

БП.9
Т48

Ю. А. ТКАЧЕВ А. А. ШЕИН

**ОБРАБОТКА
ПРОБ
ПОЛЕЗНЫХ
ИСКОПАЕМЫХ**

6П4.9
Т48

Ю. А. ТКАЧЕВ
А. А. ШЕИН

ОБРАБОТКА ПРОБ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ

6П4.9
05.1968
198

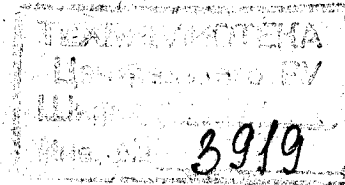
3919

Ткачев Ю. А.
Шейн А. А. Обработка
проб полезных
ископаемых. 4,65к

ВОЗВРАТИТЕ КНИГУ НЕ ПОЗЖЕ
обозначенного здесь срока

- 3/к			

«Комрон» КК.



УДК 3919 ✓



МОСКВА "НЕДРА" 1987

Ткачев Ю.А., Шейн А.А. Обработка проб полезных ископаемых. — М.: Недра, 1987, 190 с., ил.

Обобщены вопросы методики надежной и экономически оптимальной обработки геологических проб. Рассмотрены статистические закономерности сокращения измельченной пробы и связь возникающих при этом погрешностей с контрастностью руд. Изложена теория оптимизации затрат по обработке проб и на ее основе дана методика составления схем обработки. Показаны особенности обработки проб различных полезных ископаемых: полиметаллических, радиоактивных руд, угля, золото- и алмазоносных россыпей и др.

Для геологов, занимающихся поисками, разведкой, опробованием и подсчетом запасов полезных ископаемых.

Табл. 38, ил. 24, список лит. — 10 назв.

Рецензент: А.Б. Каждан, д-р геол.-минер. наук (Московский геологоразведочный институт)

ПРЕДИСЛОВИЕ

Геологические объекты выступают как источники необходимых веществ и материалов. Главными этапами изучения и освоения таких объектов являются поиски, разведка, разработка и опробование. Проблемы опробования и обработки проб сводятся к оценке объекта или его части с заданной (контролируемой) точностью при затратах на это минимума времени и средств.

За последние 20 лет принципиально изменилась оснащенность геологической отрасли вычислительной техникой. В настоящее время расчет необходимой массы проб с помощью микрокалькуляторов или номограмм, полученных на ЭВМ, занимает несколько секунд и сложность формул не имеет никакого значения. Существенно изменилась и формулировка задачи, которая заключается в построении оптимальной и надежной схемы обработки в целом. В этих условиях пользователю необходимо лишь правильно готовить материал к расчетам.

Авторы старались показать, что многие формулы сокращения проб идентичны или в окончательном виде, или на какой-то промежуточной стадии их вывода. В отношении действительно различающихся формул проводился анализ причин их несовпадения: заключались ли они в ошибочности выкладок или в отличиях исходных предположений и допущений. Впервые анализируются модели сокращения и те различия в результатах, к которым они приводят.

Обычно совокупность обрабатываемых проб обладает существенной неоднородностью. Чтобы обеспечить гарантию качества для всех проб, надежные массы берутся с запасом. Для обеспечения точности для всех проб данной партии минимальные массы должны быть определены надежно, но с точностью не более 1—2 значащих цифр.

Вывод формул сокращения, их сравнительный анализ и экспериментальная проверка, разработка методов оценки контрастности, формулировка задачи по оптимизации многоэтапной обработки проб и ее частное решение сеточным методом были выполнены Ю.А. Ткачевым, который написал главы I—IV и VI. Математические методы оптимизации обработки проб и их реализация на ЭВМ выполнены А.А. Шейным, написавшим главу V и раздел 5 главы II.

НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

§ 1. СВЯЗЬ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ С ПРОБЛЕМОЙ СОКРАЩЕНИЯ ПРОБ

Бороздовую, штуфную, валковую или какую-либо иную пробу, полученную при опробовании массивов горных пород, месторождений, товарных рудных масс, угля, концентрата или продуктов технологических процессов, будем называть исходной. Масса исходной пробы изменяется в широких пределах — от нескольких граммов до 100 кг и более, масса конечной пробы, поступающей непосредственно на анализ, не превышает 20—100 г. Наибольший диаметр кусков в исходной пробе может достигать 100—300 мм, а диаметр частиц в конечной пробе не должен превышать 0,1—0,2 мм. Поэтому материал пробы, прежде чем поступить на анализ, подвергается обработке. С целью уменьшения затрат энергии и времени обработка проб проводится в несколько этапов.

Под этапом обработки проб понимается последовательное выполнение четырех операций: 1) дробление или измельчение материала пробы, 2) грохочение или просеивание, 3) перемешивание, 4) сокращение массы пробы. Первые три операции являются вспомогательными. Они обеспечивают проведение наиболее важной последней операции, уменьшая до контролируемых пределов погрешность изучаемых свойств пробы. Обработка проб проводится по схеме, составляемой с учетом особенностей полезного ископаемого, задач его исследования, а также характеристики исходной пробы, в основном — ее массы.

При графическом оформлении схемы обработки проб пользуются общепринятыми обозначениями для основных операций. На схеме указываются масса проб после каждого сокращения и диаметры отверстий контрольных сит.

Дробление и измельчение материала проб осуществляют обычно механическим способом. В зависимости от крупности материала пробы применяют различные механизмы (табл. 1).

Механическое дробление проб (до 10 мм) проводят с помощью щековых дробилок, которые имеют простую конструкцию и надежны в работе. Материал пробы поступает в зазор между подвижной и неподвижной щекой. Подвижная щека, совершая возвратно-поступательные движения, раздавливает материал, который просыпается в разгрузочную щель, ширина которой может регулироваться, чем и определяется крупность материала раздробленной пробы.

Дробленные пробы измельчают в валковых дробилках, дисковых и вибрационных истирателях и стержневых мельницах. Валковые

Таблица 1. Техническая характеристика некоторых механизмов для измельчения проб

Тип механизма	Размер частиц, мм		Производительность, кг/ч	Мощность двигателя, кВт
	максимальный	минимальный		
Щековая дробилка ДШ-100х60 (58-Др)	60	3—10	230—400	1,0
Щековая дробилка ДШ-150х80	80	3—10	400—650	1,7
Валковая дробилка ДВ-200х150	10	0,5—10	200—800	0,6
Дисковый истиратель ИДА-175	3	0,05	40	0,5
Мельница стержневая 48-А-Мл	25	0,15—0,3	4,0—5,5	1,1
Вибристоритель 75-Т-Др-М	2—3	0,05	< 0,07	0,6

дробилки состоят из двух горизонтальных цилиндрических валков, вращающихся навстречу друг другу. Куски пробы захватываются валками и раздавливаются. Расстояние между валками можно изменить, регулируя крупность частиц.

В дисковом истирателе проба поступает в пространство между неподвижным и вращающимся дисками, насаженными на горизонтальный вал. Крупность частиц после измельчения регулируется величиной зазора между дисками. Перечисленные измельчители являются механизмами непрерывного действия и обеспечивают измельчение всей загружаемой в бункер пробы.

Вибрационный истиратель предназначен для одновременного измельчения многих проб. Он состоит из цилиндров, в которые можно загрузить по 100—200 г материала. Внутри каждого цилиндра находится стальной стержень. Цилиндры установлены на раме, при движении которой стержни катаются по стенкам цилиндров, раздавливая и истирая материал пробы.

Стержневая и шаровая мельницы состоят из цилиндра, в который помещены соответственно металлические стержни или шары. В цилиндр загружается проба массой 0,5—1,0 кг, и цилиндру придается вращение. Стержни или шары, катаясь в цилиндре, измельчают пробу в течение 30—60 мин до крупности 0,15—0,3 мм.

Для тонкого измельчения в условиях аналитических лабораторий применяют механические ступы и различные вибрационные механизмы в виде герметических емкостей с помещаемыми в них пробой и стальным шариком. Небольшие полевые отряды, в основном научно-тематического профиля, все еще применяют малопроизводительные ручные способы дробления с применением ступ и молотков.

Так получают, например, "протолочки" для изучения аксессуарных минералов.

Грохочение представляет собой процесс разделения материала пробы на классы по крупности частиц. Размер частиц в процессе дробления и измельчения изменяется в широких пределах — от 100 мм до сотых долей миллиметра. Перед дроблением при помощи грохотов и сит проводят вспомогательное грохочение, что позволяет выделить мелкую фракцию пробы, а это сокращает затраты, связанные с самой трудоемкой операцией. После дробления применяют просеивание, которое называют контрольным. Крупная фракция, не прошедшая сквозь сито, отправляется на дробление.

Грохочение крупного материала проводят с помощью грохотов различной конструкции, а просеивание мелкого материала — с помощью механических сит. Контрольное просеивание тонко измельченного материала практически невозможно, и размер частиц контролируют на ощупь или по времени истирания исходя из технических характеристик истирателей циклического действия. Для сохранения представительности пробы потери материала при просеивании должны быть минимальными.

Прежде чем сократить пробу, ее материал необходимо хорошо перемещать, с тем чтобы она стала равномерной по содержанию полезного ингредиента. Эта операция особенно важна для руд, состоящих из минералов, которые значительно различаются по плотности и отношению к измельчению. Одним из способов перемешивания пробы является способ кольца и конуса. Перемешивание выполняют на специальном столе, накрытом листовым железом. В центре стола перпендикулярно к его поверхности крепится металлический стержень. Материал пробы высыпает в одну точку — на стержень, в результате чего создается конус. Конус разравнивают в кольцо, постепенно надавливая на него специальной пластиной и вращая ее вокруг оси конуса. Когда доска дойдет до плоскости стола, весь материал пробы расположится в виде кольца, внутренний диаметр которого равен длине пластины. Из кольца совком материал сбрасывают в конус и снова разворачивают в кольцо. Для хорошего перемешивания эту операцию повторяют два-три раза. Перемешивание тонкоизмельченного материала даже при малой массе проб представляет собой трудную задачу.

Наиболее важная и ответственная операция в процессе обработки — сокращение массы пробы. Сокращение квартованием применяется после перемещения по способу конуса и кольца. Материал разравнивают на столе в виде диска.

На металлический стержень, находящийся в центре диска, надевают крестовину и делят материал пробы на четыре равные по объему части. Материал двух секторов, расположенных друг против друга, выбрасывают совками, сметая мелочь щетками. Оставшиеся два сектора смешивают, при этом проба сокращается в два раза. Повторение операции квартования сокращает массу пробы в 2^n раз, где n — число квартований.

Один из наиболее распространенных способов сокращения — применение желобкового делителя (делителя Джонса). Он состоит из металлической прямоугольной коробки с раструбом в верхней части. Коробка разделена на четное число поперечных вертикальных желобков с наклонным дном, направленных поочередно в разные стороны. С обеих сторон делителя под выпускные отверстия подставляют коробки для приема материала пробы. Ширина желобка должна не менее чем в три раза превышать наибольший диаметр зерен сокращаемого материала. Материал пробы, подлежащей сокращению, равномерно насыпают в делитель при помощи специального совка, ширина которого в точности равна длине делителя, при этом масса пробы делится пополам. Повторение операции, как и при квартовании, уменьшает массу пробы в 2^n раз, где n — число приемов сокращения.

Для отбора навесок из тонко измельченного материала применяется сокращение вычерпыванием. Материал пробы разравнивают тонким слоем в виде прямоугольника или квадрата на гладком (например, стеклянном) листе. Затем на этот слой накладывают проволочную сетку с отверстиями 2×2 см, которая оставляет отпечатки сторон квадрата. Из центра каждого квадрата (или в шахматном порядке) ложечкой отбирают порции материала пробы, сумма которых и составляет навеску для анализа. Применяются также различные "гребенки" в виде батареи узеньких совочков и т.д.

При массовом производстве предпочтительны механические делители, которые более надежны, менее трудоемки и позволяют сокращать массу пробы в любом соотношении. Некоторые механические делители имеют заслонку с электронным управлением, поверх которой потоком движется материал пробы. Поток может быть направлен по одному или двум каналам, в зависимости от положения заслонки. При помощи электронного управления можно регулировать размер и частоту отбора порций.

Сокращенный материал подвергают дальнейшему измельчению, которое увеличивает число частиц в пробе и позволяет вновь сокращать. Как правило, проба обрабатывается в несколько этапов. Только пробы очень маленькой массы измельчают сразу до такого размера, который позволяет сократить пробу до навески, идущей в анализ. Доизмельчение, вызванное большой крупностью материала в навеске, не подходящей для анализа, рассматривается как составная часть анализа пробы, но не ее обработки.

Всесоюзным институтом техники разведки (ВИТР) разработана установка для обработки геологических проб в едином мокром механическом процессе. В ней материал пробы массой 15–20 кг измельчается до крупности, обеспечивающей полное раскрытие полезных минералов, после чего проводится механический отбор лабораторной навески от потока измельченной массы методом отсечек. Установка не получила широкого распространения ввиду недостаточной надежности и ряда конструктивных недостатков. Но сама идея программируемого комбайна остается актуальной.

Разработка и внедрение новых технических устройств измельчения и сокращения, автоматизация управления процессом обработки проб требуют решения ряда методических вопросов.

Научно обоснованная система обработки проб включает две проблемы. Первая заключается в оценке погрешностей, образующихся при сокращении материала измельченной пробы. Сокращение осуществляется после каждого этапа дробления (измельчения) и приводит к случайным погрешностям различной величины в зависимости от массы сокращаемой пробы и крупности ее частиц (что в итоге определяет число частиц в пробе), контрастности частиц по изучаемому компоненту и от степени сокращения на данном этапе. Формулы, определяющие погрешности сокращения, непосредственно выводятся из законов теории вероятностей и чрезвычайно просты, если иметь дело с бессточковыми смесями рудных и нерудных частиц правильной кубической или шарообразной формы. Для их понимания и правильного применения в этой главе приводятся все необходимые сведения из теории вероятностей и математической статистики. Их изложение самым тесным образом связывается нами с проблемой сокращения и сопровождается специально подобранными примерами. При чтении этой главы рекомендуется иметь в виду использование ее материала в двух основных направлениях: для анализа классической модели сокращения, полностью соответствующей безвозвратной выборке из урны с черными и белыми шарами, и для подхода, который мы называем американским. Он заключается в эмпирическом изучении коэффициента вариации количества или содержания полезного компонента между отдельными частицами пробы. При корректном применении оба подхода дают тождественные результаты.

Все операции процесса обработки, особенно дробление и измельчение, требуют значительных затрат энергии и времени. Поэтому вторая проблема обработки проб заключается в выборе числа этапов и распределении степени измельчения и сокращения по этапам таким образом, чтобы суммарные затраты на обработку были минимальными. Специфический математический аппарат для этого будет изложен в главе V.

§ 2. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ И ВЕРОЯТНОСТИ. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ, ФУНКЦИИ ИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Объектом изучения теории вероятностей являются случайные события, случайные величины и их вероятности. Перечисленные понятия легче интуитивно понять и описать на примерах, чем дать им строгие определения. В отношении случайного события должно выполняться только одно условие: при реализации фиксированного комплекса условий оно может совершиться или не совершиться. Что именно следует обозначить случайным событием зависит от целей исследования. Успех в решении задачи часто обусловлен

искусством удачно подразделить явление на события. Но, как только события определены, физическая их природа перестает интересовать теорию и они превращаются в неделимые акты, своего рода "атомы вероятности".

При сокращении минералогической пробы событием можно обозначить попадание частицы заданного минерала в навеску. Как событие можно рассматривать также отклонение содержания в навеске от исходной пробы на величину ΔC . Это более сложное для понимания и расчетов вероятности событие. Отклонение больше некоторой заданной величины $x > \Delta C$ также можно обозначить событием $A \{x > \Delta C\}$. События обозначаются большими буквами латинского алфавита: A, B, C, \dots и т.д., иногда с указанием в фигурных скобках содержания этого события.

Из всяких событий с помощью логических операций "НЕ" ($\bar{}$), "И" (\wedge), "ИЛИ" (\vee) образуются другие события, "сложные" по отношению к исходным. Так, если A — событие, то \bar{A} — также событие, обозначаемое в теории вероятностей \bar{A} , противоположное первому и обозначающее, что событие A не совершилось. Если A означает, что содержание в навеске при сокращении отклонилось от исходной пробы не более чем на $a\%$, то \bar{A} означает, что отклонение составило более $a\%$. Логическое произведение событий A "И" B ($A \wedge B$) дает новое событие $A \cap B$ (или проще AB), заключающееся, как часто пишут, в "одновременном" осуществлении обоих событий, точнее — в их осуществлении в одном испытании. Пусть событие A означает, что погрешность содержания при первом сокращении имеет положительный знак, событие B — то же самое при втором сокращении пробы. Тогда $A \cap B$ — событие, заключающееся в том, что в каждом из двух последовательных сокращений погрешность была положительной. Заметим, что второе сокращение проведено позже первого, так что применение термина "одновременно" здесь было бы не совсем удачно.

Логическая сумма событий: A или B ($A \vee B$), дает событие $A \cup B$, которое осуществилось, если совершилось по крайней мере одно из названных событий. В нашем примере $A \cup B$ означало бы, что положительная погрешность сокращения имела место хотя бы в одном из сокращений.

Каждому событию в соответствие ставится некоторое число, которое называют вероятностью этого события $P(A)$. Вероятность достоверного события равна 1, невозможного — 0. Таким образом, $0 < P(A) < 1$.

Сложным событиям, представляющим собой результаты логических операций над другими событиями, приписываются вероятности по следующим правилам: $P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot xP(A/B)$, где B/A означает появление события B при условии, что событие A уже совершилось, а A/B — появление события A при условии, что уже совершилось событие B . Таким образом, вероятность совместного осуществления двух событий равна произведению

вероятности одного из них на вероятность другого, определенную при условии осуществления первого события. Рассмотрим измельченную пробу следующего состава: 60 % мономинеральных зерен, из них кварца 40 %, галенита 10 %, сфалерита 10 %, 40 % зерен-сростков, из них: 15 % кварца с галенитом, 15 % кварца со сфалеритом, 7 % кварца с галенитом и сфалеритом, 3 % галенита со сфалеритом. Какова вероятность, что наудачу взятое зерно окажется сростком, содержащим галенит? Обозначим события: A — зерно есть сросток, B — зерно содержит галенит. Тогда задача заключается в определении вероятности события AB .

Решение:

$$P(A) = 0,40; P(B) = 0,1 + 0,15 + 0,07 + 0,03 = 0,35;$$

$$P(B/A) = \frac{0,15 + 0,07 + 0,03}{0,40} = \frac{0,25}{0,40} = 0,625;$$

$$P(A/B) = \frac{0,15 + 0,07 + 0,03}{0,1 + 0,07 + 0,03 + 0,15} = \frac{0,25}{0,35} = 0,714;$$

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = 0,400 \cdot 0,625 = 0,25 \text{ или}$$

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A/B) = 0,35 \cdot 0,714 = 0,25.$$

В данном простом примере возможен непосредственный подсчет $P(AB)$, дающий аналогичный результат: $P(AB) = 0,15 + 0,07 + 0,03 = 0,25$.

Важнейшим понятием является *независимость событий*. Если события A и B независимы, то $P(B/A) = P(B)$ и $P(A/B) = P(A)$, т.е. появление одного из событий не изменяет вероятности появления другого. Следовательно, вероятность совместного осуществления независимых событий A и B определяется равенством $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$. Этот вывод распространяется на любое число событий.

Вероятность другого сложного события $A \cup B$ определяется по следующему правилу: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, т.е. вероятность осуществления хотя бы одного из двух рассматриваемых событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного осуществления.

Пусть в предыдущем примере A означает появление зерна, содержащего галенит, B — сфалерит. Испытание, как и прежде, будет заключаться во взятии одного зерна. Найти вероятность события $A \cup B$, т.е. вероятность появления зерна, содержащего галенит и (или) сфалерит. Решение:

$$P(A) = 0,1 + 0,15 + 0,07 + 0,03 = 0,35;$$

$$P(B) = 0,1 + 0,15 + 0,07 + 0,03 = 0,35;$$

$$P(AB) = 0,07 + 0,03 = 0,1;$$

$$P(A \cup B) = 0,35 + 0,35 - 0,10 = 0,60.$$

Если события несовместны (одновременное их осуществление невозможно), то $P(AB) = 0$ (как вероятность невозможного события) и $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Вероятности сложных событий наглядно сопоставляются на так называемых диаграммах Венна с площадями фигур, изображающими события и пропорциональными их вероятностям (рис. 1).

Понятие вероятности в общем случае не поддается определению, и для приложения теории к геологическим задачам в этом нет необходимости. Вполне удовлетворительным будет определение вероятности как отношения числа появлений интересующего нас события m к общему числу n равновероятных, единственно возможных, несовместных событий: $P(A) = m/n$, где m — число случаев, в которых событие A появилось, n — общее число возможных событий. Например, измельченная проба состоит из 10^5 частиц, из них 10^2 рудных. Наудачу берется одна частица. Пусть событие A — выбор рудной частицы, тогда $P(A) = m/n = 10^2/10^5 = 0,001$.

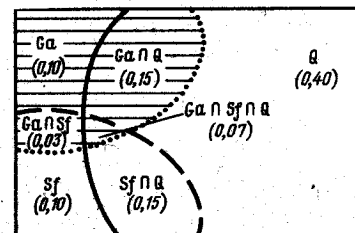
В теории вероятностей и математической статистике важное значение имеет особый класс случайных событий — *случайные величины*. Связь случайных событий со случайными величинами можно организовать по-разному. В простейшем случае событием можно считать получение в некотором эксперименте случайной величины, равной заданному значению. Более важный вид событий — попадание случайной величины ξ в некоторый интервал $[x_1, x_2]$, так что $x_1 < \xi < x_2$. Вероятность этого события записывается следующим образом:

$$P(A) = P \{ x_1 < \xi < x_2 \},$$

где в скобках записаны условия, характеризующие событие A .

Рис. 1. Диаграмма Венна, иллюстрирующая вероятности сложных событий:

Q — взятие частицы, содержащей только кварц, Ga — только галенит; Sf — только сфалерит; $Ga \cap Sf$ — галенит со сфалеритом; $Ga \cap Q$ — галенит с кварцем; $Sf \cap Q$ — сфалерит с кварцем; $Ga \cap Sf \cap Q$ — сросток всех перечисленных минералов. В скобках даны соответствующие вероятности. Горизонтальная штриховка соответствует событию — зерно содержит галенит в чистом виде или в сростках с другими минералами



Функцией распределения случайной величины ξ называется такая функция F , которая равна вероятности, что случайная величина ξ примет одно из значений $-\infty < \xi \leq x$, где x — аргумент этой функции:

$$F_{\xi}(x) = F(x) = P(\xi \leq x).$$

Таким образом, функция распределения — это вероятность осуществления события, зависящего от x , а именно — события $A\{\xi \leq x\}$. Очевидно, $F(x)$ может принять значения между 0 и 1: $0 < F(x) \leq 1$. Производная этой функции, называемая плотностью вероятности, или плотностью распределения, $f(x)$ дает представление о том, какова вероятность того, что случайная величина примет одно из значений в интервале $x + \Delta x$: $f(x) = F'(x)$.

Интеграл функции плотности вероятности от $-\infty$ до x есть функция распределения $F(x)$: $\int_{-\infty}^x f(\xi) d\xi = F(x)$. Очевидно, что интеграл плотности вероятности по всем возможным значениям x есть вероятность достоверного события: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) d\xi = 1$.

Соотношение между этими функциями показано на рис. 2. Если случайная величина принимает только некоторые значения, например целочисленные, то по аналогии определяется функция дискретного распределения:

$$F(x_n) = \sum_{i=1}^n p_i,$$

где p_i — вероятность появления значения x_i . Она представляет собой прерывистую ступенчатую линию, совершающую скачки в точках с абсциссами x_i на величину p_i (рис. 3). Дискретная плотность вероятности, или функция вероятности, соответственно равна

$$f(x_i) = \begin{cases} p_i & \text{— для возможных значений } x_i, \\ 0 & \text{— для всех остальных значений } x_i. \end{cases}$$

Рассмотрим некоторые характеристики функций распределения и их свойства. Если случайная величина X непрерывно распределена с плотностью вероятности $f(x)$, то величина

$$M(X) = \int x f(x) dx$$

называется ее математическим ожиданием. Аналогично, дискретно распределенная случайная величина имеет математическое ожидание

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i.$$

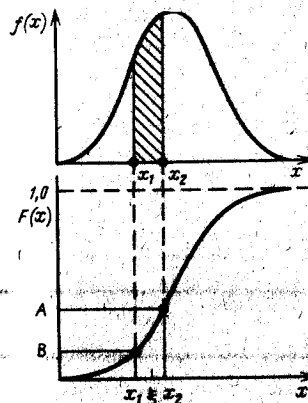


Рис. 2. Функция распределения $F(x)$ и соответствующая ей плотность вероятности $f(x)$.

Заштрихованная площадь под кривой $f(x)$ и длина отрезка АВ на оси $F(x)$ численно равны вероятности того, что значение случайной величины ξ лежит между числами x_1 и x_2 .

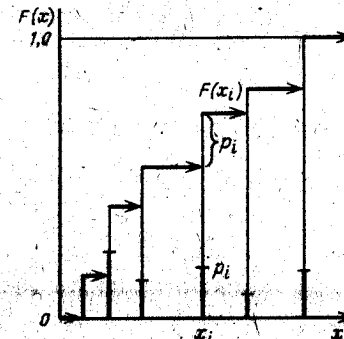


Рис. 3. Функция распределения дискретной случайной величины x .

т.е. представляет собой средневзвешенное значение случайной величины, где весовыми коэффициентами служат вероятности возможных значений. Очевидно, что сумма этих коэффициентов равна единице $\sum p_i = 1$. В частности, если случайная величина может принимать n дискретных значений x_1, x_2, \dots, x_n с равными вероятностями, то

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = \sum_{i=1}^n x_i \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

т.е. математическим ожиданием является здесь среднее арифметическое значение. Математическое ожидание имеет следующие свойства, которые необходимо знать при изучении погрешностей сокращения проб.

1. Математическое ожидание произведения случайной величины X на постоянную a равно произведению этой постоянной величины на математическое ожидание, т.е. постоянную можно вынести за знак математического ожидания. Доказательство приводим только для дискретно распределенной величины:

$$M(aX) = \sum a x_i p_i = a \sum x_i p_i = aM(X).$$

Например, пусть при сокращении пробы математическое ожидание числа отобранных рудных зерен равно 300. Все они имеют одинаковую массу 0,005 г. Математическое ожидание массы рудных частиц будет равно $0,005 \cdot 300 = 1,5$ г.

2. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий. Во многих популярных учебниках приводится такое доказательство:

$$M(X + Y) = \sum (x_i + y_i) p_i = \sum (x_i p_i + y_i p_i) = \\ = \sum x_i p_i + \sum y_i p_i = M(X) + M(Y).$$

Однако оно неверно, так как p_i здесь сначала означает вероятность появления пары случайных величин (x_i, y_i) , затем — вероятность появления величины x_i , и наконец — вероятность появления величины y_i .

Приведем правильное доказательство этого свойства, имеющего для вывода формул сокращения первостепенное значение. Пусть величина X принимает n дискретных значений x_1, x_2, \dots, x_n , а величина Y — k значений $y_1, y_2, y_3, \dots, y_k$. Обозначим вероятность появления пары (x_i, y_j) через p_{ij} , тогда

$$M(X + Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (x_i + y_j) p_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k x_i p_{ij} + \\ + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k y_j p_{ij} = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^k p_{ij} + \sum_{j=1}^k y_j \sum_{i=1}^n p_{ij}.$$

Но $\sum_{j=1}^k p_{ij}$ есть полная вероятность появления величины x_i , а $\sum_{i=1}^n p_{ij}$ — полная вероятность появления величины y_j , поэтому

$$M(X + Y) = \sum_{i=1}^n x_i p_i + \sum_{j=1}^k y_j p_j = M(X) + M(Y).$$

Заметим, что для доказательства не требовалось независимости величин X и Y .

Несмотря на кажущуюся простоту этого свойства и очевидность его применения, здесь можно совершить грубую ошибку. Пусть имеется смесь зерен, как в примере, изображенном на рис. 1. Произведем выборку 100 зерен. Обозначим X случайную величину, равную числу зерен, содержащих галенит, а Y — сфалерит. Забегая вперед, укажем, что $M(X) = 100 \cdot 0,35 = 35$, а $M(Y) = 100 \cdot 0,35 = 35$. Величины X и Y , конечно, зависимы, но это не мешает нам записать $M(X + Y) = 35 + 35 = 70$. Однако мы совершили бы грубую ошибку, посчитав, что получим в выборке в среднем 70 зерен, содержащих рудный минерал. Наше решение соответствует ситуации, в которой мы сначала посчитаем зерна, содержащие галенит, а затем — сфалерит, не обращая внимание на то, что некоторые из этих

зерен уже были учтены в первом подсчете (в среднем их будет десять). Таким образом, в нашем случае $X + Y$ не есть число зерен Z , содержащих рудный минерал. Для определения математического ожидания этой последней случайной величины необходимо использовать вероятность сложного события, полученного в приведенном ранее примере: $M(Z) = 0,60 \cdot 100 = 60$.

3. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M(XY) = \sum_{i,j} x_i y_j s_{ij} = \sum_{i,j} x_i p_i y_j q_j = \sum_i \sum_j x_i p_i y_j q_j = \\ = (\sum_i x_i p_i) (\sum_j y_j q_j) = M(X) \cdot M(Y).$$

Для доказательства этого свойства уже необходимо предположение независимости, так как только в этом случае вероятность s_{ij} появления пары величин x_i, y_j равна произведению вероятностей появления соответствующих значений случайных величин — $p_i q_j$.

4. Математическое ожидание постоянной величины равно этой величине — свойство очевидное.

Для оценки степени разброса случайной величины относительно ее математического ожидания обычно используется дисперсия $D(X)$, которая определяется как математическое ожидание квадрата разности между случайной величиной и ее математическим ожиданием:

$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

По определению, дисперсию выборочного значения случайной величины можно находить как среднее арифметическое квадратов отклонений x от $M(X)$:

$$D(X) = \frac{1}{n} \sum [x_i - M(X)]^2.$$

В некоторых случаях полезно представлять дисперсию следующим образом:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 = M[X^2 - 2XM(X) + M^2(X)] = \\ = M(X^2) - 2M(X) \cdot M(X) + M^2(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

Такое представление позволяет легко получить следующие свойства дисперсии из соответствующих свойств математического ожидания.

1. Дисперсия постоянной равна нулю:

$$D(C) = M(C^2) - M^2(C) = C^2 - C^2 = 0.$$

2. Постоянный множитель можно вынести за знак дисперсии, удвоив показатель его степени:

$$D(CX) = M(C^2 X^2) - M^2(CX) = C^2 M(X^2) - C^2 M^2(X) = \\ = C^2 [M(X^2) - M^2(X)] = C^2 D(X).$$

3. Дисперсия суммы независимых случайных слагаемых равна сумме их дисперсий:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

Отсюда следует, что дисперсия случайной величины, сложенной с постоянной, равна дисперсии самой случайной величины, так как дисперсия постоянной равна нулю: $D(X + C) = D(X) + D(C) = D(X)$.

Корень квадратный из дисперсии называют *средним квадратическим отклонением*, стандартным отклонением или (в англоязычной литературе) стандартом. В геологии в качестве меры рассеяния наиболее часто пользуют коэффициент вариации (в %):

$$V = \sqrt{D(X)} / M(X) \cdot 100.$$

Численные значения математического ожидания и дисперсии случайной величины X в изучаемой генеральной совокупности обычно обозначают μ_X и σ_X^2 ; в соответствии с чем можно записать

$$V = \sigma_X / \mu_X \cdot 100.$$

§ 3. БИНОМИАЛЬНОЕ И ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Функция вероятности *биномиального* распределения описывает вероятность появления определенного числа успехов в серии независимых испытаний (опытов). Независимыми испытаниями называются такие, в которых вероятность появления успеха в последующем испытании не зависит от результатов всех предыдущих испытаний. Таковы, например, бросания монеты (если, конечно, ни одно из предыдущих бросаний ее не испортило). Таковы традиционные в математической статистике мысленные эксперименты по изъятию черных и белых шаров из урны с последующим их возвращением перед каждым последующим испытанием. Измельченная проба, состоящая из смеси частиц разного сорта (рудных и нерудных), полностью соответствует биномиальной схеме, если отобранная

частица возвращается назад в пробу. Пусть проба содержит n частиц, из них m рудных. Тогда вероятность при одном испытании получить рудную частицу равна $p = m/n$, а нерудную $q = 1 - p$.

Предположим, что произведены два испытания. Найдем вероятности p_0 , p_1 и p_2 получения 0, 1 и 2 рудных частиц соответственно. Обозначим интересующее нас событие A , и наша задача заключается в отыскании вероятностей следующих событий: $\bar{A} \cap \bar{A}$ — ни одной рудной частицы, $A \cap \bar{A}$, $\bar{A} \cap A$ — одна рудная частица, $A \cap A$ — две рудные частицы.

В соответствии с правилами нахождения вероятностей сложных событий (см. § 2) получим:

$$p_0 = P(\bar{A} \bar{A}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) = q \cdot q = q^2,$$

$$p_1 = P(\bar{A} A) + P(A \bar{A}) = pq + qp = 2pq,$$

$$p_2 = P(A A) = P(A) \cdot P(A) = p \cdot p = p^2.$$

Убедимся, что сумма этих вероятностей равна единице:

$$p^2 + 2pq + q^2 = (p + q)^2 = (p + 1 - p)^2 = 1,$$

а вероятности равны членам бинома Ньютона. Проведя аналогичные рассуждения для 3, 4, ..., n испытаний, убедимся, что вероятности 0, 1, 2, ..., n успехов будут выражаться членами бинома $(p + q)^n$, т.е.

$$p^n q^0 + np^{n-1} q^1 + \dots + \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} + \dots + np^1 q^{n-1} + p^0 q^n,$$

где величины

$$1, n, \dots, n!/[x!(n-x)!], \dots, n, 1$$

— суть коэффициенты бинома Ньютона, равные числу сочетаний C_n^x из n по x :

$$C_n^x = n!/[x!(n-x)!].$$

Таким образом, вероятность получить x успехов в серии из n независимых испытаний

$$P_{x, n} = \begin{cases} C_n^x p^x q^{n-x} & \text{для } x = 0, 1, 2, \dots, n \\ 0 & \text{для нецелых } x. \end{cases} \quad (1)$$

Закон распределения, описываемый этой формулой, получил название биномиального. Он содержит два параметра: число испыта-

ний n и вероятность успеха в единичном испытании p (значение q получают из равенства $q = 1 - p$).

Выразим математическое ожидание и дисперсию биномиального распределения через эти параметры. Математическое ожидание распределения можно получить, рассматривая случайную величину как сумму, слагаемые которой принимают значение 1, если выпала рудная частица, и 0 — если нерудная, с вероятностями соответственно $p = m/n$ и $q = 1 - p$. Тогда

$$M(X_1) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p;$$

$$M(X_n) = \sum_{i=1}^n M(X_i) = n \sum M(X_1) = np, \quad (2)$$

где 1 или n — число испытаний.

Аналогично поступим при определении дисперсии. Вначале определим дисперсию числа успехов при единичном испытании:

$$D(X_1) = M(X_1^2) - M^2(X_1);$$

$$M(X_1^2) = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot q = p;$$

$$M^2(X_1) = p^2,$$

откуда

$$D(X_1) = p - p^2 = p(1 - p) = pq.$$

Поскольку результаты последующих и предыдущих испытаний — события независимые, то

$$D(X_n) = \sum_{i=1}^n D(X_i) = npq. \quad (3)$$

Математическое ожидание относительной частоты (частости) при биномиальном распределении получается переходом к новой случайной величине x/n . Тогда, поскольку n — константа, имеем:

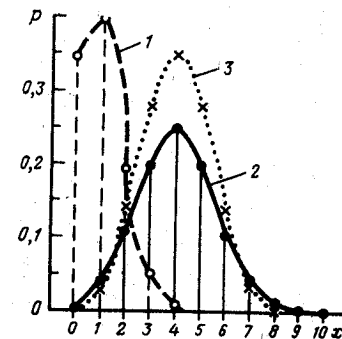
$$M\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n} M(X) = \frac{np}{n} = p, \quad (4)$$

т.е. математическое ожидание частоты равно вероятности успеха в единичном испытании. Дисперсия ее

$$D\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n^2} npq = \frac{pq}{n}. \quad (5)$$

Рис. 4. Графики некоторых дискретных распределений:

1 — биномиальное распределение с $n = 10, p = 0,1$; 2 — биномиальное распределение с $n = 10, p = 0,4$; 3 — гипергеометрическое распределение с $n = 10, p = 0,4, N = 20$



Пример. Измельченная проба содержит рудные и нерудные частицы. Вероятность появления рудной частицы при единичном испытании равна p . Произведено n независимых испытаний. Под испытанием понимаются случайный отбор одной частицы из пробы, фиксация ее типа и возвращение в пробу. Некоторая искусственность заключается в том, что частицы в данном примере возвращаются в пробу, тогда как при реальном сокращении они остаются в навеске. Однако именно в таком виде пример иллюстрирует биномиальное распределение. Необходимо вычислить:

- вероятности появления в n испытаниях соответственно 0, 1, 2, ..., n рудных частиц;
- математическое ожидание числа появившихся рудных частиц;
- дисперсию и стандарт их числа.

Решим эту задачу при различных p и n . Для этого последовательно применим формулы (1), (2) и (3). Для $n = 10$ и $p = 0,1$ получим $M(X) = np = 10 \cdot 0,1 = 1$; $D(X) = npq = 10 \cdot 0,1 \cdot 0,9 = 0,9$; $\sigma_x = 0,95$. Для $n = 10$ и $p = 0,4$ аналогично получим $M(X) = 4$; $D(X) = 2,4$; $\sigma_x = 1,55$. Для больших n решение удобно проводить на ЭВМ, например типа СМ, по программе, приведенной в прил. 1.

Результаты вычисления вероятностей, изображенные на рис. 4, дают наглядное представление о ходе ее изменения с изменением n, p и x .

Биномиальное распределение легко обобщается в том случае, когда число различных элементов в совокупности больше двух. Различимость или неразличимость постулируются пользователем, который по своему усмотрению, в зависимости от задачи, может в одних случаях рассматривать пробу как состоящую только из двух типов частиц (рудных и нерудных), в других — из k видов частиц по числу минеральных видов, слагающих пробу. Для этого перепишем формулу (1) в следующем виде:

$$P_{x, n} = b(x_1, x_2) = \frac{n!}{x_1! x_2!} p_1^{x_1} p_2^{x_2},$$

где x_1 — число успехов, x_2 — число неудач, $(x_1 + x_2) = n$. Число неудач x_2 для рудных частиц есть число успехов для другого

типа частиц, т.е. для нерудных. Если в пробе k видов частиц, то по аналогии можно записать

$$p_l(x_1, x_2, \dots, x_k) = \frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k},$$

где x_1, x_2, \dots, x_k — числа появления минералов, помеченных номерами $1, 2, 3, \dots, k$, а p_1, p_2, \dots, p_k — вероятности их появления. Это распределение называется *полиномиальным* (p_l).

Заметим, что совокупность, состоящую из любого числа видов минералов, можно рассматривать как совокупность, состоящую из двух видов: а) интересующих нас, б) остальных, имеющих вероятности появления соответственно p и $q = 1 - \sum p_i$. Полиномиальным распределением следует пользоваться только тогда, когда нас интересуют вероятности совместного появления заданного числа минералов каждого вида. При сокращении проб это встречается редко, если нам необходимо контролировать соотношение погрешностей сокращения по различным компонентам. Математическое ожидание и дисперсия числа частиц каждого минерального вида в выборке определяются по формулам для биномиального распределения.

§ 4. ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Это распределение имеет особенно важное значение в определении погрешностей сокращения измельченных проб, состоящих из смеси рудных и нерудных частиц.

Пусть генеральная совокупность (исходная проба) состоит из N частиц. В ее составе имеется M рудных частиц. Из этой генеральной совокупности сделаем безвозвратную выборку, другими словами, навеску, состоящую из n частиц.

Распределение такого рода обозначают $g(x, n, M, N)$, где g — принятое наименование гипергеометрического распределения, x — исследуемая случайная переменная, в данном случае число рудных частиц в выборке. Оно зависит от трех параметров — n, M, N , в отличие от биномиального — двухпараметрического. Если выборка сделана правильно (все возможные комбинации частиц в выборке равновероятны), то вероятность появления x рудных частиц среди n отобранных равна

$$g(x, n, M, N) = \begin{cases} \frac{C_M^x C_{N-M}^{n-x}}{C_N^n} & \text{для } x = 0, 1, 2, \dots, n, \\ 0 & \text{для дробных значений } x. \end{cases}$$

Математическое ожидание этого распределения $M(X)$ равно nM/N . Величина M/N есть вероятность появления рудной частицы в выборке. Обозначив ее p , получим, как и для биномиального закона, $M(X) = np$. Результат подтверждает интуитивное представление о "наиболее ожидаемом" числе элементов x в выборке объема n .

Дисперсия числа появлений интересующего нас события определяется по формуле

$$D(X) = npq \frac{(N-n)}{(N-1)} \approx npq(1-n/N),$$

т.е. отличается от дисперсии биномиального распределения множителем $(1-n/N)$, который никогда не превышает единицы. Следовательно, для сопоставимых случаев разброс числа появлений относительно среднего значения в гипергеометрическом распределении всегда меньше, чем в биномиальном.

Пример. От пробы, содержащей 12 кусков породы и 8 кусков руды, отобрано наугад (делением пополам) 10 кусков. Построить функцию дискретной плотности вероятности числа кусков руды в такой выборке, найти математическое ожидание и дисперсию числа кусков. В принятых обозначениях имеем: $N = 20, M = 8, n = 10, p = 8/20 = 0,40; q = 0,60$.
Решение:

$$M(X) = 10 \cdot 0,40 = 4,0;$$

$$D(X) = 10 \cdot 0,4 \cdot 0,6 \frac{20-10}{19} = 1,26.$$

Дисперсия биномиального распределения с теми же параметрами равна $npq = 10 \cdot 0,40 \cdot 0,60 \approx 2,40$, т.е. почти в два раза больше.

Более показательны параметры, относящиеся не к числу появлений элементов, а к наблюдаемой частоте их появления, т.е. отношению числа появлений элементов к числу испытаний x/n . Исходя из свойств математического ожидания получаем

$$M(x/n) = \frac{1}{n} M(x) = \frac{1}{n} np = p,$$

т.е. математическое ожидание частоты есть вероятность появления события. При гипергеометрическом распределении

$$D(x/n) = \frac{1}{n^2} D(x) = \frac{pq}{n} \frac{N-n}{N-1} \approx \frac{pq}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right) = pq \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N}\right).$$

Биномиальное распределение можно рассматривать как частный случай гипергеометрического с объемом генеральной совокупности, стремящейся к бесконечности,

$$g(x, n, M, N) \rightarrow b(x, n, M/N), \text{ при } N \rightarrow \infty.$$

Их математические ожидания равны, если равны процентные доли частиц в генеральной совокупности; если N и N/n велики, то

равны также дисперсии:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} pq \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N} \right) = \frac{pq}{n}$$

Вообще, если генеральная совокупность велика, а выборка мала, т.е. при большом отношении N/n , эти распределения становятся практически неразличимыми.

Расчеты функции распределения, т.е. вероятностей появления в выборке x рудных частиц, вручную затруднительны ввиду необходимости вычисления факториалов больших чисел. В приложении 1 мы даем программу на ЭВМ "МИР" для таких расчетов.

В программе предусмотрен также расчет вероятностей биномиального и нормального распределений. Как видно из рис. 5, полученного по результатам проведенных на ЭВМ расчетов, при больших N , n и N/n распределения очень близки. Однако, если "степень сокращения" (доля выборки по отношению к генеральной совокупности) в гипергеометрическом распределении приближается к реальной ($1/2 + 1/4$), различия между распределениями становятся ощутимыми. Дисперсия гипергеометрического распределения уменьшается, а вероятность того, что число рудных частиц попадает в заданный интервал, включающий математическое ожидание, увеличивается по сравнению с биномиальным распределением.

§ 5. НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Исключительно большое значение в проблеме опробования и сокращения сыпучих материалов имеет так называемое нормальное, или гауссово распределение. Оно широко распространено в природе

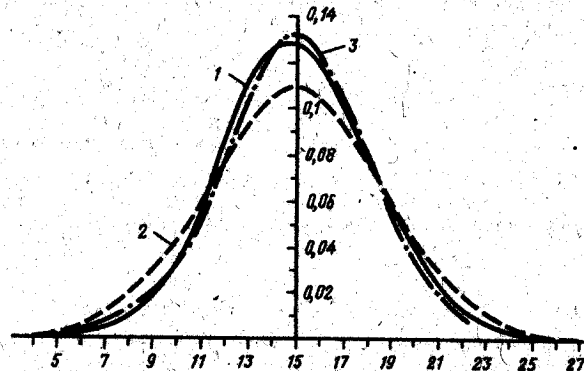


Рис. 5. Нормальное и гипергеометрическое распределения:

1 — гипергеометрическое распределение для выборки $n = 300$ из генеральной совокупности $N = 1000$ с вероятностью успеха $p = 0,05$ (50 "рудных" частиц); 2 — нормальное распределение с дисперсией, равной $np(1-p)$; 3 — нормальное распределение с дисперсией, равной $np(1-p)(1-n/N)$.

и технике, так как к нему стремится распределение суммы большого числа независимых случайных слагаемых с ограниченной дисперсией. Им хорошо описываются погрешности измерений. Кроме того, оно является предельным случаем биномиального и гипергеометрического распределений. Плотность вероятности нормального закона задается формулой

$$f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(\xi - \mu)^2}{\sigma^2}\right),$$

где μ и σ — параметры распределения, равные соответственно математическому ожиданию и квадратическому отклонению случайной величины ξ .

Функция распределения нормального закона имеет вид

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(\xi - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) d\xi$$

Это распределение часто обозначают $N(\mu, \sigma)$. Например, запись $N(2,5; 1)$ означает нормальное распределение со средним 2,5 и квадратическим отклонением 1. Нормальное распределение с параметрами $\mu = 0$ и $\sigma = 1$, т.е. $N(0; 1)$, называют *нормированным* нормальным распределением. Для того чтобы нормировать распределение с параметрами μ, σ , необходимо в качестве переменной взять новую величину z :

$$z = (\xi - \mu) / \sigma.$$

Нормированная функция нормального распределения, имеющая теперь вид

$$F(u) = \int_{-\infty}^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} z^2\right) dz,$$

подробно табулирована и приводится в большинстве руководств по математической статистике или в специальных статистических таблицах.

Большой интерес для нас будет представлять функция Лапласа $\Phi(u)$:

$$\Phi(u) = \int_0^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} z^2\right) dz,$$

Функция Лапласа (рис. 6) удобна для отыскания вероятности P того, что случайная величина отклонится от среднего значения не

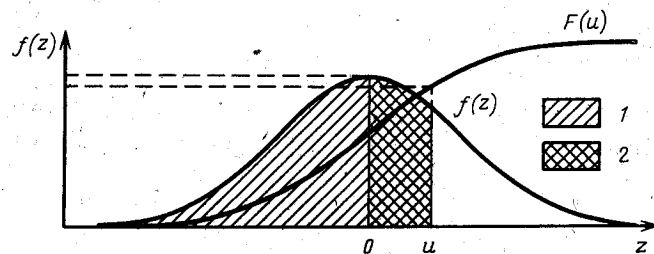


Рис. 6. График соотношения между плотностью вероятности $f(z)$, функцией распределения $F(u)$ и функцией Лапласа для нормального распределения случайной величины.

1 — площадь, равная значению функции распределения $F(u)$, т.е. вероятности того, что $x \leq u$; 2 — площадь, равная значению функции Лапласа, т.е. вероятности того, что $0 \leq z \leq u$.

более чем на заданную величину:

$$P \left\{ x_1 < \xi < x_2 \right\} = \Phi \left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma} \right) - \Phi \left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma} \right),$$

или, обозначая величину $(x - \mu) / \sigma$ через u : $P = \Phi(u_2) - \Phi(u_1)$.

Если x_1 и x_2 симметричны относительно среднего μ , то

$$P = \Phi(u_2) - \Phi(-u_2) = \Phi(u_2) + \Phi(u_2) = 2\Phi.$$

Функция Лапласа позволяет легко рассчитать и наглядно представить связь между дисперсией случайной величины и вероятностью ее отклонения от математического ожидания не более чем на заданную величину. Так, вероятность того, что фактическое отклонение не превысит "сигмы", т.е. стандартного отклонения, равна приблизительно 68 %, т.е.

$$P \left\{ |x - \mu| \leq \sigma \right\} = 0,68269 \approx 68,3 \%$$

Соответственно для двух и трех "сигм":

$$P \left\{ |x - \mu| \leq 2\sigma \right\} = 95,4 \%$$

$$P \left\{ |x - \mu| \leq 3\sigma \right\} = 99,7 \%$$

На практике событие $A \left\{ |x - \mu| \leq 3\sigma \right\}$ считают достоверным, а превышение "трехсигмовых" пределов — практически невозможным.

Так как нормальное распределение может служить хорошим приближением биномиального и гипергеометрического при увеличении объема выборки, это избавляет от необходимости вычисления

факториалов больших чисел при оценке доверительных интервалов для числа успехов x .

Для аппроксимации биномиального распределения нормальным число успехов x следует центрировать и нормировать по формуле

$$z = \frac{x - np}{\sqrt{npq}} = \frac{x/n - p}{\sqrt{pq/n}},$$

а для аппроксимации гипергеометрического — по формуле

$$z = \frac{x - np}{\sqrt{npq(1 - n/N)}} = \frac{x/n - p}{\sqrt{pq(1 - n/N)/n}}$$

Определяя доверительные интервалы с помощью функции Лапласа для z , мы тем самым определяем их для величины x .

Мы провели на ЭВМ численное сравнение гипергеометрического распределения с нормальным. При расчете соответствующего нормального распределения было предусмотрено использование дисперсии биномиального pq/n и гипергеометрического $\frac{pq}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)$ распределений.

Некоторые результаты сравнения сведены в табл. 2. Из нее видно, что даже при сравнительно небольшом объеме выборки (в нашем примере число частиц в сокращенной пробе 300) нормальное распределение с использованием в качестве поправочного множителя на безвозвратность выборки величины $(1 - n/N)$ практически не отличается от гипергеометрического*. Это дает право при исчислении погрешностей сокращения использовать все выводы, справедливые для нормального распределения как в части проверки гипотез, так и в части расчета доверительных интервалов содержания в исходной пробе по результату анализа навески из нее.

Заканчивая характеристику нормального распределения, заметим, что график плотности вероятности представляет собой колоколообразную "кривую Гаусса", симметричную относительно математического ожидания.

Асимметрия характеризуется параметром

$$v = M \left[(x - \mu)^3 \right] / \sigma^3.$$

Ее считают отрицательной ($v < 0$), если $f(x)$ вытянута влево от μ , и положительной, если вправо. Нормальное распределение дает $v = 0$, на чем основан один из методов проверки этого закона.

Для характеристики "островершинности" одномодальных (т.е. одновоспешных) распределений применяется показатель эксцесса

* Поправка дисперсии с помощью множителя $(1 - n/N)$ рекомендована для расчета погрешности геохимического опробования и разведки месторождений [10].

Таблица 2. Вероятности числа успехов для гипергеометрического и нормального распределения при $N = 1000$, $n = 300$, $p = 0,05$

Число успехов	Вероятности гипергеометрического распределения	Кумулятивная вероятность гипергеометрического распределения	Вероятность нормального распределения			
			С дисперсией $npq(1 - n/N)$		С дисперсией npq	
			дискретная	кумулятивная	дискретная	кумулятивная
0	$10 \cdot 10^{-9}$	0,442	—	0,500	$67 \cdot 10^{-6}$	0,500
1	$24 \cdot 10^{-8}$	0,442	$15 \cdot 10^{-6}$	0,500	$17 \cdot 10^{-5}$	0,500
2	$27 \cdot 10^{-7}$	0,442	$56 \cdot 10^{-6}$	0,500	$44 \cdot 10^{-5}$	0,500
3	$20 \cdot 10^{-6}$	0,442	$18 \cdot 10^{-5}$	0,500	$10 \cdot 10^{-4}$	0,499
4	$10 \cdot 10^{-5}$	0,442	$54 \cdot 10^{-5}$	0,500	$19 \cdot 10^{-4}$	0,498
5	$43 \cdot 10^{-5}$	0,442	$15 \cdot 10^{-4}$	0,499	$47 \cdot 10^{-4}$	0,496
6	$15 \cdot 10^{-4}$	0,441	$34 \cdot 10^{-4}$	0,498	$82 \cdot 10^{-4}$	0,492
7	$41 \cdot 10^{-4}$	0,440	$78 \cdot 10^{-4}$	0,494	$15 \cdot 10^{-3}$	0,483
8	$98 \cdot 10^{-4}$	0,436	$16 \cdot 10^{-3}$	0,486	$25 \cdot 10^{-3}$	0,469
9	$20 \cdot 10^{-3}$	0,426	$28 \cdot 10^{-3}$	0,471	$36 \cdot 10^{-3}$	0,444
10	$36 \cdot 10^{-3}$	0,406	$47 \cdot 10^{-3}$	0,443	$53 \cdot 10^{-3}$	0,408
11	$59 \cdot 10^{-3}$	0,369	$67 \cdot 10^{-3}$	0,396	$67 \cdot 10^{-3}$	0,355
12	$83 \cdot 10^{-3}$	0,310	$93 \cdot 10^{-3}$	0,329	$86 \cdot 10^{-3}$	0,288
13	$11 \cdot 10^{-2}$	0,227	$11 \cdot 10^{-2}$	0,236	$96 \cdot 10^{-3}$	0,202
14	$12 \cdot 10^{-2}$	0,121	$12 \cdot 10^{-2}$	0,126	$10 \cdot 10^{-2}$	0,106
15	$13 \cdot 10^{-2}$	—	$13 \cdot 10^{-2}$	—	$11 \cdot 10^{-2}$	—
16	$12 \cdot 10^{-2}$	0,242	$12 \cdot 10^{-2}$	0,126	$10 \cdot 10^{-2}$	0,106
17	$10 \cdot 10^{-2}$	0,341	$11 \cdot 10^{-2}$	0,236	$96 \cdot 10^{-3}$	0,202
18	$77 \cdot 10^{-3}$	0,419	$93 \cdot 10^{-3}$	0,329	$86 \cdot 10^{-3}$	0,288
19	$55 \cdot 10^{-3}$	0,474	$67 \cdot 10^{-3}$	0,396	$67 \cdot 10^{-3}$	0,355
20	$36 \cdot 10^{-3}$	0,509	$47 \cdot 10^{-3}$	0,443	$53 \cdot 10^{-3}$	0,408
21	$21 \cdot 10^{-3}$	0,531	$28 \cdot 10^{-3}$	0,471	$36 \cdot 10^{-3}$	0,444
22	$12 \cdot 10^{-3}$	0,542	$16 \cdot 10^{-3}$	0,486	$25 \cdot 10^{-3}$	0,469
23	$59 \cdot 10^{-4}$	0,548	$78 \cdot 10^{-4}$	0,494	$15 \cdot 10^{-3}$	0,483
24	$27 \cdot 10^{-4}$	0,551	$34 \cdot 10^{-4}$	0,498	$82 \cdot 10^{-4}$	0,492
25	$12 \cdot 10^{-4}$	0,552	$15 \cdot 10^{-4}$	0,499	$47 \cdot 10^{-4}$	0,496
26	$45 \cdot 10^{-5}$	0,552	$54 \cdot 10^{-5}$	0,500	$19 \cdot 10^{-4}$	0,498
27	$16 \cdot 10^{-5}$	0,553	$18 \cdot 10^{-5}$	0,500	$10 \cdot 10^{-4}$	0,499
28	$54 \cdot 10^{-6}$	0,553	$56 \cdot 10^{-6}$	0,500	$44 \cdot 10^{-5}$	0,500
29	$46 \cdot 10^{-6}$	0,553	$15 \cdot 10^{-6}$	0,500	$17 \cdot 10^{-5}$	0,500
30	$46 \cdot 10^{-7}$	0,553	—	—	$67 \cdot 10^{-6}$	0,500
31	$12 \cdot 10^{-7}$	0,553	—	—	—	—
32	$28 \cdot 10^{-8}$	0,553	—	—	—	—

$$\epsilon = M[(x - \mu)^4] / \sigma^4 - 3.$$

Для нормального распределения он также равен нулю. Таким образом, нормальная кривая служит эталоном островершинности и симметричности распределений.

