

**АКАДЕМИЯ НАУК СССР  
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ  
ИНСТИТУТ ГЕОЛОГИИ И ГЕОФИЗИКИ**

*Препринт № 1*

**О.Л. Жижимов**

**О ВРАЩЕНИИ  
ИСТОЧНИКОВ  
МАГНИТНОГО  
ПОЛЯ ЗЕМЛИ**

**НОВОСИБИРСК 1988**

Жижимов О.Л. О вращении источников магнитного поля Земли. Новосибирск, 1988. Ис. (Препр./ ИГиГ СО АН СССР; №1 ).

Используя неприводимые представления группы трехмерных вращений  $R_3$ , проведен анализ дрейфа магнитного поля Земли, обусловленный вращением отдельных мультиполей. Показано, что оси вращения квадруполья и октуполья не совпадают, что противоречит гипотезе о прокручивании ядра относительно поверхности планеты. Приведена оценка погрешности анализа.

Предназначена для специалистов в области геомагнетизма.

Анализ вековых вариаций магнитного поля Земли приводит к широко распространенному понятию западного дрейфа (см. /1-3/). Западный дрейф поля понимается как систематическое (от эпохи к эпохе) смещение на запад недипольной составляющей магнитного поля Земли, что проявляется, в частности, в траекториях полюсов отдельных мультиполей на земной поверхности / I /. Идея западного дрейфа часто используется при построении моделей генерации магнитного поля. Существуют теории, в которых дрейф обеспечивается проскальзыванием ядра относительно верхних слоев Земли. В некоторых теориях подобное проскальзывание является в конечном счете основной причиной генерации поля. Обзор работ и многочисленные ссылки приведены в / I /.

Несмотря на постоянное упоминание западного дрейфа, в литературе тем не менее не встречается сколько-нибудь серьезный анализ этого явления.

Настоящая работа посвящена попытке формализации самого понятия дрейфа магнитного поля с привлечением математического аппарата группы трехмерных вращений  $R_3$ . Удобной отправной точкой всех построений является сферический гармонический анализ.

### I. Сферические гармонические коэффициенты как компоненты неприводимых тензоров

Очень часто магнитное поле Земли представляется в виде ряда по сферическим гармоникам. Этот ряд для потенциала внутренних источников выглядит следующим образом / I /:

$$V(\sigma, \varphi) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=0}^j R [g_j^m \cos(m\varphi) + k_j^m \sin(m\varphi)] P_j^m(\cos\sigma). \quad (I)$$

Здесь  $R$  - средний радиус Земли,  $\sigma, \varphi$  - текущие сферические координаты точки на поверхности,  $P_j^m(x)$  - присоединенные полиномы Лежандра. Коэффициенты  $g_j^m$  и  $k_j^m$  вычисляются для каждой эпохи, их значения публикуются (см., например, /4/). Существует простой физический смысл разложения (I): вклад в ряд членов с фиксированным  $j$  соответствует вкладу в суммарное поле  $2j$ -польного источника (диполя, квадруполь, октополь и т.д.), помещенного в центр Земли. При этом набор из  $(2j+1)$  коэффициентов полностью описывает структуру соответствующего мультиполя. По причине, ко-

торая проявится ниже, вместо разложения (I) удобно использовать более симметричное разложение

$$V(\theta, \varphi) = R \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=-j}^j A_{jm} Y_{jm}(\theta, \varphi), \quad (2)$$

где  $Y_{jm}(\theta, \varphi)$  - комплексные сферические функции, образующие полную ортонормированную систему. Выбирая нормировку и фиксируя фазу функций  $Y_{jm}$  согласно [5]

$$Y_{jm}(\theta, \varphi) = (-1)^m e^{im\varphi} \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi} \frac{(j-m)!}{(j+m)!}} (\sin\theta)^m \frac{d^m}{(d\cos\theta)^m} P_j(\cos\theta), \quad (3)$$

с учетом очевидных соотношений

$$Y_{j,-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_{jm}^*(\theta, \varphi), \quad (4)$$

$$A_{jm} = \int V(\theta, \varphi) Y_{jm}^*(\theta, \varphi) d\Omega, \quad (5)$$

можно получить связь между коэффициентами  $g_j^m$ ,  $k_j^m$  и  $A_{jm}$ :

$$\begin{aligned} A_{j0} &= \sqrt{\frac{2\pi}{2j+1}} g_j^0, \\ A_{jm} &= \frac{1}{2} (-1)^m \sqrt{\frac{2\pi}{2j+1}} (g_j^m - i k_j^m), \quad m > 0, \\ A_{j,-m} &= (-1)^m A_{jm}^*. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь "звездочка" означает комплексное сопряжение; интегрирование в (5) проводится по всей сферической поверхности, причем  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ .

