'} + \omega_y^{2'}) + \frac{3}{r^{2n}} (\omega_{xy}^{2''} - \omega_{xx}'' \omega_{yy}'') \right]. \quad (8) \end{aligned}$$

2. Уравнение (7) имеет простое решение, если  $[\omega_y' = \omega_{xy}'' = 0]_{x=y=0}$ . В этом случае  $\sigma_1 = \omega_{yy}''$ , легко находятся следующие два корня и из (5) получаем

$$l : n = \frac{B\omega_x'}{\sigma - \omega_{xx}''}.$$

Таким образом, получаем следующее решение:

$$\begin{aligned} \text{а) } l_1 = n_1 = 0; \quad m_1 = 1; \quad \sigma_1 = \omega_{yy}''; \\ \text{б) } m_2 = 0; \quad l_2 : n_2 = \operatorname{tg} \left( \varepsilon + \frac{\pi}{2} \right); \quad \sigma_2 = \frac{\omega_{xx}'' + A\omega}{2} + \frac{B\omega_x'}{\sin 2\varepsilon}; \\ \text{в) } m_3 = 0; \quad l_3 : n_3 = \operatorname{tg} \varepsilon; \quad \sigma_3 = \frac{\omega_{xx}'' + A\omega}{2} - \frac{B\omega_x'}{\sin 2\varepsilon}. \quad (9) \end{aligned}$$

В этих формулах

$$\operatorname{tg} 2\varepsilon = \frac{\omega_x'}{\omega_{xx}'' - A\omega} 2B.$$

Так же просто находятся корни уравнения (7) при тех значениях  $r$ , при которых  $M = B = 0$ . В этом случае одна из главных осей напряженного состояния совпадает с осью  $z$ . Получаем

$$l : m = \frac{\omega_{xy}''}{\sigma - \omega_{xx}''} = \frac{\sigma - \omega_{yy}''}{\omega_{xx}''}; \quad n = 0; \quad \sigma_3 = A\omega. \quad (10)$$

3. Формулы (9) можно применить при исследовании напряжений, возникающих при изменении скорости вращения Земли. В этом случае

$$\omega = \frac{1}{3}s\Delta s (r^2 - 3\bar{z}^2),$$

$s$  и  $\Delta s$  — угловая скорость вращения Земли и ее изменение, ось  $\bar{z}$  параллельна оси вращения Земли.

После поворота координатных осей вокруг оси  $\bar{y}$  на угол  $90^\circ - \varphi$  ( $\varphi$  — широта исследуемой точки) получаем новые координаты  $(x, y, z)$ , причем

$$\bar{z} = -x \cos \varphi + z \sin \varphi.$$

В новой системе координат

$$\omega = \frac{1}{3}s\Delta s [(1 - 3 \cos^2 \varphi) x^2 + (1 - 3 \sin^2 \varphi) z^2 + y^2 + 3xz \sin 2\varphi].$$

Убеждаемся, что

$$[\omega''_{xy} = \omega'_y = 0]_{x=y=0},$$

поэтому можем применять формулы (9). В частности, получаем

$$\operatorname{tg} 2\varepsilon = \frac{3Br \sin 2\varphi}{1 - 3 \cos^2 \varphi - \frac{1}{2}Ar^2 (1 - 3 \sin^2 \varphi)}.$$

При изменении положения оси вращения Земли изменение потенциала выражается формулой

$$\omega = \frac{1}{2}s^2 (\bar{z}^2 - z^2).$$

Формула (9) применима. Распределение напряжений теперь зависит не только от широты, но и от разности долгот исследуемой точки и нового положения полюса.

Академия наук СССР  
Институт физики Земли

Поступила  
28.V.1963

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лейбензон Л.С. Курс теории упругости. — М.: Гостехтеоретиздат. 1947.



# ПРИЛИВЫ В УПРУГОЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЗЕМЛЕ С ЖИДКИМ ЯДРОМ\*

Вращение Земли оказывает существенное влияние на характер суточных приливов в жидком ядре. Вместе с тем велико влияние упругости оболочки на период собственных колебаний (близких к суточным и чандлеровским) и на числа Лява, если период вынужденных колебаний близок к периоду собственных колебаний [1]. Поэтому необходимо обобщить способ исследования, изложенный в статье [1], на общий случай прилива в упругом вращающемся сфероиде, или, в первом приближении, вращающемся шаре с жидким ядром. В статье [1] исходные уравнения составлены в предположении, что поверхности равного значения потенциала  $W$ , плотности  $\rho$ , коэффициентов Ламе  $\mu$ ,  $\lambda$  совпадают, а начальные напряжения имеют гидростатический характер.

Уравнения эти таковы:

$$\ddot{u} - 2\omega\dot{v} = F_u - \dot{\omega}y, \quad (1)$$

$$\ddot{v} + 2\omega\dot{u} = F_v + \dot{\omega}x, \quad (2)$$

$$\ddot{w} + \frac{2\sigma}{\omega}\dot{\varphi} = F_w, \quad (3)$$

$$\Delta V_i = 4\pi f \left( \rho\delta + \frac{\rho'}{W'}\eta \right), \quad (4)$$

где  $u, v, w$  — компоненты смещения (по осям  $X, Y, Z$ ), а  $F_u$ , например, определяется выражением

$$F_u = \frac{\partial}{\partial x} \left( V_n + V_i + \frac{\sigma + \omega}{\omega}\dot{\varphi} + \eta + \frac{\lambda}{\rho}\delta \right) + \left( \frac{\lambda\rho'}{\rho^2 W'} - 1 \right) \times \\ \times \delta \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left( \Delta u + \frac{\partial \delta}{\partial x} \right) + \frac{\mu'}{W'\rho} \left( u'W' + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial z} \right), \quad (5)$$

$$\delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (6)$$

$$\eta = u \frac{\partial W}{\partial x} + v \frac{\partial W}{\partial y} + w \frac{\partial W}{\partial z}, \quad (7)$$

$$\bar{\omega} = \omega (\varepsilon \cos \sigma t \bar{i} + \varepsilon \sin \sigma t \bar{j} + \bar{k}), \quad \varphi = -\frac{1}{3} \varepsilon \omega^2 r^2 P_2^1(\mu) \cos(\sigma t - \Phi). \quad (8)$$

Штрих означает дифференцирование по направлению нормали к уровенной поверхности, точка над буквой — дифференцирование по времени,  $V_n$  — потенциал внешних сил,  $V_i$  — изменение потенциала из-за деформации Земли,  $f$  — постоянная тяготения,  $r$  — расстояние от центра.

Уравнения (1) и (2) составлены в системе координат, вращающейся с угловой скоростью  $\bar{\omega}$  (8). В (1) и (2) члены  $-\dot{\omega}y$  и  $+\dot{\omega}x$  получены из формулы (2) статьи [1].

В теории приливов принято потенциал разлагать на элементарные гармонические

\* В сб.: Земные приливы и внутреннее строение Земли. — М.: Наука. 1967. С. 3–9.

члены следующего типа:

$$V_n = \kappa r^n \frac{d^m P_n(\mu)}{d\mu^m} (1 - \mu^2)^{\frac{m}{2}} \cos(\sigma t - m\Phi), \quad (9)$$

где  $\kappa$  — малая величина (известная),  $\mu$  — синус широты,  $\Phi$  — долгота,  $n$  и  $m$  — целые числа ( $m \leq n$ ).

При дальнейших расчетах будем считать Землю сферической. Учет сжатия, необходимый для суточных приливов, и учет вязкости в условиях гармонических колебаний возможны в следующем приближении [2]. В статической теории приливов смещения, например  $u$ , и изменение потенциала  $V_i$  представляются выражениями

$$u = \frac{\partial}{\partial x} (r^{-n} T_n V_n) + \left[ r^{-n} H_n - (r^{-n} T_n)' \right] \frac{x V_n}{r} = u_n, \quad (10)$$

$$V_i + V_n + \frac{\sigma + \omega}{\omega} \varphi = r^{-n} R_n V_n.$$

Тогда уравнения равновесия приводятся к виду

$$F_u = -\frac{\partial(\psi_n V_n)}{\partial x} + \chi_n V_n x, \quad (11)$$

где  $\psi_n$  и  $\chi_n$  — функция только  $r$ . При  $n \neq 0$  эти уравнения удовлетворяются, если  $\psi_n = \chi_n = 0$ .

При  $\omega \neq 0$  попытаемся представить решение бесконечными рядами:

$$u = \sum_0^{\infty} u_n, \quad \psi_u = \psi_v = \sum_0^{\infty} \psi_n V_n = \psi, \quad v = \sum_0^{\infty} v_n, \quad \chi_u = \chi_v = \sum_0^{\infty} \chi_n V_n = \chi,$$

$$w = \sum_0^{\infty} w_n, \quad \psi_w = \sum_0^{\infty} (\psi_n + \Psi_n) V_n = \psi + \Psi, \quad \chi_w = \sum_0^{\infty} (\chi_n + X_n) V_n = \chi + X, \quad (12)$$

где  $\psi_n, \chi_n, \Psi_n, X_n$  — функции только  $r$ . Как известно, (4) и (5), после подстановки (9), (10), (11) и приравнивания коэффициентов при  $P_n^m(\mu)$ , приводятся к следующему виду:

$$\left\{ M' + \left( R + W'H + \frac{N}{\rho} + r^n \psi \right) \rho r^2 + 2\mu \left[ rH - (n^2 + n - 1)T + r^2 H' \right] \right\}_n = 0,$$

$$\left[ \frac{N'}{\rho} + \frac{L}{r^2} - \frac{4W'}{r} H + \frac{n(n+1)}{r^2} W'T + (r^n \psi)' - r^{n+1} \chi + \right. \\ \left. + \frac{2\mu}{\rho} \left( \frac{2}{r} H' - \frac{2}{r^2} H + \frac{n(n+1)}{r^3} T \right) \right]_n = 0,$$

$$\left( T' + H - \frac{2}{r} T - \frac{M}{r^2 \mu} \right)_n = 0, \quad (13)$$

$$\left\{ (\lambda + 2\mu)H' + \frac{2\lambda}{r} \left[ H - \frac{n(n+1)}{2r} T \right] - N \right\}_n = 0,$$

$$\left( R' - 4\pi f \rho H - \frac{L}{r^2} \right)_n = 0,$$

$$[L' - n(n+1)(R - 4\pi f \rho T)]_n = 0.$$

В шесть уравнений (13) входят восемь неизвестных функций. Еще два уравнения получим из (1), (2) и (3), выражая  $\delta$  и  $\eta$  как через  $\psi_n, \chi_n$ , так и через  $H_n, T_n$  (10). Так же, как при выводе (22) и (23) в работе [1], получаем

$$(\sigma^2 - 4\omega^2) \delta = - \left( \frac{\partial F_u}{\partial x} + \frac{\partial F_v}{\partial y} + \frac{\partial F_w}{\partial z} \right) + \frac{2\omega}{\sigma^2} \left( \frac{\partial \dot{F}_v}{\partial x} - \frac{\partial \dot{F}_u}{\partial y} \right) + \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \frac{\partial F_w}{\partial z} + \frac{2}{\sigma\omega} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + 4\omega\delta\omega, \quad (14)$$

$$(\sigma^2 - 4\omega^2) \eta = - \left( \frac{\partial W}{\partial x} F_u + \frac{\partial W}{\partial y} F_v + \frac{\partial W}{\partial z} F_w \right) + \frac{2\omega}{\sigma^2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \dot{F}_v - \frac{\partial W}{\partial y} \dot{F}_u \right) + \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \frac{\partial W}{\partial z} F_w + \frac{2}{\sigma\omega} \frac{\partial W}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + 2 \left( x \frac{\partial W}{\partial x} + y \frac{\partial W}{\partial y} \right) \omega\delta\omega.$$

Выражая  $F_u, F_v, F_w$  через  $\psi_n, \chi_n$  и используя формулу

$$x \frac{\partial \psi_n}{\partial y} - y \frac{\partial \psi_n}{\partial x} = \frac{\partial \psi_n}{\partial \lambda} = -\frac{m}{\sigma} \psi_n,$$

получаем

$$(\sigma^2 - 4\omega^2) \delta = \Delta\psi - r\chi' - \left( 3 + \frac{2\omega}{\sigma} m \right) \chi - \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - z \frac{\partial \chi}{\partial z} - \chi \right) + \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{\sigma^2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - z \frac{\partial \chi}{\partial z} - \chi \right) + 2 \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{\sigma\omega} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - 4\omega\delta\omega, \quad (15)$$

$$\frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{W'} \eta = \psi' - r\chi - \frac{2\omega}{\sigma} m \frac{\psi}{r} - \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \left( \frac{z}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{z^2}{r} \chi \right) + \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{\sigma^2} \left( \frac{z}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{z^2}{r} \chi \right) + 2 \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{\sigma\omega} \frac{z}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{4r}{3} \omega\delta\omega + \frac{4}{3} r P_2 \omega\delta\omega. \quad (16)$$

Из (6), (7) и (10) получаем

$$\eta = W' \sum_0^{\infty} r^{-n} H_n V_n, \quad (17)$$

$$\delta = \sum_0^{\infty} r^{-n} \delta_n V_n.$$

Внесем в (15) и (16) ряды (12). Приравняв коэффициенты этих рядов при  $P_n^m(\mu)$ , выразим  $H_n$  и  $\delta_n$  через  $\psi_n, \chi_n, \psi_{n+2}, \chi_{n+2}, \psi_{n-2}, \chi_{n-2}$  и их первые и вторые производные. Вторые производные исключаются в разностях  $\delta_n - (r^{n+2} H_n)' r^{-n-2}$  и  $\delta_n - (r^{-n+1} H_n)' r^{n-1}$ .

Эти разности таковы:

$$\begin{aligned}
 (\sigma^2 - 4\omega^2) [\delta_n - (r^{n+2} H_n)' r^{-n-2}] &= \\
 &= -n(\sigma^2 - 4\omega^2) \left( H_n + \frac{n+1}{r} T_n \right) r^{-1} = \\
 &= - \left( n - \frac{2\omega}{\sigma} m \right) \left[ (r^{2n+1} \psi_n)' r^{-2n-1} - r \chi_n \right] r^{n-1} + \\
 &+ \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \left\{ \left[ \left( z \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_n r^{n+1} \right]' r^{-n-2} - \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right)_n \right\} + \\
 &+ \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \left\{ \left( z \frac{\partial \chi}{\partial z} \right)_n - [(z^2 \chi)_n r^{n+1}]' r^{-n-2} \right\} - \\
 &- 2 \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{\sigma \omega} \left\{ \left[ \left( z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_n r^{n+1} \right]' r^{-n-2} - \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right)_n \right\} - \\
 &- \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{\sigma^2} \left\{ \left[ \left( z \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_n r^{n+1} \right]' r^{-n-2} - \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right)_n \right\} - \\
 &- \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{\sigma^2} \left\{ \left( z \frac{\partial \chi}{\partial z} \right)_n - [(z^2 \chi)_n r^{n+1}]' r^{-n-2} \right\} + A_n, \quad (18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\sigma^2 - 4\omega^2) [\delta_n - (r^{-n+1} H_n)' r^{n-1}] &= \\
 &= (\sigma^2 - 4\omega^2) (n+1) \left( H_n - \frac{n}{r} T_n \right) r^{-1} = \\
 &= \left( n+1 + \frac{2\omega}{\sigma} m \right) (\psi_n' - r \chi_n) r^{n-1} + \\
 &+ \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \left\{ \left[ \left( z \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_n r^{-n} \right]' r^{n-1} - \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right)_n \right\} + \\
 &+ \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \left\{ \left( z \frac{\partial \chi}{\partial z} \right)_n - [(z^2 \chi)_n r^{-n}]' r^{n-1} \right\} - \\
 &- 2 \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{\sigma \omega} \left\{ \left[ \left( z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_n r^{-n} \right]' r^{n-1} - \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right)_n \right\} - \\
 &- \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{\sigma^2} \left\{ \left[ \left( z \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_n r^{-n} \right]' r^{n-1} - \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right)_n \right\} - \\
 &- \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{\sigma^2} \left\{ \left( z \frac{\partial \chi}{\partial z} \right)_n - [(z^2 \chi)_n r^{-n}]' r^{n-1} \right\} + B_n. \quad (19)
 \end{aligned}$$

Отличны от нуля только  $A_2$  и  $B_0$ :

$$A_2 = -\frac{20}{3} \omega \delta \omega,$$

$$B_0 = -\frac{4}{3} \omega \delta \omega.$$

При преобразовании выражений (18) и (19) понадобятся рекуррентные формулы:

$$(2n+1)(\mu^2-1)P_n^m = \left( \frac{(n+1)^2-m^2}{2n+3} + \frac{n^2-m^2}{2n-1} - 1 \right) P_n^m + \\ + \frac{(n-m+1)(n-m+2)}{2n+2} P_{n+2}^m + \frac{(n+m)(n+m+1)}{2n-1} P_{n-2}^m, \\ (2n+1)\mu P_n^m(\mu) = (n-m+1)P_{n+1}^m(\mu) + (n+m)P_{n-1}^m(\mu), \quad (20) \\ (2n+1)(\mu^2-1)P_n^{m'}(\mu) = -(n+1)(n+m)P_{n-1}^m(\mu) + n(n-m+1)P_{n+1}^m(\mu).$$

С помощью этих формул получаем

$$\frac{\partial}{\partial z} \sum \psi_n r^n P_n^m(\mu) \cos(\sigma t - m\lambda) = \cos(\sigma t - m\lambda) \sum \left[ \frac{n-m}{2n-1} r^{n-1} \psi'_{n-1} + \right. \\ \left. + \frac{n+m+1}{2n+3} (r^{2n+3} \psi_{n+1})' r^{-n-2} \right] P_n^m(\mu), \\ z^2 \sum \psi_n r^n P_n^m(\mu) \cos(\sigma t - m\lambda) = \cos(\sigma t - m\lambda) \sum \left[ \frac{(n-m)(n-m-1)}{(2n-1)(2n-3)} r^n \psi_{n-2} + \right. \\ \left. + \frac{(n-m+1)(n+m+1)}{(2n+3)(2n+1)} r^{n+2} \psi_n + \frac{(n-m)(n+m)}{(2n-1)(2n+1)} r^{n+2} \psi_n + \right. \\ \left. + \frac{(n+m+2)(n+m+1)}{(2n+3)(2n+5)} r^{n+4} \psi_{n+2} \right] P_n^m(\mu), \\ z \frac{\partial}{\partial z} \sum \psi_n r^n P_n^m(\mu) \cos(\sigma t - m\lambda) = \cos(\sigma t - m\lambda) \sum \left[ \frac{(n-m)(n-m-1)}{(2n-1)(2n-3)} \times \right. \\ \left. \times r^{n-1} \psi'_{n-2} + \frac{(n-m+1)(n+m+1)}{(2n+1)(2n+3)} r^{n+1} \psi'_n + \frac{(n-m)(n+m)}{(2n-1)(2n+1)} r^{-n} (\psi_n r^{2n+1})' + \right. \\ \left. + \frac{(n+m+1)(n+m+2)}{(2n+3)(2n+5)} r^{-n-2} (r^{2n+5} \psi_{n+2})' \right] P_n^m(\mu), \quad (21)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \sum \psi_n r^n P_n^m(\mu) \cos(\sigma t - m\lambda) = \cos(\sigma t - m\lambda) \sum \left\{ \frac{(n-m)(n-m-1)}{(2n-1)(2n-3)} \times \right. \\ \left. \times r^{n-1} \left( \frac{\psi'_{n-2}}{r} \right)' + \frac{(n-m+1)(n+m+1)}{(2n+1)(2n+3)} r^{-n-2} (r^{2n+2} \psi'_n)' + \right. \\ \left. + \frac{(n-m)(n+m)}{(2n-1)(2n+1)} r^{n-1} [(r^{2n+1} \psi_n)' r^{-2n}]' + \right. \\ \left. + \frac{(n+m+1)(n+m+2)}{(2n+3)(2n+5)} r^{-n-2} [(\psi_{n+2} r^{2n+5})' r^{-1}]' \right\} P_n^m(\mu),$$

$$\Delta [\psi_n r^n P_n^m(\mu) \cos(\sigma t - m\lambda)] = \cos(\sigma t - m\lambda) (\psi'_n r^{2n+2})' r^{-n-2} P_n^m(\mu).$$

Функции  $\psi$  и  $\chi$  пока произвольны. Определим их с помощью системы произвольных коэффициентов  $a_n, b_n, c_n, d_n, e_n$  следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{\sigma^2} \left[ (\psi_n r^{2n+1})' r^{-2n-1} - r\chi_n \right] r^n = \\ & = \left( \frac{4\omega^2}{\sigma^2} + a_n \right) \left[ (\psi_n r^{2n+1})' r^{-2n-1} - r\chi_n \right] r^n + c_n (\varphi_n r^{2n+1})' r^{-n-1} + d_n A_n r, \\ & \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{\sigma^2} (\psi'_n - r\chi_n) r^n = \left( \frac{4\omega^2}{\sigma^2} + b_n \right) (\psi'_n - r\chi_n) r^n + e_n B_n r. \end{aligned} \quad (22)$$

Используя формулы (21) и (22) и приравнявая к нулю коэффициенты при  $P_{n+2}^m(\mu)$  и  $P_n^m(\mu)$ , вместо (18) и (19) получаем

$$\begin{aligned} & (n+2)(\sigma^2 - 4\omega^2) \left( H_{n+2} + \frac{n+3}{r} T_{n+2} \right) = \\ & = \left( n+2 - \frac{2\omega}{\sigma} m + a_{n+2} \frac{(n+2)^2 - m^2}{2n+3} \right) \left[ (\psi_{n+2} r^{2n+5})' r^{-2n-5} - r\chi_{n+2} \right] r^{n+2} + \\ & \quad + b_n \frac{(n-m+1)(n-m+2)}{(2n+1)(2n+3)} (2n+5) (\psi'_n - r\chi_n) r^n + \\ & \quad + \frac{(n+2)^2 - m^2}{2n+3} \left( C_{n+2} + 2 \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{\sigma^2} \right) (\varphi_{n+2} r^{2n+5})' r^{-n-3} + \\ & \quad + d_{n+2} A_{n+2} \frac{(n+2)^2 - m^2}{2n+3} r + e_n B_n \frac{(n-m+1)(n-m+2)}{(2n+1)(2n+3)} (2n+5) r + B_n r, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & (n+1)(\sigma^2 - 4\omega^2) \left( H_n - \frac{n}{r} T_n \right) = \\ & = \left( n+1 + \frac{2\omega}{\sigma} m + b_n \frac{(n+1)^2 - m^2}{2n+3} \right) (\psi'_n - r\chi_n) r^n + \\ & \quad + a_{n+2} \frac{(n+m+1)(n+m+2)}{(2n+3)(2n+5)} (2n+1) \left[ (\psi_{n+2} r^{2n+5})' r^{-2n-5} - r\chi_{n+2} \right] r^{n+2} + \\ & \quad + \frac{(n+m+1)(n+m+2)}{(2n+3)(2n+5)} (2n+1) \left( C_{n+2} + 2 \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{\sigma^2} \right) (\varphi_{n+2} r^{2n+5})' r^{-n-3} + \\ & \quad + e_n B_n \frac{(n+1)^2 - m^2}{2n+3} r + d_{n+2} A_{n+2} \frac{(n+m+1)(n+m+2)}{(2n+3)(2n+5)} (2n+1) r. \end{aligned} \quad (24)$$

Из трех уравнений (1), (2) и (3) получены (23) и (24). Третье уравнение получим из (3) с помощью (21) и (22). Множители при  $P_{n+1}^m(\mu)$  дают уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{n+m+2}{2n+5} \left\{ (1+a_{n+2}) \left[ (r^{2n+5} \psi_{n+2})' r^{-2n-5} - r\chi_{n+2} \right] r^{n+2} + \right. \\ & \quad \left. + \left( C_{n+2} + 2 \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{\sigma\omega} \right) (r^{2n+5} \varphi_{n+2})' r^{-n-3} + d_{n+2} A_{n+2} r - \right. \\ & \quad \left. - (\sigma^2 - 4\omega^2) \left( H_{n+2} + \frac{n+3}{r} T_{n+2} \right) \right\} + \frac{n-m+1}{2n+1} \left[ (1+b_n) (\psi'_n - r\chi_n) r^n + \right. \\ & \quad \left. + e_n B_n r - (\sigma^2 - 4\omega^2) \left( H_n - \frac{n}{r} T_n \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Уравнение (25) вытекает из уравнений (23) и (24), если при  $m \neq 0$

$$a_n = -\frac{2\omega}{\sigma m}(n-1), \quad d_n = -\frac{2n+1}{n(n-1)+m^2}, \quad b_n = \frac{2\omega}{\sigma m}(n+2),$$

$$e_n = \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)+m^2}, \quad c_n = 2\frac{\sigma^2-4\omega^2}{\sigma^2} \left[ \frac{n(n-1)\omega-\sigma}{m^2} - 1 \right].$$

При  $m = 0$  коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$  остаются произвольными, и можно ввести дополнительное условие: решение порядка  $n$  независимо от других порядков. Тогда  $a_n = b_n = 0$ ,  $\varphi_n \neq 0$  только при  $m = 1$  и  $n = 2$ . Поэтому

$$n(\varphi_{n+2}r^{2n+5})' = 0.$$

Кроме того,  $A_n$  и  $B_n$  отличны от нуля только при  $m = 0$ . Поэтому из (23) и (24) получаем при  $m \neq 0$

$$(\sigma^2 - 4\omega^2) \left( H_{n+2} + \frac{n+3}{r} T_{n+2} \right) =$$

$$= \left[ 1 - \frac{2\omega(n+1)(n+2)+m^2}{\sigma m(2n+3)} \right] \left[ (r^{2n+5}\psi_{n+2})' r^{-2n-5} - r\chi_{n+2} \right] r^{n+2} +$$

$$+ \frac{2\omega(n-m+1)(n-m+2)(2n+5)}{\sigma(2n+1)(2n+3)m} (\psi'_n - r\chi_n) r^n, \quad (26)$$

$$(\sigma^2 - 4\omega^2) \left( H_n - \frac{n}{r} T_n \right) = \left[ 1 + \frac{2\omega(n+1)(n+2)+m^2}{\sigma m(2n+3)} \right] (\psi'_n - r\chi_n) r^n -$$

$$- \frac{2\omega(n+m+1)(n+m+2)(2n+1)}{\sigma(2n+3)(2n+5)m} \left[ (r^{2n+5}\psi_{n+2})' r^{-2n-5} - r\chi_{n+2} \right] r^{n+2}, \quad (27)$$

при  $m = 0$

$$(\sigma^2 - 4\omega^2) \left( H_{n+2} + \frac{n+3}{r} T_{n+2} \right) =$$

$$= \left[ (r^{2n+5}\psi_{n+2})' r^{-2n-5} - r\chi_{n+2} \right] r^{n+2} + \frac{2n+5}{2n+1} \frac{B_n r}{n+2} - \frac{A_{n+2} r}{n+1}, \quad (27')$$

$$(\sigma^2 - 4\omega^2) \left( H_n - \frac{n}{r} T_n \right) = (\psi'_n - r\chi_n) r^n + \frac{B_n r}{n+2} - \frac{2n+1}{2n+5} \frac{A_{n+2} r}{n+1}.$$

Уравнение (26) разрешаем относительно функций, входящих в правые части, и получаем

$$\frac{1}{\sigma^2} \left[ (r^{2n+5}\psi_{n+2})' r^{-2n-5} - r\chi_{n+2} \right] r^{n+2} =$$

$$= (1+p_n) \left( H_{n+2} + \frac{n+3}{r} T_{n+2} \right) + q_{-n-3} \left( H_n - \frac{n}{r} T_n \right), \quad (28)$$

$$\frac{1}{\sigma^2} (\psi'_n - r\chi_n) r^n = (1-p_n) \left( H_n - \frac{n}{r} T_n \right) + q_n \left( H_{n+2} + \frac{n+3}{r} T_{n+2} \right),$$

где

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{2\omega(n+1)(n+2) + m^2}{\sigma m(2n+3)}, \\ q_n &= \frac{2\omega(n+m+1)(n+m+2)(2n+1)}{\sigma m(2n+3)(2n+5)}. \end{aligned} \quad (29)$$

Теперь из уравнений (13) можно исключить функции  $\psi_n$  и  $\chi_n$ . При  $m \neq 0$  получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma^2} \psi_n r^n &= \left[ 1 + \frac{(n+1)p_{n-2} - np_n}{2n+1} \right] T_n + \frac{p_{n-2} + p_n}{2n+1} r H_n + \\ &+ \frac{q_{n-1}}{2n+1} \left( H_{n-2} - \frac{n-2}{r} T_{n-2} \right) - \frac{q_n}{2n+1} \left( H_{n+2} + \frac{n+3}{r} T_{n+2} \right), \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma^2} [(r^n \psi_n)' - r^{n+1} \chi_n] &= \left[ 1 + \frac{np_{n-2} - (n+1)p_n}{2n+1} \right] H_n + \\ &+ \frac{n(n+1)(p_{n-2} + p_n)}{2n+1} \frac{T_n}{r} + \frac{nq_{n-1}}{2n+1} \frac{1}{r} \left( H_{n-2} - \frac{n-2}{r} T_{n-2} \right) + \\ &+ \frac{(n+1)q_n}{2n+1} \frac{1}{r} \left( H_{n+2} + \frac{n+3}{r} T_{n+2} \right). \end{aligned}$$

При  $m = 0$ ,  $q_n = 0$  в шесть уравнений (13) войдут шесть неизвестных функций. При  $m \neq 0$ , кроме того, войдут  $H_{n+2}$ ,  $H_{n-2}$ ,  $T_{n+2}$ ,  $T_{n-2}$  с малыми множителями. Дополнительные члены от приливов порядков  $n-2$  и  $n+2$  малы, если частота  $\sigma$  далека от частот собственных колебаний порядков  $n-2$  и  $n+2$  или если  $V_{n-2}$  и  $V_{n+2}$  не содержат частот, близких к  $\sigma$ .

Граничные условия (непрерывность смещений, напряжений, потенциала и производной от потенциала) не зависят от  $\sigma$  и  $\omega$ .

Если  $\mu = 0$ , из уравнений (13) получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} N + R + W' H &= -r^n \psi_n, \\ r^{n+1} \chi_n &= \left( \frac{\lambda + \frac{2}{3} \mu}{\rho} \frac{\rho'}{\rho} - W' \right) \left( H' + \frac{2}{r} H - \frac{n(n+1)}{r^2} T \right). \end{aligned} \quad (31)$$

Обычно принимают, что плотность зависит только от адиабатической сжимаемости. Тогда

$$\begin{aligned} \chi_n &= 0, \\ R + r^n \psi &= \left[ n(n+1)\rho\Gamma - (r^2\rho H)' \right] \frac{W'}{r^2\rho'}. \end{aligned} \quad (32)$$

Предполагаем, что приливы порядка  $n-2$  и  $n+2$  не влияют на прилив порядка  $n$ . Тогда  $q_n = 0$  и при  $m \neq 0$  из (28) получаем

$$\begin{aligned} (2n+1)\sigma^2 H &= \frac{n}{1+p_{n-2}} (r^{2n+1}\psi)' r^{-n-1} + \frac{n+1}{1-p_n} r^n \psi', \\ (2n+1)\sigma^2 T &= \frac{1}{1+p_{n-2}} (r^{2n+1}\psi)' r^{-n} - \frac{1}{1-p_n} r^{n+1} \psi'. \end{aligned} \quad (33)$$



Уравнение (32) приводит к следующей форме уравнения Пуассона:

$$(r^{n+1}R)'' - \frac{2n}{r}(r^{n+1}R)' = -\frac{4\pi f\rho'}{W'}(r^{n+1}R + r^{2n+1}\psi). \quad (34)$$

Уравнению (32) можно придать следующий вид:

$$(r^{n+2}\rho H)' - nr^{n+1}\rho\left(H + \frac{n+1}{r}T\right) = -\frac{r\rho'}{W'}(r^{n+1}R + r^{2n+1}\psi).$$

Выразив  $H$  и  $T$  через  $\psi$  при помощи формул (33), получим

$$\left(\frac{n+1}{1-p_n} + \frac{n}{1+p_{n-2}}\right) \left[(r^{2n+1}\psi)' \frac{\rho}{r^{2n}}\right]' + \\ + (2n+1)\frac{\sigma^2\rho'}{W'r^{2n}}\left(r^{n+1}R + r^{2n+1}\psi - \frac{n+1}{1-p_n}\frac{W'}{\sigma^2}r^{2n}\psi\right) = 0. \quad (35)$$

Из уравнений (34) и (35) определяются  $r^{n+1}R$  и  $r^{2n+1}\psi$ ; эти функции ограничены в центре сферы.

Простые решения получаются в следующих случаях:

$$\begin{aligned} 1) \rho' = 0, \quad r^{2n+1}\psi &= C_1 r^{2n+1} + C_2, \\ 2) \sigma^2 = \infty, \quad r^{2n+1}\psi &= C_1 r^{2n+1} + C_2, \quad R = -r^n\psi, \\ 3) 1 + p_{n-2} = 0, \quad r^{2n+1}\psi &= C_1 \int \frac{1}{\rho} r^{2n} dr + C_2, \\ 4) 1 - p_n = 0, \quad r^{2n+1}\psi &= C_1 r^{2n+1} + C_2 r^{2n+1} \int \frac{1}{\rho} r^{-2n-2} dr. \end{aligned} \quad (36)$$

При малых значениях  $\sigma$  из (35) получаем уравнение 2-го порядка, содержащее только  $\psi$ :

$$\left(1 + \frac{n}{n+1} \frac{1-p_n}{1+p_{n-2}}\right) \left[(r^{2n+1}\psi)' \frac{\rho}{r^{2n}}\right]' - (2n+1)\rho'\psi = 0. \quad (37)$$

Однородное уравнение, служащее для определения  $R$  (получающееся из (34)), является теперь уравнением Клеро. При  $m = 0$  на основании (27) нужно принять  $p_n = 0$ , заменить  $\sigma^2$  на  $\sigma^2 - 4\omega^2$  и учесть члены с  $A_2$  и  $B_0$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Молоденский М.С., Крамер М.В. Земные приливы и нутация Земли. — М.: Изд-во АН СССР. 1961.
2. Молоденский М.С. Влияние вязкости на фазу земных приливов. // Известия АН СССР, серия геофизическая. 1963. № 10. С.1469.

# СМЕЩЕНИЯ ПРИ ПРИЛИВАХ В УПРУГОЙ ЗЕМЛЕ С УЧЕТОМ СИЛ КОРИОЛИСА\*

Рассмотрено общее решение задачи при заданных напряжениях на поверхности с учетом кориолисовых сил и при малых значениях модуля сдвига в ядре.

1. Приливы в упругой гравитирующей сфере, если начальные напряжения имеют гидростатический характер, а плотность  $\rho$  и коэффициенты упругости  $\lambda$ ,  $\mu$  зависят только от расстояния до центра сферы  $r$ , определяются известными [1] дифференциальными уравнениями:

$$\frac{\partial A}{\partial x} + Bx + f(u) = -2\omega\rho v, \quad (1)$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} + By + f(v) = +2\omega\rho u, \quad (2)$$

$$\frac{\partial A}{\partial z} + Bz + f(w) = 0, \quad (3)$$

$$\Delta R = 4\pi\kappa(\rho\delta + \rho'H), \quad (4)$$

где

$$A = \rho(R + W'H) + (\lambda + \mu)\delta + \mu'H, \\ -rB = \rho'(R + W'H) + \rho W'\delta + \mu'\delta + \left(\frac{\mu'}{r}\right)' rH, \quad (5)$$

$$f = \mu\Delta - \mu'\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\mu'}{r} + \sigma^2\rho. \quad (6)$$

Здесь  $u$ ,  $v$ ,  $w$  — смещения,  $H$ ,  $R$  и  $\delta$  — радиальная компонента смещения, изменение потенциала и объемное расширение,  $\sigma$  и  $\omega$  — частоты прилива и вращения Земли.

Уравнения (1)–(3) были преобразованы [2] следующим образом. Первое было умножено на  $x$ , второе — на  $y$ , третье — на  $z$ , и результаты сложены; первое было продифференцировано по  $x$ , второе — по  $y$ , третье — по  $z$ , и получена сумма результатов.

Таким образом, вместо уравнений (1)–(4) можно рассматривать уравнения (3), (4) и следующие два:

$$\mu\left(r\Delta H + 2H' + \frac{2}{r}H - 2\delta\right) + \mu'(rH' - H) + A'r + r^2B = -\left(\sigma^2H + 2\omega l\right)r\rho, \quad (7)$$

\* Известия АН СССР. Физика Земли. 1970. №4. С. 103–107.

**От редакции журнала:** Публикуемая статья чл.-корр. АН СССР М.С. Молоденского дает результат, весьма важный для рассмотрения широкого круга проблем, связанного с приливными силами. Оценка величин смещений и напряжений, поддающихся непосредственному измерению, и их связи с физическими параметрами недр Земли имеет значение не только для уточнения модели внутреннего строения нашей планеты, но и для оценки космогонических и тектонических процессов, которые могут быть вызваны приливными силами на Земле, Луне и других планетах солнечной системы.

$$\mu\Delta\delta + \mu' \left( \delta' - \frac{2}{r}\delta + \Delta H + \frac{1}{r}H' + \frac{3}{r^2}H \right) - \mu'' \left( H' - \frac{1}{r}H \right) + \\ + \Delta A + rB' + 3B = -(\sigma^2\delta - 2\omega\dot{\rho})\rho - (\sigma^2H + 2\omega\dot{l})\rho'.$$

Система уравнений (7) и (4) была приведена к системе уравнений первого порядка относительно функций  $R, H, L, F, P, Q$ . Через них выражаются изменение потенциала, радиальное смещение, дивергенция радиальных компонент касательного напряжения и нормальное напряжение.

2. Ранее [2] было показано, что

$$\frac{xf(u) + yf(v) + zf(w),}{\frac{\partial f(u)}{\partial x} + \frac{\partial f(v)}{\partial y} + \frac{\partial f(w)}{\partial z}} \quad (8)$$

выражаются только через  $H$  и  $\delta$  ( $u, v$  и  $w$  входят только через эти функции).

Далее будем рассматривать решения уравнений

$$f(\bar{u}) = f(\bar{v}) = f(\bar{w}) = 0, \quad (9)$$

которые не меняют  $H$  и  $\delta$ , т.е. подчинены следующим условиям:

$$\begin{aligned} \bar{u}x + \bar{v}y + \bar{w}z &= 0, \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Для определения смещений зададим пока только  $w$  выражением

$$w = \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{\sigma^2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} - z\chi \right) + \sigma m\bar{w}, \quad (11)$$

причем функции  $\psi, \chi$  пропорциональны  $P_n^m(\cos \vartheta) \cos(\sigma t - m\varphi)$  или представляются суммами подобных членов с одинаковыми значениями  $m$  и  $\sigma$ .

Если подставим это выражение в (8), то убедимся, что

$$f(w) = \frac{\partial f_1}{\partial z} + f_2z, \quad (12)$$

причем  $f_1$  и  $f_2$  зависят только от  $H$  и  $\delta$ .

Тогда, составив выражения (8) и учитывая (10), получим

$$f(u) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + f_2x,$$

$$f(v) = \frac{\partial f_1}{\partial y} + f_2y,$$

функции  $f_1$  и  $f_2$  — те же, что и в (12). Отсюда следует, что уравнения (1) и (2) приводятся к виду

$$\begin{aligned} (4\omega^2 - \sigma^2) \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - x\chi \right) &= -2\omega\rho\dot{v} + \sigma^2u, \\ (4\omega^2 - \sigma^2) \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} - y\chi \right) &= 2\omega\rho\dot{u} + \sigma^2v. \end{aligned} \quad (13)$$

Продифференцируем их по времени,  $\ddot{u}$  и  $\ddot{v}$  заменим на  $-\sigma^2 u$  и  $-\sigma^2 v$ . После исключения из этих четырех уравнений  $\dot{u}$  и  $\dot{v}$  получим

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial x} - x\chi - \frac{2\omega}{\sigma^2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} - y\chi \right) + y \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} - z \frac{\partial \bar{w}}{\partial y}, \\ v &= \frac{\partial \psi}{\partial y} - y\chi + \frac{2\omega}{\sigma^2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - x\chi \right) - x \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + z \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}, \\ w &= \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{\sigma^2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} - z\chi \right) + \sigma m \bar{w}. \end{aligned} \quad (14)$$

Из этих выражений легко определяются  $H$ ,  $S - 2rH$ ,  $l$  и  $p$ :

$$H = \frac{x}{r}u + \frac{y}{r}v + \frac{z}{r}w = \psi' - r\chi - \frac{2\omega}{\sigma} m \frac{\psi}{r} - \frac{4\omega^2}{\sigma^2 - 4\omega^2} \frac{z}{r} (w - \sigma m \bar{w}),$$

$$\begin{aligned} S - 2rH = r^2 (H' - \delta) &= \left( n(n+1) + \frac{2\omega}{\sigma} m \right) \psi - \\ &- \left( 2 + \frac{2\omega}{\sigma} m \right) (\psi' - r\chi) r + \frac{4\omega^2}{\sigma^2 - 4\omega^2} r \sin^2 \vartheta \frac{\partial (w - \sigma m \bar{w})}{\partial \cos \vartheta}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} l &= \frac{x}{r}v - \frac{y}{r}u = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{\sigma^2} \frac{\psi}{r} + \frac{2\omega}{m\sigma} \frac{z}{r} (w - \sigma m \bar{w}) \right) - \frac{2\omega}{m\sigma} \frac{\partial H}{\partial \varphi} + \bar{l}, \\ p &= \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( -\frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{\sigma^2} \chi - \frac{2\omega}{m\sigma} \frac{\partial}{\partial z} (w - \sigma m \bar{w}) \right) + \frac{2\omega}{m\sigma} \frac{\partial \delta}{\partial \varphi} + \bar{p}. \end{aligned} \quad (16)$$

Из двух первых формул получаем

$$\begin{aligned} \left( n - \frac{2\omega}{\sigma} m \right) \left( n + 1 + \frac{2\omega}{\sigma} m \right) (\psi' - r\chi) r &= \left( n(n+1) - \frac{2\omega}{\sigma} m \right) rH + \\ &+ \frac{2\omega}{\sigma} m S + \frac{4\omega^2}{\sigma^2 - 4\omega^2} \left( n(n+1) + \frac{2\omega}{\sigma} m \right) \cos \vartheta (m - \sigma m \bar{w}) r - \\ &- \frac{2\omega}{\sigma} m \sin^2 \vartheta \frac{\partial (w - \sigma m \bar{w})}{\partial \cos \vartheta} r, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \left( n - \frac{2\omega}{\sigma} m \right) \left( n + 1 + \frac{2\omega}{\sigma} m \right) \psi &= S + \frac{2\omega}{\sigma} m r H + \\ &+ \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \left( \left( 2 + \frac{2\omega}{\sigma} m \right) r \cos \vartheta (w - \sigma m \bar{w}) \right) - \sin^2 \vartheta \frac{\partial (w - \sigma m \bar{w})}{\partial \cos \vartheta} r. \end{aligned} \quad (18)$$

Из двух последних формул исключаем  $w$  с помощью первой из формул (16) и получаем

$$\begin{aligned} 2\omega \dot{l} + \sigma^2 H &= (\sigma^2 - 4\omega^2) (\psi' - r\chi) + 2\omega \bar{l}, \\ -2\omega \dot{p} + \sigma^2 \delta &= (\sigma^2 - 4\omega^2) (\Delta \psi - r\chi' - 3\chi) - 2\omega \bar{p}, \\ 2\omega \left( (r^2 \dot{l})' + r^2 \dot{p} \right) + \sigma^2 S &= (\sigma^2 - 4\omega^2) n(n+1) \psi + 2\omega \left( (r^2 \bar{l}) + r^2 \bar{p} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Если  $\omega^2 \leq \sigma^2$ , то из (17) сразу определяются  $\psi' - r\chi$  и  $\psi$ , входящие в выражения для смещений (14) и уравнения (7). Если же  $\omega^2$  и  $\sigma^2$  — величины одного порядка, то  $\psi' - r\chi$  и  $\psi$  нельзя выразить только через  $H$  и  $S$  одного порядка с этими функциями: еще войдут такие же функции, отличающиеся по порядку на 2, 4, 6, ... единиц.

3. При сфероидальных колебаниях и  $\sigma^2 \gg 4\omega^2$  можно в (14) принять

$$\bar{w} = [w_{n-1}P_{n-1}^m(\cos\vartheta) + w_{n+1}P_{n+1}^m(\cos\vartheta)] \cos(\sigma t - m\varphi). \quad (20)$$

Уравнение (3) удовлетворено, если  $w_{n-1}$  и  $w_{n+1}$  являются решениями обыкновенных уравнений:

$$\frac{2n+1}{n-m+1} \sigma m f(w_{n+1}) + A' + rB - \frac{n}{r} A + \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{\sigma^2} f(\psi' - r\chi) = 0,$$

$$\frac{2n+1}{n+m} \sigma m f(w_{n-1}) + A' + rB + \frac{n+1}{r} A + \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{\sigma^2} f(\psi' - r\chi) = 0.$$

Исключим отсюда  $\psi' - r\chi$  с помощью (18), а  $A' + rB$  и  $A$  с помощью (7) и (5). В результате получим

$$\begin{aligned} f(w_{n+1}) - \frac{2\omega}{\sigma m} \frac{n-m+1}{2n+1} \rho (i - \bar{l}) &= 0, \\ f(w_{n-1}) - \frac{2\omega}{\sigma m} \frac{n+m}{2n+1} \rho (i - \bar{l}) &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

4. Пусть внутри Земли имеется одна поверхность  $r = r_0$ , где  $\mu$ ,  $\lambda$ ,  $\rho$  или  $\mu'$ ,  $\mu''$ ,  $\rho'$  терпят разрыв. Тогда при интегрировании уравнений (7), (4) возникает вопрос о продолжении функций через эту границу. Из этих уравнений и граничных условий следует, что  $H$ ,  $R$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $L$  должны быть непрерывны, а функция  $S$ , через которую выражается дивергенция смещений, может быть разрывна. Тогда для сохранения непрерывности смещений должно выполняться условие

$$\begin{aligned} \frac{(k+m+2)(k+m+3)}{(2k+3)(2k+5)} \Delta S_{k+2} + \left( \frac{(k+1)^2 - m^2}{(2k+1)(2k+3)} + \right. \\ \left. + \frac{k^2 - m^2}{(2k-1)(2k+1)} - \frac{1}{2k+1} \right) \Delta S_k + \frac{(k-m-1)(k-m)}{(2k-3)(2k-1)} \Delta S_{k-2} = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Из подобных равенств определяются все разрывы  $\Delta S_k$ , начиная с  $\Delta S_m$  или  $\Delta S_{m+1}$  они пропорциональны  $\Delta S_n$ .

Сходимость ряда

$$\sum_m \Delta S_k P_k^m(\cos\vartheta)$$

хуже, если поверхность  $r = r_0$  близка к поверхности Земли, для точек, лежащих на полярной оси, и при  $m = 0$ . Ряд для смещений сходится быстрее, еще быстрее — для кинетической энергии.

Каждую из функций  $H$ ,  $R$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $L$ ,  $S$  представим рядом следующего вида:

$$H = \left[ H_n P_n^m(\cos\vartheta) + C \sum_m \bar{H}_k P_k^m(\cos\vartheta) \right] \cos(\sigma t - m\varphi),$$

где  $H_n$  — решение краевой задачи с неоднородными граничными условиями,  $\bar{H}_k$  — решение с однородными граничными условиями и разрывом  $S$  на величину  $\Delta S_k$ . Постоянная  $C$  определяется условием минимума энергии.

При крутильных колебаниях находятся разрывные решения для  $w_k$  при следующих условиях:

$$\begin{aligned}\mu \left( \frac{w_k}{r} \right)' &= 0 \quad (\text{на поверхности сферы}), \\ \mu_l \left( \frac{w_k}{r} \right)'_e &= \mu_i \left( \frac{w_k}{r} \right)'_i \quad (r = r_0).\end{aligned}$$

Тогда условие непрерывности смещений

$$(k+2)(k+m+1)\Delta w_{k+1} = (k-1)(k-m)\Delta w_{k-1} \quad (23)$$

определяет все  $\Delta w_k$ .

5. Компонента напряжения  $M_w$  определяется выражением

$$M_w = \mu r \left( \frac{w}{r} - \frac{z}{r} \frac{H}{r} \right)' + \frac{\mu}{r} \sin^2 \vartheta \frac{\partial H}{\partial \cos \vartheta}. \quad (24)$$

Ее всегда можно представить в следующем виде:

$$M_w = \sin^2 \vartheta \frac{\partial a}{\partial \cos \vartheta} + b, \quad (25)$$

$a$  и  $b$  выражены суммами членов, каждый из них пропорционален  $P_n^m(\cos \vartheta) \cos(\sigma t - m\varphi)$ .

Компонента  $M_l$  определяется через  $M$  и  $M_w$ . Если  $\omega = 0$ , то при сфероидальных колебаниях  $b = 0$ , при крутильных —  $a = 0$ . Тогда для сфероидальных колебаний

$$\begin{aligned}-n(n+1)M_w &= r \sin^2 \vartheta \frac{\partial M}{\partial \cos \vartheta}, \\ -n(n+1)M_l &= r \frac{\partial M}{\partial \varphi},\end{aligned}$$

где  $M$  — дивергенция тангенциальных компонент напряжения. Для крутильных колебаний

$$M_w = \left( \frac{\bar{w}}{r} \right)' r \mu.$$

При  $\omega \neq 0$  крутильные колебания характеризуются малыми значениями  $R$ ,  $H$ ,  $\delta$ ,  $M$ , сфероидальные — малым значением  $b$ .

6. Таким образом, кажется совершенно необходимым использовать полученные результаты для уточнения модели строения Земли в соответствии с числовыми данными о собственных колебаниях Земли, числах Лява и амплитудах нутации, периодах свободной нутации, используя при этом имеющиеся сведения о скоростях распространения продольных и поперечных волн. Необходимо уточнение теории нутации и вращения Земли. Дальнейшей, но очень трудной задачей, является получение сведений о вязкости внутри Земли.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мельхиор П. Земные приливы. — М.: Мир. 1968.
2. Молоденский М.С. Приливы в упругой Земле. // В сб.: Медленные колебания Земли. — М.: Наука. 1970.

## ПРИЛИВЫ В УПРУГОЙ ЗЕМЛЕ\*

Упругие приливы в Земле определяются системой дифференциальных уравнений в частных производных и соответствующими граничными условиями. Эти уравнения приводятся к обыкновенным, если не учитываются переносные ускорения и задается характер зависимости смещений от координат. В настоящей статье показано, что можно из уравнений производных исключить смещения и получить три уравнения с тремя неизвестными функциями и граничными условиями, необходимыми для определения всех функций.

1. Используем уравнения теории упругости, выраженные в смещениях  $u$ ,  $v$ ,  $w$  в следующем виде:

$$-\mu\Delta u - \mu'u' + \frac{1}{r}\mu'u + \rho\ddot{u} = \frac{\partial A}{\partial x} + Bx + 2\omega\rho\dot{v} - \rho\dot{\omega}y, \quad (1)$$

$$-\mu\Delta v - \mu'v' + \frac{1}{r}\mu'v + \rho\ddot{v} = \frac{\partial A}{\partial y} + By - 2\omega\rho\dot{u} + \rho\dot{\omega}x, \quad (2)$$

$$-\mu\Delta w - \mu'w' + \frac{1}{r}\mu'w + \rho\ddot{w} = \frac{\partial A}{\partial z} + Bz, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \rho(R + W'H) + (\lambda + \mu)\delta + \mu'H, \\ -rB &= \rho'(R + W'H) + \rho W'\delta + \mu'\delta + \left(\frac{\mu'}{r}\right)' rH, \\ rH &= xu + yv + zw, \quad \delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \quad (4)$$

Штрих обозначает частную производную по расстоянию от центра сферы  $r$ ; точка — по времени;  $W$  — потенциал силы тяжести;  $\omega$  — угловая скорость вращения Земли;  $R$  — изменение потенциала притяжения внутри деформированной сферы. Предполагается, что коэффициенты Ламе  $\lambda$ ,  $\mu$ , плотность  $\rho$  и  $W'$  зависят только от  $r$  и что начальные напряжения носят гидростатический характер.

Тогда из трех уравнений получим два следующим образом: умножим первое на  $x$ , второе на  $y$ , третье на  $z$  и результаты сложим, затем продифференцируем первое по  $x$ , второе по  $y$ , третье по  $z$  и сложим результаты. При преобразованиях используем следующие формулы:

$$\begin{aligned} xu' + yv' + zw' &= rH', \\ z\Delta u + y\Delta v + z\Delta w &= \Delta(rH) - 2\delta, \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} &= \delta' + \frac{1}{r}\delta - \frac{1}{r}H'. \end{aligned} \quad (5)$$

В результате преобразований получим

$$-\mu \left( r\Delta H + 2H' + \frac{2}{r}H - 2\delta \right) + \mu' (H - rH') + \rho r\ddot{H}' = A'r + r^2B + 2\omega\rho r\dot{l}, \quad (6)$$

\* В сб.: Медленные движения земной коры. — М.: Наука. 1972. С. 5–7.

$$\begin{aligned}
-\mu\Delta\delta - \mu' \left( \delta' - \frac{1}{r}\delta + \frac{1}{r}H' - \frac{1}{r}\delta + \Delta H + \frac{3}{r^2}H \right) + \mu' \left( \frac{1}{r}H - H' \right) + \rho'\ddot{H} + \rho\ddot{\delta} = \\
= \Delta A + rB' + 3B - 2\omega \left( \frac{\partial\rho\dot{u}}{\partial y} - \frac{\partial\rho\dot{v}}{\partial x} \right), \quad (7)
\end{aligned}$$

$$rl = xv - yu, \quad P = \frac{\partial y}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (8)$$

К уравнениям (6) и (7) добавим уравнение Пуассона:

$$\Delta R = 4\pi f (\rho\delta + \rho'H), \quad (9)$$

где  $f$  — постоянная тяготения.

В уравнения (6), (7) и (9) при  $\omega = 0$  входят три функции  $H$ ,  $\delta$  и  $R$ .

2. Для определения этих функций будем считать заданными на поверхности сферы [1]:

1) нормальное напряжение

$$N = \lambda\delta + 2\mu H'; \quad (10)$$

2) проекции тангенциального напряжения на оси координат  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ , причем

$$\begin{aligned}
xM_x + yM_y + zM_z = 0, \\
\frac{1}{\mu}M_x = \frac{\partial H}{\partial x} + \left( \frac{1}{r}H - 2H' \right) \frac{x}{r} + \left( \frac{u}{r} \right)' r, \quad (11)
\end{aligned}$$

сходные выражения имеют место для  $M_y$  и  $M_z$ ;

3) условия непрерывности производной от потенциала или (при замене объемных масс, выступающих за пределы сферы или уходящих вглубь сферы, простым слоем) разрыв непрерывности производной от потенциала простого слоя

$$R'_e - R'_i = 4\pi f (\rho_i - \rho_e) H. \quad (12)$$

Таким образом, в граничные условия входят  $H$ ,  $R$ ,  $\delta$  и  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . Последние три функции можно исключить. Продифференцируем  $M_x$  по  $x$ ,  $M_y$  по  $y$ ,  $M_z$  по  $z$ , сложим результаты и преобразуем полученное выражение при помощи формул (5):

$$M = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_z}{\partial z} = \mu \left\{ \Delta H - \frac{1}{r^2} (r^2 H')' + \delta' - \left[ \frac{(r^2 H)'}{r^2} \right]' \right\}. \quad (13)$$

Если рассматривать только периодическое движение с частотой  $\sigma$ , то начальные условия отпадают и можно пытаться решение задачи начать с определения функций  $H$ ,  $R$  и  $\delta$  при условиях на границе (10), (12) и (13).

3. Получим решение рассматриваемой краевой задачи при простейших граничных условиях. Пусть все функции, входящие в дифференциальные уравнения и граничные условия, пропорциональны  $P_n^m(\cos\vartheta) \cos(\sigma t - m\varphi)$  с множителем, зависящим только от  $r$ .

В результате воздействия на такую функцию оператором Лапласа или дифференцирования по  $r$  получим функцию, тоже пропорциональную  $P_n^m(\cos\vartheta) \cos(\sigma t - m\varphi)$ . Из



дифференциальных уравнений и граничных условий видно, что вместо уравнений в частных производных получим систему обыкновенных уравнений. Приведем эти уравнения к системе уравнений первого порядка при помощи функций

$$Q = A + \mu\delta + \mu'H,$$

$$P = -r^2Q' + \left(\mu' - \frac{2}{r}\mu\right)r^2\delta - r^3B + 2r(Q - A) + \left[r^3\left(\frac{\mu'}{r}\right)' - \sigma^2r^2\rho\right]H - 2\omega\rho r^2\dot{i}, \quad (14)$$

$$\frac{n(n+1)}{\sigma^2\rho}(F - Q) = (r^2H)' - r^2\delta, \quad L = r^2(R' - 4\pi f\rho H).$$

Этим определяются  $Q'$ ,  $H'$ ,  $R'$ . Из уравнений (6), (7) и (9) получим для  $P'$ ,  $F'$  и  $L'$

$$\begin{aligned} \Delta Q - \left[Q' + \frac{1}{r^2}P + \sigma^2\rho H + \frac{2}{r}(Q - A - \mu\delta)\right]' = \\ = -2B + \left(\frac{4\mu'}{r} - \sigma^2\rho\right)\delta + \left(\frac{4\mu'}{r} - \sigma^2\rho\right)'H - 2\omega\rho\dot{i} + 2\omega\rho\dot{P}, \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\mu\left(r\Delta H - r\delta' + 2H' + \frac{2}{r}H - 2\delta\right) + r\mu'\delta = \\ = rQ' + r^2B + \left[\sigma^2\rho r - (\mu'r)'\right]H + 2\omega\rho r\dot{i}, \quad (16) \end{aligned}$$

$$L' = n(n+1)R - 4\pi f\frac{n(n+1)}{\sigma^2}(F - Q).$$

После преобразований (14)–(16) получим следующую систему уравнений шестого порядка:

$$\begin{aligned} H' &= \delta - \frac{2}{r}H + \frac{n(n+1)}{\sigma^2}\frac{1}{r^2\rho}(F - Q), \\ Q' &= -\sigma^2\rho H + \alpha Q + [2\mu'' + \rho'W' - \alpha^2(\lambda + 2\mu)]H + (\rho' - \alpha\rho)R - \frac{1}{r^2}P - 2\omega\rho\dot{i}, \\ F' &= \left[\frac{\sigma^2}{n(n+1)}\frac{\rho}{\mu} - \frac{1}{r^2}\right]P + \frac{\rho'}{\rho}F + \left(\alpha - \frac{\rho'}{\rho}\right)(\lambda + 2\mu)\delta + 2\left(\frac{\mu'}{\rho}\right)'\rho H - 2\omega\rho\dot{i}, \\ P' &= -n(n+1)F + \frac{n(n+1)}{\sigma^2}\frac{2\mu'}{\rho r}(F - Q) - 2\omega\rho\left[r^2\dot{\rho} + (r^2\dot{i})'\right], \quad (17) \\ R' &= \frac{1}{r^2}L + 4\pi f\rho H, \\ L' &= n(n+1)R - 4\pi f\frac{n(n+1)}{\sigma^2}(F - Q), \\ \alpha(\lambda + 2\mu) &= \rho W' + 2\mu', \quad \delta(\lambda + 2\mu) = Q - \rho R - (\rho W' + 2\mu')H. \end{aligned}$$

Граничные условия на поверхности сферы таковы:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu}M &= -\frac{2n(n+1)}{r^2}H + \frac{2n(n+1)}{\sigma^2 r^3 \rho}(F-Q) - \frac{1}{r^2 \mu}P, \\ N &= Q - \rho R - \left[ \alpha(\lambda + 2\mu) + \frac{4\mu}{r} \right] H + \frac{n(n+1)}{\sigma^2} \frac{2\mu}{r^2 \rho}(F-Q), \\ \frac{1}{r^2}L + \frac{n+1}{r}R + (2n+1)W' &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Множители  $P_n^m(\cos \vartheta) \cos(\sigma t - m\varphi)$  здесь несущественны. Решение уравнений (17) определяется шестью условиями. Функции  $H$ ,  $N$ ,  $R$  должны быть ограниченными в центре сферы; тогда ограничены  $Q$ ,  $M$  и  $L$ . На поверхности сферы заданы  $N$ ,  $L + (n+1)rR$  и  $M$ . При нарушении непрерывности коэффициентов уравнений должны сохранять непрерывность  $H$ ,  $N$ ,  $R$ ,  $L$  и  $M$ . Чтобы продолжать интегрирование через точку разрыва коэффициентов уравнений, необходимо указать еще одно условие. Используя выражение для дивергенции смещений, получим

$$-\sin^2 \vartheta \frac{S}{r^2} = \frac{n(n+1)}{\sigma^2 \rho r^2}(F-Q) \sin^2 \vartheta = \sin^2 \vartheta \frac{\partial}{\partial \cos \vartheta} \left( \frac{w}{r} - \frac{z}{r} \frac{H}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (19)$$

Так как левая часть непрерывна, непрерывна и функция  $(F-Q)/\rho$ .

При малых значениях  $\mu$  функции  $F$  и  $P$  определяются из уравнения второго порядка, близки к синусоидальным с медленно меняющейся амплитудой и длиной волны, убывающей вместе с  $\mu$  как  $\sqrt{\mu}$ , с амплитудой  $P$  порядка  $\sqrt{\mu}$  амплитуды  $F$ . Выражение (19) при  $\mu \rightarrow 0$  сохраняет смысл только тогда, когда  $F \rightarrow 0$ .

4. При  $\omega = \mu = 0$  вместо системы уравнений (17) получим следующую:

$$\begin{aligned} H' &= \delta - \frac{2}{r}H - \frac{n(n+1)}{\sigma^2 r^2 \rho}Q, \\ Q' &= -\sigma^2 \rho H + \alpha A - \left( \rho' W' + \frac{\rho^2 W^{2'}}{\lambda + 2\mu} \right) H + (\rho' - \alpha \rho) R, \\ R' &= \frac{1}{r^2}L + 4\pi f \rho H, \\ L' &= n(n+1)R + \frac{4\pi f n(n+1)}{\sigma^2}Q, \quad \delta(\lambda + 2\mu) = Q - \rho(R + W'H). \end{aligned} \quad (20)$$

Наибольшие из отброшенных членов, пропорциональные  $F$ , при учете их вариаций произвольных постоянных войдут с множителем, содержащим  $\sqrt{\mu}$ . Следовательно, дифференциальные уравнения для упругой жидкости получаются непрерывным переходом от уравнений для упругого твердого тела. Из шести граничных условий одно условие — непрерывность  $(F-Q)/\rho$  — не имеет значения.

Таким образом, при любом строении упругой сферы определяются функции  $H$ ,  $N$ ,  $R$ ,  $M$ ,  $L$  и  $(F-Q)/\rho$  в оболочке.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Молоденский М.С. Упругие приливы, свободная нутация и некоторые вопросы строения Земли. // Труды Геофизического института. 1953. № 19(146).

# ВЫЧИСЛЕНИЕ ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ЗЕМЛИ\*

1. Периоды собственных колебаний Земли определяются при помощи уравнений следующего вида:

$$Y_i' = a_{i1}Y_1 + a_{i2}Y_2 + \dots + a_{i6}Y_6, \quad (1)$$

где  $Y_1 = F$  и  $Y_2 = P$  — функции, определяющие нормальное напряжение  $N$  и дивергенцию касательных напряжений  $M$  на поверхности сферы радиуса  $r$ ;  $Y_3 = H$  — радиальное смещение;  $Y_4 = S$  — функция, определяющая объемное расширение  $\delta$ ;  $Y_5 = R$  — потенциал притяжения внутри деформированной Земли;  $Y_6 = L$  — функция, характеризующая производную от потенциала по  $r$ .

Коэффициенты  $a_{ij}$  имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \alpha, & a_{12} &= \frac{\sigma^2}{n(n+1)} \frac{\rho}{\mu} - \frac{1}{r^2}, & a_{13} &= -(\lambda + 2\mu)\alpha \left( \alpha - \frac{\rho'}{\rho} \right) + 2 \left( \frac{\mu'}{\rho} \right)', & \\ a_{14} &= -\frac{\sigma^2}{n(n+1)} \rho \left( \alpha - \frac{\rho'}{\rho} \right), & a_{15} &= -\rho \left( \alpha - \frac{\rho'}{\rho} \right), & a_{16} &= 0, & \\ a_{21} &= -n(n+1), & a_{24} &= \frac{2\mu'}{r}, & a_{31} &= \frac{1}{\lambda + 2\mu}, & \\ a_{33} &= -\left( \alpha + \frac{2}{r} \right), & a_{34} &= -\left( \frac{\sigma^2}{n(n+1)} \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} - \frac{1}{r^2} \right), & & & \\ a_{35} &= -\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}, & a_{42} &= \frac{1}{\mu}, & a_{43} &= n(n+1), & a_{53} &= 4\pi\kappa\rho, & \\ a_{56} &= \frac{1}{r^2}, & a_{64} &= -4\pi\kappa\rho, & a_{65} &= n(n+1), & & & \\ a_{22} &= a_{23} = a_{25} = a_{26} = a_{32} = a_{36} = a_{41} = a_{44} = a_{45} = a_{46} = a_{51} = & & & & & & & \\ &= a_{52} = a_{54} = a_{55} = a_{61} = a_{62} = a_{63} = a_{66} = 0, & & & & & & \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\rho$  — плотность;  $\mu$  — модуль сдвига;  $\lambda$  — коэффициент Ламе;  $\sigma$  — частота колебаний;  $n$  — номер возбужденного колебания;  $\kappa$  — постоянная тяготения;  $\alpha = (\rho W' + 2\mu')/(\lambda + 2\mu)$ .

Наряду с системой (1) интегрировалась союзная (присоединенная) система:

$$-\bar{Y}_i' = a_{1i}\bar{Y}_1 + a_{2i}\bar{Y}_2 + \dots + a_{6i}\bar{Y}_6. \quad (3)$$

Каждый интеграл системы (3) определяет один первый интеграл системы (1):

$$Y_1\bar{Y}_1 + Y_2\bar{Y}_2 + \dots + Y_6\bar{Y}_6 = C, \quad (4)$$

где  $C$  — произвольная постоянная.

\* Совместно с Крамер М.В. В сб.: Медленные движения земной коры. — М.: Наука. 1972.

2. При малых расстояниях  $r$  от центра сферы коэффициенты  $a_{12}$ ,  $a_{34}$ ,  $a_{56}$  возрастают как  $1/r^2$ . Тогда система (1) разбивается на три уравнения второго порядка, имеющие простые решения:

$$F = Ar^n + Br^{-n-1}.$$

Для  $H$  и  $R$  постоянные  $A$  и  $B$ , конечно, другие. Поэтому, если начальные условия не выбраны вполне определенным образом, функции  $F$ ,  $H$ ,  $R$  возрастают к центру сферы как  $r^{-n-1}$ . Постоянная при неправильной части интеграла обращается в нуль, если при малых  $r$

$$P + nrF = 0, \quad S - (n+1)rH = 0, \quad L - nrR = 0. \quad (5)$$

Так же для союзного уравнения получим

$$\bar{F} - nr\bar{P} = 0, \quad \bar{H} + (n+1)r\bar{S} = 0, \quad \bar{R} + nr\bar{L} = 0. \quad (6)$$

В первых двух уравнениях системы (1) в члены, не содержащие  $Y_1$  и  $Y_2$ , введем постоянный множитель  $k$ . В уравнениях (3) и (4) введем этот множитель в члены, не содержащие  $Y_3$  и  $Y_4$ , в (5) и (6) — в члены, не содержащие  $Y_5$  и  $Y_6$ . Разложим решение в ряд по степеням  $k$  и получим бесконечную систему уравнений второго порядка. Уравнения разных приближений отличаются только свободными членами. Таким образом интегрирование системы (1) можно заменить интегрированием трех уравнений второго порядка и последовательными квадратурами. Уравнения второго порядка включают все члены с большими коэффициентами [с  $\sigma^2$  и  $n(n+1)$ ] и все главные члены при малых значениях  $r$ , поэтому можно ожидать, что процесс приближений быстро сойдется. После интегрирования уравнений второго порядка шаг можно значительно увеличить.

