

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ



**РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГЕОЛОГОРАЗВЕДОЧНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ СЕРГО ОРДЖОНИКИДЗЕ**

КАФЕДРА ЭНЕРГЕТИКИ

БОРОДУЛИН Ю.Б.

ОБЩАЯ ЭЛЕКТРОТЕХНИКА
ЧАСТЬ I. ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ
КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

Для студентов дневной, вечерней, заочной
и дистанционной форм обучения специальностей
геологоразведочного профиля

Москва 2006

Бородулин Ю.Б. Общая электротехника. Часть I. Линейные электрические цепи. Конспект лекций.

Компьютерная графика выполнена Ивченко И. А.

Конспект лекций соответствует программе учебной дисциплины «Электротехника и электроника» для специальностей геологоразведочного профиля и предназначен для изучения как теоретического курса, так и для подготовки к лабораторным и практическим расчетным работам по разделам данной программы. Рекомендуется для студентов дневной, вечерней, заочной и дистанционной форм обучения.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие.....	4
1. ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ	
1.1. Общие понятия об электрических цепях (основные элементы, классификация).....	5
1.2. Основные явления в электрической цепи.....	8
1.3. Основные законы электрической цепи	9
1.4. Режимы работы электрических цепей.....	11
2. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА	
2.1. Преобразование электрических цепей.....	12
2.2. Расчеты электрических цепей с использованием законов Кирхгофа.....	15
2.3. Метод контурных токов.....	16
2.4. Метод узловых потенциалов.....	17
2.5. Баланс мощностей.....	18
3. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО (СИНУСОИДАЛЬНОГО) ТОКА	
3.1. Основные параметры и представления синусоидальной функции ЭДС, напряжения и тока.....	19
3.2. Элементы электрических цепей переменного тока.....	24
3.3. Последовательное соединение элементов в цепи переменного тока	29
3.4. Проводимость цепи переменного тока. Параллельное соединение ветвей.....	30
3.5. Резонанс в электрических цепях переменного тока.....	33
3.6. Мощность в электрических цепях переменного тока.....	38
3.7. Основные соотношения для расчета электрических цепей переменного тока символическим методом.....	40
4. ТРЕХФАЗНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА	
4.1. Общие сведения о трехфазном токе.....	43
4.2. Схемы соединения звездой.....	45
4.3. Схемы соединения треугольником.....	47
4.4. Мощность трехфазной цепи.....	48
4.5. Основные соотношения для расчета трехфазных цепей.....	49
5. СРЕДСТВА ИЗМЕРЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН	
5.1. Общие сведения.....	51
5.2. Измерение тока, напряжения, мощности и $\cos \varphi$	52
Список рекомендуемой литературы.....	56

ПРЕДИСЛОВИЕ

Студенты геологоразведочного профиля изучают курс электротехники как общетехническую дисциплину. Количество аудиторных занятий (лекции, лабораторные работы) не позволяет достаточно подробно изучать все разделы курса электротехники с использованием аудиторных занятий.

Имеющиеся учебники и учебные пособия, как правило, имеют большой объем, предполагают значительное число как лекционных, так и лабораторных часов, в ряде случаев значительно перегружены подробностями, отдельными деталями, что затрудняет студентам сосредоточиться на главных принципиальных законах и понятиях электротехники.

Особенно это наблюдается у студентов заочной, вечерней и дистанционной форм обучения, хотя имеет отношение и к студентам дневного обучения.

Поэтому в данном конспекте лекций сделана попытка изложить в сжатой и доступной форме лишь основы курса общей электротехники без лишних подробностей и деталей, сосредоточив внимание на главных законах и понятиях электротехники.

Вместе с тем обращено внимание на связь учебного материала с инженерными, в частности, с расчетными задачами. Поэтому в конспекте не только изложены основы теории основных разделов электротехники, но и рассмотрены конкретные методы анализа и расчета электрических и магнитных цепей, а во второй части — основных параметров и характеристик электрических машин и трансформаторов.

При решении этих задач использован многолетний опыт преподавания курса электротехники на кафедре энергетики РГТУ для различных специальностей геологоразведочного профиля.

Для полноты охвата всего объема материала как теоретического, так и лабораторно-практического следует воспользоваться и другими методическими разработками кафедры энергетики, в частности:

- В.И. Волченсков. Методические указания к лабораторным работам по курсам электротехнического цикла (ч. I, ч. II);
- Ю.Б. Бородулин. Методические указания к лабораторным и расчетным работам по курсу электротехнического цикла;
- Ю.Б. Бородулин, В.И. Волченсков, Е.В. Калугин. Программа, методические указания, контрольные задания и методики расчетов по курсу «электротехника и электроника» (ч. I, Электротехника).

Часть 1. ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

1 ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

1.1. Общие понятия об электрических цепях (основные элементы, классификация)

Под электрической цепью понимается последовательное соединение электрических устройств, образующих замкнутый путь для прохождения электрического тока.

В современных силовых электрических устройствах находят применение постоянный ток (не изменяющийся в функции времени) и переменный ток, изменяющийся в функции времени по синусоидальному закону. Другие виды и формы тока и напряжения являются специальными и в данном пособии не рассматриваются.

Электрический ток представляет собой направленное движение носителей электрических зарядов (электроны, ионы). Отдельное устройство, входящее в состав электрической цепи и выполняющее определенную функцию, называется элементом электрической цепи. К электрическим устройствам относятся:

- источники электромагнитной энергии (генераторы) или источники электрических сигналов (гальванические элементы, аккумуляторы);
- приемники (потребители), преобразующие электрическую энергию в другие виды энергии;
- устройства передачи и преобразования электрической энергии (трансформаторы, провода, кабели), а также приборы и элементы защиты, измерений, коммутации электрических цепей (измерительные приборы, предохранители, разрядники, выключатели и др.).

Источники электрической энергии относятся к группе активных элементов электротехнических устройств. Если внутреннее сопротивление источника равно нулю и электродвижущая сила (ЭДС) $E = const$, то источник называется идеальным. Внутреннее сопротивление источника тока $R_{ин}$ во много раз меньше сопротивления нагрузки.

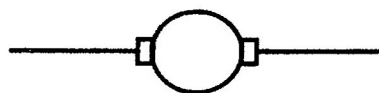
К группе пассивных элементов относятся; активное сопротивление R , индуктивность L и емкость C .

Условные обозначения источников электрической энергии и основных элементов электрических цепей:

Условные обозначения



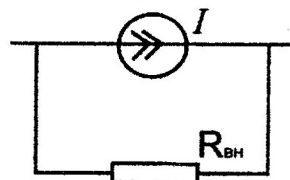
Элемент цепи
Электрическая машина
переменного тока



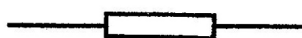
Якорь генератора (двигателя)
постоянного тока



Идеальный источник ЭДС
 E – электродвижущая сила,
 $E = \text{const}$
 $R_{\text{вн}} = 0$ – внутреннее
сопротивление



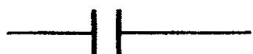
Идеальный источник тока
 $I = \text{const}$
 $R_{\text{вн}}$ – внутреннее
сопротивление
источника тока,
 $R_{\text{вн}} \gg R_{\text{наз}}$



Активное сопротивление
(резистор)
 $R = \text{const}$



Катушка индуктивности,
 $L = \text{const}$



Конденсатор,
Емкость $C = \text{const}$

В источниках электрической энергии различные виды энергии (химическая, механическая, тепловая и др.) преобразуются в электрическую, а в приемниках происходит обратный процесс. В частности, в элементах электрической цепи протекают различные энергетические процессы:

1. В активном сопротивлении в соответствии с законом Джоуля-Ленца происходит преобразование электрической энергии в тепло $P = I^2 R$ (P, I – мощность и ток в цепи). Мощность активного сопротивления всегда положительна.

Термин «сопротивление» применяется для условного обозначения элемента электрической цепи и для количественной оценки величины R . Сопротивление измеряется в омах (Ом). Величина, обратная сопротивлению, называется проводимостью и измеряется в сименсах (См).

Величина R любого приемника, строго говоря, не остается постоянной при протекании по нему тока, так как сопротивление зависит от температуры:

$$R_t = R_0 [1 + \alpha(t - t_0)].$$

Для практических расчетов в электрических цепях величину R можно принимать постоянной. В этом случае зависимость напряжения на сопротивлении R от силы тока (вольт-амперная характеристика) будет называться линейной. Электрические цепи, в которые включены постоянные по величине сопротивления, также будут линейными.

2. Индуктивный элемент – это элемент, в котором электрическая энергия преобразуется в энергию магнитного поля. В магнитном поле катушки накопление энергии происходит по закону

$$W_M = \frac{\psi_k i_k}{2}, \quad \psi = L_k i_k,$$

где ψ_k – потокосцепление; L_k – индуктивность или коэффициент пропорциональности между током и потокосцеплением; i_k – ток через катушку.

Потокосцеплением самоиндукции ψ цепи называется сумма произведений магнитных потоков, обусловленных только током в этой цепи, на число витков, с которыми они сцеплены.

Если все витки пронизываются одним и тем же магнитным потоком Φ , то потокосцепление равно произведению магнитного потока на число витков $\psi = \Phi W$.

В системе СИ потокосцепление измеряется в веберах, индуктивность в генри.

3. Емкостной элемент – это элемент, в котором происходит накопление энергии в электрическом поле конденсатора

$$W_s = \frac{q_k U_k}{2}, \quad q_k = C_k U_k,$$

где q_k – заряд; U_k – напряжение; C_k – емкость конденсатора.

Если q – количество электричества измеряется в кулонах, U_k – в вольтах, то емкость C в фарадах.

Если напряжение источника в цепи конденсатора изменяется, то происходит перераспределение зарядов на его пластинах, что приводит к возникновению тока в цепи:

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(Cu)}{dt} = C \frac{du}{dt}.$$

Мощность конденсатора положительна при его заряде и отрицательна при разряде конденсатора.

Если напряжение возрастает, то $i > 0$. Это значит, что ток и напряжение совпадают по направлению, энергия электрического поля в конденсаторе возрастает.

При убывании напряжения ток также уменьшается, энергия возвращается обратно к источнику.

Величины $R(\text{Ом})$, $L(\text{Гн})$, $C(\text{Ф})$ зависят от свойств самого устройства, его конструкции и являются параметрами этого устройства.

Мгновенные значения напряжения и тока в цепях переменного тока $u(t)$, $i(t)$ характеризуют режим работы устройства.

Те или иные соединения различных элементов называются электрической цепью, а графическое изображение цепи – электрической схемой. Электрические схемы могут быть принципиальными, замещения (расчетными) и монтажными.

Электрическая схема показывает, как осуществляется соединение элементов рассматриваемой цепи. В электрической схеме соединения элементов образуют ветви, узлы, контуры.

Участок электрической цепи, по которому проходит ток одного и того же значения и направления, называется ветвью. Замкнутая электрическая цепь, образованная одной или несколькими ветвями, называется контуром, а место соединения трех или более ветвей – узлом. На схеме узел изображается точкой.

Электрические цепи классифицируются: по роду тока (постоянный или переменный); по характеру элементов (линейные и нелинейные); по схемам соединения (простые и сложные); по изображению (монтажные, принципиальные и замещения); по составу элементов (активные и пассивные).

1.2. Основные явления в электрической цепи и характеризующие их величины

В источнике электрической энергии в результате действия сил не электромагнитной природы создается электромагнитное поле и в источнике происходит разделение электрических зарядов. Это разделение характеризуется электродвижущей силой E (ЭДС), которая при замыкании источника на внешнюю цепь вызывает электрический ток (направленное движение, например, электронов). Количество электрических зарядов, проходящих через поперечное сечение проводника в единицу времени называется током I .

Для постоянного тока

$$I = \frac{q}{t},$$

где q – количество электричества, прошедшего за время t .

Единицей измерения электрического тока является ампер (А);

$$1 \text{ ампер} = 1 \frac{\text{кулон}}{\text{секунда}}, \quad (1 \text{ а} = \frac{1 \text{ к}}{1 \text{ с}}).$$

Для переменного тока (в функции времени)

$$i = \frac{dq}{dt}.$$

При протекании тока через внешние элементы цепи выполняется работа по переносу электрических зарядов, которая характеризуется электрическим напряжением U .

Единицей напряжения, также как и ЭДС является вольт (В).

$$U = \frac{A}{q} \frac{\text{Джоуль}}{\text{Кулон}} = \text{В(вольт)}$$

Условно за направление тока во внешней цепи постоянного тока принимается от положительно заряженного электрода к отрицательно заряженному.

Электрическое напряжение вдоль внешней цепи, например, между точками 1 и 2 (рис. 1.2а) называют также разностью потенциалов.

$U_{1-2} = \varphi_1 - \varphi_2$, где φ_1 и φ_2 – потенциалы точек 1 и 2.

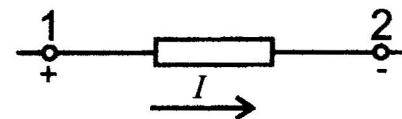


Рис.1.2а

При перемещении зарядов в проводящей среде последняя противодействует их движению с образованием тепловой энергии. Это противодействие движению электрических зарядов (току) называется электрическим сопротивлением R , а элемент цепи, параметром которого является электрическое сопротивление, называется резистором.

Как уже указывалось, единицей электрического сопротивления является Ом.

1.3. Основные законы электрической цепи

Закон Ома. Этот закон определяет связь между основными электрическими величинами на участке цепи. Для участка цепи постоянного тока с пассивными элементами

$$U = IR, \quad I = \frac{U}{R}, \quad R = \frac{U}{I}.$$

Напряжение на пассивном участке цепи U и равное ему произведение $I \cdot R$ называют падением напряжения на этом участке.

Для замкнутой электрической цепи с активным элементом (см. рис. 1.3а), где каждый элемент характеризуется электрическим сопротивлением, может быть записан обобщенный закон Ома:

$$E = I(R_{\text{ист}} + R_{\text{пр}} + R_n),$$

где $R_{\text{ист}}$ – сопротивление источника;

$R_{\text{пр}}$ – сопротивление проводов;

R_n – сопротивление внешней нагрузки.

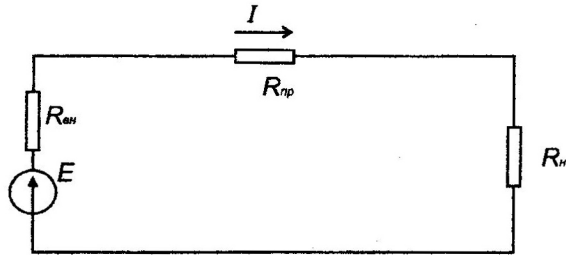


Рис. 1.3а

Первый закон Кирхгофа – закон баланса токов в узле. Алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна 0.

Для постоянного тока $\sum_{k=1}^n I_k = 0$; для переменного тока $\sum_{k=1}^n i_k = 0$.

Второй закон Кирхгофа. Алгебраическая сумма ЭДС источников питания в любом контуре равна алгебраической сумме падений напряжения на элементах этого контура,

Для постоянного тока $\sum_{i=1}^n E_i = \sum_{k=1}^m U_k$; для переменного тока $\sum_{i=1}^n e_i = \sum_{k=1}^m u_k$

Закон Джоуля-Ленца. Энергия, выделяемая в сопротивление R при протекании по нему тока I за время t , пропорциональна произведению квадрата силы тока и величины сопротивления: $W = I^2 R t$.

