

НЕКОРРЕКТНЫЕ
ЗАДАЧИ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ФИЗИКИ
И ПРОБЛЕМЫ
ИНТЕРПРЕТАЦИИ
ГЕОФИЗИЧЕСКИХ
НАБЛЮДЕНИЙ



Академия наук СССР Сибирское отделение
Вычислительный центр

НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ФИЗИКИ И ПРОБЛЕМЫ ИНТЕРПРЕТАЦИИ
ГЕОФИЗИЧЕСКИХ НАБЛЮДЕНИЙ

(Математические проблемы геофизики)

Сборник научных трудов

Под редакцией

М.М.Лаврентьева и А.С.Алексеева

1872

Новосибирск 1976



Редакционная коллегия

М.М.Лаврентьев (председатель), А.С.Алексеев (зам.председателя), О.К.Омельченко, В.Г.Романов, В.А.Цецохо.

А Н Н О Т А Ц И Я

В сборнике опубликованы работы прикладного характера, большая часть которых в математическом отношении связана с численным решением условно-корректных задач, а в прикладном — с решением геофизических задач, а также задач, связанных с дистанционными методами изучения Земли.

Сборник рассчитан на специалистов по прикладной математике и геофизике, а также на студентов старших курсов этих специальностей.

СО Д Е Р Ж А Н И Е

П р е д и с л о в и е	5
А.С.БЕЛОНОСОВ, В.А.ЦЕЦОХО. Вычислительный алгоритм и процедуры сглаживания функций, заданных приближенно в узлах нерегулярной сетки на плоскости	6
В.Г.ВАСИЛЬЕВ. О задаче определения коэффициента отражения плоской области	30
В.В.ГЕЙДТ. К задаче восстановления индикатриссы излучения и рельефа по его фотоизображениям . .	33
В.К.ГУСЯКОВ. Расчет энергии волн цунами	46
В.Р.КИРЕЙТОВ, А.В.БЕЛОНОСОВА. О численном решении задачи определения оптической поверхности по ее изображениям	65
А.А.МОРОЗОВ, А.И.ХИСАМУТДИНОВ. Способ "математических ожиданий" для сферических и цилиндрических областей в задачах переноса нейтронов	78
А.М.ФЕДОТОВ. Некоторые характеристики статистических оценок решения плохообусловленных систем нелинейных уравнений	89
В.Г.ХАЙДУКОВ, Г.М.ЦИБУЛЬЧИК. Цифровой способ формирования изображений и его опробование на численных моделях	107
Г.М.ЦИБУЛЬЧИК, Е.Ю.ДЕРЕВЦОВ. Один алгоритм обработки малоэлементных площадных систем наблюдения .	131
Аннотации статей, помещенных в сборнике.....	160

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый читателю сборник "Некорректные задачи математической физики и проблемы интерпретации геофизических наблюдений" состоит из работ, посвященных прикладным аспектам математических методов моделирования, обработки и интерпретации геофизических работ.

В математическом отношении большая часть задач, решаемых в статьях сборника, относится к классу условно-корректных, то есть задач, требующих для устойчивого численного решения дополнительной априорной информации о решении.

Краткое содержание работ хорошо отражают аннотации, помещенные в конце сборника. Отметим только, что в сборнике опубликованы также работы, связанные с новыми методами изучения Земли, основанными на использовании фотокосмических изображений.

Редколлегия

А.С.Белоносов, В.А.Цедохо

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ И ПРОЦЕДУРЫ СГЛАЖИВАНИЯ
ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ ПРИБЛИЖЕННО В УЗЛАХ НЕРЕГУЛЯР-
НОЙ СЕТКИ НА ПЛОСКОСТИ

1. О п и с а н и е а л г о р и т м а . В этом пункте излагается алгоритм гладкой аппроксимации таблично заданных функций, основанный на применении понятия разбиения единицы, который был опубликован в статье [1]. Мы будем пользоваться введенными там определениями применительно к двумерному случаю. Заметим, что алгоритм автоматически переносится на случай большего числа переменных.

1.1. Рассматривается следующая задача. Пусть в области Ω на плоскости имеется сетка из n точек $\{z_1 = (x_1, y_1), 1 = 1, \dots, n\}$, в которых заданы приближенные значения f_1 некоторой функции $f(x, y)$. Требуется построить r -гладкую функцию \tilde{f} , удовлетворяющую следующим условиям:

- а) $\|f - \tilde{f}\| \leq \epsilon$ (условие аппроксимации);
- б) вариации производных высших порядков функции \tilde{f} должны быть по возможности меньшими (условие сглаживания).

В упомянутой статье в условии а) рассматривалась равномерная норма для сеточных функций $h : z_1 \rightarrow h_1$

$$\|h\|_1 = \max_{i=1, \dots, n} |h_1|. \quad (I.I)$$

Мы будем рассматривать также евклидову норму

$$\|h\|_2 = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{i=1}^n h_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (I.2)$$

Относительно условия б) заметим, что аналогичное требование предъявляется к оглаженной функции в теории сплайнов, где минимизируется интеграл от квадрата второй производной искомой функции при условии ее близости к заданным значениям в точках z_i .

I.2. Зададимся некоторым числом s и рассмотрим покрытие области Ω стандартными квадратами V_i , центры которых находятся в точках z_i , а стороны параллельны соответствующим осям координат и имеют одинаковую длину $2s$. Зададимся также т.н. стандартной функцией $\omega(x, y)$, значения которой вычисляются по формуле

$$\omega(x, y) = \begin{cases} \frac{(1-x^2)^{r+1}(1-y^2)^{r+1}}{(1+\lambda x^2)(1+\lambda y^2)}, & \text{если } |x| < 1, |y| < 1, \\ 0 & \text{— в противном случае,} \end{cases} \quad (I.3)$$

где λ — некоторый параметр. Определим далее для каждой точки z_j сетки r -раз дифференцируемую функцию $\varphi_j(x, y)$ по формуле

$$\varphi_j(x, y) = \frac{\omega\left(\frac{x-x_j}{s}, \frac{y-y_j}{s}\right)}{\sum_{i=1}^n \omega\left(\frac{x-x_i}{s}, \frac{y-y_i}{s}\right)}. \quad (I.4)$$

Семейство функций (φ_j) образует разбиение единицы класса r на Ω , подчиненное покрытию Ω квадратами V_i .

Введем оператор L (сглаживающего приближения), действующий из пространства сеточных функций $f: z_i \rightarrow f_i$ на сетке (z_i) в пространство $C^r(\bigcup_{i=1}^n V_i)$ r -раз дифференцируемых функций $\tilde{f}(z)$ на $\bigcup_{i=1}^n V_i$ по формуле

$$L[f](z) = \sum_{i=1}^n f_i \varphi_i(z), \quad (I.5)$$

где $z = (x, y) \in \Omega$. Оператор L зависит от параметров r, s

и λ . Параметр r задает гладкость функций φ_i , и мы будем считать его фиксированным. Параметр α определяет размеры области, в которой определена функция $L[f]$, а также от его величины зависит, как много точек сетки оказывает влияние на значение $L[f]$ в каждой точке z . Параметр α выбирается исходя из конкретной конфигурации области, в которой расположены точки (z_j) , и его также естественно считать фиксированным. Таким образом, будем считать, что оператор L зависит только от λ . Оценим отклонение f от $L[f]$ в норме (I.1). Имеем

$$\|f - L[f]\| = \max_{(j)} |f_j - \sum_{i=1}^n f_i \varphi_i(z_j)| = \max_{(j)} |f_j(1 - \varphi_j(z_j)) - \sum_{i \neq j} f_i \varphi_i(z_j)| \leq 2\|f\| \max_{(j)} \{1 - \varphi_j(z_j)\}. \quad (I.6)$$

Если параметр λ устремить к бесконечности, то значения функции $L[f]$ в узлах (z_j) исходной сетки будут стремиться к значениям (f_i) (это непосредственно следует из равенств (I.3), (I.4) и оценки (I.6)). Однако при этом ухудшаются дифференциальные свойства функции $L[f]$. Поэтому при однократном применении оператора L невозможно, вообще говоря, получить решение, удовлетворяющее одновременно условиям сглаживания и аппроксимации.

I.3. Алгоритм, дающий решение нашей задачи, выглядит следующим образом. Зададимся априори такими значениями r и α , чтобы при $\lambda = 0$ соответствующая функция $L[f]$ была бы достаточно "плавной" (в смысле условия б)) и положим $\lambda_1 = 0$. Обозначим

$$\tilde{f}^{(0)}(z) = L[f](z)$$

и вычислим значения $\tilde{f}_i^{(0)}$ функции $\tilde{f}^{(0)}$ в узлах сетки. Найдём разности

$$f_i^{(1)} = f_i - \tilde{f}_i^{(0)}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Если окажется, что норма сеточной функции $f^{(1)}$ не превосходит ϵ , то $\tilde{f}^{(0)}$ можно принять за решение нашей задачи. В противном

ном случае применим оператор L к функции $f^{(1)}$, снова пологив

$$\tilde{f}^{(1)}(z) = L[f^{(1)}](z)$$

и найдем аналогичные разности для $\tilde{f}^{(1)}$

$$f_i^{(2)} = f_i^{(1)} - \tilde{f}_i^{(1)}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Этот процесс мы будем продолжать до тех пор, пока на каком-либо шаге с номером l_1 не будет выполняться одно из двух условий:

$$1) \|f^{(l_1)}\| \leq \varepsilon \quad \text{либо}$$

$$2) \frac{\|f^{(l_1-1)}\|}{\|f^{(l_1)}\|} < c, \quad \text{где } c > 1 - \text{некоторая наперед заданная скорость сходимости устройства процесса (скорость убывания нормы невязки } \|f^{(l)}\|).$$

В первом случае мы за искомое решение принимаем сумму

$$\tilde{f}(z) = \sum_{j=0}^{l_1-1} \tilde{f}^{(j)}(z) = \sum_{i=1}^n \sigma_i^{(1)} \varphi_i^{(1)}(z), \quad (I.7)$$

где

$$\sigma_i^{(1)} = f_i + f_i^{(1)} + \dots + f_i^{(l_1-1)}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (I.8)$$

Во втором случае мы увеличиваем параметр λ настолько, чтобы скорость сходимости процесса (для оператора L , соответствующего этому λ) стала снова больше числа c . Взяв это λ за λ_2 , продолжим описанный выше процесс.

И так далее. В конце концов, при некотором λ с номером m обязательно выполнится условие 1). Тогда в качестве решения \tilde{f} мы возьмем сумму

$$\tilde{f}(z) = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{j=l_{k-1}}^{l_k-1} \tilde{f}^{(j)} \right) = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^n \sigma_i^{(k)} \varphi_i^{(k)}(z) \right), \quad (I.9)$$

где

$$\sigma_i^{(k)} = \frac{1_{k-1}}{\sum_{j=1}^{k-1}} f_i^{(j)}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (\text{I.10})$$

Заметим, что при таком процессе с увеличением параметра λ суммарная функция \tilde{f} не существенно ухудшается в смысле условия сглаживания, поскольку норма $\|f^{(1)}\|$ на каждом шаге становится все меньшей.

I.4. Вычислительная схема алгоритма такова. Априори задаются параметры: r (гладкость искомой функции), ε (величина допустимого отклонения исходной функции от сглаженной), v (полудлина сторон стандартных квадратов V_i), c (требуемая скорость сходимости итерационного процесса) и некоторый набор $\{\lambda_k, k = 1, \dots, m_0\}$, возрастающих с номером k значений параметра λ .

Величина v выбирается из тех соображений, чтобы в каждый квадрат V_i попадало достаточное количество (50-100) точек сетки. Хотя для отдельных квадратов это может и не выполняться, величину v не следует выбирать слишком большой, так как в этом случае, во-первых, на значения \tilde{f} в большинстве точек ее области определения будет оказывать влияние слишком много точек сетки, что неестественно, а во-вторых, число операций в вычислениях существенно возрастет.

Величину λ_{m_0} нужно задавать настолько большой, чтобы при $k = m_0$ соответствующий итерационный процесс заведомо сошелся с достаточной скоростью. Это можно всегда сделать, например, выбрав λ_{m_0} таким, чтобы выполнялось условие

$$\min_{(j)} \phi_j(z_j) > \frac{2c - 1}{2c},$$

(где $c > 1$ - заданная скорость сходимости) так как при этом норма оператора $(E - L)$ будет меньше $\frac{1}{c}$ (это следует из оценки (I.6)).

Отметим, что от величин (λ_k) и скорости c зависит число m реально используемых в ходе итерационного процесса значений параметра λ , т.е. число наборов коэффициентов $(\sigma_i^{(k)})$, которые в дальнейшем при вычислении значений \tilde{f} будут остав-

дять основную часть используемой памяти машины (вместе с $2n$ величинами $(x_i), (y_i)$). Уменьшения числа m можно добиться заданием достаточно быстро возрастающей последовательности (λ_k) , а скорость s при этом не должна быть очень близка к 1. Значения величин λ_k и s подбираются, вообще говоря, экспериментально. Если s выбрано как сказано выше, то последовательность (λ_k) можно задать, например, следующим образом:

$$\lambda_k = \begin{cases} 0 & \text{при } k = 1 \\ 100 & \text{при } k = 2 \\ 3 \cdot \lambda_{k-1} & \text{при } k \geq 3, \end{cases} \quad (\text{I.II})$$

а скорость s взять равной 1.2.

После задания всех необходимых параметров включается описанный выше итерационный процесс, в ходе которого для каждого очередного значения λ_k вычисляются и запоминаются коэффициенты $(\sigma_i^{(k)})$.

Блок-схема алгоритма:

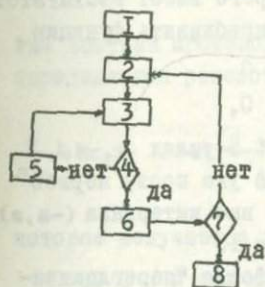


Рис. 1.

1. полагаем $k=0, l=0, f_i^{(0)} = f_i, i = 1, \dots, n$, находим $\|f^{(0)}\|$;

2. полагаем $k=k+1, \lambda = \lambda_k, \sigma_i^{(k)} = f_i^{(1)}, i = 1, \dots, n$;

3. полагаем $l = l + 1$, вычисляем

$$f_i^{(l)} = f_i^{(l-1)} - L[f^{(l-1)}](z_i),$$

$i = 1, \dots, n$, находим $\|f^{(l)}\|$;

4. если $\|f^{(l)}\| \leq \epsilon$ или $\frac{\|f^{(l-1)}\|}{\|f^{(l)}\|} < s$,

то 6. иначе 5;

5. полагаем $\sigma_i^{(k)} = \sigma_i^{(k)} + f_i^{(1)}, i = 1, \dots, n$;

6. запоминаем набор $(\sigma_i^{(k)}, i = 1, \dots, n)$;

7. если $\|f^{(1)}\| \leq \epsilon$ или $k = m_0$, то 8 иначе 2;

8. полагаем $m = k$; процесс окончен.

I.5. Используя найденные наборы коэффициентов $(\sigma_i^{(k)})$,

$i = 1, \dots, n$), можно по формуле (1.9) вычислить значение функции \tilde{f} в любой точке области, покрываемой квадратами V_i .

В качестве нормы $\|\cdot\|$ можно взять любую из норм для сеточных функций, например, (1.1) или (1.2).

Укажем на один нежелательный побочный эффект, который может иметь место для некоторых функций, если выбрать равномерную норму (1.1). Допустим, что на l -м шаге итерационного процесса возникла такая ситуация, что для большинства точек (z_i) сетки уже выполняется требуемое условие $|f_i^{(l)}| \leq \epsilon$, но существует несколько точек, в которых модуль соответствующих значений невязки $f^{(l)}$ все еще много больше ϵ . Для достижения необходимой величины невязки в этих точках процесс продолжится. При этом, во-первых, будут ухудшаться дифференциальные свойства функции \tilde{f} , а, во-вторых, значения \tilde{f} в большинстве точек будут слишком приближаться к заданным с ошибкой исходным значениям.

Приведем конкретный пример, для которого имеет место этот эффект "переглаживания". Пусть требуется приблизить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x = 0 \\ 0 & \text{при } x \neq 0, \end{cases}$$

если ее значения заданы с точностью $\epsilon \ll 1$ в узлах $x_i = i, \pm i = 0, 1, \dots$. Зададим $r = 3, s = 5$. Тогда уже после первой итерации значения $f_i^{(1)}$ невязки в точках x_i вне интервала $(-s, s)$ будут порядка ϵ , а значение $f_0^{(1)}$ близко к 1.

Для случая евклидовой нормы (1.2) эффекта "переглаживания" нет, и в этом смысле она иногда предпочтительнее равномерной нормы. Евклидову норму предлагается выбирать также в тех случаях, когда исходные значения (f_i) заданы с плохой точностью в большом числе точек. Отдельные ошибочные значения при этом не будут оказывать существенного влияния на функцию \tilde{f} .

1.6. Заметим, что описанный метод дает возможность вычислять значения не только самой функции \tilde{f} , но и ее производных. Пусть в результате итерационного процесса найдено m наборов коэффициентов $(\sigma_i^{(k)})$, соответствующих различным значениям параметра λ . Формулу (1.9) для вычисления значений $\tilde{f}(z)$ можно переписать в виде

$$\tilde{f}(z) = \sum_{k=1}^m \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i^{(k)} \omega^{(k)}(\xi_i, \eta_i)}{\sum_{i=1}^n \omega^{(k)}(\xi_i, \eta_i)} \right\}, \quad (I.12)$$

где $\omega^{(k)}$ определяется равенством (I.3) при $\lambda = \lambda_x$, $\xi_i = \frac{x-x_i}{s}$,
 $\eta_i = \frac{y-y_i}{s}$ ($i = 1, \dots, n$).

Формулы для вычисления производных функции \tilde{f} получаются дифференцированием равенства (I.12). Так, например, значения частной производной \tilde{f} по x находятся следующим образом:

$$\frac{\partial \tilde{f}(z)}{\partial x} = \frac{1}{s} \sum_{k=1}^m \left\{ \sum_{i=1}^n \sigma_i^{(k)} \frac{\partial \omega^{(k)}(\xi_i, \eta_i)}{\partial x} \sum_{i=1}^n \omega^{(k)}(\xi_i, \eta_i) - \sum_{i=1}^n \sigma_i^{(k)} \omega^{(k)}(\xi_i, \eta_i) \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega^{(k)}(\xi_i, \eta_i)}{\partial x} \right\} \left[\sum_{i=1}^n \omega^{(k)}(\xi_i, \eta_i) \right]^{-2}, \quad (I.13)$$

где частная производная $\frac{\partial \omega}{\partial x}(x, y)$ стандартной функции определяется равенством

$$\frac{\partial \omega(x, y)}{\partial x} = -2 \frac{(1-x^2)^r (1-y^2)^r}{(1+\lambda x^2)(1+\lambda y^2)} x(1-y^2) \left[r + \frac{\lambda+1}{1+\lambda x^2} \right], \quad (1.14)$$

которое получается дифференцированием по x равенства (I.3).

2. Описание процедур. В этом пункте рассматриваются основные вычислительные моменты предложенного выше алгоритма для случая, когда $(z_i)_{i=1, \dots, n}$ - произвольная неравномерная сетка на плоскости. В ходе изложения приводятся соответствующие процедуры, написанные на алгоритмическом языке АЛЬФА-6 (см. [2]).

2.1. Процедуры предварительной обработки данных.

Мы будем пользоваться обозначениями предыдущего пункта. Пусть координаты (x_i, y_i) узлов и приближенные значения f_i функции в этих узлах заданы в соответствующих элементах массивов $X, Y, F[1:n]$.

2.1.1. В дальнейшем будем считать осуществленным переход к новым координатам (x', y') , связанным со старыми (x, y)

формулами

$$x' = \frac{1}{s}(x - x_{\min}), \quad y' = \frac{1}{s}(y - y_{\min}), \quad (2.1)$$

где s - как и раньше, полудлина сторон стандартных квадратов V_i , $x_{\min} = \min_{i=1, \dots, n}(x_i)$, $y_{\min} = \min_{i=1, \dots, n}(y_i)$. Новые координаты будем обозначать по-прежнему через (x, y) ; x_i, y_i будут обозначать теперь координаты узлов сетки в новой системе координат. Величина s в новых координатах равна 1, а все точки $(z_i)_{i=1, \dots, n}$ лежат в первом квадранте на плоскости (x, y) . Формула (1.4) переписывается в виде

$$\varphi_j(x, y) = \frac{\omega(x - x_j, y - y_j)}{\sum_{i=1}^n \omega(x - x_i, y - y_i)}. \quad (2.2)$$

Процедура `ready` находит величины x_{\min} и y_{\min} и вычисляет значения элементов массивов X и Y в новых координатах

```
проц ready (n, X, Y, s, xm, ym);  
начало цел i; xm := X[1]; ym := Y[1];  
для i := 1, ..., n цикл  
начало если xm > X[i] то xm := X[i];  
если ym > Y[i] то ym := Y[i] конец;  
для i := 1, ..., n цикл  
начало X[i] := (X[i] - xm)/s;  
Y[i] := (Y[i] - ym)/s конец конец;
```

Параметры: n - число узлов; $X, Y[1 : n]$ - массивы, в которых заданы координаты узлов; s - полудлина сторон стандартных квадратов V_i ; xm, ym - вычисляемые в процедуре величины x_{\min} ; y_{\min} соответственно.

2.1.2. Для всякого натурального j обозначим через Q_j полосу

$$Q_j = \{(x, y) : j \leq y < j + 1\} = \{(x, y) : [y] = j\}$$

($[y]$ - целая часть числа y). Тогда каждый узел сетки попадает в одну из q полос, $q = 1 + [\max_{i=1, \dots, n}(y_i)]$.

Целая процедура `number` находит число q .
цел проц number (n, Y);

начало цел i ; вещ d ; $d := Y[1]$;
для $i:=1, \dots, n$ цикл если $d < Y[i]$ то $d := Y[i]$;
 $number := 1 + \text{entier}(d)$ конец;

Параметры: n - число узлов; $Y[1 : n]$ - массив ординат узлов.

Пусть n_j означает число узлов, которые попадают в полосу Q_j . Положим $t_0 = 1$, $t_{j+1} = t_j + n_j$, $j = 0, 1, \dots, q - 1$.

Процедура слой находит величины t_0, t_1, \dots, t_q .

проц слой (n, Y, q, T);

начало цел i, j ; $T[] := 0$;

для $i:=1, \dots, n$ цикл

начало $j := \text{entier}(Y[i]) + 1$;

$T[j] := T[j] + 1$ конец; $T[0] := 1$;

для $j:=1, \dots, q$ цикл

$T[j] := T[j] + T[j - 1]$ конец;

Параметры: n - число узлов; $Y[1 : n]$ - массив ординат узлов;
 $q = 1 + [\max_{i=1, \dots, n} (y_i)]$; $T[0 : q]$ - целый массив, в который заносятся вычисляемые в процедуре величины t_j .

2.1.3. Перенумеруем узлы сетки таким образом, чтобы новая последовательность узлов, обозначим ее по-прежнему через (z_i) , обладала свойствами:

1. $j \leq z_i < j + 1$, $i = t_j, t_j + 1, \dots, t_{j+1} - 1$, т.е.

$\{z_i, i = t_j, t_j + 1, \dots, t_{j+1} - 1\}$ - совокупность (2.3)

всех узлов полосы Q_j ,

2. $x_i \leq x_{i+1}$, $i = t_j, t_j + 1, \dots, t_{j+1} - 2$

для $j = 0, 1, \dots, q - 1$.

Переставим элементы массивов X, Y и F в соответствии с новой нумерацией точек. Это осуществляется следующим образом. Пусть при такой перестановке на i -е место в массивах переходит элемент с номером a_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

Процедура order находит величины a_1, a_2, \dots, a_n .

проц order (n, X, Y, A);

начало цел i, j, k, a_0, a_1, q ;

$q := \text{number}(n, Y)$;

начало цел массив $T, L[0 : q]$;

слой (n, Y, q, T) ; $L[] := T[]$;
для $i := 1, \dots, n$ цикл
начало $j := \text{entier}(Y[i])$;
 $A[L[j]] := i$; $L[j] := L[j] + 1$ конец;
для $j := 0, \dots, q-1$ цикл
для $i := T[j], \dots, T[j+1] - 2$ цикл
начало для $k := i$ шаг -1 до $T[j]$ цикл
начало $a_0 := A[k]$; $a_1 := A[k+1]$;
если $X[a_0] \leq X[a_1]$ то на M ;
 $A[k] := a_1$; $A[k+1] := a_0$ конец;
 M : конец конец конец;

Параметры: n - число узлов; $X, Y[1:n]$ - массивы абсцисс и ординат узлов; $A[1:n]$ - целый массив, в который заносятся вычисляемые в процедуре величины a_i .

Описанная перестановка элементов каждого из массивов X, Y, F осуществляется теперь при помощи процедуры сдвиг.

проц сдвиг (n, X, Y, F, A) ;
начало проц сдв(V) ; начало
массив $U[1:n]$; цел i ;
для $i := 1, \dots, n$ цикл $U[i] := V[i]$;
для $i := 1, \dots, n$ цикл $V[i] := U[A[i]]$ конец;
 сдв (X) ; сдв (Y) ; сдв (F) конец;

Параметры: n - число узлов; $X, Y[1:n]$ - массивы абсцисс и ординат узлов; $F[1:n]$ - массив значений функции в узлах; $A[1:n]$ - целый массив, в котором хранятся величины a_i .

В дальнейшем будем считать сделанной описанную перестановку элементов массивов X, Y, F . Все значения x_i, y_i, f_i , отвечающие точкам z_i любой непустой полосы Q_j , располагаются теперь в соответствующих массивах X, Y, F , начиная с номера t_j и кончая номером $(t_{j+1} - 1)$. При этом элементы массивов X и Y удовлетворяют условиям:

$$1^{\circ}. \text{entier}(Y[i]) = j, i = t_j, t_j + 1, \dots, t_{j+1} - 1, \quad (2.4)$$

$$2^{\circ}. X[i] \leq X[i+1], i = t_j, t_j + 1, \dots, t_{j+1} - 2$$

для $j = 0, 1, \dots, q-1$.

Заметим, что при помощи величин $(a_i)_{i=1, \dots, n}$ можно восстановить исходный порядок расположения элементов в массивах

вах X, Y, F . Для этого достаточно изменить в процедуре сдвиг оператор $V[i] = U[\Delta[i]]$ на $V[\Delta[i]] := U[i]$, а затем воспользоваться этой процедурой.

2.2. Вычисление значений $L[f]$ в узлах сетки $(z_i)_{i=1, \dots, n}$. Подставив в формулу (1.5) выражение (2.2), запишем ее в виде

$$L[f](z) = \frac{d(z)}{g(z)}, \quad (2.5)$$

где

$$d(z) = \sum_{i=1}^n f_i \omega(x - x_i, y - y_i),$$

$$g(z) = \sum_{i=1}^n \omega(x - x_i, y - y_i). \quad (2.6)$$

Таким образом, для вычисления $L[f]$ в точке $z=(x, y)$ достаточно найти значения сумм $d(z)$ и $g(z)$, а затем воспользоваться формулой (2.5).

Введем массивы $D, G[1 : n]$. Процедура ОСН "накапливает" величины $d(z_j)$, $g(z_j)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) в соответствующих элементах массивов D, G .

ПРОЦ ОСН ($n, X, Y, F, r, \lambda, D, G$);

ЗНАЧ r, λ ; ЦЕЛ r ; ВЕЩ λ ;

НАЧАЛО ЦЕЛ q ; $q := \text{number}(n, Y)$;

НАЧАЛО ЦЕЛ МАССИВ $T[0 : q]$; ВЕЩ x, y ;

ЦЕЛ $k, i, i_0, i_1, i_2, j, j_1, j_2$; ЛОГ iks ;

ПРОЦ БЕС; НАЧАЛО ВЕЩ ω ; $x := x \times x$; $y := y \times y$;

$\omega := ((1 - x) \times (1 - y)) \uparrow r / ((1 + \lambda x) \times (1 + \lambda y))$;

$D[j] := D[j] + \omega \times F[i]$; $G[j] := G[j] + \omega$;

$D[i] := D[i] + \omega \times F[j]$; $G[i] := G[i] + \omega$ КОНЕЦ ;

$r := r + 1$; СЛОЙ (n, Y, q, T);

ДЛЯ $i := 1, \dots, n$ ЦИКЛ

НАЧАЛО $D[i] := F[i]$; $G[i] := 1$ КОНЕЦ;

ДЛЯ $k := 0, \dots, q - 1$ ЦИКЛ

НАЧАЛО $j_1 := T[k]$; $i_0 := T[k + 1]$;

ЕСЛИ $j_1 = i_0$ ТО НА M_4 $j_2 := i_0 - 1$;

ДЛЯ $j := j_1, \dots, j_2 - 1$ ЦИКЛ НАЧАЛО

ДЛЯ $i := j + 1, \dots, j_2$ ЦИКЛ НАЧАЛО



$x := X[i] - X[j]$; если $x \geq 1$ то на $M1$;
 $y := Y[i] - Y[j]$; вс конец ;
 $M1$: конец ; если $k = q - 1$ то на $M4$;
 $i2 := T[k+2] - 1$; если $i0 > i2$ то на $M4$;
для $j := j1, \dots, j2$ цикл начало $iks := \text{истина}$;
 $i1 := i0$; для $i := i1, \dots, i2$ цикл начало
 $x := X[i] - X[j]$; если iks то начало
если $x \leq -1$ то на $M2$; $iks := \text{ложь}$; $i0 := i$ конец ;
если $x \geq 1$ то на $M3$; $y := Y[i] - Y[j]$; если $y < 1$ то $вс$;
 $M2$: конец ; $M3$: конец ; $M4$: конец конец конец ;

Параметры: n - число узлов; $X, Y[1 : n]$ - массивы абсцисс и ординат узлов; $F[1 : n]$ - массив значений функции в узлах; r (типа целый), λ - соответствующие параметры стандартной функции (I.3); $D, G[1 : n]$ - массивы, в которые заносятся вычисляемые в процедуре величины $d(z_j), g(z_j)$.

2.3. Процедура вычисления наборов коэффициентов

$$(\sigma_i^{(k)})_{i=1, \dots, n}$$

Описанная в этом пункте процедура коэф реализует, рассмотренный в разделе I, итерационный процесс согласно приведенной там блок-схеме. Вычисляемые в процедуре коэффициенты $\sigma_1^{(k)}, \sigma_2^{(k)}, \dots, \sigma_n^{(k)}$, соответствующие значению $\lambda = \lambda_k$, будут храниться на барабане, начиная с элемента с номером $(k-1) \cdot n$. В список формальных параметров включена логическая переменная iks , которая при обращении к процедуре задает вид нормы, в которой ведется приближение функции. Если $iks = \text{истина}$, то приближение ведется в равномерной норме (I.1); если же $iks = \text{ложь}$, -то в евклидовой норме (I.2). По окончании работы процедуры параметру iks присваивается значение истина, если итерационный процесс сошелся; в противном случае - ложь (т.е. использованы все m_0 заданных значений параметра λ , но требуемая точность ϵ не достигнута).

На каждом l -м шаге итерационного процесса в процедуре осуществляется вывод на печать величин $l, F_1^{(l)}, c_1^{(l)}, F_2^{(l)}, c_2^{(l)}, \lambda^{(l)}$, где

$$F_1^{(l)} = \|f^{(l)}\|_1, c_1^{(l)} = \frac{F_1^{(l-1)}}{F_1^{(l)}}, F_2^{(l)} = \|f^{(l)}\|_2, c_2^{(l)} = \frac{F_2^{(l-1)}}{F_2^{(l)}}$$

а $\lambda^{(1)}$ - текущее значение параметра λ (нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ определяются равенствами (I.1), (I.2)). Эта информация о ходе процесса может быть использована для более оптимального выбора параметров.

```

ПРОЦ коэф (n, X, Y, F, ε, r, m, λ, c, iks);
НАЧАЛО ПРОЦ контроль (λ) ; начало
f1 := f2 := 0 ; ДЛЯ i := 1, ..., n ЦИКЛ НАЧАЛО
ЕСЛИ f1 < abs(F[i]) ТО f1 := abs(F[i]);
f2 := f2 + F[i]*F[i] КОНЕЦ; f2 := sqrt(f2/n);
ЕСЛИ l = 0 ТО c1 := c2 := 0; c1 := c1/f1; c2 := c2/f2;
ЕСЛИ l = 0 ТО OUTPUT(0, '/10b', 't', '
      ||| норма λ ||| ||| скорость ||| ||| норма λ²
      ||| скорость λ² ||| ||| лямбда', '//');
OUTPUT(0, 'z11bd', l, 'e5b-d.3d₁₀+dd',
f1, 'z4b-2d.3d', c1, 'e6b-d.3d₁₀+dd', f2,
'z4b-2d.3d', c2, 'e7b-d.3d₁₀+dd', λ, '/');
c1 := ЕСЛИ iks ТО c1 ИНАЧЕ c2; c1 := f1; c2 := f2;
f1 := ЕСЛИ iks ТО f1 ИНАЧЕ f2 КОНЕЦ;
ЦЕЛ na, na, i, mo, k, l; ВМ f1, c1, f2, c2, fl, cl;
МАССИВ D, G[1:n]; l := 0; контроль(0);
mo := m; ДЛЯ k := 1, ..., mo ЦИКЛ НАЧАЛО
m := k; nз := (k-1)*n ÷ 1024; nя := (k-1)*n - nз*1024;
OUTPUT(0, '/'); COPY(0, F, 1, 5, nз, nя);
M1: l := l+1; OCP(n, X, Y, F, r, λ[k], D, G);
ДЛЯ i := 1, ..., n ЦИКЛ F[i] := F[i] - D[i]/G[i];
контроль (λ[k]); ЕСЛИ f1 ≤ ε ТО НА M3;
ЕСЛИ c1 ≤ ε ТО НА M2; COPY(1, D, 1, 5, nз, nя);
ДЛЯ i := 1, ..., n ЦИКЛ D[i] := D[i] + F[i];
COPY(0, D, 1, 5, nз, nя); НА M1 ;
M2: КОНЕЦ;
M3: OUTPUT(0, '//10b', 't', ' процесс — окончен, '//');
iks := f1 ≤ ε КОНЕЦ;

```

Параметры: n - число узлов; $X, X[1:n]$ - массивы абсцисс и ординат узлов; $F[1:n]$ - массив приближенных значений функции в узлах (по окончании работы процедуры в массиве F будут находиться разности $f_i^{(1)} = f_i - \tilde{f}_i$) ; ϵ - величина допустимого отклонения сглаженной функции от исходной в одной из

норм (I.1), (I.2); r (типа целый) - параметр стандартной функции (I.3); m - число заданных значений λ_k (по окончании работы процедуры параметр m равен числу реально использованных значений λ_k); $\lambda[1:m]$ - массив, в котором хранятся величины λ_k ; s - требуемая скорость сходимости итерационного процесса; ixs - логическая переменная, смысл которой описан выше.

2.4. Процедуры вычисления значений сглаженной функции и ее частных производных в произвольной точке.

2.4.1. Наряду с горизонтальными плоскостями Q_j , рассмотрим для натуральных i аналогичные вертикальные полосы

$$P_i = \{(x, y) : [x] = i\}.$$

В пересечении вертикальные и горизонтальные полосы дают единичные квадраты $E_{i,j} = P_i \cap Q_j$.

Пусть $n_{i,j}$ означает число узлов, принадлежащих квадрату $E_{i,j}$, $p = 1 + [\max_{i=1, \dots, n} (x_i)]$, $q = 1 + [\max_{i=1, \dots, n} (y_i)]$ (p и q находятся при помощи процедуры number). Тогда узлы могут попадать только в квадраты $\{E_{i,j} : 0 \leq i \leq p-1, 0 \leq j \leq q-1\}$. Соответствующие этим квадратам величины $n_{i,j}$ обозначим через $m_0, m_1, \dots, m_{p \cdot q - 1}$, положив $m_{i+j \cdot p} = n_{i,j}$. Таким образом, m_l - число узлов в квадрате $E_{i,j}$, где $j = 1 \div p$, $i = 1 - j$ ($l = 0, 1, \dots, p \cdot q - 1$).

Положим $k_0 = 1, k_l = k_{l-1} + m_{l-1}$ для $l = 1, 2, \dots, p \cdot q$. Тогда если квадрат $E_{i,j}$ не пуст, то

$$\{z_k : k = k_l, k_{l+1}, \dots, k_{l+1} - 1, l = i + j \cdot p\}$$

- совокупность всех его узлов (так как последовательность (z_l) обладает свойствами (2.3)).

Процедура квадрат находит величины $k_0, k_1, \dots, k_{p \cdot q}$.

проц квадрат (n, X, Y, p, q, K);

начало цел массив $M[0:p], T[0:q]$;

цел i, j, l ; слои (n, Y, q, T); $K[0] := 1$;

для $j := 0, \dots, q-1$ цикл начало $M[] := 0$;

для $l := T[j], \dots, T[j+1] - 1$ цикл начало

$i := \text{entier}(X[1]); M[i] := M[i] + 1$ конец;
 $l := j * p$; для $i := 0, \dots, p - 1$ цикл
 $K[i + 1 + 1] := K[i + 1] + M[i]$ конец конец;

Параметры: n - число узлов; X , $Y[1:n]$ - массивы абсцисс и ординат узлов; p, q - максимально возможное число непустых вертикальных и горизонтальных полос соответственно; $K[0:p * q]$ - целый массив, в который заносятся вычисляемые в процедуре величины k_1 .

2.4.2. По аналогии с (2.5), запишем выражение (I.9) для $\tilde{f}(z)$ в виде

$$\tilde{f}(z) = \sum_{k=1}^m \frac{d^{(k)}(z)}{g^{(k)}(z)}, \quad (2.7)$$

где

$$d^{(k)}(z) = \sum_{i=1}^n \sigma_i^{(k)} \omega^{(k)}(x-x_i, y-y_i), \quad (2.8)$$

$$g^{(k)}(z) = \sum_{i=1}^n \omega^{(k)}(x-x_i, y-y_i)$$

(здесь $\omega^{(k)}$ определяется формулой (I.3) при $\lambda = \lambda_k$). Таким образом, задача нахождения значений функции $\tilde{f}(z)$ и ее производных в точке $z = (x, y)$ сводится к задаче нахождения сумм (2.8) для $k = 1, 2, \dots, m$ и соответствующих производных этих сумм.

Заметим, что при вычислении сумм (2.8) и их производных достаточно ограничиться членами с теми номерами i , для которых выполняются условия:

$$|x - x_i| < 1, \quad |y - y_i| < 1 \quad (2.9)$$

(для остальных номеров соответствующие значения $\omega^{(k)}$ равны нулю).

