

И. В. Бойков, А.И. Бойкова

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ
ЗАДАЧ ГРАВИРАЗВЕДКИ

Пенза
Издательство Пензенского государственного университета
2013

УДК 550.83

Б 77

Рецензенты:

Кафедра “Прикладная математика”

государственного образовательного учреждения высшего

профессионального образования

“Политехнический институт. Сибирский федеральный университет”;

Доктор физико-математических наук,

профессор, профессор кафедры "Общепрофессиональные дисциплины"

Пензенского филиала военного учебно-научного центра Сухопутных

войск

Общевойсковой академии Вооруженных Сил Российской Федерации

О. А. Голованов.

Научный редактор

Заслуженный деятель науки РФ, д.т.н., профессор

В. И. Волчихин

Бойков, И. В., Бойкова, А. И.

Б 77 Приближенные методы решения прямых и обратных задач гравиразведки: Монография/ И. В. Бойков, А. И. Бойкова.— Пенза : Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2012. — 400 с. Библиогр.: с. 355 — 389.

ISBN

Монография посвящена приближенным методам решения прямых и обратных задач гравиразведки. Исследована гладкость потенциальных полей различной природы и построены оптимальные по точности методы приближения потенциальных полей в метрике пространства непрерывных функций. Построены оптимальные по точности приближенные методы решения прямых задач гравиразведки. Предложены и обоснованы итерационные методы решения плоских и пространственных обратных задач гравиметрии в линейной и нелинейной постановках. Для обратной задачи потенциала в двумерном случае предложены и обоснованы алгоритмы, основанные на проекционных методах решения нелинейных сингулярных интегральных уравнений. Исследованы приближенные методы продолжения потенциальных полей, основанные на решении интегральных уравнений с многомерными интегралами типа Коши и сингулярных интегральных уравнений. Построены оптимальные методы вычисления трансформаций потенциальных полей, в основу которых положена интерпретация трансформаций, как гиперсингулярных интегралов.

Книга адресована математикам, геофизикам, механикам и физикам, которые в своих предметных областях сталкиваются с необходимостью исследовать потенциальные поля различной природы, а также аспирантам и студентам специальностей “Математика”, “Прикладная математика”, “Геофизика”, “Механика”.

ISBN

УДК 550.83

ГОУ ВПО “Пензенский государственный университет, 2013

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	10
ГЛАВА I. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ, ОБЗОРЫ	14
1. Прямая и обратная задачи гравиметрии	14
2. Классы функций и обозначения	19
3. Численные методы решения прямой задачи гравиметрии	28
4. Численные методы решения обратной задачи гравиметрии	32
4.1. Потенциальные поля	33
4.2. Магнитные поля	33
5. Применение шаровых функций к решению прямых и обратных задач теории потенциальных полей	37
5.1. Полиномы Лежандра	38
6. Гиперсингулярные интегралы	41
6.1. Одномерные гиперсингулярные интегралы	41
6.2. Многомерные интегралы в смысле Адамара	49
7. Постановка задачи построения оптимальных алгоритмов вычисления гиперсингулярных интегралов и интегралов типа Коши	54
8. Элементы теории приближений	60
8.1. Полиномы наилучшего приближения	60
8.2. Интерполяционные полиномы	64
8.3. Элементы теории сплайнов	67
8.4. Полиномы Бернштейна	68
8.5. Некоторые факты из теории квадратурных формул	69
9. Элементы функционального анализа	73
9.1. Нормированные пространства	73
9.2. Линейные операторы	74
9.3. Дифференцирование в нормированных пространствах	77
10. Итерационные методы решения операторных уравнений	78
11. Метод Ньютона – Канторовича	80
ГЛАВА II. ОПТИМАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ	85
1. Оценки роста модуля производных потенциальных полей	86
1.1. Плоские поля	87
1.2. Трехмерные поля	90
1.3. Гладкость лапласовых полей	98
2. Оптимальные методы аппроксимации классов функций $Q_{r,\gamma}$ и $B_{r,\gamma}$	100
2.1. Оптимальные алгоритмы на классе $Q_{r,\gamma}(\Omega, 1)$	100

2.2. Аппроксимация класса функций $B_{r,\gamma}(\Omega, 1)$, $\Omega = [-1, 1]^l$, $l = 2, 3, \dots$	123
3. Оптимальные по точности методы восстановления потенциальных полей локальными сплайнами и целыми функциями	127
3.1. Аппроксимация потенциальных полей, принадлежащих классу функций $Q_{r,\gamma}(\Omega, 1)$, непрерывными локальными сплайнами в конечных областях	127
3.2. Аппроксимация потенциальных полей, принадлежащих классу функций $\bar{B}_{\alpha,0,\gamma}(\Omega, M)$, $0 \leq \gamma \leq 1$, непрерывными локальными сплайнами в конечных областях	137
3.3. Аппроксимация потенциальных полей рядами Котельникова	142
3.4. Восстановление потенциальных полей в неограниченных областях	144
3.4.1. Оптимальное восстановление потенциальных полей в неограниченных областях	144
3.4.2. Оптимальные методы восстановления гравитационных полей, создаваемых телами различной конфигурации	148
3.4.2.1. Одномерный случай	150
3.4.2.2. Двумерный случай	152
3.4.2.3. Трехмерный случай	154
4. Оптимальные методы представления потенциальных полей	156
4.1. Оценки снизу	157
4.2. Оптимальные по порядку методы	162
5. Восстановление геофизических полей интерполяционными полиномами, состоящими из потенциальных функций	170
5.1. Постановка задачи	170
5.2. Построение интерполяционных полиномов	171
5.3. Об одном подходе к аналитической аппроксимации потенциальных полей	177
6. Численный алгоритм восстановления потенциальных полей Земли	182
6.1. Постановка задачи. Обзор литературы	182
6.2. Численный алгоритм	184
6.3. Модельный пример	195
ГЛАВА III. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ГРАВИМЕТРИИ	197
1. Разложение по шаровым функциям потенциальных полей, создаваемых односвязным телом	197

1.1. Разложение в ряд по сферическим функциям потенциального поля одной материальной точки	197
1.2. Разложение в ряд по сферическим функциям потенциального поля двух точечных источников	199
1.3. Разложение в ряд по сферическим функциям потенциального поля $N + 1$ точечного источника	202
1.4. Разложение в ряд по сферическим функциям потенциального поля одного тела с переменной плотностью.....	204
1.5. Разложение в ряд по сферическим функциям потенциального поля двух тел с переменной плотностью.....	207
2. Аналитическое определение коэффициентов Фурье производных потенциальных полей	208
2.1. Разложение в ряд Фурье производных потенциальных полей от одного точечного источника.....	209
2.2. Разложение в ряд Фурье производных потенциальных полей от N точечных источников.....	211
3. Приближенные методы анализа потенциальных полей.....	212
4. Модельные примеры вычисления потенциала тела и его производных	223
ГЛАВА IV. ПРИБЛИЖЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ РЯДАМИ ПО СФЕРИЧЕСКИМ ФУНКЦИЯМ.....	
1. Постановка задачи	226
2. Численное определение моментов потенциальных полей	226
2.1. Построение вычислительной схемы	226
2.2. Регуляризация по А. Н. Тихонову.....	227
2.3. Регуляризация по В. Н. Страхову.....	228
2.4. Обоснование сходимости вычислительных схем.....	229
3. Фильтрация по методу В. Н. Страхова	230
4. Приближенные методы определения моментов производных потенциальных полей	232
5. Приближенные методы глобального гармонического сферического анализа потенциальных полей	233
5.1. Обзор литературы.....	233
5.2. Вспомогательные предложения	238
5.3. Численный двухступенчатый алгоритм ГГСА, основанный на экстраполяции полей и применении кубатурных формул.....	240
6. Двухступенчатый коллокационный метод разложения	

потенциальных полей по сферическим функциям	243
6.1. Численный алгоритм	243
6.2. Модельный пример	246
ГЛАВА V. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГРАВИ- И МАГНИТОРАЗВЕДКИ, ПРЕДСТАВИМЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ В СВЕРТКАХ	248
1. Обзор методов	248
2. Итерационные методы решения линейных уравнений	249
2.1. Итерационные методы решения одномерных линейных уравнений	250
2.2. Итерационные методы решения многомерных линейных уравнений	254
2.3. Итерационный метод с локальным сдвигом	255
3. Итерационные методы решения линейных систем разностных уравнений	257
4. Методы регуляризации решений линейных уравнений Вольтерра в свертках	259
5. Итерационные методы решения интегральных уравнений Вольтерра	265
5.1. Постановка задачи	265
5.2. Одномерные интегральные уравнения Вольтерра	266
5.3. Многомерные интегральные уравнения Вольтерра в свертках	274
6. Итерационные методы решения уравнений в свертках на конечных интервалах	279
6.1. Постановка задачи	280
6.2. Приближенное решение одномерных уравнений	280
6.3. Параллельные методы решения многомерных уравнений в свертках	286
7. Итерационные методы решения линейной обратной задачи гравиметрии для контактной поверхности	289
7.1. Постановка задачи	289
7.2. Двумерная задача	290
7.2.1. Определение границы раздела при известной глубине залегания H и неизвестном интервале залегания (a, b)	291
7.2.2. Определение границы раздела $z(x)$ при известной глубине залегания H и известном интервале залегания (a, b)	292
7.2.3. Определение границы раздела $z(x)$ при неизвестной глубине залегания H и неизвестном	

интервале залегания (a, b)	294
7.3. Трехмерная задача	295
8. Итерационные методы решения нелинейных обратных задач гравиметрии и магнитометрии	298
8.1. Обзор численных методов решения обратных задач теории потенциала	298
8.2. Приближенное решение обратной задачи логарифмического потенциала	306
8.3. Приближенное решение обратной задачи в трехмерном случае	308
8.4. Модельные примеры	310
9. Итерационные методы восстановления пространственных изображений, искаженных системами с абберациями	314
10. Применение метода гомотопии к решению обратных задач теории потенциала	325
10.1. Обратная задача теории потенциала в линейной постановке на плоскости	326
10.2. Обратная задача теории потенциала в линейной постановке в пространстве R_3	327
10.3. Обратная задача логарифмического потенциала в нелинейной постановке	329
10.4. Обратная задача теории потенциала в нелинейной постановке	330
10.5. Одновременное нахождение плотности и границы возмущающего тела	332
11. О применении метода локальных поправок к приближенному решению обратных задач гравиметрии	335
ГЛАВА VI. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГРАВИМЕТРИИ	
343	
1. Приближенное решение обратной задачи гравиметрии методом Ньютона — Канторовича	343
1.1. Постановка задачи. Обзор литературы	343
1.2. Метод Ньютона — Канторовича для точного уравнения	345
1.3. Метод простой итерации	355
2. Приближенное решение обратной задачи потенциала в пространстве суммируемых функций	357
2.1. Приближенное решение обратной задачи гравиметрии	359
2.2. Приближенное решение обратной задачи электроразведки ..	362
ГЛАВА VII. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ	

ПРОДОЛЖЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ	364
1. Обзор литературы	364
2. Метод сингулярных интегральных уравнений в задачах аналитического продолжения	364
3. Численные методы продолжения потенциальных полей в пространстве R_3	366
3.1. Постановка задачи	367
3.2. Приближенный метод	367
4. Дискретные модели продолжения потенциальных полей	373
4.1. Постановка задачи и вспомогательные результаты	373
4.2. Продолжение потенциальных полей с плоской поверхности .	374
4.3. Продолжение потенциальных полей с поверхности Ляпунова	379
ГЛАВА VIII. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ТРАНСФОРМАЦИЙ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ	383
1. Постановка задачи	383
2. Одномерные трансформации	386
3. Гладкость одномерных трансформаций	393
4. Оптимальные методы восстановления одномерных сопряженных функций	396
5. Оптимальный метод трансформации потенциальных полей в одномерном случае	397
6. Трансформации многомерных потенциальных полей	401
7. Гладкость многомерных трансформаций	408
8. Оптимальные методы вычисления трансформаций, представимых многомерными гиперсингулярными интегралами .	418
9. Кубатурные формулы на хаотических сетках и их применение к приближенным методам трансформации потенциальных полей	421
9.1. Кубатурные формулы на классах функций Гельдера	422
9.2. Кубатурные формулы на классе функций $W^{r,r}(M)$	424
9.3. Вычисление одномерных сингулярных интегралов на классах Гельдера	426
9.4. Вычисление одномерных сингулярных интегралов на классах Соболева	429
9.5. Приближенное вычисление гиперсингулярных интегралов на хаотических сетках	432
9.5.1. Одномерный случай	432
9.5.2. Многомерный случай	434
ПРИЛОЖЕНИЕ А. Вычисления полиномов Лежандра	439

ПРИЛОЖЕНИЕ В. Составление систем уравнений для приближенного представления потенциальных полей рядами по сферическим функциям	441
ПРИЛОЖЕНИЕ С. Итерационные методы	443
ПРИЛОЖЕНИЕ D. Модельные примеры к главе IV	446
ПРИЛОЖЕНИЕ E. Решение обратных задач гравиметрии на компьютерах с параллельными процессорами	457
ПРИЛОЖЕНИЕ F. Приближенное вычисление производных высоких порядков	462
ПРИЛОЖЕНИЕ G. Модельные примеры к разд. 8 главы V	466
ПРИЛОЖЕНИЕ H. Модельные примеры к главе VII	472
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	476
Список литературы	477

ПРЕДИСЛОВИЕ

Изучение глубинного внутреннего строения Земли являлось и является одной из важнейших задач науки. Гравитационное поле Земли (поле силы тяжести) является одним из немногих источников информации о внутреннем строении Земли. Попытки заглянуть в глубь Земли не прекращаются в течении столетий. Еще в XVIII веке М. В. Ломоносов писал: "Велико есть дело достигать в глубину земную разумом, куда рукам и оку досягать возбраняет натура". И за прошедшие три века ситуация мало изменилась. Несмотря на то, что в настоящее время скважины достигают глубины до 15 км, единственными методами изучения внутреннего строения Земли все еще являются математические методы. Человечество физически достигло небесных тел, отстоящих от Земли на миллионы километров, а о внутреннем строении Земли судит в основном по математическим моделям, построенным в результате интерпретации измерений, проведенных на поверхности Земли или в скважинах.

Основными геофизическими методами, позволяющими обрабатывать результаты измерений, являются сейсмологические, гравиметрические и магнитометрические. Исторически в гравиметрии сложилось два основных направления — решение прямых и обратных задач.

Прямые задачи гравиметрии направлены на построение гравитационных и потенциальных полей, создаваемых телами определенной геометрической конфигурации и определенной плотности. Результаты, полученные при решении прямых задач, позволяют проверить и уточнить существующие локальные, региональные и глобальные модели внутреннего строения Земли.

Обратные задачи гравиметрии, напротив, направлены на исследование недр Земли на основании информации о гравитационных полях. Решение обратных задач положено в основу построения математических моделей внутреннего строения Земли, которые затем проверяются с применением прямых задач гравиметрии.

Наряду с общими задачами исследования строения Земли, гравиметрия широко применяется при поиске полезных ископаемых. Круг задач, связанных с применением информации о гравитационных полях к поиску полезных ископаемых, выделен в отдельное направление геофизики — гравиразведку.

Решение прямых и особенно обратных задач гравиметрии и гравиразведки в явном виде возможно лишь в частных случаях. Поэтому актуальным является развитие численных методов и их обоснование.

Настоящая книга посвящена приближенным методам решения прямых и обратных задач гравиметрии и гравиразведки.

Книга не претендует на подробное изложение приближенных методов решения прямых и обратных задач гравиразведки.

Подробное изложение методов гравиразведки представлено в книгах [96, 97, 6, 132, 169, 170, 268, 280], в которых содержатся обширные библиографии.

Подробное изложение отдельных методов решения прямых и обратных задач гравиразведки дано в монографиях [5, 6, 8, 9, 20, 76, 98, 132, 169, 170, 172, 238, 249, 253, 268, 279, 280].

Перспективы развития численных методов гравиметрии в XXI столетии представлены в обзорах [190, 192, 193, 194].

Настоящая книга написана в основном на основании исследований авторов и посвящена следующим проблемам: построению оптимальных по точности методов аппроксимации потенциальных и гравитационных полей; построению оптимальных по точности методов решения прямых задач гравиразведки; построению и обоснованию итерационных методов решения обратных задач гравиразведки; применению гиперсингулярных интегралов к оценке точности интегральных трансформаций.

Книга посвящена приближенным методам решения прямых и обратных задач гравиметрии. Она состоит из 8 глав и приложения.

Первая глава является обзорной. В ней дан краткий обзор исследований по приближенным методам решения прямой и обратной задач гравиметрии. Кроме того, в этой главе приводится материал, используемый в основной части книги: даны определения гиперсингулярных интегралов; приведена постановка оптимальных методов вычисления; определены классы функций, используемые в работе; приведены необходимые сведения из теории приближений и функционального анализа; представлены некоторые итерационные методы.

Вторая глава состоит из шести разделов. В первом разделе исследуется гладкость потенциальных полей. Остальные разделы посвящены построению различных алгоритмов восстановления потенциальных полей. Во втором разделе построены оптимальные по точности методы аппроксимации классов функций, имеющих различную гладкость в окрестности границы области определения. В третьем разделе построены алгоритмы аппроксимации потенциальных полей сплайнами и целыми функциями. Четвертый раздел посвящен оптимальным методам представления потенциальных полей. В пятом разделе построены алгоритмы восстановления потенциальных полей Земли, основанные на методе экстраполяции

потенциальных функций. В шестом разделе изложен численный метод восстановления потенциальных полей Земли.

В третьей главе исследуется разложение потенциальных полей в ряды по сферическим функциям.

Четвертая глава посвящена приближенным методам представления потенциальных полей рядами по сферическим функциям. Исследованы вопросы приближенного вычисления коэффициентов Фурье по сферическим функциям потенциальных полей, заданных в конечном числе точек. Изложены алгоритмы регуляризации Тихонова и Страхова полученных систем уравнений, исследована фильтрация по методу Страхова систем уравнений, аппроксимирующих потенциальные поля. Подробно изложены методы глобального гармонического сферического анализа потенциальных полей. Рассмотренный в данной главе двухступенчатый приближенный метод нахождения коэффициентов Фурье потенциальных полей (по системе сферических функций) позволяет вычислять эти коэффициенты до высокого порядка.

Пятая глава состоит из девяти разделов. В первом разделе дан обзор приближенных методов решения уравнений в свертках. Второй раздел посвящен итерационным методам решения линейных и нелинейных уравнений в свертках. В третьем разделе рассмотрены итерационные методы решения дискретных уравнений в свертках. Одномерные и многомерные интегральные уравнения Вольтерра исследуются в четвертом и пятом разделах. Основное внимание уделяется построению и обоснованию итерационных методов. В шестом разделе построены и обоснованы итерационные методы решения нелинейных уравнений в свертках. Изложенные во втором, третьем и шестом разделах алгоритмы используются в седьмом разделе для построения эффективных методов решения обратных задач гравиметрии для контактной поверхности. В восьмом разделе изложены итерационные методы решения обратных задач гравиметрии и магниторазведки в нелинейной постановке. Девятый раздел посвящен восстановлению изображений в системах, искаженных абберациями.

Шестая глава посвящена решению обратных задач теории потенциала. Изложен метод сведения обратных задач к нелинейным сингулярным интегральным уравнениям. Предложены и обоснованы различные итерационные методы решения полученных нелинейных сингулярных интегральных уравнений.

В седьмой главе рассмотрены приближенные методы продолжения потенциальных полей. Основным математическим аппаратом, используемым в этой главе, являются многомерные аналоги интегралов типа

Коши и интегралы Стрэттона — Чу. В первом разделе приведены основные свойства этих интегралов. В остальных разделах изложены приближенные методы продолжения и разделения потенциальных полей.

В восьмой главе представлены алгоритмы приближенного вычисления трансформаций потенциальных полей. Основное отличие от известных алгоритмов заключается в трактовке трансформаций потенциальных полей как преобразований, построенных на основе гиперсингулярных интегралов. Построены оптимальные по точности алгоритмы трансформации одномерных и многомерных полей. Предложены алгоритмы построения трансформаций потенциальных полей, известных своими значениями на хаотических сетках.

В приложениях описаны разработанные программы, дано решение модельных примеров.

Книга, в первую очередь, адресована специалистам в области прикладной математики, геофизики, физики. Отдельные главы книги могут быть использованы в качестве учебного пособия по теории приближения, квадратурным формулам и методам граничных интегральных уравнений для студентов специальности "Прикладная математика".

Исследования авторов по приближенным методам решения задач геофизики были поддержаны Российским фондом фундаментальных исследований (гранты 94-01-00653, 97-01-00621), Министерством образования РФ (гранты по вычислительной математике 1994-1996 гг. и 1998-2000 гг.), Федеральным агентством по образованию РФ (2005-2009 гг., регистрационный номер 0120.0502705; 2010-2011 гг., регистрационный номер 0120.0502705; 2011 г., регистрационный номер 0120.1052992).

Многие разделы книги были предметом многочисленных плодотворных дискуссий с академиком РАН, доктором физико-математических наук, профессором В. Н. Страховым. Авторы выражают искреннюю благодарность президенту Пензенского государственного университета, Заслуженному деятелю науки РФ, доктору технических наук, профессору В. И. Волчихину за постоянную поддержку, оказываемую авторам при работе над книгой.

ГЛАВА I

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ. ОБЗОРЫ

1. Прямая и обратная задачи гравиметрии

Одними из основных понятий теории геофизических полей являются понятия прямой и обратной задачи потенциала.

Приведем, следуя [96], определения прямой и обратной задач.

Прямая задача — это задача нахождения элементов гравитационного поля по заданному распределению его источников — тяготеющих масс. Под элементами гравитационного поля здесь и всюду ниже понимаются: потенциал поля, составляющие вектора напряженности по осям координат, вторые производные потенциала по координатам и т.д.

В общем виде решение прямой задачи гравиметрии дается интегральными представлениями для потенциала:

$$V(x, y, z) = G \iiint_D \frac{dm(\xi, \eta, \zeta)}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}}, \quad (1.1)$$

его первых производных:

$$\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x} = G \iiint_D \frac{(\xi - x)dm(\xi, \eta, \zeta)}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{3/2}}, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y} = G \iiint_D \frac{(\eta - y)dm(\xi, \eta, \zeta)}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{3/2}}, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial z} = G \iiint_D \frac{(\zeta - z)dm(\xi, \eta, \zeta)}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{3/2}}, \quad (1.4)$$

и вторых производных. В (1.1)–(1.4) (x, y, z) — координаты произвольной точки пространства; (ξ, η, ζ) — координаты точки несущей массы; $dm(\xi, \eta, \zeta)$ — элемент массы в точке (ξ, η, ζ) ; D — объем, занятый массами; $G = 6,67 \cdot 10^{-8}$ — универсальная гравитационная постоянная.

В последние годы в связи с активным развитием методов градиентометрии более широкое применение при исследовании потенциальных полей играют интерпретации данных тензорной градиентометрии [136].

Если в точке (ξ, η, ζ) массы обладают плотностью $\delta(\xi, \eta, \zeta)$, то $dm(\xi, \eta, \zeta) = \delta(\xi, \eta, \zeta)dV = \delta(\xi, \eta, \zeta)d\xi d\eta d\zeta$.

В формулах (1.1)–(1.4) точка, в которой определяются значения элементов гравитационного поля, может находиться как вне носителя масс, так и внутри его. В первом случае говорят о внешнем гравитационном поле, во втором — о внутреннем. Для гравиразведки основное значение имеет нахождение внешних полей, хотя с развитием шахтной и скважинной гравиразведки большое значение приобретает и расчет внутренних полей.

Обратная задача гравиразведки состоит в нахождении распределений масс по заданному гравитационному полю этих масс.

Под заданным гравитационным полем здесь понимается, что заданы значения потенциала или (и) его производных на некотором множестве точек. В теоретических исследованиях часто предполагается, что гравитационное поле известно в некоторой области.

Под термином "нахождение распределения масс" понимается нахождение тел, вызывающее отклонение гравитационного поля, и определение их границ и плотностей.

Если заданным является внешнее поле (случай, наиболее важный для гравиразведки), говорят о *внешней* обратной задаче, если задано внутреннее поле — о *внутренней* обратной задаче.

Формально обратная задача (не обязательно обратная задача гравиразведки) определяется следующим образом. Есть модель, характеризующаяся рядом параметров. Известны результаты измерений возмущений, вносимых моделью. Требуется по известным результатам измерений восстановить модель (определить параметры модели).

Подобным образом ставятся обратные задачи магниторазведки, электродинамики, акустики и т.д.

При решении обратных задач возникают (с возрастающей сложностью) три задачи:

- 1) доказательство существования решения;
- 2) доказательство единственности решения;
- 3) исследование устойчивости решения.

Доказательства существования решения может оказаться недостаточно для решения конкретной физической задачи, так как две различные модели могут приводить к идентичным измерениям. Подобные примеры различных тел, имеющих одинаковый потенциал, приведены в статье [146].

Необходимо отметить, что аналитическое решение прямой и обратной задач гравиметрии возможно лишь в исключительных случаях. Поэтому актуальным является развитие численных методов.

В областях, свободных от масс, гравитационные поля представляются различными аналитическими выражениями (рядами по различным системам ортогональных функций, рядами Лорана, определенными интегралами, интегралами типа Коши, интегралами Фурье и т.д.). В книге [96] отмечается, что основное свойство этих аналитических выражений состоит в том, что коэффициенты рядов и ядра интегралов однозначно определяются по значениям поля в соответствующей области. Следовательно, для построения таких аналитических выражений не требуется знания распределения источников поля.

Представления гравитационных полей рядами и интегралами служат математической основой для разработки: 1) эффективных численных методов решения прямой задачи гравиметрии; 2) численных методов аналитического продолжения и нахождения пространственного распределения гравитационных полей; 3) алгоритмов нахождения некоторых характеристик расположения особых точек элементов внешних полей; 4) алгоритмов нахождения интегральных характеристик источников аномальных полей; 5) методов разделения аномальных полей, в том числе методов фильтрации высокочастотных помех и разделения полей от отдельных тел.

При решении прямой задачи гравиметрии возникает необходимость не только в разработке эффективных алгоритмов вычисления соответствующих интегралов, но и в тщательном выборе систем узлов для восстановления гравитационных полей. На важность этой задачи неоднократно указывал В. Н. Страхов [178, 204].

Задача оптимального выбора узлов при аппроксимации потенциальных полей решена в работах И. В. Бойкова и А. И. Бойковой [35, 36, 39]. Для решения этой задачи была исследована гладкость потенциальных функций в окрестности границы $\Gamma = \delta\Omega$ области Ω их определения и определены соответствующие классы функций. Показано, что при различных граничных условиях гладкость потенциальных полей описывается классами $Q_{r,\gamma}$, $\tilde{Q}_{r,\gamma}$ и $B_{r,\gamma}$, $\tilde{B}_{r,\gamma}$ (см. определения 2.12-2.14, приведенные в разделе 2 данной главы), состоящими из функций, у которых, начиная с $r + 1$ порядка, модули производных неограниченно возрастают при приближении к границе области. Вычислены поперечники Колмогорова и Бабенко классов функций $Q_{r,\gamma}$, $\tilde{Q}_{r,\gamma}$ и $B_{r,\gamma}$, $\tilde{B}_{r,\gamma}$ и построены оптимальные по точности (по порядку) методы восстановления потенциальных полей.

Трудности решения обратных задач гравиметрии обусловлены тем, что эти задачи некорректны [213] и, как правило, не обладают

свойством единственности решения. Это означает, что существуют тела с различными возмущающими свойствами (например, с различными распределениями масс, различными конфигурациями тел), порождающие тождественные внешние поля. Для выделения классов однозначности необходимо наложить дополнительные условия на плотность и геометрические свойства тел. Например, П. С. Новиков доказал единственность обратной задачи потенциала [144] в классе звездных областей, заполненных массами постоянной плотности. Неоднозначность решения обратной задачи потенциала обусловлена существованием распределений масс, имеющих нулевое внешнее поле. Характеристика таких распределений дается леммой П. С. Новикова [144]: плотность тела, определенно в области Ω , создающая нулевой внешний (для области Ω) потенциал, ортогональна всем гармоническим функциям, определенным в Ω . Исследования по определению областей единственности, основанные на этой лемме, проводились большим числом авторов. В классе областей, границы которых имеют общий участок, теоремы единственности доказаны А. А. Заморевым [106, 107]. Различные подходы к решению обратных задач предложены И. М. Рапопортом [157, 158], В. К. Ивановым [108], [110, 111], А. И. Приленко [150, 151] и А. В. Цирульским [227, 228]. Случай контактной границы раздела изучал В. Г. Чередниченко [230, 232]. основополагающие результаты по исследованию единственности решения обратных задач гравиметрии получены В. Н. Страховым [186, 187] и его учениками [74, 75].

Большое влияние на развитие методов исследования единственности обратных задач оказала программа исследований, предложенная В. Н. Страховым [189] – [194]. Отметим также интересный обзор по неединственности обратных задач [146].

Даже в случае, когда теоретически обратная задача имеет единственное решение, его численное нахождение является чрезвычайно сложной задачей благодаря следующим обстоятельствам [96]:

1. В формулировке обратной задачи требуется, чтобы гравитационное поле было задано на бесконечном множестве точек. В реальной гравиразведочной практике это условие не выполняется, поскольку в силу дискретности гравиметрических наблюдений число наблюдаемых значений элементов поля конечно.

2. В формулировке обратной задачи требуется, чтобы было задано (точно) поле тех масс, которые подлежат определению. На практике это условие не выполняется, так как наблюдаемые значения элементов поля содержат погрешности наблюдений и влияния сторонних объектов.

Поэтому, как отмечается в [96], "создание эффективных численных алгоритмов решения обратной задачи является делом трудным и требует глубоко продуманной методологии".

Обратные задачи даже в тех случаях, когда решение единственно, обладают свойством неустойчивости [213]. Это означает, что близкие внешние поля, отличающиеся друг от друга не более, чем на ε , создаются различными физическими телами. Поэтому при решении обратных задач необходимо использовать методы регуляризации, основанные на учете априорной информации о свойствах искомого решения и помех во входных данных. Методам решения некорректно поставленных задач посвящены фундаментальные исследования А. Н. Тихонова [213], В. К. Иванова [108, 109], М. М. Лаврентьева [124] и В. Н. Страхова [184]. Регуляризирующие методы решения обратных задач геофизики исследовались В. Н. Старостенко [170], Б. В. Гласко с соавторами [91] и другими авторами.

Исторически одним из первых методов решения обратных задач теории потенциала были работы, основанные на применении методов теории функций комплексной переменной (ТФКП). Исследование обратных задач потенциала методами ТФКП началось с работы И. М. Раппопорта [157]. И. М. Раппопорт предложил в качестве функции, описывающей границу тела, создающего потенциал, использовать функцию $z = z(t)$, отображающую конформно и однолистно единичный круг $|t| \leq 1$ плоскости z на область G , занимаемую телом.

В. К. Ивановым [108, 109] был предложен метод решения обратных задач потенциала, заключающийся в сведении этих задач к нелинейным краевым задачам и к нелинейным сингулярным интегральным уравнениям с неизвестной функцией, осуществляющей конформное и однолистное отображение окружности с центром в начале координат на искомую область. Методы ТФКП в применении к плоским задачам потенциала глубоко разработаны в работах В. Н. Страхова [183], А. В. Цирульского [227], В. Г. Чередниченко [230]. Приближенные методы решения двумерных задач теории потенциала, основанные на приближенном решении нелинейных сингулярных интегральных уравнений, предложены и обоснованы И. В. Бойковым и В. Е. Щукиной [63, 64].

Исследования трехмерных обратных задач потенциала начаты В. К. Ивановым [110]. Различным методам решения этих задач посвящены работы А. И. Приленко (см., например, [151]).

Эффективными методами решения прямых и обратных задач геофизики являются методы, основанные на применении интегралов типа

Коши. Основные результаты, полученные в этом направлении, подытожены в монографии М. С. Жданова [103].

Приближенным методом решения прямых задач гравиразведки, основанным на применении многомерных интегралов типа Коши, посвящены работы [40, 44, 49, 52, 53]. Новый подход к методам решения алгебраических уравнений, к которым редуцируются обратные задачи геофизики, опубликован в трудах Всероссийского семинара "Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей" [83].

Подробный обзор и сравнительный анализ исследований, проведенных в XX в. в России и за ее границей по теории и практике интерпретации потенциальных полей, представлен в работах В. Н. Страхова [190, 191, 193, 194]. В этих же работах В. Н. Страхов обосновал необходимость возникновения новой (третьей) парадигмы, которую он назвал парадигмой зрелой компьютерной эпохи, описал основные характеристики этой парадигмы и составил обширную программу перехода от второй к третьей парадигме.

2. Классы функций и обозначения

В этом разделе приведены классы функций, используемые в книге. Описание классов функций $H_\alpha(M; [a, b])$ ($0 < \alpha \leq 1$), $W_p^r(1)$, $W^{r,s}(1)$, $H_{w_1 w_2}(D)$ дается по книге С. М. Никольского [141].

Определение 2.1. Класс функций Гельдера $H_\alpha(M; [a, b])$ ($0 < \alpha \leq 1$) состоит из заданных на отрезке $[a, b]$ функций $f(x)$, удовлетворяющих во всех точках x' и x'' этого отрезка неравенству $|f(x') - f(x'')| \leq M|x' - x''|^\alpha$.

В случае, когда из текста ясно, на каком множестве рассматриваются функции, вместо $H_\alpha(M; [a, b])$ будем писать $H_\alpha(M)$. Это замечание относится и к остальным классам функций.

Определение 2.2. Класс $W^r(M; [a, b])$ состоит из функций, заданных на отрезке $[a, b]$, непрерывных и имеющих непрерывные производные до $(r - 1)$ -го порядка включительно и кусочно-непрерывную производную r -го порядка, удовлетворяющую на этом отрезке неравенству $|f^{(r)}(x)| \leq M$.

Определение 2.3. Класс $W^r H_\alpha(M; [a, b])$ состоит из функций $f(x)$, принадлежащих классу $W^r(M; [a, b])$ и удовлетворяющих дополнительному условию $f^{(r)}(x) \in H_\alpha(M)$.

Замечание. В случае, если необходимо подчеркнуть, что $|f^{(r)}(x)| \leq M_1$ и $f^{(r)}(x) \in H_\alpha(M_2)$, то будем писать $W^r(M_1)H_\alpha(M_2)$.

Определение 2.4. Класс $W_{L_p}^r(M; [a, b])$ ($1 \leq p < \infty$) состоит из функций, заданных на $[a, b]$, имеющих непрерывную производную порядка $(r - 1)$ и производную $f^{(r)}(x)$ порядка r , обладающую свойством

$$\left[\int_a^b |f^{(r)}(x)|^p dx \right]^{1/p} \leq M,$$

где интеграл понимается в смысле Лебега.

Для простоты обозначений вместо $W_{L_p}^r(M)$ будем писать $W_p^r(M)$.

Через $\tilde{W}_p^r(M; [a, b])$ обозначен класс периодических с периодом $(b - a)$ функций, входящих в класс $W_p^r(M; a, b)$.

Определение 2.5. Через $W_V^r(1; [a, b])$ обозначено множество функций $f(x)$, определенных на отрезке $[a, b]$, имеющих непрерывные производные до $(r - 1)$ -го порядка и производную r -го порядка, полная вариация которой $V_a^b f^{(r)}(t) \leq 1$.

Определение 2.6. Через $H_w(D)$ обозначен класс определенных на отрезке $D = [a, b]$ функций $f(x)$ таких, что для любых точек (x') и (x'') из D выполняется неравенство $|f(x') - f(x'')| \leq w(|x' - x''|)$, где $w(\sigma)$ — заданный модуль непрерывности. В случаях, когда $w(x) = Mx^\alpha$, используется обозначение $H_\alpha(M, D)$ и говорят, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем α и коэффициентом M .

Определение 2.7. Через $H_{w_1 w_2}(D)$ обозначен класс определенных на $D = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ функций $f(x, y)$ таких, что для любых точек (x', y') и (x'', y'') из D выполняется неравенство $|f(x', y') - f(x'', y'')| \leq w_1(|x' - x''|) + w_2(|y' - y''|)$, где $w_1(\sigma)$ и $w_2(\sigma)$ — заданные модули непрерывности. В случаях, когда $w_i(x) = M_i x^{\alpha_i}$ ($i = 1, 2$), используется обозначение $H_{\alpha_1 \alpha_2}(M, D)$, где $M = \max(M_1, M_2)$.

Определение 2.8. Через $C_l^r(\Omega, 1)$, $\Omega = [a_1, b_1; \dots; a_l, b_l]$ обозначен класс функций l независимых переменных, у которых существуют и ограничены по модулю единицей все частные производные до r -го порядка включительно. Через $C_l^r H_\alpha(M)$ обозначен класс функций, входящих в $C_l^r(\Omega, 1)$, $\Omega = [a_1, b_1; \dots; a_l, b_l]$ и дополнительно удовлетворяющих условиям $\partial^{|\mathbf{r}|} f(x_1, \dots, x_l) / \partial x_1^{r_1} \dots \partial x_l^{r_l} \in H_{\alpha \dots \alpha}(M)$, где $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_l)$; $0 \leq r_i \leq |\mathbf{r}|$, $i = 1, \dots, l$; $|\mathbf{r}| = r_1 + \dots + r_l$.

Определение 2.9. Пусть $\Omega = [-1, 1]$, $r = 1, 2, \dots, q$ — натуральное число, $q \leq r$. Функция $f(x)$, $x \in \Omega$, принадлежит классу $\hat{W}_q^r H_\alpha(M)$, если она входит в класс $W^r H_\alpha(M)$ и дополнительно удовлетворяет условиям $f^{(l)}(-1) = f^{(l)}(1) = 0$, $l = 0, 1, \dots, q$.

Определение 2.10. Пусть $r = 1, 2, \dots, q$ — натуральное число, $0 \leq \alpha \leq 1$, $\Omega = [-1, 1]^l$, $l = 2, 3, \dots$. Функция $f(x)$, $x \in \Omega$, принадлежит

классу $C_l^{r,q}H_\alpha(M)$, если она входит в класс $C_l^r H_\alpha(M)$ и дополнительно удовлетворяет условиям $\partial^{|v|} f(x_1, \dots, x_l) / \partial x_1^{v_1} \cdots \partial x_l^{v_l} |_{(\pm 1, \dots, \pm 1)} = 0$ при $0 \leq |v| \leq q, v = (v_1, \dots, v_l), 0 \leq v_i \leq |v|, |v| = v_1 + \dots + v_l$.

Определение 2.11. $W^{r,s}(D, M), D = [a, b; c, d], 0 < M < \infty$, означает класс определенных на D функций $f(x, y)$, имеющих производные $f^{(\alpha,\beta)}(x, y) = \partial^{\alpha+\beta} f(x, y) / \partial x^\alpha \partial y^\beta$ ($0 \leq \alpha \leq r, 0 \leq \beta \leq s$), причем $\|f^{(r,s)}(x, y)\|_{C(D)} \leq M, \|f^{(r,j)}(x, 0)\|_{C(D)} \leq M, j = 0, 1, \dots, s - 1, \|f^{(i,s)}(0, y)\|_{C(D)} \leq M, i = 0, 1, \dots, r - 1$.

В работе К. И. Бабенко [10] введен класс функций $Q_r(\Omega, M)$ и представлен ряд задач, решения которых принадлежат этому классу.

Определение 2.12 [10]. Пусть $\Omega = [-1, 1]^l, l = 1, 2, \dots$. Функция $\varphi(x_1, \dots, x_l)$ принадлежит классу $Q_r(\Omega, M)$, если выполнены условия:

$$\max_{x \in \Omega} |\partial^{|v|} \varphi(x_1, \dots, x_l) / \partial x_1^{v_1} \cdots \partial x_l^{v_l}| \leq M$$

при $0 \leq |v| \leq r$;

$$|\partial^{|v|} \varphi(x_1, \dots, x_l) / \partial x_1^{v_1} \cdots \partial x_l^{v_l}| \leq M / (d(x, \Gamma))^{|v|-r}, \quad x \in \Omega \setminus \Gamma,$$

при $r < |v| \leq 2r + 1$,

где $x = (x_1, \dots, x_l), v = (v_1, \dots, v_l), |v| = v_1 + \dots + v_l, d(x, \Gamma)$ – расстояние от точки x до границы Γ области Ω , вычисляемое по формуле $d(x, \Gamma) = \min_{1 \leq i \leq l} \min(|-1 - x_i|, |1 - x_i|)$.

Приведем следующие обобщения этого класса функций.

Определение 2.13. Пусть $\Omega = [-1, 1]^l, l = 1, 2, \dots$. Функция $\varphi(x_1, \dots, x_l)$ принадлежит классу $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$, если выполнены условия:

$$\max_{x \in \Omega} |\partial^{|v|} \varphi(x_1, \dots, x_l) / \partial x_1^{v_1} \cdots \partial x_l^{v_l}| \leq M$$

при $0 \leq |v| \leq r$;

$$|\partial^{|v|} \varphi(x_1, \dots, x_l) / \partial x_1^{v_1} \cdots \partial x_l^{v_l}| \leq M / (d(x, \Gamma))^{|v|-r-\zeta}, \quad x \in \Omega \setminus \Gamma,$$

при $r < |v| \leq s$,

где $s = r + [\gamma] + 1, \gamma = [\gamma] + \mu, 0 < \mu < 1, \zeta = 1 - \mu$ при γ нецелом, $s = r + \gamma$ при γ целом.

Определение 2.14. Пусть $\Omega = [-1, 1]^l, l = 1, 2, \dots; \gamma, r$ и u – неотрицательные целые числа, $s = r + \gamma$. Множество $\bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$ состоит из функций $f(x_1, x_2, \dots, x_l)$, удовлетворяющих условиям:

$$\max_{x \in \Omega} |\partial^{|v|} \varphi(x_1, \dots, x_l) / \partial x_1^{v_1} \cdots \partial x_l^{v_l}| \leq M$$

при $0 \leq |v| \leq r - 1$;

$$|\partial^{|v|}\varphi(x_1, \dots, x_l)/\partial x_1^{v_1} \cdots \partial x_l^{v_l}| \leq M(1 + |\ln^u d(x, \Gamma)|), \quad x \in \Omega \setminus \Gamma,$$

при $|v| = r$;

$$|\partial^{|v|}\varphi(x_1, \dots, x_l)/\partial x_1^{v_1} \cdots \partial x_l^{v_l}| \leq M(1 + |\ln^{u-1} d(x, \Gamma)|)/(d(x, \Gamma))^{|v|-r}, \quad x \in \Omega \setminus \Gamma,$$

при $r < |v| \leq s$.

Наряду с классом функций $\bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$ введем класс функций $Q_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$.

Определение 2.15. Пусть $\Omega = [-1, 1]^l$, $l = 1, 2, \dots, u$ — натуральное число; γ — нецелое число. Класс $Q_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$ состоит из функций, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\max_{x \in \Omega} |\partial^{|v|}\varphi(x_1, \dots, x_l)/\partial x_1^{v_1} \cdots \partial x_l^{v_l}| \leq M$$

при $0 \leq |v| \leq r$;

$$|\partial^{|v|}\varphi(x_1, \dots, x_l)/\partial x_1^{v_1} \cdots \partial x_l^{v_l}| \leq \frac{M}{(d(x, \Gamma))^{|v|-r-\zeta}}(1 + |\ln^u d(x, \Gamma)|), \quad x \in \Omega \setminus \Gamma,$$

при $r < |v| \leq s$,

где $s = r + [\gamma] + 1$, $\gamma = [\gamma] + \mu$, $0 < \mu < 1$, $\zeta = 1 - \mu$.

Введем класс функций $B_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$, $\Omega = [-1, 1]^l$, $l = 1, 2, \dots$; u — натуральное число, $0 \leq \gamma \leq 1$, M — постоянная.

Определение 2.16. Пусть $\Omega = [-1, 1]^l$, $l = 1, 2, \dots$, $r = 1, 2, \dots$, $0 < \gamma \leq 1$. Функция $\varphi(x_1, \dots, x_l)$ принадлежит классу $B_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$, если выполнены условия:

$$\|\varphi(x_1, \dots, x_l)\|_{C(\Omega)} \leq M;$$

$$\max_{x \in \Omega} |\partial^{|v|}\varphi(x_1, \dots, x_l)/\partial x_1^{v_1} \cdots \partial x_l^{v_l}| \leq M^{|v|}|v|^{|v|}$$

при $1 \leq |v| \leq r$;

$$|\partial^{|v|}\varphi(x_1, \dots, x_l)/\partial x_1^{v_1} \cdots \partial x_l^{v_l}| \leq M^{|v|}|v|^{|v|}/(d(x, \Gamma))^{|v|-r-1+\gamma}, \quad x \in \Omega \setminus \Gamma,$$

при $r < |v| \leq \infty$.

Определение 2.17. Пусть $\Omega = [-1, 1]^l$, $l = 1, 2, \dots$, $r = 1, 2, \dots$, $u = 1, 2, \dots$, $\gamma = 1$. Функция $\varphi(x_1, \dots, x_l)$ принадлежит классу $\bar{B}_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$, если выполнены условия

$$\|\varphi(x_1, \dots, x_l)\|_{C(\Omega)} \leq M;$$

$$\max_{x \in \Omega} |\partial^{|\nu|} \varphi(x_1, \dots, x_l) / \partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_l^{\nu_l}| \leq M^{|\nu|} |\nu|^{|\nu|}$$

при $1 \leq |\nu| \leq r - 1$;

$$|\partial^{|\nu|} \varphi(x_1, \dots, x_l) / \partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_l^{\nu_l}| \leq M^r r^r (1 + |\ln^u d(x, \Gamma)|), \quad x \in \Omega \setminus \Gamma,$$

при $|\nu| = r$;

$$\left| \frac{\partial^{|\nu|} \varphi(x_1, \dots, x_l)}{\partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_l^{\nu_l}} \right| \leq M^{|\nu|} |\nu|^{|\nu|} \frac{(1 + |\ln^{u-1} d(x, \Gamma)|)}{(d(x, \Gamma))^{|v| - r - 1 + \gamma}}, \quad x \in \Omega \setminus \Gamma,$$

при $r < |\nu| \leq \infty$.

Определение 2.18. Пусть $\Omega = [-1, 1]^l$, $l = 1, 2, \dots$, $0 < \alpha \leq 1$, $0 \leq \gamma \leq 1$. Множество $\tilde{B}_{0, \alpha, \gamma}^u(\Omega, M)$ состоит из функций $\varphi(x_1, \dots, x_l)$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\|\varphi(x_1, \dots, x_l)\| \leq M, \quad x \in \Omega;$$

$$\varphi(x_1 \dots x_l) \in H_{\alpha, \dots, \alpha}(M), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad x \in \Omega;$$

$$\left| \frac{\partial^{|\nu|} \varphi(x_1, \dots, x_l)}{\partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_l^{\nu_l}} \right| \leq \frac{M^{|\nu|} |\nu|^{|\nu|}}{(d(x, \Gamma))^{|r| - 1 + \gamma}} (1 + |\ln^u(d(x, \Gamma))|), \quad x \in \Omega \setminus \Gamma,$$

при $1 \leq |\nu| \leq \infty$.

Определение 2.19. Пусть $\Omega = [-1, 1]^l$, $l = 1, 2, \dots$; r, u — натуральные числа; γ — вещественное число, $0 < \gamma < 1$. Множество $B_{r, \gamma}^u(\Omega, M)$ состоит из функций $\varphi(x_1, \dots, x_l)$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\|\varphi(x_1, \dots, x_l)\|_{C(\Omega)} \leq M;$$

$$\left\| \frac{\partial^{|\nu|} \varphi(x_1, \dots, x_l)}{\partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_l^{\nu_l}} \right\|_{C(\Omega)} \leq M^{|\nu|} |\nu|^{|\nu|}$$

при $1 \leq |\nu| \leq r$;

$$\left\| \frac{\partial^{|\nu|} \varphi(x_1, \dots, x_l)}{\partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_l^{\nu_l}} \right\| \leq \frac{M^{|\nu|} |\nu|^{|\nu|} (1 + |\ln^u d(x, \Gamma)|)}{d^{|\nu| - r - 1 + \gamma}(x, \Gamma)}, \quad x \in \Omega \setminus \Gamma,$$

при $r < |\nu| < \infty$.

Определение 2.20. Пусть $\Omega = [-1, 1]^l$, $l = 1, 2, \dots$. Множество $B_{0,0}^u(\Omega, M)$ состоит из функций $\varphi(x_1, \dots, x_l)$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\left\| \frac{\partial^{|\nu|} \varphi(x_1, \dots, x_l)}{\partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_l^{\nu_l}} \right\| \leq \frac{M^{|\nu|} |\nu|^{|\nu|} (1 + |\ln^u d(x, \Gamma)|)}{d^{|\nu|}(x, \Gamma)}, \quad x \in \Omega \setminus \Gamma, \quad |\nu| = 0, 1, \dots$$

Определение 2.21. Пусть $\Omega = [-1, 1]^l$, $l = 1, 2, \dots$; $0 < \alpha \leq 1$; γ — нецелое число; $s = r + [\gamma] + 1$, $\gamma = [\gamma] + \mu$, $\zeta = 1 - \mu$. Функция $\varphi(x_1, \dots, x_l)$ принадлежит классу $Q_{r,\alpha,\gamma}^*(\Omega, M)$, если выполнены условия:

$$\|\partial^{|\nu|}\varphi(x_1, \dots, x_l)/\partial x_1^{\nu_1} \cdots \partial x_l^{\nu_l}\|_{C(\Omega)} \leq M$$

при $0 \leq |\nu| \leq r$;

$$\partial^{|\nu|}\varphi(x_1, \dots, x_l)/\partial x_1^{\nu_1} \cdots \partial x_l^{\nu_l} \in H_{\alpha,\dots,\alpha}(M)$$

при $|\nu| = r$, $x \in \Omega$;

$$|\partial^{|\nu|}\varphi(x_1, \dots, x_l)/\partial x_1^{\nu_1} \cdots \partial x_l^{\nu_l}| \leq M/(d(x, \Gamma))^{| \nu | - r - \zeta}, \quad x \in \Omega \setminus \Gamma,$$

при $r < |\nu| \leq s$.

Определение 2.22. Пусть $\Omega = [-1, 1]^l$, $l = 1, 2, \dots$; $r, s = 0, 1, \dots$; γ — вещественное число, $0 < \gamma$. Функция $\varphi(x_1, \dots, x_l)$ принадлежит классу $L_{0,s,\gamma}(\Omega, M)$, если выполнены условия:

$$|\partial^{|\nu|}\varphi(x_1, \dots, x_l)/\partial x_1^{\nu_1} \cdots \partial x_l^{\nu_l}| \leq M/(d(x, \Gamma))^{| \nu | + \gamma}, \quad x \in \Omega \setminus \Gamma,$$

при $0 \leq |\nu| \leq s$.

Определение 2.23. Пусть $\Omega = [-1, 1]^l$, $l = 1, 2, \dots$; $s = 0, 1, \dots$; γ — вещественное число, $0 < \gamma$. Функция $\varphi(x_1, \dots, x_l)$ принадлежит классу $\bar{L}_{0,s,\gamma}(\Omega, M)$, если выполнены условия:

$$|\varphi(x_1, \dots, x_l)| \leq M(1 + |\ln d(x, \Gamma)|), \quad x \in \Omega \setminus \Gamma;$$

$$|\partial^{|\nu|}\varphi(x_1, \dots, x_l)/\partial x_1^{\nu_1} \cdots \partial x_l^{\nu_l}| \leq M/(d(x, \Gamma))^{| \nu | + \gamma - 1}, \quad x \in \Omega \setminus \Gamma,$$

при $0 < |\nu| = s$.

Определение 2.24. Пусть $\Omega = (-\infty, \infty)^l \setminus \Omega_0$, $\Omega_0 = (-1, 1)^l$, $l = 2, 3, \dots$. Функция $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_l)$ принадлежит классу $Q_{(r,m)\gamma}(\Omega, M)$, если выполнены условия:

$$\|\varphi(x_1, \dots, x_l)\|_{C(\Omega)} \leq M/(d(x, \Gamma))^m, \quad x \in (-\infty, \infty)^l \setminus \Omega_1, \quad \Omega_1 = (-2, 2)^l;$$

$$\|\partial^{|\nu|}\varphi(x_1, \dots, x_l)/\partial x_1^{\nu_1} \cdots \partial x_l^{\nu_l}\|_{C(\Omega)} \leq M, \quad x \in \Omega,$$

при $0 \leq |\nu| \leq r$;

$$|\partial^{|\nu|}\varphi(x_1, \dots, x_l)/\partial x_1^{\nu_1} \cdots \partial x_l^{\nu_l}| \leq M/(d(x, \Gamma))^{| \nu | - r - \zeta}, \quad x \in \Omega \setminus \Gamma,$$

при $r < |\nu| \leq s$.

По аналогии с классами функций $Q_{r\gamma}(\Omega, M)$, $Q_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$, $B_{r\gamma}(\Omega, M)$, $B_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$ введем классы функций $Q_{r\gamma}(\tilde{\Omega}, M)$, $Q_{r,\gamma}^u(\tilde{\Omega}, M)$, $B_{r\gamma}(\tilde{\Omega}, M)$,

$B_{r,\gamma}^u(\tilde{\Omega}, M)$, $\tilde{\Omega} = R_l \setminus \Omega$, отличающиеся от классов функций $Q_{r\gamma}(\Omega, M)$, $Q_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$, $B_{r\gamma}(\Omega, M)$, $B_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$ тем, что точка x принадлежит внешности области Ω . В частности, приведем определение класса функций $Q_{r\gamma}(\tilde{\Omega}, M)$.

Определение 2.25. Пусть $\tilde{\Omega} = R_l \setminus \Omega$, $\Omega = [-1, 1]^l$, $l = 1, 2, \dots$. Функция $\varphi(x_1, \dots, x_l)$, $(x_1, \dots, x_l) \in \tilde{\Omega}$ принадлежит классу $Q_{r,\gamma}(\tilde{\Omega}, M)$, если выполнены условия:

$$\max_{x \in \tilde{\Omega}} |\partial^{|v|} \varphi(x_1, \dots, x_l) / \partial x_1^{v_1} \cdots \partial x_l^{v_l}| \leq M, \quad x \in \tilde{\Omega},$$

при $0 \leq |v| \leq r$;

$$|\partial^{|v|} \varphi(x_1, \dots, x_l) / \partial x_1^{v_1} \cdots \partial x_l^{v_l}| \leq M / (d(x, \Gamma))^{|v| - r - \zeta}, \quad x \in \tilde{\Omega} \setminus \Gamma, \Gamma = \delta\Omega,$$

при $r < |v| \leq s$,

где $s = r + [\gamma] + 1$, $\gamma = [\gamma] + \mu$, $0 < \mu < 1$, $\zeta = 1 - \mu$ при γ нецелом, $s = r + \gamma$ при γ целом.

Ниже нам понадобится определение дробных производных.

Определение 2.26. Функция $\varphi(t) \in L_1[0, 2\pi]$ является производной r -го порядка ($r > 0$) в смысле Вейля функции $f(t)$, если $\int_0^{2\pi} \varphi(t) dt = 0$ и

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} B_r(t - \tau) \varphi(\tau) d\tau,$$

где

$$B_r(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kt - \pi r/2)}{k^r}, \quad r > 0,$$

и ряд сходится в каждой точке t , за исключением, может быть, $t = 2k\pi$.

Опишем обозначения, используемые в книге.

Пусть B — банахово пространство, $x \in B$, $\|x\|$ — норма элемента x . В книге используются следующие банаховы пространства.

Пусть Ω — ограниченное замкнутое множество. Через $C(\Omega)$ обозначено пространство непрерывных функций $f(x)$, $x \in \Omega$, определенных на Ω , с нормой $\|f(x)\| = \max_{x \in \Omega} |f(x)|$. Через $L_p(\Omega)$ обозначено пространство суммируемых с p -й степенью функций $f(x)$, $x \in \Omega$, определенных на Ω , с нормой $\|f(x)\| = [\int_{\Omega} |f(x)|^p dx]^{1/p}$.

В книге используется пространство R_n векторов $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ со следующими основными нормами:

$$\|x\|_1 = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|, \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{1/2}, \quad \|x\|_3 = \sum_{k=1}^n |x_k|.$$

Пусть $x \in X$, где X – нормированное пространство. Через $B(a, \rho)$, $a \in X$, обозначен шар радиуса ρ с центром в точке a ($x \in X : \|x - a\| \leq \rho$). Через $S(a, \rho)$, $a \in X$, обозначена сфера радиуса ρ с центром в точке a ($x \in X : \|x - a\| = \rho$).

В работе используются преобразования Фурье, Лапласа, Меллина.

Пусть $f(x)$, $x = (x_1, \dots, x_l)$, $l = 1, 2, \dots$, – вещественная функция l переменных, $f(x) \in L_2(R_l)$, $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_l)$, $l = 1, 2, \dots$, $(x, \omega) = x_1\omega_1 + \dots + x_l\omega_l$.

Прямое преобразование Фурье функции $f(x)$ определяется следующей формулой:

$$V(f) = F(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{l/2}} \int_{R_l} f(x) e^{-i(x, \omega)} dx.$$

Обратное преобразование Фурье определяется формулой

$$V^{-1}(F) = f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{l/2}} \int_{R_l} F(\omega) e^{i(x, \omega)} d\omega.$$

Пусть $f(x)$, $x = (x_1, \dots, x_l)$, $l = 1, 2, \dots$, – вещественная функция l переменных, $f(x) \in L_2(R_l^+)$, $R_l^+ = [0, \infty)^l$, $p = (p_1, \dots, p_l)$, $l = 1, 2, \dots$, $(x, p) = x_1p_1 + \dots + x_lp_l$.

Прямое преобразование Лапласа функции $f(x)$ определяется формулой

$$Z(f) = F(p) = \int_{R_l^+} f(x) e^{-i(x, p)} dx.$$

Обратное преобразование Лапласа определяется формулой

$$Z^{-1}(F) = f(x) = \frac{1}{(2\pi i)^l} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \dots \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p) e^{i(x, p)} dp.$$

Пусть $f(x)$ – вещественная функция, $f(x) \in L_2(R^+)$, $R^+ = [0, \infty)$.

Прямое преобразование Меллина функции $f(x)$ определяется формулой

$$\mathfrak{M}(f) = F(z) = \int_{R^+} f(x) x^{z-1} dx.$$

Обратное преобразование Меллина определяется формулой

$$\mathfrak{M}^{-1}(F) = f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(z) x^{-z} dz.$$

Пусть $\Delta = [a, b]$, $c \in [a, b]$, $f(x) \in W^r$. Через $T_r(f, \Delta, c)$ обозначен отрезок ряда Тейлора

$$T_r(f, \Delta, c) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x - c) + \cdots + \frac{f^{(r)}(c)}{r!}(x - c)^r.$$

В работе используется формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме [141].

Напомним эту формулу:

$$f(x) = f(c) + \frac{x - c}{1!}f'(c) + \frac{(x - c)^2}{2!}f''(c) + \cdots + \frac{(x - c)^{r-1}}{(r - 1)!}f^{(r-1)}(c) + R_r(x),$$

где

$$R_r(x) = \frac{1}{(r - 1)!} \int_a^t (x - t)^{r-1} f^{(r)}(t) dt.$$

Пусть $\Delta = [a_1, b_1; \cdots; a_l, b_l]$, $l = 2, 3, \dots$, $c \in \Delta$, $f(x_1, \dots, x_l) \in C_l^r$. Через $T_r(f, \Delta, c)$ обозначим отрезок ряда Тейлора $T_r(f, \Delta, c) = f(c) + \frac{1}{1!}df(c) + \cdots + \frac{1}{r!}d^r f(c)$, где $d^r f(c)$ – дифференциалы r -го порядка функции $f(x_1, \dots, x_l)$, вычисленные в точке c .

В работе используется формула Тейлора для функций многих переменных с остаточным членом в интегральной форме [142].

Напомним эту формулу:

$$f(x_1, \dots, x_l) = \sum_{k=0}^r \frac{1}{k!} \sum_{j_1=1}^l \cdots \sum_{j_k=1}^l (x_{j_1} - x_{j_1}^0) \cdots (x_{j_k} - x_{j_k}^0) \frac{\partial^k f(x^0)}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_k}} + R_{r+1}(x), \quad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned} R_{r+1}(x) &= \frac{1}{r!} \int_0^1 (1 - u)^r \sum_{j_1=1}^l \cdots \sum_{j_{r+1}=1}^l (x_{j_1} - x_{j_1}^0) \cdots \\ &\quad \cdots (x_{j_{r+1}} - x_{j_{r+1}}^0) \frac{\partial^{r+1} f(x^0 + u(x - x^0))}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_{r+1}}} du = \\ &= (r + 1) \sum_{|k|=r+1} \frac{(x - x^0)^k}{k!} \int_0^1 (1 - u)^r f^{(k)}(x^0 + u(x - x^0)) du. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Через K_r обозначена константа Фавара

$$K_r = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k(r+1)}}{(2k + 1)^{r+1}}, \quad r = 0, 1, \dots$$

Пусть $f(t) \in H_\alpha, 0 < \alpha \leq 1, t \in [a, b]$. Тогда

$$H(f, \alpha) = \sup_{t_1 \neq t_2; t_1, t_2 \in [a, b]} \frac{|f(t_1) - f(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\alpha}.$$

Пусть $\Omega = [-1, 1]^l, l \geq 1, \Gamma = \partial\Omega$ – граница области Ω, u, r – положительные целые числа; v_i – неотрицательные целые числа, $i = 1, 2, \dots, l$. Пусть $t = (t_1, \dots, t_l), v = (v_1, \dots, v_l), |v| = v_1 + \dots + v_l$. Через D^v обозначен оператор $D^v = \partial^{|v|} / \partial t_1^{v_1} \dots \partial t_l^{v_l}$.

3. Численные методы решения прямой задачи гравиметрии

В течение XX века в рамках первой и второй парадигмы были разработаны многочисленные методы решения прямой задачи гравиметрии. Не имея возможности подробно останавливаться на каждом из известных методов и тем более проводить сравнительный анализ всех методов, остановимся только на кратком обзоре основных.

Исторически первой была решена прямая задача для тел правильной геометрической формы: шара, горизонтального стержня, горизонтального кругового цилиндра, вертикального стержня, вертикального кругового цилиндра, горизонтальной полосы, горизонтальной полуплоскости, вертикальной полосы, вертикальной полуплоскости и т.д. Для этих правильных геометрических тел удалось вычислить [96] в аналитическом виде функции $V_x, V_y, V_z, V_{xz}, V_{zz}, V_{yz}, V_{zzz}$. Вид этих функций оказывается полезным при решении обратных задач методом подбора.

Вычислив характеристики поля для тел правильной геометрической формы, можно вычислять геофизические характеристики и для тел произвольной формы, покрыв их конечной совокупностью правильных геометрических тел. Как правило, при этом используются подобные тела.

В случае, когда тело имеет сложную форму, возникает необходимость в численных методах.

В большинстве случаев гравитационное поле представляется трехмерным интегралом по объему V , занимаемому телом:

$$\Delta g(x, y, z) = G \iiint_V \sigma(\xi, \eta, \zeta) \frac{z - \zeta}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2]^{3/2}} dV, \quad (3.1)$$

где x, y, z и ξ, η, ζ – координаты внешней и внутренней точек масс соответственно; $dV = d\xi d\eta d\zeta, G$ – гравитационная постоянная, $\sigma(\xi, \eta, \zeta)$ – плотность тела.

Большое число работ (см. библиографию в [96]) посвящено упрощению формулы (3.1) при различных предположениях относительно плотности и геометрии тела. Несмотря на то, что в ряде частных случаев удается получить более простые выражения, их вычисление в замкнутой форме, как правило, невозможно. Поэтому возникает необходимость в разработке численных методов. При интерпретации геофизических полей большое распространение получил метод, заключающийся в представлении объема V в виде суммы тел правильной геометрической формы и вычислении значений полей, создаваемых этими телами.

Однако даже при таком подходе к вычислению геофизических полей возникает необходимость в приближенном вычислении интегралов. Это связано с тем, что поле потенциала для многих простых геометрических тел не может быть представлено в явном виде. Например, поле потенциала конечного горизонтального кругового цилиндра выражается через эллиптические интегралы.

Все это обуславливает необходимость развития численных методов решения прямой задачи гравиметрии. Численным методам посвящено большое число работ, в которых в первую очередь использовались кубатурные формулы.

В статьях В. И. Старостенко и А. Г. Манукяна [171, 172] разработаны численные методы решения прямых задач гравиметрии и магнитометрии для типовых аппроксимирующих тел, согласованные со сферичностью Земли. В этих работах приведена обширная библиография по численным методам решения прямых задач гравиметрии и магнитометрии.

В. Н. Страхов отмечает, что на современном этапе развития гравиметрии и магнитометрии возникла необходимость в разработке численных методов, обеспечивающих быстрое действие на 1-2 порядка более высокое, нежели достижимое в известных алгоритмах. Кроме того, он отмечает необходимость в разработке нового класса задач, связанных с тем, что в качестве входной информации выступает не значение поля g_R в тех или иных совокупностях точек на поверхности Земли, а среднее значение поля \bar{g}_R для некоторой системы площадок на поверхности Земли.

Этот круг задач решен В. Н. Страховым, Т. В. Романюк и Н. К. Фроловой [203].

К решению прямых задач гравиметрии и магнитометрии часто привлекают методы теории рядов Фурье по сферическим функциям.

Сферические функции начали применяться в геофизике более чем 150 лет назад. Здесь в первую очередь необходимо отметить работы

К. Гаусса [88] и Ф. Нейманна [265, 266] по теории земного магнетизма. Несмотря на то, что и К. Гаусс, и Ф. Нейманн проводили вычисления вручную, предложенные ими алгоритмы представляют интерес до последних дней.

Как К. Гаусс, так и Ф. Нейманн при построении глобального сферического гармонического синтеза использовали двухступенчатый метод.

Алгоритм Гаусса заключается в том, что на первом шаге применяется преобразование Фурье по переменной φ (здесь используется сферическая система координат (ρ, Θ, φ) , в которой Θ — долгота, φ — широта). На втором шаге — метод наименьших квадратов.

Алгоритм Нейманна отличается от алгоритма Гаусса на втором шаге. Вместо метода наименьших квадратов он применял квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности.

Метод Нейманна получил в дальнейшем широкое распространение в различных разделах геофизики. Он используется в топографии [257, 270], в физике атмосферы [250], в геодезии [147, 249, 268].

Впоследствии оба метода были использованы в работах по глобальному сферическому гармоническому анализу (ГСГА) и глобальному сферическому гармоническому синтезу (ГСГС). Обзор этих методов приведен в следующем разделе.

Известно, что наблюдаемые гравитационные поля являются сложными интерференционными полями. Они представляют собой сумму эффектов от ряда геологических тел с различными законами распределения плотности. Для того чтобы выделить составляющие поля, обусловленные отдельными геологическими образованиями, используют трансформации. Трансформация осуществляется [96] "с целью подавления мешающей информации и наиболее четкого выявления части полезной информации".

В большинстве случаев трансформация осуществляется с помощью различных интегральных преобразований, перечень части которых приведен в книге [96]. Эти трансформации можно представить в общем виде формулой

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi, y - \eta, z) U(\xi, \eta, 0) d\xi d\eta. \quad (3.2)$$

Несмотря на то, что численные методы для трансформации полей активно развивались в течение последних нескольких десятилетий, здесь осталось много неисследованных вопросов.

В частности, в [96] отмечается, что трансформации имеют существенные недостатки, заключающиеся в следующем:

1) способы разработаны только для случая горизонтальной поверхности и регулярной сети наблюдения;

2) отсутствует эффективный алгоритм учета центральной зоны для вычисления трансформант для $z = 0$, т.е. в случае, когда интеграл (3.2) имеет особенность в точке $x = y = 0$;

3) способы не адаптируются в смысле учета влияния случайных погрешностей наблюдений и непредставительных компонент поля при изменении уровня сигнал/помеха, соотношения их радиусов автокорреляции и т.п. В большинстве случаев они обладают лишь очень слабыми фильтрующими свойствами и весьма чувствительны к погрешностям наблюдений;

4) способы не являются оптимальными в смысле точности расчетов. Отсутствуют эффективные оценки точности, представление о которых можно получить на модельных примерах.

В работах А. И. Бойковой [72, 73] предложены численные алгоритмы трансформации потенциальных полей, в которых устранены первое и последнее из приведенных выше замечаний. Алгоритмы основаны на построении оптимальных методов вычисления гиперсингулярных интегралов.

Другой метод трансформации полей, позволяющий отделить поле исследуемого аномального тела от полей, создаваемых остальными геологическими объектами, исследовался В. Н. Страховым и С. Н. Ивановым [201], И. Л. Пруткиным [155]. Он заключается в следующем. Для локализации расположенного в области G аномального тела необходимо отделить от поля, измеряемого на поверхности Земли, составляющую, обусловленную аномальными телами, которые расположены вне области G . Предположим, что область G находится выше горизонтального слоя, расположенного на глубине, не большей, чем h . Считается, что при пересчете вверх на высоту h влияние аномалие-образующих объектов до глубины h практически исчезает. Поэтому можно считать, что поле, пересчитанное вверх на высоту h , обусловлено только аномалие-образующими объектами, расположенными вне области G .

В результате обратного пересчета вниз на величину h получаем поле, обусловленное глубинными и боковыми источниками. Вычитая это поле из исходного, получаем поле, обусловленное аномальным телом, расположенным в области G . Оценки точности изложенного выше алгоритма, насколько авторам известно, отсутствуют.

При пересчете поля на высоту h на границе области возникает большая погрешность, обусловленная краевым эффектом (пересчет проводится не по всей плоскости, а по конечной ее части S). Для уменьшения погрешности вводят в рассмотрение гармоническую функцию, минимизирующую функционал

$$I(f) = \iint_S \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy,$$

в котором граничные значения функции f совпадают со значениями рассматриваемого поля на границе поверхности S .

Подробное изложение методов трансформации потенциальных полей содержится в книгах М. А. Алексидзе [6] и Ю. И. Блоха [20].

Помимо общих методов решения прямой задачи гравиметрии, разработано большое число приемов, предназначенных для решения различных частных случаев. Разработаны вычислительные схемы для решения задач для вертикально-слоистых структур, для горизонтально-слоистых структур; разработаны графические методы решения прямых задач гравиразведки (в частности, палетки Гамбурцева, Бартона, Тяпкина и др.).

Приведенный выше краткий анализ целиком относится к работам, выполненным в рамках первой и второй парадигм.

Заканчивая его, отметим, что В. Н. Страховым предложена обширная программа развития теории и практики интерпретации геофизических полей в XXI столетии в рамках третьей парадигмы — парадигмы зрелой компьютерной эпохи. В рамках этой программы предлагается построение дискретной теории ньютоновского потенциала и решение прямых и обратных задач гравиметрии исходя из дискретных моделей. Ряд результатов в этом направлении получен в [189].

4. Численные методы решения обратной задачи геофизики

Обратные задачи геофизики относятся к классу некорректных (по Адамару) задач. Задача называется некорректной по Адамару, если ее решение не существует или оно не единственно, или оно не устойчиво. Последнее означает, что если задача описывается уравнением $Kx = f$, где f — известная правая часть, а x — решение, подлежащее определению, то небольшие изменения в правой части приводят к большим изменениям в решении. Ж. Адамар утверждал, что некорректные задачи не

имеют физического смысла. Однако оказалось, что многие задачи математической физики, геофизики, электродинамики, квантовой теории рассеяния являются некорректными. Существуют три основных метода решения некорректных задач. А. Н. Тихонов в 1963 г. предложил метод регуляризации для решения некорректных задач [211]. М. М. Лаврентьев разработал метод решения условно некорректных задач [124]. Метод квазирешений для решения некорректных задач был предложен и исследован В. К. Ивановым [112].

Покажем, что обратные задачи гравиразведки и магниторазведки являются некорректными.

4.1. Потенциальные поля

В монографии [279] показано, что трехмерное распределение масс с плотностью $\rho(r)$ удовлетворяет уравнениям $(\nabla, g) = -4\pi G\rho$, $\nabla \times g = 0$, где G — универсальная гравитационная постоянная.

Гравитационный потенциал U , определяемый формулой $g = \nabla U$, удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta U = -4\pi G\rho$, а в отсутствие масс — уравнению Лапласа $\Delta U = 0$.

Известно [169], что решение уравнения Пуассона выражается интегралом

$$U(r') = G \iiint_D \frac{\rho(r)}{|r - r'|} dv, \quad (4.1)$$

где D — область распределения масс, $r = (x, y, z)$, $r' = (x', y', z')$, $|r - r'| = ((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)^{1/2}$.

При этом гравитационное поле определяется формулой

$$g(r') = G \iiint_D \rho(r) \frac{r - r'}{|r - r'|^{3/2}} dv. \quad (4.2)$$

Обратная задача гравиразведки заключается в определении распределения масс по известному потенциалу $U(r')$ или гравитационному полю $g(r')$, $r' \in D$.

Таким образом, обратная задача гравиметрии сводится к решению интегральных уравнений Фредгольма первого рода вида (4.1) или (4.2) с неизвестной функцией $\rho(r)$.

4.2. Магнитные поля

Наряду с гравиразведкой магниторазведка является одним из основных методов исследования земных недр. Методы магниторазведки

основаны на обнаружении и интерпретации аномалий магнитного поля Земли. Магнитные материалы характеризуются вектором намагниченности I , который пропорционален магнитному полю H :

$$I = \sigma H,$$

где σ — магнитная восприимчивость.

Известно, что различные материалы имеют различные магнитные восприимчивости, определив которые, можно сделать выводы о составе исследуемых объектов.

В монографии [279] показано, что внешние магнитные поля описываются уравнением

$$H(r') = \nabla' \iiint_D I(r) \nabla' \frac{1}{|r - r'|} dr. \quad (4.3)$$

Обратная задача магниторазведки заключается в определении вектора намагниченности $I(r)$ по известному внешнему магнитному полю $H(r')$. Из уравнения (4.3) видно, что обратная задача магниторазведки сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода, что является некорректной задачей.

При решении обратных задач гравиразведки используются различные подходы, основанные как на строгих математических методах, так и на правдоподобных рассуждениях, использующих экспериментальные данные, знания и опыт исследователя.

Большую роль при решении обратных задач играет выбор модели, в рамках которой ищется решение задачи. Подробный обзор построения моделей для решения обратных задач грави- и магниторазведки приведен в [96, с. 270—272].

Универсальным методом решения обратных задач гравиразведки является метод подбора [96, 76, 170, 202]. При его реализации используются вариационные методы [212], итерационные методы [213].

Один из подходов к решению обратных задач заключается в приближенном решении интегральных уравнений (4.1)—(4.3), которые моделируют обратные задачи гравиразведки и магниторазведки.

Контактная задача для цилиндрического тела описывается нелинейным интегральным уравнением

$$G\sigma \int_a^b \ln \frac{(x-s)^2 + H^2}{(x-s)^2 + (H-z(s))^2} ds = f(x), \quad (4.4)$$

где $z(\zeta)$ — форма поверхности тела; H — глубина залегания; σ — плотность тела; G — гравитационная постоянная.

В случае, если колебания функции $z(s)$ малы по сравнению с глубиной H , уравнение (4.4) аппроксимируется линейным уравнением

$$2G\sigma H \int_a^b \frac{z(\zeta)}{(x - \zeta)^2 + H^2} d\zeta = f(x). \quad (4.5)$$

Итерационные методы решения уравнения (4.5) при известной плотности σ и различной информации о параметрах H , a и b исследованы в [56].

Методы регуляризации для решения уравнения (4.4) развивались в работах [211, 91]. К решению уравнения (4.4) применялись методы теории функций комплексной переменной [228].

Случай, когда не известны и глубина залегания H , и функция $z(\zeta)$, метод регуляризации для решения уравнения (4.4) предложен в [91].

Нелинейным приближением к уравнению (4.4) является следующее уравнение:

$$G\sigma \int_a^b \frac{2Hz(s) - z^2(s)}{(x - s)^2 + H^2} ds = f(x).$$

Итерационные методы решения этого уравнения исследованы в [41].

Введем декартову прямоугольную систему координат, направив ось z вниз.

Пусть тело залегает на глубине H , причем его нижняя поверхность совпадает с плоскостью $z = H$, а верхняя поверхность описывается функцией $z(x, y) = H - \varphi(x, y)$ с неотрицательной функцией $\varphi(x, y)$, удовлетворяющей неравенству $\max \varphi(x, y) < H$.

Тогда обратная задача гравиметрии описывается уравнением

$$G \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{H-\varphi(\zeta, \eta)}^H \frac{\sigma(\zeta, \eta, \xi) \xi d\zeta d\eta d\xi}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + \xi^2)^{3/2}} = f(x, y, 0), \quad (4.6)$$

где G — гравитационная постоянная; $\sigma(\zeta, \eta, \xi)$ — плотность возмущающего тела.

Предполагается, что $\sigma(\zeta, \eta, \xi) \equiv 0$ вне тела.

Уравнение (4.6) допускает различные аппроксимации.

Если плотность $\sigma(\zeta, \eta, \xi)$ постоянная, приходим к уравнению

$$\frac{G\sigma}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{((x-\zeta)^2 + (y-\eta)^2 + (H-\varphi(\zeta, \eta))^2)^{1/2}} - \frac{1}{((x-\zeta)^2 + (y-\eta)^2 + H^2)^{1/2}} \right] d\zeta d\eta = f(x, y, 0), \quad (4.7)$$

линеаризацией которого является уравнение

$$\frac{G\sigma H}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\zeta, \eta)}{((x-\zeta)^2 + (y-\eta)^2 + H^2)^{3/2}} d\zeta d\eta = f(x, y, 0). \quad (4.8)$$

Приближенному решению уравнений (4.6)–(4.8) посвящены многочисленные работы. Применение методов итеративной регуляризации к приближенному решению уравнения (4.6) исследовалось в [13, 14].

Итерационные методы решения уравнения (4.8) в действительной и спектральной областях рассмотрены в работе [41].

К решению уравнений (4.7) и (4.8) применяется [154, 229] метод локальных поправок.

Многие обратные задачи гравиразведки и магниторазведки, описываемые интегральными уравнениями Фредгольма первого рода, допускают применение итерационных методов. Эти методы изложены в работах [219, 12, 145] применительно к операторным уравнениям первого рода в банаховых пространствах. Наряду с интегральными уравнениями Фредгольма первого рода в теории двумерных потенциальных полей широко применяются методы теории функций комплексной переменной [226, 183, 103].

Подробное изложение итерационных методов решения линейных некорректных задач в гильбертовых пространствах содержится в [280]. Представлены метод Крылова, метод Ланцоша, обобщенный метод минимальных невязок. Приведены теоремы сходимости и проведено сравнение методов. Исследована применимость этих методов к решению уравнения Эйлера, к которому приводит метод регуляризации по Тихонову.

Распараллеливание численных алгоритмов решения обратных задач геофизики рассматривалось в [3, 4].

В большинстве работ, посвященных обратным задачам геофизики, ищется поверхность геометрического тела при известной его плотности. В работе [4] ищется плотность геометрического тела при заданных верх-

ней и нижней поверхностях:

$$\frac{G}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + H_1(\zeta, \eta))^2} - \frac{1}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + H_2(\zeta, \eta))^2} \right] \sigma(\zeta, \eta) d\zeta d\eta = f(x, y, 0).$$

В работе [43] предложен метод одновременного определения границы геометрического тела и его плотности.

В случае, если обратные задачи геофизики моделируются нелинейными операторными уравнениями, к решению привлекают методы оптимизации тихоновского параметрического функционала (см., например, [213, 170, 252, 267]). Эффективными методами решения нелинейных некорректных задач является метод наименьших квадратов и градиентные методы, подробное изложение которых содержится в [280].

5. Применение шаровых функций к решению прямых и обратных задач теории потенциальных полей

В областях, свободных от масс, гравитационные поля представляются различными аналитическими выражениями (рядами по различным системам ортогональных функций, рядами Лорана, определенными интегралами, интегралами типа Коши, интегралами Фурье и т.д.). В книге [96] отмечается, что основное свойство этих аналитических выражений заключается в том, что коэффициенты рядов и ядра интегралов однозначно определяются по значениям поля в соответствующей области. Следовательно, для построения таких аналитических выражений не требуется знания распределения источников поля. Применение аналитических выражений для исследования гравитационных полей является одним из важных направлений вычислительной геофизики.

При описании гравитационных полей Земли естественно в качестве аналитического аппарата воспользоваться шаровыми и сферическими функциями, по своей "конструкции" предназначенными для восстановления полей внутри или вне сферических или эллипсоидальных поверхностей. Теория этих функций детально изложена в монографии [256], опубликованной в 1931 г. (русский перевод [92].) Однако применение шаровых функций к описанию потенциальных полей по измерениям, проведенных вне поверхности Земли, началось значительно позже. Одной из

первых в этом направлении была статья [122], в которой предлагается алгоритм определения геометрических характеристик тела, заполняющего начальный пласт постоянной плотности. Исследование основано на разложении внешнего к телу поля в ряд по гармоническим многочленам и использовании ряда соотношений, известных для гармонических моментов плотности тела.

Как отмечалось в третьем разделе, разложение потенциальных полей имеет богатую историю.

Приведем краткий обзор работ по двухступенчатому методу в задачах глобального сферического гармонического синтеза и анализа.

Предварительно напомним основные утверждения теории полиномов Лежандра.

5.1. Полиномы Лежандра

В этом разделе мы напомним основные факты из теории полиномов Лежандра, которые будут использованы в дальнейшем. При этом без ссылок используются утверждения из [92, 205].

Полиномами Лежандра называются алгебраические полиномы, ортогональные с единичным весом на сегменте $[-1, 1]$.

Стандартизированные многочлены Лежандра определяются формулой Родрига

$$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n} [(x^2 - 1)^n]^{(n)}. \quad (5.1)$$

Старший коэффициент в стандартизированных многочленах Лежандра (5.1) равен

$$\frac{(2n!)}{(n!)^2 2^n}.$$

Поэтому многочлен Лежандра с единичным старшим коэффициентом определяется равенством

$$\tilde{P}_n(x) = \frac{n!}{(2n)!} [(x^2 - 1)^n]^{(n)}. \quad (5.2)$$

Ортонормированный многочлен Лежандра имеет вид

$$\hat{P}_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x), \quad (5.3)$$

причем его старший коэффициент равен

$$\mu_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^n}. \quad (5.4)$$

Присоединенные функции Лежандра $P_n^m(x)$, где n и m — целые числа, $-1 \leq x \leq 1$, определяются следующим выражением [92, с. 92]:

$$P_n^m(x) = (-1)^m (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}. \quad (5.5)$$

Здесь при нечетном m для $(1 - x^2)^{m/2}$ берется положительное значение.

В случае, если $-1 < x < 1$, для присоединенных полиномов справедливо выражение

$$P_n^m(\cos \theta) = (-1)^m \sin^m \theta \frac{d^m P_n(\cos \theta)}{d(\cos \theta)^m}. \quad (5.6)$$

Напомним, что в случае, когда $-1 < x < 1$, выражение $\cos m\varphi P_n^m(x)$, $\sin m\varphi P_n^m(x)$ называется тессеральной сферической функцией, если только $m \neq n$, при $m = n$ — называется секториальной сферической функцией (первого рода).

В случае, если $-1 \leq x \leq 1$, естественно воспользоваться определением присоединенных функций по Гобсону [92, с. 99]:

$$P_n^m(\cos \theta) = \frac{i^m (n+m)!}{n! \pi} \int_0^\pi (\cos \theta + i \sin \theta \cos \psi)^n \cos m\psi d\psi. \quad (5.7)$$

Это интегральное представление позволяет ввести [200] следующую нормировку присоединенных функций Лежандра:

$$\hat{P}_n^m(\cos \theta) = \frac{n!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta). \quad (5.8)$$

Отметим, что в прикладных задачах часто используется также введение присоединенных функций и их нормировка по Феррерсу.

Феррерс рассматривал присоединенные функции Лежандра только в случае, когда $-1 \leq x \leq 1$, и ввел их выражением

$$T_n^m(\cos \theta) = (-1)^m P_n^m(\cos \theta) = (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}. \quad (5.9)$$

Таким образом, присоединенные функции Лежандра, нормированные по Гобсону и Феррерсу, отличаются множителем -1 при m — нечетном. В дальнейшем мы будем использовать присоединенные функции Лежандра, определенные по Гобсону:

$$P_n^m(x) = (-1)^m (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}. \quad (5.10)$$

В задачах гармонического анализа естественна следующая нормировка [200]:

$$\hat{P}_n^m(\cos \theta) = \frac{n!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta). \quad (5.11)$$

Эта нормировка позволяет записать четырехчленное рекуррентное соотношение [200]: $\hat{P}_{n+1}^m(\cos \theta) = (\cos \theta) \hat{P}_n^m(\cos \theta) + \frac{\sin \theta}{2} (\hat{P}_n^{m+1}(\cos \theta) - \hat{P}_n^{m-1}(\cos \theta))$, $-\infty \leq m \leq \infty$, $n \geq 0$, удобное для вычисления присоединенных полиномов Лежандра первого рода.

Аналогичная рекуррентная формула была получена для шаровых функций и обе эти формулы были использованы для построения алгоритмов глобального гармонического синтеза по шаровым функциям.

В последнее время активно развиваются методы глобального сферического гармонического анализа и глобального сферического гармонического синтеза, являющиеся распространением методов Гаусса и Нейманна. Обзор работ по ГСГА и ГСГС приведен в [275].

В последнее время (в основном благодаря различным космическим программам) увеличилось число достоверных измерений значений гравитационных полей. Это ставит на повестку дня задачу увеличения размерности обрабатываемых массивов и соответственно увеличения числа слагаемых в частных суммах Фурье разложения полей по сферическим функциям.

Уже получены разложения, содержащие $N = 360$ гармоник [272]; в ряде работ [273, 277, 278], посвященных численным алгоритмам сферического анализа, высказано мнение о полном решении проблемы. Как отмечает В. Н. Страхов в [200], предложенные в [273, 277, 278] алгоритмы имеют ряд существенных недостатков, а сама проблема сферического синтеза далека от разрешения.

Значительно более эффективные алгоритмы сферического синтеза предложены в [200]. Преимущество этих алгоритмов заключается в следующем:

- 1) они одинаково хорошо работают на всех географических широтах;
- 2) устойчивы в счете;
- 3) имеют высокие точность и быстродействие;
- 4) требуют меньшую оперативную память.

Тем не менее задача построения и апробации новых алгоритмов, позволяющих за приемлемое время устойчиво решать задачи все большей размерности, осталась актуальной.

Основные проблемы, которые до сих пор остались неисследованными, заключаются в следующем:

- 1) построить алгоритмы, обеспечивающие устойчивое и экономное нахождение элементов сферического синтеза;
- 2) построить алгоритмы фильтрации, позволяющие использовать при сферическом синтезе только достоверную информацию;
- 3) создать комплекс программ на ЭВМ;
- 4) провести решение модельных примеров.

Частично эти задачи решены в [241], где предложены алгоритмы решения задачи гармонического сферического синтеза до $N = 2700$ в среде Matlab TM.

6. Гиперсингулярные интегралы

6.1. Одномерные гиперсингулярные интегралы

В работах [2, 254] Ж. Адамар ввел новый тип особых интегралов.

Определение 6.1 [2, 254]. Интеграл вида

$$\int_a^b \frac{A(\tau) d\tau}{(b - \tau)^{p+\alpha}} \quad (6.1)$$

при целом p и $0 < \alpha < 1$ определяет величину (конечную часть) рассматриваемого интеграла:

1) как половину соответствующего интеграла вдоль контура $[a, b]$, если $A(x)$ – аналитическая функция (под контуром $[a, b]$ в [2] понимается "линия, состоящая из двух отрезков ab , соединенных небольшой дугой окружности вокруг них" (рис. 6.1));

2) как предел при $x \rightarrow b$ суммы

$$\int_a^x \frac{A(\tau) d\tau}{(b - \tau)^{p+\alpha}} + \frac{B(x)}{(b - x)^{p+\alpha-1}},$$

если предположить, что функция $A(t)$ имеет p производных в окрестности точки b . Здесь $B(x)$ – любая функция, на которую налагаются два условия:

- а) рассматриваемый предел существует;
- б) $B(x)$ имеет по крайней мере p производных в окрестности точки $x = b$.

Произвольный выбор $B(x)$ никак не влияет на значение получаемого предела: условие (а) определяет значения $(p - 1)$ первых производных от $B(x)$ в точке b , так что произвольный добавочный член в числителе есть бесконечно малая величина, по меньшей мере порядка $(b - x)^p$.

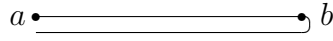


Рис. 6.1

Ж. Адамар назвал этот предел конечной частью интеграла и обозначил

$$\overline{\int_a^b \frac{A(\tau) d\tau}{(b-\tau)^{p+\alpha}}}.$$

В современной литературе чаще встречаются другие обозначения интеграла Адамара:

$$\int_a^b \frac{A(\tau) d\tau}{(b-\tau)^{p+\alpha}}$$

и

$$\int_a^b \frac{A(\tau) d\tau}{(b-\tau)^{p+\alpha}}.$$

Интегралы вида (6.1) называются интегралами в смысле Адамара. В последнее время за интегралами вида (6.1) и более общими особыми интегралами укрепилось общее название — они называются гиперсингулярными интегралами.

В данной работе используется последнее обозначение гиперсингулярных интегралов, так как из контекста всегда ясно, является данный интеграл регулярным, сингулярным или гиперсингулярным.

В современной литературе используется последний способ определения гиперсингулярных интегралов.

Замечание. В книге [1] Ж. Адамар увлекательно рассказывает о различных сторонах творческого процесса при решении математических проблем и, в частности, останавливается на открытии им [1, с. 104] гиперсингулярных интегралов.

Нетрудно убедиться в возможности распространения простейших свойств интегралов в смысле Римана на интегралы в смысле Адамара, вводимые определением 6.1. Очевидно, что справедливы формулы

$$\int_a^b \frac{Aa(\tau)}{(b-\tau)^{p+\alpha}} d\tau = A \int_a^b \frac{a(\tau)}{(b-\tau)^{p+\alpha}} d\tau, \quad A = \text{const};$$

$$\int_a^b \frac{a(\tau) + b(\tau)}{(b - \tau)^{p+\alpha}} d\tau = \int_a^b \frac{a(\tau)}{(b - \tau)^{p+\alpha}} d\tau + \int_a^b \frac{b(\tau)}{(b - \tau)^{p+\alpha}} d\tau;$$

$$\int_a^b \frac{a(\tau)}{(b - \tau)^{p+\alpha}} d\tau = \int_a^c \frac{a(\tau)}{(b - \tau)^{p+\alpha}} d\tau + \int_c^b \frac{a(\tau)}{(b - \tau)^{p+\alpha}} d\tau, a < c < b,$$

и некоторые другие.

В частности, в монографии [2] отмечается, что в интегралах Адамара вида (6.1) можно делать замену переменных $\tau = \varphi(t)$ при условии, что функция $\varphi(t)$ имеет отличную от нуля производную в окрестности точки b (включая точку b).

Использование других, привычных для интегралов Римана, свойств требует осторожности.

В частности, к интегралам в смысле Адамара неприменимы стандартные теоремы об оценке модуля определенного интеграла, так как для оценки модуля интеграла Адамара недостаточно знания модуля подынтегральной функции $A(t)$.

Один из способов вычисления интеграла Адамара заключается в следующем. Представим интеграл (6.1) в виде

$$\int_a^b \frac{A(\tau) d\tau}{(b - \tau)^{p+\alpha}} = \int_a^b \frac{A_1(\tau) d\tau}{(b - \tau)^{p+\alpha}} +$$

$$+ \int_a^b \left(A(b) + \frac{A'(b)}{1!}(\tau - b) + \dots + \frac{A^{(p-1)}(b)(\tau - b)^{p-1}}{(p-1)!} \right) \frac{d\tau}{(b - \tau)^{p+\alpha}}; \quad (6.2)$$

где

$$A_1(\tau) = A(\tau) - A(b) - \frac{A'(b)}{1!}(\tau - b) - \dots - \frac{A^{(p-1)}(b)(\tau - b)^{p-1}}{(p-1)!}.$$

Вычисляя второй из интегралов, стоящих в правой части (6.2), по определению 6.1, в котором

$$B(\tau) = -\frac{A(b)}{p + \alpha - 1} + \frac{A'(b)(b - \tau)}{(p + \alpha - 2)1!} + \dots + \frac{(-1)^p A^{(p-1)}(b)(b - \tau)^{p-1}}{\alpha(p-1)!},$$

имеем

$$\int_a^b \frac{A(\tau) d\tau}{(b - x)^{p+\alpha}} = -\frac{A(b)}{(p + \alpha - 1)(b - a)^{p+\alpha-1}} - \dots - \frac{(-1)^{p-1} A^{(p-1)}(b)}{(p-1)! \alpha (b - a)^\alpha} +$$

$$+ \int_a^b \frac{A_1(\tau) d\tau}{(b - \tau)^{p+\alpha}}.$$

Данное Адамаром определение конечной части расходящегося интеграла является частным случаем общего понятия регуляризации расходящихся интегралов.

Опишем регуляризацию расходящихся интегралов, следуя [90].

Определение 6.2 [90]. Множество K всех вещественных функций $\varphi(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$), каждая из которых имеет непрерывные производные всех порядков и финитна, т.е. обращается в нуль вне некоторой ограниченной области (своей для каждой функции $\varphi(x)$), называется основным пространством. Сами функции $\varphi(x)$ называются основными.

Определение 6.3 [90]. Линейный непрерывный функционал f задан на основном пространстве K , если указано правило, в силу которого каждой основной функции $\varphi(x)$ сопоставлено некоторое число (f, φ) и при этом выполнены следующие условия:

а) для любых двух вещественных чисел α_1, α_2 и любых двух основных функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ имеет место равенство $(f, \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \alpha_1(f, \varphi_1) + \alpha_2(f, \varphi_2)$;

б) если последовательность основных функций $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$ стремится к нулю в основном пространстве K , то последовательность чисел $(f, \varphi_1), \dots, (f, \varphi_n), \dots$ сходится к нулю.

Если $f(x)$ локально интегрируемая в R_n , то с ее помощью можно каждой основной функции $\varphi(x)$ поставить в соответствие число

$$(f, \varphi) = \int_{R_n} f(x)\varphi(x) dx. \quad (6.3)$$

Легко видеть, что выражение (6.3) является линейным функционалом. Известно, что не все линейные функционалы представимы в виде (6.3). Линейные функционалы, представимые в виде (6.3), называются регулярными, все остальные (в том числе дельта-функция) – сингулярными.

Пусть $f(x)$ – функция, локально интегрируемая всюду, кроме точки x_0 . В этой точке она имеет неинтегрируемую особенность. Тогда интеграл (6.3), где $\varphi(x)$ – основная функция, вообще говоря, расходится. Но он сходится, если $\varphi(x)$ равна нулю в окрестности точки x_0 . Ставится вопрос, нельзя ли доопределить возникающий при этом функционал, т.е. построить функционал $f \in K'$, который на основные функции $\varphi(x)$, равные нулю в окрестности точки x_0 , действует по формуле (6.3). Всякий

такой функционал f называется регуляризацией расходящегося интеграла (6.3), или регуляризацией функции $f(x)$.