Закон электромагнитной индукции устанавливает связь между электрическими и магнитными явлениями.

Он формулируется: если магнитный поток, проходящий сквозь поверхность, ограниченную некоторым контуром, изменяется во времени, в контуре индуцируется ЭДС, равная скорости изменения потока:

$$e = -\left(\frac{d\phi}{dt}\right).$$

Для катушки с числом витков W , которая пронизывается магнитным потоком ϕ :

$$e = -W\left(\frac{d\phi}{dt}\right), \text{ или в общем виде } e = -\frac{d\psi}{dt},$$

где ψ – полное потокоцепление катушки или контура.

Знак минус ставится исходя из правила Ленца, по которому индуцируемая ЭДС и вызываемый поток всегда направлены противоположно изменению основного потока. Если основной поток увеличивается, то индуцируемая ЭДС и вызываемый поток направлены навстречу, если уменьшается – то согласно.

Если магнитный поток, пронизывающий контур или катушку, создается только током в этом контуре или катушке, то магнитный поток и потокоцепление называют потоком и потокоцеплением самоиндукции.

При изменении тока изменяется поток (потокоцепление) самоиндукции, поэтому в контуре или катушке наводится ЭДС e_L , называемая ЭДС самоиндукции.

По закону электромагнитной индукции

$$e_L = -\frac{d\psi}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -L \frac{di}{dt},$$

где L – индуктивность катушки ($L = \text{const}$).

Знак минус и здесь показывает, что ЭДС самоиндукции в соответствии с правилом Ленца препятствует причине, ее вызвавшей, т.е. изменению тока.

Для катушки без потерь можно записать

$$U_L = -e_L = L \frac{di}{dt}$$

1.4. Режимы работы электрических цепей

Электрические цепи и их элементы могут работать в различных режимах в отношении величин напряжений, токов и мощностей. Наиболее характерными являются номинальный, согласованный, холостого хода (х.х.) и короткого замыкания (к.з.).

Номинальным режимом работы элемента электрической цепи считается режим, при котором он работает с номинальными параметрами.

Согласованным является режим, при котором мощность, отдаваемая источником или потребляемая приемником, имеет максимальное значение. Такое значение получается при определенном соотношении (согласовании) параметров электрической цепи.

Под режимом **холостого хода** понимается такой режим, при котором через источник или приемник не протекает электрический ток. При этом источник не отдает энергию во внешнюю часть цепи, а приемник не потребляет ее. Для двигателя это будет режим без механической нагрузки на валу.

Режимом короткого замыкания называется режим, возникающий при соединении между собой разноименных зажимов источника или пассивного элемента, а также участка электрической цепи, находящегося под напряжением. В этом случае сопротивление всей цепи равно внутреннему сопротивлению источника.

2. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Постоянный ток используется в процессе электролиза (гальванопластика – получение легко отделяющихся точечных металлических копий, гальваностегия – нанесение металлических покрытий из одних металлов на изделия из других металлов), на городском транспорте (электропоезда, трамваи, троллейбусы), в осветительных приборах, в устройствах автоматики, электроники и вычислительной техники.

Если ток постоянный, то отсутствует явление самоиндукции и падение напряжения на катушке индуктивности при $R_k=0$ равно нулю,

$$U_L = L \frac{di}{dt}, \quad \text{но} \quad \frac{di}{dt} = 0, \quad \text{т.к. } i = \text{const.}$$

Если рассматривать конденсатор как идеальную емкость, то в цепи постоянного тока эта ветвь равносильна разомкнутой.

Постоянный ток через емкость не проходит.

Таким образом, в цепи постоянного тока остаются только источники ЭДС или тока – активные элементы и пассивные элементы (резисторы и др.), в которых электрическая энергия преобразуется в тепловую.

2.1. Преобразование электрических цепей

Целью преобразования, как правило, является упрощение цепи.

Простыми цепями постоянного тока называются цепи с одним источником при последовательном (рис. 2.1а), параллельном (рис. 2.1б) и смешанном (рис. 2.1в) соединении приемников.

Согласно схеме на рис. 2.1а:

$$E = IR_1 + IR_2 + \dots + IR_n = \\ = I(R_1 + R_2 + \dots + R_n) = IR_{\text{экв}}; \quad R_{\text{экв}} = \sum R_i$$

Таким образом, эквивалентное сопротивление при последовательном соединении приемников равно сумме сопротивлений последовательно соединенных резисторов.

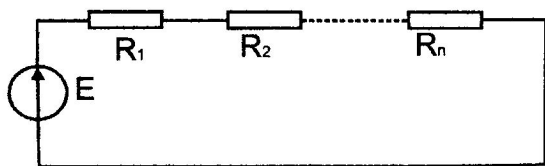


Рис. 2.1а. Последовательное соединение приемников

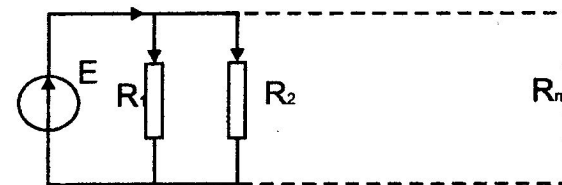


Рис. 2.1б. Параллельное соединение приемников

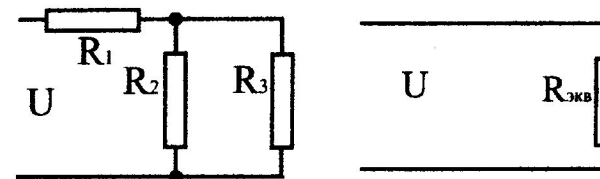


Рис. 2.1в. Преобразование схемы при смешанном соединении приемников

При параллельном соединении приемников напряжение на всех приемниках одинаково.

По закону Ома токи в каждой ветви:

$$I_1 = \frac{E}{R_1}; \quad I_2 = \frac{E}{R_2}; \quad I_n = \frac{E}{R_n}.$$

По первому закону Кирхгофа общий ток

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n = E \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right) = E(G_1 + G_2 + \dots + G_n) = EG_{\text{экв}}$$

$$G_{\text{экв}} = (G_1 + G_2 + \dots + G_n); \quad R_{\text{экв}} = \frac{1}{G_{\text{экв}}}$$

где G – проводимость

При параллельном соединении приемников эквивалентная проводимость равна сумме проводимостей.

В частном случае при двух параллельных приемниках (R_1 и R_2) эквивалентное сопротивление $R_{\text{экв}}$

$$R_{\text{экв}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

При смешанном соединении приемников (рис. 2в) эквивалентное сопротивление цепи определяется комбинацией первых двух соединений, а именно:

$$R_{\text{экв}} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = R_1 + R'_{\text{экв}}$$

В ряде электрических цепей встречаются соединения приемников в виде трехлучевой звезды и треугольника. В этом случае решение упрощается при их взаимном преобразовании (рис. 2.1г).

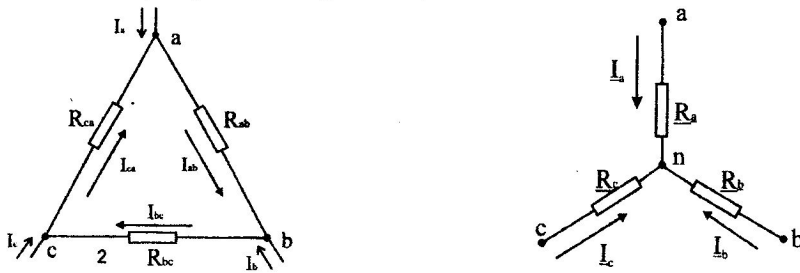


Рис. 2.1г

По условиям преобразования токи I_a, I_b, I_c и напряжения U_{ab}, U_{bc}, U_{ca} после преобразования изменяться не должны. В этом случае формулы преобразования треугольника в звезду выглядят так:

$$R_a = \frac{R_{ab}R_{ac}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}, \quad R_b = \frac{R_{bc}R_{ab}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}, \quad R_c = \frac{R_{ca}R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}.$$

При обратном преобразовании используем проводимости:

$$G_a = \frac{G_b G_c}{G_a + G_b + G_c}, \quad G_b = \frac{G_a G_c}{G_a + G_b + G_c}, \quad G_c = \frac{G_a G_b}{G_a + G_b + G_c}.$$

при этом проводимость – это величина, обратная сопротивлению, т.е. $G = 1/R$.

В случае необходимости преобразования последовательных или параллельных ветвей с источниками ЭДС следует пользоваться следующими правилами:

- при последовательном соединении ЭДС и сопротивлений эквивалентная ЭДС равна алгебраической сумме последовательно соединенных ЭДС, а эквивалентное сопротивление – арифметической сумме последовательно включенных соединений, т.е.

$$E_{\text{экв}} = \sum_{k=1}^n \pm E_k \quad \text{и} \quad R_{\text{экв}} = \sum_{k=1}^n R_k,$$

- при параллельном соединении ЭДС и сопротивлений эквивалентная ЭДС равна алгебраической сумме произведения ЭДС на проводимость этой ветви, деленную на сумму проводимостей всех ветвей, т.е.

$$E_{\text{экв}} = \frac{\sum_{k=1}^n \pm G_k E_k}{\sum_{k=1}^n G_k},$$

а эквивалентная проводимость равна арифметической сумме проводимостей всех ветвей, т.е.

$$G_{\text{экв}} = \sum_{k=1}^n G_k.$$

2.2. Расчеты электрических цепей с использованием законов Кирхгофа

Для сложных цепей, когда упростить схему до простейшей очень сложно, особенно для цепей с несколькими ЭДС, целесообразно использовать универсальные законы Кирхгофа для узловых точек и замкнутых контуров.

Как правило, задача заключается в нахождении токов и мощностей по ветвям электрической схемы при известных ЭДС и сопротивлениях.

Для решения составляется система независимых уравнений, число которых равно числу неизвестных токов по ветвям. Для составления уравнений произвольно задаются направлениями токов в ветвях, считая их положительными. Если в результате расчета ток в какой-либо ветви будет с отрицательным знаком, это означает, что его направление фактически противоположно ранее принятому.

По первому закону Кирхгофа составляется число уравнений на одно меньше имеющихся узловых точек. Остальные уравнения составляются по второму закону Кирхгофа. Для этого произвольно принимаются направления обхода каждого контура, при этом ЭДС записывается со знаком плюс, если направление обхода совпало с направлением ЭДС, и со знаком минус в противном случае. Падение напряжения записывается со знаком плюс, если направление обхода данной ветви совпало с направлением тока и со знаком минус в противном случае.

В качестве примера составим систему уравнений для схемы по рис. 2.2а.

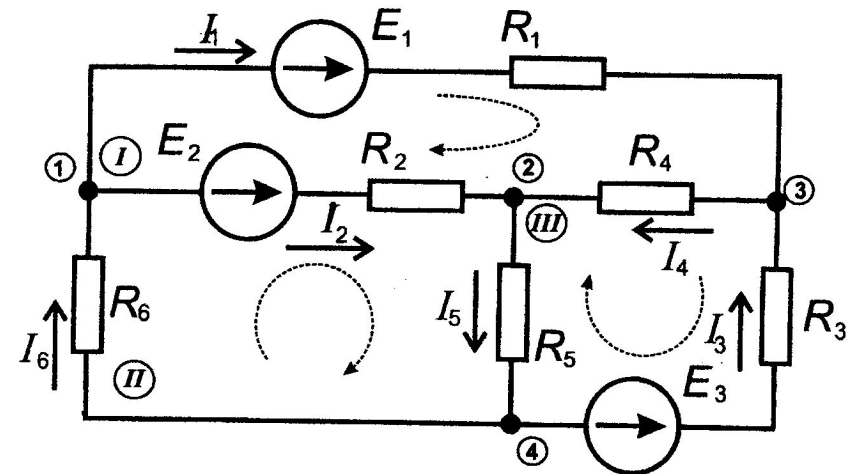


Рис. 2.2а. Схема сложной электрической цепи

В схеме имеем 4 узловых точки, поэтому составляем три уравнения по первому закону Кирхгофа:

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= I_6 \quad (\text{узел 1}), \\ I_3 &= I_2 + I_4 \quad (\text{узел 2}), \\ I_4 &= I_1 + I_3 \quad (\text{узел 3}). \end{aligned}$$

Всего неизвестно шесть токов в ветвях, поэтому по второму закону Кирхгофа необходимо составить еще три уравнения:

$$\begin{aligned} R_1 I_1 + R_4 I_4 - R_2 I_2 &= E_1 - E_2 \quad (\text{контур I}), \\ R_2 I_2 + R_5 I_5 + R_6 I_6 &= E_2 \quad (\text{контур II}), \\ -R_3 I_3 - R_5 I_5 - R_4 I_4 &= -E_1 \quad (\text{контур III}). \end{aligned}$$

Решение этих шести уравнений позволяет найти токи во всех ветвях.

2.3. Метод контурных токов

В основе метода лежат законы Кирхгофа и два предположения: в каждом контуре протекают независимые друг от друга контурные токи, а ток в каждой ветви равен алгебраической сумме контурных токов, замыкающихся через эту ветвь. В этом случае сокращается число уравнений до количества контуров и упрощается решение.

В качестве примера для составления системы уравнений с контурными токами рассмотрим схему, представленную на рис. 2.3а.

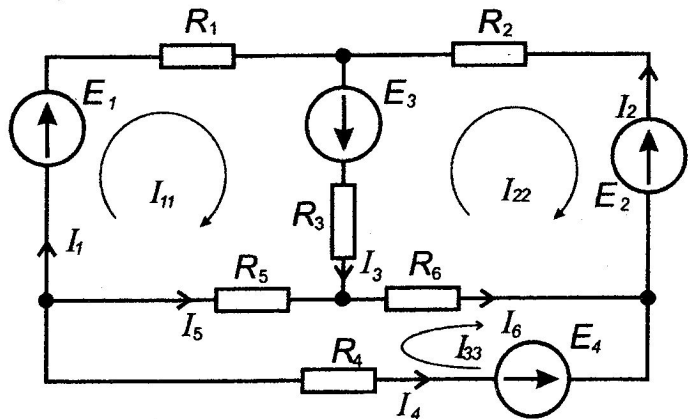


Рис.2.3а. Схема электрической цепи для расчета методом контурных токов

Обозначим контурные токи:

I_{11} – в первом контуре
 I_{22} – во втором контуре,
 I_{33} – в третьем контуре.