Следует обратить внимание на (4) и последнее соотношение в (6): величины  $A_{jm}$  и сферические функции  $Y_{jm}(\theta, \varphi)$  обладают сходными свойствами. Схожесть трансформационных свойств вытекает из (5) и распространяется на поведение  $A_{jm}$  и  $Y_{jm}$  при поворотах системы координат. Совокупность объектов, подобных совокупности величин  $A_{jm}$  ( $m=-j, \dots, j$ ), в литературе принято называть неприводимым сферическим тензором ранга  $j$ .

2. Поведение неприводимых тензоров при поворотах системы координат. Оператор поворота

При поворотах системы координат компоненты  $B_{jm}$  неприводимого сферического тензора ранга  $j$  преобразуются по  $j$ -му представлению группы трехмерных вращений (см. /5-6/):

$$B'_{j,m}(\theta', \varphi') = \sum_{m=-j}^j U_{mm}^{(j)}(\vec{\epsilon}) B_{j,m}(\theta, \varphi), \quad (7)$$

где  $B'_{j,m}$  - компоненты тензора в повернутой системе координат,  $U_{mm}^{(j)}$  - матрица ранга  $j$ , зависящая от аксиального вектора  $\vec{\epsilon}$ , характеризующего величину  $\epsilon$  и направление  $\vec{n}(\theta, \varphi)$  поворота. Связь угловых переменных в исходной  $(\theta, \varphi)$  и повернутой  $(\theta', \varphi')$  системах определяется связью радиус-векторов:

$$\begin{aligned} \vec{z}' &= \vec{z} \cos \epsilon + \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{z})(1 - \cos \epsilon) + (\vec{n} \times \vec{z}) \sin \epsilon, \\ \vec{z} &= \vec{z}' \cos \epsilon + \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{z}')(1 - \cos \epsilon) - (\vec{n} \times \vec{z}') \sin \epsilon. \end{aligned} \quad (8)$$

Выражение (7) может быть записано в более компактном виде

$$B'^{(j)}(\theta', \varphi') = \hat{U}^{(j)}(\vec{\epsilon}) B^{(j)}(\theta, \varphi). \quad (7a)$$

Поскольку функции  $Y_{jm}(\theta, \varphi)$  также являются компонентами неприводимого тензора, закон их преобразования аналогичен (7):

$$Y'_{j,m}(\theta', \varphi') = \sum_{m=-j}^j U_{mm}^{(j)}(\vec{\epsilon}) Y_{j,m}(\theta, \varphi). \quad (9)$$

Выражения (7) и (9) описывают преобразование ковариантных компонент неприводимых тензоров. Термин "неприводимый" связан с тем фактом, что при поворотах системы координат набор из  $(2j+1)$  функций ранга  $j$  преобразуется независимо от других наборов. Это свойство позволяет существенно упростить выкладки при изучении явлений, связанных с какими-либо вращениями.

Используемый в (7) оператор поворота  $\hat{U}^{(j)}(\vec{\epsilon})$  является унитарным

$$\hat{U}^{(j)}(-\vec{\epsilon}) = \{\hat{U}^{(j)}(\vec{\epsilon})\}^{-1} = \{\hat{U}^{(j)}(\vec{\epsilon})\}^+ \quad (10)$$

и унимодулярным

$$\det \| U_{mm'}^{(j)} \| = +1. \quad (II)$$

Здесь и ниже знак "+" означает эрмитовое сопряжение:

$$U_{mm'}^+ = U_{m'm}^*$$

Свойства (IO) и (II) обеспечивают правильный обратный поворот и сохранение длины вектора при поворотах. Нетрудно убедиться в том, что величина  $B^+B$  инвариантна относительно вращений:

$$B^{(j)+} B^{(j)} = B^{(j)+} B^{(j)} \quad (I2)$$

Явный вид матрицы оператора поворота проще всего получить исходя из генератора группы  $\mathcal{R}_3$  - оператора момента импульса  $\hat{J}$ , матрица которого хорошо известна из квантовой механики. В нашем случае

$$U_{mm'}^{(j)}(\vec{\varepsilon}) = \langle jm | e^{-i\vec{\varepsilon}\hat{J}} | jm' \rangle. \quad (I3)$$