Остановимся на проблеме регуляризации функций со степенными особенностями, так как интеграл в смысле Адамара введен для интегрирования таких функций.

Пусть $f(x)$ – функция со степенной особенностью в точке $x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$, причем функция $f(x)r^m$ локально интегрируема. Здесь $r = \left(\sum_{k=1}^n (x_k - x_k^0)^2\right)^{1/2}$. Для функций такого вида в монографии [90] предлагается следующая регуляризация степенных функций:

$$(f, \varphi) = \int_{R_n} f(x) \left\{ \varphi(x) - \left[\varphi(0) + \frac{\partial \varphi(0)}{\partial x_1} x_1 + \dots + \frac{\partial^m \varphi(0)}{\partial x_n^m} \cdot \frac{x_n^m}{m!} \right] \Theta(1 - r) \right\} dx, \quad (6.4)$$

где для простоты полагается, что особая точка $x_0 = 0$, функция $\Theta(1 - r)$ равна единице при $r < 1$ и равна нулю при $r \geq 1$.

Сравнивая результаты регуляризации функции $f(x)$ со степенной особенностью, проведенной по формуле (6.4) при $n = 1$, и результаты непосредственного вычисления интеграла Адамара по формуле (6.2), легко убедиться, что они отличаются на константу.

Это также следует из следующего утверждения.

Теорема 6.1 [90]. Если f_0 – частное решение проблемы регуляризации интеграла (6.3), то общее решение f получается прибавлением к f_0 любого функционала, сосредоточенного в точке x_0 .

Вопрос о выборе среди многочисленных регуляризаций данной функции естественной ее регуляризации обсуждается в § 3 главы 1 книги [90]. Мы не останавливаемся на этом вопросе, так как на протяжении всей работы рассматриваются только интегралы Адамара как наиболее естественные при решении задач геофизики.

По этой же причине здесь не обсуждается вопрос о регуляризации функций со степенными особенностями аналитическим продолжением по параметру. Эта регуляризация подробно исследована в [90].

В работе Л. А. Чикина [235] дано определение интеграла типа Коши – Адамара, обобщающее понятия интеграла в смысле главного значения Коши и интеграла в смысле Адамара.

Определение 6.4 [235]. Интегралом

$$\int_a^b \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - c)^p}, \quad a < c < b,$$

в смысле главного значения Коши — Адамара называется следующий предел:

$$\int_a^b \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - c)^p} = \lim_{v \rightarrow 0} \left[\int_a^{c-v} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - c)^p} + \int_{c+v}^b \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - c)^p} + \frac{\xi(v)}{v^{p-1}} \right],$$

где $\xi(v)$ — некоторая функция, выбранная так, чтобы указанный предел существовал.

В конечных точках a и b гиперсингулярный интеграл может быть определен следующим образом.

Определение 6.5. Интегралом $\int_a^b \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - a)^p}$ называется предел

$$\int_a^b \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - a)^p} = \lim_{v \rightarrow 0} \left[\int_{a+v}^b \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - a)^p} + \frac{\xi(v)}{v^{p-1}} + \xi_1(v) \ln |v| \right],$$

где $\xi(v)$ — некоторая функция, имеющая непрерывные производные до $(p - 1)$ -го порядка в окрестности нуля, удовлетворяющие условию Дини — Липшица; $\xi_1(v)$ — некоторая функция, удовлетворяющая условию Дини — Липшица в окрестности от нуля. Функции $\xi(v)$ и $\xi_1(v)$ выбираются так, чтобы указанный предел существовал.

В этом случае

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - a)^p} &= - \sum_{k=0}^{p-2} \frac{\varphi^{(k)}(b)(p - k - 2)!}{(b - a)^{p-1-k}(p - 1)!} + \\ &+ \frac{\varphi^{(p-1)}(b) \ln(b - a)}{(p - 1)!} - \int_a^b \frac{\varphi^{(p)}(\tau) \ln(\tau - a)}{(p - 1)!} d\tau. \end{aligned}$$

Дадим, следуя [128], еще одно определение одномерных гиперсингулярных интегралов по кривым в плоскости комплексной переменной. Это определение используется при интегрировании в комплексной области по кривым с угловыми точками.

Пусть (a, b) — достаточно гладкая дуга в комплексной плоскости. Рассмотрим интеграл вдоль нее:

$$(J_1\varphi)(a) = \int_a^b \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - a)^{p+\alpha}} d\tau, \quad (6.5)$$

где p — целое число, $p = 1, 2, \dots$, $0 \leq \alpha < 1$.

Так как определение гиперсингулярного интеграла проводится при $\alpha = 0$ и при $\alpha \neq 0$ по одной и той же схеме, ограничимся рассмотрением первого случая.

Пусть $\alpha = 0$. Воспользуемся определением Адамара конечной части интеграла. Пусть t_1 — точка, лежащая на дуге (a, b) на расстоянии ε_1 от точки a . Интеграл $(J_1\varphi)(a)$ определим как предел

$$(J_1\varphi)(a) = \lim_{t_1 \rightarrow a} \left[\int_{t_1}^b \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - a)^p} + \frac{B(t_1)}{(t_1 - a)^{p-1}} \right], \quad (6.6)$$

где функция $B(t)$ имеет производные до $(p-1)$ -го порядка, причем $(p-1)$ -я производная удовлетворяет условию Дини — Липшица и выбирается таким образом, чтобы предел существовал.

Интегрируя по частям интеграл в (6.6), имеем

$$\begin{aligned} (J_1\varphi)(a) &= \lim_{t_1 \rightarrow a} \left[\int_{t_1}^b \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - a)^p} d\tau + \frac{B(t_1)}{(t_1 - a)^{p-1}} \right] = \\ &= \lim_{t_1 \rightarrow a} \left[\left[\frac{1}{(p-1)!} \varphi^{(p-1)}(\tau) \ln(\tau - a) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{(p-1)!} \frac{\varphi^{(p-2)}(\tau)}{(\tau - a)} - \dots - \frac{1}{(p-1)} \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - a)^{p-1}} \right] \Big|_{t_1}^b - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{p!} \int_{t_1}^b \varphi^{(p)}(\tau) \ln(\tau - a) d\tau + \frac{B(t_1)}{(t_1 - a)^{p-1}} \right]. \quad (6.7) \end{aligned}$$

Полагая

$$\begin{aligned} \frac{B(t_1)}{(t_1 - a)^{p-1}} &= - \left(\frac{1}{(p-1)!} \varphi^{(p-1)}(t_1) \ln |t_1 - a| - \frac{1}{(p-1)!} \frac{\varphi^{(p-2)}(t_1)}{t_1 - a} - \dots - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(p-1)} \frac{\varphi(t_1)}{(t_1 - a)^{p-1}} \right), \quad (6.8) \end{aligned}$$

приходим к следующему определению.

Определение 6.6 [128]. Интеграл $(J_1\varphi)(a)$ определяется выражением

$$(J_1\varphi)(a) = \int_a^b \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - a)^p} d\tau \equiv - \frac{1}{(p-1)!} \varphi^{(p-1)}(a) i\alpha_a +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{(p-1)!} \varphi^{(p-1)}(b) \ln(b-a) - \frac{1}{(p-1)!} \frac{\varphi^{(p-2)}(b)}{(b-a)} - \dots - \\
& - \frac{1}{(p-1)(p-2)} \frac{\varphi'(b)}{(b-a)^{p-2}} - \frac{1}{(p-1)} \frac{\varphi(b)}{(b-a)^{p-1}} - \\
& - \frac{1}{(p-1)!} \int_a^b \varphi^{(p)}(\tau) \ln(\tau-a) d\tau,
\end{aligned}$$

где α_a — предельное значение аргумента $(t_1 - a)$ при $t_1 \rightarrow a$, т.е. угол, образованный касательной в точке a с осью x .

В случае, когда сингулярная точка находится на верхнем пределе интегрирования, аналогичным образом вводится следующее определение.

Определение 6.7 [128]. Интеграл $(J_1\varphi)(b)$ определяется выражением

$$\begin{aligned}
(J_1\varphi)(b) &= \int_a^b \frac{\varphi(\tau)}{(\tau-b)^p} d\tau \equiv \frac{\varphi^{(p-1)}(b)}{(p-1)!} i\alpha_b - \frac{\varphi^{(p-1)}(a)}{(p-1)!} \ln(b-a) + \\
& + \frac{1}{(p-1)!} \frac{\varphi^{(p-2)}(a)}{(a-b)} + \dots + \frac{1}{(p-1)(p-2)} \frac{\varphi'(a)}{(a-b)^{p+2}} + \frac{1}{(p-1)} \frac{\varphi(a)}{(a-b)^{(p-1)}} - \\
& - \frac{1}{(p-1)!} \int_a^b \varphi^{(p)}(\tau) \ln(\tau-b) d\tau,
\end{aligned}$$

где α_b — угол, образованный касательной (в направлении движения) в точке b с осью x .

Рассмотрим интеграл

$$(J_1g)(t) = \int_a^b \frac{g(\tau)}{(\tau-t)^p} d\tau, \quad t \in (a, b). \quad (6.9)$$

Определение 6.8 [128]. Пусть $t \in (a, b)$ и пусть в точке t выполняются равенства $\varphi^{(j)}(t+0) = \varphi^{(j)}(t-0) = \varphi^{(j)}(t)$, $j = 0, 1, \dots, p-1$. Интеграл $(J_1\varphi)(t)$ определяется выражением

$$\begin{aligned}
(J_1\varphi)(t) &= \int_a^b \frac{\varphi(\tau)}{(\tau-t)^p} d\tau \equiv \frac{1}{(p-1)!} \varphi^{(p-1)}(t) i(\alpha_2 - \alpha_1) + \\
& + \frac{1}{(p-1)!} \left[\varphi^{(p-1)}(b) \ln(b-t) - \varphi^{(p-1)}(a) \ln(t-a) - \left[\frac{\varphi^{(p-2)}(b)}{(b-t)} - \frac{\varphi^{(p-2)}(a)}{(a-t)} \right] \right] -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \dots - \frac{1}{(p-1)(p-2)} \left[\frac{\varphi'(b)}{(b-t)^{p-2}} - \frac{\varphi'(a)}{(a-t)^{p-2}} \right] - \\
& - \frac{1}{(p-1)} \left[\frac{\varphi(b)}{(b-t)^{p-1}} - \frac{\varphi(a)}{(a-t)^{p-1}} \right] - \frac{1}{(p-1)!} \int_a^b \varphi^{(p)}(\tau) \ln(\tau-t) d\tau, \quad (6.10)
\end{aligned}$$

где α_1 и α_2 – углы, образованные в точке t касательными к дуге (a, b) с осью x при движении по дуге от точки a к точке b .

6.2. Многомерные интегралы в смысле Адамара

Первое определение многомерных интегралов в смысле Адамара дано в монографиях [2, 254], где были определены интегралы вида

$$\iiint_T \frac{A(x, y, z)}{(G(x, y, z))^{p+\alpha}} dx dy dz, \quad p = 3, 4, \dots, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (6.11)$$

при условии, что область T является цилиндрической областью с нижним основанием S , расположенным на координатной плоскости OXY и верхним основанием, являющимся поверхностью Ляпунова $G = 0$.

Это определение интеграла Адамара было распространено [33] на более общие интегралы, которые будут использоваться в данной работе.

Пусть $T = [0, 1]^2$, $p = 1, 2, \dots$, $0 < \alpha < 1$. Рассмотрение интеграла

$$\iint_T \frac{A(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{\tau_1^{p+\alpha} \tau_2^{p+\alpha}} \quad (6.12)$$

начнем с того, что ограничим область интегрирования: $\varepsilon_1 \leq \tau_1 \leq 1$, $\varepsilon_2 \leq \tau_2 \leq 1$, обозначив через ε_1 и ε_2 два малых положительных числа. После этого интеграл можно сделать конечным, если вычислить интеграл (6.12) по частям и отбросить слагаемые, стремящиеся к бесконечности при стремлении ε_1 и ε_2 к нулю.

Введем область $T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = [\varepsilon_1, 1; \varepsilon_2, 1]$, $\varepsilon > 0$.

Определение 6.9. Пусть $p = 1, 2, \dots$, $0 < \alpha < 1$. Конечной частью интеграла (6.12) называется предел

$$\iint_T \frac{A(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{\tau_1^{p+\alpha} \tau_2^{p+\alpha}} = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0, \varepsilon_2 \rightarrow 0} \left[\iint_{T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}} \frac{A(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{\tau_1^{p+\alpha} \tau_2^{p+\alpha}} + \frac{B(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}{\varepsilon_1^{p+\alpha-1} \varepsilon_2^{p+\alpha-1}} \right],$$

в котором функция $B(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ имеет производные $\partial^{i_1+i_2} B(t_1, t_2) / \partial t_1^{i_1} \partial t_2^{i_2}$, $0 \leq i_j \leq p, j = 1, 2$, и подбирается таким образом, чтобы предел существовал.

Введем область $T_\varepsilon = [\varepsilon, 1; \varepsilon, 1]$, $\varepsilon > 0$.

Определение 6.10. Пусть $p = 2, 3, \dots$. Конечной частью интеграла $\int \int_T (A(\tau_1, \tau_2) / \tau_1^p \tau_2^p) d\tau_1 d\tau_2$ называется предел

$$\begin{aligned} \int \int_T \frac{A(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{\tau_1^p \tau_2^p} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int \int_{T_\varepsilon} \frac{A(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{\tau_1^p \tau_2^p} + \frac{B(\varepsilon)}{\varepsilon^{2p-2}} + \right. \\ \left. + C(\varepsilon) \ln(\varepsilon) + D(\varepsilon) \ln^2(\varepsilon) \right], \end{aligned}$$

где функция $B(\varepsilon)$ имеет производные до $(2p - 1)$ -го порядка, а функции $C(\varepsilon)$, $D(\varepsilon)$ имеют производные первого порядка. Функции $B(\varepsilon)$, $C(\varepsilon)$ и $D(\varepsilon)$ подбираются таким образом, чтобы предел существовал.

Распространим приведенное выше определение на полигиперсингулярные интегралы. Для простоты обозначений ограничимся бигиперсингулярным интегралом

$$B\varphi = \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)^{p_1} (\tau_2 - t_2)^{p_2}},$$

где γ_i — замкнутый ограниченный контур в плоскости комплексной переменной z_i , $i = 1, 2$. Будем считать, что γ_i , $i = 1, 2$, — гладкие контуры, удовлетворяющие условиям Ляпунова.

Построим окружность с центром в точке t_1 столь малого радиуса ρ_1 , что она пересекает контур γ_1 только в двух точках t_1' и t_1'' . Часть контура γ_1 , заключенного между точками t_1' и t_1'' , обозначим через l_1 .

Аналогичное построение проведем и на контуре γ_2 , часть контура γ_2 , расположенного между точками t_2' и t_2'' , обозначим через l_2 .

Интеграл $B\varphi$ определяется выражением

$$B\varphi = \lim_{\rho_1 \rightarrow 0, \rho_2 \rightarrow 0} \left[\int_{\gamma_1 \setminus l_1} \int_{\gamma_2 \setminus l_2} \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)^{p_1} (\tau_2 - t_2)^{p_2}} - \frac{\Gamma(\rho_1, \rho_2)}{\rho_1^{p_1-1} \rho_2^{p_2-1}} \right],$$

где $\Gamma(\rho_1, \rho_2)$ — функция, имеющая непрерывно дифференцируемые производные до $(p_1 - 1)$ -го порядка по переменной ρ_1 и до $(p_2 - 1)$ -го порядка по переменной ρ_2 .

Функция $\Gamma(\rho_1, \rho_2)$ выбирается таким образом, чтобы предел существовал и был единственным.

Отметим, что в соответствии с принятым в работе способом определения гиперсингулярных интегралов для нахождения функции $\Gamma(\rho_1, \rho_2)$

нужно вычислить по частям последний интеграл и из результата вычесть слагаемые, стремящиеся к бесконечности, когда $\rho_i \rightarrow 0, i = 1, 2$.

Дадим, следуя работе [33], следующее определение регуляризации гиперсингулярных многомерных интегралов от функций со степенными особенностями. При этом ограничимся случаем функций двух переменных, так как определение и все последующие результаты дословно распространяются на многомерные интегралы любой конечной размерности.

Рассмотрим интеграл

$$L\varphi \equiv \iint_G \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}},$$

где (t_1, t_2) — точка области G ; p ($p > 2$) — целое число.

Обозначим через $R(t, \varepsilon)$, $t = (t_1, t_2)$ круг с центром в точке t и с радиусом, равным ε .

Определение 6.11 [33]. Регуляризацией интеграла $L\varphi$ при $p \geq 3$ называется предел

$$L\varphi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\iint_{G \setminus R(t, \varepsilon)} \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} - \frac{B(\varepsilon)}{\varepsilon^{p-2}} - C(\varepsilon) \ln \varepsilon \right),$$

где $B(x)$, $C(x)$ — любые функции, на которые налагаются следующие условия:

- а) рассматриваемый предел существует;
- б) $B(x)$ имеет непрерывные производные до $(p - 2)$ -го порядка в окрестности нуля;
- в) функция $C(x)$ имеет производные первого порядка в окрестности нуля.

Замечание. Достаточно, чтобы функция $C(x)$ удовлетворяла условиям Дини — Липшица в окрестности нуля.

Замечание. В ряде случаев более удобно использовать следующее определение гиперсингулярного интеграла:

$$L\varphi = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\iint_{\Omega \setminus \Omega_1} \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} - \frac{B(h)}{h^{p-2}} - C(h) \ln h \right],$$

где $\Omega_1 = [t_1 - h, t_1 + h; t_2 - h, t_2 + h]$.

Эквивалентность двух последних определений доказана в [33].

При p нецелом регуляризация интеграла $L\varphi$ определяется следующим образом.

Определение 6.12. Регуляризацией интеграла $L\varphi$ при $p > 2$ (p – нецелое число) называется предел

$$L\varphi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\iint_{\Omega \setminus R(t, \varepsilon)} \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} - \frac{B(\varepsilon)}{\varepsilon^{p-2}} \right),$$

где $B(\varepsilon)$ – произвольная функция, на которую налагаются следующие условия:

- а) рассматриваемый предел существует;
- б) функция $B(\varepsilon)$ имеет непрерывные производные до $(p - 2)$ -го порядка включительно.

Определим гиперсингулярные интегралы с особенностями на произвольных контурах, ограничившись для простоты двумерным случаем. К этим интегралам сводятся задачи механики композитных материалов [243].

Рассмотрим интеграл

$$H(f, \gamma) \equiv \iint_{R_2} \frac{f(t_1, t_2)}{\gamma(t_1, t_2)} dt_1 dt_2,$$

где $\gamma(t_1, t_2)$ – гладкая функция. В большинстве случаев будем считать, что $\gamma(t_1, t_2)$ – полином r -го порядка по переменным t_1 и t_2 . Пусть контур γ определяется уравнением $\gamma(t_1, t_2) = 0$. Пусть ε – произвольное малое число.

Обозначим через Γ_ε область, состоящую из точек, расстояние от которых до контура γ не превосходит ε . Расстояние между точками области Γ_ε и контуром γ будем вычислять в евклидовой метрике.

Пусть каждая точка контура γ будет нулем не выше r -го порядка функции $\gamma(t_1, t_2)$. Пусть L_ε – граница области Γ_ε .

Определение 6.13 [243]. Конечной частью интеграла

$$H(f, \gamma) = \iint_{R_2} \frac{f(t_1, t_2)}{\gamma(t_1, t_2)} dt_1 dt_2 \tag{6.13}$$

назовем предел

$$H(f, \gamma) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\iint_{R_2 \setminus \Gamma_\varepsilon} \frac{f(t_1, t_2)}{\gamma(t_1, t_2)} dt_1 dt_2 - \frac{F_{\gamma, \varepsilon}(\varepsilon)}{\varepsilon^{r-1}} \right], \tag{6.14}$$

где $F_{\gamma,\varepsilon}(\varepsilon)$ — функция, удовлетворяющая двум условиям:

- 1) в области Γ_ε функция $F_{\gamma,\varepsilon}(\varepsilon)$ имеет производные до r -го порядка;
- 2) предел существует.

Можно показать, что предел не зависит от вида функции $F_{\gamma,\varepsilon}(\varepsilon)$.

Отметим, что данное выше определение многомерных гиперсингулярных интегралов допускает распространение на случай, когда уравнение $\gamma(t_1, t_2) = 0$ определяет контур, состоящий из пересекающихся дуг.

Приведем еще одно определение гиперсингулярных интегралов, удобное в тех случаях, когда особенностями являются кусочно-гладкие линии и исследуются приближенные методы вычисления этих интегралов.

Пусть в конечной части плоскости R_2 имеется гладкий контур γ , описываемый уравнением $\gamma(x_1, x_2) = 0$. Положим для определенности

$$\begin{aligned} \gamma(x_1, x_2) = & a_{00} + a_{10}x_1 + a_{20}x_2 + \cdots + a_{n0}x_1^n + \\ & + a_{n-1,1}x_1^{n-1}x_2 + \cdots + a_{1,n-1}x_1x_2^{n-1} + a_{0n}x_2^n. \end{aligned}$$

Кроме того, для определенности предположим, что уравнение $\gamma(x_1, x_2) = 0$ определяет замкнутый ограниченный контур, каждая точка которого является нулем порядка не выше r , $r \geq 1$. Мы будем говорить, что функция $\gamma(x_1, x_2)$ имеет в точке (x_1^0, x_2^0) нуль r -го порядка, если в разложении этой функции в ряд Тейлора по степеням $(x_1 - x_1^0)$ и $(x_2 - x_2^0)$ отсутствуют члены ниже r -го порядка, т.е.

$$\begin{aligned} \gamma(x_1, x_2) = & a_{r0}(x_1 - x_1^0)^r + a_{r-1,1}(x_1 - x_1^0)^{r-1}(x_2 - x_2^0) + \\ & + a_{r-2,2}(x_1 - x_1^0)^{r-2}(x_2 - x_2^0)^2 + a_{r-3,3}(x_1 - x_1^0)^{r-3}(x_2 - x_2^0)^3 + \cdots + a_{0r}(x_1 - x_1^0)^r + \\ & \text{члены более высокого порядка.} \end{aligned}$$

Будем вычислять интеграл (6.13) по формуле

$$\begin{aligned} H\varphi = & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left[\iint_{E_2} \frac{\varphi(x_1, x_2)}{\gamma(x_1, x_2) + ih} dx_1 dx_2 + \right. \\ & \left. + \iint_{R_2} \frac{\varphi(x_1, x_2)}{\gamma(x_1, x_2) - ih} dx_1 dx_2 - \frac{F(\eta)}{\eta^{r-1}} \right], \end{aligned} \quad (6.15)$$

где функция $F(h)$ подбирается так, чтобы предел существовал.

В монографии [33] показано, что вычисления интегралов вида (6.13) по формулам (6.14) и (6.15) эквивалентны.

7. Постановка задачи построения оптимальных алгоритмов вычисления гиперсингулярных интегралов и интегралов типа Коши

Постановка задачи построения оптимальных квадратурных формул принадлежит А. Н. Колмогорову .

В дальнейшем Н. С. Бахвалов [15] сформулировал задачу построения оптимальных, асимптотически оптимальных и оптимальных по порядку алгоритмов решения задач математической физики, из которой следовала постановка задачи построения оптимальных, асимптотически оптимальных и оптимальных по порядку квадратурных формул.

Вначале дадим определения оптимальных, асимптотически оптимальных и оптимальных по порядку квадратурных формул вычисления гиперсингулярных интегралов с фиксированной особенностью. Остановимся на интеграле

$$J\varphi = \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau)}{\tau^p} d\tau, \quad p = 2, 3, \dots, \quad (7.1)$$

который будем вычислять по квадратурной формуле

$$J\varphi = \sum_{k=1}^N \sum_{l=0}^{\rho} p_{kl} \varphi^{(l)}(s_k) + R_N(s_k, p_{kl}, \varphi) \quad (7.2)$$

с узлами s_k и коэффициентами p_{kl} , $k = 1, 2, \dots, N$, $l = 0, 1, \dots, \rho$, где $\rho \geq 0$; ρ – фиксированное целое число, определяемое гладкостью класса функций, к которому принадлежит $\varphi(\tau)$. Здесь $|R_N(s_k, p_{kl}, \varphi)|$ – погрешность квадратурной формулы (к.ф.) (7.2).

Если Ψ – некоторый класс заданных на сегменте $[-1, 1]$ функций, то положим

$$R_N(s_k, p_{kl}, \Psi) = \sup_{\varphi \in \Psi} |R_N(s_k, p_{kl}, \varphi)|.$$

Через $\zeta_N[\Psi]$ обозначим величину $\zeta_N[\Psi] = \inf_{(s_k, p_{kl})} R_N(s_k, p_{kl}, \Psi)$, в которой нижняя грань берется по всевозможным N узлам s_k и коэффициентам p_{kl} , $k = 1, 2, \dots, N$, $l = 0, 1, \dots, \rho$.

Квадратурную формулу (7.2), построенную на узлах s_k^* и весах p_{kl}^* ($k = 1, 2, \dots, N$, $l = 0, 1, \dots, \rho$), будем называть оптимальной, асимптотически оптимальной, оптимальной по порядку, если

$$\frac{R_N(s_k^*, p_{kl}^*, \Psi)}{\zeta_N[\Psi]} = 1, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{R_N(s_k^*, p_{kl}^*, \Psi)}{\zeta_N[\Psi]} = 1, \quad R_N(s_k^*, p_{kl}^*, \Psi) \asymp \zeta_N[\Psi]$$

соответственно. Знак \asymp (слабая эквивалентность) означает, что имеются две константы A и B ($0 < A, B < \infty$), не зависящие от N и такие, что

$$A\zeta_N[\Psi] < R_N(s_k^*, p_{kl}^*, \Psi) < B\zeta_N[\Psi].$$

В применении к гиперсингулярным интегралам с переменной особенностью задача построения оптимальных квадратурных формул заключается в следующем. Рассмотрим интеграл

$$A\varphi = \int_a^b \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - t)^p}, \quad a \leq t \leq b, \quad p - \text{целое}, \quad (7.3)$$

который будем вычислять по квадратурной формуле

$$A\varphi = \sum_{k=1}^N \sum_{l=0}^{\rho} \varphi^{(l)}(s_k) p_{kl}(t) + R_N(t, s_k, p_{kl}(t), \varphi) \quad (7.4)$$

с узлами s_k и весами $p_{kl}(t)$ ($k = 1, 2, \dots, N, l = 0, 1, \dots, \rho$), где ρ – фиксированное неотрицательное целое число, определяемое гладкостью класса функций, к которому принадлежит $\varphi(t)$.

Под погрешностью квадратурной формулы (7.4) будем понимать величину

$$R_N(s_k, p_{kl}, \varphi) = \sup_t |R_N(t, s_k, p_{kl}(t), \varphi)|.$$

Если Ψ – некоторый класс заданных на сегменте $[a, b]$ функций, то положим

$$R_N(s_k, p_{kl}, \Psi) = \sup_{\varphi \in \Psi} |R_N(s_k, p_{kl}, \varphi)|.$$

Через $\zeta_N[\Psi]$ обозначим величину

$$\zeta_N[\Psi] = \inf_{(s_k, p_{kl})} R_N(s_k, p_{kl}, \Psi),$$

в которой нижняя грань берется по всевозможным N узлам s_k и весам $p_{kl}(t)$ ($k = 1, 2, \dots, N, l = 0, 1, \dots, \rho$). Квадратурную формулу (7.4), построенную на узлах s_k^* и весах $p_{kl}^*(t)$ ($k = 1, 2, \dots, N, l = 0, 1, \dots, \rho$), будем называть оптимальной, асимптотически оптимальной, оптимальной по порядку, если

$$\frac{R_N(s_k^*, p_{kl}^*, \Psi)}{\zeta_N[\Psi]} = 1, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{R_N(s_k^*, p_{kl}^*, \Psi)}{\zeta_N[\Psi]} = 1, \quad R_N(s_k^*, p_{kl}^*, \Psi) \asymp \zeta_N[\Psi]$$

соответственно.

Постановку задачи в случае полигиперсингулярных интегралов с фиксированными особенностями опишем на примере гиперсингулярного интеграла следующего вида:

$$B\varphi = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{\tau_1^{p_1} \tau_2^{p_2}}, \quad (7.5)$$

$p_1, p_2 = 2, 3, \dots$, который будем вычислять по кубатурной формуле

$$B\varphi = \sum_{k_1=1}^{n_1} \sum_{k_2=1}^{n_2} \sum_{l_1=0}^{\rho_1} \sum_{l_2=0}^{\rho_2} p_{k_1 k_2 l_1 l_2} \varphi^{(l_1, l_2)}(s_{k_1}, s_{k_2}) + R_{n_1 n_2}(s_{k_1}, s_{k_2}, p_{k_1 k_2 l_1 l_2}, \varphi), \quad (7.6)$$

где ρ_1, ρ_2 – неотрицательные целые числа, определяемые гладкостью функции $\varphi(t_1, t_2)$; $\varphi^{(l_1, l_2)}(t_1, t_2) = \partial^{l_1+l_2} \varphi(t_1, t_2) / (\partial t_1^{l_1} \partial t_2^{l_2})$; $p_{k_1 k_2 l_1 l_2}$, $1 \leq k_i \leq n_i$, $0 \leq l_i \leq \rho_i$, $i = 1, 2$, – коэффициенты; (s_{k_1}, s_{k_2}) , $-1 \leq s_{k_i} \leq 1$, $i = 1, 2$, – узлы кубатурной формулы.

Под погрешностью кубатурной формулы понимается величина $|R_{n_1 n_2}(s_{k_1}, s_{k_2}, p_{k_1 k_2 l_1 l_2}, \varphi)|$.

Если Ψ – некоторый класс функций, то под $R_{n_1 n_2}(s_{k_1}, s_{k_2}, p_{k_1 k_2 l_1 l_2}, \Psi)$ понимается величина

$$R_{n_1 n_2}(s_{k_1}, s_{k_2}, p_{k_1 k_2 l_1 l_2}, \Psi) = \sup_{\varphi \in \Psi} |R_{n_1 n_2}(s_{k_1}, s_{k_2}, p_{k_1 k_2 l_1 l_2}, \varphi)|.$$

Введем функционал $\zeta_{n_1 n_2}[\Psi] = \inf_{s_{k_1}, s_{k_2}; p_{k_1 k_2 l_1 l_2}} R_{n_1 n_2}(s_{k_1}, s_{k_2}, p_{k_1 k_2 l_1 l_2}, \Psi)$.

Кубатурную формулу (7.6), построенную на узлах и коэффициентах $(s_{k_1}^*, s_{k_2}^*; p_{k_1 k_2 l_1 l_2}^*)$, будем называть оптимальной, асимптотически оптимальной, оптимальной по порядку, если

$$\begin{aligned} R_{n_1 n_2}(x_{k_1}^*, x_{k_2}^*; p_{k_1 k_2 l_1 l_2}^*, \Psi) &= \zeta_{n_1 n_2}[\Psi], \\ \lim_{n_1 \rightarrow \infty, n_2 \rightarrow \infty} R_{n_1 n_2}(x_{k_1}^*, x_{k_2}^*; p_{k_1 k_2 l_1 l_2}^*, \Psi) &= \zeta_{n_1 n_2}[\Psi], \\ R_{n_1 n_2}(x_{k_1}^*, x_{k_2}^*; p_{k_1 k_2 l_1 l_2}^*, \Psi) &\asymp \zeta_{n_1 n_2}[\Psi]. \end{aligned}$$

Замечание. В выражении $\lim_{n_1 \rightarrow \infty, n_2 \rightarrow \infty} = A$ предел понимается в следующем смысле: для любого как угодно малого ε ($\varepsilon > 0$) существует такое $N(N(\varepsilon))$, что при $n_1 \geq N$, $n_2 \geq N$ выполняется неравенство $|A_{n_1 n_2} - A| < \varepsilon$.

Наряду с кубатурными формулами (7.6) часто используются кубатурные формулы вида

$$B\varphi = \sum_{k=1}^N \sum_{l_1=0}^{\rho_1} \sum_{l_2=0}^{\rho_2} p_{k l_1 l_2} \varphi^{(l_1, l_2)}(M_k) + R_N(M_k, p_{k l_1 l_2}, \varphi), \quad (7.7)$$

где ρ_1, ρ_2 – неотрицательные целые числа; $p_{kl_1l_2}$ – коэффициенты, $1 \leq k \leq N, 0 \leq l_i \leq \rho_i, i = 1, 2$; $M_k, k = 1, 2, \dots, N$ – узлы кубатурной формулы, $M_k = (x_k, y_k), -1 \leq x_k, y_k \leq 1, k = 1, 2, \dots, N$.

Под погрешностью кубатурной формулы (7.7) понимается величина $|R_N(M_k, p_{kl_1l_2}, \varphi)|$.

Если Ψ – некоторый класс функций, то под $R_N(M_k, p_{kl_1l_2}, \Psi)$ понимается величина $R_N(M_k, p_{kl_1l_2}, \Psi) = \sup_{\varphi \in \Psi} |R_N(M_k, p_{kl_1l_2}, \varphi)|$.

Введем функционал $\zeta_N[\Psi] = \inf_{p_{kl_1l_2}, M_k} R_N(M_k, p_{kl_1l_2}, \Psi)$, где нижняя грань берется по всевозможным коэффициентам $p_{kl_1l_2}, k = 1, 2, \dots, N, 0 \leq l_i \leq \rho_i, i = 1, 2$, и узлам $M_k, k = 1, 2, \dots, N$.

Кубатурную формулу (7.7), построенную на векторах $(M_k^*; p_{kl_1l_2}^*)$, будем называть оптимальной, асимптотически оптимальной, оптимальной по порядку, если

$$R_N(M_k^*; p_{kl_1l_2}^*, \Psi) = \zeta_N[\Psi], \quad \lim_{N \rightarrow \infty} R_N(M_k^*; p_{kl_1l_2}^*, \Psi) = \zeta_N[\Psi],$$

$$R_N(M_k^*; p_{kl_1l_2}^*, \Psi) \asymp \zeta_N[\Psi].$$

Аналогичным образом определяются оптимальные, асимптотически оптимальные и оптимальные по порядку кубатурные формулы вычисления многомерных гиперсингулярных интегралов с фиксированными особенностями вида

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1^2 + \tau_2^2)^{p/2}}$$

при $p > 2$.

Бигиперсингулярные интегралы с переменными особенностями

$$I\varphi = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2)}{(\tau_1 - t_1)^{p_1} (\tau_2 - t_2)^{p_2}} d\tau_1 d\tau_2, \quad -1 \leq t_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \quad (7.8)$$

будем вычислять по кубатурным формулам

$$I\varphi = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \sum_{i=0}^{\rho_1} \sum_{j=0}^{\rho_2} p_{kl_{ij}}(t_1, t_2) \varphi^{(i,j)}(x_k, y_l) + R_{mn}(t_1, t_2, x_k, y_l; p_{kl_{ij}}, \varphi), \quad (7.9)$$

определяемым узлами $-1 \leq x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_m \leq 1, -1 \leq y_1 < y_2 < \dots < y_n \leq 1$ и коэффициентами $p_{kl_{ij}} (1 \leq k \leq m, 1 \leq l \leq n, i = 0, 1, \dots, \rho_1, j = 0, 1, \dots, \rho_2)$. Значения $\rho_i, i = 1, 2$, определяются гладкостью функции φ .

Под погрешностью кубатурной формулы (7.9) будем понимать величину $R_{mn}(x_k, y_l; p_{klij}, \varphi) = \sup_{t_1, t_2} |R_{mn}(t_1, t_2; x_k, y_l; p_{klij}, \varphi)|$.

Если Ψ – некоторый класс заданных на квадрате $\Omega = [-1, 1]^2$ функций, то положим $R_{mn}(x_k, y_l; p_{klij}, \Psi) = \sup_{\varphi \in \Psi} R_{mn}(x_k, y_l; p_{klij}, \varphi)$.

Через $\zeta_{mn}[\Psi]$ обозначим величину

$$\zeta_{mn}[\Psi] = \inf_{(k, l; klij)} R_{mn}(x_k, y_l; p_{klij}, \Psi),$$

в которой нижняя грань берется по всевозможным векторам $(k, l; klij)$ узлов и весов ($k = 1, 2, \dots, m, l = 1, 2, \dots, n$). Кубатурную формулу (7.9), построенную на векторах $(x_k^*, y_l^*; p_{klij}^*)$, будем называть оптимальной, асимптотически оптимальной, оптимальной по порядку, если

$$R_{mn}(x_k^*, y_l^*; p_{klij}^*, \Psi) / \zeta_{mn}[\Psi] = 1, \quad \equiv 1, \asymp 1.$$

Интеграл $I\varphi$ можно вычислять по кубатурной формуле

$$I\varphi = \sum_{k=1}^N p_k(t_1, t_2) \varphi(M_k) + R_N(t_1, t_2, M_k, p_k, \varphi), \quad (7.10)$$

использующей N значений подынтегральной функции. Здесь $M_k = (\zeta_k, \eta_k)$ – узлы кубатурной формулы (7.10), причем характер расположения узлов в квадрате Ω произвольный. Числовые характеристики погрешности определяются по формулам

$$R_N(M_k, p_k, \varphi) = \sup_{t_1, t_2} |R_N(t_1, t_2; M_k, p_k, \varphi)|,$$

$$R_N(M_k, p_k, \Psi) = \sup_{\varphi \in \Psi} R_N(M_k, p_k, \varphi), \quad \zeta_N[\Psi] = \inf_{(M_k, p_k)} R_N(M_k, p_k, \Psi).$$

Кубатурная формула (7.10), построенная на векторах $\{M_k^*, p_k^*\}$ узлов и коэффициентов, называется оптимальной, асимптотически оптимальной, оптимальной по порядку, если выполнены соотношения

$$R_N(M_k^*, p_k^*, \Psi) / \zeta_N[\Psi] = 1, \sim 1, \asymp 1.$$

Оптимальные, асимптотически оптимальные, оптимальные по порядку кубатурные формулы вычисления многомерных гиперсингулярных интегралов

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}}, \quad p > 2, \quad (t_1, t_2) \in [-1, 1]^2,$$

определяется точно так же, как для интегралов вида (7.8).

Замечание 1. Аналогичным образом определяются оптимальные квадратурные и кубатурные формулы вычисления гиперсингулярных интегралов с нецелой особенностью:

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau)}{|\tau|^{p+\lambda}} d\tau, \quad p = 1, 2, \dots, \quad 0 < \lambda \leq 1;$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau) d\tau}{|\tau - t|^{p+\lambda}}, \quad p = 1, 2, \dots, \quad 0 < \lambda \leq 1;$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{|\tau_1 - t_1|^{p_1+\lambda_1} |\tau_2 - t_2|^{p_2+\lambda_2}}, \quad p_1, p_2 = 1, 2, \dots, \quad 0 < \lambda_1, \lambda_2 \leq 1;$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p+\lambda}}, \quad p = 1, 2, \dots, \quad 0 < \lambda \leq 1.$$

При построении оптимальных алгоритмов восстановления потенциальных полей используются поперечники Бабенко и Колмогорова. Приведем определения этих поперечников.

Пусть B — банахово пространство; $X \subset B$ — компакт; $\Pi : X \rightarrow R_n$ — представление компакта X конечномерным пространством R_n .

Определение 7.1 [11]. Пусть L^n — множество n -мерных линейных подпространств пространства B . Выражение

$$d_n(X, B) = \inf_{L^n} \sup_{x \in X} \inf_{u \in L^n} \|x - u\|,$$

где последний \inf берется по всем подпространствам L^n размерности n , определяет n -поперечник Колмогорова.

Определение 7.2 [10, 11]. Пусть $\chi \in R_n$. Выражение

$$\delta_n(X) = \inf_{(\Pi: X \rightarrow R_n)} \sup_{x \in X} \text{diam} \Pi^{-1} \Pi(x),$$

где \inf берется по всем непрерывным отображениям $\Pi : X \rightarrow R_n$, определяет n -поперечник Бабенко.

В главе II будет неоднократно использоваться следующее утверждение, связывающее величины поперечников Бабенко и Колмогорова.

Лемма 7.1 [206]. Пусть B — банахово пространство; $X \subset B$ — компакт. Величины поперечников Бабенко и Колмогорова связаны неравенством

$$\delta_n(X) \leq 2d_n(X, B).$$

Оценка снизу поперечников Колмогорова может быть получена на основе утверждения, которое приведем, следуя [260].

Лемма 7.2. Пусть B — хаусдорфово компактное пространство; Ψ — класс функций, принадлежащих $C(B)$. Пусть в B существует $n+1$ точка $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ и пусть существует положительное число $\varepsilon (\varepsilon > 0)$ со следующими свойствами: для любой последовательности знаков $\lambda_i = \pm 1$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, существует функция $f(x) \in \Psi$ такая, что

$$\text{sign } f(x_i) = \lambda_i, \quad |f(x_i)| \geq \varepsilon, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Тогда в пространстве $C(B)$

$$d_n(\Psi, C(B)) \geq \varepsilon.$$

8. Элементы теории приближений

В данном разделе приводится ряд известных фактов из теории приближений, которыми будем пользоваться на протяжении книги.

Прежде всего напомним некоторые классические результаты конструктивной теории функций. При изложении этих результатов будем следовать монографиям [93, 119, 140, 208].

8.1. Полиномы наилучшего приближения

Пусть $f(x)$ — функция, определенная на сегменте $[a, b]$. Обозначим через H_n множество полиномов степени, не выше n , т.е. полиномов вида $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, а через H_n^T — множество тригонометрических полиномов вида $a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$.

Рассмотрим произвольный полином $P_n(x)$ и положим

$$\Delta(P_n) = \max_{x \in [a, b]} |P_n(x) - f(x)|.$$

Число $\Delta(P_n)$ называется отклонением полинома $P_n(x)$ от функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$. Если будем изменять полином $P_n(x)$, заставляя его пробегать все множество H_n , то величина $\Delta(P_n)$ также будет изменяться, но так как она остается неотрицательной, то множество ее значений ограничено снизу и имеет точную нижнюю границу

$$E_n = E_n(f) = \inf_{P_n \in H_n} \{\Delta(P_n)\}.$$

Величина $E_n(f)$ называется наименьшим отклонением полиномов из H_n от $f(x)$ или наилучшим приближением к $f(x)$ полиномами из H_n .

Теорема 8.1 (теорема Бореля). Для всякой функции $f(x) \in C[a, b]$ в множестве H_n существует такой полином $P(x)$, что $\Delta(P) = E_n(f)$.

Следует отметить, что для всякой функции $f(x) \in C[a, b]$ в множестве H_n существует единственный полином наилучшего приближения. Это утверждение следует из теоремы Бореля и чебышевского альтернанса.

Приведем оценки наилучших приближений к $f(x)$ полиномами из H_n . Вначале дадим формулировки классических теорем Джексона.

Теорема 8.2. Для любой функции $f(\tau) \in \tilde{C}_{[0, 2\pi]}$ справедлива оценка

$$E_n(f) \leq 12\omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

Теорема 8.3. Пусть $f(x)$ есть непрерывная 2π -периодическая функция, имеющая непрерывные производные $f'(x), f''(x), \dots, f^{(r)}(x)$. Если $\omega_r(\delta)$ — модуль непрерывности r -й производной $f^{(r)}(x)$, то

$$E_n(f) \leq \frac{12^{r+1}\omega_r\left(\frac{1}{n}\right)}{n^r}.$$

Если функция $f(x)$ приближается алгебраическими полиномами, то теоремы Джексона формулируются следующим образом.

Теорема 8.4. Если $f(x) \in C[a, b]$, то

$$E_n(f) \leq 12\omega\left(\frac{b-a}{2n}\right).$$

Теорема 8.5. Если $f(x) \in C[a, b]$ имеет p непрерывных производных, причем модуль непрерывности p -й производной $f^{(p)}$ есть $\omega_p(\delta)$, то для $n > p$ справедлива оценка

$$E_n(f) \leq \frac{C_p(b-a)^p}{n^p} \omega_p\left(\frac{b-a}{2(n-p)}\right),$$

где C_p зависит только от p .

Наряду с оценками наилучших приближений тригонометрическими и алгебраическими полиномами различных классов функций, т.е. прямыми теоремами конструктивной теории функций, нам понадобятся обратные теоремы конструктивной теории функций, позволяющие по числовым характеристикам $E_n(f)$ судить о классах функций, к которым принадлежат функции $f(x)$.

Предварительно приведем неравенства С. Н. Бернштейна, А. А. Маркова и С. М. Никольского, которыми также будем неоднократно пользоваться.

Теорема 8.6 (первое неравенство Бернштейна). Если

$$T(x) = A + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) -$$

тригонометрический полином порядка n , то справедлива оценка

$$|T'(x)| \leq n \max |T(x)|.$$

Теорема 8.7 (второе неравенство Бернштейна). Если полином $P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ степени не выше n на сегменте $[a, b]$ удовлетворяет неравенству $|P_n(x)| \leq M$, то на интервале (a, b) выполняется неравенство $|P'_n(x)| \leq \frac{Mn}{((x-a)(b-x))^{1/2}}$.

Теорема 8.8 (неравенство Маркова). Если полином $P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ степени не выше n на сегменте $[a, b]$ удовлетворяет неравенству $|P_n(x)| \leq M$, то на том же сегменте $|P'_n(x)| \leq 2Mn^2/(b-a)$.

Теорема 8.9 (неравенство Никольского) [143]. Пусть $T_n(t)$ — тригонометрический полином n -го порядка. Тогда справедливо неравенство

$$\|T_n(t)\|_C \leq n^{1/p} \|T_n(t)\|_{L_p}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Приводимые ниже обратные теоремы конструктивной теории функций принадлежат С. Н. Бернштейну.

Теорема 8.10. Пусть $f(x) \in \tilde{C}_{[0,2\pi]}$ и для любого n наилучшее приближение полиномами из H_n^T $E_n(f) \leq n^{-\alpha}$. Тогда если $0 < \alpha < 1$, то $f(x) \in H_\alpha$, а если $\alpha = 1$, то $f(x) \in Z$.

Теорема 8.11. Пусть функция $f(x) \in \tilde{C}_{[0,2\pi]}$ и $E_n(f)$ — ее наилучшее приближение полиномами из H_n^T . Если $E_n(f) \leq \frac{c}{n^{r+\alpha}}$, где r — натуральное число, а $0 < \alpha \leq 1$, то у функции $f(x)$ существуют непрерывные производные $f'(x), f''(x), \dots, f^{(r)}(x)$, причем $f^{(r)} \in H_\alpha$, если $\alpha < 1$; $f^{(r)} \in Z$, если $\alpha = 1$.

Напомним, что через Z обозначен класс функций Зигмунда, определенный следующим соотношением: для модуля непрерывности $\omega(\delta)$ справедливо неравенство $\omega(\delta) \leq c\delta(1 + |\ln \delta|)$, где c не зависит от δ .

Изложенные выше результаты принадлежат в основном классикам конструктивной теории функций: П. Л. Чебышеву, С. Н. Бернштейну, Д. Джексону и относятся к первому периоду в теории приближений. Их подробное изложение имеется в [93, 119, 140, 208].

В 50-70-е гг. прошлого столетия в конструктивной теории функций были получены новые результаты, многие из которых являются неулучшаемыми. Не имея возможности остановиться на этих результатах, приведем несколько утверждений типа теоремы Джексона об оценках наилучших приближений.

Теорема 8.12 [119]. Для любой функции $f \in \tilde{C}_{[0,2\pi]}$, $f \not\equiv \text{const}$ справедливы неравенства $E_n(f) < \omega(f, \frac{\pi}{n})$, $n = 1, 2, \dots$, причем не зависящая от $f(x)$ и от n константа 1 перед $\omega(f, \frac{\pi}{n})$ не может быть уменьшена.

Приведем оценки наилучших приближений непрерывных функций алгебраическими и тригонометрическими полиномами.

Известно [119, с. 165–167] следующее утверждение об оценках наилучших приближений периодических с периодом 2π функций тригонометрическими полиномами.

Теорема 8.13. При всех $n, r = 1, 2, \dots$, справедливы равенства

$$\begin{aligned} E_n(W_\infty^r(1))_C &= K_r n^{-r}, \\ E_n(W_1^r(1))_{L_1} &= K_r n^{-r}, \\ E_n(W_V^{r-1}(1))_{L_1} &= K_r n^{-r}, \\ E_n(W_2^r(1))_{L_2} &= n^{-r}, \end{aligned}$$

где K_r — константы Фавара, $K_r = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k(r+1)}}{(2k+1)^{r+1}}$, $r = 0, 1, \dots$

При нецелых r справедливо следующее утверждение.

Теорема 8.14 [119, с. 171–172]. Если $0 < r < 1$, то

$$E_n(W_\infty^r(1))_C = E_n(W_1^r(1))_{L_1} = \frac{4 \sin(r\pi/2)}{\pi n^r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^{r+1}}.$$

Если $r \geq 1$, то

$$E_n(W_\infty^r(1))_C = E_n(W_1^r(1))_{L_1} = \frac{1}{\pi n^r} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)\gamma - \pi r/2)}{(2k+1)^{r+1}} \right|,$$

где γ — число, удовлетворяющее соотношению

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)\gamma - \pi r/2)}{(2k+1)^r} = 0.$$

Для наилучшего приближения функций алгебраическими полиномами известно значительно меньше точных результатов.

Теорема 8.15 [119, с. 192]. При всех $r = 1, 2, \dots$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^r E_n(W_\infty^r(1; [-1, 1]))_{C[-1,1]} = K_r,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{r+\alpha} E_n(W^r H_\alpha(1; [-1, 1]))_{C[-1,1]} = K_r,$$

т.е. при $n \rightarrow \infty$

$$E_n(W_\infty^r(1; [-1, 1]))_{C[-1,1]} = K_r n^{-r} + o(n^{-r}),$$

$$E_n(W^r H_\alpha(1; [-1, 1]))_{C[-1,1]} = K_r n^{-r-\alpha} + o(n^{-r-\alpha}).$$

В частности,

$$E_n(W_\infty^1(1; [-1, 1]))_{C[-1,1]} \leq \frac{\pi}{2n}.$$

Современное состояние теории приближения функций и точные оценки приближений полиномами, отрезками рядов и сплайнами изложены в монографиях и обзорах [11, 16, 32, 206, 208, 210, 251, 260, 261].

8.2. Интерполяционные полиномы

На протяжении работы будут использоваться различные интерполяционные полиномы.

Пусть функция $f(x) \in C[a, b]$ задана на сегменте $[a, b]$ своими значениями в точках $x_i, i = 1, 2, \dots, n$. Интерполяционный полином Лагранжа имеет вид

$$P_n(f[a, b]) = \sum_{k=1}^n f(x_k) l_k(x),$$

где $l_k(x)$ — фундаментальные полиномы:

$$l_k(x) = \frac{(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)}.$$

Ниже в различных конкретных случаях используются различные сетки узлов. Это обстоятельство будет каждый раз специально оговариваться.

При аппроксимации периодических (с периодом 2π) функций будем использовать интерполяционный полином

$$T_n(f) = \sum_{k=0}^{2n} f\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right) \psi_k(x),$$

где

$$\psi_k(x) = \frac{1}{2n+1} \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(x - x_k)}{\sin \frac{x - x_k}{2}}.$$

Приведем следующие известные оценки точности аппроксимации функций тригонометрическими полиномами, которыми будем далее пользоваться.

Теорема 8.16 [119, с. 276]. Если функция $f(x)$, заданная на $[-1, 1]$, имеет r -ю ($r \geq 0$ целое) непрерывную производную, то существует константа M_r , не зависящая от f , x и n , такая, что для любого $n > r$ найдется алгебраический многочлен $P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ степени, не выше, чем n , удовлетворяющий для каждого $x \in [-1, 1]$ неравенству

$$|f(x) - P_n(x)| \leq M_r \left[\frac{1}{n} \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{|x|}{n} \right) \right]^r \omega \left[\frac{1}{n} \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{|x|}{n} \right) \right],$$

где $\omega(t) = \omega(f^{(r)}; t)$ есть модуль непрерывности r -й производной.

Обозначим через $T_r(x)$ полином Чебышева степени r , наименее уклоняющийся от нуля в равномерной метрике на сегменте $[-1, 1]$, а через x_1, \dots, x_r — его корни. Через $L_r(x, [-1, 1])$ обозначим полином, интерполирующий функцию $f(x)$ на сегменте $[-1, 1]$ по узлам x_1, \dots, x_r .

Теорема 8.17 [93]. Справедлива оценка погрешности интерполяционной формулы $L_r(x, [-1, 1])$:

$$\|f(x) - L_r(x, [-1, 1])\| \leq \|f^{(r)}\|/r!2^{r-1}.$$

Доказательство. Для произвольной точки $t \in [-1, 1]$, $t \neq x_k$, $k = 1, 2, \dots, r$, положим

$$\tau = \frac{f(t) - L_r(t, [-1, 1])}{T_r(t)}. \quad (8.1)$$

Введем функцию

$$\varphi(x) = f(x) - L_r(x, [-1, 1]) - \tau T_r(x).$$

Функция $\varphi(x)$ обращается в нуль в точках $t, x_k, k = 1, 2, \dots, r$. Применяя к функции $\varphi(x)$ $r+1$ раз теорему Ролля, убеждаемся, что существует точка ξ ($\xi \in (-1, 1)$) такая, что $\varphi^{(r)}(\xi) = f^{(r)}(\xi) - \tau r! = 0$. Отсюда $\tau = f^{(r)}(\xi)/r!$.

Используя соотношение (8.1), имеем при $x \neq x_k, k = 1, 2, \dots, r$,

$$|f(x) - L_r(x, [-1, 1])| = |\tau| |T_r(x)| \leq \frac{|f^{(r)}(\xi)|}{r!} |T_r(x)| \leq \frac{1}{2^{r-1}r!} \|f^{(r)}(x)\|.$$

В узлах $x_k, k = 1, 2, \dots, r$, утверждение теоремы очевидно.

Теорема доказана.

Аналогичные утверждения имеют место и при интерполяции функций по узлам других ортогональных многочленов. В частности, нам понадобится оценка точности интерполирования функций из класса $W^r(M)$ по узлам полиномов Лежандра.

Обозначим через $P_n(x)$ полином Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n(x^2 - 1)^n}{dx^n}.$$

Обозначим через x_k , $k = 1, 2, \dots, n$, узлы полинома Лежандра, а через $P_n(x, [-1, 1])$ – интерполяционный полином Лагранжа, построенный по этим узлам.

Теорема 8.18. Справедлива оценка погрешности интерполяционной формулы $P_n(x, [-1, 1])$ по узлам полинома Лежандра:

$$\|f(x) - P_n(x, [-1, 1])\| \leq \|f^{(n)}(x)\| / (2n - 1)!!.$$

Доказательство проводится по аналогии с доказательством предыдущей леммы. Для произвольной точки $t \in [-1, 1]$, $t \neq x_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, положим

$$\tau = \frac{f(t) - P_n(f, [-1, 1])}{P_n(t)}$$

и введем функцию $\varphi(x) = f(x) - P_n(x, [-1, 1]) - \tau P_n(x)$. Функция $\varphi(x)$ по построению имеет $n + 1$ корень, и, следовательно, по теореме Ролля, существует такая точка ξ , $-1 < \xi < 1$, в которой $\varphi^{(n)}(\xi) = 0$. Это означает, что $f^{(n)}(\xi) - \tau(2n)! / (n!2^n) = 0$. Следовательно, $\tau = f^{(n)}(\xi) / (2n - 1)!!$ и

$$\|f(x) - P_n(x, [-1, 1])\| \leq |\tau| \|P_n(x)\| \leq \|f^{(n)}\| / (2n - 1)!!$$

в точках $x \neq x_k$, $k = 1, 2, \dots, n$. В узлах x_k , $k = 1, 2, \dots, n$, утверждение теоремы очевидно.

Теорема доказана.

Пусть Ω – куб размерности l . Через $W_p^s(\Omega)$ обозначается пространство Соболева с нормой

$$\|u\|_{W_p^s(\Omega)} = \|u\|_{L_p(\Omega)} + \|u\|_{L_p^s(\Omega)},$$

где

$$\|u\|_{L_p^s(\Omega)} = \left[\sum_{|v|=s} \int_{\Omega} |D^v u|^p dx \right]^{1/p}.$$

Положим $w = s - 1$ и поставим в соответствие каждой функции $u \in W_p^s(\Omega)$ полином $R_w(x)$ степени w , удовлетворяющий условиям:

$$\int_{\Omega} x^{\alpha} R_w(x) dx = \int_{\Omega} x^{\alpha} u(x) dx, \quad |\alpha| \leq w.$$

Положим $R_w(x) = P_{\Omega}u$, т.е. P_{Ω} — линейный оператор проектирования, отображающий пространство $W_p^s(\Omega)$ на конечномерное пространство полиномов степени w от l переменных.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 8.19 [19, с. 341]. При $sp > l$ для любой функции $u \in W_p^s(\Omega)$ выполняется неравенство

$$\|u - P_{\Omega}u\|_{C(\Omega)} \leq C(\text{mes}\Omega)^{s/l-1/p} \|u\|_{L_p^s(\Omega)},$$

причем константа $C = C(p, s, l)$ не зависит от куба Ω .

Теорема 8.20 [19, с. 341]. При $ps \leq l$ и $q < q^* = p(1 - ps/l)^{-1}$ для любой функции $u \in W_p^s(\Omega)$ выполняется неравенство

$$\|u - P_{\Omega}u\|_{L_q(\Omega)} \leq C(\text{mes}\Omega)^{q^{-1}-q^{*-1}} \|u\|_{L_p^s(\Omega)},$$

причем константа $C = C(p, q, s, l)$ не зависит от куба Ω ; $1/p + 1/q = 1$.

8.3. Элементы теории сплайнов

На протяжении книги используются методы сплайн-интерполяции. Напомним, следуя [119], основные определения сплайнов, необходимые в дальнейшем.

Определение 8.1. Функция $f(x)$, заданная на сегменте $[a, b]$, называется сплайном порядка m ($m = 0, 1, \dots$) с узлами t_k , $k = 1, 2, \dots, N$, $a < t_1 < t_2 < \dots < t_N < b$, если в каждом сегменте $[a, t_1]$, $[t_1, t_2]$, \dots , $[t_N, b]$ функция $f(x)$ является алгебраическим полиномом степени m и в каждой точке t_k , $k = 1, 2, \dots, N$, некоторая производная $f^{(v)}(x)$, $0 \leq v \leq m$, имеет разрыв.

Говорят, что сплайн $f(x)$ порядка m имеет дефект r_k ($1 \leq r_k \leq m$) в узле t_k , $k = 1, 2, \dots, N$, если в точке t_k непрерывны функции $f(x)$, $f'(x)$, \dots , $f^{(m-r_k)}(x)$, а производная $f^{(m-r_k+1)}(x)$ терпит разрыв.

Число $r = \max_{1 \leq k \leq N} r_k$ называется дефектом сплайна.

Будем говорить, что в узле t_k , $k = 1, 2, \dots, N$, сплайн $f(x)$ имеет дефект $m+1$, если в этом узле функция $f(x)$ имеет разрыв непрерывности. В этом случае будем говорить, что сплайн $f(x)$ имеет дефект $m+1$.

Пусть на сегменте $[a, b]$ фиксирована система точек $\Delta_N : a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$, которая называется разбиением сегмента $[a, b]$. Через $S_m^r(\Delta_N, [a, b])$ обозначим множество заданных на $[a, b]$ сплайнов порядка m , имеющих дефекты $r_i \leq r$ в точках $t_i (i = 1, 2, \dots, N - 1)$ разбиения Δ_N . Сплайны, имеющие дефект $m + 1$, называются нулевыми и обозначаются через $S_0(\Delta_N, [a, b])$. При рассмотрении периодических сплайнов в качестве основного промежутка $[a, b]$ берется сегмент $[0, 2\pi]$ и вместо обозначения $S_m^r(\Delta_N, [a, b])$ используется обозначение $S_m^r(\Delta_N)$.

8.4. Полиномы Бернштейна

В главе IV при исследовании методов построения потенциальных полей Земли используются полиномы Бернштейна.

Определение 8.2 [140]. Пусть $f(x)$ есть функция, заданная на сегменте $[0, 1]$. Полином

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

называется полиномом Бернштейна функции $f(x)$.

Полиномы Бернштейна обладают следующим замечательным свойством — они равномерно сходятся для любой непрерывной функции.

Теорема 8.21 [140]. Если $f(x)$ непрерывна на сегменте $[0, 1]$, то равномерно относительно x выполняется соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(x) = f(x).$$

Известны следующие оценки точности приближения функций полиномами Бернштейна [140].

Теорема 8.22 [269]. Если $f(x) \in C[0, 1]$, а $B_n(x)$ — ее полином Бернштейна, то

$$|B_n(x) - f(x)| \leq \frac{3}{2} \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

где ω — модуль непрерывности функции $f(x)$.

Теорема 8.23 [258, 140]. Если $f(x) \in H_\alpha(M)$, то

$$|B_n(x) - f(x)| \leq \frac{3M}{2n^{\alpha/2}},$$

причем эта оценка неулучшаема.

Теорема 8.24 [84, 140]. Если у ограниченной функции $f(x)$ в точке x существует конечная вторая производная $f''(x)$, то

$$B_n(x) = f(x) + \frac{f''(x)}{2n} x(1-x) + \frac{\rho_n}{n},$$

где $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 0$.

Таким образом, из последних двух теорем следует, что полиномы Бернштейна обладают достаточно плохими аппроксимационными свойствами при приближении гладких функций — приближения функций $f(x) \in W^r(1)$, $r = 1, 2, \dots$, не превосходят $O(N^{-1})$.

Однако они обладают следующим свойством, которое будет использовано в главе IV.

Теорема 8.25 [116, 140]. Если $f(x)$ есть целая функция, то ее полином Бернштейна $B_n(x)$ сходится к ней на всей оси.

8.5. Некоторые факты из теории квадратурных формул

На протяжении всей книги используется ряд известных утверждений из теории квадратурных и кубатурных формул. Для удобства читателя некоторые из них приводятся в этом разделе.

Теорема 8.26 [141]. Среди квадратурных формул вида

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^m \sum_{l=0}^{\rho} p_{kl} f^{(l)}(x_k) + R(f) \equiv L(f) + R_m(f)$$

наилучшей для класса функций $W^r L_p(1)$ ($1 \leq p \leq \infty$) при $\rho = r - 1$ ($r = 1, 2, 3, \dots$), а также при $\rho = r - 2$ ($r = 2, 4, 6, \dots$) является единственная формула, определяемая следующими узлами x_k^* и коэффициентами p_{kl}^* :

$$\begin{aligned} x_k^* &= h(2(k-1) + [R_{rq}(1)]^{1/r}) \quad (k = 1, 2, \dots, m), \\ p_{1l}^* &= (-1)^l p_{ml}^* = \\ &= h^{l+1} \left\{ \frac{(-1)^l}{(l+1)!} (R_{rq}(1))^{(l+1)/r} + \frac{1}{r!} R_{rq}^{(r-l-1)}(1) \right\} \quad (l = 0, 1, \dots, \rho), \\ p_{k,2\nu}^* &= \frac{2h^{2\nu+1}}{r!} R_{rq}^{(r-2\nu-1)}(1) \\ &\quad \left(k = 2, 3, \dots, m-1; \nu = 0, 1, \dots, \left[\frac{r-1}{2} \right] \right), \\ p_{k,2\nu+1}^* &= 0 \quad \left(k = 2, 3, \dots, m-1; \nu = 0, 1, \dots, \left[\frac{r-2}{2} \right] \right), \end{aligned}$$

где $h = 2^{-1}(m-1 + (R_{rq}(1))^{1/r})^{-1}$, а $R_{rq}(t)$ — многочлен вида $t^r + \sum_{i=0}^{r-1} \beta_i t^i$, наименее уклоняющийся от нуля в метрике L_q ($p^{-1} + q^{-1} = 1$) на $[-1, 1]$. При этом

$$R_m[W^r L_p(1)] = R_m[W^r L_p(1); X^*, P^*] =$$

$$= \frac{R_{rq}(1)h^r}{r!\sqrt[q]{rq+1}} = \frac{R_{rq}(1)}{2^r r! \sqrt[q]{rq+1} (m-1 + (R_{rq}(1))^{1/r})^r}.$$

Отметим частные случаи. Если $p = 1$ ($q = \infty$), то многочлен $R_{r\infty}(t)$ есть многочлен Чебышева $T_r(t) = 2^{1-r} \cos(r \arccos t)$, и тогда

$$h = \frac{1}{2^{1/r} + 2(m-1)}, \quad R_m[W^r L(1)] = \frac{1}{r!(2 + (m-1)2^{2-1/r})^r}.$$

Если $p = q = 2$, то $R_{r2}(t)$ есть многочлен Лежандра $L_r(t)$; при этом

$$h = \left(4 \sqrt[r]{\frac{(r!)^2}{(2r)!}} + 2(m-1) \right)^{-1},$$

$$R_m[W^r L_2(1)] = \frac{2}{r! \sqrt{2r+1}} \left(2 + (m-1) \sqrt[r]{\frac{(2r)!}{(r!)^2}} \right)^{-r}.$$

Наконец, в случае $p = \infty$ ($q = 1$) $R_{r1}(t)$ есть многочлен Чебышева $Q_r(t)$ (второго рода), и тогда

$$h = (2(m-1) + \sqrt[r]{r+1})^{-1},$$

$$R_m[W^r L_\infty(1)] = \frac{1}{r!(4(m-1) + 2\sqrt[r]{r+1})^r}.$$

Приведенные равенства справедливы для всех $r = 1, 2, 3, \dots$, если $\rho = r - 1$, и для $r = 2, 4, 6, \dots$, если $\rho = r - 2$.

В книге будут использоваться следующие результаты, принадлежащие В. П. Моторному.

Теорема 8.27 [139]. Пусть при $r = 1, 2, \dots, M_m^r$ есть множество функций $f(t) \in \tilde{W}^r(0, 2\pi)$, имеющих $2m$ экстремумов на периоде $[0, 2\pi)$, производная которых $f^{(r)}(x)$ меняет знак на периоде $2m$ раз, принимая попеременно значения $+1$ или -1 . Тогда для любой системы точек $X = \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < 2\pi\}$ существует функция $f_X \in M_m^r$ такая, что

$$\min_t f_X(t) = f(x_k) = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, m-1)$$

и

$$\int_0^{2\pi} f_X(t) dt \geq \frac{2\pi K_r}{m^r},$$

где K_r — константа Фавара.

Следствие [139]. Справедливо неравенство

$$\inf_X \sup_{f \in \tilde{W}_X^r(0, 2\pi)} \int_0^{2\pi} f_X(t) dt \geq \frac{2\pi K_r}{m^r},$$

где $\tilde{W}_X^r(0, 2\pi)$ — множество функций, определенных на сегменте $[0, 2\pi]$, принадлежащих классу $\tilde{W}^r(1)$ и равных нулю на сетке X .

Теорема 8.28 [141]. Для класса $\tilde{W}^r(1)$ функций, определенных на сегменте $[0, 2\pi]$, при любых натуральных r наилучшей квадратурной формулой вида

$$\int_0^{2\pi} f(t) dt = \sum_{k=0}^{m-1} p_k f(x_k) + R_m(f)$$

или

$$\int_0^{2\pi} f(t) dt = \sum_{k=0}^{m-1} [p_k f(x_k) + p'_k f'(x_k)] + R_m(f)$$

на произвольном векторе узлов $X = (x_0, x_1, \dots, x_{m-1})$, $0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} \leq 2\pi$ для обеих квадратурных формул и произвольном векторе коэффициентов $P = \{p_k\}$ для первой квадратурной формулы или произвольном векторе коэффициентов $P = \{p_k\} \cup \{p'_k\}$ для второй квадратурной формулы является формула

$$\int_0^{2\pi} f(t) dt = \frac{2\pi}{m} \sum_{k=0}^{m-1} f\left(\frac{2k\pi}{m}\right) + R_m(f)$$

с равноотстоящими узлами и равными коэффициентами. Погрешность этой формулы равна

$$\sup_{f \in \tilde{W}^r(1)} |R(f)| = \frac{2\pi K_r}{m^r}.$$

Также неоднократно будут использоваться следующие квадратурные формулы.

Теорема 8.29 [141]. Среди квадратурных формул вида

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^m p_k f(x_k) + R_m(f)$$

наилучшей для класса $\tilde{W}^r L_p(1)$ ($1 \leq p \leq \infty$) является формула прямоугольников

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m f\left(\frac{k}{m}\right) + R_m(f);$$

при этом

$$R_m[\tilde{W}^r L_p(1)] = \frac{1}{m^r} \inf_c \|B_r^*(\cdot) - c\|_{L_q} \quad (1/p + 1/q = 1).$$

Для $1 < p \leq \infty$ наилучшая формула единственная с точностью до жесткого сдвига.

Здесь $B_r^*(t)$ ($-1 \leq t \leq 1$) — полиномы Бернулли.

Пусть функция $f(x, y)$ задана на прямоугольнике $D = [a, b; c, d]$. Рассмотрим кубатурную формулу

$$\iint_D f(x, y)dx dy = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n p_{ki} f(x_k, y_i) + R_{mn}(f), \quad (8.2)$$

определяемую вектором (X, Y, P) узлов $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_m \leq b$, $c \leq y_1 < y_2 < \dots < y_n \leq d$ и коэффициентов p_{ki} .

Теорема 8.30 [141]. Среди кубатурных формул (8.2) оптимальной для классов $H_{\omega_1, \omega_2}(D)$ и $H_\omega(D)$ является формула

$$\iint_D f(x, y)dx dy = 4hq \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n f(a + (2k-1)h, c + (2i-1)q) + R_{mn}(f),$$

где $h = \frac{b-a}{2m}$, $q = \frac{d-c}{2n}$. При этом

$$R_{mn}[H_{\omega_1, \omega_2}(D)] = 4mn \left(q \int_0^h \omega_1(t)dt + h \int_0^q \omega_2(t)dt \right);$$

$$R_{mn}[H_\omega(D)] = 4mn \int_0^q \int_0^h \omega(\sqrt{t^2 + \tau^2})dtd\tau.$$

Пусть f — элемент метрического пространства X ; L, L_1, \dots, L_N — линейные функционалы. Информация о функции f задается вектором $T(f) = (L_1(f), \dots, L_N(f))$. Через $S(T(f))$ обозначен метод S вычисления функционала $L(f)$ по информации $T(f)$. Погрешность этого метода на множестве функций Ω равна $R(S, T) = \sup_{f \in \Omega} |L(f) - S(T(f))|$. Через $R(T) = \inf_s R(S, T)$ обозначен наилучший для данной информации T метод.

Лемма 8.1 (С. А. Смоляка) [167, 15]. Пусть функционалы $L(f), L_1(f), \dots, L_N(f)$ – линейные и Ω – выпуклое центрально-симметричное множество с центром симметрии Q в линейном метрическом пространстве. Пусть $\sup_{f \in \Omega_0} L(f) < \infty$, где $\Omega_0 \equiv \{f; f \in \Omega, L_k(f) = 0, k = 1, 2, \dots, N\}$. Тогда существуют числа D_1, \dots, D_N такие, что

$$\sup_{f \in \Omega} |L(f) - \sum_{k=1}^N D_k L_k(f)| = R(T),$$

т.е. среди наилучших методов есть линейный.

Следствие. $R(T) = \sup_{f \in \Omega_0} Lf$.

9. Элементы функционального анализа

В данном разделе приводятся сведения из функционального анализа, используемые в работе.

9.1. Нормированные пространства

Рассмотрим некоторое множество E , в котором введены две операции: сложение элементов и умножение на число, удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) $x + y = y + x$ (коммутативность сложения);
- 2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (ассоциативность сложения);
- 3) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y, (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ – два закона дистрибутивности;
- 4) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ (ассоциативность умножения);
- 5) в E существует нулевой элемент 0 такой, что $x + 0 = x$ для любого $x \in E$;
- 6) для каждого элемента $x \in E$ существует однозначно определенный элемент того же множества $(-x)$ такой, что $x + (-x) = 0$.

Элемент 0 называется нулевым элементом или нулем множества E , элемент $-x$ называется элементом, противоположным элементу x .

Множество E , удовлетворяющее перечисленным свойствам, называется линейным пространством (вещественным, если числа λ вещественные, или комплексным, если λ комплексные).

Предположим, что каждому $x \in E$ поставлено в соответствие неотрицательное число $\|x\|$ (норма x), удовлетворяющее условиям:

- а) $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
- б) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (однородность нормы);
- в) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

Линейное пространство, в котором введено понятие нормы, называется линейным нормированным пространством.

Линейное нормированное пространство называется полным или банаховым пространством, если из того, что $\|x_n - x_m\|_E \rightarrow 0$ при $n, m \rightarrow \infty$, следует сходимость последовательности x_k к некоторому элементу $x \in E$ по норме пространства E , т.е. $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x - x_k\|_E = 0$.

Банаховы пространства будем обозначать буквой B .

Полное линейное нормированное пространство называется гильбертовым пространством (H -пространством), если в нем введено скалярное произведение (x, y) , $x, y \in H$, обладающее свойствами:

- а) $(x, y) = \overline{(y, x)}$ (в частности, (x, x) — вещественное число);
- б) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$;
- в) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ для любого комплексного числа λ ;
- г) $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.

Скалярное произведение связано с нормой равенством $(x, x) = \|x\|^2$.

9.2. Линейные операторы

Пусть X_1 и X_2 — нормированные пространства. Отображение A из X_1 в X_2 называется линейным оператором, если $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$ для любых чисел α, β и любых элементов $x, y \in X_1$.

Оператор A называется непрерывным, если он каждую сходящуюся (по норме в X_1) последовательность элементов (x_n) переводит в сходящуюся (по норме в X_2) последовательность элементов (Ax_n) .

Оператор A называется ограниченным, если можно указать такое положительное число K , что для $x \in X$ $\|Ax\| \leq K\|x\|$. Наименьшее из значений K , при которых выполняется предыдущее неравенство, называется нормой оператора A и обозначается $\|A\|$. Отметим, что $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$.

Множество линейных ограниченных операторов, действующих из пространства X в пространства Y , обозначается через $B[X, Y]$ или $[X, Y]$.

Пусть K — линейный оператор, действующий из нормированного пространства X в нормированное пространство Y . Говорят, что оператор K имеет обратный оператор (или, другими словами обратим), если существует оператор V такой, что $VK = I_X, KV = I_Y$, где I_X — тождественный оператор, отображающий X на X . Аналогично, I_Y — тождественный оператор, отображающий Y на Y . Оператор V называется обратным по отношению к K и обозначается K^{-1} .

Обозначим через $K(X)$ множество значений $Kx, x \in X$. Оператор K_l^{-1} , действующий из $K(X)$ в X , называется левым обратным по отно-

шению к K , если $K_l^{-1}K = I_X$. Оператор K_r^{-1} , действующий из Y в X , называется правым обратным по отношению к K , если $KK_r^{-1} = I_Y$.

Рассмотрим уравнение $Kx = y$, где y — произвольный фиксированный элемент пространства Y , а x — искомый элемент пространства X .

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 9.1 [117]. Пусть уравнение $Kx = y$ имеет решение при любом $y \in Y$ и пусть существует положительное число m такое, что при каждом $x \in X$ $\|Kx\| \geq m\|x\|$. Тогда оператор K имеет непрерывный обратный K^{-1} , причем $\|K^{-1}\| \leq 1/m$.

Следствие [117]. Для существования левого обратного оператора K_l^{-1} необходимо и достаточно, чтобы оператор K удовлетворял неравенству $\|Kx\| \geq m\|x\|$.

Линейное отображение линейного пространства X в поле скаляров называется линейным функционалом.

Множество всех непрерывных функционалов на X обозначается через X^* и называется пространством, сопряженным к X .

Пусть X — нормированное пространство. Тогда X^* также является нормированным пространством и существует пространство $X^{**} = (X^*)^*$, сопряженное к X^* .

Банахово пространство B называется рефлексивным, если $\pi(B) = B^{**}$, т.е. B изометрично B^{**} при каноническом вложении π (определение канонического вложения дано в [117, с. 114–116]).

Отметим, что любое конечномерное пространство, а также пространства L_p ($1 < p < \infty$) рефлексивны, а пространства L_1 , L_∞ и C нерефлексивны.

Замкнутое линейное подмножество банахова пространства называется его подпространством. Пространство B распадается в прямую сумму подпространств B_1 и B_2 , $B = B_1 \otimes B_2$, если каждый элемент $x \in B$ допускает единственное представление в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in B_1$, $x_2 \in B_2$. Каждое из подпространств B_1 , B_2 называется прямым дополнением друг друга.

В пространстве B можно ввести норму: $\|x\| = \|x_1\| + \|x_2\|$, где $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in B_1$, $x_2 \in B_2$, $B = B_1 \otimes B_2$. Введенная таким образом норма называется максимальной.

При исследовании линейных операторов в гильбертовых пространствах часто наряду с оператором A рассматривают его действительную и мнимые части $A_{\Re}A = (A + A^*)/2$ и $A_j = \Im A = (A - A^*)/2$. Здесь через A^* обозначен оператор, сопряженный с A . В случае, если A — матрица,

то A^* — матрица, комплексно сопряженная с A . Оператор A называется самосопряженным, если $A = A^*$.

Пусть B — банахово пространство. Точка λ комплексной плоскости называется регулярной точкой оператора A , если существует оператор $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$. Множество $\rho(A)$ всех регулярных точек открыто. Его дополнение называется спектром оператора A и обозначается символом $\sigma(A)$. Спектр $\sigma(A)$ замкнут, непустой и лежит в круге $|\sigma(A)| \leq \|A\|$.

Комплексное число λ называется собственным значением оператора A в комплексном банаховом пространстве B , если существует такой элемент $x \in B (\|x\| \neq 0)$, что $Ax = \lambda x$. Элемент x , удовлетворяющий этому равенству, называется собственным элементом оператора A , отвечающим собственному значению λ .

Множество $E \subset X$ называется множеством первой категории, если E можно представить в виде объединения счетного множества нигде не плотных множеств.

Множество $E \subset X$, не являющееся множеством первой категории, называется множеством второй категории (в X).

Пусть X — нормированное пространство, X_0 — его подпространство.

Объединим элементы из X в классы, относя два элемента x_1 и x_2 в один класс, если $x_1 - x_2 \in X_0$. При этом, очевидно, различные классы не содержат общих элементов и каждый элемент $x \in X$ входит в один и только один класс. Пусть \bar{x} — один из классов и $x \in \bar{x}$. Тогда $\bar{x} = x + X_0$.

В множестве X/X_0 всех классов можно ввести арифметические операции, полагая $\bar{x} + \bar{y} = x + y + X_0$, $\lambda \bar{x} = \lambda x + X_0$.

Эти определения не зависят от выбора элементов x и y — представителей классов \bar{x} и \bar{y} . Поэтому X/X_0 является линейным пространством, которое называется фактор-пространством.

Напомним несколько утверждений, которыми будем неоднократно пользоваться.

Теорема 9.1 (Теорема Банаха) [117]. Пусть X — B -пространство и $U \in B[X, X]$. Тогда если

$$\|U\| \leq q < 1, \quad (9.1)$$

то оператор $I - U$ имеет непрерывный обратный оператор, причем

$$\|(I - U)^{-1}\| \leq 1/(1 - q). \quad (9.2)$$

Теорема 9.2 [117]. Пусть $U_0 \in B[X, Y]$, где X и Y B -пространства, и пусть существует $U_0^{-1} \in B[Y, X]$. Тогда если оператор $U \in B[X, Y]$ удовлетворяет условию $\|U\| < \|U_0^{-1}\|^{-1}$, то оператор $V = U_0 + U$ имеет

непрерывный обратный V^{-1} , причем

$$\|V^{-1}\| \leq \frac{\|U_0^{-1}\|}{1 - \|U_0^{-1}U\|} \leq \frac{\|U_0^{-1}\|}{1 - \|U_0^{-1}\|\|U\|}. \quad (9.4)$$

Теорема 9.3 [130]. Пусть $U_0 \in B[X, Y]$. Если оператор $U \in B[X, Y]$ удовлетворяет условию $\|U\| < \|U_0^{-1}\|$, то оператор $V = U_0 + U$ имеет непрерывный обратный V^{-1} , причем

$$\|V^{-1} - U_0^{-1}\| \leq \frac{\|U\|}{1 - \|U_0^{-1}\|\|U\|} \|U_0^{-1}\|^2.$$

При исследовании разрешимости систем линейных уравнений в книге используется критерий Адамара.

Пусть $A = \{a_{i,j}\}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, — произвольная $n \times n$ матрица с комплексными элементами.

Теорема 9.4 (Теорема Адамара) [85]. Если для матрицы $A = \{a_{i,j}\}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, выполняется n неравенств

$$|a_{ii}| - \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| > 0, i = 1, 2, \dots, n,$$

то матрица A не является вырожденной.

Замечание. Критерий Адамара невырожденности матрицы $A = \{A_{ij}\}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, может быть описан n неравенствами для столбцов:

$$|a_{ii}| - \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ji}| > 0, i = 1, 2, \dots, n.$$

9.3. Дифференцирование в нормированных пространствах

Пусть X и Y — линейные нормированные пространства, $y = f(x)$ — оператор, определенный в X с областью значений в Y .

Определение 9.1. Производная Фреше. Пусть h — произвольный элемент пространства X ; предположим, что существует линейный оператор $A \in B[X, Y]$ (вообще зависящий от x) такой, что $f(x+h) - f(x) = Ah + a(x, h)$, где $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \|a(x, h)\|/\|h\| = 0$.

В этом случае Ah называется сильным дифференциалом или дифференциалом Фреше оператора $f(x)$ в точке x , соответствующим приращению h аргумента, и обозначается $df(x, h)$.

Линейный оператор A , вообще зависящий от x , обозначается $f'(x)$ и называется сильной производной или производной Фреше.

Тогда $df(x, h) = f'(x)h$ и $f(x+h) - f(x) = f'(x)h + o(\|h\|)$.

Определение 9.2. Слабый дифференциал (дифференциал Гато). Слабым дифференциалом функции $f(x)$ в точке x называют выражение

$$Df(x, h) = \left. \frac{d}{dt} f(x + th) \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t}$$

в предположении, что предел, стоящий в правой части равенства и понимаемый в смысле сходимости по норме, существует.

Теорема 9.5 [130]. Если существует сильный дифференциал $df(x, h)$, то существует и слабый $Df(x, h)$ и $df(x, h) = Df(x, h)$.

В определение дифференциала Гато не входит требование линейности. Однако если дифференциал $Df(x, h)$ линейный, то $Df(x, h) = f'_c(x)h$ и функция $f'_c(x)$ называется слабой производной или производной Гато оператора $f(x)$.

10. Итерационные методы решения операторных уравнений

При обосновании итерационных методов на протяжении всей книги широко применяется принцип сжатых отображений, сформулированный С. Банахом.

Пусть B — полное метрическое пространство, в котором задана метрика ρ .

Теорема 10.1 [130]. Пусть в полном метрическом пространстве B дан оператор A , переводящий элементы пространства B снова в элементы этого же пространства. Пусть кроме того, для всех $x, y \in B$ справедливо неравенство $\rho(A(x), A(y)) \leq \alpha \rho(x, y)$, где $0 < \alpha < 1$ и не зависит от x и y . Тогда существует одна и только одна точка x^* такая, что $A(x^*) = x^*$.

Точка x^* называется неподвижной точкой оператора A .

В условиях применимости принципа сжатых отображений последовательные приближения

$$x_{n+1} = A(x_n), \quad n = 0, 1, \dots,$$

сходятся к неподвижной точке x^* при любом начальном приближении $x_0 \in B$.

Многие обратные задачи грави- и магниторазведки моделируются операторными и, в частности, интегральными уравнениями первого рода вида

$$Ax = f, \tag{10.1}$$

где A — линейный оператор из банахова пространства B в B .

Интегральные уравнения первого рода являются классическим примером некорректных задач [213]. Для их решения разработаны многочисленные методы регуляризации [213, 124, 112, 113, 180], в число которых входят итерационные методы [14]. В данном разделе приведем несколько итерационных методов решения операторных и интегральных уравнений первого рода, которые используются в работе.

При решении интегральных уравнений с симметричными ядрами применяется следующий итерационный процесс [219].

Теорема 10.2. Пусть $K(t, \tau)$ – симметричное квадратично суммируемое положительно определенное ядро, и пусть уравнение

$$\int_a^b K(t, \tau)x(\tau)d\tau = f(t), \quad f(t) \in L_2[a, b], \quad (10.2)$$

разрешимо. Тогда последовательность $x_n(t)$, определяемая рекуррентным соотношением

$$x_{n+1}(t) = x_n(t) + \lambda(f(t) - \int_a^b K(t, \tau)x_n(\tau)d\tau),$$

где $x_0 \in L_2[a, b]$ – произвольный начальный элемент; $0 < \lambda < 2\lambda_1$, λ_1 – наименьшее характеристическое число ядра $K(t, \tau)$, сходится в метрике пространства $L_2[a, b]$ к решению уравнения (10.2).

Замечание. В главе V будут приведены различные обобщения теоремы 10.2.

В задачах грави- и магниторазведки приходится сталкиваться с интегральными уравнениями первого рода, которые описываются уравнениями вида (10.1) и у которых оператор A удовлетворяет условиям

$$\|A\| = 1, \quad \|A - I\| = 1, \quad (10.3)$$

где I – единичный оператор.

Классическим примером таких уравнений является [124] уравнение Пуассона:

$$\frac{h}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)d\tau}{(\tau - t)^2 + h^2} = f(t).$$

Для решения уравнения (10.1) при условиях (10.3) в работе [14] предлагается следующий итерационный метод:

$$x_{n+1} = (I - A)x_n + f, \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n x_m, \quad (10.4)$$

где x_0 – произвольный элемент пространства B . Показано, что если B – рефлексивное пространство, то итерационный процесс (10.4) всегда сходится к одному из решений уравнения (10.1), если последнее разрешимо.

В работе [14] показано, что метод (10.4) является регуляризирующим.

Итерационный метод (10.4) обладает, как показано в [14], еще одним достоинством – он сходится в равномерной метрике.

Итерационный метод (10.4) допускает следующее обобщение [14]. Вместо последовательности (10.4) можно взять последовательность

$$x_{n+1} = (I - \mu A)x_n + \mu f, \quad 0 < \mu \leq 1.$$

Замечание. Последовательность (10.4) построена по аналогии с суммированием расходящихся рядов по методу Фейера [140]. Из доказательства, приведенного в работе [14], следует, что и многие другие методы суммирования расходящихся рядов [123, 220], в частности методы Валле–Пуссена и Бернштейна – Рогозинского также могут быть использованы для решения уравнения (10.1).

Теорема 10.3 [145]. Пусть E – рефлексивное банахово пространство, и $\|K\| = 1$. Итерационный процесс $x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n)Kx_n$, $0 < \alpha_* \leq \alpha_n \leq \alpha^* < 1$, $n = 0, 1, \dots$, сходится к решению x^* уравнения $x = Kx$, если последнее разрешимо.

11. Метод Ньютона – Канторовича

Пусть X, Y – банаховы пространства.

Рассмотрим уравнение

$$Kx = 0, \quad (11.1)$$

где K – нелинейный оператор, действующий из X в Y .

Будем считать, что оператор K имеет в некоторой окрестности Ω начальной точки x_0 производную Фреше (или Гато), для которой существует обратный оператор $[K'(x)]^{-1}$.

Решение уравнения (11.1) будем искать в виде итерационных процессов

– основного:

$$x_{n+1} = x_n - [K'(x_n)]^{-1}K(x_n); \quad (11.2)$$

– модифицированного:

$$x_{n+1} = x_n - [K'(x_0)]^{-1}K(x_n). \quad (11.3)$$

Рассмотрим три случая: 1) оператор $K(x)$ имеет в области Ω производную Фреше второго порядка; 2) оператор $K(x)$ имеет в области Ω производную Фреше, удовлетворяющую условию Липшица; 3) оператор $K(x)$ имеет в области Ω производную Гато, не удовлетворяющую условию Гельдера.

Вначале рассмотрим первый случай.

Теорема 11.1 [117]. Пусть оператор $K(x)$ определен в Ω и имеет непрерывную вторую производную в Ω_0 . Пусть, кроме того:

- 1) существует непрерывный линейный оператор $\Gamma_0 = [K'(x_0)]^{-1}$;
- 2) $\|\Gamma_0 K(x_0)\| \leq \eta$;
- 3) $\|\Gamma_0 K''(x)\| \leq B_0 \quad (x \in \Omega_0)$.

Тогда, если $h = B_0 \eta \leq 1/2$ и $r \geq r_0 = (1 - \sqrt{1 - 2h})\eta/h$, то уравнение (11.1) имеет решение x^* , к которому сходится процесс Ньютона (основной и модифицированный). При этом $\|x^* - x_0\| \leq r_0$. Далее, если при $h < 1/2$ выполняется неравенство $r < r_1 = (1 + \sqrt{1 - 2h})\eta/h$, а при $h = 1/2$ выполняется неравенство $r \leq r_1$, то в шаре Ω_0 решение x^* единственно.

Быстрота сходимости основного процесса характеризуется неравенством

$$\|x^* - x_n\| \leq \frac{1}{2^n} (2h)^{2^n} \frac{\eta}{h} \quad (n = 0, 1, \dots),$$

а модифицированного процесса при $h < 1/2$ неравенством

$$\|x^* - x_n\| \leq \frac{\eta}{h} (1 - \sqrt{1 - 2h})^{n+1} \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Будем считать, что оператор $K(x)$ определен и дифференцируем по Фреше на шаре $S(x_0, R) = \{x : \|x - x_0\| < R\}$ и что его производная $K'(x)$ удовлетворяет на этом шаре условию Липшица $\|K'(x_1) - K'(x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|$. Пусть будут выполнены условия: $\|[K'(x_0)]^{-1}\| \leq b_0$, $\|[K'(x_0)]^{-1}K(x_0)\| \leq \eta_0$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 11.2 [120]. Пусть $h_0 = b_0 L \eta_0 < 1/2$, $r_0 = (1 - (1 - 2h_0)^{1/2})/h_0 \leq R$. Тогда последовательные приближения (11.3) сходятся к решению $x^* \in S(x_0, r_0)$ уравнения (11.1).

Лемма 11.1. Пусть нелинейный оператор K в некотором шаре $B(x_0, r)$ имеет производную Гато, а U – линейный оператор. Тогда для любых $x_1, x_2 \in B(x_0, r)$ выполняется неравенство

$$\left\| K(x_2) - K(x_1) - U(x_2 - x_1) \right\| \leq \left\| K'(x_1 + \tau(x_2 - x_1)) - U \right\| \cdot \|x_2 - x_1\|, \quad (11.4)$$

где $0 \leq \tau \leq 1$.

Доказательство. Известно [130], что если K имеет производную Гато, то

$$\left\| K(x_2) - K(x_1) \right\| \leq \left\| K'(x_1 + \tau(x_2 - x_1))(x_2 - x_1) \right\| \quad (0 \leq \tau \leq 1). \quad (11.5)$$

Рассмотрим оператор $P = K - U$. Подставляя P в предыдущую формулу и пользуясь линейностью оператора U и существованием производной Гато оператора K , получаем (11.4).

При доказательстве сходимости основного метода нам понадобится следующее утверждение, принадлежащее Л. С. Раковщину.

Лемма 11.2 [156]. Пусть X и Y – пространства Банаха, $A, B \in B[X, Y]$. Если A имеет ограниченный правый обратный оператор A_r^{-1} и если оператор $B \in B[X, Y]$ удовлетворяет условию $\|A - B\| \|A_r^{-1}\| < 1$, то он также имеет ограниченный правый обратный оператор B_r^{-1} и $\|B_r^{-1}\| \leq \|A_r^{-1}\| [1 - \|(A - B)A_r^{-1}\|]^{-1}$.

Доказательство. Лемма немедленно следует из соотношений

$$\begin{aligned} BA_r^{-1}[I + (B - A)A_r^{-1}]^{-1} &= [A + (B - A)]A_r^{-1}[I + (B - A)A_r^{-1}]^{-1} = \\ &= [I + (B - A)A_r^{-1}][I + (B - A)A_r^{-1}]^{-1} = I. \end{aligned}$$

Здесь

$$[I + (B - A)A_r^{-1}]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [(B - A)A_r^{-1}]^k.$$

Следовательно, $B_r^{-1} = A_r^{-1}[I + (B - A)A_r^{-1}]^{-1}$; имеет место приведенная в лемме оценка.

Докажем сходимость основного метода Ньютона – Канторовича.

Теорема 11.3 [21, 30]. Пусть X и Y – банаховы пространства и пусть выполнены условия:

- 1) $\|K(x_0)\| \equiv \eta_0$;
- 2) оператор K имеет производную Гато в окрестности точки x_0 , существует правый обратный оператор $[K'(x_0)]_r^{-1}$ с нормой

$$\left\| [K'(x_0)]_r^{-1} \right\| = B_0; \quad (11.6)$$

- 3) в сфере $S\{x : \|x - x_0\| \leq \frac{B_0\eta_0}{1-q}\}$ ($q < 1$) выполняется условие

$$\left\| K'(x_1) - K'(x_2) \right\| \leq q/(B_0(1 + q)).$$

В этом случае уравнение (11.1) имеет в S решение x^* , к которому сходятся приближения (11.2), и справедлива оценка $\|x^* - x_n\| \leq q^n \eta_0 B_0 / (1 - q)$.

Доказательство. Прежде всего покажем, что во всей области S существует равномерно ограниченный правый обратный оператор $[K'(x_n)]_r^{-1}$. В самом деле, из леммы Л. С. Раковщика следует, что

$$\left\| [K'(x_n)]_r^{-1} \right\| \leq (1+q)B_0. \quad (11.7)$$

Покажем теперь, что все приближения, получаемые по формуле (11.2), где под $[K'_n(x_n)]_r^{-1}$ понимается правый обратный оператор для $K'(x_n)$, удовлетворяющий неравенству (11.7), лежат в S . Действительно, $\|x_1 - x_0\| = \left\| [K'(x_0)]_r^{-1} K(x_0) \right\| \leq B_0\eta_0 \leq B_0\eta_0/(1-q)$, т.е. $x_1 \in S$.

Пусть уже доказано, что $x_m \in S$ для $m \leq n$. Так как $x_n - x_{n-1} = [K'(x_0)]_r^{-1} K(x_{n-1})$, то по лемме 11.1

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_n\| &\leq \left\| [K'(x_n)]_r^{-1} [K(x_n) - K(x_{n-1}) - K'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})] \right\| \leq \\ &\leq q\|x_n - x_{n-1}\|. \end{aligned} \quad (11.8)$$

Отсюда следует, что $\|x_{n+1} - x_0\| \leq \sum_{k=0}^n q^k B_0\eta_0$, т.е. $x_{n+1} \in S$.