Процедура `move` для заданной точки z осуществляет поиск всех узлов z_i , координаты которых удовлетворяют условиям (2.9). Найдя очередной такой узел, она обращается к процедуре `suma` с параметрами (i, ξ, η) , где i - номер этого узла, $\xi =$

$= x - x_1$, $\eta = y - y_1$. При этом предполагается, что процедура сумма находит вклад члена с номером i в каждую из вычисляемых сумм.

```

проц move(x,y,сумма);
начало вещ  $\xi$ ,  $\eta$ ; цел  $i, i_0, j, j_0, l$ ;
 $i_0 := \text{entier}(x)$ ;
если  $i_0 < 0$  то  $i_0 := i_0 + 1$ ; если  $i_0 \geq p$  то  $i_0 := i_0 - 1$ ;
если  $i_0 \geq 0 \& i_0 < p$  то начало
 $j_0 := \text{entier}(y)$ ; для  $j := j_0 - 1, \dots, j_0 + 1$  цикл
если  $j \geq 0 \& j < q$  то начало  $l := j * p$ ;
для  $i := K[i_0 + 1], \dots, K[p + 1] - 1$  цикл
начало  $\xi := x - X[i]$ ; если  $\xi > -1$  то начало
если  $\xi \geq 1$  то на M1;  $\eta := y - Y[i]$ ;
если  $\text{abs}(\eta) < 1$  то сумма( $i, \xi, \eta$ ) конец конец;
M1: для  $i := K[i_0 + 1] - 1$  шаг -1 до K[1] цикл
начало  $\xi := x - X[i]$ ; если  $\xi < 1$  то начало
если  $\xi \leq -1$  то на M2;  $\eta := y - Y[i]$ ;
если  $\text{abs}(\eta) < 1$  то сумма( $i, \xi, \eta$ ) конец конец;
M2: конец конец конец;

```

Параметры: x, y - координаты точки z ; сумма - идентификатор процедуры, о которой сказано выше.

В процедуре move предполагаются определенными: $X, Y[1:n]$ - массивы абсцисс и ординат узлов; p и q - максимально возможное число непустых вертикальных и горизонтальных полос соответственно; $K[0:p * q]$ - целый массив, в котором хранятся описанные выше величины k_1 .

2.4.3. Вещественная процедура point находит значение \tilde{f} в точке $z = (x, y)$. Если z не принадлежит области определения \tilde{f} (т.е. условия (2.9) не выполняются для всех $i = 1, 2, \dots, n$), то значение $\tilde{f}(z)$ полагается равным некоторой заданной величине const

```

вещ проц point(x, y);
знач  $x, y$ ; вещ  $x, y$ ;
начало массив D, G[1:m];
проц сумма( $i, x, y$ ); знач  $i$ ; цел  $i$ ;
начало вещ  $\omega_0$ ;  $x := x * x$ ;  $y := y * y$ ;

```

```

ω₀ := ((1-x)ₓ(1-y))!r₁;
ДЛЯ k := 1, ..., m ЦИКЛ НАЧАЛО
ω := ω₀ / ((1+λ[k]ₓx)ₓ(1+λ[k]ᵧy));
D[k] := D[k] + ω × σ[i]; G[k] := G[k] + ω;
i := i+n КОНЕЦ КОНЕЦ;
ЦЕЛ k, r₁; ВЕЩ ω; r₁ := r₁+1;
D[ ] := G[ ] := 0;
move (x, y, сумма);
ω := 0; ДЛЯ k := 1, ..., m ЦИКЛ
ЕСЛИ G[k] = 0 ТО НА M1 ИНАЧЕ
НАЧАЛО ω := ω + D[k]/G[k] КОНЕЦ; НА M2,
M1: ω := const; M2: point := ω КОНЕЦ;

```

Параметры: x, y - координаты точки z (не следует забывать, что мы перешли к новым координатам по формулам (2.1), так что (x, y) - новые координаты точки z).

В процедуре предполагаются определенными: n - число узлов; r (типа целый) - параметр стандартной функции (I.3); m - число значений λ_k , использованных в ходе итерационного процесса; $\lambda[1:m]$ - массив, в котором хранятся величины λ_k ; $\sigma[1:m \times n]$ - массив, в котором хранятся наборы коэффициентов ($\sigma_i^{(k)}$), соответствующие различным λ_k (эти коэффициенты вычисляются процедурой коэф и заносятся на барабан, откуда они могут быть считаны в массив σ при помощи оператора СОРУ (I, σ , I, 5, 0, 0)); const - любое наперед заданное число.

Процедура point3 находит значения $\tilde{f}(z)$, $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(z)$, $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(z)$ в точке z (если z не принадлежит области определения \tilde{f} , то эти значения полагаются равными некоторой заданной заранее величине const).

Частные производные $\frac{\partial \omega^{(k)}}{\partial x}$ вычисляются по формуле (I.14) для $\lambda = \lambda_k$, производные $\frac{\partial \omega^{(k)}}{\partial y}$ - по аналогичной формуле

```

ПРОЦ point3 (x, y, f, f1, f2);
ЗНАЧ x, y; ВЕЩ x, y;
НАЧАЛО МАССИВ D, G, D1, G1, D2, G2[1:m];
ПРОЦ сумма(i, x, y); ЗНАЧ i; ЦЕЛ i; НАЧАЛО

```



```

вещ  $\omega_0, x_1, x_2, y_1, y_2, u, ur, a_1, a_2, b_1, b_2, c, \mu;$ 
 $x_1 := x \times x; y_1 := x \times y; x_2 := 1 - x_1; y_2 := 1 - y_1;$ 
 $u := x_2 \times y_2; ur := u \times r; a_1 := x \times y_2; b_1 := y \times x_2;$ 
для  $k := 1, \dots, m$  цикл начало  $c := \sigma[i]; \mu := \lambda[k];$ 
 $a_2 := 1 + \mu \times x_1; b_2 := 1 + \mu \times y_1; \omega_0 := ur / (a_2 \times b_2);$ 
 $\omega := \omega_0 \times u; D[k] := D[k] + \omega \times c; G[k] := G[k] + \omega;$ 
 $\omega := \omega_0 \times a_1 \times (r + (\mu + 1) / a_2);$ 
 $D1[k] := D1[k] + \omega \times c; G1[k] := G1[k] + \omega;$ 
 $\omega := \omega_0 \times b_1 \times (r + (\mu + 1) / b_2);$ 
 $D2[k] := D2[k] + \omega \times c; G2[k] := G2[k] + \omega;$ 
 $i := i + n$  конец конец;
цел  $k$  ; вещ  $\omega$  ;
 $D[ ] := G[ ] := D1[ ] := G1[ ] := D2[ ] := G2[ ] := 0;$ 
move (x, y, сумма);
 $f := f_1 := f_2 := 0;$  для  $k := 1, \dots, m$  цикл
если  $G[k] = 0$  то на M1 иначе
начало  $\omega := D[k] / G[k]; f := f + \omega;$ 
 $f_1 := f_1 + (D1[k] - \omega \times G1[k]) / G[k];$ 
 $f_2 := f_2 + (D2[k] - \omega \times G2[k]) / G[k]$  конец;
 $f_1 := -2 \times f_1 / s; f_2 := -2 \times f_2 / s;$  на M2;
M1:  $f := f_1 := f_2 := const;$  M2: конец;

```

Параметры: x, y - координаты точки z (в новой системе координат); f, f_1, f_2 - переменные, которым присваиваются значения $\tilde{f}(z), \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(z)$ и $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(z)$ соответственно.

Переменные $n, r, m, const$ и массивы $\lambda[1:m], \sigma[1:m \times n]$ имеют тот же смысл, что и в процедуре point; s - величина, фигурирующая в формулах перехода (2.1) (т.е. полудлина сторон стандартных квадратов V_i в исходной системе координат).

По той же схеме можно составить процедуры для вычисления других производных функции \tilde{f} . Процедура move является общей для всех таких процедур.

2.5. Описание тестового примера.

В настоящем пункте рассматривается программа, которая мо-

жет служить примером использования предложенного выше комплекса процедур. Результаты тестового расчета по этой программе приведены в таблицах 1, 2, 3.

В квадрате $\Delta = [-8, 8] \times [-8, 8]$, используя датчик случайных чисел, построим такую "случайную" сетку (z_i) , что в каждую клетку $(k, k+1) \times (l, l+1)$ (где $-8 \leq k \leq 7, -8 \leq l \leq 7; k, l$ - целые), попадает ровно одна точка сетки (z_i) (всего $n = 16^2$ точек). В качестве значений (f_i) возьмем значения функции

$$f(x, y) = 1 - \left(\frac{x}{8}\right)^2 + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot y\right)$$

в узлах сетки.

Введем массивы $X, Y, F[1:n]$ (где $n = 16^2 = 256$). Процедура вход задает координаты узлов (z_i) и насчитывает значения (f_i) в соответствующих элементах массивов X, Y, F .

ПРОЦ вход;

начало вещ проц RAND;

начало вещ t; собств вещ u0, u1;

u0 = 3.14159265; u1 = 0.542101887;

t := u0 + u1; u0 := u1;

если t ≥ 4 то t := t - 4; u1 := t;

RAND := t / 4 конец;

цел i, k, l; вещ x, y, p;

p := 3.14159265359 / 4;

для l := -8, ..., 7 цикл для k := -8, ..., 7 цикл

начало i := k + 8 + (1 + 8) * 16 + 1;

x := X[i] := k + RAND; y := Y[i] := 1 + RAND;

F[i] := 1 - (x/8)² + 0.5 * sin(p * y) конец конец;

Здесь RAND - стандартная процедура (генератор случайных чисел, см. [2]).

Зададим $\epsilon = 0.01$. Построим такую функцию \tilde{f} гладкости $r = 3$, что $\|f - \tilde{f}\| \leq \epsilon$ (где в качестве $\|\cdot\|$ взята равномерная норма (I.1) и вычислим значения $\tilde{f}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}$ в 9^2

узлах $z_{i,j} = (2 \times i - 8, 8 - 2 \times j)$ ($i = 0, 1, \dots, 8; j = 0, 1, \dots, 8$)

Таблица 1.

0	I	2	3	4
-0.099133	0.24620I	0.58305I	0.839610	0.879197
-0.467898	-0.011492	0.273779	0.43628I	0.506402
0.005590	0.432454	0.746352	0.935788	0.997060
0.529308	0.92I546	I.248569	I.4322I2	I.498868
0.01030I	0.430587	0.765I98	0.93I5II	0.994052
-0.439543	-0.066704	0.255I37	0.437487	0.500278
0.057956	0.43490I	0.738753	0.947767	0.994538
0.5I5I35	0.88749I	I.229839	I.423806	I.45I623
0.I7I47I	0.445I55	0.795968	I.I23892	I.0830II
5	6	7	8	
0.870332	0.67I2I9	0.340749	-0.084889	
0.44I470	0.254592	-0.05832I	-0.434709	
0.935062	0.753968	0.435974	0.009835	
I.434895	I.249578	0.933985	0.52I707	
0.936845	0.752474	0.425698	0.078430	
0.435952	0.252782	-0.0578I0	-0.403522	
0.93I466	0.754025	0.433400	0.I087I6	
I.38I246	I.242544	0.926573	0.540740	
I.082637	0.840939	0.52I9I8	0.337448	

Таблица 2.

0	I	2	3	4
0.I3I498	0.I95463	0.075343	0.044675	0.II3325
0.I840I6	0.I60I48	0.I577I8	0.066607	-0.022347
0.I93535	0.I94255	0.I34687	0.05452I	-0.002486
0.I243I6	0.I85I82	0.II8255	0.069478	-0.00I03I
0.I50263	0.I88220	0.I20I30	0.067345	0.007068
0.I056I8	0.I96I42	0.I22I62	0.063058	-0.00I302
0.I09908	0.20I972	0.I2469I	0.0695I2	0.006443
0.II3027	0.I870I7	0.099975	0.077753	-0.025680
0.053I68	0.I77072	0.II9772	0.074928	-0.I22779

Продолжение Таблицы 2.

5	6	7	8
-0.186244	-0.247415	-0.355555	-0.154091
-0.037768	-0.120875	-0.199347	-0.127704
-0.034788	-0.122347	-0.176143	-0.131315
-0.065343	-0.122805	-0.189458	-0.166040
-0.060156	-0.130905	-0.184718	-0.104980
-0.064668	-0.118442	-0.171378	-0.091969
-0.064496	-0.099642	-0.201280	-0.074843
-0.029166	-0.142968	-0.180563	-0.101403
-0.020667	-0.068627	-0.101391	-0.063376

Таблица 3.

0	1	2	3	4
0.107314	0.087429	0.089786	0.100484	0.167429
-0.005045	0.029109	-0.025766	-0.029610	0.013961
-0.435999	-0.391495	-0.417397	-0.415123	-0.404627
-0.002576	0.012873	0.010878	-0.002195	0.002848
0.423423	0.365416	0.395927	0.398160	0.398208
0.043094	-0.007781	-0.010969	-0.002374	0.006940
-0.295154	-0.396175	-0.354967	-0.433812	-0.416251
-0.083344	0.045664	0.046279	-0.028971	0.028990
0.196347	0.194949	0.188324	0.125436	0.184411

5	6	7	8
0.242352	0.166936	0.145243	0.101264
-0.010903	-0.007216	0.032318	-0.100435
-0.383923	-0.376429	-0.418732	-0.393962
-0.003136	0.000018	0.013133	-0.052540
0.410068	0.387255	0.395936	0.368169
-0.001760	-0.002229	-0.005674	0.020095
-0.406977	-0.408816	-0.417734	-0.379352
0.003661	-0.009638	0.004051	-0.074946
0.166582	0.185887	0.140117	0.095749

равномерной сетки с шагом $h = 2$ по x и по y , которая "покрывает" квадрат Δ .

Выберем $s = 5$ (тогда в квадраты V_i попадает от 25 до 100 точек (z_i)). Пусть $m = 10$ - число различных значений λ . Последовательность (λ_k) для $k = 1, 2, \dots, m$ возьмем в виде (I.11). Зададим скорость сходимости итерационного процесса $c = 1.2$.

Приведем программу, которая:

- а) находит наборы коэффициентов $(\sigma_1^{(k)})$,
б) вычисляет матрицы значений \tilde{f} , $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}$, $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}$ в узлах указанной выше равномерной сетки (столбцы этих матриц изображены на таблицах 1, 2, 3 соответственно),

в) осуществляет вывод на печать элементов каждой из этих матриц в виде таблицы, столбцы которой перенумерованы и отвечают соответствующим столбцам матрицы.

Координаты узлов (z_i) и значения (f_i), а также все остальные параметры, задаются в этой же программе.

начало

```
ПРОЦ ready (n, X, Y, s, xm, um); { };
ЦЕЛ ПРОЦ number (n, X); { };
ПРОЦ слой (n, Y, q, T); { };
ПРОЦ квадрат (n, X, Y, p, q, K); { };
ПРОЦ order (n, X, Y, A); { };
ПРОЦ сдвиг (n, X, Y, F, A); { };
ПРОЦ ОСП (n, X, Y, F, r, lambda, D, G); { };
ПРОЦ коэф (n, X, Y, F, epsilon, r, m, lambda, c, iks); { };
МАССИВ X, Y[1:256], lambda[1:10];
ЦЕЛ i, n, r, m; ВЕЩ s, epsilon, c, xm, um; ЛОГ iks;
n := 256; r := 3; epsilon := 0.01; iks := ИСТИНА;
s := 5; m := 10; lambda[1] := 0; lambda[2] := 100;
ДЛЯ i := 3, ..., m ЦИКЛ lambda[i] := lambda[i-1]*3; c := 1.2;
МАРГ (0, 0, 128, 0, 0, 0, 0);
НАЧАЛО МАССИВ F[1:n];
ПРОЦ вход; { }
вход; ready (n, X, Y, s, xm, um);
НАЧАЛО ЦЕЛ МАССИВ A[1:n];
```

```

order (n, X, Y, A); сдвиг (n, X, Y, F, A) конец;
коэф (n, X, Y, F, e, r, m, lambda, c, iks) конец;
если iks то начало массив sigma[1 : m x n];
цел p, q; COPY (1, sigma, 1, 5, 0, 0);
p := number (n, X); q := number (n, Y);
начало цел массив K[0 : p x q]; вещ const;
проц move (x, y, сумма); {      };
вещ проц point (x, y); {      };
проц point3 (x, y, f, f1, f2); {      };
квадрат (n, X, Y, p, q, K); const := 5;
начало массив F, F1, F2, [0 : 8, 0 : 8];
цел i, j; вещ x, y, omega; проц ПЧ(F);
начало OUTPUT (0, '//');
для i := 0, ..., 8 цикл OUTPUT (0, 'z9bd4b', i);
OUTPUT (0, '//'); для j := 0, ..., 8 цикл
начало для i := 0, ..., 8 цикл
OUTPUT (0, 'z5b - d.6d', F[j, i]);
OUTPUT (0, '/' ) конец конец;
для j := 0, ..., 8 цикл для i := 0, ..., 8 цикл
начало x := ((2*i - 8) - xm)/s; y := ((8 - 2*j) - ym)/s;
F[j, i] := point(x, y);
point3(x, y, omega, F1[j, i], F2[j, i]) конец;
ПЧ(F); ПЧ(F1); ПЧ(F2) конец конец конец;
конец *

```

(оператор MARG (0,0,128,0,0,0,0) отменяет постраничную печать выводимой на АЦПУ информации (см. [2])).

Л и т е р а т у р а

1. ЦЕЦОХО В.А., БЕЛОНОСОВ А.С., БЕЛОНОСОВА А.В. Об одном методе r -гладкого приближения функций многих переменных. В сб.: Математические проблемы геофизики, Новосибирск, вып. 6, ч. I, 1975, с. 298-309.
2. БУДА А.О., ВАСЮЧКОВА Т.С., ГРАНОВСКИЙ А.А. и др. Руководство к пользованию системой автоматизации программирования АЛЬФА-6. Новосибирск, 1974.

В.Г.Васильев

О ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ОТРАЖЕНИЯ
ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ

Пусть $(x, y, 0)$ - координаты произвольной точки R плоскости, отражающей свет по закону Ламберта, с коэффициентом отражения $f(x, y)$, $(\xi, 0, h)$ - координаты источника света, который включается и отражается от плоскости, $(0, \eta, h)$ - координаты прибора, измеряющего интенсивность $J(\xi, \eta)$ отраженного света. Если $A(x, y)$ - яркость плоскости в точке $R(x, y, 0)$, то по закону Ламберта имеем

$$J(\xi, \eta) = C \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(x, y)}{r^2} \cos \alpha \, dx \, dy, \quad C = \text{const},$$

$$A(x, y) = \frac{f(x, y) \cos \beta}{\rho^2}, \quad (I)$$

$$J(\xi, \eta) = C \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha \cos \beta}{r^2 \rho^2} f(x, y) \, dx \, dy,$$

где

$$\cos \alpha = \frac{h}{r}, \quad \cos \beta = \frac{h}{\rho}, \quad (2)$$

$$\rho = \sqrt{(\xi - x)^2 + y^2 + h^2}, \quad r = \sqrt{x^2 + (\eta - y)^2 + h^2}. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1) для неизвестной функции $f(x, y)$, получим интегральное уравнение первого рода:

$$J(\xi, \eta) = Ch^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x, y) dx dy}{[(\xi - x)^2 + y^2 + h^2]^{3/2} [x^2 + (\eta - y)^2 + h^2]^{3/2}}. \quad (3)$$

Будем считать, что функция $f(x, y)$ финитная и размеры носителя $f(x, y)$ малы по сравнению с высотой h . Тогда, вместо уравнения (3), будем рассматривать уравнение

$$J(\xi, \eta) = Ch^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x, y) dx dy}{[(\xi - x)^2 + h^2]^{3/2} [(\eta - y)^2 + h^2]^{3/2}}. \quad (4)$$

Справедлива следующая формула [1]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega_1 \xi} d\xi}{[(\xi - x)^2 + h^2]^{3/2}} = e^{-i\omega_1 x} \frac{2\omega_1}{h} K_1(h\omega_1), \quad (5)$$

где $K_1(h\omega_1)$ - цилиндрическая функция Макдональда.

Применим преобразование Фурье по переменным ξ и η к левой и правой частям уравнения (4), в результате, согласно (5), получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega_1 x + \omega_2 y)} f(x, y) dx dy = \frac{J_1(\omega_1, \omega_2)}{4C\omega_1 \omega_2 K_1(h\omega_1) K_1(h\omega_2)} \rightarrow J_2(\omega_1, \omega_2), \quad (6)$$

$$J_1(\omega_1, \omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} J(\xi, \eta) e^{-i(\omega_1 \xi + \omega_2 \eta)} d\xi d\eta.$$

Отметим, что ограниченная функция $4C\omega_1 \omega_2 K_1(h\omega_1) K_1(h\omega_2)$ отлична от нуля и при больших ω_1, ω_2 имеет следующее асимптотическое представление:

$$4C \omega_1 \omega_2 K_1(h\omega_1) K_1(h\omega_2) \approx 2\pi C_0 \sqrt{\omega_1 \omega_2} \frac{1}{h} e^{-h(\omega_1 + \omega_2)}.$$

Если существует обратное преобразование Фурье от функции $J_2(\omega_1, \omega_2)$, то, применяя его к левой и правой частям (6), найдем неизвестную функцию $f(x, y)$.

Л и т е р а т у р а

1. ДИТКИН В.А., ПРУДНИКОВ А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. СМБ, 1961, с.167.

В.В.Гейдт

К ЗАДАЧЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ИНДИКАТРИССЫ ИЗЛУЧЕНИЯ И РЕЛЬЕФА ПО ЕГО ФОТОИЗОБРАЖЕНИЯМ

Задача создания полностью автоматизированного метода восстановления рельефа по его фотоизображениям была решена в работах [1-3] в двух случаях - рельеф излучает рассеянный свет либо по закону Ламберта, либо по закону Буге. Однако зачастую в реальной ситуации рельеф излучает по более сложному закону - индикатрисса излучения является довольно-таки сложной функцией угла, а чаще всего она неизвестна вообще. Поэтому для создания достаточно эффективного в практической ситуации метода автоматизированного восстановления индикатриссы излучения и рельефа необходимо распространить методы, предложенные в работах [1-3] как на случай произвольной зависимости индикатриссы от угла излучения, так и на случай неизвестной индикатриссы, что и проделано в настоящей работе.

Рассмотрим в пространстве достаточно гладкую поверхность, излучающую рассеянный свет. Функция яркости поверхности имеет следующий вид:

$$A(x, y) \cdot Y(\theta; x, y),$$

где функция $Y(\theta; x, y)$ угла между нормалью к поверхности

и направлением излучения называется индикатриссой излучения. Будем считать ее известной, т.е. заданной либо аналитически, либо таблично.

Функцию $A(x, y)$, задающую зависимость функции яркости от точки на поверхности, будем считать, как и саму поверхность, неизвестной.

Если поверхность сфотографировать, то функция интенсивности облучения фотопластины задается следующим поверхностным интегралом:

$$J(q, w) = \iint A(p)Y(\theta; p)\cos\theta \cdot D(p, q, w)dS, \quad (I)$$

- где $p = (x, y, z)$ - точка на поверхности;
 $q = (q_1, q_2, q_3)$ - координаты объектива;
 θ - угол между нормалью к поверхности и прямой, проходящей через точку p и объектив;
 $w = (w_1, w_2)$ - координаты на фотопластинке, отсчитываемые от центра пластинки параллельно x - и y - осям окружающего пространства;
 $D(p, q, w)$ - функция фильтрации объектива.

Интегрирование ведется по видимой части поверхности. Объектив называется δ -образным, если в точку w фотопластины свет приходит только из точки пересечения поверхности прямой, проходящей через точку w , и объектив. Для δ -образного объектива функция фильтрации имеет следующий вид:

$$D(p, q, w) = \frac{c}{r^2} \delta\left(w_1 - \varphi \frac{q_1 - x}{q_3 - z}\right) \delta\left(w_2 - \varphi \frac{q_2 - y}{q_3 - z}\right),$$

- где r - расстояние от точки p на поверхности до объектива;
 φ - фокусное расстояние объектива;
 c - коэффициент светорассеяния объектива.

Для δ -образной функции фильтрации и индикатриссы $Y(\theta) = \cos\theta$ интеграл (I) был взят в работе [3]. Используя

ту же методику, легко получить следующее выражение для функции интенсивности облучения фотопластинки:

$$J(q, w) = c \cdot A(x, y) \cdot Y(\theta) \cdot \Phi \cdot (\Phi^2 + w_1^2 + w_2^2)^{3/2}, \quad (2)$$

где точка на фотопластинке (w_1, w_2) и точка (x, y, z) на поверхности связаны следующими соотношениями:

$$w_1 = \Phi \frac{q_1 - x}{q_3 - z}; \quad w_2 = \Phi \frac{q_2 - y}{q_3 - z}.$$

Угол θ изменяется в пределах от 0 до $\pi/2$, поэтому индикатриссу излучения можно считать функцией косинуса угла θ , т.е.

$$Y(\theta) = \Phi(\cos \theta) \equiv \Phi(\vec{n} \cdot \vec{l}),$$

где \vec{n} - единичный вектор нормали к поверхности, а \vec{l} - единичный вектор направления, проходящего через точку поверхности и объектив. Компоненты вектора \vec{l} имеют простое выражение через координаты точки на поверхности и координаты объектива

$$\vec{l} = \frac{\vec{q} - \vec{p}}{r}.$$

Уравнение (2) перепишется тогда в следующем виде:

$$\begin{aligned} A(x, y) \Phi(n_x l_x + n_y l_y + n_z l_z) &= \frac{1}{c} J(q, w) \Phi^{-1} (\Phi^2 + w_1^2 + w_2^2)^{-3/2} = \\ &= K(q, w). \end{aligned} \quad (3)$$

Если поверхность сфотографировать из трех разных точек пространства с координатами объективов $\vec{q}^{(1)}$, $\vec{q}^{(2)}$, $\vec{q}^{(3)}$, то для трех фотопластинок будем иметь следующую систему уравнений:

$$A(x, y) \Phi(\vec{n} \cdot \vec{l}^{(i)}) = K(q^{(i)}, w^{(i)}), \quad (4)$$

$$w_1^{(i)} = \Phi^{(i)} \frac{q_1^{(i)} - x}{q_3^{(i)} - z}; \quad w_2^{(i)} = \Phi^{(i)} \frac{q_2^{(i)} - y}{q_3^{(i)} - z},$$

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1, \quad (4)$$

$$i = 1, 2, 3.$$

Индекс i нумерует величины, относящиеся к i -й фотографии.

Если $\Lambda(x, y) \neq 0$ (в отсутствие на поверхности абсолютно не излучающих точек всегда можно предположить), то, разделив второе и третье уравнения системы (4) на первое, получим следующую систему уравнений:

$$F_1(\vec{n}, \vec{p}) \equiv \Psi(\vec{n}, \vec{l}^{(2)}) \cdot \kappa(\vec{q}^{(1)}, \vec{w}^{(1)}) - \Psi(\vec{n}, \vec{l}^{(1)}) \cdot \kappa(\vec{q}^{(2)}, \vec{w}^{(2)}) = 0,$$

$$F_2(\vec{n}, \vec{p}) \equiv \Psi(\vec{n}, \vec{l}^{(3)}) \cdot \kappa(\vec{q}^{(1)}, \vec{w}^{(1)}) - \Psi(\vec{n}, \vec{l}^{(1)}) \cdot \kappa(\vec{q}^{(3)}, \vec{w}^{(3)}) = 0,$$

$$F_3(\vec{n}) \equiv n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 - 1 = 0, \quad (5)$$

$$w_1^{(i)} = \Phi^{(i)} \frac{q_1^{(i)} - x}{q_3^{(i)} - z}; \quad w_2^{(i)} = \Phi^{(i)} \frac{q_2^{(i)} - y}{q_3^{(i)} - z}.$$

Для якобиана системы (5)
$$I = \frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(n_x, n_y, n_z)}$$
 получаем следующее выражение:

$$I = 2 \frac{K^2 \vec{Q}^{(1)} \cdot \vec{W}^{(1)}}{\Psi(\vec{n}, \vec{i}^{(1)})} [\Psi(\vec{n}, \vec{i}^{(1)}) \cdot \Psi'(\vec{n}, \vec{i}^{(2)}) \cdot \Psi'(\vec{n}, \vec{i}^{(3)}) \cdot (\vec{n}, \vec{i}^{(2)}) \cdot \vec{i}^{(3)} + \Psi(\vec{n}, \vec{i}^{(3)}) \cdot \Psi'(\vec{n}, \vec{i}^{(2)}) \cdot \Psi'(\vec{n}, \vec{i}^{(1)}) \cdot (\vec{n}, \vec{i}^{(1)}) \cdot \vec{i}^{(2)} + \Psi(\vec{n}, \vec{i}^{(2)}) \cdot \Psi'(\vec{n}, \vec{i}^{(1)}) \cdot \Psi'(\vec{n}, \vec{i}^{(3)}) \cdot (\vec{n}, \vec{i}^{(3)}) \cdot \vec{i}^{(1)}], \quad (6)$$

где $(\vec{n}, \vec{i}^{(i)} \cdot \vec{i}^{(k)})$ есть смешанное произведение векторов, а Ψ' означает производную индикатриссы по ее аргументу.

Докажем следующую теорему.

Т е о р е м а . Если функция яркости излучения поверхности имеет непрерывные частные производные по всем своим аргументам в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, z_0) поверхности и якобиан (6) отличен от нуля в этой точке, то при известной индикатриссе излучения поверхность и функция $\Lambda(x, y)$ однозначно восстанавливаются в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, z_0) по трем δ -фотоизображениям поверхности при известной нормали к поверхности в точке (x_0, y_0, z_0) .

Д о к а з а т е л ь с т в о . Не будем ограничивать переменные (x, y, z) исходной поверхностью, а рассмотрим их как независимые и изменяющиеся в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, z_0) , видимой на всех трех фотографиях.

Тогда, в силу условий теоремы, согласно теореме о системе неявных функций, система уравнений (5) определяет в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, z_0) , видимой на всех трех фотографиях, непрерывное и имеющее непрерывные же частные производные по всем аргументам поле единичных векторов:

$$n_x = \varphi_1(x, y, z),$$

$$n_y = \varphi_2(x, y, z),$$

$$n_z = \varphi_3(x, y, z),$$

$$\varphi_1(x_0, y_0, z_0) = n_x^0, \quad (7)$$

$$\varphi_2(x_0, y_0, z_0) = n_y^0,$$

$$\varphi_3(x_0, y_0, z_0) = n_z^0.$$

Единичные векторы нормалей к исходной поверхности в окрестности точки (x_0, y_0, z_0) входят в множество единичных векторов (7) двухпараметрическим подмножеством в силу единственности решения системы уравнений (5).

Если в окрестности точки (x_0, y_0, z_0) поверхность представить в виде функции $z = z(x, y)$, то компоненты единичного вектора нормали к поверхности выражаются через частные производные $\partial z/\partial x$ и $\partial z/\partial y$ в следующем виде:

$$(n_x, n_y, n_z) = \left(\frac{-z_x}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}, \frac{-z_y}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} \right),$$

откуда следует

$$z_x = -\frac{n_x}{n_z}, \quad z_y = -\frac{n_y}{n_z}.$$

Заменяя n_x, n_y, n_z решениями системы уравнений (5), которые представлены системой (7), получим систему квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\varphi_1(x, y, z)}{\varphi_3(x, y, z)}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\varphi_2(x, y, z)}{\varphi_3(x, y, z)}.$$

Решение системы (8) при условии $z(x_0, y_0) = z_0$ определяет поверхность в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, z_0) .

По известной функции поверхности $z(x, y)$ функция $A(x, y)$ определяется по любой из формул

$$A(x, y) = \frac{\mathbb{K}(\vec{q}^{(i)}, \vec{w}^{(i)})}{\Psi(\vec{n}, \vec{l}^{(i)})},$$

$$w_1^{(i)} = \Phi^{(i)} \frac{q_1^{(i)} - x}{q_3^{(i)} - z}; \quad w_2^{(i)} = \Phi^{(i)} \frac{q_2^{(i)} - x}{q_3^{(i)} - z},$$

где i - любое из чисел 1, 2, 3. Теорема доказана.

Якобиан (6) заведомо равен нулю в следующих случаях:

1) индикатрисса не зависит от угла излучения (или имеет экстремум) в окрестностях любой из пар направлений $(\vec{l}^{(1)}, \vec{l}^{(2)})$; $(\vec{l}^{(1)}, \vec{l}^{(3)})$; $(\vec{l}^{(2)}, \vec{l}^{(3)})$;

2) векторы $\vec{n}, \vec{l}^{(1)}, \vec{l}^{(2)}, \vec{l}^{(3)}$ лежат в одной плоскости - в этом случае равны нулю все тройные произведения.

Отметим, что если бы мы могли гарантировать единственность решения системы (5) в точке (x_0, y_0, z_0) , то значение нормали в точке (x_0, y_0, z_0) было бы излишним.

2.

При неизвестной индикатриссе излучения разделение функции яркости излучения рельефа на индикатриссу и функцию $A(x, y)$ очевидно теряет свой смысл, поэтому далее все рассуждения

проводятся относительно самой функции яркости, которую обозначим как $\chi(x, y, z, \cos \theta)$. Формула (4) переписывается в следующем виде:

$$\chi(x, y, z, \vec{n} \cdot \vec{l}^{(i)}) = K(\vec{q}^{(i)}, \vec{w}^{(i)}),$$

$$w_1^{(i)} = \Phi^{(i)} \frac{q_1^{(i)} - x}{q_3^{(i)} - z}; \quad w_2^{(i)} = \Phi^{(i)} \frac{q_2^{(i)} - y}{q_3^{(i)} - z}, \quad (9)$$

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1,$$

где индекс (i) нумерует величины, относящиеся к i -й фотографии.

На основании формулы (9) могут быть решены следующие задачи:

1) имеется набор δ - фотоизображений известного рельефа $z = z(x, y)$. Требуется приблизительно определить функцию яркости излучения как функцию координат и угла, отсчитываемого от нормали к поверхности рельефа;

2) имеется набор δ - фотоизображений некоего рельефа. Требуется приблизительно определить рельеф и функцию яркости излучения в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, z_0) , принадлежащей рельефу. Нормаль к поверхности рельефа в точке (x_0, y_0, z_0) считается известной.

Рассмотрим первую задачу. Поскольку рельеф предполагается известным, то нормаль к поверхности рельефа, которая предполагается достаточно гладкой, можно считать известной векторной функцией координат $\vec{n}(x, y)$. При заданных положениях объективов $\vec{q}^{(i)}$ единичные векторы $\vec{l}^{(i)}$ также являются известными векторными функциями координат $\vec{l}^{(i)}(x, y)$.

Если мы имеем k - фотоизображений участка рельефа, видимого на всех k - фотографиях, то в каждой точке (x, y, z) рассматриваемого участка рельефа система (9) задает искомую функцию в k различных точках $t^{(i)} = \vec{n}(x, y) \cdot \vec{l}^{(i)}(x, y)$.

Тем самым задача определения функции яркости в точке (x, y) во всем интервале угловой переменной сводится к задаче аппрок-

симации функции по ее значениям, заданным в k узлах.

Во второй задаче, в отличие от первой, непосредственное проведение программы аппроксимации функции по ее значениям, заданным в k узлах, не проходит, так как при неизвестном рельефе неизвестен и вектор нормали к поверхности рельефа, т. е. неизвестны узлы, в которых заданы значения функции.

Для преодоления этого затруднения может быть предложен следующий вариант метода наименьших квадратов аппроксимации функции по некоторому набору ее значений с одновременным нахождением узлов, в которых заданы значения функции.

Компоненты вектора \vec{n} будем считать произвольными параметрами, заданными точками единичной сферы, и будем искать аппроксимационный полином, зависящий от компонент вектора \vec{n} , как от параметров.

Имея k фотоизображений рельефа естественно аппроксимировать функцию яркости излучения функцией, принадлежащей множеству R всевозможных функций, заданных на отрезке $[0, 1]$ и ограниченных в норме

$$\|f\| = \sqrt{\sum_{i=1}^k f^2(x_i)},$$

где x_i — узлы, в которых заданы значения функции яркости излучения. Всевозможные линейные комбинации линейно-независимых на $[0, 1]$ функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$ образуют m -мерное подмножество. В этом подмножестве имеется элемент наилучшего приближения для $f \in R$ в смысле введенной метрики. Этот элемент единственен [4]. Построим этот элемент для функции яркости излучения.

Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ — какая-то система линейно независимых функций на $[0, 1]$, непрерывных со своими производными до второго порядка, и $m \leq k$. Такую систему образуют, например, смещенные многочлены Чебышева. Многочлен наилучшего приближения для функции яркости излучения на подмножестве функций, натянутом на функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$, зависящий от точки поверхности рельефа и компонент единичного вектора нормали \vec{n} к поверхности рельефа как от параметров будет иметь следующий вид:

$$\bar{\chi}(x, y, z, \vec{h}, \vec{l}) = \sum_{j=1}^m a_j(x, y, z, \vec{h}) \varphi_j(\vec{h}, \vec{l}).$$

Коэффициенты $a_j(x, y, z, \vec{h})$ определяются из условия минимума среднеквадратичного отклонения

$$\varepsilon^2(x, y, z, \vec{h}) = \sum_{i=1}^k [k(\vec{q}^{(i)}, \vec{p}) - \bar{\chi}(\vec{p}, \vec{h}, \vec{l}^{(i)})]^2$$

в каждой точке области пространства, видимой на всех фотографиях, и для каждого набора значений компонент вектора \vec{h} из следующей системы уравнений:

$$\sum_{j=1}^m a_j b_{j\nu} - c_\nu = 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots, m),$$

где

$$c_\nu = \sum_{i=1}^k k(\vec{q}^{(i)}, \vec{p}) \cdot \varphi_\nu(\vec{h}, \vec{l}^{(i)}),$$

$$b_{j\nu} = \sum_{i=1}^k \varphi_j(\vec{h}, \vec{l}^{(i)}) \cdot \varphi_\nu(\vec{h}, \vec{l}^{(i)}).$$

Определитель этой системы как определитель Грамма системы линейно-независимых функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ положителен, и коэффициенты $a_j(\vec{p}, \vec{h})$ найдутся единственным образом. Введем обозначение $E(x, y, z; \vec{h}) = \inf \varepsilon^2(x, y, z; \vec{h})$.

Далее определим поле единичных векторов в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, z_0) , принадлежащей искомому рельефу, из условия минимума функции $E(x, y, z; \vec{h})$ как функции компонент единичного вектора \vec{h} . Поскольку в каждой точке области пространства, видимой на всех фотографиях, функция E является непрерывной функцией, определенной на единичной сфере, то этот минимум всегда существует.

Уравнения, определяющие условный экстремум функции E , имеют следующий вид:

$$\frac{\partial E}{\partial n_x} + 2\lambda n_x = 0,$$

$$\frac{\partial E}{\partial n_y} + 2\lambda n_y = 0,$$

$$\frac{\partial E}{\partial n_z} + 2\lambda n_z = 0,$$

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 - 1 = 0,$$

где λ - множитель Лагранжа, или в развернутом виде

$$F_v \equiv \sum_{i=1}^k (K(q^{(i)}, \vec{p}) - \sum_{j=1}^m a_j \varphi_j(\vec{n}, \vec{l}^{(i)})) \cdot \left(\sum_{\sigma=1}^m \frac{\partial a_{\sigma} \varphi_{\sigma}(\vec{n}, \vec{l}^{(i)})}{\partial n_v} \right) + a_{\sigma} \varphi'_{\sigma} l_v^{(i)} + 2\lambda n_v = 0, \quad (10)$$

$$(v = 1, 2, 3),$$

$$F_4 \equiv n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 - 1 = 0.$$

Поскольку функции $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные второго порядка, то при неравном нулю якобиане

$$I = \frac{D(F_1, F_2, F_3, F_4)}{D(n_x, n_y, n_z, \lambda)},$$

согласно теореме о неявных функциях система уравнений (10) определяет в некоторой окрестности произвольной точки (x_0, y_0, z_0) , видимой на всех фотографиях, непрерывное и имеющее непрерывные же частные производные по всем аргументам поле еди-

$$n_x = \chi_1(x, y, z); n_y = \chi_2(x, y, z); n_z = \chi_3(x, y, z),$$

удовлетворяющее условию

$$\chi_i(x_0, y_0, z_0) = n_i^0.$$

Далее, так же как и в первой части, по известному полю единичных нормалей (II) мы можем восстановить рельеф в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, z_0) :

$$z = z(x, y). \quad (12)$$

Отметим, что если бы мы могли гарантировать единственность решения системы (10) в точке (x_0, y_0, z_0) , то знающие нормали в точке (x_0, y_0, z_0) было бы излишним.