3. Значения частот собственных колебаний для схем строения Земли, близких к исходной, получаются вариацией произвольных постоянных, входящих в общий интеграл системы (1). Вычисления можно значительно упростить и повысить их точность, если варьировать функции, связанные с  $Y_i$  линейно, таким образом, чтобы в результат входили только интегралы правильные, быстро убывающие к центру сферы. Именно от  $Y_i$  перейдем к системе функций  $X_i$ :

$$\begin{aligned} X_1 &= -n(n+1)F + \frac{2\mu'}{r}S, & X_2 &= P, \\ X_3 &= n(n+1)H + \frac{1}{\mu}P, & X_4 &= S, \\ X_5 &= n(n+1)R - 4\pi\kappa\rho S, & X_6 &= L. \end{aligned} \quad (7)$$

Матрицу начальных значений функций  $X_i$  зададим следующим образом:

Интеграл	$X_1$	$X_3$	$X_5$	$X_2$	$X_4$	$X_6$
1	1	0	0	0	0	0
3	0	1	0	0	0	0
5	0	0	1	0	0	0
2	$C_{11}$	$C_{12}$	$C_{13}$	1	0	0
4	$C_{21}$	$C_{22}$	$C_{23}$	0	1	0
6	$C_{31}$	$C_{32}$	$C_{33}$	0	0	1

(8)

Тогда коэффициенты  $b_{ij}$  уравнений

$$X_i' = b_{i1}X_1 + b_{i2}X_2 + \dots + b_{i6}X_6$$

ТАКОВЫ:

$$\begin{aligned}
 b_{11} &= \alpha, & b_{12} &= -\frac{1}{\mu}b_{13} + \frac{2\mu'}{\mu r} - \frac{\sigma^2\rho}{\mu} + \frac{n(n+1)}{r^2}, \\
 b_{13} &= b_{15}W' + 2\mu'\alpha + \frac{2\mu'}{r} - 2\mu'', & b_{14} &= -\frac{1}{r}b_{13} + b_{15}\left(\sigma^2 + \frac{W'}{r} + 4\pi\kappa\rho\right), \\
 b_{15} &= \left(\alpha - \frac{\rho'}{\rho}\right)\rho, & b_{31} &= \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda + 2/3\mu + 4/3\mu'}, & b_{32} &= -\frac{b_{33}}{\mu} - \frac{\mu'}{\mu^2}, \\
 b_{33} &= -\left(\alpha + \frac{2}{r}\right), & b_{34} &= b_{35}\left(-\frac{2\mu'}{r\rho} + 4\pi\kappa\rho\right) + \frac{n(n+1)}{r^2} + b_{35}\sigma^2, \\
 b_{35} &= -\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}, & b_{52} &= -\frac{4\pi\kappa\rho}{\mu}, & b_{54} &= -\pi\kappa\rho', & b_{56} &= \frac{n(n+1)}{r^2}, \\
 b_{16} &= b_{22} = b_{23} = b_{24} = b_{25} = b_{26} = b_{36} = b_{41} = b_{42} = 0, \\
 b_{44} &= b_{45} = b_{46} = b_{61} = b_{62} = b_{63} = b_{64} = b_{66} = 0, \\
 b_{21} &= b_{43} = b_{65} = 1.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Обратная матрица для системы функций  $X_i$  (матрица начальных значений функций  $\bar{X}_i$  союзного уравнения) на поверхности сферы такова:

Интеграл	$\bar{X}_1$	$\bar{X}_3$	$\bar{X}_5$	$\bar{X}_2$	$\bar{X}_4$	$\bar{X}_6$
1	1	0	0	$-C_{11}$	$-C_{21}$	$-C_{31}$
3	0	1	0	$-C_{12}$	$-C_{22}$	$-C_{32}$
5	0	0	1	$-C_{13}$	$-C_{23}$	$-C_{33}$
2	0	0	0	1	0	0
4	0	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	0	1

(10)

В системе функций  $X_i$  дифференциальные уравнения с четным индексом  $i$  имеют постоянные коэффициенты, поэтому вариации  $\delta X_1 = 0$  при  $i$  четном, а в вариации постоянных интегрирования не войдут решения союзных уравнений с четным индексом. Определим коэффициенты  $C_{ij}$  в матрице (10) так, чтобы нечетные интегралы были правильными. Тогда все неправильные интегралы в вариации не войдут. Для матрицы (8) на поверхности сферы получим

$$\begin{aligned}
 X_1 &= C_1X_{11} + C_2X_{13} + C_3X_{15} + n(n+1)\delta A_1, & X_2 &= C_1X_{21} + C_2X_{23} + C_3X_{25}, \\
 X_3 &= C_1X_{31} + C_2X_{33} + C_3X_{35} + n(n+1)\delta A_3, & X_4 &= C_1X_{41} + C_2X_{43} + C_3X_{45}, \\
 X_5 &= C_1X_{51} + C_2X_{53} + C_3X_{55} + n(n+1)\delta A_5, & X_6 &= C_1X_{61} + C_2X_{63} + C_3X_{65},
 \end{aligned} \tag{11}$$

где  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  — постоянные.

Если от системы функций  $X_i$  вернемся к функциям  $Y_i$ , то на поверхности сферы получим

$$\begin{aligned}
 F &= b_1F_1 + b_2F_3 + b_3F_5 - \delta A_1, & P &= b_1P_1 + b_2P_3 + b_3P_5, \\
 H &= b_1H_1 + b_2H_3 + b_3H_5 - \delta A_3, & S &= b_1S_1 + b_2S_3 + b_3S_5, \\
 R &= b_1R_1 + b_2R_3 + b_3R_5 - \delta A_5, & L &= b_1L_1 + b_2L_3 + b_3L_5,
 \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\delta A_1 &= - \int_0^r (-\bar{F}_1 \delta X'_1 + \bar{H}_1 \delta X'_3 + \bar{R}_1 \delta X'_5) dr, \\ \delta A_3 &= - \int_0^r (-\bar{F}_3 \delta X'_1 + \bar{H}_3 \delta X'_3 + \bar{R}_3 \delta X'_5) dr, \\ \delta A_5 &= - \int_0^r (-\bar{F}_5 \delta X'_1 + \bar{H}_5 \delta X'_3 + \bar{R}_5 \delta X'_5) dr,\end{aligned}$$

где  $b_1, b_2, b_3$  — новые постоянные, определяемые из граничных условий. В  $\delta A_1, \delta A_3$  и  $\delta A_5$  главное значение имеют  $\bar{F}_1, \bar{H}_3, \bar{R}_5$ , так как  $\bar{F}_3, \bar{F}_5, \bar{H}_1, \bar{H}_5, \bar{R}_1, \bar{R}_3$  на поверхности сферы обращаются в нуль.

4. Правильные интегралы при  $r \rightarrow 0$  должны удовлетворять условиям (5) и (6). Покажем, что интегралы 2, 4 и 6 с начальными условиями из матрицы (8) являются правильными, если правильны интегралы 1, 3 и 5 из матрицы (10). Из систем (4), (8) и (10) следует, что

$$\begin{aligned}F_2 \bar{F}_1 + P_2 \bar{P}_1 + \dots &= 0, \\ F_2 \bar{F}_3 + P_2 \bar{P}_3 + \dots &= 0, \\ F_2 \bar{F}_5 + P_2 \bar{P}_5 + \dots &= 0\end{aligned}\tag{13}$$

на поверхности сферы и в любой точке вплоть до центра. Интегралы 1, 3 и 5 союзной системы правильные, поэтому выполняются равенства (6). Исключив из (13)  $\bar{F}, \bar{H}, \bar{R}$ , при  $r \rightarrow 0$  получим

$$\begin{aligned}\bar{P}_1 (P_2 + nrF_2) + \bar{S}_1 [S_2 - (n+1)rS_2] + \bar{L}_1 (L_2 - nrR_2) &= 0, \\ \bar{P}_1 (P_4 + nrF_4) + \bar{S}_1 [S_4 - (n+1)rS_4] + \bar{L}_1 (L_4 - nrR_4) &= 0, \\ \bar{P}_1 (P_6 + nrF_6) + \bar{S}_1 [S_6 - (n+1)rS_6] + \bar{L}_1 (L_6 - nrR_6) &= 0.\end{aligned}$$

Подобные равенства получим с множителями  $\bar{P}_3, \bar{S}_3, \bar{L}_3$  и  $\bar{P}_5, \bar{S}_5, \bar{L}_5$ . Это возможно только в случае, если при малых значениях  $r$  выполняются равенства (5), т.е. если интегралы 2, 4 и 6 основной системы дифференциальных уравнений правильные.

5. Основные уравнения интегрируются при условии непрерывности  $H, S, R, L, M, N$ . Условиями непрерывности  $M$  и  $N$  определяются разрывы функций  $F$  и  $P$ :

$$\begin{aligned}\Delta F &= R\Delta\rho - \left( \frac{2\Delta\mu}{r^2} - \frac{\sigma^2}{n(n+1)}\Delta\rho \right) S + \left( 4\frac{\Delta\mu}{r} + W'\Delta\rho + 2\Delta\mu' \right) H, \\ \Delta P &= \left[ \frac{2}{r}S - 2n(n+1)H \right] \Delta\mu.\end{aligned}\tag{14}$$

Так как в систему функций  $M, N, H, S, R, L$  не входят производные от  $\lambda, \mu, \rho$ , то союзные с ними функции также должны быть непрерывными. Отмечая эти функции двумя черточками, а союзные к  $F, P, H, S, R, L$  одной черточкой, сравнивая величины миноров в обеих системах, получим

$$\begin{aligned}\bar{\bar{M}} &= -r^2\bar{P}, \quad \bar{\bar{H}} = \bar{H} - 2n(n+1)\mu\bar{P} + \left( \frac{4\mu}{r} + \rho W' + 2\mu' \right) \bar{F}, \\ \bar{\bar{N}} &= \bar{F}, \quad \bar{\bar{R}} = \bar{R} + \rho\bar{F}, \\ \bar{\bar{L}} &= \bar{L}, \quad \bar{\bar{S}} = \bar{S} + \frac{2}{r}\mu\bar{P} - \left[ \frac{2\mu}{r^2} - \frac{\sigma^2}{n(n+1)}\rho \right] \bar{F}.\end{aligned}\tag{15}$$

Из этой системы (15) следует, что всегда непрерывны только  $\bar{F}$ ,  $\bar{P}$  и  $\bar{L}$ : при непрерывных  $\mu$  и  $\rho$  непрерывны  $\bar{S}$ ,  $\bar{R}$ . При разрыве только  $\mu$

$$\Delta \bar{H} = -2\bar{F}\Delta\mu'. \quad (16)$$

С помощью (7) переходим от системы функций  $F, P, H, S, R, L$  к системе  $X_i$  и союзной с ней  $\bar{X}_i$ :

$$\bar{X}_1 = -\frac{1}{n(n+1)}\bar{F}, \quad \bar{X}_3 = -\frac{1}{n(n+1)}\bar{H}, \quad \bar{X}_5 = -\frac{1}{n(n+1)}\bar{R}. \quad (17)$$

6. Правильные интегралы системы  $Y_i$  можно выделить из общего интеграла этой системы, так как каждые четыре интеграла содержат по крайней мере один правильный. Но при этом происходит увеличение ошибки интегрирования в  $r^{-(2n+1)}$  раз.

После вычисления трех интегралов (1), (3), (5) при помощи уравнения (4) можно три функции основного уравнения выразить через три остальные функции этого уравнения и три произвольные постоянные. Эти постоянные определяются условиями правильности решения уравнений (5) или (6) при достаточно малом  $r$ . Тогда в результате исключения трех функций получаем систему третьего порядка с правильными решениями.

После этого можно получить уравнение третьего порядка с правильными решениями для союзных уравнений, используя имеющиеся три интеграла основной системы. Вместо этого можно вычислить три интеграла системы (3) с начальными условиями  $\bar{P} = 1$ , или  $\bar{S} = 1$ , или  $\bar{L} = 1$ , остальные функции равны нулю. Точность последних трех интегралов может быть в  $1/C_{ij}$  раз меньшей.

# СТРОЕНИЕ ЗЕМЛИ ПО ЧАСТОТАМ ЕЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ\*

Невязки между наблюдаемыми и вычисленными частотами собственных колебаний Земли позволяют уточнить значения скоростей сейсмических волн и плотности в недрах Земли. Выведена система уравнений для поправок к функции расстояния от центра Земли. Изменение частоты при переходе к близкой модели вычисляется квадратурами.

1. Если вычислена частота свободного колебания для заданной модели строения Земли и затем эта модель немного меняется, то изменение частоты можно получить вариацией произвольных постоянных, входящих в общий интеграл уравнений колебания упругого шара. Затем можно построить такую модель, которой соответствуют заданные частоты колебаний, если эти частоты могут быть получены в результате малого изменения строения модели.

Систему шести обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющих колебания Земли, используем в таком виде:

$$y'_i = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \dots + a_{i6}y_6 \quad (i = 1, \dots, 6). \quad (1)$$

За неизвестные функции приняты

$$y_1 = P = -r^2 M + \frac{2}{r} \mu S - 2n(n+1)\mu H, \quad y_2 = S, \quad y_3 = L = r^2 (R' - 4\pi\kappa\rho H), \quad (2)$$

$$y_4 = \Phi = N - \frac{2\mu}{r^2} S + \frac{4\mu}{r} H, \quad y_5 = H, \quad y_6 = R.$$

Коэффициенты уравнений имеют следующий вид:

$$a_{12} = -\rho\sigma^2 + \frac{\beta}{r} - \frac{\rho}{r} W', \quad a_{14} = -n(n+1), \quad a_{15} = -n(n+1)\beta,$$

$$a_{16} = -n(n+1)\rho, \quad a_{21} = 1/\mu, \quad a_{25} = n(n+1), \quad a_{32} = -4\pi\rho G,$$

$$a_{36} = n(n+1), \quad a_{41} = -1/r^2, \quad a_{42} = -\frac{\beta}{r^2}, \quad a_{43} = -\frac{\rho}{r^2},$$

$$a_{45} = -\rho\sigma^2 + \frac{2}{r}\beta + \frac{2\rho}{r} W', \quad a_{52} = \frac{1}{r^2}, \quad a_{54} = \frac{1}{\lambda + 2\mu}, \quad (3)$$

$$a_{55} = -\frac{2}{r}, \quad a_{63} = \frac{1}{r^2}, \quad a_{65} = 4\pi\rho\kappa,$$

$$a_{11} = a_{13} = 0, \quad a_{22} = a_{23} = a_{24} = a_{26} = 0, \quad a_{31} = a_{33} = a_{34} = a_{35} = 0,$$

$$a_{44} = a_{46} = 0, \quad a_{51} = a_{53} = a_{56} = 0, \quad a_{61} = a_{62} = a_{64} = a_{66} = 0,$$

где  $N$ ,  $H$ ,  $R$  — соответственно нормальное к поверхности  $r = \text{const}$  напряжение, радиальное смещение и изменение потенциала притяжения;  $M$  — дивергенция касательного к поверхности  $r = \text{const}$  напряжения; через  $S$  выражается дивергенция смещений;  $W$  — потенциал силы тяжести;  $r$  — расстояние от центра шара; производные по  $r$  отмечены штрихом. Кроме того,  $\sigma$  — собственная частота и  $\kappa$  — гравитационная постоянная.

\* Совместно с Крамер М.В. // Известия АН СССР. Физика Земли. 1973. №4. С.3–9.



Система функций  $P, S, L, \Phi, H, R$  выбрана потому, что для нее только 10 из 36 коэффициентов  $a_{ij}$  зависят от строения шара и просто выражаются через плотность  $\rho$ , упругие постоянные  $\lambda, \mu$  и  $W'$ . Это значительно упрощает вычисление результата варьирования коэффициентов.

2. Прежде всего находим три правильных (ограниченных в центре шара) интеграла системы уравнений (1) и три правильных интеграла системы союзной:

$$-\bar{y}'_i = a_{1i}\bar{y}_1 + a_{2i}\bar{y}_2 + \dots + a_{6i}\bar{y}_6. \quad (4)$$

На поверхности шара (при  $r = 1$ ) значения функции  $y_i$  всегда можно представить матрицей:

	№	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$	
Интегралы правильные	{	1	1	0	0	$c_{11}$	$c_{12}$	$c_{13}$
		2	0	1	0	$c_{21}$	$c_{22}$	$c_{23}$
		3	0	0	1	$c_{31}$	$c_{32}$	$c_{33}$
Интегралы неправильные	{	4	0	0	0	1	0	0
		5	0	0	0	0	1	0
		6	0	0	0	0	0	1

(5)

Тогда значения функций союзного уравнения представляются матрицей:

	№	$\bar{y}_1$	$\bar{y}_2$	$\bar{y}_3$	$\bar{y}_4$	$\bar{y}_5$	$\bar{y}_6$	
Интегралы неправильные	{	I	1	0	0	0	0	0
		II	0	1	0	0	0	0
		III	0	0	1	0	0	0
Интегралы правильные	{	IV	$-c_{11}$	$-c_{21}$	$-c_{31}$	1	0	0
		V	$-c_{12}$	$-c_{22}$	$-c_{32}$	0	1	0
		VI	$-c_{13}$	$-c_{23}$	$-c_{33}$	0	0	1

(6)

Каждый элемент матрицы (6) равен соответствующему минору определителя, составленного из элементов матрицы (5). Следовательно,

1) три правильных интеграла системы (1) определяют значения правильных интегралов союзной системы (4) на поверхности шара;

2) в вычисления значений возмущенных частот собственных колебаний неправильные интегралы основной и союзной систем не войдут;

3) с помощью трех условий на поверхности шара выразим  $y_4, y_5, y_6$  через  $y_1, y_2, y_3$ :

$$\begin{aligned} y_4 + b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + b_{13}y_3 &= 0, \\ y_5 + b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + b_{23}y_3 &= 0, \\ y_6 + b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + b_{33}y_3 &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Каждую функцию  $y_i$  выразим через три частных правильных интеграла, входящих в матрицу (5):

$$y_i = y_{i1}y_1 + y_{i2}y_2 + y_{i3}y_3. \quad (8)$$

После подстановки (8) в (7), используя (5), получим

$$\begin{aligned} (c_{11} + b_{11})y_1 + (c_{21} + b_{12})y_2 + (c_{31} + b_{13})y_3 &= 0, \\ (c_{12} + b_{21})y_1 + (c_{22} + b_{22})y_2 + (c_{32} + b_{23})y_3 &= 0, \\ (c_{13} + b_{31})y_1 + (c_{23} + b_{32})y_2 + (c_{33} + b_{33})y_3 &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Уравнения (9) совместны только после добавления к их коэффициентам вариаций, обусловленных таким изменением  $\rho$ ,  $\mu$  и  $\lambda$  в (3), какое приведет к совпадению вычисленных частот рассматриваемых собственных колебаний с наблюдаемыми. Определитель  $\Delta$ , составленный из коэффициентов уравнений (9), считаем малой величиной. Умножим уравнения (9) на соответствующие миноры первого, затем второго и третьего столбца определителя  $\Delta$ . Результаты умножений по столбцам сложим и получим

$$\begin{aligned} y_1 (\Delta + \delta\Delta) + M_{11}\delta y_4 + M_{21}\delta y_5 + M_{31}\delta y_6 &= 0, \\ y_2 (\Delta + \delta\Delta) + M_{21}\delta y_4 + M_{22}\delta y_5 + M_{23}\delta y_6 &= 0, \\ y_3 (\Delta + \delta\Delta) + M_{31}\delta y_4 + M_{32}\delta y_5 + M_{33}\delta y_6 &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Вариации  $b_{ij}$  включены в  $\delta\Delta$ :

$$\begin{aligned} \delta y_4 &= y_1\delta c_{11} + y_2\delta c_{21} + y_3\delta c_{31}, \\ \delta y_5 &= y_1\delta c_{12} + y_2\delta c_{22} + y_3\delta c_{32}, \\ \delta y_6 &= y_1\delta c_{13} + y_2\delta c_{23} + y_3\delta c_{33}. \end{aligned} \quad (11)$$

Множители при  $y_1$  в (11) определяются правильным решением уравнений (1) с учетом вариаций и с неоднородными условиями на поверхности шара:

$$y_1 = 1; \quad y_2 = 0; \quad y_3 = 0.$$

При варьировании общего интеграла

$$y_i = \sum C_j (y_i)_j,$$

где  $(y_i)_j$  определены матрицей (5), получим

$$\begin{aligned} \delta c_1 &= \delta c_2 = \delta c_3 = 0, \\ \delta c_4 &= \delta c_{11} = \int_0^1 \sum_{i=1}^{i=6} (\bar{y}_i)_{IV} (\delta y'_i)_1 dr, \\ \delta c_5 &= \delta c_{12} = \int_0^1 \sum_{i=1}^{i=6} (\bar{y}_i)_V (\delta y'_i)_1 dr, \\ \delta c_6 &= \delta c_{13} = \int_0^1 \sum_{i=1}^{i=6} (\bar{y}_i)_{VI} (\delta y'_i)_1 dr. \end{aligned} \quad (12)$$

Величина  $(\delta y'_i)_1$  есть вариация правой части уравнений (1), вычисленная для первого частного интеграла матрицы (5);  $(\bar{y}_i)_{IV}$ ,  $(\bar{y}_i)_V$ ,  $(\bar{y}_i)_{VI}$  — функции союзного уравнения для IV, V и VI частного интеграла матрицы (6). Множители при  $y_2$  в (11) определяются условиями на поверхности:

$$y_1 = 0; \quad y_2 = 1; \quad y_3 = 0.$$

В отличие от (12) вместо  $(\delta y'_i)_1$  войдут  $(\delta y'_i)_2$ . При определении множителей при  $y_3$  войдут  $(\delta y'_i)_3$ . Уравнения (10) и (11) после подстановки в них (12) и сходных выражений

с измененным первым индексом получают следующий вид:

$$y_i (\Delta + \delta\Delta) + \int_0^1 \delta f_i dr = 0, \quad (13)$$

$$\delta f_i = \sum_{j=1}^6 \left[ y_1 (\delta y'_j)_1 + y_2 (\delta y'_j)_2 + y_3 (\delta y'_j)_3 \right] \times \\ \times [M_{1i} (\bar{y}_j)_{IV} + M_{2i} (\bar{y}_j)_V + M_{3i} (\bar{y}_j)_{VI}]. \quad (14)$$

Три уравнения (13) (при  $i = 1$ ,  $i = 2$  и  $i = 3$ ) заменяют уравнения (9). Если  $\Delta$  и все вариации малы, то  $y_1$ ,  $y_2$  и  $y_3$  можно заменить минорами любой строки, и формулы (13) различаются на величины порядка  $\Delta^2$ . После определения вариаций уравнения (9) становятся совместными и определяют точные значения  $y_1$ ,  $y_2$  и  $y_3$ .

3. Изменения частоты собственных колебаний при малом изменении коэффициентов системы уравнений (1) или при включении в эти уравнения малых дополнительных членов выражены теперь через один частный интеграл системы (1) и один частный интеграл союзной системы (4). Первый интеграл является решением граничной задачи для основной системы уравнений с условиями (7). Второй интеграл является решением граничной задачи для союзной системы (4) с граничными условиями, которые получаются из матрицы коэффициентов (7) путем обращения этой матрицы. В точках разрыва коэффициентов основная система интегрируется при условиях непрерывности  $M$ ,  $N$ ,  $H$ ,  $R$ ,  $S$ ,  $L$ . Союзная система интегрируется при условии непрерывности элементов обратной матрицы  $\bar{M}$ ,  $\bar{N}$ ,  $\bar{H}$ ,  $\bar{R}$ ,  $\bar{L}$ ,  $\bar{S}$ .

Затруднение возникает только тогда, когда при переходе через границу жидкого ядра система (1) распадается на системы четвертого и второго порядков. Если основная матрица задана в системе функций  $F$ ,  $P$ ,  $H$ ,  $R$ ,  $L$ ,  $S$ , где  $F = \Phi + (\rho W' + 2\mu') H + \sigma^2 \rho/n(n+1)S + \rho R$ , а союзная матрица — в системе функций  $\bar{F}$ ,  $\bar{P}$ ,  $\bar{H}$ ,  $\bar{R}$ ,  $\bar{L}$ ,  $\bar{S}$ , то при  $\mu = 0$  отделяются функции  $F$  и  $P$ , а в союзной системе —  $\bar{F}$  и  $\bar{P}$ . После исключения этих функций получим взаимно союзные системы четвертого порядка, если в ядре  $\alpha\rho - \rho' = 0$ . Каждый интеграл продолжается с сохранением непрерывности  $\bar{H}$ ,  $\bar{R}$ ,  $\bar{L}$ ,  $\bar{S}$  и получается правильным, если начальные значения на поверхности шара безошибочны. Кроме того, на границе ядра должно выполняться условие

$$\bar{S}_e + \frac{\sigma^2}{n(n+1)} \rho_i \bar{F}_e = 0$$

(индекс  $i$  отмечает внутреннее значение, индекс  $e$  — внешнее), имеющее такое же значение, как условие  $M = 0$  на той же границе для основной системы. Так как все условия, определяющие интересующий нас интеграл, заданы на поверхности, это условие и ограниченность всех функций вблизи центра сферы контролируют точность интегрирования основной и союзной систем.

4. Для системы коэффициентов (3) получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} + \frac{2}{n(n+1)r} & c_{21} + \frac{2\mu(n-1)(n+2)}{n(n+1)r^2} & c_{31} \\ c_{12} + \frac{1}{2n(n+1)\mu} & c_{22} - \frac{1}{n(n+1)r} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} + \frac{1}{(n+1)r} \end{vmatrix}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
f = & -\sigma^2 \rho (H\bar{\Phi} + S\bar{P}) + \\
& + \rho \left[ \left( \frac{2W'}{r} H - \frac{1}{r^2} \bar{L} \right) \bar{\Phi} - n(n+1)R\bar{P} + 4\pi\kappa H\bar{R} - 4\pi\kappa S\bar{L} - \frac{W'}{r} S\bar{P} \right] + \\
& + \beta \left[ -n(n+1)H\bar{P} + \left( \frac{2}{r} H - \frac{1}{r^2} S \right) \bar{\Phi} + \frac{1}{r} S\bar{P} \right] + \frac{1}{\lambda + 2\mu} \bar{\Phi} \bar{H} + \frac{1}{\mu} P\bar{S}, \quad (16)
\end{aligned}$$

где

$$\beta = \rho W' + 2\mu'.$$

При варьировании  $\rho$  необходимо учесть, что вариация  $W'$  должна быть выражена через вариацию  $\rho$ :

$$(r^2 \delta W')' = -4\pi\kappa r^2 \delta \rho.$$

Представим  $f$  в следующем виде:

$$f = \frac{\partial f}{\partial \sigma^2} \sigma^2 + \frac{\partial f}{\partial \rho} \delta \rho + \frac{\partial f}{\partial \mu'} \delta \mu' + \frac{\partial f}{\partial W'} \delta W' + \frac{\partial f}{\partial (\rho/\mu)} \delta \frac{\rho}{\mu} + \frac{\partial f}{\partial [\rho/(\lambda + 2\mu)]} \delta \frac{\rho}{\lambda + 2\mu}.$$

Исключив  $\delta W'$  и  $\delta \mu'$ , получим

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \delta f dr = & \left| r^2 \delta W' \int_0^r \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial W'} dr + \frac{\partial f}{\partial \mu'} \delta \mu' \right|_0^1 + \\
& + \int_0^1 \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial \rho} + 4\pi\kappa r^2 \int_0^r \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial W'} dr - \left( \frac{\partial f}{\partial \mu'} \right)' \frac{\rho}{\mu} \right) \delta \rho + \right. \\
& \left. + \frac{\partial f}{\partial (\rho/\mu)} \delta \frac{\rho}{\mu} + \frac{\partial f}{\partial [\rho/(\lambda + 2\mu)]} \delta \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} + \frac{\partial f}{\partial \sigma} \Delta \sigma \right] dr. \quad (17)
\end{aligned}$$

Общее уравнение (14) таково:

$$\begin{aligned}
\Delta + \left[ \left( \frac{M_{21}}{2n(n+1)\rho} - \frac{2(n-1)(n+2)M_{12}\mu^2}{n(n+1)\rho} \right) \left( \delta \frac{\rho}{\mu} - \frac{1}{\mu} \delta \rho \right) \right]_{r=1} + \\
+ \frac{1}{P(1)} \int_0^1 \delta f dr = 0, \quad \text{так как } \delta W'(1) = 0. \quad (18)
\end{aligned}$$

Вариации  $\delta \rho$ ,  $\delta(\rho/\mu)$  и  $\delta[\rho/(\lambda + 2\mu)]$  независимы, но  $\delta \rho$  подчинены условиям

$$\begin{aligned}
\int_0^1 r^2 \delta \rho dr = 0, \\
\int_0^1 r^4 \delta \rho dr = 0, \quad (19)
\end{aligned}$$

выражающим неизменность массы и момента инерции Земли.

С помощью (18) можно вычислить частоты свободных колебаний для любой модели, близкой к исходной.

Определим  $\delta x$  из  $n$  уравнений следующего вида:

$$\int_0^1 X_i \delta x dr + C_i = 0, \quad (20)$$

$$C_i = A_i \delta x(1) + B_i.$$

Здесь  $X_i$  — неизвестная функция от  $r$ ,  $A_i$  и  $B_i$  — известные числа. Можно  $\delta x$  представить значениями в  $n$  точках и заменить эту систему системой линейных алгебраических уравнений. Как показали пробные вычисления, ранг матрицы, составленной из чисел  $x_i(r_j)$ , оказывается низким, а значения  $\delta x_j$  — колеблющимися и чрезвычайно большими.

Избежать решения системы  $n$  уравнений можно следующим образом. Распределим функции  $X_i$  (в порядке уменьшения частоты) и, начиная с первой, присоединяя последовательно по одной, заменим их системой такого же числа взаимно ортогональных функций. Пусть тогда

$$X_i = \sum \alpha_{ij} Y_j, \quad \alpha_{ii} = 1, \quad (21)$$

$$\delta X = \sum \beta_j Y_j,$$

$$\int_0^1 Y_i Y_j dr = 0, \quad i \neq j.$$

Коэффициенты  $\alpha_{ij}$  известны,  $\beta_i$  следует определить из (20). Получим

$$\beta_1 \int_0^1 Y_1^2 dr = -C_1,$$

$$\beta_2 \int_0^1 Y_2^2 dr = -C_2 - \alpha_{21} \beta_1 \int_0^1 Y_1^2 dr, \quad (22)$$

Все  $\beta_i$  выражены через  $\delta x(1)$ . Должно выполняться условие

$$\delta x(1) = \sum \beta_i Y_i(1), \quad (23)$$

а при определении  $\delta \rho$  — два условия (19).

Далее увидим, что эти условия мало усложняют задачу. Единственными делителями при определении  $\beta_i$  являются числа

$$\int_0^1 Y_i^2 dr.$$

Если при каком-то значении индекса  $i$  функция  $Y_i$  на всем интервале близка к нулю, то  $X_i$  с известным приближением выражается через те же функции с меньшим индексом, следовательно, частота  $\sigma_i$  выражается через частоты с меньшими индексами (или в (20) необходимо включить вариации других функций).

Определим функцию  $Z$  условиями

$$Z = \sum_1^n a_i X_i, \quad \sum_1^n a_i^2 = 1, \quad \int_0^1 Z^2 dr = \min. \quad (24)$$

Для нахождения  $a_i$  получим уравнения

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \left[ \int_0^1 \left( \sum_1^n a_i X_i \right)^2 dr - \lambda \left( \sum_1^n a_i^2 - 1 \right) \right] = 0 \quad (25)$$

с обозначением

$$\int_0^1 X_i X_j dr = X_{ij} X_i X_j, \quad X_{ii} = 1.$$

Получим следующее условие совместности уравнений (25):

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{\lambda}{x_1^2} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & 1 - \frac{\lambda}{x_2^2} & x_{23} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \dots & 1 - \frac{\lambda}{x_n^2} \end{vmatrix} = 0. \quad (26)$$

$n$  действительных корней этого уравнения определяют  $n$  функций  $Z_i$ . Из неравенства Шварца получаем

$$\int_0^1 X_i X_j dr = X_{ij} \bar{X}_j \bar{X}_i \leq \bar{X}_i X_j,$$

т.е.  $X_{ij} \leq 1$ .

Определив один из корней (26), получим  $a_i$  по минорам любой строки, причем

$$\int_0^1 Z_i^2 dr = \lambda_i.$$

Если наименьший корень  $\lambda_n$  достаточно мал, то  $Z_n \approx 0$ . Таким путем можно удалить те функции, которые в  $\delta x$  входят с малыми делителями.

Решение уравнений (20) можно представить в таком виде:

$$\delta x = \sum_1^n (\beta_i^i Y_i + \beta_{i+1}^i Y_{i+1} + \dots + \beta_n^i Y_n)^{c_i} = \sum C_i \delta x_i.$$

Тогда

$$(\delta x \delta x) = \int_0^1 \delta x^2 dr = \sum \sum D_i D_j \delta x_{ij},$$

где

$$\delta x_{ij} = \frac{\int_0^1 \delta x_i \delta x_j dr}{[\int \delta x_i^2 dr \int \delta x_j^2 dr]^{1/2}} \leq 1, \quad D_i = (\delta x_i \delta x_i)^{1/2} C_i.$$

Можно найти значение  $\bar{D}_i$ , которое дает минимум  $(\delta x \delta x)$ , если все значения  $D_j (j \neq i)$  заданы. Это значение таково:

$$\bar{D}_i = D_i - \sum D_j \delta x_{ij}.$$

При замене  $D_i$  на  $\bar{D}_i$  интеграл  $(\delta x \delta x)$  уменьшается на  $(D_i - \bar{D}_i)^2$ . Если разность  $D_i - \bar{D}_i$  лежит в пределах случайных ошибок, то уменьшение  $(\delta x \delta x)$  можно получить за счет выглаживания результатов наблюдений.

Все вариации непрерывны на том интервале, где непрерывны  $\rho, \mu, \lambda$ . Решение с разрывными вариациями осуществить легче, но неопределенности в решении получится больше.

# ТЕОРИЯ ПРИЛИВОВ В УПРУГОЙ ЗЕМЛЕ С УЧЕТОМ ЧЛЕНОВ ПОРЯДКА СЖАТИЯ\*

Члены порядка сжатия Земли обязательно должны учитываться даже в простейшей теории нутации. При использовании периодов собственных колебаний Земли, определенных точнее, чем до 0,1%, влияние этих членов уже заметно. В статье показано, что влияние силы Кориолиса можно учесть настолько точно, насколько это необходимо. Указан простой способ учета сжатия Земли в периодах собственных колебаний.

1. Мы предполагаем [1], что:

а) значения потенциала внешних возмущающих сил на поверхности шара разложены на гармонические колебания и представлены рядом:

$$V = \sum V_n P_n^m (\cos \vartheta) \cos(\sigma t - m\varphi),$$

где  $\sigma$  — частота колебаний,  $\vartheta$  — полярное расстояние,  $\varphi$  — долгота;

б) подобными же рядами представлены изменение потенциала  $R$ , нормальное напряжение  $N$ , дивергенция касательных к поверхности шара напряжений  $M$  и компонента  $M_z$  касательных напряжений.

Рассматривается элементарное колебание, при котором отличны от нуля на поверхности шара только коэффициенты разложений  $R_n$ ,  $N_n$ ,  $M_n$ ,  $M_{z, n-1}$ ,  $M_{z, n+1}$  при некотором заданном  $n$  или одна из этих величин.

Четыре уравнения в частных производных (см. [1], формулы (1)–(4)) после выделения множителя при  $P_k(\cos \vartheta) \cos(\sigma t - m\varphi)$  заменяются четырьмя обыкновенными уравнениями. Эти уравнения здесь удобно иметь в следующем виде:

$$\begin{aligned} A'_k + rB_k - \frac{k}{r}A_k + f_{k+1} \left( H_k - \frac{1}{(k+1)r}S_k \right) &= \rho X_k^I, \\ A'_k + rB_k + \frac{k+1}{r}A_k + f_{k-1} \left( H_k + \frac{1}{kr}S_k \right) &= \rho X_k^{II}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} b_{k+1} \left( A'_k + rB_k - \frac{k}{r}A_k \right) + a_{k+1} \left( A'_{k+2} + rB_{k+2} + \frac{k+3}{r}A_{k+2} \right) + \\ + f_{k+1}(w_{k+1}) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\Delta R_k = 4\pi\kappa(\rho\delta_k + \rho'H_k), \quad (3)$$

\* Известия АН СССР. Физика Земли. 1974. №1. С. 3–8.



где

$$\begin{aligned}
 A &= \rho(R + W'H) + (\lambda + \mu)\delta + \mu'H, \\
 -rB &= \rho'(R + W'H) + \rho W'\delta + \mu'\delta + (\mu'/r)'rH, \\
 f &= \mu\Delta + \mu'\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\mu'}{r} + \sigma^2\rho, \\
 X_k^I &= -(\sigma - 4\omega^2)\vartheta_k^{II} + \sigma^2\left(H_k - \frac{1}{(k+1)r}S_k\right) - 2\omega\sigma^2\frac{k+2}{k+1}(2k+1)a_k\bar{w}_{k+1}, \\
 X_k^{II} &= -(\sigma^2 - 4\omega^2)\vartheta_k^I + \sigma^2\left(H_k + \frac{1}{kr}S_k\right) + 2\omega\sigma^2\frac{k-1}{k}(2k+1)a_k\bar{w}_{k-1}, \\
 \vartheta_k^I &= (\psi' - r\chi)_k + \frac{k+1}{r}\psi_k, \quad a_k = \frac{k+m+1}{2k+3}, \\
 \vartheta_k^{II} &= (\psi' - r\chi)_k - \frac{k}{r}\psi_k, \quad b_k = \frac{k-m}{2k-1}.
 \end{aligned}$$

Здесь приняты следующие обозначения:  $H$  — радиальная составляющая смещений,  $\delta$  — объемное расширение,  $\kappa$  — гравитационная постоянная,  $\rho, \lambda, \mu$  — плотность и упругие параметры, зависящие только от расстояния до центра шара  $r$ ,  $\omega$  — угловая скорость вращения Земли,  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $S = 2rH + r^2(H' - \delta)$ ,  $W$  — невозмущенный гравитационный потенциал. Штрих означает дифференцирование по радиусу.

Функции  $\psi' - r\chi$  и  $\psi$  определяются из уравнений (15) работы [1]:

$$H = \psi' - r\chi - \frac{2\omega}{\sigma} \frac{m}{r} \psi - \frac{4\omega^2}{\sigma^2 - 4\omega^2} \frac{z}{r} (w - \sigma m \bar{w}),$$

$$\begin{aligned}
 S &= r^2\Delta\psi - (r^2\psi')' - \frac{2\omega}{\sigma}m\psi - \frac{4\omega}{\sigma}m(\psi' - r\chi)r + \\
 &\quad + \frac{4\omega^2}{\sigma^2 + 4\omega^2} \left[ r \sin^2\vartheta \frac{\partial(w - \sigma m \bar{w})}{\partial \cos\vartheta} - 2z(w - \sigma m \bar{w}) \right], \quad (4) \\
 w &= \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{\sigma^2} \left( \frac{\partial\psi}{\partial z} - z\chi \right) + \sigma m w,
 \end{aligned}$$

где  $w$  — решение уравнения (9) из [1].

Уравнения (4) после разложения правых частей по функциям  $P_k^m(\cos\vartheta)$  можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 H_k + \frac{1}{kr}S_k &= \left( 1 - \frac{2\omega}{\sigma}m\frac{3k+1}{k(2k+1)} - \frac{4\omega^2}{\sigma^2}\frac{2k+1}{k}a_{k-1}b_k \right) \vartheta_k^I - \\
 &\quad - \frac{2\omega}{\sigma}m\frac{k+1}{k(2k+1)}\vartheta_k^{II} - \frac{4\omega^2}{\sigma^2}\frac{2k+1}{k}b_k b_{k-1}\vartheta_{k-2}^{II}, \quad (5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_k - \frac{1}{(k+1)r}S_k &= \left( 1 + \frac{2\omega}{\sigma}m\frac{3k+2}{(k+1)(2k+1)} - \frac{4\omega^2}{\sigma^2}\frac{2k+1}{k+1}a_k b_{k+1} \right) \vartheta_k^{II} + \\
 &\quad + \frac{2\omega}{\sigma}m\frac{k}{(k+1)(2k+1)}\vartheta_k^I - \frac{4\omega^2}{\sigma^2}\frac{2k+1}{k+1}a_k a_{k+1}\vartheta_{k+2}^I,
 \end{aligned}$$

$$(w - \sigma tw)_{k+1} = \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{\sigma^2} (b_{k+1} \vartheta_k^{II} + a_{k+1} \vartheta_{k+2}^I).$$

В уравнениях (5)  $\vartheta_{k-2}^{II}$  и  $\vartheta_{k+2}^I$  выражаем через  $w_{k+1}$  и  $w_{k-1}$ , в результате получаем

$$H_k + \frac{1}{kr} S_k = \left(1 - \frac{2\omega}{\sigma} m \frac{3k+1}{k(2k+1)}\right) \vartheta_k^I - \frac{2\omega}{\sigma} m \frac{k+1}{k(2k+1)} \vartheta_k^{II} - \frac{4\omega^2}{\sigma^2 - 4\omega^2} \frac{2k+1}{k} b_k (w - \sigma t\bar{w})_{k-1}, \quad (6)$$

$$H_k - \frac{1}{(k+1)r} S_k = \left(1 + \frac{2\omega}{\sigma} m \frac{3k+2}{(k+1)(2k+1)}\right) \vartheta_k^{II} + \frac{2\omega}{\sigma} m \frac{k}{(k+1)(2k+1)} \vartheta_k^I - \frac{4\omega^2}{\sigma^2 - 4\omega^2} \frac{2k+1}{k+1} a_k (w - \sigma t\bar{w})_{k+1}.$$

Вместо  $w_{k+1}$  вводим функцию  $Y_{k+1}$ , определяемую условием

$$Y_{k+1} = w_{k+1} - b_{k+1} \left(H_k - \frac{1}{(k+1)r} S_k\right) - a_{k+1} \left(H_{k+2} + \frac{1}{(k+2)r} S_{k+2}\right). \quad (7)$$

Тогда уравнение (2) после исключения  $A_k$  и  $B_k$  принимает следующий вид:

$$f_{k+1}(Y_{k+1}) = -\rho (b_{k+1} X_k^I + a_{k+1} X_{k+2}^{II}). \quad (8)$$

При  $\omega = 0$  уравнения (1) и (3) отделяются от (2) или (7). Граничные условия для (1) и (3) таковы:

$$M_k(1) = N_k(1) = \left(R'_k + \frac{k+1}{r} R_k + 4\pi \kappa \rho H_k\right)_{r=1} = 0, \text{ если } k \neq n.$$

Эти три величины заданы, если  $k = n$ .

Для (8) граничные условия задаются значением  $M_z$ . Используем общее выражение для  $M_z$ :

$$M_z = \mu \left( \frac{\partial H}{\partial z} + \left( \frac{1}{r} H - 2H' \right) \frac{z}{r} + \left( \frac{w}{r} \right)' r \right).$$

Отсюда получим

$$\frac{1}{\mu} M_{z, k+1} = \left( \frac{w_{k+1}}{r} \right)' r - b_{k+1} \left( H'_k + \frac{k-1}{r} H_k \right) - a_{k+1} \left( H'_{k+2} - \frac{k+4}{r} H_{k+2} \right).$$

Выразим  $M_{z, k+1}$  через  $Y_{k+1}$  — решение уравнения (8):

$$\frac{1}{\mu} M_{z, k+1} = \left( \frac{1}{r} y_{k+1} \right)' r + b_{k+1} \frac{r}{k+1} M_k - a_{k+1} \frac{r}{k+2} M_{k+2}. \quad (9)$$

Если при  $r = 1$   $M_k = M_{k+2} = 0$ , то

$$\frac{1}{\mu} M_{z, k+1} = \left( \frac{1}{r} Y_{k+1} \right)' r \quad (10)$$

— граничные условия для уравнений (8).

Простейшее решение уравнений (5) получается тогда, когда в силу граничных условий  $H_k$  и  $S_k$  — малые порядка  $\omega^2$  при  $k \neq n$ . Тогда  $\vartheta_k^I$  и  $\vartheta_k^{II}$  малы, если  $k \neq n$ , или  $k \neq n-2$ , или  $k \neq n+2$ . Написав уравнения (5) при  $k = n$ ,  $k = n-2$  и  $k = n+2$ , из полученных 6 уравнений определим  $\vartheta_{n-2}^I$ ,  $\vartheta_n^I$ ,  $\vartheta_{n+2}^I$ ,  $\vartheta_{n-2}^{II}$ ,  $\vartheta_n^{II}$ ,  $\vartheta_{n+2}^{II}$ . Используем уравнение (7) и из (8) определим  $\sigma \bar{w}_{k+1}$ . Теперь имеем все данные для вычисления смещений и правых частей уравнений (1).

Системы уравнений (1), (3), (8) связаны от  $k = m$  или  $k = m+1$  до  $k = \infty$ . Функции с индексом  $n+2$  и  $n-2$  имеют величину порядка сжатия Земли и входят в систему  $k = n$  только при сохранении членов порядка сжатия в степени  $3/2$ .

Уравнения (1), (3) и (8) решаются раздельно. Но если частоты собственных колебаний для раздельных решений близки (вблизи значения  $n = 25$ ), то учет кориолисовых сил может потребовать совместного решения. Так называемые «сфероидальные» и «крутильные» колебания всегда возникают совместно. Отношение их амплитуд определяется граничными условиями. При статическом приливе зависимость чисел Лява от широты и долготы несколько отличается от той, которая определяется элементарной теорией.

Если  $m = 0$ , то  $\bar{w}_{k-1} = 0$  и  $\bar{w}_{k+1} = 0$ . Уравнение (8) выполняется, так как  $Y_{k+1} = Y_{k-1} = 0$  и  $M_{z, k+1}$  выражается через  $M_{k+2}$  и  $M_k$ .

2. Чтобы учесть сжатие Земли, рассмотрим более общий случай, когда  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $\lambda$  зависят не только от  $r$ , но и от  $\vartheta$  и  $\varphi$ .

Уравнения, соответствующие (1) и (2), получаются при помощи следующих вспомогательных формул:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu}{\partial x} \Delta u + \frac{\partial \mu}{\partial y} \Delta v + \frac{\partial \mu}{\partial z} \Delta w &= D(\mu, \Delta \psi) - 2D(\mu, \chi) - \mu' r \Delta \chi, \\ u \frac{\partial}{\partial x} \Delta \mu + v \frac{\partial}{\partial y} \Delta \mu + w \frac{\partial}{\partial z} \Delta \mu &= D(\psi, \Delta \mu) - (\Delta \mu)' r \chi, \\ r u' \frac{\partial \mu}{\partial x} + r v' \frac{\partial \mu}{\partial y} + r w' \frac{\partial \mu}{\partial z} &= [D(\psi, \mu) - \mu' r \chi]' r - D(\mu', \psi) r + r^2 \mu'' \chi + \\ &\quad + D(\mu, \psi) - r \mu' \chi + \mu' H, \\ D(\psi, \mu) &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \mu}{\partial z}, \\ \left( \frac{\partial \mu}{\partial x} \right)' &= \frac{\partial \mu'}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\mu'}{r^2} x. \end{aligned}$$

Получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \mu \left( r \Delta H + 2H' - \frac{2}{r} H - 2\delta \right) + \mu' (rH' - H) + \\ + rA' + r^2 B + \sigma^2 \rho r H + 2\omega i r \rho = \\ = -(\eta - W'H)' r \rho - D(\mu, rH) + \\ + \mu' (rH)' - rD'(\mu, \psi) + r(\mu', \psi)' + D(\mu', \psi) - \mu'' \psi', \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mu\Delta\delta + \mu' \left( \delta' - \frac{2}{r}\delta + \Delta H + \frac{1}{r}H' + \frac{3}{r^2}H \right) + \mu'' \left( H - \frac{1}{r}H \right) + \\
& \quad + \Delta A + rB' + 3B + \sigma^2 (\rho\delta + \rho'H) - 2\omega\rho\dot{p} + 2\omega\rho'l = \\
& \quad = \left( \Delta\rho - \frac{1}{r^2} (r^2\rho')' \right) (R + W'H) + \rho\Delta (W'H - \eta) + \\
& \quad + \rho\delta \left( \Delta W - \frac{1}{r^2} (r^2W')' \right) + \delta \left( \Delta\mu - \frac{1}{r^2} (r^2\mu')' \right) - D(\mu, \psi) + \\
& \quad + \mu'\psi' + \mu'r \left( \Delta\chi - \frac{1}{r^2} (r^2\chi')' \right) + 2D(\mu, \chi) - 2\mu'\chi' + \\
& \quad + D(\Delta\mu, \psi) - (\Delta\mu)'\psi' - \chi \left( \Delta\mu - \frac{1}{r^2} (r^2\mu')' \right)' \tau - \Delta(D(\mu, \psi) - \mu'\psi'), \\
& \quad \eta = u \frac{\partial W}{\partial x} + v \frac{\partial W}{\partial y} + w \frac{\partial W}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Левые части уравнений (11) такие же, как в [1]. Если  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $\lambda$  зависят только от  $r$ , то правые части обращаются в нуль. Если эти функции можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\rho(r, \vartheta, \varphi) &= \rho(r) + \gamma\bar{\rho}(r, \vartheta, \varphi); & \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \bar{\rho}(r, \vartheta, \varphi) \sin\vartheta d\vartheta d\varphi &= 0, \\
\mu(r, \vartheta, \varphi) &= \mu(r) + \gamma\bar{\mu}(r, \vartheta, \varphi); & \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \bar{\mu}(r, \vartheta, \varphi) \sin\vartheta d\vartheta d\varphi &= 0, \\
\lambda(r, \vartheta, \varphi) &= \lambda(r) + \gamma\bar{\lambda}(r, \vartheta, \varphi); & \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \bar{\lambda}(r, \vartheta, \varphi) \sin\vartheta d\vartheta d\varphi &= 0,
\end{aligned} \tag{12}$$

где постоянная  $\gamma$  достаточно мала, то можно воспользоваться теорией возмущений.

При составлении основного уравнения свободных колебаний порядка  $n$  необходимо из уравнений (11) и из граничных условий выделить части, которые пропорциональны  $P_n^m(\cos\vartheta)\cos(\sigma t + m\varphi)$ . Колебания порядков  $n-2$  и  $n+2$  являются вынужденными от колебаний порядка  $n$  — в них главная часть возмущения определяется функциями порядка  $n$  и эти функции входят с малым множителем  $\gamma$ ; поэтому функции с индексами  $n-2$  и  $n+2$  имеют порядок, одинаковый с  $\gamma$ , а функции порядка  $n$  от учета этих членов меняются на величину порядка  $\gamma^2$ . Таким образом, если  $\gamma$  — сжатие Земли, то учет первой степени сжатия в периодах собственных колебаний сводится к вычислению  $\rho(r)$ ,  $\mu(r)$ ,  $\lambda(r)$  в согласии с формулами (12) и исправлению части коэффициентов на величины порядка  $\gamma$ . Все изложенное относится в равной мере и к граничным условиям.

3. Если  $\mu_i$  в ядре имеет малые значения, то возникают некоторые затруднения.

В системе функций  $F, P, Q, H, L, R$  из [2], где

$$Q = F - \frac{\sigma^2\rho}{n(n+1)}S,$$

из уравнения для  $F'$  следует, что  $P_{\mu=0} = 0$ . При малых  $\mu_i$

$$F' = \left( \frac{\sigma^2}{n(n+1)} \frac{\rho}{\mu_i} - \frac{1}{r^2} \right) P,$$

$$P' = -n(n+1)F - 2\omega\rho \left[ (r^2 i)' + r^2 \dot{p} \right]_n = -n(n+1) (F + (\sigma^2 - 4\omega^2) \psi\rho - \\ - \frac{\sigma^2}{n(n+1)} \rho S - 2\omega\sigma^2 \rho \left( a_n r \bar{w}_{n+1} + \frac{n-1}{n} b_n r \bar{w}_{n+1} \right)) = -n(n+1) \bar{F}.$$

Эти уравнения можно заменить следующим:

$$P'' + \left( \frac{\sigma^2 \rho}{\mu_i} - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) P = 0.$$

Функция  $\bar{F}$  — периодическая функция  $r$  с длиной волны  $(2\pi/\sigma)\sqrt{\mu_i/\rho}$ , зависящей от  $n$  только вблизи центра; отношение амплитуды  $P$  и  $\bar{F}$  равно  $(n(n+1)/\sigma)\sqrt{\mu_i/\rho}$ . При интегрировании уравнений для  $H, Q, R, L$  после перехода от  $F$  к  $\bar{F}$  дополнительные члены от  $\bar{F}$  окажутся величинами порядка  $\sqrt{\mu_i}$ . На границе ядра с оболочкой из 6 условий (непрерывность  $M, N, H, R, L, S$ ) без затруднений выполняются первые пять условий. В эти условия входят члены, содержащие  $\sqrt{\mu_i} \bar{F}$  на границе ядра. Условие непрерывности  $S$  определяет  $\bar{F}$  и приводит к значениям смещений в ядре, содержащим член с конечной амплитудой и длиной волны, пропорциональной  $\sqrt{\mu_i}$ . Для сохранения смысла смещений принимают  $\bar{F} = 0$  и мирятся с разрывом их тангенциальной компоненты. Но можно получить правильное решение и без разрыва непрерывности смещений. Из общего выражения для дивергенции смещений следует, что простейшей линейной функцией от  $S_k$ , которая должна быть правильной, чтобы были правильными смещения, является следующая:

$$(\sin^2 \vartheta S)_n = (1 - a_n b_{n+1} - a_{n-1} b_n) S_n - a_n a_{n+1} S_{n+2} - b_{n-1} b_n S_{n-2} = \\ = (2n+5) a_n a_{n+1} \left( \frac{S_n}{2n+1} - \frac{S_{n+2}}{2n+5} \right) + (2n-3) b_{n-1} b_n \left( \frac{S_n}{2n+1} - \frac{S_{n-2}}{2n-3} \right),$$

т.е. должны быть правильными разности  $(S_k/2k+1) - (S_{k+2}/2k+5)$ . Если  $(P'_k/2k+1) = (P'_{k+r}/2k+5)$  при любом  $k$ , отличном от  $n$  на четное число, то все  $\bar{F}_k$  в смещения не войдут. (Если это условие выполняется на границе ядра, то оно окажется выполненным на всех глубинах, кроме окрестности центра шара.) Прилив порядка  $k$  в этом случае вызывается дивергенцией касательных к границе ядра напряжений  $-\frac{1}{r^2} P_k$ ; смещения в оболочке при отсутствии массовых сил и напряжений на поверхности Земли ( $k \neq n$ ) имеют порядок  $\sqrt{\mu_i}$ ; кинетическая энергия сосредоточена в ядре; потенциальная, поскольку функция  $\sqrt{\mu_i}$  мала, от  $\mu_i$  почти не зависит.

В приливах порядков 2 и 0, определяющих нутацию оси вращения Земли и приливное изменение скорости ее вращения, нужно учитывать условие сохранения момента количества движения. Эти приливы следует рассмотреть отдельно.

Академия наук СССР  
Институт физики Земли  
им. О.Ю. Шмидта

Поступила  
16.XI.1972

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Молоденский М.С. Смещения при приливах в упругой Земле с учетом сил Кориолиса. // Известия АН СССР. Физика Земли. 1970. №4. С.102-107.
2. Молоденский М.С. Приливы в упругой Земле. В сб.: Медленные движения земной коры. — М.: Наука. 1972. С.5-7.

# КОРРЕКТИВЫ В СХЕМУ СТРОЕНИЯ ЗЕМЛИ, ПОЛУЧЕННЫЕ ПО ЧАСТОТАМ СФЕРОИДАЛЬНЫХ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ\*

В работе рассчитаны частоты собственных сфероидальных колебаний для основных тонов при  $0 \leq n \leq 97$ .

За исходную схему строения Земли принята модель Гутенберга. Были определены невязки между вычисленными и наблюдаемыми частотами; они достигали 2–3% при  $0 \leq n < 97$  и 10% при  $n = 97$ .

Решалась обратная задача об определении внутреннего строения Земли по наблюдаемым частотам. Расхождения вычисленных и наблюдаемых частот должны быть ликвидированы ценой минимально возможных вариаций плотности и упругих параметров внутри Земли так, чтобы не возникло противоречие с сейсмическими данными. Минимально возможные вариации параметров были оценены с помощью неравенства Шварца.

Затем решалась обратная задача методом ортогонализации ядер в интегральных соотношениях, связывающих невязки частот с вариациями параметров. В результате получены коррективы в схему строения Земли Гутенберга. Показано, что полученные коррективы в схему строения Земли лежат близко к минимально возможному порогу, даваемому неравенством Шварца.

Расхождения вычисленных и наблюдаемых частот для полученной модели уменьшились примерно на порядок и не превосходят 0,5% при  $n < 6$ . Такие расхождения могут быть вызваны не учитываемым сжатием Земли, отсутствием центральной симметрии в ее строении.

Способ вычислений в общих чертах описан в [1, 2]. Исходная модель строения Земли, для которой вычислялись собственные частоты сфероидальных колебаний и сравнивались с наблюдаемыми, была получена Н.Н. Парийским и М.В. Крамер путем аналитического выглаживания скоростей сейсмических волн, полученных Гутенбергом. Это мы считали необходимым условием, так как при интегрировании системы уравнений 6-го порядка в коэффициентах уравнений играют роль разности 5-го порядка; случайные большие величины этих разностей понижают точность численного интегрирования. Значения плотности вычислены на основе сглаженной функции  $(\lambda + 2/3\mu)/\rho$ , причем в интервале от  $r = 0,97$  до  $r = 0,85$  прирост плотности взят больше, чем только за счет сжимаемости, на 59,7%. Под корой толщиной  $0,005r$  ( $\approx 30$  км) плотность принята равной  $3,4$  г/см<sup>3</sup>, масса Земли принята равной  $5,976 \cdot 10^{27}$  г, радиус Земли  $6,371 \cdot 10^8$  см, момент инерции —  $8,027 \cdot 10^{44}$  г·см<sup>2</sup>. В табл. 1 для исходной модели даны  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $\lambda$ ,  $\mu'$ ,  $V'$ . Мы сочли удобным использовать систему единиц, в которой не приходится иметь дело с очень большими числами: за единицу длины принят средний радиус Земли ( $6,371 \cdot 10^8$  см), за единицу ускорения — среднее ускорение силы тяжести на поверхности Земли ( $982,0$  см/с<sup>2</sup>), за единицу плотности — средняя плотность Земли ( $5,517$  г/см<sup>3</sup>). Для перевода в систему CGS (см–г–с) служат множители: для  $\mu$ ,  $\lambda$  —  $3,547 \cdot 10^{12}$  дин/см<sup>2</sup>, для  $t$  — 805,5 с.

Сначала вычислены неправильные интегралы союзных уравнений. С их помощью функции  $P$ ,  $S$ ,  $L$  выражены через  $F$ ,  $H$ ,  $R$  и исключены из исходной системы уравнений, а порядок уравнений снижен таким образом до третьего с интегралами только

\* Совместно с Крамер М.В. Известия АН СССР. Физика Земли. 1975. №2. С. 3–12.

Таблица 1

Модель строения Земли, использованная для вычисления данных табл. 2

$r$	$\rho$	$\mu$	$\lambda$	$\mu'$	$V'$	$r$	$\rho$	$\lambda$	$V'$
1,000	0,5148	0,1126	0,1118	0,0000	-1,0000	0,545	1,8335	1,8784	-1,1082
0,995	0,5148	0,1126	0,1118	0,0000	-1,0023	0,54	1,8433	1,9134	-1,1012
	0,6163	0,1985	0,2198	0,0000	-1,0023	0,53	1,8626	1,9793	-1,0862
0,99	0,6218	0,1985	0,2112	0,0000	-1,0031	0,51	1,8995	2,1285	-1,0557
0,98	0,6330	0,1985	0,2184	0,0000	-1,0047	0,49	1,9342	2,2748	-1,0242
0,97	0,6441	0,1985	0,2510	0,0000	-1,0062	0,47	1,9669	2,4209	-0,9909
	0,6441	0,1985	0,2510	2,3067	-1,0062	0,45	1,9976	2,5649	-0,9565
0,95	0,6774	0,2447	0,2906	2,3067	-1,0085	0,41	2,0536	2,8389	-0,8852
0,93	0,7075	0,2908	0,3744	2,3067	-1,0099	0,37	2,1030	3,0842	-0,8093
	0,7075	0,2908	0,3744	3,0326	-1,0099	0,33	2,1466	3,2931	-0,7304
0,89	0,7592	0,4151	0,5060	2,9198	-1,0106	0,29	2,1849	3,4640	-0,6484
0,85	0,8041	0,5123	0,6277	1,9150	-1,0097	0,25	2,2182	3,6023	-0,5638
	0,8041	0,5123	0,6277	1,6617	-1,0097	0,21	2,2466	3,7210	-0,4771
0,81	0,8302	0,5627	0,7237	0,9779	-1,0089	0,17	2,2686	4,5517	-0,3882
0,77	0,8551	0,5998	0,7986	0,9632	-1,0100	0,13	2,2842	4,5746	-0,2981
0,73	0,8796	0,6428	0,8563	1,1756	-1,0139	0,11	2,2905	4,5845	-0,2526
0,69	0,9039	0,6906	0,9201	1,1582	-1,0215	0,09	2,2958	4,5928	-0,2070
0,65	0,9279	0,7325	1,0193	0,9418	-1,0343	0,07	2,3000	4,5982	-0,1612
0,61	0,9511	0,7697	1,1516	0,9915	-1,0542	0,065	2,3009	4,5990	-0,1497
0,59	0,9625	0,7909	1,2145	1,1096	-1,0675				
0,57	0,9739	0,8125	1,2639	0,9665	-1,0835				
	0,9739	0,8125	1,2639	0,3708	-1,0835				
0,55	0,9853	0,8200	1,3068	0,3708	-1,1028				
0,545	0,9882	0,8218	1,3078	0,3708	-1,1082				

правильными. После интегрирования этой системы получены все правильные интегралы исходных уравнений. Начальные значения (при  $r = 1$ ) для всех правильных интегралов представлены в табл. 2. Граничные условия при  $r = 1$  использованы для исходных уравнений в виде (15) [2]:

$$\begin{aligned} \Phi + \frac{2}{rn(n+1)}P + \frac{2(n-1)(n+2)}{n(n+1)}\frac{\mu}{r^2}S &= 0, \\ H + \frac{1}{2n(n+1)}\frac{P}{\mu} - \frac{1}{rn(n+1)}S &= 0, \\ R + \frac{1}{(n+1)r}L &= 0; \end{aligned} \quad (1)$$

для союжных:

$$\begin{aligned} -\bar{P} + \frac{2}{n(n+1)r}\bar{\Phi} + \frac{1}{2n(n+1)\mu}\bar{H} &= 0, \\ -\bar{S} + \frac{2(n-1)(n+2)}{n(n+1)}\frac{\mu}{r^2}\bar{\Phi} - \frac{1}{n(n+1)r}\bar{H} &= 0, \\ -\bar{L} + \frac{1}{(n+1)r}\bar{R} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Условие (18) [2] совместности граничных условий (1) или (2) для каждого  $n$  определяет частоту свободных колебаний или связывает независимые вариации  $\delta\rho$ ,  $\delta\rho/\mu$  и  $\delta\rho(\lambda+2\mu)$  с заданными значениями частоты следующим образом:

$$\Delta_n + \int_b X_n(\rho/\mu)\delta(\rho/\mu)dr + \int_0 X_n(\rho)\delta\rho dr + \int_0 X_n\left(\frac{\rho}{\lambda+2\mu}\right)\delta\frac{\rho}{\lambda+2\mu}dr = 0, \quad (3)$$

Таблица 2

Значения правильных интегралов на поверхности модели

$n$	$\Phi$	$F_1(1)$	$H_1(1)$	$R_1(1)$	$F_2(1)$	$H_2(1)$	$R_2(1)$	$F_3(1)$	$H_3(1)$	$R_3(1)$
2*		-0,5996	-0,5855	-0,5970	+0,4137	+0,6358	+0,7417	-0,1540	-0,1089	+0,4693
2**		-2,262	-0,2662	+0,4518	+0,8809	-0,0591	+0,1509	-0,2639	-0,1061	+0,5395
2		-0,6002 · 10 <sup>-3</sup>	-0,5864	-0,7638	-0,4281 · 10 <sup>-1</sup>	+0,5631	+0,8342	-0,1189	-0,1115	+0,4589
3		-0,1735	-0,6719	-0,4847	+0,3239	+0,7773	+0,5922	-0,7361 · 10 <sup>-1</sup>	0,8088 · 10 <sup>-1</sup>	+0,3039
4		-0,3375	-0,5641	-0,2662	+0,6135	+0,7058	+0,3498	-0,5934 · 10 <sup>-1</sup>	-0,6176 · 10 <sup>-1</sup>	+0,2322
5		-0,3258	-0,3810	-0,1313	+0,6548	+0,5017	+0,1847	-0,4690 · 10 <sup>-1</sup>	-0,4434 · 10 <sup>-1</sup>	+0,1903
6		-0,2496	-0,2576	-0,7049 · 10 <sup>-1</sup>	+0,5901	+0,3519	+0,1053	-0,3517 · 10 <sup>-1</sup>	-0,3241 · 10 <sup>-1</sup>	+0,1610
9		-0,1009	-0,1116	-0,1979 · 10 <sup>-1</sup>	+0,4202	+0,1706	+0,3493 · 10 <sup>-1</sup>	-0,1553 · 10 <sup>-1</sup>	-0,1567 · 10 <sup>-1</sup>	+0,1094
12		-0,5977 · 10 <sup>-1</sup>	-0,6254 · 10 <sup>-1</sup>	-0,8275 · 10 <sup>-2</sup>	+0,3430	+0,1155	+0,1803 · 10 <sup>-1</sup>	-0,9454 · 10 <sup>-2</sup>	-0,8914 · 10 <sup>-2</sup>	+0,8262 · 10 <sup>-1</sup>
18		-0,3583 · 10 <sup>-1</sup>	-0,2702 · 10 <sup>-1</sup>	-0,2365 · 10 <sup>-2</sup>	+0,2647	+0,7391 · 10 <sup>-1</sup>	+0,7696 · 10 <sup>-2</sup>	-0,5488 · 10 <sup>-2</sup>	-0,3782 · 10 <sup>-2</sup>	+0,5538 · 10 <sup>-1</sup>
24		-0,2774 · 10 <sup>-1</sup>	-0,1487 · 10 <sup>-1</sup>	-0,9693 · 10 <sup>-3</sup>	+0,2255	+0,5565 · 10 <sup>-1</sup>	+0,4297 · 10 <sup>-2</sup>	-0,3943 · 10 <sup>-2</sup>	-0,1993 · 10 <sup>-2</sup>	+0,4160 · 10 <sup>-1</sup>
30		-0,2338 · 10 <sup>-1</sup>	-0,9410 · 10 <sup>-2</sup>	-0,4871 · 10 <sup>-3</sup>	+0,2023	+0,4456 · 10 <sup>-1</sup>	+0,2718 · 10 <sup>-2</sup>	-0,3029 · 10 <sup>-2</sup>	-0,1199 · 10 <sup>-2</sup>	+0,3330 · 10 <sup>-1</sup>
36		-0,2037 · 10 <sup>-1</sup>	-0,6475 · 10 <sup>-2</sup>	-0,2769 · 10 <sup>-3</sup>	+0,1864	+0,3678 · 10 <sup>-1</sup>	+0,1846 · 10 <sup>-2</sup>	-0,2390 · 10 <sup>-2</sup>	-0,7864 · 10 <sup>-3</sup>	+0,2777 · 10 <sup>-1</sup>
42		-0,1765 · 10 <sup>-1</sup>	-0,4740 · 10 <sup>-2</sup>	-0,1727 · 10 <sup>-3</sup>	+0,1727	+0,3097 · 10 <sup>-1</sup>	+0,1321 · 10 <sup>-2</sup>	-0,1899 · 10 <sup>-2</sup>	-0,5510 · 10 <sup>-3</sup>	+0,2380 · 10 <sup>-1</sup>
58		-0,1304 · 10 <sup>-1</sup>	-0,2424 · 10 <sup>-2</sup>	-0,6254 · 10 <sup>-4</sup>	+0,1460	+0,2094 · 10 <sup>-1</sup>	+0,6340 · 10 <sup>-3</sup>	-0,1089 · 10 <sup>-2</sup>	-0,2599 · 10 <sup>-3</sup>	+0,1724 · 10 <sup>-1</sup>
97		-0,4985 · 10 <sup>-2</sup>	-0,3511 · 10 <sup>-3</sup>	+0,4692 · 10 <sup>-5</sup>	+0,9440 · 10 <sup>-1</sup>	+0,8927 · 10 <sup>-2</sup>	+0,1276 · 10 <sup>-3</sup>	-0,3012 · 10 <sup>-3</sup>	-0,8118 · 10 <sup>-4</sup>	+0,1020 · 10 <sup>-1</sup>
Для всех $n$ при $r = 1$		$P_1 = 1$	$S_1 = 0$	$L_1 = 0$	$P_2 = 0$	$S_2 = 1$	$L_2 = 0$	$P_3 = 0$	$S_3 = 0$	$L_3 = 1$

\*  $\sigma = 0$  (статистический прилив).

\*\* Частота колебания  $n = 0$ .



где

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} c_{11} + \frac{2}{n(n+1)r} & c_{21} + \frac{2\mu(n+2)(n-1)}{n(n+1)r^2} & c_{31} \\ c_{12} + \frac{1}{2n(n+1)\mu} & c_{22} - \frac{1}{n(n+1)r} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} + \frac{1}{(n+1)r} \end{vmatrix}, \quad (4)$$

$$X_n \left( \frac{\rho}{\mu} \right) = \frac{1}{\rho} \left[ P\bar{S} + \left( \frac{\partial f}{\partial \mu'} \right)' \mu^2 \right],$$

$$X_n \left( \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \right) = \frac{1}{\rho} \Phi \bar{H},$$

$$X_n(\rho) = \frac{\partial f}{\partial \rho} - \left( \frac{\partial f}{\partial \mu'} \right)' \frac{\mu}{\rho} + 4\pi\kappa r^2 \int_0^r \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial V'} dr - \frac{1}{\rho^2} \frac{\rho}{\mu} P\bar{S} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \Phi \bar{H}, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} f = & -\sigma^2 \rho (H\bar{\Phi} + S\bar{P}) + \rho \left[ \left( \frac{2V'}{r} H - \frac{1}{r^2} L \right) \bar{\Phi} - n(n+1)R\bar{P} + 4\pi\kappa H\bar{R} - \right. \\ & \left. - 4\pi\kappa S\bar{L} - \frac{V'}{r} S\bar{P} \right] + (\rho V' + 2\mu') \left[ -n(n+1)H\bar{P} + \left( \frac{2}{r} H - \frac{1}{r^2} S \right) \bar{\Phi} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{r} S\bar{P} \right] + \frac{1}{\lambda + 2\mu} \Phi \bar{H} + \frac{1}{\mu} P\bar{S}. \quad (6) \end{aligned}$$

В выражении, получающемся при исключении  $\delta\mu'$ ,

$$\int_b^1 \frac{\partial f}{\partial \mu'} \delta\mu' dr = \left| \frac{\partial f}{\partial \mu'} \delta\mu \right|_b^1 - \int_b^1 \left( \frac{\partial f}{\partial \mu'} \right)' \delta\mu dr,$$

первый член справа на верхнем пределе погашается членом от варьирования  $\Delta_n$  по  $\mu$ , а на нижнем пределе нужно принять  $\delta\mu = \delta\mu_i = 0$ , что верно при любом непрерывном  $\delta\mu'$  в интервале  $b - \varepsilon < r < b + \varepsilon$ , если только ядро остается жидким. Если  $\mu = 0$  и  $\alpha\rho = \rho'$ , то в системе функций  $P, \Phi, H, R, L, S$

$$\begin{aligned} P = 0; \quad \sigma^2 \rho S &= -n(n+1)(\Phi + \rho V' H + \rho R), \\ \bar{S} = 0; \quad \sigma^2 \rho \bar{P} &= \frac{1}{r^2} \bar{H} - 4\pi\kappa r \bar{L}. \end{aligned} \quad (7)$$

Тогда формула (6) сохраняет смысл при любых  $\mu$ , так как  $\frac{P}{\mu} \bar{S} \approx \frac{\omega}{\sigma} \bar{S} = 0$ . Таким образом, в ядре варьруем так, как при  $\mu \neq 0$ , а после варьирования используем (7) и  $\mu = 0$ .