Из (11.8) следует, что последовательность $\{x_n\}$ — фундаментальная и, следовательно, существует элемент $x^* = \lim x_n$. Так как $K(x_n) = -K'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$, то $K(x^*) = 0$. Из (11.8) следует, что

$$\|x^* - x_n\| \leq \sum_{k=n}^{\infty} q^k B_0\eta_0 \leq \frac{q^n B_0\eta_0}{1-q}.$$

Теорема доказана.

Замечание. Если решение x^* уравнения (11.1) входит в какую-нибудь область $S_* = S \cap \Delta R(x)$, где $\Delta R(x)$ — область значений оператора $[K'(x)]_r^{-1}$ ($x \in S$), удовлетворяющего неравенствам (11.6), (11.7), то оно единственно в этой области. В самом деле, пусть x^* и $\bar{x} \in S_*$ являются решениями уравнения (11.1). Тогда при $x \in S$

$$\|x^* - \bar{x}\| = \left\| [K'(x)]_r^{-1} [K(x^*) - K(\bar{x}) - K'(x)(x^* - \bar{x})] \right\| \leq q\|x^* - \bar{x}\| < \|x^* - \bar{x}\|.$$

Отсюда следует единственность решения в этой области.

Рассмотрим решение уравнения (11.1) модифицированным методом Ньютона — Канторовича.

Теорема 11.4 [21, 30]. Пусть X и Y — банаховы пространства, и пусть выполнены условия:

- 1) $\left\| K(x_0) \right\| \equiv \eta_0$;
- 2) оператор K имеет производную Гато в окрестности точки x_0 , существует правый обратный оператор $R(x_0) = [K'(x_0)]_r^{-1}$ с нормой $\left\| R(x_0) \right\| = B_0$;

3) в сфере $S\{x : \|x - x_0\| \leq \frac{B_0\eta_0}{1-q}\}$ ($q < 1$) выполняется условие $\|K'(x_1) - K'(x_2)\| \leq q/B_0$.

В этом случае уравнение (11.1) имеет в S решение x^* , к которому сходятся приближения (11.3), и справедлива оценка $\|x^* - x_n\| \leq q^n\eta_0B_0/(1-q)$. Решение x^* единственно в пересечении $S \cap \Delta R(x)$, $x \in S$.

Доказательство теоремы подобно доказательству теоремы 11.3.

ГЛАВА II

ОПТИМАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ

При обработке геофизических данных возникает задача синтеза потенциальных полей.

Напомним, следуя [103], определения потенциального, соленоидального и лапласова полей.

Пусть в некоторой области D локализованы источники и вихри поля, определяемые плотностями источников $q(\mathbf{r})$ и $\mathbf{j}(\mathbf{r})$, где \mathbf{r} — радиус-вектор точки в некоторой декартовой системе координат. Тогда векторное поле $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, создаваемое этими источниками, удовлетворяет уравнениям

$$\operatorname{div}\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q(\mathbf{r}), \quad \operatorname{rot}\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}(\mathbf{r}).$$

При этих условиях значение поля $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ определяются формулой

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi}\mathbf{grad}' \iiint_D \frac{q(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv + \frac{1}{4\pi}\mathbf{rot}' \iiint_D \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv,$$

в которой интегрирование ведется по переменной \mathbf{r} , а штрих у символов \mathbf{grad} и \mathbf{rot} означает, что дифференцирование осуществляется по переменной \mathbf{r}' .

Выражения

$$U(\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \iiint_D \frac{q(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv$$

и

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \iiint_D \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv$$

называются соответственно скалярным и векторным потенциалом поля $\mathbf{F}(\mathbf{r})$.

Определение 0.1 [103]. Поле \mathbf{F}_q , удовлетворяющее уравнениям $\operatorname{div}\mathbf{F}_q(\mathbf{r}) = q(\mathbf{r})$, $\operatorname{rot}\mathbf{F}_q(\mathbf{r}) = 0$, называется безвихревым или потенциальным во всем безграничном пространстве. Оно однозначно определяется заданием одного скалярного потенциала $U(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{F}_q(\mathbf{r}) = \mathbf{grad}'U(\mathbf{r}'). \quad (0.1)$$

Известно, что скалярный потенциал $U(\mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta U(\mathbf{r}) = q(\mathbf{r}),$$

а в области, где нет источников поля, — уравнению Лапласа:

$$\Delta U(\mathbf{r}) = 0.$$

Определение 0.2 [103]. Векторное поле \mathbf{F}_j называется вихревым или соленоидальным во всем безграничном пространстве, если оно удовлетворяет уравнениям $\operatorname{div}\mathbf{F}_j(\mathbf{r}) = 0$, $\operatorname{rot}\mathbf{F}_j(\mathbf{r}) = \mathbf{j}(\mathbf{r})$. Оно определяется векторным потенциалом $\mathbf{A}(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{F}_j(\mathbf{r}') = \operatorname{rot}'\mathbf{A}(\mathbf{r}'). \quad (0.2)$$

Замечание. Если в некоторой области Ω справедливо представление (0.1), то говорят, что поле $\mathbf{F}_q(\mathbf{r}')$ потенциально в области Ω . Аналогично, если в некоторой области Ω справедливо представление (0.2), то говорят, что поле $\mathbf{F}_j(\mathbf{r}')$ соленоидально в области Ω .

Определение 0.3 [103]. Векторное поле \mathbf{F} называется лапласовым векторным полем в области Ω , если оно одновременно потенциально и соленоидально в этой области.

Предположим, что известно разложение потенциального поля в ряд по сферическим функциям. Требуется построить алгоритм восстановления этого поля в некоторой области G с точностью ε .

Непосредственное применение частных сумм рядов Фурье к решению этой задачи нецелесообразно, так как требует вычислений соответствующей суммы для каждой точки области G , в которой необходимо восстановить поле. Если этих точек очень много, то решение задачи потребует значительного времени и машинных ресурсов.

В связи с этим возникает следующая

Задача. Дана область G , в которой определено потенциальное поле V . Требуется по данному ε ($\varepsilon > 0$) определить минимальное число узлов $m_k, k = 1, 2, \dots, N$, по значениям функции $V(m_k)$ в которых возможно восстановление поля V с точностью ε в любой точке области G . Кроме того, требуется определить узлы $m_k, k = 1, 2, \dots, N$, и построить алгоритм восстановления потенциального поля V .

1. Оценки роста модуля производных потенциальных полей

В данном разделе исследуется гладкость потенциальных полей, создаваемых различными телами. Результаты раздела написаны по материалам статей [35, 36, 49, 51].

1.1. Плоские поля

Ниже нам понадобятся определения двумерных операторов дифференцирования \mathbf{grad}_Γ , \mathbf{div}_Γ и \mathbf{rot}_Γ . Эти операторы определяются следующим образом [103, с. 32]. Рассмотрим на плоскости XOZ некоторый гладкий замкнутый контур L , охватывающий точку наблюдения (x, z) с радиусом-вектором ρ . Обозначим через $\Delta\Gamma$ область, ограниченную контуром L . Пусть далее \mathbf{l} — единичный вектор касательной к L (в положительном направлении обхода контура); \mathbf{v} — единичный вектор внешней нормали к L , лежащий в плоскости XOZ ; \mathbf{n} — единичный вектор нормали к плоскости XOZ , направленный по оси Y . Устремим теперь $\Delta\Gamma \rightarrow 0$ так, чтобы контур L непрерывным образом стягивался в точку (x, z) . Тогда двумерные операторы дифференцирования \mathbf{grad}_Γ , \mathbf{div}_Γ и \mathbf{rot}_Γ будут определяться следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathbf{grad}_\Gamma V(\rho) &= \lim_{\Delta\Gamma \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\Gamma} \int_L V \mathbf{v} dl, \\ \mathbf{div}_\Gamma \mathbf{F}(\rho) &= \lim_{\Delta\Gamma \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\Gamma} \int_L (\mathbf{F}, \mathbf{v}) dl, \\ \mathbf{rot}_\Gamma \mathbf{F}(\rho) &= \mathbf{n} \lim_{\Delta\Gamma \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\Gamma} \int_L (\mathbf{F}, \mathbf{l}) dl.\end{aligned}$$

Известно [103, с. 49], что гравитационное поле $\bar{V}(x, z)$ двумерного распределения масс, сосредоточенных с плотностью $\rho(x, z)$ в области G плоскости XOZ , удовлетворяет уравнениям

$$\mathbf{div} \mathbf{V} = -4\pi\gamma\rho, \quad \mathbf{rot} \mathbf{V} = \mathbf{0}, \quad (1.1)$$

где γ — универсальная постоянная.

Определим, следуя [103, с. 49], комплексную напряженность гравитационного поля следующей формулой: $\mathbf{V}(\zeta) = -V_x(x, z) + iV_z(x, z)$, где V_x и V_z — скалярные компоненты гравитационного поля \mathbf{V} .

Здесь и ниже используются обозначения $\zeta = x + iz$, $\bar{\zeta} = x - iz$, $\rho(\zeta) = \rho(x + iz) \equiv \rho(x, z)$.

Ниже используются следующие операторы дифференцирования:

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

В работе [103, с. 49] показано, что функция $V(\zeta)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{\partial V(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} = 2\pi\gamma\rho(\zeta). \quad (1.2)$$

Решение уравнения (1.2) дается формулой

$$V(\zeta_1) = -2\gamma \iint_G \frac{\rho(\zeta)}{\zeta - \zeta_1} ds, \quad (1.3)$$

где $\zeta_1 = x_1 + iz_1$, $ds = dx dz$ – дифференциальный элемент площади.

Помимо представления (1.3), чрезвычайно полезным при описании потенциальных полей является их представление в виде интеграла типа Коши. Ряд таких представлений был предложен в работах В. Н. Страхова [183], А. В. Цирульского [227, 228] и Г. Я. Голиздры [98].

В частности, в [183] было предложено представление

$$V(\zeta_1) = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2\pi\gamma[(\zeta, \bar{\zeta}) - (\zeta_1, \bar{\zeta}_1)]}{\zeta - \zeta_1} d\zeta, \quad (1.4)$$

где через $(\zeta, \bar{\zeta})$ обозначен неопределенный интеграл

$$(\zeta, \bar{\zeta}) = \int \tilde{\rho}(\zeta, \bar{\zeta}) d\zeta; \quad \tilde{\rho}(\zeta, \bar{\zeta}) = \rho((\zeta + \bar{\zeta})/2, (\zeta - \bar{\zeta})/2i);$$

L – граница области G .

Представление (1.4) справедливо в случае, когда функция плотности ρ является аналитической.

В случае, когда плотность $\rho(x, z)$ непрерывна, поле может быть представлено в виде интеграла [103]

$$V(\zeta_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2\pi\gamma[\sigma(\zeta_1) - \sigma(\zeta)]}{\zeta - \zeta_1} d\zeta, \quad (1.5)$$

где $\sigma(\zeta)$ является вспомогательной функцией, определяемой в области G^* , целиком включающей в себя область G с ее границей $\partial G = L$.

Функция $\sigma(\zeta)$ определяется в G^* уравнением

$$\frac{\partial\sigma(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}} = \rho(\zeta) \equiv \rho(x, z), \quad (1.6)$$

причем предполагается, что функция $\rho(\zeta)$ непрерывна в G^* .

Частное решение уравнения (1.6) имеет вид [103]

$$\sigma(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \iint_G \rho(\eta) \frac{ds}{\eta - \zeta}. \quad (1.7)$$

Представления (1.4) и (1.5) используются при оценке модулей производных потенциальных полей.

В дальнейшем предполагается, что контур L гладкий.

Теорема 1.1. Пусть функция $\rho(\zeta)$ имеет непрерывные производные до $(r - 1)$ порядка и ограниченную производную r -го порядка. Тогда справедлива оценка

$$\left| \frac{\partial^s V(\zeta)}{\partial \zeta^s} \right| \leq c 2^s s! \begin{cases} 1, & 0 \leq s \leq r; \\ (d(\zeta, L))^{-s+r}, & r < s, \end{cases} \quad (1.8)$$

где $d(\zeta, L)$ — расстояние от точки ζ до границы области L .

Замечание. При выполнении условий теоремы 1.1 функция $V(\zeta)$ принадлежит классу функций $B_{r,1}(G, M)$.

Доказательство. Покажем, что производные $\partial^j V(\zeta)/\partial \zeta^j$ ограничены по модулю константой A при всех значениях $j = 0, 1, \dots, r$.

Для доказательства воспользуемся представлением (1.5), в правой части которого фигурирует функция $\sigma(\zeta)$, определяемая уравнением (1.6). Пусть функция $\sigma(\zeta)$ является решением уравнения (1.6). Тогда дифференцируя равенство (1.6) r раз по переменной ζ , имеем

$$\frac{\partial^{r+1} \sigma(\zeta)}{\partial \zeta^r \partial \bar{\zeta}} = \frac{\partial^r \rho(\zeta)}{\partial \zeta^r}. \quad (1.9)$$

Из теоремы 1.18 монографии [80, с. 53] следует, что

$$\frac{\partial^{r+1} \sigma(\zeta)}{\partial \zeta^r \partial \bar{\zeta}} = \frac{\partial^{r+1} \sigma(\zeta)}{\partial \bar{\zeta} \partial \zeta^r}. \quad (1.10)$$

Поэтому уравнение (1.9) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial^r \sigma(\zeta)}{\partial \zeta^r} = \frac{\partial^r \rho(\zeta)}{\partial \zeta^r}. \quad (1.11)$$

Частным решением уравнения (1.11) является выражение

$$\frac{\partial^r \sigma(\zeta)}{\partial \zeta^r} = -\frac{1}{\pi} \iint_G \frac{\partial^r \rho(\eta)}{\partial \eta^r} \frac{ds}{\eta - \zeta}. \quad (1.12)$$

Из формулы (1.12) следует, что функции $\sigma(\zeta)$ и ее производные

$$\frac{\partial^j \sigma(\zeta)}{\partial \zeta^j}, j = 1, 2, \dots, r,$$

ограничены по модулю некоторой константой C .

Вычислим s -ю производную от функции $V(\zeta_1)$, определяемой формулой (1.5). Нетрудно видеть, что при $s \leq r$

$$\frac{\partial^s V(\zeta_1)}{\partial \zeta_1^s} = -\frac{1}{2\pi i} \int_L 2\pi\gamma \frac{\partial^s}{\partial \zeta_1^s} \left[\frac{\sigma(\zeta_1) - \sigma(\zeta)}{\zeta - \zeta_1} \right] d\zeta =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2\pi i} \int_L 2\pi\gamma \frac{\partial^s \sigma(\zeta_1)}{\partial \zeta_1^s} \frac{1}{\zeta - \zeta_1} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_L 2\pi\gamma C_s^1 \frac{\partial^{s-1} \sigma(\zeta_1)}{\partial \zeta_1^{s-1}} \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \frac{1}{\zeta - \zeta_1} d\zeta - \\
&\quad - \dots - (-1)^v \frac{1}{2\pi i} \int_L 2\pi\gamma C_s^v \frac{\partial^{s-v} \sigma(\zeta_1)}{\partial \zeta_1^{s-v}} \frac{\partial^v}{\partial \zeta_1^v} \frac{1}{\zeta - \zeta_1} d\zeta - \\
&\quad - \dots - \frac{1}{2\pi i} \int_L 2\pi\gamma [\sigma(\zeta_1) - \sigma(\zeta)] \frac{\partial^s}{\partial \zeta_1^s} \frac{1}{\zeta - \zeta_1} d\zeta. \tag{1.13}
\end{aligned}$$

Из выражения (1.12) следует, что при $s > r$

$$\frac{\partial^s \sigma(\zeta)}{\partial \zeta^s} = -\frac{(s-r)!}{\pi} \iint_G \frac{\partial^r \rho(\eta)}{\partial \eta^r} \frac{ds}{(\eta - \zeta)^{s-r+1}},$$

следовательно,

$$\left| \frac{\partial^s \sigma(\zeta)}{\partial \zeta^s} \right| \leq \frac{c(s-r)!}{(d(\zeta, L))^{s-r}},$$

где $d(\zeta, L)$ — расстояние от точки ζ до контура L . Из этого неравенства и выражения (1.13) имеем

$$\left| \frac{\partial^s V(\zeta_1)}{\partial \zeta_1^s} \right| \leq c2^s s! \begin{cases} 1, & 0 \leq s \leq r; \\ \frac{1}{(d(\zeta_1, L))^{s-r+1}}, & r < s < \infty. \end{cases}$$

Теорема доказана.

1.2. Трехмерные поля

В этом разделе оцениваются производные потенциала

$$V(x, y, z) = G \iiint_D \frac{\rho(\chi, \eta, \zeta)}{((x - \chi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2)^{1/2}} d\chi d\eta d\zeta, \tag{1.14}$$

где G — постоянная; (x, y, z) — точка вне тела D ; (χ, η, ζ) — точка, пробегающая область D .

Вначале рассмотрим случай, когда плотность $\rho(x, y, z)$ ограничена и интегрируема.

Теорема 1.2. Пусть плотность $\rho(x, y, z)$ ограничена и интегрируема. Тогда справедлива оценка

$$\left| \frac{\partial^s V(x, y, z)}{\partial x^{s_1} \partial y^{s_2} \partial z^{s_3}} \right| \leq c2^s s! \begin{cases} 1, & 0 \leq s \leq 1; \\ (d(m, \Gamma))^{-s+1}, & 1 < s, \end{cases} \tag{1.15}$$

где $d(m, \Gamma)$ – расстояние от точки $m = (x, y, z)$ до границы Γ тела D ; $s = s_1 + s_2 + s_3$, $0 \leq s_i \leq s$, $i = 1, 2, 3$.

Замечание. При выполнении условий теоремы 1.2 функция $V(x, y, z) \in B_{1,1}(\tilde{D}, M)$, $\tilde{D} = R_3 \setminus D$.

Доказательство. Первая оценка в (1.15) следует из теоремы (см. например [99, с. 100]) о первых производных ньютоновского потенциала.

Для получения второй оценки в выражении (1.15) вычислим частные производные s -го порядка от функции $V(x, y, z)$. Для определенности ограничимся вычислением производных по переменной x .

Внутри сферы $S(m_0, d)$, $S(m_0, d) \subset R_3 \setminus D$, введем локальную сферическую систему координат (r, θ, φ) , $x = r \cos \theta \cos \varphi$, $y = r \cos \theta \sin \varphi$, $z = r \sin \theta$, $0 \leq r \leq d$, с центром в точке m_0 . Пусть точка (x, y, z) с локальными сферическими координатами $x = r \cos \theta \cos \varphi$, $y = r \cos \theta \sin \varphi$, $z = r \sin \theta$, $0 \leq r \leq d$ лежит в сфере $S(m_0, d)$. Нетрудно видеть, что для оценки модуля производных

$$\frac{\partial^s V}{\partial x^{s_1} \partial y^{s_2} \partial z^{s_3}} = \frac{\partial^{s-1}}{\partial x^{s_1-l_1} \partial y^{s_2-l_2} \partial z^{s_3-l_3}} \frac{\partial V}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2} \partial z^{l_3}}$$

($l_1 + l_2 + l_3 = 1$, $0 \leq l_i \leq 1$, $i = 1, 2, 3$) достаточно оценить модуль производных

$$\frac{\partial^{s-1}}{\partial x^{s_1-l_1} \partial y^{s_2-l_2} \partial z^{s_3-l_3}}$$

от функции $\frac{\partial V}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2} \partial z^{l_3}}$.

Так как все эти производные оцениваются одинаково, остановимся на оценке производных вида

$$\frac{\partial^j V^*(r, \theta, \varphi)}{\partial r^j}, \quad 0 \leq j \leq s-1,$$

где $V^*(r, \theta, \varphi)$ – обозначение функции $\partial V(x, y, z)/\partial z$ в сферической системе координат. Такой выбор функции $V^*(r, \theta, \varphi)$, как нетрудно видеть, не влияет на общность рассуждений.

Пользуясь формулой Пуассона, значения функции $V^*(r, \theta, \varphi)$ во внутренней точке сферы $S(m_0, d)$ можно представить интегралом

$$V^*(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi d} \iint_{S(m_0, d)} V^*(d, \theta_1, \varphi_1) \frac{d^2 - r^2}{(d^2 - 2rd \cos \gamma + r^2)^{3/2}} d\sigma, \quad (1.16)$$

где γ – угол между векторами $\mathbf{m}_0 \mathbf{M}$ и $\mathbf{m}_0 \mathbf{N}$, $M = (r, \theta, \varphi)$, $N = (d, \theta_1, \varphi_1)$.

Возьмем производную порядка $(s - 1)$ от функции $V^*(r, \theta, \varphi)$ по переменной r . В результате имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{s-1} V^*(r, \theta, \varphi)}{\partial r^{s-1}} &= \frac{1}{4\pi d} \iint_{S(m_0, d)} V^*(d, \theta_1, \varphi_1) \frac{\partial^{s-1}}{\partial r^{s-1}} \frac{d^2 - r^2}{(d^2 - 2rd \cos \gamma + r^2)^{3/2}} d\sigma = \\ &= \frac{1}{4\pi d} \iint_{S(m_0, d)} \frac{V^*(d, \theta_1, \varphi_1)}{(d^2 - 2rd \cos \gamma + r^2)^{1/2}} L(s - 1, r, \gamma) d\sigma, \end{aligned} \quad (1.17)$$

где

$$L(j, r, \gamma) = (d^2 - 2rd \cos \gamma + r^2)^{1/2} \frac{\partial^j}{\partial r^j} \frac{d^2 - r^2}{(d^2 - 2rd \cos \gamma + r^2)^{3/2}}.$$

Нетрудно видеть, что при $0 < d$

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\partial^{s-1} V^*(r, \theta, \varphi)}{\partial r^{s-1}} \right| \leq \\ &\leq \left| \frac{1}{4\pi d} \iint_{S(m_0, d)} V^*(d, \theta_1, \varphi_1) \frac{d\sigma}{(d^2 - 2rd \cos \gamma + r^2)^{1/2}} \right| \max_{\gamma} |L(s - 1, r, \gamma)|. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left| \frac{\partial^{s-1} V^*(r, \Theta, \varphi)}{\partial r^{s-1}} \right|_{r=0} \leq c \max_{\gamma} |L(s - 1, 0, \gamma)|.$$

Для оценки $|L(s - 1, 0, \gamma)|$ оценим модули производных. Очевидно,

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\partial}{\partial r} \frac{d^2 - r^2}{(d^2 - 2rd \cos \gamma + r^2)^{3/2}} \right|_{r=0} = \\ &= \left| \frac{-2r}{(d^2 - 2rd \cos \gamma + r^2)^{3/2}} + \frac{3(d^2 - r^2)(2r - 2d \cos \gamma)}{2(d^2 - 2rd \cos \gamma + r^2)^{5/2}} \right|_{r=0} \leq \frac{c}{d^2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|L(1, r, \gamma)|_{r=0} \leq \frac{c}{d}. \quad (1.18)$$

Докажем по индукции, что

$$\left| \frac{\partial^j}{\partial r^j} \frac{d^2 - r^2}{(d^2 - 2rd \cos \gamma + r^2)^{3/2}} \right|_{r=0} \leq \frac{c}{d^{j+1}}. \quad (1.19)$$

Очевидно,

$$\frac{\partial^j}{\partial r^j} \frac{d^2 - r^2}{(d^2 - 2rd \cos \gamma + r^2)^{3/2}} = (d^2 - r^2) \frac{\partial^j}{\partial r^j} \left(\frac{1}{(d^2 - 2rd \cos \gamma + r^2)^{3/2}} \right) -$$

$$-2rj \frac{\partial^{j-1}}{\partial r^{j-1}} \left(\frac{1}{(d^2 - 2rd \cos \gamma + r^2)^{3/2}} \right) -$$

$$-\frac{j(j-1)}{2} \frac{\partial^{j-2}}{\partial r^{j-2}} \left(\frac{1}{(d^2 - 2rd \cos \gamma + r^2)^{3/2}} \right).$$

Покажем, что

$$\left| \frac{\partial^j}{\partial r^j} \frac{1}{(d^2 - 2rd \cos \gamma + r^2)^{3/2}} \right|_{r=0} \leq \frac{c}{d^{j+3}}. \quad (1.20)$$

Очевидно,

$$\left| \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{(d^2 - 2rd \cos \gamma + r^2)^{3/2}} \right|_{r=0} = \left| \frac{3(r - d \cos \gamma)}{(d^2 - 2rd \cos \gamma + r^2)^{5/2}} \right|_{r=0} \leq \frac{c}{d^4}.$$

Дальнейшее доказательство проведем по индукции. Пусть неравенство (1.20) справедливо при некотором $j = q$, причем каждое из слагаемых, входящих в выражение для производной порядка q по переменной r , при $r = 0$ не превосходит по модулю C/d^{q+3} . Произвольное слагаемое из выражения для производной q порядка по переменной r имеет вид

$$\frac{(r - d \cos \gamma)^i}{(d^2 - 2rd \cos \gamma + r^2)^{(2m+2i+3)/2}}, \quad (1.21)$$

где $0 \leq i \leq q$, $1 \leq m \leq q$, $q = 2m + i$.

Рассмотрим в отдельности случаи, когда $i = 0$ и $i \neq 0$. В первом случае $i = 0$, $q = 2m$:

$$\left| \frac{1}{(d^2 - 2rd \cos \gamma + r^2)^{(2m+3)/2}} \right|_{r=0} \leq c \frac{1}{d^{2m+3}} \leq c \frac{1}{d^{q+3}}. \quad (1.22)$$

Во втором случае:

$$\left| \frac{(r - d \cos \gamma)^i}{(d^2 - 2rd \cos \gamma + r^2)^{(2m+2i+3)/2}} \right|_{r=0} \leq c \frac{1}{d^{2m+i+3}} \leq c \frac{1}{d^{q+3}}. \quad (1.23)$$

Из оценок (1.18) – (1.23) следует, что

$$|L(j, r, \gamma)|_{r=0} \leq \frac{c}{d^j}. \quad (1.24)$$

Из оценок (1.17) – (1.24) следует справедливость теоремы.

Рассмотрим теперь случай, когда плотность $\rho(x, y, z)$ является дифференцируемой функцией.

Прежде всего напомним несколько определений, которые понадобятся далее.

Следуя [99], назовем поверхностями Ляпунова области, ограниченные конечным числом замкнутых поверхностей, удовлетворяющих трем условиям Ляпунова:

1) в каждой точке поверхности существует определенная касательная плоскость и, следовательно, определенная нормаль;

2) если θ есть угол между нормалью в точках m_1 и m_2 и если r есть расстояние между этими точками, то

$$\theta < Cr^\lambda \quad (0 < \lambda \leq 1), \quad (1.25)$$

где C и λ вполне определенные числа;

3) существует число d , одно и то же для всех точек поверхности и обладающее свойством: параллели к нормали в точке m поверхности пересекают не более чем в одной точке часть поверхности, находящуюся внутри сферы радиуса d и с центром в m .

Определение 1.1 [99]. Функция $f(x, y, z)$ принадлежит классу $H(s, C, \alpha)$ ($0 < \alpha \leq 1$) в области D , если она в этой области ограничена и имеет ограниченные непрерывные производные порядка s , удовлетворяющие условию Гельдера с показателем α и константой A , т.е.

$$\left| \frac{\partial^r f}{\partial x^{r_1} \partial y^{r_2} \partial z^{r_3}} \right| \leq C, \quad (1.26)$$

где $r_1 + r_2 + r_3 = r$, $r = 0, 1, \dots, s$, и для любой пары точек $m_1 \in D$ и $m_2 \in D$, расстояние r_{12} между которыми меньше некоторого числа $r_0 \leq 1$, справедливо неравенство

$$\left| \frac{\partial^s f}{\partial x^{s_1} \partial y^{s_2} \partial z^{s_3}} \Big|_{m_1} - \frac{\partial^s f}{\partial x^{s_1} \partial y^{s_2} \partial z^{s_3}} \Big|_{m_2} \right| < Cr_{12}^\alpha. \quad (1.27)$$

Пусть S — поверхность Ляпунова, n — внешняя нормаль к ней. Произвольную точку m_0 на S примем за начало местной декартовой системы координат (χ, η, ζ) , направив ось ζ по нормали n_0 в точке m_0 и зафиксировав как-нибудь оси χ, η в касательной плоскости. В достаточно малой окрестности точки m_0 уравнение поверхности S в местной системе координат (χ, η, ζ) имеет вид

$$\zeta = F(\chi, \eta). \quad (1.28)$$

Определение 1.2 [99]. Поверхность S принадлежит классу функций $L_k(B, \alpha)$, если $F(\chi, \eta) \in H(k, B, \alpha)$ и константы B и α не зависят от выбора точки m_0 .

При исследовании гладкости лапласовых полей нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 1.1 [99]. Пусть x, y, z — фиксированная система декартовых координат. Если поверхность S принадлежит классу $L_k(B, \lambda)$, то $\cos(\mathbf{N}, \mathbf{0x}) \in H(k-1, C, \lambda)$, где число C зависит только от B и λ .

Нам также понадобится следующее утверждение.

Теорема 1.3 [99, с. 127]. Пусть поверхность S принадлежит классу $L_k(B, \alpha)$, $\rho \in H(s, A, \alpha)$, где $0 \leq s \leq k$. Тогда $V(x, y, z) \in H(s+2, C, \alpha_1)$, где α_1 произвольно ($0 < \alpha_1 < \alpha$), а C зависит от B и выбора α_1 .

Пользуясь этой теоремой, получаем следующую оценку.

Теорема 1.4. Пусть поверхность S принадлежит классу $L_k(B, \alpha)$, $\rho \in H(l, C, \alpha)$, где $0 \leq l \leq k$. Справедлива оценка

$$\left| \frac{\partial^s V(x, y, z)}{\partial x^{s_1} \partial y^{s_2} \partial z^{s_3}} \right| \leq c 2^s s! \begin{cases} 1, & 0 \leq s \leq l+2; \\ d(m, D)^{-s+l+2}, & l+2 < s < \infty, \end{cases} \quad (1.29)$$

где $d(m, D)$ — расстояние от точки $m = (x, y, z)$ до области D , $s = s_1 + s_2 + s_3$, $0 \leq s_i \leq s$, $i = 1, 2, 3$.

Замечание. При выполнении условий теоремы 1.4 функция $V(x, y, z) \in B_{l+2,1}(\tilde{D}, M)$, $\tilde{D} = R_3 \setminus D$.

Доказательство. Ограниченность производных до $l+2$ порядка следует из теоремы 1.3. Докажем справедливость оценки (1.29) для производных порядка s , где $s > l+2$. При доказательстве для определенности ограничимся оценкой частной производной $\partial^s V(x, y, z) / \partial x^s$. Остальные частные производные оцениваются аналогично. Так как вне области D функция $V(x, y, z)$ и ее частные производные по x, y, z являются функциями гармоническими, то максимальные значения модулей этих производных достигаются на поверхности ∂D области D . Оценим модуль производной $\partial^s V(x, y, z) / \partial x^s$ в точке $m_0 = (x_0, y_0, z_0) \in R_3 \setminus D$. Остальные производные оцениваются аналогично. Пусть $d = d(m_0, D)$ — расстояние от точки m_0 до области D . Построим сферу $S = S(m_0, d)$ с центром в точке m_0 и с радиусом d .

Внутри сферы $S(m_0, d)$ введем локальную сферическую систему координат (r, θ, φ) , $x = r \cos \theta \cos \varphi$, $y = r \cos \theta \sin \varphi$, $z = r \sin \theta$, $0 \leq r \leq d$, с центром в точке m_0 . Пусть точка (x, y, z) с локальными сферическими координатами $x = r \cos \theta \cos \varphi$, $y = r \cos \theta \sin \varphi$, $z = r \sin \theta$, $0 \leq r \leq d$ лежит в сфере $S(m_0, d)$. В новых координатах функцию $\partial V^{l+2}(x, y, z) / \partial x^{l+2}$ обозначим через $V^*(r, \theta, \varphi)$. Нетрудно видеть, что для оценки модуля производной

$$\frac{\partial^s V}{\partial x^s} = \frac{\partial^{s-l-2}}{\partial x^{s-l-2}} \frac{\partial^{l+2} V}{\partial x^{l+2}}$$

достаточно оценить модули производных

$$\frac{\partial^j V^*(r, \theta, \varphi)}{\partial r^{j_1} \partial \theta^{j_2} \partial \varphi^{j_3}}, \quad j = j_1 + j_2 + j_3, 0 \leq j_i \leq s - l - 2, i = 1, 2, 3, 0 \leq j \leq s - l - 2.$$

Так как все эти производные оцениваются одинаково, остановимся на оценке производных вида

$$\frac{\partial^j V^*(r, \theta, \varphi)}{\partial r^j}, \quad 0 \leq j \leq s - l - 2.$$

Пользуясь формулой Пуассона, значения функции $V^*(r, \theta, \varphi)$ во внутренней точке сферы $S(m_0, d)$ можно представить интегралом

$$V^*(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi d} \iint_{S(m_0, d)} V^*(d, \theta_1, \varphi_1) \frac{d^2 - r^2}{(d^2 - 2rd \cos \gamma + r^2)^{3/2}} d\sigma. \quad (1.30)$$

Возьмем производную порядка $(s - l - 2)$ от функции $V^*(r, \theta, \varphi)$ по переменной r . В результате имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{s-l-2} V^*(r, \theta, \varphi)}{\partial r^{s-l-2}} &= \frac{1}{4\pi d} \iint_{S(m_0, d)} V^*(r_1, \theta_1, \varphi_1) \Big|_{r_1=d} \frac{\partial^{s-l-2}}{\partial r^{s-l-2}} \times \\ &\quad \times \frac{d^2 - r^2}{(d^2 - 2rd \cos \gamma + r^2)^{3/2}} d\sigma = \\ &= \frac{1}{4\pi d} \iint_{S(m_0, d)} V^*(r_1, \theta_1, \varphi_1) \Big|_{r_1=d} \frac{L(s-l-2, r, \gamma)}{(d^2 - 2rd \cos \gamma + r^2)^{1/2}} d\sigma, \end{aligned} \quad (1.31)$$

где

$$L(j, r, \gamma) = (d^2 - 2rd \cos \gamma + r^2)^{1/2} \frac{\partial^j}{\partial r^j} \frac{d^2 - r^2}{(d^2 - 2rd \cos \gamma + r^2)^{3/2}}.$$

Нетрудно видеть, что при $0 \leq r < d$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^{s-l-2} V^*(r, \theta, \varphi)}{\partial r^{s-l-2}} \right| &\leq \left| \frac{1}{4\pi d} \iint_{S(m_0, d)} V^*(d, \theta_1, \varphi_1) \times \right. \\ &\quad \times \frac{1}{(d^2 - 2rd \cos \gamma + r^2)^{1/2}} L(s-l-2, r, \gamma) d\sigma \left. \right| \leq \left| \frac{1}{4\pi d} \iint_{S(m_0, d)} |V^*(d, \theta_1, \varphi_1)| \times \right. \end{aligned}$$

$$\times \frac{d\sigma}{(d^2 - 2rd \cos \gamma + r^2)^{1/2}} \Big|_{\gamma} \max |L(s - l - 2, r, \gamma)|.$$

Следовательно,

$$\left| \frac{\partial^{s-l-2} V^*(r, \Theta, \varphi)}{\partial r^{s-l-2}} \right|_{r=0} \leq C \max_{\gamma} |L(s - l - 2, 0, \gamma)|.$$

Для оценки $|L(s - l - 2, r, \gamma)|$ последовательно оценим модули производных. Очевидно,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial}{\partial r} \frac{d^2 - r^2}{(d^2 - 2rd \cos \gamma + r^2)^{3/2}} \right|_{r=0} = \\ & = \left| \frac{-2r}{(d^2 - 2rd \cos \gamma + r^2)^{3/2}} + \frac{3(d^2 - r^2)(2r - 2d \cos \gamma)}{2(d^2 - 2rd \cos \gamma + r^2)^{5/2}} \right|_{r=0} \leq \frac{C}{d^2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|L(1, r, \gamma)|_{r=0} \leq \frac{c}{d}. \quad (1.32)$$

Докажем по индукции, что

$$\left| \frac{\partial^j}{\partial r^j} \frac{d^2 - r^2}{(d^2 - 2rd \cos \gamma + r^2)^{3/2}} \right| \leq \frac{c}{d^{j+1}}. \quad (1.33)$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^j}{\partial r^j} \frac{d^2 - r^2}{(d^2 - 2rd \cos \gamma + r^2)^{3/2}} &= (d^2 - r^2) \frac{\partial^j}{\partial r^j} \left(\frac{1}{(d^2 - 2rd \cos \gamma + r^2)^{3/2}} \right) - \\ & - 2rj \frac{\partial^{j-1}}{\partial r^{j-1}} \left(\frac{1}{(d^2 - 2rd \cos \gamma + r^2)^{3/2}} \right) - \\ & - 2 \frac{j(j-1)}{2} \frac{\partial^{j-2}}{\partial r^{j-2}} \left(\frac{1}{(d^2 - 2rd \cos \gamma + r^2)^{3/2}} \right). \end{aligned}$$

Повторяя рассуждения, проведенные в предыдущем пункте, имеем

$$|L(j, 0, \gamma)| \leq \frac{c 2^j j!}{d^j}.$$

Из оценок (1.30) – (1.33) следует справедливость теоремы.

1.3. Гладкость лапласовых полей

В этом разделе результаты, полученные в предыдущем разделе, обобщаются на случай лапласовых полей.

Известно [103], что лапласовы поля, определенные в области D , ограниченной поверхностью S , описываются многомерными интегралами типа Коши

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}') = & -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r})) \mathbf{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \right. \\ & \left. + [\mathbf{n} \times \mathbf{F}(\mathbf{r})] \times \mathbf{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right\} ds, \end{aligned} \quad (1.34)$$

здесь $\mathbf{F} = \mathbf{grad}U = \{f_1, f_2, f_3\}$; U — потенциальное поле; S — поверхность Ляпунова, ограничивающая область D ; $\mathbf{n} = \{n_1, n_2, n_3\}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности S ; $\mathbf{r} = (x, y, z)$ — радиус-вектор точки, пробегающей поверхность S ; $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ — радиус-вектор точки, лежащей внутри области D ; $\mathbf{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \{g_1, g_2, g_3\}$ — вектор-функция градиента.

Из формулы (1.34) следует, что для исследования гладкости оператор-функции $\mathbf{F}(\mathbf{r}')$ достаточно ограничиться рассмотрением интеграла

$$\psi(x_1, y_1, z_1) = \iint_S \frac{\varphi(x, y, z)(x - x_1)}{((x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2)^{3/2}} ds. \quad (1.35)$$

Можно показать (см. лемму 1.1), что гладкость функции $\varphi(x, y, z)$ определяется гладкостью функции $\mathbf{F}(\mathbf{r}')$ и гладкостью поверхности S .

Не останавливаясь на исследовании этого вопроса, априори положим, что функция $\varphi(x, y, z)$ принадлежит ряду конкретных классов функций.

Предположим вначале, что функция $\varphi(x, y, z)$ — кусочно-постоянная.

Оценим производные функции $\psi(x_1, y_1, z_1)$.

Очевидно,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^v \psi(x_1, y_1, z_1)}{\partial x_1^v} = \\ & = \iint_S \varphi(x, y, z) \frac{\partial^v}{\partial x^v} \left(\frac{x - x_1}{((x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2)^{3/2}} \right) ds. \end{aligned} \quad (1.36)$$

В работах [49, 51] показано, что

$$\left| \frac{\partial^v \psi(x_1, y_1, z_1)}{\partial x_1^v} \right| \leq \frac{Cv(2v+1)!!}{d((x_1, y_1, z_1), \Gamma)^v} (1 + |\ln(d((x_1, y_1, z_1), \Gamma))|), \quad v = 0, 1, \dots$$

и что аналогичные неравенства справедливы и для остальных частных производных порядка v от функции $\psi(x, y, z)$. Таким образом, получено следующее утверждение.

Теорема 1.5. Пусть D — выпуклая, замкнутая, односвязная область, ограниченная гладкой поверхностью S . Пусть функция $\varphi(x, y, z)$ кусочно-постоянная. Тогда компоненты вектор-функций $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ принадлежат классу функций $B_{0,0}^1(C, S)$.

При построении оптимальных методов аппроксимации лапласовых полей используется следующее утверждение А. М. Ляпунова о производных потенциала простого слоя [99, с. 86].

Теорема 1.6. Если плотность μ потенциала простого слоя

$$V(x, y, z) = \int_S \mu(x_0, y_0, z_0) \frac{d\sigma}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{1/2}}$$

удовлетворяет условию Гельдера на S , то производные

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int_S \mu(x_0, y_0, z_0) \frac{x_0 - x}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}} d\sigma,$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \int_S \mu(x_0, y_0, z_0) \frac{y_0 - y}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}} d\sigma,$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \int_S \mu(x_0, y_0, z_0) \frac{z_0 - z}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}} d\sigma,$$

рассматриваемые как функции точки $m(x, y, z)$, удовлетворяют условию Гельдера внутри D_i и внутри D_e .

Замечание. Здесь через D_i обозначена область, ограниченная поверхностью Ляпунова S . Через D_e обозначена область, внешняя к поверхности S .

Используя эту теорему, в работах [49, 51] получено следующее утверждение.

Теорема 1.7. Пусть D — выпуклая, замкнутая, односвязная область, ограниченная гладкой поверхностью S , $\Omega_1 = (-\infty, \infty)^3 \setminus D$. Пусть функция $\varphi(x, y, z)$ принадлежит классу Гельдера $H_\alpha(M)$, $M = \text{const}$. Тогда компоненты вектор-функций $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ принадлежат классам функций $\bar{B}_{0,\alpha,0}^1(M_1, D)$, $\bar{B}_{0,\alpha,0}^1(M_1, \Omega_1)$, $\Omega_1 = (-\infty, \infty)^3 \setminus D$, $M_1 = \text{const}$.

2. Оптимальные методы аппроксимации классов функций $Q_{r,\gamma}$ и $B_{r,\gamma}$

В данном разделе построены оптимальные алгоритмы аппроксимации функций, принадлежащих классам функций $Q_{r,\gamma}(\Omega, 1)$, $Q_{r,\gamma}^u(\Omega, 1)$, $\bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, 1)$, $B_{r,\gamma}(\Omega, 1)$, $B_{r,\gamma}^u(\Omega, 1)$, $\bar{B}_{r,\gamma}^u(\Omega, 1)$, $\Omega = [-1, 1]^l$, $l = 2, 3, \dots$. В предыдущем разделе было показано, что потенциальные поля, создаваемые тяготеющими массами, принадлежат классам функций $B_{r,\gamma}(\tilde{\Omega}, c)$, $B_{r,\gamma}^u(\tilde{\Omega}, c)$, $\bar{B}_{r,\gamma}^u(\tilde{\Omega}, c)$, $c = \text{const}$. В данном разделе рассматривается область $\Omega = [-1, 1]^l$, $l = 2, 3, \dots$, так как в этой области описание алгоритмов более прозрачно. В следующих разделах будут описаны алгоритмы аппроксимации функций, принадлежащих классам функций $B_{r,\gamma}(\tilde{\Omega}, c)$, $B_{r,\gamma}^u(\tilde{\Omega}, c)$, $\bar{B}_{r,\gamma}^u(\tilde{\Omega}, c)$.

Раздел написан по результатам работ [28, 29, 32].

2.1. Оптимальные алгоритмы на классе $Q_{r,\gamma}(\Omega, 1)$

Теорема 2.1. Пусть $\Omega = [-1, 1]^l$, $l \geq 2$. Справедливы оценки

$$\begin{aligned} d_n(Q_{r,\gamma}(\Omega, 1), C) &\asymp \delta_n(Q_{r,\gamma}(\Omega, 1)) \asymp \\ &\asymp \begin{cases} n^{-(s-\gamma)/(l-1)}, & v > l/(l-1), \\ n^{-s/l}(\ln n)^{s/l}, & v = l/(l-1), \\ n^{-s/l}, & v < l/(l-1), \end{cases} \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $v = s/(s - \gamma)$.

Доказательство. Вначале оценим снизу величину $\delta_n(Q_{r,\gamma}(\Omega, 1))$. Обозначим через Δ_k множество точек $x = (x_1, \dots, x_l) \in \Omega$, расстояние $d(x, \Gamma)$ от которых до границы Γ области Ω удовлетворяет неравенствам $(k/N)^v \leq d(x, \Gamma) \leq ((k+1)/N)^v$, где $v = s/(s - \gamma)$. Расстояние $d(t, \Gamma)$ описано в определении 2.12 в разд. 2 главы I.

Обозначим через Δ^k множество точек

$$\Delta^k = \left\{ t \in \Omega : \left(\frac{k}{N} \right)^v \leq d(t, \Gamma) \leq \left(\frac{k+1}{N} \right)^v, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \right\},$$

$$h_k = ((k+1)/N)^v - (k/N)^v, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Покроем множества Δ^k кубами и параллелепипедами $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, ребра которых параллельны координатным осям и длины которых не меньше, чем h_k , и не больше, чем $2h_k$, $h_k = ((k+1)/N)^v - (k/N)^v$, $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Отметим, что при построении покрытия область Δ^k покрывается наибольшим возможным числом кубов с ребрами, имеющими длину h_k .

Оценим число кубов и параллелепипедов $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, которыми покрывается область Ω .

Общее число кубов, которые можно разместить в области Ω , оценивается неравенствами

$$1+m \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{2(N^v - (k+1)^v)}{(k+1)^v - k^v} \right]^{l-1} \leq n \leq 1+m \sum_{k=0}^{N-1} \left(\left[\frac{2(N^v - k^v)}{(k+1)^v - k^v} \right] + 1 \right)^{l-1},$$

где m — число граней куба Ω ; $[\alpha]$ — целая часть числа α .

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} (N^v k^{1-v} - k)^{l-1} &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{l-1} (-1)^j C_{l-1}^j (N^v k^{1-v})^{l-1-j} k^j = \\ &= c \begin{cases} N^{v(l-1)}, & v > l/(l-1); \\ N^l, & v < l/(l-1); \\ N^l \ln N, & v = l/(l-1). \end{cases} \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$n \asymp \begin{cases} N^{v(l-1)}, & v > l/(l-1); \\ N^l, & v < l/(l-1); \\ N^l \ln N, & v = l/(l-1). \end{cases} \quad (2.2)$$

Пусть $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k = [b_{i_1}^k, b_{i_1+1}^k; \dots; b_{i_l}^k, b_{i_l+1}^k]$.

Введем функцию

$$\begin{aligned} \psi_{i_1, \dots, i_l}^k(x_1, \dots, x_l) &= \\ &= \begin{cases} A \frac{((x_1 - b_{i_1}^k)(b_{i_1+1}^k - x_1) \dots (x_l - b_{i_l}^k)(b_{i_l+1}^k - x_l))^s}{h_k^{s(2l-1)} ((k+1)/N)^{v\gamma}}, & x \in \Delta_{i_1, \dots, i_l}^k; \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Delta_{i_1, \dots, i_l}^k. \end{cases} \end{aligned}$$

Константа A подбирается из требования, чтобы $\psi_{i_1, \dots, i_l}^k(x_1, \dots, x_l) \in Q_{r, \gamma}(\Omega, M)$. Можно показать, что такая константа существует и что она не зависит от индексов k, i_1, \dots, i_l .

Максимальное значение функции $\psi_{i_1, \dots, i_l}^k(x_1, \dots, x_l)$ в каждом кубе $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$ равно cN^{-s} .

Построим множество функций

$$\xi_{k, i_1, \dots, i_l}(x_1, \dots, x_l) = \sum_{k, i_1, \dots, i_l} c_{k, i_1, \dots, i_l} \psi_{k, i_1, \dots, i_l}^k(x_1, \dots, x_l),$$

где c_{k, i_1, \dots, i_l} — вещественные числа, $|c_{k, i_1, \dots, i_l}| \leq 1$.

В предыдущей формуле суммирование проводится по всем областям $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$.

Семейство функций $\xi_{k, i_1, \dots, i_l}(x_1, \dots, x_l)$ образует n -параллелепипед, где n — число областей $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$, осуществляющих покрытие Ω . Отметим, что $\xi_{k, i_1, \dots, i_l}(x_1, \dots, x_l) \in Q_{r, \gamma}(\Omega, 1)$.

Семейство функций $\xi_{k, i_1, \dots, i_l}(x_1, \dots, x_l)$ изоморфно n -мерному вектору $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Повторяя рассуждения, проведенные в [32], и учитывая соотношение (2.2), можно показать, что

$$\delta_{n-1}(Q_{r, \gamma}(\Omega, 1)) \geq c \begin{cases} n^{-(s-\gamma)/(l-1)}, & v > l/(l-1); \\ n^{-s/l}(\ln n)^{s/l}, & v = l/(l-1); \\ n^{-s/l}, & v < l/(l-1). \end{cases} \quad (2.3)$$

Приступим к оценке поперечника Колмогорова. Вначале построим кусочно-непрерывный локальный сплайн, имеющий погрешность, указанную в формулировке теоремы. Затем укажем изменения, которые необходимы для построения непрерывного локального сплайна с такой же погрешностью.

Построим локальный сплайн, аппроксимирующий функции, принадлежащие $Q_{r, \gamma}(\Omega, 1)$. Пусть $f(x) \in C[a, b]$. Обозначим через ζ_k ($k = 1, 2, \dots, r$) нули полинома Чебышева первого рода степени r , наименее уклоняющегося от нуля на сегменте $[-1, 1]$. Аффинно отобразим сегмент $[\zeta_1, \zeta_r]$ на сегмент $[a, b]$. При этом точка ζ_1 отобразится в точку a , а точка ζ_r — в точку b . Обозначим через $\zeta'_1, \dots, \zeta'_r$ образы точек ζ_1, \dots, ζ_r при указанном отображении. Через $P_r(f, [a, b])$ обозначим полином, интерполирующий функцию $f(x)$ по узлам $\zeta'_1, \dots, \zeta'_r$. Для аппроксимации функции $f(x_1, \dots, x_l)$ l переменных, определенной в области $[a_1, b_1; \dots; a_l, b_l]$, введем интерполяционный полином $P_{s, \dots, s}(f; [a_1, b_1; \dots; a_l, b_l])$ формулой

$$P_{s, \dots, s}(f; [a_1, b_1; \dots; a_l, b_l]) = P_s^{x_1}(P_s^{x_2}(\dots P_s^{x_l}(f; [a_l, b_l]); \dots; [a_1, b_1])).$$

Это полином степени $(s-1)$ по каждой переменной x_1, \dots, x_l . Таким образом, $P_s^{x_l}(f; [a_l, b_l])$ интерполирует функцию $f(x_1, \dots, x_l)$ по переменной x_l в сегменте $[a_l, b_l]$; $P_s^{x_{l-1}}(P_s^{x_l}(f; [a_l, b_l]), [a_{l-1}, b_{l-1}])$ интерполирует функцию $P_s^{x_l}(f; [a_l, b_l])$ по переменной x_{l-1} в сегменте $[a_{l-1}, b_{l-1}]$ и т.д.

Замечание. Вместо интерполяции по узлам Чебышева можно проводить интерполяцию по равноотстоящим узлам. Выше были выбраны узлы Чебышева, так как у них наименьшая по порядку константа Лебега. Это несущественно при построении алгоритмов аппроксимации функций из классов $Q_{r, \gamma}$, однако становится существенным при аппроксимации функций из классов $B_{r, \gamma}$.

Полином $P_{s,\dots,s}(f, \Delta_{i_1,\dots,i_l}^k)$ интерполирует функцию $f(x_1, \dots, x_l)$ в области Δ_{i_1,\dots,i_l}^k . Локальный сплайн $f_N(x_1, \dots, x_l)$ составлен из полиномов $P_{s,\dots,s}(f, \Delta_{i_1,\dots,i_l}^k)$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$.

Оценим точность аппроксимации функции $f(x_1, \dots, x_l)$ сплайном $f_N(x_1, \dots, x_l)$.

Рассмотрим в отдельности случаи, когда γ — целое число, и когда γ — нецелое число.

Вначале рассмотрим случай, когда γ — целое число.

Очевидно,

$$\|f(x_1, \dots, x_l) - P_{s,\dots,s}(f, \Delta_{i_1,\dots,i_l}^0)\|_{C(\Delta_{i_1,\dots,i_l}^0)} \leq ch_0^r = c \frac{1}{N^{vr}} = c \frac{1}{N^s};$$

$$\begin{aligned} \|f(x_1, \dots, x_l) - P_{s,\dots,s}(f, \Delta_{i_1,\dots,i_l}^k)\|_{C(\Delta_{i_1,\dots,i_l}^k)} &\leq c \left(\frac{N}{k}\right)^{v\gamma} h_k^s = \\ &= c \left(\frac{N}{k}\right)^{v\gamma} \left(\frac{(k+1)^v - k^v}{N^v}\right)^s = c \frac{(k+\Theta)^{(v-1)s}}{k^{v\gamma}} \frac{1}{N^s}, \end{aligned}$$

$k = 1, 2, \dots, N - 1$.

Таким образом, при γ целом имеем

$$\|f(x_1, \dots, x_l) - f_N(x_1, \dots, x_l)\|_{C(\Omega)} \leq \frac{c}{N^s}.$$

Рассмотрим случай, когда γ — нецелое число.

Повторяя рассуждения, приведенные при $k = 1, 2, \dots, N - 1$ в случае, когда γ — целое число, легко получить оценку

$$\|f(x_1, \dots, x_l) - P_{s,\dots,s}(f, \Delta_{i_1,\dots,i_l}^k)\|_{C(\Delta_{i_1,\dots,i_l}^k)} \leq \frac{c}{N^s}.$$

Пусть $k = 0$. В этом случае справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|f(x_1, \dots, x_l) - P_{s,\dots,s}(f, \Delta_{i_1,\dots,i_l}^0)\|_{C(\Delta_{i_1,\dots,i_l}^0)} &\leq \\ &\leq E_{s-1,\dots,s-1}(f, \Delta_{i_1,\dots,i_l}^0) \lambda_s^l \leq E_{r,\dots,r}(f, \Delta_{i_1,\dots,i_l}^0) \lambda_s^l, \end{aligned}$$

где $E_{s,\dots,s}(f, \Delta_{i_1,\dots,i_l}^0)$ — наилучшее приближение функции $f(x_1, \dots, x_l)$ полиномами степени не выше s по каждой переменной x_i , $i = 1, 2, \dots, l$, в области Δ_{i_1,\dots,i_l}^0 ; λ_s — константа Лебега при интерполировании по узлам $\zeta'_1, \dots, \zeta'_s$.

Для оценки $E_{r,\dots,r}(f, \Delta_{i_1,\dots,i_l}^0)$ воспользуемся формулой Тейлора с остаточным членом в интегральной форме, приведенной в разд. 2 главы I.

Так как t, t_0 лежат в области Δ_{i_1,\dots,i_l}^0 , которая имеет непустое пересечение с границей $\Gamma = \partial\Omega$, то легко видеть, что $d(t^0 + \tau(t - t^0), \Gamma) \leq h_0$,

и $|f^{(r+1)}(t^0 + \tau(t - t^0))| \leq d(t^0 + \tau(t - t^0), \Gamma)^{-(1-\zeta)}$. Отсюда немедленно следует, что

$$\begin{aligned} E_{r-1, \dots, r-1}(f, \Delta_{i_1, \dots, i_l}^0) &\leq ch_0^{r+\zeta} \int_0^1 (1-\tau)^{r-1} \tau^{-(1-\zeta)} d\tau \leq \\ &\leq ch_0^{r+\zeta} \leq c \left(\frac{1}{N}\right)^{v(r+\zeta)} = c \left(\frac{1}{N}\right)^s. \end{aligned}$$

Известно [140], что для узлов ζ_1, \dots, ζ_s , а также для узлов, полученных их аффинными преобразованиями, $\lambda_s \leq c \ln s$.

Таким образом, и в случае нецелых γ

$$\|f(x_1, \dots, x_l) - f_N(x_1, \dots, x_l)\|_{C(\Omega)} \leq \frac{c}{N^s}.$$

Следовательно, в обоих случаях

$$\begin{aligned} \|f(x_1, \dots, x_l) - f_N(x_1, \dots, x_l)\|_{C(\Omega)} &\leq \frac{c}{N^s} \leq \\ &\leq c \begin{cases} n^{-(s-\gamma)/(l-1)}, & v > l/(l-1); \\ n^{-s/l} (\ln n)^{s/l}, & v = l/(l-1); \\ n^{-s/l}, & v < l/(l-1), \end{cases} \end{aligned} \quad (2.4)$$

здесь n — число узлов локального сплайна $f_N(x_1, \dots, x_l)$, используемых при его построении.

Опишем изменения, которые нужно внести в описанную выше конструкцию для построения непрерывного локального сплайна, имеющего погрешность, представленную правой частью неравенства (2.3). Пусть, как и выше, область Ω покрыта более мелкими областями Δ^k и $h_k = ((k+1)/N)^v - (k/N)^v$, $k = 0, 1, \dots, N-1$. Покроем область Δ^{N-2} кубами и параллелепипедами $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^{N-2}$ с ребрами, параллельными координатным осям и имеющими длины не меньше h_{N-2} и не больше $2h_{N-2}$. Отличие с описанным выше построением кусочно-непрерывного локального сплайна заключается в том, что в число узлов кубов и параллелепипедов $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^{N-2}$ включены вершины куба Δ^{N-1} .

Чтобы покрыть область Δ^{N-3} кубами и параллелепипедами $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^{N-3}$, проведем плоскости, параллельные координатным плоскостям, через вершины кубов $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^{N-2}$, расположенные на поверхности $\Delta^{N-2} \cap \Delta^{N-3}$. Обозначим полученные в результате области через $g_{i_1, \dots, i_l}^{N-3}$. Пусть $g_{i_1, \dots, i_l}^{N-3} = [a_1, b_1; \dots; a_l, b_l]$. Если длина ребра $[a_k, b_k]$, $k = 1, 2, \dots, l$, больше $2h_{N-3}$, то делим ребро на $\lceil |b_k - a_k|/h_k \rceil$ равных частей и через точки деления проводим плоскости, параллельные координатным плоскостям. В результате

получаем покрытие области Δ^{N-3} кубами и параллелепипедами $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^{N-3}$. Продолжая этот процесс, получаем покрытие области Ω кубами и параллелепипедами $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$, $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Общее число областей $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, оценивается формулой (2.2).

Приступим теперь к построению непрерывного локального сплайна, аппроксимирующего функцию $f(x_1, \dots, x_l)$ в области Ω . Полином $P_{s, \dots, s}(f, \Delta^{N-1})$ аппроксимирует функцию $f(x_1, \dots, x_l)$ в области Δ^{N-1} . В областях $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^{N-2}$ функция $f(x_1, \dots, x_l)$ аппроксимируется интерполяционным полиномом $P_{s, \dots, s}(\bar{f}, \Delta_{i_1, \dots, i_l}^{N-2})$. Здесь $\bar{f}(x_1, \dots, x_l)$ — функция, равная $f(x_1, \dots, x_l)$ во всех узлах интерполяции, кроме узлов, расположенных на поверхности $\Delta^{N-1} \cap \Delta_{i_1, \dots, i_l}^{N-2}$. В этих узлах значения функции $\bar{f}(x_1, \dots, x_l)$ берутся равными значениям полинома $P_{s, \dots, s}(f, \Delta^{N-1})$. Продолжая этот процесс, строим полиномы $P_{s, \dots, s}(f, \Delta^{N-1})$, $P_{s, \dots, s}(\bar{f}, \Delta_{i_1, \dots, i_l}^k)$, $k = 0, 1, \dots, N-2$

Объединяя построенные полиномы $P_{s, \dots, s}(f, \Delta^{N-1})$, $P_{s, \dots, s}(\bar{f}, \Delta_{i_1, \dots, i_l}^k)$, $k = 0, 1, \dots, N-2$, получаем непрерывный сплайн $f_N^*(x_1, \dots, x_l)$.

Повторяя приведенные выше оценки, приходим к неравенству

$$\|f(x_1, \dots, x_l) - f_N^*(x_1, \dots, x_l)\| \leq \frac{c}{N^s}.$$

Таким образом, получена оценка сверху поперечников Колмогорова:

$$d_n(Q_{r, \gamma}(\Omega, 1), C) \leq c \begin{cases} n^{-(s-\gamma)/(l-1)}, & v > l/(l-1); \\ n^{-s/l} (\ln n)^{s/l}, & v = l/(l-1); \\ n^{-s/l}, & v < l/(l-1), \end{cases} \quad (2.5)$$

где n — число узлов непрерывного локального сплайна $f_N^*(x_1, \dots, x_l)$.

Из неравенств (2.3), (2.5) и леммы 7.1 главы I следует справедливость теоремы.

Замечание. Оценка снизу величины поперечника Колмогорова следует из применения леммы Лоренца (лемма 7.2 главы I) к семейству функций $\xi_{k, i_1, \dots, i_l}(x_1, \dots, x_l)$.

Теорема 2.2. Пусть $\Omega = [-1, 1]^l$, $l \geq 2$, $u = 1, 2, \dots$, $v = s/(s-\gamma)$. Справедливы следующие оценки:

$$\delta_n(\bar{Q}_{r\gamma}^u(\Omega, 1)) \asymp d_n(\bar{Q}_{r\gamma}^u(\Omega, 1), C) \asymp \left(\frac{1}{n}\right)^{s/l} \quad (2.6)$$

при $v < l/(l-1)$,

$$c \left(\frac{1}{n}\right)^{s/l} (\ln n)^{u-1+s/l} \leq \delta_n(\bar{Q}_{r\gamma}^u(\Omega, 1)) \leq 2d_n(\bar{Q}_{r\gamma}^u(\Omega, 1), C) \leq$$

$$\leq c \begin{cases} \left(\frac{1}{n}\right)^{s/l} (\ln n)^{us/r}, & u/r \geq 1/l + (u-1)/s; \\ \left(\frac{1}{n}\right)^{s/l} (\ln n)^{u-1+s/l}, & u/r \leq 1/l + (u-1)/s \end{cases} \quad (2.7)$$

при $v = l/(l-1)$.

Доказательство. Оценим вначале поперечник Колмогорова. Для этого нужно построить непрерывные локальные сплайны, имеющие погрешности, совпадающие с правыми частями неравенств (2.6), (2.7).

Вначале построим кусочно-непрерывный локальный сплайн, погрешность которого совпадает с правыми частями неравенств (2.6), (2.7).

Обозначим через Δ^k множество точек $x \in \Omega$, удовлетворяющих неравенствам

$$\Delta^k = \left\{ x \in \Omega : \left(\frac{k}{N}\right)^v \leq d(t, \Gamma) \leq \left(\frac{k+1}{N}\right)^v, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \right\}.$$

Как и при доказательстве предыдущей теоремы, покроем области Δ^k кубами и параллелепипедами $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$, $k = 0, 1, \dots, N-1$. Общее число областей $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$, осуществляющих покрытие Ω , оценивается формулой (2.2).

Пусть $M_0 = [(\ln N)^{u/r}] + 1$, $M_k = [(\ln(N/k))^{(u-1)/s}] + 1$, $k = 1, \dots, N-1$. Разделим каждое из ребер $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$ на M_k равных частей и проведем плоскости, параллельные координатным плоскостям, через точки деления. Полученные в результате области обозначим через $\Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k$.

В каждой из областей $\Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k$ функцию $f(x_1, \dots, x_l)$ будем аппроксимировать интерполяционным полиномом $P_{s, \dots, s}(f, \Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k)$. Из полиномов $P_{s, \dots, s}(f, \Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, составим локальный сплайн $f_N(x_1, \dots, x_l)$.

Оценим точность аппроксимации функции $f(x_1, \dots, x_l) \in \bar{Q}_{r, \gamma}^u(\Omega, 1)$ локальным сплайном $f_N(x_1, \dots, x_l)$.

Пусть $k = 0$, тогда

$$\begin{aligned} & \|f(x_1, \dots, x_l) - P_{s, \dots, s}(f, \Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^0)\| \leq \\ & \leq c E_{r-1, \dots, r-1}(f, \Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^0) \lambda_s^l. \end{aligned}$$

Для оценки $E_{r-1, \dots, r-1}(f, \Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^0)$ воспользуемся формулой Тейлора с остаточным членом в интегральной форме, приведенной в разд. 2 главы I. Так как $d(x^0 + \tau(x - x^0), \Gamma) \leq h_{00} = h_0 / ([(\ln N)^{u/r}] + 1)$, $(x^0, x) \in \Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^0$, то отсюда следует, что

$$E_{r-1, \dots, r-1}(f, \Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^0) \leq c h_{00}^r \int_0^1 (1 - \tau)^{r-1} (1 + |\ln^u \tau h_{00}|) d\tau \leq$$

$$\leq ch_{00}^r |\ln^u h_{00}| \leq c \left(\frac{1}{N} \right)^{vr} = c \left(\frac{1}{N} \right)^s,$$

где $h_{00} = h_0/M_0$, $h_0 = 1/N^v$.

Следовательно,

$$\|f(x_1, \dots, x_l) - P_{s, \dots, s}(f, \Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^0)\|_{C(\Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^0)} \leq c \left(\frac{1}{N} \right)^s. \quad (2.9)$$

Пусть теперь $k = 1, 2, \dots, N-1$, тогда

$$\begin{aligned} & \|f(x_1, \dots, x_l) - P_{s, \dots, s}(f, \Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k)\|_{C(\Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k)} \leq \\ & \leq c \left(\left(\left(\frac{k+1}{N} \right)^v - \left(\frac{k}{N} \right)^v \right) \frac{1}{(\ln \frac{N}{k})^{(u-1)/s}} \right)^s \frac{(1 + |\ln(\frac{k}{N})^v|)^{u-1}}{\left(\frac{k}{N} \right)^{v\gamma}} \leq \\ & \leq c \left(\left(\frac{k+1}{N} \right)^v - \left(\frac{k}{N} \right)^v \right)^s \left(\frac{N}{k} \right)^{v\gamma} \leq \frac{c}{N^s}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Из оценок (2.9) и (2.10) следует, что

$$\|f(x_1, \dots, x_l) - f_N(x_1, \dots, x_l)\| \leq c \left(\frac{1}{N} \right)^s. \quad (2.11)$$

Оценим число узлов, используемых при построении локального сплайна $f_N(x_1, \dots, x_l)$. Рассмотрим в отдельности два случая:

- 1) $v < l(l-1)$;
- 2) $v = l(l-1)$.

Пусть $v < l(l-1)$. Оценка сверху числа n следует из цепочки неравенств:

$$\begin{aligned} n & \leq m \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{2 - 2\left(\frac{k}{N}\right)^v}{\left(\frac{k+1}{N}\right)^v - \left(\frac{k}{N}\right)^v} \right)^{l-1} M_k^l + mN^{v(l-1)}([\ln N] + 1)^{lu/r} \leq \\ & \leq cN^{v(l-1)}(\ln N)^{lu/r} + c \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{2N^v - 2k^v}{v(k+\theta)^{v-1}} \right)^{l-1} \left(1 + \left(\ln \frac{N}{k} \right)^{\frac{u-1}{s}} \right)^l \leq \\ & \leq cN^{v(l-1)}(\ln N)^{lu/r} + c \sum_{k=1}^{N-1} \frac{N^{v(l-1)}}{k^{(v-1)(l-1)}} \left(\left(\ln \frac{N}{k} \right)^{\frac{(u-1)l}{s}} + 1 \right) \leq cN^l, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где m — число граней области Ω .

Из неравенств (2.11) и (2.12) при $v < l(l-1)$ следует оценка

$$\|f(x_1, \dots, x_l) - f_N(x_1, \dots, x_l)\| \leq cn^{-s/l}.$$

Пусть теперь $v = l/(l-1)$. Оценка сверху числа n следует из цепочки неравенств

$$\begin{aligned}
n &\leq m \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{2 - 2\left(\frac{k}{N}\right)^v}{\left(\frac{k+1}{N}\right)^v - \left(\frac{k}{N}\right)^v} \right)^{l-1} M_k^l + mN^{v(l-1)}([\ln N] + 1)^{lu/r} \leq \\
&\leq cN^l(\ln N)^{lu/r} + c \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{N^v}{k^{v-1}} \right)^{l-1} \left[\ln \frac{N}{k} \right]^{(u-1)l/s} \leq \\
&\leq cN^l(\ln N)^{lu/r} + \frac{cN^l}{N^{(v-1)(l-1)}} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{N^{(v-1)(l-1)}}{k^{(v-1)(l-1)}} \left(\ln \frac{N}{k} \right)^{(u-1)l/s} \leq \\
&\leq cN^l(\ln N)^{lu/r} + cN^{l-1} \int_1^N \frac{N}{x} \left(\ln \frac{N}{x} \right)^{(u-1)l/s} dx \leq \\
&\leq c \begin{cases} N^l(\ln N)^{lu/r}, & lu/r \geq 1 + (u-1)l/s, \\ N^l(\ln N)^{(u-1)l/s+1}, & lu/r \leq 1 + (u-1)l/s. \end{cases} \quad (2.13)
\end{aligned}$$

Из неравенств (2.11)–(2.13) следует, что при $v = l/(l-1)$ справедлива оценка

$$\begin{aligned}
&\|f(x_1, \dots, x_l) - f_N(x_1, \dots, x_l)\| \leq \\
&\leq c \begin{cases} \left(\frac{1}{n}\right)^{s/l} (\ln n)^{us/r}, & u/r \geq 1/l + (u-1)/s; \\ \left(\frac{1}{n}\right)^{s/l} (\ln n)^{u-1+s/l}, & u/r \leq 1/l + (u-1)/s, \end{cases} \quad (2.14)
\end{aligned}$$

где n — число узлов локального сплайна.

Приступим теперь к построению непрерывного локального сплайна. Это построение проводится аналогично построению, описанному при доказательстве теоремы 2.1. Покроем область Ω кубами и параллелепипедами Δ^k , а область Δ^k — кубами и параллелепипедами $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$ так, как описано выше. Пусть $h_k = ((k+1)/N)^v - (k/N)^v$, $h_k^* = h_k/M_k$, $k = 0, 1, \dots, N-1$. Покроем область Δ^{N-2} кубами и параллелепипедами $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^{N-2}$ с ребрами, параллельными координатным осям, но, в отличие от предыдущего, потребуем, чтобы вершины кубов $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^{N-1}$ входили в число вершин областей $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^{N-2}$. Кроме того, потребуем, чтобы длины ребер областей $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^{N-2}$ были бы не меньше h_{N-2} и не превосходили $2h_{N-2}$. Затем разделим каждое из ребер областей $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^{N-2}$ на M_{N-2} равных частей и проведем плоскости, параллельные координатным плоскостям. В результате области $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^{N-2}$ оказываются покрытыми более мелкими областями $\Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^{N-2}$.

Чтобы покрыть область Δ^{N-3} более мелкими областями $\Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^{N-3}$, поступим следующим образом. Через вершины областей $\Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^{N-2}$, расположенные на гиперплоскости $\Delta^{N-2} \cap \Delta^{N-3}$, проведем плоскости, параллельные координатным плоскостям. В результате область Δ^{N-3} покрывается областями $g_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^{N-3}$. Пусть $g_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^{N-3} = [a_1, b_1; \dots; a_l, b_l]$. Если длина ребра $[a_k, b_k]$, $k = 1, \dots, l$, превосходит $2h_{N-3}^*$, то делим это ребро на $\lceil |b_k - a_k|/h_{N-3}^* \rceil$ равных частей и через точки деления проводим плоскости, параллельные координатным плоскостям. В результате область $g_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^{N-3}$ оказывается покрытой областями $\Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^{N-3}$. Продолжая эту процедуру с каждой из областей $g_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^{N-3}$, покрываем область Δ^{N-3} кубами и параллелепипедами $\Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^{N-3}$. Продолжая этот процесс, покрываем область Ω кубами и параллелепипедами $\Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k$, $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Приступим к построению непрерывного локального сплайна. В области Δ^{N-1} функция $f(x_1, \dots, x_l)$ аппроксимируется интерполяционным полиномом $P_{s, \dots, s}(f, \Delta^{N-1})$. В области $\Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^{N-2}$ функция $f(x_1, \dots, x_l)$ аппроксимируется интерполяционным полиномом $P_{s, \dots, s}(\bar{f}, \Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^{N-2})$. Функция $\bar{f}(x_1, \dots, x_l)$ совпадает с функцией $f(x_1, \dots, x_l)$ во всех узлах интерполяционного полинома $P_{s, \dots, s}(\bar{f}, \Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^{N-2})$ за исключением узлов, расположенных на поверхности $\Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^{N-2} \cap \Delta^{N-1}$. В этих узлах значения функции $\bar{f}(x_1, \dots, x_l)$ и полинома $P_{s, \dots, s}(f, \Delta_{i_1, \dots, i_l}^{N-1})$ совпадают.

Продолжая этот процесс, строим интерполяционные полиномы $P_{s, \dots, s}(\bar{f}, \Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k)$, $k = 0, 1, \dots, N-2$. Сплайн, составленный из всех полиномов $P_{s, \dots, s}(f, \Delta_{i_1, \dots, i_l}^{N-1})$, $P_{s, \dots, s}(f, \Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k)$, $k = 0, 1, \dots, N-2$, обозначим через $f_N^*(x_1, \dots, x_l)$.

Повторяя оценки, проделанные при исследовании кусочно-непрерывного локального сплайна, имеем

$$\|f(x_1, \dots, x_l) - f_N^*(x_1, \dots, x_l)\|_{C(\Omega)} \leq cN^{-s}. \quad (2.15)$$

Из неравенств (2.12), (2.13), (2.15) следует, что

$$d_n(\bar{Q}_{r, \gamma}^u(\Omega, 1), C) \leq c \left(\frac{1}{n}\right)^{s/l} \quad (2.16)$$

при $v < l/(l-1)$,

$$d_n(\bar{Q}_{r, \gamma}^u(\Omega, 1), C) \leq c \begin{cases} \left(\frac{1}{n}\right)^{s/l} (\ln n)^{us/l}, & u/r \geq 1/l + (u-1)/s; \\ \left(\frac{1}{n}\right)^{s/l} (\ln n)^{u-1+s/l}, & u/r \leq 1/l + (u-1)/s, \end{cases} \quad (2.17)$$

если $v = l/(l-1)$.

Оценим снизу величину поперечника Бабенко $\delta_n(\bar{Q}_{r,\gamma}(\Omega, 1))$ при $v = s/(s - \gamma)$, $v < l/(l - 1)$. Нетрудно видеть, что при каждом неотрицательном u $Q_{r,\gamma}(\Omega, 1) \subset \bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, 1)$. Выше было показано, что $\delta_n(Q_{r,\gamma}(\Omega, 1)) \asymp n^{-s/l}$. Следовательно,

$$\delta_n(\bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, 1)) \geq cn^{-s/l}. \quad (2.18)$$

Оценим снизу величину поперечника Бабенко $\delta_n(Q_{r,\gamma}(\Omega, 1))$ при $v = s/(s - \gamma)$, $v = l/(l - 1)$.

Покроем Ω кубами и параллелепипедами $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$ способом, описанным выше при построении кусочно-непрерывного сплайна.

Пусть

$$M_k = \begin{cases} [(\ln N)^{(u-1)/s}] + 1, & k = 0; \\ [(\ln(N/k))^{(u-1)/s}] + 1, & k = 1, 2, \dots, N-1. \end{cases}$$

Замечание. При достаточно больших N ($N \geq 10$) можно положить $M_{N-1} = 1$. Для простоты обозначений будем считать, что $M_{N-1} = 1$.

Разделим каждое ребро области $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$ на M_k равных частей и через точки деления проведем плоскости, параллельные координатным плоскостям. В результате Ω покрывается кубами и параллелепипедами $\Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k$, $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Оценим число областей $\Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k$, $k = 0, 1, \dots, N-1$. Очевидно,

$$\begin{aligned} n &\asymp m \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{2 - 2 \left(\frac{k}{N}\right)^v}{\left(\frac{k+1}{N}\right)^v - \left(\frac{k}{N}\right)^v} \right)^{l-1} M_k^l + m N^{v(l-1)} (\ln N)^{l(u-1)/s} \asymp \\ &\asymp N^l (\ln N)^{l(u-1)/s} + N^{l-1} \int_1^N \frac{N}{x} \left(\ln \frac{N}{x} \right)^{(u-1)l/s} dx \asymp N^l (\ln N)^{(u-1)l/s+1}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Пусть $\Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k = [b_{i_1, j_1}, b_{i_1, j_1+1}; \dots; b_{i_l, j_l}, b_{i_l, j_l+1}]$.

Введем функцию

$$\begin{aligned} \varphi_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k(x) &= \\ &= \begin{cases} A_k ((x_1 - b_{i_1, j_1})(b_{i_1, j_1+1} - x_1) \dots (x_l - b_{i_l, j_l})(b_{i_l, j_l+1} - x_l))^s \times \\ \quad \times \left(1 + \left| \ln^{u-1} \left(\frac{k+1}{N} \right)^v \right| \right) \left((h_k/M_k)^{3s} \left((k+1)/N \right)^{v\gamma} \right)^{-1}, \\ \quad x \in \Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k, \\ 0, \quad x \in \Omega \setminus \Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.20)$$

$k = 0, 1, \dots, N-2$.

Пусть $\Delta^{N-1} = [b_{i_1}, b_{i_1+1}; \dots; b_{i_l}, b_{i_l+1}]$.

Введем функцию

$$\varphi^{N-1}(x) = \begin{cases} A_{N-1}((x_1 - b_{i_1})(b_{i_1+1} - x_1) \cdots (x_l - b_{i_l})(b_{i_l+1} - x_l))^s h_{N-1}^{-3s}, & x \in \Delta^{N-1}, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Delta^{N-1}. \end{cases}$$

Константы A_k , $k = 0, 1, \dots, N-2$, выбираются так, чтобы

$$\left| \frac{\partial^s \varphi_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k(x_1, \dots, x_l)}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_l^{s_l}} \right| \leq 1.$$

Константа A_{N-1} выбирается так, чтобы

$$\left| \frac{\partial^s \varphi^{N-1}(x)}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_l^{s_l}} \right| \leq 1,$$

$$0 \leq s_i \leq s, \quad i = 1, 2, \dots, l, \quad s = s_1 + \dots + s_l.$$

Нетрудно видеть, что

$$|\varphi_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k(x_1, \dots, x_l)| \geq \frac{c}{N^s},$$

$$k = 0, 1, \dots, N-2,$$

$$|\varphi^{N-1}(x_1, \dots, x_l)| \geq \frac{c}{N^s}.$$

Введем множество функций $\xi(t)$

$$\xi(t) = \sum_{k, i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l} C_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k \varphi_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k(t),$$

где $|C_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k| \leq 1$. Здесь суммирование проводится по всем областям $\Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k$, расположенным в Ω , $\Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^{N-1} \equiv \Delta^{N-1}$.

Из рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы 2.1, следует оценка

$$\delta_n(\bar{Q}_{r, \gamma}^u(\Omega, 1)) \geq \frac{c}{N^s} \geq c \frac{(\ln n)^{u-1+s/l}}{n^{s/l}}. \quad (2.21)$$

Из неравенств (2.17), (2.18), (2.21) и леммы 7.1 из главы I следует справедливость теоремы.

Теорема доказана.

Замечание. Пусть $v = l/(l-1)$. Справедливость оценки

$$d_n(\bar{Q}_{r, \gamma}^u(\Omega, 1), C) \geq c \frac{(\ln n)^{u-1+s/l}}{n^{s/l}}$$

следует из применения леммы Лоренца (см. лемму 7.2 в главе I) к построенному выше множеству функций $\xi(x)$.

Теорема 2.3. Пусть $\Omega = [-1, 1]^l$, $l \geq 2$, $u = 1, 2, \dots$, $v = s/(s - \gamma)$, $v > l/(l - 1)$. Справедлива оценка

$$\delta_n(\bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, 1)) \geq cn^{-(s-\gamma)/(l-1)} \ln^{u-1} N.$$

Доказательство. Пусть $\Delta^0 = \{x \in \Omega : 0 \leq d(x, \Gamma) \leq (1/N)^v = \rho_0\}$. Через Δ^k обозначим множество точек $x \in \Omega$, удовлетворяющих неравенствам

$$\Delta^k = \{x \in \Omega : \rho_{k-1} \leq d(x, \Gamma) \leq \rho_k \leq 1\},$$

где ρ_k удовлетворяет неравенствам

$$\frac{h_k^s}{\rho_k^\gamma} = N^{-s} \ln^{u-1} N,$$

$h_k = \rho_k - \rho_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, m$. Здесь m — наибольшее целое число такое, что $\rho_m \leq 1$. Если $\rho_m = 1$, то Ω покрывается областями Δ^k , $k = 0, 1, \dots, m$. Если $\rho_m < 1$, то через Δ^{m+1} обозначается множество точек

$$\Delta^{m+1} = \{x \in \Omega : \rho_m \leq d(x, \Gamma) \leq 1\}.$$

Без потери общности можно положить, что $\rho_m = 1$. Покажем теперь что уравнения

$$\frac{h_k^s}{\rho_k^\gamma} = N^{-s} \ln^{u-1} N, \quad k = 1, \dots, m,$$

разрешимы.

Пусть $\rho_k^* = (k/N)^v$, $k = 0, 1, \dots, N$, $h_k^* = \rho_k^* - \rho_{k-1}^*$, $k = 1, \dots, N$. Тогда $h_1^{*s}/\rho_1^{*\gamma} = 1/N^s$ при $k = 1$.

При $k = 2, \dots, N$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{h_k^{*s}}{\rho_k^{*\gamma}} &= \frac{(k^v - (k-1)^v)^s}{(k/N)^{v\gamma} N^{vs}} = \frac{(v(k-\Theta)^{v-1})^s}{k^{v\gamma}} \frac{1}{N^s} \geq \\ &\geq \left(\frac{k-1}{k}\right)^{v\gamma} v^s \frac{1}{N^s} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{v\gamma} v^s \frac{1}{N^s}. \end{aligned}$$

Таким образом, существует последовательность чисел $\rho_k^* = \left(\frac{k}{N}\right)^v$, $k = 0, 1, \dots, N$ такая, что

$$\frac{h_k^{*s}}{\rho_k^{*\gamma}} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{v\gamma} v^s \frac{1}{N^s} = \frac{c}{N^s}, \quad h_k^* = \rho_k^* - \rho_{k-1}^*.$$

С другой стороны, функция $\varphi(\rho) = (\rho - \rho_{k-1})^s/\rho^\gamma$ является неубывающей при $\rho > \rho_{k-1}$ и при любом ρ_{k-1} , $k = 1, 2, \dots, m-1$.

Следовательно, число m областей Δ^k , $k = 0, 1, \dots, m$, меньше N . Кроме каждую из областей Δ^k кубами и параллелепипедами $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$ способом, который неоднократно описывался выше при построении кусочно-непрерывных локальных сплайнов. Очевидно, общее число n областей $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$, $k = 0, 1, \dots, m$, равно

$$n \asymp n_0 \asymp N^{v(l-1)},$$

где n_0 — число областей $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^0$.

Пусть $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k = [b_{i_1}^k, b_{i_1+1}^k; \dots; b_{i_l}^k, b_{i_l+1}^k]$, $k = 0, 1, \dots, m$.

Введем функции

$$\begin{aligned} & \varphi_{i_1, \dots, i_l}^0(x_1, \dots, x_l) = \\ = & \begin{cases} A_0((x_1 - b_{i_1}^0)(b_{i_1+1}^0 - x_1) \cdots (x_l - b_{i_l}^0)(b_{i_l+1}^0 - x_l))^s N^{v\gamma} h_0^{-(2l-1)s} \ln^{u-1} N, \\ \quad x \in \Delta_{i_1, \dots, i_l}^0, \\ 0, \quad x \in \Omega \setminus \Delta_{i_1, \dots, i_l}^0; \end{cases} \\ & \varphi_{i_1, \dots, i_l}^k(x_1, \dots, x_l) = \\ = & \begin{cases} A_k((x_1 - b_{i_1}^k)(b_{i_1+1}^k - x_1) \cdots (x_l - b_{i_l}^k)(b_{i_l+1}^k - x_l))^s h_k^{-(2l-1)s} \rho_k^{-\gamma}, \\ \quad x \in \Delta_{i_1, \dots, i_l}^k, \\ 0, \quad x \in \Omega \setminus \Delta_{i_1, \dots, i_l}^k, \end{cases} \end{aligned}$$

$k = 1, 2, \dots, m$.

Константы A_k , $k = 0, 1, \dots, m$, выбираются таким образом, что

$$|D^s \varphi_{i_1, \dots, i_l}^0| \leq N^{v\gamma} \ln^{u-1} N, \quad |D^s \varphi_{i_1, \dots, i_l}^k| \leq \frac{1}{\rho_k^\gamma}.$$

Очевидно, такие константы существуют и не зависят от N, u, γ .

Оценим максимальные значения $\varphi_{i_1, \dots, i_l}^k(x_1, \dots, x_l)$, $k = 0, 1, \dots, m$.

Очевидно,

$$\varphi_{i_1, \dots, i_l}^0(x_1, \dots, x_l) \geq c h_0^s N^{v\gamma} \ln^{u-1} N = c \left(\frac{1}{N} \right)^{v(s-\gamma)} \ln^{u-1} N = c \frac{\ln^{u-1} N}{N^s},$$

$$\varphi_{i_1, \dots, i_l}^k(x_1, \dots, x_l) \geq c \frac{h_k^s}{\rho_k^\gamma} = c \frac{\ln^{u-1} N}{N^s}, \quad h_k = \rho_k - \rho_{k-1},$$

$k = 1, \dots, m$.

Введем множество функций $\xi(x_1, \dots, x_l)$:

$$\xi(x_1, \dots, x_l) = \sum_{k, i_1, \dots, i_l} C_{i_1, \dots, i_l}^k \varphi_{i_1, \dots, i_l}^k(t),$$

где $|C_{i_1, \dots, i_l}^k| \leq 1$. Здесь суммирование проводится по всем областям $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$, лежащим в Ω .

Из рассуждений, приведенных при доказательстве теоремы 2.1, имеем

$$\delta_n(\bar{Q}_{r\gamma}^u(\Omega, 1)) \geq c \frac{\ln^{u-1} N}{N^s} = c \frac{\ln^{u-1} n}{n^{(s-\gamma)/(l-1)}}.$$

Теорема доказана.

Замечание. Оценка

$$d_n(\bar{Q}_{r\gamma}^u(\Omega, 1), C) \geq cn^{-(s-\gamma)/(l-1)} \ln^{u-1} n$$

следует из построения множества функций $\xi(x_1, \dots, x_l)$ и леммы 7.2 главы I.

Пусть $v > l/(l-1)$. Для аппроксимации функций $f(x_1, \dots, x_l) \in \bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, 1)$ при $v > l/(l-1)$ вначале построим кусочно-непрерывный сплайн. После этого укажем изменения, которые нужно внести в его конструкцию для построения непрерывного локального сплайна.

Вначале покроем Ω областями Δ^k и кубами и параллелепипедами $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$ так, как неоднократно делали ранее при построении кусочно-непрерывных локальных сплайнов.

Нетрудно видеть, что общее число кубов и параллелепипедов Δ^{N-1} , $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$, $k = 0, 1, \dots, N-2$, равно

$$n \asymp N^{v(l-1)}. \quad (2.22)$$

В каждой области Δ^{N-1} , $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$ функция $f(x_1, \dots, x_l)$ аппроксимируется интерполяционным полиномом $P_{s, \dots, s}(f, \Delta^{N-1})$, $P_{s, \dots, s}(f, \Delta_{i_1, \dots, i_l}^k)$. Сплайн $f_N(x_1, \dots, x_l)$ составлен из всех полиномов $P_{s, \dots, s}(f, \Delta^{N-1})$, $P_{s, \dots, s}(f, \Delta_{i_1, \dots, i_l}^k)$, определенных в кубе Ω .

Можно показать, что при $1 \leq k \leq N-1$ справедлива оценка

$$\|f(x_1, \dots, x_l) - f_N(x_1, \dots, x_l)\|_{C(\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k)} \leq cN^{-s}(\ln N)^{u-1}. \quad (2.23)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \|f(x_1, \dots, x_l) - f_N(x_1, \dots, x_l)\|_{C(\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k)} &\leq ch_k^s \frac{|\ln(\frac{k}{N})^v|^{u-1}}{((k/N)^v)^\gamma} \leq \\ &\leq ch_k^s \left(\frac{N}{k}\right)^{v\gamma} (\ln N)^{u-1} = \frac{c}{N^s} (\ln N)^{u-1}. \end{aligned}$$

Пусть $k = 0$. Без ограничения общности можно ограничиться рассмотрением куба $\Delta_{0, \dots, 0}^0 = [-1, a_1; \dots; -1, a_1]$, где $a_1 = -1 + (1/N)^v$, $x^0 = (-1, \dots, -1)$.

Используя отрезок ряда Тейлора с остаточным членом в интегральной форме, имеем

$$\begin{aligned}
& \|f(x_1, \dots, x_l) - f_N(x_1, \dots, x_l)\|_{C(\Delta_{0,\dots,0}^0)} \leq c\lambda_s^l E_{r-1,\dots,r-1}(f, \Delta_{0,\dots,0}^0) \leq \\
& \leq c \max_{x \in \Delta_{0,\dots,0}^0} \left| \sum_{|k|=r} \frac{(x_k + 1)^k}{k!} \int_0^1 (1 - \tau)^{r-1} (1 + |\ln^u d(-1 + \tau(x_k + 1), \Gamma)|) d\tau \right| \leq \\
& \leq c \max_{x \in \Delta_{0,\dots,0}^0} \left| \sum_{|k|=r} \frac{(x_k + 1)^k}{k!} \int_0^1 (1 - \tau)^{r-1} |\ln^u \tau(x_k + 1)| d\tau \right| \leq \\
& \leq ch_0^r |\ln^u h_0| \leq c \frac{\ln^u N}{N^s}.
\end{aligned}$$

Из этой оценки и неравенства (2.22) имеем

$$\|f(x_1, \dots, x_l) - f_N(x_1, \dots, x_l)\|_{C(\Omega)} \leq c \frac{\ln^u N}{N^s} \leq c \frac{\ln^u n}{n^{(s-\gamma)/(l-1)}}.$$

Приступим к построению непрерывного локального сплайна, аппроксимирующего функции $f(x_1, \dots, x_l) \in \bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, 1)$ при $v > l/(l-1)$ с точностью $c(\ln^u n)n^{-(s-\gamma)/(l-1)}$. Для этого достаточно повторить построение, проведенное выше для непрерывного локального сплайна, аппроксимирующего функции $f(x_1, \dots, x_l) \in \bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, 1)$ при $v \leq l/(l-1)$ (см. теорему 2.2). Обозначим построенный сплайн через $f_N^*(x_1, \dots, x_l)$.

Нетрудно видеть, что

$$\|f(x_1, \dots, x_l) - f_N^*(x_1, \dots, x_l)\|_{C(\Delta_{0,\dots,0}^0)} \leq ch_0^r |\ln^u h_0| \leq c \frac{\ln^u N}{N^s}; \quad (2.24)$$

$$\|f(x_1, \dots, x_l) - f_N^*(x_1, \dots, x_l)\|_{C(\Delta_{i_1,\dots,i_l}^k)} \leq cN^{-s}(\ln N)^{u-1}, \quad (2.25)$$

$k = 1, \dots, N-1$.

Из предыдущих оценок и равенства (2.22) имеем

$$\|f(x_1, \dots, x_l) - f_N^*(x_1, \dots, x_l)\|_{C(\Omega)} \leq c \frac{\ln^u N}{N^s} \leq c \frac{\ln^u n}{n^{(s-\gamma)/(l-1)}}.$$

Так как при построении локального сплайна $f_N^*(x_1, \dots, x_l)$ в каждой области Δ_{i_1,\dots,i_l}^k число узлов равно s^l , то приходим к следующему утверждению.

Теорема 2.4. Пусть $\Omega = [-1, 1]^l$, $l \geq 2$, $v = s/(s-\gamma)$, $v > l/(l-1)$, $u = 1, 2, \dots$. Справедлива оценка

$$d_n(\bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, 1), C) \leq c \frac{\ln^u n}{n^{(s-\gamma)/(l-1)}}.$$

Приступим к построению оптимальных методов аппроксимации функций $f(x_1, \dots, x_l) \in Q_{r,\gamma}^u(\Omega, 1)$. Напомним, что, следуя определению 2.15 главы I, константы s, r, γ связаны соотношениями $\gamma = s - r - 1 + \mu$, $\mu = \gamma - [\gamma]$.

Теорема 2.5. Пусть $\Omega = [-1, 1]^l$, $l \geq 2$, $u = 1, 2, \dots$, $v = s/(s - \gamma)$. Тогда при $v < l/(l - 1)$:

$$d_n(Q_{r,\gamma}^u(\Omega, 1), C) \leq c \left(\frac{1}{n}\right)^{s/l}; \quad (2.26)$$

при $v = l/(l - 1)$:

$$d_n(Q_{r,\gamma}^u(\Omega, 1), C) \leq c \frac{(\ln n)^{us/(r+1-\mu)}}{n^{s/l}}, \quad (2.27)$$

если $lu/(r + 1 - \mu) \geq ul/s + 1$;

$$d_n(Q_{r,\gamma}^u(\Omega, 1), C) \leq c \frac{(\ln n)^{(ul+s)/l}}{n^{s/l}}, \quad (2.28)$$

если $lu/(r + 1 - \mu) < ul/s + 1$.

Доказательство. Доказательство теоремы подобно доказательству теоремы 2.1. Сначала построим кусочно-непрерывный локальный сплайн, имеющий погрешность, совпадающую по порядку с правыми частями неравенств (2.26)–(2.28). Затем построим непрерывный сплайн, имеющий такую же (по порядку) точность.

Покроем область Ω кубами и параллелепипедами $\Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, подобно тому, как мы уже неоднократно делали в этом разделе. Для этого ребра кубов Δ^{N-1} , $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$ разделим на M_k равных частей

$$M_k = \begin{cases} [(\ln N)^{u/(r+1-\mu)}] + 1, & k = 0, \\ [(\ln(N/k))^{u/s}] + 1, & k = 1, \dots, N-1, \end{cases}$$

и проведем плоскости, параллельные координатным плоскостям, через точки деления. В результате получаем покрытие $\Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, области Ω .

Замечание. Для единообразия обозначений мы покрытие куба Δ^{N-1} описываем как $\Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^{N-1}$, хотя он не имеет покрытия $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^{N-1}$.

В каждой области $\Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k$ функции $f(x_1, \dots, x_l)$ аппроксимируем полиномом $P_{s, \dots, s}(f, \Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Замечание. Мы используем полином $P_{s, \dots, s}(f, \Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k)$ при $s = r+2$ и полином $P_{s+1, \dots, s+1}(f, \Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k)$ при $s = r+1$. В дальнейших рассуждениях ограничимся случаем, когда $s \geq r+2$.