Направление обхода контуров принимается в соответствии с направлениями контурных токов (по часовой стрелке). Тогда система уравнений будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} 1 \text{ контур: } +E_1 + E_2 &= I_{11}(R_1 + R_3 + R_5) - I_{22}R_3 - I_{33}R_5 \\ 2 \text{ контур: } -E_2 - E_3 &= -I_{11}R_3 + I_{22}(R_2 + R_3 + R_6) - I_{33}R_6 \\ 3 \text{ контур: } -E_4 &= -I_{11}R_5 - I_{22}R_6 + I_{33}(R_4 + R_5 + R_6). \end{aligned}$$

При совпадении направления обхода контура с направлением ЭДС и направлением тока соответственно ЭДС и падение напряжения записываем со знаком плюс, в противном случае – со знаком минус. Решив эту систему, получим значения контурных токов, по которым можно найти токи в ветвях:

$$I_1 = I_{11}, \quad I_2 = -I_{22}, \quad I_3 = I_{11} - I_{22}, \quad I_4 = -I_{33}, \quad I_5 = I_{33} - I_{11}, \quad I_6 = I_{33} - I_{22}.$$

2.4. Метод узловых потенциалов

Метод целесообразно использовать для расчета электрических цепей, имеющих несколько параллельных ветвей с активными и пассивными элементами, сходящимися к двум узловым точкам.

Идея метода заключается в расчете напряжения между этими узлами, которое называется узловым напряжением. А затем для каждой ветви по закону Ома находим искомый ток.

Рассмотрим схему, изображенную на рис. 2.4а.

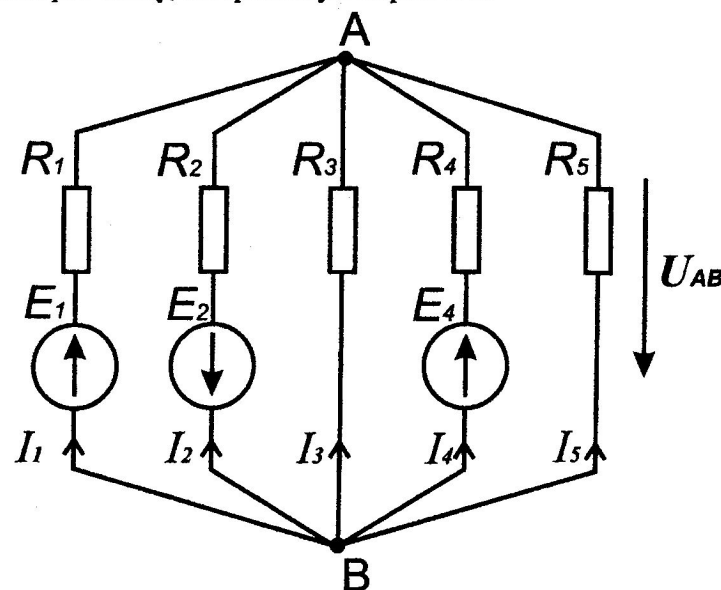


Рис. 2.4а. Схема электрической цепи с двумя узловыми точками

Составим уравнения для каждой ветви по второму закону Кирхгофа, задавшись направлением токов в ветвях и направлением обхода контура (по часовой стрелке).

$$\begin{aligned} E_1 &= I_1 R_1 + U_{AB}, \\ -E_2 &= I_2 R_2 + U_{AB}, \\ 0 &= I_3 R_3 + U_{AB}, \\ E_4 &= I_4 R_4 + U_{AB}, \\ 0 &= I_5 R_5 + U_{AB}. \end{aligned}$$

Узловые напряжения находятся по следующей формуле, которая может быть получена из уравнения по первому закону Кирхгофа

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 = 0;$$

Подставив в уравнение значения токов, получим:

$$U_{AB} = \frac{E_1 G_1 - E_2 G_2 + E_4 G_4}{G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + G_5} = \frac{\sum_{k=1}^n \pm E_k G_k}{\sum_{k=1}^n G_k}.$$

Зная величину U_{AB} , нетрудно найти токи в каждой ветви.

2.5. Баланс мощностей

Мощность P характеризует интенсивность преобразования энергии из одного вида в другой в единицу времени.

$$P = EI \text{ — для источника, } P = UI = \frac{U^2}{R} = I^2 R \text{ — для приемника.}$$

Единицей измерения мощности является ватт (Вт).

На основании закона сохранения энергии мощность, развиваемая источником энергии, должна быть равна мощности преобразования в цепи электрической энергии в другие виды (для резисторов в тепловую):

$$\sum_{k=1}^n E_k I_k = \sum_{k=1}^n I_k^2 R_k$$

Это равенство называется балансом мощностей электрической цепи.

При этом следует иметь в виду, что если фактическое направление тока совпадает с направлением ЭДС, то источник вырабатывает (генерирует) электрическую энергию, если направление ЭДС и фактического тока не совпали, то этот элемент работает в режиме потребителя и является приемником, а произведение в этом случае ($E I$) имеет отрицательный знак.

3. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО (СИНУСОИДАЛЬНОГО) ТОКА

Основные достоинства переменного тока заключаются в возможности преобразования электрической энергии одного напряжения в электрическую энергию другого напряжения. Это вызвано необходимостью применения по техническим и экономическим соображениям напряжения различного уровня для источников (электрических генераторов), линий электропередач и электроприемников (в основном электрических двигателей на напряжение 220 и 380 вольт).

Это преобразование реализуется с помощью трансформаторов, которые являются одним из элементов электрической цепи переменного тока.

Переменными называются ЭДС, напряжения, токи, которые периодически изменяются во времени. Наибольшее распространение получили переменные токи, которые изменяются по закону синуса.

ЭДС, изменяющаяся периодически по закону синуса, может быть получена в генераторах переменного тока, где механическая энергия превращается в электрическую энергию.

Анализ явлений и расчет цепей переменного тока осложняется тем, что при протекании переменного тока в элементах цепи, обладающих индуктивностью, возникает ЭДС самоиндукции и возникает постоянно меняющееся магнитное поле, а в элементах цепи, обладающих емкостью, постоянно меняется запас энергии в электрическом поле элемента.

3.1. Основные параметры и представления синусоидальной функции ЭДС, напряжения и тока

Переменный синусоидальный ток характеризуется рядом параметров:

- мгновенными значениями u , e , i , т.е. в рассматриваемый момент времени
 $u = f(\omega t)$, $e = f(\omega t)$, $i = f(\omega t)$;
- амплитудными значениями U_m , E_m , I_m , т.е. максимальными значениями синусоиды;
- угловой частотой (скоростью изменения аргумента функции) где ω измеряется в рад/сек.;
- начальной фазой ψ_u , ψ_e , ψ_i (значением аргумента функции в момент начала отсчета времени, т.е. при $t=0$) в радианах или градусах;

- периодом T – промежутком времени, в течение которого завершается полный цикл изменения синусоидальной величины;
- частотой f , т.е. числом периодов T в одну секунду,

$$f = \frac{1}{T},$$

Единицей измерения частоты является герц (Гц). В качестве промышленной в большинстве стран принята частота $f = 50$ Гц;

- действующими значениями U , E , I , т.е. среднеквадратичными значениями переменной величины. Это наименование объясняется тем, что тепловой и механический (электродинамическое взаимодействие двух проводников с током) эффект за полупериод равны эффекту постоянного тока, значение которого равно действующему значению синусоидального тока за тот же интервал времени.

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}, \quad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}, \quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \quad \text{где } \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707.$$

Следует помнить, что большинство приборов, применяемых для измерения синусоидальных электрических величин U , E , I показывают среднеквадратичные значения U , E , I за положительный полупериод.

$$U = 0,707 U_m, \quad E = 0,707 E_m, \quad I_{cp} = 0,707 I_m.$$

- средними значениями U_{cp} , E_{cp} , I_{cp} , под которыми понимают среднее значение синусоиды за положительный полупериод, т.е.

$$U_{cp} = 0,637 U_m$$

$$E_{cp} = 0,637 E_m$$

$$I_{cp} = 0,637 I_m$$

- сдвигом фаз между напряжением и током φ ,

где φ – алгебраическая величина, определяемая как разность начальных фаз напряжения и тока: $\varphi = \psi_u - \psi_i$.

На рисунке 3.1а представлена синусоидальная функция напряжения с перечисленными выше параметрами.

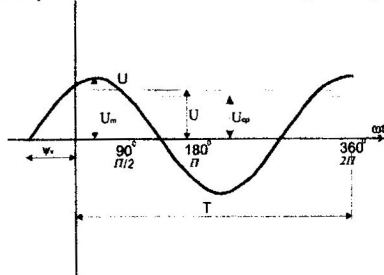


Рис. 3.1а. Синусоидальная функция напряжения

В аналитическом виде эта функция может быть записана следующим образом:

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

Однако, показанное выше графическое и аналитическое представление синусоидальной функции хотя и наглядно, но из-за сложности построения синусоид и громоздких вычислений с тригонометрическими функциями применяется сравнительно редко при выполнении расчетных операций. Поэтому в электротехнике синусоидальные функции представляют при помощи вращающегося вектора.

Длина вектора-радиуса равна амплитудному значению синусоидальной величины, а угол наклона к оси абсцисс – начальной фазе ψ . Тогда проекция этого вектора на ось ординат будет равна мгновенному значению функции в момент времени t , соответствующий определенному углу поворота вектора (рис. 3.1б).

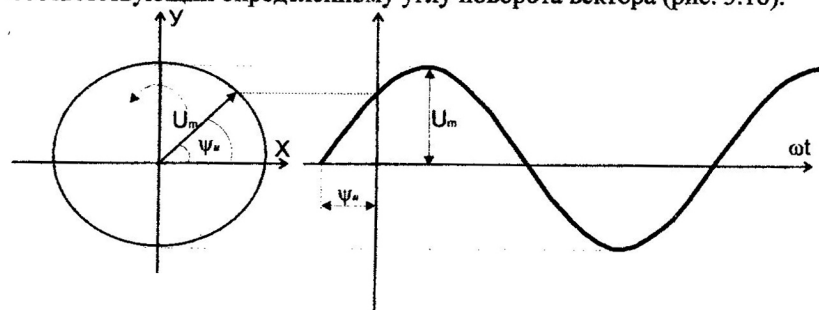


Рис. 3.1б. Изображение синусоидальной функции и вращающегося вектора

Для рис. 3.1б синусоидальная функция (мгновенное значение напряжения u) запишется следующим образом:

$$u = U_m \cdot \sin(\omega t + \psi_u).$$

Мгновенное значение (проекция вектора на ось ординат) может быть получено при вращении вектора со скоростью ω вокруг начала координат против часовой стрелки. При $t = 0$ угол поворота вектора составляет ψ_u , а проекция этого вектора на ось ординат – мгновенное значение напряжения для времени $t = 0$.

Совокупность нескольких векторов, изображающих синусоидально изменяющиеся величины одной и той же частоты, называется векторной диаграммой.

В практических расчетах векторы изображают не вращающимися, а неподвижными для момента времени $t = 0$, а длину вектора берут равной действующему значению.

От векторного изображения синусоидальных функций можно перейти к их выражению комплексными числами. Комплексные числа графически представляются векторами комплексной плоскости с осями координат ± 1 – ось действительных чисел и $\pm j$ – ось мнимых чисел. В электротехнике мнимую единицу $\sqrt{-1}$ обозначают через $j = e^{j90^\circ}$, что означает поворот на $\pm 90^\circ$ (рис. 3.1в).

Таким образом, алгебраические действия с синусоидальными функциями заменяются действиями над комплексными числами, поэтому алгебра комплексных чисел является основным математическим аппаратом при расчете цепей синусоидального тока, а векторная алгебра – наглядным средством изображения синусоидально изменяющихся величин.

Итак, наиболее рационально расчет синусоидальных величин вести в комплексном исчислении, при этом возможно иметь две формы записи комплексного числа:

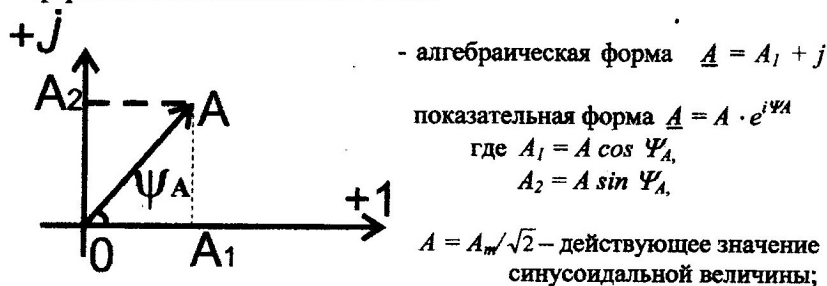


Рис. 3.1в

Вектор $\underline{A}$ на комплексной плоскости

(Признаком комплексного числа является черточка под комплексной величиной).

Следует иметь в виду, что сложение и вычитание комплексных чисел целесообразно осуществлять в алгебраической форме записи, а умножение и деление – в показательной форме записи.

Например:

1) если $\underline{I}_1 = 3 + j \cdot 4$ и $\underline{I}_2 = 1 - j \cdot 2$, то

$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 4 + j \cdot 2$, а $\underline{I}_4 = \underline{I}_1 - \underline{I}_2 = 2 + j \cdot 6$;

2) если $\underline{U} = 220 e^{j60^\circ}$, а $\underline{I} = 5 e^{j20^\circ}$,

то по закону Ома $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = 44 e^{j40^\circ}$.

Переход от показательной формы записи к алгебраической выполняется по формулам для A_1 и A_2 , а обратный переход – по формулам:

$$A = \sqrt{(A_1)^2 + (A_2)^2},$$

$$\psi_A = \arctg \frac{A_2}{A_1} \text{ — при } A_1 > 0 \text{ и } \psi_A = \arctg \frac{A_2}{A_1} + 180^\circ \text{ при } A_1 < 0$$

При расчете цепей синусоидального тока, в отличие от расчета цепей постоянного тока, необходимо учитывать не один, а три пассивных элемента: резистивный, индуктивный и емкостной, которые характеризуются соответственно активным сопротивлением R , индуктивностью L (индуктивным сопротивлением $X_L = \omega L$) и емкостью C (емкостным сопротивлением $X_C = 1/(\omega C)$), где ω – угловая частота.

Индуктивное X_L и емкостное X_C сопротивления определяют не только значения токов в цепи, но и сдвиг фаз между напряжениями и токами.

При включении в цепь индуктивности L часто говорят об индуктивном сопротивлении, индуктивном падении напряжения или индуктивной составляющей напряжения. Однако в действительности в этих понятиях есть условность. При включении в цепь катушки, обладающей активным сопротивлением R и индуктивностью L , на переменное синусоидальное напряжение уравнение по второму закону Кирхгофа записывается в виде $u = R i - e_L$. Это объясняется тем, что часть напряжения u падает на сопротивлении R , (т.е. $R i$), а остальная часть расходуется на компенсацию возникающей в индуктивности ЭДС самоиндукции (e_L). Численно значение ЭДС самоиндукции определяется из выражения

$$e_L = -L di/dt = -\omega L I_m \sin(\omega t + \pi/2).$$

Тогда величину ωL можно назвать индуктивным сопротивлением X_L и записать $X_L = \omega L = 2\pi fL$.

Аналогично $X_C = 1/(\omega C)$ называют емкостным сопротивлением, а

($X_C I$) – емкостным падением напряжения.

При расчете режимов цепей синусоидального тока максимально используются понятия, формулы и методы расчета цепей постоянного тока. Это стало возможным благодаря применению комплексного (символического) метода расчета.

Запишем законы Кирхгофа в комплексной форме.