Для определения функции яркости поверхности в окрестности точки (x_0, y_0, z_0) достаточно в коэффициентах

$a_j(x, y, z, \vec{n})$ разложения

$$\bar{\chi} = \sum_{j=1}^m a_j(x, y, z, \vec{n}) \cdot \varphi_j(\vec{n} \cdot \vec{1})$$

заменить z и \vec{n} их выражениями (II) и (12).

В соответствии со свойствами полиномов наилучшего приближения, увеличивая количество фотографий, мы можем добиться любой наперед заданной точности в смысле среднеквадратичного отклонения в определении функции яркости излучения, а тем самым точности в определении рельефа.

Автор благодарен Адамчику Ю.А., Алексееву А.С., Кирейтову В.Р., Лаврентьеву М.М., Марчуку А.Г., Цецохо В.А. за полезные обсуждения настоящей работы.

Л и т е р а т у р а

1. ЛАВРЕНТЬЕВ М.М., КИРЕЙТОВ В.Р. Об одном классе отображений биповерхностей трехмерного пространства.-ДАН СССР, 1974, т. 216, № 2, с. 259-260.
2. ЛАВРЕНТЬЕВ М.М., КИРЕЙТОВ В.Р. О точках ветвления оптических гиперповерхностей.-ДАН СССР, 1975, т.221, № 5, с. 1027-1030.
3. КИРЕЙТОВ В.Р. Об одном классе отображений биповерхностей трехмерного пространства.-В сб.: Математические проблемы геофизики, 1974, вып.5, ч.1, Новосибирск, с. 38-44.
4. БЕРЕЗИН П.С., ЖИДКОВ Н.П. Методы вычислений, М., Физматгиз, 1959.

В.К.Гусяков

РАСЧЕТ ЭНЕРГИИ ВОЛН ЦУНАМИ

Настоящая статья является непосредственным продолжением работ [1,2], опубликованных в выпусках сборника "Математические проблемы геофизики" и посвященных исследованию сейсмических условий возбуждения цунами. В [1] дана точная математическая постановка задачи о возбуждении сейсмических и гравитационных волн в слое жидкости, лежащем на упругом полупространстве, и описан способ построения решения. В [2] изложен метод расчета теоретических мареограмм цунами, а также сейсмограмм поверхностных сейсмических волн, изучена их зависимость от параметров среды и источника, моделирующего очаг землетрясения.

Полученные теоретические мареограммы волн цунами дают возможность вычислить энергию, заключенную в них, и сделать оценку отношения этой энергии к полной сейсмической энергии, излучаемой источником. Последняя возможность непосредственно вытекает из принятого в настоящей работе подхода к изучению процесса возбуждения волн цунами, а именно - решения этой задачи в рамках динамической теории упругости с учетом силы тяжести, что дает возможность рассмотреть в одной системе уравнений как гравитационные так и сейсмические волны.

При расчетах энергии цунами в качестве моделей очагов будут использоваться точечные источники. Расчет мареограмм цуна-

ми от пространственных источников требует больших затрат машинного времени; на порядок и более превышающих затраты в случае точечных моделей. Кроме того, пространственные источники с движущимся разрывом создают эффект направленности излучения, заключающийся в том, что в сторону движения разрыва волны излучаются более интенсивно, чем в противоположном направлении. В этом случае нельзя интегрирование по контуру, необходимое для расчета энергии, выполнить в явной форме, требуется применение численных методов, что в свою очередь приводит к многократному возрастанию общего времени счета. Расчет полной сейсмической энергии, излучаемой такими источниками, также требует разработки специальной методики.

1. Расчет полной сейсмической энергии, излучаемой точечными источниками.

Возбуждение различных типов волн в рассматриваемой модели среды, состоящей из слоя сжимаемой жидкости глубиной h , лежащем на упругом полупространстве и находящемся в поле силы тяжести, производится действием сосредоточенного источника, помещенного внутри упругого полупространства на глубине h под дном (рис. 1). Энергия, излученная таким источником, передается в виде объемных волн, продольных и поперечных, которые, распространяясь со скоростями V_p и V_s и доходя до границ раздела, возбуждают другие типы волн, присущие данной модели, передавая им часть своей энергии. Однако для моментов времени $t < \frac{h}{V_p}$ поле смещений, возбуждаемое источником в нашей модели эквивалентно полю смещений, создаваемому источником того же типа, помещенным в однородную безграничную среду. Для этого случая имеются явные формулы, описывающие главные части смещения (т.е. смещения в окрестностях фронтов) в продольных и поперечных волнах (см., например, [3,4]). На основании этих формул с помощью вектора Ломова-Пойнтинга можно вычислить плотность потока сейсмической энергии в этих волнах:

$$\bar{P} = \bar{a}\rho\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2, \quad (I.1)$$

где \bar{a} - скорость распространения волны, ρ - плотность среды,

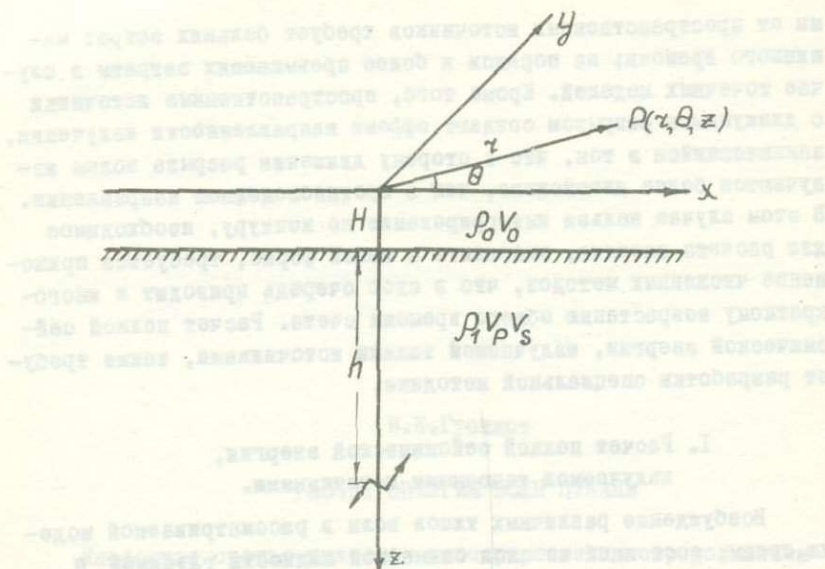


Рис. I. Модель среды.

U - смещение, \bar{P} - энергия, протекающая в единицу времени через единичную площадку в направлении распространения волны. Производя интегрирование по времени от момента прихода волны до момента окончания колебаний в данной точке и затем интегрируя этот поток по сфере, охватывающей источник, получим полную сейсмическую энергию, переданную источником в среду.

При этом сразу же обнаруживается, что если брать зависимость воздействия в источнике от времени в виде единичной ступенчатой функции ($f(t) = \sigma(t)$), то интеграл от квадрата второй производной этой функции по времени не существует в классическом смысле, следовательно, энергия источника оказывается бесконечной. Физический смысл этого результата понятен: для того, чтобы осуществить мгновенное конечное смещение источник должен обладать бесконечной энергией. Обойти это затруднение можно, взяв функцию $f(t)$ в виде сглаженной ступеньки, например, $f(t) = 1 - e^{-t/\tau_0}$ при $t \geq 0$. Влияние такого сглаживания временной функции источника на расчетные мареграммы волн цунами и, следовательно, на их энергию, невелико и находится, как указывалось в [2] в пределах 1% при изменении параметра

τ_0 в интервале I-5сек.

Очевидно, что в однородной безграничной среде полная энергия, излучаемая источником, не зависит от его ориентации в пространстве, а определяется лишь типом источника и параметрами упругого пространства. Поэтому нам достаточно будет рассмотреть лишь три основных типа источника - центр давления, двойная сила без момента и диполь с моментом, к которым в конечном счете сводятся источники, использовавшиеся при расчете мареограмм цунами.

Поскольку возбуждаемые точечным источником в однородном пространстве продольные и поперечные волны характеризуются заметно выраженными сферическими фронтами, при расчете энергии удобно пользоваться наряду с декартовой системой координат x, y, z сферической R, θ, φ с ортами $\bar{R}_1, \bar{\theta}_1, \bar{\varphi}_1$.

Ц е н т р д а в л е н и я . Такой источник возбуждает только продольные волны, смещения в окрестностях фронтов которых согласно [3] представляются формулой:

$$\bar{U}_P^{цд} = \frac{1}{4\pi\rho_1 V_P^3 R} f'(t - \tau_P) \bar{R}_1, \quad (I.2)$$

где $\tau_P = \frac{R}{V_P}$. Принимая зависимость воздействия в источнике от времени в виде $f(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau_0}}$, получим:

$$\bar{U}_P^{цд} = \frac{1}{4\pi\rho_1 V_P^3 R \tau_0} e^{-\frac{t-\tau_P}{\tau_0}} \bar{R}_1. \quad (I.3)$$

Плотность потока энергии такой волны, согласно (I.I), равна:

$$\bar{F}^{цд} = \rho_1 V_P \left(\frac{\partial U_P^{цд}}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{16\pi^2 \rho_1 V_P^5 R^2 \tau_0^4} e^{-2\frac{t-\tau_P}{\tau_0}} \cdot \bar{R}_1.$$

Интегрируя ее по времени от момента прихода волны $\tau_P = \frac{R}{V_P}$ до бесконечности, получим энергию, прошедшую через единичную

площадку:

$$e_{\text{цд}} = \int_{\tau_p}^{\infty} P_{\text{цд}} dt = \frac{1}{16\pi^2 \rho_1 v_p^5 R^2 \tau_0^4} \int_{\tau_p}^{\infty} e^{-2\frac{t-\tau_p}{\tau_0}} dt = \frac{1}{32\pi^2 \rho_1 v_p^5 R^2 \tau_0^3}.$$

Проведя интегрирование по сфере радиуса R , которое в данном случае сводится просто к умножению на ее площадь $4\pi R^2$, поскольку поле сферически симметрично, получим полную энергию, излучаемую в среду источником типа центра давления:

$$E_{\text{цд}} = \frac{1}{8\pi \rho_1 v_p^5 \tau_0^3}. \quad (1.4)$$

Как и следовало ожидать, полная энергия не зависит от радиуса используемой референт-сферы.

Двойная сила без момента. Согласно [3] формулы для смещений в окрестности фронтов продольных и поперечных волн от такого источника имеют вид:

$$\bar{u}_p^{\text{цд}} = \frac{\cos^2 \theta}{4\pi \rho_1 v_p^3 R} f'(t - \tau_p) \bar{R}_1, \quad \tau_p = \frac{R}{v_p}, \quad (1.5)$$

$$\bar{u}_s^{\text{цд}} = -\frac{\sin 2\theta}{8\pi \rho_1 v_s^3 R} f'(t - \tau_s) \bar{\theta}_1, \quad \tau_s = \frac{R}{v_s}. \quad (1.6)$$

В этом случае при вычислении потока энергии необходимо учитывать вклад как продольных, так и поперечных волн.

Плотность потока энергии, согласно (1.1), равна:

$$\bar{F}_p^{\text{цд}} = \rho_1 \bar{v}_p \left(\frac{\partial u_p^{\text{цд}}}{\partial t} \right)^2 = \frac{\cos^4 \theta}{16\pi^2 \rho_1 v_p^5 R^2 \tau_0^4} e^{-2\frac{t-\tau_p}{\tau_0}} \bar{R}_1^2,$$

$$\bar{P}_S^{\partial c} = \rho_1 \bar{V}_S \left(\frac{\partial U_S^{\partial c}}{\partial t} \right)^2 = \frac{\sin^2 2\theta}{64\pi^2 \rho_1 V_S^5 R^2 \tau_0^4} e^{-2\frac{t-\tau_S}{\tau_0}} \bar{\theta}_1.$$

Количество энергии, перенесенной через единичную площадку:

$$e_P^{\partial c} = \frac{\cos^4 \theta}{16\pi^2 \rho_1 V_P^5 R^2 \tau_0^4} \int_{\tau_P}^{\infty} e^{-2\frac{t-\tau_P}{\tau_0}} dt = \frac{\cos^4 \theta}{32\pi^2 \rho_1 V_P^5 R^2 \tau_0^3},$$

$$e_S^{\partial c} = \frac{\sin^2 2\theta}{64\pi^2 \rho_1 V_S^5 R^2 \tau_0^4} \int_{\tau_S}^{\infty} e^{-2\frac{t-\tau_S}{\tau_0}} dt = \frac{\sin^2 2\theta}{128\pi^2 \rho_1 V_S^5 R^2 \tau_0^3}.$$

Чтобы получить общую энергию, перешедшую в волны каждого типа, нужно выполнить интегрирование по сфере:

$$E_P^{\partial c} = \iint_S e_P^{\partial c} dS, \quad E_S^{\partial c} = \iint_S e_S^{\partial c} dS.$$

Записывая интеграл по S в сферических координатах, и вынося из-под него постоянные множители, получим:

$$E_P^{\partial c} = \frac{1}{32\pi^2 \rho_1 V_P^5 \tau_0^3} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\cos^4 \theta}{R^2} R^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{1}{40\pi \rho_1 V_P^5 \tau_0^3}, \quad (I.7)$$

$$E_S^{\partial c} = \frac{1}{128\pi^2 \rho_1 V_S^5 \tau_0^3} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 2\theta}{R^2} R^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{1}{60\pi \rho_1 V_S^5 \tau_0^3}. \quad (I.8)$$

Полная сейсмическая энергия, излучаемая источником этого типа, равна:

$$E^{\partial c} = E_P^{\partial c} + E_S^{\partial c} = \frac{1}{40\pi \rho_1 V_P^5 \tau_0^3} \left[1 + \frac{2}{3} \frac{V_P^5}{V_S^5} \right]. \quad (I.9)$$

Диполь с моментом. Смещения в продольных и поперечных волнах, возбуждаемых таким источником, согласно [3], представляются формулами:

$$\bar{U}_P^{\partial M} = - \frac{\sin^2 \theta \sin 2\varphi}{8\pi\rho_1 V_P^3 R} f'(t - \tau_P) \bar{R}_1, \quad (I.10)$$

$$\bar{U}_{SV}^{\partial M} = - \frac{\sin 2\theta \sin 2\varphi}{16\pi\rho_1 V_S^3 R} f'(t - \tau_S) \bar{\theta}_1, \quad (I.11)$$

$$\bar{U}_{SH}^{\partial M} = \frac{\sin \theta \sin^2 \varphi}{4\pi\rho_1 V_S^3 R} f'(t - \tau_S) \bar{\varphi}_1. \quad (I.12)$$

В поперечной волне в данном случае присутствует как sv , так и sh компонента. Легко показать, что для энергии при этом выполняется правило аддитивности, т.е.

$$E(\bar{U}_{SV} + \bar{U}_{SH}) = E(\bar{U}_{SV}) + E(\bar{U}_{SH}).$$

Действуя аналогично разобранным выше случаям источника в виде двойной силы без момента, для вкладов отдельных волн в полную энергию получаем:

$$E_P^{\partial M} = \frac{1}{120\pi\rho_1 V_P^5 \tau_0^3}, \quad (I.13)$$

$$E_{SV}^{\partial M} = \frac{1}{480\pi\rho_1 V_S^5 \tau_0^3}, \quad (I.14)$$

$$E_{\text{вн}}^{\text{дм}} = \frac{1}{32\pi\rho_1 V_B^5 \tau_0^3} \quad (I.15)$$

Для полной энергии, излучаемой источником типа диполя с моментом, имеем:

$$E^{\text{дм}} = E_P^{\text{дм}} + E_{\text{sv}}^{\text{дм}} + E_{\text{вн}}^{\text{дм}} = \frac{1}{120\pi\rho_1 V_P^5 \tau_0^3} \left[1 + 4 \frac{V_P^5}{V_B^5} \right] \quad (I.16)$$

Численные значения полной сейсмической энергии, излучаемой модельными источниками, получались при следующих значениях физических параметров:

$$\begin{aligned} V_P &= 6 \cdot 10^3 \text{ м/сек,} \\ V_B &= 3,46 \cdot 10^3 \text{ м/сек,} \\ \rho_1 &= 3 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \\ \tau_0 &= 1 \text{ сек.} \end{aligned}$$

Излучаемая энергия для трех рассмотренных типов источника при этом равна:

$$\begin{aligned} E_{\text{ц0}}^{\text{дм}} &= 0,1706 \cdot 10^{-23} \text{ дж,} \\ E_{\text{дс}}^{\text{дм}} &= 0,3886 \cdot 10^{-23} \text{ дж,} \\ E_{\text{дм}}^{\text{дм}} &= 0,7204 \cdot 10^{-23} \text{ дж.} \end{aligned}$$

Малая величина полученной энергии связана с тем, что эти источники получены на основе решения для е д и н и ч н ы х сил, т.е., например, силы, величиной 1 ньютон (в системе СИ) или диполя с моментом 1 ньютон * метр. Создаваемые такими источниками смещения имеют столь же малые порядки. Например, для диполя с моментом максимальное смещение в продольной волне на расстоянии 100км согласно (I.10) равно:

$$U_P^{\text{дм}} = 0,67 \cdot 10^{-21} \text{ м.}$$

Введением постоянного множителя (величиной порядка 10^{20}), соответствующего увеличению мощности источника, можно довести значение смещения в объемных волнах до реально наблюдаемых при землетрясениях различной магнитуды величин, сопоставив та-

ким образом реальному очагу диполь с определенным моментом. Энергия такого источника также будет близка к оценкам, получаемым для реальных землетрясений. Однако на соотношение между энергиями различных типов волн от одного и того же источника это не повлияет, поэтому во введении такого множителя в формулы типа (I.10)-(I.12) в данной работе нет необходимости.

2. Методика расчета энергии волн цунами.

Для расчета энергии волн цунами использовалась формула, приведенная в работе [5],

$$E_{\text{ц}} = - \rho_0 g H \int_L \int_0^{\infty} U_z(t) \bar{V}_r(t) dt dl, \quad (2.1)$$

где ρ_0 - плотность жидкости, g - ускорение силы тяжести, H - глубина океана, $U_z(t)$ - зависимость вертикальной компоненты смещения поверхности океана от времени, $\bar{V}_r(t)$ - средняя по глубине горизонтальная компонента скорости смещения частиц в волне, L - замкнутый контур интегрирования, охватывающий эпицентральную область.

Для вычисления энергии, следовательно, необходимо иметь рассчитанную мареограмму $U_z(t)$, а также зависимость $\bar{V}_r(t)$, которая может быть получена непосредственным дифференцированием по времени функции $\bar{U}_r(t)$. Как отмечалось в [1], зависимость горизонтальной компоненты смещения и, следовательно, скорости смещения от глубины точки наблюдения z в пределах $0 \leq z \leq H$ монотонна и практически линейна, поэтому за среднее значение $\bar{V}_r(t)$ можно принять с достаточной степенью точности ее значение при $z = \frac{H}{2}$, т.е. на половине глубины океана.

Проиллюстрируем применение формулы (2.1) к расчетам энергии волн цунами, взяв для определенности случай точечного источника в виде диполя с моментом, образованного из двух вертикальных противоположно направленных сил с плечом вдоль оси x . В цилиндрических координатах z, θ, r с началом на поверхности океана зависимость вертикальной и горизонтальной компонент смещения в волнах цунами, возбуждаемых таким источником, может быть представлена формулами [1]:

$$U_z^{BX}(r, \theta, z, t) = - \frac{\cos \theta}{2\pi \rho_1 V_S^4} \int_0^\infty \frac{k L_z(k, \eta, z) W^B(k, \eta, h)}{\frac{\partial \Delta}{\partial \eta} \cdot \eta^6} \cos(kV_S \eta t) J_1(kr) dk \quad (2.2)$$

$$U_r^{BX}(r, \theta, z, t) = - \frac{\cos \theta}{2\pi \rho_1 V_S^4} \int_0^\infty \frac{k L_r(k, \eta, z) W^B(k, \eta, h)}{\frac{\partial \Delta}{\partial \eta} \cdot \eta^6} \times \\ \times \cos(kV_S \eta t) \times [J_0(kr) - \frac{1}{kr} J_1(kr)] dk. \quad (2.3)$$

Здесь k - волновое число, η - некоторая, вообще говоря, комплексная переменная. Выражения для $L_z(k, \eta, z)$, $L_r(k, \eta, z)$, $W^B(k, \eta, h)$, $\frac{\partial \Delta}{\partial \eta}$, ввиду их сложности мы здесь не выписываем (см. [1]).

Дифференцируя (2.3) по времени t и положив $z = \frac{H}{2}$, получим среднюю горизонтальную скорость смещения частиц:

$$\bar{v}_r^{BX}(r, \theta, \frac{H}{2}, t) = - \frac{\cos \theta}{2\pi \rho_1 V_S^4} \int_0^\infty \frac{k L_r(k, \eta, \frac{H}{2}) W^B(k, \eta, h)}{\frac{\partial \Delta}{\partial \eta} \cdot \eta^6} \times \\ \times k V_S \eta \times \sin(kV_S \eta t) \times [J_0(kr) - \frac{1}{kr} J_1(kr)] dk. \quad (2.4)$$

Обозначив, для краткости, интегралы в формулах (2.2) и (2.4) за $u_z^{BX}(r, 0, t)$ и $\bar{v}_r^{BX}(r, \frac{H}{2}, t)$, соответственно, и подставляя в (2.1), получим:

$$B_{\psi}^{BX} = - \rho_0 g H \int_L \int_0^\infty \left[- \frac{\cos \theta}{2\pi \rho_1 V_S^4} \cdot u_z^{BX}(r, 0, t) \right] \left[- \frac{\cos \theta}{2\pi \rho_1 V_S^4} \cdot \bar{v}_r^{BX}(r, \frac{H}{2}, t) \right] dt dl = \\ = - \frac{\rho_0 g H}{4\pi^2 \rho_1^2 V_S^8} \int_L \int_0^\infty \cos^2 \theta \cdot u_z^{BX}(r, 0, t) \cdot \bar{v}_r^{BX}(r, \frac{H}{2}, t) dt dl.$$

Заменяя интеграл по контуру L на интеграл по азимуту θ (в цилиндрических координатах), получим:

$$E_{\text{ц}}^{\text{вх}} = - \frac{\rho_0 g H}{4\pi^2 \rho_1^2 V_s^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \cos^2 \theta \cdot u_z^{\text{вх}}(r, 0, t) \cdot \bar{v}_r^{\text{вх}}(r, \frac{H}{2}, t) \cdot r d\theta dt = \quad (2.5)$$

$$= - \frac{\rho_0 g H r}{4\pi \rho_1^2 V_s^3} \int_0^{\infty} u_z^{\text{вх}}(r, 0, t) \bar{v}_r^{\text{вх}}(r, \frac{H}{2}, t) dt.$$

Разделив $E_{\text{ц}}^{\text{вх}}$ на величину полной сейсмической энергии, излучаемой источником типа диполя с моментом (формула (1.16)), получим их отношение

$$\delta^{\text{вх}} = \frac{E_{\text{ц}}^{\text{вх}}}{E_{\text{дм}}}, \quad (2.6)$$

показывающее, какая часть полной сейсмической энергии этого источника идет на образование волн цунами.

Выражение (2.5) содержит в числителе эллиптическое расстояние r для которого рассчитываются зависимости $u_z^{\text{вх}}(r, 0, t)$ и $\bar{v}_r^{\text{вх}}(r, \frac{H}{2}, t)$. Последнее содержит r в аргументах бесселевых функций $J_0(kr)$ и $J_1(kr)$, следовательно, при $kr \gg 1$ зависят от расстояния как $\frac{1}{\sqrt{r}}$, а их произведение как $\frac{1}{r}$. Здесь мы также получаем независимость энергии от размеров контура, начиная с некоторого $r > r_0$ (для волн цунами $r_0 \sim 100\text{км}$).

Аналогичным образом формула (2.1) применяется для расчета доли энергии цунами от других точечных дипольных источников в результате чего получаются отношения:

$$\delta^{\text{вз}} = \frac{E^{\text{вз}}}{E^{\text{дс}}}; \quad \delta^{\text{гх}} = \frac{E^{\text{гх}}}{E^{\text{дс}}}; \quad \delta^{\text{гу}} = \frac{E^{\text{гу}}}{E^{\text{дм}}}; \quad \delta^{\text{гз}} = \frac{E^{\text{гз}}}{E^{\text{дм}}}; \quad \delta^{\text{цд}} = \frac{E^{\text{цд}}}{E^{\text{цд}}}. \quad (2.7)$$

В формулах (2.7) первый верхний индекс у выражений δ и $E_{\text{ц}}$ указывает на ориентацию единичных сил, из которых образуется дипольный источник (в - вертикальная, г - горизонтальная), второй верхний индекс указывает ориентацию плеча диполя в декартовой системе координат. Индекс цд означает источник типа

центра давления.

Зависимости $u_z(r, 0, t)$ и $v_r(r, \frac{H}{2}, t)$ рассчитывались путем вычисления интегралов вида (2.2), (2.4) по квадратурной формуле Гаусса с шестью узлами в некотором временном интервале от t_1 до t_2 , охватывающем промежуток времени от прихода волны цунами в данную точку до момента практического затухания колебаний. Вычисление интеграла (2.5) производилось с помощью квадратурной формулы Симпсона. Плотность жидкости ρ_0 считалась равной 1000 кг/м^3 , ускорение силы тяжести $g = 9.8 \text{ м/сек}^2$, остальные параметры те же, что при расчетах полной сейсмической энергии источников.

3. Анализ зависимости доли энергии цунами от параметров источника и среды.

Результаты расчетов доли энергии цунами по отношению к полной сейсмической энергии, излучаемой источником, приведены на рис. 2-6. Для равномерного освещения значительного интервала изменения величины $\delta = \frac{E_{ц}}{E_{ист}}$ эти отношения отложены по вертикальной оси в логарифмическом масштабе.

Рис. 2 иллюстрирует зависимость доли энергии цунами от глубины очага, рассчитанную при глубине океана $H = 5 \text{ км}$. Прежде всего следует отметить значительный диапазон изменения величин δ ; при изменении глубины источника от 0 до 60 км доля энергии цунами уменьшается для всех типов источников в 100-1000 раз. Все источники, за исключением вертикального диполя с моментом, цунами с наибольшей энергией возбуждают при расположении их непосредственно под дном океана. Максимально возможную долю энергии цунами дают при этом источники типа центра давления и горизонтального диполя с моментом. При источнике типа вертикального диполя с моментом, возбуждающем волны цунами наибольшей амплитуды (в определенных направлениях) максимальная доля энергии цунами составляет около 10% при глубине $h = 4-5 \text{ км}$. Начиная с $h > 15 \text{ км}$, наибольшую энергию волны цунами имеют при источнике типа вертикального диполя без момента, хотя по амплитуде они меньше, чем, например, волны в случае вертикального диполя с моментом. Но поскольку такой источник (v_z) излучает волны равномерно во всех направлениях, их сум-

марная энергия оказывается наибольшей.

На рис. 3 приведен набор зависимостей $\delta(h)$ для диполя с моментом, моделирующего подвижку по вертикальной плоскости разлома при различных направлениях подвижки по отношению к вертикали, так что $\gamma = 0^\circ$ соответствует чистому взбросу, $\gamma = 90^\circ$ - чистому сдвигу. Видно, что взбросовая подвижка при всех глубинах источника дает волны цунами с наибольшей энергией.

Рис. 4 изображает те же зависимости $\delta(h)$ для произвольно ориентированного диполя с моментом, моделирующего подвижку вкрест простирания разлома с углом падения α , отсчитываемом от вертикали, так что $\alpha = 0$ соответствует вертикальному разлому, $\alpha = 90^\circ$ - разлому в горизонтальной плоскости. В этом случае также максимальная энергия цунами получается при подвижке по вертикальному разлому.

На рис. 5 и 6 представлена зависимость доли энергии цунами от глубины океана H для источников наибольшей цунамигенности (вертикальных диполей) и центра давления, помещенных на различных глубинах $h = 10, 20, 30, 40$ км. Глубина океана также оказывает значительное влияние на величину доли энергии цунами: при изменении H в диапазоне 1-10 км отношения изменяются в 10 и более раз. Кривые имеют максимумы при определенной глубине океана, при этом общей тенденцией является смещение этих максимумов в сторону больших глубин океана при увеличении глубины источника, так что при $h > 40$ км максимумы достигаются при наибольших возможных глубинах океана ($H \sim 10$ км). При $h \geq 40$ км кривые $\delta(H)$ имеют также минимумы при $H = 2-3$ км. Следует отметить, что при $h < 10$ км и глубине океана более 5-6 км (рис. 5а) доля энергии цунами при источнике типа центра давления становится большей, чем при дипольных источниках, т.е. центр давления является при этих условиях наиболее эффективным генератором цунами.

Составленная для расчетов энергии цунами программа позволяет (формально положив $h = 0$), получить зависимости и для источников, расположенных непосредственно на дне океана; при этом у кривых $\delta(H)$ получаются резко выраженные максимумы при $H < 1$ км. Однако полностью полагаться на результаты таких расчетов нельзя, поскольку при построении решения предполага-

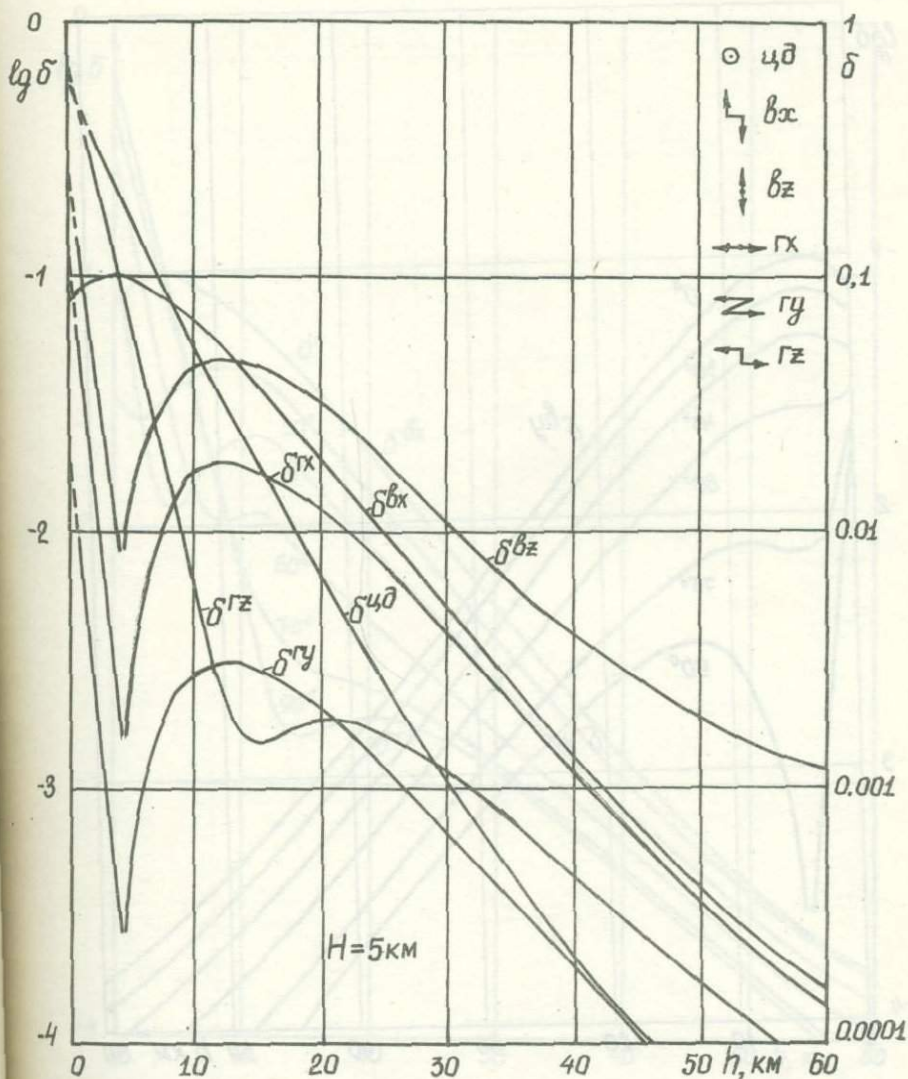


Рис.2. Зависимость доли энергии цунами $\delta = \frac{E_{ц}}{E_{ист}}$ от глубины очага для шести основных моделей источника. Глубина океана $H = 5$ км.

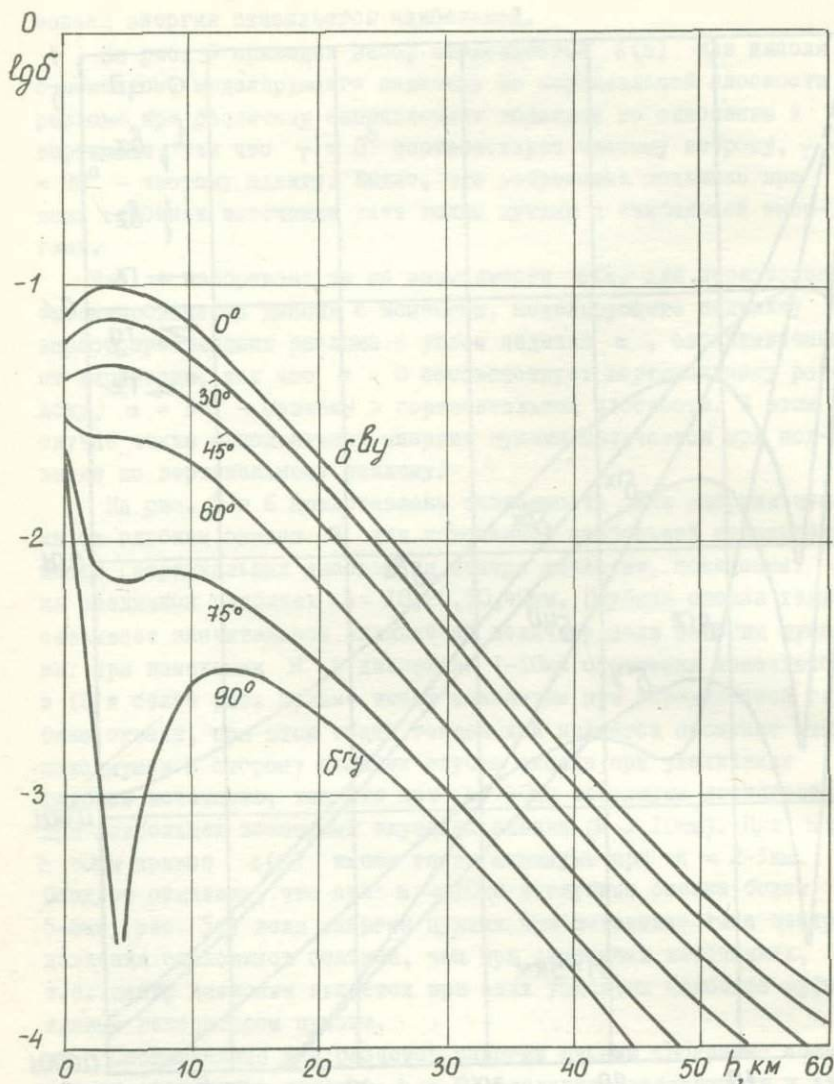


Рис.3. Зависимость доли энергии цунами от глубины дополнительного источника, моделирующего подвижку по вертикальному разлому. Глубина океана $H = 5$ км. Параметр кривых - угол между направлением подвижки и вертикалью.

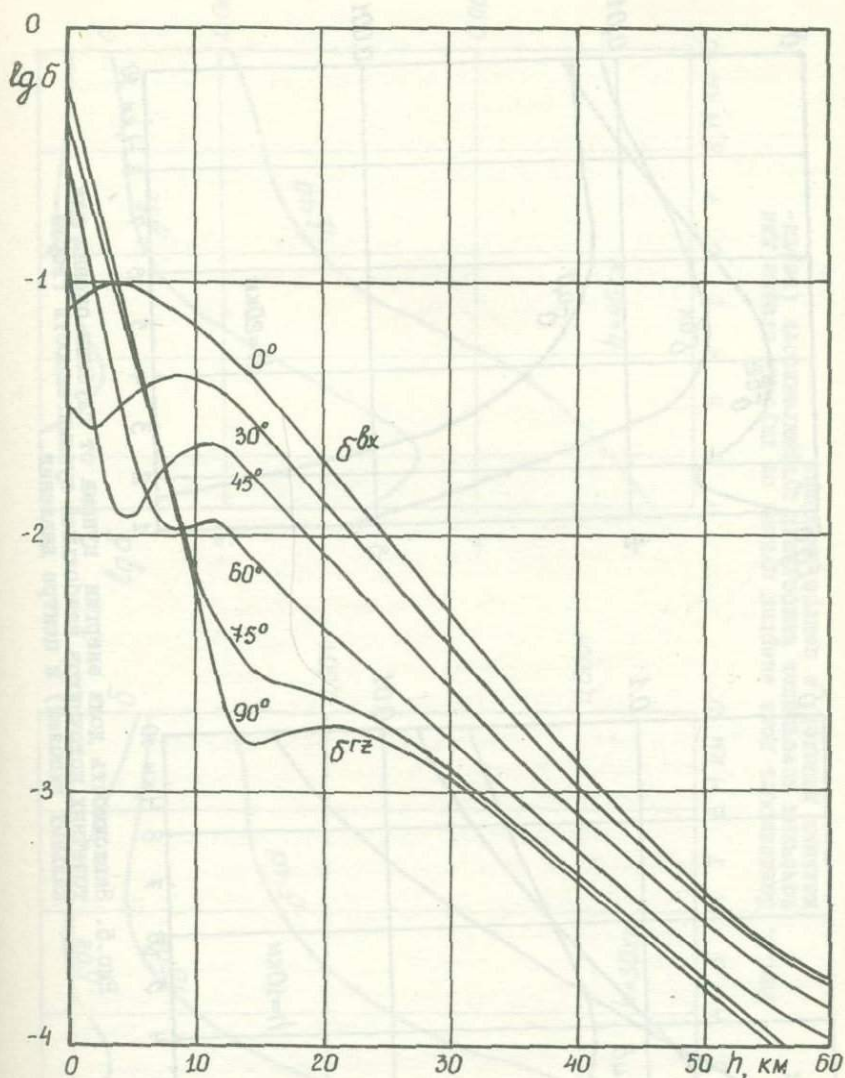


Рис. 4. Зависимость доли энергии цунами от глубины дипольного источника, моделирующего взбросовую подвижку по произвольно ориентированной плоскости разлома. Глубина океана $H = 5$ км. Параметр кривых - угол падения плоскости разлома, отсчитываемый от вертикали.