Оценим точность аппроксимации при $1 \leq k \leq N-1$:

$$\begin{aligned}
& \|f(x_1, \dots, x_l) - P_{s, \dots, s}(f, \Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k)\|_{C(\Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k)} \leq \\
& \leq c \left(\left(\left(\frac{k+1}{N} \right)^v - \left(\frac{k}{N} \right)^v \right) \frac{1}{(\ln \frac{N}{k})^{u/s}} \right)^s \frac{(1 + |\ln(\frac{k}{N})^v|)^u}{(\frac{k}{N})^{v\gamma}} \leq \\
& \leq B \left(\left(\frac{k+1}{N} \right)^v - \left(\frac{k}{N} \right)^v \right)^s \left(\frac{N}{k} \right)^{v\gamma} \leq \frac{c}{N^s}. \tag{2.29}
\end{aligned}$$

Пусть $k = 0$, тогда

$$\begin{aligned}
& \|f(x_1, \dots, x_l) - P_{s, \dots, s}(f, \Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^0)\|_{C(\Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^0)} \leq \\
& \leq c E_{r+1, \dots, r+1}(f, \Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^0) \lambda_s^l.
\end{aligned}$$

Используя формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме, имеем

$$\begin{aligned}
E_{r+1, \dots, r+1}(f, \Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^0) & \leq c h_{00}^{r+1-\mu} \int_0^1 (1-\tau)^{r-1} (1 + |\ln^u(\tau h_{00})|) d\tau \leq \\
& \leq c h_{00}^{r+1-\mu} \ln^u h_{00} \leq c \left(\frac{1}{N} \right)^{v(r+1-\mu)} = c \left(\frac{1}{N} \right)^s,
\end{aligned}$$

где $h_{00} = h_0/M_0$, $h_0 = (1/N)^v$.

Следовательно,

$$\|f(x_1, \dots, x_l) - P_{s, \dots, s}(f, \Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^0)\|_{C(\Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^0)} \leq c \left(\frac{1}{N} \right)^s. \tag{2.30}$$

Из неравенств (2.29), (2.30) следует оценка

$$\|f(x_1, \dots, x_l) - f_N(x_1, \dots, x_l)\| \leq c \left(\frac{1}{N} \right)^s. \tag{2.31}$$

Теперь оценим число n узлов, используемых для построения сплайна $f_N(x_1, \dots, x_l)$. При этом нужно рассмотреть два случая:

- 1) $v < l/(l-1)$;
- 2) $v = l/(l-1)$.

Пусть $v < l/(l-1)$. Оценка числа n следует из цепочки неравенств

$$n \leq m \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{2 - 2(\frac{k}{N})^v}{(\frac{k+1}{N})^v - (\frac{k}{N})^v} \right)^{l-1} M_k^l + 2m N^{v(l-1)} \lceil \ln N \rceil^{lu/(r+1-\mu)} \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq cN^{v(l-1)}(\ln N)^{lu/(r+1-\mu)} + c \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{2N^v - 2k^v}{v(k+\theta)^{v-1}} \right)^{l-1} \left(1 + \left(\ln \frac{N}{k} \right)^{\frac{u}{s}} \right)^l \leq \\
&\leq cN^{v(l-1)}(\ln N)^{lu/(r+1-\mu)} + c \sum_{k=1}^{N-1} \frac{N^{v(l-1)}}{k^{(v-1)(l-1)}} \left(\left(\ln \frac{N}{k} \right)^{\frac{ul}{s}} + 1 \right) \leq cN^l,
\end{aligned}$$

где m число граней области $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$.

Проведя аналогичные вычисления, имеем $n \geq cN^l$. Следовательно,

$$n = O(N^l). \quad (2.32)$$

Из неравенств (2.31), (2.32) следует, что

$$\|f(x_1, \dots, x_l) - f_N(x_1, \dots, x_l)\| \leq c \left(\frac{1}{n} \right)^{s/l},$$

где n — число узлов локального сплайна.

Пусть $v = l/(l-1)$. Верхняя граница числа кубов $\Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, покрывающих область Ω , определяется из цепочки неравенств

$$\begin{aligned}
n &\leq m \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{2 - 2\left(\frac{k}{N}\right)^v}{\left(\frac{k+1}{N}\right)^v - \left(\frac{k}{N}\right)^v} \right)^{l-1} M_k^l + 2mN^{v(l-1)} \lceil \ln N \rceil^{lu/(r+1-\mu)} \leq \\
&\leq cN^l (\ln N)^{lu/(r+1-\mu)} + cN^l (\ln N)^{(ul/s)+1}.
\end{aligned}$$

Осталось выразить N через n . Нужно рассмотреть два случая:

- 1) если $lu/(r+1-\mu) \geq ul/s + 1$, то $N \leq n^{1/l} / (\ln n)^{u/(r+1-\mu)}$;
- 2) если $lu/(r+1-\mu) < ul/s + 1$, то $N \leq n^{1/l} / (\ln n)^{(ul+s)/(sl)}$.

Следовательно, при $lu/(r+1-\mu) \geq ul/s + 1$:

$$\|f(x_1, \dots, x_l) - f_N(x_1, \dots, x_l)\| \leq c \frac{(\ln n)^{us/(r+1-\mu)}}{n^{s/l}}; \quad (2.33)$$

при $lu/(r+1-\mu) < ul/s + 1$:

$$\|f(x_1, \dots, x_l) - f_N(x_1, \dots, x_l)\| \leq c \frac{(\ln n)^{(ul+s)/l}}{n^{s/l}}. \quad (2.34)$$

Чтобы получить оценку сверху поперечника Колмогорова для класса функций $Q_{r,\gamma}^u(\Omega, 1)$, построим непрерывный локальный сплайн, имеющий погрешность, определяемую правыми частями неравенств (2.26)–(2.28). Для этого повторим построение непрерывного локального сплайна $f_N^*(x_1, \dots, x_l)$, проведенное при доказательстве теоремы 2.1. Можно показать, что для аппроксимации функций $f(x_1, \dots, x_l) \in Q_{r,\gamma}^u(\Omega, 1)$

непрерывными локальными сплайнами $f_N^*(x_1, \dots, x_l)$ справедливы оценки, приведенные в правых частях формул (2.26)–(2.28).

Теорема доказана.

Теорема 2.6. Пусть $\Omega = [-1, 1]^l$, $l \geq 2$, $u = 1, 2, \dots$, $v = s/(s - \gamma)$, $v < l/(l - 1)$. Справедлива оценка $\delta_n(Q_{r,\gamma}^u(\Omega, 1)) \geq Cn^{-s/l}$.

Доказательство. Выше было показано (см. теорему 2.1), что $\delta_n(Q_{r,\gamma}(\Omega, 1)) \geq Cn^{-s/l}$. Так как $Q_{r,\gamma}(\Omega, 1) \in Q_{r,\gamma}^u(\Omega, 1)$, то $\delta_n(Q_{r,\gamma}^u(\Omega, 1)) \geq cn^{-s/l}$.

Теорема доказана.

Теорема 2.7. Пусть $\Omega = [-1, 1]^l$, $l \geq 2$, $u = 1, 2, \dots$, $v = s/(s - \gamma)$, $v = l/(l - 1)$. Тогда

$$\delta_n(Q_{r,\gamma}^u(\Omega, 1)) \geq c \frac{(\ln n)^{u+s/l}}{n^{s/l}}.$$

Доказательство. Покроем область Ω кубами и параллелепипедами $\Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$, подобно тому, как это сделано при доказательстве теоремы 2.2.

Введем функцию

$$M_k = \begin{cases} [(\ln N)^{u/s}] + 1, & k = 0; \\ [(\ln \frac{N}{k})^{u/s}] + 1, & k = 1, 2, \dots, N - 1. \end{cases}$$

Оценим число областей $\Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$. Очевидно,

$$\begin{aligned} n &\asymp m \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{2 - 2 \left(\frac{k}{N}\right)^v}{\left(\frac{k+1}{N}\right)^v - \left(\frac{k}{N}\right)^v} \right)^{l-1} M_k^l + 2mN^{v(l-1)} (\ln N)^{lu/s} \asymp \\ &\asymp N^l (\ln N)^{lu/s} + N^{l-1} \int_1^N \frac{N}{x} \left(\ln \frac{N}{x} \right)^{ul/s} dx \asymp N^l (\ln N)^{1+ul/s}. \end{aligned}$$

Пусть $\Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k = [b_{i_1, j_1}, b_{i_1, j_1+1}; \dots; b_{i_l, j_l}, b_{i_l, j_l+1}]$. Введем функцию

$$\begin{aligned} &\varphi_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k(x_1, \dots, x_l) = \\ &= \begin{cases} A_k ((x_1 - b_{i_1, j_1})(b_{i_1, j_1+1} - x_1) \cdots (x_l - b_{i_l, j_l})(b_{i_l, j_l+1} - x_l))^s \times \\ \quad \times (1 + |\ln^u \left(\frac{k+1}{N}\right)^v|) (h_k/M_k)^{-3s} ((k+1)/N)^{-v\gamma}, \\ \quad x \in \Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k, \\ 0, \quad x \in \Omega \setminus \Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k \end{cases} \end{aligned}$$

$$h_k = ((k+1)/N)^v - (k/N)^v, k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Константы A_k , $k = 0, 1, \dots, N - 1$, выбираются из условий

$$|D^s \varphi_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k| \leq \frac{1}{((k+1)/N)^{v\gamma}} \left(1 + \left| \ln^u \left(\frac{k+1}{N} \right)^v \right| \right).$$

Очевидно, такие константы существуют и не зависят от N, u, γ .
Оценим максимальное значение функции $\varphi_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k(x_1, \dots, x_l)$.
Очевидно,

$$\begin{aligned} & \varphi_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k(x_1, \dots, x_l) \geq \\ & \geq A_k \left(\frac{h_k}{M_k} \right)^s \left(\frac{N}{k+1} \right)^{v\gamma} \left(1 + \left| \ln^u \left(\frac{k+1}{N} \right)^v \right| \right) = \\ & = A_k \left(\left(\frac{k+1}{N} \right)^v - \left(\frac{k}{N} \right)^v \right)^s \frac{1}{\left(\left(\ln \frac{N}{k} \right)^{u/s} + 1 \right)^s} \left(\frac{N}{k+1} \right)^{v\gamma} \times \\ & \times \left(1 + \left| \ln^u \left(\frac{k+1}{N} \right)^v \right| \right) \geq c \left(\frac{(k+\Theta)^{v-1} v}{N^v} \right)^s \left(\frac{N}{k+1} \right)^{v\gamma} = \frac{c}{N^s} \end{aligned}$$

при $k = 1, 2, \dots, N - 1$;

$$\begin{aligned} \varphi_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^0(x_1, \dots, x_l) & \geq A_0 \left(\frac{h_0}{M_0} \right)^s \left(\frac{N}{1} \right)^{v\gamma} \left(1 + \left| \ln^u \left(\frac{1}{N} \right)^v \right| \right) \geq \\ & \geq c \frac{1}{N^{vs}} \frac{1}{\ln^u N} N^{v\gamma} (1 + \ln^u N^v) \geq c \frac{1}{N^s}. \end{aligned}$$

Введем линейную комбинацию функций $\xi(x_1, \dots, x_l)$:

$$\xi(x_1, \dots, x_l) = \sum_{k, i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l} C_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k \varphi_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k(x_1, \dots, x_l),$$

где $|C_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k| \leq 1$. Здесь суммирование проводится по всем областям $\Delta_{i_1, \dots, i_l; j_1, \dots, j_l}^k$, расположенным в области Ω .

Из рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы 2.1, следует оценка

$$\delta_n(Q_{r\gamma}^u, (\Omega, 1)) \geq c \frac{(\ln n)^{u+s/l}}{n^{s/l}}.$$

Замечание. Оценка

$$d_n(Q_{r\gamma}^u(\Omega, 1), C) \geq c \frac{(\ln n)^{u+s/l}}{n^{s/l}}$$

следует из построения функции $\xi(x_1, \dots, x_l)$ и леммы 7.2 главы I.

Объединяя теоремы 2.4–2.6 приходим к следующему утверждению.

Теорема 2.8. Пусть $\Omega = [-1, 1]^l$, $l \geq 2$, $u = 1, 2, \dots$, $v = s/(s - \gamma)$. Тогда при $v < l/(l - 1)$:

$$\delta_n(Q_{r\gamma}^u(\Omega, 1)) \asymp d_n(Q_{r\gamma}^u(\Omega, 1), C) \asymp \left(\frac{1}{n}\right)^{s/l};$$

при $v = l/(l - 1)$:

$$c \frac{(\ln n)^{(ul+s)/l}}{n^{s/l}} \leq \delta_n(Q_{r\gamma}^u(\Omega, 1)) \leq 2d_n(Q_{r\gamma}^u(\Omega, 1), C) \leq c \frac{(\ln n)^{us/(r+1-\mu)}}{n^{s/l}},$$

если $lu/(r + 1 - \mu) \geq ul/s + 1$;

$$\delta_n(Q_{r\gamma}^u(\Omega, 1)) \asymp d_n(Q_{r\gamma}^u(\Omega, 1), C) \asymp \frac{(\ln n)^{(ul+s)l}}{n^{s/l}},$$

если $lu/(r + 1 - \mu) < ul/s + 1$.

Теорема 2.9. Пусть $\Omega = [-1, 1]^l$, $l \geq 2$, $v = s/(s - \gamma)$, $v > l/(l - 1)$. Тогда

$$\delta_n(Q_{r\gamma}^u(\Omega, 1)) \geq cn^{-(s-\gamma)/(l-1)} \ln^u n.$$

Доказательство. Доказательство подобно доказательству теоремы 2.3 с той разницей, что в данном случае функция $\varphi_{i_1, \dots, i_l}^0(x_1, \dots, x_l)$ вводится формулой

$$\begin{aligned} & \varphi_{i_1, \dots, i_l}^0(x_1, \dots, x_l) = \\ & = \begin{cases} A_0 \frac{((x_1 - b_{i_1}^0)(b_{i_1+1}^0 - x_1) \dots (x_l - b_{i_l}^0)(b_{i_l+1}^0 - x_l))^s}{h_0^{(2l-1)s}} N^{v\gamma} \ln^u N, & x \in \Delta_{i_1, \dots, i_l}^0, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Delta_{i_1, \dots, i_l}^0. \end{cases} \end{aligned}$$

Теорема 2.10. Пусть $\Omega = [-1, 1]^l$, $l \geq 2$, $v = s/(s - \gamma)$, $v > l/(l - 1)$. Тогда

$$d_n(Q_{r\gamma}^u(\Omega, 1), C) \leq cn^{-(s-\gamma)/(l-1)} \ln^u n.$$

Доказательство. Покроем Ω областями $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$, так, как это сделано при доказательстве теоремы 2.4.

Нетрудно видеть, что число областей $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$, равно

$$n \asymp N^{v(l-1)}. \quad (2.35)$$

Функция $f(x_1, \dots, x_l) \in Q_{r,\gamma}^u(\Omega, 1)$ приближается в области $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$ интерполяционным полиномом $P_{s, \dots, s}(f, \Delta_{i_1, \dots, i_l}^k)$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$. Локальный сплайн $f_N(x_1, \dots, x_l)$ составлен из интерполяционных полиномов $P_{s, \dots, s}(f, \Delta_{i_1, \dots, i_l}^k)$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$.

Нетрудно видеть, что при $1 \leq k \leq N - 1$ справедлива оценка

$$\|f(x_1, \dots, x_l) - f_N(x_1, \dots, x_l)\|_{C(\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k)} \leq cN^{-s}(\ln N)^u. \quad (2.36)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \|f(x_1, \dots, x_l) - f_N(x_1, \dots, x_l)\|_{C(\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k)} &\leq ch_k^s \frac{|\ln(\frac{k}{N})^v|^u}{((k/N)^v)^\gamma} \leq \\ &\leq ch_k^s \left(\frac{N}{k}\right)^{v\gamma} (\ln N)^u = \frac{c}{N^s} (\ln N)^u. \end{aligned}$$

Пусть $k = 0$. Без потери общности мы можем ограничиться рассмотрением куба $\Delta_{0, \dots, 0}^0 = [-1, a_1; \dots; -1, a_1]$, где $a_1 = -1 + (1/N)^v$.

Используя формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме, имеем

$$\begin{aligned} \|f(x_1, \dots, x_l) - f_N(x_1, \dots, x_l)\|_{C(\Delta_{0, \dots, 0}^0)} &\leq c\lambda_s^l E_{r, \dots, r}(f, \Delta_{0, \dots, 0}^0) \leq \\ &\leq c \max_{x \in \Delta_{0, \dots, 0}^0} \sum_{|k|=r+1} \frac{(x_k + 1)^k}{k!} \int_0^1 (1 - \tau)^r \frac{|\ln^u d(-1 + \tau(x_k + 1)), \Gamma|}{(d(-1 + \tau(x_k + 1)), \Gamma)^{1-\zeta}} d\tau \leq \\ &\leq ch_0^{r+1-\mu} |\ln^u h_0| \leq c \frac{\ln^u N}{N^s}. \end{aligned}$$

Из предыдущей оценки и неравенства (2.35) имеем

$$\|f(x_1, \dots, x_l) - f_N(x_1, \dots, x_l)\|_{C(\Omega)} \leq c \frac{\ln^u N}{N^s} \leq c \frac{\ln^u n}{n^{(s-\gamma)/(l-1)}}.$$

Для построения непрерывного локального сплайна $f_N^*(x_1, \dots, x_l)$, аппроксимирующего функции $f(x_1, \dots, x_l) \in Q_{r, \gamma}^u(\Omega, 1)$ с точностью $c(\ln^u n)n^{-(s-\gamma)/(l-1)}$, повторим построение, приведенное в доказательстве теоремы 2.4.

Тогда при $0 \leq k \leq N - 1$ приходим к следующим оценкам:

$$\|f(x_1, \dots, x_l) - f_N^*(x_1, \dots, x_l)\|_{C(\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k)} \leq cN^{-s}(\ln N)^u, \quad (2.37)$$

$k = 1, \dots, N - 1,$

$$\begin{aligned} c\|f(x_1, \dots, x_l) - f_N^*(x_1, \dots, x_l)\|_{C(\Delta_{0, \dots, 0}^0)} &\leq \\ &\leq ch_0^{r+1-\mu} |\ln^u h_0| \leq c \frac{\ln^u N}{N^s}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Из предыдущих оценок и равенства (2.35) имеем

$$\|f(x_1, \dots, x_l) - f_N^*(x_1, \dots, x_l)\|_{C(\Omega)} \leq c \frac{\ln^u N}{N^s} \leq c \frac{\ln^u n}{n^{(s-\gamma)/(l-1)}}.$$

Так как в каждой области $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$, число узлов локального сплайна $P_{s, \dots, s}(f, \Delta_{i_1, \dots, i_l}^k)$ равно s^l , то приходим к неравенству

$$d_n(Q_{r\gamma}^u(\Omega, 1), C) \leq cn^{-(s-\gamma)/(l-1)} \ln^u n.$$

Теорема доказана.

Сопоставляя утверждения теорем 2.8 и 2.9, приходим к следующему утверждению.

Теорема 2.11. Пусть $\Omega = [-1, 1]^l$, $l \geq 2$, $u = 1, 2, \dots$, $v = s/(s - \gamma)$, $v > l/(l - 1)$. Тогда

$$\delta_n(Q_{r\gamma}^u(\Omega, 1)) \asymp d_n(Q_{r\gamma}^u(\Omega, 1), C) \asymp n^{-(s-\gamma)/(l-1)} \ln^u n.$$

2.2. Аппроксимация класса функций

$$\mathbf{B}_{r,\gamma}(\Omega, \mathbf{M}), \Omega = [-1, 1]^l, l = 2, 3, \dots$$

В этом разделе используются усреднения различных функций. В связи с этим приведем условия, налагаемые на ядра усреднения [168, с. 104]. При этом условие 4 нам понадобится в более сильной форме, нежели в [168].

Наложим на функцию $\omega_h(x, y)$ переменных $x = (x_1, \dots, x_l)$, $y = (y_1, \dots, y_l)$, определенную в R^l и зависящую от параметра h , следующие условия:

1) $\text{supp} \omega_h(x, y) \subset \{(x, y) : |x - y| < Kh\}$, $K > 0$, т.е. носитель функции ω_h лежит в "диагональной полоске" с шириной $O(h)$;

2) $0 \leq \omega_h(x, y) \leq Kh^{-l}$;

3) $\int_{R^l} \omega_h(x, y) dy = 1$ (условие нормировки);

4) $\omega_h(x, y)$ имеет непрерывные производные до любого порядка по совокупности переменных x и y , причем

$$|D_x^\alpha D_y^\beta \omega_h(x, y)| \leq KA^v v^v h^{-l-|\alpha|-|\beta|},$$

где $v = |\alpha| + |\beta|$.

Возьмем в качестве $\omega(x)$ функцию, имеющую непрерывные производные любого порядка, равную нулю вне куба $[-1, 1]^l$ и удовлетворяющую условию нормировки. Потребуем, чтобы производные функции $\omega(x)$ удовлетворяли неравенствам

$$\left| \frac{\partial^{|v|} \omega(x)}{\partial x_1^{v_1} \dots \partial x_l^{v_l}} \right| \leq A^{|v|} |v|^{|v|},$$

где $v = (v_1, \dots, v_l)$, $|v| = v_1 + \dots + v_l$, $A = \text{const}$.

Функцию $\omega_h(x, y)$ можно теперь определить по формуле $\omega_h(x, y) = h^{-l}\omega\left(\frac{x-y}{h}\right)$.

Теорема 2.12. Пусть $\Omega = [-1, 1]^l, l \geq 2, M = \text{const}$. Справедлива оценка

$$\delta_n(B_{r,\gamma}(\Omega, M)) \geq cn^{-(r+1-\gamma)/(l-1)}. \quad (2.39)$$

Доказательство. Обозначим через Δ_0 множество точек $x \in \Omega$, расстояние от которых до границы Γ множества Ω удовлетворяет неравенствам $0 \leq d(x, \Gamma) = \min_{1 \leq i \leq l} \min(|-1 - x_i|, |1 - x_i|) \leq 2^{-N}$.

Обозначим через $\Delta_k, k = 1, 2, \dots, N$, множество точек $x \in \Omega$, расстояние от которых до границы Γ множества Ω удовлетворяет неравенствам

$$\frac{2^{k-1}}{2^N} \leq d(x, \Gamma) = \min_{1 \leq i \leq l} \min(|-1 - x_i|, |1 - x_i|) \leq \frac{2^k}{2^N}.$$

В каждой области $\Delta_k, k = 0, 1, \dots, N$, разместим кубы $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$ с гранями, параллельными граням куба Ω , и ребрами, имеющими длину, не меньшую h_k и не большую $2h_k$, где $h_0 = 2^{-N}, h_k = 2^{k-1}/2^N, k = 1, \dots, N-1$. То что в каждой области $\Delta_k, k = 0, 1, \dots, N$, может оказаться 2^l параллелепипедов с гранями, параллельными граням куба Ω , не влияет на общность рассуждений. В каждом кубе $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$ разместим куб $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^{*k}, k = 0, 1, \dots, N$, с гранями, параллельными граням куба Ω , центр симметрии которого совпадает с центром симметрии куба $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k, k = 0, 1, \dots, N$, а длина ребра h_k^* равна $h_k^* = h_k/8$.

Каждому кубу $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^{*k}$ поставим в соответствие функцию

$$L_{i_1, \dots, i_l}^k(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Delta_{i_1, \dots, i_l}^{*k}, \\ 0, & x \notin \Delta_{i_1, \dots, i_l}^{*k}. \end{cases}$$

Каждой функции L_{i_1, \dots, i_l}^k поставим в соответствие среднюю функцию, определяемую формулой

$$L_{i_1, \dots, i_l}^{*k}(x) = (h_k^*)^{-l+r+1-\gamma} \int_{\Omega} \omega\left(\frac{y-x}{h_k^*}\right) L_{i_1, \dots, i_l}^k(y) dy, \quad (2.40)$$

где $\omega\left(\frac{x}{h_k^*}\right)$ — ядро усреднения, удовлетворяющее перечисленным выше условиям.

При выполнении этих условий функция $L_{i_1, \dots, i_l}^{*k}(x)$ принадлежит классу $B_{r,\gamma}(\Omega)$. В результате в каждом кубе $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$ построена функция $L_{i_1, \dots, i_l}^{*k}(x)$, принадлежащая классу $B_{r,\gamma}(\Omega, M)$, равная нулю вне куба $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$ и в центре куба $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$, принимающая значение, не меньшее чем $c2^{-(r+1-\gamma)N}$, причем константа c одна и та же для всех кубов $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$.

Обозначим через n число кубов $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$, образующих покрытие области Ω . Оценим число n . Очевидно,

$$\begin{aligned} 1 + m([2^{N+1}])^{l-1} + m \sum_{k=1}^{N-1} \left[\frac{2(1 - 2^{k-N})}{h_k} \right]^{l-1} &\leq n \leq \\ &\leq 1 + m([2^{N+1}] + 1)^{l-1} + m \sum_{k=1}^{N-1} \left(\left[\frac{2(1 - 2^{k-N})}{h_k} \right] + 1 \right)^{l-1}, \end{aligned}$$

где $m = 2^l$.

Нетрудно видеть, что

$$\sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{1 - 2^{k-N}}{h_k} \right)^{l-1} \leq \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{2^N - 2^k}{2^{k+1} - 2^k} \right)^{l-1} \leq c2^{N(l-1)}.$$

Следовательно, $n \leq c2^{N(l-1)}$.

Аналогичным образом доказывается неравенство $n \geq c2^{N(l-1)}$.

Поэтому

$$n = c2^{N(l-1)}. \quad (2.41)$$

Повторяя неоднократно приводимые рассуждения, приходим к неравенству $\delta_n(B_{r,\gamma}(\Omega, M)) \geq c2^{-N(r+1-\gamma)}$. Учитывая связь между N и n , выраженную формулой (2.41), имеем окончательно

$$\delta_n(B_{r,\gamma}(\Omega, M)) \geq cn^{-(r+1-\gamma)/(l-1)}. \quad (2.42)$$

Теорема доказана.

Построим локальные сплайны, реализующие эту оценку. Один из таких сплайнов построен при $\gamma = 1$ в работе [24, с. 76–80]. При его построении в каждом кубе $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$ функция $f(x_1, \dots, x_l)$ аппроксимировалась отрезком ряда Тейлора. В результате локальный сплайн $f_N(x_1, \dots, x_l)$ был кусочно-непрерывным.

Построим локальный сплайн таким образом, чтобы в каждом кубе $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$ функция $f(x)$ аппроксимировалась интерполяционными полиномами. Это позволит построить сплайн непрерывный в Ω и тем самым оценить сверху поперечник Колмогорова.

Теорема 2.13. Пусть $\Omega = [-1, 1]^l$, $l \geq 2$, тогда

$$\delta_n(B_{r,\gamma}(\Omega, M)) \asymp d_n(B_{r,\gamma}(\Omega, M), C) \asymp n^{-(r+1-\gamma)/(l-1)}.$$

Доказательство. Построим непрерывный локальный сплайн, аппроксимирующий функции из класса $B_{r,\gamma}(\Omega, M)$ с точностью порядка

$n^{-(r+1-\gamma)/(l-1)}$, где n — число узлов сплайна. Для построения этого сплайна заметим, что классу функций $B_{r,\gamma}(\Omega, M)$ можно поставить в соответствие класс функций $Q_{r,\gamma_1}(\Omega, M_1)$, где $M_1 = (Ms_1)^{s_1}$, $s_1 = r + [\gamma_1] + 1$. Значение γ_1 выбирается таким образом, чтобы выполнялось неравенство $v_1 = s_1/(s_1 - \gamma_1) > l/(l - 1)$. Здесь $s_1 = r + [\gamma_1] + 1$, $\gamma_1 = [\gamma_1] + \mu_1$, $\mu_1 = \gamma$. Нетрудно видеть, что это неравенство выполняется, если $[\gamma_1] > l(r + 1 - \gamma)/(l - 1) - r - 1$. Очевидно, класс функций $B_{r,\gamma}(\Omega, M)$ вложен в класс функций $Q_{r,\gamma_1}(\Omega, M_1)$.

В разд. 2.1 на n узлах был построен непрерывный локальный сплайн, имеющий на классе функций $Q_{r,\gamma_1}(\Omega, M_1)$ точность $cn^{-(s_1-\gamma_1)/(l-1)}$. Следовательно, на классе функций $B_{r,\gamma}(\Omega, M)$ этот сплайн будет иметь точность $cn^{-(s_1-\gamma_1)/(l-1)}$, где n — число узлов локального сплайна. Таким образом, для поперечников Колмогорова получена оценка сверху

$$d_n(B_{r,\gamma}(\Omega, M), C) \leq cn^{-(r+1-\gamma)/(l-1)}.$$

Из сопоставления этой оценки с неравенством (2.42) и из леммы 7.1 главы I следует справедливость теоремы.

Выше было показано, что потенциальные поля могут принадлежать классу функций $\bar{B}_{r,\gamma}^1(\Omega, M)$, $M = \text{const}$. В связи с этим представляет интерес построение оптимальных методов аппроксимации функциональных классов $\bar{B}_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$, $B_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$, $u = 1, 2, \dots$

Не останавливаясь на оценке поперечников Бабенко $\delta_n(\bar{B}_{r,\gamma}^u(\Omega, M))$, $\delta_n(B_{r,\gamma}^u(\Omega, M))$, построим непрерывные локальные сплайны для аппроксимации функций из указанных классов и оценим сверху поперечники Колмогорова $d_n(\bar{B}_{r,\gamma}^u(\Omega, M), C)$ и $d_n(B_{r,\gamma}^u(\Omega, M), C)$.

Рассмотрим класс функций $\bar{B}_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$. Этот класс вложен в класс функций $\bar{Q}_{r,\gamma_1}^u(\Omega, M_1)$, где $M_1 = (Ms)$, $s = r + [\gamma_1] + 1$, $\gamma_1 = [\gamma_1] + \mu_1$, $\mu_1 = \gamma$, при условии, что $[\gamma_1] > l(r + 1 - \gamma)/(l - 1) - r - 1$. В разд. 1 были построены непрерывные локальные сплайны для аппроксимации функций из класса $\bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$ и оценены поперечники Бабенко и Колмогорова. Тем самым доказано следующее утверждение.

Теорема 2.14. Пусть $\Omega = [-1, 1]^l$, $l \geq 2$, $u = 1, 2, \dots$. Справедлива оценка

$$d_n(\bar{B}_{r,\gamma}^u(\Omega, M), C) \leq c \frac{\ln^u n}{n^{(r+1-\gamma)/(l-1)}}.$$

Аналогичным образом доказывается следующее утверждение.

Теорема 2.15. Пусть $\Omega = [-1, 1]^l$, $l \geq 2$, $u = 1, 2, \dots$. Справедлива оценка

$$d_n(B_{r,\gamma}^u(\Omega, M), C) \leq c \frac{\ln^u n}{n^{(r+1-\gamma)/(l-1)}}.$$

3. Оптимальные по точности методы восстановления потенциальных полей локальными сплайнами и целыми функциями

В этом разделе проводится исследование задачи, сформулированной в начале главы.

Построены оптимальные по точности методы восстановления потенциальных полей в равномерной метрике. Предложено два класса оптимальных по точности алгоритмов в виде сплайнов и в виде целых функций (отрезков рядов Котельникова). При этом рассмотрены в отдельности два случая:

1) область G , в которой восстанавливается потенциальное поле, ограничена;

2) область G , в которой восстанавливается потенциальное поле, является дополнением до пространства E_3 некоторой ограниченной замкнутой области.

В разд 1 было показано (см. теоремы 1.4, 1.5), что потенциальные поля вне создающих их тел принадлежат классам функций $B_{r\gamma}(\Omega, M)$, $\bar{B}_{r\gamma}^1(\Omega, M)$.

3.1. Аппроксимация потенциальных полей, принадлежащих классу функций $Q_{r,\gamma}(\Omega, 1)$, непрерывными локальными сплайнами в конечных областях

В этом разделе излагаются оптимальные методы восстановления потенциальных полей. Вначале рассмотрим восстановление поля, создаваемого шаром $B(0, 1)$ единичного радиуса с центром в начале координат в предположении, что плотность тела имеет производные до l -го порядка. Как было показано в первом разделе, в этом случае потенциал гравитационного поля удовлетворяет неравенству (1.29), т.е. $V(x, y, z)$ принадлежит классу функций $B_{r,\gamma}$. В этом разделе для определенности будем рассматривать классы функций $B_{r,\gamma}(\tilde{\Omega}, 1)$, где $\tilde{\Omega} = (-\infty, \infty)^3 \setminus B(0, 1)$.

Введем декартову прямоугольную систему координат, поместив начало координат в центр тела $B(0, 1)$ и направив ось Z вертикально вверх.

Сферические координаты связаны с декартовыми формулами $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$, где θ — угол между осью OZ и радиус-вектором OM , соединяющим начало координат с точкой M , имеющей координаты (r, θ, φ) ; φ — угол в плоскости OXY , отсчитываемый в положительном направлении от оси OX до проекции радиус-вектора OM на плоскость OXY .

Пусть нужно построить алгоритм восстановления поля в области G , заключенной между двумя концентрическими сферами с радиусами, равными единице и R . Построим систему концентрических сфер с радиусами $r_k = 1 + (R - 1) \left(\frac{e^{k-1}}{e^N} \right)^v$, $k = 1, 2, \dots, N$, $v = \ln 2$. Пусть $r_0 = 1$. Обозначим через Δ_k , $k = 0, 1, \dots, N - 1$, множество точек $m = (x, y, z)$, удовлетворяющих неравенству $r_k \leq d(m, \Gamma) \leq r_{k+1}$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$, где $d(m, \Gamma)$ – расстояние от точки m до границы Γ единичной сферы.

Каждую из областей Δ_k разделим на сферические параллелепипеды. Обозначим через $h_k = r_{k+1} - r_k$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$, расстояние между соседними концентрическими сферами. Покроем сферу S_{k+1} с радиусом r_{k+1} множеством сферических параллелепипедов.

Для этого поставим каждой области Δ_k , $k = 0, 1, \dots, N - 1$, в соответствие множество узлов θ_i^k, φ_j^k , которые определяются следующим образом. Обозначим через $M_{k+1, i+1, j+1}$ точку, имеющую сферические координаты $r_{k+1}, \theta_{i+1}, \varphi_{j+1}$. Значения $\theta_{i+1}, \varphi_{j+1}$ подбираются из требования, чтобы расстояние между точками $M_{k+1, i, j}$ и $M_{k+1, i+1, j}$, а также между точками $M_{k+1, i, j}$ и $M_{k+1, i, j+1}$ было бы равно h_k , $k = 0, 1, \dots, N - 1$. Соединим точки $M_{k+1, i, j}$ с началом координат и обозначим через $M_{k+1, i, j}^0$ точку пересечения этой прямой со сферой S_k . Обозначим через Δ_{kij} сферический параллелепипед с вершинами в точках $M_{k+1, i, j}^0, M_{k+1, i+1, j}^0, M_{k+1, i, j+1}^0, M_{k+1, i+1, j+1}^0, M_{k+1, i, j}, M_{k+1, i+1, j}, M_{k+1, i, j+1}, M_{k+1, i+1, j+1}$.

Обозначим через μ_k , $k = 1, 2, \dots, N$, узлы полинома Чебышева первого рода степени N , расположенные на сегменте $[-1, 1]$. Пусть $[a, b]$ – произвольный сегмент. Отобразим сегмент $[-1, 1]$ на сегмент $[a, b]$ таким образом, чтобы точка -1 отобразилась в точку a , а точка 1 – в точку b . При этом узлы μ_k отображаются в μ'_k , $k = 1, 2, \dots, N$. Интерполяционный полином, построенный по узлам μ'_k , $k = 1, 2, \dots, N$, и интерполирующий функцию $f(x)$ на сегменте $[a, b]$, обозначим через $P_N(f, [a, b])$. В случае, если возникнет необходимость отметить, что интерполяция проводится по переменной x , будем писать $P_N^x(f, [a, b])$.

Приступим к аппроксимации функции $V(r, \theta, \varphi)$ в сферическом параллелепипеде Δ_{kij} . Здесь $V(r, \theta, \varphi) = V(r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta)$.

Обозначим через $A_k, B_k, C_k, D_k, A'_k, B'_k, C'_k, D'_k$ вершины параллелепипеда Δ_{kij} . На дугах $A_k B_k; C_k D_k; A'_k B'_k; C'_k D'_k$ функция $V(r, \theta, \varphi)$ зависит только от переменной φ ; на дугах $A_k D_k; B_k C_k; A'_k D'_k; B'_k C'_k$ эта функция зависит только от переменной θ ; на сегментах $[A_k, A'_k], [B_k, B'_k], [D_k, D'_k], [C_k, C'_k]$ она зависит только от переменной r .

Будем считать, что точки $A_k, A'_k; B_k, B'_k; D_k, D'_k; C_k, C'_k$ имеют соответственно следующие координаты: $(r_k, \theta_i, \varphi_j), (r_{k+1}, \theta_i, \varphi_j)$,

$(r_k, \theta_i, \varphi_{j+1}), (r_{k+1}, \theta_i, \varphi_{j+1}), (r_k, \theta_{i+1}, \varphi_{j+1}), (r_{k+1}, \theta_{i+1}, \varphi_{j+1}), (r_k, \theta_{i+1}, \varphi_j), (r_{k+1}, \theta_{i+1}, \varphi_j)$.

Введем обозначения: $h_k^r = |r_{k+1} - r_k|, h_i^\theta = |\theta_{i+1} - \theta_i|, h_j^\varphi = |\varphi_{j+1} - \varphi_j|$.

Функция $V(r, \theta, \varphi)$ аппроксимируется в параллелепипеде Δ_{kij} интерполяционным полиномом $V_N(r, \theta, \varphi, \Delta_{kij}) = P_{s_k}^r P_{s_k}^\theta P_{s_k}^\varphi V(r, \theta, \varphi)$, где описанный выше оператор интерполирования P_{s_k} последовательно применяется по переменным φ, θ, r ; $s_0 = l + 2, s_k = [8k(l + 2)]/e + 1$.

Локальный сплайн, аппроксимирующий функцию $V(r, \theta, \varphi)$ в области G и составленный из интерполяционных полиномов $V_N(r, \theta, \varphi, \Delta_{kij})$, обозначим через $V_N(r, \theta, \varphi)$.

Оценим погрешность приближения функции $V(r, \theta, \varphi)$ локальным сплайном $V_N(r, \theta, \varphi)$. Пусть $f \in W^r(1)$.

В случае, если функция, определяемая на сегменте $[a, b]$, интерполируется полиномом $P_r(f, [a, b])$, то (см. теорему 8.17 в главе 1) справедлива оценка

$$\|f(x) - P_r(f, [a, b])\|_{C[a,b]} \leq \frac{(b-a)^r}{2^{2r-1}r!} \max_{x \in [a,b]} \|f^{(r)}(x)\|_{C[-1,1]}.$$

Воспользовавшись этим неравенством, оценим норму разности

$$\|V(r, \theta, \varphi) - V_N(r, \theta, \varphi)\|_C.$$

Для этого достаточно оценить разность $\|V(r, \theta, \varphi) - V_N(r, \theta, \varphi)\|$ в произвольно фиксированном сферическом параллелепипеде Δ_{kij} .

Напомним, что в рассматриваемом случае производные функции $V(r, \theta, \varphi)$ оцениваются неравенством

$$\left| \frac{\partial^s V(r, \theta, \varphi)}{\partial r^{s_1} \partial \theta^{s_2} \partial \varphi^{s_3}} \right| \leq c 2^s s! \begin{cases} 1, & 0 \leq s \leq l + 2, \\ d(m, D)^{-s+l+2}, & l + 2 < s < \infty, \end{cases} \quad (3.1)$$

где $d(m, D)$ — расстояние от точки $m = (r, \theta, \varphi)$ до области D . Это неравенство следует из оценки (1.29) и формул, связывающих сферические и декартовы координаты.

После этих предварительных замечаний перейдем к оценкам. Вначале рассмотрим случай, когда $k = 0$, т.е. параллелепипед Δ_{kij} граничит с телом D . Тогда

$$\begin{aligned} \max_{(r, \theta, \varphi) \in \Delta_{0ij}} \|V(r, \theta, \varphi) - V_N(r, \theta, \varphi)\| &\leq \frac{ch_0^{l+2}}{2^{2l+3}(l+2)!} \leq \\ &\leq c \frac{(R-1)^{l+2}}{2^{2l+3}} \left(\frac{1}{e^N}\right)^{(l+2)v} = c \frac{(R-1)^{l+2}}{e^{Nv(l+2)}}. \end{aligned}$$

При получении этой оценки использовано первое из неравенств (3.1). Пусть $k \geq 1$, $v_k = 2k(l+2)$, $s_k = [8k(l+2)] + 1$, тогда

$$\begin{aligned}
& \max_{(r,\theta,\varphi) \in \Delta_{kij}} \|V(r, \theta, \varphi) - V_N(r, \theta, \varphi)\| \leq c \frac{2^{v_k} v_k! h_k^{v_k}}{(d(\Delta_{kij}, D))^{v_k - l - 2}} \frac{\ln^3 s_k}{s_k^{v_k}} = \\
& = c 2^{v_k} v_k! \frac{(e^{v_k} - e^{v(k-1)})^{v_k} (R-1)^{v_k}}{e^{v N v_k}} \frac{e^{N v (v_k - l - 2)}}{e^{(k-1)v(v_k - l - 2)} (R-1)^{(v_k - l - 2)}} \frac{\ln^3 s_k}{s_k^{v_k}} \leq \\
& \leq c 2^{v_k} v_k! (e^v - 1)^{v_k} \frac{e^{(k-1)v(l+2)}}{e^{N v (l+2)}} (R-1)^{l+2} \frac{\ln^3 s_k}{s_k^{v_k}} \leq \\
& \leq c \left(2 \frac{v_k (e^v - 1) e^{(k-1)v(l+2)/v_k}}{e s_k} \right)^{v_k} \frac{(R-1)^{l+2} \ln^3 N}{e^{v N (l+2)}} \leq \\
& \leq c (R-1)^{l+2} \frac{\ln^3 N}{2^{N(l+2)}}.
\end{aligned}$$

Таким образом, получена оценка

$$\|V(r, \theta, \varphi) - V_N(r, \theta, \varphi)\| \leq c \frac{(R-1)^{l+2}}{2^{(l+2)N}} \ln^3 N.$$

Подсчитаем число функционалов, используемых при построении сплайна $V_N(r, \theta, \varphi)$.

Нетрудно видеть, что это число равно

$$\begin{aligned}
n &= (l+2)^3 n_0 + \sum_{k=1}^{N-1} (k(l+2) + 1)^3 n_k = \\
&= c(l+2)^3 \frac{4\pi r_1^2}{h_0^2} + C(l+2)^3 \sum_{k=1}^{N-1} \frac{4\pi k^3 r_{k+1}^2}{h_k^2} \leq c 2^{2N}.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\|V(r, \theta, \varphi) - V_N(r, \theta, \varphi)\| \leq c (R-1)^{l+2} \frac{\ln^3 n}{n^{(l+2)/2}}.$$

Для сравнения отметим, что если использовать равномерную сетку с n узлами, то погрешность восстановления равна $c(R-1)^{l+2} n^{-(l+2)/3} \ln^3 n$.

Построенные выше алгоритмы применяются для оптимального восстановления потенциальных полей.

Пусть известны значения потенциального поля $V(x, y, z)$ в N , произвольным образом расположенных узлах (x_k, y_k, z_k) , $k = 1, 2, \dots, N$; причем эти узлы не обязательно принадлежат области D , в которой восстанавливается поле. Определим по значениям $V(x_k, y_k, z_k)$, $(k = 1, 2, \dots, N)$

первые N коэффициентов Фурье разложения поля $V(x, y, z)$ по шаровым функциям. Алгоритмам определения этих коэффициентов посвящены главы III и IV.

Тем самым построена N -я частная сумма ряда Фурье по шаровым функциям, которая является аппроксимацией поля $V(x, y, z)$. Пусть точность аппроксимации функции $V(x, y, z)$ N -й частной суммой ряда Фурье по сферическим функциям не превосходит некоторого значения ε . Тогда следует построить алгоритм восстановления поля в области D с точностью, не большей ε . Определим, используя алгоритмы, описанные в данном разделе и в разд. 2, число M необходимых для этого узлов и расположения этих узлов $w_k, k = 1, 2, \dots, M$, в области D . Вычислим по N -й частной сумме ряда Фурье значения поля $V(w_k)$ в точках $w_k, k = 1, 2, \dots, M$. Пользуясь этими значениями $V(w_k), w_k, k = 1, 2, \dots, M$, значения поля $V(x, y, z)$ можно восстановить в любой точке (x, y, z) области D по локальным сплайнам, описанным в данном разделе и разд. 2. Точность такого восстановления есть величина порядка ε и не может быть улучшена.

Таким образом, построен оптимальный по точности (по порядку) алгоритм восстановления потенциальных полей в области D (не обязательно конечной) по N значениям поля V , замеренным в произвольных точках.

Выше был построен оптимальный алгоритм восстановления потенциальных функций $U(x, y, z) \in B_{r,\gamma}(\Omega_1, M)$ в области Ω_1 , заключенной между двумя концентрическими сферами с радиусами, равными единице и R_0 . Этот алгоритм имеет следующие два недостатка:

- 1) построенный локальный сплайн имел разрывы на границах сферических параллелепипедов, покрывающих область Ω_1 ;
- 2) использовалась существенно неравномерная сетка узлов.

Ниже предлагается метод, свободный от этих недостатков.

Для простоты дальнейших выкладок будем считать, что областью Ω является куб $[-H, H]^3$. Полученные результаты переносятся и на случаи конечных областей, ограниченных поверхностями Ляпунова.

Построим непрерывные локальные сплайны, которые являются оптимальным по порядку алгоритмом приближения потенциальной функции $U(x, y, z) \in B_{r,\gamma}(\Omega, M)$ в области $\Omega = [-H, H]^3$.

В разд. 2 была доказана справедливость неравенства

$$\delta_n(B_{r,\gamma}(\Omega, 1)) \geq cn^{-(r+1-\gamma)/2},$$

где $\Omega = [-H, H]^3$.

Это означает, что функции из класса $B_{r,\gamma}(\Omega, 1)$ невозможно аппроксимировать точнее, нежели $cn^{-(r+1-\gamma)/2}$ никаким аппаратом приближения, использующим n произвольных функционалов.

Одновременно в разд. 2 было показано, что при $v = s/(s - \gamma)$

$$d_n(Q_{r,\gamma}(\Omega, M), C) \asymp \delta_n(Q_{r,\gamma}(\Omega, M)) \asymp \begin{cases} n^{-(s-\gamma)/(l-1)}, & v > l/(l-1); \\ n^{-s/l}(\ln n)^{s/l}, & v = l/(l-1); \\ n^{-s/l}, & v < l/(l-1). \end{cases}$$

Как следует из определений классов $B_{r,\gamma}$ и $Q_{r,\gamma}$, класс функций $B_{r,\gamma}(\Omega, M)$ вложен в класс функций $Q_{r,\gamma_1}(\Omega, M)$ (разумеется, при различных значениях γ и γ_1). Поэтому выбрав в последнем параметр s_1 (см. определение класса $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$) таким образом, чтобы $s_1/(s_1 - \gamma_1) > 3/2$, приходим к задаче построения непрерывного локального сплайна на классе $Q_{r,\gamma_1}(\Omega, M_1)$. Решение этой задачи дано в разд. 2. Таким образом, построен непрерывный сплайн, являющийся оптимальным по порядку алгоритмом аппроксимации функций из класса $B_{r,\gamma}(\Omega, M)$.

При использовании построенного в разд. 2 алгоритма аппроксимации класса $Q_{r,\gamma}$ возникает техническое неудобство, связанное со слишком частым изменением шага в сетке узлов. Поэтому более удобным в практическом отношении является следующий алгоритм.

Пусть $U(x, y, z) \in B_{r,\gamma}(\Omega, A)$. Из определения класса $B_{r,\gamma}(\Omega, A)$ следует, что функция $U(x, y, z)$ имеет ограниченные частные производные до r -го порядка включительно, а начиная с $r + 1$ порядка все производные имеют на границе области особенность вида $A^{|v|}|v|^v/d(P, \Gamma)^{|v|-r-1+\gamma}$, где $d(P, \Gamma)$ – расстояние от точки $P = (x, y, z)$ до границы Γ области Ω .

Отсюда следует, что если положить $s = [3r/2] + 1$, то функция $U(x, y, z)$ входит в класс $Q_{r,\gamma_1}(\Omega, M_1)$, где $\gamma_1 = s - r - 1 + \gamma$.

Построим локальный сплайн, аппроксимирующий функции из $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$ в предположении, что $s = r + [\gamma] + 1 > [3r/2] + 1$.

Обозначим через $L_r(f, [a, b])$ интерполяционный полином, построенный по r равноотстоящим узлам, расположенным на сегменте $[a, b]$, причем концы сегмента a и b входят в число узлов. Через $L_{r,\dots,r}(f, G)$, $G = [a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3]$, обозначим полином степени $(r - 1)$ по каждой переменной, интерполирующий функцию $f(x, y, z)$ по r равноотстоящим узлам по каждой переменной, причем точки a_i, b_i ($i = 1, 2, 3$) входят в число узлов интерполяции.

При оценке погрешности интерполяции воспользуемся следующей формулой интерполяции по Лагранжу функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$:

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \omega(x),$$

где $L_n(x)$ – интерполяционный полином Лагранжа по узлам x_1, \dots, x_n , $\omega(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_n)$, $a < \xi < b$.

При равноотстоящих узлах $x_k = a + \frac{b-a}{n}k$, $k = 0, 1, \dots, n$, оценка погрешности интерполяции оценивается неравенством

$$\begin{aligned} |f(x) - L_{n+1}(f, [a, b])| &\leq \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} |(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)| \leq \\ &\leq \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} \left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1} n! = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{n+1} \left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Предыдущая формула вытекает из следующих рассуждений. Оценим $\max_{x \in [a, b]} |\omega_{n+1}(x)|$, где $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_n)$, $a_0 = x_0$, $x_k = x_0 + \frac{b-a}{n}k$, $x_n = b$.

Очевидно, $\max_{x \in [a, b]} |\omega_{n+1}(x)|$ достигается в интервале (x_0, x_1) в некоторой точке x^* . Тогда

$$\begin{aligned} \max_{x \in [a, b]} |\omega_n(x)| &= |x^* - x_0| |x^* - x_1| \cdots |x^* - x_n| \leq \\ &\leq \left(\frac{b-a}{n}\right) \left(\frac{b-a}{n}\right) \left(2\frac{b-a}{n}\right) \cdots \left(n\frac{b-a}{n}\right) = n! \left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

Отсюда следует справедливость формулы (3.2).

Разделим область Ω на области Ω_k ($k = 0, 1, \dots, M$), которые определяются неравенствами

$$H \left(\frac{kL}{N}\right)^v \leq d(P, \Gamma) \leq H \left(\frac{(k+1)L}{N}\right)^v,$$

где $v = s/(s - \gamma)$, $L = [\ln N]$, $M = N/L$, $P = (x, y, z)$.

Для простоты обозначений предполагается, что N/L – целое число.

Введем обозначения

$$h_k = H \left(\frac{kL + L}{N}\right)^v - H \left(\frac{kL}{N}\right)^v,$$

$k = 0, 1, \dots, M - 1$.

Введем обозначение $\Delta^{M-1} = \Omega_{M-1}$. Кроме того, для единообразия в обозначениях будем писать $\Delta_{i_1, i_2, i_3}^{M-1}$ вместо Δ^{M-1} , хотя область Δ^{M-1} на более мелкие части не делится.

Рассмотрим область Ω_{M-2} . Покроем область Ω_{M-2} кубами и параллелепипедами $\Delta_{i_1, i_2, i_3}^{M-2}$ таким образом, чтобы вершины куба $\Delta_{i_1, i_2, i_3}^{M-1}$ входили в число вершин областей $\Delta_{i_1, i_2, i_3}^{M-2}$ и, кроме того, длины ребер областей $\Delta_{i_1, i_2, i_3}^{M-2}$ должны быть не меньше h_{M-2} и не больше $2h_{M-2}$.

После того как построены области $\Delta_{i_1, i_2, i_3}^{M-2}$, приступаем к построению покрытия области Ω_{M-3} более мелкими областями $\Delta_{i_1, i_2, i_3}^{M-3}$. Для этого проведем через вершины областей $\Delta_{i_1, i_2, i_3}^{M-2}$, лежащих на поверхности $\Omega_{M-2} \cap \Omega_{M-3}$, плоскости, параллельные координатным плоскостям. Области, которые образуются в Ω_{M-3} в результате построения, обозначим через G_{i_1, i_2, i_3}^{M-3} . Рассмотрим произвольную область $g_{i_1, i_2, i_3} = [a_{i_1}, a_{i_1+1}; b_{i_2}, b_{i_2+1}; c_{i_3}, c_{i_3+1}] \subset G_{i_1, i_2, i_3}^{M-3}$. Эту область разбиваем на более мелкие области следующим образом. Если длина какого-нибудь ребра (скажем, ребра (a_i, a_{i+1})) области g_{i_1, i_2, i_3} превышает $2h_{M-3}$, то это ребро делится на $|a_{i+1} - a_i|/h_{M-3}$ равных частей и через точки деления проводятся плоскости, параллельные координатным плоскостям. Прделав эту процедуру со всеми областями G_{i_1, i_2, i_3}^{M-3} , получаем покрытие области Ω_{M-3} более мелкими областями $\Delta_{i_1, i_2, i_3}^{M-3}$.

Аналогичным образом строятся покрытия Δ_{i_1, i_2, i_3}^k , $k = M-4, \dots, 0$.

Область Δ_{i_1, i_2, i_3}^0 покроем кубами $\Delta_{i_1, i_2, i_3; j_1, j_2, j_3}^0$ со сторонами, параллельными координатным плоскостям и с ребрами одинаковой длины $h_0^* = h_0/L^r$.

Приступим к построению непрерывного локального сплайна, аппроксимирующего функцию $U(x, y, z)$ в области Ω .

Построение локального сплайна начнем с куба $\Delta_{i_1, i_2, i_3}^{M-1}$. В этом кубе функция $U(x, y, z)$ аппроксимируется интерполяционными полиномами $L_{s, s, s}(U, \Delta_{i_1, i_2, i_3}^{M-1})$.

Перейдем к области Ω_{M-2} . Как отмечалось выше, эта область покрывается кубами с ребрами, равными h_{M-2} , причем это покрытие осуществляется таким образом, чтобы все вершины кубов $\Delta_{i_1, i_2, i_3}^{M-1}$, лежащие на границе области Ω_{M-1} , совпадали с вершинами соответствующих кубов из множества $\Delta_{i_1, i_2, i_3}^{M-2}$. В каждом из кубов $\Delta_{i_1, i_2, i_3}^{M-2}$ функция $U(x, y, z)$ аппроксимируется интерполяционным полиномом $L_{s, s, s}(\bar{U}, \Delta_{i_1, i_2, i_3}^{M-2})$, где $\bar{U}(x, y, z)$ совпадает с $U(x, y, z)$ всюду, за исключением поверхности $\Delta_{i_1, i_2, i_3}^{M-2} \cap \Delta_{i_1, i_2, i_3}^{M-1}$, на которой она совпадает с $L_{s, s, s}(U, \Delta_{i_1, i_2, i_3}^{M-1})$.

Аналогичным образом строятся интерполяционные полиномы в остальных областях Ω_k , $k = 1, \dots, M-3$.

Если γ – целое число, то аналогичное построение проводится в областях $\Delta_{i_1, i_2, i_3; j_1, j_2, j_3}^0$. Если γ – нецелое число, то в областях $\Delta_{i_1, i_2, i_3; j_1, j_2, j_3}^0$, имеющих непустое пересечение с границей Γ , построение интерполяционного полинома проводится следующим образом: интерполяция проводится только по тем узлам полинома $L_s(U, \Delta_{i_1, i_2, i_3; j_1, j_2, j_3}^0)$, которые не лежат на Γ , т.е. из числа узлов интерполяции исключаются узлы, лежащие на Γ . В кубах $\Delta_{i_1, i_2, i_3; j_1, j_2, j_3}^0$, не имеющих пересечения с Γ , функция $U(x, y, z)$

аппроксимируется полиномами $L_{s,s,s}(U, \Delta_{i_1, i_2, i_3; j_1, j_2, j_3}^0)$. При этом отметим, что каждая из вершин кубов $\Delta_{i_1, i_2, i_3}^{k+1}$, лежащая на границе области Ω_{k+1} , входит в множество вершин кубов Δ_{i_1, i_2, i_3}^k , лежащих на этой же границе.

Сплайн, состоящий из интерполяционных полиномов $L_{s,s,s}(U, \Delta_{i_1, i_2, i_3}^k)$, $k = 1, \dots, M-1$, $L_{s,s,s}(U, \Delta_{i_1, i_2, i_3; j_1, j_2, j_3}^0)$, обозначим через $U_M(x, y, z)$.

Оценим точность построенного сплайна. Воспользовавшись формулой (3.2), имеем

$$\begin{aligned} \|U(x, y, z) - L_{s,s,s}(U, \Delta_{i_1, i_2, i_3}^{M-1})\| &\leq c \frac{1}{H^\gamma} \left(\frac{N}{(M-1)L} \right)^{\gamma v} h_{M-1}^s \left(\frac{1}{s} \right)^{s+1} \leq \\ &\leq \frac{cH^{s-\gamma}}{s^{s+1}} \left(\frac{N}{(M-1)L} \right)^{\gamma v} \left(\left(\frac{((M-1)L + L)}{N} \right)^v - \left(\frac{(M-1)L}{N} \right)^v \right)^s \leq \\ &\leq cH^{s-\gamma} \left(\frac{1}{N} \right)^s \frac{1}{s^{s+1}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|U(x, y, z) - L_{s,s,s}(U, \Delta_{i_1, i_2, i_3}^k)\|_C &\leq c \left(\frac{1}{H} \right)^\gamma \left(\frac{N}{kL} \right)^{\gamma v} h_k^s \left(\frac{1}{s} \right)^{s+1} \leq \\ &\leq \frac{cH^{s-\gamma}}{s^{s+1}} \left(\frac{N}{kL} \right)^{\gamma v} \left(\left(\frac{(kL + L)}{N} \right)^v - \left(\frac{kL}{N} \right)^v \right)^s \leq cH^{s-\gamma} \left(\frac{1}{N} \right)^s \frac{1}{s^{s+1}}, \end{aligned}$$

$k = 1, 2, \dots, M-2$.

В случае, если γ – целое число, то справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|U(x, y, z) - L_{s,\dots,s}(U, \Delta_{i_1, i_2, i_3; j_1, j_2, j_3}^0)\|_C &\leq ch_0^r \left(\frac{1}{r+2} \right)^r \leq \\ &\leq cH^r \left(\frac{1}{N} \right)^{rv} \leq cH^r \left(\frac{1}{N} \right)^{rs/(s-\gamma)} \leq c \frac{H^r}{N^s}. \end{aligned}$$

Если γ – нецелое число, то в области Ω_0 приходится отдельно рассматривать кубы, имеющие непустое пересечение с Γ , и остальные кубы.

Если куб $\Delta_{i_1, i_2, i_3; j_1, j_2, j_3}^0$ не имеет пересечения с границей Γ области Ω , то при оценке точности аппроксимации функции $U(x, y, z)$ интерполяционным полиномом $L_{s,s,s}(U, \Delta_{i_1, i_2, i_3; j_1, j_2, j_3}^0)$ используются значения производных до $r+1$ порядка. В этом случае справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|U(x, y, z) - L_{s,s,s}(U, \Delta_{i_1, i_2, i_3; j_1, j_2, j_3}^0)\|_C &\leq \\ &\leq \frac{c}{(d(\Delta_{i_1, i_2, i_3; j_1, j_2, j_3}^0, \Gamma))^\mu} \left(\left(\frac{1}{N} \right)^v \frac{H}{s} \right)^{r+1} \leq \\ &\leq \frac{c}{N^{v(r+1-\mu)}} H^{r+1-\mu} \leq cH^{r+1-\mu} \left(\frac{1}{N} \right)^s. \end{aligned}$$

Здесь $d(\Delta_{i_1, i_2, i_3; j_1, j_2, j_3}^0, \Gamma)$ — расстояние между кубом $\Delta_{i_1, i_2, i_3; j_1, j_2, j_3}^0$ и границей Γ .

Осталось рассмотреть случай, когда куб $\Delta_{i_1, i_2, i_3; j_1, j_2, j_3}^0$ имеет непустое пересечение с Γ . В этом случае

$$\begin{aligned} \|U(x, y, z) - L_{s, s, s}(U, \Delta_{i_1, i_2, i_3; j_1, j_2, j_3}^0)\|_{C(\Delta_{i_1, i_2, i_3; j_1, j_2, j_3}^0)} &\leq \\ &\leq cE_{s-2}(U, \Delta_{i_1, i_2, i_3; j_1, j_2, j_3}^0)\lambda_s, \end{aligned}$$

где λ_s — константа Лебега; $E_{s-2}(U, \Delta_{i_1, i_2, i_3; j_1, j_2, j_3}^0)$ — наилучшее приближение функции $U(x, y, z)$ в области $\Delta_{i_1, i_2, i_3; j_1, j_2, j_3}^0$ алгебраическими полиномами степени $(s-2)$ по каждой переменной.

Для оценки $E_{s-1}(U, \Delta_{i_1, i_2, i_3; j_1, j_2, j_3}^0)$ воспользуемся формулой Тейлора для функций многих переменных с остаточным членом в интегральной форме, приведенной в разд. 2 главы I.

Из этой формулы следует, что

$$E_{s-1}(U, \Delta_{i_1, i_2, i_3; j_1, j_2, j_3}^0) \leq \frac{c}{s!} h_0^{r+\zeta} \leq cN^{-s}.$$

В результате имеем

$$\|U(x, y, z) - L_s(U, \Delta_{i_1, i_2, i_3; j_1, j_2, j_3}^0)\|_{C(\Delta_{i_1, i_2, i_3; j_1, j_2, j_3}^0)} \leq cH^{r+1-\mu} \left(\frac{1}{N}\right)^s.$$

Таким образом, в области Ω_0

$$\|U(x, y, z) - U_M(x, y, z)\|_C \leq cH^{r+1-\mu} \left(\frac{1}{N}\right)^s.$$

Из полученных неравенств следует, что во всей области Ω

$$\|U(x, y, z) - U_M(x, y, z)\|_C \leq cH^{r+1-\mu} \left(\frac{1}{N}\right)^s.$$

Оценим число кубов Δ_{i_1, i_2, i_3}^k , покрывающих область Ω . При этом ограничимся оценкой сверху:

$$\begin{aligned} n &\leq n_0 + n_1, \\ n_1 &\leq \sum_{k=1}^{M-1} \left(2H - H \left(\frac{2kL}{N}\right)^v\right)^2 \left(H \left(\frac{kL+L}{N}\right)^v - H \left(\frac{kL}{N}\right)^v\right)^{-2} \leq \\ &\leq c \sum_{k=1}^{M-1} \left(\frac{N^v - (kL)^v}{N^v}\right)^2 \left(\frac{(kL)^{v-1}}{N^v}\right)^{-2} \leq c \sum_{k=1}^{M-1} \left(\frac{M^v - k^v}{M^v}\right)^2 \left(\frac{M^v L}{k^{v-1}}\right)^2 \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq cL^2 \sum_{k=1}^{M-1} \frac{1}{k^{2v-2}} (M^v - k^v)^2 \leq cL^2 \sum_{k=1}^{[M/2]} \frac{M^{2v}}{k^{2v-2}} \leq \\ &\leq cL^2 \begin{cases} M^{2v}, & v > 3/2; \\ M^3 \ln M, & v = 3/2; \\ M^3, & v < 3/2, \end{cases} \end{aligned}$$

где n_0 — число кубов в области Ω_0 .

Число кубов в области Ω_0 оценивается равенством $n_0 = N^{2v} L^v$. Отсюда следует, что

$$n \leq cN^{2v} \ln^v N + c \begin{cases} N^{2v}/(\ln N)^{2v-2}, & v > 3/2; \\ N^3, & v = 3/2; \\ N^3/\ln N, & v < 3/2. \end{cases}$$

Так как выбором величины s всегда можно добиться того, что $v > 3/2$, то получаем оценку

$$\|U(x, y, z) - U_N(x, y, z)\|_C \leq cn^{-(s-\gamma)/2} (\ln n)^{s/2}.$$

Таким образом, построен алгоритм, погрешность которого отличается от погрешности оптимального алгоритма множителем $(\ln n)^{s/2}$, но который значительно более удобен на практике.

3.2. Аппроксимация потенциальных полей, принадлежащих классу функций $\tilde{B}_{\alpha,0,\gamma}(\Omega, M)$, $0 \leq \gamma \leq 1$, непрерывными локальными сплайнами в конечных областях

Построим метод аппроксимации функций из множества $\tilde{B}_{\alpha,0,\gamma}(\Omega, M)$ в предположении, что $\Omega = [-1, 1]^l$, $l = 2, 3, \dots$, а затем укажем способ распространения этого алгоритма на трехмерные области D , ограниченные гладкими поверхностями S .

При построении локального сплайна рассмотрим два случая:

- 1) $Me \leq 1$,
- 2) $Me > 1$.

Пусть вначале $Me \leq 1$.

Обозначим через Δ^0 множество точек x ($x = (x_1, \dots, x_l)$), расстояние от которых до границы $\Gamma = \partial\Omega$ области Ω удовлетворяет неравенству $0 \leq d(x, \Gamma) \leq \frac{1}{2^N}$. Через Δ^k , $k = 1, 2, \dots, N$, обозначим множество точек $x \in \Omega$, расстояние от которых до границы Γ области Ω удовлетворяет неравенствам

$$\frac{2^{k-1}}{2^N} \leq d(x, \Gamma) \leq \frac{2^k}{2^N}, k = 1, 2, \dots, N.$$

Каждую из областей Δ^k , $k = 0, 1, \dots, N$, покроем более мелкими кубами $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$ с гранями, параллельными координатным плоскостям, и с ребрами, равными

$$h_0 = \frac{1}{2^N}, \quad h_k = \frac{2^k - 2^{k-1}}{2^N}, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Ниже мы построим два вида локальных сплайнов — кусочно-непрерывный и непрерывный. Сначала построим локальный сплайн, который может иметь разрывы на гранях кубов $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$. Этот сплайн более удобен при реализации и имеет такую же точность, что и непрерывный сплайн.

Необходимость в построении непрерывного сплайна вызвана тем обстоятельством, что во многих задачах гравиразведки проводится анализ изменения потенциального поля во всей области.

Вначале остановимся на построении кусочно-непрерывного сплайна.

При построении кусочно-непрерывного локального сплайна, предназначенного для аппроксимации функций из класса $\tilde{B}_{\alpha, 0, \gamma}(\Omega, M)$, достаточно ограничиться описанным выше покрытием области Ω кубами $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$.

В каждой области $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$ функцию f будем аппроксимировать интерполяционным полиномом $P_{s_k, \dots, s_k}(f, \Delta_{i_1, \dots, i_l}^k)$, построенным по узлам полиномов Чебышева первого рода. Подробное построение описано в предыдущем разделе. Здесь $s_0 = 0$, $s_k = [k(1 - \gamma) + 1]$, $k = 1, 2, \dots, N$. Отметим, что $P_{0, \dots, 0}(f, \Delta_{i_1, \dots, i_l}^0)$ означает константу. Сплайн, составленный из полиномов $P_{s_k, \dots, s_k}(f, \Delta_{i_1, \dots, i_l}^k)$, $k = 0, 1, \dots, N$, обозначим через $f_N(x)$.

Оценим погрешность аппроксимации функции $\tilde{B}_{\alpha, 0, \gamma}(\Omega, M)$ сплайном $f_N(x)$.

Нетрудно видеть, что

$$\|f(x_1, \dots, x_l) - f_N(x_1, \dots, x_l)\|_{C(\Delta_{i_1, \dots, i_l}^0)} \leq ch_0^\alpha = \frac{c}{2^{N\alpha}},$$

где $h_0 = \frac{1}{2^N}$.

При $k = 1, 2, \dots, N - 1$ и $0 \leq \gamma < 1$ имеем

$$\begin{aligned} & \|f(x_1, \dots, x_l) - f_N(x_1, \dots, x_l)\|_{C(\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k)} \leq \\ & \leq c(h_k)^{s_k} \left(\frac{2^N}{2^{k-1}}\right)^{s_k-1+\gamma} (1 + |\ln 2^{k-N-1}|) \frac{M^{s_k} s_k^{s_k}}{2^{2s_k-1} s_k!} \leq \\ & \leq cN \left(\frac{2^{k-1}}{2^N}\right)^{s_k} \left(\frac{2^N}{2^{k-1}}\right)^{s_k-1+\gamma} \frac{s_k^{s_k} M^{s_k}}{2^{s_k} \sqrt{2\pi s_k}} \left(\frac{e}{s_k}\right)^{s_k} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq cN \frac{2^{k(1-\gamma)}}{2^{N(1-\gamma)}} \left(\frac{Me}{2}\right)^{s_k} \frac{1}{\sqrt{2\pi s_k}} \leq \\ &\leq cN \frac{1}{2^{N(1-\gamma)}} \left(\frac{2^{k(1-\gamma)/s_k} Me}{2}\right)^{s_k} \frac{1}{\sqrt{2\pi s_k}} \leq c \frac{N}{2^{N(1-\gamma)}}, \end{aligned}$$

$$h_k = 2^{k-N} - 2^{k-1-N} = 2^{k-1-N}.$$

Оценим число узлов сплайна $f_N(x)$.

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} n &\asymp 2^N + \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{2 - 2^{k-N}}{2^{k-1-N}}\right)^{l-1} k^l \asymp \\ &\asymp 2^{N(l-1)} + \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{2^N - 2^k}{2^k}\right)^{l-1} k^l \asymp 2^{N(l-1)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|f(x_1, \dots, x_l) - f_N(x_1, \dots, x_l)\|_{C(\Omega)} \leq c \left(\frac{1}{n^{\alpha/(l-1)}} + \frac{1}{n^{(1-\gamma)/(l-1)}} \right) \ln n.$$

Таким образом, при $1 - \gamma > \alpha$ имеем оценку

$$\|f(x_1, \dots, x_l) - f_N(x_1, \dots, x_l)\|_{C(\Omega)} \leq c \frac{\ln n}{n^{\alpha/(l-1)}}.$$

Пусть $\gamma > 1 - \alpha$. Внесем изменения в алгоритм аппроксимации. Сохраним покрытие области Ω кубами $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$, построенное выше. В каждом кубе $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$ функцию $f(x)$ будем аппроксимировать полином $P_{s_k, \dots, s_k}(f, \Delta_{i_1, \dots, i_l}^k)$, где $s_0 = 0$, $s_k = N$. Сплайн, составленный из полиномов $P_{s_k, \dots, s_k}(f, \Delta_{i_1, \dots, i_l}^k)$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$, обозначим через $f_N(x_1, \dots, x_l)$.

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} &\|f(x_1, \dots, x_l) - f_N(x_1, \dots, x_l)\|_{C(\Delta_{i_1, \dots, i_l}^0)} \leq \frac{c}{2^{N\alpha}}; \\ &\|f(x_1, \dots, x_l) - f_N(x_1, \dots, x_l)\|_{C(\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k)} \leq \\ &\leq c (h_k)^{s_k} \left(\frac{2^{s_k}}{2^{k-1}}\right)^{s_k-1+\gamma} \frac{s_k^{s_k} M^{s_k}}{2^{s_k-1} s_k!} (1 + |\ln 2^{k-N-1}|) \leq \\ &\leq cN \frac{2^{k(1-\gamma)}}{2^{N(1-\gamma)}} \left(\frac{Me}{2}\right)^{s_k} \frac{1}{\sqrt{2\pi s_k}} \leq \frac{cN}{2^N \alpha}. \end{aligned}$$

Число n узлов сплайна $f_N(x)$ оценивается равенством

$$n \asymp 2^{N(l-1)}.$$

Следовательно, в общем случае

$$\|f(x_1, \dots, x_l) - f_N(x_1, \dots, x_l)\|_{C(\Omega)} \leq \frac{c}{n^{\alpha/(l-1)}}.$$

Отметим изменения, необходимые для построения непрерывного сплайна. Используя покрытие $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, сплайн $f_N(x)$ составляем из полиномов $P_{N, \dots, N}(f, \Delta_{i_1, \dots, i_l}^k)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, и используем конструкцию, неоднократно описанную выше. При этом $n \asymp 2^{N(l-1)} N^l$ и

$$\|f(x_1, \dots, x_l) - f_N(x_1, \dots, x_l)\| \leq \frac{c(\log_2 n)^{1+\alpha l/(l-1)}}{n^{\alpha(l-1)}}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда $Me \geq 1$. Покроем куб Ω областями Δ^k , $k = 1, \dots, N-1$, состоящими из точек $x = (x_1, \dots, x_l)$, удовлетворяющих неравенствам

$$\left(\frac{e^{k-1}}{e^N}\right)^v \leq d(x, \Gamma) \leq \left(\frac{e^k}{e^N}\right)^v, \quad v = \ln\left(1 + \frac{2}{Me^2}\right).$$

Область Δ^0 определяется неравенствами $0 \leq d(x, \Gamma) \leq 1/e^{Nv}$.

Каждую из областей Δ^k , $k = 0, 1, \dots, N-1$, покроем кубами и параллелепипедами $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$. Способ построения последних неоднократно был описан выше.

В каждом кубе $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$ функцию $f(x)$ аппроксимируем полиномом $P_{s_k, \dots, s_k}(f, \Delta_{i_1, \dots, i_l}^k)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, $s_k = [kv]+1$. Обозначим через $f_N(x)$ сплайн, составленный из полиномов $P_{s_k, \dots, s_k}(f, \Delta_{i_1, \dots, i_l}^k)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$. Общее число узлов локального сплайна равно

$$n \asymp \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{2 - e^{(k-1-N)v}}{e^{(k-1-N)v}(e^v - 1)}\right)^{l-1} (kv)^l \asymp \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{2e^{Nv}}{e^{(k-1)v}}\right)^{l-1} (kv)^l \asymp e^{Nv(l-1)}.$$

Отсюда

$$N \asymp \frac{1}{v(l-1)} \ln n.$$

Оценим погрешность аппроксимации. Очевидно,

$$\begin{aligned} \|f(x) - f_N(x)\|_{C(\Delta_{i_1, \dots, i_l}^0)} &\leq ch_0^\alpha = \frac{c}{e^{Nv\alpha}} \leq \frac{c}{n^{\alpha/(l-1)}}; \\ \|f(x) - f_N(x)\|_{C(\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k)} &\leq \\ &\leq ch_k^{s_k} \left(\frac{e^{Nv}}{e^{(k-1)v}}\right)^{s_k-1+\gamma} \frac{s_k^{s_k} M^{s_k}}{2^{s_k} s_k!} \left(1 + \left|\ln\left(\frac{e^{k-1}}{e^N}\right)^v\right|\right) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq cN \left(\frac{e^{(k-1)v}(e^v - 1)}{e^{Nv}} \right)^{s_k} \left(\frac{e^{Nv}}{e^{(k-1)v}} \right)^{s_k - 1 + \gamma} \frac{s_k^{s_k} M^{s_k}}{2^{s_k} \sqrt{2\pi s_k}} \left(\frac{e}{s_k} \right)^{s_k} \leq \\
&\leq cN \left(\frac{1}{e^{Nv}} \right)^{1-\gamma} (e^{(k-1)(1-\gamma)v/s_k} (e^v - 1))^{s_k} \left(\frac{Me}{2} \right)^{s_k} \frac{1}{\sqrt{2\pi s_k}} \leq \\
&\leq cN \left(\frac{1}{e^{Nv}} \right)^{1-\gamma} \left(\frac{Me}{2} e^{(k-1)(1-\gamma)v/s_k} (e^v - 1) \right)^{s_k} \leq \frac{cN}{(e^{Nv})^{1-\gamma}} \leq \frac{c \ln n}{n^{(1-\gamma)/(l-1)}}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|f(x) - f_N(x)\|_{C(\Omega)} \leq c \left(\frac{\ln n}{n^{(1-\gamma)/(l-1)}} + \frac{\ln n}{n^{\alpha/(l-1)}} \right).$$

Замечание. При использовании равномерной сетки имеем погрешность порядка $n^{-\alpha/l}$.

Опишем способ построения локального сплайна в областях, ограниченных поверхностями Ляпунова. Для определенности рассмотрим выпуклую область D , ограниченную гладкой поверхностью S . Обозначим через R радиус наибольшей сферы, которую можно вписать в поверхность S . Пусть (x_0, y_0, z_0) — центр этой сферы. Обозначим через N натуральное число. Заклучим D в параллелепипед G . Покроем параллелепипед G кубами с ребрами, равными $\frac{R}{2}$. Назовем отмеченными те кубы, имеющие непустое пересечение с D , расстояние от которых до границы S области D удовлетворяет неравенству $\frac{R}{2} \leq d(t, S)$. Обозначим эти кубы через Δ_i^N . Объединение этих кубов назовем покрытием. Оно составляет первый этап замощения. Покроем параллелепипед G кубам Δ_i^{N-1} с ребрами, равными $\frac{1}{4}R$. Назовем отмеченными те кубы, которые имеют непустое пересечение с D , не входят в первый этап замощения и расстояние от которых до границы S удовлетворяет неравенствам $\frac{R}{4} \leq d(t, S) \leq \frac{R}{2}$. Аналогичным образом покроем область D кубами $\Delta_i^k, k = N-2, \dots, 0$, с ребрами, равными $\frac{R}{8}, \dots, \frac{R}{2^N}$. Области, которые являются соответствующими покрытиями, назовем $N-2, N-3, \dots, 0$ покрытиями области D . Область, являющуюся объединением $0, 1, \dots, N$ покрытий, обозначим через D^* . В каждом из $\Delta_i^k, k = 0, 1, \dots, N$, кубов, входящих в область D^* , функцию $f(t)$ аппроксимируем интерполяционным полиномом $P_{s_k, \dots, s_k}(f, \Delta_i^k)$, где s_k выбирается в зависимости от величины Me . Способ выбора s_k описан выше.

Сплайн, составленный из полиномов $P_{s_k, \dots, s_k}(f, \Delta_i^k), k = 0, 1, \dots, N$, обозначим через $f_N(x)$. Очевидно, этот сплайн не является непрерывным. Его погрешность на классе функций $\tilde{B}_{\alpha, 0, \gamma}(D, M)$ равна

$$\|f(x) - f_N(x)\|_{C(D)} \leq c \left(\frac{\ln n}{n^{(1-\gamma)/(l-1)}} + \frac{\ln n}{n^{\alpha/(l-1)}} \right).$$

Для построения непрерывного сплайна достаточно провести построения, описанные в разд. 2.

3.3. Аппроксимация потенциальных полей рядами Котельникова

В этом разделе исследуется метод восстановления потенциальных полей рядами Котельникова. Для простоты обозначений рассмотрим только случай, когда $\Omega = [-H, H]^3$. Будем также считать, что потенциальное поле принадлежит классу функций $B_{r,\gamma}(\Omega, M)$.

В разд. 3.1 построен локальный сплайн $U_s(x, y, z)$, восстанавливающий функцию $U(x, y, z)$ с точностью $\varepsilon = cn^{-s/2}$, где n — число функционалов, используемых при построении сплайна $U_s(x, y, z)$. Продолжим функцию $U_s(x, y, z)$ на все пространство R_3 , положив ее вне области Ω равной нулю. Полученную в результате продолжения функцию обозначим вновь через $U_s(x, y, z)$.

Замечание. Продолжение функции $U_s(x, y, z)$ можно осуществить с помощью полиномов Бернштейна.

Применим к функции $U_s(x, y, z)$ преобразование Фурье по переменным x, y, z :

$$\tilde{U}_s(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_s(x, y, z) e^{-i(\omega_1 x_1 + \omega_2 y_2 + \omega_3 z_3)} dx dy dz. \quad (3.7)$$

Обратное преобразование вычисляется по формуле

$$U_s(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}_s(\omega_1, \omega_2, \omega_3) e^{i(\omega_1 x_1 + \omega_2 y_2 + \omega_3 z_3)} d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3.$$

Так как в пространстве L_2 норма преобразования Фурье равна единице, то

$$\|U(x, y, z) - U_s(x, y, z)\| = \|\tilde{U}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) - \tilde{U}_s(\omega_1, \omega_2, \omega_3)\| \leq \varepsilon_1 = H^3 \varepsilon.$$

Известно, что преобразование Фурье $\tilde{U}_s(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ стремится к нулю, когда переменные $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ стремятся к бесконечности и, кроме того,

$$\iiint_{E_3} |\tilde{U}_s(\omega_1, \omega_2, \omega_3)|^2 d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 < \infty.$$

Следовательно, существует такая константа L , что

$$\left[\iiint_{D^*} |\tilde{U}_s(\omega_1, \omega_2, \omega_3)|^2 d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 \right]^{1/2} \leq \varepsilon, \quad (3.8)$$

где $D^* = E_3 \setminus D$, $D = [-L, L]^3$.

Обозначим через $\bar{U}_s^*(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ сужение функции $\tilde{U}_s(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ на область D . Через $U_s^*(x, y, z)$ обозначим функцию

$$U_s^*(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint_D \bar{U}_s^*(\omega_1, \omega_2, \omega_3) e^{i(\omega_1 x + \omega_2 y + \omega_3 z)} d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3. \quad (3.9)$$

Повторим рассуждения, проведенные в [223, с. 153, 154] в одномерном случае. Разложим функцию $\bar{U}_s^*(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ в ряд Фурье

$$\bar{U}_s^*(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \sum_{k_3=-\infty}^{\infty} c_{k_1 k_2 k_3} e^{-i\frac{\pi}{L}(k_1 \omega_1 + k_2 \omega_2 + k_3 \omega_3)}, \quad (3.10)$$

коэффициенты $c_{k_1 k_2 k_3}$ которого равны

$$c_{k_1 k_2 k_3} = \frac{1}{(2L)^3} \int_{-L}^L \int_{-L}^L \int_{-L}^L \bar{U}_s^*(\omega_1, \omega_2, \omega_3) e^{i\frac{\pi}{L}(k_1 \omega_1 + k_2 \omega_2 + k_3 \omega_3)} d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3. \quad (3.11)$$

Сравнивая формулы (3.9) и (3.11), видим, что

$$c_{k_1 k_2 k_3} = \frac{(2\pi)^{3/2}}{(2L)^3} U_s^* \left(\frac{k_1 \pi}{L}, \frac{k_2 \pi}{L}, \frac{k_3 \pi}{L} \right).$$

Подставляя (3.10) в (3.9) и меняя порядок интегрирования и суммирования, имеем

$$\begin{aligned} U_s^*(x, y, z) &= \frac{1}{(2L)^3} \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \sum_{k_3=-\infty}^{\infty} U_s^* \left(\frac{k_1 \pi}{L}, \frac{k_2 \pi}{L}, \frac{k_3 \pi}{L} \right) \times \\ &\times \iiint_D e^{i(\omega_1(x - k_1 \pi/L) + \omega_2(y - k_2 \pi/L) + \omega_3(z - k_3 \pi/L))} d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 = \\ &= \frac{1}{(2L)^3} \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \sum_{k_3=-\infty}^{\infty} U_s^* \left(\frac{k_1 \pi}{L}, \frac{k_2 \pi}{L}, \frac{k_3 \pi}{L} \right) \times \\ &\times \int_{-L}^L e^{i\omega_1(x - k_1 \pi/L)} d\omega_1 \int_{-L}^L e^{i\omega_2(y - k_2 \pi/L)} d\omega_2 \int_{-L}^L e^{i\omega_3(z - k_3 \pi/L)} d\omega_3 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \sum_{k_3=-\infty}^{\infty} U_s^* \left(\frac{k_1\pi}{L}, \frac{k_2\pi}{L}, \frac{k_3\pi}{L} \right) \times \\
&\times \frac{\sin L(x - k_1\pi/L) \sin L(y - k_2\pi/L) \sin L(z - k_3\pi/L)}{L(x - k_1\pi/L) L(y - k_2\pi/L) L(z - k_3\pi/L)}. \quad (3.12)
\end{aligned}$$

Таким образом, построен алгоритм аппроксимации потенциальных полей, при котором аппроксимация проводится целыми функциями.

Погрешность этого алгоритма не превосходит величины $v = An^{-r/2}$, где n — число измеренных значений потенциального поля $U(x, y, z)$.

3.4. Восстановление потенциальных полей в неограниченных областях

В этом разделе исследуются оптимальные методы восстановления потенциальных полей, определенных в области R_3 . В частности, исследуются оптимальные методы восстановления гравитационных полей, создаваемых телами различной конфигурации.

3.4.1. Оптимальное восстановление потенциальных полей в неограниченных областях

Оценки оптимальных методов восстановления функций на компактах определяются величинами поперечников Колмогорова и Бабенко соответствующих классов функций. Так как пространство непрерывных функций в R_l не является полным, то необходимы другие определения, характеризующие точность аппроксимации в R_l , в частности, определение поперечников в среднем [131]. Однако возможна и другая постановка задачи.

Задача. Пусть $\tilde{\Omega} = R_l \setminus (-1, 1)^l$, ε ($\varepsilon > 0$) — как угодно малое вещественное число. Требуется построить оптимальный по порядку (по точности) метод аппроксимации функций из класса $Q_{(r,m)\gamma}(\tilde{\Omega}, M)$ с точностью ε .

Приступая к решению этой задачи, определим область D такую, что при $x \in \tilde{\Omega} \setminus D$ $|f(x)| \leq \varepsilon$, $x = (x_1, \dots, x_l)$, $f(x) \in Q_{(r,m)\gamma}(\tilde{\Omega}, M)$. Из определения класса функций $Q_{(r,m)\gamma}(\tilde{\Omega}, M)$ следует, что $D = [-\rho, \rho]^l \setminus (-1, 1)^l$, где $\rho = [\varepsilon^{-1/m}] + 1$.

Обозначим через $Q_{(r,m)\gamma}(\tilde{\Omega}(D), M)$ сужение класса функций $Q_{(r,m)\gamma}(\tilde{\Omega}, M)$ на область D . Вычислим поперечники Бабенко и Колмогорова для $Q_{(r,m)\gamma}(\tilde{\Omega}(D), M)$.

Обозначим через Δ_k множество точек x , удовлетворяющих неравенствам $\rho\left(\frac{k}{N}\right)^v \leq d(x, \Gamma) \leq \rho\left(\frac{k+1}{N}\right)^v$, $k = 1, \dots, N-1$, $v = s/(s-\gamma)$. Через Δ_0 обозначено множество точек x , удовлетворяющих неравенствам $1 \leq d(x, \Gamma) \leq \rho\left(\frac{1}{N}\right)^v$.

Здесь Γ – внутренняя граница области D . Каждую область Δ_k покроем более мелкими областями $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$, построение которых при $l = 3$ описано в разд. 2.

Оценим число кубов, из которых состоит покрытие области D . Показано, что

$$n \asymp \begin{cases} N^{v(l-1)}, v > l/(l-1); \\ N^l \ln N, v = l/(l-1); \\ N^l, v < l/(l-1). \end{cases}$$

Пусть $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k = [b_{i_1}^k, b_{i_1+1}^k; \dots; b_{i_l}^k, b_{i_l+1}^k]$. В каждом кубе $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$ построим функцию

$$\psi(x_1, \dots, x_l) = A \frac{((x_1 - b_{i_1}^k)(b_{i_1+1}^k - x_1) \cdots (x_l - b_{i_l}^k)(b_{i_l+1}^k - x_l))^s}{h_k^{s(2l-1)} (\rho((k+1)/N)^v)^\gamma},$$

$$h_k = \rho\left(\left(\frac{k+1}{N}\right)^v - \left(\frac{k}{N}\right)^v\right).$$

Константа A подбирается из требования, чтобы

$$\psi(x_1, \dots, x_l) \in Q_{r\gamma}(\Omega, M).$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \psi(x_1, \dots, x_l) &\geq ch_k^s \frac{1}{(\rho((k+1)/N)^v)^\gamma} = \\ &= c\rho^{s-\gamma} \left(\left(\frac{k+1}{N}\right)^v - \left(\frac{k}{N}\right)^v \right)^s \left(\frac{N}{k+1}\right)^{v\gamma} = c \frac{\rho^{s-\gamma}}{N^s}. \end{aligned}$$

Следовательно, повторяя неоднократно приведенные рассуждения, имеем

$$\delta_n(Q_{(r,m)\gamma}(\tilde{\Omega}(D), M)) \geq c\rho^{s-\gamma} \begin{cases} n^{-(s-\gamma)/(l-1)}, v > l/(l-1); \\ n^{-s/l} (\ln n)^{s/l}, v = l/(l-1); \\ n^{-s/l}, v < l/(l-1). \end{cases}$$

Построим непрерывный локальный сплайн, из оценки погрешности которого следует оценка сверху поперечника Колмогорова.

Покроем область D кубами $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$, $k = 0, 1, \dots, N-1$. Для этого воспользуемся построенными выше областями Δ^k , $k = 0, 1, \dots, N-1$. Пусть $h_k = \rho((k+1)^v - k^v)N^{-v}$, $k = 0, 1, \dots, N-1$. Построение областей $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$,

$k = 0, 1, \dots, N - 1$, начнем с области Δ_0 . Покроем область Δ_0 кубами и параллелепипедами $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^0$ с ребрами, параллельными осям координат, причем длины ребер должны быть не меньше h_0 и не превышать $2h_0$. При этом вершины куба $[-1, 1]^l$ входят в число вершин кубов $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^0$. Область Δ_1 покрывается кубами и параллелепипедами $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^1$ с ребрами, длины которых не меньше h_1 и не больше $2h_1$. При этом вершины куба Δ_0 должны входить в число вершин кубов $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^1$, и, кроме того, на поверхности области Δ_0 не должно быть вершин областей $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^1$, не совпадающих с вершинами областей $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^0$. Аналогичным образом области Δ_k покрываются более мелкими областями $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$, $k = 2, 3, \dots, N - 1$.

Построение локального сплайна начнем с куба $\Delta_{1, \dots, 1}^{N-1}$.

В этом кубе функция $f(x_1, \dots, x_l)$ приближается интерполяционным полиномом $L_{s, \dots, s}(f, \Delta_{1, \dots, 1}^{N-1})$, построение которого описано выше. После этого переходим к кубу $\Delta_{1, \dots, 1, 2}^{N-1}$, граничащему с кубом $\Delta_{1, \dots, 1}^{N-1}$. В этом кубе строится интерполяционный полином $L_{s, \dots, s}(\bar{f}, \Delta_{1, \dots, 1, 2}^{N-1})$, где $\bar{f}(x_1, \dots, x_l)$ — функция, равная $f(x_1, \dots, x_l)$ всюду в $\Delta_{1, \dots, 1, 2}^{N-1}$, кроме граней куба $\Delta_{1, \dots, 1, 2}^{N-1}$, общих с кубом $\Delta_{1, \dots, 1}^{N-1}$, а на этих гранях равна полиному $L_{s, \dots, s}(f, \Delta_{1, \dots, 1}^{N-1})$. Подобное построение проводится во всей области Δ^{N-1} , причем при построении интерполяционного полинома в кубе $\Delta_{i_1^* \dots i_l^*}^{N-1}$, завершающем покрытие области Δ^{N-1} , на гранях куба $\Delta_{i_1^* \dots i_l^*}^{N-1}$, общих с гранями кубов $\Delta_{i_1 \dots i_l}^{N-1}$, в качестве значений интерполируемых функций берутся значения ранее построенных интерполяционных полиномов $L_s(f, \Delta_{i_1 \dots i_l}^{N-1})$. Аналогичным образом строятся интерполяционные полиномы и в остальных областях Δ^k , $k = 0, 1, \dots, N - 2$, причем при переходе от области Δ^k к области Δ^{k-1} , $k = 1, 2, \dots, N - 1$, соблюдаются условия равенства построенных интерполяционных полиномов на всех общих гранях. Переход от области Δ^k к области Δ^{k-1} описан в разд. 2. Сплайн, построенный таким образом, обозначим через $f_N(x_1, \dots, x_l)$.

Оценим норму $\|f(x_1, \dots, x_l) - f_N(x_1, \dots, x_l)\|_C$. При этом нужно рассмотреть два случая:

- а) точка $(x_1, \dots, x_l) \in \Delta^0$;
- б) точка $(x_1, \dots, x_l) \in \Delta^k$, $k = 1, 2, \dots, N - 1$.

В первом случае при γ целом справедлива оценка

$$\|f(x_1, \dots, x_l) - f_N(x_1, \dots, x_l)\|_{C(\Delta_{i_1, \dots, i_l}^0)} \leq c \rho^r \frac{1}{N^{rv}} = c \frac{\rho^{s-\gamma}}{N^s}.$$

При γ нецелом величину $E_{s-1, \dots, s-l}(f, \Delta_{i_1, \dots, i_l}^0)$ мажорируем, используя формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

В результате имеем оценку

$$\begin{aligned} & \|f(x_1, \dots, x_l) - f_N(x_1, \dots, x_l)\|_{C(\Delta_{i_1, \dots, i_l}^0)} \leq \\ & \leq cE_{s-1, \dots, s-l}(f, \Delta_{i_1, \dots, i_l}^0)\lambda_s^l \leq ch_0^{r+\zeta} \leq c\left(\frac{\rho}{N^v}\right)^{r+\zeta} = c\frac{\rho^{s-\gamma}}{N^s}. \end{aligned}$$

Второй случай неоднократно рассматривался выше:

$$\|f(x_1, \dots, x_l) - f_N(x_1, \dots, x_l)\|_{C(\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k)} \leq c\frac{\rho^{s-\gamma}}{N^s}.$$

Так как сплайн $f_N(x_1, \dots, x_l)$ непрерывный, то из последних неравенств и из соотношения, связывающего n и N , имеем

$$d_n(Q_{(r,m)\gamma}(\Omega(D), M), C) \leq c\rho^{s-\gamma} \begin{cases} n^{-(s-\gamma)/(l-1)}, v > l/(l-1); \\ n^{-s/l} \ln n, v = l/(l-1); \\ n^{-s/l}, v < l/(l-1). \end{cases}$$

Из оценок поперечников Бабенко и Колмогорова и неравенства $\delta_n(X) \leq 2d_n(X, B)$ приходим к следующему утверждению.

