А. Л. ЛЕВШИН

Поверхностные и каналовые сейсмические волны

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ЗЕМЛИ
им. О. Ю. ШМИДТА

А. Л. ЛЕВШИН

Поверхностные и каналовые сейсмические волны

Издательство «Наука»

Москва 1973

УДК 550.344

Поверхностные и каналовые сейсмические волны. Левшин А. Л. Изд-во «Наука», 1973.

В монографии дана общая теория интерференционных (поверхностных и каналовых) волн, возбуждаемых сейсмическим источником в вертикально- или радиально-неоднородных средах. Описаны методы расчета спектров и сейсмограмм этих волн и исследованы их основные свойства, причем особое внимание уделено моделям с внутренними волноводами. Приведены машинные алгоритмы интерпретации сейсмограмм поверхностных волн, анализ экспериментальных данных о поверхностных волнах землетрясений в континентальной коре и мантии Земли.

Издание представляет интерес для геофизиков — сейсмологов и сейсморазведчиков.

Табл. 13. Илл. 70. Библ. 164 назв.

Ответственный редактор
доктор физ.-матем. наук
В. И. КЕЙЛИС-БОРОК

Анатолий Львович Левшин

ПОВЕРХНОСТНЫЕ И КАНАЛОВЫЕ СЕЙСМИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

Утверждено к печати
ордена Ленина Институтом физики Земли имени О. Ю. Шмидта
Академии наук СССР

Редактор **И. Н. Галкин**. Художественный редактор **Н. Н. Власик**
Технические редакторы **В. А. Григорьева, Э. Л. Кунина**

Сдано в набор 13/III 1973 г. Подписано к печати 3/VII 1973 г. Формат 60×90 1/16.
Бумага № 1. Усл. печ. л. 11. Уч.-изд. л. 10,7. Тираж 900. Т-08387. Тип. зак. 2001.

Цена 75 коп.

Издательство «Наука», 103717 ГСП, Москва К-62, Подсосенский пер., 21
2-я типография издательства «Наука», 121099, Москва Г-99, Шубинский пер., 10.

Л $\frac{0295\text{-}0415}{042(02)\text{-}73}$ 443-73

ВВЕДЕНИЕ

Наиболее точные и надежные данные о внутреннем строении Земли получены путем анализа колебаний земной поверхности при землетрясениях и взрывах. Самую продолжительную и интенсивную часть колебаний образуют обычно поверхностные волны.

История использования поверхностных волн в сейсмологии противоречива. Их главной особенностью является дисперсия: среда действует на них как частотный фильтр, и скорость распространения разных частот по-разному зависит от строения среды. Благодаря дисперсии поверхностные волны несут больше информации, чем объемные волны: например, в благоприятной ситуации по записи поверхностных волн в одной точке можно построить разрез среды или найти глубину очага, или распознать взрыв с той же степенью достоверности, что и по записям объемных волн на целом профиле.

Однако на протяжении почти всей истории сейсмологии поверхностные волны используются гораздо меньше, чем объемные. Вначале это объяснялось тем, что первые объекты, изучавшиеся сейсмологией, — резкие границы в разрезе и координаты эпицентров — удобнее было изучать объемными волнами. По мере появления новых, более сложных задач возникла потребность в дополнительных интерпретируемых наблюдениях типа записей поверхностных волн. При этом возникло серьезное препятствие, поскольку именно благодаря дисперсии теория поверхностных волн гораздо сложнее, и их труднее интерпретировать. Долгое время теория опиралась на такие упрощения модели среды, что самая перспективная задача — совместная интерпретация объемных и поверхностных волн — оставалась нетронутой. Реальные пути преодоления этих трудностей появились с созданием спектральной теории дифференциальных операторов, открывшей возможности качественно описывать основные свойства поверхностных волн и эффективно рассчитывать их на ЭВМ для любой горизонтально-однородной модели среды. Однако эта теория долго не замечалась в сейсмологии, и поверхностные волны изучались на базе традиционных упрощений, главное из которых заключалось в представлении среды системой однородных слоев. Такие упрощения сделали возможными массовые расчеты, однако понимание общих свойств поверхностных волн продолжало опираться на простейшие аналогии. Нельзя преуменьшать успехи такого подхода: он дал много ярких и важных результатов в региональном изучении земной коры [5, 28, 38, 79, 84, 106, 124, 157, 162], построении разрезов верхней мантии [3, 20, 58, 84, 95, 123, 137, 138], оценке поглощающих свойств вещества Земли [30, 39, 103, 123], определении магнитуды, энергии, механизма и глубины очага [19, 67, 83, 92, 110, 111, 128, 130], распознавании ядерных взрывов [67, 74, 81, 146].

Однако этот подход имел и обратную сторону: как в теории, так и в эксперименте появилось большое число методик и приемов, предназначенных для решения частных задач при помощи доступных данной группе исследователей технических и вычислительных средств; обрастая традициями и усложняясь, такие методики и приемы настолько удалялись друг от друга, что получаемые разными исследователями результаты стали трудно сопоставимыми.

Первый опыт применения спектральной теории операторов был сделан для простейшего вида поверхностных волн — волн Лява [147], несущих только горизонтальное смещение, поперечное к направлению распространения. Этот опыт изложен в книге [4]. Спектральная теория позволила внести в общие свойства волн Лява такую ясность, а при расчетах избавила от стольких ограничений, что когда на базе этой теории был запрограммирован расчет более сложного вида поверхностных волн — волн Рэлея [160], казалось, что теория поверхностных волн в горизонтально-однородных средах практически исчерпана.

Однако довольно быстро стала ясна и другая сторона дела,— во-первых, обнаруживались все новые возможности общей теории, в особенности асимптотической, при изучении влияния среды и источника на волновые поля. Главное же, появилась насущная необходимость подкрепить общую теорию адекватными методами анализа реальных сейсмограмм.

В этой книге делается попытка рассмотреть с единой позиции основные вопросы как теории, так и интерпретации поверхностных волн и их близкого аналога — каналовых волн — в свете возможностей современной теории, вычислительной математики и регистрирующей аппаратуры. Рассматриваются два круга вопросов — математическое моделирование этих волн и анализ наблюдений, включающий выделение сигнала, построение дисперсионных и резонансных кривых и их геофизическую интерпретацию.

Книга состоит из двух частей. В первой части на физическом уровне строгости рассмотрены теория, методы расчета и основные свойства поверхностных и каналовых волн.

В главе 1 даны основные элементы теории этих волн в неоднородных упругих средах — полупространстве и шаре, параметры которых — скорости упругих волн и плотность — являются произвольными кусочно-непрерывными функциями одной координаты (глубины или радиуса). На источник колебаний никаких физически существенных ограничений не накладывается. Смещения в волнах типа Рэлея и Лява выражаются через собственные функции соответствующих одномерных краевых задач типа Штурма — Лиувилля. Полученные точные формулы оцениваются асимптотически на больших расстояниях от источника. Оценки приводят к сравнительно простым формулам, допускающим наглядное физическое истолкование. В частности, удается разделить влияние источника, приемника и пути распространения на волновое поле. Теоретический аппарат главы 1 используется в главе 2 для разработки методики математического моделирования волнового поля, а в главах 3 и 4 — для исследования основных свойств поверхностных и каналовых волн и их связи с параметрами среды и источника. Читатель, не интересующийся математической стороной проблемы, может начинать чтение с главы 3.

Рассмотренная в главе 2 методика состоит из нескольких последовательных этапов, на каждом из которых решаются определенные физические задачи: расчет дисперсии, поляризации, поглощения, зависимости амплитудного спектра от глубины приемника и источника, спектров смещений в отдельных гармониках, теоретических сейсмограмм. Эта методика реализована в серию программ для ЭВМ.

В главе 3 дана качественная картина наиболее важных свойств поверхностных волн. Наряду с относительно изученными свойствами (дисперсия, поляризация) исследуются такие слабо изученные динамические характеристики, как зависимость спектра от глубины очага, от частоты и от номера гармоники. Здесь же сформулированы принципы подобия и взаимности, указан способ приближенного учета поглощения.

Глава 4 посвящена особому классу моделей, содержащих внутренний слой с пониженной скоростью поперечных волн. Установлено, что в таких моделях, представляющих большой интерес для геофизики, существуют как поверхностные, так и каналовые волны. На высоких частотах они практически не взаимодействуют, но по мере уменьшения частоты начинают интерферировать; при этом возникает своеобразное просачивание энергии колебаний из внутреннего волновода в близповерхностную зону и обратно. Выявлен ряд критериев для обнаружения внутренних волноводов по наблюдениям на поверхности.

Значительное внимание здесь и в последующих главах уделено высшим гармоникам. Они сравнительно редко использовались при интерпретации наблюдений, но представляют большой практический интерес. Во-первых, они проникают на значительно большие глубины, чем основные гармоники при тех же периодах; это позволит изучать первые 100—200 *км* верхней мантии по наблюдениям стандартной аппаратуры и, возможно, использовать более слабые и в силу этого более многочисленные землетрясения. Во-вторых, они чувствительней к деталям скоростного разреза, чем основные гармоники, реагирующие лишь на интегральные характеристики разреза в пределах значительного интервала глубин. Это особенно важно для обнаружения внутренних слоев с пониженной скоростью.

Высшие гармоники поверхностных волн представляют большой интерес и в сейсмической разведке, как существенные помехи при выделении полезных сигналов [26, 48, 91, 148]. Без ясного понимания природы и свойств помех трудно разрабатывать эффективные способы их подавления и прогнозировать условия разведки новых площадей.

Вторая часть посвящена применению теоретического и расчетного аппарата первой части к интерпретации волн, возбуждаемых землетрясениями и взрывами. Главное внимание уделяется методическим вопросам. Среди множества возникающих задач подробно рассмотрены две: изучение строения коры и верхней мантии континентальных областей Земли (глава 5) и анализ природы низкоскоростных волн — помех в сейсморазведке (глава 6). При этом применяется один и тот же подход: проводится расчет волновых полей в некоторых типичных моделях среды; на этой основе намечается методика интерпретации, которая затем применяется к экспериментальным наблюдениям.

В главе 5 анализируются расчетные поля поверхностных волн в двух классических моделях Земли — Гутенберга и Джеффриса [22, 33, 35]. Главные различия этих моделей относятся к первым 300—400 *км* верхней мантии, где модель Гутенберга имеет слой пониженной скорости. Он вносит существенные особенности в характер волнового поля, главным образом в высшие гармоники поверхностных волн. Показано, что так называемые каналовые фазы Sa, Lg и Rg на континентах образуются в результате интерференции короткопериодных участков спектра основных и высших гармоник, вызванной слоистостью коры и неоднородностью верхней мантии. При этом они не обязательно связаны с каналами-слоями пониженной скорости. Исследовано влияние глубины очага на вид сейсмограмм.

Наряду с такими качественными закономерностями большое значение имеет количественный анализ сейсмограмм — определение дисперсии, поляризации, затухания и т. п. Проведенные расчеты дают необходимый модельный материал для оценки эффективности и точности различных способов анализа. Рассмотрение теоретических сейсмограмм показывает, что благодаря интерференции нескольких диспергирующих гармоник поле поверхностных волн может быть достаточно сложным, и одномерное (временно́е или спектральное) его представление не позволяет надежно разделять и количественно изучать отдельные гармоники. Новые возможности открывает двумерный (спектрально-временно́й) анализ волнового поля (СВАН), методика которого изложена в главе 5. Метод СВАН оказывается особенно эффективным для изучения длиннопериодных колебаний. Конец главы 5 посвящен совместной интерпретации поверхностных и объемных волн. По ограниченному набору данных — дисперсионной кривой и годографам и амплитудным кривым объемных волн — комбинированным методом перебора и случайного поиска «Еж» [15] строится совокупность скоростных разрезов коры и верхней мантии, согласующихся с наблюдениями в пределах заданных погрешностей. Поскольку получаемые решения сохраняют еще значительную неоднозначность, оценивается возможность уменьшения неоднозначности при использовании дополнительных данных о дисперсии высших гармоник поверхностных волн.

В главе 6 исследуется природа поверхностных волн-помех в сейсмической разведке. На примере двух типичных моделей верхней части разреза и экспериментальных данных для одного из районов Русской платформы показано, что наиболее серьезными помехами являются высшие гармоники поверхностных волн, обладающие широким спектром фазовых скоростей и медленно затухающие с увеличением глубины взрыва. Намечены способы ослабления этих помех.

Мы не останавливаемся здесь на других возможностях рассмотренной теории и методики: определении резонансных свойств грунтов [13], исследовании источника [4, 76, 144], изучении электромагнитных пульсаций в магнитосфере [31] и др.

Эта книга является итогом примерно десятилетней работы, проведенной автором в секторе вычислительной геофизики Института физики Земли АН СССР совместно с большим коллективом математиков и геофизиков. Ряд разделов работы выполнен совместно с математиками из Института химической физики АН СССР, Ленинградского отделения Математического института АН СССР и Вычислительного центра Ленинградского государственного университета.

Автор выражает искреннюю благодарность профессору В. И. Кейлис-Бороку за постоянную помощь и поддержку при проведении работы и написании этой книги. Он глубоко признателен своим коллегам по сектору вычислительной геофизики Института физики Земли АН СССР, а также сотрудникам ИХФ и ЛОМИ АН СССР, кандидатам физико-математических наук М. Г. Нейгауз, Г. В. Шкадинской и З. А. Янсон, принимавшим участие в исследованиях, отраженных в работе. Весьма полезными оказались для автора замечания, высказанные при обсуждении работы членом-корреспондентом АН СССР В. А. Магницким, профессорами В. М. Бабичем и И. И. Гурвичем.

I. ТЕОРИЯ И ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПОВЕРХНОСТНЫХ И КАНАЛОВЫХ ВОЛН

Глава 1

ТЕОРИЯ

§ 1. Поле смещений в вертикально-неоднородном полупространстве

Постановка задачи. Рассмотрим упругое полупространство с координатами z, r, φ $(0 \leqslant z < \infty,\ 0 \leqslant r < \infty,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi)$. Уравнения движения имеют вид [57]:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \widehat{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \widehat{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \widehat{zz}}{\partial z} + \frac{\widehat{rz}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} - F_z,\\
&\frac{\partial \widehat{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \widehat{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \widehat{rz}}{\partial z} + \frac{\widehat{rr} - \widehat{\varphi\varphi}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} - F_r, \qquad (1.1)\\
&\frac{\partial \widehat{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \widehat{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \widehat{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2\widehat{r\varphi}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} - F_\varphi.
\end{aligned}
$$

Здесь t — время; u_z, u_r, u_φ — компоненты вектора смещений $\mathbf{u}(t, z, r, \varphi)$ по ортам $\mathbf{a}_z$, $\mathbf{a}_r$, $\mathbf{a}_\varphi$ соответственно; $\widehat{rz}$, $\widehat{rr}$, $\widehat{r\varphi}$, $\widehat{\varphi z}$, $\widehat{\varphi\varphi}$, $\widehat{zz}$ — компоненты напряжений, связанные со смещениями формулами:

$$
\begin{aligned}
&\widehat{rz} = \mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\right),\\
&\widehat{rr} = \lambda\Delta + 2\mu\frac{\partial u_r}{\partial r},\\
&\widehat{r\varphi} = \mu\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi}\right), \qquad (1.2)\\
&\widehat{\varphi z} = \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}\right),\\
&\widehat{\varphi\varphi} = \lambda\Delta + 2\frac{\mu}{r}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r\right),\\
&\widehat{zz} = \lambda\Delta + 2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z},
\end{aligned}
$$

где Δ — дилатация:

$$
\Delta = \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r}. \qquad (1.3)
$$

Коэффициенты Ламе́ λ и μ и плотность ρ — кусочно-непрерывные положительные функции одной координаты z; при $z > Z$ λ, μ, ρ постоянны, а скорость поперечных волн $b = \sqrt{\mu/\rho}$ и скорость продольных волн $a = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ максимальны:

$$b(Z+0) = \max b(z), \qquad a(Z+0) = \max a(z).$$

Компоненты смещений и напряжений непрерывны и ограничены на всем отрезке $0 \leqslant z < \infty$, поверхность $z = 0$ свободна от напряжений, т. е.

$$\widehat{rz} = \widehat{\varphi z} = \widehat{zz} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0. \tag{1.4}$$

Начальные условия: отсутствие смещений до момента $t = 0$, т. е

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0 \quad \text{при} \quad t < 0. \tag{1.5}$$

Векторное поле сил $\mathbf{F}\ (t,\ z,\ r,\ \varphi)$ с компонентами F_z, F_r, F_φ, действующих на единицу объема вещества, описывает локализованный по времени и пространству сейсмический источник. На $\mathbf{F}$ наложены следующие физически несущественные ограничения:

1) $\mathbf{F}\ (t,\ z,\ r,\ \varphi) = 0$ при $t < 0$;

2) $\mathbf{F}\ (t,\ z,\ r,\ \varphi)$ абсолютно интегрируема и подчиняется условиям Дирихле относительно всех аргументов.

Необходимо найти главную часть поля смещений на больших расстояниях от оси $r = 0$ при $z \ll r$.

Формулы для источника. В силу ограничений, наложенных на источник, оказывается допустимым следующее представление:

$$\mathbf{F}(t,\ z,\ r,\ \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \int\limits_0^\infty \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^{3} f_m^{(i)} \mathbf{A}_m^{(i)} \right] \xi d\xi\, d\omega, \tag{1.6}$$

где

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_m^{(1)} &= \mathbf{a}_z Y_m, \\
\mathbf{A}_m^{(2)} &= \mathbf{a}_r \frac{\partial Y_m}{\partial r} \frac{1}{\xi} + \mathbf{a}_\varphi \frac{\partial Y_m}{\partial \varphi} \frac{1}{\xi r}, \\
\mathbf{A}_m^{(3)} &= \mathbf{a}_r \frac{\partial Y_m}{\partial \varphi} \frac{1}{\xi r} - \mathbf{a}_\varphi \frac{\partial Y_m}{\partial r} \frac{1}{\xi}, \\
Y_m &= e^{im\varphi} J_m(\xi r).
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Здесь J_m — функция Бесселя первого рода целого значка m. Система векторных функций $\mathbf{A}_m^{(i)}$ является полной и попарно ортогональной. Коэффициенты $f_m^{(i)}\ (z,\ \xi,\ \omega)$ находятся из соотношений ортогональности:

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_0^{2\pi} (\mathbf{A}_m^{(i)}(\chi r),\ \overline{\mathbf{A}}_l^{(j)}(\gamma r))\ r d\varphi\, dr = 2\pi \delta_{ij} \delta_{ml} \frac{\delta(\gamma - \chi)}{\sqrt{\gamma\chi}}, \tag{1.8}$$

(δ_{ij} — символ Кронекера, $\delta(\gamma-\chi)$ — функция Дирака[1]) и равны

$$f_m^{(i)} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{2\pi}(\mathbf{F}, \overline{\mathbf{A}}_m^{(i)})\, r d\varphi\, dr\, dt. \tag{1.9}$$

Конкретно для $i = 1, 2, 3$ имеем:

$$f_m^{(1)} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{2\pi}[F_z\overline{Y}_m(\xi, r)]\, r d\varphi\, dr dt,$$

$$f_m^{(2)} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{2\pi}\left[F_r\frac{\partial\overline{Y}_m}{\partial r} + F_\varphi\frac{\partial\overline{Y}_m}{\partial\varphi}\frac{1}{r}\right]\frac{r}{\xi}\, d\varphi\, dr\, dt, \tag{1.10}$$

$$f_m^{(3)} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{2\pi}\left[F_r\frac{\partial\overline{Y}_m}{\partial\varphi}\frac{1}{r} - F_\varphi\frac{\partial\overline{Y}_m}{\partial r}\right]\frac{r}{\xi}\, d\varphi\, dr\, dt,$$

где

$$\overline{Y}_m = e^{-im\varphi}J_m(\xi, r).$$

Для компонент сил F_z, F_r, F_φ получим из (1.6), (1.7):

$$F_z = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}\int\limits_0^{\infty}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m^{(1)}Y_m\right]\xi\, d\xi\, d\omega,$$

$$F_r = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}\int\limits_0^{\infty}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(f_m^{(2)}\frac{\partial Y_m}{\partial r} + f_m^{(3)}\frac{\partial Y_m}{\partial\varphi}\frac{1}{r}\right)\right]d\xi\, d\omega, \tag{1.11}$$

$$F_\varphi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}\int\limits_0^{\infty}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(f_m^{(2)}\frac{\partial Y_m}{\partial\varphi}\frac{1}{r} - f_m^{(3)}\frac{\partial Y_m}{\partial r}\right)\right]d\xi\, d\omega.$$

Формулы для смещений. Решение исходной нестационарной задачи теории упругости имеет вид

$$\mathbf{u}(t, z, r, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}\,\mathbf{U}(\omega, z, r, \varphi)\, d\omega, \tag{1.12}$$

где

$$\mathbf{U}(\omega, z, r, \varphi) = v.\int\limits_0^{\infty}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{i=1}^{3} V_m^{(i)}(z, \xi, \omega)\,\mathbf{A}_m^{(i)}(r, \varphi)\right]\xi\, d\xi.$$

$e^{i\omega t}\,\mathbf{U}(\omega, z, r, \varphi)$ есть решение аналогичной стационарной задачи теории упругости, которое строится единственным образом при условии, что $V_m^{(i)}(z)$ интегрируемы с квадратом на интервале $z \in (0, \infty)$.

[1] $\overline{\mathbf{A}}_l^{(j)}$ — комплексно-сопряженное с $\mathbf{A}_l^{(j)}$.

Как будет показано ниже, функции $V_m^{(i)}(\xi)$ имеют особенности при вещественных значениях переменной интегрирования ξ и параметра ω. Поэтому здесь и далее под $v.\int\limits_0^\infty (\quad)\,d\xi$ мы понимаем значение соответствующего контурного интеграла на плоскости комплексного переменного ξ. Контур интегрирования идет по действительной полуоси с обходом полюсов подынтегральной функции по малым полуокружностям в верхней полуплоскости. Отсюда для проекций $\mathbf{U}$ на орты $\mathbf{a}_z$, $\mathbf{a}_r$, $\mathbf{a}_\varphi$ получим:

$$
\begin{aligned}
U_z &= v.\int\limits_0^\infty \Big[\sum_{m=-\infty}^{\infty} V_m^{(1)} Y_m\Big]\xi\,d\xi,\\
U_r &= v.\int\limits_0^\infty \Big[\sum_{m=-\infty}^{\infty}\Big(V_m^{(2)}\frac{\partial Y_m}{\partial r}+\frac{V_m^{(3)}}{r}\frac{\partial Y_m}{\partial \varphi}\Big]d\xi,\\
U_\varphi &= v.\int\limits_0^\infty \Big[\sum_{m=-\infty}^{\infty}\Big(\frac{V_m^{(2)}}{r}\frac{\partial Y_m}{\partial \varphi}-V_m^{(3)}\frac{\partial Y_m}{\partial r}\Big]d\xi.
\end{aligned}
\tag{1.13}
$$

Подставляя (1.11) — (1.13) в уравнения (1.1) и граничные условия (1.4) и считая допустимым двойное дифференцирование под знаком интеграла, получаем следующие уравнения:

1. Для $V_m^{(1)}$, $V_m^{(2)}$:

$$
l_1(V_m^{(1)};V_m^{(2)}) \equiv \frac{d}{dz}\Big[(\lambda+2\mu)\frac{dV_m^{(1)}}{dz}-\xi\lambda V_m^{(2)}\Big]- -\xi\mu\frac{dV_m^{(2)}}{dz}+V_m^{(1)}(\omega^2\rho-\xi^2\mu)=-f_m^{(1)}, \tag{1.14}
$$

$$
l_2(V_m^{(1)};V_m^{(2)}) \equiv \frac{d}{dz}\Big[\mu\frac{dV_m^{(2)}}{dz}+\xi\mu V_m^{(1)}\Big]+\xi\lambda\frac{dV_m^{(1)}}{dz}+ +V_m^{(2)}(\omega^2\rho-\xi^2\lambda-2\xi^2\mu)=-f_m^{(2)}
$$

с граничными условиями:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{zz} &\equiv (\lambda+2\mu)\frac{dV_m^{(1)}}{dz}-\xi\lambda V_m^{(2)}=0,\\
\tau_{rz} &\equiv \mu\frac{dV_m^{(2)}}{dz}+\xi\mu V_m^{(1)}=0 \quad \text{при} \quad z=0.
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

Функции $V_m^{(1)}$, $V_m^{(2)}$, σ_{zz} и τ_{rz} непрерывны и ограничены при всех z.

2. Для $V_m^{(3)}$

$$
l_3(V_m^{(3)}) \equiv \frac{d}{dz}\Big(\mu\frac{dV_m^{(3)}}{dz}\Big)+V_m^{(3)}(\omega^2\rho-\xi^2\mu)=-f_m^{(3)} \tag{1.16}
$$

с граничным условием

$$\tau_{\varphi z} \equiv \mu \frac{dV_m^{(3)}}{dz} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0. \tag{1.17}$$

Функции $V_m^{(3)}$ и $\tau_{\varphi z}$ непрерывны и ограничены для всех z.

Левые части уравнений (1.14) и граничные условия (1.15) определяют самосопряженный оператор $\mathbf{L}$ в пространстве интегрируемых с квадратом вектор-функций $\begin{vmatrix} V_m^{(1)} \\ V_m^{(2)} \end{vmatrix}$. Левая часть уравнения (1.16) и граничные условия (1.17) определяют самосопряженный оператор L_3 в пространстве интегрируемых с квадратом функций $V_m^{(3)}$. Если вектор-функции $\begin{vmatrix} f_m^{(1)} \\ f_m^{(2)} \end{vmatrix}$ и функции $f_m^{(3)}$ также интегрируемы с квадратом на интервале $z \in (0, \infty)$ (что следует из ограничений, наложенных на функцию $\mathbf{F}(t, z, r, \varphi)$), то для функций $V_m^{(1)}$, $V_m^{(2)}$, $V_m^{(3)}$ справедливы следующие разложения по собственным функциям выше упомянутых операторов [4, 41, 46, 61, 85].

Разложение смещений по собственным функциям. $V_m^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ можно представить следующим образом:

$$V_m^{(i)} = \sum_{k=1}^{K_R(\xi)} c_{km}^R \tilde{V}_k^{(i)} + \int_{\omega_0^2}^{\infty} c_m^R(\beta)\, \tilde{V}^{(i)}(\beta, z)\, d\beta. \tag{1.18}$$

Здесь для коэффициентов c_{km}^R, c_m^R имеем:

$$\begin{aligned} c_{km}^R &= \frac{1}{\omega_{kR}^2(\xi) - \omega^2} \frac{D_{km}^R}{I_{kR}}, \\ c_m^R &= \frac{D_m^R}{\beta(\xi) - \omega^2}, \end{aligned} \tag{1.19}$$

$$\begin{aligned} D_{km}^R &= \int_0^\infty (f_m^{(1)} \tilde{V}_k^{(1)} + f_m^{(2)} \tilde{V}_k^{(2)})\, dz, \\ D_m^R &= \int_0^\infty (f_m^{(1)} \tilde{\overline{V}}^{(1)} + f_m^{(2)} \tilde{\overline{V}}^{(2)})\, dz, \end{aligned} \tag{1.20}$$

$$\begin{aligned} I_{kR} &= \int_0^\infty \rho\, [(\tilde{V}_k^{(1)})^2 + (\tilde{V}_k^{(2)})^2]\, dz, \\ \omega_0^2 &= \xi^2 b^2 (Z + 0), \end{aligned} \tag{1.21}$$

$\tilde{V}_k^{(1)}$ и $\tilde{V}_k^{(2)}$, $\tilde{V}^{(1)}$ и $\tilde{V}^{(2)}$ — собственные функции оператора, образованного левыми частями (1.14) и граничными условиями (1.15).

Первая пара функций соответствует дискретному спектру собственных значений $\omega_{kR}^2 (k = 1, 2, \ldots, K_R(\xi))$; $\xi^2 v_R^2 < \omega_{kR}^2 < \omega_0^2$, где v_R — минимальная скорость рэлеевской волны в однородном полупространстве с константами, равными $a(z)$, $b(z)$, $\rho(z)$ на некоторой глубине z [4, 40]. Вторая пара соответствует непрерывному спектру собственных значений β ($\omega_0^2 \leqslant \beta < \infty$). Волновое число ξ играет здесь роль свободного параметра. Формулы (1.19) получены из соотношений ортогональности:

$$\begin{gathered}\int_0^\infty \rho\,[\hat{V}_i^{(1)}\hat{V}_j^{(1)} + \hat{V}_i^{(2)}\hat{V}_j^{(2)}]\,dz = 0; \qquad \text{при } i \neq j\\ \int_0^\infty \rho\,[\hat{V}^{(1)}(\beta)\,\tilde{\hat{V}}^{(1)}(\omega^2) + \hat{V}^{(2)}(\beta)\,\tilde{\hat{V}}^{(2)}(\omega^2)]\,dz = \delta(\omega^2 - \beta),\end{gathered} \tag{1.22}$$

где $\tilde{\hat{V}}^{(i)}$ комплексно сопряжено с $\hat{V}^{(i)}$.

Аналогично $V_m^{(3)}$ можно представить так:

$$V_m^{(3)} = \sum_{k=1}^{K_L(\xi)} c_{km}^L \hat{V}_k^{(3)} + \int_{\omega_0^2}^\infty c_m^L(\beta)\,\hat{V}^{(3)}(z, \beta)\,d\beta, \tag{1.23}$$

где

$$c_{km}^L = \frac{1}{\omega_{kL}^2(\xi) - \omega^2}\,\frac{D_{km}^L}{I_{kL}}, \qquad c_m^L = \frac{D_m^L}{\beta(\xi) - \omega^2}; \tag{1.24}$$

$$D_{km}^L = \int_0^\infty f_m^{(3)} \hat{V}_k^{(3)}\,dz, \qquad D_m^L = \int_0^\infty f_m^{(3)} \tilde{\hat{V}}^{(3)}\,dz, \tag{1.25}$$

$$I_{kL} = \int_0^\infty \rho\,(\hat{V}_k^{(3)})^2\,dz; \tag{1.26}$$

$\hat{V}_k^{(3)}$ и $\hat{V}^{(3)}$ — собственные функции оператора, образованного левой частью (1.16) и граничным условием (1.17). $\hat{V}_k^{(3)}$ соответствует дискретному спектру собственных значений ω_{kL}, $k = 1, 2, \ldots, K_L(\xi)$; $(\xi \min b(z))^2 < \omega_{kL}^2 \leqslant \omega_0^2$; $\hat{V}^{(3)}$ соответствует непрерывному спектру собственных значений β ($\omega_0^2 < \beta < \infty$).

При выводе используются соотношения ортогональности:

$$\begin{gathered}\int_0^\infty \rho \hat{V}_i^{(3)} \hat{V}_j^{(3)}\,dz = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j,\\ \int_0^\infty \rho \hat{V}^{(3)}(\omega^2)\,\tilde{\hat{V}}^{(3)}(\beta)\,dz = \delta(\omega^2 - \beta).\end{gathered} \tag{1.27}$$

Подставляя найденные выражения для $V_m^{(i)}$ в (1.13), получаем окончательные точные формулы для смещений:

$$u_z = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\Big[v.\int\limits_0^{\infty}\Big[\sum_{m=-\infty}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{K_R(\xi)} c^R_{km}\tilde{V}^{(1)}_k + \int\limits_{\omega_0^2}^{\infty} c^R_m(\beta)\,\tilde{V}^{(1)}\,d\beta\Big)\,Y_m\Big]\,\xi\,d\xi\Big]\,d\omega,$$

$$u_r = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\Big[v.\int\limits_0^{\infty}\Big[\sum_{m=-\infty}^{\infty}\Big(\Big(\sum_{k=1}^{K_R(\xi)} c^R_{km}\tilde{V}^{(2)}_k + \int\limits_{\omega_0^2}^{\infty} c^R_m(\beta)\,\tilde{V}^{(2)}\,d\beta\Big)\frac{\partial Y_m}{\partial r} + \frac{1}{r}\Big(\sum_{k=1}^{K_L(\xi)} c^L_{km}\tilde{V}^{(3)}_k + \int\limits_{\omega_0^2}^{\infty} c^L_m(\beta)\,\tilde{V}^{(3)}\,d\beta\Big)\frac{\partial Y_m}{\partial\varphi}\Big)\Big]\,d\xi\Big]\,d\omega, \qquad (1.28)$$

$$u_\varphi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\Big[v.\int\limits_0^{\infty}\Big[\sum_{m=-\infty}^{\infty}\Big(\frac{1}{r}\Big(\sum_{k=1}^{K_R(\xi)} c^R_{km}\tilde{V}^{(2)}_k + \int\limits_{\omega_0^2}^{\infty} c^R_m(\beta)\,\tilde{V}^{(2)}\,d\beta\Big)\frac{\partial Y_m}{\partial\varphi} - \Big(\sum_{k=1}^{K_L(\xi)} c^L_{km}\tilde{V}^{(3)}_k + \int\limits_{\omega_0^2}^{\infty} c^L_m(\beta)\,\tilde{V}^{(3)}\,d\beta\Big)\frac{\partial Y_m}{\partial r}\Big)\Big]\,d\xi\Big]\,d\omega.$$

Можно показать, что полученное решение нестационарной задачи удовлетворяет нулевым начальным условиям (1.5). Действительно, при фиксированном ξ функциями ω в (1.26), помимо $e^{i\omega t}$, являются только коэффициенты c^Q_{km}; c^Q_{km} — регулярные функции ω всюду кроме конечного числа точек, в которых $\operatorname{Im}\omega \geqslant 0$, убывающие при $\omega \to \infty$ не медленнее, чем $0\left(\frac{1}{\omega^{1+|\varepsilon|}}\right)$. Меняя порядок интегрирования по ω и ξ, смещая контур интегрирования по ω в нижнюю полуплоскость, мы получаем нулевые значения $\mathbf{u}(t)$ и $\partial\mathbf{u}/\partial t$ при $t < 0$.

Итак, при помощи разложения по собственным функциям мы нашли точное решение, удовлетворяющее уравнениям (1.1), граничным и начальным условиям.

Асимптотика на больших расстояниях r. В дальнейшем нас будет интересовать главная часть возмущений $\mathbf{u}(t, z, r, \varphi)$ на больших горизонтальных расстояниях r, несоизмеримых с рассматриваемыми длинами волн и линейными размерами источника. Введем также ограничение на рассматриваемый диапазон глубин $0 < z < H$; $r \gg H$. Как известно, именно эта часть возмущений переносится поверхностными волнами [40, 68].

Вклад поверхностных волн целиком определяется дискретным спектром собственных значений ω^2_{kQ}; его можно оценить методом контурных интегралов как сумму вычетов по полюсам слагаемых в подынтегральных функциях, стоящих под знаками сумм $\sum\limits_{k=1}^{K_R(\xi)}$, $\sum\limits_{k=1}^{K_L(\xi)}$ в (1.28).

Сохраняя в решении стационарной задачи только члены, убывающие не быстрее $r^{-1/2}$, можно получить следующие асимптотические формулы для компонент смещений u_q (где $q = z,\ \varphi,\ r$) на больших расстояниях r [40, 68, 69, 73, 93, 141]:

$$
\begin{aligned}
u_q &= \sum_{k=1}^{\infty} u_{kq}(t, z, r, \varphi), \\
u_{kq} &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{\overline{\omega}_{kQ}}^{\infty} e^{i\omega t} U_{kq}(\omega, z, r, \varphi)\, d\omega,
\end{aligned}
\tag{1.29}
$$

$$
U_{kq} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-i\frac{\pi}{4}} (v_{kQ} C_{kQ} I_{kQ})^{-1} \frac{\exp(-i\xi_{kQ} r)}{\sqrt{\xi_{kQ} r}} (\varepsilon_q \tilde{V}_k^{(i_q)}(\omega, z))\, W_{kQ}(\omega, \varphi).
\tag{1.30}
$$

Значения индексов Q, i_q, а также множителя ε_q при заданном q приведены в табл. 1.

Таблица 1

q	Q	i_q	ε_q
z	R	1	1
r	R	2	$-i$
φ	L	3	$+i$

$\overline{\omega}_{kQ}$ — минимальная частота, при которой еще выполняется условие $\xi_{kQ}(\omega)\, r \gg |m| + 1$; ξ_{kQ} — корень уравнения $\omega_{kQ}^2(\xi) - \omega^2 = 0$,

$$
v_{kQ} = \frac{\omega}{\xi_{kQ}},
\tag{1.31}
$$

$$
C_{kQ} = \frac{d\omega_{kQ}(\xi_{kQ})}{d\xi},
\tag{1.32}
$$

$$
W_{kQ} = \sum_m D_{km}^{Q} \exp\left[im\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right].
\tag{1.33}
$$

При выводе формул (1.30) — (1.33) использованы асимптотические соотношения:

$$v.\int_0^\infty \frac{\Phi(\xi) J_m(\xi r)\,\xi\,d\xi}{\omega_{kQ}^2(\xi)-\omega^2} \approx \sqrt{\frac{\pi\xi_{kQ}}{2r}}\,\frac{\Phi(\xi_{kQ})}{\omega C_{kQ}} \times$$

$$\times \exp\left\{-i\left[\xi_{kQ} r-\left(m-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]\right\}, \quad (1.34)$$

$$v.\int_0^\infty \frac{\Phi(\xi)\dfrac{dJ_m(\xi r)}{dr}\,d\xi}{\omega_{kQ}^2(\xi)-\omega^2} \approx \sqrt{\frac{\pi\xi_{kQ}}{2r}}\,\frac{\Phi(\xi_{kQ})}{\omega C_{kQ}} \times$$

$$\times \exp\left\{-i\left[\xi_{kQ} r-\left(m-\frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]\right\},$$

справедливые при $\xi_{kQ}\, r \gg |m|+1$.

§ 2. Поле смещений в радиально-неоднородном шаре

Постановка задачи. Рассмотрим упругий шар с координатами R, θ, φ $(0 \leqslant R \leqslant R_0,\ 0 < \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi)$. Уравнения движения в этих координатах имеют вид [57]:

$$\frac{1}{R}\frac{\partial \widehat{\theta R}}{\partial\theta}+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial\widehat{\varphi R}}{\partial\varphi}+\frac{\partial\widehat{RR}}{\partial R}+\frac{1}{R}(2\widehat{RR}-\widehat{\theta\theta}-$$

$$-\widehat{\varphi\varphi}+\widehat{\theta R}\operatorname{ctg}\theta)=\rho\frac{\partial^2 u_R}{\partial t^2}-F_R,$$

$$\frac{1}{R}\frac{\partial\widehat{\theta\theta}}{\partial\theta}+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial\widehat{\theta\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{\partial\widehat{\theta R}}{\partial R}+\frac{1}{R}[3\widehat{\theta R}+(\widehat{\theta\theta}-\widehat{\varphi\varphi})\operatorname{ctg}\theta]=$$

$$=\rho\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}-F_\theta, \quad (1.35)$$

$$\frac{1}{R}\frac{\partial\widehat{\theta\varphi}}{\partial\theta}+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial\widehat{\varphi\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{\partial\widehat{\varphi R}}{\partial R}+\frac{1}{R}[3\widehat{\varphi R}+2\widehat{\theta\varphi}\operatorname{ctg}\theta]=\rho\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2}-F_\varphi.$$

Здесь u_R, u_θ, u_φ—компоненты вектора смещений $\mathbf{u}$ (t, R, θ, φ) по ортам $\mathbf{a}_R$, $\mathbf{a}_\theta$, $\mathbf{a}_\varphi$ соответственно; $\widehat{\theta R}$, $\widehat{\theta\theta}$, $\widehat{\theta\varphi}$, $\widehat{\varphi R}$, $\widehat{\varphi\varphi}$, $\widehat{RR}$ — компоненты напряжений, связанные со смещениями формулами:

$$\begin{aligned}
\widehat{\theta R}&=\mu\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial R}-\frac{u_\theta}{R}+\frac{1}{R}\frac{\partial u_R}{\partial\theta}\right),\\
\widehat{\theta\theta}&=\lambda\Delta+2\frac{\mu}{R}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+u_R\right),\\
\widehat{\theta\varphi}&=\frac{\mu}{R}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial\theta}-u_\varphi\operatorname{ctg}\theta+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}\right),\\
\widehat{\varphi R}&=\mu\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial R}-\frac{u_\varphi}{R}+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial u_R}{\partial\varphi}\right), \qquad (1.36)\\
\widehat{\varphi\varphi}&=\lambda\Delta+2\frac{\mu}{R}\left(u_R+u_\theta\operatorname{ctg}\theta+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right),\\
\widehat{RR}&=\lambda\Delta+2\mu\frac{\partial u_R}{\partial R}.
\end{aligned}$$

Здесь дилатация Δ имеет вид

$$\Delta = \frac{\partial u_R}{\partial R} + \frac{2u_R}{R} + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{1}{R}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{u_\theta}{R}\operatorname{ctg}\theta. \quad (1.37)$$

Коэффициенты Ламé λ, μ и плотность ρ — кусочно-непрерывные положительные функции одной координаты R; компоненты смещений и напряжений непрерывны и ограничены на всем отрезке $[0, R_0]$. Поверхность шара свободна от напряжений, т. е.

$$\widehat{\theta R} = \widehat{\varphi R} = \widehat{RR} = 0 \quad \text{при} \quad R = R_0. \quad (1.38)$$

Начальные условия

$$\mathbf{u} = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} = 0 \quad \text{при} \quad t < 0. \quad (1.39)$$

Поле сил $\mathbf{F}(t, R, \theta, \varphi)$ с компонентами F_R, F_θ, F_φ описывает действие локализованного во времени и пространстве источника. На $\mathbf{F}$ наложены следующие ограничения:

1) $\mathbf{F}(t, R, \theta, \varphi) = 0$ при $t < 0$;

2) $\mathbf{F}(t, R, \theta, \varphi)$ абсолютно интегрируемо по t и подчиняется условиям Дирихле относительно всех аргументов.

Необходимо найти главную часть поля смещений в шаре на больших угловых расстояниях θ от полюса $R = R_0$, $\theta = 0$ и антиполюса $R = R_0$, $\theta = \pi$ при $\theta R_0 \gg R_0 - R$.

Формулы для источника. В силу ограничений, наложенных на $\mathbf{F}(t, R, \theta, \varphi)$, справедливо следующее представление [54, 161]:

$$\mathbf{F}(t, R, \theta, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{i=1}^{3} f_{mn}^{(i)}(R, \omega)\,\mathbf{A}_{mn}^{(i)}\right]d\omega, \quad (1.40)$$

где

$$\mathbf{A}_{mn}^{(1)} = \mathbf{a}_R Y_{mn},$$

$$\mathbf{A}_{mn}^{(2)} = \left(\mathbf{a}_\theta\frac{\partial Y_{mn}}{\partial\theta} + \mathbf{a}_\varphi\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial Y_{mn}}{\partial\varphi}\right)\frac{1}{N},$$

$$\mathbf{A}_{mn}^{(3)} = \left(\mathbf{a}_\theta\frac{\partial Y_{mn}}{\partial\varphi}\frac{1}{\sin\theta} - \mathbf{a}_\varphi\frac{\partial Y_{mn}}{\partial\theta}\right)\frac{1}{N}, \quad (1.41)$$

$$Y_{mn}(\theta, \varphi) = e^{im\varphi}P_n^m(\cos\theta),$$

$$N = \sqrt{n(n+1)}, \qquad |m| \leqslant n;$$

$P_n^m(\cos\theta)$ — присоединенные полиномы Лежандра, определенные согласно следующим формулам [60]:

$$P_n^m(x) = \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^n n!} \frac{d^{n+m}(x^2-1)^n}{dx^{n+m}} \quad \text{при} \quad m \geqslant 0, \tag{1.42}$$

$$P_n^m(x) = (-1)^m \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} P_n^{|m|}(x) \quad \text{при} \quad m < 0.$$

Система векторных функций $\mathbf{A}_{mn}^{(i)}$ является полной системой векторов, удовлетворяющих следующим условиям ортогональности на единичной сфере[2]:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (\mathbf{A}_{mn}^{(i)}, \overline{\mathbf{A}}_{lq}^{(j)}) \sin\theta d\theta\, d\varphi = 4\pi\delta_{ij}\delta_{ml}\delta_{nq} \frac{(n+m)!}{(n-m)!\,(2n+1)}. \tag{1.43}$$

В работе Г. И. Петрашеня [71] для решения аналогичной задачи теории упругости была предложена другая система векторных функций, являющаяся линейной комбинацией системы $\mathbf{A}_{mn}^{(i)}$. В отличие от [71], где волновое поле в шаре ищется в виде суммы потенциального и соленоидального полей, разложение волнового поля по системе $\mathbf{A}_{mn}^{(i)}$ позволяет отдельно исследовать сфероидальные и крутильные колебания шара. Все доказательства ортогональности и полноты системы, рассмотренной в [71], легко перенести на систему $\mathbf{A}_{mn}^{(i)}$.

Коэффициенты $f_{mn}^{(i)}$ разложения внешнего воздействия $\mathbf{F}$ по системе $\mathbf{A}_{mn}^{(i)}$ имеют вид

$$f_{mn}^{(i)}(R, \omega) = \frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (\mathbf{F}, \overline{\mathbf{A}}_{mn}^{(i)}) \sin\theta d\theta\, d\varphi\, dt. \tag{1.44}$$

Конкретно для $i = 1,2,3$ имеем:

$$f_{mn}^{(1)} = \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{2n+1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} F_R \overline{Y}_{mn} \sin\theta d\theta\, d\varphi\, dt,$$

$$f_{mn}^{(2)} = \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{2n+1}{4\pi N} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left[F_\theta \frac{\partial \overline{Y}_{mn}}{\partial\theta} + F_\varphi \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial \overline{Y}_{mn}}{\partial\varphi}\right] \times$$
$$\times \sin\theta d\theta\, d\varphi\, dt, \tag{1.45}$$

$$f_{mn}^{(3)} = \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{2n+1}{4\pi N} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left[F_\theta \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial \overline{Y}_{mn}}{\partial\varphi} - F_\varphi \frac{\partial \overline{Y}_{mn}}{\partial\theta}\right] \times$$
$$\times \sin\theta d\theta\, d\varphi\, dt,$$

$$\overline{Y}_{mn}(\theta, \varphi) = e^{-im\varphi} P_n^m(\cos\theta).$$

---

[2] При $n = 0$, $N = 0$, $Y_{mn} = \text{const}$ и (1.41) теряет смысл. Будем считать, что $A_{00}^{(2)} = A_{00}^{(3)} = 0$.

Для компонент сил F_R, F_θ, F_φ получим из (1.40) и (1.41):

$$F_R = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} f_{mn}^{(1)} Y_{mn}\right] d\omega,$$

$$F_\theta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{N}\sum_{m=-n}^{n}\left(f_{mn}^{(2)}\frac{\partial Y_{mn}}{\partial\theta} + f_{mn}^{(3)}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial Y_{mn}}{\partial\varphi}\right)\right] d\omega, \quad (1.46)$$

$$F_\varphi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{N}\sum_{m=-n}^{n}\left(f_{mn}^{(2)}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial Y_{mn}}{\partial\varphi} - f_{mn}^{(3)}\frac{\partial Y_{mn}}{\partial\theta}\right)\right] d\omega.$$

Формулы для смещений. Будем искать смещения в виде

$$\mathbf{u}(t, R, \theta, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\, v.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{i=1}^{3} V_{mn}^{(i)}\mathbf{A}_{mn}^{(i)}\right] d\omega, \quad (1.47)$$

где $V_{mn}^{(i)} = V_{mn}^{(i)}(R, \omega)$ [3]. Отсюда для проекций смещения на орты $\mathbf{a}_R$, $\mathbf{a}_\theta$, $\mathbf{a}_\varphi$ получим:

$$u_R = \frac{1}{2\pi}\, v.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} V_{mn}^{(1)} Y_{mn}\right] d\omega, \quad (1.48)$$

$$u_\theta = \frac{1}{2\pi}\, v.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{N}\sum_{m=-n}^{n}\left(V_{mn}^{(2)}\frac{\partial Y_{mn}}{\partial\theta} + V_{mn}^{(3)}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial Y_{mn}}{\partial\varphi}\right)\right] d\omega,$$

$$u_\varphi = \frac{1}{2\pi}\, v.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{N}\sum_{m=-n}^{n}\left(V_{mn}^{(2)}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial Y_{mn}}{\partial\varphi} - V_{mn}^{(3)}\frac{\partial Y_{mn}}{\partial\theta}\right)\right] d\omega.$$

Подставляя (1.46) — (1.48) в уравнения (1.35) и граничные условия (1.38), получаем следующие уравнения для $V_{mn}^{(i)}$.

1. Для $V_{mn}^{(1)}$, $V_{mn}^{(2)}$:

$$l_1(V_{mn}^{(1)}; V_{mn}^{(2)}) \equiv \frac{d}{dR}\left[(\lambda + 2\mu)\frac{dV_{mn}^{(1)}}{dR} + \frac{2\lambda}{R}V_{mn}^{(1)} - \frac{\lambda N}{R}V_{mn}^{(2)}\right] +$$
$$+ \frac{\mu}{R^2}\left[4R\frac{dV_{mn}^{(1)}}{dR} - 4V_{mn}^{(1)} + N\left(3V_{mn}^{(2)} - R\frac{dV_{mn}^{(2)}}{dR} - NV_{mn}^{(1)}\right)\right] +$$
$$+ \omega^2\rho V_{mn}^{(1)} = -f_{mn}^{(1)}, \quad (1.49)$$

$$l_2(V_{mn}^{(1)}; V_{mn}^{(2)}) \equiv \frac{d}{dR}\left[\mu\left(\frac{dV_{mn}^{(2)}}{dR} - \frac{V_{mn}^{(2)}}{R} + \frac{NV_{mn}^{(1)}}{R}\right)\right] + \frac{\lambda N}{R}\left(\frac{dV_{mn}^{(1)}}{dR} +\right.$$
$$\left.+ \frac{2}{R}V_{mn}^{(1)} - \frac{N}{R}V_{mn}^{(2)}\right) + \frac{\mu}{R^2}\left(5NV_{mn}^{(1)} + 3R\frac{dV_{mn}^{(2)}}{dR} - V_{mn}^{(2)} - 2N^2V_{mn}^{(2)}\right) +$$
$$+ \omega^2\rho V_{mn}^{(2)} = -f_{mn}^{(2)}$$

---

[3] Здесь и далее $v.\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\ )\,d\omega$ означает, что контур интегрирования идет по действительной оси, обходя особенности подынтегральной функции по малым полуокружностям в нижней полуплоскости комплексного переменного ω.

при граничных условиях:

$$\begin{aligned}\sigma_{RR} &\equiv (\lambda+2\mu)\frac{dV^{(1)}_{mn}}{dR}+\frac{2\lambda}{R}V^{(1)}_{mn}-\frac{\lambda N}{R}V^{(2)}_{mn}=0,\\ \tau_{\theta R} &\equiv \mu\left(\frac{dV^{(2)}_{mn}}{dR}-\frac{V^{(2)}_{mn}}{R}+\frac{NV^{(1)}_{mn}}{R}\right)=0 \quad \text{при} \quad R=R_0,\end{aligned} \tag{1.50}$$

$$V^{(1)}_{mn}=V^{(2)}_{mn}=0 \quad \text{при} \quad R=0. \tag{1.51}$$

Функции $V^{(1)}_{mn}$, $V^{(2)}_{mn}$, σ_{RR} и $\tau_{\theta R}$ непрерывны и ограничены на всем отрезке $[0,\ R_0]$.

2. Для $V^{(3)}_{mn}$ имеем:

$$l_3(V^{(3)}_{mn}) \equiv \frac{d}{dR}\left[\mu\left(\frac{dV^{(3)}_{mn}}{dR}-\frac{V^{(3)}_{mn}}{R}\right)\right]+\frac{3\mu}{R}\frac{dV^{(3)}_{mn}}{dR}-$$
$$-\frac{\mu}{R^2}(N^2+1)V^{(3)}_{mn}+\omega^2\rho V^{(3)}_{mn}=-f^{(3)}_{mn}, \tag{1.52}$$

и граничные условия:

$$\tau_{\varphi R} \equiv \mu\left(\frac{dV^{(3)}_{mn}}{dR}-\frac{V^{(3)}_{mn}}{R}\right)=0 \quad \text{при} \quad R=R_0. \tag{1.53}$$

$$V^{(3)}_{mn}=0 \quad \text{при} \quad R=0. \tag{1.54}$$

Функции $V^{(3)}_{mn}$, $\tau_{\varphi R}$ непрерывны и ограничены на всем отрезке $[0,\ R_0]$.

Разложение смещений по собственным функциям. $V^{(i)}_{mn}$ $(i = 1{,}2)$ можно представить следующим образом:

$$V^{(i)}_{mn}=\frac{1}{R_0^2}\sum_{k=1}^{\infty} c^{S}_{kmn}\tilde{V}^{(i)}_{kn}, \tag{1.55}$$

где для коэффициентов c^S_{kmn} имеем:

$$c^S_{kmn}=\frac{1}{\omega^2_{knS}-\omega^2}\,\frac{D^S_{kmn}}{I_{knS}}, \tag{1.56}$$

$$D^S_{kmn}=\int_0^{R_0}\left(f^{(1)}_{mn}\tilde{V}^{(1)}_{kn}+f^{(2)}_{mn}\tilde{V}^{(2)}_{kn}\right)R^2\,dR, \tag{1.57}$$

$$I_{knS}=\frac{1}{R_0^2}\int_0^{R_0}\rho R^2\left[(\tilde{V}^{(1)}_{kn})^2+(\tilde{V}^{(2)}_{kn})^2\right]dR. \tag{1.58}$$

Здесь $\tilde{V}^{(i)}_{kn}(R)$ $(i=1{,}2)$ — собственные функции, а ω^2_{knS} — собственные значения оператора, образованного левыми частями (1.49) и граничными условиями (1.50), (1.51) при заданном значении целочисленного параметра n.

Аналогично

$$V_{mn}^{(3)} = \frac{1}{R_0^2} \sum_{k=1}^{\infty} c_{kmn}^{T} \tilde{V}_{kn}^{(3)}, \tag{1.59}$$

где

$$c_{kmn}^{T} = \frac{1}{\omega_{knT}^2 - \omega^2} \frac{D_{kmn}^{T}}{I_{knT}}, \tag{1.60}$$

$$D_{kmn}^{T} = \int_0^{R_0} f_{mn}^{(3)} \tilde{V}_{kn}^{(3)} R^2 \, dR, \tag{1.61}$$

$$I_{knT} = \frac{1}{R_0^2} \int_0^{R_0} \rho R^2 (\tilde{V}_{kn}^{(3)})^2 \, dR. \tag{1.62}$$

Здесь $\tilde{V}_{kn}^{(3)}$ — собственные функции, а ω_{knT}^2 — собственные значения оператора, образованного левой частью (1.52) и граничными условиями (1.53), (1.54). При выводе (1.56), (1.60) использовались условия ортогональности:

$$\begin{gathered} \int_0^{R_0} \rho R^2 (\tilde{V}_{kn}^{(1)} \tilde{V}_{ln}^{(1)} + \tilde{V}_{kn}^{(2)} \tilde{V}_{ln}^{(2)}) \, dR = 0, \\ \int_0^{R_0} \rho R^2 (\tilde{V}_{kn}^{(3)} \tilde{V}_{ln}^{(3)}) \, dR = 0 \quad \text{при} \quad k \neq l. \end{gathered} \tag{1.63}$$

Подставляя найденные для $V_{mn}^{(i)}$ (R, ω) выражения в (1.48), получаем формулы для смещений:

$$\begin{aligned} u_R &= \frac{1}{2\pi R_0^2} v. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \sum_{k=1}^{\infty} c_{kmn}^{S} (\omega) \, \tilde{V}_{kn}^{(1)} (R) \, Y_{mn} \right] d\omega, \\ u_\theta &= \frac{1}{2\pi R_0^2} v. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{N} \sum_{m=-n}^{n} \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_{kmn}^{S} (\omega) \, \tilde{V}_{kn}^{(2)} (R) \frac{\partial Y_{mn}}{\partial \theta} + \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. + \, c_{kmn}^{T} (\omega) \, \tilde{V}_{kn}^{(3)} (R) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{mn}}{\partial \varphi} \right) \right] d\omega, \\ u_\varphi &= \frac{1}{2\pi R_0^2} v. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{N} \sum_{m=-n}^{n} \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_{kmn}^{S} (\omega) \, \tilde{V}_{kn}^{(2)} (R) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{mn}}{\partial \varphi} - \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. - \, c_{kmn}^{T} (\omega) \, \tilde{V}_{kn}^{(3)} (R) \frac{\partial Y_{mn}}{\partial \theta} \right) \right] d\omega. \end{aligned} \tag{1.64}$$

Доказательство того, что построенное решение (1.64) удовлетворяет начальным условиям (1.39), проводится аналогично плоскому случаю для каждого члена ряда $\sum\limits_{m,\, n}$.

Таким образом, при помощи разложения по собственным функциям мы получили точное решение, удовлетворяющее уравнению (1.35), граничным и начальным условиям (1.38), (1.39).

Представление смещений в виде суммы собственных колебаний шара. В формулах (1.64) только множители типа $c^Q_{kmn}\, e^{i\omega t}$ зависят от ω. Поэтому вычисление интегралов по ω сводится к нахождению значений интегралов типа $v.\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega t}\psi(\omega)}{\alpha^2-\omega^2}\,d\omega$. При введенных ограничениях на источник $\psi(\omega)$ может иметь особенность при $\mathrm{Im}\,\omega \geqslant 0$ и регулярна в нижней полуплоскости. Кроме того, $\psi(-\omega)=\overline{\psi}(\omega)$. Отсюда для $t \geqslant t_1$ нетрудно получить

$$v.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}\frac{\psi(\omega)}{\alpha^2-\omega^2}\,d\omega=\frac{2\pi}{\alpha}\,\mathrm{Re}\left[\psi(\alpha)\exp\left(i\left(\alpha t-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right]+d(t). \quad (1.65)$$

Функция $d(t)$ описывает не представляющее для нас интереса возмущение, связанное с особенностями источника. Для финитного источника, у которого $\mathbf{F}(t)=0$ вне интервала $0\leqslant t\leqslant t_1$, $d(t)=0$ при $t>t_1$, для других источников $d(t)$ экспоненциально затухает во времени.

Применяя найденное соотношение к (1.64) и пренебрегая $d(t)$, получаем:

$$u_R=\frac{1}{R_0^2}\,\mathrm{Re}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}\exp\left[i\left(\omega_{knS}t-\frac{\pi}{2}\right)\right]D^S_{kmn}\,\frac{\widetilde{V}^{(1)}_{kn}(R)}{\omega_{knS}}\,\frac{Y_{mn}}{I_{knS}},$$

$$u_\theta=\frac{1}{R_0^2}\,\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{N}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\exp\left[i\left(\omega_{knS}t-\frac{\pi}{2}\right)\right]D^S_{kmn}\,\times\right.$$

$$\left.\times\,\frac{V^{(2)}_{kn}(R)}{\omega_{knS}I_{knS}}\,\frac{\partial Y_{mn}}{\partial\theta}+\exp\left[i\left(\omega_{knT}t-\frac{\pi}{2}\right)\right]D^T_{kmn}\,\frac{\widetilde{V}^{(3)}_{kn}(R)}{\omega_{knT}I_{knT}}\,\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial Y_{mn}}{\partial\varphi}\right\}, \quad (1.66)$$

$$u_\varphi=\frac{1}{R_0^2}\,\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{N}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\exp\left[i\left(\omega_{knS}t-\frac{\pi}{2}\right)\right]D^S_{kmn}\,\frac{\widetilde{V}^{(2)}_{kn}(R)}{\omega_{knS}I_{knS}}\,\times\right.$$

$$\left.\times\,\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial Y_{mn}}{\partial\varphi}-\exp\left[i\left(\omega_{knT}t-\frac{\pi}{2}\right)\right]D^T_{kmn}\,\frac{V^{(3)}_{kn}(R)}{\omega_{knT}I_{knT}}\,\frac{\partial Y_{mn}}{\partial\theta}\right\}.$$

Таким образом, мы представили смещения в виде суммы собственных сфероидальных S и крутильных T колебаний шара с дискретными частотами ω_{knS} и ω_{knT}. Радиальная компонента u_R обязана только сфероидальным колебаниям, компоненты u_θ, u_φ — как сфероидальным, так и крутильным колебаниям.

Асимптотика смещений в бегущих волнах при больших углах θ. Для выделения из смещений, описываемых формулами (1.66), бегущих поверхностных волн будем следовать [98]. Изменим порядок суммирования (т. е. заменим сумму $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}$ суммой $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}$) и заменим суммирование по n интегрированием по контуру L, охватывающему положительную часть действительной оси плоскости комплексного переменного ν, где $n = \mathrm{Ent}(\mathrm{Re}\,\nu)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n^m(\cos\theta) = -\frac{1}{2i}\oint\limits_L \frac{f(\nu)\,P_\nu^m(\cos(\pi-\theta))\,(-1)^{|m|}}{\cos\pi\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\,d\nu.$$

Представляя $(\cos\pi(\nu+1/2))^{-1/2}$ при $\mathrm{Im}\,\nu \geqslant 0$ рядом $2\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l \exp\left[i(2l+1)\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\pi\right]$, а при $\mathrm{Im}\,\nu < 0$ рядом $2\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l \exp\left[-i(2l+1)\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\pi\right]$, устремляя контур интегрирования к действительной оси и вводя новую переменную $\omega = \omega_{kQ}(\nu)$, получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n^m(\cos\theta) = 2\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^{l+|m|}\int\limits_0^{\infty} f(\omega)\,P_\nu^m(\cos(\pi-\theta)) \times$$
$$\times \sin\left[(2l+1)\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\pi\right]\frac{d\nu}{d\omega}\,d\omega. \quad (1.67)$$

Исключив из рассмотрения низкочастотную часть поля с $\omega < \bar\omega$ и применив асимптотику присоединенных полиномов Лежандра для больших значений $n\sin\theta \gg |m|+1$, находим

$$\sum_{\mathrm{Ent}[\nu(\bar\omega)]}^{\infty} f_n P_n^m(\cos\theta) \approx \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi\sin\theta}}\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\int\limits_{\bar\omega}^{\infty}\nu^{m-\frac{1}{2}} f(\omega)\,\frac{d\nu}{d\omega}\times \quad (1.68)$$
$$\times\cos\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)(\pi-\theta)-\frac{\pi}{4}+\frac{m\pi}{2}\right]\sin\left[(2l+1)\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\pi\right]d\omega.$$

Применяя аналогичные асимптотические преобразования к сумме $\sum_{\mathrm{Ent}[\nu(\bar\omega)]}^{\infty} f_n \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta}$, получаем

$$\sum_{\mathrm{Ent}[\nu(\bar\omega)]}^{\infty} f_n \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \approx \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi\sin\theta}}\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\int\limits_{\bar\omega}^{\infty}\nu^{m+\frac{1}{2}} f(\omega)\,\frac{d\nu}{d\omega}\times \quad (1.69)$$
$$\times\cos\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)(\pi-\theta)-\frac{3\pi}{4}+\frac{m\pi}{2}\right]\sin\left[(2l+1)\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\pi\right]d\omega;$$

Используя эти формулы для преобразования (1.66), можно найти следующие асимптотические выражения для компоненты смещения u_q ($q = R, \theta, \varphi$) в поверхностной волне, l раз обежавшей шар и при этом g раз прошедшей через полюс $\theta = 0$ и антиполюс $\theta = \pi$ шара:

$$u_q = \sum_{k=1}^{\infty} u_{kq}(t, R, \theta, \varphi),$$
$$u_{kq} = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{\bar{\omega}_{kQ}}^{\infty} e^{i\omega t} U_{kq}(\omega, R, \theta, \varphi)\, d\omega, \tag{1.70}$$

$$U_{kq} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-i\frac{\pi}{4}} (v_{kQ} C_{kQ} I_{k\nu Q})^{-1} \frac{\exp\left[-i\left(\nu_{kQ} + \frac{1}{2}\right)\tilde{\theta} + i\frac{\pi}{2} g\right]}{\sqrt{\nu_{kQ} \sin\theta}} \times$$
$$\times (\varepsilon_q \tilde{V}_{k\nu}^{(i_q)}(R))\, W_{k\nu Q}(\omega, \varphi, g). \tag{1.71}$$

Здесь истинные значения индексов Q, i_q и множителя ε_q при заданном q даны в табл. 2.

