В. В. Нардов

ПРАКТИЧЕСКОЕ РУКОВОДСТВО ПО ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ КРИСТАЛЛОГРАФИИ

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ А. А. ЖДАНОВА

В. В. Нардов

ПРАКТИЧЕСКОЕ РУКОВОДСТВО ПО ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ КРИСТАЛЛОГРАФИИ

Допущено Министерством высшего
и среднего специального образования РСФСР
в качестве учебного пособия для студентов
геологических, физических и технологических
специальностей

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
ЛЕНИНГРАД • 1974

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Ленинградского университета

УДК 548.1 : 515.6

Практическое руководство по геометрической кристаллографии. Нардов В. В. Учебное пособие. 1974. Изд-во Ленингр. ун-та, с. 3—142.

В руководстве приведены сведения по геометрии кристаллических многогранников, входящие в общий курс кристаллографии для геологов. Автор пытался сделать его пригодным для самостоятельного изучения. Руководство будет содействовать лучшему усвоению предмета студентами, а также оно будет полезно всем специалистам, изучающим монокристаллы и их свойства.

Отв. ред. *проф. В. А. Франк-Каменецкий*

Рецензенты: акад. *Н. В. Белов* (Москва, ИКАН), кафедра кристаллографии Ленинградского горного ин-та им. Г. В. Плеханова (проф. *И. И. Шафрановский*).

Н $\frac{20805-133}{076(02)-74}$ БЗ—30—48—1974

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Кристаллы сейчас привлекают внимание не только представителей геолого-минералогических наук, но и других специалистов — физиков, химиков, технологов, имеющих дело с изучением и использованием кристаллического вещества. Широкое использование кристаллических материалов в новой технике (полупроводники, ферриты, сегнетоэлектрики, лазеры и проч.) привело к тому, что все большему кругу специалистов необходимы знания по геометрической кристаллографии.

Отсутствие элементарных, но весьма специализированных знаний о кристаллах — умения определить симметрию, описать формы роста кристаллов, построить стереографическую или гномоническую проекцию, правильно определить символы граней, ребер и прочее, наконец, понять лаконичное и весьма краткое описание кристалла, которое приводится в справочнике — часто создает затруднения даже у вполне сложившихся специалистов.

Эти затруднения связаны со спецификой пространственной симметрии кристаллов, необходимостью использовать объемные модели кристаллов для их изучения, особенностями координатных систем, которые используются при описании кристаллов различной симметрии.

Именно для освоения элементарных основ геометрической кристаллографии и предназначено практическое руководство, составленное доцентом кафедры кристаллографии Ленинградского университета Владимиром Владимировичем Нардовым (1920—1970).

Отличаясь исключительной простотой изложения и строгостью выводов, оно является общедоступным пособием по изучению самых необходимых основ геометрической макрокристаллографии. Используя данное руководство и небольшой набор моделей кристаллических многогранников, обучающийся без специальной подготовки может освоить основные положения геометрической кристаллографии, научиться определять симметрию, формы, символы граней кристаллов, понимать современную кристаллографическую номенклатуру и символику. Материал изложен предельно просто и в то же время строго, сопровождается хорошими иллюстрациями и наглядными таблицами. Математический аппарат настолько прост, что не требует ничего, кроме школьного курса математики. Иногда для упрощения автор не приводит на проекциях полного набора элементов симметрии (табл. 7, 8 и в тексте). Нет полной унификации в обозначениях видов симметрии, что вообще характерно для современных символов Германа-Могена.

При подготовке рукописи к печати нами внесены только самые необходимые исправления, обновлен список литературы и сделано несколько редакционных сносок, которые касаются трактовки отдельных частных вопросов.

Проф. В. А. Франк-Каменецкий

□

ОТ АВТОРА

На кафедре кристаллографии Ленинградского университета под руководством организатора и заведующего кафедрой профессора О. М. Аншелеса коллективом преподавателей в течение нескольких десятилетий разрабатывался и совершенствовался курс кристаллографии для студентов-геологов. В настоящее время этот курс ведется профессором В. А. Франк-Каменецким. Широко известны два учебника, соответствовавшие в свое время читаемому курсу: «Кристаллография», Г. М. Попов и И. И. Шафрановский (1941) и «Начала кристаллографии», О. М. Аншелес (1952).

Овладеть основами геометрической кристаллографии настолько, насколько это требуется геологам и особенно кристаллографам и минералогам, невозможно без упражнений по описанию многогранников. Одна из задач, стоящая перед автором — по возможности облегчить учащимся прохождение практической части курса. В предлагаемом руководстве сделана попытка суммировать опыт преподавания геометрической кристаллографии, который накоплен в результате работы на кафедре ряда преподавателей: проф. О. М. Аншелеса, проф. В. Б. Татарского, проф. В. А. Франк-Каменецкого, проф. И. И. Шафрановского, доц. Г. М. Попова, ассист. Т. Н. Бураковой, доц. В. В. Нардова, доц. И. Е. Каменцева, ст. преп. В. Ф. Чернышевой.

Основой при составлении руководства послужили учебные пособия по кристаллографии О. М. Аншелеса (1952), Г. М. Попова и И. И. Шафрановского (1964), Е. Е. Флинта (1961). Другие использованные источники указаны в списке литературы.

Много ценных замечаний по рукописи было сделано моими учителями проф. В. Б. Татарским и проф. В. А. Франк-Каменецким. Пользуюсь случаем, чтобы выразить им свою глубокую благодарность.

□

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Некоторые сведения о развитии кристаллографии и основные свойства кристаллов

Кристаллография — наука о кристаллическом состоянии вещества. Она изучает кристаллические индивидуумы, т. е. отдельные кристаллы, процессы образования и разрушения кристаллов, их состав, строение, геометрические, физические и физико-химические свойства. В основе кристаллографии лежат математика, физика, химия и физическая химия. Кристаллография делится на четыре главных раздела.

1. Геометрическая кристаллография.
2. Кристаллогéнезис[1] — учение о зарождении и росте кристаллов.
3. Кристаллохимия.
4. Кристаллофизика.

Обычно мы имеем дело с материей, находящейся в одном из трех состояний: газообразном, жидком, твердом (кристаллическом). То или иное состояние данного вещества устойчиво при определенных термодинамических условиях, т. е. при определенных температурах и давлениях.

Практическая деятельность людей неразрывно связана с кристаллами, так как они распространены на земной поверхности чрезвычайно широко. Земная кора примерно на 95% кристаллическая. Подавляющее большинство минералов имеет кристаллическое строение. Горные породы состоят почти исключительно из кристаллических зерен. Всем хорошо известны такие кристаллические вещества, как лед, сахар, различные соли. Из горных пород извлекаются металлы. Они имеют кристаллическое строение и являются основой всей техники и промышленности. За последние 20 лет использование монокристаллов в технике значительно возросло.

Возникновение кристаллографии было связано с изучением главным образом кристаллов минералов. Познание процессов возникновения и разрушения вообще, а также минералов и горных пород имеет важнейшее научное и практическое значение.

[1] Генезис (греч.) — происхождение, возникновение; процесс развития.

Геологам кристаллография необходима потому, что она лежит в основе минералогии, петрографии, геохимии, учения о месторождениях полезных ископаемых. Кристаллографические методы исследования минералов с помощью рентгеновских лучей, гониометра[2], поляризационного микроскопа — необходимое вооружение каждого геолога.

Очень кратко рассмотрим вопрос о накоплении знаний о кристаллах. Исключительная красота кристаллов многих минералов не могла не привлекать к себе внимания древних людей. Хорошо образованные кристаллы благодаря огранке, блеску, прозрачности, окраске использовались как украшения, коллекционировались. Мы знаем, что в древние времена непонятные людям явления порождали различные фантастические представления. Широко известным примером этого может служить обожествление загадочных небесных тел и некоторых животных. Так было и с кристаллами. Им приписывались особые мистические свойства, например, способность исцелять от болезней, вызывать заболевания, влиять на судьбу человека и т. п.

Люди очень давно научились кристаллизовать соли из водных растворов, т. е. создавать кристаллы, управлять процессом кристаллизации. Очевидно, что кристаллизация воды для большинства населения земного шара всегда была обычным явлением. Человек очень давно использовал в практических целях увеличение объема при переходе воды из жидкого состояния в кристаллическое, например, для раскалывания больших камней. Но во многих отношениях кристаллы долго оставались для человека загадочными образованиями.

Обобщение наблюдений над кристаллами и создание точных понятий о них связаны в первую очередь с изучением минералов, с развитием добычи полезных ископаемых: строительных материалов, солей, различных руд. Прежде всего создавались понятия о вкусовых свойствах кристаллов, их твердости, прочности, спайности, плавкости, растворимости, форме, цвете, блеске, т. е. о таких свойствах, которые использовались людьми.

Кристаллом древние греки называли лед. Позднее это название распространилось и на прозрачные кристаллы кварца — горный хрусталь, который тогда считался окаменевшим льдом. В XII в. кристаллами стали называть все тела, имеющие природную форму многогранников.

Нам известно, что в 79 г. нашего летосчисления римский писатель и ученый Плиний Старший упоминал о плоскогранности и прямореберности кристаллов. Этот вывод может считаться первым обобщением геометрической кристаллографии. Для расширения и углубления знаний о кристаллах и для дальнейшего их обобщения потребовались еще многие столетия.

Учеными прошлых веков было установлено много интересных свойств кристаллов. Остановимся кратко на их рассмотрении.

---

[2] Гония (греч.) — угол.

1. Способность самоограниться. Кристаллы, вырастающие в природных или в лабораторных условиях, часто оказываются ограненными. Кристаллы разных веществ ограняются вообще различно. У кристаллов одного и того же вещества огранка может изменяться в зависимости от внешних условий, при которых они растут. Изменение огранки кристаллов алюмокалиевых квасцов $[KAl(SO_4)_2 \cdot 12H_2O]$ в зависимости от пересыщения раствора, из которого они растут, показано на рис. 1.

Для того чтобы кристалл покрылся гранями, необходимы определенные внешние условия. Во многих случаях кристаллы вырастают неограненными. Например, большинство кристаллических зерен горных пород не огранено.

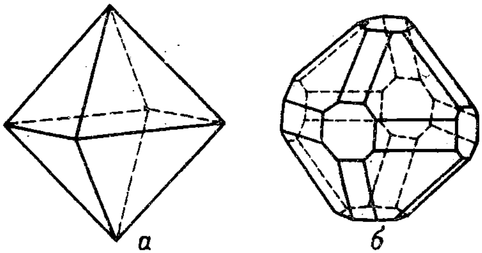


Рис. 1. Кристаллы алюмокалиевых квасцов: *а*) выращенные из сильно пересыщенного раствора, *б*) из слабо пересыщенного раствора.

2. Однородность, заключающаяся в том, что по параллельным направлениям свойства кристалла одинаковы. Если исследовать, например, оптические свойства кристалла по каким-то направлениям, а затем отколоть от него кусочек, то в этом кусочке по тем же направлениям будут аналогичные свойства. Откалываемая от кристалла часть может быть как угодно мала, лишь бы ее размеры позволяли исследовать данные свойства по нужным направлениям. Кристаллическая однородность проявляется в отношении механических, оптических, электрических, магнитных и других свойств.

3. Анизотропность — неравносвойственность выражается в том, что по непараллельным направлениям свойства кристалла могут быть разными.

4. Спайность — способность кристаллов раскалываться по определенным плоскостям. Это свойство тесно связано с кристаллической однородностью и анизотропностью. Спайностью обладают не все кристаллы. Если взять кристалл, обладающий спайностью, например NaCl, и расколоть его на какое угодно количество частей любой величины, то все части — выколки — оказываются прямоугольными параллелепипедами (рис. 2). Всем известна способность слюды расщепляться на пластинки любой толщины. Эта способность — не что иное, как спайность.

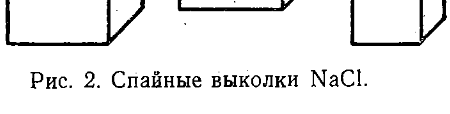


Рис. 2. Спайные выколки NaCl.

От вещества к веществу меняется форма спайных выколок, количество плоскостей, по которым кристалл раскалывается, степень совершенства спайности. У одного кристалла степень совершенства спайности по непараллельным плоскостям может быть различной.

5. Симметрия. Форма многих (но не всех) кристаллических многогранников оказывается симметричной, т. е. у многих кристаллических многогранников имеются равные части: грани, ребра, вершины. На рис. 1. изображены симметричные многогранники, а на рис. 3 — асимметричные, не имеющие равных частей.

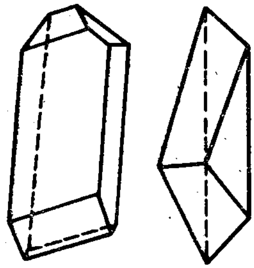


Рис. 3. Асимметричные многогранники.

6. Закон Стенона, или закон постоянства углов, который первоначально формулировался так: *углы между соответственными гранями (и ребрами) у всех кристаллов одного и того же вещества постоянны.*

В зависимости от условий роста огранка кристалла может изменяться (количество граней, их контуры и размеры), но углы между соответственными гранями остаются неизменными. Известно, что в 1280 г. А. Магнус говорил о том, что минералы характеризуются определенной формой. В 1611 г. немецкий астроном И. Кеплер наблюдал постоянство углов на снежинках. В 1669 г. этот закон установил датский ученый Н. Стенон на кристаллах горного хрусталя (SiO_2) и железного блеска (Fe_2O_3). М. В. Ломоносов (1711—1765) независимо от Стенона установил этот закон в 1749 г. путем измерения кристаллов селитры (KNO_3) и алмаза.

В 1783 г. французский ученый Роме-Делиль, основываясь на многочисленных измерениях различных кристаллов, подтвердил наблюдения Стенона и сформулировал закон в общем виде. В дальнейшем в формулировку закона были введены уточнения, и теперь он читается так: *у всех кристаллов одного и того же вещества, одного и того же строения, при одинаковых условиях, углы между соответственными гранями (и ребрами) постоянны.*

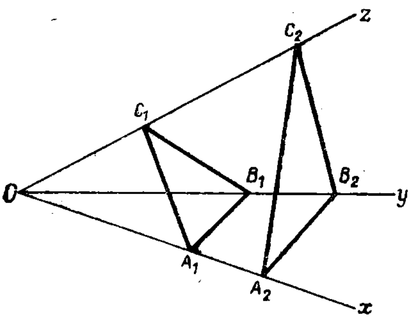


Рис. 4. Иллюстрация к закону Аюи.

7. Закон Аюи, или закон целых чисел: *двойные отношения отрезков, отсекаемых двумя любыми гранями кристалла на трех его ребрах, равны отношению целых небольших чисел.*

Пусть на рис. 4 Ox, Oy и Oz — три ребра кристалла, OA_1, OB_1, OC_1 и OA_2, OB_2, OC_2 — отрезки, которые две грани $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ отсекают на этих ребрах непосредственно или в результате мысленного продолжения граней до пересечения с ребрами.

Тогда: $\frac{OA_2}{OA_1} : \frac{OB_2}{OB_1} : \frac{OC_2}{OC_1} = P : Q : R$,

где P, Q и R — целые небольшие числа. Этот закон был установлен французским ученым Р. Ж. Аюи в 1784 г.

8. Минимальная внутренняя энергия. Материя, находящаяся в кристаллическом состоянии, обладает меньшей энергией, чем в аморфном[3], жидком или газообразном состояниях. Атомы, ионы, молекулы, образующие кристалл, прочно соединяются друг с другом, при этом выделяется теплота. Процесс кристаллизации — это экзотермический процесс[4]. Процесс разрушения кристаллов, наоборот, эндотермический[5].

При разрушении кристалла надо затратить энергию для того чтобы порвать связи между частицами. Это хорошо демонстрирует график изменения температуры металла (рис. 5). При медленном равномерном охлаждении расплава металла его температура постепенно понижается до точки затвердевания. Далее, несмотря на продолжающийся отвод тепла, температура остается постоянной (t_1) до тех пор, пока весь расплав не закристаллизуется. В этот период времени отводится тепло, выделяющееся при кристаллизации. Температура затвердевшего металла снова понижается.

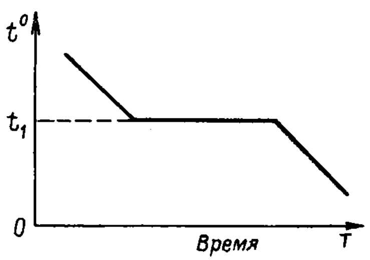


Рис. 5. Изменение температуры металла при равномерном охлаждении.

Если на графике изменить направление отсчета времени на обратное, то аналогично можно проследить изменение температуры при медленном равномерном нагревании твердого металла. Его температура повышается до точки плавления. Пока весь металл не расплавится, температура остается постоянной (t_1), так как подводимое тепло идет на расплавление (разрушение) кристаллов металла. Затем температура расплава снова повышается.

Некоторые из перечисленных свойств присущи только кристаллам и являются поэтому их специфическими особенностями, а именно: 1) способность самоограняться, 2) свойства, выражаемые законом Стенона и законом Аюи, 3) минимальная внутренняя энергия.

По мере накопления знаний о кристаллах все настойчивее вставал вопрос о причинах, обусловливающих их особые свойства. Постепенно ученые пришли к выводу, что частицы—молекулы, стро-

[3] Аморфос (греч.) — аморфный, бесформенный, не способный давать формы, т. е. не способный самоограняться.

[4] Экзотермический процесс — процесс, происходящий с выделением теплоты.

[5] Эндотермический процесс — процесс, происходящий с поглощением теплоты.

ящие кристалл, располагаются в нем параллельно друг другу, т. е. свойства, присущие кристаллам, обусловлены их особым внутренним строением. Почти до конца прошлого века господствовало мнение, что все кристаллы построены обязательно из молекул.

Первыми широко известными учеными, представлявшими себе кристалл построенным из правильно расположенных шарообразных материальных частиц, были знаменитый астроном Иоганн Кеплер (1619) и замечательный естествоиспытатель англичанин Роберт Гук (1665).

Ньютон в своей «Оптике» в 1675 г. писал:

«Нельзя ли предположить, что при образовании кристалла частицы не только установились в строй и ряды, застывая в правильных фигурах, но также посредством некоторой полярной способности повернули свои одинаковые стороны в одинаковом направлении».

В 1690 г. голландский ученый Христиан Гюйгенс также высказал предположение, что свойства кристаллов могут быть объяснены их закономерным внутренним строением (рис. 6). Он считал, что частицы, слагающие кристалл, имеют определенную форму, особую для каждого вещества.

М. В. Ломоносов в 1749 г. создал корпускулярную теорию строения материи. Корпускулам он приписывал шарообразную форму.

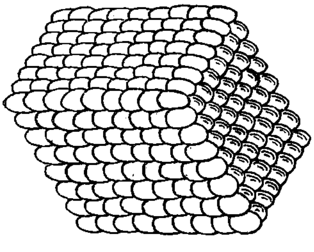


Рис. 6. Строение кальцита по Х. Гюйгенсу.

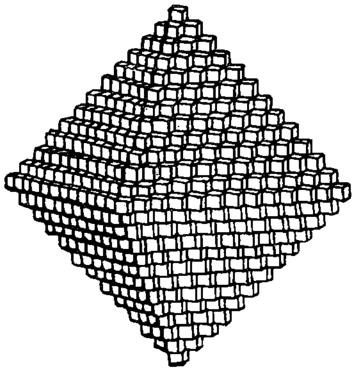


Рис. 7. Строение кристалла по Р. Ж. Аюи.

Представление Ломоносова о строении кристаллов довольно близко к современному.

Французский аббат Р. Ж. Аюи в 1784 г. опубликовал созданную им теорию строения кристаллов. Его теория основывалась на предположении, что любой кристалл состоит из равных молекул, имеющих форму многогранников, заполняющих кристаллическое пространство без промежутков и расположенных в кристалле параллельно друг другу (рис. 7).

Для нас сейчас ясно, что неправильно молекулам приписывать форму многогранников и что далеко не все кристаллы построены из молекул. Но тем не менее теория Аюи верно отразила геометрическую особенность пространственного распределения частиц в кристаллах, и это позволило ему вывести из созданной теории геометрический закон кристаллографии — закон целых чисел (см. с. 9).

В 1813 г. английский физик и химик Волластон предложил в созданных Аюи моделях кристаллов заменить многогранные молекулы математическими точками. Если вместо центра тяжести каждой молекулы в такой модели кристалла поставить в пространстве точку, то получится совокупность точек, которую называют *пространственной решеткой. Пространственная решетка — это геометрический образ, характеризующий наиболее общую для всех кристаллов геометрическую особенность их строения.*

Остановимся еще на нескольких событиях, имеющих большое значение в развитии кристаллографии.

Русские ученые Н. И. Кокшаров (1818—1892) и П. В. Еремеев (1830—1899) измерили на гониометре большое количество кристаллов различных минералов. Результаты их измерений послужили основой для дальнейшего развития кристаллографии и не потеряли своего значения до сих пор.

В середине прошлого века французским ученым А. А. Бравэ (1811—1863) была создана теория решетчатого строения кристаллов. Он вывел 14 разновидностей пространственных решеток, т. е. 14 самых общих геометрических законов строения кристаллов. Этими законами предусматриваются все мыслимые в кристаллах взаимные расположения равных и параллельных друг другу частиц. Теория пространственных решеток объяснила ряд геометрических особенностей кристаллов и позволила объяснить некоторые их физические свойства. Благодаря выводу Бравэ создавалась возможность для дальнейшего развития теории строения кристаллов.

В 1869 г. была опубликована работа академика А. В. Гадолина, в которой он вывел 32 вида симметрии, т. е. все возможные варианты симметрии кристаллических многогранников. Следует отметить, что вывод 32 видов симметрии был осуществлен раньше Гадолина немецким минералогом И. Ф.-Х. Гесселем в 1830 г. Но работу Гесселя по ряду причин его современники не поняли, она была забыта и не оказала влияния на развитие науки о кристаллах. Почти окончательная разработка этого вопроса имелась и в работах Бравэ.

В конце прошлого столетия русским академиком Е. С. Федоровым (1853—1919) и почти одновременно с ним немецким ученым А. Шенфлисом (1858—1934) теоретически были выведены 230 частных законов внутреннего строения кристаллов — 230 вариантов симметрии внутреннего строения кристаллов. Эти законы называются *федоровскими,* или *пространственными, группами симметрии.* Ими предусматриваются не только параллельные расположения частиц в кристаллах, но и все возможные расположения повернутых относительно друг друга равных и зеркально-равных частиц, т. е. все возможные симметричные их расположения.

Кроме того, Е. С. Федоров создал новые методы изучения кристаллов. Благодаря его трудам кристаллография стала самостоятельной наукой. До работ Федорова кристаллография развивалась почти исключительно в связи с изучением минералов.

В 1912 г. немецким физиком М. Лауэ (1879—1960) была открыта дифракция рентгеновских лучей, проходящих через кристалл. Это открытие, с одной стороны, позволило определить волновую природу рентгеновских лучей и определить соответствующие им длины волн, а с другой — дало возможность экспериментальным путем исследовать строение кристаллов. Результаты определения структур кристаллов с помощью рентгеновских лучей полностью подтвердили правильность геометрической теории строения кристаллов, созданной Бравэ и Федоровым.

В нашей стране академиком А. В. Шубниковым (1886—1970) был создан научно-исследовательский институт кристаллографии при Академии наук СССР. В этом институте проведено много весьма важных работ по изучению кристаллов и по использованию достижений кристаллографии в технике и в промышленности.

Академик Н. В. Белов разработал принцип плотнейших упаковок, значительно облегчающий исследование структур вообще и особенно ионных кристаллов. Непосредственно Беловым и его учениками расшифрованы структуры большого количества различных кристаллических веществ (силикатов и алюмосиликатов, боратов, сульфидов и др.).

Трудами перечисленных ученых и многих других, не упомянутых нами исследователей, изучавших кристаллы, была подготовлена почва для дальнейших успехов в развитии кристаллографии, экспериментального определения структур различных кристаллов, искусственного выращивания монокристаллов и чрезвычайно плодотворного использования кристаллов в технике благодаря их оптическим, электрическим, в частности полупроводниковым, и другим свойствам.

Итак, мы видим, что изучением кристаллов занимались многие ученые различных стран. Трудами многих поколений исследователей была создана современная теория строения кристаллов и наука о кристаллах — кристаллография.

Вопросы для повторения

1. На какие главные разделы делится кристаллография?
2. Перечислите основные свойства кристаллов. Какие из них являются специфическими для кристаллов?
3. Как формулируются закон Стенона и закон Аюи?

§ 2. Представление о пространственной, или трансляционной, решетке и о правильной системе фигур

Главной геометрической особенностью кристаллов является их *правильное внутреннее строение*. Составляющие кристалл частицы: атомы, ионы, молекулы располагаются в нем в определенном порядке.

Рассмотрим схему наиболее простого случая строения кристалла, состоящего из атомов одного элемента. Допустим, что асимметричный атом имеет форму эллипсоида. На рисунках мы будем изображать его эллипсом, а девяткой внутри эллипса показывать асимметричность атома (рис. 8). Предположим, что максимальное притяжение между двумя атомами будет осуществляться при их взаимно параллельном расположении, показанном на рис. 8. Присоединяясь таким способом друг к другу, атомы выстроятся в ряд. Если вторая по силе связь между атомами будет при их расположении, изображенном на рис. 9, то ряды соединятся в слой. Пусть направление третьей по силе связи между атомами близко к перпендикулярному относительно плоскости рисунка. При осуществлении этой связи предположим, что атомы находятся в параллельном положении. Тогда на изображенный слой наложатся такие же слои и получится трехмерная постройка, в которой все атомы параллельны друг другу. Эта трехмерная постройка и является схемой одного из наиболее простых случаев строения кристалла. Если взять кристалл конечных размеров, то величину атома относительно размеров такого кристалла можно считать бесконечно малой. Если же рассматривать размеры атомов как конечные величины, то размеры кристалла относительно этих величин можно считать бесконечно большими. Обычно изображается схема строения небольшого участка кристалла, а мысленно следует продолжать ее построение до бесконечно больших размеров.

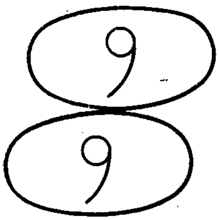


Рис. 8. Участок ряда.

Что же является главной, определяющей геометрической особенностью строения рассматриваемой постройки, т. е. что необходимо знать, чтобы мы могли создать такую постройку из данных фигур, и в чем заключается правильность ее строения?

Для создания постройки необходимо знать *способ присоединения фигур* друг к другу. Следовательно, *способ присоединения фигур — это главная геометрическая особенность строения.* В нашей постройке все фигуры присоединяются друг к другу одним и тем же способом. В этом и заключается правильность строения в рассматриваемом случае. Такая система фигур называется *правильной системой.*

Способ присоединения фигур в нашей постройке удобно характеризовать *трансляциями. Трансляция — это повторяющийся пере-*

нос на определенный отрезок вдоль прямой, без поворота. Обозначается трансляция буквой T и двусторонней стрелкой, длина которой равна *шагу трансляции — величине переноса.* Величину переноса называют также *шагом поступания, периодом трансляции* и *периодом идентичности.* Любая точка правильной системы повторяется в направлении трансляции на расстоянии ее шага. Описанную трансляцию часто рассматривают как элемент симметрии и называют *осью поступания,* или *трансляционной осью.*

Если известна одна фигура и трансляция T_1, то известен ряд OA (см. рис. 9). Знание еще двух трансляций (T_2 и T_3) позволяет полу-

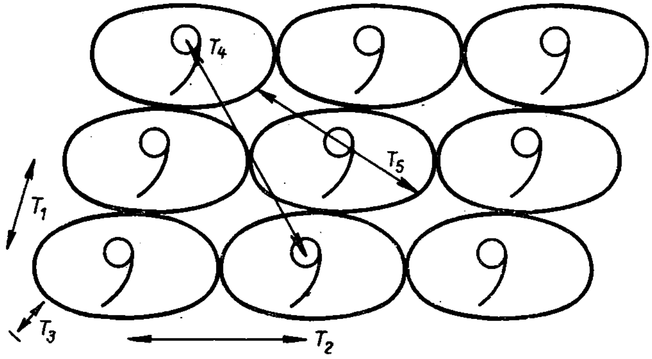


Рис. 9. Правильная система фигур.

чить трехмерную постройку. На рис. 9 T_3 обозначена двусторонней стрелкой, длина которой соответствует проекции ее шага на плоскости рисунка. Поперечная черточка у конца стрелки означает, что трансляция расположена косо к плоскости рисунка.

В нашей постройке все фигуры связаны друг с другом трансляциями. В ней кроме трансляций T_1, T_2 и T_3 имеется еще множество других подобных трансляций, например T_4, T_5 и т. д. Любые три пересекающиеся, но не лежащие в одной плоскости трансляции, связывающие все фигуры системы, характеризуют взаимное расположение фигур.

Возьмем какую-то точку O и проведем через нее три прямые так, чтобы углы между ними были равны углам между T_1, T_2 и T_3 (рис. 10). Пусть каждая из этих прямых соответствует одной из трех трансляций. Начиная от O, отметим точками на них величины соответствующих шагов. Полученные таким путем точки называются *узлами решетки.* Узлы, расположенные

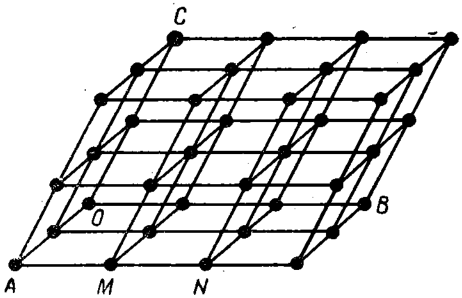


Рис. 10. Участок пространственной решетки.

на прямой линии, образуют *ряд решетки*. Расстояние между соседними точками ряда называется *промежутком ряда*. Транслируя ряд OA вдоль OB, мы получим закономерное расположение узлов в плоскости AOB. Узлы, расположенные в одной плоскости, образуют *плоскую сетку*.

Плоская сетка пространственной решетки — это бесконечная совокупность равных параллельных рядов, лежащих в одной плоскости и отстоящих друг от друга на одинаковых расстояниях. Трансляцией плоской сетки AOB вдоль OC получается трехмерная совокупность узлов. Такую трехмерную совокупность узлов, закономерно расположенных в пространстве, обычно называют *пространственной*, или *трансляционной, решеткой*.

Трансляционную решетку рассмотренной кристаллической постройки можно получить, как предложил Волластон (см. с. 12), заменяя в постройке все атомы точками, соответствующими, например, их центрам (см. рис. 9 и 10).

На рис. 10 через узлы решетки проведены прямые линии, параллельные T_1, T_2 и T_3. Эти линии делят кристаллическое пространство без остатка на множество параллельно ориентированных параллелепипедов, имеющих общие смежные стороны. Такой параллелепипед называется *элементарным параллелепипедом*. В нашей постройке на одну элементарную ячейку приходится один эллипсоид или один атом.

Возможны кристаллы более сложного состава, у которых каждому эллипсоиду (см. рис. 9) или каждому параллелепипеду (см. рис. 10) будет соответствовать не один, а несколько атомов, молекула или группа молекул, два или большее количество ионов, или более сложный комплекс, в который могут входить и атомы, и ионы, и молекулы.

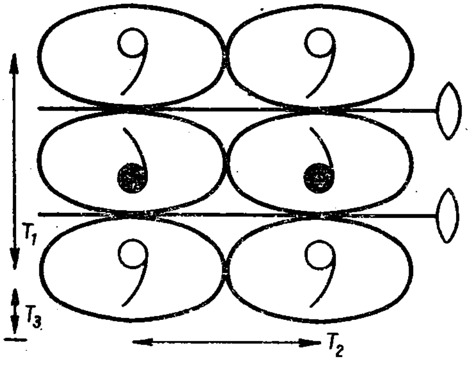


Рис. 11. Правильная система непараллельных фигур.

На рис. 11 показан слой, построенный из асимметричных фигур. В направлении T_2 фигуры слоя связаны друг с другом трансляцией, т. е. в этом направлении повторяются фигуры, находящиеся в параллельном положении. Если двигаться по слою в направлении T_1, то будут чередоваться равные фигуры, повернутые относительно друг друга на 180° вокруг линий, на концах которых изображены маленькие эллипсы. На одной стороне фигур (верхней) кружки девяток не зачернены, а на другой (нижней) они зачернены. Наложением друг на друга таких слоев, т. е. за счет транслирования изображенного слоя вдоль T_3, можно получить трехмерную закономерную постройку — правильную систему фигур. В рассматриваемой трехмерной системе фигур одной элементарной ячейке соответствуют две фигуры и количество фигур системы в два раза больше количества узлов трансляционной решетки, соответствующей этой системе фигур.

Правильная система, состоящая из правых и левых фигур, показана на рис. 12. Прямыми линиями изображены плоскости, перпендикулярные к плоскости рисунка, связывающие левые и правые фигуры. В этой постройке на элементарную ячейку приходится две фигуры: одна правая и одна левая.

Общая закономерность строения кристаллов — *их решетчатое строение* — выражается в том, что любой кристалл теоретически может быть разделен без остатка на параллельно ориентированные равные параллелепипеды, имеющие общие стороны. Повторяемость тождественных элементов кристаллической постройки, т. е. совместимо равных ее частей, находящихся в параллельном положении, характеризует трансляционная решетка.

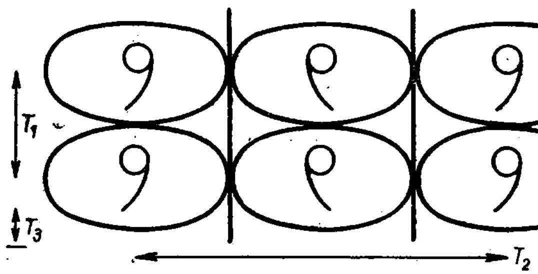


Рис. 12. Правильная система правых и левых фигур.

Если в кристаллической постройке взять какую-то точку, то в направлении трансляции на расстоянии ее шага будут повторяться точно такие же точки. Если взять не одну точку, а какую-то совокупность точек, то в направлении трансляции на расстоянии ее шага будут повторяться точно такие же совокупности, расположенные параллельно друг другу.

Теперь мы можем окончательно сформулировать определение трансляционной решетки[6]. *Трансляционная решетка — это трехмерная совокупность узлов,* т. е. все тождественные относительно друг друга точки кристаллической постройки. Тождественными называются точки, связанные трансляциями.

Е. С. Федоров дал следующее определение:

Пространственная решетка есть не что иное, как совокупность точек, составляющих вершины системы выполняющих пространство равных и параллельно расположенных параллелепипедов.

[6] Пространственная решетка, трансляционная решетка — синонимы.

Итак, *кристаллами называются тела, имеющие решетчатое строение.*

В каждом кристалле слагающие его частицы — атомы, ионы, молекулы расположены относительно друг друга в строго определенном порядке. Частицы в кристалле совершают колебательные движения около своих средних положений. Они не могут свободно перемещаться относительно друг друга, как в газах и в жидкостях. Эта особенность является специфической для кристаллов и называется она *статичностью кристаллов*[7].

Свойства кристаллов определяются их химическим составом и строением. Строение же кристаллов обусловлено силами притяжения и отталкивания между слагающими их атомами. Эти силы проявляются как результат взаимодействия электронных оболочек атомов.

Вопросы для повторения

1. Что называется кристаллом?
2. Что является главной геометрической особенностью строения кристаллической постройки?
3. Какая система фигур называется правильной?
4. Что называется трансляцией и шагом трансляции?
5. Что называется пространственной решеткой?
6. Что называется узлом, рядом, промежутком ряда, плоской сеткой в пространственной решетке?
7. Какими двумя факторами определяются свойства кристаллов?

---

[7] В этом определении не учитывается «динамичность» строения кристаллов — активная подвижность дефектного состояния реального кристалла.— *Примеч. ред.*

□

Глава I

ЭЛЕМЕНТЫ СИММЕТРИИ

§ 1. Понятие о кристаллическом многограннике и о симметричной фигуре

Тела, имеющие правильное (решетчатое) строение и ограниченные естественно образованными гранями, называются *кристаллическими многогранниками*. В том случае, если у кристаллического многогранника наблюдаются равные и закономерно расположенные части, например, грани, ребра, вершины, то многогранник называется *симметричным*.

Симметричной называется такая фигура, отдельные части которой мысленно могут быть совмещены друг с другом посредством симметрического преобразования.

Симметрическим называется такое *преобразование*, в результате которого все равные части фигуры совмещаются друг с другом и фигура совмещается сама с собой.

Каждому симметрическому преобразованию соответствует некоторый геометрический образ, называемый *элементом симметрии*.

Действием элемента симметрии называется соответствующее ему симметрическое преобразование. Элементами симметрии многогранников являются: *плоскость симметрии, оси симметрии* и *центр инверсии*.

Итак, взаимное расположение равных частей многогранника характеризуется элементами симметрии. Симметрия же многогранника выясняется по наличию у него и взаимному расположению равных граней. Симметрия формы кристаллических многогранников обусловливается симметрией их внутреннего строения.

Форма не всех многогранников симметрична. Например, у многогранников, изображенных на рис. 3, нет равных частей, они асимметричны.

Выше речь шла об идеальных, т. е. неискаженных многогранниках. Форма же реального кристалла часто оказывается искаженной вследствие того, что внешние причины создают неодинаковые условия для роста различных его частей. Первое знакомство с кристаллическими многогранниками обычно осуществляется с помощью идеализированных моделей, форма которых не искажена. Такие идеализированные модели полнее отражают правильность внешнего и внутреннего строения кристаллов и в первую очередь их симметрию. В § 5 гл. 3 будет показано, что заключение о симметрии кристаллического многогранника, основанное только на его форме, даже идеальной, не всегда правильно. Симметрия реального кристалла выясняется по симметрии его свойств. При этом используются акцессории роста, штриховки на гранях, способность самоограняться (кристаллизация из шаров), фигуры травления, спайность, твердость, оптические, электрические, магнитные и другие физические свойства. Наиболее полные сведения о строении кристаллов и об их симметрии дает рентгеноструктурный анализ.

Вопросы для повторения

1. Что называется кристаллическим многогранником?
2. Какая фигура называется симметричной?
3. Какое преобразование называется симметрическим?
4. Что называется элементом симметрии и его действием?

§ 2. Плоскость симметрии *(m)*

Плоскостью симметрии (*m*) называется такая плоскость в симметричной фигуре, при отражении в которой, как в двустороннем зеркале, фигура совмещается сама с собой.

Плоскость симметрии делит фигуру на две зеркально-равные части, расположенные относительно друг друга, как предмет и его зеркальное изображение (рис. 13). На рисунке *m* перпендикулярна к плоскости чертежа.

Отражение в *m* производится следующим образом: из каждой точки (*A*, *B* и т. д.) фигуры $ABB'A'$ проводится перпендикулярная к *m* линия. Отрезок от отражаемой точки до *m* (*AK*) откладывается на проведенной линии по другую сторону от *m* (KA'). Конец этого отрезка (A') и будет зеркальным изображением отражаемой точки (*A*). В результате отражения в *m* каждой точки рассматриваемой фигуры ее правая часть совместится с левой, а левая — с правой, т. е. фигура совместится сама с собой.

На рис. 14 показано, что в результате отражения в *m* правая асимметричная фигура превращается в левую, и наоборот.

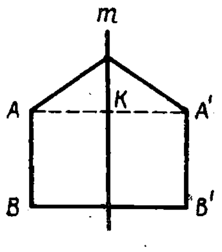


Рис. 13. Отражение в плоскости симметрии.

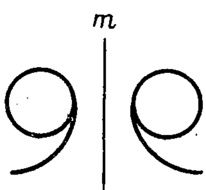


Рис. 14. Преобразования правой асимметричной фигуры в левую, и наоборот, с помощью отражения в *m*.

Многогранник, изображенный на рис. 15, имеет плоскость симметрии. Она проходит через середины граней, перпендикулярно к ним. Пересечение плоскости с гранями отмечено двойными линиями. Чтобы найти плоскость симметрии у многогранника, нужно представить себе, в результате отражения в какой плоскости совместятся друг с другом все его равные части. Рассматриваемую при этом плоскость следует соответствующим поворотом многогранника расположить так, чтобы она заняла такое же положение относительно наблюдателя, какое занимает m на рис. 13 и 14. Наиболее легко увидеть плоскость симметрии многогранника тогда, когда она совпадает с «плоскостью симметрии» тела наблюдателя.

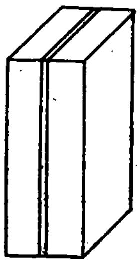


Рис. 15. Многогранник с плоскостью симметрии.

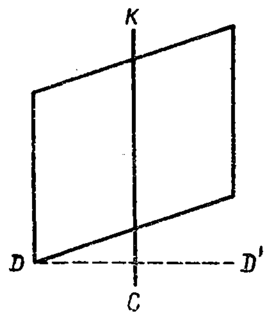


Рис. 16. Плоскость KC не является плоскостью симметрии.

Следует обратить внимание на то, что фигура (рис. 16) прямой KC делится на две равные, но не зеркально-равные части. Как видно из рисунка, плоскость, пересекающая фигуру по KC, не может быть плоскостью симметрии. Если отразить в такой плоскости точку D, то ее изображение — точка D' — не совместится с такой же (соответственной) точкой фигуры.

Вопросы для повторения

1. Что называется плоскостью симметрии?
2. По какому признаку у фигуры обнаруживается наличие плоскости симметрии?

§ 3. Простые оси симметрии (L_1, L_2, L_3, L_4 и L_6)

Простой осью симметрии называется прямая, при повороте вокруг которой на определенный угол фигура совмещается сама с собой.

Наименьший угол, на который нужно повернуть фигуру вокруг оси симметрии, чтобы фигура совместилась сама с собой, называется *элементарным углом поворота* данной оси. *Порядком оси* симметрии называется число самосовмещений фигуры при повороте ее вокруг этой оси на 360°.

Если n — порядок оси, α — элементарный угол, то $n=360/\alpha$.

У кристаллов возможны только следующие простые оси симметрии, для которых в литературе встречаются различные обозначения[1].

Ось	1-го порядка	L_1	или	g_1	или	G_1	$\alpha=360°$
„	2-го	„	L_2 „	g_2	„	G_2	$\alpha=180°$
„	3-го	„	L_3 „	g_3	„	G_3	$\alpha=120°$
„	4-го	„	L_4 „	g_4	„	G_4	$\alpha=90°$
„	6-го	„	L_6 „	g_6	„	G_6	$\alpha=60°$

Из правильного (решетчатого) строения кристаллов выводится *закон симметрии кристаллов,* согласно которому *в кристаллах возможны оси симметрии только второго, третьего, четвертого и шестого порядков.* Рассмотрим этот вывод.

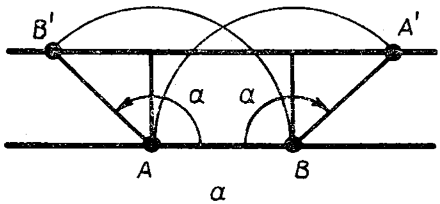


Рис. 17. Углы поворота возможных простых осей симметрии в пространственной решетке.