Теорема 3.1. Пусть ρ – вещественное положительное число, $\rho > 1$; $D = [-\rho, \rho]^l \setminus (-1, 1)^l$, $Q_{(r,m)\gamma}(\tilde{\Omega}(D), M)$ – сужение класса функций $Q_{(r,m)\gamma}(\tilde{\Omega}, M)$ на область D . Справедливы оценки

$$\begin{aligned} & \delta_n(Q_{(r,m)\gamma}(\tilde{\Omega}(D), M)) \asymp d_n(Q_{(r,m)\gamma}(\tilde{\Omega}(D), M), C) \asymp \\ & \asymp \rho^{s-\gamma} \begin{cases} n^{-(s-\gamma)/(l-1)}, v > l/(l-1); \\ n^{-s/l} (\ln n)^{s/l}, v = l/(l-1); \\ n^{-s/l}, v < l/(l-1). \end{cases} \end{aligned}$$

Вернемся к поставленной в начале раздела задаче. Требуется построить метод аппроксимации функций из $Q_{(r,m)\gamma}(\tilde{\Omega}, M)$, имеющий точность ε и использующий наименьшее число функционалов. Число узлов локального сплайна, реализующего решение задачи, определяется из уравнения $d_n(Q_{(r,m)\gamma}(\tilde{\Omega}(D), M), C) = \varepsilon$. Отсюда имеем

$$n \asymp \begin{cases} \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{(m+s-\gamma)(l-1)}{m(s-\gamma)}}, v > l/(l-1); \\ \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{(m+s-\gamma)l}{m}} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-s/l}, v = l/(l-1); \\ \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{(m+s-\gamma)l}{m}}, v < l/(l-1). \end{cases}$$

Отметим, что при построении локального сплайна для восстановления потенциальных функций из области $\tilde{\Omega}$, являющейся дополнением шара $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1$ до трехмерного пространства, выделяется область

$\tilde{\Omega}^*$, расположенная между двумя концентрическими сферами с радиусами, равными 1 и $R = \varepsilon^{-1/m}$. Построим систему концентрических сфер с радиусами $r_k = 1 + (R - 1) \left(\frac{k}{N}\right)^v$, $k = 1, 2, \dots, N$, $v = s/(s - \gamma)$. Пусть $r_0 = 1$. Обозначим через Δ_k , $k = 0, 1, \dots, N - 1$, множество точек $P = (x_1, x_2, x_3)$, удовлетворяющих неравенствам $r_k \leq d(P, \partial\Gamma) \leq r_{k+1}$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$, где $d(P, \partial\Gamma)$ — расстояние от точки P до сферы $\partial\Gamma = \{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$.

Каждую из областей Δ_k разделим следующим образом на сферические параллелепипеды. Пусть $h_k = r_{k+1} - r_k$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$, — расстояние между соседними концентрическими сферами. Покроем сферу S_{k+1} с радиусом r_{k+1} множеством сферических параллелепипедов. Введем сферическую систему координат, поместив начало координат в центр единичного шара.

Поставим каждой области Δ_k , $k = 0, 1, \dots, N - 1$, в соответствие множество узлов Θ_i^k, φ_j^k , которые определяются следующим образом. Обозначим через $M_{k+1, i+1, j+1}$ точку, имеющую сферические координаты $(r_{k+1}, \Theta_{i+1}, \varphi_{j+1})$. Значения $\Theta_{i+1}, \varphi_{j+1}$ подбираются из требования, чтобы расстояние между точками $M_{k+1, i, j}$ и $M_{k+1, i+1, j}$, а также между точками $M_{k+1, i, j}$ и $M_{k+1, i, j+1}$ было бы равно h_k , $k = 0, 1, \dots, N - 1$. Соединим точки $M_{k+1, i, j}$ с началом координат и обозначим через $M_{k+1, i, j}^0$ пересечения этих прямых со сферой S_k . Обозначим через Δ_{kij} сферический параллелепипед с вершинами в точках $M_{k+1, i, j}^0, M_{k+1, i+1, j}^0, M_{k+1, i, j+1}^0, M_{k+1, i+1, j+1}^0, M_{k+1, i, j}, M_{k+1, i+1, j}, M_{k+1, i, j+1}, M_{k+1, i+1, j+1}$.

Построение локального сплайна в каждом из сферических параллелепипедов, покрывающих область $\tilde{\Omega}^*$, подобно описанному выше.

3.4.2. Оптимальные методы восстановления гравитационных полей, создаваемых телами различной конфигурации

В зависимости от формы тела, создающего гравитационное поле, рассмотрим несколько классов полей.

1. Гравитационное поле создается материальным объектом, простирающимся в бесконечность.

В этом случае гравитационное поле описывается следующим выражением [103, с. 58]:

$$U(x, 0) = \sigma H \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z(\zeta) d\zeta}{(x - \zeta)^2 + H^2}, \quad (3.14)$$

где σ — постоянная плотность тела, расположенного между плоскостью $z = -H$ и поверхностью $z = -H + z(x)$. Здесь $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} z(x) = 0$.

2. Задача для контактной поверхности.

В этом случае гравитационное поле описывается выражением

$$U(x, y, 0) = \sigma H \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\zeta, \eta) d\zeta d\eta}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + H^2)^{3/2}}. \quad (3.15)$$

Здесь σ — плотность тела, расположенного между поверхностями $z = -H$ и $z = -H + \varphi(x, y)$, причем $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \varphi(x, y) = 0$.

3. В случае, если рудное тело имеет плотность $\sigma(x, y, z)$ и занимает область Q , то гравитационное поле описывается выражением

$$U(x, y, z) = \iiint_Q \frac{\sigma(\zeta, \eta, \xi)(z - \xi) d\zeta d\eta d\xi}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \xi)^2)^{3/2}}. \quad (3.16)$$

Здесь Q — область в E_3 , определяемая уравнениями $z = -H$, $z = -H + \varphi(x, y)$. В случае, если Q — конечная область, то она определяется уравнениями $z = -H$, $z = -H + \varphi(x, y)$, где $\varphi(x, y) = 0$ при $(x, y) \in (-\infty, \infty)^2 \setminus [-a, a]^2$, $\varphi(x, y) > 0$ при $(x, y) \in [-a, a]^2$.

Выделим классы функций, к которым принадлежат описанные выше поля.

Вначале рассмотрим первый случай в предположении, что функция $z = z(x)$ не имеет конечного носителя и в предположении, что $\int_{-\infty}^{\infty} z(\zeta) d\zeta = B < \infty$. Тогда функция $U(x, 0)$ бесконечно дифференцируема и ее r -я производная удовлетворяет неравенству

$$\|U^{(r)}(x, 0)\|_{C(-\infty, \infty)} \leq \frac{c r! 4^r}{H^{r+1}}. \quad (3.17)$$

Если функция $z(x)$ имеет конечный носитель, то функция $U(x, 0)$ бесконечно дифференцируема и ее r -я производная удовлетворяет неравенству

$$\|U^{(r)}(x, 0)\|_{C(-\infty, \infty)} \leq \frac{c 4^r r! H}{d(x, \Gamma)^{r+2}}, \quad (3.18)$$

где $d(x, \Gamma)$ — расстояние от точки x до границы Γ тела; константу c в дальнейшем полагаем равной единице.

Во втором случае также нужно рассмотреть две ситуации: функция $\varphi(x, y)$ не финитна и функция $\varphi(x, y)$ финитна.

В обоих случаях функция $U(x, y, 0)$ имеет счетное множество производных. Отличие состоит в оценках модулей этих производных. Если функция $\varphi(x, y)$ не является финитной, то

$$\|U^{(r_1, r_2)}(x, y, 0)\|_C \leq \frac{c 4^r r!}{H^{r+2}}, \quad r = r_1 + r_2, \quad (3.19)$$

а если функция $\varphi(x, y)$ является финитной, то

$$\|U^{(r_1, r_2)}(x, y, 0)\|_C \leq \frac{c4^r r! H}{d((x, y), \Gamma)^{r+3}}, \quad r = r_1 + r_2, \quad (3.20)$$

где $d((x, y), \Gamma)$ — расстояние от точки (x, y) до тела.

В третьем случае функция $U(x, y, z)$ имеет счетное множество производных и справедлива оценка

$$\|U^{(r_1, r_2, r_3)}(x, y, z)|_{z=0}\|_C \leq \frac{c4^r r! H}{d((x, y, z), \Gamma)^{r+3}}, \quad r = r_1 + r_2 + r_3, \quad (3.21)$$

где $d((x, y, z), \Gamma)$ — расстояние от точки (x, y, z) до границы Γ тела Q .

При исследовании первого и второго случаев для простоты обозначений будем полагать $\sigma = 1$. Кроме того, в формулах (3.19)–(3.21) константы будем для простоты полагать равными единице.

3.4.2.1. Одномерный случай

Так как в геофизике реальны тела конечных размеров, то остановимся на случае, когда функция $U(x, 0)$ описывается равенством (3.14) с финитной функцией $z(x)$, $x \in [-a, a]$. Таким образом, нужно построить оптимальный метод восстановления функций, определенных на оси $(-\infty, \infty)$, удовлетворяющих неравенству (3.18) и при $|x| > a + 1$ неравенству

$$|U(x, 0)| \leq \frac{1}{(d(x, \Gamma))^2}. \quad (3.22)$$

Описанный выше класс функций обозначим через $U_{a, H}$, где $[-a, a]$ — носитель функции $z(x)$.

Ставится задача построения оптимального алгоритма восстановления функций, принадлежащих классу $U_{a, H}$.

Для определенности положим $H > 8ae$.

Разобьем числовую ось на три части: $(-\infty, -B)$, $[-B, B]$, (B, ∞) , где $B = \sqrt{H}2^{(N-1)/2}$, N — натуральное число, величина которого определяется заданной точностью аппроксимации.

Функцию $U(x, 0)$ будем аппроксимировать функцией $U^*(x, 0)$, которая равна нулю на множествах $(-\infty, -B)$, (B, ∞) , а на сегменте $[-B, B]$ является локальным сплайном, построение которого описано ниже.

Разобьем сегмент $[-B, B]$ на более мелкие сегменты точками $-x_{N_1}$, $-x_{N_1-1}, \dots, -x_1$, $-x_m^*$, $-x_{m-1}^*, \dots, -x_1^*$, $0, x_1^*, \dots, x_m^*$, x_1, \dots, x_{N_1} , где $x_1 = a$, $x_2 = \frac{5}{4}a$, $x_3 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 a, \dots, x_{N_1-1} = \left(\frac{5}{4}\right)^{N_1-1} a$, $x_{N_1} = B$; $x_k^* = \frac{2ae}{H}k$,

$k = 1, 2, \dots, m - 1$, $x_m^* = a$, $N_1 = \left[\left((N - 1)/2 - \log_2 a/\sqrt{H} \right) / \log_2 \frac{5}{4} \right] + 1$,
 $m = \lceil H/(2e) \rceil + 1$.

Обозначим через Δ_k и Δ_l^* сегменты $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 1, 2, \dots, N_1 - 1$ и $[x_l^*, x_{l+1}^*]$, $l = 0, 1, \dots, m - 1$. Сегменты $[-x_{k+1}, -x_k]$ и $[-x_{l+1}^*, -x_l^*]$, симметричные сегментам $[x_k, x_{k+1}]$ и $[x_l^*, x_{l+1}^*]$, обозначаются через $\bar{\Delta}_k$ и $\bar{\Delta}_l^*$ соответственно.

Нетрудно видеть, что число n этих сегментов равно $n = \frac{(1+o(1))N}{\log_2(5/4)}$.

В сегменте Δ_k функцию $U(x, 0)$ будем аппроксимировать полиномом $P_s(U(x, 0), \Delta_k)$, $k = 1, 2, \dots, N_1$, $s = N$.

Аппроксимация в сегментах $\bar{\Delta}_k$, Δ_l^* , $\bar{\Delta}_l^*$ проводится аналогично.

Локальный сплайн, составленный из полиномов $P_s(U(x, 0), \Delta_k)$, $P_s(U(x, 0), \bar{\Delta}_k)$, $P_s(U(x, 0), \Delta_l^*)$, $P_s(U(x, 0), \bar{\Delta}_l^*)$, обозначим через $U_N(x, 0)$.

Оценим точность аппроксимации функции $U(x, 0)$ локальным сплайном $U_N(x, 0)$ на сегменте $[-B, B]$. При этом нужно отдельно оценить точность аппроксимации на сегментах Δ_k и Δ_l^* .

В сегменте Δ_k ($\bar{\Delta}_k$)

$$\begin{aligned} \|U(x, 0) - U_N(x, 0)\|_{C(\Delta_k)} &\leq \left(\frac{h_k}{2}\right)^s \frac{1}{2^{s-1}s!} \max_{x \in \Delta_k} |U^{(s)}(x, 0)| \leq \\ &\leq \left(\frac{h_k}{2}\right)^s \frac{1}{2^{s-1}s!} \frac{s!4^s H}{x_k^{s+2}} \leq \left(\frac{x_k}{8}\right)^s \frac{2^{s+1}H}{x_k^{s+2}} = \frac{1}{2^{2s-1}} \frac{H}{x_k^2} \leq \frac{H}{x_k^2} 2^{-2N+1} \leq \frac{H}{a^2 2^{2N-1}}, \end{aligned}$$

где $h_k = x_{k+1} - x_k$.

В сегментах Δ_l^* ($\bar{\Delta}_l^*$)

$$\begin{aligned} \|U(x, 0) - U_N(x, 0)\|_{C(\Delta_l^*)} &\leq \left(\frac{h_l}{2}\right)^s \frac{1}{2^{s-1}s!} \max_{x \in \Delta_l^*} |U^{(s)}(x, 0)| \leq \\ &\leq \left(\frac{h_l}{2}\right)^s \frac{1}{2^{s-1}s!} \frac{s!4^s}{H^{s+1}} = \left(\frac{ae}{H}\right)^s \frac{2^{s+1}}{H^{s+1}} = \left(\frac{H}{8}\right)^s \frac{2^{s+1}}{H^{s+1}} = \frac{2}{H} \frac{1}{2^{2N-1}}. \end{aligned}$$

Таким образом, на сегменте $[-B, B]$ справедлива оценка

$$\|U(x, 0) - U_N(x, 0)\|_C \leq \frac{c}{2^{2N-1}},$$

и, следовательно, на всей числовой оси имеем

$$\|U(x, 0) - U^*(x, 0)\|_C \leq \frac{c}{2^{2N-1}}.$$

При построении сплайна $U_N(x, 0)$ используется $n = (1+o(1))N^2 \times \log_2^{-1}(5/4)$ функционалов. Отметим, что при этом предполагается, что

$N \gg |\log_2(a/\sqrt{H})|$. Тогда погрешность восстановления функции $U(x, 0)$ оценивается неравенством

$$\|U(x, 0) - U^*(x, 0)\|_C \leq C \frac{1}{4\sqrt{n \log_2 5/4}}. \quad (3.23)$$

где n — число функционалов, используемых при построении аппроксимирующей функции $U^*(x, 0)$.

3.4.2.2. Двумерный случай

Исследуем точность восстановления гравитационных полей, заданных выражением (3.15), в котором функция $\varphi(x, y)$ имеет конечный носитель $[-a, a]^2$. Таким образом, нужно построить оптимальный метод восстановления функций, определенных на плоскости $(-\infty, \infty)^2$, удовлетворяющих неравенству (3.19) и при $|x| > a + 1$, $|y| > a + 1$ неравенству

$$\|U(x, y, 0)\| \leq \frac{1}{d((x, y), \Gamma)^3}.$$

Описанный выше класс функций обозначим через $U_{a,a,H}$.

Разобьем плоскость на две части: квадрат $\Delta = [-B, B]^2$, $B = e^{N/3}$ и его дополнение $\bar{\Delta}$ до расширенной плоскости. Функцию $U(x, y, 0)$ будем аппроксимировать функцией $U^*(x, y, 0)$, равной нулю в $\bar{\Delta}$, а в квадрате Δ являющейся локальным сплайном, построение которого описано ниже.

Разобьем квадрат Δ на области Δ_k , которые определяются соотношениями $\Delta_0 = [-a, a]^2$; $\Delta_k = \left\{ a \left(\frac{5}{4}\right)^{k-1} \leq d((x, y), \Delta_0) \leq a \left(\frac{5}{4}\right)^k \right\}$, $k = 1, 2, \dots, N_1 - 1$, $N_1 = \left\lceil \frac{N}{3} / \ln \frac{5}{4} \right\rceil$, $\Delta_{N_1} = \left\{ a \left(\frac{5}{4}\right)^{N_1-1} \leq d((x, y), \Delta_0) \leq B - a \right\}$. Здесь $d((x, y), \Delta_0)$ определяется формулой $d((x, y), \Delta_0) = \min(|x - a|, |x + a|, |y - a|, |y + a|)$. В свою очередь каждую из областей Δ_k , $k = 0, 1, \dots, N_1$, разобьем на квадраты. Область Δ_0 разбивается на квадраты Δ_{kl}^0 с длиной стороны, равной $H/2e$, и со сторонами, параллельными координатным осям.

Введем обозначения: $h_0 = H/2e$, $h_k = a5^{k-1}/4^k$, $k = 1, 2, \dots, N_1 - 1$, $h_{N_1} = B - a(5/4)^{N_1-1}$.

Каждую из областей Δ_k ($k = 1, 2, \dots, N_1$) покроем квадратами Δ_{ij}^k со сторонами, равными h_k ($k = 1, 2, \dots, N_1$) и параллельными координатным осям.

Функцию $U(x, y, 0)$ в квадратах Δ_{ij}^k , $k = 0, 1, \dots, N_1$, будем приближать интерполяционным полиномом $P_{ss}(U(x, y, z), \Delta_{ij}^k)$, построение которого было описано выше. Величина s равна N .

Локальный сплайн, составленный из полиномов $L_{ss}(U(x, y, z), \Delta_{ij}^k)$, обозначим через $U_N(x, y, 0)$.

Замечание. Здесь для простоты построен локальный сплайн, который может иметь точки разрыва на сторонах квадратов Δ_{ij}^k . Построение непрерывного локального сплайна подобно описанному в разд. 3.1, поэтому здесь опускается.

Оценим точность восстановления функции $U(x, y, 0)$ локальным сплайном $U_N(x, y, 0)$ в области Δ . Для этого нужно отдельно оценить погрешность восстановления в квадратах Δ_{ij}^k , $k = 1, 2, \dots, N_1$, и в квадратах Δ_{ij}^0 .

Нетрудно видеть, что в квадрате Δ_{ij}^0

$$\begin{aligned} \|U(x, y, 0) - U_N(x, y, 0)\|_C &\leq \left(\frac{h_0}{2}\right)^s \frac{\lambda_s}{2^{s-1}s!} \max_{(x,y) \in \Delta_{ij}^0} |U^{(s,0)}(x, y, 0)|, \\ \max_{(x,y) \in \Delta_{ij}^0} |U^{(0,s)}(x, y, 0)| &\leq \left(\frac{h_0}{2}\right)^s \frac{\lambda_s}{2^{s-1}s!} \frac{4^s s! H}{H^{s+3}} \leq \left(\frac{H}{4e}\right)^s \frac{2^s 2\lambda_s}{H^{s+2}} \leq \\ &\leq \frac{1}{2^{s-1}H^2} \left(\frac{1}{e}\right)^s \ln s \leq \frac{1}{H^2} e^{-N} \frac{8\pi + 4 \ln N}{2^{2N-1}\pi}, \end{aligned}$$

где $s = N$, λ_s – константа Лебега по узлам полинома Чебышева первого рода.

В случае, если точка $(x, y) \in \Delta_{ij}^k$, $k = 1, 2, \dots, N_1$, имеем оценку

$$\begin{aligned} \|U(x, y, 0) - U_N(x, y, 0)\|_C &\leq \left(\frac{h_k}{2}\right)^s \frac{\lambda_s}{2^{s-1}s!} \frac{4^s s! H}{(d(x, y), \Delta^0)^{s+3}} \leq \\ &\leq \left(\frac{a}{2} \left(\left(\frac{5}{4}\right)^k - \left(\frac{5}{4}\right)^{k-1} \right)\right)^s 2^{s+1} H \left(\frac{a}{2} \left(\frac{5}{4}\right)^{k-1}\right)^{-(s+3)} \lambda_s \leq \\ &\leq a^3 \left(\frac{1}{8}\right)^s 2^{s+1} H \left(8 + \frac{4}{\pi} \ln N\right) \leq \frac{2H}{a^3} \frac{(8\pi + 4 \ln N)}{4^N \pi}. \end{aligned}$$

Таким образом, в области Δ и, следовательно, на всей плоскости $(-\infty, \infty)^2$ справедлива оценка

$$\|U(x, y, 0) - U^*(x, y, 0)\| \leq K \frac{(8\pi + 4 \ln N)}{4^N \pi},$$

где $K = \max\left(1, \frac{2}{H^2}, \frac{2H}{a^3}\right)$.

Оценим число квадратов, используемых при построении функции $U^*(x, y, 0)$. Нетрудно видеть, что это число равно

$$(2 + o(1)) \left[\frac{10N}{3 \ln(5/4)} + \left(\frac{ae}{H}\right)^2 \right].$$

Естественно предположить, что $\left| \left(\frac{ae}{H} \right)^2 \right| < N$. В этом случае можно считать, что число функционалов, используемых для построения функции $U^*(x, y, 0)$, равно $n = (1 + o(1))\alpha N^3$, где $\alpha = 20/(3(\ln(5/4)))$. Следовательно,

$$\|U(x, y, 0) - U^*(x, y, 0)\|_C \leq K \frac{(1 + o(1)) \ln n}{4^{(n/\alpha)^{1/3}}}. \quad (3.24)$$

Замечание. При достаточно больших N ($N \geq 15$) непосредственное использование интерполяционных полиномов $P_s(U(x, y, 0), \Delta_{ij}^k)$, $s = N$, нецелесообразно из-за их неустойчивости. Поэтому области Δ_{ij}^k разбиваются на более мелкие области таким образом, чтобы в каждой из них интерполяция проводилась полиномом порядка не выше 15 по каждой переменной, а общее число функционалов, используемых при восстановлении функции $U(x, y, 0)$ в области Δ_{ij}^k , было бы равно s^2 . Можно показать, что при этом сохраняется оценка (3.24), но с несколько большей константой α .

3.4.2.3. Трехмерный случай

Введем декартову прямоугольную систему координат, направив ось OZ вниз.

Исследуем точность восстановления гравитационных полей, заданных выражением (3.16), в котором функция $\varphi(x, y)$ имеет конечный носитель $[-a, a]^3$ и, кроме того, ограничена по модулю величиной h . Таким образом, нужно построить оптимальный метод восстановления функций, заданных в области $\{-\infty \leq x \leq \infty, -\infty \leq y \leq \infty, 0 \leq -z \leq \infty\}$ и удовлетворяющих неравенствам (3.21), а при $d((x, y, z), \Gamma) \geq 1$ — неравенству

$$|U(x, y, z)| \leq \frac{1}{d((x, y, z), \Gamma)^3},$$

где $d((x, y, z), \Gamma)$ — евклидово расстояние от точки (x, y, z) до границы Γ области Q .

Описанный выше класс функций обозначим через $U_{a,a,h,H}$.

Обозначим через Ω область $[-B, B; -B, B, 0, B]$, где $B = e^{N/3}$. Через Δ_0 обозначим прямоугольный параллелепипед $[-a, a; -a, a; 0, a]$. Разобьем область $\Omega \setminus \Delta_0$ на более мелкие области Δ_k , где Δ_k — множество точек (x, y, z) , удовлетворяющих неравенствам:

$$\Delta_k = \left\{ a \left(\frac{5}{4} \right)^{k-1} \leq d((x, y, z), \Delta_0) \leq a \left(\frac{5}{4} \right)^k \right\}, k = 1, 2, \dots, N_1 - 1,$$

$$N_1 = \left[\left(\frac{N}{3} \right) / \ln \frac{5}{4} \right], \Delta_{N_1} = \left\{ a \left(\frac{5}{4} \right)^{N_1-1} \leq d((x, y, z), \Delta_0) \leq B - a \right\}.$$

Каждую из областей Δ_k , $k = 1, 2, \dots, N_1$, в свою очередь, разбиваем на кубы. Пусть $h_k = a \left(\frac{5}{4} \right)^{k-1} \frac{1}{4}$, $k = 1, 2, \dots, N_1$. Покроем каждую из областей Δ_k , $k = 1, 2, \dots, N_1$, кубами с ребрами, равными h_k , и гранями, параллельными координатным плоскостям.

Обозначим эти кубы через Δ_{ijl}^k , $k = 1, 2, \dots, N_1$.

Область Δ_0 также разбивается на более мелкие кубы Δ_{ijl}^0 с ребрами, равными $h_0 = (H - h)/2e$, и гранями, параллельными координатным плоскостям.

В каждой из областей Δ_{ijl}^k , $k = 0, 1, 2, \dots, N_1$, функцию $U(x, y, z)$ будем аппроксимировать интерполяционным полиномом $P_s(U, \Delta_{ijl}^k)$, $k = 0, 1, 2, \dots, N_1$. Величина $s = N$.

Сплайн, составленный из полиномов $P_s(U, \Delta_{ijl}^k)$, $k = 1, 2, \dots, N_1$, будем обозначать $U_N(x, y, z)$, а через $U_N^*(x, y, z)$ будем обозначать функцию

$$U_N^*(x, y, z) = \begin{cases} 0, & (x, y, z) \in \Pi \setminus \Omega; \\ U_N(x, y, z), & (x, y, z) \in \Omega. \end{cases}$$

Здесь Π — полупространство $\{z : z \geq 0\}$.

Нетрудно видеть, что в кубе Δ_{ijl}^0 справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \|U(x, y, z) - L_{sss}(U, \Delta_{ijl}^0)\|_C \leq \\ & \leq \left(\frac{h_0}{2} \right)^s \frac{\lambda_s^2}{2^{s-1} s!} \max_{(x, y, z) \in \Delta_{ijl}^0} (|U^{(s,0,0)}(x, y, z)|, |U^{(0,s,0)}(x, y, z)|, \\ & |U^{(0,0,s)}(x, y, z)|) \leq \frac{2}{H_1^2} \frac{1 + o(1)}{4^N} \left(8 + \frac{4}{\pi} \ln N \right)^2, \end{aligned}$$

где $H_1 = H - h$, $s = N$.

Повторяя рассуждения, проведенные в двумерном случае, в кубах Δ_{ijl}^k имеем оценку

$$\|U(x, y, z) - L_{sss}(U, \Delta_{ijl}^k)\|_C \leq A \frac{1 + o(1)}{4^N} \left(8 + \frac{4}{\pi} \ln N \right)^2,$$

где $A = 2H_1/a^3$.

Общее число m кубов Δ_{ijl}^k , $k = 0, 1, \dots, N_1$, покрывающих область Ω , равно $75N_1 + ([2ae/H_1] + 1)^3$.

Общее число функционалов n , используемых при построении сплайна $U_N(x, y, z)$, равно

$$75N_1N^3 + \left[\frac{2ae}{H_1} \right]^3 N^3 \leq n \leq 75N_1N^3 + \left(\left[\frac{2ae}{H_1} \right] + 1 \right)^3 N^3.$$

Так как нас интересует асимптотический характер оценки, то можно положить $n = \alpha N^4$, где $\alpha = [75/3(\ln(5/4))]$.

Таким образом, справедлива оценка

$$\|U(x, y, z) - U_N^*(x, y, z)\| \leq c4^{-(n/\alpha)^{1/4}} \ln n. \quad (3.24)$$

Следовательно,

$$d_n(U_{a,a,h,H}(1), C) \leq c4^{-(n/\alpha)^{1/4}} \ln n. \quad (3.25)$$

4. Оптимальные методы представления потенциальных полей

В предыдущем разделе были рассмотрены оптимальные методы восстановления потенциальных полей. При этом предполагалось, что потенциальное поле априори задано в аналитической или какой-нибудь другой форме. Как отмечает В. Н. Страхов [190], для потребностей геофизической практики необходимо иметь несколько типов вычислительных алгоритмов. Один из таких алгоритмов основан на оптимальном представлении полей, заданных в виде трехмерных интегралов типа Коши. В данном разделе будут исследоваться оптимальные методы аппроксимации потенциальных полей, создаваемых телами с плотностью $\sigma(x, y, z)$, занимающими область Ω с границей Γ . Ниже будут построены оптимальные по порядку (по точности) кубатурные формулы вычисления трехмерных интегралов типа Коши на классах функций Гельдера и Соболева.

Пусть F — потенциальное в области Ω поле, удовлетворяющее уравнениям

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \quad \operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}. \quad (4.1)$$

Пусть $\operatorname{grad} u = \mathbf{F}$. Тогда [103]

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}') &\equiv I_1 + I_2 = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma} \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{F}) \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + [\mathbf{n} \times \mathbf{F}] \times \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right\} ds + \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь $\mathbf{r}' \in \Omega$, \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к поверхности Γ , $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $\mathbf{r}' = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}$.

Раздел написан по материалам статьи [40].

4.1. Оценки снизу

При получении оценок снизу от интегралов по поверхности для простоты обозначений ограничимся рассмотрением кубатурной формулы

$$\begin{aligned} I_0\varphi &\equiv \iint_{\Gamma} \varphi(x, y, z) \frac{(x - x')}{((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)^{3/2}} ds = \\ &= \sum_{k=1}^N p_k(x', y', z') \varphi(x_k, y_k, z_k) + R_N(\varphi), \end{aligned} \quad (4.3)$$

где $(x_k, y_k, z_k) \in \Gamma$, для интеграла $I_0\varphi$, являющегося составной частью интеграла I_1 .

В данном разделе для простоты будем считать, что Γ — единичная сфера с центром в начале координат. Как будет видно из дальнейших выкладок, это упрощение не влияет на окончательный результат.

Кубатурную формулу (4.3) будем рассматривать как в предположении, что точка (x', y', z') расположена вне поверхности Γ , так и в предположении, что точка (x', y', z') принадлежит поверхности Γ .

Рассмотрим вначале случай, когда точка (x', y', z') не принадлежит поверхности Γ .

Пусть значения функции φ известны в N произвольно заданных узлах $M_k = (x_k, y_k, z_k)$, $M_k \in \Gamma$, $k = 1, 2, \dots, N$. Вычислим верхнюю грань оценки снизу погрешности всевозможных кубатурных формул, использующих узлы M_k , $k = 1, 2, \dots, N$.

Предположим вначале, что $\varphi(x, y, z) \in H_{\alpha, \alpha, \alpha}(1)$, $0 < \alpha \leq 1$.

Уложим на сфере Γ наиболее плотным образом $3N$ кругов. Известно [160, 216], что площадь, занимаемая такой укладкой, составляет менее чем $\pi/\sqrt{12}$ от площади сферы, причем при N , стремящемся к бесконечности, отношение площади, занимаемой плотной укладкой из N равных кругов, к площади сферы равно $\pi/\sqrt{12}$. Поэтому можно считать, что площадь, занимаемая укладкой из $3N$ равных кругов, не меньше половины площади сферы Γ . Следовательно, радиус каждого из кругов не меньше чем $\sqrt{2/3N}$. Так как кубатурная формула (4.3) использует N узлов, то по крайней мере в $2N$ кругах отсутствуют узлы кубатурной формулы (4.3). При достаточно больших N по крайней мере внутри N кругов не происходит смены знака $(x - x')$ при фиксированном значении (x', y', z') . Назовем круги, в которых отсутствуют узлы кубатурной формулы (4.3) и не происходит смена знака функции $(x - x')$, отмеченными. Выше было установлено, что имеется по крайней мере N отмеченных

кругов. Обозначим эти круги через $S_k(\rho)$, где k — номер круга, ρ — радиус окружности (общий для всех окружностей).

В каждом из отмеченных кругов $S_k(\rho)$ построим функцию

$$\varphi_k(x, y, z) = (d((x, y, z), \Gamma_k))^\alpha,$$

где $d((x, y, z), \Gamma_k)$ — расстояние от точки (x, y, z) до границы Γ_k круга $S_k(\rho)$.

Тогда

$$R_N(\varphi) \geq \sum'_{k=1}^{3N} \iint_{S_k(\rho)} \varphi_k(x, y, z) \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} ds,$$

где \sum' означает суммирование по отмеченным кругам. Нетрудно видеть, что $|R_N(\varphi)| \geq cN^{-\alpha/2}$. Следовательно, при любых значениях (x', y', z') , любой сетке узлов M_k , $k = 1, 2, \dots, N$, и любых весах p_k , $k = 1, 2, \dots, N$, справедлива оценка

$$\zeta_N[H_{\alpha, \alpha, \alpha}(1)] \geq cN^{-\alpha/2}.$$

Предположим, что $\varphi \in C_3^r(1)$. В каждой сфере $S_k(\rho)$ построим функцию

$$\varphi_k^*(x, y, z) = \frac{A}{\rho^r} (d((x, y, z), \Gamma_k))^{2r},$$

где константа A подбирается из требования, чтобы $\varphi_k^*(x, y, z) \in C_3^r(1)$.

Тогда

$$R_N(\varphi) = \sum_{k=1}^{3N} \iint_{\Delta_k} \varphi_k^*(x, y, z) \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} ds \geq cN^{-r/2}.$$

Следовательно, $\zeta_N[C_3^r(1)] \geq cN^{-r/2}$.

Рассмотрим теперь случай, когда точка $(x', y', z') \in \Gamma$. В этом случае интегралы, входящие в формулу (4.2), являются гиперсингулярными. Оптимальные методы вычисления гиперсингулярных интегралов построены в [33]. Из результатов, полученных в [33], следует, что при условии, что $(x', y', z') \in \Gamma$, для кубатурных формул вида (4.3) справедливы оценки (при $r \geq 2$) $\zeta_N[C_3^r(1)] \geq cN^{-r/2}$.

Оценим снизу точность вычисления интеграла

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv$$

кубатурными формулами, использующими N значений функции $\operatorname{div} \mathbf{F}$.

Пусть $\operatorname{div} \mathbf{F} = \varphi(x, y, z)$. Как и выше, ограничимся рассмотрением интеграла

$$H\varphi \equiv \iiint_{\Omega} \varphi(x, y, z) \frac{x - x'}{((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)^{3/2}} dv,$$

где для простоты обозначений положим $\Omega = [-1, 1]^3$.

Интеграл $H\varphi$ будем вычислять по кубатурным формулам вида

$$\begin{aligned} H\varphi = & \sum_{k_1=1}^N \sum_{k_2=1}^N \sum_{k_3=1}^N p_{k_1, k_2, k_3}(x', y', z') \varphi(x_{k_1}, y_{k_2}, z_{k_3}) + \\ & + R_{NNN}(x', y', z'; p_{k_1, k_2, k_3}(x', y', z'); x_{k_1}, y_{k_2}, z_{k_3}; \varphi) \end{aligned} \quad (4.4)$$

и

$$H\varphi = \sum_{k=1}^N p_k(x', y', z') \varphi(M_k) + R_N(x', y', z'; p_k(x', y', z'); M_k; \varphi). \quad (4.5)$$

Здесь M_k — узлы, произвольным образом расположенные в области Ω ; $p_k(x', y', z')$ — коэффициенты, $k = 1, 2, \dots, N$.

Вначале оценим функционал $\zeta_{NNN}(\Psi)$, отнесенный к формуле (4.4). Класс функций Ψ определим ниже. Разделим куб Ω на $(2N)^3$ более мелких кубов $\Delta_{ijk} = [x_i, x_{i+1}; x_j, x_{j+1}; x_k, x_{k+1}]$, $i, j, k = 0, 1, \dots, 2N - 1$, где $x_k = -1 + k/N$, $k = 0, 1, \dots, 2N$. Куб Δ_{ijk} назовем отмеченным, если в нем нет узлов кубатурной формулы (4.4).

Опишем множество кубов Δ_{ijk} , $i, j, k = 0, 1, \dots, 2N - 1$, трехмерной матрицей $C = \{c_{ijk}\}$, у которой индекс i означает номер слоя, индекс j означает номер строки в i -м слое, а индекс k означает номер столбца в i -м слое. Основанием каждого i -го слоя является квадрат $[-1, 1]^2$, покрытый квадратами $\Delta_{jk} = [x_j, x_{j+1}; x_k, x_{k+1}]$, $j, k = 0, 1, \dots, 2N - 1$. Квадрат Δ_{jk} будем называть отмеченным, если соответствующий куб Δ_{ijk} является отмеченным.

Будем называть строку (столбец) отмеченной (отмеченным), если она (он) содержит только отмеченные квадраты. Будем называть слой отмеченным, если он состоит из отмеченных строк. Покажем, что существуют отмеченные строки, столбцы и слои. В самом деле, так как кубатурная формула (4.4) построена на трехмерной сетке, имеющей $2N$ узлов по каждому направлению, а матрица C имеет $2N$ индексов по каждому направлению, то имеется по крайней мере N отмеченных строк, N отмеченных столбцов, N отмеченных слоев. Обозначим

через $\Theta_1(j, l)$ отношение числа отмеченных строк среди строк с номерами $j, j + 1, \dots, l$ к общему числу $l - j - 1$ строк. Аналогично, через $\Theta_2(k, l)$ обозначено отношение числа отмеченных столбцов среди столбцов с номерами $k, k + 1, \dots, l$ к общему числу $l - k - 1$ столбцов, а через $Q_3(i, l)$ — отношение числа отмеченных слоев среди слоев с номерами $i, i + 1, \dots, l$ к общему числу $l - i - 1$ слоев. Покажем, повторяя рассуждения из работы [31, с. 169], что существует такое натуральное число ν , $\nu \leq 3(N + 1)/2$, для которого $\min_{l > \nu} \Theta_i(\nu, l) \geq 1/3$, $i = 1, 2, 3$.

Доказательство проведем от противного. Предположим, что не существует \bar{k} ($\bar{k} < 3(N + 1)/2$), для которого $\min_{l > \bar{k}} \Theta_1(\bar{k}, l) \geq 1/3$. Тогда для некоторого l_1 будет $\Theta_1(0, l_1) < 1/3$. Затем найдется такое l_2 , что $\Theta_1(l_1, l_2) < 1/3$. Продолжим этот процесс до тех пор, пока не найдется такое μ , что $\Theta_1(l_{\mu-1}, l_\mu) < 1/3$, а $l_\mu > 3(N + 1)/2$. Тогда общее число отмеченных строк не может превысить $\frac{1}{2}(N + 1) + 2N - \frac{3}{2}(N + 1) = N - 1$, в то время, как по построению число отмеченных строк не меньше N . Из полученного противоречия следует, что существует \bar{k} ($\bar{k} < 3(N + 1)/2$) такое, что $\min_{l > \bar{k}} \Theta(\bar{k}, l) \geq \frac{1}{3}$.

Положим $\nu = 3(N + 1)/2$.

В качестве класса функций Ψ вначале возьмем $\Psi = H_{\alpha\alpha\alpha}(1)$.

Пусть $\Delta_{ijk} = [x_i, x_{i+1}; x_j, x_{j+1}; x_k, x_{k+1}]$ — произвольный отмеченный куб, индексы которого удовлетворяют неравенствам $i, j, k \geq \nu + 1$.

Построим в этом кубе функцию

$$\varphi_{ijk}(x, y, z) = A \frac{((x - x_i)(x_{i+1} - x)(y - y_j)(y_{j+1} - y)(z - z_k)(z_{k+1} - z))^\alpha}{(2/N)^{5\alpha}},$$

где константа A выбирается из условия $\varphi_{ijk}(x, y, z) \in H_{\alpha\alpha\alpha}(1)$.

В области Ω введем функцию $\psi(x, y, z)$, равную $\varphi_{ijk}(x, y, z)$, если $(x, y, z) \in \Delta_{ijk}$, Δ_{ijk} — отмеченный куб с индексами $i, j, k \geq \nu + 1$, и равную нулю во всех остальных случаях.

Тогда погрешность кубатурной формулы (4.4) равна

$$\begin{aligned} & R_{NNN}(x', y', z'; p_k(x', y', z'); x_{k_1}, y_{k_2}, z_{k_3}, \Psi) \geq \\ & \geq \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \sum_{i_3=1}^n \int \int \int_{\Delta_{i_1 i_2 i_3}} \frac{\varphi_{i_1 i_2 i_3}(x, y, z)(x - x')}{((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)^{3/2}} dv, \end{aligned}$$

где $\sum \sum \sum'$ означает суммирование по отмеченным кубам с индексами $i, j, k \geq \nu + 1$.

Положим $x' = y' = z' = -1 + \nu/N$. Следовательно,

$$R_{NNN}[\Psi] \geq \sup_{x', y', z' \in \Omega} R_N(x', y', z'; p_k(x', y', z'); x_{k_1}, y_{k_2}, z_{k_3}, \Psi) \geq$$

$$\begin{aligned}
& \geq R_N(x_\nu, x_\nu, x_\nu; p_k(x_\nu, x_\nu, x_\nu); x_{k_1}, y_{k_2}, z_{k_3}, \psi) = \\
& = \sum_{i_1=\nu+1}^N \sum_{i_2=\nu+1}^N \sum_{i_3=\nu+1}^N \int \int \int_{\Delta_{i_1 i_2 i_3}} \frac{\psi(x, y, z)(x - x_\nu)}{((x - x_\nu)^2 + (y - x_\nu)^2 + (z - z_\nu)^2)^{3/2}} d\nu \geq \\
& \geq \sum_{i_1=\nu+1}^N \sum_{i_2=\nu+1}^N \sum_{i_3=\nu+1}^N \int \int \int_{\Delta_{i_1 i_2 i_3}} \frac{N^2(i_1 - \nu)}{(\sum_{j=1}^3 (i_j + 1 - \nu)^2)^{3/2}} \psi(x, y, z) d\nu \geq \\
& \geq cN^3 \int \int \int_{\Delta_{i_1 i_2 i_3}} \psi(x, y, z) d\nu = \frac{c}{N^\alpha}.
\end{aligned}$$

Таким образом, получена оценка

$$\zeta_{NNN}[H_{\alpha\alpha\alpha}(1)] \geq \frac{c}{N^\alpha} = \frac{c}{n^{\alpha/3}},$$

где n — общее число узлов кубатурной формулы (4.4).

Теорема 4.1. Пусть $\Psi = H_{\alpha\alpha\alpha}(1)$. Для кубатурных формул вида (4.4) справедлива оценка

$$\zeta_{NNN}[H_{\alpha\alpha\alpha}(1)] \geq \frac{c}{n^{\alpha/3}},$$

где n — общее число узлов кубатурной формулы (4.4).

Для кубатурной формулы (4.5) справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.2. Пусть $\Psi = H_{\alpha\alpha\alpha}(1)$. Для кубатурных формул вида (4.5) справедлива оценка

$$\zeta_N[H_{\alpha\alpha\alpha}(1)] \geq \frac{c}{N^{\alpha/3}},$$

где N — общее число узлов кубатурной формулы (4.5).

Доказательство теоремы 4.2 подобно доказательству предыдущей теоремы.

Пусть $\Psi = C_3^r(1)$. В этом случае справедливы следующие утверждения.

Теорема 4.3. Пусть $\Psi = C_3^r(1)$. Для кубатурных формул вида (4.4) справедлива оценка

$$\zeta_{NNN}[H_{\alpha\alpha\alpha}(1)] \geq \frac{c}{n^{r/3}},$$

где n — общее число узлов кубатурной формулы (4.4).

Теорема 4.4. Пусть $\Psi = C_3^r(1)$. Для кубатурных формул вида (4.5) справедлива оценка $\zeta_N[C_3^r(1)] \geq c/N^{r/3}$, где N — общее число узлов кубатурной формулы (4.5).

Доказательство теоремы 4.3 подобно доказательству теоремы 4.1. Различие заключается только в построении функции $\varphi_{ijk}(x, y, z)$. В данном случае

$$\varphi_{ijk}(x, y, z) = A \frac{((x - x_i)(x_{i+1} - x)(y - y_j)(y_{j+1} - y)(z - z_k)(z_{k+1} - z))^r}{(2/N)^{5r}}.$$

Доказательство теоремы 4.4 подобно доказательству теоремы 4.3.

4.2. Оптимальные по порядку методы

Для построения оптимального по порядку (по точности) алгоритма восстановления потенциальных полей следует воспользоваться оптимальными по порядку кубатурными формулами, предназначенными для вычисления интегралов из формулы (4.1).

Для простоты обозначений ограничимся случаем, когда Γ — единичная сфера, а Ω — единичный шар с центром в начале координат.

Вначале остановимся на случае, когда F и f принадлежат классу функций $\Psi = \tilde{B}_{0,\alpha,\gamma}^0(\Omega, A)$.

Из проведенных ниже выкладок будет следовать, что описанный метод справедлив для областей, ограниченных кусочно-непрерывными поверхностями. Пусть $r_k = 1 - e^{(k-N)v}$, $k = 1, 2, \dots, N$, $r_0 = 1$. Значение v будет определено ниже. Обозначим через Γ_k сферы с радиусами r_k и с центром в начале координат, $k = 1, 2, \dots, N - 1$. Для единообразия обозначим Γ через Γ_0 .

Обозначим через Ω_k области, расположенные между сферами Γ_k и Γ_{k+1} . Обозначим через $h_k = r_k - r_{k+1}$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$. Покроем сферу Γ_k равными сферическими шестиугольниками с длиной ребра, равной h_k . То обстоятельство, что при построении такого покрытия может оказаться несколько многоугольников с диаметрами, меньшими диаметра сферического шестиугольника, не существенно. Нетрудно видеть, что число таких многоугольников не превышает $O(\sqrt{N})$, где N — общее число элементов покрытия. Поэтому не будем выделять неправильные многоугольники и все элементы покрытия будем называть шестиугольниками. Обозначим эти шестиугольники через $A_i^k B_i^k C_i^k D_i^k E_i^k F_i^k A_i^k$ ($i = 1, 2, \dots, n_k$), где n_k — число шестиугольников на сфере Γ_k , $k = 0, 1, \dots, N - 1$. Соединим вершины шестиугольников, расположенных на сфере Γ_k с началом координат. При этом каждый шестиугольник на сфере Γ_k (скажем, шестиугольник $A_i^k B_i^k C_i^k D_i^k E_i^k F_i^k$) имеет образ на сфере Γ_{k+1} (шестиугольник $\bar{A}_i^k \bar{B}_i^k \bar{C}_i^k \bar{D}_i^k \bar{E}_i^k \bar{F}_i^k$). Области, расположенные между сферическими шестиугольниками $A_i^k B_i^k C_i^k D_i^k E_i^k F_i^k$, их

образами $\bar{A}_i^k \bar{B}_i^k \bar{C}_i^k \bar{D}_i^k \bar{E}_i^k \bar{F}_i^k$ и плоскостями, проходящими через стороны $A_1^k B_1^k$ и $\bar{A}_1^k \bar{B}_1^k, \dots, E_i^k F_i^k$ и $\bar{E}_i^k \bar{F}_i^k$, обозначим через $\Delta_{i_1}^k$, $i_1 = 1, 2, \dots, n_k$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$.

Общее число n областей $\Delta_{i_1}^k$ равно $n \asymp e^{2N}$.

После этих предварительных построений приступим к описанию кубатурных формул.

Обозначим через $\sigma_i = A_i^0 B_i^0 C_i^0 D_i^0 E_i^0 F_i^0$ ($i = 1, 2, \dots, n_0$) шестиугольники, покрывающие сферу Ω_0 . Обозначим через M_i^0 центр i -го шестиугольника ($i = 1, 2, \dots, n_0$). В качестве кубатурной формулы, аппроксимирующей интеграл

$$\mathbf{I}_1 = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma} \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{F}) \mathbf{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + [\mathbf{n} \times \mathbf{F}] \times \mathbf{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right\} ds,$$

возьмем следующую формулу:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 = & -\frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{n_0} \iint_{\sigma_k} \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{F}(M_k^0)) \mathbf{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \right. \\ & \left. + [\mathbf{n} \times \mathbf{F}(M_k^0)] \times \mathbf{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right\} ds + R_{n_0}(F), \end{aligned} \quad (4.6)$$

где n_0 — число шестиугольников, покрывающих сферу Ω_0 .

Нетрудно видеть, что $n_0 \asymp e^{2N}$. Следовательно, диаметр шестиугольников покрытия есть величина порядка e^{-N} и погрешность кубатурной формулы (4.6) оценивается величиной

$$|R_{n_0}(F)| \leq ce^{-N\alpha} \leq cn_0^{-\alpha/2}.$$

Теперь перейдем к вычислению интеграла

$$\mathbf{I}_2 \mathbf{F} = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \cdot \mathbf{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv. \quad (4.7)$$

Опишем два типа кубатурных формул.

При построении первого типа кубатурных формул будем предполагать, что производные от функции $f = \operatorname{div} \mathbf{F}$ легко вычисляются аналитически до любого требуемого порядка.

Пусть точка r' принадлежит области Δ_i^j , $i = 1, 2, \dots, n_j$, $j = 1, 2, 3, \dots, N - 1$. Через $\bar{\Delta}_i^j$, $i = 1, 2, \dots, n_j$, $j = 1, 2, \dots, N - 1$, обозначим объединение областей Δ_l^k , $l = 1, 2, \dots, n_k$, $k = 1, 2, \dots, N - 1$, имеющих

непустое пересечение с Δ_i^j . В области $\bar{\Delta}_i^j, i = 1, 2, \dots, n_j, j = 2, \dots, N-1$, функция $f(x, y, z)$ аппроксимируется отрезком ряда Тейлора

$$f_j(M_i^j, \bar{\Delta}_i^j) = f(M_i^j) + \dots + \frac{1}{m_j!} d^{m_j} f(M_i^j),$$

где $m_j = 16j + 1$.

В области $\bar{\Delta}_i^j, i = 1, 2, \dots, n_j, j = 0, 1$, функция $f(x, y, z)$ аппроксимируется постоянной $f_0(M_i^j, \bar{\Delta}_i^j) = f(M_i^j), f_1(M_i^j, \bar{\Delta}_i^j) = f(M_i^j)$.

В областях $\Delta_i^k, i = 1, 2, \dots, n_k, k = 0, 1$, не входящих в $\bar{\Delta}_i^j$, функция $f(x, y, z)$ аппроксимируется константой $f(M_i^k)$, где M_i^k – центр тяжести области Δ_i^k (в качестве M_i^k может быть взята и любая другая точка из области Δ_i^k): $f_0(M_i^k, \Delta_i^k) = f(M_i^k), f_1(M_i^k, \Delta_i^k) = f(M_i^k)$. В области $\Delta_i^k, i = 1, 2, \dots, n_k, k = 2, \dots, N-1$, функция $f(x, y, z)$ аппроксимируется отрезком ряда Тейлора

$$f_k(M_i^k, \Delta_i^k) = f(M_i^k) + \dots + \frac{1}{m_k!} d^{m_k} f(M_i^k),$$

где $m_k = [(k-1)v(1-\gamma)] + 1$.

Для вычисления интеграла $I_2 f$ при $r' \in \Delta_i^j$ используется кубатурная формула

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_2 f(\mathbf{r}') &= \frac{1}{4\pi} \iiint_{\bar{\Delta}_i^j} f_j(M_i^j, \bar{\Delta}_i^j) \cdot \mathbf{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=1}^{n_k} ' \iiint_{\Delta_l^k} f_k(M_l^k, \Delta_l^k) \cdot \mathbf{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv + R_N(f), \end{aligned} \quad (4.8)$$

где $\sum '$ означает суммирование по областям Δ_i^k , не имеющим пересечений с $\bar{\Delta}_i^j$.

Пусть $r' \in \Delta_i^k, k = 0$, тогда

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{4\pi} \left| \iiint_{\bar{\Delta}_i^0} (f(\mathbf{r}) - f_0(M_i^0, \bar{\Delta}_i^0)) \mathbf{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv \right| \leq \\ &\leq c \iiint_{\bar{\Delta}_i^0} \frac{(|x - x'| + |y - y'| + |z - z'|)}{((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)^{(3-\alpha)/2}} dv \leq \\ &\leq c \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{e^{(1-N)v}} \rho^\alpha d\rho d\Theta d\varphi = \frac{c}{e^{Nv(1+\alpha)}}. \end{aligned}$$

Аналогичная оценка справедлива и при $r' \in \Delta_i^1$.

Нетрудно видеть, что

$$q_2 = \frac{1}{4\pi} \left| \sum_{k=0}^{n_0-1} \iiint_{\bar{\Delta}_k^0} (f(\mathbf{r}) - f_0(M_k^0, \Delta_k^0)) \mathbf{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv \right| \leq \frac{c}{e^{Nv\alpha}},$$

где \sum' – суммирование по областям, не имеющим пересечений с Δ_i^j .

Оценим теперь сумму:

$$\begin{aligned} q_3 &= \frac{1}{4\pi} \left| \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{l=1}^{n_{k1}} \iiint_{\bar{\Delta}_i^k} (f(\mathbf{r}) - f_k(M_l^k, \Delta_l^k)) \mathbf{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv \right| \leq \\ &\leq c \max_{k,l} \max |f(r) - f_k(M_l^k, \Delta_l^k)| \leq \\ &\leq c N h_{k,l}^{m_k} \left(\frac{e^{Nv}}{e^{(k-1)v}} \right)^{m_k-1+\gamma} \frac{m_k^{m_k} A^{m_k}}{4^{m_k} m_k!} \leq \\ &\leq c N \left(\frac{e^{kv} - e^{(k-1)v}}{e^{Nv}} \right)^{m_k} \left(\frac{e^{Nv}}{e^{(k-1)v}} \right)^{m_k-1+\gamma} \frac{m_k^{m_k} A^{m_k}}{4^{m_k} m_k!} \leq \\ &\leq c N \frac{e^{(k-1)v(1-\gamma)}}{e^{Nv(1-\gamma)}} (e^v - 1)^{m_k} \frac{m_k^{m_k} A^{m_k}}{4^{m_k} \sqrt{2\pi m_k}} \left(\frac{e}{m_k} \right)^{m_k} \leq \\ &\leq c \frac{N}{\sqrt{2\pi m_k}} \frac{(e^{(k-1)v(1-\gamma)/m_k} e^{(e^v - 1)A})^{m_k}}{4} \frac{1}{e^{Nv(1-\gamma)}}. \end{aligned}$$

Полагая $v = \ln(1 + \frac{4}{Ae^2})$, получаем оценку $q_3 \leq c \frac{N}{e^{Nv(1-\gamma)}}$.

Нетрудно видеть, что в этом случае общее число узлов n кубатурной формулы (4.8) равно

$$n \asymp e^{Nv(l-1)}.$$

Следовательно,

$$q_3 \leq \frac{c \ln n}{n^{(1-\gamma)/(l-1)}}.$$

Таким образом, в данном случае

$$R_N(\Psi) \leq c \left(\frac{\ln n}{n^{\alpha/(l-1)}} + \frac{\ln n}{n^{(1-\gamma)/(l-1)}} \right).$$

Отметим, что в случае равномерной сетки узлов погрешность равна $O(n^{-\alpha/l})$.

Рассмотрим теперь второй тип кубатурных формул для вычисления интеграла (4.7). При этом сохраним прежнее разбиение Ω на области Δ_k ,

$k = 0, 1, \dots, N - 1$, но разбиение областей Δ_k , $k = 0, 1, \dots, N - 1$, проведем по "географическому" принципу. Рассмотрим область Δ_k , $k = 0, 1, \dots, N - 1$, на сферу Γ_k , $k = 0, 1, \dots, N - 1$, нанесем сетку широт и меридиан по сферическим координатам $(r_k, \Theta_i^k, \varphi_j^k)$. Обозначим через $A_i^k B_i^k C_i^k D_i^k$ сферические параллелепипеды, которые получаются при нанесении на сферу Γ_k сетки широт и меридиан по координатам $(r_k, \Theta_i^k, \varphi_j^k)$, $k = 1, 2, \dots, N - 1$, $i = 1, 2, \dots, n_k$, $j = 1, 2, \dots, m_k$. При этом значения Θ_i^k и φ_j^k подбираются таким образом, чтобы расстояние между узлами A_i^k, B_i^k и B_i^k, C_i^k было не больше $h_k = r_k - r_{k+1}$. Дальнейшее построение областей Δ_i^k проводится по аналогии с описанным выше построением областей Δ_i^k в случае, когда функция $f(x, y, z)$ известна вместе с производными достаточно высокого порядка.

В каждом параллелепипеде $\Delta_i^k = [A_i^k B_i^k C_i^k D_i^k \bar{A}_i^k \bar{B}_i^k \bar{C}_i^k \bar{D}_i^k]$, $k = 0, 1$, функция $f(x, y, z)$ аппроксимируется константой $P_0(f, \Delta_i^k) = f(M_i^k)$, где M_i^k — центр тяжести Δ_i^k (в качестве M_i^k может быть взята и любая другая точка из Δ_i^k , $k = 0, 1$).

В каждом параллелепипеде $\Delta_i^k = [A_i^k B_i^k C_i^k D_i^k \bar{A}_i^k \bar{B}_i^k \bar{C}_i^k \bar{D}_i^k]$ при $k = 2, \dots, N - 1$ функция $f(x, y, z)$ аппроксимируется интерполяционным полиномом $P_{n_k, n_k, n_k}(f, \Delta_i^k) = P_{n_k}^r P_{n_k}^\varphi P_{n_k}^\theta f(x, y, z)$, где $P_{n_k}^r$ — интерполяционный полином Лагранжа, построенный по n_k узлам, являющимся отображением n_k узлов полинома Чебышева I рода степени n_k с сегмента $[-1, 1]$ на сегмент $[A_i^k \bar{A}_i^k]$, $n_k = 12k + 1$.

Обозначим через $\bar{\Delta}_i^j$, $j = 2, 3, \dots, N - 1$, объединение множества параллелепипедов Δ_v^k , имеющих непустое пересечение с Δ_i^j . Аппроксимацию в области $\bar{\Delta}_i^j$ будем проводить по формуле $P_{n_j, n_j, n_j}(f, \bar{\Delta}_i^j)$.

Сплайн, составленный из этих полиномов, обозначим через f_n .

Пусть точка r' расположена в сферическом параллелепипеде Δ_i^k , $k = 0, 1$. Тогда интеграл $I_2 f$ вычисляется по кубатурной формуле

$$I_2 f = I_2 f_n + R_n(f). \quad (4.10)$$

Повторяя выкладки, проведенные выше при рассмотрении кубатурной формулы (4.8) и при оценке погрешности аппроксимации функций класса $\tilde{B}_{0, \alpha, \gamma}^0(\Omega, M)$ локальными сплайнами, имеем

$$R_n(\Psi) \leq cn^{-\alpha/2} \ln^2 n. \quad (4.11)$$

Пусть $r' \in \Delta_i^j$, $j = 2, 3, \dots, N - 1$. Кубатурная формула, предназначенная для вычисления интеграла $I_2 f$, имеет вид

$$I_2 f = \frac{1}{4\pi} \iint_{\bar{\Delta}_i^j} P_{n_j, n_j, n_j}(f, \bar{\Delta}_i^j) \mathbf{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv +$$

$$+\frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{n_k-1} \iint_{d_l^k} P_{n_j n_j n_j}(f) \mathbf{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv + R_n(f),$$

где $d_l^k = \Delta_l^k \cap \Delta$; Δ дополнение $\bar{\Delta}_i^j$ до области Ω .

Повторяя выкладки, проведенные при рассмотрении кубатурной формулы (4.8) и при оценке погрешности аппроксимации функций класса $\tilde{B}_{0,\alpha,\gamma}^0(\Omega, M)$ локальными сплайнами, имеем

$$R_n[\tilde{B}_{0,\alpha,\gamma}^0(\Omega)] \leq cn^{-\alpha/2} \ln^2 n. \quad (4.12)$$

Замечание. В случае, если функции $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{F})$ и $f = \operatorname{div} \mathbf{F}$ принадлежат классам Гельдера $H_{\alpha,\alpha}$ и $H_{\alpha,\alpha,\alpha}$, то оптимальный по порядку по точности алгоритм имеет погрешность $cn^{-\alpha/3} \ln n$, где n — число функционалов, используемых при построении этого алгоритма.

Рассмотрим теперь случай, когда функции f и $(\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})$ принадлежат классу $B_{r,\gamma}(\Omega)$. Для вычисления интегралов I_1 и I_2 используются те же разбиения, что и выше. Отличия состоят в следующем. При вычислении интеграла I_1 в каждом шестиугольнике $\sigma_i^0 = A_i^0 B_i^0 C_i^0 D_i^0 E_i^0 F_i^0$ ($i = 1, 2, \dots, n_0$) функция F аппроксимируется отрезком ряда Тейлора

$$F_r(x, y, z, \sigma_i^0) = F(M_i^0) + \frac{1}{1!} dF(M_i^0) + \dots + \frac{1}{(r-1)!} d^r F(M_i^0).$$

Локальный сплайн, составленный из полиномов $F_r(x, y, z, \sigma_i^0)$, обозначим через $F_r(x, y, z)$, и интеграл $I_1 F$ будем вычислять по кубатурной формуле

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 \mathbf{F}(r') &= \\ &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{n_0} \iint_{\sigma_k} \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{F}_r) \mathbf{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + [\mathbf{n} \times \mathbf{F}_r] \times \mathbf{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right\} ds + \\ &\quad + R_{n_0}(\mathbf{F}(r')). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Можно показать, что погрешность R_{n_0} кубатурной формулы (4.13) оценивается неравенством

$$|R_{n_0}(F)| \leq An_0^{-r/2}. \quad (4.14)$$

Для аппроксимации интеграла $I_2 f$ используется разбиение шара Ω на сферические параллелепипеды Δ_i^k , $i = 1, 2, \dots, n_i$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, причем построение параллелепипеда Δ_i^k зависит от информации о функции f . В случае, если производные функции f легко вычисляются до

любого нужного порядка, то проводится разбиение на области Δ_i^k , основаниями которых являются сферические шестиугольники. Способ разбиения описан при исследовании восстановления потенциальных полей на классе $\tilde{B}_{0,\alpha,\gamma}^0(\Omega)$. В каждом параллелепипеде Δ_i^k функция $f(x, y, z)$ аппроксимируется отрезком ряда Тейлора

$$T_{r_k}(f, \Delta_i^k) = f(M_i^k) + \frac{1}{1!}df(M_i^k) + \dots + \frac{1}{r_k!}d^{r_k}F(M_i^k),$$

$$r_0 = r, r_k = 4k(r + 3) + 1, k = 1, 2, \dots, N - 1.$$

Воспользуемся обозначениями $\bar{\Delta}_i^j$ и d_i^k , введенными выше. Обозначим через $T_{n_j}(f, \bar{\Delta}_i^j)$ отрезок ряда Тейлора

$$T_{n_j}(f, \bar{\Delta}_i^j) = f(M_i^j) + \frac{1}{1!}df(M_i^j) + \dots + \frac{1}{r!}d^{r_j}f(M_i^j),$$

аппроксимирующий функцию f в области $\bar{\Delta}_i^j$.

Сплайн, составленный из полиномов $T_{r_k}(f, \Delta_i^k)$, $T_{n_k}(f, \bar{\Delta}_i^k)$, и аппроксимирующий функцию $f(x, y, z)$ в области Ω , обозначается через $\tilde{T}_n(f)$.

Пусть r' лежит в параллелепипеде Δ_i^j , $i = 1, 2, \dots, n_j$, $j = 0, 1$. Тогда интеграл I_2f вычисляется по кубатурной формуле

$$I_2f = I_2\tilde{T}_n(f) + R_n(f) \quad (4.15)$$

с погрешностью

$$|R_n(f)| \leq An^{-(r+1-\gamma)/2} \ln n, \quad (4.16)$$

где n — число функционалов, используемых для построения сплайна $\tilde{T}_n(f)$.

Пусть теперь $r' \in \Delta_i^j$, $i = 1, 2, \dots, n_j$, $j = 2, 3, \dots, N - 1$.

Кубатурная формула, предназначенная в данном случае для вычисления интеграла I_2f , имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_2f(\mathbf{r}') &= \frac{1}{4\pi} \iiint_{\bar{\Delta}_i^j} T_{n_j}(f, \bar{\Delta}_i^j) \mathbf{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{n_k} \iiint_{d_l^k} T_{n_k}(f, \Delta_l^k) \mathbf{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv + R_n(f), \end{aligned}$$

где

$$|R_n(f)| \leq An^{-(r+1-\gamma)/2} \ln n; \quad (4.17)$$

n — число функционалов, используемых при вычислении интегралов I_1f и I_2f .

Из оценок (4.14), (4.16) и (4.17) следует, что точность восстановления потенциальных полей на классе $B_{r,\gamma}(\Omega)$ есть величина порядка $cn^{-(r+1-\gamma)/2} \ln n$. В случае, если производные высших порядков от функции f вычисляются сложно, то область Ω разбивается на более мелкие области Δ_i^j по "географическому" принципу и функция f аппроксимируется в областях Δ_i^j интерполяционными полиномами степени r при $j = 0$ и степени $4j(r + 3)$ при $j = 1, 2, \dots, N - 1$.

Замечания:

1. Выше были построены оптимальные по порядку кубатурные формулы вычисления интегралов I_1, I_2 и J_1, J_2 . Помимо вычисления кубатурных формул по оптимальным алгоритмам, необходимо оптимальным образом выбрать точки $\Gamma' = (x', y', z')$, в которых вычисляются значения $F(r')$ потенциальных полей. В случае скалярных лапласовых полей этот вопрос исследован в разд. 1.3. Нетрудно видеть, что полученные там результаты справедливы и в данном случае для полей, принадлежащих классам функций $\tilde{B}_{0,\alpha,\gamma}^0$ и $B_{r,\gamma}$. Как уже отмечалось выше, наилучшее восстановление функций, принадлежащих некоторому компактному множеству, n -мерным многообразиям определяется n -ми поперечниками. В разд. 2 приведена оценка поперечников на классе функций $B_{r,\gamma}(\Omega)$. Эта оценка говорит о неулучшаемой величине погрешности восстановления функций на классе $B_{r,\gamma}(\Omega)$. Оптимальный по порядку алгоритм восстановления векторных полей $F(r')$ в случае классов $B_{0,\alpha,\gamma}^0$ и $\tilde{B}_{r,\gamma}(\Omega)$ строится по аналогии с построениями, приведенными в разд. 1.2, 1.3.

2. Выше было описано построение оптимальных кубатурных формул в случае, когда Ω — шар, а Γ — ограничивающая его сфера. Нетрудно видеть, что все выкладки и оценки остаются в силе и в случае областей, ограниченных кусочно-непрерывными поверхностями.

Для построения оптимального по порядку (по точности) алгоритма восстановления потенциальных полей следует воспользоваться оптимальными по порядку кубатурными формулами, предназначенными для вычисления интегралов из формулы (4.1) и полученными в предыдущем разделе оптимальными методами аппроксимации потенциальных полей.

Построение оптимального по порядку (по точности) алгоритма восстановления потенциальных полей состоит из трех этапов. Вначале определяются классы функций, к которым принадлежат рассматриваемые потенциальные поля. Этот вопрос исследован в разд 1. Затем строятся локальные сплайны, являющиеся оптимальным по порядку алгоритмом аппроксимации выделенных классов функций. Построению оптимальных по точности алгоритмов аппроксимации классов функций $Q_{r,\gamma}^u(\Omega, 1)$,

$B_{r,\gamma}(\Omega, 1)$ посвящены разд. 2 и 3 данной главы. На третьем этапе вычисляются по оптимальным по порядку кубатурным формулам значения потенциального поля в узлах сплайна. Соответствующие кубатурные формулы построены в данном разделе. Возникает вопрос выбора числа узлов локального сплайна и кубатурной формулы. Представляется естественным выбрать так эти числа, чтобы погрешности, вносимые локальными сплайнами и кубатурными формулами, совпадали. Это нетрудно сделать, приравнявая погрешности локальных сплайнов и кубатурных формул.

5. Восстановление геофизических полей интерполяционными полиномами, состоящими из потенциальных функций

5.1. Постановка задачи

В задачах геофизики и метеорологии [9, 96, 82] широко применяются методы аппроксимации физических полей гармоническими (потенциальными) функциями.

В случае, если использовались равномерные сетки наблюдений, то восстановление функций, описывающих физические поля, проводится с помощью рядов Котельникова. Оптимальные методы восстановления потенциальных полей по равномерным сеткам построены в [178].

Подробное изложение оптимальных методов восстановления потенциальных полей по равномерным сеткам для различных классов функций приведено в [9].

Восстановление аналитических функций комплексной переменной, определенных в различных (конечных и бесконечных) областях с помощью рядов Котельникова, исследовано в [276].

Если сетки наблюдений не являются равномерными, то ряд Котельникова следует заменить его более сложными и труднореализуемыми аналогами [223]. Поэтому при неравномерных сетках наблюдений применяются другие методы интерполяции.

В монографии [9] исследованы вопросы построения интерполяционных полиномов по базисным функциям

$$G_i = \frac{1}{2\pi} \frac{z_1}{[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + z_1^2]^{3/2}}, \quad z_1 > 0,$$

$i = 1, 2, \dots, n$, и их применения к решению различных вопросов геофизики.

Представляет значительный интерес исследование методов построения интерполяционных полиномов по базисам, состоящим из различных функций, и оценка погрешности такого рода интерполяции.

В данном разделе исследуются методы восстановления потенциальных полей интерполяционными формулами с базисными функциями специального вида.

5.2. Построение интерполяционных полиномов

В зависимости от класса, к которому принадлежит восстанавливаемая функция, необходимо использовать различные базисные функции. В этом разделе описываются способы построения базисных функций в зависимости от характера решаемой задачи и строятся интерполяционные полиномы по базисным функциям.

Изложение начнем со случая восстановления потенциальных полей в полупространстве, так как этот случай наиболее часто встречается в задачах геофизики.

Введем декартову прямоугольную систему координат $OXYZ$, направив ось OZ вертикально вверх. Предположим, что нужно аппроксимировать гармоническую функцию $U(x, y, z)$ при $z > 0$. Если известны граничные значения $U_0(x, y, 0)$ функции $U(x, y, z)$ на поверхности $z = 0$, то задачу вычисления поля в полупространстве $z > 0$ можно трактовать как задачу вычисления интеграла Пуассона

$$U(x, y, z) = \frac{z}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U_0(\xi, \eta, 0) d\xi d\eta}{((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (5.1)$$

Одним из источников введения гармонических функций, являющихся базисными при интерполяции, могут быть кубатурные формулы.

Пусть финитная функция $U_0(x, y, 0)$ с областью определения $[-D, D]^2$ принадлежит классу Гельдера $H_{\alpha\alpha}(1)$. Пусть поле $U(x, y, 0)$ измерялось в узлах сетки $(x_k, y_l, 0)$.

Для определенности предположим, что сетка $(x_k, y_l, 0)$ прямоугольная: $x_k = -D + 2Dk/n$, $y_l = -D + 2Dl/m$, $k = 0, 1, \dots, n$, $l = 0, 1, \dots, m$. Пусть $h = 4D^2/nm$.

Функция $U(x, y, z)$ может быть аппроксимирована кубатурной формулой

$$U(x, y, z) = \frac{z}{\pi} h \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{m-1} \frac{U_0(x_k, y_l, 0)}{((x - x_k)^2 + (y - y_l)^2 + z^2)^{3/2}} + R_{nm}(x, y, z_0). \quad (5.2)$$

Погрешность кубатурной формулы (5.2) будет оценена ниже, а сейчас отметим, что кубатурная формула (5.2) определяет способ интерполяции потенциальных функций системой функций

$$U_{nm}(x, y, z) = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m \alpha_{kl} G_{kl}(x, y, z),$$

где

$$G_{kl}(x, y, z) = \frac{z}{\pi} [(x - x_k)^2 + (y - y_l)^2 + z^2]^{-3/2}, \quad (5.3)$$

$k = 1, 2, \dots, n, l = 1, 2, \dots, m$.

В случае, если сетка наблюдений (x_k, y_k) , $k = 1, 2, \dots, n$, на плоскости $z = 0$ не является прямоугольной, то потенциальные функции аппроксимируются системой функций

$$U_n(x, y, z) = \sum_{k=0}^n \alpha_k G_k(x, y, z), \quad (5.4)$$

где

$$G_k(x, y, z) = \frac{z}{\pi} [(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 + z^2]^{-3/2}, \quad (5.5)$$

$k = 1, 2, \dots, n$.

В работе [9] исследована аппроксимация потенциальных полей на плоскости $z = z_0$ системой функций

$$\tilde{U}_n(x, y, z_0) = \sum_{k=0}^n \alpha_k G_k(x, y, z_0) + \delta. \quad (5.6)$$

Здесь

$$G_i(x, y, z_0) = \frac{1}{2\pi} \frac{z_0}{((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + z_0^2)^{3/2}}. \quad (5.7)$$

При приближении интеграла Пуассона по другим кубатурным формулам можно получить другие базисные функции.

Будем использовать обозначения, введенные выше: $x_k = -D + 2Dk/n$, $k = 0, 1, \dots, n$, $y_l = -D + 2Dl/m$, $l = 0, 1, \dots, m$, $N = nm$; $\Delta_{kl} = [x_k, x_{k+1}; y_l, y_{l+1}]$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, $l = 0, 1, \dots, m-1$.

Рассмотрим кубатурную формулу

$$U(x, y, z) = \frac{z}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{m-1} U_0(x_k, y_l, 0) \iint_{\Delta_{kl}} \frac{d\xi d\eta}{((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2)^{3/2}} + R_{nm}(x, y, z). \quad (5.8)$$

Естественно при построении интерполяционных полиномов в качестве базисных функций взять функции

$$P_{kl}(x, y, z) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_{y_l}^{y_{l+1}} \frac{d\xi d\eta}{((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2)^{3/2}},$$

$k = 0, 1, \dots, n-1, l = 0, 1, \dots, m-1$, являющиеся весовыми в кубатурной формуле (5.8).

Используя формулы [153]

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(x^2 + a^2)^{1/2}};$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + b^2)\sqrt{x^2 + a^2}} = \begin{cases} \frac{1}{b\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \frac{|x\sqrt{b^2 - a^2} + b\sqrt{x^2 + a^2}|}{\sqrt{x^2 + b^2}}, & b^2 > a^2, \\ \frac{1}{b\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{a^2 - b^2}}{b\sqrt{x^2 + a^2}}, & a^2 > b^2, \end{cases}$$

имеем

$$\begin{aligned} P_{kl}(x, y, z) &= \int_{y_l}^{y_{l+1}} \frac{x - \xi}{((y - \eta)^2 + z^2)((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2)^{1/2}} \Big|_{x_k}^{x_{k+1}} d\eta = \\ &= \int_{y_l}^{y_{l+1}} \frac{x - x_{k+1}}{((y - \eta)^2 + z^2)((x - x_{k+1})^2 + (y - \eta)^2 + z^2)^{1/2}} d\eta - \\ &- \int_{y_l}^{y_{l+1}} \frac{x - x_k}{((y - \eta)^2 + z^2)((x - x_k)^2 + (y - \eta)^2 + z^2)^{1/2}} d\eta = \\ &= \frac{x - x_{k+1}}{z|x - x_{k+1}|} \operatorname{arctg} \frac{(y - y_{l+1})|x - x_{k+1}|}{z((x - x_{k+1})^2 + (y - y_{l+1})^2 + z^2)^{1/2}} - \\ &- \frac{x - x_{k+1}}{z|x - x_{k+1}|} \operatorname{arctg} \frac{(y - y_l)|x - x_{k+1}|}{z((x - x_{k+1})^2 + (y - y_l)^2 + z^2)^{1/2}} - \\ &- \frac{x - x_k}{z|x - x_k|} \operatorname{arctg} \frac{(y - y_{l+1})|x - x_k|}{z((x - x_k)^2 + (y - y_{l+1})^2 + z^2)^{1/2}} + \\ &+ \frac{x - x_k}{z|x - x_k|} \operatorname{arctg} \frac{(y - y_l)|x - x_k|}{z((x - x_k)^2 + (y - y_l)^2 + z^2)^{1/2}} = \\ &= \frac{1}{z} \operatorname{arctg} \frac{(y - y_{l+1})(x - x_{k+1})}{z((x - x_{k+1})^2 + (y - y_{l+1})^2 + z^2)^{1/2}} - \\ &- \frac{1}{z} \operatorname{arctg} \frac{(y - y_l)(x - x_{k+1})}{z((x - x_{k+1})^2 + (y - y_l)^2 + z^2)^{1/2}} - \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{z} \operatorname{arctg} \frac{(y - y_{l+1})(x - x_k)}{z((x - x_k)^2 + (y - y_{l+1})^2 + z^2)^{1/2}} +$$

$$+\frac{1}{z} \operatorname{arctg} \frac{(y - y_l)(x - x_k)}{z((x - x_k)^2 + (y - y_l)^2 + z^2)^{1/2}}.$$

Отсюда следует, что в качестве базисных при построении интерполяционных полиномов можно брать следующие функции:

$$F_{k,l}(x, y, z) = \frac{1}{z} \operatorname{arctg} \frac{(y - y_l)(x - x_k)}{z((x - x_k)^2 + (y - y_l)^2 + z^2)^{1/2}} -$$

$$-\frac{1}{z} \operatorname{arctg} \frac{(y - y_{l+1})(x - x_k)}{z((x - x_k)^2 + (y - y_{l+1})^2 + z^2)^{1/2}} -$$

$$-\frac{1}{z} \operatorname{arctg} \frac{(y - y_l)(x - x_{k+1})}{z((x - x_{k+1})^2 + (y - y_l)^2 + z^2)^{1/2}} +$$

$$+\frac{1}{z} \operatorname{arctg} \frac{(y - y_{l+1})(x - x_{k+1})}{z((x - x_{k+1})^2 + (y - y_{l+1})^2 + z^2)^{1/2}}. \quad (5.9)$$

Пусть $U_0(x, y, 0)$ – финитная функция с носителем $[-D, D]^2$. Тогда функции

$$C_{kl}(x, y, z) = \frac{z}{\pi} \int_{-D}^D \int_{-D}^D \frac{\xi^k \eta^l d\xi d\eta}{((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2)^{3/2}},$$

$k, l = -n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n$, являются базисными в полупространстве $z > 0$.

Наряду с квадратурными формулами источником для построения базисных функций для интерполяционных полиномов являются коэффициенты Фурье.

В случае, если функция $U_0(x, y, 0)$ определена на всей плоскости $z = 0$, то коэффициенты Фурье

$$C_{kl}(x, y, z) = \frac{z}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\xi^2 - \eta^2} \xi^k \eta^l d\xi d\eta}{((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2)^{3/2}},$$

$k, l = -n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n$, являются базисными функциями в полупространстве $z > 0$.

В случае, если интерполирование проводится в конечной области, то источником базисных функций могут быть кубатурные формулы вычисления интегралов Пуассона для круга и шара. Отметим, что, используя формулу Пуассона для n -мерного шара, можно построить интерполяционные полиномы в n -мерных пространствах.

Кроме того, отметим, что в качестве источника базисных функций для построения интерполяционных полиномов можно использовать веса кубатурных формул, предназначенных для вычисления интегралов, стоящих в правых частях интегральных представлений гармонических функций. Напомним [137, с. 230], что интегральными представлениями гармонических функций называются функции

$$u(x) = \frac{1}{(m-2)|s_1|} \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{r^{m-2}} \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} - u(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{m-2}} \right) d_{\xi} \Gamma$$

при $m > 2$,

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left(\ln \frac{1}{r} \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} - u(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r} \right) d_{\xi} \Gamma$$

при $m = 2$.

Здесь n — вектор внешней нормали к поверхности Γ в точке ξ ; $u(x)$ — гармоническая функция в ограниченной области m -мерного пространства с гладкой границей Γ ; $|s_1|$ — площадь сферы единичного радиуса в m -мерном пространстве, $r = r(x, \xi)$ — расстояние между точками x и ξ .

После того как выделены множества базисных функций, приступим к построению интерполяционных полиномов.

Для определенности будем аппроксимировать потенциальные поля системой базисных функций (5.4). Пусть известны значения потенциального поля $U(x, y, z)$ в узлах $(\tilde{x}_v, \tilde{y}_v, \tilde{z}_v)$, которые обозначим через $f_v = U(\tilde{x}_v, \tilde{y}_v, \tilde{z}_v)$, $v = 0, 1, \dots, n$.

Отметим, что пересечение множеств $\{\tilde{x}_k, \tilde{y}_k, \tilde{z}_k\}$ и $\{x_i, y_i, z_i\}$ пусто.

Коэффициенты α_l будем определять из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{l=0}^n a_{kl} \alpha_l = f_k, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (5.10)$$

где $a_{kl} = G_l(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k, \tilde{z}_k)$.

Докажем, что система уравнений (5.10) однозначно разрешима. Для этого покажем, что множество функций $G_k(x, y, z)$, $k = 1, 2, \dots, n$, определяемых формулой (5.5), линейно независимо в области $z > 0$.

Доказательство проведем от противного. Предположим, что существуют такие константы γ_k , $k = 1, 2, \dots, n$, не все равные нулю, что выполняется тождество $\sum_{k=1}^n \gamma_k G_k(x, y, z) \equiv 0$ при $z > 0$.

Положим для определенности, что $\gamma_1 \neq 0$, и, следовательно,

$$G_1(x, y, z) \equiv - \sum_{k=2}^n \frac{\gamma_k}{\gamma_1} G_k(x, y, z). \quad (5.11)$$

Положим в (5.11) $x = x_1$, $y = y_1$ и устремим z к нулю. Тогда левая часть тождества (5.11) стремится к бесконечности, а правая к нулю. Из этого противоречия следует линейная независимость системы функций $G_k(x, y, z)$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Опишем построение интерполяционного полинома по некоторой системе базисных функций $G_{ij}(x, y, z)$, $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, m$.

Для удобства обозначим функции $G_{ij}(x, y, z)$ через $\varphi_k(x, y, z)$, $k = 1, 2, \dots, N$, $N = nm$. Пусть нужно построить полином, составленный из функций $\varphi_k(x, y, z)$, $k = 1, 2, \dots, N$, и интерполирующий функцию $U(x, y, z)$ в узлах $v_k = (\tilde{x}_k, \tilde{y}_k, \tilde{z}_k)$, $k = 1, 2, \dots, N$.

Этот полином ищем в виде линейной комбинации $\sum_{k=1}^N a_k \varphi_k(x, y, z)$, коэффициенты a_k которой определяются из системы (5.10).

С другой стороны, для получения оценок точности аппроксимации интерполяционными полиномами следует, по аналогии с конструктивной теорией функций [140], ввести понятие фундаментальных полиномов.

Предварительно решим N следующих систем уравнений:

$$\sum_{l=1}^N \alpha_l^j \varphi_l(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k, \tilde{z}_k) = f_k^j, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad f^j = (f_1^j, \dots, f_N^j), \quad (5.12)$$

где f^j — вектор, все компоненты которого равны нулю, кроме j -й компоненты, равной единице.

Выше было отмечено, что системы уравнений (5.12) однозначно разрешимы.

Введем функции

$$\psi_j(x, y, z) = \sum_{l=1}^N \alpha_l^j \varphi_l(x, y, z),$$

которые назовем фундаментальными полиномами.

Тогда интерполяционный полином восстановления функции $U(x, y, z)$ по узлам $(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k, \tilde{z}_k)$, $k = 1, 2, \dots, N$, имеет вид

$$L_N(x, y, z) = \sum_{k=1}^N U(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k, \tilde{z}_k) \psi_k(x, y, z).$$

Введя определение наилучшего приближения гармонической функции $U(x, y, z)$ по системе базисных функций $G_{ij}(x, y, z)$, $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, m$, и введя аналог константы Лебега для интерполяционных полиномов вида $L_N(x, y, z)$, можно построить аналог конструктивной теории функций. Однако, получающиеся оценки трудно обозримы и не представляют большого интереса при решении практических задач гравиметрии.

Замечание. При решении практических задач нет необходимости в построении фундаментальных полиномов. Для этого достаточно решить систему уравнений

$$\sum_{l=1}^N \alpha_l \varphi_l(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k, \tilde{z}_k) = U(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k, \tilde{z}_k), \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

5.3. Об одном подходе к аналитической аппроксимации потенциальных полей

Оптимальные методы восстановления потенциальных полей изложены в разд. 1–3. Помимо задачи построения оптимальных методов, в работе [191] поставлена задача развития аппроксимационного подхода к описанию потенциальных (и других) полей.

При этом к аппарату аппроксимации предъявляются следующие требования [191]:

- 1) необходимость иметь адекватный геофизической практике аппарат конечномерного описания функций на основе конечной и приближенной информации об этих функциях;
- 2) необходимость подавления (исключения) помех как в имеющихся экспериментальных данных, так и в конечномерных описаниях функций;
- 3) необходимость иметь такие (конечномерные) аналитические описания функций, которые позволяют достаточно просто выполнить над ними основные аналитические операции: дифференцирование, интегрирование и продолжение с заданными свойствами.

В качестве одного из аппаратов аппроксимации, удовлетворяющих перечисленным выше требованиям, можно взять локальные сплайны, используя специальные алгоритмы для определения их параметров.

Предположим вначале, что известно аналитическое представление поля. Требуется построить конечномерный аппарат аппроксимации для аналитической аппроксимации поля $V(x, y, z)$, заданного в области G достаточно больших размеров. Для определенности предположим, что область G представляет собой параллелепипед $G = [a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2]$.

Поле V в области G может быть задано своими моментами (коэффициентами Фурье) по шаровым функциям или каким-нибудь аналитическим представлением.

В этом разделе мы не будем касаться вопросов вычисления коэффициентов Фурье по сферическим функциям. Они рассматриваются в главах III и IV. Отметим только, что в современной геофизической практике, когда исследователь располагает информацией о нескольких тысячах измерений и имеет возможность (по крайней мере теоретическую) вычислить несколько тысяч моментов, частная сумма ряда Фурье, состоящая из несколько тысяч слагаемых, не может считаться конечномерным алгоритмом, удовлетворяющим требованиям, сформулированным в п. 1–3.

Аппаратом, более приспособленным к восстановлению потенциальных полей, являются локальные сплайны. Разобьем параллелепипед G на более мелкие параллелепипеды Δ_{ijk} , $i = 1, 2, \dots, n_1$, $j = 1, 2, \dots, n_2$, $k = 1, 2, \dots, n_3$. В каждом параллелепипеде Δ_{ijk} потенциальное поле $V(x, y, z)$ приближается полиномом $P_{r_1 r_2 r_3}(x, y, z; \Delta_{ijk})$ степени r_1 по переменной x , степени r_2 по переменной y и степени r_3 по переменной z . Сплайн, состоящий из полиномов $P_{r_1 r_2 r_3}(x, y, z; \Delta_{ijk})$, $i = 1, 2, \dots, n_1$, $j = 1, 2, \dots, n_2$, $k = 1, 2, \dots, n_3$, обозначим через $V_{r_1 r_2 r_3}(x, y, z)$. Для определенности будем считать, что $r_1 = r_2 = r_3 = r$.

Локальный сплайн может быть построен по различным разбиениям (не обязательно равномерным) и различными способами. Несколько способов описано в данной главе. В случае, если поле $V(x, y, z)$ задано приближенно в виде конечной суммы ряда Фурье по шаровым функциям, достаточно каждому параллелепипеду Δ_{ijk} поставить в соответствие сетку, состоящую из r^3 узлов и определить соответствующий полином $P_{rrr}(x, y, z; \Delta_{ijk})$. Существуют различные способы построения локальных сплайнов, на которых здесь не останавливаемся. Отметим только, что число r^3 узлов сетки связано с точностью восстановления поля.

Оптимальные методы восстановления потенциальных полей построены в разд. 2, 3 данной главы. Используя описанные там алгоритмы, по необходимой точности ε восстановления поля и размерности области Δ_{ijk} определяется величина r .

Пусть дано разбиение исходной области G на параллелепипеды Δ_{ijk} , $i = 1, 2, \dots, n_1$, $j = 1, 2, \dots, n_2$, $k = 1, 2, \dots, n_3$, и построен локальный сплайн $V_{rrr}(x, y, z)$.

Пусть M_{ijk} — произвольная точка области Δ_{ijk} . Для определенности в качестве M_{ijk} возьмем центр этой области.

Поставим каждому полиному $P_{rrr}(x, y, z; \Delta_{ijk})$ в соответствие

m -мерный вектор $T_{ijk} = (a_1, a_2, \dots, a_m)$. Здесь $a_1 = P_{rrr}(M_{ijk}; \Delta_{ijk})$, $a_2 = \partial P_{rrr}(x, y, z; \Delta_{ijk})/\partial x|_{M_{ijk}}$, $a_3 = \partial P_{rrr}(x, y, z; \Delta_{ijk})/\partial y|_{M_{ijk}}$, \dots , $a_m = \partial^{3r} P_{rrr}(x, y, z; \Delta_{ijk})/\partial x^r \partial y^r \partial z^r|_{M_{ijk}}$, где $m - 1$ – число частных производных в разложении полинома $P_{rrr}(x, y, z; \Delta_{ijk})$ в ряд Тейлора.

Очевидно, что компонентами вектора T_{ijk} являются значения полинома $P_{rrr}(x, y, z; \Delta_{ijk})$ и его частных производных первого, второго и последующих порядков (число которых определяется размерностью вектора), взятых в определенном порядке и вычисленных в точке M_{ijk} .

Таким образом, для восстановления потенциального поля в параллелепипеде $\Delta_{ijk} = [b_i, b_{i+1}; c_j, c_{j+1}; d_k, d_{k+1}]$ достаточно запомнить три вектора: вектор $I_{ijk} = (b_i, b_{i+1}, c_j, c_{j+1}, d_k, d_{k+1})$ с координатами параллелепипеда Δ_{ijk} , вектор $M_{ijk} = (\alpha_{ijk}, \beta_{ijk}, \gamma_{ijk})$ с координатами точки M_{ijk} в системе координат и вектор $T_{ijk} = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ с координатами, составленными из частных производных полинома $P_{rrr}(x, y, z; \Delta_{ijk})$, вычисленными в точке $M_{i,j,k}$.

Для нахождения вектора T_{ijk} надо вычислить частные производные полинома $P_{rrr}(x, y, z; \Delta_{ijk})$ в точке $M_{i,j,k}$ до достаточно высокого порядка. Использование разностных схем с этой целью вряд ли можно считать целесообразным из-за большой погрешности вычислений, обусловленной в первую очередь погрешностью в экспериментальных данных. Поэтому более точным и устойчивым к погрешностям в исходных данных является следующий подход. Для нахождения частных производных, соответствующих компонентам a_2, \dots, a_m вектора T_{ijk} , приравняем в m произвольно выбранных точках из Δ_{ijk} полином $a_{000} + a_{001}(z - \gamma_{ijk}) + a_{010}(y - \beta_{ijk}) + a_{100}(x - \alpha_{ijk}) + \dots + a_{s_1 v_1 w_1}(x - \alpha_{ijk})^{s_1}(y - \beta_{ijk})^{v_1}(z - \gamma_{ijk})^{w_1} + \dots + a_{s_r v_r w_r}(x - \alpha_{ijk})^{s_r}(y - \beta_{ijk})^{v_r}(z - \gamma_{ijk})^{w_r}$, состоящий из m слагаемых, полиному $P_{rrr}(x, y, z; \Delta_{ijk})$. В результате вычислений находим значения коэффициентов $a_{000}, a_{011}, \dots, a_{rrr}$ и тем самым определяем вектор T_{ijk} значений частных производных в точке M_{ijk} .

Замечание. Подобные разложения в аналитической форме проводятся в среде MAPLE и др.

Недостатком такого метода определения параметров сплайна является необходимость в решении систем уравнений возможно достаточно высокого порядка. Порядок системы алгебраических уравнений равен размерности сплайна, последняя определяется размерами области, в которой аппроксимируется поле, и точностью аппроксимации.

Более простым, точным и устойчивым к погрешностям является метод определения параметров векторного представления сплайна, основанный на использовании интегралов типа Коши.

Рассмотрим вначале плоский случай. Пусть Z — плоскость комплексной переменной, $u(z)(z \in Z)$ — комплексный потенциал. Пусть функция $u(z)$ задана (в аналитической форме, форме ряда Фурье по какой-нибудь ортогональной системе функций или в другой форме) в области G . Пусть γ — гладкая замкнутая кривая, полностью расположенная внутри области G .

Обозначим через D область, ограниченную контуром γ . Разобьем область D на более мелкие области $D_i, i = 1, 2, \dots, l$, которые могут иметь произвольную форму, в зависимости от решаемой задачи. Каждой области D_j поставим в соответствие принадлежащую ей точку $c_j, j = 1, 2, \dots, l$. Известно [149], что

$$u(c_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{u(\tau) d\tau}{\tau - c_j}. \quad (5.13)$$

Следовательно,

$$u^{(k)}(c_j) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{u(\tau) d\tau}{(\tau - c_j)^{k+1}}. \quad (5.14)$$

Разобьем контур γ на более мелкие части точками $a_k, k = 0, 1, \dots, N, a_0 = a_N$. На каждой дуге $\gamma_k = a_k a_{k+1}$ возьмем по узлу квадратурной формулы $b_k \in \gamma_k, k = 0, 1, \dots, N$. Тогда функция $u(z)$ и ее производные $u^{(k)}(z), k = 1, 2, \dots, m$, в точке c_j вычисляются по формуле

$$u^{(k)}(c_j) = \frac{k!}{2\pi i} \sum_{v=0}^{N-1} u(b_v) \int_{\gamma_v} \frac{d\tau}{(\tau - c_j)^{k+1}}, \quad (5.15)$$

$k = 0, 1, \dots, m, j = 1, 2, \dots, l$.

Можно показать, что формула (5.15) обладает высокой точностью и устойчива к возмущениям при вычислении узлов, весов и значений $u(\zeta_k)$.

В многомерном случае вместо формулы (5.13) следует использовать аналог интеграла типа Коши [103]. Пусть $\mathbf{F}(x, y, z)$ — потенциальное в области D поле, непрерывное до границы S .

Известно [103], что потенциальное в области D поле удовлетворяет уравнениям $\operatorname{div} \mathbf{F} = \mathbf{q}, \operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Разобьем область D на более мелкие области $D_i, i = 1, 2, \dots, l$, и каждой области D_i поставим в соответствие точку $c_i \in D_i$ с радиус-вектором $\mathbf{r}'_i (i = 1, 2, \dots, l)$.

Справедлива формула

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}'_i) = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ (\mathbf{n}, \mathbf{F}) \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i|} + [\mathbf{n} \times \mathbf{F}] \times \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i|} \right\} ds +$$

$$+\frac{1}{4\pi} \iiint_D \mathbf{q}(\mathbf{r}) \mathbf{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i|} dv, \quad (5.16)$$

где \mathbf{n} — единичная внешняя нормаль к поверхности S ; \mathbf{r} — радиус-вектор точки поверхности S (в первом интеграле) и области D (во втором интеграле).

Для вычисления частных производных от функции $\mathbf{F}(\mathbf{r}'_i)$ достаточно заметить, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{d}^s \mathbf{F}(\mathbf{r}'_i) = \\ & = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ (\mathbf{n}, \mathbf{F}) d_{\mathbf{r}'}^s \mathbf{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i|} + [\mathbf{n} \times \mathbf{F}] \times d_{\mathbf{r}'}^s \mathbf{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i|} \right\} + \\ & + \frac{1}{4\pi} \iiint_D \mathbf{q}(\mathbf{r}) d_{\mathbf{r}'}^s \mathbf{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i|} dv, \end{aligned} \quad (5.17)$$

где индекс \mathbf{r}' означает, что производные берутся по переменной \mathbf{r}' .

Аппроксимируя интегралы, стоящие в правых частях формул (5.16) и (5.17) по кубатурным формулам, получаем устойчивый и эффективный алгоритм вычисления значений функции $\mathbf{F}(\mathbf{r}'_i)$ и ее производных в области $D_i, i = 1, 2, \dots, l$.

Отметим преимущества такого представления полей.

1. Простота представления. Для восстановления поля в области Δ_{ijk} достаточно запомнить три вектора, причем один из них — трехмерный, второй — шестимерный, третий T_{ijk} — m -мерный.

2. При делении области Δ_{ijk} на части (скажем, на части Δ_{ijk}^1 и Δ_{ijk}^2 с центрами в точках $(\alpha_{ijk}^1, \beta_{ijk}^1, \gamma_{ijk}^1)$ и $(\alpha_{ijk}^2, \beta_{ijk}^2, \gamma_{ijk}^2)$) легко вычисляются векторы T_{ijk}^1 и T_{ijk}^2 , соответствующие областям Δ_{ijk}^1 и Δ_{ijk}^2 .