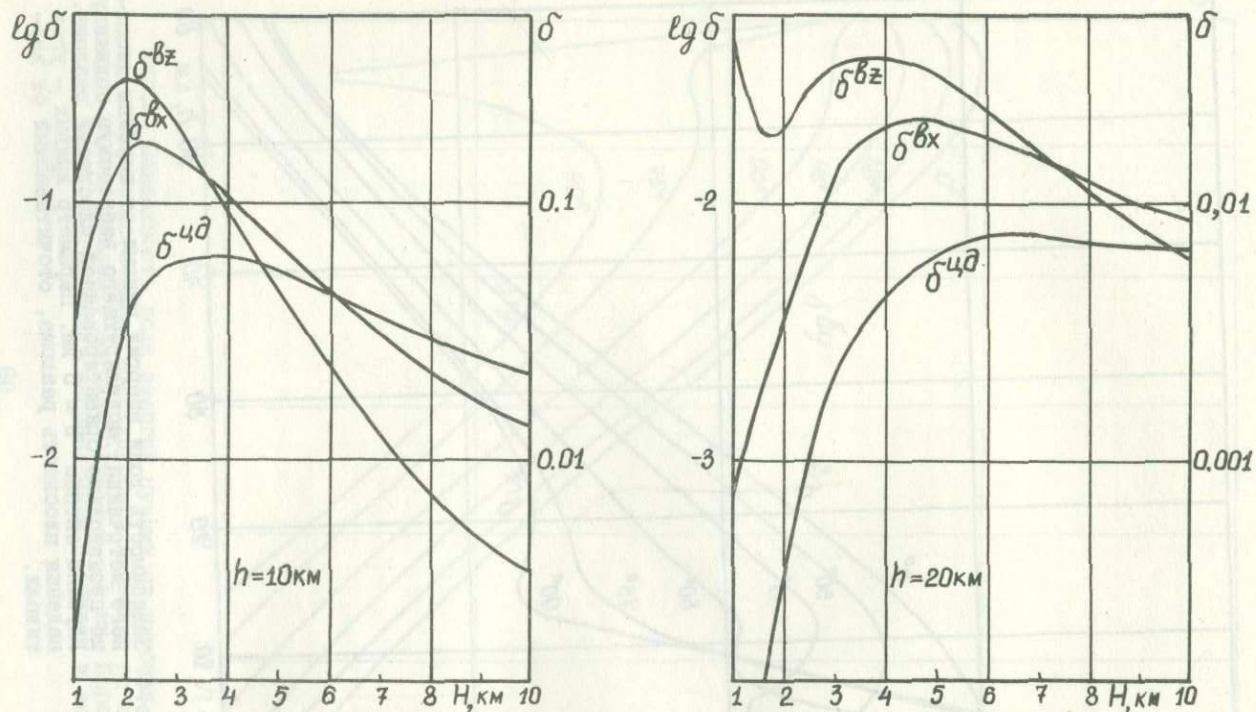


Рис.5. Зависимость доли энергии цунами от глубины океана для точечных источников наибольшей цунамигенности (вертикальных диполей) и центра давления.

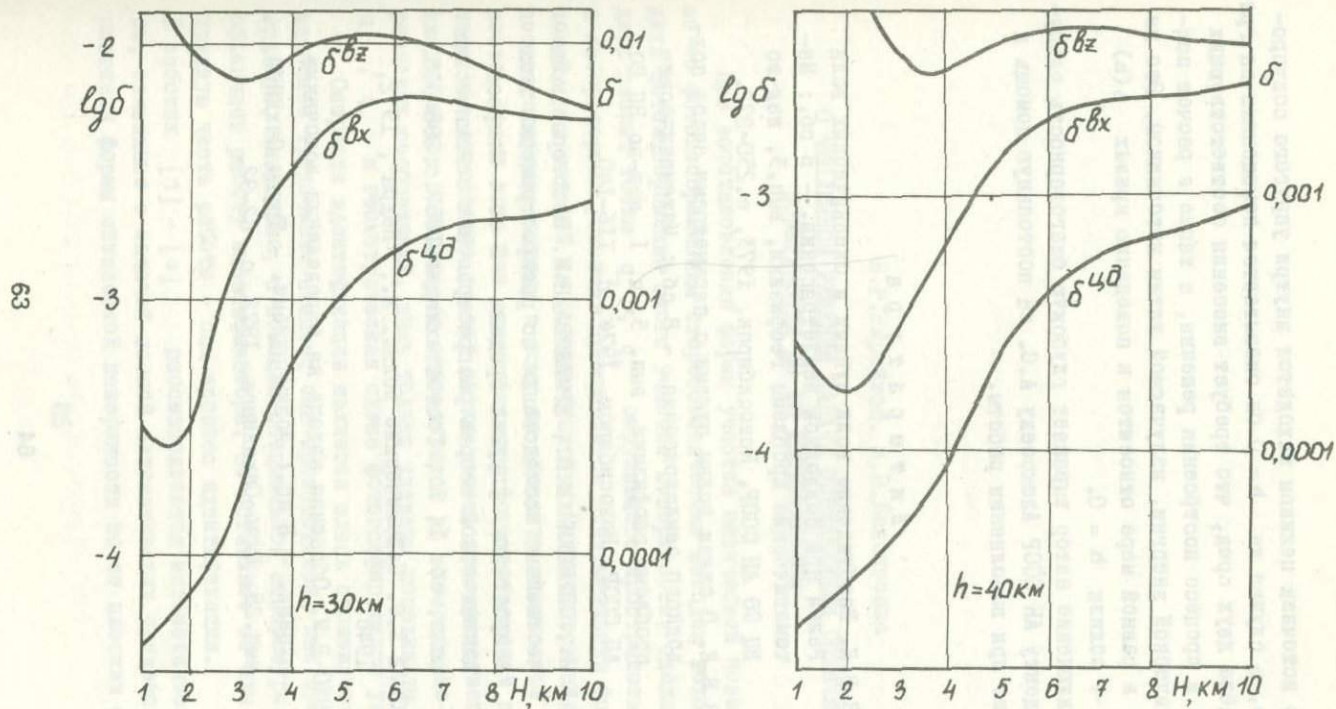


Рис.6. Зависимость доли энергии цунами от глубины океана для точечных источников наибольшей цунамигенности (вертикальных диполей) и центра давления.

лось, что источник целиком находится внутри упругого полупространства, в случае же $h = 0$ он оказывается помещенным на границу раздела двух сред, что требует внесения соответствующих изменений в процесс построения решения, а также в расчет полной сейсмической энергии, излучаемой таким источником. Это же замечание в равной мере относится к поведению кривых $\delta(h)$ на рис. 2-4 вблизи $h = 0$.

В заключение автор выражает глубокую благодарность члену-корреспонденту АН СССР Алексееву А.С. за постоянную помощь и руководство при выполнении работы.

Л и т е р а т у р а

1. ГУСЯКОВ В.К. Возбуждение волн цунами и океанических волн Релея при подводном землетрясении. - В сб.: Математические проблемы геофизики, вып.3, изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1973, с.250-272.
2. ГУСЯКОВ В.К. О связи волны цунами с параметрами очага подводного землетрясения. - В сб.: Математические проблемы геофизики, вып. 5, ч. I, изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1974, с. II6-140.
3. ОГУРЦОВ К.И., УСПЕНСКИЙ И.Н., ЕРМИЛОВА Н.И. Некоторые количественные исследования по распространению волн в простейших упругих средах. - В сб.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, сб. I, Л., Гостоптехиздат, 1957, с.296-365.
4. САВАРЕНСКИЙ Е.Ф. Сейсмические волны. М., "Недра", 1972, 194с.
5. КАИСТРЕНКО В.М. Обратная задача на определении источника цунами. - В сб.: Волны цунами. - Труды СахКНИИ, вып.29, Южно-Сахалинск, 1972, с. 82-92.

В.Р.Кирейтов, А.В.Белоносова

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИЧЕСКОЙ
ПОВЕРХНОСТИ ПО ЕЕ ИЗОБРАЖЕНИЯМ

При восстановлении формы участка оптической поверхности по ее фотоизображениям стереоскопическим методом исходят из двух фотоизображений этого участка поверхности, сделанных из двух разных точек q_1 , q_2 окружающего пространства. Затем в лабораторных условиях производится идентификация фотоизображений, при которой на фотоизображениях отмечаются пары точек, соответствующие одному и тому же элементу оптической поверхности. После того как идентификация фотоизображений произведена для достаточно густой сетки точек, пространственные координаты точек поверхности определяются из элементарно-геометрических соображений, лишь только указаны координаты точек q_1 , q_2 и геометрическая схема фотографирующего устройства.

Операция идентификации является здесь промежуточным, но наиболее трудоемким этапом; она производится, как правило, вручную, визуалью, с помощью специальной аппаратуры, которая облегчает работу идентификатора, но оставляет за ним наиболее трудную часть работы - сам процесс идентификации.

В работах [1] - [4] рассматриваются математические вопросы, связанные с задачей полной автоматизации процесса восстановления формы оптической поверхности по ее плоским фотоизоб-

ражениям, без предварительной идентификации последних. Из результатов этих работ следует, что процедура идентификации фотоизображений в принципе можно избежать, если использовать большее (нежели два) количество фотоизображений интересующего участка поверхности. Такое заключение имеет силу при выполнении ряда упрощающих предположений, одним из которых является предположение о типе яркости свечения оптической поверхности. Как известно, экспериментальные данные по диффузному отражению (излучению) света реальными (шероховатыми) поверхностями не могут быть описаны удовлетворительно ныне существующими математическими теориями явления. В теоретической оптике общеупотребителен закон отражения Ламберта, верный только приближенно. В предположении, что яркость оптической поверхности как функция направления зависит в каждой точке лишь от угла φ между нормалью к поверхности и направлением на наблюдателя, можно в первом приближении считать яркость функцией вида $B(x) \cdot \cos^a \varphi$, где функция $B(x)$ уже не зависит от направления, а - вещественное число.

В работах [1] - [3] предполагается, что яркость рассматриваемых оптических поверхностей относится к указанному типу. При $a = 0$ имеем изотропную (ламбертову) яркость; при $a \neq 0$ будем называть яркость вида $B(x) \cdot \cos^a \varphi$ яркостью типа В.

В настоящей работе рассматриваются вопросы численного решения задачи определения оптической поверхности с яркостью типа В по трем изображениям.

В разделе I работы приводится формула цветного изображения оптической поверхности и выписываются дифференциальные уравнения для отыскания рельефной функции. В разделе 2 обсуждаются вопросы, связанные с численным решением возникающих уравнений. Раздел III посвящен описанию выбранного алгоритма численного решения задачи, приводятся результаты численных экспериментов и некоторые выводы из полученных результатов. Авторы выражают признательность члену-корреспонденту АН СССР М.М.Лаврентьеву за внимание, проявленное к работе.

I. В этом разделе используются обозначения, понятия и результаты работ [1] - [4].

Достаточно общая для наших целей формула цветного изображения \mathcal{F} оптической поверхности (о.п.) (S, A) с по-

мощью проекционной схемы (п.с.) может быть записана в виде:

(1)

$$\mathcal{F}_{\mathcal{F}}(w; \lambda) = \int_{\alpha_q(S)} \Lambda(x, \cos \varphi; \lambda) \cos \varphi \cdot e^{-\varepsilon(\lambda)|x-q|} F_{vac}(x, w; \lambda) dS_x,$$

где через λ обозначена длина волны света, \mathcal{F} - п.с. $\{q, \varrho, W, F_{vac}\}$, со спектральной плотностью импульсного отклика $F_{vac}(x, w; \lambda)$ (т.е., $F_{vac}(x, w; \lambda) \cdot \Delta\lambda$ - отклик п.с. на точечный источник единичной силы, помещенный в точку $x \in \mathcal{F}_+$ и излучающий свет в диапазоне длин волн $\lambda + \Delta\lambda$), $\Lambda(x, \cos \varphi; \lambda)$ - спектральная плотность яркости о.п. (S, Λ) (предполагается, что для каждого λ спектральная плотность яркости в точке $x \in S$ как функция направления зависит лишь от косинуса угла φ между нормалью к поверхности S в точке x и вектором $q - x$); $\varepsilon(\lambda)$ - натуральный показатель ослабления потока света в диапазоне длин волн $\lambda + \Delta\lambda$, причем среда предполагается поглощающей, но не рассеивающей, $\alpha_q(S)$ - часть поверхности S , видимая из точки q , и, наконец, $\mathcal{F}_{\mathcal{F}}(w; \lambda)$ - спектральная плотность изображения о.п. (S, Λ) с помощью п.с. \mathcal{F} . Единицы измерения и физической размерность величин $\mathcal{F}_{\mathcal{F}}$ и F_{vac} одна и та же. В некоторых важных случаях функция $F_{vac}(x, w; \lambda)$ имеет вид $F_e(x, w; \lambda) \cdot v(\lambda)$, где $F_e(x, w; \lambda)$ - импульсный отклик прибора, измеряемый в энергетических единицах (освещенность), а $v(\lambda)$ - функция спектральной чувствительности п.с. \mathcal{F} .

Полагая в формуле (I) $\varepsilon(\lambda) = 0$, $v(\lambda) = 1$, $F_{vac} = F_e = F = b(x, \lambda) \delta(w - F(x))$, где δ - δ - функция, $b(x) = \int_{-\infty}^{\infty} b(x; \lambda) d\lambda$, $\Lambda(x, \cos \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda(x, \cos \varphi; \lambda) d\lambda$, и интегрируя обе части формулы (I) по λ в пределах от $-\infty$ до ∞ , получаем упрощенный вариант указанной формулы для (черно-белого) изображения $\mathcal{F}_{\mathcal{F}}(w)$:

$$\mathcal{F}_{\mathcal{F}}(w) = \int_{\alpha_q(S)} \Lambda(x, \cos \varphi) \cos \varphi \cdot b(x) \cdot \delta(w - F(x)) dS_x. \quad (2)$$

Скажем, что о.п. (S, Λ) имеет тип В (или яркость Λ имеет тип В), если $\Lambda(x, \cos \varphi) = B(x) \cdot \cos^a \varphi$;

где a - ненулевое вещественное число. Для о.п. типа В имеем формулу:

$$\int_{\mathcal{F}} g(w) = \alpha_q \int_{(S)} B(x)b(x) \cos^{a+1} \varphi \delta(w - F(x)) dS_x. \quad (3)$$

Обратная задача определения оптической поверхности по ее изображениям (задача D) ставится так: задано семейство изображений оптической поверхности (S, A) , сделанных из разных точек окружающего пространства с помощью заданных п.с.; найти часть поверхности S , участвующую в создании изображений и яркость на этом участке.

Предположим, что светящаяся часть о.п. (S, A) (т.е., область на S , вне которой $A \equiv 0$) может быть записана в пространстве переменных x, y, z в виде $z = h(x, y)$, (x, y) пробегает конечную область плоскости x, y и яркость A имеет тип В.

Пусть $\mathcal{F}_i = \{q_i, \varepsilon_i, \varepsilon_i, F_i\}$, $i = 1, 2, 3$ - три п.с., удовлетворяющие условиям:

- 1) точки q_1, q_2, q_3 аффинно независимы,
- 2) график функции h не пересекается с плоскостью, проходящей через точки q_1, q_2, q_3 , и лежит под ней,
- 3) оптические оси всех п.с. параллельны оси oz ,
- 4) из каждой точки q_i видно всю верхнюю сторону графика функции h ,
- 5) график функции h лежит в области $\bigcap_{i=1}^3 \mathcal{F}_i$,
- 6) $F_i(x, w) = \frac{\text{const}}{|q_i - x|^2} \delta(w - \mathcal{F}_i(x))$, $i = 1, 2, 3$.

При выполнении этих условий из трех соотношений вида (3) для п.с. \mathcal{F}_i , $i = 1, 2, 3$, получаем систему дифференциальных уравнений в области Ω для определения функции h по трем изображениям:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = F(x, y, h), \quad (4)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = G(x, y, h), \quad \text{где}$$

$$F = \frac{((q_3^1-h)-(q_3^2-h)\varphi_{12})((q_2^1-y)-(q_2^3-y)\varphi_{13})}{\Delta} -$$

$$- \frac{((q_3^1-h)-(q_3^3-h)\varphi_{13})((q_2^1-y)-(q_2^2-y)\varphi_{12})}{\Delta}, \quad (5)$$

$$G = \frac{((q_3^1-h)-(q_3^3-h)\varphi_{13})((q_1^1-x)-(q_1^2-x)\varphi_{12})}{\Delta} -$$

$$- \frac{((q_3^1-h)-(q_3^2-h)\varphi_{12})((q_1^1-x)-(q_1^3-x)\varphi_{13})}{\Delta},$$

$$\Delta = ((q_1^1-x)-(q_1^2-x)\varphi_{12})((q_2^1-y)-(q_2^3-y)\varphi_{13}) -$$

$$- ((q_2^1-y)-(q_2^2-y)\varphi_{12})((q_1^1-x)-(q_1^3-x)\varphi_{13}); \quad (6)$$

$$\varphi_{11} = \frac{q_1^{\frac{1}{\alpha}}(q_1^1, \otimes \frac{q_1^1-x}{q_1^1-h}, \otimes \frac{q_2^1-y}{q_1^1-h})(q_3^1-h)^{\frac{3}{\alpha}} ((q_1^1-x)^2 + (q_2^1-y)^2 + (q_3^1-h)^2)^{\frac{3+\alpha}{2\alpha}}}{q_1^{\frac{1}{\alpha}}(q_1^1, \otimes \frac{q_1^1-x}{q_3^1-h}, \otimes \frac{q_2^1-y}{q_3^1-h})(q_3^1-h)^{\frac{3}{\alpha}} ((q_1^1-x)^2 + (q_2^1-y)^2 + (q_3^1-h)^2)^{\frac{3+\alpha}{2\alpha}}} \quad (7)$$

$$i = 1, 2.$$

2. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{\partial h}{\partial x} = F(x, y, h), \quad \frac{\partial h}{\partial y} = G(x, y, h), \quad (8)$$

$$(x, y) \in \Omega, \quad -\infty < h < \infty.$$

К решению такой системы уравнений редуцируется решение задачи D в случае яркости типа В. Особенность возникающей при этом ситуации состоит в том, что в настоящий момент не удается установить согласованность этой системы (т.е., выполнение условия $\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial h} G = \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial h} F$ в интересующей области.)

Но и при выполнении условия согласования численное решение задачи представляет определенные трудности, например, потому что нарушение точных условий согласования при численном решении уравнений неизбежно, а возможный эффект рассогласования неочевиден.

Функцию $g(x, y)$ на области Ω назовем псевдорешением системы (8) вдоль гладкой кривой $r(t) = (x(t), y(t))$, если вдоль всей кривой выполнено соотношение

$$\frac{dg(r(t))}{dt} = F(r(t), g(r(t))) \frac{dx}{dt} + G(r(t), g(r(t))) \frac{dy}{dt}. \quad (9)$$

Непрерывную функцию $g(x, y)$ назовем псевдорешением системы (8) относительно семейства $X = \{r_i(t)\}_{i \in J}$ гладких кривых $r_i(t)$, если g является псевдорешением системы (8) вдоль каждой кривой семейства X .

Семейство $X = \{r_i(t)\}_{i \in J}$ регулярно параметризованных гладких кривых $r_i(t)$ в области Ω назовем звездным относительно точки x_0 , лежащей на какой-нибудь кривой указанного семейства, если до любой точки на кривой этого семейства можно добраться, двигаясь вдоль отрезков кривых из X . Точку x_0 будем называть опорной точкой звездного семейства кривых.

Один из способов построения псевдорешения системы 8 (не обязательно согласованной) относительно семейства кривых $X = \{r_i(t)\}_{i \in J}$ состоит в решении семейства обыкновенных дифференциальных уравнений типа (9) вдоль кривых семейства X , согласовании полученных решений в точках пересечения разных кривых так, чтобы на множестве $|X|$ склеенное решение было непрерывным, и последующей экстраполяции полученной функции с множества $|X|$ на интересующую область. Неединственность псевдорешения при этом очевидна, в частности, в силу произвола в реализации указанных процедур.

Если система уравнений (8) согласована, то ясно, что след псевдорешения системы (8) относительно звездного семейства кривых X на множестве точек $|X| \subseteq \Omega$, покрываемых кривыми этого семейства, определяется однозначно указанием значения псевдорешения в опорной точке семейства.

Относительно системы уравнений (4), возникающей при решении задачи D , мы не можем предполагать условия согласования выполненными. Сообразуясь с имеющимися данными, мы ставим относительно системы (4) следующую задачу:

Пусть известно решение h системы (4), удовлетворяющее условию $h(x_0, y_0) = h^0$. Найти (численное) псевдорешение \tilde{h} относительно звездного семейства кривых X , с точкой (x_0, y_0) в качестве опорной системы уравнений

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} = F + \delta F, \quad \frac{\partial \tilde{h}}{\partial y} = G + \delta G, \text{ где } \delta F, \delta G - \text{ малые}$$

возмущения правых частей, при условии $\tilde{h}(x_0, y_0) = h^0 + \Delta h$, Δh - малое число. Пронаблюдать в численных экспериментах степень отличия функций \tilde{h} и h на множестве $|X|$ в зависимости от величин указанных возмущений.

Если h_1 - псевдорешение системы $\frac{\partial h}{\partial x} = F_1(x, y, h)$, $\frac{\partial h}{\partial y} = G_1(x, y, h)$, $i = 1, 2$, вдоль кривой $r(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$, с начальными данными $h_1(x_0, y_0) = h_1^0$, то функция $h_1(r(t))$ является решением интегрального уравнения

$$h_1(r(t)) = h_1^0 + \int_a^b (F_1(x, y, h_1(r(t)))\dot{x}(t) + G_1(x, y, h_1(r(t)))\dot{y}(t)) dt, \quad (10)$$

$$i = 1, 2.$$

Если $|F_1 - F_2| \leq \epsilon$, $|G_1 - G_2| \leq \epsilon$ в интересующей области изменения переменных x, y, h , и $|h_1^0 - h_2^0| \leq \delta$, то имеем оценку для $|h_1(r(t)) - h_2(r(t))|$ при $t=a$:

$$|h_1(r(t)) - h_2(r(t))| \leq \delta + \epsilon \sqrt{2} \cdot 1,$$

где l - длина отрезка кривой $r(t)$ от опорной точки до точки $r(a)$.

При том способе интегрирования системы (4), который изложен в п.3 настоящей статьи, модуль разности между "истинным" искомым решением и получаемым псевдорешением оценивается в точке $z \in \Omega$ величиной $\delta + \epsilon \sqrt{2} (1 + m)$, где $l(m)$ - модуль разности, $x(y)$ - координат заданной точки z и опорной точки. Будем говорить, что задача решается устойчиво, если существует указанная зависимость решения от величины погрешности.

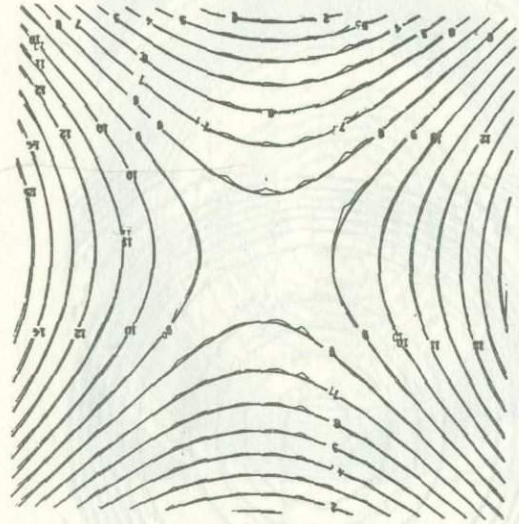
3. Перейдем к описанию численного метода решения поставленной задачи. В качестве опорной сетки искомого псевдорешения системы уравнений (4) примем систему прямых, параллельных осям OX , OY и равноотстоящих друг от друга. Назовем прямую, проходящую параллельно оси OX через точку x_0 , y_0 , опорной прямой. Интегрирование возникающих обыкновенных дифференциальных уравнений будем проводить методом Рунге-Кутты, используя формулы четвертого порядка точности относительно шага.

Проинтегрируем первое уравнение системы (4) как обыкновенное дифференциальное уравнение по x при $y = y_0$ с начальными данными $h(x_0, y_0) = h_0$, вдоль опорной прямой. Полученное решение будет псевдорешением. Псевдорешение вдоль любой прямой, перпендикулярной к опорной, можно найти, решая задачу Коши для второго уравнения системы (4), как обыкновенного дифференциального уравнения по y при $x = x_0$, беря в качестве начальных данных значения найденного псевдорешения в узлах опорной сетки.

По описанному алгоритму составлена программа на языке α для машины БЭСМ-6 и проведены численные эксперименты, результаты которых представлены на рисунках (1 - 4).

Во всех примерах предполагалось, что:

- 1) оптическая поверхность задана аналитически,
- 2) яркость $A(x) = B(x) \cos^2 \varphi$, т.е. имеет тип В. Необходимое для нахождения рельефа семейство трех изображений оптической поверхности получено расположением объектива в точках $q_1(1, 2, 50)$, $q_2(-1, 2, 50)$,



$$s = -\frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{n} \cdot 100\% = 0.5\%$$

$$r = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (h_i - \bar{h})^2}{n}} \cdot 100\% = 3\%$$

$$h(x, y) = x^2 - y^2, -3.1 \leq x, y \leq 3.2;$$

$$B(x, y) = \sin^2(200\pi x) \cdot \sin^2(200\pi y) + 1.5;$$

$$a = -.71 \quad e : 0.01 \leq |e| \leq 0.1.$$

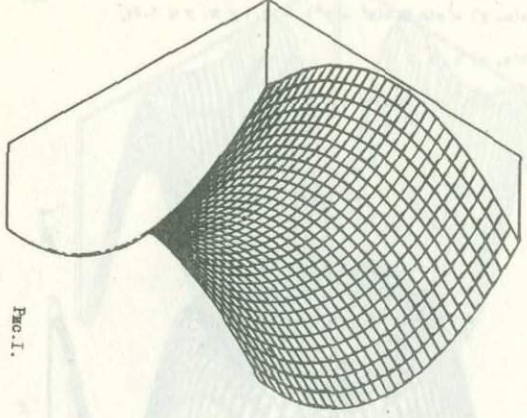


FIG. 1.

74

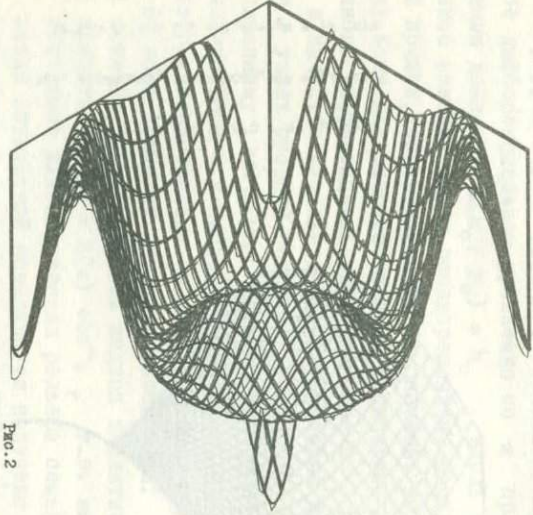
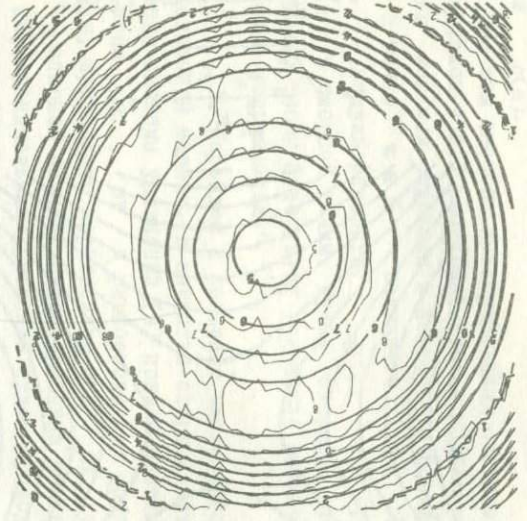


FIG. 2

$$h(x, y) = \sin 0.4(x^2 + y^2) - 3.1 \leq x, y \leq 3.2;$$

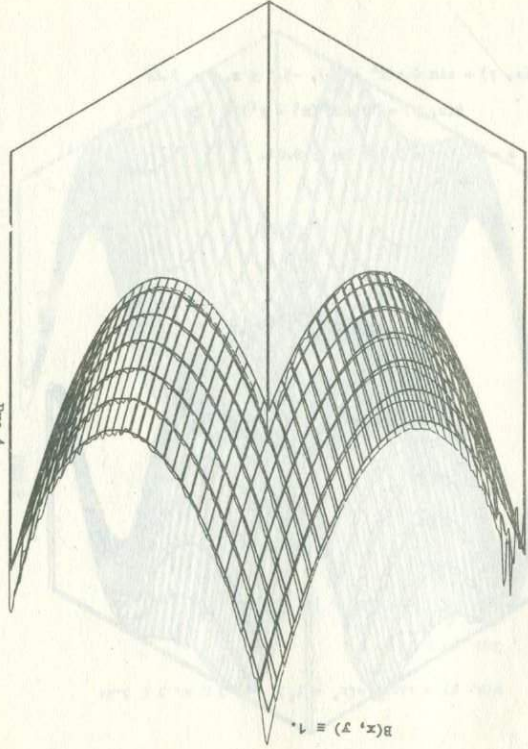
$$B(x, y) \equiv 1;$$

$$a = -1; \quad \epsilon : 0.01 \leq |\epsilon| \leq 0.1.$$



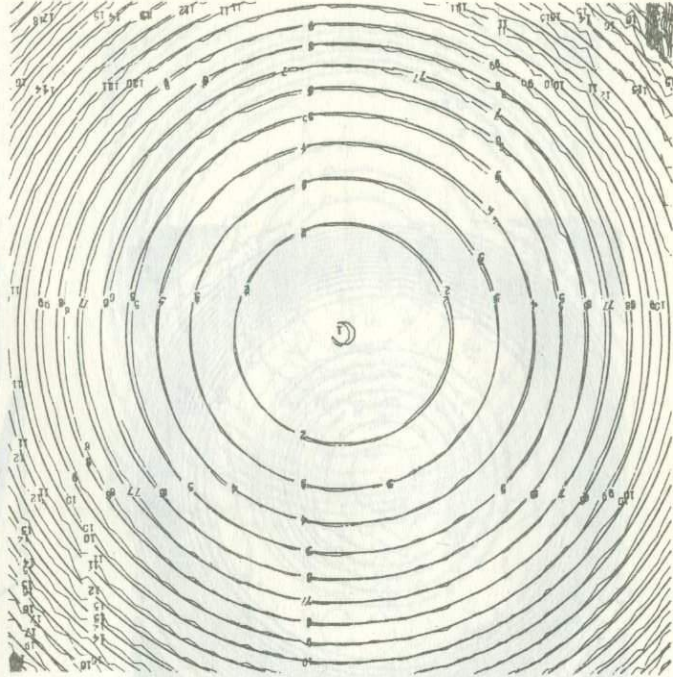
$b = 5\%$;
 $\tau = 10\%$.

FIG. 4



$$h(x, y) = x + y \quad ; \quad -4.9 \leq x, y \leq 4.91$$

$$B(x, y) \equiv 1.$$



$$b = 2\% ;$$

$$x = 5.5\%.$$

$$a = 1!$$

$$e : 0.001 \geq |e| \geq 0.0001.$$

а₃ (1, -2, 50),

3) изображение насчитано по формуле (4).

Переменными параметрами в численном эксперименте при решении прямой задачи являлись рельефная функция $h(x, y)$, яркость $B(x, y)$, параметр a и величина ошибки ϵ , вносимая в значения функции изображений. На всех четырех рисунках представлен рельеф заданной оптической поверхности (сверху) и восстановленной поверхности (ниже) в топографическом (изолиниях) и перспективном вариантах.

Каждый рисунок соответствует набору из четырех компонент - параметров $(h(x, y)B(x, y), a, \epsilon)$. Конкретные значения компонент, соответствующего рисунку набора, указаны в подписях к рисункам; кроме того, в каждом случае указана средняя квадратичная погрешность начальных данных (от внесения ошибки в функцию изображений) и восстановленной поверхности.

В результате анализа численных экспериментов представляется, что значения параметра a (определяющего вид индикатрисы яркости типа B , напомним, что $a \neq 0$) не является существенным, пока в вычислениях участвуют точные значения σ_j ; влияние a на точность восстановления рельефа сказывается при внесении случайных ошибок в значения σ_j . Как нам кажется, задача численно решается устойчиво в том смысле, в котором об этом говорилось выше.

Л и т е р а т у р а

1. ЛАВРЕНТЬЕВ М.М., КИРЕЙТОВ В.Р. Об одном классе отображений биповерхностей трехмерного пространства.- ДАН СССР, 216, № 2, (1974), 259-260.
2. ЛАВРЕНТЬЕВ М.М., КИРЕЙТОВ В.Р. О точках ветвления оптических гиперповерхностей.- ДАН СССР, 221, № 5 (1975), 1027-1030.
3. КИРЕЙТОВ В.Р. О задаче определения оптической поверхности по ее изображениям. Функциональный анализ и его приложения, т. 10, вып.3, 45-54.
4. КИРЕЙТОВ В.Р. О некоторых свойствах $(n - 1)$ -мерных поверхностей в n -мерном пространстве.- В сб.: Математические проблемы геофизики. Вып. 5, Новосибирск, 1975, стр.73-86.

А.А.Морозов, А.И.Хисамутдинов

СПОСОБ "МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЖИДАНИЙ" ДЛЯ СФЕРИЧЕСКИХ
И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЕЙ В ЗАДАЧАХ ПЕРЕНОСА НЕЙТРОНОВ

I. Введение

В задачах переноса нейтронов часто приходится вычислять интегральные потоки частиц в ограниченных объемах. Один из эффективных путей решения подобных задач методами Монте-Карло — использование способов с "математическими ожиданиями" ([1], [2]).

Пусть

x — точка фазового пространства R координат \vec{r} , направлений $\vec{\Omega}$, энергий E и времени t ,

\hat{K} — сопряженный интегральный оператор с ядром $k(x, y)$,

$\phi(x)$ — "весовая" функция для вычисления интегрального потока,

$\dot{\phi}(x)$ — дифференциальный поток частиц.

При использовании "математических ожиданий" искомый интегральный поток $\int_{(R)} \phi(x) \dot{\phi}(x) dx$ представляют как сумму

$$\int_{(R)} \Phi(x) K\Phi(x) dx + \int_{(R)} \Phi_0(x) \Phi(x) dx,$$

где $K\Phi(x) \equiv \int_{(R)} k(x,y)\Phi(y)dy$, $\Phi_0(x)$ - поток нерассеянных частиц. Как известно, величина $K\Phi(x)$ аналитически не вычисляется; ее приходится вычислять методом Монте-Карло. В данной работе рассматриваются конкретные способы с конечной дисперсией для вычисления $K\Phi(x)$ в случае сферических и цилиндрических объемов. Отметим, что все рассмотрения справедливы и для γ - квантов.

2. Оценка для $K\Phi(x)$

Конкретизируем рассматриваемую задачу. Будет считаться, что при замедлении нейтроны испытывают упругое рассеяние, а в тепловой области осуществляется "односкоростная диффузия" ([3]). Индикатрису рассеяния на ν -м элементе среды запишем как

$$\varepsilon_S^{(\nu)}(E, \vec{\Omega} \rightarrow E', \vec{\Omega}') = \varepsilon_S^{(\nu)}(\vec{\Omega}'/E) \delta(E' - e(E, \vec{\Omega}')), \quad (2.1)$$

где $\varepsilon_S^{(\nu)}(\vec{\Omega}'/E)$ - "угловая плотность", а запись под знаком δ - функции учитывает законы сохранения (в тепловой области в качестве (2.1) имеем $\frac{1}{4\pi} \delta(E' - E_T)$, E_T - средняя энергия тепловых нейтронов). В обеих энергетических областях вероятность поглощения может быть отлична от 0. Выпишем выражения ядра $k(x, x')$. Имеем

$$k(x, x') = \sum_S(\vec{x}, E) \sum_{\nu=1}^N \frac{\varepsilon_S^{(\nu)}(\vec{x}, E)}{\sum_S(\vec{x}, E)} \varepsilon_S^{(\nu)}(E, \vec{\Omega} \rightarrow E', \vec{\Omega}') \times \quad (2.2)$$

$$\frac{e^{-\tau(\vec{r}, \vec{r}', E')}}{|\vec{r}' - \vec{r}|^2} \delta(\vec{\Omega}' - \frac{\vec{r}' - \vec{r}}{|\vec{r}' - \vec{r}|}) \delta(t' - t - \frac{|\vec{r}' - \vec{r}|}{v'}),$$

v^* , v' - скорости нейтрона с энергией E^0 , E' соответственно, $\Sigma_S^{(v)}(\vec{r}, E)$ - макроскопическое сечение рассеяния на v -м элементе среды,

$$\Sigma_S(\vec{r}, E) = \sum_{v=1}^N \Sigma_S^{(v)}(\vec{r}, E), \quad N - \text{число элементов среды,}$$

$\Sigma(\vec{r}, E)$ - полное макроскопическое сечение,

$\tau(\vec{r}, \vec{r}', E)$ - оптическая длина пути между точками \vec{r} , \vec{r}' для нейтронов с энергией E' .

Весовую функцию $\varphi(x)$ примем нижеследующего вида:

$$\varphi(x) = \chi_1(\vec{r}) \chi_2(E) \chi_3(t),$$

$$\chi_1(\vec{r}) = \begin{cases} 1, & \vec{r} \in V \\ 0, & \vec{r} \notin V, \end{cases} \quad \chi_2(E) = \begin{cases} 1, & E \in (E^*, E^{**}) \\ 0, & E \notin (E^*, E^{**}), \end{cases}$$

$$\chi_3(t) = \begin{cases} 1, & t \in (t^*, t^{**}) \\ 0, & t \notin (t^*, t^{**}), \end{cases}$$

где V - заданный пространственный объем, (E^*, E^{**}) , (t^*, t^{**}) - заданные энергетический и временной интервалы. Объем V считается однородным; полное макроскопическое сечение внутри объема V будем обозначать как $\Sigma(E)$.

Интеграл $K\varphi(x)$ представляет собой сумму "парциальных" интегралов, каждый из которых отвечает рассеянию на определенном элементе. Мы будем рассматривать вариант, когда производится случайный выбор определенного члена этой суммы с вероятностями $\Sigma_S^{(v)}(\vec{r}, E) / \Sigma_S(\vec{r}, E)$.

Рассмотрим теперь вычисление "парциального" интеграла.

После перехода к сферической системе координат с центром в точке \vec{r} и с $\vec{r}' = \vec{r} + \rho\vec{\omega}$ имеем пятикратный интеграл, область интегрирования D в котором определяется характеристическими функциями $\chi_1(\cdot)$, $\chi_2(\cdot)$, $\chi_3(\cdot)$, индикатрисой рассеяния и δ -функцией

$$K_{\Phi}(x) = \int_D \Sigma_S(\vec{r} + \rho\vec{\omega}) \xi_S^{(v)}(E, \vec{\Omega} \rightarrow E', \vec{\omega}) e^{-\tau(\vec{r}, \vec{r} + \rho\vec{\omega}, E)} \times \quad (2.3)$$

$$\times \chi_1(\vec{r} + \rho\vec{\omega}) \chi_2(E') \chi_3(t') \delta(t' - t - \frac{\rho}{v'}) d\rho d\vec{\omega} dE' dt'.$$

Интегрирование по переменным ρ , E' , t' в (2.3) может быть выполнено.