При свободных колебаниях в точке  $r = 1$  отношение миноров первой строки  $\Delta_n$  равно отношению  $P : S : L$ , а миноров первого столбца — отношению  $\bar{\Phi} : \bar{H} : \bar{R}$  [2]. Эти числа определяют начальные условия для интеграла основной системы уравнений с условиями на поверхности (1) и союзной — с условиями (2). Затем вычислены функции  $X_n(\rho)$  и заменены системой взаимно ортогональных нормированных функций  $Y_n(\rho)$  следующим

Таблица 3а  
Коэффициенты разложения функций  $X_n(\rho/\mu)$  по ортогональным функциям

n	i														
	97	58	12	9	6	3	0	42	36	30	24	18	5	4	2
97	576,0														
58	2,6	1,9													
12	0,2	12,0	39,6												
9	0,7	7,2	32,9	18,4											
6	0,1	3,0	23,7	33,4	15,5										
3	0,5	2,1	12,8	28,0	32,5	10,0									
0	-0,1	-4,8	-15,9	-16,6	-13,4	0,3	3,6								
42	0,1	10,1	-2,9	-6,6	1,1	-1,7	-1,3	4,4							
36	0,1	16,1	-3,1	-1,8	3,2	-4,0	-3,0	8,4	2,0						
30	0,1	20,8	0,6	-6,0	7,8	-9,3	-5,5	12,8	6,2	2,6					
24	1,5	17,7	9,5	-12,7	11,9	-11,6	-7,3	11,4	7,7	1,4	3,0				
18	-0,9	15,5	26,9	-16,7	12,0	-10,1	-5,8	6,1	4,8	1,5	2,8	0,8			
5	0,1	2,4	20,2	34,0	22,0	2,4	0,6	0,2	0,1	0	-0,1	-0,1	0,2		
4	0,4	2,2	16,4	31,8	28,9	6,2	0,9	0,3	0,1	0,1	-0,1	-0,1	0,4	0	
2	0,5	3,0	12,6	24,0	30,0	9,2	-2,5	-0,5	-0,2	0	0,2	0,4	-0,9	-0,2	0

Таблица 3б  
Коэффициенты разложения функций  $X_n(\rho)$  по ортогональным функциям

n	i														
	97	58	42	36	30	24	18	12	9	6	5	4	3	2	0
97	2203,0														
58	1,2	10,9													
42	-13,7	47,2	12,6												
36	-33,2	65,7	22,1	8,5											
30	-63,4	73,0	27,4	29,9	6,4										
24	-76,9	49,4	12,8	49,0	13,2	10,1									
18	-86,1	25,2	-20,0	56,5	21,0	20,9	14,6								
12	-66,8	6,1	-49,5	22,7	14,5	15,7	37,2	18,2							
9	-46,5	2,2	-39,8	1,3	12,1	3,9	31,0	30,9	7,1						
6	-26,1	79,2	-20,3	-5,6	11,0	-2,7	15,2	29,4	19,8	16,5					
5	-18,7	0,3	-13,6	-4,5	9,2	-2,8	10,1	24,4	22,4	25,1	1,4				
4	-12,1	0,2	-7,9	-2,0	6,9	-1,7	6,1	18,6	24,4	34,0	4,4	0,9			
3	-6,0	0,9	-3,6	2,8	4,1	-0,5	5,4	13,6	27,6	40,7	10,1	3,9	2,7		
2	-0,1	2,2	-1,6	9,2	1,2	-1,2	10,7	11,9	31,2	37,9	17,3	9,0	11,5	0,2	
0	-31,6	-1,9	-20,8	16,2	15,6	+2,6	-2,8	24,5	10,2	7,7	-5,9	1,1	-22,6	-1,7	1,4

образом:

$$X_n(\rho) = \bar{Y}_n(\rho) \cdot \sum_j k_{nj} Y_j(\rho),$$

$$\int_0^1 Y_i(\rho) \cdot Y_j(\rho) dr = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases} \quad (8)$$

Было принято, что  $k_{nn} = 1$ , поэтому  $\bar{Y}_n(\rho)$  есть норма функции, из которой после нормирования получена  $Y_n(\rho)$ . Затем получены функции  $Y_n\left(\frac{\rho}{\mu}\right)$  и  $Y_n\left(\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}\right)$  и соответствующие им коэффициенты  $k_{nj}$ .

В табл. 3а и 3б для варьирования функций  $\rho/\mu$  и  $\rho$  даны коэффициенты

$$\bar{k}_{nj} = 100 \frac{k_{nj} \bar{Y}_n}{\sigma_n \int_0^1 X_n(\sigma) dr}$$

С этими коэффициентами просто вычисляются изменения отношений  $\Delta\sigma_n/\sigma_n$  при варьировании  $\rho/\mu$  (табл. 3а) или  $\rho$  (табл. 3б):

$$\frac{\Delta\sigma_n}{\sigma_n} = \left(\frac{\Delta\sigma_n}{\sigma_n}\right)_0 - \sum \bar{k}_{nj} \int_0^1 \delta\left(\frac{\rho}{\mu}\right) Y_j dr.$$

В табл. 4 приведены значения некоторых функций  $Y_n$ , а именно:

$$Y_{97}\left(\frac{\rho}{\mu}\right), \quad Y_{58}\left(\frac{\rho}{\mu}\right), \quad Y_{12}\left(\frac{\rho}{\mu}\right), \quad Y_9\left(\frac{\rho}{\mu}\right), \quad Y_{97}(\rho), \quad Y_{58}(\rho),$$

$$Y_{12}(\rho), \quad Y_{97}\left(\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}\right), \quad Y_{58}\left(\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}\right), \quad Y_{42}\left(\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}\right)$$

и отношения

$$A_n = \int_0^1 X_n^2\left(\frac{\rho}{\mu}\right) dr : \int_0^1 Y_n^2\left(\frac{\rho}{\mu}\right) dr.$$

Если из трех функций  $\rho$ ,  $\frac{\rho}{\mu}$  и  $\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}$  две твердо заданы, то третья функция вполне определяется условием полного совпадения вычисленных частот с наблюдаемыми, если эту функцию предполагаем заданной суммой вида (8). Однако ее значения, как правило, не получаются малыми. Способы исключения больших значений вариаций рассмотрены в [2]. Прежде всего можно приравнять к нулю те функции  $Y_i$ , которые мало меняют среднее квадратическое значение функций  $X_n$ . При точности определения вариаций в 2–3% таких функций наберется не менее половины, но и останется все еще слишком много, если определять все вариации. Пробные вычисления показали, что вариации получаются малыми только при определении коэффициентов при 3–5 функциях с наибольшими нормами.

В табл. 5 даны: для каждого  $n$  множители  $1/\sigma_n \int_n(\sigma) dr$ , нужные для вычисления относительных отклонений вычисленных частот от наблюдаемых частот, взятых из [3]

Таблица 4

Функции  $Y_n(\rho/\mu)$ , оказывающие наибольшее и наименьшее влияние на частоту колебаний

$r \setminus n$	97	58	12	9	5	2	18
1,000	-0,0159	+3,1781	-0,3197	+0,0970	-3,6120	-5,4849	+1,8971
0,995	+0,3195	-0,3714	+0,5768	-0,3304	-1,7454	+2,9727	+1,1143
0,995	+0,5053	+1,5069	+0,7849	-0,3676	-8,1981	+8,4074	+4,5108
0,99	+1,2299	-1,0560	+1,1903	-0,5546	-3,6885	+2,2229	+3,1184
0,98	+3,6940	+0,1330	+0,3157	-0,1455	+0,9559	+3,3608	+0,9581
0,97	+8,2203	-2,8883	+0,9306	-0,5663	-0,6926	-2,2500	-0,8877
0,95	+2,2213	+4,2132	-1,5565	+0,6614	+0,8902	+0,2473	-0,1258
0,93	-0,0573	+3,3344	-1,1448	+0,1842	-1,3198	+0,1331	+0,3072
0,89	-0,2190	+0,7169	+0,9444	-1,6566	+0,5431	+0,0851	-0,4315
0,85			+2,6984	-2,0926	+0,5463	+0,5822	+1,5656
0,81			+2,5126	-0,4275	-0,5217	+0,6909	-0,1172
0,77			+2,4356	+1,0285	-0,9131	+1,2054	-3,2894
0,73			+1,5432	+2,0914	+1,7959	-0,2101	+1,4392
0,69			+0,8164	+2,3446	-0,3952	-0,6067	-0,3486
0,65			+0,3646	+2,0407	-0,9957	+1,1604	+0,5070
0,61			+0,1465	+1,3525	-2,1742	-1,9024	-2,4857
0,59				+1,0125	+1,6824	-1,2489	+0,7129
0,57				+0,6301	-2,4931	+2,0306	+2,2135
$A_n$	1,0	2,918	1,091	4,339	$3,322 \cdot 10^4$	$4,971 \cdot 10^4$	$2,295 \cdot 10^3$

 $Y_n(\rho)$  $Y_n\left(\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}\right)$ 

$r \setminus n$	97	58	12	97	58	12
1,000	+0,4030	+5,9440	+4,1870	+14,003	+36,883	-1,9281
0,995	-0,5269	+8,6343	+3,2578	+7,5127	+24,208	-1,4726
0,995	-0,1764	+6,6005	+2,3498	-4,7553	+16,196	-6,6303
0,98	-1,1035	+8,1583	+1,8333	-7,8398	+2,9635	-1,7699
0,97	-3,7936	+3,5585	+1,0542	-6,3424	-3,1697	+2,7489
0,95	-8,3488	-0,9222	-1,8370	-0,7645	+2,3814	+4,9333
0,93	-1,9814	-3,0498	+1,6892	-1,0340	+2,5188	+4,1407
0,89	-0,0014	-1,5101	+0,3961	-0,1201	-0,1234	+1,9036
0,85	+0,1165	-0,1944	+0,3585	+0,0674	-0,1223	+0,3758
0,81		-0,0237	+3,0806		-0,2219	+0,1947
0,77		-0,5465	+1,3509		-0,1599	+0,1071
0,73			-1,9409			-0,1768
0,69			-2,2173			
0,65			+0,1590			
0,61			-0,8667			
0,59			-1,9809			
0,57			-0,0001			

по значениям  $\Delta_n$ :  $\Delta\sigma_n/\sigma_n = -\Delta_n/\sigma_n \int_0^1 X_n(\sigma) d\sigma$ , и относительные отклонения вычисленных частот от наблюдаемых в процентах. Наибольшее отклонение при  $n = 97$ , равное 10,93%, может казаться ошибочным, но оно легко снимается путем исправления плотности в верхней части оболочки малой поправкой

$$\rho_{\text{исп}} = \rho_0 + 0,496 \cdot 10^{-2} \cdot Y_{97}(\rho). \quad (9)$$

Исправленные отклонения вычисленных частот не превышают (по модулю) 3,01% при  $n < 6$  и 1,5% при  $n > 6$ . Исправленная функция  $\rho$  показана на рис. 1.

Существенное уменьшение отклонений вычисленных частот при  $n > 6$  достигается

Таблица 5

## Отклонения вычисленных частот от наблюдаемых, в %

$n$	1	2	3	4	$n$	1	2	3	4
0	$0,1264 \cdot 10^0$	+0,66	+0,36	+0,68	18	$0,3248 \cdot 10^3$	-1,70	-0,59	+0,29
2	$0,1414 \cdot 10^1$	-0,18	+0,23	+0,94	24	$0,7599 \cdot 10^3$	-0,61	-0,23	+0,41
3	$0,1543 \cdot 10^1$	+2,04	+2,51	+3,11	30	$0,1539 \cdot 10^4$	+0,04	-0,05	+0,09
4	$0,2154 \cdot 10^1$	+2,94	+3,58	+4,00	36	$0,2025 \cdot 10^4$	+0,29	+0,02	-0,21
5	$0,3907 \cdot 10^1$	+2,84	+3,65	+3,95	42	$0,2131 \cdot 10^4$	+0,44	+0,20	-0,07
6	$0,7186 \cdot 10^1$	+2,37	+3,33	+3,55	58	$0,1359 \cdot 10^4$	+0,12	+0,07	+0,01
9	$0,2862 \cdot 10^2$	-0,75	+0,58	+0,65	97	$0,82034 \cdot 10^5$	+10,93	0	-5,17
12	$0,8278 \cdot 10^2$	-1,83	-0,27	+0,08					

Примечания: 1. Множители  $M_n = \frac{1}{\sigma \int_0^1 X_n(\sigma) dr}$ .

2. Отклонения для исходной модели вычисленных частот от наблюдаемых, в %:  $\frac{\Delta\sigma}{\sigma} = \Delta_n M_n$ .

3. Отклонения для исправленной модели 1 (с поправками по формулам (9) и (10)).

4. Отклонения для модели НВ-1,6 по результатам нашего интегрирования.

небольшим изменением функции  $\rho/\mu$ :

$$\delta\left(\frac{\rho}{\mu}\right) = -0,037Y_{12}\left(\frac{\rho}{\mu}\right) + 0,020Y_{58}\left(\frac{\rho}{\mu}\right). \quad (10)$$

В столбце 3 табл. 5 помещены разности между вычисленными и наблюдаемыми частотами после учета (9) и (10). Они не превышают (по модулю) 0,59% при  $n > 6$  и 3,65% при  $n < 6$ . Результат при  $n > 6$  можно считать хорошим, так как величины порядка сжатия в основных формулах (3) не учитывались.

Представление о минимальной вариации  $\delta\left(\frac{\rho}{\mu}\right)$  или  $\delta\rho$ , необходимой для устранения заданных расхождений в частотах вычисленных и наблюдаемых, можно получить с помощью неравенства Шварца:

$$\left| \int_0^1 X_n \delta x \right| = |\Delta_n| \leq \bar{X}_n \bar{\delta x},$$

где

$$\bar{X}_n = \left[ \int_0^1 X_n^2 dr \right]^{1/2}, \quad \bar{\delta x} = \left[ \int_0^1 \delta x^2 dr \right]^{1/2}$$

Например, если  $\delta x = \delta(\rho/\mu)$  и функция  $X_n$  вычислена для варьирования  $\rho/\mu$ , то по значениям  $\Delta_n$  из табл. 5 и  $X_n$  по данным табл. 4 получим

$$\delta\left(\frac{\rho}{\mu}\right) > 0,02 \text{ для } n > 6, \quad (11)$$

$$\delta\left(\frac{\rho}{\mu}\right) > 0,06 \text{ для всех } n. \quad (12)$$

Если  $\delta x = \delta\rho$ , то  $\delta\rho > 0,08$  при всех  $n$ . Таким образом, вариация (10) по сравнению с (11) невелика, а варьирование  $\rho$  потребовало бы больших вариаций.

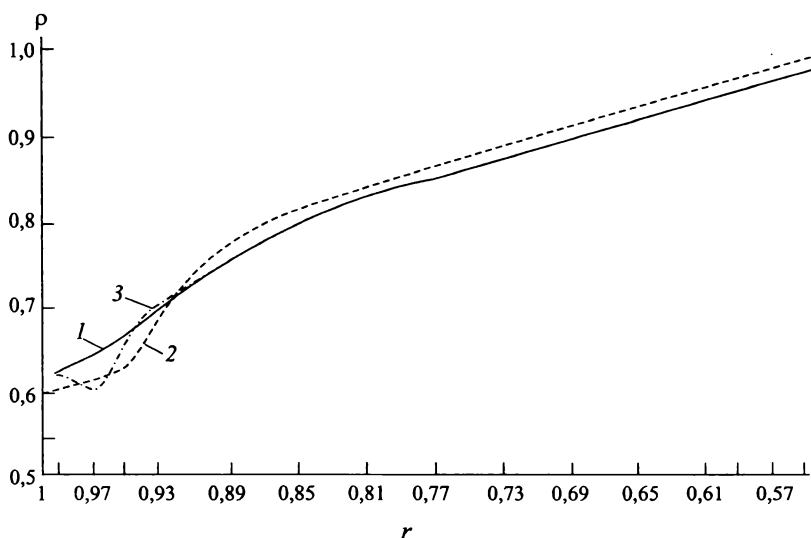


Рис. 1. Распределение плотности в оболочке.

1 — функция  $\rho$ , принятая при интегрировании уравнений; 2 — функция  $\rho$ , взятая из [4] (модель НВ-1,6); 3 — функция  $\rho$ , исправленная в верхней части мантии по формуле (9).

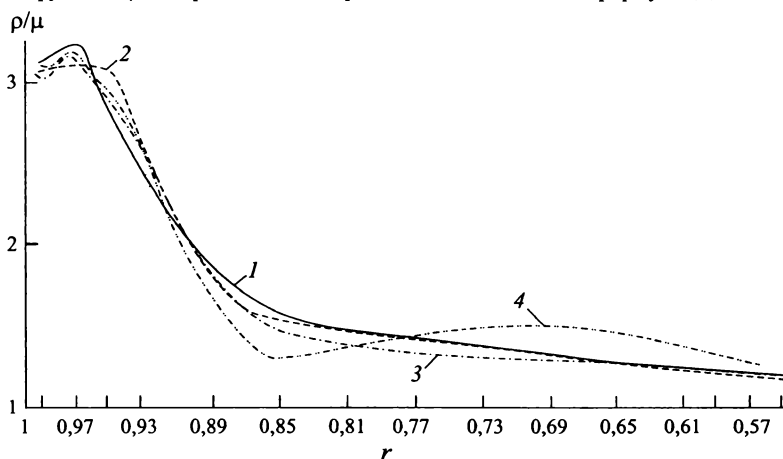


Рис. 2. Распределение  $\rho/\mu$  в оболочке.

1 — функция  $\rho/\mu$ , принятая за исходную при интегрировании уравнений; 2 — функция  $\rho/\mu$  из [4] (модель НВ-1,6); 3 — функция  $\rho/\mu$ , снимающая расхождение в частотах при  $n > 6$ ; 4 — функция  $\rho/\mu$ , снимающая расхождение при всех  $n$ .

Заметим, что ядро начинает заметно влиять на частоту колебаний при  $n \leq 6$ . Если и эти отклонения в частотах снимать варьированием строения оболочки, то к (10) нужно добавить еще один член:

$$\delta \left( \frac{\rho}{\mu} \right) = -0,037Y_{12} \left( \frac{\rho}{\mu} \right) + 0,020Y_{58} \left( \frac{\rho}{\mu} \right) + 0,080Y_9 \left( \frac{\rho}{\mu} \right), \quad (13)$$

и тогда остаточные отклонения в частотах при всех  $n > 2$  не превысят 1,03%. Тогда

Таблица 6

## Модели НВ-1,6 и наша исправленная

$r$	$\left(\frac{\rho}{\mu}\right)_{\text{НВ-1,6}}$	$\rho_{\text{НВ-1,6}}$	$\left(\frac{\rho}{\mu}\right)_1$	$\rho_0 + \delta\rho$	$\left(\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}\right)_0$
0,995	3,051	0,6026	3,106	0,6154	0,9992
0,99	3,060	0,6056	3,067	0,6163	1,0222
0,98	3,095	0,6085	3,180	0,6142	1,0284
0,97	3,090	0,6140	3,153	0,6027	0,9940
0,95	3,090	0,6242	2,910	0,6676	0,8686
0,93	2,579	0,6971	2,542	0,7075	0,7401
0,89	1,766	0,7842	1,808	0,7598	0,5682
0,85	1,558	0,8159	1,470	0,8041	0,4866
0,81	1,477	0,8451	1,382	0,8302	0,4490
0,77	1,411	0,8706	1,336	0,8551	0,4279
0,73	1,356	0,8955	1,311	0,8796	0,4107
0,69	1,310	0,9196	1,279	0,9039	0,3928
0,65	1,264	0,9432	1,253	0,9279	0,3735
0,61	1,221	0,9660	1,231	0,9511	0,3534
0,59	1,200	0,9775	—	0,9625	0,3442
0,57	1,176	0,9897	—	0,9739	0,3371
0,55	1,170	0,9993	—	0,9796	0,3324
0,545	1,173	1,0010	—	0,9882	0,3348

Примечание.  $(\rho/\mu)_1$  — значения  $\rho/\mu$ , исправленные выражением (10).  
 $\rho_0 + \delta\rho$  — значения  $\rho$ , исправленные выражением (9).

$\left[ \int_0^1 \left[ \delta \left( \frac{\rho}{\mu} \right) \right]^2 dr \right]^{1/2} \approx 0,09$ . Это значение только в полтора раза превышает теоретический нижний предел (12), определяемый неравенством Шварца.

Однако кривая  $\rho/\mu$  в этом варианте в нижней части оболочки противоречит сейсмическим данным или сказывается отклонение от идеальной упругости (рис. 2). Может быть, лучший результат можно получить, приписав ядру небольшое значение модуля сдвига  $\mu$  или учитывая влияние внутреннего ядра, но раньше следует уточнить интегрирование союзных уравнений при малых  $r^1$ .

В табл. 6 даны: модель НВ-1,6, значения  $\rho/\mu$ , исправленные выражением (10), а также  $\rho$ , исправленные выражением (9). Это исправление оправдано также большим изменением теплового давления в верхней части оболочки, уменьшающем плотность при  $r = 0,97$  примерно на 0,03 (см. табл. 6).

Для сравнения вычислены значения частот для модели Земли НВ-1,6 (Bullen and Haddon [4]). Составлены разности

$$\delta \left( \frac{\rho}{\mu} \right) = \left( \frac{\rho}{\mu} \right)_{\text{НВ-1,6}} - \left( \frac{\rho}{\mu} \right)_0,$$

$$\sigma\rho = \rho_{\text{НВ-1,6}} - \rho_0; \quad \delta \left( \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \right) = \left( \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \right)_{\text{НВ-1,6}} - \left( \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \right)_0$$

(индексом «0» отмечены функции для нашей исходной модели, табл. 1) и по формулам

<sup>1</sup> После того как эта статья была сдана в печать, мы уточнили интегрирование уравнений при  $n = 2, 4$  и 6 (а при  $n > 9$  уравнения интегрированы точнее). С новыми результатами после исправления схемы строения Земли поправками

$$\delta\rho = +0,496 \cdot 10^{-2} Y_{97}(\rho), \quad \delta(\rho/\mu) = +0,020 Y_{58}(\rho/\mu) - 0,037 Y_{12}(\rho/\mu) + 0,040 Y_9(\rho/\mu)$$

расхождения в частотах составили меньше 0,75% (по модулю) для двух частот и меньше 0,5% для всех остальных.

(3) вычислены поправки в частоту исходной модели. В табл. 5 в столбце 4 помещены остаточные невязки в частотах ( $\Delta\sigma_n/\sigma_n$  в процентах).

Но величины невязок настолько больше, чем в работе [4], что наши результаты следует рассматривать как первый опыт прямого решения обратной задачи (не подбором). Полезно также выяснить реальную точность вычисления собственных частот.

Академия наук СССР  
Институт физики Земли  
им. О.Ю. Шмидта

Поступила  
10.VI.1974

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Молоденский М.С., Крамер М.В.* Вычисление частот собственных колебаний Земли. В сб.: Медленные движения земной коры. — М.: Наука. 1972.
2. *Молоденский М.С., Крамер М.В.* Строение Земли по частотам ее собственных колебаний // Известия АН СССР. Физика Земли. 1973. №4.
3. *John S. Derr.* Free oscillation observations through 1968. // Bull. Seism. Soc. Amer. 1969. 59. №5.
4. *Bullen K.E., Haddon R.A.W.* Earth models based on compressibility theory. // Phys. Earth and Planetary Interiors. 1967. 1. № 1.



# О ВОЗМОЖНОЙ СВЯЗИ ИЗМЕНЕНИЙ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ И СКОРОСТИ ВРАЩЕНИЯ ЗЕМЛИ\*

Решаются уравнения упругого равновесия неоднородной Земли при наличии на различных глубинах очага деформации, задаваемого разрывом радиальной и тангенциальной компонент смещений. Рассматривается соответствующее изменение момента инерции Земли и часть изменения силы тяжести на ее поверхности, описываемая сферической функцией второго порядка. Отношение этих двух величин очень зависит от характера деформации и глубины очага.

Как хорошо известно, астрономические наблюдения обнаруживают нерегулярные, «скачкообразные» изменения угловой скорости вращения Земли  $\omega$ , достигающие иногда относительной величины

$$\delta\omega/\omega = 4 \cdot 10^{-8}$$

за три года [1]. Во многих работах, в частности в [2, 3], показано, что столь большие изменения скорости вращения Земли не могут быть объяснены процессами, происходящими на поверхности Земли (атмосферными явлениями, осадками, таянием полярных льдов, падением метеоритов). По-видимому, эти изменения вращения Земли связаны с процессами, происходящими внутри Земли, с изменениями внутренней структуры или движениями в глубинных слоях. Мы рассмотрим здесь только влияние гипотетических изменений плотности и напряжений в некотором подкорковом слое (например, в результате фазовых или температурных изменений) на момент инерции Земли, а следовательно, на ее вращение, и на значения силы тяжести на поверхности Земли.

Не касаясь природы этого изменения и причин, его вызвавших, можно рассматривать область, в которой происходят изменения, как очаг напряжений и неупругих деформаций. Если в тонком слое толщиной  $l$  произойдет увеличение плотности на величину  $\delta\rho$ , то толщина слоя уменьшится на  $\delta l = l\delta\rho/\rho$ . Это значит, что нормальная к поверхности слоя составляющая смещений будет иметь скачок на величину  $\delta l$ . Не делая никаких предположений о происхождении и характере очага деформаций, можно его задать величинами скачков нормальной и тангенциальной компонент смещений как краевыми условиями и искать затем деформации в Земле как решение уравнений упругого равновесия при данных краевых условиях.

В работах [1–3] приведены результаты решения уравнений упругости для случая центрально-симметричной деформации ( $n = 0$ ), когда на заданной глубине  $h$  происходит расширение или сжатие тонкого слоя, — испытывает скачок нормальная составляющая смещений. Модель Земли принималась та же, что и в работе [4], т.е. с однородным внутренним ядром, распределением плотностей, близким к модели А Буллена, и распределением скоростей сейсмических волн согласно модели Джеффриса. Эти расчеты для случая  $n = 0$  показали, что для изменения длительности суток на 1 мс (или  $\delta\omega/\omega = 1,16 \cdot 10^{-8}$ ) при глубинах  $h$  от 64 до 2900 км (слой расположен в оболочке Земли) достаточно изменения толщины слоя (скачка радиальных смещений) соответственно от 8,6 до 3,6 см. Тогда при изменении плотности на 0,01 г толщина изменяющихся слоев составляет от 29 до 20 м, а сила тяжести на поверхности Земли изменяется на 40 мкгл при глубине слоя

\* Совместно с Молоденским С.М., Парийским Н.Н. Известия АН СССР. Физика Земли. 1975. №6. С. 3–11.

64 км и на 11 мкг/л при расположении его на границе ядра и оболочки. В той же работе был рассчитан случай распределения изменений смещений в переменном слое согласно сферической функции с  $n = 2$  и осью симметрии, совпадающей с осью вращения Земли. Был рассчитан только один частный случай для глубины слоя в 380 км и упрощенной модели Земли с ядром, однородным по плотности и по упругим свойствам. В этом случае изменение длительности суток на 1 мкс соответствует максимальному изменению силы тяжести (на полюсах) на 74 мкг/л. Двадцать лет тому назад такие изменения силы тяжести еще были недоступны измерениям; но сейчас дело обстоит иначе, и поэтому представляют интерес более детальные расчеты.

В 1973 г. в докладе на Международной конференции в Потсдаме одним из авторов [5] были приведены подсчеты изменений вращения и силы тяжести в случае поверхностной деформации Земли согласно сферической функции  $n = 2$ . Этот подсчет мог служить только для оценки порядка ожидаемых изменений силы тяжести, так как не проводилось решение уравнений упругости, а деформации Земли представлялись слоем с плотностью  $2,5 \text{ г/см}^3$ , распределенного по поверхности Земли по закону  $P_2^0(\cos \theta)$  с осями симметрии, совпадающими с осью вращения Земли или лежащей в плоскости экватора. В первом случае изменению длительности суток на 1 мс соответствовала толщина слоя на полюсе всего в 13,5 см.

В настоящей статье разбирается более общий и реальный случай.

Общий случай деформации Земли при произвольном источнике деформаций может быть описан, если деформации представить разложением по сферическим функциям. Как будет показано ниже, изменение момента инерции Земли вызывает только деформации, пропорциональные сферическим функциям  $Y_0(\theta, \varphi)$ ,  $Y_2^0(\theta, \varphi)$ . В настоящей работе в случае деформаций, пропорциональных  $Y_2^0(\theta, \varphi)$ , получено решение уравнений упругости при заданных граничных условиях в зоне очага и вычислено соответствующее изменение момента инерции Земли и силы тяжести. Полученную таким образом оценку вариации силы тяжести (на основании наблюдаемых неравномерностей вращения Земли) можно рассматривать лишь как нижнюю границу возможных временных изменений  $g$ , поскольку в наблюдаемых вариациях силы тяжести на отдельном пункте существенную роль могут играть высшие гармоники деформаций, не влияющие на изменение момента инерции Земли.

1. Изменение момента инерции и силы тяжести при деформациях Земли. В декартовой системе координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , в которой ось  $z$  направлена вдоль оси вращения Земли, изменение момента инерции Земли  $\delta I$  в результате деформаций представим в следующем виде:

$$\delta I = \iiint_{(V)} \delta \rho (x^2 + y^2) dV + \iint_{\sigma_1} (x^2 + y^2) H(a) \rho(a) d\sigma_1 + \iint_{\sigma_2} (x^2 + y^2) H(b) [\rho(b-0) - \rho(b+0)] d\sigma_2, \quad (1)$$

где  $V$  — объем, занимаемый Землей до деформации,  $a$  — радиус Земли,  $b$  — радиус земного ядра,  $\delta \rho$  — изменение плотности в данной точке при деформации,  $\sigma_1$  — поверхность Земли,  $\sigma_2$  — поверхность разрыва плотности между ядром и оболочкой,  $H$  — радиальная компонента смещений,  $\rho(a)$  — плотность вещества на поверхности,  $\rho(b-0) - \rho(b+0)$  — величина разрыва плотности на границе ядро – оболочка. Используя

уравнение Пуассона

$$4\pi G\delta\rho = -\Delta R \quad (2)$$

( $G$  — постоянная тяготения,  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $R$  — изменение потенциала в результате деформации), первое слагаемое в (1) можно записать в форме

$$\delta I_1 = -\frac{1}{4\pi G} \iiint_{(V)} (x^2 + y^2) \Delta R dV. \quad (3)$$

Этот объемный интеграл можно свести к поверхностному, если использовать формулу Грина отдельно для ядра и оболочки:

$$\begin{aligned} & \iiint_{(V)} [(x^2 + y^2) \Delta R - R \Delta (x^2 + y^2)] dV = \\ & = \iint_{\sigma_1} \left[ (x^2 + y^2) \frac{\partial R}{\partial n} - R \frac{\partial}{\partial n} (x^2 + y^2) \right] d\sigma_1 - \iint_{\sigma_2} (x^2 + y^2) \frac{\partial R}{\partial n} (b + 0) d\sigma_2 + \\ & \quad + \iint_{\sigma_2} (x^2 + y^2) \frac{\partial R}{\partial n} (b - 0) d\sigma_2, \quad (4) \end{aligned}$$

где  $\partial/\partial n$  — производная по внешней нормали. Используя обозначения  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ,  $\theta$  — полярный угол,  $P_2^0(\cos\theta)$  — полином Лежандра второго порядка, запишем:

$$x^2 + y^2 = r^2 \sin^2\theta = \frac{2}{3} r^2 (1 - P_2^0(\cos\theta)).$$

Подставив это выражение в (4), найдем

$$\begin{aligned} \delta I_1 = -\frac{1}{4\pi G} & \left\{ \iiint_{(V)} 4R dV + \frac{2}{3} a^2 \iint_{\sigma_1} (1 - P_2^0(\cos\theta)) \times \right. \\ & \left. \times \left( R' - \frac{2}{a} R \right) d\sigma_1 + \frac{2}{3} b^2 \iint_{\sigma_2} (1 - P_2^0(\cos\theta)) [R'(b - 0) - R'(b + 0)] d\sigma_2 \right\}, \quad (5) \end{aligned}$$

где штрихом обозначены производные по радиусу.

Введем функцию

$$L = r^2 (R' - 4\pi G\rho H), \quad (6)$$

непрерывную на границе ядра и оболочки. После замены первого слагаемого в (1) выражением (5) найдем

$$\begin{aligned} \delta I = -\frac{1}{4\pi G} & \left\{ \iiint_{(V)} 4R dV + \frac{2}{3} \iint_{\sigma_1} (1 - P_2^0(\cos\theta)) (L - 2aR) d\sigma_1 + \right. \\ & \left. + \frac{2}{3} \iint_{\sigma_2} (1 - P_2^0(\cos\theta)) (L(b - 0) - L(b + 0)) d\sigma_2 \right\}. \quad (7) \end{aligned}$$

Последнее слагаемое в (7) равно нулю вследствие непрерывности  $L$ . Разложим  $R$ ,  $L$  по сферическим функциям  $Y_n^m(\theta, \varphi)$ :

$$R = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\theta, \varphi) R_n^m(r), \quad L = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\theta, \varphi) L_n^m(r).$$

Подставив эти разложения в (7), получим после интегрирования по  $\theta, \varphi$

$$\delta I = -\frac{4}{G} \int_0^a R_0(r) r^2 dr - \frac{2a^2}{3G} (L_0(a) - 2aR_0(a)) + \frac{2a^2}{15G} (L_2^0(a) - 2aR_2^0(a)). \quad (8)$$

Таким образом, вклад в изменение момента инерции Земли вносят только гармоники, пропорциональные  $Y_0(\theta, \varphi)$  и  $Y_2(\theta, \varphi)$ .

Мы рассмотрели случай наличия скачка плотности только на границе жидкого ядра и оболочки. Очевидно, что выражение (8) для изменения момента инерции Земли остается в силе и при наличии нескольких разрывов плотности на границе внутреннего ядра или в оболочке при условии, что  $R$  и  $L$  рассчитаны с учетом этих разрывов. Соотношение (8) справедливо и при наличии неупругих деформаций в зоне изменяющегося слоя, поскольку нарушение уравнений упругости не сопровождается нарушением уравнения Пуассона.

Изменение силы тяжести определяется выражением

$$\delta \vec{g} = -\text{grad} [W(a+h) - W(a) + R(a+h)], \quad (9)$$

где  $W$  — потенциал недеформированной Земли. Так как функция  $R$  над поверхностью Земли удовлетворяет уравнению Лапласа, то ее разложение по сферическим функциям при  $r \geq a+H$  имеет вид

$$R(r, \theta, \varphi)|_{r \geq a+H} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\theta, \varphi) R_n^m(a) \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}.$$

Пренебрегая в (9) членами порядка  $H^2/a^2$ ,  $R^2/W^2$ , получим

$$\begin{aligned} \delta \vec{g} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \vec{e}_r Y_n^m(\theta, \varphi) \left( \frac{n+1}{a} R_n^m(a) - \frac{2gH_n^m(a)}{a} \right) - \\ - \vec{e}_\theta R_n^m(a) \frac{1}{a} \frac{\partial Y_n^m}{\partial \theta} - \vec{e}_\varphi R_n^m(a) \frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial Y_n^m(\theta, \varphi)}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, с относительной ошибкой порядка  $H^2/a^2$  можно считать, что сила тяжести в результате деформации Земли изменяется на величину

$$\delta g = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\theta, \varphi) \left( \frac{n+1}{a} R_n^m(a) - \frac{2gH_n^m(a)}{a} \right) \quad (11)$$

и, кроме того, направление вертикали изменяется на угол

$$\delta \Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n -\frac{R_n^m(a)}{ag} \left[ e_\theta \frac{\partial Y_n^m(\theta, \varphi)}{\partial \theta} + \frac{\vec{e}_\varphi}{\sin \theta} \frac{\partial Y_n^m(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} \right]. \quad (12)$$

2. Для решения уравнений упругого равновесия зададимся следующими краевыми условиями:

- а) поверхность Земли свободна от нормальных и тангенциальных напряжений; производная от потенциала на поверхности Земли непрерывна;
- б) граница оболочки и ядра свободна от тангенциальных напряжений;
- в) на глубине  $h$  одна из компонент смещений имеет разрыв;
- г) решение правильно (не возрастает неограниченно к центру Земли).

Рассмотрим решение уравнений упругости при этих граничных условиях для случая  $n = 2$ . Кроме функций  $H, R, L$ , определенных в п. 1, введем функции  $T, M, N$ , характеризующие соответственно тангенциальную компоненту смещений, тангенциальную компоненту напряжений и нормальную компоненту напряжений [6]. Уравнения упругости в Земле для функций  $H, T, R, L, M, N$  представляют собой систему шести обыкновенных уравнений первого порядка. В работе [7] вычислены шесть линейно независимых решений этих уравнений, соответствующих таким граничным условиям, когда одна из шести функций на поверхности Земли равна единице, а остальные — нулю.

В системе единиц, в которой  $a = 1, g(a) = 1, G = 3/4\pi$ , средняя плотность Земли  $\sim 5,517 \text{ г/см}^3 = 1$ , граничные условия запишем в следующем виде:

$$M(1) = 0, \quad (13a)$$

$$N(1) = 0, \quad (13б)$$

$$3R(1) + L(1) = 0, \quad (13в)$$

$$M(0,545) = 0. \quad (13г)$$

Условие (13в) можно получить, если учесть, что величина скачка  $R'$  на поверхности Земли равна удвоенному притяжению простого слоя  $4\pi G\rho H$  и что при  $n = 2$  имеем  $R'(1+0) = -3R(1)$ . Вследствие линейности решение уравнений упругости пропорционально величине скачка  $\delta H$ . Обозначив через  $r_0 = 1 - h/a$  безразмерное расстояние от центра Земли до очага деформаций, положим

$$\delta H(r_0) = 1, \quad \delta T(r_0) = \delta R(r_0) = \delta L(r_0) = \delta M(r_0) = \delta N(r_0) = 0. \quad (13д)$$

Вместо условия (13д), как было отмечено, можно ввести условие, соответствующее скачку  $T$ . Наконец, условие регулярности решения в центре Земли в зависимости от выбранной модели строения ядра приводит к различным условиям на границе оболочки и ядра. Для модели Земли с внутренним твердым ядром №3, рассмотренной в работе [7], условия на границе оболочки и ядра, как показано в [6], уравнения (3), (5), следующие:

$$N(b) + \rho(b-0)[R(b) - g(b)H(b)] = 0, \quad (13е)$$

где  $\rho(b-0) = 1,625, g(b) = 1,049,$

$$b = 0,545, R'(b-0) = 3,261R(b). \quad (13ж)$$

Последнее соотношение следует из формул (2.15), (2.17) работы [6] при  $\gamma(b) = -0,375$ .

Задача сводится к отысканию такой линейной комбинации шести независимых интегралов  $I^{(1)}, I^{(2)}, I^{(3)}, I^{(4)}, I^{(5)}, I^{(6)}$  системы обыкновенных дифференциальных уравнений, чтобы условия (13) были удовлетворены. Для этого найдем сначала некоторое частное решение  $I_0$ , которое удовлетворяет: 1) уравнениям упругости при  $r < r_0$  и  $r > r_0$ ; 2) условию (13д) и всем трем условиям (13г), (13е), (13ж) на границе оболочки

и ядра, но не удовлетворяет граничным условиям на поверхности. С этой целью удобно взять решение, которое тождественно равно нулю всюду в области  $0 \leq r < r_0$ , а в области  $r_0 \leq r \leq 1$  полностью определяется следующими начальными условиями:

$$H(r_0 + 0) = 1, \quad T(r_0 + 0) = R(r_0 + 0) = \dots = N(r_0 + 0) = 0. \quad (14)$$

Обозначив значения функций, входящих в интеграл  $I_0$  на поверхности Земли через  $H_0, T_0, R_0, L_0, M_0, N_0$ , условие (14) запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial H_0}(r_0)H_0 + \frac{\partial H}{\partial T_0}(r_0)T_0 + \dots + \frac{\partial H}{\partial N_0}(r_0)N_0 &= 1, \\ \frac{\partial T}{\partial H_0}(r_0)H_0 + \frac{\partial T}{\partial T_0}(r_0)T_0 + \dots + \frac{\partial T}{\partial N_0}(r_0)N_0 &= 0, \\ \dots & \\ \dots & \\ \frac{\partial N}{\partial H_0}(r_0)H_0 + \frac{\partial N}{\partial T_0}(r_0)T_0 + \dots + \frac{\partial N}{\partial N_0}(r_0)N_0 &= 0, \end{aligned} \quad (15)$$

где коэффициенты  $\frac{\partial(H, T, R, L, M, N)}{\partial(H_0, T_0, R_0, L_0, M_0, N_0)}$  для разных значений  $r_0$  обозначают величину интеграла  $(H, T, R, L, M, N)$  в точке  $r_0$ , если на поверхности сферы одно из значений  $(H_0, T_0, R_0, L_0, M_0, N_0)$  равно единице, а остальные — нулю. Эти коэффициенты выписаны в табл. 2 работы [7]. Решение уравнений (15) однозначно определяет  $H_0, T_0, R_0, L_0, M_0, N_0$ . Аналогично можно вычислить значения  $I_0$  на поверхности и для случаев разрыва в точке  $r_0$  функции  $T$ .

Чтобы удовлетворить и граничным условиям (13а), (13б), (13в) на поверхности, найдем три независимых интеграла  $I_1, I_2, I_3$ , непрерывные всюду при  $0 \leq r \leq 1$  и подчиняющиеся условиям (13г), (13е), (13ж) при  $r = b$ . Для этого выразим значения функций  $M, R, H, R'$  на границе ядра и оболочки через их значения на поверхности с помощью коэффициентов  $\frac{\partial(H, T, R, L, M, N)}{\partial(H_0, T_0, R_0, L_0, M_0, N_0)}(b)$  и подставим их в равенства (13г), (13е), (13ж). После решения полученной таким образом системы из трех алгебраических уравнений для шести неизвестных  $H(a), T(a), R(a), L(a), M(a), N(a)$  найдем следующие значения независимых интегралов  $I_1, I_2, I_3$  на поверхности Земли при условиях 1)  $R + 1/3L = 1, M = N = 0$ , 2)  $R + 1/3L = 0, M = 1, N = 0$ , 3)  $R + 1/3L = 0, M = 0, N = 1$ .

	$H(a)$	$T(a)$	$R(a)$	$L(a)$	$M(a)$	$N(a)$
$I_1$	0,370	0,0486	0,781	0,656	0	0
$I_2$	0,180	1,085	0,291	-0,873	1	0
$I_3$	0,972	0,0296	0,369	-1,107	0	1

Поскольку интегралы  $I_1, I_2, I_3$  непрерывны в точке  $r_0$ , к  $I_0$  можно добавить любую линейную комбинацию из  $I_1, I_2, I_3$  без нарушения условия (13д). Из интегралов  $I_0, I_1, I_2, I_3$  можно образовать такую линейную комбинацию, чтобы условия (13а), (13б), (13в) также оказались выполненными. Именно, если искать окончательное решение в виде

$$I = I_0 + c_1 I_1 + c_2 I_2 + c_3 I_3,$$

то получим

$$c_1 = -(R_0 + 1/3L_0), \quad c_2 = -M_0, \quad c_3 = N_0.$$

Таблица

Значения функций  $H$ ,  $T$ ,  $R$ , входящих в решение  $I$ , на поверхности Земли

$r_0$	$\delta H = 1, \delta T = 0$			$\delta T = 1, \delta H = 0$		
	$H$	$T$	$R$	$H$	$T$	$R$
1,00	1,000	0,0000	0,0000	0,0000	1,000	0,000
0,99	0,997	-0,0100	0,0079	0,0324	0,994	0,021
0,95	0,969	-0,0447	0,0338	0,182	0,963	0,110
0,90	0,906	-0,0751	0,0540	0,402	0,897	0,229
0,85	0,808	-0,0886	0,0605	0,654	0,783	0,354
0,80	0,695	-0,0920	0,0563	0,878	0,652	0,460
0,75	0,577	-0,0885	0,0448	1,040	0,522	0,534
0,70	0,462	-0,0802	0,0295	1,111	0,394	0,562
0,65	0,362	-0,0674	0,0159	1,037	0,268	0,518
0,60	0,294	-0,0510	0,0127	0,717	0,138	0,355
0,55	0,278	-0,0303	0,0302	0,000	0,000	0,000

В результате решение уравнений упругости, удовлетворяющее условиям (13), полностью определяется. В таблице приводятся значения всех функций решения  $I$  на поверхности Земли.

По формулам (8), (11), (12) можно найти изменение момента инерции Земли, силы тяжести и направления вертикали. В принятой нами системе единиц функции  $H$ ,  $R$ ,  $L$  оказываются величинами одного порядка, и поэтому, как это следует из формул (8), (11), (12), безразмерные отношения  $\delta I/I$ ,  $\delta g/g$ ,  $\delta \Phi$  при деформациях Земли, пропорциональных  $P_2^0(\cos \theta)$ , — также величины одного порядка. Скачкообразные изменения  $\delta I/I = -\delta \omega/\omega$ , которые составляют  $\sim 10^{-8}$ , в настоящее время уверенно регистрируются. Соответствующие изменения  $\delta g/g$  находятся близко к возможной в настоящее время точности абсолютных измерений силы тяжести;  $\delta \Phi$  находится за порогом достигнутой сейчас точности определения широты и долготы.

На рис. 1 приведено изменение момента инерции Земли, когда на расстоянии  $r_0$  от центра Земли произошел скачок вертикальной компоненты смещений на 1 м. Там же представлен аналогичный результат для случая, когда скачок испытывает функция  $T$ . Решением, соответствующим скачку обеих величин  $H$ ,  $T$ , является, очевидно, линейная комбинация этих частных решений. На рис. 2 представлена величина разрыва  $\delta H$  на разных глубинах, достаточная для того, чтобы длительность суток изменилась на 1 мс ( $\delta \omega/\omega = 1,16 \cdot 10^{-8}$ ). Рис. 3 иллюстрирует изменение силы тяжести на полюсе, соответствующее случаям  $\delta H = 0,1$  м и  $\delta(T/r) = 0,1$  м. На рис. 4 представлены безразмерные отношения ( $\delta g/g$ ) на полюсе к  $\delta I/I$ , не зависящие от величины разрывов  $\delta H$ ,  $\delta T$ .

Следует отметить, что это отношение очень различается по величине для разных механизмов очага: от 0 до +0,5 в случае скачка  $T$ , от  $+\infty$  до +10 в случае скачка  $H$  на различных глубинах  $h$ . Поэтому по экспериментально найденной величине этого отношения можно было бы сделать некоторые предположения о характере очага деформаций и о его локализации по глубине. Напомним, однако, что показанные на рис. 4 отношения являются минимально возможными, так как мы рассматриваем деформации, пропорциональные сферической функции второго порядка с осью, совпадающей с осью вращения Земли. Если деформации распределены в Земле более сложным образом (например, носят региональный характер), то разложение этих деформаций по сферическим функциям даст члены второго порядка  $\sim Y_2^0$  и  $Y_0$  с весьма малыми амплитудами и потому получатся небольшие изменения  $\delta I/I$  и  $\delta \omega/\omega$ . Изменения же  $\delta g$  в некоторых областях могут быть весьма значительны, поскольку они определяются всеми членами разложения по сферическим функциям, в том числе членами высшего порядка, не влияющими на вращение Земли. Даже если деформации распределены по зональной сферической функции второго

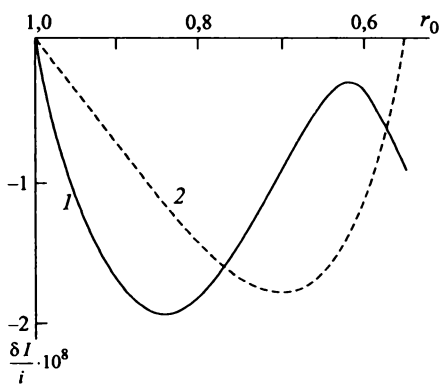


Рис. 1

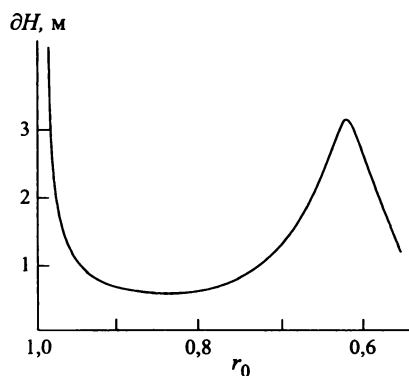


Рис. 2

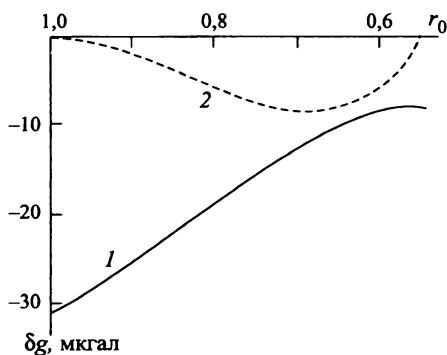


Рис. 3

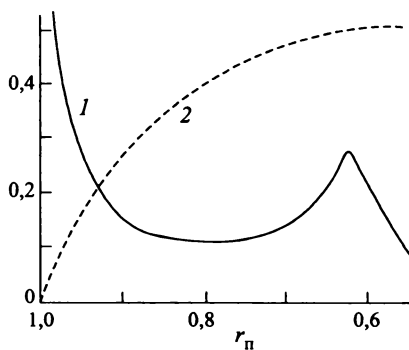


Рис. 4

Рис. 1. Относительное изменение момента инерции Земли при  $n = 2$ .

1 — случай  $\delta H(r_0) = 1$  м, 2 —  $\delta(T/r)(r_0) = 0,1$  м.

Рис. 2. Величина разрыва  $\delta H$  в метрах на различных глубинах, необходимых для того, чтобы продолжительность суток изменилась на 1 мс.

Рис. 3. Изменение силы тяжести на полюсе. При разрывах:

1 —  $\delta H(r_0) = 0,1$  м и 2 —  $\delta(T/r)(r_0) = 0,1$  м на разных глубинах.

Рис. 4. Безразмерные отношения  $10^{-2}\delta g/g$  на полюсе к  $\delta I/I$  при разрыве  $H$  и  $\delta g/g$  на полюсе к  $\delta I/I$  при разрыве  $T$  на разных глубинах:

1 — разрыв  $H$ , 2 — разрыв  $T$ .

порядка  $P_2^0(\cos \gamma)$ , но ось ее симметрии не совпадает с осью вращения Земли, а образует с ней угол  $\theta'$  и имеет долготу  $\varphi'$ , то максимальное относительное изменение силы тяжести будет в полюсах сферической функции в точках  $O(\theta', \varphi')$  и  $O_1(\pi + \theta', \pi + \varphi')$ , относительное же изменение момента инерции и угловой скорости будет меньше, чем в рассмотренном нами случае и даже может равняться нулю.

Действительно, пусть  $M(\theta, \varphi)$  — текущая точка,  $O(\theta', \varphi')$  — полюс сферической зональной функции второго порядка  $P_2^0$ , дуга  $OM = \gamma$ . Тогда по теореме сложения сферических функций при  $n = 2$

$$P_2^0(\cos \gamma) = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta' - 1) P_2^0(\cos \theta) + \frac{1}{3} P_1^2(\cos \theta') P_2^1(\cos \theta) \cos(\varphi - \varphi') + \frac{1}{12} P_2^2(\cos \theta') P_2^2(\cos \theta) \cos 2(\varphi - \varphi'). \quad (16)$$



Второй и третий члены выражения (16) не дадут изменения момента инерции. Первый же член дает величину  $\delta I$  в  $P_2^0(\cos \theta')$  меньшую, чем рассмотрено выше. Если ось симметрии деформации лежит в плоскости экватора, то мы получим в 2 раза меньшее изменение момента инерции, чем в случае совпадения осей симметрии и вращения Земли. Если ось симметрии образует угол  $\theta = 54^\circ 45'$  с полярной осью, то изменения момента инерции не будет.

Таким образом, наблюдения изменений силы тяжести в одном пункте не могут дать однозначной информации о природе связи между изменениями силы тяжести и скорости вращения Земли. Необходима постановка наблюдений в большом числе пунктов. Сопоставление изменений во вращении Земли с распределением по поверхности Земли временных изменений силы тяжести позволит решить существенный вопрос о том, связаны ли неравномерности вращения с процессами, приводящими к изменениям момента инерции Земли или с изменениями относительных движений внутри Земли.

Наиболее надежно в настоящее время изменения силы тяжести во времени измеряются Сакумой в Международном бюро мер и весов в Севре под Парижем с помощью установки для абсолютного определения силы тяжести методом подбрасывания уголкового отражателя. На основании данных, приведенных Сакумой [8] в его докладе на Международном симпозиуме по земному гравитационному полю в Сиднее в ноябре 1973 г., изменения силы тяжести в Севре за два года (с 1968 по 1970 г.) незначительны, но с середины 1970 г. до середины 1972 г., т.е. за 2 года, сила тяжести в Севре увеличилась приблизительно на 40 мкгал, или на 20 мкгал в год. Если бы это изменение являлось проявлением деформации, распределенной по закону  $P_2^0(\cos \theta)$ , с осью, совпадающей с осью вращения Земли, то соответствующее увеличение силы тяжести на полюсе равнялось бы

$$\delta g_{\text{п}} = \delta g_{\text{Севр}} / \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta_{\text{Севр}} - 1) = 31,8 \frac{\text{мкгал}}{\text{год}},$$

принимая широту Севра:  $\pi/2 - \theta_{\text{Севр}} = 48^\circ 49'$ . Увеличение силы тяжести на полюсе при распределении смещений по закону  $CP_2^0(\cos \theta)$  соответствует  $C < 0$  или сжатию Земли вдоль полярной оси, приводящему к увеличению ее полярного момента инерции и замедлению вращения в соответствии с современными наблюдениями. По данным, любезно сообщенным нам П.С. Сидоренковым, полученным им по материалам Международной службы времени, аналогично тому, как это сделано в его работе [9], среднее годовое относительное изменение угловой скорости вращения Земли с середины 1970 г. до середины 1972 г. (для того же интервала времени, что и данные Сакума) составляло  $\delta\omega/\omega = -0,118 \cdot 10^{-8}$  за 1 год.

Таким образом, отношение

$$\left(\frac{\delta g}{g}\right)_{\text{п}} / \left(\frac{\delta I}{I}\right) = \frac{31,8 \cdot 10^{-6}}{981} / 0,118 \cdot 10^{-8} = 27,4.$$

Эта величина согласно рис. 4 соответствует случаю разрыва  $H$  при глубине изменяющегося слоя  $h = 370$  км. Мы не считаем, ни в какой мере, эти числа имеющими реальное значение, поскольку распределение вариаций силы тяжести по поверхности Земли пока еще не изучено.

Приведенные расчеты иллюстрируют реальную возможность выяснения вопроса, не вызываются ли нерегулярные изменения скорости вращения Земли и изменения силы тяжести предполагаемыми процессами внутри Земли. Для выяснения этого вопроса весьма существенно проводить измерения не только абсолютных изменений силы тяжести, но и относительных изменений на больших базах в тысячу и более километров. В этом

отношении имеют большое значение единственные в этом роде работы Ю.Д. Буланже [10] по измерению изменений силы тяжести на длинных профилях.

Академия наук СССР  
Институт физики Земли  
им. О.Ю. Шмидта

Поступила  
15.VIII.1974

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пари́йский Н.Н.* Неравномерность вращения Земли. — М.: Изд-во АН СССР. 1954.
2. *Molodensky M.S. and Pariisky N.N.* Elastic tides and irregularities of the Earth's rotation in connection with structure. // Association de seismologie et de physique de l'interieur de la Terre. 10-e Assamblee UGGJ. — Rome, 1954.
3. *Пари́йский Н.Н.* Внутренние деформации Земли и неравномерность ее вращения. // Труды 11 Астрометрической конференции в Пулково 24–25 мая 1954 г. — М.: Изд-во АН СССР. 1956.
4. *Молоденский М.С., Крамер М.В.* Земные приливы и нутации Земли. — М.: Изд-во АН СССР. 1961.
5. *Pariisky N.N.* Earth rotation and gravity variations. // 2nd International Symposium Geodesy and Physics of the Earth. Potsdam May 7th–11th, 1973. — Potsdam. 1974.
6. *Молоденский М.С.* Упругие приливы, свободная нутация и некоторые вопросы строения Земли. // Труды Геофизического института АН СССР. 1953. №19(146). С.3–52.
7. *Молоденский М.С., Крамер М.В.* Числа Лява для статических приливов 2-го и 3-го порядков. // В сб.: Земные приливы и нутации Земли. — М.: Изд-во АН СССР. 1961.
8. *Sakuma A.* A permanent station for the absolute determination of gravity approaching one microgal accuracy. // International Symposium on the Earth's Gravitational Field and Secular Variation in Position. Sydney, 26–30, November, 1973. — Sydney: Univ. of N.S.W. 1973.
9. *Сидоренков Н.С.* Неравномерность вращения Земли по данным астрономических наблюдений за 1968–1971 гг. // Астрономический журнал. 1971. 48. Вып. 6. С.1305–1307.
10. *Буланже Ю.Д.* Вековые вариации силы тяжести. // Известия АН СССР. Физика Земли. 1974. №10.

# ПРИЛИВЫ И СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЗЕМЛИ С УЧЕТОМ СИЛ КОРИОЛИСА\*

Получена система обыкновенных дифференциальных уравнений (десятого порядка в оболочке и четвертого в ядре), дающая точное решение задачи об упругих приливах и собственных колебаниях для сферически-симметричной Земли с учетом сил Кориолиса. Показана возможность низкочастотных колебаний; частным случаем таких колебаний является свободная нутация с периодом, близким к суткам.

В [1] получена система обыкновенных дифференциальных уравнений для упругих приливов и собственных колебаний Земли с учетом сил Кориолиса. При этом были использованы выражения для смещений, полученные в [2] в виде суммы смещений сферидального и крутильного типа. Хотя три компоненты смещения выражались через три вспомогательные функции, третья функция входила заранее заданным образом, и поэтому вид смещений не являлся достаточно общим. Поэтому при малых значениях частоты колебаний, так же как и в [3], возникали заметные связи между колебаниями, отличными по порядку величины на 2 единицы.

Здесь мы покажем, что в результате небольшого обобщения выражений для смещений (14) из [2] для сферически-симметричной Земли получается точная система обыкновенных дифференциальных уравнений, не связанная с системами, отличными по порядку величины.

Будем исходить из следующих выражений для компонент смещения  $u$ ,  $v$ ,  $w$  в декартовой системе координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ :

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial\psi}{\partial x} - x\chi - \frac{2\omega}{\sigma^2} \left( \frac{\partial\dot{\psi}}{\partial y} - y\dot{\chi} \right), \\ v &= \frac{\partial\psi}{\partial y} - y\chi + \frac{2\omega}{\sigma^2} \left( \frac{\partial\dot{\psi}}{\partial x} - x\dot{\chi} \right), \\ w &= \frac{\partial\psi}{\partial z} - z\chi + \bar{w}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\sigma$  — частота колебательного процесса;  $\psi$ ,  $\chi$ ,  $\bar{w}$  — вспомогательные функции, зависящие от  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ;  $\omega$  — угловая скорость вращения Земли, а точка означает производную по времени. В отличие от [2] теперь  $u$  и  $v$  выражены только через  $\psi$  и  $\chi$ , а  $w$  — через  $\psi$ ,  $\chi$  и  $\bar{w}$ .

Из (1) для гармонических колебаний с частотой  $\sigma$  получаем

$$\begin{aligned} \ddot{u} - 2\omega\dot{v} &= -(\sigma^2 - 4\omega^2) \left( \frac{\partial\psi}{\partial x} - x\chi \right), \\ \ddot{v} + 2\omega\dot{u} &= -(\sigma^2 - 4\omega^2) \left( \frac{\partial\psi}{\partial y} - y\chi \right), \quad \ddot{w} = -\sigma^2 \left( \frac{\partial\psi}{\partial z} - z\chi + \bar{w} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

\* Известия АН СССР. Физика Земли. 1976. №1. С. 3–12.

Поэтому уравнения колебаний с учетом сил Кориолиса могут быть записаны в таком виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial x} + Bx + f(u) - \rho\sigma^2 u &= -\rho(\sigma^2 - 4\omega^2) \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - x\chi \right), \\ \frac{\partial A}{\partial y} + By + f(v) - \rho\sigma^2 v &= -\rho(\sigma^2 - 4\omega^2) \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} - y\chi \right), \\ \frac{\partial A}{\partial z} + Bz + f(w) - \rho\sigma^2 w &= -\rho\sigma^2 \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} - z\chi + \bar{w} \right),\end{aligned}\quad (3)$$

где

$$\begin{aligned}f &= \mu\Delta + \mu' \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\mu'}{r} + \sigma^2 \rho, \\ A &= \rho(R + W'H) + (\lambda + \mu)\delta + \mu'H, \\ -rB &= \rho'(R + W'H) + (\rho W' + \mu')\delta + \left( \frac{\mu'}{r} \right)' rH,\end{aligned}$$

$\Delta$  — оператор Лапласа,  $\rho$  — плотность,  $\lambda, \mu$  — параметры Ламе,  $R$  — изменение гравитационного потенциала  $W, H$  — радиальная компонента смещений,  $\delta$  — объемное расширение; штрих означает производную по  $r$ .

Выражения (1) определяют  $H$  и  $\delta$  через  $\psi, \chi$  и  $\bar{w}$ :

$$\begin{aligned}H &= \frac{x}{r}u + \frac{y}{r}v + \frac{z}{r}w = \psi' - r\chi - \frac{2\omega}{\sigma}m\frac{\psi}{r} + \frac{z}{r}\bar{w}, \\ \delta &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \Delta\psi - r\chi' - 3\chi - \frac{2\omega}{\sigma}m\chi + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z}.\end{aligned}\quad (4)$$

Функции, входящие в (4), можно представить рядами следующего вида:

$$\psi = \sum_{n=m}^{n=\infty} \psi_n P_n^m(\cos \vartheta) \cos(\sigma t - m\varphi).$$

Функции с одним нижним индексом здесь и всюду далее зависят только от  $r$ .

Из (4) определим функцию  $S$ :

$$S = (r^2 H)' - r^2 \delta,$$

и вычислим выражения

$$\begin{aligned}H_n + \frac{1}{nr}S_n &= \left( 1 - \frac{2\omega}{\sigma} \frac{m}{n} \right) \left( \psi'_n - r\chi_n + \frac{n+1}{r}\psi_n \right) + \frac{2n+1}{2n-1} \frac{n-m}{n} \bar{w}_{n-1}, \\ H_n - \frac{1}{(n+1)r}S_n &= \left( 1 + \frac{2\omega}{\sigma} \frac{m}{n+1} \right) \left( \psi'_n - r\chi_n - \frac{n}{r}\psi_n \right) + \frac{2n+1}{2n+3} \frac{n+1+m}{n+1} \bar{w}_{n+1}.\end{aligned}\quad (5)$$

Последнее из выражений (1) можно записать так:

$$\begin{aligned}w_{n-1} &= \frac{n+m}{2n+1} \left( \psi'_n - r\chi_n + \frac{n+1}{r}\psi_n \right) + \bar{w}_{n-1}, \\ w_{n+1} &= \frac{n+1-m}{2n+1} \left( \psi'_n - r\chi_n - \frac{n}{r}\psi_n \right) + \bar{w}_{n+1}.\end{aligned}\quad (6)$$

С помощью (6) исключаем из (5)  $\bar{w}_{n-1}$  и  $\bar{w}_{n+1}$  и получаем

$$H_n - \frac{1}{(n+1)r} S_n = \frac{(n+1)(n+2) + m^2}{(n+1)(2n+3)} b_n \left( \psi'_n - r\chi_n - \frac{n}{r} \psi_n \right) + \frac{(n+1+m)(2n+1)}{(n+1)(2n+3)} w_{n+1}, \quad (7)$$

$$H_n + \frac{1}{nr} S_n = \frac{n(n-1) + m^2}{n(2n-1)} b_{-n-1} \left( \psi'_n - r\chi_n + \frac{n+1}{r} \psi_n \right) + \frac{(n-m)(2n+1)}{n(2n-1)} w_{n-1},$$

где

$$b_n = 1 + \frac{2\omega}{\sigma} \frac{m}{n+1} \frac{(n+1)(2n+3)}{(n+1)(n+2) + m^2}, \quad b_{-n-1} = 1 - \frac{2\omega}{\sigma} \frac{m}{n} \frac{n(2n-1)}{n(n-1) + m^2}.$$

Теперь дифференциальные уравнения (3) преобразуем подобно тому, как преобразованы выражения для смещений (1). Третье из уравнений (3) равносильно двум обыкновенным уравнениям:

$$\begin{aligned} A'_n + rB_n - \frac{n}{r} A_n + f_{n+1} \left( \frac{2n+1}{n+1-m} w_{n+1} \right) &= 0, \\ A'_n + rB_n + \frac{n+1}{r} A_n + f_{n-1} \left( \frac{2n+1}{n+m} w_{n-1} \right) &= 0, \\ f_n &= \mu \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) + \mu' \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\mu'}{r} + \sigma^2 \rho. \end{aligned} \quad (8)$$

Используя все уравнения (3), определим  $A$ ,  $\Delta A$  и  $n(n+1)A_n = r^2 (\Delta A - (r^2 A)')$ . Затем вычислим  $A'_n + rB_n - \frac{n}{r} A_n$  и  $A'_n + rB_n + \frac{n+1}{r} A_n$ . Получим

$$\begin{aligned} A'_n + rB_n - \frac{n}{r} A_n + f_{n+1} \left( H_n - \frac{1}{(n+1)r} S_n \right) - \sigma^2 \rho \left( H_n - \frac{1}{(n+1)r} S_n \right) &= \\ = \left( -\sigma^2 \rho + 4\omega^2 \rho \frac{(n+1)(n+2) + m^2}{(n+1)(2n+3)} \right) \left( \psi'_n - r\chi_n - \frac{n}{r} \psi_n \right) - \\ - \sigma^2 \rho \frac{2n+1}{2n+3} \frac{n+1+m}{n+1} \bar{w}_{n+1}. \end{aligned}$$

С помощью (5) исключим  $\bar{w}_{n+1}$  и получим

$$\begin{aligned} A'_n + rB_n - \frac{n}{r} A_n + f_{n+1} \left( H_n - \frac{1}{(n+1)r} S_n \right) &= a_n \sigma^2 \rho \left( \psi'_n - r\chi_n - \frac{n}{r} \psi_n \right), \\ a_n &= \frac{(n+1)(n+2) + m^2}{(n+1)(2n+3)} \left( b_n + \frac{4\omega^2 - \sigma^2}{\sigma^2} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Сходным образом получается уравнение, в котором  $n$  заменяется на  $-(n+1)$ , а  $f_{n+1}$  —

на  $f_{n-1}$ :

$$\begin{aligned} A'_n + rB_n + \frac{n+1}{r}A_n + f_{n-1} \left( H_n + \frac{1}{(n+1)r}S_n \right) &= \\ &= a_{-n-1}\sigma^2\rho \left( \psi'_n - r\chi_n + \frac{n+1}{r}\psi_n \right), \end{aligned} \quad (10)$$

$$a_{-n-1} = -\frac{2\omega}{\sigma} \frac{m}{n} + \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \frac{n(n-1) + m^2}{n(2n-1)}.$$

Уравнения (9) и (10) после исключения  $\psi_n$  и  $\chi_n$  с помощью (7) приводятся к следующему виду:

$$\begin{aligned} A'_n + rB_n - \frac{n}{r}A_n + f_{n+1} \left( H_n - \frac{1}{(n+1)r}S_n \right) &= \\ = \sigma^2\rho \frac{b_n - 1 + \frac{4\omega^2}{\sigma^2}}{b_n} \left( H_n - \frac{1}{(n+1)r}S_n - \frac{(n+1+m)(2n+1)}{(n+1)(2n+3)}w_{n+1} \right), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} A'_n + rB_n + \frac{n+1}{r}A_n + f_{n-1} \left( H_n + \frac{1}{nr}S_n \right) &= \\ = \sigma^2\rho \frac{b_{-n-1} - 1 + \frac{4\omega^2}{\sigma^2}}{b_{-n-1}} \left( H_n + \frac{1}{nr}S_n - \frac{(n-m)(2n+1)}{n(2n-1)}w_{n-1} \right). \end{aligned}$$

В четыре уравнения (8) и (11) в качестве неизвестных входят функции  $H_n$ ,  $S_n$ ,  $w_{n-1}$ ,  $w_{n+1}$  и  $R_n$  ( $B_n$  и  $A_n$  выражаются через эти функции). После добавления уравнения Пуассона

$$R''_n + \frac{2}{r}R'_n - \frac{n(n+1)}{r^2}R_n = 4\pi f (\rho\delta_n + \rho'H_n) \quad (12)$$

получаем полную систему уравнений. Система уравнений (8), (11) и (12) решается независимо от систем для других  $n$ .

Уравнения (8) отделяются от (11) и (12) при  $\omega = 0$ . Связь между этими уравнениями велика при достаточно малых  $b_n$  или  $b_{-n-1}$ .