Для того чтобы от вектора T_{ijk} перейти к вектору T_{ijk}^1 , достаточно в многочлене $T_{ijk}(x, y, z) = a_1 + a_2(x - \alpha_{ijk}) + a_3(y - \beta_{ijk}) + a_4(z - \gamma_{ijk}) + \dots + a_{rrr}(x - \alpha_{ijk})^{s_r}(y - \beta_{ijk})^{v_r}(z - \gamma_{ijk})^{w_r}$ сделать замены $(x - \alpha_{ijk}) = (x - \alpha_{ijk}^1) + (\alpha_{ijk}^1 - \alpha_{ijk})$, $(y - \beta_{ijk}) = (y - \beta_{ijk}^1) + (\beta_{ijk}^1 - \beta_{ijk})$, $(z - \gamma_{ijk}) = (z - \gamma_{ijk}^1) + (\gamma_{ijk}^1 - \gamma_{ijk})$ и привести подобные члены.

3. Сложение полей, определенных в одной и той же области Δ_{ijk} , сводится к сложению двух векторов, содержащих в качестве компонент частные производные. При этом предполагается, что частные производные обеих полей вычислены в одной и той же точке M_{ijk} .

4. Операция дифференцирования поля в области Δ_{ijk} сводится к умножению компонент вектора T_{ijk} на соответствующие константы. Так, например, если компонента $a_{s_1 s_2 s_3}$ соответствует частной производной $\partial^{s_1 + s_2 + s_3} / \partial x^{s_1} \partial y^{s_2} \partial z^{s_3}$, в которой $1 \leq s_1, s_2, s_3$, то при дифференциро-

вании по x компонента $a_{s_1 s_2 s_3}$ умножается на s_1 и записывается в векторе T_{ijk} на месте, соответствующем частной производной $\frac{\partial^{s_1+1+s_2+s_3}}{\partial x^{s_1+1} y^{s_2} z^{s_3}}$.

5. Операция интегрирования потенциального поля сводится к делению каждой компоненты вектора T_{ijk} на соответствующую константу и к перестановке компонент вектора.

Замечание. В случае, если рассматривается двумерное поле, представленное в виде функций комплексной переменной, то операция вычисления частных производных, составляющих вектор T_{ijk} , заменяется операцией вычисления первых коэффициентов ряда Тейлора разложения поля в ряд по степеням $(z - \xi_{kl})$, где в данном случае $z = (x + iy)$, $\xi_{kl} = (\alpha_{kl} + i\beta_{kl})$ — точка области Δ_{kl} , в которой восстанавливается поле.

При этом для определения коэффициентов Тейлора можно использовать формулу Коши, вычисления по которой более устойчивы и точны, нежели определение частных производных решением систем алгебраических уравнений.

6. Предлагаемое представление поля позволяет вычислять его в областях с очень сложной границей, где другие методы требуют чрезвычайно большого числа действий.

В самом деле, если известно представление локального сплайна в виде N -мерного вектора коэффициентов ряда Тейлора, вычисленных в точке A , то вычисление поля в точке B сводится к выполнению $3N + O(\log_2 N)$ арифметических действий. При этом все степени $(x_B - x_A)^k$, $(y_B - y_A)^k$, $(z_B - z_A)^k$, где $k = 1, 2, \dots, N$, вычисляются предварительно и число арифметических действий, необходимых для их вычисления, равно $O(\log_2 N)$. Здесь $A = (x_A, y_A, z_A)$, $B = (x_B, y_B, z_B)$.

6. Численный алгоритм восстановления потенциальных полей Земли

6.1. Постановка задачи. Обзор литературы

Хорошо известно [96], что информация о гравитационном поле является одной из важнейших в геофизике. На основании этой информации изучаются тектонические процессы, аномалии осадочного чехла и фундамента, разломы земной коры. Изменение гравитационного поля используется для предсказания землетрясений [102]. Таким образом, одной из первостепенных задач геофизики является создание единой модели гравитационного поля Земли. Как отмечается в [115], на этом пути возникают следующие препятствия:

- 1) несогласованность различных моделей гравитационных полей;
- 2) некондиционность ряда съемок гравитационных полей;

3) наличие больших ареалов (в частности, приполярных областей), не охваченных гравитационными съемками.

Одним из способов решения проблемы построения единой модели гравитационного поля является создание глобальной модели гравитационного поля Земли по спутниковым измерениям. Различные аспекты решения этой проблемы освещены в работе [115].

Несмотря на отмеченный в [115] прогресс в решении этой проблемы, остается актуальной задача восстановления потенциальных полей в областях, в которых отсутствуют данные о гравитационном поле или эти данные не являются достоверными.

В данном разделе предложен алгоритм восстановления потенциального поля в замкнутой ограниченной области Ω ($\Omega = \{0 \leq R_0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \Theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$) по его значениям, известным на части Γ_1 ($\Gamma_1 = \{R, 0 \leq \alpha_1 \leq \Theta \leq \alpha_2 \leq \pi, 0 \leq \beta_1 \leq \varphi \leq \beta_2 \leq 2\pi\}$) границы $\Gamma = \partial\Omega$ области Ω .

Задача ставится следующим образом.

Введем сферическую систему координат (ρ, θ, φ) . Пусть в области $\Omega^* = \{0 \leq R_0 \leq \rho \leq R^*, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ существует потенциальное поле $U(\rho, \theta, \varphi)$, значения которого известны на поверхности $\Gamma_1 = \{R, \alpha_1 \leq \theta \leq \alpha_2, \beta_1 \leq \varphi \leq \beta_2\}, 0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq \pi, 0 \leq \beta_1 < \beta_2 \leq 2\pi$. Используя эти значения, требуется восстановить поле $U(\rho, \theta, \varphi)$ в области $\Omega = \{0 \leq R_0 \leq \rho \leq R < R^*, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$. Подобные задачи возникают в метеорологии [82].

Задача восстановления потенциального поля в ограниченной замкнутой односвязной области по его значениям на границе области исследовалась в [103, 280]. В качестве основного аппарата исследования в [103, 280] используются интегралы типа Коши.

Численные методы продолжения лапласовых полей, основанные на проекционных методах решения интегральных уравнений с интегралами типа Коши, предложены в [52, 53, 62, 83].

Эти методы позволяют продолжить гравитационное поле, известное на замкнутой гладкой поверхности, на область, включающую в себя заданную поверхность. Последовательное применение алгоритмов, предложенных в [52, 53, 62, 83], позволяет локализовать источники гравитационных полей.

Для случая, когда известны значения потенциального поля в достаточно большом числе точек, в работе [54] предложен двухступенчатый коллокационный метод определения коэффициентов Фурье по сферическим функциям.

Во всех этих методах требуется располагать значениями потенциальных функций на гладких замкнутых поверхностях или в ограниченных областях.

В данном разделе предлагаются методы восстановления потенциальных и гравитационных полей, значения которых известны только на сферическом прямоугольнике. Раздел написан по материалам работы [51].

6.2. Численный алгоритм

Постановка задачи. Пусть потенциальное поле известно на границе $\Gamma_1 = \{R, \alpha_1 \leq \theta \leq \alpha_2, \beta_1 \leq \varphi \leq \beta_2\}$ области $\Omega_1 = \{R_0 \leq \rho \leq R, \alpha_1 \leq \theta \leq \alpha_2, \beta_1 \leq \varphi \leq \beta_2\}$. Не ограничивая общности, можно положить $\beta_1 = 0, \beta_2 = 2\pi$ (из приведенного ниже алгоритма восстановления потенциального поля будет очевидна справедливость этого замечания).

Требуется восстановить потенциальное поле в области Ω .

Ниже предлагается несколько алгоритмов решения этой задачи.

Первый алгоритм. Для аппроксимации функции $U(\rho, \Theta, \varphi)$ построим полином Бернштейна $B_{nn}(U(R, \Theta, \varphi))$ (см. разд. 8 главы I) по переменным Θ и φ на поверхности Γ_1 . Так как функция $U(\rho, \Theta, \varphi)$ гармоническая, то [209] на сфере $S(0, R)$ она разлагается в равномерно сходящийся ряд по степеням Θ и φ . Известна (см. разд. 8 главы I) теорема Канторовича о сходимости последовательности полиномов Бернштейна к целой функции на числовой оси. Повторяя доказательство этой теоремы, можно показать, что последовательность полиномов $B_{nn}(U(R, \Theta, \varphi))$ при $n \rightarrow \infty$ сходится к функции $U(R, \Theta, \varphi)$ на сфере $S(0, R)$.

Таким образом, для любого $\varepsilon (\varepsilon > 0)$ можно найти такой номер N , что при $n \geq N$

$$\|U(R, \Theta, \varphi) - B_{nn}(U(R, \Theta, \varphi))\|_{C(S(0,R))} \leq \varepsilon.$$

Воспользовавшись полиномом $B_{nn}(U(R, \Theta, \varphi))$ приближенно (с точностью ε), вычислим значения $U(R, \Theta, \varphi)$ на сетке узлов (R, Θ_k, φ_l) , $\Theta_k = \pi k/M$, $\varphi_k = 2\pi k/M$, $k = 0, 1, \dots, M$, M — натуральное число. Так как функция $U(\rho, \Theta, \varphi)$ потенциальная при $\rho \geq R$, то во внешности сферы $S(0, R)$ она может быть представлена интегралом Пуассона [137, с. 273]:

$$U(\rho, \Theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi R} \int_{S(0,R)} \frac{(\rho^2 - R^2)U(R, \xi, \eta) d\sigma}{(R^2 - 2R\rho \cos \gamma + \rho^2)^{3/2}}, \quad (6.1)$$

где γ — угол между радиус-векторами, связывающими начало координат с точками (ρ, θ, φ) и (R, ζ, η) .

По кубатурным формулам вычисления интеграла Пуассона находим приближенные значения функции $U(\rho, \Theta, \varphi)$ на сетке узлов $(R_1, \Theta_k, \varphi_l)$, $k, l = 0, 1, \dots, N, R_1 > R$.

Замечание 1. Конкретные кубатурные формулы представлены ниже.

Замечание 2. Оптимальные по точности (по порядку) кубатурные формулы вычисления интегралов с ядрами Пуассона построены в работах [48, 58].

Теперь, располагая значениями функции $U(\rho, \Theta, \varphi)$ на сетках $\{R, \Theta_k, \varphi_l\}, \{R_1, \Theta_k, \varphi_l\}, k, l = 0, 1, \dots, N$, по разностным схемам продолжаем потенциальное поле $U(\rho, \Theta, \varphi)$ на область Ω .

В практическом отношении данный алгоритм осуществим, если поверхность Γ_1 достаточно велика.

В противном случае более предпочтительным является следующий алгоритм.

Второй алгоритм заключается в следующем. После того как построен полином Бернштейна $B_{nn}(U(R, \Theta, \varphi))$, по формуле Пуассона (6.1) вычисляем приближенные значения функции $U(R, \Theta, \varphi)$ на сетке узлов $(\rho_k, \Theta_l, \varphi_j)$, $\rho_k = R + kh, k = 0, 1, \dots, N_1, \Theta_l = \pi l/N, l = 0, 1, \dots, N, \varphi_j = \pi j/N, j = 0, 1, \dots, 2N$, где N, N_1 — натуральные числа. Зафиксировав значения $l = 0, 1, \dots, N, j = 0, 1, \dots, 2N$, по значениям функции $U(R, \Theta, \varphi)$ на множестве узлов $(\rho_k, \Theta_l, \varphi_j), (\rho_{k+1}, \Theta_l, \varphi_j), \dots, (\rho_{N_1}, \Theta_l, \varphi_j)$, строим полином Бернштейна $B_{N_1}(U(R, \Theta, \varphi))$. Этот полином осуществляет продолжение функции $U(R, \Theta, \varphi)$ на значения $\rho < R$. Теоретически полином Бернштейна может продолжить потенциальное поле на всю область Ω . Это следует из теоремы Канторовича.

Третий алгоритм заключается в следующем. Располагая значениями потенциального поля на поверхности $\Gamma_1 = \{R, \alpha_1 \leq \theta \leq \alpha_2, \beta_1 \leq \varphi \leq \beta_2\}$, находим значения потенциального поля на поверхности $\Gamma_2 = \{R_1, \alpha_1 \leq \theta \leq \alpha_2, \beta_1 \leq \varphi \leq \beta_2\}, R_1 > R$.

Для этого вначале потенциальное поле продолжаем из области Γ_1 на большую область $\Gamma_1^*, \Gamma_1 \subset \Gamma_1^* \in S(0, R)$.

Из-за того что на поверхности Γ_1 поле задано с погрешностью и из-за ошибок округления, восстановить поле на всей сфере с высокой точностью не всегда удастся. Однако этот алгоритм позволяет восстановить поле в области Γ_1^* , диаметр которой в несколько раз больше диаметра области Γ_1 . При этом теоретически точность восстановления в Γ_1^* имеет тот же порядок, что и точность задания в Γ_1 . Восстановив поле в области Γ_1^* , определяем его в области $S(0, R) \setminus \Gamma_1^*$. Это можно сделать несколькими

различными способами:

1) взяв значения поля, восстановленные на поверхности Γ_1^* за исходные, продолжить потенциальное поле на область Γ_2^* , $\Gamma_1^* \subset \Gamma_2^*$. Затем повторять этот процесс до тех пор, пока не будет восстановлено поле на поверхности сферы $S(0, R)$ с центром в начале координат радиуса R ;

2) положить поле $U(R, \theta, \varphi) = 0$ при $(R, \theta, \varphi) \in S(0, R) \setminus \Gamma_1^*$;

3) вычислить среднее значение поля $U(R, \theta, \varphi)$ в области Γ_1^* и положить $U(R, \theta, \varphi)$ в области $S(0, R) \setminus \Gamma_1^*$ равным этому среднему значению.

Четвертый алгоритм заключается в следующем. После того как построен полином Бернштейна $B_{nn}(U(R, \Theta, \varphi))$ на сфере $S(0, R)$ вычисляется потенциальное поле в области Ω . Для этого, используя полином Бернштейна $B_{nn}(U(R, \Theta, \varphi))$, вычисляются значения функции $U(R, \Theta, \varphi)$ на сетке узлов (R, Θ_k, φ_l) , $\Theta_k = \pi k/N$, $k = 0, 1, \dots, N$, $\varphi_l = l\pi/N$, $l = 0, 1, \dots, 2N$. Затем, решая систему уравнений

$$\frac{1}{4\pi} \int_{S(0, R_0)} \frac{(R^2 - R_0^2) U_{NN}(R_0, \xi, \eta) d\sigma}{R_0(R_0^2 - 2R_0R \cos \gamma_{kl} + R^2)^{3/2}} = U_{NN}(R, \Theta_k, \varphi_l), \quad (6.2)$$

$k = 0, 1, \dots, N$, $l = 0, 1, \dots, 2N$, находим значения функции U_{NN} на сетке узлов $(R_0, \Theta_k, \varphi_l)$, $k = 0, 1, \dots, N$, $l = 0, 1, \dots, 2N$. Здесь γ_{kl} — угол между радиус-векторами, связывающими начало координат с точками (R, θ_k, φ_l) и (R_0, ζ, η) .

Здесь функция $U_{NN}(R_0, \Theta, \varphi)$ — приближение к функции $U(R_0, \Theta, \varphi)$. Функция $U_{NN}(R_0, \Theta, \varphi)$ может быть определена разными способами: это может быть интерполяционный полином по узлам ξ, η

$$U_{NN}(R_0, \xi, \eta) = \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^N \alpha_{kl} \psi_k(\xi) \psi_l(\eta)$$

с коэффициентами α_{kl} , требующими определения; это может быть отрезок ряда $\sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^N \alpha_{kl} \xi^k \eta^l$; это могут быть кусочно-постоянные функции.

Решив эту систему уравнений, по формуле (6.1) восстанавливаем функцию $U(\rho, \Theta, \varphi)$.

Замечание. Для определения точности восстановления на каждом шаге можно делать проверку. Например, на первом шаге можно взять восстановленные значения в области $\Gamma_1^* \setminus \Gamma_1$ за исходные, восстановить поле в Γ_1 и оценить погрешность "обратного" хода. Аналогичные проверки можно проводить на каждом этапе вычислений.

Оба последние способа носят эвристический характер и привносят дополнительную погрешность. Но так как по значениям поля на $S(0, R)$

будут вычисляться значения на поверхности $\Gamma_2 = \{R_1, \alpha_1 \leq \theta \leq \alpha_2, \beta_1 \leq \varphi \leq \beta_2\}$, то влияние определенных по второму или третьему способам значений поля $U(R, \theta, \varphi)$ в области $S(0, R) \setminus \Gamma_1^*$ незначительно скажутся на этих вычислениях.

После определения поля $U(R, \theta, \varphi)$ на поверхности $S(0, R)$ по формуле Пуассона вычисляются значения поля $U(R_1, \theta, \varphi)$ на поверхности $\Gamma_2 = \{R_1, \alpha_1 \leq \theta \leq \alpha_2, \beta_1 \leq \varphi \leq \beta_2\}$, $R_1 > R$.

После того как определены значения поля на поверхностях Γ_1^* и Γ_2 , приступаем к определению поля в области $\Omega_1 = \{R_0 \leq \rho \leq R, \alpha_1 \leq \theta \leq \alpha_2, \beta_1 \leq \varphi \leq \beta_2\}$. Для этого используются разностные формулы с шагом по переменной ρ .

Вычислив значения поля в области Ω_1 , приступаем к восстановлению поля в области $\Omega = \{R_0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$. Для этого используются разностные формулы с шагом по θ и φ .

Отметим, что подобное попеременное использование различных разностных схем использовалось в работе [46] (см. также разд. 4 главы VI).

После этих предварительных рассуждений перейдем к детальному изложению первого алгоритма.

I этап. Восстановление поля на сфере $S(0, R)$. Для восстановления поля на сфере $S(0, R)$ воспользуемся полиномами Бернштейна, описанными в разд. 8 главы I.

Построим полином Бернштейна по переменным θ и φ в области Γ_1 :

$$B_{n,n}(\theta, \varphi) = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n C_n^k C_n^l U \left(R, \alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1) \frac{k}{n}, \beta_1 + (\beta_2 - \beta_1) \frac{l}{n} \right) \times \\ \times \left(\frac{\theta - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} \right)^k \left(1 - \frac{\theta - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} \right)^{n-k} \left(\frac{\varphi - \beta_1}{\beta_2 - \beta_1} \right)^l \left(1 - \frac{\varphi - \beta_1}{\beta_2 - \beta_1} \right)^{n-l}.$$

Повторяя доказательство теоремы Канторовича, можно показать, что если функция $U(R, \theta, \varphi)$ разлагается в области $\{0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ в равномерно сходящийся ряд по степеням θ и φ , то последовательность полиномов Бернштейна $B_{n,n}(\theta, \varphi)$ сходится к функции $U(R, \theta, \varphi)$ во всей области $\{0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$.

Применим полином Бернштейна к продолжению потенциального поля на сферу $S(0, R)$. Из приведенного утверждения следует, что, пользуясь полиномом Бернштейна, можно восстановить функцию $U(R, \theta, \varphi)$ при $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ с любой степенью точности. Однако из-за вычислительных погрешностей и неточности исходных данных такое восстановление во всей области не всегда возможно.

Приведем модельный пример, иллюстрирующий эффективность описанного выше алгоритма.

Пример 1. Используя полином Бернштейна $B_{n,n}(\theta, \varphi)$, восстановить на сфере $S(0, R)$ потенциальное поле $U = \frac{100}{\sqrt{(x-30)^2+(y-30)^2+(z-30)^2}}$, значения которого известны в области $\Gamma_1 = \{R, \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$.

Результаты восстановления в области $\Gamma_1^* = S(0, R) \setminus \Gamma_1$ приведены в табл. 1, где R – радиус сферы $S(0, R)$; n – порядок полинома Бернштейна по одной переменной.

Таблица 1

R	n	Максимальная абсолютная погрешность	Максимальная относительная погрешность
10	20	2.27798576224133E-0002	1.14274749915141E+0000
10	30	1.53759033742038E-0002	7.71329453384163E-0001
10	40	1.15974535862101E-0002	5.81784192940981E-0001
10	50	9.30777065625199E-0003	4.66922656691302E-0001
10	60	0.77241574776419E-0003	3.89901851247023E-0001
10	70	0.67155642276189E-0003	3.34677439338226E-0001
10	80	0.84370149121625E-0003	2.93148244188511E-0001
10	90	0.19853831201727E-0003	2.60783748246762E-0001
5	20	1.10680936915615E-0002	5.62543924710401E-0001
5	30	7.53816478300929E-0003	3.83132716465966E-0001
5	40	0.71383649888512E-0003	2.90409902446615E-0001
5	50	0.60001810028760E-0003	2.33799270948310E-0001
5	60	3.84943410224883E-0003	1.95650292465821E-0001
5	70	3.30936078675740E-0003	1.68200672775707E-0001
5	80	2.90214949669627E-0003	1.47503862314840E-0001
5	90	0.58415193557801E-0003	1.31341404617523E-0001

II этап. На поверхности $\Gamma = \{R, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ введем сетку узлов $\theta_k = \frac{k\pi}{N}, k = 0, 1, \dots, N, \varphi_l = \frac{\pi l}{N}, l = 0, 1, \dots, 2N$.

Для простоты обозначений будем считать, что узлы $\theta_k, k_* \leq k \leq k^*, \varphi_l, l_* \leq l \leq l^*$ принадлежат поверхности Γ_1 .

Введем узлы $r_k = R - \frac{(R-R_0)k}{M}, k = -1, 0, 1, \dots, M$.

Пользуясь формулой (6.1), вычислим значения $U(r_{-1}, \theta_k, \varphi_l)$ при $\alpha_1 \leq \theta_k \leq \alpha_2$, $\beta_1 \leq \varphi_l \leq \beta_2$, $r_{-1} > R$.

Значения $U(r_{-1}, \theta_k, \varphi_l)$, $k = \overline{k_*}, k^*, l = \overline{l_*}, l^*$, будем вычислять по кубатурной формуле

$$\begin{aligned} & U(r_{-1}, \theta_k, \varphi_l) = \\ & = \frac{R}{4\pi} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(U(R, \theta_i^*, \varphi_j^*) - U(R, \theta_k, \varphi_l)) (r_{-1}^2 - R^2) \sin \theta_i^*}{(R^2 - 2Rr_{-1} \cos \gamma^* + r_{-1}^2)^{3/2}} \int_{\Delta_{ij}} d\theta d\varphi + \\ & \quad + U(R, \theta_k, \varphi_l) + Er_N(U), \end{aligned} \quad (6.3)$$

где $\cos \gamma^* = \cos \theta_i^* \cos \theta_k + \sin \theta_i^* \sin \theta_k \cos(\varphi_j^* - \varphi_l)$, $\theta_i^* = \frac{\theta_i + \theta_{i+1}}{2}$, $\varphi_j^* = \frac{\varphi_j + \varphi_{j+1}}{2}$, $\Delta_{ij} = [\theta_i, \theta_{i+1}; \varphi_j, \varphi_{j+1}]$, $Er_N(U)$ – погрешность кубатурной формулы.

Замечание. В кубатурной формуле (6.3) используется равномерная сетка. Точно так же равномерная сетка используется при построении полиномов Бернштейна. Поэтому, если в области Γ_1 потенциальное поле задано на неравномерной сетке, то вначале следует воспользоваться известными результатами по построению интерполяционных полиномов на неравномерных сетках узлов [135], а затем найти значения функции $U(R, \theta, \varphi)$ в области Γ_1 на равномерной сетке узлов. В главе 8 излагаются методы вычисления интегралов на хаотических сетках узлов.

Более точной является кубатурная формула

$$\begin{aligned} & U(r_{-1}, \theta_k, \varphi_l) = \frac{R}{4\pi} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} (U(R, \theta_i^*, \varphi_j^*) - U(R, \theta_k, \varphi_l)) \times \\ & \times \int_{\Delta_{ij}} \frac{(r_{-1}^2 - R^2) \sin \theta}{(R^2 - 2Rr_{-1} \cos \gamma + r_{-1}^2)^{3/2}} d\theta d\varphi + U(R, \theta_k, \varphi_l) + Er_N(U), \end{aligned} \quad (6.4)$$

где $\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta_k + \sin \theta \sin \theta_k \cos(\varphi - \varphi_l)$, $\theta_i^* = \frac{\theta_i + \theta_{i+1}}{2}$, $\varphi_j^* = \frac{\varphi_j + \varphi_{j+1}}{2}$, $\Delta_{ij} = [\theta_i, \theta_{i+1}; \varphi_j, \varphi_{j+1}]$, с погрешностью, равной

$$|Er_N(U)| \Big|_{\Omega}^{\cup N^{-1}}. \quad (6.5)$$

Кубатурные формулы (6.3) и (6.4) устойчивы к возмущениям значений $U(R, \theta_i^*, \varphi_j^*)$. Можно показать, что если значения $U(R, \theta_i^*, \varphi_j^*)$ заданы с точностью ε , т.е. $\left| U(R, \theta_i^*, \varphi_j^*) - \tilde{U}(R, \theta_i^*, \varphi_j^*) \right| \leq \varepsilon$, то это приводит в кубатурные формулы (6.3) и (6.4) погрешность, не превосходящую 2ε .

Замечание. В кубатурных формулах (6.3), (6.4) не в равной степени представлены области, принадлежащие различным широтам (значениям θ). Число сферических квадратов Δ_{ij} на единицу площади увеличивается при приближении к полюсам ($\theta = 0$ и $\theta = \pi$), а их площади уменьшаются. Этого легко избежать, если воспользоваться известными способами покрытия сферы [160, 216]. Однако эти построения потребуют значительного усложнения алгоритма.

Докажем справедливость оценки (6.5). Погрешность кубатурной формулы (6.4) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
& |Er_N(U)| \leq \\
& \leq \max_{\Theta, \varphi} \left| \frac{R}{4\pi} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \int_{\Delta_{ij}} \frac{(U(R, \theta, \varphi) - U(R, \theta_i^*, \varphi_j^*)) (r_{-1}^2 - R^2) \sin \theta}{(R^2 - 2Rr_{-1} \cos \gamma + r_{-1}^2)^{3/2}} d\theta d\varphi \right| \leq \\
& \leq \max_{i,j} \max_{(R, \theta, \varphi) \in \Delta_{ij}} |U(R, \theta, \varphi) - U(R, \theta_i^*, \varphi_j^*)| \times \\
& \quad \times \frac{R}{4\pi} \int_{S(0, R)} \frac{(r_{-1}^2 - R^2) \sin \theta}{(R^2 - 2Rr_{-1} \cos \gamma + r_{-1}^2)^{3/2}} d\theta d\varphi \leq \\
& \leq \max_{i,j} B (|\theta_i - \theta_i^*| + |\varphi_j - \varphi_j^*|) \leq B \left(\frac{\pi}{2N} + \frac{\pi}{N} \right) \leq \frac{2\pi c}{N} = \frac{c}{N}.
\end{aligned}$$

Здесь $\Delta_{ij} = [R; \theta_i, \theta_{i+1}; \varphi_j, \varphi_{j+1}]$.

Для построения более точных кубатурных формул нужно аппроксимировать функцию сплайнами на поверхности Γ_1 .

Опишем построение локальных сплайнов на поверхности Γ_1 , причем поверхность Γ_1 может совпадать с Γ .

Пусть на поверхности Γ_1 известны значения функции на равномерной по θ и φ сетке (θ_k, φ_l) , $k = k_*, k_* + 1, \dots, k^*$, $l = 0, 1, \dots, N$. Зафиксируем целое положительное число m , величина которого будет определена ниже. Для простоты обозначений будем считать, что $N_1 = k^* - k_*$ и N кратны m : $N_1 = mn_1$, $N = mn_2$.

Введем на поверхности Γ_1 прямоугольники $\Delta_{kl}^* = [R; \theta_{mk}, \theta_{m(k+1)}; \varphi_{ml}, \varphi_{m(l+1)}]$, $k = 0, 1, \dots, n_1 - 1$, $l = 0, 1, \dots, n_2 - 1$, $\theta_k = \alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1)k/N_1$, $k = 0, 1, \dots, N_1$, $\varphi_l = 2\pi l/N$, $l = 0, 1, \dots, N$.

В прямоугольнике Δ_{kl}^* , $k = 0, 1, \dots, n_1 - 1$, $l = 0, 1, \dots, n_2 - 1$, построим интерполяционный полином $L_{mm}(U, \Delta_{kl}^*) = L_m^\theta [L_m^\varphi [U, [\varphi_{ml}, \varphi_{m(l+1)}]]$, $[\theta_{mk}, \theta_{m(k+1)}]$. Здесь $L_m^x [f, [a, b]]$ означает полином, интерполирующий функцию $f(x) \in C[a, b]$ на сегменте $[a, b]$ по $m + 1$ равноотстоящему узлу, причем точки a и b входят в число узлов интерполяции. Через

$L_{mm}[f, [a, b; c, d]]$ обозначен интерполяционный полином, определяемый формулой

$$L_{mm}[f, [a, b; c, d]] = L_m^{x_2} [L_m^{x_1} [f(x_1, x_2), [a, b]], [c, d]],$$

в которой последовательно применяются операторы $L_m^{x_1}$ по переменной x_1 и $L_m^{x_2}$ — по переменной x_2 .

Из полиномов $L_{mm}[U, \Delta_{kl}^*], k = 0, 1, \dots, n_1 - 1, l = 0, 1, \dots, n_2 - 1$, составим локальный сплайн $S_{mm}[U, \Gamma_1]$, аппроксимирующий функцию на поверхности Γ_1 .

Оценим погрешность аппроксимации функции $U(R, \theta, \varphi)$ полиномами $L_{mm}[U, \Delta_{kl}^*], k = 0, 1, \dots, n_1 - 1, l = 0, 1, \dots, n_2 - 1$.

Точность интерполяции полиномом $L_{mm}[f, [a, b; c, d]]$ функции $f(x_1, x_2)$, определенной на прямоугольнике $[a, b; c, d]$ и имеющей непрерывные частные производные до $(s - 1)$ -го порядка и кусочно-непрерывные производные до s -го порядка, ограниченные по абсолютной величине константой \bar{M} , оценивается при $m \geq s$ неравенством

$$\|f(x_1, x_2) - L_{mm}[f; [a, b; c, d]]\|_C \leq \frac{c\bar{M}}{m(m-1)\dots(m-s+1)} h^s \lambda_m^2,$$

где $h = \max(|b - a|, |d - c|)$; λ_m — константа Лебега.

В оценку погрешности интерполяционных полиномов входит константа \bar{M} , равная наибольшей из абсолютных величин частных производных функции $f(x_1, x_2)$. Оценим абсолютную величину производной m -го порядка гармонической функции $U(x_1, x_2, x_3)$ при $(x_1, x_2, x_3) \in \Gamma_1$. Не ограничивая общности, можно считать, что расстояние от любой точки поверхности Γ_1 до границы $\partial\Omega^*$ области Ω^* не меньше трех. Зафиксируем произвольную точку $M_0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in \Gamma_1$.

По теореме о среднем [215]

$$U(M_0) = \frac{3}{4\pi a^2} \int_{B(M_0, a)} U(x_1, x_2, x_3) dv.$$

Так как производная от гармонической функции также является гармонической функцией, то по теореме Остроградского [218] имеем

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial U(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} \right|_{M_0} &= \frac{1}{V_a} \int_{B(M_0, a)} \frac{\partial U(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 = \\ &= \frac{1}{V_a} \int_{S(M_0, a)} U(x_1, x_2, x_3) dx_2 dx_3. \end{aligned}$$

Пусть $\overline{M} = \max_{(x_1, x_2, x_3) \in \partial\Omega^*} |U(x_1, x_2, x_3)|$. Нетрудно видеть, что

$$\left| \frac{\partial U(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} \right| \leq \frac{3}{4\pi a^3} \cdot 4\pi a^2 \overline{M} = \frac{3}{a} \overline{M}.$$

Следовательно, при $a \geq 3$ производные всех порядков от гармонической функции $U(x_1, x_2, x_3)$ при $(x_1, x_2, x_3) \in \Gamma_1$ не превосходят \overline{M} .

Таким образом, погрешность приближения интерполяционными полиномами $L_{mm}[f, [a, b, c, d]]$ оценивается величиной

$$\|f(x_1, x_2) - L_{mm}[f; [a, b, c, d]]\|_{C[a, b, c, d]} \leq \frac{\overline{M}c}{m!} h^m \lambda_m^2,$$

где $\overline{M} = \max_{(x_1, x_2, x_3) \in \partial\Omega^*} |U(x_1, x_2, x_3)|$, расстояние между Γ_1 и поверхностью $\partial\Omega^*$ области Ω^* не меньше 3. При выводе этой оценки считаем $s = m$.

Отсюда следует, что точность аппроксимации функции $U(\rho, \theta, \varphi)$ сплайном $S_{mm}[U, \Gamma_1]$ на поверхности Γ_1 оценивается неравенством

$$\|U(R, \theta, \varphi) - S_{mm}[U, \Gamma_1]\|_{C(\Gamma_1)} \leq \frac{c\overline{M}}{m!} \left(\frac{1}{N_1^m} + \frac{1}{N^m} \right).$$

После построения локального сплайна значение потенциального поля вычисляется по формуле

$$U(r_{-1}, \theta_k, \varphi_l) = \frac{R}{4\pi} \sum_{i=0}^{n_1-1} \sum_{j=0}^{n_2-1} \int_{\Delta_{ij}^*} \frac{(S_{mm}[U, \Gamma_1](R, \theta_i^*, \varphi_j^*) - U(R, \theta_k, \varphi_l))}{(R^2 - 2Rr_{-1} \cos \gamma + r_{-1}^2)^{3/2}} \times \\ \times (r_{-1}^2 - R^2) \sin \theta d\theta d\varphi + U(R, \theta_k, \varphi_l) + Er(U), \quad (6.6)$$

где $\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta_k + \sin \theta \sin \theta_k \cos(\varphi - \varphi_l)$.

Так как интеграл Пуассона от константы равен константе, то $|Er(U)| \leq cn_*^{-m}$, где $n_* = \min(n_1, n_2)$, а константа c не зависит от R и n_1, n_2 .

Второй этап заканчивается вычислением значений $U(r_{-1}, \theta_k, \varphi_l)$, $k = k_*, k_* + 1, \dots, k^*$, $l = l_*, l_* + 1, \dots, l^*$, по одной из представленных выше кубатурных формул.

III этап. На протяжении этого этапа, пользуясь разностными схемами, восстановим поле $U(\rho, \theta, \varphi)$ в области Ω_1 . Напомним, что уравнение Лапласа в сферических координатах имеет вид

$$\Delta U(\rho, \theta, \varphi) = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}.$$

Разностная схема для оператора Лапласа, записанного в сферических координатах, имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta U = & \frac{2}{r_{k-1}} \frac{U_{k-2,j,l} - U_{k-1,j,l}}{h_k} + \frac{U_{k,j,l} - 2U_{k-1,j,l} + U_{k-2,j,l}}{h_k^2} + \\ & + \frac{\operatorname{ctg} \theta_j}{r_{k-1}^2} \frac{U_{k-1,j,l} - U_{k-1,j-1,l}}{h_j} + \frac{1}{r_{k-1}^2} \frac{U_{k-1,j+1,l} - 2U_{k-1,j,l} + U_{k-1,j-1,l}}{h_j^2} + \\ & + \frac{1}{r_{k-1}^2 \sin^2 \theta_j} \frac{U_{k-1,j,l+1} - 2U_{k-1,j,l} + U_{k-1,j,l-1}}{h_l^2} = 0, \end{aligned} \quad (6.7)$$

где $U_{k,j,l} = U(r_k, \theta_j, \varphi_l)$, h_k, h_j, h_l — соответственно шаги сетки узлов, введенной в начале II этапа, по переменным ρ, θ, φ . Из формулы (6.7) имеем

$$\begin{aligned} U_{k,j,l} = & 2U_{k-1,j,l} - U_{k-2,j,l} - \frac{2h_k}{r_{k-1}} (U_{k-2,j,l} - U_{k-1,j,l}) - \\ & - h_k^2 \frac{\operatorname{ctg} \theta_j}{r_{k-1}^2} \frac{U_{k-1,j,l} - U_{k-1,j-1,l}}{h_j} - \frac{h_k^2}{h_j^2 r_{k-1}^2} (U_{k-1,j+1,l} - 2U_{k-1,j,l} + U_{k-1,j-1,l}) - \\ & - \frac{h_k^2}{h_l^2 r_{k-1}^2 \sin^2 \theta_j} (U_{k-1,j,l+1} - 2U_{k-1,j,l} + U_{k-1,j,l-1}), \quad k = 2, 3, \dots, M. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Замечание. Пользуясь значениями $U_{-1,j,l}, U_{0,j,l}, k_* \leq j \leq k^*, 0 \leq l \leq N$, вычисляем $U_{1,j,l}, k_* + 1 \leq j \leq k^* - 1, 0 \leq l \leq N$.

Теперь, располагая значениями $U_{0,j,l}$ при $k_* \leq j \leq k^*, 0 \leq l \leq N$ и $U_{1,j,l}$ при $k_* + 1 \leq j \leq k^* - 1, 0 \leq l \leq N$, находим значения $U_{2,j,l}$ при $k_* + 2 \leq j \leq k^* - 2, 0 \leq l \leq N$.

Продолжая этот процесс, приходим к одной из трех возможностей:

1) в случае, если на первом этапе потенциальное поле было продолжено на всю сферу $S(0, R)$, после выполнения третьего этапа потенциальное поле будет восстановлено на всей сфере $S(0, R_0)$. В этом случае потенциальное поле восстановлено во всей области Ω ;

2) вычислены значения поля на сетке узлов, расположенной на сфере $S(0, R_0)$;

3) вычисления заканчиваются на сфере $R_0^* (R_0^* > R_0)$.

В двух последних случаях нужно перейти к четвертому этапу.

IV этап. Предположим вначале, что имеет место вторая возможность и в результате вычислений по формуле (6.8) найдены значения $U(r_k, \theta_j, \varphi_l), k = p, j = k_* + p, \dots, k^* - p, l = 0, \dots, N, p = 1, \dots, M - 1$. Обозначим через Ω_* область, в которой к началу IV этапа было восстановлено поле $U(\rho, \theta, \varphi)$.

На протяжении этого этапа восстанавливается потенциальное поле в области $\Omega \setminus \Omega_*$. Воспользуемся следующей разностной аппроксимацией уравнения Лапласа:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{r_k} \frac{U_{k-2,j-1,l} - U_{k-1,j-1,l}}{h_k} + \frac{U_{k-2,j-1,l} - 2U_{k-1,j-1,l} + U_{k,j-1,l}}{h_k^2} + \\ & + \frac{\operatorname{ctg} \theta_{j-1}}{r_k^2} \frac{U_{k,j-1,l} - U_{k,j-2,l}}{h_j} + \frac{1}{r_k^2} \frac{U_{k,j,l} - 2U_{k,j-1,l} + U_{k,j-2,l}}{h_j^2} + \\ & + \frac{1}{r_k^2 \sin^2 \theta_{j-1}} \frac{U_{k,j-1,l+1} - 2U_{k,j-1,l} + U_{k,j-1,l-1}}{h_l^2} = 0. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Отсюда получаем разностную схему

$$\begin{aligned} U_{k,j,l} = & 2U_{k,j-1,l} - U_{k,j-2,l} - 2r_k \frac{h_j^2}{h_k} (U_{k-2,j-1,l} - U_{k-1,j-1,l}) - \\ & - r_k^2 \frac{h_j^2}{h_k^2} (U_{k-2,j-1,l} - 2U_{k-1,j-1,l} + U_{k,j-1,l}) - \operatorname{ctg} \theta_{j-1} h_j (U_{k,j-1,l} - U_{k,j-2,l}) - \\ & - \frac{1}{\sin^2 \theta_{j-1}} \frac{h_j^2}{h_l^2} (U_{k,j-1,l+1} - 2U_{k,j-1,l} + U_{k,j-1,l-1}), \end{aligned} \quad (6.10)$$

с помощью которой последовательно находим $U_{k,j,l}$ при различных значениях j . Располагая значениями $U_{k,j-1,l}$, $U_{k,j-2,l}$, $U_{k,j-1,l-1}$, $U_{k,j-1,l+1}$, $U_{k-1,j-1,l}$, $U_{k-2,j-1,l}$ при $k = 1$ и $k = 2$, находим значения $U_{k,j,l}$ и $U_{k,j+1,l}$ для $k = 2$. Аналогично, используя значения $U_{k,j+1,l}$, $U_{k,j+2,l}$, $U_{k,j+1,l-1}$, $U_{k,j+1,l+1}$, $U_{k-1,j+1,l}$, $U_{k-2,j+1,l}$ при $k = 1$ и $k = 2$, вычисляем значения $U_{k,j,l}$ и $U_{k,j-1,l}$ для $k = 2$. Дальнейшие вычисления проводятся аналогично при $k = 3, 4, \dots, M$. Обозначим через $\bar{\Omega}_*$ область, представляющую собой объединение области Ω_* и области, в которой удалось вычислить значения $U_{k,j,l}$ по формуле (6.10).

Последовательное применение указанных вычислений может привести к одному из трех случаев:

1) все значения $U(r_k, \theta_j, \varphi_l)$, $j = 0, 1, \dots, N$, $l = 0, 1, \dots, 2N$, будут вычислены при $k = 1, 2, \dots, \widetilde{M}$, $\widetilde{M} < M$;

2) все значения будут вычислены на сфере $S(0, R_0)$, т.е. получены значения $U(R_0, \theta_j, \varphi_l)$, $j = 0, 1, \dots, N$, $l = 0, 1, \dots, 2N$;

3) вычисления оборвутся на сфере $S(0, R_0)$.

В первом и втором случаях существует сфера $S(0, r_{\widetilde{k}})$, $\widetilde{k} \leq \widetilde{M}$, на которой известны значения $U(r_{\widetilde{k}}, \theta_i, \varphi_j)$, $i = 0, 1, \dots, N$, $j = 0, 1, \dots, 2N$.

Используя эти значения, по формуле Пуассона для внешней задачи Лапласа заканчиваем восстановление потенциального поля $U(\rho, \theta, \varphi)$

в области $r_{\tilde{k}} \leq \rho \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ в первом случае и в области Ω во втором случае. Тем самым во втором случае завершаем процесс восстановления поля в области Ω , а в первом случае приходим к исходной задаче на сфере $S(0, r_{\tilde{M}})$.

Кроме того, во втором случае восстановление потенциального поля в области Ω может быть проведено с использованием интеграла Пуассона и разностных схем при начальном значении на сфере $S(0, R_0)$.

На этом заканчиваем решение задачи в первом и втором случаях.

Третий случай совпадает с рассмотренной выше второй возможностью. В этом случае повторяются действия, описанные в IV этапе.

Замечание. В третьем случае можно вернуться к I этапу и в случае восстановления с помощью полиномов Бернштейна потенциального поля на всей сфере $S(0, R_0)$ с достаточно высокой степенью точности для восстановления поля в области $\Omega \setminus \bar{\Omega}_*$ можно воспользоваться формулой Пуассона для внешней задачи Лапласа и на этом завершить вычисления.

Замечание. В третьем случае для восстановления потенциального поля можно увеличить шаг по r и по θ в разностной схеме и вновь провести вычисления третьего и четвертого этапов. Однако чрезмерное увеличение шагов может вызвать значительную дополнительную погрешность.

Выше остался без рассмотрения случай, когда после окончания вычислений по третьему этапу значения потенциального поля оказались вычисленными только на части сферы $S(0, R_0^*)$. В этом случае, используя вычисления, описанные в IV этапе, восстанавливаем поле в области $\{R_0^* \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$.

Тем самым задача сведена к рассмотренному выше второму случаю.

Приведем модельный пример восстановления потенциальных полей по описанному выше алгоритму.

6.3. Модельный пример

Введем декартову систему координат $OXYZ$. Пусть в точке с координатами $(30, 30, 30)$ находится точечное тело с массой $\mu = 100$, создающее потенциальное поле $U(x, y, z)$.

Введем сферическую систему координат (ρ, θ, φ) с полюсом в начале декартовой системы координат. Пусть потенциальное поле $U(x, y, z)$ известно на поверхности $\{\rho = R, \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ и равно

$$U(x, y, z) = \frac{100}{\sqrt{(x-30)^2 + (y-30)^2 + (z-30)^2}}.$$

Требуется определить поле $U(\rho, \theta, \varphi)$ в области, определяемой неравенствами $R_0 \leq \rho \leq R$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Введем сетку узлов $\theta_k = \frac{k\pi}{N_1}$, $k = 0, 1, \dots, N_1$, $\varphi_l = \frac{2\pi l}{N_2}$, $l = 0, 1, \dots, N_2$, $r_k = R - \frac{(R-R_0)k}{M}$, $k = 0, 1, \dots, M$, где $R_0 = \frac{R}{2}$, и используем численный алгоритм, приведенный в разд. 2.

Результаты вычислений приведены в табл. 2, где R – радиус сферы; N_1, N_2, M – число узлов по переменным θ, φ, ρ ; абсолютная и относительная погрешности вычисляются в равномерной метрике.

Таблица 2

R	N_1	M	N_2	Максимальная абсолютная погрешность	Максимальная относительная погрешность (%)
10	12	4	6	7.10150632E-0002	3.42728159E+0000
10	12	4	8	6.74350044E-0002	3.25188808E+0000
10	12	4	10	6.00010837E-0002	2.89424638E+0000
10	12	4	12	5.34529762E-0002	2.63961710E+0000
10	18	6	6	4.92832078E-0002	2.59311024E+0000
10	18	6	8	4.76491023E-0002	2.57045698E+0000
10	18	6	10	4.03768592E-0002	2.53176093E+0000
10	18	6	12	3.93737465E-0002	2.49945770E+0000
5	12	4	6	3.43809877E-0002	1.71528484E+0000
5	12	4	8	2.57156139E-0002	1.30595952E+0000
5	12	4	10	2.57073538E-0002	1.30337634E+0000
5	12	4	12	2.56325279E-0002	1.30103164E+0000
5	18	6	6	2.55056883E-0002	1.29754873E+0000
5	18	6	8	2.54943372E-0002	1.27839226E+0000
5	18	6	10	2.53505878E-0002	1.24037784E+0000
5	18	6	12	2.53083547E-0002	1.23998678E+0000

Таким образом, относительная погрешность восстановления потенциального поля достигает 2,5 % ($R = 10$) и 1,25 % ($R = 5$) при небольших значениях N_1, N_2, M и стремится к нулю при увеличении N_1, N_2, M .

ГЛАВА III

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ГРАВИМЕТРИИ

В главе I был дан краткий обзор методов решения прямой задачи гравиметрии, из которого следует, что методологической основой известных в литературе исследований являлась ньютоновская теория тяготения в ее непрерывной интерпретации. Как отмечается в [189], на современном этапе развития гравиметрии необходимо применять методы дискретной теории ньютоновского потенциала.

В связи с этим возникает задача разложения в ряд по шаровым функциям потенциальных полей, создаваемых отдельными телами (и их частями). Этим вопросам посвящены разд. 1, 2 данной главы. В разд. 3, 4 исследуются вопросы приближенного вычисления моментов по кубатурным формулам.

1. Разложение по шаровым функциям потенциальных полей, создаваемых односвязным телом

В этом разделе излагаются алгоритмы разложения в ряд по шаровым функциям потенциальных полей, создаваемых односвязными телами. При этом при вычислении моментов по сферическим функциям (коэффициентов Фурье) за основу вычислений берется дискретная модель.

1.1. Разложение в ряд по сферическим функциям потенциального поля одной материальной точки

В случае, если возмущающее поле имеет постоянную плотность и поле вычисляется на достаточно большом расстоянии от тела, то тело можно рассматривать как материальную точку с массой, равной массе тела. В данном разделе приведены формулы разложения в ряд по сферическим функциям односвязного тела с простой геометрической структурой (куб, шар), воспринимаемого на достаточно большом удалении как материальную точку.

Введем сферическую систему координат r, θ, φ .

Рассмотрим задачу определения коэффициентов Фурье разложения потенциального поля $U(P)$, созданного единичной массой, находящейся в точке S с координатами $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$.

Известно [92, 169], что потенциал в точке P с координатами (r, θ, φ) при $r_1 < r$ определяется формулой

$$U(P) = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r_1}{r}\right)^k P_n(\cos \gamma), \quad (1.1)$$

где γ — угол между векторами OP и OS .

При $r < r_1$ потенциал в точке P определяется формулой

$$U(P) = \frac{1}{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_1}\right)^k P_n(\cos \gamma).$$

Из теоремы сложения [92] следует, что

$$P_n(\cos \gamma) = \sum_{m=0}^n \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta) P_n^m(\cos \theta_1) \cos m(\varphi - \varphi_1), \quad (1.2)$$

где $\varepsilon_m = 1$ при $m = 0$ и $\varepsilon_m = 2$ при $m \geq 1$.

Из (1.1) и (1.2) следует, что при $r_1 < r$

$$\begin{aligned} U(P) &= \\ &= \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_1}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta) P_n^m(\cos \theta_1) \cos m(\varphi - \varphi_1). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Учитывая нормировку [200]

$$\widehat{P}_n^m(\cos \theta) = \frac{n!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta), \quad (1.4)$$

последнее выражение можно представить в виде

$$\begin{aligned} U(P) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_1^n}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n \varepsilon_m \frac{(n-m)!(n+m)!}{(n!)^2} \times \\ &\times \widehat{P}_n^m(\cos \theta) \widehat{P}_n^m(\cos \theta_1) \cos m(\varphi - \varphi_1). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Формула (1.5) дает разложение потенциального поля $U(P)$ в ряд Фурье по базисным функциям $\{r^{-k}\}$, $k = 0, 1, \dots$, $\{\widehat{P}_n^m(\cos \Theta) \cos m\varphi\}$, $\{\widehat{P}_n^m(\cos \Theta) \sin m\varphi\}$, $m = 0, 1, \dots, n$, $n = 0, 1, \dots$

Коэффициенты Фурье при базисных функциях $\{\hat{P}_n^m(\cos \Theta) \cos m\varphi\}$, $\{\hat{P}_n^m(\cos \Theta) \sin m\varphi\}$ обозначим через константы a_{nm} , b_{nm} , $m = 0, 1, \dots, n$, $n = 0, 1, \dots$, соответственно.

Формула (1.5) позволяет выписать коэффициенты $\{a_{nm}, b_{nm}\}$ в явном виде:

$$a_{nm} = (r_1)^n \varepsilon_m \frac{(n-m)!(n+m)!}{(n!)^2} \hat{P}_n^m(\cos \theta_1) \cos m\varphi_1, \quad (1.6)$$

где $n = 0, 1, \dots$; $m = 0, 1, \dots, n$, и

$$b_{nm} = (r_1)^n \varepsilon_m \frac{(n-m)!(n+m)!}{(n!)^2} \hat{P}_n^m(\cos \theta_1) \sin m\varphi_1,$$

где $n = 1, 2, \dots$; $m = 0, 1, \dots, n$.

1.2. Разложение в ряд по сферическим функциям потенциального поля двух точечных источников

Рассмотрим два точечных источника с массами m_0 и m_1 , расположенных в точках O и O_1 . Здесь точка O совпадает с началом координат. Потенциал поля, созданного этой парой источников в точке P , равен

$$U(P) = \frac{m_0}{r} + \frac{m_1}{r_1}, \quad (1.7)$$

где r – расстояние от O до P ; r_1 – расстояние от O_1 до P . Обозначим через r_0 расстояние между O и O_1 . Сферические координаты точек P и O_1 соответственно равны (r, θ, φ) и $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$.

Пусть $r_0 < r$, $r_0 < r_1$. Разложим функцию $\frac{1}{r_1}$ в ряд по степеням $\frac{r_0}{r}$. По формулам тригонометрии

$$r_1 = r(1 + (r_0/r)^2 - 2(r_0/r) \cos \gamma)^{1/2}, \quad (1.8)$$

где γ – угол между векторами OP и OO_1 .

Если $r_0 < r$, то

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1} &= \frac{1}{r(1 + (r_0/r)^2 - 2(r_0/r) \cos \gamma)^{1/2}} = \\ &= \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n \cos(\gamma), \end{aligned} \quad (1.9)$$

где $P_n(\cos \gamma)$ – полиномы Лежандра.

Из формул (1.7) и (1.9) следует, что

$$\begin{aligned} U(P) &= \frac{m_0}{r} + \frac{m_1}{r} + \frac{m_1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\cos \gamma) = \\ &= \frac{m_0 + m_1}{r} + \frac{m_1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\cos \gamma). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Воспользовавшись теоремой сложения полиномов Лежандра [92, с. 138-140], имеем

$$P_n(\cos \gamma) = P_n(\mu)P_n(\mu_1) + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\mu)P_n^m(\mu_1) \cos m(\varphi - \varphi_1),$$

где $\mu = \cos \theta, \mu_1 = \cos \theta_1$.

Введем соотношение $\varepsilon_m = 1$ при $m = 0$, $\varepsilon_m = 2$ при $m \neq 0$ и воспользуемся нормировкой [200]

$$\widehat{P}_n^m(\cos \theta) = \frac{n!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta).$$

В результате имеем

$$P_n(\cos \gamma) = \sum_{m=0}^n \varepsilon_m \frac{(n-m)!(n+m)!}{(n!)^2} \widehat{P}_n^m(\mu) \widehat{P}_n^m(\mu_1) \cos m(\varphi - \varphi_1).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} U(P) &= \frac{m_0}{r} + \frac{m_1}{r} + \\ &+ \frac{m_1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \varepsilon_m \left(\frac{r_0}{r}\right)^n \frac{(n-m)!(n+m)!}{(n!)^2} \widehat{P}_n^m(\cos \Theta) \widehat{P}_n^m(\cos \Theta_1) \cos m(\varphi - \varphi_1). \end{aligned}$$

Коэффициенты Фурье при базисных функциях $\{\widehat{P}_n^m(\cos \Theta) \cos m\varphi\}$, $\{\widehat{P}_n^m(\cos \Theta) \sin m\varphi\}$ обозначим через a_{nm}, b_{nm} , $m = 0, 1, \dots, n, n = 0, 1, \dots$, соответственно.

Нетрудно видеть, что

$$a_{00} = m_0 + m_1,$$

$$a_{n0} = m_1(r_0)^n \widehat{P}_n^0(\cos \theta_1)$$

при $n = 1, 2, \dots$,

$$a_{nj} = 2m_1(r_0)^n \frac{(n+j)!(n-j)!}{(n!)^2} \widehat{P}_n^j(\cos \theta_1) \cos j\varphi_1,$$

$$b_{nj} = 2m_1(r_0)^n \frac{(n+j)!(n-j)!}{(n!)^2} \widehat{P}_n^j(\cos \theta_1) \sin j\varphi_1$$

при $n = 1, 2, \dots, j = 0, 1, \dots, n$.

Воспользуемся обозначениями сферических функций, приведенными в [169, с. 294], и примем

$$Y_{n0}(\theta, \varphi) = \widehat{P}_n^0(\mu),$$

$$Y_{nj}(\theta, \varphi) = \widehat{P}_n^m(\mu) \cos m\varphi, j = 1, 2, \dots, n,$$

$$Y_{nj}(\theta, \varphi) = \widehat{P}_n^m(\mu) \sin m\varphi, j = n+1, n+2, \dots, 2n,$$

причем если $j \leq n$, то $m = j$; если $j \geq n+1$, то $m = j - n$.

Тогда предыдущее выражение можно записать в более компактном виде:

$$P_n(\cos \gamma) = \sum_{j=0}^{2n} \varepsilon_m \frac{(n-m)!(n+m)!}{(n!)^2} Y_{nj}(\theta, \varphi) Y_{nj}(\theta_1, \varphi_1). \quad (1.11)$$

Подставив (1.11) в (1.10), имеем

$$U(P) = \frac{m_0 + m_1}{r} + \frac{m_1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r} \right)^n (Y_{n0}(\theta, \varphi) Y_{n0}(\theta_1, \varphi_1) + 2 \sum_{j=1}^{2n} \frac{(n-m)!(n+m)!}{(n!)^2} Y_{nj}(\theta, \varphi) Y_{nj}(\theta_1, \varphi_1)) \quad (1.12)$$

Формула (1.12) определяет поле в точке P .

Представим разложение (1.12) в виде ряда Фурье:

$$U(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2n} C_{nj} Y_{nj}(\theta, \varphi),$$

где

$$C_{00} = \frac{m_0 + m_1}{r}; \quad C_{n0} = \frac{m_1}{r} \left(\frac{r_0}{r} \right)^n Y_{n0}(\theta_1, \varphi_1),$$

$n = 1, 2, \dots,$

$$C_{nj} = 2 \frac{m_1}{r} \left(\frac{r_0}{r} \right)^n \frac{(n+m)!(n-m)!}{(n!)^2} Y_{nj}(\theta_1, \varphi_1),$$

$m = j$ при $j \leq n$; $m = j - n$ при $j \geq n+1$; $j = 1, \dots, 2n, n = 0, 1, \dots$

Отметим, что в последней формуле использованы приведенные выше соотношения для Y_{nj} , $j = 0, 1, \dots, 2n, n = 0, 1, \dots$

1.3. Разложение в ряд по сферическим функциям потенциального поля $N + 1$ точечного источника

Рассмотрим $N+1$ точечный источник с массами $m_i, i = 0, 1, 2, \dots, N$, расположенными соответственно в точках $O_i, i = 0, 1, 2, \dots, N$.

Здесь точка O_0 совпадает с началом координат и в дальнейшем обозначается через O .

Необходимо определить потенциал, создаваемый этими источниками в точке P .

Пусть точка P имеет сферические координаты (r, θ, φ) , а точки O_i имеют сферические координаты $(r_i, \theta_i, \varphi_i), i = 1, 2, \dots, N$. Пусть r — расстояние от точки P до начала координат, $R_i, i = 1, 2, \dots, N$ — расстояние от точек $O_i, i = 1, 2, \dots, N$, до точки P , а $r_i, i = 1, 2, \dots, N$, расстояние от точки O до точек $O_i, i = 1, 2, \dots, N$, соответственно.

Обозначим через $\gamma_i, i = 1, \dots, N$, соответственно углы между вектором OP и векторами $OO_i, i = 1, \dots, N$. Будем считать, что $r_i < r, i = 1, \dots, N$. В этом случае

$$\frac{1}{R_i} = \frac{1}{r} \left(1 + \left(\frac{r_i}{r} \right)^2 - 2 \left(\frac{r_i}{r} \right) \cos \gamma_i \right)^{-1/2} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_i}{r} \right)^n P_n(\cos \gamma_i).$$

Таким образом, значение потенциала от $N + 1$ точечного источника в точке P равно

$$\begin{aligned} U(P) &= \\ &= \frac{m_0}{r} + \dots + \frac{m_N}{r} + \frac{m_1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_1}{r} \right)^n P_n(\cos \gamma_1) + \dots + \frac{m_N}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_N}{r} \right)^n P_n(\cos \gamma_N). \end{aligned}$$

Из теоремы сложения следует, что

$$\begin{aligned} &P_n(\cos \gamma_i) = \\ &= Y_{n0}(\theta, \varphi) Y_{n0}(\theta_i, \varphi_i) + 2 \sum_{j=1}^{2n} \frac{(n-m)!(n+m)!}{(n!)^2} Y_{nj}(\theta, \varphi) Y_{nj}(\theta_i, \varphi_i), \quad (1.13) \end{aligned}$$

$i = 1, 2, \dots, N$.

Воспользовавшись этой формулой, имеем

$$\begin{aligned} U(P) &= \frac{m_0}{r} + \dots + \frac{m_N}{r} + \frac{m_1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_1}{r} \right)^n \left(Y_{n0}(\theta, \varphi) Y_{n0}(\theta_1, \varphi_1) + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{j=1}^{2n} \frac{(n-m)!(n+m)!}{(n!)^2} Y_{nj}(\theta, \varphi) Y_{nj}(\theta_1, \varphi_1) \right) + \dots + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{m_N}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_N}{r} \right)^n (Y_{n0}(\theta, \varphi) Y_{n0}(\theta_N, \varphi_N) + \\
& + 2 \sum_{j=1}^{2n} \frac{(n-m)!(n+m)!}{(n!)^2} Y_{nj}(\theta, \varphi) Y_{nj}(\theta_N, \varphi_N) \Big). \quad (1.14)
\end{aligned}$$

Обозначив через C_{nj} , $n = 0, 1, \dots$, $j = 0, 1, \dots, 2n$, коэффициенты Фурье

$$\begin{aligned}
C_{00} &= \frac{1}{r} \sum_{i=0}^N m_i, \\
C_{n0} &= \frac{1}{r} \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{r_i}{r} \right)^n Y_{n0}(\theta_i, \varphi_i),
\end{aligned}$$

$n = 1, 2, \dots$,

$$C_{nj} = \frac{2}{r} \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{r_i}{r} \right)^n \frac{(n-m)!(n+m)!}{(n!)^2} Y_{nj}(\theta_i, \varphi_i),$$

$n = 1, 2, \dots$, $j = 1, 2, \dots, 2n$, потенциал можно представить в виде

$$U(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2n} C_{nj} Y_{nj}(\theta, \varphi).$$

Из проведенных выше рассуждений легко получить формулу для вычисления потенциала N точечных источников, расположенных в точках O_i , $i = 1, 2, \dots, N$, ни одна из которых не совпадает с началом координат.

Для этого, положив в формуле (1.14) $m_0 = 0$, имеем

$$\begin{aligned}
U(P) &= \frac{m_1}{r} + \dots + \frac{m_N}{r} + \frac{m_1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_1}{r} \right)^n (Y_{n0}(\theta, \varphi) Y_{n0}(\theta_1, \varphi_1) + \\
& + 2 \sum_{j=1}^{2n} \frac{(n-m)!(n+m)!}{(n!)^2} Y_{nj}(\theta, \varphi) Y_{nj}(\theta_1, \varphi_1) \Big) + \dots + \\
& + \frac{m_N}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_N}{r} \right)^n (Y_{n0}(\theta, \varphi) Y_{n0}(\theta_N, \varphi_N) + \\
& + 2 \sum_{j=1}^{2n} \frac{(n-m)!(n+m)!}{(n!)^2} Y_{nj}(\theta, \varphi) Y_{nj}(\theta_N, \varphi_N) \Big).
\end{aligned}$$

Запишем в явном виде коэффициенты Фурье разложения потенциальных полей, создаваемых N точечными источниками и представимых рядом

$$U(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\hat{P}_n^m(\cos \theta)}{r^{n+1}} (a_{nm} \cos m\varphi + b_{nm} \sin m\varphi). \quad (1.15)$$

Пусть потенциальное поле $U(P)$, $P = (x, y, z)$ задано N источниками с координатами $(r_i, \theta_i, \varphi_i)$ ($i = 1, 2, \dots, N$). Тогда, пользуясь принципом суперпозиции, которому подчиняются потенциальные поля, имеем

$$a_{nm} = \sum_{i=1}^N m_i (r_i)^n \varepsilon_m \frac{(n-m)!(n+m)!}{(n!)^2} \hat{P}_n^m(\cos \theta_i) \cos m\varphi_i,$$

где $n = 0, 1, \dots$, $m = 0, 1, \dots, n$;

$$b_{nm} = \sum_{i=1}^N m_i (r_i)^n \varepsilon_m \frac{(n-m)!(n+m)!}{(n!)^2} \hat{P}_n^m(\cos \theta_i) \sin m\varphi_i,$$

где $n = 1, 2, \dots$, $m = 0, 1, \dots, n$.

1.4. Разложение в ряд по сферическим функциям потенциального поля одного тела с переменной плотностью

Пусть дано тело, занимающее область D и имеющее плотность $\rho(S)$, где S — точка, принадлежащая D .

Введем прямоугольную систему координат $OXYZ$ и поместим ее начало во внутреннюю точку области D . Введем сферические координаты (r, θ, φ) с центром в точке O .

Разделим область D на сферические параллелепипеды, построив последовательность концентрических сфер с радиусами $r_i = iR/n$, $i = 0, 1, \dots, n$, и проведя поверхности $\theta = \theta_k$, $\theta_k = k\pi/n_1$, $k = 0, 1, \dots, n_1$ и $\varphi = \varphi_k$, $\varphi_k = 2k\pi/n_2$, $k = 0, 1, \dots, n_2$. Здесь через R обозначена длина наибольшего из отрезков, соединяющих точку O с границей области D .

Пусть $N = nn_1n_2$. Будем считать, что приращения $\Delta r = r_{i+1} - r_i$, $i = 0, 1, \dots, n-1$; $\Delta \theta = \theta_{i+1} - \theta_i$, $i = 0, 1, \dots, n_1-1$; $\Delta \varphi = \varphi_{i+1} - \varphi_i$, $i = 0, 1, \dots, n_2-1$, достаточно малы. Поэтому можно считать, что объем сферического параллелепипеда, расположенного между концентрическими сферами с радиусами r_i и r_{i+1} , равен $v_i = r_i^2 \sin \theta \Delta r \Delta \theta \Delta \varphi$.

Так как объем v_i достаточно мал, то можно считать, что потенциал, создаваемый телом с плотностью $\sigma(r, \theta, \varphi)$, расположенным в сферическом параллелепипеде, приближенно равен потенциалу, создаваемому точечным источником, расположенным в принадлежащей данному сферическому параллелепипеду точке $(r_i, \theta_j, \varphi_k)$, и имеющим массу $\sigma(r_i, \theta_j, \varphi_k)v_i$.

В этих предположениях можно считать, что потенциал, создаваемый сферическими параллелепипедами в точке P с координатами (R, Θ, Φ) ($R < R_1$), приближенно равен

$$U(P) = \frac{1}{R_1} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n_1-1} \sum_{k=0}^{n_2-1} \sigma(r_i, \theta_j, \varphi_k) r_i^2 \sin \theta \Delta r \Delta \theta \Delta \varphi +$$

$$+ \frac{1}{R_1} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n_1-1} \sum_{k=0}^{n_2-1} \sigma(r_i, \theta_j, \varphi_k) r_i^2 \sin \theta \Delta r \Delta \theta \Delta \varphi \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_i}{R_1} \right)^n P_n(\cos \gamma_{ijk}),$$

где γ_{ijk} — угол между векторами OP и OS_{ijk} , $S_{ijk} = (r_i, \theta_j, \varphi_k)$.

Отметим, что в рамках дискретной теории потенциала потенциальные поля различных тел вычисляются по аналогичным формулам.

Для того чтобы вычислить потенциал, создаваемый телом, необходимо просуммировать предыдущее выражение в предположении, что $\Delta r, \Delta \theta, \Delta \varphi$ стремятся к нулю при N , стремящемся к бесконечности.

В результате имеем

$$U(P) = \frac{1}{R_1} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R(\theta, \varphi)} \sigma(r, \theta, \varphi) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{R_1^{n+1}} Y_{n0}(\Theta_1, \Phi_1) \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R(\theta, \varphi)} \sigma(r, \theta, \varphi) r^{n+2} \sin \theta Y_{n0}(\theta, \varphi) dr d\theta d\varphi +$$

$$+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2n} \frac{1}{R_1^{n+1}} \frac{(n-m)!(n+m)!}{(n!)^2} Y_{nj}(\Theta_1, \Phi_1) \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R(\theta, \varphi)} \sigma(r, \theta, \varphi) r^{n+2} \sin \theta Y_{nj}(\theta, \varphi) dr d\theta d\varphi,$$

где

$$Y_{n0}(\theta, \varphi) = \widehat{P}_n^0(\cos \theta),$$

$$Y_{nj}(\theta, \varphi) = \widehat{P}_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi, j = 1, 2, \dots, n,$$

$$Y_{nj}(\theta, \varphi) = \widehat{P}_n^m(\cos \theta) \sin m\varphi, j = n + 1, n + 2, \dots, 2n,$$

причем если $j \leq n$, то $m = j$; если $j \geq n + 1$, то $m = j - n$.

Это выражение можно записать в виде ряда Фурье:

$$U(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2n} C_{nj} Y_{nj}(\Theta_1, \Phi_1),$$

где

$$C_{00} = \frac{1}{R_1} \iiint_D \sigma(r, \theta, \varphi) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi,$$

$$C_{n0} = \frac{1}{R_1^{n+1}} \iiint_D \sigma(r, \theta, \varphi) r^{n+2} \sin \theta Y_{n0}(\theta, \varphi) dr d\theta d\varphi,$$

$$C_{nj} = \frac{2}{R_1^{n+1}} \frac{(n-m)!(n+m)!}{(n!)^2} \iiint_D \sigma(r, \theta, \varphi) r^{n+2} \sin \theta Y_{nj}(\theta, \varphi) dr d\theta d\varphi,$$

$n = 0, 1, \dots, j = 0, 1, \dots, 2n$.

При решении модельных примеров необходимо знать точные значения коэффициентов a_{nm} и b_{nm} разложения потенциальных полей по шаровым функциям.

Пусть потенциальное поле $U(x, y, z)$ задается телом, заполняющим область D и имеющим плотность $\rho(r, \theta, \varphi)$. Тогда, учитывая выведенные выше формулы разложения потенциала, можно получить следующие выражения для неизвестных a_{nm} и b_{nm} :

$$\begin{aligned} a_{nm} &= \\ &= \frac{\varepsilon_m (n-m)!(n+m)!}{(n!)^2} \iiint_D r^{n+2} \rho(r, \theta, \varphi) \widehat{P}_n^m(\cos \theta) \sin \theta \cos m\varphi dr d\theta d\varphi, \end{aligned}$$

где $n = 0, 1, \dots, m = 0, 1, \dots, n$;

$$\begin{aligned} b_{nm} &= \\ &= \frac{\varepsilon_m (n-m)!(n+m)!}{(n!)^2} \iiint_D r^{n+2} \rho(r, \theta, \varphi) \widehat{P}_n^m(\cos \theta) \sin \theta \sin m\varphi dr d\theta d\varphi, \end{aligned}$$

где $n = 1, 2, \dots, m = 0, 1, \dots, n$.

Коэффициенты a_{nm} и b_{nm} , $n = 1, 2, \dots, m = 0, 1, \dots, n$, вычисляются по кубатурным формулам. В частности, могут быть использованы кубатурные формулы с неравномерными по r сетками узлов.

1.5. Разложение в ряд по сферическим функциям потенциального поля двух тел с переменной плотностью

Пусть даны два тела, занимающие области $D_i, i = 1, 2$.

Введем две системы координат $OXYZ$ и $O_1X_1Y_1Z_1$. Поместим начало координат системы $OXYZ$ во внутреннюю точку области D_1 , а начало координат системы $O_1X_1Y_1Z_1$ — во внутреннюю точку области D_2 . Будем считать, что системы координат $OXYZ, O_1X_1Y_1Z_1$ имеют параллельные и одинаково направленные оси. Сопоставим с декартовыми системами координат $OXYZ$ и $O_1X_1Y_1Z_1$ сферические системы координат (R, Θ, Φ) с центром в точке O и (R_1, Θ_1, Φ_1) с центром в точке O_1 . Координаты точки O_1 в системе координат $OXYZ$ равны (x_0, y_0, z_0) .

Выведем формулы, связывающие координаты точки P в первой и во второй системах координат.

Пусть точка P имеет декартовы координаты (x, y, z) и (x_1, y_1, z_1) в первой и второй системах координат.

Нетрудно видеть, что

$$x = x_1 + x_0, y = y_1 + y_0, z = z_1 + z_0,$$

$$x = R \cos \Phi \sin \Theta, y = R \sin \Phi \sin \Theta, z = R \cos \Theta,$$

$$x_1 = R_1 \cos \Phi_1 \sin \Theta_1, y_1 = R_1 \sin \Phi_1 \sin \Theta_1, z_1 = R_1 \cos \Theta_1,$$

$$R = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, R_1 = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^{1/2}.$$

Выразим R_1, Θ_1, Ψ_1 через R, Θ, Ψ :

$$R_1 = ((R \cos \Phi \sin \Theta - x_0)^2 + (R \sin \Phi \sin \Theta - y_0)^2 + (R \cos \Theta - z_0)^2)^{1/2},$$

$$\cos \Theta_1 = \frac{z_1}{R_1} =$$

$$= \frac{R \cos \Theta - z_0}{((R \cos \Phi \sin \Theta - x_0)^2 + (R \sin \Phi \sin \Theta - y_0)^2 + (R \cos \Theta - z_0)^2)^{1/2}},$$

$$\operatorname{tg} \Phi_1 = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{R \sin \Phi \sin \Theta - y_0}{R \cos \Phi \sin \Theta - x_0}.$$

Потенциал первого тела в системе координат $OXYZ$ равен

$$U(P) = \frac{1}{R} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{R(\Theta, \Phi)} \sigma(r, \theta, \varphi) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{R^n} Y_{n0}(\Theta, \Phi) \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R(\Theta, \Phi)} \sigma(r, \theta, \varphi) r^{n+2} Y_{n0}(\theta, \varphi) \sin \theta dr d\theta d\varphi + \\
& \quad + \frac{2}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2n} \frac{(n-m)!(n+m)!}{R^n (n!)^2} Y_{nj}(\Theta, \Phi) \times \\
& \quad \times \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R(\Theta, \Phi)} \sigma(r, \theta, \varphi) r^{n+2} Y_{nj}(\theta, \varphi) \sin \theta dr d\theta d\varphi. \quad (1.16)
\end{aligned}$$

Аналогично, потенциал второго тела в системе координат $O_1 X_1 Y_1 Z_1$ имеет вид

$$\begin{aligned}
U_1(P) &= \frac{1}{R_1} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R_1(\Theta_1, \Phi_1)} \sigma_1(r_1, \theta_1, \varphi_1) r_1^2 \sin \theta_1 dr_1 d\theta_1 d\varphi_1 + \\
& \quad + \frac{1}{R_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{R_1^n} Y_{n0}(\Theta_1, \Phi_1) \times \\
& \quad \times \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R_1(\Theta_1, \Phi_1)} \sigma_1(r_1, \theta_1, \varphi_1) r_1^{n+2} Y_{n0}(\theta_1, \varphi_1) \sin \theta_1 dr_1 d\theta_1 d\varphi_1 + \\
& \quad + \frac{2}{R_1} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2n} \frac{(n-m)!(n+m)!}{R_1^n (n!)^2} Y_{nj}(\Theta_1, \Phi_1) \times \\
& \quad \times \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R_1(\Theta_1, \Phi_1)} \sigma_1(r_1, \theta_1, \varphi_1) r_1^{n+2} Y_{nj}(\theta_1, \varphi_1) \sin \theta_1 dr_1 d\theta_1 d\varphi_1. \quad (1.17)
\end{aligned}$$

Выражая в формуле (1.17) R_1, Θ_1, Φ_1 через R, Θ, Φ по приведенным выше формулам и складывая полученное таким образом выражение для $U_1(P)$ с выражением (1.16), получаем формулу для потенциала двух тел. Формулу не выписываем из-за громоздкости выражения.

2. Аналитическое определение коэффициентов Фурье производных потенциальных полей

При решении многих задач геофизики возникает необходимость в разложении в ряды по шаровым функциям не только самих потенциальных полей, но и их производных первого и более высоких порядков.

При этом значительный интерес представляет построение алгоритма, который позволяет одновременно определить коэффициенты разложения в ряды по шаровым функциям и потенциала и его производных различных порядков. Один из таких алгоритмов рассматривается ниже.

2.1. Разложение в ряд Фурье производных потенциальных полей от одного точечного источника

Разложим потенциальное поле $U(P)$, создаваемое точечным источником, в ряд по шаровым функциям:

$$U(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\widehat{P}_n^m(\cos \theta)}{r^{n+1}} (a_{nm} \cos m\varphi + b_{nm} \sin m\varphi). \quad (2.1)$$

В случае, если измеряются не значения потенциала $U(P)$ в различных точках P , а производные от потенциала $U(P)$ по переменной z в точках P_k , то для нахождения коэффициентов a_{km}, b_{km} следует продифференцировать по z предыдущее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial z}(U(P)) = \frac{\partial}{\partial z} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\widehat{P}_n^m(\cos \theta)}{r^{n+1}} (a_{nm} \cos m\varphi + b_{nm} \sin m\varphi). \quad (2.2)$$

Преобразуем в отдельности правую и левую части формулы (2.2).

Для этого вычислим производную

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{P_n^m(\mu) \cos m\varphi}{r^{n+1}} \right) &= \frac{\partial}{\partial z} \left(r^n P_n^m(\mu) (\cos m\varphi) r^{-(2n+1)} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial z} (r^n P_n^m(\mu) \cos m\varphi) r^{-(2n+1)} + r^n P_n^m(\mu) \cos m\varphi \frac{\partial}{\partial z} (r^{-(2n+1)}) \end{aligned}$$

при $n \neq 0, m \leq n$. Здесь $\mu = \cos \Theta$.

Первое слагаемое преобразуем по формуле вычисления производных от присоединенных полиномов Лежандра [92, с. 135]:

$$\frac{\partial}{\partial z} (r^n P_n^m(\mu) \cos m\varphi) = (n+m) r^{n-1} P_{n-1}^m(\mu) \cos m\varphi$$

при $n - m \geq 1$;

$$\frac{\partial}{\partial z} (r^n P_n^m(\mu) \cos m\varphi) = 0$$

при $n - m < 1$.

Нетрудно видеть, что

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r^{2n+1}} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{(2n+1)/2}} \right) = -\frac{(2n+1) \cos \theta}{r^{(2n+2)}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{P_n^m(\mu) \cos m\varphi}{r^{n+1}} \right) = \\ & = \frac{n+m}{r^{n+2}} P_{n-1}^m(\mu) \cos m\varphi - \frac{2n+1}{r^{n+2}} P_n^m(\mu) \cos m\varphi \cos \theta \end{aligned}$$

при $n - m \geq 1$;

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{P_n^m(\mu) \cos m\varphi}{r^{n+1}} \right) = -(2n+1)r^{-(n+2)} P_n^m(\mu) \cos n\varphi \cos \theta$$

при $n - m < 1$.

Известно следующее рекуррентное соотношение [92, с. 109]:

$$(2n+1)\mu P_n^m(\mu) - (n-m+1)P_{n+1}^m(\mu) - (n+m)P_{n-1}^m(\mu) = 0.$$

Воспользовавшись этим соотношением, приходим к формулам

$$\frac{\partial}{\partial z} (r^{-(n+1)} P_n^m(\mu) \cos m\varphi) = -r^{-(n+2)} (n-m+1) P_{n+1}^m(\mu) \cos m\varphi$$

при $n - m \geq 1$;

$$\frac{\partial}{\partial z} (r^{-(n+1)} P_n^m(\mu) \cos m\varphi) = -(2n+1)r^{-(n+2)} P_n^m(\mu) \cos m\varphi \cos \theta$$

при $n - m < 1$.

Воспользовавшись нормировкой

$$\hat{P}_n^m(\cos \theta) = \frac{n!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta),$$

приходим к выражениям

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z} (r^{-(n+1)} \hat{P}_n^m(\mu) \cos m\varphi) = \\ & = -\frac{(n+m+1)(n-m+1)}{(n+1)r^{n+2}} \hat{P}_{n+1}^m(\mu) \cos m\varphi \end{aligned} \quad (2.3)$$

при $n - m \geq 1$;

$$\frac{\partial}{\partial z} (r^{-(n+1)} \hat{P}_n^m(\mu) \cos m\varphi) = -\frac{2n+1}{r^{n+2}} \hat{P}_n^n(\mu) \cos n\varphi \cos \theta \quad (2.4)$$

при $n - m < 1$.

Таким образом, справедлива формула

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U(P)}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{\widehat{P}_n^m(\cos \theta)}{r^{n+1}} (a_{nm} \cos m\varphi + b_{nm} \sin m\varphi) \right) = \\
&= - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n+1)^2 - m^2}{(n+1)r^{n+2}} \widehat{P}_{n+1}^m(\cos \theta) (a_{nm} \cos m\varphi + b_{nm} \sin m\varphi) - \\
&\quad - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{r^{n+2}} \widehat{P}_n^n(\cos \theta) \cos \theta (a_{nn} \cos n\varphi + b_{nn} \sin n\varphi). \quad (2.5)
\end{aligned}$$

2.2. Разложение в ряд Фурье производных потенциальных полей от N точечных источников

Рассмотрим N точечных источников с массами $m_i, i = 1, 2, \dots, N$, расположенными в точках $O_i, i = 1, 2, \dots, N$.

Необходимо определить производную потенциала, создаваемого этими источниками в точке P .

Пусть точка P имеет сферические координаты (r, θ, φ) , а точки O_i имеют сферические координаты $(r_i, \theta_i, \varphi_i), i = 1, 2, \dots, N$. Пусть r — расстояние от точки P до начала координат; $R_i, i = 1, 2, \dots, N$, — расстояния от точек $O_i, i = 1, 2, \dots, N$, до точки P ; $r_i, i = 1, 2, \dots, N$, — расстояния от точки O до точек $O_i, i = 1, 2, \dots, N$, соответственно.

Обозначим через $\gamma_i, i = 1, \dots, N$, соответственно углы между вектором OP и векторами $OO_i, i = 1, \dots, N$.

В первом разделе было показано, что потенциал вычисляется по формуле (1.14). Преобразовывая каждое слагаемое формулы (1.14) по аналогии с выкладками, проведенными в разд. 2.1, имеем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial z} &= - \sum_{i=1}^N m_i \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(r_i)^n}{r^{n+2}} \sum_{m=0}^{n-1} \varepsilon_m \frac{(n-m)!(n+m)!((n+1)^2 - m^2)}{(n!)^2 (n+1)} \times \right. \\
&\quad \times \widehat{P}_{n+1}^m(\cos \theta) \widehat{P}_n^m(\cos \theta_i) \cos m(\varphi - \varphi_i) - \\
&\quad \left. - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r_i)^n}{r^{n+2}} (2n+1) \widehat{P}_n^n(\cos \theta) \varepsilon_n \frac{(2n)!}{(n!)^2} \widehat{P}_n^n(\cos \theta_i) \cos \theta \cos n(\varphi - \varphi_i) \right). \quad (2.6)
\end{aligned}$$

Отсюда и из (2.4) получаем следующие выражения для коэффициентов Фурье a_{kl} и b_{kl} :

$$a_{00} = \sum_{i=1}^N m_i,$$

$$a_{nm} = \sum_{i=1}^N (r_i)^n \varepsilon_m \frac{(n-m)!(n+m)!}{(n!)^2} \widehat{P}_n^m(\cos \theta_i) \cos m\varphi_i,$$

$$b_{nm} = \sum_{i=1}^N (r_i)^n \varepsilon_m \frac{(n-m)!(n+m)!}{(n!)^2} \widehat{P}_n^m(\cos \theta_i) \sin m\varphi_i$$

при $n = 1, 2, \dots, m = 0, 1, \dots, n-1$;

$$a_{nn} = \sum_{i=1}^N (r_i)^n \varepsilon_n \frac{(2n)!}{(n!)^2} \widehat{P}_n^n(\cos \theta_i) \cos n\varphi_i,$$

$$b_{nn} = \sum_{i=1}^N (r_i)^n \varepsilon_n \frac{(2n)!}{(n!)^2} \widehat{P}_n^n(\cos \theta_i) \sin n\varphi_i$$

при $n = 1, 2, \dots$

Отметим, что в случае разложения производной потенциала $\frac{\partial U(P)}{\partial z}$ в ряд по сферическим функциям

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{\widehat{P}_n^m(\cos \theta)}{r^{n+1}} (a_{nm}^* \cos m\varphi + b_{nm}^* \sin m\varphi)$$

коэффициенты a_{nm}^* и b_{nm}^* могут быть легко выражены через коэффициенты a_{nm} и b_{nm} . В самом деле, $a_{00}^* = 0, b_{00}^* = 0, a_{n+1,m}^* = -\frac{(n+2)^2 - m^2}{n+1} a_{nm}, b_{n+1,m}^* = -\frac{(n+2)^2 - m^2}{n+1} b_{nm}, n = 0, 1, \dots, m = 0, 1, \dots, n-1; a_{n+1,n}^* = -(2n+1)(\cos \theta) a_{nn}, b_{n+1,n}^* = -(2n+1)(\cos \theta) b_{nn}, n = 0, 1, \dots$

3. Приближенные методы анализа потенциальных полей

В данном разделе излагаются алгоритмы аппроксимации потенциальных геофизических полей рядами по сферическим функциям, в которых для вычисления моментов используются различные кубатурные формулы.

Пусть дано тело, занимающее область D и имеющее плотность $\rho(S)$, где S — точка, принадлежащая D .

Потенциал поля $U(x)$, удовлетворяющий уравнению Лапласа $\Delta U(x) = 0$ вне области D , может быть приближенно представлен в виде отрезка ряда по шаровым функциям:

$$U(x) = \frac{1}{r^v} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n \frac{\widehat{P}_n^m(\cos \theta)}{r^n} (a_{nm} \cos m\varphi + b_{nm} \sin m\varphi). \quad (3.1)$$

Здесь $v \geq 0$ — целое число; $\widehat{P}_n^m(\cos \theta)$ — присоединенные функции Лежандра [92]; a_{nm} и b_{nm} — коэффициенты Фурье по шаровым функциям. Ниже полагаем $v = 1$.

Для решения задачи синтеза поля $U(x)$ по шаровым функциям по формуле (3.1) необходимо вычисление коэффициентов a_{nm} и b_{nm} .

Так как в явном виде эти коэффициенты могут быть вычислены только в исключительных случаях, то требуется разработка приближенных методов их вычисления.

В данном разделе излагается алгоритм приближенного вычисления коэффициентов Фурье.

Введем прямоугольную систему координат $OXYZ$ и поместим ее начало во внутреннюю точку области D . Введем сферические координаты (r, θ, φ) с центром в точке O .

В разд. 1 было показано, что разложение поля $U(P)$, ($P = (R_1, \theta_1, \varphi_1)$), создаваемого телом D по шаровым функциям, имеет вид

$$\begin{aligned}
U(P) &= \frac{1}{R_1} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{R(\theta, \varphi)} \sigma(r, \theta, \varphi) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{R_1^{n+1}} Y_{n0}(\Theta_1, \Phi_1) \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{R(\theta, \varphi)} \sigma(r, \theta, \varphi) r^{n+2} \sin \theta Y_{n0}(\theta, \varphi) dr d\theta d\varphi + \\
&+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2n} \frac{1}{R_1^{n+1}} \frac{(n-m)!(n+m)!}{(n!)^2} Y_{nj}(\Theta_1, \Phi_1) \times \\
&\times \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{R(\theta, \varphi)} \sigma(r, \theta, \varphi) r^{n+2} \sin \theta Y_{nj}(\theta, \varphi) dr d\theta d\varphi,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
Y_{n0}(\theta, \varphi) &= \widehat{P}_n^0(\mu), \\
Y_{nj}(\theta, \varphi) &= \widehat{P}_n^m(\mu) \cos \theta \cos m\varphi, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\
Y_{nj}(\theta, \varphi) &= \widehat{P}_n^m(\mu) \cos \theta \sin m\varphi, \quad j = n+1, n+2, \dots, 2n,
\end{aligned}$$

причем если $j \leq n$, то $m = j$; если $j \geq n+1$, то $m = j - n$; $\mu = \cos \theta$.

Это выражение можно записать в виде ряда Фурье:

$$U(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2n} C_{nj} Y_{nj}(\Theta_1, \Phi_1),$$

где

$$C_{00} = \frac{1}{R_1} \iiint_D \sigma(r, \theta, \varphi) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi,$$

$$C_{n0} = \frac{1}{R_1^{n+1}} \iiint_D \sigma(r, \theta, \varphi) r^{n+2} \sin \theta Y_{n0}(\theta, \varphi) dr d\theta d\varphi,$$

$$C_{nj} = \frac{2}{R_1^{n+1}} \frac{(n-m)!(n+m)!}{(n!)^2} \iiint_D \sigma(r, \theta, \varphi) r^{n+2} \sin \theta Y_{nj}(\theta, \varphi) dr d\theta d\varphi,$$

где $n = 0, 1, \dots, j = 0, 1, \dots, 2n$.

В большинстве случаев вместо коэффициентов C_{nm} более удобно вычислять коэффициенты a_{nm} и b_{nm} :

$$\begin{aligned} a_{nm} &= \\ &= \varepsilon_m \frac{(n-m)!(n+m)!}{(n!)^2} \iiint_D r^{n+2} \sigma(r, \theta, \varphi) \widehat{P}_n^m(\cos \theta) \sin \theta \cos m\varphi dr d\theta d\varphi, \end{aligned}$$

где $m = 0, 1, \dots, n, n = 0, 1, \dots$;

$$\begin{aligned} b_{nm} &= \\ &= \varepsilon_m \frac{(n-m)!(n+m)!}{(n!)^2} \iiint_D r^{n+2} \sigma(r, \theta, \varphi) \widehat{P}_n^m(\cos \theta) \sin \theta \sin m\varphi dr d\theta d\varphi, \end{aligned}$$

где $m = 0, 1, \dots, n; n = 0, 1, \dots$.

Так как точно вычислить коэффициенты a_{nm} и b_{nm} возможно лишь в исключительных случаях, то возникает задача приближенного вычисления интегралов, через которые выше выражены a_{nm} и b_{nm} . Для этого естественно воспользоваться кубатурными формулами.

Пусть $\Omega = [-1, 1]^3$. Рассмотрим интеграл

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \int_{-1}^1 dx_1 \int_{-1}^1 dx_2 \int_{-1}^1 f(x_1, x_2, x_3) dx_3.$$

Интеграл по каждой переменной в правой части этого равенства заменим квадратурной суммой, например, формулой Гаусса [140]:

$$\int_{-1}^1 \psi(t) dt = \sum_{i=1}^m A_i^{(m)} \psi(t_i^{(m)}) + R_m,$$

где $A_i^{(m)}, t_i^{(m)}$ — веса и узлы квадратурной формулы Гаусса.

В результате получим кубатурную формулу

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m A_{i_1}^{(m)} A_{i_2}^{(m)} A_{i_3}^{(m)} f(t_{i_1}^{(m)}, t_{i_2}^{(m)}, t_{i_3}^{(m)}) + R_m(f). \quad (3.2)$$

Формула (3.2) имеет m^3 узлов и точна, когда $f(x) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}$, где $0 \leq \alpha_k \leq 2m + 1$ ($k = 1, 2, 3$).

В частности, она точна, когда $f(x)$ – любой многочлен степени $2m + 1$ по каждой переменной.

Мы определяем веса $A_k^{(m)}$, $k = 1, 2, \dots, m$, по следующей формуле [127]:

$$A_k^{(m)} = 2(1 - (t_k^{(m)})^2) / (m P_{m-1}(t_k^{(m)}))^2, \quad (3.3)$$

в которой значения полиномов Лежандра $P_m(x)$ вычисляются по рекуррентной формуле [127]

$$P_j(x) = \frac{j-1}{j} (x P_{j-1}(x) - P_{j-2}(x)) + x P_{j-1}(x). \quad (3.4)$$

Как известно, узлы квадратурной формулы Гаусса являются узлами полиномов Лежандра соответствующей степени. Формулы, определяющие в аналитической форме узлы полиномов Лежандра, неизвестны, и поэтому их приходится вычислять приближенно. Одним из наиболее простых методов является метод половинного деления.

Опишем процесс нахождения корней полиномов Лежандра более подробно. При этом воспользуемся известным свойством корней ортогональных полиномов [140], которое заключается в том, что корни двух соседних ортогональных многочленов чередуются, т.е. $-1 < x_1^{(n)} < x_1^{(n_1)} < x_2^{(n)} < x_2^{(n_1)} < \dots < x_{n_1}^{(n)} < x_{n_1}^{(n)} < 1$. Таким образом, имеем

$$P_{n_1}(x_{k_1}^{(n)}) P_{n_1}(x_{k_1+1}^{(n)}) < 0. \quad (3.5)$$

Полином $P_0(x) = 1$, т.е. корней не имеет. Полином $P_1(x) = x$, т.е. имеет один корень $x = 0$; тогда по указанному выше свойству нулей ортогональных полиномов нули полинома $P_2(x)$ находятся внутри сегментов $[-1, 0]$ и $[0, 1]$ соответственно. Находим нули полинома $P_2(x)$. Пусть это будут значения x_1^2, x_2^2 . Тогда корни полинома $P_3(x)$ находятся внутри сегментов $[-1, x_1^2]$, $[x_1^2, x_2^2]$, $[x_2^2, 1]$. Продолжая этот процесс, находим корни полиномов Лежандра нужного порядка.

Рассмотрим тело, занимающее область D и имеющее плотность $\sigma(S)$, где S – точка, принадлежащая D . Разобьем это тело на сферические параллелепипеды, построив множество концентрических сфер с радиусами

$r_i = iR/s_1$, $i = 0, 1, \dots, s_1$, и проведя плоскости $\varphi = \varphi_k$, $\varphi_k = 2k\pi/s_2$, $k = 0, 1, \dots, s_2$; $\theta = \theta_k$; $\theta_k = k\pi/s_3$; $k = 0, 1, \dots, s_3$.

В случае, если сферический параллелепипед не полностью заполняется телом D , мы продолжаем тело до границ параллелепипеда, полагая $\sigma(S) = 0$ в части параллелепипеда, не занятой телом.

Кубатурные формулы вычисления коэффициентов a_{nm}, b_{nm} имеют вид

$$a_{nm} = \varepsilon_n \frac{(n+m)!(n-m)!}{(n!)^2} \sum_{u=0}^{s_1-1} \sum_{v=0}^{s_2-1} \sum_{w=0}^{s_3-1} \frac{r_{u+1} - r_u}{2} \frac{\varphi_{v+1} - \varphi_v}{2} \frac{\theta_{w+1} - \theta_w}{2} \times$$

$$\times \sum_{l_1=1}^{n_1} \sum_{l_2=1}^{n_2} \sum_{l_3=1}^{n_3} A_{l_1}^{n_1} A_{l_2}^{n_2} A_{l_3}^{n_3} \sigma \left(t_{u,l_1}^{(n_1)}, t_{v,l_2}^{(n_2)}, t_{w,l_3}^{(n_3)} \right) \widehat{P}_n^m \left(\cos t_{w,l_3}^{(n_3)} \right) \left(t_{u,l_1}^{(n_1)} \right)^{n+2} \times$$

$$\times \sin \left(t_{w,l_3}^{(n_3)} \right) \cos m \left(t_{v,l_2}^{(n_2)} \right), \quad (3.6)$$

где $m = 0, 1, \dots, n$; $n = 0, 1, \dots$;

$$b_{nm} = \varepsilon_n \frac{(n+m)!(n-m)!}{(n!)^2} \sum_{u=0}^{s_1-1} \sum_{v=0}^{s_2-1} \sum_{w=0}^{s_3-1} \frac{r_{u+1} - r_u}{2} \frac{\varphi_{v+1} - \varphi_v}{2} \frac{\theta_{w+1} - \theta_w}{2} \times$$

$$\times \sum_{l_1=1}^{n_1} \sum_{l_2=1}^{n_2} \sum_{l_3=1}^{n_3} A_{l_1}^{n_1} A_{l_2}^{n_2} A_{l_3}^{n_3} \sigma \left(t_{u,l_1}^{(n_1)}, t_{v,l_2}^{(n_2)}, t_{w,l_3}^{(n_3)} \right) \widehat{P}_n^m \left(\cos t_{w,l_3}^{(n_3)} \right) \left(t_{u,l_1}^{(n_1)} \right)^{n+2} \times$$

$$\times \sin \left(t_{w,l_3}^{(n_3)} \right) \sin m \left(t_{v,l_2}^{(n_2)} \right), \quad (3.7)$$

где $m = 0, 1, \dots, n$; $n = 0, 1, \dots$

Здесь $\Delta_{uvw} = [r_u, r_{u+1}; \varphi_v, \varphi_{v+1}; \theta_w, \theta_{w+1}]$ – сферический параллелепипед; $t_{u,l_1}^{(n_1)} = r_u + \left(1 + t_{l_1}^{(n_1)}\right) (r_{u+1} - r_u)/2$, $t_{v,l_2}^{(n_2)} = \varphi_v + \left(1 + t_{l_2}^{(n_2)}\right) (\varphi_{v+1} - \varphi_v)/2$, $t_{w,l_3}^{(n_3)} = \theta_w + \left(1 + t_{l_3}^{(n_3)}\right) (\theta_{w+1} - \theta_w)/2$, $\sigma \left(t_{u,l_1}^{(n_1)}, t_{v,l_2}^{(n_2)}, t_{w,l_3}^{(n_3)} \right)$ – плотность в узлах сетки; s_1 – число разбиений по переменной r ; s_2 – число разбиений по переменной φ ; s_3 – число разбиений по переменной θ .