Пусть $p(\vec{\omega})$ - плотность вероятности для выбора $\vec{\omega}$ и ρ_1 , ρ_2 - границы интегрирования по ρ на луче $\vec{\omega}$, определяемые характеристическими функциями $\chi_1(\cdot)$, $\chi_3(\cdot)$ и δ -функцией. Тогда оценка для $K_{\Phi}(x)$ есть

$$\Sigma_S(\vec{r}, E) \frac{\xi_S^{(v)}(\vec{\Omega}\vec{\omega}/E)}{p(\vec{\omega})} e^{-\int_0^{\rho_1} \Sigma(\vec{r} + s\vec{\omega}, E^0) ds} (e^{-\Sigma^*(E^0)L^*} - e^{-\Sigma^*(E^0)L^{**}}) \chi_2(E^0), \quad (2.4)$$

где $E^0 = e(E, \vec{\Omega}\vec{\omega})$

$$L^* = \begin{cases} v^*(t^* - t_1), & \text{если } t_1 < t^* \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases} \quad L^{**} = \begin{cases} v^*(t^{**} - t_1), & \text{если } v^*(t^{**} - t_1) < \rho_2 - \rho_1 \\ \rho_2 - \rho_1, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

t_1 - момент времени, в который нейтрон пересекает границу объема V , входя в него.

Заметим, что если в границах ρ_1 , ρ_2 укладывается несколько временных интервалов, то вычисления с помощью оценки (2.4) могут оказаться относительно более худшими, нежели при использовании другого способа, в котором ρ выбирается случайным образом.

3. Выбор направления $\vec{\omega}$

Будем рассматривать объемы двух видов, выбор направления для которых различается.

I. Сферический объем. (R_c - радиус сферы). Перейдем к сферическим координатам в точке \vec{r} . Пусть L - расстояние от точки \vec{r} до центра сферы. Плотность $p(\vec{\omega})$ представим в виде $p(\vec{\omega}) = p(\mu) \cdot p(\varphi)$, где $p(\varphi)$ - плотность вероятности выбора азимутального угла φ , а $p(\mu)$ - плотность вероятности выбора косинуса угла между направлением $\vec{\omega}$ и направлением на центр сферы. Угол φ мы будем выбирать изотропно. μ предлагается выбирать равномерно в некотором интервале $1 > \mu \geq \mu_{\min}$, μ_{\min} - граница "видимости" сферы, которую легко получить:

$$\mu_{\min} = \begin{cases} \sqrt{L^2 - R_c^2}/L, & \text{если } \vec{r} \in V \\ -1, & \text{если } \vec{r} \in V. \end{cases} \quad (3.1)$$

Таким образом,

$$p(\vec{\omega}) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1 - \mu_{\min}}. \quad (3.2)$$

Направляющие косинусы a', b', c' направления $\vec{\omega}$ легко получить через направляющие косинусы a, b, c направления на центр сферы и μ, φ по формулам Ченцова [4]:

$$a' = a\left(\mu - \frac{\Lambda}{1 + |c|}\right) + \delta_1, \quad b' = b\left(\mu - \frac{\Lambda}{1 + |c|}\right) - \delta_2, \quad c' = c\mu - \Lambda \operatorname{sign} c, \quad (3.3)$$

где

$$\delta_1 = \sqrt{1 - \mu^2} \cos \varphi, \quad \delta_2 = \sqrt{1 - \mu^2} \sin \varphi, \quad \Lambda = a\delta_1 - b\delta_2.$$

Так как угол φ у нас изотропен, то δ_1 и δ_2 можно вычислять по следующему алгоритму [4]:

$$1) x = 1 - 2\alpha_1, y = 1 - 2\alpha_2, \quad (2.4)$$

(α_1, α_2 - равномерно распределенные в $(0,1)$ случайные числа);

2) если $m = x^2 + y^2 \leq 1$, то принимается

$$\delta_1 = x \sqrt{\frac{1-m^2}{m}}, \quad \delta_2 = y \sqrt{\frac{1-m^2}{m}},$$

в противном случае снова выполняется пункт 1) с новыми $\alpha_1,$

α_2 .
П. Ц и л и н д р и ч е с к и й о б ъ е м. ($R_{ц}$ - радиус цилиндра, H - его высота).

Следует различать два случая.

1) $\vec{r} \in V$. В этом случае

$$p(\mu) = \frac{1}{2}, \quad p(\varphi) = \frac{1}{2\pi}, \quad p(\vec{\omega}) = \frac{1}{4\pi}.$$

2) $\vec{r} \notin V$. Если объем цилиндра не сильно отличается от объема сферы минимального радиуса, полностью включающей в себя цилиндр, то предлагается выбрать направление $\vec{\omega}$ так же, как в случае сферы, и использовать следующий метод: оценка равна 0, если $\vec{\omega}$ не пересекает цилиндр и равна (2.4), в противном случае. $p(\vec{\omega})$ совпадает с (3.2).

Если объем цилиндра значительно меньше объема сферы, то предлагается сначала выбирать угол φ в пределах "видимости" цилиндра из точки \vec{r} , а затем μ (в этом случае плотность выбора μ будет зависеть от φ). Получим

$$P(\varphi) = \frac{1}{\varphi_{\max} - \varphi_{\min}} = \frac{1}{2\varphi_1}, \quad \varphi_2 - \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2 + \varphi_1, \quad (3.4)$$

где

$$\varphi_1 = \arcsin(R_{ц}/L), \quad L = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2},$$

$$\varphi_2 = \begin{cases} 2\pi - \arccos\left(\frac{x_0 - x}{L}\right), & \text{если } y > y_0 \\ \arccos\left(\frac{x_0 - x}{L}\right), & \text{если } y < y_0, \end{cases}$$

(x_0, y_0, z_0) - декартовы координаты геометрического центра цилиндра,

(x, y, z) - декартовы координаты точки \vec{r} .

Плотность вероятности выбора μ возьмем вида

$$p(\mu) = \frac{1}{\mu_{\max} - \mu_{\min}}, \quad (3.5)$$

где μ_{\min}, μ_{\max} - границы "видимости" цилиндра по μ в плоскости, проходящей через точку \vec{r} под углом φ к плоскости $Y = y$. Подробные формулы для случая цилиндра предполагается привести в отчете ВЦ СО АН СССР этих же авторов в 1976г.

Направляющие косинусы направления $\vec{\omega}$ получаются обычным образом

$$a = \cos \varphi \sqrt{1 - \mu^2}, \quad b = \sin \varphi \sqrt{1 - \mu^2}, \quad c = \mu.$$

4. Ускорение счета оценки $K_{\varphi}^*(x)$

При вычислении $K_{\varphi}^*(x)$ на ЭВМ большая часть затрачиваемого машинного времени приходится на вычисление экспонент в оценке (2.4) и выбор направления $\vec{\omega}$. Так как при решении задач переноса нейтронов методом Монте-Карло подобные операции приходится производить большое количество раз, то мы предлагаем некоторые способы ускорения вычислений оценки (2.4).

$$e^{-\int_0^1 \Sigma(\vec{r} + s\vec{\omega}, E^0) ds}$$

Экспоненту e^0 приходится вычислять даже тогда, когда она относительно мала. Чтобы избавиться от этого, предлагается следующий "розыгрыш" этой экспоненты.

I) Выбирается случайное число α , равномерно распределенное в $(0,1)$ и вычисляется $-\ln \alpha$;

2) если $-\ln \alpha < \int_0^1 \Sigma(\vec{r} + \vec{s}\vec{\omega}, E^0) ds$, то оценка (2.4)

полагается равной 0, в противном случае оценка (2.4) вычисляется, но без этой экспоненты.

Полученное значение $-\ln \alpha$ следует использовать при "розыгрыше" следующего звена нейтронной траектории.

Относительно экспонент $e^{-\Sigma(E^0)L^*}$ и $e^{-\Sigma(E^0)L^{**}}$ мы можем определить их минимальные и максимальные возможные значения, которые вполне определяются величиной детектора и временным интервалом (t^*, t^{**}) (причем в случае $t_1 > t^*$ надо вычислять только вторую экспоненту, первая равна 1). Поэтому можно задать некоторый определенный набор целочисленных значений величин $\Sigma(E^0)L$ и численных значений экспонент в этих точках. Представим экспоненты, которые надо вычислять в виде произведения этих значений на определенные, также экспоненциальные, множители. Эти множители предлагается вычислять, выделяя небольшое число членов разложения их в ряд.

5. Численные результаты

Рассмотрим следующую задачу. Пусть бесконечная однородная среда, состоящая из SiO_2 плотности 2.65 г/см^3 , пористости 20% (поры заполнены водой), пересечена скважиной - бесконечным цилиндром радиуса 7.5 см. Скважина также заполнена водой. На оси цилиндра находится точечный моноэнергетический (14 мэв) изотропный импульсный источник нейтронов. Требуется определить плотность столкновений тепловых нейтронов ($E < 0.215 \text{ эв}$) в сфере радиуса R_c (центр сферы находится также на оси цилиндра на расстоянии L от источника) в заданных временных интервалах. Расчеты производились методом Монте-Карло. Для сравнения были применены различные способы:

- а) применялась оценка "по столкновениям", не использующая математических ожиданий;
- б) использовалась оценка (2.4);
- в) использовалась оценка (2.4) с предложенным в §4 "розыгрышем" экспоненты.

Полученные результаты расчетов на ЭВМ БЭСМ-6 по программе, написанной на α -языке, приведены в таблицах I, 2. Верхнее

число в клетке таблицы представляет собой плотность столкновений тепловых нейтронов, деленную на объем сферы, ниже — статистическую относительную погрешность в %. В таблице I приводятся результаты для $R_c = 3$ см., $L = 5$ см. Число траекторий — 6000. Соответствующие времена расчетов: а) 12 мин. 54 сек. б) 51 мин 17 сек. в) 38 мин 11 сек.

Для сравнения способов а), б) и в) желательно иметь, конечно, результаты с возможно меньшими погрешностями, но мы считаем, что и результаты, приведенные в таблице I, дают определенное представление об эффективности этих способов.

Т а б л и ц а I

t^* (мксек)	t^{**} (мксек)	а)	б)	в)
0	100	$5.903 \cdot 10^{-4}$ 15.9	$7.704 \cdot 10^{-4}$ 10.6	$8.868 \cdot 10^{-4}$ 7.2
100	200	$3.062 \cdot 10^{-4}$ 19.3	$3.841 \cdot 10^{-4}$ 10.6	$4.427 \cdot 10^{-4}$ 10
200	300	$1.273 \cdot 10^{-4}$ 20.4	$1.925 \cdot 10^{-4}$ 14	$2.043 \cdot 10^{-4}$ 9.2
300	400	$8.258 \cdot 10^{-5}$ 23.5	$1.001 \cdot 10^{-4}$ 13	$1.002 \cdot 10^{-4}$ 12.3
400	500	$4.691 \cdot 10^{-5}$ 21.9	$4.914 \cdot 10^{-5}$ 19.2	$6.518 \cdot 10^{-5}$ 16.7
500	600	$1.934 \cdot 10^{-5}$ 35.1	$2.734 \cdot 10^{-5}$ 18.2	$3.37 \cdot 10^{-5}$ 17.4
600	700	$1.488 \cdot 10^{-5}$ 34.9	$2.086 \cdot 10^{-5}$ 16.8	$1.914 \cdot 10^{-5}$ 20.9
700	800	$1.086 \cdot 10^{-5}$ 30	$1.135 \cdot 10^{-5}$ 18.2	$8.825 \cdot 10^{-6}$ 29.7
800	900	$3.569 \cdot 10^{-6}$ 38.3	$8.105 \cdot 10^{-6}$ 16.9	$7.35 \cdot 10^{-6}$ 23.1
900	1000	$3.979 \cdot 10^{-6}$ 40.7	$4.733 \cdot 10^{-6}$ 29	$5.01 \cdot 10^{-6}$ 29.0

Из рассмотрения погрешностей и времен расчетов видно, что способы а) и б) примерно равнозначны по критерию $[\sigma^2 t]$ (где σ - корень из дисперсии, а t - время расчета). Также видно, что способ в) эффективнее. Следует ожидать, что для сфер еще меньшего радиуса, способ б), и, тем более, в), будет эффективнее, чем а). [2].

Заметим, что значения плотности столкновений, полученные способом а), во всех временных интервалах ниже соответствующих, полученных методами б) и в). Вторая группа расчетов проводилась методами а) и в) для $R_c = 7.5$ см с числом траекторий 2400. Соответствующие времена расчетов: а) 53 мин. 07 сек. в) 2 часа 40 мин. 43 сек. Результаты приведены в таблице 2.

Т а б л и ц а 2

t^* (мксек)	t^{**} (мксек)	а)	в)
0	100	$6.75 \cdot 10^{-4}$ 2.3	$6.934 \cdot 10^{-4}$ 2.2.
100	200	$2.936 \cdot 10^{-4}$ 2.8	$3.118 \cdot 10^{-4}$ 2.6
200	300	$1.493 \cdot 10^{-4}$ 3.2	$1.555 \cdot 10^{-4}$ 3.2
300	400	$7.693 \cdot 10^{-5}$ 3.6	$8.299 \cdot 10^{-5}$ 3.6
400	500	$4.487 \cdot 10^{-5}$ 4.2	$4.68 \cdot 10^{-5}$ 4.4
500	600	$2.7 \cdot 10^{-5}$ 4.8	$2.858 \cdot 10^{-5}$ 4.8
600	700	$1.871 \cdot 10^{-5}$ 5.5	$1.845 \cdot 10^{-5}$ 5.4
700	800	$1.206 \cdot 10^{-5}$ 6.4	$1.235 \cdot 10^{-5}$ 5.9
800	900	$7.965 \cdot 10^{-6}$ 7.5	$8.427 \cdot 10^{-6}$ 6.8
900	1000	$6.735 \cdot 10^{-6}$ 7.2	$5.638 \cdot 10^{-6}$ 6.9

Из таблицы 2 видно, что для сфер "большого" радиуса способ а) предпочтительнее. Но для сфер "малого" радиуса способ а), по-видимому, дает заниженные результаты (как для среднего, так и для дисперсии). Эта ситуация типична при вычислении аналоговыми методами малых вероятностей.

Л и т е р а т у р а

1. ФАНО У., СПЕНСЕР Л., БЕРГЕР М. Перенос гамма-излучения. М., Госатомиздат, 1963.
2. ХИСАМУТДИНОВ А.И. Об эффективности метода математических ожиданий для задач одного класса. - ЖВМ и МФ, 1967, т.7, № 4, с.946-953.
3. БЕКУРЦ К., ВИРТЦ К., Нейтронная физика. М., Атомиздат, 1968.
4. МАРЧУК Г.И., МИХАЙЛОВ Г.А., НАЗРАЛИЕВ М.А., ДАРБИНЯН Р.А. Решение прямых и некоторых обратных задач атмосферной оптики методом Монте-Карло. Новосибирск, "Наука", 1968.

А.М.Федотов

**НЕКОТОРЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ОЦЕНОК
РЕШЕНИЯ ПЛОХООБУСЛОВЛЕННЫХ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ
УРАВНЕНИЙ**

1. В в е д е н и е

Задачи статистического оценивания решений уравнений неизбежно возникают, когда исходные данные задаются с некоторой погрешностью и нам дополнительно известны некоторые статистические закономерности ошибок.

Впервые статистический подход к методам приближенных вычислений, по-видимому, был предложен в работе Халфина [1], для оценки эффективности вычислительных формул с приближенными исходными данными. Позднее в работе М.М.Лаврентьева и В.Г.Васильева [2] был предложен статистический подход к условно-корректным задачам [3]. В дальнейшем по отношению к линейным задачам этот подход развивался в работах [4-6] и других.

Предлагаемый метод оценивания решений ближе всего находится к идеям работ [4],[6] и основан на формальном применении формулы Байеса для нахождения детерминированной величины.

Формально используемую формулу Байеса можно трактовать как формулу, дающую регуляризованное по Тихонову [7] решение задачи. В работе будет доказана сходимость получаемого регуля-

ризованного решения (оценки) к точному решению при увеличении числа экспериментов, увеличении числа точек замеров и уменьшении дисперсии оценки. Способ доказательства и получения оценок скоростей сходимости базируется на известном в математической статистике методе (см. [8]) получения асимптотических оценок.

Рассмотрим нелинейное уравнение в евклидовом пространстве

$$\Phi(X) = Y; \quad X \in R^n, \quad Y \in R^m. \quad (I)$$

Ставится задача определить неизвестное значение вектора $X_0 \in R^n$ по измерениям правой части уравнения (I), если априори известно, что X_0 принадлежит ограниченному выпуклому множеству

$$X_0 \in M \subset R^n.$$

Ввиду того, что правая часть уравнения (I) получена в результате эксперимента, она задается с некоторой погрешностью, которую будем считать аддитивной, то есть

$$\tilde{Y} = Y_0 + \vec{\delta} = \Phi(X_0) + \vec{\delta}, \quad (2)$$

где \tilde{Y} - вектор, представляющий результаты эксперимента, $\vec{\delta}$ - вектор погрешностей.

Пусть имеется последовательность векторов $\{\tilde{Y}_n\}_{n=1}^N$, каждая из которых представляет реализацию эксперимента по измерению правой части уравнения, то есть

$$\tilde{Y}_n = Y_0 + \vec{\delta}_n = \Phi(X_0) + \vec{\delta}_n; \quad n = 1, \dots, N, \quad (2')$$

где $\{\vec{\delta}_n\}_{n=1}^N$ - последовательность ошибок измерений рассматриваемой последовательности экспериментов. Требуется построить оценку $\tilde{X} \in M$ значения вектора X_0 , удовлетворяющую некоторым свойствам оптимальности.

В дальнейшем мы будем предполагать следующее.

I. Уравнение (I) является условно-корректным или корректным по Тихонову ([3], [7]), то есть отображение Φ является взаимнооднозначным и взаимнонепрерывным на множестве M

$$\Phi : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow D_M \subset \mathbb{R}^m .$$

2. M - является кубом, расположенным в центре координат

$$M = [-1, 1]^n .$$

3. Вектор погрешности $\vec{\delta}$ равен

$$\vec{\delta} = \sigma \vec{\delta}_H ,$$

где σ - произвольная неособенная матрица, $\vec{\delta}_H$ - гауссовский вектор с нулевым средним и единичной ковариационной матрицей.

$$\vec{\delta}_H \in \mathcal{N}(0, I) ,$$

где I - единичная матрица. Другими словами, вектор погрешности $\vec{\delta}$ является гауссовским вектором с нулевым средним и ковариационной матрицей $\sigma\sigma^T$ (индекс T обозначает транспонирование), то есть

$$\vec{\delta} \in \mathcal{N}(0, \sigma\sigma^T) .$$

Плотность распределения вектора погрешностей в \mathbb{R}^m суть

$$P_\epsilon(\vec{y}) = k \exp\left\{-\frac{1}{2} \|\vec{y}\|_{[\sigma\sigma^T]^{-1}}^2\right\}, \quad \vec{y} \in \mathbb{R}^m ,$$

где k - нормировочный множитель, а

$$\|\vec{y}\|_C = (\vec{y}, C\vec{y}) = \vec{y}^T C \vec{y} .$$

В дальнейшем через \vec{X}_H и \vec{X} мы будем обозначать приближенные оценки решения уравнения (I) вектора X_0 и $B = \sigma\sigma^T$.

2. Байесовский подход к задачам статистического оценивания.

Постановка задачи для уравнения (I) как задачи математической статистики лежит в основе метода статистической регуляризации [4,6].

Следуя [9], сформулируем Байесовский подход к задачам статистического оценивания.

Предположим, что нам задано априорное распределение решения уравнения (I) на R^n с плотностью $p(X)$. Вероятность того, что искомое решение X_0 принадлежит множеству $A \subset R^n$ суть

$$P\{X_0 \in A\} = \int_A p(X) dX.$$

Тогда, следуя правилу Байеса, получим, что апостериорное (после измерения \tilde{Y}) распределение решения уравнения (I) имеет следующую плотность распределения в R^n :

$$p(X/\tilde{Y}) = \frac{p(X) \exp\left\{-\frac{1}{2} \|\tilde{Y} - \Phi(X)\|_{[\sigma\sigma^T]^{-1}}^2\right\}}{\int_{R^n} p(X) \exp\left\{-\frac{1}{2} \|\tilde{Y} - \Phi(X)\|_{[\sigma\sigma^T]^{-1}}^2\right\} dX}. \quad (3)$$

В качестве оценки решения уравнения (I) предлагается взять математическое ожидание X по распределению, заданному плотностью (3).

В случае, когда задача оценивания встречается многократно, байесовская оценка преобразуется к виду:

$$\tilde{X}_N = \frac{\int_{R^n} X p(X) \prod_{i=1}^N \exp\left\{-\frac{1}{2} \|\tilde{Y}_i - \Phi(X)\|_{[\sigma\sigma^T]^{-1}}^2\right\} dX}{\int_{R^n} p(X) \prod_{i=1}^N \exp\left\{-\frac{1}{2} \|\tilde{Y}_i - \Phi(X)\|_{[\sigma\sigma^T]^{-1}}^2\right\} dX}. \quad (4)$$

Отметим, что байесовская оценка (4) при точно известном априорном распределении является оптимальной в среднем квадратическом в достаточно широком классе оценок. Причем точность решения задается дисперсией оценки \tilde{X}_N .

3. Байесовская форма регуляризации.

Во многих практических задачах искомое решение не является реализацией некоторой случайной величины, как этого требует байесовский подход, а есть некоторая детерминированная величина, принадлежащая некоторому априорному множеству в R^n [3]

$$X_0 \in M \subset R^n.$$

Однако и в этом случае возможно построить статистическую оценку решения уравнения (I), формально используя байесовский подход, хотя и ничего нельзя сказать об ее оптимальности. Пусть M - ограниченное в R^n множество и следовательно имеет конечную меру. Предположим, что X_0 есть случайная величина, имеющая равномерное распределение на M , то есть ее плотность распределения в R^n суть:

$$p(x) = \frac{1}{\int_M dx} \chi_M(x),$$

где $\chi_M(x)$ - характеристическая функция множества M ,

$$\chi_M(x) = \begin{cases} 1, & x \in M \\ 0, & x \notin M. \end{cases}$$

Тогда, для получения оценки решения уравнения (I), мы можем воспользоваться формулой Байеса (4)

$$\tilde{X}_N = \frac{\int_M x \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \|\tilde{Y}_i - \Phi(x)\|_{B^{-1}}^2 \right\} dx}{\int_M \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \|\tilde{Y}_i - \Phi(x)\|_{B^{-1}}^2 \right\} dx}. \quad (5)$$

Теперь мы можем рассмотреть формулу (5) формально и применить ее к оценке значения детерминированной величины X_0 . Для этого нам нужно выяснить, какую погрешность дает применение формулы (5) для получения искомой оценки. Попутно мы установим сходимость \tilde{X}_N к точному решению уравнения (I) $\tilde{X}_N \rightarrow X_0$ при $N \rightarrow \infty$.

4. Первая задача оценивания.

Предположим следующее:

- 1) X_0 является внутренней точкой M ,
 - 2) размерности пространств R^n и R^m совпадают, $n = m$.
- Сделаем замену переменных интегрирования в формуле (5).

Пусть

$$x_i = x_i^0 + z_i / \sqrt{N}, \quad i = 1, \dots, n,$$

здесь x_1, x_1^0, z_1 - координаты векторов X, X_0 и $Z \in R^m$ соответственно, т.е.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}; \quad X_0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_m^0 \end{bmatrix}; \quad Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix}.$$

Тогда (5) примет вид:

$$\sqrt{N} (\tilde{x}_1 - x_1^0) = \frac{\int_{M_N} z_i \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \|\tilde{Y}_i - \Phi(X_0 + \frac{Z}{\sqrt{N}})\|_{B^{-1}}^2\right\} dZ}{\int_{M_N} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \|\tilde{Y}_i - \Phi(X_0 + \frac{Z}{\sqrt{N}})\|_{B^{-1}}^2\right\} dZ}, \quad (6)$$

где

$$M_N = \prod_{k=1}^m [(x_k^0 - 1)\sqrt{N}, (1 - x_k^0)\sqrt{N}].$$

Отметим, что $M_N \rightarrow R^m$, при $N \rightarrow \infty$.

Умножив числитель и знаменатель формулы (6) на

$$\exp\left\{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \|\tilde{Y}_i - \Phi(X_0)\|_{B^{-1}}^2\right\},$$

мы преобразуем формулу (6) к виду

$$\sqrt{N} (\tilde{x}_1 - x_1^0) = \frac{\int_{M_N} z_i \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [\|\tilde{Y}_i - \Phi(X_0 + \frac{Z}{\sqrt{N}})\|_{B^{-1}}^2 - \|\tilde{Y}_i - \Phi(X_0)\|_{B^{-1}}^2]\right\} dZ}{\int_{M_N} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [\|\tilde{Y}_i - \Phi(X_0 + \frac{Z}{\sqrt{N}})\|_{B^{-1}}^2 - \|\tilde{Y}_i - \Phi(X_0)\|_{B^{-1}}^2]\right\} dZ}.$$

В дальнейшем нам понадобится асимптотика интеграла вероятности при $x \rightarrow \infty$

$$\operatorname{erfc}\{x\} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \exp\{-\omega^2\} d\omega.$$

Используя асимптотическое разложение, мы получим, что при достаточно больших x

$$\operatorname{erfc}\{x\} \sim O(1/x). \quad (7)$$

Рассмотрим следующие функционалы:

$$F(X, Y) = \|Y - \Phi(X)\|_{B^{-1}}^2, \\ G(N, Z) = \sum_{i=1}^N [F(X_0 + \frac{Z}{\sqrt{N}}, \tilde{Y}_1) - F(X_0, \tilde{Y}_1)].$$

Путем несложных выкладок легко показать, что

$$G(N, Z) = N \|\Phi(X_0 + \frac{Z}{\sqrt{N}}) - \Phi(X_0)\|_{B^{-1}}^2 + \xi_N, \quad (8)$$

где ξ_N - нормально распределенная случайная величина с нулевым средним и с дисперсией, равной

$$D\xi_N = [2\sqrt{N} \|\Phi(X_0 + \frac{Z}{\sqrt{N}}) - \Phi(X_0)\|_{B^{-1}}]^2. \quad (9)$$

Действительно

$$G(N, Z) = \sum_{i=1}^N \left\{ F(X_0 + \frac{Z}{\sqrt{N}}, \tilde{Y}_1) - F(X_0, \tilde{Y}_1) \right\} = \\ = \sum_{i=1}^N \left\{ \left[\tilde{Y}_1 - \Phi(X_0 + \frac{Z}{\sqrt{N}}), B^{-1}(\tilde{Y}_1 - \Phi(X_0 + \frac{Z}{\sqrt{N}})) \right] - \right. \\ \left. - \left[\tilde{Y}_1 - \Phi(X_0), B^{-1}(\tilde{Y}_1 - \Phi(X_0)) \right] \right\} = \\ = \sum_{i=1}^N \left\{ \left[\Phi(X_0 + \frac{Z}{\sqrt{N}}) - \Phi(X_0), B^{-1}(\Phi(X_0 + \frac{Z}{\sqrt{N}}) - \Phi(X_0)) \right] - \right. \\ \left. - 2 \left[\tilde{Y}_1 - \Phi(X_0), B^{-1}(\Phi(X_0 + \frac{Z}{\sqrt{N}}) - \Phi(X_0)) \right] \right\}.$$

Используя (2, 2'), получим

$$G(N, Z) = N \|\Phi(X_0) - \Phi(X_0 + Z/\sqrt{N})\|_{B^{-1}}^2 - \\ - 2 \sum_{i=1}^N \left[\vec{\delta}_i, B^{-1}(\Phi(X_0) - \Phi(X_0 + Z/\sqrt{N})) \right].$$

Учитывая, что $B = \sigma\sigma^T$ и $\sigma^{-1} \vec{\delta}_i = \vec{\delta}_H \in \mathcal{N}(0, I)$, получим

$$G(N, Z) = N \|\Phi(X_0) - \Phi(X_0 + Z/\sqrt{N})\|_{B^{-1}}^2 - \\ - 2 \sum_{i=1}^N \left[\sigma^{-1} \vec{\delta}_i, \sigma^{-1}(\Phi(X_0 + \frac{Z}{\sqrt{N}}) - \Phi(X_0)) \right] = \\ = N \|\Phi(X_0) - \Phi(X_0 + \frac{Z}{\sqrt{N}})\|_{B^{-1}}^2 - 2 \left[\sum_{i=1}^N \sigma^{-1} \vec{\delta}_i, \sigma^{-1}(\Phi(X_0 + \frac{Z}{\sqrt{N}}) - \Phi(X_0)) \right].$$

Учитывая, что второе слагаемое представляет собой сумму нормально распределенных случайных величин с нулевым средним, мы получим требуемое соотношение (8) или, что тоже самое

(10)

$$G(N, Z) = N \|\Phi(X_0) - \Phi(X_0 + \frac{Z}{\sqrt{N}})\|_{B^{-1}}^2 + 2\sqrt{N} \|\Phi(X_0) - \Phi(X_0 + \frac{Z}{\sqrt{N}})\|_{B^{-1}} \xi,$$

где $\xi \in \mathcal{N}(0, 1)$ - нормально распределенная случайная величина с нулевым средним и единичной дисперсией.

Докажем несколько вспомогательных лемм.

Л е м м а I. Рассмотрим случайную величину

$$u_n = n c_1 - \sqrt{n} (c_2 + c_3 \xi),$$

где ξ - нормально распределенная случайная величина с нулевым средним и единичной дисперсией $\xi \in \mathcal{N}(0, 1)$;

c_1, c_2, c_3 - произвольные постоянные. Тогда для любого $\epsilon > 0$ существует $c_4 > 0$ и $M > 0, M = M(c_4)$ такие, что для всех $n \geq M$

$$P \{u_n \geq n c_4\} \geq 1 - \epsilon. \quad (II)$$

Доказательство основано на асимптотическом разложении интеграла вероятности. Действительно

$$P\{u_n \geq c_4 n\} = P\left\{\xi \geq \frac{(c_4 - c_1)\sqrt{n} - c_2}{c_3}\right\} =$$

$$= k \int_{x_n}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2} \omega^2\right\} d\omega,$$

$$x_n = \frac{(c_4 - c_1)\sqrt{n} - c_2}{c_3},$$

где k - нормирующий множитель. Полагая $c_4 < c_1$, получим

$$P\{u_n \geq c_4 n\} = 1 - \operatorname{erfc}\{x_n\},$$

где $x_n = \frac{(c_1 - c_4)\sqrt{n} + c_2}{c_3}$.

Отметим, что $x_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, следовательно $\operatorname{erfc}\{x_n\} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то есть для любого $\epsilon > 0$ существует такое $M > 0$, что для всех $n \geq M$

$$\operatorname{erfc}\{x_n\} \leq \epsilon.$$

Откуда и следует доказательство леммы.

Л е м м а 2. Для любых $\eta > 0$ и $\epsilon > 0$ существуют такие $C(\eta)$ и $M(\eta)$, что для всех $Z: \|Z\| \geq \eta\sqrt{N}$ функционал

$$G(N, Z) \geq C(\eta)N$$

с вероятностью $1 - \epsilon$ для всех $N \geq M$, то есть

$$P\{G(N, Z) \geq C(\eta)N\} \geq 1 - \epsilon.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из корректности уравнения (I) по Тихонову с множеством корректности M следует существование монотонно возрастающей положительной функции $C_1(\eta) \geq 0$ (см. [3]) такой, что

$$\inf_{\|X_0 - X\| \geq \eta} \|\Phi(X_0) - \Phi(X)\|_{B^{-1}}^2 \geq C_1(\eta), \quad (12)$$

Используя представление (10) и лемму 1, получим, что

$$P\{G(N, Z) \geq C_4 N\} = P\left\{\xi \geq -\frac{\Delta_N^2(Z) - C_4}{\Delta_N(Z)} \sqrt{N}\right\},$$

где $\Delta_N(Z) = \|\Phi(X_0) - \Phi(X_0 + \frac{Z}{\sqrt{N}})\|_{B^{-1}}$. Учитывая неравенство (12), получим, что

$$P\{G(N, Z) \geq C_4 N\} \geq P\left\{\xi \geq \frac{C_4 - C_1^2(\eta)}{C_1(\eta)} \sqrt{N}\right\}.$$

Откуда следует справедливость леммы 2 для всех $C_4 < C_1^2(\eta)$.

З а м е ч а н и е 1. Учитывая асимптотическое разложение функции $\operatorname{erfc}\{x\}$ при $x \rightarrow \infty$, можно считать, что

$$P\{G(N, Z) \geq C_4 N\} \geq 1 - \frac{\text{const}}{\sqrt{N}}.$$

Л е м м а 3. Существуют $\eta_1 > 0$ и матрица W такие, что для всех $Z : \|Z\| \leq \eta_1 \sqrt{N}$

$$G(N, Z) = (WZ, WZ) + 2\xi \|WZ\|_{B^{-1}} + O\left(\frac{\|Z\|}{\sqrt{N}}\right), \quad (13)$$

где $\xi \in \mathcal{N}(0, 1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\Phi(X)$ непрерывно дифференцируема в точке X_0 , тогда, используя теилоровское разложение, получим, что существует $\eta_1 > 0$ такое, что для всех $X \in M : \|X - X_0\| \leq \eta_1$

$$\Phi(X) - \Phi(X_0) = J(X_0) \cdot (X - X_0) + o(\|X - X_0\|^2),$$

где $J(X)$ - якобивая матрица функции $\Phi(X)$.

Отсюда

$$\begin{aligned} \|\Phi(X) - \Phi(X_0)\|_{B^{-1}}^2 &= [\Phi(X) - \Phi(X_0), B^{-1}(\Phi(X) - \Phi(X_0))] = \\ &= [J(X_0)(X - X_0), B^{-1}J(X_0)(X - X_0)] + o(\|X - X_0\|^3). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|\Phi(X_0) - \Phi(X_0 + \frac{Z}{\sqrt{N}})\|^2 &= \frac{1}{N} [J(X_0)Z, B^{-1}J(X_0)Z] + o(\frac{m}{N^{3/2}}) = \\ &= \frac{1}{N} [\sigma^{-1}J(X_0)Z, \sigma^{-1}J(X_0)Z] + o(\frac{m}{N^{3/2}}). \end{aligned}$$

Таким образом, $W = \sigma^{-1}J(X_0)$, далее, используя представление (10), получим доказательство леммы.

З а м е ч а н и е 2. Матрицу $W = \sigma^{-1}J(X_0)$ всегда можно считать симметрической положительно определенной матрицей. В противном случае мы всегда можем провести замену на

$$W_1 = [W^T W]^{1/2} = [J(X_0)^T B^{-1} J(X_0)]^{1/2}.$$

З а м е ч а н и е 3. Для положительно определенной симметрической матрицы формулу (13) можно переписать в виде

$$G(N, Z) = \|WZ\|^2 + 2(\vec{\xi}, WZ) + o(\frac{m}{\sqrt{N}}), \quad (14)$$

где $\vec{\xi} \in \mathcal{N}(0, I)$ - гауссовский вектор с нулевым средним и с единичной квадратичной матрицей I .

Л е м м а 4. Предположим, что

$$\text{Det}[(\sigma^{-1} J(X_0))^T (\sigma^{-1} J(X_0))] \neq 0,$$

тогда для всех $\varepsilon > 0$ существует $K > 0$, определяемое леммой 2 такое, что для всех $N > K$ с вероятностью $1 - \varepsilon$

$$\int_{M_N} \exp\left\{-\frac{1}{2} G(N, Z)\right\} dZ = \frac{k e^{-\|\vec{\xi}\|^2/2}}{\text{Det}[W_1]} + o\left(\frac{m}{\sqrt{N}}\right), \quad (I5)$$

$$\int_{M_N} Z \exp\left\{-\frac{1}{2} G(N, Z)\right\} dZ = \frac{k e^{-\|\vec{\xi}\|^2/2}}{\text{Det}(W_1)} W_1^{-1} \vec{\xi} + o\left(\frac{m}{\sqrt{N}}\right), \quad (I6)$$

где $W_1 = [J(X_0)^T B^{-1} J(X_0)]^{1/2}$, k - нормирующий множитель.

Доказательство. Рассмотрим множества

$$\tilde{M} = \{X \in M : \|X - X_0\| \leq \eta_1\}; \quad \tilde{M}_N = \{Z \in M_N : \|Z\| \leq \eta_1 \sqrt{N}\}.$$

Согласно лемме 2, для любого $\varepsilon > 0$, существует $K(\eta_1) > 0$ такое, что

$$\begin{aligned} \int_{M_N \setminus \tilde{M}_N} \exp\left\{-\frac{1}{2} G(N, Z)\right\} dZ &\leq \exp\{-C_4(\eta_1)N\} \nu(M_N \setminus \tilde{M}_N) = \\ &= N^{m/2} e^{-C_4(\eta_1)N} \nu(M \setminus \tilde{M}) \rightarrow 0, \quad \text{при } N \rightarrow \infty \end{aligned}$$

для всех $N \geq K$, где ν - мера Лебега, с вероятностью $1 - \varepsilon$. Аналогичное неравенство получим и для интеграла (I6). Поэтому можно ограничиться только рассмотрением интегралов по множеству \tilde{M}_N . Рассмотрим интеграл (I5), согласно лемме 3, имеем

$$\int_{\tilde{M}_N} \exp\left\{-\frac{1}{2} G(N, Z)\right\} dZ = \int_{\tilde{M}_N} \exp\left\{-\frac{1}{2}(W_1 Z, W_1 Z) - (\vec{\xi}, W_1 Z) + o\left(\frac{m}{\sqrt{N}}\right)\right\} dZ =$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-\|\vec{\xi}\|^2/2} (1 + o(\frac{m}{\sqrt{N}})) \int_{\tilde{M}_N} \exp\{-\frac{1}{2}[W_1 Z + \vec{\xi}, W_1 Z + \vec{\xi}]\} dZ = \\
&= \frac{ke^{-\|\vec{\xi}\|^2/2}}{\text{Det}[W_1]} + o(\frac{m}{\sqrt{N}}).
\end{aligned}$$

Аналогично получаем для (16)

$$\begin{aligned}
&\int_{\tilde{M}_N} Z \exp\{-\frac{1}{2}G(N, Z)\} dZ = \\
&= e^{-\|\vec{\xi}\|^2/2} (1 - o(\frac{m}{\sqrt{N}})) \int_{\tilde{M}_N} \exp\{-\frac{1}{2}[W_1 Z + \vec{\xi}, W_1 Z + \vec{\xi}]\} Z dZ = \\
&= \frac{ke^{-\|\vec{\xi}\|^2/2}}{\text{Det}[W_1]} W_1^{-1} \vec{\xi} + o(\frac{m}{\sqrt{N}}).
\end{aligned}$$

Здесь были использованы замена переменных интегрирования $y = W_1 Z$ и свойства интеграла вероятности. Лемма 4 доказана.

З а м е ч а н и е 4. Требование существования ограниченного обратного отображения для плохообусловленных задач весьма обременительно, однако для наших целей достаточно существования обратного отображения для $y = W_1 Z$ на множестве M .

Таким образом нами доказана следующая

Т е о р е м а I. Пусть $\Phi(X)$ взаимнооднозначное отображение на множестве M , непрерывно дифференцируемо в точке $X_0 \in M$, причем матрица

$$W_1 = [J(X_0)^T B^{-1} J(X_0)]^{1/2}$$

имеет обратную на множестве M . Тогда при гауссовских ошибках измерений оценка решения уравнения (I), даваемая формулой (5), имеет следующее отклонение от истинного значения X_0 :

$$\tilde{X}_N - X_0 = \frac{1}{\sqrt{N}} W_1^{-1} \vec{\xi} + o\left(\frac{m}{N}\right),$$

где $\vec{\xi} \in \mathcal{N}(0, I)$ гауссовский вектор с нулевым средним и единичной корреляционной матрицей, для всех достаточно больших N (см. лемму 2 и замечание 1).

5. Вторая задача оценивания.

Пусть X_0 по-прежнему является внутренней точкой M , но $m > n$.