Пусть на рис. 17 AB — промежуток ряда пространственной решетки, и пусть через узлы A и B, перпендикулярно к плоскости рисунка проходят две оси n-го порядка. В результате поворотов вокруг этих осей точки A и B займут положение A' и B'. Точки A' и B' будут связаны трансляциями друг с другом и с точками A и B. Все узлы, соответствующие этим точкам, лежат в одной плоской сетке. Ряд $A'B'$ параллелен ряду AB, следовательно, он должен иметь промежуток, равный AB, т. е. расстояние $A'B'$ должно быть кратно AB. Рассмотрим, какие значения n удовлетворяют этому условию.

$A'B'=AB+2A'C$, $\frac{A'C}{A'B}=\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$, где α — элементарный угол поворота оси n-го порядка, $A'C=-A'B\cos\alpha$, $A'B=AB$, по построению, $A'B'=AB-2AB\cos\alpha$, $A'B'=AB(1-2\cos\alpha)$.

Множитель правой части равенства $1-2\cos\alpha$ равен целым числам при следующих значениях угла α: 60, 90, 120 и 180°. Косинусы этих углов соответственно равны: $^1/_2$, 0, $-^1/_2$ и -1. При $\alpha=180°$ точки A' и B' ложатся в один ряд с точками A и B. Итак, в пространственной решетке возможны простые поворотные оси только 6-го, 4-го, 3-го и 2-го порядков.

Ниже, на примере оси симметрии пятого порядка, рассмотрен несколько иной путь вывода закона симметрии кристаллов.

---

[1] В настоящее время универсальное распространение получили обозначения элементов симметрии по Герману-Могену (см. § 5, с. 66—69). Можно изучение симметрии кристаллов сразу проводить на основе этих обозначений.— *Примеч. ред.*

Теорема. В пространственной решетке невозможны простые поворотные оси 5-го и выше 6-го порядков.

Доказательство. Предположим, что в пространственной решетке имеется ось 5-го порядка. Она расположена перпендикулярно плоскости рис. 18 и обозначена пятиугольником. Вокруг оси 5-го порядка все повторяется через 72°. Пусть ближайшими узлами к L_5 будут точки *1, 2, 3, 4* и *5*. Эти точки совмещаются друг с другом при поворотах вокруг оси на 72, 144° и т. д. Рассматриваемые точки лежат в одной плоскости.

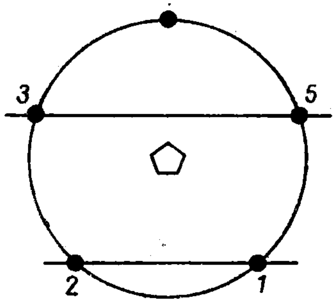


Рис. 18. К доказательству теоремы о невозможности в пространственной решетке оси 5-го порядка.

Ряд пространственной решетки — это совокупность точек, расположенных на прямой линии и отстоящих друг от друга на одинаковых расстояниях (с. 16). Два узла определяют направление ряда. Через узлы *1* и *2* проходит ряд, промежуток которого равен расстоянию между точками *1* и *2*. Более маленький промежуток этого ряда невозможен, так как любая точка между *1* и *2* оказывается ближе к L_5, чем точки *1* и *2*. Согласно же первоначальному условию ближайшими узлами к L_5 являются точки *1* и *2*.

Плоскую сетку пространственной решетки можно рассматривать как совокупность равных параллельных рядов, расположенных на одинаковом расстоянии друг от друга (с. 16). Поэтому в пространственной решетке ряд *5—3* должен быть таким же, как ряд *1—2*. Но у ряда *5—3* промежуток больше, чем у ряда *1—2*. Между точками *5* и *3* невозможен узел по той же причине, по которой невозможен узел между точками *1* и *2*.

Итак, точки, изображенные на рис. 18, не обладают свойствами узлов пространственной решетки, так как в параллельных рядах, образованных ими, неравные промежутки. Поэтому ось 5-го порядка не совместима с понятием о пространственной решетке.

Аналогичным способом доказывается невозможность в пространственной решетке, а следовательно, и в кристаллах осей симметрии выше 6-го порядка и возможность в них осей 2-, 3-, 4- и 6-го порядков.

Познакомимся с осями симметрии у многогранников.

Ось 3-го порядка имеется у многогранника, изображенного на рис. 19. Она совпадает с удлинением кристалла и проходит через его острые вершины. Ось 4-го порядка у многогранника, изображенного на рис. 20, проходит через центр квадратной грани и через острую вершину. У многогранника, изображенного на рис. 21, имеется L_6. Она проходит через центры шестиугольных граней.

Вообще нетрудно увидеть, что то или иное направление в многограннике является простой осью симметрии. Для этого нужно посмотреть на него по этому направлению. Например, повернуть многогранник так, чтобы интересующее нас направление расположилось вертикально, и, глядя на кристалл сверху, сосчитать, сколько раз вокруг этого направления повторяются равные грани.

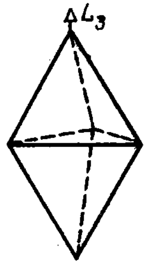


Рис. 19. Многогранник с осью L_3.

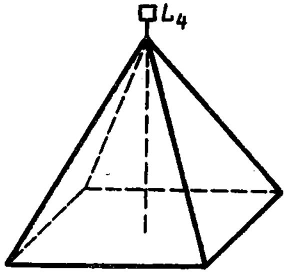


Рис. 20. Многогранник с осью L_4.

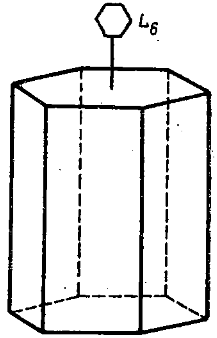


Рис. 21. Многогранник с осью L_6.

У многогранника, изображенного на рис. 22, имеется L_2, при повороте вокруг которой на 180° его равные грани совмещаются друг с другом, и вся фигура совмещается сама с собой. В данном случае L_2 проходит через центры двух граней, каждая из которых в результате поворота вокруг L_2 совмещается только сама с собой. Кроме того, у других многогранников L_2 может проходить через вершину многогранника или через середину ребра, перпендикулярно к последнему.

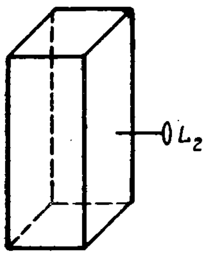


Рис. 22. Многогранник с осью L_2.

Обратим внимание на то, что фигура, имеющая L_4, при повороте вокруг этой оси на 180° совмещается сама с собой. Фигура, имеющая L_6, совмещается сама с собой в результате поворота вокруг L_6 на 180 и на 120°. Но было бы неправильно сказать, что L_4 одновременно является осью 2-го порядка, а L_6 — осями 2-го и 3-го порядков. Порядок оси определяется ее элементарным (наименьшим) углом поворота или числом самосовмещений фигуры при повороте вокруг оси на 360°.

Вопросы для повторения

1. Что называется простой осью симметрии, элементарным углом поворота оси и ее порядком?
2. Перечислите оси симметрии, возможные в кристаллах.
3. Какие оси симметрии в кристаллах невозможны и почему?

§ 4. Центр инверсии (*С*)[2]

Центром инверсии называется особая точка внутри фигуры, при отражении в которой всех точек фигуры последняя совмещается сама с собой. Отражение в центре инверсии производится следующим образом. Через центр инверсии и отражаемую точку проводится прямая. Изображение точки получается на этой прямой по другую сторону от центра на таком же расстоянии, на каком находится отражаемая точка (рис. 23).

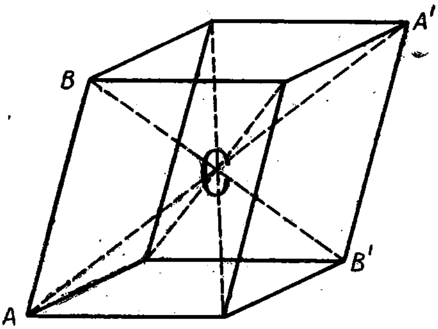


Рис. 23. Отражение в центре инверсии.

Центр инверсии — это особая точка внутри фигуры, характеризующаяся тем, что любая проведенная через нее прямая по обе стороны от нее и на одинаковых расстояниях встречает равные (соответственные) точки фигуры.

В результате отражения в центре инверсии правой асимметричной фигуры получается левая асимметричная фигура (рис. 24). При этом у фигуры и ее изображения меняются местами правая и левая стороны, верх и низ. Для отличия верхней стороны от нижней у фигуры, находящейся справа, зачернен кружок.

Определять наличие *С* у многогранников очень просто по следующему признаку: если каждой грани многогранника соответствует равная и параллельная грань, то такой многогранник имеет центр инверсии. Помещая многогранник на стол последовательно

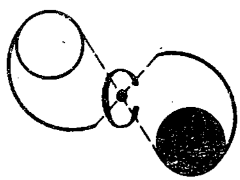


Рис. 24. Преобразование правой асимметричной фигуры в левую, и наоборот, отражением в *С*.

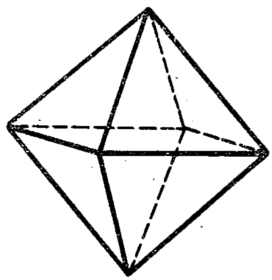


Рис. 25. Центр инверсии в октаэдре.

на различные грани и сравнивая верхнюю грань с нижней, легко установить наличие или отсутствие у него центра инверсии.

У октаэдра (рис. 25) имеется центр инверсии. Вершины попарно параллельных граней октаэдра направлены в противоположные

---

[2] Инверсио (лат.) — переворачивание, перемещение.

стороны. Характеризуя взаимное расположение равных и параллельных граней в таких случаях, говорят, что грани обратно параллельны друг другу.

Вопросы для повторения

1. Что называется центром инверсии?
2. По какому признаку обнаруживается наличие у многогранника центра инверсии?

§ 5. Примеры симметрии многогранников и некоторые приемы отыскания элементов симметрии

У многогранника, изображенного на рис. 26, все грани попарно равны и параллельны. Следовательно, у него имеется C. Кроме того, у этого многогранника можно обнаружить три взаимно перпендикулярные плоскости ($3m$). Каждая плоскость симметрии перпендикулярна к четырем граням, через центры которых она проходит, а двум другим граням она параллельна. Три линии пересечения этих плоскостей взаимно перпендикулярны и являются осями симметрии 2-го порядка ($3L_2$). Отыскивать элементы симметрии можно было бы и в ином порядке. Например, можно начать с обнаружения L_2 или m. Найденную совокупность элементов симметрии

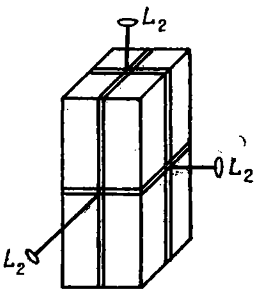


Рис. 26. Многогранник с симметрией $3L_2C3m$.

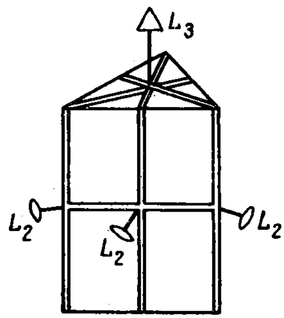


Рис. 27. Многогранник с симметрией L_33L_24m.

следует записать так: $3L_2C3m$. На первом месте записываются оси, затем центр инверсии и плоскости. Никакие знаки препинания между элементами симметрии не ставятся.

У многогранника, изображенного на рис. 27, две параллельные грани представляют собой равносторонние треугольники. Через их центры проходит L_3. Кроме того, у него имеются три L_2, расположенные перпендикулярно к L_3. Каждая из этих осей проходит через центр прямоугольной грани и через середину ребра. Центр инверсии отсутствует, так как прямоугольные грани не параллельны друг другу. Перпендикулярно к L_3 проходит плоскость симметрии. Еще три плоскости симметрии пересекаются по L_3. Полная совокупность элементов симметрии — L_33L_24m. Точно такая же симметрия у фигуры, изображенной на рис. 19.

Многогранник, показанный на рис. 28, имеет L_3, которая проходит через его острые вершины. Но эта ось связывает друг с другом не все равные грани. Она не связывает грани, образующие одну острую вершину, с равными им гранями, образующими вторую такую же вершину. Следовательно, у многогранника должен быть какой-то элемент симметрии, связывающий эти вершины. Грани многогранника не параллельны друг другу. Поэтому у него не может быть центра инверсии. Плоскостей симметрии у него нет. Наконец, обнаружим L_2, перпендикулярную к L_3 и проходящую через середины двух ребер. Таких пар ребер три, следовательно, и L_2 имеется 3 ($3L_2$). Найденными элементами симметрии все равные грани связываются друг с другом. Окончательно запишем: $L_3 3L_2$.

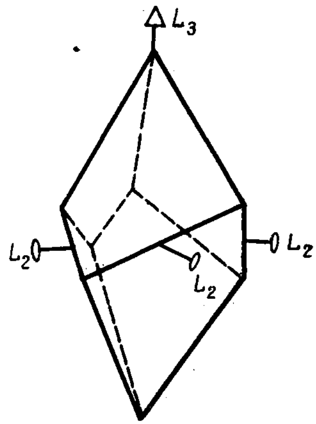


Рис. 28. Многогранник с симметрией $L_3 3L_2$.

Если у кристалла имеется одна ось симметрии, порядок которой выше 2-го, то такая ось называется *главной осью* и записывается на первом месте. *У многогранников, имеющих главную ось, оси 2-го порядка могут быть расположены только перпендикулярно к главной оси.* Действительно, предположим, что L_2 не перпендикулярна к главной оси L_n (рис. 29). В таком случае, повернув L_n вокруг L_2 на 180°, получим вторую L_n'. Но это противоречит первоначальному условию, согласно которому имеется только одна L_n. Если же предположим L_2, перпендикулярную к L_n, то в результате поворота L_n вокруг L_2 она совместится сама с собой (рис. 30). Из этого положения вытекает практическое правило: при наличии

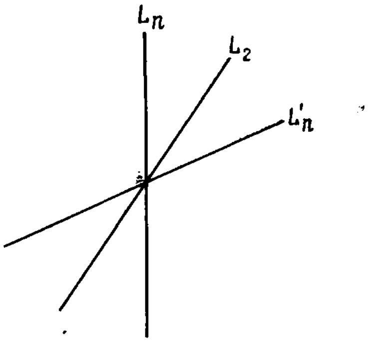


Рис. 29. L_2, не перпендикулярная к L_n, и ей равнодействующая L_n'.

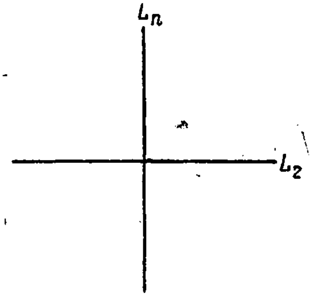


Рис. 30. Самосовмещение L_n при повороте вокруг перпендикулярной к ней L_2.

главной оси, отыскивая оси 2-го порядка, следует мысленно через центр кристалла провести плоскость, перпендикулярную к главной оси, и посмотреть, не может ли где-либо на линии пересечения этой плоскости с многогранником выходить L_2.

У куба имеются три взаимно перпендикулярные оси 4-го порядка (рис. 31, *а*). Эти оси перпендикулярны к граням. Четыре оси 3-го порядка у него совпадают с биссектрисами трехгранных углов между осями 4-го порядка, т. е. проходят через вершины (рис. 31, *б*). Кроме того, у него имеется 6 осей 2-го порядка, проходящих через середины ребер (рис. 31, *в*).

Количество плоскостей симметрии у рассматриваемого многогранника можно сосчитать, например, так. Через одну L_4 проходит $4m$, через вторую — тоже $4m$. Но одна из плоскостей общая для

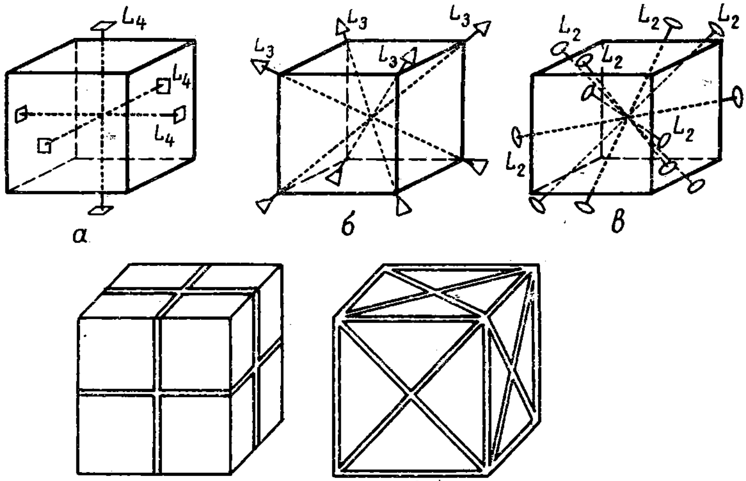


Рис. 31. Элементы симметрии куба — $3L_44L_36L_2C9m$.
а, б, в — оси; *г, д* — плоскости.

обеих осей. Поэтому всего через $2L_4$ проходит $4m+3m$. Через третью L_4 проходит также $4m$, но две из них уже сосчитаны, так как они проходят через первую и вторую оси. Значит, остались еще не сосчитанными $2m$, проходящие через третью L_4. Общее количество плоскостей: $4m+3m+2m=9m$.

Три из найденных плоскостей перпендикулярны к трем L_4, а остальные шесть перпендикулярны к шести L_2 (см. рис. 31, *г* и *д*). Окончательно запишем: $3L_44L_36L_2C9m$. В дальнейшем мы узнаем, что существуют кубы, обладающие иной симметрией.

Кристаллических многогранников, более богатых элементами симметрии, чем рассмотренный выше, не бывает. Эту совокупность элементов симметрии рекомендуется запомнить.

При наличии у кристалла $4L_3$ оси 3-го порядка мы всегда будем писать на втором месте. У такого кристалла могут быть 3 оси 4-го порядка, которые пишутся на первом месте. Если же у него нет осей 4-го порядка, то обязательно имеются $3L_2$, которые записываются на первом месте. При подсчете количества одинаковых элементов симметрии или количества граней многогранник рекомендуется держать неподвижно или положить его на стол.

Вопросы для повторения

1. Какая ось симметрии многогранника называется главной?
2. Как могут располагаться оси 2-го порядка относительно главной оси?
3. В каком порядке записываются элементы симметрии кристаллических многогранников?

Задача

Определить элементы симметрии у ряда учебных моделей.

§ 6. Инверсионные оси симметрии (L_{i1}, L_{i2}, L_{i3}, L_{i4}, L_{i6})

Инверсионной осью симметрии называется прямая линия, при повороте вокруг которой на элементарный угол с последующим отражением в центральной точке фигуры, как в центре инверсии, фигура совмещается сама с собой. *Элементарным углом поворота* инверсионной оси симметрии называется наименьший угол, на который надо повернуть фигуру вокруг оси, чтобы после отражения в центральной точке фигура совместилась сама с собой.

По рис. 32 можно увидеть, что в результате поворота кристалла на 180° вокруг любой линии, перпендикулярной к m, и последующего отражения в точке пересечения этого перпендикуляра с m, как в центре инверсии, фигура совмещается сама с собой. Плоскость симметрии этого многогранника параллельна плоскости рисунка. Например, ребро AB в результате поворота на 180° вокруг прямой, следом которой является L_{i2}, перемещается в положение $A'B'$. Последующее отражение $A'B'$ в точке пересечения L_{i2} с m, как в центре инверсии, приводит к совмещению $A'B'$ с A_1B. Такой же результат — совмещение AB с A_1B — получается за счет отражения AB в m. Итак, действие m и L_{i2}, перпендикулярной к m, равнозначно. Поэтому любой перпендикуляр к m можно рассматривать как L_{i2}. Доказательство этого положения очень простое, и мы его

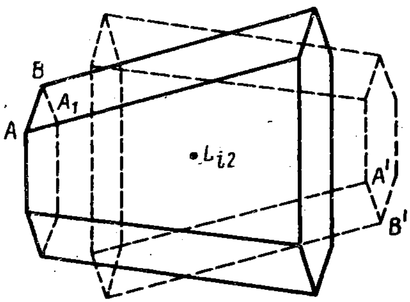


Рис. 32. Иллюстрация действия оси L_{i2}, аналогичного действию перпендикулярной к ней m.

не приводим. Для того чтобы за L_{i2} принимать конкретную прямую, условимся называть инверсионной осью 2-го порядка перпендикуляр к m, проходящий через центр тяжести кристалла. Указывать наличие у многогранников инверсионной оси 2-го порядка не нужно, но следует запомнить, что действие L_{i2} *равнозначно действию перпендикулярной к ней* m.

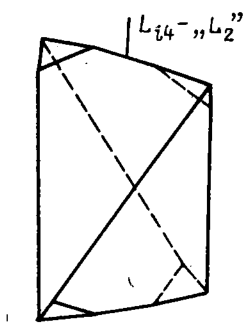


Рис. 33. Многогранник с осью L_{i4}.

Инверсионная ось 3-го порядка — L_{i3} равна по действию L_3 и C. Если у кристалла указано наличие L_3 и C, то указывать наличие L_{i3} не обязательно, и наоборот.

Наибольшие затруднения встречает обнаружение инверсионной оси 4-го порядка L_{i4}. Например, у многогранника на рис. 33 легко увидеть «L_2». Обратим внимание на то, что этот многогранник имеет грани двух сортов, причем граней каждого сорта у него по четыре. Обнаруженная ось «2-го порядка» не дает возможности совместить друг с другом все равные грани. Других элементов симметрии у него нет. В таком случае нужно проверить, не является ли эта «L_2» инверсионной осью 4-го порядка [3]. Проверка приводит к положительному результату [4].

Инверсионная ось 6-го порядка (L_{i6}) равна по действию L_3 и перпендикулярной к ней m. Если у кристалла указано наличие L_{i6}, то указывать L_3 и m не обязательно, и наоборот.

Для лучшего запоминания все инверсионные оси симметрии сведены вместе (рис. 34):

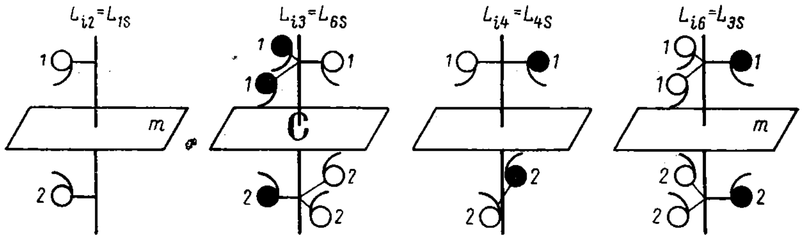


Рис. 34. Совмещение фигуры, обозначенной цифрой *1*, с фигурой, обозначенной цифрой *2*, в результате действия инверсионных или зеркально-поворотных осей.

$\bar{1}=L_{i1}=C,$

$\bar{2}=L_{i2}=\perp$ к $m,$

$\bar{3}=L_{i3}=L_3+C,$

---

[3] При повороте вокруг L_{i4} на 180° фигура всегда совмещается сама с собой. Но L_{i4} увидеть труднее, чем L_2. Поэтому учащиеся вместо L_{i4} часто находят «L_2».

[4] В дальнейшем знакомство с единичными прямыми даст второй критерий для обнаружения L_{i4}, являющейся главной осью.

$\bar{4} = L_{i4} = «L_2»$,

$\bar{6} = L_{i6} = L_3 + m$, где m перпендикулярна к L_3.

Вместо инверсионных осей можно использовать *зеркально-поворотные оси симметрии.* Действие зеркально-поворотной оси состоит из поворота вокруг оси на элементарный угол и отражения в плоскости, перпендикулярной к оси, как в плоскости симметрии. В кристаллах могут быть зеркально-поворотные оси 1-го, 2-го, 3-го, 4-го и 6-го порядков. Они обозначаются: L_{1S}, L_{2S}, L_{3S}, L_{4S} и L_{6S} или $\mathring{1}$, $\mathring{2}$, $\mathring{3}$, $\mathring{4}$ и $\mathring{6}$ (или $\tilde{1}$, $\tilde{2}$, $\tilde{3}$, $\tilde{4}$, $\tilde{6}$):

$L_{1S} = L_{i2}$;

L_{2S} — любая прямая, проходящая через центр инверсии;

$L_{3S} = L_{i6}$;

$L_{4S} = L_{i4}$;

$L_{6S} = L_{i3}$.

Вопросы для повторения

1. Что называется инверсионной осью симметрии?
2. Какая инверсионная ось является перпендикуляром к плоскости симметрии?
3. Какие инверсионные оси являются совокупностями двух элементов симметрии?

Задача

Определить элементы симметрии у ряда учебных моделей. Желателен подбор моделей с инверсионными осями.

□

Глава 2

КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

§ 1. Стереографические проекции[1]

Для изображения на плоском рисунке пространственного расположения элементов симметрии, граней, ребер кристаллов и вообще различных прямых линий и плоскостей в кристаллографии употребляются специальные проекции. Проекции являются удобным и наглядным способом описания кристаллов. На проекциях отражаются углы между спроектированными прямыми и плоскостями. С помощью проекций многие кристаллографические задачи решаются графическим путем.

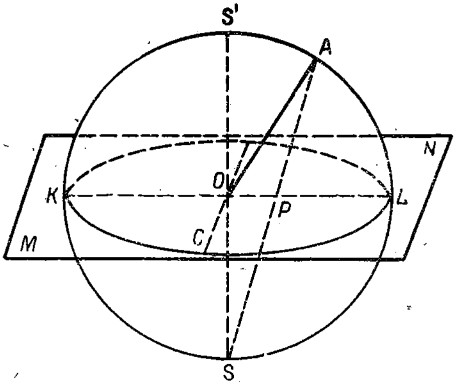


Рис. 35. Схема построения стереографической проекции.

Построение рассматриваемых ниже проекций производится при помощи сферы или шара проекций (рис. 35). SS' — ось проекций. S — глазная точка. Через центр сферы O перпендикулярно к SS' проводится плоскость проекций MN. На рисунке плоскость проекций предполагается перпендикулярной к плоскости чертежа. Плоскость проекций пересекается с поверхностью сферы по окружности KCL, ограничивающей круг проекций. Эту окружность обычно называют основным кругом.

Пусть требуется построить стереографическую проекцию какой-либо прямой в кристалле. Для большей наглядности центр кристалла совместим с центром сферы проекций. Если интересующая нас прямая не проходит через центр O, то перенесем ее параллельно самой себе так, чтобы она прошла через O. Затем верхнюю часть этой прямой продолжим до пересечения с поверхностью сферы. Пусть они пересекаются в точке A. Теперь нужно соединить глаз-

[1] Стереос (греч.) — пространственный.

ную точку с точкой A лучом зрения SA. Точка пересечения луча зрения с кругом проекций (P) — стереографическая проекция верхней части прямой OA. Проекция ее нижней части строится аналогичным образом. Прямая OA продолжается вниз до пересечения со сферой, а за глазную точку принимается S'. Обычно проектируют только верхнюю часть прямой, т. е. ту часть, которая расположена выше плоскости проекций.

Горизонтальная прямая на проекции изображается двумя точками. Пусть проектируемой прямой будет KL. Лучи зрения, соединяющие точки пересечения этой прямой с поверхностью сферы, пересекут круг проекций в точках K и L. Эти точки и будут стереографической проекцией рассматриваемой (горизонтальной) прямой, их соединяют сплошной линией. Проекцией SS' (вертикальной прямой) будет точка O.

Построение стереографической проекции плоскости производится следующим образом (рис. 36). Круг проекций $AMCN$ предполагается перпендикулярным к плоскости рисунка. Если проектируемая плоскость не проходит через центр кристалла, который совмещен с центром сферы проекций, то ее переносят параллельно самой себе так, чтобы она прошла через центр. Пусть проектируемая плоскость пересекает верхнюю часть сферы по дуге ABC. Если каждую точку этой дуги соединить лучом зрения с точкой S, то лучи зрения пересекут плоскость проекций по дуге AKC, которая и будет стереографической проекцией плоскости ABC. Существует теорема, согласно которой стереографической проекцией плоскости является дуга окружности. При этом концы дуги опираются на концы одного из диаметров основного круга проекций.

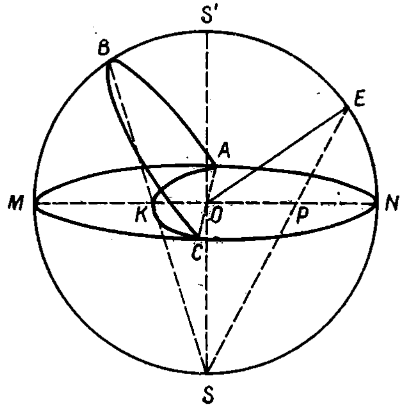


Рис. 36. Построение стереографической и гномостереографической проекций.

Дуга AKC — стереографическая проекция плоскости ABC и гномостереографическая проекция направления OE; точка P — стереографическая проекция направления OB и гномостереографическая проекция плоскости ABC.

Три точки определяют окружность. Поэтому для построения проекции плоскости достаточно взять диаметр (AC), по которому она пересекает круг проекций, провести один луч зрения (SB) и через три точки A, K и C провести дугу окружности. Обычно проектируется только верхняя часть плоскости, лежащая над плоскостью проекций. При проектировании нижней части плоскости за глазную точку принимается точка S'. Если проектируемая плоскость перпендикулярна к плоскости проекций, то ее проекцией будет диаметр, по которому она пересекает круг проекций (прямая линия — частный случай дуги). Если проектируемая плоскость совпадает с плоскостью проекций, то ее проекцией будет окружность, ограничивающая круг проекций.

Стереографические проекции просты и наглядны. Их наглядность и простота обеспечиваются тем, что плоскости заменяются дугами, а линии — точками.

Вопросы для повторения

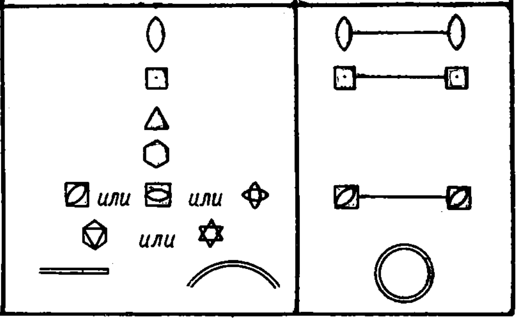
1. Чем является и как строится стереографическая проекция прямой?
2. Куда ложатся стереографические проекции прямых: а) вертикальной, б) близкой к вертикальной, в) горизонтальной, г) близкой к горизонтальной?
3. Чем является и как строится стереографическая проекция плоскости?
4. Чем являются и куда ложатся стереографические проекции плоскостей: а) вертикальной, б) близкой к вертикальной, в) горизонтальной, г) близкой к горизонтальной?

§ 2. Проекции элементов симметрии

Элементы симметрии кристаллических многогранников мы будем изображать в стереографических проекциях. При этом вместо точек — проекций осей — будем ставить значки, соответствующие осям. Приняты обозначения, показанные в табл. 1. Вспомогательные линии здесь сплошные.

Таблица 1

Элемент симметрии	Расположение относительно плоскости проекции	
	Перпендикулярно и наклонно	Параллельно
L_2		
L_4		
L_3		
L_6		
L_{i4}	или или	
L_{i6}	или	
m		



В дальнейшем при проектировании граней внутри значков придется ставить крестики и окружности. Поэтому не следует рисовать значки слишком мелкими, а также затушевывать их середины. В случае наличия центра инверсии около центра круга проекций ставится буква C.

Если для удобства проектирования центр тяжести кристалла совместить с центром сферы проекций, то все элементы симметрии кристалла будут проходить через центр сферы. Кроме того, при проектировании кристаллы ориентируются относительно плоскости проекций и относительно наблюдателя по определенным правилам. Эти правила изложены в § 2 гл. 6. До знакомства с правилами можно увидеть общепринятое расположение элементов симметрии любого кристалла на проекциях табл. 2, с. 63. В этой таблице имеются проекции всех возможных у кристаллов совокупностей элементов симметрии.

Окружности для проекций рекомендуется проводить с помощью циркуля. При наличии у кристаллов $4L_3$ наиболее быстро и точно изображаются проекции его осей и плоскостей симметрии, в том числе и косо расположенных относительно оси проекций, следующим построением. Проводится окружность круга проекций и два взаимно перпендикулярных диаметра. При этом один из диаметров должен быть направлен на наблюдателя. Под углом 45° к этим диаметрам проводятся еще два диаметра. Затем ножка циркуля ставится на конец одного из первых двух диаметров, а карандаш — на конец перпендикулярного диаметра и проводится дуга. Таких дуг нужно провести четыре (рис. 37). Точки пересечения этих дуг будут проекциями $4L_3$. Остальные точки пересечения дуг, диаметров и окружности — проекции возможных у кристаллов осей симметрии 2-го и 4-го порядков. Сами же дуги, окружность и диаметры являются проекциями возможных у кристаллов плоскостей симметрии. Если у кристалла имеются плоскости симметрии, соответствующие каким-то из этих линий, то линии проводятся двойные. Кроме того, эти вспомогательные линии нужны для правильного нанесения проекций граней.

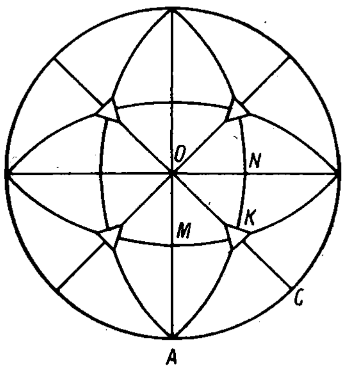


Рис. 37. Основа для проектирования многогранника, имеющего $4L_3$.

Нужно обратить внимание на то, что плоскости, стереографическими проекциями которых являются линии (см. рис. 37), разбивают поверхность сферы проекций на равные сферические треугольники. Проекции же этих треугольников на круге проекций оказываются неравными. В результате проектирования (лучами зрения) они искажаются различно в зависимости от их положения относительно оси проекций. Несмотря на это, мы должны видеть, что в результате поворота плоскости ACB вокруг L_3, отмеченной буквой K, она совмещается с плоскостью BNO и с плоскостью OMA, что плоскость OKC совмещается с плоскостями AKN и BKM. В дальнейшем для нас особое значение будет иметь симметричное расположение относительно указанной L_3 точек C, M и N, точек A, O и B, дуг KC, KM и KN, дуг KA, KO и KB, дуг AM, ON и BC и дуг MO, NB и CA.

Вопросы для повторения

1. Как обозначаются оси и плоскости симметрии на проекциях?
2. Как быстро и точно построить проекции осей и плоскостей симметрии кристаллов, имеющих $4L_3$?

§ 3. Гномостереографические проекции[2]

В гномостереографических проекциях вместо данного геометрического образа проектируется перпендикулярный к нему образ: вместо плоскости проектируется перпендикулярная к ней линия, вместо линии — перпендикулярная к ней плоскость.

Гномостереографическая проекция плоскости — это стереографическая проекция перпендикуляра к ней, т. е. точка. *Гномостереографическая проекция прямой* — это стереографическая проекция плоскости, перпендикулярной к этой прямой, т. е. дуга окружности (см. рис. 36).

Грани кристаллов будем проектировать в гномостереографических проекциях. Для проектирования центр кристалла следует совместить с центром сферы. Ранее было рассмотрено построение стереографической проекции прямой (с. 32—33, рис. 35). Согласно

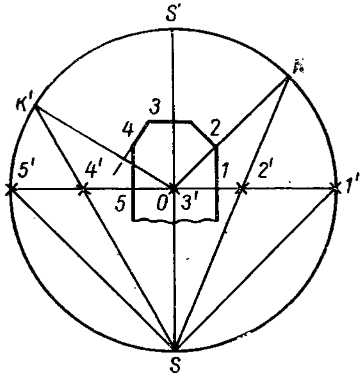


Рис. 38. Построение гномостереографических проекций граней.

Точки *1'*, *2'*, *3'*, *4'* и *5'* — проекции граней *1*, *2*, *3*, *4* и *5*.

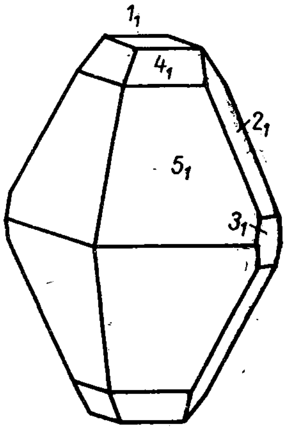


Рис. 39. Проектируемый кристалл.

приведенному выше определению для получения гномостереографической проекции грани нужно через центр сферы провести перпендикуляр к грани или к ее продолжению[3]. Точку пересечения сферы

[2] Гномон (греч.) — перпендикуляр.

[3] Может оказаться, что через центр сферы перпендикуляр к грани провести нельзя. Однако из построения стереографической проекции линии известно, что проектируемая линия переносится параллельно самой себе (в рассматриваемом случае переносится перпендикуляр к грани) так, чтобы она прошла через центр сферы. Кроме того, гномостереографическая проекция не отражает величину грани. Поэтому и грань можно представить себе такой величиной, какая удобна для выполнения построения.

с этим перпендикуляром соединить лучом зрения с глазной точкой. Точка пересечения луча зрения с кругом проекций будет гномостереографической проекцией грани (рис. 38).

Построение гномостереографических проекций граней разберем на примере кристалла, изображенного на рис. 39. Обычно кристалл проектируется, будучи определенным образом ориентированным относительно плоскости проекций и относительно наблюдателя[4]. В данном случае расположим многогранник так, чтобы его грань 1_1 была горизонтальна и обращена вверх, а грань 3_1 — вправо. Совместим центр кристалла с центром сферы проекций и спроектируем его элементы симметрии — $3L_2C3m$ (рис. 40).

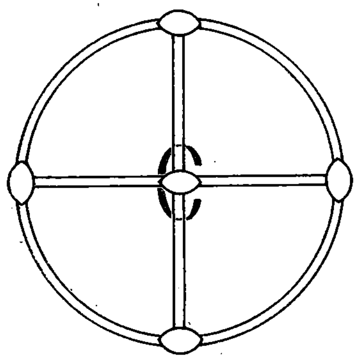


Рис. 40. Проекция совокупности $3L_2C3m$.

Для построения проекции грани 2_1 и симметричных ей граней 2_2, 2_3 и 2_4 рассечем через центр сферу и кристалл плоскостью, перпендикулярной к этим граням. Секущая плоскость совпадает с плоскостью симметрии кристалла[5]. Начертим это сечение (рис. 41). Грани 1_1, 2_1, 3_1 и симметричные им грани перпендикулярны к плоскости рисунка. Круг проекций AB тоже перпендикулярен к плоскости рисунка. Через центр сферы проведем перпендикуляр (OK) к грани 2_1. Соединим точки S и K лучом зрения SK. Точка

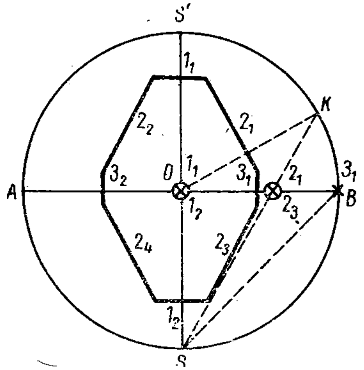


Рис. 41. Сечение кристалла и сферы плоскостью, перпендикулярной к граням 1_1, 2_1, 3_1.

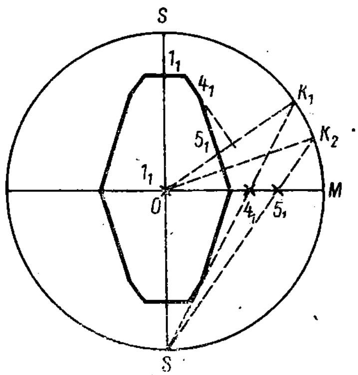


Рис. 42. Сечение кристалла и сферы плоскостью, перпендикулярной к граням 1_1, 4_1, 5_1.

---

[4] Как уже отмечалось, соответствующие правила изложены в § 2 гл. 6.

[5] Учащийся должен совершенно четко понять, что на рис. 39 все грани, обозначенные цифрами *1*, *2* и *3*, перпендикулярны к *m*.

пересечения луча зрения с плоскостью проекций является гномостереографической проекцией грани 2_1. Аналогичным построением получим проекции граней 1_1 и 3_1.

Проекции верхних граней (находящихся выше плоскости проекций) будем обозначать крестиками, а проекции нижних граней — окружностями. Проекции вертикальных граней (параллельных оси проекций) всегда находятся на окружности круга проекций. Их удобнее обозначать крестиками, так как плохо нарисованные окружности легко спутать с эллипсами, которыми обозначаются L_2. При проектировании нижних граней за глазную точку принимается точка S'. Очевидно, что проекции нижних граней 1_2 и 2_3 совпадают соответственно с проекциями верхних граней 1_1 и 2_1, так как эти нижние грани связаны с верхними плоскостью симметрии, совмещенной с плоскостью проекций.

Перпендикулярно к плоскости рис. 41 по линии SS' проходит m. Поэтому для нахождения проекций граней 2_2, 2_4 и 3_2 нет необходимости делать описанные выше построения. Их проекции проще получить, отразив в плоскости $S'S$ соответственно грани 2_1, 2_3 и 3_1.

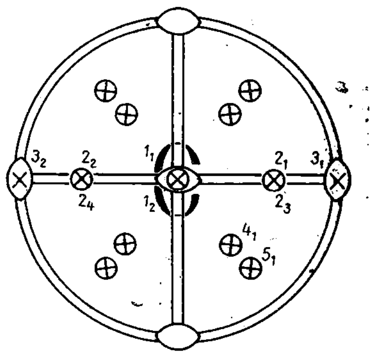


Рис. 43. Стереограмма кристалла (рис. 39).

Для построения проекций граней 4_1 и 5_1 пересечем кристалл и сферу плоскостью, перпендикулярной к этим граням (рис. 42). Проведя соответствующие перпендикуляры и лучи зрения, получим проекции граней 4_1 и 5_1.

Теперь сведем на рис. 43 проекцию элементов симметрии кристалла и проекции граней, полученные на рис. 41 и 42. Круг проекций перпендикулярен к SS' и к плоскости рис. 41. Повернем этот круг на 90° вокруг диаметра AB и наложим его на проекцию элементов симметрии. То же самое проделаем с кругом проекций рис. 42. Но при переносе его на рис. 43 учтем, что угол между AB и OM равен углу между плоскостями в кристалле, по которым произведены сечения, изображенные на рис. 41 и 42. Воспользовавшись элементами симметрии, изображенными на рисунке, получим проекции всех граней, симметричных спроектированным граням. Итак, построение стереограммы кристалла, т. е. проекции его элементов симметрии и граней, закончено.

Рассмотрим еще проекцию кристалла, изображенного на рис. 44. Он обладает симметрией $3L_24L_3C3m$. Проведем вспомогательные линии, изображенные на рис. 37. Мысленно совместим центр кристалла с центром проекции на рис. 45 так, чтобы его грань 4 была вертикальна и обращена к нам. Теперь расположения осей 3-го порядка в кристалле и на проекции соответствуют друг другу, проекции горизонтальных осей 2-го порядка совпадают с концами диаметров, проходящих между проекциями осей 3-го порядка. С этими же диаметрами совпадают проекции двух вертикальных плоскостей симметрии. Проекция вертикальной L_2 попадает в центр круга проекций, а проекция горизонтальной m совпадает с окружностью круга проекций.