Таблица 2

q	Q	i_q	ε_q
R	S	1	1
θ	S	2	$-i(-1)^g$
φ	T	3	$i(-1)^g$

$\bar{\omega}_{kQ}$ — минимальная частота, при которой еще выполнено неравенство $\nu_{kQ}(\omega) \sin\theta \gg |m| + 1$; ν_{kQ} — корень уравнения $\omega_{kQ}^2(\nu) - \omega^2 = 0$;

$$v_{kQ} = \frac{\omega R_0}{\nu_{kQ} + \frac{1}{2}}, \tag{1.72}$$

$$C_{kQ} = R_0 \frac{d\omega_{kQ}(\nu_{kQ})}{d\nu}; \tag{1.73}$$

$$W_{k\nu Q} = \sum_m \nu_{kQ}^{m-1}(\omega)\, D_{km\nu}^{Q} \exp\left\{im\left[\varphi + (-1)^g \frac{\pi}{2}\right]\right\}, \tag{1.74}$$

Полный путь пробега волны θ связан с координатой точки наблюдения θ ($0 < \theta < \pi$) следующим образом:

$$\tilde{\theta} = (-1)^g \theta + 2\pi (g - l). \qquad (1.75)$$

Связь между высокочастотными смещениями в шаре и полупространстве. Пусть $\frac{\omega R_0}{b(R_0)} \to \infty$, а величина $\frac{\omega}{b(R_0)}(R_0 - R) = \frac{\omega z}{b(R_0)}$ остается при этом ограниченной. Тогда нетрудно показать, что формулы (1.71) для шара перейдут в соответствующие формулы (1.29) для полупространства, если заменить в них индексы S на R, T на L и учесть, что при $\frac{\omega R_0}{b(R_0)} \to \infty$ и $g = l = 0$:

$$\omega R_0 \theta \to \omega r, \qquad \frac{\nu_{kQ}}{R} \to \xi_{kQ}, \qquad F_R \to -F_z, \qquad F_\theta \to F_r;$$

$$U_{kR} \to -U_{kz}, \qquad U_{k\theta} \to U_{kr};$$

$$\tilde{V}^{(1)}_{k\nu}(R) \to \tilde{V}^{(1)}_k(z), \qquad \tilde{V}^{(2)}_{k\nu}(R) \to -\tilde{V}^{(2)}_k(z), \qquad \tilde{V}^{(3)}_{k\nu}(R) \to \tilde{V}^{(3)}_k(z);$$

$$\nu^{m-1}_{kS} D^S_{km\nu} \to -D^R_{km}, \qquad \nu^{m-1}_{kT} D^T_{km\nu} \to D^L_{km}.$$

Таким образом, высокочастотные части смещений в поверхностных волнах для полупространства и шара асимптотически одинаковы.

§ 3. Физическое истолкование полученных решений

Ниже мы дадим истолкование полученных формул (1.29), (1.71), существенное для понимания процесса возбуждения и распространения поверхностных волн. Будем считать, что поле сил $\mathbf{F}$, описывающее сейсмический источник, локализовано в некоторой зоне, расположенной в полупространстве вблизи начала координат $z = 0$, $r = 0$, а в шаре — вблизи полюса $R = R_0$, $\theta = 0$. Поместим в точку с координатами z, r, φ (в шаре R, θ, φ) неискажающий приемник, регистрирующий q-ю компоненту смещений этой точки ($q = z, r, \varphi$ в полупространстве; $q = R, \theta, \varphi$ — в шаре). Величина r (или ∂) имеет тогда смысл *эпицентрального расстояния*, φ — *азимута с эпицентра на станцию*, z (или R) — *глубины приемника*, отсчитываемой от свободной поверхности (центра шара), $\tilde{\theta}$ (в шаре) — *пути пробега волны*, g раз прошедшей через эпицентр и антиэпицентр.

Теоретическая сейсмограмма $u_q(t)$ поверхностной волны, регистрируемая таким приемником, описывается при достаточно больших r (или θ) формулами (1.29) — (1.30) или (1.70) — (1.71). *Поверхностные волны Рэлея* (индекс волны $Q = R$ или S) будут регистрироваться только при $q = z$, r или R, θ: они поляризованы в вертикальной плоскости (сечении большого круга), проходящей через эпицентр и приемник. *Поверхностные волны Лява* (индекс волны $Q = L$ или T) будут регистрироваться только при $q = \varphi$: они линейно поляризованы, вектор смещения нормален к плоскости поляризации волн Рэлея.

Каждую сейсмограмму можно рассматривать как суперпозицию бесконечного числа *гармоник* (в других терминологиях — нормальных волн, обертонов или мод); индекс k ($k = 1, 2, \ldots, \infty$) обозначает номер гармоники. Вклад отдельной гармоники с номером k в теоретическую сейсмограмму q-й компоненты смещения обозначен $u_{kq}(t)$. Поскольку согласно (1.29) или (1.70) $u_{kq}(t) = \frac{1}{\pi} \mathrm{Re} \int\limits_{\overline{\omega}_{kQ}}^{\infty} U_{kq}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$, $U_{kq}(\omega)$ имеет смысл *спектральной плотности смещения* в q-й компоненте k-й гармоники. Пределы интегрирования по ω характеризуют спектральный состав гармоники. Мы видим, что сверху спектр формально не ограничен (о физических ограничениях см. гл. 3); частота $\overline{\omega}_{kQ}$, ограничивающая спектр снизу, зависит от свойств среды и эпицентрального расстояния.

Спектральная плотность U_{kq} может быть представлена в виде произведения

$$U_{kq} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-i\frac{\pi}{4}} \prod_{j=1}^{4} B_{kq}^{(j)}. \tag{1.76}$$

Формулы для сомножителей $B_{kq}^{(j)}$ приведены в табл. 3; значения индексов Q, i_q, множителя ε_q при данном q указаны в табл. 2.

Все множители $B_{kq}^{(j)}$ прямо или косвенно (через непрерывный действительный параметр ν) зависят от частоты ω; на каждый из них влияют свойства среды (распределение по глубине скоростей и плотности), тип (Q) и номер (k) регистрируемой гармоники. Для заданной модели среды, индексов k и Q регистрируемой волны и заданной частоты ω:

1. Множитель $B_{kq}^{(1)}$ одинаков для всех эпицентральных расстояний и любого источника.

Таблица 3

	$B_{kq}^{(1)}$	$B_{kq}^{(2)}$	$B_{kq}^{(3)}$	$B_{kq}^{(4)}$
Полупространство	$(v_{kQ}(\omega) C_{kQ}(\omega) I_{kQ}(\omega))^{-1}$	$\dfrac{\exp(-i\xi_{kQ}(\omega) r)}{\sqrt{\xi_{kQ} r}}$	$\varepsilon_q \widetilde{V}_k^{(iq)}(\omega, z)$	$W_{kQ}(\omega, \varphi)$
Шар	$(v_{kQ}(\omega) C_{kQ}(\omega) I_{k\nu Q})^{-1}$	$\dfrac{\exp\left[-i\left(\nu_{kQ}(\omega) + \frac{1}{2}\right)\widetilde{\theta} + i\frac{\pi}{2} g\right]}{\sqrt{\nu_{kQ}(\omega) \sin\theta}}$	$\varepsilon_q(g) \widetilde{V}_{k\nu}^{(iq)}(R)$	$W_{k\nu Q}(\varphi, g)$

2. Множитель $B_{kq}^{(2)}$ описывает эффект эпицентрального расстояния. Числитель его определяет задержку фазы колебания с частотой ω; задержка равна $\xi_{kQ}\, r$ или $(\nu_{kQ} + 1/2)\,\widetilde{\theta}$ (в шаре); здесь $\xi_{kQ} \approx (\nu_{kQ} + 1/2)/R_0$ — *волновое число*; соответствующая временна́я задержка равна $\frac{r}{v_{kQ}(\omega)} \approx \frac{R_0 \widetilde{\theta}}{v_{kQ}(\omega)}$ и, следовательно, v_{kQ} есть *фазовая скорость* распространения данной гармоники вдоль свободной поверхности. Зависимость $v_{kQ} = v_{kQ}(\omega)$ называется *дисперсией скорости*, а график функции $v_{kQ}(\omega)$ будем называть *к-й ветвью дисперсионной кривой*. При анализе нестационарных колебаний важную роль играет *групповая скорость k-й гармоники*

$$C_{kQ} = \frac{d\omega_{kQ}}{d\xi}(\xi_{kQ}) \approx R_0 \frac{d\omega_{kQ}(\nu_{kQ})}{d\nu}.$$

Дополнительный набег фазы (полярный фазовый сдвиг) в шаре на $\pi/2$ происходит при каждом проходе волны через эпицентр и антиэпицентр из-за фокусировки волн в этих точках [114].

Знаменатель $B_{kq}^{(2)}$ описывает эффект ослабления амплитуды за счет геометрического расхождения на пути r (или θ). Дополнительное ослабление может возникнуть из-за неучтенного нами поглощения; при малых отклонениях от идеальной упругости его можно учесть введением в $B_{kq}^{(2)}$ дополнительного множителя вида $\exp(-\alpha_{kQ}(\omega) r)$ для полупространства, $\exp(-\alpha_{kQ}(\omega) R_0 \widetilde{\theta})$ для шара. Способ оценки *коэффициента поглощения* α_{kQ} для поверхностных волн при известном законе поглощения объемных волн дан ниже (см. гл. 3).

3. Множитель $B_{kq}^{(3)}$ зависит от глубины погружения приемника и его направленности (т. е. того, на какую компоненту смещения он настроен). При наблюдениях с частотным (искажающим) прибором дополнительный множитель, описывающий частотную характеристику прибора, естественно включать в $B_{kq}^{(3)}$.

4. Множитель $B_{kq}^{(4)}$ зависит от механизма источника, а также от азимутального расположения станции по отношению к источнику (угла φ). Зависимость от φ исчезает для осесимметричных источников.

Глава 2

МЕТОДИКА РАСЧЕТА

Рассмотрение полученных в предыдущей главе формул (1.28), (1.29) и (1.70), (1.71) показывает, что расчет полей поверхностных волн можно осуществлять тремя последовательными этапами:

1) расчет собственных значений ω_{kQ}^2 и собственных функций $\tilde{V}_k^{(i)}$ операторов (1.14) — (1.17) и (1.49) — (1.54), а также связанных с ними величин и функций для заданной модели вертикально- или радиально-неоднородной среды;

2) расчет амплитудных и фазовых спектров поверхностных волн для заданной модели источника, направленности и положения регистрирующего прибора;

3) расчет нестационарных сейсмограмм.

Для решения многих задач сейсмологии нет необходимости проводить все три или даже два этапа расчетов. Так, уже на первом этапе решаются вопросы о дисперсии фазовых и групповых скоростей, поглощении и поляризации колебаний как функции частоты, о зависимости амплитуды смещений или плотности потока энергии фиксированной частоты от глубины приемника или элементарного источника для отдельных гармоник волн Рэлея и Лява.

На втором этапе решаются вопросы, связанные со спектральными характеристиками поверхностных волн; например, может быть исследовано влияние механизма источника на амплитудный и фазовый спектры отдельных гармоник и суммарный спектр нескольких гармоник. Необходимость проведения третьего этапа (перехода во временну́ю область) возникает главным образом тогда, когда нужно интерпретировать сложную волновую картину или на численных примерах оценивать эффективность и точность различных алгоритмов обработки наблюдений.

§ 1. Собственные значения и собственные функции

Нахождение собственных значений и собственных функций дифференциальных операторов такого типа, как рассмотренные в гл. 1, для произвольных моделей среды является сложной вычислительной задачей, решение которой стало возможным лишь с внедрением электронных вычислительных машин. В настоящее время сложилось два основных подхода к ее решению: метод слоистой аппроксимации и метод численного интегрирования. Ниже мы рассмотрим оба этих метода на примере волн Лява, а затем кратко остановимся на решении задачи для волн Рэлея.

Волны Лява в неоднородном полупространстве. Решение задачи о собственных функциях и собственных значениях дифферен циального оператора L_3, образованного левой частью уравнения (1.16) и граничным условием (1.17), заключается в отыскании таких чисел $\omega^2 = \omega^2_{kL}$ и таких функций $V^{(3)} = \tilde{V}^{(3)}_k\ (z)$, которые при заданном значении параметра ξ удовлетворяют уравнению

$$l_3(V^{(3)}) \equiv \frac{d}{dz}(\tau_{z\varphi}(z)) + (\omega^2\rho(z) - \xi^2\mu(z))\, V^{(3)} = 0 \tag{2.1}$$

и граничным условиям:

$$\tau_{z\varphi} = \mu\,\frac{dV^{(3)}}{dz} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \tag{2.2}$$

$$V^{(3)} \to 0 \qquad\qquad \text{при} \quad z \to \infty. \tag{2.3'}$$

Заменой переменной $\tilde{z} = z/Z$, коэффициентов $\tilde{\mu} = \mu\ (z)/\mu\ (Z + 0)$, $\tilde{\rho} = \rho\ (z)/\rho\ (Z + 0)$ и параметров $\tilde{\omega} = \omega Z/b\ (Z + 0)$, $\tilde{\xi} = \xi Z$ приводим нашу задачу к безразмерному виду. Черточку мы в дальнейшем для простоты записи опускаем. Учитывая, что $\mu\ (1 + 0) = \rho\ (1 + 0) = b\ (1 + 0) = 1$ при $z > 1$, условие (2.3′) можно представить иначе:

$$\tau_{z\varphi}(1) + V^{(3)}(1)\sqrt{\xi^2 - \omega^2} = 0. \tag{2.$\overline{3}$}$$

Рассмотрим теперь способы отыскания ω^2_{kL} и $V^{(3)}_k$ для заданных значений ξ и номера $k = 1,2\ldots$

Слоистая аппроксимация. Идея метода заключается в замене реальной модели, заданной кусочно-непрерывными, положительными, но в остальном произвольными функциями b, ρ некой близкой моделью, состоящей из слоев, в каждом из которых b и ρ изменяются по заданному закону. Главное требование к такому закону: решение уравнения (2.1) для каждого слоя должно выписываться в явном виде. В простейшем случае слоисто-однородной аппроксимации решение является либо тригонометрической, либо гиперболической функцией z. В случае более сложных законов оно может быть выражено специальными функциями разных видов.

Зная вид решения (а следовательно, и способ его расчета), можно связать матричным соотношением значения $V^{(3)}$ и $\tau_{z\varphi}$ на кровле и подошве любого слоя. В общем случае оно имеет вид

$$\left|\begin{matrix} V^{(3)} \\ \tau_{z\varphi} \end{matrix}\right|_{z = z_{l+1}} = \Phi^{(L)}_l(\omega, \xi)\left|\begin{matrix} V^{(3)} \\ \tau_{z\varphi} \end{matrix}\right|_{(z = z_l)}, \tag{2.4}$$

где $\Phi^{(L)}_l$ — действительная матрица, элементы которой есть известные функции ω, ξ и параметров l-го слоя.

Так, для случая кусочно-постоянных μ и ρ

$$\Phi^{(L)}_l = \left|\begin{matrix} \cos h_l s_l & \dfrac{\sin h_l s_l}{\mu_l s_l} \\ -\mu_l s_l \sin h_l s_l & \cos h_l s_l \end{matrix}\right| \tag{2.5}$$

где $s_l = \sqrt{\frac{\omega^2}{b_l^2} - \xi^2}$ при $\frac{\omega}{b_l^2} > \xi$ и $s_l = -i\sqrt{\left|\frac{\omega^2}{b_l^2} - \xi^2\right|}$ при $\frac{\omega}{b_l} < \xi$.

Пользуясь непрерывностью $V^{(3)}$ и $\tau_{z\varphi}$, можно рекуррентным путем получить формулу, связывающую $\left|\begin{matrix} V^{(3)} \\ \tau_{z\varphi} \end{matrix}\right|_{z=1}$ и $\left|\begin{matrix} V^{(3)} \\ \tau_{z\varphi} \end{matrix}\right|_{z=0}$

$$\left|\begin{matrix} V^{(3)} \\ \tau_{z\varphi} \end{matrix}\right|_{z=1} = \Phi^{(L)}(\omega, \xi) \left|\begin{matrix} V^{(3)} \\ \tau_{z\varphi} \end{matrix}\right|_{z=0} \tag{2.6}$$

где $\Phi^{(L)} = \prod_{l=1}^{N} \Phi_l^{(L)}(\omega, \xi)$; N — число слоев в модели.

Пользуясь граничными условиями (2.2) и (2.3), нетрудно найти отсюда уравнение, связывающее ω и ξ:

$$\psi(\omega, \xi) \equiv \varphi_{21}^{(L)}(\omega, \xi) + \sqrt{\xi^2 - \omega^2}\, \varphi_{11}^{(L)}(\omega, \xi) = 0. \tag{2.7}$$

Здесь $\varphi_{11}^{(L)}$, $\varphi_{21}^{(L)}$ — элементы матрицы $\Phi^{(L)}$.

Уравнение (2.7) при заданном ξ имеет один или несколько корней ω_{kL}^2, являющихся собственными значениями задачи (2.1). Собственные значения отыскиваются численным путем: подбираются такие ω, для которых ψ отличается от нуля не более чем на заданную малую величину (при каждой проверке $\psi(\omega, \xi)$ вычисляется заново). После того как собственное значение найдено, нетрудно вычислить $\left|\begin{matrix} V_k^{(3)} \\ \tau_{z\varphi} \end{matrix}\right|$ на границах слоев. Описанный алгоритм, получивший в сейсмологии название метода Томсона — Хаскелла [131], наряду с крупным достоинством — простотой и, следовательно, экономичностью вычислений — обладает и рядом существенных недостатков:

1. Возможность аппроксимации модели с произвольным законом изменения b, ρ с глубиной z слоистой моделью с заданными законами изменения скорости и плотности в каждом слое требует количественного обоснования. Из физических соображений очевидно, что, если мощности слоев много меньше $2\pi/\xi$, такая аппроксимация не может привести к существенным искажениям $\tilde{V}_k^{(3)}$ и ω_{kL}, однако для аккуратных оценок необходимо в каждом случае доказывать, что такая близость имеет место (например, способом удвоения: при двукратном увеличении числа слоев $\tilde{V}_k^{(3)}$ и ω_{kL} изменяются в пределах допустимой погрешности). В ряде случаев (особенно при слоисто-однородной аппроксимации, где b и ρ разрывны) сходимость решения для аппроксимирующей модели к точному решению может быть очень медленной. Об этом, в частности, свидетельствуют расчеты Э. Н. Бессоновой и Г. А. Ситниковой (ИФЗ АН СССР).

2. Поиск собственных значений ω_{kL}^2 в методе Томсона — Хаскелла осложняется в случаях, когда исследуются участки спектра, где ω_{kL} для разных номеров k близки. Возникает возможность спутать номер отыскиваемого значения, и приходится существенно мельчить шаг по ω при поиске нужного нуля $\psi(\omega, \xi)$. Этот недостаток (отсутствие надежного критерия для определения номера найденного собственного значения) не является свойством слоистой аппроксимации и может быть преодолен путем изменения метода поиска ω_{kL}^2.

Численные методы. Среди возможных численных методов решения нашей задачи наиболее эффективным является, по-видимому, метод прогонки. Мы рассмотрим ниже только этот метод, так как он был использован в программе, по которой проводились наши расчеты. Обычная прогонка, как она описана в [23], сводилась бы в нашем случае к введению функции $\alpha(z)$ с помощью соотношения $\frac{\tau_{z\varphi}}{V^{(3)}} = \alpha(z)$, а соответствующая задача для $\alpha(z)$ имела бы вид

$$\frac{d\alpha(z)}{dz} + \frac{\alpha^2(z)}{\mu(z)} + (\omega^2\rho - \xi^2\mu) = 0, \qquad \alpha(0) = 0, \qquad \alpha(1) = -\sqrt{\xi^2 - \omega^2}.$$

Решая получившееся уравнение Рикатти для α от $z = 1$ до $z = 0$, мы могли бы подбором найти ω_{kL}^2, удовлетворяющее условию $\alpha(0) = 0$ при $z = 0$. После этого, решая уравнение $\tau_{z\varphi} \equiv \mu \frac{dV^{(3)}}{dz} = \alpha(z)$ при известном граничном условии (2.2) или (2.3), можно определить $\tilde{V}_k^{(3)}$. Однако в нашем случае $\tilde{V}_k^{(3)}$ является колебательной функцией z, и в областях, где $\tilde{V}_k^{(3)}$ близко к нулю, $\alpha(z)$ неограниченно растет. Поэтому удобно воспользоваться предложенной А. А. Абрамовым модификацией [1], при которой вместо $\alpha(z)$ вводится функция $\Omega(z)$, такая, что

$$\frac{\tau_{z\varphi}}{V^{(3)}} = \operatorname{tg}\Omega(z). \tag{2.8}$$

Для $\Omega(z)$ имеем:

$$\frac{d\Omega}{dz} + \frac{\sin^2\Omega}{\mu(z)} + \cos^2\Omega\,(\omega^2\rho(z) - \xi^2\mu(z)) = 0, \tag{2.9}$$

$$\Omega(0) = 0, \tag{2.10}$$

$$\Omega(1) = -(k-1)\pi - \operatorname{arctg}\sqrt{\xi^2 - \omega^2}. \tag{2.11}$$

Эта замена весьма эффективна, так как:

1) Ω, в отличие от α, медленно изменяется с изменением z, что существенно облегчает интегрирование (2.9);

2) номер собственного значения ω_{kL}^2 нашей задачи определяется однозначно, поскольку он оказывается равным числу k в граничном условии для Ω при $\Omega = 1$.

В самом деле, пусть $\tilde{V}_k^{(2)}$ — собственная функция и, следовательно, обращается в нуль в $(k-1)$ точках на оси z [41]. В этих и только в этих точках Ω равно $-\pi/2\,(2n+1)$, где n — целое; в окрестности каждой такой точки $\frac{d\Omega}{dz} = -\frac{1}{\mu} < 0$ и, следовательно, $\Omega\,(z)$ монотонно убывает. Из этого следует, что на интервале [0,1] число нулей $\tilde{V}_k^{(3)}$ совпадает с числом точек $-\pi/2\,(2n+1)$ на отрезке $[-(k-1)\,\pi,\,0]$. Очевидно, что число таких точек равно k. Нетрудно показать и обратное, а именно, что если при каком-либо значении k функция Ω удовлетворяет уравнению (2.9) и граничным условиям (2.10) — (2.11) для некоторого ω_{kL}^2, это значение ω_{kL}^2 является собственным значением задачи (2.1) — (2.3). Собственные значения находим методом подбора; интегрируя уравнения (2.9) от $z = 1$ к $z = 0$ численным методом (например, методом Рунге — Кутта), вычисляем $\Omega\,(0)$. Подбираем такое значение ω^2, при котором $\Omega\,(0) = 0$. Это значение и есть ω_{kL}^2. Найдя ω_{kL}, определяем $\tau_{z\varphi}$ и $\tilde{V}_k^{(3)}$ не непосредственно из уравнения $\tau_{z\varphi} = \operatorname{tg}\Omega\cdot\tilde{V}_k^{(3)}$, поскольку коэффициент при $\tilde{V}_k^{(3)}$ — быстро меняющаяся функция z, а введением новой неизвестной функции $\eta_k\,(z)$ по формулам:

$$\begin{aligned} \tau_{z\varphi} &= \eta_k(z)\sin\Omega, \\ \tilde{V}_k^{(3)} &= \eta_k(z)\cos\Omega, \end{aligned} \tag{2.12}$$

для которой получаем линейное уравнение первого порядка с плавно меняющимся коэффициентом при η_k

$$\frac{d\eta_k}{dz} = -\frac{1}{2}\sin 2\Omega\left(\omega_{kL}^2\rho - \xi^2\mu - \frac{1}{\mu}\right)\eta_k. \tag{2.13}$$

Начальное значение $\eta_k\,(1)$ — произвольная константа. В процессе вычисления η_k в любой заданной точке z_s определяются $\tilde{V}_k^{(3)}$ и $\tau_{z\varphi}$.

На практике нет необходимости начинать интегрирование уравнений (2.9), (2.13) с точки $z = 1$, поскольку во многих случаях еще значительно выше этой точки решение монотонно убывает по экспоненциальному закону и становится очень малым (по сравнению со своим максимальным значением). В [4] описан способ выбора точки начала интегрирования при заданных k, ω и ξ, позволяющий существенно сократить время счета без внесения погрешностей в решение. Точка начала интегрирования $z_н$ лежит всегда между $z = 1$ и самой нижней точкой поворота (т. е. точкой, где $\omega^2/b^2\,(z) = \xi^2$); в нее переносится граничное условие, т. е. предполагается, что при $z > z_н$ $b\,(z) = b\,(z_н + 0)$, $\rho\,(z) = \rho\,(z_н + 0)$. Значение $z_н$ для заданного k убывает с ростом ξ.

Другая возможность существенно сократить время счета основана на поведении решения в зонах, где $\omega^2\rho\,(z) - \xi^2\,\mu\,(z) > 0$

и велико. Решение в этих зонах сильно осциллирует (особенно при больших k), что резко замедляет численное интегрирование прогоночного уравнения (2.9). В то же время, если только скорость $b(z)$ в этих зонах не слишком быстро изменяется с глубиной, решение может быть с хорошей точностью описано асимптотическими формулами метода ВКБ [7]. Для $z_{\text{в}} < z < z_{\text{н}}$, где $z_{\text{в}}$ и $z_{\text{н}}$ — верхняя и нижняя границы применимости асимптотики, решение будет иметь вид

$$V^{(3)}(z) = \frac{c}{\sqrt{\mu(z)}} \frac{1}{\sqrt[4]{\frac{1}{b^2(z)} - \frac{\xi^2}{\omega^2}}} \cos\left[\int\limits_{z_{\text{н}}}^{z} \sqrt{\frac{\omega^2}{b^2(z)} - \xi^2}\, dz + \alpha_{\text{н}}\right] + o\left(\frac{1}{\omega}\right), \quad (2.14)$$

где c и $\alpha_{\text{н}}$ — параметры, определяемые из свойства непрерывности $V^{(3)}$ и $\tau_{z\varphi}$ при $z = z_{\text{н}}$.

Отсюда можно получить прогоночную формулу для вычисления $\Omega(z)$ на верхней границе участка применимости асимптотики:

$$\Omega(z_{\text{в}}) = \operatorname{arctg}\left\{\mu(z_{\text{в}}) \sqrt{\frac{\omega^2}{b^2(z_{\text{в}})} - \xi^2}\, \operatorname{tg}\left[\int\limits_{z_{\text{н}}}^{z_{\text{в}}} \sqrt{\frac{\omega^2}{b^2(z)} - \xi^2}\, dz + \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\Omega_{\text{н}}}{\mu(z_{\text{н}}) \sqrt{\frac{\omega^2}{b^2(z_{\text{в}})} - \xi^2}}\right)\right]\right\} - [m_{\text{н}} + s(z_{\text{в}})]\,\pi, \quad (2.15)$$

где $m_{\text{н}}$ — ближайшее целое к $\Omega_{\text{н}}/\pi$, s — ближайшее целое к

$$\frac{1}{\pi}\left[\int\limits_{z_{\text{н}}}^{z_{\text{в}}} \sqrt{\frac{\omega^2}{b^2(z)} - \xi^2}\, dz + \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\Omega_{\text{н}}}{\mu(z_{\text{н}}) \sqrt{\frac{\omega^2}{b^2(z)} - \xi^2}}\right)\right]. \quad (2.16)$$

С помощью формулы (2.15) мы можем «проскакивать» участки применимости асимптотики при интегрировании уравнения (2.9) для Ω; необходимо только вычислять значения интегралов

$$\int\limits_{z_{\text{н}}}^{z_{\text{в}}} \sqrt{\frac{\omega^2}{b^2(z)} - \xi^2}\, dz.$$

Аналогичным путем можно получить формулу, связывающую $\eta_k(z_{\text{в}})$ и $\eta_k(z_{\text{н}})$, и «проскакивать» те же участки при интегрировании уравнения для η_k, когда ω_{kL}^2 найдено. Обоснование критериев, определяющих границы участков, где применима асимптотика при заданном k, ω и ξ, дано в работе [7].

Нетрудно показать, что применение аналогичных формул в случае слоистой аппроксимации позволяет зафиксировать номер отыскиваемого значения и тем самым устранить отмеченный выше недостаток способа Томсона — Хаскелла.

Волны Лява в неоднородном плоском слое. Если вместо однородного полупространства рассмотреть неоднородный слой мощностью Z, обе границы которого свободны от напряжений, второе граничное условие примет вид

$$\tau_{z\varphi}(Z) = 0. \qquad (2.17)$$

Это приводит к уравнению частот в слоистой аппроксимации вида

$$\psi(\omega, \xi) = \varphi_{21}(\omega, \xi) = 0 \qquad (2.18)$$

и граничному условию для метода прогонки

$$\Omega\ (1) = -(k-1)\pi. \qquad (2.19)$$

Если в слое существует участок монотонного возрастания $b(z)$, примыкающий к нижней границе слоя, и на этом участке оказывается точка поворота z' уравнения (2.1), здесь также допустим перенос начала интегрирования из $z = 1$ в некую точку $z_н$, лежащую в интервале между точкой поворота z' и 1. При этом, однако, целесообразно переносить граничное условие не в форме (2.19), а в той же форме, как и в случае полупространства (2.3), поскольку при этом вносится меньшее искажение в решение.

Волны Лява в шаровом слое. Оператор для волн Лява в случае сферической симметрии, как показано в § 2 гл. 1, имеет вид

$$l_3(V^{(3)}) \equiv \frac{d}{dR}\left(\mu \frac{dV^{(3)}}{dR} - \frac{V^{(3)}}{R}\right) + \frac{3\mu}{R}\frac{dV^{(3)}}{dR} + \omega^2\rho V^{(3)} - \\ - \frac{\mu}{R^2}(N^2+1)V^{(3)} = 0. \qquad (2.20)$$

В Земле из-за наличия жидкого ядра распространение волн Лява ограничено шаровым слоем $R_0 \geqslant R \geqslant R_я > 0$; граничные условия при $R = R_0$, $R = R_я$ однотипны: $\tau_{R\varphi} = 0$, т. е. обе границы слоя свободны от касательных напряжений. Можно показать [24], что заменой переменных $y = \ln(R_0/R)$, $V^{(3)} = W(R/R_0)$ и параметров

$$\hat{\mu}(y) = \frac{\mu(R)}{\mu(R_0)}\left(\frac{R}{R_0}\right)^3, \qquad \hat{\rho}(y) = \frac{\rho(R)}{\rho(R_0)}\left(\frac{R}{R_0}\right)^5,$$

$$\hat{\omega} = \frac{\omega R_0}{b(R_0)}, \qquad \hat{\xi}^2 = N^2 - 2 \qquad (2.21)$$

задача для шарового слоя сводится к рассмотренной выше задаче для неоднородного плоского слоя, заключенного в интервале $0 \leqslant y \leqslant \ln R_0/R_я$ между двумя свободными границами. Для нее точно так же применим метод прогонки. Можно решать эту задачу и в физических координатах; соответствующий прогоночный алгоритм описан в работе [21]; уравнение прогонки незначительно отличается от плоского случая.

Программы расчета волн Лява. Описанные выше алгоритмы численного интегрирования были реализованы в две программы на языке М-20 — БЭСМ-4, широко используемые в настоящей работе. Одна из этих программ [4] рассчитывает волны Лява в полупространстве, другая [21] — в шаровом слое (в физических координатах). Скоростной и плотностной разрезы задаются в виде таблиц; интерполяция между точками таблиц — линейная. Программы обеспечивают для заданного набора номеров k, периодов T, глубин источника h_s или H_s расчет фазовых и групповых скоростей, производных фазовой скорости по параметрам разреза (см. ниже § 2), спектральных амплитуд $U_{k\varphi}(\omega)$ для сосредоточенной на глубине h_s (H_s) горизонтальной силы (без учета геометрического расхождения) и их производных по глубине.

Помимо этих программ для некоторых расчетов применялись их модификации, составленные в ЛГУ им. А. А. Жданова [7]. Эти модификации используют на участках быстрой осцилляции решений описанный выше асимптотический метод и существенно сокращают время счета.

Волны Рэлея в неоднородном полупространстве. Решение задачи о собственных функциях и собственных значениях дифференциального оператора $\mathbf{L}$, образованного левой частью уравнений (1.14) и граничными условиями (1.15), заключается в отыскании таких чисел $\omega^2 = \omega^2{}_{kR}$ и таких вектор-функций $\begin{vmatrix} V^{(1)} \\ V^{(2)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tilde{V}_k^{(1)} \\ \tilde{V}_k^{(2)} \end{vmatrix}$, которые при заданном значении параметра ξ удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned} l_1(V^{(1)}; V^{(2)}) &\equiv \frac{d}{dz}\left[(\lambda + 2\mu)\frac{dV^{(1)}}{dz} - \xi\lambda V^{(2)}\right] - \\ &\qquad - \xi\mu\frac{dV^{(2)}}{dz} + V^{(1)}(\omega^2\rho - \xi^2\mu) = 0, \\ l_2(V^{(1)}; V^{(2)}) &\equiv \frac{d}{dz}\left[\mu\frac{dV^{(2)}}{dz} + \xi\mu V^{(1)}\right] + \\ &\qquad + \xi\lambda\frac{dV^{(1)}}{dz} + V^{(2)}(\omega^2\rho - \xi^2\lambda - 2\xi^2\mu) = 0, \end{aligned} \tag{2.22}$$

и граничным условиям

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{zz} &\equiv (\lambda + 2\mu)\frac{dV^{(1)}}{dz} - \xi\lambda V^{(2)} = 0 \\ \tau_{zr} &\equiv \mu\frac{dV^{(2)}}{dz} + \xi\mu V^{(1)} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad z = 0, \tag{2.23}$$

$$\begin{vmatrix} V^{(1)} \\ V^{(2)} \end{vmatrix} \to 0 \quad \text{при} \quad z \to \infty. \tag{2.24}$$

Проведем в (2.21) — (2.23) такую же замену переменных и коэффициентов, что и для волн Лява (с дополнительной подстановкой $\hat{\lambda}(z) = \lambda(z)/\mu(Z+0)$) и перейдем к векторной форме

$$l(\mathbf{w}) \equiv \frac{d}{dz}\left(A\frac{d\mathbf{w}}{dz} + \xi B\mathbf{w}\right) - \xi B^*\frac{d\mathbf{w}}{dz} + (\omega^2\rho E - \xi^2 C)\mathbf{w} = 0, \quad (2.25)$$

где A, B, C — матрицы:

$$A = \begin{vmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda+2\mu \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 0 & \mu \\ -\lambda & 0 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} \lambda+2\mu & 0 \\ 0 & \mu \end{vmatrix}$$

B^* — сопряженная с B, E — единичная матрица, $\mathbf{w}$ — вектор-функция

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} V^{(2)} \\ V^{(1)} \end{pmatrix}$$

Граничные условия для $\mathbf{w}$ имеют вид:

$$\begin{pmatrix} \tau_{zr} \\ \sigma_{zz} \end{pmatrix} \equiv A\frac{d\mathbf{w}}{dz} + \xi B\mathbf{w} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \quad (2.26)$$

$$\mathbf{w} \to 0 \quad \text{при} \quad z \to \infty. \quad (2.27)$$

Обозначим

$$\left(A\frac{dW}{dz} + \xi BW\right)V^{-1} = T(\omega, \xi, z). \quad (2.28')$$

Здесь W — матрица второго порядка, столбцы которой—два линейно независимых решения $\mathbf{w}_1$ и $\mathbf{w}_2$ нашего уравнения; T — матрица второго порядка.

Из условия убывания $\mathbf{w}$ на бесконечности и постоянства λ, μ, ρ при $z > 1$ получаем второе граничное условие для $\mathbf{w}$ в виде

$$T(\omega, \xi, 1) = \frac{1}{\gamma^2\beta - \xi^2}\begin{pmatrix} \omega^2\gamma & 2\xi^2 - \omega^2 - 2\gamma\beta \\ 2\xi^2 - \omega^2 - 2\gamma\beta & \omega^2\beta \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

где

$$\gamma = \sqrt{\xi^2 - \frac{\omega^2}{a^2(1)}}, \qquad \beta = \sqrt{\xi^2 - \omega^2}.$$

Мы не будем рас атривать здесь решение задачи (2.25) — (2.27) методом слоистой аппроксимации [28, 156], поскольку оно мало чем отличается от решения для случая волн Лява и имеет те же недостатки. Специфические трудности возникают из-за наличия в решении быстро растущей компоненты; способы их частичного преодоления указаны в [121, 139]. В описании решения этой задачи методом прогонки мы следуем [56, 63, 134].

В отличие от задачи для волн Лява, где прогоночная функция вводилась как $\Omega(z) = -\operatorname{arctg} T(z)$, где $T(z) = \tau_{\varphi z}(z)/V^{(3)}(z)$ (отношение напряжения к смещению), в случае волн Рэлея прогоночная матрица Ф (z) вводится как

$$\Phi(z) = -\exp(2i\Omega(z)), \tag{2.29}$$

где Ω (z) играет ту же роль, что и в волнах Лява:

$$\Omega(z) = -\operatorname{arctg} T(z) = \frac{1}{2i}\ln[(T - iE)(T + iE)^{-1}]. \tag{2.30}$$

Здесь T (z) определено (2.28′). Окончательно имеем

$$\Phi(z) = -(T(z) - iE)(T(z) + iE)^{-1}. \tag{2.31}$$

Можно показать, что T (z) — самосопряженная, а Ф (z) — унитарная матрицы. Подставляя (2.28), (2.31) в (2.25), получаем уравнение для Ф (z):

$$\frac{d\Phi(z)}{dz} = iP(\Phi)\Phi(z), \tag{2.32}$$

где P (Ф) — эрмитова матрица известного вида. Граничные условия для Ф (z) принимают вид:

$$\det(\Phi - E) = 0 \text{ при } z = 0, \tag{2.33}$$

$$\Phi = -(T(1) - iE)(T(1) + iE)^{-1} \text{ при } z = 1. \tag{2.34}$$

В работе [63] доказывается, что значения ω_{kR}^2, при которых матрица Ф удовлетворяет уравнению (2.32) и граничным условиям (2.33), (2.34), являются собственными значениями задачи (2.26) — (2.28) и обратно. При решении прогоночного уравнения (2.32) используется унитарность матрицы Ф: ее собственные числа имеют вид $\exp(i\varphi_1(\omega_{kR}^2, z))$, $\exp(i\varphi_2(\omega_{kR}^2, z))$. Функция φ_1 выбирается так, что $\varphi_1 \geqslant \varphi_2$. В точке $z = 1$ $-\pi < \varphi_i(\omega_{kR}^2, 1) < \pi$. Граничное условие для точки $z = 0$ будет выполнено, если функция

$$\Psi_k(\omega^2) = \begin{cases} \varphi_1(\omega^2, 0) - 2m\pi & \text{для } k = 2m, \quad m = 1, 2, 3, \\ \varphi_2(\omega^2, 0) - 2m\pi & \text{для } k = 2m - 1, \quad m = 0, 1, 2 \end{cases} \tag{2.35}$$

равна нулю. Таким образом задача отыскания ω_{kR}^2 для заданных ξ и k сводится к отысканию нуля функции $\Psi_k(\omega^2)$. Это делается по следующей схеме:

а) задается начальное приближение для ω^2;

б) вычисляются $\Phi(\omega^2, 1)$ и $\varphi_1(\omega^2, 1)$, $\varphi_2(\omega^2, 1)$;

в) уравнение (2.32) численно интегрируется разностным методом; в каждом узле вычисляются аргументы собственных чисел φ_1, φ_2 (при этом учитывается их непрерывность по z);

г) по $\varphi_1(\omega^2, 0)$ или $\varphi_2(\omega^2, 0)$ определяется $\Psi_k(\omega^2)$;

д) эта процедура повторяется с другими ω^2 (определяемыми алгоритмом поиска корня) до тех пор, пока корень ω_{kR}^2, при котором $\Psi_k(\omega^2) = 0$, не будет найден.

Интегрирование уравнения (2.32) можно начинать не с точки $z = 1$, а с более высокой точки (выбирая ее по тому же алгоритму, что и для волн Лява). Эта точка $z_н$ будет лежать в интервале $z_п < z_н \leqslant 1$, где $z_п = \max(z_п^i)$, а $z_п^i$ удовлетворяют условиям:

$$b(z_п^{(i)} - 0) < \frac{\omega}{\xi}; \qquad b(z_п^{(i)} + 0) \geqslant \frac{\omega}{\xi}.$$

Далее предполагается, что при $z > z_н$ $\lambda(z) = \lambda(z_н + 0)$, $\mu(z) = \mu(z_н + 0)$, $\rho(z) = \rho(z_н + 0)$. Когда собственное значение $\omega_{kR}^2(\xi)$ найдено, с помощью вспомогательной функции $\eta_k(z)$, вводимой формулами:

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2}(E + \Phi)\,\eta_k, \tag{2.36}$$

$$\frac{d\mathbf{w}}{dz} = -A^{-1}\left[\xi B\mathbf{w} + \frac{i}{2}(E - \Phi^*)\,\eta_k\right],$$

отыскивается собственная вектор-функция $\mathbf{w}$. За описанием алгоритма вычисления собственной функции мы отсылаем к [63]. Отметим только, что в силу присутствия в решении двух линейно независимых компонент, одна из которых может расти существенно быстрее другой, этот алгоритм оказывается значительно более сложным, чем для волн Лява.

Волны Рэлея в неоднородном шаре. Методика расчета волн Рэлея в неоднородном шаре, близкая к описанной в предыдущем разделе, дана в [94]. Наиболее важные новые элементы: снятие ограничения $\mu(R) > 0$, что позволяет учесть эффект жидкого ядра Земли (в разрез включается зона $\mu(R) = 0$, $R_1 < R < R_2$) и изменение граничного условия: теперь вместо условия на бесконечности имеем условие в точке $R = 0$: $V_{\nu k}^{(1)}(0) = V_{\nu k}^{(2)}(0) = 0$. Оба этих элемента для рассматриваемых нами периодов не столь существенны, и мы не будем поэтому останавливаться на технике решения.

Программы для расчета Рэлея. Описанные алгоритмы были реализованы в две программы, широко используемые в работе. Программа [63] на языке М-20 — БЭСМ-4, рассчитывает волны Рэлея в полупространстве, программа [94] на языке АЛГОЛ-60 — волны Рэлея в твердо-жидком шаре. Как и для волн Лява, интерполяция скоростей и плотностей в разрезе принята линейной. Для заданного набора номеров k, чисел ξ или значков n, глубин источника h_s и H_s рассчитываются фазовые и групповые скорости, производные фазовой скорости по параметрам разреза (см. следующие параграфы), спектральные амплитуды U_{kz} (U_{kR}) для сосредоточенной на глубине h_s (H_s) вертикальной и горизонтальной сил и их производные по глубине в этих точках, а также отношение компонент смещений свободной поверхности.

§ 2. Интегральные формулы

Если собственные функции $\tilde{V}_k^{(i)}$ известны они могут быть использованы для повторного вычисления собственных значений ω_{kQ}^2 (хороший способ контроля точности решения), а также для нахождения некоторых связанных с ними величин, необходимых при анализе полей поверхностных волн: фазовых и групповых скоростей, а также частных производных фазовой скорости по параметрам разреза. Для вычисления всех перечисленных величин по $\tilde{V}_k^{(i)}$ ниже будут получены интегральные формулы; их вывод базируется на свойствах операторов (1.14) — (1.17), (1.49)—(1.54) и методах теории возмущений [102, 104, 164].

Интегральные формулы для ω_{kQ}^2. Пользуясь самосопряженностью операторов (1.14) — (1.17), можно получить формулы, выражающие ω_{kQ} через интегралы от собственных функций $\tilde{V}_k^{(i)}$. Действительно, умножив обе части уравнения $l_1(\tilde{V}_k^{(1)};\ \tilde{V}_k^{(2)}) = 0$ на $\tilde{V}_k^{(1)}$, уравнения $l_2(\tilde{V}_k^{(1)};\ \tilde{V}_k^{(2)}) = 0$ на $\tilde{V}_k^{(2)}$, проинтегрировав их по z от 0 до ∞ с учетом граничных условий и сложив, получим:

$$\omega_{kR}^2 G_{kR}^{(0)} = \xi^2 (G_{kR}^{(1)} + G_{kR}^{(2)}) + 2\xi (G_{kR}^{(3)} + G_{kR}^{(4)}) + G_{kR}^{(5)} + G_{kR}^{(6)}. \quad (2.37)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
G_{kR}^{(0)} &= I_{kR} = \int_0^\infty \rho\,[(\tilde{V}_k^{(1)})^2 + (\tilde{V}_k^{(2)})^2]\,dz,\\
G_{kR}^{(1)} &= \int_0^\infty b^2\rho\,[\tilde{V}_k^{(1)}]^2\,dz, \quad G_{kR}^{(2)} = \int_0^\infty a^2\rho\,[\tilde{V}_k^{(2)}]^2\,dz,\\
G_{kR}^{(3)} &= \int_0^\infty b^2\rho \left[\frac{d\tilde{V}_k^{(2)}}{dz}\,\tilde{V}_k^{(1)} + 2\,\frac{d\tilde{V}_k^{(1)}}{dz}\,\tilde{V}_k^{(2)}\right] dz,\\
G_{kR}^{(4)} &= -\int_0^\infty a^2\rho\,\frac{d\tilde{V}^{(1)}}{dz}\,\tilde{V}_k^{(2)}\,dz,\\
G_{kR}^{(5)} &= \int_0^\infty b^2\rho \left[\frac{d\tilde{V}_k^{(2)}}{dz}\right]^2 dz,\\
G_{kR}^{(6)} &= \int_0^\infty a^2\rho \left[\frac{d\tilde{V}_k^{(1)}}{dz}\right]^2 dz.
\end{aligned} \quad (2.38)$$

Аналогично, умножив обе части уравнения $l_3(\tilde{V}_k^{(3)}) = 0$ на $V_k^{(3)}$ и проинтегрировав по z от 0 до ∞ с учетом граничных условий, будем иметь

$$\omega_{kL}^2 G_{kL}^{(0)} = \xi^2 G_{kL}^{(1)} + G_{kL}^{(2)}. \quad (2.39)$$

Здесь

$$G_{kL}^{(0)} = I_{kL} = \int_0^\infty \rho\,[\tilde{V}_k^{(3)}]^2\,dz,$$

$$G_{kL}^{(1)} = \int_0^\infty b^2\rho\,[\tilde{V}_k^{(3)}]^2\,dz, \qquad (2.40)$$

$$G_{kL}^{(2)} = \int_0^\infty b^2\rho\left[\frac{d\tilde{V}_k^{(3)}}{dz}\right]^2 dz.$$

Аналогичными методами можно получить формулы, выражающие ω_{kQ}^2 через интегралы от собственных функций в сферическом случае:

$$\omega_{k\nu S}^2 G_{kS}^{(0)} = N^2\left(G_{kS}^{(1)} + G_{kS}^{(2)}\right) + 2N\left(G_{kS}^{(3)} + G_{kS}^{(4)}\right) + G_{kS}^{(5)} + G_{kS}^{(6)}, \quad (2.41)$$

$$\omega_{k\nu T}^2 G_{kT}^{(0)} = N^2 G_{kT}^{(1)} + G_{kT}^{(2)}. \qquad (2.42)$$

Здесь $N = \sqrt{\nu(\nu+1)}$, а $G_{kQ}^{(i)}$ — следующие интегралы:

$$G_{kS}^{(0)} = R_0^2 I_{k\nu S} = \int_0^{R_0} \rho R^2\left[(\tilde{V}_{k\nu}^{(1)})^2 + (\tilde{V}_{k\nu}^{(2)})^2\right] dR,$$

$$G_{kS}^{(1)} = \int_0^{R_0} b^2\rho\,[\tilde{V}_{k\nu}^{(1)}]^2\,dR,$$

$$G_{kS}^{(2)} = \int_0^{R_0} a^2\rho\,[\tilde{V}_{k\nu}^{(2)}]^2\,dR,$$

$$G_{kS}^{(3)} = \int_0^{R_0} b^2\rho\left[\tilde{V}_{k\nu}^{(1)}\tilde{V}_{k\nu}^{(2)} + R\left(\tilde{V}_{k\nu}^{(1)}\frac{d\tilde{V}_{k\nu}^{(2)}}{dR} + 2\frac{d\tilde{V}_{k\nu}^{(1)}}{dR}\tilde{V}_{k\nu}^{(2)}\right)\right] dR, \quad (2.43)$$

$$G_{kS}^{(4)} = -\int_0^{R_0} a^2\rho\left[2\tilde{V}_{k\nu}^{(1)}\tilde{V}_{k\nu}^{(2)} + R\frac{d\tilde{V}_{k\nu}^{(1)}}{dR}\tilde{V}_{k\nu}^{(2)}\right] dR,$$

$$G_{kS}^{(5)} = \int_0^{R_0} b^2\rho\left[\left(R\frac{d\tilde{V}_{k\nu}^{(2)}}{dR}\right)^2 - 2R\left(4\tilde{V}_{k\nu}^{(1)}\frac{d\tilde{V}_{k\nu}^{(2)}}{dR} + \frac{d\tilde{V}_{k\nu}^{(1)}}{dR}\tilde{V}_{k\nu}^{(2)}\right) - 4(\tilde{V}_{k\nu}^{(1)})^2 - (\tilde{V}_{k\nu}^{(2)})^2\right] dR;$$

$$G_{kS}^{(6)} = \int_0^{R_0} a^2\rho\left[\left(R\frac{d\tilde{V}_{k\nu}^{(1)}}{dR}\right)^2 + 4R\tilde{V}_{k\nu}^{(1)}\frac{d\tilde{V}_{k\nu}^{(2)}}{dR} + 4\left(\tilde{V}_{k\nu}^{(1)}\right)^2\right] dR,$$

$$G_{kT}^{(0)} = R_0^2 I_{k\nu T} = \int_0^{R_0} \rho R^2\,[\tilde{V}_{k\nu}^{(3)}]^2\,dR,$$

$$G_{kT}^{(1)} = \int\limits_0^{R_0} b^2\rho\, [\tilde{V}_{k\nu}^{(3)}]^2\, dR, \tag{2.44}$$

$$G_{kT}^{(2)} = \int\limits_0^{R_0} b^2\rho \left[\left(R\,\frac{d\tilde{V}_{k\nu}^{(3)}}{dR}\right)^2 - 2\tilde{V}_{k\nu}^{(3)}\,\frac{d\tilde{V}_{k\nu}^{(3)}}{dR}\,R - (\tilde{V}_{k\nu}^{(3)})^2\right] dR.$$

Формулы (2.37), (2.39), (2.41), (2.42) связывают средние кинетическую и потенциальные энергии данного колебания за временной цикл и являются выражением закона сохранения энергии.

Интегральные выражения для фазовой и групповой скорости. Формулы (2.37), (2.39), (2.41), (2.42) можно использовать для вычисления фазовой скорости. Поскольку в плоском случае $v_{kQ} = \omega_{kQ}/\xi$, а в сферическом случае $v_{kQ} = \omega_{kQ}R_0/(\nu + {}^1/_2)$, получаем:

$$v_{kR} = \left[\frac{G_{kR}^{(1)} + G_{kR}^{(2)} + \frac{2}{\xi}(G_{kR}^{(3)} + G_{kR}^{(4)}) + \frac{1}{\xi^2}(G_{kR}^{(5)} + G_{kR}^{(6)})}{G_{kR}^{(0)}}\right]^{1/2}, \tag{2.45}$$

$$v_{kL} = \left[\frac{G_{kL}^{(1)} + \frac{1}{\xi^2}\,G_{kL}^{(2)}}{G_{kL}^{(0)}}\right]^{1/2}, \tag{2.46}$$

$$v_{kS} = R_0\left[\frac{G_{kS}^{(1)} + G_{kS}^{(2)} + \frac{2}{N}(G_{kS}^{(3)} + G_{kS}^{(4)}) + \frac{1}{N^2}(G_{kS}^{(5)} + G_{kS}^{(6)})}{G_{kS}^{(0)}}\right]^{1/2}, \tag{2.47}$$

$$v_{kT} = R_0\left[\frac{G_{kT}^{(1)} + \frac{1}{N^2}\,G_{kT}^{(2)}}{G_{kT}^{(0)}}\right]^{1/2}. \tag{2.48}$$

Для получения интегральных выражений групповой скорости продифференцируем уравнения $l_1(\tilde{V}_k^{(i)}) = 0$ и $l_2(\tilde{V}_k^{(i)}) = 0$ по ξ, умножим первое из них на $\tilde{V}_k^{(1)}$, а второе — на $\tilde{V}_k^{(2)}$, проинтегрируем по z в пределах $(0, \infty)$ и сложим. Используя свойства $\partial\tilde{V}_k^{(i)}(\xi, z)/\partial\xi$ и самосопряженность оператора $\mathbf{L}$, находим

$$C_{kR} = \frac{G_{kR}^{(1)} + G_{kR}^{(2)} + \frac{1}{\xi}(G_{kR}^{(3)} + G_{kR}^{(4)})}{v_{kR}G_{kR}^{(0)}}. \tag{2.49}$$

Поступая аналогичным образом с уравнением $l_3(\tilde{V}_k^{(3)}) = 0$, получаем интегральное выражение для групповой скорости волн Лява:

$$C_{kL} = \frac{G_{kL}^{(1)}}{v_{kL}G_{kL}^{(0)}}. \tag{2.50}$$

Аналогичные формулы нетрудно найти и для сферического случая:

$$C_{kS} = \frac{R_0^2}{v_{kS} G_{kS}^{(0)}} \left[G_{kS}^{(1)} + G_{kS}^{(2)} + \frac{1}{N} (G_{kS}^{(3)} + G_{kS}^{(4)}) \right], \tag{2.51}$$

$$C_{kT} = \frac{R_0^2 G_{kT}^{(1)}}{v_{kT} G_{kT}^{(0)}}. \tag{2.52}$$

Формулы (2.45) — (2.52) определяют v_{kQ} и C_{kQ} как функции волнового числа ξ или сферического значка ν. Для определения v_{kQ}, C_{kQ} как функций частоты ω мы должны подставлять в (2.45) — (2.52) вместо ξ и ν величины $\xi_{kQ}(\omega)$, $\nu_{kQ}(\omega)$, являющиеся, как уже отмечалось, корнями уравнений $\omega^2 = \omega_{kQ}^2(\xi)$, $\omega^2 = \omega_{kQ}^2(\nu)$.

Возмущения ω_{kQ}, вызванные возмущениями разреза. Рассмотрим, как влияют на ω_{kQ} малые возмущения скоростей упругих волн и плотности. Обозначим возмущение какого-либо из этих параметров $\delta\chi(z)$ (где $\chi = a$, b или ρ), а вызванное им возмущение собственной частоты при данном ξ соответственно $\delta_\chi \omega_{kQ}(\xi)$. Из формул (2.37), (2.39) следует, что с точностью до малых второго порядка:

$$\delta_\chi \omega_{kR} = \frac{1}{2\omega_{kR} G_{kR}^{(0)}} [\xi^2 \delta_\chi (G_{kR}^{(1)} + G_{kR}^{(1)}) + 2\xi \delta_\chi (G_{kR}^{(3)} + G_{kR}^{(4)}) +$$

$$+ (G_{kR}^{(5)} + G_{kR}^{(6)}) - \omega_{kR}^2 \delta_\chi G_{kR}^{(0)}], \tag{2.53}$$

$$\delta_\chi \omega_{kL} = \frac{1}{2\omega_{kL} G_{kL}^{(0)}} [\xi^2 \delta_\chi G_{kL}^{(1)} + \delta_\chi G_{kL}^{(2)} - \omega_{kL}^2 \delta_\chi G_{kL}^{(0)}]. \tag{2.54}$$

Интегралы $G_{kQ}^{(i)}$ в плоском случае имеют вид $\int\limits_0^\infty f_Q^{(i)}(z)\, \psi_{kQ}^{(i)}(z)\, dz$, где $f_Q^{(i)}(z)$ равно $\rho(z)$, $a^2(z)\rho(z)$, $b^2(z)\rho(z)$, а $\psi_{kQ}^{(i)}$ — различные элементы квадратичной формы от собственных функций $V_k^{(i)}$ и их производных по z. Поэтому их вариации $\delta_\chi G_{kQ}^{(i)}$ можно представить в виде сумм:

$$\delta_\chi G_{kQ}^{(i)} = \delta_\chi^{(1)} G_{kQ}^{(i)} + \delta_\chi^{(2)} G_{kQ}^{(i)},$$

$$\delta_\chi^{(1)} G_{kQ}^{(i)} = \int\limits_0^\infty (\delta_\chi f_{kQ}^{(i)})\, \psi_{kQ}^{(i)}\, dz = \int\limits_0^\infty (\gamma_{\chi Q}^{(i)} \psi_{kQ}^{(i)})\, \delta\chi\, dz, \tag{2.55}$$

$$\delta_\chi^{(2)} G_{kQ}^{(i)} = \int\limits_0^\infty f_{kQ}^{(i)} \delta_\chi \psi_{kQ}^{(i)}\, dz,$$

где функции $\gamma_{\chi Q}^{(i)}$, зависящие только от параметров разреза, определены табл. 4.

Таблица 4

χ	Q	i						
		0	1	2	3	4	5	6
a	R	0	0	$2a\rho$	0	$2a\rho$	0	$2a\rho$
	L	0	0	0	—	—	—	—
b	R	0	$2b\rho$	0	$2b\rho$	0	$2b\rho$	0
	L	0	$2b\rho$	$2b\rho$	—	—	—	—
ρ	R	1	b^2	a^2	b^2	a^2	b^2	a^2
	L	1	b^2	b^2	—	—	—	—

Можно показать, что

$$\xi^2\delta_\chi^{(2)}(G_{kR}^{(1)} + G_{kR}^{(2)}) + 2\xi\delta_\chi^{(2)}(G_{kR}^{(3)} + G_{kR}^{(4)}) + \delta_\chi^{(2)}(G_{kR}^{(5)} + G_{kR}^{(6)}) - \\ - \omega_{kR}^2\delta_\chi^{(2)}G_{kR}^{(0)} = 0. \qquad (2.56)$$

Для этого нужно умножить уравнение $l_1(V_k^{(i)}) = 0$ на $\delta_\chi V_k^{(1)}$, уравнение $l_2(V_k^{(i)}) = 0$ на $\delta_\chi V_k^{(2)}$, проинтегрировать по z в интервале $(0, \infty)$ и сложить друг с другом. При этом следует учесть, что вариации $\delta_\chi V_k^{(i)}$ подчиняются тем же граничным условиям, что и $V_k^{(i)}$.

Аналогично, умножением $l_3(V_k^{(3)}) = 0$ на $\delta_\chi V_k^{(3)}$ и интегрированием по z в тех же пределах можно получить

$$\xi^2\delta_\chi^{(2)}G_{kL}^{(1)} + \delta_\chi^{(2)}G_{kL}^{(2)} - \omega_{kL}^2\delta_\chi^{(2)}G_{kL}^{(0)} = 0. \qquad (2.57)$$

Из этого следует, что в формулах (2.53), (2.54) можно заменить вариации $\delta_\chi G_{kQ}^{(i)}$ на $\delta_\chi^{(1)} G_{kQ}^{(2)}$, т. е. вместо $\delta_\chi G_{kQ}^{(i)}$ в них будут входить интегралы типа $\int\limits_0^\infty (\gamma_{\chi Q}^{(i)}\psi_{kQ}^{(i)})\,\delta\chi\,dz$. Для непосредственной оценки возмущений собственной частоты колебания с заданным волновым числом ξ удобнее пользоваться частными производными $\partial\omega_{kQ}/\partial\chi\ (z', \xi)$; мы определим их как значения $\delta_\chi\,\omega_{kQ}$, соответствующие возмущению параметра χ вида дельта-функции $\varepsilon\delta(z - z')$ (здесь ε — единичный множитель размерности χ/z). Формулы для $\partial\omega_{kQ}/\partial\chi\ (z', \xi)$ получим, заменив в (2.53), (2.54) вариации $\delta_\chi^{(1)} G_{kQ}^{(i)}$ значениями множителей $(\gamma_{\chi Q}^{(i)}\ \psi_{kQ}^{(i)})$ в подынтегральных выражениях для $\delta_\chi^{(1)}G_{kQ}^{(i)}$, которые могут быть вычислены одновременно с расчетом $V_k^{(i)}$. Зная $\partial\omega_{kQ}/\partial\chi\ (z)$ для данного ξ, нетрудно найти возмущение $\delta_\chi \omega_{kQ}$ для произвольного, но малого $\delta\chi(z)$:

$$\delta_\chi \omega_{kQ} = \int_0^\infty \frac{\partial \omega_{kQ}}{\partial \chi}(z)\,\delta\chi(z)\,dz. \qquad (2.58')$$

Разбивая отрезок $(0, Z)$ на ряд интервалов (z_i, z_{i+1}), определяемых характером разреза, и считая возмущения $\delta\chi_j$ в пределах j-го интервала постоянными (или подчиняющимися заданным законам), можно заменить функции $\partial\omega_{kQ}(z)/\partial\chi$ дискретными наборами чисел $\partial\omega_{kQ}/\partial\overline{\chi}_j$, характеризующих возмущение собственной частоты при заданном виде возмущения $\delta\chi_j$ в каждом интервале (слое). Эти числа называют обычно частными производными собственной частоты по параметрам слоев $\overline{\chi}_j$. Очевидно, что

$$\frac{\partial \omega_{kQ}}{\partial \overline{\chi}_j} = \int_{z_j}^{z_{j+1}} \frac{\partial \omega_{kQ}}{\partial \chi}\,\delta\chi_j(z)\,dz. \qquad (2.58)$$

Аналогичные формулы для сферического случая, описывающие эффект возмущения собственной частоты сфероидальных и крутильных колебаний негравитирующего шара при возмущениях скорости и плотности, получим, заменив в (2.53), (2.54) индексы R и L на S и T, ξ на N, интегралы $G^{(i)}_{kQ}$ из (2.38), (2.40) на соответствующие интегралы из (2.43), (2.44). Вывод формул проводится тем же способом, что и для плоского случая.

Частные производные фазовой скорости. Пользуясь формулами (2.53), (2.54), можно получить выражения для возмущения фазовой скорости на заданной *частоте* ω при возмущении параметров среды χ (a, b или ρ). В самом деле,

$$v_{kQ}(\omega) = \frac{\omega}{\xi_{kQ}(\omega)}, \qquad (2.59)$$

$$\delta_\chi v_{kQ}(\omega) = -\frac{\omega\delta_\chi \xi_{kQ}(\omega)}{\xi^2_{kQ}(\omega)} = \frac{\omega\delta_\chi \omega_{kQ}(\xi = \xi_{kQ})}{\xi^2_{kQ}(\omega)\,C_{kQ}(\omega)}.$$

Отсюда, пользуясь (2.53), (2.54), находим следующие формулы для $\dfrac{\partial v_{kQ}}{\partial \chi}(\omega, z)$:

$$\frac{\partial v_{kR}}{\partial b} = \frac{b\rho}{C_{kR}I_{kR}}\left[\left(\widetilde{V}^{(1)}_k + \frac{1}{\xi_{kR}}\frac{d\widetilde{V}^{(2)}_k}{dz}\right)^2 + \frac{4}{\xi_{kR}}\frac{d\widetilde{V}^{(1)}_k}{dz}\widetilde{V}^{(2)}_k\right],$$

$$\frac{\partial v_{kR}}{\partial a} = \frac{a\rho}{C_{kR}I_{kR}}\left[\widetilde{V}^{(2)}_k - \frac{1}{\xi_{kR}}\frac{d\widetilde{V}^{(1)}_k}{dz}\right]^2,$$

$$\frac{\partial v_{kR}}{\partial \rho} = \frac{b}{2\rho}\frac{\partial v_{kR}}{\partial b} + \frac{a}{2\rho}\frac{\partial v_{kR}}{\partial a} - \frac{v^2_{kR}}{2C_{kR}I_{kR}}\left[(\widetilde{V}^{(1)}_k)^2 + (\widetilde{V}^{(2)}_k)^2\right], \qquad (2.60)$$

$$\frac{\partial v_{kL}}{\partial b} = \frac{b\rho}{C_{kL} I_{kL}} \left[(\widetilde{V}_k^{(3)})^2 + \frac{1}{\xi_{kL}^2} \left(\frac{d\widetilde{V}_k^2}{dz} \right)^2 \right],$$

$$\frac{\partial v_{kL}}{\partial \rho} = \frac{b}{2\rho} \frac{\partial v_{kL}}{\partial b} - \frac{v_{kL}^2}{2C_{kL} I_{kL}} (\widetilde{V}_k^{(3)})^2.$$

Здесь значения a, b, ρ и $\widetilde{V}_k^{(i)}$ взяты на глубине z, значения C_{kQ}, v_{kQ}, I_{kQ}, ξ_{kQ} — на частоте ω.

Формулы для $\partial v_{kQ}/\partial\chi$ в сферическом случае можно получить из (2.60) той же последовательностью замен, что и для $\delta_\chi \omega_{kQ}$.

Формулы, позволяющие оценивать возмущения групповой скорости, оказываются существенно более сложными из-за необходимости учета возмущения собственных функций; для произвольных $a(z)$, $b(z)$, $\rho(z)$ это приводит к серьезным вычислительным трудностям. Формулы (2.8) работы [21], где эффект возмущения собственных функций не учитывается, ошибочны.