Если  $\mu = 0$ , а плотность зависит только от давления, то

$$\chi_n = 0, \quad f_{n-1} = f_{n+1} = \sigma^2\rho.$$

Тогда из (9) и (10) получаем

$$\begin{aligned} H_n - \frac{1}{(n+1)r}S_n - \frac{2n+1}{n+1-m}w_{n+1} &= a_n \left( \psi'_n - \frac{n}{r}\psi_n \right), \\ H_n + \frac{1}{nr}S_n - \frac{2n+1}{n+m}w_{n-1} &= a_{-n-1} \left( \psi'_n + \frac{n+1}{r}\psi_n \right). \end{aligned} \quad (13)$$

С помощью (7) исключаем  $w_{n+1}$  и  $w_{n-1}$  и получаем

$$\begin{aligned} H_n - \frac{1}{(n+1)r}S_n &= \left( 1 + \frac{2\omega}{\sigma} \frac{m}{n+1} - \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \frac{(n+1)^2 - m^2}{(n+1)(2n+3)} \right) \left( \psi'_n - \frac{n}{r}\psi_n \right), \\ H_n + \frac{1}{nr}S_n &= \left( 1 - \frac{2\omega}{\sigma} \frac{m}{n} - \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \frac{n^2 - m^2}{n(2n-1)} \right) \left( \psi'_n + \frac{n+1}{r}\psi_n \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Из этих равенств определяем  $H_n$ ,  $S_n$  и выражаем  $\delta_n$  через  $\psi_n$ . В результате получаем

$$\begin{aligned} H_n &= E_n \left( \psi'_n - \frac{F_n}{r E_n} \psi_n \right), \\ S_n &= -F_n \left( \psi'_n r - \frac{D_n}{F_n} \psi_n \right), \\ \delta_n &= E_n \Delta \psi_n. \end{aligned} \quad (15)$$

В выражении  $\Delta \psi_n$  индекс  $n$  относится к  $\Delta \psi$ . Таким образом,

$$\Delta \psi_n = (\Delta \psi)_n = \psi''_n + \frac{2}{r} \psi'_n - \frac{n(n+1)}{r^2} \psi_n.$$

Коэффициенты  $E_n$ ,  $F_n$  и  $D_n$  зависят от  $n$ ,  $m$  и  $\sigma/\omega$ :

$$\begin{aligned} E_n &= 1 - C_n - C_{n+1}, \quad F_n = \frac{2\omega}{\sigma} m + (n+1)C_n - nC_{n+1}, \\ C_n &= \frac{4\omega^2 n^2 - m^2}{\sigma^2 4n^2 - 1}, \quad D_n = n(n+1) - \frac{2\omega}{\sigma} m - n^2 C_{n+1} - (n+1)^2 C_n, \\ &F_n + C_n = n(n+1)E_n. \end{aligned}$$

Из формул (3) следует, что при  $\mu = 0$  и  $\chi = 0$

$$(4\omega^2 - \sigma^2) \psi_n = R_n - \frac{1}{3} \varepsilon \omega (\sigma + \omega) r^2 + W' (H_W)_n + \frac{\lambda}{\rho} \delta_n. \quad (16)$$

Это выражение отличается от (12) из [3] только формой записи<sup>1</sup>, именно постоянным множителем при  $\psi_n$ ;  $H_W$  — компонента смещения по нормали к уровенной поверхности. Если сжатие Земли не учитывать, то формулы (12), (15) и (16) после исключения  $H_n$  и  $\delta_n$  дают систему двух уравнений второго порядка, из которых определяются функции  $\psi_n$  и  $R_n$  с учетом сил Кориолиса. Влияние сил Кориолиса мало только тогда, когда  $\sigma \gg \omega$ .

Потенциал силы тяжести внутри Земли, вращающейся и находящейся в гидростатическом равновесии, с точностью до первых степеней сжатия определяется выражением

$$W = W_0(r) + \frac{2}{3} \alpha K P_2(\cos \vartheta), \quad (17)$$

где  $K$  — правильное решение дифференциального уравнения:

$$K'' + \frac{2}{r} K' - \frac{6}{r^2} K = -\frac{4\pi \kappa \rho'}{W'} K, \quad (18)$$

подчиненное условию

$$K(a) = (rW')_{r=a},$$

$\alpha$  — сжатие земного уровенного эллипсоида,  $a$  — радиус Земли.

<sup>1</sup>Слагаемое, содержащее множителем амплитуду нутации  $\varepsilon$ , получено в [3] и добавлено здесь для сравнения окончательных результатов.  $\varepsilon \neq 0$ , если только  $n = 2$  и  $m = 1$ .

Тогда плотность и притяжение внутри Земли таковы:

$$\rho = \rho_0(r) + \frac{2}{3}\alpha \frac{\rho'}{W'} K P_2(\cos \vartheta),$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = W' \sin \vartheta \cos \varphi \left( 1 - 2\alpha \frac{K}{rW'} \cos^2 \vartheta \right), \quad (19)$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = W' \sin \vartheta \sin \varphi \left( 1 - 2\alpha \frac{K}{rW'} \cos^2 \vartheta \right),$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} = W' \cos \vartheta \left( 1 + 2\alpha \frac{K}{rW'} \sin^2 \vartheta \right). \quad (20)$$

Исходя из (17) и (19) вычислим  $W'/\rho'$  и убедимся, что эта функция, как и  $\rho$ , постоянна на урвненной поверхности. Если, кроме того,

$$\rho' = \frac{\rho^2 W'}{\lambda + 2/3\mu} \quad (21)$$

при  $\vartheta = \vartheta_0$ ,  $P_2(\cos \vartheta_0) = 0$ , то уравнение (18) обеспечивает выполнение (21) при всех значениях  $\vartheta$  с ошибкой порядка квадрата сжатия.

С помощью (20) вычисляем функцию

$$\eta = \frac{\partial W}{\partial x} u + \frac{\partial W}{\partial y} v + \frac{\partial W}{\partial z} w = W' H_W = W' H_r + 2\alpha \frac{K}{r} \cos \vartheta (w - \cos \vartheta H).$$

Здесь  $H_r$  и  $H_W$  — компоненты смещения — радиального и по нормали к урвненной поверхности.

Функция  $H_W$  содержит члены, пропорциональные сферическим функциям порядков  $n$ ,  $n - 2$  и  $n + 2$ . Коэффициенты при этих функциях таковы:

$$(H_W)_n = (H_r)_n - \frac{(n+1)^2 - m^2}{(2n+1)(2n+3)} \frac{2\alpha K}{rW'} \left( H_n - \frac{2n+1}{n+1-m} w_{n+1} \right) -$$

$$- \frac{n^2 - m^2}{(2n-1)(2n+1)} \frac{2\alpha K}{rW'} \left( H_n - \frac{2n+1}{n+m} w_{n-1} \right), \quad (22)$$

$$(H_W)_{n-2} = - \frac{n+m-1}{2n-1} \frac{2\alpha K}{rW'} \left( H_n - \frac{2n+1}{n+m} w_{n-1} \right),$$

$$(H_W)_{n+2} = - \frac{n-m+1}{2n+1} \frac{2\alpha K}{rW'} \left( H_n - \frac{2n+1}{n+1-m} w_{n+1} \right).$$

Эти выражения далее будут использованы в частном случае  $\mu = 0$ .

Уравнение Пуассона (12) представим через вспомогательную функцию  $\Phi$ :

$$\Phi = R + \frac{\sigma + \omega}{\omega} \phi - (4\omega^2 - \sigma^2) \psi, \quad (23)$$

$$\phi = -1/3\epsilon\omega^2 r^2 P_2'(\cos \vartheta) \cos(\sigma t - \varphi).$$

Получим

$$\Phi = -\frac{W'}{\rho'} (\rho' H_W + \rho \delta) - \left( \frac{\lambda}{\rho} - \frac{\rho W'}{\rho'} \right) \delta, \quad (24)$$

$$\Delta \Phi = -\frac{4\pi f \rho'}{W'} \Phi - (4\omega^2 - \sigma^2) \Delta \psi + 4\pi f \left( \rho' - \frac{\lambda \rho'}{\rho W'} \right) \delta.$$



Последние члены справа отпадают в соответствии с (21). Обе части этих уравнений умножим на  $P_n^m(\cos\vartheta)\cos(\sigma t - m\varphi)$  и проинтегрируем по поверхности сферы радиуса  $r$ . После деления на  $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi [P_n^m(\cos\vartheta)\cos(\sigma t - m\varphi)]^2 d\cos\vartheta d\varphi$  получаем обыкновенные уравнения:

$$\begin{aligned}\Phi_n &= -\left(\frac{W'}{\rho'}\right)_0 (\rho'_0 H_n + \rho_0 \delta_n) + a_{nm} \left(W'_2 H_n + \left(\frac{W'\rho}{\rho'}\right) \delta_n\right), \\ \Delta\Phi_n &= -4\pi f \left(\frac{\rho'}{W'}\right)_0 \Phi_n - (4\omega^2 - \sigma^2) \Delta\psi_n - 4\pi f \left(\frac{\rho'}{W'}\right)_2 a_{nm} \Phi_n.\end{aligned}\quad (25)$$

Индексом «0» отмечены значения функций, характеризующих строение Земли на луче  $P_2(\cos\vartheta) = 0$ ; индексом «2» — малый множитель при  $P_2(\cos\vartheta)$ ,

$$\begin{aligned}a_{nm} &= \int_0^\pi [P_n^m(\cos\vartheta)]^2 P_2(\cos\vartheta) d\cos\vartheta \left[ \int_0^\pi [P_n^m(\cos\vartheta)]^2 d\cos\vartheta \right]^{-1} = \\ &= 1 - \frac{3}{2} \left( \frac{(n+1)^2 - m^2}{(2n+1)(2n+3)} + \frac{n^2 - m^2}{(2n-1)(2n+1)} \right).\end{aligned}$$

Для определения функций  $\Phi_{n+2}$  и  $\psi_{n+2}$  сходным образом получим уравнения:

$$\begin{aligned}\Delta\Phi_{n+2} &= -4\pi f \left(\frac{\rho'}{W'}\right)_0 \Phi_{n+2} - 4\pi f \left(\frac{\rho'}{W'}\right)_2 \cdot \frac{3(n-m+1)(n-m+2)}{2(2n-1)(2n+3)} \Phi_n, \\ \Phi_{n+2} &= -\left(\frac{W'}{\rho'}\right) (\rho'_0 H_{n+2} + \rho_0 \delta_{n+2}) + \\ &\quad + \left(W'_2 H_n + \left(\frac{W'\rho}{\rho'}\right) \delta_n\right) \cdot \frac{3(n-m+1)(n-m+2)}{2(2n+1)(2n+3)}.\end{aligned}\quad (26)$$

Таким образом, при колебании порядка  $n$  функции  $\Phi_{n+2}$  и  $\psi_{n+2}$  имеют величину порядка свободных членов в (26):  $\alpha\Phi_n$  и  $\alpha\psi_n$ . Величину того же порядка имеют функции  $\Phi_{n-2}$  и  $\psi_{n-2}$ . Все последующие функции имеют порядок  $\alpha^2$  или более высокий.

Система обыкновенных уравнений с учетом сжатия (25) отличается от уравнений без учета сжатия только малым изменением коэффициентов, зависящим от  $n$  и  $m$ . Хорошее приближение к точным решениям уравнений (25) и (13) можно получить аналитически. Будем сначала искать решение при  $\alpha = 0$  для частоты  $\sigma_0$ , являющейся корнем уравнения

$$\frac{4\omega^2}{\sigma_0^2} \frac{n^2 - m^2}{2n-1} + \frac{2\omega}{\sigma_0} m - n = 0.\quad (27)$$

Все корни этого уравнения — действительные числа.

Для частоты  $\sigma_0$  из (14) и (15) получим

$$\frac{F_n}{E_n} = \frac{D_n}{F_n} = n, \quad (H_r)_n = E_n \left( \psi'_n - \frac{n}{r} \psi_n \right) - 2\varepsilon \frac{\omega}{\sigma} r.$$

С обозначением

$$\bar{H}_n = E_n \left( \psi'_n - \frac{n}{r} \psi_n \right), \quad H_n = \bar{H}_n - 2\varepsilon \frac{\omega}{\sigma} r\quad (28)$$

получаем

$$\delta_n = \bar{H}'_n + \frac{n+2}{r} \bar{H}_n.$$

Как убедимся ниже, при частоте  $\sigma_0$  в (25) можно принять

$$(4\omega^2 - \sigma_0^2) (\Delta\psi_n) = 0.$$

Тогда при  $\alpha = 0$  из (25) получаем

$$\Phi = C_1 \bar{K}_n + C_2 K_n,$$

где  $K_n$  — правильное решение,  $\bar{K}_n$  — неправильное, поэтому  $C_1 = 0$  и (28) запишем так:

$$\frac{1}{4\pi f} r^{n+2} \Delta\Phi_n = (\rho' H_n + \rho \delta_n) r^{n+2} = (\rho r^{n+2} H_n)' + 2\varepsilon \frac{\omega}{\sigma} (n+3) \rho r^{n+2}. \quad (29)$$

Воспользуемся тождеством

$$r^{n+2} \Delta\Phi_n = \left( \left( \Phi'_n - \frac{n}{r} \Phi_n \right) r^{n+2} \right)'$$

и найдем интеграл (29):

$$\left( \Phi_n - \frac{n}{r} \Phi_n - 4\pi f \rho H_n \right) r^{n+2} = 8\pi f \varepsilon (n+3) \frac{\omega}{\sigma} \int_0^r \rho r^{n+2} dr + C_3. \quad (30)$$

Очевидно,  $C_3 = 0$ . Из (30) определяем  $H_n$ , затем из (28) —  $\bar{H}_n$  и с помощью этой функции определяем  $\psi_n$ :

$$\psi_n = C_4 r^n + \frac{r^n}{E} \int_0^r \frac{\bar{H}_n}{r^n} dr. \quad (31)$$

Далее убедимся, что в граничные условия  $C_4$  входит только в виде произведения  $(4\omega^2 - \sigma_0^2)C_4$ , и поэтому функция  $\psi_n$  в  $1/\omega^2$  раз больше других функций. Поскольку  $C_4$  в  $\Delta\psi_n$  не входит, исходное приближение  $(4\omega^2 - \sigma_0^2)\Delta\psi_n = 0$  очень хорошее. В решении при  $\sigma \neq \sigma_0$  и  $\alpha \neq 0$  ( $\sigma - \sigma_0$  и  $\alpha$  — малые величины) в возмущающих членах, содержащих множители  $\sigma - \sigma_0$  и  $\alpha$ , сохранены в первом приближении только члены с  $C_4$ . Тогда получим

$$H_n = \bar{H}_n - 2\varepsilon \frac{\omega}{\sigma} r + (nE_n - F_n) \frac{\psi_n}{r} + (H_W - H_r)_n, \quad (32)$$

где

$$nE_n - F_n = 2 \left( n - \frac{\omega}{\sigma} m \right) \frac{\Delta\sigma}{\sigma}, \quad \bar{H}_n = E_n \left( \psi'_n - \frac{n}{r} \psi_n \right). \quad (33)$$

При вычислении последнего члена в (32), зависящего от сжатия уровнейных поверхностей, примем во внимание равенства (13) при  $\sigma = \sigma_0$ :

$$\begin{aligned} S_n + nrH_n &= 0, \\ H_n - \frac{n+1}{n+1-m} w_{n+1} &= a_n \frac{n+1}{2n+1} \frac{1}{E_n} \bar{H}_n, \\ H_n - \frac{n}{n+m} w_{n-1} &= \frac{4\omega^2 - \sigma_0^2}{\sigma_0^2} \frac{n}{2n+1} \left( \frac{1}{E_n} \bar{H}_n + \frac{2n+1}{r} \psi_n \right). \end{aligned}$$

Если сохранить только главный член с  $C_4$ , то из (33) с помощью (22) получим

$$H_n = \bar{H}_n + 2 \left( n - \frac{\omega}{\sigma} m \right) \frac{\Delta\sigma}{\sigma} r^{n-1} C_4 - 2\varepsilon \frac{\omega}{\sigma} r - \gamma \frac{K_2}{W'} r^{n-2}, \quad (34)$$

где

$$\gamma = \frac{4\omega^2 - \sigma_0^2}{\sigma_0^2} \frac{n^2 - m^2}{2n - 1} 2\alpha C_4.$$

Формула (34) определяет  $H_n$ , если известна функция  $\bar{H}_n$ . Уравнение (30) определяет  $H_n$  и  $\bar{H}_n$ , если только  $\alpha = 0$  и  $\sigma = \sigma_0$ . При уточнении этого уравнения в (29) нужно изменить только  $H_n$  в соответствии с (34), так как выражение (28) для  $\bar{H}_n$  сохраняется. Таким образом, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi f} r^{n+2} \Delta\Phi_n &= \left[ \rho' H_n + \rho \left( \bar{H}'_n + \frac{n+2}{r} \bar{H}_n \right) \right] r^{n+2} = \\ &= (\rho r^{n+2} H_n)' + \rho [r^{n+2} (\bar{H}_n - H_n)]'. \end{aligned}$$

В последнем члене используем (34) и получаем после интегрирования

$$\begin{aligned} \left( \Phi'_n - \frac{n}{r} \Phi_n - 4\pi f \rho H_n \right) r^{n+2} &= \\ &= 4\pi f (2n+1) \nu \int \rho r^{2n} dr + 4\pi f \gamma \int \rho \left( \frac{K_2 r^{2n}}{W'} \right)' dr, \quad (35) \end{aligned}$$

где  $\nu = 2 \left( n - \frac{\omega}{\sigma} m \right) \frac{\Delta\sigma}{\sigma} C_4 - 2\frac{\omega}{\sigma} \varepsilon$  и учтено, что  $\varepsilon = 0$ , если  $n \neq 2$ . В последнем члене (35) выполним интегрирование по частям, заменим

$$\frac{\rho'}{W'} K_2 = -\frac{1}{4\pi f} \Delta K_2$$

и еще проинтегрируем по частям. Получим

$$\begin{aligned} \left( \Phi'_n - \frac{n}{r} \Phi_n - 4\pi f \rho H_n \right) r^{n+2} - \gamma \left( K'_2 - 2\frac{n-1}{r} K_2 + \frac{4\pi f \rho}{W'} K_2 \right) r^{n+2} &= \\ = -4\pi f (2n+1) \nu \int_0^r \rho r^{2n} dr + \gamma (n-2) (3n-1) \int_0^r K_2 r^{2n-2} dr. \quad (36) \end{aligned}$$

В частном случае  $n = 2$ ,  $m = 1$ ,  $\sigma_0 = -\omega$  получаем выражение, немного отличное от (50) из [3] обозначениями:

$$\begin{aligned} (L - 2rR) r^2 - 2\alpha\beta \left( K'_2 - \frac{2}{r} K_2 + \frac{4\pi f \rho}{W'} K_2 \right) r^4 &= -20\pi f \nu \int_0^r \rho r^4 dr, \quad (37) \\ \beta &= 3C_4. \end{aligned}$$

В следующем приближении функция

$$(4\omega^2 - \sigma_0^2) \Delta\psi_n$$

считается известной из предшествующего приближения. Граничные условия составляем так же, как (45)–(51) в [3], но при произвольном значении  $n$ . Найдем три частных интеграла в оболочке при  $\sigma = 0$  и при отсутствии внешних массовых и поверхностных сил. Эти интегралы при  $r = 1$  подчинены условиям

$$M_n = 0, N_n = 0, L_n + (n + 1)rR_n = 0. \quad (38)$$

Из этих интегралов после исключения  $C_2$  с помощью (23) образуем один частный интеграл такой, что на границе  $r = b$  оболочки с ядром

$$\begin{aligned} M_n = 0, N_n + \rho_i (R_n + W'H_n) = \rho_i \omega^2 r^n \beta, \\ L_n - (nr + r^2 \gamma) R_n + 4\pi \kappa \rho_i r^2 H_n = -r\gamma (\omega^2 r^n \beta). \end{aligned} \quad (39)$$

Этими условиями определяется единственный интеграл: каждая из функций выражается произведением  $\omega^2 r^n \beta$  на свою, вполне определенную функцию от  $r$ . Остается невыполненным только (36) при  $r = b$ . После подстановки в него  $L_n - nrR_n$  при  $\varepsilon = 0$  получаем уравнение вида  $\beta Q = 0$  (при  $\varepsilon \neq 0$  такое уравнение получается после исключения  $\varepsilon$  с помощью уравнения сохранения момента количества движения). Следовательно,  $\beta = 0$ , кроме случая  $Q = 0$ . Так как в  $Q$  входит  $\Delta\sigma/\sigma_0$ , то условие  $Q = 0$  определяет частоту свободных колебаний  $\sigma_0 + \Delta\sigma$ , соответствующую заданному значению  $m$ ; нетрудно видеть, что  $\Delta\sigma$  получается малой величиной порядка  $\frac{1}{\omega} \omega^2 b^2 \sigma$ , или порядка  $10^{-3} \sigma$ , т.е. достаточно малой, чтобы оправдать законность применения метода возмущений. При вынужденных колебаниях последнее условие (38) неоднородно, поэтому все функции в оболочке зависят линейно от  $\omega^2 b^n \beta$ , а уравнение (36) при  $r = b$  (и после исключения  $\varepsilon$  при  $n = 2$ ) имеет вид  $P + \beta Q = 0$ .

При заданном значении  $\Delta\sigma$ , следовательно, при заданном  $Q$ , отсюда определяется параметр  $\beta$ . Если отношение  $\Delta\sigma/\sigma$  не мало, то параметр  $\beta$  не велик; значение  $\beta = 0$  соответствует статическому приливу.

Следующее приближение может изменить  $\Delta\sigma$  на величину порядка сжатия. В этом приближении в  $\psi_n$  сохраняется не только главный член  $C_4 r^n$ , но и следующий, получаемый из предшествующего приближения. Для этого определяем  $H_n$ , затем  $\dot{H}_n$  из (33) и, наконец,  $\psi_n$  из интегрирования (28). В этом приближении правые части уравнений (11) и (12) и сжатие уровенных поверхностей нужно учитывать не только в ядре, но и в оболочке с помощью уравнений (22) и (25).

Таким образом, должна существовать серия длиннопериодических собственных колебаний, соответствующая функциям  $P_n^m(\cos \vartheta)$  при разных значениях  $n$  и  $m$  на частоте, близкой к той, которая определяется формулой (27). Эти колебания возникают из-за наличия жидкого ядра и вращения Земли. Частным случаем таких колебаний ( $n = 2$ ,  $m = 1$ ,  $\sigma_0 = -\omega$ ) является свободная нутация с периодом, близким к суткам.

Академия наук СССР  
Институт физики Земли  
им. О.Ю. Шмидта

Поступила  
24.III.1975

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Молоденский М.С. Теория приливов в упругой Земле с учетом членов порядка сжатия. // Известия АН СССР. Физика Земли. 1974. № 1.
2. Молоденский М.С. Смещения при приливах в упругой Земле с учетом сил Кориолиса. // Известия АН СССР. Физика Земли. 1970. № 4.
3. Молоденский М.С., Крамер М.В. Земные приливы и нутация Земли. — М.: Изд-во АН СССР. 1961.

# ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ЗЕМЛИ С ОКЕАНОМ\*

На основании полученных ранее обыкновенных уравнений приливов и собственных колебаний Земли с учетом сил Кориолиса рассматривается задача о свободных или вынужденных колебаниях Земли с океаном. Приливы в океане и собственные частоты его колебаний могут быть получены из тех же уравнений, которыми описываются колебания жидкого ядра Земли, с теми отличиями, что объемным сжатием вещества можно пренебречь; граничные же условия задаются на поверхности весьма сложной формы.

В простейшем случае океана постоянной глубины, покрывающего собой всю Землю, получено решение, связывающее глубину океана с частотами его свободных колебаний, обобщающее решение этой задачи, изложенное в «Гидродинамике» Лэмба на случай вращающейся Земли. Указан путь учета упругого прогиба поверхности Земли и показано, что при точности котидальных карт до  $\sim 1\%$  этим эффектом можно пренебречь.

Для океана переменной глубины, ограниченного береговой линией сложной формы, получено уравнение, определяющее амплитуды элементарных волн, слагающих прилив. Из решения этого уравнения получается значение эффективной глубины океана для колебаний, определяемых сферической функцией с заданными индексами  $n$  и  $m$ .

Влияние приливов в мировом океане на частоты свободных колебаний или на амплитуды вынужденных (на числа Лява) можно вычислить, если известно приливное изменение уровня мирового океана в каждой точке в каждый момент времени (или компонента этого изменения с заданным периодом и фазой). Приливы в океане можно вычислить путем интегрирования уравнений в частных производных, которые являются частным случаем уравнений упругих колебаний. Хотя сами уравнения для океанических приливов много проще, чем для упругих земных, их решение чрезвычайно усложнено граничными условиями, задаваемыми на сложной поверхности дна океана. Именно на дне океана должны быть непрерывны радиальное смещение, нормальное давление, потенциал и притяжение, вызываемые деформированной Землей (включая и океан). Контуры мирового океана должны быть близки к действительным, нормальное давление на поверхности воды должно отсутствовать. Из-за сложности формы дна и береговой линии такая задача может решаться только числовыми методами. Обзор состояния вопроса и указатель литературы содержатся в [1].

В этой статье излагается решение задачи, основанное на разложении прилива в океане на элементарные приливные волны (типа волн упругих приливов). Для элементарных волн динамические амплитуды и фазы вычисляются по заданным частоте колебания  $\sigma$  и параметрам волн  $n$  и  $m$  (индексы присоединенных полиномов Лежандра). Влияние прилива в океане на числа Лява выразится бесконечным рядом, все коэффициенты этого ряда вычисляются с помощью карты глубины мирового океана. Влияние на частоту свободного колебания в главной части определится одним членом подобного ряда.

Рассмотрим вначале простейшее колебание, возможное при простейших граничных условиях. Пусть океан покрывает всю Землю слоем одинаковой глубины, так что дно.

\* Известия АН СССР. Физика Земли. 1977. №9. С. 3–10.

как и невозмущенная поверхность океана, имеет сферическую форму. В отличие от известного решения этой задачи, изложенного в монографии Лэмба [2], мы учтем вращение Земли и ее упругость. В основу положим решение, полученное в [3] для учета динамического эффекта жидкого ядра Земли. Принимая во внимание малую глубину океана (по сравнению с радиусом Земли), пренебрежем изменением плотности воды с глубиной, т.е. примем воду несжимаемой и тем существенно упростим решение задачи. В этом случае объемное расширение  $\delta = 0$ , коэффициент Ламе  $\lambda = \infty$ , гидростатическое давление  $\lambda\delta = p$  имеет конечный предел. Полученные в [3] уравнения малого колебания, характеризующегося индексами  $\sigma$  (частота),  $n$  и  $m$  (индексы функций Лежандра), принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}\Delta(\Psi_n P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi) &= 0, \\ \Delta(R_n P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi) &= 0,\end{aligned}\quad (1)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $\Psi_n$  и  $R_n$  зависят только от  $r$  и характеризуют смещения и изменение потенциала. Решение уравнений (1) очевидно:

$$\begin{aligned}\Psi_n &= c_1 r^n + c_2 r^{-n-1}, \\ R_n &= c_3 r^n + c_4 r^{-n-1}.\end{aligned}\quad (2)$$

Далее с помощью формул (15) и (16) работы [3] получаем

$$\begin{aligned}H_n &= Ac_1 r^{n-1} - Bc_2 r^{-n-2}, \\ S_n &= (n+1)Ac_1 r^n + nBc_2 r^{-n-1}, \\ \frac{N}{\rho} &= (4\omega^2 - \sigma^2)\Psi - R - W'H.\end{aligned}\quad (3)$$

Здесь  $H_n$  — зависящий от  $r$  множитель при радиальном смещении,  $S_n = (r^2 H_n)'$ ,  $N_n$  и  $R_n$  — множители при давлении и изменении потенциала,  $\omega$  — угловая скорость вращения Земли,  $\sigma$  — частота колебания,

$$\begin{aligned}A &= n - \frac{2\omega}{\sigma}m - \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \cdot \frac{n^2 - m^2}{2n - 1}, \\ B &= n + 1 + \frac{2\omega}{\sigma}m - \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \cdot \frac{(n+1)^2 - m^2}{2n + 3}.\end{aligned}\quad (4)$$

В простейшем случае, когда океан покрывает всю Землю и глубина его  $h$  постоянна, возможно элементарное решение с параметрами  $\sigma$ ,  $n$ ,  $m$ . В этом случае остается лишь определить значения постоянных  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  и  $c_4$  с помощью граничных условий. Начнем с еще более простой задачи. Допустим, что Земля под влиянием приливных сил не деформируется. Если радиус дна океана равен 1, то

$$H_n(1) = Ac_1 - Bc_2.\quad (5)$$

На поверхности океана нет давления, т.е.

$$N(1+h) = 0.\quad (6)$$

Прилив вызывается внешними массовыми силами, потенциал которых вне Земли таков:

$$V_e = \kappa_{nm} r^n P_n^m(\cos\theta)\cos(\sigma t - m\varphi).\quad (7)$$

Поэтому в точке  $r = 1 + H$

$$L_n + (n + 1) r R_n = (2n + 1) \varkappa_{nm} r^{n+1}, \quad (8)$$

где

$$L_n = r^2 (R'_n - 4\pi G \rho H_n),$$

$G$  — гравитационная постоянная,  $\rho$  — плотность воды, штрихом обозначено дифференцирование по  $r$ .

Ниже дна океана массы, по предположению, не перемещаются и не деформируются, поэтому

$$R'_n(1) - 4\pi G \rho H_n(1) - \frac{n}{r} R_n(1) = 0. \quad (9)$$

Но  $H(1) = 0$ , поэтому

$$c_1 = 0, \quad H(1 + h) = (2n + 1) A c_1 h.$$

Здесь и далее члены порядка  $h^2$  отброшены. Остается использовать условия (6) и (8). Из (6) получаем

$$\left[ (4\omega^2 - \sigma^2) \frac{A + B}{B} - W' h (2n + 1) A \right] c_1 - (1 + nh) c_3 = 0. \quad (10)$$

Из (8) получаем

$$(1 + (n - 1) h) n c_3 + (n + 1) c_3 (1 + (n - 1) h) - 4\pi G \rho (2n + 1) A c_1 h = (2n + 1) \varkappa_{nm} (1 + (n - 1) h) \quad (11)$$

или

$$c_3 - 4\pi G \rho A c_1 h = \varkappa_{nm}.$$

$c_3$  из (11) вносим в (10) и получаем

$$\left[ (4\omega^2 - \sigma^2) \frac{A + B}{B} - W' h (2n + 1) A - 4\pi G \rho A h \right] c_1 = (1 + nh) \varkappa_{nm}. \quad (12)$$

Условие совместности уравнений (10) и (11) при  $\varkappa_{nm} = 0$  или условие равенства нулю коэффициента при  $c_1$  в (12) таково:

$$\frac{4\omega^2 - \sigma^2}{2n + 1} \left( \frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right) = \left( W' + \frac{4\pi G \rho}{2n + 1} \right) h. \quad (13)$$

Эта формула определяет собственные частоты океана постоянной глубины на вращающейся абсолютно твердой Земле. Если  $\omega = 0$ , то  $A = n$ ,  $B = n + 1$ , и из (13) получаем

$$\frac{\sigma^2}{n(n + 1)} = - \left( W' + \frac{4\pi G \rho}{2n + 1} \right) h,$$

что совпадает с формулой Лэмба (см.[2], с.383).

Учет деформируемости Земли при заданной схеме ее строения при одинаковой всюду глубине океана мало усложняет задачу. Действительно, пусть в результате интегрирования

уравнений упругих колебаний Земли порядка  $n, m$  на частоте  $\sigma$  и выделения правильных интегралов получены при  $r = 1$  следующие независимые частные интегралы:

	$M$	$S$	$L$	$\theta = L + (n + 1)rR$	$N$	$H$	
интеграл $M$	1	0	0	$\theta_M$	$N_M$	$H_M$	(14)
интеграл $S$	0	1	0	$\theta_S$	$N_S$	$H_S$	
интеграл $L$	0	0	1	$\theta_L$	$N_L$	$H_L$	

Теперь на дне океана должны выполняться не два, а четыре условия: должны быть непрерывны функции  $L, N, R, H$ . На поверхности океана сохраняются условия (6) и (8). Таким образом, число постоянных возросло до 6, а к постоянным  $c_1, c_2, c_3, c_4$  добавились постоянные  $C$  и  $L$  — множители при интегралах  $S$  и  $L$  в (14). Множитель  $M(1)$ , конечно, равен нулю из-за непрерывности  $M$ , множитель  $C$  отличен от  $S(1)$  из-за разрыва  $S$ , множитель  $L$  равен  $L(1)$ .

Условие (8) с учетом дифференциальных уравнений для  $L'$  и  $R'$  [4] принимает следующий вид:

$$(2n + 1) \chi_{nm} [1 + (n + 1)h] = [L + (n + 1)rR]_{r=1+h} - [L + (n + 1)R]_{r=1} + h [(n + 1)(L + (n + 1)R)_1 - 4\pi G\rho(S - (n + 1)H)].$$

Следовательно,

$$(L + (n + 1)R)_1 = (2n + 1) \chi_{nm} + 4\pi G\rho h(S - (n + 1)H)$$

или

$$\left( \frac{1}{n + 1} + R_L + 4\pi GH_L h \right) L + (R_S + 4\pi G\rho H_S h) C - \frac{4\pi G\rho h}{n + 1} S = \frac{2n + 1}{n + 1} \chi_{nm}. \quad (15)$$

Условие (6) и условие непрерывности  $N(1)$  можно записать так:

$$N(1) = -hN'(1) = cN_S + LN_L, \quad (16)$$

$N'$  можно выразить через  $c_1, c_2, L$  и  $H$ :

$$\frac{1}{\rho} N' = (4\omega^2 - \sigma^2) \Psi' - \left( \frac{1}{r^2} L + 4\pi G\rho H \right) - W'H' - W''H.$$

Используя (3) и непрерывность  $R$  из (16), получаем

$$\begin{aligned} & \rho c_1 (4\omega^2 - \sigma^2 - AW') + \rho c_2 (4\omega^2 - \sigma^2 + BW') - \\ & - \rho (cR_S + LR_L) = -\rho c_1 h ((4\omega^2 - \sigma^2) n - A(n - 1)W') + \\ & + \rho c_2 h ((4\omega^2 - \sigma^2) (n - 1) + (n + 2)BW') = N_S C + N_L L. \end{aligned} \quad (17)$$

$c_1$  и  $c_2$  выражаются через  $S = S(1), C$  и  $L$ :

$$\begin{aligned} (2n + 1) A c_1 &= S + nH(1) = S + n(H_S C + H_L L), \\ (2n + 1) B c_2 &= S - (n + 1)H(1) = S - (n + 1)(H_S C + H_L L). \end{aligned}$$





а по формуле (13)

$$\frac{D}{h} + 0,816 = 0.$$

Таким образом, учет упругости Земли при  $n = 2$  дает эффект немногим более 1%. Для больших значений  $n$  влияние упругости Земли на частоты свободных колебаний, очевидно, должно быть еще меньше вследствие большей эффективной жесткости Земли для деформаций, описываемых сферическими функциями высших порядков.

Рассматриваемая граничная задача линейна, поэтому сумма элементарных колебаний, амплитуды которых определены в соответствии с граничными условиями, может быть решением более сложной задачи. Попытаемся с помощью набора элементарных колебаний представить прилив в океане, глубина которого  $h$  зависит от  $\theta$  и  $\varphi$ .

Будем считать, что на невозмущенной поверхности океана  $r = 1 + h_0$ , где  $h_0$  — постоянная малая величина, равная средней глубине океана, а на дне океана  $r = 1 + h_0 - h$ , где  $h = h(\theta, \varphi)$  — глубина океана. При сравнении с рассмотренным случаем  $h = \text{const}$  можно убедиться, что условия на поверхности океана сохраняются, а изменятся только условия непрерывности функций  $H, R, N, L$  на дне океана.

Функции, характеризующие смещения в жидкости, вычисляются независимо от допущения  $h = \text{const}$ , а функции, полученные из решения уравнений упругих колебаний для сферически-симметричной Земли, нужно теперь вычислить в точке  $r = 1 + h_0 - h$ , т.е. нужно учесть их изменение на отрезке  $h_0 - h$ . Но мы убедились, что полный учет упругости изменил результат приблизительно на 1% (при  $n = 2$ ). Здесь же речь идет о малом вторичном эффекте, которым вполне можно пренебречь.

Условия (18) для каждой элементарной волны не являются необходимыми. Обязаны выполняться лишь условия для суммарной волны, получаемые путем суммирования выражений типа (18), но вычисленные при разных значениях  $n$  и  $m$  (на фиксированной частоте приливообразующей силы) с разными постоянными  $L_{nm}, C_{nm}, S_{nm}$ . При любом числе элементарных волн условий всегда три, но каждое должно выполняться при всех значениях времени  $t$ , широты  $\theta$  и долготы  $\varphi$ . Этого мы можем добиться следующим образом. Первое из уравнений (18) и (18а) не содержат  $h$ . Поэтому для каждой элементарной волны коэффициенты  $L_{nm}$  и  $C_{nm}$  можно выразить через  $S_{nm}$  независимо от  $h$ . После исключения определенных таким образом  $L_{nm}$  и  $C_{nm}$  получим, очевидно, для каждой элементарной волны выражение (19). Теперь должно выполняться только одно это условие, но для всех  $t, \theta, \varphi$ :

$$\sum_{n,m} \bar{S}_{nm} (h + a_{nm}) Y_n^m = \chi_{n_0 m_0} Y_{n_0}^{m_0}, \quad (20)$$

где  $n_0, m_0$  — индексы приливообразующей волны. Далее рассмотрим свободные колебания, т.е. примем  $\chi_{n_0 m_0} = 0$ . Так как  $h$  зависит от  $\varphi$ , возможен сдвиг фазы каждой элементарной волны. Это учтем, если примем

$$Y_n^m = P_n^m (\cos \theta) \cos (\sigma t - m\varphi + \alpha_{nm}),$$

где  $\alpha_{nm}$  — постоянные, удовлетворяющие условию (20).

Очевидно, что множители при  $\cos \sigma t$  и  $\sin \sigma t$  в (20) следует приравнять к нулю:

$$\begin{aligned} P &= \sum_{n,m} \bar{S}_{nm} (a_{nm} + h) \cos (m\varphi - \alpha_{nm}) P_n^m (\cos \theta) = 0, \\ Q &= \sum_{n,m} \bar{S}_{nm} (a_{nm} + h) \sin (m\varphi - \alpha_{nm}) P_n^m (\cos \theta) = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Эти два условия должны выполняться при всех значениях  $\theta$  и  $\varphi$ . Близость  $P$  и  $Q$  к нулю в среднем можно обеспечить с заданной точностью условием минимума интеграла  $I$ :

$$I = \iiint (P^2 + Q^2) \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Все постоянные  $\bar{S}_{nm}$  тогда определяются из уравнений

$$\frac{\partial I}{\partial \bar{S}_{nm}} = 0. \quad (22)$$

С помощью (21) уравнение (22) приводится к следующему виду:

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} [2P \cos(m\varphi - \alpha_{nm}) + 2Q \sin(m\varphi - \alpha_{nm})] (a_{nm} + h) P_n^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta d\varphi = 0$$

или

$$2\bar{S}_{nm} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (a_{nm} + h)^2 [P_n^m(\cos \theta)]^2 \sin \theta d\theta d\varphi + 2 \sum \iint \bar{S}_{kl} (a_{kl} + h) \times \\ \times (a_{nm} + h) P_k^l(\cos \theta) P_n^m(\cos \theta) \cos(m\varphi - l\varphi - \alpha_{nm} + \alpha_{kl}) \sin \theta d\theta d\varphi = 0. \quad (23)$$

Второе слагаемое содержит все неизвестные, кроме  $\bar{S}_{nm}$ , входящего отдельно в первое слагаемое. Множитель при  $a_{kl}a_{nm}$  во втором слагаемом обращается в нуль, если  $n \neq k$  и  $m \neq l$ , в силу ортогональности сферических функций. Поэтому все члены второго слагаемого имеют малую величину, порядка  $h^2$ . Первое же слагаемое с ошибкой порядка  $h^2$  можно записать в виде

$$2a_{nm}\bar{S}_{nm} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (a_{nm} + 2h) [P_n^m(\cos \theta)]^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \\ = 2a_{nm}\bar{S}_{nm} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} [P_n^m(\cos \theta)]^2 \sin \theta d\theta d\varphi (a_{nm} + 2h_{nm}), \quad (24)$$

где

$$h_{nm} = \frac{\iint h [P_n^m(\cos \theta)]^2 \sin \theta d\theta d\varphi}{\iint [P_n^m(\cos \theta)]^2 \sin \theta d\theta d\varphi}.$$

Разделим (23) на  $2 \iint [P_n^m(\cos \theta)]^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ . Тогда член, содержащий  $\bar{S}_{nm}$ , будет таким:

$$\bar{S}_{nm} (a_{nm} + h_{nm})^2,$$

а все другие члены по-прежнему имеют величину порядка  $h$ . Составим определитель из коэффициентов системы (23). В каждое уравнение входит один большой коэффициент (коэффициент при том же неизвестном в остальных уравнениях имеет порядок  $h$ ). Неизвестные в уравнениях выпишем в таком порядке, чтобы большие коэффициенты находились на главной диагонали определителя. Тогда величина определителя будет отличаться от произведения диагональных элементов на величину порядка  $h^2$ . Если же

хотя бы один диагональный элемент, например  $(a_{nm} + h_{nm})^2$ , равен нулю, то определитель имеет величину порядка  $h^2$ , т.е. с принятой точностью равен нулю. Таким образом, условие свободного колебания с параметрами  $\sigma$ ,  $n$  и  $m$  таково:

$$a_{nm} + h_{nm} = 0$$

или в развернутом виде:

$$\Delta(\sigma) = \begin{vmatrix} FH_L - \frac{N_L}{\rho} - R_L & FH_S - \frac{N_S}{\rho} - R_S & \frac{D}{h_{nm}} \\ \frac{N_L}{\rho} & \frac{N_S}{\rho} & F \\ R_L + \frac{4\pi G}{n+1} \frac{N_L}{F} + \frac{1}{n+1} & R_S + \frac{4\pi G}{n+1} \frac{N_S}{F} & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (25)$$

Это выражение отличается от (19) тем, что вместо  $h$  стоит  $h_{nm}$ . При  $h = h_0 = \text{const}$ ,  $h_{nm} = h_0$  и (23) переходит в (19); при  $\rho h = 0$  получаем условие свободного колебания упругой Земли без океана. Если известна частота колебания Земли без океана  $\sigma_0$ , то на частоте колебания Земли с океаном  $\sigma_0 + \delta\sigma$  должно выполняться равенство (25). Таким образом определится влияние океана  $\delta\sigma$ , если  $H_L$ ,  $R_L$ ,  $H_S$ ,  $N_S$ ,  $R_S$  вычислены для частоты  $\sigma_0 + \delta\sigma$ :

$$H_L(\sigma_0 + \delta\sigma) = H_L(\sigma_0) + \frac{\partial H_L}{\partial \sigma} \delta\sigma.$$

Производные  $\partial H_L / \partial \sigma$ , а также производные, нужные для вычисления остальных функций, определяются так же, как при вычислении свободных колебаний Земли без океана.

Для определения фаз нужны дополнительные условия, например условия минимума интеграла

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} P^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

при известных, уже определенных значениях  $\bar{S}_{nm}$ .

Фазы элементарных волн определяются менее надежно, чем амплитуды. Для определения частоты свободных колебаний и влияния на амплитуду вблизи резонанса они не нужны.

Местные влияния на приливы, зависящие от положения места наблюдения относительно береговой линии, определяются очень большим числом элементарных волн. Эта задача здесь не рассматривается.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Богданов К.Т.* Приливы мирового океана. — М.: Наука. 1975.
2. *Лэмб Г.* Гидродинамика. — М.-Л.: Гостехиздат. 1947.
3. *Молоденский М.С.* Приливы и собственные колебания Земли с учетом сил Кориолиса. // Известия АН СССР. Физика Земли. 1976. № 1.
4. *Молоденский М.С., Крамер М.В.* Числа Лява для статических земных приливов 2-го и 3-го порядков. — М.: Изд-во АН СССР. 1961.
5. *Молоденский М.С., Молоденский С.М., Парийский Н.Н.* О возможной связи изменений силы тяжести и скорости вращения Земли. // Известия АН СССР. Физика Земли. 1975. № 6.
6. *Перцев Б.П.* Влияние морских приливов ближних зон на земноприливные наблюдения. // Известия АН СССР. Физика Земли. 1976. № 1.

# ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕМЕНТАРНОГО КОЛЕБАНИЯ УПРУГОЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЗЕМЛИ\*

Обсуждаются свойства элементарного колебания вращающейся Земли, полученного на основе точных дифференциальных уравнений десятого порядка в работе [1]. В предельном случае при стремящейся к нулю скорости вращения элементарное колебание распадается на сумму сфероидального колебания порядка  $n$  и крутильных колебаний порядков  $n - 1$  и  $n + 1$ . При конечной, но малой (по сравнению с частотой колебания) угловой скорости, если частота сфероидального колебания близка к частоте одного из соседних крутильных колебаний, связь этих колебаний может быть значительной. Точные значения собственных частот вращающейся планеты могут быть получены из условия обращения в нуль определителя пятого порядка (4).

Так же как и уравнения сфероидальных и крутильных колебаний невращающейся Земли, точные уравнения колебаний вращающейся планеты являются самосопряженными. Это облегчает использование метода возмущений, обеспечивает ортогональность решений, соответствующих различным собственным значениям, и позволяет определить связи, существующие между различными фундаментальными решениями дифференциальных уравнений колебаний вращающейся планеты.

При рассмотрении собственных колебаний и приливов в сферически-симметричной невращающейся планете обычно используется известная классификация колебаний, данная впервые Лэмбом: они подразделяются на элементарные сфероидальные и крутильные колебания. Элементарные решения уравнений сфероидального и крутильного типов колебаний удается использовать и при наличии вращения в случае, когда частота рассматриваемых колебаний значительно выше угловой скорости вращения планеты (как это имеет место при собственных колебаниях Земли), и тогда, когда частота колебаний достаточно низка и силами инерции в нулевом приближении можно пренебречь (земные приливы).

Пути уточнения решения задачи в первом случае могут заключаться в использовании метода возмущений по малому параметру  $\omega/\sigma$  (где  $\omega$  — угловая скорость вращения Земли, а  $\sigma$  — частота собственного колебания) на основе уравнений в частных производных и приближенных выражений для смещений при крутильных и сфероидальных колебаниях [2]. Однако из-за наличия связи между сфероидальными колебаниями порядка  $n$  и крутильными — порядков  $n - 1$  и  $n + 1$  применение методов возмущений в таком виде может быть осложнено, особенно в «квазивырожденном» случае, когда частота сфероидального колебания близка к частоте одного из соседних крутильных колебаний [3]. Кроме того, быстрота сходимости ряда по степеням  $\omega/\sigma$  остается невыясненной, особенно для наиболее длиннопериодных колебаний Земли, когда отношение  $\omega/\sigma \sim 0,04$  не очень мало и члены порядка  $(\omega/\sigma)^2$  ощутимы [3].

Если же частоты колебаний имеют порядок, одинаковый с  $\omega$  (в случае приливов и длиннопериодных колебаний), то разложение по степеням  $\omega/\sigma$  становится совершенно невозможным. При рассмотрении резонансных явлений (например, суточной нутации или длиннопериодных колебаний, описанных в [1]) оказывается неприемлемым также и нулевое приближение  $\omega/\sigma = 0$ .

\* Известия АН СССР. Физика Земли. 1977. №7. С. 9–15.

В поисках более эффективного решения задачи в работе [1] путем небольшого обобщения вида смещений для элементарного колебания порядка  $n$  удалось получить для сферически-симметричной модели Земли систему точных обыкновенных уравнений колебаний, не связанных с уравнениями соседних порядков.

Система обыкновенных уравнений, полученная с учетом сил Кориолиса, формально может быть получена из хорошо известных уравнений сфероидальных колебаний порядка  $n$  и крутильных — порядков  $n - 1$  и  $n + 1$ , если в них инерционные члены, содержащие множитель  $\rho\sigma^2$  (где  $\rho$  — плотность), заменить более сложными выражениями, связывающими колебания разных типов в одно общее колебание. Именно функции, характеризующие при  $\omega = 0$  кинетическую энергию сфероидального колебания ( $\sigma^2\rho H_n$  и  $\sigma^2\rho S_n$ ) и соседних крутильных колебаний ( $\sigma^2\rho T_{n-1}$  и  $\sigma^2\rho T_{n+1}$ ), заменяются при  $\omega \neq 0$  следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \sigma^2\rho H_n - \frac{n+1}{2n+1}\Psi_{n+1} - \frac{n}{2n+1}\Psi_{n-1}; \quad \sigma^2\rho T_{n+1} - \Psi_{n+1}, \\ \sigma^2\rho S_n + \frac{n(n+1)}{2n+1}r(\Psi_{n+1} - \Psi_{n-1}); \quad \sigma^2\rho T_{n-1} - \Psi_{n-1}, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_{n+1} &= \sigma^2\rho \frac{a_n}{b_n} \left( H_n - \frac{1}{(n+1)r} S_n + \frac{(n+1)^2 - m^2}{(n+1)(n+2) + m^2} T_{n+1} \right) = \sigma^2\rho \frac{a_n}{b_n} \Psi_{n+1}^*, \\ \Psi_{n-1} &= \sigma^2\rho \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} \left( H_n + \frac{1}{nr} S_n + \frac{n^2 - m^2}{n(n-1) + m^2} T_{n-1} \right) = \sigma^2\rho \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} \Psi_{n-1}^*, \\ T_{n+1} &= -\frac{2n+1}{n+1-m} w_{n+1} + H_n - \frac{1}{(n+1)r} S_n, \\ T_{n-1} &= H_n + \frac{1}{nr} S_n - \frac{2n+1}{n+m} w_{n-1}, \\ \frac{a_n}{b_n} &= \frac{\frac{2\omega}{\sigma} \frac{m}{n+1} + \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \frac{(n+1)(n+2)+m^2}{(n+1)(2n+3)}}{1 + \frac{2\omega}{\sigma} \frac{m}{n+1} \frac{(n+1)(2n+3)}{(n+1)(n+2)+m^2}}. \end{aligned} \quad (2)$$

В справедливости этого утверждения можно убедиться в результате замены в формулах (11) и (8) работы [1] функций  $w_{n-1}$  и  $w_{n+1}$  функциями  $T_{n-1}$  и  $T_{n+1}$ . Функции  $\Psi_{n-1}$  и  $\Psi_{n+1}$  объединяют уравнения сфероидальных и крутильных колебаний в одну общую систему дифференциальных уравнений. После добавления уравнения Пуассона получается полная система уравнений и порядок ее повышается до десятого. Из десяти граничных условий, определяющих частный интеграл, 5 условий обеспечивают ограниченность всех функций в центре сферы (условия правильности решения). Пять условий на поверхности Земли задаются значениями на этой поверхности:

1. потенциала внешних возмущающих сил  $V_e$  Земли:

$$R'_n - 4\pi\kappa\rho H_n + (n+1) \frac{R_n}{r} = (2n+1) \frac{V_e}{r},$$

где  $R_n$  — потенциал внутри деформированной Земли;

2. нормального давления  $N_n$ ;

3. трех величин, характеризующих тангенциальные напряжения:

$$\begin{aligned} M_n &= \left( \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_z}{\partial z} \right); \quad (M_z)_{n+1} = -\frac{(n+1-m)}{2n+1} \mu \left( \frac{T_{n+1}}{r} \right)' r'; \\ (M_z)_{n-1} &= -\frac{n+m}{2n+1} \mu \left( \frac{T_{n-1}}{r} \right)' r. \end{aligned}$$

Здесь  $M_x, M_y, M_z$  — проекции тангенциального напряжения на оси прямоугольной системы координат (ось  $z$  параллельна оси вращения Земли). Пять правильных линейно независимых интегралов можно задать так, чтобы из пяти функций  $H_n, S_n, R_n, T_{n-1}, T_{n+1}$  на поверхности одна из них в каждом интервале равнялась бы единице, а остальные — нулю. Тогда любое правильное решение  $F$  определится через эти частные, отмеченные индексами  $H, S, R, n-1, n+1$  в виде комбинации:

$$F(r) = H(1)F_H(r) + S(1)F_S(r) + R(1)F_R(r) + T_{n-1}F_{n-1}(r) + T_{n+1}F_{n+1}(r). \quad (3)$$

Если  $F(1)$  удовлетворяет граничным условиям, то постоянные, входящие в (3), есть числа Лява (в общем случае их пять).

При свободном колебании равны нулю на поверхности:

$$1) P = (R' - 4\pi\kappa\rho H)r + (n+1)R = \frac{1}{r}L + (n+1)R,$$

где  $\rho$  — плотность,  $R$  — изменение потенциала;

2)  $N$  — давление на поверхность по нормали к ней;

3)  $M$  — дивергенция компонент касательно к сфере напряжения;

4) компонента касательного напряжения  $t_1 = \mu \left( \frac{T_{n-1}}{r} \right)'$ ;

5) компонента  $t_2 = \mu \left( \frac{T_{n+1}}{r} \right)'$ .

Условие совместности уравнений (3), определяющих числа Лява, таково:

$$\Delta = \begin{vmatrix} P_H & P_S & P_R & (P_{n-1}) & (P_{n+1}) \\ N_H & N_S & N_R & (N_{n-1}) & (N_{n+1}) \\ M_H & M_S & M_R & (M_{n-1}) & (M_{n+1}) \\ (t_{1H}) & (t_{1S}) & (t_{1R}) & (t_{1,n-1}) & (t_{1,n+1}) \\ (t_{2H}) & (t_{2S}) & (t_{2R}) & (t_{2,n-1}) & (t_{2,n+1}) \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

Элементы определителя (4), заключенные в скобки, равны нулю при  $\omega = 0$ . Поэтому при  $\omega = 0$

$$\Delta = \begin{vmatrix} P_H & P_S & P_R \\ N_H & N_S & N_R \\ M_H & M_S & M_R \end{vmatrix} t_{1,n-1} t_{2,n+1}. \quad (5)$$

Значение частоты, при котором равен нулю один из множителей в (5), определяет при  $\omega = 0$  частоту сфероидаального колебания порядка  $n$  или крутильного колебания порядков  $n-1$  или  $n+1$ . Эти условия хорошо известны.

Точным уравнением для определения частот собственных колебаний при  $\omega \neq 0$  является уравнение (4). Если элементы определителя (4) вычислены при значении частоты  $\sigma$ , близком к значению одной из частот свободных колебаний  $\sigma_0$ , то  $\Delta$  — малая величина порядка  $\frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma}$ . При  $\Delta = 0$  числа Лява пропорциональны минорам любой строки определителя (4), а при  $\Delta \neq 0$  отношение миноров отличается от отношения чисел Лява на величины порядка  $\frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma}$ .

Преобразуем (4) так, чтобы в одном из столбцов (например, в первом) стояли малые величины. Для этого вычислим приближенные значения чисел Лява, умножим элементы каждого столбца на соответствующее число Лява, результаты сложим и заменим ими



элементы первого столбца. В новом определителе величина  $\Delta$  точно сохранится, а все элементы первого столбца будут величинами порядка  $\frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma}$ , так как при  $\Delta = 0$  они все были бы равны нулю. Таким образом,

$$\Delta = A_{11}\delta P + A_{21}\delta N + A_{31}\delta M + A_{41}\delta t_{n-1} + A_{51}\delta t_{n+1}, \quad (6)$$

где  $A_{i1}$  — миноры первого столбца, а  $\delta P, \delta N, \delta M, \delta t_{n-1}, \delta t_{n+1}$  вычислены по формуле (3) с приближенными значениями чисел Лява.

Свяжем величину определителя (4) с вариацией частоты и функций, входящих в дифференциальные уравнения. Заметим, что для решения двух систем линейных дифференциальных уравнений

$$y'_k = a_{k1}y_1 + a_{k2}y_2 + \dots + a_{kl}y_l \quad (7)$$

и

$$-z'_i = (a_{i1} + \delta a_{i1})z_1 + (a_{i2} + \delta a_{i2})z_2 + \dots + (a_{il} + \delta a_{il})z_l \quad (8)$$

справедливо тождество

$$\sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^l \int_0^r \delta a_{kj} y_k z_j dz + \sum_{k=1}^l y_k(r) z_k(r) = 0, \quad (9)$$

если  $y_k$  и  $z_j$  — правильные непрерывные решения уравнений (7) и (8). Если все  $\delta a_{kj} = 0$ , то функции  $z_i$  и  $y_i$  взаимно сопряженные. Если же  $|\delta a_{kj}| < \varepsilon$  при всех значениях аргумента и индексов  $k$  и  $j$  ( $\varepsilon$  — малая постоянная), то в (9) можно приближенно принять сопряженность  $y_i$  и  $z_i$ , допуская ошибку порядка  $\varepsilon^2$ .

Пусть системой (7) является система уравнений упругих колебаний с учетом сил Кориолиса (1), а частное решение получено при значениях на поверхности  $H(1) = A_{11}, S(1) = A_{12}, R(1) = A_{13}, T_{n-1}(1) = A_{14}, T_{n+1}(1) = A_{15}$  ( $A_{i1}$  — миноры первой строки определителя 4). Так как с минорами сопряжены соответствующие элементы определителя, то для системы (8) можно принять  $z_1 = P_H, z_2 = P_S, z_3 = P_R, z_4 = P_{n-1}, z_5 = P_{n+1}$ . Поэтому вместо (9) можно написать

$$\int_0^1 \delta f dr + \Delta = 0, \quad (10)$$

где

$$f = \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^l a_{kj} y_k z_j. \quad (11)$$

Таким образом, из (10) при известном  $\Delta$  определяется  $\sigma - \sigma_0$ , т.е. частота свободного колебания. Для задачи упругих колебаний Земли уравнения, сопряженные с (7), именно уравнения (8), при  $\delta a_{ik} = 0$  имеют решение

$$z_i = b_{i1}y_1 + b_{i2}y_2 + \dots + b_{il}y_l, \quad (12)$$

где все  $b_{ij}$  зависят только от  $r$ . В этом случае исключение всех  $z_i$  из (8) с помощью (12) возвращает к системе уравнений (7). Для уравнений, представляющих колебания

упругой сферически-симметричной Земли, выражения типа (12) очень просты. В системе функций  $M, N, H, S, R, L, X_{n-1}, Y_{n-1}, X_{n+1}, Y_{n+1}$  они таковы [4]:

$$\begin{aligned} \bar{N}_n &= r^2 H_n; & n(n+1)\bar{M}_n &= S_n; & 4\pi\kappa\bar{R}_n &= -L_n; \\ \bar{X}_{n+1} &= r^2\mu Y_{n-1}; & \bar{X}_{n-1} &= r^2\mu Y_{n-1}; & \bar{H}_n &= -r^2 N_n; \\ n(n+1)\bar{S}_n &= -M_n; & 4\pi\kappa\bar{L}_n &= R_n; & \bar{Y}_{n+1} &= -r^2\mu X_{n+1}; \\ & & \bar{Y}_{n-1} &= -r^2\mu X_{n-1}, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= piT_{n+1}; & Y_{n+1} &= X'_{n+1}; & p^2 &= \frac{n+1}{2n+1} \frac{(n+1)^2 - m^2}{(n+1)(n+2) + m^2}; \\ X_{n-1} &= qiT_{n-1}; & Y_{n-1} &= X'_{n-1}; & q^2 &= \frac{n}{2n+1} \frac{n^2 - m^2}{n(n-1) + m^2}; \end{aligned}$$

$i$  — мнимая единица; надстрочной чертой обозначены сопряженные функции. Если функции  $M_n$  и  $N_n$  заменить функциями  $\Phi_n$  и  $P_n$ :

$$\begin{aligned} \Phi_n &= N_n + \frac{2\mu}{r^2} S_n - \frac{4\mu}{r} H_n, \\ P_n &= \mu \left( \frac{2}{r} S_n - 2n(n+1)H_n - M_n r^2 \right), \end{aligned}$$

то первые четыре выражения в (13) будут такими:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_n &= r^2 H_n; & n(n+1)\bar{P}_n &= S_n, \\ \bar{H}_n &= -r^2 \Phi_n; & n(n+1)\bar{S}_n &= -P_n, \end{aligned} \quad (14)$$

остальные сохраняются.

Справедливость формул (13) и (14) можно проверить непосредственно, если составить систему сопряженных обыкновенных дифференциальных уравнений, исключить все сопряженные функции с помощью (13) и (14) и убедиться в том, что полученные уравнения совпадают с исходными. Значения на поверхности ( $r = 1$ ) пяти правильных интегралов задаются 25 числами. В силу (13) и (14) не все эти числа независимы. Зададим матрицу правильных интегралов при  $r = 1$  следующим образом:

$H_n$	$S_n$	$R_n$	$X_{n-1}$	$X_{n+1}$	$\Phi_n$	$P_n$	$L_n$	$Y_{n-1}$	$Y_{n+1}$	
1	0	0	0	0	$\Phi_1$	$P_1$	$L_1$	$Y_{n-1,1}$	$Y_{n+1,1}$	
0	1	0	0	0	$\Phi_2$	$P_2$	$L_2$	$Y_{n-1,2}$	$Y_{n+1,2}$	
0	0	1	0	0	$\Phi_3$	$P_3$	$L_3$	$Y_{n-1,3}$	$Y_{n+1,3}$	
0	0	0	1	0	$\Phi_4$	$P_4$	$L_4$	$Y_{n-1,4}$	$Y_{n+1,4}$	
0	0	0	0	1	$\Phi_5$	$P_5$	$L_5$	$Y_{n-1,5}$	$Y_{n+1,5}$	(15)

Эту матрицу дополним пятью неправильными интегралами с единицами по диагонали у одной из функций  $\Psi_n, P_n, L_n, Y_{n-1}$  и  $Y_{n+1}$  и нулями у всех остальных элементов. Такая матрица 10-го порядка легко обращается и дает простые выражения для элементов обратной матрицы — частных интегралов сопряженной системы дифференциальных уравнений.

Результат обращения сравним с (13) и получим

$$\begin{aligned} n(n+1)\Phi_2 &= P_1; & 4\pi\kappa\Phi_3 &= L_1; & 4\pi\kappa P_3 &= n(n+1)L_2; & \Phi_4 &= -\mu Y_{n-1,1}; \\ P_n &= -n(n+1)\mu Y_{n-1,2}; & L_4 &= -4\pi\kappa\mu Y_{n-1,3}; & \Phi_5 &= -\mu Y_{n+1,1}; \\ P_5 &= -n(n+1)\mu Y_{n+1,2}; & L_5 &= -4\pi\kappa\mu Y_{n+1,3}; & Y_{n+1,4} &= Y_{n-1,5}. \end{aligned} \quad (16)$$

Остальные 15 равенств удовлетворяются тождественно. Поэтому из 25 чисел, входящих в правую часть матрицы (15), 10 чисел могут контролировать точность вычисления, т.е. точность численного интегрирования дифференциальных уравнений.

Пусть системой (7) является система дифференциальных уравнений, соответствующая собственному значению  $\sigma_1$ , а системой (8) — сопряженная система, соответствующая собственному значению  $\sigma_2$ . Вычислим правильные частные интегралы такие, что при  $r = 1$   $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = y_5 = 0$  в силу граничных условий, определяющих  $\sigma_1$ , а  $z_6 = z_7 = z_8 = z_9 = z_{10} = 0$  в силу граничных условий, определяющих  $\sigma_2$  (это можно выполнить в системе функций, использованной при составлении условия 3). Тогда в (10)  $\Delta = 0$  и отличны от нуля только те  $\delta a_{ij}$ , которые зависят от  $\sigma$ . Используем еще самосопряженность дифференциальных уравнений, позволяющую выразить все функции сопряженной системы через функции исходной. В результате из (10) получим

$$\int_0^1 (\sigma_2^2 - \sigma_1^2) \left[ \frac{n+1}{2n+1} \left( H_n - \frac{1}{(n+1)r} S_n \right)_1 \left( H_n - \frac{1}{(n-1)r} S_n \right)_2 + \right. \\ \left. + \frac{n}{2n+1} \left( H_n + \frac{1}{nr} S_n \right)_1 \left( H_n + \frac{1}{nr} S_n \right)_2 + \right. \\ \left. + \frac{n+1}{2n+1} \frac{(n+1)^2 - m^2}{(n+1)(n+2) + m^2} (T_{n+1})_1 (T_{n+1})_2 + \right. \\ \left. + \frac{n}{2n+1} \frac{n^2 - m^2}{n(n-1) + m^2} (T_{n-1})_1 (T_{n-1})_2 - \right. \\ \left. - \left( \left( \frac{\sigma^2 a_n}{b_n} \right)_2 - \left( \frac{\sigma^2 a_n}{b_n} \right)_1 \right) (\Psi_{n+1})_1 (\Psi_{n+1})_2 - \right. \\ \left. - \left( \left( \frac{\sigma^2 a_{-n-1}}{b_{-n-1}} \right)_2 - \left( \frac{\sigma^2 a_{-n-1}}{b_{-n-1}} \right)_1 \right) (\Psi_{n-1})_1 (\Psi_{n-1})_2 \right] \rho r^2 d = 0. \quad (17)$$

Индексами 1 и 2 отмечены собственные функции, соответствующие собственным значениям  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Интегральное условие (17) необходимо и достаточно для определения коэффициентов рядов, представляющих функции, характеризующие вынужденное колебание через статическое решение и собственные функции свободных колебаний.

При варьировании только частоты в  $f$  (формула (11)) существенны только следующие члены:

$$f(\sigma) = \sigma^2 \rho \left( H_n^2 + \frac{S_n^2}{n(n+1)} + p^2 T_{n+1}^2 + q^2 T_{n-1}^2 \right) - \\ - \frac{n+1}{2n+1} \frac{\sigma^2 a_n}{b_n} \rho \Psi_{n+1}^{*2} - \frac{n}{2n+1} \frac{\sigma^2 a_{-n-1}}{b_{-n-1}} \rho \Psi_{n-1}^{*2}. \quad (18)$$

Для сравнения с этим выражением вычислим кинетическую энергию. Используя выражения для смещения (1) из [1], определим скорости смещений и после интегрирования по объему всей Земли — кинетическую энергию  $W$  элементарного колебания, характеризу-

емого параметрами  $\sigma$ ,  $n$ ,  $m$ :

$$2W = \frac{2\pi}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \int \left[ (\sigma^2 - 4\omega^2) \frac{(n+1)(n+2) + m^2}{(2n+1)(2n+3)} \Psi_{n+1}^2 + \right. \\ \left. + (\sigma^2 - 4\omega^2) \frac{n(n+1) + m^2}{(2n-1)(2n+1)} \Psi_{n-1}^2 + \frac{2n+1}{2n+3} \frac{n+1+m}{n+1-m} \sigma^2 w_{n+1}^2 + \right. \\ \left. + \frac{2n+1}{2n-1} \frac{n-m}{n+m} \sigma^2 w_{n-1}^2 \right] \rho r^2 dr. \quad (19)$$

После исключения  $\Psi_{n+1}$  и  $\Psi_{n-1}$  с помощью (1) и  $w_{n-1}$ ,  $w_{n+1}$  с помощью (7) из [1] можно убедиться в том, что подынтегральное выражение в (19) отличается от (18) только постоянным множителем и членами порядка квадрата возмущений.

Зависимость собственной частоты  $\sigma$  от  $m$  (расщепление спектральных линий в результате вращения Земли) получается в результате подстановки (18) в (10) и варьирования результата по  $m$ , если учесть зависимость  $f$  от  $m$  через коэффициенты  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $a_{-n-1}$ ,  $b_{-n-1}$ ,  $p$ ,  $q$ . Заметим, что таким способом ротационное расщепление спектральных линий в отличие от [2] может быть найдено точно и при любом отношении  $\omega/\sigma$ .

Если при вычислении  $\sigma$  ограничиться относительной точностью порядка  $\frac{\omega^2 a}{g} \sim \frac{1}{300}$ , то зависимость  $\Delta$  от  $m$  можно не учитывать, и в результате варьирования (10) по  $m$  получим

$$\delta\sigma = \frac{\int_0^1 (f(n, m) - f(n, 0)) dr}{\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \sigma} dr}, \quad (20)$$

где  $\delta\sigma$  — разность собственных частот колебаний с индексами  $n$ ,  $m$  и  $n$ ,  $m = 0$ .

Таким образом, как и в [2], расщепление спектральных линий оказывается связанным с кинетической энергией элементарного колебания.

В заключение отметим следующее обстоятельство. Из формул (2) как будто следует, что существуют такие частоты, при которых характер колебаний существенно меняется. Именно в случае близости  $b_n$  или  $b_{-n-1}$  к нулю возмущающие члены  $\Psi_{n+1}$  или  $\Psi_{n-1}$ , казалось бы, должны неограниченно возрастать. Однако если учесть ограниченность кинетической энергии и выразить возмущения через  $\Psi_n$ ,  $\Psi'_n$  (по формуле (7) из [1]), то выяснится, что никаких особенностей в характере колебаний в этом случае не возникает.

Академия наук СССР  
Институт физики Земли  
им. О.Ю. Шмидта

Поступила  
18.X.1976

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Молоденский М.С. Приливы и собственные колебания Земли с учетом сил Кориолиса. // Известия АН СССР. Физика Земли. 1976. № 1.
2. Пекерис Х.Л., Альтерман З., Ярош Х. Ротационные мультиплеты в спектре Земли. // В сб.: Собственные колебания Земли. — М.: Мир. 1964.
3. Luh P.C.H. The normal modes of the rotating, self-gravitating inhomogeneous earth. Ph. D. thesis, University of California. — San Diego. 1973.
4. Молоденский С.М. О связи чисел Лява с нагрузочными коэффициентами. // Известия АН СССР. Физика Земли. 1977. № 3.
5. Молоденский М.С. Земные приливы и нутация Земли. — М.: Изд-во АН СССР. 1961.