Проекции граней (*1* и *4*), перпендикулярных к осям 2-го и 3-го порядков, совпадают с проекциями этих осей. Теперь возьмем грань *2*. Она вертикальна, значит, ее проекция должна быть на окружности круга проекций. Перпендикуляр к этой грани делит пополам угол между горизонтальными L_2. Поэтому проекция грани *2* находится посередине между концами этих осей, т. е. на

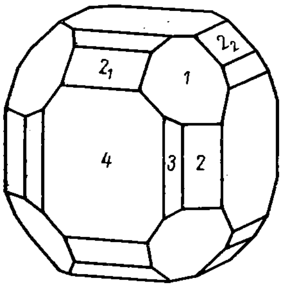


Рис. 44. Кристалл с симметрией $3L_24L_3C3m$.

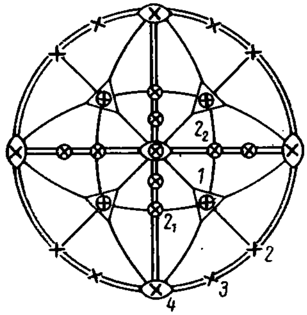


Рис. 45. Стереограмма кристалла.
Центр инверсии не обозначен.

конце вспомогательной линии — диаметра, проходящего через $2L_3$. Проекции остальных одиннадцати граней, симметричных 2-й грани, можно получить с помощью элементов симметрии, изображенных на проекции. Повернем проекцию грани *2* вокруг той L_3, рядом с которой стоит *1*, и получим проекции 2_1 и 2_2.

Нетрудно убедиться, что проекции граней находятся именно в точках 2_1 и 2_2. Каждая из трех граней *2*, 2_1 и 2_2 перпендикулярна к линии пересечения плоскости симметрии и вспомогательной плоскости, проходящей через $2L_3$. Стереографические проекции этих линий на рис. 45 совпадают с точками пересечения указанных плоскостей и являются гномостереографическими проекциями рассматриваемых граней. Отражая в горизонтальной плоскости проекции 2_1 и 2_2, получим под ними проекции нижних граней. Затем отражениями в вертикальных плоскостях получаем проекции остальных симметричных граней.

Проекция вертикальной грани *3* лежит на окружности круга проекции между проекциями граней *4* и *2*. Эта точка легко находится построением. Действием элементов симметрии получаем проекции остальных симметричных граней.

В результате изложенного выше описания построения гномостереографических проекций граней читателю должно быть ясно следующее:

1) проекции горизонтальных граней находятся в центре круга проекций;

2) проекции вертикальных граней находятся на окружности круга проекций;

3) чем ближе положение грани к горизонтальному, тем ее проекция ближе к центру круга проекций, и чем ближе положение грани к вертикальному, тем ее проекция ближе к окружности круга проекций, или, чем ближе положение грани к перпендикулярному относительно какой-либо прямой, тем ее проекция ближе к стереографической проекции этой прямой.

Учащийся должен уметь по проекции грани быстро представить себе ее положение в пространстве относительно оси и плоскости проекций. Также нужно уметь по проекции элементов симметрии представить их пространственное расположение.

Кроме описанного выше приближенного графического метода построения проекций кристаллов существует также более точный метод проектирования по сферическим координатам граней с помощью специальных стереографических сеток. Этот метод изложен в § 2 гл. 3.

Вопросы для повторения

1. Что такое гномостереографическая проекция плоскости и как она строится?
2. В каких случаях гномостереографические проекции плоскостей совпадают со стереографическими проекциями осей симметрии?

§ 4. Зона, или пояс

На рис. 43 и 45 построены проекции граней, пересекающихся в параллельных ребрах. Проекции таких граней ложатся на стереографическую проекцию плоскости, перпендикулярной к граням.

Совокупность граней, пересекающихся в параллельных ребрах, называется *зоной,* или *поясом. Прямая* в кристалле, параллельная всем граням данной зоны, т. е. параллельная ребрам, по которым пересекаются грани зоны, называется *осью* зоны.

Стереографическую проекцию плоскости, перпендикулярной к оси зоны и соответственно перпендикулярной ко всем граням зоны (дугу окружности), называют *проекцией зоны.* Проекции всех граней данной зоны ложатся на эту дугу. Зону и соответственно ее проекцию определяют две пересекающиеся (непараллельные) грани. Прямые линии и дуги (рис. 37) являются проекциями зон, в которых у кристаллов кубической сингонии наиболее часто встречаются грани. Стереографическая проекция оси зоны называется *полюсом зоны.*

Вопросы для повторения

1. Что называется зоной, или поясом, осью зоны?
2. Что называется проекцией зоны, полюсом зоны?

§ 5. Практика приближенного проектирования граней кристаллов

Для приобретения навыков использования проекций необходима тренировка в проектировании граней приблизительно — на глаз. При приближенном проектировании кристалл располагается рядом с проекцией его элементов симметрии. Элементы симметрии кристалла при этом должны быть параллельны элементам симметрии, изображенным на проекции. Глядя на кристалл, нужно мысленно совместить его центр с центром круга проекций, сообразить, в какую часть круга проекций спроектируется каждая грань, и нанести проекции всех граней.

Не будет ошибки, если учащийся нанесет проекцию грани, расположенной косо относительно оси проекции, немного дальше от центра круга проекций или ближе к нему. Но нельзя допускать, чтобы грань, проектирующаяся на окружность круга проекций, или на проекцию плоскости симметрии, или на проекцию оси симметрии, оказалась спроектированной в иное место. Проекции должны отражать относительный наклон граней. Например, проекция грани, занимающей положение более близкое к вертикальному, т. е. параллельному к оси проекций, обязательно должна быть ближе к окружности круга проекций, чем проекция грани, более наклонной к оси проекций.

Задача

Спроектировать элементы симметрии и грани 10—15 учебных многогранников.

§ 6. Линейные проекции

Линейные проекции плоскостей и прямых получаются в результате их пересечения с плоскостью проекций. При этом проектируемые прямые и плоскости пересекаются друг с другом в точке, лежащей вне плоскости проекций. Построение линейных проекций иллюстрирует рис. 46. Перпендикулярно к плоскости проекций MN проводится ось проекций SS'. Ось проекций пересекается с плоскостью проекций в точке O — центре плоскости проекций. Точки S и S' отстоят от плоскости проекций на расстоянии R. Обычно R принимается равным 5 или 10 *см*. Проектируемые прямые и плоскости должны проходить через точку S, если проектируются верхние полупрямые или полуплоскости, и через точку S', если требуется получить проекции

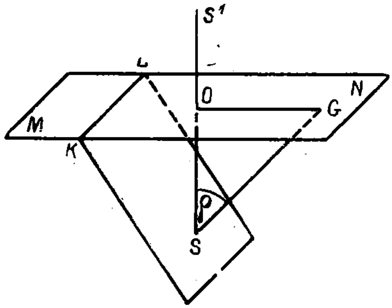


Рис. 46. Построение линейных проекций.

MN — плоскость проекций; O — центр плоскости проекций; SS' — ось проекций; KL — линейная проекция плоскости KLS; G — линейная проекция прямой SG.

нижних полупрямых или полуплоскостей. Линейная проекция плоскости — прямая линия. Линейная проекция прямой — точка. Из прямоугольного $\triangle OGS$ следует, что $OG = R\,\mathrm{tg}\,\rho$, где ρ — угол между осью проекций и проектируемой прямой.

§ 7. Гномонические проекции

В гномонических проекциях так же, как в гномостереографических, вместо плоскости проектируется перпендикулярная к ней линия, вместо прямой — перпендикулярная к ней плоскость.

Гномоническая проекция прямой — это линейная проекция плоскости, перпендикулярной к проектируемой прямой, т. е. *прямая линия. Гномоническая проекция плоскости* — это линейная проекция прямой, перпендикулярной к проектируемой плоскости, т. е. *точка.*

При проектировании граней кристалла в гномонических проекциях его элементы симметрии проектируются в линейных проекциях. Гномонические проекции удобнее гномостереографических благодаря тому, что в них проекции зон — прямые линии, а не дуги. В то же время они менее удобны, чем гномостереографические, так как в них проекции граней, по своему положению близких к вертикальным, получаются на очень больших расстояниях от центра проекций, а вертикальные грани проектируются в бесконечности.

Вопросы для повторения

1. Как строятся линейные проекции прямых и плоскостей?
2. Какая существует взаимосвязь между линейными и гномоническими проекциями прямых и плоскостей?

Глава 3

СФЕРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ ГРАНЕЙ И СТЕРЕОГРАФИЧЕСКИЕ СЕТКИ

§ 1. Представление об измерении кристаллов

При изучении кристаллов того или иного вещества их измеряют на гониометре (угломере). На рис. 47 изображена одна из моделей двукружного отражательного теодолитного гониометра[1]. Измеряемый кристалл укрепляется на головке прибора *5*. Из коллиматора *3* на него падает пучок параллельных лучей. Вращая кристалл вокруг осей горизонтального *1* и вертикального *2* кругов, можно любую грань установить в такое положение, чтобы отраженный ею свет попал в зрительную трубу *4*. Это дает возможность производить измерения.

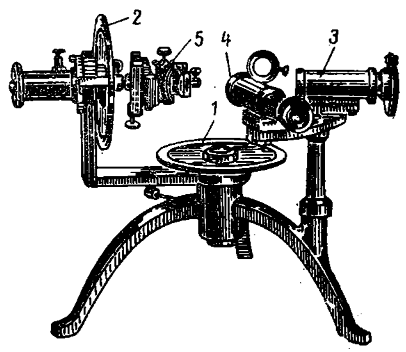


Рис. 47. Двукружный отражательный гониометр.

1 — горизонтальный круг с делениями; *2* — вертикальный круг с делениями; *3* — коллиматор; *4* — зрительная труба; *5* — головка прибора с юстировочно-центрировочным приспособлением.

Перед измерением с помощью юстировочно-центрировочного приспособления кристалл юстируется, т. е. устанавливается в правильное положение относительно горизонтального и вертикального кругов прибора.[2]

В результате юстирования какое-то направление, например совпадающее с L_4 тетрагонального кристалла, устанавливается параллельно оси вращения вертикального круга, и центрированием кристалла оно совмещается с этой осью. Измерение заключается в том, что при вращении кристалла вместе с вертикальным и горизонтальным кругами каждая его грань устанавливается в такое положение, при котором она отражает свет, вышедший из коллиматора, в зрительную трубу. По обоим кругам

---

[1] Двукружный гониометр был введен в практику измерения кристаллов Е. С. Федоровым.— *Примеч. ред.*

[2] Юстус (лат.) — правильный.

берутся отсчеты, которые соответствуют *сферическим координатам граней* — φ и ρ. Обычные отражательные гониометры позволяют брать отсчеты с точностью до $1'$.

Координата φ — это угол между некоторой принимаемой за нулевую меридиональной плоскостью в кристалле и второй меридио-

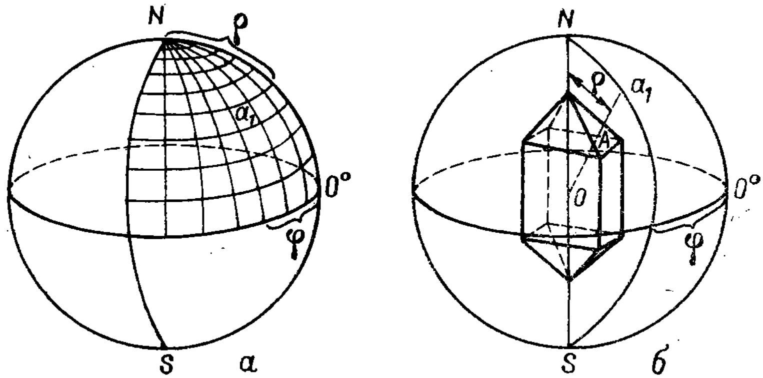


Рис. 48. Изображение грани со сферическими координатами φ и ρ:
а) шар проекций; *б*) кристалл в центре шара проекций.

нальной плоскостью, перпендикулярной к данной грани и проходящей через направление, по которому кристалл отъюстирован, т. е. долгота грани (рис. 48, 49). *Координата* ρ — это угол между направлением, по которому отъюстирован кристалл, и перпендикуляром к грани (см. рис. 48, 49).

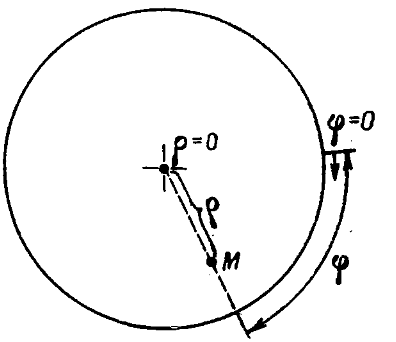


Рис. 49. Сферические координаты точки *M* на круге проекций.

Сферические координаты характеризуют положение перпендикуляра к грани относительно указанного выше направления и плоскости. Если известны φ и ρ двух граней, то можно вычислить углы между ними. Расстояние же грани от центра кристалла сферические координаты не характеризуют.

§ 2. Стереографические сетки

Графическое решение кристаллографических задач значительно упрощают специальные стереографические сетки. В кристаллографии широко применяются сетки двух типов: полярная — сетка А. К. Болдырева и экваториальная — сетка Ю. В. Вульфа (рис. 50 и 51).

Сетка Болдырева построена следующим образом. На шаре проекций через каждые два градуса проведены меридианы и параллели и спроектированы лучами зрения на плоскость проекций. Причем за глазную точку принят один из полюсов сферы. Концентрические окружности на ней (широты) являются линиями одинаковых ρ, прямые линии (радиусы круга) — линиями одинаковых φ.

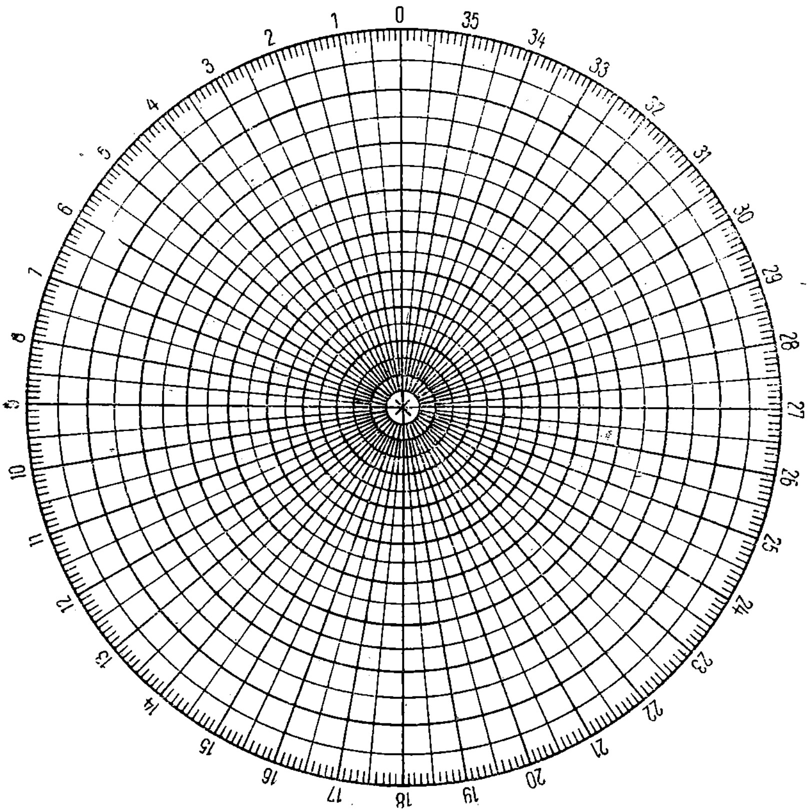


Рис. 50. Сетка Болдырева.

За начальный меридиан принимается радиус, идущий от центра проекции вправо. Точки, лежащие на начальном меридиане, имеют координату $\varphi = 0°$. Центру сетки соответствует координата $\rho = 0°$. Все точки окружности круга проекций имеют $\rho = 90°$.

При помощи сетки Болдырева легко и быстро можно найти любую точку, соответствующую тем или иным сферическим координатам, но нельзя измерить угол между любыми, произвольно взятыми прямыми, проекциями которых являются точки. Эта важная для кристаллографии задача решается с помощью сетки Вульфа.

Сетка Вульфа строится аналогично сетке Болдырева, но при проектировании широтных и меридиональных линий сферы за глазную точку принимается точка пересечения экватора с одним из меридианов. Осью проекций служит диаметр сферы, на котором лежит глазная точка, а плоскостью проекций — центральное сечение сферы, перпендикулярное к оси проекций. Правая половина экватора сетки Вульфа соответствует начальному меридиану сетки Болдырева. Часто эту линию сетки Вульфа называют начальным меридианом,

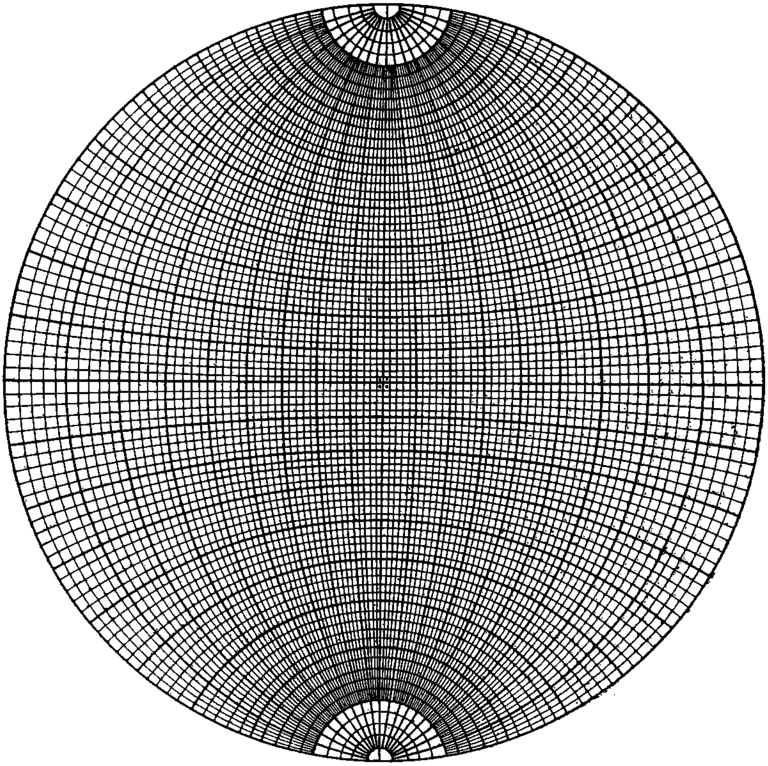


Рис. 51. Сетка Вульфа.

хотя она является широтной линией сетки. Для удобства отсчетов меридианы и параллели, соответствующие на сетках 10, 20, 30° и т. д., проведены толстыми линиями.

Каждая из описанных сеток имеет свои преимущества, но сетка Вульфа для решения кристаллографических задач более универсальна, чем сетка Болдырева. Е. Е. Флинтом предложена сетка, составленная из половинок сетки Болдырева и сетки Вульфа (рис. 52). В кристаллографическую практику стереографические сетки были введены Е. С. Федоровым. Им использовалась, кроме того, сложная сетка, состоящая из двух экваториальных и одной центральной. На рисунках изображены сетки уменьшенного размера. Для работы изготовляются сетки с радиусом 10 *см* (приложения 1 и 2).

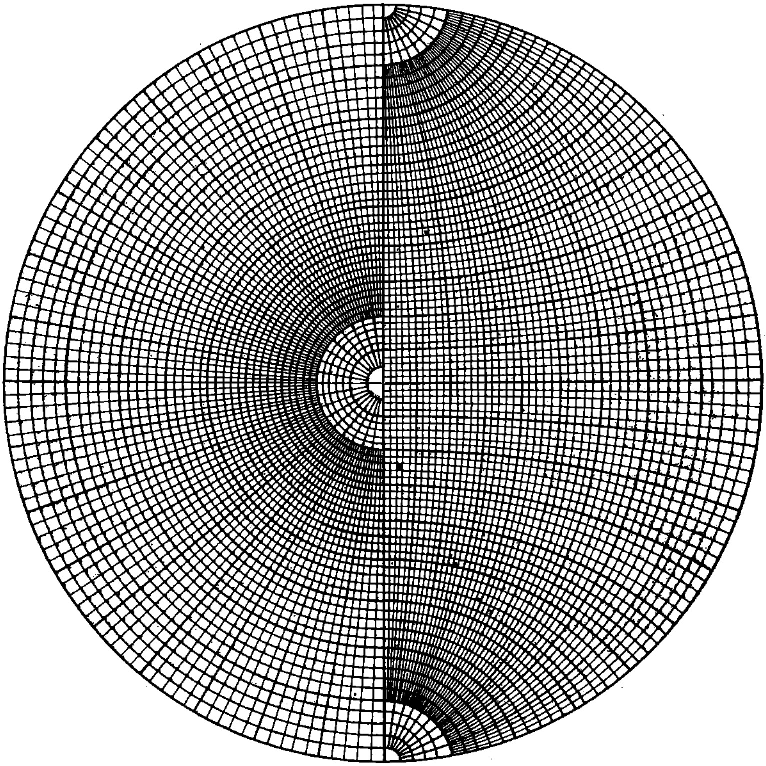


Рис. 52. Сетка Флинта.

§ 3. Построение стереографических проекций прямых и плоскостей по сферическим координатам с помощью стереографических сеток

Разберем выполнение данной задачи с помощью сетки Вульфа. Сетка располагается на столе перед наблюдателем так, чтобы линия, соединяющая полюсы сетки, была направлена на него. На сетку накладывается калька. Работающий со стереографической сеткой должен быть вооружен твердым остро отточенным карандашом. Работа выполняется с предельно возможной точностью. Пользоваться иглой для закрепления кальки на сетке не следует, так как в противном случае сетка скоро станет непригодной для работы.

На кальке ставится точка по центру сетки, а около точки наносятся короткие черточки по радиусам (рис. 53). Затем проводится окружность, ограничивающая круг проекций. Вправо от окружности ставится черточка — продолжается идущий слева направо диаметр, который является экватором сетки и соответствует начальному меридиану плоскости проекций кристалла. Около проведенной черточки пишется $\varphi=0$, а ниже нее изображается стрелка, обращенная вниз. Стрелка показывает, что углы φ отсчитываются по движению часовой стрелки.

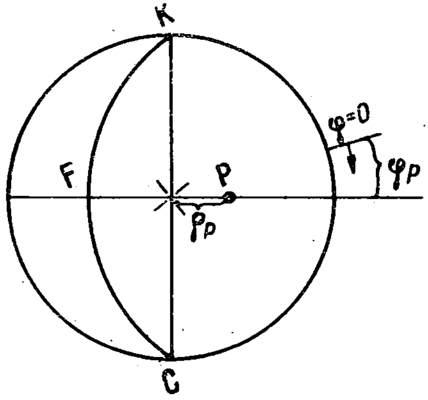


Рис. 53. Стереографические проекции прямой *(P)* и плоскости *KFC* с координатами φ и ϱ.

Пусть требуется нанести на кальку стереографическую проекцию прямой или, что то же самое, гномостереографическую проекцию плоскости по сферическим координатам φ и ρ.

От начального меридиана по окружности круга проекций отсчитывают угол φ. Конец дуги отмечают черточкой с внешней стороны окружности. Затем калька поворачивается на сетке так, чтобы проведенная черточка совпала с продолжением любого из радиусов окружности. Центр сетки и центр кальки при этом должны быть совмещены. По радиусу сетки от центра в направлении черточки отсчитывают угол ρ и ставят точку *(P)*. Она и будет стереографической проекцией прямой с координатами φ и ρ.

Выполнение данной задачи при помощи сетки Болдырева аналогично. Разница сводится к тому, что на сетке Вульфа имеется только четыре радиуса, по которым отсчитываются углы ρ, а на сетке Болдырева радиусов гораздо больше.

Нанесение стереографических проекций плоскостей по сферическим координатам φ и ρ выполняется с помощью сетки Вульфа проще, чем с помощью сетки Болдырева. Сферические координаты характеризуют положение перпендикуляра к плоскости. Описанным выше способом получают его стереографическую проекцию. Не смещая отмеченного на кальке центра с центра сетки Вульфа, поворачивают кальку так, чтобы проекция перпендикуляра *(P)* расположилась на горизонтальном диаметре (см. рис. 53). От проекции перпендикуляра отсчитывают по диаметру в направлении к центру и за него 90° и ставят точку *(F)*, через эту точку проводят меридиан *(KFC)*, который и будет стереографической проекцией плоскости с координатами φ и ρ.

Чтение сферических координат перпендикуляра к плоскости по его проекции с помощью сетки Вульфа производится следующим образом. Проекция перпендикуляра к плоскости ставится на горизонтальный или вертикальный диаметр сетки. От центра до проекции отсчитывается угол ρ. По концу диаметра на кальку наносится риска. Угол, соответствующий дуге окружности круга проекций от начального меридиана до нанесенной риски, будет углом φ.

Вопросы для повторения

1. Куда лягут на сетке проекции граней: а) имеющих одинаковые φ, б) φ, отличающиеся на 180°, в) имеющих одинаковые ρ?

Задача

По сферическим координатам, полученным в результате измерения кристалла на гониометре, построить стереограмму и установить симметрию кристалла (рис. 39 и 43).

№ грани	φ	ρ	№ грани	φ	ρ
1	—	0°	9	129	72
2	0°	90	10	231	72
3	51	90	11	309	72
4	129	90	12	51	56
5	180	90	13	129	56
6	231	90	14	231	56
7	309	90	15	309	56
8	51	72	16	0	62
			17	180	62

Замечание. Стереограмма отражает положение каждой грани относительно направления, по которому кристалл отъюстирован, и относительно плоскости, принятой за нулевую меридиональную плоскость, а также она отражает величины углов между гранями. О расстоянии же граней от центра кристалла и о размерах граней по сферическим координатам и по стереограмме ничего нельзя узнать.

§ 4. Измерение углов между прямыми и плоскостями с помощью сетки Вульфа

На гномостереографической проекции граней кристалла с помощью сетки Вульфа можно просто и быстро измерить угол между любыми направлениями и плоскостями. Стереограмма должна быть расположена на сетке так, чтобы ее центр совпадал с центром сетки, а стереографические проекции направлений, между которыми требуется определить угол, находились на одном меридиане. Поворотом стереограммы на сетке любые две точки можно установить на один меридиан. Угол между двумя направлениями равен угловой величине дуги меридиана, заключенной между проекциями этих направлений. Угол же между гранями является дополнительным до 180° для угла между перпендикулярами к ним.

Если требуется определить угол между перпендикулярами к верхней и нижней граням, то проекции этих граней устанавливаются на симметричные меридианы, и определяется угловая величина дуги по меридиану от одной грани до полюса сетки и от этого же полюса по симметричному меридиану до другой грани.

Задача

Используя стереограмму кристалла (см. задачу § 3), выполнить следующее:

1. Определить угол между гранями *2* и *3*, *8* и *12*, *13* и *15*, *14* и *17* (129°, 164°, 68°, 43°).
2. Провести зону, полюс которой имеет координаты: $\varphi=141°$ и $\rho=34°$.
3. Определить координаты полюса зоны *13—17* ($\varphi=321°$, $\rho=35°$).
4. Определить угол между осями зон *9—10* и *7—11* (68°).
5. Определить угол между гранью *10* и нижней гранью, проекция которой совпала с проекцией грани *16* (48°).

§ 5. Построение линейных и гномонических проекций по сферическим координатам

Проще всего эта задача выполняется с помощью специальной гномонической сетки (рис. 54 и приложение 3). На краях сетки нанесено 360 делений, соответствующих углам φ. Любой радиус

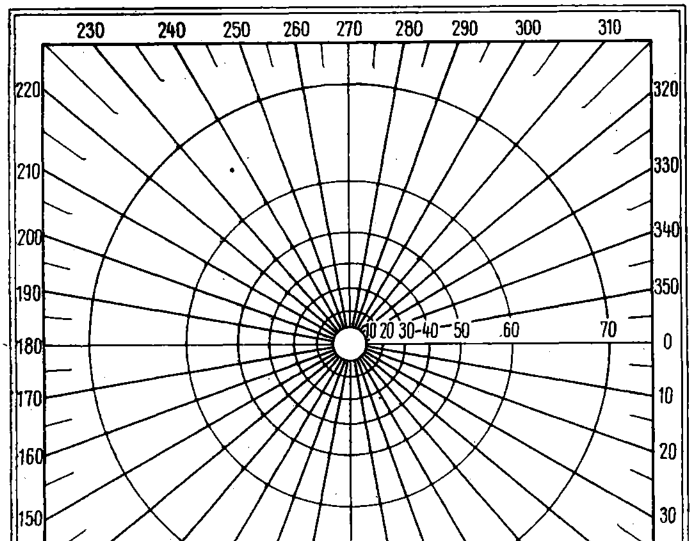


Рис. 54. Гномоническая сетка.

сетки — это место точек, имеющих одинаковые φ. Каждая окружность сетки — место точек с одинаковыми ρ. Нанесение на проекцию точки с данными φ и ρ производится так же, как по сетке Болдырева. При отсутствии гномонической сетки углы φ откладываются с помощью транспортира или стереографической сетки, а для определения расстояний проекций от центра плоскости проекций изготавливается линейка с делениями, рассчитанными по формуле $OG = R\,\mathrm{tg}\,\rho$.

На рис. 55 изображены гномостереографическая и гномоническая проекции плоскости LJ. На рисунке видно, что, зная угол ρ, расстояние OG легко определить графическим путем. При этом угол ρ или $\rho/2$ откладывается с помощью транспортира или стереографической сетки. Если радиусы гномонической проекции и стереографической сетки равны и угол ρ не превышает 45°, то OG равно расстоянию от центра сетки до точки, соответствующей 2ρ стереографической сетки.

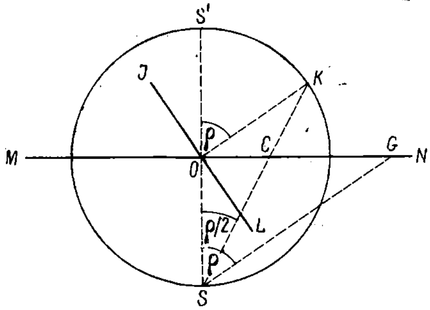


Рис. 55. Гномоническая (G) и гномостереографическая (C) проекции плоскости LJ.

§ 6. Определение симметрии реальных кристаллических многогранников

Симметрия формы кристалла обусловлена симметрией его внутреннего строения. Форма не полностью, а лишь частично отражает симметрию внутреннего строения.

Кристаллы пирита часто имеют форму куба, на гранях которого наблюдаются ступеньки — штриховка (рис. 56), являющаяся следствием особенностей их внутреннего строения. Учет расположения этих штрихов позволяет установить истинную симметрию куба пирита, как $3L_2 4L_3 C 3m$, а не $3L_4 4L_3 6L_2 C 9m$.

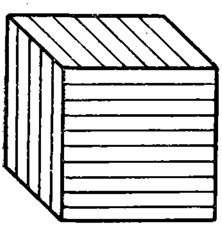


Рис. 56. Ступенчатость на гранях куба пирита.

Рис. 57. Кристалл с симметрией $L_6 Cm$. Фигуры на гранях — ямки травления.

Полная совокупность элементов симметрии фигуры, изображенной на рис. 57 — $L_6 6L_2 C 7m$. Так огранены бывают кристаллы апатита. При травлении можно получить на гранях призмы кристалла апатита ямки — фигуры травления, показанные на рисунке[3]. Эти фигуры говорят о том, что у граней призмы и у кристалла апатита в целом нет вертикальных плоскостей симметрии и нет простых поворотных осей второго порядка, но есть плоскость симметрии, перпендикулярная к L_6. Таким образом, по фигурам травления устанавливается истинная симметрия кристалла апатита — $L_6 Cm$.

Рассмотренные примеры демонстрируют возможность завышения симметрии кристалла, если судить о ней только по форме многогранника. На практике при выяснении симметрии сопоставляются различные физические свойства кристалла, зависящие от его внутреннего строения. Кроме того, при выяснении симметрии реальных кристаллов возникают затруднения из-за искажения их формы. Форма кристаллов искажается при их росте. Вызывают искажения неодинаковые условия роста разных частей кристалла. Эти условия определяются концентрацией, температурой, а также гравитационным, магнитным, электрическим полями, движением кристалла или среды, в которой растет кристалл, и другими причинами.

Французский ученый Пьер Кюри сформулировал принцип, согласно которому *симметрия следствия складывается из симметрии причин, определяющих возникновение следствия.* В связи с этим в форме вырастающего кристалла обычно проявляются только те элементы симметрии, которые являются общими и для кристалла и для среды, в которой кристалл растет. Если кристалл, имеющий несколько плоскостей симметрии, неподвижен и его омывает поток раствора, направленный вдоль одной из плоскостей, то эта плоскость симметрии, общая для кристалла и раствора, проявится в форме кристалла. Другие же плоскости симметрии могут и не проявиться в его форме, так как они не будут совпадать с плоскостью симметрии среды.

Наложение симметрии среды на симметрию кристалла может влиять только на его внешнюю симметрию — на симметрию его формы. При этом симметрия внутреннего строения кристалла не изменяется. Изменение симметрии формы проявляется в искажении идеализированного многогранника роста данного кристалла. Он вытягивается или уплощается, контуры граней, связанных элементами симметрии, становятся неравными. Некоторые из таких граней могут отсутствовать. Но, как бы ни искажался многогранник, симметрия его внутреннего строения будет проявляться в постоянстве углов между соответственными гранями. Благодаря этому на стереограммах проекции соответственных граней искаженных и неискаженных кристаллов оказываются одинаково расположенными. Кристаллографические проекции не отражают рассматриваемые

[3] Здесь призмой называются шесть равных граней, пересекающихся в параллельных ребрах.

искажения. По проекции многогранника можно судить о его истинной симметрии.

Равные друг другу грани имеют одинаковое строение. При искажении кристалла их строение не изменяется. Грани, имеющие одинаковое строение, независимо от их размеров и очертаний, обладают одинаковыми физическими и химическими свойствами. Поэтому по штриховкам на гранях, по фигурам травления, твердости, отражательной способности и другим свойствам можно судить о том, какие из граней равны друг другу и какие не равны, т. е. какие из них имеют одинаковое строение и какие разное.

При выяснении симметрии прозрачных кристаллов часто решающее значение имеет изучение их оптических свойств, а именно: показателей преломления, двупреломления, оптической индикатрисы, ее ориентировки, плеохроизма, дисперсий осей индикатрисы, дисперсий оптических осей, вращения плоскости поляризации и прочее.

Следует отметить, что существует мощный рентгеноструктурный метод изучения не только симметрии, но и внутреннего атомного строения кристаллов, основанный на изучении дифракции рентгеновых лучей в кристаллах. Сведения об этом методе выходят за рамки данного руководства.

Итак, для установления симметрии кристалла по искаженному многограннику нужно:

1. Измерить многогранник на гониометре; построить его проекцию; по проекции и по данным измерения получить представление об идеализированном многограннике и о его возможной симметрии.

2. По геометрическим, физическим и химическим свойствам граней и по внутренним физическим свойствам кристалла (спайность, оптические свойства и др.) установить, какие из граней равны друг другу, какой симметрией они обладают и какими элементами симметрии связаны друг с другом.

3. Сделать окончательный вывод об истинной симметрии кристалла.

□

Глава 4

ВЫВОД ВИДОВ СИММЕТРИИ. СИНГОНИИ, КАТЕГОРИИ И ЕДИНИЧНЫЕ ПРЯМЫЕ

§ 1. Взаимосвязь между элементами симметрии кристаллических многогранников

Правильное строение кристаллов накладывает определенные ограничения на их симметрию. У кристаллов не возможны оси симметрии 5-го и выше 6-го порядков (доказательство см. с. 23—24). Кроме того, правильное строение предусматривает у кристаллических многогранников не случайные, а вполне определенные совокупности элементов симметрии, причем элементы симметрии взаимосвязаны друг с другом. Их взаимосвязь рассматривается в теоремах *о сложении элементов симметрии*.

Теоремы о сложении элементов симметрии необходимы для вывода всех возможных у кристаллов совокупностей элементов симметрии. Кроме того, знание теорем может оказать значительную помощь при отыскании элементов симметрии у многогранников. Поэтому приведенные ниже теоремы рекомендуется запомнить. Доказательства этих теорем имеются в учебниках кристаллографии. Здесь будет рассмотрено доказательство только одной теоремы.

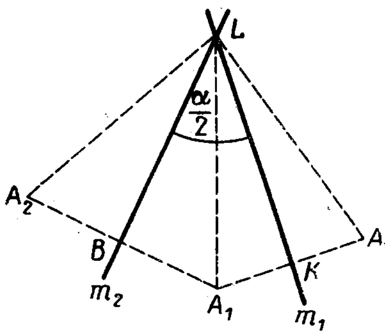


Рис. 58. Две плоскости симметрии и линия их пересечения — простая ось симметрии.

Теорема 1 *а*. Линия пересечения двух плоскостей симметрии есть простая ось симметрии, равнодействующая этих плоскостей. Элементарный угол поворота данной оси вдвое больше угла между плоскостями.

Дано: m_1 и m_2 — плоскости симметрии, перпендикулярные к плоскости рисунка, $\alpha/2$ — угол между ними (рис. 58).

Построение. Возьмем произвольную точку A. Отразим ее в m_1. Полученную точку A_1 отразим в m_2 — получим точку A_2.

Доказать: последовательное отражение в m_1 и в m_2 равнозначно повороту на угол α вокруг линии пересечения плоскостей, т. е. $AL=A_2L$ и $\angle ALA_2=\alpha$.

Доказательство. По построению ΔALK равен ΔA_1LK, $\Delta A_1LB = \Delta A_2LB$, треугольники ALA_1 и A_1LA_2 — равнобедренные, и A_1L — их общая сторона, поэтому $AL = A_2L$.

По условию $\angle BLK = \alpha/2 = \angle BLA_1 + \angle A_1LK$. По построению $\angle A_1LK = \angle ALK$ и $\angle A_1LB = \angle A_2LB$. Отсюда следует, что $\angle ALK + \angle A_2LB = \alpha/2$ и $\angle ALA_2 = \alpha$.

Доказав, что $AL = A_2L$ и что $\angle ALA_2 = \alpha$, мы доказали, что точка A совмещается с точкой A_2 в результате поворота ее на $\angle\alpha$ вокруг L (линии пересечения плоскостей m_1 и m_2).

Доказательство выполнено для одной точки, для любой другой точки оно производится таким же образом.

Рассмотрим несколько случаев, встречающихся в кристаллах и соответствующих этой теореме.

На рис. 59 плоскости симметрии перпендикулярны к плоскости чертежа. В результате отражения асимметричной фигуры в m она из *1*-го положения перемещается во *2*-е. Последующее отражение

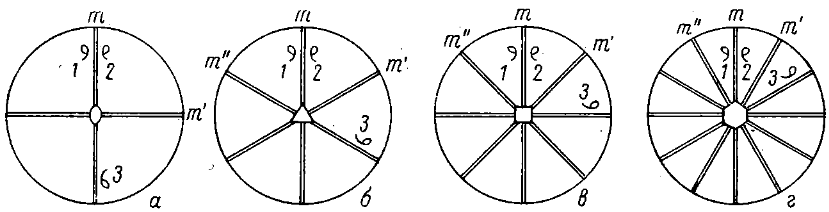


Рис. 59. Линия пересечения n плоскостей симметрии, пересекающихся под углом $\frac{360°}{2n}$, — простая ось симметрии n-го порядка.

в m' переводит ее в *3*-е положение. Угол между m и m' обозначим $\alpha/2$. Он равен в случае *а* — 90°, *б* — 60, *в* — 45 и *г* — 30°.

Из рисунка видно, что фигура из *1*-го положения может быть переведена в *3*-е поворотом на угол α вокруг линии пересечения плоскостей симметрии. А если это так, то линия пересечения m и m' является осью симметрии с элементарным углом поворота α. Каждая из изображенных на рисунке осей симметрии является равнодействующей двух плоскостей симметрии m и m', так как поворот вокруг оси на угол α в направлении от m и m' приводит к такому же результату, как последовательные отражения в m и m'.

Теорема 1 *б*. Если через простую ось симметрии проходит плоскость симметрии, то через ту же ось должна проходить вторая плоскость симметрии (равнодействующая оси). Угол между плоскостями вдвое меньше элементарного угла поворота данной оси.

Поворот вокруг оси симметрии на угол α переводит фигуру из *1*-го положения в *3*-е (см. рис. 59). Последующее отражение в m' перемещает ее во *2*-е положение. На рисунке видно, что фигура может быть перемещена из *1*-го положения во *2*-е отражением в m, которая образует с m' угол $\alpha/2$. Итак, m является равнодействующей оси симметрии и m'.

Следствие. Если через ось симметрии проходит плоскость симметрии, то число плоскостей, проходящих через ось, равно порядку данной оси.

Если при нахождении равнодействующего элемента симметрии m и L_n в случаях *б, в, г* поворот вокруг L_n произвести не вправо, а влево, то равнодействующей будет m''. Затем в случае *в* можно найти новую плоскость, равнодействующую L_4 и m', а в случае *г* еще три плоскости: равнодействующую L_6 и m', L_6 и m'', L_6 и одной из последних вновь найденных плоскостей. Таким образом, число плоскостей оказывается равным порядку оси.

Тот же результат можно получить проще. Вокруг оси симметрии n-го порядка все должно повторяться n раз. Повернув m и m' вокруг оси, мы получим n плоскостей симметрии.

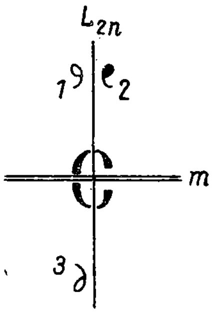


Рис. 60. Простая ось четного порядка, взаимосвязанная с перпендикулярной к ней m и C.

Теоремы 1 *а* и 1 *б* объединяются более общей формулировкой теоремы 1 (см. с. 61).

Теорема 2*а*. При наличии простой оси симметрии четного порядка и центра инверсии перпендикулярно к оси должна проходить плоскость симметрии.

На рис. 60 m перпендикулярна к плоскости чертежа и к L_{2n}.

Фигура в результате поворота вокруг L_{2n} на 180° из *1*-го положения перемещается во *2*-е. Если в *1*-м положении она обращена к наблюдателю своей верхней стороной, то во *2*-м — нижней.

Отражение в C переводит фигуру из *2*-го положения в *3*-е. Очевидно, что фигура из *1*-го положения может быть перемещена в *3*-е за счет отражения в m, перпендикулярной к L_{2n}. Поэтому действие m равнозначно повороту на 180° вокруг перпендикулярной к m оси четного порядка и последующему отражению в C.

Теорема 2*б*. При наличии плоскости симметрии и центра инверсии перпендикулярно к плоскости через центр проходит ось симметрии четного порядка.

Отражение в C переводит фигуру из *2*-го положения в *3*-е (см. рис. 60). Отражение в m переводит ее из *3*-го положения в *1*-е. Из *1*-го же положения во *2*-е фигура может быть переведена поворотом на 180° вокруг перпендикулярной к m оси четного порядка, т. е. последнее действие равнозначно сумме первых двух действий.