§ 6. РАВНОМЕРНОЕ (ПРЯМОУГОЛЬНОЕ) РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Это распределение непрерывной случайной величины имеет плотность вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 1/(\beta - a) & \text{при } a < x < \beta \\ 0 & \text{при всех других значениях } x. \end{cases}$$

Его график представляет собой прямую, параллельную оси абсцисс и отстоящую от нее на расстоянии $1/(\beta - a)$. Математическое ожидание равномерно распределенной случайной величины равно середине интервала $(\beta + a)/2$. Дисперсия этого распределения $\sigma^2 = (\beta - a)^2 / 12 = h^2 / 12$ важна для нас тем, что объясняет происхождение так называемой поправки Шепарда, которую необходимо учитывать как составную часть дисперсии при округленных данных, где h — интервал округления, предельное деление шкалы измеряющего прибора или шаг группирования при построении гистограмм. Применение поправки Шепарда справедливо только при малых h , так как с увеличением ширины интервала распределение в пределах этого интервала уже нельзя считать равномерным.

§ 7. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА

Это весьма замечательное дискретное распределение является частным случаем биномиального с очень малым значением вероятности p . Если вероятность появления некоторого события в малый промежуток времени прямо пропорциональна этому промежутку, а вероятность появления двух событий в течение этого промежутка равна нулю, то вероятность числа событий будет подчиняться закону Пуассона

$$P(X = x, \lambda) = \lambda^x e^{-\lambda} / x!$$

с одним параметром λ , характеризующим как дисперсию, так и среднее значение: $\mu_x = \lambda$, $\sigma_x^2 = \lambda$.

Распределение Пуассона используется для описания числа радиоактивных распадов, числа зерен редко встречающихся минералов в породе или раздробленной пробе, числа жил, редких палеонтологических остатков или других объектов на единицу площади или объема. В частности, отклонение закона распределения случайной величины от пуассоновского будет свидетельствовать о неслучайном (зако-

номерно сгущенном или слишком равномерном) характере распределения изучаемых объектов. Распределение Пуассона является как бы эталоном случайной неравномерности в расположении точек по разрезу, площади или объему.

§ 8. ЛОГАРИФИЧЕСКИ НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Если по нормальному закону распределены не сами величины, а их логарифмы, то получается распределение вида

$$L(x, \nu, \theta) = \frac{1}{\theta \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\log x - \nu)^2}{2\theta^2}\right).$$

Как и нормальное распределение, оно характеризуется двумя параметрами — средним значением логарифма $\mu_L = \nu$ и логарифмической дисперсией $\sigma_L^2 = \theta^2$. Среднее значение случайной величины x и ее дисперсия σ_x^2 связаны с μ_L и σ_L^2 следующими соотношениями

$$\mu_x = \exp\left(a \mu_L + \frac{1}{2} a^2 \sigma_L^2\right),$$

$$\sigma_x^2 = \exp\left(2a \mu_L + a^2 \sigma_L^2\right) [\exp(a^2 \sigma_L^2) - 1],$$

где $a = \log_b e$ (b — основание логарифмов). Те же соотношения в натуральных логарифмах имеют вид

$$\mu_x = \exp\left(\mu_L + \frac{1}{2} \sigma_L^2\right),$$

$$\sigma_x^2 = \exp\left(2\mu_L + \sigma_L^2\right) [\exp(\sigma_L^2) - 1].$$

Логнормальное распределение широко применяется в геохимии для аппроксимации распределения содержаний редких химических элементов. Для нас оно важно как средство аппроксимации распределения размеров зерен раздробленной пробы или характеристики гранулометрического состава осадочных пород.

Для облегчения чтения геологами данной книги и другой статистической литературы добавим несколько слов по поводу терминологии и обозначений. Понятия математического ожидания и дисперсии обозначаются большими буквами M и D с указанием в скобках множества величин, к которым относятся эти понятия. Например $D(X + C)$, где $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ обозначает дисперсию множества случайных величин $\{x_1 + C, x_2 + C, \dots, x_n + C\}$. Параметры изучаемой генеральной совокупности обозначаются греческими буквами. Так, математическое ожидание случайной величины x в данной генеральной совокупности обозначается обычно μ_x или просто μ , а дисперсия — σ_x^2 или σ^2 , если ясно, о какой случайной величине идет речь. Необходимо различать также математическое ожидание

и дисперсию случайной величины данной выборки и выборочную оценку математического ожидания и дисперсий той генеральной совокупности, которую характеризует эта выборка. Для первой пары из этих величин нет общепринятых обозначений, и они не имеют самостоятельного значения. Выборочные оценки математического ожидания и дисперсии генеральной совокупности обозначают соответствующими латинскими буквами m_x и s_x^2 .

Глава II

АНАЛИЗ ОСНОВНЫХ ПРИНЦИПОВ И ФОРМУЛ СОКРАЩЕНИЯ

§ 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Почти все исследователи, занимавшиеся проблемой обработки и сокращения проб, уделяли немалое внимание истории вопроса и анализу результатов предшественников. Краткие обзоры литературы имеются у К.Л. Пожарицкого, П.Л. Каллистова, Н.В. Барышева, Д.А. Краснова, Ф. Штаммбергера и других авторов. Однако исчерпывающего анализа сделано не было. Некоторые ошибочные положения продолжают переходить из работы в работу.

Развернувшаяся в 30-х годах дискуссия между П.Л. Каллистовым и К.Л. Пожарицким по поводу экспериментального определения коэффициентов формулы $q = Ka^a$ и так называемой "физической" интерпретации параметров K и a осталась незавершенной. Не подведен итог попыткам экспериментального определения надежных масс проб при сокращении. По существу, еще не было проведено методически корректной проверки соответствия фактических погрешностей сокращения расчетным для различных формул, в том числе и для широко употребляющейся формулы Ричардса — Чечотта. Вместе с тем в достаточной степени не оценены и не использованы положительные элементы основоположника научного подхода к сокращению проб Д. Брунтонна.

Все это заставляет нас еще раз вернуться к историческому обзору, интересному самому по себе и полезному с точки зрения многочисленных подходов к практическому решению важного, но, казалось бы, простого в статистическом смысле вопроса. Анализ работ будет проводиться с позиций современного состояния вопроса. Поэтому мы вынуждены будем использовать некоторые понятия и положения, подробное изложение которых дается ниже. В отношении каждой формулы анализируется следующее:

а) каким образом, из каких принципов она получена, какая модель сокращения явно и неявно подразумевалась автором формулы;

б) как производится переход от числа частиц к массе пробы в частности, как высчитываются средний размер частиц, средняя их плотность, объем и масса;

в) подразумевалась ли допустимая погрешность сокращения, какова она и каким образом входит в формулу;

г) имелась ли в виду смесь мономинеральных зерен или также и сростков, каким образом учитывалось содержание полезного компонента в среднем по пробе и распределение его по фракциям зерен. Иными словами, какой вид имело бы выражение для контрастности пробы;

д) учитывались ли начальная масса пробы и степень ее сокращения.

Таким образом, каждую формулу при анализе мы представляли в виде основного статистического "ядра" и "поправок" за форму, плотность, гранулометрический состав, контрастность, начальную массу и некоторых других поправок "второго порядка": за степень переизмельчения рудных минералов и т.д.

§ 2. ПРИНЦИП ВЕЗИНА. НАЧАЛО НАУЧНОГО ПОДХОДА. ОСНОВОПОЛАГАЮЩИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ Д. БРУНТОНА

Принцип Везина заключается в том, что если отбирать материал для исследования из исходной пробы, то масса этого материала, обеспечивающая надежные результаты, прямо пропорциональна кубу поперечника частиц. Другими словами, при прочих равных условиях погрешность определяется числом частиц в выборке. В этом понимании принцип Везина является правильным при условии, что исходная проба достаточно велика по числу зерен по сравнению с выборкой, т.е. степень сокращения очень велика.

Этот принцип, записанный в виде равенства

$$q_1/q_2 = d_1^3/d_2^3, \quad (6)$$

говорит, что если исходная проба 2, аналогичная пробе 1, в n раз мельче ($d_1/d_2 = n$), то требуемая навеска будет в n^3 раз меньше ($q_1/q_2 = n^3$). В последующем интерпретация принципа расширилась, и формулу (6) стали понимать как соотношение отбираемых масс на этапах обработки в зависимости от диаметров измельчения на этих этапах. Принцип Везина стали понимать так, что для обеспечения требуемой надежности число частиц в процессе обработки должно быть постоянным. Вся последующая критика относится, по существу, к такому расширенному толкованию. В частности, Д.А. Краснов ограничивает действие принципа Везина пробами, не содержащими зерен-сростков. Теоретически принцип Везина применим и для смеси зерен, содержащих сростки рудных и нерудных минералов, до тех пор пока доля сростков остается постоянной. Диапазон измельчений пробы, при котором это условие выполняется, не велик. Поэто-

му практически необходимо согласиться с заключением, что принцип Везина применим лишь к смеси мономинеральных зерен.

Принцип Везина записывается в виде формулы

$$q = Kd^3. \quad (7)$$

Обычно считается, что она дает завышенные против необходимых массы проб. Однако это не совсем верно. Если надежная масса экспериментально определена и найдено соответствующее численное значение коэффициента K для тонкоизмельченной пробы, то применение этого коэффициента для проб с большим размером частиц действительно будет давать завышенные величины масс. Наоборот, экстраполяция коэффициента, найденного при крупном измельчении, на тонкоизмельченные пробы приведет к ненадежным результатам. Для правильной реализации принципа параметр K должен быть определен на каждом этапе обработки в соответствии со степенью измельчения d , а это полностью обесценивает его роль.

Н.А. Котляр в 1926 г. провел ряд опытов с искусственными смесями рудных и нерудных частиц и показал, что между необходимой массой пробы q и диаметром действительно существует кубическая зависимость, между q и плотностью частиц — прямая линейная, между q и содержанием — прямая линейная, если погрешность исчислять в абсолютных процентах, и обратная, если в процентах относительно среднего.

Фундаментальное исследование Д. Брунтонна, по существу, развивает принцип Везина. Его формула является специализацией формулы Везина в двух отношениях. Во-первых, она раскрывает содержание параметра K , во-вторых, включает в явном виде параметр требуемой точности (допустимой погрешности), которая Везиным подразумевалась неявно. Чтобы это стало очевиднее, запишем формулу Брунтонна в следующем виде:

$$q = \frac{1}{p} \frac{k-c}{c} n f \gamma d^3, \quad (8)$$

где p — предельно допустимая погрешность в % от массы металла в пробе, k — содержание металла в богатейшей частице пробы, c — среднее содержание металла, f — поправка за форму частицы, γ — плотность богатейшей частицы пробы. Таким образом, по Брунтонну, $q = Kd^3$, где K находится с помощью формулы (8). Сомножители f и γ служат для перевода числа частиц пробы в ее массу. Отношение $(k-c)/c$ очень близко к современным вариантам коэффициента контрастности. Определение f сводится к изучению массы и числа зерен узкого класса частиц. По первоначальным оценкам Д. Брунтонна, при дроблении до 0,1–0,05 мм золотых и серебряных руд f колеблется от 1 до 6. Как установили Н.В. Барышев и В.И. Красиков в 1936 г., значение f изменяется от 1 до 6,6, причем при увеличении крупности частиц оно уменьшается. Наиболее непонятным коэффи-

циентом, вызвавшим много критики, является n — число богатейших частиц пробы, находящихся в избытке или недостатке по сравнению со средним его значением в исходной пробе.

Главная практическая особенность формулы Брунтон заключается в гарантировании требуемой надежности. Величина k взята не средняя по пробе с учетом срастков, а максимальная. Плотность частицы и ее размер также взяты максимальными. Все это неизбежно приводит к превышению гарантийной массы, вызвавшему единодушную, но вряд ли справедливую критику специалистов. Главное возражение состояло в невозможности или сложности определения величины n , без чего вся формула оказывалась неупотребимой:

Д.А. Краснов в 1969 г. при критике формулы Брунтон указывает, что параметр n поставлен в зависимость от задаваемой ошибки p , а именно — величина n изменяется прямо пропорционально изменению p . По мнению Д.А. Краснова, эта связь должна быть обратной. Этот вывод сделан на том основании, что n находится в числителе формулы, а p — в знаменателе. Внимательное изучение оригинальной работы Д. Брунтон показало, что n является попросту переводным множителем для приведения допустимой погрешности задаваемой в процентах массы металла, в допустимую погрешность по числу частиц, которая требуется по смыслу формулы. Это становится очевидным, стоит только записать допустимую погрешность в виде p/n .

Практического применения формула Брунтон не получила, но послужила отправной точкой для многочисленных исследований. Она содержит все параметры, кроме исходной массы, от которых зависит требуемая масса пробы, а именно: диаметр частицы, поправка на ее форму, плотность, коэффициент контрастности и допустимая погрешность. Другое дело, что конкретный вид указанных параметров в применении к пробам сложного гранулометрического и минерального (точнее, "срасткового") составов в действительности оказался более сложным и изменяющимся по мере измельчения пробы. Так, для учета изменения контрастности Н.В. Барышев и В.И. Красиков предлагали ввести коэффициент k , равный 1 для смеси полностью раскрытых рудных и нерудных частиц, и равный нулю, когда вся руда состоит из частиц-срастков с одинаковым содержанием металла. Для "погашения" действия максимального диаметра они ввели коэффициент ϵ , равный 1 для проб с узким классом крупности, и меньший единицы — для переизмельченных проб. Другие параметры формулы также подвергались различным усовершенствованиям, зачастую противоречащим друг другу из-за различной физической интерпретации параметров. Покажем это на примере величины f . Некоторые авторы понимают ее как отношение объема средней реальной частицы к объему куба со стороной d или шара с диаметром d . Другие связывают ее с гранулометрическим составом измельченного материала и характером его прохождения через сито: как отношение объема частицы к объему шара с диаметром, равным диаметру отверстий сита. В первом понимании к вели-

чине f требуется еще поправка на гранулометрический состав материала, во втором эта поправка как бы уже учтена. В первом случае для игольчатых частиц f будет очень мало, во втором — очень велико. Так, по данным К.Л. Пожарицкого (1935 г.), для золотых руд при крупном дроблении (до 1,65 мм) $f = 0,03$. Сравнивать эти значения с данными Д. Брунтон или Н.В. Барышева и В.И. Красикова трудно по указанной причине.

Единственный вывод Д. Брунтон — материал должен быть тем мельче раздроблен, чем меньше сокращаемая проба — оказался, безусловно, ошибочным. Современные исследования показали, что вывод должен быть противоположным. Кроме того, ни Д. Брунтон, ни Везин не учитывали факт накопления погрешностей по мере сокращения пробы при многоэтапной ее обработке.

3. ЭМПИРИЧЕСКОЕ НАПРАВЛЕНИЕ. ФОРМУЛА РИЧАРДСА—ЧЕЧОТТА

В 1904 г. Р. Ричардс в книге по обогащению руд приводит таблицу данных пяти инженеров по надежной обработке проб. Эти данные, по мнению Р. Ричардса, показывают, что в рассмотренных девяти случаях изменение необходимой массы пробы примерно пропорционально квадрату изменения диаметра частиц. В заключение Р. Ричардс говорит, что на основании данных этой таблицы можно получить массы, "которые, вероятно, встретят одобрение практиков".

Так как у Р. Ричардса не было ни широкого практического материала, на который можно было бы опереться с большой достоверностью, ни теоретических предпосылок выдвинутой им зависимости, то вполне понятны его приведенные выше весьма осторожные выражения. Впоследствии (1909 г.) сам автор указал на условность и изменчивость этой зависимости.

Г.О. Чечотт в 1932 г. выразил предложенную Р. Ричардсом зависимость в виде формулы $q = Kd^2$, где q — надежная масса пробы в кг, d — диаметр отверстий контрольного сита в мм. Им же впервые была составлена таблица для выбора коэффициента K в зависимости от содержания металла в руде и характера вкрапленности (табл. 3). В ней руды подразделены на шесть категорий и для каждой рекомендованы предельные и средние значения K . С тех пор формула Ричардса—Чечотта получила универсальное применение среди геологов-практиков и более полувека оказывала решающее воздействие на направление дальнейших исследований.

Следует отметить, что формула для многих случаев давала хорошее приближение, а, если этого не случалось, ошибку относили за счет неверного определения параметра K . Действительно, правильный выбор представляет сложную задачу. Предел колебаний K (от 0,16 до 24) достаточно широк, а деление руд на категории условно. Шагом назад по сравнению с формулой Брунтон было отсутствие предельно допустимой погрешности. Она, по-видимому, неявно под-

Таблица 3. Значения параметра K для категорий руд по Г.О. Чечотту

Категория руды	Характеристика	Пределы K	Среднее
I	Очень убогие руды, весьма равномерное оруденение, равномерная тонкая вкрапленность	0,16—0,40	0,25
II	Убогие руды, равномерное оруденение, мелкая равномерная вкрапленность	0,4—1,5	1,0
III	Средние руды, средняя вкрапленность	1,5—3,0	1,8
IV	Средние руды, равномерная средняя и крупная вкрапленность	3—6	4,5
V	Богатые руды, оруденение неравномерное, крупная неравномерная вкрапленность	6—15	10
VI	Очень богатые руды, весьма неравномерное оруденение, вкрапленность спорадическая со штуфными включениями	15—24	20

разумевалась равной погрешности анализа на тот или иной вид руд, обычной для того времени. Отсутствует также поправка на форму частиц f и плотность γ .

Формула Ричардса—Чечотта в явном виде не содержит коэффициента контрастности. Но, отбросив из формулы Брунтон те параметры, которых нет в формуле Чечотта, и сопоставив оставшееся: $q = [(k - c)/c] \gamma d^3$ (Д. Брунтон) и $q = Kd^2 = (K/d)d^3$ (Г.О. Чечотт), обнаруживаем, что выражением для контрастности по Г.О. Чечотту, по существу, служит отношение K/d , т.е. контрастность по Ричардсу—Чечотту изменяется при дроблении обратно пропорционально размеру частиц. Следовательно, для руд, в которых коэффициент контрастности при дроблении подчиняется этому закону, правильный выбор K может обеспечить надежные массы при различной крупности. Для других руд никаким выбором K это обеспечить невозможно. Многочисленные критики как на отрицательный момент указывали на то, что показатель степени диаметра частиц в формуле равен двум. С позиций проведенного анализа видно, что это значение показателя степени есть совместный результат "нормальной", кубической зависимости и неявно подразумеваемого закона изменения контрастности обратно пропорционально диаметру.

Формулу Ричардса—Чечотта на практике применяют для определения надежной массы на каждом этапе сокращения, неверно полагая, что обеспечение надежности на каждом этапе автоматически обеспечивает ее для всего процесса обработки. На деле же погрешности этапов складываются по законам статистики, что ни в самой формуле, ни в рекомендациях по ее применению не отмечается.

Наконец, в этой формуле не учитывается зависимость допускаемой погрешности от сокращаемой массы, а эта зависимость существ-

ует, ибо, если степень сокращения невелика, при прочих равных условиях будет меньше и погрешность сокращения. Необходимо упомянуть и о совсем неуместном употреблении формулы, а именно — для определения необходимой массы исходной, например бороздовой, пробы, понимая под d размер кусков отбитой пробы или размер рудной вкрапленности.

Таким образом, нельзя считать вполне обоснованным то значительное место, которое занимала и занимает эта формула в проблеме обработки проб.

§ 4. ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ РИЧАРДСА—ЧЕЧОТТА. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЭМПИРИЧЕСКИХ ФОРМУЛ

Американские инженеры К. Демонд и Р. Хальфердал в 1922 г. обобщили принцип Ричардса, сделав его более гибким за счет изменения показателя степени диаметра частиц: $q = Kd^a$. В формуле стало два параметра, которые требовалось определить для каждого вида руды. Не претендуя на теоретическое решение, авторы пошли путем чистого эксперимента, решая систему из двух уравнений с двумя неизвестными K и a : $q_1 = Kd_1^a$; $q_2 = Kd_2^a$.

Значения q_1 и q_2 являются надежными массами при заданных диаметрах d_1 и d_2 , определяемыми экспериментально, т.е. обработкой многих проб и изучением расхождений. Поскольку такие эксперименты не совсем просты и дешевы, К. Демонд и Р. Хальфердал сделали допущение, что масса 1 г всегда (независимо от свойств руды) надежна для пробы, измельченной до 0,1 мм, т.е. $q_2 = 0,001$ кг, $d_2 = 0,1$ мм (150 меш.). В раздробленной до 0,1 мм руде содержится не менее $2 \cdot 10^8$ частиц, и содержание может быть определено с точностью 0,03 %, что вполне достаточно для применяемых химических методов. Будем называть эту пару величин стандартом Демонда — Хальфердала. Подставляя стандарт Демонда — Хальфердала во второе уравнение, требуется провести эксперименты по определению надежной массы q_1 для какого-либо другого измельчения d_1 . Конкретно предлагалось пробу массой 2 г дробить до размера $d_1 = 49$ мм, делить (сокращать) ее на 16 частей, причем исходную массу пробы выбирать так, чтобы масса после сокращения стала равной q_1 . Все шестнадцать навесок истирались до 0,1 мм, сокращались до 1 г и анализировались. Если расхождения не превышали ошибки химического анализа, масса считалась надежной и подставлялась в указанную систему уравнений для определения K и a . Практически значения a , по Демонду и Хальфердалю, колеблются в пределах от 1,5 до 2,7.

В течение 30 лет советская наука в области опробования шла по этому направлению. Основным продолжателем идей К. Демонда и Р. Хальфердала в период от 1937 до 1950 г. был К.Л. Пожарицкий. Логарифмируя основную формулу, он приводит ее к линейному виду $\lg q = \lg K + a \lg d$. Соответствующая прямая на двойном логариф-

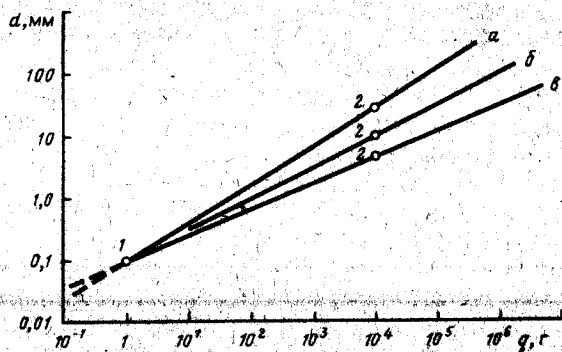


Рис. 7. Логарифмическая диаграмма "размер — масса" для экспериментальной оценки параметров формулы $q = Kd^a$. По К.Л. Пожарицкому
 1 — стандарт Демонда — Хальфердаля; 2 — экспериментальные точки для второго размера и массы; а — весьма равномерные руды, б — равномерные руды, в — неравномерные руды

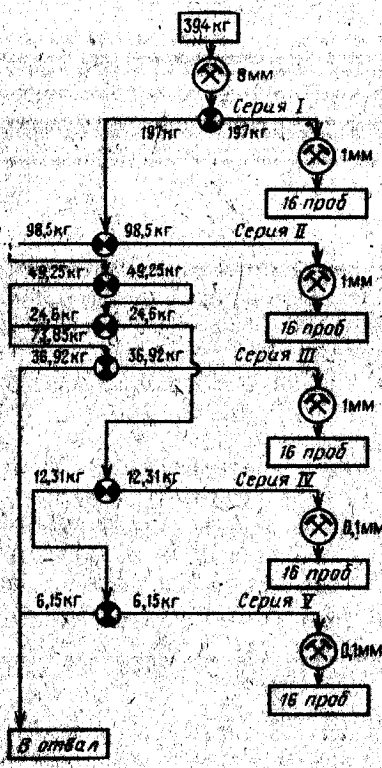


Рис. 8. Схема экспериментов по определению средних масс проб. По К.Л. Пожарицкому.

мическом бланке-графике (рис. 7) проходит через точку с координатами $q_1 = 0,001$, $d_1 = 0,1$ (стандарт Демонда — Хальфердаля). Другая точка определялась экспериментально, как у К. Демонда и Р. Хальфердаля, однако со следующим усовершенствованием. Каждая из восьми параллельных проб не истиралась сразу до 0,1 мм, а подвергалась нескольким последовательным этапам дробления

и сокращения (рис. 8), причем на каждом этапе сокращение проводилось в соответствии с задаваемыми априори, а затем проверяемыми значениями K и a , которые определяют вторую (пробную) точку на графике (см. рис. 7). Такой подход К.Л. Пожарицкий считал более приближенным к практике. В этом отношении он был прав, но возникает вопрос, что определяет формула по К.Л. Пожарицкому: надежную массу для заданного акта сокращения или для всей схемы обработки, состоящей из переменного числа этапов (ошибки которых, как известно, складываются по закону аддитивности дисперсий).

К.Л. Пожарицкий на протяжении всего длительного периода дискуссии с П.Л. Каллистовым настаивает на полезности этого усовершенствования именно в связи с накоплением погрешностей вследствие многократного сокращения.

К.Л. Пожарицким выработаны стандарты обработки проб для четырех групп руд. К первой группе отнесены руды редких металлов с равномерной мелкой вкрапленностью полезного компонента, аналогичные им медные, полиметаллические, мышьяковые, серни- и медноколчеданные руды, а также руды с неравномерным оруденением, ценный минерал которых имеет склонность к весьма легкому измельчению, бокситы, железные руды (при анализе на железо, кальций, магний, кремний и серу) — $q = 0,06d^{1,8}$.

Ко второй группе отнесены сравнительно равномерные молибденовые, ртутные, медные порфиоровые, сурьмяные и свинцово-цинковые руды, неравномерные руды редких металлов, в которых ценный компонент легко измельчается, — $q = 0,1d^2$.

К третьей группе отнесено большинство неравномерных руд: руды с крупной и неравномерной вкрапленностью молибденита, шеелита, вольфрамита, киновари, касситерита и других редких минералов — $q = 0,18d^{2,25}$.

К четвертой группе отнесены богатые полиметаллические и другие очень неравномерные руды — $a > 2,25$, $K > 0,18$. В 1961 г. М.Ф. Локонов свел эти результаты в табл. 4.

С упорной 20-летней критикой описанного способа определения K и a выступал П.Л. Каллистов. Во-первых, он отрицал стандарт Демонда — Хальфердаля, считая его выколачиванием формулы*, и предполагал путем экспериментов определять не одну а две точки на графике, по которым можно находить K и a . П.Л. Каллистов замечает, что если прямые Пожарицкого продолжить левее опорной точки (точка 1 на рис. 7), то прямые для руд разной контрастности поменяются местами, вследствие чего получается, что при дроблении менее 0,1 мм наиболее неравномерные руды становятся более равномерными. Это — остроумный и справедливый довод, который, однако, нельзя принять всерьез, так как в стандарте Демонда — Хальфер-

* Принятие стандарта якобы ставит K в зависимость от a , тогда как они должны быть независимы.

Таблица 4. Масса проб (в кг) в зависимости от размера наибольших частиц. По К.Л. Пожарицкому

Размер наибольших частиц, мм	Гуды				
	весьма равномерные		неравномерные и средние	весьма неравномерные	
	$q = 0,06d^{1,8}$	$q = 0,05d^2$	$q = 0,1d^2$	$q = 0,2d^2$	$q = 0,18d^{2,2}$
20	15	20	40	80	160
10	4	5	10	20	35
8	2,5	3,2	6,4	12,8	20
5	1,2	1,25	2,5	5,0	7
3	0,45	0,45	0,9	1,8	2,5
2	0,2	0,20	0,4	0,8	0,9
1	0,06	0,05	0,1	0,2	0,18
0,5	0,018	0,0125	0,025	0,05	0,04
0,1	0,001	0,0005	0,001	0,002	0,001

дали не предполагается пробу массой 1 г измельчать и сокращать далее, что при тогдашней технике анализа было оправдано. Современные методы анализа микронвесок потребовали бы других стандартов, скажем, 0,05 г и 0,01 мм.

Во-вторых, П.Л. Каллистов предлагал однозначную физическую интерпретацию параметров K и a . По его мнению, K выражает число частиц в пробе, необходимых для достижения желаемой точности. Но это число частиц зависит в свою очередь от среднего содержания изучаемого компонента, крупности зерен этого компонента, их плотности, неравномерности его распределения в пробе, а также от содержания компонента в несущем минерале. П.Л. Каллистов утверждает, что K остается одним и тем же при всяком измельчении, т.е. является постоянной величиной.

Показатель a по Каллистову, должен корректировать зависимость массы пробы от среднего диаметра частиц, "погашая" действие максимального диаметра. Он определяется механическими свойствами материала.

Попытку подвести итоги давней дискуссии в 1965 г. предпринял крупнейший специалист ГДР по опробованию и подсчету запасов Ф. Штаммбергер. Он считает интерпретацию параметров K и a , данную П.Л. Каллистовым, гораздо более важным вкладом в проблему, чем саму формулу Демонда — Хальфердаля.

Остановимся на анализе экспериментов по определению надежной массы проб. Прежде всего обратим внимание на общий недостаток обработки данных таких экспериментов. Он заключается в том,

что вместо общепринятой теперь характеристики погрешности сокращения — среднего квадратического отклонения прежде часто использовались другие характеристики, трудно поддающиеся статистической обработке, а также не применялись тесты для проверки гипотез о допустимости получающихся отклонений.

Для примера рассмотрим предложенную Н.В. Барышевым стандартную схему проведения эксперимента по определению K и a (рис. 9). В каждой серии с массой пробы q_{Φ} вычисляют среднее содержание и его среднее квадратическое отклонение σ_{Φ} . Выбирают серию проб (диаметр частиц обозначают d_1), которая дала наибольшее* квадратическое отклонение, и вычисляют надежную массу пробы q_1 исходя из соотношения $q_1/q_{\Phi} = \sigma_{\Phi}^2/\sigma_{\text{доп}}^2$, где $\sigma_{\text{доп}}$ — допустимая средняя квадратическая погрешность, откуда $q_1 = q_{\Phi} \sigma_{\Phi}^2/\sigma_{\text{доп}}^2$.

Значения q_1 и d_1 подставляют в первое из двух уравнений упомянутой системы, стандарт Демонда — Хальфердаля — во второе.

Обработанные Л.И. Шаманским в 1938 г. данные одного из таких экспериментов показали следующие результаты: в серии А — $K = 0,05$, $a = 1,72$; в серии В — $K = 0,08$, $a = 1,90$; в серии Г — $K = 0,55$, $a = 2,74$; в серии Д — $K = 0,37$, $a = 2,57$.

Они со всей очевидностью показывают, что формула Демонда — Хальфердаля неудовлетворительно описывает зависимость надежной массы от диаметра. Действительно, значения параметров сильно изменяются от выбора величины измельчения для определения второй опорной точки. На основании этих данных Л.И. Шаманский предлагает по существу другую зависимость:

$$q = K_1 + K_2 d + K_3 d^2,$$

имеющую для данного случая вид

$$q = -0,261 + 0,822d - 0,019d^2,$$

которая в среднем дает хорошее приближение, но отрицательные массы для малых диаметров.

В настоящее время с целью максимального использования полученной в результате такого довольно дорогостоящего эксперимента информации использовали бы не одну, а все пять серий, а оценку K и a провели бы, решая все шесть (с учетом стандарта Демонда — Хальфердаля) уравнений методом наименьших квадратов. Лабораторную ошибку необходимо было отсеять методом дисперсионного анализа.

Попытаемся выяснить, какая же погрешность исследуется в подобного рода экспериментах. Из раздробленной до диаметра

* Для уменьшения относительной роли лабораторной погрешности.

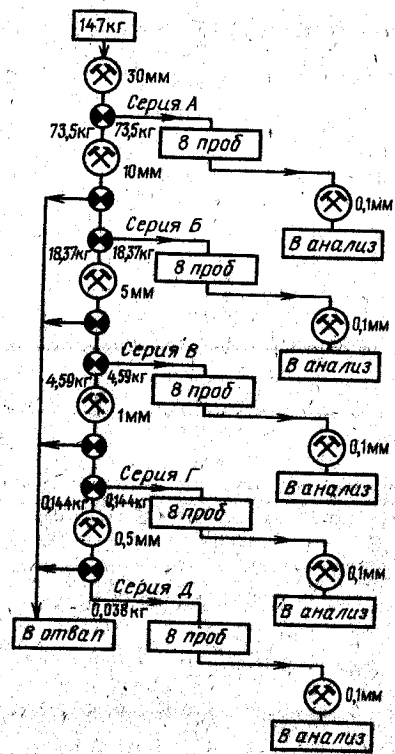


Рис. 9. Схема экспериментов по определению параметров формулы $q = Ka^a$. По Н.В. Барышеву

будет меньше, чем ошибка сокращения от 200 до 2 кг.

Ошибка сокращения — это несоответствие между содержанием изучаемого компонента в исходной и сокращенной пробах. При упомянутой методике возникает две ошибки сокращения: при взятии из исходной пробы серийной (обозначим ее σ_1) и при разделении ее на серию частных проб (обозначим ее σ_2). По закону сложения конечная ошибка сокращения определится из равенства $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$.

П.Л. Каллистов при обработке экспериментов подсчитывает ошибку сокращения по отношению к содержанию в серийной пробе, т.е. находит ошибку σ_2 , которая является лишь частью общей ошибки сокращения. Лишь в том случае, когда масса серийной пробы велика по сравнению с массой конечной пробы и близка к массе исходной пробы, ошибкой σ_1 можно пренебречь. При этом действительно необходимая масса не зависит от начальной. Однако такое положение выполняется не всегда. "Надежная" по отношению к серийной пробе масса может быть ненадежной по отношению к исход-

ной пробе, которая является единственным критерием надежности. Каждая из них разделяется на серию частных проб, которые и анализируются. По результатам анализа определяют минимальную массу частной пробы q_1 , при которой ошибка сокращения не превышает лабораторную.

Затем исходную пробу дробят до диаметра d_2 и повторяют операцию определения минимальной надежной массы q_2 . После этого, по П.Л. Каллистову, имеют два уравнения $q_1 = Ka_1^a$ и $q_2 = Ka_2^a$ с двумя неизвестными K, a , которые определяются при решении системы этих уравнений. По К.Л. Пожарицкому, второе уравнение дает стандарт Демонда — Хальфердала. При постановке таких опытов предполагается, что надежная масса пробы не зависит от сокращаемой (начальной). Как будет показано далее, это предположение верно лишь для очень больших степеней сокращения и весьма тщательного перемешивания. В общем случае это неверно и ошибка сокращения одинакова по свойствам проб в одинаковых условиях, например от 5 до 2 кг.

Казахстанскими геологами Г.В. Крыловым и А.К. Тереховым в 1960 г. был проведен следующий эксперимент. Из пробы, раздробленной до 1-го диаметра, отбирались серийные пробы различной, все уменьшающейся массы. Серийные пробы разделялись на частные (всегда по восемь частных проб из одной серийной). Затем подсчитывалась средняя ошибка в содержании в серии частных проб по отношению к среднему содержанию в серийной пробе, т.е. ошибка выделения частной пробы из серийной. Она, по замыслу авторов, должна характеризовать ошибку сокращения (тем самым надежность или ненадежность массы конечной пробы). Однако эта ошибка — лишь часть ошибки сокращения. Вторую ее часть составляет ошибка выделения серийных проб. К счастью, авторы "попутно" подсчитывали ошибки выделения серийных проб. Ими можно было бы воспользоваться для нахождения общей ошибки сокращения.

Среднее содержание в исходной пробе вычислено неверно — как среднее арифметическое из серийных проб, хотя масса серийных проб неодинакова и изменяется в широких пределах (от 3,6 до 467 кг). Следовательно, неверно вычислены и ошибки выделения серийных проб. Именно по этой причине авторы не обнаружили тенденции к увеличению ошибки выделения серийных проб с уменьшением их массы. Так как ошибки выделения частных проб подсчитывались по отношению к среднему содержанию в серийных пробах, то они оказались совершенно не связанными с содержанием в исходной пробе (а ведь в установлении такой связи и заключалась цель эксперимента). Тенденция к увеличению ошибки с уменьшением массы оказалась также слабой, так как она определяется ошибками сокращения проб различной массы в одинаковое число раз (в данном случае — в 8 раз).

Для нахождения правильной общей ошибки сокращения авторы пересчитали заново содержание в исходных пробах и ошибки выделения серийных проб σ_1 . При сравнении этих ошибок отчетливо проявляется тенденция к их увеличению с уменьшением массы серийных проб. Сложением полученных ошибок выделения серийных проб с ошибками выделения частных проб из серийных получены общие ошибки сокращения. Обнаружена явная тенденция к их увеличению с уменьшением массы пробы.

Для нахождения правильного содержания в исходных пробах и ошибки выделения серийных проб авторы пересчитали заново содержание в исходных пробах и ошибки выделения серийных проб σ_1 . При сравнении этих ошибок отчетливо проявляется тенденция к их увеличению с уменьшением массы серийных проб. Сложением полученных ошибок выделения серийных проб с ошибками выделения частных проб из серийных получены общие ошибки сокращения. Обнаружена явная тенденция к их увеличению с уменьшением массы пробы.

Таким образом, Г.В. Крылов и А.К. Терехов фактически исследовали ошибки сокращения серийных проб различной массы в 8 раз. Эти ошибки действительно держатся на одном уровне и резко возрастают лишь при малых массах. Не обнаружив закономерного хода их увеличения с уменьшением массы проб, Г.В. Крылов и А.К. Терехов пришли к выводу о существовании так называемых неизбежных случайных ошибок приготовления проб. Они даже устанавливают их величину по месту перегиба совмещенной кривой ошибок: для M_0 при крупности пробы 10 мм — 7,35 %, при крупности 4,5 мм — 5,5 %; для W при крупности пробы 10 мм — 10 %, при крупности пробы 4,5 мм — 15,8 %.

Что же это за "неизбежные" ошибки, не зависящие ни от массы пробы, ни от крупности дробления (из двух случаев в одном, т.е. в 50 %, "неизбежная случайная ошибка пробы" оказалась больше при меньшей крупности)? Поскольку эти ошибки не зависят от главных факторов приготовления проб — массы и крупности, они в эксперименте авторов, по нашему мнению, были ошибками приготовления навесок и анализа.

Для получения корректных выводов в экспериментах подобного рода эти ошибки должны быть отсеяны. Для этой цели может быть применен метод *дисперсионного анализа*, заключающийся в следующем. Из исходной пробы, раздробленной до диаметра d_1 , отбирается n_1 проб массой q_1 , n_2 проб массой q_2 и т.д., желательна до полного вычерпывания. Из каждой такой пробы берется для анализа m навесок. По m навескам высчитывается среднее содержание для каждой пробы, а по содержаниям в каждой пробе — среднее содержание в исходной пробе. По отклонению содержаний в каждой навеске от содержаний в частных пробах высчитывается стандартное отклонение анализа $\sigma_{ан}$, а по отклонению содержаний в навесках от среднего содержания в исходной пробе — общее стандартное отклонение $\sigma_{об}$. Из равенства $\sigma_{сокр}^2 = \sigma_{об}^2 - \sigma_{ан}^2$ определяют дисперсию сокращения $\sigma_{сокр}^2$, которая является мерой точности сокращения. По ней определяется минимальная необходимая масса для заданной точности обработки.

Вместо таких общепринятых характеристик точности, как дисперсия или стандартное отклонение, пользовались средними арифметическими ошибками, при выделении серийных проб за характеристику ошибки принимается единичное отклонение. Этими обстоятельствами обусловлено дополнительное искажение картины увеличения ошибки с уменьшением массы пробы в описываемых экспериментах. Вычисленные нами действительные ошибки в большинстве случаев существенно превышают неизбежные случайные ошибки приготовления проб, на которые ориентировались авторы при выборе надежных масс. Следовательно, схемы обработки, рекомендуемые авторами, являются недостаточными. Изложенные замечания в равной мере относятся к отработке данных в экспериментах по методике Н.В. Барышева, П.Л. Каллистова и к их практическим выводам.

В заключение отметим "пассивную" роль формулы $q = Kd^a$ в выборе надежной массы вообще. По замыслу, надежная навеска определяется экспериментально для нескольких диаметров (по крайней мере для двух), а формула служит для определения надежной массы для промежуточных параметров, т.е. для интерполяции. Однако нет никаких гарантий, что такая интерполяция дает достаточно точное приближение. Л.И. Шиманский это наглядно показал, обработав данные, полученные Н.В. Барышевым. Подтверждением применимости формулы для интерполяции было бы совпадение вычисленной по формуле массы с найденной экспериментально для произвольно выбранных третьего, четвертого и последующих диаметров измельчения. Таких опытов, к сожалению, не ставилось.

Роль формулы, которая фактически может использоваться лишь как средство интерполяции, да и то под вопросом, конечно, недостаточна. Только тогда, когда параметры формулы могут быть объективно выведены исходя из свойств руды, которые поддаются простой и надежной оценке, формула приобретает действительную ценность.

Масса, определяемая из формулы, надежна для одного акта сокращения. При схемах обработки с двумя и более этапами масса, будучи надежной для каждого акта сокращения в отдельности, не гарантирует надежности всей схемы в целом, так как ошибка от этапа к этапу накапливается. Согласиться же с модификацией опытов и их трактовкой по Пожарицкому также нельзя, так как формула, вне всякого сомнения, должна характеризовать ошибку одного акта сокращения, а процесс их накопления пользователь должен контролировать сам, составляя схемы обработки и используя свойство аддитивности дисперсий.

Таким образом, на основании современных данных в отношении формулы Демонда — Хальфердаля можно сделать следующие выводы:

- 1) физическая интерпретация эмпирических коэффициентов K и a не удалась и в дальнейшем представляется бесперспективной;
- 2) аппроксимация модели сокращения экспериментальным подбором K и a оказалась недостаточно гибкой для практики в широком диапазоне измельчений; обработка данных экспериментов была некорректной;
- 3) формула Демонда — Хальфердаля по первоначальному замыслу должна давать приемлемую на практике верхнюю границу необходимой массы. В этом качестве она не потеряла значения и сейчас.

§ 5. ИССЛЕДОВАНИЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ ВЫБОРОЧНОГО МЕТОДА

Для установления связи между массой пробы, размером частиц и погрешностью сокращения в конце 30-х — начале 40-х годов исследователи обратились к методам математической статистики.

Й. Мике в 1928 г. рассмотрел пробу как смесь частиц двух видов. Для того чтобы оценить необходимое число их в выборке, он использовал теорему Бернулли об отклонении доли частиц одного класса в выборке от доли этих частиц в генеральной совокупности и теорему Лапласа для определения параметра надежности, получив следующее соотношение:

$$n \geq [2p(1-p)t^2] / \epsilon^2,$$

где n — число частиц в выборке; p — доля "рудных" частиц; t — параметр надежности; ϵ — предельно допустимые ошибки.

Далее Й. Мике предполагал, что все частицы имеют одинаковую массу. Рассматривая ее как функцию доли рудных частиц p , он находил минимальную массу пробы, гарантирующую погрешность не

более допустимой. Понимая, что "рудные" и "нерудные" частицы значительно отличаются по массе, И. Мике ввел коэффициент равный отношению масс "нерудной" и "рудной" частиц, и получил следующее выражение:

$$q = \frac{d^3 \gamma_n}{\epsilon^2} (c - lk)^2 \frac{l^2}{3(2l + 1)},$$

где q — масса пробы, г; γ_n — плотность "нерудной" частицы, г/см³; l — отношение масс "рудных" и "нерудных" частиц; d — средний размер частиц, см; c — содержание исследуемого компонента "нерудных" частицах; k — содержание в "рудных" частицах. Очевидно, что параметр l не должен быть меньше 0,5, что затруднит классификацию частиц. Чтобы проанализировать эту формулу, выразим l через плотности "рудных" и "нерудных" частиц и исследуем квадрат ошибки:

$$\epsilon^2 = \frac{\gamma_p^2 c^2}{2\gamma_p - \gamma_n} \left(\frac{k\gamma_p}{c\gamma_n} - 1 \right) \frac{d^3}{3q} = K \frac{d^3}{q}.$$

Формула устанавливает тот факт, что квадрат ошибки прямо пропорционален кубу среднего размера частиц и обратно пропорционален массе пробы. Кроме того, если все частицы пробы "рудные", т.е. $k = c$ и $\gamma_p = \gamma_n$, то погрешность будет равна нулю. Но выражение, определяющее значение коэффициента K , является следствием значительных упрощений при исследовании надежной массы как функции от доли рудных частиц, поэтому дает завышенную оценку погрешности.

В. Бауле и А. Бенедетти-Пихлер в 1928 г. рассматривали отдельный акт сокращения аналогичной смеси, состоящей из двух классов частиц, имеющих равные объемы. Применяя сложные математические соотношения, они установили, как и И. Мике, что квадрат ошибки можно выразить в следующем виде:

$$\epsilon^2 = Kp(1 - p)/n,$$

где p — доля рудных частиц; n — общее их число в выборке.

Обозначив через p_1 процентное содержание "рудных", а через p_2 — "нерудных" частиц, они пришли к выводу, что погрешность зависит от размера частиц и массы пробы q следующим образом:

$$\epsilon^2 = \gamma_p^2 \gamma_n^2 (p_1 - p_2)^2 p_1 (1 - p_1) (v/q\gamma^3),$$

где v — объем частицы; γ — средняя плотность материала пробы. Как и у И. Мике, эта формула устанавливает зависимость квадрата ошибки от размера частиц и массы пробы, но в этой формуле используются значения величины p_1 и p_2 , которые предварительно необходимо выразить как функции содержания и плотности.

У. Бертольф в 1957 г. для анализа погрешности также использовал дисперсию биномиального закона распределения. Если из пробы, состоящей практически из неограниченного числа частиц, извлекается n частиц, то дисперсия определяется соотношением $\sigma^2 = p(1 - p)/n$, где p — доля "рудных" частиц. Последние формулы верны для смесей частиц, обладающих равными массами. Чтобы учесть различие частиц по массе и плотности, У. Бертольф ввел специальные множители, после чего формула для дисперсии массы полезного компонента приняла следующий вид:

$$\sigma^2 = \left[\left(\frac{\gamma_p}{\gamma} \right)^2 p + \left(\frac{\gamma_n}{\gamma} \right)^2 (1 - p) \right] \frac{1}{n}.$$

Для дисперсии содержания полезного компонента, которое можно выразить через доли рудных частиц и их плотности:

$$c = p\gamma_p / [p\gamma_p + (1 - p)\gamma_n],$$

У. Бертольф предложил следующую формулу:

$$q_c^2 = [c(1 - c)\gamma_p \gamma_n] / \gamma^2 n,$$

или, если n выразить через массу и размер частицы:

$$\sigma_c^2 = [c(1 - c)\gamma_p \gamma_n d^3] / q.$$

Дж. Висман тогда же обратил внимание на то, что при нахождении дисперсии с помощью биномиального распределения вводится предположение о бесконечно большом числе частиц в исходной пробе по сравнению с сокращенной. При небольшой степени сокращения это предположение неверно, и Дж. Висман ввел поправку на ограниченный объем совокупности:

$$\sigma^2 = \frac{p(1 - p)}{n} \left(1 - \frac{n}{N} \right),$$

где N — число частиц в начальной пробе. Эта поправка существенно важна при многоэтапной обработке пробы, так как на каждом этапе масса пробы сокращается незначительно.

А.И. Гольдштейн в 1935 г. рассмотрел пробу как конечную совокупность частиц, имеющих различные размеры и содержание. Тогда содержание в начальной пробе будет равно

$$c_0 = \frac{\sum_{i=1}^N c_i g_i}{\sum_{i=1}^N g_i},$$

а в пробе после сокращения

$$c_1 = \frac{\sum_{j=1}^n c_j g_j}{\sum_{j=1}^n g_j},$$

где c_j и g_j — соответственно содержание и масса отдельных частей. Введя величину $\pi_i = c_i - c_0$, А.И. Гольдштейн использовал для вычисления дисперсии содержания корреляцию между массой частицы и содержанием r :

$$\sigma_c^2 = \frac{\sigma^2}{n} (1 + v_{g^2}) (1 + r_{g^2 \pi^2} v_{g^2} v_{\pi^2}) (1 + r_{g^2 \rho^2} v_{g^2}),$$

где σ — средняя квадратическая разность содержания между частями; r — коэффициенты корреляции; v — коэффициенты вариации соответствующих величин, указанных в индексах. Очевидно, что подсчет дисперсии по формуле Гольдштейна требует определения величин c_j , g_j и корреляции между ними, что практически невыполнимо даже с помощью дорогостоящих экспериментов. Зависимость погрешности от размера частиц в этой формуле выражена косвенно через величину σ , которую также необходимо определять экспериментально.

§ 6. ИССЛЕДОВАНИЯ П. ЖИ

Новая волна интереса к проблеме сокращения проб поднялась в 1955—1965 г. благодаря исследованиям французских (П. Жи) и советских (Д.А. Краснов, Ю.А. Ткачев) специалистов. Работы П. Жи первоначально (1954—1958 гг.) были стимулированы необходимостью контроля качества товарных масс полезного ископаемого. Впоследствии специфика обработки геологических проб была учтена им в полной мере, и мы не можем согласиться с замечанием Ф. Штамбергера, что П. Жи будто бы не отразил геологическое существо проблемы.

В обобщенном виде формула Жи имеет следующий вид:

$$\sigma^2 = Cd^3 [(1/q) - (1/Q)],$$

где Q — опробуемая масса; q — масса пробы; C — параметр опробования; d — размер ячейки сита, задерживающего от 5 до 10 % просеиваемого материала. Многие параметры этой формулы порознь встречались в более ранних формулах, но вместе в правильной взаимной связи они появились впервые. К ним относятся заданная погрешность сокращения, масса сокращаемой пробы и группа параметров, характеризующих контрастность материала C :

$$C = fglm,$$

где f — коэффициент формы зерен; g — гранулометрический пока-

затель; l — степень раскрытия минералов; m — коэффициент минерального состава. П. Жи не придавал большого значения массе сокращаемой пробы Q , полагая, что практически всегда $q \ll Q$, и анализировал в основном формулу

$$\sigma^2 = fglmd^3/q.$$

В качестве меры допустимой погрешности ($\pm 2\theta$) П. Жи принял ошибку, которая совершается в среднем не более чем в 95 случаях из 100. Тогда формула, записанная решенной относительно требуемой массы q , принимает вид

$$q = d^3 fglm/\theta^2.$$

Коэффициент C для удобства анализа можно разбить на два множителя — C_V и C_K — и рассмотреть по отдельности. Первый множитель равен $C_V = fg$, где f — отношение объема реального зерна, прошедшего через сито, к объему куба со стороной d ; g — гранулометрический коэффициент. Таким образом, C_V — это "объемный" коэффициент при кубе диаметра d , переводящий число частиц реальной пробы в ее объем. Коэффициент f , по данным П. Жи, в большинстве случаев колеблется от 0,3 до 0,7. Для пластинчатых минералов (слюд) его значение опускается до 0,1, для игольчатых поднимается до 10. Не приведет к большой ошибке, если в обычных случаях принимать f равным 0,5.

Под d П. Жи понимает размер отверстий сита, на котором остается 10—15 % просеиваемого материала пробы. Однако с помощью гранулометрического коэффициента g в формулу фактически вводится средний взвешенный диаметр. Действительно, если (по П. Жи)

$$g = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{d_i^3}{d^3} w_i}{\sum_{i=1}^n d_i^3 w_i / d^3},$$

то входящее в формулу выражение $gd^3 = \sum d_i^3 w_i$. Для определения g необходимо проводить ситовый анализ основных типов измельчаемых проб. Для проб нерасситованной руды $0,1 < g < 0,35$, для проб с ограниченным верхним размером (как при обработке проб с просеиванием) — $0,15 < g < 0,40$, с ограниченным нижним размером (отситованы мелочь, пыль) — $0,2 < g < 0,5$. Для расситованных руд $0,3 < g < 0,5$ и приближается к 1 с уменьшением классового промежутка. Объемный коэффициент по существу присутствовал и в формуле Брунтон в виде параметра f , детально обсуждался К.Л. Пожарицким, П.Л. Каллистовым, Н.В. Барышевым и другими советскими специалистами.

Что же касается коэффициента C_K , то это впервые введенный П. Жи физически интерпретируемый коэффициент контрастности пробы. П. Жи счел удобным разбить его на две составляющие —

коэффициент "раскрытия" l и "минералогический" коэффициент m : $C_K = lm$.

Для коэффициента раскрытия l П. Жи дает следующее простое выражение: $l = (c' - c)/(k - c)$, где k — содержание полезного компонента в рудном минерале, %; c' — содержание полезного компонента в богатейшей частице пробы, %; c — среднее содержание полезного компонента в пробе, %. Значение l изменяется от 0 для полностью гомогенной до +1 для полностью раскрытой (гетерогенной) руды. П. Жи выделяет следующие градации руд по степени раскрытия: сильно гетерогенная — 0,8; гетерогенная — 0,4; средняя — 0,2; гомогенная — 0,1; весьма гомогенная — 0,05.

Примеры. 1. Руда с 4 % Pb, богатейшие куски содержат 20 % Pb, рудный минерал — галенит с 87 % Pb:

$$l = (0,2 - 0,04)/(0,87 - 0,04) = 0,19.$$

2. Магнетитовая руда с 50 % Fe, наиболее богатые куски содержат 55 % Fe, содержание Fe в магнетите 70 %:

$$l = (0,55 - 0,50)/(0,70 - 0,50) = 0,25.$$

Для правильного определения l рекомендуется определять c' анализом химического состава пробы или ее микроскопическим изучением.