# О ВОЗБУЖДЕНИИ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЗЕМЛИ\*

Рассмотрена задача о возбуждении колебаний упругой вращающейся Земли в случае, когда внутренние точечные и внешние источники напряжений заданным образом меняются со временем. Определены как функции времени коэффициенты, с помощью которых искомые смещения выражаются через смещения при простейших свободных колебаниях.

Задача о колебаниях упругой Земли в случае, когда граничные условия заданным образом меняются со временем, непосредственно связана с выяснением связи между строением очага землетрясения и амплитудами собственных колебаний Земли, возникающих от землетрясения. Без учета вращения Земли эта задача впервые была рассмотрена Альтерман, Ярошем и Пекерисом [1], а позднее — Гильбертом [2], Дзивонским и другими авторами. Сходные задачи возникают при вычислении влияния метеорологических факторов на вращение Земли, при вычислении приливных колебаний планеты без разложения потенциала приливообразующего тела по сферическим функциям, при выяснении условий возбуждения длиннопериодных колебаний Земли. Ответ на эти вопросы объединяется в общем решении, если в граничную поверхность включить малую сферу, окружающую очаг землетрясения, — источник напряжений внутри Земли.

Дифференциальные уравнения колебаний упругой Земли, строение которой сферически-симметрично, путем простых преобразований приводятся к системе уравнений в частных производных, содержащих функции  $H, Q, F, P, R, L$  [3]. Исключим из этих уравнений вспомогательные функции и используем обозначения:

$$\begin{aligned}
 F_1(Q, H, T, R) &= \Delta Q - \rho \ddot{\delta} - \rho' \ddot{H} + \frac{2\mu'}{r^3} S - \frac{1}{r^2} (r^2 \Phi)' + \\
 &\quad + \left[ \frac{\rho}{r^2} (\ddot{S} - \ddot{S}) - \frac{1}{r^2} (\rho r^2 (\ddot{H} - \ddot{H}))' \right], \\
 F_2(Q, H, T, R) &= \Delta H - \frac{1}{\mu} (Q' - \Phi) - \frac{1}{r^2} (r^2 \delta - 2rH)' - \frac{\rho}{\mu} (\ddot{H} - \ddot{H}), \quad (1) \\
 F_3(Q, H, T, R) &= \Delta T + \frac{\mu'}{\mu} T' - \frac{\mu'}{\mu r} T - \frac{\rho}{\mu} \ddot{T} - \frac{\rho}{\mu} (\ddot{T} - \ddot{T}), \\
 F_4(Q, H, T, R) &= \Delta R - 4\pi f (\rho \delta + \rho' H), \\
 \Phi &= \alpha Q + (2\mu'' + \rho' W' - \alpha^2 (\lambda + 2\mu)) H + (\rho' - \alpha \rho) R, \quad (2) \\
 S &= (r^2 H)' - r^2 \delta.
 \end{aligned}$$

Последние слагаемые в  $F_i(Q, H, T, R)$  содержат  $\tilde{S}, \tilde{H}, \tilde{T}$ , включающие силы Кориолиса. Эти обозначения подробно объяснены в [4]. Здесь они использованы в формулах (22).

В этих обозначениях функции  $Q, H, T, R$  определяются из уравнений

$$F_i(Q, H, T, R) = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (3)$$

\* Известия АН СССР. Физика Земли. 1980. С. 3–9.

Здесь  $H$  — радиальное смещение,  $R$  — изменение гравитационного потенциала,  $\delta$  — объемное расширение,  $T$  — функция, определяющая компоненту  $M_z$  тангенциального напряжения, действующего на поверхности сферы,

$$Q = (\lambda + 2\mu)\delta + \rho R + (\rho W' + 2\mu')H; \quad \alpha = \frac{\rho W' + 2\mu'}{\lambda + 2\mu}, \quad (4)$$

$\mu$  и  $\lambda$  — коэффициенты упругости Ламе,  $\rho$  и  $W'$  — плотность и радиальная производная от потенциала силы тяжести;  $r$  — расстояние от переменной точки до центра сферической Земли; надстрочный штрих — знак производной по  $r$ , надстрочная точка — знак производной по времени  $t$ ;  $f$  — постоянная тяготения;  $\Delta$  — оператор Лапласа. Эти уравнения могут представлять сложные колебания, составленные из колебаний разного порядка в сферических функциях и с разными частотами  $\sigma$ . Поэтому здесь они используются для колебаний, возникающих в условиях сложного возбуждения.

Действующие на Землю силы учитываются через граничные условия. В общем случае эти условия таковы:

1) условие для нормального давления  $N(t, \theta, \varphi)$  на сферической граничной поверхности связывает  $\delta$  и  $H$ :

$$N(t, \theta, \varphi) = \lambda\delta + 2\mu H'; \quad (5)$$

2) три компоненты  $M_x, M_y, M_z$  действующего на поверхности сферы тангенциального напряжения полностью определяются двумя функциями [3]:

$$M(t, \theta, \varphi) = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_z}{\partial z}; \quad (6)$$

$$M_z(t, \theta, \varphi) = \mu \left[ \frac{\partial H}{\partial z} + \left( \frac{1}{r} H - 2H' \right) \frac{z}{r} + \left( \frac{w}{r} \right)' r \right],$$

где  $w$  — компонента смещений по оси  $z$ ;  $w$  выражается через  $H, S$  и  $T$ . Условия для  $M$  и  $M_z$  на поверхности связывают  $H, S$  и  $T$ ;

3) потенциал приливообразующей силы  $V_c$  связывает на поверхности  $R(t, \theta, \varphi)$  и  $R'(t, \theta, \varphi)$ , так как  $\Delta(R - V_c) = 0$  вне Земли.

Для малой сферы граничными условиями могут служить указания на особенности функций  $H, Q, R, T$  в окрестности особой точки. Значения этих функций вне малой сферы представим суммами двух слагаемых: первое слагаемое гармоническое и принимает на сфере заданное значение; для второго слагаемого центр малой сферы не является особой точкой. Основные свойства очага представляются его особенностями низших порядков. Используя линейность всех стадий решения задачи о возбуждении колебаний, целесообразно выполнить решения отдельно для простейших особенностей очага, имея в виду, что линейное сочетание таких решений представит решение для более сложного очага.

Функции  $N, M, M_z, Q, H, R, T$ , зависящие от  $t, \theta, \varphi$ , представим в интегральной форме. Так, пусть

$$N(t, \theta, \varphi) = \int_0^{\sigma} [N_c(\sigma, \theta, \varphi) \cos \sigma t + N_s(\sigma, \theta, \varphi) \sin \sigma t] d\sigma. \quad (7)$$

Подобными выражениями представим остальные функции через их четные и нечетные частотные характеристики (с индексами  $c$  и  $s$ ).

Решения уравнений (1) и (3) ищем также в интегральной форме:

$$Q(t, r, \theta, \varphi) = Q_l(t, r, \theta, \varphi) + \int_0^{\infty} [Q_c(\sigma, r, \theta, \varphi) \cos \sigma t + Q_s(\sigma, r, \theta, \varphi) \sin \sigma t] d\sigma. \quad (8)$$

Функция  $Q(t, r, \theta, \varphi)$  содержит лишь те особенности, которые имеет  $Q_l(t, r, \theta, \varphi)$ .

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$D(l_1, l_2, l_3) = \frac{\partial^l \left(\frac{1}{d}\right)}{\partial x_0^{l_1} \partial y_0^{l_2} \partial z_0^{l_3}} \quad (l = l_1 + l_2 + l_3), \quad (9)$$

где  $d^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$ ,  $x_0, y_0, z_0$  и  $x, y, z$  — координаты особой и текущей точек соответственно. Ось координат  $z$  совместим с осью вращения Земли. Для  $1/d$  имеем разложение

$$\frac{1}{d} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{r_0^{n+1}} \sum_{m=0}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta) P_n^m(\cos \theta_0) \cos m(\varphi - \varphi_0). \quad (10)$$

Здесь  $r_0, \theta_0, \varphi_0$  — сферические координаты особой точки,  $r, \theta, \varphi$  — сферические координаты текущей точки. При  $r \geq r_0$  множитель  $r^n/r_0^{n+1}$  следует заменить множителем  $r_0^n/r^{n+1}$ .

Получим далее разложение для  $D(l_1, l_2, l_3)$ :

$$D(l_1, l_2, l_3) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n D_{lnm} P_n^m(\cos \theta), \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} D_{lnm} &= D_{clnm} \cos m\varphi_0 + D_{slnm} \sin m\varphi_0, \\ D_{clnm} &= r^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{\partial^l}{\partial x_0^{l_1} \partial y_0^{l_2} \partial z_0^{l_3}} \left( \frac{1}{r_0^{n+1}} P_n^m(\cos \theta_0) \cos m\varphi_0 \right), \\ D_{slnm} &= r^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{\partial^l}{\partial x_0^{l_1} \partial y_0^{l_2} \partial z_0^{l_3}} \left( \frac{1}{r_0^{n+1}} P_n^m(\cos \theta_0) \sin m\varphi_0 \right) \quad (r \leq r_0). \end{aligned} \quad (12)$$

Пусть в простейшем случае

$$\begin{aligned} Q_l(t, r, \theta, \varphi) &= Q(t)D(l_1, l_2, l_3), \\ H_l(t, r, \theta, \varphi) &= H(t)D(l_1, l_2, l_3), \\ R_l(t, r, \theta, \varphi) &= R(t)D(l_1, l_2, l_3), \\ T_l(t, r, \theta, \varphi) &= T(t)D(l_1, l_2, l_3). \end{aligned} \quad (13)$$

Функции  $Q_c$  и  $Q_s$  представим рядами:

$$\begin{aligned} Q_c &= \sum \sum Q_{cnm} P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi, \\ Q_s &= \sum \sum Q_{snm} P_n^m(\cos \theta) \sin m\varphi. \end{aligned}$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} Q(t, r, \theta, \varphi) &= Q(t)D(l_1, l_2, l_3) + \int_0^{\infty} \sum \sum [Q_{cnm} \cos \sigma t \cos m\varphi + \\ &+ Q_{snm} \sin \sigma t \sin m\varphi] P_n^m(\cos \theta) d\sigma. \end{aligned} \quad (14)$$

Подставим выражения для  $Q$ ,  $H$ ,  $R$ ,  $T$  вида (14) в уравнения (1). Главные члены этих уравнений, не имеющие множителем  $\omega$ , не содержат частоты  $\sigma$ ; поэтому интегрирование по  $\sigma$  можно выполнить после дифференцирования по  $r$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ . Полученный результат умножим на

$$\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos\theta) \cos m\varphi \cos \sigma t \sin \theta d\theta d\varphi dt \quad (15)$$

и проинтегрируем по времени  $t$  в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ , по  $\theta$  — от 0 до  $\pi$  и по  $\varphi$  — от 0 до  $2\pi$ . Члены с  $\dot{H} = \partial^2 H / \partial t^2$  и  $\dot{\delta} = \partial^2 \delta / \partial t^2$  преобразуем путем двукратного интегрирования по частям по времени. Так как источник напряжений действует ограниченное время и вне малой сферы вызывает ограниченные напряжения, то при  $t = \pm\infty$

$$H(\pm\infty) = \dot{H}(\pm\infty) = \delta(\pm\infty) = \dot{\delta}(\pm\infty) = 0.$$

Поэтому вне знака интегрирования по времени слагаемые не появятся, а под знаком интегрирования оператор  $\partial^2 / \partial t^2$  перейдет в множитель  $-\sigma^2$ . Интегралы по  $\varphi$  в пределах от 0 до  $2\pi$  обращаются в нуль все, кроме тех, которые содержат тот же множитель  $\cos m\varphi \cos \sigma t$ , как (10). Поэтому все функции с индексом  $s$  в результат интегрирования не войдут (если в (10) множитель  $\cos \sigma t \cos m\varphi$  заменить на множитель  $\sin \sigma t \sin m\varphi$ , то не войдут функции с индексом  $c$ ).

Функции  $Q(t)$ ,  $H(t)$ ,  $R(t)$ ,  $T(t)$  подвергнем интегральному преобразованию Фурье. Например, для  $Q(t)$  напомним:

$$Q(t) = \int_0^\infty [Q_c(\sigma) \cos \sigma t + Q_s(\sigma) \sin \sigma t] d\sigma. \quad (16)$$

Теперь в результате подстановки выражений типа (14) в (1) и (2), после умножения результата на множитель (10) и последующего интегрирования по  $\varphi$  и  $\theta$  получаем

$$F_i(Q^*, H^*, R^*, T^*) = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} Q^* &= Q_{cnm} + Q_c(\sigma) D_{cnm}, \\ H^* &= H_{cnm} + H_c(\sigma) D_{cnm}, \\ R^* &= R_{cnm} + R_c(\sigma) D_{cnm}, \\ T^* &= T_{cnm} + T_c(\sigma) D_{cnm}. \end{aligned} \quad (18)$$

Уравнения вида (17) и (18), но с заменой индекса  $c$  на индекс  $s$  получаются и для нечетных частотных характеристик колебания. Соответствующая уравнениям (17) и (18) однородная система является обычной системой уравнений упругих колебаний с частотой  $\sigma$ . Если функции  $Q_n$  выразить через  $H_n$ ,  $R_n$  и  $S_n$  и исключить из системы, то однородные уравнения, получаемые из (17) и (18), сведутся к системе уравнений (1) из [4]. Таким образом, для каждой тройки значений параметров  $\sigma$ ,  $n$  и  $m$  получена система обыкновенных линейных неоднородных уравнений.

Разрыв правых частей в уравнениях (17) и (18) не является препятствием к построению правильного решения этих уравнений с непрерывными всюду (включая точку  $r_0\theta_0\varphi_0$ ) напряжениями и смещениями. Действительно, при интегрировании неоднородных уравнений (13) методом вариации произвольных постоянных, входящих в общее решение



однородной системы, новые произвольные постоянные могут быть разными при  $r < r_0$  и при  $r > r_0$ . Дополнительные постоянные, число которых равно порядку уравнений, определяются из условия непрерывности напряжений и смещений при  $r = r_0$ , т.е. тех функций, которые непрерывны в частных интегралах решений однородной системы уравнений.

Преобразуем далее граничные условия вида (7) так, как были преобразованы дифференциальные уравнения. Умножим (7) на множитель (15) и проинтегрируем по  $\varphi$  от 0 до  $2\pi$ , по  $\theta$  от 0 до  $\pi$  и по  $t$  от 0 до  $\infty$ . Получим

$$N_{cnm}(\sigma) = \int_0^{\infty} \bar{N}_{cnm}(t) \cos \sigma t dt. \quad (19)$$

Данные функции, зависящие только от  $\sigma$  или только от  $t$ , входят в следующие разложения:

$$\begin{aligned} N_c(\sigma, \theta, \varphi) &= \sum \cos m\varphi \sum N_{cnm}(\sigma) P_n^m(\cos \theta), \\ \bar{N}(t, \theta, \varphi) &= \sum_m \cos m\varphi \sum_n \bar{N}_{cnm}(t) P_n^m(\cos \theta). \end{aligned} \quad (20)$$

В результате замены в множителе (15)  $\cos \sigma t \cos m\varphi$  на  $\sin \sigma t \sin m\varphi$  после интегрирования в тех же пределах по  $\theta$ ,  $\varphi$  и  $t$  получим формулы (19) и (20) с заменой индекса  $c$  на индекс  $s$ .

Граничные условия для  $M(t, \theta, \varphi)$ ,  $M_z(t, \theta, \varphi)$  и условие, связывающее  $R(t, \theta, \varphi)$  с  $R'(t, \theta, \varphi)$ , преобразуются по образцу (20).

Рассмотрим отдельно случай, когда внешних источников напряжений нет. Тогда условия на большой сферической поверхности (20) приводятся к обычным:

$$N_{cnm} = M_{cnm} = (M_z)_{cnm} = L_{cnm} + (n+1)rR_{cnm} = 0,$$

при всех значениях  $\sigma$ ,  $n$ ,  $m$  и при замене индекса  $c$  на индекс  $s$ . Эти условия однородны, но неоднородны дифференциальные уравнения; поэтому отличные от нуля решения возможны при всех значениях  $\sigma$ . Затруднение заключается только в том, что решения уравнений (18) нужно иметь для всех значений  $n$ ,  $m$  и  $\sigma$  в пределах от 0 до  $\infty$ .

Воспользуемся обычным приемом теории малых колебаний: будем считать, что для однородной задачи (соответствующей свободным колебаниям Земли) известны все собственные значения и собственные функции. (Конечно, для значений  $n$ ,  $m$  и  $\sigma$ , не превосходящих разумных пределов, что соответствует ограничению детальности представления зависимости искомых функций от  $r$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  и  $t$ .) Далее поступаем так же, как в простейшем случае вынужденных колебаний: функцию  $\Phi(n, \sigma, r)$ , являющуюся решением системы (1), представим рядом:

$$\Phi(n, \sigma, r) = \Phi(n, 0, r) + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \Phi_i(n, \sigma_i, r). \quad (21)$$

В результате подстановки таких рядов в уравнения, содержащие  $\sigma$ , получаем четыре

условия, которым должны удовлетворять коэффициенты в (21):

$$\begin{aligned}
 \sum a_i (\sigma^2 - \sigma_i^2) \tilde{H}_i + \sigma^2 \tilde{H}_0 &= 0, \\
 \sigma^2 \rho \tilde{H} &= \sigma^2 \rho H - \frac{n+1}{2n+1} \Psi_{n+1} - \frac{n}{2n-1} \Psi_{n-1}, \\
 \sum a_i (\sigma^2 - \sigma_i^2) \tilde{S}_i + \sigma^2 \tilde{S}_0 &= 0, \\
 \sigma^2 \rho \tilde{S} &= \sigma^2 \rho S + \frac{n(n+1)}{2n+1} (\Psi_{n+1} - \Psi_{n-1}), \\
 \sum a_i (\sigma^2 - \sigma_i^2) \left( \tilde{T}_{n+1} \right)_i + \sigma^2 \left( \tilde{T}_{n+1} \right)_0 &= 0; \quad \sigma^2 \rho \tilde{T}_{n+1} = \sigma^2 \rho T_{n+1} - \Psi_{n+1}, \\
 \sum a_i (\sigma^2 - \sigma_i^2) \left( \tilde{T}_{n-1} \right)_i + \sigma^2 \left( \tilde{T}_{n-1} \right)_0 &= 0; \quad \sigma^2 \rho \tilde{T}_{n-1} = \sigma^2 \rho T_{n-1} - \Psi_{n-1}.
 \end{aligned} \tag{22}$$

Функции  $\psi_{n+1}$  и  $\psi_{n-1}$  определены формулами (2) из [4]. Коэффициенты  $a_i$  определяются с помощью условия ортогональности собственных функций (17) [4]:

$$\sigma_i^2 f_{ij} \left( \frac{\omega}{\sigma_i} \right) - \sigma_j^2 f_{ij} \left( \frac{\omega}{\sigma_j} \right) = 0, \tag{23}$$

где

$$\begin{aligned}
 f_{ij} \left( \frac{\omega}{\sigma} \right) &= \int_0^1 \left[ H_i H_j + \frac{S_i S_j}{n(n+1)r^2} + p^2 (T_i T_j)_{n+1} + q^2 (T_i T_j)_{n-1} - \right. \\
 &\quad - \frac{n+1}{2n+1} \frac{\frac{2\omega}{\sigma} \frac{m}{n+1} + \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \frac{(n+1)(n+2)+m^2}{(n+1)(2n+3)}}{1 + \frac{2\omega}{\sigma} \frac{m}{n+1} \frac{(n+1)(2n+3)}{(n+1)(n+2)+m^2}} (\Psi_i^* \Psi_j^*)_{n+1} - \\
 &\quad \left. - \frac{n}{2n+1} \frac{-\frac{2\omega}{\sigma} \frac{m}{n} + \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \frac{n(n-1)+m^2}{n(2n-1)}}{1 - \frac{2\omega}{\sigma} \frac{m}{n} \frac{n(2n-1)}{n(n-1)+m^2}} (\Psi_i^* \Psi_j^*)_{n-1} \right] \rho r^2 dr. \tag{24}
 \end{aligned}$$

Из левой группы уравнений (22) после умножения первого уравнения на  $H_j^2 \rho r^2 dr$ , второго — на  $\frac{S_j}{n(n+1)} \rho r^2 dr$ , третьего — на  $p^2 (T_j)_{n+1} \rho r^2 dr$  и четвертого — на  $q^2 (T_j)_{n-1} \rho r^2 dr$ , после суммирования этих результатов и интегрирования по  $r$  от центра до поверхности Земли получаем

$$\sum_i a_i \left( \sigma^2 f_{ij} \left( \frac{\omega}{\sigma} \right) - \sigma_i^2 f_{ij} \left( \frac{\omega}{\sigma_i} \right) \right) + \sigma^2 f_{0j} (0) = 0$$

или на основании (23)

$$\sum a_i \left( \sigma^2 f_{ij} \left( \frac{\omega}{\sigma} \right) - \sigma_j^2 f_{ij} \left( \frac{\omega}{\sigma_j} \right) \right) + \sigma^2 f_{0j} (0) = 0. \tag{25}$$

Воспользуемся тем, что  $a_j$  велики только при малых  $|\sigma - \sigma_j|$ .

Для таких значений  $a_j$  получаем

$$a_j = \frac{\sigma^2}{\sigma_j^2 - \sigma^2} \frac{f_{0j}}{f_{ji}},$$

где

$$\bar{f}_{jj} = \frac{1}{\sigma^2 - \sigma_j^2} \left[ \sigma^2 f_{jj} \left( \frac{\omega}{\sigma} \right) - \sigma_j^2 f_{jj} \left( \frac{\omega}{\sigma_j} \right) \right] = f_{jj} \left( \frac{\omega}{\sigma_j} \right) - \frac{\omega}{2\sigma_j} \frac{\partial f_{jj} \left( \frac{\omega}{\sigma_j} \right)}{\partial \left( \frac{\omega}{\sigma_j} \right)}.$$

Если частота является комплексной величиной  $\sigma + i\varepsilon$ , то функция  $a_j(\sigma + i\varepsilon)$  имеет особую точку на действительной оси. При интегрировании по  $\sigma$  в пределах от  $\infty$  до  $\sigma + i\varepsilon$  функция  $a_j$  интегрируется вдоль действительной оси от  $\infty$  до  $\sigma_j + \varepsilon$ , а затем от  $\sigma_j + \varepsilon$  до  $\sigma_j + i\varepsilon$  при постоянном  $\sigma - \sigma_j$ . Поэтому возрастание амплитуд ограничено величиной  $\varepsilon$ . Зависимость всех функций от времени определена формулами вида (8) и (13). Если  $Q(t)$ ,  $H(t)$ ,  $R(t)$ ,  $T(t)$  заданы рядами Фурье, то вычисления просты и выполняются аналитически.

Академия наук СССР  
Институт физики Земли  
им. О.Ю. Шмидта

Поступила  
3.III.1978

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Альтерман З., Ярош Х., Пекерис Х.Л.* Колебания Земли. // В сб.: Собственные колебания Земли. — М.: Мир. 1964.
2. *Gilbert F.* Excitation of the normal modes of the Earth by earthquake sources. // *Geophysics. J. Roy. Astron. Soc.* 1971. 22. P.223–226.
3. *Молоденский М.С.* Приливы в упругой Земле. // В сб.: Медленные движения земной коры. — М.: Наука. 1972.
4. *Молоденский М.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения элементарного колебания упругой вращающейся Земли. // *Известия АН СССР. Физика Земли.* 1977. № 7.

# ПРОСТЕЙШИЕ УПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЗЕМЛИ\*

В работе [1] уравнения в частных производных, служащие для определения упругих колебаний вращающейся Земли, заменены (при простейших граничных условиях) равносильной системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Покажем, что замена эта внесла в результат малую относительную ошибку порядка  $q^2$ , где  $q$  — отношение центробежной силы к силе тяжести на экваторе.

Уравнения, полученные в указанной работе, не допускают образования из них уравнений для соседних порядков путем изменения параметра  $n$  (порядка сферической функции, с которым связана своя граничная задача). Это видно из следующего примера. В уравнении (6) из [1]

$$w_n(r, \theta, \varphi) = [w_{n-1}(r)P_{n-1}^m(\cos \theta) + w_{n+1}(r)P_{n+1}^m(\cos \theta)] \cos(\sigma t - m\varphi). \quad (1)$$

При  $n + 2$  получаем

$$w_{n+2}(r, \theta, \varphi) = [w_{n-1+2}(r)P_{n+1}^m(\cos \theta) + w_{n+1+2}(r)P_{n+3}^m(\cos \theta)] \cos(\sigma t - m\varphi), \quad (2)$$

где  $w_{n+1}(r)$  и  $w_{n-1+2}(r)$  определяются из разных систем уравнений, поэтому

$$w_{n+1}(r) \neq w_{n-1+2}(r). \quad (3)$$

Сохраним такую запись индексов для  $w_n$ ,  $\bar{w}_n$  и  $\Phi$ :

$$\Phi = (\sigma^2 - 4\omega^2) \rho \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} - z\chi \right) + \sigma^2 \rho w. \quad (4)$$

Теперь уравнения работы [1] представим в форме, допускающей изменение индексов. Уравнения (7)–(9) этой работы правильны при всех  $n$  в следующей записи:

$$b_n \left( \psi' - r\chi - \frac{n}{r}\psi \right)_n = H_n - \frac{1}{(n+1)r} S_n + \frac{(n+1)^2 - m^2}{(n+1)(n+2) + m^2} \times \\ \times \left( T_{n+1} - \frac{2n+1}{n+1-m} \bar{w}_{n-1+2} \right),$$

$$b_{-n-1} \left( \psi' - r\chi + \frac{n+1}{r}\psi \right)_n = H_n + \frac{1}{nr} S_n + \frac{n^2 - m^2}{n(n-1) + m^2} \times \\ \times \left( T_{n-1} - \frac{2n+1}{n+m} \bar{w}_{n+1-2} \right), \quad (5)$$

$$f_{n-1}(T_{n-1}) - \sigma^2 \rho \left( H_n + \frac{1}{nr} S_n \right) + (\sigma^2 - 4\omega^2) \left( \psi' - r\chi + \frac{n+1}{r}\psi \right)_n = \\ = -\frac{n+2}{n} \left( \frac{z}{r} \Phi \right)_n + \frac{1}{nr} \left( \sin^2 \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \cos \theta} \right)_n, \quad (6)$$

\* В сб.: Медленные деформации Земли и ее вращение. — М.: Радио и связь. 1985. С. 24–27.

$$f_{n+1}(T_{n+1}) - \sigma^2 \rho \left( H_n - \frac{1}{(n+1)r} S_n \right) + (\sigma^2 - 4\omega^2) \left( \psi' - r\chi - \frac{n}{r} \psi \right)_n =$$

$$= -\frac{n-1}{n+1} \left( \frac{z}{r} \Phi \right)_n - \frac{1}{(n+1)r} \left( \sin^2 \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \cos \theta} \right)_n.$$

Правая часть (6) через  $\Phi_{n-2}$  и  $\Phi_{n+2}$  содержит  $\psi_{n-2}$ ,  $\psi_{n+2}$ ,  $w_{n-2}$ ,  $w_{n+2}$ . После изменения  $n$  в уравнения колебаний порядков  $n-2$  и  $n+2$  войдут  $\psi_n$  и  $w_n$ , отличные от нуля, так как граничная задача порядка  $n$  по условию неоднородна. Поэтому функции порядков  $n-2$  и  $n+2$  при однородных в этих порядках граничных условиях отличны от нуля и должны быть в (6) сохранены. Таким путем уравнения (11) из работы [1] получают малые дополнительные члены, возмущения, связанные с уравнениями порядков  $-2$  и  $+2$ . Уравнения (6) с возмущениями таковы:

$$f_{n-1}(T_{n-1}) - \sigma^2 \rho \frac{a_{-n-1}}{b_{-n-1}} \left( H_n + \frac{1}{nr} S_n + \frac{n^2 - m^2}{n(n-1) + m^2} T_{n-1} \right) = \varepsilon_{n-1},$$

$$f_{n+1}(T_{n+1}) - \sigma^2 \rho \frac{a_n}{b_n} \left( H_n - \frac{1}{(n+1)r} S_n + \frac{(n+1)^2 - m^2}{(n+1)(n+2) + m^2} T_{n+1} \right) = \varepsilon_{n+1},$$

где

$$\varepsilon_{n-1} = -\frac{(2n+1)(n-m)}{n(n-1) + m^2} \frac{a_{-n-1}}{b_{-n-1}} \bar{w}_{n+1-2} -$$

$$- \frac{2n+1}{n} \frac{(n-m)(n-m-1)}{(2n-1)(2n-3)} 4\omega^2 \rho \left( \psi' - r\chi - \frac{n-2}{r} \psi \right), \quad (8)$$

$$\varepsilon_{n+1} = -\frac{(2n+1)(n+1+m)}{(n+1)(n+2) + m^2} \frac{a_n}{b_n} \bar{w}_{n-1+2} - \frac{2n+1}{n} \times$$

$$\times \frac{(n-m)(n-m-1)}{(2n-1)(2n-3)} 4\omega^2 \rho \left( \psi' - r\chi + \frac{n+3}{r} \psi \right)_{n+2}.$$

Возмущение  $\varepsilon_{n-1}$  содержит только функции порядка  $n-2$ , а  $\varepsilon_{n+2}$  содержит только функции порядка  $n+2$ .

В уравнения, определяющие функции порядка  $n-2$  (или  $n+2$ ) войдут возмущения  $\varepsilon_{n+1-2}$  (или  $\varepsilon_{n-1+2}$ ). Так как для этих порядков граничные условия однородны, порядок величины функций задают возмущения. Но  $\varepsilon_{n-1}$  и  $\varepsilon_{n+1}$  содержат произведения малых функций  $\bar{w}_{n+1-2}$  и  $\bar{w}_{n-1+2}$  порядка  $q^{1/2}$  на малые коэффициенты  $a_{n-1}$  и  $a_n$  тоже порядка  $q^{1/2}$ . Поэтому от возмущений порядка  $n$  функции порядка  $n-2$  или  $n+2$  получат величину порядка  $q$ . Основное решение порядка  $n$  от возмущений малыми функциями порядка  $q$  изменится на величину порядка  $q^2$ .

Понятно, что колебания порядков  $n-2$  и  $n+2$  возбудят колебания порядков  $n-4$  и  $n+4$  с амплитудами порядка  $q^2$  от основного колебания, а колебание порядка  $n \pm 2k$  ( $k$  — целое число) получит амплитуду порядка  $q^k$ .

Уравнения колебания жидкого ядра Земли получаются из общих уравнений, если в них  $\mu = 0$ ,  $f_{n-1} = f_{n+1} = \sigma^2 \rho$ . Если, кроме того, плотность зависит только от давления, то получаем

$$\chi_n = 0,$$

$$\rho \delta_n + \rho' H_n + \frac{\rho'}{W'} (R + (\sigma^2 - 4\omega^2) \psi)_n = 0, \quad (9)$$

т.е. формулу (16) из работы [1]. Из этого уравнения и уравнения Пуассона  $H_n$  и  $\delta_n$  исключаются с помощью уравнений, получающихся из (4) вышеназванной работы после исключения  $T_{n-1}$  и  $T_{n+1}$ :

$$H_n + \frac{S_n}{(n+1)r} = \alpha_n \left( \psi' - \frac{n}{r} \psi \right)_n - \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \frac{2n+1}{n+1} \times$$

$$\times \frac{(n+m+1)(n+m+2)}{(2n+1)(2n+3)} \left( \psi' + \frac{n+3}{r} \psi \right)_{n+2},$$

$$H_n - \frac{S_n}{nr} = \alpha_{n-1} \left( \psi' + \frac{n+1}{r} \psi \right)_n - \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \frac{2n+1}{n} \times$$

$$\times \frac{(n-m)(n-m-1)}{(2n-1)(2n-3)} \left( \psi' - \frac{n-2}{r} \psi \right)_{n-2}. \quad (10)$$

Здесь сохранены слагаемые с  $\psi_{n+2}$  и  $\psi_{n-2}$ . Результат исключения таков:

$$E_n \rho \Delta \psi_n + \rho' \left( \varepsilon_n \psi' - \frac{F}{r} \psi \right)_n + \frac{\rho'}{W'} (R + (\sigma^2 - 4\omega^2) \psi)_n = \varepsilon_{n-2} + \varepsilon_{n+2}, \quad (11)$$

где

$$\left. \begin{aligned} E_n &= \frac{n+1}{2n+1} \alpha_n + \frac{n}{2n+1} \alpha_{n-1}; & F &= \frac{n(n+1)}{2n+1} (\alpha_n - \alpha_{n-1}), \\ \alpha_n &= 1 + \frac{2\omega}{\sigma} \frac{m}{n+1} + \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \frac{(n+1)^2 - m^2}{(n+1)(2n+3)}, \\ \varepsilon_{n-2} &= \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \frac{2n+1}{n} \frac{n-m}{2n-1} \frac{n-m-1}{2n-3} \left[ \rho r^{-n+1} \left( \psi' - \frac{n-2}{r} \psi \right)_{n-2} \right]' r^{n-1}, \\ \varepsilon_{n+2} &= \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \frac{2n+1}{n+1} \frac{(n+m+1)(n+m+2)}{(2n+3)(2n+5)} \left[ \rho r^{n+2} \left( \psi' + \frac{n+3}{r} \psi \right)_{n+2} \right]' r^{-n-2}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Уравнение Пуассона запишем с помощью (9):

$$R_n'' = \frac{2}{r} R_n' - \frac{n(n+1)}{r} R_n + 4\pi f \frac{\rho'}{W'} (R + (\sigma^2 - 4\omega^2) \psi)_n = 0. \quad (13)$$

Амплитуды колебаний, возбуждаемых в жидком ядре Земли, просто оцениваются для функций, непрерывных на границе с оболочкой. Очевидно, что они имеют порядок  $q$ , как в оболочке. Только разрывные функции  $S_n$ ,  $T_{n-1}$ ,  $T_{n+1}$  могут иметь большие значения при свободных колебаниях ядра. Все функции в ядре определяются из довольно простых уравнений (11)–(13), допускающих изменение индекса  $n$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Молоденский М.С. Приливы и собственные колебания Земли с учетом сил Кориолиса. // Известия АН СССР. Физика Земли. 1976. № 1. С.3–12.

# УПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЗЕМЛИ С ЖИДКИМ ВЯЗКИМ ЯДРОМ\*

Обыкновенные дифференциальные уравнения колебаний вращающейся Земли с идеально жидким ядром и упругой оболочкой были получены в работах [1, 2]. В настоящей статье эти результаты распространены на более реальный случай неоднородного ядра с малой вязкостью и малым модулем сдвига.

Уравнения колебания жидкого ядра Земли с малой вязкостью можно получить из обычных уравнений сфероидальных колебаний следующим путем.

1. Вносим в уравнения силы Кориолиса путем замены инерционных членов  $\sigma^2 \rho H$  и  $\sigma^2 \rho S$  выражениями  $\sigma^2 \rho \tilde{H}$  и  $\sigma^2 \rho \tilde{S}$  [1], где

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= H - \bar{H}; \quad \bar{H} = \frac{n+1}{2n+1} a_n \left( \psi' - r\chi - \frac{n}{r} \psi \right) + \frac{n}{2n+1} a_{-n-1} \left( \psi' - r\chi + \frac{n+1}{r} \psi \right), \\ \tilde{S} &= S - \bar{S}; \quad \bar{S} = \frac{n(n+1)}{2n+1} r \left( a_{-n-1} \left( \psi' - r\chi + \frac{n+1}{r} \psi \right) - a_n \left( \psi' - r\chi - \frac{n}{r} \psi \right) \right), \\ a_n &= \frac{2\omega}{\sigma} \frac{m}{n+1} + \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \frac{(n+1)(n+2) + m^2}{(n+1)(2n+3)}. \end{aligned}$$

Здесь  $\sigma$  — частота;  $n$  и  $m$  — индексы функций Лежандра. Вспомогательные функции  $\psi$  и  $\psi' - r\chi$  выражаются через  $H$ ,  $S$  и функции  $T_{n-1}$ ,  $T_{n+1}$ , связывающие их с крутильными колебаниями,

$$\left. \begin{aligned} b_n \left( \psi' - r\chi - \frac{n}{r} \psi \right) &= H - \frac{1}{(n+1)r} S + \frac{(n+1)^2 - m^2}{(n+1)(n+2) + m^2} T_{n+1}, \\ b_{-n-1} \left( \psi' - r\chi + \frac{n+1}{r} \psi \right) &= H + \frac{1}{nr} S + \frac{n^2 - m^2}{(n-1)n + m^2} T_{n-1}, \\ b_n &= 1 + \frac{2\omega}{\sigma} \frac{m}{n+1} \frac{(n+1)(2n+1)}{(n+1)(n+2) + m^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

2. Из полученной таким образом системы уравнений десятого порядка выделяются три уравнения второго порядка, которые при малом  $\mu$  интегрируются независимо от других. Из них два уравнения связывают через силы Кориолиса сфероидальные колебания с крутильными.

3. Решение граничной задачи при  $\mu = 0$  известно [2] и достаточно просто. На основе его с добавлением возмущений получается решение при малом  $\mu$ .

4. Напряжения от вязкости вычисляются как упругие, но с заменой деформаций скоростями их изменений и со своим модулем  $\nu$ . Из-за сдвига фазы число определяемых функций удваивается (появляются компоненты-множители при  $\cos(\sigma t - m\varphi)$  и  $\sin(\sigma t - m\varphi)$ ).

Как указывалось, после внесения в дифференциальные уравнения сил Кориолиса изменятся два уравнения сфероидальных колебаний и присоединятся два уравнения крутильных колебаний, содержащих инерционные члены. Для этих уравнений удобен следующий

\* В сб.: Медленные деформации Земли и ее вращение. — М.: Радио и связь. 1985. С. 28–34.

вид:

$$z' + \sigma^2 (y - \bar{H}) - \frac{2\mu'}{\rho'} \left( 2H - \frac{1}{r}S \right) + \left( \frac{\rho'}{\rho^2} (\lambda + 2\mu) - W' \right) \delta = 0, \quad (2)$$

$$z + \frac{\sigma^2}{n(n+1)} (x - \bar{S}) - \frac{2\mu'}{\rho} \left( \frac{S}{n(n+1)r} - H \right) = 0, \quad (3)$$

$$z = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \delta + R + W'H, \quad (4)$$

$$f_{n-1}(T_{n-1}) = \sigma^2 \rho \frac{a_{-n-1}}{b_{-n-1}} \left( H + \frac{1}{nr}S + \frac{n^2 - m^2}{n(n-1) + m^2} T_{n-1} \right), \quad (5)$$

$$f_{n+1}(T_{n+1}) = \sigma^2 \rho \frac{a_n}{b_n} \left( H - \frac{1}{(n+1)r}S + \frac{(n+1)^2 - m^2}{(n+1)(n+2) + m^2} T_{n+1} \right), \quad (6)$$

$$f_n = \mu \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) + \mu' \frac{d}{dr} - \frac{\mu'}{r} + \sigma^2 \rho. \quad (7)$$

Здесь

$$x = S + \frac{P'}{\sigma^2 \rho}; \quad y = H + \frac{P}{\sigma^2 \rho r^2}, \quad (8)$$

$$P = \mu (S' - n(n+1)H). \quad (9)$$

Остальные уравнения (уравнение Пуассона и выражение для дивергенции смещений  $\delta$ ) имеют обычный для сфероидальных колебаний вид:

$$\delta = H' + \frac{2}{r}H - \frac{S}{r^2}; \quad \Delta R = 4\pi f (\rho\delta + \rho'H). \quad (10)$$

При  $\omega = 0$  уравнения (1)–(10) переходят в уравнения сфероидальных колебаний порядка  $n$  и крутильных — порядков  $n-1$  и  $n+1$ . Для оценки влияния малой вязкости на колебания ядра упростим задачу, приняв

$$\mu' = 0; \quad (\lambda + 2\mu) \frac{\rho'}{\rho^2} = W'. \quad (11)$$

Исключив из (8) и (9)  $S$  и  $H$ , получим уравнение

$$\left( \frac{P'}{\sigma^2 \rho} \right)' - n(n+1) \frac{P}{\sigma^2 \rho r^2} + \frac{P}{\mu} - (X' - n(n+1)y) = 0.$$

При малом  $\mu$  это уравнение легко приводится к однородному:

$$\left( \frac{\bar{P}'}{\sigma^2 \rho} \right)' - n(n+1) \frac{\bar{P}}{\sigma^2 \rho r^2} + \frac{\bar{P}}{\mu} = 0, \quad (12)$$

где

$$P = \bar{P} - \mu (X' - n(n+1)y). \quad (13)$$

Множитель при  $\mu$  можно считать известным из приближения  $\mu = 0$  (в уравнениях и граничных условиях). Тогда это уравнение разрешается отдельно. Еще два уравнения, разрешаемых по отдельности, получим из (5) и (6). После решения этих трех уравнений



останется разрешить систему четвертого порядка. Используем функции  $u_1 = (x - S) - (x - S)_0$ ,  $u_2 = y - y_0$ ,  $u_3 = R - R_0$ . Индексом «нуль» отмечены значения функций при  $\mu = 0$ .

Из (8) и (10) получаем

$$\delta + \frac{\rho'}{\rho} H = y' + \frac{2}{r} y - \frac{1}{r^2} x + \frac{\rho'}{\rho} y.$$

Поэтому имеем

$$\delta - \delta_0 = \frac{\rho'}{\rho} (H - H_0) = u'_2 + \left( \frac{2}{r} + \frac{\rho'}{\rho} \right) u_2 - \frac{1}{r^2} (u_1 + \bar{S} - \bar{S}_0). \quad (14)$$

Из (3) получаем

$$\left( \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \delta + R + W'H \right) - \left( \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \delta + R + W'H \right)_0 + \frac{\sigma^2}{n(n+1)} u_1 = 0.$$

Тогда (11) и (14) приводят (2), (3) и уравнение Пуассона к следующему виду:

$$\left. \begin{aligned} u'_1 &= n(n+1) (u_2 - \bar{H} - \bar{H}_0) \nu + \varepsilon_\rho W', \\ u'_2 + \left( \frac{2}{r} + \frac{\rho'}{\rho} \right) u_2 - \frac{1}{r^2} (u_1 + \bar{S} - \bar{S}_0) + \\ &+ \frac{\rho'}{W'} \left( u_3 + \frac{\sigma^2}{n(n+1)} u_1 \right) + \varepsilon_\rho = 0, \\ \Delta u_3 + 4\pi f \frac{\rho'}{W'} \left( u_3 + \frac{\sigma^2}{n(n+1)} u_1 \right) + 4\pi f \varepsilon_\rho &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Уравнения (15) имеют четвертый порядок. Они определяют  $S$ ,  $H$ ,  $R$  через  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$ , если известны функции  $\bar{S} - \bar{S}_0$  и  $\bar{H} - \bar{H}_0$ . Эти две функции формулами (1) выражаются через  $\delta\psi = \psi - \psi_0$  и  $\delta(\psi' - r\chi) = \psi' - r\chi - (\psi' - r\chi)_0$ .

Остается определить эти две функции. Из (5) и (6) при малом  $\mu$  получаем

$$f_{n-1}(\delta T_{n-1}) = \sigma^2 \rho a_{-n-1} \delta \left( \psi' - r\chi + \frac{n+1}{r} \psi \right) - \mu (\Delta T_{n-1})_0, \quad (16)$$

$$f_{n+1}(\delta T_{n+1}) = \sigma^2 \rho a_n \delta \left( \psi' - r\chi - \frac{n}{r} \psi \right) - \mu (\Delta T_{n+1})_0. \quad (17)$$

Решение этих уравнений далее используется для оценки влияния малой вязкости на упругие колебания ядра. При малых  $\mu$  возможно приближенное аналитическое решение, так как уравнения (12) и  $f_{n-1}(\bar{P}) = 0$ ;  $f_{n+1}(\bar{P}) = 0$ ;  $\bar{P}'' + \sigma^2 \rho \bar{P} / \mu = 0$  имеют одинаковые главные члены (с  $d^2/dr^2$  и  $1/\mu$ ). Поэтому

$$f_{n-1} \left( \delta H + \frac{1}{nr} \delta S \right) = -\frac{1}{n\sigma^2} f_{n-1} \frac{(Pr^n)'}{\rho r^n} + f_{n-1} \left( u_2 + \frac{1}{nr} u_1 \right) - \frac{1}{n} \frac{((P - \bar{P}) r^n)'}{r^{n+1}}. \quad (18)$$

Слагаемые с  $u_1$  и  $u_2$  можно включить в решение в следующем приближении. Функция  $\delta T_{n-1}$  выражается через  $\delta \left( \psi' - r\chi + \frac{n+1}{r} \psi \right)$  и  $\delta \left( H + \frac{1}{nr} S \right)$ , поэтому (17) позволяет рассматривать (16) как уравнение для определения  $\delta \left( \psi' - r\chi + \frac{n+1}{r} \psi \right)$ .

После исключения  $\delta T_{n-1}$  получаем

$$b_{-n-1}f_{n-1} \left[ \delta \left( \psi' - r\chi + \frac{n+1}{r}\psi \right) \right] = \frac{n^2 - m^2}{n(n-1) + m^2} \times \\ \times \left[ \sigma^2 \rho a_{-n-1} \delta \left( \psi' - r\chi + \frac{n+1}{r}\psi \right) - \mu (\Delta T_{n-1})_0 \right] - \frac{[(P - \bar{P})r^n]'}{nr^{n+1}}. \quad (19)$$

Пусть правильное решение однородного уравнения, получаемого из (19) при  $\mu = 0$ , таково:

$$\left[ \delta \left( \psi' - r\chi + \frac{n+1}{r}\psi \right) \right]_0 = (c \cos \tau)_{n-1}, \\ \tau_{n-1} = \left[ \frac{\sigma^2 \rho}{\mu} \left( 1 - \frac{a_{-n-1}}{b_{-n-1}} \frac{n^2 - m^2}{n(n-1) + m^2} \right) \right]^{1/2} (r - b) + \tau_{n-1}(b).$$

Тогда решение уравнения (19) представим так:

$$\delta \left( \psi' - r\chi + \frac{n+1}{r}\psi \right) = (c \cos \tau)_{n-1} - \frac{\mu}{\sigma^2 \rho b_{-n-1}} \times \\ \times \left[ \frac{n^2 - m^2}{n(n-1) + m^2} (\Delta T_{n-1})_0 - \frac{\{[S'_0 - n(n+1)H_0]r^n\}'}{nr^{n+1} \delta \left( \psi' - r\chi - \frac{n}{r}\psi \right)} \right]. \quad (20)$$

По этому образцу составляется уравнение для  $\delta \left( \psi' - r\chi + \frac{n}{r}\psi \right)$ . Из (1) следует, что

$$\left. \begin{aligned} \bar{S} - \bar{S}_0 &= \frac{n(n+1)}{2n+1} r \left[ a_{-n-1} \delta \left( \psi' - r\chi + \frac{n+1}{r}\psi \right) - a_n \delta \left( \psi' - r\chi - \frac{n}{r}\psi \right) \right], \\ \bar{H} - \bar{H}_0 &= \frac{n+1}{2n+1} a_{-n-1} \delta \left( \psi' - r\chi + \frac{n+1}{r}\psi \right) - \frac{n}{2n+1} a_n \delta \left( \psi' - r\chi - \frac{n}{r}\psi \right). \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Таким образом, свободные члены уравнений (15) определены. Заметим, что слагаемые, меняющие знак в малом интервале глубин (содержащие множители  $\cos \tau_{n-1}$  и  $\cos \tau_{n+1}$ ), в решение уравнений (15) войдут после интегрирования по  $r$  и таким образом получат большие делители. Поэтому  $u_1$ ,  $u_2$  и  $u_3$  стремятся к нулю вместе с  $\mu$ . Однако в  $x$ , а значит и в  $S$ , целиком войдет  $\bar{S} - \bar{S}_0$ . Функции  $R$  и  $H$ , в отличие от  $S$ , при малых  $\mu$  устойчивы, как  $u_2$  и  $u_3$ . При  $\mu = 0$  в уравнениях (15) нужно принять  $u_1 = u_2 = u_3 = \bar{S} - \bar{S}_0 = \bar{H} - \bar{H}_0 = 0$ . Тогда уравнения (15) превращаются в тождество.

Постоянные интегрирования, нужные для выполнения граничных условий, дают уравнения, определяющие  $H_0$ ,  $R_0$ ,  $S_0$ . Получим эти уравнения.

Из (5) получаем

$$(T_{n-1})_0 = \frac{a_{-n-1}}{b_{-n-1}} \left( H_0 + \frac{1}{nr} S_0 + \frac{n^2 - m^2}{n(n-1) + m^2} (T_{n-1})_0 \right)$$

или

$$(T_{n-1})_0 = \frac{a_{-n-1}}{\alpha_{-n-1}} \left( H_0 + \frac{1}{nr} S_0 \right) = a_{-n-1} \left( \psi' - r\chi + \frac{n+1}{r}\psi \right)_0,$$

где

$$\alpha_n = a_n + \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{\sigma^2}.$$

Из (1) получаем

$$S_0 - \bar{S}_0 = n(n+1) \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{\sigma^2} \psi_0; \quad H_0 - \bar{H}_0 = \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{\sigma^2} (\psi' - r\chi)_0.$$

Заменим  $\psi_0$  функцией  $\beta$ :

$$\psi_0 = r^n \beta + \int_0^r r \chi_0 dr.$$

Из выражений для  $(T_{n-1})_0$  и  $(T_{n+1})_0$  имеем

$$(T_{n+1})_0 = a_n \left( \psi' - r\chi - \frac{n}{r} \psi \right)_0.$$

Таким образом получаем

$$\left. \begin{aligned} S_0 &= \frac{n(n+1)r}{2n+1} \left( (2n+1) \alpha_{-n-1} \beta r^{n-2} + (\alpha_{-n-1} - \alpha_n) \frac{1}{r^2} \int_0^r r \chi_0 dr \right), \\ H_0 &= \left( \frac{n+1}{2n+1} \alpha_n + \frac{n}{2n+1} \alpha_{-n-1} \right) \beta' r^n + n \alpha_{-n-1} \beta r^{n-1}, \\ \delta_0 &= \left( \frac{n+1}{2n+1} \alpha_n + \frac{n}{2n+1} \alpha_{-n-1} \right) \left( \beta'' + \frac{2n+1}{r} \beta' - \frac{n(n+1)}{r^2} \int_0^r r \chi_0 dr \right) r^n. \end{aligned} \right\} (22)$$

Уравнение (3) при  $\mu = 0$  определяет  $z_0 = (4\omega^2 - \sigma^2) \psi_0$ .

Подстановка этих выражений в (4) дает

$$\begin{aligned} &\left( \frac{n+1}{2n+1} \alpha_n + \frac{n}{2n+1} \alpha_{-n-1} \right) \left( \beta'' + \frac{2n+2}{r} \beta' \right) + \frac{n \alpha_{-n-1} \rho'}{\rho r} \beta + \\ &+ r_0^{-n} R_0 = \frac{n(n+1)}{r^2} \left( \frac{n+1}{2n+1} \alpha_n + \frac{n}{2n+1} \alpha_{-n-1} + \frac{\alpha_n - \alpha_{-n-1}}{2n+1} \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\rho' r}{\rho} - \frac{(\sigma^2 - 4\omega^2)}{n(n+1)} \frac{\rho' r^2}{\rho W'} \right) \int_0^r r \chi_0 dr, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} R_0'' + \frac{2}{r} R_0' - \frac{n(n+1)}{r^2} R_0 - 4\pi f \frac{\rho'}{W'} [R_0 + (\sigma^2 - 4\omega^2) r^n \beta] = \\ = 4\pi f (\sigma^2 - 4\omega^2) \frac{\rho'}{W'} \int_0^r r \chi_0 dr, \end{aligned} \quad (24)$$

$$(\sigma^2 - 4\omega^2) r \chi_0 = \left( \frac{\rho'}{\sigma^2} (\lambda + 2\mu) - W' \delta_0 \right). \quad (25)$$

Уравнения (22)–(25) определяют  $H_0$ ,  $\delta_0$ ,  $R_0$  в жидком ядре при заданной функции  $\rho$ . Если затем принимается  $\mu \neq 0$ , то  $H_0$ ,  $\delta_0$ ,  $R_0$  вычисляются с этим  $\mu$ , а затем из уравнений

(15) определяются  $u_1$ ,  $u_2$  и  $u_3$ . Тогда

$$H = H_0 + \frac{\mu}{\sigma^2 \rho r^2} (S'_0 - n(n+1)H_0) - \frac{\bar{P}}{\sigma^2 \rho r^2},$$

$$R = R_0 + u_3,$$

$$\delta = \delta_0 - \frac{\mu}{\sigma^2 \rho r^2} \frac{\rho'}{\rho} (S'_0 - n(n+1)H_0) - \frac{\rho'}{\rho} u_2 - \frac{\rho'}{\rho^2} \frac{\bar{P}}{\sigma^2 r^2}.$$

Функция  $(\bar{P}/\mu)_0 = S'_0 - n(n+1)H$  при приближении  $\mu$  к нулю имеет конечный предел. Таким образом, у функций  $H$ ,  $R$ ,  $S$  слагаемые, меняющие знак на малом интервале глубин, стремятся к нулю по мере уменьшения этого интервала до нуля. У функций  $S$ ,  $T_{n-1}$ ,  $T_{n+1}$ ,  $\psi$  такие слагаемые имеют конечную амплитуду.

В вязком ядре при замене  $\mu$  символом  $\nu \frac{d}{dt}$  из-за сдвига фазы нужно принять

$$P(t) = \bar{P}_c \cos(\sigma t - m\varphi) + \bar{P}_s \sin(\sigma t - m\varphi),$$

$$\mu P(t) = -\sigma \nu P_c \sin(\sigma t - m\varphi) + \sigma \nu \bar{P}_s \cos(\sigma t - m\varphi).$$

Для функции  $P(r)$  при малых  $\nu$  приближенно получаем

$$\bar{P}'_c(b) = \sqrt{\frac{\sigma \rho}{2\nu}} (\bar{P}_c(b) - \bar{P}_s(b)), \quad \bar{P}'_s(b) = \sqrt{\frac{\sigma \rho}{2\nu}} (\bar{P}_c(b) + \bar{P}_s(b)).$$

Если  $r$  не близко к  $b$ , то главными являются слагаемые, происходящие от сил Кориолиса. Эти слагаемые приводят к диссипации энергии на всех глубинах.

При колебании с параметрами  $n = 2$ ,  $m = 1$  ось вращения Земли совершает нутационное движение. Поэтому уравнения колебания составляются в системе координат, которая вместе с Землей не только вращается, но еще движется относительно среднего положения по конусу с амплитудой  $\varepsilon$ . Инерционные члены от нутации добавляются к потенциалу внешних сил  $\kappa V_e(r) P_2^1(\cos \theta) \cos(\sigma t - \varphi) (\kappa V_e(r)) - \varepsilon \omega (\sigma + \omega) r^2 P_2^1(\cos \theta) \cos(\sigma t - \varphi)$  и к инерционным силам по оси  $\theta = 0$   $\sigma^2 \rho \omega - 2\varepsilon \omega \sigma (x \cos \sigma t + y \sin \sigma t)$ . Амплитуда  $\varepsilon$  определяется условием сохранения кинетического момента.

В вязком ядре возникает сдвиг фазы нутации (амплитуд  $\varepsilon_c$ ,  $\varepsilon_s$ ), фазы смещений и кинетического момента, вызывающий уменьшение амплитуды вынужденной нутации и затухание свободной. Вблизи границы ядра сдвиг велик, но быстро убывает с глубиной по экспоненте. На всех глубинах силы Кориолиса вызывают малый сдвиг фазы, приводящий к диссипации энергии.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Молоденский М.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения элементарного колебания упругой вращающейся Земли. // Известия АН СССР. Физика Земли. 1977. № 7. С.9–15.
2. *Молоденский М.С.* Приливы и собственные колебания Земли с учетом сил Кориолиса. // Известия АН СССР. Физика Земли. 1976. № 1. С.3–12.

# ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ ЗЕМЛИ\*

## ВВЕДЕНИЕ

Элементы пространственного ориентирования Земли (углы прецессии, нутации и собственного вращения, ориентирующие систему координат, связанную с Землей, относительно неподвижной системы отсчета), как выяснил Леонард Эйлер в 1765 г. [1], нельзя отделить от составляющих движения полюса по земной поверхности, располагая только результатами измерений и не привлекая динамическую теорию вращения Земли. На основе теории движения свободных твердых тел, которую Эйлер разрабатывал с 1744 г. [2], он впервые рассмотрел вопрос совместного определения пространственного ориентирования Земли и движения полюса [3].

Теория вращения Земли постоянно развивалась, однако, как показали проведенные недавно радиоинтерферометрические эксперименты, еще недостаточно совершенен способ расчета нутации.

В высокоточных современных наблюдениях заметны приливные влияния. Полностью ли учитываются эти влияния на основе принятого на практике статического подхода, не будут ли следствием неточного учета приливных влияний определяемые движения обсерваторий и выводы о неприливных изменениях силы тяжести порядка  $1 \cdot 10^{-8}$  м/с<sup>2</sup> и тем более порядка  $1 \cdot 10^{-11}$  м/с<sup>2</sup>? Для ответа на эти вопросы необходима точная теория приливов.

Существенное повышение точности измерений, обеспечиваемое современной техникой, может давать эффект только при использовании столь же точной теории вращения и колебаний Земли. Развитие такой теории является одной из актуальных задач современной науки.

Предлагаемая вниманию читателя книга посвящена общей теории упругих колебаний Земли с жидким ядром, причем колебания заранее не разделены на сфероидальные и крутильные, а граничные условия могут иметь самый общий вид. Кроме того, в уравнения включены силы Кориолиса для учета вращения системы координат, связанной с Землей. Это делает результаты применимыми при возбуждении колебаний на самых низких частотах, когда силы Кориолиса имеют основное значение. При этом возможно непрерывное уменьшение модуля сдвига до нуля, что соответствует жидкому ядру. Таким образом, единой системой уравнений и единым методом исследования можно охватить колебания всех видов и всех частот, в том числе вынужденную и свободную нутацию оси вращения Земли.

В начале книги рассматривается простейший случай сферически-симметричного строения Земли. При радиальном смещении, объемном расширении и изменении потенциала, пропорциональных присоединенному полиному Лежандра с параметрами  $n$  и  $m$ , для простого колебания с частотой  $\sigma$  решение представлено системой обыкновенных дифференциальных уравнений, сложное колебание — суммой таких элементарных колебаний. Лунно-солнечные приливы и свободные (собственные) колебания могут быть представлены одним элементарным колебанием. В наиболее сложных случаях принимают во внимание возбуждение колебаний порядков  $n - 2$  и  $n + 2$ . Затем задача решается в условиях, близких к условиям реальной Земли: поверхности равных модулей упругости

\* Общая теория упругих колебаний Земли. — М.: Недра. 1989. С. 3–79.

и плотности мало отличаются от сферической формы; поверхности Земли и разрыва плотности и модулей упругости отличаются на малые (по отношению к радиусу Земли) величины от сферических; ядро Земли обладает малой вязкостью. В этих случаях решение для простейшего колебания требует малого изменения, определяемого методом возмущений. Оказалось возможным не возвращаться к уравнениям в частных производных, а выразить решение обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Теория упругих колебаний Земли стала широко применяться после того, как были достаточно точно измерены частоты более чем тысячи свободных колебаний разных типов. В результате получены надежные ответы на наиболее трудные вопросы глубинного строения Земли.

В книге обобщены некоторые результаты более ранних работ автора [4–10].

Это дает возможность от начала до конца ознакомиться с теорией упругих колебаний Земли. В частности, §4 содержит вывод преобразованных к простейшей форме уравнений в частных производных и граничных условий, в которые вместо тангенциального смещения входит дивергенция тангенциального смещения. В §5 дифференциальные уравнения выражены через вспомогательные функции  $\Phi$  и  $P$  (вместо  $M$  и  $N$ ), используемые в следующих параграфах, публикуемых впервые. Применяется простая запись неправильных интегралов<sup>1</sup>, позволяющая при обращении матрицы, составленной из частных интегралов, понизить ее порядок в два раза. На поверхности Земли граничные условия для исходных и сопряженных уравнений связаны простыми соотношениями.

В §6 использованы выражения для смещений, включающие производные от смещений по времени. Это позволило уравнения в частных производных заменить системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрено приложение результата к расчету суточной нутации. В §7 получены простые выражения для вычисления сопряженных функций без обращения матрицы. В матрице, составленной из значений на поверхности пяти правильных частных интегралов, входящих в пять независимых частных интегралов, десять элементов можно выразить через остальные пятнадцать. Выведено условие ортогональности собственных функций, вычисленных с включением сил Кориолиса.

Некоторые обозначения, употреблявшиеся в ранее опубликованных статьях, в данной книге изменены для удобства использования всех ее разделов.

Исследования и эксперименты проводились в Институте физики Земли АН СССР.

Автор выражает глубокую благодарность М.И.Юркиной за неоценимую помощь при подготовке рукописи к изданию.

### ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Точка над буквой — символ дифференцирования по времени  $t$ , штрих — символ дифференцирования по радиусу-вектору  $r$ ; черта над буквой — в некоторых случаях символ сопряженной функции. Функции без нижнего индекса зависят от сферических координат  $\vartheta$ ,  $\varphi$ ,  $r$ , с нижним индексом  $n$  — только от расстояния  $r$  до центра земной сферы.

$\Delta$  — оператор Лапласа,

$\Lambda$  — объемное расширение,  $\Lambda_n$  — функция от  $r$ , его определяющая,

$M$  — дивергенция тангенциального к поверхности  $r = \text{const}$  напряжения (140)<sup>2</sup>,

$P$  — гидростатическое давление,

$\rho_n^m$  — присоединенный полином Лежандра степени  $n$  и порядка  $m$ ,

$T$  — вспомогательная функция расстояния  $r$  (141), (143),  $T_{n-1}$ ,  $T_{n+1}$  (141),

$\Phi$  — вспомогательная функция (89),

<sup>1</sup>Правильным интегралом решения системы дифференциальных уравнений названа функция, ограниченная в центре Земли.

<sup>2</sup>В скобках указаны номера формул, в которых впервые встречается данное обозначение.

$X$  — вспомогательная функция (57),  
 $\Psi$  — вспомогательная функция (57) (ее определение в §3 отлично от определения в §7 и §10),  
 $\Psi^*$  — вспомогательная функция (142),  
 $\alpha$  — сжатие земного эллипсоида,  
 $\vartheta$  — полярное расстояние от направления оси вращения Земли,  
 $\kappa$  — амплитуда потенциала  $V_e$ ,  
 $\lambda, \mu$  — коэффициенты упругости Ламе,  
 $\nu$  — вспомогательное обозначение (138) или коэффициент вязкости (§10),  
 $\rho$  — плотность после деформации,  $\rho_0$  — невозмущенная плотность,  
 $\sigma$  — частота приливообразующей силы и свободного колебания,  $\sigma_0$  — приближенное значение,  
 $\varphi$  — долгота,  
 $\chi, \psi$  — функции, через которые выражены смещения (56),  
 $\omega$  — угловая скорость вращения Земли,  $\omega$  отличается от модуля угловой скорости вращения Земли только из-за влияния нутации,  
 $G$  — гравитационная постоянная,  
 $H$  — функция, определяющая радиальную компоненту смещения (16),  
 $H_W$  — функция, характеризующая компоненту смещения по нормали к уровенной поверхности,  
 $H_r$  — функция, определяющая радиальную компоненту (обозначение введено для отличия от  $H_W$ ),  
 $M$  — тангенциальная компонента напряжения (30),  
 $M_x, M_y, M_z$  — проекции тангенциальной компоненты напряжения на оси координат,  
 $N = \Lambda\lambda + 2\mu H'$  (29);  $N_W$  — нормальная к поверхности сферической Земли компонента напряжения,  $N_x, N_y, N_z$  — компоненты нормального напряжения по осям координат,  

$$P = -Mr^2 + \frac{2}{r}\mu S - 2n(n+1)\mu H,$$

$$\bar{P} = P + \mu(S'_0 - n(n+1)H_0),$$

$$Q = (R' - 4\pi\rho GH)r + (n+1)R = \frac{L}{r} + (n+1)R,$$
 $R$  — функция, определяющая изменение потенциала притяжения внешней силой и деформацией Земли (21),  
 $S$  — дивергенция тангенциального смещения,  $S = (Hr^2)' - \Lambda r^2$  (89), при  $\mu = 0$   $S = S_0$ ,  $\bar{S}$  (141),  
 $T$  — функция расстояния  $r$ , определяющая тангенциальное смещение (20),  
 $V_e$  — потенциал внешней силы,  
 $V_i$  — изменение потенциала притяжения Земли из-за деформации,  
 $a$  — радиус земной сферы,  
 $b$  — радиус земного ядра,  
 $g$  — ускорение силы тяжести на поверхности земной сферы, в §7 — вспомогательная функция  $g = \mu(T_{n-1}/r)'$ ,  
 $r$  — расстояние до центра земной сферы,  
 $\mathbf{r}$  — радиус-вектор (34),  
 $t$  — время,  
 $u, v, w$  — компоненты смещения точки при деформации,  
 $x, y, z$  — декартовы прямоугольные координаты точки после деформации,  
 $x_0, y_0, z_0$  — координаты точки до деформации.

## §1. Деформация упругой, неоднородной, сжимаемой и гравитирующей сферы

Состояние земной сферы при отсутствии деформирующей силы определено коэффициентами  $\lambda$  и  $\mu$  упругости Ламе, плотностью  $\rho_0$  и шестью компонентами начального напряжения  $X_x, Y_y, Z_z, X_y, Y_z, Z_x$  в каждой точке сферы [4]. В последующем будет рассмотрен случай, когда  $\lambda, \mu$  и  $\rho_0$  зависят только от расстояния  $r$  до центра сферы, а начальные напряжения имеют гидростатический характер, т.е.

$$\text{grad}(\lambda, \mu, \rho_0) = \frac{d(\lambda, \mu, \rho_0)}{dr}; \quad (1)$$

$$X_y = Y_z = Z_x = 0; \quad X_x = Y_y = Z_z = P. \quad (2)$$

Будем полагать, что внешняя деформирующая сила имеет потенциал  $V_e$ , внутри сферы  $V_e$  является однородным гармоническим многочленом степени  $n$  от прямоугольных координат  $x, y, z$  (начало системы координат совмещено с центром сферы). Следовательно,

$$\Delta V_e = \frac{\partial^2 V_e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_e}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_e}{\partial z^2} = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial V_e}{\partial x} x + \frac{\partial V_e}{\partial y} y + \frac{\partial V_e}{\partial z} z = nV_e. \quad (4)$$

Из-за смещения и объемного расширения или сжатия элементов массы при деформации начальный потенциал  $W_0$  сферы изменяется на величину  $V_i$ . После деформации он будет равен

$$U = W_0 + V_e + V_i. \quad (5)$$

Точка с координатами  $x_0, y_0, z_0$  при деформации получает смещения  $u, v, w$ , тогда ее новые координаты

$$x = x_0 + u; \quad y = y_0 + v; \quad z = z_0 + w.$$

Деформация вызывает изменение объема и плотности. Объемное расширение равно

$$\Lambda = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (6)$$

Элемент массы после деформации имеет новую плотность

$$\rho = \rho_0 (1 - \Lambda). \quad (7)$$

В точке с координатами  $x, y, z$  после деформации окажется элемент массы, находившийся в точке с координатами  $x - u, y - v, z - w$ , поэтому

$$\rho(x, y, z) = \rho_0(x - u, y - v, z - w) (1 - \Lambda). \quad (8)$$

Начальные напряжения  $X_x, Y_y, Z_z$  элемента массы в его исходном положении  $x - u, y - v, z - w$ , добавочные напряжения, которые возникают от деформации этого элемента и могут быть выражены через смещения  $u, v, w$  и коэффициенты упругости  $\lambda$  и



$\mu$ , составляют напряжения  $\bar{X}_x, \bar{Y}_y, \bar{Z}_z, \bar{X}_y, \bar{Y}_z, \bar{Z}_x$  в точке с координатами  $x, y, z$  после деформации. Результирующее напряжение с достаточной точностью можно получить простым сложением обеих указанных частей. Используя (2), получаем

$$\begin{aligned} \bar{X}_x(x, y, z) &= X_x(x - u, y - v, z - w) + \Lambda\lambda + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}; \\ \bar{X}_y(x, y, z) &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right); \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (9)$$

Равенства (5), (6), (8) и (9) выражают состояние деформированной сферы через величины, зависящие от ее начального состояния и смещений. Дифференциальные уравнения, определяющие смещения, можно получить из условий равновесия сферы до и после деформации. До деформации, в соответствии с допущением (2) о гидростатическом характере начальных напряжений, выполняются три условия равновесия следующего вида:

$$\rho_0(x, y, z) \frac{\partial W_0(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial X_x(x, y, z)}{\partial x} = 0. \quad (10)$$

После деформации

$$\rho(x, y, z) \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial \bar{X}_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial \bar{X}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{X}_z}{\partial z} = 0. \quad (11)$$

Исключая из шести уравнений (10) и (11) и шести уравнений (9) все девять компонент напряжений (три начальных, шесть после деформации), получаем три уравнения для определения трех компонент смещения:

$$\begin{aligned} \rho(x, y, z) \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} - \rho_0(x - u, y - v, z - w) \frac{\partial W_0(x - u, y - v, z - w)}{\partial x} + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left( \Lambda\lambda + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Остальные два уравнения можно написать аналогично. С помощью (5) и (8) исключаем  $U$  и  $\rho$  из этих уравнений. Тогда первые два члена в (12) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \rho_0(x - u, y - v, z - w) (1 - \Lambda) \frac{\partial}{\partial x} [W_0(x, y, z) + V_e + V_i] - \\ - \rho_0(x - u, y - v, z - w) \frac{\partial W_0(x - u, y - v, z - w)}{\partial x} = \rho_0(x - u, y - v, z - w) \times \\ \times \left[ \frac{\partial W_0(x, y, z)}{\partial x} - \frac{\partial W_0(x - u, y - v, z - w)}{\partial x} + \frac{\partial (V_e + V_i)}{\partial x} - \Lambda \frac{\partial W_0}{\partial x} \right], \end{aligned}$$

где  $V_e$  и  $V_i$  — малые величины порядка смещений (членами порядка квадрата смещения пренебрегаем).