Следствие. При наличии центра инверсии у фигуры столько плоскостей симметрии, сколько осей четного порядка.

Теорема 2 *в*. Точка пересечения простой оси симметрии четного порядка и перендикулярной к ней плоскости симметрии является центром инверсии.

Поворот вокруг оси четного порядка на 180° переводит фигуру из *2*-го положения в *1*-е (см. рис. 60). Отражением в m, перпендикулярной к оси, она переводится из *1*-го положения в *3*-е. Из *2*-го положения в *3*-е фигура может быть переведена отражением в C, являющемся точкой пересечения L_{2n} и перпендикулярной к ней m, т. е. последнее действие равнозначно сумме первых двух действий.

Теоремы 2*а*, 2*б* и 2*в* объединяются в теореме 2 (см. с. 61).

Теорема 3 (теорема Эйлера). При наличии двух пересекающихся осей симметрии присутствует третья ось симметрии, равнодействующая их и проходящая через точку их пересечения.

Теорема Эйлера справедлива не только для простых осей симметрии, она справедлива и для инверсионных осей. Поэтому в более общем виде теорема Эйлера формулируется так:

Если есть два элемента симметрии, то обязательно присутствует и третий элемент симметрии, равнодействующий для первых двух.

Все теоремы о сложении элементов симметрии могут рассматриваться как частные случаи теоремы Эйлера.

Ниже мы рассмотрим три частных случая пересекающихся простых осей симметрии в кристаллических многогранниках.

1. На рис. 61, *а, б, в, г* изображены оси 2-го порядка, расположенные в плокости чертежа и пересекающиеся в одной точке.

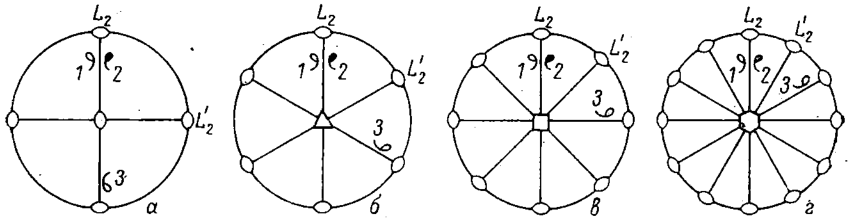


Рис. 61. Оси nL_2, пересекающиеся под углом $\frac{360°}{n}$; точка пересечения — выход перпендикулярной к ним L_n.

В каждом случае через точку пересечения этих осей перпендикулярно к ним и к плоскости чертежа проходит еще одна ось симметрии.

Поворот вокруг L_2 переводит фигуру из *1*-го положения во *2*-е. В результате поворота вокруг L_2' фигура из *2*-го положения переходит в *3*-е. Из рисунка видно, что поворотом вокруг оси, перпендикулярной к плоскости чертежа, в направлении от L_2 к L_2' фигура переводится из *1*-го положения в *3*-е, т. е. последнее действие равнозначно сумме первых двух действий.

Аналогичным путем нетрудно убедиться в том, что L_2 является равнодействующей L_2' и вертикальной оси и что L_2' равна по действию L_2 и вертикальной оси. В первом случае действием L_2' и вертикальной оси фигура переводится из *2*-го положения в *3*-е и в *1*-е. Такой же результат — перемещение фигуры из *2*-го положения в *1*-е — получается за счет поворота вокруг L_2. Во втором случае действием L_2 и вертикальной оси фигура из *2*-го положения перемещается в *1*-е и *3*-е. К такому же результату приводит действие L_2'.

Следствие. Оси 2-го порядка, перпендикулярные к L_n, пересекаются друг с другом под углом $\alpha/2$, где $\alpha = \frac{360°}{n}$. Поэтому, если перпендикулярно к L_n проходит одна L_2, то всего L_2 будет n.

Это хорошо видно на рис. 61. Нахождением всех равнодействующих осей 2-го порядка или поворотами вокруг L_n осей L_2 и L_2' получается n осей 2-го порядка.

2. На рис. 62 показаны три пересекающиеся оси симметрии. Угол между L_3 и L_3'=70°31′44″. Каждая из них составляет с L_2 угол, равный 54°44′08″. В результате поворота вокруг L_2 и L_3 асимметричной фигуры, нарисованной на грани куба, она из *1*-го положения перемещается во *2*-е и *3*-е. Поворот вокруг L_3', перемещающий фигуру из *1*-го положения в *3*-е, равнозначен этим поворотам. Поэтому L_3' является равнодействующим элементом симметрии L_2 и L_3.

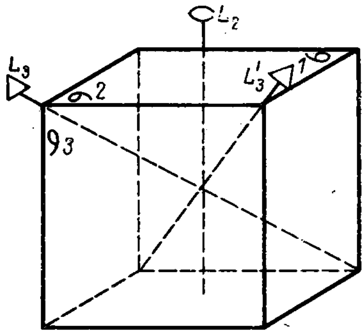


Рис. 62. Взаимосвязанные L_3, L_3' и L_2.

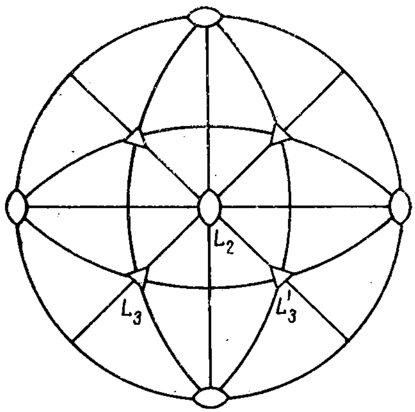


Рис. 63. Проекция $3L_24L_3$.

Действием L_3 и L_3' фигура перемешается из *2*-го положения в *3*-е и в *1*-е. Такой же результат получается за счет действия L_2, являющейся равнодействующей L_3 и L_3'. Найдя все равнодействующие оси или повернув L_2 и L_3' вокруг L_3, получим совокупность элементов симметрии — $3L_24L_3$ (рис. 63).

3. На рис. 64 угол между L_2 и L_4 — 45°, между L_4 и L_3 — 54°44′08″ и между L_2 и L_3 — 35°15′52″. В результате поворота нарисованной на грани куба фигуры вокруг L_2 и вокруг L_4 она перемещается из *1*-го положения во *2*-е и в *3*-е. Из *1*-го пложения в *3*-е фигура может быть переведена поворотом вокруг L_3. Поэтому L_3 является равнодействующим элементом симметрии L_2 и L_4.

Точно так же из *1*-го положения в *3*-е и во *2*-е фигура перемещается действием L_2 и L_4, а L_3 — равнодействующий элемент симметрии. Наконец, из *3*-го в *1*-е и во *2*-е положение фигура переводится поворотом вокруг L_3 и L_2, а действием L_4 можно заменить эти два поворота.

Для получения остальных равнодействующих элементов симметрии фигуры повернем L_2 и L_3 вокруг L_4. В результате получим $3L_44L_34L_2$. Поворотом этих элементов симметрии вокруг L_3 получим $3L_44L_36L_2$ (рис. 65).

Теорема 4*а*[4]. При наличии двух инверсионных осей симметрии присутствует равнодействующая их простая ось симметрии, проходящая через точку пересечения первых двух осей.

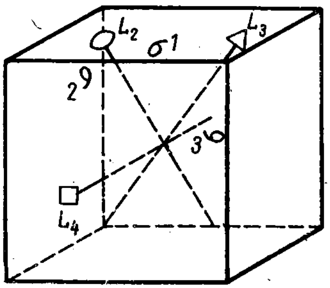


Рис. 64. Взаимосвязанные L_4, L_2 и L_3.

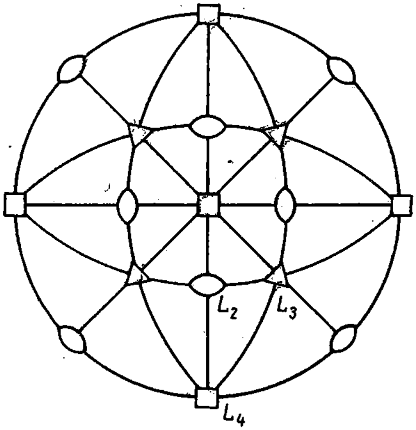


Рис. 65. Проекция $3L_4 4L_3 6L_2$.

Отражение в m приводит к такому же результату, как поворот вокруг L_{i2}, перпендикулярной к этой m. Поскольку проще произвести отражение в m, чем подействовать L_{i2}, будем использовать m, считая, что действуем L_{i2}, перпендикулярной к этой m.

1. Отражение в m переводит фигуру из положения *1* в положение *2* (рис. 66). Поворот на элементарный угол вокруг L_{i4}, L_{i6} или

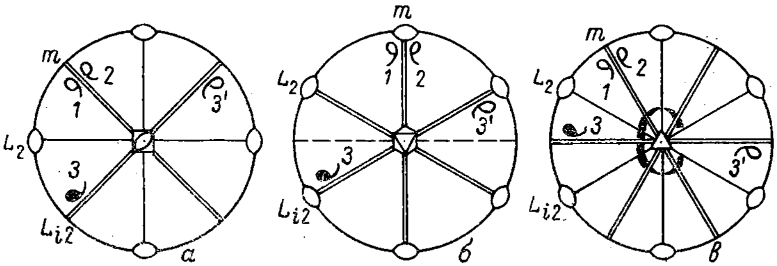


Рис. 66. Взаимосвязанные L_{i4}, L_2 и m.

L_{i3} переводит фигуру из положения *2* в положение *3'*, и последующее отражение в точке пересечения осей, как в центре инверсии, переводит ее в положение *3*. Очевидно, что такой же результат можно получить за счет поворота фигуры вокруг L_2, т. е.

[4] В теоремах 1*а* и 1*б* разобраны частные случаи, предусмотренные теоремами 4*а* и 4*б*. Помня, что $m=L_{i2}$, можно обойтись без теорем 1*а* и 1*б* и соответственно без теоремы 1.

в рассматриваемых случаях L_2 является равнодействующим элементом симметрии m и L_{i4} или m и L_{i6}, или m и L_{i3}.

2. Еще у кристаллических многогранников возможно взаимное расположение элементов симметрии, показанное на рис. 67. Углы между L_{i4} и L_3, между L_3 и m равны 54°44′08″, а между L_{i4} и m — 45°00′00″. Поворот на 90° вокруг L_{i4} переводит фигуру из *1*-го положения в *2′*, и последующее отражение в центре куба как в центре инверсии переводит ее в положение *2*. Отражением в m она переводится из *2*-го положения в *3*-е. Фигура может быть перемещена из *1*-го положения в *3*-е поворотом вокруг L_3. Это значит, что L_3 является равнодействующим элементом симметрии L_{i4} и $m(L_{i2})$.

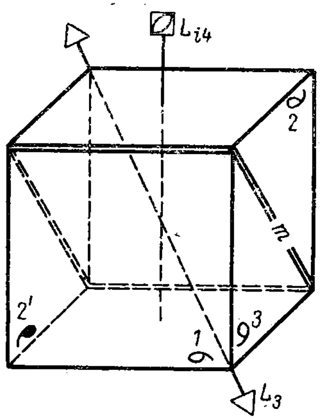


Рис. 67. Взаимосвязанные L_{i4}, L_3 и m.

Теорема 4 *б*[5]. При наличии инверсионной и простой осей симметрии присутствует равнодействующая их вторая инверсионная ось, проходящая через точку пересечения первых двух осей.

1. Действием m и L_2 фигура (см. рис. 66) перемещается из положения *2* в положения *1* и *3*. Из положения *3* в положение *2* она может быть перемещена действием инверсионной оси, расположенной перпендикулярно к плоскости чертежа. Следовательно, перпендикулярная к плоскости чертежа инверсионная ось является равнодействующей m (L_{i2}) и L_2.

Действием L_2 и инверсионной оси, расположенной перпендикулярно к плоскости чертежа, фигура перемещается из положения *1* в положение *3* и *2*. Отражением в m также можно переместить фигуру из положения *1* в положение *2*. А это значит, что m (L_{i2}) является равнодействующим элементом симметрии L_2 и инверсионной оси, расположенной перпендикулярно к плоскости чертежа.

2. Последовательное действие m и L_3 (см. рис. 67) переводит фигуру из *2*-го положения в *3*-е и *1*-е. Равнодействующей для этих элементов симметрии является L_{i4}.

Действием L_3 и L_{i4} фигура переводится из *3*-го положения в *1*-е и во *2*-е, а m — равнодействующая для этих элементов симметрии.

Нахождение всех равнодействующих для указанных элементов симметрии приводит к полной совокупности $3L_{i4}4L_36m$ (рис. 68).

Следствие. Если L_{in} лежит в m или имеется L_2, перпендикулярная к L_{in}, то количество L_2 и m, проходящих через L_{in}, одинаково и равно порядку простой оси симметрии, соответствующей L_{in} (см. рис. 66)[6].

Теоремы 4 *а* и 4 *б* объединяются в теореме 4 (см. с. 61).

Еще раз обратим внимание на то, что в данном параграфе осуществлен лишь показ теорем, способствующий их запоминанию, но не заменяющий их доказательство.

---

[5] См. сноску к теореме 4*а*.

[6] L_{i4} соответствует простая ось — L_2.

Ниже суммированы основные четыре теоремы о сложении элементов симметрии и их следствия в наиболее удобном виде.

Теорема 1. Простая ось симметрии n-го порядка, являющаяся линией пересечения n плоскостей симметрии, и указанные n плоскостей взаимосвязаны. Если две m пересекаются под углом $\alpha/2$, то линия их пересечения является осью симметрии с элементарным углом $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$.

Следствие. Если через ось симметрии проходит плоскость симметрии, то число плоскостей, проходящих через ось, равно порядку данной оси.

Теорема 2. Простая ось симметрии четного порядка, перпендикулярная к ней плоскость симметрии и центр инверсии взаимосвязаны. Если есть любые два из этих элементов симметрии, то обязательно имеется и третий.

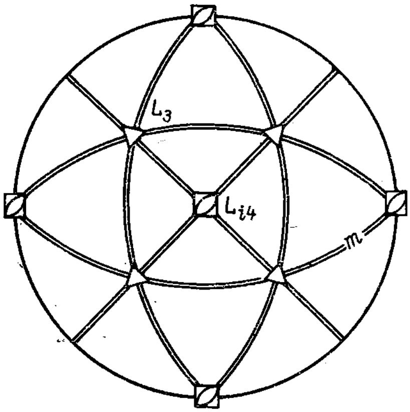


Рис. 68. Проекция $3L_{i4}4L_36m$.

Следствие. При наличии центра инверсии у фигуры столько плоскостей симметрии, сколько у нее осей четного порядка, и наоборот — столько осей четного порядка, сколько плоскостей симметрии.

Теорема 3. При наличии двух пересекающихся простых осей симметрии присутствует третья простая ось симметрии, равнодействующая и проходящая через точку их пересечения.

Следствие. Простые оси 2-го порядка, перпендикулярные к L_n, пересекаются друг с другом под углом $\alpha/2$, где $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$. Поэтому, если перпендикулярно к L_n проходит одна L_2, то всего L_2 будет n.

Теорема 4. Две инверсионные и одна простая оси симметрии, пересекающиеся в одной точке, взаимосвязаны. Если есть две любые из этих осей, то обязательно присутствует и третья их равнодействующая ось.

Взаимное расположение осей, возможное в кристаллических многогранниках, показано на рис. 66 и 68.

Следствие. Если L_{in} лежит в m или имеется L_2, перпендикулярная к L_{in}, то количество L_2 и m, проходящих через L_{in}, одинаково и равно порядку простой оси симметрии, соответствующей L_{in}.

В дальнейшем мы будем ссылаться на эти четыре основные теоремы и их следствия.

Вопросы для повторения

1. Что называется сложением элементов симметрии?
2. Как читаются четыре основные теоремы о сложении элементов симметрии и их следствия?

Задача

Сделайте рисунки, иллюстрирующие четыре основные теоремы о сложении элементов симметрии.

§ 2. Тридцать два вида симметрии

Полная совокупность элементов симметрии кристаллического многогранника называется видом симметрии, или точечной группой симметрии [7]. Все разнообразие симметрии кристаллических многогранников исчерпывается 32 видами симметрии (табл. 2) [8].

Вывод многих видов симметрии мы уже осуществили, рассматривая теоремы о сложении элементов симметрии. Исходя из описанных выше элементов симметрии и используя теоремы об их сложении, можно произвести вывод всех видов симметрии следующим образом.

1. Берутся простые оси симметрии: L_2, L_3, L_4 и L_6. Это четыре вида симметрии, которые называются примитивными (первая вертикальная колонка табл. 2). К примитивным видам симметрии относятся также многогранники, не имеющие никаких элементов симметрии [9] и имеющие $3L_24L_3$.

Вид симметрии $3L_24L_3$ содержит минимальное количество элементов симметрии из всех видов, в которых имеется $4L_3$ (нижняя горизонтальная строка табл. 2). Для вывода этого вида симметрии достаточно взять L_2 и L_3, образующие угол 54°44′08″, и по теореме 3 получить все равнодействующие элементы симметрии.

2. Берутся инверсионные оси $L_{i2}(m)$, L_{i4}, L_{i3} и L_{i6}. Это 4 инверсионно-примитивных вида симметрии. К ним относятся еще многогранники, имеющие только C. [10]

3. К простым осям четного порядка L_2, L_4 и L_6 добавляется C, и по теореме 2 получаются центральные виды симметрии: L_2Cm, L_4Cm и L_6Cm.

Вид симметрии $3L_24L_3C3m$ выводится на основании этой же теоремы добавлением C к L_2 и L_3, расположенным под углом 54°44′08″, или, что то же самое, добавлением C к $3L_24L_3$.

4. К инверсионным осям L_{i4}, L_{i3} и L_{i6} прибавляется m, проходящая через ось. На основании следствия теоремы 4 получаются инверсионно-планальные виды симметрии: $L_{i4}2L_22m$, $L_{i3}3L_23m$ и $L_{i6}3L_23m$.

---

[7] Кристаллы, относящиеся к одному виду симметрии, составляют класс.

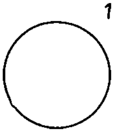
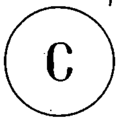
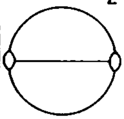
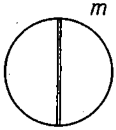
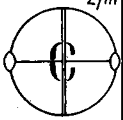
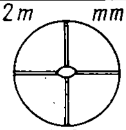
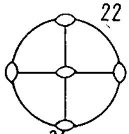
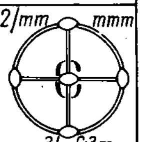
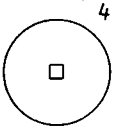
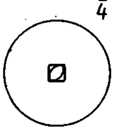
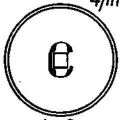
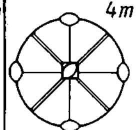
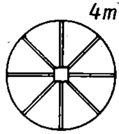
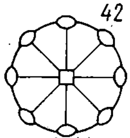
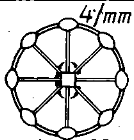
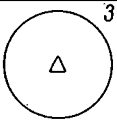
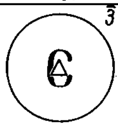
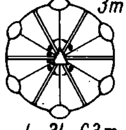
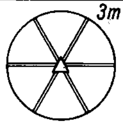
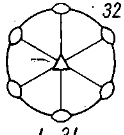
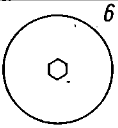
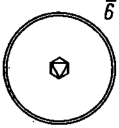
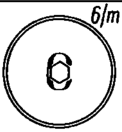
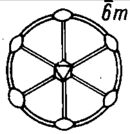
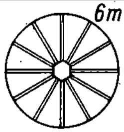
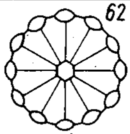
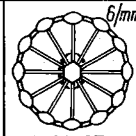
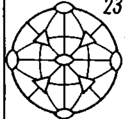
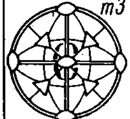
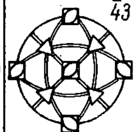
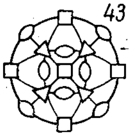
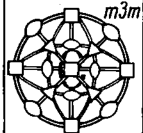
[8] Виды симметрии кристаллов впервые были выведены в 1830 г. И. Гесселем (1796—1872), но только после классической работы А. В. Гадолина (1828—1892), опубликованной в 1869 г., они вошли во всеобщее употребление.— *Примеч. ред.*

[9] Можно сказать, что такие многогранники имеют простую ось 1-го порядка — L_1, но L_1 вообще не имеет смысла, так как любая прямая в асимметричной фигуре будет L_1.

[10] Можно сказать, что многогранники, имеющие только C, имеют L_{i1}, но L_{i1} такой же бессмысленный образ, как и L_1, так как любая прямая, проходящая через C, является L_{i1}.

32 вида симметрии

Таблица 2

Категории	Сингонии	Виды симметрии: Примитивные	Инверсионно-примитивные	Центральные	Инверсионно-планальные	Планальные	Аксиальные	Аксиально-центральные
Низшая	Триклинная	1 	$\bar{1}$  C					
Низшая	Моноклинная	2  L_2	m  m	2/m  L_2Cm				
Низшая	Ромбическая					2m mm  L_22m	22  $3L_2$	2/mm mmm  $3L_2C3m$
Средняя	Тетрагональная	4  L_4	$\bar{4}$  L_{i4}	4/m  L_4Cm	$\bar{4}m$  $L_{i4}2L_22m$	4m  L_44m	42  L_44L_2	4/mm  L_44L_2C5m
Средняя	Тригональная	3  L_3	$\bar{3}$  L_{i3}		$\bar{3}m$  L_33L_2C3m	3m  L_33m	32  L_33L_2	
Средняя	Гексагональная	6  L_6	$\bar{6}$  L_{i6}	6/m  L_6Cm	$\bar{6}m$  $L_{i6}3L_23m$	6m  L_66m	62  L_66L_2	6/mm  L_66L_2C7m
Высшая	Кубическая	23  $3L_24L_3$		m3  $3L_24L_3C3m$	$\bar{4}3$  $3L_{i4}4L_36m$		43  $3L_44L_36L_2$	m3m  $3L_44L_36L_2C9m$

Вид симметрии $3L_{i4}4L_36m$ выводится добавлением m к L_2 и L_3, расположенным под углом 54°44′08″. Согласно теореме $4L_2$ превращается в L_{i4}. Затем находятся остальные равнодействующие оси.

5. К каждой простой оси добавляется m, проходящая через ось. На основании теоремы 1 и следствия, вытекающего из нее, ось n-го порядка будет линией пересечения n плоскостей. Таким образом, получаются планальные — плоскостные — виды симметрии: L_22m, L_33m, L_44m и L_66m. В каждом из них имеется ось L_n, являющаяся линией пересечения n плоскостей симметрии.

6. К каждой из осей L_2, L_3, L_4 и L_6 добавляется перпендикулярная L_2. На основании следствия теоремы 3 получаются аксиальные — осевые — виды симметрии: $3L_2$, L_33L_2, L_44L_2 и L_66L_2. В аксиальных видах симметрии имеются только оси симметрии. Вид симметрии $3L_44L_36L_2$ выводится добавлением L_2 к исходным L_2 и L_3, расположенным под углом 54°44′08″. Добавляемая L_2 образует с первоначально взятой L_2 угол 45°00′00″, а с L_3 — 35°15′52″. По теореме 3 исходная L_2 превращается в L_4. Затем находятся остальные равнодействующие оси.

7. К каждому аксиальному виду симметрии, в том числе и к $3L_44L_36L_2$, добавляется C. В соответствии с теоремой 2 получаются аксиально-центральные виды симметрии: $3L_2C3m$, L_44L_2C5m, L_66L_2C7m и $3L_44L_36L_2C9m$. Добавление C к L_33L_2 дает уже выведенный вид симметрии L_33L_23m (L_33L_2C3m).

Как в обозначении элементов симметрии кристаллических многогранников, так и в названиях видов симметрии по элементам симметрии в литературе нет единообразия. С однозначным наименованием каждого вида симметрии по общей форме мы познакомимся в § 2 гл. 5. Расположение некоторых видов симметрии в той или иной клетке таблицы также условно. Например, вид симметрии m относят или к инверсионно-планальным или к планальным видам симметрии; L_2Cm — к центральным или к аксиально-центральным; L_33L_2C3m — к инверсионно-планальным или к аксиально-центральным; $3L_{i4}4L_36m$ — к инверсионно-планальным или к планальным.

Вопросы для повторения

1. Что называется видом симметрии, или точечной группой?
2. В чем заключается принцип вывода видов симметрии?

Задача

Выведите все виды симметрии тетрагональной или гексагональной сингонии.

§ 3. Сингонии и категории

Тридцать два вида симметрии объединяются в 7 сингоний [1], или систем (табл. 2 и 3).

---

[1] Сингони́я — совокупность углов.

Таблица 3

Характеристика сингоний по элементам симметрии и по единичным прямым[1]

Категории	Сингония	Обязательно имеющиеся элементы симметрии	Количество и расположение единичных прямых
Низшая	Триклинная[2]	Нет	Все
	Моноклинная	L_2 или $m(L_{i2})$	Множество, но не все. Одно совпадает с L_2 или L_{i2} и любое в плоскости, перпендикулярной к оси 2-го порядка
	Ромбическая	$3L_2$ или $L_2 2m(L_2 2L_{i2})$	Три. Совпадают с L_2 или L_{i2}
Средняя	Тетрагональная	L_4 или L_{i4}	Одно. Совпадает с главной осью
	Тригональная	L_3	
	Гексагональная	L_6 или L_{i6}	
Высшая	Кубическая	$4L_3$	Нет

[1] Характеристика сингоний по единичным прямым будет рассмотрена в § 6.
[2] Клинос — косой угол.

В названия большинства сингоний входят греческие числительные. Эти числительные и другие, которые употребляются в дальнейшем, приведены ниже.

Моно	одно-
ди	дву-
три	трех-
тетра	четырех-
пента	пяти-
гекс, гекса	шести-
окта	восьми-
дека	десяти-
додека	двенадцати-

Сингонии объединяются в три категории (табл. 2 и 4).

Таблица 4

Характеристика категорий по элементам симметрии и по единичным прямым

Категория	Симметрия	Количество единичных прямых
Низшая	Нет L_n и L_{in}, где $n>2$	Не менее трех
Средняя	Одна L_n или L_{in}, где $n>2$	Одно
Высшая	Есть $4L_3$	Нет

Вопросы для повторения

1. Сколько существует сингоний в кристаллографии и как они называются?
2. Какие сингонии относятся к низшей, средней и высшей категории?
3. Какую характеристику по элементам симметрии имеет каждая сингония и каждая категория?

§ 4. Одинаковые и равные элементы симметрии

Одноименные элементы симметрии называются *одинаковыми*. Например, все L_2 одной фигуры или одного вида симметрии являются одинаковыми, все плоскости симметрии фигуры или вида симметрии также являются одинаковыми.

Равными элементами симметрии какой-либо фигуры или вида симметрии называются такие из одинаковых, которые могут быть совмещены друг с другом при помощи элементов симметрии этой же фигуры или этого же вида симметрии.

Например, все L_2 в аксиальном виде симметрии тригональной сингонии равны, так как они могут быть совмещены друг с другом при помощи L_3. В аксиальном виде симметрии тетрагональной сингонии равными являются взаимно перпендикулярные L_2. Оси же 2-го порядка, пересекающиеся под углом 45°, одинаковые, но не равные, так как они не могут быть совмещены друг с другом никакими элементами симметрии. В планальном виде симметрии тригональной сингонии все плоскости равны. В планальном виде симметрии тетрагональной сингонии равные плоскости образуют угол 90°[12].

§ 5. Международные обозначения видов симметрии по Герману-Могену

Кроме рассмотренных выше обозначений видов симметрии существуют иные общепринятые сейчас полные и сокращенные обозначения видов симметрии по Герману-Могену. В этих обозначе-

[12] Расчленение элементов симметрии на одинаковые и равные имеет существенное значение при изучении физических свойств кристаллов.— *Примеч. ред.*

ниях для записи элементов симметрии используются следующие знаки:

$$\begin{array}{llll}
1^{13} - L_1 & \bar{1} & & - C \\
2 - L_2 & m(\bar{2}) & & - m \\
3 - L_3 & \bar{3} & (3+\bar{1}) & - L_{i3} \\
4 - L_4 & \bar{4} & & - L_{i4} \\
6 - L_6 & \bar{6} & (3+\perp m) & - L_{i6}.
\end{array}$$

Перпендикулярность друг к другу оси четного порядка $-L_{2n}$ и m показывается чертой, разделяющей эти знаки. Например, $2/m$, $4/m$, $6/m$, параллельность оси и плоскости обозначается так: $2m$, $3m$, $4m$, $6m$. Перпендикулярность двух разных осей (кроме кубической сингонии): 22, 32, 42, 62.

В полном символе того или иного вида симметрии по Герману-Могену из всех равных элементов симметрии указывается только один, и в то же время в нем должны быть указаны все неравные элементы симметрии, входящие в данный вид симметрии.

Зная по одному элементу симметрии каждого сорта из всех элементов, входящих в данный вид симметрии, нетрудно получить их полную совокупность. Это можно сделать двумя способами: а) используя теоремы о сложении элементов симметрии; б) действуя указанными элементами симметрии друг на друга, вывести все равные им элементы, как это мы уже делали в § 1 этой главы.

Таблица 5

Международные символы видов симметрии по Герману-Могену

Сингония	Полная совокупность элементов симметрии	Символ полный	Символ сокращенный
Триклинная	—	1	—
	C	$\bar{1}$	—
	L_2	2	—
Моноклинная	m	m	—
	L_2Cm	$2/m$	—
	L_22m	$2mm$	mm
Ромбическая	$3L_2$	222	22
	$3L_2C3m$	$2/m2/m2/m$	mmm

[13] Единица означает отсутствие элементов симметрии.

Сингония	Полная совокупность элементов симметрии	Символ	
		полный	сокращенный
	L_4	4	—
	L_{i4}	$\bar{4}$	—
	L_4Cm	$4/m$	—
Тетрагональная	$L_{i4}2L_22m$	$\bar{4}2m$	$\bar{4}m$
	L_44m	$4mm$	$4m$
	L_44L_2	422	42
	L_44L_2C5m	$4/m2/m2/m$	$4/mm$, $4/mmm$[1]
	L_3	3	—
	L_{i3}	$\bar{3}$	—
Тригональная	$L_{i3}3L_23m$	$32/m$	$\bar{3}m$
	L_33m	$3m$	—
	L_33L_2	32	—
	L_6	6	—
	L_{i6}	$\bar{6}$	—
	L_6Cm	$6/m$	—
	$L_{i6}3L_23m$	$\bar{6}2m$	$\bar{6}m$
Гексагональная	L_66m	$6mm$	$6m$
	L_66L_2	622	62
	L_66L_2C7m	$6/m2/m2/m$	$6/mm$, $6/mmm$[1]
	$3L_24L_3$	23	—
	$3L_24L_3C3m$	$2/m3$	$m3$
	$3L_{i4}4L_36m$	$\bar{4}3m$	—
Кубическая	$3L_44L_36L_2$	432	—
	$3L_44L_36L_2C9m$	$4/m32/m$	$m3m$

[1] Сокращение не до минимума символов $4/mmm$ и $6/mmm$ объясняется тем, что эти символы составлены с учетом одного из правил записи символов пространственных групп симметрии, согласно которому в символе должны быть указаны три плоскости.

Все символы видов симметрии по Герману-Могену помещены в табл. 5. Символ каждого вида симметрии средней категории начинается с главной оси. В кубической сингонии цифра *3* всегда пишется на втором месте. Если *3* стоит на втором месте, то это значит, что всего осей 3-го порядка 4.[14]

[14] Полный символ (см. табл. 5) учитывает, что одинаковые направления (см. с. 69) при переходе к пространственной симметрии могут быть представлены разными элементами симметрии (плоскость скольжения и проч.), что должно быть отражено в символе.— *Примеч. ред.*

В международном символе указывается минимум элементов симметрии, исходя из которого при помощи теорем о сложении элементов симметрии можно получить их полную совокупность. В сокращенном символе предпочтение отдается плоскостям симметрии, а оси, когда это можно, не входят в символ. Для понимания символов Германа-Могена необходимо знание теорем о сложении элементов симметрии. Учащимся рекомендуется прочитать полные и сокращенные записи и сообразить, каким путем или на основании каких теорем из указанных элементов симметрии можно получить все остальные.

Вопросы для повторения

1. Какие элементы симметрии называются одинаковыми, какие — равными?
2. Как строится международный символ вида симметрии: а) полный, б) сокращенный?

Задачи

1. Составьте международные обозначения, полные и сокращенные, ряда видов симметрии разных сингоний.
2. Из указанных в международных символах элементов симметрии выведите на проекциях их полные совокупности: mm, 22, mmm, $\bar{4}2m$, $4m$, $4/m2/m2/m$, $\bar{3}m$, 622, $6/mm$, $2/m3$, $m3m$.

§ 6. Симметрично-равные и единичные прямые и направления[15]

Здесь рассматриваются прямые и направления, проходящие через центр кристалла. Каждой прямой соответствуют два противоположных направления.

Симметрично-равными называются такие прямые, или направления, в симметричной фигуре, которые связаны друг с другом элементами симметрии, т. е. выводятся одно из другого с помощью элементов симметрии. *Единичными* называются такие прямые, или направления, которым нет симметрично-равных.

В симметрично-равных направлениях свойства кристаллов всегда одинаковы, а в единичных — их свойства могут отличаться от свойств во всех других направлениях. При рассмотрении вопроса о симметрично-равных и единичных прямых необходимо иметь представление о частном и общем положении той или иной прямой относительно элементов симметрии.

Прямая расположена частным образом относительно элементов симметрии в том случае, если она: 1) совпадает с каким-либо элементом симметрии (совпадает с осью симметрии или лежит в плоскости симметрии); 2) перпендикулярна какому-либо элементу симметрии; 3) образует одинаковые углы с двумя равными элементами симметрии.

Прямая общего положения не удовлетворяет ни одному из этих трех условий.

---

[15] В данном руководстве устранена привычная для кристаллографов, но не обоснованная замена термина «прямая» термином «направление».

В различных кристаллах в зависимости от того, к каким видам симметрии они принадлежат, могут быть разные количества симметрично-равных и единичных прямых. Если у многогранника нет элементов симметрии, то все прямые в нем единичны и симметрично-равных прямых в нем не может быть. Если в многограннике имеется только C, то в нем также все прямые единичны, так как в результате отражения прямой, проходящей через C, прямая в ней совместится сама с собой, и других симметрично-равных прямых за счет отражения в C получить нельзя.

В кристаллах, принадлежащих к низшей категории симметрии триклинной сингонии (см. табл. 2), все прямые единичны, а симметрично-равных прямых в них нет.

Наибольшие затруднения встречаются при отыскании единичных прямых в многогранниках, принадлежащих к видам симметрии низшей категории моноклинной сингонии (см. табл. 2). На эти виды симметрии рекомендуется обратить особое внимание.

Возьмем вид симметрии 2 (рис. 69). Проведем прямую KC, не совпадающую с L_2 и не параллельную ей, т. е. прямую общего

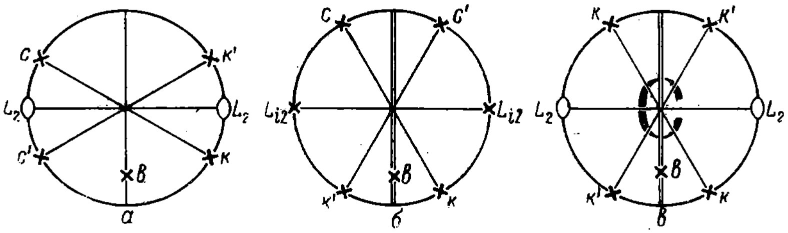


Рис. 69. Проекции симметрично-равных (KC и $K'C'$, KK и $K'K'$) и единичных ($в$, L_2, L_{i2}) прямых:
а) вид симметрии — L_2; *б*) вид симметрии — Li_2; *в*) вид симметрии — L_2mC.

положения. Повернув KC вокруг L_2, получим вторую такую же прямую $K'C'$. KC и $K'C'$ — симметрично-равные прямые. Очевидно, что в данном виде симметрии любой прямой, расположенной косо относительно L_2, соответствует одна симметрично-равная прямая.

Теперь возьмем прямую частного положения — перпендикуляр к L_2. Пусть ее проекцией будет точка $в$. При повороте вокруг L_2 эта прямая совместится сама с собой, ее верхний конец совместится с нижним, а нижний — с верхним. Следовательно, любая прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярной к L_2, будет единичной.

Осталась нерассмотренной лишь одна прямая, совпадающая с L_2. Эта прямая единична, так как при повороте вокруг L_2 она остается на месте.

Таким же способом рассмотрим все прямые в виде симметрии m (см. рис. 69). Взяв любую прямую KC, расположенную косо относительно плоскости симметрии, и отразив ее в этой плоскости, получаем симметрично-равную прямую $K'C'$. Прямая же, лежащая в плоскости симметрии, при отражении в m остается на месте, например, прямая, проекция которой точка *в*. Значит, любая прямая, лежащая в m, является единичной. Перпендикуляр к m или L_{i2} при отражении в m совмещается сам с собой. Значит, эта прямая единична.

Аналогичным образом легко убедиться, что в виде симметрии $2/m$ (см. рис. 69) все прямые, расположенные косо относительно элементов симметрии, являются симметрично-равными. Любая прямая, лежащая в плоскости симметрии, единична. И прямая, совпадающая с L_2, также единична.

Обобщим три рассмотренных выше случая. В многограннике, относящемся к моноклинной сингонии (виды симметрии: 2, m и $2/m$), единичных прямых множество, но не все прямые единичны. Одна единичная прямая совпадает с осью 2-го порядка (L_2 или L_{i2}) и любая прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярной к оси 2-го порядка, единична. Любой другой прямой соответствует одна симметрично-равная прямая, т. е. симметрично-равные прямые имеют кратность 2.

В виде симметрии mmm (рис. 70), относящемся к ромбической сингонии, прямые *1*, расположенные косо относительно элементов

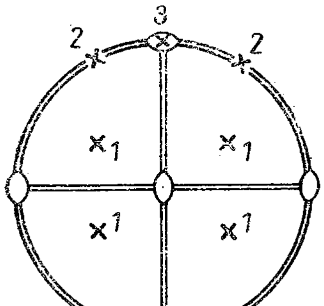


Рис. 70. Проекции симметрично-равных *(1, 2)* и единичных ($3L_2$) прямых.

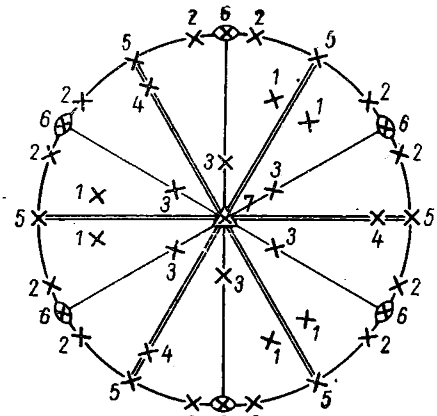


Рис. 71. Проекции симметрично-равных *(1—6)* и единичной *(7)* прямых.

симметрии, имеют кратность 4, прямые *2*, лежащие в m, имеют кратность 2, а прямая *3*, совпадающая с L_2, имеет кратность 1, т. е. она единична. Всего единичных прямых в этом виде симметрии три. Они совпадают с $3L_2$.

В виде симметрии $\bar{3}m$ (рис. 71) прямые общего положения *1*, прямые *2*, перпендикулярные к L_{i3}, и прямые *3*, образующие одинаковые углы с двумя равными L_2 и с двумя равными m, имеют кратность 6. Прямые *4*, лежащие в m, прямые *5*, перпендикулярные к L_{i3}

и лежащие в m, и прямые *6*, совпадающие с L_2, имеют кратность 3. Прямая *7*, совпадающая с L_{i3}, имеет кратность 1, т. е. она единична.

В виде симметрии $m3m$ (рис. 72) прямые общего положения *1* имеют кратность 24. Прямые *2*, лежащие между L_2 и L_3 в плоскостях симметрии, прямые *3*, лежащие в плоскостях симметрии между L_3 и L_4, и прямые *4*, лежащие в плоскостях симметрии, проходящих через L_4, имеют кратность 12. Прямые 5, совпадающие с L_2, имеют кратность 6. Прямые *6*, совпадающие с L_3, имеют кратность 4. Прямые *7*, совпадающие с L_4, имеют кратность 3. Единичных прямых в этом виде симметрии нет.

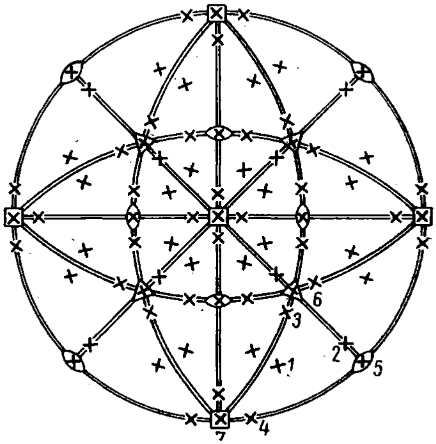


Рис. 72. Проекция вида симметрии $m3m$, в котором нет единичных прямых.

Теперь читателю должна быть понятна характеристика сингоний и категорий по единичным прямым (см. табл. 3 и 4).

Ранее, на стр. 69, было сказано, что знакомство с единичными прямыми даст новый критерий для обнаружения L_{i4}, являющейся главной осью, а именно если обнаружена L_2, совпадающая с единственной единичной прямой в многограннике, то это ось не 2-го, а 4-го порядка — L_{i4}.

Вопросы для повторения

1. Какие прямые называются единичными и какие — симметрично-равными?
2. Перечислите три признака частного положения прямой.
3. Дайте характеристику каждой сингонии и каждой категории по единичным прямым.
4. Как определить кратность той или иной прямой в данном виде симметрии?
5. Какой критерий для обнаружения L_{i4} у тетрагональных кристаллов дает представление о единичных прямых?

§ 7. Полярные прямые[16]

При изучении некоторых физических свойств кристаллов особое значение имеют полярные прямые и единичные направления.

Полярной прямой в кристаллическом многограннике называется такая прямая, концы которой не могут быть совмещены друг с другом при помощи элементов симметрии этого многогранника. Полярной прямой соответствуют два неравных противоположных направления.

[16] Полярные прямые могут быть описаны в образах черно-белой симметрии.— *Примеч. ред.*

В кристаллах, относящихся к виду симметрии 1, все прямые полярны. В кристаллах, принадлежащих к виду симметрии $\bar{1}$, полярные прямые невозможны, так как при отражении в C любая прямая совмещается сама с собой. В кристаллах, обладающих центром инверсии, нет полярных прямых и нет единичных направлений.

В кристаллических многогранниках, не имеющих центра инверсии, не являются полярными следующие прямые: 1) перпендикуляры к простым поворотным осям четного порядка, т. е. перпендикулярные к L_2 (L_{i4}), L_4 и L_6; 2) прямые, совпадающие с инверсионными осями четного порядка, т. е. с L_{i2} ($\perp$к m), L_{i4} и L_{i6}.

Все остальные прямые в них полярны. Прямые, перпендикулярные к L_{i4}, не могут быть полярными, так как L_{i4} включает в себя «L_2».