При значительном превышении содержания полезного компонента в минерале k над средним содержанием c $l \approx c'/k$. Учитывая, что минералогический параметр m содержит k в первом приближении в числителе и что произойдет сокращение величины k , коэффициент контрастности становится практически идентичным таковому Д. Брунтон и зависит главным образом от c' и c . Это, однако, умаляет заслуги П. Жи в решении проблемы контрастности руды.

Минералогический коэффициент m определяется по формуле

$$m = [(1 - c/k)^2 \gamma_p] / [c/k + (1 - c/k)\gamma]$$

Практически при $c/k < 0,1$ П. Жи рекомендует $m = k\gamma_p/c$, а для случая $c/k > 0,9$ — $m = (1 - c/k)\gamma$.

Можно поступить и иначе, приняв в этом случае за "полезный" компонент тот, для которого выполняется условие $c/k < 0,1$. Это ближе к практике, так как чистые вещества обычно анализируются не на основной компонент, а на примеси.

Значение m изменяется в весьма широких пределах. Без преувеличения можно сказать, что это главный фактор, определяющий надежную массу пробы.

Примеры. 1. Руда с 4 % Pb ($c = 0,04$), рудный минерал — галенит с 87 % Pb ($k = 0,87$), $\gamma_p = 7,5$:

$$m = \frac{k \gamma_p}{c} = \frac{0,87 \cdot 7,5}{0,04} = 163,2.$$

2. Россыпное золото с содержанием 1 г/т:

$$m = 2 \cdot 10^7.$$

По П. Жи для концентрата с содержанием металла 90 % m равно 0,01—0,03 (что, однако, не следует из приведенных здесь его выражений для m).

Результат П. Жи легко интерпретируется следующим образом. Требуемая надежная масса увеличивается обратно пропорционально квадрату допускаемой погрешности. Куб средневзвешенного диаметра d^3 частиц и коэффициент формы f переводят требуемое число частиц в объем, плотность γ переводит этот объем в массу. Коэффициентом пропорциональности является контрастность руды $c'\gamma_p/(c\gamma)$, которая в первом приближении равна отношению концентраций компонента в объеме богатейших частиц к среднему в пробе.

§ 7. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ И ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ Д.А. КРАСНОВА

Одновременно и независимо от П. Жи проблему сокращения проб подробно исследовал Д.А. Краснов в 1956—1969 гг. с экспериментальной и теоретической сторон. Опыты заключались в сокращении искусственной смеси зерен магнетита и пегматитовой породы струйчатым (желобчатым) делителем на 32 или 16 параллельных навесок и изучении отклонений числа зерен (и массы навески) по отношению к теоретическому. Деление пробы из зерен одного минерала одной крупности показало, что относительная погрешность уменьшается пропорционально увеличению корня квадратного числа зерен и тем самым массы навески. Этот вывод вполне согласуется с положением математической статистики, так как в данном случае $pq = p(1-p) = \text{const}$ и $\sigma = \sqrt{pq/n} = \text{const}/\sqrt{n}$. Однако при большом числе зерен Д.А. Красновым обнаружено отклонение от этой зависимости: относительная погрешность после критической точки $m_{кр}$ (рис. 10) остается постоянной. Мы предостерегаем читателей от соблазна сделать из этого явления далеко идущий, но ошибочный вывод о том, что после некоторой критической массы увеличение сокращенной пробы якобы не уменьшает погрешность сокращения. Можно выдвинуть две гипотезы, объясняющие парадокс Краснова: 1) струйчатый делитель при большой загрузке перестает быть хорошим статистическим механизмом из-за взаимодействия зерен в струе; 2) на результаты накладываются погрешности взвешивания, относительная величина которых постоянна. Результаты разделения разноминеральных смесей позволяют отдать предпочтение второй гипотезе. Деление смеси двух минералов трех классов крупности показало независимость поведения каждого класса, т.е. сокращение происходит как бы самостоятельно для каждой фракции пробы. Это чрезвычайно важный для дальнейшего результат.

Необходимо отметить, что опыты Д.А. Краснова соответствуют следующей математической модели: каждая частица пробы подвергается

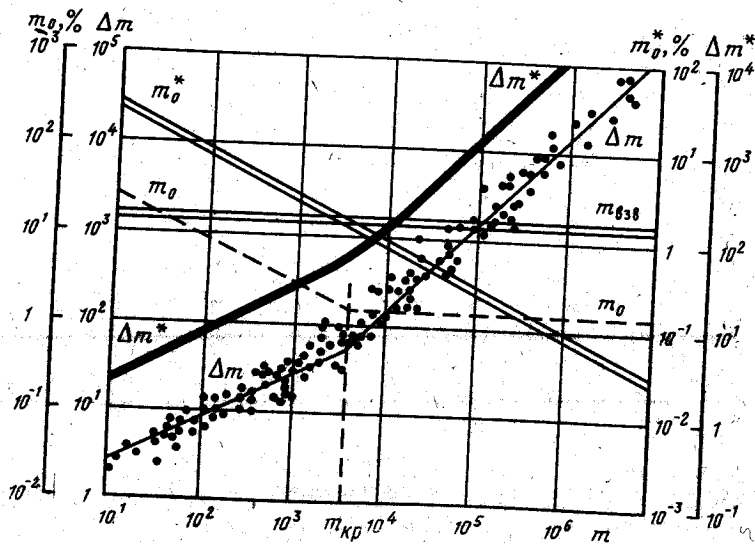


Рис. 10. Зависимость погрешности сокращения от числа частиц в пробе. По данным Д.А. Краснова.

Δm — абсолютная погрешность; m_0 — относительная погрешность. В интерпретации Д.А. Краснова: m_0 обратно пропорциональна величине \sqrt{m} до значения $m = m_{кр}$, при больших значениях m остается постоянной. В интерпретации Ю.А. Ткачева: $m_0 = m_0^* + m_{взв}$, где m_0^* — относительная погрешность сокращения; $m_{взв}$ — относительная погрешность взвешивания; Δm^* — квадратическая сумма абсолютных погрешностей сокращения и взвешивания, в точности аппроксимирующая экспериментальные точки

ется статистическому тестированию с вероятностью p , оказаться в навеске и с вероятностью $1 - p$ попасть в отвал, где $p = 1/16$ или $1/32$. При дальнейшем теоретическом выводе формулы Д.А. Краснов пользуется другой моделью, заключающейся в случайном отборе n частиц из генеральной совокупности. В главе III будут показаны существенные отличия этих моделей.

В качестве исходной Д.А. Краснов берет формулу

$$n = p(1 - p)t^2 / \Delta^2.$$

Учитывая, что Δ^2 / t^2 есть дисперсия σ^2 , можно написать

$$\sigma^2 = p(1 - p) / n = pq / n,$$

т.е. за основу Д.А. Краснов берет выражение для дисперсии доли частиц биномиального распределения. Правильность этого несомненна (для малых степеней сокращения необходим множитель $(1 - n/N)$). Изучение этой работы Д.А. Краснова показало, что речь

идет о расчете доверительных интервалов погрешностей для заданных вероятностей исходя из биномиальной дисперсии, но с использованием при этом плотности вероятности нормального распределения. В 1960 г. Ю.А. Ткачевым экспериментально показано, что при числе частиц $n > 300$ это вполне допустимо.

Далее Д.А. Краснов заменяет долю числа рудных зерен (свободных рудных минералов и сростков) p массовой долей a :

$$a = p \frac{\gamma_p}{\gamma} \frac{d_p^3}{d^3} = p \frac{\gamma_p}{\gamma} f,$$

где γ_p , γ — соответственно плотности рудных зерен и смеси, и приходит к следующей формуле

$$q = 10 d_{ср}^3 \frac{t^2}{m_a^2} \left(\frac{1}{a} - 1 \right),$$

где q — необходимая масса пробы, кг; $d_{ср}$ — средний диаметр частиц, см; m_a — относительная допустимая погрешность %; t — коэффициент вероятности; a — весовая доля рудных частиц. Выражение

$\left(\frac{1}{a} - 1 \right)$ в формуле Краснова является, по существу, коэффициентом контрастности. Эта формула, служащая основой для дальнейших выводов, некорректна и неудобна. Неудобство заключается в том, что в формулу входит величина, непосредственно не определяемая, — весовая доля рудных частиц a .

Некорректность заключается в том, что, переходя от p к a , Д.А. Краснов не произвел необходимых преобразований в допустимой погрешности. Преобразуем исходную формулу Краснова $\sigma^2 = pq/n$ для относительной погрешности $\sigma_{отн}$:

$$\sigma_{отн}^2 = \frac{\sigma^2}{p^2} = \frac{p(1 - p)}{p^2 n} = \frac{(1/p - 1)}{n}.$$

Теперь допустимы любые дальнейшие преобразования формулы, так как относительная погрешность не зависит от единиц, в которых выражено содержание полезного компонента: в числовом, объемном или весовом содержании рудных частиц или весовом содержании металла. Как правило, геолога интересует весовое содержание полезного компонента c , которое равно $c = ak$, откуда $a = c/k$, где a — весовое содержание рудных частиц; k — содержание металла в них. В свою очередь,

$$a = p \gamma_p / \gamma,$$

где p — доля рудных частиц по их числу. При одном и том же p весовое содержание a будет во столько раз больше, во сколько плотность рудных частиц больше средней плотности. Отсюда

$$\rho = \sigma_1/\gamma_p = c\gamma/(k\gamma_p).$$

Подставляя это выражение в исходную формулу Краснова, мы получим результат, сильно отличающийся от полученного Д.А. Красновым:

$$\sigma^2 = (k\gamma_p/c\gamma - 1)/n = (k\gamma_p/(c\gamma) - 1)d^3\gamma/q,$$

или

$$q = [d^3\gamma(k\gamma_p/c\gamma - 1)]/\sigma^2 = [d^3\gamma(k\gamma_p/c\gamma - 1)t^2]/m^2.$$

Большим вкладом Д.А. Краснова в проблему обработки промышленности является экспериментальная проверка вида зависимости относительной погрешности от параметров правой части формулы. Конечно, этими опытами проверялась не истинность формул математической статистики, а адекватность принятой модели реальному процессу сокращения.

Следует остановиться на фундаментальном подходе Д.А. Краснова к вопросу о среднем диаметре частиц. Под ним он понимает диаметр, средневзвешенный по выходам классов w_i :

$$d_{cp} = \sum d_i \frac{w_i}{\sum w_i} = \sum d_i p_i.$$

Такое понимание среднего диаметра, как будет показано в дальнейшем, не согласуется с теорией сокращения: средневзвешенный должен быть куб диаметра, но ценность подхода Д.А. Краснова определяется тем, что он выбрал и применил из большого числа выражений для распределения размера частиц при дроблении простое и удобное уравнение Годэна — Андреева: $y = Ax^c$, где x — диаметр частицы; y — суммарный выход классов мельче x ; A — коэффициент, определяемый общей крупностью материала; c — показатель, определяющий характер гранулометрической кривой. Он изменяется от 0,5 для вогнутых кривых (преобладание мелких зерен) до 1,5 для выпуклых (преобладание крупного материала). Практически $0,8 < c < 1,2$ и близко к единице.

Подставив в выражение для среднего диаметра вместо w его значение из уравнения Годэна — Андреева $dy = A c x^{c-1} dx$, Д.А. Краснов получает:

$$d_{cp} = \frac{d_2 \int_0^{d_2} x^{c-1} dx}{\int_0^{d_2} x^{c-1} dx} = \frac{c}{c+1} d_2 = \frac{c}{c+1} D_{max},$$

где D_{max} — наибольший диаметр частиц.

С учетом приведенного выше замечания это результат необходимо скорректировать следующим образом:

$$d_{cp} = \sqrt[3]{c/(c+1)} D_{max}.$$

Но и это еще не вполне корректно, так как весовые коэффициенты w , которые у Д.А. Краснова пропорциональны весовому выходу всего материала класса, в действительности должны быть пропорциональны выходу металла в соответствующих классах крупности. При избирательном переизмельчении рудных или пустых частиц это будет ощутимо влиять на средний диаметр.

Для определения весового содержания рудных частиц а Д.А. Краснов делает следующие правдоподобные допущения:

- 1) весь рудный минерал распределен равномерно по классам крупности, в частности содержание его в классе $-D + d_{вкр}$, где $d_{вкр}$ — преобладающий размер вкрапленности, такое же, как в классе $-d_{вкр} + 0$;
- 2) в классе $-D + d_{вкр}$ весь минерал находится в сростках, а в классе $-d_{вкр} + 0$ — в свободном состоянии;
- 3) весовое содержание полезного компонента в сростках β принимается равным содержанию его в наиболее богатых кусках-сростках максимальной крупности D .

Весовую долю сростков a_c автор определяет как средневзвешенные по двум классам: $-D + d_{вкр}$ с выходом w и $-d_{вкр} + 0$ с выходом $1 - w$:

$$a_c = (\beta/w)w + a(1-w),$$

где

$$w = 1 - d_{вкр}^c/D^c = 1 - \frac{1}{r^c}.$$

Подставляя это в выражение для коэффициента контрастности $(1/a_c - 1)$, получаем

$$\frac{1}{a_c} - 1 = \frac{r^c \beta}{\{r^c - (1 - \beta)\} a} - 1.$$

Окончательно формула Краснова представляется в следующем виде.

$$q = \left(\frac{c}{c+1}\right)^3 D^3 \frac{t^2}{m^2} \left(\frac{r^c}{r^c - (1 - \beta)} \cdot \frac{\beta}{a} - 1\right).$$

Положительная сторона формулы заключается в возможности корректировки максимального диаметра D с помощью параметра c гранулометрической кривой (который в соответствии с упомянутым замечанием должен быть не в кубе, а в первой степени). Весьма

ценна идея выразить поправочный множитель к коэффициенту контрастности

$$r^c / [r^c - (1 - \beta)]$$

через отношение максимального диаметра частиц к диаметру рудной вкрапленности $r = D/d_{вкр}$ с учетом гранулометрического параметра c .

Однако вывод Д.А. Красновым коэффициента контрастности, в котором нет отношения плотностей рудных и нерудных зерен, неубедителен. Д.А. Краснов указывает, что при $\beta = a$ (содержание в сростках и рудных частицах равно среднему по пробе) необходимая масса пробы должна быть равна нулю. Замечание верное, но из основной формулы Краснова не вытекающее, что еще раз указывает на сомнительность рассмотренного выражения для коэффициента контрастности. Д.А. Краснов приводит несколько примеров практических расчетов необходимой массы по разработанной формуле, которые мы проанализируем в сравнении с расчетами по другим формулам в главе IV.

Для упрощения пользования формулой Д.А. Краснов подставляет вместо ряда параметров их наиболее употребительные значения и получает (в кг):

$$q = 0,025 D^3 (\beta - a),$$

где D — диаметр максимального зерна (отверстия сита), мм; β — содержание полезного компонента в рудной частице, %; a — среднее содержание его в пробе, %. В таком варианте формула совпадает с принципом Везина $q = Kd^3$, где $K = 0,025 (\beta - a)$.

Глава III

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ СОКРАЩЕНИЯ ПРОБ ИЗМЕЛЬЧЕННЫХ (СЫПУЧИХ) МАТЕРИАЛОВ

§ 1. ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО СОКРАЩЕНИЯ

Под сокращением в геологической и горной практике понимается уменьшение массы измельченной пробы путем деления ее на две равные или неравные части с целью ее дальнейшей обработки или выделения из пробы в конечном счете представительной навески, непосредственно идущей в анализ. Одна из сокращенных частей подвергается дальнейшей обработке или анализу, а другая направляется

в отвал или служит дубликатом. Таким образом, сокращение — это отбор части пробы от измельченной и перемешанной пробы.

Между сокращением пробы и опробованием рыхлых (сыпучих) или кусковых масс существует коренное отличие, на котором следует специально остановиться. Многие исследователи, например А.И. Гольдштейн, П. Жи и другие, считают, что отличительной особенностью сокращения является то, что все частицы или куски опробуемого материала имеют равную вероятность попасть в пробу независимо от их расположения. Это условие необходимо при сокращении, но недостаточно. Действительно, с помощью щупов-проботорников мы можем и при правильной организации опробования должны отобрать пробу с любой глубины и любой части опробуемой массы. Однако при сокращении, в отличие от описанной выше операции отбора пробы, должно соблюдаться еще одно условие: вероятность двух частиц оказаться вместе (в пробе) должна быть одинакова для любой пары частиц независимо от их взаимного расположения в сокращаемом материале. Эта вероятность определяется по формуле

$$P_1 = [n(n-1)] / [N(N-1)].$$

где N и n — число частиц соответственно в сокращаемой пробе и в выборке из нее. Аналогично для любой пары частиц должна быть также одинаковой вероятность p_2 совместного попадания в отвал:

$$P_2 = (N-n)(N-n-1) / (N(N-1)).$$

Общая вероятность оказаться вместе равна сумме

$$P = P_1 + P_2 \approx p^2 + (1-p)^2,$$

где p — вероятность для частицы быть взятой в пробу. Как следствие, для любых двух частиц должны быть одинаковы и вероятности оказаться врозь P_3 :

$$P_3 = 1 - P = 2p(1-p).$$

Это требование значительно строже предыдущего, включает его как составную часть и является главным принципиальным отличием сокращения проб от опробования сыпучих материалов. Для его выполнения к каждой частице пробы необходимо применить некоторый случайный механизм, направляющий частицу в пробу. Хороший механический делитель обладает свойствами такого случайного механизма. Если проба сокращается вручную, например квартованием, то роль механизма выполняет перемешивание. Перемешивание должно проводиться так долго и таким образом, чтобы взаимное расположение любых двух частиц после перемешивания не зависело от их расположения до перемешивания.

Таким образом, излагаемые в дальнейшем результаты относятся к процессу сокращения, но не отбора, так как только при выполнении условий сокращения возможно применение используемых здесь методов математической статистики.

§ 2. ИДЕАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ СМЕСИ "РУДНЫХ" И "НЕРУДНЫХ" ЗЕРЕН ПРАВИЛЬНОЙ ФОРМЫ

Анализ известных в настоящее время теоретических формул и методов определения допустимой массы проб при сокращении показал, что большинство их основано на модели смеси мономинеральных, т.е. не содержащих сростков "рудных" и "нерудных" минералов, зерен правильной формы одинакового размера. Для краткости мы будем называть минералы, содержащие интересующие нас компоненты или являющиеся ими, рудными, а не содержащие их — нерудными. Многообразие известных в настоящее время формул сокращения в основном вызвано тем, что при одинаковой в общих чертах статистической основе методика учета реальных особенностей измельченной пробы была различной. Мы будем использовать такую методику, которая позволяет ввести в формулу минимальное число простых, но фундаментальных характеристик изучаемой пробы, сравнительно легко определяемых с помощью несложных экспериментальных исследований или даже предсказуемых на основании сведений о минеральном составе, характере вкрапленности и геометрической характеристике исходной пробы или массива, из которого она взята.

Совершаемую при сокращении случайную погрешность целесообразно измерять средним квадратическим отклонением или его квадратом — дисперсией. При этом будем различать четыре ее варианта: дисперсию числа частиц полезного компонента в сокращенной пробе σ_x^2 , дисперсию массы металла (размерность — квадрат единиц массы: г², кг² и т.д.) σ_w^2 :

$$\sigma_w^2 = \rho^2 \sigma_x^2, \quad (9)$$

дисперсию содержания металла σ_c^2 :

$$\sigma_c^2 = \frac{1}{q^2} \sigma_w^2 = \frac{\rho^2}{q^2} \sigma_x^2 \quad (10)$$

(выражается в квадратах массовых долей или процентов) и дисперсию относительной ошибки в содержании металла $\sigma_{отн}^2$:

$$\sigma_{отн}^2 = \frac{1}{c^2} \sigma_c^2 = \frac{\rho^2}{q^2 c^2} \sigma_x^2 \quad (11)$$

(выражается в квадратах относительных процентов или относительных долей). Обозначения в формулах (9), (10) и (11) следующие:

x — число рудных частиц в сокращенной пробе; ρ — масса рудных частиц, т.е. металла, в пробе, г; q — масса сокращенной пробы, г; c — среднее содержание металла в пробе, %.

Наиболее часто, особенно в конечных формулах, будет употребляться средняя квадратическая величина относительной погрешности содержания, т.е. $\sigma_{отн}$. Умноженная на 100 %, она является хорошо известным геологам коэффициентом вариации.

Уточним эти понятия на примерах. Пусть стандартное отклонение массы металла в сокращенной пробе 500 г составляет 10 г. Это соответствует стандартному отклонению (абсолютного) содержания, равному $10:500 = 0,02$, или 2 %. При среднем содержании металла в пробе, равном 5 %, это составит $2 \% : 5 \% = 0,4$, или 40 % относительных. Заметим, что на практике желательно подвергать анализам навески, содержащие значительно меньшие ошибки. Относительная дисперсия и относительное стандартное отклонение не зависят от единиц выражения содержания.

Главная математическая модель сокращения смеси рудных и нерудных минералов — выборка без возвращения из конечной генеральной совокупности. Распределение числа рудных частиц в такой выборке подчиняется гипергеометрическому закону, который хорошо аппроксимируется нормальным законом с дисперсией

$$\sigma_{n_p}^2 = p(1-p)n\left(\frac{N-n}{N-1}\right).$$

Так как $N \gg 1$, то приближенно

$$\sigma_{n_p}^2 = p(1-p)n\left(1 - \frac{n}{N}\right), \quad (12)$$

где n и N — число частиц соответственно в выборке и в генеральной совокупности; p — доля рудных частиц в ней. Переходя к относительной дисперсии, получим

$$\sigma^2 = \sigma_{отн}^2 = \frac{1}{(np)^2} \sigma_{n_p}^2 = \left(\frac{1}{p} - 1\right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N}\right). \quad (13)$$

К этому же результату мы придем, если используем равенство (11) и заменим в нем среднее содержание c отношением массы металла в пробе к массе пробы: $c = np\rho/q$, где ρ — масса рудной частицы. Тогда

$$\sigma^2 = \frac{\rho^2}{q^2 c^2} \sigma_{n_p}^2 = \frac{\rho^2}{q^2 \left(\frac{np\rho}{q}\right)^2} \sigma_{n_p}^2 = \frac{1}{(np)^2} \sigma_{n_p}^2 = \left(\frac{1}{p} - 1\right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N}\right).$$

Объем генеральной совокупности и объем выборки, т.е. величину

сокращаемой и сокращенной пробы, целесообразно выразить весовых единицах, поэтому, полагая для кубической модели

$$N = Q / (d^3 \gamma) \text{ и } n = q / (d^3 \gamma),$$

получим

$$\sigma^2 = \left(\frac{1}{p} - 1\right) d^3 \gamma \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{Q}\right). \quad (1)$$

Следует отметить одно допущение. Несмотря на то что дисперсия выражена как функция массы пробы после сокращения, контрольные величины выборки в рассматриваемой модели сокращения осуществляются по числу частиц в ней. Теоретически выборка должна состоять из n частиц и, отбирая от пробы массу q , только приближенно можно утверждать, что там окажется n частиц: $M(n) = q/p$, так как колебания в доле рудных частиц приведут одновременно к колебаниям в средней плотности материала выборки γ . Однако эти колебания без заметных погрешностей можно пренебречь. Кроме того, при расчете дисперсии после анализа навески определяют фактическое значение γ , которое используется в формулах для апостериорного расчета погрешности сокращения.

Заменим численную долю рудных частиц p их массовой долей:

$$p_w = p \gamma_p / \gamma, \text{ откуда } p = p_w \gamma / \gamma_p.$$

Массовую долю рудных частиц заменим массовой долей металла (т.е. содержанием металла), что практически более удобно:

$$c = p_w k = p \frac{k \gamma_p}{\gamma}; \quad p = \frac{c \gamma}{k \gamma_p}.$$

После проведенных замен получим основную формулу погрешности сокращения:

$$\sigma^2 = \left(\frac{k \gamma_p}{c \gamma} - 1\right) \gamma d^3 \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{Q}\right),$$

или

$$\sigma^2 = \left(\frac{k \gamma_p}{c} - \gamma\right) d^3 \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{Q}\right), \quad (15)$$

где σ^2 — относительная ошибка весового содержания металла при сокращении, доли единицы; Q и q — масса сокращаемой и сокращенной пробы, г; γ_p — плотность рудных зерен, г/см³; γ — средняя плотность зерен в пробе, г/см³; k — содержание металла в рудной частице, доли единицы; c — содержание металла в пробе, доли единицы; d — диаметр частиц, см.

Среднюю плотность пробы можно выразить через плотность рудных и нерудных зерен. Для этого в равенство

$$\gamma = \frac{\gamma_p n_p d^3 + \gamma_n (n - n_p) d^3}{n d^3} = \gamma_p p + \gamma_n (1 - p),$$

где γ_n — плотность нерудного зерна, необходимо подставить значение $p = c \gamma / k \gamma_p$, после чего получаем

$$\gamma = \frac{k \gamma_p \gamma_n}{k \gamma_p - c (\gamma_p - \gamma_n)}. \quad (16)$$

Однако практически проще и удобнее использовать в основной формуле для идеальной модели (15) среднюю плотность пробы, так как ее легче оценить, чем плотность смеси отдельно взятых рудных и нерудных зерен.

Формула (15) является основной, из которой в дальнейшем будут получены практически приемлемые формулы для сокращения реальной смеси зерен. Обозначая $C = k \gamma_p / c \gamma - 1$ и решая равенство (15) относительно q , получим

$$q = C \gamma d^3 Q / (\sigma^2 Q + C \gamma d^3), \quad (17)$$

откуда видно, что масса сокращенной пробы при заданной ошибке сокращения зависит от массы пробы до сокращения:

$$\lim_{Q \rightarrow 0} q = 0, \quad \lim_{Q \rightarrow \infty} q = C \gamma d^3 / \sigma^2.$$

При уменьшении массы сокращаемой пробы при прочих равных условиях уменьшается и необходимая масса пробы после сокращения. При увеличении массы сокращаемой пробы необходимая масса пробы после сокращения, увеличиваясь, стремится к пределу $q = C \gamma d^3 / \sigma^2$. Следовательно, только в том случае когда степень сокращения достаточно велика, необходимая масса сокращенной пробы практически не зависит от массы сокращаемой пробы. Использование последней формулы возможно уже при степени сокращения, равной пяти. При этом фактическая дисперсия сокращения отклонится от расчетной по формуле приблизительно на 20 %, а стандартное отклонение — на 4–5 %. При степени сокращения, равной 10, отклонение стандартной ошибки сокращения от расчетной составит немногим более 3 %. Учитывая, что вычисленные для соответствующих погрешностей необходимые массы проб будут отличаться от требуемых в сторону перестраховки, величину степени сокращения на одном этапе, начиная с 5, можно считать большой и пользоваться упрощенной формулой без учета массы сокращаемой пробы. Однако при небольших степенях сокращения учет ее совершенно необходим.

Зависимость необходимой массы пробы от допустимого стандартного отклонения, как и следовало ожидать, является обратной пропорциональной, а от диаметра частиц — кубической. При прочих равных условиях требуемая масса пробы прямо пропорциональна средней плотности.

Особого рассмотрения требует группа величин, выражающих характер распределения полезного компонента в частицах пробы. Мы назвали ее коэффициентом контрастности руды C :

$$C = k\gamma_p / (c\gamma) - 1.$$

Из этого выражения видно, что коэффициент контрастности это отношение концентрации "металла" в единице объема рудной частицы к концентрации его в единице объема средней пробы (в единицы). Минимальное значение коэффициента контрастности равно нулю. При этом значении проба становится идеально однородной, и при сокращении можно обойтись какой угодно малой навеской, лишь бы она была достаточна для анализа. Наибольшее значение коэффициента контрастности практически не ограничено. При содержании золота в кварц-золотоносной пробе, равном 10 г/т, контрастность руды, раздробленной до стадии полного высвобождения золота, будет составлять $2 \cdot 10^6$. Зависимость необходимой массы пробы от коэффициента контрастности при больших его значениях прямо пропорциональна, поэтому определение его значения в исходной пробе и установление закона изменения в процессе дробления наиболее важные задачи. В дальнейшем изложении содержания коэффициента контрастности будет углублено.

Запишем основную формулу (15) с коэффициентом контрастности:

$$\sigma^2 = C\gamma d^3 \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{Q} \right). \quad (18)$$

Проверка по размерности показывает, что σ^2 является здесь как и требуется, безразмерной величиной. Следует еще раз напомнить, что если масса пробы выражена в граммах (г), а плотность — граммах на кубический сантиметр (г/см^3), то размер частиц необходимо выражать в сантиметрах (см).

Учитывая большую важность теоретической основы сокращения для дальнейших практических разработок, еще раз остановимся на выводе основной формулы и проведем его с существенно иными позициями.

Известно, что дисперсия среднего арифметического значения, например содержания c из n независимых наблюдений (порций)

$$\sigma_c^2 = \sigma_c^2 / n, \quad (19)$$

где, σ_c^2 — дисперсия содержания в отдельных порциях материала.

Если порцией считать отдельную частицу из измельченной пробы, то σ_c^2 будет дисперсией среднего арифметического содержания в выборке из n частиц. При сокращении пробы нас интересует дисперсия средневзвешенного содержания. Именно оно является несмещенной оценкой содержания в пробе до сокращения. Ввиду того что "рудные" частицы отличаются по плотности от "нерудных", среднее арифметическое содержание по частицам будет смещенной оценкой.

Вывод формулы удобнее вести через количество металла в сокращенной пробе. В отдельной частице оно равно $c_i v_i \gamma_i$, где c_i — содержание металла в частице, %; v_i — ее объем, см^3 ; γ_i — плотность, г/см^3 . Количество "металла" в выборке из n частиц равно

$$\sum_{i=1}^n c_i v_i \gamma_i,$$

а среднее количество металла на одну частицу:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c_i v_i \gamma_i = \overline{cv\gamma}.$$

Дисперсия массы металла в отдельных частицах σ_w^2 задается равенством

$$\sigma_w^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (c_i v_i \gamma_i - \overline{cv\gamma})^2. \quad (20)$$

Вывод формулы ведется для узкого гранулометрического класса, т.е. смеси частиц одинакового объема, поэтому

$$\sigma_w^2 = \frac{v^2}{n} \sum_{i=1}^n (c_i \gamma_i - \overline{c\gamma})^2.$$

Дисперсия массы металла в выборке из n частиц σ_w^2 равна $n\sigma_w^2$, а дисперсия содержания (в процентах) σ_c^2 в выборке из n частиц равна дисперсии массы металла в n частицах $n\sigma_w^2$, деленной на квадрат массы пробы q . Последний равен средней массе частицы $\rho = v\gamma$, умноженной на их число: $q = v\gamma n$. Таким образом,

$$\sigma_c^2 = \frac{n\sigma_w^2}{q^2} = \frac{v^2 \sum_{i=1}^n (c_i \gamma_i - \overline{c\gamma})^2}{v^2 \gamma^2 n^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (c_i \gamma_i - \overline{c\gamma})^2}{\gamma^2 n^2}. \quad (21)$$

Наконец, относительная дисперсия содержания (квадрат коэффициента вариации)

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_c^2}{c^2} = \frac{1}{c^2 n} \sum_{i=1}^n (c_i \gamma_i - \overline{c\gamma})^2. \quad (22)$$

Выражение в числителе формулы (22) является средневзвешенной по плотности дисперсией содержания. Обозначим ее $\sigma_c^2(\gamma)$. Тогда

$$\sigma^2 = \sigma_c^2(\gamma) / (c^2 n). \quad (23)$$

Так как сокращение проводится по схеме безвозвратной выборки, то, добавив соответствующий множитель, получим

$$\sigma^2 = (\sigma_c^2(\gamma) / c^2) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N} \right). \quad (24)$$

Переходя от числа частиц к массе пробы и используя для этого диаметр частиц d и их плотность γ , получим

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_c^2(\gamma)}{c^2} d^3 \gamma \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{Q} \right). \quad (25)$$

Сравним полученный результат с основной формулой сокращения. Отличие заключается лишь в выражении для коэффициента контрастности. В формуле (25) он имеет более общую форму, связанную с весьма строгой ограничительной предпосылкой, что проба состоит из смеси рудных и нерудных частиц, что рудные частицы имеют одинаковое содержание компонента k , а нерудные не содержат его совсем. Если мы вернемся к этому ограничению, то убедимся, что коэффициент контрастности основной формулы $k\gamma_p / c\gamma - 1$ является частным случаем квадрата коэффициента вариаций содержания полезного компонента в отдельных частицах $\sigma_c^2(\gamma) / c^2$. Величину $\sigma_c^2(\gamma)$ можно выразить следующим образом

$$\begin{aligned} \sigma_c^2(\gamma) &= \frac{1}{\gamma^2} [(k\gamma_p - k\gamma_p p)^2 p + (0 \cdot \gamma_n - k\gamma_p p)^2 (1-p)] = \\ &= \frac{1}{\gamma^2} k^2 \gamma_p^2 p(1-p), \end{aligned} \quad (26)$$

где p — числовая доля рудных частиц в пробе, $1-p$ — то же, нерудных. Подставляя теперь в (26) вместо p его значение $p = c\gamma / k\gamma_p$, получим

$$\sigma_c^2(\gamma) = (c\gamma / \gamma^2) (k\gamma_p - c\gamma). \quad (27)$$

Подставляя затем это значение в (25), получим

$$\sigma^2 = \left(\frac{k\gamma_p}{c\gamma} - 1 \right) d^3 \gamma \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{Q} \right), \quad (28)$$

т.е. формулу, тождественную основной формуле сокращения (15). Таким образом мы приходим к следующему общему определению

коэффициента контрастности смеси частиц: это квадрат коэффициента вариации содержания изучаемого компонента в отдельных частицах:

$$\frac{1}{n} \frac{1}{\gamma^2} \sum_{i=1}^n (c_i \gamma_i - \bar{c}\gamma)^2,$$

где n — число частиц в смеси или число однородных фракций частиц в смеси. С помощью этого выражения можно оценивать контрастность рудных смесей, состоящих из нескольких рудных и нерудных минералов различной степени высвобождения. В заключение приведем еще одно доказательство тождественности сравниваемых формул сокращения:

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_0^2}{c^2 n} \left(1 - \frac{n}{N} \right) = \frac{\sigma_0^2}{c^2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N} \right).$$

Но

$$\begin{aligned} \sigma_0^2 &= (\Delta c_1)^2 p + (\Delta c_2)^2 (1-p) = \left(\frac{k\gamma_p}{\gamma} - c \right)^2 \frac{c\gamma}{k\gamma_p} + \\ &+ c^2 \left(1 - \frac{c\gamma}{k\gamma_p} \right) = c^2 \left(\frac{k\gamma_p}{c\gamma} - 1 \right), \end{aligned}$$

откуда

$$\sigma^2 = \left(\frac{k\gamma_p}{c\gamma} - 1 \right) \gamma d^3 \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{Q} \right)$$

(обозначения прежние).

§ 3. СОКРАЩЕНИЕ ПРОБЫ ПО ЧАСТЯМ КАК ИНСТРУМЕНТ ИССЛЕДОВАНИЯ РЕАЛЬНОЙ МОДЕЛИ

Реальная измельченная и просеянная через сито с диаметром отверстий d_c проба состоит из смеси частиц $d \leq d_c$, отличающихся также степенью раскрытия рудных минералов. Проблему сокращения такой пробы теоретически можно решить, рассматривая по отдельности сокращение отдельных фракций и определенным образом объединяя результат. Для этого необходимо уметь вычислять погрешность в пробе, полученной объединением параллельных навесок. Впервые в связи с проблемой сокращения проб на это указал Н.А. Котляр на первом Всесоюзном горном научно-техническом съезде (1926 г.). Однако он ошибочно полагал, что погрешность суммы всех классов равна корню квадратному из суммы погрешностей классов. При таком утверждении погрешность в объединенной пробе всегда боль-

ше самой большой частной погрешности, тогда как она должна быть всегда меньше ее.

Каким бы образом мы ни разделили пробу на несколько параллельных частей, после сокращения их в одинаковое число раз соединения навесок ошибка сокращения при прочих равных условиях будет зависеть только от степени сокращения и не зависеть от способа деления на параллельные пробы. Пробу измельченного материала можно представить себе состоящей из нескольких классов по крупности, в пределах которых размер частиц и их другие характеристики можно считать постоянными. Если выполняются требования к сокращению, то каждый класс сокращается в одинаковое число раз. Применяя к каждому классу формулу сокращения, можно определить ошибку сокращения соответствующего класса, а затем по ним определить общую ошибку. Для этого рассмотрим влияние погрешностей сокращения частей пробы на результирующую ошибку.

В одной из работ по применению теории вероятностей в геологии [10] показано, что если среднее значение параметра определяется по формуле $c = \sum p_i c_i$, где c — среднее значение параметра в объединенном объекте; c_i — значение его в i -той части; p_i — весовая доля i -той части, то дисперсию его погрешности надо определять по формуле

$$\sigma_c^2 = \sum p_i^2 \sigma_{c_i}^2, \quad (29)$$

где σ_c^2 и $\sigma_{c_i}^2$ — дисперсия ошибки параметра соответственно в объединенном объекте и в его i -той части. Пусть c является средним содержанием в общей в пробе, а c_i — в отдельных классах. Нас интересует относительная погрешность содержания $\sigma^2 = \sigma_c^2 / c^2$. Подставим в левую часть равенства (29) вместо σ_c^2 его значение $\sigma^2 c^2$ а в правую вместо $\sigma_{c_i}^2$ его значение $\sigma_i^2 c_i^2$:

$$\sigma^2 c^2 = \sum p_i^2 c_i^2 \sigma_i^2,$$

откуда

$$\sigma^2 = \sum p_i^2 \frac{c_i^2}{c^2} \sigma_i^2 = \sum p_i^2 c_i^{*2} \sigma_i^2 = \sum w_i^2 \sigma_i^2, \quad (30)$$

где w_i — массовая доля металла в i -том классе, c_i^* — коэффициент относительной концентрации полезного компонента в i -том классе.

Пусть мы сокращаем пробу массой Q в m раз предварительным разделением ее на две параллельные пробы, а затем независимым m -кратным сокращением каждой части и объединением полученных навесок. Погрешность сокращения каждой из параллельных проб

$$\sigma_i^2 = C \gamma d^3 \left(\frac{1}{0,5Q/m} - \frac{1}{0,5Q} \right) = \frac{2}{Q} C \gamma d^3 (m - 1).$$

Так как в данном случае $c_i^* = 1$, $p_i = 1/2$ и $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_i^2$, то

Таблица 5. Характеристика отдельных классов сокращаемой пробы

Показатели	Классы			Проба в целом
	1	2	3	
Доля массы пробы p_i	0,2	0,3	0,5	1
Содержание c_i	1,2	0,7	0,6	0,75
Произведение $p_i c_i$	0,24	0,21	0,3	0,75
Коэффициент относительной концентрации c_i^*	1,6	0,93	0,8	1
Весовая доля металла в классе w_i	0,32	0,28	0,40	1
Относительная погрешность сокращения класса σ_i	0,1	0,07	0,05	0,04

Взвешенная сумма погрешностей

$$\sum \sigma_i^2 w_i^2 = 1,83 \cdot 10^{-3}$$

Относительная погрешность сокращения пробы в целом

$$\sigma = \sqrt{1,83 \cdot 10^{-3}} = 0,04 = 4 \%$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{2^2} \sigma_1^2 + \frac{1}{2^2} \sigma_2^2 = \sigma_i^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2} \sigma_i^2 = \frac{1}{Q} C \gamma d^3 (m - 1).$$

Рассматривая все сокращения как единый акт, получим аналогичный результат:

$$\sigma^2 = C \gamma d^3 \left(\frac{1}{Q/m} - \frac{1}{Q} \right) = \frac{1}{Q} C \gamma d^3 (m - 1),$$

что подтверждает примененный нами закон сложения погрешностей при объединении навесок.

Пример. Проба состоит из трех классов смесей, которые сокращались отдельно. Характеристика классов и погрешности их сокращения представлены в табл. 5. Порядок расчета показан в результирующих строках таблицы. Полученная относительная погрешность сокращения после объединения сокращенных классов (4 %) оказалась меньше самой маленькой погрешности сокращения класса (5 %).

Формулу (30) можно применять также для определения относительной погрешности содержания не только в объединенных пробах, но и в некоторых других случаях. Например, горная выработка или вагонетка опробована несколькими пробами равной массы, которые подвергались отдельной обработке с одинаковой степенью сокращения. Практически это достигается отвешиванием в общую навеску количеств, прямо пропорциональных массам отобранных проб. Конечные навески с относительными массами p_i объединены.

Погрешность, с которой объединенная навеска отражает содержание в этих отобранных пробах, следует определять по формуле (30). Применяя ее, следует учесть, что величины σ_i^2 обозначают в этом случае погрешность сокращения отдельных проб.

§ 4. РЕАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ РАЗМЕРЫ ЧАСТИЦ, ПЛОТНОСТЬ И КОЭФФИЦИЕНТ КонтРАСТНОСТИ

Введем понятие *теоретического эквивалента* пробы. Под ним будем понимать пробу, состоящую из двух классов частиц — рудных и нерудных. Все рудные частицы теоретического эквивалента имеют одинаковую форму, размер d_p , плотность γ_p и содержание полезного компонента k . Все нерудные частицы имеют тот же размер $d_n = d_p$, одинаковую плотность γ_n и не содержат изучаемого компонента. Теоретический эквивалент по определению должен давать при сокращении одинаковую погрешность, как и заменяемая им реальная проба такой же начальной и конечной массы. Входящие в формулу сокращения параметры теоретического эквивалента назовем эквивалентами соответствующих физических характеристик реальной пробы.

Рассмотрим эквивалентный диаметр. Для этого применим результат предыдущего раздела к пробе, частицы которой отличаются только размером. Разумеется, рудные отличаются от нерудных также величинами γ_p и k , однако эти отличия остаются постоянными для всех размеров.

Пусть проба состоит из двух классов крупности: класс d_1 составляет долю пробы по весу, равную p_1 , класс d_2 — долю, равную p_2 , где $p_1 + p_2 = 1$. Тогда для каждой составной части можно написать:

$$\sigma_1^2 = C\gamma d_1^3 \left(\frac{1}{p_1 Q/m} - \frac{1}{p_1 Q} \right);$$

$$\sigma_2^2 = C\gamma d_2^3 \left(\frac{1}{p_2 Q/m} - \frac{1}{p_2 Q} \right),$$

где m — степень сокращения. Тогда при объединении составных частей пробы в соответствии с формулой (30)

$$\sigma^2 = C\gamma d_1^3 \left(\frac{1}{p_1 Q/m} - \frac{1}{p_1 Q} \right) w_1^2 + C\gamma d_2^3 \left(\frac{1}{p_2 Q/m} - \frac{1}{p_2 Q} \right) w_2^2 =$$

$$= C\gamma \frac{1}{Q} (m-1) \left(d_1^3 \frac{p_1^2}{p_1} + d_2^3 \frac{p_2^2}{p_2} \right) = C\gamma \frac{1}{Q} (m-1) \times$$

$$\times (d_1^3 p_1 + d_2^3 p_2).$$

С другой стороны, для эквивалентной пробы

$$\sigma^2 = C\gamma d_{\text{экв}}^3 \left(\frac{1}{Q/m} - \frac{1}{Q} \right) = C\gamma \frac{1}{Q} (m-1) d_{\text{экв}}^3,$$

откуда непосредственно следует, что

$$d_{\text{экв}}^3 = d_1^3 p_1 + d_2^3 p_2 + \dots + d_n^3 p_n.$$

Этот результат отличается от выдвинутых нами ранее предположений: а) эквивалентный диаметр — это диаметр, который оставляет число частиц в эквивалентной пробе прежним, б) это средне-взвешенный диаметр. Как видим, верным эквивалентом является средневзвешенный куб диаметра.

Применяя аналогичный прием по отношению к плотности γ и коэффициенту контрастности C , получим

$$\gamma_{\text{экв}} = \sum \gamma_i w_i;$$

$$C_{\text{экв}} = \sum C_i w_i.$$

Однако полученные формулы эквивалентных параметров справедливы лишь каждая отдельно, т.е. для случаев, когда по фракциям пробы изменяется только один искомый параметр, а остальные постоянны. Строго говоря, они применимы и в случае одновременной изменчивости всех характеристик, но при этом между их значениями не должно быть статистической зависимости. Пробы, как правило, характеризуются согласованными изменениями: в более мелких классах степень раскрытия минералов выше, определенные минералы имеют тенденцию к переизмельчению и т.д. От этого будет изменяться степень относительной концентрации компонентов по классам крупности пробы.

Во всех этих случаях усреднению подлежит произведение трех параметров: C , γ и d^3 , т.е.

$$(C\gamma d^3)_{\text{экв}} = \sum C_i \gamma_i d_i^3 w_i,$$

где C_i , γ_i , d_i — средние значения в пределах узких классов.

§ 5. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ПОДТВЕРЖДЕНИЕ ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕНИЯ ПРОБ

В этом разделе приводятся результаты обработки и сокращения ряда искусственно приготовленных проб. Такая обработка преследовала цель показать корректность полученной формулы и установить, являются ли практически приемлемыми сделанные при ее выводе допущения.

Идея проверки заключалась в том, чтобы, взяв из искусственно приготовленных проб с известным содержанием компонента на определенном этапе измельчения серию навесок и проанализировав их, сравнить практически полученное распределение ошибок в содержании с вычисленным по формуле. Сравнение результатов с подсчетами по формуле Чечотта проводилось в предположении, что допустимая погрешность составляет 10 %.

Опыты проводились с искусственно приготовленными пробами. Три из них были составлены из песка, цемента и галенита, две другие — из известняка, цемента и настурана. Перед приготовлением проб 1, 2 и 3 в песке, цементе и галените химически было определено содержание свинца. В песке и цементе оно составило тысячные доли процента. Как будет видно из дальнейшего, таким содержанием свинца в наших опытах можно пренебречь. В галените оно оказалось равным 83,63 против 86,6 %, соответствующих формуле PbS.

В измельченном галените под бинокляром кроме галенита были обнаружены его сростки с кварцем, редкие зерна пирита и халькопирита. Искусственные пробы были приготовлены таким образом, что в каждой из них были известны не только содержание галенита, но и неравномерность распределения его по пробе. Измельченный в стальной ступке галенит был рассеян на классы. Результаты рассева приведены ниже.

Классы, мм	Менее	От 0,1	От 0,25	От 0,5	От 3	От 5	От 7
	0,1	до 0,25	до 0,5	до 3	до 5	до 7	до 10
Количество галенита в классе, %	8,3	5,5	5,3	30,6	19,4	16,5	14,4

Для приготовления одинаковых проб 1 и 2 каждый класс галенита делится пополам для засыпки в пробы 1 и 2. Таким путем была достигнута известная и одинаковая неравномерность распределения галенита в этих пробах с содержанием свинца около 15 %.

Для приготовления пробы 3 брались навески галенита из самого мелкого класса (менее 0,1 мм). В нее предполагалось заложить содержание свинца между 0,5 и 1 %. Исходя из этого расчета и составялись навески воздушно-сухого цемента, песка и галенита для приготовления проб. В результате окончательного взвешивания готовых проб и подсчетов содержание свинца в них составило (в %) соответственно 14,20; 14,09; 0,75.

После того как пробы с цементом затвердели и были раздроблены до 5 мм, их подвергли ситовому анализу. После взятия навески для анализа пробы дробились до 1 мм, проводился ситовый анализ, результаты которого приведены в табл. 6. Части для составления навески брались после ситового анализа из каждой фракции пропорционально ее относительному содержанию в измельченной пробе.

После дробления до 5 мм навески для анализа составлялись по 5 г, после дробления до 1 мм — по 3 г. Обработка результатов

Таблица 6. Результаты ситового анализа проб после дробления (в %)

Номер пробы	Дробление до 5 мм			Дробление до 1 мм		Масса пробы, г
	0—1	1—3	3—5	0,0—0,25	0,25—1	
1	22,0	31,8	46,2	56,2	43,8	5231
2	25,0	11,5	63,5	57,2	42,8	5216
3	26,6	25,0	48,4	55,3	44,7	5237

Таблица 7. Содержание Pb в искусственно приготовленных пробах (в %)

Навеска	Номер пробы		
	1	2	3
1	17,40	19,87	0,72
2	11,80	16,61	0,72
3	11,95	15,61	0,78
4	9,80	14,82	0,70
5	18,30	10,45	0,71
6	13,53	13,35	0,73
7	11,80	11,96	0,70
8	8,40	13,96	0,75
9	9,81	17,75	0,78
10	11,24	13,75	0,70
Среднее	12,40	14,81	0,73
Заложённое	14,20	14,09	0,75

химических анализов показала, что брать и анализировать навески из проб, раздробленных до 1 мм, было бесполезно, так как ошибка сокращения здесь оказалась одного порядка с ошибкой химического анализа. Поэтому при дальнейшем изложении мы опускаем все результаты, касающиеся навесок проб, взятых после дробления до 1 мм. В результате химического и полярографического анализов составленных навесок были получены данные, приведенные в табл. 7.

В качестве изучаемого компонента в другой серии опытов мы взяли уран, равновесный с радием. Для составления проб 4 и 5 образец с большим содержанием настурана раздробили и из раздробленной части выделили фракцию с диаметром частиц 1 мм для приготовления монолита № 1. Фракция мельче 1 мм была тщательно растерта в пудру для приготовления монолита № 2. Затем обе фракции раздельно смешали с цементом и водой и оставили до полного затвердевания. Спустя некоторое время оба монолита были осторожно

измельчены и из них отсеяна фракция с диаметром частиц 3—5 мм. Так были получены "рудные" частицы определенного размера, содержащие уран в монолите из тонкоизмельченной смеси в количестве 3,4 % (частицы из монолита № 2) и в количестве 3 % (частицы монолита № 1).

В качестве наполнителя использовали известняк, из раздробленных образцов которого также выделена фракция 3—5 мм. Проба 4 состояла из 690 г тщательно смешанных "рудных" настуран-б-тонных частиц из монолита № 2 с 4 кг наполнителя, проба 5 — 627 г "рудных" частиц из монолита № 1 с 3,5 кг наполнителя.

Таким образом, пробы 5 и 4 состояли из смеси частиц узкого по размеру класса 3—5 мм. Содержание изучаемого компонента в пробах и в составляющих их "рудных" частицах было известно. Проба 5 отличается от пробы 4 только тем, что содержание урана в "рудных" частицах хоть и равно в среднем 3 %, но колеблется в существенно больших пределах.

Цель такой подготовки проб 5 и 4 заключалась в том, чтобы а) исключить влияние частиц различных диаметров и изучить закон сокращения пробы с одинаковым диаметром частиц, б) иметь (максимальное содержание изучаемого компонента в "рудной частице) возможно ближе к действительному. В пробе 4 *k* должно было мало изменяться по мере дробления. В пробе 5 при дроблении ее до диаметров, близких к 1 мм, *k* будет существенно возрастать. Эти явления мы надеялись уловить в процессе эксперимента.

Из проб 5 и 4 с диаметром частиц 3—5 мм было отобрано 10 навесок по 80 г каждая. После тщательного растирания эти навески были подвергнуты радиометрическому анализу. Ввиду того что радиометрический анализ позволял исследовать одну и ту же навеску неограниченное число раз, был проведен дисперсионный анализ. Суммарная дисперсия была разложена на две составляющие: дисперсию, обусловленную техникой эксперимента, и дисперсию, обусловленную действием изучаемого фактора, т.е. сокращением. Каждая навеска для этого анализировалась 5 раз (табл. 8). Следует сказать, что в дисперсию, вызванную техникой эксперимента, входит также дисперсия, обусловленная неравномерным распределением вещества пробы в мерительной емкости, причем эта дисперсия даже при тщательном измельчении и перемешивании пробы превышает дисперсию, вызванную другими факторами эксперимента. Поэтому после каждого измерения проба высыпалась из измерительной емкости, перемешивалась и вновь засыпалась в нее.

По результатам статистической обработки проб с галенитом (табл. 9) видно, что суммарная относительная погрешность сокращения и анализа по очень равномерной пробе 3 равна 4 % и не превышает погрешности анализа (по прописям). Она может быть принята за фактическую погрешность анализа. Тогда чистая погрешность сокращения для проб 1 и 2 оказывается практически равной общей погрешности (24,7 и 17,3 % соответственно).

Таблица 8. Содержание урана в пробах 4 и 5 (в %)

Определе- ние	Навеска										Среднее по пробе
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Проба 4											
1-е	0,445	0,568	1,05*	0,429	0,529	0,464	0,542	0,461	0,615	0,625	—
2-е	0,457	0,582	1,07	0,422	0,537	0,473	0,542	0,525	0,596	0,617	—
3-е	0,430	0,581	1,05	0,421	0,536	0,468	0,515	0,510	0,596	0,600	—
4-е	0,440	0,578	1,05	0,405	0,538	0,458	0,595	0,494	0,592	0,625	—
5-е	0,435	0,568	1,04	0,407	0,532	0,484	0,552	0,498	0,604	0,597	—
Среднее	0,4414	0,5754	1,0520	0,4168	0,5344	0,4694	0,5712	0,4976	0,6006	0,6128	0,5244
Проба 5											
1-е	0,539	0,430	0,423	0,431	0,528	0,625	0,427	0,388	0,472	0,464	—
2-е	0,345	0,423	0,421	0,455	0,519	0,633	0,423	0,400	0,483	0,471	—
3-е	0,353	0,418	0,430	0,451	0,528	0,636	0,428	0,389	0,479	0,482	—
4-е	0,335	0,428	0,423	0,448	0,504	0,614	0,425	0,402	0,488	0,473	—
5-е	0,340	0,422	0,426	0,430	0,511	0,618	0,411	0,396	0,497	0,472	—
Среднее	0,3464	0,4242	0,4246	0,4430	0,5180	0,6252	0,4228	0,3950	0,4838	0,4724	0,4554

* Третья навеска пробы 4 в подсчет среднего и в подсчет дисперсий не включена, ввиду того что ее содержание разнится от содержания в остальных навесках.

Таблица 9. Результаты статистической обработки сокращения и анализа проб с галенитом (в %)

Характеристика	Номер пробы		
	1	2	3
Среднее по анализам	12,40	14,81	0,73
Заложенное среднее	14,20	14,09	0,75
Дисперсия сокращения и анализа	12,60	6,94	$8,69 \cdot 10^{-4}$
Квадратическое отклонение	3,55	2,63	$2,95 \cdot 10^{-4}$
Дисперсия относительной погрешности	$6,2 \cdot 10^{-2}$	$3,2 \cdot 10^{-2}$	$1,6 \cdot 10^{-3}$
Погрешность	25	17,8	4
Относительная погрешность только сокращения	24,7	17,3	—

Для проб с настураном (табл. 10) также установлено, что вариация содержания между навесками практически полностью вызвана погрешностями сокращения. Погрешность анализа не оказывает влияние на общую погрешность.