Первый закон Кирхгофа: алгебраическая сумма токов, записанных в комплексной форме, в узле электрической цепи равна нулю;

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0$$

Второй закон Кирхгофа: алгебраическая сумма напряжений, записанных в комплексной форме, в контуре равна алгебраической сумме ЭДС, записанных в комплексной форме в том же контуре;

$$\sum_{k=1}^n U_K = \sum_{k=1}^n E_K$$

Запишем уравнения по первому и второму закону Кирхгофа для электрических схем, изображенных на рис. 3.1г.

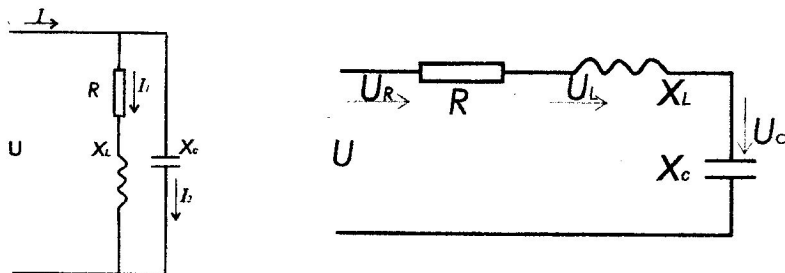


Рис. 3.1.г

По первому закону для цепи с параллельно включенными R , X_L и X_C запишем уравнение:

$$I = I_1 + I_2$$

По второму закону Кирхгофа для цепи с последовательно включенными R , X_L и X_C запишем уравнения:

$$U = U_R + U_L + U_C \quad \text{или} \\ U = IR + I(jX_L) + I(-jX_C) = I(R + jX_L - jX_C)$$

При этом будем помнить, что эквивалентное комплексное сопротивление Z_3 при последовательном включении сопротивлений R , X_L , X_C : $Z_3 = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n = (R_1 + R_2 + \dots + R_n) + j(\pm X_L \pm X_2 \dots + X_n)$, где n — число последовательно соединенных элементов (знак $+$ соответствует X_L , знак $-$ соответствует X_C); эквивалентная комплексная проводимость Y_3 при параллельном соединении n ветвей $Y_3 = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$.

При смешанном соединении используют расчетные формулы последовательного и параллельного соединений для комплексных сопротивлений.

3.2. Элементы электрических цепей переменного тока

Резисторный элемент или активное сопротивление в цепи переменного тока практически не отличается от сопротивления в цепи постоянного тока (при частоте $f=50$ герц поверхностным эффектом можно пренебречь). Если к резистору приложено синусоидальное напряжение $u = U_m \sin \omega t$, то по закону Ома для мгновенных значений

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \psi_u) = I_m \sin \omega(t + \psi_u),$$

то видно, что начальная фаза тока по отношению к начальной фазе напряжения не изменилась $\varphi = \psi_u - \psi_i = 0$, т.е. в цепи с резистивным сопротивлением напряжение и ток совпадают по фазе.

График мгновенных значений и векторная диаграмма изображены на рис.3.2 а.

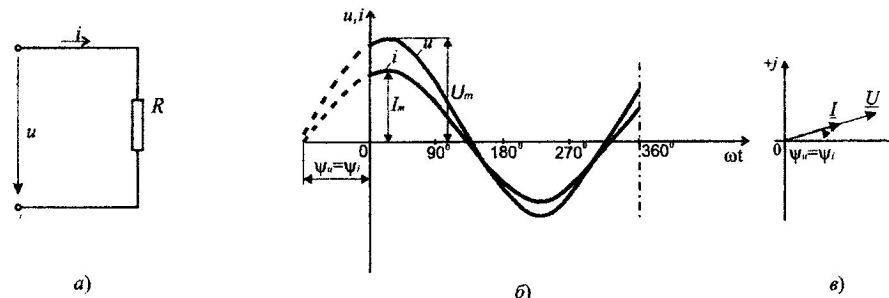


Рис. 3.2а

В комплексной форме можно записать:

$$\underline{U} = U e^{j\psi_u} \quad \text{и} \quad \underline{I} = I e^{j\psi_i}$$

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U e^{j\psi_u}}{I e^{j\psi_i}} = \left(\frac{U}{I}\right) e^{j(\psi_u - \psi_i)} = R e^{j0} = R.$$

В активном сопротивлении в соответствии с законом Джоуля-Ленца выделяется энергия, которая пропорциональна квадрату действующего значения тока и величины сопротивления R .

$$W = I^2 R t.$$

Это значит, что в активном сопротивлении проходит процесс необратимого преобразования электрической энергии в тепловую энергию.

При включении в цепь переменного тока катушки индуктивности ток возбуждает в проводнике и окружающей среде магнитное поле, потоки магнитного поля (Φ) сцеплены с частью витков катушки или со всей катушкой, что характеризуется понятием потокосцепления ψ .

$$\psi = \sum_{k=1}^m W_k \Phi_k$$

Потокосцепление и ток катушки в линейной цепи пропорциональны и связаны соотношением

$$\Psi = L \cdot i,$$

где L - коэффициент пропорциональности, называемый индуктивностью катушки.

В соответствии с законом электромагнитной индукции, который гласит: если магнитный поток, проходящий через поверхность, ограниченную токоведущим контуром, изменяется во времени, в контуре индуцируется ЭДС, равная скорости изменения потока:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(iL)}{dt} = -L \frac{di}{dt}$$

ЭДС вызывает ток i , направленный так же как и ЭДС, а магнитный поток, созданный этим током, направлен навстречу основному потоку Φ , т.е. препятствует его увеличению (при $di/dt > 0$).

Если магнитный поток, пронизывающий катушку, создается током только в этом контуре, то индуцированная ЭДС называется ЭДС самоиндукции e_L , т.е.

$$e_L = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{di}{dt}$$

и эта ЭДС компенсирует напряжение, приложенное к катушке, (при $R_k=0$), т.е. $-e_L = u$.

Если к катушке приложено синусоидальное напряжение $U = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$, то интегрируя выражение

$$u = -e_L = L \frac{di}{dt}, \text{ получим}$$

$$i = \frac{U_m}{\omega L} \sin(\omega t + \psi_u - 90^\circ) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$$

Отсюда следует, что начальная фаза тока $\psi_i = \psi_u - 90^\circ$, т.е. ток по фазе отстает от напряжения на 90° (рис. 3.26).

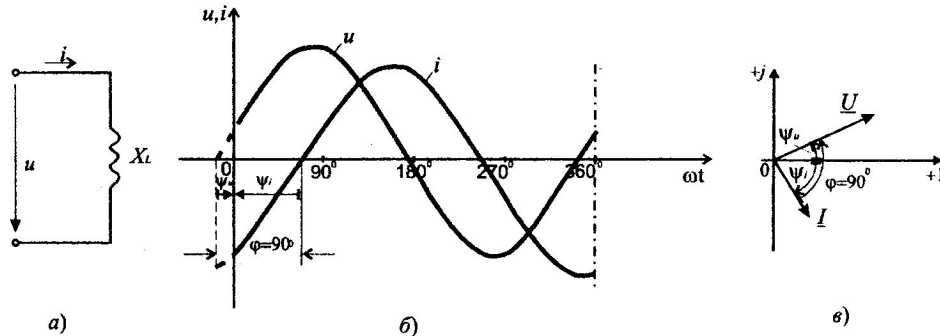


Рис. 3.26

Закон Ома в комплексной форме

$$\underline{U} / \underline{I} = U e^{j\psi_u} / I e^{j\psi_i} = U/I e^{j\psi_u - j\psi_i} = U/I e^{j90^\circ}, \text{ но т.к.}$$

$$e^{j90^\circ} = \cos 90^\circ + j \sin 90^\circ = j, \text{ то}$$

$$\underline{I} = \underline{U} / jX_L,$$

где jX_L - индуктивное сопротивление в комплексной форме.

Тогда падение напряжения на участке цепи с индуктивностью

$$\underline{U} = \underline{I} jX_L$$

Из вышеприведенного можно также записать, что

$$X_L = \omega L = 2 \pi f L.$$

В катушке индуктивности, находящейся под синусоидальным напряжением, постоянно происходит обмен энергией между магнитным полем катушки и внешним источником. Этот обмен происходит с двойной частотой, т.к. мгновенная мощность

$$P_L = iu = \frac{I_m U_m}{2} \sin \omega t \sin(\omega t + 90^\circ) = \frac{I_m U_m}{2} \sin 2\omega t = IU \sin 2\omega t$$

Электрическая цепь в течение одной четверти периода потребляет энергию из сети и запасает в магнитном поле, а в следующей четверти периода возвращает ее обратно в сеть. Эта нагрузка называется индуктивной или реактивной нагрузкой. Никакой полезной работы она не производит.

Для оценки введено понятие реактивной мощности Q_L

$$Q_L = I^2 X_L.$$

Если синусоидальное напряжение $u_c = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ приложено к емкостному элементу, то ток зарядки-разрядки емкости:

$$i = C \frac{du_c}{dt} = \frac{C[U_m \sin(\omega t + \psi_u)]}{dt} = \omega C U_m \sin(\omega t + \psi_u + 90^\circ).$$

Амплитуда тока $I_m = \omega C U_m$, а величина, обратная ωC , называется емкостным сопротивлением $\frac{1}{\omega C} = X_c$.

Начальная фаза тока $\psi_i = \psi_u + 90^\circ$, т.е. угол сдвига между током и напряжением равен 90° и ток опережает напряжение на 90° .

График мгновенных значений и векторные диаграммы изображены на рис. 3.2 в.

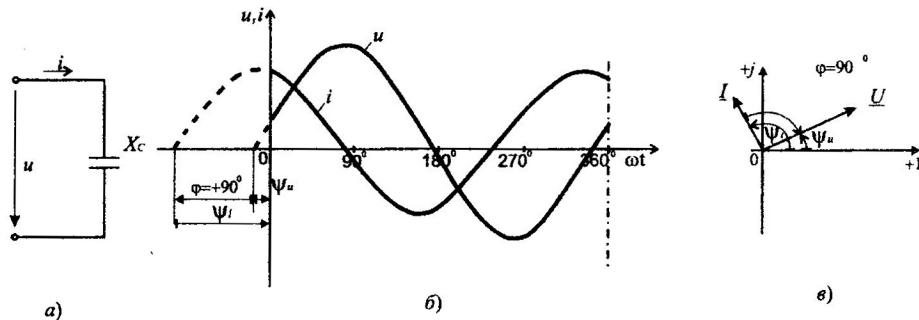


Рис. 3.2в

Закон Ома в комплексной форме:

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U e^{j\psi_u}}{I e^{j\psi_i}} = \frac{U}{I} e^{j(\psi_u - \psi_i)} = X_c e^{-j90^\circ} = -jX_c, \text{ т.к. } e^{-j90^\circ} = -j$$

Падение напряжения на участке цепи с емкостным элементом

$$\underline{U} = \underline{I}(-jX_c).$$

Мгновенная мощность в цепи с емкостью C , как и в цепи с индуктивностью, с двойной частотой изменяется по величине и по знаку, т.е. происходит обмен энергией между конденсатором с емкостью C и источником:

$$P_c = ui = U_m \sin \omega t I_m \sin(\omega t + 90^\circ) = UI \sin 2\omega t$$

Такая нагрузка называется емкостной или реактивной

$$Q_c = I^2 X_c.$$

В нижеприведенной таблице даны мгновенные значения, закон Ома в комплексной форме и векторные диаграммы для различных элементов цепи.

Элементы	Мгновенные значения	Векторная диаграмма	Закон Ома в ком. Форме
R 	$u_R = U_m \sin \omega t$ $i = I_m \sin \omega t$		$\underline{U}_R = \underline{I} R$
jX_L 	$u_L = U_m \sin \omega t$ $i = I_m \sin(\omega t - 90^\circ)$		$\underline{U}_L = \underline{I} (jX_L)$
$-jX_C$ 	$u_C = U_m \sin \omega t$ $i = I_m \sin(\omega t + 90^\circ)$		$\underline{U}_C = \underline{I} (-jX_C)$
$R \quad jX_L$ 	$u = U_m \sin \omega t$ $i = I_m \sin(\omega t - \varphi)$		$\underline{U} = \underline{I} (R + jX_L)$
$R \quad -jX_C$ 	$u = U_m \sin \omega t$ $i = I_m \sin(\omega t + \varphi)$		$\underline{U} = \underline{I} (R - jX_C)$

3.3. Последовательное соединение элементов в цепи переменного тока

Если к электрической цепи с последовательным соединением элементов R, L, C приложено синусоидальное напряжение

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u),$$

то на каждый элемент будет приходиться напряжение U_R, U_L и U_C (см. рис. 3.1г).

По второму закону Кирхгофа в комплексной форме можно записать

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C, \text{ а с учетом замены}$$

$$\underline{U}_R = \underline{I} R, \quad \underline{U}_L = j X_L \underline{I}, \quad \underline{U}_C = -j X_C \underline{I}$$

получим закон Ома в комплексной форме:

$$\underline{U} = \underline{I} [R + j(X_L - X_C)].$$

Величина $R + j(X_L - X_C) = \underline{Z}$ называется комплексным сопротивлением, а $X = (X_L - X_C)$ — реактивным сопротивлением. Угол сдвига фаз φ между напряжением и током определяется аргументом комплексного сопротивления

$$\underline{Z} = Z e^{j\varphi}, \text{ где}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad \text{и} \quad \varphi = \arctg \frac{X_L - X_C}{R}.$$

Знак угла сдвига фаз φ определяется знаком реактивного сопротивления: если $X_L > X_C$, то участок имеет активно-индуктивный характер, если $X_L < X_C$, то — активно-емкостной.

В первом случае ток отстает от напряжения на угол φ , во втором — опережает (см. рис.3.3 а).

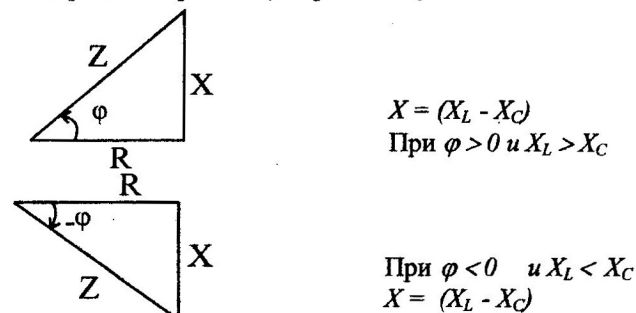


Рис. 3.3а

На рис. 3.3 б показаны векторные диаграммы для этих случаев. Начальная фаза тока φ_i принята равной нулю, а векторные диаграммы построены в соответствии с уравнением по второму закону Кирхгофа.

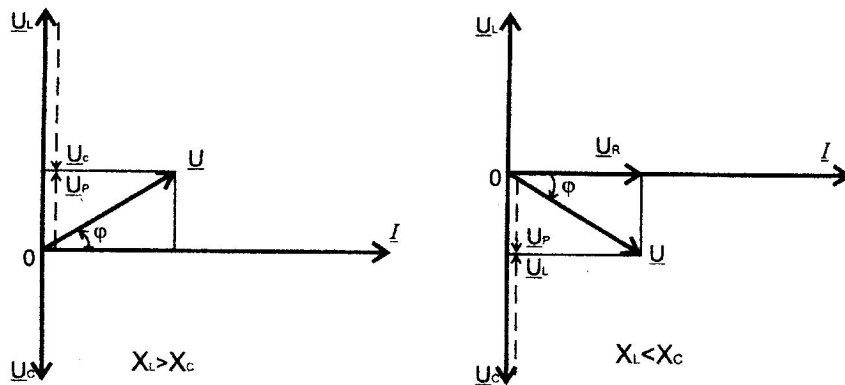


Рис. 3.36

На рисунках $\underline{U}_R$ называется активной составляющей и совпадает с вектором тока по направлению, $\underline{U}_L$ опережает вектор тока на 90° и $\underline{U}_C$ отстает на угол 90° .