В табл. 6 помещены все виды симметрии без центра инверсии, указаны неполярные и полярные прямые, отмечены все случаи полярности единичных прямых и поставлены крестики в случае наличия пиро- и пьезоэлектричества в кристаллах, относящихся к данному виду симметрии.[17]

Таблица 6

Виды симметрии без C и полярные прямые в них

№ п/п.	Вид симметрии	Неполярные прямые	Полярные прямые	Полярные прямые, являющиеся единичными	Пьезоэлектричество	Пироэлектричество
1	1	Нет	Все, кроме перпендикулярных к осям четного порядка: L_2, L_4, L_6, L_{i4}	Все	+	+
2	2	Все $\perp$ к L_2		Одно L_2	+	+
3	m	Одно $\perp$ к m		Все в m	+	+
4	mm	Все $\perp$ к L_2		Одно L_2	+	+
5	22	Все $\perp$ к $3L_2$		Нет	+	—
6	4	Все $\perp$ к L_4		Одно L_4	+	+
7	$\bar{4}$	L_{i4} и все $\perp$ к L_{i4}		Нет	+	—
8	$\bar{4}m$	Все $\perp$ к $2L_2$ и к $2m$		Нет	+	—
9	$4m$	Все $\perp$ к L_4		Одно L_4	+	+
10	42	Все $\perp$ к L_4 и к $4L_2$		Нет	+	—
11	3	Нет		Одно L_3	+	+
12	$3m$	Три $\perp$ к $3m$		Одно L_3	+	+

[17] В кристаллах-диэлектриках под влиянием механических воздействий — сжатий и растяжений — на концах полярных прямых возбуждается разноименное электричество, которое называется пьезоэлектричеством. Диэлектрик — непроводник электричества. Электричество, возбуждаемое в кристаллах на концах единичных полярных прямых в связи с изменением их температуры, называется пироэлектричеством.

№ п/п.	Вид симметрии	Неполярные прямые	Полярные прямые	Полярные прямые, являющиеся единичными	Пьезоэлектричество	Пироэлектричество
13	32	Все $\perp$ к $3L_2$	и кроме совпадающих с инверсионными осями: L_{i2}, L_{i4}, L_{i6}	Нет	+	—
14	6	Все $\perp$ к L_6		Одно L_6	+	+
15	$\bar{6}$	Одно L_{i6}		Нет	+	—
16	$\bar{6}m$	Все $\perp$ к $3L_2$		Нет	+	—
17	$6m$	Все $\perp$ к L_6		Одно L_6	+	+
18	62	Все $\perp$ к L_6 и к $6L_2$		Нет	+	—
19	23	Все $\perp$ к $3L_2$		Нет	+	—
20	$\bar{4}3m$	Все $\perp$ к $3L_{i4}$ и к $6m$		Нет	+	—
21	432[1]	Все $\perp$ к $3L_4$ и к $6L_2$		Нет	—	—

[1] Кристаллы вида симметрии 432, не имея $\bar{1}$, пьезоэлектричеством не обладают.

Вопросы для повторения

1. Какие прямые называются полярными?
2. С какими прямыми связаны пьезоэлектрические и с какими пироэлектрические свойства кристаллов?
3. В кристаллах каких видов симметрии имеются полярные прямые?

Задачи

Изучить 10—15 учебных многогранников по следующей схеме:

1. Элементы симметрии.
2. Количество и расположение: а) единичных прямых, б) полярных прямых.
3. Название категории, сингонии, вида симметрии.
4. Международный символ вида симметрии, полный и сокращенный.
5. Проекции элементов симметрии и граней.

□

Глава 5

ПРОСТЫЕ ФОРМЫ

§ 1. Описание и классификация простых форм

В предыдущих главах мы познакомились с симметрией кристаллических многогранников. Практическое определение симметрии того или иного многогранника нами осуществлялось по взаимному расположению его равных граней, ребер и вершин, т. е. по взаимному расположению равных элементов его формы.

Формой многогранника называется совокупность всех его граней. Очевидно, что форма многогранника определяется не только количеством всех его граней, но и их взаимным расположением, количеством сортов граней (отличающихся друг от друга по величине и очертаниям) и соотношением размеров граней разных сортов. Для описания формы кристаллических многогранников кроме представления об их симметрии необходима классификация граней. В основе такой классификации лежит понятие о *простой форме.*

Все равные грани многогранника, т. е. грани, связанные друг с другом элементами симметрии, *называются простой формой*[1]. Соответственно из одной грани простой формы при помощи элементов симметрии могут быть выведены все остальные грани этой формы. Если многогранник огранен двумя или несколькими простыми формами, то он называется комбинационным.

Прежде всего следует изучить полный набор моделей простых форм кристаллов. Установлено всего 47 простых форм кристаллов, которые имеют различные названия. Все простые формы и их проекции показаны в табл. 7 (с. 79—82).

Для понимания названий простых форм необходимо знакомство с приведенными на с. 65 греческими числительными. Кроме того, в названиях простых форм используется греческое слово *эдра* — грань.

Простые формы описываются в определенном порядке, способствующем лучшему запоминанию.

Простые формы низшей и средней категорий. 1. *Монóэдр* — одногранник. 2. *Диэдр* — простая форма, состоящая из двух пересекающихся граней. В зависимости от того, осью или плоскостью симметрии связаны его грани, диэдр называют осевым или безос-

[1] Кроме того, существует простая форма — одногранник.

ным. 3. *Пинакóид*[2] — простая форма, состоящая из двух параллельных граней.

В первом столбце табл. 7 помещены ромбические простые формы, во втором — тетрагональные, в третьем — тригональные, в четвертом — гексагональные. В каждой горизонтальной строке помещены аналогичные формы разных сингоний.

Призмы. 4. *Ромбическая.* 5. *Тетрагональная.* 6. *Тригональная.* 7. *Гексагональная.* Перечисленные призмы состоят из четырех, трех и шести граней, пересекающихся в параллельных ребрах. В сечениях, перпендикулярных к граням этих призм, получаются соответственно ромб, квадрат, равносторонний треугольник и правильный шестиугольник. У тетрагональной, тригональной и гексагональной призм грани параллельны главной оси.

8. *Дитетрагональная.* 9. *Дитригональная.* 10. *Дигексагональная.* Эти призмы удобно рассматривать как тетрагональную, тригональную или гексагональную призму, у которой удвоены грани таким образом, что все ее ребра параллельны главной оси. В сечениях, перпендикулярных к граням этих призм, получаются соответственно дитетрагон, дитригон и дигексагон.

Пирамиды. 11. *Ромбическая,* 12. *Тетрагональная.* 13. *Тригональная.* *14. Гексагональная.* Все грани пирамиды пересекаются в одной точке, лежащей на оси симметрии, причем ее грани равнонаклонены к этой оси.

15. *Дитетрагольная.* 16. *Дитригональная.* 17. *Дигексагональная.* Эти пирамиды удобно рассматривать как тетрагональную, тригональную и гексагональную пирамиды, у которых удвоены грани. Их грани также пересекаются в одной точке на оси симметрии и равнонаклонены к оси.

Дипирамиды. 18. *Ромбическая.* 19. *Тетрагональная.* 20. *Тригональная.* 21. *Гексагональная.* Дипирамиду можно рассматривать как две пирамиды, сложенные основаниями так, что точно под гранью верхней пирамиды находится грань нижней пирамиды, если основания сложенных пирамид расположены горизонтально.

22. *Дитетрагональная.* 23. *Дитригональная.* 24. *Дигексагональная.*

Эти формы можно рассматривать как дипирамиды с удвоенными гранями.

Трапецоэдры[3]. 25. *Тетрагональный.* 26. *Тригональный.* *27. Гексагональный.* Трапецоэдр можно представить как две пирамиды, сложенные основаниями так, что верхняя пирамида повернута относительно нижней на произвольный угол. Следует обратить внимание на проекцию, по которой видно, что нижняя грань трапецоэдра находится между двумя верхними и вообще не посередине между ними.

Тетраэдры. 28. *Ромбический.* 29. *Тетрагональный.* Из геометрии известен кубический (правильный) тетраэдр (в нашем опи-

---

[2] Пинакс (греч.) — доска.

[3] Трапеца (греч.) — четырехугольник с двумя равными смежными сторонами.

сании он имеет № 33). Тетрагональный тетраэдр можно рассматривать как кубический, сжатый или вытянутый по L_{i4}. Ромбический тетраэдр удобно представлять себе как тетрагональный, скрученный вокруг L_{i4}.

30. *Ромбо́эдр.* Его можно рассматривать как куб, сжатый или вытянутый по L_3, или как две тригональные пирамиды, сложенные основаниями так, что точно посередине между двумя гранями верхней пирамиды находится грань нижней. Это хорошо видно на проекции. Ромбоэдр, получающийся за счет сжатия куба, называется тупым, а за счет растяжения — острым.

Скалено́эдры[4]. 31. *Тетрагональный.* 32. *Тригональный* (или дитригональный). Тетрагональный скаленоэдр удобно рассматривать как тетрагональный тетраэдр с удвоенными гранями, а тригональный скаленоэдр — как ромбоэдр с удвоенными гранями.

Простые формы кубической сингонии. 33. *Тетраэдр* — в кубической сингонии единственный четырехгранник. 34. *Октаэдр* — в кубической сингонии единственный восьмигранник. 35. *Триго́н-тритетра́эдр.* 36. *Тригон-триоктаэдр.* 37. *Тетрагон-тритетраэдр.* 38. *Тетрагон-триоктаэдр.* 39. *Пентагон-тритетраэдр.* 40. *Пентагон-триоктаэдр.*

Первое слово названия каждой из этих простых форм отражает контур грани, а второе показывает, что грань тетраэдра или октаэдра заменена тремя гранями.

41. *Гекстетраэдр* (или гексатетраэдр). 42. *Гексоктаэдр.*

По аналогии с предыдущими эти простые формы должны бы называться: тригон-гекстетраэдр и тригон-гексоктаэдр. Но их названия сокращены. Гексоктаэдр — сорокавосьмигранник. Это самая богатая гранями простая форма.

43. *Векса́эдр* (куб) — в кубической сингонии единственный шестигранник. 44. *Тетрагекса́эдр* — гексаэдр с учетверенными гранями. В его названии форма грани — тригон — для сокращения опущена. 45. *Пентаго́н-додека́эдр* — 12-гранник с пятиугольными гранями. Его можно рассматривать как гексаэдр с удвоенными гранями. 46. *Дидодекаэдр* — пентагон-додекаэдр с удвоенными гранями. 47. *Ромбододекаэдр* — 12-гранник. Его грани имеют форму ромбов.

Простая форма определяется числом и взаимным расположением граней. То и другое зависит от положения граней относительно элементов симметрии.

Простые формы разделяются на *частные* и *общие.*

Простая форма называется *частной,* если ее грань:

1) параллельна какому-нибудь элементу симметрии[5],

2) перпендикулярна какому-нибудь элементу симметрии,

3) образует одинаковые углы с двумя равными элементами симметрии[6].

[4] Скаленос (греч.) — косой, неравносторонний треугольник.

[5] У кристаллов кубической сингонии грань общей формы может быть параллельна L_3.

[6] В учебниках кристаллографии это условие обычно опускается или формулируется недостаточно четко. Определение равных элементов симметрии см. на с. 66.

Простая форма называется *общей*, если положение ее грани не удовлетворяет ни одному из приведенных выше трех условий.

Кроме того, простые формы разделяются на *замкнутые* и *незамкнутые*. К первым относятся дипирамиды, тетраэдры, трапецо-

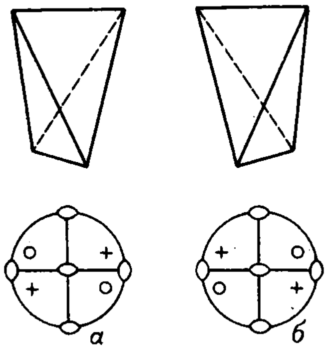


Рис. 73. Правый и левый ромбические тетраэдры.

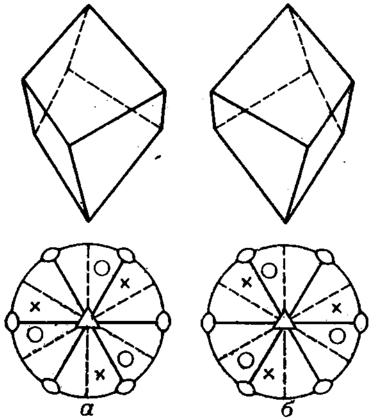


Рис. 74. Правый и левый тригональные трапецоэдры.

эдры и другие, ко вторым — моноэдры, диэдры, пинакоиды, призмы и пирамиды.

Многие простые формы имеют две разновидности: правую и левую, например, ромбические тетраэдры (рис. 73), все трапецоэдры (рис. 74), пентагон-тритетраэдры и др. Комбинационные многогранники также бывают правые и левые (рис. 75).

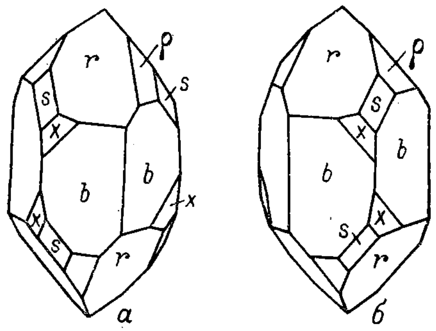


Рис. 75. Правый и левый кристаллы кварца.

Грани разных простых форм отмечены разными буквами.

Две зеркально-равные фигуры, не совместимые друг с другом путем переносов и поворотов, называются энантиоморфными (противоположно равными)[7].

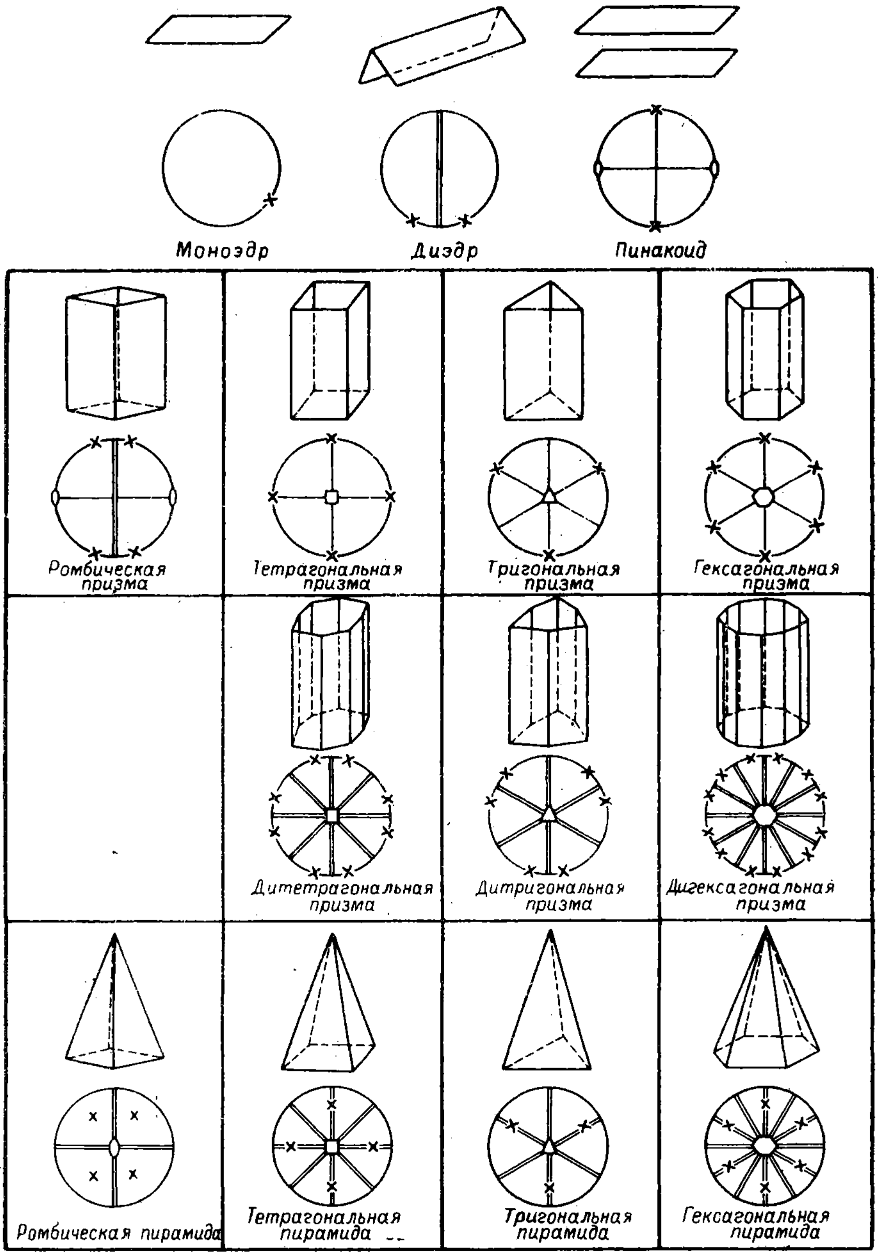
Энантиоморфные формы возможны только в тех видах симметрии, в которых отсутствуют инверсионные оси, плоскости симметрии и центр инверсии. Такими видами симметрии являются все примитивные и аксиальные виды.

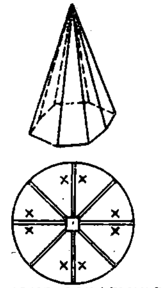
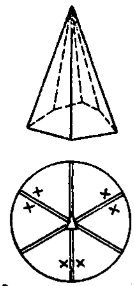
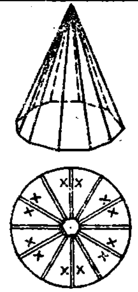
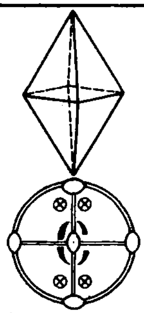
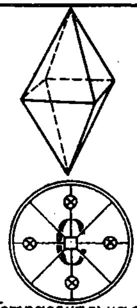
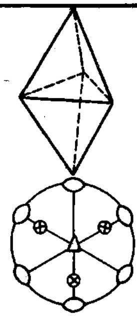
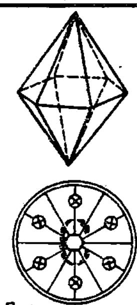
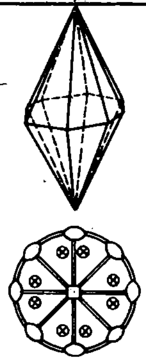
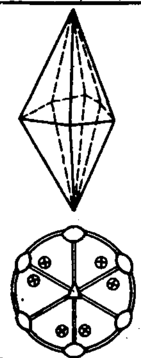
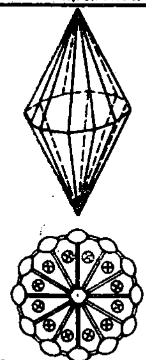
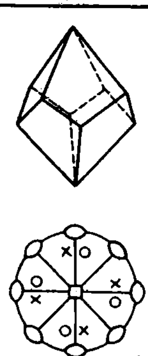
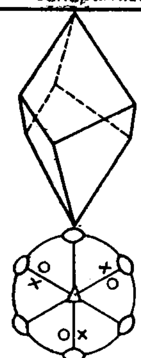
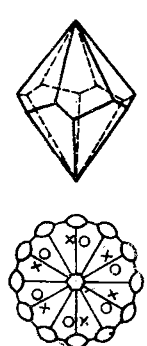
[7] Энантиос (греч.) — противоположный; морфе (греч.) — форма.

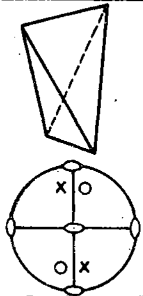
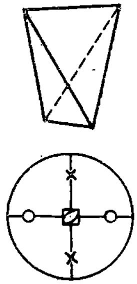
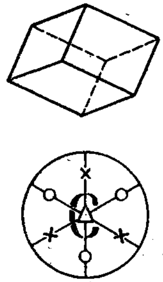
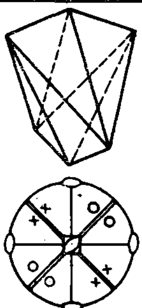
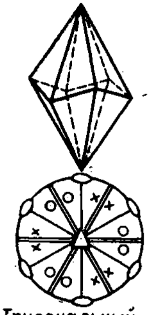
Таблица 7

ПРОСТЫЕ ФОРМЫ И ИХ ПРОЕКЦИИ

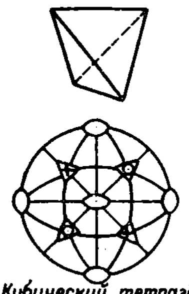
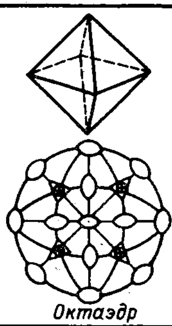
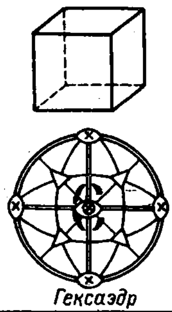
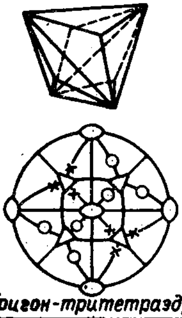
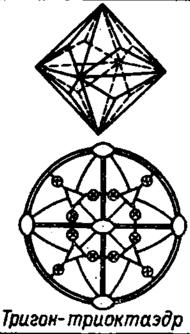
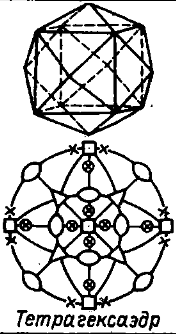
1 Простые формы низшей и средней категории.

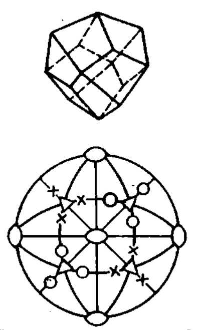


	 Дитетрагональная пирамида	 Дитригональная пирамида	 Дигексагональная пирамида
 Ромбическая дипирамида	 Тетрагональная дипирамида	 Тригональная дипирамида	 Гексагональная дипирамида
	 Дитетрагональная дипирамида	 Дитригональная дипирамида	 Дигексагональная дипирамида
	 Тетрагональный трапецоэдр	 Тригональный трапецоэдр	 Гексагональный трапецоэдр

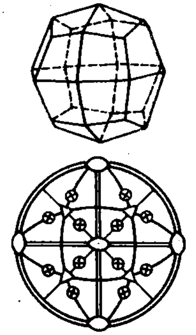
 Ромбический тетраэдр	 Тетрагональный тетраэдр	 Ромбоэдр	
	 Тетрагональный скаленоэдр	 Тригональный скаленоэдр	

2. Простые формы кубической сингонии.

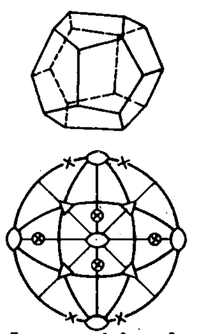
 Кубический тетраэдр	 Октаэдр	 Гексаэдр
 Тригон-тритетраэдр	 Тригон-триоктаэдр	 Тетрагексаэдр



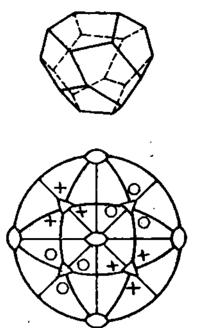
Тетрагон-тритетраэдр



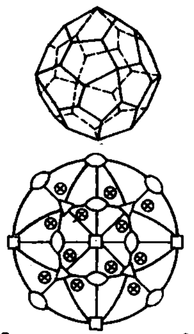
Тетрагон-триоктаэдр



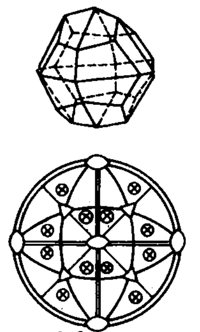
Пентагон-додекаэдр



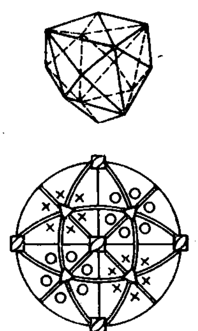
Пентагон-тритетраэдр



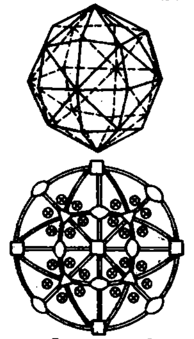
Пентагон-триоктаэдр



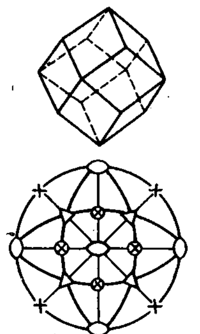
Дидодекаэдр



Гексатетраэдр



Гексоктаэдр



Ромбо-додекаэдр

[1] На табл. 7 при изображении проекций простых форм не всегда приводится полная совокупность элементов симметрии.— *Примеч. ред.*

Вопросы для повторения

1. Что называется формой многогранника?
2. Что называется простой формой?
3. Какая простая форма называется частной и какая — общей (три признака)?
4. Какие фигуры называются энантиоморфными?
5. В каких видах симметрии возможны энантиоморфные формы?
6. Чем отличается ромбоэдр от гексаэдра, тригональной дипирамиды, тригонального трапецоэдра?

§ 2. Простые формы, возможные в каждом виде симметрии

Используя стереографические проекции элементов симметрии и гномостереографические проекции граней, можно легко и наглядно вывести все простые формы, возможные в каждом виде симметрии. Результаты такого вывода сведены в табл. 8 (с. 85—94).

В каждом виде симметрии возможны общие формы только одного названия, т. е. каждый вид симметрии характеризуется определенной общей формой. В табл. 8 приведены однозначные названия видов симметрии по общим формам. Одновременно с чтением изложенных ниже пояснений необходимо смотреть соответствующие данные в таблице.

Возьмем вид симметрии 1. Поскольку в нем нет элементов симметрии, то не может быть и симметрично-равных граней. Следовательно, в этом виде симметрии возможны только моноэдры — общие формы. Вид симметрии — моноэдрический.

В виде симметрии $\bar{1}$ обязательно каждой грани будет равная и параллельная грань. В нем возможны только пинакоиды. Вид симметрии — пинакоидальный.

В виде симметрии m возможны три различных расположения граней относительно m.

1. Грань перпендикулярна к m. При отражении в плоскости она совмещается сама с собой. Новой симметрично-равной грани не получить. Поэтому любая грань, перпендикулярная к m, будет моноэдром.

2. Грань параллельна m. За счет отражения в m получится вторая грань, параллельная первой. Эти две равные и параллельные грани образуют пинакоид.

3. Грань расположена косо относительно m. За счет отражения в плоскости получается вторая грань. Эти две грани непосредственно или при их продолжении пересекаются друг с другом, следовательно, они образуют диэдр. Вид симметрии — диэдрический безосный.

Возьмем вид симметрии $\bar{3}m$ и рассмотрим все мыслимые положения граней относительно элементов симметрии.

1. Грань$\perp L_3$. Пусть это будет верхняя грань. Повернув ее вокруг любой из осей второго порядка или отразив в C, получим вто-

рую нижнюю грань, перпендикулярную L_3, равную и параллельную первой грани. Эти две грани образуют пинакоид.

2. Грань $\perp m$ и $\| L_3$. Поворотами грани вокруг осей 2-го порядка или поворотами вокруг L_3 и отражением в C получаются шесть граней, параллельных главной оси. Это — гексагональная призма.

3. Грань $\perp L_2$ и $\| L_3$. Отразив ее в плоскостях симметрии или повернув вокруг L_3 и отразив в C, получим шесть граней, пересекающихся в параллельных ребрах. Это — вторая гексагональная призма.

4. Грань $\| L_3$. Действием имеющихся элементов симметрии из одной грани получим 12 граней, пересекающихся в параллельных ребрах — дигексагональную призму.

5. Грань $\perp m$. Действием $3L_2$ или L_3 и C из одной грани получим шесть граней. Три из них образуют пирамиду, обращенную вершиной вверх, а три других — пирамиду, обращенную вершиной вниз. Каждая из нижних граней находится точно посередине между двумя верхними гранями. Это — ромбоэдр.

Следует обратить внимание на то, что в результате поворота верхней грани вокруг горизонтальной L_2 получается симметричная грань снизу.

6. Грань образует одинаковые углы с двумя равными плоскостями симметрии. Действием имеющихся элементов симметрии из одной грани получается двенадцать граней. Шесть верхних граней образуют пирамиду, а шесть нижних — вторую пирамиду. Каждая грань нижней пирамиды находится под гранью верхней пирамиды. Это — гексагональная дипирамида.

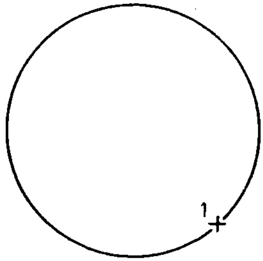
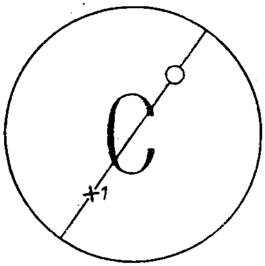
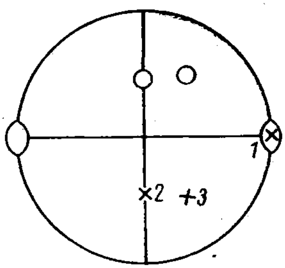
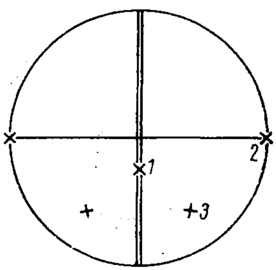
7. Грань занимает общее положение относительно элементов симметрии. Действием элементов симметрии из одной грани получается двенадцать граней. Выведенную простую форму можно рассматривать как ромбоэдр с удвоенными гранями. Это — тригональный скаленоэдр. Вид симметрии тригонально-скаленоэдрический.

Рассмотрим все возможные простые формы еще для одного вида симметрии — $2/m3$, относящегося к кубической сингонии (табл. 8).

1. Грань $\perp L_3$ — октаэдр.
2. Грань $\perp L_2$ — гексаэдр.
3. Грань $\perp m$ и образует одинаковые углы с двумя равными L_2 (и с двумя равными m) — ромбододекаэдр.
4. Грань $\perp m$ — пентагон-додекаэдр.
5. Грань образует одинаковые углы с двумя равными m (и с двумя равными L_2) и проектируется между L_3 и биссектрисой угла, образованного двумя L_2. Это — тригон-триоктаэдр.
6. Грань образует одинаковые углы с двумя равными m (и с двумя равными L_2) и проектируется между проекциями L_2 и L_3 — тетрагон-триоктаэдр.
7. Грань занимает общее положение. Проекция грани общего положения у кристаллов кубической сингонии может находиться

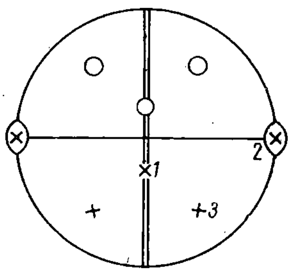
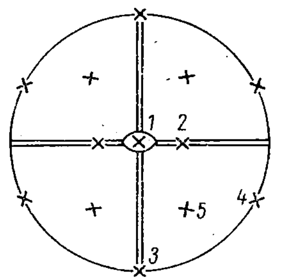
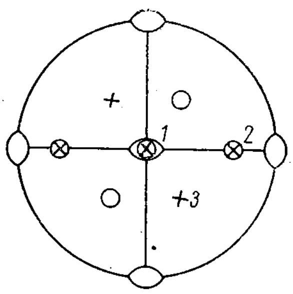
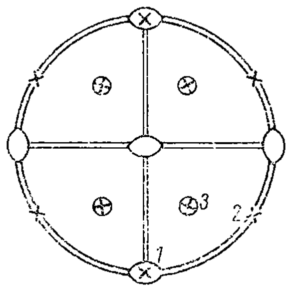
Таблица 8

Простые формы, возможные в каждом виде симметрии, и их символы [1]

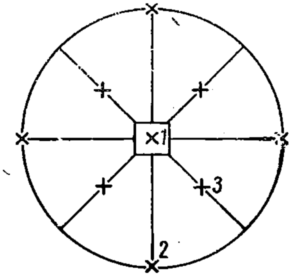
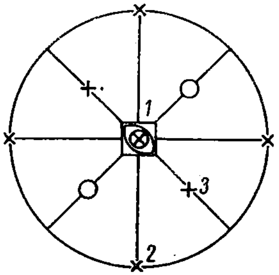
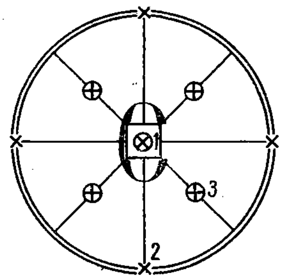
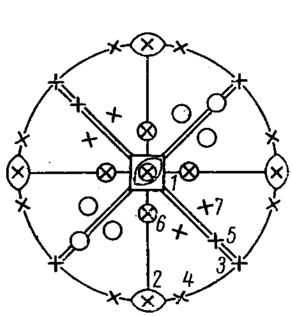
Сингония	Вид симметрии	Проекции и названия простых форм		Символы[2]
Триклинная	1 Моноэдрический (примитивный)		1—моноэдр	Любые
	$\bar{1}$ Пинакоидальный (инверсионно-примитивный)		1—пинакоид	Любые
Моноклинная	2 Диэдрический осевой (примитивный)		1—моноэдр 2—пинакоид 3 — диэдр	$\{\underline{010}\}$ $\{\underline{h0l}\}$, {101}, {100}, $\{\underline{hkl}\}$, {111}, {011}, {110}
	m Диэдрический безосный (инверсионно-примитивный)		1—моноэдр 2—пинакоид 3—диэдр	$\{\underline{h0l}\}$, {101}, {100}, {001} $\{\underline{010}\}$ $\{\underline{hkl}\}$, {111}, {011}, {110}

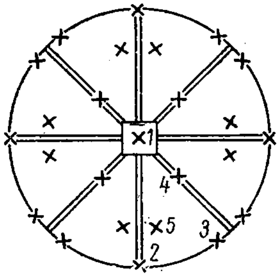
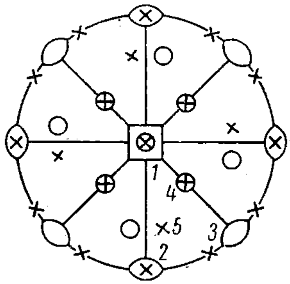
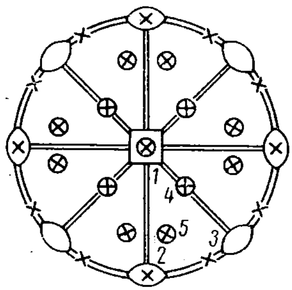
[1] На проекциях видов симметрии $2/m$, $4/mm$ и др. не приведено обозначение центра инверсии (С). Разъяснения к графе «символы» см. с. 124. — *Примеч. ред.*

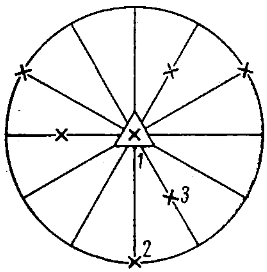
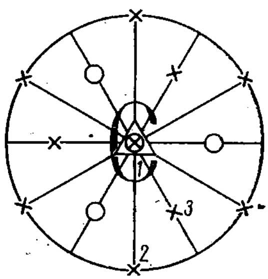
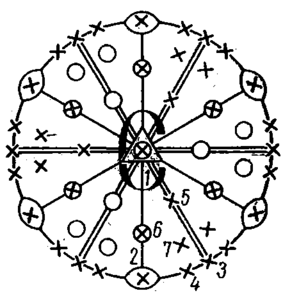
[2] Единственные значения символов и символы в наиболее общем виде подчеркнуты. Символы простых форм, отличающиеся от приведенных только знаками индексов, в таблице не указаны.

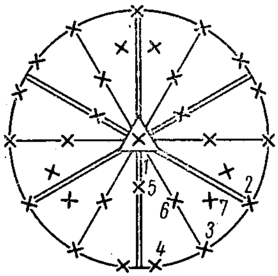
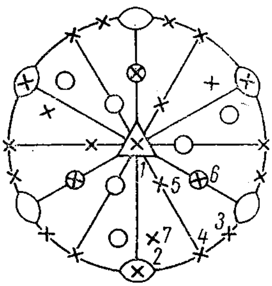
Сингония	Вид симметрии	Проекции и названия простых форм		Символы
Моноклинная	$2/m$ Призматический[3] (центральный)		1,2—пинакоид 3—ромбическая призма	{h0l} {101}, {001}, {100}, {010} {hkl} {111}, {011}, {110}
Ромбическая	mm Ромбо-пирамидальный (планальный)		1—моноэдр 2—диэдр 3—пинакоид 4—ромбическая призма 5—ромбическая пирамида	{001} {h0l}, {101}, {0kl} {011} {100}, {010} {hk0}, {110} {hkl}, {111}
	22 Ромбо-тетраэдрический (аксиальный)		1—пинакоид 2—ромбическая призма 3—ромбический тетраэдр	{100}, {010}, {001} {hk0}, {110}, {h0l} {101}, {0kl}, {011} {hkl}, {111}
	mmm Ромбо-дипирамидальный (аксиально-центральный)		1—пинакоид 2—ромбическая призма 3—ромбическая дипирамида	{100}, {010}, {001} {hk0}, {110}, {h0l}, {101}, {0kl}, {011} {hkl}, {111}

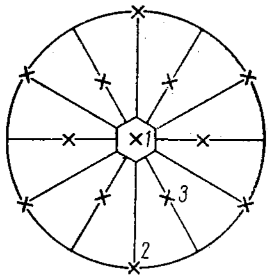
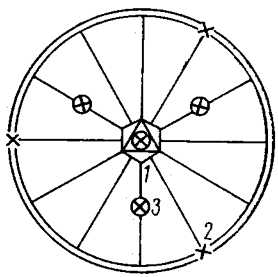
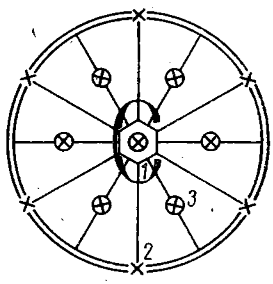
[3] Из всех призм только ромбическая может быть общей формой. Поэтому название данного вида симметрии упрощается, вместо ромбопризматического он называется призматическим.