Никакие фракции пробы не были избирательно обогащены галенитом, поэтому расчет эквивалентного диаметра частиц произведен по формуле

$$d_{\text{экв}}^3 = \sum_{i=1}^k p_i d_i^3,$$

где p_i — весовые доли классов; d_i — средние диаметры узких granulометрических классов. Подставляя в формулу их значения из табл. 6, получим для пробы 1:

$$d_{\text{экв}} = \sqrt[3]{0,5^3 \cdot 0,22 + 2^3 \cdot 0,32 + 4^3 \cdot 0,46} = 3,2 \text{ (мм)},$$

для пробы 2:

$$d_{\text{экв}} = \sqrt[3]{0,5^3 \cdot 0,25 + 2^3 \cdot 0,12 + 4^3 \cdot 0,63} = 3,5 \text{ (мм)}.$$

Средняя плотность частиц пробы вычисляется по формуле

$$\gamma = \frac{c}{k} \gamma_p + \left(1 - \frac{c}{k}\right) \gamma_n,$$

где c — среднее содержание свинца (0,14); k — содержание свинца в галените ($\sim 0,84$); γ_p — плотность галенита ($7,5 \text{ г/см}^3$); γ_n — плотность наполнителя ($2,5 \text{ г/см}^3$), т.е.

$$\gamma = \frac{0,14}{0,84} \cdot 7,5 + \left(1 - \frac{0,14}{0,84}\right) \cdot 2,5 = 3,35 \text{ (г/см}^3\text{)}.$$

Таблица 10. Результаты статистической обработки анализов с настураном (в %)

Характеристики	Навеска										Изменчивость средних значений	
	Проба № 4											Среднее из всех навесок
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
Среднее	0,4414	0,5754	—	0,4168	0,5344	0,4694	0,5712	0,4976	0,6000	0,6128	0,5243	—
Дисперсия	$8,6 \cdot 10^{-5}$	$3,8 \cdot 10^{-5}$	—	$8,6 \cdot 10^{-5}$	$1,1 \cdot 10^{-5}$	$7,7 \cdot 10^{-5}$	$8,6 \cdot 10^{-4}$	$4,5 \cdot 10^{-4}$	$6,4 \cdot 10^{-5}$	$1,5 \cdot 10^{-4}$	$2,0 \cdot 10^{-4}$	$4,51 \cdot 10^{-3}$
Квадратическое отклонение	$9,3 \cdot 10^{-3}$	$6,2 \cdot 10^{-3}$	—	$9,3 \cdot 10^{-3}$	$3,4 \cdot 10^{-3}$	$8,8 \cdot 10^{-3}$	$2,9 \cdot 10^{-2}$	$2,1 \cdot 10^{-2}$	$8,0 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-2}$	$1,4 \cdot 10^{-2}$	$6,72 \cdot 10^{-2}$
Коэффициент вариации	2,1	1,1	—	2,2	6,3	1,9	5,1	4,3	1,3	2,0	2,7	12,8
Среднее	0,3464	0,4246	0,4246	0,4430	0,5180	0,6252	0,4228	0,3950	0,4838	0,4724	0,456	—
Дисперсия	$7,5 \cdot 10^{-5}$	$1,9 \cdot 10^{-5}$	$0,98 \cdot 10^{-5}$	$11,0 \cdot 10^{-5}$	$8,9 \cdot 10^{-5}$	$7,1 \cdot 10^{-5}$	$3,8 \cdot 10^{-5}$	$3,2 \cdot 10^{-5}$	$7,1 \cdot 10^{-5}$	$3,3 \cdot 10^{-5}$	$5,48 \cdot 10^{-5}$	$5,25 \cdot 10^{-3}$
Квадратическое отклонение	$8,7 \cdot 10^{-3}$	$4,3 \cdot 10^{-3}$	$3,1 \cdot 10^{-3}$	$1,0 \cdot 10^{-2}$	$9,4 \cdot 10^{-3}$	$8,4 \cdot 10^{-3}$	$6,1 \cdot 10^{-3}$	$5,7 \cdot 10^{-3}$	$8,4 \cdot 10^{-3}$	$5,8 \cdot 10^{-3}$	$7,4 \cdot 10^{-2}$	$7,25 \cdot 10^{-2}$
Коэффициент вариации	3,5	1,0	0,74	2,4	1,8	1,3	1,5	1,4	1,7	1,2	1,64	15,9

Наибольшую сложность вызывает расчет коэффициента контрастности. Сделаем следующие допущения (подробный анализ и будет проведен в гл. IV): а) классы крупности галенита распределены одинаково по классам крупности пробы; б) если размер рудной вкрапленности больше размера частиц пробы, то зерна рудного минерала плотностью раскрыты (коэффициент контрастности мал); в) если размер вкрапленности существенно (на порядок) меньше размера частиц пробы, то они имеют приблизительно одинаковое среднее содержание (коэффициент контрастности равен нулю); г) при сопоставимых размерах вкрапленности и зерен плотность раскрыто около 30 % рудных минералов. В соответствии с этими принципами в табл. 11 подсчитана доля галенита в этих трех указанных состояниях, а также средние коэффициенты контрастности по классам крупности пробы. Максимальный коэффициент контрастности равен

$$C_{\max} = \frac{83,6\% \cdot 7,5}{14,2\% \cdot 2,5} - 1 = 17,66.$$

Отсюда $C_{\text{экв}} = 0,339 \cdot C_{\max} = 5,76$.

Погрешности сокращения σ рассчитаны по формуле

$$\sigma^2 = C_{\text{экв}} \gamma d_{\text{экв}}^3 \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{Q} \right)$$

при следующих значениях параметров: $C_{\text{экв}} = 5,76$; $\gamma = 2,5 \text{ г/см}^3$; $d_{\text{экв}} = 0,32 \text{ см}$; $Q = 5,2 \cdot 10^3 \text{ г}$; $q = 5 \text{ г}$:

$$\sigma_{\text{рас}}^2 = 5,76 \cdot 2,5 \cdot 0,32^3 / 5 = 307 \approx 31\%.$$

Упрощенная проверка гипотезы о существенности отклонения расчетной погрешности от эмпирической может быть проведена следующим образом: нуль-гипотеза $\sigma_{\text{эмп}} = \sigma_{\text{рас}}$ на 5 %-ном уровне отклоняется, если

$$\sqrt{2f} |\sigma_{\text{рас}} - \sigma_{\text{эмп}}| / \sigma_{\text{рас}} \geq 1,96,$$

где f — число навесок. Для пробы 1 имеем

$$\sqrt{2,9} \frac{0,31 - 0,25}{0,31} = 0,82,$$

т.е. гипотеза о подтверждении результата не отвергается ($0,82 < 1,96$). Практически аналогичный результат получаем для пробы 2.

На примере обработки искусственных проб можно привести сравнение нашей формулы с формулой Ричардса — Чечотта. Для этого

Таблица 11. Распределение гранулометрических классов частиц галенита по классам крупности пробы 1 и расчет коэффициента контрастности

Гранулометрическая характеристика раздробленного галенита	Классы крупности пробы с галенитом (в скобках выход пробы)					
	0—1 мм (22 %)		1—3 мм (32 %)		3—5 мм (46 %)	
	Выход класса, %	Парциальный коэффициент контрастности C	Выход класса галенита в данном классе пробы, %	Парциальный коэффициент контрастности C	Выход класса галенита в данном классе пробы, %	Парциальный коэффициент контрастности C
0,1—0,1	8,3	0	19,1	0	28,6	0
0,1—0,25	5,5					
0,25—0,50	5,3	0,2 C_{\max}	30,6	0,2 C_{\max}	40,5	0,2 C_{\max}
0,5—1,0	9,5					
1,0—3,0	21,1	0,6 C_{\max}	50,3	0,6 C_{\max}	30,9	0,6 C_{\max}
3,0—5,0	19,4					
5,0—7,0	16,5					
7,0—10	14,4					
Средний по классу коэффициент контрастности	$C_1 = 0,14 \cdot 0 + 0,15 \cdot 0,2 + 0,71 \cdot 0,6 = 0,456 \cdot (C_{\max})$		$C_2 = 0,19 \cdot 0 + 0,31 \cdot 0,2 + 0,50 \cdot 0,6 = 0,36 \cdot (C_{\max})$		$C_3 = 0,29 \cdot 0 + 0,41 \cdot 0,2 + 0,31 \cdot 0,6 = 0,268 \cdot (C_{\max})$	
Средний по пробе коэффициент контрастности	$C = (0,22 \cdot 0,456 + 0,32 \cdot 0,36 + 0,46 \cdot 0,268) \cdot C_{\max} = 0,339 \cdot C_{\max} = 0,339 \cdot 17 = 5,76$					

необходимо поставить их в сопоставимые условия. Сделаем предположение, что подразумеваемая допустимая погрешность в формуле Ричардса — Чечотта равна 10 %. Произведем пересчет необходимой массы проб (навесок) в наших опытах, имея в виду что она обратно пропорциональна квадрату погрешности: $q_{\phi}/q = \sigma^2/\sigma_{\phi}^2$, где q_{ϕ} — фактическая (в опытах) масса навесок, дающая погрешность σ_{ϕ} ; q — масса навесок, обеспечивающих 10 %-ную погрешность. Для пробы 1 получим $5:q_1 = 10^2:25^2$, откуда $q = 5 \cdot 25^2:10^2 = 31,2^2$. Для пробы № 2 $q_2 = 5 \cdot 17^2:10^2 = 14,45$ г.

По табл. 3 выбираем значение K для формулы Чечотта. Руду с содержанием около 15 % свинца следует считать богатой и отнести к V категории. Преобладающий размер рудной вкрапленности (~ 1 мм) следует считать, по-видимому, мелким, и руду по этому признаку следует отнести к I категории. Необходимая масса навески для руд V категории составляет $10 \cdot 3^2 = 90$ кг, для руд I категории — $0,1 \cdot 9 = 900$ г. В обоих случаях полученная масса в 100–1000 раз превышает необходимую. Такое несоответствие связано прежде всего с ошибочностью принципа, заложенного в табл. 3. Значение K в ней сделано возрастающим с увеличением содержания в руде. В действительности при постоянной заданной относительной погрешности надежная масса пробы уменьшается с увеличением содержания полезного компонента.

При оценке расчетной погрешности для пробы 4 и 5 приняты следующие значения параметров.

Параметры	Проба 4	Проба 5
$Q, \text{ г}$	$4,7 \cdot 10^3$	$4,1 \cdot 10^3$
$q, \text{ г}$	80	80
$d, \text{ см}$	0,5	0,5
$k, \%$	3,4	3,0
$c, \%$	0,524	0,456
$\gamma_p, \text{ г/см}^3$	3	3
$\gamma_s, \text{ г/см}^3$	3	3
$C = \frac{k \gamma_p}{c \gamma} - 1$	$C = \frac{3,4}{0,524} - 1 = 5,49$	$C = \frac{3,0}{0,456} - 1 = 5,58$

Расчетные погрешности $\sigma_{\text{рас}}$ сокращения равны: для пробы 4

$$\sigma_{\text{рас}} = \sqrt{5,49 \cdot 3,0 \cdot 0,5^3 : 80} = 0,160 = 16,0 \%$$

(экспериментальное значение 12,8 %), для пробы 5

$$\sigma_{\text{рас}} = \sqrt{5,58 \cdot 3,0 \cdot 0,5^3 : 80} = 0,161 = 16,1 \%$$

(экспериментальное значение 15,9 %).

Совпадение расчетных погрешностей с эмпирическими хорошее. Здесь и без статистической проверки гипотез очевидно равенство теоретической (расчетной) и эмпирической погрешностей сокращения.

Для сравнения с формулой Чечотта определим надежную массу навески для погрешности 10 %:

$$\frac{80}{q} = \frac{10^2}{16^2}, \text{ откуда } q_4 = q_5 = \frac{80 \cdot 16^2}{10^2} = 205 \text{ г.}$$

По формуле Чечотта руду относим к первой категории. Расчетная требуемая масса составляет при этом 900 г, что существенно превышает экспериментальное значение.

В заключение этого раздела отметим, что более конкретный расчет коэффициента контрастности пробы, а также другой путь его оценки будут даны в следующей главе.

§ 6. АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ СОКРАЩЕНИЯ СМЕСИ ЧАСТИЦ РАЗЛИЧНЫХ КЛАССОВ

Рассмотренная в первом разделе этой главы простейшая модель сокращения относилась к одному классу частиц, одинаковых по всем показателям, кроме свойства быть рудной или нерудной. В ней предполагалось, что контроль величины пробы после сокращения осуществляется по числу частиц. Процесс "сокращения" заключается в выборе из пробы заданного их числа по одной частице, причем все частицы одинаково доступны для выбора независимо от их расположения и свойств. Способ сокращения, соответствующий такой модели, трудно осуществить на практике. Это возможно лишь вручную методом "поштучного вычерпывания" для пробы, состоящей из сравнительно небольшого числа крупных частиц.

Рассмотрим вторую модель сокращения, заключающуюся в следующем. Задавшись необходимым числом частиц после сокращения n_0 и зная их число в исходной пробе, определим степень сокращения: $m = n_0/N_0$. Подвергнем последовательно каждую частицу пробы следующему испытанию: с вероятностью $p = 1/m$ частица отправляется в навеску и с вероятностью $q = 1 - p$ — в отвал. Порядок, в котором поступают частицы для испытаний, несуществен, поэтому будем считать, что сначала идут все рудные частицы, затем — нерудные.

Определим дисперсию доли рудных частиц, т.е. дисперсию отношения двух величин n_p/n_0 :

$$\sigma_{n_p/n_0}^2 = \left(\frac{n_p}{n_0}\right)^2 \left(\frac{\sigma_{n_p}^2}{n_p^2} + \frac{\sigma^2}{n_0^2} - 2r n_p n_0 \frac{\sigma_{n_p} \sigma_{n_0}}{n_p n_0}\right). \quad (31)$$

Дисперсии $\sigma_{n_p}^2$ и $\sigma_{n_0}^2$ определяются из биномиальной схемы как

дисперсия "числа успехов" попасть в навеску, причем число испытаний равно числу соответствующих частиц в сокращенной пробе:

$$\sigma_{n_p}^2 = N_p pq = N_0 a pq, \sigma_{n_0}^2 = N_0 pq = \sigma_{n_p}^2 / a,$$

где a — доля рудных частиц. Очевидно также, что

$$n_p = N_p / m = N_0 a / m, n_0 = N_0 / m.$$

Коэффициент корреляции между числом рудных частиц в выборке и общим числом частиц в ней $r_{n_p n_0}$ определим как коэффициент между суммой и одним из слагаемых по следующей схеме: $r_{n_p n_0} = r_{xy}$, где $x = n_p$, $y = n_p + n_0$. Величины n_p и n_0 независимы, поэтому можно записать [10]:

$$r_{n_p n_0} = r_{n_p n_p} \frac{\sigma_{n_p}}{\sigma_{n_0}} + r_{n_p n_0} \frac{\sigma_{n_p}}{\sigma_{n_0}} \frac{\sigma_{n_0}}{\sigma_{n_0}};$$

поскольку $r_{n_p n_p} = 1$, а $r_{n_p n_0} = 0$, то

$$r_{n_p n_0} = \sigma_{n_p}^2 / \sigma_{n_0}^2 = a.$$

Подставляя все это в формулу (31), получим

$$\begin{aligned} \sigma_{n_p}^2 / n_0 &= a^2 \left(\frac{\sigma_{n_p}^2 m^2}{(N_0 a)^2} + \frac{\sigma_{n_p}^2 m^2}{a N_0^2} - 2a \frac{m^2 \sigma_{n_p}^2}{N_0^2 a \sqrt{a}} \right) = \\ &= \frac{a(m-1)}{N_0} [1 - a + 2a(1 - \sqrt{a})] = a [1 - a + 2a(1 - \sqrt{a})] \times \\ &\times n_0 \left(1 - \frac{n_0}{N_0}\right). \end{aligned}$$

Сопоставляя этот результат с полученным для первой модели сокращения (формула 12), видим, что отличия заключаются лишь во втором множителе: вместо $(1-p)$ стало $[1 - a + 2a(1 - \sqrt{a})]$, где $p = a$ — доля рудных частиц.

Дополнительное слагаемое второго множителя $2p(1 - \sqrt{p})$ всегда не отрицательно, следовательно, математическое ожидание дисперсии сокращения по такой схеме всегда больше, чем по прежней. Эти отличия в общем невелики и для различных p приведены в табл. 12.

При малом содержании рудных частиц отличиями в схемах сокращения можно пренебречь, при $p = 50\%$ отношение дисперсий превышает полтора раза. При приближении p к 100% дисперсия увеличи-

Таблица 12. Сравнительные расчетные погрешности моделей сокращения

p	$1-p$	$2p(1 - \sqrt{p})$	$\frac{2p(1 - \sqrt{p})}{1-p} \cdot 100\%$
0,01	0,99	0,02	2
0,01	0,9	0,14	15
0,3	0,7	0,27	39
0,5	0,5	0,29	59
0,8	0,2	0,17	84
0,9	0,1	0,09	92
0,99	0,01	0,0099	99,0
0,999	0,001	0,0000999	99,92

вается вдвое по сравнению с получаемой по первой схеме сокращения (погрешность — в $\sqrt{2}$ раз).

Способ сокращения, соответствующий второй модели, может быть осуществлен с помощью желобковых делителей Джонса или механических сократителей Глаголева. При этом проба должна направляться на сократитель настолько тонкой струей, чтобы отсутствовало взаимодействие частиц, т.е. чтобы попадание частицы в одну из щелей желобкового делителя не влияло на вероятность попадания в эту щель другой частицы. Если частицы сыплются плотной струей, это условие не выполняется, так как частица, занимая место в струе, вытесняет из нее другие частицы. При этом реализуется третья модель сокращения, наиболее типичная для практических методов. К ней же можно отнести классическое квартование, т.е. разделение конуса пробы двумя перпендикулярными вертикальными плоскостями. Конус перемешанной пробы можно считать в этом случае "застывшей струей".

В первой модели величины сокращенной пробы контролировались по числу испытаний, равному числу частиц в ней, во второй — по степени сокращения числа частиц, в третьей — по степени сокращения объема, занимаемого пробой. При редком расположении частиц (не более одной в равных единицах объема) третья модель становится тождественной второй. При равенстве размеров и массы всех частиц также происходит вырождение третьей модели во вторую.

Схему сокращения, соответствующую третьей модели, т.е. с контролем по объему пробы, можно реализовать с помощью вычерпывания порциями до получения заданного объема. Величину порции можно выбрать равной объему максимального зерна. Тогда эта модель сокращения отождествится с первой, но коэффициент контрастности при этом должен характеризовать не отдельные зерна, а порции. Более подробно этот вопрос будет рассмотрен в следующей главе.

Наконец, контроль величины пробы может проводиться по массе. Этот вариант близок к предыдущему, но при прочих равных условиях будет давать несколько большие погрешности, чем при контроле по объему. Кроме того, на практике контроль по массе не принят, хотя на схемах разведки пробы указана именно масса. Фактически известна масса начальной пробы, а все остальные получаются отделиванием части объема, но без взвешивания.

Анализ различных моделей сокращения показал, что расчетные погрешности от модели в большинстве случаев отличаются несущественно и ими можно пренебречь.

§ 7. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ СОДЕРЖАНИЯ ПРИ МНОГОЭТАПНОЙ ОБРАБОТКЕ ПРОБ

Погрешность содержания на каждом этапе обработки пробы зависит от погрешностей, которые вносятся сокращениями на всех предыдущих этапах, т.е. значения погрешностей являются зависимыми случайными величинами. Поэтому необходимо установить связи между ними и выяснить влияние каждого этапа на накопленную погрешность.

Рассмотрим случай, когда проба состоит из двух классов частиц: рудных и нерудных. Пусть в начальной пробе имеется всего частиц N_0 , доля рудных частиц p_0 , а в сокращенной пробе общее число частиц N_1 . Тогда дисперсия доли рудных частиц p_1 в сокращенной пробе:

$$D[p_1] = p_0(1-p_0)(1/N_1 - 1/N_0).$$

Материал сокращенной пробы подвергается дроблению, при этом число частиц в пробе возрастает и становится равным $N'_1 = a_1 N_1$, где коэффициент a_1 больше единицы. Затем проба сокращается до общего числа частиц N_2 , при этом значение p_1 влияет на долю рудных частиц p_2 в пробе после второго сокращения.

Математическое ожидание и дисперсия двух случайных величин p_1 и p_2 связаны между собой следующими соотношениями [6]:

$$M[p_2] = M[M[p_2 | p_1]],$$

$$D[p_2] = D[M[p_2 | p_1]] + M[D[p_2 | p_1]],$$

где $M[p_2 | p_1]$ и $D[p_2 | p_1]$ — условные математическое ожидание и дисперсия соответственно. Условным математическим ожиданием называется математическое ожидание случайной величины p_2 при условии, что значение другой случайной величины p_1 , от которого зависит значение p_2 , равно некоторому фиксированному значению. В рассматриваемом случае полагаем, что в пробе N_1 число рудных частиц равно p_1 , поэтому $M[p_2 | p_1] = p_1$, а $M[p_2] = M[p_1] = p_0$, т.е. математическое ожидание доли рудных частиц в пробе, сокра-

щенной два раза, равно доле рудных частиц в начальной пробе. Тогда можно определить значение первого слагаемого в формуле для дисперсии:

$$D[M[p_2 | p_1]] = D[p_1] = p_0(1-p_0)\left(\frac{1}{N_1} - \frac{1}{N_0}\right).$$

Значение условной дисперсии $D[p_2 | p_1]$ находим, полагая, что p_1 фиксированная величина, поэтому

$$D[p_2 | p_1] = p_1(1-p_1)\left(\frac{1}{N_2} - \frac{1}{N'_1}\right),$$

отсюда второе слагаемое равно:

$$M[D[p_2 | p_1]] = \left(\frac{1}{N_2} - \frac{1}{N'_1}\right)M[p_1 - p_1^2] = \left(\frac{1}{N_2} - \frac{1}{N'_1}\right)[M[p_1] - M^2[p_1] - D[p_1]].$$

Окончательно получим выражение для дисперсии случайной величины p_2 :

$$D[p_2] = p_0(1-p_0)\left[\left(\frac{1}{N_1} - \frac{1}{N_0}\right) + \left(\frac{1}{N_2} - \frac{1}{N'_1}\right) - \left(\frac{1}{N_2} - \frac{1}{N'_1}\right) \times \left(\frac{1}{N_1} - \frac{1}{N_0}\right)\right],$$

или, отбрасывая последнее слагаемое,

$$D[p_2] < p_0(1-p_0)\left[\left(\frac{1}{N_1} - \frac{1}{N_0}\right) + \left(\frac{1}{N_2} - \frac{1}{N'_1}\right)\right].$$

Величина пренебрегаемого слагаемого будет незначительна даже при небольшом числе частиц в пробе. Рассмотрим простой пример. Пусть для начальной пробы $N_0 = 20$, $p_0 = 0,3$. Пробу сократили в четыре раза, т.е. $N_1 = 5$. Затем ее раздробили таким образом, что число частиц стало равным $N'_1 = 40$ и сократили еще в четыре раза, т.е. до $N_2 = 10$. Если воспользоваться точной формулой для дисперсии, то ее значение равно $D[p_2] = 0,045$, а приближенное значение $D[p_2] = 0,047$, т.е. относительная ошибка составляет 4,4%. Для значительного числа частиц в пробе, когда $N = 10^6 - 10^{10}$, как это и бывает в действительности, расхождение будет еще меньше, поэтому дисперсию можно принимать равной значению оценки по приближенной формуле.

Используя аналогичные выкладки, можно получить формулу дисперсии рудных частиц для обработки пробы за n этапов:

$$D[p_n] = p_0(1-p_0)\left[\left(\frac{1}{N_1} - \frac{1}{N_0}\right) + \left(\frac{1}{N_2} - \frac{1}{N'_1}\right) + \dots + \left(\frac{1}{N_n} - \frac{1}{N'_{n-1}}\right)\right].$$

Дисперсия относительной погрешности доли рудных частиц равна $D[(p_0 - p_n)/p_0]$, или

$$\left(\frac{1}{p_0} - 1\right) \left[\left(\frac{1}{N_1} - \frac{1}{N_0}\right) + \left(\frac{1}{N_2} - \frac{1}{N_1}\right) + \dots + \left(\frac{1}{N_n} - \frac{1}{N_{n-1}}\right) \right]$$

Заменим численную долю рудных частиц весовой долей металла, а число частиц выразим через массу пробы и размеры частиц. Тогда получим выражение для приближенного значения дисперсии содержания:

$$\sigma^2 = \frac{1}{Q_0} \left(\frac{k\gamma_p}{c\gamma} - 1 \right) \gamma \sum_{k=1}^n d_k^3 (m_k - m_{k-1}), \quad (32)$$

где Q_0 — начальная масса пробы, г; γ_p — плотность рудных частиц, г/см³; γ — средняя плотность частиц, г/см³; k — содержание металла в рудной частице, доли единицы; c — содержание металла в пробе, доли единицы; d_k — размеры частиц пробы на этапах после дробления, см; m_k — степени сокращения массы пробы на этапах обработки.

Данная формула позволяет оценивать дисперсию содержания, если контрастность руды $C = (k\gamma_p)/(c\gamma) - 1$ не изменяется с дроблением частиц пробы, а размеры частиц на каждом этапе обработки представляют собой узкий гранулометрический класс. Если рассматривать одноэтапный процесс сокращения пробы как развернутый многоэтапный процесс обработки без дробления, т.е. когда значения размеров частиц d_k не изменяются и равны d , то получим равенство

$$\sigma^2 = \frac{C\gamma d^3}{Q_0} (m_1 - 1 + m_2 - m_1 + \dots + m - m_{n-1}) = \frac{C\gamma d^3}{Q_0} (m - 1).$$

Это выражение совпадает со значением дисперсии при единичном сокращении пробы от массы Q_0 до массы $Q_1 = Q_0/m$.

Выражение для дисперсии позволяет оценить вклад каждого этапа в накопление погрешности содержания. Чем больше размер частиц, т.е. чем меньше частиц в пробе и степень сокращения после сокращения после дробления, тем значительнее доля погрешности, внесенная в содержание данным этапом обработки пробы.

Предположим, что необходимо составить схему обработки пробы в два этапа при заданном значении средней квадратической погрешности σ . Используя формулу для дисперсии при $n = 2$, можно выразить степень сокращения на первом этапе:

$$m_1 = 1 - (\sigma^2 Q_0 / (C\gamma) - d_2^3 (m - m_2)) / d_1^3.$$

Придавая различные значения величинам d_1 , d_2 и m_2 таким образом,

чтобы они удовлетворяли условиям $d_2 \leq d_1 \leq d_0$, $1 \leq m_1 \leq m_2 \leq m$, можно определить значение m_1 , удовлетворяющее точности обработки, заданной значением σ , причем таких комплектов значений m_1 , m_2 , d_1 , d_2 будет несколько.

Следовательно, существует несколько способов обработки одной и той же пробы, позволяющих достигнуть необходимой точности. Каждая из этих схем отличается размерами частиц после дробления и сокращения массы пробы на этапах обработки, а также числом этапов. Среди множества схем необходимо выбрать наиболее эффективную, требующую минимальных затрат.

Глава IV

КОНТРАСТНОСТЬ ИЗМЕЛЬЧЕННОЙ ПРОБЫ, ЕЕ СВЯЗЬ С РАЗМЕРОМ РУДНОЙ ВКРАПЛЕННОСТИ И ГРАНУЛОМЕТРИЧЕСКИМ СОСТАВОМ

§ 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Погрешности сокращения отдельных гранулометрических классов и общая ошибка сокращения всей измельченной пробы зависят от целого ряда фундаментальных характеристик руды. Опираясь на сформулированное в предыдущей главе определение коэффициента контрастности, в этой главе мы изучим его зависимость от характера рудной вкрапленности, числа рудных минералов, степени их раскрытия и содержания компонентов.

Для целей оптимизации процесса обработки проб коэффициент контрастности необходимо выразить как функцию диаметра измельчения, используя в качестве параметров этой функции такие известные по минералогическому описанию руд характеристики, как минеральный состав, структура и текстура руд, главным образом характер вкрапленности полезного компонента. Зная механические свойства рудных и вмещающих минералов и пород, можно с достаточной точностью предсказать изменение коэффициента контрастности в процессе дробления.

При дроблении пробы происходит раскрытие минеральных сростков, так что с уменьшением их размеров доля частиц, состоящих из чистых минеральных видов, увеличивается. Когда материал пробы измельчен до такой степени, что ни одна частица в пробе не является сростком рудного и нерудного ингредиента, коэффициент контрастности достигает максимальной величины и далее не изменяется. Это его значение назовем критическим C^* . Расчет критического значения представляет определенную трудность, особенно если

руда содержат несколько видов рудных минералов. Этому будет посвящена первая часть главы. Во второй части мы попытаемся выразить изменение коэффициента контрастности в процессе измельчения через его критическое значение и отношение размера частиц пробы к размеру рудной вкрапленности.

§ 2. КОЭФФИЦИЕНТ КонтРАСТНОСТИ ИЗМЕЛЬЧЕННОЙ ПРОБЫ УЗКОГО ГРАНУЛОМЕТРИЧЕСКОГО КЛАССА

Коэффициентом контрастности пробы C мы назвали относительную дисперсию количества металла (т.е. квадрат коэффициента вариации в долях) в отдельных частицах пробы по отношению к среднему его количеству в частице:

$$C = \frac{1}{\bar{w}} M (w - \bar{w})^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{w_i}{\bar{w}} - 1 \right)^2, \quad (33)$$

где w_i — масса металла в i -той частице, г; \bar{w} — средняя масса металла в частице, г; n — число частиц в пробе. Средняя масса металла равна общей массе металла, деленной на число частиц, или среднему содержанию, умноженному на среднюю массу частицы: $\bar{w} = cd^3$.

В частном случае, когда проба состоит из рудных и нерудных частиц с частотами p_p и $p_n = 1 - p_p$ соответственно

$$C = \left(\frac{w_p}{\bar{w}} - 1 \right)^2 + 1 - p_p.$$

Выразим p_p через w и w_p : $\bar{w} = w_p p_p$, откуда $p_p = \bar{w}/w_p$. Подставляя это отношение в формулу (33), получим:

$$C = \left(\frac{w_p}{\bar{w}} - 1 \right)^2 \frac{\bar{w}}{w_p} + 1 - \frac{\bar{w}}{w_p} = \frac{w_p}{\bar{w}} - 1,$$

или, после выражения массы металла через содержание:

$$C = k\gamma_p / (c\gamma) - 1, \quad (34)$$

т.е. для пробы, состоящей из смеси рудного и нерудного минералов, коэффициент контрастности принимает известное из главы III выражение.

В литературе еще не обсуждался вопрос о коэффициенте контрастности руды, полезный компонент которой содержится в нескольких носителях. Между тем именно такие руды составляют большинство. В горных породах, например в обычном граните, практически любой элемент также содержится в нескольких минералах-носителях. Таким образом, важность вопроса о коэффициенте контрастности руды, содержащей несколько носителей полезного компонента, не подлежит сомнению.

Рассмотрим случай, когда руда состоит из двух типов мономинеральных зерен. Пусть k_1 и γ_1 — содержание металла и плотность в первом типе рудных частиц, k_2 и γ_2 — во втором. Раскрывая выражение (33), запишем

$$C = \left(\frac{w_1}{\bar{w}} - 1 \right)^2 p_1 + \left(\frac{w_2}{\bar{w}} - 1 \right)^2 (1 - p_1),$$

где w_1 и w_2 — масса металла в частице соответственно первого и второго минералов. Из этого следует, что

$$\bar{w} = w_1 p_1 + w_2 (1 - p_1),$$

откуда

$$p_1 = \frac{\bar{w} - w_2}{w_1 - w_2}; \quad 1 - p_1 = \frac{\bar{w} - w_1}{w_2 - w_1},$$

что окончательно дает

$$C = \left(\frac{w_1}{\bar{w}} - 1 \right)^2 \frac{\bar{w} - w_2}{w_1 - w_2} + \left(\frac{w_2}{\bar{w}} - 1 \right)^2 \frac{\bar{w} - w_1}{w_2 - w_1},$$

где w — средняя масса металла на одну частицу.

Это выражение легко привести к следующему виду:

$$C = \left(\frac{w_1}{\bar{w}} - 1 \right)^2 \frac{\left(\frac{w_2}{\bar{w}} - 1 \right)}{\left(\frac{w_2}{\bar{w}} - 1 \right) - \left(\frac{w_1}{\bar{w}} - 1 \right)} + \left(\frac{w_2}{\bar{w}} - 1 \right)^2 \times \frac{\left(\frac{w_1}{\bar{w}} - 1 \right)}{\left(\frac{w_1}{\bar{w}} - 1 \right) - \left(\frac{w_2}{\bar{w}} - 1 \right)}.$$

Введем понятие парциального контраста частиц i -того минерала R_i :

$$R_i = \left(\frac{w_i}{\bar{w}} - 1 \right) = \frac{k_i \gamma_i}{c\gamma} - 1. \quad (35)$$

Тогда предыдущее выражение для C приобретает следующий простой вид:

$$C = R_1^2 \frac{R_2}{R_2 - R_1} + R_2^2 \frac{R_1}{R_1 - R_2}. \quad (36)$$

Парциальный контраст безрудных частиц $R_0 = -1$. Подставляя в формулу (36) значение $R_2 = -1$, убеждаемся, что получаем результат, совпадающий с известным нам выражением (34):

$$C = R_1^2 \frac{-1}{-R_1 - 1} + (-1)^2 \frac{R_1}{R_1 + 1} = \frac{R_1^2 + R_1}{1 + R_1} = R_1.$$

Таким образом, если проба состоит из частиц двух минеральных видов, один из которых не содержит изучаемого компонента, при расчете коэффициента контрастности можно пользоваться выражением (34), иначе — выражением (36). В прил. 3 приведена программа расчета по этой формуле для микрокалькуляторов "Электроника" БЗ-21 и БЗ-34.

Пример. Имеется анкерит-сидеритовая смесь с содержанием FeO 50%. Для анкерита $k_1 = 20\%$, $\gamma_1 = 3,0$ для сидерита $k_2 = 62\%$, $\gamma_2 = 3,9$, $c = 50\%$, $\gamma = 3,6$. Ответ $C = 0,23$. Для сравнения укажем, что в сидерит-кварцевой смеси с таким же содержанием железа коэффициент контрастности равен $C = 0,34$, а в анкерит-кварцевой с содержанием FeO 15% существенно больше: 0,48.

Отправляясь от формулы (33), для трех и более минералов-носителей запишем:

$$C = \left(\frac{w_1}{w} - 1\right)^2 p_1 + \left(\frac{w_2}{w} - 1\right)^2 p_2 + \left(\frac{w_3}{w} - 1\right)^2 (1 - p_1 - p_2),$$

где p_i — числовая доля частиц i -того минерала. Ее необходимо выразить через весовую долю носителя p_{wi} : $p_{wi} = p_i \gamma_i$, откуда $p_i = p_{wi} / \gamma_i$.

Для приведения суммы полученных таким способом числовых долей к единице их необходимо перенормировать:

$$p_i = \frac{p_{wi}}{\gamma_i} / \sum_{i=1}^m \frac{p_{wi}}{\gamma_i}.$$

По аналогии для любого числа m минералов-носителей запишем

$$C = \sum_{i=1}^m R_i^2 p_i, \quad R_i = \frac{k_i \gamma_i}{c \gamma} - 1,$$

т.е. коэффициент контрастности пробы равен взвешенной сумме квадратов парциальных коэффициентов контрастностей всех минералов, слагающих пробу R_i .

Приведем несколько примеров расчета коэффициента контрастности руды, содержащей несколько носителей полезного компонента. В таблицах сделан расчет вручную, а в прил. 4 предложена программа для расчета на микрокалькуляторе "Электроника" БЗ-34.

Таблица 13. Характеристики медной руды, определяющие ее контрастность по меди

Минералы	γ , г/см ³	k , %	p_{wi} , %	c_i	$\frac{p_{wi}}{\gamma_i}$	$p = \frac{p_{wi}}{\gamma_i} / \sum \frac{p_{wi}}{\gamma_i}$	$k_i \gamma_i$
Борнит	5,1	63	3,7	2,3	0,73	0,02	321,3
Халькопирит	4,2	35	9,1	3,2	2,17	0,06	147,0
Халькозин	5,7	80	0,7	0,6	0,12	0,003	456,0
Нерудные	2,7	—	86,5	—	32,04	0,91	0,0
Среднее	2,95						
					$\Sigma = 100 \quad \Sigma = 6,1 \quad \Sigma \approx 35,05 \quad \Sigma \approx 1,00 \quad c \gamma = 2,95 \times 6,1 \approx 17,9$		

Пример 1. Медная руда в качестве носителя меди содержит борнит, халькопирит и халькозин (табл. 13).

Проведем расчет коэффициента контрастности по данным табл. 13:

$$C = \left(\frac{321,3}{18,0} - 1\right)^2 0,02 + \left(\frac{147,0}{18,0} - 1\right)^2 0,06 + \left(\frac{456,0}{18,0} - 1\right)^2 0,003 + (-1)^2 0,91 \approx 5,68 + 3,08 + 1,78 + 0,91 \approx 11,45.$$

При измельчении до 0,1 см и обеспечении 5%-ной средней квадратической погрешности содержания меди в навеске после сокращения

$$q = \frac{C \gamma d^3}{\sigma^2} = \frac{11,45 \cdot 0,1^3 \cdot 2,95}{0,05^2} = 13,5 \text{ г.}$$

Для арбитражных прецизионных анализов с погрешностью не более 1% требуемая масса будет значительно больше:

$$q = \frac{11,45 \cdot 0,1^3 \cdot 2,95}{(0,01)^2} = 337,8 \text{ г.}$$

Если то же содержание меди было обусловлено только халькопиритом, то коэффициент контрастности можно было бы рассчитать проще:

$$C = \frac{35 \cdot 4,2}{6,1 \cdot 2,96} - 1 = 7,17,$$

а требуемая навеска при допустимой 5%-ной погрешности была бы равна не 13,5, а 8,4 г.

Таблица 14. Характеристики нефелинового сиенита, определяющие ее контрастность по алюминию

Минерал	γ	$k, \%$	$p_w, \%$	c_i	$\frac{p_{w_i}}{\gamma_i}$	p_i	$k_i \gamma_i$
Микроклин	2,6	18,4	65	12,0	25	0,66	47,8
Нефелин	2,6	32,5	20	6,5	7,69	0,21	84,5
Биотит	3,1	12,0	5	0,6	1,61	0,04	37,2
Щелочной пироксен	3,5	5,0	5	0,25	1,43	0,04	17,5
Прочие	3,0	—	5	—	1,67	0,05	0,0
	Среднее 2,69		$\Sigma=100$	$\Sigma=19,35$	$\Sigma=37,4$	$\Sigma=1,00$	$\Sigma\gamma=52$

Если такая руда содержала бы только халькозин, то а навеска составила бы 30 г.

$$C = \frac{80 \cdot 5,7}{6,1 \cdot 2,96} = 25,25,$$

Пример 2. Проба нефелинового сиенита содержит 65 % микроклина, 20 % нефелина, 5 % биотита, 10 % щелочного пироксена. Требуется определить контрастность по Al_2O_3 . Исходные данные сгруппированы в табл. 14. Расчет по ним коэффициента контрастности дает:

$$C = \left(\frac{47,84}{52,38} - 1\right)^2 \cdot 0,66 + \left(\frac{84,5}{52,38} - 1\right)^2 \cdot 0,21 + \left(\frac{37,2}{52,38} - 1\right)^2 \cdot 0,04 + \left(\frac{17,5}{52,38} - 1\right)^2 \cdot 0,04 + (-1)^2 \cdot 0,05 = 0,005 + 0,083 + 0,0033 + 0,05 + 0,018 = 0,16.$$

Для достижения средней квадратической воспроизводимости содержания Al_2O_3 в сокращенной пробе, равной 5 % ($\sigma^2 = (0,05)^2 = 0,0025$), при измельчении до 1 мм = 0,1 см требуется (считая начальную массу бесконечно большой)

$$q = \frac{C \gamma d^3}{\sigma^2} = \frac{0,16 \cdot 2,7 \cdot 0,001}{0,0025} = 0,17 \text{ г.}$$

На первый взгляд поражает малая требуемая масса после сокращения, но следует учесть, что проба состоит в основном из минералов, содержание Al_2O_3 в которых одного порядка, а данная навеска реально содержит около 1000 зерен. Предусмотреть правильный выбор коэффициента K при использовании здесь формулы Чечотта никакими таблицами невозможно.

§ 3. ГРАНУЛОМЕТРИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИЗМЕЛЬЧЕННОЙ ПРОБЫ

Гранулометрическая характеристика измельченной и просеянной через заданное контрольное сито пробы влияет на необходимую массу пробы двойко. Во-первых, она определяет значение эффективного диаметра частиц. Преобладание в пробе мелких классов при том же контрольном сите уменьшает эффективный диаметр в 1,2–1,5 раза, что приводит к уменьшению необходимой массы до $1,5^3 \approx 3$ раз. По сравнению с контрастностью, изменяющейся на несколько порядков, это несущественно. Во-вторых, она влияет на коэффициент контрастности, который увеличивается с преобладанием мелких классов.

Наиболее подробно гранулометрическая характеристика измельчаемых материалов обсуждается в литературе по обогащению полезных ископаемых. Теоретический подход к проблеме с позиций теории вероятности и теории случайных процессов впервые осуществил акад. А.Н. Колмогоров. В литологии при характеристике обломочных пород обычно используют логарифмически нормальное распределение частиц и такие его характеристики, как медиана и квартили (размеры, отсекающие 25, 50 и 75 процентов частиц).

Наибольшее распространение среди обогатителей получило уравнение Годэна — Андреева $y = Ax^h$, где y — выход класса мельче x ; A — параметр, определяющий положение кривой на оси размера частиц; h — параметр, зависящий от способа измельчения и механических свойств материала.

Обычно исследуется материал, пропущенный через контрольное сито диаметром D (т.е. класс — $D + 0$ мм). Поэтому две точки для аппроксимации дают уравнения:

$$y = AD^h = 1; \quad y = e^{h \ln D} x^h = De^h x^h.$$

Остальные точки для аппроксимации дают результаты контрольного отсева. Аппроксимацию удобно проводить, логарифмируя уравнение Годэна — Андреева $\lg y = \lg A + h \lg x$ и решая методом наименьших квадратов систему линейных относительно параметров A и h уравнений:

$$\begin{cases} \lg y_1 = \lg A + h \lg x_1 \\ \lg y_2 = \lg A + h \lg x_2 \\ \dots \dots \dots \\ \lg y_i = \lg A + h \lg x_i \\ \dots \dots \dots \\ \lg y_n = \lg A + h \lg x_n \end{cases}$$

где y_i — суммарный выход классов — $x_i + 0$ мм. После подстанов-

Таблица 15. Гранулометрическая характеристика руды после измельчения до 1 мм

Класс, мм	Выход, %	Кумулятивный класс, мм	Выход, %	lg y	lg x	lg y / lg x
-0,1 + 0	35	-0,1 + 0	35	-0,46	-1	0,46
-0,2 + 0,1	10	-0,2 + 0	45	-0,35	-0,7	0,50
-0,5 + 0,2	24	-0,5 + 0	69	-0,16	-0,3	0,53
-0,75 + 0,5	15	-0,75 + 0	84	-0,076	-0,12	0,63
-1 + 0,75	16	-1 + 0	100			$\Sigma = 2,12$

$$\bar{h} = \frac{1}{4} \cdot 2,12 = 0,53;$$

$$\lg A = h \lg D = 0, A = 1.$$

ки $\lg A = -h \lg D$ получим систему уравнений

$$\left\{ \lg y_i = h(-\lg D + \lg x_i) \right\}, \quad i = \overline{1, n},$$

откуда наилучшая оценка h получается как среднее арифметическое:

$$\bar{h} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\lg y_i}{-\lg D + \lg x_i}; \quad \lg A = \bar{h} \lg D.$$

Программа для вычисления параметров гранулометрической кривой по данным ситового анализа на микрокалькуляторе приведена в прил. 5.

Пример. Результаты ситового анализа руды, измельченной и пропущенной через сито в 1 мм ($D = 1, \lg D = 0$), приведены в табл. 15.

Таким образом, в нашем случае гранулометрическая кривая описывается уравнением $y = x^{0,53}$.

Уравнение Годэна — Андреева очень удобно в использовании, но недостаточно гибко для материалов с отсеченными верхними и нижними классами.

Уравнение Вейнига $y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$ определяет, по существу,

кривую нормальной плотности вероятности при $h = 1/\sqrt{2\sigma^2}$, где σ — среднее квадратическое отклонение от среднего диаметра, y —

плотность вероятности частиц, имеющих размер x , который отсчитывается от среднего диаметра.

А.Н. Колмогоров сделал допущение, что скорость дробления частиц не зависит от их диаметра. Другими словами, при одном акте дробления частиц пополам вероятность такого дробления не зависит от их размера. При достаточно продолженном дроблении, как теоретически показал А.Н. Колмогоров, распределение частиц будет стремиться к логарифмически нормальному закону. По-видимому, из-за большей сложности аппроксимации усеченных логарифмически нормальных распределений такое уравнение, к сожалению, не получило широкого распространения, хотя и является чрезвычайно гибким.

§ 4. ИЗМЕНЕНИЕ КОНТРАСТНОСТИ В ПРОЦЕССЕ ИЗМЕЛЬЧЕНИЯ

Очевидно, что контрастность по мере измельчения пробы увеличивается и что это явление в значительной степени определяет требуемую массу надежной пробы. Однако попыток описать количественно изменение контрастности в процессе измельчения предпринималось не много. П. Жи предложил следующий эмпирический способ расчета коэффициента контрастности. Максимально возможное для данной руды его значение, которое достигается при полном раскрытии минералов, он умножал на коэффициент раскрытия l , изменяющийся от 0 до 1:

$$l = (c_6 - \bar{c}) / (k - \bar{c}), \quad (37)$$

где k — содержание металла в минерале-носителе; \bar{c} — среднее его содержание в пробе. Переменной, изменяющейся при дроблении, здесь является содержание металла в богатейшей частице c_6 , которое определяется эмпирически с помощью анализа химического состава отдельных частиц или их микроскопического изучения. Такой подход был бы удовлетворительным, если бы не возникало необходимости выразить l как функцию размера измельчения, что обязательно для целей оптимизации схем обработки.

Д.А. Краснов не выделяет в своей формуле специального параметра, определяющего коэффициент контрастности пробы. Анализ формулы Краснова показывает, что выражением, ближе всего описывающим этот параметр, является $(\frac{1}{a_c} - 1)$. Таким образом, исход-

ный коэффициент контрастности по Краснову

$$C = \frac{1}{a_c} - 1, \quad (38)$$

где a_c — массовая* доля зерен-сростков, которая в свою очередь

*Здесь должна стоять доля по числу частиц, а не по массе.

равна $a_c = a \frac{1}{\beta}$, где a — содержание минерала в пробе, %; β — содержание минерала в богатейшем зерне размером D , %.

Для того чтобы привести коэффициент контрастности Краснова в сопоставимый вид, необходимо преобразовать его с учетом содержания металла в минерале k :

$$a_c = \frac{c}{k} \frac{1}{\beta} = \frac{c}{k} \frac{k}{c_6} = \frac{c}{c_6},$$

откуда

$$C = \left(\frac{\beta}{a} - 1 \right) = \frac{c_6}{c} - 1, \quad (39)$$

Таким образом, у Д.А. Краснова и П. Жи изменение коэффициента контрастности с измельчением определяется эмпирической величиной c_6 — содержанием полезного компонента в богатейшей частице. Влияние гранулометрической характеристики Д.А. Краснов учитывает следующим образом: он делает допущение, что в классе частиц $-D + d_{\text{вкр}}$, где D — диаметр отверстий контрольного сита, $d_{\text{вкр}}$ — наиболее характерный размер рудных вкраплений; содержание металла в сростках равно c_6 . В классе $-d_{\text{вкр}} + 0$ все минеральные включения раскрыты и $c_6 = k$, т.е. равно содержанию металла в минерале. Обозначая выход первого упомянутого класса γ , второго $1 - \gamma$, определяется средневзвешенное значение β :

$$\bar{\beta} = c_6 \gamma + k(1 - \gamma). \quad (40)$$

На его основании Д.А. Краснов находит средневзвешенное значение a_c :

$$a_c = \frac{a}{\beta} \gamma + a(1 - \gamma) = \frac{a}{\beta} (\gamma + \beta(1 - \gamma)),$$

которое при подстановке в формулу (38) дает:

$$C = \frac{1}{\gamma + \beta(1 - \gamma)} \frac{\beta}{a} - 1.$$

Однако при таком усреднении совершаются две ошибки. Во-первых, усредняется только "часть" величины C , так как имеет место следующее неравенство:

$$1/\bar{a}_c - 1 \neq \overline{1/a_c} - 1.$$

Например, если $a_{c1} = 0,3$, $a_{c2} = 0,7$, то усредняя a_c , найдем $\bar{a}_c = 0,5$, а соответствующее ему C равно 1.

Усредняя правильно, через C , найдем

$$C_1 = \left(\frac{1}{0,3} - 1 \right) = 2,333; \quad C_2 = \left(\frac{1}{0,7} - 1 \right) = 0,43;$$

$$\bar{C} = \frac{2,3 + 0,43}{2} = 1,3.$$

Во-вторых, при расчете C требуется среднее квадратическое взвешенное, а не взвешенное первой степени.

Положив $r = D/d_{\text{вкр}}$ и используя уравнение Годэна — Андреева, Д.А. Краснов устанавливает, что для класса $-D + d_{\text{вкр}}$

$$\gamma = 1 - \left(\frac{1}{r} \right)^h = \frac{r^h - 1}{r^h}; \quad 1 - \gamma = \frac{1}{r^h},$$

тогда

$$C = \frac{r^h \beta}{r^h - 1 + \beta} \frac{1}{a} - 1.$$

Программу расчета C по этой формуле см. в прил. 6. Записанный в таком виде коэффициент контрастности Д.А. Краснова можно интерпретировать следующим образом. Обычно $C \gg 1$, тогда

$$C = \frac{r^h \beta}{r^h - 1 + \beta} \frac{1}{a}.$$

Второй сомножитель сопоставляется с критическим значением коэффициента контрастности и является постоянной величиной. Первый сомножитель — изменяющаяся, как и у П. Жи, от 0 до 1 при дроблении часть. Действительно, при полном высвобождении минералов $\beta = 1$ и $r^h \beta / (r^h - 1 + \beta) = 1$. Коэффициент контрастности при этом достигает критического значения. Для гомогенной пробы ($\beta = a$) нулевого значения C , как должно быть, не получается. Это достигается лишь при $\beta = 0$, что невозможно по физическому смыслу параметра β .

Указанные ошибки не позволяют воспользоваться коэффициентом контрастности Д.А. Краснова, но его идея использовать в выражении для C отношение размера частиц к размеру вкрапленности (r) и показатель гранулометрической кривой весьма интересна.

Закончив этот критический анализ, теоретически рассмотрим изменение коэффициента контрастности в предположении, что дробление частиц происходит независимо от расположения поверхностей минеральных сростаний, но рудные вкрапления в частицах дроблению не подвергаются, число рудных вкраплений мало по сравнению с общим объемом пробы, так что вероятность попадания более одного рудного вкрапления в одну частицу пренебрежимо мала.

Тогда пробу можно рассматривать как смесь безрудных частиц с частицами, содержащими одно рудное вкрапление. Количество металла в такой частице будет равно $w_p = d^3 \gamma_p k$ при среднем количестве металла на частицу, равном $\bar{w} = d^3 \gamma c$, где k — содержание его в материале, %; γ_p — плотность минерала, г/см³; c — среднее в пробе, %. Так как общее количество металла в пробе равно $N d^3 \gamma c$ и сосредоточено только в частицах, содержащих рудные вкрапления, то

$$N d^3 \gamma c = n d_{\text{вкр}}^3 \gamma_p k,$$

откуда

$$p_p = \frac{n}{N} = \frac{d^3 \gamma c}{d_{\text{вкр}}^3 \gamma_p k}.$$

Для этих условий

$$C = \left(\frac{d_{\text{вкр}}^3 \gamma_p k}{d^3 \gamma c} - 1 \right)^2 \frac{d^3 \gamma c}{d_{\text{вкр}}^3 \gamma_p k} + 1 - \frac{d^3 \gamma c}{d_{\text{вкр}}^3 \gamma_p k} = \frac{d_{\text{вкр}}^3 \gamma_p k}{d^3 \gamma c} - 1.$$

Отбрасывая единицу, для достаточно больших коэффициентов контрастности без большой погрешности можно написать

$$C = \frac{k \gamma_p}{c \gamma} \left(\frac{d_{\text{вкр}}}{d} \right)^3 = \frac{k \gamma_p}{c \gamma r^3}. \quad (41)$$

Здесь следует уточнить, что под $d_{\text{вкр}}$ понимается средний размер вкраплений рудных минералов или других ингредиентов, содержащих изучаемый компонент, в частицах пробы, измельченной до размера d . Таким образом, $r = d/d_{\text{вкр}} > 1$, а $d_{\text{вкр}}$ является величиной переменной в процессе дробления. При полном раскрытии минералов $r = 1$, что дает критическое значение коэффициента контрастности, а при $d_{\text{вкр}} < d$, его значение всегда меньше $C_{\text{кр}}$.

Последний результат — формула (41) — чрезвычайно любопытен тем, что в довольно широком диапазоне размеров измельчения предсказывает парадоксальное явление — независимость требуемой массы от диаметра частиц. Действительно, в этом диапазоне коэффициент контрастности изменяется обратно пропорционально кубу диаметра. Требуемая масса, будучи прямо пропорциональной кубу диаметра, при этом не изменяется. Это становится понятным, если учесть, что число рудных (т.е. содержащих вкрапление) частиц при дроблении в некотором диапазоне $d_0 > d > d_{\text{вкр}}$ остается постоян-

ным. Бедные золотые руды с мелкой вкрапленностью золота хорошо иллюстрируют это явление.