Вектор полного напряжения получается путем геометрического суммирования векторов $\underline{U}_R$, $\underline{U}_L$, $\underline{U}_C$.

3.4. Проводимость цепи переменного тока. Параллельное соединение ветвей

В цепях переменного тока, аналогично цепям постоянного тока, существует понятие проводимости. Под комплексной проводимостью $\underline{Y}$ понимают отношение комплексного действующего значения тока к комплексному действующему значению напряжения.

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{1}{\underline{Z}}, \quad \text{но т.к. } \underline{Z} = R + jX, \text{ то}$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j \frac{X}{R^2 + X^2}$$

Здесь :

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} = \frac{R}{Z^2} \quad - \text{действительная часть комплексной}$$

проводимости

(активная проводимость) и

$B = \frac{X}{R^2 + X^2} = \frac{X}{Z^2}$ - мнимая часть, которая называется реактивной проводимостью.

Тогда полная проводимость $\underline{Y} = G - jB$, при этом
 $B = B_L - B_C$, а $X = X_L - X_C$.

Представление участка цепи комплексной проводимостью $\underline{Y} = G - jB$ соответствует схеме замещения с параллельным соединением элементов (рис.3.4а).

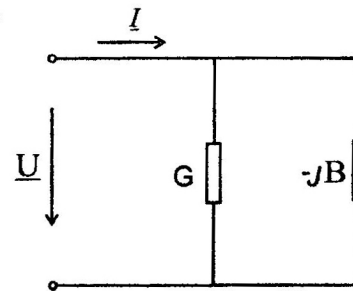


Рис. 3.4 а

В качестве примера рассмотрим цепь с двумя параллельными ветвями, параметры которых R_1 , L и R_2 , C (рис. 3.4 б).

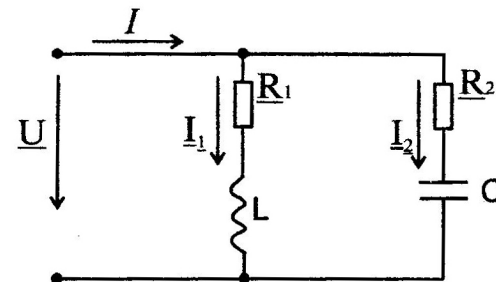


Рис. 3.4 б

Тогда по первому закону Кирхгофа

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2,$$

эквивалентное сопротивление цепи

$$\underline{Z}_{\text{экв}} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}, \quad \text{где}$$

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_L \quad \underline{Z}_2 = R_2 - jX_C,$$

или запишем через проводимости:

$$\underline{Y}_{\text{экв}} = \frac{1}{\underline{Z}_{\text{экв}}} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = (G_1 - j B_L) + (G_2 + j B_C) = \\ = (G_1 + G_2) - j (B_L - B_C),$$

где $G_{\text{экв}} = G_1 + G_2$ $B_{\text{экв}} = B_L - B_C$.
Проводимость в показательной форме

$$\underline{Y}_{\text{экв}} = Y e^{j\varphi}, \quad \text{где}$$

$$Y = \sqrt{(G_1 + G_2)^2 + (B_L - B_C)^2} \quad \text{и} \quad \varphi = \arctg \frac{B_L - B_C}{G_1 + G_2}.$$

Векторная диаграмма представлена на рис. 3.4 в.

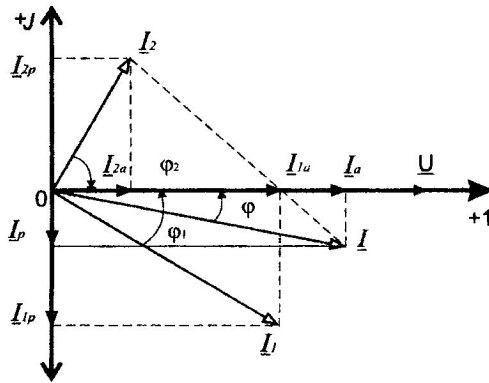


Рис. 3.4 в

Векторная диаграмма строится в соответствии с первым законом Кирхгофа, а за опорный вектор принимается вектор $\underline{U}$ с нулевой начальной фазой ($\varphi_u = 0$).

Разложим векторы токов в параллельных ветвях на две составляющие:

I_a – активная составляющая

I_p – реактивная составляющая, т.е.

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{a1} + \underline{I}_{p1} \quad \text{и} \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_{a2} + \underline{I}_{p2}.$$

Построим векторы токов, т.к. сопротивление первой ветви активно-индуктивное, ток $\underline{I}_1$ отстает по фазе от напряжения на угол φ_1 .

Сопротивление второй ветви активно-емкостное, поэтому ток $\underline{I}_2$ опережает напряжение на угол φ_2 .

Вектор тока в неразветвленной части получается путем геометрического сложения векторов $\underline{I}_1$ и $\underline{I}_2$.

Из векторной диаграммы также следует, что

$$I_a = I \cos \varphi, \quad I_p = I \sin \varphi \quad \text{или} \quad I_a = UG \quad \text{и} \quad I_p = UB.$$

3.5. Резонанс в электрических цепях переменного тока

В электрической цепи, состоящей из индуктивности L и емкости C , при определенных условиях могут возникнуть колебания за счет обмена энергией между электрическими и магнитными полями.

Чтобы поддерживать незатухающие колебания энергии, необходимо к контуру подводить энергию, компенсирующую потери на активном сопротивлении контура, на частоте колебаний контура.

По аналогии с механической колебательной системой этот процесс называется резонансом.

Различают в зависимости от схемы включения L и C в цепь резонанс напряжений и резонанс токов.

Резонансом в электрических цепях называется режим участка электрической цепи, содержащей индуктивный и емкостной элементы, при котором разность фаз между напряжением и током равна нулю ($\varphi = 0$). Режим резонанса может быть получен при изменении частоты ω питающего напряжения или изменением параметров L и C .

При последовательном соединении элементов L и C возникает резонанс напряжения (рис. 3.5а).

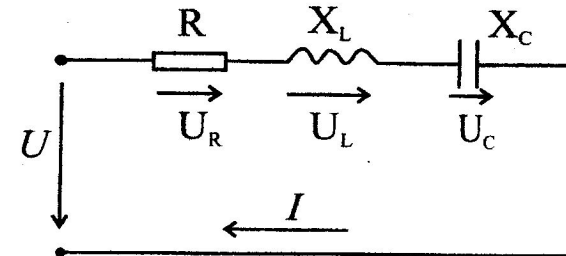


Рис. 3.5а

Для схемы, изображенной на рисунке 3.5а, ток в цепи

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X^2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}, \quad \text{а}$$

знаменатель данного выражения есть модуль комплексного сопротивления, который зависит от частоты. При достижении некоторой частоты реактивная составляющая сопротивления X_p будет равна нулю, т.к.

$$X_p = (\omega L - 1/\omega C).$$

Модуль сопротивления в этом случае становится минимальным, ток в данной схеме возрастает до максимального значения, причем вектор напряжения совпадает по фазе с вектором тока:

$$I = I_{\max} = U/R; \quad \varphi = 0; \quad \cos \varphi = 1;$$

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C})^2} = Z_{\min} = R$$

где ω_0 – резонансная частота напряжения, определяемая из условия:
 $|X_L| = |X_C|; \quad \omega_0 L = 1/\omega_0 C.$

$$\text{Тогда частота колебаний } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

Угол сдвига $\varphi = 0$ можно получить уменьшением частоты напряжения питания схемы или изменением величины индуктивности L или емкости C в цепи. В этом случае наступает резонанс, при котором напряжение питания будет равно напряжению на активном сопротивлении R . Напряжение на индуктивности $U_{L\text{рез}}$ и емкости $U_{C\text{рез}}$ равны по величине и противоположны по фазе. В этом случае, если $X_{L\text{рез}} = X_{C\text{рез}} \gg R$, то напряжения $U_{L\text{рез}} = U_{C\text{рез}}$ будут значительно превышать напряжение питания электрической цепи, что представляет определенную опасность.

На рис. 3.56 показаны частотные характеристики контура, т.е. зависимость тока в цепи, полного сопротивления Z и угла φ от частоты. Из рисунка видно, что при $\omega = \omega_0$ наступает резонанс, который характеризуется:

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{рез}} &= 0, \text{ а } \cos \varphi_{\text{рез}} = 1 \\ Z_{\text{рез}} &= R \\ I_{\text{рез}} &= I_{\max} = U/Z_{\text{рез}} \end{aligned}$$

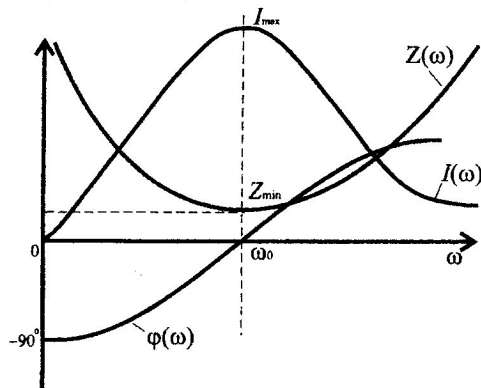


Рис. 3.56

На рис. 3.5в приведена векторная диаграмма для режима резонанса напряжения.

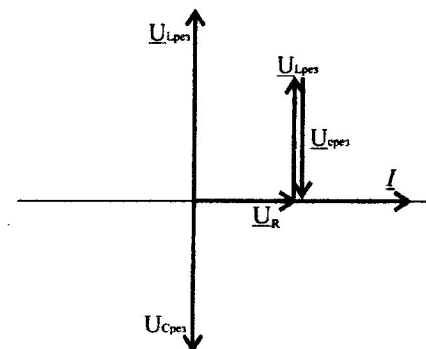


Рис. 3.5в

Волновое или характеристическое сопротивление последовательного контура

$$|X_L| = |X_C| = \omega_0 L = \sqrt{\frac{L}{C}} = Z_B.$$

Отношение напряжения на индуктивности или емкости к напряжению на входе в режиме резонанса называется добротностью контура:

$$Q = \frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U} = \frac{X_L I}{RI} = \frac{X_L}{R}$$

Добротность контура представляет собой коэффициент усиления по напряжению и в катушке индуктивности может достигать значительных величин:

$$U_{\text{рез}} = I_{\text{рез}} X_L = \frac{U}{R} X_L = U \frac{X_L}{R}.$$

При $X_L \gg R$ напряжение на индуктивности (или емкости) может быть гораздо больше напряжения на входе, что широко используется в радиотехнике. В промышленных сетях резонанс напряжений является аварийным режимом, так как увеличение напряжения на конденсаторе может привести к его пробое, а на индуктивности – к пробое изоляции, а рост тока приводит к нагреву проводов и изоляции.

Резонанс токов может возникнуть при параллельном соединении (рис. 3.5г) реактивных элементов в цепях переменного тока. В этом случае: $B_L - B_C = 0$,

где $B_L = \frac{X_L}{Z^2}$, $B_C = \frac{X_C}{Z^2}$,

тогда $\varphi = \arctg \frac{B_L - B_C}{G_1 + G_2} = 0$;

$$\underline{I} = \underline{I}_L + \underline{I}_C = \underline{U}Y_L + \underline{U}Y_C = U(G_1 - jB_L + G_2 + jB_C) = U[G - j(B_L - B_C)].$$

При определенной частоте, называемой резонансной, реактивные составляющие проводимости могут сравняться по модулю и суммарная проводимость будет минимальной. Общее сопротивление при этом становится максимальным, общий ток минимальным, вектор тока совпадает с вектором напряжения. Такое явление называется резонансом токов.

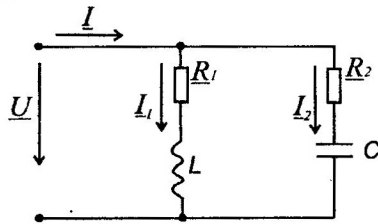


Рис. 3.5г

Резонансную частоту тока ω^* найдем из условия равенства реактивных проводимостей ветвей.

$$\frac{\omega^* L}{R_1^2 + (\omega^* L)^2} = \frac{1}{R_2^2 + (\frac{1}{\omega^* C})^2}.$$

После ряда преобразований, получим:

$$\omega^* = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{L/C - R_1^2}{L/C - R_2^2}}.$$

Из формулы следует, что:

- резонансная частота зависит не только от параметров реактивных сопротивлений, но и активных.
- энергетические процессы в цепи при резонансе токов аналогичны процессам, происходящим при резонансе напряжений.
- реактивная энергия циркулирует внутри цепи: в одну часть периода энергия магнитного поля индуктивности переходит в энергию электрического поля емкости, в следующую часть периода происходит обратный процесс.

При резонансе токов реактивная мощность равна нулю.

На рис. 3.5д приведена векторная диаграмма для режима резонанса токов, а на рис. 3.5е – резонансные кривые, построенные при $U = \text{const}$: $I_{1p} = B_L U$, $I_{2p} = B_C U$.

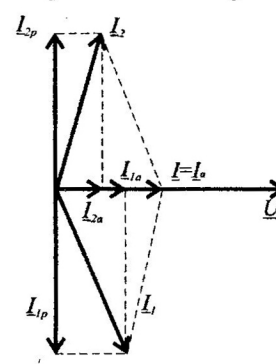


Рис. 3.5д

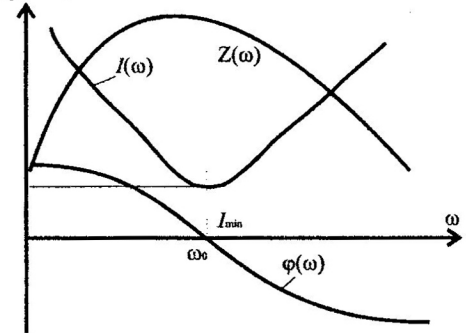


Рис. 3.5е

Большинство промышленных потребителей переменного тока носит активно-индуктивный характер и, следовательно, потребляют реактивную мощность. К таким потребителям относятся асинхронные двигатели, установки электрической сварки и т.д.

Для уменьшения реактивной мощности и повышения коэффициента мощности параллельно потребителю включают батарею конденсаторов, что приводит к уменьшению тока в проводах, соединяющих потребителя с источником энергии.

Наоборот, снижение $\cos \varphi$ приводит к увеличению тока и потерь электрической энергии ($I^2 R t$) в проводах, увеличению сечения и расхода проводов, завышению мощности источника питания ($S = UI$).