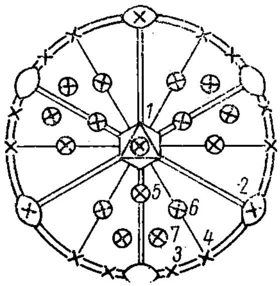
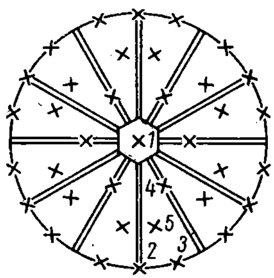
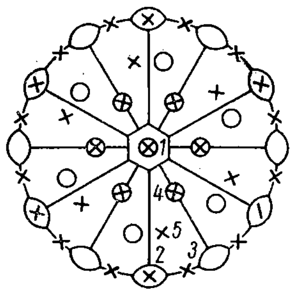
Сингония	Вид симметрии	Проекции и названия простых форм		Символы
Тетрагональная	4 Тетраго-нально-пирами-дальный (прими-тивный)		1—моноэдр 2—тетрагональная призма 3—тетрагональная пирамида	{001} {hk0}, {110}, {100} {hkl}, {111}, {101}
	$\bar{4}$ Тетраго-нально-тетраэд-рический (инверси-онно-при-митив-ный)		1—пинакоид 2—тетрагональная призма 3—тетрагональный тетраэдр	{001} {hk0}, {110}, {100} {hkl}, {111}, {101}
	4/m Тетраго-нально-дипира-мидаль-ный (цент-ральный)		1—пинакоид 2—тетрагональная призма 3—тетрагональная дипирамида	{001} {hk0}, {110}, {100} {hkl}, {111}, {101}
	$\bar{4}m$ Тетраго-нально-скалено-эдриче-ский (ин-версион-но-пла-нальный)		1—пинакоид 2—3—тетрагональная призма 4—дитетрагональная призма 5—тетрагональный тетраэдр 6—тетрагональная дипирамида 7—тетрагональный скаленоэдр	{001} {100}, {110} {hk0} {hhl}, {111} {h0l}, {101} {hkl}

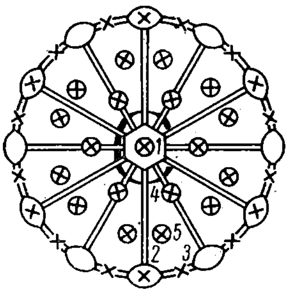
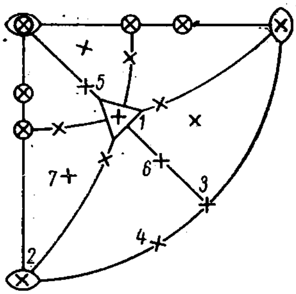
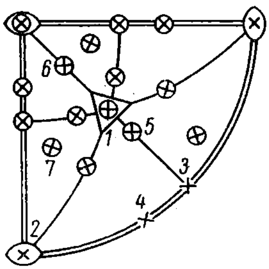
Сингония	Вид симметрии	Проекции и названия простых форм		Символы
Тетрагональная	$4m$ Дитетрагонально-пирамидальный (планальный)		1—моноэдр 2—тетрагональная призма 3—дитетрагональная призма 4—тетрагональная пирамида 5—дитетрагональная пирамида	{001} {100}, {110} {*hk*0} {*h*0*l*}, {101} {*hhl*}, {111} {*hkl*}
	42 Тетрагонально-трапецоэдрический (аксиальный)		1—пинакоид 2—тетрагональная призма 3—дитетрагональная призма 4—тетрагональная дипирамида 5—тетрагональный трапецоэдр	{001} {100}, {110} {*hk*0} {*h*0*l*}, {101} {*hhl*}, {111} {*hkl*}
	$4/mm$ Дитетрагонально-дипирамидальный (аксиально-центральный)		1—пинакоид 2—тетрагональная призма 3—дитетрагональная призма 4—тетрагональная дипирамида 5—дитетрагональная дипирамида	{001} {100}, {110} {*hk*0} {*h*0*l*}, {101} {*hhl*}, {111} {*hkl*}

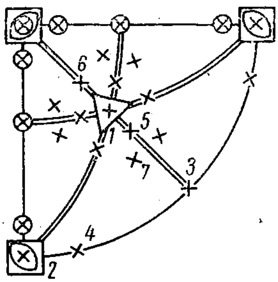
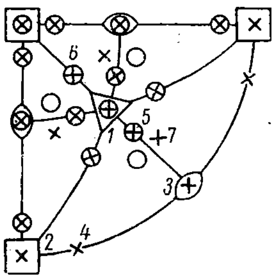
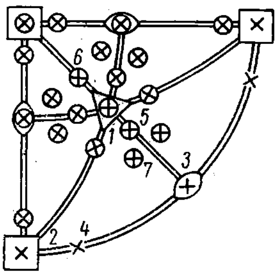
Сингония	Вид симметрии	Проекции и названия простых форм		Символы
Тригональная	3 Тригонально-пирамидальный		1—моноэдр 2—тригональная призма 3—тригональная пирамида	$\{0001\}$ $\{hk\bar{i}0\}$, $\{01\bar{1}0\}$, $\{10\bar{1}0\}$, $\{11\bar{2}0\}$, $\{\bar{1}2\bar{1}0\}$ $\{hk\bar{i}l\}$, $\{01\bar{1}1\}$, $\{10\bar{1}1\}$, $\{11\bar{2}1\}$, $\{\bar{1}2\bar{1}1\}$
	$\bar{3}$ Ромбоэдрический (инверсионно-примитивный)		1—пинакоид 2—гексагональная призма 3—ромбоэдр	$\{0001\}$ $\{hk\bar{i}0\}$, $\{01\bar{1}0\}$, $\{11\bar{2}0\}$ $\{hk\bar{i}l\}$, $\{01\bar{1}1\}$, $\{11\bar{2}1\}$
	$\bar{3}m$ Тригонально-скаленоэдрический (инверсионно-планальный)		1—пинакоид 2,3—гексагональная призма 4—дигексагональная призма 5—ромбоэдр 6—гексагональная дипирамида 7—тригональный скаленоэдр	$\{0001\}$ $\{01\bar{1}0\}$ $\{11\bar{2}0\}$ $\{hk\bar{i}0\}$ $\{0k\bar{k}l\}$, $\{01\bar{1}1\}$ $\{hh\overline{2h}l\}$, $\{11\bar{2}1\}$ $\{hk\bar{i}l\}$

Сингония	Вид симметрии	Проекции и названия простых форм		Символы
Тригональная	$3m$ Дитригонально-пирамидальный (планальный)		1—моноэдр	$\{0001\}$
			2—тригональная призма	$\{11\bar{2}0\}$, $\{\bar{1}2\bar{1}0\}$
			3—гексагональная призма	$\{01\bar{1}0\}$
			4—дитригональная призма	$\{hk\bar{i}0\}$
			5—тригональная пирамида	$\{hh\overline{2h}l\}$, $\{11\bar{2}1\}$ $\{\bar{h}2h\bar{h}l\}$, $\{\bar{1}2\bar{1}\bar{1}\}$
			6—гексагональная пирамида	$\{0k\bar{k}l\}$, $\{01\bar{1}1\}$
			7—дитригональная пирамида	$\{hk\bar{i}l\}$
	32 Тригонально-трапецоэдрический (аксиальный)		1—пинакоид	$\{0001\}$
			2—тригональная призма	$\{11\bar{2}0\}$ $\{\bar{1}2\bar{1}0\}$
			3—дитригональная призма	$\{hk\bar{i}0\}$
			4—гексагональная призма	$\{01\bar{1}0\}$
			5—ромбоэдр	$\{0k\bar{k}l\}$, $\{01\bar{1}1\}$
			6—тригональная дипирамида	$\{hh\overline{2h}l\}$, $\{11\bar{2}1\}$, $\{\bar{h}2h\bar{h}l\}$; $\{\bar{1}2\bar{1}1\}$
			7—тригональный трапецоэдр	$\{hk\bar{i}l\}$

Сингония	Вид симметрии	Проекции и названия простых форм		Символы
Гексагональная	6 Гексагонально-пирамидальный (примитивный)		1—моноэдр 2—гексагональная призма 3—гексагональная пирамида	$\{0001\}$ $\{hk\bar{i}0\}$, $\{01\bar{1}0\}$, $\{11\bar{2}0\}$ $\{hk\bar{i}l\}$, $\{01\bar{1}1\}$, $\{11\bar{2}1\}$
	$\bar{6}$ Тригонально-дипирамидальный (инверсионно-примитивный)		1—пинакоид 2—тригональная призма 3—тригональная дипирамида	$\{0001\}$ $\{hk\bar{i}0\}$, $\{10\bar{1}0\}$, $\{01\bar{1}0\}$, $\{11\bar{2}0\}$, $\{1\bar{2}10\}$ $\{hk\bar{i}l\}$, $\{01\bar{1}\bar{1}\}$, $\{11\bar{2}1\}$, $\{10\bar{1}\bar{1}\}$, $\{\bar{1}2\bar{1}1\}$
	$6/m$ Гексагонально-дипирамидальный (центральный)		1—пинакоид 2—гексагональная призма 3—гексагональная дипирамида	$\{0001\}$ $\{hk\bar{i}0\}$, $\{01\bar{1}0\}$, $\{11\bar{2}0\}$ $\{hk\bar{i}l\}$, $\{01\bar{1}1\}$, $\{11\bar{2}1\}$

Сингония	Вид симметрии	Проекции и названия простых форм		Символы
Гексагональная	$\bar{6}m$ Дитригонально-дипирамидальный (инверсионно-планальный)		1—пинакоид 2—тригональная призма 3—дитригональная призма 4—гексагональная призма 5—тригональная дипирамида 6—гексагональная дипирамида 7—дитригональная дипирамида	$\{0001\}$ $\{11\bar{2}0\}$, $\{\bar{1}2\bar{1}0\}$ $\{hk\bar{i}0\}$ $\{01\bar{1}0\}$ $\{hh\overline{2h}l\}$, $\{11\bar{2}1\}$ $\{0k\bar{k}l\}$, $\{01\bar{1}1\}$ $\{hk\bar{i}l\}$
	$6m$ Дигексагонально-пирамидальный (планальный)		1—моноэдр 2—гексагональная призма 3—дигексагональная призма 4—гексагональная пирамида 5—дигексагональная пирамида	$\{0001\}$ $\{01\bar{1}0\}$, $\{11\bar{2}0\}$ $\{hk\bar{i}0\}$ $\{0k\bar{k}l\}$, $\{01\bar{1}1\}$, $\{hh\overline{2h}l\}$, $\{11\bar{2}1\}$ $\{hk\bar{i}l\}$
	62 Гексагонально-трапецоэдрический (аксиальный)		1—пинакоид 2—гексагональная призма 3—дигексагональная призма 4—гексагональная дипирамида 5—гексагональный трапецоэдр	$\{0001\}$ $\{01\bar{1}0\}$, $\{11\bar{2}0\}$ $\{hk\bar{i}0\}$ $\{0k\bar{k}l\}$, $\{01\bar{1}1\}$ $\{hh\overline{2h}l\}$, $\{11\bar{2}1\}$ $\{hk\bar{i}l\}$

Сингония	Вид симметрии	Проекции и названия простых форм		Символы
Гексагональная	$6/mm$ Дигексагонально-дипирамидальный (аксиально-центральный)		1—пинакоид	{0001}
			2—гексагональная призма	$\{01\bar{1}0\}$, $\{11\bar{2}0\}$
			3—дигексагональная призма	$\{hk\bar{i}0\}$
			4—гексагональная дипирамида	$\{0k\bar{k}l\}$, $\{01\bar{1}1\}$ $\{h\bar{h}\overline{2h}l\}$, $\{11\bar{2}1\}$
			5—дигексагональная дипирамида	$\{hk\bar{i}l\}$
Кубическая	23 Пентагон-тритетраэдрический (примитивный)		1—тетраэдр кубический	{111}
			2—гексаэдр	{100}
			3—ромбододекаэдр	{110}
			4—пентагон-додекаэдр	$\{hk0\}$
			5—тригон-тритетраэдр	$\{hhl\}$ $h < l$
			6—тетрагон-тритетраэдр	$\{hhl\}$ $h > l$
			7—пентагон-тритетраэдр	$\{hkl\}$
	$m3$ Дидодекаэдрический (центральный)		1—октаэдр	{111}
			2—гексаэдр	{100}
			3—ромбододекаэдр	{110}
			4—пентагон-додекаэдр	$\{hk0\}$
			5—тригон-триоктаэдр	$\{hhl\}$ $h > l$
			6—тетрагон-триоктаэдр	$\{hhl\}$ $h < l$
			7—дидодекаэдр	$\{hkl\}$

Сингония	Вид симметрии	Проекции и названия простых форм		Символы
Кубическая	$\bar{4}3m$ Гекстетраэдрический (инверсионно-планальный)		1—тетраэдр кубический	$\{111\}$ $\{11\bar{1}\}$
			2—гексаэдр	$\{100\}$
			3—ромбододекаэдр	$\{110\}$
			4—тетрагексаэдр	$\{hk0\}$
			5—тетрагонтритетраэдр	$\{hhl\}$ $h > l$
			6—тригонтритетраэдр	$\{hhl\}$ $h < l$
			7—гекстетраэдр	$\{hkl\}$
	432 Пентагонтриоктаэдрический (аксиальный)		1—октаэдр	$\{111\}$
			2—гексаэдр	$\{100\}$
			3—ромбододекаэдр	$\{110\}$
			4—тетрагексаэдр	$\{hk0\}$
			5—тригон-триоктаэдр	$\{hhl\}$ $h > l$
			6—тетрагонтриоктаэдр	$\{hhl\}$ $h < l$
			7—пентагонтриоктаэдр	$\{hkl\}$
	$m3m$ Гексоктаэдрический (аксиально-центральный)		1—октаэдр	$\{111\}$
			2—гексаэдр	$\{100\}$
			3—ромбододекаэдр	$\{110\}$
			4—тетрагексаэдр	$\{hk0\}$
			5—тригонтриоктаэдр	$\{hhl\}$ $h > l$
			6—тетрагонтриоктаэдр	$\{hhl\}$ $h < l$
			7—гексоктаэдр	$\{hkl\}$

в любой точке любого треугольника, образованного вспомогательными линиями (см. рис. 37), но только не на сторонах этих треугольников. Вывод с помощью элементов симметрии всех симметричных граней дает 24 грани, которые можно рассматривать как пентагон-додекаэдр с удвоенными гранями, т. е. дидодекаэдр. Вид симметрии — дидодекаэдрический.

Рассмотрим несколько замечаний о распределении простых форм по сингониям.

1. Моноэдр и пинакоид встречаются у кристаллов низшей и средней категорий.

2. Простые формы, возможные в низшей категории, невозможны в кубической сингонии.

3. Простые формы, возможные в средней категории, невозможны в кубической сингонии, и все, кроме моноэдров и пинакоидов, невозможны в низшей категории.

4. Простые формы кубической сингонии невозможны ни в средней, ни в низшей категориях.

5. Ромбическая призма возможна не только в ромбической сингонии, но и в моноклинной.

Иногда ромбическая призма ошибочно принимается за тетрагональную. А именно в тех нередких случаях, когда у ромбических призм углы между гранями оказываются очень близкими к 90°[8].

6. Тригональная и гексагональная призмы, а также ряд других простых форм бывают как у тригональных, так и гексагональных кристаллов.

7. Во многих случаях одна и та же простая форма встречается в разных видах симметрии одной или нескольких сингоний. Исключение составляют следующие 19 простых форм, каждая из которых встречается только в одном виде симметрии:

1) ромбическая пирамида; 2) ромбический тетраэдр; 3) ромбическая дипирамида; 4) дитетрагональная пирамида; 5) тетрагональный трапецоэдр; 6) тетрагональный скаленоэдр; 7) дитетрагональная дипирамида; 8) дитригональная пирамида; 9) тригональный трапецоэдр; 10) тригональный скаленоэдр; 11) дитригональная дипирамида; 12) дигексагональная пирамида; 13) гексагональный трапецоэдр; 14) дигексагональная дипирамида; 15) пентагон-тритетраэдр; 16) дидодекаэдр; 17) гекстетраэдр; 18) пентагон-триоктаэдр; 19) гексоктаэдр.

В разных видах симметрии одна и та же простая форма обладает разной симметрией. Поэтому в кристаллографии существуют пять гексаэдров, отличающихся по симметрии, два кубических тетраэдра, три октаэдра и т. д.

---

[8] Если учесть, что по единичным прямым коэффициенты теплового расширения вообще различны, то у ромбических простых форм углы между гранями могут оказаться равными углам между гранями аналогичных тетрагональных форм в пределах точности измерения только при данных термодинамических условиях.

Вопросы для повторения

1. В чем заключается принцип вывода всех простых форм, возможных в данном виде симметрии?
2. Какое значение для классификации видов симметрии имеют общие формы?
3. Какие простые формы возможны: а) в низшей категории, б) в средней категории, в) в высшей категории?
4. Почему в ромбической сингонии невозможна тетрагональная призма, тетрагональная пирамида, тетрагональная дипирамида, тетрагональный тетраэдр?

Задача

На проекциях нескольких видов симметрии разных сингоний выведите все простые формы, возможные в каждом из этих видов. Назовите виды симметрии по общим формам.

§ 3. Практическое определение названий простых форм, составляющих комбинационные формы

Определение следует начинать с выяснения количества простых форм, образующих данную комбинационную форму. Простых форм оказывается столько, сколько сортов граней имеется на данном комбинационном многограннике.

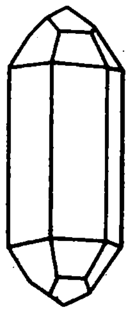


Рис. 76. Шесть прямоугольных граней, образующих две тригональные призмы.

Замечание 1. К разным сортам относятся грани, отличающиеся друг от друга по величине и очертаниям. Грани, принадлежащие одной простой форме, связаны друг с другом элементами симметрии, и на идеализированных моделях они обязательно равны друг другу. Но иногда могут встретиться комбинационные многогранники, у которых грани, равные по величине и очертаниям, не будут односортными. В таком случае необходимо увидеть на многограннике или на его проекции, что рассматриваемые грани не связаны друг с другом элементами симметрии, и, следовательно, они не могут принадлежать одной простой форме.

Например, у многогранника, изображенного на рис. 76, смежные вертикальные грани не связаны друг с другом элементами симметрии. Поэтому они образуют две простые формы, каждая из которых состоит из трех граней (две тригональные призмы).

Замечание 2. Контуры грани простой формы, находящейся в комбинации, вообще не являются диагностическим признаком для определения названий простой формы. На рис. 77, *а, б, в* изображены комбинации одних и тех же двух простых форм. Все три многогранника относятся к виду симметии $m3m$. Разница между этими многогранниками заключается в соотношении размеров граней шести- и восьмигранника. Грани шестигранника уменьшаются при переходе от вида *а* к *в*, а грани восьмигранника соответственно увеличиваются.

В случае *а* грани шестигранника — восьмиугольники, а восьмигранника — треугольники; в случае *б* грани шестигранника — квадраты, а восьмигранника — треугольники; в случае *в* грани шестигранника — квадраты, а восьмигранника — шестиугольники. Итак, мы видим, что *контуры грани простой формы, находящейся в комбинации, не постоянны и определяются соотношением размеров*

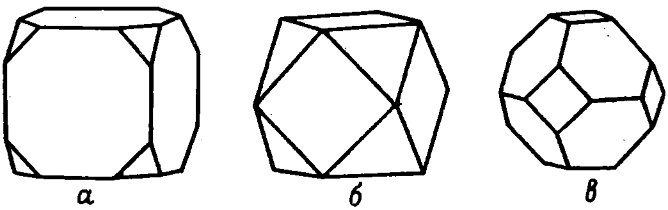


Рис. 77. Три комбинации (*а, б, в*) куба и октаэдра при различном соотношении размеров граней простых форм.

граней простых форм, образующих комбинационную форму. Контуры грани данной простой формы зависят еще и от того, с какой другой простой формой она образует комбинацию, а также от количества простых форм, составляющих комбинационную форму.

Существует несколько способов определения простых форм, входящих в комбинационные формы.

1. По количеству граней данной простой формы во многих случаях однозначно определяется ее название. Например, на рис. 77 многогранники, принадлежащие к виду симметрии $m3m$, образованы шести- и восьмигранниками. В кубической сингонии имеется только один шестигранник — гексаэдр и один восьмигранник — октаэдр.

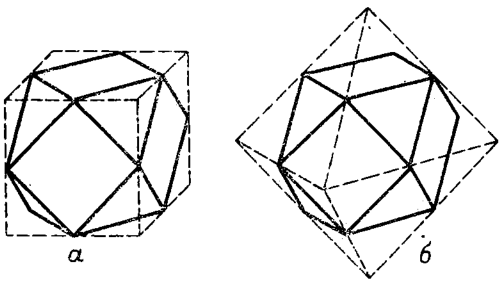


Рис. 78. Комбинационная форма (сплошная линия) и мысленное продолжение равных граней до пересечения друг с другом (пунктир), позволяющее «увидеть» простую форму:

а) куб, *б*) октаэдр.

2. Мысленное продолжение граней одной простой формы до пересечения друг с другом дает возможность увидеть контуры ее граней и всю простую форму. На рис. 78 *а* и *б* пунктирными линиями показано, что продолжение квадратных граней до пересечения друг с другом дает гексаэдр, а продолжение треугольных граней дает октаэдр. Этот способ часто оказывается выгоднее других, но он требует некоторого пространственного воображения. Иногда, особенно по граням малой величины, бывает трудно представить себе простую форму.

3. Построив проекцию, легко узнать простую форму на память или по проекциям на табл. 7 или 8. Это наиболее простой и универсальный способ определения простых форм. Если учащийся хорошо овладел проектированием, то он без затруднений проектирует многогранники и по проекциям легко определяет названия простых форм.

4. Существуют различные вспомогательные таблицы для определения названий простых форм. Например, табл. 9, 10 и 11.

Простые формы низшей категории

Таблица 9

Взаимное расположение граней	Число граней	Простая форма
—	1	Моноэдр
Грани параллельны	2	Пинакоид
Грани пересекаются	2	Диэдр
Грани попарно (через одну) параллельны	4	Ромбическая призма
Все грани пересекаются в одной точке	4	Ромбическая пирамида
Грани не параллельны, образуют 4 вершины, в каждой из которых пересекаются по 3 грани	4	Ромбический тетраэдр
Грани попарно параллельны, образуют 6 вершин, в каждой из которых пересекаются по 4 грани	8	Ромбическая дипирамида

Таблица 10

Простые формы средней категории

Расположение граней	Число граней	Простая форма
Перпендикулярны главной оси	1 2	Моноэдр Пинакоид
Параллельны главной оси	 3 4 6 6 8 12	Призмы: тригональная, тетрагональная, гексагональная, дитригональная, дитетрагональная, дигексагональная
Пересекают главную ось в одной точке	 3 4 6 6 8 12	Пирамиды: тригональная, тетрагональная, гексагональная, дитригональная, дитетрагональная, дигексагональная

Расположение граней		Число граней	Простая форма
Грани пересекают главную ось в двух точках. Расположение граней на проекции:	Нижние грани точно под верхними	 6 8 12 12 16 24	Дипирамиды: тригональная, тетрагональная, гексагональная, дитригональная, дитетрагональная, дигексагональная
	Нижняя грань не посередине между двумя верхними	 6 8 12	Трапецоэдры: тригональный, тетрагональный, гексагональный
	Нижняя грань точно посередине между двумя верхними	4 6	Тетрагональный тетраэдр Ромбоэдр
	Нижняя пара граней точно посередине между двумя парами верхних	 8 12	Скаленоэдры: тетрагональный, тригональный

5. Кроме того, названия простых форм определяются по их символам. С символами мы познакомимся в следующей главе.

Определяя названия простых форм, образующих комбинационный многогранник, необходимо выяснить: 1) число граней формы; 2) положение граней формы относительно элементов симметрии; 3) частная это форма или общая; 4) взаимное расположение граней формы; 5) очертание грани[9]; 6) если данная форма может рассматриваться как производная, то следует выяснить, производной какой формы она является.

При определении простых форм рекомендуется пользоваться набором простых форм.

Нельзя приступать к определению простых форм, не имея совершенно ясного представления о том, что такое простая форма.

---

[9] Имеется в виду очертание грани простой формы, не находящейся в комбинации с другими простыми формами.

Таблица 11

Простые формы кубической сингонии и их символы

Расположение граней относительно координатных осей[1]		Число граней	Простая форма	Символ[3]
Грань $\perp$ одной из осей		6	Гексаэдр	$\{100\}$
Грань одинаково наклонена ко всем трем осям ($\perp$ к L_3)		4 8	Тетраэдр Октаэдр	$\{111\}$ и $\{11\bar{1}\}$ $\{111\}$
Грань $\parallel$ одной из осей и одинаково наклонена к двум другим осям		12	Ромбододекаэдр	$\{110\}$
Грань одинаково наклонена к двум осям и не параллельна третьей оси	Отсекает больший отрезок на третьей оси	12 24	Тетрагон-тритетраэдр Тригон-триоктаэдр	$\{hhl\}$ $h > l$
	Отсекает меньший отрезок на третьей оси	12 24	Тригон-триоктаэдр Тетрагон-триоктаэдр	$\{hhl\}$ $h < l$
Грань занимает общее положение.		12 24 24 24 48	23 — пентагон-тритетраэдр $2/m3$ — дидодекаэдр[2] $\bar{4}3m$ — гекстетраэдр 432 — пентагон-триоктаэдр $m3m$ — гексоктаэдр	$\{hkl\}$

[1] В любом кристалле кубической сингонии обязательно имеются три взаимно перпендикулярные и в то же время симметрично-равные прямые, которые в зависимости от вида симметрии совпадают или с $3L_4$ или с $3L_{i_4}$ или с $3L_2$. Три такие оси кубического кристалла принимаются за координатные.

[2] Следует читать: в виде симметрии $2/m3$ — дидодекаэдр и т. д.

[3] Для определения некоторых простых форм кубической сингонии можно использовать символы граней (см. гл. 6, с. 124).

Вопросы для повторения

1. Как определить количество простых форм, образующих данную комбинационную форму?
2. Перечислите известные Вам способы определения названий простых форм.

Задача

У 10—15 комбинационных форм определить названия всех простых форм. При отсутствии общей формы вывести ее на проекции и назвать вид симметрии по общей форме.

§ 4. Двойники

Во время возникновения и роста кристаллов часто образуются сростки, закономерные и незакономерные. Кристаллы, сросшиеся друг с другом в случайных взаимных ориентировках, называются *незакономерными сростками.*

Если кристаллы одного и того же состава и строения срастаются не в случайных положениях, то они образуют *закономерный сросток.* Кристаллы, сросшиеся друг с другом в параллельных положениях, называются *параллельным сростком.* В параллельных сростках решетка каждого кристалла является продолжением решетки другого или других кристаллов, участвующих в срастании. Поэтому параллельный сросток можно рассматривать как монокристалл.

Особо важное значение имеют закономерные сростки, называемые *двойниками.*

Двойником называется такой сросток двух кристаллов одинакового состава и строения, в котором один кристалл является зеркальным отображением другого или один кристалл повернут относительно другого на 180°[10].

Плоскость, отражением в которой один индивид двойника совмещается с другим или становится в параллельное положение относительно второго, называется *двойниковой плоскостью.* На рис. 79 изображен двойник минерала гипса ($CaSO_4 \cdot 2H_2O$). У него двойниковой плоскостью является плоскость ABC.

Двойниковой осью называется направление, при повороте вокруг которого на 180° один индивид двойника совмещается с другим или становится в параллельное положение относительно другого. На рис. 80 изображен двойник минерала ортоклаза ($KAlSi_3O_8$). В нем двойниковая ось параллельна ребру AB.

В зависимости от симметрии кристаллов у двойника может быть только двойниковая плоскость, только двойниковая ось или и ось и плоскость одновременно. Кристаллы гипса и ортоклаза обладают центром инверсии. Поэтому в каждом из рассматриваемых двойников имеется и двойниковая ось и двойниковая плоскость, причем ось перпендикулярна к плоскости.

---

[10] К двойникам относятся и такие сростки, где два кристалла связаны друг с другом отражением в центре инверсии.— *Примеч. ред.*

Плоскость, по которой индивиды срастаются друг с другом, называется *плоскостью срастания* или *двойниковым швом*. Плоскость срастания у одних двойников совпадает с двойниковой плоскостью (рис. 79), а у других — не совпадает (рис. 80).

Кристаллы одного и того же состава и одинакового строения могут срастаться по различным законам двойникования. В каждом отдельном случае двойниковой осью, двойниковой плоскостью и плоскостью срастания могут быть различные направления и плоскости.

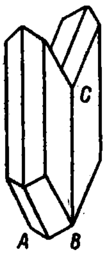


Рис. 79. Двойник срастания кристаллов гипса ($CaSO_4 \cdot 2H_2O$).

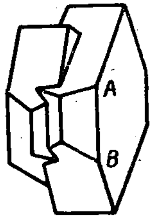


Рис. 80. Двойник прорастания кристаллов ортоклаза ($KAlSi_3O_8$).

Двойниковая ось параллельна AB. Двойниковая плоскость перпендикулярна к двойниковой оси и не совпадает с плоскостью срастания

Среди двойников различают двойники срастания (см. рис. 79) и двойники прорастания (рис. 80, 81). В двойниках срастания один индивид отграничивается от другого плоскостью срастания. В двойниках прорастания кристаллы частично обрастают друг друга (см. рис. 80) или пронизывают друг друга насквозь (рис. 81 *а* и *б*). В двойниках прорастания поверхность срастания бывает очень сложной, ступенчатой и извилистой (рис. 82).

Для кристаллов некоторых веществ характерно срастание в двойниковом положении большого количества индивидов. Такие образования называются полисинтетическими двойниками (рис. 83). Полисинтетические двойники характерны для полевых шпатов.

Двойники образуются не только при возникновении и росте кристаллов. Во многих случаях они образуются в результате меха-

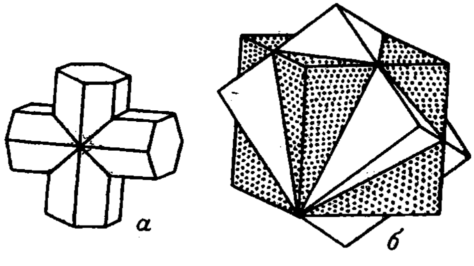


Рис. 81. Двойники прорастания:
а) ставролит, *б*) флюорит.

нических деформаций кристаллов. Причины, обусловливающие возникновение двойников, изучены еще недостаточно.

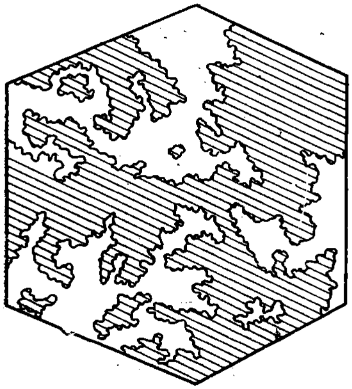


Рис. 82. Разрез двойника прорастания кварца. Граница срастания сложная.

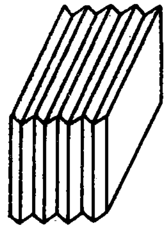


Рис. 83. Полисинтетический двойник.

Вопросы для повторения

1. Что называется двойниковой осью, двойниковой плоскостью, плоскостью срастания или двойниковым швом?
2. Какие существуют типы двойников?

Глава 6

КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИЕ СИМВОЛЫ

§ 1. Закон Аюи (закон целых чисел)

Закон Р. Ж. Аюи (1743—1822), или *закон целых чисел,* дает возможность характеризовать взаимное расположение граней и ребер кристаллов с помощью особых обозначений — символов граней и ребер.

Закон Аюи гласит: *Двойные отношения отрезков, отсекаемых любыми двумя гранями кристалла на трех его пересекающихся ребрах, равны отношению целых небольших чисел.*

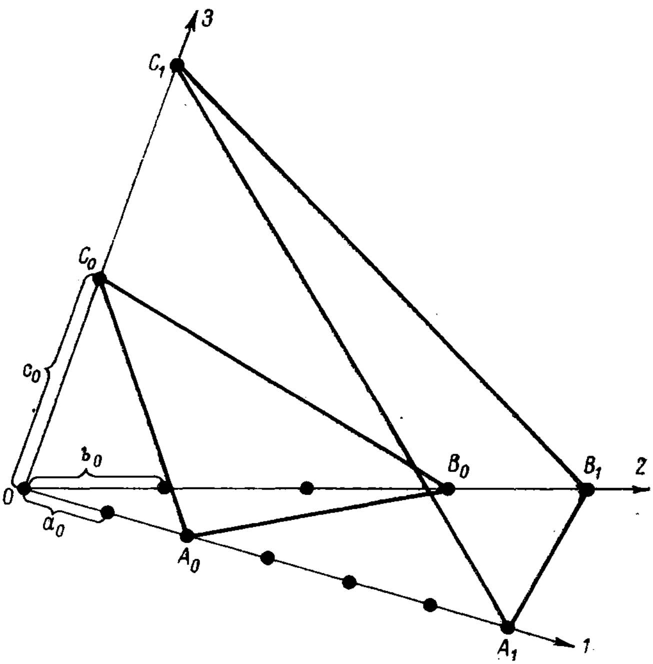


Рис. 84. Чертеж, поясняющий закон целых чисел.

01, 02, 03 — кристаллографические оси, a_0, $в_0$ и c_0 — промежутки рядов, $A_0B_0C_0$ и $A_1B_1C_1$ — плоские сетки.

На рис. 84 01, 02 и 03 — ребра кристалла, $A_0B_0C_0$ и $A_1B_1C_1$ — две грани. Согласно закону Аюи, $\frac{OA_1}{OA_0} : \frac{OB_1}{OB_0} : \frac{OC_1}{OC_0} = P : Q : R$, где P, Q и R — целые небольшие числа.

Почему же двойные отношения отрезков пропорциональны целым числам?

Ребро кристалла является рядом пространственной решетки. Пусть 01, 02 и 03 — ряды решетки с промежутками a_0, b_0 и c_0. Грани кристалла являются плоскими сетками. Пусть плоские сетки $A_0B_0C_0$ и $A_1B_1C_1$ пересекают ребра в узлах решетки. Тогда $OA_0 = a_0r$, $OB_0 = b_0s$, $OC_0 = c_0t$, где r, s и t — целые числа (на рис. 84 — 2, 3, 1). $OA_1 = a_0u$, $OB_1 = b_0v$, $OC_1 = c_0w$, где u, v и w — целые числа (на рис. 84 — 6, 4 и 2).

Двойные отношения отрезков, отсекаемых гранями на ребрах, равны: $\frac{a_0u}{a_0r} : \frac{b_0v}{b_0s} : \frac{c_0w}{c_0t} = \frac{u}{r} : \frac{v}{s} : \frac{w}{t} = P : Q : R$, где P, Q и R — целые числа. Действительно, в числителях и знаменателях среднего отношения — целые числа. Приведя дроби к общему знаменателю, отбросив его, затем сократив оставшиеся числители, если они имеют общий делитель, всегда получим целые числа. Например, заменив в последнем выражении буквы их численными значениями, соответствующими рисунку, получим целые числа: $\frac{u}{r} : \frac{u}{s} : \frac{w}{t} = \frac{6}{2} : \frac{4}{3} : \frac{2}{1} = 9 : 4 : 6$.

Если каждый из отрезков, которые отсекает на осях грань $A_0B_0C_0$, принять за единицу измерения по соответствующей оси и в этих единицах выразить отрезки, отсекаемые гранью $A_1B_1C_1$, а затем взять двойные отношения полученных отрезков, то получится отношение тех же целых чисел, что и в предыдущем случае. Действительно, $OA_0 = 1$, $OB_0 = 1$, $OC_0 = 1$; $OA_1 = 3$, $OB_1 = 4/3$, $OC_1 = 2$; $(3:1) : (4/3 : 1) : (2:1) = 9:4:6$.

Плоские сетки могут пересекать ряды решетки не в узлах. Теоретически легко доказать, что и в таких случаях двойные отношения также дадут целые числа. Отрезки, отсекаемые плоскими сетками на рядах, всегда рациональны относительно промежутков рядов.

Выше рассмотрен случай, когда грани $A_0B_0C_0$ и $A_1B_1C_1$ отсекают на осях отрезки, соизмеримые с величинами промежутков рядов. Практически приходится иметь дело с кристаллами макроскопических размеров, у которых грани отсекают на ребрах отрезки, не соизмеримые с бесконечно малыми промежутками рядов. Будем теперь считать, что рис. 84 соответствует этому условию. В таких случаях за единицы измерения по осям (за *единичные отрезки*) принимаются отрезки, отсекаемые на осях одной из граней, например, гранью $A_0B_0C_0$. Отрезки, которые отсекает грань $A_1B_1C_1$, измеренные единичными отрезками: $\frac{OA_1}{OA_0}$, $\frac{OB_1}{OB_0}$ и $\frac{OC_1}{OC_0}$.

При росте кристалла грани и ребра перемещаются параллельно самим себе. Поэтому фигуры микрокристалла и выросшего из него макрокристалла будут подобны друг другу. Из подобия фигур микро- и макрокристалла следует, что двойные отношения отрезков, отсекаемых гранями $A_0B_0C_0$ и $A_1B_1C_1$ на ребрах макрокристалла, равны отношению тех же целых чисел, что у микрокристалла. Пусть $OA_0=10$ *мм*, $OB_0=21$ *мм*, $OC_0=17$ *мм*, $OA_1=30$ *мм*, $OB_1=28$ *мм*, $OC_1=34$ *мм*. Измерить отрезки OA_1, OB_1 и OC_1 соответственно отрезками OA_0, OB_0 и OC_0 — значит определить, сколько раз единичный отрезок содержится в измеряемом отрезке. По осям *1*, *2* и *3* получаются следующие отрезки: $\frac{OA_1}{OA_0}=\frac{30\ мм}{10\ мм}=3$, $\frac{OB_1}{OB_0}=$ $=\frac{28\ мм}{21\ мм}=\frac{4}{3}$, $\frac{OC_1}{OC_0}=\frac{34\ мм}{17\ мм}=2$.

Отношение этих отрезков $3:\frac{4}{3}:2=9:4:6$.

Вопросы для повторения

1. Как формулируется закон Аюи?
2. Какие величины пространственной решетки определяют единицы измерения по ребрам кристалла?

§ 2. Установка кристаллов[1]

Для того чтобы, используя закон Аюи, получить кристаллографические символы направлений и плоскостей кристалла, нужно в кристалле выбрать кристаллографические (координатные) оси и единицы измерения по осям, т. е. осуществить *установку кристалла*. Следует различать установку кристалла и расположение его в пространстве. Кристаллографические оси проводятся обязательно параллельно плотным рядам пространственной решетки. Начало координат удобнее всего совмещать с центром кристалла.

В разных сингониях различные правила выбора кристаллографических осей. С этими правилами мы познакомимся ниже.

Перечислим прямые, совпадающие с плотными рядами пространственной решетки или параллельные им:

1. Имеющиеся или возможные ребра кристаллов.[2]
2. Оси симметрии (в том числе перпендикуляры к плоскостям симметрии — L_{i2}).
3. Линии пересечения плоскостей симметрии с гранями.
4. Направления в плоскостях симметрии, перпендикулярные к линиям пересечения этих плоскостей (см. планальные виды симметрии).

---

[1] Здесь рассматривается только морфологическая установка кристаллов. В большинстве случаев (кроме кубических кристаллов) она неоднозначна. Вопрос об однозначной структурной установке и ее соотношениях с морфологическими установками выходит за рамки настоящего руководства.— *Примеч. ред.*

[2] О возможных ребрах кристаллов говорится в § 1 гл. 7.

Углы между кристаллографическими осями обозначаются α, β и γ (рис. 85). Первая ось — x — «показывает» угол α, но не служит его стороной, вторая ось — y — «показывает» угол β, а третья — z — «показывает» угол γ. Углы между кристаллографическими осями у кристаллов разных сингоний могут быть различны. Ниже этот вопрос будет рассмотрен подробно.

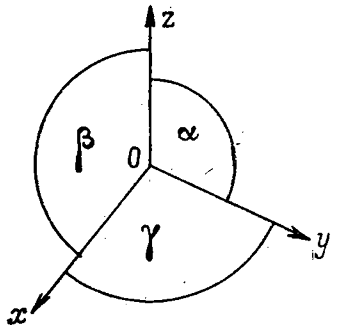


Рис. 85. Обозначение углов между кристаллографическими осями.

При описании все кристаллы располагаются в пространстве так, чтобы ось z была вертикальна. У кристаллов разных сингоний положение осей x и y относительно наблюдателя оказывается несколько различным. В общем же ось y располагается слева направо, а ось x направляется на наблюдателя. Положительными считаются концы осей: x — от начала координат к наблюдателю, y — от начала координат вправо, z — от начала координат вверх.

Отрезки, отсекаемые гранью на кристаллографических осях, называются ее *параметрами*. Например, отрезки OA_1, OB_1 и OC_1 (см. рис. 84) — параметры грани $A_1B_1C_1$, отрезки OA_0, OB_0 и OC_0 — параметры грани $A_0B_0C_0$. За единицы измерения — *единичные отрезки* — по кристаллографическим осям принимаются параметры какой-либо из граней кристалла, пересекающей все три оси и отсекающей на них равные отрезки, если оси являются симметрично-равными прямыми, или неравные отрезки, если оси — единичные прямые[3]. Мы будем выражать параметры граней в единичных отрезках.

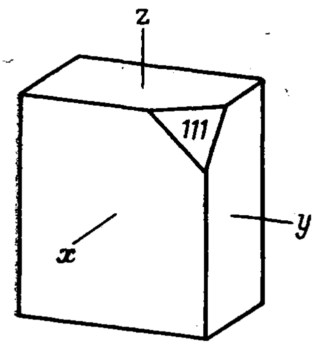


Рис. 86. Установка триклинного кристалла.

Грань кристалла, параметры которой приняты за единицы измерения (единичные отрезки), называется *единичной гранью*. В дальнейшем единичная грань будет обозначаться тремя единицами — 111 (рис. 86).

Триклинная сингония. У кристаллов триклинной сингонии кристаллографические оси проводятся параллельно трем произвольно выбранным ребрам, причем углы между осями должны быть по возможности близки к 90°. Вопрос о том, какие именно ребра принять

[3] Единицы измерения по осям можно получать не только с помощью единичной грани, но и другими способами, например, с помощью двуединичных граней (см. с. 121).

за кристаллографические оси и какую из осей принять за 1-ю, 2-ю и 3-ю по морфологическим особенностям многогранника, не решается однозначно. Обычно за третью ось принимается ось наиболее развитой зоны, т. е. направление, параллельное ребрам, в которых пересекается наибольшее количество граней.

Вообще у триклинных кристаллов $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90°$ и промежутки рядов по кристаллографическим осям у них также различные, т. е. $a_0 \neq b_0 \neq c_0$. Неравенство углов друг другу и 90° и неравенство промежутков рядов обусловлено особенностями строения триклинных кристаллов. В триклинных кристаллах все прямые, в том числе и совпадающие с координатными осями, единичны, а по единичным прямым свойства кристаллов вообще различны, в частности, различны промежутки рядов и коэффициенты теплового расширения. С изменением термодинамических условий углы между рядами пространственных решеток триклинных кристаллов и соотношения размеров промежутков рядов по кристаллографическим осям изменяются. Поэтому у триклинного кристалла α, β или γ могут оказаться равными 90° и a_0, b_0 или c_0 равными друг другу лишь при данных термодинамических условиях в пределах точности произведенного измерения.

В связи с неравенством промежутков рядов по кристаллографическим осям триклинных кристаллов, у них вообще не должны быть равны друг другу и единичные отрезки — параметры единичной грани. Поэтому к единичной грани триклинного кристалла предъявляется единственное требование: она должна пересекать все три оси.

Выбор кристаллографических осей и единичной грани по морфологическим особенностям многогранников триклинной сингонии часто оказывается не однозначным. Предпочтение отдается такому варианту, при котором ось z является осью наиболее развитой зоны, углы α, β и γ по возможности близки к 90° и единичные отрезки наиболее близки друг другу по абсолютной величине.

При описании триклинных многогранников ось z располагается вертикально, а положительный конец оси x направляется на наблюдателя (см. рис. 86).

Моноклинная сингония. У моноклинных кристаллов за вторую кристаллографическую ось (y) принимается ось 2-го порядка (L_2 или $\perp$ к m). Она располагается горизонтально слева направо. Затем кристалл вращается вокруг L_2 так, чтобы вертикально встали грани наиболее развитой зоны. Параллельно ребрам этой зоны проводится третья ось. Первая ось проводится параллельно имеющемуся или возможному ребру так, чтобы $\angle\beta$ был по возможности близок к 90°, а $\angle\gamma$ был равен 90° (рис. 87 *а, б, в*). Положительный конец первой оси должен быть направлен на наблюдателя и наклонен вниз.[4]

---

[4] Кроме того, существует иная установка моноклинных кристаллов, при которой ось 2-го порядка (L_2 или L_{i2}) принимается за ось z.

У моноклинных кристаллов $\alpha=\gamma=90°$, $\beta=90°$ и $a_0 \neq b_0 \neq c_0$, так как у них кристаллографические оси совпадают с единичными прямыми. Единичной гранью кристалла моноклинной сингонии называется грань, пересекающая все три кристаллографические оси.

Выбор первой и третьей осей и единичной грани у моноклинных кристаллов не однозначен. Нужно стараться выбрать угол β близкий к 90° и единичные отрезки близкие друг другу по абсолютной величине.

Установка моноклинных кристаллов часто вызывает затруднения, поэтому рекомендуется обратить на нее особое внимание.

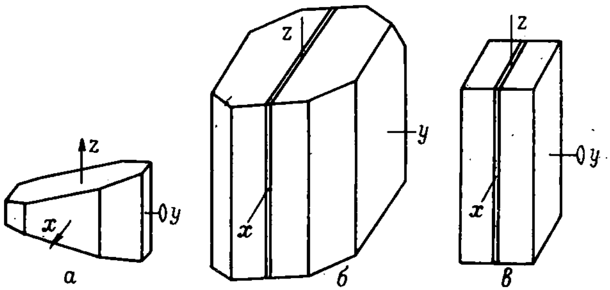


Рис. 87. Кристаллографические оси моноклинных кристаллов:
а) вид симметрии *2*, *б*) **вид симметрии *m*, *в*) вид симметрии** *2/m*.

Ромбическая сингония. За кристаллографические оси принимаются три единичные прямые, которые в ромбических кристаллах взаимно перпендикулярны и совпадают с осями 2-го порядка. При наличии трех осей симметрии 2 они будут координатными осями. Вопрос о том, какую из них принять за 1-ю, 2-ю и 3-ю ось, по морфологическим особенностям многогранника не решается однозначно. Обычно за третью ось принимается ось наиболее развитой зоны. В случае наличия у кристалла —2 и *mm* за третью ось принимается 2, а за x и y — перпендикуляры к плоскостям симметрии.

У ромбических кристаллов $\alpha=\beta=\gamma=90°$, $a_0 \neq b_0 \neq c_0$. Единичной гранью ромбического кристалла (так же как триклинного и моноклинного) выбирается грань, пересекающая все три кристаллографические оси.

Кристалл располагается в пространстве так, что ось z вертикальна, оси x и y горизонтальны. Причем ось x направлена на наблюдателя, а ось y — слева направо (рис. 88, *а*, *б*).

Тетрагональная сингония. За ось z принимается ось 4-го порядка — главная ось, за x и y — две прямые, перпендикулярные оси z и друг другу. Если имеются простые поворотные оси 2-го порядка, то они принимаются за x и y. При наличии $4L_2$ выбор координатных осей не однозначен (рис. 89, *а*). У кристаллов планального вида симметрии за x и y принимаются 2 оси $\bar{2}$ — перпендикуляры к плоскостям симметрии, причем возможны два варианта (рис. 89 *б*).