Для малых поворотов ( $\varepsilon \ll 1$ ) справедливо разложение

$$\exp[-i\vec{\varepsilon}\hat{J}] \approx 1 - i\vec{\varepsilon}\hat{J} - \frac{1}{2}(\vec{\varepsilon}\hat{J})(\vec{\varepsilon}\hat{J}) + \dots$$

При этом (I3) дает

$$\begin{aligned} U_{mm'}^{(j)}(\vec{\varepsilon}) \approx & (1 - i\varepsilon \cos\theta) \delta_{m,m'} - \\ & - \frac{i}{2} \varepsilon \sin\theta [ e^{-i\phi} \sqrt{(j-m')(j+m'+1)} \delta_{m,m'+1} + \\ & + e^{i\phi} \sqrt{(j+m')(j-m'+1)} \delta_{m,m'-1} ] + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (I4)$$

Можно найти и точное выражение для матрицы поворота /5/

$$\begin{aligned} U_{mm'}^{(j)}(\vec{\varepsilon}) = & \exp[-i\phi(m-m')] \times \\ & \times \sum_{m''} e^{-i\varepsilon m''} d_{mm''}^{(j)}(\theta) d_{m'm''}^{(j)}(\theta). \end{aligned} \quad (I5)$$

Здесь вещественные матрицы  $d_{mm'}^{(j)}(\theta)$  могут быть вычислены, например, через полиномы Якоби  $P_s^{(\mu, \nu)}$  (см. /б/).

$$d_{mm'}^{(j)}(\beta) = \xi_{mm'} \cdot \left[ \frac{s!(s+\mu+\nu)!}{(s+\mu)!(s+\nu)!} \right]^{1/2} \cdot \left( \sin \frac{\beta}{2} \right)^\mu \cdot \left( \cos \frac{\beta}{2} \right)^\nu \cdot P_s^{(\mu, \nu)}(\cos \beta), \quad (16)$$

где

$$\mu = |m - m'|, \quad \nu = |m + m'|, \quad 2s = 2j - \mu - \nu,$$

$$\xi_{mm'} = \begin{cases} 1 & , \quad m' \geq m, \\ (-1)^{m'-m} & , \quad m' < m. \end{cases}$$

### 3. Дрейф поля и вращение источников

Пусть для потенциала магнитного поля внутренних источников на поверхности в различные моменты времени справедливы разложения

$$t = t_1 : \quad V_1(\theta, \varphi) = \sum A_{jm} Y_{jm}(\theta, \varphi), \quad (17)$$

$$t = t_2 : \quad V_2(\theta, \varphi) = \sum B_{jm} Y_{jm}(\theta, \varphi).$$

Если предположить, что все изменение потенциала на поверхности во времени связано лишь с вращением источников относительно оси, проходящей через центр Земли, можно найти связь между  $B_{jm}$  и  $A_{jm}$ :

$$B_{jm} = \sum_{m'} U_{mm'}^{(j)}(\vec{\epsilon}) A_{jm'}. \quad (18)$$

Отличие (18) от (7) связано с тем фактом, что коэффициенты разложения по сферическим гармоникам соответствуют контравариантным компонентам неприводимого тензора, в отличие от ковариантных компонент  $Y_{jm}(\theta, \varphi)$ . Кроме того, вращение физической системы отличается от вращения системы координат знаком поворота. Более компактно (18) может быть записано в виде:

$$B^{(j)} = \hat{U}^{(j)} A^{(j)}, \quad (19)$$

причем из (12) следует

$$A^{(j)} + A^{(j)} = B^{(j)} + B^{(j)}. \quad (20)$$

Временные изменения потенциала реального магнитного поля Земли конечно же не могут быть сведены только к повороту системы источников. Можно говорить лишь о наилучшем приближении к реальной вариации поля, достигаемом тем или иным поворотом.