В применявшихся нами программах расчетов волн Лява и Рэлея предусматривались возможности вычисления величин $\partial v_{kQ}/$ $/\partial\overline{\overline{\chi}}_j$, $\partial v_{kQ}/\partial\widetilde{\widetilde{\chi}}_j$, где $\overline{\overline{\chi}}_j$ — скорости или плотности на верхней границе j-го слоя, а $\widetilde{\widetilde{\chi}}_j$ — градиенты скоростей или плотности в j-м слое. Под слоем подразумевался интервал между двумя точками таблицы входных значений скорости и плотности, в пределах которого эти величины интерполировались линейно.

§ 3. Спектры поверхностных волн, возбуждаемых элементарными источниками

Для расчета спектральных характеристик поверхностных волн необходимо принять конкретную модель сейсмического источника. Ниже на основании полученных в § 1 и 2 гл. 1 формул (1.30), (1.71) будут выведены формулы, выражающие спектральную плотность смещений для некоторых практически важных источников: осесимметричного вертикального и радиального воздействия, вращательного воздействия, поля горизонтальных сил заданного направления, произвольно ориентированной сосредоточенной силы, диполя (с моментом и без момента), двойного диполя, центра расширения. Поскольку в формулах (1.30), (1.71) от источника зависит только множитель W_{kQ} (или $B_{kQ}^{(4)}$ в формуле (1.76)), мы будем в дальнейшем рассматривать выражения для W_{kQ} при различных воздействиях.

Полупространство

1. *Вертикальное осесимметричное воздействие.* Пусть

$$\mathbf{F} = F_z(t, z, r)\,\mathbf{a}_z. \tag{2.61}$$

В этом случае из (1.10) получаем

$$f_0^{(1)}(z, \xi, \omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \int\limits_0^{\infty} F_z J_0(\xi r)\, r\, dr\, dt;$$

$$f_m^{(1)} = 0 \quad \text{при} \quad m \neq 0; \qquad f_m^{(2)} \equiv f_m^{(3)} \equiv 0.$$

Из (1.20), (1.25) следует:

$$D_{k0}^R = \int\limits_0^{\infty} f_0^{(1)}(\xi_{kR}, \omega, z)\, \widetilde{V}_k^{(1)}(\xi_{kR}, z)\, dz;$$

$$D_{km}^R = 0 \quad \text{при} \quad m \neq 0; \qquad D_{km}^L \equiv 0.$$

В итоге:

$$W_{kR} = \int\limits_0^{\infty} f_0^{(1)} \widetilde{V}_k^{(1)}\, dz, \qquad W_{kL} = 0. \tag{2.62}$$

В частности, для идеально сосредоточенной в точке $z = h$, $r = 0$ вертикальной силы

$$\mathbf{F} = \delta(z - h)\, \frac{\delta(r)}{r}\, \varphi(t)\, \mathbf{a}_z, \tag{2.63}$$

$$W_{kR} = \widetilde{V}_k^{(1)}(h, \omega)\, S(\omega). \tag{2.64}$$

Здесь и далее $S(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \varphi(t)\, dt$ — временно́й спектр источника.

2. *Радиальное осесимметричное воздействие.* Пусть

$$\mathbf{F} = F_r(t, z, r)\, \mathbf{a}_r. \tag{2.65}$$

В этом случае из (1.10), (1.20), (1.25) имеем:

$$f_0^{(2)} = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \int\limits_0^{\infty} F_r J_1(\xi r)\, r\, dr\, dt;$$

$$f_m^{(2)} = 0 \quad \text{при} \quad m \neq 0; \qquad f_m^{(1)} \equiv f_m^{(3)} \equiv 0;$$

$$D_{k0}^R = \int\limits_0^{\infty} f_0^{(2)} \widetilde{V}_k^{(2)}\, dz; \qquad D_{km}^R = 0 \quad \text{при} \quad m \neq 0; \qquad D_{km}^L \equiv 0.$$

Отсюда из (1.33) следует:

$$W_{kR} = -\int\limits_0^{\infty} f_0^{(2)} \widetilde{V}_k^{(2)} dz, \qquad W_{kL} = 0. \tag{2.66}$$

В частном случае идеально сосредоточенного в точке $z = h$,

$= 0$ радиального источника:

$$\mathbf{F} = 2\delta(z-h)\frac{\delta(r)}{r^2}\varphi(t)\mathbf{a}_r, \tag{2.67}$$

$$W_{kR} = -\xi_{kR}\widetilde{V}_k^{(2)}(h, \omega)S(\omega). \tag{2.68}$$

3. Вращательное воздействие. Пусть

$$\mathbf{F} = F_\varphi(t, z, r)\mathbf{a}_\varphi. \tag{2.69}$$

Из (1.10), (1.20), (1.25) получаем:

$$f_0^{(3)} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t}\int_0^\infty F_\varphi J_1(\xi r)\,r\,dr\,dt; \qquad f_m^{(3)} = 0 \quad \text{при} \quad m \neq 0;$$

$$f_m^{(1)} \equiv f_m^{(2)} \equiv 0; \qquad D_{km}^R \equiv 0; \qquad D_{k0}^L = \int_0^\infty f_0^{(3)}\widetilde{V}_k^{(3)}dz;$$

$$D_{km}^L = 0 \qquad \text{при} \quad m \neq 0.$$

В результате

$$W_{kR} = 0, \qquad W_{kL} = \int_0^\infty f_0^{(3)}\widetilde{V}_k^{(3)}dz. \tag{2.70}$$

В частном случае сосредоточенного в точке $z = h$, $r = 0$ вращательного воздействия:

$$\mathbf{F} = 2\delta(z-h)\frac{\delta(r)}{r^2}\varphi(t)\mathbf{a}_\varphi, \tag{2.71}$$

$$W_{kL} = \xi_{kL}\widetilde{V}_k^{(3)}(h, \omega)S(\omega). \tag{2.72}$$

4. Поле горизонтальных сил фиксированного направления. Рассмотрим только частный случай такого поля сил

$$\mathbf{F} = F_T(t, z, r)\mathbf{a}_T, \tag{2.73}$$

где $\mathbf{a}_T$ — единичный горизонтальный вектор фиксированного направления:

$$(\mathbf{a}_T, \mathbf{a}_z) = 0, \qquad (\mathbf{a}_T, \mathbf{a}_r) = \cos(\delta - \varphi), \qquad (\mathbf{a}_T, \mathbf{a}_\varphi) = \sin(\delta - \varphi).$$

Тогда

$$\mathbf{F} = F_T[\cos(\delta-\varphi)\mathbf{a}_r + \sin(\delta-\varphi)\mathbf{a}_\varphi]$$

и имеем:

$$f_m^{(1)} \equiv 0; \qquad f_m^{(2)} = f_m^{(3)} = 0 \quad \text{при} \quad m \neq \pm 1;$$

$$f_1^{(2)} = \frac{e^{-i\delta}}{2}f_T; \qquad f_{-1}^{(2)} = -\frac{e^{i\delta}}{2}f_T;$$

$$f_1^{(3)} = \frac{e^{-i\delta}}{2i} f_T; \qquad f_{-1}^{(3)} = \frac{e^{i\delta}}{2i} f_T;$$

$$f_T = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} F_T J_0(\xi, r)\, dr dt.$$

Суммируя по m, получаем окончательно:

$$W_{kR} = i \cos(\delta - \varphi) \int_0^{\infty} f_T \widetilde{V}_k^{(2)} dz,$$

$$W_{kL} = -i \sin(\delta - \varphi) \int_0^{\infty} f_T \widetilde{V}_k^{(3)} dz. \tag{2.74}$$

В частном случае идеально сосредоточенной в точке $z = h$, $r = 0$ горизонтальной силы:

$$\mathbf{F} = \delta(z - h) \frac{\delta(r)}{r} \varphi(t)\, \mathbf{a}_T, \tag{2.75}$$

$$W_{kR} = i \cos(\delta - \varphi) \widetilde{V}_k^{(2)}(h, \omega) S(\omega), \tag{2.76}$$

$$W_{kL} = -i \sin(\delta - \varphi) \widetilde{V}_k^{(3)}(h, \omega) S(\omega).$$

5. *Произвольно ориентированная сосредоточенная сила.* Пусть

$$\mathbf{F} = \delta(z - h) \frac{\delta(r)}{r} [\mathbf{a}_z \cos\beta + \mathbf{a}_T \sin\beta]\, \varphi(t). \tag{2.77}$$

Комбинируя (2.64) и (2.76), получаем:

$$W_{kR} = [\cos\beta\, \widetilde{V}_k^{(1)}(h, \omega) + i \sin\beta \cos(\delta - \varphi) \widetilde{V}_k^{(2)}(h, \omega)]\, S(\omega), \tag{2.78}$$

$$W_{kL} = -i \sin\beta \sin(\delta - \varphi) \widetilde{V}_k^{(3)}(h, \omega) S(\omega).$$

6. *Диполь без момента.* Поле диполя, образованного парой сил без момента

$$\mathbf{F}_{\pm} = \pm\, \delta(z - h) \frac{\delta(r)}{r} \varphi(t) [\mathbf{a}_z \cos\beta + \mathbf{a}_T \sin\beta], \tag{2.79}$$

получим с точностью до членов, убывающих медленнее r^{-1} [95], применив к W_{kQ}^{1} из (2.78) оператор

$$\cos\beta \frac{d}{dh} + i\xi_{kQ} \sin\beta \cos(\delta - \varphi).$$

7. *Центр расширения.* Его можно заменить эквивалентным источником из трех ортогональных диполей без момента. Направим один диполь вертикально ($\beta = 0$), а два других горизонталь-

но ($\beta = \pi/2$, $\delta = 0$ и $\pi/2$). Суммируя поля, получаем:

$$W_{kR} = \left[\frac{d\widetilde{V}_k^{(1)}}{dz}(h, \omega) - \xi_{kR}\widetilde{V}_k^{(2)}(h, \omega)\right] S(\omega), \qquad W_{kL} = 0. \quad (2.80)$$

8. Диполь с моментом. Пусть пара сил действует в тех же направлениях, что и в п. 6, но существует вращательный момент $\mathbf{N}$, ось диполя, т. е. линия, соединяющая точки приложения сил, задана вектором $\mathbf{a}_n$, где $\mathbf{a}_n = \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|} \times \frac{\mathbf{F}}{|\mathbf{F}|}$, $(\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_z) = \cos\gamma$, $(\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_r) = \sin\gamma\cos(\alpha - \varphi)$, $(\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_\varphi) = \sin\gamma\sin(\alpha - \varphi)$. Углы γ, δ, β, α не независимы, а связаны соотношением $\operatorname{ctg}\gamma \operatorname{ctg}\beta = -\cos(\delta - \alpha)$. Поле смещений от такого диполя на больших расстояниях r получим, применив к W_{kQ} в (2.78) оператор

$$\left[\cos\gamma \frac{d}{dh} + i\xi_{kQ}\cos(\alpha - \varphi)\sin\gamma\right].$$

9. Двойной диполь. Точечная дислокация эквивалентна системе из двух диполей с моментом, причем суммарный вращательный момент системы равен нулю. Поле смещений, вызванных таким источником, получим, сложив поля двух диполей, найденные согласно п. 7, и учтя, что поле второго диполя находится по полю первого взаимной перестановкой углов $\gamma \rightleftarrows \beta$, $\alpha \rightleftarrows \delta$.

Резюмируя результаты этого раздела, отметим, что для рассмотренных точечных источников выражения для W_{kQ} ($Q = R, L$) можно компактно записать в виде:

$$W_{kR} = \left[A_1\widetilde{V}_k^{(1)}(h) + A_2\frac{d\widetilde{V}_k^{(1)}(h)}{dz} + A_3\widetilde{V}_k^{(2)}(h) + A_4\frac{d\widetilde{V}_k^{(2)}(h)}{dz}\right] S(\omega),$$
$$W_{kL} = \left[A_5\widetilde{V}_k^{(3)}(h) + A_6\frac{d\widetilde{V}_k^{(3)}(h)}{dz}\right] S(\omega), \quad (2.81)$$

где A_i — комплексные коэффициенты, зависящие от частоты и механизма источника[1]. Выражения для A_i во всех рассмотренных случаях сведены в табл. 5.

---

[1] Обобщая эту формулу на случай мультиполя s-го порядка, можно показать, что для такого источника W_{kR} будет линейной комбинацией выражения вида $d^j(\widetilde{V}^{(i)})/dz^j$ ($i = 1,2$; $j = 1,2,\ldots, s-1$); W_{kL} — линейной комбинацией выражений вида

$$\frac{d^j(\widetilde{V}_k^{(3)}(h))}{dz^j} \quad (j = 1, 2, \ldots, s-1).$$

Таблица 5

Тип источника	A_1	A_2
Сосредоточенная сила	$\cos\beta$	0
Сосредоточенное радиальное воздействие	0	0
Центр вращения	0	0
Диполь без момента	$\frac{i\xi_{kR}}{2}\sin 2\beta\cos(\delta-\varphi)$	$\cos^2\beta$
Центр расширения	0	1
Диполь с моментом	$i\xi_{kR}\sin\gamma\cos\beta\cos(\alpha-\varphi)$	$\cos\gamma\cos\beta$
Двойной диполь	$i\xi_{kR}[\sin\gamma\cos\beta\cos(\alpha-\varphi)+$ $+\sin\beta\cos\gamma\cos(\delta-\varphi)]$	$2\cos\gamma\cos\beta$

Сферический случай ($\nu\geqslant|m|+1$)

1. *Радиальное осесимметричное воздействие.* Пусть

$$\mathbf{F}=F_R(t,R,\theta)\,\mathbf{a}_R. \tag{2.82}$$

Из (1.45), (1.57), (1.61), (1.74) получим:

$$\begin{gathered}
f_{0\nu}^{(1)}=\left(\nu_{kS}+\frac{1}{2}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega t}\int_0^{\pi}F_RP_\nu(\cos\theta)\sin\theta d\theta dt;\\
f_{m\nu}^{(1)}=0 \qquad \text{при} \quad m\neq 0, \qquad f_{m\nu}^{(2)}\equiv f_{m\nu}^{(3)}\equiv 0,\\
W_{k\nu S}=\frac{1}{\nu_{kS}}\int_0^{R_0}f_{0\nu}^{(1)}\widetilde{V}_{k\nu}^{(1)}(R)\,R^2dR; \qquad W_{k\nu T}=0.
\end{gathered} \tag{2.83}$$

В частности, для идеально сосредоточенной в точке $R=H$, $0=0$ радиальной силы:

$$\mathbf{F}=\delta(R-H)\frac{\delta(\theta)}{H^2\sin\theta}\varphi(t)\,\mathbf{a}_R; \tag{2.84}$$

$$W_{k\nu S}=\widetilde{V}_{k\nu}^{(1)}(H)\,S(\omega), \qquad W_{k\nu T}=0. \tag{2.85}$$

2. *Меридиональное осесимметричное воздействие.* Пусть

$$\mathbf{F}=F_\theta(t,R \quad {}_\theta. \tag{2.86}$$

A_3	A_4	A_5	A_6
$i\sin\beta\cos\beta\,(\delta-\varphi)$	0	$i\sin\beta\sin(\delta-\varphi)$	0
$-\xi_{kR}$	0	0	0
0	0	ξ_{kL}	0
$-\xi_{kR}\sin^2\beta\times$ $\times\cos^2(\delta-\varphi)$	$\frac{i}{2}\sin 2\beta\cos(\delta-\varphi)$	$\frac{\xi_{kL}}{2}\sin^2\beta\times$ $\times\sin 2(\delta-\varphi)$	$-\frac{i}{2}\sin 2\beta\times$ $\times\sin(\delta-\varphi)$
$-\xi_{kR}$	0	0	0
$-\xi_{kR}\sin\beta\sin\gamma\times$ $\times\cos(\delta-\varphi)\times$ $\times\cos(\alpha-\varphi)$	$i\sin\beta\cos\gamma\times$ $\times\cos(\delta-\varphi)$	$\xi_{kL}\sin\gamma\sin\beta\times$ $\times\sin(\delta-\varphi)\times$ $\times\cos(\alpha-\varphi)$	$-i\sin\beta\cos\gamma\times$ $\times\sin(\delta-\varphi)$
$-2\xi_{kR}\sin\beta\sin\gamma\times$ $\times\cos(\delta-\varphi)\times$ $\times\cos(\alpha-\varphi)$	$i[\sin\beta\cos\gamma\times$ $\times\cos(\delta-\varphi)+\sin\gamma\times$ $\times\cos\beta\cos(\alpha-\varphi)$	$\xi_{kL}\sin\gamma\sin\beta\times$ $\times\sin(\alpha+\delta-2\varphi)$	$-i[\sin\beta\cos\gamma\times$ $\times\sin(\delta-\varphi)+\sin\gamma\times$ $\times\cos\beta\sin(\alpha-\varphi)]$

В этом случае имеем:

$$f_{m\nu}^{(1)}\equiv f_{m\nu}^{(3)}\equiv 0,\qquad f_{m\nu}^{(2)}=0\quad \text{при}\quad m\neq 0,$$

$$f_{0\nu}^{(2)}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t}\int_0^{\pi}F_\theta\frac{dP_\nu(\cos\theta)}{d\theta}\sin\theta d\theta dt, \tag{2.87}$$

$$W_{k\nu S}=\frac{1}{\nu_{kS}}\int_0^{\infty}f_{0\nu}^{(2)}\widetilde{V}_{k\nu}^{(2)}R^2dR,\qquad W_{k\nu T}=0.$$

В частном случае идеально сосредоточенного в точке $R=H$, $\theta=0$ меридионального воздействия:

$$\mathbf{F}=\frac{2\delta(R-H)\,\delta(\theta)\,\varphi(t)}{H^3\sin^2\theta}\mathbf{a}_\theta, \tag{2.88}$$

$$W_{k\nu S}=-\frac{\nu_{kS}}{H}\widetilde{V}_{k\nu}^{(2)}(H)\,S(\omega),\qquad W_{k\nu T}=0. \tag{2.89}$$

3. Вращательное воздействие. Пусть

$$\mathbf{F}=F_\varphi(t,R,\theta)\,\mathbf{a}_\varphi. \tag{2.90}$$

Из (1.45) получаем:

$$f_{m\nu}^{(1)}\equiv f_{m\nu}^{(2)}\equiv 0;\qquad f_{m\nu}^{(3)}=0\quad \text{при}\quad m\neq 0;$$

$$f_{0\nu}^{(3)}=-\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega t}\int_0^{\pi}F_\varphi\frac{dP_\nu(\cos\theta)}{d\theta}\sin\theta d\theta dt.$$

Из (1.57), (1.61), (1.74) следует:

$$W_{k\nu S}=0,\qquad W_{k\nu T}=-\frac{1}{\nu_{kT}}\int_0^{R_0} f_{0\nu}^{(3)}\widetilde{V}_{k\nu}^{(3)}R^2dR. \tag{2.91}$$

В частном случае идеально сосредоточенного в точке $R=H$, $\theta=0$ вращательного воздействия:

$$\mathbf{F}=2\delta(R-H)\frac{\delta(\theta)\,\varphi(t)}{H^3\sin^2\theta}\,\mathbf{a}_\varphi, \tag{2.92}$$

$$W_{k\nu T}=\frac{\nu_{kT}}{H}\widetilde{V}_{k\nu}^{(3)}(H)\,S(\omega). \tag{2.93}$$

4. *Поле касательных сил фиксированного азимута.* Рассмотрим только частный случай такого поля сил

$$\mathbf{F}=F_T(t,R,\theta)\,\mathbf{a}_T, \tag{2.94}$$

$\mathbf{a}_T$ — единичный касательный вектор фиксированного азимута:

$$(\mathbf{a}_T,\mathbf{a}_R)=0,\qquad(\mathbf{a}_T,\mathbf{a}_\theta)=\cos(\delta-\varphi),\qquad(\mathbf{a}_T,\mathbf{a}_\varphi)=\sin(\delta-\varphi).$$

Тогда

$$\mathbf{F}=F_T\,[\mathbf{a}_\theta\cos(\delta-\varphi)+\mathbf{a}_\varphi\sin(\delta-\varphi)]$$

и из (2.7) получаем

$$f_{m\nu}^{(1)}\equiv0;\qquad f_{m\nu}^{(2)}=f_{m\nu}^{(3)}=0\quad\text{при}\quad m\neq\pm1;$$

$$f_{1\nu}^{(2)}=\frac{e^{-i\delta}f_{T\nu}}{2\nu(\nu+1)};\qquad f_{-1\nu}^{(2)}=\frac{-e^{i\delta}f_{T\nu}}{2};$$

$$f_{1\nu}^{(3)}=\frac{e^{-i\delta}f_{T\nu}}{2i\nu(\nu+1)};\qquad f_{-1\nu}^{(3)}=\frac{e^{i\delta}f_{T\nu}}{2i};$$

$$f_{T\nu}=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega t}\int_0^{\pi}F_T\left(\frac{dP_\nu^1}{d\theta}+\frac{P_\nu^1}{\sin\theta}\right)\sin\theta\,d\theta\,dt.$$

Суммируя по m, получаем:

$$\begin{aligned}W_{k\nu S}&=\frac{(-1)^g}{\nu_{kS}^2}\,i\cos(\delta-\varphi)\int_0^{R_0}f_{T\nu}\widetilde{V}_{k\nu}^{(2)}R^2dR,\\ W_{k\nu T}&=-\frac{(-1)^g}{\nu_{kT}^2}\,i\sin(\delta-\varphi)\int_0^{R_0}f_{T\nu}\widetilde{V}_{k\nu}^{(3)}R^2dR.\end{aligned} \tag{2.95}$$

В частном случае сосредоточенной в точке $R=H$, $\theta=0$ касательной силы:

$$\mathbf{F}=\frac{\delta(R-H)\,\delta(\theta)\,\varphi(t)}{H^2\sin\theta}\,\mathbf{a}_T, \tag{2.96}$$

$$W_{k\nu S} = (-1)^g\, i \cos(\delta - \varphi)\, \widetilde{V}^{(2)}_{k\nu}(H)\, S(\omega),$$
$$W_{k\nu T} = (-1)^g\, i \sin(\delta - \varphi)\, \widetilde{V}^{(3)}_{k\nu}(H)\, S(\omega). \tag{2.97}$$

5. *Произвольно-ориентированная сосредоточенная сила.* Пусть

$$F = \delta(R - H)\frac{\delta(\theta)}{H^2 \sin\theta}\,[\mathbf{a}_R \cos\beta + \mathbf{a}_T \sin\beta]\,\varphi(t).$$

Из (2.85) и (2.97) получаем:

$$W_{k\nu S} = [\cos\beta\, \widetilde{V}^{(1)}_{k\nu}(H) + i(-1)^g \sin\beta\cos(\delta - \varphi)\, \widetilde{V}^{(2)}_{k\nu}(H)]\, S(\omega),$$
$$W_{k\nu L} = -i(-1)^g \sin\beta \sin(\delta - \varphi)\, \widetilde{V}^{(3)}_{k\nu}(H)\, S(\omega). \tag{2.98}$$

6. *Диполь без момента.* $W_{k\nu Q}$ для диполя без момента, ориентированного так же, как сила, с точностью до членов, убывающих быстрее $(R_0 \sin\theta)^{-1/2}$, находим, применив к $W_{k\nu Q}$ в (2.98) оператор

$$\left[\cos\beta \frac{d}{dR} + i(-1)^g \frac{\nu_{kQ} + 1/2}{H} \sin\beta\cos(\delta - \varphi)\right].$$

7. *Центр расширения.* Комбинируя поля трех взаимно перпендикулярных диполей без момента, имеем:

$$W_{k\nu S} = \left[\frac{d\widetilde{V}^{(1)}_{k\nu}(H)}{dR} - (-1)^g \frac{\nu_{kQ} + 1/2}{H}\, \widetilde{V}^{(2)}_{k\nu}\right] S(\omega), \qquad W_{k\nu T} = 0. \tag{2.99}$$

8. *Диполь с моментом.* Пусть направление оси диполя задано вектором $\mathbf{a}_n$: $(\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_R) = \cos\gamma$; $(\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_\theta) = \sin\gamma\cos(\alpha - \varphi)$; $(\mathbf{a}_n \mathbf{a}_\varphi) = \sin\gamma\sin(\alpha - \varphi)$. Поле смещений получим (с той же оговоркой, что и в п. 6), применив к $W_{k\nu Q}$ из (2.98) оператор

$$\left[\cos\gamma \frac{d}{dR} + i \frac{\nu_k + 1/2}{H} \sin\gamma\cos(\alpha - \varphi)\right].$$

9. *Двойной диполь.* $W_{k\nu Q}$ для двойного диполя с нулевым вращательным моментом получим, сложив поля двух ортогональных диполей с моментом, с учетом, что для второго диполя необходимо взаимное изменение углов γ и β, δ и α. Как и в случае полупространства, можно компактно описать $W_{k\nu Q}$ для точечных источников с помощью комплексных коэффициентов A_j:

$$W_{k\nu S} = \left[A_1 \widetilde{V}^{(1)}_{k\nu}(H) + A_2 \frac{d\widetilde{V}^{(1)}_{k\nu}(H)}{dR} + A_3 \widetilde{V}^{(2)}_{k\nu}(H) + A_4 \frac{d\widetilde{V}^{(2)}_{k\nu}(H)}{dR}\right] S(\omega),$$
$$W_{k\nu T} = \left[A_5 \widetilde{V}^{(3)}_{k\nu}(H) + A_6 \frac{d\widetilde{V}^{(3)}_{k\nu}(H)}{dR}\right] S(\omega). \tag{2.100}$$

Выражения для A_j в сферическом случае можно получить из соответствующих формул плоского случая (см. табл. 5); для этого в последних надо заменить всюду ξ_{kQ} на $(\nu_{kQ} + {}^1/_2)/H$ и ввести дополнительный множитель $(-1)^g$ во все A_j с $j > 2$. Этот множитель отражает изменение знака касательных составляющих сил в источнике по отношению к волне, излучаемой в сторону, противоположную точке регистрации.

§ 4. Теоретические сейсмограммы

Переход от спектров поверхностных волн к теоретическим сейсмограммам смещений заключается согласно (1.29), (1.70) в вычислении интеграла Фурье вида $\mathrm{Re}\int\limits_{\bar{\omega}_k}^{\infty} U_{kQ}\, e^{i\omega t} d\omega$. Специфической особенностью этих интегралов в нашем случае является наличие в U_{kQ} быстро осциллирующего множителя вида $\exp(-i\xi_{kQ}(\omega) r)$, где $\xi_{kQ} r$ велико. Рассмотрим два подхода к вычислению таких интегралов — асимптотический и численный.

Асимптотический метод. При оценках интегралов типа $I = \int\limits_0^{\infty} \Phi(\omega)\, e^{il\varphi(\omega)}\, d\omega$, где $\Phi(\omega)$ — слабо осциллирующая по сравнению с $e^{il\varphi(\omega)}$ функция, обычно пользуются методом стационарной фазы [44], согласно которому

$$I = \sqrt{\frac{2\pi}{l}} \sum_j \frac{\Phi(\omega_j)}{\sqrt{\left|\dfrac{d^2\varphi(\omega_j)}{d\omega^2}\right|}} \exp\left\{il\varphi(\omega_j) + i\frac{\pi}{4}\,\mathrm{sign}\left(\frac{d^2\varphi(\omega_j)}{d\omega^2}\right)\right\} + o\left(\frac{1}{l}\right). \quad (2.101)$$

Здесь ω_j — корни уравнения $d\varphi(\omega_j)/d\omega = 0$ — так называемые точки стационарной фазы.

Условие применимости (2.101) — необращение в нуль $d^2\varphi(\omega)/d\omega^2$ в точках ω_j. Точнее оно сформулировано в [73] в виде неравенства

$$\left|\frac{5}{3}\left(\frac{d^3\varphi}{d\omega^3}\right)^2 \Big/ \left(\frac{d^2\varphi}{d\omega^2}\right)^3 - \frac{d^4\varphi}{d\omega^4} \Big/ \left(\frac{d^2\varphi}{d\omega^2}\right)^2\right| \ll 8l.$$

Вклад окрестности стационарной точки $\bar{\omega}$, в которой обращается в нуль $d^2\varphi(\omega)/d\omega^2$, оценивается обычно при помощи интеграла Эйри:

$$I_1 = \frac{2\sqrt{\pi}\,\Phi(\bar{\omega})\exp(i\varphi(\bar{\omega}))\,E(\tau)}{\sqrt[3]{\dfrac{l}{2}\dfrac{d^3\varphi(\bar{\omega})}{d\omega^3}}} + o\left(\frac{1}{l^{2/3}}\right), \quad (2.102)$$

где $E(\tau)$ — интеграл Эйри:

$$E(\tau)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \cos\left(x\tau+\frac{x^3}{3}\right)dx,$$

$$\tau=l\frac{d\varphi(\overline{\omega})}{d\omega}\left(\frac{l}{2}\frac{d^3\varphi(\omega)}{d\omega^3}\right)^{-\frac{1}{3}}. \quad (2.103)$$

Т. Б. Яновская [96] предложила более общую формулу, особенно удобную для оценки вклада пар стационарных точек ω_1, ω_2, расположенных вблизи точки $\overline{\omega}$, где $d^2\varphi/d\omega^2=0$, по разные стороны от нее. Эта формула использует функцию Эйри в определении В. А. Фока [87]:

$$Э(\tau)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_\Gamma \exp\left(\tau z-\frac{z^3}{3}\right)dz, \quad (2.104)$$

где Г — контур, идущий от ∞ к 0 вдоль действительной оси и затем по лучу $\arg z=-2\pi/3$ от 0 к ∞. Согласно [96],

$$I_2=\sqrt{\frac{2\pi\sqrt{|\tau|}}{l}}\exp\left\{\frac{i}{2}\left[l(\varphi(\omega_1)+\varphi(\omega_2))-\pi\right]\right\}\times$$
$$\times\left[\frac{\Phi(\omega_1)Э(-|\tau|)}{\sqrt{|\varphi''(\omega_1)|}}-\frac{\Phi(\omega_2)\bar{Э}(-|\tau|)}{\sqrt{|\varphi''(\omega_2)|}}\right]. \quad (2.105)$$

Применяя формулы (2.101), (2.102), (2.105) к нашей задаче, мы должны принять $l=r$, $\Phi(\omega)=|U_{kq}(\omega)|$, $\varphi(\omega)=\omega t/r-$ $-\xi_{kQ}(\omega)$. Тогда

$$\frac{d\varphi}{d\omega}=\frac{t}{r}-\frac{1}{C_{kQ}(\omega)},\qquad \frac{d^2\varphi}{d\omega^2}=-\frac{d^2\xi_{kQ}(\omega)}{d\omega^2},$$

$$\frac{d^3\varphi}{a\omega^3}=-\frac{a^3\xi_{kQ}}{d\omega^3}. \quad (2.106)$$

Таким образом, для расчета сейсмограммы необходимо знать функции $\xi_{kQ}(\omega)$, $C_{kQ}(\omega)$, $d^2\xi_{kQ}/d\omega^2$, а в точках, где $d^2\xi_{kQ}/d\omega^2=0$, также и $d^3\xi_{kQ}/d\omega^3$. Применение асимптотических формул в реальных ситуациях встречает серьезные трудности: 1) существуют участки спектра, где не только $d^2\xi_{kQ}/d\omega^2$, но и $d^3\xi_{kQ}/d\omega^3$ близко к нулю; 2) $|U_{kq}(\omega)|$ может в отдельных участках спектра сильно осциллировать; 3) точность описания разных участков сейсмограммы асимптотическими формулами может существенно различаться. Это затрудняет использование асимптотики при массовых расчетах сейсмограмм. Однако асимптотические методы весьма удобны для качественных оценок вида сейсмограмм, и мы пользуемся ими в настоящей работе.

Способ построения такой «приближенной» сейсмограммы состоит в следующем: кривая групповой скорости $C_{kQ}(\omega)$ разбивается на ряд монотонных участков, заключенных между соседними экстремумами. Каждому участку соответствует квазисинусоидальное колебание переменной частоты и амплитуды вида $A(t)\cos(\tilde{\omega}(t)t + \varphi(t))$. В момент времени t частота $\tilde{\omega}$ определяется из условия $C_{kQ}(\tilde{\omega}) = r/t$, амплитуда $A(t)$

$$A(t) = \sqrt{\frac{2\pi}{r}}\,\frac{|U_{kq}(\tilde{\omega})|}{\sqrt{\left|\dfrac{d^2\xi_{kQ}}{d\omega^2}(\tilde{\omega})\right|}}, \tag{2.107}$$

а фаза

$$\varphi(t) = \arg U_{kq}(\tilde{\omega}) - \frac{\pi}{4}\operatorname{sign}\left(\frac{d^2\xi_{kQ}}{d\omega^2}(\tilde{\omega})\right).$$

В формулу для амплитуды можно ввести множитель $\exp(-\alpha_{kQ}(\tilde{\omega})\,r)$, учитывающий поглощение.

Таким образом, для участков роста групповой скорости с частотой видимая частота записи убывает во времени и наоборот. Чтобы получить теоретическую сейсмограмму данной гармоники, надо сложить колебания, соответствующие разным участкам кривой $C_{kQ}(\omega)$. При этом колебания с разной частотой, но с одинаковой групповой скоростью будут интерферировать; окрестностям экстремумов соответствуют биения. Каждый экстремум $C_{kQ}(\omega)$ на частоте $\hat{\omega}$ дает дополнительный вклад в теоретическую сейсмограмму — это так называемая фаза Эйри — затухающее во времени колебание вида $A(t)\cos(\hat{\omega}t + \varphi(\hat{\omega}))$ постоянной частоты $\hat{\omega}$. Амплитуда в фазе Эйри находится по формуле

$$A(t) = \frac{2\sqrt{\pi}\,|U_{kq}(\hat{\omega})|\,E(\tau)}{\sqrt[3]{-\dfrac{r}{2}\dfrac{d^3\xi_{kQ}}{d\omega^3}(\hat{\omega})}}, \tag{2.108}$$

где $E(\tau)$ — функция Эйри от аргумента τ:

$$\tau = (t - r/C_{kQ}(\hat{\omega}))\Big/\sqrt[3]{-\frac{r}{2}\frac{d^3\xi_{kQ}}{d\omega^3}(\hat{\omega})}. \tag{2.109}$$

Как видно из этих формул, амплитуда колебания с видимой частотой $\hat{\omega}$ будет убывать с расстоянием как r^{-1} ($r^{-1/2}$ — за счет геометрического расхождения, $r^{-1/2}$ — за счет растягивания сигнала во времени). Амплитуда колебаний в фазе Эйри убывает с расстоянием несколько медленнее: как $r^{-5/6}$ ($r^{-1/3}$ вместо $r^{-1/2}$ — за счет меньшего растягивания этой части процесса во времени). Фактическая амплитуда фаз Эйри (как и любой части записи) зависит не только от вида кривой групповой скорости, но и от функции $|U_{kq}(\omega)|$, определяемой строением среды, глубиной, механизмом и спектром источника; поэтому из полученных соотношений нельзя делать вывод о том, что максимальные амплитуды на записях всегда связаны с фазами Эйри.

Для получения полной теоретической сейсмограммы необходимо суммировать колебания всех гармоник, дающих существенный вклад при данном t; поскольку обычно исследуется ограниченный диапазон частот, с помощью кривых групповой скорости удобно оценивать, какие гармоники надо учесть в данном интервале времен и частот.

Численный метод. Любой численный метод преобразования Фурье требует достаточно подробного описания функции $U_{kq}(\omega)$, что приводит к большому объему вычислений. Разработанный в последние годы алгоритм быстрого преобразования Фурье [116] сильно сокращает время счета; однако и здесь при использовании ЭВМ класса БЭСМ-4 остаются существенные технические проблемы. Приведем простой пример: минимальный период осцилляции по ω множителя $\exp\left(i\,\frac{\omega r}{v(\omega)}\right)$ равен приближенно $2\pi v_0/r$, где v_0 — минимальная фазовая скорость в рассматриваемом интервале ω. В реальной ситуации возможны $(2\pi v_0)/r \approx 10^{-4}$ *сек*$^{-1}$, а весь интервал расчетных ω — от 0 до 10 *сек*$^{-1}$. Поэтому число точек, в которых нужно задать подынтегральную функцию, достигает 10^6. Такой массив чисел не может быть подвергнут быстрому преобразованию Фурье «в лоб» даже на ЭВМ класса БЭСМ-6; для БЭСМ-4 максимальный размер массива порядка 10^3, т. е. в тысячу раз меньше, чем нужно. Для преодоления этой трудности разработаны следующие основные приемы.

1. *Сдвиг начала отсчета.* Поскольку, как следует из асимптотических оценок, $U_{kq}(t) \approx 0$ для времен пробега $t_0 < \frac{r}{\tilde{C}_k(\omega)} - A$, где $\tilde{C}_k(\omega)$ — максимальная групповая скорость данной гармоники в исследуемом диапазоне частот, а A — константа, можно сдвинуть начало отсчета на сейсмограмме в точку t_0 и вычислять преобразование Фурье от функции $\tilde{U}_{kq}(\omega) = U_{kq}(\omega)e^{-i\omega t_0}$, которая на интервале $(0, \omega_{\max})$ осциллирует не так быстро, как исходная функция $U_{kq}(\omega)$. Это позволяет уменьшить число разбиений подынтегральной функции в $\sim 1{,}5$ раза.

2. *Параболическая интерполяция* $\tilde{U}_{kq}(\omega)$. В алгоритме быстрого преобразования Фурье вся подынтегральная функция $\tilde{U}_{kq}(\omega)\,e^{i\omega t}$ аппроксимируется ступенчатой функцией, что приводит к повышенным требованиям на число разбиений; комбинируя этот алгоритм с методом Филона [62, 82], где преобразуемая функция $\tilde{U}_{kq}(\omega)$ аппроксимируется кусочно-параболической, можно в ~ 2 раза уменьшить число разбиений при сохранении той же точности. При этом время счета для преобразования заданного массива не возрастает.

3. *Преобразование входного массива суммированием.* Спецификой быстрого преобразования Фурье является предопределенность значений абсцисс, в которых будет вычислена преобразованная

функция. Именно, если вычисляемый интеграл имеет пределы $(\omega_{min}, \omega_{max})$ и входная функция представлена 2^N значениями, то значения преобразования $U_{kq}(t)$ будут вычислены в точках $t_j = 2\pi j/(\omega_{max} - \omega_{min})$, $j = 1, 2\ldots, 2^{N-1}$. Разобьем входную функцию на L равных подмассивов и будем вычислять преобразование Фурье в точках t_j, соответствующих массиву длины $\Delta\omega = (\omega_{max} - \omega_{min})/L$. Нетрудно убедиться, что

$$U_{kq}(t_j) = \int\limits_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} f(\omega) e^{i\omega t_j} d\omega = \int\limits_{\omega_{min}}^{\omega_{min}+\Delta\omega} \sum_{s=0}^{L-1} f(\omega + s\Delta\omega) e^{i\omega t_j} d\omega. \quad (2.110)$$

Это позволяет уменьшить входной массив до приемлемого размера почленным суммированием всех подмассивов. При этом, однако, может оказаться, что полученный шаг $\delta t = t_j - t_{j-1} = 2\pi/\Delta\omega$ слишком велик для детального описания сейсмограммы. Тогда необходимо применить операцию 4.

4. *Преобразование фаз входного массива.* Для получения входной функции в промежуточных точках $t_j' = t_j + \Delta t$ $(\Delta t < \delta t)$ можно представить входной массив в виде $\hat{U}_{kq}(\omega) = \tilde{U}_{kq}(\omega) e^{i\omega\Delta t}$ и действовать с ним так же, как с массивом $\tilde{U}_{kq}(\omega)$. Это приводит к повторным вычислениям преобразований Фурье, причем всего приходится производить $\delta t/\Delta t$ вычислений. Получаемые после каждого преобразования выходные подмассивы должны быть упорядочены и сведены в один массив чисел, соответствующих растущей абсциссе t.

Описанные приемы использовались нами в программе для расчета теоретических сейсмограмм $u_{kq}(t, r)$ поверхностных волн. Эта программа составлена на языке БЭСМ-4 и осуществляет следующие основные операции:

1) ввод и предварительная равноточная интерполяция с заданным шагом по ω массивов данных, полученных в результате расчетов спектров поверхностных волн по программам [4, 21, 63, 94]: волновых чисел $\{\xi_{kQ}(\omega_j)\}$, коэффициентов поглощения $\{\alpha_{kQ}(\omega_j)\}$ спектральных амплитуд $\{|U_{kq}(\omega_j)|\}$ для последовательности значений k и набора глубин и моделей источника;

2) определение минимального периода $\delta'\omega$ осцилляций функции $\exp[-i(\omega t_0 + \xi_{kQ} r)]$, выбор шага интегрирования $\delta\omega$ из условия $\delta\omega = \delta'\omega/P$, где $P = 15 \div 20$;

3) интерполяция функции $\xi_{kQ}(\omega)$ с шагом $\delta\omega$ и вычисление преобразования Фурье

$$y(t - t_0) = \int\limits_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} A(\omega) \exp[i(\omega t - \omega t_0 - \xi_{kQ} r)] d\omega,$$

где $A(\omega)$ — косинусовый сужатель, ослабляющий эффект обрыва спектральной функции на высоких частотах, вне интересующей нас области спектра:

$$A = 1 \quad \text{при} \quad \omega < \omega_{c2};$$

$$A(\omega) = \frac{1}{2}\left[1 + \cos\left(\pi \frac{\omega - \omega_{c2}}{\omega_{max} - \omega_{c2}}\right)\right] \qquad \text{при} \quad \omega > \omega_{c2};$$

4) расчет функций $x_q(\tau)$:

$$x_q(\tau) = \int\limits_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} A_1(\omega)\,\Phi(\omega)\, U_{kq}(\omega) \exp\left[-\alpha_{kQ}(\omega)\, r + i\omega\tau\right] d\omega$$

для заданных моделей и глубин очага; $\Phi(\omega)$ — частотная характеристика аппаратуры, $A_1(\omega)$ — двусторонний косинусовый сужатель для устранения эффекта обрыва спектральной функции на высоких и низких частотах, вне интересующей нас области спектра $\omega_{c1} \leqslant \omega \leqslant \omega_{c2}$;

5) вычисление теоретических сейсмограмм путем свертки

$$u_q(t - t_0) = y(t - t_0) * x_q(t).$$

Разделение расчета сейсмограмм на этапы и применение свертки диктуются чисто техническими соображениями: для одного и того же расстояния r обычно рассчитывается несколько сейсмограмм для разных моделей и глубин очага или разных поглощающих моделей. Так как наиболее трудоемким является расчет функций $y(t - t_0)$, удобнее выделить эту операцию в отдельный этап. В принципе же вполне возможно находить каждую сейсмограмму непосредственно преобразованием Фурье от функции $\hat{U}_{kq}(\omega)$. Имеющийся опыт расчетов свидетельствует о значительном выигрыше времени при использовании описанной методики по сравнению с расчетом сейсмограммы без использования алгоритма быстрого преобразования Фурье.

Глава 3

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПОВЕРХНОСТНЫХ И КАНАЛОВЫХ ВОЛН

В этой главе мы рассмотрим основные свойства поверхностных волн в вертикально- и радиально-неоднородных моделях. Эти свойства вытекают в основном из формул, полученных в гл. 1 и 2; некоторые заключения строго не доказаны и базируются на результатах многочисленных расчетов.

§ 1. Спектральный диапазон

Рассмотрим спектральный диапазон k-й гармоники поверхностной волны Рэлея или Лява. Как уже отмечалось выше, этот диапазон формально не ограничен сверху (фактические ограничения обусловлены глубиной и спектром излучения источника, а также поглощением); снизу он всегда ограничен частотой $\overline{\omega}_{kQ}$. Это ограничение обусловлено двумя причинами: 1) представление колебаний в виде бегущих волн для данного расстояния r или θ от источника допустимо лишь при выполнении условий:

$$\frac{\xi_{kQ}(\omega)\,r}{|m|+1} = N_1 \gg 1 \tag{3.1}$$

в плоском случае и

$$\frac{\nu_{kQ}(\omega)\sin\theta}{|m|+1} = N_1 \gg 1 \tag{3.2}$$

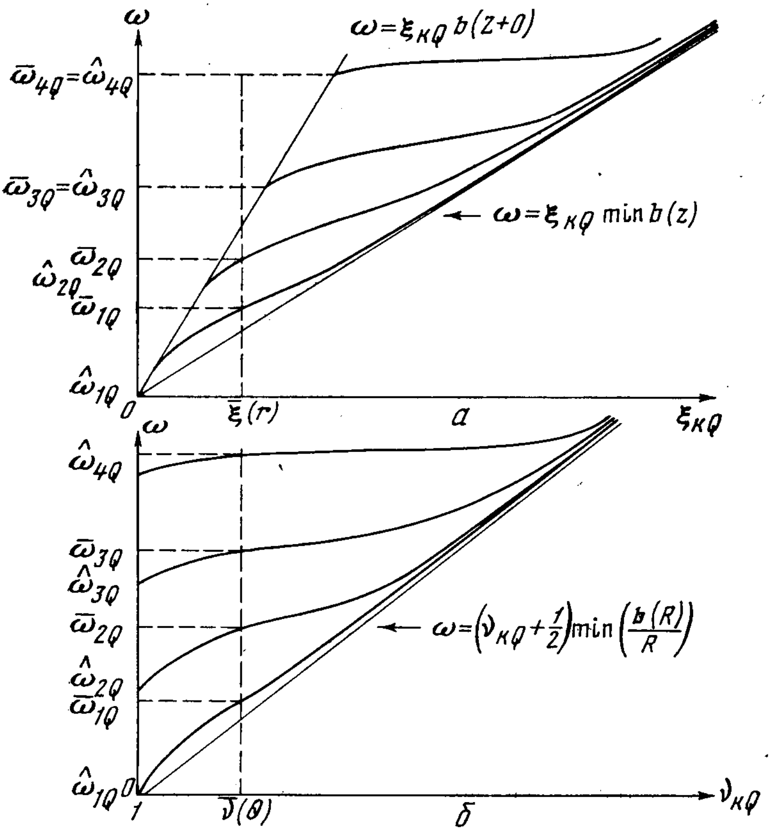


Рис. 1. Определение нижней границы спектрального диапазона

а — плоский случай; *б* — сферический случай в сферическом случае; 2) собственные значения операторов (1.14) — (1.17), (1.49) —(1.50) существуют лишь в ограниченном диапазоне частот $\hat{\omega}_{kQ} < \omega < \infty$, причем предельные частоты $\hat{\omega}_{kQ}$ растут с номером гармоники k:

$$\hat{\omega}_{k+1Q} > \hat{\omega}_{kQ} > \hat{\omega}_{k-1Q} > \ldots > \hat{\omega}_{1Q} = 0. \tag{3.3}$$

Поэтому, чтобы найти граничную частоту $\overline{\omega}_{kQ}$ для заданного r или θ, надо выбрать значение N_1, определяющее точность представления колебаний бегущими волнами, найти из (3.1) или (3.2) соответствующее $\overline{\xi} = \xi_{kQ}$ или $\overline{\nu} = \nu_{kQ}$ и затем, зная зависимость $\xi_{kQ}(\omega)$ или $\nu_{kQ}(\omega)$, определить $\overline{\omega}_{kQ}$ (графическая иллюстрация дана на рис. 1). Для плоской модели при $k > 1$ может оказаться, что при данном $\overline{\xi}$ не существует собственных значений ω_{kQ}; тогда граничная частота спектра равна предельной частоте: $\overline{\omega}_{kQ} = \hat{\omega}_{kQ}$. Во всех других случаях разность $(\hat{\omega}_{kQ} - \overline{\omega}_{kQ})$ положительна и при заданном r (или θ) быстро убывает с ростом k.

Заметим, что многие свойства поверхностных волн целиком определяются соответствующими дифференциальными операторами. В связи с этим часто оказывается удобным рассматривать поведение тех или иных величин, характеризующих волну, во всем диапазоне существования собственных значений $\hat{\omega}_{kQ} < \omega < \infty$. Однако для конкретного расстояния физический смысл могут иметь лишь результаты, относящиеся к диапазону частот $\overline{\omega}_{kQ} < \omega < \infty$.

§ 2. Дисперсия фазовых и групповых скоростей

Дисперсия фазовых и групповых скоростей определяется формулами (2.45) —(2.52). Рассмотрим некоторые следствия этих формул.

Волны Лява в неоднородном полупространстве. 1. Фазовая и групповая скорости всегда положительны, причем групповая скорость всегда меньше или равна фазовой:

$$v_{kL}(\omega) \geqslant C_{kL}(\omega) \geqslant 0. \tag{3.4}$$

Это следует из формул (2.46), (2.50); равенство $v_{kL} = C_{kL}$ соответствует предельным случаям, когда интеграл $G_{kL}^{(2)}$ становится пренебрежимо мал по сравнению с другими членами формулы (2.46).

2. Фазовая скорость монотонно убывает с частотой:

$$\frac{dv_{kL}}{d\omega} \leqslant 0. \tag{3.5}$$

Из формул (1.31), (1.32) легко получить соотношение

$$C_{kL}\xi_{kL}\frac{dv_{kL}}{d\omega}=C_{kL}-v_{kL} \tag{3.6}$$

и в силу (3.4) находим (3.5).

3. Максимальным значением фазовой скорости v_{kL} является скорость поперечных волн $b(Z+0)$ в полупространстве $z>Z$. При $v_{kL}>b(Z+0)$ было бы нарушено условие $\tilde{V}_k^{(3)}\to 0$ при $z\to\infty$.

4. Асимптотическим значением фазовой скорости v_{kL} при $\omega\to\infty$ является минимальная скорость поперечных волн в среде $\min b(z)$. Это следует из (2.46) и свойств оператора (1.16), (1.17). При достаточно больших ω собственная функция $\tilde{V}_k^{(3)}(z)$ отлична от нуля только в малой окрестности минимума $b(z)$. Учитывая ограниченность b, ρ и $\tilde{V}_k^{(3)}$, получаем из (2.46), что при $\omega\to\infty$

$$v_{kL}^2\to G_{kL}^{(1)}/G_{kL}^{(0)}=\frac{\int\limits_0^\infty b^2\rho\,(\tilde{V}_k^{(3)})^2\,dz}{\int\limits_0^\infty \rho\,(\tilde{V}_k^{(3)})^2 dz}\to(\min b(z))^2.$$

5. Из спектральной теории операторов следует, что ветви дисперсионных кривых фазовой скорости не пересекаются, т. е. для любых k и таких ω, что $\omega>\hat{\omega}_{k+1L}$,

$$v_{k+1L}(\omega)>v_{kL}(\omega). \tag{3.7}$$

6. Для групповой скорости C_{kL} справедливы свойства 3 и 4, т. е.

$$C_{kL}(\hat{\omega}_{kL})=b(Z+0), \tag{3.8}$$

$$\lim_{\omega\to\infty}C_{kL}(\omega)=\min b(z), \tag{3.9}$$

а свойства 2 и 5 не имеют места, т. е. существуют экстремумы и пересечения ветвей групповой скорости (рис. 2).

Из формул (2.60) для производных фазовой скорости по параметрам среды следует:

7а. При возрастании скорости поперечных волн в какой-либо части среды фазовая скорость увеличивается, поскольку

$$\frac{\partial v_{kL}}{\partial b}(\omega,z)>0. \tag{3.10}$$

7б. При возрастании плотности в той части среды, где скорость поперечных волн больше фазовой скорости ($v_{kL}<b(z)$), фазовая

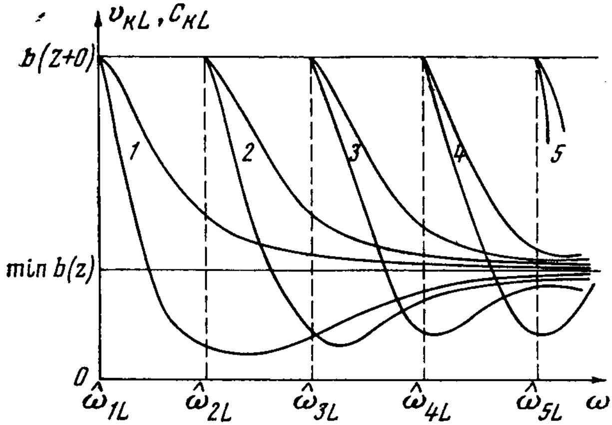


Рис. 2. Дисперсия волн Лява в неоднородном полупространстве

Цифры у кривых — номера гармоник k

скорость возрастает, так как для таких z

$$\frac{\partial v_{kL}}{\partial \rho}(\omega, z) > 0. \tag{3.11}$$

Вне этих интервалов при росте ρ v_{kL} может убывать; в частности, если минимум $b(z)$ достигается у поверхности, в этой точке $\frac{\partial v_{kL}}{\partial \rho}(\omega, 0) < 0$; в таких моделях $\frac{\partial v_{kL}}{\partial \rho}(z)$ меняет знак хотя бы один раз.

Волны Лява в неоднородном шаровом слое. При условии, что мы не рассматриваем излишне низкие частоты ($\omega > \overline{\omega}_{kT}$), свойства 1 и 2 точно такие же, как в плоском случае.

3. Верхний предел v_{kT} определяется только выбором $\overline{\omega}_{kT}$ и, в частности, может быть больше $\max b(R)$.

4. Нижним пределом v_{kT} при $\omega \to \infty$ является величина

$$R_0 \min [b(R)/R].$$

5. Аналогично плоскому случаю.

6. При $\omega \to \infty$ $C_{kT} \to R_0 \min [b(R)/R]$; при $\omega \to \overline{\omega}_{kT}$ C_{kT} ограничено, поскольку формально $C_{kT}(\hat{\omega}_{kQ}) = 0$. Допустимы экстремумы и пересечения ветвей $C_{kT}(\omega)$.

7. Аналогично плоскому случаю.

Волны Рэлея в неоднородном полупространстве. Большинство перечисленных здесь свойств строго не доказано; они вытекают либо из физических соображений, либо из результатов расчетов.

1, 2. Формулы (2.45), (2.49) не исключают возможности, что $C_{kR}(\omega) > v_{kR}(\omega)$ и $dv_{kR}(\omega)/d\omega > 0$. В расчетах такие случаи отмечены только для $k = 1$; при $k > 1$ расчетная фазовая ско-

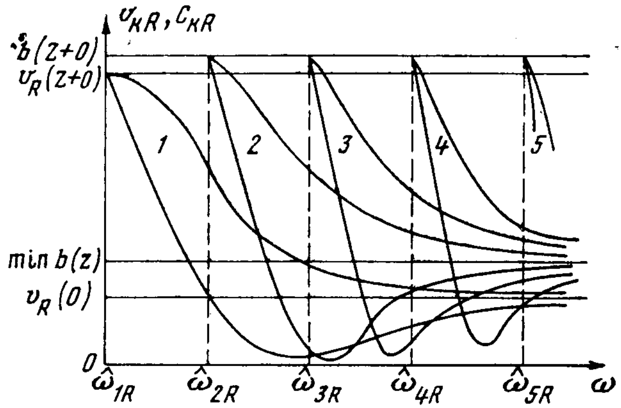


Рис. 3. Дисперсия волн Рэлея в неоднородном полупространстве

рость монотонно убывает с частотой и всегда превосходит групповую скорость.

3. Предельные фазовые скорости при $\omega = \hat\omega_{kR}$ равны:

$$v_{1R}(\hat\omega_{1R}) = v_R(Z+0); \quad v_{kR}(\hat\omega_{kR}) = b(Z+0), \qquad k > 1. \tag{3.12}$$

4. Асимптотическими значениями фазовой скорости при $\omega \to \infty$ в зависимости от значения k и строения модели могут являться [2,40]:

а) Минимальное значение скорости поперечной волны $\min b(z)$ при $v_г(z_i) > \min b(z)$ для $k = 1, 2, \ldots$ Здесь $v_г(z_i)$, $i = 1, 2, \ldots, N$ — скорость граничной волны; z_i — глубина границы разрыва, вдоль которой может распространяться граничная волна; N — число таких границ разрыва. При $z_i = 0$ $v_г(0) = v_R(0)$ (волна Рэлея вдоль границы однородного полупространства с параметрами $a(0)$, $b(0)$); при $z_i > 0$

$$\min\{v_R(z_i - 0), v_R(z_i + 0)\} < v_г(z_i) < \min\{b(z_i - 0), b(z_i + 0)\} \tag{3.13}$$

(волна Стонли вдоль границы двух полупространств с параметрами $a(z_i - 0)$, $b(z_i - 0)$, $\rho(z_i - 0)$ и $a(z_i + 0)$, $b(z_i + 0)$, $\rho(z_i + 0)$).

б) Если для какого-либо i $v_г(z_i) < \min b(z)$, асимптотами ветвей $v_{kR}(\omega)$ для $1 < k \leqslant K \leqslant N$ являются соответствующие $v_г(z_i)$, упорядоченные по k согласно своим численным значениям: чем больше k, тем больше асимптотическое $v_г(z_i)$; K — число границ, для которых выполнено неравенство (3.13). Для остальных ветвей с номерами $k > K$

$$\lim_{\omega \to \infty} v_{kR}(\omega) = \min b(z).$$

5. Ветви дисперсионных кривых $v_{kR}(\omega)$ не пересекаются.

6. Для групповой скорости — предельные значения при $\omega \to \hat{\omega}_{kR}$ и $\omega \to \infty$ такие же, как для v_{kR} (рис. 3).

7. При возрастании скорости продольных волн в какой-либо части среды фазовая скорость волн Рэлея возрастает, так как из (2.60) следует

$$\frac{\partial v_{kR}}{\partial b}(\omega, z) > 0. \tag{3.14}$$

При возрастании скорости поперечных волн у поверхности скорость v_{kR} возрастает, так как

$$\frac{\partial v_{kR}}{\partial b}(\omega, 0) > 0; \tag{3.15}$$

для произвольного z это не очевидно.

Волны Рэлея в неоднородном шаре. Различия с плоским случаем — в отсутствии предельных значений v_{kS} при $\omega \to \hat{\omega}_{kS}$ и в том, что при $\omega \to \infty$ предельные значения v_{kS}, C_{kS} имеют вид либо $R_0 \min [b(R)/R]$ вместо $b(z)$, либо $(R_0/R_i)v_{\text{г}}(R_i)$ вместо $v_{\text{г}}(R_i)$.

§ 3. Законы подобия

Пусть задана модель среды со скоростями $a(z)$ и $b(z)$ и плотностью $\rho(z)$. Зададимся некоторой частотой ω и сравним основные характеристики поверхностной волны (фазовые и групповые скорости, волновые числа, амплитуды смещений) в этой среде и ряде других сред, полученных из нее различными подобными преобразованиями. Знание законов подобия для поверхностных волн может быть полезным при обобщении результатов расчетов на более широкий класс сред.

Законы подобия для скоростей и волновых чисел. 1. При увеличении плотности среды в M раз фазовая и групповая скорости и волновое число не изменяются:

$$\chi(\omega)_{[a,\, b,\, M\rho]} = \chi(\omega)_{[a,\, b,\, \rho]}. \tag{3.16}$$

Здесь χ равно v_{kQ}, C_{kQ} или ξ_{kQ}. Это следует из того, что в уравнениях (2.1), (2.21) и граничных условиях (2.2), (2.22) ρ входит во все члены (ведь $\lambda = (a^2 - 2b^2)\,\rho$ и $\mu = b^2\rho$, и увеличение ρ в M раз не изменяет уравнений).

2. При одновременном увеличении скоростей $a(z)$ и $b(z)$ в среде в M раз происходит как бы трансформация частот

$$\chi(\omega)_{[Ma,\, Mb,\, \rho]} = M\chi\left(\frac{\omega}{M}\right)_{[a,\, b,\, \rho]}, \tag{3.17}$$

где χ равно v_{kQ} или C_{kQ}. Это следует из того, что в уравнениях (2.1), (2.21) только члены, содержащие ω^2, не увеличиваются при этом в M раз, и для сохранения уравнений в прежнем виде необходимо заменить частоту ω частотой $\bar{\omega} = \omega/M$. При этом волновое число ξ_{kQ} не изменяется:

$$\xi_{kQ}(\omega)_{[Ma,\, Mb,\, \rho]} = \xi_{kQ}\left(\frac{\omega}{M}\right)_{[a,\, b,\, \rho]} \tag{3.18}$$

и из $v_{kQ} = \omega/\xi_{kQ}$ вытекает (3.17).

3. При линейном растяжении среды в M раз получаем для скоростей

$$\chi(\omega)_{[a(Mz),\, b(Mz),\, \rho(Mz)]} = \chi\left(\frac{\omega}{M}\right)_{[a(z),\, b(z),\, \rho(z)]}. \tag{3.19}$$

Это следует из того, что при замене переменной $\bar{z} = Mz$ уравнения (2.1), (2.21) сохраняют прежний вид при условии, что вместо ω в них стоит ω/M, а для волнового числа выполнено соотношение

$$\xi_{kQ}(\omega)_{[a(Mz),\, b(Mz),\, \rho(Mz)]} = M\xi_{kQ}\left(\frac{\omega}{M}\right)_{[a,\, b,\, \rho]}. \tag{3.20}$$

Законы подобия для амплитуд смещений. 1. При увеличении плотности среды в M раз спектральная амплитуда $U_{kq}(\omega)$ и смещение $u_{kq}(t)$ уменьшаются в M раз:

$$\begin{array}{lll} U_{kq}(\omega) & = \dfrac{1}{M} U_{kq}(\omega) & \\ \quad [a,\, b,\, M\rho] & \qquad\qquad [a,\, b,\, \rho]. & (3.21) \\ u_{kq}(t) & = \dfrac{1}{M} u_{kq}(t) & \end{array}$$

Это следует из того, что в формулы для u_{kq} и U_{kq} (1.29), (1.30) входит множителем в знаменателе интеграл I_{kQ}, пропорциональный ρ.

2. При одновременном увеличении скоростей $a(z)$ и $b(z)$ во всей среде в M раз, если при этом существует временно́е подобие источников

$$\mathbf{F}(t, r, \varphi, z)_{[Ma,\, Mb,\, \rho]} = M\mathbf{F}(Mt, r, \varphi, z)_{[a,\, b,\, \rho]}, \tag{3.22}$$

справедливо

$$U_{kq}(\omega, r, \varphi, z)_{[Ma,\, Mb,\, \rho]} = \frac{1}{M^2} U_{kq}\left(\frac{\omega}{M}, r, \varphi, z\right)_{[a,\, b,\, \rho]} \tag{3.23}$$

и

$$u_{kq}(t, r, \varphi, z)_{[Ma,\, Mb,\, \rho]} = \frac{1}{M} u_{kq}(Mt, r, \varphi, z)_{[a,\, b,\, \rho]}. \tag{3.24}$$

Это следует из (3.17), (3.18), выражений (1.29) и (1.30) для u_{kq} и U_{kq}, а также из формул (1.9), (1.20), (1.25), (1.33), связывающих W_{kQ} с $\mathbf{F}$.

3. При линейном растяжении среды в M раз, если при этом существует пространственно-временно́е подобие источников:

$$\mathbf{F}(t, r, \varphi, z)_{[a(Mz),\, b(Mz),\, \rho(Mz)]} = M^4\mathbf{F}(Mt, Mr, Mz, \varphi)_{[a(z),\, b(z),\, \rho(z)]}; \tag{3.25}$$

для спектральной амплитуды $U_{kq}(\omega)$ выполняется:

$$U_{kq}(\omega, r, \varphi, z)_{[a(Mz),\, b(Mz),\, \rho(Mz)]} = MU_{kq}\left(\frac{\omega}{M},\, Mr,\, \varphi,\, Mz\right)_{[a(z),\, b(z),\, \rho(z)]}, \tag{3.26}$$

а для смещения $u_{kq}(t)$

$$u_{kq}(t, r, \varphi, z)_{[a(Mz),\, b(Mz),\, \rho(Mz)]} = M^2 u_{kq}(Mt, Mr, \varphi, Mz)_{[a(z),\, b(z),\, \rho(z)]}. \tag{3.27}$$

Этот результат вытекает из тех же формул, что и 2.

Сходные формулы нетрудно получить для шара.