Это объясняется тем, что при одной и той же полезной мощности, потребляемой из сети, ток определяется и $\cos \varphi$.

$$I = \frac{P}{U \cos \varphi}.$$

Если параллельно электродвигателю, который на схеме замещения может быть представлен в виде катушки с R и L , потребляющей при заданном напряжении такую же активную мощность P и реактивную мощность Q , что и двигатель, включить конденсатор такой емкости, чтобы реактивная составляющая общего тока стала равной нулю, то общий $\cos \varphi$ цепи стал бы равен единице и из сети поступал бы ток, соответствующий только активной мощности, что экономически очень выгодно, т.к. снижается, как уже отмечалось, сечение подводящих проводов.

3.6. Мощность в электрических цепях переменного тока

Под мгновенной мощностью p понимают произведение мгновенных значений напряжения и тока i , т.е.

$$p = u i = U_m \sin(\omega t + \varphi_u) I_m \sin \omega t = p_R + p_L + p_C.$$

Электрическая цепь с элементами R , L и C имеет две составляющих мощности, соответствующих активной нагрузке цепи (R) и реактивной (X_L и X_C).

Можно получить, что мгновенные значения мощности будут равны:

$$\begin{aligned} \text{активной} - p_R &= UI \cos \varphi (1 - \cos 2\omega t), \\ \text{реактивной (индуктивной)} - p_L &= U_L I \sin 2\omega t, \\ \text{реактивной (емкостной)} - p_C &= -U_C I \sin 2\omega t. \end{aligned}$$

Из уравнений видно, что мгновенная мощность элемента с активным сопротивлением имеет две составляющие: постоянную ($UI \cos \varphi$) и переменную ($UI \cos \varphi \cos 2\omega t$); мгновенные мощности реактивных элементов p_L и p_C — переменные, изменяются по синусоидальному закону с двойной частотой, причем p_L и p_C имеют противоположные знаки.

Из этих формул можно получить производные для участков цепи с сопротивлением Z .

Активная мощность определяет необратимое преобразование электрической мощности, например, в тепловую. Активная мощность измеряется в ваттах (Вт) и обозначается буквой P .

$$P = UI \cos \varphi = I^2 R = P^2 Z \cos \varphi$$

Мощность реактивных элементов $P_p = P_L + P_C$ в среднем за период равна нулю, т.к. в течение одной четверти периода она положительна, а в течение другой — отрицательна. Это соответствует колебательному процессу обмена энергией между магнитным полем индуктивности и электрическим полем конденсатора. Эта мощность называется реактивной и обозначается буквой Q . Единицей реактивной мощности является вольт-ампер реактивный (вар).

$$Q = UI \sin \varphi = I^2 X_p = I^2 (X_L - X_C), \text{ т.е. } Q = Q_L - Q_C.$$

Кроме активной и реактивной мощности цепь синусоидального тока характеризуется полной мощностью, которая обозначается буквой S .

$$S = UI$$

Единицей измерения полной мощности является вольт-ампер (ВА).

Между этими мощностями существует связь, а именно:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

Угол сдвига между активной и реактивной мощностями определяется соотношением активного и реактивного сопротивления электрической цепи, т.е.

$$\varphi = \arctg \frac{X_p}{R} = \arctg \frac{Q}{P}.$$

Запись в комплексной форме можно получить следующим образом: если имеем $\underline{U} = U e^{j\varphi_u}$ и $\underline{I} = I e^{j\varphi_i}$, то угол между напряжением и током $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$, тогда $\underline{I}^* = I e^{-j\varphi_i}$ — сопряженный вектор тока (т.е. повернутый на 180°).

Произведение

$$\underline{U} \underline{I}^* = UI e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = UI e^{j\varphi} = UI \cos \varphi + j UI \sin \varphi = P + jQ.$$

Таким образом, полная мощность

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = P + jQ = S e^{j\varphi}.$$

Активные и реактивные мощности источника и потребителя равны, точно также равны и полные мощности. При этом следует иметь в виду, что для электрической цепи, состоящей из нескольких, например, параллельных ветвей, поскольку угол сдвига φ разных ветвей может быть различным, то суммарная мощность всей цепи должна находиться отдельно для каждой ветви.

Таким образом, если имеем три ветви с

$$S_1; P_1 \text{ и } Q_1 \text{ и } S_1 = S_1 \cos \varphi_1 + j S_1 \sin \varphi_1 = P_1 + jQ_1;$$

$$S_2; P_2 \text{ и } Q_2 \text{ и } S_2 = S_2 \cos \varphi_2 + j S_2 \sin \varphi_2 = P_2 + jQ_2;$$

$$S_3; P_3 \text{ и } Q_3 \text{ и } S_3 = S_3 \cos \varphi_3 + j S_3 \sin \varphi_3 = P_3 + jQ_3,$$

то следует найти отдельно суммарную активную мощность всей цепи

$$P_T = P_1 + P_2 + P_3,$$

реактивную мощность всей цепи

$$Q_T = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

и полную мощность всей цепи

$$S_{\Sigma} = \sqrt{P_{\Sigma}^2 + Q_{\Sigma}^2}, \quad \text{но}$$

$S_{\Sigma} \neq S_1 + S_2 + S_3$, что видно из построенных треугольников мощностей (рис. 3.6а).

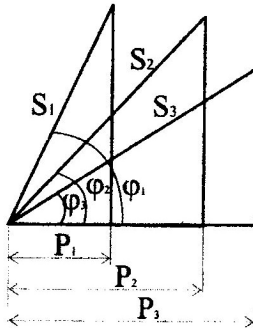


Рис. 3.6а

3.7. Основные соотношения для расчета электрических цепей переменного тока символическим методом

Ниже приводятся основные соотношения для анализа и расчета электрических синусоидальных однофазных цепей на базе теории комплексных чисел.

Аналитическое представление электрических величин:

- мгновенные значения напряжения
 $u = U_m \sin(\omega t + \Psi_u)$,
- мгновенное значение тока
 $i = I_m \sin(\omega t + \Psi_i)$,
- действующее значение напряжения и тока

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0,707 U_m ; \quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 I_m$$

Переход от мгновенных (синусоидальных) значений к векторным представлениям напряжения и тока дается для следующих условий:

- длина вектора соответствует действующему значению параметра,
- вектор изображается в заданной системе координат для момента времени $t = 0$,
- угол наклона к оси абсцисс равен начальной фазе ψ .

Представление действующих значений электрических параметров в виде комплексных чисел на примере напряжения:

- алгебраическая форма

$$\underline{U} = U' + j U'';$$

- тригонометрическая форма

$$\underline{U} = U \cos \psi_u + j U \sin \psi_u;$$

- показательная форма

$$\underline{U} = U e^{j\psi_u}.$$

Переход от тригонометрической формы к показательной сделан на основе формулы Эйлера

$$e^{j\psi} = \cos \psi + j \sin \psi.$$

При этом в показательной форме модуль равен действующему значению величины, а $e^{j\psi}$ является так называемым оператором поворота, т.к. вектор повернут по отношению к оси абсцисс на угол ψ .

Представленные выше формы записи показаны также на рис. 3.7а.

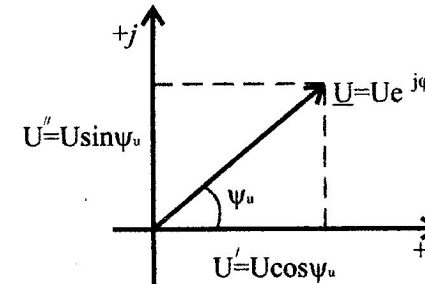


Рис. 3.7а

В электротехнике на комплексной плоскости мнимая единица $\sqrt{-1}$ обозначается через j , где $j = e^{j90^\circ}$ и $-j = e^{-j90^\circ}$, т.е. умножение вектора на $+j$ (e^{j90°) обозначает поворот на $+90^\circ$, а умножение на $-j$ (e^{-j90°) – поворот на -90° .

При анализе и расчете электрических цепей приходится пользоваться, в основном, алгебраической и показательной формами представления электрических величин. Первая используется при арифметических операциях сложения и вычитания (например, при использовании первого закона Кирхгофа), вторая при умножении и делении.

В первом случае операции сложения (вычитания) выполняются отдельно для действительной и мнимой части, во втором случае операция умножения (деления) выполняется для модульных значений, а углы поворота соответственно складываются или вычитаются.

Переход от алгебраической формы к показательной выполняется по формулам, которые следуют из рис. 3.7а.

$$U = \sqrt{(U')^2 + (U'')^2},$$

$$\Psi_u = \arctg U''/U', \text{ при } U' > 0$$

$$\Psi_u = \arctg U''/U' + 180^\circ, \text{ при } U' < 0,$$

$$U' = U \cos \Psi_u$$

$$U'' = U \sin \Psi_u.$$

Формулы для элементов электрической цепи R , X_L и X_C приведены ниже:

$$X_L = 2 \pi f L \text{ (ом)}, L \text{ в (Гн)}$$

$$X_C = \frac{10^6}{2 \pi f C} \text{ (ом)}, C \text{ в (мкф)}$$

Полное сопротивление Z

$$\underline{Z} = R + j(X_L - X_C) = Z e^{j\varphi}, \text{ где}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}, \text{ а } \varphi = \arctg \frac{X_L - X_C}{R}$$

Мощность источника цепи:

полная мощность

$$S_{ист} = UI^* = U e^{j\varphi} I e^{-j\varphi} =$$

$$= UI e^{j(\varphi - \varphi)} =$$

$$= UI e^{j0} =$$

$$= UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = P + jQ.$$

Здесь $\varphi_u - \varphi_i$ — угол между вектором напряжения и тока.

Мощность потребителей электрической цепи:

$$\text{- активная мощность } P_\Sigma = \sum_{k=1}^n I_k^2 R,$$

$$\text{- реактивная мощность } Q_\Sigma = \sum_{k=1}^n I_k^2 (X_L - X_C),$$

$$\text{- полная мощность } S_\Sigma = \sqrt{P_\Sigma^2 + Q_\Sigma^2}.$$

При анализе и расчете электрической цепи должен быть соблюден баланс мощностей источников и потребителей:

$$S_{ист} = S_\Sigma.$$

4. ТРЕХФАЗНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

4.1. Общие сведения о трехфазном токе

Основой устройства силовых электрических цепей для электроснабжения промышленных, бытовых и др. потребителей является трехфазная система.

В трехфазной системе действуют три однофазных синусоидальных ЭДС одинаковой частоты и амплитуды, но сдвинутые одна относительно другой на 120° , создаваемые одним источником энергии. В качестве последнего, как правило, выступает трехфазный синхронный генератор.

Мгновенное значение ЭДС такого трехфазного генератора можно записать так:

$$e_A = E_m \sin \omega t, \quad e_B = E_m \sin (\omega t - 120^\circ),$$

$$e_C = E_m \sin (\omega t + 120^\circ),$$

Индексы A, B, C обозначают часть трехфазной системы, называемую фазой.

Трехфазная система по сравнению с тремя однофазными имеет определенные преимущества:

- она обеспечивает получение вращающегося магнитного поля, что используется в электрических двигателях переменного тока;
- обеспечивает эффективную и экономически выгодную передачу электрической энергии на любые расстояния при одновременной экономии проводникового материала (медных или алюминиевых проводов);
- позволяет от одного источника (генератора) получить одновременно два по значению напряжения, например, 220 и 380 В за счет схемы включения потребителей.

Три ЭДС получаются в синхронных генераторах, которые имеют на статоре три одинаковых неподвижных обмотки (ф. A, B и C), сдвинутые в пространстве на угол 120° относительно друг друга. Поэтому при вращении магнитного поля, создаваемого вращающимся ротором (якорем), в обмотках статора индуцируются три ЭДС (e_A, e_B, e_C) с одной частотой и амплитудой, но сдвинутые по фазе тоже на 120° .

На рис. 4.1а представлены мгновенные значения ЭДС всех фаз, а также векторы этих ЭДС на комплексной плоскости.

В комплексной форме действующие значения ЭДС фаз A, B, C можно записать так:

$$\underline{E}_A = E e^{j0}, \quad \underline{E}_B = E e^{j120}, \quad \underline{E}_C = E e^{j240} = E e^{-j120}.$$

При этом следует иметь в виду, что при анализе трехфазных систем ось действительных чисел направлена вертикально по оси ординат, т.е. по отношению к обозначению в однофазных системах повернута на 90° против часовой стрелки, т.е. вектор $\underline{E}_A$, для которого

начальная фаза равна нулю, направлен по действительной оси. Обмотки генератора соединяются, как правило, по схеме звезды, при которой концы всех трех фаз (X, Y, Z) соединяются в одну общую точку (O или N), называемую нейтральной.

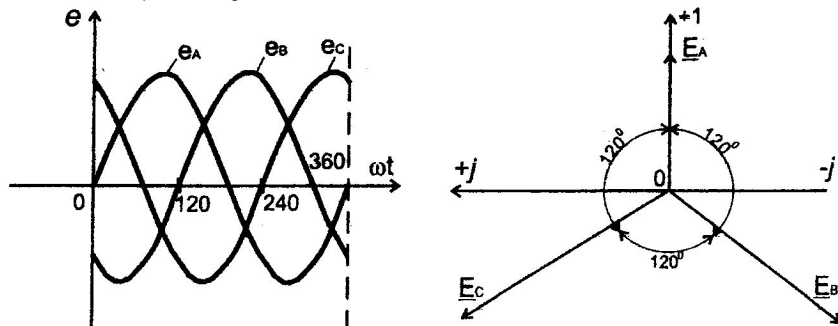


Рис. 4.1а

Возможно соединение обмотки генератора и в схему треугольник, при которой начало одной фазы соединяется с концом другой (В с X, С с Y, А с Z). В этом случае обмотки образуют замкнутый контур, в котором в любой момент сумма мгновенных значений трех ЭДС равна нулю, т.е.

$$E_A + E_B + E_C = 0.$$

Сумма ЭДС трех фаз генератора, соединенных в звезду, также равна нулю. Поэтому потенциал нейтральной точки N генератора равен нулю. Напряжение между началом и концом фаз генератора (или между началом фазы А, В или С и нейтральной точкой N в трехфазной системе) называется фазным напряжением (U_ϕ). Напряжение между началом двух фаз (например, А и В) называется линейным напряжением (U_L).

$$U_{AB} = U_A - U_B.$$

Векторы линейных напряжений также образуют симметричную систему, и сдвинуты один относительно другого тоже на 120° .

В комплексной форме линейные напряжения

$$U_{AB} = U_\phi e^{i30^\circ}, \quad U_{BC} = U_\phi e^{-i90^\circ}, \quad U_{CA} = U_\phi e^{i150^\circ}.$$

В симметричной системе нетрудно найти, что

$$U_L = \sqrt{3} \cdot U_\phi.$$

Кроме векторных диаграмм для трехфазных систем строят топографические диаграммы напряжений, на которых вектор напряжения направлен в точку «большого потенциала», т.е. для, например линейного напряжения U_{AB} , не от точки А к точке В, а

наоборот, от точки В к точке А. Приемники в трехфазных системах могут соединяться звездой с нулевой точкой:

- с нейтральным проводом, соединяющим нейтральные точки источника и потребителя (четырёхпроводная система),
- без нейтрального провода (трехпроводная система).

Кроме того, потребитель может быть соединен по схеме треугольник.

4.2 Схемы соединения звездой.