Рассмотрим только одно измерение, но с независимыми компонентами, т.е. корреляционная матрица диагональна

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & & & & & & \cdot \\ \cdot & & \lambda_2^2 & & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & & & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_m^2 \end{bmatrix}.$$

Сделаем аналогичную пункту 4 замену переменных интегрирования в формуле (5)

$$x_i = x_i^0 + z_i/\sqrt{m}, \quad i = 1, \dots, n$$

и рассмотрим следующие функционалы:

$$F_m(X, Y) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{\lambda_i^2} [Y_i - \Phi_i(X)]^2,$$

$$G_m(Y, Z) = F_m(X_0 + Z/\sqrt{m}, Y) - F(X_0, Y).$$

Лемма 5. Для любых $\epsilon > 0$ и $\eta > 0$ существуют такие $C(\eta) > 0$ и $M > 0$, что для всех $Z: \|Z\| \geq \eta\sqrt{m}$

$$P\{G_m(\tilde{Y}, Z) \geq m C(\eta)\} \geq 1 - \epsilon$$

для всех $m \geq M$, причем для фиксированного M величина

$\varepsilon \sim 0(1/\sqrt{m})$.

Доказательство . Аналогично пункту 4 преобразуем G_m к виду

$$G_m(Z, \tilde{Y}) = \|\Phi(X_0) - \Phi(X_0 + \frac{Z}{\sqrt{m}})\|_{B^{-1}}^2 + \xi \|\Phi(X_0) - \Phi(X_0 + \frac{Z}{\sqrt{m}})\|_{B^{-1}},$$

где $\xi \in (0, 1)$.

Далее используем взаимную однозначность функции $\Phi(X)$ на множестве M . Ввиду того, что для всех $Z: \|Z\| \geq \eta \sqrt{m}$ существует монотонная функция $C_1(\eta) > 0$ такая, что

$$\|\Phi(X_0) - \Phi(X_0 + \frac{Z}{\sqrt{m}})\|_{B^{-1}}^2 \geq C_1(\eta),$$

предположим, что существует такое число $C_2(\eta) > 0$ (монотонная функция), что для всех $k = 1, \dots, m$

$$\frac{1}{\lambda_k^2} |\Phi_k(X_0) - \Phi_k(X_0 + \frac{Z}{\sqrt{m}})|^2 \geq C_2(\eta).$$

Ввиду конечности m в качестве $C_2(\eta)$, мы можем выбрать минимум по всем k , а измерения, для которых

$$\Phi_k(X_0) = \Phi_k(X_0 + \frac{Z}{\sqrt{m}}), \quad \|Z\| \geq \eta \sqrt{m}$$

в расчет не принимать, вследствие их неинформативности, отсюда следует

$$\|\Phi(X_0) - \Phi(X_0 + \frac{Z}{\sqrt{m}})\|_{B^{-1}}^2 \geq m C_2(\eta). \quad (20)$$

Отсюда, согласно лемме I, для всех $C < C_2(\eta)$ и достаточно больших m

$$P\{G(\tilde{Y}, Z) \geq Cm\} \geq 1 - \text{const} \frac{\sqrt{C_2(\eta)}}{C_2(\eta) - C} \cdot \frac{1}{\sqrt{m}},$$

откуда следует утверждение леммы 5.

Доказательства остальных лемм полностью совпадают с доказательствами лемм пункта 4, и мы имеем следующую теорему.

Т е о р е м а 2. Пусть $\Phi(x)$ взаимнооднозначное на M отображение непрерывно дифференцируемо в точке $X_0 \in M$, причем матрица

$$W_1 = [J(X_0)^T B^{-1} J(X_0)]^{1/2}$$

имеет обратную на множестве M . Тогда при независимых гауссовских ошибках измерений оценка решения уравнения (I), даваемая формулой (5), имеет следующее отклонение от истинного значения X_0 :

$$\tilde{X} - X_0 = \frac{\xi}{\sqrt{m}} W_1^{-1} + o\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right),$$

где $\xi \in \mathcal{N}(0, 1)$, для достаточно больших n .

З а м е ч а н и е 5. Предположение о статистической независимости наблюдений в разных точках не является существенным.

6. Третья задача оценивания.

В этом пункте мы рассмотрим зависимость отклонения оценки (5) при стремлении к нулю дисперсии ошибки.

Пусть 1) X_0 - внутренняя точка множества M ,

2) $N = 1$,

3) $n = m$,

4) Погрешности являются нормально распределенными независимыми случайными величинами с нулевым средним и с дисперсией λ .

Рассмотрим распределение отклонения оценки \tilde{X} от точного решения при $\lambda \rightarrow 0$.

Сделаем замену переменных интегрирования в формуле (5)

$$x_i = x_i^0 + \lambda z_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

и рассмотрим функционал

$$G(\lambda, z, \tilde{Y}) = \frac{1}{\lambda^2} \left[\sum_{k=1}^n [\tilde{Y}_k - \Phi_k(X_0 + \lambda Z)]^2 - \sum_{k=1}^n [\tilde{Y}_k - \Phi_k(X_0)] \right]^2 =$$

$$= \frac{1}{\lambda^2} [\|\Phi(X_0 + \lambda Z) - \tilde{Y}\|^2 - \|\Phi(X_0) - \tilde{Y}\|^2].$$

Путем несложных преобразований, аналогичных пункту 4, мы получим, что

$$G(\lambda, z, \tilde{Y}) = \frac{1}{\lambda^2} \|\Phi(X_0) - \Phi(X_0 + \lambda Z)\|^2 + \sum_{k=1}^n \frac{\delta_k}{\lambda} \left[\frac{\Phi(X_0) - \Phi(X_0 + \lambda Z)}{\lambda} \right]$$

и, учитывая, что сумма нормальных случайных величин есть нормальная случайная величина, получим;

(21)

$$G(\lambda, z, \tilde{Y}) = \frac{1}{\lambda^2} \|\Phi(X_0) - \Phi(X_0 + \lambda Z)\|^2 + \xi \frac{\|\Phi(X_0) - \Phi(X_0 + \lambda Z)\|}{\lambda}.$$

То есть мы находимся в условиях пункта 5, где роль σ играет $1/\lambda^2$, следовательно справедлива

Т е о р е м а 3. Пусть $\Phi(x)$ взаимнооднозначная функция непрерывно дифференцируема в точке $X_0 \in M$, причем матрица

$$W_1 = [J(X_0)^T J(X_0)]^{1/2}$$

имеет обратную. Тогда оценка, даваемая формулой (5), истинного значения величины X_0 сходится при $\lambda \rightarrow 0$ к значению X_0 с вероятностью единица, причем при достаточно малых λ имеет место следующее асимптотическое представление:

$$\tilde{X} - X_0 = \lambda \xi W_1^{-1} + o((\lambda n)^2),$$

где $\xi \in \mathcal{N}(0, 1)$.

7. Заключение.

Таким образом, предложенную формулу (5), дающую оценку решения уравнения (1), можно использовать для получения приближенного решения уравнения (1) с наперед заданной точностью.

Л и т е р а т у р а

1. ХАЛФИН Л.А. Статистический подход к методам приближенных вычислений.-ДАН СССР, 144, № 6, (1962), 1229-1231.
2. ЛАВРЕНТЬЕВ М.М., ВАСИЛЬЕВ В.Г. О постановке некоторых некорректных задач математической физики. Сибирский математический журнал, УП, № 3, (1966), 559-576.
3. ЛАВРЕНТЬЕВ М.М. О некорректных задачах математической физики. Новосибирск, 1962.
4. ТУРЧИН В.Ф., КОЗЛОВ В.П., МАЛКЕВИЧ М.С. Использование методов математической статистики для решения некорректных задач. УФН, 102, № 3, (1970).
5. ПЕТРОВ А.П. Оценки линейных функционалов для решения некоторых обратных задач.-ЖВМиФ, 7, № 3, (1967), 648-654.
6. ЖУКОВСКИЙ Е.Л., МОРОЗОВ В.А. О последовательной байесовской регуляризации алгебраических систем уравнений. - ЖВМиФ, 12, № 2, (1972).
7. ТИХОНОВ А.Н., АРСЕНИН В.Я. Методы решения некорректных задач. Москва, 1974.
8. ИБРАГИМОВ И.А., ХАСЬМИНСКИЙ Р.З. Асимптотическое поведение некоторых статистических оценок. Теория вероятностей и ее приложения. 17, № 3, 469-486 (1972), 18, № 1, 78-93 (1973).
9. РОББИНС Г. Эмпирический байесовский подход к задачам теории статистических решений.-Сб. Математика, 10:5 (1966), 122-140.

В.Г.Хайдуков, Г.М.Цибульчик

ЦИФРОВОЙ СПОСОБ ФОРМИРОВАНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ И ЕГО
ОПРОБОВАНИЕ НА ЧИСЛЕННЫХ МОДЕЛЯХ

§ I. Описание алгоритма и программы

Процесс фокусировки поля, лежащий в основе формирования изображений в любых линейных системах (например, линзового или голографического типов), изменяющихся во времени по гармоническому закону, может быть описан следующей постановкой задачи для уравнения Гельмгольца в безграничном пространстве (x, y, z) . Выберем для определенности временной фактор в виде $\exp(+2\pi i\nu \cdot t)$.

Имеем

$$\Delta u + (2\pi k)^2 \cdot u = f(x, y, z), \quad (I)$$

где

$$k = \frac{\nu}{v} = \frac{1}{\lambda} \quad - \text{волновое число;}$$

$$f(x, y, z) = 2 \cdot u_0(x, y) \cdot \delta'(z);$$

$u_0(x, y)$ - поле комплексных амплитуд на плоскости $z = 0$. Для обеспечения единственности решения уравнения (I) используем дополнительное условие - условие излучения на бесконечнос-

ти в виде:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{S_R} \left| \frac{\partial u}{\partial R} - i2\pi k u \right|^2 dS_R = 0, \quad (2)$$

которое выделяет из общего решения сходящуюся систему волн. Краевое условие на бесконечности (2) позволяет интерпретировать правую часть уравнения (I) не как влияние внешних источников, а как функцию стоков, распределенных по плоскости $z = 0$. Источники в такой постановке считаются расположенными на бесконечности, при этом они имеют нулевую плотность распределения. Известно [2], что решением задачи (I), (2) в случае $v = \text{const}$ является волновой потенциал двойного слоя, который представляет собой свертку фундаментального решения оператора Гельмгольца с правой частью:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= f(x, y, z) - \frac{1}{4\pi} \frac{e^{+i2\pi kR}}{R} = \\ &= \{2u_0(x, y) \cdot \delta'(z)\} * \left\{ -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{+i2\pi kR}}{R} \right\} = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \left[u_0(x, y) * \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e^{+i2\pi kR}}{R} \right) \right] = \quad (3) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} u_0(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e^{+i2\pi kR_0}}{R_0} \right) dx_0 dy_0. \end{aligned}$$

Здесь $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; $R_0 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2}$; $z > 0$. Свертка, записанная в первых двух строках, производится по трем переменным (x, y, z) , а в остальных строках цепочки равенств (3) имеется в виду двумерная свертка по переменным (x, y) , а z - параметр преобразования.

С другой стороны, можно показать [6,7], что потенциал (3) является решением внешней задачи Дирихле для однородного уравнения (I) в полупространстве $z \geq 0$ (и, соответственно, $z \leq 0$) при заданных граничных значениях поля:

$$u(x, y, z) \Big|_{z=0} = u_0(x, y) \quad (4)$$

и выполнении условий излучения на бесконечности (2).

Таким образом, для описания процесса формирования изображений, основанного на фокусировке заданного поля u_0 по сходящейся системе волн, существуют две модельные постановки задач (I) и (4), приводящие к эквивалентному результату.

Введем важную для дальнейшего рассмотрения операцию двумерного преобразования Фурье, выполняемую по формулам:

$$U(k_x, k_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} u(x, y) \cdot \exp[-i2\pi(k_x \cdot x + k_y \cdot y)] dx dy = F\{u(x, y)\}$$

$$u(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} U(k_x, k_y) \cdot \exp[+i2\pi(k_x \cdot x + k_y \cdot y)] dk_x dk_y = F^{-1}\{U(k_x, k_y)\} \quad (5)$$

где пространственные частоты k_x , k_y связаны с волновым числом $k = 1/\lambda$ известным соотношением

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2. \quad (6)$$

В работе [6] показано, что функции

$$h(x, y; z) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e^{+i2\pi k \cdot R}}{R} \right), \quad (7)$$

имеющей смысл импульсной реакции фокусирующей системы, соответствует пространственный Фурье-образ:

$$H(k_x, k_y; z) = F\{h(x, y; z)\} = \begin{cases} e^{+i2\pi z \cdot \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} & \text{для } k_x^2 + k_y^2 \leq k^2 \\ e^{-2\pi z \cdot \sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k^2}} & \text{для } k_x^2 + k_y^2 > k^2, \end{cases} \quad (8)$$

выполняющий роль передаточной характеристики системы.

С введенными обозначениями интеграл свертки (3) для полупространства $z \geq 0$ может быть записан в следующей эквивалентной форме:

$$u(x, y; z) = F^{-1}\{U_0(k_x, k_y) \cdot H(k_x, k_y; z)\}, \quad (9)$$

где

$$U_0(k_x, k_y) = F\{u_0(x, y)\}.$$

С точки зрения вычислительных затрат алгоритм (9) обладает явным преимуществом по сравнению с прямым вычислением свертки (3), если воспользоваться известным способом быстрого преобразования Фурье (БПФ) [3]. Однако алгоритм БПФ есть численный метод дискретного преобразования Фурье. Кроме того, поле $u_0(x, y)$, представляющее исходную информацию в задаче формирования изображений, может быть задано, например, в сейсмике, только в дискретной и конечной системе точек наблюдения на плоскости $z = 0$. Поэтому необходимо привести дискретные аналоги соотношений (3), (5), (9). Наиболее простой способ учета дискретной структуры и конечных размеров приемной апертуры состоит во введении функции "окна" $b(x, y)$:

$$b(x, y) = \sum_{m=0}^{N_x-1} \sum_{n=0}^{N_y-1} \delta(x - m \cdot \Delta x, y - n \cdot \Delta y), \quad (10)$$

где $\Delta x, \Delta y$ - шаг выборочной решетки в координатном пространстве (x, y) . Теперь интеграл свертки (3) можно записать в дискретной форме:

$$u(x, y; z) = [u_0(x, y) \cdot b(x, y)] \cdot h(x, y; z) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x_0, y_0) \cdot b(x_0, y_0) \cdot h(x - x_0, y - y_0; z) dx_0 dy_0.$$

Выполняя интегрирование с учетом дельта-функций, получим окончательно:

$$u_{pq}(z) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{N_x-1} \sum_{n=0}^{N_y-1} u_{0mn} \cdot h_{p-m, q-n}(z). \quad (II)$$

Здесь и в дальнейшем мы используем обозначения:

$$f(x = m \cdot \Delta x, y = n \cdot \Delta y) \equiv f_{mn}.$$

Применение функций "окна", состоящих из дельта-импульсов, в координатном и спектральном пространствах к (5) дает формулы дискретного двумерного преобразования Фурье:

$$\left. \begin{aligned} U_{st} &= \sum_{m=0}^{N_x-1} \sum_{n=0}^{N_y-1} u_{mn} \cdot e^{-i2\pi \left(\frac{m \cdot s}{N_x} + \frac{n \cdot t}{N_y} \right)} \\ u_{mn} &= \frac{1}{N_x N_y} \sum_{s=0}^{N_x-1} \sum_{t=0}^{N_y-1} U_{st} \cdot e^{+i2\pi \left(\frac{m \cdot s}{N_x} + \frac{n \cdot t}{N_y} \right)} \end{aligned} \right\} \quad (I2)$$

Здесь $U(k_x = s \cdot \Delta k_x, k_y = t \cdot \Delta k_y) \equiv U_{st}$ и $\Delta k_x, \Delta k_y$ - шаг выборочной решетки в спектральном пространстве (k_x, k_y) , определяемый соотношением:

$$\Delta k_x = \frac{1}{N_x \cdot \Delta x}; \quad \Delta k_y = \frac{1}{N_y \cdot \Delta y}. \quad (I3)$$

Соотношения (I2) позволяют записать (9) в следующей дискретной форме:

$$u_{pq}(z) = \frac{1}{N^2} \sum_{s=0}^{N-1} \sum_{t=0}^{N-1} \left\{ \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} u_{0mn} \cdot e^{-i2\pi \left(\frac{m \cdot s}{N} + \frac{n \cdot t}{N} \right)} \right\} \cdot x \quad (I4)$$

$$\times \left\{ \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} h_{mn}(z) \cdot e^{-i2\pi \left(\frac{m \cdot s}{N} + \frac{n \cdot t}{N} \right)} \right\} \cdot e^{+i2\pi \left(\frac{p \cdot s}{N} + \frac{q \cdot t}{N} \right)}, \quad (14)$$

где $N = N_x + N'_x = N_y + N'_y$;

$N_x \times N_y$ - размеры решетки, определяющие область задания поля $u_0(x, y)$;

$N'_x \times N'_y$ - размеры решетки задания функции $h(x, y; z)$.

Сделаем несколько замечаний относительно применения алгоритма (14). Известно [3], что для правильного вычисления свертки с помощью БПФ необходимо предусмотреть меры по подавлению эффектов перекрытия значений функций, участвующих в операции свертки. Цикличность, или периодическое повторение отсчетов функций - свойство, присущее самой дискретной природе алгоритма (14), которое обуславливается заменой интеграла Фурье (5) рядом Фурье (12). Другими словами, процесс дискретизации функции неизбежно сопровождается периодическим повторением Фурье-образа этой функции и наоборот. Таким образом, значения $u_{pq}(z)$, получаемые на выходе алгоритма (14), есть результат свертки двух периодически повторяющихся последовательностей отсчетов функций $u_0(x, y)$ и $h(x, y; z)$. Свойства циклической свертки подробно описаны в работе [3]. Там же указан простой рецепт для борьбы с этим эффектом, который состоит в добавлении нулей к каждой из последовательностей таким образом, чтобы длина каждой "окаймленной" последовательности стала равной сумме длин двух "необнуленных" последовательностей. Это означает, что в формуле (14) под N'_x , N'_y надо понимать число дополнительных нулевых отсчетов, которыми следует окаймить исходную решетку $(N_x \times N_y)$ значений заданного поля $u_0(x, y)$. При выполнении этого правила "окаймление нулями" применение алгоритма (14) и прямое вычисление дискретной свертки в (11) дадут одинаковый результат для значений аргумента p, q , меняющихся в диапазоне $[0, 1, \dots, N - 1]$.

С другой стороны, соотношению (9) можно сопоставить дискретный аналог в несколько иной форме, отличной от (14). Действительно, для спектральной функции $h(k_x, k_y; z)$ нам известна формула (8), позволяющая рассчитать точные значения

этой функции в узлах любой сетки переменных (k_x, k_y) . Тем самым отпадает необходимость в выполнении операции преобразования Фурье функции $h(x, y; z)$. Поэтому вместо (I4) мы можем написать:

$$u_{pq}(z) = \frac{1}{N^2} \sum_{s=0}^{N-1} \sum_{t=0}^{N-1} \left\{ \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} u_{omn} \cdot e^{-i2\pi \left(\frac{m \cdot s + n \cdot t}{N} \right)} \right\} \times$$

(I5)

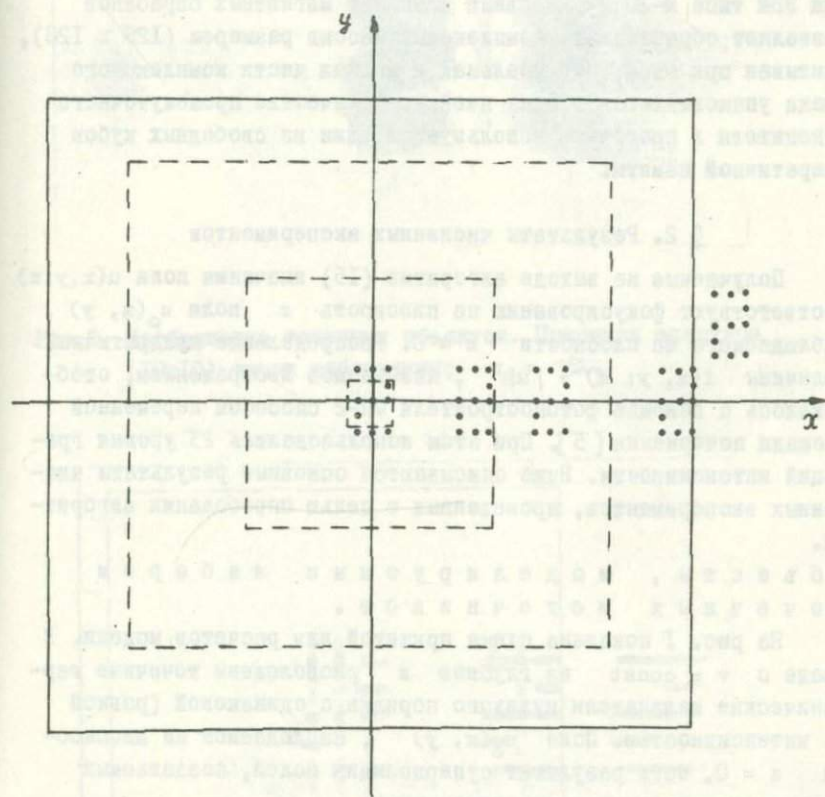
$$\times H(s \cdot \Delta k_x, t \cdot \Delta k_y; z) \cdot e^{+i2\pi \left(\frac{p \cdot s + q \cdot t}{N} \right)}$$

Однако вычисление функции H по (8) в узлах сетки аргументов можно понимать как процесс дискретизации этой функции, который, как указывалось выше, сопровождается периодическим повторением ее Фурье-образа, т.е. последовательности отсчетов функции $h(x, y; z)$ в координатном пространстве (x, y) . При дискретизации $H(k_x, k_y; z)$ мы вычисляем ее значения для тех же самых пространственных частот, что и спектр U_{ost} , а это означает, что в пространственной области период повторения отсчетов $h(x, y; z)$ равен полной длине N (с учетом окаймления) заданного сигнала u_{omn} . Таким образом, в алгоритме (I5), в отличие от (I4), "обнуляется" только решетка данных u_{omn} и, следовательно, становится возможным перекрытие изображений. Оставалось неясным, насколько очевидные преимущества алгоритма (I5) — знание точных значений $H(k_x, k_y; z)$ вместо приближенных и отсутствие одной операции преобразования Фурье — по сравнению с (I4) могут быть "снивелированы" недостатком — возможностью появления ложных изображений. Были реализованы оба алгоритма и в результате численных экспериментов установлено, что в алгоритме (I4) действительно достигается полное исключение эффекта перекрытия изображений, но ценой некоторого общего ухудшения качества изображения. Во всех случаях, когда расстояние от плоскости фокусировки (плоскости объектов) до плоскости наблюдения сравнимо по величине с линейными размерами приемной апертуры, влияние перекрытий пренебрежимо мало, а по качеству изображе-

ния, получаемые алгоритмом (I5), обладают лучшей разрешенностью картины. Учитывая выше сказанное, а также тот факт, что время вычислений по алгоритму (I4) возрастает примерно на $1/3$, а объем занимаемой оперативной и магнитной памяти вдвое по сравнению с (I5), все основные расчеты, иллюстрируемые ниже, проведены по алгоритму (I5).

Основная идея описываемого цифрового способа получения изображений заключается в вычислении двумерной свертки (3) с помощью БПФ. Следует отметить, что реализация БПФ в случае входных массивов, целиком помещающихся в оперативной памяти, особых затруднений не вызывает. Положение дела меняется, когда приходится обрабатывать большие массивы исходных данных, содержащиеся во внешней магнитной памяти. В работе [8] описана программа, реализующая БПФ в случае массивов любой размерности и длины и требующая небольшой оперативной памяти. Эта программа, написанная на языке АЛГОЛ, носит универсальный характер, так как рассчитана на электронно-вычислительные машины достаточно широкого класса. Однако для работы с этой программой требуется как минимум четыре одновременно задействованных магнитных запоминающих устройства (магнитофоны, диски), работающих в режиме постоянного обмена с оперативной памятью машины. Опыт показывает, что магнитофоны относятся к числу наименее надежных узлов во всей системе вычислительной машины. К тому же число обращений к внешней памяти в программе [8] настолько велико, что время, затрачиваемое на все операции обмена, превосходит время, необходимое для проведения самих вычислений.

В связи с последним замечанием для реализации БПФ в случае больших входных массивов была написана программа, рассчитанная на возможности конкретной ЭВМ М-222, что позволило оптимизировать такие технические характеристики, как быстродействие и надежность. В качестве примера укажем, что на получение одной фотографии, т.е. изображения, сфокусированного в (128×128) точках плоскости z , программа расходует ~ 10 минут машинного времени. Схематически работа программы заключена в выполнении следующих операций. В качестве основного накопителя в процессе счета используются магнитные барабаны, что значительно повышает надежность выполнения операций обме-



**Рис. I. Объекты, моделируемые набором
точечных источников**

на с оперативной памятью. Максимальный размер решетки преобразования ($N \times N$) определяется емкостью магнитных барабанов. Для ЭВМ типа М-20 минимальный комплект магнитных барабанов позволяет обрабатывать комплексный массив размером (128×128), учитывая при этом, что реальная и мнимая части комплексного числа упаковываются в одну ячейку. В качестве промежуточного накопителя в программе используется один из свободных кубов оперативной памяти.

§ 2. Результаты численных экспериментов

Получаемые на выходе алгоритма (15) значения поля $u(x, y; z)$ соответствуют фокусированию на плоскость z поля $u_0(x, y)$, наблюдаемого на плоскости $z = 0$. Распределение квадратичной величины $i(x, y; z) = |u|^2$, называемое изображением, отображалось с помощью фотопостроителя ФП-2 способом переменной площади почернения [5]. При этом использовались 23 уровня градаций интенсивности. Ниже описываются основные результаты численных экспериментов, проведенных с целью опробования алгоритма.

Объекты, моделируемые набором точечных источников.

На рис. 1 показана схема принятой для расчетов модели. В среде с $v = \text{const}$ на глубине z расположены точечные гармонические излучатели нулевого порядка с одинаковой (равной I) интенсивностью. Поле $u_0(x, y)$, наблюдаемое на плоскости $z = 0$, есть результат суперпозиции полей, создаваемых каждым элементарным излучателем вида:

$$\frac{1}{R} \cdot e^{+i2\pi(v \cdot t - k \cdot R)}$$

Расстояние между соседними источниками принято равным $1,8 \lambda$, где $\lambda = 1/k$ - длина волны. Шаг выборочной решетки в приемной апертуре составил $\Delta x = \Delta y = \Delta = 0,6 \lambda$.

На рис. 2, 3, 4 показаны изображения точечных источников, расположенных на глубине $z = 15 \lambda$ для приемной апертуры, имеющей размеры соответственно (10×10), (50×50) и (96×96) точек наблюдения. На рис. 1 соответствующие апертуры

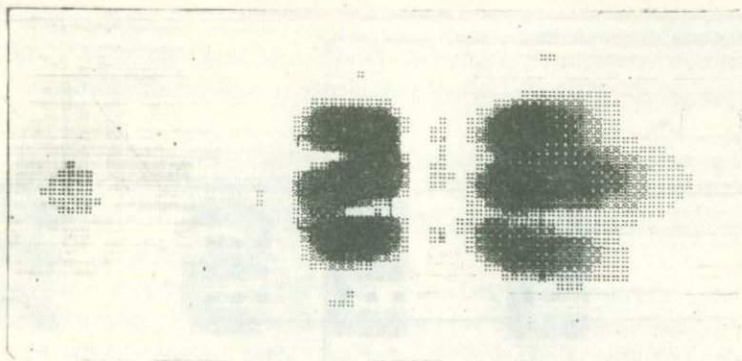


Рис.2. Изображение точечных объектов. Приемная апертура (10x10) точек наблюдения; $z_0 = 15\lambda$.

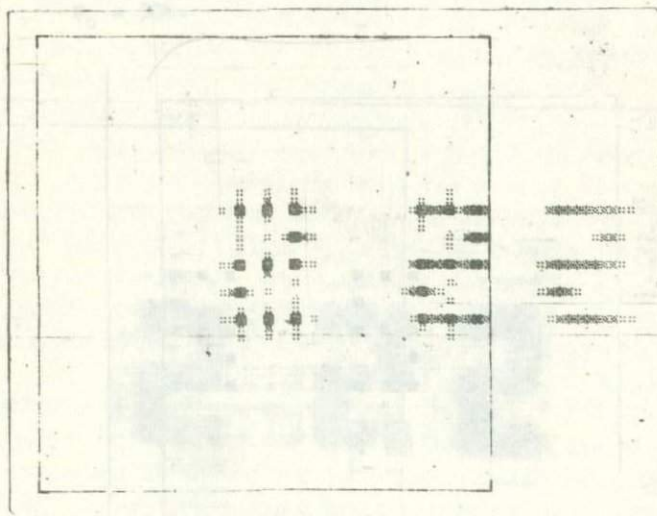


Рис.3. Изображение точечных объектов. Апертура (50x50); $z_0 = 15\lambda$.

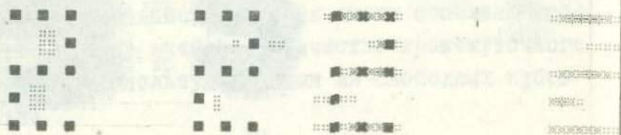


Рис.4. Изображение точечных объектов. Апертура (96x96);
 $z_0 = 15\lambda$.

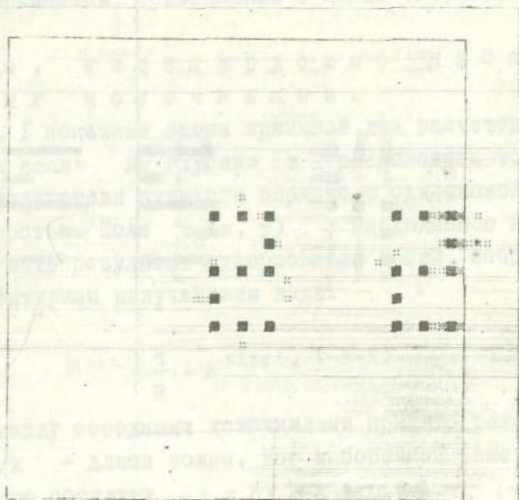


Рис.5. Изображение точечных объектов. Апертура (50x50);
 $z_0 = 3\lambda$.

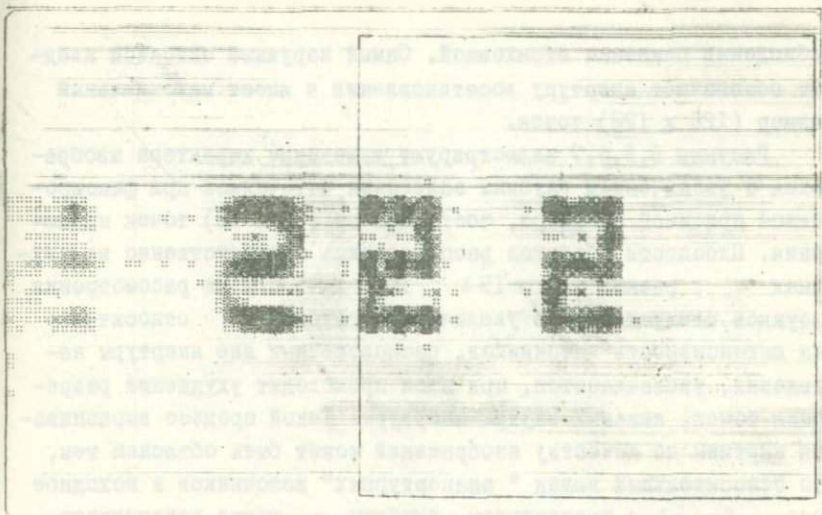


Рис.6. Изображение точечных объектов. Апертура (50x50)

$$z_0 = 30\lambda.$$

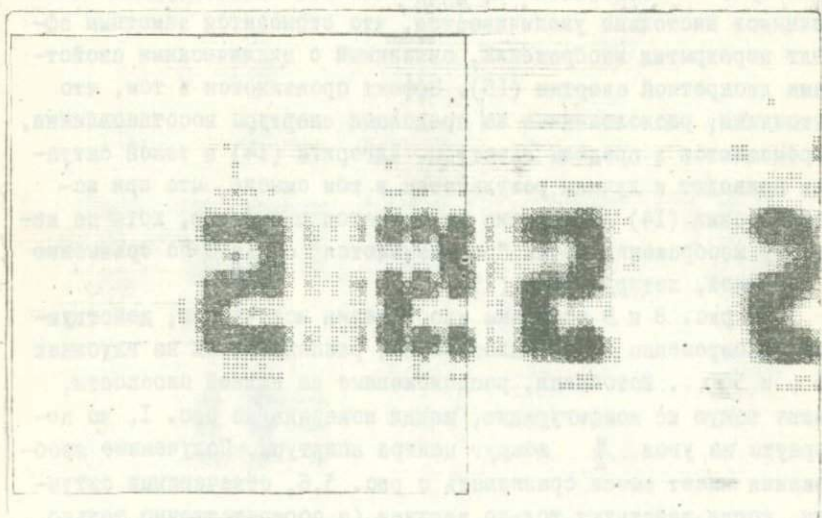


Рис.7. Изображение точечных объектов. Апертура (50x50);

$$z_0 = 45\lambda.$$

наблюдения показаны штриховкой. Самый наружный сплошной квадрат обозначает апертуру восстановления и имеет максимальный размер (128 x 128) точек.

Рисунки 5,3,6,7 иллюстрируют изменение характера изображения с увеличением глубины залегания источников при фиксированной приемной апертуре, состоящей из (50 x 50) точек наблюдения. Плоскости объектов располагались соответственно на глубинах z , равных 3λ , 15λ , 30λ и 45λ . Из рассмотрения рисунков следует, что с увеличением глубины z относительная интенсивность источников, расположенных вне апертуры наблюдения, увеличивается, при этом происходит ухудшение разрешения точек, лежащих внутри апертуры. Такой процесс выравнивания картины по качеству изображений может быть объяснен тем, что относительный вклад "заапертурных" источников в исходное поле $u_0(x, y)$ с увеличением глубины z также увеличивается. Другими словами, с удалением плоскости объектов от приемной апертуры точки по яркости изображения выравниваются при общем уменьшении разрешающей способности системы. На глубине $z = 45\lambda$ относительная интенсивность "заапертурных" источников настолько увеличивается, что становится заметным эффект перекрытия изображений, связанный с циклическими свойствами дискретной свертки (15). Эффект проявляется в том, что источники, расположенные за пределами апертуры восстановления, перемещаются в пределы апертуры. Алгоритм (14) в такой ситуации приводит к лучшим результатам в том смысле, что при использовании (14) перекрытие исключается полностью, хотя по качеству изображений точки "размазываются" сильнее по сравнению с картиной, которую дает (15).

На рис. 8 и 9 показаны изображения источников, действующих одновременно в двух плоскостях, расположенных на глубинах 15λ и 30λ . Источники, расположенные на нижней плоскости, имеют такую же конфигурацию, какая показана на рис. 1, но повернуты на угол $\frac{\pi}{2}$ вокруг центра апертуры. Полученные изображения имеет смысл сравнивать с рис. 3,6, отвечающими ситуации, когда действуют только верхние (и соответственно только нижние) источники. Из сравнения этих пар изображений следует, что влияние нижних источников при фокусировании верхних точек оказывается незначительным, тогда как верхние источники при

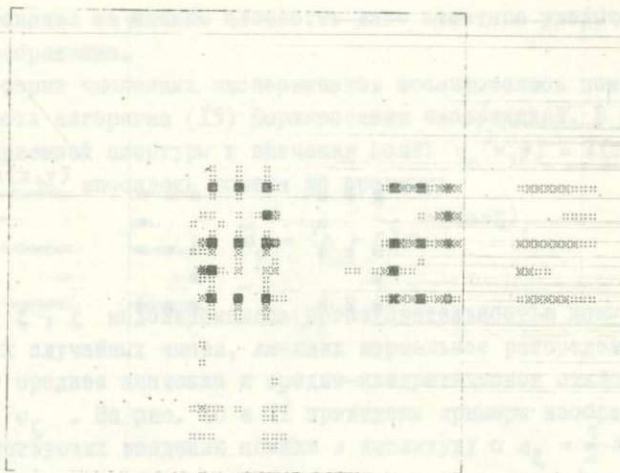


Рис.8. Изображение точечных объектов, расположенных в верхней плоскости. Апертура (50x50); $z_0 = 15\lambda$.

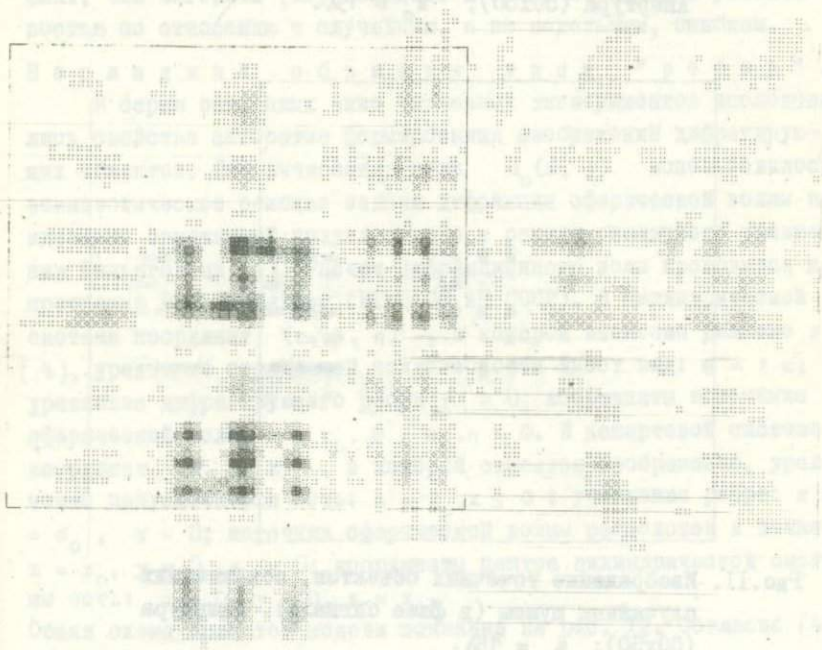


Рис.9. Изображение точечных объектов, расположенных в нижней плоскости. Апертура (50x50); $z_0 = 30\lambda$.

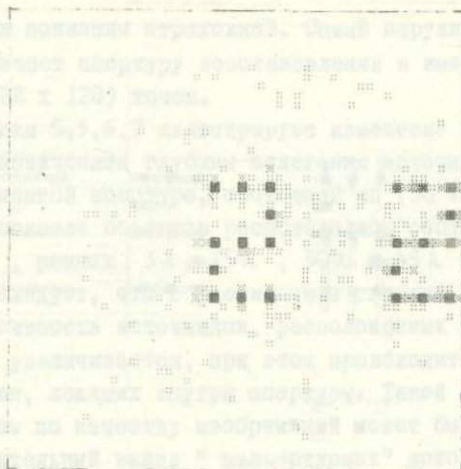


Рис. IО. Изображение точечных объектов, осложненных случайным шумом (в амплитуде сигнала). Апертура (50x50); $z_0 = 15\lambda$.