§ 4. Принцип взаимности

Для простейших источников типа сосредоточенных сил легко проследить выполнение принципа взаимности — неизменность спектральных плотностей U_{kq} при перемене местами источника и приемника с сохранением у источника направленности приемника и наоборот. В самом деле, для простой вертикальной силы на глубине h согласно (2.64) имеем:

$$W_{kR} = \bar{V}_k^{(1)}(\omega, h)\, S(\omega),$$

$$U_{kz}^{\downarrow}(h, z) \sim S(\omega)\, \bar{V}_k^{(1)}(\omega, h)\, \bar{V}_k^{(1)}(\omega, z), \tag{3.28}$$

$$U_{kr}^{\downarrow}(h, z) \sim S(\omega)\, \bar{V}_k^{(1)}(\omega, h)\, \bar{V}_k^{(2)}(\omega, z). \tag{3.29}$$

Для простой горизонтальной силы на глубине h, направленной на приемник, согласно (2.84) имеем:

$$W_{kR} = i\bar{V}_k^{(2)}(\omega, h)\, S(\omega), \tag{3.30}$$

$$U_{kz}^{\rightarrow}(h, z) \sim S(\omega)\, i\bar{V}_k^{(2)}(\omega, h)\, \bar{V}_k^{(1)}(\omega, z),$$

$$U_{kr}^{\rightarrow}(h, z) \sim S(\omega)\, i\bar{V}_k^{(2)}(\omega, h)\, \bar{V}_k^{(2)}(\omega, z). \tag{3.31}$$

Для простой горизонтальной силы на глубине h, перпендикулярной направлению эпицентр — приемник, согласно (1.32) имеем:

$$W_{kL} = -i\bar{V}_k^{(3)}(\omega, h)\, S(\omega),$$

$$U_{k\varphi}^{\rightarrow}(h, z) \sim S(\omega)\, \bar{V}_k^{(3)}(\omega, h)\, \bar{V}_k^{(3)}(\omega, z). \tag{3.32}$$

Отсюда и вытекает существование взаимности:

$$\begin{aligned} &U_{kz}^{\downarrow}(h, z) = U_{kz}^{\downarrow}(z, h), \qquad && U_{kr}^{\downarrow}(h, z) = -U_{kz}^{\rightarrow}(z, h),\\ &U_{kr}^{\rightarrow}(h, z) = U_{kr}^{\rightarrow}(z, h), && U_{kz}^{\rightarrow}(h, z) = -U_{kr}^{\downarrow}(z, h)^1.\\ &U_{k\varphi}^{\rightarrow}(h, z) = U_{k\varphi}^{\rightarrow}(z, h), && \end{aligned} \tag{3.33}$$

Аналогичные формулы нетрудно получить для шара.

---

[1] Изменение знака в последних двух формулах вызано изменением направления отсчета горизонтальной компоненты смещения U_{kr}.

§ 5. Зависимость амплитуды смещения от азимута

Рассмотрим, как изменяется спектральная амплитуда k-й гармоники поверхностной волны в функции азимутального угла φ (азимута «эпицентр — станция»). Полученные в § 3 гл. 2 формулы позволяют исследовать эту зависимость для различных неосесимметричных источников (при наличии осевой симметрии такая зависимость, конечно, отсутствует). Мы рассмотрим здесь только два простейших источника — сосредоточенную силу и диполь с моментом, действующие в неоднородном полупространстве.

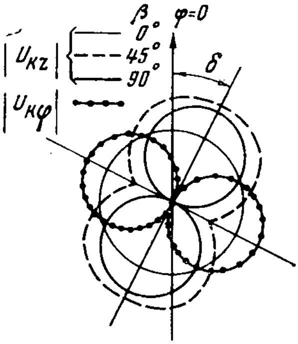


Рис. 4. Характеристики излучения поверхностных волн для источника типа «сосредоточенная сила»

Сосредоточенная сила. Пусть направление действия силы характеризуется углом с вертикалью β и азимутом горизонтальной проекции силы δ. Тогда, как следует из формул (2.86), для волн Лява справедливо

$$|U_{k\varphi}| \sim |E_1 \sin(\delta - \varphi)|, \tag{3.34}$$

для волн Рэлея

$$|U_{kz}| \sim |U_{kr}| \sim \sqrt{E_2^2 + G_2^2 \cos^2(\delta - \varphi)}. \tag{3.35}$$

Здесь E_i и G_i — коэффициенты, зависящие от строения среды, глубины источника, частоты ω, угла β.

В случае $\beta = 0°$ (вертикальная сила) $E_1 = G_2 = 0$, т. е. смещение в волне Рэлея не зависит от φ; для $\beta = 90°$ (горизонтальная сила) $E_2 = 0$ и смещение в волне Рэлея пропорционально $\cos(\delta - \varphi)$. Эти и промежуточный случаи иллюстрируются рис. 4. Сравнивая характеристики излучения для волн Лява и Рэлея, мы видим, что у волн Лява всегда существуют два отчетливо выраженных лепестка, а у волн Рэлея по мере роста β характеристика излучения трансформируется из окружности в двухлепестковую кривую, причем зоны слабого излучения наиболее четко выражены при $\beta = 90°$.

Диполь с моментом. Направление действия силы в этом случае по-прежнему описывается углами β и δ; положение плоскости разрыва — углами γ и α (γ — угол падения, α — азимут падения плоскости разрыва, $\operatorname{ctg}\gamma \operatorname{ctg}\beta = -\cos(\delta - \alpha)$). В этом случае для волн Лява

$$|U_{k\varphi}| \sim |\sin(\delta - \varphi)| \sqrt{E_1^2 + G_1^2\cos^2(\alpha - \varphi)}, \qquad (3.36)$$

для волн Рэлея

$$|U_{kz}| \sim |U_{kr}| \sim [(E_2 + G_2\cos(\alpha - \varphi)\cos(\delta - \varphi))^2 + (E_3\cos(\delta - \varphi) + G_3\cos(\alpha - \varphi))^2]^{1/2}. \qquad (3.37)$$

В некоторых случаях формулы упрощаются. Так, для вертикального разрыва ($\gamma = 90°$, $\delta = \alpha \pm 90°$) $E_1 = E_2 = E_3 = 0$ и

$$|U_{k\varphi}| \sim G_1|\cos(\alpha - \varphi)|,$$

$$|U_{kz}| \sim |U_{kr}| \sim |\cos(\alpha - \varphi)| \sqrt{G_2^2\sin^2(\alpha - \varphi) + G_3^2},$$

для горизонтального разрыва ($\gamma = 0°$, $\beta = 90°$) $G_1 = E_2 = G_2 = G_3 = 0$

$$|U_{k\varphi}| \sim |E_1\sin(\delta - \varphi)|,$$

$$|U_{kz}| \sim |U_{kr}| \sim |E_3\cos(\delta - \varphi)|.$$

Мы видим, что и для дипольного источника в характеристиках излучения волн Лява отчетливо видны два лепестка, ориентировка

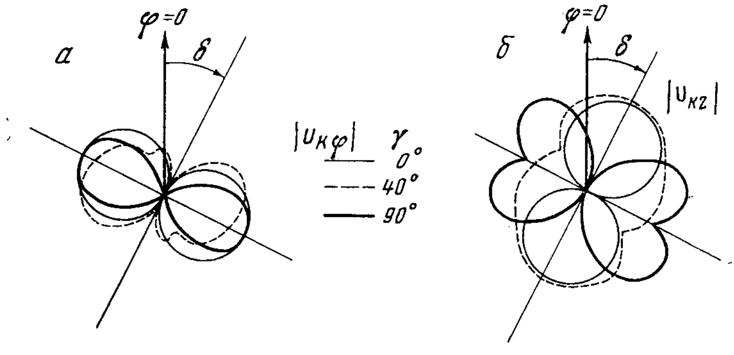


Рис. 5. Характеристики излучения поверхностных волн для источника типа «диполь с моментом»

а — волна Лява; *б* — волна Рэлея

которых определяется направлением действия сил; при определенных значениях параметров источника могут появляться два менее четких дополнительных лепестка, ориентировка которых зависит от положения плоскости разрыва (рис. 5, *а*). В характеристиках излучения волн Рэлея за счет эффекта вертикальных компонент сил зоны ослабленного излучения обычно выражены слабее, чем у волн Лява, а форма характеристик более сложная (рис. 5, *б*). Отсюда следует, что для определения направления подвижки у рассмотренных моделей источника целесообразней использовать волны Лява.

§ 6. Зависимость амплитуды смещения от глубины приемника и источника

Из формулы (1.30) вытекает, что зависимость спектральной амплитуды $|U_{kq}|$ смещения в поверхностной волне от глубины приемника определяется только свойствами среды: при регистрации волны Лява $|U_{k\varphi}| \sim |\tilde{V}_k^{(3)}(z)|$; при регистрации волны Рэлея $|U_{kz}| \sim |\tilde{V}_k^{(1)}(z)|$ — для вертикального прибора, $|U_{kr}| \sim |\tilde{V}_k^{(2)}(z)|$ — для горизонтального прибора. Таким образом, для ответа на поставленный вопрос необходимо исследовать, как изменяются с глубиной собственные функции $\tilde{V}_k^{(i)}$. Ниже мы рассмотрим лишь важнейшие особенности поведения этих функций.

Волны Лява. Свойства функций $\tilde{V}_k^{(3)}$ целиком определяются оператором (1.14), (1.15).

1. Из граничного условия (1.15) вытекает, что при $z = 0$ всегда имеется локальный экстремум $\tilde{V}_k^{(3)}$.

2. При $z > Z$ $\tilde{V}_k^{(3)}(z) = \tilde{V}_k^{(3)}(Z) \exp[-\beta_k(Z+0)(z-Z)]$, и поскольку

$$\beta_k(z) = \sqrt{\xi_{kL}^2 - \frac{\omega^2}{b^2(z)}}, \quad \beta_k(Z+0) \geqslant 0, \quad \text{то } \tilde{V}_k^{(3)}(z)$$

убывает с глубиной.

3. Фактическое монотонное убывание $\tilde{V}_k^{(3)}(z)$ может начинаться и при $z < Z$, а именно при $z > \bar{z}_k$, где $\bar{z}_k$ — максимальная из точек $\bar{z}$, для которых справедливо неравенство $b(\bar{z}-0) < v_{kL}(\omega) < b(\bar{z}+0)$ (рис. 6); $\bar{z}_k$ мы будем называть глубиной проникания волны Лява. Убывание $\tilde{V}_k^{(3)}(z)$ при $\bar{z}_k < z < Z$ происходит не медленнее, чем по линейному закону; при этом, если $b(z)$ монотонно растет, убывание происходит не медленнее, чем у функции

$$\tilde{V}_k^{(3)}(\bar{z}_k) \exp\left[-\int_{\bar{z}_k}^{z} \beta_k(z)\,dz\right].$$

4. Для данного номера k $\bar{z}_k$ не может возрастать с ростом ω (это связано с монотонностью убывания v_{kL} с ростом ω).

Для данной частоты ω $\bar{z}_{k+1} \geqslant \bar{z}_k$, иными словами, глубина проникания $(k+1)$-й гармоники не может быть меньше глубины проникания k-й гармоники.

Для заданной фазовой скорости $v = v_k(\omega_k) = v_{k+1}(\omega_{k+1}) = \ldots$ справедливо $\ldots \omega_{k+2} > \omega_{k+1} > \omega_k \ldots$, и поскольку при этом

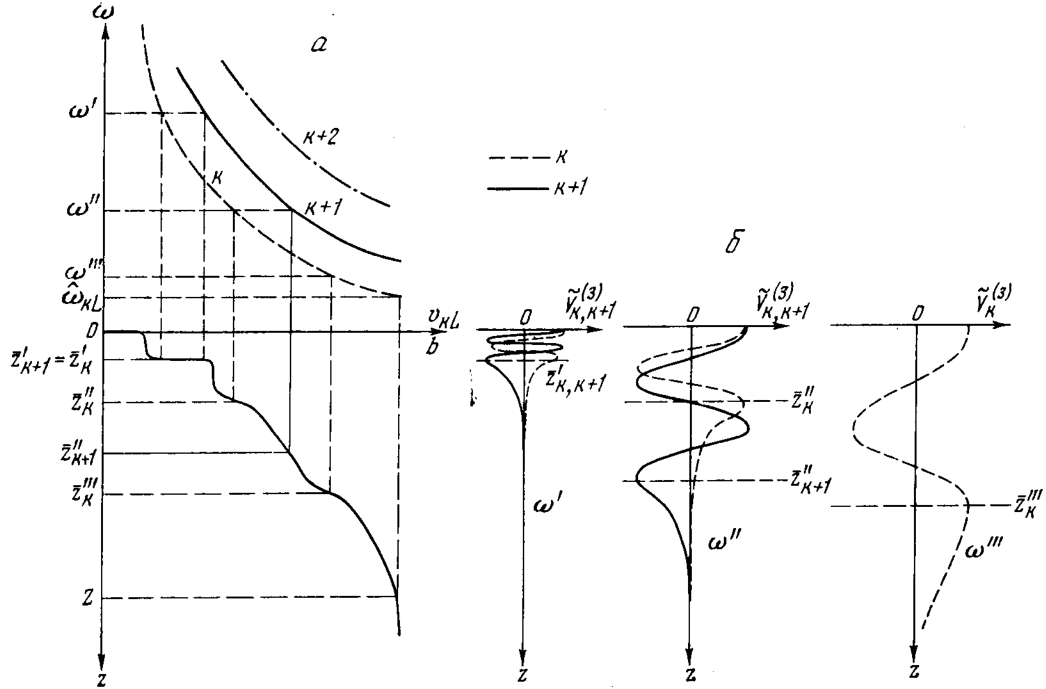


Рис. 6. Глубина проникания поверхностных волн Лява

а — определение глубины проникания для заданных k и ω;

б — поведение собственных функций $\widetilde{V}_k^{(3)}$ для разных k и ω

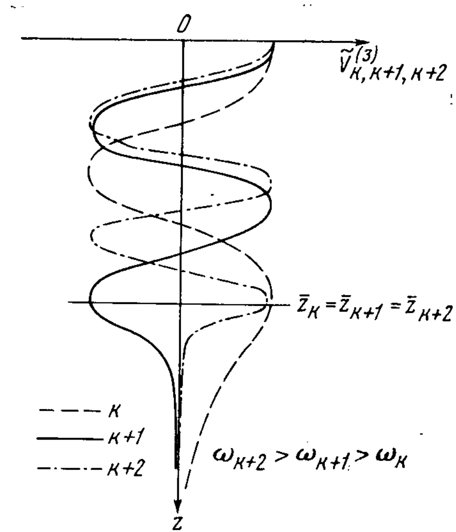


Рис. 7. Поведение собственных функций $\widetilde{V}_k^{(3)}$ для фиксированного значения фазовой скорости и различных k

$\beta_{k+2}(z) > \beta_{k+1}(z) > \beta_k(z)$; $\bar{z}_{k+2} = \bar{z}_{k+1} = \bar{z}_k$, ослабление собственной функции с глубиной при $z > \bar{z}_k$ происходит тем быстрее, чем больше k (рис. 7).

5. В интервале $0 < z < \bar{z}_k$ $\tilde{V}_k^{(3)}$ колеблется, $k - 1$ раз меняя знак. Положение экстремальных и нулевых точек $\tilde{V}_k^{(3)}(z)$ зависит от вида функции $b(z)$ и частоты ω.

В случае шарового слоя при не слишком малых ω поведение $\tilde{V}_{k\nu}^{(3)}(R)$ качественно такое же, как в плоском случае (важна только монотонность $b(R)/R$). Критический радиус $\bar{R}_k$ (аналог $\bar{z}_k$) определяется как минимальный из $\bar{R}$, для которых выполняются неравенства $\frac{b(\bar{R}+0)}{\bar{R}} < \frac{v_{kT}}{R_0} < \frac{b(\bar{R}-0)}{\bar{R}}$. При очень малых ω весь шаровой слой захватывается колебательным процессом, и область экспоненциально убывающих $\tilde{V}_k^{(3)}$ отсутствует.

Волны Рэлея. Поведение функций $\tilde{V}_k^{(1)}$ и $\tilde{V}_k^{(2)}$ целиком определяется оператором (1.16), (1.17).

1. При $z = 0$ согласно граничным условиям (1.17):

$$\operatorname{sign}\left(\frac{d\tilde{V}^{(2)}(0)}{dz}\right) = -\operatorname{sign}\tilde{V}_k^{(1)}(0),$$

$$\operatorname{sign}\tilde{V}_k^{(2)}(0) = \operatorname{sign}\left(\frac{d\tilde{V}_k^{(1)}(0)}{dz}\right).$$

$\tilde{V}_k^{(1)}$ и $V_k^{(2)}$ известны с точностью до одного и того же не зависящего от z коэффициента; поэтому мы примем, что $\tilde{V}_k^{(1)}(0) > 0$. Тогда возможны две знаковые комбинации: $\tilde{V}_k^{(2)}(0) > 0$, $(d\tilde{V}_k^{(2)}(0)/dz) < 0$, $(d\tilde{V}_k^{(1)}(0)/dz) > 0$ или $\tilde{V}_k^{(2)}(0) < 0$, $(d\tilde{V}_k^{(1)}(0)/dz) < 0$, $(d\tilde{V}_k^{(2)}(0)/dz) < 0$; следовательно, во всех случаях одна из функций возрастает, а другая убывает по модулю при локальном удалении от свободной поверхности.

2. При $z > Z$ λ, μ и ρ — константы и согласно (1.16)

$$\tilde{V}_k^{(1)}(z) = c\{\exp[-\gamma_k(z-Z)] + c_1\exp[-\beta_k(z-Z)]\}, \quad (3.38)$$

$$\tilde{V}_k^{(2)}(z) = -c\left\{\frac{\xi_{kR}}{\gamma_k}\exp[-\gamma_k(z-Z)] + \frac{\beta_k c_1}{\xi_{kR}}\exp[-\beta_k(z-Z)]\right\},$$

где

$$\gamma_k = \sqrt{\xi_{kR}^2 - \frac{\omega^2}{a^2(Z+0)}}, \qquad \beta_k = \sqrt{\xi_{kR}^2 - \frac{\omega^2}{b^2(Z+0)}}.$$

Так как $\gamma_k > \beta_k > 0$, очевидно, что, начиная с некоторого $z > Z$, $\tilde{V}_k^{(1)} \to 0$, $\tilde{V}_k^{(2)} \to 0$ с ростом z. При этом $\lim\limits_{z\to\infty} \tilde{V}_k^{(2)}/\tilde{V}_k^{(1)} = -\frac{\beta_k}{\xi_{Qk}} < 0$. При некоторых значениях c_1 $\tilde{V}_k^{(1)}$ и $\tilde{V}_k^{(2)}$ могут при $z > Z$ однократно менять знак; при этом, если изменяется знак

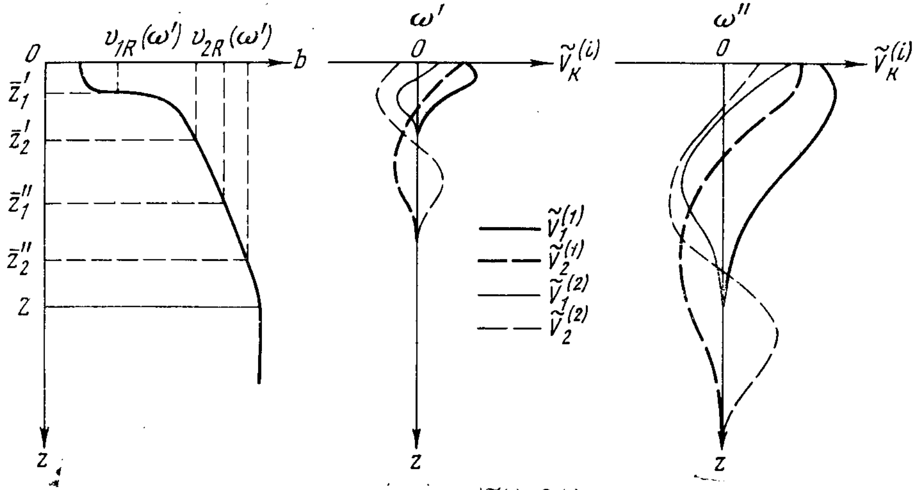


Рис. 8. Поведение собственных функций $\widetilde{V}_k^{(1)}$, $\widetilde{V}_k^{(2)}$ для заданных ω

$\widetilde{V}_k^{(1)}$ (в точке $z' > Z$), обязательно изменяется знак $\widetilde{V}_k^{(2)}$ (в точке $z'' > z'$).

3. Существует точка $\bar{z}_k$, определяемая тем же условием, что и для $\widetilde{V}_k^{(3)}$, ниже которой при условии монотонного возрастания $a(z)$, $b(z)$ приближенно выполняются соотношения:

$$\widetilde{V}_k^{(1)} \simeq c\left\{\exp\left[-\int_{\bar{z}_k}^{z} \gamma_k(z)\,dz\right] + c_1(z)\exp\left[-\int_{\bar{z}_k}^{z} \beta_k(z)\,dz\right]\right\}, \quad (3.39)$$

$$\widetilde{V}_k^{(2)} \simeq -c\left[\frac{\xi_{kR}}{\gamma_k(z)}\exp\left(-\int_{\bar{z}_k}^{z} \gamma_k\,dz\right) + c_1(z)\,\frac{\beta_k(z)}{\xi_{kR}}\exp\left(-\int_{\bar{z}_k}^{z} \beta_k\,dz\right)\right].$$

4. В интервале $0 < z < \bar{z}_k \widetilde{V}_k^{(1)}$, $\widetilde{V}_k^{(2)}$ осциллируют. При этом в большинстве рассмотренных случаев общее число нулей $\widetilde{V}_k^{(2)}$ $\sigma_k^{(2)}$ равно или на единицу больше, чем число нулей $\widetilde{V}_k^{(1)}$ $\sigma_k^{(1)}$. Номер гармоники k, как правило, связан с числом нулей функций $\widetilde{V}_k^{(1)}$, $\widetilde{V}_k^{(2)}$ соотношением $k = \mathrm{Ent}\,[(\sigma_k^{(1)} + \sigma_k^{(2)})/2]$, однако следует помнить, что это свойство строго не доказано; более того, в ряде моделей (далеких, впрочем, от реальных геологических сред) это соотношение не выполняется.

Типичное поведение $\widetilde{V}_k^{(1)}(z)$, $\widetilde{V}_k^{(2)}(z)$ показано на рис. 8.

Зависимость амплитуды смещения от глубины источника. В случае, когда в очаге действует точечный источник — простая сила, диполь или их комбинация, для оценки изменения амплитуды смещения в функции глубины очага h можно воспользоваться формулами (2.82), (2.100). При этом в общем случае зависимость $|U_{kq}(h)|$ может быть весьма сложной, так как $|U_{kq}(h)|^2$ является квадратичной формой от функций $\tilde{V}_k^{(i)}$ и их производных по глубине. Наиболее общим свойством поля при любой модели источника является его убывание с h, начиная с некоторого $h \geqslant z_k$, по закону, близкому к экспоненциальному. Для простейших источников (вертикальная или горизонтальная сила) зависимость от глубины источника целиком определяется моделью среды: в случае вертикальной силы

$$U_{kz} \sim U_{kr} \sim \tilde{V}_k^{(1)}(h),$$

в случае горизонтальной силы

$$U_{kz} \sim U_{kr} \sim \tilde{V}_k^{(2)}(h), \qquad U_{k\varphi} \sim \tilde{V}_k^{(3)}(h).$$

Таким образом, сюда полностью переносятся результаты предыдущего раздела. В случае точечного центра расширения

$$U_{kz} \sim U_{kr} \sim \left(-\xi_{kR}\tilde{V}_k^{(2)}(h) + \frac{d\tilde{V}_k^{(1)}(h)}{dz}\right), \qquad U_{k\varphi} = 0.$$

Для неидеально сосредоточенных источников, действующих в пределах конечного интервала глубин, зависимость амплитуды смещения от положения очага выражена менее четко, чем для точечных источников (в частности, зоны резко пониженных значений амплитуд, связанные с узлами $\tilde{V}_k^{(i)}$, должны иметь незначительную протяженность по h).

§ 7. Зависимость амплитуды смещения от частоты и номера гармоники

Зависимость $|U_{kq}|$ от частоты ω при заданных k, q и положении приемника определяется строением среды и свойствами источника. Из формул § 3 гл. 2 следует, что в ряде случаев удается разделить влияние среды и источника, представив $|U_{kq}(\omega)|$ в виде $\frac{1}{\sqrt{r}}\tilde{B}_{kq}^j(\omega)\,|S(\omega)|$, где $S(\omega)$ — пространственно-временно́й спектр источника, а множитель $\tilde{B}_{kq}^j(\omega)$ имеет смысл частотной характеристики среды («excitation function» в английской терминологии) для данной глубины h и модели источника j, данной глубины z и ориентировки q приемника. Мы видим, что

$$\tilde{B}_{kq}^j(\omega) = \left(\sqrt{\omega v_{kQ}(\omega)}\,C_{kQ}(\omega)\,I_{kQ}(\omega)\right)^{-1}\tilde{V}_k^{(i_j)}(\omega, h)\,\tilde{V}_k^{(i_q)}(\omega, z). \quad (3.40)$$

Рассмотрим характер изменения $\tilde{B}_{kq}^j$ с ω. На частотах, близких к критической $\hat{\omega}_{kQ}$, колебания захватывают всю среду, и интеграл от квадратов собственных функций I_{kQ} неограниченно возрастает, причем быстрее, чем $1/\sqrt{\omega}$. В результате $\tilde{B}_{kq}^j(\omega)$ стремится к нулю при $\omega \to \hat{\omega}_{kQ}$ независимо от k и q.

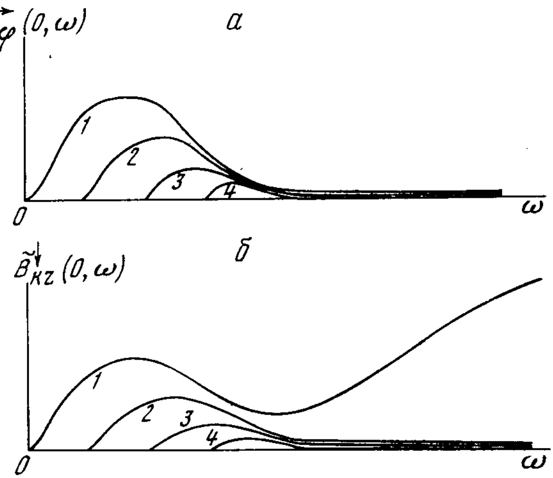


Рис. 9. Частотные характеристики среды для источника типа «сосредоточенная сила» при разных k

а — волны Лява, горизонтальная сила; *б* — волны Рэлея, вертикальная сила, вертикальная компонента смещения. Цифры у кривых — номера гармоник k

На очень высоких частотах колебания в волнах Лява концентрируются в областях минимума $b(z)$; в волнах Рэлея — у свободной поверхности, в областях минимумов $b(z)$ и тех минимумов $a(z)$, в которых $a(z) < b(Z+0)$. Амплитуды смещений экспоненциально убывают с удалением от зон концентрации, причем скорость убывания растет с ω. Поэтому при $\omega \to \infty$ $\tilde{B}^j_{kq}$ будет стремиться к нулю, если источник и приемник расположены в одной и той же области концентрации колебаний. Пусть это условие выполнено: тем не менее $\tilde{B}^j_{kq}(\omega) \to 0$ при $\omega \to \infty$ для всех волн, кроме тех, которые на очень высоких частотах становятся граничными (сюда относится собственно волна Рэлея, $Q = R$, $k = 1$ и волны Стопли на границах разрыва внутри среды). Для этих волн возможно неограниченное возрастание $\tilde{B}^j_{kq}(\omega)$ с ростом ω; физически это объясняется тем, что колебаниями захвачен очень тонкий слой, и возбуждение весьма эффективно. Ограничение спектральных амплитуд происходит за счет множителя $S(\omega)$.

На промежуточных частотах из-за почти монотонного поведения v_{kQ} и I_{kQ} экстремумы $\tilde{B}^j_{kq}$ определяются экстремумами групповой скорости C_{kQ}, а также экстремумами и нулями собственных функций $\tilde{V}^{(iq)}_k$. Наиболее просто выглядят графики $\tilde{B}^j_{kq}(\omega)$ для поверхностного источника (минимумам групповой скорости соответствуют максимумы $\tilde{B}^j_{kq}(\omega)$ и наоборот) (рис. 9). Когда источник или приемник расположен внутри среды, помимо спада $\tilde{B}^j_{kq}(\omega)$ на высоких частотах, могут появляться дополнительные экстремумы и нули $\tilde{B}^j_{kq}(\omega)$ на промежуточных частотах; их число различно для разных h и растет с k.

Зависимость амплитуды смещений от номера гармоники при фиксированной частоте определяется моделью среды и механизмом источника. Для поверхностного источника амплитуды высших гармоник, как правило, меньше амплитуд основной, однако убывание $|U_{kq}|$ с ростом k происходит медленно (рис. 9). Для источника внутри среды в силу колебательного характера $\tilde{V}_k^{(iq)}$ и условия $\bar{z}_{k+1} > \bar{z}_k$ возможны случаи, когда на данной частоте спектральные амплитуды некоторых высших гармоник существенно больше, чем у остальных, включая первую. Это в особенности относится к большим глубинам очага. У источника типа центра расширения относительное возбуждение высших гармоник по сравнению с основной слабее, чем у других источников. Из сказанного следует, что при описании суммарного поля поверхностных волн, вообще говоря, нельзя ограничиваться учетом малого числа гармоник. Однако во многих случаях разумные ограничения частотного диапазона и интервала времен, для которых оценивается поле, позволяют эффективно уменьшить число учитываемых гармоник.

§ 8. Поляризация

Как отмечалось ранее, на больших расстояниях смещение частиц в волнах Лява происходит параллельно вектору $\mathbf{a}_\varphi$, т. е. перпендикулярно к вертикальной плоскости zr (сечению большого круга $R\theta$), проходящей через приемник и источник. Движение частиц в волнах рэлеевского типа происходит на больших расстояниях только в плоскости zr ($R\theta$). Для нестационарных волн траектории движения частиц могут быть весьма сложными; в стационарной волне движение происходит по эллипсу, главные оси которого параллельны $\mathbf{a}_z$ и $\mathbf{a}_r$ или $\mathbf{a}_R$ и $\mathbf{a}_\theta$. Это следует из того, что отношение спектральных амплитуд двух компонент (эллиптичность) имеет вид:

$$\varkappa_k(\omega, z) = \frac{U_{kr}(\omega, z)}{U_{kz}(\omega, z)} = -i\,\frac{\tilde{V}_k^{(2)}(\omega, z)}{\tilde{V}_k^{(1)}(\omega, z)} \tag{3.41}$$

или

$$\varkappa_k(\omega, R) = U_{k\theta}(\omega, R)/U_{kR}(\omega, R) = -i(-1)^g\,\tilde{V}_{k\nu}^{(2)}(R)/\tilde{V}_{k\nu}^{(1)}(R), \tag{3.42}$$

где $\tilde{V}_k^{(i)}$, $\tilde{V}_{k\nu}^{(i)}$ — действительные функции.

Изменение знака $\varkappa_k$ при проходе волны через эпицентр или антиэпицентр — кажущееся, оно связано с постоянством положительного направления отсчета $u_{k\theta}$ (и $U_{k\theta}$) от эпицентра вне зависимости от направления подхода волны. $\varkappa_k(\omega, z)$ является, как мы видим, функцией положения приемника и частоты и, подобно фазовой скорости, не зависит от источника, а лишь от свойств среды. При поверхностном приемнике ($z = 0$) отмечается следующее асимптотическое поведение $\varkappa_k$ при $\omega \to \infty$ (мы рассмотрим только наиболее типичный случай $\min b(z) = b(0) > v_R(0)$).

Для $k = 1$ (собственно рэлеевской волны) $\varkappa_1(\omega, 0) \to \varkappa_R(0)$, т. е. поляризация становится такой же, как у рэлеевской волны в однородном полупространстве с параметрами, как у поверхности нашей модели.

Отсюда следует, что

$$\lim_{\omega\to\infty} \varkappa_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{v_R(0)}{b(0)}\right)^2} \Bigg/ \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{v_R(0)}{b(0)}\right)^2\right] \tag{3.43}$$

и для возможных соотношений $0{,}875 < v_R(0)/b(0) < 0{,}956$ лежит в пределах 0,570—0,785. Для $v_R(0)/b(0) = 0{,}92$ (что соответствует $a(0)/b(0) = \sqrt{3}$) $\varkappa_1 = 0{,}685$. При $k > 1$

$$\lim_{\omega\to\infty} \varkappa_k(\omega, 0) = \frac{1}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{b(0)}{a(0)}\right)^2} \tag{3.44}$$

и для возможных соотношений $0 < b(0)/a(0) < 0{,}7$ $0{,}5 < \varkappa_k < 0{,}7$. Это легко понять, если учесть, что высшие гармоники при $\omega \to \infty$ образуются из скользящих вдоль поверхности волн SV, а отношение компонент в такой волне подчиняется формуле (3.44). Отсюда следует, что на достаточно высоких частотах движение частиц в любой рэлеевской волне — возвратное. С уменьшением частоты может происходить изменение направления вращения. Для $k = 1$ такое явление не типично и наблюдается лишь при исключительно резких изменениях $b(z)$. Для $k > 1$ изменение направления вращения с изменением частоты характерно для большинства исследуемых моделей. При этом изменение направления вращения обычно вызвано изменением знака (переходом через нуль) горизонтальной компоненты (собственной функции $\tilde{V}_k^{(2)}(0, \omega)$). Однако известны примеры обращения в нуль и вертикальной компоненты (собственной функции $\tilde{V}_k^{(1)}(0, \omega)$).

§ 9. Поглощение

Рассмотренный в § 2 гл. 2 аппарат частных производных фазовой скорости удобно использовать для приближенного учета поглощения упругих волн. Как известно [36, 42, 103], малое поглощение эффективно описывается внесением комплексных добавок $\delta\mu$, $\delta\lambda$ в упругие модули непоглощающей среды μ и λ. Будем считать, что $|\delta\mu| \ll \mu$, $|\delta\lambda| \ll \lambda$; обозначим действительные части $\delta\mu$, $\delta\lambda$, как $\delta'\mu, \delta'\lambda$; мнимые — $\delta''\mu$, $\delta''\lambda$. Будем считать $\delta'\mu$, $\delta'\lambda$, $\delta''\mu$, $\delta''\lambda$ функциями частоты ω и координаты z. Скорости упругих волн $a(z)$ и $b(z)$ также получат комплексные возмущения $\delta a(z, \omega)$ и $\delta b(z, \omega)$; $\delta a \approx (\delta\lambda + 2\delta\mu)/2a\rho$, $\delta b \approx \delta\mu/2b\rho$; $|\delta a| \ll a$, $|\delta b| \ll b$. Это приводит к комплексному возмущению фазовой скорости $\delta v_{kQ} = \delta_a v_{kQ} + \delta_b v_{kQ} = \delta' v_{kQ} + i\delta'' v_{kQ}$, величину которого нетрудно определить, пользуясь формулами (2.60). Мнимая часть возмущения фазовой скорости $\delta'' v_{kQ}$ непосредственно связана с коэффициентом поглощения α_{kQ} поверхностной волны

$$\alpha_{kQ}(\omega) = \frac{\omega\delta''v_{kQ}}{v_{kQ}^2} = \frac{\omega}{2v_{kQ}}\left[\int\limits_0^\infty \delta_a''v_{kQ}(\omega, z)\,a(z)\,Q_a^{-1}(\omega, z)\,dz + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^\infty \delta_b''v_{kQ}(\omega, z)\,b(z)\,Q_b^{-1}(\omega, z)\,dz\right]. \quad (3.45)$$

Аналогичная формула (с интегрированием по R от 0 до R_0) имеет место для шара. Здесь Q_a^{-1}, Q_b^{-1} — функции диссипации объемных волн, определенные как

$$Q_a^{-1} = \frac{\delta''\lambda + 2\delta''\mu}{\lambda + 2\mu}, \qquad Q_b^{-1} = \frac{\delta''\mu}{\mu}.$$

Конкретный вид зависимостей $\delta'\mu$, $\delta'\lambda$, Q_a^{-1}, Q_b^{-1} от частоты ω определяется механизмом диссипации. Для классических моделей (тел Фойгта, Максвелла) Q частотно зависимы, а действительная часть возмущения фазовой скорости $\delta'v_{kQ}$ имеет порядок Q^{-2}, что позволяет пренебречь эффектом дисперсии за счет поглощения [42, 140]. Для более сложных моделей с отсутствием зависимости Q от частоты в широком диапазоне частот $\delta'v_{kQ}$ имеет порядок Q^{-1}, и им не следует пренебрегать при точных расчетах дисперсии фазовых скоростей в поглощающих средах [119]. Кажущаяся функция диссипации для поверхностной волны Q_{kQ}^{-1} связана с α_{kQ} известной формулой

$$Q_{kQ}^{-1} = \frac{2C_{kQ}\alpha_{kQ}}{\omega}. \quad (3.46)$$

Глава 4

ПОВЕРХНОСТНЫЕ И КАНАЛОВЫЕ ВОЛНЫ В МОДЕЛЯХ С ВНУТРЕННИМ ВОЛНОВОДОМ

Из свойств волн Лява и Рэлея, рассмотренных в гл. 3, очевидно, что на достаточно высоких частотах поля этих волн могут концентрироваться вблизи свободной поверхности и в зонах локальных минимумов скорости. Области концентрации высокочастотных волновых полей обычно называют волноводами; волны, концентрирующиеся в близповерхностном волноводе,— поверхностными, а во внутренних волноводах — каналовыми волнами. В геофизике часто рассматриваются модели Земли, обладающие как близповерхностным, так и внутренними волноводами, и особое внимание уделяется обнаружению внутренних волноводов. Для

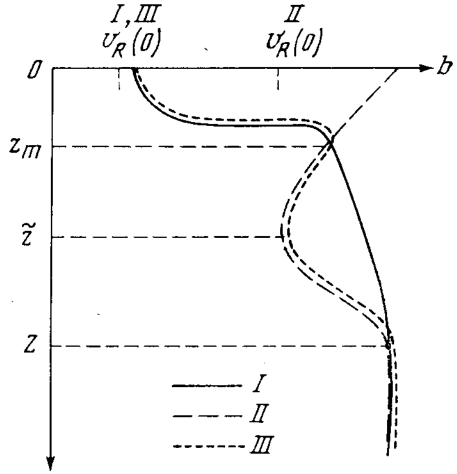


Рис. 10. Распределение скоростей поперечных волн в моделях *I*, *II*, *III*

лучшего понимания сложной волновой картины, возникающей в моделях с несколькими волноводами, полезно вначале составить представление о свойствах полей упругих колебаний в простейших моделях, комбинацией которых можно образовать модель с несколькими волноводами. Введем с этой целью модели *I* и *II* (рис. 10): в первой из них скорость поперечных волн монотонно растет с глубиной; во второй скорость $b(z)$ вначале убывает, а потом возрастает с z, так что единственный минимум $b(z)$ достигается на некоторой глубине $\tilde{z}$. На значение скорости $b(\tilde{z})$ наложим дополнительное ограничение $b(\tilde{z}) > v_R(0)$, существенно упрощающее особенности поля рэлеевских волн. Затем мы рассмотрим модель *III*, у которой до некоторой глубины ход $b(z)$ такой же, как в модели *I*, а ниже этой глубины z^* такой же, как в модели *II*, причем $b(z^* + 0) = b(z^* - 0)$. Эта модель обладает двумя волноводами и является достаточно близкой к моделям Земли, изучаемым в геофизике [51, 132].

Мы не будем специально останавливаться на свойствах волнового поля в модели *I*, так как они достаточно подробно рассматривались в предшествующей главе; на рис. 2 и 3 схематически изображены дисперсионные кривые, а на рис. 6 и 8 — графики $\tilde{V}_k^{(i)}(z)$ для нескольких гармоник и ряда частот, демонстрирующие эффект концентрации колебаний в поверхностном волноводе модели *I* по мере роста частоты. Отметим только сравнительно простой ход графиков v_{kQ} и C_{kQ}, существенные различия в дисперсии основных гармоник волн Лява и Рэлея и сравнительно малые различия в дисперсии высших гармоник.

§ 1. Волновое поле в модели II с внутренним волноводом

Дисперсия. Дисперсия волн Лява и Рэлея показана на рис. 11. Мы видим, что из-за меньших различий в максимальной и минимальной скоростях поперечных волн кривые $v_{kQ}(\omega)$ в этой модели значительно более пологие, чем в модели I. При этом наблюдается попарное совпадение кривых v_{k+1R} и $v_{kL} (k \geqslant 1)$ в интервалах частот $\omega_k^* < \omega < \infty$, причем ω_k^* растет с ростом k. Групповые скорости в этом интервале попарно совпадают и практически стационарны. Это свидетельствует об одинаковой физической природе

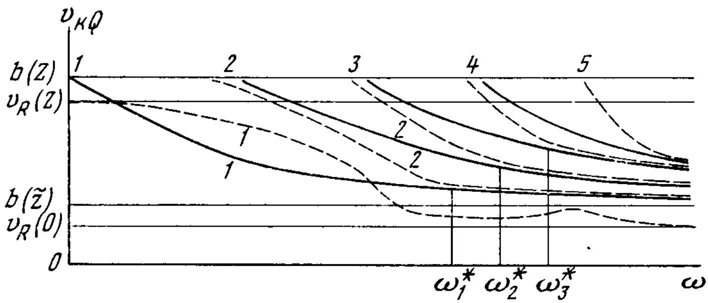


Рис. 11. Дисперсия фазовых скоростей поверхностных волн в модели II рис. 10

Скорости v_{kL} — сплошные линии, v_{kR} — пунктир. Цифры у кривых — номера гармоник k

соответствующих гармоник Лява и Рэлея в данном диапазоне частот. Высокочастотное поле Лява в такой модели образуется в результате конструктивной интерференции многократно рефрагированных волн SH [10, 11, 65]; аналогичным путем поле волн Рэлея при $k > 1$ образовано интерефереıщией таких же волн SV. При $\omega < \omega_k^*$ рефрагированные волны отходят в некоторых точках от оси канала настолько далеко, что начинает сказываться присутствие свободной поверхности. Этот эффект существенно различен для волн SV и SH, и дисперсионные кривые начинают расходиться. Поскольку ω_{kQ} для фиксированного v (соответствующего определенному положению вершин лучей элементарных волн) растет с ростом k, частота ω_k^*, на которой начинается расхождение, также растет с k.

Сказанное подтверждается также рассмотрением производных $\partial v_{kQ}/\partial\chi$ как функций глубины z $(\chi = a,\ b,\ \rho)$. Производные $\partial v_{k+1R}/\partial b$, $\partial v_{kL}/\partial b$ при $\omega_k^* < \omega < \infty$ максимальны в окрестностях волновода и близки по своим значениям. Производные $\partial v_{kQ}/\partial\rho$, $\partial v_{kQ}/\partial a$ в той же области глубин практически нулевые, так как скорость продольных волн и плотность не влияют на условия интерференции рефрагированных поперечных волн.

Что касается волны $1R$, то благодаря принятому условию $b(\tilde{z}) > v_R(0)$ она сохраняет свойства граничной волны при любом ω. При $\omega \to \infty$ ее фазовая скорость стремится к рэлеевской скорости у свободной поверхности $v_R(0)$; при $\omega \to 0$ стремится к скорости волн Рэлея в полупространстве $v_R(Z+0)$; на промежуточных частотах имеется минимум v_{1R}; производные $\partial v_{1R}/\partial \chi$ ведут себя качественно так же, как в модели I, в частности, максимум $\partial v_{1R}/\partial b(z)$ при уменьшении частоты закономерно передвигается в глубь среды.

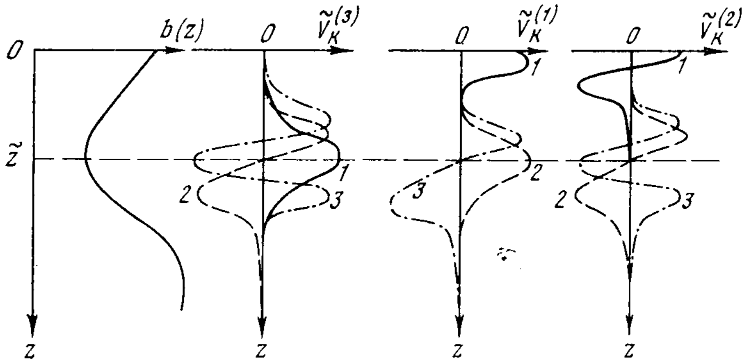


Рис. 12. Поведение собственных функций $\widetilde{V}_k^{(i)}(z)$ для частот $\omega > \omega_3^*$ в модели II

Слева — модель среды, цифры у кривых — номера k

Амплитуды. На высоких частотах $\omega > \omega_k^*$ поле всех волн Лява, всех высших гармоник волн Рэлея концентрируется в области пониженных $b(z)$ (рис. 12). Амплитуды этих волн, которые мы будем называть каналовыми, максимальны в случае, когда источник и приемник расположены внутри этой области; по мере удаления от оси волновода после нескольких осцилляций амплитуды $|U_{kq}(z)|$ начинают экспоненциально убывать. Поэтому поле достаточно высокочастотных каналовых волн не может наблюдаться на свободной поверхности или возбуждаться источником, расположенным вдали от оси волновода. Рассмотрение поведения $|U_{kq}(z)|$ как функции z показывает, что модуль амплитуды симметричен относительно оси волновода; при этом поведение $|U_{kz}^{\downarrow}|$, $|U_{kr}^{\downarrow}|$ для вертикального воздействия и $|U_{k\varphi}^{\rightarrow}|$ для горизонтального воздействия качественно сходно; вертикальный источник возбуждает более интенсивное поле каналовых волн SV, чем горизонтальный.

При $\omega < \omega_k^*$ концентрация колебаний в волноводе постепенно прекращается, поскольку область значительных амплитуд достигает свободной поверхности и слоев под волноводом. Это происходит раньше у волн Рэлея, чем у волн Лява, что связано, видимо, с различным эффектом отражения от свободной поверхности волн SV и SH.

Что касается основной гармоники волн Рэлея, то она не концентрируется в волноводе; на высоких частотах колебания максимальны у свободной поверхности, а с уменьшением ω постепенно захватывают все более глубокие части среды, как и в моделях без внутренних волноводов.

§ 2. Волновое поле в модели с двумя волноводами *III*

Рассмотрим такую модель *III* (рис. 10), у которой близповерхностный волновод выражен более четко, чем внутренний; в частности, абсолютный минимум $b(z)$ достигается у свободной поверхности, и различие в значениях $b(0)$ и $b(\tilde{z})$ не слишком мало. Такая модель близка к некоторым моделям Земли.

Дисперсия. Ветви дисперсионных кривых $v_{kQ}(\omega)$ в модели *III* выглядят качественно иначе, чем в моделях *I*, *II*: начиная с некоторого $k^* > 1$ и в некотором диапазоне частот $\omega > \omega_k^*$ и фазовых скоростей $v_{kQ}^* > v_{kQ} > b(0)$ эти кривые имеют вид лестниц, образованных крутыми участками типа *I* и пологими участками типа *II*, отделенными узкими переходными зонами (рис. 13). Две соседние кривые $v_{kQ}(\omega)$ и $v_{k+1Q}(\omega)$ в переходных зонах сближаются, причем тем теснее, чем выше k.

Последовательности сблизившихся концами участков *I* различных гармоник образуют систему «крутых» прерывистых линий $v_{jQ}^{I}(\omega)$ $(j = k^*, k^* + 1, \ldots, \infty)$ (пунктир на рис. 13); последовательности участков *II* образуют систему «пологих» прерывистых линий $v_{iQ}^{II}(\omega)$ $(i = 1, 2, \ldots, \infty)$ (точечные линии на рис. 13). Сравнение с моделями *I* и *II* показывает, что прерывистые кривые $v_{jQ}^{I}(\omega)$ в рассматриваемом диапазоне частот и скоростей близки к соответствующим кривым $v_{kQ}(\omega)$ в модели *I* $(j = k \geqslant k^*)$; прерывистые кривые v_{iQ}^{I} почти совпадают с соответствующими кривыми $v_{kQ}(\omega)$ в модели *II* ($i = k$ для волн Лява, $i = k + 1$, $k \geqslant k^*$ для волн Рэлея).

По мере роста номера гармоники k:

1) расширяется диапазон частот, в котором волны $v_{kQ}(\omega)$ имеют «ступеньки»; при этом пределом $\lim\limits_{k\to\infty} v_{kQ}^*$ является b_m — максимальное значение скорости поперечных волн в антиволноводе — слое между двумя волноводами;

2) переходные зоны между участками *I*, *II* сужаются настолько, что в них происходят как бы квазипересечения кривых v_{kQ} и v_{k+1Q}, а кривые $v_{jQ}^{I}(\omega)$ и $v_{iQ}^{II}(\omega)$ становятся практически непрерывными;

3) совпадение кривых v_{jQ}^{I} и v_{jQ}^{II} с соответствующими кривыми v_{kQ} в моделях *I* и *II* становится все более идеальным.

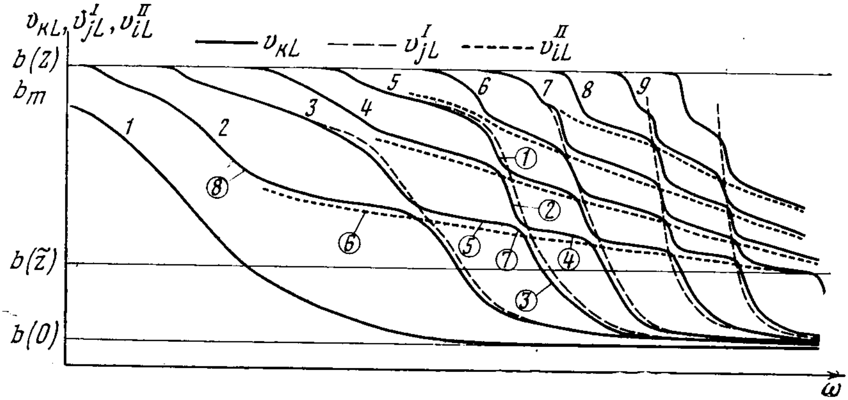


Рис. 13. Фазовые скорости и системы прерывистых линий v^{I}_{jL}, v^{II}_{jL} в модели *III*

Арабские цифры — номера гармоник k, цифры в кружках — точки спектра, поведение собственных функций в которых показано на рис. 15

На участках *I* производные фазовой скорости $\partial v_{kQ}/\partial b\ (z)$ максимальны в области близповерхностного волновода, на участках *II* — в области внутреннего волновода, при этом во внутреннем волноводе

$$\frac{\partial v_{kQ}}{\partial a} \approx \frac{\partial v_{kQ}}{\partial \rho} \approx 0.$$

В том же диапазоне частот и скоростей кривые групповой скорости $C_{kQ}(\omega)$ в модели *III* ведут себя следующим образом: на участках *I* они почти совпадают с ветвями соответствующих кривых в модели *I*, причем наиболее высокочастотному участку *I* соответствует основной минимум групповой скорости $C_{jQ}(\omega)$, остальным участкам — крутоспадающие участки ветви $C_{jQ}(\omega)$. Участкам *II* соответствуют практически стационарные групповые скорости, почти такие же, как у соответствующих ветвей $C_{iQ}(\omega)$ в модели *II*. В переходных зонах происходят резкие перепады групповой скорости, причем при достаточно больших k переходные зоны настолько узки, что перепады приобретают вид разрывов C_{kQ} (со скачком разного знака для разных k) (рис. 14).

Амплитуды. Рассмотрим, как ведут себя спектральные амплитуды смещений свободной поверхности в модели *III* при изменении глубины h элементарного источника (точечной вертикальной или горизонтальной силы) на различных частотах (отмеченных цифрами в кружках на рис. 13). При этом не будем фиксировать номер гармоники k, а будем двигаться от высоких частот к низким вдоль какой-нибудь из прерывистых линий системы v^{I}_{jQ}, а затем системы v^{II}_{iQ}. При этом k будет убывать на единицу с уменьшением ω при прохождении каждого пропуска (переходной зоны). Для прерывистых линий v^{I}_{jQ} колебания оказываются сконцентрированными

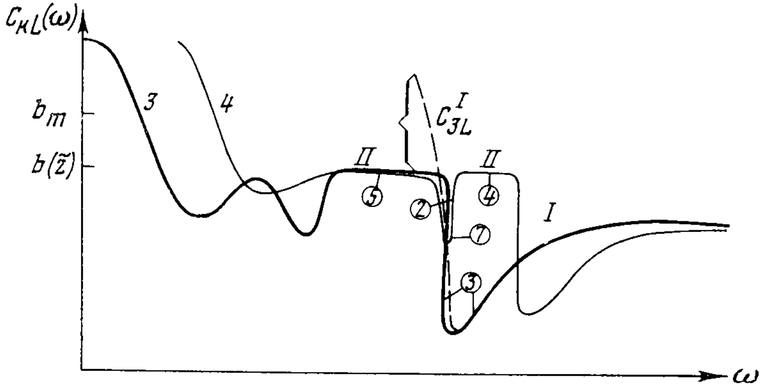
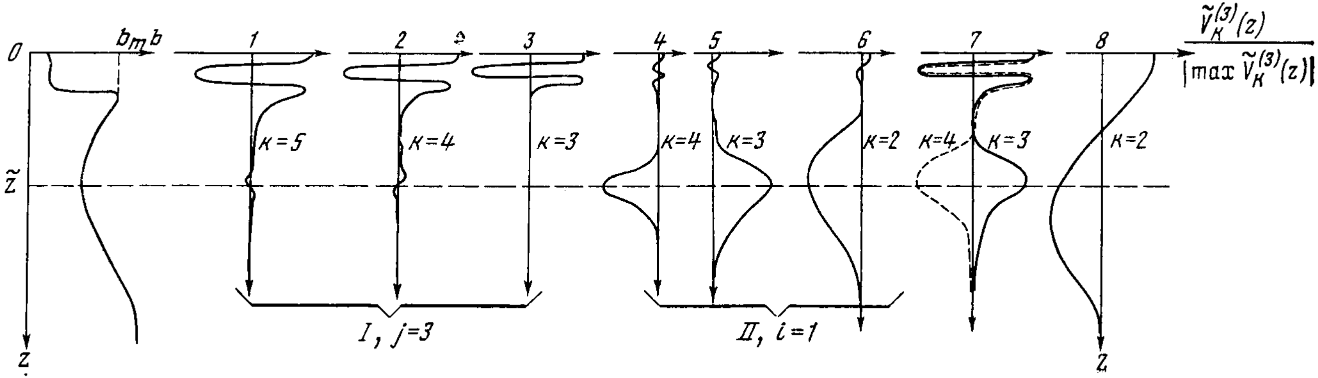


Рис. 14. Кривые групповых скоростей $C_{3L}(\omega)$ и $C_{4L}(\omega)$ в модели III

Римские цифры — номера участков, остальные обозначения те же, что на рис. 13

Рис. 15. Зависимость амплитуды смещений от глубины для различных точек спектра волн Лява в модели III



в верхнем волноводе, и ход графика $|U^{I}_{kq}(h)|$ в пределах волновода такой же, как у $|U_{kq}(h)|$ в модели I (рис. 15, графики *1*, *2*, *3*). Во внутреннем волноводе ход графиков существенно разный, но уровень амплитуд здесь ничтожен по сравнению с уровнем при источнике в верхнем волноводе. Таким образом, совокупность колебаний, соответствующих прерывистой линии $v^{I}_{jQ}(\omega)$, образует j-ю поверхностную волну в верхнем волноводе, практически такую же, как в модели I.

При движении вдоль какой-либо из линий $v^{II}_{iQ}(\omega)$ отмечаются концентрация колебаний во внутреннем волноводе и низкий уровень смещений на поверхности (рис. 15, графики *4*, *5*, *6*). Ход графиков $|U^{II}_{iq}(h)|$ такой же, как у $|U_{kq}(h)|$ в модели II в пределах внутреннего волновода, и существенно иной в верхнем волноводе, где относительный уровень амплитуд ничтожен. Таким образом, колебания, соответствующие прерывистой линии v^{II}_{jQ}, описывают j-ю каналовую волну того же типа, что и в модели II (их номера равны для $Q = L$ и различаются на единицу для $Q = R$; $j = k + 1$). Эти каналовые волны практически необнаружимы на поверхности; если бы приемник был погружен во внутренний волновод, напротив, нам не удалось бы наблюдать поверхностные волны.

Особый ход амплитудных графиков отмечается в переходных зонах (рис. 15, графики *7*): здесь $U_{kq}(h)$ имеет экстремумы в обоих волноводах и близко к нулю в антиволноводе. При этом графики $|U_{k+1q}(h)|$, $|U_{kq}(h)|$ на частоте максимального сближения кривых v_k и v_{k+1} совпадают, знаки U_{kq} и U_{k+1q} одинаковы во внешнем и обратны во внутреннем волноводах. Отметим, что в случае приемника во внутреннем волноводе знаковые соотношения были бы противоположными. Амплитуды $|U_{kq}(h)|$ за счет почти двукратного увеличения множителя I_{kQ} в переходной зоне примерно в 2 раза меньше, чем в прилегающих точках участка I.

Вне «ступенчатого» диапазона дисперсии фазовой скорости (при $k < k^*$, или $v^*_{kQ} < v_{kQ}$, или $\omega < \omega^*_k$) прерывистые кривые v^{I}_{jQ} и v^{II}_{iQ} не имеют смысла, и мы, как и ранее, рассматриваем графики $U_{kq}(h)$. В этой области колебания захватывают оба волновода и антиволновод, и амплитуды относительно равномерно осциллируют по всей зоне (рис. 15, график *8*).

§ 3. Физическая трактовка; критерии существования волноводов

Из проведенного рассмотрения очевидно, что на высоких частотах энергия колебаний концентрируется в том из волноводов, где расположен источник, и нигде не выходит из него. В зависимости от расположения источника и приемника мы можем наблюдать поверхностные волны (источник и приемник в верхнем волноводе), каналовые волны (источник и приемник в нижнем волноводе) либо не наблюдать никаких интерференционных волн (источник и приемник в разных волноводах либо вне волноводов). Свойства каналовых и поверхностных волн при этом остаются почти такими же, как и в моделях *I* и *II*.

Полученная нами сложная картина ступенчатых кривых, образующих системы прерывистых линий,— для этих частот лишь результат применения формального математического аппарата. Этот аппарат описывает два невзаимодействующих поля единой системой собственных функций [1]. Поэтому физический смысл дисперсионных кривых фазовой скорости для высокочастотных поверхностных волн имеют только линии $v^I_{jQ}(\omega)$, для высокочастотных каналовых волн — только линии $v^{II}_{iQ}(\omega)$. Прерывистость этих линий фиктивна, так как на высоких частотах дисперсионные кривые в переходных зонах настолько сближены и графики $|U_{kq}(h)|$ и $|U_{k+1Q}(h)|$ настолько похожи, что при суммировании вклада двух сближенных гармоник амплитуда либо удваивается, становясь равной амплитуде волны на соседних по частоте точках (в случае, когда источник и приемник находятся в одном волноводе), либо уничтожается, как и все поле (если источник и приемник не расположены в одном и том же волноводе).

Таким образом, высокочастотное поле поверхностных волн не содержит признаков внутреннего волновода.

Если мы рассмотрим очень низкие частоты, то оказывается, что колебания захватывают обе зоны пониженных скоростей, и можно наблюдать только интегральный эффект несколько меньших фазовых и групповых скоростей в модели *III* по сравнению с моделью *I*. Никаких резких качественных эффектов мы при этом не отметим.

Наибольший интерес представляют промежуточные частоты, где возможно слабое взаимодействие полей двух волноводов [11, 50, 99]. На этих частотах переходные зоны достаточно узки, чтобы имело место интерференционное взаимодействие двух волновых полей, и в то же время они не являются чисто формальной особенностью методики расчета, поскольку отмечаются физически значимые различия в величинах фазовых скоростей и амплитуд двух сблизившихся гармоник. Рассмотрим теперь эффект одной такой переходной зоны.

1. Спектральные амплитуды на частоте $\tilde{\omega}$ максимального сближения кривых v_{kQ} и v_{k+1Q} для k-й и $k+1$-й гармоник на

---

[1] Сходная картина наблюдается и в других случаях, когда существуют два слабосвязанных волновых поля: в моделях с одним внутренним минимумом скорости $b(z)$, но при условии $v_R(0) > \min b(z)$; в моделях с $\min a(z) < b(z+0)$ [2]; при наличии границ разрыва, на которых образуются волны Стонли, например, границе мантия — ядро [101]; при распространении акустических волн в земной атмосфере, содержащей два волновода [129].

расстоянии r от источника согласно (1.30) имеют вид:

$$U_{kq}(\widetilde{\omega}) \sim \pm |U_{kq}(\widetilde{\omega})| \exp\left[-\frac{i\widetilde{\omega}}{v_{kQ}(\widetilde{\omega})} r\right],$$

$$U_{k+1q}(\widetilde{\omega}) \sim \pm |U_{k+1q}(\widetilde{\omega})| \exp\left[-\frac{i\widetilde{\omega}}{v_{k+1Q}(\widetilde{\omega})} r\right],$$

причем

$$|U_{kq}|/|U_{k+1q}| = 1+\varepsilon, \qquad \frac{v_{k+1Q}}{v_{kQ}} = 1+\delta \quad 0<\varepsilon\ll 1, \quad 0<\delta\ll 1.$$

Суммарная спектральная амплитуда двух гармоник будет равна

$$|U^{\Sigma}_{k,\,k+1q}(\widetilde{\omega})| = |U_{kq}(\widetilde{\omega})| \left|1 \pm (1+\varepsilon)\exp\left[\frac{i\delta\cdot\widetilde{\omega}}{v_{kQ}(\widetilde{\omega})}\right]\right| \qquad (4.1)$$

Знак в (4.1) зависит от взаимного расположения источника и приемника (плюс, если и тот и другой — в одном волноводе, минус, если в разных). Таким образом, при наличии внутреннего волновода спектральная амплитуда $U^{\Sigma}_{k,k+1q}$ осциллирует с r, причем период осцилляций равен $v_{kQ}(\widetilde{\omega})\widetilde{T}/\delta$, где $\widetilde{T} = 2\pi/\widetilde{\omega}$; если источник и приемник находятся в одном волноводе (например, на поверхности), максимумы амплитуд наблюдаются в точках $r_n = n v_{kQ}(\widetilde{T})\widetilde{T}/\delta$, минимум—в точках $(n+{}^1/_2)\, v_{kQ}(\widetilde{T})\widetilde{T}/\delta)$.

При расположении источника и приемника в разных волноводах экстремумы меняются местами. Таким образом, возникает просачивание энергии из волновода в волновод, подобное взаимному раскачиванию маятников, висящих на одной не вполне жесткой опоре.

2. Если имеется возможность выделить колебания с фиксированной фазовой скоростью (в результате наблюдений волн пространственной группой станций), в принципе возможно обнаружение биений во времени колебаний двух близких частот $\widetilde{\omega}_k$ и $\widetilde{\omega}_{k+1}$, причем $\widetilde{\omega}_{k+1}/\widetilde{\omega}_k = 1+\sigma$, $\sigma \ll 1$. При этом на фазовой скорости v период осцилляций во времени будет равен $\widetilde{T}/\sigma$, а экстремумы $U^{\Sigma}_{k,\,k+1q}(v)$ будут наблюдаться в моменты времени $t_n = n\widetilde{T}/2\sigma$, $\widetilde{T} = 2\pi/\widetilde{\omega}_k$.

3. На промежуточных частотах переходные зоны имеют конечную ширину. Поэтому вместо скачкообразных изменений групповых скоростей здесь появляются экстремумы и пересечения кривых $C_{kQ}(\omega)$ разных гармоник. Вклад такой зоны в нестационарную сейсмограмму имеет вид сложного интерференционного колебания с узким диапазоном видимых частот. Если по нему каким-либо способом найти «кажущуюся» кривую групповой скорости, то окажется, что она несколько изменяется в зависимости от глубины источника и расстояния. Это связано с тем, что с глубиной

источника меняется соотношение между вкладами отдельных гармоник, а с расстоянием меняются условия их интерференции. С практической точки зрения особенно важна следующая закономерность: для не слишком глубоких источников (выше или лишь немногим ниже оси внутреннего волновода) наиболее существен вклад гармоники с наименьшим для данной зоны номером k; ее кривая C_{kQ} (ω) представлена в пределах зоны крутопадающей ветвью. В результате и «кажущаяся» кривая групповой скорости C_{kQ} (ω) оказывается крутопадающей, причем ее крутизна заметно больше, чем у соответствующей кривой C_{kQ} (ω) в модели I.

4. Наконец, еще одну интересную возможность открывает оценка максимальной групповой скорости данной гармоники на промежуточных частотах. За счет неполного сближения кривых v_{kQ} (ω) и v_{k+1Q} (ω) прерывистые линии v_{jQ}^{I} (ω) для не очень высоких номеров гармоник могут не покрывать весь интервал фазовых скоростей между b ($\tilde{z}$) — минимальной скоростью в нижнем волноводе и b_m — максимальной скоростью в антиволноводе. Соответственно появляется ограничение на максимум групповой скорости. Таким образом, в модели I ветви C_{kQ} (ω) высших гармоник на промежуточных частотах могут протягиваться до бóльших значений, чем соответствующая им совокупность участков кривых C_{kQ} (ω) в модели III; в результате в модели III не будут наблюдаться среднечастотные волны с групповыми скоростями, бóльшими b ($\tilde{z}$) (на рис. 14 эта часть кривой C_{3Q} (ω) в модели I отмечена фигурной скобкой).

Указанные здесь признаки волноводов носят поисковый характер; для конкретных моделей из-за различия в свойствах волноводов понятия высоких, средних и низких частот требуют уточнения. Поэтому мы вернемся к этому вопросу еще раз при изучении конкретной модели верхней мантии Земли.

II. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ В ЗЕМЛЕ

Глава 5

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ В КОНТИНЕНТАЛЬНОЙ КОРЕ И ВЕРХНЕЙ МАНТИИ ЗЕМЛИ

Континентальная кора и подстилающая ее верхняя мантия являются одними из главных объектов применения метода поверхностных волн. Наиболее часто для определения скоростного разреза этих частей Земли используют дисперсию основных гармоник волн Рэлея и Лява. Для исследования коры необходимы наблюдения в диапазоне периодов 10—50 *сек*; определяется либо групповая скорость на трассе эпицентр — станция, либо фазовая скорость между парой станций, лежащих примерно в одном и том же азимуте от эпицентра. При этом землетрясения и станции подбирают так, чтобы изучаемая трасса (или участок трассы) проходила через континентальный регион примерно однотипного строения; для регионального изучения коры иногда применяют методику дробления протяженных трасс на участки с разным строением коры с определением дисперсии групповой скорости на каждом участке по большому числу наблюдений [80, 162].

Для изучения верхней мантии до глубин 300—400 *км* используют дисперсию основных гармоник в диапазоне периодов 40 — 300 *сек*, при этом для периодов менее 100 *сек* применяют те же методы, что и при изучении коры (обязательно только наличие длиннопериодной аппаратуры); для наблюдений бóльших периодов пригодны только записи редких сильных землетрясений ($M > 7.5$). При этом трассы чаще всего оказываются смешанными, пересекающими как океаны, так и разные континенты; извлечь из наблюденных данных сведения о дисперсии на чисто континентальном пути удается только косвенным путем, при некоторых допущениях о свойствах трассы [20, 86, 123].

Для получения дисперсионных кривых применяется визуальный метод обработки записи, основанный на измерении координат экстремальных точек сигнала [77, 84, 124]; в некоторых случаях используется метод спектрального анализа зацифрованных записей на ЭВМ [84, 163]. Решение обратной задачи — определение скоростного разреза по наблюденной дисперсии — осуществляется ручным [12, 35, 84], а в последнее время и машинными методами подбора модели, для которой расчетная кривая в среднем наиболее близка к наблюденной. При этом на класс моделей, как правило, накладываются жесткие ограничения: например, модель предполагается слоисто-однородной с фиксированным небольшим числом слоев [5, 120]. Часто неизвестными считаются только один-два параметра модели (например, мощности слоев), а остальные, в том числе и существенно влияющие на дисперсию, фиксируются; поскольку фиксированные параметры фактически известны с погрешностями, точность и разрешающая способность метода поверхностных волн не получают объективной оценки.

Использование высших гармоник для изучения строения коры и, в особенности, мантии носит эпизодический характер, в основном в связи с недостаточной надежностью их выделения и первичной обработки существующими методами. В редких случаях определяются дисперсионные кривые второй и третьей гармоник [6, 117, 118, 149—151]; большое внимание уделяется так называемым каналовым волнам Sa, Lg, Rg [6, 9, 45, 59, 72, 78, 107, 155]. Эти фазы, обладающие четкими вступлениями с устойчивыми групповыми скоростями, используют для определения типа коры на трассе: волны Lg, Rg не проходят даже через очень короткие участки коры океанического типа, сильно ослабевают при прохождении через тектонические зоны. По наблюдениям этих фаз оценивают также скорости поперечных волн в коре и мантии, хотя не вполне ясно, к каким участкам среды относятся измерения, поскольку природа волн еще окончательно не определена. Ряд авторов связывает их со слоями пониженной скорости в континентальной коре и верхней мантии [89, 107, 115, 127]; другие считают, что такие волны могут возникать в результате интерференции высших гармоник и в моделях, лишенных внутренних волноводов [78, 124, 149, 151].

В этой главе исследуются возможности дальнейшего развития методики изучения строения континентальной коры и мантии с помощью поверхностных волн. Наш подход заключается в математическом моделировании (расчете) волновых полей в некоторых характерных моделях Земли и анализе возможностей использования тех или иных свойств поля для определения параметров среды. Основное внимание уделяется свойствам и перспективам использования высших гармоник для изучения верхней мантии, новым машинным методам первичного анализа сейсмограмм, исследованию неоднозначности решения обратной задачи. Наряду с модельными исследованиями приводятся примеры интерпретации реальных данных.

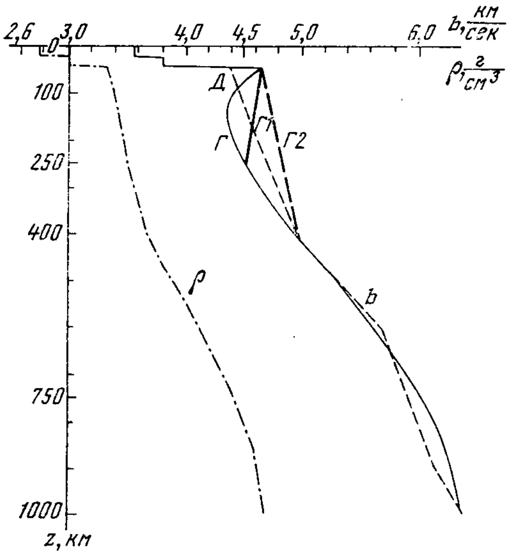
§ 1. Спектральные характеристики поверхностных волн в моделях Земли Гутенберга и Джеффриса

Модели среды и источника. Моделирование волновых полей поверхностных волн проводилось для двух классических моделей Земли — Гутенберга [33] и Джеффриса [35] (рис. 16 и табл. 6).

Таблица 6

i	z, *км*	Модель Джеффриса		Модель Гутенберга		Модель *А* Буллена	Модель Андерсона		Модель автора
		a, *км/сек*	b, *км/сек*	a, *км/сек*	b, *км/сек*	ρ, *г/см*^{3}	Q_a	Q_b	Q_b
0	0	6,14	3,55	6,14	3,55	2,74	1012,5	450	400
1−	19	6,14	3,55	6,14	3,55	2,74	1012,5	450	400
1+	19	6,58	3,80	6,58	3,80	3,00	1012,5	450	400
2−	38	6,58	3,80	6,58	3,80	3,00	1012,5	450	400
2+	38	7,75	4,37	8,20	4,65	3,32	135,0	60	200
3	60	7,82	4,40	8,15	4,58	3,35	157,5	70	180
4	80	7,88	4,44	8,06	4,48	3,36	202,5	90	160
5	100	7,95	4,46	8,00	4,38	3,39	225,0	100	100
6	140	8,07	4,50	7,86	4,35	3,41	247,5	110	50
7	170	8,18	4,55	7,92	4,36	3,44	258,75	115	60
8	200	8,26	4,60	8,04	4,40	3,47	270,0	120	100
9	250	8,42	4,68	8,22	4,50	3,51	303,75	135	150
10	300	8,58	4,76	8,55	4,62	3,55	337,5	150	200
11	400	8,93	4,94	8,96	4,93	3,65	360,0	160	250
12	500	9,66	5,32	9,60	5,32	3,92	382,5	170	400
13	600	10,24	5,66	10,12	5,62	4,12	472,5	210	600
14	800	11,01	6,13	10,88	6,14	4,48	1057,5	470	800
15	1000	11,43	6,36	11,44	6,37	4,68	1462,5	650	1000
16	1200	11,71	6,50	11,76	6,50	4,80	1901,25	845	1100
17	1400	11,99	6,62	12,08	6,62	4,90	2351,25	1045	1200
18	1600	12,26	6,73	12,28	6,75	5,00	2801,25	1245	1300

Обе они относительно хорошо согласуются с данными объемных сейсмических волн; наиболее важные отличия моделей — разница в скоростях упругих волн непосредственно под корой и существование или отсутствие слоя пониженной скорости в верхней мантии. Хотя в последние годы предложен ряд других моделей, несколько лучше согласующихся с теми или иными выборками наблюденных данных, сравнение полей для моделей *Г* и *Д* представляет интерес с точки зрения выявления эффекта слоя пониженной скорости на волновую картину. Земная кора в обеих моделях представлена двумя однородными слоями одинаковой мощности. Распределение плотностей, сравнительно слабо влияющее на особенности поверхностных волн, выбрано согласно Буллену (*А*) [12] и одинаково в обеих моделях (табл. 6). Для выяснения эффекта влияния отдельных частей разреза (коры, верха мантии) на свойства волн проводились расчеты для других, вспомогательных, моделей среды, частично отличающихся от опорных (например, моделей *Г1* и *Г2* на рис. 16).



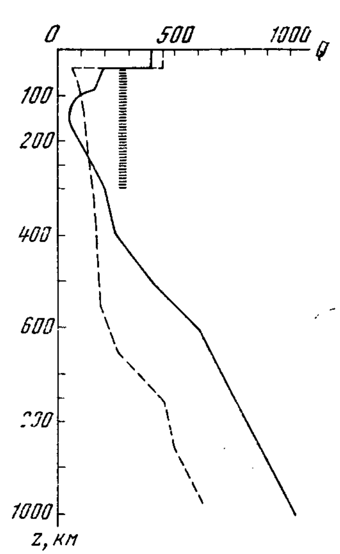


Рис. 16. Распределение скорости поперечных волн b и плотности ρ по глубине в моделях Гутенберга (*Г*), Джеффриса (*Д*), вспомогательных моделях (*Г1* и *Г2*)

Рис. 17. Распределение Q_b в поглощающей модели Андерсона и др. (пунктир) и модели автора (сплошная линия). Штриховка — область возможных частотнозависимых Q_b

Для учета поглощения необходимо задаться распределением Q_a и Q_b в Земле. В расчетах использовались две модели распределения Q — Андерсона и др. [103] и модель, отличающаяся от модели Андерсона бóльшими значениями Q_b непосредственно под корой (рис. 17 и табл. 6). Для обеих моделей характерны сравнительно высокие Q в земной коре, очень малые Q на глубинах 38—300 *км* и быстро растущие Q на глубинах свыше 500 *км*. Предполагалось, что Q_a и Q_b частотно независимы; для волн Лява специально оценивался эффект частотной зависимости для интервала глубин, соответствующего слою пониженной скорости (на рис. 17 эта область показана штриховкой).

Основные расчеты теоретических сейсмограмм производились для точечного вертикального и горизонтального воздействий. При этом предполагалось, что спектральная функция источника постоянна в интересующем нас диапазоне периодов и плавно убывает до нуля вне этого диапазона. Выбор столь простой модели диктовался не ограничениями расчетного аппарата (как отмечалось выше, можно ввести в расчет данные о весьма произвольном источнике), а отсутствием достаточно уверенных данных о свойствах реальных источников. Казалось, предпочтительней моделировать поле элементарного источника и затем оценить возможный эффект усложнения механизма источника, чем сразу задаваться какой-либо частной моделью очага. Предполагалось, что регистрация производится на поверхности неискажающим трехкомпонентным приемником.

При проведении расчетов был принят ряд ограничений, обусловленных главным образом техническими соображениями. Диапазон частот был ограничен максимальными значениями периода $T = 300$ *сек*; волны с таким периодом при любом номере k захватывают всю верхнюю мантию; при бо́льших T необходимо учитывать эффект гравитации. Со стороны высоких частот расчетный диапазон был ограничен значением периода $T = 1 \div 2$ *сек*. Предполагалось, что нас интересуют такие удаления от источника, на которых более высокочастотные колебания в силу избирательного поглощения сильно затухают.

Ограничения на число учитываемых гармоник необходимо вводить в связи с сильным возрастанием затрат машинного времени при расчетах полей высоких гармоник. Как правило, максимальное k не превышало 10; во многих расчетах теоретических сейсмограмм, где исследовался интервал времен регистрации, соответствующий групповым скоростям меньше 4,5 *км/сек*, число учитываемых гармоник ограничивалось тремя-четырьмя.

Максимальные эпицентральные расстояния r в наших задачах не превышали 10 000 *км*, что вполне достаточно для изучения волн на чисто континентальных трассах; для расчета сейсмограмм на бо́льших удалениях при разумных затратах машинного времени необходимо сузить расчетный диапазон со стороны высоких частот.

Бо́льшая часть расчетов волн Рэлея выполнена для плоских моделей, все расчеты волн Лява проведены для сферических моделей; мы в дальнейшем всюду используем индексы L и R для волн Лява и Рэлея вне зависимости от того, учитывался или нет эффект сферичности.

Дисперсия скоростей. *Волны Лява.* Дисперсионные кривые $v_{kL}(T)$ и $C_{kL}(T)$ для первых восьми гармоник волн Лява в моделях *Г* и *Д* приведены на рис. 18, 19. При оценке влияния на характер волновой картины параметров разреза помимо самих дисперсионных кривых удобно использовать графики частных производных фазовой скорости по этим параметрам. На рис. 20 приведены примеры таких графиков для модели *Г*, $k = 1, 2$; в качестве параметров выбраны скорости поперечных волн на верхних границах слоев, заключенных в нескольких интервалах глубин в коре и мантии.

Весь расчетный диапазон групповых скоростей C_{kL} (от 5 до 3 *км/сек*) можно разделить на четыре участка (I—IV), существенно отличающиеся поведением дисперсионных кривых и, следовательно, характером волновой картины. На эти же участки можно разделить и теоретические сейсмограммы волн Лява.

I. $C_{kL} > 4{,}55$ *км/сек*. Кривые C_{kL} (T) не пересекаются и разделены по периодам; вдоль каждой кривой период монотонно убывает с уменьшением групповой скорости. Сейсмограмма для этого участка должна выглядеть как наложение ряда нормально диспергирующих цугов с резко различными и монотонно убывающими во времени видимыми периодами. Этому участку соответствуют фазовые скорости выше 5,5 *км/сек* и, следовательно, глубины проникания порядка 500 *км* и более. Поскольку на глубинах свыше 500 *км* модели *Г* и *Д* различаются слабо, волновая картина для участка *I* времен регистрации в моделях *Г* и *Д* качественно сходна. Отмечаются только небольшие количественные различия в значениях C_{kL} для заданных k и T.

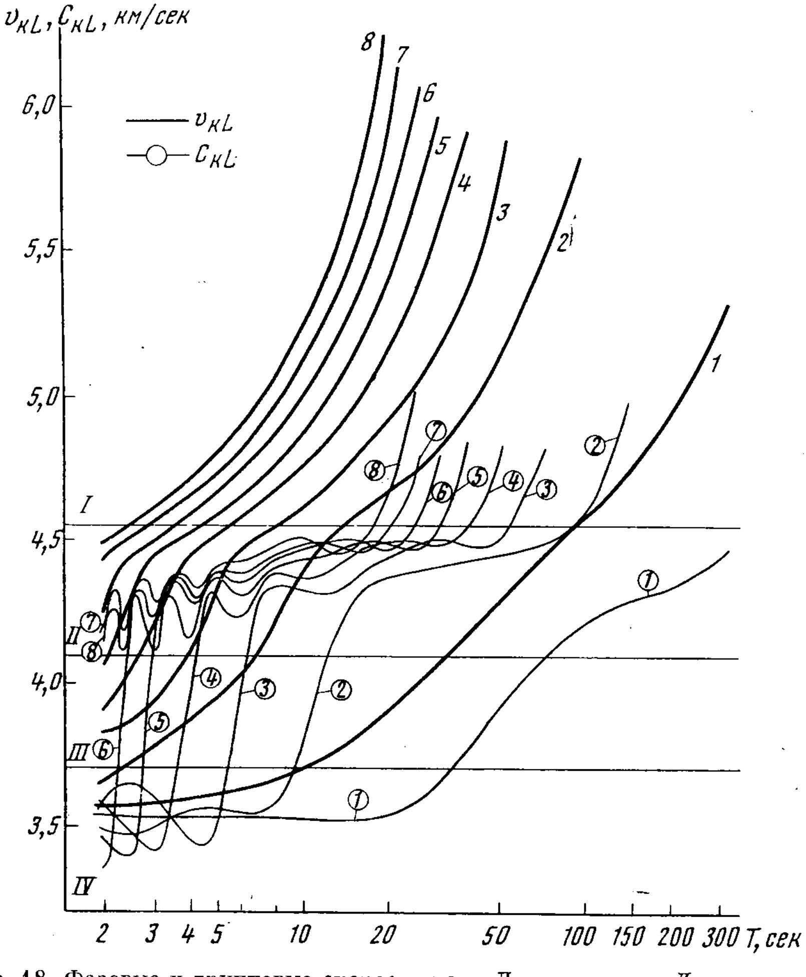


Рис. 18. Фазовые и групповые скорости волн Лява в модели *Д*

v_{kL} — фазовые скорости; C_{kL}— групповые скорости. Цифры у кривых — номера гармоник k

II. $4{,}55 > C_{kL} > 4{,}1$ *км/сек*. Кривые $C_{kL}(T)$ высших гармоник ($k \geqslant 3$) осциллируют и многократно пересекаются, причем размах и число осцилляций растет с номером k. Характер осцилляций в моделях *Г* и *Д* существенно разный. В модели *Д* кривые $C_{kL}(T)$ почти синусоидальные, а $v_{kL}(T)$ — гладкие; в модели *Г* для периодов меньше 15 *сек* и $k \geqslant 3$ в кривых $C_{kL}(T)$ чередуются стационарные участки и резкие минимумы; кривые фазовой скорости — ступенчатые, что типично для моделей с двумя волноводами. Области минимумов C_{kL} лежат в интервалах 10—15; 5—7; 3—4,2 *сек* и т. д., области стационарного значения $C_{kL} \approx \approx 4{,}45$ *км/сек* занимают промежуточные зоны. Как следует из гл. 4, стационарным значениям C_{kL} соответствуют мало интенсивные на поверхности каналовые волны.

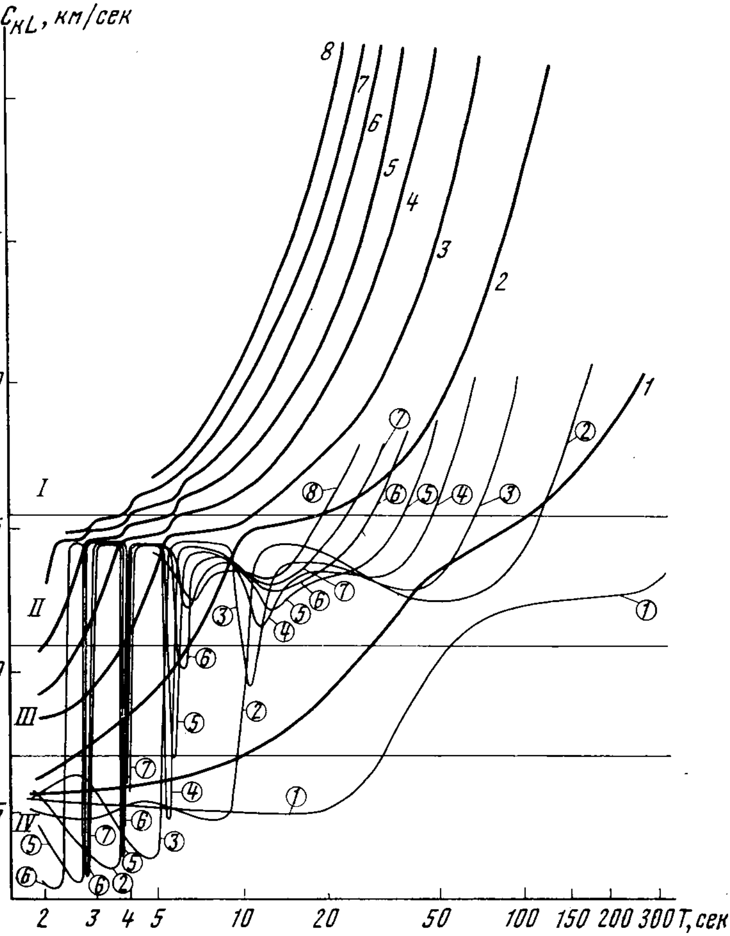


Рис. 19. Фазовые и групповые скорости волн Лява в модели *Г*

Обозначения те же, что на рис. 18

Кривые $C_{1L}(T)$ и $C_{2L}(T)$ хотя и не имеют столь сложной формы, однако существенно отличаются для двух моделей. Для модели Γ характерны почти стационарные значения скоростей в области периодов 100—250 *сек* ($4{,}25 > C_{1L} > 4{,}20$ *км/сек*) и отчетливый минимум групповой скорости C_{2L} в диапазоне 50 *сек*. В области 50—70 *сек* кривые $C_{1L}(T)$ и $C_{2L}(T)$ сближены настолько, что н-

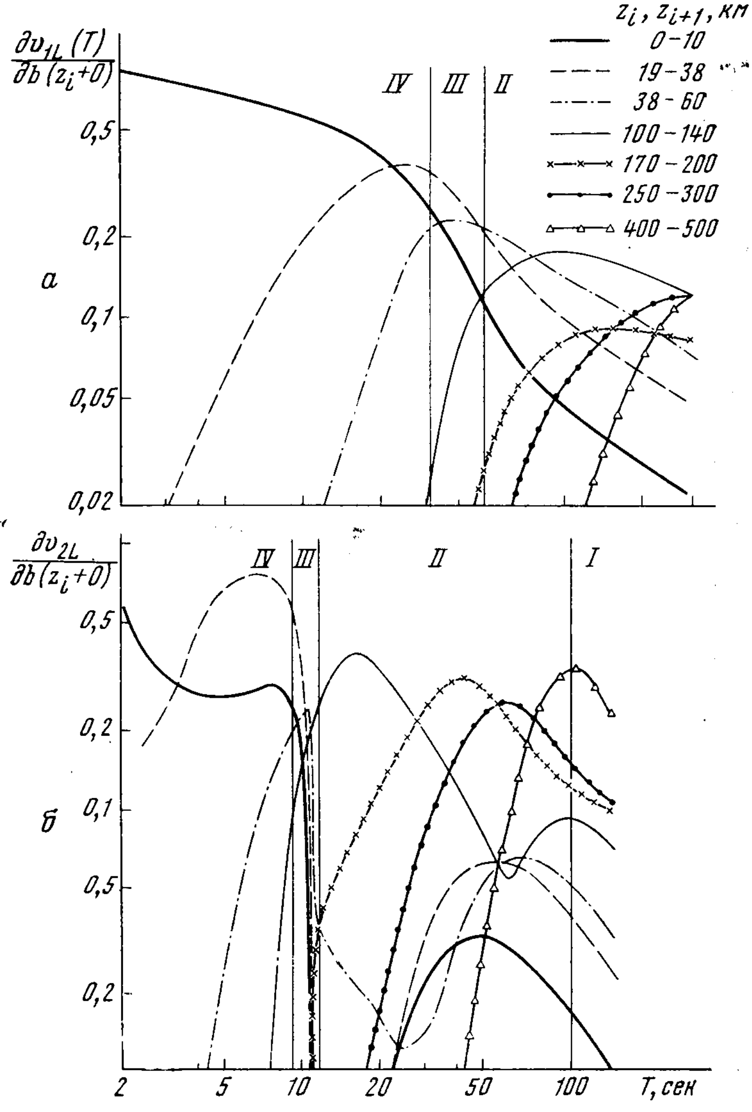


Рис. 20. Частные производные фазовой скорости волн Лява v_{kL} по параметрам разреза — скоростям $b(z_i + 0)$ в отдельных слоях модели Γ

а) $k = 1$; б) $k = 2$

записи должно образоваться единое сложное колебание. В модели *Д* в этом диапазоне не наблюдается стационарных значений $C_{1L}(T)$ и минимума $C_{2L}\ (T)$; кривая $C_{2L}\ (T)$ тесно сближена не с $C_{1L}\ (T)$, а с кривыми $C_{kL}\ (T)$, $(k \geqslant 3)$.

Такое поведение кривых $C_{kL}\ (T)$ свидетельствует о сложном характере волновой картины на этом участке записи. Для модели *Д* должно отмечаться вступление с групповой скоростью 4,52 *км/сек*, спектральный состав следующего за ним колебания должен быстро изменяться во времени: от 100 *сек* и ниже в интервале 4,52—4,35 *км/сек*, от 20 *сек* и ниже — в интервале 4,35—4,1 *км/сек*. Это сложное колебание накладывается на диспергирующий длиннопериодный цуг (периоды плавно уменьшаются со временем от 300 до 80 *сек*), принадлежащий основной гармонике.

Для модели *Г* характерно несколько более позднее (4,47 *км/сек*) импульсное короткопериодное вступление с небольшими амплитудами, сложный характер длиннопериодного колебания за счет интерференции основной и нескольких высших гармоник, постепенный переход записи (при $C_{kL} < 4{,}2$ *км/сек*) в наложение нескольких цугов с резко различными периодами: 80—50, 12—10, 7—5 *сек* и т. д.

Фазовые скорости на этом участке лежат в диапазоне 5,5 — 4,5 *км/сек* и контролируются в основном строением верхней мантии в диапазоне глубин 38—500 *км* (рис. 20). Различия в значениях при фиксированном T для моделей *Г* и *Д* достигают 0,07 *км/сек* для $k = 1$; 0,5 *км/сек* для $k = 2$; отклонения групповых скоростей примерно в 2 раза больше.

III. $4{,}1 > C_{kL} > 3{,}7$ *км/сек*. В модели *Д* кривые групповой скорости не пересекаются и разделены по периодам; вдоль каждой кривой скорость монотонно убывает с уменьшением периода. Как и на участке *I*, сейсмограмма должна выглядеть как наложение нескольких нормально диспергирующих цугов с резко различными видимыми периодами: 70—40 *сек* в цуге основной гармоники, 12—9 *сек* во второй, 7—6 *сек* в третьей, 4,5—3,5 *сек* в четвертой и т. д.

В модели *Г* картина более сложная за счет имеющихся пересечений кривых групповой скорости. Так, до скорости 3,8 *км/сек* кривые $C_{2L}\ (T)$ и $C_{3L}\ (T)$ близки, и им должен соответствовать единый цуг колебаний с биениями (периоды 11—9 *сек*); при меньших скоростях этому диапазону периодов соответствует только одна гармоника ($k = 2$). В диапазоне периодов 6—5 *сек* картина еще сложнее из-за наложения четырех гармоник с близкими периодами и скоростями ($k = 3, 4, 5, 6$). Важной особенностью поведения кривых $C_{2L}\ (T)$, $C_{3L}\ (T)$ на этом участке является их большая крутизна в области справа от основного минимума; такой крутизны не отмечается в модели *Д*. В табл. 7 приведены средние значения производных dC_{kL}/dT для моделей *Г* и *Д* в соответствующих участках спектра. Здесь T'', T' — периоды, соответствующие групповым скоростям 4,1 и 3,6 *км/сек*.

Таблица 7

Модель	$k=2$				$k=3$			
	T''	T'	$T''-T'$	$\left[\frac{dC_{2L}}{dT}\right]_{ср}$	T''	T'	$T''-T'$	$\left[\frac{dC_{3L}}{dT}\right]_{ср}$
Г	10,1	9,2	0,9	0,56	5,35	5,25	0,10	5,0
Г1	11,6	9,5	2,1	0,24	6,10	5,80	0,30	1,70
Г2	12,4	9,7	2,7	0,18	6,50	5,85	0,75	0,67
Д	12,3	8,0	4,3	0,11	6,20	5,20	1,00	0,50

Возникает вопрос, вызвано ли столь большое различие в крутизне кривых групповой скорости $C_{2L}(T)$, $C_{3L}(T)$ в моделях *Г* и *Д* существованием в модели *Г* слоя пониженной скорости, или важны также различия в скоростях непосредственно под корой. Для решения этого вопроса были проведены расчеты для моделей *Г1* и *Г2* (рис. 16), имеющих ту же скорость $b(z)$ в кровле мантии, что у модели *Г*, но лишенных слоя пониженной скорости. Расчетные кривые $C_{2L}(T)$, $C_{3L}(T)$ для всех четырех моделей показаны на рис. 21; из этого рисунка и табл. 7 следует, что главную роль в увеличении крутизны кривых $C_{kL}(T)$ играет слой пониженной скорости.

На участке *III* фазовые скорости заключены в диапазоне 4,5—4,1 *км/сек* и контролируются строением коры и верхних 150—200 *км* мантии (рис. 20); при этом с ростом k влияние коры относительно ослабевает.

IV. $C_{kL} < 3{,}70$. Кривые групповой скорости многократно пересекаются и осциллируют. Размах и число осцилляций растут с ростом k. В результате должна образоваться сложная интерференционная волна, которая может распадаться на несколько групп (фаз) с четкими вступлениями. В рассматриваемом диапазоне периодов ($T > 2$ *сек*) возможны вступления с групповыми скоростями $3{,}65 \pm 0{,}05$ *км/сек* (периоды колебаний меньше 3 *сек*, $k = 3$) и $3{,}55 \pm 0{,}05$ *км/сек* (периоды колебаний меньше 15 *сек*, $k = 1{,}2$). Эти волны накладываются на более длиннопериодное колебание с убывающим от 30 до 18 *сек* видимым периодом, соответствующее правой ветви дисперсионной кривой основной гармоники. В рассматриваемом диапазоне периодов весь цуг волн Лява должен заканчиваться на временах, соответствующих групповой скорости 3,3 *км/сек*. При наличии осадочных слоев могут существовать короткопериодные цуги колебаний ($T < 8$ *сек*) и на более поздних временах.

Фазовые скорости на участке *IV* меньше 4,1 *км/сек* и контролируются строением коры; различий для моделей *Г* и *Д*, строение коры у которых одинаково, на этом участке не отмечается.

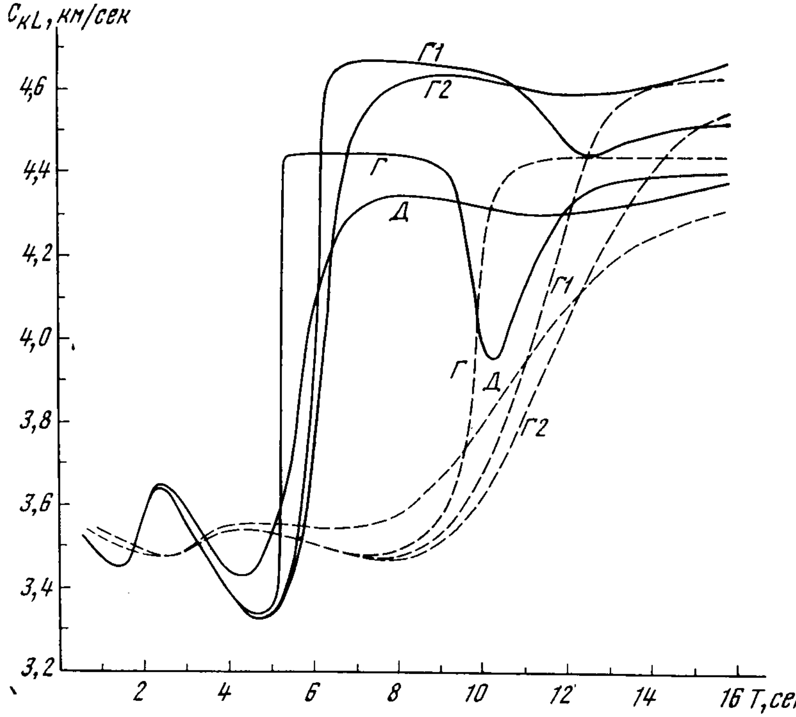


Рис. 21. Групповые скорости высших гармоник волн Лява в моделях *Г*, *Д*, *Г1*, *Г2*

$k = 3$ — сплошные линии, $k = 2$ — пунктир

Волны Рэлея. Дисперсия высших гармоник волн Рэлея качественно сходна с дисперсией высших гармоник волн Лява (рис. 22, 23). Можно только отметить, что эффект слоя пониженной скорости в модели *Г* проявляется несколько менее явно, чем у волн Лява: меньше крутизна ступенек кривых фазовой скорости, не столь четки зоны стационарных значений и минимумов групповой скорости: так, например, в минимуме C_{3R} (T) на периоде 10 *сек* групповая скорость равна 4,18 *км/сек*, а у волны Лява в том же минимуме C_{3L} = 3,9 *км/сек*. Крутизна ветвей C_{2R} (T), C_{3R} (T) в области правее основного минимума, несколько меньше, чем у соответствующих кривых для волн Лява в модели *Г*.

Дисперсия основной гармоники — существенно иная, чем у волн Лява. В области длинных периодов здесь имеются локальные экстремумы C_{1R} (T), положение которых зависит от свойств модели. У модели *Г* минимум скорости расположен на периоде 200 *сек*, а значение скорости в нем 3,57 *км/сек*; для модели *Д* имеем соответственно 220 *сек* и 3,70 *км/сек*. Максимум скорости в модели *Г* расположен на периоде 60 *сек*, а значение скорости в нем 3,9 *км/сек*: для модели *Д* имеем соответственно 100 *сек* и 3,8 *км/сек*.

Крутизна кривой C_{1R} (T) в области справа от основного минимума (на 18 *сек*) значительно больше в модели $Г$. Соответственно фазовая скорость v_{1R} (T) в модели $Г$ в диапазоне периодов 40—70 *сек* почти не возрастает.

Присутствие локального максимума скорости должно приводить к появлению на сейсмограммах на участке *III* четкого вступления с групповой скоростью 3,8—3,9 *км/сек*, за которым в течение некоторого временно́го интервала происходит сложная интерференция нескольких диспергирующих цугов. Начиная со скоростей 3,6—3,5 *км/сек* (на участке *IV*), существует только один нормально диспергирующий цуг с периодами от 40 до 20 *сек*. Кривая C_{1R} (T) не пересекается с кривыми C_{kR} (T) высших гармоник и, следовательно, не участвует в образовании импульсной волны со скоростью 3,55 *км/сек*.

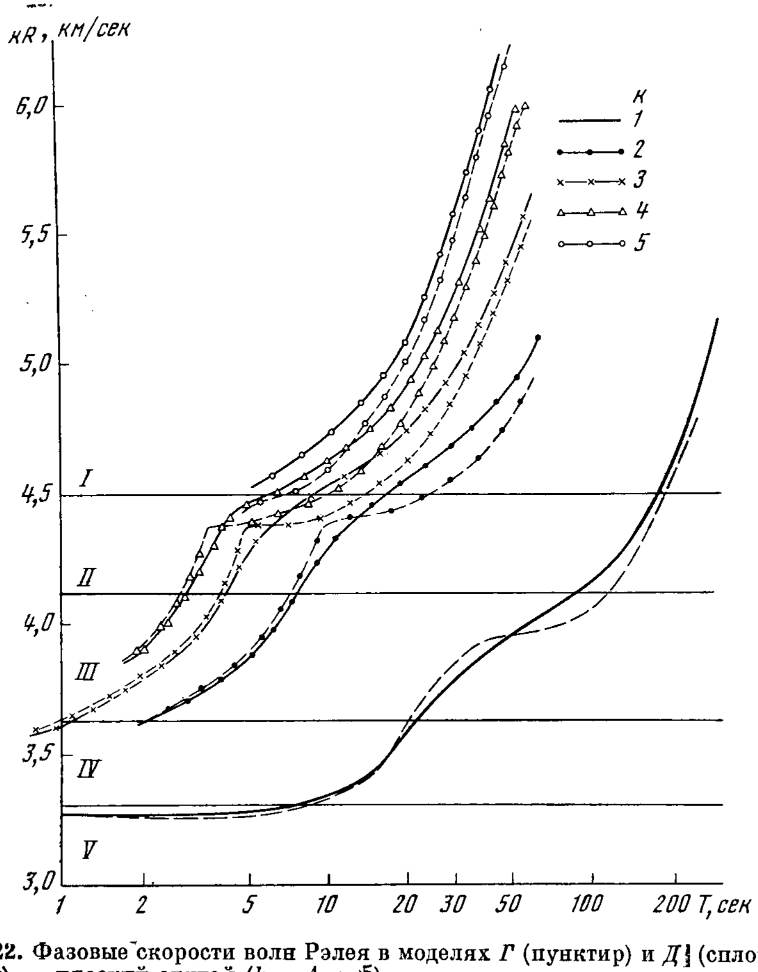


Рис. 22. Фазовые скорости волн Рэлея в моделях $Г$ (пунктир) и $Д$ (сплошные линии) — плоский случай ($k = 1 \div 5$)

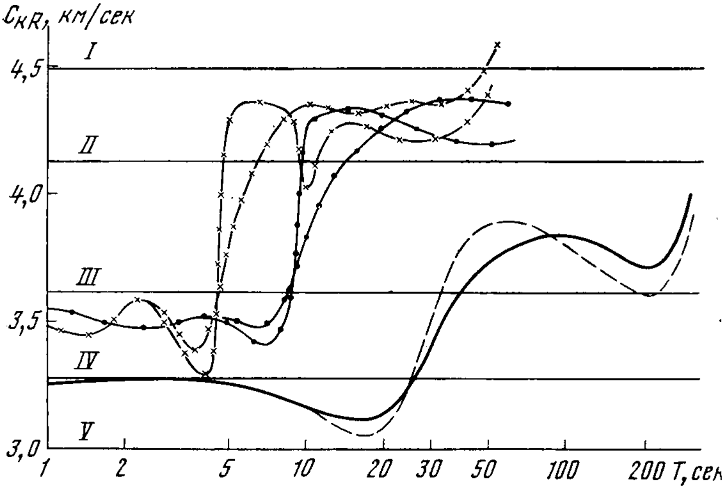


Рис. 23. Групповые скорости волн Рэлея в моделях *Г* и *Д* — плоский случай ($k = 1 \div 3$)

Обозначения те же, что на рис. 22

Кроме того, в дисперсионной кривой C_{1R} (T) можно выделить участок V со скоростями C_{1R} меньше 3,25 *км/сек*. Он должен начинаться короткопериодным вступлением ($T < 8$ *сек*) и переходить в интенсивную фазу Эйри с периодами 17—19 *сек* в районе групповых скоростей 3,0 *км/сек*. При наличии осадочных слоев должны существовать короткопериодные цуги рэлеевских волн ($T < 10$ *сек*) с групповыми скоростями меньше 3 *км/сек*.

В целом из проведенного рассмотрения можно сделать следующие выводы:

Участки записи поверхностных волн с групповыми скоростями больше 4,55 *км/сек* могут использоваться для изучения глубоких частей мантии ($z > 500$ *км*). При этом периоды колебаний в основной гармонике превышают 500 *сек*; благодаря отсутствию пересечений и сближений кривых C_{kL} (T), C_{kR} (T) для разных k в принципе возможно разделение гармоник на записи.

Участки записи с групповыми скоростями $4,55 > C_{kQ} > 4,1$ *км/сек* могут использоваться для изучения верхней мантии. В короткопериодной части спектра ($T < 20$ *сек*) из-за сложного характера дисперсионных кривых C_{kQ} (T) разделение гармоник вряд ли возможно; для количественного прогноза волновой картины необходимо учитывать большое число (до десяти и более) гармоник. В области периодов более 20 *сек* для изучения верхней мантии целесообразно использовать основную и первую высшую гармоники Лява; при наличии в верхней мантии слоя пониженной скорости возможны трудности в разделении этих гармоник на периодах 50—80 *сек*.

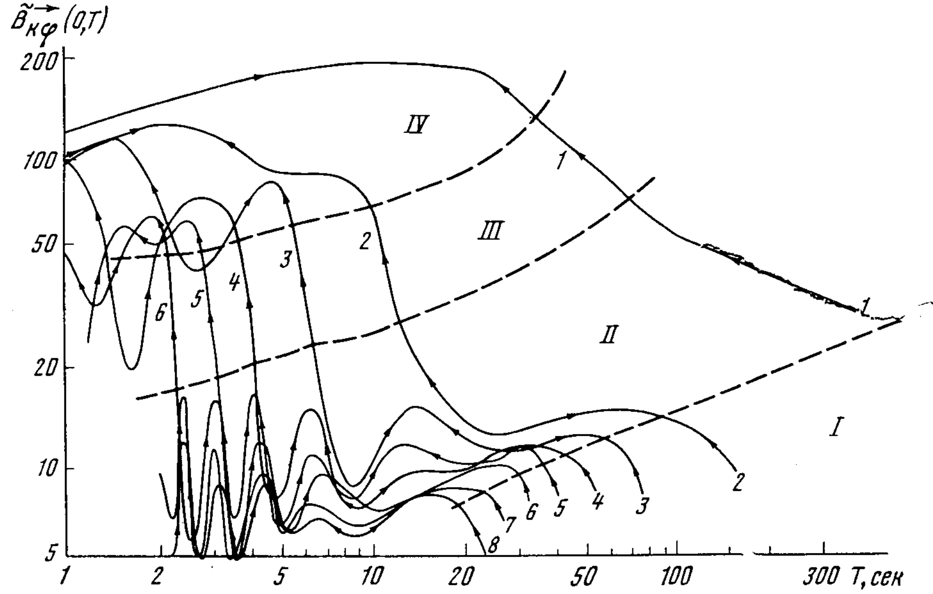


Рис. 24. Частотные характеристики волн Лява в модели *Д* (горизонтальная сила на поверхности, $k = 1 \div 8$)

Цифры у кривых — номера гармоник k

Участки записи с групповыми скоростями $4{,}1 > C_{kQ} > 3{,}7$ *км/сек* могут использоваться для изучения коры и верхней мантии. Здесь могут быть выделены либо отдельные гармоники, либо интерференционные цуги, образованные биениями двух или большего числа гармоник со сливающимися кривыми групповой скорости. Особенно перспективна с этой точки зрения область периодов 9—11 *сек*, где могут быть использованы критерии для выделения волноводов, описанные в гл. 4.

На этом же участке могут быть легко отделены от высших основные гармоники волн Лява и Рэлея. Для волн Рэлея наиболее существенная информация о строении верхней мантии заключена в положении экстремумов длиннопериодной ветви кривой C_{1R} (T) и крутизне ветви с периодами $30 < T < 50$ *сек*.

Поведение кривых C_{kL} (T) и C_{kR} (T) на участке *II* существенно зависит от строения коры, которое желательно изучить по другим данным.

Участки записи с групповыми скоростями меньше 3,7 *км/сек* можно использовать для изучения строения коры. В силу сложного поведения кривых групповой скорости разделение волн на отдельные гармоники здесь затруднено. Это не относится к основной гармонике волн Рэлея, которая может быть отделена от высших почти во всем диапазоне периодов и групповых скоростей.

Как уже отмечалось в § 4 гл. 2, кривые групповой скорости определяют последовательность появления на сейсмограмме колебаний с теми или иными видимыми периодами (т. е. как бы закон частотной модуляции записи). Что же касается фактического вида сейсмограмм, то он определяется еще и законом амплитудной модуляции, зависящим как от кривой групповой скорости, так и от ряда других факторов: частотной характеристики и поглощающих свойств среды, спектра источника и т. п. [32, 52].

Для оценки этих факторов мы должны рассмотреть некоторые динамические характеристики поверхностных волн в Земле и их связь со строением модели.

Частотные характеристики среды. *Волны Лява.* На рис. 24 приведены частотные характеристики $\widetilde{B}_{k\vec{\varphi}}(T)$ для горизонтальной силы, действующей на поверхности в модели *Д* ($k = 1 \div 8$). Римскими цифрами показаны участки спектра, соответствующие различным интервалам групповых скоростей и времен записи. Стрелками указано направление изменения амплитуд с ростом времени. Видно, что поведение кривых качественно сходно с поведением функций $1/C_{kL}(T)$ (рис. 18). Первая гармоника всюду имеет наибольшие амплитуды, ослабление амплитуд по мере увеличения номера гармоники k происходит медленно. Так, на участке *II*, где отмечается сложный ход кривых $C_{kL}(T)$, гармоники с $k \geqslant 6$ могут иметь амплитуды, соизмеримые с амплитудами второй и третьей гармоник. Для участка *III* характерно возрастание амплитуды со временем в каждой гармонике.

Сравнение функций $\widetilde{B}_{k\vec{\varphi}}(T)$ в моделях *Г* и *Д* проведено на рис. 25—27 для нескольких глубин очага (0, 38, 80, 200 *км*) и первых трех значений k. Видно, что с увеличением глубины очага быстро ослабевают амплитуды на участке *IV*, что должно приводить к перемещению максимальных амплитуд к началу записи поверхностных волн. При этом спад амплитуд основной гармоники по мере увеличения глубины очага происходит монотонно; у высших гармоник из-за наличия узлов собственных функций разные участки спектра (и соответственно сейсмограмм) могут усиливаться или ослабевать с погружением источника. Таким образом, форма сейсмограмм высших гармоник неустойчива по отношению к изменениям глубины очага. Этот эффект должен быть несколько менее выражен для распределенных по поверхности или объему источников за счет осреднения частотной характеристики по глубине.

Различия в поведении $\widetilde{B}_{k\vec{\varphi}}(T)$ для разных моделей наиболее заметны на участках *II* и *III*. Так, в модели *Г* в интервале групповых скоростей 4,4—4,3 *км/сек* вклад высших гармоник ($k = 2$ и 3) в суммарную сейсмограмму весьма мал — он соответствует каналовым волнам. Отмечается некоторое возрастание амплитуд каналовых волн по мере погружения источника во внутренний волновод, однако амплитуды остаются значительно меньшими, чем в модели *Д* для того же интервала периодов. При $k = 3$ отмечаются

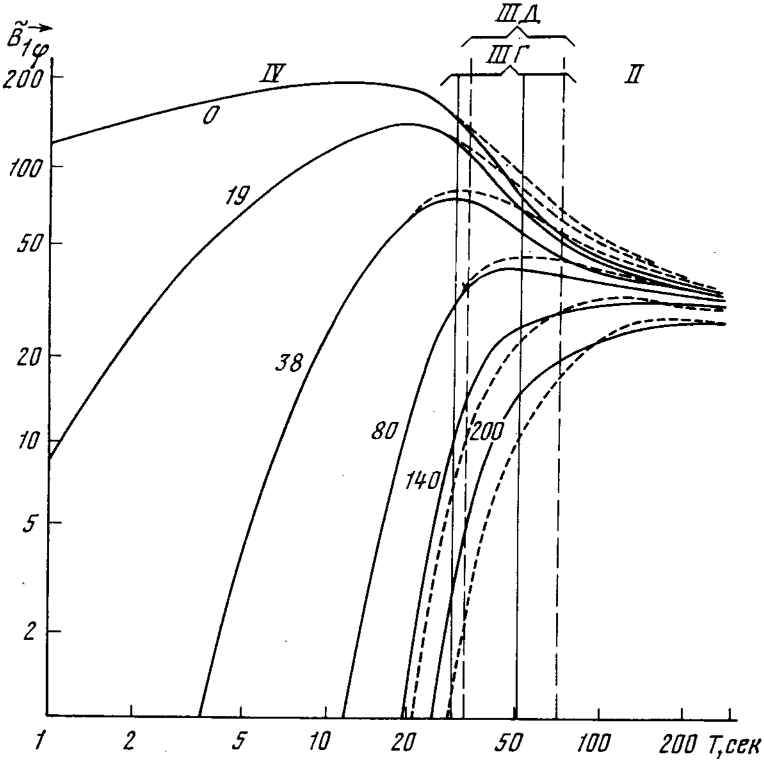


Рис. 25. Частотные характеристики основной гармоники волн Лява в моделях *Г* (сплошные линии) и *Д* (пунктир); числа у кривых—глубины очага *h*, *км*

также резкие локальные максимумы $\tilde{B}_{k\varphi}^{\rightarrow}(T)$ на периодах, соответствующих локальным минимумам групповой скорости (участок *III*). Таких резких максимумов в модели *Д* не отмечается.

Волны Рэлея. Частотные характеристики волн Рэлея для точечного вертикального воздействия (рис. 28—30) качественно сходны с рассмотренными выше характеристиками для волн Лява. Наиболее заметное различие — в поведении частотной характеристики для поверхностного источника в области коротких периодов (меньше 10 *сек*), где у волн Рэлея амплитуда возрастает, а у волн Лява убывает с уменьшением периода. Это может привести к различиям в спектре интерференционных волн со скоростями 3,55 и 3,25 *км/сек* (последняя должна содержать более интенсивные короткопериодные колебания); с возрастанием расстояния различия должны нивелироваться из-за избирательного поглощения высоких частот. Для очагов внутри коры и в мантии качественных различий в частотных характеристиках волн Лява и Рэлея не отмечается. Строение мантии сказывается на поведении кривых $\tilde{B}_{1q}^{\downarrow}(T)$ только при $T > 50$ *сек* и то весьма слабо.

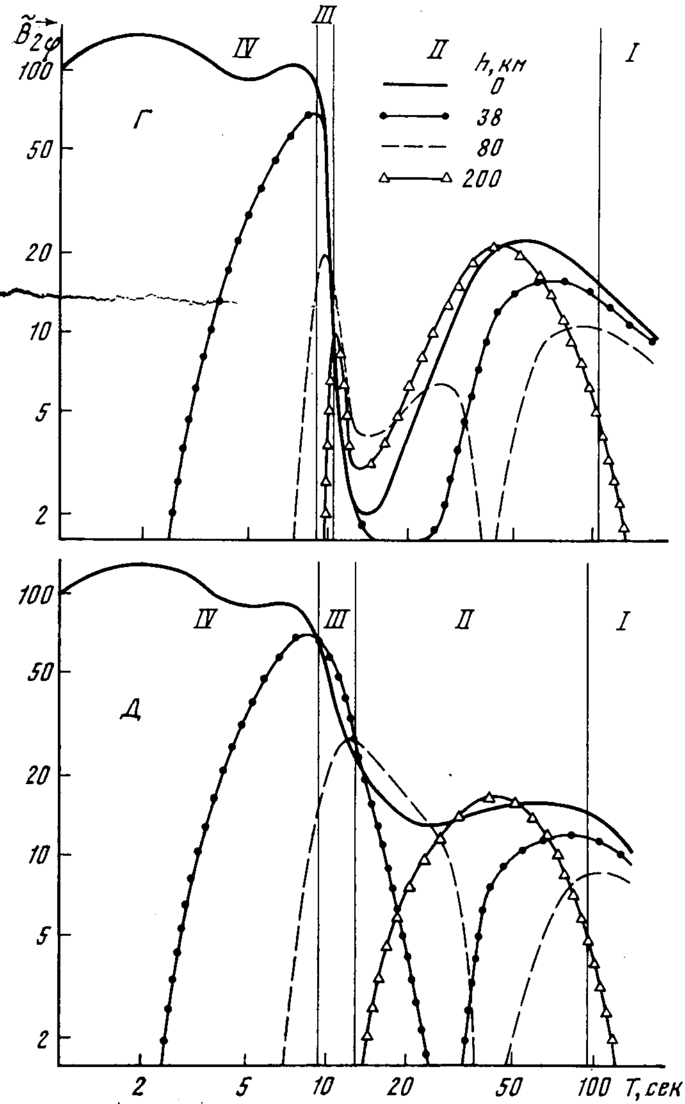


Рис. 26. Частотные характеристики второй гармоники волн Лява в моделях *Г* и *Д* при различных глубинах источника *h*, *км*

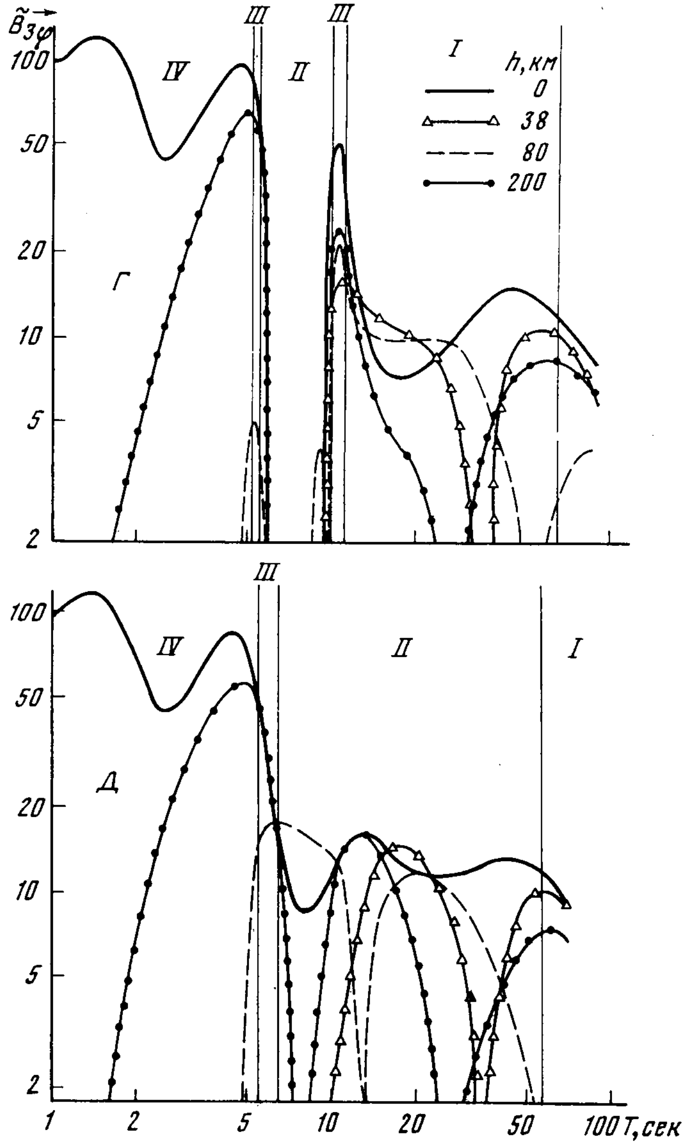


Рис. 27. Частотные характеристики третьей гармоники волн Лява в моделях *Г* и *Д* при различных глубинах источника *h*, *км*

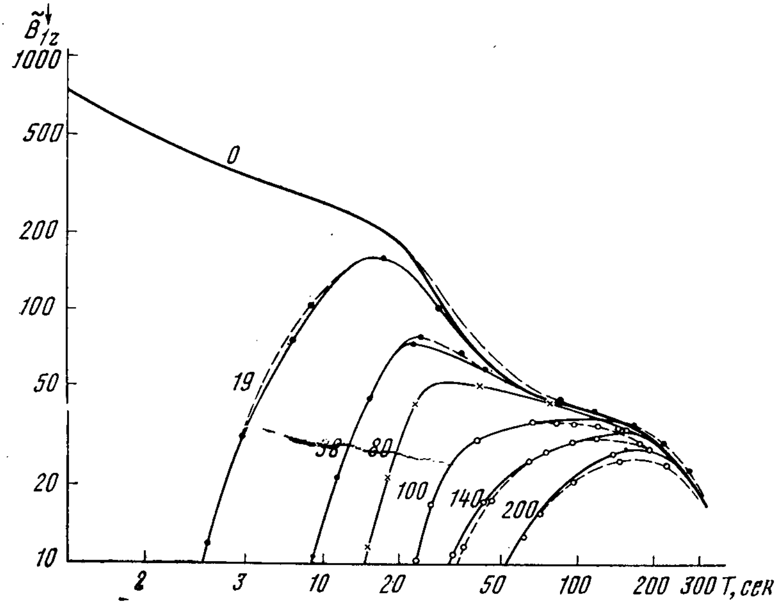


Рис. 28а Частотные характеристики основной гармоники волн Рэлея в моделях *Д* (сплошные линии) и *Г* (пунктир)

Источник — вертикальная сила, числа у кривых —глубины источника h, *км*. Вертикальная компонента смещения

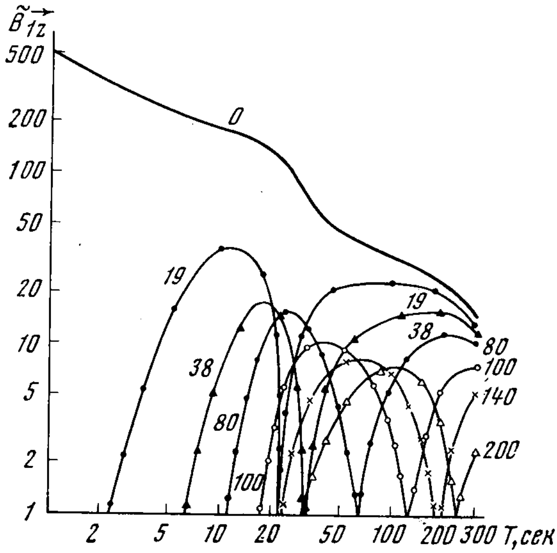


Рис. 28б. Частотные характеристики основной гармоники волн Рэлея в модели *Д*

Источник — горизонтальная сила. Остальные обозначения те же, что на рис. 28а

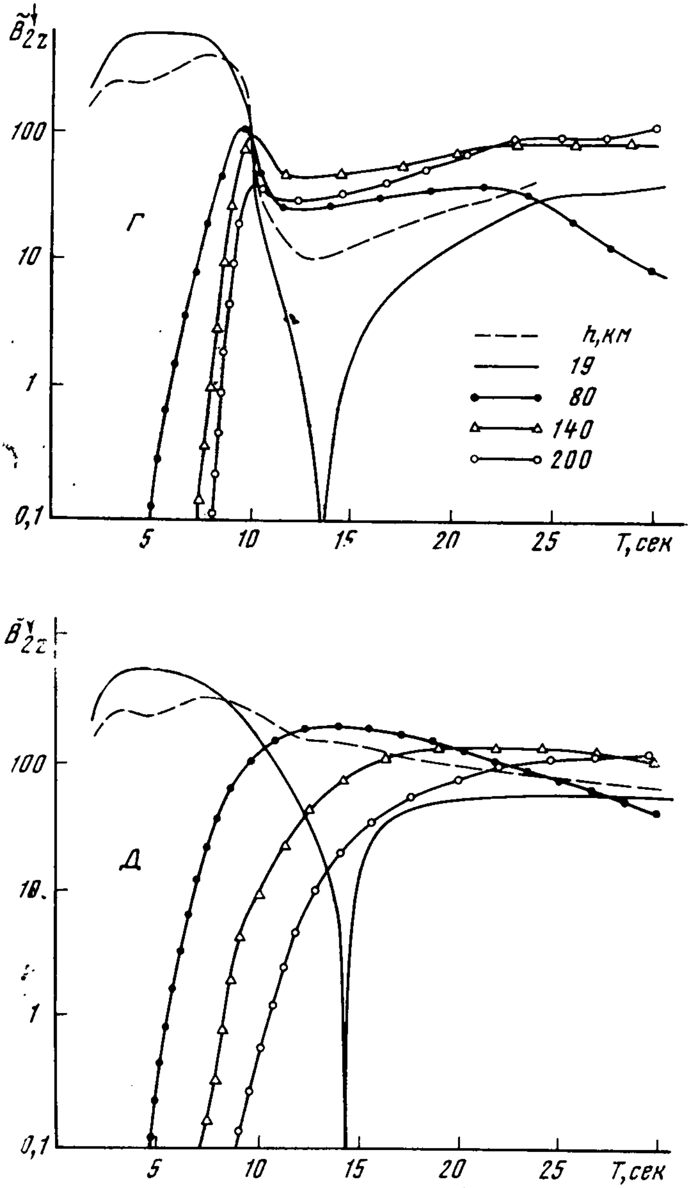


Рис. 29. Частотные характеристики второй гармоники волн Рэлея в моделях *Г* и *Д*

Источник — вертикальная сила на глубине *h*, *км*. Вертикальная компонента смещения

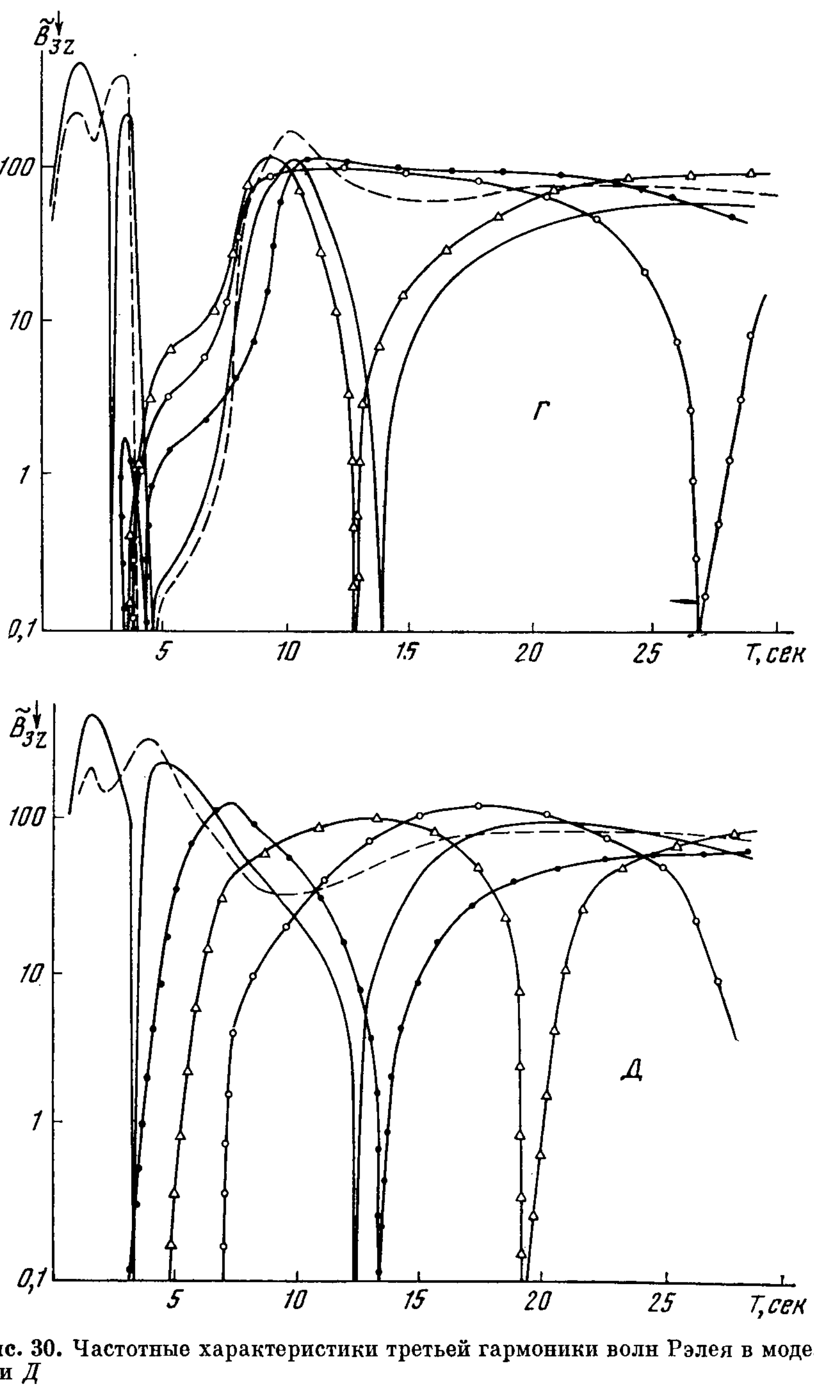


Рис. 30. Частотные характеристики третьей гармоники волн Рэлея в моделях *Г* и *Д*

Обозначения те же, что на рис. 29

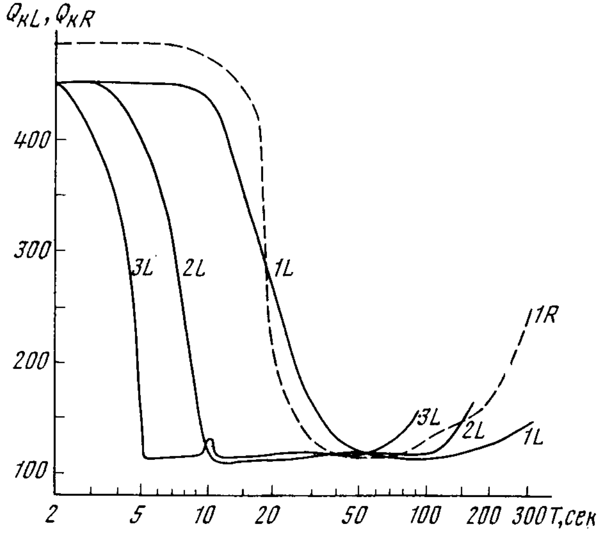


Рис. 31. Функции $Q_{kL}(T)$ $(k = 1,2,3)$, $Q_{1R}(T)$ для поверхностных волн в модели $Г$ (поглощение по Андерсону и др. [103])

Явления, типичные для поверхностных волн в моделях с двумя волноводами (зоны резких ослаблений амплитуд и резонансных максимумов $\widetilde{B}^{\downarrow}_{kq}(T)$), выражены у высших гармоник волн Рэлея в модели $Г$ несколько менее четко, чем у волн Лява. Характеристики $\widetilde{B}^{\rightarrow}_{kz}(T)$ для горизонтальной сосредоточенной силы из-за дополнительного узла смещений в собственной функции $\tilde{V}^{(2)}_k(z)$ несколько сложнее зависят от глубины очага и периода, чем $\widetilde{B}^{\downarrow}_{kz}(z)$ (рис. 28б).

Поглощение. На рис. 31 приведены расчетные кривые $Q_{kL}(T)$ $(k = 1, 2, 3)$ и Q_{1R} (T) для модели $Г$ и распределения Q_a, Q_b по Андерсону. Видно, что короткопериодной части спектра (участкам III—IV сейсмограмм) соответствуют большие Q_{kL}, по мере проникания волн в мантию Q_{kL} резко уменьшается (участок II), а затем медленно возрастает по мере проникновения волн в слои с большим Q на глубинах больше 500 *км* (участок I). Скоростное строение верхней мантии сравнительно слабо влияет на характер поглощения поверхностных волн; более заметный эффект оказывает изменение поглощающей модели. Так, в зависимости от того, как локализована зона малых Q в мантии, может заметно меняться крутизна спада от больших Q_{kL} к малым.