На рисунке 4.2а показана четырехпроводная схема соединения трехфазной системы звездой и принятые направления токов.

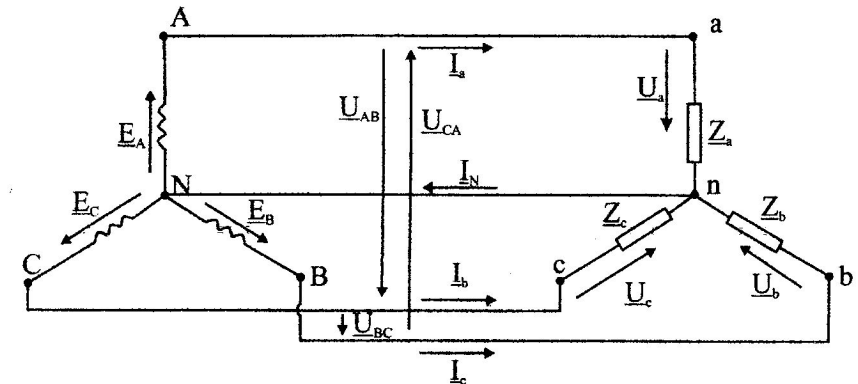


Рис. 4.2а. Схема соединения звездой

В такой системе фазные напряжения генератора равны фазным напряжениям потребителя $U_A = U_a$, $U_B = U_b$, $U_C = U_c$.

Соответственно равны и линейные напряжения.

Условно будем пренебрегать сопротивлением соединительных проводов. При симметричной нагрузке, т.е.:

$$Z_\phi = Z_a = Z_b = Z_c.$$

токи в фазах потребителя будут тоже равны, но сдвинуты по фазе на 120° :

$$I_a = I_b = I_c = \frac{U_\phi}{Z_\phi}$$

Фазный ток равен току линейному, т.е.

$$I_L = I_a, \quad I_L = I_b, \quad I_L = I_c.$$

Ток в нейтральном проводе равен нулю:

$$I_N = I_a + I_b + I_c = 0.$$

Наличие или отсутствие нейтрального провода на режим работы не влияет.

В случае несимметричной нагрузки потребителя следует рассмотреть два случая: при наличии нейтрального провода (четырёхпроводная система) и отсутствии нейтрального провода (трехпроводная система). В первом случае режим работы каждой фазы

не зависит от режима двух других, а токи в каждой фазе определяются отдельно. В этом случае, т.к. токи в фазах неодинаковы, в соответствии с первым законом Кирхгофа появляется ток в нейтральном проводе I_N , который равен сумме токов трех фаз (для мгновенных или комплексных значений).

$$I_N = I_a + I_b + I_c.$$

Векторная диаграмма режима с неоднородной и несимметричной нагрузкой по фазам представлена на рис. 4.26.

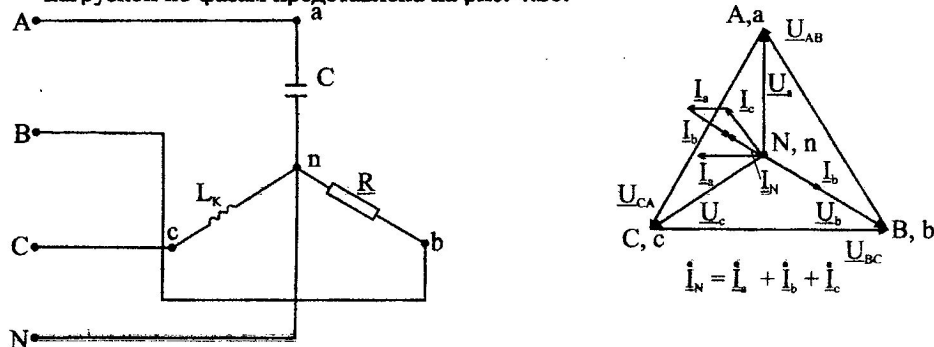


Рис. 4.26

При трехпроводной системе (нейтральный провод отсутствует) и несимметричной неоднородной нагрузке $Z_a \neq Z_b \neq Z_c$ нарушается симметрия не только токов, но и фазных напряжений. Линейные напряжения U_{ab} , U_{bc} , U_{ca} определяются генератором значительной мощности и поэтому считаются неизменными, но потенциал нейтральной точки приемника в этом случае не равен нулю.

Другими словами, между нулевыми точками генератора N и потребителя n возникает разность потенциалов (происходит «смещение» нулевой точки потребителя).

Напряжение между точками N и n может быть найдено методом узловых потенциалов (см. раздел 2.4 и рис.4.2в).

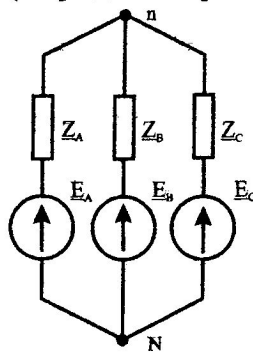


Рис. 4.2в

Тогда,

$$U_{Nn} = \frac{E_A Y_a + E_B Y_b + E_C Y_c}{Y_a + Y_b + Y_c}, \text{ где}$$

$$E_A \approx U_A, \quad E_B \approx U_B, \quad E_C \approx U_C \text{ и}$$

Y_a, Y_b, Y_c — комплексные проводимости фаз приемника.

В этом случае фазные напряжения приемника будут не равны фазным напряжениям источника из-за смещения нейтрали:

$$U_a = U_A - U_{Nn}, \quad U_b = U_B - U_{Nn}, \quad U_c = U_C - U_{Nn}.$$

Топографическая и векторная диаграммы напряжений и токов для приемника показана на рис. 4.2г.

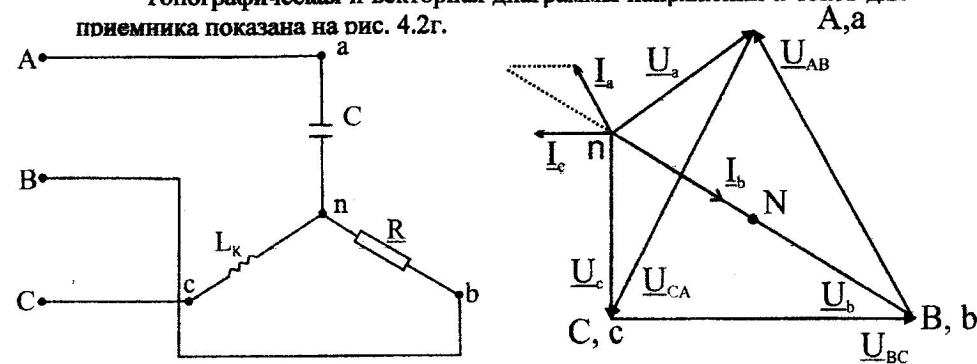


Рис. 4.2г

4.3. Схемы соединения треугольником

На рис. 4.3а показана схема соединения фаз приемника треугольником. Сопротивлениям фаз присваивается двойной индекс: Z_{ab} , Z_{bc} , Z_{ca} . Каждая фаза приемника оказывается включенной на линейное напряжение генератора, т.е.

$$U_{ab} = U_{AB}, \quad U_{bc} = U_{BC}, \quad U_{ca} = U_{CA}.$$

Токи в проводах, соединяющие точки A, B и C генератора соответственно с точками a, b и c приемника, называются линейными (I_A, I_B, I_C), а токи в фазах приемника I_{ab}, I_{bc}, I_{ca} — фазными. Направление токов показано на рис.4.3а.

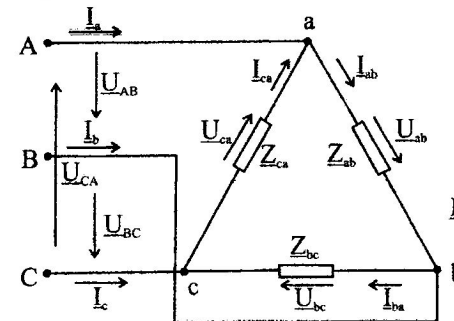


Рис. 4.3а

Линейные и фазные токи связаны между собой первым законом Кирхгофа для соответствующих узлов:

$$I_A = I_{ao} - I_{ca}, \quad I_B = I_{bo} - I_{ao}, \quad I_C = I_{co} - I_{bo}.$$

Для симметричной системы, когда $Z_{ao} = Z_{bo} = Z_{co}$, имеем $I_a = \sqrt{3} \cdot I_\phi$.

При этом как линейные, так и фазные токи сдвинуты относительно друг от друга соответственно на 120° .

Топографическая и векторная диаграммы напряжений и токов при соединении потребителей треугольником при симметричной активной нагрузке ($Z_{ao} = Z_{bo} = Z_{co} = R$) приведена на рис. 4.36, а при несимметричной и неоднородной нагрузке ($Z_{ao} \neq Z_{bo} \neq Z_{co}$) показана на рис. 4.3в.

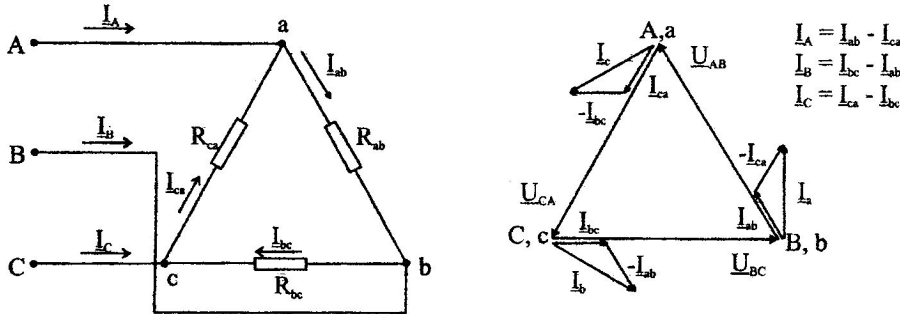


Рис. 4.36

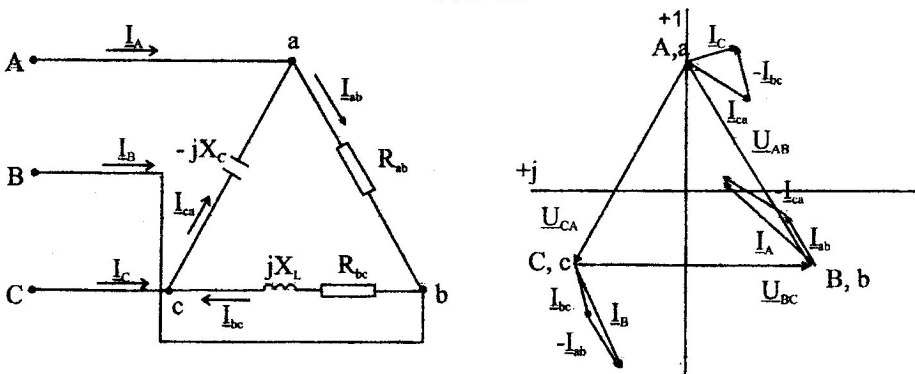


Рис. 4.3в

4.4. Мощность трехфазной цепи

Трехфазная цепь представляет собой совокупность трех однофазных цепей, поэтому активная и реактивная мощности трехфазной цепи равны мощностям отдельных фаз, т.е. для активной нагрузки

$$P = P_a + P_b + P_c \text{ для схемы соединения звездой,}$$

$$P = P_{ao} + P_{bo} + P_{co} \text{ для схемы соединения треугольником.}$$

Активная мощность каждой фазы определяется, как и для однофазного приемника:

$$P_a = I_a^2 R_a, \quad P_b = I_b^2 R_b, \quad P_c = I_c^2 R_c \text{ при соединении звездой,}$$

$P_{ao} = I_{ao}^2 R_{ao}, \quad P_{bo} = I_{bo}^2 R_{bo}, \quad P_{co} = I_{co}^2 R_{co}$ при соединении треугольником, или – в общем виде

$$P_\phi = I_\phi^2 R_\phi = U_\phi I_\phi \cos \varphi_\phi.$$

Соответственно для реактивной нагрузки:

$$Q = Q_a + Q_b + Q_c \text{ для схемы соединения звездой,}$$

$$Q = Q_{ao} + Q_{bo} + Q_{co} \text{ для схемы соединения треугольником.}$$

Реактивная мощность каждой фазы:

$$Q_a = I_a^2 X_{ra}, \quad Q_b = I_b^2 X_{rb}, \quad Q_c = I_c^2 X_{rc} \text{ при соединении звездой,}$$

$$Q_{ao} = I_{ao}^2 X_{rao}, \quad Q_{bo} = I_{bo}^2 X_{rbo}, \quad Q_{co} = I_{co}^2 X_{rco} \text{ при соединении}$$

треугольником.

В общем виде можно записать:

$$Q_\phi = I_\phi^2 X_{r\phi} = U_\phi I_\phi \sin \varphi_\phi.$$

Тогда полная мощность трехфазного приемника

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

Следует помнить, что $S \neq S_a + S_b + S_c$ или $S \neq S_{ao} + S_{bo} + S_{co}$.

При определении полной мощности в комплексной форме

$$S = P + jQ = (P_a + P_b + P_c) + j(Q_a + Q_b + Q_c) \text{ для схемы}$$

соединения звездой.

При симметричной нагрузке по фазам для обеих схем включения мощность всех фаз одинакова, поэтому:

$$P = 3P_\phi = 3 U_\phi I_\phi \cos \varphi_\phi,$$

$$Q = 3Q_\phi = 3 U_\phi I_\phi \sin \varphi_\phi,$$

$$S = 3S_\phi = 3 U_\phi I_\phi.$$

На практике часто пользуются не фазными величинами, а линейными, тогда для симметричной системы:

$$S = \sqrt{3} U_\lambda I_\lambda,$$

$$P = \sqrt{3} U_\lambda I_\lambda \cos \varphi$$

$$Q = \sqrt{3} U_\lambda I_\lambda \sin \varphi.$$

4.5. Основные соотношения для расчета трехфазных цепей

Комплексные фазные напряжения:

$$\underline{U}_a = U_\phi e^{j0}, \quad \underline{U}_b = U_\phi e^{j120^\circ}, \quad \underline{U}_c = U_\phi e^{j240^\circ}.$$

Комплексные линейные напряжения:

$$\underline{U}_{ao} = U_\lambda e^{j30^\circ}, \quad \underline{U}_{bo} = U_\lambda e^{j90^\circ}, \quad \underline{U}_{co} = U_\lambda e^{j150^\circ}.$$

Расчет токов в фазах симметричной нагрузки, включенной звездой ($Z_a = Z_b = Z_c = Z e^{j\varphi}$)

$$I_a = \frac{\underline{U}_a}{Z} = \frac{U_\phi e^{j0}}{Z e^{j\varphi}} = I_\phi e^{-j\varphi},$$

$$I_a = \frac{U_a}{Z_\phi} = \frac{U_\phi e^{-j120}}{Z_\phi e^{j\varphi}} = I_a e^{j(120+\varphi)},$$

$$I_c = \frac{U_c}{Z_\phi} = \frac{U_\phi e^{j120}}{Z_\phi e^{j\varphi}} = I_a e^{j(120-\varphi)}.$$

Соответственно, при несимметричной нагрузке ($Z_a \neq Z_b \neq Z_c$) при наличии нейтрального провода:

$$I_a = \frac{U_\phi e^{j0}}{Z_a e^{j\varphi_a}} = I_a e^{-j\varphi_a}, \quad I_b = \frac{U_\phi e^{-j120}}{Z_b e^{j\varphi_b}} = I_b e^{-j(120+\varphi_b)}, \quad I_c = \frac{U_\phi e^{j120}}{Z_c e^{j\varphi_c}} = I_c e^{j(120-\varphi_c)}.$$

Ток в нейтральном проводе

$$I_N = I_a + I_b + I_c.$$

При несимметричной нагрузке и отсутствии нейтрального провода происходит смещение нейтрали на величину:

$$U_{Nn} = \frac{U_A Y_A + U_B Y_B + U_C Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C},$$

тогда фазные напряжения:

$$U_a = U_A - U_{Nn}, \quad U_b = U_B - U_{Nn}, \quad U_c = U_C - U_{Nn},$$

а токи в фазах:

$$I_a = U_a Y_a, \quad I_b = U_b Y_b, \quad I_c = U_c Y_c.$$

При соединении потребителей треугольником и симметричной нагрузке токи в фазах будут равны, но сдвинуты на 120° .

$$I_{ab} = \frac{U_a e^{j30}}{Z_\phi e^{j\varphi}} = I_\phi e^{j(30-\varphi)},$$

$$I_{bc} = \frac{U_b e^{-j90}}{Z_\phi e^{j\varphi}} = I_\phi e^{-j(90+\varphi)},$$

$$I_{ca} = \frac{U_c e^{j150}}{Z_\phi e^{j\varphi}} = I_\phi e^{j(150-\varphi)},$$

где $U_a = U_\phi$, $Z_{ab} = Z_{bc} = Z_{ca} = Z_\phi e^{j\varphi}$.