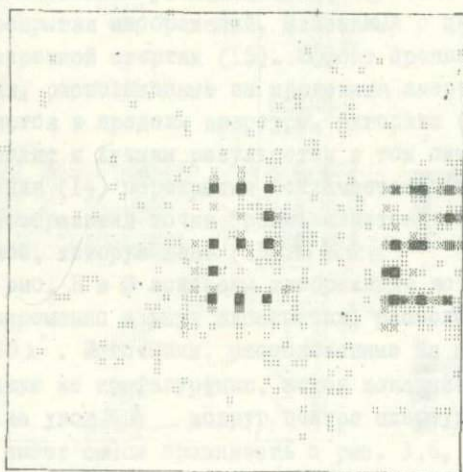


Рис. II. Изображение точечных объектов, осложненных случайным шумом (в фазе сигнала). Апертура (50x50); $z_0 = 15\lambda$.

фокусировании на нижнюю плоскость дают заметное увеличение шума в изображении.

В серии численных экспериментов исследовалась помехоустойчивость алгоритма (15) формирования изображений. В каждой точке приемной апертуры в значения поля: $u_0(x, y) = A(x, y) \cdot e^{-i \cdot \Phi(x, y)}$ вносилась помеха по правилу:

$$\tilde{u}_0 = (A + \xi) e^{-i(\Phi + \zeta)}.$$

Помеха ξ , ζ моделировалась последовательностью некоррелированных случайных чисел, имеющих нормальное распределение, нулевое среднее значение и средне-квадратическое отклонение σ_ξ и σ_ζ . На рис. 10 и 11 приведены примеры изображений, соответствующих введению помехи в амплитуду с $\sigma_\xi = \frac{1}{2} \cdot A_{\max}$ и в фазу с $\sigma_\zeta = \frac{\pi}{2}$ наблюдаемого поля отдельно. Идеальный случай, т.е. без помех, соответствует рис. 3.

Сравнение рис. 3, 10, 11 и рис. 3, 8, 6, 9 иллюстрирует тот факт, что алгоритм (15) обладает достаточно высокой устойчивостью по отношению к случайным, а не модельным, ошибкам.

Негладкие объекты типа "ребер".

В серии описанных ниже численных экспериментов исследовались свойства алгоритма формирования изображений дифрагирующих объектов. Для вычисления поля $u_0(x, y)$ использовалось асимптотическое решение задачи дифракции сферической волны на идеально отражающей полуплоскости в рамках скалярного уравнения Гельмгольца [4]. Расчет дифракционного поля проводился по программе В.Г.Чернякова (ИГиГ СО АН СССР). В цилиндрической системе координат (r, θ, η) , в которой записано решение в [4], уравнение отражающей полуплоскости имеет вид: $\theta = \pm \pi$; уравнение дифрагирующего ребра $r = 0$; координаты источника сферической волны $r = r_0, \theta = \theta_0, \eta = 0$. В декартовой системе координат (x, y, z) , в которой строится изображение, уравнение полуплоскости есть: $z = z_0, x \leq 0$; уравнение ребра: $z = z_0, x = 0$; источник сферической волны расположен в точке $x = x_0, y = 0, z = z_0$; координаты центра цилиндрической системы есть: $x = 0, y = 0, z = z_0$.
Общая схема принятой модели показана на рис. 12. Согласно [4]

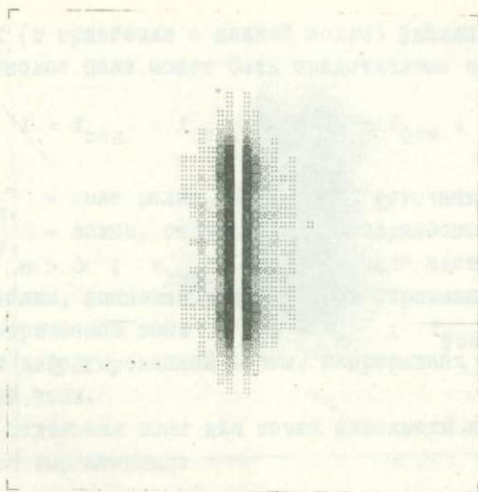


Рис.13. Изображение дифрагирующего ребра по $f_{\text{диф}}$.
 Апертура (52x52); $z_0 = 12,5\lambda$.



Рис.14. Изображение дифрагирующего ребра по $f_{\text{диф}}$.
 Апертура (52x52); $z_0 = 25\lambda$.

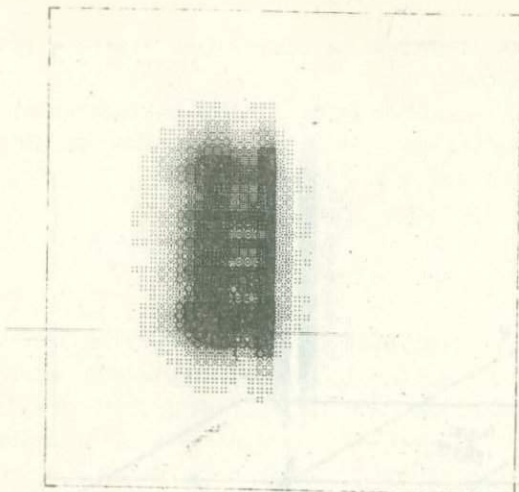


Рис.15. Изображение дифрагирующего ребра по $f_{\text{диф}} + f_{\text{отр}}$.
Апертура (52x52); $z_0 = 12,5\lambda$.

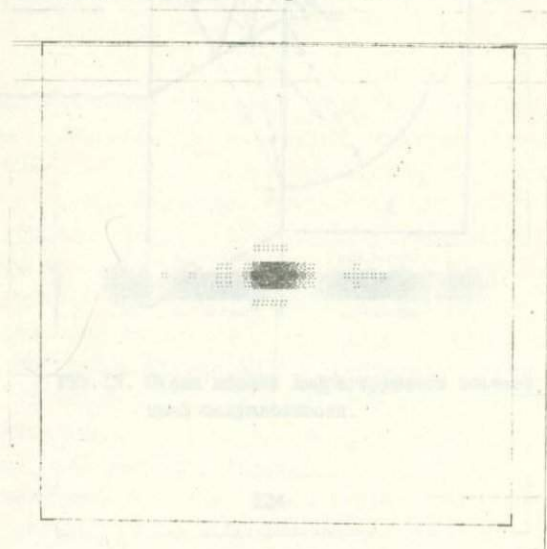


Рис.16. Изображение дифрагирующего ребра по $f_{\text{диф}} + f_{\text{отр}}$.
Апертура (52x52); $z_0 = 25\lambda$.

на больших (в сравнении с длиной волны) удалениях от ребра полное волновое поле может быть представлено следующей суммой:

$$f = f_{\text{пад.}} + f_{\text{отр.}} + f_{\text{диф.}} + f_{\text{фон.}},$$

где $f_{\text{пад.}}$ - поле волны, излученной источником;
 $f_{\text{отр.}}$ - волна, отраженная от полуплоскости в полупространство $\theta > 0$; $f_{\text{диф.}}$ - "диффузная" часть поля дифрагированной волны, компенсирующая разрыв отраженной волны на границе геометрической тени $\theta = \pi - \theta_0$; $f_{\text{фон.}}$ - "фоновая" часть поля дифрагированной волны, непрерывная на границе геометрической тени.

Поля отдельных волн для точек плоскости наблюдения $z = 0$ описываются выражениями:

$$f_{\text{пад.}} = \frac{\exp[-ik\sqrt{r^2 + r_0^2 + \eta^2 - 2r \cdot r_0 \cdot \cos(\theta - \theta_0)}]}{\sqrt{r^2 + r_0^2 + \eta^2 - 2r \cdot r_0 \cdot \cos(\theta - \theta_0)}},$$

$$f_{\text{отр.}} = \frac{-\exp[-ik\sqrt{r^2 + r_0^2 + \eta^2 - 2r \cdot r_0 \cdot \cos(\theta + \theta_0)}]}{\sqrt{r^2 + r_0^2 + \eta^2 - 2r \cdot r_0 \cdot \cos(\theta + \theta_0)}},$$

$$f_{\text{диф.}} = \text{sign}(\pi - \theta_0 - \theta) \cdot \frac{W(w)}{\rho} \cdot e^{-ik\rho},$$

где

$$w = |\theta + \theta_0 - \pi| \cdot \sqrt{\frac{k \cdot r_0 \cdot r}{\pi \rho}},$$

$$\rho = \sqrt{(r + r_0)^2 + \eta^2},$$

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + z_0^2},$$

$$r = \sqrt{x^2 + z_0^2},$$

$$\eta = y.$$

$W(w)$ — специальная функция, выражающаяся через интегралы Френеля. По своему физическому смыслу "фоновое" слагаемое описывает излучение энергии из малой окрестности ребра. Оценки, следующие из теории [4], показывают, что в окрестности границы тени интенсивность $f_{\text{фон}}$ на порядок меньше интенсивности других слагаемых. Численные эксперименты показали, что учет $f_{\text{фон}}$ не приводит к сколько-нибудь заметному изменению полученных изображений.

Расчет поля дифрагированных волн проводился для следующих значений параметров: глубина залегания полуплоскости $z_0 = 12,5 \lambda$; источник располагался в начале координат $x_0 = y_0 = z_0 = 0$; шаг выборочной решетки приемной апертуры составил $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0,5 \lambda$; размер решетки — (52 x 52) точек на плоскости $z = 0$;

На рис. 13 показано изображение дифрагирующего ребра, построенное в результате фокусировки "диффузного" слагаемого поля на плоскость $z = z_0$. Из рисунка следует, что максимум интенсивности (области почернения) сосредоточен не на самом ребре, а на двух полосах, отстоящих на расстоянии, равном $\frac{\lambda}{2}$, от точной линии ребра. Это "раздвоение" в изображении ребра объясняется разрывом исходного поля $u_0(x, y) = f_{\text{диф}}$ на границе тени (в данном случае оси y). На рис. 14 приведено изображение поля $u_0(x, y) = f_{\text{диф}}$, сфокусированное на глубину, равную удвоенному расстоянию от плоскости наблюдения до ребра, т.е. $z = 2 \cdot z_0$. Картина, изображенная на рис. 14, требует некоторых пояснений. Из геометрических соображений, основанных на лучевом описании процесса дифракции, следует, что в каждой точке ребра возникает конус дифрагированных волн с углом полураствора, равным углу между ребром и падающим лучом. Продолжение дифрагированных лучей в сторону полупространства $\theta < 0$ приводит к понятию эквивалентного мнимого источника для волн, дифрагированных на ребре. Известно [1], что в тех точках, в которых якобиан перехода от декарто-

вых координат к лучевым координатам обращается в нуль, поле лучей теряет свойства регулярности. Физически это соответствует явлению фокусировки поля, каустики и распределению мнимых источников. Из анализа решения рассматриваемой дифракционной задачи следует, что точки мнимого источника дифрагированных волн распределены по окружности с функцией плотности $w(w)$, проведенной в плоскости, перпендикулярной ребру и проходящей через источник; центр окружности находится в точке ребра, а радиус равен расстоянию от ребра до источника. Таким образом, если бы удалось заменить мнимый источник на действительный процесс излучения, то на плоскости наблюдения $z = 0$ мы получили бы то же самое поле $f_{\text{диф}}$, а ребро в этом случае являлось бы линией каустики. Рис. 14 дает изображение мнимого источника дифрагированных волн, сфокусированное на плоскость $z = 2 \cdot z_0$. На рис. 14, так же как и на рис. 13, отчетливо видны эффекты, связанные с разрывом исходного поля $u_0(x, y) = f_{\text{диф}}$ по границе тени.

Рис. 15, 16 иллюстрируют изображения суммарного поля отраженной и дифрагированной волн, т.е. в этом случае принято: $u_0(x, y) = f_{\text{отр}} + f_{\text{диф}}$. Рис. 15 соответствует фокусировке на плоскость $z = z_0$, рис. 16 - на плоскость $z = 2 \cdot z_0$. Отсутствие разрыва в исходном поле $u_0(x, y)$ приводит к исчезновению "раздвоения" в изображении ребра. На удвоенной глубине интенсивность отраженной волны настолько велика, что фокусирующих свойств алгоритма (15) оказывается недостаточно, чтобы увидеть мнимый источник дифрагированных волн. Фактически рис. 16 отображает только мнимый источник отраженной волны.

В заключение авторы выражают признательность К.Д.Клем-Мусатову за консультации по вопросам решения дифракционной задачи, а также В.Г.Чернякову за предоставление программы и помощь в проведении расчетов дифрагированного поля.

Л и т е р а т у р а

1. БАБИЧ В.М., БУЛДЫРЕВ В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. Гл.ред. физ.-мат.лит., "Наука", М., 1972.

2. ВЛАДИМИРОВ В.С. Уравнения математической физики. Гл.ред. физ.-мат.лит., "Наука", М., 1971.
3. ГОЛД Б., РЭЙДЕР Ч. Цифровая обработка сигналов. "Сов.радио", М., 1973.
4. КЛЕМ-МУСАТОВ К.Д. Принцип Юнга в теории дифракции сейсмических волн.-В сб.: Сейсмические волны в сложно-построенных средах. "Наука", Сибирское отделение, Новосибирск, 1974.
5. РАППОПОРТ М.Б. Автоматическая обработка записей колебаний в сейсморазведке. "Недра", М., 1973.
6. ЦИБУЛЬЧИК Г.М. О формировании сейсмического изображения на основе голографического принципа.-"Геология и геофизика", 1975, № II.
7. Цибульчик Г.М. Анализ решения краевой задачи, моделирующей процесс формирования изображения в сейсмоголографии. "Геология и геофизика", 1975, № I2.
8. SINGLETON R. A method for computing the Fast Fourier Transform with auxiliary memory and limited high-speed storage. IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics, 1967, vol. AU-15, N 2, p. 91-97.

Г.М.Цибульчик, Е.Ю.Деревцов

ОДИН АЛГОРИТМ ОБРАБОТКИ МАЛОЭЛЕМЕНТНЫХ ПЛОЩАДНЫХ
СИСТЕМ НАБЛЮДЕНИЯ

§ I. Постановка задачи.

В последние годы в сейсмике в связи с обсуждением перспектив дальнейшего развития сейсмических методов исследования стала разрабатываться идея применения двумерных, пространственных интерференционных систем наблюдения. В самом общем информативном смысле площадные системы позволяют добиться лучшего согласования размерности наблюдаемого физического поля с "трехмерностью" реальных геологических объектов. Этим площадные системы принципиально отличаются от применяемых в настоящее время на практике линейных профильных систем наблюдения. Однако эффективные пути использования таких систем для решения круга интерпретационных задач сейсмике, вопросы оптимального планирования площадных систем на стадии постановки и методы обработки наблюдений на стадии анализа в настоящее время остаются пока не ясными. Исследование возможностей таких систем в целом составляет сложную, многогранную проблему и, по-видимому, должно вестись в самых различных направлениях.

Целью настоящей работы является рассмотрение одного из аспектов указанной проблемы, связанное с применением малоэле-

ментных и, в общем случае, нерегулярных систем наблюдения. Многоканальность системы наблюдения в этом случае оказывается не адекватной многомерности физического процесса распространения волнового поля. Однако для некоторых задач удается сформулировать постановки, которые согласуются с описанием их в рамках непрерывной теории. Примером такой реализуемой ситуации является задача выделения сигнала в форме плоской волны общего вида:

$$f(t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}_0}{v^*}),$$

распространяющейся с кажущейся скоростью v^* через площадную группу датчиков. Здесь:

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} \quad - \text{ радиус-вектор точки плоскости } z = 0;$$

$$\vec{n}_0 = \sin \beta_0 \cdot \vec{i} + \cos \beta_0 \cdot \vec{j} \quad - \text{ единичный вектор, указывающий направление распространения волны в плоскости } z = 0;$$

β_0 - азимут распространения сигнала;

$$v^* = \frac{v}{\sin \alpha_0} \quad - \text{ кажущаяся скорость сигнала;}$$

v - истинная скорость;

α_0 - угол падения волны.

Определим векторное волновое число \vec{k} (пространственные частоты k_x, k_y) как решение системы двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \vec{k} \cdot \vec{n}_0 &= \frac{v}{v^*} \\ \vec{k} \cdot (-\vec{n}_0) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (I)$$

где v - обычная (временная) частота, измеряемая в герцах; а знак "минус" во втором уравнении означает антиколлинеарность векторов \vec{k} и \vec{n}_0 .

Из (I) имеем:

$$\begin{aligned} \vec{k} &= \frac{v}{v^*} (-\sin \beta_0 \cdot \vec{i} - \cos \beta_0 \cdot \vec{j}) \equiv \\ &\equiv k_x \cdot \vec{i} + k_y \cdot \vec{j}. \end{aligned} \quad (2)$$

В соответствии с теорией обобщенных функций [1] преобразование Фурье плоской волны по переменным (x, y, t) можно записать:

$$F(k_x, k_y, \nu) = \iiint_{-\infty}^{\infty} f(t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}_0}{v}) \cdot \exp[-2\pi i(k_x \cdot x + k_y \cdot y + \nu \cdot t)] dx dy dt = \\ = F(\nu) \cdot \delta(k_x - k_{x0}) \cdot \delta(k_y - k_{y0}), \quad (3)$$

где $F(\nu)$ - одномерное (по времени) Фурье - преобразование функции $f(t)$. Из (3) следует, что Фурье-образ плоской волны в плоскости (k_x, k_y) , проведенной на некоторой фиксированной частоте ν , сосредоточен в точке с координатами $k_x = k_{x0}$ и $k_y = k_{y0}$, зависящими от значений скорости v и углов α_0 и β_0 по формуле (2). Во всех остальных точках (k_x, k_y) этой плоскости $F=0$. В случае недиспергирующих сигналов носитель функции спектральной плотности в трехмерном пространстве (k_x, k_y, ν) представляет собой прямую линию, проходящую через начало координат, азимут и угол наклона которой определяются параметрами сигнала β_0 и v^* . Если результирующее поле представляет собой суперпозицию нескольких плоских волн, бегущих с различными кажущимися скоростями и в различных направлениях, то в спектральном пространстве (k_x, k_y, ν) появится соответствующее число прямых линий (носитель обобщенной функции), вдоль которых распределяется энергия сигнала.

Таким образом, исследование рельефа 3-х мерного спектра $F(k_x, k_y, \nu)$ волнового поля, зарегистрированного на плоскости $z = 0$, позволяет судить о структуре сигналов, слагающих сейсмограммы, выявить зоны повышенной концентрации энергии, которые в координатном пространстве (x, y, t) соответствуют отдельным "прослеживаемым" волнам. Распределение четких максимумов спектра относительно общего фона, диффузно размазанного по всему частотному пространству (k_x, k_y, ν) характеризует соотношение регулярной и нерегулярной, случайной, компонент в общей сложной картине сейсмического поля колебаний.

Задача определения спектра $F(k_x, k_y, \nu)$, в случае регулярных систем наблюдения, по крайней мере, в принципиальном плане затруднений не вызывает, хотя практическая реализация

сталкивается с проблемой обработки большого объема числовой информации и предъявляет повышенные требования к быстродействию вычислительных программ. В настоящее время приемлемое решение может быть достигнуто на основе методов быстрого преобразования Фурье [2]. В случае малочисленных и нерегулярных систем наблюдения прямые методы Фурье-анализа не применимы. Более точно, формальное применение преобразования Фурье в этой ситуации приводит к неудовлетворительным с физической точки зрения результатам. Поясним сказанное следующими рассуждениями.

Пусть волновое поле $f_0(x, y, t)$, регистрируемое на плоскости наблюдения $z = 0$, допускает 3-х мерное Фурье-представление:

$$F_0(k_x, k_y, \nu) = \iiint_{-\infty}^{\infty} f_0(x, y, t) \cdot \exp\{-2\pi i(k_x x + k_y y + \nu t)\} dx dy dt. \quad (4)$$

Конечность и дискретность системы наблюдения приводит к тому, что вместо (4) мы имеем:

$$F(k_x, k_y, \nu) = \iiint_{-\infty}^{\infty} f(x, y, t) \exp\{-2\pi i(k_x x + k_y y + \nu t)\} dx dy dt, \quad (5)$$

где наблюдаемое поле $f(x, y, t)$ связано с истинным $f_0(x, y, t)$ с помощью функции "окна" $b(x, y)$:

$$f(x, y, t) = f_0(x, y, t) \cdot b(x, y),$$

$$b(x, y) = \sum_{m=1}^n \delta(x - x_m, y - y_m). \quad (6)$$

В выражении для функции "окна" $b(x, y)$ учтен факт дискретности и конечности системы только относительно пространственных переменных (x, y) , тогда как относительно временной оси t считается, что поле дано в непрерывной форме и без каких-либо ограничений. В дальнейшем при цифровом анализе нам потребуется ввести квантование поля и по временной оси. Однако ясно, что эффект, вызванный дискретизацией функций по времени, пренебрежимо мал по сравнению с аналогичным эффектом в пространственной области.

Подставляя (6) в (5), получим:

$$F(k_x, k_y, \nu) = \sum_{m=1}^n \left\{ \exp[-2\pi i(k_x x_m + k_y y_m)] \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f_0(x_m, y_m, t) \cdot e^{-2\pi i \nu t} dt \right\} = \quad (7)$$

$$= \sum_{m=1}^n F_0(\vec{r}_m, \nu) \cdot \exp[-2\pi i \vec{k} \cdot \vec{r}_m].$$

Применяя преобразование Фурье (по частоте ν), мы можем представить (7) в виде сейсмограммы, полученной в результате суммирования трасс площадной системы с временными сдвигами τ_m , соответствующими параметрам сигнала (азимуту β_0 и кажущейся скорости v^*):

$$f_{\beta_0 v^*}(t) = \sum_{m=1}^n f_0(\vec{r}_m, t + \tau_m), \quad (8)$$

где

$$\tau_m = \frac{x_m \sin \beta_0 + y_m \cos \beta_0}{v^*}. \quad (8a)$$

С другой стороны, выражение (7) может быть представлено в следующей эквивалентной форме:

$$F(k_x, k_y, \nu) = F_0(k_x, k_y, \nu) * B(k_x, k_y).$$

Здесь свертка выполняется по переменным (k_x, k_y) .

Функция $B(k_x, k_y)$ имеет смысл диаграммы направленности системы и является преобразованием Фурье функции "окна" (6):

$$B(k_x, k_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} b(x, y) \cdot \exp[-2\pi i(k_x \cdot x + k_y \cdot y)] dx dy = \quad (9)$$

$$= \left\{ \sum_{m=1}^n \exp[-2\pi i \vec{k} \cdot \vec{r}_m] \right\}.$$

Имеем

$$F(k_x, k_y, \nu) = \iint_{-\infty}^{\infty} F_0(k'_x, k'_y, \nu) \cdot B(k_x - k'_x, k_y - k'_y) dk'_x dk'_y. \quad (10)$$

Выражения (9) и (10) показывают, что в случае нерегулярной и малочисленной решетки приборов, диаграмма направленности

$B(k_x, k_y)$, служащая ядром преобразования (10), обладает плохими избирательными свойствами в пространстве (k_x, k_y, ν) и, как следствие этого, функция F будет являться сильно искаженной оценкой истинного спектра F_0 . Мы можем попытаться исправить положение, пропустив каждую трассу $f_0(x, y, t)$ через, подходящим образом, подобранный фильтр $h(x, y, t)$:

$$f_0(x, y, t) \cdot h(x, y, t),$$

где свертка производится только во временной области.

Из (5) имеем

$$F(k_x, k_y, \nu) = \iiint_{-\infty}^{\infty} f_0(x, y, \tau) \cdot b(x, y) \cdot h(x, y, \tau) \cdot \exp\{-2\pi i(k_x x + k_y y + \nu t)\} dx dy dt d\tau = \quad (11)$$

$$= \sum_{m=1}^n \{ \exp[-2\pi i(k_x x_m + k_y y_m)] \cdot [\int_{-\infty}^{\infty} f_0(x_m, y_m, t) \cdot h(x_m, y_m, t) \cdot e^{-2\pi i \nu t} dt] \} = \sum_{m=1}^n \{ F_0(\vec{r}_m, \nu) \cdot H(\vec{r}_m, \nu) \cdot \exp[-2\pi i \vec{k} \cdot \vec{r}_m] \}.$$

Выполняя преобразование Фурье по частоте ν , можно представить (11) в виде сейсмограммы, получаемой в результате обработки данных площадной системы по схеме "фильтр сумма":

$$f_{\beta_0 \nu^*}(t) = \sum_{m=1}^n \{ f_0(\vec{r}_m, t + \tau_m) \cdot h(\vec{r}_m, t) \}, \quad (12)$$

где знак свертки относится только к временной области, а величина сдвига τ_m определяется параметрами сигнала β_0 ,

ν по формуле (8а). С другой стороны, преобразование (II) можно записать в спектральной области в форме двумерной свертки по переменным k_x, k_y :

$$F(k_x, k_y, \nu) = F_0(k_x, k_y, \nu) * B_1(k_x, k_y, \nu) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} F_0(\vec{k}', \nu) \cdot B_1(\vec{k} - \vec{k}', \nu) d\vec{k}', \quad (13)$$

где ядро преобразования имеет вид:

$$B_1(k_x, k_y, \nu) = \iint_{-\infty}^{\infty} f_n(x, y, \nu) \cdot b(x, y) \cdot \exp[-2\pi i(k_x \cdot x + k_y \cdot y)] dx dy = \\ = \sum_{m=1}^n H(\vec{r}_m, \nu) \cdot \exp(-2\pi i \vec{k} \cdot \vec{r}_m). \quad (14)$$

В отличие от (9) выражение (14) зависит от частоты ν , а свобода в выборе коэффициентов фильтра $H_m(\nu)$ означает возможность управления формой диаграммы направленности системы $B_1(k_x, k_y, \nu)$.

В дальнейшем нас будет интересовать энергетическая величина спектра, равная по определению:

$$P(k_x, k_y, \nu) = F(k_x, k_y, \nu) \cdot \bar{F}(k_x, k_y, \nu) = \\ = \sum_{m, l=1}^n H_m(\nu) \cdot \bar{H}_l(\nu) \cdot F_m(\nu) \cdot \bar{F}_l(\nu) \cdot \exp[-2\pi i \vec{k} \cdot (\vec{r}_m - \vec{r}_l)]. \quad (15)$$

Здесь мы используем обозначения:

$$F_0(\vec{r}_m, \nu) = F_m(\nu); \quad H(\vec{r}_m, \nu) = H_m(\nu),$$

а черта над символом означает комплексное сопряжение. Выражение (15) в соответствии с установившейся терминологией [5] будем называть пространственно-временным спектром.

Из (13) и (15) имеем:

$$P(\vec{k}, \nu) = \iint_{-\infty}^{\infty} F_0(\vec{k}', \nu) \cdot F_0(\vec{k}'', \nu) \cdot V_1(\vec{k} - \vec{k}', \nu) \cdot \bar{V}_1(\vec{k} - \vec{k}'', \nu) d\vec{k}' d\vec{k}'' \quad (16)$$

Из последнего выражения следует, что если бы удалось подобрать такие характеристики фильтров $H_m(\nu)$, которые бы обеспечили необходимые "дельтаобразные" свойства ядра преобразования $V_1(\vec{k} - \vec{k}', \nu) \rightarrow \delta(\vec{k} - \vec{k}')$, то (15) будет неискаженной оценкой истинного энергетического спектра, т.е. $P(\vec{k}, \nu) \rightarrow P_0(\vec{k}, \nu)$. Оказывается, что при некоторых ограничениях, накладываемых на сложность исследуемого волнового поля, в частности, в предположении, что поле состоит из конечного числа плоских волн, такой фильтр определить можно и при сравнительно небольшом числе точек наблюдения. При этом, как будет показано ниже, коэффициенты искомого оптимального фильтра выражаются через значения входного спектра, т.е. диаграмма направленности V_1 оказывается функцией не только геометрических свойств приемной апертуры, но и самого исходного поля. Другими словами, ценой нелинейности удастся повысить разрешающую способность малоэлементной и нерегулярной группы приемников при анализе волнового поля в спектральном пространстве (k_x, k_y, ν) . Ниже дается подробное описание соответствующего алгоритма.

§ 2. Описание алгоритма.

Пусть на горизонтальной плоскости наблюдения задана прямоугольная декартова система координат, на которой имеются n точек (сейсмоприемников), заданных векторами $\vec{r}_m = (x_m, y_m)$. Представим сейсмограммы, оцифрованные с шагом дискретизации $\Delta t = I$, с помощью системы векторов в пространстве R^n :

$$(f_{1t}, f_{2t}, \dots, f_{nt})$$

для $t = 0, 1, 2, \dots, N - 1$.

Перейдем из временной области в частотную с помощью дискретного преобразования Фурье [2]:

$$F_m(\nu) = \sum_{t=0}^{N-1} f_{mt} \cdot e^{-2\pi i \frac{\nu \cdot t}{N}}$$

где ν — целочисленная частота, меняющаяся в тех же пределах, что и t . образуем сумму квадратичных форм вида (15), имеющую смысл полной энергии процесса:

$$E = \sum_{\nu=0}^{N-1} P(\nu, \vec{k}). \quad (17)$$

Искомый фильтр находится из минимизации выражения (17) при линейном ограничении, накладываемом на коэффициенты фильтра:

$$\sum_{m=1}^n H_m(\nu) = 1 \quad \text{— для каждого значения } \nu. \quad (18)$$

Физический смысл условия (18) состоит в требовании, чтобы искомый фильтр пропускал без искажения любую плоскую волну, распространяющуюся со скоростью, соответствующей волновому числу \vec{k} , и оптимально (в смысле наименьших квадратов) подавлял другие волны, соответствующие другим волновым числам, не равным \vec{k} .

Очевидно, что сумма квадратичных форм (17) достигает минимума лишь в том случае, когда каждое слагаемое $P(\nu, \vec{k})$ принимает свое минимальное значение. Поэтому дальнейшее рассмотрение будем проводить для некоторой фиксированной частоты ν . С целью упрощения записи условимся обозначать функцию $P(\nu, \vec{k})$ просто как $P(\vec{k})$; искомые коэффициенты фильтра обозначим через x_m , т.е. $H_m(\nu) \equiv x_m$.

Введем в рассмотрение векторы:

$$a = (F_1 e^{-2\pi i \vec{k} \cdot \vec{r}_1}, F_2 e^{-2\pi i \vec{k} \cdot \vec{r}_2}, \dots, F_n e^{-2\pi i \vec{k} \cdot \vec{r}_n}),$$

$$c = (1, 1, \dots, 1),$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Векторы a , c , $x \in C^n$ со скалярным произведением векторов, определяемым обычным образом:

$$(x, y) = x_1 \cdot \bar{y}_1 + x_2 \cdot \bar{y}_2 + \dots + x_n \cdot \bar{y}_n.$$

С введенными обозначениями квадратичная форма (15) принимает простой вид:

$$P(\vec{k}) = (a, x) \cdot (\overline{a}, \overline{x}),$$

Задача состоит в том, чтобы найти

$$\min_{x \in C^N} \{ (a, x) (\overline{a}, \overline{x}) \}$$

при условии $(c, x) = 1$.

Отметим, что если положить $\vec{x} = \frac{1}{n} c$, то получим стандартный линейный метод вычисления спектра:

$$P(\vec{k}) = \frac{1}{n^2} (a, c) (\overline{a}, c) = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n F_j \overline{F}_j e^{-2\pi i \vec{k} \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_1)},$$

соответствующий операции равновзвешенного суммирования сейсмограмм (?).

Решением сформулированной задачи является: либо множество векторов $x \in C^N$ таких, что $(a, x) = 0$ и $(c, x) = 1$ (при этом $\lambda = 0$); либо множество $\{x \in C^N : (c, x) = 1; a \perp c\}$, где μ - произвольное комплексное число. Ситуация, имеющая место во втором случае, возникает только тогда, когда регистрируемое поле состоит из одной плоской волны. Если поле представляет собой сумму нескольких волн, то функция $\min \{P(\vec{k})\}$ всегда обращается в нуль (векторы a и c при любом \vec{k} неколлинеарны). Кроме того, в обоих случаях имеется произвол в выборе коэффициентов фильтра. Поэтому естественно наложить на коэффициенты фильтра условие минимальности его нормы, учитывая его с некоторым весом ϵ , имеющим смысл интенсивности вводимого дополнительно, "регуляризирующего", шума. Объединив два условия на минимум в одно, получим окончательно задачу:

$$\left. \begin{aligned} (a, x) \cdot (\overline{a}, \overline{x}) + \epsilon(x, x) \rightarrow \min \\ (c, x) = 1 \end{aligned} \right\}, \quad (19)$$

которая теперь имеет единственное решение. По аналогии с [5]

назовем метод нахождения пространственно-временного спектра с помощью фильтра x , являющегося решением поставленной задачи, методом с высоким разрешением.

Для задачи (19) функция Лагранжа есть:

$$\varphi(x, \lambda) = (a, x) \cdot (\overline{a, x}) + \varepsilon(x, x) - \lambda \cdot [(c, x) - 1]. \quad (20)$$

Дифференцируя (20) по x и λ , получим систему из $n + 1$ уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (a, x) \cdot \overline{a, x} + \varepsilon \cdot x - \lambda \cdot c &= 0 \\ (c, x) &= 1 \end{aligned} \right\}, \quad (21)$$

решение которой дает интересующие нас величины:

$$\left. \begin{aligned} \min \{P(k)\} = \lambda &= \frac{\varepsilon \cdot (\varepsilon + |a|^2)}{n(\varepsilon + |a|^2) - (c, a) \cdot (\overline{c, a})} \\ E(\varepsilon, a) = (a, x) \cdot (\overline{a, x}) &= \frac{\varepsilon^2 \cdot (c, a) \cdot (\overline{c, a})}{[n(\varepsilon + |a|^2) - (c, a) \cdot (\overline{c, a})]^2} \\ (a, x) &= \frac{\varepsilon \cdot (c, a)}{n(\varepsilon + |a|^2) - (c, a) \cdot (\overline{c, a})} \\ x &= \frac{(\varepsilon + |a|^2) \cdot c - (c, a) a}{n(\varepsilon + |a|^2) - (c, a) \cdot (\overline{c, a})} \end{aligned} \right\} \cdot (22)$$

Здесь $|a|^2 = (a, a)$. Отметим, что $|a|^2$ не зависит от k , поскольку $|a|^2 = a_1 \cdot \overline{a_1} + a_2 \cdot \overline{a_2} + \dots + a_n \cdot \overline{a_n} = F_1 \cdot \overline{F_1} + F_2 \cdot \overline{F_2} + \dots + F_n \cdot \overline{F_n}$. Перечислим некоторые свойства функции $E(\varepsilon, a)$:

$$I) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} E(\varepsilon, a) = \frac{1}{n^2} (c, a) \cdot (\overline{c, a}) = E(a).$$

Это означает, что при значениях параметра $\epsilon \rightarrow \infty$ исследуемый метод переходит в линейный.

$$2) \quad \max_{\epsilon} E(\epsilon, a) = \frac{|a|^2}{n} = \max E(a).$$

Действительно, из оценки

$$(c, a) \cdot (\overline{c, a}) \leq \sqrt{(c, c)} \cdot \sqrt{(a, \overline{a})} \cdot \sqrt{(c, c)} \cdot \sqrt{(\overline{a}, a)} = n \cdot |a|^2,$$

получаем: $\max E(a) = \frac{|a|^2}{n}$. Величины $(c, a) \cdot (\overline{c, a})$ и $n \cdot |a|^2$ совпадают, если все компоненты вектора a вещественны и равны между собой. В этом случае из (22) следует:

$$\max E(\epsilon, a) = \frac{|a|^2}{n}.$$

$$3) \quad \frac{E(\epsilon, a)}{E(a)} = \left[1 + \frac{1}{\epsilon} \left(|a|^2 - \frac{(c, a) \cdot (\overline{c, a})}{n} \right) \right]^{-2} \leq 1.$$

В силу неравенства $|a|^2 \geq \frac{(c, a) \cdot (\overline{c, a})}{n}$ последнее отношение всегда меньше или равно единице.

Сравним характеристики направленности одной и той же группы датчиков, соответствующие как линейному методу оценивания спектра, так и рассматриваемому методу. Для этого найдем пространственно-временной спектр как функцию от \vec{k} в случае, когда сигнал представляет собой плоскую монохроматическую волну единичной амплитуды, распространяющуюся со скоростью, соответствующей волновому числу \vec{k}_0 .

Имеем

$$a_0 = (e^{-2\pi i(\vec{k} - \vec{k}_0) \cdot \vec{r}_1}, e^{-2\pi i(\vec{k} - \vec{k}_0) \cdot \vec{r}_2}, \dots, e^{-2\pi i(\vec{k} - \vec{k}_0) \cdot \vec{r}_n}).$$

Из (9) и (14) следует:

$$\left. \begin{aligned} V(\vec{k} - \vec{k}_0) &= \frac{1}{n} (a_0, c) \\ V_1(\vec{k} - \vec{k}_0) &= (a_0, x) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Из сравнения (23) и (22) непосредственно получаем:

$$E(a_0) = |V(\vec{k} - \vec{k}_0)|^2; \quad E(\epsilon, a_0) = |V_1(\vec{k} - \vec{k}_0)|^2.$$

Из перечисленных выше свойств функции $E(\epsilon, a)$ следует, что при $\vec{k} = \vec{k}_0$ имеет место равенство $E(\epsilon, a_0) = E(a_0) = 1$ (достигается максимум, свойство 2). Нули диаграмм направленности совпадают между собой. В остальных точках в силу свойства 3 величина $E(\epsilon, a_0)$ меньше $E(a_0)$. Таким образом, характеристика направленности в рассматриваемом методе обладает лучшими избирательными свойствами по сравнению с характеристикой линейного метода.

Пока поле состоит из одной плоской волны, преимущество метода с высоким разрешением велико; оно становится не слишком большим в случае поля, образованного двумя или более плоскими волнами. Действительно, ни при каких значениях векторного волнового числа \vec{k} компоненты вектора a не становятся вещественными и равными между собой. Следовательно, не достигает максимума функция $E(\epsilon, a)$ и это ухудшает картину.

Исследуем количественно то улучшение, которое дает метод с высоким разрешением по сравнению с линейным методом, если поле состоит из суперпозиции двух плоских волн, бегущих со скоростями, соответствующими волновым числам \vec{k}_1 и \vec{k}_2 . В этом случае

$$\begin{aligned} F &= (e^{2\pi i \vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 + \rho \cdot e^{2\pi i \vec{k}_2 \cdot \vec{r}_1}, \dots, e^{2\pi i \vec{k}_1 \cdot \vec{r}_n + \rho \cdot e^{2\pi i \vec{k}_2 \cdot \vec{r}_n}}) = \\ &= (e^{2\pi i \vec{k}_1 \cdot \vec{k}_1 [1 + \rho \cdot e^{2\pi i (\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{r}_1}, \dots \\ &\dots, e^{2\pi i \vec{k}_1 \cdot \vec{r}_n [1 + \rho \cdot e^{2\pi i (\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{r}_n}], \end{aligned}$$

где первая волна имеет единичную амплитуду, а ρ - амплитуда второй волны.