Рассмотрение зависимостей $\alpha_{kL}(T)$ показывает, что на фоне общего уменьшения коэффициента поглощения с ростом периода возможны локальные экстремумы $\alpha_{kQ}(T)$, связанные с влиянием на разные участки спектра различных частей модели и наличием зон пониженного Q внутри среды. Так, для основной гармоники волн Лява отмечается локальный максимум α_{1L} (T) на периоде около 30 *сек*, вызванный проникание волны в зону малых Q непосредственно под корой. Аналогичные максимумы отмечаются у высших гармоник $k = 2$ и $k = 3$ на периодах 11 и 5 *сек* соответственно.

Поведение Q_{kR} (T) и α_{kR} (T) волн Рэлея качественно сходно волнам Лява. Отметим только несколько более резкий спад к малым Q_{1R} у основной гармоники на периодах 20—30 *сек* и значительно более сильное возрастание Q_{1R} с периодом для периодов больше 100 *сек*.

Поляризация рэлеевских волн. Характер поляризации рэлеевских волн в плоских и сферических моделях демонстрируется рис. 32. Различия в отношении горизонтальной и вертикальной компонент смещения поверхности для моделей *Г* и *Д* в основной гармонике проявляются лишь при $T > 70$ *сек* и не превышают 0,05; для всего интервала периодов $\varkappa_k$ (T) заключено в диапазоне 0,6—0,8. У высших гармоник эти различия заметны уже на периодах больше 10 *сек* у второй и 5 *сек* у третьей гармоник и достигают 0,1. Для части спектра высших гармоник, у которой колебания ограничены корой (IV—V участки сейсмограмм), $\varkappa_k$ заключено в пределах 0,6—0,3; для волн, проникающих в мантию, возможно $\varkappa_k < 0,3$; знак $\varkappa_k$ всюду положителен, что соответствует возвратному движению частиц в волне, и смена направления движения возможна только для больших групповых скоростей, находящихся вне рассматриваемого диапазона.

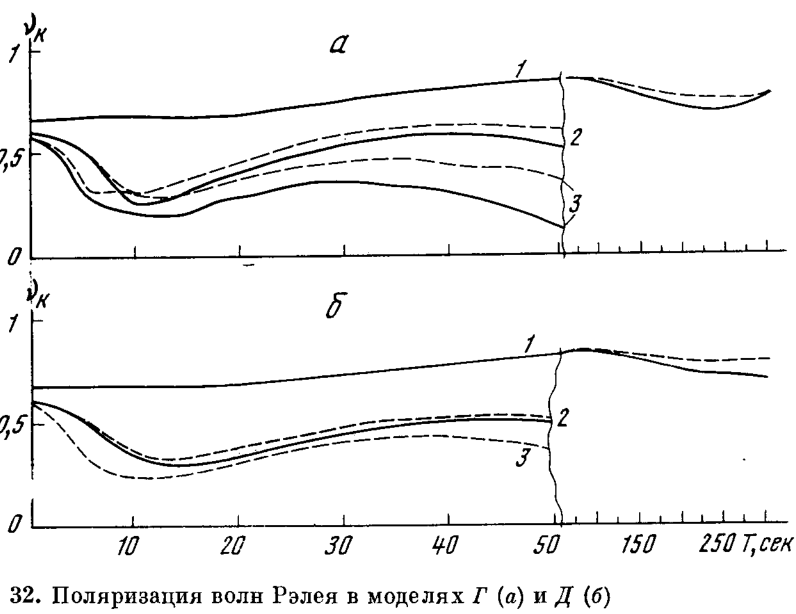


Рис. 32. Поляризация волн Рэлея в моделях *Г* (*а*) и *Д* (*б*)

Плоский случай — сплошные линии; сферический случай— пунктир; цифры у кривых — номера гармоник k

§ 2. Теоретические сейсмограммы поверхностных волн в моделях Земли Гутенберга и Джеффриса

Дополним качественный анализ волновой картины, проведенный в предыдущем параграфе, рассмотрением теоретических сейсмограмм. На рис. 33—38 приведены расчетные сейсмограммы волн Лява и Рэлея в моделях *Г* и *Д* для эпицентрального расстояния 3000 *км*. Для волн Лява источник — горизонтальная сила, а для волн Рэлея — вертикальная сила с равномерным спектром в области 2—45 *сек* (приведены сейсмограммы вертикальной компоненты смещения). Суммировались отдельно вторая и третья гармоники, а также первая, вторая и третья гармоники (мы обозначим соответствующие сейсмограммы $u_{2,3\varphi}(t)$, и $u_{1,2,3\varphi}(t)$ для волн Лява; $u_{2,3z}(t)$ и $u_{1,2,3z}(t)$ для волн Рэлея). Для волн Рэлея оценивался также вклад четвертой и пятой гармоник ($u_{1,2,3,4,5z}(t)$). Расчетные сейсмограммы имеют сравнительно сложный вид. Помимо интерференции нескольких диспергирующих цугов с различными видимыми периодами, на них, как и следовало ожидать, отмечается ряд волн с четкими вступлениями. Рассмотрим их характеристики.

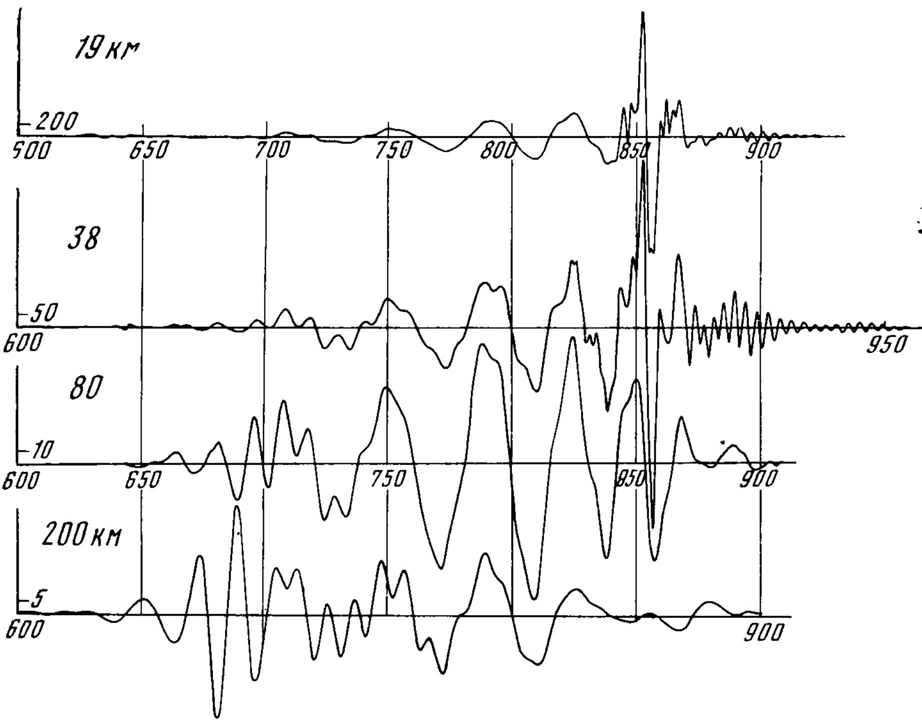


Рис. 33. Теоретические сейсмограммы волн Лява $u_{1,2,3\varphi}(t)$ в модели *Г* ($r = 3000$ *км*) при различных глубинах очага

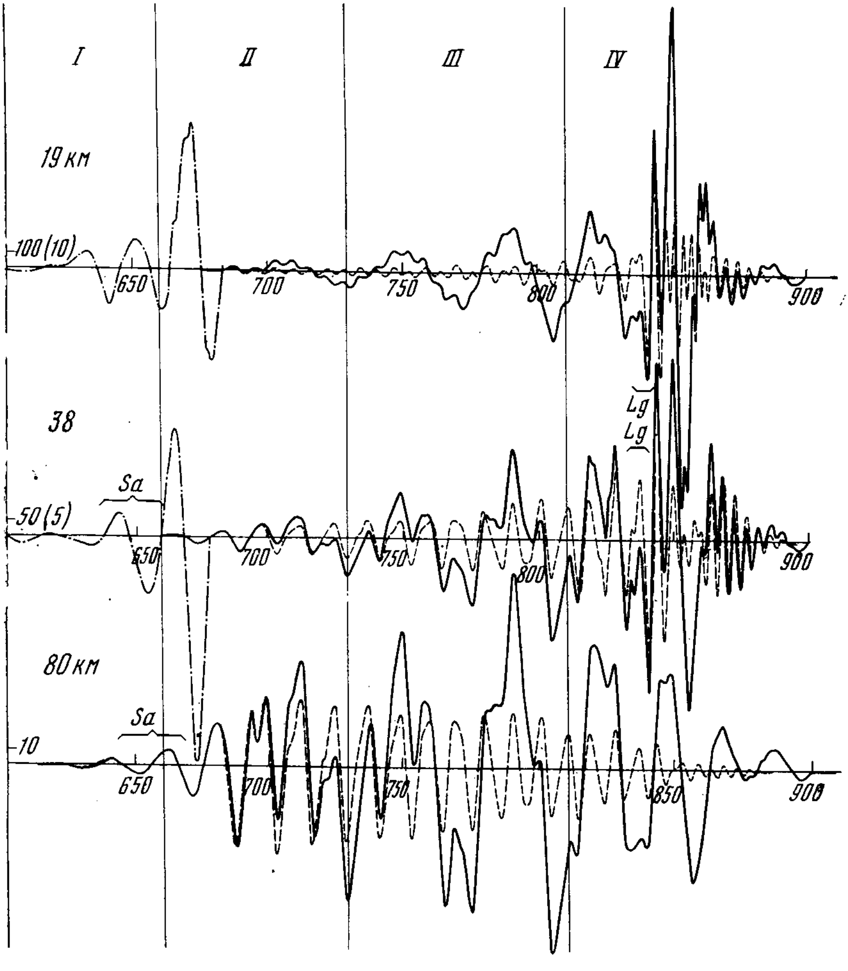


Рис. 34. Теоретические сейсмограммы волн Лява в модели *Д* (r = 3000 *км*) $u_{1,2,3\varphi}(t)$ — сплошные линии; то же, с десятикратным увеличением,— штрих-пунктир; $u_{2,3\varphi}(t)$ — пунктир

«Каналовые» волны. Первая волна с групповыми скоростями 4,65—4,40 *км/сек* (на временах 650—680 *сек*) отмечается у волн Лява и Рэлея. Она содержит периоды 10—30 *сек*; ее амплитуда сложным образом зависит от глубины очага; по мере углубления очага относительная амплитуда этой волны по сравнению с остальной записью отчетливо возрастает; для очагов на глубине 140—200 *км* ее амплитуды сравнимы с амплитудами для поверхностных очагов или превышают их. Сравнение записей $u_{1,2,3q}$ (t) и $u_{2,3q}$ (t) показывает, что эта волна образована наложением высших гармоник, а записей $u_{1,2,3,4,5z}$ (t) и $u_{1,2,3z}$ (t)

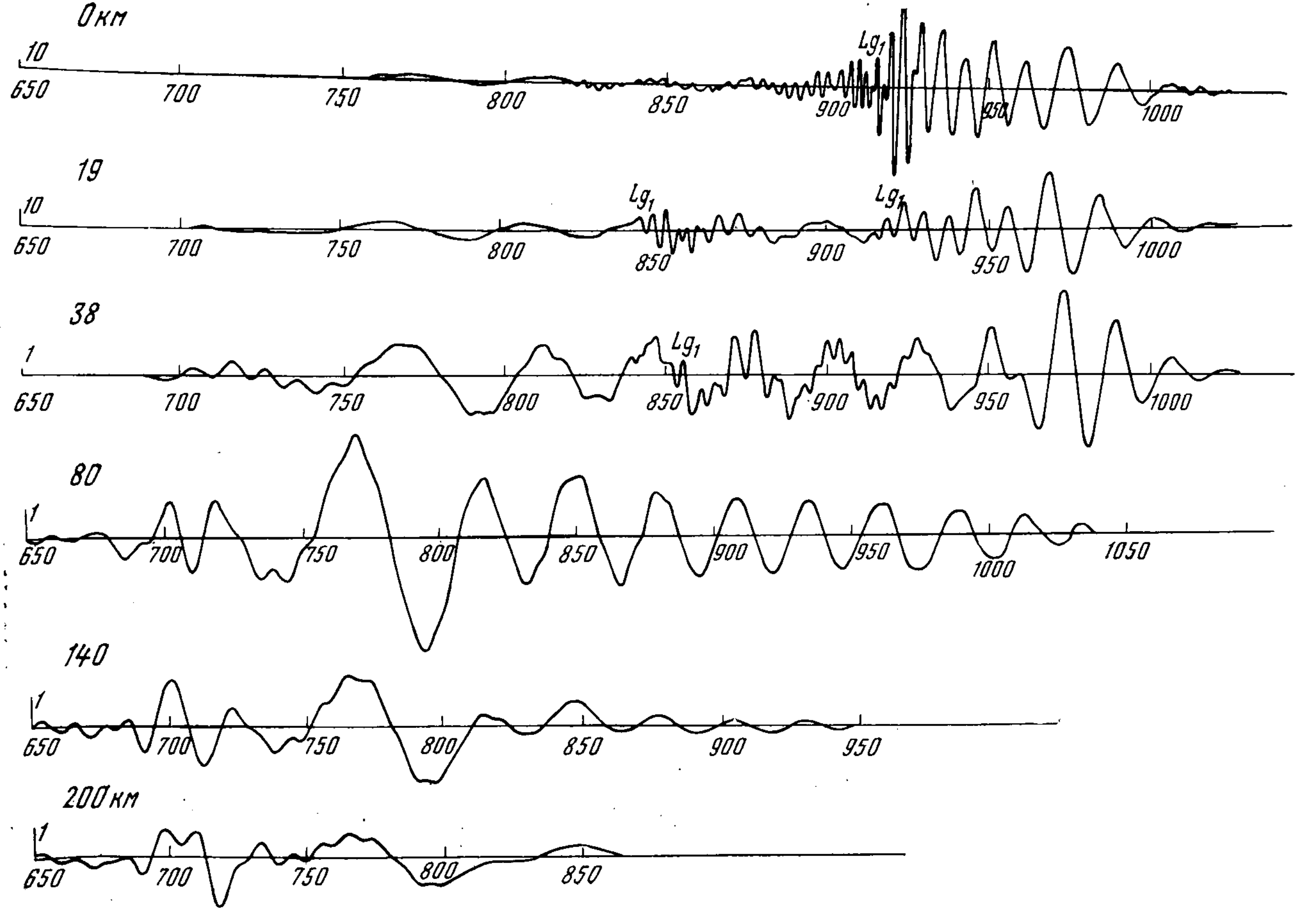


Рис. 35. Теоретические сейсмограммы волн Рэлея $u_{1,2,3z}(t)$ в модели $Г$ ($r = 3000$ *км*)

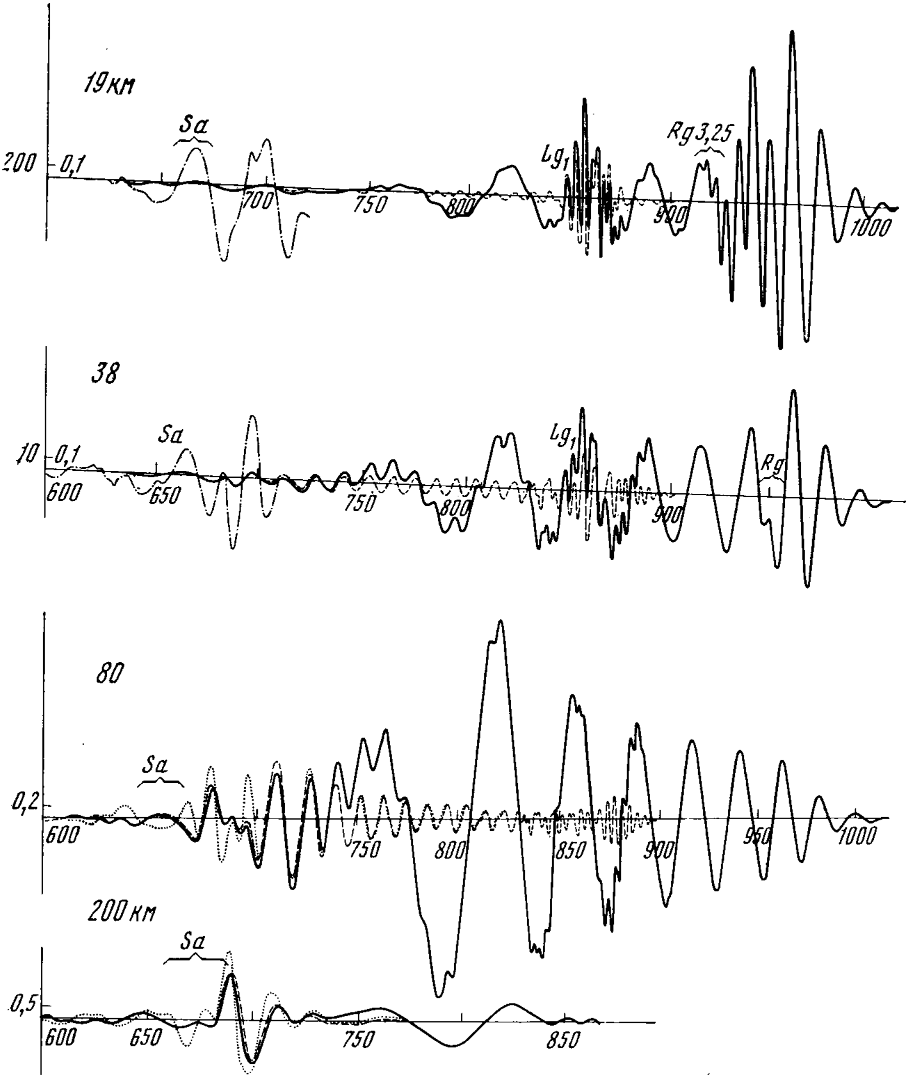


Рис. 36. Теоретические сейсмограммы волн Рэлея в модели *Д* (r = 3000 *км*)

$u_{1,2,3z}(t)$ — сплошные линии; то же, с десятикратным увеличением,— штрих-пунктир, $u_{2,3z}(t)$ — пунктир; $u_{1,2,3,4,5z}(t)$ — точечные линии

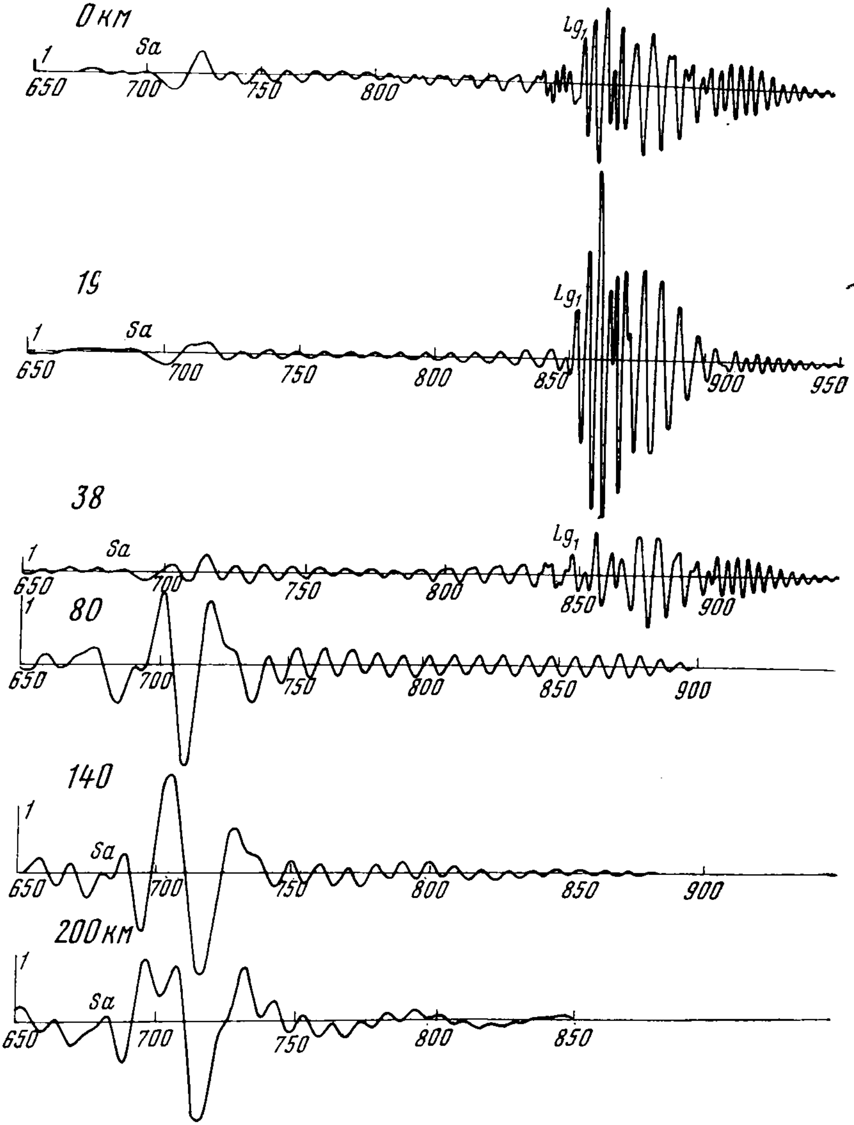


Рис. 37. Теоретические сейсмограммы волн Рэлея $u_{2,3z}$ (t) в модели Γ $(r = 3000$ *км*)

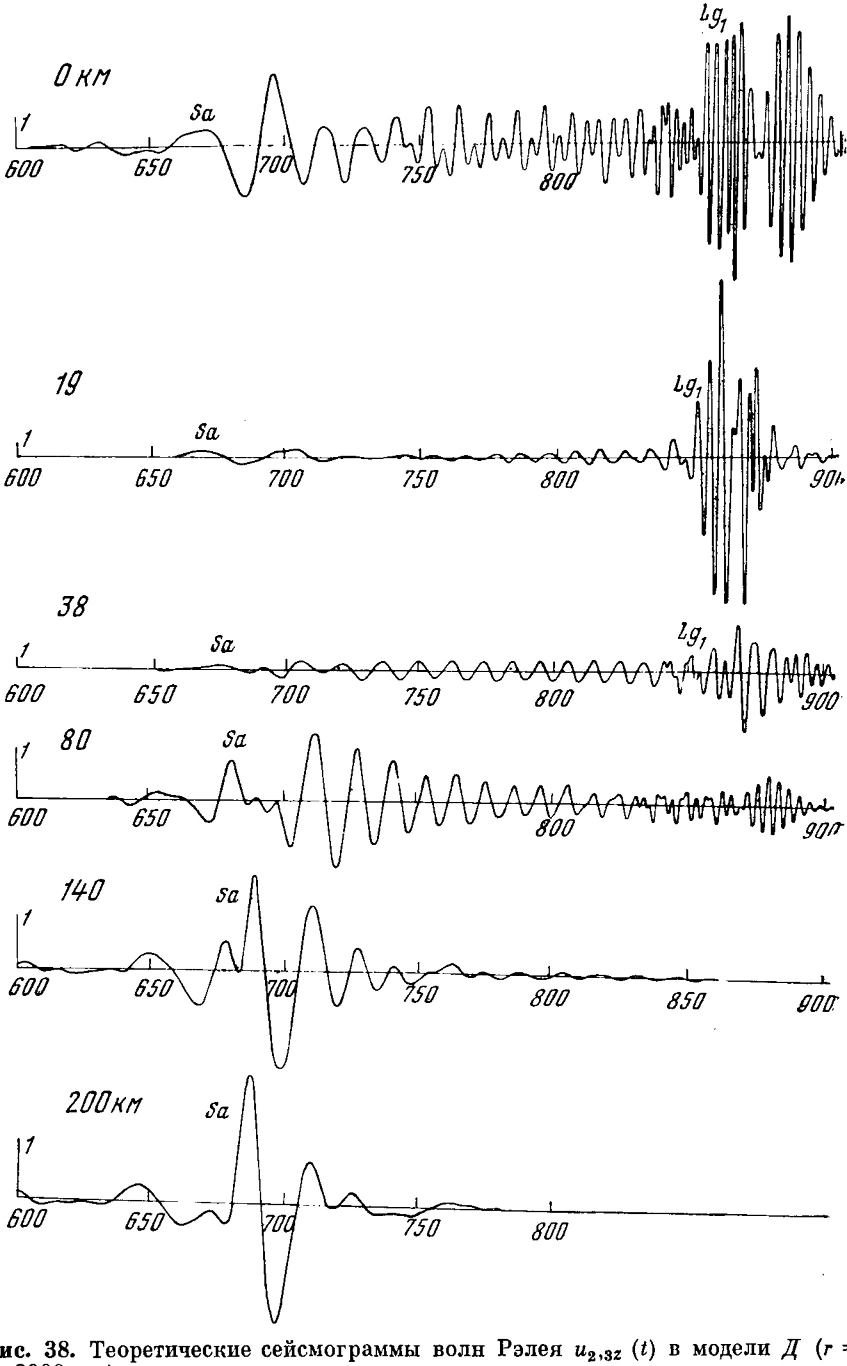


Рис. 38. Теоретические сейсмограммы волн Рэлея $u_{2,3z}(t)$ в модели *Д* ($r = 3000$ *км*)

(рис. 35, $h = 80, 200$),— что вклад высоких гармоник ($k > 3$) в этой зоне еще значителен. Отличие сейсмограмм рэлеевских волн состоит главным образом в том, что та же волна четко отделяется от последующего цуга при малых $h \leqslant 19$ *км*. Сравнение основных параметров этой волны и известных по литературе параметров волны *Sa* [20, 59, 89, 90, 115, 127, 137, 154] свидетельствует о том, что выделенная на расчетных сейсмограммах фаза обладает всеми основными свойствами волны *Sa*. При этом она отмечается как в модели *Г*, так и в модели *Д*, лишенной слоя пониженной скорости, причем даже более интенсивна и отчетлива в модели *Д*. Таким образом, нет оснований считать волну *Sa* каналовой и связывать ее возникновение с существованием слоя пониженной скорости в мантии на континентах. Главную роль в возникновении этой волны играют два фактора — резкая граница между корой и мантией и неоднородность верхних слоев мантии. Разумеется, свойства этой волны в моделях *Г* и *Д* (спектральный состав, форма записи, зависимость от глубины очага) несколько различны, однако делать количественные заключения об этом, основываясь на сейсмограммах $u_{1,2,3q}(t)$, нельзя. Из предыдущего параграфа следует, что для получения количественно верной динамической картины на этом участке записи нужно учесть до десяти гармоник.

Вторая волна, вступающая на фоне продолжительного цуга, имеет при малых h четкое короткопериодное вступление с групповыми скоростями 3,57—3,48 *км/сек* ($t = 840 \div 870$ *сек*) и периоды 8—4 *сек*. По мере углубления очага интенсивность волны быстро уменьшается, и при глубинах очага свыше 80 *км* волна практически отсутствует. На сейсмограммах $u_{1,2,3\varphi}(t)$ эта волна значительно интенсивней, чем на сейсмограммах $u_{1,2,3z}(t)$, так как значительный вклад в нее вносит основная гармоника $1L$; основная гармоника $1R$ в образовании волны не участвует. По своим параметрам отмечаемая волна весьма сходна с описанной многими сейсмологами волной *Lg* [45, 72, 78, 127, 155]. Таким образом, волна *Lg*, которую часто называют каналовой, образуется и в среде, лишенной внутреннего волновода вообще (модель *Д*). Наиболее важные факторы, определяющие свойства волны *Lg*, — наличие резкой границы коры и мантии и неоднородность (в нашем примере слоистость) коры.

Вслед за волной *Lg* на сейсмограммах $u_{1,2,3\varphi}(t)$ следует колебание большой амплитуды, быстро затухающее со временем. Это — фаза Эйри основной гармоники волн Лява с периодами 13—16 *сек*. На сейсмограммах волн Рэлея наблюдается еще одно вступление на временах 920—950 *сек*. Ему соответствуют групповые скорости 3,25—3,15 *км/сек*, периоды 10—12 *сек*; оно целиком обязано основной гармонике волны Рэлея и затухает с погружением очага еще быстрее, чем волна *Lg*. По своим характеристикам оно сходно с известной по литературе волной *Rg* [45, 72, 154]. Таким образом, и эта волна не связана с каким-либо внутренним волноводом, ее свойства контролируются неоднородностью (слоистостью) земной коры.

Сложный, интерференционный характер сейсмограмм позволяет выделить на них ряд других, несколько менее четких фаз, которые могли бы быть отождествлены с другими известными из литературы «каналовыми» волнами [6, 72, 107, 109]. Однако, на наш взгляд, вряд ли следует придавать особое значение появлению слабых вступлений на сейсмограммах поверхностных волн, так как их присутствие или отсутствие контролируется недостаточно изученными факторами (механизм и глубина очага, спектральный состав источника) и не может рассматриваться как надежная характеристика среды.

Различия теоретических сейсмограмм в моделях *Г* и *Д*. Различия сейсмограмм в моделях *Г* и *Д* визуально не слишком значительны и нивелируются за счет вклада основной гармоники, которая в рассмотренном диапазоне периодов в этих моделях практически не отличается и обладает значительной амплитудой. Они заключаются в форме колебаний в волне Sa, поведении огибающей и частотном содержании диспергирующего цуга в интервале групповых скоростей 4,3—3,7 *км/сек* (т. е. на втором и третьем участках записи). Наиболее заметны эти явления при сравнении сейсмограмм $u_{2,3z}(t)$ (рис. 37, 38), $u_{2,3\varphi}(t)$ (рис. 46, 47). Для модели *Г* характерно резкое уменьшение амплитуд в интервале скоростей 3,9—3,8 *км/сек* (750—780 *сек*) в результате интерференции двух высших гармоник с близкими групповыми скоростями и периодами. В модели *Д* столь резких изменений амплитуд не наблюдается. Наиболее отчетлив этот эффект для глубин очага 38 и 80 *км*. Отметим также, что в модели *Г* убывание короткопериодной части цуга высших гармоник с глубиной очага происходит заметно быстрее, чем в модели *Д*.

Теоретические сейсмограммы для источников с широким спектром излучения. На рис. 39 слева приведена сейсмограмма $u_{1z}(t)$ основной гармоники волн Рэлея для источника, у которого спектральная функция имеет постоянную амплитуду между 20 и 100 *сек* и плавно спадает к нулю в интервалах между 10 и 20 и 100 и 300 *сек*. Источник — вертикальная сосредоточенная сила на глубине 38 *км*, модель среды *Г*, расстояние 5000 *км*. Мы видим четкое вступление со скоростью максимума 3,88 *км/сек*, по своим свойствам сходное с экспериментально наблюдаемой при сильных землетрясениях фазой R. За ним следует интерференционный цуг, в котором наиболее отчетливо видно уменьшение периода со временем от 60 до 20 *сек* (вклад крутой ветви $C_{1R}(t)$ справа от основного минимума); присутствие длиннопериодных составляющих (вклад ветви $C_{1R}(t)$ справа от локального максимума) распознается лишь по сложной форме огибающей. Колебание заканчивается фазой Эйри, соответствующей минимуму $C_{1R}(T)$ на периоде 18 *сек*; волна Rg отсутствует из-за относительно большой глубины очага и ограничений на спектр источника со стороны коротких периодов.

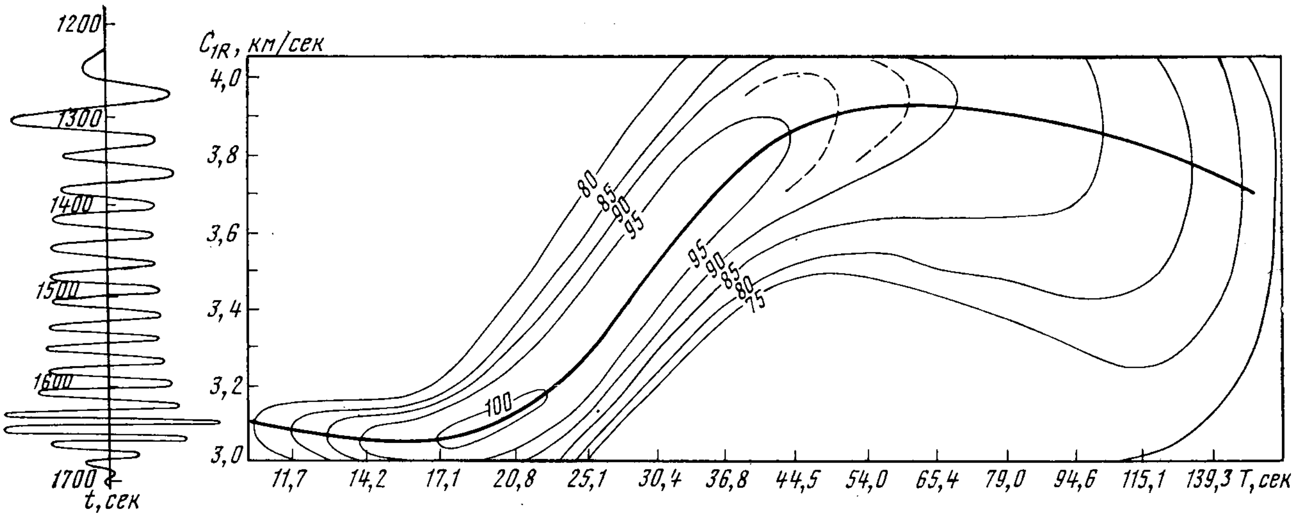


Рис. 39. Теоретическая сейсмограмма $u_{1z}(t)$ в модели Γ (r = 5000 *км*, h = *км*) и диаграмма СВАН

Здесь и далее числа у изолинии — значения 10 (log | $Y(\omega)$ | + 5)

Возможности использования теоретических сейсмограмм. Рассмотренные примеры демонстрируют возможности применения теоретических сейсмограмм для объяснения природы и изучения свойств экспериментально наблюдаемых фаз поверхностных волн (*Sa*, *Lg*, *Rg*, *R*, *G*). Однако этим далеко не исчерпываются возможности, открываемые численным моделированием полей поверхностных волн. Одним из наиболее перспективных направлений в использовании теоретических сейсмограмм является анализ магнитуд. Как известно, магнитуды являются условной характеристикой интенсивности землетрясений и определяются непосредственно по записям поверхностных (*M*) или объемных (*m*) волн (см., например, [19, 83, 146]).

Имеющиеся калибровочные кривые магнитуд *M*, приводящие измеренные по записям амплитуды к фиксированному расстоянию, получены статистическим путем. Теоретические сейсмограммы для различных расстояний могут составить более надежную базу для определения калибровочных кривых. По ним можно также оценить влияние глубины очага на магнитуду *M* и найти соответствующие поправки.

Из рассмотрения сейсмограмм на рис. 33—36 видно, что ослабление максимальной амплитуды (а следовательно, и магнитуды) по мере погружения очага под кору происходит сходным образом в моделях *Г* и *Д*. Это опровергает объяснения дефекта магнитуды при погружении очага в мантию влиянием астеносферы [92]; он связан с тем, что глубина проникания колебаний основной гармоники волн Лява и Рэлея с периодами меньше 30 *сек*, используемых для измерения *M*, не превышает мощности коры.

Теоретические сейсмограммы могут оказаться весьма полезными при физической интерпретации и развитии критерия обнаружения ядерных взрывов по отношению магнитуд *m*/*M* [67, 81, 146]. Они оказываются полезными и при объяснении ряда других наблюдаемых эффектов. Так из сейсмограмм на рис. 33—36 с очевидностью следует, что относительный вклад высших гармоник быстро возрастает по мере углубления очага: этот эффект хорошо известен экспериментально [6, 109]. Сравнение сейсмограмм для очагов в верхней и нижней частях коры свидетельствует о быстром ослаблении короткопериодных частей сигнала с погружением источника. Этот факт находит хорошее экспериментальное подтверждение в наблюдениях землетрясений с надежно определенными глубинами очага и может быть использован для оценок глубин очага в пределах земной коры [76, 144]. Наконец, в следующем параграфе мы продемонстрируем использование теоретических сейсмограмм для оценки эффективности и разрешающей способности новых машинных методов обработки сейсмограмм поверхностных волн.

§ 3. Спектрально-временно́й анализ поверхностных волн

Приведенные теоретические сейсмограммы могут служить модельными примерами исходных данных, используемых в сейсмологии при решении обратной задачи — определении строения среды по наблюденному волновому полю. Вид сейсмограмм в значительной степени определяется параметрами источника, варьирующими от землетрясения к землетрясению и известными интерпретатору с малой точностью и надежностью (механизм, спектр, глубина очага). Поэтому наилучший путь интерпретации — в разделении влияния среды и источника, например путем определения по имеющимся сейсмограммам инвариантных относительно источника характеристик поверхностных волн. Согласно гл. 1—3, к ним относятся дисперсионные кривые $v_{kQ}(T)$ и $C_{kQ}(T)$, функции $\varkappa_k(T)$ и $Q_{kQ}(T)$ отдельных гармоник поверхностных волн. Таким образом, возникает задача разделения гармоник и определения их индивидуальных спектральных характеристик.

Рассмотрение рис. 33—38 приводит к выводу, что визуальное выделение гармоник по сейсмическим записям сопряжено со значительными трудностями, а определение по ним спектральных характеристик обычным визуальным способом (по экстремальным точкам записи) — весьма неточная операция. Особенно сильно искажены длиннопериодные участки сигнала, наименее устойчивые к интерференционным эффектам. Предварительная полосовая фильтрация сейсмограмм хотя и улучшает точность обработки, все же не снимает всех трудностей, вызванных наложением гармоник.

Переход от временно́й записи $u_q(t)$ к ее спектру $U_q(\omega)$, как следует из формул (1.29), (1.70) и проведенных расчетов, не дает большого эффекта, поскольку из-за интерференции гармоник амплитудный спектр записи оказывается изрезанным, а фазовый спектр — неустойчивым в областях малых амплитуд. При анализе реальных записей это усугубляется добавлением к сигналу микросейсм, а также помех, вызванных самим сигналом,— запаздывающих поверхностных волн, отраженных от неоднородностей коры и мантии и пришедших к станции по более длинным путям, чем сигнал [152]. В результате ошибки спектральных измерений могут быть весьма значительными.

Таким образом, традиционные способы представления сейсмических сигналов в виде одномерных временны́х или спектральных функций при анализе поверхностных волн оказываются неадекватными исследуемому явлению. Более точные и надежные результаты могут быть получены с помощью двумерного спектрально-временно́го представления, в котором амплитудные и фазовые характеристики процесса рассматриваются как функции двух переменных: частоты и времени. Хотя идея спектрально-временно́го анализа (далее он сокращенно обозначен СВАН) известна длительное время, в сейсмологии этот подход в цифровой реализации стал применяться для изучения диспергирующих цугов только в последние годы, а в отечественной литературе вообще не рассматривался. В связи с этим ниже будет приведено краткое рассмотрение принципа СВАН и реализующего его машинного алгоритма, а затем показаны результаты обработки этим методом расчетных и реальных сейсмограмм поверхностных волн.

Принципы спектрально-временно́го анализа. Обозначим подлежащую анализу запись поверхностной волны в интервале времени $t_н \leqslant t \leqslant t_к$ $u(t)$, а ее преобразование Фурье $U(x)$:

$$U(x) = \int_{t_н}^{t_к} e^{-ixt}\, u(t)\, dt. \tag{5.1}$$

Основной принцип СВАН заключается в замене одномерных представлений анализируемого сигнала $u(t)$ или $U(x)$ двумерным представлением $У(t, \omega)$, характеризующим спектр сигнала в окрестности частоты ω в моменты времени, близкие к t. $У(t, \omega)$ определяется так:

$$У(t, \omega) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} U(x)\, H\left(\frac{x-\omega}{\omega}\right) e^{ixt}\, dx, \tag{5.2}$$

где $H(x)$ — некоторая функция, имеющая максимум при $x = 0$ и быстро убывающая с ростом x; $H\left(\frac{x-\omega}{\omega}\right)$ имеет смысл частотной характеристики узкополосного фильтра с центральной частотой ω. Произведение $U(x)\, H\left(\frac{x-\omega}{\omega}\right)$ представляет собой спектр отфильтрованного сигнала, а функции $|У(t, \omega)|$ и $\arg У(t, \omega)$ — соответственно его огибающую и фазу [29].

Рассмотрим, как с помощью функции $|У(t, \omega)|$ можно определить групповую скорость поверхностной волны.

Как следует из формулы (1.29), спектр k-й гармоники на расстоянии r от источника можно представить в виде

$$U_{kq}(x) = |U_{kq}(x)| \exp\left[i\left(-\frac{rx}{v_{kQ}(x)} + \psi_Q(x)\right)\right], \tag{5.3}$$

где $|U_{kq}|$, v_{kQ}, ψ_Q — медленно меняющиеся функции частоты x.

---

[2] В акустических исследованиях речи СВАН в аналоговой форме применяются уже более 20 лет [135, 153]; та же аппаратура была использована эпизодически сейсмологами в 1959 г. [125], в СССР получил развитие аналоговый метод ЧИСС [8, 37], в котором содержатся идеи (но не техники) СВАНА.

Применяя преобразование (5.2) и оценивая $У(t, \omega)$ на больших расстояниях r методом стационарной фазы [44], получаем

$$У(t, \omega) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, H\left(\frac{\widetilde{\omega}-\omega}{\omega}\right) \left| U_{kQ}(\widetilde{\omega}) \right| \times$$

$$\times \frac{C_{kQ} \exp\left\{ i \left[\widetilde{\omega}\left(t - \frac{r}{v_{kQ}(\widetilde{\omega})}\right) + \psi_Q(\widetilde{\omega}) + \frac{\pi}{4} \operatorname{sign} \frac{dC_{kQ}(\widetilde{\omega})}{d\omega} \right] \right\}}{\sqrt{\left| \frac{dC_{kQ}(\widetilde{\omega})}{d\omega} r \right|}}. \quad (5.4)$$

Здесь $\widetilde{\omega} = \widetilde{\omega}(t)$ — корень уравнения $r/t - C_{kQ}(\omega) = 0$, где $C_{kQ}(\omega)$ — групповая скорость данной гармоники поверхностной волны; для простоты положим, что это уравнение имеет только один корень. Максимум функции $H\left(\frac{\widetilde{\omega}-\omega}{\omega}\right)$ на плоскости (ω, t) достигается там, где аргумент $(\widetilde{\omega} - \omega)/\omega$ обращается в нуль, т. е. на линии $\omega = \widetilde{\omega}(t)$. Поскольку функции $|U_{kQ}(\omega)|$, $C_{kQ}^{(\omega)}$ и $dC_{kQ}/d\omega$ меняются сравнительно медленно, область повышенных значений функций $|У(t, \omega)|$ — гребень рельефа этой функции — также будет приурочена к этой линии. Зная $\widetilde{\omega}(t)$, легко определить групповую скорость. Этим и обосновывается возможность определения закона частотной модуляции сигнала и тем самым групповой скорости по рельефу функции $|У(t, \omega)|$. Сами значения $|У(t, \omega)|$ вдоль гребня определяют закон амплитудной модуляции, а значения $\arg У(t, \omega)$ содержат информацию о фазовой скорости.

Если сигнал $u(t)$ содержит несколько гармоник (или состоит из нескольких элементарных сигналов, соответствующих разным участкам кривой групповой скорости одной и той же гармоники), они будут проявляться в рельефе функции $|У(t, \omega)|$ как отдельные гребни. Это позволяет разделить интерферирующие гармоники и определить их групповые скорости. Возможность разделения сигналов лимитируется разрешающей способностью анализа, зависящей от ширины полосы пропускания фильтра $H\left(\frac{x-\omega}{\omega}\right)$ и от длительности сигнала.

Разрешающая способность СВАН. Хорошо известно, что частота и время являются сопряженными понятиями и их невозможно измерять одновременно сколь угодно точно. Если мы определим разрешающую способность по времени Δt и частоте $\Delta\omega$ одним из принятых способов [88], то принцип неопределенности можно выразить неравенством $\Delta\omega\, \Delta t = q_1 \geqslant q > 0$, где q зависит от способа определения $\Delta\omega$ и Δt. Поэтому, когда мы говорим об амплитуде или фазе составляющей сигнала на частоте ω в момент времени t, фактически речь идет о полосе частот $\omega \pm \Delta\omega$ и интервале времен $t \pm \Delta t$. Таким образом, мы можем на плоскости (ω, t) измерять лишь амплитуды и фазы, усредненные по частоте и по времени на некоторых площадках размером $2\,\Delta\omega \cdot 2\Delta t = 4\,q_1$. Одну из сторон площадки можно выбрать произвольно, учитывая лишь практические ограничения из-за конечной длительности записи или полосы пропускания сигнала; другая найдется по величине q_1, так как площадь площадки останется постоянной.

В результате для поверхностных волн можно разделять отдельные гармоники, если они обрисовываются неперекрывающимися площадками.

При выборе конкретных функций $H\left(\frac{x-\omega}{\omega}\right)$ следует стремиться к получению минимального q_1. Известно, что гауссовские функции являются в этом смысле оптимальными среди всех функций, бесконечных по времени и неограниченных по частоте.

Для конечного интервала времени наблюдения оптимальными являются вытянутые сфероидальные функции [122]. Достигаемый при этом выигрыш по сравнению с гауссовскими функциями весьма мал и не оправдывается из-за усложнения вычислений сфероидальных функций.

В применяемом нами алгоритме функция $H\left(\frac{x-\omega}{\omega}\right)$ имеет вид

$$H\left(\frac{x-\omega}{\omega}\right) = \exp\left[-\alpha\left(\frac{x-\omega}{\omega}\right)^2\right], \tag{5.5}$$

а ее преобразование Фурье (временно́й отклик на δ-функцию) при не слишком малых ω дается формулой

$$h(t) \approx \frac{\omega}{\sqrt{\pi\alpha}} \exp\left[-\frac{\omega^2}{4\alpha}t^2\right]\cos\omega t. \tag{5.6}$$

Условимся считать [88], что разрешающая способность функций H и h определяется стандартным отклонением нормированных гауссовых сомножителей в (5.5) и (5.6), откуда получаем:

$$\Delta\omega = \frac{\omega}{\sqrt{2\alpha}}, \tag{5.7}$$

$$\Delta t = \frac{\sqrt{2\alpha}}{\omega}. \tag{5.8}$$

Таким образом, соотношение неопределенности будет иметь вид

$$\Delta\omega\,\Delta t = 1. \tag{5.9}$$

Итак, можно задать, например, нужную ширину спектрального окна $\Delta\omega$, выбрать в (5.7) нужное значение α и получить для этого α по формуле (5.8) некоторую ширину временного окна Δt или, наоборот, задаваться Δt и определить $\Delta\omega$ по (5.7).

Машинный алгоритм СВАН. Наиболее эффективно СВАН реализуется при помощи ЭВМ [112, 122]. Ниже будут описаны алгоритм и программа СВАН, разработанные автором совместно с В. Ф. Писаренко, Ф. М. Пручкиной, Г. А. Погребинским [142]; этот алгоритм отличается от описанных в американской литературе несколько иной техникой преобразования Фурье, позволяющей повысить точность вычислений без потери быстродействия; он реализуется на машинах среднего класса типа БЭСМ-4.

1. *Подготовка данных.* Входной сигнал представлен последовательностью отсчетов через равные интервалы времени: $u(t_j)$, $t_j = t_{\text{н}} + (j-1)\,\Delta t$; $j = 1, \ldots, L$. Такая последовательность может быть получена либо путем полуавтоматической цифровки фотозаписи [43], либо путем непосредственной цифровой регистрации. В последнем случае благодаря большой частоте опроса исходный числовой массив может быть слишком велик для обработки по методике СВАН. Поэтому он подвергается вначале ряду последовательных операций сглаживания и разрежения для устранения избыточной высокочастотной информации без внесения искажений в сигнал.

Затем входной сигнал исправляется за возможное линейное смещение (тренд) нулевой линии и умножается на косинусовый сужатель, устраняющий эффект обрыва краев сигнала. Далее он дополняется нулями до ближайшего к L сверху числа точек 2^l $(l \leqslant 11)$.

2. *Переход в частотную область.* По методике, описанной в § 4 гл. 2, находится преобразование Фурье от входного сигнала

$$U(x_j) = \int\limits_{t_{\text{н}}}^{t_{\text{н}}+\Delta t(2^l-1)} u(t)\, e^{-ix_j t}\, dt.$$

Точки x_j находятся по формуле $x_j = 2\pi/(\Delta t\ 2^{l+\sigma})$, где σ может принимать значения 0, 1 или 2.

Делением на комплексную частотную характеристику аппаратуры, заданную в тех же точках x_j, устраняется искажающий эффект аппаратуры в рабочем диапазоне частот. В случае, когда анализируется цифровая магнитная запись, эта характеристика вычисляется по калибровочному сигналу, имеющемуся на записи, тем же способом, что и $U(x_j)$ [34].

3. *Вычисление* $У(t, \omega)$. Функция $У(t, \omega)$ вычисляется в дискретном наборе точек ω_m $(m = 1, 2, \ldots, M)$ и t_n $(n = 1, 2, \ldots, N)$ в пределах исследуемой части плоскости (ω, t). Наиболее удобен логарифмически постоянный шаг по частоте, т. е. $\omega_{m+1}/\omega_m = \text{const}$, и постоянный шаг δt по времени; последний из-за плавности $|\,У(t, \omega)\,|$ целесообразно иметь существенно большим, чем Δt, а именно

$$\delta t = \Delta t 2^q, \quad q = 1, 2, 3, \ldots\ .$$

Вычисление $У(t, \omega)$ для заданного ω_m проводится так: исправленный спектр сигнала умножается на функцию $H\left(\frac{\omega_m - x}{\omega_m}\right)$; полученный в результате узкополосный спектр трансформируется во временнýю область тем же способом, что и в п. 2. Однако за счет различия в шаге Δt и δt при обратном преобразовании достаточно вычислять спектр в точках t_n:

$$t_n = t_{\text{н}} + \delta t \cdot n, \ N = 2^{l-q}.$$

Благодаря применению описанного в гл. 2 (стр. 58) приема суммирования обратное преобразование осуществляется при этом существенно более быстро, чем прямое. Затем по известным комплексным величинам $У(t_n, \omega_m)$ находятся $\log|У(t_n, \omega_m)|$, $\arg У(t_n, \omega_m)$ (с точностью до 2π). Полученные результаты запоминаются, и программа переходит к счету для следующего значения ω_{m+1}. Результирующие матрицы $\{\log|У(t_n, \omega_m)|\}$, $\{\arg У(t_n, \omega_m)\}$ печатаются по окончании счета.

Анализ диаграмм СВАН, определение групповых и фазовых скоростей. Этот этап обработки в настоящее время еще не автоматизирован, поскольку пригодный для программирования алгоритм еще отрабатывается. По матрицам $\{\log|У(t_n, \omega_m)|\}$ строятся изолинии уровня с заданным шагом по $\Delta \log|У(t, \omega)|$, выделяются зоны повышенных значений $\log|У(t, \omega)|$ и через эти зоны проводятся линии гребня, пересекающие изолинии в точках с минимальным градиентом $\log|Y(t, \omega)|$. Такие линии с точностью оценок метода стационарной фазы аппроксимируют кривые групповой скорости отдельных гармоник в тех частях плоскости (ω, t), где эти сигналы разделены.

После первого анализа целесообразно оценить, правильно ли выбран параметр фильтра α; наиболее целесообразно приспосабливать α к виду кривых $C_{kQ}(\omega)$: крутым участкам $C_{kQ}(\omega)$ должны соответствовать большие α (малое $\Delta\omega$), пологим участкам C_{kQ} — малые α (малые Δt). Может оказаться целесообразным обработать запись заново с другими значениями α; в принципе СВАН нетрудно усовершенствовать, сделав α переменным и изменяющимся с ω по заданному закону.

Располагая матрицами $\{У^{(1)}(t_n, \omega_m)\}$, $\{У^{(2)}(t_n, \omega_m)\}$ для записей одного и того же землетрясения, полученных на двух станциях вдоль одной и той же трассы, можно определить фазовую скорость между станциями в функции частоты. Для этого для каждого ω_m надо снять отсчеты $\arg У^{(1)}(t^{(1)}, \omega_m)$, $\arg У^{(2)}(t^{(2)}, \omega_m)$ в точках $t^{(1)}$, $t^{(2)}$, лежащих на гребне одной и той же кривой групповой скорости; фазовая скорость на частоте ω_m найдется по формуле

$$v_{kQ}(\omega_m) = \omega_m \Delta r / [\omega_m (t^{(2)} - t^{(1)}) + \arg Y^{(1)}(t^{(1)}, \omega_m) - \\ - \arg Y^{(2)}(t^{(2)}, \omega_m) \pm 2\pi N],$$

где $\Delta r = r_2 - r_1$ — расстояние между станциями; неопределенность в $\pm 2\pi N$, $N = 0, 1, 2, \ldots$ легко исключить из физических соображений (степень точности кривой зависит от точности оценок метода стационарной фазы).

Величину $\log \frac{|Y^{(2)}(t^{(2)}, \omega_m)|}{|Y^{(1)}(t^{(2)}, \omega_m)|}$ можно использовать для определения коэффициента поглощения $\alpha_{kQ}(\omega_m)$. При этом необходимо учесть уменьшение амплитуд с расстоянием за счет геометрического расхождения и растягивания волнового фронта.

Диаграммы СВАН различных компонент одной и той же записи могут также быть использованы для определения поляризации волн и, в частности, коэффициента эллиптичности $\varkappa_k$ в функции частоты.

Возможности СВАН, конечно, не ограничиваются изучением поверхностных волн. СВАН является весьма эффективным методом изучения любых диспергирующих цугов; описанная программа находит применение, например, при изучении пульсаций магнитосферы типа РС-1 и РС-2, где с ее помощью уже получен ряд новых результатов по оценке параметров магнитосферы [31].

Ниже мы рассмотрим примеры применения СВАН к анализу расчетных и наблюденных полей поверхностных волн.

Дисперсия основной гармоники волны Рэлея на континентальной трассе. На рис. 39 приведены расчетная сейсмограмма и диаграмма СВАН ($\alpha = 50$) основной гармоники волны Рэлея в модели *Г* при глубине очага 38 *км* на расстоянии 5000 *км*. На диаграмме отчетливо вырисовывается гребень повышенных значений $\log |Y(t, \omega)|$, по которому легко проводится кривая групповой скорости. Сравнение этой кривой с расчетом (рис. 40) показывает, что СВАН позволяет с высокой точностью (погрешность меньше 0,2%) восстановить групповую скорость $C_{1R}(T)$ во всем диапазоне равномерного излучения источника (20—100 *сек*); в примыкающих участках спектра (15—20 и 100 —150 *сек*) погрешность больше, а в области очень слабых спектральных амплитуд (5—10 и 150—200 *сек*) возникают расхождения порядка 1%.

Для пары таких сейсмограмм, соответствующих расстояниям 5000 и 5200 *км*, по описанной выше методике были определены фазовые скорости. В диапазоне периодов 20—70 *сек* точность определения оказалась очень высокой (0,2%) (рис. 40); для бóльших и меньших периодов в зависимости от α погрешности достигали 0,5—1,5%; они вызваны эффектом вычислительных шумов при расчетах сейсмограмм и проведении СВАН (искусственное устранение нулевой линии и т. п.), существенным при измерении задержки фазы на малых базах. В реальных условиях точность измерений фазовой скорости на столь малых базах может быть значительно меньше из-за искажающего влияния горизонталь-

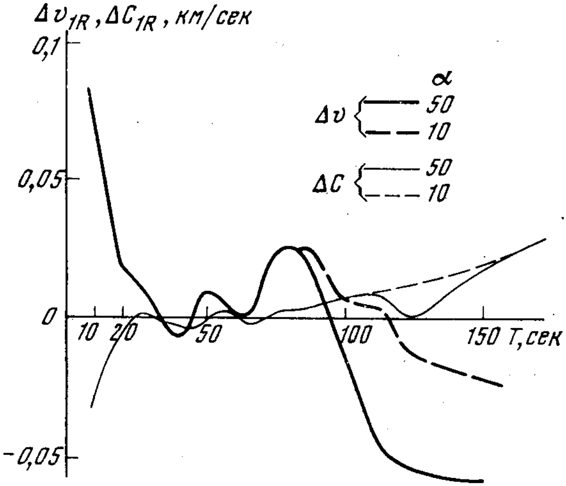


Рис. 40. Отклонения фазовой и групповой скоростей Δv_{1R} и ΔC_{1R}, найденных по диаграммам СВАН, от истинных

ных неоднородностей вдоль трассы, неполного устранения интерференции с высшими гармониками и т. п.

Последующие примеры относятся к реальным наблюдениям на треугольнике станций цифровой магнитной записи ИФЗ АН СССР Фрунзе — Талгар — Нарын, введенном в эксплуатацию в 1968 г. (Ю. А. Колесников, А. П. Осадчий, Э. И. Зеликман и др.). Станции Фрунзе и Нарын имеют, помимо трех стандартных каналов, близких по характеристикам к комбинирован-

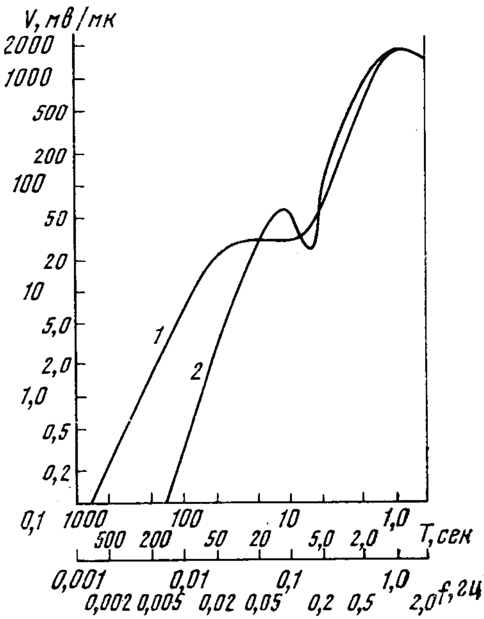


Рис. 41. Частотные характеристики каналов цифровой магнитной записи

1 — длиннопериодный;
2 — стандартный канал

ному каналу с датчиками СК-СКМ [66], вертикальный длиннопериодный канал Ю. А. Колесникова. Частотные характеристики стандартного и длиннопериодного каналов приведены на рис. 41. Регистрация ведется одиннадцатиразрядным двоичным кодом, частота опроса 30 *гц*, точность отсчета времени 0,001 *сек*. Перед анализом СВАН запись подвергалась трехкратному сглаживанию и разряжению с результирующим шагом по времени 0,81 *сек*.

На рис. 42 приведены сейсмограмма и диаграмма СВАН землетрясения 23 октября 1968 г. на Аляске (№ 1 в табл. 8), зарегистрированного длиннопериодным вертикальным каналом станции Нарын (r = 7509 *км*). Трасса эпицентр — станция пересекает Аляску, мелководные арктические моря, Средне-Сибирское плоскогорье, Казахскую складчатую страну и Северный Тянь-Шань. Таким образом, путь оказывается чисто континентальным и практически платформенным. Диаграмма ($\alpha = 50$) оказывается весьма сходной с показанной на рис. 39 диаграммой для модельного примера. По ней в диапазоне периодов 13—150 *сек* уверенно проводится кривая $C_{1R}(T)$ групповой скорости основной гармоники.

Для столь однородного континентального пути групповые скорости для периодов больше 100 *сек* определены, по-видимому, впервые. При этом использовалось сравнительно слабое землетрясение. Визуальная обработка той же записи позволяет найти групповые скорости в интервале периодов 20—70 *сек*; примерно такие же результаты дает анализ СВАН записи стандартного канала, где визуальной обработкой удается оценить групповые скорости только в диапазоне 20—40 *сек*. Аналогичный результат получен для землетрясения № 7 на Аляске, записанного той же станцией.

Конечно, данных только двух землетрясений недостаточно для сколько-нибудь определенных заключений о строении коры и мантии под трассой. Однако, поскольку кривые групповой скорости находятся по диаграммам весьма уверенно, имеет смысл сравнить их с расчетными кривыми и экспериментальными данными других авторов. На рис. 43 приведены полученные кривые, а также теоретические кривые для сферических моделей *Д* и *Г* и экспериментальные данные для других чисто континентальных трасс [84, 106, 136, 157].

Из сравнения с расчетными кривыми видно, что для периодов 20—90 *сек* групповые скорости для трассы Аляска — Нарын близки к скоростям $C_{1R}(T)$ в модели *Д*, а для больших периодов — в модели *Г*. Это можно качественно объяснить отсутствием вдоль трассы мощного антиволновода непосредственно под корой. Сходный результат получен недавно для США в работах по международной модели верхней мантии [133].

Из сравнения с данными других авторов (для периодов меньше 90 *сек*) видно, что групповые скорости в северной Азии мень-

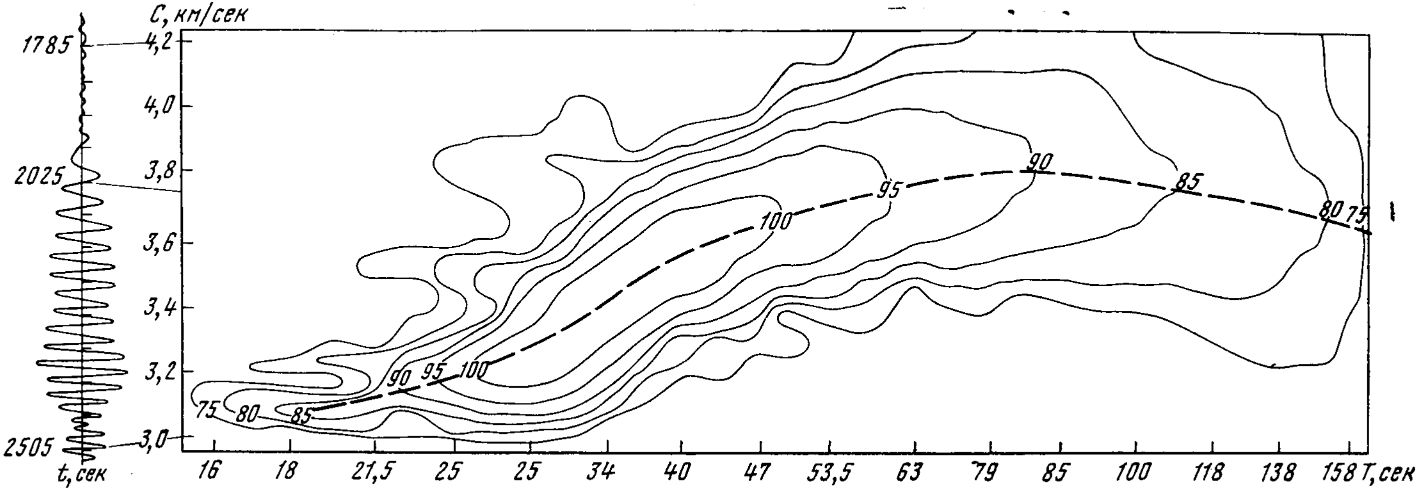


Рис. 42. Сейсмограмма землетрясения № 1 на Аляске, полученная на станции Нарын (длиннопериодный *z*-канал), и диаграмма СВАН

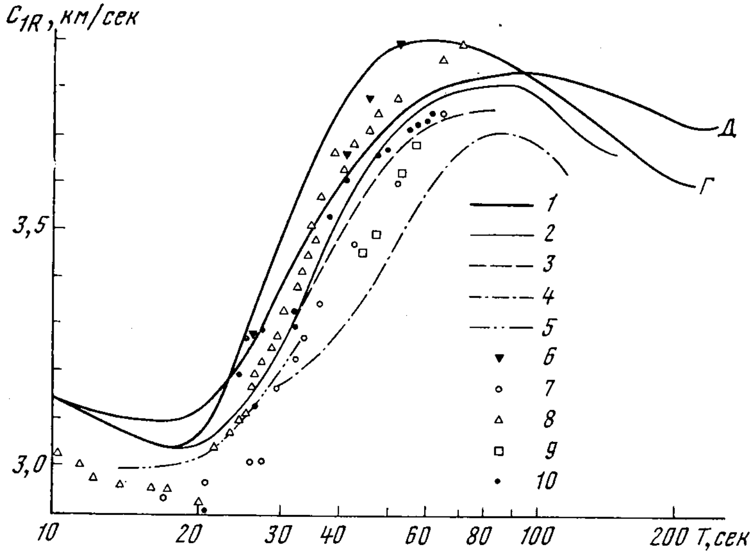


Рис. 43. Групповые скорости основной гармоники волн Рэлея

1 — расчетные кривые, сферические модели; *2—5* по результатам СВАН: *2* — Аляска — Нарын, № 1; *3* — Хоккайдо — Фрунзе, № 2; *4* — Филиппины — Нарын, № 3; *5* — Камчатка — Андижан, № 4; *6—10* — данные других авторов; *6* — Канадский щит [84]; *7* — Турция — Упсала [106]; *8* — Африка [157]; *9* — Кюсю — Копенгаген [106]; *10* — Алеуты—Львиро (Конго) [136]

ше, чем в Африке или на Канадском щите, больше, чем в Европе (на трассе Турция — Упсала, пересекающей Балканы и Карпаты), больше, чем на евроазиатской трассе Кюсю — Копенгаген, пересекающей пустыню Гоби и Алтай, и близки к скоростям на Евроазиатской — Африканской трассе: Алеутские острова — Львиро (Конго). Эти различия, по-видимому, могут быть объяснены различиями в средней мощности коры и скоростях в земной коре и верхних частях мантии.