В теории приливов потенциал принято разлагать на элементарные колебания типа

$$V_e = \sum V_n = \sum \kappa_{nm} \tau_{nm} r^n, \quad (13)$$

где  $\kappa_{nm}$  — амплитуда гармоники  $V_n$  потенциала  $V_e$ ;

$$\tau_{nm} = \rho_n^m (\cos \vartheta) \cos(\sigma t - m\varphi). \quad (14)$$

Для простоты записи индекс  $m$  в обозначении (14) будем опускать. В этом параграфе (при рассмотрении статического прилива)  $\sigma = 0$  и, соответственно,

$$W_0(x, y, z) - W_0(x - u, y - v, z - w) = \frac{\partial W_0}{\partial x} u + \frac{\partial W_0}{\partial y} v + \frac{\partial W_0}{\partial z} w = \\ = \frac{dW_0}{dr} \sum \tau_n H_n, \quad (15)$$

где

$$\sum \tau_n H_n r = ux + vy + wz = Hr, \quad (16)$$

$H_n$  — функция расстояния  $r$ . Для влияния гармоники степени  $n$ , опуская иногда этот индекс, вместо (12) получаем

$$\rho_0 \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( V_e + V_i + \tau_n H_n \frac{dW_0}{dr} \right) - \Lambda \frac{x}{r} \frac{dW_0}{dr} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left( \Lambda \lambda + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] = 0. \quad (17)$$

Наконец, после дифференцирования и преобразований имеем

$$\rho_0 \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( V_e + V_i + \tau_n H_n \frac{dW_0}{dr} \right) - \Lambda \frac{x}{r} \frac{dW_0}{dr} \right] + (\lambda + \mu) \frac{\partial \Lambda}{\partial x} + \mu \Delta u + \\ + \Lambda \frac{x}{r} \frac{d\Lambda}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d\mu}{dr} \left( \frac{\partial \tau_n H_n r}{dx} - u + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0. \quad (18)$$

В три уравнения типа (18) кроме компонент смещения  $u$ ,  $v$  и  $w$  входит неизвестная функция  $V_i$ , связанная с изменением плотности уравнением Пуассона:

$$\Delta V_i = \Delta U - \Delta W_0 = 4\pi G [\rho_0(x, y, z) - \rho(x, y, z)].$$

С помощью (8) и (16) получаем

$$\Delta V_i = 4\pi G [\rho_0(x, y, z) - (1 - \Lambda) \rho_0(x - u, y - v, z - w)] = \\ = 4\pi G \left( \Lambda \rho_0 + \tau_n H_n \frac{d\rho_0}{dr} \right). \quad (19)$$

Уравнения (18) и (19) вместе с условиями на поверхности сферы и в ее центре (или на сферическом слое) определяют состояние сферы (или сферического слоя) после деформации. Граничные условия будут рассмотрены ниже.

Систему уравнений в частных производных (18) и (19) можно привести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений методом Лява [11, 12], представив  $V_e$  как

$$\bar{V}_e = V_e a^{n-1} / g = \tau_n r^n.$$

Будем искать решение в виде

$$\begin{aligned} u &= \sum u_n; & u_n &= \tau_n H_n \frac{x}{r} + T_n \frac{\partial}{\partial x} \tau_n; \\ v &= \sum v_n; & v_n &= \tau_n H_n \frac{y}{r} + T_n \frac{\partial}{\partial y} \tau_n; \\ w &= \sum w_n; & w_n &= \tau_n H_n \frac{z}{r} + T_n \frac{\partial}{\partial z} \tau_n; \end{aligned} \quad (20)$$

$$V_e + V_i = R = \sum_0^{\infty} \tau_n R_n. \quad (21)$$

Неизвестные функции  $R_n$ ,  $T_n$  так же, как  $H_n$ , зависят только от  $r$  (в вычислениях на основе этого метода удобно выбрать систему единиц так, чтобы отношение  $a^{n-1}/g$  численно было равно единице, а  $G = 3/4\pi$ ).

Как отмечено выше, радиальное смещение пропорционально  $H_n$ , изменение потенциала —  $R_n$ , функция  $T_n$  — компоненте тангенциального смещения.

Из (6) с помощью (3) и (4) получаем

$$\Lambda = \sum_0^{\infty} \Lambda_n \tau_n, \quad (22)$$

$$\Lambda_n = H'_n + \frac{2}{r} H_n - \frac{n(n+1)}{r^2} T_n. \quad (23)$$

Далее, опуская индекс  $n$ , запишем:

$$\begin{aligned} \Delta u &= (T'' - H' + \Lambda) \frac{\partial \tau}{\partial x} + \left[ (n+1)T' - (n+1)H + \frac{r^2}{n} \Lambda' \right] \frac{nx}{r^3} \tau; \\ x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} &= (rT' - T) \frac{\partial \tau}{\partial x} + H' x \tau; \\ \frac{\partial \tau H r}{\partial x} - u + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} &= (rT' - 2T + Hr) \frac{\partial \tau}{\partial x} + 2H' x \tau. \end{aligned} \quad (24)$$

Подставив (24) и (22) в уравнение (18), будем иметь

$$\begin{aligned} &\left[ \rho_0 (R + HW'_0) + (\lambda + 2\mu) \Lambda - \mu H' + \mu' \left( T' + H - \frac{2}{r} T \right) + \mu T'' \right] \frac{\partial \tau}{\partial x} + \\ &+ \left[ (R' + H'W'_0 + HW''_0 - \Lambda W'_0) \rho_0 + n(n+1)\mu \frac{T' - H}{r^2} + \right. \\ &\quad \left. + \Lambda \lambda' + 2\mu' H' + (\lambda + 2\mu) \Lambda' \right] \frac{G\tau}{r} = 0. \end{aligned}$$

Замена  $x$  на  $y$  и  $z$  приводит к двум другим уравнениям. Необходимое и достаточное условие удовлетворения всех трех уравнений при  $n \neq 0$  — обращение в нуль выражений в квадратных скобках. Следовательно, функции  $H$ ,  $R$ ,  $T$  должны удовлетворять двум обыкновенным:

$$- \left[ \mu \left( H + T' - \frac{2}{r} T \right) \right]' = \rho_0 (R + HW'_0) + \Lambda \lambda + \frac{2\mu}{r} \left[ 2H + T' - \frac{n^2 + n + 1}{r} T \right], \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
-(\Lambda\lambda + 2\mu H')' = \rho_0 (R + HW_0')' - \Lambda\rho_0 W_0' + 4\frac{\mu}{r} \left( H' - \frac{H}{r} \right) - \\
- \frac{n(n+1)}{r^2} \mu \left( T' + H - \frac{4T}{r} \right). \quad (26)
\end{aligned}$$

Четвертое уравнение в частных производных (19) с учетом (1), (3) и (4) примет вид

$$\Delta V_i = \Delta (\tau_n R_n) = 4\pi G (\Lambda_n \rho_0 + \rho_0' H_n) \tau_n.$$

После преобразований и сокращения на  $\tau_n$  получим обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$R'' = -\frac{2}{r} R' + \frac{n(n+1)}{r^2} R + 4\pi G (\Lambda \rho_0 + \rho_0' H). \quad (27)$$

Уравнения (25), (26) и (27) вместе с граничными условиями, которые будут получены ниже, определяют вспомогательные функции  $H$ ,  $R$ ,  $T$ .

В последующих задачах часть граничных условий определена напряжением на поверхности сферы. Компоненту  $N_x$  этого напряжения на оси  $x$  можно определить из (9):

$$\begin{aligned}
N_x = \bar{X}_x \frac{x}{r} + \bar{X}_y \frac{y}{r} + \bar{X}_z \frac{z}{r} = X_x (x - u, y - v, z - w) \frac{x}{r} + \Lambda\lambda \frac{x}{r} + \\
+ \frac{\mu}{r} \left( \frac{\partial \tau H r}{\partial x} - u + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} \right),
\end{aligned}$$

или на основании (23) и (24):

$$N_x = X_x (x - u, y - v, z - w) \frac{x}{r} + (\Lambda\lambda + 2\mu H') \frac{x\tau}{r} + \mu \left( T' - \frac{2}{r} T + H \right) \frac{\partial \tau}{\partial x}. \quad (28)$$

Отсюда для нормальной компоненты  $N_W$  получим

$$N_W(x, y, z) = N_x \frac{x}{r} + N_y \frac{y}{r} + N_z \frac{z}{r} = N_W(x - u, y - v, z - w) + \tau N,$$

где

$$N = \Lambda\lambda + 2\mu H' = (\lambda + 2\mu) H' + \lambda \left( \frac{2}{r} H - \frac{n(n+1)}{r^2} T \right). \quad (29)$$

Исключая из  $N_x$  нормальную компоненту, определим проекции тангенциальной компоненты  $M$  напряжения по осям координат:

$$M_x = N_x r^2 - N_W(x, y, z) r x = M r \frac{\partial \tau}{\partial x}, \quad (30)$$

где

$$M = \mu \left( T' - \frac{2}{r} T + H \right).$$

Граничные условия для потенциала деформированной сферы получим, используя известные свойства потенциала притяжения. Функцию (21), выражающую изменение потенциала сферы, с достаточным приближением можно рассматривать как сумму потенциала

объемной массы и простых сферических слоев на границах разрыва плотности (на поверхности сферы, на границе ядра и др.). Имея в виду различия в аналитических свойствах потенциала притяжения внешних и внутренних масс, разобьем потенциал  $V_e + V_i$  на три части:  $V_H$ , создаваемую наружными (объемной и поверхностной) массами, лежащими вне сферы  $r = b$ ,  $V_B$ , создаваемую массой внутри этой сферы, и  $V_C$ , создаваемую простым слоем на этой же сфере. Плотность этого слоя равна  $(\rho_i - \rho_e)H\tau$ , где  $\rho_e, \rho_i$  — объемная плотность на внешней и внутренней поверхности сферы  $r = b$ . Если при  $r = b$  плотность непрерывна, то  $\rho_e - \rho_i = 0$  и  $V_C = 0$ .

Таким образом,

$$V_e + V_i = V_H + V_B + V_C;$$

внутри сферы ( $r = b$ )

$$V_H = V_H(b) \frac{r^n}{b^n}; \quad V_C = V_C(b) \frac{r^n}{b^n};$$

вне сферы ( $r = b$ )

$$V_B = V_B(b) \frac{r^{n+1}}{b^{n+1}}; \quad V_C = V_C(b) \frac{r^{n+1}}{b^{n+1}}.$$

Производные от потенциала объемной массы непрерывны, поэтому

$$\left[ \frac{\partial}{\partial r} (V_e + V_i) \right]_{b-0} = \frac{n}{b} (V_H + V_C) - \frac{n+1}{b} V_B = \frac{2n+1}{b} (V_H + V_C) - \frac{n+1}{b} (V_e + V_i).$$

Потенциал слоя запишем следующим образом:

$$V_C = \frac{4\pi G}{2n+1} (\rho_i - \rho_e) H \frac{V_e}{b^{n-1}},$$

следовательно, будем иметь

$$\left[ \frac{\partial}{\partial r} (V_e + V_i) \right]_{b-0} = -\frac{n+1}{b} (V_e + V_i) + \frac{2n+1}{b} V_H + 4\pi G (\rho_i - \rho_e) H\tau; \quad (31)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial r} (V_e + V_i) \right]_{b-0} - \left[ \frac{\partial}{\partial r} (V_e + V_i) \right]_{b+0} = 4\pi G (\rho_i - \rho_e) H\tau. \quad (32)$$

Уравнение (32) следует из формулы Пуассона. Подставив (21) в (32), получим

$$(R')_{b-0} - (R')_{b+0} = 4\pi G (\rho_i - \rho_e) H. \quad (33)$$

Для поверхности Земли ( $r = a$ ) имеем  $\rho_e = 0$ ,  $V_H = V_e$  и, используя формулу (31), запишем

$$(R')_{a-0} = -\frac{n+1}{a} R + 4\pi\rho_0 GH + (2n+1)g.$$

## §2. Уравнения в частных производных, определяющие суточные земные приливы и нутацию Земли

Уравнения упругости при существовании потенциала объемных сил имеют следующий вид:

$$\rho \frac{D\mathbf{r}}{Dt} = \rho \text{grad}U = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial z}, \quad (34)$$

где  $\frac{D}{Dt}$  означает дифференцирование по времени в неподвижной системе координат;  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор текущей точки  $x, y, z$ ;  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$  — векторы давления, действующие на элементы плоскости  $yz, zx$  или  $xy$ ;

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial}{\partial y} + \dot{z} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Точка над буквой означает частную производную по времени  $t$ .

В системе координат, вращающейся с угловой скоростью  $\omega$ , левую часть уравнения (34), включая силы Кориолиса, можно преобразовать к виду [13]:

$$\frac{D\dot{\mathbf{r}}}{Dt} = \frac{\tilde{D}}{Dt} [\dot{\mathbf{r}} + [\omega\mathbf{r}]] + [\omega [\dot{\mathbf{r}} + [\omega\mathbf{r}]]] = \frac{\tilde{D}\dot{\mathbf{r}}}{Dt} + 2 [\omega\dot{\mathbf{r}}] + [\dot{\omega}\mathbf{r}] + (\omega\mathbf{r})\omega - \omega^2\mathbf{r}. \quad (35)$$

Волнистая черта над буквой означает, что производная по времени взята в подвижной системе координат. Если смещения малы, то

$$\frac{\tilde{D}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}, \quad (36)$$

так как произведения скорости смещения на деформации — малые второго порядка.

Аналогично (5) при исследовании приливов и нутации в потенциал  $U$  включены: гравитационный потенциал  $W_0$  всех масс Земли, потенциал  $V_e$  приливообразующей силы и потенциал  $V_i$  от деформации Земли. Потенциал  $V_e$  в подвижной системе координат представим в виде

$$V_e = \kappa_{2m} \tau_2 r^2. \quad (37)$$

Для суточного прилива  $m = 1$ , для полусуточного  $m = 2$ , для двухнедельного  $m = 0$ .

В подвижной системе координат выразим

$$\omega = \omega (\varepsilon i \cos \sigma t + \varepsilon j \sin \sigma t + \mathbf{k}), \quad (38)$$

где  $\varepsilon$  — амплитуда нутации. В этом случае из (35) и (36) получаем

$$\begin{aligned} \frac{D\dot{x}}{Dt} &= \ddot{u} - 2\omega\dot{v} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \Omega + \frac{\sigma + \omega}{\omega} \Phi \right); \\ \frac{D\dot{y}}{Dt} &= \ddot{v} + 2\omega\dot{u} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \Omega + \frac{\sigma + \omega}{\omega} \Phi \right); \\ \frac{D\dot{z}}{Dt} &= \ddot{w} + \frac{2\sigma}{\omega} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \Omega + \frac{\sigma + \omega}{\omega} \Phi \right), \end{aligned} \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi &= -\varepsilon \omega^2 l z \cos(\sigma t - \varphi); \\ \Omega &= \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) = \frac{1}{2} \omega^2 l^2; \end{aligned} \quad (40)$$

$u, v, w$  — смещения в подвижной системе координат.

Как в статическом случае (§1), для определения начальных напряжений необходимо допустить, что в поле постоянно действующих сил с потенциалом  $W = W_0 + \Omega$  напряжения носят гидростатический характер, т.е.

$$\rho_0 \text{grad} W = \text{grad} P, \quad (41)$$

где  $P$  — гидростатическое давление при  $V_e = V_i = 0$ . Теперь преобразуем правую часть уравнения (34), предварительно записав ее в виде суммы:

$$\begin{aligned} \rho \text{grad}U + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial z} = \\ = -\rho \text{grad}\Omega + [\rho \text{grad}W - \text{grad}P(x - u, y - v, z - w)] + \\ + \left[ \text{grad}P(x - u, y - v, z - w) + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial z} \right]. \end{aligned}$$

Первый член перенесем в левую часть уравнения. Второй член преобразуем, воспользовавшись (41) и приняв во внимание изменение плотности при деформации по (8). Получаем

$$\begin{aligned} \rho \text{grad}W - \text{grad}P(x - u, y - v, z - w) = \\ = \rho_0 (1 - \Lambda) \text{grad}W(x + u, y + v, z + w) - \text{grad}P = \\ = \rho \text{grad}(V_e + V_i + \eta) - \Lambda \rho \text{grad}W, \quad (42) \end{aligned}$$

где

$$\eta = \frac{\partial W}{\partial x}u + \frac{\partial W}{\partial y}v + \frac{\partial W}{\partial z}w. \quad (43)$$

Последний член в (42) можно выразить через смещения при помощи уравнений упругости (§1). По-прежнему считаем, что поверхности постоянных потенциалов, плотностей и коэффициентов упругости  $\lambda$  и  $\mu$  совпадают. Однако теперь эти поверхности принимаем не сферическими, а сфероидальными, которые определены теорией равновесия вращающейся неоднородной планеты. Сохраняя силы Кориолиса, запишем

$$\begin{aligned} \ddot{u} - 2\omega\dot{v} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} + \left(\frac{\Lambda'\lambda}{\rho^2 W'} - 1\right)\Lambda\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\left(\Delta u + \frac{\partial\Lambda}{\partial x}\right) + \\ + \frac{\mu'}{\rho W'}\left[u'W' + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial z}\right] = F_u; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{v} + 2\omega\dot{u} = -\frac{\partial\psi}{\partial y} + \left(\frac{\Lambda'\lambda}{\rho^2 W'} - 1\right)\Lambda\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho}\left(\Delta v + \frac{\partial\Lambda}{\partial y}\right) + \\ + \frac{\mu'}{\rho W'}\left[v'W' + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial W}{\partial z}\right] = F_v; \quad (44) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{w} + \frac{2\sigma}{\omega}\frac{\partial\Phi}{\partial z} = -\frac{\partial\psi}{\partial z} + \left(\frac{\Lambda'\lambda}{\rho^2 W'} - 1\right)\Lambda\frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho}\left(\Delta w + \frac{\partial\Lambda}{\partial z}\right) + \\ + \frac{\mu'}{\rho W'}\left[w'W' + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial z}\right] = F_w, \end{aligned}$$

где

$$-\psi = V_e + \frac{\sigma + \omega}{\omega}\Phi + V_i + \eta + \frac{\Lambda\lambda}{\rho}; \quad (45)$$

штрих здесь означает производную по направлению внешней нормали к уровенной поверхности. К уравнениям (44) необходимо добавить уравнение Пуассона. Полное изменение плотности в фиксированной точке пространства определено уравнением неразрывности:

$$\dot{\rho} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0,$$

следовательно,

$$-\dot{\rho} = \Lambda\rho + \frac{\rho'}{W'}\eta,$$

поэтому

$$\Delta V_i = 4\pi G \left( \Lambda\rho + \frac{\rho'}{W'}\eta \right). \quad (46)$$

Уравнения (6), (8), (42)–(46), составляющие систему, достаточны для определения всех функций.

При  $\mu = 0$  уравнения становятся гидродинамическими. Кроме того, если принять, что плотность зависит от гидростатического давления, то, поскольку  $\lambda\rho' = \rho^2 W'$ , вместо (44) получаем

$$\ddot{u} - 2\omega\dot{v} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}; \quad \ddot{v} + 2\omega\dot{u} = -\frac{\partial\psi}{\partial y}; \quad \ddot{w} + \frac{2\sigma}{\omega} \frac{\partial\Phi}{\partial z} = -\frac{\partial\psi}{\partial z}. \quad (47)$$

Эти уравнения совпадают с обычными уравнениями для невращающейся Земли, если  $\Phi = 0$  и  $V_i = 0$ .

Изменение гидростатического давления  $p$  в фиксированной точке пространства складывается из изменения давления фиксированного элемента жидкости  $\Lambda\lambda$  и изменения давления из-за перемещения элемента  $\eta\rho$ , т.е.

$$-p = \Lambda\lambda + \eta\rho, \quad (48)$$

а уравнения (45) и (46) равносильны следующим:

$$-\frac{W'}{4\pi\rho'G}\Delta V_i = \psi + V_e + \frac{\sigma + \omega}{\omega}\phi + V_i = \frac{p}{\rho}. \quad (49)$$

Величины  $\Lambda$ ,  $\eta$  и  $p$  можно выразить через  $\psi$ . Для этого сначала запишем через  $\psi$  смещения  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , которые, как видно из (37) и (38), при установившемся движении являются гармоническими колебаниями с частотой  $\sigma$ , поэтому

$$\frac{d^2\tau_{nm}}{dt^2} = -\sigma^2\tau_{nm}. \quad (50)$$

Продифференцировав первые две формулы (47) по времени, используя (50) и исключив  $\dot{u}$  и  $\dot{v}$ , получим

$$\begin{aligned} (\sigma^2 - 4\omega^2)u &= \frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{2\omega}{\sigma^2} \frac{\partial\psi}{\partial y}; \\ (\sigma^2 - 4\omega^2)v &= \frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{2\omega}{\sigma^2} \frac{\partial\psi}{\partial x}; \\ \sigma^2 w &= \frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{2\sigma}{\omega} \frac{\partial\phi}{\partial z}. \end{aligned}$$



С такими величинами смещений из (6), (8) и (43) найдем

$$(\sigma^2 - 4\omega^2) \Lambda = \Delta\psi - 4\frac{\omega^2}{\sigma^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2};$$

$$(\sigma^2 - 4\omega^2) \eta = \psi'W' - \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \frac{\partial\psi}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{2\omega^2}{\sigma^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \frac{2(\sigma^2 - 4\omega^2)}{\sigma\omega} \frac{\partial\phi}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z}.$$

Второе выражение можно упростить. Потенциал  $W$  зависит только от  $l$  и  $z$ , поэтому

$$\frac{\partial W}{\partial y} = \frac{y}{l} \frac{\partial W}{\partial l}; \quad \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{x}{l} \frac{\partial W}{\partial l}.$$

Кроме того,

$$x \frac{\partial\psi}{\partial y} - y \frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = -\frac{m}{\sigma} \frac{\partial\psi}{\partial t},$$

так как в функцию  $\psi$  время и долгота входят только в линейной комбинации  $\sigma t - m\varphi$ . Таким образом,

$$(\sigma^2 - 4\omega^2) \eta = \psi'W' - \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \frac{\partial\psi}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{2\omega m}{\sigma l} \psi \frac{\partial W}{\partial l} + \frac{2(\sigma^2 - 4\omega^2)}{\sigma\omega} \frac{\partial\phi}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z}. \quad (51)$$

Теперь системе уравнений (49) можно придать следующий вид:

$$-\frac{W'}{4\pi\rho'G} \Delta V_i = \psi + V_c + \frac{\sigma + \omega}{\omega} \phi + V_i = \frac{1}{\omega^2} F(\psi) - \frac{2}{\sigma\omega} \frac{\partial\phi}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z}, \quad (52)$$

где

$$F(\psi) = \frac{\omega^2}{4\omega^2 - \sigma^2} \left[ \frac{\rho W'}{\rho'} \left( \Delta\psi - \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \right) + \psi'W' - \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \frac{\partial\psi}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{2\omega m}{\sigma l} \psi \frac{\partial W}{\partial l} \right].$$

Получена система двух уравнений в частных производных второго порядка с неизвестными функциями  $\psi$  и  $V_i$ . Граничные условия определены непрерывностью напряжений, потенциала и его производных, а также нормальной к границе ядра компонентой смещений.

### §3. Приливы в упругой вращающейся Земле с жидким ядром

Вращение Земли оказывает существенное влияние на суточные приливы в ее жидком ядре. Вместе с тем велико влияние упругости оболочки Земли на период свободных колебаний (близких к суточным и чандлеровым) и на числа Лява, если период вынужденных колебаний близок к периоду свободных колебаний [14]. Поэтому необходимо обобщить способ исследования для случая прилива в упругом вращающемся сфероиде или, в первом приближении, — вращающемся шаре с жидким ядром [5]. Учитывая вращение Земли по (35) и принимая во внимание силы Кориолиса, имеем

$$\ddot{u} - 2\omega\dot{v} = F_u - \dot{\omega}y; \quad \ddot{v} + 2\omega\dot{u} = F_v + \dot{\omega}x; \quad \ddot{w} + \frac{2\sigma}{\omega}\dot{\phi} = F_w, \quad (53)$$

к этим уравнениям нужно добавить (46).

В последующих расчетах будем полагать Землю сферической. Учет сжатия, необходимый для суточных приливов, и учет вязкости в условиях гармонических колебаний возможны в следующем приближении [22].

При сфероидальных колебаниях, в частности в теории земных приливов, смещения, например  $u$ , и изменение  $V_i$  потенциала, полагая  $\kappa_{nm} = 1$ , можно представить выражениями

$$u_n = \frac{\partial}{\partial x} (\tau_n T_n) + \left[ r^{-n} H_n - (r^{-n} T_n)' \right] \tau_n r^{n-1} x; \quad (54)$$

$$V_i + V_n + \frac{\sigma + \omega}{\omega} \phi = \tau_n R_n. \quad (55)$$

Приведем уравнение равновесия к виду

$$F_u = -\frac{\partial (\psi_n V_n)}{\partial x} + \chi_n V_n x, \quad (56)$$

где  $\chi_n$  и  $\psi_n$  — функции от  $r$ . При  $n \neq 0$  эти уравнения удовлетворяются, если  $\chi_n = \psi_n = 0$ . При  $\omega \neq 0$  представим решение бесконечными рядами:

$$\begin{aligned} \psi_u = \psi_v &= \sum_0^{\infty} \psi_n V_n = \psi; & \chi_u = \chi_v &= \sum_0^{\infty} \chi_n V_n = \chi; \\ \psi_w &= \sum_0^{\infty} (\psi_n + \Psi_n) V_n = \psi + \Psi; & \chi_w &= \sum_0^{\infty} (\chi_n + X_n) V_n = \chi + X, \end{aligned} \quad (57)$$

где  $\chi_n, \psi_n, \Psi_n, X_n$  — функции от  $r$ . Функция  $\psi$  в (56) и (57) отличается от  $\psi$  в (45) при  $\mu = 0$  постоянным множителем. Приравнявая коэффициенты при  $\tau_n$ , систему уравнений (46) и (53) с помощью (54), (55) и (56) можно привести к следующему виду:

$$\begin{aligned} &\left\{ M' + \left( R + HW' + \frac{N}{\rho} + \Psi r^n \right) \rho r^2 + 2\mu [Hr - (n^2 + n - 1)T + H'r^2] \right\}_n = 0; \\ &\left[ \frac{N'}{\rho} + \frac{L}{r^2} - \frac{4HW'}{r} + \frac{n(n+1)}{r^2} TW' + (\psi r^n)' - \chi r^{n+1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\mu}{\rho} \left( \frac{2H'}{r} - \frac{2H}{r^2} + \frac{n(n+1)}{r^3} T \right) \right]_n = 0; \\ &\left( T' + H - \frac{2T}{r} - \frac{M}{\mu r^2} \right)_n = 0; \\ &\left\{ (\lambda + 2\mu)H' + \frac{2\lambda}{r} \left[ H - \frac{n(n+1)}{2r} T \right] - N \right\}_n = 0; \\ &\left( R' - 4\pi\rho GH - \frac{L}{r^2} \right)_n = 0; \\ &[L' - n(n+1)(R - 4\pi\rho GT)]_n = 0. \end{aligned} \quad (58)$$

В шесть уравнений (58) входят восемь неизвестных функций. Еще два уравнения получим из (53), выражая  $\Lambda$  и  $\eta$  через  $\chi_n, \psi_n, H_n, T_n$  в соответствии с формулами (54)

и (55). Тогда аналогично выводу (51) и (52) будем иметь

$$(\sigma^2 - 4\omega^2) \Lambda = - \left( \frac{\partial F_u}{\partial x} + \frac{\partial F_v}{\partial y} + \frac{\partial F_w}{\partial z} \right) + \frac{2\omega}{\sigma^2} \left( \frac{\partial \dot{F}_v}{\partial x} - \frac{\partial \dot{F}_u}{\partial y} \right) + \\ + \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \frac{\partial F_w}{\partial z} + \frac{2}{\sigma\omega} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + 4\omega\delta\omega,$$

где  $\delta\omega$  — изменение угловой скорости вращения после деформации:

$$(\sigma^2 - 4\omega^2) \eta = - \left( \frac{\partial W}{\partial x} F_u + \frac{\partial W}{\partial y} F_v + \frac{\partial W}{\partial z} F_w \right) + \frac{2\omega}{\sigma^2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \dot{F}_v - \frac{\partial W}{\partial y} \dot{F}_u \right) + \\ + \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \frac{\partial W}{\partial z} F_w + \frac{2}{\sigma\omega} \frac{\partial W}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z} + 2 \left( x \frac{\partial W}{\partial x} + y \frac{\partial W}{\partial y} \right) \omega\delta\omega.$$

Выразив  $F_u$ ,  $F_v$ ,  $F_w$  через  $\chi_n$ ,  $\psi_n$  и используя формулу

$$x \frac{\partial \psi_n}{\partial y} - y \frac{\partial \psi_n}{\partial x} = \frac{\partial \psi_n}{\partial \varphi} = -\frac{m}{\sigma} \psi_n,$$

получим

$$(\sigma^2 - 4\omega^2) \Lambda = \Delta\psi - r\chi' - \left( 3 + \frac{2\omega}{\sigma} m \right) \chi - \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - z \frac{\partial \chi}{\partial z} - \chi \right) + \\ + \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{\sigma^2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - z \frac{\partial \chi}{\partial z} - \chi \right) + 2 \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{\sigma\omega} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - 4\omega\delta\omega; \quad (59)$$

$$\frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{W'} \eta = \psi' - \chi r - \frac{2\omega}{\sigma} m \frac{\psi}{r} - \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \left( \frac{z}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \chi \frac{z^2}{r} \right) + \\ + \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{\sigma^2} \left( \frac{z}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{z^2}{r} \chi \right) + 2 \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{\sigma\omega} \frac{z}{r} \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{4r}{3} \omega\delta\omega + \frac{4}{3} r P_2 \omega\delta\omega. \quad (60)$$

Из (6), (43) и (54) следует  $\eta = W' \sum_0^{\infty} \tau_n H_n$  и в соответствии с (22)  $\Lambda = \sum_0^{\infty} \Lambda_n \tau_n$ .

Введем в (59) и (60) ряды (57). Приравняв коэффициенты этих рядов при  $\tau_n$ , выразим  $\Lambda_n$  и  $H_n$  через  $\chi_n$ ,  $\psi_n$ ,  $\chi_{n-2}$ ,  $\psi_{n-2}$ ,  $\chi_{n+2}$ ,  $\psi_{n+2}$ , их первые и вторые производные. Вторые производные исключаются в разностях  $\Lambda_n - (r^{n+2} H_n)' r^{-n-2}$  и  $\Lambda_n - (r^{-n+1} H_n)' r^{n-1}$ .

Эти разности таковы:

$$\begin{aligned}
 (\sigma^2 - 4\omega^2) \left[ \Lambda_n - (r^{n+2} H_n)' r^{-n-2} \right] &= -n (\sigma^2 - 4\omega^2) \left( H_n + \frac{n+1}{r} T_n \right) r^{-1} = \\
 &= - \left( n - \frac{2\omega}{\sigma} m \right) \left[ (r^{2n+1} \psi_n)' r^{-2n-1} - \chi_n r \right] r^{n-1} + \\
 &+ \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \left\{ \left[ \left( z \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_n r^{n+1} \right]' r^{-n-2} - \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right)_n \right\} + \\
 &+ \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \left\{ \left( z \frac{\partial \chi}{\partial z} \right)_n - [(z^2 \chi)_n r^{n+1}]' r^{-n-2} \right\} - \\
 &- 2 \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{\sigma \omega} \left\{ \left[ \left( z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_n r^{n+1} \right]' r^{-n-2} - \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right)_n \right\} - \\
 &- \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{\sigma^2} \left\{ \left[ \left( z \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_n r^{n+1} \right]' r^{-n-2} - \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right)_n \right\} - \\
 &- \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{\sigma^2} \left\{ \left( z \frac{\partial \chi}{\partial z} \right)_n - [(\chi z^2)_n r^{n+1}]' r^{-n-2} \right\} + A_n; \quad (61)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\sigma^2 - 4\omega^2) \left[ \Lambda_n - (r^{-n+1} H_n)' r^{n-1} \right] &= (\sigma^2 - 4\omega^2) (n+1) \left( H_n - \frac{n}{r} T_n \right) r^{-n} = \\
 &= \left( n+1 + \frac{2\omega}{\sigma} m \right) (\psi'_n - \chi_n r) r^{n-1} + \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \left\{ \left[ \left( z \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_n r^{-n} \right]' r^{n-1} - \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right)_n \right\} + \\
 &+ \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \left\{ \left( z \frac{\partial \chi}{\partial z} \right)_n - [(z^2 \chi)_n r^{-n}]' r^{n-1} \right\} - \\
 &- 2 \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{\sigma \omega} \left\{ \left[ \left( z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_n r^{-n} \right]' r^{n-1} - \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right)_n \right\} - \\
 &- \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{\sigma^2} \left\{ \left[ \left( z \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_n r^{-n} \right]' r^{n-1} - \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right)_n \right\} - \\
 &- \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{\sigma^2} \left\{ \left( z \frac{\partial \chi}{\partial z} \right)_n - [(\chi z^2)_n r^{-n}]' r^{n-1} \right\} + B_n. \quad (62)
 \end{aligned}$$

Среди слагаемых  $A_n$  и  $B_n$  при  $m = 0$  отличны от нуля только  $A_2$  и  $B_0$ :

$$A_2 = -\frac{20}{3} \omega \delta \omega; \quad B_0 = -\frac{4}{3} \omega \delta \omega.$$

При преобразовании выражений (61) и (62) понадобятся рекуррентные формулы:

$$\begin{aligned}
 -(2n+1) \sin^2 \vartheta P_n^m(\cos \vartheta) &= \left[ \frac{(n+1)^2 - m^2}{2n+3} + \frac{n^2 - m^2}{2n-1} - 1 \right] P_n^m(\cos \vartheta) + \\
 &+ \frac{(n-m+1)(n-m+2)}{2n+2} P_{n+2}^m(\cos \vartheta) + \frac{(n+m)(n+m+1)}{2n+1} P_{n-2}^m(\cos \vartheta); \\
 (2n+1) \cos \vartheta P_n^m(\cos \vartheta) &= (n-m+1) P_{n+1}^m(\cos \vartheta) + (n+m) P_{n-1}^m(\cos \vartheta); \quad (63)
 \end{aligned}$$

$$-(2n+1)\sin^2\vartheta\frac{dP_n^m(\cos\vartheta)}{d\cos\vartheta} = -(n+1)(n+m)P_{n-1}^m(\cos\vartheta) + \\ + n(n-m+1)P_{n+1}^m(\cos\vartheta).$$

Используя их, получаем

$$\frac{\partial}{\partial z}\sum\tau_{nm}\psi_n r^n = \sum\left[\frac{n-m}{2n-1}\psi'_{n-1}r^{n-1} + \frac{n+m+1}{2n+3}(\psi_{n+1}r^{2n+3})'r^{-n-2}\right]\tau_{nm};$$

$$z^2\sum\tau_{nm}\psi_n r^n = \sum\left[\frac{(n-m)(n-m-1)}{(2n-1)(2n-3)}\phi_{n-2}r^n + \right. \\ \left. + \frac{(n-m+1)(n+m+1)}{(2n+3)(2n+1)}\psi_n r^{n+2} + \frac{(n-m)(n+m)}{(2n-1)(2n+1)}\psi_n r^{n+2} + \right. \\ \left. + \frac{(n+m+2)(n+m+1)}{(2n+3)(2n+5)}\psi_{n+2}r^{n+4}\right]\tau_{nm};$$

$$z\frac{\partial}{\partial z^2}\sum\tau_{nm}\psi_n r^n = \sum\left[\frac{(n-m)(n-m-1)}{(2n-1)(2n-3)}\psi'_{n-2}r^{n-1} + \right. \\ \left. + \frac{(n-m+1)(n+m+1)}{(2n+1)(2n+3)}\psi'_n r^{n+1} + \frac{(n-m)(n+m)}{(2n-1)(2n+1)}r^{-n}(\psi_n r^{2n+1})' + \right. \\ \left. + \frac{(n+m+1)(n+m+2)}{(2n+3)(2n+5)}r^{-n-2}(\psi_{n+2}r^{2n+5})'\right]\tau_{nm}; \quad (64)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\sum\tau_{nm}\psi_n r^n = \sum\left\{\frac{(n-m)(n-m-1)}{(2n-1)(2n-3)}r^{n-1}\left(\frac{\psi'_{n-2}}{r}\right)' + \right. \\ \left. + \frac{(n-m+1)(n+m+1)}{(2n+1)(2n+3)}r^{-n-2}(\psi'_n r^{2n+2})' + \right. \\ \left. + \frac{(n-m)(n+m)}{(2n-1)(2n+1)}r^{n-1}[(r^{2n+1}\psi_n)'r^{-2n}]' + \right. \\ \left. + \frac{(n+m+1)(n+m+2)}{(2n+3)(2n+5)}r^{-n-2}[(\psi_{n+2}r^{2n+5})'r^{-1}]\right\}\tau_{nm};$$

$$\Delta[\tau_{nm}\psi_n r^n] = (\psi'_n r^{2n+2})'r^{-n-2}\tau_{nm}.$$

Определим  $\Psi$  и  $X$  с помощью системы произвольных коэффициентов  $a_n, b_n, c_n, d_n, e_n$  следующим образом:

$$\frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{\sigma^2}[(\Psi_n r^{2n+1})'r^{-2n-1} - X_n r]r^n = \left(\frac{4\omega^2}{\sigma^2} + a_n\right)[(\psi_n r^{2n+1})'r^{-2n-1} - \\ - \chi_n r]r^n + c_n(\phi_n r^{2n+1})'r^{-n-1} + A_n d_n r; \quad (65)$$

$$\frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{\sigma^2}(\Psi'_n - X_n r)r^n = \left(\frac{4\omega^2}{\sigma^2} + b_n\right)(\psi'_n - \chi_n r)r^n + B_n e_n r.$$

Используя формулы (64), (65) и приравнявая к нулю коэффициенты при  $\tau_{(n+2)m}$  и  $\tau_{nm}$ , вместо (61) и (62) выведем

$$\begin{aligned}
 (n+2)(\sigma^2 - 4\omega^2) \left( H_{n+2} + \frac{n+3}{r} T_{n+2} \right) &= \left( n+2 - \frac{2\omega}{\sigma} m + \right. \\
 &+ a_{n+2} \frac{(n+2)^2 - m^2}{2n+3} \left. \left[ (\psi_{n+2} r^{2n+5})' r^{-2n-5} - \chi_{n+2} r \right] r^{n+2} + \right. \\
 &+ b_n \frac{(n-m+1)(n-m+2)}{(2n+1)(2n+3)} (2n+5) (\psi'_n - \chi_n r) r^n + \\
 &+ \frac{(n+2)^2 - m^2}{2n+3} \left( c_{n+2} + 2 \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{\sigma^2} \right) (\phi_{n+2} r^{2n+5})' r^{-n-3} + \\
 &+ A_{n+2} d_{n+2} \frac{(n+2)^2 - m^2}{2n+3} r + B_n e_n \frac{(n-m+1)(n-m+2)}{(2n+1)(2n+3)} (2n+5) r + B_n r; \quad (66)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (n+1)(\sigma^2 - 4\omega^2) \left( H_n - \frac{n}{r} T_n \right) &= \left( n+1 + \frac{2\omega}{\sigma} m + \right. \\
 &+ b_n \frac{(n+1)^2 - m^2}{2n+3} \left. (\psi'_n - \chi_n r) r^n + a_{n+2} \frac{(n+m+1)(n+m+2)}{(2n+3)(2n+5)} (2n+1) \times \right. \\
 &\times \left[ (\psi_{n+2} r^{2n+5})' r^{-2n-5} - \chi_{n+2} r \right] r^{n+2} + \frac{(n+m+1)(n+m+2)}{(2n+3)(2n+5)} \times \\
 &\times (2n+1) \left( c_{n+2} + 2 \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{\sigma^2} \right) (\phi_{n+2} r^{2n+5})' r^{-n-3} + B_n e_n \frac{(n+1)^2 - m^2}{2n+3} r + \\
 &+ A_{n+2} d_{n+2} \frac{(n+m+1)(n+m+2)}{(2n+3)(2n+5)} (2n+1) r. \quad (67)
 \end{aligned}$$

Из уравнений (53) получены два уравнения (66) и (67). Третье уравнение получим из последнего уравнения (53) с помощью (64) и (65). Множители при  $\tau_{(n+1)m}$  дают

$$\begin{aligned}
 \frac{n+m+2}{2n+5} \left\{ (1+a_{n+2}) \left[ (r^{2n+5} \psi_{n+2})' r^{-2n-5} - \chi_{n+2} r \right] r^{n+2} + \right. \\
 \left. + \left( c_{n+2} + 2 \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{\sigma\omega} \right) (r^{2n+5} \phi_{n+2})' r^{-n-3} + A_{n+2} d_{n+2} r - \right. \\
 \left. - (\sigma^2 - 4\omega^2) \left( H_{n+2} + \frac{n+3}{r} T_{n+2} \right) \right\} + \frac{n-m+1}{2n+1} \left[ (1+b_n) (\psi'_n - \chi_n r) r^n + \right. \\
 \left. + B_n e_n r - (\sigma^2 - 4\omega^2) \left( H_n - \frac{n}{r} T_n \right) \right] = 0. \quad (68)
 \end{aligned}$$

Уравнение (68) следует из (66) и (67), если при  $m \neq 0$

$$\begin{aligned}
 a_n = -\frac{2\omega}{\sigma m} (n-1); \quad b_n = \frac{2\omega}{\sigma m} (n+2); \quad c_n = 2 \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{\sigma^2} \left[ \frac{n(n-1)\omega - \sigma}{m^2} - 1 \right]; \\
 d_n = -\frac{2n+1}{n(n-1)+m^2}; \quad e_n = \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)+m^2}.
 \end{aligned}$$

При  $m = 0$  коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$  произвольны и можно ввести дополнительное условие: решение порядка  $n$  не зависит от других порядков. Тогда  $a_n = b_n = 0$ ;  $\phi_n \neq 0$

только при  $m = 1$  и  $n = 2$ . Поэтому

$$n(\phi_{n+2}r^{2n+5})' = 0.$$

При  $m \neq 0$  из (66) и (67) следует

$$\begin{aligned} (\sigma^2 - 4\omega^2) \left( H_{n+2} + \frac{n+3}{r} T_{n+2} \right) &= \\ &= \left[ 1 - \frac{2\omega}{\sigma} \frac{(n+1)(n+2) + m^2}{m(2n+3)} \right] \left[ (\psi_{n+2}r^{2n+5})' r^{-2n-5} - \chi_{n+2}r \right] r^{n+2} + \\ &\quad + \frac{2\omega}{\sigma} \frac{(n-m+1)(n-m+2)(2n+5)}{(2n+1)(2n+3)m} (\psi'_n - \chi_n r) r^n; \quad (69) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\sigma^2 - 4\omega^2) \left( H_n - \frac{n}{r} T_n \right) &= \left[ 1 + \frac{2\omega}{\sigma} \frac{(n+1)(n+2) + m^2}{m(2n+3)} \right] (\psi'_n - \chi_n r) r^n - \\ &- \frac{2\omega}{\sigma} \frac{(n+m+1)(n+m+2)(2n+1)}{(2n+3)(2n+5)m} \left[ (r^{2n+5}\psi_{n+2})' r^{-2n-5} - \chi_{n+2}r \right] r^{n+2}; \end{aligned}$$

при  $m = 0$

$$\begin{aligned} (\sigma^2 - 4\omega^2) \left( H_{n+2} + \frac{n+3}{r} T_{n+2} \right) &= \\ &= \left[ (\psi_{n+2}r^{2n+5})' r^{-2n-5} - \chi_{n+2}r \right] r^{n+2} + \frac{2n+5}{2n+1} \frac{B_n r}{n+2} - \frac{A_{n+2}r}{n+1}; \quad (70) \end{aligned}$$

$$(\sigma^2 - 4\omega^2) \left( H_n - \frac{n}{r} T_n \right) = (\psi'_n - \chi_n r) r^n + \frac{B_n r}{n+2} - \frac{2n+1}{2n+5} \frac{A_{n+2}r}{n+1}.$$

Уравнение (69) решаем относительно функций, входящих в правые части. В результате будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma^2} \left[ (\psi_{n+2}r^{2n+5})' r^{-2n-5} - \chi_{n+2}r \right] r^{n+2} &= \\ &= (1 + p_n) \left( H_{n+2} + \frac{n+3}{r} T_{n+2} \right) + q_{-n-3} \left( H_n - \frac{n}{3} T_n \right); \quad (71) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sigma^2} (\psi'_n - \chi_n r) r^n = (1 - p_n) \left( H_n - \frac{n}{r} T_n \right) + q_n \left( H_{n+2} + \frac{n+3}{r} T_{n+2} \right),$$

где

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{2\omega}{\sigma} \frac{(n+1)(n+2) + m^2}{m(2n+3)}; \\ q_n &= \frac{2\omega}{\sigma} \frac{(n+m+1)(n+m+2)(2n+1)}{m(2n+3)(2n+5)}. \end{aligned} \quad (72)$$

Теперь из уравнений (58) можно исключить функции  $\chi_n$  и  $\psi_n$ . При  $m \neq 0$  получим

$$\frac{1}{\sigma^2} \psi_n r^n = \left[ 1 + \frac{(n+1)p_{n-2} - np_n}{2n+1} \right] T_n + \frac{p_{n-2} + p_n}{2n+1} H_n r + \\ + \frac{q_{-n-1}}{2n+1} \left( H_{n-2} - \frac{n-2}{r} T_{n-2} \right) - \frac{q_n}{2n+1} \left( H_{n+2} + \frac{n+3}{r} T_{n+2} \right);$$

$$\frac{1}{\sigma^2} [(\psi_n r^n)' - \chi_n r^{n+1}] = \left[ 1 + \frac{np_{n-2} - (n+1)p_n}{2n+1} \right] H_n + \\ + \frac{n(n+1)(p_{n-2} + p_n)}{2n+1} \frac{T_n}{r} + \frac{nq_{-n-1}}{2n+1} \frac{1}{r} \left( H_{n-2} - \frac{n-2}{r} T_{n-2} \right) + \\ + \frac{(n+1)q_n}{2n+1} \frac{1}{r} \left( H_{n+2} + \frac{n+3}{r} T_{n+2} \right).$$

При  $m = 0$ ,  $q_n = 0$  в шесть уравнений (58) войдут шесть неизвестных функций. При  $m \neq 0$ , кроме того, войдут  $H_{n-2}$ ,  $H_{n+2}$ ,  $T_{n-2}$ ,  $T_{n+2}$  с малыми множителями. Дополнительные члены от приливов порядков  $n-2$  и  $n+2$  малы, если частота  $\sigma$  далека от частот свободных колебаний порядков  $n-2$  и  $n+2$  или если  $V_{n-2}$  и  $V_{n+2}$  не содержат частот, близких к  $\sigma$ .

Граничные условия (непрерывность смещений, напряжений, потенциала и производной от потенциала) не зависят от  $\sigma$  и  $\omega$ .

Если  $\mu = 0$ , из уравнений (58) следует

$$\frac{1}{\rho} N + R + HW' = -\psi_n r^n; \\ \left( \frac{\lambda + \frac{2}{3}\mu}{\rho} \frac{\rho'}{\rho} - W' \right) \left( H' + \frac{2}{3}H - \frac{n(n+1)}{r^2} T \right) = \chi_n r^{n+1}.$$

Обычно принимают, что плотность зависит только от адиабатической сжимаемости. Тогда

$$\chi_n = 0; \quad \left[ n(n+1)\rho T - (\rho H r^2)' \right] \frac{W'}{\rho' r^2} = R + \psi r^n. \quad (73)$$

Предполагаем, что приливы порядков  $n-2$  и  $n+2$  не влияют на приливы порядка  $n$ . Тогда  $q_n = 0$ , при  $m \neq 0$  из (71) получаем

$$(2n+1)\sigma^2 H = \frac{n}{1+p_{n-2}} (\psi r^{2n+1})' r^{-n-1} + \frac{n+1}{1-p_n} \psi' r^n; \\ (2n+1)\sigma^2 T = \frac{1}{1+p_{n-2}} (\psi r^{2n+1})' r^{-n} - \frac{1}{1-p_n} \psi' r^{n+1}. \quad (74)$$

Уравнение (73) приводит к следующей форме уравнения Пуассона:

$$(r^{n+1} R)'' - \frac{2n}{r} (r^{n+1} R)' = -\frac{4\pi\rho'G}{W'} (r^{n+1} R + \psi r^{2n+1}). \quad (75)$$

Уравнение (73) можно записать в следующем виде:

$$(\rho H r^{n+2})' - \rho n r^{n+1} \left( H + \frac{n+1}{r} T \right) = -\frac{\rho' r}{W'} (r^{n+1} R + \psi r^{2n+1}).$$



Выразив  $H$  и  $T$  через  $\psi$  при помощи формул (74), получим

$$\left( \frac{n+1}{1-p_n} + \frac{n}{1+p_{n-2}} \right) \left[ (\psi r^{2n+1})' \frac{\rho}{r^{2n}} \right]' + \\ + (2n+1) \frac{\rho' \sigma^2}{r^{2n} W'} \left( r^{n+1} R + \psi r^{2n+1} - \frac{n+1}{1-p_n} \frac{W'}{\sigma^2} \psi r^{2n} \right) = 0. \quad (76)$$

Произведения  $r^{n+1} R$  и  $\psi r^{2n+1}$  определяются из уравнений (75) и (76). Эти функции ограничены в центре сферы. Простые решения будут в следующих случаях:

$$\begin{aligned} \rho' &= 0; & \psi r^{2n+1} &= C_1 r^{2n+1} + C_2; \\ \sigma^2 &= \infty; & \psi r^{2n+1} &= C_1 r^{2n+1} + C_2; & R &= -\psi r^n; \\ 1 + p_{n-2} &= 0; & \psi r^{2n+1} &= C_1 \int \frac{1}{\rho} r^{2n} dr + C_2; \\ 1 - p_n &= 0; & \psi r^{2n+1} &= C_1 r^{2n+1} + C_2 r^{2n+1} \int \frac{1}{\rho} r^{-2n-2} dr. \end{aligned}$$

При малых величинах  $\sigma$  из (76) получаем уравнение второго порядка, содержащее только  $\psi$ :

$$\left( 1 + \frac{n}{n+1} \frac{1-p_n}{1+p_{n-2}} \right) \left[ (\psi r^{2n+1})' \frac{\rho}{r^{2n}} \right]' - (2n+1) \rho' \psi = 0.$$

Однородное уравнение, определяющее  $R$  и следующее из (75), является уравнением Клеро.

При  $m = 0$  на основании (70) нужно принять  $p_n = 0$ , заменить  $\sigma^2$  на  $\sigma^2 - 4\omega^2$ , имея в виду члены с  $A_2$  и  $B_0$ .

#### §4. Общие уравнения упругих колебаний Земли

При сферически-симметричном строении Земли (без учета сжатия) уравнения (44) можно представить в компактной форме:

$$\frac{\partial A}{\partial x} + Bx + \bar{f}(u) + 2\rho\omega\dot{v} - \rho\dot{\omega}y = 0; \quad (77)$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} + By + \bar{f}(v) - 2\rho\omega\dot{u} + \rho\dot{\omega}x = 0; \quad (78)$$

$$\frac{\partial A}{\partial z} + Bz + \bar{f}(w) = 0, \quad (79)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \rho(R + HW') + (\lambda + \mu)\Lambda + \mu'H; \\ -Br &= \rho'(R + HW') + \Lambda\rho W' + \Lambda\mu' + \left( \frac{\mu'}{r} \right)' Hr; \\ \bar{f}(u) &= \mu\Delta u + \mu'u' + \frac{\mu'u}{r} - \rho\ddot{u}, \end{aligned} \quad (80)$$

и аналогично для  $\bar{f}(v)$  и  $\bar{f}(w)$ . Поскольку земное сжатие не учтено, амплитуда нутации  $\varepsilon$  принята равной нулю. Не задавая заранее типа колебаний (сфероидальные или крутильные), преобразуем уравнения (77)–(79) следующим образом: умножим первое на  $x$ , второе на  $y$ , третье на  $z$  и сложим результаты. Затем продифференцируем первое из этих

уравнений по  $x$ , второе по  $y$  и третье по  $z$  и опять сложим результаты. В преобразованиях используем формулы

$$\begin{aligned} u'x + v'y + w'z &= H'r; \\ x\Delta u + y\Delta v + z\Delta w &= \Delta(Hr) - 2\Lambda; \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} &= \Lambda' + \frac{\Lambda}{r} - \frac{H'}{r}. \end{aligned} \quad (81)$$

В результате преобразований получим

$$-\mu \left( r\Delta H + 2H' + \frac{2H}{r} - 2\Lambda \right) + \mu' (H - H'r) + \ddot{H}'\rho r = A'r + Br^2 + 2\rho\omega r\dot{s}; \quad (82)$$

$$\begin{aligned} -\mu\Delta\Lambda - \mu' \left( \Lambda' - \frac{2\Lambda}{r} + \frac{H'}{r} + \Delta H + \frac{3H}{r^2} \right) + \mu'' \left( \frac{H}{r} - H' \right) + \ddot{H}'\rho' + \ddot{\Lambda}\rho &= \\ = \Delta A + B'r + 3B - 2\omega \left( \frac{\partial\rho\dot{u}}{\partial y} - \frac{\partial\rho\dot{v}}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (83)$$

где

$$rs = vx - uy. \quad (84)$$

К уравнениям (82) и (83) добавим уравнение Пуассона (19). В уравнения (82), (83) и (19) при  $\omega = 0$  входят три функции:  $\Lambda$ ,  $H$  и  $R$ .

Для определения этих функций будем считать заданными на поверхности сферы:

1) нормальное напряжение

$$N_W = \Lambda\lambda + 2\mu H'; \quad (85)$$

2) проекции тангенциального напряжения на оси координат  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  при условии, что

$$\begin{aligned} M_x x + M_y y + M_z z &= 0; \\ \frac{1}{\mu} M_x &= \frac{\partial H}{\partial x} + \left( \frac{H}{r} - 2H' \right) \frac{x}{r} + \left( \frac{u}{r} \right)' r; \end{aligned} \quad (86)$$

сходные выражения справедливы для  $M_y$  и  $M_z$ ;

3) условия непрерывности производной от потенциала или разрыв непрерывности производной от потенциала простого слоя (при замене объемных масс, выступающих за пределы сферы или уходящих вглубь сферы, простым слоем).

Таким образом, в граничные условия входят  $\Lambda$ ,  $H$ ,  $R$  и  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . Последние три функции можно исключить. Продифференцируем  $M_x$  по  $x$ ,  $M_y$  по  $y$ ,  $M_z$  по  $z$ , сложим результаты и преобразуем полученное выражение, используя формулы (81):

$$M = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_z}{\partial z} = \mu \left\{ \Delta H - \frac{1}{r^2} (H'r^2)' + \Lambda' - \left[ \frac{(Hr^2)'}{r^2} \right]' \right\}. \quad (87)$$

Если рассматривать только периодическое движение с частотой  $\sigma$ , то начальные условия отпадают и можно начать решение задачи с определения функций  $\Lambda$ ,  $H$ ,  $R$  при условиях на границе (85), (33) и (87).

## §5. Стрoение Земли по частотам сферoидальных свободных колебаний

Если для некоторой модели Земли вычислена частота свободного колебания и затем эта модель немного изменена, то изменение частоты можно получить путем вариации произвольных постоянных, входящих в общий интеграл уравнений колебания упругого шара [23]. Далее можно построить такую модель, которой соответствуют заданные частоты колебаний, если эти частоты могут быть получены в результате малого изменения строения модели.

Систему шести обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющих колебания Земли, используем в таком виде:

$$y_1' = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \dots + a_{i6}y_6 \quad (i = 1, \dots, 6). \quad (88)$$

За неизвестные функции приняты

$$\begin{aligned} y_1 = P = -Mr^2 + \frac{2}{r}\mu S - 2n(n+1)\mu H; \quad y_2 = S; \quad y_3 = L = r^2(R' - 4\pi\rho GH); \\ y_4 = \Phi = N - \frac{2\mu}{r^2}S + \frac{4\mu}{r}H; \quad y_5 = H; \quad y_6 = R. \end{aligned} \quad (89)$$

Система функций  $\Phi, H, L, P, R, S$  выбрана потому, что для нее только десять из 36 коэффициентов  $a_{ij}$  зависят от строения шара. Они выражены через плотность, упругие постоянные  $\lambda, \mu$  и производную  $W'$ . Это значительно упрощает вычисления результата при варьировании коэффициентов.

Коэффициенты уравнений (88) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} a_{12} = -\rho\sigma^2 + \frac{\beta}{r} - \frac{\rho}{r}W'; \quad a_{14} = -n(n+1); \quad a_{15} = -n(n+1)\beta; \\ a_{16} = -n(n+1)\rho; \quad a_{21} = 1/\mu; \quad a_{25} = n(n+1); \quad a_{32} = -4\pi\rho G; \\ a_{36} = n(n+1); \quad a_{41} = -1/r^2; \quad a_{42} = -\frac{\beta}{r^2}; \quad a_{43} = -\frac{\rho}{r^2}; \\ a_{45} = -\rho\sigma^2 + \frac{2}{r}\beta + \frac{2\rho}{r}W'; \quad a_{52} = \frac{1}{r^2}; \quad a_{54} = \frac{1}{\lambda + 2\mu}; \\ a_{55} = -\frac{2}{r}; \quad a_{63} = \frac{1}{r^2}; \quad a_{65} = 4\pi\rho G; \\ a_{11} = a_{13} = a_{22} = a_{23} = a_{24} = a_{26} = a_{31} = a_{33} = a_{34} = a_{35} = a_{44} = \\ = a_{46} = a_{51} = a_{53} = a_{56} = a_{61} = a_{62} = a_{64} = a_{66} = 0, \end{aligned} \quad (90)$$

где  $\beta = \rho W' + 2\mu'$ .

Прежде всего находим три правильных (ограниченных в центре шара) интеграла системы уравнений (88) и три правильных интеграла сопряженной системы

$$-\bar{y}_i' = a_{i1}\bar{y}_1 + a_{i2}\bar{y}_2 + \dots + a_{i6}\bar{y}_6. \quad (91)$$

На поверхности шара (при  $r = 1$ ) функции  $y_i$  всегда можно представить матрицей:

	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$	
Интегралы	1	1	0	0	$c_{11}$	$c_{12}$	$c_{13}$
правильные	2	0	1	0	$c_{21}$	$c_{22}$	$c_{23}$
	3	0	0	1	$c_{31}$	$c_{32}$	$c_{33}$
	4	0	0	0	1	0	0
Интегралы	5	0	0	0	0	1	0
неправильные	6	0	0	0	0	0	1

Здесь  $c_{kl}$  — значения функций  $y_4, y_5, y_6$  на земной поверхности для первого, второго и третьего правильных интегралов.

Тогда функции сопряженного уравнения можно представить следующей матрицей:

		$\bar{y}_1$	$\bar{y}_2$	$\bar{y}_3$	$\bar{y}_4$	$\bar{y}_5$	$\bar{y}_6$	
Интегралы	I	1	0	0	0	0	0	
неправильные	II	0	1	0	0	0	0	
	III	0	0	1	0	0	0	(93)
	IV	$-c_{11}$	$-c_{21}$	$-c_{31}$	1	0	0	
Интегралы	V	$-c_{12}$	$-c_{22}$	$-c_{32}$	0	1	0	
правильные	VI	$-c_{13}$	$-c_{23}$	$-c_{33}$	0	0	1	

Каждый элемент матрицы (93) равен соответствующему минору определителя, составленного из элементов матрицы (92). Тогда, во-первых, три правильных интеграла системы (88) определяют правильные интегралы сопряженной системы (91) на поверхности шара, во-вторых, в вычисления возмущенных частот свободных колебаний не войдут неправильные интегралы основной и сопряженной систем.

Используя три условия на поверхности шара, выразим  $y_4, y_5, y_6$  через  $y_1, y_2, y_3$ :

$$\begin{aligned} y_4 + b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + b_{13}y_3 &= 0; \\ y_5 + b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + b_{23}y_3 &= 0; \\ y_6 + b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + b_{33}y_3 &= 0, \end{aligned} \quad (94)$$

где  $b_{ij}$  определены коэффициентами при соответствующих функциях в граничных условиях.

Каждую функцию  $y_i$  выразим через три частных правильных интеграла, входящих в матрицу (92):

$$y_i = y_{i1}y_1 + y_{i2}y_2 + y_{i3}y_3. \quad (95)$$

Подставив (95) в (94) и используя (92), запишем

$$\begin{aligned} (b_{11} + c_{11})y_1 + (b_{12} + c_{21})y_2 + (b_{13} + c_{31})y_3 &= 0; \\ (b_{21} + c_{12})y_1 + (b_{22} + c_{22})y_2 + (b_{23} + c_{32})y_3 &= 0; \\ (b_{31} + c_{13})y_1 + (b_{32} + c_{23})y_2 + (b_{33} + c_{33})y_3 &= 0. \end{aligned} \quad (96)$$

Уравнения (96) совместны только после добавления к их коэффициентам вариаций, обусловленных такими изменениями  $\rho, \mu$  и  $\lambda$  в (90), которые приведут к совпадению вычисленных частот с измеренными в рассматриваемых свободных колебаниях. Определитель  $D$ , составленный из коэффициентов уравнений (96), считаем малой величиной. Умножим уравнение (96) на соответствующие миноры первого, затем второго и третьего столбцов определителя  $D$ . Результаты умножения по столбцам сложим и получим

$$\begin{aligned} y_1(D + \delta D) + M_{11}\delta y_4 + M_{21}\delta y_5 + M_{31}\delta y_6 &= 0; \\ y_2(D + \delta D) + M_{21}\delta y_4 + M_{22}\delta y_5 + M_{23}\delta y_6 &= 0; \\ y_3(D + \delta D) + M_{31}\delta y_4 + M_{32}\delta y_5 + M_{33}\delta y_6 &= 0. \end{aligned} \quad (97)$$

Вариации  $b_{ij}$  включены в  $\delta D$ :

$$\begin{aligned} \delta y_4 &= y_1\delta c_{11} + y_2\delta c_{21} + y_3\delta c_{31}; \\ \delta y_5 &= y_1\delta c_{12} + y_2\delta c_{22} + y_3\delta c_{32}; \\ \delta y_6 &= y_1\delta c_{13} + y_2\delta c_{23} + y_3\delta c_{33}. \end{aligned} \quad (98)$$

Множители при  $y_1$  в (98) определены правильным решением уравнений (88) с учетом вариаций и с неоднородными условиями на поверхности шара:

$$y_1 = 1; \quad y_2 = 0; \quad y_3 = 0.$$

Варьируя общий интеграл

$$y_i = \sum C_j (y_i)_j,$$

где  $C_j$  — постоянные;  $(y_i)_j$  определены матрицей (92), будем иметь

$$\begin{aligned} \delta C_1 &= \delta C_2 = \delta C_3 = 0; \\ \delta C_4 &= \delta c_{11} = \int_0^1 \sum_{i=1}^{i=6} (\bar{y}_i)_{IV} (\delta y'_i)_1 dr; \\ \delta C_5 &= \delta c_{12} = \int_0^1 \sum_{i=1}^{i=6} (\bar{y}_i)_V (\delta y'_i)_1 dr; \\ \delta C_6 &= \delta c_{13} = \int_0^1 \sum_{i=1}^{i=6} (\bar{y}_i)_{VI} (\delta y'_i)_1 dr. \end{aligned} \quad (99)$$

Здесь  $(\delta y'_i)_1$  обозначает вариацию правой части уравнений (88), вычисленную для первого частного интеграла матрицы (92);  $(\bar{y}_i)_{IV}$ ,  $(\bar{y}_i)_V$ ,  $(\bar{y}_i)_{VI}$  — функции сопряженного уравнения для IV, V и VI частного интеграла матрицы (93). Множители при  $y_2$  в (98) определены условиями на поверхности:  $y_1 = 0$ ;  $y_2 = 1$ ;  $y_3 = 0$ .

В выражения, аналогичные (99), теперь вместо  $(\delta y'_i)_1$  войдут  $(\delta y'_i)_2$ , при определении множителей для  $y_3$  —  $(\delta y'_i)_3$ . Уравнения (97) и (98) после подстановки в них (99) и аналогичных выражений с измененным первым индексом имеют вид

$$y_i (D + \delta D) + \int_0^1 \delta f_i dr = 0; \quad (100)$$

$$\begin{aligned} \delta f_i &= \sum_{j=1}^6 \left[ y_1 (\delta y'_j)_1 + y_2 (\delta y'_j)_2 + y_3 (\delta y'_j)_3 \right] \times \\ &\quad \times [M_{1i} (\bar{y}_j)_{IV} + M_{2i} (\bar{y}_j)_V + M_{3i} (\bar{y}_j)_{VI}]. \end{aligned} \quad (101)$$

Три уравнения (100) (при  $i = 1, i = 2, i = 3$ ) заменяют уравнения (96). Если  $D$  и все вариации малы, то  $y_1, y_2$  и  $y_3$  можно заменить минорами любой строки. Формулы (100) различаются на величины порядка  $D^2$ . После определения вариаций уравнения (96) становятся совместными. Они определяют точные  $y_1, y_2$  и  $y_3$ . Для системы коэффициентов (90) получаем

$$D = \begin{vmatrix} c_{11} + \frac{2}{n(n+1)r} & c_{21} + \frac{2\mu(n-1)(n+2)}{n(n+1)r^2} & c_{31} \\ c_{12} + \frac{1}{2n(n+1)\mu} & c_{22} - \frac{1}{n(n+1)r} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} + \frac{1}{(n+1)r} \end{vmatrix};$$

$$f = -\rho\sigma^2 (\bar{\Phi}H + \bar{P}S) + \rho \left[ \left( \frac{2W'}{r}H - \frac{L}{r^2} \right) \bar{\Phi} - n(n+1)R\bar{P} + 4\pi GH\bar{R} - \right. \\ \left. - 4\pi G\bar{L}S - \frac{W'}{r}\bar{P}S \right] + \beta \left[ -n(n+1)H\bar{P} + \left( \frac{2}{r}H - \frac{S}{r^2} \right) \bar{\Phi} + \frac{\bar{P}S}{r} \right] + \\ + \frac{\bar{\Phi}H}{\lambda+2\mu} + \frac{P\bar{S}}{\mu}.$$

Варируя  $\rho$ , необходимо иметь в виду, что вариация  $W'$  должна быть выражена через вариацию  $\rho$ :

$$(r^2\delta W')' = -4\pi Gr^2\delta\rho.$$

Представим  $\delta f$  в виде

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial\sigma^2}\delta\sigma^2 + \frac{\partial f}{\partial\rho}\delta\rho + \frac{\partial f}{\partial\mu'}\delta\mu' + \frac{\partial f}{\partial W'}\delta W' + \frac{\partial f}{\partial\left(\frac{\rho}{\mu}\right)}\delta\left(\frac{\rho}{\mu}\right) + \frac{\partial f}{\partial\left(\frac{\rho}{\lambda+2\mu}\right)}\delta\left(\frac{\rho}{\lambda+2\mu}\right).$$

Исключив  $\delta W'$  и  $\delta\mu'$ , получим

$$\int_0^1 \delta f dr = \left[ r^2\delta W' \int_0^r \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial W'} dr + \frac{\partial f}{\partial\mu'}\delta\mu' \right] \Big|_0^1 + \\ + \int_0^1 \left[ \left[ \frac{\partial f}{\partial\rho} + 4\pi Gr^2 \int_0^r \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial W'} dr - \left( \frac{\partial f}{\partial\mu'} \right)' \frac{\rho}{\mu} \right] \delta\rho + \right. \\ \left. + \frac{\partial f}{\partial\frac{\rho}{\mu}}\delta\frac{\rho}{\mu} + \frac{\partial f}{\partial\frac{\rho}{\lambda+2\mu}}\delta\frac{\rho}{\lambda+2\mu} + \frac{\partial f}{\partial\sigma}\delta\sigma \right] dr.$$

Исходное уравнение (101) при этом имеет вид

$$D + \left[ \left( \frac{M_{21}}{2n(n+1)\rho} - \frac{2(n-1)(n+2)M_{12}\mu^2}{n(n+1)\rho} \right) \left( \delta\frac{\rho}{\mu} - \frac{\delta\rho}{\mu} \right) \right]_{r=1} + \\ + \frac{1}{P(1)} \int_0^1 \delta f dr = 0, \quad (102)$$

так как  $\delta W'(1) = 0$ . Вариации  $\delta\rho$ ,  $\delta\frac{\rho}{\mu}$  и  $\delta\frac{\rho}{\lambda+2\mu}$  независимы, вариации по  $\delta\rho$  подчинены условиям

$$\int_0^1 r^2\delta\rho dr = 0; \quad \int_0^1 r^4\delta\rho dr = 0, \quad (103)$$

выражающим неизменность массы и момента инерции Земли.

С помощью (102) можно вычислить частоты свободных колебаний для любой модели Земли, близкой к исходной.