Для удобства введем следующие обозначения:

$$\delta_j = e^{-2\pi i(\vec{k} - \vec{k}_1) \cdot \vec{r}_j},$$

$$\epsilon_1 = \rho \cdot e^{2\pi i(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{r}_1},$$

$$\delta_{j1} = \delta_j \cdot \epsilon_1 = e^{-2\pi i(\vec{k} - \vec{k}_1) \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_1)},$$

$$\epsilon_{j1} = 1 + \epsilon_j + \epsilon_1 + \epsilon_j \cdot \epsilon_1.$$

Тогда $a(\vec{k})$ запишется в простом виде:

$$a(\vec{k}) = (\delta_1 [1 + \epsilon_1], \delta_2 [1 + \epsilon_2], \dots, \delta_n [1 + \epsilon_n]).$$

Из (22) имеем

$$E(\epsilon, a) = \frac{\epsilon^2 \sum_{j=1}^n \delta_{j1} \epsilon_{j1}}{[n(\epsilon + \sum_{j=1}^n \epsilon_{jj}) - \sum_{j=1}^n \delta_{j1} \epsilon_{j1}]^2}. \quad (24)$$

Поскольку $a(k_1) = (1 + \epsilon_1, 1 + \epsilon_2, \dots, 1 + \epsilon_n) = a_1$, то

$$E(\epsilon, a_1) = \frac{\epsilon^2 \sum_{j=1}^n \epsilon_{je}}{[n(\epsilon + \sum_{j=1}^n \epsilon_{jj}) - \sum_{j=1}^n \epsilon_{je}]^2}. \quad (25)$$

Предположим, что $\rho < 1$ и что в точке a_1 функция $E(a)$ достигает своего максимума (этот максимум соответствует первой из волн, бегущей со скоростью, соответствующей волновому числу \vec{k}_1). Это означает, что при $\vec{k} \neq \vec{k}_1$:

$$\frac{E(a)}{E(a_1)} = \frac{\sum_{j,e=1}^n \delta_{je} \epsilon_{je}}{\sum_{j,e=1}^n \epsilon_{je}} < 1. \quad (26)$$

Необходимо подчеркнуть различие между максимумом, о котором говорится здесь, и той наивысшей гранью функции, которая фигурирует при описании свойств функции $E(\epsilon, a)$ (свойство 2). Из (24), (25) и (26) имеем:

$$\frac{E(\epsilon, a)}{E(\epsilon, a_1)} = \frac{\sum_{j,e=1}^n \delta_{je} \epsilon_{je}}{\sum_{j,e=1}^n \epsilon_{je}} \left[\frac{n(\epsilon + \sum_{j=1}^n \epsilon_{jj}) - \sum_{j,e=1}^n \epsilon_{je}}{n(\epsilon + \sum_{j=1}^n \epsilon_{jj}) - \sum_{j,e=1}^n \delta_{je} \epsilon_{je}} \right] < \frac{E(a)}{E(a_1)} < 1.$$

Полученное отношение показывает, что максимум функции $E(\epsilon, a)$ достигается в той же точке, что и максимум функции $E(a)$, и что он более крутой, чем максимум функции $E(a)$. Зададимся вопросом, всегда ли выполняется неравенство (26). Ответ на этот вопрос в общем случае отрицателен. Тем не менее можно утверждать, что при достаточных размерах приемной апертуры и количестве приемников неравенство (26) справедливо. При малых n необходимо выполнение некоторых условий, накладываемых на аргументы экспонент, входящих в вектор a , и которые сводятся к тому, чтобы линейные комбинации этих аргументов лежали в промежутке от 0 до π . В случае произвольного числа волн с различными интенсивностями и нерегулярного расположения приемников необходимые ограничения на аргументы строго сформулировать не удается.

Таким образом, в распределении интенсивности поля в зависимости от волнового вектора \vec{k} могут присутствовать максимумы, не соответствующие волнам (ложные максимумы).

Рассмотренный в этом разделе алгоритм в иной, вероятностно-статистической трактовке, был предложен в работах [4,5], в которых основные соотношения получены методом максимального правдоподобия. В [6] введен целый класс спектральных оценок, названных степенными оценками, частным случаем которых явля-

ются результаты работы [4,5]. Ниже кратко рассматривается возможность применения степенных оценок в исследуемой нами детерминированной постановке задачи оценивания пространственно-временного спектра. С этой целью представим квадратичную форму

$$P(\vec{k}) = (a, x) \cdot (\overline{a, \vec{x}}) + \varepsilon \cdot (x, x)$$

в матричном виде,

$$P(\vec{k}) = (Mx, x),$$

где $M = N + \varepsilon \cdot I$, I - единичная матрица, а N есть матрица ранга 1:

$$\begin{pmatrix} a_1 \bar{a}_1 & a_1 \bar{a}_2 & \dots & a_1 \bar{a}_n \\ a_2 \bar{a}_1 & a_2 \bar{a}_2 & \dots & a_2 \bar{a}_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n \bar{a}_1 & a_n \bar{a}_2 & \dots & a_n \bar{a}_n \end{pmatrix}.$$

Можно проверить, что собственные числа матрицы M есть:

$$\lambda_1 = S_1 \bar{S}_1 + S_2 \bar{S}_2 + \dots + S_n \bar{S}_n + \varepsilon = \|a\|^2 + \varepsilon; \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_n = \varepsilon;$$

а собственный вектор, соответствующий собственному числу λ_1 :

$$b_{\lambda_1} = \left(\frac{S_1}{\|a\|^2}, \frac{S_2}{\|a\|^2}, \dots, \frac{S_n}{\|a\|^2} \right).$$

Спектральные степенные оценки имеют вид [6]:

$$P_r(\vec{k}) = \left[\sum_{j=1}^n \lambda_j^r \left| \sum_{l=1}^n b_{jl} e^{\frac{-ik \cdot \vec{r}_l}{\sqrt{n}}} \right|^2 \right]^{\frac{1}{r}}. \quad (27)$$

Здесь $\{b_j\} = \{(b_{j1}, b_{j2}, \dots, b_{jn})\}$; $j = 1, 2, \dots, n$ - ортонормальная система собственных векторов матрицы M . В нашем случае имеющихся собственных чисел и собственного вектора оказывается достаточно для того, чтобы найти (27) в явном

виде. Заметим, что $b_1 = b_{\lambda_1}$ и в наших обозначениях

$$\left| \sum_{l=1}^n b_{1l} \frac{e^{-ik \cdot r_l}}{\sqrt{n}} \right|^2 = \frac{(a, c) \overline{(a, c)}}{n \|a\|^2}.$$

Воспользовавшись свойством

$$\sum_{j=1}^n \left| \sum_{l=1}^n b_{jl} \frac{e^{-ik \cdot r_l}}{\sqrt{n}} \right|^2 = 1,$$

запишем (27) в простом виде:

$$P_r(\vec{k}) = [(\|a\|^2 + \epsilon)^r \frac{(a, c) \overline{(a, c)}}{n \|a\|^2} - \epsilon^r \frac{(a, c) \overline{(a, c)}}{n \|a\|^2} + \epsilon^r]^{\frac{1}{r}}. \quad (28)$$

При $r = g > 0$ имеем

$$P_g(\vec{k}) = \frac{\epsilon}{\sqrt{n} \|a\|^2} \left\{ \left[\frac{\|a\|^2}{\epsilon} + 1 \right]^{g-1} (a, c) \overline{(a, c)} + \|a\|^2 n \right\}^{\frac{1}{g}},$$

а при $r = -g$

$$P_{-g}(\vec{k}) = \frac{\sqrt[n]{\|a\|^2} (\epsilon + \|a\|^2)}{\left\{ \left[1 - \left(1 + \frac{\|a\|^2}{\epsilon} \right)^g \right] (a, c) \overline{(a, c)} + n \|a\|^2 \left(1 + \frac{\|a\|^2}{\epsilon} \right)^g \right\}^{\frac{1}{g}}}.$$

В частности, при $g = 1$

$$P_1(\vec{k}) = \frac{(a, c) \overline{(a, c)}}{n} + \epsilon; \quad P_{-1}(\vec{k}) = \frac{n\epsilon(\epsilon + \|a\|^2)}{n(\epsilon + \|a\|^2) - (a, c) \overline{(a, c)}}.$$

В наших обозначениях с точностью до нормирующего множителя имеем:

$$P_1(\vec{k}) = (a, c) \overline{(a, c)} + \epsilon(c, c); P_{-1}(\vec{k}) = \overline{(a, x)}(a, x) + \epsilon(x, x) = \min\{P(\vec{k})\}.$$

Численное сравнение оценок между собой и с $E(\epsilon, a)$ показало, что в рассматриваемом детерминированном подходе лучший результат дает величина $E(\epsilon, a)$. Оценки $P_r(\vec{k})$ дают менее рельефную картину пространственно-временного спектра, по сравнению с $E(\epsilon, a)$. Объясняется это, по-видимому, тем, что в функции $E(\epsilon, a)$ мы отбрасываем "шум" $\epsilon(x, x)$, и это значительно проясняет картину. Используя детерминированный подход к задаче, следовало бы преобразовать оценки $P_r(\vec{k})$, вычитая из них некоторую функцию, зависящую от ϵ (уровня "шума") и r . Эта функция легко устанавливается при $r = I$ и $r = -I$; при произвольных r вид этой функции установить не удалось.

§ 3. Результаты численного эксперимента.

С целью реализации алгоритма была составлена программа, вычисляющая пространственно-временный спектр в узлах эквидистантной двумерной сетки по координатам k_x , k_y и изображающая его графически с помощью процедуры "карта". В программе используется в несколько измененном виде процедура БПФД [3]. Способ опробовался на тестовых сейсмограммах, для расчетов которых в качестве сигнала использовался импульс Пузырева [7]

$$f_j(t) = \sum_{i=1}^g A_i \cdot e^{-\beta \cdot (t-1,1-t_{0i}+\tau_{ij})^2} \cdot \sin[2\pi \cdot \nu_0 \cdot (t-1,1-t_{0i}+\tau_{ij}) + \alpha],$$

где $\beta = 2$

$\nu_0 = 0,75 \text{ гц}$

$\alpha = \frac{3}{4} \pi$

A_i - масштабный множитель, выражающий "амплитуду" i - й

волны;

t_{oi} - "время вступления" i -й волны, соответствующее центру группы датчиков;

τ_{ij} - относительное время запаздывания i -й волны, "набегающее" в процессе распространения плоского фронта через группу датчиков;

i - индекс датчика, указывающий положение датчика на плоскости наблюдения.

Длительность импульса $\sim 2,3$ сек.

На рис. I показана схема расположения датчиков площадной системы, использованной в расчетах. Относительная задержка τ_{ij} i -й волны для j -го датчика вводилась по очевидной формуле:

$$\tau_{ij} = \frac{\vec{v}_i \cdot \vec{r}_j}{(v_i^*)^2} = \frac{|\vec{r}_j|}{v_i^*} \cdot \cos(\beta_j - \varphi_i),$$

где \vec{r}_j - радиус-вектор положения j -го датчика;

β_j - азимут j -го датчика;

φ и v_i^* - азимут и величина кажущейся скорости i -го сигнала.

Все сведения о параметрах волн, использовавшихся при расчете тестовых сейсмограмм, представлены в таблице:

Номер сигнала	A_i см	v_i^* км/сек	Градусы φ_i	t_{oi} сек
1	1,0	∞	0	0
2	0,5	3,0	45	4,4
3	0,5	3,0	55	5,3
4	0,7	2,0	336	9,0
5	0,7	4,0	336	10,5
6	0,6	2,5	160	16,8
7	0,6	2,5	220	19,1
8	0,4	1,5	90	26,2
9	0,4	1,5	180	26,7

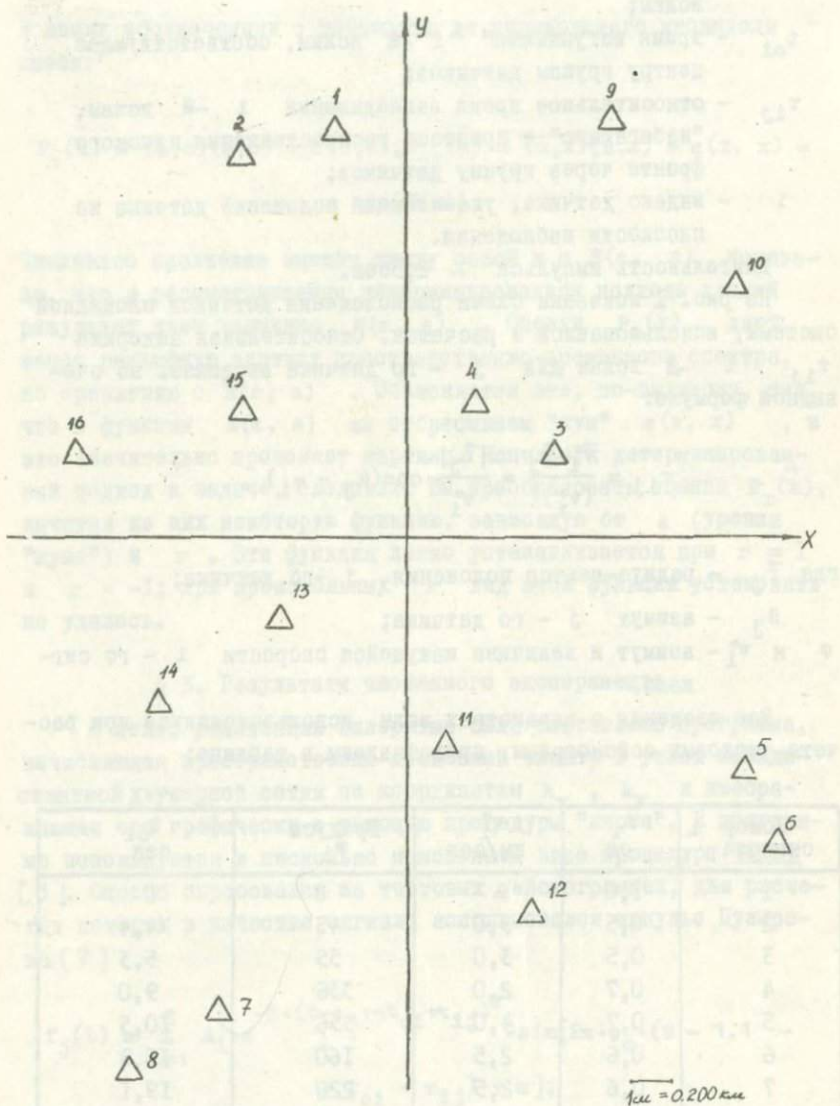


Рис. I. Схема расположения датчиков площадной системы

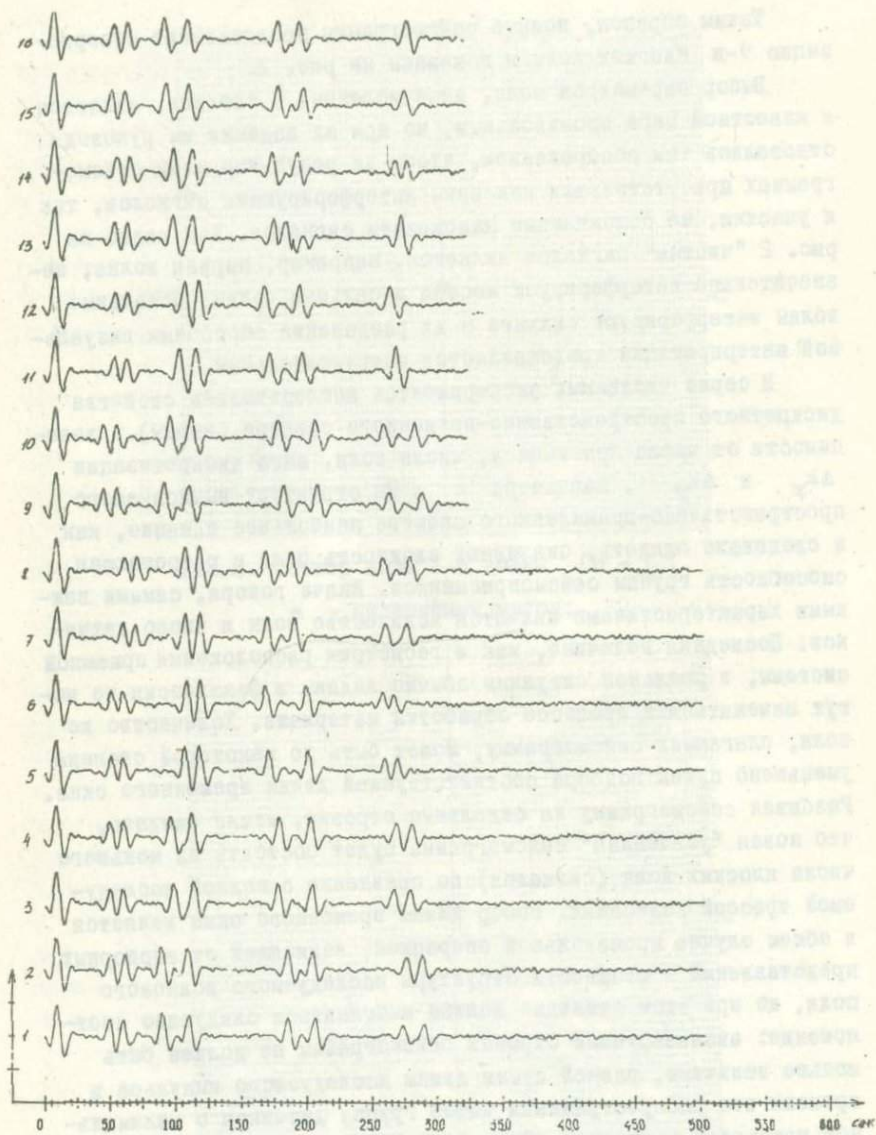


Рис.2. Тестовые сейсмограммы

Таким образом, полные сейсмограммы представляют суперпозицию 9-и плоских волн и показаны на рис. 2.

Выбор параметров волн, перечисленных в таблице, является в известной мере произвольным, но при их задании мы руководствовались тем соображением, чтобы на результирующих сейсмограммах присутствовали как зоны интерферирующих сигналов, так и участки, не осложненные наложением сигналов. Как видно на рис. 2 "чистым" сигналом является, например, первая волна; незначительно интерферирует шестая и седьмая волны; остальные волны интерферируют сильнее и их разделение способами визуальной интерпретации представляется затруднительным.

В серии численных экспериментов исследовались свойства дискретного пространственно-временного спектра (карты) в зависимости от числа приемников, числа волн, шага дискретизации Δk_x и Δk_y , параметра ϵ . На структуру вычисляемого пространственно-временного спектра наибольшее влияние, как и следовало ожидать, оказывают сложность поля и разрешающая способность группы сейсμοприемников. Иначе говоря, самыми важными характеристиками являются количество волн и число датчиков. Последняя величина, как и геометрия расположения приемной системы, в реальной ситуации обычно заданы и фактически не могут изменяться в процессе обработки материала. Количество же волн, слагающих сейсмограмму, может быть до некоторой степени уменьшено путем подбора соответствующей длины временного окна. Разбивая сейсмограмму на отдельные отрезки, можно ожидать, что новая "усеченная" сейсмограмма будет состоять из меньшего числа плоских волн (сигналов) по сравнению с полной исследуемой трассой колебаний. Выбор длины временного окна является в общем случае произвольной операцией, зависящей от априорных представлений о сложности структуры исследуемого волнового поля, но при этом очевидно должно выполняться следующее соотношение: анализируемый отрезок сейсмограммы не должен быть меньше величины, равной сумме длины исследуемого импульса и времени его распространения через группу датчиков с минимальной кажущейся скоростью. Остальные параметры программы (шаг дискретизации карты и величина ϵ) имеют меньшее значение и, кроме того, ими можно управлять в пределах, устанавливаемых возможностями ЭВМ.

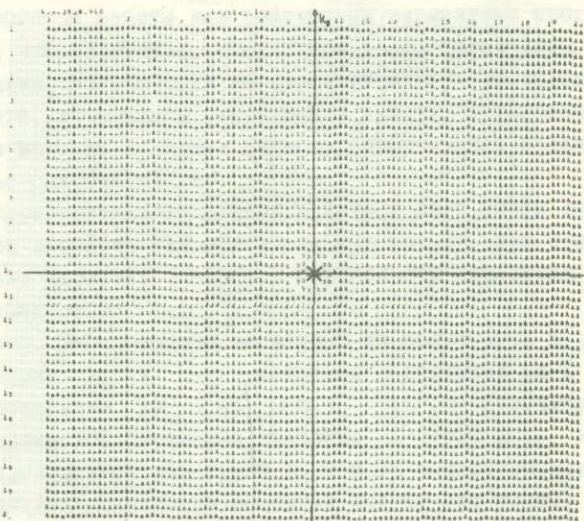
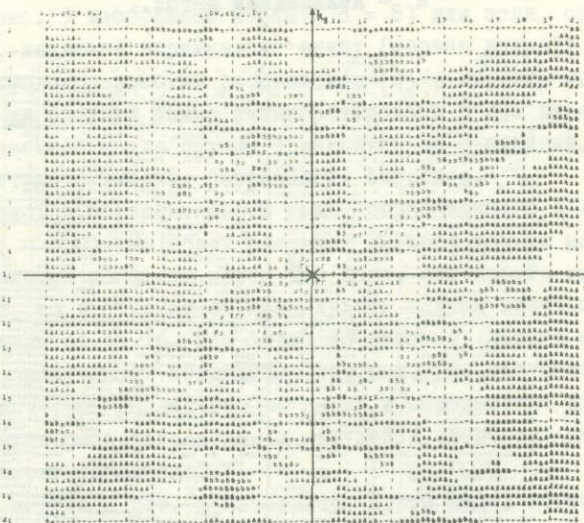


Рис.3. Спектр поля I-й волны ($n = 8$);
а - нелинейный метод;



б - линейный метод.

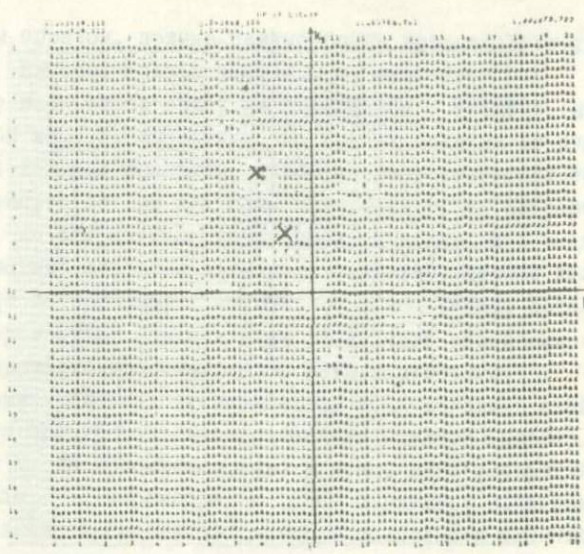
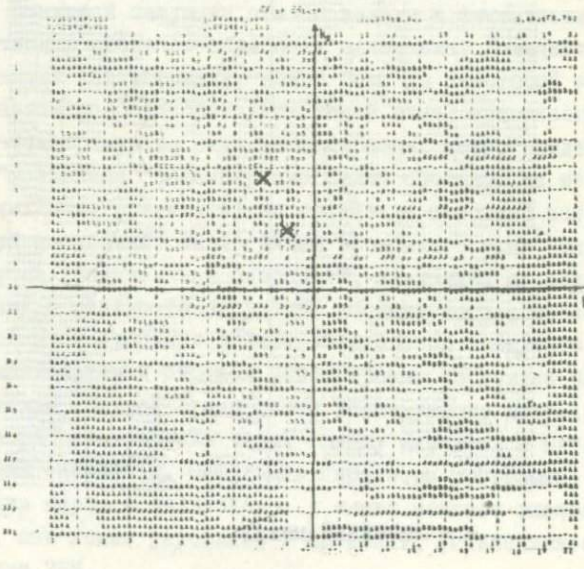


Рис.4. Спектр поля 4-й и 5-й волн ($n = 8$);
а - нелинейный метод.



б - линейный метод.
154

В процессе работы над различными вариантами программ выяснилось, что программы, получающие карты нелинейным и линейным методами, практически не отличаются друг от друга ни временем счета, ни объемом оперативной памяти, в основном расходуемой на массивы исходных данных (оцифрованные сейсмограммы) и их Фурье-преобразование.

Пространственно-временный спектр в виде карты может быть получен на любой из 512 целочисленных частот, при этом предпочтительно выбирать частоту в окрестности максимума энергетического спектра.

На рис. 3-6 помещены некоторые из полученных карт. Во всех примерах k_x и k_y меняются в пределах от -1 до +1; шаг дискретизации $\Delta k_x = \Delta k_y = 0,1$; ν - целочисленная частота равна 100 (истинное значение ≈ 1 гц) и $\epsilon = 0,05$. Расчеты проводились для групп из 8 и 16 сейсμοприемников. Использовались в качестве исходных данных как полные сейсмограммы (рис. 2), так и выбранные отрезки. Для полного разрешения всех девяти волн, имеющих на сейсмограммах, 16 приемников оказалось недостаточно.

На рис. 3 изображены карты ($n = 8$) для поля, состоящего из волны, падающей вертикально снизу (первая волна); карты получены методом с высоким разрешением (а) и линейным методом (б). Эти же рисунки можно интерпретировать и как характеристики направленности для группы приемников из 8 станций. Преимущество метода с высоким разрешением очевидно.

На рис. 4 помещены карты поля, образованного 4-й и 5-й волнами ($n = 8$). На обоих рисунках имеются ложные максимумы.

На рис. 5 показаны карты для поля, состоящего из 4-й и 5-й волн, но в отличие от предыдущего случая количество датчиков увеличено до 16. Как видно из рисунка, ложные максимумы на карте, полученной нелинейным методом, уже отсутствуют. Наблюдается четкое разделение сигналов, и определение их параметров (азимута распространения и кажущейся скорости) по карте производится однозначно.

На следующем рис. 6 изображены карты поля, состоящего из 2-й и 3-й волн для $n = 16$. Сигналы разделить не удается; наблюдаемый на первом рисунке максимум имеет неоднородное строение. Разрешение волн может быть достигнуто только путем

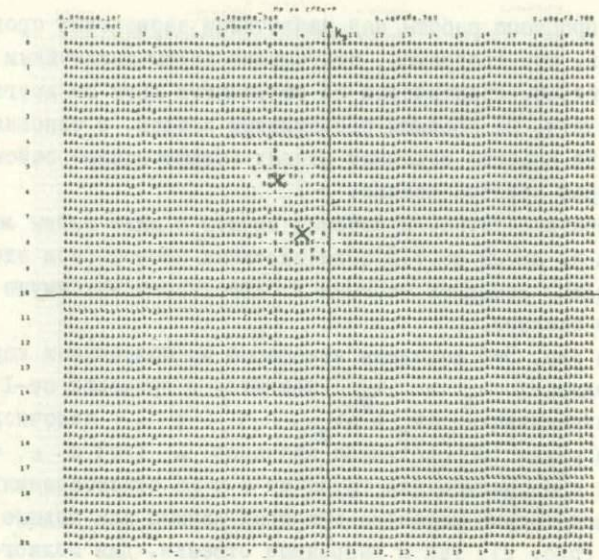
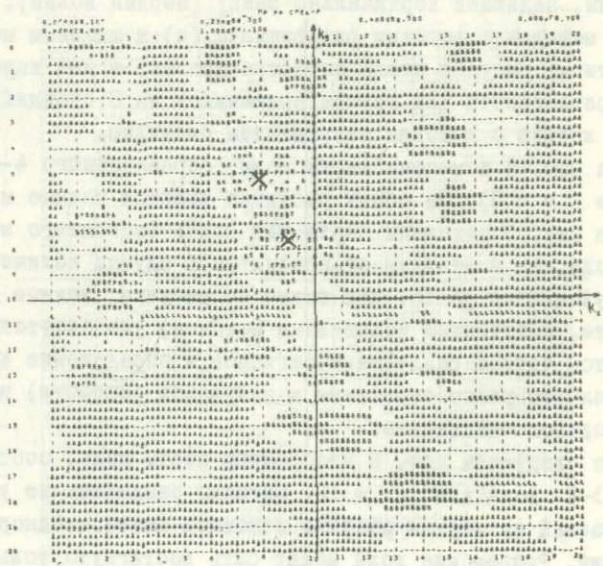


Рис.5. Спектр поля 4-й и 5-й волн ($n = 16$);
а - нелинейный метод.



б - линейный метод.

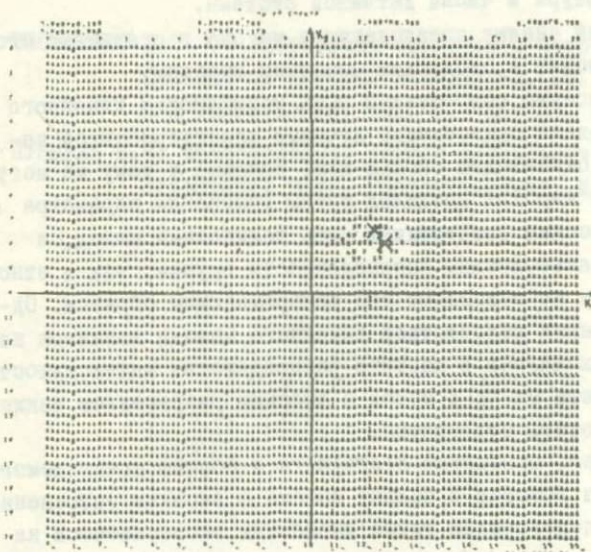
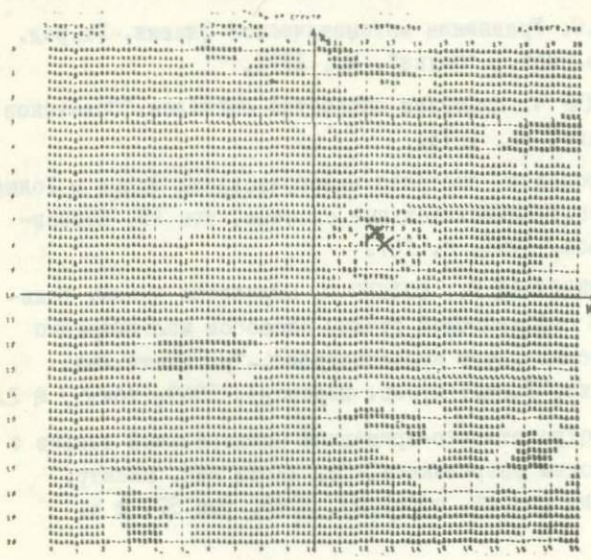


Рис. 6. Спектр поля 2-й и 3-й волн ($n = 16$);
а - нелинейный метод .



б - линейный метод.

увеличения апертуры и числа датчиков системы.

Проведенный анализ предложенного метода и сравнение его с линейным приводит к следующим основным выводам.

Метод с высоким разрешением есть модификация линейного метода. Он обладает существенно лучшими характеристиками направленности и отношением сигнал-шум, которые к тому же могут варьироваться в широких пределах путем изменения параметра ϵ .

Метод с высоким разрешением есть нелинейный метод, и поэтому как характеристика направленности группы, так и отношение сигнал-шум не описывают его исчерпывающим образом. Одним из существенных недостатков линейного метода является наличие ложных максимумов в картине распределения интенсивности поля в зависимости от \vec{k} ; метод с высоким разрешением также не свободен от этого недостатка.

Тем не менее, сравнение последнего и обычно применяемого линейного метода говорит в пользу метода с высоким разрешением. Этот вывод подтвержден также численным экспериментом на ЭВМ.

Л и т е р а т у р а

1. ВЛАДИМИРОВ В.С. Уравнения математической физики. Гл.ред. физ.-мат., "Наука", М., 1971.
2. ГОЛД Б., РЕЙДЕР Ч. Цифровая обработка сигналов. "Советское радио", М., 1973.
3. ГУСЕВ В.Д. Процедуры быстрого преобразования Фурье и Уолша. В сб.: Вычислительные системы, том 45, Новосибирск, 1971, с. 107.
4. КЕЙПОН Д., ГРИНФЕЛЬД Р., КОЛКЕР Р. Обработка данных Большой сейсмической группы способом многомерного максимального правдоподобия.-Тр. ин-та Инж. элект."Радио";(русск. перевод), 1967, том 55, № 2.
5. КЕЙПОН Д. Пространственно-временной спектральный анализ с высоким разрешением.-Тр. ин-та инж. электр. Радио (русск. перевод), 1969, том 57, № 8.

6. ПИСАРЕНКО В.Ф. Об оценивании спектров с помощью нелинейных функций от матрицы ковариаций.—Сб. Вычислительная сейсмология, вып. 6, "Наука", М., 1973.
7. ПУЗЫРЕВ Н.И. Интерпретация данных сейсморазведки методом отраженных волн. Гостехиздат, М., 1959.

А Н Н О Т А Ц И И
статей, помещенных в сборнике

УДК 518.12

"Вычислительный алгоритм и процедуры сглаживания функций, заданных приближенно в узлах нерегулярной сетки на плоскости!" Белоносов А.С., Цецохо В.А. - Сб. "Некорректные задачи математической физики и проблемы интерпретации геофизических наблюдений" (Математические проблемы геофизики). . Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1976, с.6.

В работе излагается алгоритм сглаживания таблично заданных функций двух переменных, основанный на применении понятия разбиения единицы. Предлагается комплекс процедур на языке АЛБФА-6, позволяющий вычислять значения сглаженной функции и ее производных в произвольной точке на плоскости. Рассматривается программа, которая служит примером использования процедур комплекса, и приводятся результаты тестового расчета по этой программе. Библи. - 2 назв., рис. - 1, табл. - 3.

УДК 517.946

"О задаче определения коэффициента отражения плоской области!" Васильев В.Г. - Сб. "Некорректные задачи математической физики и проблемы интерпретации геофизических наблюдений" (Математические проблемы геофизики)". Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1976, с.30.

Задача определения коэффициента отражения плоской области сводится к решению интегрального уравнения первого рода. Решение этого уравнения получено в явном виде.

УДК 517.945

"К задаче восстановления индикатриссы излучения и рельефа по его фотоизображениям!" Гейдт В.В. - Сб. "Некорректные задачи

математической физики и проблемы интерпретации геофизических наблюдений" (Математические проблемы геофизики) . Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1976, с.33.

В случае известной индикатриссы излучения рельефа в работе обобщается автоматизированный метод восстановления рельефа по его фотоизображениям, предложенный М.М.Лаврентьевым и В.Р.Кирейтовым для индикатриссы Ламберта и Буге, на случай произвольной индикатриссы, удовлетворяющей определенным условиям.

В случае неизвестной индикатриссы излучения рельефа в работе предложен автоматизированный метод восстановления рельефа и индикатриссы излучения по фотоизображениям рельефа с помощью вариантов метода наименьших квадратов аппроксимации функции по ее значениям, заданным на некотором неизвестном наборе узлов, с одновременным нахождением узлов, в которых заданы значения функции. Библ. - 4 назв.

УДК 550.345

"Расчет энергии волн цунами" Гусяков В.К. - Сб. "Некорректные задачи математической физики и проблемы интерпретации геофизических наблюдений" (Математические проблемы геофизики) . Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1976, с.46.

В работе излагается метод расчета энергии волн цунами на основе полученных теоретических мареограмм. Энергия цунами сопоставляется с полной сейсмической энергией, излучаемой сосредоточенным источником, моделирующим очаг подводного землетрясения. Изучена зависимость доли энергии цунами от типа и глубины источника, а также от глубины океана в эпицентральной области, на основании чего получены характеристики источников, обладающих наибольшей цунамигенностью. Библ. - 5 назв, рис.7.

УДК 517.945

"О численном решении задачи определения оптической поверхности по ее изображениям" Кирейтов В.Р., Белоносова А.В.- Сб. "Некорректные задачи математической физики и проблемы интерпретации геофизических наблюдений" (Математические проблемы геофизики) . Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1976, с.65.

В статье рассматриваются вопросы, связанные с численным решением задачи определения оптической поверхности по трем ее изображениям в случае, когда яркость оптической поверхности имеет вид степенной функции от косинуса угла излучения. Указанная задача сводится к интегрированию системы уравнений вида $\frac{\partial h}{\partial x} = F(x, y, h)$, $\frac{\partial h}{\partial y} = G(x, y, h)$, для определения рельефной функции $h(x, y)$ оптической поверхности. Авторы предлагают решать выписанную систему уравнений как набор обыкновенных дифференциальных уравнений вдоль линий прямоугольной сетки, склеивать полученные решения в точках пересечения линий и затем интерполировать полученную функцию на интересующую область. Проведенные численные эксперименты показывают, что если система обладает решениями с заданными значениями в фиксированной области, то указанный способ приводит к устойчивому относительно малых вариаций правых частей и начальных данных решению. Библиография - 6 назв., рис. - 4.

УДК 518.12:539,125.523

"Способ "математических ожиданий" для сферических и цилиндрических областей в задачах переноса нейтронов". Морозов А.А., Хисамутдинов А.И. - Сб. "Некорректные задачи математической физики и проблемы интерпретации геофизических наблюдений" (Математические проблемы геофизики). Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1976, с.78.

В работе рассматривается конкретная реализация способа "математических ожиданий" для вычисления потока нейтронов в сферических и цилиндрических объемах. Предлагается способ ускорения расчетов. Приведены результаты численного сравнения способа "математических ожиданий" с аналоговой оценкой "по столкновениям". Библиография - 4 назв., табл. - 2.

УДК 517.948+519.251.9

"Некоторые характеристики статистических оценок решения плохообусловленных систем нелинейных уравнений". Федотов А.М. - Сб. "Некорректные задачи математической физики и проблемы интерпретации геофизических наблюдений" (Математические проблемы геофизики). Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1976,

с.89.

В статье предложена и изучается формула, дающая регуляризованное решение нелинейного уравнения в евклидовом пространстве. Предлагаемая формула получена путем формального использования байесовского подхода для задач статистического оценивания.

Погрешности в задании исходных данных для оценивания решения считаются гауссовскими. Получена асимптотическая оценка для отклонения оценки решения от точного значения. Библ. - 9 назв.

УДК

"Цифровой способ формирования изображений и его опробование на численных моделях" Хайдуков В.Г., Цибульчик Г.М. - Сб. "Некорректные задачи математической физики и проблемы интерпретации геофизических наблюдений" (Математические проблемы геофизики) . Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1976, с.107.

В статье описывается алгоритм формирования изображения в случае гармонического закона изменения полей во времени, основанный на вычислении двумерной свертки с помощью "быстрого преобразования Фурье". Программа, реализующая возможности ЭВМ М-222, рассчитана на обработку площадной дискретной системы размера (128x128) точек наблюдений. Проведено исследование алгоритма на численных моделях, включающих описание объектов набором точечных источников и негладкие дифрагирующие объекты типа "ребер".

УДК

"Один алгоритм обработки малоэлементных площадных систем наблюдений" Цибульчик Г.М., Деревцов Е.Ю. - Сб. "Некорректные задачи математической физики и проблемы интерпретации геофизических наблюдений" (Математические проблемы геофизики) . Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1976, с.131.

Рассматривается один из способов многоканальной обработки данных площадных систем сейсмических наблюдений, действующий по схеме "фильтр+ сумма". Показывается, что в спектральном представлении способ может быть трактован как нелинейный

метод оценивания дельтаобразных пиков в распределении поля в пространстве "частота-волновое число". Исследуются фильтрующие свойства алгоритма (в детерминированной постановке). Показывается, что способ обладает более высокой разрешающей способностью по сравнению с линейным методом суммирования сейсмограмм. Вывод подтвержден результатами численного эксперимента.

НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ФИЗИКИ И ПРОБЛЕМЫ ИНТЕРПРЕТАЦИИ
ГЕОФИЗИЧЕСКИХ НАБЛЮДЕНИЙ

(Математические проблемы геофизики)

Под редакцией

Михаила Михайловича Лаврентьева
и Анатолия Семеновича Алексева

Технический редактор В.С.Сергеев
Художник-оформитель И.Г.Бархатова

Подписано в печать 16/ХП-76г. МНО7599
Формат бумаги 60x90 1/16 Объем 10,3 п.л., уч. изд. 10,7
Тираж 600 экз. Заказ № 338 Цена 70 коп.

Ротапринт ВЦ СО АН СССР, Новосибирск 90

Цена 70 коп

1872