Рассмотрим теперь изменение коэффициента контрастности, отбросив весьма ограничивающее предположение о том, что частица пробы может содержать не более одного рудного вкрапления. Такой случай более распространен, чем предыдущий. В рудах средних и богатых вероятность того, что частица может иметь больше одного зерна рудного минерала, существенно отличается от нуля. Распределение числа рудных зерен в "рудных" частицах будет удовлетворительно подчиняться закону Пуассона $P_x = \lambda^x e^{-\lambda}/x!$, где P_x — вероятность иметь в частице пробы x рудных зерен; λ — среднее число рудных зерен на частицу. Одно рудное зерно содержит $w_p = d_{\text{вкр}}^3 \gamma_p k$ металла. Среднее содержание в руде c в таком случае выразится через w_p следующим образом:

$$c = \frac{w_p n_p}{q} = \frac{d_{\text{вкр}}^3 \gamma_p k n_p}{d^3 \gamma N},$$

где n_p — число рудных вкраплений; q — масса пробы, г; N — общее число частиц в ней. Отсюда

$$\lambda = n_p/N = d^3 c \gamma / (d_{\text{вкр}}^3 k \gamma_p).$$

Теперь коэффициент контрастности можно выразить как функцию отношения $d/d_{\text{вкр}}$ в диапазоне $d \geq d_{\text{вкр}}$:

$$C = \sum_{x=0}^m \left(\frac{x d_{\text{вкр}}^3 \gamma_p k}{d^3 \gamma c} - 1 \right)^2 P_x.$$

Подставляя вместо P_x его выражение из закона Пуассона, получим

$$C = \sum_{x=0}^m \left(\frac{x d_{\text{вкр}}^3 \gamma_p k}{d^3 \gamma c} - 1 \right)^2 \left(\frac{d^3 c \gamma}{d_{\text{вкр}}^3 k \gamma_p} \right)^x e^{-\frac{d^3 c \gamma}{d_{\text{вкр}}^3 k \gamma_p}} x$$

$$x \frac{1}{x!} = \sum_{x=0}^m \left\{ \left(\frac{x \gamma_p k}{r^3 \gamma c} - 1 \right)^2 \left(\frac{r^3 c \gamma}{k \gamma_p} \right)^x e^{-\frac{r^3 c \gamma}{k \gamma_p}} \right\} \frac{1}{x!},$$

где $r = d/d_{\text{вкр}}$. Это достаточно громоздкое выражение легко программируется и поддается расчету на микрокалькуляторах типа "Электроника" БЗ-21, БЗ-34, МК-54, МК-56. Программа расчета и инструкция к ней приведены в прил. 7.

Таблица 16. Слагаемые для расчета коэффициента контрастности C при различных r

Число вкраплений в частице x	$r = d/d_{вкр}$							
	10	8	5	4	3	2	1,5	1
0	$9 \cdot 10^{-5}$	0,0085	0,31	0,55	0,78	0,93	0,97	0,99
1	$7 \cdot 10^{-4}$	0,052	0,007	0,15	1,74	10,7	29	104
2	0,0025	0,038	0,1	0,55	1,19	1,72	1,88	1,96
3	0,0060	0,022	0,2	0,32	0,25	0,1	0,045	0,013
4	0,0090	0,0046	0,14	0,094	0,029			
5	0,011	$4,2 \cdot 10^{-4}$	0,06	0,019				
6	0,010	0,0090	0,019	0,028				
7	0,0067	0,020	0,0044					
8		0,026						
C	0,045	0,18	0,84	1,68	3,99	13,9	31,9	106,7

Проведем расчеты для четырех примеров.

Пример 1. Проба из кварц-кальцитовой жилы с галенитом с содержанием свинца 2% ($k = 86\%$, $\gamma_p = 7,5$, $c = 2\%$, $\gamma = 3$). Для различных r схема и результат расчета приведены в табл. 16. Значение коэффициента контрастности изменяется от сотых долей до 106,7. Последнее значение с удивительной точностью совпадает со значением, полученным другим способом для полностью раскрытой руды:

$$C = \frac{k\gamma_p}{c\gamma} - 1 = \left(\frac{86 \cdot 7,5}{2 \cdot 3} - 1 \right) = 106,5.$$

Пример 2. Проба из кальцитовой жилы со сфалеритом с содержанием цинка 10% ($k = 50\%$, $\gamma_p = 7$, $c = 10\%$, $\gamma = 4,2$). Результаты расчета C приведены на рис. 11 (кривая 2) и в примере 1. Максимальное значение ($C = 8,3$) совпадает с критическим коэффициентом контрастности $\left(\frac{k\gamma_p}{c\gamma} - 1 \right) = 7,33$.

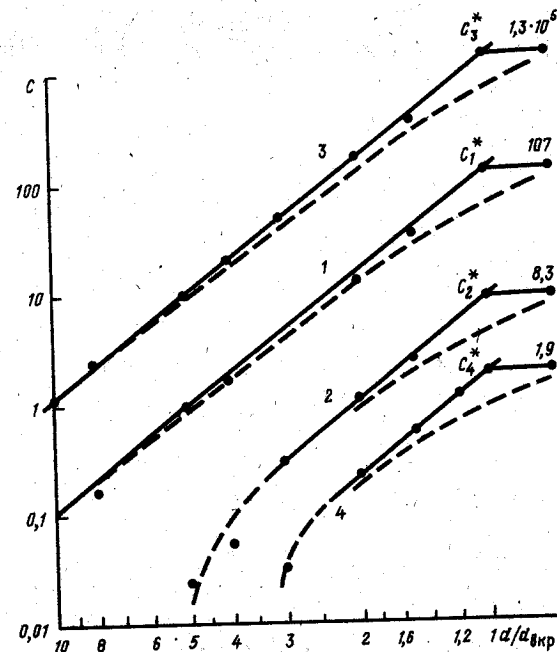
Пример 3. Кварцевая золотоносная жила с содержанием золота 50 г/т, для которой $k = 100\%$, $\gamma_p = 17,6$, $c = 0,005\%$, $\gamma = 2,7$. Результаты расчета приведены на рис. 11 (кривая 3). Предельное значение ($1,3 \cdot 10^5$) с хорошей точностью совпадает с критическим значением

$$\left(\frac{k\gamma_p}{c\gamma} - 1 \right) = 1,3 \cdot 10^5.$$

Пример 4. Кальцит-сидеритовая руда содержит 60% сидерита ($k = 62\%$, $\gamma_p = 3,9$) и 40% кальцита. Общее содержание FeO составляет 37,2% ($c = 37,2\%$, $\gamma = 3,4$). Результаты этого примера (см. рис. 11, кривая 4) показывают, что

Фиг. 11. Зависимость нижней границы значений коэффициента контрастности руды (C) от относительного размера кусков ($d/d_{вкр}$).

Фундаментальные точки C^* характеризуют предельно раскрытые руды. Сплошные линии — для случая, когда рудные вкрапления не дробятся, пунктирные — когда дробление происходит независимо от расположения вкраплений. 1—4 — различные руды по номерам примеров, охарактеризованных в тексте. Для примера 3 значения шкалы C умножить на 10^2



при малом критическом коэффициенте контрастности C (порядка единицы) его значение, рассчитанное с помощью распределения Пуассона, на единицу больше рассчитанного по известному выражению:

$$C = \frac{62 \cdot 3,9}{37,2 \cdot 3,4} - 1 = 0,91.$$

Изменение коэффициента контрастности в зависимости от $r = d/d_{вкр}$ показано на рис. 11 в логарифмическом масштабе.

Графики демонстрируют удивительный результат: все расчетные значения C в точности лежат на прямых с угловым коэффициентом $-1/3$. Это указывает на обратную пропорциональность коэффициента контрастности от куба диаметра измельчения. Таким образом, результат, полученный в предположении, что в частице пробы может иметься не более одного рудного включения, совпадает с результатом, полученным без этого ограничивающего предположения.

Общим в рассуждениях, приводящих к этому результату, остается предположение, что рудное вкрапление, попадая по одному или по несколько штук в отдельные частицы измельченного материала, не подвергается при этом разделению на части. Число рудных вкраплений (не частиц, а вкраплений!) при таком дроблении остается постоянным, что и приводит к независимости требуемой массы пробы от диаметра измельчения. Такие случаи не так уж редки на практике. К ним относятся руды самородного золота с мелкой вкрап-

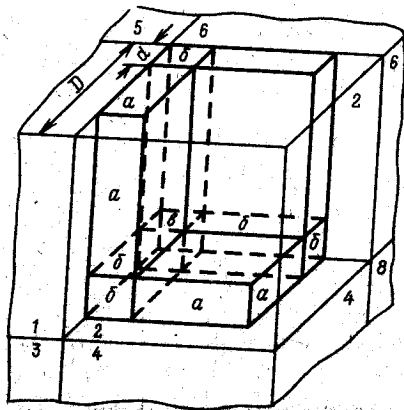


Рис. 12. Распределение кубического рудного вкрапления размером $2d$ между составными частями расколотого в восемь кубиков куска породы размером $2D$:

1-8 — номера кубиков; a — зоны, в которых вкрапление распределяется между двумя (a), четырьмя (b) и восемью (c) смежными кубиками

ленностью. При дроблении таких руд число золотинок в широком диапазоне диаметров измельчения не изменяется. Так же будут вести себя другие бедные руды с механически прочными и мелкими рудными минералами. Такие руды мы не рекомендуем сокращать до тех пор, пока не начнут интенсивно разрабатываться рудные вкрапления.

Другими словами, условием, определяющим возможность сокращения, является не вообще уменьшение размера частиц и увеличение вследствие этого их общего числа, а увеличение числа рудных частиц.

Рассмотрим другую важную модель дробления, при которой расколы кусков происходят по поверхностям, не зависящим от расположения в кусках рудных вкраплений. По этой модели, следовательно, может происходить раздробление рудных вкраплений, и оно будет тем вероятнее, чем ближе значение $d/d_{вкр}$ к единице. Полная модель такого процесса сложна для анализа, поэтому ограничимся рассмотрением более частной следующей модели: 1) все рудные вкрапления перед дроблением имеют поперечник $d_{вкр}$, все частицы материала — d ; 2) частицы материала либо не имеют вкраплений, либо имеют по одному вкраплению; 3) вкрапление расположено в пределах частицы случайным образом, причем все ее положения равновероятны; 4) частицы материала имеют форму куба со стороной d , а рудные вкрапления — форму куба со стороной $d_{вкр}$, причем грани куба-вкрапления ориентированы параллельно граням куба-частицы.

Рассмотрим акт дробления, заключающийся в раскалывании кубов-частиц пробы от размера d до размера $d/2$. При этом из каждой частицы образуется восемь кубиков и возможны следующие события, вероятности которых определяются геометрически по рис. 12 и занесены в табл. 17.

Вывод формулы для расчета коэффициента контрастности при дроблении по этой модели приведем по следующей схеме. Общий

Таблица 17. Варианты распределения рудных вкраплений при дроблении частиц пробы

Номер случая	Событие	Вероятности, выраженные через	
		d и $d_{вкр}$	$r = d/d_{вкр}$
1	Вкрапление попадает целиком в один из кубиков, остальные 7 пусты	$\left(\frac{d - 2d_{вкр}}{d - d_{вкр}}\right)^3$	$\left(\frac{r - 2}{r - 1}\right)^3$
2	Вкрапление распределяется между двумя кубиками, остальные 6 пусты	$\frac{3d_{вкр}(d - 2d_{вкр})^2}{(d - d_{вкр})^3}$	$3 \frac{(r - 2)^2}{(r - 1)^3}$
3	Вкрапление распределяется между четырьмя кубиками, остальные 4 пусты	$\frac{3d_{вкр}^2(d - 2d_{вкр})}{(d - d_{вкр})^3}$	$3 \frac{(r - 2)}{(r - 1)^3}$
4	Вкрапление распределяется между всеми 8 кубиками	$\frac{d_{вкр}^3}{(d - d_{вкр})^3}$	$\frac{1}{(r - 1)^3}$

коэффициент контрастности найдем как функцию двух парциальных коэффициентов: первый — для частиц, которые перед рассматриваемым актом дробления не содержали рудных вкраплений, второй — для остальных частиц. Этот второй коэффициент в свою очередь будем рассматривать как взвешенную сумму коэффициентов для отдельных групп частиц; указанных в табл. 17 с весовыми коэффициентами, равными соответствующим вероятностям.

Рассмотрим отдельно каждое слагаемое.

Случай 1:

$$\Sigma_1 = \frac{1}{8} \left[\left(\frac{w_p}{\bar{w}^*} - 1 \right)^2 + 7 \right] \left(\frac{r - 2}{r - 1} \right)^3$$

Случай 2:

$$\Sigma_2 = \frac{1}{8} \left[\int_0^1 w_p \left\{ \left(\frac{w_p - x}{\bar{w}^*} - 1 \right)^2 + \left(\frac{x}{\bar{w}^*} - 1 \right)^2 \right\} x \right. \\ \left. \times \frac{1}{2 w_p} dx + 6 \right] \frac{3(r - 2)^2}{(r - 1)^3} = \frac{1}{8} \left\{ \frac{2}{3} \frac{\bar{w}}{w_p} \left[\left(\frac{w_p}{\bar{w}^*} - 1 \right)^3 + 1 \right] + 6 \right\} x \\ \times \frac{3(r - 2)^2}{(r - 1)^3}$$

где x — количество металла в первом из кубиков; $w_p - x$ — то же во втором из кубиков, между которыми распределилось рудное включение в равновероятных пропорциях; w_p — количество металла в рудном вкраплении, не подвергшемся дроблению; \bar{w}^* — среднее количество металла на частицу после дробления ($\bar{w}^* = \frac{1}{8}\bar{w}$, где \bar{w} — среднее количество металла в частице до указанного дробления); r — отношение $d/d_{вкр}$ до рассматриваемого акта дробления.

Случай 3:

$$\Sigma_3 = \frac{1}{8} \left[\int_0^{\frac{1}{2}w_p} \int_0^{\frac{1}{2}(w_p-x)} \left\{ \left(\frac{w_p-x-y}{\bar{w}^*} - 1 \right)^2 + \left(\frac{y}{\bar{w}^*} - 1 \right)^2 + \left(\frac{xy/(w_p-x)}{\bar{w}^*} - 1 \right)^2 + \left(\frac{x(1-y(w_p-x))}{\bar{w}^*} - 1 \right)^2 \right\} \times \frac{1}{\frac{1}{2}w_p} \frac{1}{\frac{1}{2}(w_p-x)} dy dx + 4 \right] \frac{3(r-2)^2}{(r-1)^3} = \frac{1}{8} \left[\frac{9}{4} \left(\frac{4}{9} \frac{w_p}{\bar{w}^*} - 1 \right)^2 + \frac{7}{4} \right] \frac{3(r-2)^2}{(r-1)^3},$$

где x — количество металла в двух первых кубиках; $w_p - x$ — в двух остальных; y — количество металла в первом из второй пары кубиков.

Случай 4:

$$\Sigma_4 = \frac{1}{8} \left[\int_0^{0,5w_p} \int_0^{0,5(w_p-x)} \int_0^{0,5(w_p-x-y)} \left\{ \left(\frac{w_p-x-y-z}{\bar{w}^*} - 1 \right)^2 + \left(\frac{z}{\bar{w}^*} - 1 \right)^2 + \left(\frac{yz}{\bar{w}(w_p-x-y)} - 1 \right)^2 + \left(\frac{y(w_p-x-y-z)}{\bar{w}^*(w_p-x-y)} - 1 \right)^2 + \left(\frac{x(w_p-x-y)(w_p-x-y-z)}{\bar{w}^*(w_p-x)(w_p-x-y)} - 1 \right)^2 + \left(\frac{xz}{\bar{w}^*(w_p-x)} - 1 \right)^2 + \left(\frac{xyz}{\bar{w}^*(w_p-x)(w_p-x-y)} - 1 \right)^2 + \left(\frac{xy(w_p-x-y-z)}{\bar{w}^*(w_p-x)(w_p-x-y)} - 1 \right)^2 \right\} \frac{1}{\frac{1}{2}(w_p-x-y)} dz \frac{1}{\frac{1}{2}(w_p-x)} dy \frac{1}{\frac{1}{2}w_p} dx \right] \frac{1}{(r-1)^3}.$$

В случае 4 каждое из этих восьми слагаемых тройного интеграла соответствует среднему квадратическому отклонению количества металла в кубике при распределении рудного включения между всеми восемью кубиками. После нескольких страниц преобразований, которые мы опускаем, получаем

$$\Sigma_4 = \frac{1}{8} \left[\left(\frac{4}{\sqrt{27}} \frac{w_p}{\bar{w}^*} - \frac{\sqrt{27}}{4} \right)^2 + \frac{53}{16} \right] \frac{1}{(r-1)^3}.$$

Таким образом, $C_p^* = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4$, а общий коэффициент контрастности C будет рассчитан как среднее взвешенное по рудным и нерудным частям пробы:

$$C = C_p^* p_p + (0-1)^2 (1-p_p) = (\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4) p_p + 1 - p_p, \quad (42)$$

где p_p — содержание рудных частиц (т.е. сростков и чистых рудных минералов) в пробе до рассматриваемого акта дробления

$$p_p = \frac{n_p}{N} = \frac{c\gamma r^3}{k\gamma_p}, \quad (p_p < 1).$$

Грубую прикидку правильности значений Σ_i можно провести с помощью другой, еще более простой модели: для каждого из случаев табл. 17 заменим w_p его среднеквадратическим значением. Для первого случая оно равно для частицы, в которую попало вкрапление, $1 - w_p$. Для второго случая оно равно $\sqrt{\frac{w_p^2}{12} + \frac{w_p^2}{2^2}} = 0,58 w_p$, для третьего — $\sqrt{\frac{w_p^2}{12} + \frac{w_p^2}{4^2}} = 0,38 w_p$, для четвертого — $\sqrt{\frac{w_p^2}{12} + \frac{w_p^2}{8^2}} = 0,31 w_p$.

Тогда

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_1 &= \frac{1}{8} \left[\left(\frac{w_p}{\bar{w}^*} - 1 \right)^2 + 7 \right] \frac{(r-2)^3}{(r-1)^3}, \\ \Sigma_2 &= \frac{1}{8} \left[\left(\frac{0,58w_p}{\bar{w}^*} - 1 \right)^2 + 6 \right] \frac{3(r-2)^2}{(r-1)^3}, \\ \Sigma_3 &= \frac{1}{8} \left[\left(\frac{0,38w_p}{\bar{w}^*} - 1 \right)^2 + 4 \right] \frac{3(r-2)}{(r-1)^3}, \\ \Sigma_4 &= \frac{1}{8} \left[\left(\frac{0,31w_p}{\bar{w}^*} - 1 \right)^2 \right] \frac{1}{(r-1)^3}. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Для того чтобы произвести расчет коэффициента для следующего за рассмотренным акта дробления, необходимо найти новое значение

ние $d_{вкр}$, уменьшившееся по сравнению с прежним. Поскольку при одном акте дробления по указанной схеме, т.е. вдвое, получается целый спектр новых частично раздробленных вкраплений, то необходимо взять среднее квадратическое из куба его значений, соответствующих случаям 1-4. Для этого достаточно определить следующий коэффициент λ :

$$\lambda = \sqrt[4]{\sum_{i=1}^4 p_i a_i^2}, \quad (44)$$

где p_i — вероятность случаев (см. табл. 16); a_i — коэффициенты при w_p , полученные из формул (42) и (43):

	a_1	a_2	a_3	a_4
Формула (42)	1	0,66	0,44	0,59
Формула (43)	1	0,58	0,38	0,31

Расчет коэффициента контрастности проводится по следующей схеме:

1) выбор начальных условий, т.е. определение исходного значения крупности кусков d_0 , преобладающего размера вкрапленности $d_{вкр}$, отношения их $r_0 = d_0/d_{вкр}$ и начальных значений w_p и \bar{w} . При определении r_0 следует руководствоваться принципом не более одного рудного вкрапления на кусок (частицу) исходной пробы:

$$w_p = d_{вкр}^3 k \gamma_p; \quad \bar{w} = d_0^3 c \gamma; \quad \bar{w}^* = \frac{1}{8} \bar{w}; \quad w_p/\bar{w}^* = 8k\gamma_p/(c\gamma r_0^3).$$

2) определение доли рудных (т.е. содержащих сростки) частиц в исходной пробе $p_p^0: p_p^0 = r_0^3 c\gamma/(k\gamma_p)$;

3) расчет парциального коэффициента контрастности C_p^* для части исходной пробы, содержащей сростки, по формулам (42) или (43);

4) расчет общего коэффициента контрастности C по формуле $C = C_p^* p_p^0 + 1 \cdot (1 - p_p^0)$. Полученный коэффициент контрастности относится к пробе, раздробленной до размера $d_1 = d_0/2$;

5) расчет нового значения r_1 , полученного после дробления до d_1 , по формуле

$$r_1 = \left(\frac{d_1}{d_{вкр}}\right) = \frac{d_0/2}{d_{вкр} \lambda} = \frac{r_0}{2} \sqrt[3]{\lambda}; \quad (45)$$

6) для пробы, раздробленной от диаметра частиц d_1 до $d_2 = d_1/2$, расчет коэффициента контрастности повторяется по такой же схеме, что и r_1 с заменой значений с индексом 0 на значения с индексом 1 (табл. 18).

Таблица 18. Расчет коэффициента контрастности для кварц-золотоносной пробы, измельченной до $d/d_{вкр} = 6$.

Номер слагаемого	Вероятность случая* p_i	Парциальный коэффициент контрастности**		Исходные данные и подготовительные расчеты
		$\Sigma_i \cdot 10^6$	$\Sigma_i p_i \cdot 10^6$	
1	0,51	2,9	1,48	$k = 100\%, \gamma_p = 17,6$ $c = 0,005\%, \gamma = 2,7$ $k\gamma_p = 1,3 \cdot 10^5, r = 6$ $c\gamma$ $\frac{w_p}{w} = 1,3 \cdot 10^5 \cdot \frac{8}{216} = 4,8 \cdot 10^3$
2	0,38	1,9	0,72	
3	0,10	1,2	0,12	
4	0,01	1,7	0,02	
$\Sigma = 1,0$		$C_p^* = \Sigma = 2,34$		$p_p = \frac{1}{1,3 \cdot 10^5} \cdot 216 = 1,66 \cdot 10^{-3}$

$$C = C_p^* p_p + 1 \cdot (1 - p_p) = 2,34 \cdot 10^6 \cdot 1,66 \cdot 10^{-3} + 1 \cdot 0,998 = 3,88 \cdot 10^3$$

* Вычисляется по формулам из табл. 17.

** Расчет этих величин проводится по формуле (42) или (43).

Таблица 19. Коэффициенты контрастности C для различных руд

Номер примера	r_0	r	r_1	C
1 (свинец)	3,0	1,5	1,74	19,5
	16,0	8,0	8,1	$2,28 \cdot 10^2$
3 (золото)	6,0	3,0	3,2	$3,88 \cdot 10^3$
	2,4	1,2	1,5	$4,2 \cdot 10^4$

Расчет значений λ по формуле (44) и r_1 по формуле (45):

$$\lambda = \sqrt[4]{1 \cdot 0,51 + 0,66^2 \cdot 0,38 + 0,44^2 \cdot 0,10 + 0,59^2 \cdot 0,01} = \sqrt[4]{0,69} = 0,83; \quad \sqrt[3]{\lambda} = 0,94, \text{ откуда } r_1 = 6/(2 \cdot 0,94) = 3,2.$$

Результаты расчетов по аналогичной схеме для различных значений r_0 приведены в табл. 19.

Значения C нанесены на графики. Анализ графиков (см. рис. 11) показывает, что при больших r они практически совпадают с графиками для модели измельчения без разрушения рудных вкраплений. Действительно, рассматриваемая модель предсказывает близкую к единице вероятность того, что вкрапления не разрушаются. Для малых r , приближающихся к единице, коэффициент контрастности существенно меньше, так как вероятность разрушения и уменьшения размера вкраплений велика.

Следует подробнее остановиться на смысловой интерпретации полученных графиков. По существу, они являются нижней границей возможных значений C для руды с заданными параметрами k , γ

c , γ , r_0 , т.е. с заданным значением $C_{\max} = \frac{k\gamma p}{c\gamma} - 1$ и $d_0/d_{\text{вкр}}$. Если

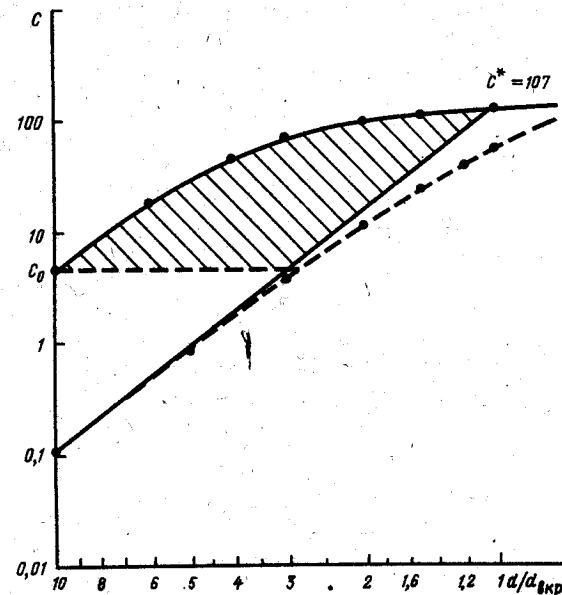
рудные вкрапления разместить в частицах пробы диаметром d наиболее равномерным образом, то контрастность такой руды будет минимально возможной для такой руды и будет увеличиваться по мере дробления пропорционально кубу диаметра частиц до "фундаментальной" точки, в которой $d = d_{\text{вкр}}$. В фундаментальной точке контрастность достигнет максимума и далее изменяться не будет. Для такой руды дробление в пределах до фундаментальной точки не уменьшает надежной массы навески. Таковы упоминавшиеся бедные золотые руды с равномерной мелкой вкрапленностью золота.

В модели равновероятного дробления картина изменения C зависит от величины r . При больших r она аналогична описанной, а при малых, когда начинает интенсивно уменьшаться размер вкраплений, дробление как средство гомогенизации пробы достигает своей основной цели и требуемая масса уменьшается с уменьшением диаметра частиц. Угловой коэффициент логарифмической зависимости требуемой массы от диаметра возрастает до трех в фундаментальной точке и далее остается равным трем, что соответствует кубической зависимости массы от размера. Реальные горные породы и руды раскалываются преимущественно по границам минералов, поэтому нижняя граница возможных значений C лежит между сплошным и пунктирным графиком (см. рис. 13) для соответствующей руды. Любопытно, что если пунктирный график "скорректировать", т.е. построить в координатах $C - r$, то он в точности совпадает со сплошным, что подтверждает правильность построений.

Таким образом, анализируемые графики (см. рис. 11) указывают на нижнюю границу коэффициента контрастности. Руда с заданным легко определяемым критическим значением коэффициента контрастности и с заданным отношением размера частиц к размеру вкраплений не может иметь коэффициента контрастности меньше, чем снимаемое с графика. На практике более важной задачей является оценка верхней границы значений C , применение которой с гарантией обеспечило бы заданную точность. Конечно, критическое

Рис. 13. Нижняя и верхняя границы контрастности руды, охарактеризованной в примере 1:

C_0 — контрастность исходной руды, определенная эмпирически или расчетом. Заштрихована область возможных значений при дальнейшем измельчении. Остальные обозначения как на рис. 11.



значение C можно принять за верхнюю границу, но при крупном размере кусков руд с мелкой вкрапленностью оно приведет к большому превышению требуемой массы проб, поэтому задача заключается в более точном определении верхней границы (рис. 13). При конструировании ее мы исходим из следующих реальных предположений: а) кривая верхней границы C должна проходить через фундаментальную точку C^* и при дальнейшем измельчении совпадать с горизонталью $C = C_{\max}$; б) ни в какой точке производная этой кривой в логарифмических координатах не должна быть меньше чем -3 ; в) для большей гарантии кривая должна быть выпуклой вверх; г) исходной (самой левой на рис. 13) точкой для кривой должно быть значение C_0 , определенное экспериментально; д) скорость изменения контрастности по мере измельчения материала убывает.

Перечисленным требованиям удовлетворяет функция

$$\lg C = a(\lg r)^a + \lg C_{\max} \quad (46)$$

при $a > 1$. Эта кривая должна проходить через точку C_0 , и иметь в ней производную -3 , поэтому необходимо решить относительно искомым параметров этой кривой систему уравнений:

$$\begin{cases} \lg C_0 = a(\lg r)^a + \lg C_{\max} \\ a a(\lg r)^{a-1} = -3. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получаем:

$$a = \frac{\lg r_0^3}{\lg \frac{C_{\max}}{C_0}}, \quad a = - \frac{3}{a (\ln r_0)^{a-1}}$$

Программа для расчета коэффициента контрастности по формуле (46) приведена в прил. 8.

Проведем расчет верхней границы коэффициента контрастности для галенитовой руды, охарактеризованной в примере 1 (см. рис. 13). Пусть размер галенитовых вкрапленников равен 3 мм. В пробе, раздробленной до 30 мм ($r_0 = 30/3 = 10$), богатейшие куски содержат до 12 % галенита, т.е. $12 \cdot 0,86 = 10,32 \approx 10\%$ свинца. Плотность богатейшей частицы γ_p равна

$$\gamma_p = 7,5 \cdot 0,12 + 2,7 \cdot 0,82 \approx 3,1.$$

Отсюда

$$C_0 = \frac{c_6 \gamma_p}{c \gamma} - 1 = \frac{10 \cdot 3,2}{2 \cdot 2,7} - 1 = 4,9;$$

$$\frac{C_{\max}}{C_0} = \frac{107}{4,9} = 21,8.$$

Определяем показатель кривой a :

$$a = \frac{3 \lg r}{\lg \frac{C_{\max}}{C_0}} = \frac{3 \lg 10}{\lg 21,8} = 2,24.$$

Угловой коэффициент кривой равен

$$a = - \frac{3}{a (\ln r)^{a-1}} = - \frac{3}{2,24 (\ln 10)^{1,24}} = -0,48.$$

Таким образом,

$$\ln C = \ln C_{\max} - 0,48 (\ln r)^{2,24}.$$

Определим коэффициент контрастности для различных r в соответствии с полученным выражением:

d	30	18	12	9	6	4,5	3
r	10	6	4	3	2	1,5	1
C	4,9	18,4	40,5	60,8	90	103,2	107

Таблица 20. Необходимая масса пробы при обработке галенитовой руды, охарактеризованной в примере 1 (в кг)

r	d	$q = 10\%$	$q = 5\%$
10	3,0	35,7	148
6	1,8	0,403	1,60
4	1,2	0,260	1,00
3	0,9	0,164	0,656
2	0,6	0,072	0,288
1,5	0,45	0,035	0,140
1	0,3	0,010	0,040

Если требуемая относительная средняя квадратическая точность сокращения по свинцу составляет 10 % (или 5 %), то требуемая масса пробы после сокращения, определяемая по формуле (без учета влияния начальной массы) $q = Cd^3 \gamma / \sigma^2$, будет равна указанной в табл. 20.

Сопоставим необходимые массы проб, определяемые по методике, разработанной авторами, и по методике Д.А. Краснова на материалах приведенного примера.

В примере Д.А. Краснова медная халькопиритовая руда содержит меди 1 % или около 3 % халькопирита. Максимальная крупность ее кусков 25 мм. Преобладающий размер вкрапленности $d_{\text{вкр}}$ составляет 1 мм, а содержание халькопирита в наиболее богатых кусках-фрагментах максимальной крупности равно 12–15 %.

По формуле Краснов рассчитает минимальную массу химической пробы, отвечающую абсолютной точности определения халькопирита $\Delta = 0,1\%$ с вероятностью 99 %.

Согласно этим условиям, значения параметров формулы будут следующими: $D = 2,5$ см, $a = 0,03$, $\beta = 0,15$, $m_a = 100\Delta/a = 3,33$, $r = D/d_{\text{вкр}} = 25$ и $t = 2,58$. Примем показатель гранулометрической характеристики h , равным единице. Подставив эти значения параметров в формулу, получим (в кг)

$$Q_a = 10 \left(\frac{1}{1+1} \right)^3 \cdot 2,5^3 \cdot \frac{2,58}{3,33^2 \cdot 0,03} \left[\frac{25 \cdot 0,15}{25 - (1 - 0,15)} - 0,03 \right] = 48,8.$$

Заложенная здесь требуемая точность чрезвычайна: относительная погрешность $\frac{0,1}{3} = 0,03 = 3\%$ с вероятностью ее неперевышения в 99 % ($2,5\sigma$) составит среднюю квадратическую погрешность $3:2,5 = 1,2\%$. При содержании меди $\sim 1\%$ в руководствах по подсчету запасов рекомендуется принимать среднюю относительную погрешность в 7–10 %, т.е. в 6–7 раз большую, что потребовало бы массы меньшей в 40–50 раз. Эквивалентный диаметр, принятый автором, $d_{\text{экв}} = D/2$, вероятно, несколько занижен.

Исходные данные для нашего расчета по этому примеру составят:

$$k = 34\%, \quad \gamma_p = 4,2, \quad c = 1\%, \quad \gamma = 3, \quad \sigma = 0,012, \quad r = 25, \quad c_6 = 15 \cdot 0,34 = 5,1\%,$$

$$\gamma_6 = 4,2 \cdot 0,15 + 3 \cdot 0,85 = 3,2,$$

$$C_{\max} = \frac{34 \cdot 4,2}{1 \cdot 3} - 1 = 47, \quad C_0 = \frac{5,1 \cdot 3,2}{1 \cdot 3,0} - 1 = 4,4.$$

Для пробы, раздробленной в куски с эквивалентным размером $D/2 = 2,5/2 = 1,25$ см, требуемая масса (в кг) составит

$$q = \frac{4,4 \cdot 1,25^3 \cdot 3,0}{0,012^2} = 179.$$

Для реальных требований к точности в 5 % требуемая масса (в кг) составит

$$q = \frac{4,4 \cdot 1,25^3 \cdot 3,0}{0,05^2} = 10,3.$$

Обращаем внимание практиков на сильную зависимость надежной массы от требуемой точности.

Предложим расчет необходимой массы при дальнейшем дроблении данной пробы. При эквивалентном диаметре в 1,25 см значение r_0 составит 12,5.

Определим показатель кривой a :

$$a = \frac{3 \lg r_0}{\lg \frac{C_{\max}}{C_0}} = \frac{3 \lg 12,5}{\lg 10,7} = 3,2$$

и угловой коэффициент a :

$$a = -\frac{3}{3,2 (\ln 12,5)^{2,2}} = -0,12.$$

Вычисленные требуемые массы для различных r указаны в двух последних строках табл. 21 для погрешностей 1 и 5 %.

Таблица 21. Контрастность руды (по примеру Д.А. Краснова) и необходимые массы проб в зависимости от степени измельчения

r	d_{\max}	$d_{\text{эква}}$	C	Необходимая масса пробы (в кг) при допустимой погрешности (в %)	
				1	5
12,5	2,5	1,25	4,6	269	10,3
5	10	5	27	100	4
2,5	5	2,5	42,9	20	0,8
1,5	3	1,5	46,7	4,7	0,200
1	1	0,5	47	0,147	0,007
1	0,5	0,25	47	0,022	0,001
1	0,1	0,05	47	0,002	0,0001

В заключение проанализируем выявленную закономерность изменения коэффициента контрастности при измельчении пробы в сравнении с формулой Демонда — Хальфердаля. Обращаясь к рис. 13, соединим прямой фундаментальную точку графика, имеющую координаты ($C = C_{\max}$, $d/d_{\text{вкр}} = 1$) с начальной экспериментальной точкой ($C = C_0$, $d/d_{\text{вкр}} = d_0/d_{\text{вкр}}$). Эта прямая будет соответствовать уравнению

$$\lg C = \lg C_{\max} - a \left(\lg \frac{d}{d_{\text{вкр}}} \right)^3 = \lg C_{\max} + a \lg d_{\text{вкр}} - a \lg d,$$

$$(a < 3)$$

или, после потенцирования, уравнению

$$C = (C_{\max} + \text{const})/d^a.$$

Заменяя величину $C_{\max} + \text{const}$, являющуюся константой, на K^* и подставляя K^* в формулу сокращения (без учета исходной массы), получим:

$$q = \frac{K^* \gamma}{\sigma^2} \frac{d}{d^a} = K d^{3-a}.$$

Этот результат является не чем иным, как формулой Демонда — Хальфердаля. Таким образом, ее можно представить как частный случай нашей формулы при том предположении, что коэффициент контрастности руды изменяется при дроблении по установленному закону [формула (46) с параметром $a = 1$]. Теперь мы можем уверенно поставить точку в дискуссии об определении значений и физической интерпретации параметров K и a в формуле Демонда — Хальфердаля. Действительно, K определяется критическим значением коэффициента контрастности. Дискуссионный показатель степени a так же легко определяется, как $3 - a$, где величина a может быть получена на основании одной экспериментальной точки и определяется, по существу, отношением размера частиц к размеру вкрапленников. Для получения этой точки достаточно визуально или анализом определить наибольшее содержание компонента в частице (куске). Положение этой точки может быть без особого труда предсказано на основании структурно-текстурных особенностей руды, обычно хорошо изученных на каждом месторождении.

Изложенные в этом разделе результаты неплохо согласуются с выводами А.М. Годэна, проводившего исследование раскрытия минеральных сростков при измельчении в целях обогащения. Его задача заключалась в оценке процента полезного минерала, выделившегося в чистую фазу. При значениях r_0 , меньших единицы, коэффициент контрастности практически пропорционален раскрытию. При таком измельчении ход кривых раскрытия Годэна и ход нашей кривой изменения контрастности практически совпадают.

§ 5. Контрастность реальной пробы сложного гранулометрического состава

Способ определения C для реальной измельченной пробы состоит в определении C_i для каждого узкого гранулометрического класса и в нахождении средневзвешенного значения, где весовыми коэффициентами служат доли металла, заключенного в классах. Если не происходит избирательного истирания полезного минерала, то весовыми коэффициентами будут выходы гранулометрических классов. Когда полезный минерал измельчается легче вмещающей породы, замена выхода металла выходом класса только увеличит гарантию обработки и вполне допустима. Вариациями плотности частиц пробы можно пренебречь, тогда

$$\overline{Cd^3} = \sum C_i \overline{d_i^3} p_i; \quad \overline{d^3} = \sum d_i^3 p_i,$$

$$\text{откуда } \overline{C} = \overline{Cd^3} / \overline{d^3},$$

где черта сверху есть знак среднего.

Рассмотрим оценку C на примере 1, приведенном в предыдущем параграфе. Результаты ситового анализа этой пробы измельченной до -10 мм, диаметры середины классов, соответствующие им коэффициенты контрастности C_i (сняты с графика 13) и дальнейшие расчеты приведены в табл. 21.

Таблица 21. Расчет коэффициента контрастности руды с заданным гранулометрическим составом

Класс, мм	d_i	d_i^3	C_i	Выход класса p_i	$p_i d_i^3$	$p_i d_i^3 C_i$
-10 + 5	8	512	8,5	0,22	112,6	957
-5 + 2,5	4	64	40,5	0,36	23,0	933
-2,5 + 1	2	8	90	0,27	2,2	194
-1 + 0,5	0,8	0,5	107	0,11	—	5,88
-0,5 + 0	0,25	0,02	107	0,04	—	—
				$\Sigma = 1,00$	$\Sigma = 137,8$	$\Sigma = 2089,88$

$$d_{\text{экв}} = \sqrt[3]{\sum p_i d_i^3} = \sqrt[3]{138} = 5,17 \text{ мм} = 0,517 \text{ см};$$

$$C = \frac{2090}{138} = 15,14.$$

Необходимая при 5 %-ной точности масса будет равна:

$$q = \frac{15,14 \cdot 0,517^3 \cdot 2,7}{0,05^2} = \frac{2,090 \cdot 2,7}{0,0025} = 2,26 \text{ кг.}$$

Если при расчете необходимой массы пробы ориентироваться на самые крупные куски, без учета реальной степени измельчения, то она будет

$$q = \frac{4,9 \cdot 1,0^3 \cdot 2,7}{0,05^2} = 5,29 \text{ кг.}$$

Эта масса существенно превышает действительно необходимую, что убеждает в практической необходимости учета реального ситового состава пробы.

§ 6. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ ПРОБЫ

По сравнению с измельчением геологических проб вопросам их перемешивания уделялось значительно меньшее внимание. Действительно, процессу измельчения неизбежно сопутствует и перемешивание. Если проба не очень велика по массе, а размер частиц не очень мал, то перемешивание не является проблемой и достаточный эффект достигается традиционным перемешиванием известным способом "кольца и конуса". Главное при этом — избежать систематических погрешностей, вызванных гравитационным расслоением частиц различной плотности и размеров. Рудная мелочь, проваливаясь сквозь относительно крупный материал пробы, обогащает нижнюю часть. Если не учитывать этого обстоятельства, систематические ошибки могут на порядок и более превысить случайные погрешности сокращения, контролируемые массой пробы. Перемешивание способом "кольца и конуса" не устраняет сегрегации. Полулежащий перед квартованием конус имеет осевую симметрию в распределении частиц различной крупности и плотности. Классическое квартование вертикальной плоскостью сводит на нет отрицательное влияние гравитационного расслоения.

Желобчатый делитель при неизбежном использовании не исключает систематических ошибок, так как сконцентрированная на дне совка мелочь часто попадает преимущественно в одну из щелей делителя. Механические делители Глаголева по замыслу должны исключать подобные систематические ошибки.

Перемешивание и сокращение очень тонко измельченных проб малой массы действительно представляют собой проблему. Из-за большого числа частиц и большой их удельной поверхности силы сцепления между ними препятствуют эффективному перемешиванию и отбору аналитической навески. Именно на этой "лабораторной" стадии подготовки пробы иногда оказываются бесполезными усилия по обеспечению заданной точности.

Выводы предыдущих глав относились к пробе, достаточно хорошо перемешанной. Для того чтобы иметь возможность оценивать качество перемешивания, необходимо установить эталон идеально перемешанной пробы, т.е. такой, которую лучше перемешать, не подвергая дроблению, уже невозможно. Вариация состава в отдель-

ных порциях пробы, уменьшаясь, достигает некоторого уровня и далее не уменьшается. Недостаток такого определения — отсутствие практической уверенности в том, что достигнутый уровень гомогенизации является максимально возможным для данной пробы.

Теоретически число рудных частиц в порциях идеально перемешанной пробы должно подчиняться биномиальному закону независимо от величины порции. Вариации в макропорциях будут характеризовать макронеоднородность, в самых малых порциях — микро-неоднородность. Если вариации состава хотя бы для какой-нибудь величины порции превышают устанавливаемые биномиальным законом, пробу нельзя назвать перемешанной. Достичь простым перемешиванием большей гомогенности, чем указанная, вообще, говоря, невозможно. Однако в частных случаях это осуществимо. Представим себе смесь шарообразных частиц с таким соотношением радиусов рудных и нерудных частиц, что одни из них как раз помещаются в промежутках между другими. Тогда при достаточно хорошем встряхивании можно получить макроподобие "кристаллической решетки" с равномерностью распределения, превышающей биномиальную. Такие случаи могут встречаться в практике шликерного рудологического анализа протоколов.

Длительность надежного перемешивания колеблется в широких пределах и зависит от типа смесителя или способа смешивания, а также от тщательности исполнения. Она определяется лишь экспериментально. Т.И. Ивановой (спектральная лаборатория Института геологии филиала Коми АН СССР) получена следующая зависимость величины коэффициента вариации (в %) от тщательности и продолжительности перемешивания пробы.

Перемешивание	Барий	Стронций
Небрежное, 5 мин	62,5	4,6
Небрежное, 10 мин	31,6	7
Рядовое, 10 мин	13	6,4
Тщательное, 10 мин	7	8
Тщательное, 20 мин	5	5,7

По этим данным делаем вывод, что для бария, который присутствует в пробе преимущественно в виде барита, тщательность и продолжительность перемешивания перед взятием аналитической навески имеют решающее значение. Вычислим погрешность сокращения такой пробы, если бы она была перемешана идеально. Исходные данные: $k = 66\%$, $\gamma_p = 4,5$ (барит), $c = 0,006\%$, $\gamma = 3$, $q = 20$ мг, $d = 0,01$ мм = $0,001$ см.

Коэффициент контрастности C равен $\frac{66 \cdot 4,5}{0,006 \cdot 3} - 1 \approx 16500$, относительная дисперсия σ^2 равна $\frac{0,001^3 \cdot 3}{0,02} 16500 = 2,5 \cdot 10^{-3}$. Коэффициент вариации V равен $100 \sqrt{2,5 \cdot 10^{-3}} = 5\%$, т.е. в точности соответствует экспериментально полученному значению. Следова-

тельно, проба попадает под определение идеально перемешанной.

Заметим, что по стронцию погрешность взятия аналитической навески значительно меньше, так как он присутствует в пробе не в форме высококонцентрированного минерала-носителя, а в виде изоморфной примеси в кальците и доломите.

Ю.И. Стахеев и др. [9] приводят интересные собственные и литературные данные по зависимости погрешности от времени ручного и механического перемешивания. Использовалась смесь 2 г хлористого натрия с 20 мг кварца. После измельчения до 50 мкм и перемешивания она разделялась на 10 равных порций. Соль растворялась в воде, а содержание кварца определялось с помощью установки для электрического импульсного метода:

Перемешивание в ступке		Перемешивание в вибромельнице	
t, с	V, %	t, с	V, %
120	31,0	5	3,8
180	11,2	10	2,6
900	5,3	20	1,9
1800	2,7	30	1,5

Вычислим по нашей формуле предельно достижимый минимум погрешности для этих опытов. Исходные данные: $k = 100\%$ (содержание минерала кварца в частице кварца), $\gamma_p = 2,7$, $c = 0,02$; $(2 + 0,02) \approx 1\%$, $\gamma = 2,1$ (галит), $q = 2:10 = 0,2$ г, $d = 50$ мкм = $0,005$ см. Расчет:

$$C = \frac{100 \cdot 2,7}{1 \cdot 2,1} - 1 \approx 128;$$

$$V^2 = \frac{0,005^3 \cdot 2,1}{0,2} 128 = 1,7 \cdot 10^{-4}, \quad V = 1,3\%.$$

Таким образом, при перемешивании в вибромельнице предельная гомогенизация достигается за 30 с, а вручную — за полчаса.

Имеются литературные данные, которые не подтверждают монотонной тенденции к гомогенизации тонкоизмельченной пробы с увеличением продолжительности перемешивания. По этим данным максимальная гомогенизация ($V = 3\%$) достигается в механическом смесителе через 5 мин, а затем через 30 мин она вновь возрастает вследствие сегрегации до уровня $V = 30\%$ и далее остается постоянной. Все это свидетельствует о сложности хорошего перемешивания тонкоизмельченных проб.

Мы настоятельно рекомендуем на лабораторной стадии обработки проб пользоваться перемешиванием в вибромельницах из расчета не менее 30–60 с на 1 г материала.

ОПТИМИЗАЦИЯ ОБРАБОТКИ ПРОБ

§ 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОБРАБОТКИ ПРОБ

Затраты на обработку проб связаны с основными операциями (дробление, просеивание, перемешивание и сокращение) и работами вспомогательного характера по отношению к основным (разборка проб, загрузка в механизмы, расфасовка и упаковка проб и т.д.). Наибольшую часть энергии потребляет дробление материала пробы. Ее количество зависит от отношения размеров частиц до и после дробления — степени дробления, от массы обрабатываемого материала и от физико-механических свойств руды.

Затраты энергии на просеивание, перемешивание и сокращение прямо пропорциональны массе пробы и числу частиц в ней. Вспомогательные работы зависят от квалификации обслуживающего персонала, расстановки механизмов и не связаны со схемой обработки проб.

Поставим следующую задачу: определить размеры частиц после дробления и степени сокращения массы пробы на этапах так, чтобы затраты энергии на дробление материала были минимальными, а погрешность содержания, вызванная многоэтапной обработкой, находилась в допустимых пределах.

Для решения этой задачи необходимо установить зависимость затрат на дробление от размеров частиц и массы пробы и найти математическое выражение для численного критерия эффективности той или другой схемы обработки. Рассмотрим методы подсчета расхода энергии на дробление. В зависимости от крупности дробленого материала условно разделяют стадии дробления и измельчения: крупное дробление — от 1500 до 100 мм; среднее дробление — от 100 до 40 мм; мелкое дробление — от 40 до 5 мм; измельчение — от 5 до 0,1 мм; тонкое измельчение — от 0,1 до 0,05 мм.

В дальнейшем независимо от размеров частиц будет использоваться только один термин — дробление. Важная количественная характеристика — степень дробления i , которая определяется как отношение максимальных размеров частиц до (D) и после (d) дробления: $i = D/d$.

Степень дробления на каждом этапе обработки называется частной:

$$i_k = \frac{d_{k-1}}{d_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Степень дробления, достигнутая за все этапы, называется общей

и равна произведению частных степеней:

$$i_1 i_2 \dots i_n = \frac{d_0}{d_1} \frac{d_1}{d_2} \dots \frac{d_{n-1}}{d_n} = \frac{d_0}{d_n} = i.$$

С уменьшением размеров частиц в них уменьшается число крупных дефектов, облегчающих разрушение, поэтому удельная прочность частиц возрастает, для горных пород наблюдается заметно увеличение прочности частиц меньше 0,1–0,5 мм [1], т.е. существенными факторами, влияющими на затраты энергии на дробление, являются степень дробления и размеры частиц.

Работа на дробление одной частицы размера D до размера d определяется с помощью законов дробления. В 1867 г. П. Риттингер, рассматривая дробление одиночного куба на более мелкие, предположил, что работа прямо пропорциональна вновь образованной поверхности и выражается через D и d следующим образом [1]:

$$A = K_p \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{D} \right) Q = K_p \left(\frac{i-1}{D} \right) Q,$$

где K_p — коэффициент пропорциональности; Q — масса пробы.

Закон дробления Кика—Кирпичева (1875 г.) утверждает, что работа на дробление пропорциональна объему тела. В этом случае зависимость от D и d имеет более сложный вид:

$$A = K_k (\lg D - \lg d) Q = K_k \lg i Q.$$

Ф. Бонд в 1951 г. предложил считать затраты энергии на дробление пропорциональными среднему геометрическому из объема и поверхности куба, что соответствует формуле:

$$A = K_6 \left(\frac{1}{\sqrt{d}} - \frac{1}{\sqrt{D}} \right) Q = K_6 \frac{\sqrt{i}-1}{\sqrt{D}} Q.$$

Закон Кика—Кирпичева применяется для оценки затрат энергии на стадиях крупного и среднего дробления. Так как при обработке проб размеры частиц можно отнести к стадиям мелкого дробления, то применение этого закона исключается. Считается, что при мелком дроблении применим закон Риттингера, а закон Бонда занимает промежуточное положение.

Формула для подсчета энергии по закону Риттингера хорошо согласуется с существующими нормами затрат труда на дробление при обработке проб. Исходными данными были нормы времени на механическое дробление проб, взятые в зависимости от крепости пород и размеров частиц. Эти нормы выработки, являющиеся обобщением большого производственного опыта и специального хронометража, приведены в табл. 23, где N обозначены затраты времени в человеко-часах на 1 кг пробы. Считая, что затраты времени прямо

Таблица 23. Таблица норм времени на механическое дробление при обработке проб

Категории крепости пород	Коэффициенты затрат времени	Размер частиц, мм								\bar{K}_N
		25-11	10-6	5-3	2,5-1,1	1,0-0,6	0,5-0,3	0,25-0,15	0,14-0,07	
I-III	N	0,005	0,008	0,018	0,034	0,061	0,1	0,196	0,5	0,09
	K_N	0,10	0,12	0,13	0,07	0,09	0,08	0,07	0,07	
IV-VI	N	0,006	0,011	0,025	0,047	0,073	0,128	0,242	0,55	0,11
	K_N	0,12	0,19	0,19	0,09	0,11	0,10	0,08	0,08	
VII-IX	N	0,008	0,013	0,031	0,064	0,84	0,148	0,285	0,615	0,14
	K_N	0,16	0,20	0,23	0,12	0,13	0,11	0,11	0,09	
X-XI	N	0,012	0,018	0,064	0,088	0,125	0,190	0,348	0,678	0,19
	K_N	0,24	0,27	0,48	0,17	0,18	0,14	0,13	0,9	

пропорциональны затратам энергии, т.е. $N = K_N(1/d - 1/D)$, можно определить коэффициент для различных степеней дробления:

$$K_N = NdD/(D - d).$$

Из данных табл. 23 видно, что более всего отличается от остальных значений коэффициент K_N , отвечающий дроблению от $D = 5$ мм до $d = 3$ мм. При вычислении среднего значения \bar{K}_N наибольшее и наименьшее значение коэффициента отбрасывались. Величины K_N для пород одинаковой крепости незначительно отличаются для различных степеней дробления, а коэффициент \bar{K}_N позволяет достаточно точно оценить затраты времени в соответствии с существующими нормами.

Например, на дробление 1 кг пород IV-VI категории от размера $D = 10$ мм до размера $d = 0,06$ мм по существующим нормам отводится $N_1 = 0,011 + 0,025 + 0,047 + 0,073 = 0,156$ чел.-ч., а затраты по формуле, связанной с законом Риттингера $N_2 = (1/d - 1/D) \bar{K}_N = 0,172$. Если же рассмотреть дробление 1 кг пород X-XI категорий от размера $D = 25$ мм до размера $d = 1,1$ мм, то получим соответственно $N_1 = 0,175$ и $N_2 = 0,165$.

Поэтому для оценки затрат энергии A на дробление при многоэтапной обработке проб использовался закон Риттингера. Работа на каждом этапе A_k вычисляется по формуле

$$A_k = K \left(\frac{1}{d_k} - \frac{1}{d_{k-1}} \right) Q_{k-1} = \frac{K}{Q_0} \left(\frac{1}{d_k} - \frac{1}{d_{k-1}} \right) \frac{1}{m_{k-1}},$$

а суммарная затраченная энергия —

$$A = \frac{K}{Q_0} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{d_k} - \frac{1}{d_{k-1}} \right) \frac{1}{m_{k-1}},$$

где $m_0 = 1$. Постоянный множитель K/Q_0 не влияет на значения размеров частиц и степеней сокращения, при которых функция затрат достигает наименьшего значения. Поэтому оптимизация обработки проб есть задача минимизации функции:

$$A = \frac{1}{d_1} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{d_k} - \frac{1}{d_{k-1}} \right) \frac{1}{m_{k-1}} \quad (47)$$

при ограничениях

$$\sum_{k=1}^n d_k (m_k - m_{k-1}) < \frac{\sigma^2 Q_0}{\gamma C}, \quad (48)$$

$$d_0 > d_1 > \dots > d_n > \delta, \quad (49)$$

$$1 < m_1 < m_2 < \dots < m_{n-1} < m, \quad (50)$$

где A — функция затрат энергии; d_k — размеры частиц пробы на этапах обработки после дробления, см; m_k — степени сокращения массы пробы; σ — предельно допустимая погрешность, доли единицы; Q_0 — масса начальной пробы, г; γ — средняя плотность материала, г/см³; C — контрастность руды; δ — наименьший технически возможный размер частицы после дробления, определяемый комплектом механизмов, см; m — степень общего сокращения массы пробы.

Решение задачи (47) — (50) определяет эффективную схему обработки проб, удовлетворяющую и требованиям минимизации затрат, и требованиям необходимой точности.

§ 2. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Оптимизация обработки проб относится к классу задач минимизации функции многих переменных при некоторых ограничениях: $\min f(x)$ при $x \in X$, где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — точка n -мерного пространства, а X — некоторое подмножество этого пространства. Подмножество называется допустимым множеством задачи минимизации, а точки, принадлежащие к X , — допустимыми точками. В нашем случае размеры частиц d_k и степени сокращения массы проб m_k определяют точку $x = (d_1, \dots, d_n, m_1, \dots, m_{n-1})$, а неравенства (48) — (50) задают допустимое множество.