На том же рис. 43 показаны другие кривые групповой скорости, полученные с помощью СВАН: для трассы Хоккайдо — Фрунзе от землетрясения № 2 (r = 5453 *км*); для трассы Филиппины — Нарын от землетрясения № 3 (r = 5413); для трассы Камчатка — Андижан от землетрясения № 4 (r = 6394 *км*, осциллографическая запись прибором СВК). Видно, что групповые скорости вдоль трассы Хоккайдо — Фрунзе, пересекающей складчатые области Забайкалья, Монголии, Алтая, несколько меньше, чем для трассы через северную Азию. Аналогичный эффект отмечается для трассы Камчатка — Андижан, проходящей через Становой хребет, Забайкалье, Саяны и Алтай (выделены периоды до 40 *сек*). Для трассы Филиппины — Фрунзе, пересекающей Тибет, Гималаи и Тянь-Шань, отмечены существенно более низкие скорости, свидетельствующие о большой мощности коры и, возможно, о малых скоростях ниже коры.

Во всех случаях СВАН позволяет уверенно определять ход дисперсионных кривых в значительно более широкой области периодов, чем при визуальной обработке записей.

Таблица 8

№	Дата	Время	Район	φ, *град* N	λ, *град*	*M*
1	29.X 1968	$22^h16^m15^s$	Аляска	65,6	149,9 W	6,5
2	7.X 1968	20 49 00	Хоккайдо	41,9	142,7 E	5,7
3	28.VIII 1968	20 42 18	Филиппины	15,6	122,0 E	5,7
4	13.XI 1952	07 58 46	Камчатка	51,2	157,1 E	5,5
5	21.V 1962	12 02 60	Куньлунь	37,3	95,7 E	7,0
6	19.VIII 1962	18 26 39	Синьцзян	44,6	81,7 E	6,3
7	17.XII 1968	12 02 15	Аляска	60,2	152,8 W	6,6

Разделение гармоник и определение групповых скоростей высших гармоник. Рассмотрим результаты применения СВАН для разделения гармоник поверхностных волн. На рис. 44 приведена теоретическая сейсмограмма $u_{1,2,3\varphi}$ (t) — сумма трех первых гармоник волн Лява в модели *Д* (расстояние $r = 3000$ *км*, сосредоточенный источник действует на поверхности). Там же приведена диаграмма СВАН с нанесенными на ней теоретическими кривыми C_{kL} (T), на которой уверенно выделяются основная гармоника в интервале периодов 5—55 *сек* и высшие гармоники в участках спектра, соответствующих восходящим ветвям кривых C_{kL} (T) при $4{,}2 > C_{kL} > 3{,}6$ *км/сек*. При бо́льших и меньших скоростях из-за интерференционных явлений разделить гармоники не удается; следует помнить, что при поверхностном источнике основная гармоника доминирует по амплитуде, что затрудняет анализ.

На рис. 45 приведена аналогичная сейсмограмма (с несколько более широкополосным спектром излучения источника) для модели *Г* (глубина источника 38 *км*). Выделяются как основная, так и обе высшие гармоники, причем отчетливо выделена область больших значений C_{kL} (T) порядка 4,4—4,3 *км/сек* в интервале периодов 10—22 *сек*. Интерференция основной и второй гармоник искажает ход кривой групповой скорости основной гармоники на периодах 45 *сек* и более. Разделить интерферирующие вторую и третью гармоники в интервале периодов 9—12 *сек* не удается, результирующая «кажущаяся» кривая групповой скорости C_{2L} (T) в этом интервале показана пунктиром. Видно, что хотя ее крутизна и меньше, чем у теоретической кривой C_{2L} (T)

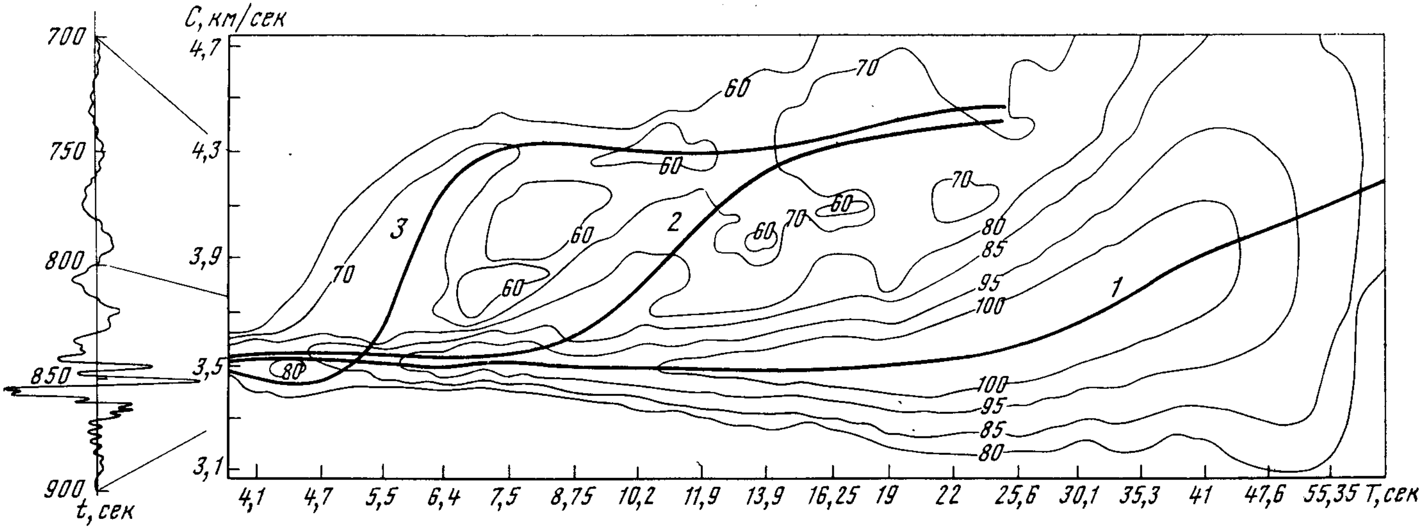


Рис. 44. Теоретическая сейсмограмма волн Лява $u_{1,2,3\varphi}(t)$ в модели *Д* ($r = 3000$ *км*, $h = 0$) и диаграмма СВАН

Жирные линии — теоретические кривые $C_{kL}(T)$ ($k = 1, 2, 3$)

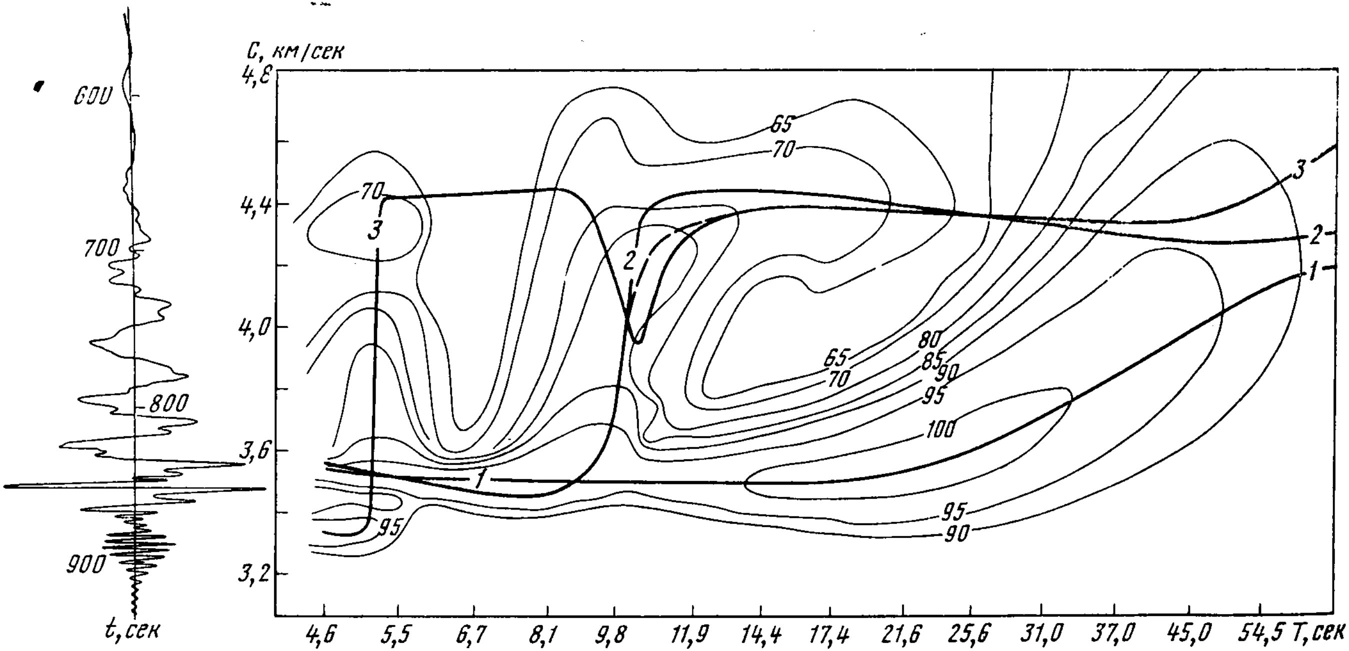


Рис. 45. Теоретическая сейсмограмма волн Лява $u_{1,2,3\varphi}(t)$ в модели Γ ($r = 3000$ *км*, $h = 38$ *км*) и диаграмма СВАН

Сплошные жирные линии — теоретические кривые $C_{kL}(T)$ ($k = 1, 2, 3$), пунктир — «кажущаяся» кривая $C_{kL}(T)$

все же она значительно больше, чем крутизна C_{2L} (T) в модели $Д$. Большой крутизной обладает и кривая C_{3L} (T). В области коротких периодов удается отделить третью гармонику от суммы первой и второй в зоне минимума C_{3L} (T) на периодах 4—5 *сек*.

При больших глубинах источника вклад основной гармоники в области периодов меньше 20 *сек* несуществен, и им можно пренебречь. На рис. 46 и 47 приведены сейсмограммы $u_{2,3\Phi}$ (t) для моделей $Г$ и $Д$ (h = 200 *км*) и соответствующие диаграммы СВАН (α = 50). Видно, что с помощью СВАН уверенно определяются C_{2L} (T) и C_{3L} (T) в модели $Д$; в модели $Г$ не удается разделить вторую и третью гармоники в области локального минимума C_{3L} (T) (9—12 *сек*); кажущаяся кривая C_{2L} (T) и в этом случае имеет существенно бо́льшую крутизну, чем C_{2L} (T) в модели $Д$.

Таким образом, модельные примеры подтверждают возможность использования предложенного в гл. 4 критерия для выявления слоев пониженной скорости в мантии по крутизне кривой C_{2L} (T).

Рассмотрим теперь несколько примеров анализа реальных сейсмограмм. На рис. 48 приведены сейсмограмма и диаграмма СВАН (α = 100) для землетрясения на Камчатке (№ 4 в табл. 8), записанного станцией Андижан. Запись носит весьма сложный характер; на диаграмме отчетливо выделяются основная и вторая гармоники волн Рэлея; крутая правая ветвь дисперсионной кривой C_{2L} (T) еще более уверенно выделяется при большом α = 200. Другой пример приведен на рис. 49, где по сейсмограмме станции Москва землетрясения № 5 в центральном Куньлуне (r = 4755 *км*, вертикальный сейсмограф Голицына, осциллографическая запись) при помощи СВАН (α = 100) выделены вторая и третья гармоники волны Рэлея в интервале групповых скоростей 4,3—3,4 *км/сек*. Некоторые участки кривых C_{kR} (T) были получены не с приводимой диаграммы, где они кажутся недостаточно обоснованными, а с диаграмм с другими значениями α.

На рис. 50 сведены полученные дисперсионные кривые для этих трасс, а также для трассы Синьцзян — Пулково (землетрясение № 6, r = 3770 *км*, вертикальный сейсмограф Голицына, осциллографическая запись), где также выделены вторая и третья рэлеевские гармоники.

Результат для этой трассы близок к полученному С. Крампиным и М. Ботом [109] при анализе сейсмограмм того же землетрясения на станции Упсала (Швеция) при помощи полосовой фильтрации и последующей визуальной обработки профильтрованных осциллограмм. На рис. 50 приведены теоретические кривые для моделей $Г$ и $Д$ (сферический случай). Различия в ходе кривых для трасс Камчатка — Андижан и Синьцзян — Пулково не очень велики, что свидетельствует о примерно сходном строении коры и верхов мантии вдоль трассы.

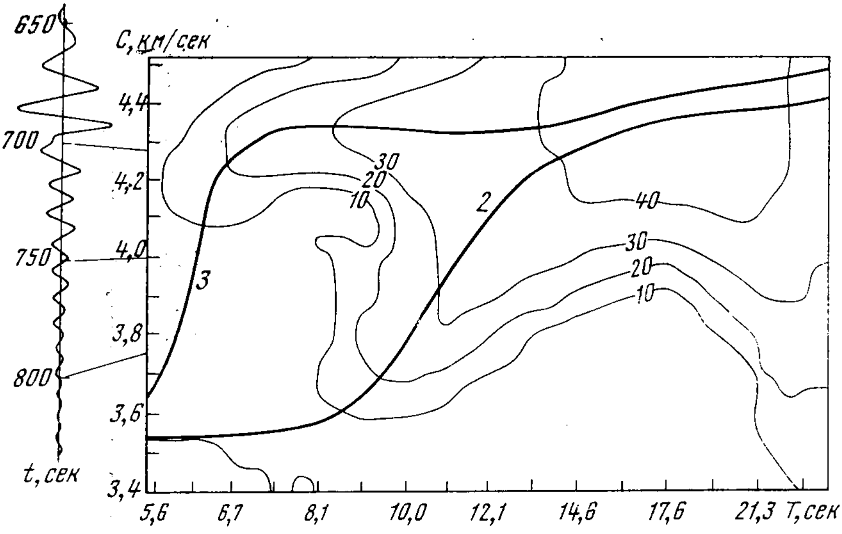


Рис. 46. Теоретическая сейсмограмма волн Лява $u_{2,3\varphi}(t)$ в модели *Д* ($r = 3000$ *км*, $h = 200$ *км*) и диаграмма СВАН

Жирные линии — кривые $C_{kL}(T)$ ($k = 2,3$)

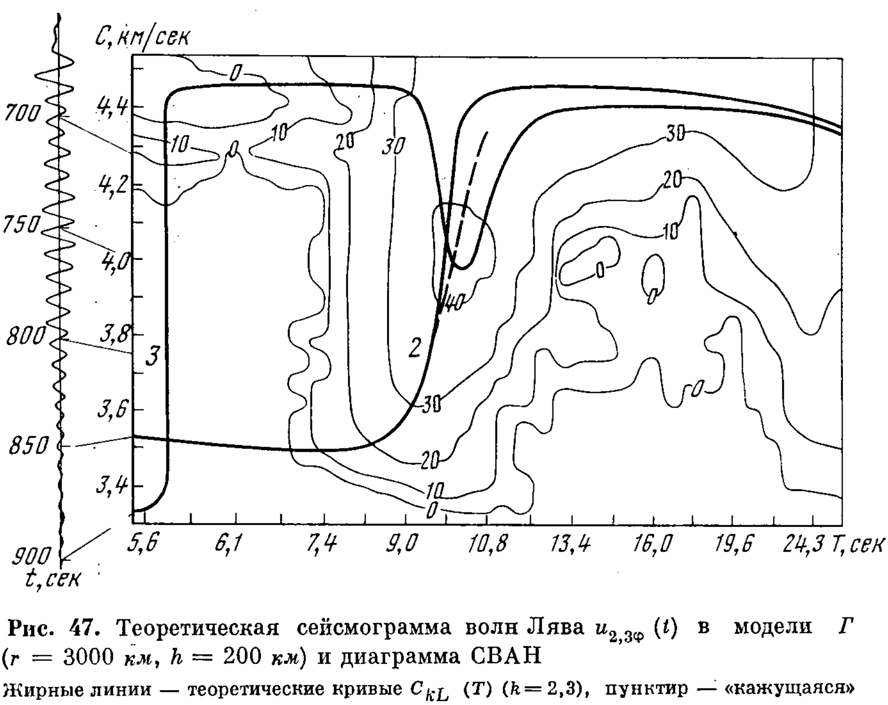


Рис. 47. Теоретическая сейсмограмма волн Лява $u_{2,3\varphi}(t)$ в модели *Г* ($r = 3000$ *км*, $h = 200$ *км*) и диаграмма СВАН

Жирные линии — теоретические кривые $C_{kL}(T)$ ($k=2,3$), пунктир — «кажущаяся» кривая

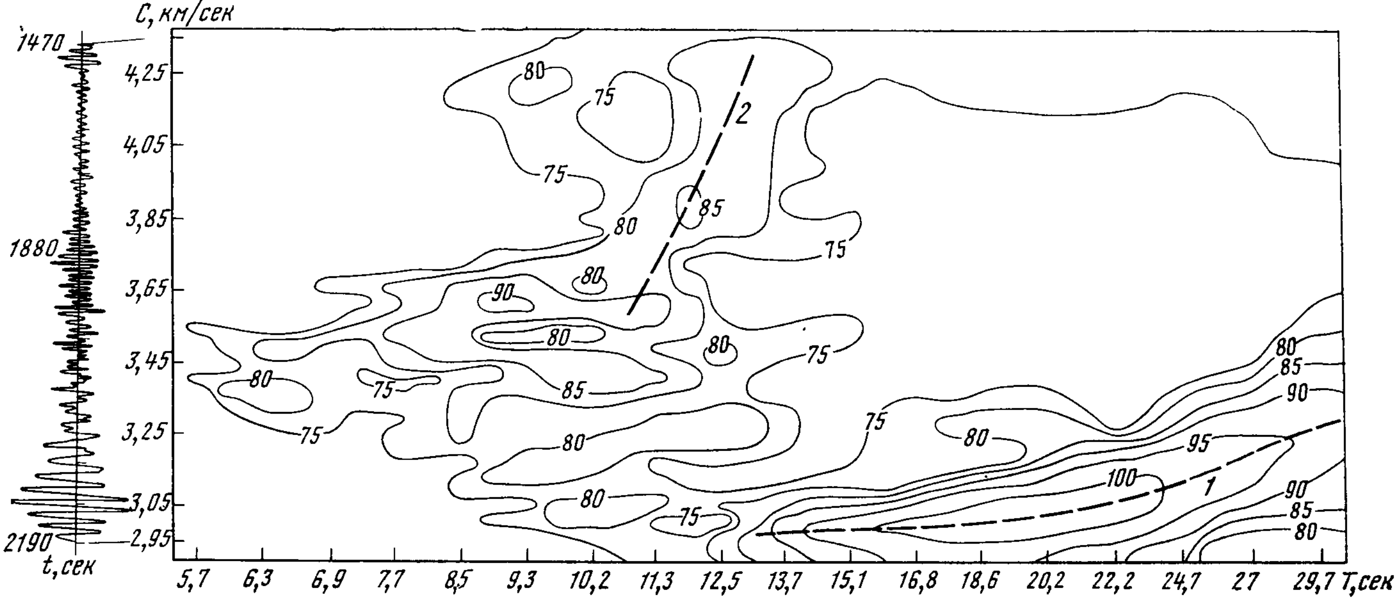


Рис. 48. Сейсмограмма землетрясения № 4 на Камчатке (станция Андижан, СВК) и диаграмма СВАН

Пунктир — кривые $C_{kR}(T)$ $(k = 1,2)$ согласно диаграмме

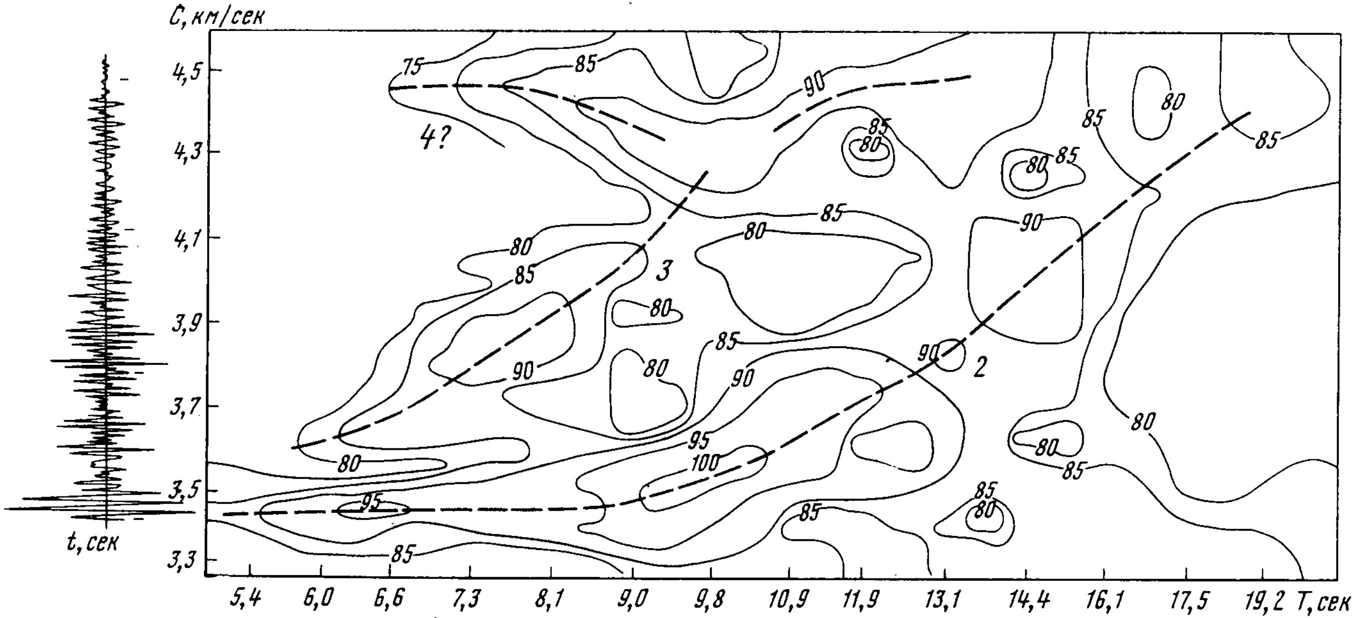


Рис. 49. Сейсмограмма землетрясения № 5 (станция Москва, СВГ) и диаграмма СВАН

Пунктир — кривые C_{kR} (T) $(k = 1, 2, 3, 4)$ согласно диаграмме

Кривые для трассы Куньлунь — Москва, значительный участок которой идет через горные районы, более существенно сдвинуты в область больших периодов. Отклонение всех полученных кривых от теоретических кривых $C_{kR}(T)$ в моделях *Г* и *Д* свидетельствует о большей мощности коры и несколько меньших скоростях в коре вдоль исследованных трасс по сравнению с принятыми для моделей *Г* и *Д*. Например, для однородной коры со скоростью 3,55 *км/сек* и мощностью 40 *км*, лежащей на мантии типа *Г* (табл. 6), расчетные кривые $C_{kR}(T)$ близки к наблюденным для трассы Синьцзян — Пулково.

Приведенные здесь примеры демонстрируют методические возможности машинных методов анализа сейсмограмм поверхностных волн и чувствительность дисперсионных кривых к строению среды вдоль трассы. Как уже отмечалось выше, мы не предполагали в этой работе решать на их базе геофизические задачи, связанные с оценкой строения коры и верхней мантии,— для этого необходимо собрать статистически представительный материал для сравнительно однородных трасс, изучить не только волны Рэлея, но и волны Лява и т. п. Подход к решению этих задач будет описан в следующем параграфе.

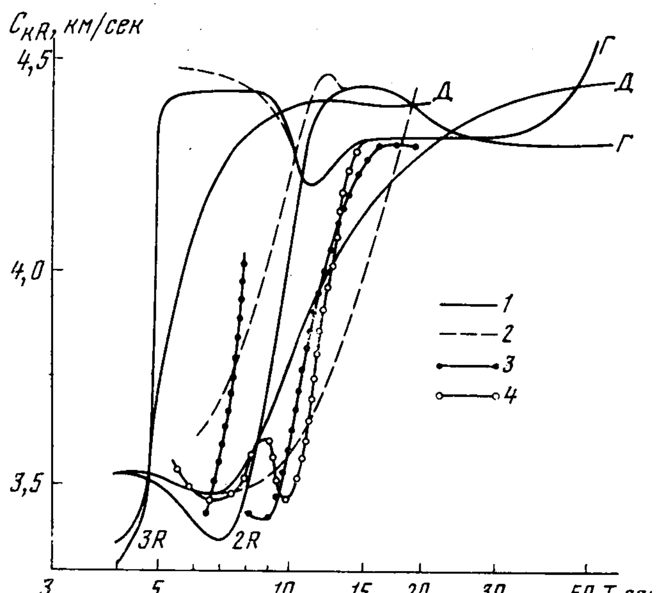


Рис. 50. Дисперсия высших гармоник волн Рэлея ($k = 2,3$)

1 — расчетные кривые, сферические модели; *Г* и *Д*, *2—4* — данные СВАН: *2* — Куньлунь — Москва, *3* — Синьцзянь — Пулково, *4* — Камчатка — Андижан

§ 4. Совместная интерпретация поверхностных и объемных волн

Получаемые в результате анализа сейсмограммы кривые фазовой или групповой скорости поверхностных волн используются для решения обратной задачи — определения скоростного и в отдельных случаях плотностного разреза среды. Строгой теории решения обратных задач метода поверхностных волн, аналогичной имеющейся в методе годографов [25], еще не разработано. Ряд полученных для волн Лява результатов [24] свидетельствует о наличии неоднозначности даже при абсолютно точном задании дисперсионной кривой во всем диапазоне ее существования при условии, что скорость поперечных волн в среде немонотонно изменяется с глубиной. Экспериментальные дисперсионные кривые известны в ограниченном диапазоне периодов и с определенными погрешностями. В результате решение будет неоднозначным и в тех случаях, когда теоретически имеется однозначность.

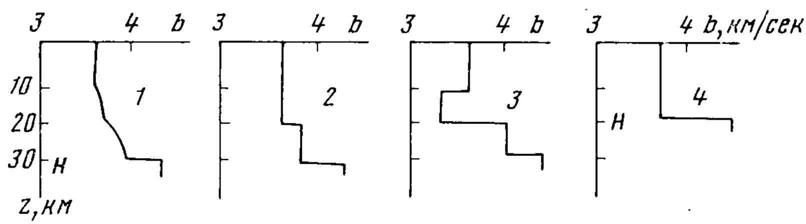


Рис. 51. Модели коры, эквивалентные по дисперсии основной гармоники волн Лява, $T > 20$ *сек*

На рис. 51 показаны три существенно разные модели коры (*1*, *2*, *3*). Скорость поперечных волн у поверхности b (0), мощность коры H и строение мантии во всех моделях одинаковы. Расчет показывает, что для периодов более 20 *сек* фазовые скорости основной гармоники волн Лява различаются не более чем на 0,03 *км/сек*, а групповые скорости — не более чем на 0,05 *км/сек*, т.е. практически неразличимы. Неотличимы от этих кривых кривые v_{1L} (T), C_{1L} (T) для модели *4* с однородной корой, мощность которой равна $^2/_3$ H. Таким образом, наблюдения одной гармоники в ограниченном диапазоне периодов не позволяют на практике однозначно определить мощность или тип строения коры. Конечно, помимо волн Лява, в распоряжении интерпретатора могут быть другие данные о разрезе: например, годографы объемных (P и S) волн, дисперсионные кривые волн Рэлея и т. п. Но и эти данные не могут быть проинтерпретированы однозначно с такой степенью надежности, чтобы можно было зафиксировать большое число параметров изучаемой среды. Поэтому разумна следующая постановка обратной задачи: в заданном классе возможных разрезов Земли найти совокупность таких разрезов, у которых расчетные характеристики согласуются с наблюдениями в пределах точности измерений.

В такой постановке совместная интерпретация дисперсионных кривых и годографов объемных волн была начата В. И. Кейлис-Бороком, В. П. Валюсом и автором в работе [4] в 1964 г.; в настоящее время эта методика получила применение при изучении земной коры и верхней мантии в СССР и за рубежом [14—17, 143] и принята в качестве основной при построении международной модели верхней мантии [133]. Ф. Пресс в развитие этой методики интерпретирует совместно не только годографы и дисперсионные кривые, но и периоды собственных колебаний Земли [158, 159]. Ниже мы рассмотрим два примера решения обратной задачи в этой постановке, выполненные при участии автора; вопросы техники и методики поиска решений более подробно описаны в работах [14, 16, 17].

Определение скоростного разреза континентальной земной коры в одном из районов Средней Азии. Для исследования строения земной коры на профиле Андижан — Душанбе длиной 400 *км* использовались годографы объемных волн P и S в интервале эпицентральных расстояний 50—350 *км* (по данным КСЭ ИФЗ АН СССР [64]) и дисперсионная кривая v_{1R} (T) для волн Рэлея в диапазоне периодов 12—36 *сек* (данные Т. М. Сабитовой). Стандартные ошибки наблюдений были оценены как $\pm$ 1 *сек* для волн P, $\pm$ 2 *сек* — для волн S и $\pm$ 0,05 *км/сек* — для волн Рэлея.

Одновременно с анализом наблюденных данных проводился модельный эксперимент: для модели среды, показанной на рис. 52, были рассчитаны те же данные, что и наблюденные, а также кривая v_{1L} (T) для волн Лява в том же диапазоне периодов, что и v_{1R} (T). Этим данным были приписаны стандартные ошибки наблюдений, и в дальнейшем они рассматривались как экспериментальные.

Интерпретация проводилась следующим образом. На основе имеющихся представлений о строении земной коры горных областей были выбраны два типа параметризации скоростного разреза I и II (табл. 9 и 10).

Обе они соответствуют двуслойной кристаллической коре (с постоянными градиентами скоростей в слоях), прикрытой слоем осадков и лежащей на мантии со слабым положительным градиентом скорости. Параметры осадков и мантии фиксированы, поскольку они слабо влияют на годографы и фазовые скорости в рассматриваемом диапазоне расстояний и периодов. Остальные параметры среды, в особенности мощность коры и ее отдельных слоев и скорости поперечных волн в ней сильно варьируют. Параметризации I и II различаются главным образом характером слоистости в коре: в I возможен только разрыв градиента скорости $a(z)$ и $b(z)$, в II допускается разрыв самих a, b с обязательным увеличением скоростей. В целом очевидно, что в пределах каждой из областей I, II содержатся разрезы, существенно отличные друг от друга с точки зрения геофизики и геологии.

Таблица 9. Параметризация I *

Глубина z, *км*	Скорость продольных волн a, *км/сек*	Скорость поперечных волн b, *км/сек*	Плотность ρ, *г/см³*	Слой
$z_0 = 0$	$a(z_0) = 4$	$b(z_0) = 2$	$\rho(z_0) = 2{,}1$	Осадки
$z_1 = 3$	$a(z_1 - 0) = 5$	$b(z_1 - 0) = 3$	$\rho(z_1 - 0) = 2{,}3$	
	$5{,}2 < a(z_1 + 0) < 5{,}75$	$3 < b(z_1 + 0) < 4$	$\rho(z_1 + 0) = 2{,}65$	
$10 < z_2 < 22$	$5{,}75 < a(z_2) < 6{,}25$	$3{,}4 < b(z_2) < 3{,}65$	$\rho(z_2) = 2{,}75$	Кора
$40 < z_3 < 70$	$6{,}25 < a(z_3 - 0) < 7{,}4$	$3{,}65 < b(z_3 - 0) < 4{,}25$	$\rho(z_3 - 0) = 2{,}85$	
	$a(z_3 + 0) = 8{,}1$	$b(z_3 + 0) = 4{,}6$	$\rho(z_3 + 0) = 3{,}35$	Мантия
$z_4 = 370$	$a(z_4) = 9{,}0$	$b(z_4) = 4{,}95$	$\rho(z_4) = 3{,}85$	

* Для $z_i = z_1 + 0$, z_2, $z_3 - 0$ $1{,}65b(z_i) < a(z_i) < 1{,}85b(z_i)$.

Таблица 10. Параметризация II **

z, *км*	a, *км/сек*	b, *км/сек*	ρ, *г/см³*	Слой
$z_0 = 0$	$a(z_0) = 4$	$b(z_0) = 2$	$\rho(z_0) = 2{,}2$	Осадки
$z_1 = 3$	$a(z_1 - 0) = 5$	$b(z_1 - 0) = 3$	$\rho(z_1 - 0) = 2{,}28$	
	$5 < a(z_1 + 0) < 6$	$3 < b(z_1 + 0) < 3{,}5$		
$10 < z_2 < 30$	$a(z_1 + 0) < a(z_2 - 0) < 6$	$b(z_1 + 0) < b(z_2 - 0) < 3{,}5$		
	$4{,}5 + 0{,}05z_2 < a(z_2 - 0)$	$2{,}75 + 0{,}25z_2 < b(z_2 - 0)$	$\rho(z_i) = 0{,}77 + 0{,}302a(z_i)$	Кора 1
	$6 < a(z_2 + 0) < 7$	$3{,}5 < b(z_2 + 0) < 3{,}85$		
	$a(z_2 + 0) - 0{,}1 < a(z_3 - 0) < a(z_2 + 0) + 0{,}8$	$b(z_2 + 0) - 0{,}1 < b(z_3 - 0) < b(z_2 + 0) + 0{,}4$		Кора 2
$40 < z_3 < 70$	$6 < a(z_3 - 0)$	$3{,}5 < b(z_3 - 0)$		
	$a(z_3 + 0) = 8{,}1$	$b(z_3 + 0) = 4{,}6$	$\rho(z_3 + 0) = 3{,}35$	Мантия
$z_4 = 370$	$a(z_4) = 9$	$b(z_4) = 4{,}95$	$\rho(z_4) = 3{,}85$	

** Для $z_i = z_1 + 0$, $z_2 - 0$, $z_2 + 0$, $z_3 - 0$ $1{,}7b(z_i) < a(z_i) < 1{,}8b(z_i)$.

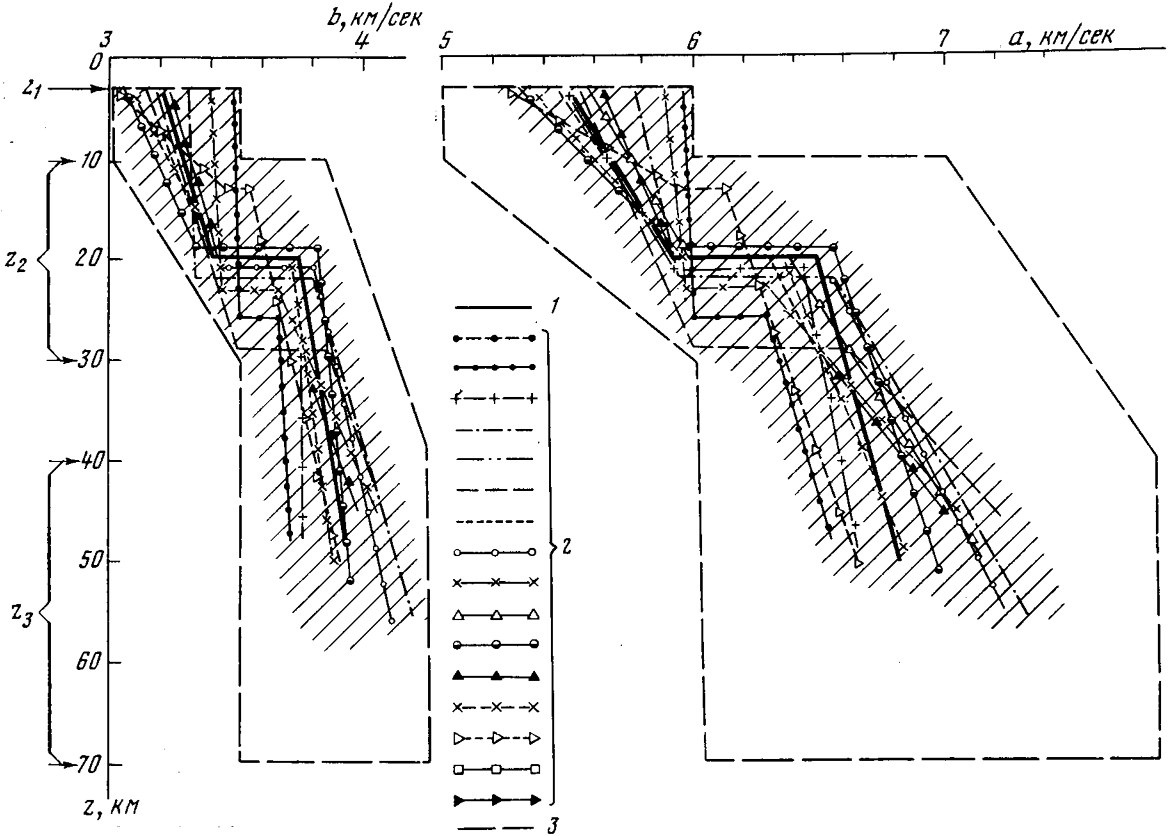


Рис. 52. Результаты модельного эксперимента по определению строения земной коры

1 — опорный разрез; *2* — разрезы, найденные по всем данным; *3* — границы параметризации. Заштрихована область, занимаемая разрезами, найденными только по объемным волнам

В пределах заданных параметризаций методом Монто-Карло [14] на ЭВМ перебирались возможные модели среды, для них рассчитывались данные, соответствующие наблюденным, и проводилось сравнение расчета и наблюдений. Разрез считался допустимым, если среднеквадратичные отклонения годографов и дисперсионных кривых, нормированные стандартными ошибками, не превышали 1,25, а максимальные ошибки 2,0 (в модельном примере 1,1 и 1,5). Результаты перебора приведены в табл. 11 и

Таблица 11

	Наблюдения		Модельный эксперимент
	Параметризация		Параметризация II
	I	II	
Перебрано разрезов	400	200	200
Найдено разрезов:			
по объемным волнам	18	67	67
по всем данным	14	32	33

на рис. 52—54. Они вскрывают глубокую неоднозначность, присущую этой выборке данных. Хотя среди решений, найденных в модельном эксперименте (рис. 52), содержатся разрезы, очень близкие к истинному, среди них имеются и весьма далекие от него по основным параметрам: мощности коры и первого кристаллического слоя, скачку скорости на границе в коре. Значительная неоднозначность сохраняется и при обработке экспериментальных данных; в частности, не удается установить, принадлежит ли реальная кора к типу I или II, т. е. существует ли резкая граница между верхней и нижней частями коры. Весьма неточно оценивается мощность коры (от 44 до 61 *км*).

Тем не менее результаты проведенного анализа не должны рассматриваться как чисто негативные: 1) в найденных решениях содержится бóльшая информация о строении коры, чем в первоначальных данных (табл. 9,10); 2) все найденные разрезы имеют близкие средние скорости поперечных волн; существенно сужен диапазон возможных скоростей b (z) на глубинах от 10 до 50 *км*; 3) использование совокупности данных позволяет значительно уменьшить неоднозначность по сравнению с интерпретацией данных только одного типа, например, решения, удовлетворяющие наблюденным годографам, занимают более широкую подобласть (показана штриховкой), чем решения, удовлетворяющие всем наблюдéниям.

Для дальнейшего уменьшения неоднозначности необходимо увеличить точность и расширить диапазон наблюдений, а также, что может быть легче реализовано, использовать другие данные

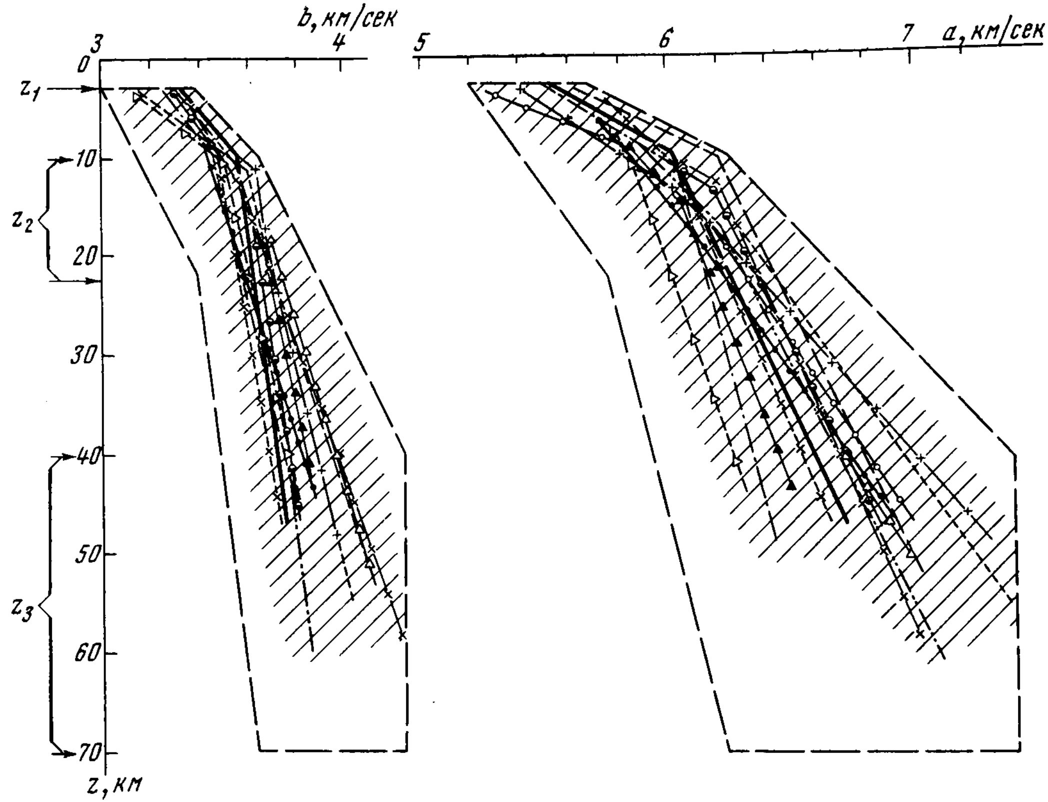


Рис. 53. Результаты интерпретации наблюдений в параметризации I

Обозначения те же, что на рис. 52

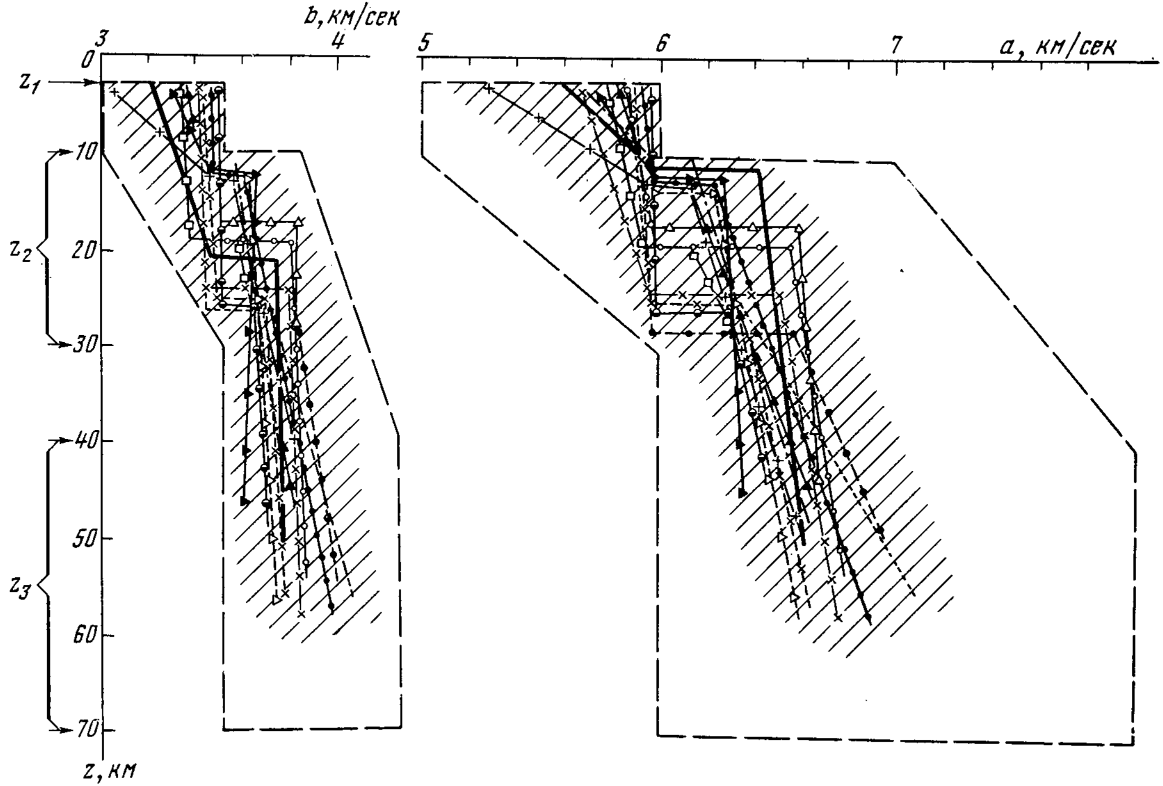


Рис. 54. Результаты интерпретации наблюдений в параметризации II

Обозначения те же, что на рис. 52.

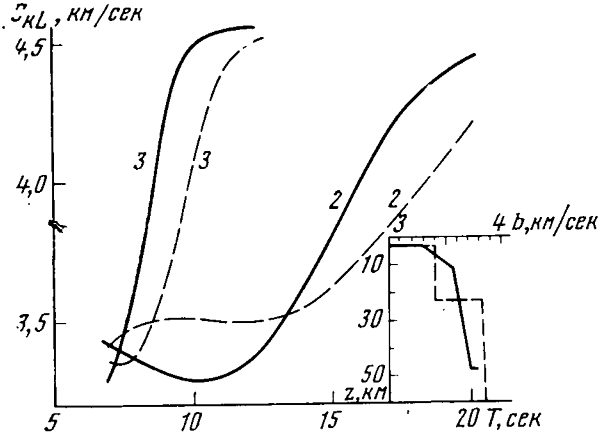


Рис. 55. Дисперсия групповых скоростей высших гармоник волн Лява ($k = 2,3$) для двух моделей коры из показанных на рис. 52.

(динамику объемных волн, последующие вступления, высшие гармоники поверхностных волн, физические ограничения на допустимые градиенты скоростей и т. п.).

Приведенные на рис. 55 дисперсионные кривые C_{kL} (T) высших гармоник ($k = 2,3$) волн Лява для двух разрезов, являющихся решениями модельного эксперимента, показывают, что при помощи высших гармоник действительно можно сузить неоднозначность получаемых решений. В диапазоне периодов 14—20 *сек* для C_{2L} (T), 8—10 *сек* для C_{kL} (T) различия дисперсионных кривых могут быть уверенно обнаружены при помощи СВАН.

Определение скоростного разреза верхней мантии Европы. В качестве исходных данных использовались годограф S (в диапазоне расстояний 10—35°) по данным [55, 105, 108] и групповые скорости волн Лява в диапазоне периодов 30—90 *сек* для трассы Турция — Швеция [106], а также амплитудная кривая волн S [18].

Стандартные ошибки годографов оценивались как $\pm$ 10 *сек* для 10—29° и $\pm$ 20 *сек* в диапазоне 30—35°; стандартная ошибка групповой скорости $\pm$ 0,1 *км/сек*. Параметризация разреза была выбрана таким образом, чтобы включить все известные разрезы верхней мантии и допустить существование волновода не только непосредственно под границей Мохоровичича, но и на некоторой глубине под ней, а также модели с различными скоростями под волноводом. Отсюда минимальное число слоев в верхней мантии — четыре; варьировались скорости поперечных волн на четырех границах (b_1, b_2, b_3, b_4) и глубины двух границ H_2, H_3 (табл. 12).

Между границами скорости интерполировались линейно. Строение коры специально не исследовалось, однако, поскольку оно влияет на годографы и групповые скорости, каждая модель мантии

Таблица 12

Глубина от границы M, *км*	Пределы изменения *в*, *км/сек*
$H_1 = 0$	$4{,}3 \leqslant b_1 \leqslant 4{,}8$
$15 \leqslant H_2 \leqslant 65$	$4{,}2 \leqslant b_2 \leqslant \frac{0{,}4}{315} H_2 + 4{,}8$ *
$H_2 + 30 \leqslant H_3 \leqslant 215$	$4{,}2 \leqslant b_3 \leqslant \frac{0{,}4}{315} H_3 + 4{,}8$ *
$H_4 = 315$	$4{,}2 \leqslant b_4 \leqslant 5{,}2$
$H_5 = 565$	$b_5 = 5{,}65$
$H_6 = 735$	$b_6 = 6{,}08$
$H_7 = 935$	$b_7 = 6{,}33$

* Это означает, что b_2 и b_3 ограничены сверху прямой линией, соединяющей точки $H = 0$, $b = 4{,}8$ и $H = 315$, $b = 5{,}2$ (рис. 56).

комбинировалась с одной из девяти возможных моделей коры и считалась решением, если расчетные данные хотя бы для одной из моделей коры согласовались с наблюдениями.

В отличие от предыдущего примера, в пределах параметризации допускались не любые значения скоростей и глубин, а лишь дискретизированные по многомерной сетке с шагом 0,1 *км/сек* для b_1, b_2, 0,2 *км/сек* для b_3 и b_4, 15 *км* для H_2 и 20 *км* для H_3. В результате в параметризации содержалось 35 000 разрезов мантии.

Отбор разрезов осуществлялся методом «Ёж», комбинирующим случайный поиск с полным перебором в окрестности случайно найденного решения. За описанием метода «Ёж» мы отсылаем к работе [14]. Проведенный перебор около 2000 решений позволил весьма детально исследовать всю область. По дисперсии и годографам был отобран 151 разрез, из них только у семи амплитудная кривая хорошо согласовалась с наблюдениями. Эти семь разрезов показаны на рис. 56 вместе с границами параметризации и известными разрезами верхней мантии.

Полученные решения занимают небольшую подобласть в пространстве неизвестных параметров: значения трех параметров у них совпадают: $b_1 = 4{,}5$, $b_2 = 4{,}5$, $b_3 = 4{,}6$ *км/сек*, а H_2, H_3, b_4 отличаются на один-два шага, так что решения содержат разрезы с волноводом в верхней мантии или без него. Эти решения весьма не похожи на классические разрезы Гутенберга, Джеффриса и Леман, которые не удовлетворяют тем или иным экспериментальным данным.

Для уменьшения существенной, с точки зрения геофизики, неоднозначности целесообразно расширить диапазон наблюде-

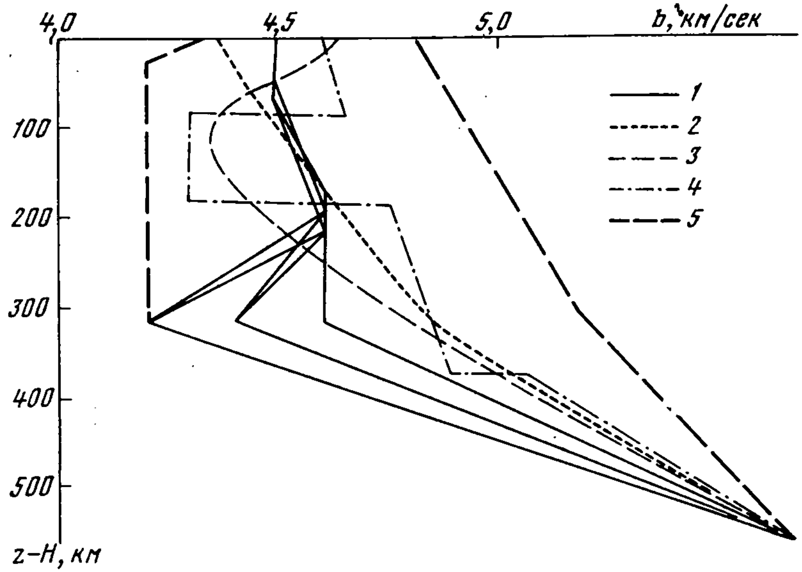


Рис. 56. Скоростные разрезы верхней мантии Европы

1 — разрезы, найденные в работе [16]; 2 — разрез Джеффриса; 3 — разрез Гутенберга; 4 — разрез Леман [55]; 5 — границы параметризации

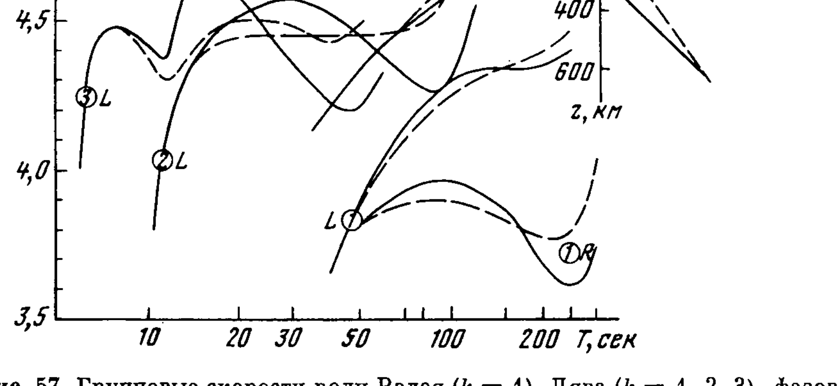


Рис. 57. Групповые скорости волн Рэлея ($k = 1$), Лява ($k = 1, 2, 3$), фазовые скорости волн Лява ($k = 1$) для двух моделей мантии Европы

ний поверхностных волн в сторону бо́льших периодов и использовать помимо основной гармоники высшие, а также волны Рэлея и последующие вступления. На рис. 57 приведены расчетные дисперсионные кривые волн Лява v_{1L} (T), C_{1L} (T) для более широкого диапазона периодов, чем использовавшийся в нашем анализе ($T < 300$ *сек*), дисперсионные кривые волн Рэлея C_{1R} (T) в том же диапазоне T, а также дисперсионные кривые C_{kL} (T) для второй и третьей гармоник волн Лява. Расчеты проведены для двух качественно отличных моделей из семи найденных решений. Видно, что дисперсионные кривые v_{1L} (T), C_{1R} (T) заметно отличаются при $T > 150$ *сек*; у высших гармоник волн Лява отмечены большие различия групповых скоростей в области периодов 30—100 *сек*. Для модели с волноводом отмечается сближение кривых C_{1L} (T) и C_{2L} (T) и глубокие минимумы C_{2L} (T), C_{3L} (T); в модели без волновода эти особенности кривых C_{kL} (T) не отмечаются. Анализируя наблюдения по методике СВАН, можно по данным о длиннопериодных основной и высших гармониках сузить класс возможных решений.

Глава 6

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ-ПОМЕХИ В СЕЙСМОРАЗВЕДКЕ

В то время как в сейсмологии поверхностные волны широко используются для получения данных о среде и источнике, в сейсмической разведке они обычно играют роль помех, затрудняющих выделение полезных сигналов — отраженных волн [26, 48, 75, 91]. Только при инженерно-геологических исследованиях они иногда используются для уточнения скоростных параметров первых десяти-двадцати метров разреза [48, 49]. При сейсморазведочных работах методом отраженных волн источником колебаний обычно являются взрывы ВВ в укупоренных скважинах на глубинах до 40—50 *м*, реже 80—100 *м*. Как показали многочисленные полевые наблюдения, при этом возбуждается поле низкоскоростных, относительно низкочастотных волн-помех рэлеевского типа, значительно превышающих по уровню отраженные сигналы (как продольные, регистрируемые вертикальными z-приборами, так и обменные типа PS, регистрируемые горизонтальными $x(r)$-приборами). Еще более значителен относительный уровень таких помех, если колебания возбуждаются поверхностными взрывами, ударами или вибрационными устройствами.

При сейсморазведке методом отраженных поперечных волн (этот метод успешно развивается в последние годы [27, 75]) колебания возбуждаются ударами или чаще — направленными взрывами в мелких скважинах с камуфлетом. Такие источники возбуждают интенсивное поле низкоскоростных, низкочастотных волн Лява, маскирующих на записях y(φ)-приборов отраженные волны от глубоких горизонтов.

Для ослабления помех и выделения отражений применяются разнообразные аппаратурные и методические приемы: углубление источника, фильтрация, группирование приборов и источников, специальные системы наблюдений и др. Однако во многих случаях эти приемы не обеспечивают полного подавления помех или существенно удорожают работу. Для разработки более эффективных приемов необходимо детально изучить физическую природу и свойства поля помех, частотный состав, характер дисперсии фазовой и групповой скорости, влияние строения среды, условий возбуждения, параметров источника.

В этой главе будут показаны возможности описанных выше методов расчета и анализа поверхностных волн при решении подобных задач в типичных для сейсморазведки условиях.

§ 1. Расчетные волновые поля помех

Модели среды и источника. Верхняя часть разреза — зона малых и пониженных скоростей, в которой возбуждаются и распространяются поверхностные волны-помехи,— сложена обычно рыхлыми песчано-глинистыми отложениями. Скорости поперечных волн в этой зоне редко превосходят 500 *м/сек*; в первых 1—2 *м*, содержащих большой процент органических материалов, отмечаются сверхмалые скорости поперечных волн (меньше 100—150 *м/сек*). Нижней границей этой зоны часто является кровля коренных (уплотненных терригенных или скальных) пород, в которых скорости поперечных волн превышают 1000—1500 *м/сек*.

Скорости продольных волн в пределах зоны в зависимости от гидрогеологических условий могут существенно различаться. В неводонасыщенной части рыхлой толщи они обычно не превышают 1000 *м/сек*, в полностью водонасыщенных рыхлых породах ниже уровня грунтовых вод достигают 1600—2000 *м/сек*, в уплотненных коренных и скальных породах превышают 2500 *м/сек*. Мощность зоны пониженных скоростей, положение уровня грунтовых вод и другие характеристики широко варьируют даже в пределах одного района.

Поэтому для детального количественного исследования выбраны две относительно простые модели среды с качественно отличными свойствами. Эти модели показаны на рис. 58. До глубины 40 *м* скоростной разрез одинаков и соответствует толще песчано-глинистых отложений с монотонным нарастанием скорости с глубиной. В самой верхней части имеется тонкий (1 *м*) слой со сверхмалыми скоростями продольных и поперечных волн. На глубине 40 *м* в модели УВ скачком увеличиваются скорость продольных

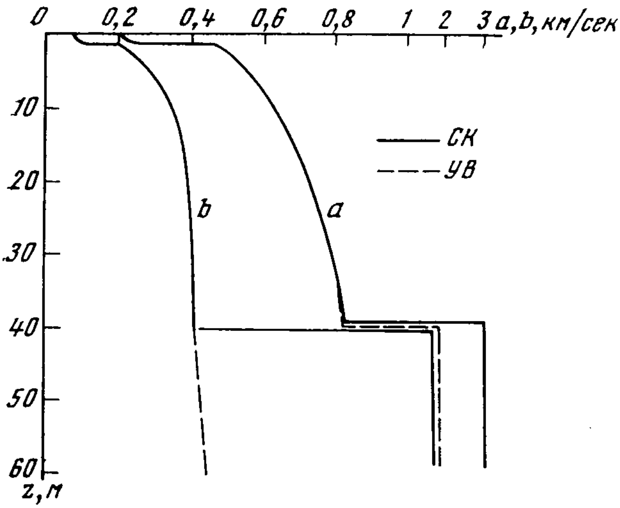


Рис. 58. Расчетные модели верхней части разреза

волн (с 820 до 1600 *м/сек*) и плотность, а скорость поперечных волн не изменяется. Это соответствует полному водонасыщению пород ниже 40 *м* [47]. В модели СК скачком изменяются обе скорости (с 820 до 3000 *м/сек* для продольных волн, с 400 до 1600 *м/сек* для поперечных волн) и плотность, что соответствует скальным породам на глубине больше 40 *м*. Таким образом, эти две модели соответствуют геологическим ситуациям: «рыхлая толща, обводненная с глубины 40 *м*», и «слой рыхлых пород на скальном основании».

Размеры применяемых в сейсморазведке источников в десятки раз меньше минимальных длин возбуждаемых колебаний, что позволяет считать их точечными. В качестве источников, возбуждающих волны Рэлея, рассматривались центр расширения (модель взрыва в скважине) на различных глубинах в интервале 0—100 *м* и вертикальная сила (модель ударного воздействия), для волн Лява — горизонтальная сила на поверхности. Насколько хорошо центр расширения описывает взрыв в скважине, будет видно из сопоставления расчетов с экспериментом (§ 2). Спектральные характеристики источника в пределах рассматриваемого диапазона частот предполагались постоянными; при наличии данных о спектре взрывного или ударного источника их нетрудно учесть по формулам § 3 гл. 2. Предполагалось, что регистрация ведется неискажающим трехкомпонентным прибором на поверхности.

Параметры расчетов. Для описанных моделей среды и источника были рассчитаны спектральные характеристики первых четырех гармоник волн Рэлея и Лява в диапазоне периодов 0,025—0,5 *сек*; основной интерес для сейсморазведки представляют периоды 0,025—0,1 *сек*.

Дисперсия поверхностных волн. *Волны Лява.* Дисперсия волн Лява в моделях СК и УВ показана на рис. 59. Для модели УВ характерно сближение кривых $C_{kL}(T)$ высших гармоник вблизи максимального значения скорости поперечных волн в среде $b\ (Z + + 0)$; при меньших C_{kL} кривые $C_{kL}(T)$ не пересекаются и разделены по периодам, что должно приводить к относительно простой волновой картине — наложению нескольких нормально диспергирующих цугов с резко различными периодами. В области очень малых групповых скоростей (меньше 150 *м/сек*) в рассматриваемом диапазоне периодов присутствует только основная гармоника волн

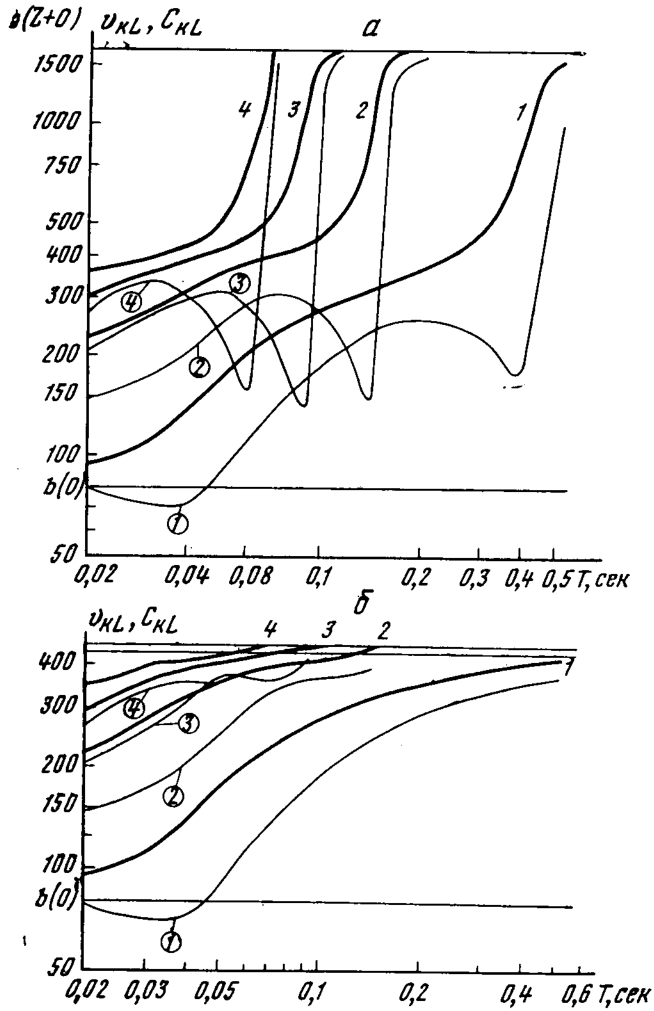
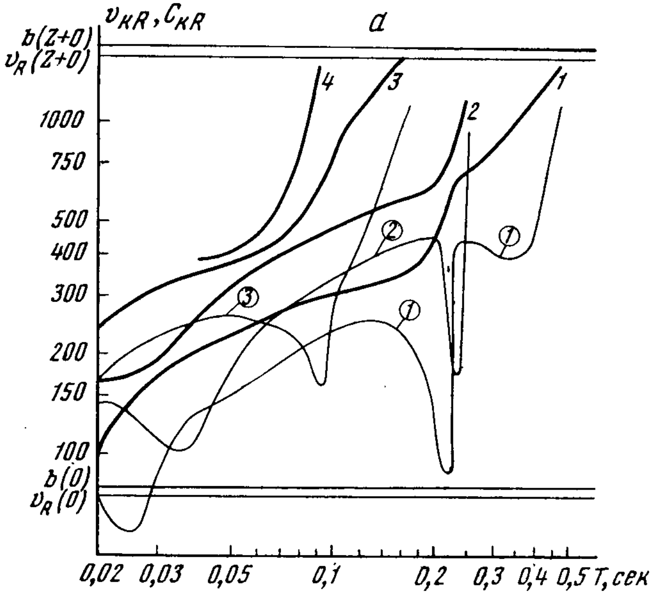


Рис. 59. Дисперсия волн Лява ($k = 1{,}4$) в моделях СК (*а*) и УВ (*б*)

Жирные линии — фазовые скорости, тонкие — групповые

Лява. В модели СК дисперсионные кривые C_{kL} (T) выглядят сложнее. Благодаря присутствию резкой границы на глубине $H = 40$ *м* в интервале скоростей b $(H + 0)$, b $(H - 0)$ кривые C_{kL} монотонно спадают с уменьшением T, не пересекаясь и не сближаясь друг с другом. При дальнейшем уменьшении T C_{kL} (T) достигают локальных минимумов и далее возрастают, пересекая друг друга несколько раз. Начиная с некоторого T_k^*, зависящего от номера k, соответствующие кривые C_{kL} (T) и v_{kL} (T) в моделях УВ и СК совпадают (в нашем случае $T_1^* = 0{,}14$ *сек*, $T_2^* = 0{,}05$, $T_3^* = 0{,}04$, $T_4^* = 0{,}03$ *сек*). Фазовые скорости разных гармоник в



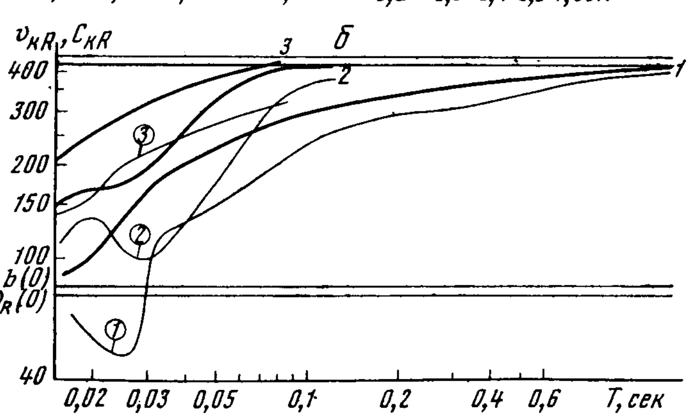


Рис. 60. Дисперсия волн Рэлея ($k = 1{,}4$) в моделях СК (*а*) и УВ (*б*)

Жирные линии — фазовые скорости, тонкие — групповые пределах всего диапазона периодов перекрываются, занимая в модели УВ интервал 90—450 *м/сек*, в модели СК — 90 — 1500 *м/сек*.