При отсутствии осей 2-го порядка (примитивный, инверсионно-примитивный и центральный виды симметрии) x и y проводятся параллельно имеющимся или возможным ребрам, образующим друг с другом и с осью z углы, равные 90°.

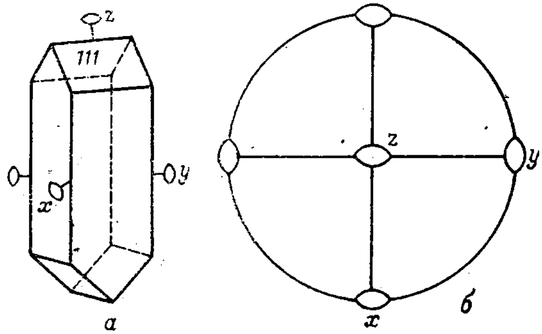


Рис. 88. Кристаллографические оси ромбического кристалла (вид симметрии 22):

а) кристалл; *б*) проекция.

У тетрагональных кристаллов $\alpha=\beta=\gamma=90°$. Единицы измерения по осям x и y равны друг другу, так как эти оси являются симметрично-равными, а по оси z иная единица — $a_0=b_0\neq c_0$.

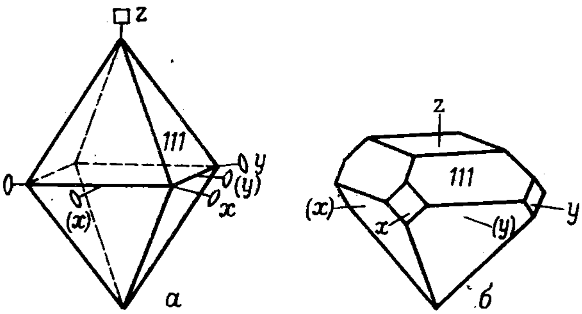


Рис. 89. Кристаллографические оси тетрагональных кристаллов:

а) вид симметрии $4/mm$, *б*) вид симметрии $4m$.

Единичной называется грань, отсекающая равные отрезки на горизонтальных осях и пересекающая вертикальную ось. Предпочтение отдается грани с наиболее близкими параметрами по осям x и z. Если у тетрагонального кристалла нет единичной грани, а имеется грань, пересекающая оси x и z, то ее параметр по оси x принимается за единицу измерения по осям x и y, а параметр по оси

z — за единицу измерения по этой оси (рис. 89 *а, б* оси (x) и (y)). Ось z располагается вертикально, а оси x и y — горизонтально, причем ось x направлена на наблюдателя, а ось y — слева направо.

Кубическая сингония. За кристаллографические оси принимаются три взаимно перпендикулярные оси 4-го порядка. Если осей 4-го порядка нет, то имеются три взаимно перпендикулярные оси 2-го порядка, которые принимаются за кристаллографические оси. Все три оси x, y и z являются симметрично-равными.

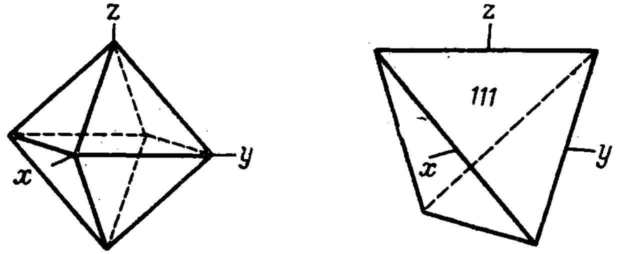


Рис. 90. Установка кубических кристаллов.
(виды симметрии $m3m$ и $\bar{4}3m$)

У кубических кристаллов $\alpha=\beta=\gamma=90°$, $a_0=b_0=c_0$. Единичной называется грань, отсекающая равные отрезки на всех трех осях. В зависимости от вида симметрии единичной может быть грань октаэдра или тетраэдра. Грани этих простых форм перпендикулярны к осям 3-го порядка (рис. 90).

Ось z располагается вертикально, оси x и y — горизонтально, причем ось x направляется на наблюдателя, а ось y — слева направо.

Гексагональная и тригональная сингонии. За ось z принимается главная ось, за оси x и y — перпендикуляры к плоскостям симметрии ($2L_{i2}$), а при отсутствии плоскостей симметрии — $2L_2$. Если и простых осей 2-го порядка нет, то оси x и y проводятся параллельно имеющимся или возможным ребрам, образующим друг с другом угол 120° и в то же время перпендикулярным к оси z. На рис. 91 показаны кристаллографические оси гексагональных и тригональных кристаллов[5]. Ось z перпендику-

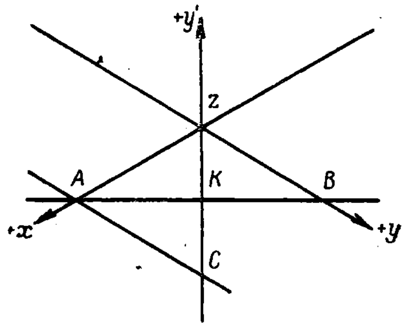


Рис. 91. Кристаллографические оси x, y, y' в гексагональной и тригональной сингонии.
AB и AC — линии пересечения единичных граней с плоскостью горизонтальных осей.

[5] Кроме того, нередко ось x направляется на наблюдателя, или ось y располагается слева направо.

лярна к плоскости рисунка. Для кристаллов этих сингоний в кристаллографии обычно используется четвертая дополнительная координатная ось — y'. Эта ось является симметрично-равной осям x и y. Целесообразность использования оси y' будет объяснена на с. 124.

У гексагональных и тригональных кристаллов $\alpha=\beta=90°$, $\gamma=120°$, $a_0=b_0\neq c_0$. Единичной гранью в гексагональной и тригональной сингониях называется грань, отсекающая равные отрезки на двух горизонтальных осях (x, y, y') и пересекающая вертикальную ось z. Согласно определению единичной грани, возможно два варианта: а) единичная грань пересекает все три горизонтальные оси; б) единичная грань параллельна одной из горизонтальных осей.

Эти два варианта единичной грани показаны на рис. 91, где AB — линия пересечения грани с плоскостью горизонтальных осей в случае *а* и AC — линия пересечения грани с плоскостью горизонтальных осей в случае *б*.

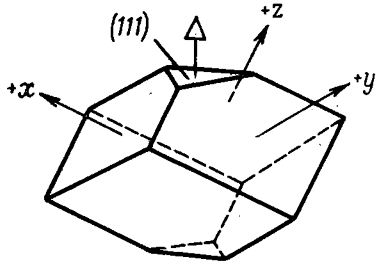


Рис. 92. Ромбоэдрическая установка тригональных кристаллов.

Кроме рассмотренной выше установки существует особая установка тригональных кристаллов. За кристаллографические оси принимаются три симметрично-равных направления, параллельных имеющимся или возможным ребрам кристалла и расположенных под равными косыми углами относительно L_3 (рис. 92).

За единичную грань принимается имеющаяся или возможная грань, перпендикулярная к L_3, т. е. в зависимости от вида симметрии грань моноэдра или пинакоида. Единица измерения по всем осям одна и та же, как и в кубической сингонии, т. е. $a_0=b_0=c_0$ и $\alpha=\beta=\gamma\neq 90°$. Эта установка называется тригональной, или ромбоэдрической, в отличие от гексагональной установки с четырьмя кристаллографическими осями. Данные об установке кристаллов каждой сингонии сведены в табл. 12.

Таблица 12

Сингония	Единичные отрезки по осям	Углы между кристаллографическими осями	Геометрические константы[1]
Триклинная	$a_0\neq b_0\neq c_0$	$\alpha\neq\beta\neq\gamma$	$a:1:c$; α, β, γ.
Моноклинная	$a_0\neq b_0\neq c_0$	$\alpha=\gamma=90°$, $\beta\neq 90°$	$a:1:c$; β
Ромбическая	$a_0\neq b_0\neq c_0$	$\alpha=\beta=\gamma=90°$	$a:1:c$
Тетрагональная	$a_0=b_0\neq c_0$	$\alpha=\beta=\gamma=90°$	c

Сингония	Единичные отрезки по осям	Углы между кристаллографическими осями	Геометрические константы
Кубическая	$a_0 = b_0 = c_0$	$\alpha=\beta=\gamma=90°$	—
Гексагональная и тригональная	$a_0 = b_0 \neq c_0$	$\alpha=\beta=90°$, $\gamma=120°$	c
Тригональная (ромбоэдрическая установка)	$a_0 = b_0 = c_0$	$\alpha=\beta=\gamma \neq 90°$	α

[1] См. § 10 данной главы (с. 128—129).

Вопросы для повторения

1. Что называется установкой кристалла?
2. Параллельно каким элементам пространственной решетки проводятся кристаллографические оси?
3. Какие прямые в кристаллах совпадают с плотными рядами пространственной решетки или параллельны им?
4. Как располагаются в пространстве кристаллографические оси при описании многогранников?
5. Как обозначаются углы между кристаллографическими осями?
6. Что называется параметрами грани?
7. Какие прямые принимаются за кристаллографические оси в кристаллах каждой сингонии?
8. В каком порядке выбираются кристаллографические оси в кристаллах моноклинной сингонии?
9. Какая грань называется единичной у кристаллов каждой сингонии?
10. Почему у кристаллов: а) низшей категории — $a \neq b \neq c$, б) средней категории — $a=b\neq c$, в) высшей категории — $a=b=c$?

§ 3. Символы граней

Пусть на рис. 93 x, y и z — три кристаллографические оси, $A_0B_0C_0$ — единичная грань и OA_0, OB_0 и OC_0 — единицы измерения соответственно по первой, второй и третьей осям; $A_1B_1C_1$ — грань, символ которой требуется определить.

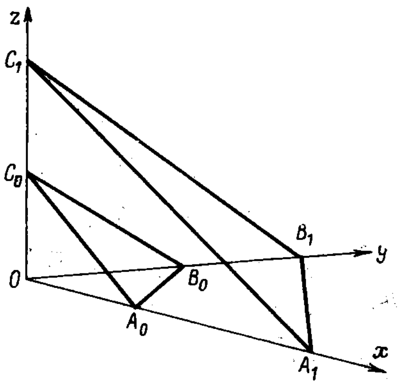


Рис. 93. Чертеж к определению индексов грани.

Прежде всего следует измерить отрезки, отсекаемые на осях гранью $A_1B_1C_1$. Измеряются отрезки параметрами единичной грани. Получаем по x — OA_1/OA_0, по y — OB_1/OB_0 и по z — OC_1/OC_0.

Затем берем отношения обратных величин этих отрезков $OA_0/OA_1 : OB_0/OB_1 : OC_0/OC_1 = h : k : l$, где h, k и l — целые взаимно простые числа, они называются *индексами грани.* Совокупность индексов, написанная без знака деления и в круглых скобках, называется *символом грани.* Символ грани $A_1B_1C_1$ — (hkl).

Итак, для получения символа грани нужно: 1) произвести установку кристалла; 2) измерить единичными отрезками отрезки, отсекаемые гранью на осях; 3) взять отношение обратных величин этих отрезков и, если нужно, то выполнить преобразования, в результате которых все члены отношения станут взаимно простыми целыми числами, которые и будут индексами грани.

Единичная грань отсекает на осях отрезки: 1, 1, 1. Отношение обратных величин этих отрезков — 1 : 1 : 1. Символ единичной грани — (111).

Пусть грань отсекает на осях отрезки по x — 4, по y — 1, по z — 2. Отношение обратных величин этих отрезков: $\frac{1}{4} : 1 : \frac{1}{2} = 1 : 4 : 2$. Символ грани — (142), или в общем виде — (hkl), где $k > l > h$.

Индексы граней кристаллов обычно не больше 6 и как исключение больше 10.

У граней не могут быть символы $(h00)$, $(0k0)$, $(00l)$, $(hh0)$, $(h0h)$, $(0kk)$ и (hhh), где h, k и $l > 1$. В противном случае индексы не были бы взаимно простыми числами. Действительно, h : 0 : 0 = 1 : 0 : 0, 0 : k : 0 = 0 : 1 : 0 и т. д.

Вопросы для повторения

1. Что нужно сделать, чтобы получить символ грани (три этапа)?
2. Что называется индексами грани, символом грани?
3. Какой символ имеет единичная грань?
4. Почему у грани не может быть символ $(h00)$, $(hh0)$ или (hhh)?

§ 4. Зависимость между параметрами грани и ее индексами и типы символов граней

1. Если грань отсекает по какой-то оси отрезок больший, чем по другой, то индекс грани, соответствующий этой оси, меньше, чем индекс, соответствующий другой оси, и наоборот (см. § 3).

Это соотношение будем использовать в дальнейшем при определении символов и при суждении о взаимном расположении граней по их символам.

2. Если грань параллельна кристаллографической оси, то отрезок, отсекаемый ею на этой оси, равен бесконечности. Пусть грань отсекает отрезки: ∞, p и q. Отношение обратных величин этих отрезков: $1/\infty : 1/p : 1/q = 0 : k : l$. Символ — $(0kl)$.

В символе грани, параллельной какой-либо кристаллографической оси, индекс, соответствующий этой оси, равен нулю.

3. Если грань пересекает отрицательный конец оси, то ее параметр по этой оси отрицателен, и над его величиной ставится знак

минус, например, $\bar{1}$ или $\frac{\bar{1}}{2}$. Индекс, соответствующий отрицательному параметру, также отрицателен, и над ним ставится знак минус, например, $(h\bar{k}l)$. Грань с таким символом пересекает положительные концы осей x и z и отрицательный конец оси y.

4. Символ грани отражает ее наклон к кристаллографическим осям относительно единичной грани, но не отражает расстояние грани от начала координат. Если грань мысленно перенести параллельно самой себе в сторону начала координат или от него, то все отрезки, отсекаемые ею на кристаллографических осях, соответственно уменьшаются или увеличиваются в одно и то же число раз. Во многих случаях за счет параллельного переноса грани упрощается измерение отсекаемых ею отрезков и вычисление индексов.

Параллельный перенос грани равносилен умножению или делению на одно и то же число всех отрезков, отсекаемых гранью на осях, и не влияет на ее символ. Поэтому у всех кристаллов одного и того же вещества, одного и того же строения при одинаковых термодинамических условиях и при одинаковой установке символы соответственных граней всегда одинаковы независимо от размеров кристаллов.

В зависимости от положения грани относительно кристаллографических осей их символы делятся на следующие шесть типов.

1. Единичная грань. Отрезки, отсекаемые ею на осях, приняты за единицы. Символы: (111), $(11\bar{1})$, $(1\bar{1}1)$ и т. д.

2. Грань пересекает одну ось, а двум другим осям она параллельна. Символы: (100), (010), (001), $(\bar{1}00)$, $(0\bar{1}0)$ и $(00\bar{1})$.

3. Грань параллельна одной оси, а по двум другим осям отсекает равные отрезки, т. е. в обоих отрезках, отсекаемых гранью, содержится одно и то же число соответствующих оси единиц измерения. По абсолютной величине эти отрезки могут быть не равными, если оси не равны друг другу. Символы: (110), (101), (011), $(\bar{1}10)$ и т. д.

4. Грань параллельна одной оси, а по двум другим осям отсекает неравные отрезки. Символы: $(hk0)$, $(h0l)$, $(0kl)$, $(h\bar{k}0)$ и т. д.

5. Грань пересекает три оси и по двум из них отсекает равные отрезки. Символы: (hhl), (hkh), (hkk), $(h\bar{k}h)$ и т. д. Необходимо различать символы (hhl), где $h>l$ и $h<l$.

6. Грань отсекает разные отрезки на всех осях, т. е. занимает общее положение. Символы: (hkl), $(h\bar{k}l)$ и т. д. Индексы, равные нулю, буквами не заменяются.

Вопросы для повторения

1. Какая существует зависимость индексов грани от ее параметров в следующих случаях: а) один параметр больше, чем другой; б) грань параллельна кристаллографической оси; в) параметр грани отрицателен; г) параметры грани увеличиваются за счет параллельного переноса грани.
2. Перечислите шесть типов символов граней.

§ 5. Примеры определения символов граней

На рис. 94 изображена проекция ромбической дипирамиды. Все грани дипирамиды отсекают на одной и той же кристаллографической оси отрезки, равные по абсолютной величине, а на разных осях — разные отрезки. Если эти отрезки принять за единицы измерения, то все индексы любой из рассматриваемых граней — единицы. На рисунке символы верхних граней написаны выше соответствующих проекций, а символы нижних — ниже.

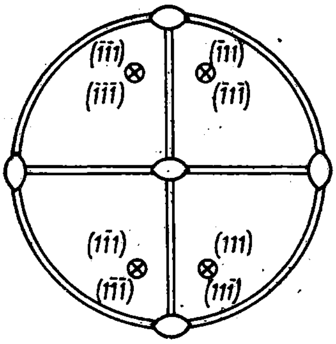


Рис. 94. Проекция граней ромбической дипирамиды. Грань принята за единичную. (Центр инверсии не обозначен).

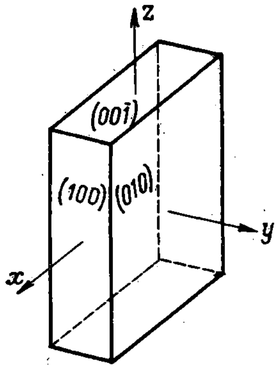


Рис. 95. Многогранник триклинной сингонии с частным положением граней относительно осей.

На рис. 95 изображен многогранник триклинной сингонии, образованный тремя пинакоидами. Требуется определить символы его граней.

Кристаллографические оси проведем параллельно ребрам многогранника. Единичной грани у многогранника нет. В данном случае для определения символов единицы измерения по осям не нужны.

Не зная единицу измерения по z, можно сказать, что грань, пересекающая ось z, отсекает на ней отрезок n, т. е. любое число единиц. Оси x и y она пересекает в бесконечности. Параметры грани: ∞, ∞ и n. Отношение обратных величин параметров: $0:0:1/n = 0:0:1$. Символ — (001). Аналогично получаются символы остальных граней: $(00\bar{1})$, (010), $(0\bar{1}0)$, (100) и $(\bar{1}00)$.

При решении вопроса о символе верхней грани возможно иное рассуждение. Параллельный перенос грани не влияет на ее символ. В результате параллельного переноса грань может занять такое положение, при котором она будет отсекать по оси z единицу (хотя величина этой единицы нам неизвестна). Тогда параметры грани: ∞, ∞ *1*, и символ (001).

На рис. 96 изображен многогранник, образованный тремя тетрагональными пирамидами. За оси x и y приняты направления, параллельные имеющимся ребрам. Единичной грани у многогранника нет. Любая грань каждой из пирамид пересекает одну из горизонтальных осей и вертикальную ось. За единицы измерения по осям можно принять отрезки, отсекаемые любой из граней. Пусть это будет грань *1*. Отрезок, отсекаемый ею по оси x, будет служить единицей измерения и по оси y, так как у тетрагональных кристаллов $a=b$. Символ грани *1* — (101), грани *2* — (011).

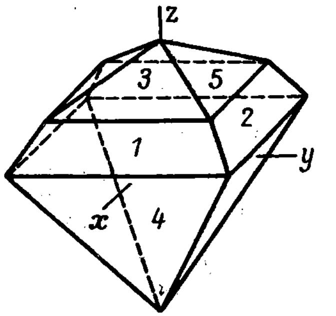


Рис. 96. Многогранник тетрагональной сингонии.
1 — (101), *3* — $(h0l)$, $h<l$, *4* — $(10\bar{1})$ или *3* — (101), *1* — $(h0l)$, $h>l$, *4* — $(h0\bar{l})$, $h>l$.

Грань *3*, принадлежащая второй пирамиде, по оси x отсекает больше единицы, по оси z — меньше единицы, и оси y она параллельна. Ее параметры — p, ∞, r, где $p>r$, и символ $(h0l)$, где $h<l$. Если за единицы измерения принять отрезки, отсекаемые на осях гранью *3*, то ее символ будет (101), а символ грани *1* — $(h0l)$, где $h>l$.

Грань *4*, принадлежащая нижней пирамиде, имеет такой же наклон к осям, как и грань *1*. Ее символ отличается от символа грани *1* только отрицательным знаком третьего индекса — $(10\bar{1})$ или $(h0\bar{l})$, $h>l$.

Возьмем простую форму тетрагон-триоктаэдр (рис. 97). Каждая его грань пересекает все три кристаллографические оси и отсекает на двух из них равные отрезки, а на третьей — меньший отрезок. Единичной грани нет.

У кубических кристаллов единица измерения по всем трем осям одна и та же. Поэтому у них можно измерять отрезки, отсекаемые гранью на осях, любой единицей. При этом наиболее удобно за единицу принимать меньший отрезок из отсекаемых гранью на осях.

Примем за единицу измерения меньший отрезок, отсекаемый гранью *1*. По двум другим осям она отсекает равные отрезки, но бóльшие, чем единица. Ее символ (hhl), где $h<l$. Пусть параметры грани 1 — 2, 2 и 1. Отношение обратных величин этих

параметров — 1/2 : 1/2 : 1 = 1 : 1 : 2. Символ — (112). На рис. 98 изображена проекция тетрагон-триоктаэдра и написаны символы всех его граней.

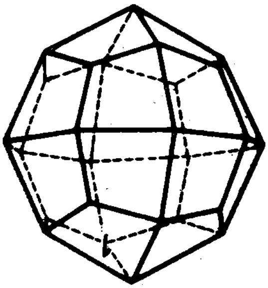


Рис. 97. Тетрагон-триоктаэдр.

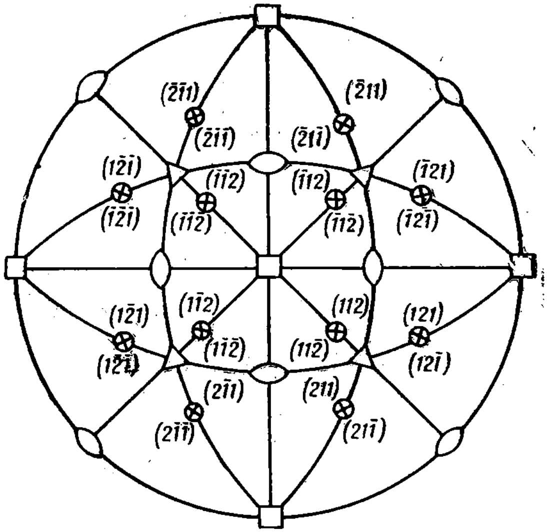


Рис. 98. Символы граней тетрагон-триоктаэдра.

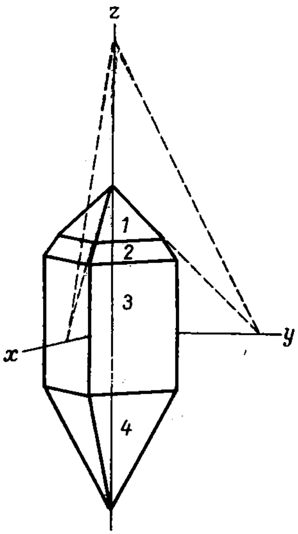


Рис. 99. Кристалл, иллюстрирующий практическое определение символов.

1 — (111); *2* — (221); *3* — (110); *4* — $(22\bar{1})$.

Тетрагон-триоктаэдры могут отличаться друг от друга по углам между гранями. Поэтому их грани, соответствующие грани *1*, могут иметь символы: (112), (223), (113) и т. д.

При тренировке в определении символов граней полезно получать их не только в общем виде, но узнавать приблизительные численные значения индексов. Для определения параметров грани удобно прикладывать к ней линейку или карандаш, чтобы видеть отрезки, отсекаемые на осях. Рассмотрим, как это делается, на примере нескольких граней одного кристалла.

Пусть перед нами находится модель многогранника, изображенного на рис. 99. За единичную примем грань *1* и будем прикладывать к ней карандаш так, чтобы он служил продолжением грани и пересек по очереди оси x, y и z. Расстояние от центра кристалла до точки пересечения продолжения грани с осью x — первый параметр грани *1* — единица измерения по оси x. Расстояние от центра кристалла до точки пересечения продолжения грани с осью y — второй параметр грани *1* — единица измерения по оси y. Расстояние от центра кристалла до точки пересечения продолжения грани с осью z — третий параметр грани *1* — единица измерения по оси z. Символ грани — (111).

Пусть требуется определить символ грани *2*. Эта грань по оси x отсекает отрезок меньше единицы. Чтобы не иметь дела с дробными отрезками, мысленно перенесем грань *2* параллельно самой себе так, чтобы она отсекла по оси x единицу. Тогда по оси y она отсечет тоже единицу, а по оси z — две единицы. Параметры грани: *1*, *1* и *2*. Отношение обратных величин параметров: $1:1:\frac{1}{2}=$ $=2:2:1$. Символ — (221).

Для получения символа грани *3*, эту грань мысленно перенесем параллельно самой себе, чтобы она отсекла по оси x единицу. После переноса по оси y она отсечет тоже единицу. Оси z грань параллельна. Ее параметры 1, 1, ∞. Отношение обратных величин параметров: $1:1:0$. Символ — (110).

Грань *4* наклонена к кристаллографическим осям так же, как и грань *2*. Ее символ — $(22\bar{1})$.

Представление о символах граней нетрудно составить по их проекциям. На рис. 100 изображены проекции нескольких граней кристалла ромбической сингонии. За кристаллографические оси приняты $3L_2$. Единичной гранью может быть любая из граней *1*, *2* и *3*. Примем за единичную грань *1*. Ее символ — (111).

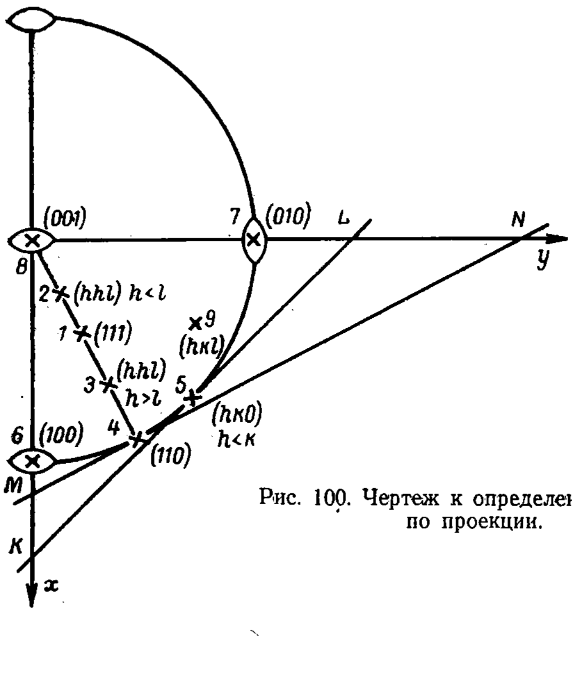


Рис. 100. Чертеж к определению символов по проекции.

Глядя на проекцию кристалла, нужно увидеть, что грани *1, 2, 3* и *4* лежат в одной зоне и пересекают плоскость проекций по линиям, параллельным касательной MN. Грани *2, 3* и *4* можно перенести параллельно самим себе так, чтобы они отсекли на x и y такие же отрезки, какие отсекает единичная грань. Поэтому первый индекс любой из этих граней должен быть равен второму.

Грань *2* занимает положение более близкое к горизонтальному, чем грань *1*. Она отсекает на оси z отрезок меньше, а на осях x и y больше, чем грань *1*. Соответственно третий индекс этой грани должен быть больше, чем первый. Символ грани *2* — (hhl), где $h<l$, например, (112) или (223).

Грань *3* по сравнению с единичной гранью отсекает по оси z отрезок больше, чем по x и y. Поэтому первый и второй ее индексы должны быть больше, чем третий. Символ грани *3* — (hhl), где $h>l$, например, (221), (332) или (331).

Грань *4* параллельна оси z. Ее третий индекс равен нулю, а первый и второй единице — (110).

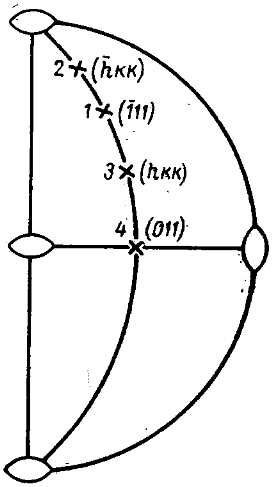


Рис. 101. Проекция граней *1—4* того же кристалла, что и на рис. 100 при другом выборе осей.

Грань *5* параллельна оси z и пересекает плоскость осей x и y по линии, параллельной касательной KL. Она отсекает по оси x отрезок больший, чем по оси y. Напомним, что здесь речь идет не об абсолютных величинах отрезков, а об их величинах, выраженных через единичные отрезки. Абсолютные же величины отрезков, отсекаемых KL по осям x и y, в данном частном случае оказались почти равными друг другу. Первый индекс грани *5* должен быть меньше, чем второй. Ее символ $(hk0)$, где $h<k$.

Каждая из граней *6, 7* и *8* пересекает только одну ось и параллельна двум другим осям. Соответственно символ каждой из них состоит из единицы и двух нулей: (100), (010) и (001).

Грань *9* пересекает все три оси и отсекает на них разные отрезки. Ее символ в общем виде (hkl).

Если у многогранника поменять местами оси x и z, то на проекции каждая грань окажется повернутой на 90° вокруг оси y (рис. 101). Теперь каждая грань *1, 2, 3* и *4* отсекает равные отрезки по осям y и z. На рис. 101 это увидеть труднее, чем на рис. 100.

Задачи

1. На проекцию вида симметрии mm нанести зону, в символе каждой грани которой первый индекс равен третьему.
2. На проекциях видов симметрии m, 2 и $2/m$ проведите зону, грани которой параллельны оси x. В какой точке этой зоны лежит проекция грани (001)?

§ 6. Двуединичные грани

В случае отсутствия у кристалла единичной грани, для получения единиц измерения по кристаллографическим осям, могут быть использованы две *двуединичные грани* с символами типа (110), (101) или (011).

Двуединичными называются две грани, каждая из которых пересекает две оси, а вместе они пересекают все три оси.

Пусть x, y и z на рис. 102 — координатные оси, A_0 и B_0 — точки пересечения грани с первой и второй осями. Третьей оси эта грань параллельна. Пусть другая грань параллельна первой оси и пересекает вторую и третью оси в точках B' и C'. Эти две грани могут быть приняты за двуединичные.

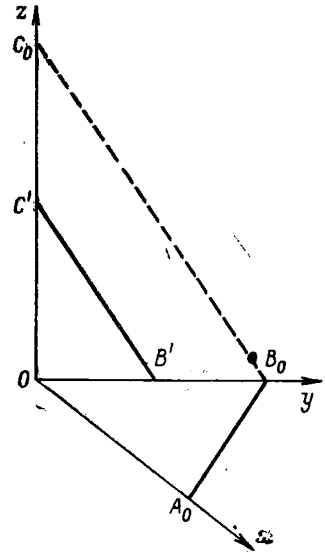


Рис. 102. Координатные оси и единичные отрезки, отсекаемые на осях двуединичными гранями.

Отрезки OA_0 и OB_0, отсекаемые первой гранью на двух осях, можно принять за единицы измерения по этим осям. Для того чтобы получить единицу измерения по третьей оси, нужно вторую грань мысленно перенести параллельно самой себе так, чтобы она отсекла на второй оси отрезок OB_0, который уже принят за единицу измерения. После такого переноса вторая грань будет отсекать на третьей оси отрезок OC_0, который и принимается за единицу измерения по третьей оси.

Индексы любой двуединичной грани — две единицы и ноль. Две двуединичные грани пересекают обязательно три кристаллографические оси, поэтому, если в символе одной из них ноль стоит на первом месте, то в символе второй ноль может быть только на втором или на третьем месте и т. д. (рис. 103). Грани *1* и *2* или *3* и *5* кристалла, изображенного на рис. 96, могут быть названы двуединичными. Использование двуединичных граней бывает необходимо только при описании кристаллов низшей категории.[6]

Пусть требуется определить символы граней кристалла моноклинной сингонии, проекция которого изображена на рис. 104. За вторую ось примем L_2, за третью — ось зоны 4—5 и за первую — ось зоны 1, 2, 3, 4. Единичной грани у многогранника нет. За двуединичные можно принять одну из граней *2* и *3* и одну из граней *4* и *5*, т. е. имеется четыре варианта выбора двуединичных граней. Ниже

---

[6] Очевидно, что в средней категории одна «двуединичная» грань вполне заменяет единичную.— *Примеч. ред.*

написаны символы граней *2, 3, 4* и *5* соответственно этим вариантам.

1) 2 и 4 — (011) и (110), 3 и 5 — $(0kl)$, $k>l$ и $(hk0)$, $h<k$;

2) 3 и 4 — (011) и (110), 2 и 5 — $(0kl)$, $k<l$ и $(hk0)$, $h<k$;

3) 2 и 5 — (011) и (110), 3 и 4 — $(0kl)$, $k>l$ и $(hk0)$, $h>k$;

4) 3 и 5 — (011) и (110), 2 и 4 — $(0kl)$, $k<l$ и $(hk0)$, $h>k$.

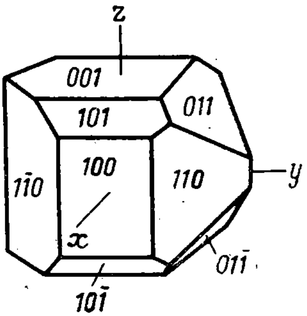


Рис. 103. Кристалл с двуединичными гранями.
Вид симметрии 2.

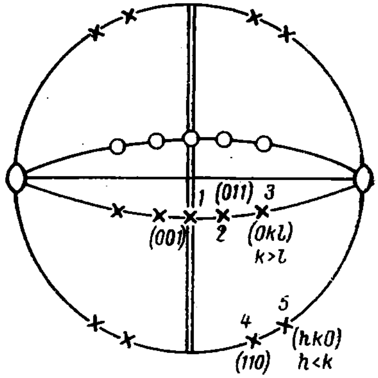


Рис. 104. Проекция кристалла с двуединичными гранями (*2* и *4*, *2* и *5*, *3* и *4*, *3* и *5*).
Вид симметрии $2/m$.

Грань *1* параллельна осям x и y. Ее символ — (001). Обратим внимание на то, что грань (001) у моноклинных кристаллов обычно проектируется не в центре круга проекций, так как у них ось x не перпендикулярна к оси z.

Вопросы для повторения

1. Какие грани называются двуединичными?
2. В каких сингониях и как используются двуединичные грани для получения единиц измерения по осям?

§ 7. Четырехчленные символы гексагональных и тригональных кристаллов

Если единичная грань пересекает плоскость горизонтальных осей по линии AB (рис. 105), то она отсекает на осях отрезки по x — 1, по y — 1, по z — 1, а по y' — $\frac{\bar{1}}{2}$, так как треугольник AzK прямоугольный, угол $zAK=30°$ и $zK=\frac{Az}{2}$. Отношение обратных величин отрезков, отсекаемых этой гранью на осях: $1:1:\bar{2}:1$. Символ грани — $(11\bar{2}1)$.

Кроме того, за единичную может быть принята другая грань, пересекающая горизонтальные оси по линии AC. Она отсекает равные отрезки на осях x и y' и пересекает ось z. Отрезки, отсекаемые этой гранью на осях: 1, ∞, $\bar{1}$, 1. Ее символ — $(10\bar{1}1)$. Единичная грань гексагональных и тригональных кристаллов может иметь символ $(11\bar{2}1)$ или $(10\bar{1}1)$.

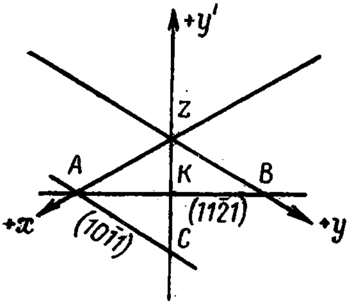


Рис. 105. Оси и положение единичной грани гексагональных и тригональных кристаллов.

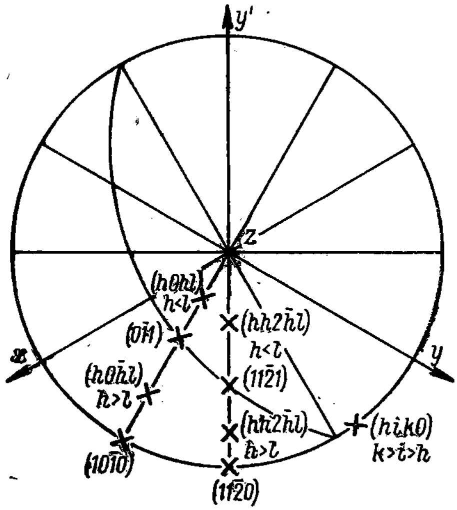


Рис. 106. Положение граней тригональных и гексагональных кристаллов на проекции и символы граней.

Если известны отрезки, отсекаемые гранью на двух горизонтальных осях, то известен отрезок, отсекаемый ею и по третьей горизонтальной оси, и соответственно, если известны индексы грани по двум горизонтальным осям, то известен индекс и по третьей горизонтальной оси.

В четырехчленном символе $(hk\bar{i}l)$ любой грани гексагонального или тригонального кристалла сумма первых двух индексов всегда равна третьему с обратным знаком: $h+i=k$.

По проекциям граней, изображенным на рис. 106, читатель должен представить себе положение этих граней относительно кристаллографических осей и убедиться в правильности написанных символов при данной единичной грани.

Вопросы для повторения

1. Какой четырехчленный символ может иметь единичная грань гексагонального или тригонального кристалла (два варианта)?
2. Каким свойством обладает четырехчленный символ?
3. Измените выбор единичной грани на рис. 106. Символы каких граней изменятся в результате этого, и как они изменятся?

§ 8. Символы простых форм

Символы всех граней одной простой формы состоят из одних и тех же индексов. Лишь в зависимости от положения той или иной грани относительно кристаллографических осей в символах разных граней одной простой формы индексы могут меняться местами и приобретать или терять знак минус.

Символом простой формы называются индексы одной из ее граней, поставленные в фигурные скобки, например, {111}, {001}. В символе простой формы должно быть минимальное количество отрицательных индексов. По символам можно отличать одноименные простые формы друг от друга и определять названия простых форм (см. табл. 8 и 11).

Символы нескольких простых форм кубической сингонии необходимо помнить наизусть:

1) гексаэдр — {100};
2) тетраэдр — {111} или $\{11\bar{1}\}$;
3) октаэдр — {111};
4) ромбододекаэдр — {110};
5) пентагон-додекаэдр — $\{hk0\}$;
6) общая форма — $\{hkl\}$.

Напомним, что в кубической сингонии пять видов симметрии и пять общих форм:

1) гексоктаэдр,
2) гекстетраэдр,
3) дидодекаэдр,
4) пентагон-триоктаэдр,
5) пентагон-тритетраэдр.

Кроме того, следует запомнить, что у кристаллов низшей категории пинакоиды в зависимости от символов имеют следующие названия:

{100} — 1-й пинакоид,
{010} — 2-й пинакоид,
{001} — 3-й пинакоид.

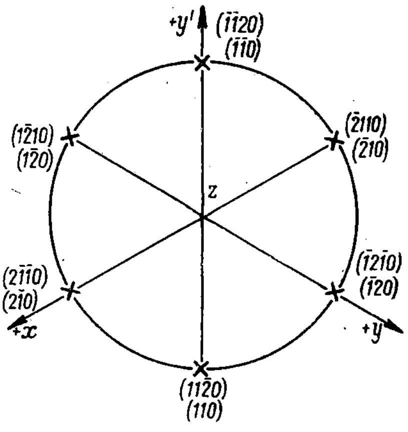


Рис. 107. Трех- и четырехчленные символы граней гексагональной призмы.

Теперь можно объяснить странный, на первый взгляд, факт использования кристаллографами дополнительной четвертой кристаллографической оси y'. Если пользоваться четырьмя осями и четырехчленными символами, то изложенное выше положение, что символы всех граней одной простой формы состоят из одних и тех же индексов, справедливо для всех сингоний. Если же использовать трехчленные символы при описании гексагональных и тригональных кристаллов, то это положение оказывается неверным (рис. 107), что и является главной причиной использования дополнительной оси y'.

Вопрос о принадлежности или непринадлежности тех или иных граней одной простой форме решается, вообще, не по символам этих граней, а по тому, связаны они друг с другом элементами симметрии или не связаны и соответственно имеют они одинаковое строение или не имеют. Во всех видах симметрии, кроме 43 и $m3m$, возможны разные простые формы одного или различного наименования, символы граней которых состоят из одинаковых индексов. Примером сказанному могут служить пинакоиды $\{100\}$, $\{010\}$ и $\{001\}$ кристаллов низшей категории, две тригональные призмы $\{11\bar{2}0\}$ и $\{\bar{1}2\bar{1}0\}$ вида симметрии $\bar{6}m$, тетрагональная призма $\{100\}$ и пинакоид $\{001\}$, тетраэдры $\{111\}$ и $\{1\bar{1}\bar{1}\}$ и т. д.

Вопросы для повторения

1. Что называется символом простой формы?
2. Какие символы имеют первый, второй и третий пинакоиды, кубический тетраэдр, октаэдр, гексаэдр, ромбододекаэдр и любая общая форма кубической сингонии?
3. Почему в гексагональной и тригональной сингониях используется дополнительная — четвертая кристаллографическая ось?

§ 9. Определение символов граней с помощью эталонных стереограмм

Измерения кристаллов с помощью гониометров дают возможность узнавать точное положение граней относительно кристаллографических осей и соответственно точное положение проекций граней. Исходя из данных гониометрического измерения с помощью вычислительных или графических методов можно определить численные значения индексов граней.[7]

Проще всего приближенно определять символы граней, сравнивая стереограмму изучаемого кристалла с соответствующей «эталонной» стереограммой. На рис. 108 приведена стереограмма кубической сингонии при обычной установке. Эта стереограмма используется для определения символов граней кристаллов кубической сингонии; она применима и для тетрагональной, ромбической, моноклинной и триклинной сингоний.

Символы граней кристаллов гексагональной и тригональной сингоний при установке с четырьмя кристаллографическими осями определяются по стереограмме, изображенной на рис. 109.

Стереограмма для кристаллов кубической сингонии, отъюстированных по L_3, приведена на рис. 110. Кроме того, эта стереограмма может быть использована для тригональных кристаллов при ром-

[7] Полное изложение графических и вычислительных методов кристаллографии имеется в книге О. М. Аншелеса (1939).

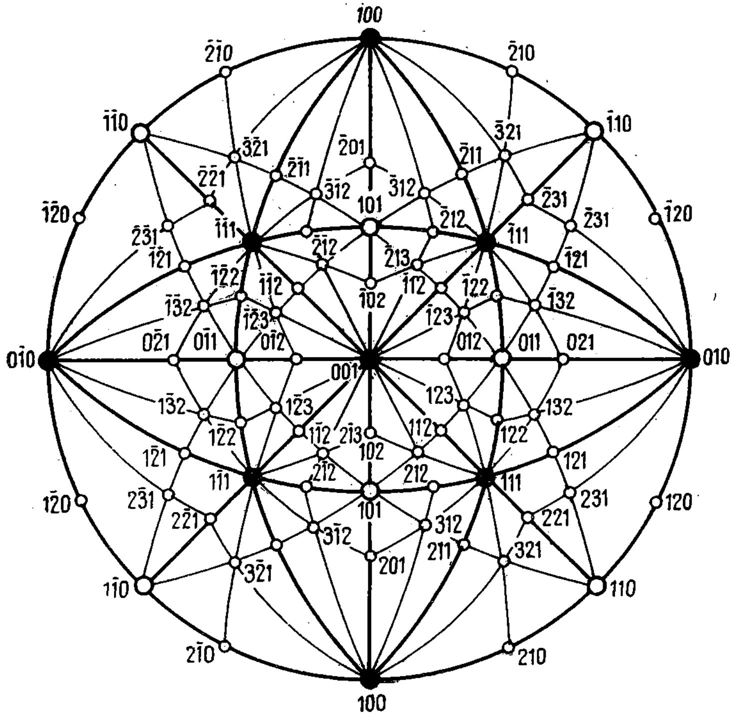


Рис. 108. Стереограмма кубической сингонии.