Если

$$\delta\frac{\rho}{\mu} = \delta\frac{\rho}{\lambda+2\mu} = \delta W' = \delta\mu' = 0,$$

а  $\delta\sigma$  известна из сопоставления измеренных и рассчитанных  $\sigma$ , то уравнения, определяющие  $\delta\rho$ , можно представить в виде

$$\int_0^1 X_i \delta\rho dr + C_i = 0, \quad (104)$$

где  $C_i = A_i \delta\rho(1) + B_i$ ;  $X_i$  — неизвестная функция от  $r$ ;  $A_i$  и  $B_i$  — известные числа. Эту систему можно заменить системой линейных алгебраических уравнений относительно величин  $\delta\rho$  в отдельных точках  $r = r_j$ . Величины  $\delta\rho_j$  могут получиться большими, быстро меняющимися от точки к точке и зависящими от выбора частот, по которым они определены. Чтобы избежать решения подобной системы, необходимо распределить функции  $X_i$  в порядке уменьшения частоты и, присоединяя последовательно по одной, заменить их системой такого же числа взаимно ортогональных функций. Тогда

$$\begin{aligned} X_i &= \sum \alpha_{ij} Y_j; & \alpha_{ii} &= 1; & \delta\rho &= \sum \beta_j Y_j; \\ \int_0^1 Y_i Y_j dr &= 0, & i &\neq j. \end{aligned} \quad (105)$$

Коэффициенты  $\alpha_{ij}$  известны,  $\beta_j$  следует определять из (104). В результате будем иметь

$$\beta_1 \int_0^1 Y_1^2 dr = -C_1; \quad \beta_2 = \int_0^1 Y_2^2 dr = -C_2 - \alpha_{21} \beta_1 \int_0^1 Y_1^2 dr.$$

Все  $\beta_i$  выражены через  $\delta\rho(1)$ . Должно выполняться условие

$$\delta\rho(1) = \sum \beta_i Y_i(1),$$

а при определении  $\delta\rho$  — два условия (103). Эти условия мало усложняют задачу. Единственными делителями при определении  $\beta_i$  являются числа  $\int_0^1 Y_i^2 dr$ .

Если при каком-то индексе  $i$  функция  $Y_i$  на всем интервале окажется близкой к нулю, то  $X_i$  с известным приближением может быть выражена через те же функции, но с меньшим индексом, следовательно, и частота  $\sigma_i$  может быть выражена через частоты с меньшими индексами, либо в (104) необходимо включить вариации других функций.

### §6. Приливы и свободные колебания Земли с учетом сил Кориолиса

Для упругих приливов и свободных колебаний Земли с учетом сил Кориолиса была получена система обыкновенных дифференциальных уравнений [24]. При этом использовались выражения для смещений в виде суммы смещений сфероидального и крутильного типов [25]. Три компоненты смещения выражены через три вспомогательные функции, однако третья функция вошла заранее заданным образом, и вид смещений не оказался достаточно общим. Поэтому при малых частотах колебаний возникали заметные связи между колебаниями, отличными по порядку на две единицы. Здесь мы покажем, что в результате небольшого обобщения выражений для смещений для сферически-симметричной Земли можно получить точную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, не связанную с системами, отличными по порядку величины [9].

Будем исходить из следующих выражений для компонент  $u$ ,  $v$ ,  $w$  смещения в декартовой системе координат  $xyz$ :

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial\psi}{\partial x} - \chi x - \frac{2\omega}{\sigma^2} \left( \frac{\partial\psi}{\partial y} - \dot{\chi}y \right); \\ v &= \frac{\partial\psi}{\partial y} - \chi y + \frac{2\omega}{\sigma^2} \left( \frac{\partial\psi}{\partial x} - \dot{\chi}x \right); \\ w &= \frac{\partial\psi}{\partial z} - \chi z + \bar{w}, \end{aligned} \quad (106)$$

где  $\chi$ ,  $\psi$ ,  $\bar{w}$  — вспомогательные функции, зависящие от координат

$$\chi = \sum_{n=m}^{\infty} \chi_n(r) \tau_{nm}; \quad \psi = \sum_{n=m}^{\infty} \psi_n(r) \tau_{nm}; \quad \bar{w} = \sum_{n=m}^{\infty} \bar{w}_n(r) \tau_{nm},$$

а следовательно,  $\ddot{\chi} = -\sigma^2 \chi$ ;  $\ddot{\chi} = -\sigma^2 \dot{\chi}$ , и аналогично для производных от  $\psi$  и  $\bar{w}$ . Функции  $\chi$ ,  $\psi$ , как в §3, служат для выражения смещений, но определены по-другому. Здесь  $u$  и  $v$  выражены только через  $\chi$  и  $\psi$ , а  $w$  — через  $\chi$ ,  $\psi$  и  $\bar{w}$ .

Из (106) получаем

$$\begin{aligned} \ddot{u} - 2\omega\dot{v} &= -(\sigma^2 - 4\omega^2) \left( \frac{\partial\psi}{\partial x} - \chi x \right); \\ \ddot{v} + 2\omega\dot{u} &= -(\sigma^2 - 4\omega^2) \left( \frac{\partial\psi}{\partial y} - \chi y \right); \\ \ddot{w} &= -\sigma^2 \left( \frac{\partial\psi}{\partial z} - \chi z + \bar{w} \right), \end{aligned}$$

поэтому уравнения колебаний с учетом сил Кориолиса можно записать так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial x} + Bx + f(u) - \rho\sigma^2 u &= -\rho(\sigma^2 - 4\omega^2) \left( \frac{\partial\psi}{\partial x} - \chi x \right); \\ \frac{\partial A}{\partial y} + By + f(v) - \rho\sigma^2 v &= -\rho(\sigma^2 - 4\omega^2) \left( \frac{\partial\psi}{\partial y} - \chi y \right); \\ \frac{\partial A}{\partial z} + Bz + f(w) - \rho\sigma^2 w &= -\rho\sigma^2 \left( \frac{\partial\psi}{\partial z} - \chi z + \bar{w} \right), \end{aligned} \quad (107)$$

где, например, для  $u$

$$f(u) = \mu\Delta u + \mu' u' - \frac{\mu' u}{r} + \rho\sigma^2 u,$$

и аналогично для составляющих  $v$  и  $w$  смещения по осям  $y$  и  $z$ . Последний член справа в определении функции  $f$  компенсируется последними членами в левой части уравнений. Эти члены сохранены для удобства последующих выводов. Функции  $A$  и  $B$  определены формулами (80). Выражения (106) определяют  $\Lambda$  и  $H$  через  $\chi$ ,  $\psi$  и  $\bar{w}$  (6), (15), т.е.

$$\begin{aligned} \Lambda &= \Delta\psi - \chi'r - 3\chi - \frac{2\omega}{\sigma} \chi m + \frac{\partial\bar{w}}{\partial z}; \\ H &= \psi' - \chi r - \frac{2\omega}{\sigma} m \frac{\psi}{r} + \frac{z}{r} \bar{w}. \end{aligned} \quad (108)$$



Из (108) определим функцию

$$S = (Hr^2)' - \Lambda r^2$$

и вычислим величины

$$\begin{aligned} H_n + \frac{S_n}{nr} &= \left(1 - \frac{2\omega}{\sigma} \cdot \frac{m}{n}\right) \left(\psi'_n - \chi_n r + \frac{n+1}{r} \psi_n\right) + \frac{2n+1}{2n-1} \cdot \frac{n-m}{n} \bar{w}_{n-1}, \\ H_n - \frac{S_n}{(n+1)r} &= \left(1 + \frac{2\omega}{\sigma} \cdot \frac{m}{n+1}\right) \left(\psi'_n - \chi_n r - \frac{n}{r} \psi_n\right) + \\ &+ \frac{2n+1}{2n+3} \cdot \frac{n+1+m}{n+1} \bar{w}_{n+1}. \end{aligned} \quad (109)$$

Последнее из выражений (106) можно записать так:

$$\begin{aligned} w_{n-1} &= \frac{n+m}{2n+1} \left(\psi'_n - \chi_n r + \frac{n+1}{r} \psi_n\right) + \bar{w}_{n-1}; \\ w_{n+1} &= \frac{n+1-m}{2n+1} \left(\psi'_n - \chi_n r - \frac{n}{r} \psi_n\right) + \bar{w}_{n+1}. \end{aligned} \quad (110)$$

С помощью (110) исключаем  $\bar{w}_{n-1}$  и  $\bar{w}_{n+1}$  из (109) и получаем

$$\begin{aligned} H_n - \frac{S_n}{(n+1)r} &= \frac{(n+1)(n+2) + m^2}{(n+1)(2n+3)} b_n \left(\psi'_n - \chi_n r - \frac{n}{r} \psi_n\right) + \\ &+ \frac{(n+1+m)(2n+1)}{(n+1)(2n+3)} w_{n+1}; \\ H_n + \frac{1}{nr} S_n &= \frac{n(n-1) + m^2}{n(2n-1)} b_{-n-1} \left(\psi'_n - \chi_n r + \frac{n+1}{r} \psi_n\right) + \\ &+ \frac{(n-m)(2n+1)}{n(2n-1)} w_{n-1}, \end{aligned} \quad (111)$$

где

$$b_n = 1 + \frac{2\omega}{\sigma} \frac{m}{n+1} \frac{(n+1)(2n+3)}{(n+1)(n+2) + m^2}; \quad b_{-n-1} = 1 - \frac{2\omega}{\sigma} \frac{m}{n} \frac{n(2n-1)}{n(n-1) + m^2}.$$

Теперь дифференциальные уравнения (107) преобразуем таким же образом, как выражения для смещений (106). Третье из уравнений (107) равносильно двум обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned} A'_n - \frac{n}{r} A_n + B_n r + f_{n+1} \left(\frac{2n+1}{n+1-m} w_{n+1}\right) &= 0; \\ A'_n + \frac{n+1}{r} A_n + B_n r + f_{n-1} \left(\frac{2n+1}{n+m} w_{n-1}\right) &= 0, \end{aligned} \quad (112)$$

где

$$\begin{aligned} f_{n+1} \left(\frac{2n+1}{n+1-m} w_{n+1}\right) &= \mu \left[ \frac{\partial^2 w_{n+1}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial w_{n+1}}{\partial r} - \frac{(n+1)(n+2)}{r^2} w_{n+1} \right] + \\ &+ \mu' \frac{\partial w_{n+1}}{\partial r} - \frac{\mu' w_{n+1}}{r} + \rho \sigma^2 w_{n+1}; \end{aligned}$$

$$f_{n-1} \left( \frac{2n+1}{n+m} w_{n-1} \right) = \mu \left[ \frac{\partial w_{n-1}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial w_{n-1}}{\partial r} - \frac{(n-1)n}{r^2} w_{n-1} \right] + \\ + \mu' \frac{\partial w_{n-1}}{\partial r} - \frac{\mu' w_{n-1}}{r} + \rho \sigma^2 w_{n-1}.$$

В этих преобразованиях использованы зависимости

$$\Delta \frac{\psi_n \tau_{n-1}}{r} = \left( \frac{\psi_n''}{r} - \frac{n(n-1)}{r^3} \psi_n \right) \tau_{n-1}; \\ \Delta (\tau_{n-1} \chi_n r) = \left( \chi_n'' r + 4\chi_n' + \frac{2-n(n-1)}{r} \chi_n \right) \tau_{n-1}$$

с заменой  $n$  на  $n+2$  в последних членах справа при множителях  $\tau_{n+1}$ .

Используя все уравнения (107), вычислим  $A'$ ,  $\Delta A$  и  $-n(n+1)A_n = r^2(\Delta A - (A'r^2)')$ . Затем определим

$$A'_n + B_n r - \frac{n}{r} A_n \text{ и } A'_n + B_n r + \frac{n+1}{r} A_n.$$

Тогда получим

$$A'_n - \frac{n}{r} A_n + B_n r + f_{n+1} \left( H_n - \frac{S_n}{(n+1)r} \right) - \rho \sigma^2 \left( H_n - \frac{S_n}{(n+1)r} \right) = \\ = \left( -\rho \sigma^2 + 4\rho \omega^2 \frac{(n+1)(n+2) + m^2}{(n+1)(2n+3)} \right) \left( \psi_n' - \chi_n r - \frac{n}{r} \psi_n \right) - \\ - \rho \sigma^2 \frac{2n+1}{2n+3} \cdot \frac{n+1+m}{n+1} \bar{w}_{n+1}.$$

С помощью (109) исключим  $\bar{w}_{n+1}$  и получим

$$A'_n + B_n r - \frac{n}{r} A_n + f_{n+1} \left( H_n - \frac{S_n}{(n+1)r} \right) = \rho \sigma^2 a_n \left( \psi_n' - \chi_n r - \frac{n}{r} \psi_n \right); \\ a_n = \frac{(n+1)(n+2) + m^2}{(n+1)(2n+3)} \left( b_n + \frac{4\omega^2 - \sigma^2}{\sigma^2} \right). \quad (113)$$

Подобным образом можно получить уравнение, в котором  $n$  заменено на  $-(n+1)$ , а  $f_{n+1}$  — на  $f_{n-1}$ :

$$A'_n + \frac{n+1}{r} A_n + B_n r + f_{n-1} \left( H_n + \frac{S_n}{(n+1)r} \right) = \\ = \rho \sigma^2 a_{-n-1} \left( \psi_n' - \chi_n r + \frac{n+1}{r} \psi_n \right); \\ a_{-n-1} = \frac{2\omega m}{\sigma n} + \frac{4\omega^2 n(n-1) + m^2}{\sigma^2 n(2n-1)}. \quad (114)$$

Уравнения (113) и (114) после исключения  $\chi_n$  и  $\psi_n$  с помощью (111) приобретают вид

$$A'_n - \frac{n}{r} A_n + B_n r + f_{n+1} \left( H_n - \frac{S_n}{(n+1)r} \right) = \\ = \rho \sigma^2 \frac{b_n - 1 + \frac{4\omega^2}{\sigma^2}}{b_n} \left( H_n - \frac{S_n}{(n+1)r} - \frac{(n+1+m)(2n+1)}{(n+1)(2n+3)} w_{n+1} \right);$$

$$A'_n + \frac{n+1}{r}A_n + B_n r + f_{n-1} \left( H_n + \frac{S_n}{nr} \right) = \\ = \rho \sigma^2 \frac{b_{-n-1} - 1 + \frac{4\omega^2}{\sigma^2}}{b_{-n-1}} \left( H_n + \frac{S_n}{nr} - \frac{(n-m)(2n+1)}{n(2n-1)} w_{n-1} \right). \quad (115)$$

В четыре уравнения (112) и (115) в качестве неизвестных входят функции  $H_n$ ,  $R_n$ ,  $S_n$ ,  $w_{n-1}$ ,  $w_{n+1}$  ( $A_n$ ,  $B_n$  можно выразить через  $\Lambda_n$ ,  $H_n$  и  $R_n$ ). Добавив уравнения Пуассона (27):

$$R''_n + \frac{2}{r}R'_n - \frac{n(n+1)}{r^2}R_n = 4\pi G (\Lambda_n \rho + \rho' H_n), \quad (116)$$

получим полную систему уравнений. Система уравнений (112), (115) и (116) разрешима независимо от системы для других  $n$ .

Уравнения (112) отделяются от (115) и (116) при  $\omega = 0$ . Связь между этими уравнениями велика при достаточно малых  $b_n$  и  $b_{-n-1}$ .

Если  $\mu = \chi_n = 0$ , то

$$f_{n-1} = \rho \sigma^2 w_{n-1}; \quad f_{n+1} = \rho \sigma^2 w_{n+1}.$$

Тогда из (113) и (114) получаем

$$H_n - \frac{S_n}{(n+1)r} - \frac{2n+1}{n+1-m} w_{n+1} = a_n \left( \psi'_n - \frac{n}{r} \psi_n \right); \\ H_n + \frac{S_n}{nr} - \frac{2n+1}{n+m} w_{n-1} = a_{-n-1} \left( \psi'_n + \frac{n+1}{r} \psi_n \right). \quad (117)$$

С помощью (111), исключив  $w_{n+1}$  и  $w_{n-1}$ , будем иметь

$$H_n - \frac{S_n}{(n+1)r} = \left( 1 + \frac{2\omega}{\sigma} \frac{m}{n+1} - \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \frac{(n+1)^2 - m^2}{(n+1)(2n+3)} \right) \left( \psi'_n - \frac{n}{r} \psi_n \right); \\ H_n + \frac{S_n}{nr} = \left( 1 - \frac{2\omega}{\sigma} \frac{m}{n} - \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \frac{n^2 - m^2}{n(2n-1)} \right) \left( \psi'_n + \frac{n+1}{r} \psi_n \right). \quad (118)$$

Из этих равенств можно определить  $H_n$ ,  $S_n$  и выразить  $\Lambda_n$  через  $\psi_n$ :

$$H_n = E_n \left( \psi'_n - \frac{F_n}{E_n r} \psi_n \right); \quad S_n = -F_n \left( \psi'_n r - \frac{D_n}{F_n} \psi_n \right); \\ \Lambda_n = E_n (\Delta \psi_n), \quad (119)$$

где

$$(\Delta \psi)_n = \psi''_n + \frac{2}{r} \psi'_n - \frac{n(n+1)}{r^2} \psi_n.$$

Коэффициенты  $D_n$ ,  $E_n$  и  $F_n$  зависят от  $m$ ,  $n$  и  $\sigma/\omega$ :

$$D_n = n(n+1) - \frac{2\omega}{\sigma} m - C_{n+1} n^2 - C_n(n+1); \quad E_n = 1 - C_n - C_{n+1}; \\ F_n = \frac{2\omega}{\sigma} m + C_n(n+1) - C_{n+1} n; \quad C_n = \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \cdot \frac{n^2 - m^2}{4n^2 - 1}; \\ C_n + F_n = n(n+1)E_n.$$

Из формул (107) следует, что при  $\mu = 0$  и  $\chi = 0$

$$(4\omega^2 - \sigma^2) \psi_n = R_n - \frac{1}{3} \varepsilon \omega (\sigma + \omega) r^2 + W' (H_W)_n + \frac{\lambda}{\rho} \Lambda_n. \quad (120)$$

Это выражение отличается от (45) только формой записи, а именно: постоянным множителем при  $\psi_n$ . Слагаемое, содержащее множителем амплитуду нутации  $\varepsilon$  (§2), добавлено здесь для сравнения окончательных результатов;  $\varepsilon \neq 0$ , если только  $n = 2$  и  $m = 1$ ;  $H_W$  характеризует компоненту смещения по нормали к уровенной поверхности. Если сжатие Земли не учитывать, то формулы (116), (119) и (120) после исключения  $\Lambda_n$  и  $H_n$  дают систему двух уравнений второго порядка, из которых можно определить функции  $\psi_n$  и  $R_n$  с учетом сил Кориолиса. Влияние сил Кориолиса мало только при  $\sigma \gg \omega$ . Потенциал силы тяжести внутри Земли, вращающейся в гидростатическом равновесии, с точностью до первых степеней сжатия определен выражением

$$W = W_0(r) + \frac{2}{3} \alpha K P_2(\cos \vartheta), \quad (121)$$

где  $\alpha$  — сжатие земного эллипсоида;  $K$  — правильное решение дифференциального уравнения

$$K'' + \frac{2}{r} K' - \frac{6}{r^2} K = -\frac{4\pi \rho' G}{W'} K, \quad (122)$$

подчиненное условию  $K(a) = (rW')_{r=a}$ . Тогда плотность и притяжение внутри Земли будут следующими:

$$\rho = \rho_0(r) + \frac{2}{3} \alpha \frac{\rho'}{W'} K P_2(\cos \vartheta); \quad (123)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} &= W' \sin \vartheta \cos \varphi \left( 1 - 2\alpha \frac{K}{rW'} \cos^2 \vartheta \right); \\ \frac{\partial W}{\partial y} &= W' \sin \vartheta \sin \varphi \left( 1 - 2\alpha \frac{K}{rW'} \cos^2 \vartheta \right); \\ \frac{\partial W}{\partial z} &= W' \cos \vartheta \left( 1 + 2\alpha \frac{K}{rW'} \sin^2 \vartheta \right). \end{aligned} \quad (124)$$

С помощью (121) и (123) вычислим  $W'/\rho'$ . Эта функция, как и  $\rho$ , постоянна на уровенной поверхности. Если, кроме того,

$$\rho' = \rho^2 W' / \left( \lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \quad (125)$$

при  $\vartheta = \vartheta_0$  и  $P_2(\cos \vartheta_0) = 0$ , то уравнение (122) обеспечивает выполнение (125) при всех  $\vartheta$  с ошибкой порядка квадрата сжатия.

С помощью (124) вычислим функцию (43):

$$\eta = H_W W' = H_r W' + 2\alpha \frac{K}{r} \cos \vartheta (w - H \cos \vartheta).$$

Здесь  $H_r$  и  $H_W$  — функции, определяющие соответственно радиальное смещение и смещение по нормали к уровенной поверхности. Функция  $H_W$  содержит члены, пропорциональные сферическим функциям  $n - 2$  и  $n + 2$ . Коэффициенты при этих функциях

таковы:

$$(H_W)_n = (H_r)_n - \frac{(n+1)^2 - m^2}{(2n+1)(2n+3)} \frac{2\alpha K}{rW'} \left( H_n - \frac{2n+1}{n+1-m} w_{n+1} \right) -$$

$$- \frac{n^2 - m^2}{(2n-1)(2n+1)} \frac{2\alpha K}{rW'} \left( H_n - \frac{2n+1}{n+m} w_{n-1} \right);$$

$$(H_W)_{n-2} = - \frac{n+m-1}{2n-1} \frac{2\alpha K}{rW'} \left( H_n - \frac{2n+1}{n+m} w_{n-1} \right); \quad (126)$$

$$(H_W)_{n+2} = - \frac{n-m+1}{2n+1} \frac{2\alpha K}{rW'} \left( H_n - \frac{2n+1}{n+1-m} w_{n+1} \right).$$

Эти выражения далее будут использованы в частном случае  $\mu = 0$ .

Уравнение Пуассона (116) представим через вспомогательную функцию  $\phi$ :

$$\phi = R + \frac{\sigma + \omega}{3\omega} \varepsilon \omega^2 r^2 P_2^1(\cos \vartheta) \cos(\sigma t - \varphi) - (4\omega^2 - \sigma^2) \psi. \quad (127)$$

Получим

$$\phi = - \frac{W'}{\rho'} (\rho' H_W + \Lambda \rho) - \left( \frac{\lambda}{\rho} - \frac{\rho W'}{\rho'} \right) \Lambda,$$

$$\Delta \phi = - \frac{4\pi \rho' G}{W'} \phi - (4\omega^2 - \sigma^2) \Delta \psi + 4\pi G \left( \rho' - \frac{\lambda \rho'}{\rho W'} \right) \Lambda. \quad (128)$$

Последние члены справа исчезают при выполнении (125). Обе части уравнений (128) умножим на  $\tau_{nm}$  и проинтегрируем по поверхности сферы радиуса  $r$ . После деления на

$$\int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \tau_{nm}^2 d \cos \vartheta d\varphi$$

будем иметь обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$\phi_n = - \left( \frac{W'}{\rho'} \right) (\rho'_0 H_n + \Lambda_n \rho_0) + a_{nm} \left( W'_2 H_n + \left( \frac{\rho W'}{\rho'} \right)_2 \Lambda_n \right);$$

$$\Delta \phi_n = -4\pi G \left( \frac{\rho'}{W'} \right)_0 \phi_n - (4\omega^2 - \sigma^2) \Delta \psi_n - 4\pi G \left( \frac{\rho'}{W'} \right)_2 a_{nm} \phi_n. \quad (129)$$

Функции с нулевым индексом характеризуют строение Земли вдоль луча  $P_2(\cos \vartheta) = 0$ , с индексом 2 — малый множитель при  $P_2(\cos \vartheta)$ :

$$a_{nm} = \int_{-1}^{+1} [P_n^m(\cos \vartheta)]^2 P_2(\cos \vartheta) d \cos \vartheta \left[ \int_{-1}^{+1} [P_n^m(\cos \vartheta)]^2 d \cos \vartheta \right]^{-1} =$$

$$= 1 - \frac{3}{2} \left( \frac{(n+1)^2 - m^2}{(2n+1)(2n+3)} + \frac{n^2 - m^2}{(2n-1)(2n+1)} \right).$$

Аналогично для определения функций  $\phi_{n+2}$  и  $\psi_{n+2}$  получим уравнения

$$\Delta \phi_{n+2} = -4\pi G \left( \frac{\rho'}{W'} \right)_0 \phi_{n+2} - 6\pi G \left( \frac{\rho'}{W'} \right)_2 \frac{(n-m+1)(n-m+2)}{(2n-1)(2n+3)} \phi_n;$$

$$\phi_{n+2} = - \left( \frac{W'}{\rho'} \right)_0 (\rho'_0 H_{n+2} + \rho_0 \Lambda_{n+2}) + \frac{3}{2} \left( H_n W_2 + \left( \frac{\rho W'}{\rho'} \right)_2 \Lambda_n \right) \frac{(n-m+1)(n-m+2)}{(2n+1)(2n+3)}. \quad (130)$$

Таким образом, при колебании порядка  $n$  функции  $\phi_{n+2}$  и  $\psi_{n+2}$  имеют величину порядка свободных членов в (130), а именно:  $\alpha\phi_n$  и  $\alpha\psi_n$ . Функции  $\phi_{n-2}$  и  $\psi_{n-2}$  — величины того же порядка. Все последующие функции — порядка  $\alpha^2$  или выше.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений с учетом сжатия (129) отличается от уравнений без учета сжатия только малым изменением коэффициентов, зависящим от  $n$  и  $m$ .

Хорошее приближение для точного решения уравнений (129) и (117) можно получить аналитически. Для этого сначала найдем решение при  $\alpha = 0$  для частоты  $\sigma_0$  — корня уравнения

$$\frac{4\omega^2 n^2 - m^2}{\sigma_0^2 2n - 1} + \frac{2\omega}{\sigma_0} m - n = 0. \quad (131)$$

Все корни этого уравнения — действительные числа. Для частоты  $\sigma_0$  из (118) и (119) запишем

$$\frac{F_n}{E_n} = \frac{D_n}{F_n} = n; \quad (H_r)_n = E_n \left( \psi'_n - \frac{n}{r} \psi_n \right) - 2\varepsilon \frac{\omega}{\sigma} r.$$

Введем следующие обозначения:

$$\bar{H}_n = E_n \left( \psi'_n - \frac{n}{r} \psi_n \right); \quad H_n = \bar{H}_n - 2\varepsilon \frac{\omega}{\sigma} r, \quad (132)$$

получим

$$\Lambda_n = \bar{H}'_n + \frac{n+2}{r} \bar{H}_n.$$

Как будет показано далее, при частоте  $\sigma_0$  в (129) можно принять

$$(4\omega^2 - \sigma_0^2) (\Delta\psi_n) = 0.$$

Тогда при  $\alpha = 0$  из (129) следует

$$\phi = C_1 \bar{K}_n + C_2 K_n,$$

где  $K_n$  — правильное решение;  $\bar{K}_n$  — неправильное решение, поэтому  $C_1 = 0$ , и (132) запишем в виде

$$\frac{1}{4\pi G} r^{n+2} \Delta\phi_n = (\rho' H_n + \Lambda_n \rho) r^{n+2} = (\rho H_n r^{n+2})' + 2\varepsilon \frac{\omega}{\sigma} (n+3) \rho r^{n+2}. \quad (133)$$

Воспользуемся тождеством

$$r^{n+2} \Delta\phi_n = \left( \left( \phi'_n - \frac{n}{r} \phi_n \right) r^{n+2} \right)'$$

и найдем интеграл (133):

$$\left( \phi_n - \frac{n}{r} \phi_n - 4\pi \rho G H_n \right) r^{n+2} = 8\pi \varepsilon G (n+3) \frac{\omega}{\sigma} \int_0^r \rho r^{n+2} dr + C_3. \quad (134)$$

Очевидно,  $C_3 = 0$ . Из (134) определим  $H_n$ , затем из (132) —  $\bar{H}_n$  и с помощью этой функции выразим  $\psi_n$ :

$$\psi_n = \frac{1}{3}C_4 r^4 + \frac{r_n}{E_n} \int_0^r \frac{\bar{H}_n}{r^n} dr.$$

Далее убедимся, что  $C_4$  входит в граничные условия только в виде произведения  $\frac{1}{3}(4\omega^2 - \sigma^2)C_4$ , поэтому функция  $\psi_n$  в  $1/\omega^2$  раз больше других функций. Поскольку  $C_4$  в  $\Delta\psi_n$  не входит, исходное приближение  $(4\omega^2 - \sigma^2)\Delta\psi_n = 0$  имеет высокую точность. В решении при  $\sigma = \sigma_0$  и  $\alpha \neq 0$  (разность  $\sigma - \sigma_0$  и  $\alpha$  — малые величины) в возмущающих членах, содержащих множители  $\sigma - \sigma_0$  и  $\alpha$ , сохранены в первом приближении только члены с  $C_4$ , поэтому

$$H_n = \bar{H}_n - 2\varepsilon \frac{\omega}{\sigma} r + (nE_n - F_n) \frac{\psi_n}{r} + (H_W - H_r)_n, \quad (135)$$

где

$$E_n n - F_n = 2 \left( n - \frac{\omega}{\sigma} m \right) \frac{\Delta\sigma}{\sigma}; \quad \bar{H}_n = E_n \left( \psi'_n - \frac{n}{r} \psi_n \right). \quad (136)$$

При вычислении последнего члена в (135), зависящего от сжатия уровневых поверхностей, примем во внимание равенства (117) при  $\sigma = \sigma_0$ :

$$\begin{aligned} S_n + nrH_n &= 0; \\ H_n - \frac{n+1}{n+1-m} w_{n+1} &= a_n \frac{n+1}{2n+1} \frac{\bar{H}_n}{E_n}; \\ H_n - \frac{n}{n+m} w_{n-1} &= \frac{4\omega^2 - \sigma_0^2}{\sigma_0^2} \frac{n}{2n+1} \left( \frac{\bar{H}_n}{E_n} + \frac{2n+1}{r} \psi_n \right). \end{aligned}$$

Если сохранить только главный член с  $C_4$ , то из (136) с помощью (126) следует

$$H_n = \bar{H}_n + \frac{2}{3} \left( n - \frac{\omega}{\sigma} m \right) \frac{\Delta\sigma}{\sigma} r^{n-1} C_4 - 2\varepsilon \frac{\omega}{\sigma} r - \gamma \frac{K_2}{W'} r^{n-2}, \quad (137)$$

где

$$\gamma = \frac{2}{3} \frac{4\omega^2 - \sigma_0^2}{\sigma_0^2} \frac{n^2 - m^2}{2n-1} \alpha C_4.$$

Формула (137) определяет  $H_n$ , если известна функция  $\bar{H}_n$ , а уравнение (134) —  $H_n$  и  $\bar{H}_n$ , если  $\alpha = 0$  и  $\sigma = \sigma_0$ . При уточнении этого уравнения в (133) нужно изменить  $H_n$  в соответствии с (137), так как выражение (132) для  $\bar{H}_n$  сохраняется. Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi G} r^{n+2} \Delta\phi_n &= \left[ \rho' H_n + \rho \left( \bar{H}'_n + \frac{n+2}{r} \bar{H}_n \right) \right] r^{n+2} = \\ &= (\rho r^{n+2} H_n)' + \rho [r^{n+2} (\bar{H}_n - H_n)]'. \end{aligned}$$

В последнем члене, используя (137) после интегрирования, имеем

$$\begin{aligned} \left( \phi'_n - \frac{n}{r} \phi_n - 4\pi\rho G H_n \right) r^{n+2} &= -4\pi G (2n+1) \nu \int_0^r \rho r^{2n} dr + \\ &+ 4\pi\gamma G \int_0^r \rho \left( \frac{K_2 r^{2n}}{W'} \right)' dr, \quad (138) \end{aligned}$$

где  $\nu = \frac{2}{3} \left( n - \frac{\omega}{\sigma} m \right) \frac{\Delta\sigma}{\sigma} C_4 - 2 \frac{\omega}{\sigma} \varepsilon$  с учетом того, что  $\varepsilon = 0$ , если  $n \neq 2$ . В последнем члене (138) выполним интегрирование по частям, произведем замену

$$\frac{\rho'}{W'} K_2 = -\frac{1}{4\pi G} \Delta K_2$$

и еще раз проинтегрируем по частям. В результате будем иметь

$$\begin{aligned} & \left( \phi'_n - \frac{n}{r} \phi_n - 4\pi\rho G H_n \right) r^{n+2} - \gamma \left( K'_2 - 2 \frac{n-1}{r} K_2 + \frac{4\pi\rho G}{W'} K_2 \right) r^{n+2} = \\ & = -4\pi G (2n+1) \nu \int_0^r \rho r^{2n} dr + \gamma (n-2) (3n-1) \int_0^r K_2 r^{2n-2} dr. \quad (139) \end{aligned}$$

В частном случае  $n = 2, m = 1, \sigma_0 = -\omega$  получаем выражение, отличающееся от (50) в [14] обозначениями:

$$(L - 2rR) r^2 - 2\alpha C_4 \left( K'_2 - \frac{2}{r} K_2 + \frac{4\pi\rho G}{W'} K_2 \right) r^4 = -20\nu\pi G \int_0^r \rho r^4 dr.$$

В следующем приближении функцию  $(4\omega^2 - \sigma^2) \Delta\psi_n$  нужно считать известной из предыдущего приближения. Граничные условия составляем так же, как (45)–(51) в [14], но при произвольном  $n$ . Найдем три частных интеграла в оболочке при  $\sigma = 0$  и отсутствии внешних массовых и поверхностных сил. Эти интегралы при  $r = 1$  подчинены условиям

$$M_n = 0; \quad N_n = 0; \quad L_n + (n+1) r R_n = 0. \quad (140)$$

Из них после исключения  $C_2$  с помощью (127) образуем такой частный интеграл, что на границе  $r = b$  оболочки с ядром

$$\begin{aligned} M_n &= 0; \quad N_n + \rho_i (R_n + H_n W') = \rho_i \omega^2 C_4 r^n; \\ L_n - (nr + \gamma r^2) R_n + 4\pi\rho_i G H_n r^2 &= \gamma r (\omega^2 C_4 r^n). \end{aligned}$$

Этими условиями определен единственный интеграл: каждая из функций выражена произведением  $\omega^2 C_4 r^n$  на свою вполне определенную функцию от  $r$ . Остается невыполненным только (139) при  $r = b$ . После подстановки в него  $L_n - nrR_n$ , если  $\varepsilon = 0$ , получаем уравнение вида  $C_4 q = 0$  (при  $\varepsilon \neq 0$  такое уравнение можно получить, исключив  $\varepsilon$  с помощью уравнения сохранения кинетического момента). Следовательно,  $C_4 = 0$ , кроме случая  $q = 0$ . Так как в  $q$  входит  $\Delta\sigma/\sigma_0$ , то условие  $q = 0$  определяет частоту свободных колебаний  $\sigma_0 + \Delta\sigma$ , соответствующую заданному  $m$ ; нетрудно убедиться, что  $\Delta\sigma$  получается малой величиной, порядка  $\sigma\omega b^2$  или порядка  $10^{-3}\sigma$ , т.е. достаточно малой, чтобы оправдать применение метода возмущений. При вынужденных колебаниях условие (140) неоднородно, поэтому все функции в оболочке зависят линейно от  $\omega^2 b^n C_4$ , а уравнение (139) при  $r = b$  (после исключения  $\varepsilon$  для  $n = 2$ ) имеет вид  $p + C_4 q = 0$ .



Следовательно, для заданной величины  $\Delta\sigma$  и определенном  $q$  можно вычислить параметр  $C_4$ . Если отношение  $\Delta\sigma/\sigma$  не мало, то параметр  $C_4$  не велик;  $C_4 = 0$  соответствует статическому приливу.

Следующее приближение может изменить  $\Delta\sigma$  на величину порядка сжатия. При этом в  $\psi_n$  сохраняется не только главный член  $\frac{1}{3}C_4r^n$ , но и следующий, получаемый из предыдущего приближения. Для этого вычисления определяем  $H_n, \dot{H}_n$  из (136) и, наконец,  $\psi_n$  после интегрирования (132). В этом приближении правые части уравнений (115) и (116) и сжатие урвенных поверхностей нужно учитывать не только в ядре, но и в оболочке с помощью уравнений (126) и (129).

Таким образом, должна существовать серия длиннопериодических свободных колебаний, соответствующая функциям  $P_n^m(\cos \vartheta)$  для разных  $n$  и  $m$  на частоте, близкой к той, которая определена формулой (131). Эти колебания возникают при жидком ядре и вращении Земли. Частный случай таких колебаний ( $n = 2, m = 1, \sigma_0 = -\omega$ ) — свободная нутация с периодом, близким к суткам.

### §7. Обыкновенные дифференциальные уравнения элементарного колебания упругой вращающейся Земли

При рассмотрении свободных колебаний и приливов в сферически-симметричной невращающейся планете обычно используют известное разделение колебаний на элементарные сфероидальные и крутильные, введенное впервые Лэмбом. Элементарные решения сфероидального и крутильного типов удастся использовать и для вращающейся планеты при частоте рассматриваемых колебаний значительно выше угловой скорости вращения (как для свободных колебаний Земли) либо при частоте колебаний достаточно низкой, когда в нулевом приближении можно пренебречь силами инерции (земные приливы). Решение задач в первом случае можно уточнить, используя метод возмущения по малому параметру  $\omega/\sigma$ , на основе уравнений в частных производных и приближенных выражений для смещений при крутильных и сфероидальных колебаниях [26]. Однако из-за связи между сфероидальными колебаниями порядка  $n$  и крутильными — порядков  $n - 1$  и  $n + 1$  применение метода возмущений в таком виде может быть осложнено, особенно при частоте сфероидального колебания, близкой к частоте одного из соседних крутильных колебаний [20]. Кроме того, сходимость ряда по степеням  $\omega/\sigma$  остается невыявленной, особенно для наиболее длиннопериодических колебаний Земли, когда  $\omega/\sigma \approx 0,04$  и влияние  $(\omega/\sigma)^2$  существенно. Если же частоты колебаний близки к угловой скорости вращения (при приливах и длиннопериодических колебаниях), разложение по степеням  $\omega/\sigma$  становится невозможным. При рассмотрении резонансных явлений (например, суточной нутации или длиннопериодических колебаний [9]) оказывается неприемлемым также и нулевое приближение  $\omega/\sigma = 0$ . При поиске более эффективного решения задачи путем некоторого обобщения видов смещений для элементарного колебания порядка  $n$  удалось получить для сферически-симметричной модели Земли систему точных обыкновенных дифференциальных уравнений, не связанных с уравнениями смежных порядков  $n$ .

Система обыкновенных дифференциальных уравнений с учетом сил Кориолиса формально может быть получена из хорошо известных уравнений сфероидальных колебаний порядка  $n$ , а также крутильных — порядков  $n - 1$  и  $n + 1$ , если инерционные члены, содержащие множитель  $\rho\sigma^2$ , заменить в них более сложными выражениями, связывающими колебания разных типов в одно общее. Именно функции, характеризующие при  $\omega = 0$  кинетическую энергию сфероидального колебания ( $\rho\sigma^2 H_n$  и  $\rho\sigma^2 S_n$ ) и соседних крутильных колебаний ( $\rho\sigma^2 T_{n-1}$  и  $\rho\sigma^2 T_{n+1}$ ), при  $\omega \neq 0$  следует заменить следующими

выражениями [10]:

$$\begin{aligned}
 \rho\sigma^2\tilde{H}_n &= \rho\sigma^2 H_n - \frac{n+1}{2n+1}\Psi_{n+1} - \frac{n}{2n+1}\Psi_{n-1}; \\
 \rho\sigma^2\tilde{T}_{n-1} &= \rho\sigma^2 T_{n-1} - \Psi_{n-1}; \\
 \rho\sigma^2\tilde{S}_n &= \rho\sigma^2 S_n + \frac{n(n+1)}{2n+1}r(\Psi_{n+1} - \Psi_{n-1}); \\
 \rho\sigma^2\tilde{T}_{n+1} &= \rho\sigma^2 T_{n+1} - \Psi_{n+1}.
 \end{aligned} \tag{141}$$

Новые вспомогательные функции  $\Psi$  и  $T$  заданы следующими выражениями (определение функции  $\Psi$  отлично от использованного в §3):

$$\begin{aligned}
 \Psi_{n+1} &= \rho\sigma^2 \frac{a_n}{b_n} \left( H_n - \frac{S_n}{(n+1)r} + \frac{(n+1)^2 - m^2}{(n+1)(n+2) + m^2} T_{n+1} \right) = \rho\sigma^2 \frac{a_n}{b_n} \Psi_{n+1}^*; \\
 \Psi_{n-1} &= \rho\sigma^2 \frac{a_{-n-1}}{b_{-n-1}} \left( H_n + \frac{S_n}{nr} + \frac{n^2 - m^2}{n(n-1) + m^2} T_{n-1} \right) = \rho\sigma^2 \frac{a_{-n-1}}{b_{-n-1}} \Psi_{n-1}^*;
 \end{aligned} \tag{142}$$

$$\begin{aligned}
 T_{n+1} &= -\frac{2n+1}{n+1-m}w_{n+1} + H_n - \frac{S_n}{(n+1)r}; \\
 T_{n-1} &= H_n + \frac{S_n}{nr} - \frac{2n+1}{n+m}w_{n-1}; \\
 \frac{a_n}{b_n} &= \frac{\frac{2\omega}{\sigma} \frac{m}{n+1} + \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \frac{(n+1)(n+2)+m^2}{(n+1)(2n+3)}}{1 + \frac{2\omega}{\sigma} \frac{m}{n+1} \frac{(n+1)(2n+3)}{(n+1)(n+2)+m^2}}.
 \end{aligned} \tag{143}$$

В справедливости высказанного утверждения можно убедиться, заменив в формулах (115) и (112) функции  $w_{n-1}$  и  $w_{n+1}$  функциями  $T_{n-1}$  и  $T_{n+1}$ . Функции  $\Psi_{n-1}$  и  $\Psi_{n+1}$  объединяют уравнения сфероидальных и крутильных колебаний в одну общую систему дифференциальных уравнений. Добавив уравнение Пуассона, получим полную систему уравнений десятого порядка. Из десяти граничных условий, определяющих частный интеграл, пять условий обеспечивают ограниченность всех функций в центре сферы (условия правильности решения). Пять условий на поверхности Земли определены величинами на этой поверхности:

— потенциалом  $V_e$  внешней возмущающей силы:

$$R'_n - 4\pi\rho GH_n + (n+1)\frac{R_n}{r} = (2n+1)\frac{V_n}{r};$$

— нормальным давлением  $N_W$ ;

— тангенциальными напряжениями:

$$\begin{aligned}
 M_n &= \left( \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_z}{\partial z} \right); \\
 (M_z)_{n+1} &= -\frac{(n+1-m)}{2n+1}\mu \left( \frac{T_{n+1}}{r} \right)' r; \quad (M_z)_{n-1} = -\frac{n+m}{2n+1}\mu \left( \frac{T_{n-1}}{r} \right)' r.
 \end{aligned}$$

Пять правильных линейно независимых интегралов можно задать так, чтобы из пяти функций  $H_n$ ,  $R_n$ ,  $S_n$ ,  $T_{n-1}$ ,  $T_{n+1}$  на поверхности одна в каждом интеграле равнялась единице, а остальные — нулю. Тогда любое правильное решение  $F$  для каждой из функций  $M$ ,  $N$ ,

$$Q = (R' - 4\pi\rho GH)r + (n+1)R = \frac{L}{r} + (n+1)R$$

и компонент касательного напряжения

$$g = \mu \left( \frac{T_{n-1}}{r} \right)' \text{ и } h = \mu \left( \frac{T_{n+1}}{r} \right)'$$

будет определено через эти частные решения, отмеченные индексами  $H, R, S, n-1$  (вместо  $T_{n-1}$ ),  $n+1$  (вместо  $T_{n+1}$ ). Это решение представляет линейная функция

$$F(r) = H(1)F_H(r) + R(1)F_R(r) + S(1)F_S(r) + T_{n-1}F_{n-1}(r) + T_{n+1}F_{n+1}(r). \quad (144)$$

Если  $F(1)$  (на земной поверхности) удовлетворяет граничным условиям, то постоянные в (144) суть числа Лява (в общем случае их пять). При свободном колебании равны нулю на поверхности значения функций  $Q, M, g, h$ , а также давление  $N_w$  по нормали к поверхности. Условие совместности граничных условий (144), определяющих числа Лява, таково:

$$D = \begin{vmatrix} Q_H & Q_S & Q_R & (Q_{n-1}) & (Q_{n+1}) \\ N_H & N_S & N_R & (N_{n-1}) & (N_{n+1}) \\ M_H & M_S & M_R & (M_{n-1}) & (M_{n+1}) \\ (g_H) & (g_S) & (g_R) & (g_{n-1}) & (g_{n+1}) \\ (h_H) & (h_S) & (h_R) & (h_{n-1}) & (h_{n+1}) \end{vmatrix} = 0. \quad (145)$$

Условие (145) определяет частоту свободного колебания. Элементы определителя, заключенные в скобки, равны нулю при  $\omega = 0$ , поэтому тогда

$$D = \begin{vmatrix} Q_H & Q_S & Q_R \\ N_H & N_S & N_R \\ M_H & M_S & M_R \end{vmatrix} g_{n-1} h_{n+1}. \quad (146)$$

Частота, при которой равен нулю один из множителей в (146), определяет при  $\omega = 0$  частоту сфероидального колебания порядка  $n$  или крутильного колебания порядков  $n-1$  или  $n+1$ .

Уравнение (145) для определения частот свободных колебаний, когда  $\omega \neq 0$ , является точным. Если элементы определителя (145) вычислены при частоте  $\sigma_0$ , близкой к одной из частот  $\sigma$  свободных колебаний, то  $D$  — малая величина порядка  $(\sigma_0 - \sigma)/\sigma_0$ . Если  $D = 0$ , числа Лява пропорциональны минорам любой строки определителя (145), а при  $D \neq 0$  отношение миноров отличается от отношения чисел Лява на величины порядка  $(\sigma_0 - \sigma)/\sigma_0$ .

Преобразуем (145) так, чтобы в одном из столбцов (например, в первом) стояли малые величины. Для этого вычислим приближенные значения чисел Лява, умножим элементы каждого столбца на соответствующее число Лява, результаты сложим и заменим ими элементы первого столбца. В новом определителе величина  $D$  точно сохранится, а все элементы первого столбца будут порядка  $(\sigma_0 - \sigma)/\sigma_0$ , так как при  $D = 0$  они все были бы равны нулю. Таким образом,

$$D = A_{11}\delta Q + A_{21}\delta N + A_{31}\delta M + A_{41}\delta g + A_{51}\delta h, \quad (147)$$

где  $A_{i1}$  — миноры первого столбца;  $\delta Q, \delta N, \delta M, \delta g, \delta h$  вычислены по формуле (144) с приближенными числами Лява.

Рассмотрим взаимосвязь определителя (145) и вариаций частоты и функций, входящих в дифференциальные уравнения. Заметим, что для решения двух систем линейных

дифференциальных уравнений

$$y'_k = a_{k1}y_1 + a_{k2}y_2 + \dots + a_{kl}y_l; \quad (148)$$

$$-z'_i = (a_{i1} + \delta a_{i1})z_1 + (a_{i2} + \delta a_{i2})z_2 + \dots + (a_{il} + \delta a_{il})z_l \quad (149)$$

справедливо тождество

$$\sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^l \int_0^r \delta a_{kj} y_k z_j dz + \sum_{k=1}^l y_k(r) z_k(r) = 0, \quad (150)$$

если  $y_k$  и  $z_j$  — правильные (ограниченные в центре сферы) непрерывные решения уравнений (148) и (149). Если все  $\delta a_{kj} = 0$ , функции  $y_i$  и  $z_i$  — взаимно сопряженные. Если же  $|\delta a_{kj}| < \varepsilon$  при всех величинах аргумента и индексов  $k$  и  $j$  ( $\varepsilon$  — малая постоянная), то в (150) можно приближенно принять сопряженность  $y_i$  и  $z_i$ , допуская ошибку порядка  $\varepsilon^2$ . Пусть системой (149) является система уравнений упругих колебаний с учетом сил Кориолиса (§6), а частное решение получено при величинах на поверхности  $H(1) = A_{11}$ ;  $S(1) = A_{12}$ ;  $R(1) = A_{13}$ ;  $T_{n-1}(1) = A_{14}$ ;  $T_{n+1}(1) = A_{15}$  ( $A_{1i}$  — миноры первой строки определителя (145)). Так как с минорами сопряжены соответствующие элементы определителя, то для системы (149) можно принять  $z_1 = Q_H$ ;  $z_2 = Q_S$ ;  $z_3 = Q_R$ ;  $z_4 = Q_{n-1}$ ,  $z_5 = Q_{n+1}$ . Поэтому вместо (150) можно написать

$$\int_0^1 \delta f dr + D = 0, \quad (151)$$

где

$$f = \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^l a_{kj} y_k z_j. \quad (152)$$

Таким образом, из (151) при известном  $D$  можно определить  $\sigma - \sigma_0$ , т.е. частоту свободного колебания. В задаче об упругих колебаниях Земли уравнения, сопряженные с (148), а именно уравнение (149), для  $\delta a_{ik} = 0$  имеют решение

$$z_i = b_{i1}y_1 + b_{i2}y_2 + \dots + b_{il}y_l, \quad (153)$$

где все  $b_{ij}$  зависят только от  $r$ . В этом случае исключение всех  $z_i$  из (149) с помощью (153) возвращает к системе уравнений (148). Для уравнений, описывающих колебания упругой сферически-симметричной Земли, выражения типа (153) очень просты. В системе функций  $H, L, M, N, R, S, X_{n-1}, Y_{n-1}, X_{n+1}, Y_{n+1}$  они имеют следующий вид [16]:

$$\begin{aligned} \bar{N}_n &= H_n r^2; & \bar{H}_n &= -N_n r^2; \\ n(n+1)\bar{S}_n &= -M_n; & n(n+1)\bar{M}_n &= S_n; \\ 4\pi G\bar{L}_n &= R_n; & 4\pi G\bar{R}_n &= -L_n; \\ \bar{X}_{n+1} &= \mu r^2 Y_{n+1}; & \bar{Y}_{n+1} &= -\mu r^2 X_{n+1}; \\ \bar{X}_{n-1} &= \mu r^2 Y_{n-1}; & \bar{Y}_{n-1} &= -\mu r^2 X_{n-1}, \end{aligned} \quad (154)$$

где

$$X_{n+1} = ipT_{n+1}; \quad Y_{n+1} = X'_{n+1}; \quad p^2 = \frac{n+1}{2n+1} \frac{(n+1)^2 - m^2}{(n+1)(n+2) + m^2};$$

$$X_{n-1} = iqT_{n-1}; \quad Y_{n-1} = X'_{n-1}; \quad q^2 = \frac{n}{2n+1} \frac{n^2 - m^2}{n(n-1) + m^2};$$

$i = \sqrt{-1}$ . Черта над буквой означает сопряженную функцию. Если функции  $M_n$  и  $N_n$  заменить функциями  $\Phi_n$  и  $P_n$  (§5):

$$\Phi_n = N_n - \frac{2\mu}{r^2} S_n + \frac{4\mu}{r} H_n;$$

$$P_n = \mu \left( \frac{2}{r} S_n - 2n(n+1) H_n \right) - M_n r^2,$$

то первые четыре выражения в (154) будут следующими:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_n &= H_n r^2; & n(n+1) \bar{P}_n &= S_n; \\ \bar{H}_n &= -\Phi_n r^2; & n(n+1) \bar{S}_n &= -P_n; \end{aligned} \quad (155)$$

а остальные не изменятся.

Справедливость формул (154) и (155) можно проверить непосредственно. Если составить систему сопряженных обыкновенных дифференциальных уравнений и исключить все сопряженные функции с помощью (154) и (155), то полученные уравнения совпадут с исходными. Значения на поверхности ( $r = 1$ ) пяти правильных интегралов могут быть заданы 25 числами. В силу (154) и (155) не все эти числа независимы. Зададим матрицу правильных интегралов при  $r = 1$  следующим образом:

$H_n$	$S_n$	$R_n$	$X_{n-1}$	$X_{n+1}$	$\Phi_n$	$P_n$	$L_n$	$Y_{n-1}$	$Y_{n+1}$
1	0	0	0	0	$\Phi_1$	$P_1$	$L_1$	$Y_{n-1,1}$	$Y_{n+1,1}$
0	1	0	0	0	$\Phi_2$	$P_2$	$L_2$	$Y_{n-1,2}$	$Y_{n+1,2}$
0	0	1	0	0	$\Phi_3$	$P_3$	$L_3$	$Y_{n-1,3}$	$Y_{n+1,3}$
0	0	0	1	0	$\Phi_4$	$P_4$	$L_4$	$Y_{n-1,4}$	$Y_{n+1,4}$
0	0	0	0	1	$\Phi_5$	$P_5$	$L_5$	$Y_{n-1,5}$	$Y_{n+1,5}$

(156)

Эту матрицу дополним пятью неправильными интегралами с единицами по диагонали у одной из функций  $\Phi_n$ ,  $L_n$ ,  $P_n$ ,  $Y_{n-1}$  и  $Y_{n+1}$  и нулями для всех остальных элементов. Такая матрица десятого порядка легко обращается и дает простые выражения для элементов обратной матрицы — частных интегралов сопряженной системы дифференциальных уравнений. Результат обращения сравним с (154) и получим

$$\begin{aligned} n(n+1)\Phi_2 &= P_1; & 4\pi G\Phi_3 &= L_1; & 4\pi GP_3 &= n(n+1)L_2; \\ \Phi_3 &= -\mu Y_{n-1,1}; & P_4 &= -n(n+1)\mu Y_{n-1,2}; & L_4 &= -4\pi G\mu Y_{n-1,3}; \\ \Phi_5 &= -\mu Y_{n+1,1}; & P_5 &= -n(n+1)\mu Y_{n+1,2}; \\ L_5 &= -4\pi\mu GY_{n+1,3}; & Y_{n+1,4} &= Y_{n+1,5}. \end{aligned}$$

Остальные 15 равенств удовлетворяются тождественно. Поэтому из 25 чисел, входящих в правую часть матрицы (156), 10 чисел могут контролировать точность вычисления, т.е. точность численного интегрирования дифференциальных уравнений.

Пусть система (148) является системой дифференциальных уравнений, соответствующей собственному значению  $\sigma_1$ , а система (149) — сопряженной системой, соответствующей собственному значению  $\sigma_2$ . Вычислим правильные частные интегралы такие, что при  $r = 1$   $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = y_5 = 0$  в силу граничных условий, определяющих  $\sigma_1$ , а  $z_6 = z_7 = z_8 = z_9 = z_{10} = 0$  в силу граничных условий, определяющих  $\sigma_2$  (это можно выполнить в системе функций, использованной при составлении условия 3). Тогда в (151)  $D = 0$  и отличны от нуля только те  $\delta a_{ij}$ , которые зависят от  $\sigma$ . Воспользуемся самосопряженностью дифференциальных уравнений, позволяющей выразить все функции сопряженной системы через функции исходной. В результате из (151) получим

$$\int_0^1 (\sigma_2^2 - \sigma_1^2) \left[ \frac{n+1}{2n+1} \left( H_n - \frac{S_n}{(n+1)r} \right)_1 \left( H_n - \frac{S_n}{(n+1)r} \right)_2 + \right. \\ \left. + \frac{n}{2n+1} \left( H_n + \frac{S_n}{nr} \right)_1 \left( H_n + \frac{S_n}{nr} \right)_2 + \right. \\ \left. + \frac{n+1}{2n+1} \frac{(n+1)^2 - m^2}{(n+1)(n+2) + m^2} (T_{n+1})_1 (T_{n+1})_2 + \right. \\ \left. + \frac{n}{2n+1} \frac{n^2 - m^2}{n(n-1) + m^2} (T_{n-1})_1 (T_{n-1})_2 - \right. \\ \left. - \left( \left( \frac{\sigma^2 a_n}{b_n} \right)_2 - \left( \frac{\sigma^2 a_n}{b_n} \right)_1 \right) (\Psi_{n+1})_1 (\Psi_{n+1})_2 - \right. \\ \left. - \left( \left( \frac{\sigma^2 a_{-n-1}}{b_{-n-1}} \right)_2 - \left( \frac{\sigma^2 a_{-n-1}}{b_{-n-1}} \right)_1 \right) (\Psi_{n-1})_1 (\Psi_{n-1})_2 \right] \rho r^2 dr = 0. \quad (157)$$

Индексами «1» и «2» отмечены собственные функции, соответствующие собственным значениям  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Интегральное условие (157) необходимо и достаточно для определения коэффициентов рядов, представляющих функции, характеризующие вынужденное колебание через статическое решение и собственные функции свободных колебаний. При варьировании частоты в формуле (152) существенны только члены

$$f(\sigma) = \rho \sigma^2 \left( H_n^2 + \frac{S_n^2}{n(n+1)} + p^2 T_{n+1}^2 + q^2 T_{n-1}^2 \right) - \frac{n+1}{2n+1} \frac{\sigma^2 a_n}{b_n} \rho \Psi_{n+1}^{*2} - \\ - \frac{n}{2n+1} \frac{\sigma^2 a_{-n-1}}{b_{-n-1}} \rho \Psi_{n-1}^{*2}. \quad (158)$$

Для сравнения с этим выражением вычислим кинетическую энергию. Используя выражения для смещений (106), определим скорости смещений и после интегрирования по объему всей Земли — кинетическую энергию  $W$  элементарного колебания, характеризуемого параметрами  $\sigma$ ,  $m$ ,  $n$ :

$$2W = \frac{2\pi}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \int_0^1 \left[ (\sigma^2 - 4\omega^2) \frac{(n+1)(n+2) + m^2}{(2n+1)(2n+3)} \Psi_{n+1}^2 + \right. \\ \left. + (\sigma^2 - 4\omega^2) \frac{n(n+1) + m^2}{(2n-1)(2n+1)} \Psi_{n-1}^2 + \frac{2n+1}{2n+3} \frac{n+1+m}{n+1-m} \sigma^2 w_{n+1}^2 + \right. \\ \left. + \frac{2n+1}{2n-1} \frac{n-m}{n+m} \sigma^2 w_{n-1}^2 \right] \rho r^2 dr. \quad (159)$$

После исключения  $\Psi_{n+1}$  и  $\Psi_{n-1}$  с помощью (141) и  $w_{n-1}$ ,  $w_{n+1}$  с помощью (111) можно убедиться, что подынтегральное выражение в (159) отличается от (158) постоянным множителем и членами порядка квадрата возмущений.

Зависимость собственной частоты  $\sigma$  от  $m$  (расщепление спектральных линий при вращении Земли) можно определить подстановкой (158) в (151) и варьированием результата по  $m$ , если принять во внимание зависимость  $f$  от  $m$  через коэффициенты  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $a_{-n-1}$ ,  $b_{-n-1}$ ,  $p$ ,  $q$ . Заметим, что таким образом ротационное расщепление спектральных линий может быть найдено точно и при любом отношении  $\omega/\sigma$ . Если при вычислении  $\sigma$  ограничиться относительной точностью порядка  $\omega^2 a/g \approx 1/300$ , то зависимость  $D$  от  $m$  можно не учитывать, и в результате варьирования (151) по  $m$  получим

$$\sigma_{n,m} - \sigma_{n,0} = \frac{\int_0^1 (f(n,m) - f(n,0)) dr}{\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \sigma} dr}. \quad (160)$$

Таким образом, расщепление спектральных линий оказывается связанным с кинетической энергией элементарного колебания.

В заключение отметим следующее обстоятельство. Из формул (142) можно предположить, что существуют такие частоты, при которых характер колебаний существенно меняется. Именно в случае близости  $b_n$  или  $b_{-n-1}$  к нулю возмущающие члены  $\Psi_{n+1}$  или  $\Psi_{n-1}$ , казалось бы, должны неограниченно возрастать. Однако, если принять во внимание ограниченность кинетической энергии и выразить возмущение через  $\Psi_n$ ,  $\Psi'_n$  по формуле (111), то выяснится, что никаких особенностей в характере колебаний в этом случае не возникает.

### §8. Простейшие упругие колебания вращающейся Земли

Упругие колебания вращающейся Земли, имеющей сферически-симметричное строение и начальные напряжения гидростатического характера, описаны системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Радиальное смещение  $H$  (16), изменение  $R$  потенциала притяжения (21) и компонент  $w$  смещения в направлении оси вращения Земли:

$$w = X_{n-1}(r)\tau_{n-1} + Y_{n+1}(r)\tau_{n+1}, \quad (161)$$

при простейших граничных условиях приняты искомыми функциями. Значения, принимаемые тремя функциями, выражающими условия сфероидальных колебаний порядка  $n$ , и двумя функциями, выражающими условия кругильных колебаний порядков  $n-1$  и  $n+1$ , определяют граничные условия. Простейшим будем считать колебание, при котором функции имеют вид (21). В §6 отмечено, что система обыкновенных дифференциальных уравнений (112), (115) и (116) разрешима независимо от систем с другой величиной  $n$ . Это верно при  $\mu = 0$ , но если  $\mu \neq 0$ , существуют малые связи между системами с близкими  $n$ . Рассмотрим источники этих связей, имея в виду общие выражения:

$$\begin{aligned} H &= \sum_{n=0}^{\infty} \tau_n H_n(r); & R &= \sum_{n=0}^{\infty} \tau_n R_n(r); \\ w &= \sum_{n=0}^{\infty} [X_{n-1}(r)\tau_{n-1} + Y_{n+1}(r)\tau_{n+1}]. \end{aligned} \quad (162)$$

Третье из уравнений (107) представим следующим образом:

$$\frac{\partial A}{\partial z} + Bz + f(w) - \rho\sigma^2 w = -\rho(\sigma^2 - 4\omega^2) \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} - \chi z \right) - \Theta,$$

где

$$\Theta = \rho\sigma^2 w - \rho(\sigma^2 - 4\omega^2) \left( \frac{\partial\psi}{\partial z} - \chi z \right).$$

Тогда из этих уравнений получим

$$A' + Br + f(H) - \rho\sigma^2 H = -\rho(\sigma^2 - 4\omega^2) (\psi' - \chi r) - \frac{z}{r} \Theta;$$

$$\begin{aligned} \Delta A + 3B + B'r + f(\Lambda) - \Lambda\rho\sigma^2 = & -\rho(\sigma^2 - 4\omega^2) (\Delta\psi - \chi'r - 3\chi) - \\ & - \rho'(\sigma^2 - 4\omega^2) (\psi' - \chi r) - \frac{\partial\Theta}{\partial z}. \end{aligned}$$

Исключив из них  $A''$ , определив  $A'_n + B_n r$  и  $A_n$ , будем иметь уравнения вида (112), дополненные слагаемыми, появляющимися из рядов (162).

Связь между уравнениями разных порядков  $n$  возникает при представлении производной по  $z$  через производные по  $r$  и  $\vartheta$  и использовании рекуррентных соотношений (63). Поэтому в выражения  $\frac{z}{r}\Theta$ ,  $\frac{\partial\Theta}{\partial z}$ ,  $\frac{z}{r}w$  и  $\frac{\partial z}{\partial z}$  входят слагаемые не только с  $\tau_n$ , но также с  $\tau_{n-2}$  и  $\tau_{n+2}$ . Повторив вычисления, приводящие к уравнениям (113) и (114), но с сохранением гармоник соседних степеней, получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ \tau_n \left[ A'_n + B_n r - \frac{n}{r} A_n + f_{n+1} \left( H_n - \frac{S_n}{(n+1)r} \right) - \rho\sigma^2 \left( H_n - \frac{S_n}{(n+1)r} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + (\sigma^2 - 4\omega^2) \left( \psi' - \chi r - \frac{n}{r} \psi \right)_n - \frac{2n+1}{2n+3} \cdot \frac{n+m+1}{n+1} \Theta_{n+1} \right] + \right. \\ \left. + \tau_{n+2} \frac{n+m-1}{n+1} \Theta_{n-1} - \tau_{n-2} \frac{2(n+m+2)}{(n+1)(2n+3)} \Theta_{n+1} \right\} = 0; \quad (163) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \tau_n \left[ A'_n + B_n r + \frac{n+1}{r} A_n + f_{n-1} \left( H_n + \frac{S_n}{nr} \right) - \rho\sigma^2 \left( H_n + \frac{S_n}{nr} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + (\sigma^2 - 4\omega^2) \left( \psi' - \chi r + \frac{n+1}{r} \psi \right)_n - \frac{2n+1}{2n-1} \cdot \frac{n-m}{n} \Theta_{n-1} \right] + \right. \\ \left. + \tau_{n-2} \frac{n+2-m}{n} \Theta_{n+1} + \tau_{n+2} \frac{2(n-1-m)}{n(2n-1)} \Theta_{n-1} \right\} = 0. \quad (164) \end{aligned}$$

Из (163) и (164) нужно исключить вспомогательные функции  $\chi_n$ ,  $\psi_n$ ,  $\Theta_{n-1}$  и  $\Theta_{n+1}$ , для этого используем функции  $U_{n-1}$  и  $V_{n+1}$ , входящие в окончательный результат:

$$\begin{aligned} U_{n-1} &= H_n + \frac{S_n}{nr} - \frac{2n+1}{n+m} w_{n-1}; \\ V_{n+1} &= H_n - \frac{S_n}{(n+1)r} - \frac{2n+1}{n+1-m} w_{n+1}. \end{aligned} \quad (165)$$

Из (162) определим

$$w_{n-1} = X_{n-1} + Y_{n-1}; \quad w_{n+1} = X_{n+1} + Y_{n+1}.$$



Исключая  $w_{n-1}$  и  $w_{n+1}$  из (111), имеем

$$\begin{aligned} b_n \left( \psi' - \chi r - \frac{n}{r} \psi \right)_n &= H_n - \frac{S_n}{(n+1)r} + \frac{(n+1)^2 - m^2}{(n+1)(n+2) + m^2} V_{n+1}; \\ b_{-n-1} \left( \psi' - \chi r + \frac{n+1}{r} \psi \right)_n &= H_n + \frac{S_n}{nr} + \frac{n^2 - m^2}{n(n-1) + m^2} U_{n-1} \end{aligned} \quad (166)$$

и находим

$$\begin{aligned} \frac{2n+1}{n+m} \Theta_{n-1} &= \rho \sigma^2 \left( H_n + \frac{S_n}{nr} - U_{n-1} \right) - \\ &\quad - (\sigma^2 - 4\omega^2) \rho \frac{n+m}{2n-1} \left( \psi' - \chi r + \frac{n+1}{r} \psi \right)_n; \\ \frac{2n+1}{n+1-m} \Theta_{n+1} &= \rho \sigma^2 \left( H_n - \frac{S_n}{(n+1)r} - V_{n+1} \right) - \\ &\quad - (\sigma^2 - 4\omega^2) \rho \frac{n+1-m}{2n+3} \left( \psi' - \chi r - \frac{n}{r} \psi \right)_n. \end{aligned} \quad (167)$$

Уравнения (112) сохраняют свой вид, если  $w_{n-1}$  и  $w_{n+1}$  выражены в системе функций  $H_n, R_n, S_n, U_{n-1}, V_{n+1}$ :

$$\begin{aligned} A'_n + B_n r - \frac{n}{r} A_n + f_{n+1} \left( H_n - \frac{S_n}{(n+1)r} - V_{n+1} \right) &= 0; \\ A'_n + B_n r + \frac{n+1}{r} A_n + f_{n-1} \left( H_n + \frac{S_n}{nr} - U_{n-1} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (168)$$

Пользуясь (168), исключаем  $A_n$  и  $B_n$  из (163) и (164). С помощью (166) и (167) исключаем  $\chi_n$  и  $\psi_n$ ,  $\Theta_{n-1}$  и  $\Theta_{n+1}$ . В системе функций  $H_n, R_n, S_n, U_{n-1}, V_{n+1}$  получаем

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \tau_n \left[ f_{n+1} (V_{n+1}) - \rho \sigma^2 \frac{a_n}{b_n} \left( H_n - \frac{S_n}{(n+1)r} + \frac{(n+1)^2 - m^2}{(n+1)(n+2) + m^2} V_{n+1} \right) \right] + \right. \\ \left. + \tau_{n+2} \frac{n+m-1}{n+1} \Theta_{n-1} - 2 \frac{n+m+2}{(n+1)(2n+3)} \tau_{n-2} \Theta_{n+1} \right\} = 0; \end{aligned} \quad (169)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \tau_n \left[ f_{n-1} (U_{n-1}) - \rho \sigma^2 \frac{a_{-n-1}}{b_{-n-1}} \left( H_n + \frac{S_n}{nr} + \frac{n^2 - m^2}{n(n-1) + m^2} U_{n-1} \right) \right] + \right. \\ \left. + \tau_{n-2} \frac{n+2-m}{n} \Theta_{n+1} + 2 \tau_{n+2} \frac{n-m-1}{n(2n-1)} \Theta_{n-1} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (170)$$

Для определения всех пяти функций, к уравнениям (168)–(170) нужно присоединить пятое уравнение — уравнение Пуассона:

$$\begin{aligned} R''_n + \frac{2}{r} R'_n - \frac{n(n+1)}{r^2} R = 4\pi G \frac{n+1}{2n+1} \left[ \left( H_n - \frac{S_n}{(n+1)r} \right) \rho r^{n+2} \right]' r^{-n-2} + \\ + 4\pi G \frac{n}{2n+1} \left[ \left( H_n + \frac{S_n}{nr} \right) \rho r^{-n+1} \right]' r^{n-1}. \end{aligned} \quad (171)$$

Эти пять уравнений получены в результате формального преобразования уравнений в частных производных (уравнений упругих колебаний). Если они удовлетворены при любом положении точки в любой момент времени, т.е. если для всех  $n$  определены функции  $H_n(r)$ ,  $R_n(r)$ ,  $S_n(r)$ ,  $U_{n-1}(r)$ ,  $V_{n+1}(r)$ , удовлетворяющие уравнениям (168)–(171) и заданным граничным условиям, то получено решение исходных уравнений (107). Функцию  $\Theta$ , введенную в уравнение (107), в системе функций  $H_n$ ,  $R_n$ ,  $S_n$ ,  $U_{n-1}$ ,  $V_{n+1}$  можно определить из (167), используя (166):

$$\frac{2n+1}{n+m}\Theta_{n-1} = \rho\sigma^2 \left( H_n + \frac{S_n}{nr} - U_{n-1} \right) - (\sigma^2 - 4\omega^2) \frac{\rho}{b_n} \left( H_n + \frac{S_n}{nr} + \frac{n^2 - m^2}{n(n-1) + m^2} U_{n-1} \right); \quad (172)$$

$$\frac{2n+1}{n+1-m}\Theta_{n+1} = \rho\sigma^2 \left( H_n - \frac{S_n}{(n+1)r} - V_{n+1} \right) - (\sigma^2 - 4\omega^2) \frac{\rho}{b_{-n-1}} \left( H_n - \frac{S_n}{(n+1)r} + \frac{(n+1)^2 - m^2}{(n+1)(n+2) + m^2} V_{n+1} \right). \quad (173)$$

Уравнения (169) и (170) отличаются от (114) и (115) слагаемыми с  $\tau_{n-2}$  и  $\tau_{n+2}$ , множители при  $\tau_n$  такие же, как в (141) и (142). После объединения слагаемых с  $\tau_n$  множители при  $\tau_n$  для всех  $n$  нужно приравнять к нулю. Тогда уравнения (169) и (170) примут следующий вид:

$$f_{n+1}(V_{n+1}) - \rho\sigma^2 \frac{a_n}{b_n} \left( H_n - \frac{S_n}{(n+1)r} + \frac{(n+1)^2 - m^2}{(n+1)(n+2) + m^2} V_{n+1} \right) = 2 \frac{n+m+4}{(n+3)(2n+7)} \Theta_{n+3} - \frac{n+m-3}{n-1} \Theta_{n-3}; \quad (174)$$

$$f_{n-1}(U_{n-1}) - \rho\sigma^2 \frac{a_{-n-1}}{b_{-n-1}} \left( H_n + \frac{S_n}{nr} + \frac{n^2 - m^2}{n(n-1) + m^2} U_{n-1} \right) = - \frac{n+4-m}{n+2} \Theta_{n+3} - 2 \frac{n-3-m}{(n-2)(2n-5)} \Theta_{n-3}. \quad (175)$$

В правые части этих уравнений входят функции из системы порядка  $n$ , измененного на две единицы. Но при малом  $\omega$  функции  $\Theta_{n-3}$  и  $\Theta_{n+3}$  можно определить из уравнений и граничных условий, составленных при  $\omega = 0$ . Тогда эти функции становятся известными и система уравнений, в которую входят (174) и (175), — неоднородной. Если  $\omega = 0$ , то  $a_n = 0$ ,  $b_n = 1$ . Из (172) и (173) следует, что тогда  $\Theta_{n-1}$  и  $\Theta_{n+1}$  пропорциональны  $U_{n-1}$  и  $V_{n+1}$ . Поэтому уравнения (174) и (175) будут удовлетворены, если при всех  $n$   $U_{n-1} = V_{n+1} = 0$ . Остальные уравнения приводят к уравнениям сфероидальных колебаний и не связаны с уравнениями соседних порядков. Крутильных колебаний не возникает.