Здесь необходимо отметить следующее. Во-первых, для каждого мультиполя будет существовать свой оптимальный поворот. Совпадение векторов поворота различных мультиполей должно быть обусловлено лишь очень вескими причинами, например, поворотом ядра Земли (области генерации поля) относительно поверхности. Справедливо и обратное утверждение: существование прокручивания приводит к совпадению поворотов различных мультиполей. Во-вторых, при поиске оптимального поворота каждого мультиполя необходимо сразу исключить влияние преобразований, нарушающих условие (20). Частично это достигается нормировкой коэффициентов разложения

$$\begin{aligned} A^{(j)} &\rightarrow A^{(j)} \cdot [A^{(j)} + A^{(j)}]^{-1/2}, \\ B^{(j)} &\rightarrow B^{(j)} \cdot [B^{(j)} + B^{(j)}]^{-1/2}, \end{aligned} \quad (21)$$

которая не влияет на параметры поворота. Ниже везде коэффициенты  $A^{(j)}$  и  $B^{(j)}$  будут подразумеваться нормированными.

Таким образом, математически задача о нахождении оптимального поворота сводится к задаче нахождения вектора  $\vec{\epsilon}$ , минимизирующего некоторую скалярную функцию, которую удобно выбрать в виде

$$F(\vec{\epsilon}) = \frac{(B - \hat{U}A)^+ \cdot (B - \hat{U}A)}{(B - A)^+ \cdot (B - A)}. \quad (22)$$



Здесь индексы мультипольности  $j$  у матриц  $A$ ,  $B$  и  $U$  опущены.

#### 4. Расчет параметров поворотов

Для анализа параметров вращений были выбраны коэффициенты Гаусса из работы /7/, отражающие состояние магнитного поля Земли за последние сорок лет. Эти коэффициенты по формулам (6) были пересчитаны в компоненты неприводимых тензоров, нормированных согласно (21). Минимизация функции (22) для соседних пятилетних эпох позволила определить соответствующие векторы  $\vec{\xi}^{(j)}$  для  $j=2,3$ . Вычисление  $\vec{\xi}^{(j)}$  проводилось методом наискорейшего спуска. Рассчитать параметры вращения для мультиполей порядка больше, чем  $j=3$ , не удалось из-за ошибок, связанных с неопределенностью определения коэффициентов Гаусса. Результаты рас-

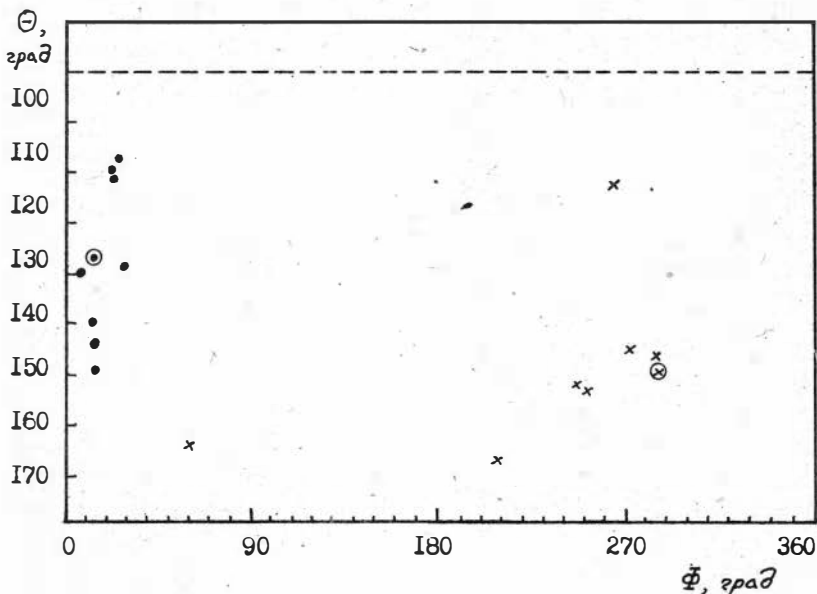


Рис. 1. Угловые координаты осей вращения для  $j=2$  (●) и  $j=3$  (x). Средние значения обведены.