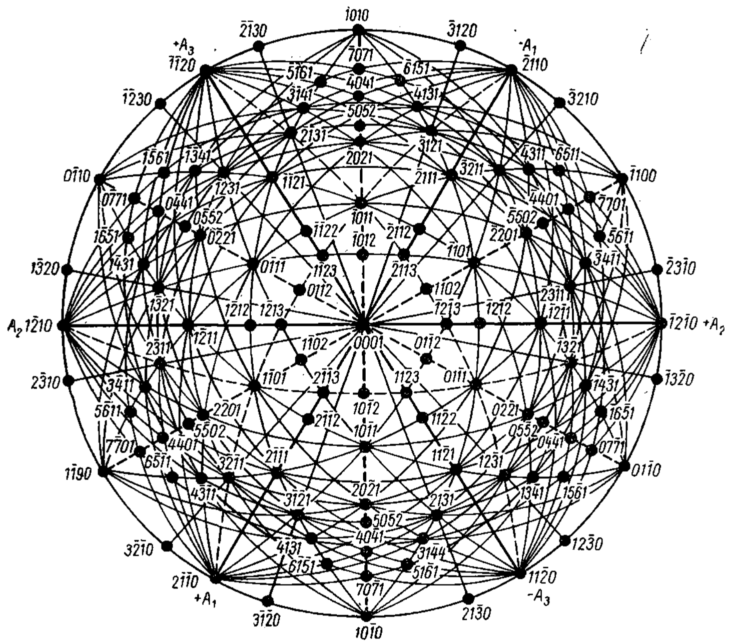


Рис. 109. Стереограмма гексагональной сингонии.
(Ось x—A_1; y—A_2; y'—A_3).

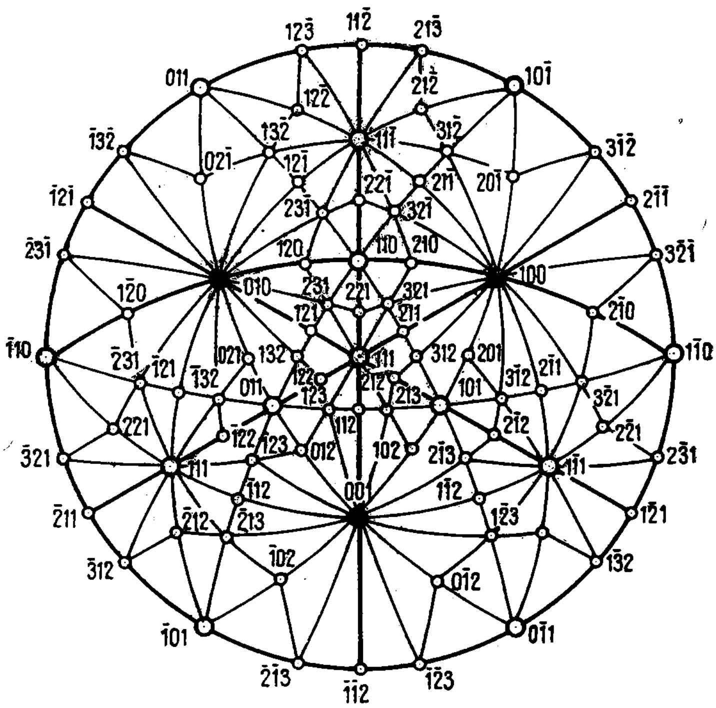


Рис. 110. Стереограмма кубической сингонии при совмещении с осью проекции L_3.

боэдрической установке и для кристаллов всех сингоний, кроме гексагональной, при произвольной ориентировке кристаллов.

На приведенных выше стереограммах проведены зоны или участки зон, в точках пересечения которых находятся проекции наиболее часто встречающихся граней, т. е. граней с наиболее простыми символами.

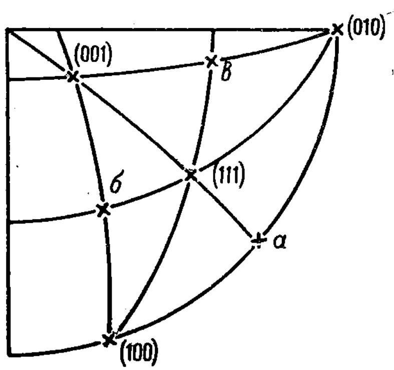


Рис. 111. Проекция граней кристалла триклинной сингонии.

На рис. 111 показаны проекции некоторых граней кристалла триклинной сингонии. Пусть известны проекции и символы граней (100), (010), (001) и (111). Требуется определить символы граней *а, б, в*. Грань *а* лежит на пересечении зон (001) — (111) и (100) — (010). По стереограмме рис. 108 видим, что на пересечении зон, проведенных через грани с такими же символами, лежит грань (110). Значит, и у грани *а* символ (110). Аналогичным путем определим символы граней *б* — (101) и *в* — (011).

Задачи

1. Используя стереограммы рис. 108 и 109, выяснить, в каких точках, в каких зонах или в каких областях стереограмм находятся проекции граней, имеющих символы каждого из шести типов.

2. На рис. 108 найдите зоны, в которых у всех граней а) первый индекс грани относится ко второму как 1 : 2; б) второй индекс относится к третьему как 2 : 1.

3. Выполнить описание ряда комбинационных многогранников разных сингоний по форме, показанной на рис. 112.

На проекциях гексагональных и тригональных кристаллов обязательно обозначить оси x, y и y^1.

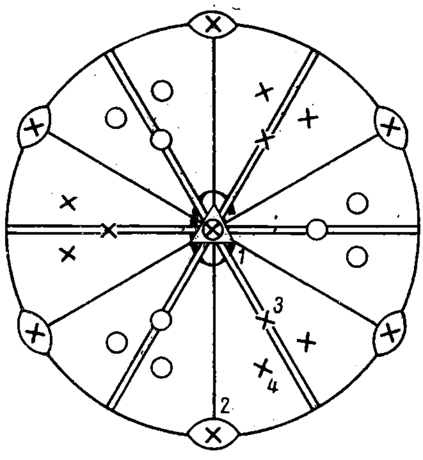


Рис. 112. Пример описания многогранника.

Категория средняя; сингония тригональная; вид симметрии инверсионно-планальный или тригонально-скаленоэдрический — $L_3 3L_2 C 3m$—$\bar{3}m$. E — одна, совпадает с L_3. *1* — пинакоид $\{0001\}$; *2* — гексагональная призма $\{11\bar{2}0\}$; *3* — ромбоэдр $\{01\bar{1}1\}$; *4* — тригональный скаленоэдр $\{hk\bar{i}l\}$

§ 10. Геометрические константы, или элементы кристаллов

Если кристалл изучен с помощью рентгеновских лучей и определены размеры его элементарной ячейки, то известны a_0, b_0 и c_0 — промежутки рядов решетки, принятых за кристаллографические оси (рис. 84, с. 104). По этим данным вычисляется отношение

$$a_0 : b_0 : c_0 = \frac{a_0}{b_0} : \frac{b_0}{b_0} : \frac{c_0}{b_0} = a : 1 : c.$$

Углы между кристаллографическими осями α, β и γ и отношение $a:1:c$ называются *элементами* или *геометрическими константами кристалла.*

В тех случаях, когда нет данных о величинах a_0, b_0 и c_0, вычисляется отношение единичных отрезков $OA_0 : OB_0 : OC_0 = \frac{OA_0}{OB_0} : \frac{OB_0}{OB_0} : \frac{OC_0}{OB_0} = a : 1 : c$.

Выбор кристаллографических осей и единичной грани по морфологическим особенностям кристалла часто оказывается не однозначным. Поэтому кристаллографические константы, полученные исходя из *морфологической установки* многогранника, могут отличаться от метрических констант этого же кристалла, полученных исходя из его *структурной установки.*

У всех кристаллов данного вещества одного и того же строения при данных термодинамических условиях и одинаковой установке α, β, γ и $a:1:c$ одинаковы. У кристаллов же разных веществ они вообще различны. По этим величинам можно отличать кристаллы разных веществ и кристаллы одного вещества, но различного строения. В тех случаях, когда у всех кристаллов данной сингонии углы между осями равны 90 или 120°, эти углы не считаются константами, так как они не могут быть использованы для различия кристаллов, относящихся к данной сингонии. Также, если $a_0=b_0$, то в отношении $a:1:c$ a оказывается равным 1 и не является константой.

У кристаллов кубической сингонии геометрические константы одинаковы, так как у них $a_0=b_0=c_0$ и $\alpha=\beta=\gamma=90°$. Геометрические константы кристаллов каждой сингонии помещены в специальной графе табл. 12 (с. 112—113).

Вопросы для повторения

1. Что называется геометрическими константами или элементами кристаллов?
2. Какими геометрическими константами характеризуется каждая сингония?

§ 11. Символы ребер

По отношению к ребрам кристалла закон Аюи (см. с. 104) выражается в том, что двойные отношения координат любых точек каких-либо двух ребер, взятых по трем другим ребрам как по осям координат, есть целые числа.

Пусть координатными осями будут линии Ox, Oy, Oz, параллельные ребрам пересечения *основных граней* (рис. 113). Основными гранями называются грани, имеющие символы (100), (010) и (001). $A_0B_0C_0$ — единичная грань. Параметры единичной грани: OA_0, OB_0 и OC_0.

Требуется определить символ ребра. Ребро нужно перенести параллельно самому себе так, чтобы оно прошло через начало координат. Пусть это будет ребро OK. Затем следует взять на ребре какую-нибудь точку и определить ее координаты. Координаты точки K получим следующим образом. Через точку K проведем прямую KM, параллельную Oz, до пересечения с плоскостью xOy.

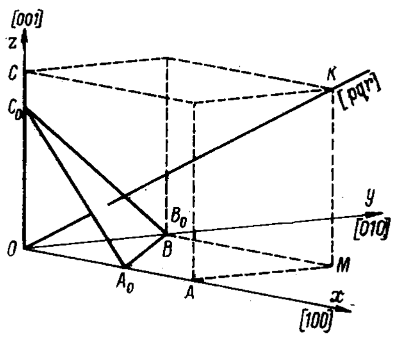


Рис. 113. Чертеж к определению индексов ребра.

В плоскости xOy проведем прямую MA, параллельную Oy, до пересечения с осью x. Отрезок $MK=OC$ и измеренный OC_0 будет координатой точки K по Oz. Отрезок $AM=OB$ и измеренный OB_0 — координата точки K по Oy. Отрезок OA, измеренный OA_0 — координата точки K по Ox. Точку K выгодно выбрать так, чтобы одна из ее координат оказалась равной единице. На рис. 113 $OB=OB_0$. Если построить параллелепипед, ребрами которого будут координаты точки K, то направление OK будет телесной диагональю этого параллелепипеда (см. рис. 113).

Отношение индексов ребра равно отношению координат любой точки, лежащей на этом ребре. Координаты точки измеряются единичными отрезками: $\frac{OA}{OA_0} : \frac{OB}{OB_0} : \frac{OC}{OC_0} = p : q : r$, где p, q и r — взаимно простые целые числа — индексы ребра OK. Символ ребра пишется в квадратных скобках $[pqr]$. При получении символов ребер не нужно брать отношение обратных величин $\frac{OA}{OA_0}$, $\frac{OB}{OB_0}$ и $\frac{OC}{OC_0}$, как это делается при нахождении символов граней.

Если известны символ ребра и параметры единичной грани, то можно решить обратную задачу — через начало координат провести прямую, соответствующую заданному символу. Для этого нужно построить параллелепипед с вершиной в точке O. Ребрами параллелепипеда будут параметры единичной грани, отложенные по соответствующим осям столько раз, сколько единиц содержится в соответствующем индексе ребра. Искомым ребром будет телесная диагональ параллелепипеда, проходящая через начало координат.

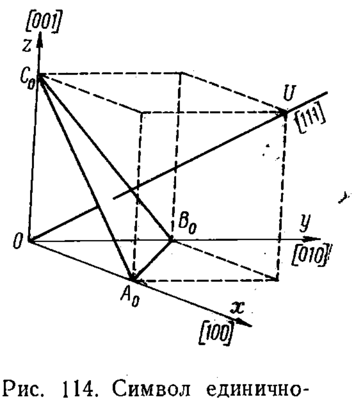


Рис. 114. Символ единичного ребра — [111].

На рис. 114 построен параллелепипед, ребрами которого служат параметры единичной грани. Телесная диагональ OU этого параллелепипеда называется единичным ребром. Для определения символа ребра *OU* удобнее всего взять точку *U*. Ее координаты 1, 1 и 1. Индексы ребра также единицы. Символ единичного ребра [111].

Очевидно (рис. 113 и 114), что символ оси x — [100], оси y — [010], оси z — [001].

Символы прямых используются для обозначения зон. *Символом зоны* называется символ оси зоны. *Ось зоны* — это прямая, параллельная ребрам, в которых пересекаются грани данной зоны. Несколько граней, параллельных, например, оси z, образуют зону. Символ этой зоны — [001].

Вопросы для повторения

1. Как выражается закон Аюи по отношению к ребрам кристаллов?
2. Как получить символ ребра, если известны параметры единичной грани?
3. Какие символы имеют оси x, y и z?
4. Что называется символом зоны?

Глава 7

ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ СИМВОЛАМИ ГРАНЕЙ И РЕБЕР

§ 1. Метод развития зон

В кристаллографии широко используется метод развития зон для вывода возможных граней. Этот метод основан на законе Х. С. Вейса (1780—1856), или законе зон:

Точка пересечения проекций любых двух зон кристаллов является проекцией возможной грани.

Соответственно закону Вейса линии пересечения возможных граней — это возможные ребра кристалла.

На рис. 115 через грани (100), (010), (001) и (111) проведено шесть зон и получено три точки пересечения зон *1*, *2* и *3*. Эти точки — проекции возможных граней. Через них можно провести новые зоны и получить новые точки пересечения зон, через которые снова провести зоны и т. д. Этот графический способ вывода возможных граней называется «методом развития зон».

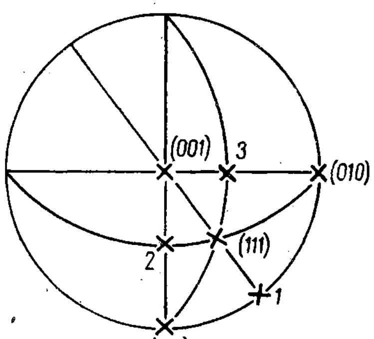


Рис. 115. Проекция нескольких зон с возможными гранями *1*, *2*, *3* в точках их пересечения.

Грани, параллельно ребрам пересечения которых проводятся кристаллографические оси, называются основными гранями. Например, у кристаллов видов симметрии $\bar{1}$, $2/m$, 222, mmm основные грани — это грани первого, второго и третьего пинакоидов, у кристаллов видов симметрии $4/m$, $\bar{4}m$, 42, $4/mm$ — это грани тетрагональной призмы и пинакоида, у кристаллов кубической сингонии — это грани гексаэдра. В тех случаях, когда известны кристаллографические оси, известны и основные грани, которые могут быть действительными, или возможными гранями.

Если известны проекции основных (100), (010), (001) граней и единичной (111) или косой *(hkl)*, или двух двуединичных граней, то методом развития зон можно вывести проекции любых возможных граней данного кристалла.

Вопросы для повторения

1. Как формулируется закон Вейса?
2. Какие линии называются возможными ребрами?
3. Какие грани называются основными?

§ 2. Зависимость между индексами ребра и проходящей через него грани

Между индексами ребра и грани, проходящей через ребро (или параллельной ему), существует простое соотношение. Если $(p_1p_2p_3)$ — символ грани, а $[r_1,\ r_2,\ r_3]$ — символ ребра, лежащего в грани или параллельного ей, т. е. символ зоны, то $p_1r_1+p_2r_2+p_3r_3=0$, т. е. сумма произведений индексов ребра на соответствующие индексы грани, параллельной ребру или проходящей через него, равна нулю. Эта формула позволяет установить зависимость между символами двух граней $(p_1p_2p_3)$ и $(q_1q_2q_3)$ и символом ребра их пересечения $[r_1r_2r_3]$, т. е. символом зоны, в которой лежат обе грани: $r_1:r_2:r_3=(p_2q_3-p_3q_2):(p_3q_1-p_1q_3):(p_1q_2-p_2q_1)$.

Если считать, что $[p_1p_2p_3]$ и $[q_1q_2q_3]$ символы зон, а $(r_1r_2r_3)$ — символ грани, находящейся на пересечении этих зон, то формула остается справедливой, и, используя ее, можно определить символ грани по символам двух зон, в которых находится эта грань.

Для ускорения вычислений удобно пользоваться «перекрестным умножением». Два символа, по которым определяется третий, записываются по два раза друг под другом, как это сделано ниже:

$$\begin{array}{c|cccc|c}
p_1 & p_2 & p_3 & p_1 & p_2 & p_3 \\
 & \multicolumn{4}{c|}{\times\times\times} & \\
q_1 & q_2 & q_3 & q_1 & q_2 & q_3
\end{array}$$

$$\overline{(p_2q_3-p_3q_2):(p_3q_1-p_1q_3):(p_1q_2-p_2q_1)=r_1:r_2:r_3}$$

Крайние индексы отделяются чертой, и они не участвуют в дальнейших вычислениях. Затем перемножаются все индексы, соединенные черточками. Написанное выше отношение разностей полученных произведений равно отношению искомых индексов.

При определении символа грани по символам двух зон вообще получается два результата: или искомый символ, или символ параллельной грани. Получение того или иного символа определяется тем, какой из перемножаемых символов будет записан сверху и какой снизу. В символах параллельных граней соответственные индексы всегда равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку. Например, $(hk\bar{l})$ и $(\bar{h}\bar{k}\bar{l})$ — символы параллельных граней. Мы всегда можем сообразить по знакам индексов, получен ли нужный для нас символ или символ с противоположными знаками у индексов. В последнем случае следует изменить знак у каждого индекса на обратный.

Точно так же при определении символа зоны получаются символы двух противоположных направлений, совпадающих с осью зоны.

Пусть требуется методом перекрестного умножения определить символ возможной грани *2* (см. рис. 115). Ось зоны (100)—(001) совпадает с кристаллографической осью *y*. Символ этой зоны — [010]. Символ зоны (111)—(010):

$$\begin{array}{c|cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$(0-1):(0-0):(1-0)=1:0:1 \quad [101]$$

Символ грани *2*:

$$\begin{array}{c|cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$(1-0):(0-0):(0-1)=1:0:1 \quad (101)$$

Полезно знать, что символ грани и символ перпендикуляра к ней равны друг другу в следующих случаях:

1. В кубической сингонии — у всех граней.
2. В тетрагональной, гексагональной и тригональной сингониях — у всех граней вертикальной зоны, т. е. зоны [001] и у граней (001) и $(00\bar{1})$.
3. В ромбической сингонии — у граней (100), $(\bar{1}00)$, (010), $(0\bar{1}0)$, (001) и $(00\bar{1})$.
4. В моноклинной сингонии — у граней (010) и $(0\bar{1}0)$.

Вопросы для повторения

1. Какая существует зависимость между символом грани и символом ребра, лежащего в грани или параллельного ей?
2. Что можно определить методом перекрестного умножения? Что необходимо знать, чтобы воспользоваться этим методом?
3. В каких случаях символ грани и символ перпендикуляра к грани равны друг другу?

Задача

Определите символ одной из медиан в треугольнике грани октаэдра.

§ 3. Зависимость между индексами ребра и проходящей через него грани для гексагональных и тригональных кристаллов при установке с четырьмя кристаллографическими осями

У кристаллов гексагональной и тригональной сингоний при установке с четырьмя кристаллографическими осями индексы ребра $[r_1r_2r_3r_4]$ и грани $(p_1p_2p_3p_4)$, проходящей через ребро, связаны следующей формулой: $(p_1-p_3)r_1+(p_2-p_3)r_2+p_4r_4=0$.

Чтобы по символам двух граней найти символ ребра их пересечения, необходимо сначала найти числа в скобках — субиндексы, а затем перекрестным умножением первый, второй и четвертый индексы ребра.

Например, для нахождения символа ребра, по которому пересекаются грани $(\bar{3}1\bar{2}1)$ и $(\bar{1}101)$ (рис. 116), вычитанием из 1-го и 2-го индексов 3-го получим субиндексы. Для 1-й грани: $3-\bar{2}=5$, $\bar{1}-\bar{2}=1$, для 2-й грани: $\bar{1}-0=\bar{1}$, $1-0=1$.

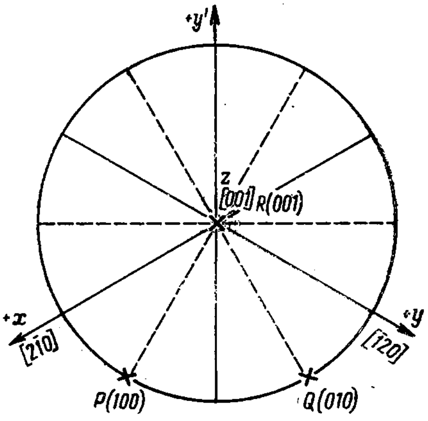


Рис. 116. Координатные оси и основные грани гексагональных кристаллов.

Перекрестным умножением этих субиндексов и четвертых индексов найдем символ оси зоны:

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
5 & 1 & 1 & 5 & 1 & 1 \\
\bar{1} & 1 & 1 & \bar{1} & 1 & 1
\end{array}
$$

$$(1-1) : (\bar{1}-5) : (5-\bar{1}) = 0 : \bar{6} : 6 = 0 : \bar{1} : 1 \, [0\bar{1}1]$$

Если нужен четырехчленный символ, то третий индекс находится, как сумма первых двух с обратным знаком: $[0\bar{1}11]$.

Чтобы определить четырехчленный символ грани кристалла гексагональной сингонии по четырехчленным символам двух зон, необходимо предварительно найти субиндексы зон так же, как это делается для граней. Перекрестным умножением этих субиндексов и четвертых индексов находятся первый, второй и четвертый индексы грани, третий равен сумме первых двух с обратным знаком.

Найдем символ грани, находящейся на пересечении зон $[0001]$ и $[0\bar{1}11]$. Субиндексы первой зоны — нули. Субиндексы второй зоны: $0-1=\bar{1}$ и $\bar{1}-1=\bar{2}$.

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\bar{1} & \bar{2} & 1 & \bar{1} & \bar{2} & 1
\end{array}
$$

$$(0-\bar{2}) : (\bar{1}-0) : (0-0) = 2 : \bar{1} : 0 \qquad (2\bar{1}\bar{1}0) \text{ и } (\bar{2}110).$$

В тех случаях, когда нужно определить символ грани, находящейся на пересечении двух зон, в каждой из которых известны символы двух непараллельных граней, а символы зон не нужны, поступают следующим образом.

Символы граней каждой зоны без третьего индекса подвергаются перекрестному умножению. Пусть символы граней одной зоны будут $(1\bar{1}02)$ и $(1\bar{1}01)$, символами граней другой зоны будут $(3\bar{2}\bar{1}0)$

и $(2\bar{1}\bar{1}0)$. Без получения субиндексов, отбросив третьи индексы, производим перекрестное умножение

$$\begin{array}{c|cccc|c} 1 & \bar{1} & 2 & 1 & \bar{1} & 2 \\ 1 & \bar{1} & 1 & 1 & \bar{1} & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc|c} 3 & \bar{2} & 0 & 3 & \bar{2} & 0 \\ 2 & \bar{1} & 0 & 2 & \bar{1} & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$(\bar{1}-\bar{2}) : (2-1) : (\bar{1}-\bar{1}) = 1 : 1 : 0 \qquad (0-0) : (0-0) : (\bar{3}-\bar{4}) = 0 : 0 : 1$$

Полученные числа, не являющиеся индексами зон, также подвергнем перекрестному умножению и получим индексы грани.

$$\begin{array}{c|cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$(1-0) : (0-1) : (0-0) = 1 : \bar{1} : 0 \qquad (1\bar{1}0)$$

Четвертый индекс находится как сумма первых двух с обратным знаком. В результате пересечения двух зон получаются две параллельные друг другу грани. Их символами в нашем случае будут $(\bar{1}100)$ и $(1\bar{1}00)$.

Символы граней и зон кристалла определяются после того как кристалл установлен, т. е. когда известны его координатные оси и соответственно положение основных граней: *P* (100), *Q* (010) и *R* (001). Кроме того, бывает известно положение единичной грани *U* (111) или положение и символ косой грани *(hkl)*, или положение и символы двух двуединичных граней. Располагая такими сведениями о четырех или пяти гранях, методом развития зон можно выяснить положение любой возможной у кристалла грани, а методом перекрестного умножения определить ее символ. Поскольку определение символов граней и направлений у гексагональных и тригональных кристаллов обычно вызывает затруднения, на особом рисунке показаны их координатные оси, основные грани и их трехчлённые символы (см. рис. 116).

Вопросы для повторения

1. Как по четырехчленным символам двух граней определить символ ребра их пересечения?
2. Что называется субиндексами?
3. Как по четырехчленным символам двух зон определить символ грани, лежащей в этих зонах?

Задача

Проверьте правильность утверждения, что у кристаллов гексагональной сингонии символ любой грани, лежащей в зоне [0001], и символ перпендикуляра к грани одинаковы.

§ 4. Метод сложения индексов

В методе сложения индексов используется наиболее частный случай зависимости между символами трех граней, лежащих в одной зоне. Эту зависимость в общем виде мы не рассматриваем.

Отношение сумм соответствующих индексов двух непараллельных граней $(p_1p_2p_3)$ и $(q_1q_2q_3)$ равно отношению индексов третьей грани $(k_1k_2k_3)$, лежащей между первыми двумя в одной с ними зоне:

$$\begin{array}{c} + \begin{array}{c} p_1p_2p_3 \\ q_1q_2q_3 \end{array} \\ \hline nk_1 : nk_2 : nk_3 = k_1 : k_2 : k_3 = (k_1k_2k_3). \end{array}$$

Здесь $nk_1 = p_1 + q_1$, $nk_2 = p_2 + q_2$ и $nk_3 = p_3 + q_3$.

Пусть требуется определить символ грани a, лежащей на пересечении зон (100)—(010) и (111)—(001) (см. рис. 111). Эта грань находится между гранями (100) и (010). Сложим их индексы.

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 100 \\ 010 \end{array} \\ \hline 110. \end{array}$$

Грань с символом (110) лежит в зоне (100) — (010) между гранями (100) и (010). Теперь нужно выяснить, лежит ли грань (110) в зоне (111)—(001). Если в этой зоне есть две грани, сумма индексов которых дает (110), то грань с таким символом имеется в зоне. Нетрудно сообразить, что сумма индексов грани (111) и грани, находящейся под ней — $(11\bar{1})$, дает нужный результат.

$$\begin{array}{c} +\begin{array}{c} 111 \\ 11\bar{1} \end{array} \\ \hline 2:2:0 = 1:1:0 \quad (110). \end{array}$$

Такой же результат получается, если из символа грани (111) вычесть символ грани (001)

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{r} 111 \\ 001 \end{array} \\ \hline 110. \end{array}$$

Соответственно изложенной выше зависимости одно из слагаемых равно сумме минус второе слагаемое.

Итак, грань с символом (110) лежит в точке пересечения зон (100)—(010) и (001)—(111), т. е. это грань a. В данном простом случае на основании ранее полученных сведений можно было сообразить без вычислений, что у всех граней, лежащих в зоне (111) — (001), первый и второй индексы равны. Среди граней этой зоны есть грань a, параллельная оси z, т. е. лежащая в зоне (100)—(010). Ее символ — (110).

Если известно положение на проекции основных граней P (100), Q (010), R (001) и единичной (111) или (hkl), или двух двуединичных, то методом сложения индексов в сочетании с методом развития зон можно определить символ любой имеющейся или возможной грани.

Вопросы для повторения

1. Какая зависимость между индексами граней одной зоны используется в методе сложения индексов?
2. На стереограмме (см. рис. 108) найдите примеры такой зависимости.

УКАЗАТЕЛЬ ЛИТЕРАТУРЫ

Аншелес О. М. Вычислительные и графические методы кристаллографии. Изд-во Ленингр. ун-та, 1939, 300 с.

Аншелес О. М. Начала кристаллографии. Изд-во Ленингр. ун-та, 1952, 276 с.

Бокий Г. Б. Введение в кристаллохимию. Изд-во Моск. ун-та, 1954, 489 с.

Бокий Г. Б. Кристаллохимия. М., «Наука», 1971, 400 с.

Болдырев А. К. Кристаллография. ОНТИ. Л.—М., Грозный, Новосибирск, Горнонефтеиздат, 1934, 426 с.

Булах А. Г. Графика кристаллов. М., «Недра», 1972, 112 с.

Доливо-Добровольский В. В. Курс кристаллографии. М.—Л., Изд-во ОНТИ, 1937.

Костов И. Кристаллография. М., «Мир», 1965, 528 с.

Лейтвейн Ф., Зоммер-Кулачевски Ш. Кристаллография. М., «Высшая школа», 1968, 379 с.

Попов Г. М., Шафрановский И. И. Кристаллография. М.—Л., Госгеолиздат, 1941, 242 с.

Попов Г. М., Шафрановский И. И. Кристаллография. М., «Высшая школа», 1952, 372 с.

Флинт Е. Е. Начала кристаллографии. М., «Высшая школа», 1961, 242 с.

Флинт Е. Е. Практическое руководство по геометрической кристаллографии. М., Госгеолтехиздат, 1956, 208 с.

Франк-Каменецкий В. А. Таблицы по геометрической макро- и микрокристаллографии. Изд-во Ленингр. ун-та, 1961, 33 с.

Шафрановский И. И. История кристаллографии в России. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1962, 415 с.

Шубников А. В., Копдин В. А. Симметрия в науке и искусстве. М., «Наука», 1972, 339 с.

Шубников А. В., Флинт Е. Е., Бокий Г. Б. Основы кристаллографии. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1940, 488 с.

Bishop A. C. An Outline of Crystal Morphology, Hutchinson. London, 1967, 314 p.

Buerger M. J. Elementary Crystallography, John Wiley and Sons, 1956, 548 p.

Kleber W. Einführung in die Kristallographie, Veb. Verlag Technik Berlin, 1965. 418 S.

Phillips F. C. Introduction to crystallography, Longmans. London, 1965. 340 p.

□

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Владимир Владимирович Нардов

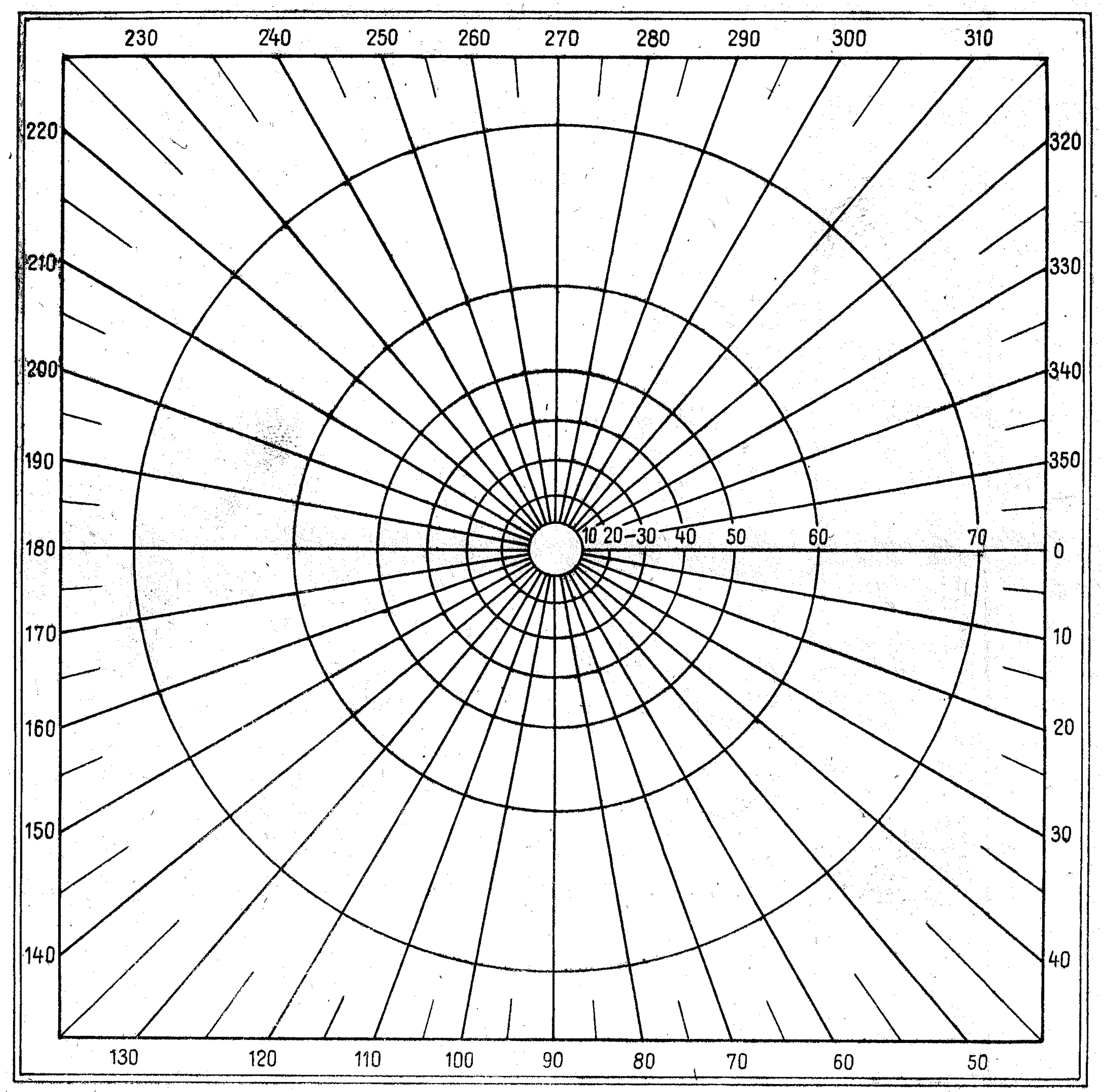
ПРАКТИЧЕСКОЕ РУКОВОДСТВО ПО ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ КРИСТАЛЛОГРАФИИ

Редактор *Ф. И. Шаренкова*
Техн. редактор *В. С. Кузина*
Корректоры *М. В. Унковская, И. П. Губерер*

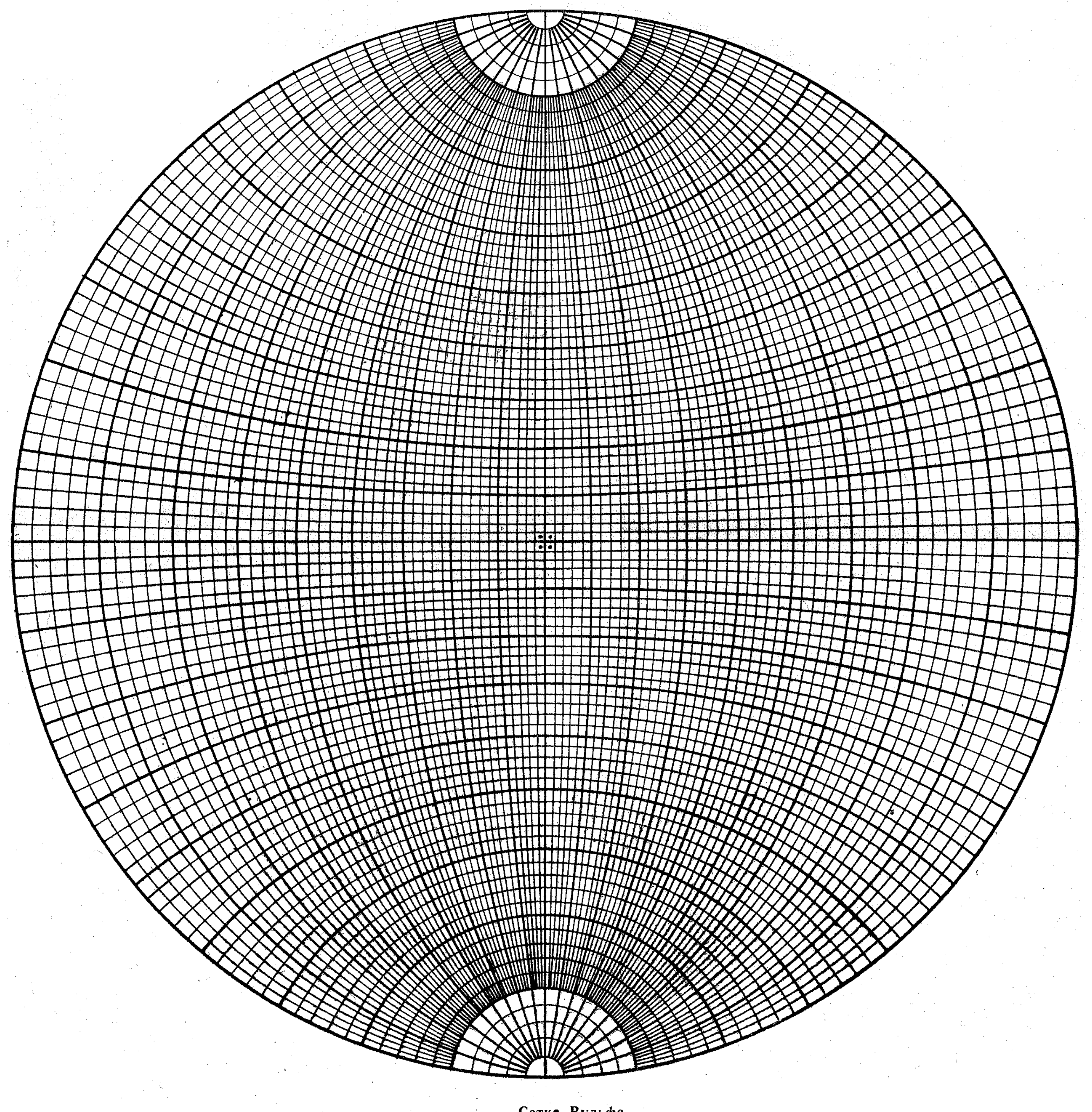
М25992. Сдано в набор 6/VII 1973 г. Подписано к печати 8/VIII 1974 г. Формат бум. 60×90$^1/_{16}$. Печ. л. 9. Уч.-изд. л. 8,86. Бум. л.4,5. Бумага тип. № 3. Заказ 3142. Тираж 4000. экз.
Цена 37 коп.

Издательство ЛГУ им. А. А. Жданова
199164. Университетская наб., 7/9

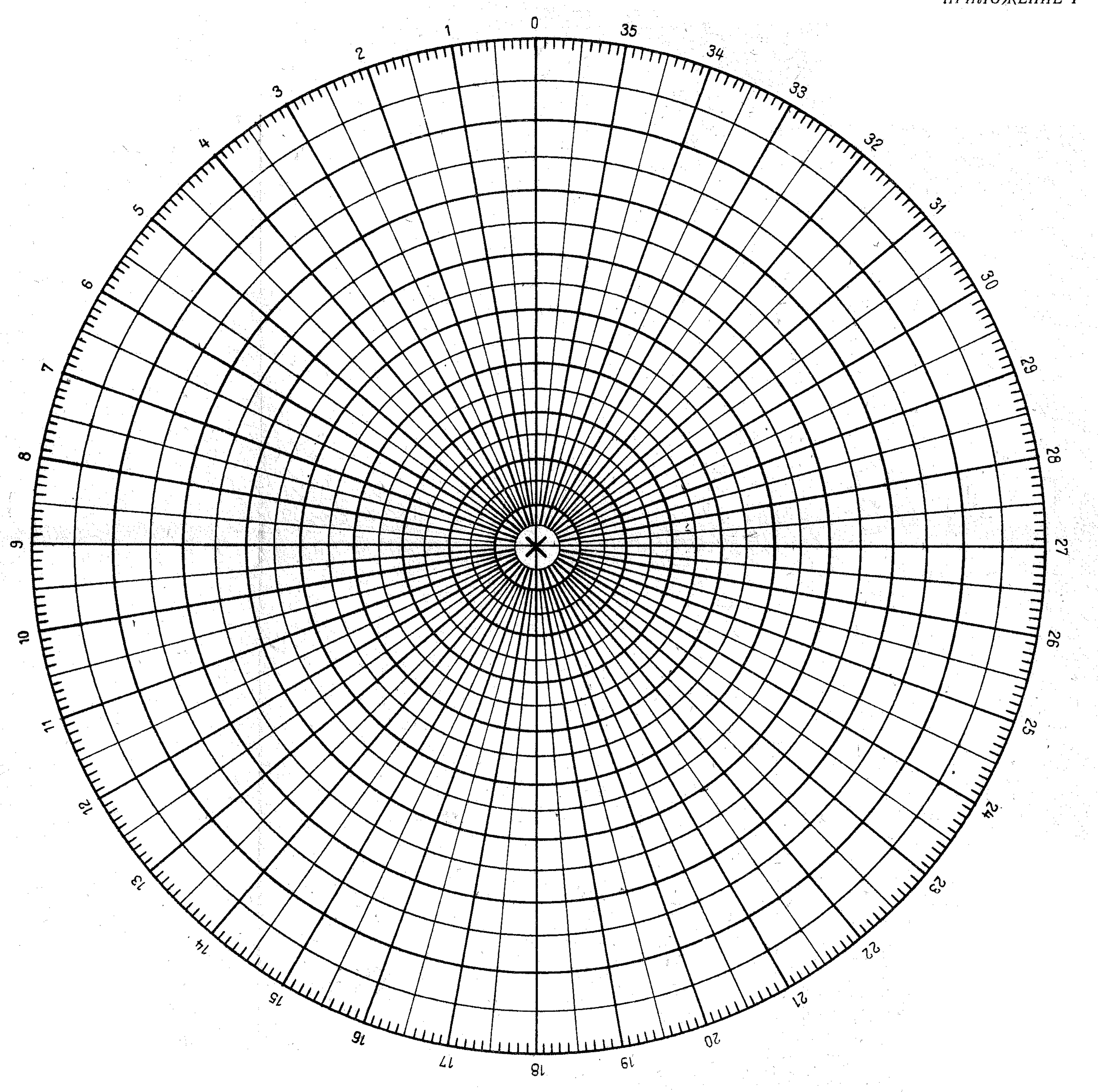
Типография им. Анохина
Управления по делам издательств, полиграфии и книжной торговли Совета Министров Карельской АССР,
Петрозаводск, ул. «Правды», 4.



Гномоническая сетка



Сетка Вульфа



Сетка Болдырева

37 коп.

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА . 1974