Представляет значительный интерес исследование погрешности построенных кубатурных формул.

Это исследование проведем при следующих предположениях:

1) плотность во всей области D принадлежит некоторому классу гладких функций;

2) плотность $\sigma(x_1, x_2, x_3)$ кусочно-непрерывна в области D , причем область D состоит из более мелких областей D_i : $D = \cup_{i=1}^n D_i$, в каждой из которых $\sigma(x_1, x_2, x_3) \in W^{s,s}(1)$.

Напомним, что класс $W^{s,s,s}(1)$ состоит из функций $f(x_1, x_2, x_3)$, имеющих непрерывные производные до $(s-1)$ -го порядка по каждой переменной в отдельности, и кусочно-непрерывные производные s -го порядка, причем

$$\left\| \frac{\partial^s f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_i^s} \right\|_C \leq 1, i = 1, 2, 3. \quad (3.8)$$

Предположим, что радиус области D равен R .

Исследуем погрешность вычисления коэффициентов Фурье при первом предположении.

При построении кубатурных формул (3.6), (3.7) область D разбивается на сферические параллелепипеды множеством концентрических сфер с радиусами $r_i = iR/s_1$, $i = 0, 1, \dots, s_1$, и плоскостей $\varphi = \varphi_k$, $\varphi_k = 2k\pi/s_2$, $k = 0, 1, \dots, s_2$; $\theta = \theta_k$, $\theta_k = k\pi/s_3$, $k = 0, 1, \dots, s_3$.

Обозначим через $\Delta_{i,j,k}$ сферический параллелепипед, образованный концентрическими окружностями с радиусами r_i, r_{i+1} и плоскостями $\varphi = \varphi_j, \varphi = \varphi_{j+1}$; $\theta = \theta_k, \theta = \theta_{k+1}$.

Оценим погрешность вычисления интеграла

$$\iiint_{\Delta_{ijk}} r^{n+2} \sigma(r, \theta, \varphi) \hat{P}_n^m(\cos \theta) \sin \theta \cos m\varphi dr d\varphi d\theta. \quad (3.9)$$

Вначале рассмотрим случай, когда параллелепипед Δ_{ijk} полностью расположен в теле D .

Учитывая, что кубатурная формула Гаусса является кубатурной формулой интерполяционного типа, легко получаем следующую оценку погрешности кубатурной формулы:

$$\begin{aligned} r_{ijk} &= \left| \iiint_{\Delta_{ijk}} \psi(r, \varphi, \theta) dr d\varphi d\theta - \sum_{l_1=1}^{n_1} \sum_{l_2=1}^{n_2} \sum_{l_3=1}^{n_3} A_{l_1} A_{l_2} A_{l_3} \psi(t_{l_1}, t_{l_2}, t_{l_3}) \right| = \\ &= \left| \iiint_{\Delta_{ijk}} (\psi(r, \varphi, \theta) - L_{n_1}^r L_{n_2}^\varphi L_{n_3}^\theta \psi(r, \varphi, \theta)) dr d\varphi d\theta \right|, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где $\psi(r, \varphi, \theta) = r^{n+2} \sigma(r, \varphi, \theta) \hat{P}_n^m(\cos \theta) \sin \theta \cos m\varphi$; $L_{n_1}^r(\psi(r, \varphi, \theta))$ — интерполяционный полином по переменной r и по n_1 узлам, являющимся образом узлов полинома Лежандра степени n_1 при отображении последних с сегмента $[-1, 1]$ на сегмент $[r_i, r_{i+1}]$ длиной $h_1 = R/s_1$.

В этом случае, как известно [140, с. 163], погрешность интерполяции оценивается неравенством

$$\max_{x \in [r_i, r_{i+1}]} |f(x) - L_{n_1}(f(x))| \leq cn_1^{-s+1/2} h_1^s. \quad (3.11)$$

Аналогичные оценки справедливы для погрешности интерполяции и по другим переменным.

В случае функций двух переменных имеем

$$\begin{aligned} & | f(x_1, x_2) - L_{n_1, n_2} f(x_1, x_2) | \leq \\ & \leq | f(x_1, x_2) - L_{n_1} f(x_1, x_2) | + | L_{n_1} f(x_1, x_2) - L_{n_1, n_2} f(x_1, x_2) | \leq \\ & \leq | f(x_1, x_2) - L_{n_1} f(x_1, x_2) | + | L_{n_1} (f(x_1, x_2) - L_{n_2} f(x_1, x_2)) |, \quad (3.12) \end{aligned}$$

Из (3.11) следует, что оценка первого из слагаемых суммы (3.12) равна $Cn_1^{-s+1}h_1^s$.

Рассмотрим подробнее второе слагаемое выражения (3.12):

$$\|L_{n_1}(f(x_1, x_2) - L_{n_2}f(x_1, x_2))\| \leq \|L_{n_1}\| \|f(x_1, x_2) - L_{n_2}(f(x_1, x_2))\|. \quad (3.13)$$

Оценка второго сомножителя в правой части неравенства (3.13) вычисляется аналогично (3.11).

Пусть ψ_k — фундаментальные полиномы по узлам x_k . Известно, что

$$\|L_{n_1}f\| \leq \left\| \sum_{k=1}^{n_1} f(x_k)\psi_k(x) \right\|_C \leq \max_k |f(x_k)| \left\| \sum_{k=1}^{n_1} \psi_k(x) \right\|_C \leq \|f(x)\|_C \lambda_{n_1}.$$

Отсюда $\|L_{n_1}\| \leq \lambda_{n_1}$.

В результате получаем оценку погрешности

$$\begin{aligned} & \max_{(r, \varphi, \theta) \in \Delta_{ijk}} | \psi(r, \varphi, \theta) - L_{n_1, n_2, n_3} \psi(r, \varphi, \theta) | \leq \\ & \leq c\lambda_{n_1} \max \left(\left| \frac{\partial^s \psi}{\partial r^s} \right| \frac{h_1^s}{n_1^s} + \left| \frac{\partial^s \psi}{\partial \varphi^s} \right| \frac{h_2^s}{n_2^s} \lambda_{n_2} + \left| \frac{\partial^s \psi}{\partial \theta^s} \right| \frac{h_3^s}{n_3^s} \lambda_{n_2} \lambda_{n_3} \right), \quad (3.14) \end{aligned}$$

где $h_1 = \frac{R}{s_1}$, $h_2 = \frac{2\pi}{s_2}$, $h_3 = \frac{\pi}{s_3}$.

Оценим модули частных производных $\partial^s \psi / \partial r^s$, $\partial^s \psi / \partial \varphi^s$, $\partial^s \psi / \partial \theta^s$.

Нетрудно видеть, что $|\partial^s \psi / \partial r^s| \leq c((n+2)! / (n+2-s)!) r^{n+2-s}$; $|\partial^s \psi / \partial \varphi^s| \leq cm^s$.

При оценке производной $\partial^s \psi / \partial \theta^s$ нужно воспользоваться выражением нормированных по В. Н. Страхову присоединенных полиномов Лежандра через интеграл Лапласа [200]:

$$\widehat{P}_n^m(\cos \theta) = \frac{i^m}{\pi} \int_0^\pi (\cos \theta + i \sin \theta \cos \tau)^n \cos m\tau d\tau.$$

Отсюда следует, что $|\partial^s \psi / \partial \theta^s| \leq cn^s$.

Из неравенства (3.14) и оценок модулей частных производных функции $\psi(r, \varphi, \theta)$ имеем

$$\begin{aligned} & \max_{(r, \varphi, \theta) \in \Delta_{ijk}} |\psi(r, \varphi, \theta) - L_{n_1, n_2, n_3} \psi(r, \varphi, \theta)| \leq \\ & \leq c \left(\left(\frac{n}{n_1} \right)^s h_1^s \lambda_{n_1} + \left(\frac{m}{n_2} \right)^s h_2^s \lambda_{n_1} \lambda_{n_2} + \left(\frac{n}{n_3} \right)^s h_3^s \lambda_{n_1} \lambda_{n_2} \lambda_{n_3} \right). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Тогда

$$\begin{aligned} r_{ijk} &= \left| \iiint_{\Delta_{ijk}} (\psi(r, \varphi, \theta) - L_{n_1}^r L_{n_2}^\varphi L_{n_3}^\theta \psi(r, \varphi, \theta)) dr d\varphi d\theta \right| \leq \\ & \leq c \lambda_{n_1} \left(\frac{h_1^{s+1} h_2 h_3 n^s}{n_1^s} + \frac{h_1 h_2^{s+1} h_3 m^s}{n_2^s} \lambda_{n_2} + \frac{h_1 h_2 h_3^{s+1} n^s}{n_3^s} \lambda_{n_2} \lambda_{n_3} \right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Оценим теперь погрешность кубатурной формулы вычисления интеграла по параллелепипеду Δ_{ijk} , внутри которого плотность претерпевает разрыв. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} & \left| \iiint_{\Delta_{ijk}} (\psi(r, \varphi, \theta) - L_{n_1}^r L_{n_2}^\varphi L_{n_3}^\theta \psi(r, \varphi, \theta)) dr d\varphi d\theta \right| \leq \\ & \leq \|\psi - L_{n_1}^r L_{n_2}^\varphi L_{n_3}^\theta \psi\| \text{mes} \Delta_{ijk} \leq \\ & \leq \|\psi - T_{n_1, n_2, n_3}(\psi) - L_{n_1}^r L_{n_2}^\varphi L_{n_3}^\theta (\psi - T_{n_1, n_2, n_3}(\psi))\| \text{mes} \Delta_{ijk} \leq \\ & \leq ch_1 h_2 h_3 E_{n_1, n_2, n_3}(\psi) \lambda_{n_1} \lambda_{n_2} \lambda_{n_3} \leq ch_1 h_2 h_3 \omega_{ijk} \lambda_{n_1} \lambda_{n_2} \lambda_{n_3}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

где $T_{n_1, n_2, n_3}(\psi)$ — полином наилучшего равномерного приближения функции ψ степени $n_1 - 1, n_2 - 1, n_3 - 1$ по переменным r, φ, θ ; ω_{ijk} — колебания функции ψ в области Δ_{ijk} .

Из формулы (3.17) следует, что погрешность вычисления интеграла по параллелепипеду, в котором плотность ρ претерпевает разрыв, наименьшая, когда $n_1 = n_2 = n_3 = 1$, т.е. когда плотность ρ внутри параллелепипеда аппроксимируется константой $\psi(r_i, \varphi_j, \theta_k)$. В этом случае погрешность аппроксимации не превосходит величины $ch_1 h_2 h_3 \omega_{ijk}$. Отсюда следует, что приближенное вычисление интегралов в параллелепипедах, в которых плотность претерпевает разрыв, дает погрешность порядка $cN h_1 h_2 h_3$, где N — число параллелепипедов, имеющих непустое пересечение с поверхностью тела D .

Из проведенных выкладок следует, что для погрешности кубатурных формул (3.6), (3.7) справедлива оценка

$$R_{n_1 n_2 n_3} \leq c s_1 s_2 s_3 \left(\frac{2n^s \pi^2}{n_1^s} \frac{R^{s+1}}{s_1^{s+1} s_2 s_3} \lambda_{n_1} + \frac{\pi R (2\pi)^{s+1}}{n_2^s s_1 s_2^{s+1} s_3} \lambda_{n_1} \lambda_{n_2} + \right. \\ \left. + \frac{2\pi R}{n_3^s} \frac{\pi^{s+1}}{s_1 s_2 s_3^{s+1}} \lambda_{n_1} \lambda_{n_2} \lambda_{n_3} \right) + c N h_1 h_2 h_3. \quad (3.18)$$

Рассмотрим теперь случай, когда плотность $\sigma(r, \varphi, \theta)$, а следовательно, и функция $\psi(r, \varphi, \theta)$ кусочно непрерывны, причем в областях непрерывности они принадлежат классу $W^{s,s,s}(1)$.

В параллелепипедах Δ_{ijk} , в которых функция ψ непрерывна, погрешность кубатурной формулы оценивается неравенством (3.16). В параллелепипедах Δ_{ijk} , в которых плотность ρ имеет разрыв, погрешность вычисления при $n_1 = n_2 = n_3 = 1$

$$\iiint_{\Delta_{ijk}} \psi(r, \varphi, \theta) dr d\varphi d\theta = \psi(r_i, \varphi_j, \theta_k) \text{mes} \Delta_{ijk} + R_{ijk}(\psi)$$

оценивается неравенством $|R_{ijk}(\psi)| \leq \omega_{ijk} \text{mes} \Delta_{ijk}$.

Таким образом, в случае кусочно-непрерывной плотности σ погрешность кубатурных формул (3.6), (3.7) оценивается неравенством

$$R_{n_1 n_2 n_3} \leq c s_1 s_2 s_3 \left(\frac{2n^s \pi^2}{n_1^s} \frac{R^{s+1}}{s_1^{s+1} s_2 s_3} \lambda_{n_1} + \frac{\pi R (2\pi)^{s+1}}{n_2^s s_1 s_2^{s+1} s_3} \lambda_{n_1} \lambda_{n_2} + \right. \\ \left. + \frac{2\pi R}{n_3^s} \frac{\pi^{s+1}}{s_1 s_2 s_3^{s+1}} \lambda_{n_1} \lambda_{n_2} \lambda_{n_3} \right) + c N h_1 h_2 h_3 \max_{ijk} \omega_{ijk}, \quad (3.19)$$

где N — число параллелепипедов, имеющих непустое пересечение с поверхностями разрыва плотности.

Значительно более точные формулы можно построить в предположении, что n -кратное вычисление значений плотности $\sigma(r, \varphi, \theta)$ в $n_1 n_2 n_3$ точках требует значительно меньше времени, нежели вычисление интегралов по формулам (3.6), (3.7) при всех значения n и m .

Излагаемый ниже алгоритм особенно эффективен при параллельных вычислениях.

Рассмотрим случай, когда $\sigma(r, \varphi, \theta) \in W^{s,s,s}(1)$, и предположим, что требуется вычислить последовательность интегралов a_{nm} и b_{nm} , $m = 0, 1, \dots, n$, при фиксированном значении n .

Опишем вокруг тела D сферу S с центром в точке O , принадлежащей телу D , и с радиусом R . Введем систему концентрических сфер

с центром в точке O и радиусами $r_k = R(k/n_1)^v, k = 1, 2, \dots, n_1, v = (s+1)/(n+1)$. Введем точки $\theta_i = \pi i/n_2, i = 0, 1, \dots, n_2$ и $\varphi_j = 2\pi j/n_3, j = 0, 1, \dots, n_3$.

В результате этих построений тело D окажется покрытым сферическими параллелепипедами. При этом будем различать "внутренние" параллелепипеды, все точки которых принадлежат телу D и "граничные" параллелепипеды, имеющие точки, не принадлежащие телу D .

Построим сферический параллелепипед с вершинами в точках $(r_k, \theta_i, \varphi_j), (r_k, \theta_{i+1}, \varphi_j), (r_k, \theta_{i+1}, \varphi_{j+1}), (r_k, \theta_i, \varphi_{j+1}), (r_{k+1}, \theta_i, \varphi_j), (r_{k+1}, \theta_{i+1}, \varphi_j), (r_{k+1}, \theta_{i+1}, \varphi_{j+1}), (r_{k+1}, \theta_i, \varphi_{j+1})$.

Обозначим этот параллелепипед через Δ_{ijk} .

Предположим вначале, что параллелепипед Δ_{ijk} — внутренний.

Для вычисления интеграла

$$a_{nm}(\Delta_{ijk}) = \iiint_{\Delta_{ijk}} \psi(r, \varphi, \theta) dr d\varphi d\theta$$

аппроксимируем подынтегральную функцию $\psi(r, \varphi, \theta)$ интерполяционными многочленами $L_{n_k}^r L_{m_k}^\varphi L_{v_k}^\theta \psi(r, \varphi, \theta)$, построение которых опишем ниже.

Пусть ξ_1, \dots, ξ_r — корни полинома Чебышева первого рода степени r , определенного на сегменте $[-1, 1]$. Обозначим через ξ'_1, \dots, ξ'_r точки, являющиеся образами узлов ξ_1, \dots, ξ_r при отображении $[-1, 1]$ на $[a, b]$. Через $L_r^t(f, [a, b])$ обозначим полином, интерполирующий функцию $f(t)$ по переменной t и по узлам $\xi'_k, k = 1, 2, \dots, r$, на сегменте $[a, b]$. Пусть $\Delta = [a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3]$. Пусть функция $f(t_1, t_2, t_3)$ определена в параллелепипеде Δ . В этом параллелепипеде функция $f(t_1, t_2, t_3)$ интерполируется полиномом

$$L_n^{t_1} L_m^{t_2} L_v^{t_3}(f, \Delta) = L_n^{t_1}(L_m^{t_2}(L_v^{t_3}(f, [a_3, b_3]), [a_2, b_2]), [a_1, b_1]).$$

Для оценки точности интерполирования функции $f(x) \in W^r$ полиномами $L_r^t(f, [a, b])$ воспользуемся теоремой 8.17 из главы I.

В результате имеем

$$|f(t) - L_r^t(f, [a, b])| \leq \max_{a \leq t \leq b} |f^{(r)}(t)| \frac{(b-a)^r}{2^{2r-1} r!}.$$

Нетрудно видеть, что справедливо неравенство

$$\iiint_{\Delta_{kij}} |\psi(r, \varphi, \theta) - L_s^r L_s^\varphi L_s^\theta(f, \Delta_{kij})| dr d\varphi d\theta \leq$$

$$\leq c \left(h_k^{s+1} l_2 l_3 n^s \frac{r_{k+1}^{n-s}}{2^{2s-1} s!} + h_k l_2^{s+1} l_3 m^s \frac{r_{k+1}^n}{2^{2s-1} s!} + h_k l_2 l_3^{s+1} n^s \frac{r_{k+1}^n}{2^{2s-1} s!} \right), \quad (3.20)$$

где $h_k = r_{k+1} - r_k$, $k = 0, 1, \dots, n_1 - 1$; $l_2 = \pi/n_2$; $l_3 = 2\pi/n_3$.

Очевидно,

$$\begin{aligned} h_k^{s+1} l_2 l_3 n^s \frac{r_{k+1}^{n-s}}{2^{2s-1} s!} &\leq c l_2 l_3 R^{n+1} \frac{n^s}{n_1^{s+1} 2^{2s-1} s!} \leq c \frac{n^s R^{n+1}}{n_1^{s+1} n_2 n_3 2^{2s-1} s!}; \\ h_k l_2^{s+1} l_3 m^s \frac{r_{k+1}^n}{2^{2s-1} s!} &\leq c l_2^{s+1} l_3 R^{n+1} \frac{m^s}{n_1^{s+1} 2^{2s-1} s!} \leq c \frac{n^s R^{n+1}}{n_1 n_2^{s+1} n_3 2^{2s-1} s!}; \\ h_k l_2 l_3^{s+1} n^s \frac{r_{k+1}^n}{2^{2s-1} s!} &\leq c l_2 l_3^{s+1} R^{n+1} \frac{n^s}{n_1^{s+1} 2^{2s-1} s!} \leq c \frac{n^s R^{n+1}}{n_1 n_2 n_3^{s+1} 2^{2s-1} s!}. \end{aligned}$$

Полагая $s_1 = s_2 = s_3 = N$, получаем следующую оценку вычисления функционала $a_{nm}(\Delta_{kij})$:

$$R_{kij} \leq \frac{cn^s R^{n+1}}{N^{s+3} 2^{2s-1} s!}. \quad (3.21)$$

В "граничных" параллелепипедах функционалы $a_{nm}(\Delta_{kij})$ вычисляются по формуле

$$a_{nm}(\Delta_{kij}) = \psi(M_{kij}) \text{mes} \Delta_{kij} + R_{kij},$$

где M_{kij} — произвольная точка, принадлежащая пересечению $\Delta_{kij} \cap D$. Погрешность этой формулы оценивается величиной $\omega_{kij} \text{mes}(\Delta_{kij} \cap D)$.

Таким образом, погрешность вычисления коэффициента Фурье a_{nm} не превосходит величины

$$R_N = c \frac{(n-m)!(n+m)!}{(n!)^2} \left(\frac{n^s R^{n+1}}{N_1^{s/3} 2^{2s-1} s!} + \sum'_{kij} \omega_{kij}(\Delta_{kij}) \text{mes} \Delta_{kij} \right),$$

где $s^3 N_1$ — общее число значений функции $\sigma(r, \varphi, \theta)$, используемое при вычислении a_{nm} ; \sum' — суммирование по "граничным" параллелепипедам, имеющим непустое пересечение с D ; $\omega(\psi)$ — максимальное из колебаний $\omega_{kij}(\Delta_{kij})$.

В случае, если плотность $\sigma(r, \varphi, \theta)$ задана аналитически, в "граничных" параллелепипедах Δ_{kij} функционал $a_{nm}(\Delta_{kij})$ можно вычислять по формуле

$$a_{nm}(\Delta_{kij}) = \iiint_{\Delta_{kij} \cap D} T_{s-1}(\psi(r, \varphi, \theta)) dr d\varphi d\theta + R_{kij},$$

где $T_{s-1}(\psi(r, \varphi, \theta)) = \psi(M_{kij}) + \frac{d\psi(M_{kij})}{1!} + \dots + \frac{d^{s-1}\psi(M_{kij})}{(s-1)!}$ — отрезок ряда Тейлора; M_{kij} — произвольная точка из пересечения $\Delta_{kij} \cap D$. При этом погрешность оценивается неравенством (3.21).

В случае, если значения производной $\sigma(r, \varphi, \theta)$ аналитически не заданы, то производные вычисляются по разностным формулам или по известному методу Ланцоша [126] вычисления производных через интегралы. Отметим, что в геофизической практике последний метод, по видимому, более предпочтительный, так как он обладает фильтрующими свойствами.

При использовании отрезков ряда Тейлора для вычисления функционалов $a_{nm}(\Delta_{kij})$ в граничных параллелепипедах Δ_{kij} погрешность вычисления коэффициентов Фурье a_{nm} и b_{nm} равна

$$R_{nm} = c \frac{n^s R^{n+1}}{N_1^{s/3} 2^{2s-1} s!},$$

где $s^3 N_1$ — общее число значений $\sigma(r, \varphi, \theta)$, используемое при вычислении a_{nm} и b_{nm} .

Можно показать, что предложенный алгоритм — оптимальный по порядку по точности.

4. Модельные примеры вычисления потенциала тела и его производных

Для иллюстрации эффективности изложенных в предыдущих параграфах методов необходимо рассмотреть случаи, когда вычисляется потенциал и его производная, создаваемая телом. По причинам, которые будут ясны из дальнейшего, для этой цели очень удобен шаровой слой.

Вычислим потенциал, создаваемый телом с плотностью $\sigma = 1$, которое заключено в шаровом слое Ω , в произвольной точке $P(R, \Theta, \Phi)$. Для этого разобьем Ω на элементарные сферические параллелепипеды: $\Delta_{ijl} = [r_i, r_{i+1}; \theta_j, \theta_{j+1}; \varphi_l, \varphi_{l+1}]$; где $r_i = R_1 + (R_2 - R_1)i/n_1$ при $i = 0, 1, \dots, n_1$, $\theta_j = \Theta_1 + (\Theta_2 - \Theta_1)j/n_2$ при $j = 0, 1, \dots, n_2$; $\varphi_l = \Phi_1 + (\Phi_2 - \Phi_1)l/n_3$ при $l = 0, 1, \dots, n_3$,

Объем каждого параллелепипеда Δ_{ijl} приближенно равен $\text{mes}\Delta_{ijl} = r^2 \sin \theta \Delta r \Delta \theta \Delta \varphi$, $\Delta r = (R_2 - R_1)/n_1$, $\Delta \theta = (\Theta_2 - \Theta_1)/n_2$, $\Delta \Phi = (\Phi_2 - \Phi_1)/n_3$.

Будем приближенно считать, что потенциал, создаваемый параллелепипедом Δ_{ijl} , равен потенциалу, создаваемому материальной точкой с массой $m = \text{mes}\Delta_{ijl}\sigma$ и координатами r_i, θ_j, φ_l (σ — плотность, по

условию $\sigma = 1$). Тогда потенциал, создаваемый одним сферическим параллелепипедом Δ_{ijl} в точке P , равен $U(P) = m_{ijl}/\rho_{ijl}$, где m_{ijl} — масса параллелепипеда Δ_{ijl} ; ρ_{ijl} — расстояние от параллелепипеда до точки P .

Потенциал, создаваемый всем шаровым слоем в точке P , равен

$$U(P) = \sum_{i=0}^{n_1-1} \sum_{j=0}^{n_2-1} \sum_{l=0}^{n_3-1} \frac{m_{ijl}}{\rho_{ijl}} = \sum_{i=0}^{n_1-1} \sum_{j=0}^{n_2-1} \sum_{l=0}^{n_3-1} \frac{\text{mes}\Delta_{ijl}}{\rho_{ijl}}$$

при $\sigma = 1$.

Отсюда следует, что

$$U(P) = \sum_{i=0}^{n_1-1} \sum_{j=0}^{n_2-1} \sum_{l=0}^{n_3-1} \frac{r_i^2 \sin \theta_l (R_2 - R_1) (\Theta_2 - \Theta_1) (\Phi_2 - \Phi_1)}{n_1 n_2 n_3 (R^2 + r_i^2 - 2Rr_i \cos \gamma_{jl})^{1/2}},$$

где $\cos \gamma_{jl} = \cos \Theta \cos \theta_j + \sin \Theta \sin \theta_j \cos(\Phi - \varphi_l)$.

По указанной формуле вычисляем потенциал в N узлах. В дальнейшем эти значения используются при решении задачи глобального гармонического анализа.

Из работы [169, с. 97] следует, что потенциал шарового слоя с массой $M = \sum_{ijl} m_{ijl}$, равной сумме масс всех параллелепипедов $M = \sum_{ijl} m_{ijl}$, равен потенциалу точки, помещенной в центр этого слоя с массой M . Известно, что точные значения коэффициентов a_{nm} и b_{nm} для потенциала точки, помещенной в начало координат с массой M , равны $a_{00} = M$, а остальные коэффициенты равны нулю: $a_{nm} = 0$, $n = 1, \dots, m = 0, \dots, n$; $b_{nm} = 0$, $n = 0, 1, \dots, m = 0, \dots, n$. Это обстоятельство позволяет оценить эффективность алгоритма.

Результаты решения модельных задач для различных шаровых слоев подтверждают эффективность описанных выше алгоритмов.

Сравнивая указанные выше точные значения коэффициентов a_{nm} и b_{nm} с вычисленными приближенно по исследуемым в работе методам, делаем заключение о высокой эффективности изложенных методов.

Подобный модельный пример рассматривается и для вычисления производной потенциала, создаваемого телом, заключенным в шаровой слой. При этом значения производных потенциала в сетке узлов $(r_i, \Theta_i, \varphi_i)$ для определения вектора свободных членов вычисляются по формуле

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(P)}{\partial z} \Big|_{(r_i, \theta_j, \varphi_l)} &= \sum_{i=0}^{n_1-1} \sum_{j=0}^{n_2-1} \sum_{l=0}^{n_3-1} \frac{r_i^2 \sin \theta_l (R_2 - R_1) (\Phi_2 - \Phi_1) (\Theta_2 - \Theta_1)}{n_1 n_2 n_3} \times \\ &\times \frac{(R \cos \Theta - r_i \cos \theta_j)}{(r_i^2 + R^2 - 2r_i R (\cos \Theta \cos \theta_j + \sin \Theta \sin \theta_j \cos(\Phi - \varphi_l)))^{3/2}}. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что производная потенциала, создаваемого телом с плотностью $\sigma = 1$, расположенным в шаровом слое Ω , равна производной потенциала, создаваемого точкой с массой M , расположенной в начале координат. При этом точные значения коэффициентов a_{nm} и b_{nm} разложения производной потенциала в данном случае равны $a_{00} = M$, $b_{00} = 0$, $a_{nm} = 0$, $m = 0, \dots, n$; $n = 1, \dots$, $b_{nm} = 0$, $m = 0, 1, \dots, n$, $n = 1, 2, \dots$

Отметим, что если производная потенциала $\frac{\partial U(P)}{\partial z}$ разлагается в ряд по шаровым функциям

$$\frac{\partial U(P)}{\partial z} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\widehat{P}_n^m(\cos \theta)}{r^{n+1}} (a_{nm}^* \cos m\varphi + b_{nm}^* \sin m\varphi),$$

то $a_{00}^* = 0$, $b_{00}^* = 0$, $a_{1,0}^* = -a_{00} = M$, $a_{ij}^* = 0$ ($(i, j) \neq (1, 0)$), $b_{ij}^* = 0$, $i, j = 0, 1, \dots$

Результаты решения модельных примеров подтвердило эффективность изложенного выше алгоритма.

ГЛАВА IV

ПРИБЛИЖЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ РЯДАМИ ПО СФЕРИЧЕСКИМ ФУНКЦИЯМ

В главе построены алгоритмы аппроксимации потенциальных полей рядами по сферическим функциям. При построении алгоритмов используются различные методы регуляризации неустойчивых операторов и фильтрации исходных данных.

1. Постановка задачи

Хорошо известна необходимость для геофизики и геодезии описаний потенциальных полей Земли рядами по шаровым функциям. Эффективные алгоритмы синтеза таких рядов предложены в [188, 200, 249, 273, 278]. В последнее время благодаря спутниковым измерениям возросла точность измерений параметров полей и появилась возможность получения большого числа достоверных измерений. В связи с этим возникла задача построения быстрых и точных алгоритмов восстановления потенциальных полей по большому числу измерений. Этим вопросам посвящена данная глава.

2. Численное определение моментов потенциальных полей

2.1. Построение вычислительной схемы

Пусть в евклидовом пространстве E_3 векторов (x_1, x_2, x_3) задана сфера S с центром в начале координат радиуса R . Сферические координаты (r, θ, φ) в E_3 определяются формулами

$$x_1 = r \cos \theta, x_2 = r \cos \varphi \sin \theta, x_3 = r \sin \varphi \sin \theta. \quad (2.1)$$

Элемент $U(x)$ ($x = (x_1, x_2, x_3)$) некоторого потенциального поля, удовлетворяющий во всей внешности S уравнению Лапласа $\Delta U(x) = 0$, может быть приближенно представлен [200] отрезком ряда по шаровым функциям

$$U(x) = \frac{1}{r^v} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n \frac{\widehat{P}_n^m(\cos \theta)}{r^n} (a_{nm} \cos m\varphi + b_{nm} \sin m\varphi).$$

Здесь $v \geq 0$ — целое число; $\widehat{P}_n^m(\cos \theta)$ — нормированные по В. Н. Страхову присоединенные функции Лежандра; a_{nm} и b_{nm} — коэффициенты Фурье по шаровым функциям.

Отметим, что ниже полагается $v = 1$. Напомним, что нормировка по В. Н. Страхову определяется следующей формулой [188, 200]:

$$\widehat{P}_n^m(\cos \theta) = \frac{n!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta).$$

Предположим, что в результате измерений известно N_1 значение ($N_1 = (N+1)^2$) $U(x^k)$, $x^k = (x_1^k, x_2^k, x_3^k)$, $k = 1, 2, \dots, N_1$.

Располагая этими значениями, необходимо определить N_1 коэффициент Фурье a_{nm} ($m = 0, 1, \dots, n; n = 0, 1, \dots, N$), b_{nm} ($m = 0, 1, \dots, n; n = 1, 2, \dots, N$).

Составим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n \frac{\widehat{P}_n^m(\cos \theta_k)}{r_k^{n+1}} (a_{nm} \cos m\varphi_k + b_{nm} \sin m\varphi_k) = U(x^k), \quad (2.2)$$

$k = 1, 2, \dots, N_1$. Здесь $(r_k, \theta_k, \varphi_k)$ — полярные координаты точки x^k , вычисляемые по формулам (2.1).

Система (2.2) является системой из N_1 уравнения с N_1 неизвестным. Известно [213], что восстановление коэффициентов в задачах геофизики является некорректной задачей. Таким образом, решение этой задачи требует методов регуляризации.

Для решения системы уравнений (2.2) используется несколько методов, которые описываются ниже. Для простоты обозначений представим систему уравнений (2.2) в матричной форме:

$$AX = F, \quad (2.3)$$

где $X = (a_{00}, a_{10}, a_{11}, \dots, a_{nn}; b_{11}, b_{21}, \dots, b_{nn})$; $F = (U(x^1), \dots, U(x^{N_1}))$; A — матрица системы (2.2).

2.2. Регуляризация по А. Н. Тихонову

Регуляризация по А. Н. Тихонову [213] заключается в замене системы уравнений (2.3) системой уравнений

$$\alpha x + A^*Ax = A^*f, \quad (2.4)$$

где $\alpha > 0$ — параметр регуляризации; A^* — сопряженная матрица.

Для решения уравнения (2.3) могут быть использованы следующие итерационные схемы:

$$X_{n+1} = (1 - \alpha)X_n - \gamma(A^*AX_n - A^*F); \quad (2.5)$$

$$X_{n+1} = \beta X_n + (1 - \beta)(X_n - \gamma(\alpha X_n + A^*AX_n - A^*F)), \quad (2.6)$$

где $0 < \beta < 1$, $\gamma \leq 1/\|A^*A\|$. Для определенности положим $\beta = 1/2$, $\gamma = 1/(2\|A^*A\|)$.

Обоснование вычислительных схем (2.5) и (2.6) приводится ниже.

Результаты решения модельных задач по методу А. Н. Тихонова приведены в приложениях С, D.

Приведенный выше алгоритм регуляризации эффективно работает в условиях, когда вектор правых частей системы уравнений (2.2) состоит из результатов достоверных измерений. В случае, если результаты измерений недостоверны и проводится фильтрация отбрасыванием недостоверных уравнений (см. разд. 3.1 данной главы), то число уравнений в регуляризованной системе (2.4) не уменьшается, что приводит к значительным издержкам памяти и машинного времени. Например, если первоначальная система имела N_1 уравнение, а система, полученная после фильтрации, имела $N_2 = [N_1/2]$ уравнений и обе они решались методом Гаусса, требующим порядка n^3 арифметических действий при решении системы, состоящей из n уравнений, то число арифметических действий при решении системы, состоящей из N_1 уравнения, в 8 раз больше числа арифметических действий, необходимых для решения системы, состоящей из N_2 уравнений. Это преимущество пропадает при использовании регуляризации по Тихонову, так как после регуляризации исходная и регуляризованные системы имеют одинаковое число уравнений.

Поэтому нужен новый метод регуляризации, реализующий преимущества фильтрации. Этот метод предложен В. Н. Страховым и описан в следующем разделе.

2.3. Регуляризация по В. Н. Страхову

Регуляризация по В. Н. Страхову заключается в том, что решение уравнения (2.3) ищется в виде вектора

$$X = A^*Z. \quad (2.7)$$

Вектор Z определяется из уравнения

$$\beta Z + AA^*Z = F, \quad (2.8)$$

где $\beta > 0$ — малый параметр.

Для решения системы уравнений (2.8) применимы следующие итерационные схемы:

$$Z_{n+1} = (1 - \beta)Z_n - \gamma(AA^*Z_n - F); \quad (2.9)$$

$$Z_{n+1} = \mu_n Z_n + (1 - \mu_n)(Z_n - \gamma(\beta Z_n + AA^*Z_n - F)), \quad (2.10)$$

где $0 < \mu_* < \mu_n \leq \mu^* < 1, \gamma \leq 1/\|AA^*\|$. Для определенности положим $\gamma = 1/(2\|A^*A\|)$.

При реализации вычислительной схемы (2.10) в модельных примерах было взято $\mu_n = 1/2, n = 0, 1, \dots$

В уравнениях (2.9) и (2.10) β – параметр регуляризации (β – неотрицательное достаточно малое число); μ_n – последовательность положительных чисел, удовлетворяющих условию $0 < \mu_* \leq \mu_n < \mu^* < 1$, где μ_* и μ^* – соответственно нижняя и верхняя границы параметра $\mu_n, n = 0, 1, \dots$

2.4. Обоснование сходимости вычислительных схем

Докажем сходимость итерационных схем (2.5) и (2.6). Обоснование сходимости будем проводить в евклидовом пространстве E_{N_1} .

Доказательство сходимости итерационной схемы (2.5). Так как оператор A^*A самосопряженный, то его спектр находится на положительной полуоси OX декартовой системы координат (включая, возможно, и начало координат). Так как $\gamma = 1/(2\|A^*A\|)$, то спектр оператора γA^*A расположен в сегменте $[0, 1/2]$, а по теореме Данфорда [100] спектр оператора $(1 - \alpha)I - \gamma A^*A$ расположен в сегменте $[1/2 - \alpha, 1 - \alpha]$. Тогда $\|(1 - \alpha)I - \gamma A^*A\| \leq (1 - \alpha)$. Следовательно, по теореме Банаха о сжимающих отображениях, итерационный процесс (2.5) сходится к решению x_α^* уравнения

$$\alpha x + \gamma A^*Ax = \gamma A^*F$$

со скоростью $\|x_\alpha^* - x_{n+1}\| \leq (1 - \alpha)^n \|\alpha x_0 + \gamma A^*Ax_0 - A^*F\|$, где x_0 – начальное приближение.

Перейдем теперь к обоснованию сходимости вычислительной схемы (2.6). Здесь будет использована теорема 10.3 из главы I.

Доказательство сходимости итерационного метода (2.6). Для того чтобы воспользоваться теоремой 10.3 из главы I, нужно доказать, что $\|I - \gamma(\alpha I + A^*A)\| \leq 1$. Из рассуждений, приведенных при обосновании вычислительной схемы (2.5), следует, что спектр оператора $I - \gamma(\alpha I + A^*A)$ расположен в сегменте $\left[1 - \left(\frac{\alpha}{2\|A^*A\|} + \frac{1}{2}\right), 1 - \frac{\alpha}{2\|A^*A\|}\right]$. Поэтому $\|I - \gamma(\alpha I + A^*A)\| \leq (1 - \alpha/(2\|A^*A\|))$ и линейный оператор

$I - \gamma(\alpha I + A^*A)$ удовлетворяет условиям теоремы 10.3. Следовательно, итерационный процесс (2.6) сходится при любом начальном приближении x_0 и любом α ($0 \leq \alpha < 1$).

Обоснование вычислительных схем (2.9) и (2.10) проводится так же, как обоснование вычислительных схем (2.5) и (2.6), и поэтому на этом не останавливаемся.

3. Фильтрация по методу В. Н. Страхова

Помимо регуляризации эффективный прием получения более точных аппроксимаций потенциальных полей заключается в фильтрации уравнений из системы (2.2).

Методы фильтрации для решения систем уравнений с неточно заданными коэффициентами и правыми частями предложены и исследованы В. Н. Страховым.

Особое значение методы фильтрации приобретают при решении неустойчивых систем уравнений с правыми частями, полученными в результате измерений.

Применительно к исследуемой в настоящей главе задаче синтеза потенциальных полей метод фильтрации заключается в следующем.

При аппроксимации потенциального поля отрезками рядов по шаровым функциям из системы уравнений (2.2) определяются коэффициенты a_{kl}, b_{kl} , которые являются моментами потенциального поля по шаровым функциям. Как правило, заранее известны границы плотности тела $A \leq \rho(r, \theta, \varphi) < B$, создающего потенциальное поле. Это позволяет получить оценки для моментов a_{kl}, b_{kl} . Располагая информацией об оценках моментов a_{kl}, b_{kl} , можно сделать выводы о достоверности измерений значений поля $U(x^k)$.

Проиллюстрируем это на примере решения системы уравнений (2.2). Для простоты обозначений представим систему уравнений (2.2) в виде

$$DX = F, \quad (3.1)$$

где $D = \{d_{kl}\}, k, l = 1, 2, \dots, N_1, X = (x_1, \dots, x_{N_1})^T, F = (f_1, \dots, f_{N_1})^T$.

Отметим, что при переходе от системы (2.2) к системе (3.1) используются обозначения $x_1 = a_{00}, x_2 = a_{10}, \dots, x_M = a_{NN}, x_{M+1} = b_{11}, \dots, x_{N_1} = b_{NN}$, где $M = (N+2)(N+1)/2, N_1 = M + (N+1)N/2; f_1 = U(x^1), \dots, f_{N_1} = U(x^{N_1})$.

Предположим, что вектор F получен в результате испытаний, т.е. содержит погрешность. Предположим, что имеется априорная инфор-

мация о решении. Пусть известно, что для $\|X\|_{l_2} = [\sum_{k=1}^{N_1} |x_k|^2]^{1/2}$ справедливо неравенство $\|X\| \leq B$.

Возьмем произвольную k строку из системы уравнений (3.1): $f_k = \sum_{l=1}^{N_1} d_{kl}x_l$. Из неравенства Гельдера следует, что

$$\left| \sum_{l=1}^{N_1} d_{kl}x_l \right| \leq \left[\sum_{l=1}^{N_1} d_{kl}^2 \right]^{1/2} \left[\sum_{l=1}^{N_1} x_l^2 \right]^{1/2} \leq B \left[\sum_{l=1}^{N_1} d_{kl}^2 \right]^{1/2}.$$

Поэтому если окажется, что

$$B \left[\sum_{l=1}^{N_1} d_{kl}^2 \right]^{1/2} < |f_k|,$$

то k -е уравнение не соответствует исходной физической задаче и его следует отбросить.

Если же известна, например, граница значений нормы $\|X\|_{l_{1/2}} \geq A$ ($\|X\|_{l_{1/2}} = [\sum_{k=1}^{N_1} |x_k|^{1/2}]^2$), то, воспользовавшись неравенством Гельдера с отрицательными степенями [221]

$$\sum_{k=1}^N |a_k b_k| > \left(\sum_{k=1}^N |a_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^N |b_k|^q \right)^{1/q},$$

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p < 1$, имеем для k -го уравнения

$$\sum_{l=1}^N |a_{kl}x_l| \geq \left(\sum_{l=1}^N |a_{kl}|^{-1} \right)^{-1} \left(\sum_{l=1}^N |x_l|^{1/2} \right)^2 \geq A \left(\sum_{l=1}^N |a_{kl}|^{-1} \right)^{-1}.$$

Если окажется, что справедливо неравенство

$$A \left[\sum_{l=1}^N |a_{kl}|^{-1} \right]^{-1} \geq |f_k|,$$

то k -е уравнение следует отбросить, так как оно не соответствует физической задаче.

При проведении фильтрации можно использовать различную информацию об области определения решения и различные неравенства. При решении модельных примеров, приведенных в приложениях С, Д, предполагается, что $[\sum_{k=1}^N |x_k|^2]^{1/2} \leq B$ и используется неравенство Гельдера при $p = 2$.

При решении модельных примеров результаты измерений моделировались датчиком случайных чисел.

Вместо уравнения (3.1) рассматривалось уравнение

$$DX = \hat{F},$$

где $\hat{F} = F + dF$; $dF = (df_1, \dots, df_{N_1})$; $df_i = k(\frac{1}{2} - \delta f_i)$, $i = 1, 2, \dots, N_1$. Здесь δf_i ($i = 1, 2, \dots, N_1$) – последовательность случайных чисел, моделируемая специальной программой ПК. Коэффициент подобия k определяется из условия

$$\frac{\|dF\|_{E_{N_1}}}{\|F + dF\|_{E_{N_1}}} \leq \eta^2.$$

Результаты решения модельных примеров с фильтрацией приведены в приложениях С, D.

4. Приближенные методы определения моментов производных потенциальных полей

К решению задачи определения моментов производных потенциальных полей можно подойти с нескольких позиций.

В качестве первой можно рассматривать формальное разложение производных потенциальных полей в ряд по шаровым функциям

$$\frac{\hat{P}_n^m(\cos \theta)}{r^{n+1}} \cos m\varphi, \frac{\hat{P}_n^m(\cos \theta)}{r^{n+1}} \sin m\varphi,$$

$$n = 0, 1, \dots, \quad m = 0, 1, \dots, n.$$

Пусть известны значения производных потенциала $\frac{\partial U}{\partial z}$ в N_1 точке x^k , $k = 1, 2, \dots, N_1$, с полярными координатами $(r_k, \theta_k, \varphi_k)$. Система уравнений, из которой определяются моменты, имеет вид

$$\sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n \frac{\hat{P}_n^m(\cos \theta_k)}{r_k^{n+1}} (a_{nm} \cos m\varphi_k + b_{nm} \sin m\varphi_k) = \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{x_k}, \quad (4.1)$$

$$k = 1, 2, \dots, N_1.$$

К решению системы (4.1) привлекаются те же методы, что и к решению системы (2.2).

Более естественным представляется подход, когда разложение ищется в виде, адекватном решаемой задаче.

Воспользовавшись формулой (2.5) из предыдущей главы, запишем систему линейных алгебраических уравнений, предназначенную для нахождения коэффициентов a_{kl} и b_{kl} . Пусть известны значения производной потенциала $f_k = \frac{\partial U(P_k)}{\partial z} |_{(r_k, \theta_k, \varphi_k)}$ в N_1 точке.

Тогда коэффициенты a_{kl} и b_{kl} определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n \frac{(n+1)^2 - m^2}{(n+1)r_k^{n+2}} \widehat{P}_{n+1}^m(\cos \theta_k) (a_{nm} \cos m\varphi_k + b_{nm} \sin m\varphi_k) - \\
 & - \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{r_k^{n+2}} \widehat{P}_n^n(\cos \theta_k) \cos \theta_k (a_{nn} \cos n\varphi_k + b_{nn} \sin n\varphi_k) = f_k, \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

$k = 1, 2, \dots, N_1$.

К решению системы (4.2) привлекаются те же методы, что и к решению системы (2.2).

5. Приближенные методы глобального гармонического сферического анализа потенциальных полей

В разделе предложен алгоритм определения коэффициентов Фурье в разложении по сферическим функциям потенциальных полей в предположении, что потенциальные поля известны своими значениями на неравномерной сетке узлов, заданной в некоторой части поверхности Земли.

Метод основан на использовании полиномов Бернштейна для продолжения потенциальных полей на всю поверхность Земли и последующем применении кубатурных формул. Краткие сведения о полиномах Бернштейна приведены в разд. 8 главы I. Подробное изложение теории полиномов Бернштейна дано в монографиях [140, 260, 262]. Раздел написан по материалам статьи [51].

5.1. Обзор литературы

Задачи глобального гармонического сферического анализа и синтеза восходят к классическим работам К. Гаусса [88, 89] и Ф. Нейманна [265, 266] по теории земного магнетизма.

Несмотря на то, что и К. Гаусс и Ф. Нейманн проводили вычисления вручную, предложенные ими алгоритмы представляют интерес и в настоящее время.

И К. Гаусс, и Ф. Нейманн при построении глобального сферического гармонического синтеза использовали двухступенчатый метод.

Алгоритм Гаусса заключался в том, что на первом шаге применялось преобразование Фурье по переменной φ (здесь используется сферическая система координат (ρ, θ, φ) , в которой θ — долгота, φ — широта). На втором шаге — метод наименьших квадратов.

Алгоритм Нейманна отличался от алгоритма Гаусса на втором шаге. Вместо метода наименьших квадратов он применял квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности.

Метод Нейманна получил в дальнейшем широкое распространение в различных разделах геофизики.

Он используется в топографии [270, 257], в физике атмосферы [250], в геодезии [268, 249, 147].

Впоследствии оба метода были использованы в работах по глобальному сферическому гармоническому анализу.

Приведем краткий обзор работ по двухступенчатому методу в задачах глобального сферического гармонического синтеза и глобального сферического гармонического анализа.

Пусть функция $f(\theta, \varphi)$ на сферической поверхности S разлагается в ряд по сферическим функциям

$$\begin{aligned}
 f(\theta, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \bar{P}_n^m(\cos \theta) (C_{nm} \cos m\varphi + S_{nm} \sin m\varphi) = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} K(n, m) \bar{P}_n^m(\cos \theta) (C_{nm} \cos m\varphi + S_{nm} \sin m\varphi) = \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \bar{P}_n^m(\cos \theta) (C_{nm} \cos m\varphi + S_{nm} \sin m\varphi) = \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} A_m(\theta) \cos m\varphi + B_m(\theta) \sin m\varphi, \tag{5.1}
 \end{aligned}$$

где

$$A_m(\theta) = \sum_{n=m}^{\infty} C_{nm} \bar{P}_n^m(\cos \theta), \quad B_m(\theta) = \sum_{n=m}^{\infty} S_{nm} \bar{P}_n^m(\cos \theta),$$

$K(n, m) = 1$ при $n \geq m$, $K(n, m) = 0$ при $n < m$; $\bar{P}_n^m(\cos \theta)$ — нормированные присоединенные функции Лежандра:

$$\bar{P}_n^m(t) = \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{2(n+m)!} \frac{(1-t^2)^{m/2} d^{n+m}(t^2-1)^n}{2^n n! dt^{n+m}}},$$

$t = \cos \theta$.

Глобальный сферический гармонический анализ заключается в нахождении коэффициентов C_{nm} и S_{nm} из разложения (5.1) функции $f(\theta, \varphi)$ по сферическим функциям.

Используя ортогональность тригонометрических полиномов и присоединенных полиномов Лежандра, из разложения (5.1) имеем

$$\begin{Bmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{Bmatrix} = \frac{1}{(1 + \delta_{m0})\pi} \int_S f(\theta, \varphi) \overline{P}_n^m(\cos \theta) \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix} ds, \quad (5.2)$$

где $ds = \sin \theta d\theta d\varphi$, $S = [0, \pi; 0, 2\pi]$, $\delta_{m0} = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 0, & m \neq 0 \end{cases}$.

Применяя к формуле (5.2) кубатурные формулы, можно вычислить коэффициенты C_{nm} и S_{nm} .

Двухступенчатый ГСГА состоит в том, что последовательно проводятся вычисления по переменным φ и θ . В двухступенчатом ГСГС вычисления проводятся в обратном порядке – сначала проводятся вычисления по θ , а затем – по φ .

Остановимся на этих алгоритмах подробнее.

Алгоритм двухступенчатого ГСГА заключается в том, что вначале вычисляются функции:

$$\begin{Bmatrix} A_m(\theta) \\ B_m(\theta) \end{Bmatrix} = \frac{1}{(1 + \delta_{m0})\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi) \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix} d\varphi, \quad (5.3)$$

а затем вычисляются коэффициенты:

$$\begin{Bmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{Bmatrix} = \int_0^\pi \begin{Bmatrix} A_m(\theta) \\ B_m(\theta) \end{Bmatrix} \overline{P}_n^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \quad (5.4)$$

Двухступенчатый ГСГС заключается в том, что вначале проводится суммирование по параметру n :

$$\begin{Bmatrix} A_m(\theta) \\ B_m(\theta) \end{Bmatrix} = \sum_{n=m}^{\infty} \overline{P}_n^m(\cos \theta) \begin{Bmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{Bmatrix}, \quad (5.5)$$

а затем вычисляются значения функции:

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} (A_m(\theta) \cos m\varphi + B_m(\theta) \sin m\varphi). \quad (5.6)$$

Алгоритмы сферического анализа и синтеза развивались в работах [273, 249, 274].

Непосредственное применение формул (5.3)-(5.4) возможно только при небольших значениях n и m . Поэтому необходима дискретизация этих формул.

Основная проблема при этом заключается в том, что после дискретизации присоединенные полиномы Лежандра оказываются неортонормальными.

Это накладывает дополнительные трудности на решение задачи ГГСА даже при условии, что дана равномерная сетка узлов на всей сферической поверхности.

Для вычисления коэффициентов C_{nm} и S_{nm} существует два классических метода: метод наименьших квадратов, восходящий к К. Гауссу, и метод механических квадратур, который развил Ф. Нейманн.

Преимущество метода наименьших квадратов заключается в том, что он эффективен при наличии погрешностей в данных.

Преимущество метода механических квадратур заключается в его простоте:

$$\begin{Bmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^N s_i \bar{P}_n^m(\cos \Theta_i) \begin{Bmatrix} A_m(\Theta_i) \\ B_m(\Theta_i) \end{Bmatrix},$$

где $s_i = \frac{\pi}{N} \sin \Theta_i$, узлы Θ_i ($i = 0, 1, \dots, N$) равноотстоящие.

Обобщения последней формулы предложены в работах [249, 255].

В случае, если узлы по переменной Θ равноотстоящие, в [275] предлагается достаточно сложный и неустойчивый метод нахождения коэффициентов для квадратурной формулы Гаусса наивысшей алгебраической степени точности при заранее заданной сетке узлов.

Помимо алгоритмов двухступенчатого глобального сферического гармонического синтеза, разработан и внедрен в геофизическую практику алгоритм "столбцового" типа [200] вычисления потенциальных полей во внешности сферы.

Для вычисления отрезков ряда по шаровым функциям

$$U(x) = \frac{1}{r^\nu} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n \frac{\hat{P}_n^m(\cos \theta)}{r^n} (a_{nm} \cos m\varphi + b_{nm} \sin m\varphi),$$

где $\nu > 0$ — целое число; $\hat{P}_n^m(\cos \theta)$ — присоединенные функции Лежандра; $x = (x_1, x_2, x_3)$, (r, φ, θ) — сферические координаты. В [200] построены четырехчленные рекурсивные соотношения, связывающие присоединенные функции Лежандра \hat{P}_n^m , нормированные следующим образом:

$$\hat{P}_n^m(\cos \theta) = \frac{n!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta).$$

Алгоритм "столбцового" типа позволяет проводить устойчивый синтез потенциальных полей при $N \geq 180$ с высокой точностью [200].

В работе [241] описана методика синтеза потенциальных полей на персональных компьютерах в среде MathlabTM, позволяющая осуществлять синтез до $N = 2700$.

Как отмечалось выше, в ГСГА потенциальных полей широко используется метод наименьших квадратов. Однако этот метод, как показано в [138], требует очень большого числа наблюдений.

Метод наименьших квадратов эффективно применяется в случае, если задана равномерная по широте и долготе сетка наблюдений. Однако, в геодезической практике такая сетка отсутствует, в частности, из-за проблемы полярных областей. В работе [274] отмечается, что в полярных областях отсутствует регулярная сетка спутниковых наблюдений и ее приходится дополнять наземными и авиационными съемками.

В связи с этим в [274] предложен алгоритм, основанный на методе наименьших квадратов и позволяющий использовать информацию, полученную как из спутниковых, так и из наземных измерений и аэроизмерений.

Следующий алгоритм предложен в [263].

Потенциал Земли в произвольной точке вне Земли в сферических координатах (r, θ, φ) может быть представлен в виде ряда

$$U(r, \theta, \varphi) = \frac{GM}{R} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} u_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

где Y_{lm} — сферические функции степени l и порядка m , а u_{lm} — коэффициенты Фурье разложения по сферическим функциям.

Пусть S — произвольная сфера, отстоящая от центра Земли на расстоянии $R + h$, где R — радиус Земли, $h > 0$ (в [263] величину h связывают с траекторией спутника). Используя свойство ортонормальности сферических функций

$$\frac{1}{4\pi} \int_S Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{ij}(\theta, \varphi) d\sigma = \delta_{li} \delta_{mj},$$

в [263] получено следующее представление для коэффициентов Фурье:

$$u_{kl} = \frac{1}{4\pi \alpha_{kl}} \int_S U(\theta, \varphi) Y_{kl}(\theta, \varphi) d\sigma. \quad (5.7)$$

Здесь δ_{lk} — символ Кронекера; $\alpha_{kl} = \frac{GM}{R} \left(\frac{R}{R+h}\right)^{k+1}$.

Вычисление коэффициентов u_{kl} по формуле (5.7) в [263] проводится по кубатурным формулам различного вида.

Непосредственное использование кубатурных формул приводит к большим погрешностям, так как отсутствуют спутниковые измерения гравитационных полей в полярных областях.

Это связано с наклоном орбит спутников относительно экватора.

Поэтому наряду с кубатурными формулами в [263] для вычисления коэффициентов Фурье используются искусственные приемы.

Еще один подход к определению коэффициентов Фурье разложения гармонических функций в ряды по сферическим функциям основан на фильтрации Винера – Колмогорова [274].

Подробный обзор численных методов нахождения коэффициентов Фурье по сферическим функциям содержится в [200]. В этой работе изложен двухступенчатый метод, основанный на быстром дискретном преобразовании Фурье и на использовании квадратурных формул Гаусса.

Представляет значительный теоретический и практический интерес построение численных методов нахождения коэффициентов Фурье сферических функций по информации о потенциальных полях, заданной на неравномерной сетке узлов в некоторой области, не включающей полярные области.

В данном разделе предложен метод решения этой проблемы.

5.2. Вспомогательные предложения

В разд. 6 главы II описан алгоритм продолжения потенциальных полей, заданных в ограниченной области, расположенной на сфере, на всю сферу. В основу этого алгоритма положено известное (см. теорему 8.25 из главы I) свойство полиномов Бернштейна равномерно приближать целые функции. Построение классического полинома Бернштейна требует знания информации об аппроксимируемой функции на равномерной сетке узлов.

В геофизической практике затруднительно провести равномерную съемку на достаточно больших территориях, и поэтому представляет интерес построение модификаций полиномов Бернштейна, использующих неравномерные сетки узлов.

Рассмотрим сегмент $[0, 1]$, на котором имеется N узлов, $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1$. Пусть $\Delta_k = [x_k, x_{k+1}]$, $h_k = x_{k+1} - x_k$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$. Будем считать выполненным условие $h^*/h_* \leq m$, где $h^* = \max h_k$, $h_* = \min h_k$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$, m – целое число. Величина m влияет на точность аппроксимации.

Построим следующую модификацию полиномов Бернштейна:

$$\tilde{B}_N(x) = \sum_{k=0}^N C_N^k f(x_k) x^k (1-x)^{N-k}. \quad (5.8)$$

Покажем, что при выполнении условия $h^*/h_* \leq m$, $m = \text{const}$, для любой непрерывной функции $f(x) \in C[0, 1]$ справедливо равенство $\lim_{N \rightarrow \infty} \|f(x) - \tilde{B}_N(x)\| = 0$. Доказательство подобно доказательству теоремы Бернштейна (см. [140]). Оно опирается на следующую лемму.

Лемма 5.1 ([140, с. 21]). Пусть $x \in [0, 1]$ и $\delta > 0$ — произвольное положительное число. Обозначим через $\Delta_N(x)$ множество тех значений k из ряда $0, 1, \dots, N$, для которых $|\frac{k}{N} - x| \geq \delta$. Тогда

$$\sum_{k \in \Delta_N(x)} C_N^k x^k (1-x)^{N-k} \leq \frac{1}{4N\delta^2}.$$

Оценим $\|f(x) - \tilde{B}_N(x)\|_{C[0,1]}$. Так как $\sum_{k=0}^N C_N^k x^k (1-x)^{N-k} = 1$, то

$$f(x) = \sum_{k=0}^N f(x_k) C_N^k x^k (1-x)^{N-k}. \text{ Следовательно,}$$

$$\|f(x) - \tilde{B}_N(x)\| = \left\| \sum_{k=0}^N (f(x) - f(x_k)) C_N^k x^k (1-x)^{N-k} \right\|.$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon (\varepsilon > 0)$ и найдем такой промежуток δ , что $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon/2$ при $|x_1 - x_2| \leq \delta$. Зафиксируем произвольную точку $x \in [0, 1]$ и рассмотрим δ -окрестность этой точки: $G(x) = [x - \delta, x + \delta] \cap [0, 1]$. Покажем, что начиная с достаточно больших значений N в области $G(x)$ будет находиться хотя бы одна точка последовательности x_k , $k = 0, 1, \dots, N$.

В самом деле, пусть множество точек x_0, \dots, x_N таково, что расстояния между ними распределены следующим образом: имеется одно максимальное расстояние $h^* = mh_*$, а все остальные расстояния минимальные. Тогда $mh_* + (N-1)h_* = 1$ и, следовательно, $h_* = 1/(m+N-1)$, $h^* = m/(m+N-1)$. Не ограничивая общности, будем считать, что максимальным является расстояние между узлами x_{N-1} и $x_N = 1$. Увеличим расстояние между двумя смежными узлами x_j, x_{j+1} , $j = 0, 1, \dots, N-2$. Для того чтобы общая длина отрезков $\Delta_k = [x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, оставалась равной 1 и сохранялось отношение $h^*/h_* \leq m$, нужно, чтобы $h^* \leq m/(m+N-1)$. Аналогично, если максимальная длина достигается

между $k+1$ точками x_0, x_1, \dots, x_N , то $h^* = m/(2km + N - k)$. Таким образом, при достаточно больших значениях N $h^* < \delta$ и в сегменте $G(x)$ при любом значении x содержатся точки множества $\{x_k\}$, $k = 0, 1, \dots, N$.

Тогда

$$|f(x) - \tilde{B}_N(x)| \leq \sum'_{k=0}^N |f(x) - f(x_k)| C_N^k x^k (1-x)^{N-k} + \\ + \sum_{k \in \Delta_N(x)} |f(x) - f(x_k)| C_N^k x^k (1-x)^{N-k} = I_1 + I_2,$$

где \sum' означает суммирование по $x_k \in G(x)$. Вначале оценим I_1 . Так как функция $f(x)$ равномерно непрерывна, то $|f(x) - f(x_k)| \leq \varepsilon/2$ при $x_k \in G(x)$. Следовательно, $I_1 \leq \varepsilon/2$. Из леммы 5.1 следует, что $I_2 \leq M/(4N\delta^2)$, $M = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$. Так как δ — фиксированное число, то выбором N можно добиться, чтобы $I_2 \leq \varepsilon/2$. Следовательно, $\|f(x) - \tilde{B}_N(x)\| \leq \varepsilon$.

Повторяя доказательство теоремы Т. Поповичиу [140, с. 245—246], можно показать, что для модифицированных полиномов Бернштейна справедлива оценка $|f(x) - \tilde{B}_N(x)| \leq c\omega\left(f; \frac{1}{\sqrt{N}}\right)$, где $\omega(f, \delta)$ — модуль непрерывности функции $f(x)$.

Известна теорема Л. В. Канторовича (теорема 8.25 из главы I), утверждающая, что если $f(x)$ есть целая функция, то ее полином Бернштейна

$$B_N(x) = \sum_{k=0}^N C_N^k f\left(\frac{k}{N}\right) x^k (1-x)^{N-k}$$

сходится к ней на всей числовой оси.

Повторяя рассуждения, приведенные в [140, с. 254—256], можно показать, что если $U(x)$ — проекция на сегмент $[a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$, гармонической функции $U(x, y, z)$, то последовательность полиномов Бернштейна $B_n(x)$, $x \in [0, 1]$, сходится к этой функции.

5.3. Численный двухступенчатый алгоритм ГГСА, основанный на экстраполяции полей и применении кубатурных формул

Введем сферическую систему координат (r, θ, φ) с центром в центре сферы S радиуса R . Пусть известны значения потенциального поля $U(R, \theta, \varphi)$ в области Ω на поверхности сферы, определяемой неравенствами $0 < \alpha_1 \leq \theta \leq \alpha_2 < \pi$, $0 < \beta_1 \leq \varphi \leq \beta_2 < 2\pi$. Положим

$\beta_1 = 0, \beta_2 = 2\pi$, т.е. $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Ограничение, связанное с предположением, что $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, не влияет на общность рассуждений. Оно сделано только для простоты обозначений.

Предлагаемый алгоритм ГСГА состоит из двух этапов.

Первый этап. На первом этапе, располагая значениями потенциального поля на поверхности $\Omega \subset S$, продолжаем его на поверхность сферы S радиуса R .

Пусть значения функции $U(R, \theta, \varphi)$ заданы на прямоугольной сетке узлов $\{\theta_k, \varphi_l\}$, $k = 1, 2, \dots, M_1$, $l = 1, 2, \dots, N_1$, причем эта сетка не равномерная ни по переменной θ , ни по переменной φ . По узлам $\{\theta_k, \varphi_l\}$, $k = 1, 2, \dots, M_1$, $l = 1, 2, \dots, N_1$, построим полином Бернштейна:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{M_1, N_1}(\theta, \varphi) = & \\ = \sum_{k=1}^{M_1} \sum_{l=1}^{N_1} C_{M_1}^k C_{N_1}^l U(R, \theta_k, \varphi_l) & \left(\frac{\theta - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} \right)^k \left(1 - \frac{\theta - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} \right)^{M_1 - k} \times \\ & \times \left(\frac{\varphi - \beta_1}{\beta_2 - \beta_1} \right)^l \left(1 - \frac{\varphi - \beta_1}{\beta_2 - \beta_1} \right)^{N_1 - l}. \end{aligned}$$

Полином $\tilde{B}_{M_1, N_1}(\theta, \varphi)$ приближает функцию $U(R, \theta, \varphi)$ в области Ω .

Введем в области Ω равномерную сетку узлов $\left\{ \alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1) \frac{k}{n_1}, \beta_1 + (\beta_2 - \beta_1) \frac{l}{n_1} \right\}$, $k, l = 0, 1, \dots, n_1$.

По значениям полинома $\tilde{B}_{M_1, N_1}(\theta, \varphi)$ на равномерной сетке узлов строится новый полином

$$\begin{aligned} B_{n_1, n_1}^*(\theta, \varphi) = & \\ = \sum_{k=0}^{n_1} \sum_{l=0}^{n_1} C_{n_1}^k C_{n_1}^l \tilde{B}_{M_1, N_1} & \left(\alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1) \frac{k}{n_1}, \beta_1 + (\beta_2 - \beta_1) \frac{l}{n_1} \right) \times \\ \times \left(\frac{\theta - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} \right)^k \left(1 - \frac{\theta - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} \right)^{n_1 - k} & \left(\frac{\varphi - \beta_1}{\beta_2 - \beta_1} \right)^l \left(1 - \frac{\varphi - \beta_1}{\beta_2 - \beta_1} \right)^{n_1 - l}. \end{aligned}$$

Замечание. Необходимость в построении этого полинома обусловлена тем, что на втором этапе используются кубатурные формулы, построенные на равномерных сетках узлов.

Полином $B_{n_1, n_1}^*(\theta, \varphi)$ приближает функцию $U(R, \theta, \varphi)$ на сфере S .

Построением полинома $B_{n_1, n_1}^*(\theta, \varphi)$ заканчивается первый этап.

Второй этап. Располагая значениями полинома $B_{n_1, n_1}^*(\theta, \varphi)$ на поверхности S , вычислим коэффициенты Фурье по сферическим функциям. Для этого воспользуемся формулой

$$\begin{Bmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{Bmatrix} = \frac{1}{(1 + \delta_{m0})\pi} \int_S B_{n_1, n_1}^*(\theta, \varphi) \overline{P}_n^m(\cos \theta) \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix} ds. \quad (5.8)$$

Перейдем в (5.8) к сферической системе координат. Воспользовавшись формулой интегрирования по сфере [121], имеем

$$\begin{aligned} & \begin{Bmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{Bmatrix} = \\ & = \frac{1}{(1 + \delta_{m0})\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} B_{n_1, n_1}^*(\theta, \varphi) \overline{P}_n^m(\cos \theta) \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix} \sin \theta d\theta d\varphi. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Так как значения функции $B_{n_1, n_1}^*(\theta, \varphi)$ легко вычисляются при любых значениях (θ, φ) , то для вычисления интегралов из правых частей формул (5.8), (5.9) можно использовать кубатурные формулы.

В формуле (5.9) по переменной φ естественно воспользоваться квадратурной формулой по равноотстоящим узлам, которая является формулой наивысшей тригонометрической степени точности. Для вычисления интеграла по переменной θ можно воспользоваться квадратурной формулой Гаусса n -го порядка.

В результате получаем формулу

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{Bmatrix} &= \frac{2}{M(1 + \delta_{m0})} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M \alpha_k^{(N)} B_{n_1, n_1}^* \left(x_k^{(N)}, \frac{2\pi l}{M} \right) \overline{P}_n^m \left(\cos x_k^{(N)} \right) \times \\ & \times \begin{Bmatrix} \cos \frac{2\pi ml}{M} \sin \frac{2\pi ml}{M} \\ \sin \frac{2\pi ml}{M} \end{Bmatrix} \sin x_k^{(N)} + R_{NM}(U), \end{aligned} \quad (5.10)$$

где $\left\{ \alpha_k^{(N)}, x_k^{(N)} \right\}$ – коэффициенты и узлы квадратурной формулы Гаусса; $R_{NM}(U)$ – погрешность квадратурной формулы (5.10).

Наряду с формулой (5.10) вычисление коэффициентов Фурье сферических функций можно проводить по кубатурным формулам с равноотстоящими узлами:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{(1 + \delta_{m0})} \frac{2\pi}{NM} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M B_{n_1, n_1}^* \left(\frac{\pi k}{N}, \frac{2\pi l}{M} \right) \overline{P}_n^m \left(\cos \frac{\pi k}{N} \right) \times \\ & \times \begin{Bmatrix} \cos \frac{2\pi ml}{M} \\ \sin \frac{2\pi ml}{M} \end{Bmatrix} \sin \frac{\pi k}{N} + R_{NM}(U). \end{aligned} \quad (5.11)$$

6. Двухступенчатый коллокационный метод разложения потенциальных полей по сферическим функциям

В этом разделе предложен двухступенчатый коллокационный метод разложения потенциальных полей по сферическим функциям. Метод позволяет вычислять гармоники высокого порядка по сферическим функциям при существенно неравномерной сетке наблюдений. В данном разделе использованы результаты работы [54].

6.1. Численный алгоритм

Пусть в евклидовом пространстве E_3 векторов $x = (x_1, x_2, x_3)$ задана сфера S радиуса R с центром в начале координат. Пусть (r, θ, φ) – сферические координаты, связанные с декартовыми стандартным образом: $x_1 = r \cos \varphi \sin \theta$, $x_2 = r \sin \varphi \sin \theta$, $x_3 = r \cos \theta$.

В зависимости от того, где расположены элементы исследуемого потенциального поля, рассматриваем внутреннюю и внешнюю задачи.

Элемент $U(x)$ некоторого потенциального поля, удовлетворяющего внутри сферы S уравнению Лапласа (внутренняя задача), описывается рядом Фурье по шаровым функциям

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \sum_{m=0}^n (A_{nm} \cos m\varphi + B_{nm} \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta), \quad (6.1)$$

где $P_n^m(\cos \theta)$ – присоединенные функции Лежандра.

Для определенности будем рассматривать внутреннюю задачу. Этот выбор обусловлен проблемой разложения потенциальных полей в ряды Фурье по сферическим функциям по результатам спутниковых измерений. Поэтому для учета проблемы полярных областей будем считать, что потенциальное поле задано на сфере S с радиусом R в сферическом поясе $10^\circ \leq \theta \leq 170^\circ$, $0^\circ \leq \varphi \leq 360^\circ$.

Введем сетку узлов $\theta_k = \frac{\pi}{18} + \left(\pi - \frac{\pi}{9}\right) \frac{k}{N}$, $k = 0, 1, \dots, N$, $\varphi_l = 2\pi/M$, $l = 0, 1, \dots, M$.

Будем аппроксимировать функцию $U(x)$ конечным отрезком ряда

$$U_N(x) = \sum_{n=0}^N \left(\frac{r}{R}\right)^n \sum_{m=0}^n (A_{nm} \cos m\varphi + B_{nm} \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta). \quad (6.2)$$

Введем функцию $K(n, m)$, определяемую формулой

$$K(n, m) = \begin{cases} 1, & m \leq n; \\ 0, & m > n. \end{cases}$$

Тогда формулу (6.2) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 U_N(x) &= \sum_{n=0}^N \left(\frac{r}{R}\right)^n \sum_{m=0}^N K(n, m) (A_{nm} \cos m\varphi + B_{nm} \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta) = \\
 &= \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N K(n, m) \left(\frac{r}{R}\right)^n (A_{nm} \cos m\varphi + B_{nm} \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta) = \\
 &= \sum_{m=0}^N (C_m(r, \theta) \cos m\varphi + S_m(r, \theta) \sin m\varphi), \tag{6.3}
 \end{aligned}$$

где

$$C_m(r, \theta) = \sum_{n=m}^N A_{nm} \left(\frac{r}{R}\right)^n P_n^m(\cos \theta); \tag{6.4}$$

$$S_m(r, \theta) = \sum_{n=m}^N B_{nm} \left(\frac{r}{R}\right)^n P_n^m(\cos \theta). \tag{6.5}$$

Таким образом, нахождение коэффициентов Фурье A_{nm} и B_{nm} разложения по шаровым функциям состоит из двух этапов: нахождения коэффициентов $C_m(r, \theta)$, $S_m(r, \theta)$ и, затем, нахождения собственно коэффициентов A_{nm} и B_{nm} .

Для нахождения коэффициентов $C_m(r, \theta)$ и $S_m(r, \theta)$ в [274] использован следующий алгоритм.

Пользуясь ортогональностью тригонометрической системы функций, можно представить функции $C_m(r, \theta)$ и $S_m(r, \theta)$ как коэффициенты Фурье по тригонометрической системе функций:

$$C_0(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(r, \varphi, \theta) d\varphi; \tag{6.6}$$

$$C_m(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} U(r, \varphi, \theta) \cos m\varphi d\varphi, m = 1, 2, \dots, N; \tag{6.7}$$

$$S_m(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} U(r, \varphi, \theta) \sin m\varphi d\varphi, m = 1, 2, \dots, N. \tag{6.8}$$

Интегралы в формулах (6.6)-(6.8) вычисляются по квадратурным формулам прямоугольников, которые в случае равноотстоящих узлов являются наилучшими [141].

Гармонические функции входят в класс функций $Q_{r\gamma}$, описанный в разд. 2 главы I, а параметр γ этого класса зависит от фиксированных значений r и θ (см. главу II).

В работе [32] показано, что погрешность вычисления интегралов от функций из класса $Q_{r\gamma}([0, 2\pi], 1)$ по наилучшим квадратурным формулам равна cN^{-s} .

Однако в случае неравномерных узлов точность квадратурной формулы значительно уменьшается. Так как информация о потенциальных полях в полярных областях отсутствует, то этот метод при решении конкретных задач приводит к большим погрешностям.

Поэтому естественно построить другие алгоритмы.

При фиксированных значениях r и θ коэффициенты Фурье $C_m(r, \theta)$ и $S_m(r, \theta)$ будем находить из системы уравнений

$$\sum_{m=0}^N C_m(r, \theta) \cos m\varphi_k + \sum_{m=1}^N S_m(r, \theta) \sin m\varphi_k = U(r, \theta, \varphi_k), \quad (6.9)$$

$$k = 1, 2, \dots, 2N + 1.$$

При различных узлах φ_k детерминант отличен от нуля, что гарантирует разрешимость системы уравнений (6.9).

Однако даже в случае равноотстоящих узлов применение метода Гаусса и его модификаций нецелесообразно, так как практически все коэффициенты матрицы системы (6.9) отличны от нуля. В этом случае более целесообразно применение итерационных методов.

Обозначим через $a_{i,j}$ коэффициенты $a_{i,j} = \cos j\varphi_i, j = 0, 1, \dots, N, a_{i,N+j} = \sin j\varphi_i, j = 1, 2, \dots, N, i = 1, 2, \dots, 2N + 1$, а через $z_j, j = 1, 2, \dots, 2N + 1$, – неизвестные $z_j = C_{j-1}(r, \theta), j = 1, 2, \dots, N + 1, z_{N+1+j} = S_j(r, \theta), j = 1, 2, \dots, N$.

В результате приходим к системе уравнений

$$AZ = F, \quad (6.10)$$

где $A = \{a_{i,j}\}_{i,j=1,2,\dots,2N+1}$, $z = (z_1, \dots, z_{2N+1})$, $F = (U_N(r, \theta, \varphi_1), \dots, U_N(r, \theta, \varphi_{2N+1}))$.

Систему уравнений (6.10) решаем итерационным методом

$$Z_{m+1} = \alpha_m Z_m + (1 - \alpha_m)(Z_m - \gamma(AZ_m - F)), \quad (6.11)$$

где $\gamma = 1 / \left(2 \left[\sum_{i=1}^{2N+1} \sum_{j=1}^{2N+1} |a_{ij}|^2 \right]^{1/2} \right)$.

Сходимость итераций (6.11) следует из теоремы 10.3 главы I.

После того как определены функции $C_m(r, \theta)$ и $S_m(r, \theta)$ на системе узлов $r = R, \pi/18 \leq \theta_v \leq \pi - \pi/18, v = 1, 2, \dots, N + 1$, приступаем к определению коэффициентов A_{nm} и B_{nm} (отметим, что возможны и другие системы узлов. Например, параметр r может принимать различные значения). Коэффициенты $A_{nm}, n = 1, 2, \dots, N + 1, m = 0, 1, \dots, N$, находятся из $m, m = 0, 1, \dots, N$, систем уравнений

$$C_m(R, \theta_v) = \sum_{n=m}^N A_{nm} \left(\frac{r}{R}\right)^n P_n^m(\cos \theta_v), v = 1, 2, \dots, N + 1, \quad (6.12)$$

каждая из которых состоит из $N + 1$ уравнений с $(N + 1 - m)$ неизвестными, $m = 0, 1, \dots, N$.

Для решения системы уравнений (6.12) используем метод регуляризации Тихонова [213]. Согласно этому методу матрица системы (6.12) умножается на сопряженную и проводится регуляризация сдвигом на положительную константу α .

Аналогичным образом определяются коэффициенты B_{nm} из системы уравнений

$$S_m(R, \theta_v) = \sum_{n=m}^N B_{nm} \left(\frac{r}{R}\right)^n P_n^m(\cos \theta_v), v = 1, 2, \dots, N + 1. \quad (6.13)$$

Ниже приведен модельный пример, иллюстрирующий высокую эффективность предложенного алгоритма.

6.2. Модельный пример.

Поместим единичный источник с массой $m = 1$ в точку с координатами $M = (3, 3, 3)$ в декартовой системе координат. Известны коэффициенты разложения поля, создаваемого единичным источником, по сферическим функциям [92, 239].

С использованием алгоритма, описанного в разд. 6.1, были вычислены коэффициенты Фурье при $10 \leq N \leq 400$.

При $N = 10$ максимум разности между точными значениями коэффициентов Фурье и значениями, вычисленными по алгоритму, описанному в разд. 6.1, составил

$$\max_{n,m} |A_{nm} - \bar{A}_{nm}| = 4.4541 \cdot 10^{-4},$$

где A_{nm} — приближенные значения коэффициентов; \bar{A}_{nm} — точные значения коэффициентов.

Воспользовавшись приближенными значениями коэффициентов Фурье, вычисленными при $N = 10$, находим значения потенциального поля,

возбужденного единичной массой, помещённой в точку (3, 3, 3). Максимальная разность значений исходного потенциального поля с приближенными значениями в единичном шаре не превосходит 10^{-2} .

Время выполнения программы (в секундах) и максимальная абсолютная погрешность вычислений ($\max_{n,m} |A_{nm} - \bar{A}_{nm}|$, $m = 0, 1, \dots, n$, $n = 0, 1, 2, \dots, 300$) представлены в табл. 1.

Таблица 1.

n	Время выполнения программы	Максимальная абсолютная погрешность
3	0.175139	2.0791e-004
7	0.247844	7.7812e-007
10	0.333854	4.4541e-004
20	0.749239	2.4856e-011
25	1.22758	3.2517e-007
30	1.51237	3.9579e-007
50	4.32134	3.3877e-007
300	2785.37	5.0842e-007

ГЛАВА V

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГРАВИ- И МАГНИТОРАЗВЕДКИ, ПРЕДСТАВИМЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ В СВЕРТКАХ

В этой главе излагаются итерационные методы решения уравнений в свертках. В разд. 2—5 построены итерационные методы решения интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра общего вида. В разд. 7, 8 — результаты, приведенные в разд. 2—5, используются для построения итерационных методов решения обратных задач грави- и магниторазведки. В главе использованы результаты работ [23, 26, 27, 41, 43, 50, 51, 54, 56, 67, 68].

1. Обзор методов

Многие обратные задачи грави- и магниторазведки моделируются одномерными и многомерными интегральными уравнениями в свертках следующих видов:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)x(\tau)d\tau = f(t), \quad (1.1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2)x(\tau_1, \tau_2)d\tau_1d\tau_2 = f(t_1, t_2). \quad (1.2)$$

Ряд таких задач описан в разд. 4 главы I. Подробное изложение обратных задач грави- и магниторазведки, которые описываются уравнениями в свертках, приведено в книгах [6, 96, 103, 170, 213].

Обратные задачи грави- и магниторазведки являются некорректно поставленными [6, 170] и для своего решения требуют использования методов регуляризации.

Выделим несколько методов, разработанных для приближенного решения уравнения (1.1).

Прежде всего надо отметить методы, связанные с применением интегральных преобразований в совокупности с регуляризирующими множителями [213].

Большая группа методов основана на разложении функций x и f по различным полным системам функций [77, 78].

Отдельную большую группу составляют итерационные методы [12, 13, 56, 77, 78].

При решении обратных задач грави- и магниторазведки широко применяются методы регуляризации [124, 170, 213], методы квазирешений [112, 113], а также проекционные методы [79, 95].

2. Итерационные методы решения линейных уравнений

Ниже исследуются итерационные методы решения интегральных уравнений

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)x(\tau)d\tau = f(t), \quad (2.1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2)x(\tau_1, \tau_2)d\tau_1d\tau_2 = f(t_1, t_2). \quad (2.2)$$

Предлагаются и обосновываются итерационные схемы решения интегральных уравнений (2.1), (2.2) при весьма общих предположениях. В случае уравнения (2.1) достаточно, чтобы функция $G(\omega)$, являющаяся преобразованием Фурье функции g , при изменении ω в интервале $(-\infty, \infty)$ обращалась в нуль в конечном числе точек. Аналогичное условие налагается на функцию $G(\omega_1, \omega_2)$, являющуюся преобразованием Фурье функции $g(t_1, t_2)$.

Как отмечается в работах [77, 78, 237], основным недостатком известных итерационных методов решения уравнения (2.1) являются достаточно жесткие условия сходимости.

Ниже приведен ряд итерационных схем, являющихся обобщением известных и хорошо зарекомендовавших себя на практике итерационных методов. Предлагаемые методы подробно исследуем на примере уравнения (2.1), а затем укажем способ их распространения на уравнение (2.2).

Обоснование итерационных алгоритмов будем проводить в пространстве $L_2(-\infty, \infty)$.

Обозначим через $G(\omega)$, $X(\omega)$, $F(\omega)$ преобразование Фурье функций $g(t)$, $x(t)$, $f(t)$.

Будем говорить, что выполнено условие A , если в плоскости комплексной переменной z множество значений $G(\omega)$ расположено внутри угла с вершиной в начале координат и с раствором, меньшим π , причем при конечных значениях ω функция $G(\omega)$ не равна нулю. Тогда найдется такая константа γ (в общем случае комплексная), что множество значений $\gamma G(\omega)$ будет расположено внутри и на окружности с центром в точке $(+1, 0)$ с радиусом, равным 1.

Замечание. Отличие излагаемых в этом разделе методов от известных в литературе заключается в том, что в работах [77, 78, 219, 237], множитель γ предполагается только вещественным и его значение не связывается со спектром ядра оператора свертки. Кроме того, ниже итерационные процессы исследуются как во временной, так и в спектральной областях.

2.1. Итерационные методы решения одномерных линейных уравнений

Исследуем различные итерационные методы решения линейных интегральных уравнений в свертках вида (2.1).

Пусть спектры входного и выходного сигналов расположены в сегменте $[-T, T]$ и выполнено условие A . Тогда найдется константа γ такая, что $\max_{|\omega| \leq T} |1 - \gamma G(\omega)| = q < 1$.

Рассмотрим итерационный процесс

$$\begin{aligned} x_{n+1}(t) &= \\ &= x_n(t) - \gamma \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)x_n(\tau)d\tau + \gamma f(t), \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (2.3)$$

Теорема 2.1. Пусть спектры входного и выходного сигналов расположены на сегменте $[-T, T]$ и выполнено условие A . Тогда последовательность $x_n(t)$ сходится к решению $x^*(t)$ уравнения (2.1) со скоростью $\|x^*(t) - x_n(t)\| = O(q^n)$.

Пусть выполнено условие A и носители функций $X(\omega), F(\omega)$ определены в интервале $(-\infty, \infty)$.

Рассмотрим итерационный процесс

$$\begin{aligned} x_{n+1}(t) &= \\ &= \alpha_n x_n(t) + (1 - \alpha_n) \left[x_n(t) - \gamma \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)x_n(\tau)d\tau + \gamma f(t) \right], \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $0 < \varepsilon_0 \leq \alpha_n \leq 1 - \varepsilon_1 < 1$; γ — константа, определенная из условия $\sup_{-\infty < \omega < \infty} |1 - \gamma G(\omega)| \leq 1$.

Теорема 2.2. Пусть уравнение (2.1) имеет единственное решение $x^*(t)$ и выполнено условие A . Последовательность $x_n(t)$, определяемая итерационной схемой (2.4), сходится к $x^*(t)$.

Рассмотрим итерационный процесс

$$x_{n+1}^T(t) = x_n^T(t) - \gamma \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)x_n^T(\tau)d\tau + \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \psi_T(t - \tau)f(\tau)dt, \quad (2.5)$$

где Фурье-образ функции $\psi_T(t)$ имеет вид

$$\psi_T(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{при } |\omega| \leq T; \\ 0 & \text{при остальных значениях } \omega. \end{cases}$$

В итерационной схеме (2.5) вместо функции $\psi_T(\omega)$ можно взять и другие множители, в частности, используемые в работе [237].

Теорема 2.3. Пусть выполнено условие A и уравнение (2.1) имеет единственное решение $x^*(t)$. Тогда итерационный процесс (2.5) сходится при любом начальном приближении $x_0(t)$ со спектром, сосредоточенным в сегменте $[-T, T]$, и справедлива оценка

$$\|x^* - x_n^T\| \leq cq^n + \varepsilon + |\gamma| \left\{ \int_{-\infty}^{-T} |f(t)|^2 dt + \int_T^{\infty} |f(t)|^2 dt \right\}^{1/2} + \varepsilon \frac{g}{1 - q}, \quad (2.6)$$

где $q = \max_{|\omega| \leq T} |1 - \gamma G(\omega)|$, $\varepsilon = \left[\int_{-\infty}^{-T} |x^*(\omega)|^2 d\omega + \int_T^{\infty} |x^*(\omega)|^2 d\omega \right]^{1/2}$.

Пусть условие A не выполняется. Обозначим через T_0 и T_N достаточно большие по абсолютной величине числа, выбор которых определяется

условием $\varepsilon = \left[\int_{-\infty}^{-T_0} |X(\omega)|^2 d\omega + \int_{T_N}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \right]^{1/2}$.

Пусть $\Delta_k = [T_{k-1}, T_k]$, $k = 1, 2, \dots, N$, где $-T = T_0 < T_1 < \dots < T_N = T$ определяются таким образом, чтобы при изменении ω в сегменте Δ_k ($k = 1, 2, \dots, N$) приращение аргумента $G(\omega)$ было меньше π . Каждому сегменту Δ_k ($k = 1, 2, \dots, N$) поставим в соответствие такую константу γ_k , при которой значения функций $\gamma_k G(\omega)$ при $\omega \in \Delta_k$ лежат внутри единичного круга с центром в точке $(1, 0)$. Обозначим через $E_j(\omega)$ ($j = 1, 2, \dots, N$) характеристические функции сегментов Δ_j , $j = 1, 2, \dots, N$, а через $x_j^*(t)$, $x_{0j}(t)$, $f_j(t)$ прообразы функций $E_j(\omega)X^*(\omega)$, $E_j(\omega)X_0(\omega)$, $E_j(\omega)F(\omega)$.

Определим $x_{n+1}(t)$ из выражения

$$x_{n+1}(t) = \sum_{j=1}^N x_{n+1,j}(t). \quad (2.7)$$

Для нахождения решения $x_{n+1,j}(t)$ используем итерационный процесс

$$x_{n+1,j}(t) = x_{n,j}(t) - \gamma_j \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)x_{n,j}(\tau)d\tau + \gamma_j f_j(t), \quad (2.8)$$

$j = 1, \dots, N, n = 0, 1, \dots$

Теорема 2.4. Пусть уравнение (2.1) имеет решение $x^*(t)$.

Тогда последовательные приближения $x_{n+1}(t)$, определяемые формулами (2.7), (2.8), сходятся и справедлива оценка

$$\|x^*(t) - x_{n+1}(t)\| \leq q^n + \varepsilon(1 + \max |g(t)|)/(1 - q) +$$

$$+ |\gamma| \left\{ \int_{-\infty}^{T_0} |f(t)|^2 dt + \int_{T_N}^{\infty} |f(t)|^2 dt \right\}^{1/2},$$

где $\varepsilon = \left[\int_{-\infty}^{T_0} |X^*(\omega)|^2 d\omega + \int_{T_N}^{\infty} |X^*(\omega)|^2 d\omega \right]^{1/2}$, $q_i = \max_{\omega \in \Delta_i} |1 - \gamma_i G(\omega)|$,
 $q = \max_{1 \leq j \leq N} q_i$, $|\gamma| = \max_{1 \leq j \leq N} |\gamma_j|$.

Доказательство теоремы 2.1. Так как в пространстве $L_2(-\infty, \infty)$ $\|x(t)\| = \|X(\omega)\|$, то справедливость теоремы 2.1 следует из неравенства

$$\|x_{n+1}(t) - x_n(t)\| = \|x_n(t) - x_{n-1}(t) - \gamma \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)(x_n(\tau) - x_{n-1}(\tau))d\tau\| =$$

$$= \|X_n(\omega) - X_{n-1}(\omega) - \gamma G(\omega)(X_n(\omega) - X_{n-1}(\omega))\| \leq$$

$$\leq \max_{|\omega| \leq T} |1 - \gamma G(\omega)| \|x_n(t) - x_{n-1}(t)\| = q \|x_n(t) - x_{n-1}(t)\|$$

и теоремы Банаха о неподвижной точке (теорема 9.1 из главы I).

Доказательство теоремы 2.2. Справедливость теоремы следует из того, что норма оператора $Kx \equiv x(t) - \gamma \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)x(\tau)d\tau$ при выполнении условия A равна единице и из соответствующих утверждений теоремы 10.3 главы I.

Доказательство теоремы 2.3. Докажем сходимость итерационного процесса (2.5). Так как решение $x^*(t)$ уравнения (2.1) принадлежит пространству $L_2(-\infty, \infty)$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая константа T , при которой $\int_{-\infty}^{-T} |X^*(\omega)|^2 d\omega + \int_T^{\infty} |X^*(\omega)|^2 d\omega \leq \varepsilon^2$. Возьмем в качестве

начального приближения функцию $x_0(t)$ с финитным спектром, сосредоточенным на сегменте $[-T, T]$.

Для последовательных приближений $x_n^T(t)$ имеем

$$\begin{aligned} \|x_{n+1}^T(t) - x_n^T(t)\| &= \|X_n^T(\omega) - X_{n-1}^T(\omega) - \gamma G(\omega)(X_n^T(\omega) - X_{n-1}^T(\omega))\| \leq \\ &\leq \max_{|\omega| \leq T} |1 - \gamma G(\omega)| \|x_n^T(t) - x_{n-1}^T(t)\| = q(T) \|x_n^T(t) - x_{n-1}^T(t)\| \leq \\ &\leq q^n(T) \|x_1^T(t) - x_0^T(t)\|. \end{aligned}$$

Из условия A следует, что $q(T) < 1$, и по теореме Банаха о сжатых отображениях (теорема 9.1 из главы I) последовательность $x_n^T(t)$ сходится к решению x^{*T} уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)x(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_T(t - \tau)f(\tau)d\tau. \quad (2.9)$$

Оценим близость решений $x^*(t)$ и $x^{*T}(t)$ уравнений (2.1) и (2.9). Представим функцию $X^*(\omega)$ в виде $X_1^*(\omega) + X_2^*(\omega)$, где

$$X_1^*(\omega) = \begin{cases} X^*(\omega) & \text{при } |\omega| \leq T, \\ 0 & \text{при } |\omega| > T, \end{cases} \quad X_2^*(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } |\omega| \leq T, \\ X^*(\omega) & \text{при } |\omega| > T. \end{cases}$$

Обозначим через $x_1^*(t)$ и $x_2^*(t)$ прообразы функций $X_1^*(\omega)$ и $X_2^*(\omega)$. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} x_1^*(t) - x^{*T}(t) &= x_1^*(t) - x^{*T}(t) - \gamma \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)(x_1^*(\tau) - x^{*T}(\tau))d\tau + \gamma f(t) - \\ &\quad - \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \psi_T(t - \tau)f(\tau)d\tau - \gamma \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)x_2^*(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Переходя к нормам, имеем

$$\begin{aligned} &\|x_1^*(t) - x^{*T}(t)\| \leq \\ &\leq |\gamma| \left\{ \left\{ \int_{-\infty}^{-T} |f(t)|^2 dt + \int_T^{\infty} |f(t)|^2 dt \right\}^{1/2} + \|x_2^*(t)\| \max_t |g(t)| \right\} \times \\ &\quad \times \frac{1}{1 - \max_{\omega} |1 - \gamma G(\omega)|}. \end{aligned}$$

Так как $\|x^*(t) - x^{*T}(t)\| \leq \|x_1^*(t) - x^{*T}(t)\| + \|x_2^*(t)\|$, $\|x_2^*(t)\| \leq \varepsilon$, то получаем оценку (2.6).

Доказательство теоремы 2.4. Докажем сходимость итерационного процесса (2.8). Так как решение $x^*(t)$ уравнения (2.1) принадлежит пространству $L_2(-\infty, \infty)$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая константа T , при которой $\int_{-\infty}^{-T} |X^*(\omega)|^2 d\omega + \int_T^{\infty} |X^*(\omega)|^2 d\omega < \varepsilon^2$.

Докажем сходимость итерационного процесса (2.8) при произвольно фиксированном j , $1 \leq j \leq N$.