При соединении треугольником и несимметричной нагрузке

$Z_{ab} \neq Z_{bc} \neq Z_{ca}$, каждая фаза имеет свой угол сдвига $\varphi_{ab} \neq \varphi_{bc} \neq \varphi_{ca}$.

Тогда

$$I_{ab} = \frac{U_{ab}}{Z_{ab}} = \frac{U_a e^{j30}}{Z_{ab} e^{j\varphi_{ab}}} = I_{ab} e^{j(30-\varphi_{ab})},$$

$$I_{bc} = \frac{U_{bc}}{Z_{bc}} = \frac{U_b e^{-j90}}{Z_{bc} e^{j\varphi_{bc}}} = I_{bc} e^{-j(90+\varphi_{bc})},$$

$$I_{ca} = \frac{U_{ca}}{Z_{ca}} = \frac{U_c e^{j150}}{Z_{ca} e^{j\varphi_{ca}}} = I_{ca} e^{j(150-\varphi_{ca})}.$$

Мощности трехфазной системы при различных режимах включения могут быть определены по формулам, представленным в разделе 4.4.

5. СРЕДСТВА ИЗМЕРЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Эксплуатация электрических цепей и установок всегда связаны с необходимостью измерения электрических величин: тока, напряжения, мощности.

5.1. Общие сведения

Измерение — это нахождение физической (электрической) величины опытным путем с помощью специальных технических средств — измерительных приборов.

Измерительные приборы отличаются по системам принципиального устройства, классу точности, по конструктивным особенностям (например, щитовые или пультные) и другим признакам.

В нижеприведенной таблице указаны некоторые данные электроизмерительных приборов различных систем.

Таблица 5.1.

Данные измерительных приборов						
Система	Обозначение системы	Тип	Уравнение преобразования	Род тока	Область применения	Расширение пределов измерения
Магнито-электрическая		М	$\alpha = cI$	Пост.	А, В, Ω	Шунт, доб. сопр. R_d
Электромагнитная		Э	$\alpha = cI^2 dI/da$	Пост. и перем.	А, В, f	Тт, тн, R_d
Электродинамическая		Д	$\alpha = cI_1 I_2 \cos \psi dM/da$	Пост. и перем.	А, В, W	Тт, тн, R_d
Ферродинамическая		Д	$\alpha = cI_1 I_2 \cos \psi dM/da$	Пост. и перем.	W, $\cos \varphi$, φ , f	Тт, тн, R_d
Электростатическая		С	$\alpha = cU^2 dC/da$	Пост. и перем.	V	

Результат измерения $A_{изм.}$ физической величины всегда отличается от действительного его значения A . Точность измерения характеризуется погрешностью измерения. Различают:

абсолютную погрешность $\Delta A = A_{изм.} - A$;

относительную погрешность $\delta A\% = (\Delta A/A) 100\%$.

Причиной погрешности может быть несовершенство метода измерения, недостаточный точный отчет показаний и погрешность самого прибора. Точность измерительных приборов характеризуется приведенной погрешностью:

$$\delta A_{пр} \% = \Delta A / A_{пред} \cdot 100\%,$$

где $A_{пред}$ – конечное значение шкалы прибора, т.е. номинальное значение.

По допустимому значению основной приведенной погрешности (в %) все приборы подразделяются на 8 классов: 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,5; 4,0.

Класс точности показывает приведенную погрешность, выраженную в процентах.

Абсолютная погрешность одинакова по всей шкале прибора, поэтому, чем меньше $A_{изм.}$, тем больше $\delta A\%$. В связи с этим для измерения следует подбирать прибор так, чтобы значение $A_{изм.}$ приходилось на вторую половину его шкалы.

Перед измерением необходимо определить цену деления шкалы прибора $C_{шк.}$. Для этого пределы измерения $A_{пред.}$ необходимо разделить на число делений шкалы $N_{шк.}$, тогда

$$C_{шк.} = \frac{A_{пред.}}{N_{шк.}}.$$

При измерении в цепях переменного тока величины тока и напряжения наибольшее распространение получили приборы электромагнитной системы (типа Э).

5.2. Измерение тока, напряжения, мощности и $\cos \varphi$

Измерение тока

Ток в электрических цепях может измеряться амперметрами, миллиамперметрами или микроамперметрами, включенными последовательно с электроприемником (рис. 5.2а).

Чтобы амперметр не оказывал значительного влияния на режим работы цепи, его внутреннее сопротивление $R_{РА}$ должно быть в сотни раз меньше $R_{нагр.}$.

Для расширения пределов измерения прибора в электрических цепях параллельно его обмотке включают резистор – шунт (рис. 5.2б). Сопротивление шунта $R_{ш}$ определяется (на основании законов Ома и Кирхгофа) зависимостью:

$$R_{ш} = R_{РА} / (K_{ш} - 1),$$

где $K_{ш}$ – коэффициент шунтирования ($K_{ш} = I_A / I_{РА}$).

Изменение пределов измерения амперметров и миллиамперметров достигается перестановкой штекеров или поворотом переключателя, размещенных на панели корпуса приборов.

Измерение напряжения

Напряжения в электрических цепях измеряются вольтметрами, подключенными параллельно участку цепи, на котором производится измерение (рис. 5.2в).

Чтобы вольтметр не менял режима электрической цепи, его сопротивление R_{PV} должно быть значительно больше $R_{нагр.}$ (в 100 и более раз). Для расширения пределов измерения вольтметра

последовательно с ним включают добавочный резистор R_d (рис. 5.2г). Сопротивление добавочного резистора подсчитывается по формуле:

$$R_d = R_{PV} (K_d - 1), \text{ где } K_d = U / U_{PV}.$$

Переключение пределов измерения производится одним из указанных выше способов.

Измерение мощности и $\cos \varphi$

Измерение мощности в электрических цепях производится ваттметрами.

Неподвижная катушка ваттметра (токовая обмотка) с малым числом витков толстого провода включается последовательно с нагрузкой, а неподвижная катушка (обмотка напряжения), выполненная из тонкого провода с большим числом витков, параллельно нагрузке (рис. 5.2д).

Отклонение стрелки прибора пропорционально току нагрузки I и напряжению на ней U .

Зажим токовой обмотки, подсоединяемый со стороны источника питания, называется генераторным (условно – начало обмотки); соединенный с ним зажим обмотки напряжения также считается ее началом. Упомянутые зажимы на схемах обозначаются точкой, а на приборах звездочкой.

Ваттметр имеет два предела по току (2,5 и 5,0 А) и 6 пределов по напряжению (30, 75, 150, 300, 450, 600 В).

Для определения цены деления прибора используют выражение:

$$C_{PV} = A_I A_U / N_{шк.}, \text{ Вт/дел.},$$

где A_I и A_U – принятые пределы измерения по току и напряжению,

$N_{шк.}$ – полное число делений шкалы.

Схема включения прибора для измерения $\cos \varphi$ аналогична схеме включения ваттметра, там также имеются генераторные зажимы для токовой катушки и катушки напряжения. Шкала прибора имеет градуировку угла φ , $\cos \varphi$, а также указатель характера нагрузки (активно-индуктивный или активно-емкостной). Значение $\cos \varphi = 1$ указывает на то, что нагрузка чисто активная.

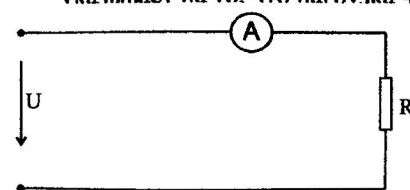


Рис. 5.2а

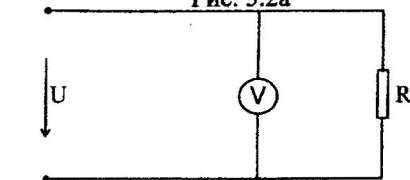


Рис. 5.2в

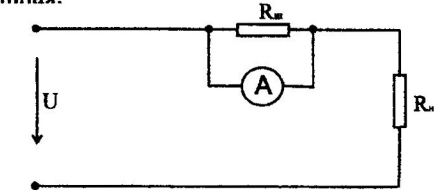


Рис. 5.2б

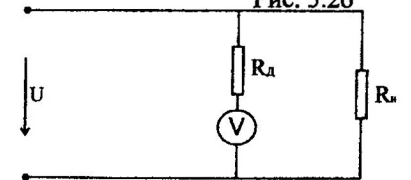


Рис. 5.2г

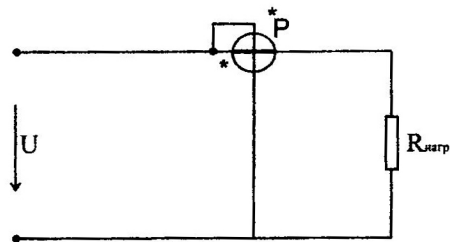


Рис. 5.2д

Измерение трехфазной мощности имеет некоторые особенности.

Активная мощность может быть измерена при помощи одного, двух или трех ваттметров в зависимости от симметрии нагрузки и схемы соединения фаз приемника.

В симметричной системе ($P_a = P_b = P_c$) измерение мощности можно сделать в одной фазе, т.к. общая мощность будет равна утроенному значению (рис. 5.2е). Схема соединения фаз (звездой или треугольником) в этом случае не имеет значения.

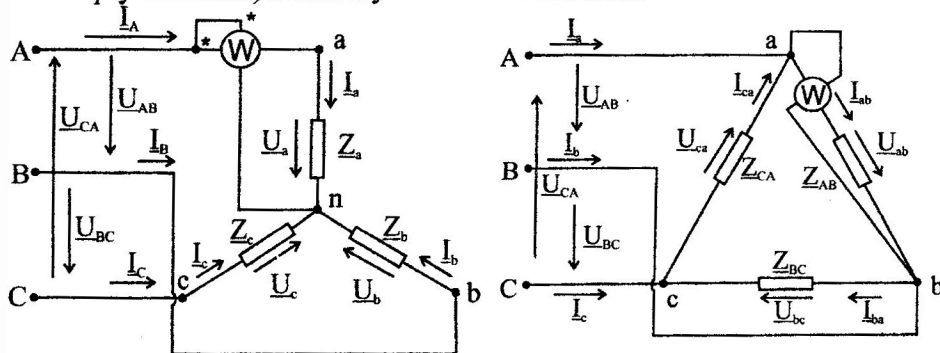


Рис. 5.2е

В несимметричной трехфазной четырехпроводной системе мощность может быть измерена с помощью трех ваттметров, включенных в каждую фазу (рис. 5.2ж).

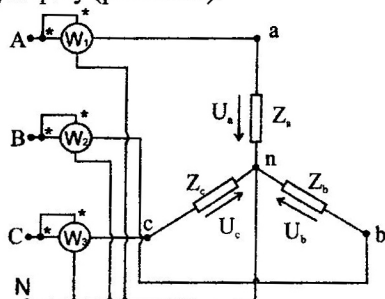


Рис. 5.2ж

В этом случае $P = P_a + P_b + P_c$. Активная мощность в трехпроводной системе может быть измерена с помощью двух ваттметров, у которых обмотки напряжения включены на линейное напряжение (рис. 5.2и).

В этом случае мощность трехфазной системы равна алгебраической сумме показаний двух ваттметров $P = P_1 + P_2$.

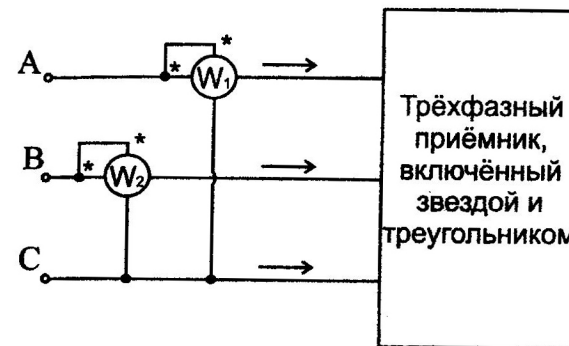


Рис. 5.2и

Коэффициент мощности в цепи переменного тока может быть измерен с помощью прибора, который называется фазометром. В отличие от ваттметра фазометр имеет две подвижные катушки, которые включаются параллельно на напряжение сети, поэтому в подвижных катушках возникают два встречно-направленных вращающихся момента (прибор работает по принципу логометра). Угол поворота оси, на которой закреплены обе катушки, зависит от угла сдвига фаз в измеряемой цепи. Шкала фазометра градуируется в градусах (угол φ) и значениях $\cos \varphi$ (от нуля до 1).

Список рекомендуемой литературы

Основная.

1. Пантюшин В.С. Электротехника. М., высшая школа, 1986.
2. Волынский Б.А., Зейн Е.Н., Шатерников В.Е. Электротехника. М., Энергоатомиздат, 1987.
3. Электротехника. Под ред. В.Г. Герасимова. М., Высшая школа, 1986.
4. Сборник задач по общей электротехнике. Под ред. В.Г. Герасимова. Высшая школа, 1985.

Дополнительная.

1. Касаткин А.С., Немцов М.В. Электротехника. М., Энергоатомиздат, 1983.
2. Справочное пособие по электротехнике и основам электроники. Под ред. А.В. Нетушила. М., Высшая школа, 1986.
3. Антонова О.А., Глудкин О.П., Давыдов П.Д. и др. Электротехника и основы электроники. М., Высшая школа, 1993.

Подписано в печать 2.10.2006 г. Объем 3,5 п.л.

Тираж 100 экз. Заказ № 84

Редакционно-издательский отдел РГГРУ
Москва, ул. Миклухо-Маклая, 23