Точка x называется решением задачи минимизации, если она является допустимой, и для всех остальных допустимых точек выполняется неравенство: $f(\hat{x}) \leq f(x)$. Решение задачи может быть единственным, их может быть несколько. Множество решений может быть бесконечным.

Справедлива теорема Вейрштрасса, позволяющая выделить широкий класс задач минимизации, имеющих решение: задача минимизации непрерывной функции $f(x)$ на замкнутом ограниченном множестве X разрешима. Непрерывная функция может достигать наименьшего значения либо в некоторой внутренней точке допустимого множества, либо на его границе. При решении задач минимизации важную роль играет градиент функции $f(x)$, т.е. вектор, координаты которого — частные производные:

$$f'(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Если минимум функции $f(x)$ достигается во внутренней точке \hat{x} , то градиент в этой точке обращается в нуль: $f'(\hat{x}) = 0$ (рис. 14).

Градиент определяет направление наискорейшего возрастания функции. Это свойство используют для построения некоторой последовательности точек из допустимого множества $x^1, x^2, \dots, x^k, \dots$, таких, что значение функции убывает от точки к точке, т.е. выполняется неравенство $f(x^k) \leq f(x^{k-1})$. Методы построения подобных последовательностей называются методами спуска. Такую последовательность можно построить, перемещаясь от точки к точке в направлении, противоположном градиенту, что обеспечивает убывание функции:

$$x^{k+1} = x^k - a_k f'(x^k),$$

где a_k — некоторое положительное число, называемое шагом спуска (рис. 15).

Иногда, в целях уменьшения объема вычислений, на каждом этапе спуска изменяют значения не всех, а одной или нескольких переменных, полагая остальные постоянными и изменяя их на последующих шагах. Такой метод называется методом покоординатного спуска.

В том случае, если задача минимизации имеет вид $\min f(x)$, при ограничении $g(x) = 0$, для решения задачи используют метод множителей Лагранжа [7]. При этом составляют функцию Лагранжа $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x)$ и находят значения x и λ , в которых градиент функции Лагранжа обращается в нуль. Для этого необходимо решить

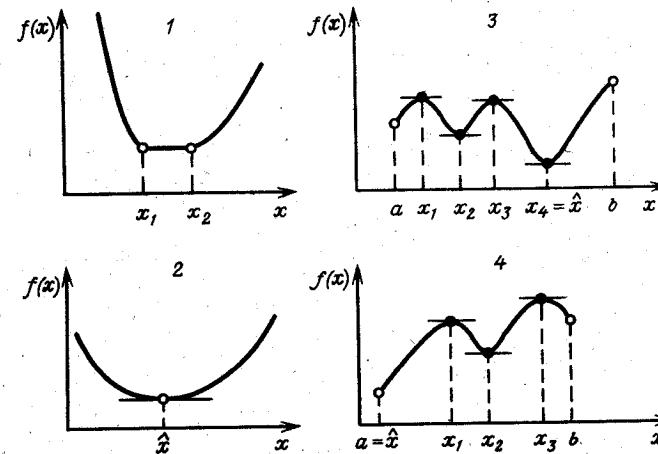


Рис. 14. Минимумы функции одной переменной:

1 — нестрогий минимум (точки, удовлетворяющие условию $x_1 < x < x_2$, являются решением задачи минимизации); 2 — строгий минимум в точке $x = \hat{x}$; 3 — глобальный минимум достигается во внутренней точке $x = \hat{x}$; 4 — глобальный минимум достигается в одной из граничных точек $\hat{x} = a$. Во внутренних точках локального минимума касательные к кривым горизонтальны

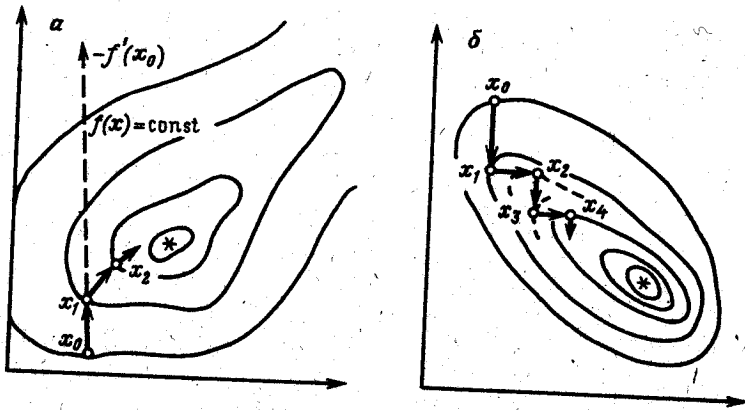


Рис. 15. Иллюстрация методов поиска минимума:

a — градиентный спуск происходит по ломаной $x_0 x_1 x_2, \dots$, перпендикулярной в каждой точке к линии уровня (изолинии); b — по координатному спуску происходит по ломаной, состоящей из отрезков прямых, параллельных координатным осям

систему уравнений:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x) = 0.$$

Решениями этой системы могут быть одна или несколько n -мерных точек. Сравнением значений функции $f(x)$ в этих точках можно определить наименьшее значение.

Для решения системы уравнений будем использовать метод последовательных приближений. При этом система приводится к виду [3]

$$x_i = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Выбирается некоторое начальное приближение к решению системы $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, а каждое последующее приближение находится из соотношений:

$$x_i^k = \varphi(x_1^{k-1}, x_2^{k-1}, \dots, x_n^{k-1}).$$

При выполнении некоторых условий последовательность $x^1, x^2, \dots, x^k, \dots$ сводится к решению системы. Геометрическая иллюстрация метода последовательных приближений для уравнения с

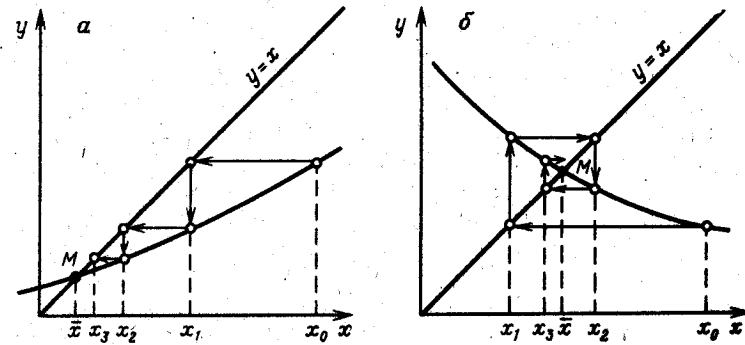


Рис. 16. Иллюстрация сходящегося метода последовательных приближений.

Уравнение $f(x) = 0$ преобразуется к виду $x = \varphi(x)$. Решением его является x — абсцисса точки M . $a - 0 < \varphi'(x) < 1$, последовательные приближения $x_1 = \varphi(x_0), x_2 = \varphi(x_1), \dots, x_n = \varphi(x_{n-1})$, монотонно убывая, сходятся к корню \bar{x} , траектория процесса имеет вид "лестницы"; $b - 1 < \varphi'(x) < 0$ последовательные приближения колеблются вокруг \bar{x} , приближаясь к нему, траектория процесса имеет вид ломаной спирали

одним неизвестным $x = \varphi(x)$ приводится на рис. 16.

Задача оптимизации обработки проб — частный случай задачи минимизации функции:

$$F(x, y) = \frac{1}{y_1^a} + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{y_k^a} - \frac{1}{y_{k-1}^a} \right) \frac{1}{x_{k-1}}$$

при ограничениях

$$y_1^\beta (x - 1) + \sum_{k=2}^{n-1} y_k^\beta (x_k - x_{k-1}) + y_n^\beta (m - x_{n-1}) \leq D,$$

$$b > y_1 > y_2 > \dots > y_n > a > 0,$$

$$1 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < m,$$

где $a > 1, \beta > 1$. Ограничения этой задачи определяют замкнутую ограниченную область, в которой функция $F(x, y)$ непрерывна, так как $x_i > 0, y_i > 0$. Следовательно, по теореме Вейрштрасса задача минимизации имеет решение, поиск которого состоит из нескольких этапов.

Этап 1. Зафиксируем переменные x_1, x_2, \dots, x_{n-1} и введем обозначения:

$$a_1 = 1 - \frac{1}{x_1},$$

$$a_k = \frac{1}{x_{k-1}} - \frac{1}{x_k}, \quad k = 2, 3, \dots, n-1,$$

$$a_n = \frac{1}{x_{n-1}},$$

$$b_1 = x_1 - 1,$$

$$b_k = x_k - x_{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots, n-1,$$

$$b_n = m - x_{n-1}.$$

Рассмотрим задачу минимизации функции

$$F_1(y) = \sum_{k=1}^n a_k / y_k^a$$

при ограничениях

$$\sum_{k=1}^n b_k y_k^\beta < D,$$

$$b > y_1 > y_2 > \dots > y_n > a > 0,$$

где $a_k > 0, b_k > 0$. Эта задача имеет единственное решение, которое находится методом множителей Лагранжа:

$$\hat{y}_k = \left(\frac{D}{S}\right)^{\frac{1}{\beta}} \left(\frac{a_k}{b_k}\right)^{\frac{1}{a+\beta}}, \quad (51)$$

$$\text{где } S = \sum_{k=1}^n (a_k^\beta b_k^a)^{\frac{1}{a+\beta}}$$

Этап 2. Подставив значение \hat{y}_k в функцию $F_1(y)$, получим

$$F_1(y) = D^{\frac{1}{\beta}} S^{\frac{1-\beta}{\beta}}. \text{ Таким образом, задача минимизации функции } F(x, y) \text{ сводится к минимизации функции}$$

$$S(x) = \frac{x_1 - 1}{x_1^p} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{x_k - x_{k-1}}{(x_{k-1} x_k)^p} + \frac{(m - x_{n-1})^{1-p}}{x_{n-1}^p}$$

при ограничении

$$1 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < m,$$

где $p = \beta / (a + \beta)$. Решением этой задачи является решение системы уравнений:

$$x_1 = \frac{p}{1-p} \frac{x_2 - x_2^p}{x_2^p - 1}; \quad (52)$$

$$x_k = \frac{p}{1-p} \frac{x_{k+1} x_k^p - x_{k+1}^p x_k - 1}{x_{k+1}^p - x_k^p}, \quad k = 2, \dots, n-1; \quad (53)$$

$$x_{n-1} = \frac{p}{1-p} \frac{(m - x_{n-1}) x_{n-2}^p - (m - x_{n-1})^p x_{n-2}}{(m - x_{n-1})^p - x_{n-2}^p}; \quad (54)$$

обозначим решение этой системы

$$\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_{n-1}).$$

Этап 3. Подставляем значения $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_{n-1}$ в соотношение (51), получим оптимальные значения переменных \hat{y}_k :

$$\hat{y}_1 = \left(\frac{D}{S(\hat{x})}\right)^{\frac{1}{\beta}} \left(\frac{1}{\hat{x}_1}\right)^{\frac{1}{a+\beta}}; \quad (55)$$

$$\hat{y}_k = \left(\frac{D}{S(\hat{x})}\right)^{\frac{1}{\beta}} \left(\frac{1}{\hat{x}_{k-1} \hat{x}_k}\right)^{\frac{1}{a+\beta}}, \quad k = 2, \dots, n-1; \quad (56)$$

$$\hat{y}_n = \left(\frac{D}{-S(\hat{x})}\right)^{\frac{1}{\beta}} \left(\frac{1}{(m - \hat{x}_{n-1}) \hat{x}_{n-1}}\right)^{\frac{1}{a+\beta}}. \quad (57)$$

Приведенный метод позволяет решать задачу оптимизации обработки проб для произвольного числа этапов и любой заданной точности.

§ 3. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ОПТИМИЗАЦИИ ОБРАБОТКИ ПРОБ

Функция затрат энергии и ограничения в задаче оптимизации проб зависят от значительного числа переменных. Например, если обработка состоит из четырех этапов, то требуется определить четыре значения размеров частиц и три значения степеней сокращения массы пробы. Размеры частиц и степени сокращения являются объектами различной природы, если первые имеют размерность длины и могут изменяться в пределах от 100 до 0,001 см, то степени сокра-

щений — безразмерные величины, принимающие значения от единицы до нескольких миллионов. Поэтому с целью понижения числа переменных рассмотрим случаи, когда либо размеры частиц d_k , либо степени сокращений m_k являются фиксированными.

Рассмотрим функцию затрат энергии

$$A = \frac{1}{d} + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{d_k} - \frac{1}{d_{k-1}} \right) \frac{1}{m_{k-1}}$$

и ограничения точности

$$\sum_{k=1}^n d_k^3 (m_k - m_{k-1}) \leq D,$$

где $D = \sigma^2 Q_0 / \gamma C$. Пусть зафиксированы размеры частиц d_1, d_2, \dots, d_n , а требуется решить задачу оптимизации обработки, т.е. определить оптимальное значение степеней сокращения массы пробы на этапах. Коэффициенты при переменных m_k будут постоянными величинами, обозначим их a_k и b_k :

$$a_{k-1} = \frac{1}{d_k} - \frac{1}{d_{k-1}}; \quad b_{k-1} = d_{k-1}^3 - d_k^3;$$

$$k = 2, 3, \dots, n.$$

В ограничении все слагаемые, не зависящие от m_k , перенесем в правую часть неравенства и обозначим

$$b_0 = D + d_1^3 - m d_n^3.$$

Поставленная задача о нахождении оптимальных степеней сокращения при фиксированных размерах частиц примет вид

$$\min \left(\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{m_k} \right)$$

при ограничениях

$$\sum_{k=1}^n b_k m_k \leq b_0,$$

$$1 < m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_{n-1} \leq m_n$$

где коэффициенты a_k и b_k — положительные числа. Формула (51)

позволяет определить оптимальные значения m_k при $\alpha = \beta = 1$:

$$m_k = \frac{b_0}{S} \sqrt{\frac{a_k}{b_k}}, \quad (58)$$

$$\text{где } S = \sum_{k=1}^n \sqrt{a_k b_k}.$$

Порядок выполнения вычислительных операций рассмотрим на примере. Пусть начальная масса пробы Q_0 равна 70 кг, размер частиц в ней d_0 равен 5 см. Проба обрабатывается в три этапа с размерами частиц после дробления: $d_1 = 1$ см, $d_2 = 0,25$ см, $d_3 = 0,05$ см. Величина навески Q_3 , идущей на анализ, равна 100 г. Содержание металла в частице $k = 0,86$, в пробе $c = 0,02$, плотность рудной частицы γ_p равна 5 г/см³, средняя плотность частиц $\gamma = 3$ г/см³. Предел погрешности определяется значением $\sigma = 0,1$. Вычисление проводится в несколько шагов.

Шаг 1. Находим значение величин

$$m = Q_0 / Q_3 = 700;$$

$$C = k \gamma_p / (c \gamma) - 1 = 106,5;$$

$$D = \frac{Q_0 \sigma^2}{c \gamma} = 2,19;$$

$$b_0 = D + d_1^3 - m d_3^3 = 3,10.$$

Шаг 2. Вычисляем коэффициенты a_k, b_k и $S = \sum_{k=1}^n \sqrt{a_k b_k}$:

$$a_1 = \frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} = 3,$$

$$a_2 = \frac{1}{d_3} - \frac{1}{d_2} = 16,$$

$$b_1 = d_1^3 - d_2^3 = 0,98,$$

$$b_2 = d_2^3 - d_3^3 = 0,015,$$

$$S = \sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2} = 2,20.$$

Шаг 3. По формуле (58) определяем m_k и массу пробы на этапах:

$$b_0 / S = 1,41;$$

$$m_1 = b_0/S \sqrt{a_1/b_1} = 2,46; \quad Q_1 = Q_0/m_1 = 28455 \text{ г};$$

$$m_2 = b_0/S \sqrt{a_2/b_2} = 46,05; \quad Q_2 = Q_0/m_2 = 1520 \text{ г}.$$

Если фиксированные размеры частиц и найденные значения сокращений массы пробы подставить в функцию затрат, то получим

$$A_m = \frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_0} + \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1}\right) \frac{1}{m_1} + \left(\frac{1}{d_3} - \frac{1}{d_2}\right) \frac{1}{m_2} = 2,37.$$

В некоторых случаях может оказаться, что величина \hat{m}_k существенно меньше единицы, т.е. масса пробы после сокращения на первом этапе должна возрастать, что невозможно. Это означает, что первый этап обработки исключается т.е. происходит дробление от размера d_0 до размера d_2 без сокращения массы и решается аналогичная задача, где этапов обработки на один меньше, и новые значения фиксированных размеров частиц определяются через прежние уменьшением индекса на единицу: $d'_{k-1} = d_k$, $k = 2, 3, \dots, n$. Если же окажется, что $\hat{m}_{n-1} > m$, то масса навески, идущей на анализ, будет меньше, чем требуется. Тогда исключается последний этап обработки, а значения размеров частиц определяются равенством: $d'_k = d_k$, $k = 1, 2, \dots, n-2$, $d'_{n-1} = d_n$. В том случае, когда и $\hat{m}_1 < 1$ и $\hat{m}_{n-1} > m$, необходимо исключить оба крайних этапа.

Коэффициент $b_0 = D + d_1^3 - m d_n^3$ должен принимать только положительные значения. Если размеры частиц d_1 , d_n и общая степень сокращения массы пробы таковы, что $b_0 < 0$, то при данных значениях d_1 , d_n и m невозможно добиться заданной точности обработки, каким бы образом не осуществлялось сокращение пробы на этапах. Если в условии рассмотренного примера $Q_3 = 20$ г, а $d_3 = 0,1$ см, то $b_0 = 2,19 + 1 - 3,5 = -0,31$. Чтобы достигнуть необходимой точности, надо либо увеличивать массу навески, либо уменьшать значение d_3 .

Пусть теперь зафиксированы значения массы пробы на этапах Q_k или, что то же самое, степени сокращения m_k . Тогда возникает задача о выборе оптимальных значений размеров частиц на этапах, при этом в функции затрат и ограничений постоянными будут коэффициенты при переменных m_k . Обозначим:

$$p_1 = 1 - \frac{1}{m_1};$$

$$p_k = \frac{1}{m_{k-1}} - \frac{1}{m_k}, \quad k = 2, \dots, n-1;$$

$$p_n = \frac{1}{m_{n-1}};$$

$$q_1 = m_1 - 1;$$

$$q_k = m_k - m_{k-1}, \quad k = 2, \dots, n-1;$$

$$q_n = m - m_{n-1},$$

где все величины p_k и q_k являются положительными; приходим к задаче минимизации функции

$$A_d = \sum_{k=1}^n p_k/d_k$$

при ограничениях

$$\sum_{k=1}^n q_k d_k^3 \leq D;$$

$$d_0 \geq d_1 \geq \dots \geq d_n \geq \delta,$$

где $D = Q_0 \sigma^2 / C\gamma$. Как и раньше, оптимальные значения \hat{d}_k находим по формуле (51) при $\alpha = 1, \beta = 3$:

$$\hat{d}_k = \sqrt[3]{\frac{D}{W}} \sqrt[4]{\frac{p_k}{q_k}}, \quad (59)$$

$$W = \sum_{k=1}^n \sqrt[4]{p_k^3 q_k}.$$

В качестве примера рассмотрим пробу с теми же исходными данными, что и раньше, при заданных степенях сокращения: $m_1 = 30$, $m_2 = 300$, $m = 700$. Вычислительные операции выполняются в несколько шагов.

Шаг 1. Вычисляем значения C и D : $C = 106,5$, $D = 2,19$.

Шаг 2. Находим коэффициенты p_k и q_k и сумму

$$W = \sum_{k=1}^n \sqrt[4]{p_k^3 q_k};$$

$$p_1 = 1 - \frac{1}{m_1} = 0,97; \quad p_2 = \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} = 0,03; \quad p_3 = \frac{1}{m_2} = 0,003;$$

$$q_1 = m_1 - 1 = 29; \quad q_2 = m_2 - m_1 = 270; \quad q_3 = m - m_2 = 400;$$

$$W = 2,62.$$

Шаг 3. Используя формулы (59), определяем оптимальные размеры частиц \hat{d}_k :

$$\sqrt[3]{\frac{D}{W}} = 0,94;$$

$$\hat{d}_1 = \sqrt[3]{\frac{D}{W}} \sqrt[4]{\frac{p_1}{q_1}} = 0,4;$$

$$\hat{d}_2 = \sqrt[3]{\frac{D}{W}} \sqrt[4]{\frac{p_2}{q_2}} = 0,1;$$

$$\hat{d}_3 = \sqrt[3]{\frac{D}{W}} \sqrt[4]{\frac{p_3}{q_3}} = 0,05.$$

Затраты энергии для такой схемы обработки равны $A_d = 2,58$. Сравнение с затратами для предыдущего примера, где $A_m = 2,37$, показывает, что полученная схема эффективнее второй, так как обе обеспечивают одну и ту же точность.

При решении задачи об оптимальных размерах частиц иногда оказывается, что либо размер частиц после дробления на первом этапе больше начального размера частиц ($\hat{d}_1 > \hat{d}_0$), либо имеющиеся механизмы не позволяют дробить до размера \hat{d}_n ($\hat{d}_n < \delta$), либо одновременно и $\hat{d}_1 > \hat{d}_0$, и $\hat{d}_n < \delta$. Тогда исключают из обработки тот этап, где нарушаются необходимые условия, и решают аналогичную задачу, но для меньшего числа этапов и для новых фиксированных степеней сокращения.

Пусть в рассмотренном примере $\delta = 0,07$, тогда $\hat{d}_3 = 0,05 < \delta$. Исключаем из обработки третий этап, т.е. считаем $m_3 = m$, получаем задачу для двух этапов, где $m_1 = 30$, $m = 700$; по формуле (59) $\hat{d}_1 = 0,4$, $\hat{d}_2 = 0,08$, а затраты энергии будут равны $A'_d = 2,60$.

Рассмотренные задачи при некоторых условиях позволяют минимизировать затраты при обработке проб. Полученные результаты показывают, от каких величин существенно зависят точность и функция затрат. Главное же заключается в том, что полученные соотношения позволяют решить задачу оптимизации обработки проб в целом.

§ 4. ОПТИМАЛЬНЫЕ СХЕМЫ ОБРАБОТКИ ПРОБ

Соотношения (58) и (59) позволяют с помощью сравнительно простых вычислений уменьшить значение затрат энергии методом координатного спуска. Выбирают, например, фиксированные значения переменных m_k и по ним определяют оптимальные значения размеров частиц d_k . Затем для полученных величин d_k решают задачу о нахождении оптимальных степеней сокращения и т.д.; вычисления можно заканчивать тогда, когда значения функции затрат от шага к шагу меняться практически не будут. Рассмотрим пример с теми же данными, что и в предыдущем параграфе.

Шаг 1. Ранее вычислено: $m = 700$; $C = 108,5$; $D = 2,19$.

Шаг 2. Пусть $d_1 = 1$ см, $d_2 = 0,25$ см, $d_3 = 0,05$ см. Находим $m_1 = 2,46$, $m_2 = 46,05$, затраты энергии равны $A = 2,36$.

Шаг 3. По значениям $m_1 = 2,46$, $m_2 = 46,05$ определяем $d_1 = 0,8$ см, $d_2 = 0,3$ см, $d_3 = 0,07$ см, при этом $A = 2,091$.

Шаг 4. По значениям $d_1 = 0,8$ см, $d_2 = 0,3$ см, $d_3 = 0,07$ см находим $m_1 = 2,08$, $m_2 = 30,19$, $A = 2,047$.

Шаг 5. По значениям $m_1 = 2,08$, $m_2 = 30,19$ находим $d_1 = 0,74$ см, $d_2 = 0,32$ см, $d_3 = 0,08$ см, $A = 1,97$.

Шаг 6. По значениям $d_1 = 0,74$ см, $d_2 = 0,32$ см, $d_3 = 0,08$ см находим $m_1 = 3,60$, $m_2 = 28,2$, $A = 1,97$. Значения функции A совпадают, вычисления заканчиваются.

Достоинство этого метода заключается в том, что вычисления проводятся по формулам, использующим простейшие алгебраические операции, которые выполняются на электронных калькуляторах практически всех типов.

Одним из недостатков подобного координатного спуска является то, что если начальные фиксированные значения далеки от оптимальных, то число шагов, а следовательно, вычислений может быть очень велико. При этом может оказаться, что при переходе к новым значениям функции затрат A будет изменяться незначительно, не достигнув минимального значения. Если в рассмотренном примере начать покоординатный спуск при фиксированных значениях m_k , то результаты будут иные.

Шаг 1. Пусть $m_1 = 30$, $m_2 = 300$. Находим $d_1 = 0,4$ см, $d_2 = 0,1$ см, $d_3 = 0,05$ см, $A = 2,58$.

Шаг 2. По $d_1 = 0,4$ см, $d_2 = 0,1$ см, $d_3 = 0,05$ см находим $m_1 = 30,77$, $m_2 = 297,55$, $A = 2,57$.

Шаг 3. По $m_1 = 30,77$, $m_2 = 297,55$ находим $d_1 = 0,4$ см, $d_2 = 0,09$ см, $d_3 = 0,05$ см, $A = 2,57$. Здесь значение функции A стабилизируется на втором шаге, но, как показывают предыдущие результаты, минимум функции не достигается.

Решение задачи организации обработки проб дают формулы (51)–(57) при значениях показателей $\alpha = 1$ и $\beta = 3$. Сначала находят оптимальные значения сокращения массы \hat{m}_k , решая методом последовательных приближений систему уравнений:

$$m_1 = \frac{3 \sqrt[4]{m_2^3}}{\sqrt{m_2} + \sqrt[4]{m_2^3 + 1}}; \quad (60)$$

$$m_k = \frac{3 \sqrt[4]{m_{k+1}^3 m_{k-1}^3}}{\sqrt{m_{k+1}} + \sqrt[4]{m_{k+1} m_{k-1}^3} + \sqrt{m_{k-1}}}, \quad k = 2, \dots, n-2; \quad (61)$$

$$m_{n-1} = \frac{3 \sqrt[4]{(m - m_{n-1})^3 m_{n-2}^3}}{\sqrt{m - m_{n-1}} + \sqrt[4]{(m - m_{n-1}) m_{n-2}^3} + \sqrt{m_{n-2}}}. \quad (62)$$

Оптимальные размеры частиц после дробления на этапах определяются из соотношений

$$\hat{d}_1 = \sqrt[3]{\frac{D}{W}} \sqrt[4]{\frac{1}{m_1}}; \quad (63)$$

$$\hat{d}_k = \sqrt[3]{\frac{D}{W}} \sqrt[4]{\frac{1}{\hat{m}_k \hat{m}_{k-1}}}, \quad k = 2, \dots, n-1; \quad (64)$$

$$\hat{d}_n = \sqrt[3]{\frac{D}{W}} \sqrt[4]{\frac{1}{(\hat{m} - \hat{m}_{n-1}) \hat{m}_{n-1}}}. \quad (65)$$

где $D = Q_0 \sigma^2 / C\gamma$, а W — функция, зависящая от степеней сокращения

$$W = \frac{\hat{m}_1 - 1}{\sqrt[4]{m_1^3}} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{\hat{m}_k - \hat{m}_{k-1}}{\sqrt[4]{\hat{m}_k^3 \hat{m}_{k-1}^3}} + \frac{\sqrt[4]{m - \hat{m}_{n-1}}}{\sqrt[4]{m_{n-1}^3}}$$

Соотношения (60)–(65) приводят к важным заключениям относительно оптимальных параметров обработки проб. Уравнения системы (60)–(62) зависят только от значения m , поэтому оптимальные степени сокращения массы пробы на этапах зависят только от общей степени сокращения.

Значения оптимальных размеров частиц пропорциональны величине $D = Q_0 \sigma^2 / C\gamma$, поэтому начальная масса пробы, заданная точность и контрастность влияют на величину \hat{d}_k . Чем выше требования к точности обработки проб, тем меньше величина σ и тем меньше размеры частиц \hat{d}_k . Если рассматривать пробы различной контрастности, то увеличение контрастности влечет уменьшение размеров частиц.

Значение затрат для оптимальных \hat{d}_k и \hat{m}_k

$$A = W^3 \sqrt{\frac{W}{D}},$$

и, так как величина A обратно пропорциональна D , затраты энергии возрастают с увеличением контрастности пробы.

Назовем критическим такое значение размера частиц пробы, при котором требуемая точность достигалась бы при сокращении после одноэтапного измельчения:

$$d_{кр}^3 (m - 1) = D \quad \text{или} \quad d_{кр} = \sqrt[3]{D / (m - 1)}.$$

Если вместо оптимальных значений \hat{d}_k рассматривать их отноше-

ния к критическому размеру:

$$\hat{d}_1 = \frac{\hat{d}_1}{d_{кр}} = R \sqrt[4]{\frac{1}{\hat{m}_1}}; \quad (66)$$

$$\hat{d}_k = \frac{\hat{d}_k}{d_{кр}} = R \sqrt[4]{\frac{1}{\hat{m}_k \hat{m}_{k-1}}}; \quad k = 2, \dots, n-1; \quad (67)$$

$$\hat{d}_n = \frac{\hat{d}_n}{d_{кр}} = R \sqrt[4]{\frac{1}{(m - \hat{m}_{n-1}) \hat{m}_{n-1}}}; \quad (68)$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{m - 1}{W}}, \quad (69)$$

то расчет оптимальной схемы обработки существенно упрощается. Относительные величины \hat{d}_k и оптимальные степени сокращения зависят только от общей степени сокращения m . Эту зависимость выражают номограммы (см. рис. 19–22), построенные по результатам вычислений на ЭВМ для различных значений m . Номограммы позволяют быстро находить оптимальную схему обработки для произвольной степени сокращения m и любой заданной точности.

Рассмотрим опять обработку пробы массой 70 кг до навески 100 г. Общая степень сокращения $m = 700$, оптимальные значения \hat{m}_k находим, используя номограмму для обработки в три этапа (см. рис. 20). Для этого откладываем на оси общей степени сокращения $m = 700$ и восстанавливаем перпендикуляр. Точки пересечения перпендикуляра с линиями $m_1^{(3)}$ и $m_2^{(3)}$ проектируем на ось оптимальных сокращений на этапах, после чего находим: $\hat{m}_1 = 4,6$, $\hat{m}_2 = 35,0$.

Значения относительных величин \hat{d}_k находим, проектируя точки пересечения того же перпендикуляра с линиями $d_1^{(3)}$, $d_2^{(3)}$, $d_3^{(3)}$ на ось степени дробления в критических единицах: $\hat{d}_1 = 4,7$, $\hat{d}_2 = 1,9$, $\hat{d}_3 = 0,55$.

Учитывая, что $D = 2,19$;

$$W = \frac{\hat{m}_1 - 1}{\sqrt[4]{m_1^3}} + \frac{\hat{m}_2 - \hat{m}_1}{\sqrt[4]{\hat{m}_1^3 \hat{m}_2^3}} + \sqrt[4]{\frac{m - \hat{m}_2}{m_2^3}} = 2,16;$$

$$d_{кр} = \sqrt[3]{\frac{D}{m - 1}} = 0,146.$$

Далее находим размеры частиц на этапах: $\hat{d}_1 = \bar{d}_1 d_{кр} = 0,7$ см, $\hat{d}_2 = \bar{d}_2 d_{кр} = 0,27$ см, $\hat{d}_3 = \bar{d}_3 d_{кр} = 0,08$ см.

Значение функции затрат

$$A = W \sqrt[3]{\frac{W}{D}} - \frac{1}{d_0} = 1,95,$$

что несколько меньше, чем для схемы обработки, найденной по ординатным спуском.

Метод составления схем обработки с помощью номограмм связан с незначительным числом вычислительных операций, а поэтому эффективен и прост. Номограммы, что очень важно, дают возможность исследовать процесс обработки проб и решать более общие задачи.

§ 5. СХЕМЫ ОБРАБОТКИ ПРОБ С ПЕРЕМЕННОЙ КОНТРАСТНОСТЬЮ

В процессе дробления пробы изменяется содержание в богатейшей частице, а следовательно, и контрастность пробы C . Зависимости контрастности от размера частицы, связанного с точностью обработки, от изменения очень сложна и не дает возможности получить такие простые соотношения, как в предыдущем параграфе. Используя разработанную методику составления оптимальных схем обработки, можно найти степени сокращения и размеры частиц на этапах, удовлетворяющие требованиям точности с учетом изменения контрастности. При этом затраты энергии будут меньше, чем при произвольном выборе значений d_k и m_k , но, возможно, не самыми минимальными. Такие схемы обработки будем называть квазиоптимальными. Расчет квазиоптимальных схем состоит из двух шагов.

Шаг 1. Находим, используя выражения (60)–(65) или по номограммам, оптимальные размеры частиц и степени сокращения.

Шаг 2. Используя уравнение

$$\lg C = a(\lg r)^a + \lg C_{\max},$$

аппроксимирующее зависимость контрастности от размеров частиц, можно определить значения C_k , отвечающие размерам частиц на этапах обработки. Затем корректируют размеры частиц с учетом требований точности и изменения контрастности.

Пусть проба начальной массы $Q_0 = 70$ кг обрабатывается в три этапа до навески $Q_3 = 100$ г. Размер частиц начальной пробы d_0 равен 5 см, плотность рудных частиц γ_p равна $7,5$ г/см³, средняя плотность $\gamma = 3$ г/см³. Содержание металла в рудной частице начальной пробы k_0 равно 0,15, наибольшее содержание в вкраплении $k_{\max} = 0,86$, среднее содержание в пробе $C = 0,02$, $d_{\text{вкр}} = 1,5$ см, предел погрешности задан величиной $\sigma = 0,1$.

Шаг 1. Находим значения

$$m = 700;$$

$$C_0 = k_0 \gamma_p / (c\gamma) - 1 = 17,75;$$

$$D_0 = Q_0 \sigma^2 / (C_0 \gamma) = 13,14,$$

$$d_{\text{кр}} = \sqrt[3]{D_0 / (m - 1)} = 0,26.$$

По номограмме для трех этапов обработки (см. рис. 20) находим \hat{m}_k : $\hat{m}_1 = 4,6$; $\hat{m}_2 = 35$. Значения относительных величин \hat{d}_k определяем по номограмме: $\hat{d}_1 = 4,7$; $\hat{d}_2 = 1,9$; $\hat{d}_3 = 0,55$. Соответствующие размеры частиц \hat{d}_k равны: $\hat{d}_1 = 1,22$ см; $\hat{d}_2 = 0,50$ см; $\hat{d}_3 = 0,14$ см.

Шаг 2. Уже на первом этапе обработки оптимальный размер частиц $\hat{d}_1 = 1,36$ меньше, чем $d_{\text{вкр}}$, значит на втором и третьем этапах контрастность пробы с измельчением изменяться не будет и равна ее максимальному значению:

$$C_{\max} = \frac{k_{\max} \gamma_p}{c \gamma} - 1 = 106,5.$$

Корректируем значения размеров частиц:

$$d_k = \hat{d}_k \sqrt[3]{C_0 / C_{\max}},$$

находим квазиоптимальные значения: $d_1 = 0,7$ см; $d_2 = 0,27$ см; $d_3 = 0,08$ см, т.е. в данном случае квазиоптимальные значения размеров частиц совпадают с оптимальными, отвечающими максимальному значению контрастности.

Рассмотрим пример, где поправки к размерам частиц не равны друг другу, а изменяются от этапа к этапу. Пусть проба массой 1000 кг обрабатывается по навески 100 г за четыре этапа: $d_0 = 10$ см; $d_{\text{вкр}} = 0,02$ см; $k_0 = 0,00001$; $k_{\max} = 1$; $c = 0,000001$; $\gamma_p = 18,3$ г/см³; $\gamma = 3$ г/см³. Точность обработки определяется величиной $\sigma = 0,1$.

Шаг 1. По номограмме для обработки в четыре этапа (см. рис. 21) находим оптимальные степени сокращения и относительные значения \hat{d}_k :

$$\hat{m}_1 = 3,85, \hat{m}_2 = 21,5, \hat{m}_3 = 225,5, \hat{d}_1 = 11,60, \hat{d}_2 = 5,41,$$

$$\hat{d}_3 = 1,95, \hat{d}_4 = 0,42.$$

Значение контрастности для начальной массы пробы равно $C_0 = 60$, вычисляем начальные значения d_k :

$$D_0 = Q_0 \sigma^2 / C_0 \gamma = 55,55;$$

$$d_{кр} = \sqrt[3]{D_0 / (m - 1)} = 0,18;$$

$$\hat{d}_1 = \bar{d}_1 d_{кр} = 2,10;$$

$$\hat{d}_2 = \bar{d}_2 d_{кр} = 0,97;$$

$$\hat{d}_3 = \bar{d}_3 d_{кр} = 0,35;$$

$$\hat{d}_4 = \bar{d}_4 d_{кр} = 0,075.$$

Шаг 2. Все размеры частиц \hat{d}_k больше, чем размер вкрапления $d_{вкр}$, поэтому необходимо внести корректировку с учетом изменения контрастности. Вычисляем коэффициенты C_{max} , a и r_k = $\hat{d}_k / d_{вкр}$:

$$C_{max} = k_{max} \gamma_p / (c\gamma) - 1 = 6 \cdot 10^4;$$

$$a = \frac{3(\lg d_0 - \lg d_{вкр})}{\lg C_{max} - \lg C_0} = 2,7;$$

$$a = \frac{3}{a(\lg d_0 - \lg d_{вкр})} = -0,2;$$

$$r_1 = 105; r_2 = 48,5; r_3 = 17,5; r_4 = 3,75.$$

Значение контрастности для каждого этапа находим из соотношения $a(\lg r_k)^a + \lg C_{max}$, откуда: $C_1 = 2772,6$; $C_2 = 9137,87$; $C_3 = 26310,97$; $C_4 = 54364,48$.

Корректируем значения размеров частиц и определяем квазиоптимальные значения $d_k = \hat{d}_k \sqrt[3]{C_0 / C_{max}}$: $d_1 = 0,59$ см; $d_2 = 0,18$ см; $d_3 = 0,046$ см; $d_4 = 0,008$ см.

Метод определения оптимальных значений размеров частиц и сокращений массы пробы постоянной контрастности позволяет в какой-то степени уменьшить затраты и для пробы с контрастностью, возрастающей при дроблении. При этом погрешность обработки не превышает допустимых пределов.

ОСОБЕННОСТИ СОСТАВЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ СХЕМ
ОБРАБОТКИ ПРОБ РАЗЛИЧНЫХ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ

§ 1. ПОГРЕШНОСТЬ СОКРАЩЕНИЯ ПРОБ
ДЛЯ ГРАНУЛОМЕТРИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Гранулометрический (ситовой, седиментометрический) анализ имеет не менее важное значение, чем химический. В геологии он широко используется в литологических исследованиях терригенных отложений для их диагностики. Для таких полезных ископаемых, как глина, песок, гравий, щебень, он дает их основную промышленную характеристику. При обогащении полезных ископаемых на стадиях грохочения, измельчения, сухой и мокрой классификации важнейшую характеристику процесса дает ситовой анализ. Производительность обогащения и извлечения полезных компонентов в концентратах определяется гранулометрическим составом. Изучению гранулометрического состава придается большое значение в химической промышленности, в производстве абразивных материалов, в почвоведении и на гидравлическом транспорте. Наконец, контроль обработки проб сам по себе требует знания их гранулометрического состава.

Исследования по этому вопросу приводятся М.Ф. Локоновым и Д.А. Красновым. В частности, они предлагают несколько эмпирических формул: q (кг) = $2d$ (мм); $q = 0,02d^2 + 0,5d$ и график Митрофанова, который дает линейную зависимость массы от диаметра, исключая область очень тонких измельчений. Наибольший интерес представляют таблицы гарантийных масс проб, рекомендуемые отдельными исследователями, институтами или другими организациями, которые мы проанализируем далее в сравнении с нашими результатами.

Общий недостаток как таблиц, так и формул — ограниченная область действия, как правило, четко не указанная. Первую серьезную попытку вывести формулу на основе теории вероятностей сделал Д.А. Краснов. Обсуждение вопроса он начинает с критерия точности, за который принимает относительную погрешность в определении выхода заданного класса частиц.

Обозначим числовую долю частиц интересующего нас класса крупности в пробе a_i , число частиц — N_i , а долю остальных частиц, являющуюся суммой долей всех остальных классов, — $1 - a_i$. Для вывода формулы погрешности в соотношении классов воспользуемся формулой

$$\sigma^2 = \left(\frac{1}{p} - 1\right) \left(\frac{1}{n_0} - \frac{1}{N_0}\right), \quad (70)$$

где p — вероятность интересующего нас события; n_0 и N_0 — объемы соответственно выборки и генеральной совокупности (число частиц до и после сокращения). Для нашего случая $p = a_i$.

Производя далее замену числовой доли a_i выходом класса w_i , а также числа частиц до сокращения (N_0) и после него (n_0) массами пробы q_0 и Q_0 , будем иметь в виду, что диаметры классов частиц здесь различны. Обозначив $a_i = N_i/N_0$, $w_i = q_i/q_0$, $\bar{w}_i = Q_i/Q_0$, получим

$$Q_i = N_i d_i^3 \gamma_i; \quad Q_0 = N_0 d_{\text{ЭКВ}}^3 \gamma_{\text{ЭКВ}},$$

где $d_{\text{ЭКВ}}$ и $\gamma_{\text{ЭКВ}}$ получаем, как описано в гл. III, откуда

$$w_i = \frac{a_i d_i^3 \gamma_i}{d_{\text{ЭКВ}}^3 \gamma_{\text{ЭКВ}}} \quad \text{или} \quad a_i = w_i \frac{d_{\text{ЭКВ}}^3 \gamma_{\text{ЭКВ}}}{d_i^3 \gamma_i},$$

где γ_i — плотность i -того класса частиц.

Подставляя массу вместо числа частиц и a_i вместо p в формулу (70), получим

$$\sigma^2 = \left(\frac{d_i^3 \gamma_i}{w_i d_{\text{ЭКВ}}^3 \gamma_{\text{ЭКВ}}} - 1 \right) d_{\text{ЭКВ}}^3 \gamma_{\text{ЭКВ}} \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{Q} \right). \quad (71)$$

Эта формула по существу не отличается от формулы сокращения для химических проб: здесь та же зависимость погрешности сокращения от начальной и конечной массы пробы, от куба диаметра и плотности, и от уже знакомого нам коэффициента контрастности, имеющего для данного случая следующее выражение:

$$C = d_i^3 \gamma_i / (w_i d_{\text{ЭКВ}}^3 \gamma_{\text{ЭКВ}}) - 1.$$

В гранулометрическом анализе отличиями в плотности частиц различных классов крупности можно пренебречь и написать

$$C = d_i^3 / (w_i d_{\text{ЭКВ}}^3) - 1. \quad (72)$$

Сравнивая это выражение с коэффициентом контрастности для рудных проб, устанавливаем, что w_i здесь эквивалентно среднему содержанию полезного компонента c , а содержание полезного компонента в рудной частице здесь равно 100%, т.е. $k = 1$. Отличием является присутствие отношения кубов диаметров: диаметра частиц изучаемой фракции и эквивалентного диаметра частиц пробы.

С некоторым приближением можно сказать, что контрастность в применении к гранулометрической пробе в отношении заданного класса частиц изменяется обратно пропорционально выходу этого класса и прямо пропорционально отношению массы частицы этого

класса к средней массе частицы. Требуемая масса пропорциональна кубу диаметра и обратно пропорциональна выходу класса.

Если в формуле (71) принять $d_i^3 \gamma_i = d_{\text{ЭКВ}}^3 \gamma_{\text{ЭКВ}}$, то получим формулу, по существу идентичную формуле Краснова. Следовательно, формула Краснова требует завышенных масс при анализе мелких фракций, правильных для средних и недостаточных для крупных, в которых $d_i^3/d_{\text{ЭКВ}}^3 > 1$.

Принципиальная идентичность формул надежной массы для изучения вещественного и гранулометрического состава становится очевидной, если принять во внимание, что коэффициент контрастности в первом случае отражает отношение массы полезного компонента в рудной частице к его средней массе на частицу, а во втором — отношение массы частицы i -того класса к массе средней частицы.

Проведем вывод формулы сокращения при гранулометрическом анализе для несколько иной модели. Каждая частица пробы общим числом N_0 подвергается испытанию: с вероятностью p попасть в сокращенную пробу или с вероятностью $1 - p$ попасть в отвал, где $p = 1/m$ (m — степень сокращения).

Нас интересует относительная дисперсия $\sigma_{w_i/\bar{w}}^2$ выхода w_i частиц класса i :

$$w_i = q_i / q_0; \quad \bar{w}_i = Q_i / Q_0,$$

где q_0 , q_i — массы соответственно пробы и класса i после сокращения, Q_0 , Q_i — то же, до сокращения. Искомую дисперсию будем рассматривать как дисперсию отношения q_i/q_0 :

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{отн}}^2 &= \sigma_{w_i/\bar{w}}^2 = \frac{1}{\bar{w}^2} \sigma_{q_i/q_0}^2 = \frac{1}{\bar{w}^2} \cdot \bar{w}^2 \left(\frac{\sigma_{q_i}^2}{q_i^2} + \frac{\sigma_{q_0}^2}{q_0^2} - \right. \\ &\left. - 2 r_{q_1 q_0} \frac{\sigma_{q_1} \sigma_{q_0}}{q_1 q_0} \right) = \frac{1}{q_0^2} \left(\frac{\sigma_{q_i}^2}{w_i^2} + 1 - 2 r_{q_1 q_0} \frac{\sigma_{q_1} \sigma_{q_2}}{w_i} \right). \quad (73) \end{aligned}$$

Величину $r_{q_1 q_0}$ найдем как коэффициент корреляции между слагаемым и суммой: r_{xy} , где $x = q_1$, $y = q_1 + q_2 = q_0$, откуда [10] следует, что

$$r_{xy} = r_{q_1 q_1} \frac{\sigma_{q_1} \sigma_{q_1}}{\sigma_{q_0} \sigma_{q_0}} + r_{q_1 q_2} \frac{\sigma_{q_1} \sigma_{q_2}}{\sigma_{q_0} \sigma_{q_0}}.$$

Поскольку процесс сокращения различных классов независим, то $r_{q_1 q_2} = 0$. С другой стороны, $r_{q_1 q_1} = +1$, откуда

$$r_{xy} = \sigma_{q_1}^2 / \sigma_{q_0}^2.$$

После подстановки этого выражения в формулу (73) получаем

$$\sigma_{\text{отн}}^2 = \frac{1}{q_0^2} \left(\frac{\sigma_{q_i}^2}{w_i^2} + \frac{\sigma_{q_0}^2}{1} - 2 \frac{\sigma_{q_1}^2}{\sigma_{q_0}^2} \frac{\sigma_{q_1} \sigma_{q_0}}{w_i} \right) \quad (74)$$

Дисперсию массы i -того класса ($\sigma_{q_1}^2$) и всей пробы ($\sigma_{q_0}^2$) определим через дисперсию числа частиц:

$$\begin{cases} \sigma_{q_i}^2 = \sigma^2 \{n_i (d_i^3 \gamma_i)\} = \sigma_{n_i}^2 (d_i^3 \gamma_i)^2; \\ \sigma_{q_0}^2 = \sigma^2 \{n_0 (d_{\text{экв}}^3 \gamma_{\text{экв}})\} = \sigma_{n_0}^2 (d_{\text{экв}}^3 \gamma_{\text{экв}})^2, \end{cases} \quad (75)$$

а дисперсию числа частиц найдем из биномиального закона:

$$\sigma_{n_i}^2 = N_i p(1-p) = N_0 a_i p(1-p),$$

$$\sigma_{n_0}^2 = N_0 p(1-p),$$

где a_i — доля частиц класса i по числу частиц. Заменяем ее массовой долей класса w_i :

$$a_i = w_i d_{\text{экв}}^3 \gamma_{\text{экв}} / (d_i^3 \gamma_i),$$

тогда

$$\sigma_{n_i}^2 = N_0 w_i \frac{d_{\text{экв}}^3 \gamma_{\text{экв}}}{d_i^3 \gamma_i} p(1-p) = \frac{Q_0 w_i}{d_i^3 \gamma_i} p(1-p);$$

$$\sigma_{n_0}^2 = N_0 p(1-p) = Q_0 p(1-p) / (d_{\text{экв}}^3 \gamma_{\text{экв}}).$$

Подставляя эти значения в формулу (75), получим

$$\sigma_{q_i}^2 = Q_0 w_i d_i^3 \gamma_i p(1-p);$$

$$\sigma_{q_0}^2 = Q_0 d_{\text{экв}}^3 \gamma_{\text{экв}} p(1-p),$$

что после подстановки этих выражений в формулу (74) дает

$$\sigma_{\text{отн}}^2 = \left(\frac{1}{q_0} - \frac{1}{Q_0} \right) d_{\text{экв}}^3 \gamma_{\text{экв}} \frac{d_i^3 \gamma_i}{w_i d_{\text{экв}}^3 \gamma_{\text{экв}}} + 1 - 2 \sqrt{\frac{w_i d_{\text{экв}}^3 \gamma_{\text{экв}}}{d_i^3 \gamma_i}} \quad (76)$$

Последний множитель этой формулы есть выражение для коэф-

фициента контрастности. Вычтя и прибавив единицу, приведем его к следующему виду:

$$C = \left(\frac{d_i^3 \gamma_i}{w_i d_{\text{экв}}^3 \gamma_{\text{экв}}} - 1 \right) + 2 \left(1 - \sqrt{\frac{w_i d_{\text{экв}}^3 \gamma_{\text{экв}}}{d_i^3 \gamma_i}} \right).$$

В этом выражении мы узнаем коэффициент контрастности и дополнительное слагаемое, которым при больших коэффициентах контрастности можно пренебречь. Действительно, при этом w_i будет очень мало и колебания в выборочной массе i -того класса практически не повлияют на колебания массы пробы после сокращения и, следовательно, рассмотренная модель сокращения для этого случая совпадает с прежней.

Сравним коэффициенты контрастности рассмотренных моделей:

$\frac{d_i^3 \gamma_i}{w_i d_{\text{экв}}^3 \gamma_{\text{экв}}}$	Коэффициент контрастности	
	Формула (71)	Формула (76)
1	0	0
2	1	1,58
4	3	3,85
8	7	8,2
16	15	18,5
32	31	32,6
64	63	64,7
128	127	128,8
256	255	256,9

Из сравнения видно, что модели практически идентичны, начиная с $C = 5$, что соответствует выходу класса средней крупности 15–20%. Для классов с большим выходом требуемые массы рекомендуются увеличивать в 1,5–2 раза.

Сравним массы, получаемые по формуле Ткачева, с рекомендуемыми в мировой практике. При этом будем считать, что подразумеваемая относительная требуемая точность соответствует 5% и относится к некоторому "среднему" классу частиц ($d_{\text{экв}} = d_i$), имеющему выход 10% (табл. 24).

Массы проб, вычисленные по предлагаемой формуле, в целом близки к рекомендуемым различными стандартами (см. табл. 24). Следует, однако, указать, что, если выход интересующего нас класса принять иным, результаты будут резко расходиться, так же, как и при иной гарантийной точности.

Для заданных условий справедливо следующее простое математическое правило: требуемая масса пробы, выраженная в килограммах, численно равна размеру частиц изучаемого класса, выраженному в миллиметрах.

Таблица 24. Масса проб на ситовой анализ по данным различных источников (в кг)

Размер максимальных кусков, мм	Масса пробы	Масса пробы по формуле Ткачева*
Институт Механобр		
150—100	400—200	146—97
100—75	200—150	97—73
75—25	150—25	75—24
25—10	20—10	24—10
10—5	7,5—2,0	10—5
5—1	2—1	5—1
Уральские обогатительные фабрики		
100,0	500—100	97
50,0	200—100	47
0,3—0,1	0,1—0,05	0,3
Руководство А. Таггарта		
16,00—11,32	40	39,813
11,32—8,00	12,5	10,692
8,00—5,66	5	7,776
5,66—4,00	2	5,443
4,00—2,00	1	3,888
2,00—1,00	0,5	1,944
1,00—0,50	0,25	0,972
0,50—0,25	0,1	0,486
0,25—0,00	0,05	0,253
Криворожские железные руды		
250	600	243
200	500	194
150	350	146
100	200	97
80	150—200	78
50	75	47
30	45—40	29
25	25	24
20	20	19

* Для допустимой погрешности 5 % и выхода класса 10 %

Гранулометрический анализ подразумевает определение с достаточной точностью выхода всех или многих классов, поэтому при определении гарантийной массы необходимо брать в расчет класс с минимальным выходом. При уменьшении классового промежутка, т.е. при увеличении детальности анализа, требуемая масса возрастает.

§ 2. ОПТИМАЛЬНЫЕ СХЕМЫ ОБРАБОТКИ ПРОБ РУДНЫХ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ

Пусть необходимо обработать пробу массой q_0 , имеющую предельную контрастность C^* с погрешностью не более σ_0 и получить навеску q_k . Определим требуемый размер измельчения $d_{кр}$:

$$d_{кр}^3 = \frac{\sigma_0^2}{C} \left(\frac{1}{q_k} - \frac{1}{q_0} \right) = \frac{q_0 \sigma_0^2}{C(m_k - 1)},$$

где m_k — требуемая степень сокращения, $m_k = q_0/q_k$. Этот размер мы назвали в предыдущей главе критическим. Если технически достижимая степень измельчения в данной лаборатории или цехе меньше критической ($d_{кр} > d_{тех}$), обработка пробы с заданной точностью возможна. Траекторию обработки пробы в координатах "масса — размер" можно изобразить в виде ломаной линии (рис. 17). "Траектория" обработки в один этап с дроблением до $d_{кр}$ изобразится стрелкой из точки $a(d_0, q_0)$ в точку $b(d_{кр}, q_k)$.

Критический размер обладает следующим свойством. Если пробу нельзя измельчить до размеров, меньших критического, то возможна обработка только в один этап. Это можно доказать следующим образом. Пусть пробу можно обработать в два этапа, выбрав на промежуточном этапе некоторую массу q_1 и измельчение d_1 . Тогда на первом этапе

$$\sigma_1^2 = Cd_1^3 \left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_0} \right),$$

на втором

$$\sigma_2^2 = Cd_{кр}^3 \left(\frac{1}{q_k} - \frac{1}{q_1} \right).$$

Приравняв сумму этих дисперсий к общей дисперсии в один этап, получим

$$(d_1^3 - d_{кр}^3) \left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_0} \right) = 0,$$

что возможно только при $d_1 = d_{кр}$ или $q_1 = q_0$. И то, и другое условие возможно только при одном этапе обработки.

* Плотность пробы в этом разделе включена в качестве множителя в контрастность.