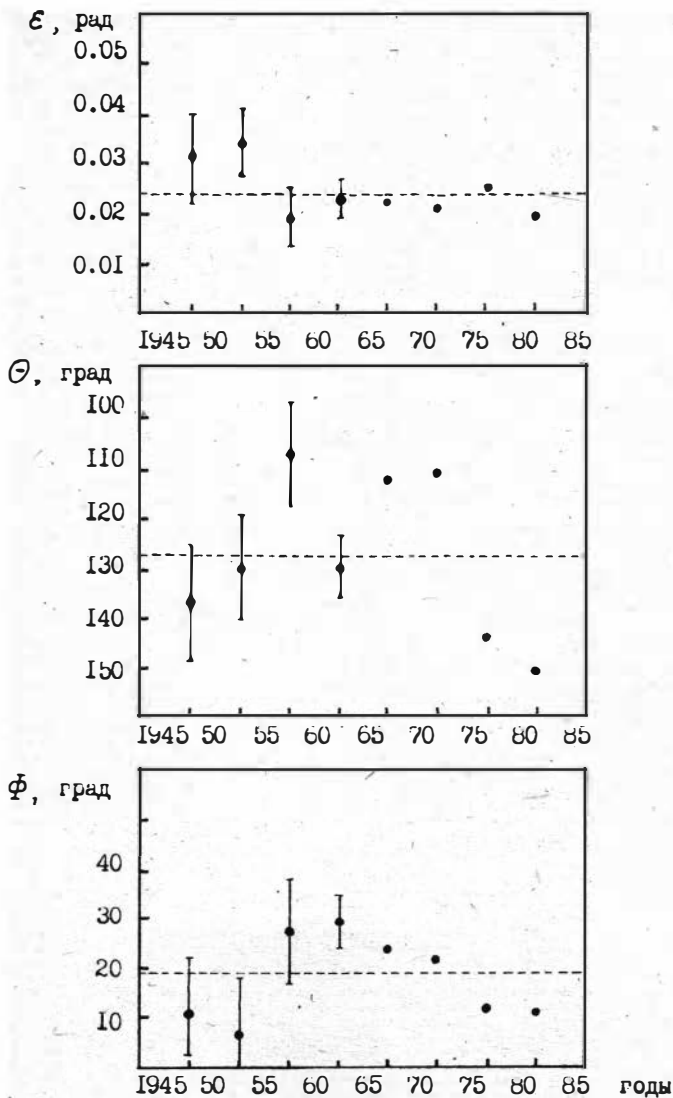


Рис.2. Параметры поворотов квадруполь для различных эпох. Ошибки соответствуют оценке (23). Пунктиром отмечены средние значения.

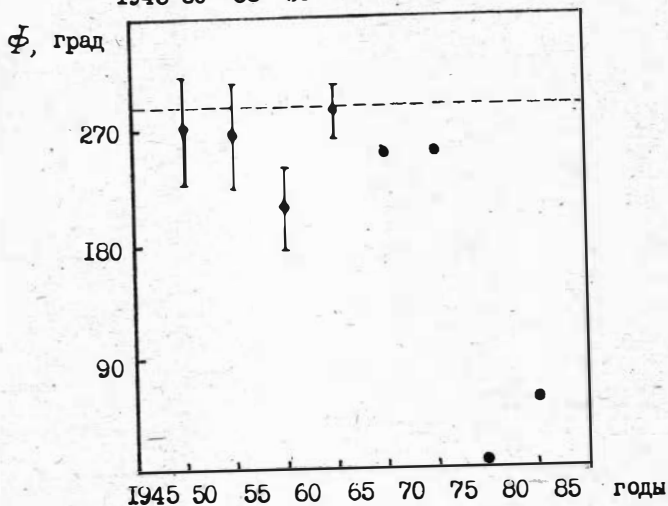
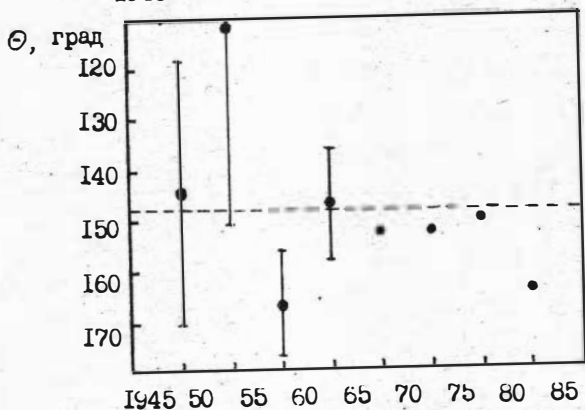
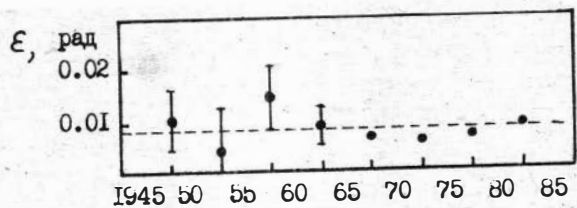


Рис.3. Параметры поворотов октуполя для различных эпох. Ошибки соответствуют оценке (23). Пунктиром отмечены средние значения.

чета приведены на рис.1, на котором отмечены угловые координаты осей вращения. Временная развертка этих координат и углов поворота приведена на рис.2 и 3.