При  $\omega \neq 0$ , но малом для граничных условий сфероидальных колебаний

$$\left[ \mu \left( \frac{U_{n-1}}{r} \right)' \right]_{r=1} = \left[ \mu \left( \frac{V_{n+1}}{r} \right)' \right]_{r=1} = 0,$$

функции  $U_{n-1}, V_{n+1}, \Theta_{n-3}, \Theta_{n+3}$  малы при всех величинах  $r$ . В исходном приближении достаточно принять  $\Theta_{n-3} = \Theta_{n+3} = 0$ , а в следующих приближениях вычислять эти функции по предыдущему приближению. В условиях Земли сходимость приближений не вызывает сомнений. В предельном случае жидкого ядра  $\mu = 0$ ;  $f(u) = \rho\sigma^2 u$ ;  $f(v) = \rho\sigma^2 v$ ;  $f(w) = \rho\sigma^2 w$  и уравнения (107) существенно упрощаются:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial x} + Bx + \rho(\sigma^2 - 4\omega^2) \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - \chi x \right) &= 0; \\ \frac{\partial A}{\partial y} + By + \rho(\sigma^2 - 4\omega^2) \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} - \chi y \right) &= 0; \\ \frac{\partial A}{\partial z} + Bz + \rho\sigma^2 w &= 0. \end{aligned} \quad (176)$$

Первые два из уравнений (176) будут удовлетворены, если

$$\frac{A}{\rho} + (\sigma^2 - 4\omega^2) \psi = 0; \quad \frac{\rho'}{\rho^2} A + \frac{Br}{\rho} - (\sigma^2 - 4\omega^2) \chi r = 0. \quad (177)$$

Введя (177) в третье из уравнений (176), получим

$$w = \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{\sigma^2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} - \chi z \right); \quad \Theta = 0.$$

При  $\mu = 0$  из (107) следует

$$A = \rho(R + HW') = \Lambda\lambda; \quad -Br = \rho'(R + HW') + \Lambda\rho W',$$

а из (177) будем иметь уравнения

$$\begin{aligned} (4\omega^2 - \sigma^2) \psi &= R + HW' + \frac{\Lambda\lambda}{\rho}; \\ (4\omega^2 - \sigma^2) \chi r^2 &= \left( \rho W' - \frac{\rho'}{\rho} \lambda \right) \Lambda. \end{aligned} \quad (178)$$

Эти уравнения можно получить из общих уравнений (168). Так как  $\Theta = 0$ , а  $f(u) = \rho\sigma^2 u$ ,  $f(v) = \rho\sigma^2 v$ ,  $f(w) = \rho\sigma^2 w$ , из (169) и (170) определяем  $U_{n-1}$  и  $V_{n+1}$ :

$$U_{n-1} = a_{-n-1} \left( \psi' - \chi r + \frac{n+1}{r} \psi \right)_n; \quad V_{n+1} = a_n \left( \psi' - \chi r - \frac{n}{r} \psi \right)_n. \quad (179)$$

В отличие от (117) закон изменения плотности с глубиной не ограничен условием  $\chi = 0$ .

Введем в (172) и (173)  $\Theta_{n-1} = \Theta_{n+1} = 0$  и (179), откуда

$$\begin{aligned} H_n - \frac{S_n}{(n+1)r} &= \zeta_n \left( \psi' - \chi r - \frac{n}{r} \psi \right)_n; \\ H_n + \frac{S_n}{nr} &= \zeta_{-n-1} \left( \psi' - \chi r + \frac{n+1}{r} \psi \right)_n, \end{aligned} \quad (180)$$

где  $\zeta_n = a_n + \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{\sigma^2}$ .

Из (180) вытекает

$$H_n = E_n (\psi' - \chi r)_n - F_n \frac{1}{r} \psi_n; \quad (181)$$

$$S_n = E_n \left[ (\psi' - \chi r)'_n + \frac{2}{r} (\psi' - \chi r)_n - \frac{n(n+1)}{r^2} \psi_n \right],$$

где  $E_n$  и  $F_n$  определены так же, как в §6.

Для определения функций, входящих в уравнения колебаний при  $\mu = 0$ ,  $\chi \neq 0$ , удобна система функций  $\psi_n$ ,  $R_n$ ,  $Z_n$ , где  $Z_n = \psi'_n - \chi_n r$ . Тогда из (180) и (181) следует

$$H_n = E_n Z_n - \frac{F_n}{r} \psi_n; \quad \Lambda_n = E_n \left( Z' + \frac{2}{r} Z - \frac{n(n+1)}{r^2} \psi \right)_n.$$

Уравнения (178) в этой системе функций таковы:

$$Z'_n = \frac{\rho}{\lambda E_n} [(4\omega^2 - \sigma^2) \psi - R - HW']_n - \frac{2}{r} Z_n + \frac{n(n+1)}{r^2} \psi_n; \quad (182)$$

$$\psi'_n = \left( \frac{\rho^2 W'}{\lambda} - \rho' \right) [(4\omega^2 - \sigma^2) \psi - R - HW']_n \frac{1}{(4\omega^2 - \sigma^2)r} + Z_n.$$

Уравнение Пуассона будет иметь вид

$$R''_n + \frac{2}{r} R'_n - \frac{n(n+1)}{r^2} R_n = 4\pi G \left[ \frac{\rho^2}{\lambda} ((4\omega^2 - \sigma^2) \psi - R - HW')_n + \rho' H \right]. \quad (183)$$

Уравнения (182) и (183) после исключения  $H_n$  с помощью (181) определяют  $\psi_n$ ,  $R_n$ ,  $Z_n$ , а затем  $H_n$ ,  $R_n$ ,  $N_n = \Lambda_n \lambda$ ,  $L_n = r^2 (R'_n - 4\pi \rho G H_n)$ . Функции  $H_n$ ,  $L_n$ ,  $N_n$ ,  $R_n$  входят в самосопряженные дифференциальные уравнения. Определив  $\psi_n$  и  $Z_n$  как функции  $H_n$  и  $N_n$ , можно выразить сопряженные с ними функции через  $H_n$  и  $N_n$ .

### §9. Влияние малых нарушений сферической симметрии строения Земли на ее упругие колебания

Теория упругих приливов и свободных колебаний разработана для Земли, строение которой сферически-симметрично, а граничные условия имеют простейший вид. Малые отклонения от сферы поверхностей равных модулей упругости  $\lambda$  и  $\mu$  и плотности  $\rho$ , а также граничных поверхностей можно учесть методом возмущений [15, 27, 28]. Такие расчеты, основанные на использовании свойств самосопряженности уравнений в частных производных в интегральной форме, проведены, в частности, в указанных работах, а также в [17]. Ниже предложен другой подход к решению тех же задач, основанный на анализе общих систем обыкновенных дифференциальных уравнений. При простейшем колебании, когда граничные условия зависят от времени через множитель  $\tau$  (14), уравнения упругих колебаний в частных производных приведены к системе уравнений, в которую как параметры входят  $\sigma$ ,  $m$  и  $n$ . Наиболее удобна система обыкновенных дифференциальных уравнений, в которой неизвестными являются функции, сохраняющие непрерывность при разрывах  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\rho$ , а именно функции  $H$ ,  $R$ ,  $S$ ,  $T_{n-1}$ ,  $T_{n+1}$ , описывающие смещения и изменения потенциала, и функции  $L$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $\mu \left( \frac{T_{n-1}}{r} \right)'$ ,  $\mu \left( \frac{T_{n+1}}{r} \right)'$ , описывающие напряжения и изменение притяжения.

Замена исходных уравнений в частных производных системой обыкновенных дифференциальных уравнений возможна не только при полной сферической симметрии Земли.

Такая замена возможна при простейшем колебании на части сферы, если только на ней производные от  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\rho$  по полярному расстоянию  $\vartheta$  и долготе  $\varphi$  равны нулю. Если сфера разделена на части и в каждой части получены обыкновенные дифференциальные уравнения, то их решения должны быть согласованы условиями непрерывности напряжений, потенциала притяжения, смещений и притяжения. Простейшим является случай, когда в малой заданной области функция  $\mu$  изменена на малую величину  $\beta$ , которая не зависит от  $\vartheta$  и  $\varphi$ . Функция  $\beta$  может быть не малой, если отлична от нуля в малой области. Тогда такое изменение  $\mu$ ,  $\lambda$ ,  $\rho$  приведет к малому изменению функций, характеризующих колебание. Общий случай с мало измененными  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\rho$  приведет к малому изменению характера колебаний и может быть представлен суммой простейших изменений. Упрощение задачи достигнуто возможностью заранее указать вид решения.

Будем искать изменение функций  $Y_i$ , описывающих простейшее колебание с параметрами  $\sigma$ ,  $m$ ,  $n$ . Эти функции являются решением системы уравнений

$$Y_i' = \sum \alpha_{ij} Y_j. \quad (184)$$

В этой системе непрерывных функций коэффициенты  $\alpha_{ij}$  не содержат производных от  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\rho$ . Возмущения коэффициентов в простейшем случае приняты равными  $\beta(\vartheta_0, \varphi_0)\alpha_{ij}$ , функции  $\beta(\vartheta_0, \varphi_0)$  постоянны в каждой выделенной области, но меняются от области к области (разрывны по  $\vartheta_0$  и  $\varphi_0$  на границах областей). Пусть  $Z_i$  — возмущения функции  $Y_i$ , тогда уравнения с возмущениями таковы:

$$(Y_i + Z_i)' = \sum \alpha_{ij} (Y_j + Z_j) + \beta \sum \alpha_{ij} Y_j. \quad (185)$$

Произведения  $\alpha_{ij}\beta Z_j$  как малые второго порядка опущены. Из (184) и (185) получаем

$$Z_i' = \sum \alpha_{ij} Z_j + \beta \sum \alpha_{ij} Y_j. \quad (186)$$

В функциях  $Y_i$ , в граничных условиях (как в коэффициентах) выделяем слагаемые, пропорциональные  $\beta$ . Тогда условия на границах  $r = a$  (поверхность Земли) и  $r = b$  (граница ядра) приобретают вид

$$Y_i(a, \vartheta, \varphi) = A_i + a_i \beta(\vartheta_0, \varphi_0); \quad Y_i(b, \vartheta, \varphi) = B_i + b_i \beta(\vartheta_0, \varphi_0). \quad (187)$$

Коэффициенты  $a_i$  и  $b_i$  могут быть нулями, но в  $A_i$  и  $B_i$  хотя бы один коэффициент предполагаем отличным от нуля (чтобы существовало невозмущенное колебание). Уравнения (186) и условия (187) допускают решение вида

$$Y_i(r, \vartheta_0, \varphi_0) = Y_i(r) + \beta(\vartheta_0, \varphi_0) Z_i(r). \quad (188)$$

Уравнения и граничные условия, полученные после подстановки (188) в (186) и (187), должны быть удовлетворены при всех  $\vartheta_0$  и  $\varphi_0$ . Это возможно, если  $Y_i(r)$  и  $Z_i(r)$  определены из решения граничных задач:

1) уравнений (184) с условиями

$$Y_i(a) = A_i; \quad Y_i(b) = B_i; \quad (189)$$

2) уравнений (186), в которых  $Y_i$  теперь известны, с условиями

$$Z_i(a) = a_i; \quad Z_i(b) = b_i. \quad (190)$$

Допустим, возмущения  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\rho$  отсутствуют, но границы мало отличаются от сферы. Пусть

$$r(a, \vartheta, \varphi) = a + \zeta\beta(\vartheta, \varphi); \quad r(b, \vartheta, \varphi) = b + \eta\beta(\vartheta, \varphi). \quad (191)$$

При малых  $\zeta$  и  $\beta$ , из (191) с решением вида (188) получаем

$$Y_i(a + \zeta\beta(\vartheta, \varphi)) = Y_i(a) + \zeta\beta(\vartheta, \varphi) Y_i'(a) = Y_i(a) + \beta(\vartheta, \varphi) Z_i(a);$$

$$Y_i(b + \eta\beta(\vartheta, \varphi)) = Y_i(b) + \eta\beta(\vartheta, \varphi) Y_i'(b) = Y_i(b) + \beta(\vartheta, \varphi) Z_i(b).$$

Отсюда выводим граничные условия:

1) для уравнений (184)

$$Y_i(a) = A_i; \quad Y_i(b) = B_i; \quad (192)$$

2) для уравнений (186) при  $\alpha_{ij} = 0$

$$\zeta Y_i'(a) = a_i; \quad \eta Y_i'(b) = b_i. \quad (193)$$

В (193)  $Y_i'(a)$  и  $Y_i'(b)$  известны из решения задачи с условиями (192). Формулы (189), (190) и (192), (193) выражают соблюдение граничных условий и непрерывность функций  $Y_j$  и  $Z_j$  по  $r$ . Непрерывность по  $\vartheta$  и  $\varphi$  может быть соблюдена ценой замены  $\beta(\vartheta_0, \varphi_0)$  функцией  $\beta(\vartheta, \varphi)$ , непрерывно переходящей в ее значения в соседней области внутри узкой зоны, включающей границу областей. Заранее можно ожидать, что такая замена мало изменит решение вне такой узкой зоны при  $n$  не очень больших. Решение в узкой зоне зависит от первых и вторых производных переходной функции  $\beta(\vartheta, \varphi)$ .

#### §10. Упругие колебания вращающейся Земли с жидким вязким ядром

Уравнения колебания жидкого вращающегося ядра с малой вязкостью можно получить из обычных уравнений сфероидальных упругих колебаний путем включения в инерционные члены сил Кориолиса и замены модуля сдвига оператором  $\nu \frac{\partial}{\partial t}$ , где  $\nu$  — коэффициент вязкости. Силы Кориолиса повышают порядок дифференциальных уравнений с шестого до десятого, а вязкость вызывает сдвиг фазы колебания, зависящий от глубины в разной степени для разных функций, а это приводит к удвоению порядка уравнений, т.е. к двадцатому порядку. Но при достаточно малой вязкости система уравнений распадается на отдельные системы не выше четвертого порядка. Чтобы убедиться в этом, преобразуем уравнения упругих колебаний, выделив в них слагаемые, меняющие знак на малом интервале глубин порядка  $\mu/\rho g$ . Такие слагаемые входят в функции, зависящие от тангенциальных компонент смещения, и при численном интегрировании уравнений потребовали бы уменьшения шага до малой величины, стремящейся к нулю вместе с  $\mu$ . Выделим эти слагаемые, преобразуя уравнения колебаний к новой системе функций.

Исходим из уравнений (89), дополнив их уравнениями, включающими силы Кориолиса, как это описано в §7. Таким образом, за исходную принимаем систему уравнений, выраженных в функциях  $\Phi$ ,  $H$ ,  $P$ ,  $S$ ,  $L$ ,  $R$ ,  $T_{n-1}$ ,  $T'_{n-1}$ ,  $T_{n+1}$ ,  $T'_{n+1}$  с коэффициентами, зависящими от плотности  $\rho$  и коэффициентов упругости Ламе  $\mu$  и  $(\lambda + 2\mu)$ . Выразим  $H$ ,  $R$ ,  $S$  через  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ :

$$S + \frac{P'}{\rho\sigma^2} = X; \quad (194)$$

$$H + \frac{P}{\rho\sigma^2 r^2} = Y; \quad (195)$$

$$R + HW' + \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \Lambda = Z. \quad (196)$$

Из (194) и (195) имеем

$$\rho'H + \Lambda\rho = \rho'Y + \rho \left( Y' + \frac{2}{r}Y - \frac{1}{r^2}X \right). \quad (197)$$

В уравнение

$$S' = n(n+1)H + \frac{P}{\mu}$$

вводим  $H$  и  $S$  из (194) и (195) и получаем

$$\left( \frac{\bar{P}'}{\rho\sigma^2} \right)' + \left( \frac{1}{\mu} - \frac{n(n+1)}{\rho\sigma^2 r^2} \right) \bar{P} = 0, \quad (198)$$

где

$$\bar{P} = P + \mu(S'_0 - n(n+1)H_0).$$

Множители при  $\mu$  с нулевым индексом здесь и везде далее определены из приближения  $\mu = 0$ , считаем их известными. В (194)–(196) входит правильное решение уравнения (198). Уравнение (88) для  $\Phi'$  и  $P'$ , после введения сил Кориолиса в результате замены  $\sigma^2\rho S$  и  $\sigma^2\rho H$  на  $\sigma^2\rho\bar{S}$  и  $\sigma^2\rho\bar{H}$ , запишем следующим образом:

$$Z' + \sigma^2(Y - \bar{H}) - \frac{2\mu'}{\rho} \left( 2H - \frac{S}{r} \right) + \epsilon\Lambda = 0; \quad (199)$$

$$Z + \frac{\sigma^2}{n(n+1)}(X - \bar{S}) - \frac{2\mu'}{\rho} \left( \frac{S}{n(n+1)} - Hr \right) = 0, \quad (200)$$

где

$$\epsilon = \frac{\lambda + 2\mu\rho'}{\rho} - W'.$$

Функции  $\bar{H} = \tilde{H} - H$  и  $\bar{S} = \tilde{S} - S$  содержат силы Кориолиса:

$$-\rho\sigma^2\bar{H}_n = \frac{n+1}{2n+1}\Psi_{n+1} + \frac{n}{2n+1}\Psi_{n-1};$$

$$-\rho\sigma^2\bar{S}_n = \frac{n(n+1)}{2n+1}r(\Psi_{n+1} - \Psi_{n-1}).$$

Функции  $\Psi_{n-1}$  и  $\Psi_{n+1}$  определены (142). При оценке влияния вязкости примем  $\mu' = 0$ ,  $\epsilon$  и  $\mu$  малыми. Из (200) определяем  $X - \bar{S}$ , из (199) и (200) при  $\sigma \neq 0$  определяем  $(X - \bar{S})'$ :

$$(X - \bar{S}) \frac{\sigma^2}{n(n+1)} + R + \frac{W'}{\rho'} (\Lambda\rho + \rho'H) + \frac{\epsilon\rho}{\rho'}\Lambda = 0; \quad (201)$$

$$(X - \bar{S})' - n(n+1)(Y - \bar{H}) - \frac{n(n+1)}{\sigma^2}\epsilon\Lambda = 0. \quad (202)$$

К уравнениям (201) и (202) присоединяем уравнение Пуассона, в котором используем (201):

$$R'' + \frac{2}{r}R' - \frac{n(n+1)}{r^2}R - 4\pi G \frac{\rho'}{W'} \left[ \frac{\sigma^2}{n(n+1)}(X - \bar{S}) + R + \frac{\epsilon\rho}{\rho'}\Lambda \right] = 0. \quad (203)$$

Уравнения (201)–(203), а также (197) определяют  $X'$ ,  $Y'$ ,  $R''$ . Представим эти уравнения через малые функции  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$ :

$$u_1 = (X - \bar{S}) - (X - \bar{S})_0; \quad u_2 = Y - Y_0; \quad u_3 = R - R_0. \quad (204)$$

Из (201), (202), (197) и (203) получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} u_1' - n(n+1)u_2 &= \frac{n(n+1)}{\sigma^2} \epsilon \Lambda + n(n+1)(\bar{H} - H_0) = 0; \\ u_2' + \left( \frac{2}{r} + \frac{\rho'}{\rho} \right) u_2 - \frac{u_1}{r^2} + \frac{\rho'}{\rho W'} \left( u_3 + \frac{\sigma^2}{n(n+1)} u_1 \right) &= \frac{\bar{S} - \bar{S}_0}{r^2} - \frac{\epsilon \Lambda}{W'}; \\ u_3'' + \frac{2}{r} u_3' - \frac{n(n+1)}{r^2} u_3 - \frac{4\pi G \rho'}{W'} \left( u_3 + \frac{\sigma^2}{n(n+1)} u_1 \right) &= 4\pi G \epsilon \Lambda \frac{\rho}{W'}. \end{aligned} \quad (205)$$

Пусть правые части уравнений (205) ошибочны на величину  $\alpha_i(r)$ , и для всех номеров  $i$  уравнений и переменной  $r$

$$\int_0^r [\alpha_i(r)]^2 dr = (\alpha_i^2)_{\text{CP}} r, \quad (206)$$

где  $\alpha_i$  — малая величина. Тогда решение уравнений (205) ошибочно на величину  $\alpha_i u_i$ , где

$$\int_0^r u_i^2(r) dr = (u_i^2)_{\text{CP}} r.$$

Здесь  $u_i(r)$  — решения уравнений, сопряженных с однородными уравнениями, получаемыми из (205). Таким образом, вместо точных решений уравнений можно использовать приближенные решения, полученные при условии (206), а уравнения упростить, воспользовавшись тем, что дифференцирование по  $r$  вводит большой множитель порядка  $\sigma \sqrt{\rho/\mu}$ . Правые части в (205) можно выразить через  $\delta\Psi_{n-1} = \Psi_{n-1} - (\Psi_{n-1})_0$  и  $\delta\Psi_{n+1} = \Psi_{n+1} - (\Psi_{n+1})_0$ .

Функции  $\Psi_{n-1}$  и  $\Psi_{n+1}$  определены выражениями (142), в которые следует ввести (194), (195) и (204). Получаем

$$\begin{aligned} \delta\Psi_{n+1} = \rho\sigma^2 \frac{a_n}{b_n} \left[ \frac{(n+1)^2 - m^2}{(n+1)(n+2) + m^2} \delta T_{n+1} + \frac{P'}{(n+1)\rho\sigma^2 r} + u_2 - \frac{u_1}{(n+1)r} + \right. \\ \left. + \frac{P}{\rho\sigma^2 r^2} + \frac{n}{2n+1} \cdot \frac{1}{\rho\sigma^2} (\delta\Psi_{n+1} - \delta\Psi_{n-1}) \right]. \end{aligned} \quad (207)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \delta\Psi_{n-1} = \rho\sigma^2 \frac{a_{-n-1}}{b_{-n-1}} \left[ \frac{n^2 - m^2}{n(n-1) + m^2} \delta T_{n-1} - \frac{P'}{n\rho\sigma^2 r} + \frac{P}{\rho\sigma^2 r} + u_2 + \frac{u_1}{nr} - \right. \\ \left. - \frac{n+1}{2n+1} \frac{1}{\rho\sigma^2} (\delta\Psi_{n-1} - \delta\Psi_{n+1}) \right]. \end{aligned} \quad (208)$$

Функции  $\delta T_{n-1}$  и  $\delta T_{n+1}$  связаны уравнениями

$$f_{n-1}(\delta T_{n-1}) = \delta\Psi_{n-1}; \quad f_{n+1}(\delta T_{n+1}) = \delta\Psi_{n+1}, \quad (209)$$



где

$$f_n(\delta T_n) = \mu \left( \frac{\partial^2 \delta T_n}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \delta T_n}{\partial r} - \frac{n(n+1)}{r^2} \delta T_n \right) + \rho \sigma^2 \delta T_n.$$

Исключив из этих уравнений  $\delta \Psi_{n-1}$  и  $\delta \Psi_{n+1}$ , будем иметь два уравнения для определения  $\delta T_{n-1}$  и  $\delta T_{n+1}$ .

При достаточно малых  $\mu$  воспользуемся близостью уравнений (209) к уравнению (198), так как главные члены этих уравнений можно привести к уравнению вида

$$\bar{P}'' + \left( \frac{\rho \sigma^2}{\mu} - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) \bar{P} = 0.$$

Ранее принято, что  $\mu' = 0$ , поэтому  $\bar{P}'' \gg \bar{P}' \gg \bar{P}$ . Тогда (209) можно записать в следующем виде:

$$\delta T_{n+1}'' + \left( \frac{\rho \sigma^2}{\mu} - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) \delta T_{n+1} = \frac{1}{\mu} \delta \Psi_{n+1}.$$

Это уравнение, а также уравнения (207) и (209), удовлетворяющиеся при значениях

$$\begin{aligned} \delta \Psi_{n+1} &= \frac{a_n}{b_n} \left( \frac{P}{r^2} + \frac{n}{2n+1} \delta \Psi_{n+1} - \frac{n}{2n+1} \delta \Psi_{n-1} \right); \\ \delta \Psi_{n-1} &= \frac{a_{-n-1}}{b_{-n-1}} \left( \frac{P}{r^2} + \frac{n+1}{2n+1} \delta \Psi_{n-1} - \frac{n+1}{2n+1} \delta \Psi_{n+1} \right); \\ -\delta T_{n+1} &= \frac{(n+1)(n+2) + m^2}{(n+1)^2 - m^2} \frac{P'}{(n+1)\rho\sigma^2 r}, \end{aligned} \quad (210)$$

определяют главные члены в  $\delta T_{n+1}$  и  $\delta \Psi_{n+1}$ . Это приближение отражает характер всех функций при малых величинах  $\mu$ .

Амплитуды  $\delta \Psi_{n-1}$  и  $\delta \Psi_{n+1}$  стремятся к нулю вместе с  $\mu$ , как  $P$ , амплитуды колеблющихся слагаемых в  $u_1, u_2, u_3$  убывают еще быстрее. Таким образом, уравнение (205) и условие непрерывности  $H, R, R' + 4\pi\rho GH$  на границе ядра определяют  $u_1, u_2, u_3$  и с их помощью функции

$$\begin{aligned} H &= H_0 - \frac{P}{\rho\sigma^2 r^2} + u_2; \quad R = R_0 + u_3; \\ S &= S_0 - \frac{P'}{\rho\sigma^2} + (\bar{S} - \bar{S}_0) + u_1; \\ \Lambda &= \Lambda_0 - \frac{\rho'}{\rho W'} \left( u_3 + u_2 W' + \frac{\sigma^2}{n(n+1)} u_i \right); \\ T_{n-1} &= (T_{n-1})_0 + \frac{n(n-1) + m^2}{n^2 - m^2} \frac{P'}{n\rho\sigma^2 r}; \\ T_{n+1} &= (T_{n+1})_0 - \frac{(n+1)(n+2) + m^2}{(n+1)^2 - m^2} \frac{P'}{(n+1)\rho\sigma^2 r}. \end{aligned}$$

Функции  $S, T_{n-1}, T_{n+1}$  разрывны при  $\mu = 0$  и неустойчивы при малых  $\mu$ . Функции  $\Lambda, H, R$  устойчивы.

Полученные результаты применим к жидкому слабо вязкому ядру, заменив  $\mu$  оператором  $\nu \frac{\partial}{\partial t}$  и добавив функции, определяющие сдвиг фазы. Тогда каждая из функций

получит две компоненты. Например,  $H$  будет выражена так:

$$\begin{aligned} \tau H &= \tau_c H_c(r) + \tau_s H_s(r); \\ \tau_c &= P_n^m(\cos \vartheta) \cos(\sigma t - m\varphi); \quad \tau_s = P_n^m(\cos \vartheta) \sin(\sigma t - m\varphi); \end{aligned}$$

число уравнений также удвоится.

На малом интервале глубины ( $b - r$ ), принимая  $\mu' = \rho' = 0$ , из (198) получаем

$$\nu \bar{P}_c'' + \rho \sigma^2 \bar{P}_s = 0; \quad \nu \bar{P}_s'' - \rho \sigma^2 \bar{P}_c = 0.$$

Исключение  $\bar{P}_s$  приводит к уравнению

$$\frac{d^4 P_c}{dr^4} + \left( \frac{\rho \sigma^2}{\nu} \right)^2 \bar{P}_c = 0.$$

На том же интервале глубин решение представим следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{P}_c(r) &= e^{-h} [\bar{P}_c(b) \cos h + \bar{P}_s(b) \sin h]; \\ \bar{P}_s(r) &= e^{-h} [\bar{P}_s(b) \cos h - \bar{P}_c(b) \sin h], \end{aligned} \tag{211}$$

где  $h = (b - r)\sigma \sqrt{\frac{\rho}{\nu}}$ .

Теперь из (210) и (198) определяем  $(\delta\Psi_{n+1})_c$  и  $(\delta\Psi_{n+1})_s$ :

$$\begin{aligned} (\delta\Psi_{n+1})_c &= -\frac{a_n}{b_n} \cdot \frac{1}{r^2} [\bar{P}_c - \nu\sigma (S'_0 - n(n+1)H_0)_s]; \\ (\delta\Psi_{n+1})_s &= -\frac{a_n}{b_n} \cdot \frac{1}{r^2} [\bar{P}_s + \nu\sigma (S'_0 - n(n+1)H_0)_c]. \end{aligned}$$

Функции  $(\delta\Psi_{n-1})_c$  и  $(\delta\Psi_{n-1})_s$  можно получить из написанных формул заменой  $n$  на  $-(n+1)$ . При малых величинах  $h$  в этих формулах главными являются члены с  $\bar{P}_c$  и  $\bar{P}_s$ . При возрастании  $h$  главными становятся вторые члены. Они определяют диссипацию энергии внутри вращающегося ядра.

При колебании с параметрами  $n = 2$ ,  $m = 1$  в решение включается нутация оси вращения Земли с амплитудой  $\varepsilon$ . Из-за вязкости возникает сдвиг фазы кинетического момента с амплитудами  $\varepsilon_c$  и  $\varepsilon_s$ . Обе компоненты определены условием сохранения кинетического момента.

### §11. Строение Земли по частотам свободных колебаний

Система функций  $y_i$ , определяемых уравнениями

$$y'_i = \sum a_{ij} y_j, \tag{212}$$

характеризует упругое колебание Земли. Коэффициенты  $a_{ij}$  зависят от плотности  $\rho$  и модулей упругости  $\mu$  и  $\lambda + 2\mu$ , заданных в функции  $r$  — расстояния до центра Земли со сферически-симметричным строением. В  $a_{ij}$  как параметры входят  $\sigma$ ,  $n$ ,  $m$ , определяющие частоту и тип колебания. Пусть уравнения (212) интегрированы дважды при исходных величинах  $\mu_0$ ,  $(\lambda + 2\mu)_0$ ,  $\rho_0$ ,  $\sigma_0$  и при слегка измененных величинах  $\mu = \mu_0 + \delta\mu$ ;  $\lambda + 2\mu = (\lambda + 2\mu)_0 + \delta(\lambda + 2\mu)$ ;  $\rho = \rho_0 + \delta\rho$ ;  $\sigma = \sigma_0 + \delta\sigma$  и дважды вычислен определитель, выражающий совместность однородных граничных условий при  $r = 1$  (на

земной поверхности). Определитель  $D$  обращается в нуль, если  $\sigma_0 = \sigma(\rho_0, \mu_0, \lambda_0)$  или  $\sigma_0 + \delta\sigma = \sigma(\mu + \delta\mu, \lambda + \delta\lambda, \rho + \delta\rho)$  являются частотами свободных колебаний. Если  $D = 0$ , то из (152) получаем

$$\int_0^1 \sum_i \sum_j \delta a_{ij} y_i z_j dr = 0, \quad (213)$$

где

$$z'_i = - \sum_j (a_{ji} + \delta a_{ji}) z_j.$$

Если  $\delta\mu$ ,  $\delta(\lambda + 2\mu)$ ,  $\delta\rho$  малы, то малы и  $\delta a_{ij}$ , а  $z_j$  будут близки к  $\bar{y}_j$ . От замены в (213)  $z_j$  на  $\bar{y}_j$  возникает ошибка порядка квадрата малых величин. После такой замены из (213) следует

$$\int_0^1 \sum_i \sum_j \delta a_{ij} y_i \bar{y}_j dr = \int_0^1 \sum_j \bar{y}_j \delta y'_j dr = 0.$$

Для системы (212) удобна система функций  $\Phi$ ,  $H$ ,  $L$ ,  $P$ ,  $R$ ,  $S$ ,  $X_{n-1}$ ,  $X_{n+1}$ ,  $Y_{n-1}$ ,  $Y_{n+1}$ , в которой получены простые выражения для сопряженных функций  $\bar{\Phi}$ ,  $\bar{H}$ ,  $\bar{L}$ ,  $\bar{P}$ ,  $\bar{R}$ ,  $\bar{S}$ ,  $\bar{X}_{n-1}$ ,  $\bar{X}_{n+1}$ ,  $\bar{Y}_{n-1}$ ,  $\bar{Y}_{n+1}$ . Четыре функции  $Y_i$  и  $\bar{Y}_i$  являются чисто мнимыми, но окончательный результат получается действительным. Используя (154) и (155), запишем

$$\begin{aligned} \sum \bar{y}_j \delta y'_j = & Hr^2 \delta \Phi' - \Phi r^2 \delta H' + \frac{S}{n(n+1)} \delta P' - \frac{P}{n(n+1)} \delta S' + \frac{R}{4\pi G} \delta L' - \\ & - \frac{L}{4\pi G} \delta R' - \mu r^2 (X_{n-1} \delta Y'_{n-1} + X_{n+1} \delta Y'_{n+1}). \end{aligned} \quad (214)$$

Вводим в (214)  $\delta a_{ij}$  из системы уравнений десятого порядка и получаем

$$\begin{aligned} \sum \bar{y}_j \delta y'_j = & b_1 \delta \sigma + b_2 \delta \rho + b_3 \delta (r^2 W') + b_4 \delta (\lambda + 2\mu) + b_5 \delta \mu + b_6 \delta \mu' + \\ & + b_7 \delta \frac{\mu'}{\mu} + b_8 \delta \frac{\rho}{\mu}. \end{aligned} \quad (215)$$

Здесь

$$\begin{aligned} b_1 &= \rho \frac{\partial b_2}{\partial \sigma}; \\ b_2 &= -\sigma^2 \left( H \bar{H} r^2 + \frac{s \bar{S}}{n(n+1)} + p^2 T_{n+1} \bar{T}_{n+1} + q^2 T_{n-1} \bar{T}_{n-1} \right) - 2RS - HL; \\ b_3 &= \frac{\rho}{r^2} (4rH^2 - 2HS); \quad b_4 = \frac{\Phi^2 r^2}{(\lambda + 2\mu)^2}; \\ b_5 &= \frac{P^2}{n(n+1)\mu^2}; \quad b_6 = 4 \left( HS - H^2 r - \frac{S^2}{2n(n+1)r} \right); \\ b_7 &= -\mu r^2 X_{n-1} \left( \frac{X_{n-1}}{r} \right)' - \mu r^2 X_{n+1} \left( \frac{X_{n+1}}{r} \right)'; \\ b_8 &= \sigma^2 (X_{n-1} \bar{X}_{n-1} + X_{n+1} \bar{X}_{n+1}), \end{aligned} \quad (216)$$

слагаемые с  $b_7$  и  $b_8$  введены для упрощения записи вариаций  $\delta Y'_{n-1}$  и  $\delta Y'_{n+1}$ . В (213) вводим (215) и (216). После этого слагаемые с  $\delta\mu'$  и  $\delta(r^2W')$  интегрируем по частям и выражаем через  $\delta\mu$  и  $\delta\rho$ . Все функции  $b_i$  действительны, поскольку действительны  $T_{n-1}$  и  $T_{n+1}$ . Из полученного таким образом выражения определяем  $\delta\sigma_j$ :

$$\delta\sigma_j = \int_0^1 (A_j\delta\rho + B_j\delta\mu + C_j\delta(\lambda + 2\mu)) dr. \quad (217)$$

Из наблюдений определены более тысячи свободных колебаний  $\sigma_j$ , а затем вычислены  $\delta\sigma_j$  при разных величинах  $\sigma$ ,  $n$  и  $m$ . По этому материалу Дзевонским и Гильбертом [18, 19] построены модели Земли 1066А и 1066В, очень близкие по частотам свободных колебаний, но заметно различающиеся по скоростям сейсмических волн. Определение трех функций  $\delta\rho$ ,  $\delta\mu$  и  $\delta(\lambda + 2\mu)$  только из условий вида (217) при современной (хотя и довольно высокой) точности наблюдений едва ли возможно. Поэтому будем считать скорости сейсмических волн известными и не подлежащими изменению. Тогда

$$\delta\left(\frac{\mu}{\rho}\right) = \delta\left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\right) = 0. \quad (218)$$

Используя эти условия, выражаем в (217)  $\delta\mu$  и  $\delta(\lambda + 2\mu)$  через  $\delta\rho$  и получаем

$$\delta\sigma_j = \int_0^1 G_j(r)\delta\rho(r)dr. \quad (219)$$

Еще в сороковых годах XX века при определении  $\delta\rho$  использовали только четыре условия типа (219), а именно условия, связанные с массой Земли, ее моментом инерции и двумя числами Лява, определяемыми по земным приливам. Границу разрыва модулей упругости и плотности считали известной. Может создаться впечатление, что теперь строение Земли можно определить независимо от каких-либо допущений относительно вида функций  $\delta\rho$ . Однако при использовании условий вида (219) необходимо допустить, что мало не только  $\delta\rho$ , но и  $(\delta\rho)'$ . Без этого условия можно получить точное решение, но с очень большими колебаниями  $\delta\rho$ , явно фиктивными.

В ядре Земли принимаем  $\mu = 0$ . Тогда  $P_n = \tilde{T}_{n-1} = \tilde{T}_{n+1} = 0$ , порядок системы уравнений снижается до четвертого, коэффициенты (216) будут выражены через  $H$ ,  $L$ ,  $R$ ,  $S$ .

Искомую функцию  $\delta\rho$ , удовлетворяющую условиям вида (219), представим суммой:

$$\delta\rho = \sum_{j=1}^{j=n} b_j G_j, \quad (220)$$

функции  $G_j$  известны,  $b_j$  — искомые коэффициенты. Условия (219) приводят к системе алгебраических уравнений

$$\sum_1^n K_{ij} b_j = \delta\sigma_j; \quad K_{ij} = \int_0^1 G_i G_j dr. \quad (221)$$

Исследование и решение системы (221) будет упрощено, если  $G_j$  заменить системой взаимно ортогональных в интервале  $0 \leq r \leq 1$  функций  $Y_i$ , приняв

$$G_j = \sum_{i=1}^{i=j} a_{ij} Y_i; \quad Y_1 = G_1.$$

Из условий ортогональности

$$\int_0^1 Y_i Y_j dr = 0; \quad \int_0^1 Y_i^2 dr \neq 0$$

последовательно можно определить все коэффициенты  $a_{ij}$  и все функции  $Y_i$ . Теперь можно использовать более простое решение:

$$\delta\rho = \sum_1^n a_i Y_i. \quad (222)$$

Коэффициенты  $a_i$  определены системой уравнений

$$\sum_1^j a_i a_{ij} \bar{Y}_i^2 = \delta\sigma_j; \quad \bar{Y}_i^2 = \int_0^1 Y_i^2 dr. \quad (223)$$

Их нужно вычислять последовательно, один за другим. Если функция  $\bar{Y}_j$  близка к нулю, то функция  $\delta\rho$  будет неустойчивой и заметно изменяться при малом изменении  $\delta\sigma_j$ . В этом случае  $\delta\sigma_j$  приближенно (или точно при  $\bar{Y}_j^2 = 0$ ) можно представить линейной функцией  $\delta\sigma_i$  ( $i < j$ ), а определитель системы (220) будет мал (или равен нулю). Исключив из (223) все уравнения с малыми  $\bar{Y}_j^2$ , можно от (223) вернуться к системе (220) с исключенными условиями, вносящими неустойчивость решения, а от решения (222) — к решению (220). При изменении порядка, в котором расположены условия и соответствующие им частоты, будут получены решения, различающиеся только нумерацией функций  $G_j$ . Таким образом, если исключены условия, вносящие в решение неустойчивость, не оправданную ошибками определения частоты, то устойчивое решение (222) не зависит от способа построения системы ортогональных функций, хотя системы функций могут быть совсем разными. Усложнение решения способом построения ортогональных функций с наибольшими нормами, приводящим к необходимости решать уравнение высокой степени (так называемое «вековое» уравнение), не нужно. Определив  $\delta\rho$ , можно попытаться определить  $\delta\mu$ , исходя вместо двух условий (218) из условия

$$\delta \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} = 0.$$

Тогда из (217) получим

$$\delta\sigma_j - \int_0^1 A_j \delta\rho dr = \int_0^1 \left( B_j + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} C_j \right) \delta\mu dr.$$

Здесь левые части известны. Далее поступаем, как при определении  $\delta\rho$ . Уравнения, исключенные из-за малости  $\bar{Y}_i^2$ , при этом окажутся полезными. Это приведет к исправлению скоростей сейсмических волн.

В работе Дзевонского и Гильберта [19] отклонения вычисленных частот от наблюдаемых заметно меньше ошибок определения частот из наблюдений. Поэтому создается впечатление, что полученные ими модели строения Земли несут на себе фиктивные детали, происходящие от ошибок определения частот. Намеченные здесь отбор и исключение неустойчивых условий позволят освободиться от этих нереальных флуктуаций плотности  $\rho$  и лучше использовать исключительную по ценности информацию о строении Земли по частотам свободных колебаний.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрев движение планетарной жидкой массы, подверженной только силе взаимного тяготения и одинаковому давлению на поверхности, Пицетти [29] отметил, что единственное движение этой массы как твердого тела в этом случае есть равномерное вращение около неизменной оси. Изменение угловой скорости ведет к нарушению состояния равновесия и возникновению течений вещества внутри планеты, что, в свою очередь, может вызывать и поддерживать как горизонтальные, так и вертикальные движения точек земной поверхности.

Принято считать, что изменение скорости вращения Земли приводит к изменению земного сжатия и среднего значения силы тяжести на земной поверхности. Это суждение основано на теории вращения планетарной массы, вращающейся в равновесии. Основы ее заложены Ньютоном и Клеро, развита она главным образом Ляпуновым. Более общий подход к той же задаче изложен Л. Лихтенштейном [30]. Он исходил из начальной конфигурации при некоторой скорости вращения, принимая, что эта начальная конфигурация близка к равновесному состоянию. Для Земли этот факт надежно подтверждается астрономическими, геодезическими и геофизическими наблюдениями и положен в основу геологических представлений о строении Земли. Напряжения сдвига внутри Земли расслаиваются (релаксируют), поэтому интенсивность современных землетрясений мала по сравнению с той, которая была бы при отсутствии релаксации. Л. Лихтенштейн поставил вопрос об изменении гравитационного поля Земли при малом медленном изменении скорости вращения до некоторого другого ее значения. При этом происходит изменение состояния Земли от первого равновесного до второго, тоже равновесного, сила тяжести изменяется в точках земной поверхности на малую величину. Ее нужно определить в зависимости от распределения силы тяжести на поверхности Земли и в соответствии с предположением о состоянии вещества внутри Земли. Для решения этой задачи Лихтенштейн получил интегральное уравнение, которое до сих пор не использовано. Его результат изложен в монографии математического, а не геофизического характера.

Изложенное выше в значительной части по существу составляет взгляды автора на пути решения задачи Лихтенштейна на основе общей теории упругих колебаний Земли. При изменении скорости вращения внутри Земли (от поверхности до центра) возникают сложные движения, только часть которых можно представить как изменение угловой скорости, т.е. как вращение твердого тела. Смещения, описываемые вращением твердого тела, полностью учтены, поскольку уравнения составлены в подвижной системе координат, которая вращается с угловой скоростью, зависящей от времени, вокруг оси, мало меняющей направление в пространстве. При известном характере этого движения в уравнение колебаний входят только параметры, полностью определяющие движение. При изменении модуля вектора угловой скорости этим параметром является производная от угловой скорости по времени, при изменении направления упомянутого вектора в пространстве (нутаии) — компоненты этого вектора по двум координатным осям. Эти величины можно найти из дополнительных условий, определяющих выбор подвижной системы координат. Этот простейший эффект усложнен наложением на него упругих

смещений внутри Земли, более сложных, но вполне закономерных, если определять их на основе закона Гука. В целом задача много проще, чем может показаться на первый взгляд, так как характер движений внутри Земли при неизменной скорости вращения довольно хорошо изучен. Известно, что колебания с малыми периодами быстро затухают, а охватывающие всю Землю (процессия, нутация, вековое замедление земного вращения) выделены, их можно изучать отдельно так же, как смещения Северного и Южного полюсов. Внутреннее строение Земли (распределение плотности, модулей упругости Ламе) в течение последних лет детально изучено. Точность измерений времени, силы тяжести, деформаций земной поверхности быстро возрастает. Современный обзор состояния измерительной техники, результатов наблюдений и теории содержится в книге Морица и Мюллера [21].

Если внутри Земли возникают движения, то только некоторые из них могут повлиять на изменение вращения ее в целом как твердого тела.

Отдельно должны быть рассмотрены движения, происходящие вблизи поверхности Земли и подчиненные более сложным закономерностям (осадки, разрушение гор и вынос продуктов разрушения реками на дно морей и океанов, сезонные изменения в циркуляции атмосферы, а также циклоны, тайфуны, ураганы, приливы в океанах, землетрясения, результаты деятельности человека). Внутри же Земли нужно выделить наиболее крупные глубинные землетрясения, связанные с источниками меняющихся со временем упругих напряжений. Исключив эти явления, движения внутри Земли можно представить уравнениями теории упругости с указанными выше дополнениями и упрощениями.

Необходимо определить силы, вызывающие колебание (притяжение Луны и Солнца на поверхностные силы — давление на поверхность Земли, тангенциальные силы, возникающие от ветровой нагрузки на горы, леса, поля). Все эти воздействия на Землю входят в решение задачи через граничные условия. Когда свободные колебания известны, колебания на любой частоте можно представить в виде суммы колебаний на нулевой частоте и на частотах свободных колебаний. Таким образом, не требуется интегрировать уравнение на всех частотах (от нуля до бесконечности, хотя в решение в общем случае войдут все частоты).

Упрощение результата достигнуто выбором типа искомого решения, при котором не придется вычислять интегралы от произведения трех сферических функций.

Результаты можно использовать для выделения той части изменения гравитационного поля, которую можно объяснить изменением скорости вращения Земли. Было бы интересно сопоставить полученное решение с результатом Лихтенштейна.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Euler L.* Remarques generales sur le mouvement diurne des planets. // Opera omnia, ser. 2. 1961. V. 29. P.199–219.
2. *Euler L.* De communicatione motus in collisione corporum sese non directe percutientium. // Opera omnia, ser. 2. 1964. V. 8. P.7–26.
3. *Euler L.* Recherches sur le mouvement de rotation des corps celestes. // Opera omnia, ser. 2. 1961. V. 29. P.220–256.
4. *Молоденский М.С.* Упругие приливы, свободная нутация и некоторые вопросы строения Земли. // Труды Геофизического института. 1953. № 19(146). С.3–52.
5. *Молоденский М.С.* Приливы в упругой вращающейся Земле с жидким ядром. // В сб.: Земные приливы и внутреннее строение Земли. — М.: Наука. 1967. С.3–9.

6. *Молоденский М.С.* Теория нутации и суточных земных приливов. // В кн.: *Молоденский М.С., Крамер М.В.* Земные приливы и нутация Земли. — М.: Издательство АН СССР. 1961. С.3–25.
7. *Молоденский М.С.* Приливы в упругой Земле. // В сб.: Медленные движения земной коры. — М.: Наука. 1972. С.5–7.
8. *Молоденский М.С.* Строение Земли по частотам ее собственных колебаний. // Известия АН СССР. Физика Земли. 1973. № 4. С.3–9.
9. *Молоденский М.С.* Приливы и собственные колебания Земли с учетом сил Кориолиса. // Известия АН СССР. Физика Земли. 1976. № 1. С.3–12.
10. *Молоденский М.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения элементарного колебания упругой вращающейся Земли. // Известия АН СССР. Физика Земли. 1977. № 7. С.9–15.
11. *Ляв А.* Математическая теория упругости. // Перевод с четвертого английского издания. — М.–Л.: Объединенное научно-техническое изд-во НКТП СССР. 1935.
12. *Лейбензон Л.С.* Курс теории упругости. // 2-е изд., перераб. и дополн. — М.–Л.: Государственное изд-во технико-теоретической литературы. 1947.
13. *Лэмб Г.* Теоретическая механика. — М.–Л.: Объединенное научно-техническое изд-во. 1936. Т.3 (см. также [21]).
14. *Молоденский М.С., Крамер М.В.* Земные приливы и нутация Земли. — М.: Издательство АН СССР. 1961.
15. *Молоденский С.М.* О влиянии горизонтальных неоднородностей мантии на амплитуды приливных волн. // Известия АН СССР. Физика Земли. 1977. № 2. С.3–8.
16. *Молоденский С.М.* О связи чисел Лява с нагрузочными коэффициентами. // Известия АН СССР. Физика Земли. 1977. № 3. С.3–7.
17. *Молоденский С.М., Крамер М.В.* Влияние крупномасштабных горизонтальных неоднородностей мантии на земные приливы. // Известия АН СССР. Физика Земли. 1980. № 1. С.3–20.
18. *Dziewonski A.M., Gilbert F.* Observations of normal modes from 84 recordings of the Alaskan earthquake of 1964 March 28. // The Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society. 1972. V. 27. № 4. P.393–446.
19. *Dziewonski A.M., Gilbert F.* Observations of normal modes from 84 recordings of the Alaskan earthquake of 1964 March 28–11. Further remarks based on new spheroidal overtone data. // Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society. 1973. V. 35. № 4. P.401–437.
20. *Luh P.C.* Normal modes of rotating, self-gravitating inhomogeneous Earth. // The Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society. 1974. V. 38. № 1. P.187–224.
21. *Moritz H., Mueller I.I.* Earth rotation. Theory and observation. — New York: The Ungar Publishing Company. 1987. 617 pp.
22. *Молоденский М.С.* Влияние вязкости на фазу земных приливов. // Известия АН СССР. Физика Земли. 1963. № 10. С.1469–1482.
23. *Молоденский М.С., Крамер М.В.* Строение Земли по частотам ее собственных колебаний. // Известия АН СССР. Физика Земли. 1973. № 4. С. 3–8.
24. *Молоденский М.С.* Теория приливов в упругой Земле с учетом членов порядка сжатия. // Известия АН СССР. Физика Земли. 1974. № 1. С. 3–8.
25. *Молоденский М.С.* Смещения при приливах в упругой Земле с учетом сил Кориолиса. // Известия АН СССР. Физика Земли. 1970. № 4. С. 102–107.
26. *Пекерис Х.Л., Альперман З., Ярош Х.* Ротационные мультиплеты в спектре Земли. // В сб.: Собственные колебания Земли. — М.: Мир. 1964. С. 257–283.



27. *Жарков В.Н., Любимов В.М.* Теория крутильных колебаний для сферически-несимметричных моделей Земли. // Известия АН СССР. Физика Земли. 1970. № 2. С. 3–14.
28. *Жарков В.Н., Любимов В.М.* Теория сфероидальных колебаний для сферически-несимметричных моделей Земли. // Известия АН СССР. Физика Земли. 1970. № 10. С. 3–12.
29. *Пицетти П.* Основы механической теории фигуры планет. // Перевод Михайлова А.А. с итальянского издания 1913 г. — М.–Л.: Государственное технико-теоретическое издательство. 1933 г.
30. *Лихтенштейн Л.* Фигуры равновесия вращающейся жидкости. // Перевод Абалакина В.К. с немецкого издания 1933 г. М : Наука. 1965.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

*В.В.Бровар, М.И.Юркина* Михаил Сергеевич Молоденский, жизнь и творчество . . . 3

## Часть I. ГЕОДЕЗИЯ И ГРАВИМЕТРИЯ

О редукции силы тяжести к уровню моря для нерегуляризированной Земли . . .	25
Определение фигуры геоида при совместном использовании астрономо-геодезических уклонений отвеса и карты аномалий силы тяжести	35
Астрономо-гравиметрическое нивелирование по 51-й и 55-й параллелям от 30-го до 56-го меридиана . . . . .	59
Основные вопросы геодезической гравиметрии . . . . .	74
Введение . . . . .	74
<b>Исследование основных теоретических задач геодезической гравиметрии</b>	
<b>Глава I. Взаимная связь элементов гравитационного поля регуляризированной Земли . . . . .</b>	<b>78</b>
§ 1. Некоторые соотношения между значениями гармонической функции и ее производных . . . . .	78
§ 2. Основные задачи гравиметрии для регуляризированной Земли . . . . .	81
§ 3. Нормальный потенциал силы тяжести . . . . .	83
§ 4. Формулы Сомильяна и Клеро . . . . .	86
<b>Глава II. Геоид нерегуляризированной Земли . . . . .</b>	<b>89</b>
§ 5. Формула Моисеева . . . . .	89
§ 6. Формула Малкина [5] . . . . .	91
§ 7. Сравнение формул Моисеева и Малкина . . . . .	92
§ 8. Формула Молоденского [6] . . . . .	93
§ 9. Сравнение прямого метода решения («нерегуляризированной Земли») с методом конденсации . . . . .	94
§ 10. Выводы . . . . .	95
<b>Глава III. Фигура реальной Земли . . . . .</b>	<b>96</b>
§ 11. Редукции на геоид. Сравнение методов, изложенных в главах I и II . . . . .	96
§ 12. Переход в формуле Грина к производным по направлениям координатных линий . . . . .	100
§ 13. Переход к интегрированию по поверхности $S$ (известной формы) . . . . .	104
§ 14. Вывод линейного интегрального уравнения для $\zeta$ . . . . .	109
<b>Исследование основных практических задач геодезической гравиметрии</b>	
<b>Глава IV. Задачи, требующие использования мировой гравиметрической съемки . . . . .</b>	<b>113</b>
§ 15. Введение. Критика выводов де Грааф-Хантера . . . . .	113
§ 16. Общая характеристика земного гравитационного поля . . . . .	114
§ 17. Метод исследования погрешностей, возникающих из-за отсутствия мировой гравиметрической съемки . . . . .	118
§ 18. Улучшение сходимости ряда Стокса после выделения центральной зоны . . . . .	119
§ 19. Оценка предельного влияния дальних зон . . . . .	121

§ 20. Оценка среднего квадратического влияния дальних зон . . . . .	124
<b>Глава V. Задачи, разрешаемые при наличии только местной гравиметрической съемки . . . . .</b>	<b>127</b>
§ 21. Идея астрономо-гравиметрического способа развития опорной геодезической сети . . . . .	127
§ 22. Оценка предельной ошибки, связанной с ограничением радиуса интегрирования . . . . .	129
§ 23. Оценка предельной ошибки для астрономо-гравиметрического нивелирования . . . . .	134
§ 24. Верхний предел накопления систематических ошибок в гравиметрических поправках при астрономо-гравиметрическом нивелировании . . . . .	136
§ 25. Два типа астрономо-геодезических уклонений отвеса и связь между ними	138
§ 26. Исправление результатов астрономо-гравиметрического нивелирования . . . . .	146
<b>Глава VI. Интерполяция силы тяжести и суждение о точности гравиметрических выводов . . . . .</b>	<b>151</b>
§ 27. Ошибка представительства и ошибка интерполяции силы тяжести . . . . .	151
§ 28. Точность определения гравиметрических уклонений отвеса в условиях равномерной площадной съемки . . . . .	154
§ 29. Пример Московской аномалии . . . . .	161
<b>Глава VII. Вывод вспомогательных формул к главе IV</b>	<b>163</b>
§ 30. Вывод исходных формул . . . . .	163
§ 31. Частный случай применения формулы (7.10) . . . . .	165
§ 32. Разложение функции Стокса по полиномам Лежандра в интервале изменения $\cos \psi$ от $-1$ до $\cos \psi_0$ . . . . .	167
§ 33. Формулы Стокса и Вининг-Мейнеса в преобразованной форме . . . . .	172
<b>Пружинный гравиметр. Теория гравиметра с ленточной кольцевой пружиной</b>	<b>174</b>
<b>Тридцать лет советской гравиметрии (1917–1947) . . . . .</b>	<b>189</b>
<b>Внешнее гравитационное поле и фигура физической поверхности Земли . . . . .</b>	<b>202</b>
<b>Приближенный способ решения уравнения, определяющего фигуру квазигеоида</b>	<b>221</b>
<b>Изучение фигуры физической поверхности Земли геометрическим (астрономо-геодезическим) методом . . . . .</b>	<b>227</b>
<b>К постановке астрономо-гравиметрического нивелирования в СССР . . . . .</b>	<b>235</b>
<b>Метод совместной обработки гравиметрических и геодезических материалов для изучения гравитационного поля Земли и ее фигуры</b>	<b>242</b>
<b>Новый метод решения геодезических задач . . . . .</b>	<b>250</b>
<b>Решение задачи Стокса с относительной погрешностью порядка квадрата сжатия Земли . . . . .</b>	<b>269</b>
<b>Исследование решения задачи Стокса с относительной погрешностью порядка квадрата сжатия Земли . . . . .</b>	<b>274</b>
<b>Новые методы изучения фигуры Земли . . . . .</b>	<b>282</b>
<b>Методы изучения фигуры и внешнего гравитационного поля Земли . . . . .</b>	<b>284</b>
<b>Точность вычисления аномальной части гравитационного поля вне Земли . . . . .</b>	<b>288</b>
<b>Зависимость гравитационного поля Земли от изменения скорости ее вращения . . . . .</b>	<b>293</b>

## Часть II. ГЕОФИЗИКА

<b>Упругие приливы, свободная нутация и некоторые вопросы строения Земли . . . . .</b>	<b>296</b>
--	------------

Введение . . . . .	296
§1. Деформация упругой, неоднородной, сжимаемой и гравитирующей сферы . . . . .	298
§2. Деформация жидкой сферы . . . . .	304
§3. Упругая оболочка и жидкое ядро . . . . .	308
§4. Упругое, однородное и несжимаемое ядро . . . . .	309
§5. Упругая оболочка и упругое, однородное, несжимаемое ядро . . . . .	310
§6. Интегральные уравнения . . . . .	311
§7. Гипотезы об изменении плотности с глубиной . . . . .	314
§8. Строение упругой сферы, моделирующей Землю . . . . .	317
§9. Интегрирование уравнений упругого равновесия сферы численным методом . . . . .	322
§10. Результаты вычислений . . . . .	327
§11. Поправки за подвижность вод океанов . . . . .	331
§12. Сравнение с результатами наблюдений и выводы . . . . .	339
<b>Плотность и упругость внутри Земли . . . . .</b>	<b>342</b>
<b>Теория нутации и суточных земных приливов . . . . .</b>	<b>351</b>
<b>Числа Лява для статических земных приливов 2-го и 3-го порядков . . . . .</b>	<b>373</b>
<b>Влияние вязкости на фазу земных приливов . . . . .</b>	<b>388</b>
<b>Направление главных осей напряженного состояния при земных приливах . . . . .</b>	<b>403</b>
<b>Приливы в упругой вращающейся Земле с жидким ядром . . . . .</b>	<b>406</b>
<b>Смещения при приливах в упругой Земле с учетом сил Кориолиса . . . . .</b>	<b>415</b>
<b>Приливы в упругой Земле . . . . .</b>	<b>420</b>
<b>Вычисление частот собственных колебаний Земли . . . . .</b>	<b>424</b>
<b>Строение Земли по частотам ее собственных колебаний . . . . .</b>	<b>429</b>
<b>Теория приливов в упругой Земле с учетом членов порядка сжатия . . . . .</b>	<b>437</b>
<b>Коррективы в схему строения Земли, полученные по частотам сфероидальных собственных колебаний . . . . .</b>	<b>443</b>
<b>О возможной связи изменений силы тяжести и скорости вращения Земли . . . . .</b>	<b>454</b>
<b>Приливы и собственные колебания Земли с учетом сил Кориолиса . . . . .</b>	<b>464</b>
<b>Частоты собственных колебаний Земли с океаном . . . . .</b>	<b>474</b>
<b>Обыкновенные дифференциальные уравнения элементарного колебания упругой вращающейся Земли . . . . .</b>	<b>483</b>
<b>О возбуждении собственных колебаний упругой вращающейся Земли . . . . .</b>	<b>490</b>
<b>Простейшие упругие колебания вращающейся Земли . . . . .</b>	<b>497</b>
<b>Упругие колебания вращающейся Земли с жидким вязким ядром . . . . .</b>	<b>500</b>
<b>Общая теория упругих колебаний Земли . . . . .</b>	<b>506</b>
§1. Деформация упругой, неоднородной, сжимаемой и гравитирующей сферы . . . . .	509
§2. Уравнения в частных производных, определяющие суточные земные приливы и нутацию Земли . . . . .	514
§3. Приливы в упругой вращающейся Земле с жидким ядром . . . . .	518
§4. Общие уравнения упругих колебаний Земли . . . . .	526
§5. Строение Земли по частотам сфероидальных свободных колебаний . . . . .	528
§6. Приливы и свободные колебания Земли с учетом сил Кориолиса . . . . .	532
§7. Обыкновенные дифференциальные уравнения элементарного колебания упругой вращающейся Земли . . . . .	542
§8. Простейшие упругие колебания вращающейся Земли . . . . .	548
§9. Влияние малых нарушений сферической симметрии строения Земли на ее упругие колебания . . . . .	553
§10. Упругие колебания вращающейся Земли с жидким вязким ядром . . . . .	555
§11. Строение Земли по частотам свободных колебаний . . . . .	559

Научное издание

**Молоденский Михаил Сергеевич**

**Избранные труды**

**ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ,  
ФИГУРА И ВНУТРЕННЕЕ  
СТРОЕНИЕ ЗЕМЛИ**

*Утверждено к печати Ученым советом  
Объединенного института физики Земли  
Российской академии наук*

Зав. редакцией Н.А. Степанова  
Редактор Т.Я. Жабицкая  
Редактор-организатор Н.В. Заяц  
Художественный редактор Е.А. Быкова

ЛР № 020297 от 23.06.1997

Налоговая льгота –  
общероссийский классификатор продукции  
ОК-005-93, том 2; 953000 – книги, брошюры

Подписано к печати 12.11.2001  
Формат 70 × 100<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Гарнитура Таймс  
Печать офсетная  
Усл.печ.л. 46,9. Усл.кр.-отт. 46,9. Уч.-изд.л. 52,5  
Тип. зак. 4421

Издательство "Наука"  
117997 ГСП-7, Москва В-485, Профсоюзная ул., 90

E-mail: [secret@naukaran.ru](mailto:secret@naukaran.ru)  
Internet: [www.naukaran.ru](http://www.naukaran.ru)

Санкт-Петербургская типография "Наука"  
199034, Санкт-Петербург В-34, 9-я линия, 12

ISBN 5-02-002331-0



9 785020 102331 4

**В ИЗДАТЕЛЬСТВЕ "НАУКА"  
ГОТОВЯТСЯ К ПЕЧАТИ:**

**Самарский А.А., Вабищевич П.Н.**

**АДДИТИВНЫЕ СХЕМЫ  
ДЛЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

В монографии рассмотрены аддитивные разностные схемы приближенного решения многомерных нестационарных задач для уравнений с частными производными. Выделены классы схем с расщеплением по пространственным переменным (схемы переменных направлений), схемы расщепления по физическим процессам. При использовании компьютеров параллельной архитектуры строятся схемы декомпозиции области – регионально-аддитивные схемы. Рассмотрены безусловно устойчивые аддитивные схемы многокомпонентного расщепления для эволюционных уравнений первого и второго порядков. Материал книги базируется на общей теории устойчивости (корректности) операторно-разностных схем.

## **ПРОБЛЕМЫ ГЕОФИЗИКИ XXI в.**

В сборнике научных трудов дан критический анализ существующего состояния и тенденций развития сейсмологии, геофизики и смежных наук, в том числе сравнительной планетологии. Особое внимание уделено предельным возможностям исследований, связанных с физическими и другими ограничениями в области изучения строения Земли, изучения сейсмических очагов, прогноза землетрясений. В книге представлена новая концепция геодинамических и геофизических процессов, основанная на принципах нелинейной динамики и учитывающая непосредственные и опосредованные связи между процессами разной природы, которые протекают в оболочке Земли. Книга завершает серию изданий, посвященных нетрадиционным методам исследования в геофизике, основанных на расширении представлений о модели и свойствах среды.



**Булгаков В.К., Соловьев С.В.**

**МОДЕЛИ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ  
В МАНТИИ И ЯДРЕ ЗЕМЛИ**

В монографии авторами предложены модели, описывающие конвекцию литосферной плиты в зоне субдукции. Рассмотрены ньютоновская и неньютоновская реологии мантии. Учтена теплота фазового перехода. Вычислены критические числа Рэлея, исследовано влияние магнитного поля на поля течения и теплообмен в ядре Земли.

**В ИЗДАТЕЛЬСТВЕ "НАУКА"  
ВЫХОДИТ В СВЕТ**

**Магомедов К.М.**

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ГЕОТЕРМИИ**

Впервые геотермия рассматривается в широком понимании: от фундаментальной проблемы образования, эволюции и нагрева планет до использования тепла земных недр на практике. Изложены рекомендации по термодинамическому и гидродинамическому расчетам геотермических энергетических систем. Предложено обобщение законов Дарси и Фурье для процессов фильтрации. Большое место занимает изложение новых методов построения теоретических уравнений состояния на основе квантовой и статистической механики.

**АДРЕСА КНИГОТОРГОВЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ  
ТОРГОВОЙ ФИРМЫ “АКАДЕМКНИГА”**

**Магазины “Книга–почтой”**

121009 Москва, Шубинский пер., 6; 241-02-52  
197345 Санкт-Петербург, ул. Петрозаводская, 75; (код 812) 235-05-67

**Магазины “Академкнига” с указанием отделов “Книга–почтой”**

690088 Владивосток, Океанский пр-т, 140 (“Книга–почтой”); (код 4232) 5-27-91  
620151 Екатеринбург, ул. Мамина-Сибиряка, 137 (“Книга–почтой”); (код 3432) 55-10-03  
664033 Иркутск, ул. Лермонтова, 298 (“Книга–почтой”); (код 3952) 46-56-20  
660049 Красноярск, ул. Сурикова, 45; (код 3912) 27-03-90  
220012 Минск, проспект Ф.Скорины, 72; (код 10375-17) 232-00-52, 232-46-52  
117312 Москва, ул. Вавилова, 55/7; 124-55-00  
117192 Москва, Мичуринский пр-т, 12; 932-74-79  
103054 Москва, Цветной бульвар, 21, строение 2; 921-55-96  
103624 Москва, Б. Черкасский пер., 4; 298-33-73  
630091 Новосибирск, Красный пр-т, 51; (код 3832) 21-15-60  
630090 Новосибирск, Морской пр-т, 22 (“Книга–почтой”); (код 3832) 35-09-22  
142292 Пушкино Московской обл., МКР “В”, 1 (“Книга–почтой”); (13) 3-38-60  
443022 Самара, проспект Ленина, 2 (“Книга–почтой”); (код 8462) 37-10-60  
191104 Санкт-Петербург, Литейный пр-т, 57; (код 812) 272-36-65  
199164 Санкт-Петербург, Таможенный пер., 2; (код 812) 328-32-11  
194064 Санкт-Петербург, Тихорецкий пр-т, 4; (код 812) 247-70-39  
199034 Санкт-Петербург, Васильевский остров, 9-я линия, 16;  
(код 812) 323-34-62  
634050 Томск, Набережная р. Ушайки, 18; (код 3822) 22-60-36  
450059 Уфа, ул. Р. Зорге, 10 (“Книга–почтой”); (код 3472) 24-47-74  
450025 Уфа, ул. Коммунистическая, 49; (код 3472) 22-91-85

**Коммерческий отдел, г. Москва**

**Телефон 241-03-09**

**E-mail: [akadem.kniga@g.23.relcom.ru](mailto:akadem.kniga@g.23.relcom.ru)**

**Склад, телефон 291-58-87**

**Факс 241-94-64**

---

*По вопросам приобретения книг  
просим обращаться также  
в Издательство по адресу:  
117997 Москва, ул. Профсоюзная, 90  
тел. факс (095) 334-98-59  
E-mail: [initsiat@naukaran.ru](mailto:initsiat@naukaran.ru)  
Internet: [www.naukaran.ru](http://www.naukaran.ru)*

---