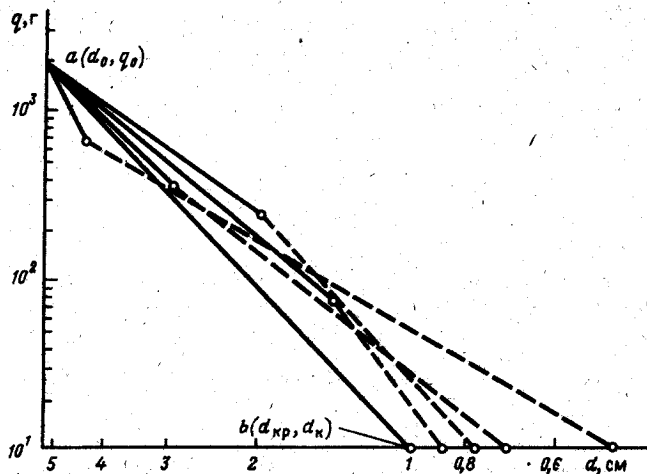


Рис. 17. Траектория обработки пробы в координатах "сокращение — размер".

Сплошная линия — первый этап; прерывистая линия — второй этап; жирная линия — оптимальная траектория.

Иначе обстоит дело, если контрастность изменяется: соответствующее этому условию равенство будет иметь вид

$$(C_1 d_1^3 - C_{\max} d_{кр}^3) \left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_0} \right) = 0.$$

Из этого следует, что при $d_1 = d_{кр} \sqrt[3]{C_{\max}/C_1}$ возможно промежуточное сокращение. Любопытно, что если коэффициент контрастности увеличивается пропорционально уменьшению куба диаметра (случай, возможный и рассмотренный в гл. IV), то при любом размере сохраняется равенство $C_1 d_1^3 = C_{\max} d_{кр}^3$. Такую пробу можно сокращать до q_k при любом диаметре частиц, так как дробление не увеличивает гомогенизации рудного компонента. Таким образом, возможность обработки пробы в два и более этапов возникает вследствие возможности измельчения пробы мельче $d_{кр}$. Кроме того имеет значение изменение контрастности по мере дробления частиц.

Начнем рассмотрение схем обработки проб со случая двух этапов с постоянной контрастностью. Выберем конечный размер измельчения $d_2 < d_1$ и будем изменять d_1 в пределах $d_{кр} < d_1 < d_0$. При заданном фиксированном d_1 определим ту минимальную массу q_1 , которая с учетом последующего дробления до d_2 и сокращения навески q_k все еще обеспечит необходимую точность, из следующего равенства:

$$\alpha_0^2 = Cd_2^3 \left(\frac{1}{q_k} - \frac{1}{q_1} \right) + Cd_1^3 \left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_0} \right).$$

Удобнее использовать вместо массы пробы необходимую степень сокращения на первом этапе m_1 , а размеры частиц выражать в критических диаметрах. Сделав эти замены, получим

$$m_1 = \frac{m_k (1 - d_2^{*3}) - (1 - d_1^{*3})}{d_1^{*3} - d_2^{*3}},$$

откуда необходимая масса будет равна

$$q_1 = \frac{d_1^{*3} - d_2^{*3}}{(\sigma^2/C) + (d_1^{*3}/q_0) - (d_2^{*3}/q_k)}, \quad (77)$$

где m_k — общая степень сокращения; d_i^* — размер в единицах критического размера $d_i^* = d_i/d_{кр}$. При заданных d_1 и d_2 найденная степень сокращения оптимальна. Увеличение массы приведет к перерасходу на измельчение, а уменьшение недопустимо из-за повышения погрешности.

Сопоставив работу на дробление по П. Риттингеру при различных допустимых вариантах d_1 и d_2 , можно выбрать оптимальный вариант обработки.

Для практического расчета возьмем следующий пример: $q_0 = 2 \text{ кг} = 2000 \text{ г}$; $q_k = 10 \text{ г}$; $k = 60 \%$; $d_{кр} = 0,0677 \text{ см}$; $m_k = 200$; $\gamma_p = 7 \text{ г/см}^3$; $\gamma = 3,0 \text{ г/см}^3$; $c = 5 \%$; $\sigma = 0,05 \%$; $C = 3 \left(\frac{0,6 \cdot 7}{0,05 \cdot 3} - 1 \right) = 81$.

Результаты расчетов для этого параметра приведены в табл. 25. Минимум затрат достигается при $d_1 = 0,2 \text{ см}$, $d_2 = 0,05 \text{ см}$ и степени сокращения на первом этапе $m_1 = 352$. По данным этих расчетов на рис. 18 изображена функция затрат в виде топографической поверхности. Наиболее важная ее особенность состоит в том, что она не образует локальных минимумов, и применение любого из подходящих методов оптимизации обязательно приведет к глобальному минимуму. Он находится в довольно узком "желобе", вытянутом вдоль оси d_2 . Следующая практически важная особенность состоит в том, что в широких окрестностях минимума затраты на обработку изменяются незначительно, т.е. приближенная оптимизация с практической точки зрения вполне удовлетворительна. В областях, далеких от оптимальной точки, затраты резко возрастают и при самых неблагоприятных схемах обработки превышают минимальные в десятки раз.

Расчет с применением других гипотез о затратах на дробление приводят почти к тем же оптимальным точкам: по гипотезе Риттингера $d_1 = 0,18$, $d_2 = 0,047$, $q_1 = 248$; по гипотезе Кирпичева $d_1 = 0,25$, $d_2 = 0,04$, $q_1 = 294$; по гипотезе Бонда $d_1 = 0,20$, $d_2 = 0,44$, $q_1 = 300$. Отсюда следует, что для практических целей допустимо выбрать ту ги-

Таблица 25. Промежуточные массы проб (первое число, в г) и затраты на обработку проб в два этапа (второе число, в усл. ед.)

Измельчение на втором этапе d_2	Измельчение на первом этапе								
	0,07	0,1	0,2	0,3	0,5	1	2	3	5
10^{-6}	11,1 110000	31,9 —	230 —	609 —	1339 —	1884 —	1985 —	1995 —	1999 —
10^{-3}	11,1 390,5	31,9 516	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —
0,01	11,1 295	31,9 229	230 319	610 636	1340 1356	1884 1885	1985 1985	1995 1996	1999 1999
0,02	11,1 290	32,5 213	235 206	620 356	1350 688	1887 944	1985 993	1996 998	1999 1000
0,03	11,2 288	33,9 208	248 170	647 261	1378 472	1893 632	1986 662	1996 665	1999 666
0,04	11,3 287	37,5 206	279 156	710 220	1437 370	1907 478	—	1996 499	—
0,045	11,5 287	40,8 205	307 153	763 211	—	—	—	—	—
0,055	11,8 287	46,4 205	352 152*	843 207	1544 318	1929 387	1991 398	1997 400	—
0,06	13,5 286	80,3 205	587 168	1177 224	1732 295	1963 328	—	—	2000 333
0,067	44,2 286	543 227	1608 260	1869 283	—	—	—	—	2000 299
0,0675	126 286	1136 255	1872 284	1961 —	—	1999 296	—	—	2000 296
0,06769	1597 294	1976 294	1998 295	—	—	—	—	—	—

* Оптимальный вариант (минимум затрат на обработку).

потезу о зависимости затрат от размера измельчения, которая приведет к более простым методам оптимизации.

Аналогичные расчеты проведены для большого набора степеней сокращения от 2 до 10^7 (табл. 26). Эти расчеты вместе с теоретическими выводами предыдущей главы показывают, что оптимальная схема обработки пробы существует, и для ее расчета необходимо иметь только два параметра — требуемую степень общего сокращения и критический диаметр. Первый из этих параметров всегда известен по исходной массе и конечной навеске. По своему характеру это конструктивный параметр, ибо именно он определяет траекторию обработки: с его изменением изменяется соотношение степеней сокращения на этапах и соотношение диаметров измельчения.

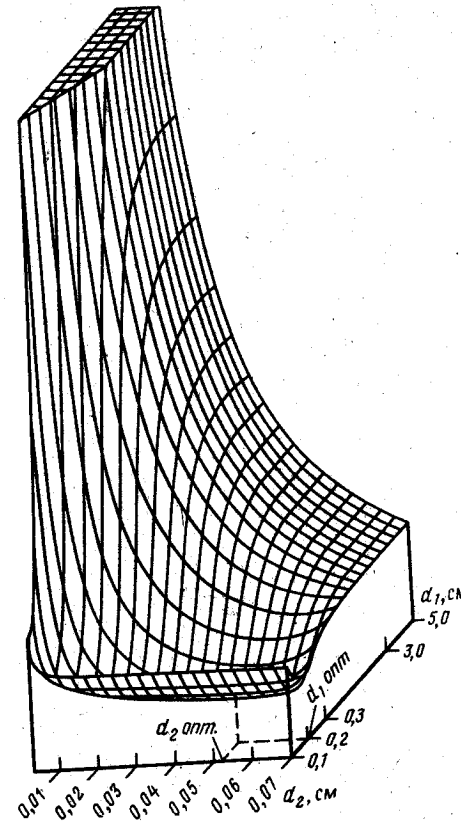


Рис. 18. Вид поверхности целевой функции (затрат на измельчение) для двухэтапной обработки в координатах "степень измельчения на первом этапе — степень измельчения на втором этапе". Масштабы логарифмические

Второй параметр — критический диаметр — выступает здесь в качестве масштабного множителя. Он определяет абсолютные размеры измельчений. Выражение для критического диаметра, приводившееся в предыдущих разделах, мы преобразуем в следующий вид:

$$d_{кр} = \sqrt[3]{1/T},$$

$$T = \frac{C}{\sigma^2 q_k} \left(\frac{m_k - 1}{m_k} \right). \quad (78)$$

Величину T назовем тяжестью обработки пробы. Из приведенного выражения видно, что тяжесть обработки увеличивается с увеличением начальной массы пробы и с уменьшением конечной навески. Она увеличивается пропорционально коэффициенту контрастности и уменьшается с увеличением допустимой погрешности.

Теоретически, если принимать в расчет только затраты на дробление, обработка в два этапа всегда выгоднее, чем в один. Однако обычно степень измельчения загружаемого в аппарат ма-

териала при эффективном его использовании должна быть не менее трех—пяти. Поэтому практически включение второго этапа становится эффективным, если требуемая общая степень сокращения не менее 100. При увеличении m_k конечный размер измельчения пробы должен быть меньше, но никогда не опускается ниже $0,63 d_{кр}$. Этот размер можно принять как контрольный при составлении оптимальных схем в два этапа. Оптимальные и другие возможности траектории обработки пробы изображены на рис. 17.

Подобные рассуждения справедливы и для схем обработки проб более чем в два этапа. Техника их составления сложна (см. гл. V),

Таблица 26. Параметры оптимальной обработки пробы в два этапа для примера, приведенного в § 5, гл. V (контрастность постоянная)

m_k	m_1	d_1^*	d_2^*	d_1^*/d_2^*
2	1,1	1,01	0,99	1,01
3	1,33	1,13	0,97	1,2
5	1,68	1,25	0,93	1,3
10	2,47	1,42	0,86	1,66
20	3,48	1,62	0,80	2,0
50	5,12	1,94	0,75	2,6
100	6,14	2,3	0,73	3,2
200	8,06	2,6	0,70	3,7
500	11,3	3,2	0,68	4,6
1000	14,9	3,7	0,67	5,5
7000	24,1	6,0	0,66	9,1
10^4	26,3	6,6	0,65	10,1
10^5	49,5	11,5	0,64	18,1
10^6	94,0	20,0	0,638	31,5
10^7	168	35,5	0,638	56,1

* В единицах критического диаметра ($d_{кр} = 0,068$ см).

и реализуются они с помощью ЭВМ. Результаты расчетов приведены на номограммах (рис. 19-22), позволяющих по заданной общей степени сокращения составлять оптимальные схемы. Рассмотрен подробно процесс составления оптимальной схемы обработки использованием разработанных номограмм.

Первый шаг состоит в выборе числа этапов обработки. Оно определяется единственным параметром — общей требуемой степенью сокращения пробы $m_k = Q_0/q_k$, где Q_0 — начальная масса, q_k — навеска, идущая в анализ, г. В табл. 27 во второй колонке приведено число этапов, вычисленное в соответствии с принципом эффективного использования измельчителей. В каждом из них степень измельчения должна достигать 3-5, но не опускаться ниже. Так, при общей степени сокращения $m_k = 200$ обработку необходимо проводить в два этапа, при $m_k = 5 \cdot 10^3$ требуется три этапа, и т.д. Рекомендуем следовать простому эмпирическому правилу: число этапов обработки равно десятичному порядку степени сокращения, уменьшенному на единицу.

Второй шаг в составлении оптимальной схемы обработки заключается в выборе степени сокращения на этапах. Для этого берется номограмма для соответствующего числа этапов. В нашем случае ($m_k = 200$, $n = 2$) необходимо использовать номограмму на рис. 19, а. По горизонтальной оси находим значение 200 и с него снимаем степени сокращения (от массы Q_0 !) на этапах:

Таблица 27. Оптимальная степень сокращения* (числитель, %) и степень измельчения (знаменатель, $d/d_{кр}$) при неизменяющейся контрастности

m_k	n	Этапы обработки				
		1	2	3	4	5
$< 10^2$	1	$\frac{100}{1,0}$	—	—	—	—
$10^2 - 10^3$	2	$\frac{39}{2,5}$	$\frac{61}{0,7}$	—	—	—
$10^3 - 10^4$	3	$\frac{28}{5}$	$\frac{30}{2}$	$\frac{47}{0,5}$	—	—
$10^4 - 10^5$	4	$\frac{15}{12}$	$\frac{17}{5,5}$	$\frac{27}{1,9}$	$\frac{41}{0,4}$	—
10^5 и более	5	$\frac{10}{25}$	$\frac{13}{14}$	$\frac{16}{6}$	$\frac{22}{2}$	$\frac{39}{0,3}$

* Логарифм общей степени сокращения разделяется на слагаемые в указанных пропорциях, возводится в степень и получается частная степень сокращения m_i ; для получения общей степени сокращения m , на i -том этапе следует перемножить частные степени от первой до i -той.

Таблица 28. Оптимальная степень сокращения* (числитель, %) и степень измельчения (знаменатель, $d/d_{кр}$) проб при изменяющейся контрастности

m_k	n	Этапы обработки				
		1	2	3	4	5
$< 10^2$	1	$\frac{100}{1,0}$	—	—	—	—
$10^2 - 10^3$	2	$\frac{42}{3,0}$	$\frac{58}{0,6}$	—	—	—
$10^3 - 10^4$	3	$\frac{26}{9,5}$	$\frac{32}{2,5}$	$\frac{42}{0,45}$	—	—
$10^4 - 10^5$	4	$\frac{15}{30}$	$\frac{21}{10}$	$\frac{25}{2,2}$	$\frac{35}{0,35}$	—
10^5 и более	5	$\frac{12}{100}$	$\frac{14}{35}$	$\frac{20}{10}$	$\frac{22}{2}$	$\frac{32}{0,25}$

* См. список к табл. 27.

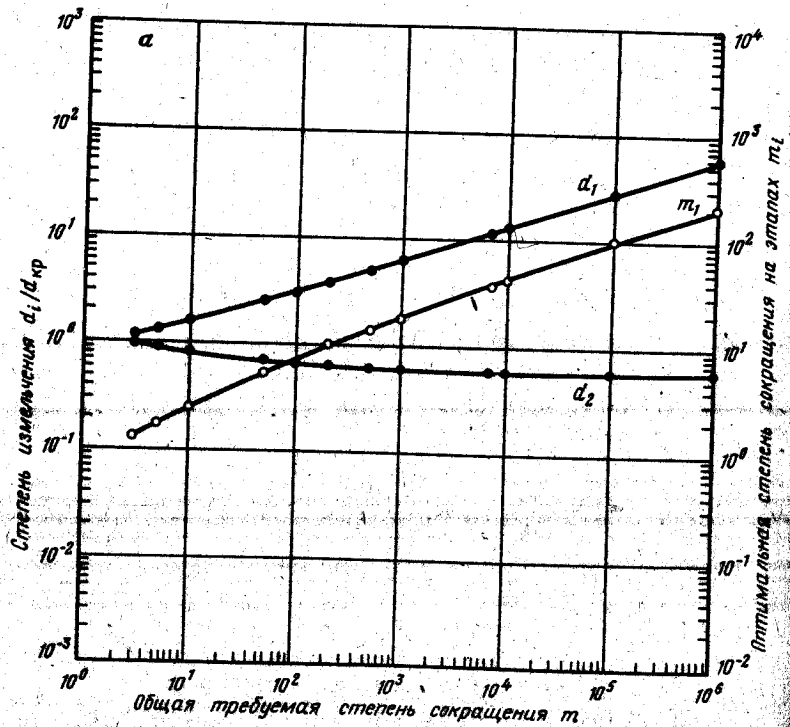
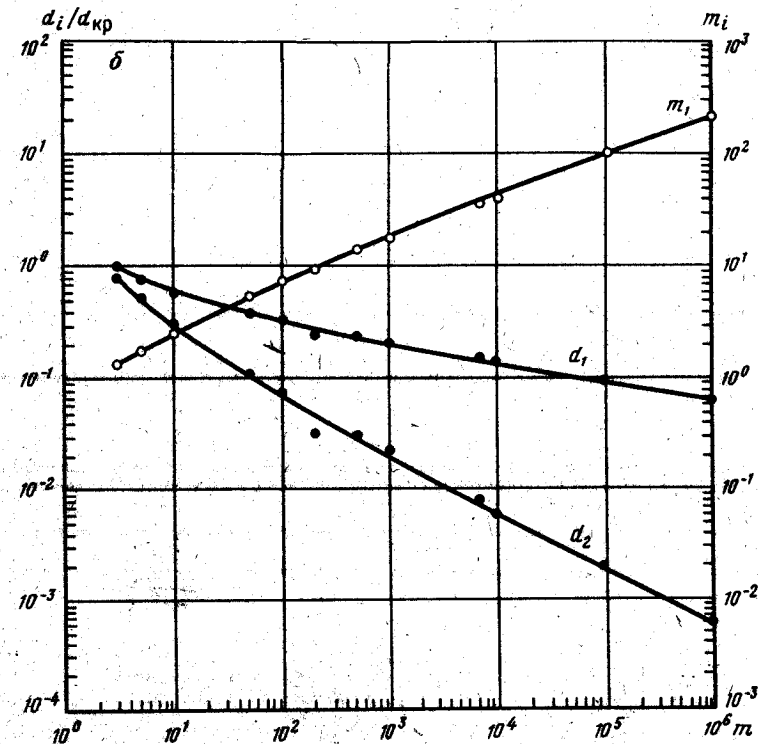


Рис. 19. Номограмма оптимальных схем обработки проб в два этапа с

На горизонтальной оси откладывают общую степень сокращения m и воспроектировав точку пересечения перпендикуляра с линией m_1 на ось справа, оптимальные d_1 и d_2 на ось слева

$= 8$, $m_2 = m_k = 200^*$. Для случая $m_k = 5 \cdot 10^3$ используем номограмму на рис. 20, а и для значения 5000 снимаем степень сокращения на этапах: $m_1 = 6$, $m_2 = 80$, $m_3 = 5000$. Для приближенного определения степеней сокращения можно использовать табл. 27 или для вариантов с изменяющейся контрастностью — табл. 28. Для $m_k = 200$ ($n = 2$) из второй строки табл. 26 устанавливаем, что на первом этапе необходимая степень сокращения должна составить 39 % от общей величины, на втором — 61 %. Для того чтобы перейти от этих цифр непосредственно к степеням сокращения, необходимо логарифм общей степени сокращения ($\lg 200 = 2,3$) разделить в указанной пропорции (39 % составляет 0,9, 61 % составляет 1,4) и потенцировать ($m_1 = 10^{0,9} \approx 8$, $m_2 = 10^{1,4} \approx 25$). Убеждаемся, что общая степень сокращения составляет $200 : 8 \times 25 = 200$. Отклонение полученного

* Для руд с переменной контрастностью аналогичным способом используем рис. 19, б.



стойкой (а) и переменной (б) контрастностью.

навливают перпендикуляр из точки m . Оптимальные сокращения находят, проектируя точки пересечения перпендикуляра с линиями

значений от точных, взятых по номограмме, незначительные. Из табл. 27 и 28 легко устанавливается общая тенденция в степенях сокращения: они увеличиваются от первых этапов обработки к последним. Для проб с изменяющейся в процессе дробления контрастностью эта тенденция выражена менее отчетливо.

Третий шаг в построении оптимальных схем обработки проб заключается в установлении относительных размеров частиц (измельчений) на этапах. Оно аналогично описанному для степеней сокращения. Естественно, что значения снимаются с графиков, обозначающих размер, а не степень сокращения (кривые d на номограммах и левые шкалы для считывания значений). В нашем случае ($m_k = 200$) на рис. 19, а находим $d_1 = 2,6$, $d_2^* = 0,69$. Для приближенного решения используем табл. 26: $d_1^* = 2,5$, $d_2^* = 0,7$.

Общая качественная картина распределения измельчений такова. При многоэтапной обработке степень измельчения на первых этапах невелика и увеличивается к последним этапам. При увеличении числа

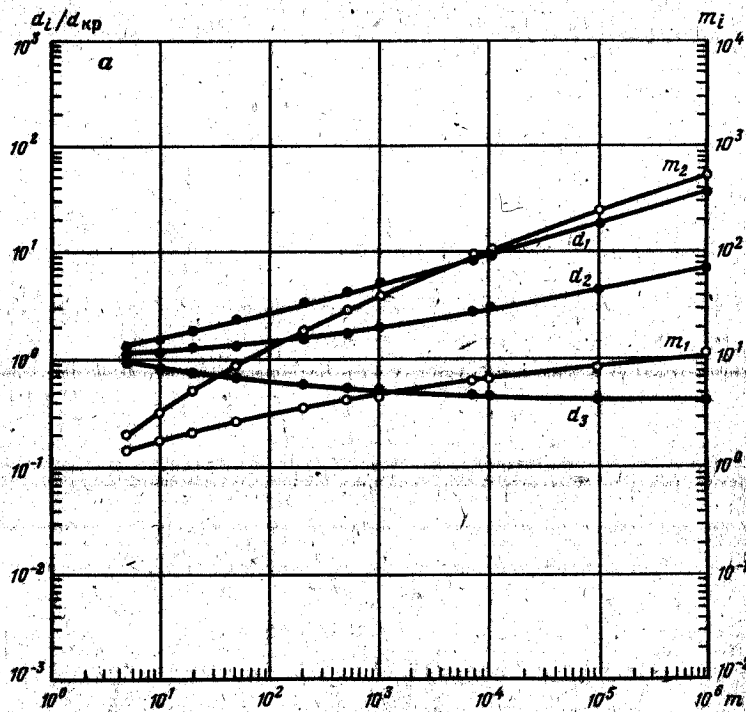


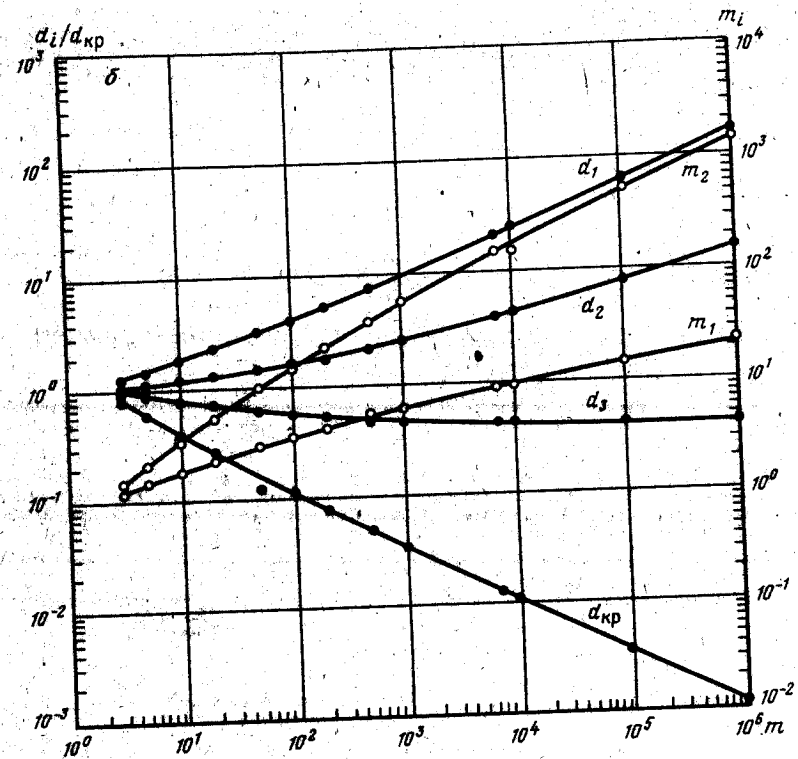
Рис. 20. Номограмма оптимальных схем обработки проб в три этапа с постоянной контрастностью. Обозначения те же, что на рис. 19

этапов конечный размер уменьшается от 1 (для одного этапа) до 0,1 (для пяти этапов). Конечная степень измельчения (в критическом диаметрах) приблизительно равна критическому диаметру, деленному на число этапов. Если такое измельчение невозможно по техническим причинам, число этапов необходимо уменьшить по сравнению с тем, которое рекомендуется исходя из общей степени сокращения.

Четвертый шаг заключается в расчете коэффициента контрастности, подробно описанном в предыдущих разделах книги. Для быстрого приближенного его расчета приводим номограмму (рис. 23).

Пятый шаг заключается в расчете тяжести обработки T и критического диаметра $d_{кр}$ по формулам (78). Мы приводим номограмму, реализующую эти формулы (рис. 24). Для иллюстрации четвертого и пятого шагов, а также всего процесса в целом рассмотрим следующий пример.

Требуется обработать кварц-галенитовую пробу с содержанием



линией (а) и переменной (б) контрастностью.

свинца около 2,0 %. Начальная масса пробы 13 кг, навеска, идущая в анализ, 1 г, допустимая погрешность обработки 10 %. Коэффициент контрастности такой пробы равен (см. пример 1, § 3, гл. IV).

$$C = \frac{k \gamma_p}{c \gamma} - 1 = \frac{86 \cdot 7,5}{2 \cdot 3} - 1 = 107.$$

Расчет C на рис. 24 показан штриховыми линиями. Исходные значения на шкалах 1 и 2, также 3 и 4 соединяют прямыми и получают промежуточные значения на шкалах 5 и 6. Соединяют их прямой и на шкале 7 читают ответ.

Тяжесть обработки этой пробы вычисляется по уравнению

$$T = \frac{C \gamma}{\sigma^2 q_k} \frac{(m_k - 1)}{m_k} = \frac{3 \cdot 107}{0,1^2 \cdot 1} = 32100 \approx 32 \cdot 10^3,$$

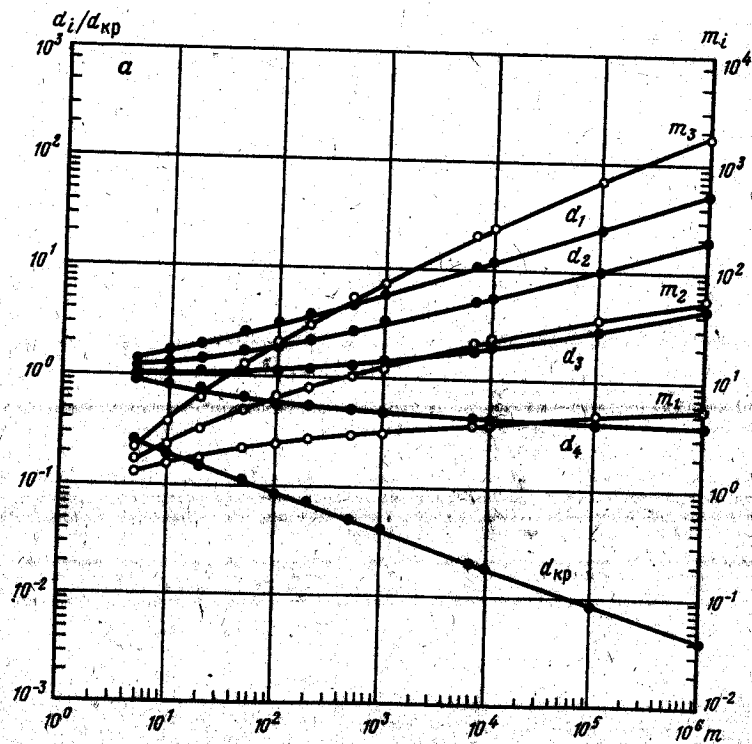


Рис. 21. Номограмма оптимальных схем обработки проб в четыре этапа. Обозначения те же, что на рис. 19

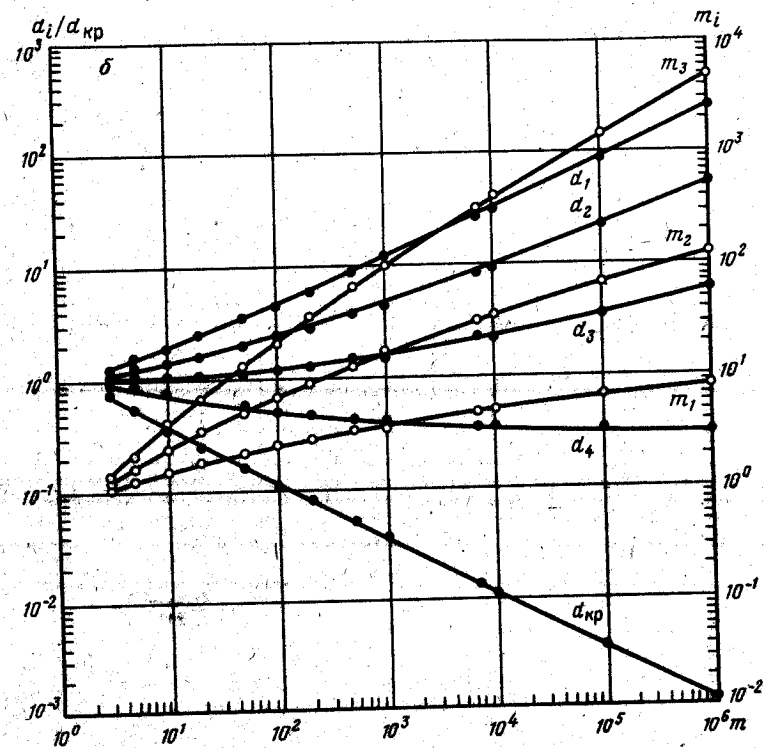
критический диаметр — по уравнению

$$d_{кр} = \sqrt[3]{\frac{1}{\Gamma}} = \sqrt[3]{\frac{1}{32 \cdot 10^3}} = \frac{1}{10^3 \sqrt[3]{32}} = \frac{1}{31,7} = 0,032 \text{ (см)}$$

На рис. 24 расчет $d_{кр}$ указан пунктирными линиями. Шкалы задействуют в порядке их нумерации. В данном случае точность построения на номограмме ввиду ее малых размеров едва ли достаточна для практики.

В соответствии с общей степенью сокращения ($m_k = 13000:1 = 1,3 \cdot 10^4$) оптимальная обработка такой пробы должна проводиться в четыре этапа. Степени сокращения и измельчения считываем с номограммы рис. 21 или приблизительно выбираем из табл. 27. Параметры схемы обработки приведены в табл. 29.

Еще раз проиллюстрируем, как изменяются число этапов, степени сокращения и измельчения по этапам. Для этого модифицируем приведенный пример. При массе пробы 2 кг степень сокращения равна 200.



с постоянной (а) и переменной (б) контрастностью.

равна 200. Число этапов для такой степени сокращения равно двум. По табл. 27 определяем, что степень сокращения на первом этапе должна составить 8, на втором — 25. На первом этапе необходимо размельчить пробу до $d_1 = 2d_{кр} = 0,0677 \cdot 2 = 0,14$ см, на втором — до $d_2 = 0,7d_{кр} = 0,05$ см. Если бы исходная масса пробы была 20 кг, то общая степень сокращения составила бы 2000, оптимальное число этапов — три (см. табл. 29).

Исторически сложилось, что исследования по надежной обработке проб были стимулированы трудностями надежного анализа золотых и серебряных руд. В работах Д. Брунтонна, Р. Ричардса, Г.С. Чечотта и других исследователей рассматривались именно такие руды.

С точки зрения обработки проб золотые и серебряные руды необходимо подразделить на два типа, сильно отличающиеся по контрастности. Руды, в которых металл присутствует в минерал-носителях, характеризующихся незначительными концентрациями металла, например сульфиды, имеют низкую контрастность, приближенно равную отношению содержания металла в носителе к содержанию его в породе. Обработка таких руд ничем не отличается от

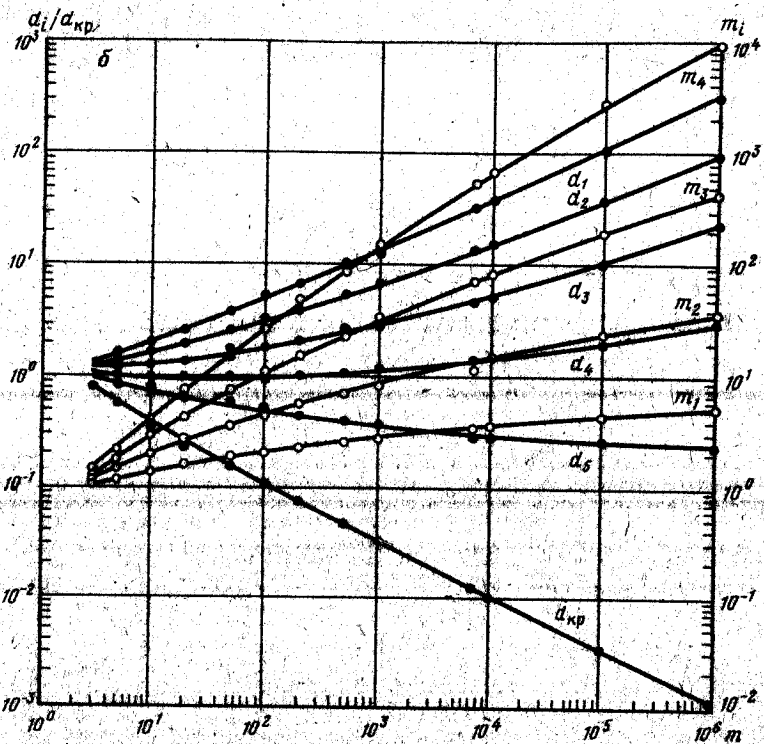


Рис. 22. Номограмма оптимальных схем обработки проб в пять этапов. Обозначения те же, что на рис. 19

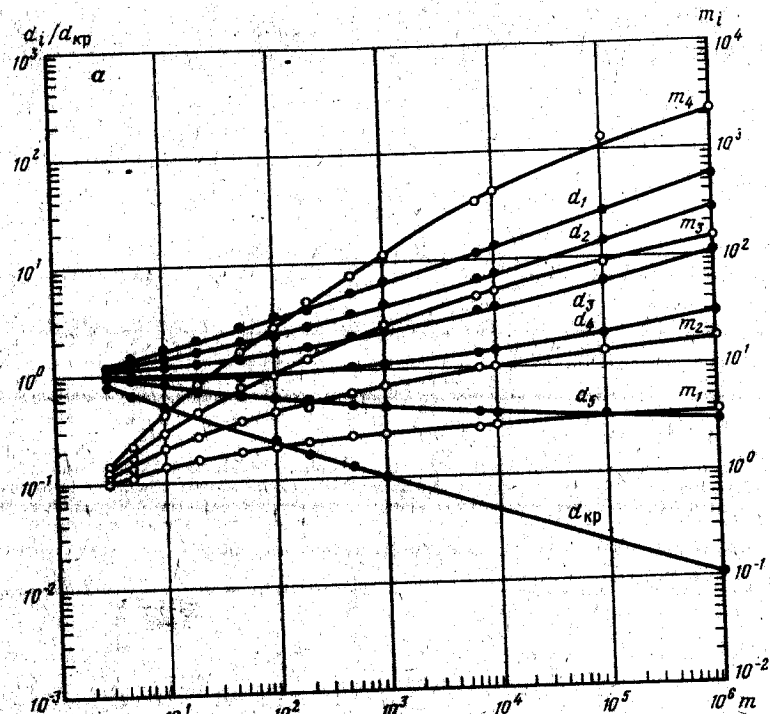
обработки руд других металлов, например свинцовых. Пусть имеет пробу с золотосодержащим пиритом. Содержание золота 20 г/т, содержание пирита 20%. Тогда содержание золота в пирите 100 г/т. Коэффициент контрастности вычисляется следующим образом:

$$C = \frac{100 \cdot 5}{20 \cdot 2,6} - 1 \approx 9.$$

Такие руды равномернее, чем обычные свинцовые или медные руды.

На много порядков более высока контрастность у руд, содержащих самородный металл. Для того же примера, если золото присутствует в самородном виде,

$$C = \frac{10^6 \cdot 17}{20 \cdot 2,7} - 1 \approx 3,1 \cdot 10^4.$$



с постоянной (а) и переменной (б) контрастностью.

Надежная масса таких проб по крайней мере в 10000 раз превышает таковую для предыдущей руды при измельчении ее до полного высвобождения несущего ингредиента. В наиболее благоприятном для обработки случае коэффициент контрастности такой руды при более крупном дроблении был бы обратно пропорциональным кубу диаметра. Если найденное для предыдущего примера значение $C \approx 3 \cdot 10^5$ относится к размеру 0,5 мм (это реально для среднего и крупного вкрапленного золота), то для той же пробы в стадии дробления 10 мм минимально возможное значение C будет равно 37,5. Реальное его значение будет зависеть от неравномерности оруденения. Определить его чрезвычайно трудно, так как при малых содержаниях золота оценить неоднородность его распределения визуально невозможно, а ставить многочисленные эксперименты дорого.

Методика, разработанная и изложенная в главе IV, кажется авторам наиболее приемлемой для этого случая. В табл. 30 даны

формулу сокращения проб угля сделал В.Р. Клер [5]. Полученная им формула имеет следующий вид:

$$q = \frac{V^2 \sum d_i^3 f_i w_i t^2}{V_{\text{доп}}^2} \gamma \frac{m-1}{m} n,$$

где q — необходимая масса на этапе обработки, г; $V_{\text{доп}}$ — общая допустимая относительная погрешность обработки; t — коэффициент вероятности; d_i — диаметр частиц i -того гранулометрического класса, см; w_i — его выход i -того гранулометрического класса, %; f_i — поправка на форму частиц; γ — плотность угля, г/см³; m — коэффициент сокращения; n — число этапов обработки. Величина $\sum d_i^3 f_i w_i$ есть не что иное как эффективный размер частиц пробы, $V_{\text{доп}}^2/t^2$ — допустимая среднеквадратическая относительная погрешность.

Все перечисленные величины в той же форме и в том же смысле уже включались в большинство формул сокращения, за исключением редко включаемой поправки на конечность сокращаемой пробы, $(m-1)/m$.

Показателем контрастности в формуле Клера является величина V — коэффициент вариации определяемого качества от частицы к частице, что в точности соответствует английскому подходу к выводу формулы сокращения. В формуле эта величина не раскрывается, а для практического использования значение V предлагается определять экспериментально анализом отдельных частиц. Для зольности такой анализ осуществляется изучением распределения плотности частиц, разделением угля в тяжелых жидкостях. Таким образом, формула Клера в целом идентична более ранним. Включение в нее числа этапов обработки n не может быть рекомендовано, так как в соответствии с такой трактовкой общая допустимая погрешность делится по числу этапов на равные части, что не делает обработку оптимальной. В гл. V было показано, что оптимальное распределение погрешностей по этапам довольно сильно отличается от равномерного.

подавляющее большинство угольных проб отбирается из недр и на поверхности для анализа на зольность. Контрастность этих проб по золе определяется главным образом включениями пустой породы кровли, почвы и прослоев. Конституционная зола распределена более равномерно и ввиду малого ее содержания картину существенно не изменяет. Первая особенность угольных проб состоит в том, что пустая порода при обработке проб измельчается значительно хуже, чем сам уголь, поэтому в формулах сокращения необходимо применять не средний размер частиц (кусков), определяемый из ситового анализа, а максимальный.

Вторая особенность состоит в том, что отделение пустой породы прослоев и включений от угля при измельчении происходит быстро,

Таблица 31. Необходимые массы проб при обработке по различным данным (в кг)

Размер наибольших кусков, мм	По английскому стандарту	По американскому стандарту	По южноафриканскому стандарту	По формуле Клера для "относительно неравномерных" углей	По формуле Ткачева (для 10 %-ной погрешности)
100	—	—	1000	—	—
76,2	291	—	—	—	1000
50,8	145	—	—	—	314
38,1	73	—	113	—	133
25,4	36	450	—	28	39
19,1	18	225	13,5	—	17
12,7	9	112	—	5	4,9
9,5	—	55	3,0-4,5	3	2,1
6,35	4,5	27	—	1	0,6
4,8	—	14	—	—	0,26
1,20	0,227	—	—	0,005	0,004
0,422	0,113	—	—	—	—

и мы рекомендуем подставлять в формулу максимальную контрастность на всех этапах обработки. Этот вывод подтверждается, в частности, интересными экспериментальными данными В.Р. Клера по распределению зольности между отдельными зёрнами в различных ситовых классах угля Экибастузского месторождения: гистограммы зольности частиц практически повторяют друг друга в широком диапазоне размеров. На ряде других месторождений дисперсия зольности частиц увеличивается с измельчением весьма незначительно. Можно принять стандартный коэффициент контрастности по зольности из следующих условий: $k = 100 \%$, $\gamma_p = 2,5 \text{ г/см}^3$, $c = 10 \%$, $\gamma = 1,5$.

Коэффициент контрастности при этом вычисляется следующим образом:

$$C = \frac{100 \cdot 2,5}{10 \cdot 1,5} - 1 \approx 16.$$

Это дает следующие упрощенные формулы надежных масс (q — в г, d — в см): для 1 %-ной допустимой погрешности $q = 2,4 \times 10^5 d^3$, для 5 %-ной $q = 1 \cdot 10^4 d^3$, для 10 %-ной $q = 2,4 \cdot 10^3 d^3$.

Сравним рекомендованные при обработке проб различными международными стандартами массы с вычисленными по этим формулам (табл. 31).

Для определения сернистости угля коэффициент контрастности необходимо определить исходя из наиболее неблагоприятного ва-

рианта, когда большая часть серы вызвана колчеданом и имеет содержание около 1 %:

$$C = \frac{54 \cdot 5}{1 \cdot 1,5} - 1 \approx 180.$$

Это по крайней мере в десять раз превышает контрастность золе, что влечет соответствующее увеличение массы при той же точности обработки, что противоречит мнению некоторых исследователей, считающих, что уголь наиболее неравномерен по золе.

По углероду, водороду, теплоте сгорания и выходу летучих контрастность угля весьма незначительна, как и по главным оксидам золе. Представляет интерес контрастность угля по типичным для него редким и рассеянным элементам. За основу возьмем германий. Будем считать, что содержание германия 5 г/т необходимо определять с погрешностью не хуже 10 %. Практически весь он сосредоточен в отдельных ингредиентах типа витринита, содержание которого примем в среднем 10 % от массы угля. Тогда

$$C = \left(\frac{50 \cdot 1,5}{5 \cdot 1,5} - 1 \right) \approx 10.$$

Таким образом, масса проб, надежная для определения зольности или сернистости, обеспечивает надежный анализ элементов-примесей, связанных с органической частью угля. Эта масса может оказаться недостаточной при анализе угля на элементы, образующие в нем самостоятельные минералы.

§ 4. ШЛИХО-МИНЕРАЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЫ

Заслуженной популярностью в геологии пользуются минералогические пробы. Они необходимы при шлихо-минералогических поисках, количественно-минералогическом изучении горных пород в шлифах, с помощью так называемых "протокочек", при минералогическом картировании рудных месторождений, промышленного опробования каустеритовых и других россыпей.

Весьма перспективно направление в опробовании рудных месторождений, развиваемое с 1963 г. Н.В. Ивановым, и состоящее в замене большей части анализов химического состава минералогическими с последующим пересчетом.

Особенностью минералогических проб является, во-первых, узкий гранулометрический состав. Действительно, измельчение должно обеспечить высвобождение минералов из сростков, но не быть настолько, что затруднило бы диагностику и подсчет минералов. Во-вторых, содержание изучаемого компонента (т.е. минерала) "рудной" частице равно 100 %. Обе эти особенности облегчают вывод формулы необходимой навески. Она может быть получена либо

из общей формулы сокращения как частный ее случай, либо непосредственно из биномиального закона теории вероятностей.

Коэффициент контрастности минералогической пробы получается из обычной подстановкой $k = 1$: $C = \gamma_p / (c\gamma) - 1$, где c — массовая доля изучаемого минерала; γ_p — его плотность, г/см³; γ — средняя плотность пробы, г/см³. Для достаточно малых содержаний единицей можно пренебречь и принять $C = \gamma_p / (c\gamma)$. Для больших степеней сокращения, когда величину $1/q - 1/Q$ можно опустить, необходимая масса пробы будет определяться по формуле

$$q = \frac{d^3 \gamma}{\frac{\gamma}{c} \sigma^2} = \frac{\gamma_p d^3 \gamma}{c \gamma \sigma^2} = \frac{\gamma_p d^3}{c \sigma^2} \quad (79)$$

Таким образом, формула (79) — частный случай общей формулы сокращения проб, приведенной в гл. III. В этой своей разновидности она близка формуле В.А. Новикова, полученной в 1940 г.: $q = (100 - A)d^3 \gamma / (\sigma^2 A)$, где A — содержание изучаемого минерала в пробе, %. При малых его значениях выражение $(100 - A)/A$ совпадает с $1/c$, где c — содержание в долях. При концентрациях, больших 50 %, за изучаемый компонент лучше принять тот, содержание которого меньше 50 %.

Существенное отличие предлагаемой формулы от формулы Новикова состоит в множителе γ_p / γ , корректирующем необходимую массу на плотность изучаемого минерала. При прочих равных условиях величина относительной погрешности определяется числом зерен изучаемого минерала в пробе. При одной и той же массовой доле c числовая доля зерен этого минерала будет во столько раз меньше, во сколько больше плотность этого минерала по сравнению со средней плотностью зерен пробы γ_p / γ . Мы еще раз останавливаемся на этом простом соотношении, потому что не только В.А. Новиков, но и другие исследователи, например Д.А. Краснов, в формулах, предназначенных для контроля обработки минералогических проб, не учитывают этот множитель. В.Д. Белоусов [2], упоминая этот факт, не дает, однако, определенного заключения о границах применимости формулы Краснова в шлихо-минералогическом опробовании.

Подставляя в формулу сокращения вместо c его значение $c = a \gamma_p / \gamma$, получим $q = d^3 \gamma / (a \sigma^2)$. Других преобразований при этом не требуется, так как относительная погрешность инвариантна относительно способа выражения концентраций (в долях, процентах или по числу частиц).

Разделив обе части последнего равенства на величину $d^3 \gamma$ (средняя масса одного зерна), получим необходимое число зерен в сокращенной пробе n : $n = 1 / (a \sigma^2)$, а умножив обе части последнего равенства на числовую долю зерен нашего минерала a , получим следующую простую формулу:

$$n_p = 1/\sigma^2,$$

(80)

где n_p — число частиц интересующего нас минерала ($n_p = an$), которое необходимо иметь в навеске (или охватить подсчетом, взвешиванием, измерением и т.д.), чтобы обеспечить относительную квадратическую погрешность не более σ . Эта формула — непосредственное выражение погрешности относительной частоты редких событий. В применении к минералогическим пробам она рекомендована еще А.А. Глаголевым, известным советским специалистом в области методики количественно-минералогического анализа, и приводится, например, в 1971 г. у Г.В. Серебрякова.

По формуле (80) получаем следующие соотношения:

Допустимая относительная погрешность в определении содержания минерала, %	1	5	10	15	20
Требуемое число зерен этого минерала в выборке	10000	400	100	45	25

Эти данные полезно применять для оценки числа спор определенного вида, необходимых в подсчете соотношений палеоботанических видов, и в других аналогичных случаях, когда требуется оценить с нужной достоверностью долю каких-либо геологических объектов.

Навески минералогических проб, вычисляемые по формуле (79), интересно сравнить с экспериментальными данными по сокращению различных минеральных смесей. Так, Н.В. Иванов в 1963 г. для "статистически весового" метода минералогического анализа кианитовых руд получил следующие результаты (табл. 32).

Таблица 32. Экспериментальные погрешности сокращения кианитовых руд с содержанием кианита около 50 %

Размер частиц, мм	Экспериментальная навеска, мг	Экспериментальная погрешность среднего из двух проб*	Вычисленная по формуле (79) навеска, мг
0,59	427,9	6,1 (8,6)	204
-0,59 + 0,42	200,0	0,8**	—
-0,21 + 0,105	25,0	4,7 (6,6)	5
-0,105 + 0,053	6,0	5,9 (8,34)	0,4

* В скобках указана погрешность единичного сокращения.

** Эта очень малая погрешность не принималась во внимание.

Таблица 33. Надежные навески кианитовых руд для статистически-весового минералогического анализа

Содержание кианита, %	Размер частиц, мм	Рекомендуемая масса пробы, мг		
		по Н.В. Иванову		по Ю.А. Ткачеву для 10 %-ной погрешности
		для рядовых анализов	для контрольных анализов	
55	+ 0,59	400	1000	420
52	-0,59 + 0,420	100	400	87,5
35	-0,420 + 0,210	50	100	30
30	-0,210 + 0,105	12,5	25	3,9
25	-0,105 + 0,053	3,0	5,0	0,7
20	-0,053 + 0,010	0,7	1,0	0,05

В другой серии экспериментов Н.В. Иванов установил, что для фракции с содержанием кианита 50 %, средним размером частиц 0,3 мм и массой 100 мг среднее содержание по семи пробам устанавливается с погрешностью 1,5 %, погрешность сокращения одной пробы при этом равна ($1,5 \sqrt{7} \approx 4 \%$). Вычисленная по формуле (79) навеска, соответствующая такой погрешности, составляет 118 мг, т.е. очень близка к фактической. В результате этих и других экспериментов Н.В. Иванов рекомендует следующие надежные массы (табл. 33).

Из табл. 32 видно, что рекомендации Н.В. Иванова для рядовых анализов довольно хорошо соответствуют 10 %-ной погрешности. Однако для очень мелких фракций рекомендованные им массы завышены.

Обширные эксперименты по определению надежной массы касситеритовых шлиховых концентратов проведены В.Д. Белоусовым [2]. При максимальном размере зерен 1—3 мм В.Д. Белоусов рекомендует использовать навеску 500 г; по формуле (79) для 15 %-ной погрешности следует брать навеску 378 г, для 10 %-ной — 850 г; при максимальном размере зерен 3—5 мм навеска составляет соответственно 1200, 896 и 2000 г.

§ 5. НАДЕЖНАЯ ВЕЛИЧИНА И ИЗМЕЛЬЧЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ НАВЕСОК

В соответствии с общепринятой терминологией в лабораторию на анализ сдается лабораторная проба, а ее дубликат остается у заказчика. Масса и измельчение лабораторной пробы должны обеспечивать требуемую точность в содержании по наиболее неблагоприятному из определяемых компонентов с учетом предстоящей лабораторной обработки. Исходная проба до стадии лабораторной готовит-

ся в специальных цехах или других подразделениях заказчика анализ под его контролем. Таким образом, "стыковка" заказчика и аналитика происходит на стадии лабораторной пробы.

Дальнейшая подготовка пробы к анализу до стадии аналитической навески происходит в лаборатории под контролем аналитика. Под аналитической навеской понимается частная проба, весь материал которой непосредственно идет в анализ. Эта стадия обработки имеет свои особенности. Во-первых, масса обрабатываемых проб очень мала. Она изменяется от 20–50 г в начале процесса до 20–10 мг в конце его. Прогресс в области анализа приводит к дальнейшему уменьшению аналитической навески, усложняет подготовку надежных проб и приводит к тому, что по времени и трудоемкости эта подготовка превышает собственно анализ.

Во-вторых, лабораторная проба представлена ингредиентами, освобожденными от сростков. Без большой ошибки ее коэффициент контрастности можно считать достигшим максимума и не изменяющимся в процессе дальнейшей подготовки. В-третьих, контроль размера частиц пробы проводится не просеиванием, которое для тонкого помола становится неэффективным. Обычно степень измельчения контролируется продолжительностью истирания или на ощупь. Для этого необходимо знание типовой гранулометрической характеристики измельчителей в динамике. Ее получают не ситовым анализом, а различными специфическими методами, например с помощью электроимпульсной установки.

Литература, посвященная погрешностям сокращения лабораторных проб, образует самостоятельный поток, который незначительно пересекается с аналогичной литературой горно-геологического профиля. Исследования по этой теме публикуются в журналах преимущественно химико-аналитического и спектроскопического профиля. Известна формула Вильсона для средней квадратической погрешности процентного содержания σ (в %):

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (\Delta k_i \gamma_i - \Delta k_j \gamma_j)^2 \frac{w_i w_j}{\gamma_i \gamma_j} \frac{1}{n}$$

где m — число минералов, слагающих породу; w_i — содержание этих минералов в породе, %; γ_i — их плотность, г/см³; n — число частиц в пробе, $\Delta k_i = k_i - c$; k_i — содержание изучаемого элемента в i -том минерале, %; c — его содержание в породе, %.

Наиболее широко формула Вильсона употребляется для двухкомпонентной смеси:

$$\sigma^2 = (k_1 - k_2)^2 \frac{w_1 w_2}{n} \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma^2} \quad (81)$$

где σ — абсолютная погрешность содержания элемента; k_1, k_2 — содержание элемента в 1- и 2-м минералах; γ_1, γ_2 — их плотности.

w_1, w_2 — содержание минералов в породе ($w_2 = 1 - w_1$); γ — ее средняя плотность; n — число частиц в пробе.

Если число частиц выразить через массу q и размер зерен d и перейти к относительной погрешности, то формула Вильсона примет следующий вид:

$$\sigma_{\text{отн}}^2 = \left(1 - \frac{k_2}{k_1}\right)^2 \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma} \frac{w_2}{w_1 q} d^3 \quad (82)$$

Если плотности минералов отличаются незначительно, формула Вильсона для многокомпонентной смеси приобретает следующий вид:

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (k_1 - k_2)^2 \frac{w_i w_j}{n}$$

или в частном случае для трехминеральной породы:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} [(k_1 - k_2)^2 w_1 w_2 + (k_1 - k_3)^2 w_1 w_3 + (k_2 - k_3)^2 w_2 w_3] \quad (83)$$

Анализ формул Вильсона позволяет выявить два существенных отличия от наших формул. Во-первых, в формулах Вильсона опущена зависимость погрешности от сокращаемой массы пробы. Во-вторых, А. Вильсон положил равными плотности всех ингредиентов. При анализе большинства горных пород на основные компоненты это вполне допустимо, так как плотности породообразующих минералов отличаются незначительно. Для руд это допущение приводит к занижению расчетной погрешности по сравнению с фактической.