Следует отметить, что публикуемые коэффициенты  $g_j^m$  и  $h_j^m$  содержат некоторую ошибку, связанную со способом вычисления сферических гармонических коэффициентов. Величины этих ошибок обсуждаются, например, в работе [7]. Следствием неопределенности  $g_j^m$  и  $h_j^m$  является неопределенность векторов  $\vec{E}^{(j)}$ . Если бы ошибки  $\Delta g$  и  $\Delta h$  были независимыми, искомая ошибка  $\Delta \vec{E}^{(j)}$  была бы просто суммой модулей отдельных выражений типа

$$\frac{\partial \vec{E}^{(j)}}{\partial g_j^m} \Delta g_j^m + \frac{\partial \vec{E}^{(j)}}{\partial h_j^m} \Delta h_j^m.$$

Однако ввиду явной зависимости ошибок отдельных коэффициентов Гаусса наиболее разумной является следующая оценка ошибки  $\Delta \vec{E}^{(j)}$ :

$$\Delta \vec{E}^{(j)} \approx 2 \cdot \max \left\{ \frac{\partial \vec{E}^{(j)}}{\partial g_j^m} \Delta g_j^m, \frac{\partial \vec{E}^{(j)}}{\partial h_j^m} \Delta h_j^m, (m=1, \dots, j) \right\}. \quad (23)$$

Удвоение ошибки связано с неопределенностью не только начальных, но и конечных коэффициентов. Ошибки, определенные согласно (23), приведены на рис. 2-3 в виде стандартных отклонений от средних значений.

## 5. Обсуждение результатов

Анализируя результаты расчета, приведенные на рис. 1-3, можно сделать некоторые выводы:

1. Параметры вращения как квадруполя, так и октуполя для различных эпох разбросаны относительно некоторых средних ( по времени ) значений  $\vec{E}_0^{(2)}$  и  $\vec{E}_0^{(3)}$ . Отклонения от этих средних вполне сравнимы со стандартными отклонениями  $\Delta \vec{E}^{(2)}$  и  $\Delta \vec{E}^{(3)}$ , обсуждавшимися в предыдущем разделе.
2. Ориентация средних векторов  $\vec{E}_0^{(2)}$  и  $\vec{E}_0^{(3)}$  не совпадает, причем

различие превышает среднее стандартное отклонение. То же самое можно сказать и о модулях средних векторов.

3. Все векторы  $\vec{\xi}^{(2)}$  и  $\vec{\xi}^{(3)}$  направлены в южное полушарие. Именно в этом смысле следует понимать западный дрейф недипольной составляющей магнитного поля Земли. Однако западное направление дрейфа не является доминирующим.

Следствием изложенного может быть следующее утверждение: никакого физического прокручивания ядра Земли относительно поверхности не существует, ибо в противном случае наблюдалось бы совпадение векторов  $\vec{\xi}_0^{(2)}$  и  $\vec{\xi}_0^{(3)}$  как по величине, так и по направлению.

В заключение автор благодарит В.В.Кузнецова за обсуждение вопросов, затронутых в этой работе.

#### Л и т е р а т у р а

1. Паркинсон У. Введение в геомагнетизм. М.:Мир, 1986. 528 с.
2. James R.W. An equation for estimating Westward drift // J. Geomag. Geoelect. 1968. Vol. 20, N 4. P.429-431.
3. Malin S.R.C., Saunders I. Rotation of the Earth's magnetic field// Nature. 1973. Vol. 245, N 5419. P.25-26.
4. David R, Barrachough, International Geomagnetic Reference Field: the fourth generation // Phys. Earth Planet. Inter. 1987. Vol.48, N 3-4. P.293-305.
5. Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. Л.:Наука, 1975. 440 с.
6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1977. 832 с.
7. Langel R.A. Derivation of proposed IGRF models for 1945, 1950, 1955 and 1960 // Phys. Earth Planet. Inter. 1987. Vol.48, N 3-4. P.279-292.

Утверждено к печати  
Институтом геологии и геофизики СО АН СССР

Технический редактор Н.Н.Александрова

---

Подписано к печати 10.02.88. МН 09075.  
Бумага 60x84/16. Печ.л.0,5. Уч.-изд.л.0,4.

Тираж 200. Заказ 105. Бесплатно.

---

Институт геологии и геофизики СО АН СССР  
Новосибирск, 90. Ротапринт.