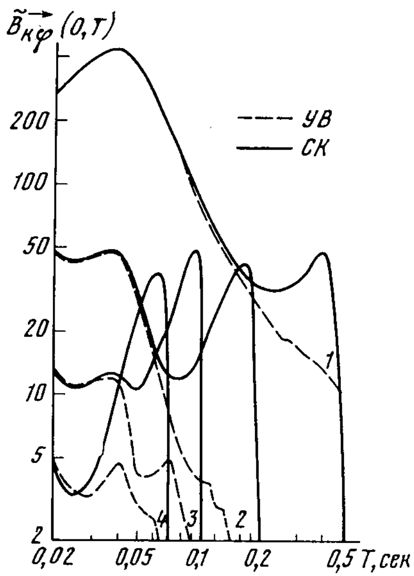
Если же ограничиться в нашем рассмотрении более узким частотным диапазоном 0,03—0,05 *сек*, наиболее типичным для сейсморазведки волнами SH, то оказывается, что интервалы фазовых скоростей почти не перекрываются, и разным гармоникам соответствуют различные диапазоны глубин проникания; глубины возрастают с k, однако и при $k \leqslant 3$ волны Лява в этом диапазоне периодов не достигают скального основания и контролируются целиком рыхлой толщей. При этом основная гармоника имеет очень малую глубину проникания (до 1 *м*) и контролируется несколькими первыми метрами разреза.

Волны Рэлея. Дисперсионные кривые волн Рэлея (рис. 60) более сложные, чем у волн Лява. Для модели УВ отмечается несколько областей сближения или пересечения кривых C_{kR} (T); для модели СК благодаря существованию узких и глубоких минимумов кривые C_{kR} (T) пересекаются многократно. В результате почти во всем интервале групповых скоростей, за исключением очень малых (меньше 90 *м/сек*), должна наблюдаться сложная волновая картина — интерференция нескольких гармоник с близкими периодами и фазовыми скоростями. Групповые скорости меньше 90 *м/сек* и фазовые скорости меньше 150 *м/сек* в пределах рассматриваемого диапазона периодов имеет только основная гармоника с периодами меньше 0,035 *сек*; такие колебания проникают на глубину не более 3—5 *м*. Наличие скального основания проявляется на дисперсионных кривых на периодах, больших T_k^* : $T_1^* \approx 0{,}1$, $T_2^* \approx 0{,}06$, $T_3^* \approx 0{,}04$ *сек*.

Различия в дисперсии высших гармоник волн Лява и Рэлея более заметны, чем для земной коры и мантии. Это вызвано тем, что из-за существования очень сильной границы для продольных волн и нарушения условия $\min a\,(z) > b\,(Z + 0)$ в моделях УВ и СК значительный вклад в высшие гармоники вносят чисто продольные, а также обменные многократно рефрагированные и отраженные волны. Поэтому условия конструктивной интерференции оказываются не идентичными условиям конструктивной интерференции чисто поперечных колебаний SH, приводящей к образованию волн Лява.

Поляризация волн Рэлея. В зависимости от номера гармоники, периода и типа модели отношение $\varkappa_k$ компонент горизонтального и вертикального смещений поверхности сильно варьирует. Для фиксированного k в каждой из моделей $\varkappa_k$ (T) несколько раз изменяет свой знак по мере изменения периода; поэтому идентифицировать какую-либо гармонику по направлению движения частиц можно только в узком диапазоне периодов. В среднем горизонтальная компонента смещений больше вертикальной в 1,5—2 раза, хотя встречаются узкие спектральные зоны с обратным соотношением компонент.

Амплитудные характеристики. *Волны Лява.* На рис. 61 приведены частотные характеристики $\tilde{B}_{\vec{k\varphi}}(0,\ T)$ волн Лява для поверхностного источника — сосредоточенной горизонтальной силы. Характеристики по форме близки к кривым $1/C_{kL}\ (T)$. Видно, что интенсивность основной гармоники незначительно превышает интенсивность высших, а если учесть, что основная гармоника распространяется при $T < 0{,}05$ *сек* в очень слабо уплотненных породах, можно ожидать преобладания высших гармоник на записях даже для поверхностного источника. Второй важный факт, вытекающий из рассмотрения рис. 61, — значительно более высокий уровень поверхностных волн Лява в модели СК, обусловленный более эффективным захватом энергии волн SH поверхностным слоем, лежащим на жестком основании. В пределах диапазона 0,02—0,05 *сек* в модели СК значительные амплитуды могут иметь гармоники с более высокими номерами, чем рассчитанные (до $k = 7 \div 9$); наибольшие амплитуды соответствуют малым групповым скоростям 300—100 *м/сек.* В модели УВ уровень амплитуд быстро понижается с увеличением номера гармоники.



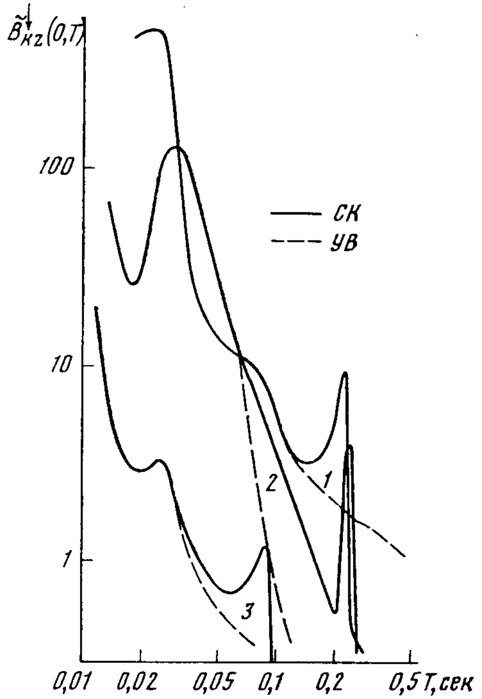


Рис. 61. Частотные характеристики волн Лява ($k = 1{,}4$) в моделях УВ и СК
Источник — горизонтальная сила на поверхности

Рис. 62. Частотные характеристики волн Рэлея ($k = 1{,}3$) в моделях СК и УВ
Источник — вертикальная сила на поверхности, вертикальные смещения

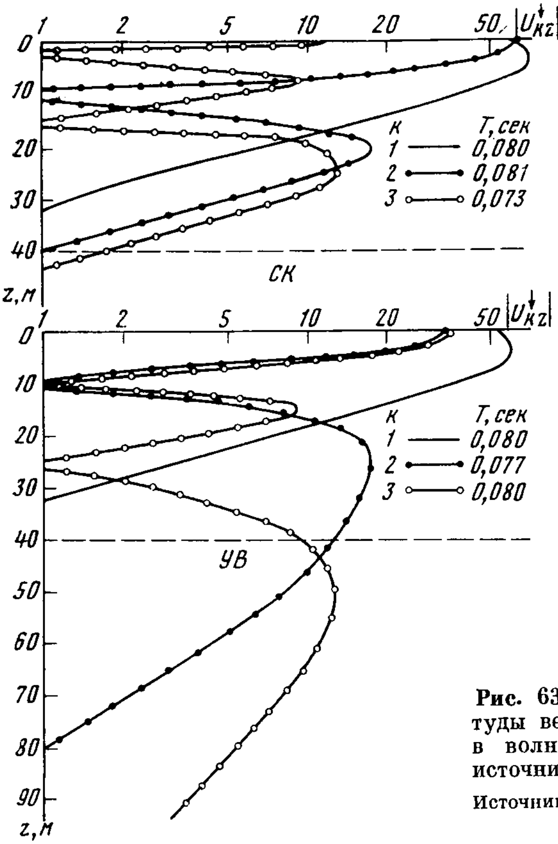


Рис. 63. Зависимость амплитуды вертикальных смещений в волнах Рэлея от глубины источника

Источник — вертикальная сила

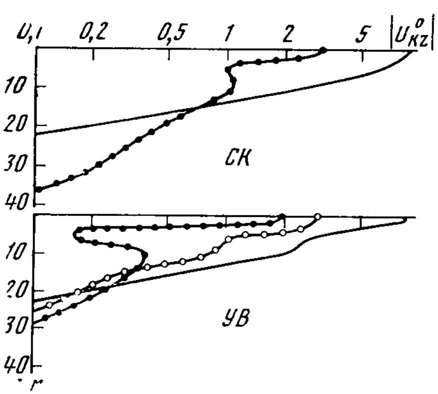


Рис. 64. Зависимость амплитуды вертикальных смещений в волнах Рэлея от глубины источника ($k = 1,3$)

Источник — центр расширения

Волны Рэлея. Частотные характеристики $\tilde{B}_{kz}^{\downarrow}$ (0, T) для сосредоточенной вертикальной силы на поверхности (модель ударного или вибрационного воздействия) показаны на рис. 62. Видно, что в этом случае основная гармоника по интенсивности превосходит вторую только в области малых периодов, меньших 0,03 *сек*, где колебания сосредоточены в почвенном слое, и должны быстро ослабевать с расстоянием из-за сильного поглощения. В модели СК амплитуды колебаний равны или больше, чем в модели УВ, при тех же k и T; наибольшие амплитуды приурочены к областям минимумов групповой скорости. Для источников, действующих внутри среды, частотные характеристики $\tilde{B}_{kz}^{\downarrow}$ (h, T) выглядят очень сложно и лишены наглядности. Более информативны графики $|U_{kz}(h)|$, примеры которых приведены на рис. 63 (вертикальная сосредоточенная сила) и рис. 64 (центр расширения). Из графиков рис. 63 видно, что по мере погружения источника основная гармоника быстро ослабевает, а высшие гармоники сохраняют большие амплитуды до значительных глубин. Особенно медленно происходит спад амплитуд высших гармоник в модели УВ, где они оказываются такими же интенсивными для источника на глубине 60—70 *м*, как для поверхностного источника.

Для источника типа центра расширения (рис. 64) картина существенно иная — здесь происходит сравнительно быстрое ослабление амплитуды по мере углубления источника. Физическая природа этого различия состоит в том, что центр расширения излучает только продольные волны, причем их кажущиеся скорости больше фазовых скоростей поверхностных волн в рассматриваемом диапазоне периодов. В этих условиях поле высших гармоник — нелучевое (т. е. его нельзя получить методом конструктивной интерференции); образующие его интерференционные поперечные волны возникают при нелучевом отражении продольной энергии от свободной поверхности. Такое возбуждение поперечных волн может быть эффективным только тогда, когда источник достаточно близок к поверхности.

Таким образом, из теоретических расчетов для двух моделей верхней части разреза вытекает, что в формировании поля поверхностных волн в диапазоне периодов, регистрируемом в сейсморазведке, существенную роль играют высшие гармоники. Они обладают широким спектром фазовых и групповых скоростей и медленно ослабевают с глубиной при погружении источника.

§ 2. Экспериментальные наблюдения поверхностных волн и их интерпретация

Экспериментальные исследования поверхностных волн, возбуждаемых в рыхлых породах слабыми ударными и взрывными воздействиями, были проведены автором в 1960—1962 гг. [48]. В результате этих экспериментов была установлена важная роль высших

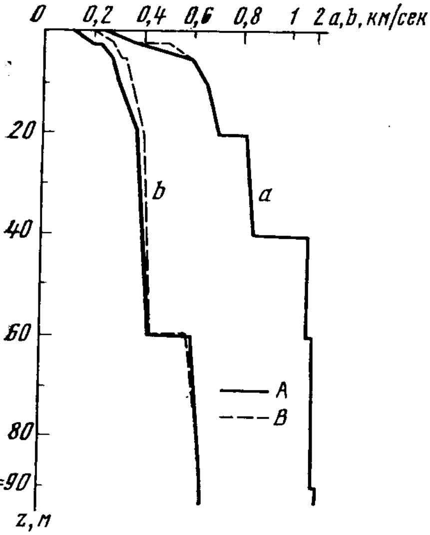


Рис. 65. Модели среды по данным скважинных наблюдений

гармоник волн Лява и Рэлея в формировании поля низкоскоростных волн и изучено влияние на их свойства различных частей разреза. Тогда же был сделан вывод о том, что высшие гармоники могут являться существенными помехами при сейсмической разведке методом отраженных волн.

Более детальные исследования природы волн-помех при регистрации отражений от глубоких горизонтов были проведены автором и Л. И. Ратниковой в Волго-Уральской экспедиции отдела сейсморазведки Института физики Земли в 1969 г. [53]. Результаты этих работ рассмотрены ниже.

Сейсмогеологические условия и методика экспериментов. Работы проводились в Саратовском Заволжье, на продольном профиле длиной около 2 *км*. Данные о скоростном разрезе исследуемой площади были получены из микросейсмокаротажа с регистрацией продольных и поперечных волн на поверхности, наблюдений в серии мелких скважин, ультразвукового каротажа параметрических скважин.

Несмотря на детальность проводившихся измерений, скорости поперечных волн в верхних 40 *м* разреза — наиболее изменчивой его части — определяются с погрешностью порядка 50—100 *м/сек*. Такая низкая точность объясняется неуверенной регистрацией прямой поперечной волны при взрывах на малых глубинах.

В пределах изучаемого участка верхняя часть разреза сложена кайнозойскими песчано-глинистыми отложениями. Границей зоны малых скоростей является уровень грунтовых вод, находящийся на глубине около 40 *м*. Скорости продольных и поперечных волн возрастают с глубиной; на глубине около 60 *м* отмечается скачкообразное увеличение скорости. Два варианта распределения скоростей *a*, *b*, согласующиеся с данными каротажных измерений, показаны на рис. 65.

Проведенные ранее работы методом отраженных волн на этом участке показали, что выделению отраженных волн от палеозойских горизонтов с временами прихода от 0,6 до 1,5 *сек* после взрыва мешают интенсивные помехи с низкими кажущимися скоростями. Для изучения природы помех были проведены специальные наблюдения. Наблюдения проводились со станцией ПМЗ-64 на широ-

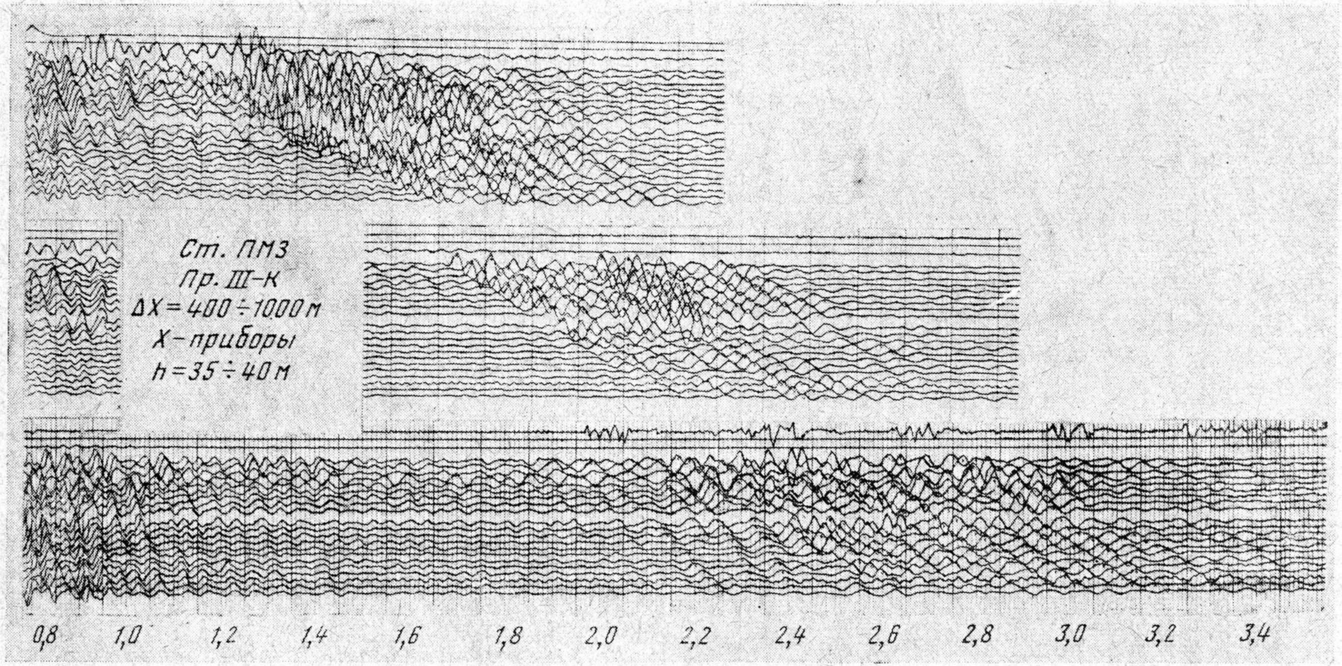


Рис. 66. Примеры наблюденных сейсмограмм поверхностных волн

кополосной фильтрации 0—130 *гц*; применялись горизонтальные и вертикальные приборы СПМ-16, «Светлячок», С-210. Максимальные удаления от источника достигали 1,7 *км*; взрывы производились в скважинах на глубинах от 5 до 80 *м*; величины зарядов изменялись от 0,4 до 15 *кг*.

Наблюдаемая волновая картина. На сейсмограммах z и x приборов в последующей части записи регистрируются низкочастотные (периоды $T > 0{,}04$ *сек*), низкоскоростные (кажущиеся скорости $v < 1000$ *м/сек*) многофазные волны большой интенсивности. Им соответствуют групповые скорости от 500 до 160 *м/сек*, так что вблизи пункта взрыва эти волны заполняют интервал времени до 1 *сек*, а на удалениях $\sim$ 1,5 *км* — до 3,5 *сек* и на некоторых интервалах расстояний существенно затрудняют регистрацию отражений (рис. 66).

В цуге волн-помех можно выделить несколько групп, отличающихся по своим фазовым и групповым скоростям, однако в силу интерференции границы между группами часто условны.

Основные характеристики выделенных групп волн приведены в табл. 13.

Таблица 13

№ группы	v, *м/сек*	C, *м/сек*	T, *сек*	$\varkappa$	Направление вращения
I	700—900	470—510	0,04—0,06	5—10	Прямое
II	400—450	350—370	0,06—0,1	1—3	»
III	430—550	280—320	0,05—0,07	0,5—0,7	»
IV	250—300	160—240	0,03—0,19	1	Возвратное

Нумерация групп дана в порядке убывания их групповых скоростей; фазовые скорости, как правило, также убывают с ростом номера, за исключением группы III, у которой отмечается инверсия фазовой скорости. Траектории движения частиц вне явных зон интерференции близки к эллиптическим; направление вращения у групп I—III — прямое (т. е. от источника в верхней части эллипса), у группы IV — возвратное. Соотношение полуосей эллипса $\varkappa$ меняется от группы к группе.

Группа I наиболее интенсивна при взрывах в пределах ЗМС, она исчезает при погружении заряда на 5—10 *м* ниже границы зоны (рис. 67, 68, *а*). Группа IV обладает заметной интенсивностью только при взрывах на глубинах меньше 10—20 *м*; в ней практически отсутствуют колебания с периодами меньше 0,1 *сек*; группы II и III присутствуют на записи при взрывах во всем диапазоне глубин от 10 до 70 *м* (рис. 67); наблюдается значительное ослабление группы II при взрывах на глубинах около 50—55 *м* (рис. 68, *б*).

На рис. 69 заштрихованы области значений фазовой и групповой скоростей различных групп, полученные путем анализа всей совокупности сейсмограмм и перезаписей, прошедших низкочастотную фильтрацию (0—13, 0—28, 0—40 *гц*). Несмотря на значительный разброс полученных данных, разделение групп по характеру дисперсии фазовых и групповых скоростей остается достаточно четким.

Помимо визуальных определений, был проведен машинный анализ групповых скоростей при помощи СВАН. Для этого осциллографические записи были зацифрованы на установке УЦС с шагом 0,002 *сек*. Одна из полученных диаграмм СВАН приведена

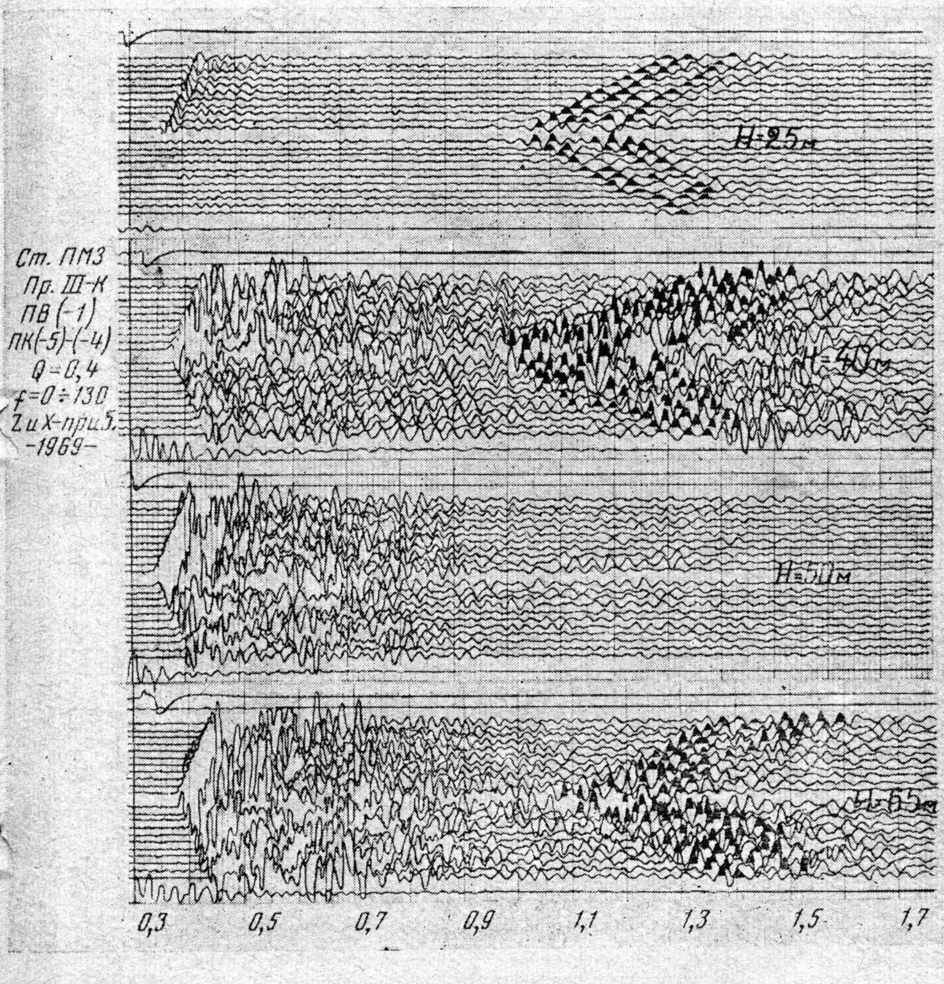


Рис. 67. Примеры сейсмограмм поверхностных волн при взрывах на разных глубинах ($r = 300 \div 400$ *м*)

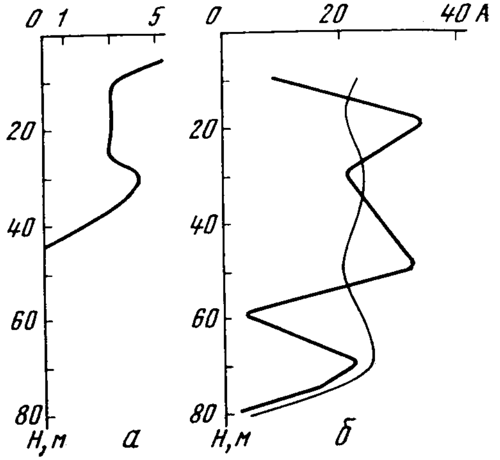


Рис. 68. Зависимость амплитуд смещения от глубины заряда

а — группа I, $r = 600$ *м*;

б — группы II (жирная линия) и III (тонкая линия), $r = 1200$ *м*

на рис. 70. На ней уверенно выделяются те же четыре группы, но диапазон периодов каждой группы значительно шире, чем по визуальным определениям. Ход кривой групповой скорости по диаграммам СВАН определен более точно, чем при ручной обработке.

Интерпретация наблюдений. *Группа I*. Рассмотрим, может ли наблюдаемая волновая картина быть объяснена в рамках изложенной в части I теории поверхностных волн. По имеющимся данным скважинных наблюдений, максимальные скорости поперечных волн в верхних 200 *м* разреза не превышают 800 *м/сек*. Из табл. 13 следует, что фазовые скорости групп II, III и IV лежат в пределах возможного диапазона скоростей v_{kR} (T) для данного разреза, т. е. они всюду меньше 800 *м/сек*, а группа I имеет более высокие фазовые скорости. В то же время из данных торпедирования известно, что она связана с верхней частью среды и быстро затухает по мере углубления источника под уровень грунтовых вод. Следовательно, нельзя связывать эту волну с более глубокими частями разреза ($z > 200 \div 300$ *м*), где скорости поперечных волн достигают значений 1000 *м/сек* и более. Поэтому она должна быть отнесена к классу «просачивающихся» (leaking) волн [70, 100, 113, 126, 145], которые в отличие от «нормальных» рэлеевских волн связаны не с дискретным, а с непрерывным спектром собственных значений дифференциальных операторов (1.14), (1.15) (см. формулы (1.28)). Известно, что такие волны затухают быстрее нормальных рэлеевских волн, теряя часть энергии на излучение в глубь среды. Разделение на нормальные и просачивающиеся волны во многом условно: включив в модель среды более глубокие слои с бо́льшими скоростями поперечных волн, можно в рамках нашей вычислительной схемы рассчитать все интерференционные волны с фазовыми скоростями, меньшими новой скорости b $(Z + 0)$. Однако с вычислительной точки зрения такой путь расчета волн, связанных с верхними частями разреза, вряд ли эффективен. Методы расчета просачивающихся волн в непрерывных средах, аналогичные описанным выше для нормальных волн, только начинают разрабатываться. Поэтому мы ограничимся ниже физической трактовкой природы этой волновой группы, не подкрепляя ее расчетом. Как уже отмечалось, в верхней части разреза имеется только одна сильная граница скоростей — уровень грунтовых вод. Автором в работе [47] было показано, что на этой резкой и гладкой границе существуют идеальные условия отражения продольных волн; при этом не образуется сколько-нибудь интенсивных обменных волн. Конструктивная интерференция запредельных отраженных продольных волн и приводит к образованию волновой группы I. Фазовые ско-

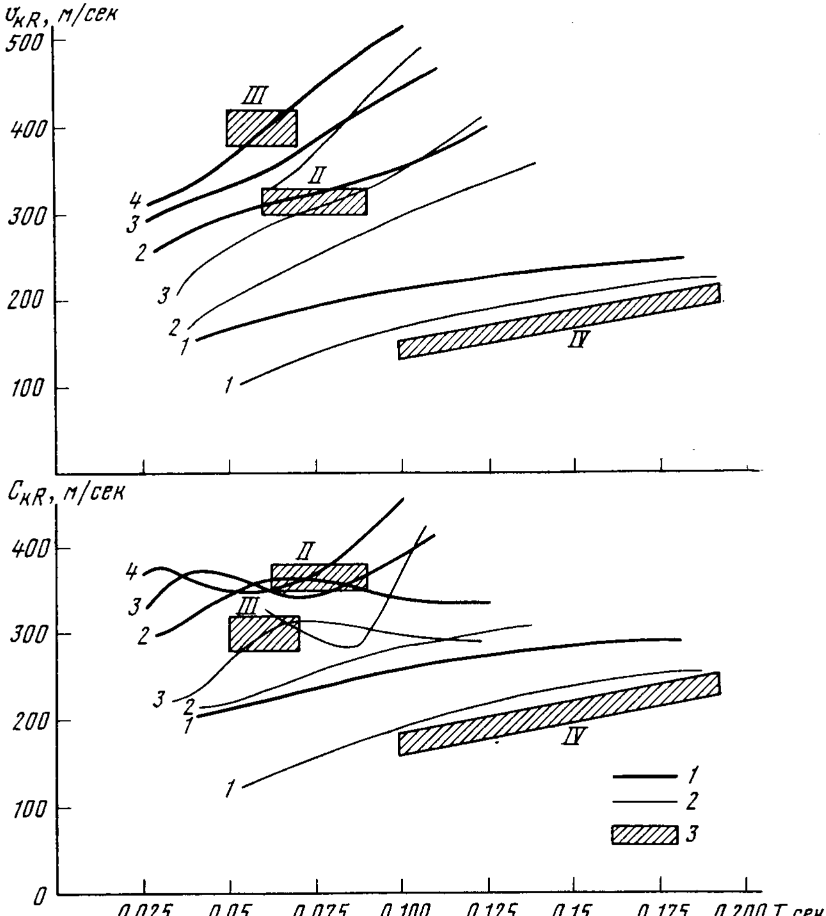


Рис. 69. Наблюденные и теоретические данные о дисперсии поверхностных волн

1 — расчет для модели A; 2 — расчет для модели B; 3 — наблюденные данные. Цифры у кривых — значения k

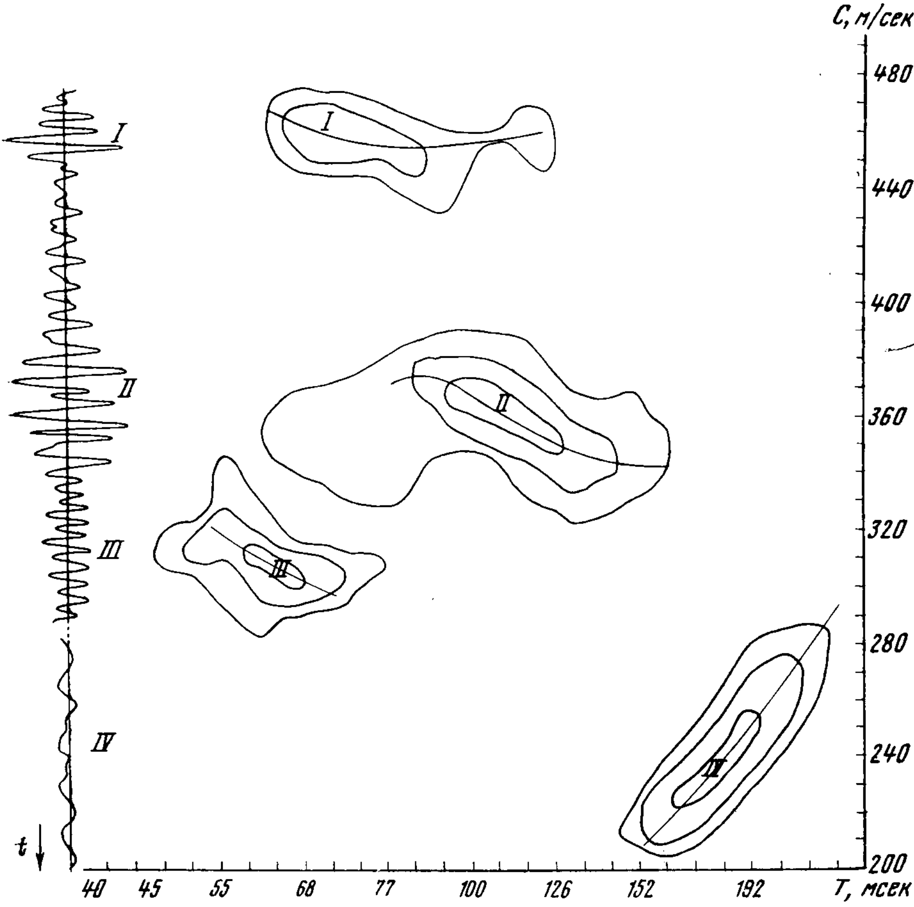


Рис. 70. Наблюденная сейсмограмма поверхностных волн (r = 1340 *м*) и диаграмма СВАН

рости результирующей интерференционной группы должны быть заключены между скоростями продольных волн выше и ниже уровня грунтовых вод, что и наблюдается в эксперименте. При погружении источника под границу лучевое возбуждение запредельных отражений невозможно, и энергия волны должна экспоненциально убывать с углублением источника (рис. 68, *a*).

Группы II—IV. Для количественного объяснения свойств групп II—IV были проведены расчеты рэлеевских волн для двух моделей среды *A* и *B*, показанных на рис. 65. Эти модели несколько отличаются от модели УВ — в них имеются дополнительные границы на глубинах 5 и 60 *м*. Сравнение расчетных и наблюденных данных о дисперсии (рис. 69), поляризации и изменении амплитуд с погружением заряда позволяет сделать следующие заключения о природе волновых групп II—IV.

1. Группа IV по своим характеристикам наиболее соответствует основной гармонике рэлеевской волны. Ее фазовые и групповые скорости лишь на 20—25 *м/сек* отличаются от расчетных для модели В; траектории движения частиц в группе — возвратные, причем горизонтальная и вертикальная компоненты смещений примерно равны. Амплитуда смещений резко ослабевает с погружением заряда, в особенности для глубин более 10 *м*. В основном на записи представлена длиннопериодная часть спектра основной гармоники ($T > 0{,}1$ *сек*). Это можно объяснить тем, что короткопериодные колебания распространяются в верхних 5—10 *м* разреза и быстро затухают с расстоянием из-за сильного поглощения.

2. Группы II и III образованы высшими гармониками рэлеевских волн. Об этом свидетельствует характер дисперсии фазовой и групповой скоростей: и те и другие попадают в диапазон расчетных значений для второй, третьей и четвертой гармоник в моделях *А* и *В*; особенности поляризации: преобладание прямых траекторий движения с изменчивым отношением компонент $\varkappa$, медленное убывание амплитуд смещений с увеличением глубины заряда. Хотя из-за недостаточной точности данных о скоростном разрезе хорошее количественное совпадение наблюденной и расчетной дисперсии получить не удалось, наиболее вероятным кажется отождествление группы II с третьей, а группы III — со второй гармониками волны Рэлея. Сравнение расчетных и наблюденных графиков зависимости амплитуды смещения от глубины показывает, что в реальных условиях затухание амплитуд с глубиной происходит заметно медленнее, чем в расчетах для центра расширения, и качественно сходно с расчетным для вертикальной силы. Это указывает на то, что взрывной источник, возможно, не обладает сферической симметрией. Об этом же свидетельствует и факт регистрации прямых поперечных волн на поверхности.

Таким образом, проведенный анализ наблюденных и расчетных данных позволил отождествить поле низкоскоростных низкочастотных волн-помех с различными гармониками поверхностных волн Рэлея и установить основные закономерности их распространения. В частности, показано, что наиболее интенсивную часть этого поля образуют высшие гармоники поверхностных волн, амплитуда которых слабо затухает с увеличением глубины заряда. Основная гармоника в регистрируемом диапазоне периодов сравнительно мало интенсивна, содержит только длиннопериодные колебания ($T > 0{,}1$ *сек*) и резко ослабевает при углублении источника на глубину более 10—20 *м*. Помимо нормальных рэлеевских волн выделена просачивающаяся волна продольного типа, связанная с уровнем грунтовых вод. Сходные результаты получены автором и Л. И. Ратниковой при анализе данных аналогичных экспериментов, проведенных в 1967 г. в одном из районов Пермской области; во многом сходные особенности имеют поля низкоскоростных помех, описанные в ряде других экспериментальных исследований [26, 75, 91]. Это позволяет считать волновые поля помех, описанные выше, типичными для многих районов, где проводится сейсмическая разведка нефти и газа. Свойства помех таковы, что только одновременное использование нескольких способов их ослабления может привести к положительным результатам. Погружение заряда в водонасыщенные или коренные породы позволяет резко ослабить основную гармонику волн Рэлея и интерференционные продольные волны, связанные с резкой верхней границей. Применение фильтров высоких частот с большой крутизной среза позволяет значительно уменьшить уровень всех поверхностных волн. Большой эффект может быть получен применением способов пространственной фильтрации, рассчитанных на подавление волн с широким спектром фазовых скоростей от 200 до 1000 *м/сек*. Для получения дисперсионных характеристик поля поверхностных волн целесообразно пользоваться методикой СВАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамов А. А.* Вариант метода прогонки.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, 1, № 2.
2. *Аленицын А. Г.* Волны Рэлея в неоднородном упругом полупространстве волноводного типа.— Прикл. матем. и мех., 1967, 31, вып. 2.
3. *Альтерман З., Ярош Х., Пикерис Х. Л.* Распространение рэлеевских волн в Землю. Собственные колебания Земли. «Мир», 1964.
4. *Андрианова З. С., Кейлис-Борок В. И., Левшин А. Л., Нейгауз М. Г.* Поверхностные волны Лява. «Наука», 1965.
5. *Архангельская В. М.* Дисперсия поверхностных волн и строение земной коры.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1960, № 9.
6. *Архангельская В. М.* Исследование короткопериодных волн Рэлея, ч. I и II.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1961, № 8; 1964, № 9.
7. *Бабич В. М., Бабич Г. Н., Фомина Н. А.* О расчете волн Лява с использованием асимптотических формул метода ВКБ.— В сб.: Вычислительная сейсмология, вып. 4. «Наука», 1968.
8. *Береза Г. В., Слуцковский А. И., Полшков М. К.* Частотный анализ сейсмических колебаний.— Прикл. геофизика, 1954, вып. 11.
9. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. Изд-во АН СССР, 1957.
10. *Бреховских Л. М.* О волноводных явлениях в твердых слоистых средах с непрерывно изменяющимися параметрами.— Акуст. журн., 1968, 14, № 2.
11. *Булдырев В. С., Озеров Д. К.* Высокочастотная асимптотика собственных функций волн Лява. Дисперсионные уравнения высокочастотных волн Лява в неоднородном полупространстве.— В сб.: Вычислительная сейсмология, вып. 3. «Наука», 1967.
12. *Буллен К. Е.* Введение в теоретическую сейсмологию. «Мир», 1966.
13. *Бунэ В. И., Левшин А. Л., Павлов О. В., Французова В. И.* Применение сейсморазведочных и расчетных методов при сейсмическом микрорайонировании.— Изв. АН СССР. Физика Земли, 1973, № 9.
14. *Валюс В. П.* Определение скоростных разрезов Земли по совокупности сейсмических наблюдений. Канд. дисс. М., 1969.
15. *Валюс В. П.* Определение сейсмических разрезов по совокупности наблюдений.— В сб.: Вычислительная сейсмология, вып. 4. «Наука», 1968.
16. *Валюс В. П., Левшин А. Л., Кейлис-Борок В. И.* Определение скоростного разреза верхней мантии Европы.— Докл. АН СССР, 1969, 185, № 3.
17. *Валюс В. П., Левшин А. Л., Сабитова Т. М.* Совместная интерпретация объемных и поверхностных волн для одного из районов Средней Азии.— В сб.: Вычислительная сейсмология, вып. 2. «Наука», 1966.
18. *Ванек И., Штельцнер И.* Амплитуда объемных сейсмических волн.— В сб.: Верхняя мантия Земли. «Мир», 1964.
19. *Ванек И., Затопек А. и др.* Стандартизация шкалы магнитуд.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1962, № 2.
20. Верхняя мантия Земли. Сб. статей. «Мир», 1964.

21. *Вилькович Е. В., Левшин А. Л., Нейгауз М. Г.* Волны Лява в вертикально-неоднородной среде: учет сферичности, вариаций параметров, поглощения.— В сб.: Вычислительная сейсмология, вып. 2. «Наука», 1966.
22. Внутреннее строение Земли. Сб. статей. ИЛ, 1949.
23. *Гельфанд И. М., Локуциевский О. В.* Метод прогонки для решения разностных уравнений.— В кн.: *Годунов С. К., Рябенький В. С.* Введение в теорию разностных схем. Физматгиз, 1962.
24. *Гервер М. Л., Каждан Д. А.* Нахождение скоростного разреза по дисперсионной кривой. Вопросы единственности.— В сб.: Вычислительная сейсмология, вып. 4. «Наука», 1968.
25. *Гервер М. Л., Маркушевич В. М.* Определение по годографу скорости распространения сейсмической волны.— В сб.: Вычислительная сейсмология, вып. 3. «Наука», 1967.
26. *Гильберштейн П. Г., Почтовик В. С.* Опыт цифрового моделирования низкоскоростных сейсмических волн — помех.— Разв. геофизика, вып. 33. «Недра», 1969.
27. *Гинодман А. Г.* Применение метода поперечных отраженных волн при исследованиях в бортовой зоне Камско-Кинельской впадины.— Прикл. геофизика, вып. 61. «Недра», 1970.
28. *Гласко В. Б., Саваренский Е. Ф., Шечков Б. Н.* Данные о фазовых и групповых скоростях поверхностных сейсмических волн.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1963, № 10.
29. *Голдман С.* Теория информации. ИЛ, 1957.
30. *Голицын Б. Б.* О дисперсии и затухании поверхностных сейсмических волн.— Изв. Росс. Акад. наук, 1912, № 2.
31. *Гохберг М. Б., Похотелов О. А., Кочерянц Е. Б.* К вопросу о генерации устойчивых колебаний геомагнитного слоя.— Докл. АН СССР, 1971, 198, № 3.
32. *Грудева Н. П., Левшин А. Л., Французова В. И.* О природе каналовых сейсмических волн.— В сб.: Вычислительная сейсмология, вып. 5. «Наука», 1971.
33. *Гутенберг Б.* Скорости распространения сейсмических волн в земной коре.— В сб.: Земная кора. ИЛ, 1957.
34. *Дараган С. К., Осадчий А. П.* Импульсная калибровка и контроль сейсмического канала.— В сб.: Вычислительная сейсмология, вып. 3. «Наука», 1967.
35. *Джеффрис Г.* Земля, ее происхождение, история и строение. ИЛ, 1960.
36. *Жарков В. Н.* Собственные колебания Земли. Затухание.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1962, № 2.
37. *Запольский К. К.* Аппаратура и методика исследования характеристик сейсмических волн в реальных средах. Канд. дисс., 1952.
38. Земная кора. Сб. статей. ИЛ, 1957.
39. *Калинин В. А., Трубицын В. П.* Затухание поверхностных волн в слое на полупространстве.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1962, № 12.
40. *Кейлис-Борок В. И.* Интерференционные поверхностные волны. Изд-во АН СССР, 1960.
41. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. ИЛ, 1958.
42. *Коган С. Я.* Краткий обзор теорий поглощения сейсмических волн.— Изв. АН СССР. Физика Земли, 1966, № 11-12.
43. *Колесников Ю. А., Соловьев В. Н.* Установка для цифрования сейсмограмм с автоматическим нанесением чисел на перфокарты и бумажную ленту.— В сб.: Новые приборы для регистрации сейсмических явлений. «Наука», 1964.
44. *Копсон Э.* Асимптотические разложения. «Мир», 1966.
45. *Коридалин Е. А.* Некоторые характеристики волн типа Lg и Rg и региональные особенности их распространения.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1961, № 9.
46. *Левитан Б. М.* Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка. М.—Л., Гостехиздат, 1950.

47. *Левшин А. Л.* Определение уровня грунтовых вод сейсмическими методами.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1962, № 9.
48. *Левшин А. Л.* Распространение поверхностных волн в рыхлых породах.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1962, № 12.
49. *Левшин А. Л.* Применение сейсмических методов исследований при инженерно-геологических изысканиях.— Труды Ин-та ВСЕГИНГЕО, 1962, вып. 20.
50. *Левшин А. Л.* Волны Лява и слой пониженной скорости в верхней мантии.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1964, № 11.
51. *Левшин А. Л., Французова В. И., Шкадинская Г. В.* Высшие гармоники волн Рэлея и строение верхней мантии.— В сб.: Вычислительная сейсмология, вып. 4. «Наука», 1968.
52. *Левшин А. Л., Французова В. И., Шкадинская Г. В.* Амплитудные спектры поверхностных волн.— Там же.
53. *Левшин А. Л., Ратникова Л. И.* Высшие гармоники поверхностных волн — помехи при регистрации отражений.— В сб.: Сейсмические волны в тонкослоистых средах. «Наука», 1973.
54. *Левшин А. Л., Янсон З. А.* Поверхностные волны в вертикально и радиально-неоднородных средах.— В сб.: Вычислительная сейсмология, вып. 5. «Наука», 1971.
55. *Леманн И.* Волны S и структура верхней мантии.— В сб.: Верхняя мантия Земли. «Мир», 1964.
56. *Лидский В. Б., Нейгауз М. Г.* К методу прогонки в случае самосопряжений системы второго порядка.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, 2, № 1.
57. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.—Л., ОНТИ, 1935.
58. *Магницкий В. А.* Внутреннее строение и физика Земли. «Недра», 1965.
59. *Магницкий В. А., Хорошева В. В.* К вопросу о волноводе в оболочке Земли и его физической природе.— Докл. АН СССР, 1960, 135, № 2.
60. *Морс Ф., Фешбах Г.* Методы теоретической физики, т. 2. ИЛ, 1960, стр. 306.
61. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. Гостехиздат, 1954.
62. *Наймарк Б. М., Погребинский Г. А., Резников Е. Л.* Практические методы вычисления преобразования Фурье. Теоретическая и вычисл. геофизика. «Наука», 1973.
63. *Нейгауз М. Г., Шкадинская Г. В.* Метод расчета поверхностных волн Рэлея в вертикально-неоднородном полупространстве.— В сб.: Вычислительная сейсмология, вып. 2. «Наука», 1966.
64. *Нерсесов И. Л., Раутиан Т. Г.* Кинематика и динамика сейсмических волн на расстояниях до 3500 *км* от эпицентра.— Труды Ин-та физики Земли, 1964, № 32 (199).
65. *Озеров Д. К.* О лучевом методе получения дисперсионных уравнений для интерференционных волн SH, распространяющихся в средах со сферическими границами.— В сб.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, вып. 8. Л., «Наука», 1966.
66. *Осадчий А. П., Дараган С. К.* Аппаратура КОД для многоканальной цифровой регистрации сейсмических сигналов.— В сб.: Вычислительная сейсмология, вып. 2. «Наука», 1966.
67. *Пасечник И. П.* Характеристика сейсмических волн при ядерных взрывах и землетрясениях. «Наука», 1970.
68. *Петрашень Г. И.* Колебания упругого полупространства, покрытого слоем жидкости.— Уч. зап. ЛГУ, серия матем. наук, 1951, № 149.
69. *Петрашень Г. И.* Распространение упругих волн в слоисто-изотропных средах, разделенных параллельными плоскостями.— Уч. зап. ЛГУ, серия матем. наук, 1952, № 162.
70. *Петрашень Г. И., Енальский В. А.* О некоторых интерференционных явлениях в средах, содержащих тонкие плоскопараллельные слои.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1956, № 9-11; 1957, № 10.

71. *Петрашень Г. И.* Симметрия вращения и шаровые векторы.— Уч. зап. ЛГУ, 1949, вып. 17.
72. *Печ К.* Континентальные волны в центральной Европе.— В сб.: Строение Земли по поверхностным сейсмическим волнам. «Мир», 1965.
73. *Пикерис Х.* Теория распространения звука взрыва в мелкой воде.— В сб.: Распространение звука в океане. ИЛ, 1951.
74. Подземные ядерные взрывы. Сб. статей. ИЛ, 1962.
75. Поперечные и обменные волны в сейсморазведке. «Недра», 1967.
76. *Сабитова Т. М.* Интерпретация спектров поверхностных волн при землетрясениях. Канд. дисс. Ин-т геологии АН КиргССР, Фрунзе, 1966.
77. *Саваренский Е. Ф.* Об определении групповой и фазовой скорости из наблюдений.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1959, № 11.
78. *Саваренский Е. Ф., Вальднер Н. Г.* Волны Lg и Rg от землетрясений Черноморского бассейна и некоторые соображения об их природе.— В сб.: Сейсмические исследования, № 4. Изд-во АН СССР, 1960.
79. *Саваренский Е. Ф., Кирнос Д. П.* Элементы сейсмологии и сейсмометрии. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
80. *Санто Т.* Дисперсия поверхностных волн вдоль различных трасс до станции Упсала в Швеции, ч. 1.— В сб.: Строение Земли по поверхностным сейсмическим волнам. «Мир», 1965.
81. Сейсмический эффект подземных взрывов.— Труды Ин-та физики Земли, 1960, № 15 (182).
82. *Снеддон И.* Преобразование Фурье. ИЛ, 1955.
83. *Соловьев С. Л., Шебалин Н. В.* Определение интенсивности землетрясений по смещению почвы в поверхностных волнах.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1957, № 7.
84. Строение Земли по поверхностным сейсмическим волнам. Сб. статей. «Мир», 1965.
85. *Титчмарш Э. И.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, т. 1. ИЛ, 1960.
86. *Токсез М. Н., Бен-Менахем А.* Скорости многократно обегающих Землю волн Лява и Рэлея в оболочке.— В сб.: Строение Земли по поверхностным сейсмическим волнам. «Мир», 1965.
87. *Фок В. А.* Таблицы функций Эйри. Трансжелдориздат, 1946.
88. *Харкевич А. А.* Спектры и анализ. Физматгиз, 1962.
89. *Хорошева В. В.* Исследование волновода на твердой двумерной модели с резкими границами.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1962, № 8.
90. *Хорошева В. В.* Некоторые результаты исследования волн Pa и Sa по сейсмограммам станций СССР.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1960, № 7.
91. *Цымбал Т. М., Крауклис Л. А.* Изучение поверхностных волн, зарегистрированных при сейсмических исследованиях в Сурхан-Дарьинской депрессии.— В сб.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, вып. 8. Л., «Наука», 1966.
92. *Шебалин Н. В.* Балльность, магнитуда и глубина очага землетрясений.— В кн.: Землетрясения в СССР. Изд-во АН СССР, 1961.
93. *Шерман Д. И.* О распространении волн в жидком слое, лежащем на упругом полупространстве.— Труды Сейсмол. ин-та АН СССР, 1945, № 115.
94. *Шкадинская Г. Б.* Метод расчета поверхностных волн Рэлея в радиально-неоднородном шаре.— В сб.: Вычислительная сейсмология, вып. 5. «Наука», 1971
95. *Яновская Т. Б.* Исследование полей смещений в поверхностных волнах с целью определения динамических параметров очагов землетрясений. Канд. дисс. М., 1968.
96. *Яновская Т. Б.* К вопросу об исследовании диспергирующих поверхностных волн в окрестности минимума групповой скорости.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1959, № 12.
97. *Яновская Т. Б.* О дисперсии рэлеевских волн в сферическом слое.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1958, № 7.

98. *Янсон З. А.* Об интерференции волн *SH* в упругом шаровом слое, лежащем на упругом шаре. I, II.— Изв. АН СССР. Физика Земли, 1965, № 1,5.
99. *Янсон З. А.* Распространение нестационарных упругих волн *SH* в полупространстве с двумя волноводами. I, II.— Изв. АН СССР. Физика Земли, 1969, № 2, 3.
100. *Alsop L. E., Chander R.* The generation of direct and coupled PL modes.— Suppl. Nuovo Cimento, 1968, 6, N 1.
101. *Alterman Z. S., Aboudi J.* The common spectrum of computed seismograms.— Israel J. Technology, 1968, 6, N 4.
102. *Anderson D L.* Universal dispersion tables. 1. Love waves across oceans and continents on a spherical Earth.— Bull. Seism. Soc. Am., 1964, 54, N 2.
103. *Anderson D. L., Ben-Menahem A., Archambeau C. B.* Attenuation of seismic energy in the upper mantle.— J. Geoph. Res., 1965, **70**.
104. *Andrianova Z., Keilis-Borok V., Levshin A., Neigaus M.* Seismic Love waves. N. Y., Consult. Bureau, 1967.
105. *Arnold E. P., Jeffreys H., Shimshoni M.* S in the three European earthquakes.— Geoph. J., 1963, 8, N 1.
106. *Bath M., Vogel A.* Continental dispersion of seismic surface waves.— Geofis. pura a appl., 1957, **38**.
107. *Bath M.* A continental channel wave guided by the intermediate layer in the crust.— Geofis. pura a appl., 1957, 38.
108. *Bath M.* Travel times of the principal earthquakes waves for Uppsala. Uppsala, 1947.
109. *Bath M., Crampin S.* Higher modes of seismic surface waves. Relations to channel waves.— Geoph. J., 1965, **9**.
110. *Ben-Menahem A.* Spectral response of an elastic sphere to dipolar point sources.— Bull. Seism. Soc. Am., 1964, 54, N 5A.
111. *Ben-Memahem A., Toksoz A. N.* Source-mechanism from spectra of long-period seismic surface-waves. I—III.— J. Geoph. Res., 1962, **67**, N 5; 1963, 68, N 18; Bull. Seism. Soc. Am., 1963, **53**, N 5.
112. *Bloch S., Hales A. L.* New technique for the determination surface wave phase velocities.— Bull. Seism. Soc. Am., 1968, 58, N 3.
113. *De Bremaecker J. Cl.* Body waves as normal and leaking modes 1.— Bull. Seism. Soc. Am., 1967, **57**, p. 191.
114. *Brune J., Nafe L. E., Alsop L. E.* The polar phase shift of surface waves on a sphere.— Bull. Seism. Soc. Am., 1961, **51**, 247.
115. *Caloi P.* L'astenosfera come Canale-guida dell'energia seismica.— Ann. geofis., 1954, 7.
116. *Cooley J. W., Tukey J. W.* An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series.— Math. Comput., 1965, 19, 297—301.
117. *Crampin S.* Higher modes of seismic surface waves. Preliminary observations.— Geoph. J., 1964, 9, 37—57.
118. *Crampin S., Bath M.* Higher modes of seismic surface waves: mode separation.— Geoph. J., 1965, 10, 81—92.
119. *Davies D.* On the problem of compatibility of surface waves and travel times.— Geoph. J., 1967, **13**, 421—424.
120. *Dorman J., Ewing M.* Numerical inversion of seismic surface wave dispersion data and crust-mantle structure in the New York — Pensilvania area.— J. Geoph. Res., 1962, **67**, N 13.
121. *Dunkin J.* Computation of modal solutions in a layered elastic media at high frequencies.— Bull. Seism. Soc. Am., 1965, **55**, 335—358.
122. *Dziewonsky A., Bloch S., Landisman M.* A technique for the analysis of transient seismic signals.— Bull. Seism. Soc. Am., 1969, 59, N 1.
123. The Earth's mantle. London, Acad. Press., 1967, ch. 12, p. 355—420.
124. *Ewing M., Jardetzky W., Press F.* Elastic waves in layered media. N. Y., Mc-Graw-Hill, 1957.
125. *Ewing M., Mueller S., Landisman M., Sato Y.* Transient analysis of earthquake and explosion arrivals.— Geofis. pura a appl., 1959, **44**, N 3.

126. *Gilbert F.* Propagation of transient leaking modes in a stratificial elastic waveguide.— Rev. Geoph., 1964, 2, 123—153.
127. *Gutenberg B.* Channel waves in the Earth's crust.— Geophysics, 1955, 20, N 2.
128. *Harkider D. G.* Surface waves in multilayered elastic media.— Bull. Seism. Soc. Am., 1964, 54, 627—679.
129. *Harkrider D. G.* Theoretical and observed acoustic-gravity waves from explosion sources in atmosphere.— J. Geoph. Res., 1964, 69, N 24.
130. *Haskell N. A.* The radiation pattern of surface waves from point soursce in a multilayered medium.— Bull. Seism. Soc. Am., 1963, 55, 377.
131. *Haskell N. A.* The dispersion of surface waves on multilayered media.— Bull. Seism. Soc. Am., 1953, 43, 17—34.
132. *Ivanova Z. S., Keilis-Borok V. I., Levshin A. L., Neigaus M. G.* Love waves and the structure of the upper mantle.— Geoph. J., 1965, 9, N 1.
133. *Keilis-Borok V. I., Knopoff L. et al.* The progress report of the working group to the VI International Symposium on the Geophysical Theory and Computers. Copenhagen, 1969.
134. *Keilis-Borok V. I., Neigaus M. G., Shkadinskaya G. V.* Application of the theory of eigen-functions to the calculations of surface waves velocities.— Rev. Geoph., 1965, 3, N 1.
135. *Koenig W., Dunn H. K., Lacy L. Y.* The sound spectrograph.— J. Acoust. Soc. Am., 1946, 18, N 1.
136. *Kovach R. L.* Surface wave dispersion for an Asio-African and a Eurasian paths.— J. Geoph. Res., 1969, 64, 805—813.
137. *Kovach R. L.* Seismic surface waves: some observations and recent development.— Phys. and Chem. Earth, 1965, 6, 251—314.
138. *Kovach R . L., Anderson D. L.* Higher mode surface waves and their bearing on the structure of the earth's mantle.— Bull. Seism. ~~Soc.~~ Am., 1964, 161—182.
139. *Knopoff L. A.* A matrix method for elastic wave problems.— Bull. Seism. Soc. Am., 1964, 54, 431—438.
140. *Knopoff L. A. at al.* Attenuation of dispersed waves.— J. Geoph. Res., 1964, 69, N 8.
141. *Lamb H.* On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid.— Phil. Trans. Roy. Soc. London, 1904, A, 203.
142. *Levshin A. L., Pisarenko V. F., Pogrebinsky G. A.* On a frequency-time analysis of oscillations.— Ann. geofis., 1972, 28.
143. *Levshin A. L., Sabitova T. M., Valus V. P.* Joint interpretation of body and surface waves data for a district in Middle Asia.— Geoph. J., 1966, 11, N 11.
144. *Levshin A. L., Neigaus M. G., Sabitova T. M.* Spectra of Love waves and the depth of a normal source.— Geoph. J., 1965, 9, N 2-3.
145. *Levshin A. L., Panza G. F.* Further remarks on extra roots of Rayleigh equation and Somigliana waves.— Ann. geofis., 1970, 23, № 1.
146. *Lieberman R. C., Pomeroy P. W.* Relative excitation of surface waves by earthquakes and underground explosions.— J. Geoph. Res., 1969, 74, N 6.
147. *Love A. E. H.* Some problems of geodinamics. Cambr. Univ. Press, 1911.
148. *Mooney H., Bolt B.* Dispersive characteristics of the first three Rayleigh modes for a single surface layer.— Bull. Seism. Soc. Am., 1966, 56, N 1.
149. *Oliver J., Dorman J., Sutton G.* The second shear mode of continental Rayleigh waves.— Bull. Seism. Soc. Am., 1959, 49, 379—389.
150. *Oliver J., Ewing M.* Higher modes of continental Rayleigh waves.— Bull. Seism. Soc. Am., 1957, 47, N 1.
151. *Oliver J., Ewing M.* Normal modes of continental surface waves.— Bull. Seism. Soc. Am., 1958, 48, N 1.
152. *Pilant W. L., Knopoff L.* Observations of multiple seismic events.— Bull. Seism. Soc. Am., 1964, 54, N 1.
153. *Potter R. K., Kopp G. A., Green N. C.* Visible speech. N. Y., Van Nostrand, 1947.

154. *Press F., Ewing M.* Waves with P_n and S_n velocity at great distances.— Proc. Nat. Acad. Sci., 1955, **41**, 25.
155. *Press F., Ewing M.* Two slow surface waves across North America.— Bull. Seism. Soc. Am., 1952, **43**, 219.
156. *Press F., Harkrider D., Seafeldt C. A.* A fast convenient program for computation of surface-wave dispersion curves in multilayered media.— Bull. Seism. Soc. Am., 1961, **51**.
157. *Press F., Ewing M., Oliver J.* Crustal structure and surface wave dispersion in Africa.— Bull. Seism. Soc. Am., 1956, **46**, N 1.
158. *Press F.* Earth models consistent with geophysical data.— Phys. Earth. Planet., 1970, **3**, N 3.
159. *Press F.* Earth models obtained by Monte Carlo inversion.— J. Geoph. Res., 1968, **73**, 5223.
160. *Rayleigh (Strutt J. W.).* On waves propagated along the plane surface of an elastic solid.— Proc. London Math. Soc., 1887, **17**.
161. *Saito M.* Excitation of free oscillations and surface waves by a point source in a vertically heterogeneous earth.— J. Geoph. Res., 1967, **72**, N 14.
162. *Santo T. A.* Dispersion of Love waves along various paths to Japan.— Bull. Earthquake Res. Inst., 1962, **40**, 631—652.
163. *Sato Y.* Analysis of dispersed surface waves. III.— Bull. Earthquake Res. Inst., 1956, **34**, 131.
164. *Takeuchi H., Dorman J., Saito M.* Partial derivatives of surface wave phase velocity with respect to physical parameter changes within the Earth.— J. Geoph. Res., 1964, **69**, N 16.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 3

I. ТЕОРИЯ И ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПОВЕРХНОСТНЫХ И КАНАЛОВЫХ ВОЛН

Глава 1. **Теория** 8
§ 1. Поле смещений в вертикально-неоднородном полупространстве 8
§ 2. Поле смещений в радиально-неоднородном шаре 16
§ 3. Физическое истолкование полученных решений 25

Глава 2. **Методика расчета** 28
§ 1. Собственные значения и собственные функции 28
§ 2. Интегральные формулы 39
§ 3. Спектры поверхностных волн, возбуждаемых элементарными источниками 45
§ 4. Теоретические сейсмограммы 54

Глава 3. **Основные свойства поверхностных и каналовых волн** . . . 59
§ 1. Спектральный диапазон 60
§ 2. Дисперсия фазовых и групповых скоростей 61
§ 3. Законы подобия 65
§ 4. Принцип взаимности 67
§ 5. Зависимость амплитуды смещения от азимута 68
§ 6. Зависимость амплитуды смещения от глубины приемника и источника 70
§ 7. Зависимость амплитуды смещения от частоты и номера гармоники 74
§ 8. Поляризация 76
§ 9. Поглощение 77

Глава 4. **Поверхностные и каналовые волны в моделях с внутренним волноводом** 78
§ 1. Волновое поле в модели II с внутренним волноводом . . 80
§ 2. Волновое поле в модели с двумя волноводами III 82
§ 3. Физическая трактовка; критерии существования волноводов 85

II. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ В ЗЕМЛЕ

Глава 5. **Поверхностные волны в континентальной коре и верхней мантии Земли** 89
§ 1. Спектральные характеристики поверхностных волн в моделях Земли Гутенберга и Джеффриса 90
§ 2. Теоретические сейсмограммы поверхностных волн в моделях Земли Гутенберга и Джеффриса 112
§ 3. Спектрально-временно́й анализ поверхностных волн . . . 122
§ 4. Совместная интерпретация поверхностных и объемных волн 141

Глава 6. **Поверхностные волны-помехи в сейсморазведке** 151
§ 1. Расчетные волновые поля помех 152
§ 2. Экспериментальные наблюдения поверхностных волн и их интерпретация 159

Литература 169

ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
24	1 сн.	θ	$\tilde{\theta}$
27	1 сн.	$\tilde{V}_{k\nu}^{(iq)}$	$\tilde{V}_{k\nu}^{(i_q)}$
27	2 сн.	$\tilde{V}_{k}^{(iq)}$	$\tilde{V}_{k\nu}^{(i_q)}$

75 коп.