Приведем результаты сравнительных расчетов погрешностей сокращения для некоторых приведенных А. Вильсоном петрографических примеров по формулам Вильсона и по формуле авторов (гранит, табл. 34; норит, табл. 35). Коэффициент контрастности рассчитывался по формуле

$$C = \sum_{i=1}^m R_i^2 p_i; \quad R_i = \frac{k_i \gamma_i}{c \gamma} - 1,$$

где m — число минералов-носителей; k_i — содержание элемента в i -том минерале-носителе, %; γ_i — плотность i -того минерала-носителя, г/см³, $p_i = p_{w_i} \gamma_i$, где p_{w_i} — массовая доля минерала-носителя в породе. Расчет проводился по программам для микрокалькулятора, приводимым в приложениях. Совпадение результатов более чем удовлетворительное, свидетельствующее о том, что навеска 1 г из пробы крупностью 0,1 мм (стандарт Демонда-Хальфердала)

Таблица 34. Коэффициенты вариации содержания породобразующих оксидов плесневяного гранита при взятии навески 1 г из пробы, измельченной до 0,1 мм ($\gamma = 2,7 \text{ г/см}^3$)

Компоненты	Плотность, г/см ³	Содержание в минералах, %			Содержание в породе, %	Коэффициент вариации, %	
		Кварц	Альбит	Биотит		по А. Вильсону	по Ю.А. Ткачеву
Минералы:							
кварц	2,65	100	—	—	35,0	0,23	0,24
альбит	2,62	—	100	—	60,0	0,15	0,14
биотит	3,10	—	—	100	5,0	0,80	0,77
Оксиды:							
SiO ₂	—	100	68,7	35,2	78,0	0,04	0,02
Al ₂ O ₃	—	—	19,4	10,0	12,2	0,16	0,08
FeO	—	—	—	42,7	2,1	0,95	0,8
Na ₂ O	—	—	11,8	—	7,1	0,14	0,14

Таблица 35. Коэффициенты вариации содержания породобразующих оксидов норита при взятии навески 1 г из пробы, измельченной до 0,1 мм ($\gamma = 3,1 \text{ г/см}^3$)

Компоненты	Плотность, г/см ³	Содержание в минералах, %			Содержание в породе, %	Коэффициент вариации, %	
		Гиперстен	Анортит	Биотит		по А. Вильсону*	по Ю.А. Ткачеву
Минералы:							
гиперстен	3,50	100	—	—	50,0	0,2	0,18
анортит	2,74	—	100	—	50,0	0,2	0,18
Оксиды:							
SiO ₂	—	51,7	43,0	47,45	0,02	0,02	0,016
Al ₂ O ₃	—	—	36,6	18,32	0,2	0,2	0,18
FeO	—	30,9	15,46	15,46	0,2	0,2	0,18
MgO	—	17,4	8,68	8,68	0,2	0,2	0,18
CaO	—	—	20,2	10,08	0,2	0,2	0,18

* Округлено, как в оригинале.

Таблица 36. Характеристика надежности аналитических навесок для аксессуарных компонентов горных пород, образующих самостоятельные минералы

Минерал	Компонент	Ожидаемое содержание, г/т	Коэффициент вариации в навеске ($m = 1 \text{ г}$, $d = 0,1 \text{ мм}$), %	Навеска (г) при $d = 0,1 \text{ мм}$ и погрешности не выше 5 %	Степень дополнительного измельчения (мкм) при погрешности не выше 5 %
Пирит	FeS ₂	10000	2,5	0,25	—
Ильменит	TiO ₂	10000	2,3	0,20	—
Кальцит	CO ₂	10000	1,8	0,13	—
Апатит	P ₂ O ₅	2000	4,3	0,75	—
Хромит	Cr	200	16,5	10,9	40
Халькопирит	Cu	100	22,3	20,0	30
Циркон	Zr	100	23,3	21,7	30
Золото	Au	5	211	1780	8

Таблица 37. Гранулометрические характеристики некоторых стандартных образцов (по Е.К. Вульфсону, Л.М. Иванцову, Ю.И. Стахееву)

Стандартный образец	Объем частицы, мкм ³			Средний диаметр, мкм
	Минимальный x 10 ²	Максимальный x 10 ⁶	Средний x 10 ⁴	
G-1 — (гранит, НБС*, США)	2,4	2,2	10	46
W-1 — (диабаз, НБС, США)	0,4	0,21	0,8	20
GM — (гранит, Геол. ин-т, ГДР)	1,3	1,3	1,3	23
BM — (базальт, Геол. ин-т, ГДР)	0,5	0,9	0,7	19
TM — (глинистый сланец, Геол. ин-т, ГДР)	0,2	0,5	0,3	14

* Национальное бюро стандартов.

по породобразующим оксидам обеспечивает точность не ниже 0,2 %, а по железу — не ниже 1 %.

Подготовка к спектральному силикатному анализу (навеска 20 мг, погрешность 10–20 %) не потребует дополнительного измельчения таких горных пород. Точнее, растирка и смешивание с внутренним стандартом, если он применяется, может проводиться после отбора нужной массы и имеет технологические цели, не связанные с обеспечением надежности навески.

Таблица 38. Характеристики стандартных образцов СССР

Элемент	Основной минерал-носитель	Плотность, г/см ³	Содержание, %		Коэффициент кон-трастности	Коэффициент вариации (в %) для различных навесок					
			в минерале	в образце		10 мг	20 мг	100 мг	200 мг	1 г	2 г
СГ-1А (альбитизированный гранит)											
Zr	Циркон	4,7	49,5	0,072	1197	20	14	6,4	4,5	2,0	1,4
Na	Альбит	2,6	9,7	4,05	1,4	0,69	0,49	0,22	0,15	0,07	0,06
B	Турмалин	3,2	4,0	0,001	4800	40	28	13	8,9	4,0	2,8
СГД-1А (габбро эссексское)											
Ti	Ильменит	4,7	31,6	1,03	47	4,2	3,0	1,3	0,90	0,42	0,30
P	Апатит	3,2	18,3	0,44	50	4,3	3,1	1,4	0,96	0,43	0,31

Для изучения элементов аксессуарных минералов необходимы значительно большие навески или более тщательное их измельчение (табл. 36). Для анализа элементов, содержащихся в породах в таких же малых количествах, но не образующих самостоятельных минералов, следует брать столь же малые навески, как и для главных оксидов. Сравнивая разброс содержаний в сопоставимых навесках, можно решать обратную задачу, т.е. делать предварительные выводы о формах нахождения элементов, что хорошо иллюстрируется приведенным в гл. IV примером со стронцием и барием.

Особо важное значение в аналитической практике имеет обоснование надежной подготовки стандартных образцов, так как ошибки от непредставительности их навесок переносятся на все анализируемые пробы. Гранулометрический состав некоторых имеющих международное употребление стандартных образцов, исследованный электроимпульсным методом в Институте геохимии и аналитической химии (ГЕОХИ), приводится в табл. 37.

В свидетельствах на стандартные образцы СГД-1А (габбро эссексское), СГ-1А (трапп), СГ-1А (альбитизированный гранит) гранулометрические характеристики не приводятся. По аналогии, а также основываясь на данных о динамике измельчения распространенных минералов в вибромельнице, принимаем для них средний размер 50 мкм и рассчитываем коэффициенты вариации для различных элементов в этих образцах. Табл. 38 дает возможность интерполировать без расчетов и определять массы при заданной точности для широкого круга элементов. Эти значения можно дополнить расчетами Ю.И. Стахеева и др. по формуле Вильсона для американских стандартных образцов (табл. 39).

Таблица 39. Коэффициенты вариации отбора аналитической навески из стандартных образцов США, %

Элемент	Масса навески, мг						
	1	3	10	30	100	300	1000
Образец G-1							
Al	2,1	1,2	0,66	0,38	0,21	0,12	0,06
Mg	26,2	15,2	8,30	4,80	2,62	1,52	0,83
Ca	7,04	4,08	2,28	1,25	0,70	0,41	0,22
Образец W-1							
Al	1,11	0,64	0,35	0,20	0,11	0,06	0,04
K	4,95	2,88	1,41	0,90	0,50	0,26	0,16

Приведенные материалы убедительно свидетельствуют о необходимости расчетного контроля погрешности сокращения на стадии лабораторной обработки пробы, особенно для современных методов, использующих микроколичества вещества. При навеске 1-10 мг нужен обязательный прямой или косвенный контроль тонкости помола, так как для большинства элементов распространенных горных пород (кроме породообразующих) требуемый размер частиц здесь будет порядка 1-5 мкм, что является труднодостижимой задачей. Во избежание недоразумений рекомендуется рассчитывать "сквозную" схему обработки, включающую этапы лабораторного измельчения, исходя из требуемой для анализа навески и крупности. В этом случае лабораторная проба и ее дубликат представляют собой промежуточный продукт. Если анализ проводится в лаборатории другой организации, такую тесную стыковку осуществить практически невозможно. Тогда при документации лабораторной пробы следует указывать среднюю квадратическую погрешность ее предыдущей обработки.

Приложение 1

АЛГОЛ-ПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
ЧИСЛА "УСПЕХОВ" В БИНОМИАЛЬНОМ,
ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОМ И НОРМАЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ
ДЛЯ ЭВМ "МИР"

"ПУСТ" БИГИНО. "ФОРМ" 2; "РАЗ" 6; $P = K/N \Gamma$; $Q = 1 - P$; $MX = N \times P$;
 $DX = MX \times Q$; $DXG = DX \times (N \Gamma - N) / (N \Gamma - 1)$; $A = NI$; $S = BI$; $CNB = 0$;
 $CNG = 0$; $SINB = 0$; $SING = 0$; $S1B = 1 / (\sqrt{X}) \times \sqrt{8 \times ARCTG(1)}$; $SIG =$
 $= 1 / (\sqrt{DXG}) \times \sqrt{8 \times ARCTG(1)}$; $S2 = -1 - MX$; $CG = 0$; $CB = 0$; $CV = 0$;
 $SIG = 0$; $SIB = 0$; "ВЫВ" "ЗНАЧ" [СОВОКУПНОСТЬ], "ПРОБ" 2, $N \Gamma$, "СТР"
[ВЕРОЯТНОСТЬ], "ПРОБ" 2, P , "СТР", [ИСПЫТАНИЙ], "ПРОБ" 2, N , "СТР",
[МАТ. ОЖИДАНИЕ], "ПРОБ" 2, MX , "СТР" [ДИСП. БИНОМ.], "ПРОБ" 2, DX ,
"СТР", [ДИСП. ГИПЕР.], "ПРОБ" 2, DXG ; "ВЫВ" "ЗАГ" "ТАБ" 1, УСПЕХОВ,
БИНОМ., ГИПЕР., НОРМ. Б, ГОРМ. Г.; $B = Q \uparrow N$; $V = 0$; $I = 0$; $M1. "E"$
 $N - 1 > N \Gamma - K$ "ТО" "НА" $M6$ "ИНА" "НА" $M2$; $M6. G = 0$; "E" $I = 0$ "ТО"
"НА" $M7$; $B = B \times P \times (N + 1 - I) / I$; $M7. CB = CB + B$; $NB = S1B \times EXP(-S2 /$
 $\sqrt{DX}) \uparrow 2/2$; $NG = SIG \times EXP(-S2 / \sqrt{DXG}) \uparrow 2/2$; $CNB = CNB + NB$;
 $CNG = CNG + NG$; "E" $I > A$ "И" $I < S$ "ТО" ($SIB = SIB + B$; $SINB = SINB +$
 $+ NB$; $SING = SING + NG$); "E" $F(I/\Pi) = 0$ "ТО" "ВЫВ" "ТАБ" 1, $I, B, G,$
 NB, NG ; $I = I + 1$; $S2 = S2 + 1$; "E" $I < N$ "ТО" "НА" $M1$ "ИНА" "НА" $M2$;
"E" $I \leq K$ "ТО" "НА" $M4$ "ИНА" "НА" $M3$; $M4. "PA3" R$; "E" $G = 0$ "ИЛИ"
 $N - I = N \Gamma - K$ "ТО" $G = C(K, I) \times C(N \Gamma - K, N - I) / C(N \Gamma, N)$ "ИНА" $G = G$
 $\times (K + 1 - I) \times (N + 1 - I) / (N \Gamma - K - N + 1)$; $CG = CG + G$; "E" $I = 0$ "ТО" "НА"
 $M5$; $B = B \times P \times (N + 1 - I) / I$; $M5. "PA3" 6$; $CB = CB + B$; $NB = S1$
 $B \times EXP(-S2 / \sqrt{DX}) \uparrow 2/2$; $NG = SIG \times EXP(-S2 / \sqrt{DXG}) \uparrow 2/2$; $CNB =$
 $= CNB + NB$; $CNG = CNG + NG$; "E" $I > A$ "И" $I < S$ "ТО" ($SIG = SIG + G$;
 $SIB = SIB + B$; $SINB = SINB + NB$; $SING = SING + NG$); "E" $F(I/\Pi) =$
 $= 0$ "ТО" "ВЫВ" "ТАБ" 1, I, B, G, NB, NG ; $I = I + 1$; $S2 = S2 + 1$; "E" $I < N$
"ТО" "НА" $M2$ "ИНА" "НА" KO ; $M3. G = 0$; $B = B \times P \times (N + 1 - I) / I$; $CB = CB$
 $+ B$; $NB = S1B \times EXP(-S2 / \sqrt{DX}) \uparrow 2/2$; $NG = SIG \times EXP(-S2 / \sqrt{DXG})$
 $\uparrow 2/2$; $CNB = CNB + NB$; $CNG = CNG + NG$; "E" $I > A$ "И" $I < S$ "ТО" ($SIB =$
 $= SIB + B$; $SINB = SINB + NB$; $SING = SING + NG$); "E" $F(I/\Pi) = 0$ "ТО"
"ВЫВ" "ТАБ" 1, I, B, G, NB, NG ; $I = I + 1$; $S2 = S2 + 1$; "E" $I < N$ "ТО" "НА"
 $M3$ "ИНА" "НА" KO ; $KO. "ВЫВ" "ЗНАЧ" "СТР", [СУММА], "ПРОБ" 9, CB,$
"ПРОБ" 3, CG , "СТР", "ПРОБ" 8, [ВЕРОЯТНОСТЬ В ИНТЕРВАЛЕ], "ПРОБ" 2,
 $NI, [-], BI, "СТР", [БИНОМИАЛЬНОЕ], "ПРОБ" 18, SIB, "СТР", [ГИПЕР$
ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ], "ПРОБ" 12, $SIG, "СТР", [НОРМАЛЬНОЕ Б], "ПРОБ" 19,$
 $SINB, "СТР", [НОРМАЛЬНОЕ Г.], "ПРОБ" 19, SING "ГДЕ" \Phi(X) = 10 \uparrow \Sigma$
($I = 1, X, LG(I)$); $NI = MX - T \times \sqrt{DX}$; $BI = MX + T \times \sqrt{DX}$; $C(X, Y) =$
 $= \Phi(X) / \Phi(Y) / \Phi(X - Y)$ "КОН"

Информатива к примеру: объем генеральной совокупности $N \Gamma = 20$, объем
выборки $N = 10$, вероятность успеха $P = K / N \Gamma = 8 / 20 = 0,4$.
"ПУСТ" $N \Gamma = 20$; $K = 8$; $N = 10$; $T = 2$; $\Pi = 1$ "КОН"

Директива для начала счета

"ВЫП" $R = 4$; "НА" БИГИНО "КОН"

Результаты будут выведены в следующем виде

СОВОКУПНОСТЬ 20

ВЕРОЯТНОСТЬ . 400000,00

ИСПЫТАНИЙ 10

МАТ. ОЖИДАНИЕ . 400000₁₀ 1
 ДИСП. БИНОМ. . 240000₁₀ 1
 ДИСП. ГИПЕР. . 126816₁₀ 1

"ТАБЛИЦА" 1

УСПЕХОВ	БИНОМ.	ГИПЕР.	НОРМ. Б.	НОРМ. Г.
0	.604650 ₁₀ -2	.384600 ₁₀ -3	.140881 ₁₀ -2	.178839 ₁₀ -4
1	.402900 ₁₀ -1	.102500 ₁₀ -1	.918641 ₁₀ -2	.630465 ₁₀ -3
2	.120900 ₁₀ 0	.807100 ₁₀ -1	.394907 ₁₀ -1	.100693 ₁₀ -1
3	.214800 ₁₀ 0	.258100 ₁₀ 0	.111913 ₁₀ 0	.728704 ₁₀ -1
4	.250500 ₁₀ 0	.376100 ₁₀ 0	.209080 ₁₀ 0	.238927 ₁₀ 0
5	.200400 ₁₀ 0	.257700 ₁₀ 0	.257510 ₁₀ 0	.354960 ₁₀ 0
6	.111200 ₁₀ 0	.804700 ₁₀ -1	.209080 ₁₀ 0	.238930 ₁₀ 0
7	.423200 ₁₀ -1	.102000 ₁₀ -1	.111911 ₁₀ 0	.728704 ₁₀ -1
8	.105700 ₁₀ -1	.382500 ₁₀ -3	.394901 ₁₀ -1	.100693 ₁₀ -1
9	.156590 ₁₀ -2	0	.918633 ₁₀ -2	.630465 ₁₀ -3
10	.104392 ₁₀ -3	0	.140881 ₁₀ -2	.178839 ₁₀ -4
СУММА	.998696 ₁₀ 0	.107300 ₁₀ 1		

ВЕРОЯТНОСТЬ В ИНТЕРВАЛЕ .991620₁₀ 0 — .709838₁₀ 1
 БИНОМИАЛЬНОЕ .980410₁₀ 0
 ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ .107353₁₀ 1
 НОРМАЛЬНОЕ Б. .945171₁₀ 0
 НОРМАЛЬНОЕ Г. .969257₁₀ 0

НОРМ. Б. — нормальное распределение с дисперсией, вычисленной по формуле для биномиального распределения.
 НОРМ. Г. — нормальное распределение с дисперсией, вычисленной по формуле для гипергеометрического распределения.

Приложение 2

ПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНОГО КОЭФФИЦИЕНТА Контрастности материала, состоящего из смеси двух ингредиентов, из которых только один содержит изучаемый элемент*

Коэффициент контрастности C вычисляется по формуле

$$C = k_1 \gamma_1 / (c \gamma) - 1,$$

где γ_1 — содержание элемента в "рудном" ингредиенте (минерале), %; k_1 — его плотность, г/см³; c — среднее содержание элемента в материале пробы; γ — средняя плотность материала пробы.

* Программы в приложениях 2-10 написаны для микрокалькулятора "Электроника Б3-34".

Адрес	Команда	Код	Инструкция
00	x	12	F ПРГ
01	ИП1	61	Набрать программу F АВТ
02	+	13	Занести исходные данные:
03	ИП2	62	c — в рег. 1
04	÷	13	γ — в рег. 2
05	1	01	k — в рег. y
06	—	11	γ _p — в рег. x
07	C/П	50	В/О C/П Прочитать результат на индикаторе

Время вычисления 4 с.

Пример: $c = 2$; $\gamma = 4$; $k = 87$; $\gamma_p = 7.5$.

Ответ: 80,56.

Приложение 3

ПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНОГО КОЭФФИЦИЕНТА Контрастности материала, состоящего из двух ингредиентов

Коэффициент контрастности C вычисляется по формуле

$$C = R_1^2 \frac{R_2}{R_2 - R_1} + R_2^2 \frac{R_1}{R_1 - R_2}$$

$$R_i = k_i \gamma_i / (c \gamma) - 1,$$

где k_1, k_2 — содержание элемента соответственно в 1- и 2-м ингредиентах (минералах), %; γ_1, γ_2 — плотности этих ингредиентов, г/см³; γ — средняя плотность минерала, г/см³; c — среднее содержание элемента в пробе, %.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Инструкция
00	ИП2	62	11	÷	13	
01	↑	0E	12	↑	0E	Вкл F ПРГ
02	ИП3	63	13	1	01	
03	x	12	14	—	11	Набрать программу
04	П2	42	15	П4	44	F АВТ
05	ИП4	64	16	Fx ²	22	
06	↑	0E	17	П5	45	Занести данные:
07	ИП5	65	18	ИП6	66	c — в рег. 2
08	x	12	19	↑	0E	γ — в рег. 3
09	↑	0E	20	ИП7	67	
10	ИП2	62	21	x	12	

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Инструкция
22	↑	0E	37	ИП7	67	k_1 — в рег. 4
23	ИП2	62	38	x	12	
24	+	13	39	П7	47	γ_1 — в рег. 5
25	↑	0E	40	ИП6	66	
26	1	01	41	↑	0E	k_2 — в рег. 6
27	—	11	42	ИП4	64	
28	П6	46	43	—	11	γ_2 — в рег. 7
29	Fx^2	22	44	÷	13	
30	П7	47	45	↑	0E	В/О
31	ИП4	64	46	ИП5	65	С/П
32	↑	0E	47	x	12	
33	ИП6	66	48	↑	0E	Прочитать
34	—	11	49	ИП7	67	результат на инди-
35	÷	13	50	+	10	каторе
36	↑	0E	51	С/П	50	

Время вычисления 20 с.

Пример: $c = 50$; $\gamma = 3,6$; $k_1 = 20$; $\gamma_1 = 3,0$; $k_2 = 62$; $\gamma_2 = 3,9$.

Ответ: $C = 0,229$.

Приложение 4

ПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНОГО КОЭФФИЦИЕНТА Контрастности материала, состоящего из m ингредиентов

Вычисление коэффициента контрастности C проводится по формуле

$$C = \frac{m}{\sum_{i=1}^m R_i^2 p_i},$$

$$R_i = k_i \gamma_i / (c\gamma) - 1,$$

где k_i — содержание изучаемого элемента в i -том минерале, %; γ_i — плотность минерала, г/см³; c — среднее содержание изучаемого элемента в материале:

$$c = \frac{m}{\sum_{i=1}^m p_{w_i} k_i},$$

где p_{w_i} — содержание i -того ингредиента в материале, %; γ — средняя плотность материала:

$$\gamma = \frac{m}{\sum_{i=1}^m \gamma_i p_i} / 100,$$

где p_i — содержание i -того ингредиента (в %).

$$p_i = \frac{p_{w_i}}{\gamma_i} / \sum \frac{p_{w_i} \gamma_i}{\gamma_i} = \frac{p_{w_i}}{\gamma_i} / \sum p_{w_i}.$$

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	ПЗ	43	19	ИП1	61	38	ИПС	6 [
01	ИП1	61	20	x	12	39	÷	13
02	x	12	21	КП4	4	40	П1	41
03	ИПА	6—	22	ИП4	64	41	КИП4	Г4
04	+	10	23	4	04	42	ИПА	6—
05	ПА	4—	24	—	11	43	÷	13
06	ИП2	62	25	С/П	50	44	I	01
07	ИП3	63	26	ИПА	6—	45	—	11
08	x	12	27	ИПВ	6L	46	Fx^2	22
09	ИПВ	6L	28	x	12	47	ИП1	61
10	+	10	29	1	01	48	x	12
11	ПВ	4L	30	ВП	0L	49	ИПД	6Г
12	ИП3	63	31	4	04	50	+	10
13	ИП1	61	32	÷	13	51	ПД	4Г
14	÷	13	33	ПА	4—	52	ИП4	64
15	ИПС	6 [34	4	04	53	4	04
16	+	10	35	П4	44	54	—	11
17	ПС	4	36	С/П	50	55	С/П	50
18	ИП2	62	37	÷	13	56	ВП	51
						57	36	36

Инструкция:

F ПРГ, набрать программу, F АВТ

Занести: 0 — в рег. А—Д, 4 — в рег. 4

→ Занести данные по первому (следующему) минералу:

γ_i — в рег. 1,

k_i — в рег. 2, p_{w_i} — в рег. x

В/О, С/П, на индикаторе высветится число обработанных минералов.

Если обработаны не все минералы,

то, иначе →

С/П, на индикаторе высветится цифра 4

→ Занести данные по первому (следующему) минералу:

p_{w_i} — в рег. y, γ_i — в рег. x

С/П

на индикаторе высветится число обработанных минералов.

Если обработаны не все минералы,

то, иначе →

прочитать значение C в рег. Д

Время вычисления $T = (18 \times m + 4)$ с.

Пример: $m = 2$; $\gamma_1 = 7,5$; $k_1 = 87$; $p_{w_1} = 5$; $\gamma_2 = 2,7$; $k_2 = 0$; $p_{w_2} = 95$.

Ответ: $C \approx 51$.

Приложение 5

ПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ
ГРАНУЛОМЕТРИЧЕСКОЙ КРИВОЙ ГОДЭНА-АНДРЕЕВА

Расчет параметров проводится по формулам

$$h = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\lg y_i}{\lg D + \lg x_i}; \lg A = h \lg D,$$

где h — показатель степени уравнения Годэна-Андреева; A — коэффициент пропорциональности этого уравнения ($y = Ax^h$); n — число классов, на которые рассеивается материал; y_i — суммарный выход классов — $x + 0$ мм; D — максимальный диаметр самого крупного класса (размер контрольного сита).

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	F lg	17	09	ИП3	63	17	ИП3	63
01	П2	42	10	+	10	18	ИП4	64
02	←	14	11	П3	49	19	÷	13
03	F lg	17	12	ИП4	64	20	С/П	50
04	ИП1	61	13	1	01	21	ИП1	61
05	—	11	14	+	10	22	x	12
06	ИП2	62	15	П4	44	23	F 10 ^x	15
07	→	14	16	С/П	50	24	С/П	50
08	÷	13						

Инструкция:

F ПРГ, набрать программу, F АВТ
Занести 0 — в рег. 3, 4, $\lg D$ — в рег. 1
Занести x_i — в рег. y , y_i — в рег. x

В/О, С/П
Высветится число занесенных классов.

Если классы еще есть,
то, иначе

С/П →
Высветится параметр h

С/П
Высветится параметр A

Время вычислений $T = (6n + 4)$ с.

Пример: $D = 1$, $x_1 = 0,10$ $y_1 = 0,35$
 $x_2 = 0,20$ $y_2 = 0,45$
 $x_3 = 0,50$ $y_3 = 0,89$
 $x_4 = 0,75$ $y_4 = 0,94$

Ответ: $h = 0,52$, $A = 1$.

Приложение 6

ПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА КонтРАСТНОСТИ
МАТЕРИАЛА, ПО Д.А. КРАСНОВУ

Расчет коэффициента контрастности C проводится по формуле

$$C = \frac{\gamma^h \beta}{\gamma^h - 1 + \beta} \frac{1}{\alpha} - 1,$$

где α — содержание изучаемого компонента в опробуемом материале, доли; β — его содержание в богатейшем зерне размером D , доли; γ — отношение размера наибольших зерен к размеру вкрапленников $\gamma = D/d_{\text{вкр}}$; h — показатель гранулометрической кривой (по Годэну-Андрееву)

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	÷	13	07	П5	45	14	←	14
01	ИП3	63	08	ИП4	64	15	÷	13
02	←	14	09	1	01	16	ИП1	61
03	F x y	24	10	—	11	17	÷	13
04	П4	44	11	ИП2	62	18	1	01
05	ИП2	62	12	+	10	19	—	11
06	x	12	13	ИП5	65	20	С/П	50

Инструкция:

F ПРГ, набрать программу F АВТ

Занести α — в рег. 1, β — в рег. 2, h — в рег. 3, D — в рег. 4, $d_{\text{вкр}}$ — в рег. x

В/О

С/П

Прочитать результаты на индикаторе

Время вычисления 8 с.

Пример: $\alpha = 0,05$; $\beta = 0,80$; $h = 0,5$; $D = 5$ мм; $d = 3$ мм

Ответ: $C = 17,9$.

Приложение 7

ПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА
КонтРАСТНОСТИ ПРИ РАЗМЕРЕ ЧАСТИЦ,
ПРЕВЫШАЮЩИХ РАЗМЕР РУДНОЙ ВКРАПЛЕННОСТИ

Исходя из представлений о пуассоновском распределении рудных вкрапленей в частицах материала и при условии, что при измельчении пробы рудные вкрапления, не раздробившись, попадают в одну из частиц, расчет C проводится

по формуле

$$C = \sum_{x=0}^m \left(\frac{k \gamma_p}{r^3 c \gamma} - 1 \right)^2 \left(\frac{r^3 c \gamma}{k \gamma_p} \right)^x \exp \left(- \frac{r^3 c \gamma}{k \gamma_p} \right) \frac{1}{x!},$$

где k — содержание элемента в минерале-носителе, %; c — среднее его содержание в материале, %; γ_p — плотность минерала-носителя и средняя по пробе, г/см³; r — отношение размера частиц пробы к размеру вкраплений минерала-носителя; x — переменная суммирования, изменяющаяся от 0 до величины, дающей пренебрежимо малое значение слагаемого.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	ИП6	66	17	←	14	33	ИП9	69
01	↑	0E	18	ИП7	67	34	х	12
02	х	12	19	х	12	35	П9	49
03	F Вх	0	20	1	01	36	ИП7	67
04	х	12	21	—	11	37	Fх=0	5E
05	F 1/х	23	22	Fх ²	22	38	41	41
06	ИП2	62	23	ПА	4—	39	ИП9	69
07	х	12	24	ИП7	67	40	С/П	50
08	ИП3	63	25	ИП8	68	41	ИП0	60
09	х	12	26	Fх ^y	24	42	ИП7	67
10	ИП4	64	27	П9	49	43	х	12
11	÷	13	28	ИП8	68	44	П0	40
12	ИП5	65	29	/—/	0L	45	ИП9	69
13	÷	13	30	Fe ^x	16	46	←	14
14	↑	0E	31	ИПА	6—	47	÷	13
15	F 1/х	23	32	х	12	48	С/П	50
16	П8	48						

Инструкция:

F ПРГ, набрать программу, F АВТ

Занести данные:

0 — в рег. 0, k — в рег. 2, γ_p — в рег. 3, c — в рег. 4, γ — в рег. 5, r — в рег. 6

Занести начальное (0) или следующее (на единицу большее) значение x в рег. 7

В/О, С/П

Записать значение слагаемого. Если его значение существенно, то, иначе

Закончить счет

Сложить все полученные слагаемые

Время вычисления 15 с на одно слагаемое.

Пример: $k = 86$; $\gamma_p = 7,5$; $c = 2$; $\gamma = 3$; $r = 1,5$.

Ответ: $C = 0,97 + 28,9 + 1,88 + 0,045 = 31,8$.

Приложение 8

ПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА КонтРАСТНОСТИ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ОТНОШЕНИЯ РАЗМЕРА ЧАСТИЦ К РАЗМЕРУ РУДНОЙ ВКРАПЛЕННОСТИ

Расчет коэффициента контрастности C проводится по формуле

$$\lg C = a(\lg r)^a + \lg C_{\max}, \quad (a > 1),$$

$$\text{где } a = \frac{\lg r_0^3}{\lg C_{\max} - \lg C_0}, \quad a = \frac{3}{a(\lg r_0)^{a-1}};$$

r — отношение размера частиц d (в см) материала, для которого считается контрастность, к размеру рудной вкрапленности $d_{\text{вкр}}$ (в см) — ($r = d/d_{\text{вкр}}$); r_0 — то же, для исходной пробы ($r_0 = d_0/d_{\text{вкр}}$); C_{\max} — предельный коэффициент контрастности данного материала (при полном раскрытии сростков); C_0 — коэффициент контрастности исходной пробы. C_{\max} и C_0 рассчитываются по одинаковым формулам:

$$C_{\max} = \frac{k \gamma_p}{c \gamma} - 1; \quad C_0 = \frac{c_6 \gamma_6}{c \gamma} - 1,$$

где k — содержание элемента в минерале-носителе, %; γ_p — плотность элемента, г/см³; c_6 — содержание элемента в богатейшей частице исходной пробы, %; γ_6 — плотность исходной пробы, г/см³:

$$\gamma_6 = \gamma_p w_6 + \gamma_n(1 - w_6) = \gamma_p \frac{c_6}{k} + \gamma_n \left(1 - \frac{c_6}{k}\right),$$

где w — содержание в пробе минерала-носителя, доли единицы.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Инструкция
00	ИП4	64	14	÷	13	F ПРГ
01	ИП7	67	15	ИП6	66	
02	х	12	16	÷	13	Набрать программу
03	П9	49	17	1	01	F АВТ
04	1	01	18	—	11	
05	ИП7	67	19	ПА	4—	Занести данные:
06	—	11	20	ИП3	63	$d = 18$ мм — в рег. 0
07	ИП6	66	21	ИП4	64	$d_0 = 30$ мм — в рег. 1
08	х	12	22	х	12	$d_{\text{вкр}} = 3$ мм — в рег. 2
09	ИП9	69	23	ИП5	65	$k = 86$ % — в рег. 3
10	+	10	24	÷	13	$\gamma_p = 7,5$ г/см ³ —
11	ИП8	68	25	ИП6	66	в рег. 4
12	х	12	26	÷	13	
13	ИП5	65	27	1	01	

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Инструкция
28	—	11	51	→	14	
29	П9	49	52	÷	13	
30	ИПА	6—	53	/—/	0L	$c = 2\% - \text{в рег. 5}$
31	÷	13	54	ПА	4—	
32	F lg	17	55	ИПО	60	$\gamma = 3 \text{ г/см}^3 - \text{в рег. 6}$
33	ПВ	4	56	ИП2	62	
34	ИП1	61	57	÷	13	$w = 0,12 - \text{в рег. 7}$
35	ИП2	62	58	1	01	
36	÷	13	59	ВП	0 [$c_0 = 10\% - \text{в рег. 8}$
37	F lg	17	60	4	04	
38	ПА	4—	61	/—/	0L	В/О, С/П
39	3	03	62	+	10	
40	x	12	63	F lg	17	Прочитать результат
41	ИПВ	6L	64	ИПВ	6L	на индикаторе
42	÷	13	65	→	14	
43	ПВ	4	66	F x ^y	24	Ответ: 18,4
44	1	01	67	ИПА	6—	
45	—	11	68	x	12	
46	ИПА	6—	69	ИП9	69	
47	F x ^y	24	70	F lg	17	
48	ИПВ	6L	71	+	10	
49	x	12	72	F 10 ^x	15	
50	3	03	73	С/П	50	

Время вычислений 30 с.

Приложение 9

ПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ СРЕДНЕЙ КВАДРАТИЧЕСКОЙ ПОГРЕШНОСТИ СОДЕРЖАНИЯ ЭЛЕМЕНТА ДЛЯ ДВУХМИНЕРАЛЬНОЙ ПОРОДЫ ПО ФОРМУЛЕ ВИЛЬСОНА

Расчет проводится по формуле

$$\sigma^2 = (k_1 - k_2)^2 \frac{w_1 w_2 \gamma_1 \gamma_2}{n \gamma} = (k_1 - k_2)^2 w_1 w_2 \frac{d^3 \gamma_1 \gamma_2}{q \gamma}$$

где σ — абсолютная погрешность содержания элемента; k_1, k_2 — содержание элемента в 1- и 2-м минералах (доли); w_1, w_2 — массовая доля этих минералов в породе; γ_1, γ_2 — плотности этих минералов, г/см³; d — размер частиц проб, см; q — масса пробы после сокращения, г.

Дополнительно программа включает расчет средней плотности породы γ

$$\gamma = p_1 \gamma_1 + p_2 \gamma_2$$

$$\text{где } p_i = w_i \frac{\gamma}{\gamma_i} / \sum_{i=1}^2 w_i \frac{\gamma}{\gamma_i} = \frac{w_i}{\gamma_i} / \sum \frac{w_i}{\gamma_i}$$

а также расчет содержания элемента в породе

$$c = w_1 k_1 + w_2 k_2$$

Время вычислений $17 + 5 + 2 = 24$ с.

Пример. Определить погрешность содержания SiO₂ в пробе массой 1 г, измельченной до 0,1 мм, из норита.

Ответ: ~ 0,02 %.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Инструкция
00	ИП7	67	31	ИП1	61	
01	F x ²	22	32	ИП4	64	F ПРГ
02	ИП7	67	33	—	11	Набрать программу
03	x	12	34	F x ²	22	F АВТ
04	П9	49	35	ИП2	62	
05	ИП2	62	36	x	12	Занести данные:
06	ИП3	63	37	ИП5	65	$k_1 = 0,5171 - \text{в рег. 1}$
07	÷	13	38	x	12	
08	ПВ	4	39	ИП9	69	$w_1 = 0,5 - \text{в рег. 2}$
09	ПО	40	40	x	12	
10	ИП5	65	41	ИП8	68	$\gamma_1 = 3,5 - \text{в рег. 3}$
11	ИП6	66	42	÷	13	
12	÷	13	43	ИП3	63	$k_2 = 0,4319 - \text{в рег. 4}$
13	ПС	4	44	x	12	
14	ИПО	60	45	ИП6	66	$w_2 = 0,5 - \text{в рег. 5}$
15	+	10	46	x	12	
16	ПО	40	47	ИПА	6—	$\gamma_2 = 2,74 - \text{в рег. 6}$
17	ИПВ	6	48	÷	13	
18	ИПО	60	49	F √x	21	$d = 0,01 - \text{в рег. 7}$
19	÷	13	50	ИПД	6Г	
20	ИП3	63	51	x	12	$q = 1 - \text{в рег. 8}$
21	x	12	52	С/П	50	
22	ПА	4—	53	ПВ	4	100 — в рег. Д
23	ИПС	6	54	ИП1	61	
24	ИПО	60	55	ИП2	62	В/О, С/П
25	÷	13	56	x	12	Прочсть на индикаторе
26	ИП6	66	57	ПО	40	погрешность:
27	x	12	58	ИП4	64	$7,52 \cdot 10^{-3} \%$
28	ИПА	6—	59	ИП5	65	С/П
29	+	10	60	x	12	Прочсть содержание
30	ПА	4—	61	ИПО	60	элемента: 47,45 %

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Инструкция
62	+	10	67	←→	14	С/П
63	ИПЦ	8Г	68	÷	13	Прочсть относительную погрешность: $1,59 \cdot 10^{-2}$
64	x	12	69	ИПЦ	6Г	
65	С/П	50	70	x	12	В рег. А прочсть среднюю
66	ИПВ	6	71	С/П	50	плотность породы: 3,07

Приложение 10

ПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ СРЕДНЕЙ КВАДРАТИЧЕСКОЙ ПОГРЕШНОСТИ СОДЕРЖАНИЯ ЭЛЕМЕНТА ДЛЯ ТРЕХМИНЕРАЛЬНОЙ ПОРОДЫ ПО ФОРМУЛЕ ВИЛЬСОНА

Расчет погрешности проводится по формуле

$$\sigma^2 = [(k_1 - k_2)^2 w_1 w_2 + (k_1 - k_3)^2 w_1 w_3 + (k_2 - k_3)^2 w_2 w_3] \frac{d^3 \gamma}{q}$$

где σ — абсолютная погрешность содержания элемента; k_i — содержание элемента в i -том минерале-носителе (доли); w_i — содержание i того минерала (доли); d — размер частиц, см; γ — средняя плотность материала пробы, г/см³; q — анализируемая величина навески, г.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Инструкция
00	ИП7	67	18	ИП2	62	F ПРТ
01	x ²	22	19	x	12	Набрать программу
02	ИП7	67	20	ИП6	66	F АВТ
03	x	12	21	x	12	Занести данные:
04	ПО	40	22	ИПА	6-	$k_1 = 1,0$ — в рег. 1
05	ИП1	61	23	+	10	$w_1 = 0,35$ — в рег. 2
06	ИП3	63	24	НА	4-	$k_2 = 0,6873$ — в рег. 3
07	-	11	25	ИП3	63	$w_2 = 0,60$ — в рег. 4
08	Fx ²	22	26	ИП5	65	$k_3 = 0,3521$ — в рег. 5
09	ИП2	62	27	-	11	$w_3 = 0,05$ — в рег. 6
10	x	12	28	Fx ²	22	$d = 0,01$ — в рег. 7
11	ИП4	64	29	ИП4	64	$q = 1$ — в рег. 8
12	x	12	30	x	12	$\gamma = 2,63$ — в рег. 9
13	ПА	4-	31	ИП6	66	100 — в рег. Д
14	ИП1	61	32	x	12	В/О, С/П
15	ИП5	65	33	ИПА	6-	Прочсть значение аб-
16	-	11	34	+	10	солютной погрешно-
17	Fx ²	22	35	ИПО	60	сти: $2,87 \cdot 10^{-2}$ %

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Инструкция
36	x	12	41	F √x	21	
37	ИП9	69	42	ИПЦ	61	
38	x	12	43	x	12	
39	ИП8	68	44	С/П	50	
40	÷	13				

Время вычислений 16 с.

Пример. Определить погрешность в содержании SiO₂ в навеске гранита 1 г, измельченной до 0,1 мм = 0,01 см.

Ответ: $2,87 \cdot 10^{-2}$ %. Для нахождения относительной погрешности в % (коэффициента вариации) это значение делим на содержание SiO₂ и умножаем на 100 %:

$$\frac{2,87 \cdot 10^{-2}}{78} \cdot 100 = 3,67 \cdot 10^{-2} \approx 0,04 \%$$

Приложение 11

ФОРТРАН-ПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ СХЕМ ОБРАБОТКИ ПРОБ

```

PROGRAM STONES
DESCRIPTIONS OF VARIABLES AND DATA SETTING
INTEGER*2 INF(10), INS(4)
DIMENSION A(10, 4), AM(10), AQ(10), AD(10), AR(10)
DIMENSION CX(10), X(11), Y(11)
EQUIVALENCE (A(1), AM(1), A(11), AQ(1))
EQUIVALENCE (A(21), AD(1), A(31), AR(1))
DATA INF/'CB', 'CM', CX 'GP', 'GG', 'QQ', 'QN', 'DN', 'DB', 'SI'/
DATA INS/'MM', QQ, 'DD', 'DO'/
C GET RIGHT INFORMATION FROM USER
1 TYPE 201
ACCEPT 202, N
IF (N. LT. 2. OR. N. GT. 10) GOTO 1
2 TYPE 203
ACCEPT 202, NB
IF (NB. LT. 0. OR. NB. GT. 1) GOTO 2
NB = NB + 1
3 TYPE 204
ACCEPT 205, EPS
IF(EPS. LE. 0) GOTO 3
DO 5, K = 1, 10
4 TYPE 206, INF(K)
ACCEPT 205, CX(K)

```

```

IF (CX(K). LT. 0. OR. CX(K). GT. 1. E6) GOTO 4
5 CONTINUE
C HERE THE CALCULATIONS BEGIN
X(1) = 1.
Y(1) = 1.
AMN = CX(6)/CX(7)
DO 11, K = 2, N
11 X(K) = AMN * 0.5
X(N+1) = AMN - X(N)
12 DO 13, K = 2, N
ALP = (X(K) - 1) * X(K + 1) * 0.25
13 Y(K) = 3. * ALP * X(K + 1) / (SQRT(X(K) - 1)) + ALP + SQRT(X(K + 1))
Y(N+1) = AMN - X(N)
ALP = 0.
DO 14, K = 2, N + 1
D = ABS(Y(K) - X(K))
14 IF (D. GT. ALP) ALP = D
IF (ALP. LE. EPS) GOTO 16
DO 15, K = 2, N + 1
15 X(K) = Y(K)
GOTO 12
DO 17, K = 1, N
17 Y(K) = (X(K) * X(K + 1)) * (-0.25)
ALP = X(N + 1) * Y(N) * 3
DO 18, K = 1, N - 1
18 ALP = ALP + (X(K + 1) - X(K)) * Y(K) * 3
C = CX(1)/CX(2) * CX(4)/CX(5) - 1.
AM(N) = AMN
AQ(N) = CX(7)
AMN = CX(6)/CX(5) * CX(10) * 2
ALP = (AMN/ALP) * 0.3333333
AMN = (AMN/(AN(N) - 1.)) * (-0.3333333)
DO 19, K = 1, N - 1
AM(K) = X(K + 1)
AQ(K) = CX(6)/AM(K)
AD(K) = ALP * Y(K)
19 AR(K) = AD(K) * AMN
AD(N) = ALP * Y(N)
AR(N) = AD(N) * AMN
GOTO (20, 101), NB
20 CR = ALOG10((C + 1.) * CX(3)/CX(1) - 1.)
D = ALOG10(CX(8)/CX(9))
ALP = 3. * D / (CR - ALOG10(C))
AMN = -3. / ALP / D * (ALP - 1.)
DO 21, K = 1, N
X(K) = AD(K)/CX(9)
IF (X(K). GT. 1.) Y(K) = 10. * (AMN * ALOG10(X(K)) * ALP + CR)

```

```

IF (X(K). LE. 1.) Y(K) = C
21 AD(K) = AD(K) * (C/Y(K)) * 0.3333333
C FUT INFORMATION FOR USER
101 PRINT 211, N
PRINT 211, CX(1), CX(2), CX(4), CX(5)
PRINT 213, CX(8), CX(9), CX(10)
NB = NB - 1
PRINT 214, CX(6), NB
DO 102, K = 1, 4
DO 102, NB = 1, N, 4
NS = NB + 3
IF (NS. GT. N) NS = N
PRINT 215. (INS(K), KS, A(KS, K), KS = NB, NS)
102 CONTINUE
C FORMAT STATEMENTS
201 FORMAT (// ЧИСЛО ЦИКЛОВ ДРОБЛЕНИЯ N(2-10) - ', x)
202 FORMAT (I2)
203 FORMAT (ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЬ АЛГОРИТМА В (0 ИЛИ 1) - ', x)
204 FORMAT (ИТЕРАЦИИ ДО ЭПСИЛОН (> 0.) - ', x)
205 FORMAT (F13.6)
206 FORMAT (ВЕЛИЧИНА, A2, РАВНА - ', x)
211 FORMAT (ОПРЕДЕЛЕНИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ' I2, ' - СТАДИЙ-
НОГО ДЕЛЕНИЯ ПРОВ ')
212 FORMAT (IHO, 'CB = ', F13.6, 4X, 'CM = ', F13.6, 4X, 'GP = ', F13.6,
x 4X, 'G = ', F13.6)
213 FORMAT (IH, 9X, 'DN = ', F13.6, 4X, 'DB = ', F13.6, 4X, 'SIGMA
x = ', F13.6)
214 FORMAT (IHO, 'РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА ДЛЯ QO = ', F13.6, ' И В
x = ', I1)
215 FORMAT (IH, 4(A2, '(, I2, ') = ', F13.6, 4X))
END

```

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев С.Е., Перов В.А., Зверевич В.В. Дробление, измельчение и грохочение полезных ископаемых. М., Недра, 1980.
2. Белоусов В.Д. Опыт определения представительных навесок при сокращении шлиховых концентратов оловоносных россыпей. — Экспресс-информация. ВИЭМС. Геология, методы поисков и разведки месторождений металлических полезных ископаемых, 1977, № 6, с 1—19.
3. Вергасов В.А., Журкин И.Г., Красикова М.В. и др. Вычислительная математика. М., Недра, 1976.
4. Клер В.Р. Применение математической статистики для определения параметров обработки проб угля и горючих сланцев. — В кн.: Полезные ископаемые в осадочных толщах. М., Наука, 1973, с. 200—215.
5. Клер В.Р. Обработка материалов разведки месторождений угля. М., Недра, 1980.
6. Михок Г., Урсяну В. Выборочный метод и статистическое оценивание. М., Финансы и статистика, 1982.
7. Моисеев Н.Н., Иванюков Ю.П., Столярова Е.М. Методы оптимизации. М., Наука, 1978.
8. Сивосин М.Н., Саклаков В.А. Способ обработки геологических проб с предварительным извлечением самородного металла. — В кн.: Геология и разведка угольных месторождений. Тула, 1977, с. 78—82.
9. Стахеев Ю.И., Кузнецов Ю.Н. Неоднородность химического состава вещества и точность аналитических методов. — Завод. лабор., 1970, № 1, с. 1—7.
10. Ткачев Ю.А., Юдович Я.Э. Статистическая обработка геохимических данных. Л., Наука, 1975.

33

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава I. Необходимые сведения из теории вероятностей и математической статистики	4
§ 1. Связь теории вероятностей и математической статистики с проблемой сокращения проб.	4
§ 2. Случайные события и вероятности. Случайные величины, функции их распределения.	8
§ 3. Биномиальное и полиномиальное распределения	16
§ 4. Гипергеометрическое распределение.	20
§ 5. Нормальное распределение	22
§ 6. Равномерное (прямоугольное) распределение.	27
§ 7. Распределение Пуассона.	27
§ 8. Логарифмически нормальное распределение	28
Глава II. Анализ основных принципов и формул сокращения	29
§ 1. Общие сведения	29
§ 2. Принцип Везина. Начало научного подхода. Основопологающие исследования Д. Брунтон	30
§ 3. Эмпирическое направление. Формула Ричардса—Чечотта	33
§ 4. Обобщение формулы Ричардса—Чечотта. Экспериментальное определение параметров эмпирических формул	35
§ 5. Исследования с применением выборочного метода	43
§ 6. Исследования П. Жи	46
§ 7. Экспериментальные и теоретические исследования Д.А. Краснова	49
Глава III. Теоретические основы сокращения проб измельченных (сыпучих) материалов	54
§ 1. Основное свойство сокращения	54
§ 2. Идеальная модель смеси "рудных" и "нерудных" зерен правильной формы	56
§ 3. Сокращение пробы по частям как инструмент исследования реальной модели	63
§ 4. Реальная модель. Эквивалентные размеры частиц, плотность и коэффициент контрастности.	66
§ 5. Экспериментальное подтверждение формулы сокращения проб	67
§ 6. Анализ моделей сокращения смеси частиц различных классов	77
§ 7. Оценка погрешности содержания при многоэтапной обработке проб.	80
Глава IV. Контрастность измельченной пробы, ее связь с размером рудной вкрапленности и гранулометрическим составом.	83
§ 1. Общие сведения	83
§ 2. Коэффициент контрастности измельченной пробы узкого гранулометрического класса	84
§ 3. Гранулометрическая характеристика измельченной пробы.	89
§ 4. Изменение контрастности в процессе измельчения	91
§ 5. Контрастность реальной пробы сложного гранулометрического состава	110
§ 6. Статистические вопросы перемешивания пробы	111

Глава V. Оптимизация обработки проб	114
§ 1. Математическая модель обработки проб	114
§ 2. Основные положения и методы оптимизации	118
§ 3. Частные случаи оптимизации обработки проб	123
§ 4. Оптимальные схемы обработки проб	128
§ 5. Схема обработки проб с переменной контрастностью	132
Глава VI. Особенности составления оптимальных схем обработки проб различных полезных ископаемых	135
§ 1. Погрешность сокращения проб для гранулометрического анализа	135
§ 2. Оптимальные схемы обработки проб рудных полезных ископаемых	141
§ 3. Особенности обработки угольных проб	159
§ 4. Шлихо-минералогические пробы	162
§ 5. Надлежащая величина и размещение аналитических навесок	165
<i>Приложение 1. Алгол-программа вычисления вероятностей числа "успехов" в биномиальном, гипергеометрическом и нормальном распределении для ЭВМ "МИР"</i>	175
<i>Приложение 2. Программа вычисления предельного коэффициента контрастности материала, состоящего из смеси двух ингредиентов, из которых только один содержит изучаемый элемент</i>	174
<i>Приложение 3. Программа вычисления предельного коэффициента контрастности материала, состоящего из двух ингредиентов</i>	175
<i>Приложение 4. Программа вычисления предельного коэффициента контрастности материала, состоящего из m ингредиентов</i>	176
<i>Приложение 5. Программа вычисления параметров гранулометрической кривой Година-Андреева</i>	178
<i>Приложение 6. Программа вычисления коэффициента контрастности материала по Д.А. Краснову</i>	179
<i>Приложение 7. Программа вычисления коэффициента контрастности при размере частиц, превышающих размер рудной вкрапленности</i>	179
<i>Приложение 8. Программа вычисления коэффициента контрастности в зависимости от отношения размера частиц к размеру рудной вкрапленности</i>	181
<i>Приложение 9. Программа вычисления средней квадратической погрешности содержания элемента для двухминеральной породы по формуле Вильсона</i>	182
<i>Приложение 10. Программа вычисления средней квадратической погрешности содержания элемента для трехминеральной породы по формуле Вильсона</i>	184
<i>Приложение 11. Фортран-программа вычисления оптимальных схем обработки проб</i>	186
Список литературы	188

ПРОИЗВОДСТВЕННОЕ ИЗДАНИЕ

Юрий Андреевич Ткачев, Анатолий Алексеевич Шейн

ОБРАБОТКА ПРОБ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ

Редактор издательства *А.М. Антокольская*
Обложка художника *В.И. Казаковой*
Художественный редактор *Г.Н. Юрчевская*
Технические редакторы *Л.Н. Фомина, Н.С. Анашкина*
Корректор *Зайцева Н.В.*
Оператор *Л.А. Миронова*

ИБ № 5504

Подписано в печать 14.07.86. Т — 16151. Формат 60x90 1/16. Бумага офсетная № 2. Набор выполнен на наборно-пишущей машине. Гарнитура "Сенчури". Печать офсетная. Усл. печ. л. 12,0. Усл. кр.-отт. 12,37. Уч.-изд. л. 11,70. Тираж 3500 экз. Заказ 1793. /33—2. Цена 65 коп.

Ордена "Знак Почета" издательство "Недра",
103633, Москва, К-12, Третьяковский проезд, 1/19

Отпечато в Московской типографии № 6 Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
109088, Москва, Ж-88, Южнопортовая ул., 24.

УВАЖАЕМЫЙ ТОВАРИЩ!

Издательство "Недра" готовит к печати — новые книги

АФАНАСЬЕВА Е.Л., ИСАЕНКО М.П., МОМДЖИ Г.С. Технологическая минераграфия. 19 л. 1 р. 10 к.

Рассмотрено применение минераграфических исследований для повышения эффективности обогащения и комплексного использования руд черных, цветных и благородных металлов. Основное внимание уделено описанию современных методов рудной микроскопии: диагностике рудных минералов в отраженном свете, текстурно-структурным и парагенетическим анализам и др. Приведены рекомендации по использованию этих методов при исследовании различных типов руд.

Для геологов, минералогов, обогатителей и других специалистов, занимающихся изучением вещественного состава руд в связи с их обогащением.

План 1987 г. № 339.

ГРИГОРЯН С.В. Первичные геохимические ореолы при поисках и разведке рудных месторождений. 29 л. 1 р. 80 к.

Рассмотрены методы изучения и особенности состава и строения первичных геохимических ореолов различных рудных месторождений. Описаны критерии интерпретации геохимических аномалий, в том числе критерии разработки зон рассеяния рудной минерализации, идентификации и оценки полиформационных аномалий. Показана высокая эффективность использования этих критериев при поисках и оценке месторождений и рудных залежей скрытого залегания. Особое внимание уделено методическим приемам количественной оценки перспектив рудоносности по геохимическим данным.

Для специалистов, занимающихся поисками и разведкой рудных месторождений.

План 1987 г. № 60.

Интересующие Вас книги можно приобрести или заказать в магазинах книготорга, распространяющих научно-техническую литературу, и в магазинах — опорных пунктах издательства "Недра", адреса которых приведены в аннотированном плане, а также через отдел "Книга — почтой" (г. Ленинград, магазин № 17).

Адреса центральных магазинов:

№ 115—117334, Москва, Ленинский проспект, 40. Дом научно-технической книги;

№ 17—199178, Ленинград, В.О., Средний проспект, 61

Издательство "Недра"