Возьмем в качестве начального приближения функцию $x_{0j}(t)$ с финитным спектром, сосредоточенным на сегменте Δ_j .

Из рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы 2.1, следует, что $x_{n+1,j}(t) \rightarrow x_j^*(t)$. Таким образом, последовательность $x_{n+1}(t)$, определяемая выражением (2.7), сходится к функции $x^{*T}(t)$. Оценка погрешности итерационной схемы (2.7)–(2.8) может быть получена повторением выкладок, проведенных при доказательстве теоремы 2.3.

2.2. Итерационные методы решения многомерных линейных уравнений

Рассмотрим многомерное уравнение (2.2). Все описанные выше итерационные схемы допускают распространение и на многомерный случай. Поэтому ограничимся рассмотрением лишь одной итерационной схемы.

Обозначим через $X(\omega_1, \omega_2)$, $G(\omega_1, \omega_2)$, $F(\omega_1, \omega_2)$ преобразование Фурье функций $x(t_1, t_2)$, $g(t_1, t_2)$, $f(t_1, t_2)$.

Аналогом условия A в многомерном случае является следующее: значения функции $G(\omega_1, \omega_2)$ при изменении аргументов ω_1, ω_2 в интервале $-\infty < \omega_1, \omega_2 < \infty$ расположены внутри угла раствора, меньшего π , с вершиной в начале координат, и функция $G(\omega_1, \omega_2) \neq 0$ при конечных значениях ω_1 и ω_2 .

Пусть функции $X(\omega_1, \omega_2)$ и $F(\omega_1, \omega_2)$ финитны и их носители расположены в квадрате $[-T, T; -T, T]$. Из условия A следует, что существует такое комплексное число γ , что $\max_{|\omega_i| \leq T, i=1,2} |1 - \gamma G(\omega_1, \omega_2)| = q < 1$.

Рассмотрим итерационный процесс

$$x_{n+1}(t_1, t_2) = x_n(t_1, t_2) - \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2) x_n(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \gamma f(t_1, t_2),$$

$n = 0, 1, \dots$

Теорема 2.5. Пусть уравнение (2.2) имеет единственное решение $x^*(t_1, t_2)$, выполнено условие A , функции $X(\omega_1, \omega_2)$ и $F(\omega_1, \omega_2)$ финитны.

Последовательные приближения $x_{n+1}(t_1, t_2)$ сходятся к функции $x^*(t_1, t_2)$ со скоростью $\|x^*(t_1, t_2) - x_{n+1}(t_1, t_2)\| = O(q^{n+1})$.

Доказательство теоремы 2.5 подобно доказательству теоремы 2.1 и поэтому опускается.

Предположим, что функция $G(\omega_1, \omega_2)$ обращается в нуль в конечном числе точек. Разобьем плоскость (ω_1, ω_2) на конечное число прямоугольников $\Delta_{kl} = [v_k, v_{k+1}; w_l, w_{l+1}]$, $k = 1, 2, \dots, N_1$, $l = 1, 2, \dots, N_2$, таким образом, чтобы при изменении аргументов (ω_1, ω_2) в прямоугольнике Δ_{kl} значения $G(\omega_1, \omega_2)$ были расположены внутри (и, возможно, в вершине) угла раствора, меньшего π , с вершиной в начале координат плоскости комплексного переменного. Заметим, что v_1, w_1 и v_N, w_N могут принимать значения $-\infty$ и ∞ соответственно.

Каждому прямоугольнику Δ_{kl} ставится в соответствие такое комплексное число γ_{kl} , при котором

$$\sup_{\omega_1, \omega_2 \in \Delta_{kl}} |1 - \gamma_{kl} G(\omega_1, \omega_2)| \leq q_{kl} \leq 1, \quad k = 1, 2, \dots, N_1, \quad l = 1, 2, \dots, N_2.$$

Рассмотрим итерационный процесс

$$x_{n+1,kl}(t_1, t_2) = \alpha_n x_{n,kl}(t_1, t_2) + (1 - \alpha_n) \left(x_{n,kl}(t_1, t_2) - \gamma_{kl} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2) x_{n,kl}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \gamma_{kl} f_{kl}(t_1, t_2) \right), \quad (2.10)$$

$n = 0, 1, \dots$; $k = 1, 2, \dots, N_1$; $l = 1, 2, \dots, N_2$,

$$x_{N_1 N_2}(t_1, t_2) = \sum_{k=0}^{N_1} \sum_{l=0}^{N_2} x_{kl}^*(t_1, t_2). \quad (2.11)$$

Теорема 2.6. Пусть уравнение (2.2) имеет единственное решение $x^*(t_1, t_2)$. Пусть функция $G(\omega_1, \omega_2)$ обращается в нуль в конечном числе точек. Тогда итерационный процесс (2.10), (2.11) сходится к решению $x^*(t_1, t_2)$ в метрике пространства $L_2((-\infty, \infty)^2)$.

Доказательство этого утверждения проводится по аналогии с доказательством теоремы 2.4.

2.3. Итерационный метод с локальным сдвигом

Вернемся к уравнению (2.1).

Рассмотрим случай, когда множество значений $G(\omega)$ расположено внутри и на сторонах угла раствора, меньшего π , с вершиной в начале

координат. Для простоты изложения будем считать, что функция $G(\omega)$ обращается в нуль только в одной конечной точке ω (скажем, в точке $\omega = 0$). В качестве примера можно указать на задачу гравиметрии, исследованную в монографии [170, с. 125-126]. Эта задача описывается уравнением (2.1) с ядром

$$g(t - \tau) = \frac{1}{\pi} \frac{a^2 - (t - \tau)^2}{[(t - \tau)^2 + a^2]^2},$$

имеющим преобразование Фурье $G(\omega) = |\omega|e^{-|\omega|a}$.

Обозначим через $\delta_n(\omega)$ одну из дельтообразных положительных последовательностей, сходящуюся к дельта-функции $\delta(\omega)$; через $\Delta_n(t)$ — обратное преобразование Фурье последовательности $\delta_n(\omega)$.

Рассмотрим итерационный процесс

$$x_{n+1}(t) = \alpha_n x_n(t) + (1 - \alpha_n) \left(x_n + \beta \int_{-\infty}^{\infty} \Delta_m(t - \tau) x_n(\tau) d\tau - \right. \\ \left. - \gamma \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau) x_n(\tau) d\tau + \gamma f(t) \right), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.12)$$

где β, m — параметры регуляризации; m — целое число; константа γ выбрана так, что $\sup_{-\infty < \omega < \infty} |1 - \beta \delta_m(\omega) - \gamma G(\omega)| \leq 1$; $0 < \alpha_* \leq \alpha_n \leq \alpha^* < 1$.

Повторяя рассуждения, приведенные в разд. 2.1, убеждаемся в том, что итерационный процесс (2.12) сходится. Обозначив через x^* и x^{**} соответственно решение уравнения (2.1) и функцию, к которой сходятся итерации (2.12), для любого ε ($\varepsilon > 0$) имеем $\|x^* - x^{**}\| = \varepsilon + A(\varepsilon)\beta$, где $A(\varepsilon)$ — константа, зависящая от ε . Нетрудно видеть, что $A(\varepsilon) = 1/(1 - q(\varepsilon))$, где $q(\varepsilon) = \sup_{-T \leq \omega \leq T} \|1 - \beta \delta_m(\omega) - \gamma G(\omega)\|_{C[-T, T]}$, а число T выбирается из требования, чтобы

$$\left[\int_{-\infty}^{-T} (x^*(t))^2 dt \right]^{1/2} + \left[\int_{-\infty}^{-T} (x^{**}(t))^2 dt \right]^{1/2} + \\ + \left[\int_T^{\infty} |x^*(t)|^2 dt \right]^{1/2} + \left[\int_T^{\infty} |x^{**}(t)|^2 dt \right]^{1/2} < \varepsilon.$$

Так как $x^*(t) \in L_2(-\infty, \infty)$ и $x^{**}(t) \in L_2(-\infty, \infty)$, то такое T всегда существует.

3. Итерационные методы решения линейных систем разностных уравнений

Рассмотрим бесконечную систему уравнений

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{l-k}x_k = f_l, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2. \quad (3.1)$$

Системы вида (3.1) находят применение в геофизике. В частности, в статье В. Н. Страхова и Т. А. Гванцеладзе [199] обратная задача гравиметрии сведена к бесконечной системе линейных уравнений (3.1). Там же выделены классы единственности и устойчивости решения этой задачи.

Покажем, что алгоритмы, предложенные в разд. 2 этой главы, применимы и к системе уравнений (3.1).

Обозначим через $A(\Theta)$, $X(\Theta)$, $F(\Theta)$ дискретные преобразования Фурье последовательностей a_k , x_k , f_k соответственно, где $k = (-\infty, \infty)$. Напомним [87], что дискретное преобразование последовательности a_k определяется выражением

$$A(\Theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\Theta}, \quad 0 \leq \Theta \leq 2\pi.$$

Обратно, коэффициенты a_k функции $A(\Theta)$ выражаются по формуле

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A(\theta) e^{-ik\theta} d\theta,$$

$k = \dots, -1, 0, 1, \dots$

Пусть выполнено условие A : значения функции $A(\Theta)$ при $0 \leq \Theta \leq 2\pi$ расположены внутри угла раствора, меньшего π , с вершиной в начале координат. Тогда существует такая комплексная константа γ , при которой множество значений функции $\gamma A(\Theta)$ расположено внутри окружности с радиусом, равным 1, и с центром в точке $(1, 0)$ и, возможно, касается самой окружности в точке $(0, 0)$.

Применим к системе уравнений (3.1) итерационный процесс

$$x_l^{m+1} = x_l^m - \gamma \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{l-k}x_k^m - f_l \right), \quad (3.2)$$

где $l = (\dots, -n, \dots, n, \dots)$, $m = 0, 1, \dots$

Сходимость процесса (3.2) будем исследовать в пространстве l_2 с нормой $\|x\| = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_k|^2 \right]^{1/2}$. Обозначим через $L_2[0, 2\pi]$ множество функций $x(e^{is})$, $s \in [0, 2\pi]$, суммируемых с квадратом и с нормой $\|x\|_{L_2[0, 2\pi]} = \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(e^{is}) \overline{x(e^{is})} ds \right]^{1/2}$.

Применим к итерационному процессу (3.2) дискретное преобразование Фурье. В результате приходим к уравнению

$$X^{n+1}(\Theta) = X^n(\Theta) - \gamma (A(\Theta)X^n(\Theta) - F(\Theta)).$$

Переходя к нормам, имеем

$$\begin{aligned} \|x^{n+1} - x^n\| &= \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} |x_l^{n+1} - x_l^n|^2 \right]^{1/2} = \|X^{n+1}(\Theta) - X^n(\Theta)\| = \\ &= \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[(x^n - x^{n-1}) - \gamma \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{l-k} (x_k^n - x_k^{n-1}) \right]^2 \right]^{1/2} = \\ &= \|(X^n(\Theta) - X^{n-1}(\Theta))(1 - \gamma A(\Theta))\| \leq \\ &\leq \max_{0 \leq \Theta \leq 2\pi} |1 - \gamma A(\Theta)| \|X^n(\Theta) - X^{n-1}(\Theta)\| = \\ &= \max_{0 \leq \Theta \leq 2\pi} |1 - \gamma A(\Theta)| \|x^n - x^{n-1}\|. \end{aligned}$$

Если $\max_{\Theta} |1 - \gamma A(\Theta)| = q < 1$, то по теореме Банаха (теорема 9.1 главы I) итерационный процесс (3.2) сходится.

В случае, если $\max_{\Theta} |1 - \gamma A(\Theta)| = 1$, то систему уравнений (3.2) можно решать методом итерации по схеме

$$x_l^{n+1} = \eta_n x_l^n + (1 - \eta_n) \left(x_l^n - \gamma \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{l-k} x_k^n - f_l \right) \right),$$

$l = \dots, -n, \dots, n, \dots$, где $0 < \alpha < \eta_n < \beta < 1$.

Сходимость этой схемы доказывается так же, как и в континуальном случае.

Рассмотрим случай, когда условие A не выполнено, однако функция $A(\Theta)$ обращается в нуль в конечном числе точек. Разобьем сегмент $[0, 2\pi]$ на части $\Delta_k = [a_k, a_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots, v-1$, $a_0 = 0$, $a_v = 2\pi$, таким образом, чтобы при изменении Θ на сегменте Δ_k значения $A(\Theta)$ ($\Theta \in \Delta_k$) были бы расположены внутри угла раствора, меньшего π , с вершиной в

начале координат. Тогда с каждым сегментом Δ_k можно связать константу γ_k таким образом, что множество значений $\gamma_k A(\Theta)$ ($\Theta \in \Delta_k$) будет расположено внутри единичной окружности с центром в точке $(1,0)$ и, возможно, коснется самой окружности в точке $(0,0)$. Разложим вектор $\bar{f} = (\dots, f_{-n}, \dots, f_n, \dots)$ на сумму таких векторов \bar{f}^k ($k = 0, 1, \dots, v-1$), при которых преобразование Фурье $\bar{F}^k(\Theta)$ вектора \bar{f}^k равно нулю на множестве точек $[0, 2\pi] \setminus \Delta_k$. Для осуществления этого разложения обозначим через $E_k(\Theta)$ характеристическую функцию множества Δ_k ($k = 0, 1, \dots, v-1$). Тогда вектор \bar{f}^k определяется составляющими

$$f_n^k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_{n-j} a_j^k,$$

где $\{a_j^k\}_{j=-\infty}^{\infty}$ коэффициенты Фурье функции $E_k(\Theta)$.

Аналогичным образом начальный вектор \bar{x}^0 разложим на сумму векторов $\bar{x}^{k,0}$, $k = 0, 1, \dots, v-1$. Для решения уравнения (3.1) воспользуемся итерационным процессом

$$x_l^{k,m+1} = x_l^{k,m} - \gamma_k \left(\sum_{v=-\infty}^{\infty} a_{l-v} x_v^{k,m} - f_l^k \right), \quad (3.3)$$

$$l = \dots, -n, \dots, n, \dots, \quad k = 0, 1, \dots, v-1, \quad m = 0, 1, \dots$$

По аналогии с доказательством, приведенным в разд. 2 этой главы, можно показать, что итерации (3.3) сходятся и вектор $x_l^m = \sum_{k=0}^{v-1} x_l^{k,m}$ сходится к решению уравнения (3.1) в метрике пространства l_2 .

4. Методы регуляризации решений линейных уравнений Вольтерра в свертках

Рассмотрим уравнение

$$\int_0^t g(t-\tau)x(\tau)d\tau = f(t). \quad (4.1)$$

Применяя к уравнению (4.1) преобразование Лапласа, приходим к уравнению

$$G(p)X(p) = F(p), \quad (4.2)$$

где $G(p)$, $X(p)$, $F(p)$ — изображения функций $g(t)$, $x(t)$, $f(t)$ соответственно.

Естественно выразить $X(p)$ из (4.2): $X(p) = F(p)/G(p)$ и, применив обратное преобразование Лапласа, вычислить $x(t)$ по формуле

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{F(p)}{G(p)} e^{tp} dp.$$

Однако из-за несогласованного стремления к нулю функций $F(p)$ и $G(p)$ при $p \rightarrow \infty$ интеграл может не существовать.

В связи с этим необходимо прибегнуть к методам регуляризации. Общие методы построения регуляризирующих множителей для уравнений в свертках различного вида предложены в монографии [213]. Отмечено, что в зависимости от особенности функции $F(p)/G(p)$ на бесконечности приходится прибегать к различным регуляризирующим множителям $\varphi(p, \alpha)$.

На примере уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)x(\tau)d\tau = f(t)$$

в монографии [213] изложено применение регуляризирующих множителей.

Применяя к последнему уравнению преобразование Фурье, имеем $X(\omega) = F(\omega)/G(\omega)$.

Регуляризованное решение $R_\varphi(x, \alpha)$ ищется по формуле

$$R_\varphi(x, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\omega, \alpha)}{G(\omega)} F(\omega) e^{t\omega} d\omega,$$

где функция $\varphi(\omega, \alpha)$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $\varphi(\omega, \alpha)$ определена в области ($\alpha \geq 0, \infty < \omega < \infty$);
- 2) $0 \leq \varphi(\omega, \alpha) \leq 1$ для всех значений $\alpha \geq 0$ и $-\infty < \omega < \infty$;
- 3) $\varphi(\omega, 0) \equiv 1$;
- 4) для всякого $\alpha > 0$ $\varphi(\omega, \alpha)$ — четная по ω и $\varphi(\omega, \alpha) \in L_2(-\infty, \infty)$;
- 5) для всякого $\alpha > 0$ $\varphi(\omega, \alpha) \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow \pm\infty$;
- 6) при $\alpha \rightarrow 0$ $\varphi(\omega, \alpha) \rightarrow 1$ не убывая, причем на всяком сегменте $-c \leq \omega \leq c$ сходимость равномерная;
- 7) для всякого $\alpha > 0$ $\frac{\varphi(\omega, \alpha)}{G(\omega)} \in L_2(-\infty, \infty)$;
- 8) для всякого $\omega \neq 0$ $\varphi(\omega, \alpha) \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow \infty$ и эта сходимость равномерная на всяком сегменте $[\omega_1, \omega_2], 0 < \omega_1 < \omega_2$.

В монографии [213] показано, что вычисление $R_\varphi(x, \alpha)$ устойчиво и оператор $R_\varphi(x, \alpha)$ является регуляризирующим для уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)x(\tau)d\tau = f(t)$$

в предположении, что $f(t) \in L_2$, $x(t) \in L_1$, а отклонение $x(t)$ от $R_\varphi(x, \alpha)$ оценивается в пространстве C .

Рассмотрим еще один метод регуляризации уравнения (4.1). Применяя преобразование Лапласа к уравнению (4.1), будем иметь $G(p)X(p) = F(p)$. Тогда $X(p) = \frac{F(p)}{G(p)}$.

Функция $F(p)/G(p)$ имеет различную асимптотику на бесконечности. Рассмотрим несколько отдельных случаев.

Случай 1. Положим, что при $p \rightarrow \infty \frac{F(p)}{G(p)} = O(p^n)$. Тогда уравнение $G(p)X(p) = F(p)$ может быть представлено в виде $p^n G(p)[X(p)/p^n] = F(p)$. Обозначим $X(p)/p^n$ через $X_1(p)$, причем

$$X_1(p) = F(p)/(G(p)p^n). \quad (4.3)$$

Тогда оригинал $x_1(t)$ можно вычислить по обратному преобразованию Лапласа:

$$x_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} [F(p)/(p^n G(p))] dp.$$

С другой стороны, так как $X_1(p) = X(p)/p^n$, то $X(p) = X_1(p)p^n$ и, следовательно, $x(t) = x_1^{(n)}(t)$, причем $x_1(0) = x_1'(0) = \dots = x_1^{(n-1)}(0) = 0$.

Таким образом, для восстановления $x(t)$ необходимо вычислить производную n порядка. Вычисление производных, в свою очередь, является некорректной задачей, подробно исследованной в [213].

В ряде случаев функцию $x(t)$ можно вычислить в аналитической форме.

Из равенства $X_1(p) = \frac{1}{p^n} X(p)$ следует, что

$$x_1(t) = \int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^{t_{n-1}} x(\tau) d\tau dt_{n-1} \dots dt_1.$$

Подставим это выражение в (4.3):

$$\int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^{t_{n-1}} x(\tau) d\tau dt_{n-1} \dots dt_1 = Z^{-1} \left(\frac{F(p)}{G(p)p^n} \right).$$

Это равенство эквивалентно следующему:

$$x(t) = \frac{d^n(Z^{-1}(F(p)/G(p)p^n))}{dt^n}. \quad (4.4)$$

Из теоремы о свертке следует, что

$$\begin{aligned} Z^{-1}\left(\frac{F(p)}{G(p)p^n}\right) &= Z^{-1}\left(F(p)\left(\frac{1}{G(p)p^n}\right)\right) = \\ &= Z^{-1}\left(Z\left(\int_0^t f(t-\tau)Z^{-1}\left(\frac{1}{G(p)p^n}\right)dt\right)\right) = \\ &= \int_0^t f(t-\tau)Z^{-1}\left(\frac{1}{G(p)p^n}\right)d\tau. \end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение в (4.4), окончательно имеем

$$x(t) = \frac{d^n\left[\int_0^t f(t-\tau)Z^{-1}\left(\frac{1}{G(p)p^n}\right)d\tau\right]}{dt^n}. \quad (4.5)$$

Этот метод при $n = 1$ был использован в [101, с. 155-156] при решении интегрального уравнения Абеля:

$$\int_0^t (t-\tau)^{-\alpha}x(\tau)d\tau = f(t), \quad (4.6)$$

которое встречается во многих задачах физики. Известно, что изображением функции $t^{-\alpha}$ является функция $\Gamma(1-\alpha)/p^{1-\alpha}$, где $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция.

Применив к уравнению (4.6) преобразование Лапласа, имеем $p^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)X(p) = F(p)$.

Введем обозначение $X_1(p) = X(p)/p$. Тогда $p^\alpha\Gamma(1-\alpha)X_1(p) = F(p)$ и, следовательно, $X_1(p) = F(p)/\Gamma(1-\alpha)p^\alpha$. Так как оригиналом, соответствующим изображению $p^{-\alpha}$, является функция $t^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$, то изображению $X_1(p)$ соответствует оригинал

$$x_1(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 \tau^{\alpha-1}f(t-\tau)d\tau. \quad (4.7)$$

Известна [101, с. 156] формула $\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi}$. Следовательно,

$$x_1(t) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^t \tau^{\alpha-1} f(t-\tau) d\tau. \quad (4.8)$$

Отсюда

$$x(t) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \tau^{\alpha-1} f(t-\tau) d\tau. \quad (4.9)$$

Если функция $f(t)$ дифференцируема и при $t = 0$ непрерывна, то

$$x(t) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \left[t^{\alpha-1} f(0) + \int_0^t \tau^{\alpha-1} f'(t-\tau) d\tau \right]. \quad (4.10)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что функция $x(t)$ является решением уравнения (4.6).

При решении уравнений свертки, встречающихся на практике, как правило, свободный член задан с погрешностью. Из формулы (4.5) следует, что для получения решения уравнения (4.1) необходимо провести n -кратное дифференцирование. Если функция $f(t)$ задана с погрешностью $f(t) = f^*(t) + \varepsilon(t)$, имеющей случайный характер, то операция дифференцирования является некорректной и для ее реализации необходимо применение методов регуляризации [213].

Ряд алгоритмов численного дифференцирования приведен в приложении F.

Случай 2. Применив к уравнению (4.1) преобразование Лапласа, получаем алгебраическое уравнение (4.2). Запишем его в виде $G_2(p)X_2(p) = F(p)$, где $G_2(p) = e^{\alpha p}G(p)$, $X_2(p) = e^{-\alpha p}X(p)$. Тогда $X_2(p) = \frac{F(p)}{G(p)e^{\alpha p}}$.

Обозначив через $x_2(t)$ оригинал, соответствующий изображению $X_2(p)$, имеем $x_2(t) = Z^{-1}(F(p)/(G(p)e^{\alpha p}))$.

По теореме смещения

$$x(t-\alpha)u(t-\alpha) = x_2(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{F(p)e^{pt}}{G(p)e^{\alpha p}} dp. \quad (4.11)$$

Формула (4.11) дает решение при $x > \alpha$. Для того чтобы восстановить решение на сегменте $[0, \alpha]$, можно воспользоваться методом продолжения аналитических функций, основанным на применении полиномов Бернштейна. Для этого, построив полином Бернштейна на сегменте

$[\alpha_1, \alpha_1 + 1]$, $\alpha_1 > \alpha$, по узлам $t_k = \alpha_1 + k/N, k = 0, 1, \dots, N$, экстраполируем его на сегмент $[0, \alpha]$. Более подробно подобные построения описаны в разд. 6 главы IV.

Оценим погрешность, которая возникает от неточности в задании свободного члена уравнения (4.1). Пусть $f(t) = f^*(t) + \varepsilon(t)$, где $f^*(t)$ — точное задание правой части, а $\varepsilon(t)$ — погрешность задания, причем $\max_{0 \leq t \leq \infty} |\varepsilon(t)| < \varepsilon$.

Кроме того, будем считать, что уравнение (4.1) при точном задании правой части $f^*(t)$ имеет точное решение $x^*(t)$, которое определяется по формуле (4.11).

Тогда погрешность правой части уравнения (4.1), определяемая функцией $\varepsilon(t)$, дает погрешность решения $x_\varepsilon(t)$, равную

$$x_\varepsilon(t - \alpha)u(t - \alpha) = \int_0^t \varepsilon(t - \tau)Z^{-1} \left(\frac{1}{G(p)e^{\alpha p}} \right) dt.$$

Предполагая, что функция $Z^{-1} \left(\frac{1}{G(p)e^{\alpha p}} \right)$ абсолютно интегрируема, убеждаемся в справедливости оценки $x_\varepsilon(t) = O(\varepsilon)$. Таким образом, погрешность в задании правой части, не превышающая по абсолютной величине ε , вызывает погрешность в решении $O(\varepsilon)$.

Рассмотрим еще один метод решения уравнения (4.1). Пусть известно изображение Лапласа $X(p) = F(p)/G(p)$ решения $x(t)$ уравнения (4.1). Будем считать, что функция $X(p)$ аналитическая при $\operatorname{Re} p > c$. Функция $x^*(t)$ может быть найдена из решения уравнения

$$\int_0^\infty x(t)e^{-pt} dt = X(p). \quad (4.12)$$

Для его решения воспользуемся методом коллокации. Приближенное решение уравнения будем искать в виде полинома

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k e^{-kt},$$

коэффициенты α_k которого определяются из системы алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{k + v} = X(v), \quad v = C_0, C_0 + 1, \dots, C_0 + n - 1, \quad (4.13)$$

где $C_0 \geq C$ — целое число.

Определитель системы (4.13) имеет вид ([152], пример 416):

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{1+C_0} & \frac{1}{2+C_0} & \cdots & \frac{1}{n+C_0} \\ \frac{1}{2+C_0} & \frac{1}{3+C_0} & \cdots & \frac{1}{n+1+C_0} \\ \frac{1}{n+C_0} & \frac{1}{n+1+C_0} & \cdots & \frac{1}{2n-1+C_0} \end{vmatrix} = \frac{\prod_{1 \leq i < k \leq n} (i-k)^2}{\prod_{i,k=1}^n (C_0 + i - 1 + k)} \neq 0.$$

Произведение в знаменателе берется по всем i и k , принимающим независимо друг от друга все значения от 1 до n .

В случае, когда $C_0 = 0$, определитель Δ равен ([152], пример 418)

$$\Delta = \frac{[1!2! \dots (n-1)!]^3}{n!(n+1)! \dots (2n-1)!} \neq 0.$$

Отсюда следует однозначная разрешимость системы (4.13).

Замечание. В ряде случаев предпочтительным оказывается метод, при котором в качестве точек коллокации выбираются точки, расположенные в некотором сегменте $\Delta = [a, b]$, $a > C_0$. Это связано с тем, что отпадает необходимость в анализе значений функции $X(p)$ при достаточно больших значениях p .

5. Итерационные методы решения интегральных уравнений Вольтерра

5.1. Постановка задачи

Интегральные уравнения Вольтерра исторически являются одним из первых видов интегральных уравнений, ставших известными математикам. Несмотря на более чем столетнюю историю, теория интегральных уравнений Вольтерра продолжает активно развиваться. Это связано с несколькими обстоятельствами. Во-первых, постоянно возникают все новые области физики, экономики, экологии, в которых основные процессы моделируются интегральными уравнениями Вольтерра. Это приводит к возникновению новых классов интегральных уравнений типа Вольтерра. Отметим, что в последние годы уравнения Вольтерра начали широко применяться в сейсмологии [163]. Во-вторых, продолжается исследование с различных позиций классических уравнений Вольтерра.

Представить подробный обзор публикаций, посвященных интегральным уравнениям Вольтерра, не представляется возможным, так как по этой тематике ежегодно публикуется несколько сотен статей. Отметим только, что подробное изложение классических результатов, относящихся к уравнениям Вольтерра, и обширная библиография приведены в работах [81, 87, 114, 164, 224, 240, 247, 248].

В данном разделе предлагается и обосновывается новый итерационный метод решения интегральных уравнений Вольтерра первого и второго родов.

5.2. Одномерные интегральные уравнения Вольтерра

Рассмотрим интегральные уравнения

$$\int_0^t h(t-\tau)x(\tau)d\tau = f(t); \quad (5.1)$$

$$x(t) + \int_0^t h(t-\tau)x(\tau)d\tau = f(t). \quad (5.2)$$

Стандартные методы операционного исчисления заключаются в том, что к уравнениям (5.1) и (5.2) применяется преобразование Лапласа, которое приводит эти уравнения к алгебраическим уравнениям

$$H(p)X(p) = F(p); \quad (5.3)$$

$$X(p) + H(p)X(p) = F(p), \quad (5.4)$$

где $X(p)$, $H(p)$, $F(p)$ — преобразования Лапласа функций $x(t)$, $h(t)$, $f(t)$.

Оператор Лапласа будем обозначать буквой Z : $Z(h) = H(p)$.

Решения уравнений (5.3), (5.4) имеют вид

$$X(p) = F(p)/H(p); \quad (5.5)$$

$$X(p) = F(p)/(1 + H(p)). \quad (5.6)$$

Применяя к выражениям (5.5), (5.6) обратное преобразование Лапласа, формально можно получить решения соответствующих уравнений. Однако из-за возможности обращения функций $H(p)$ или $(1 + H(p))$ в нуль и расходимости интегралов обратного преобразования Лапласа получение достаточно точных и устойчивых решений во многих случаях весьма проблематично.

Одним из способов решения уравнений (5.5) и (5.6) являются методы регуляризации, подробное изложение которых содержится в [213]. В предыдущем разделе также изложены методы регуляризации, основанные на преобразовании Лапласа.

Сложность решения интегральных уравнений Вольтерра заключается в том, что некорректными являются не только задачи решения уравнений, полученных в результате преобразований, но и сама задача решения уравнения Вольтерра первого рода во многих случаях является

некорректной. Для ее решения предложены многочисленные методы регуляризации. Кроме общих методов регуляризации [213, 124, 112] для решения интегральных уравнений Вольтерра разработаны методы, учитывающие специфику интегрального оператора Вольтерра: метод регуляризации Тихонова, метод регуляризации Денисова, методы Апарцина, Сергеева, Магницкого. Подробное изложение этих методов содержится в [81].

Несмотря на большое количество различных методов, представляет интерес развитие приближенных методов решения интегральных уравнений видов (5.1) и (5.2), основанных на других специфических свойствах операторов Вольтерра. В первую очередь представляет интерес построение итерационных методов для решения интегральных уравнений Вольтерра первого рода, так как итерационные методы устойчивы и обладают фильтрующими свойствами по отношению к возмущениям. Несмотря на то, что решение интегральных уравнений Вольтерра второго рода является корректной задачей, предлагаемые ниже итерационные методы представляют интерес и для этого класса уравнений.

Прежде чем перейти к построению итерационных алгоритмов, оценим нормы прямого и обратного преобразований Лапласа. Обозначим через c вещественное число, определяющее полуплоскость сходимости функции $F(p)$. Ниже через c будем обозначать число, определяющее полуплоскости сходимости всех используемых функций, и будем рассматривать функции $F(p)$, $H(p)$, $X(p)$ при $p = u + iv$, $u = \text{const} > c$, $-\infty < v < \infty$.

Норму функции $F(p)$ определим формулой

$$\|F(p)\| = \left[\int_{-\infty}^{\infty} |F(u + iv)|^2 dv \right]^{1/2}. \quad (5.7)$$

Выведем формулу, аналогичную формуле Парсеваля для преобразования Фурье. Очевидно,

$$\begin{aligned} \|F(p)\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |F(u + iv)|^2 dv = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} e^{-ut-ivt} f(t) dt \right|^2 dv = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} e^{-ivt} (e^{-ut} f(t)) dt \right|^2 dv = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ivt} (e^{-ut} f(t))_+ dt \right|^2 dv = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |V((e^{-ut}f(t))_+)|^2 dv = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |(e^{-ut}f(t))_+|^2 dt = \\
&= 2\pi \int_0^{\infty} |e^{-ut}f(t)|^2 dt = 2\pi \|f_u^+(t)\|^2. \tag{5.8}
\end{aligned}$$

Здесь

$$f_u^+(t) = (e^{-ut}f(t))_+ = \begin{cases} e^{-ut}f(t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

$V(f)$ – преобразование Фурье функции $f(t)$, определяемое формулой

$$V(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt, \|(e^{-ut}f(t))_+\| = \left[\int_0^{\infty} |e^{-ut}f(t)|^2 dt \right]^{1/2}. \tag{5.9}$$

Рассмотрим уравнение (5.3). Пусть действительное число c определяет полуплоскость сходимости. Положим $p = u + iv, u = \text{const} > c$. Предположим, что при изменении v в пределах $-\infty < v < \infty$ значения функции $H(p)$ лежат внутри угла раствора, меньшего π , с вершиной в начале координат плоскости комплексной переменной. Тогда существует такое комплексное число γ , при котором значения функции $\gamma H(p)$ при изменении v в пределах от $-\infty$ до ∞ лежат внутри окружности радиуса 1 с центром в точке $(1,0)$ плоскости комплексной переменной и, возможно, в точке $(0,0)$.

В случае, если значения функции $\gamma H(p)$, $p = u + iv, u = \text{const}$, лежат внутри единичной окружности с центром в точке $(1,0)$ и радиусом 1 (это условие назовем условием A), рассмотрим итерационный процесс

$$x_{n+1}(t) = x_n(t) - \gamma \left(\int_0^t h(t-\tau)x_n(\tau)d\tau - f(t) \right), \tag{5.10}$$

$n = 0, 1, \dots$

Докажем сходимость этого итерационного процесса. Умножим уравнение (5.10) на e^{-ut} . В результате имеем

$$\begin{aligned}
&e^{-ut}x_{n+1}(t) = \\
&= e^{-ut}x_n(t) - \gamma \left(\int_0^t e^{-u(t-\tau)}h(t-\tau)e^{-\tau u}x_n(\tau)d\tau - e^{-ut}f(t) \right). \tag{5.11}
\end{aligned}$$

Преобразуем это уравнение следующим образом:

$$e^{-ut}(x_{n+1}(t) - x_n(t)) = e^{-ut} \left(x_n(t) - x_{n-1}(t) - \gamma \left(\int_0^t h(t-\tau)(x_n(\tau) - x_{n-1}(\tau))d\tau \right) \right).$$

Переходя к нормам, имеем

$$\begin{aligned} \|e^{-ut}(x_{n+1}(t) - x_n(t))\| &= \|e^{-ut} \left(x_n(t) - x_{n-1}(t) - \right. \\ &\left. - \gamma \left(\int_0^t h(t-\tau)(x_n(\tau) - x_{n-1}(\tau))d\tau \right) \right)\| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|Z[(x_n(t) - x_{n-1}(t)) - \\ &\quad - \gamma \left(\int_0^t h(t-\tau)(x_n(\tau) - x_{n-1}(\tau))d\tau \right)]\| = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|(1 - \gamma H(v))(X_n(v)) - X_{n-1}(v)\| \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sup_{-\infty \leq v \leq \infty} |1 - \gamma H(v)| \|X_n(v) - X_{n-1}(v)\| \leq \\ &\leq \sup_{-\infty \leq v \leq \infty} |1 - \gamma H(v)| \|e^{-ut}(x_n(t) - x_{n-1}(t))\|. \end{aligned}$$

Здесь во временной области использована норма, определяемая формулой (5.8), а в спектральной области норма, определяемая формулой (5.7).

Так как по предположению $\sup_{-\infty \leq v \leq \infty} |1 - \gamma H(p)| \leq q < 1$, то, как следует из теоремы Банаха (см. теорему 9.1 главы I), итерационный процесс (5.10) сходится к решению $x^*(t)$ уравнения (5.1) как геометрическая прогрессия со знаменателем q .

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 5.1. Пусть значения функции $H(p)$, $p = u + iv$, $u = \text{const} > c$, $-\infty < v < \infty$, лежат внутри угла с вершиной в начале координат и с раствором, меньшим π , в плоскости комплексной переменной. Тогда найдется такая константа γ , что выполняется условие $\sup_{-\infty \leq v \leq \infty} |1 - \gamma H(p)| \leq q < 1$, $p = u + iv$, $u = \text{const}$, и итерационный процесс (5.10) сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем q к решению $x^*(t)$ уравнения (5.1).

В случае, если условие не выполняется, но значения функции $H(p)$ лежат внутри угла раствора, меньшего π , с вершиной в начале координат плоскости комплексной переменной, и, возможно, в его вершине, для решения уравнения (5.1) может быть использован следующий итерационный процесс:

$$x_{n+1}(t) = \alpha_n x_n(t) + (1 - \alpha_n) \left(x_n(t) - \gamma \left(\int_0^t h(t - \tau) x_n(\tau) d\tau - f(t) \right) \right), \quad (5.12)$$

$n = 0, 1, \dots$, где $0 < \alpha_* \leq \alpha_n \leq \alpha^* < 1$, константа γ выбрана таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$\sup_{-\infty \leq v \leq \infty} |1 - \gamma H(v)| \leq 1.$$

Из условия, наложенного на функцию $H(p)$, следует, что последнее неравенство выполнимо. Пусть уравнение (5.1) разрешимо. Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.2. Пусть уравнение (5.1) разрешимо. Пусть значения функции $H(p)$, $-\infty \leq v \leq \infty$, расположены внутри угла раствора, меньшего π , с вершиной в начале координат плоскости комплексной переменной i , и, возможно, в его вершине. Тогда итерационный процесс (5.12) сходится к решению уравнения (5.1).

Замечание. Если уравнение (5.1) имеет несколько решений, то процесс сходится к одному из решений. Доказательство основано на теореме сходимости итерационных процессов с унитарными операторами (см. теорему 10.3 главы I).

Рассмотрим теперь случай, когда условие A не выполняется. Зафиксируем u ($u > c$) и построим множества Δ_k , $k = 0, 1, \dots, N + 1$, где $\Delta_0 = (-\infty, v_0]$, $\Delta_k = [v_{k-1}, v_k]$, $k = 1, 2, \dots, N$, $\Delta_{N+1} = [v_N, \infty)$, конечные точки v_j , $j = 0, 1, \dots, N$, которые подбираются таким образом, чтобы множество значений $H(u + iv)$ при $v \in \Delta_k$, $k = 0, 1, \dots, N$, было расположено внутри угла с раствором, меньшим π , и с вершиной в начале координат плоскости комплексной переменной w . При выполнении этого условия для каждого k найдется такое комплексное число γ_k , что при $v \in \Delta_k$, $k = 0, 1, \dots, N + 1$, значения функции $H(u + iv)$ расположены внутри единичной окружности с центром в точке $(1, 0)$ плоскости комплексной переменной w и, возможно, в точке $(0, 0)$.

Вначале рассмотрим случай, когда функция $H(u + iv)$ не обращается в нуль при конечных значениях v , $-\infty < v < \infty$.

Тогда для решения уравнения (5.1) может быть использован следующий итерационный процесс:

$$x_{n+1}^k(t) = x_n^k(t) - \gamma_k \left(\int_0^t h_k(t-\tau)x_n^k(\tau)d\tau - f_k(t) \right), \quad (5.13)$$

$$k = 0, 1, \dots, N+1, n = 0, 1, \dots,$$

$$x_{n+1}(t) = \sum_{k=0}^{N+1} x_{n+1}^k(t). \quad (5.14)$$

Здесь $h_k(t) = \int_0^t h(t-\tau)e_k(\tau)d\tau$, $f_k(t) = \int_0^t f(t-\tau)e_k(\tau)d\tau$, $e_k(\tau)$ — обратное преобразование Лапласа функции $E_k(u+iv)$, определяемой формулой

$$E_k(u+iv) = \begin{cases} 1, & v \in \Delta_k, \\ 0, & v \in (-\infty, \infty) \setminus \Delta_k, \end{cases}$$

$$k = 0, 1, \dots, N+1.$$

При каждом фиксированном значении k , $k = 0, 1, 2, \dots, N+1$, сходимость итерационной схемы (5.13) доказывается так же, как и сходимость итерационного процесса (5.2).

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 5.3. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) уравнение (5.1) имеет единственное решение $x^*(t)$;
- 2) функция $H(u+iv)$ не обращается в нуль при конечных значениях v , $-\infty < v < \infty$;
- 3) преобразование Лапласа решения $x^*(t)$ суммируемо с квадратом: $\int_{-\infty}^{\infty} |X^*(u+iv)|^2 dv = k < \infty$.

Тогда для любого ε найдутся такие узлы v_k , $k = 0, 1, \dots, N$, и такие комплексные константы γ_k , $k = 0, 1, \dots, N$, что итерационный процесс (5.13), (5.14) сходится к функции $x_N^*(t)$ и справедлива оценка

$$\left[\int_0^{\infty} |e^{-ut}(x^*(t) - x_N^*(t))|^2 dt \right] < \varepsilon.$$

В случае, если функция $H(u+iv)$ с фиксированным значением u ($u > c$) при изменении v от $-\infty$ до ∞ может обращаться в нуль в конечном числе точек, то для решения уравнения (5.1) нужно использовать другую вычислительную схему.

Пусть функция $H(u + iv)$ при фиксированном значении $u(u > c)$ и при v изменяющемся в пределах от $-\infty$ до ∞ , обращается в нуль в конечном числе точек.

Тогда существует такой набор узлов $v_k, k = 0, 1, \dots, N$, что при изменении параметра v на множествах $\Delta_0 = (-\infty, v_0], \Delta_k = [v_k, v_{k+1}), k = 1, 2, \dots, N-1, \Delta_N = [v_N, \infty)$, значения функции $H(u + iv), u > c, u = \text{const}$, находятся внутри угла с раствором, меньшим π , с вершиной в начале координат плоскости комплексной переменной w и, возможно, в его вершине. Тогда каждому множеству $\Delta_k, k = 0, 1, \dots, N$, можно поставить в соответствие комплексное число $\gamma_k, k = 0, 1, \dots, N$, такое, что значения функции $\gamma_k H(u + iv)$ при $u = \text{const}, u > c, v \in \Delta_k$, расположены внутри единичной окружности с центром в точке $(1, 0)$ и, возможно, в точке $(0, 0)$.

Построим итерационный метод:

$$x_{n+1}^k(t) = \alpha_n^k x_n^k(t) + (1 - \alpha_n^k) \left(x_n^k(t) - \gamma_k \left(\int_0^t h_k(t - \tau) x_n(\tau) d\tau - f_k(t) \right) \right), \quad (5.15)$$

$$0 < \alpha_* \leq \alpha_n^k \leq \alpha^* < 1, k = 0, 1, \dots, N, n = 0, 1, \dots,$$

$$x_{n+1}(t) = \sum_{k=0}^N x_{n+1}^k(t), \quad (5.16)$$

где $h_k(t), f_k(t)$ – прообразы функций $H(u + iv)E_k(u + iv), F(u + iv)E_k(u + iv)$, здесь $E_k(u + iv)$ – характеристическая функция множества $\Delta_k, k = 0, 1, \dots, N$, определяемая формулой

$$E_k(u + iv) = \begin{cases} 1, & v \in \Delta_k, \\ 0, & v \in (-\infty, \infty) \setminus \Delta_k. \end{cases}$$

Относительно сходимости итерационной схемы (2.15), (2.16) справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.4. Пусть уравнение (5.1) разрешимо. Тогда итерационный процесс (5.15), (5.16) сходится к одному из решений.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 5.2.

Изложенный выше итерационный метод решения интегральных уравнений Вольтерра в свертках может быть применен и к решению интегральных уравнений вида

$$x(t) + \int_t^\infty h(t - \tau)x(\tau)d\tau = f(t),$$

$$\int_t^{\infty} h(t - \tau)x(\tau)d\tau = f(t),$$

которые, как отмечается в [81], широко используются при анализе многих физических систем.

Здесь при обосновании вычислительных схем нужно применить специальную теорему о свертке [81]:

$$Z\left[\int_t^{\infty} h(t - \tau)x(\tau)d\tau\right] = H(-p)X(p),$$

где

$$H(-p) = \int_0^{\infty} h(-t)e^{pt}dt;$$

$X(p)$ – стандартное изображение,

$$X(p) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt}dt.$$

Замечание. Наряду с построением итерационных процессов в действительной области естественно рассмотреть аналогичные процессы в области изображений. Рассмотрим итерационный процесс

$$X_{n+1}(p) = X_n(p) - \gamma(H(p)X_n(p) - F(p)), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (5.17)$$

построенный по аналогии с итерациями (5.10). Его сходимость при $p = u + iv$, $-\infty < v < \infty$, следует из доказательства теоремы 5.1. Вычислив по формуле (5.17) значения $X(p)$ на сетке узлов $p_k = u + iv_k$, $k = 1, 2, \dots, N$, и используя квадратурные формулы вычисления обратного преобразования Лапласа

$$\frac{1}{2\pi} \int_{u-i\infty}^{u+i\infty} e^{(u+iv)t} X(u+iv)dv = \begin{cases} x(t), & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (5.18)$$

находим значения $x(t)$ в узлах сетки t_k , $k = 1, 2, \dots, M$.

По этим значениям строится локальный сплайн, восстанавливающий функцию $x(t)$.

Вычисление интеграла, стоящего в левой части формулы (5.18) по квадратурным формулам, может оказаться неустойчивым.

Здесь следует использовать методы регуляризации, изложенные в [213].

Результаты, аналогичные приведенным в данном разделе, могут быть получены и для уравнений второго рода вида (5.2). Однако, так как для уравнений вида (5.2) метод простой итерации всегда сходится, то распространение предыдущих результатов на уравнения вида (5.2) не представляет значительного практического интереса и поэтому здесь не приводится.

5.3. Многомерные интегральные уравнения Вольтерра в свертках

В этом разделе будем исследовать итерационные методы решения многомерных интегральных уравнений Вольтерра в свертках. При этом ограничимся двумерными уравнениями первого рода вида

$$\int_0^{t_1} \int_0^{t_2} h(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2) x(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = f(t_1, t_2). \quad (5.19)$$

Обозначим через $H(p_1, p_2)$ преобразование Лапласа функции $h(t_1, t_2)$, осуществляемое формулой

$$H(p_1, p_2) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(p_1 t_1 + p_2 t_2)} h(t_1, t_2) dt_1 dt_2.$$

Аналогично определяются преобразования $X(p_1, p_2)$ и $F(p_1, p_2)$ функций $x(t_1, t_2)$ и $f(t_1, t_2)$. Для их вычисления используются кубатурные формулы.

Будем считать функции $H(p_1, p_2)$ и $F(p_1, p_2)$ аналитическими по переменным $p_i = u_i + iv_i$ при $u_i \geq c_i$, $i = 1, 2$. Зафиксируем значения $u_i \geq c_i$, $i = 1, 2$, и рассмотрим функцию $H_{u_1 u_2}^+(v_1, v_2) = H(u_1 + iv_1, u_2 + iv_2)$ при $-\infty < v_i < \infty$, $i = 1, 2$.

Предположим вначале, что значения функции $H_{u_1 u_2}^+(v_1, v_2)$ при изменении значений $-\infty < v_i < \infty$, $i = 1, 2$, лежат внутри угла раствора, меньшего π , в плоскости комплексной переменной ω . Тогда найдется такое комплексное число γ , что значения функции $\gamma H_{u_1 u_2}^+(v_1, v_2)$ при $-\infty < v_i < \infty$, $i = 1, 2$, лежат внутри окружности с центром в точке $(1, 0)$ и с радиусом, равным единице, в плоскости комплексной переменной ω . Назовем это условием A .

Решение уравнения (5.19) будем искать итерационным методом

$$x_{n+1}(t_1, t_2) = x_n(t_1, t_2) - \gamma \left(\int_0^{t_1} \int_0^{t_2} h(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2) x_n(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 - f(t_1, t_2) \right), \quad (5.20)$$

$n = 0, 1, \dots$

В случае, если значения функции $H_{u_1 u_2}^+(v_1, v_2)$ при изменении значений $-\infty < v_i < \infty, i = 1, 2$, лежат внутри угла раствора, меньшего π , и в вершине угла, решение уравнения (5.19) ищется итерационным методом

$$x_{n+1}(t_1, t_2) = \alpha_n x_n(t_1, t_2) + (1 - \alpha_n) \left(x_n(t_1, t_2) - \gamma \left(\int_0^{t_1} \int_0^{t_2} h(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2) x_n(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 - f(t_1, t_2) \right) \right), \quad (5.21)$$

$n = 0, 1, \dots$, где $0 < \alpha_* \leq \alpha_n \leq \alpha^* < 1$.

Докажем сходимость итерационных методов (5.20) и (5.21).

Норму функции $F(p_1, p_2)$ определим формулой

$$\|F(p_1, p_2)\|^2 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F(u_1 + iv_1, u_2 + iv_2)|^2 dv_1 dv_2 \right]. \quad (5.22)$$

Для обоснования сходимости итерационных процессов (5.20) и (5.21) нам понадобится формула, аналогичная формуле Парсеваля для преобразования Фурье.

Очевидно,

$$\begin{aligned} \|F(p_1, p_2)\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F(u_1 + iv_1, u_2 + iv_2)|^2 dv_1 dv_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(t_1, t_2) e^{-(u_1 + iv_1)t_1} e^{-(u_2 + iv_2)t_2} dt_1 dt_2 \right|^2 dv_1 dv_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-u_1 t_1 - u_2 t_2} f(t_1, t_2) e^{-i(v_1 t_1 + v_2 t_2)} dt_1 dt_2 \right|^2 dv_1 dv_2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-u_1 t_1 - u_2 t_2} f(t_1, t_2))_{++} e^{-i(v_1 t_1 + v_2 t_2)} dt_1 dt_2 \right|^2 dv_1 dv_2 = \\
&= 4\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |V((e^{-u_1 t_1 - u_2 t_2} f(t_1, t_2))_{++})|^2 dv_1 dv_2 = \\
&= 4\pi^2 \|V(e^{-u_1 t_1 - u_2 t_2} f(t_1, t_2))_{++}\|^2 = 4\pi^2 \|(e^{-u_1 t_1 - u_2 t_2} f(t_1, t_2))_{++}\|^2 = \\
&= 4\pi^2 \left[\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} |e^{-u_1 t_1 - u_2 t_2} f(t_1, t_2)|^2 dt_1 dt_2 \right]^{1/2}.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
&(e^{-u_1 t_1 - u_2 t_2} f(t_1, t_2))_{++} = \\
&= \begin{cases} e^{-u_1 t_1 - u_2 t_2} f(t_1, t_2), & (0 \leq t_1 \leq \infty) \cap (0 \leq t_2 \leq \infty), \\ 0, & (t_1, t_2) \in (-\infty, \infty)^2 \setminus ((0 \leq t_1 \leq \infty) \cap (0 \leq t_2 \leq \infty)). \end{cases}
\end{aligned}$$

Докажем сходимость итерационного процесса (5.20). Умножим уравнение (5.20) на $e^{-u_1 t_1 - u_2 t_2}$. В результате имеем

$$\begin{aligned}
&e^{-u_1 t_1 - u_2 t_2} x_{n+1}(t_1, t_2) = e^{-u_1 t_1 - u_2 t_2} (x_n(t_1, t_2) - \\
&- \gamma \left(\int_0^{t_1} \int_0^{t_2} h(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2) x_n(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 - f(t_1, t_2) \right)), \quad (5.23)
\end{aligned}$$

$n = 0, 1, \dots$

Вычитая почленно из (5.23) такое же выражение, но со значением индекса на единицу меньшим, и переходя к нормам, получаем

$$\begin{aligned}
&\|e^{-u_1 t_1 - u_2 t_2} (x_{n+1}(t_1, t_2) - x_n(t_1, t_2))\| = \\
&= \|e^{-u_1 t_1 - u_2 t_2} (x_n(t_1, t_2) - x_{n-1}(t_1, t_2) - \\
&- \gamma \left(\int_0^{t_1} \int_0^{t_2} h(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2) (x_n(\tau_1, \tau_2) - x_{n-1}(\tau_1, \tau_2)) d\tau_1 d\tau_2 \right))\| = \\
&= \frac{1}{4\pi} \|Z [x_n(t_1, t_2) - x_{n-1}(t_1, t_2) - \\
&- \gamma \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} h(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2) (x_n(\tau_1, \tau_2) - x_{n-1}(\tau_1, \tau_2)) d\tau_1 d\tau_2]\| =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi} \|X_n(p_1, p_2) - X_{n-1}(p_1, p_2) - \gamma H(p_1, p_2) (X_n(p_1, p_2) - X_{n-1}(p_1, p_2))\| \leq \\
&\leq \sup_{-\infty < v_i < \infty, i=1,2} |1 - H(u_1 + iv_1, u_2 + iv_2)| \frac{1}{4\pi} \|X_n(p_1, p_2) - X_{n-1}(p_1, p_2)\| = \\
&= \sup_{-\infty < v_i < \infty, i=1,2} |1 - H(u_1 + iv_1, u_2 + iv_2)| \times \\
&\quad \times \|e^{-u_1 t_1 - u_2 t_2} (x_n(t_1, t_2) - x_{n-1}(t_1, t_2))\|. \tag{5.24}
\end{aligned}$$

При условии

$$\sup_{-\infty < v_i < \infty, i=1,2} |1 - H(u_1 + iv_1, u_2 + iv_2)| \leq q < 1 \tag{5.25}$$

сходимость итерационного метода (5.20) следует из теоремы Банаха (см. теорему 9.1 главы I).

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 5.5. Пусть выполнено условие (5.25). Тогда уравнение (5.19) имеет единственное решение, к которому сходится итерационный процесс (5.20) со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем равным q .

В случае, если вместо условия (5.25) выполняется условие

$$\sup_{-\infty < v_j < \infty, j=1,2} |1 - \gamma H(u_1 + iv_1, u_2 + iv_2)| \leq 1, \tag{5.26}$$

то справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.6. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) уравнение (5.19) разрешимо;
- 2) существует такое комплексное число γ , что справедливо неравенство (5.26).

Тогда итерационный процесс (5.21) сходится к одному из решений уравнения (5.19).

Доказательство следует из результатов теоремы 10.3 главы I о сходимости итерационных процессов с унитарными операторами и неравенства

$$\begin{aligned}
&\|e^{-u_1 t_1 - u_2 t_2} \left(x(t_1, t_2) - \gamma \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} h(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2) x(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \right)\| \leq \\
&\leq \|e^{-u_1 t_1 - u_2 t_2} x(t_1, t_2)\|,
\end{aligned}$$

справедливость которого доказывается рассуждениями, аналогичными приведенными в (5.24).

Построим итерационные схемы решения уравнения (5.19) в предположении, что для функции $H(u_1+iv_1, u_2+iv_2)$, $u_i = \text{const}$, $u_i \geq c$, $i = 1, 2$, при изменении $(v_1, v_2) \in (-\infty, \infty)^2$ условие A не выполняется. Вначале рассмотрим случай, когда функция $H(u_1 + iv_1, u_2 + iv_2)$ не обращается в нуль во внутренних точках области $(-\infty, \infty)^2$. Обозначим через B достаточно большое положительное число, величина которого будет определена ниже. При выполнении приведенных выше условий область $\Omega = [-B, B; -B, B]$ можно покрыть прямоугольниками $\Delta_{kl} = [t_k, t_{k+1}; \tau_l, \tau_{l+1}]$, $t_k = -B + \frac{2kB}{M_1}$, $k = 0, 1, \dots, M_1$, $\tau_l = -B + \frac{2lB}{M_2}$, $l = 0, 1, \dots, M_2$, таким образом, чтобы при $(v_1, v_2) \in \Delta_{kl}$ значения функции $H(u_1+iv_1, u_2+iv_2)$ были расположены внутри угла раствора, меньшего π , с вершиной в начале координат плоскости комплексной переменной w .

В этом случае каждому прямоугольнику Δ_{kl} можно поставить в соответствие комплексное число γ_{kl} такое, что значения функции $(1 - \gamma_{kl}H(u_1 + iv_1, u_2 + iv_2))$ при $(v_1, v_2) \in \Delta_{kl}$ лежат внутри окружности радиуса 1 с центром в точке $(1, 0)$ плоскости комплексной переменной.

Обозначим через $E_{kl}(u_1+iv_1, u_2+iv_2)$ характеристическую функцию области Δ_{kl} , определяемую формулой

$$E_{kl}(u_1 + iv_1, u_2 + iv_2) = \begin{cases} 1, & (v_1, v_2) \in \Delta_{kl}, \\ 0, & (v_1, v_2) \in (-\infty, \infty)^2 \setminus \Delta_{kl}. \end{cases}$$

Решение уравнения (5.19) будем искать итерационным методом:

$$x_{n+1}^{kl}(t_1, t_2) = \alpha_n^{kl} x_n^{kl}(t_1, t_2) + (1 - \alpha_n^{kl})(x_n^{kl}(t_1, t_2) - \gamma_{kl} \left(\int_0^{t_1} \int_0^{t_2} h_{kl}(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2) x_n(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 - f_{kl}(t_1, t_2) \right)), \quad (5.27)$$

$$n = 0, 1, \dots, k = 0, 1, \dots, M_1 - 1, l = 0, 1, \dots, M_2 - 1,$$

$$x_{n+1}(t_1, t_2) = \sum_{k=0}^{M_1-1} \sum_{l=0}^{M_2-1} x_{n+1}^{kl}(t_1, t_2). \quad (5.28)$$

Здесь $h_{kl}(t_1, t_2)$, $f_{kl}(t_1, t_2)$ — прообразы функций $H(u_1+iv_1, u_2+iv_2) \times E_{kl}(u_1 + iv_1, u_2 + iv_2)$, $F(u_1 + iv_1, u_2 + iv_2) E_{kl}(u_1 + iv_1, u_2 + iv_2)$.

Будем считать, что уравнение (5.19) имеет единственное решение $x^*(t_1, t_2)$, удовлетворяющее условию

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |e^{-u_1 t_1 - u_2 t_2} x^*(t_1, t_2)|^2 dt_1 dt_2 \leq k < \infty.$$

Тогда найдется постоянное число B такое, что справедливо следующее неравенство

$$\iint_{(-\infty, \infty)^2 \setminus [-B, B]^2} |e^{-u_1 t_1 - u_2 t_2} x^*(t_1, t_2)|^2 dt_1 dt_2 < \varepsilon.$$

При сделанных выше предположениях справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.7. Пусть уравнение (5.19) имеет единственное решение. Тогда итерационный процесс (5.27), (5.28) сходится к этому решению при $n \rightarrow \infty$, $B \rightarrow \infty$ и при соответствующем выборе констант γ_{kl} , $k = 0, 1, \dots, M_1$, $l = 0, 1, \dots, M_2$ (отметим, что при увеличении значения B параметры M_1, M_2 могут также возрастать).

Рассмотрим теперь случай, когда функция $H(u_1 + iv_1, u_2 + iv_2)$ ($u_1, u_2 = \text{const}$, $u_1, u_2 \geq c$) может обращаться в нуль на конечном числе линий. В этом случае область $[-B, B; -B, B]$, где B — достаточно большое положительное число, может быть покрыта прямоугольниками Δ_{kl} , $k = 0, 1, \dots, M_1 - 1$, $l = 0, 1, \dots, M_2 - 1$, такими, что при $(v_1, v_2) \in \Delta_{kl}$ значения функции $H(u_1 + iv_1, u_2 + iv_2)$ лежат внутри угла раствора, меньшего π (и возможно, в его вершине).

Тогда каждому прямоугольнику Δ_{kl} , $k = 0, 1, \dots, M_1 - 1$, $l = 0, 1, \dots, M_2 - 1$, можно поставить в соответствие такое комплексное число γ_{kl} , что значения функции $1 - \gamma_{kl} H(u_1 + iv_1, u_2 + iv_2)$, $(v_1, v_2) \in \Delta_{kl}$, будут лежать в круге радиуса 1 с центром в точке $(1, 0)$. При этих значениях γ_{kl} итерационный процесс (5.27), (5.28) сходится к одному из решений уравнения (5.19).

Замечания:

1. Утверждения, аналогичные сформулированным в теоремах 3.1-3.3, справедливы и для уравнений второго рода.

2. Для уравнений Вольтерра первого и второго родов можно по аналогии с итерационными схемами (5.20), (5.21) построить итерационные процессы в частотной области.

6. Итерационные методы решения уравнений в свертках на конечных интервалах

В этом разделе изложен метод построения итерационных параллельных алгоритмов решения одномерных и многомерных интегральных уравнений в свертках. Построенные алгоритмы можно реализовать на компьютерах с параллельной архитектурой. Раздел написан по материалам статьи [42].

6.1. Постановка задачи

Ниже ряд результатов, полученных в предыдущих разделах, переносится на нелинейные уравнения в свертках.

Здесь предложены параллельные итерационные методы решения нелинейных уравнений в свертках следующих видов:

$$Kx \equiv \lambda x(t) + \int_a^b h(t - \tau, \tau)x(\tau)d\tau = f(t), \quad a \leq t \leq b, \lambda \geq 0; \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} Lx &\equiv \int_a^b \dots \int_a^b h(t_1 - \tau_1, \dots, t_l - \tau_l)x(\tau_1, \dots, \tau_l)d\tau_1 \dots d\tau_l = \\ &= f(t_1, \dots, t_l), \quad a \leq t_i \leq b, \quad i = 1, 2, \dots, l, \end{aligned} \quad (6.2)$$

где оператор K непрерывно обратим в пространстве $L_2[a, b]$, а оператор L непрерывно обратим в пространстве $L_2([a, b]^l)$, $l = 2, 3, \dots$

В уравнении (6.1) функция $h(t, \tau) \in H_{11}(M)$ определена в области $[a - b, b - a] \times [a, b]$, а функция $f(t) \in H_1(M)$ — на сегменте $[a, b]$. Продолжим эти функции, доопределив функцию $h(t, \tau)$ нулем в области $R_2 \setminus ([a - b, b - a] \times [a, b])$, а функцию $f(t)$ — нулем в области $(-\infty, \infty) \setminus [a, b]$.

В уравнении (6.2) функция $h(t_1, \dots, t_l)$ определена в области $[a - b, b - a]^l$, а функция $f(t_1, \dots, t_l)$ — в области $[a, b]^l$, $l = 2, 3, \dots$. Продолжим эти функции до R_l , определив функцию $h(t_1, \dots, t_l)$ нулем в области $(-\infty, \infty)^l \setminus [a - b, b - a]^l$, а функцию $f(t_1, \dots, t_l)$ определив нулем в области $(-\infty, \infty)^l \setminus [a, b]^l$.

Для доказательства сходимости итерационных процессов будем использовать теорему 10.3 в главе I.

6.2. Приближенное решение одномерных уравнений

Пусть $f(t) \in L_2(-\infty, \infty)$. Прямое и обратное преобразования Фурье функции $f(t)$ определяются формулами

$$V(f(t)) = F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt, \quad -\infty < \omega < \infty,$$

$$V^{-1}(F(\omega)) = f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega, \quad -\infty < t < \infty.$$

Введем оператор $P_{[a,b]}f(t) = f(t), t \in [a, b]; P_{[a,b]}f(t) = 0, t \notin [a, b]$.

Обозначим через $H(\omega, \zeta)$ преобразование Фурье функции $h(t, \zeta)$ по переменной t .

Будем говорить, что функция $\lambda + H(\omega, \zeta)$ удовлетворяет условию A , если значения $\lambda + H(\omega, \zeta)$, $-\infty \leq \omega \leq \infty$, $a \leq \zeta \leq b$, лежат внутри и на сторонах угла с вершиной в начале координат плоскости комплексной переменной и с раствором, меньшим π .

Построение итерационных методов решения уравнения (6.1) начнем со случая, когда выполняется условие A .

Рассмотрим в отдельности два случая: $\lambda \neq 0$ и $\lambda = 0$.

В первом случае имеется две возможности. Во-первых, в ряде частных случаев может существовать комплексное число γ такое, что выполняется неравенство

$$\sup_{-\infty \leq \omega \leq \infty, a \leq \zeta \leq b} |1 - \gamma(\lambda + H(\omega, \zeta))| \leq q < 1. \quad (6.3)$$

В общем случае существует такое комплексное число γ , что выполняется неравенство

$$\sup_{-\infty \leq \omega \leq \infty, a \leq \zeta \leq b} |1 - \gamma(\lambda + H(\omega, \zeta))| \leq 1. \quad (6.4)$$

В случае, если $\lambda = 0$, условие A выражается неравенством

$$\sup_{-\infty \leq \omega \leq \infty, a \leq \zeta \leq b} |1 - \gamma H(\omega, \zeta)| \leq 1. \quad (6.5)$$

Вначале рассмотрим случай, когда $\lambda \neq 0$.

Введем узлы $t_k = a + (b - a)k/N$, $k = 0, 1, \dots, N$, и аппроксимируем уравнение (6.1) следующим образом:

$$\lambda x(t) + \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} h(t - \tau, t_k) x(\tau) d\tau = f(t). \quad (6.6)$$

Решение уравнения (6.6) будем искать итерационным методом:

$$x_{n+1}(t) = \alpha_n x_n(t) + (1 - \alpha_n) \left(x_n(t) - \gamma (\lambda x_n(t) + \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} h(t - \tau, t_k) x_n(\tau) d\tau - f(t)) \right), \quad (6.7)$$

$n = 0, 1, \dots$ Здесь $0 < \alpha_* \leq \alpha_n \leq \alpha^* < 1$.

Пусть $\Delta_l = [t_l, t_{l+1}]$. Тогда в метрике пространства L_2 имеем

$$\begin{aligned}
& \left\| x(t) - \gamma \left(\lambda x(t) + \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} h(t-\tau, t_k) x(\tau) d\tau \right) \right\| = \\
& = \left\| \sum_{l=0}^{N-1} P_{\Delta_l} \left[x(t) - \gamma \left(\lambda x(t) + \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\Delta_k} h(t-\tau, t_k) P_{\Delta_k}[x(\tau)] d\tau \right) \right] \right\| \leq \\
& \leq \left\| \sum_{l=0}^{N-1} P_{\Delta_l} [x(t)] - \gamma \left(\lambda \sum_{l=0}^{N-1} P_{\Delta_l} [x(t)] + \sum_{k=0}^{N-1} \int_a^b h(t-\tau, t_k) P_{\Delta_k} [x(\tau)] d\tau \right) \right\| = \\
& = \left\| \sum_{l=0}^{N-1} V(P_{\Delta_l} [x(t)]) - \gamma \left[\lambda \sum_{l=0}^{N-1} V(P_{\Delta_l} [x(t)]) + \sum_{l=0}^{N-1} H(\omega, t_l) V(P_{\Delta_l} [x(t)]) \right] \right\| \leq \\
& \leq \sup_{\omega, k} |1 - \gamma(\lambda + H(\omega, t_k))| \left\| \sum_{l=0}^{N-1} V(P_{\Delta_k} [x(t)]) \right\| \leq \\
& \leq \sup_{-\infty < \omega < \infty, a \leq t \leq b} |1 - \gamma(\lambda + H(\omega, t))| \|x(t)\|. \tag{6.8}
\end{aligned}$$

Из неравенства (6.8) и теоремы 10.3 главы I следует, что при выполнении условия (6.4) итерационный процесс (6.7) сходится в метрике $L_2[a, b]$.

Наличие условия (6.3) позволяет применить теорему Банаха об операторах сжатия и оценить скорость сходимости итераций (6.7). Пусть выполнено условие (6.3). Обозначим через x_N^* решение уравнения (6.6), а через x_m — результат m -й итерации в итерационном процессе (6.7). Тогда из теоремы Банаха имеем $\|x_N^* - x_m\| \leq cq^{m-1}$.

Оценим норму разности между решением x^* уравнения (6.1) и решением x_N^* уравнения (6.6). Возьмем x^* в качестве начального приближения в итерационном процессе (6.7). Тогда

$$\begin{aligned}
\|x^* - x_N^*\| & \leq |\gamma| \left\| \int_a^b h(t-\tau, \tau) x^*(\tau) d\tau - \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} h(t-\tau, t_k) x^*(\tau) d\tau \right\| (1-q)^{-1} \leq \\
& \leq cN^{-1}.
\end{aligned}$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 6.1. Пусть оператор K непрерывно обратим, $h(t, \zeta) \in H_{11}(M)$ при $t \in [a-b, b-a]$, $\zeta \in [a, b]$, $f(t) \in H_1(M)$ при $t \in [a, b]$,

и существует комплексное число γ такое, что выполнено условие (6.3). Тогда итерационный процесс (6.7) сходится к решению x_N^* уравнения (6.6) со скоростью $\|x_N^* - x_m\| \leq cq^{m-1}$, где x_m — результат m -й итерации в итерационном процессе (6.7), и справедлива оценка $\|x^*(t) - x_N^*(t)\| \leq cN^{-1}$, где $x^*(t)$ — решение уравнения (6.1).

Пусть вместо неравенства (6.3) выполняется более слабое условие (6.4). Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 6.2. Пусть оператор K непрерывно обратим и выполняется условие (6.4). Тогда итерационный процесс (6.7) сходится к решению уравнения (6.6).

Доказательство аналогично доказательству теоремы 6.1.

Аналогичное утверждение справедливо в случае, если $\lambda = 0$ и выполнено условие (6.5).

Рассмотрим случай, когда не выполняется условие A . Этот случай изложим на примере уравнений первого рода:

$$K_0 x \equiv \int_a^b h(t - \tau, \tau) x(\tau) d\tau = f(t). \quad (6.9)$$

Пусть при каждом фиксированном значении ζ , $a \leq \zeta \leq b$, значения функции $H(\omega, \zeta)$, $-\infty \leq \omega \leq \infty$, лежат внутри и на сторонах угла раствора, меньшего π , с вершиной в начале координат. Назовем это условием A_0 .

Аппроксимируем уравнение (6.9) следующим образом

$$K_N x \equiv \sum_{k=0}^{N-1} \int_a^b h(t - \tau, t_k) P_{\Delta_k} [x(\tau)] d\tau = f(t), \quad t \in [a, b], \quad (6.10)$$

где $t_k = a + (b - a)k/N$, $k = 0, 1, \dots, N$, $\Delta_k = [t_k, t_{k+1}]$.

Нетрудно видеть, что если оператор K_0 непрерывно обратим, то при q таких, что $q = c\|K_0^{-1}\|N^{-1} < 1$, уравнение (6.10) имеет единственное решение $x_N^*(t)$ и справедлива оценка $\|x^*(t) - x_N^*(t)\| \leq cN^{-1}$, где $x^*(t)$ — решение уравнения (6.9).

Применив к уравнению (6.10) преобразование Фурье, имеем

$$\sum_{k=0}^{N-1} H_k(\omega) V(P_{\Delta_k} [x(t)]) = F(\omega), \quad -\infty < \omega < \infty, \quad (6.11)$$

где $H_k(\omega) = H(\omega, t_k)$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$.

Поставим каждой функции $H_k(\omega)$ в соответствие комплексное число γ_k такое, чтобы значения $\gamma_k H_k(\omega)$ лежали внутри единичной окружности с центром в точке $(1,0)$ и, возможно, в точке $(0,0)$.

Введем новые функции $z_k(t) = \gamma_k^{-1} P_{\Delta_k}[x(t)]$. Тогда уравнения (6.10) и (6.11) можно представить в виде

$$\sum_{k=0}^{N-1} \gamma_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} h(t - \tau, t_k) z_k(\tau) d\tau = f(t), \quad a \leq t \leq b, \quad (6.12)$$

и

$$\sum_{k=0}^{N-1} \gamma_k H_k(\omega) V(z_k(t)) = F(\omega), \quad -\infty < \omega < \infty. \quad (6.13)$$

Уравнение (6.12) будем решать итерационным методом:

$$z^{m+1}(t) = \alpha_m z^m(t) + (1 - \alpha_m) \left(z^m(t) - \sum_{k=0}^{N-1} \gamma_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} h(t - \tau, t_k) z_k^m(\tau) d\tau - f(t) \right), \quad m = 0, 1, \dots, \quad (6.14)$$

где $z(t) = z_k(t)$ при $t \in \Delta_k$. Функция $x^m(t)$ определяется формулой $x^m(t) = \gamma_k z^m(t)$ при $t \in \Delta_k$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$.

Сходимость итерационного процесса (6.14) доказывается по аналогии с доказательством сходимости итерационного процесса (6.7).

Повторяя теперь рассуждения, проведенные при доказательстве теорем 6.1 и 6.2, приходим к следующему утверждению.

Теорема 6.3. Пусть оператор K_0 непрерывно обратим, $h(t, \tau) \in H_{1,1}(1)$, $f(t) \in H_1(1)$. Пусть при каждом фиксированном значении ζ ($a \leq \zeta \leq b$) для функции $H(\omega, \zeta)$ выполняется условие A_0 . Тогда итерационный процесс (6.14) сходится к функции $z_N^*(t)$, связанной с решением $x_N^*(t)$ уравнения (6.10) формулами $P_{\Delta_k}[x(t)] = \gamma_k z_k(t)$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$. Справедлива оценка $\|x^*(t) - x_N^*(t)\| \leq cN^{-1}$, где $x^*(t)$ — решение уравнения (6.9).

Замечание. В случае, если оператор K_0 необратим, теорема 6.3 справедлива при дополнительных условиях: уравнения (6.9) и (6.10) однозначно разрешимы.

Рассмотрим случай, когда условие A_0 не выполняется при некоторых значениях функций $H(\omega, \zeta)$, $a \leq \zeta \leq b$. При построении вычислительной схемы будем исходить из уравнения (6.11). Введем узлы $-\infty < T_0 < T_1 < \dots < T_M < \infty$ таким образом, чтобы на множествах

$\Delta_0^* = (-\infty, T_0]$, $\Delta_l^* = [T_{l-1}, T_l]$, $l = 1, \dots, M-1$, $\Delta_{M+1}^* = [T_M, \infty)$ значения функций $H(\omega, t_k)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, лежали внутри и на сторонах угла α_{kl} , $k = 0, 1, \dots, N-1$, $l = 0, 1, \dots, M+1$, раствора, меньшего π , с вершиной в начале координат. Обозначим через $E(\Delta_l^*)$ характеристическую функцию интервала Δ_l^* : $E(\Delta_l^*) = 1$ при $\omega \in \Delta_l^*$, $E(\Delta_l^*) = 0$ при $\omega \notin \Delta_l^*$, $l = 0, 1, \dots, M+1$. Воспользовавшись этой функцией, представим уравнение (6.11) в виде системы уравнений:

$$\sum_{k=0}^{N-1} H(\omega, t_k) E(\Delta_l^*) V(P_{\Delta_k}[x(t)]) = E(\Delta_l^*) F(t), \quad l = 0, 1, \dots, M+1. \quad (6.15)$$

Введем обозначения: $H_k^l(\omega) = H(\omega, t_k) E(\Delta_l^*)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, $l = 0, 1, \dots, M+1$, $X_k^l(\omega) = V(P_{\Delta_k}[x(t)]) E(\Delta_l^*)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, $F^l(\omega) = F(\omega) E(\Delta_l^*)$, $l = 0, 1, \dots, M+1$, и представим систему уравнений (6.14) в виде

$$\sum_{k=0}^{N-1} H_k^l(\omega) X_k^l(\omega) = F^l(\omega), \quad l = 0, 1, \dots, M+1. \quad (6.16)$$

Каждое уравнение системы (6.16) можно рассматривать в отдельности.

Переходя в системе (6.16) к оригиналам, имеем

$$\sum_{k=0}^{N-1} \int_{\Delta_k} h_k^l(t-\tau) x_k^l(\tau) d\tau = f^l(t), \quad l = 0, 1, \dots, M+1, \quad (6.17)$$

где $h_k^l(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau, t_k) e_l(\tau) d\tau$, $f^l(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau, t_k) e_l(\tau) d\tau$, $e_l(t) = V^{-1}(E(\Delta_l^*))$.

Выпишем в явном виде итерационную схему решения системы уравнений (6.17). Каждому интервалу Δ_l^* , $l = 0, 1, \dots, M+1$, и каждой функции $H_k(\omega)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, поставим в соответствие комплексные числа γ_{lk} , $k = 0, 1, \dots, N-1$, такие, что $\max_{k,l} \sup_{\omega \in \Delta_l^*} |1 - \gamma_{kl} H_k^l(\omega)| \leq 1$.

Система уравнений (6.17) решается итерационным методом:

$$z^{l,m+1}(t) = \alpha_m^{l,m}(t) z^{l,m} + (1 - \alpha_m^{l,m})(z^{l,m}(t) - \sum_{k=0}^{N-1} \gamma_{lk} \int_{\Delta_k} h_k^l(t-\tau) z_k^{l,m}(\tau) d\tau + f^l(t)), \quad t \in [a, b], \quad (6.18)$$

$l = 0, 1, \dots, M + 1, m = 0, 1, \dots$, где $x_k^{l,m}(t) = \gamma_{lk} z_k^{l,m}(t)$; $z^{l,m}(t) = z_k^{l,m}(t)$ при $t \in \Delta_k, k = 0, 1, \dots, N - 1$. Тогда $x^{l,m}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \gamma_{lk} z_k^{l,m}(t)$ и, следовательно,

$$x^m(t) = \sum_{l=0}^{M+1} x^{l,m}(t). \quad (6.19)$$

Сходимость итерационного процесса (6.18), (6.19) в метрике пространства L_2 доказывается по аналогии со сходимостью итерационного процесса (6.7).

Из непрерывной обратимости оператора K и гладкости ядра $h(t, \tau)$ следует оценка $\|x^* - x_N^*\| \leq cN^{-1}$, где $x^*(t)$ и $x_N^*(t)$ – решения уравнений (6.1) и (6.10) соответственно. При $m \rightarrow \infty, M \rightarrow \infty, N \rightarrow \infty$ приближенное решение $x_N^m(t)$ стремится к решению $x^*(t)$ уравнения (6.9) в метрике пространства $L_2[a, b]$.

Теорема 6.4. Пусть оператор K непрерывно обратим. Пусть при любом ζ ($a \leq \zeta \leq b$) и при любых конечных значениях ω функция $H(\omega, \zeta)$ не обращается в нуль. Тогда существуют такие системы точек t_k ($a \leq t_k \leq b$), $k = 0, 1, \dots, N - 1$, и T_l ($-\infty < T_0 < \dots < T_M < \infty$), $l = 0, 1, \dots, M$, что система (6.17) имеет единственное решение, которое может быть получено методом последовательных приближений (6.18), (6.19), сходящимся при $m \rightarrow \infty, M \rightarrow \infty, N \rightarrow \infty$ к решению $x^*(t)$ уравнения (6.9) в метрике пространства $L_2[a, b]$.

Справедливо замечание, аналогичное замечанию к теореме 6.4.

6.3. Параллельные методы решения многомерных уравнений в свертках

В этом разделе на примере уравнения

$$Lx \equiv \int_a^b \dots \int_a^b h(t - \tau)x(\tau)d\tau = f(t), \quad (6.20)$$

$t = (t_1, \dots, t_l), \tau = (\tau_1, \dots, \tau_l)$, опишем способ построения параллельных методов решения многомерных уравнений в свертках на конечных интервалах.

Введем функции $h^*(t) = h(t)$ при $a - b \leq t_i \leq b - a, i = 1, 2, \dots, l$ и $h^*(t) \equiv 0$ при $t_i \in (-\infty, \infty) \setminus [a - b, b - a], i = 1, 2, \dots, l$.

Уравнение (6.20) можно представить в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h^*(t - \tau)P_{[a,b]^l}[x(\tau)]d\tau = f^*(t), \quad (6.21)$$

где $f^*(t) = f(t)$ при $a \leq t_i \leq b$, $f^*(t) \equiv 0$ при $t_i \in R_i \setminus [a, b]^l$, $i = 1, 2, \dots, l$,

$$P_{[a,b]^l}[x(t_1, \dots, t_l)] = \begin{cases} x(t_1, \dots, t_l), & t \in [a, b]^l, \\ 0, & t \notin (-\infty, \infty)^l \setminus [a, b]^l. \end{cases}$$

Применим к уравнению (6.21) преобразование Фурье:

$$H^*(\omega_1, \dots, \omega_l)V(P_{[a,b]^l}[x(t_1, \dots, t_l)]) = F^*(\omega_1, \dots, \omega_l), \quad (6.22)$$

где $H^*(\omega_1, \dots, \omega_l)$, $F^*(\omega_1, \dots, \omega_l)$ – преобразования Фурье функций $h^*(t_1, \dots, t_l)$, $f^*(t_1, \dots, t_l)$. Через V и V^{-1} обозначено прямое и обратное преобразования Фурье функций l переменных. Будем полагать, что $H^*(\omega_1, \dots, \omega_l)$, $F^*(\omega_1, \dots, \omega_l) \in L_2[(-\infty, \infty)^l]$.

Предположим, что функция $H^*(\omega_1, \dots, \omega_l)$ в любой ограниченной области $G \subset E_l$ обращается в нуль в конечном числе точек или кривых. Обозначим через B достаточно большое положительное число, величина которого будет определена ниже. Покроем куб $\Delta = [-B, B]^l$ более мелкими кубами Δ_{k_1, \dots, k_l} , $k_i = 0, 1, \dots, N - 1$, которые строятся таким образом, чтобы значения функции $H^*(\omega_1, \dots, \omega_l)$ при $(\omega_1, \dots, \omega_l) \in \Delta_{k_1, \dots, k_l}$ лежали внутри и на сторонах угла α_{k_1, \dots, k_l} с вершиной в начале координат и с раствором, меньшим π . Тогда каждому кубу Δ_{k_1, \dots, k_l} можно поставить в соответствие константу γ_{k_1, \dots, k_l} такую, что значения функции $\gamma_{k_1, \dots, k_l} H^*(\omega_1, \dots, \omega_l)$ при $(\omega_1, \dots, \omega_l) \in \Delta_{k_1, \dots, k_l}$ будут лежать в замкнутом круге с центром в точке $(1, 0)$ и с радиусом 1. В этом случае справедливо неравенство

$$\sup_{\omega \in \Delta_{k_1, \dots, k_l}} |1 - \gamma_{k_1, \dots, k_l} H^*(\omega)| \leq 1, \quad \omega = (\omega_1, \dots, \omega_l). \quad (6.23)$$

Обозначим через $E_{k_1, \dots, k_l}(\omega)$ характеристическую функцию куба Δ_{k_1, \dots, k_l} , $k_i = 0, 1, \dots, N - 1$, $i = 1, 2, \dots, l$.

Тогда уравнение (6.22) можно представить в виде системы уравнений

$$H^*(\omega)E_{k_1, \dots, k_l}(\omega)V(P_{[a,b]^l}[x(t)]) = E_{k_1, \dots, k_l}(\omega)F^*(\omega), \quad (6.24)$$

$k_i = 0, 1, \dots, N - 1$, $i = 1, 2, \dots, l$.

Система уравнений (6.24) в частотной области решается итерационным методом:

$$\begin{aligned} X_{k_1 \dots k_l}^{m+1}(\omega) &= \alpha_m^{k_1, \dots, k_l} X_{k_1 \dots k_l}^m(\omega) + (1 - \alpha_m^{k_1, \dots, k_l}) (X_{k_1 \dots k_l}^m(\omega) - \\ &- \gamma_{k_1 \dots k_l} (H^*(\omega)E_{k_1 \dots k_l}(\omega)X_{k_1 \dots k_l}^m(\omega) - F^*(\omega)E_{k_1 \dots k_l}(\omega))), \end{aligned} \quad (6.25)$$

где $m = 0, 1, \dots$;

$$X^{m+1}(\omega) = \sum_{k_1=0}^{N-1} \cdots \sum_{k_l=0}^{N-1} X_{k_1 \dots k_l}^{m+1}(\omega), \quad (6.26)$$

где $X_{k_1 \dots k_l}(\omega) = V(P_{[a,b]^l}[x(t)])E_{k_1 \dots k_l}(\omega)$, $0 < \alpha_* \leq \alpha_m^{k_1, \dots, k_l} \leq \alpha^* < 1$.

В действительной области система (6.25), (6.26) имеет вид

$$\begin{aligned} x_{k_1, \dots, k_l}^{m+1}(t) = & \alpha_m^{k_1, \dots, k_l} x_{k_1, \dots, k_l}^m(t) + (1 - \alpha_m^{k_1, \dots, k_l}) (x_{k_1, \dots, k_l}^m(t) - \\ & - \gamma_{k_1, \dots, k_l} \left(\int_a^b \cdots \int_a^b h_{k_1, \dots, k_l}^*(t - \tau) x_{k_1, \dots, k_l}^m(\tau) d\tau - \right. \\ & \left. - f_{k_1, \dots, k_l}^*(t) \right), k = 0, 1, \dots, N - 1, i = 1, 2, \dots, l, \end{aligned} \quad (6.27)$$

$m = 0, 1, \dots$;

$$x^{m+1}(t_1, \dots, t_l) = \sum_{k_1=0}^{N-1} \cdots \sum_{k_l=0}^{N-1} x_{k_1, \dots, k_l}^{m+1}(t_1, \dots, t_l). \quad (6.28)$$

Здесь

$$\begin{aligned} f_{k_1, \dots, k_l}^*(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\tau) e_{k_1, \dots, k_l}(t - \tau) d\tau, \\ h_{k_1, \dots, k_l}^*(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h^*(\tau) e_{k_1, \dots, k_l}(t - \tau) d\tau, \\ e_{k_1, \dots, k_l}(t_1, \dots, t_l) &= V^{-1}(E_{k_1, \dots, k_l}(\omega_1, \dots, \omega_l)). \end{aligned}$$

Доказательство сходимости итерационных схем (6.25), (6.26) и (6.27), (6.28) аналогично проведенным в предыдущем пункте.

Остановимся на вопросе выбора константы B . Положим $\varepsilon_1 = \varepsilon/4$, где ε — заданная точность решения уравнения (6.20). При условиях, налагаемых на ядро и правую часть уравнения (6.20), следует, что решение x^* уравнения (6.20) принадлежит пространству L_2 . В этом случае константа B определяется из уравнения

$$\left| \int_{(-\infty, \infty)^l} \int_{[-B, B]^l} \left| \frac{F^*(\omega_1, \dots, \omega_l)}{H^*(\omega_1, \dots, \omega_l)} \right|^2 d\omega \right|^{1/2} = \varepsilon_1.$$

Из итерационных схем (6.25) и (6.27) видно, что каждое из уравнений, входящих в системы (6.25) и (6.27), решается в отдельности, независимо от остальных. Это позволяет решать эти системы уравнений на ЭВМ с параллельной архитектурой.

7. Итерационные методы решения линейной обратной задачи гравиметрии для контактной поверхности

В данном разделе будем рассматривать итерационные методы решения обратной задачи гравиметрии для контактной поверхности в двумерном и трехмерном случаях. Предлагаются итерационные методы определения формы поверхности при известной глубине залегания и одновременного определения глубины залегания и формы поверхности. Раздел написан по материалам статей [41, 56].

7.1. Постановка задачи

Одной из важных задач интерпретации гравитационных аномалий является задача определения параметров рудных тел по значениям гравитационного поля на поверхности Земли. В случае, если плотность рудных тел известна из других источников, то задача заключается в определении поверхности рудного тела.

Введем декартову систему координат, у которой ось Z направлена вертикально вниз.

Нелинейная постановка обратной задачи для бесконечно протяженной по оси Y контактной поверхности $z(x)$ описывается [96] нелинейным интегральным уравнением

$$Kz \equiv G\sigma \int_a^b \ln \frac{(x-s)^2 + H^2}{(x-s)^2 + (H-z(s))^2} ds = f(x), \quad (7.1)$$

где $z(\zeta)$ — форма поверхности тела; H — глубина залегания; σ — плотность возмущающего тела; G — гравитационная постоянная.

Регулярирующие алгоритмы решения уравнения (7.1) начали исследоваться в работах [91, 213]. Подробный анализ различных методов содержится в книгах [96, 170].

Линеаризация уравнения (7.1) описывается линейным интегральным уравнением

$$2G\sigma H \int_a^b \frac{z(\zeta)}{(x-\zeta)^2 + H^2} d\zeta = f(x). \quad (7.2)$$

Нам удобно представить его в виде

$$Az \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} G\sigma H \int_a^b \frac{z(\zeta)}{(x-\zeta)^2 + H^2} d\zeta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x). \quad (7.3)$$

При известной глубине залегания H , известном интервале (a, b) и известной плотности σ для решения уравнения (7.2) в работах [213, 217] предложены и обоснованы регулирующие алгоритмы. Подробная библиография по методам решения уравнений (7.1) и (7.2) и геофизической интерпретации решений содержится в [96]. В цикле статей [173, 175] исследованы вопросы существования и единственности решений уравнений вида

$$z(x) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{(t-x)^2}{(t-x)^2 + z^2(x)} dt = U(x)$$

на Страховском множестве функций. Там же исследована сходимость метода простой итерации.

В случае, если рудное тело залегает на глубине H , причем его нижняя поверхность совпадает с плоскостью $z = H$, а верхняя поверхность описывается функцией $z(x, y) = H - \varphi(x, y)$, функция $\varphi(x, y)$ неотрицательна, $\max \varphi(x, y) \ll H$, гравитационное поле на поверхности Земли описывается уравнением

$$\sigma HG \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\zeta, \eta) d\zeta d\eta}{((x-\zeta)^2 + (y-\eta)^2 + H^2)^{3/2}} = f(x, y), \quad (7.4)$$

где σ — плотность тела; G — гравитационная постоянная.

В случае, если рудное тело имеет плотность $\sigma(x, y, z)$ и занимает объем Q , то гравитационное поле на поверхности Земли описывается уравнением

$$G \iiint_Q \frac{\sigma(\zeta, \eta, \xi) \xi d\zeta d\eta d\xi}{((x-\zeta)^2 + (y-\eta)^2 + \xi^2)^{3/2}} = f(x, y, 0). \quad (7.5)$$

В данном разделе предлагаются и обосновываются итерационные алгоритмы решения уравнений (7.2)-(7.4) при различной информации о форме поверхности и глубине залегания тела.

7.2. Двумерная задача

В этом пункте исследуются приближенные методы решения уравнения (7.2), описывающего обратную задачу гравиметрии в двумерном случае при различной информации о форме поверхности тела z , глубине залегания тела H и интервале $[a, b]$ определения правой части уравнения.

7.2.1. Определение границы раздела при известной глубине залегания H и неизвестном интервале залегания (a, b)

Так как интервал (a, b) неизвестен, то представим уравнение (7.2) в виде

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} G \sigma H \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z(\zeta)}{(x - \zeta)^2 + H^2} d\zeta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x), \quad (7.6)$$

где полагаем функцию $f(x)$ определенной при $x \in (-\infty, \infty)$.

В случае необходимости функция $f(x)$ определяется нулем в области $(-\infty, \infty) \setminus (a, b)$. Применяя к уравнению (7.6) преобразование Фурье, представим его в виде

$$Z(\omega)B(\omega) = F_1(\omega), \quad (7.7)$$

где $Z(\omega)$, $B(\omega)$, $F_1(\omega)$ — преобразование Фурье функций $z(x)$, $G\sigma H/(x^2 + H^2)$, $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x)$ соответственно. Преобразование Фурье функции $g(x)$ вычисляется по формуле

$$G(\omega) = V(g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-ix\omega} dx, \quad -\infty < \omega < \infty.$$

Обратное преобразование Фурье вычисляется по формуле

$$g(x) = V^{-1}G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{ix\omega} d\omega, \quad -\infty < x < \infty.$$

Известно [153, с. 391] (формула 15), что преобразование Фурье функции $H/(x^2 + H^2)$ равно $\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-H|\omega|}$.

Известно [199], что уравнение (7.6) имеет единственное решение при достаточно общих условиях. Зафиксируем произвольное значение ε ($\varepsilon > 0$). По данному ε можно найти такое положительное число D , что

$$\int_{-\infty}^{-D} |Z^*(\omega)|^2 d\omega + \int_D^{\infty} |Z^*(\omega)|^2 d\omega \leq \varepsilon^2.$$

Здесь $Z^*(\omega)$ — решение уравнения (7.7). Очевидно, $Z^*(\omega)$ есть преобразование Фурье решения $z^*(x)$ уравнения (7.7).

Уравнение (7.7) будем решать итерационным методом на сетке $t_k = -D + 2Dk/N$, $k = 0, 1, \dots, N$. Каждому значению t_k поставим в соответствие комплексное число γ_k такое, что $|1 - \gamma_k B(t_k)| = 1/2$.

Рассмотрим итерационный процесс

$$Z_{n+1}(t_k) = Z_n(t_k) - \gamma_k(Z_n(t_k)B(t_k) - F_1(t_k)), \quad (7.8)$$

$k = 0, 1, \dots, N, n = 0, 1, \dots$

Нетрудно видеть, что итерационный процесс (7.8) сходится со скоростью $(1/2)^n$. Пользуясь теоремой о сходимости метода Ньютона – Канторовича с возмущением [120], можно показать, что если функция $F(\omega)$ задана в узлах t_k с точностью ε_1 , то величина погрешности при вычислении $Z^*(t_k)$, где $Z^*(\omega)$ – решение уравнения (7.7), оценивается неравенством $|Z^*(t_k) - Z_{n+1}(t_k)| \leq |Z_1(t_k) - Z_0(t_k)| 2^{-n} + 2\varepsilon_1$, справедливым при всех $k, k = 0, 1, \dots, N$.

Воспользовавшись квадратурными формулами вычисления обратного преобразования Фурье [105], находим значения функции $z(x_l)$ на сетке: $x_l = -A + 2lA/M, l = 0, 1, \dots, M$.

7.2.2. Определение границы раздела при известной глубине залегания H и известном интервале залегания (a, b)

Определив функцию $z(x)$ вне сегмента $[a, b]$ нулем и применив к уравнению (7.2) преобразование Фурье, получаем

$$Z(\omega)B(\omega) = F_1(\omega).$$

Возьмем в качестве начального приближения функцию $Z_0(\omega)$, являющуюся преобразованием Фурье функции, локализованной в интервале (a, b) , и построим итерационный процесс, состоящий из нескольких этапов.

I этап. Последовательные значения находятся по формуле

$$Z_{n+1}(t_k) = \alpha_n Z_n(t_k) + (1 - \alpha_n) (Z_n(t_k) - \gamma_k (Z_n(t_k)B(t_k) - F_1(t_k))),$$

$k = 0, 1, \dots, N$, где t_k определяются точно также, как в п. 7.1.1; $0 < \alpha_* \leq \alpha_k \leq \alpha^* < 1$.

II этап. По значениям $Z_1(t_k), k = 0, 1, \dots, N$, обратным преобразованием Фурье определяются приближения $z_1(x_k), k = 0, 1, \dots, M$.

III этап. На вектор $(z_1(x_0), \dots, z_1(x_M))$ воздействуем оператором ограничений $P_{[a,b]}$, действующим по формуле

$$P_{[a,b]}f(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in [a, b]; \\ 0, & \text{если } x \notin [a, b]. \end{cases}$$

В результате получаем вектор $(\bar{z}_1(x_0), \dots, \bar{z}_1(x_M))$.

IV этап. На вектор $(\bar{z}_1(x_0), \dots, \bar{z}_1(x_M))$ воздействуем оператором ограничений P^+ , действующим по формуле

$$P^+c = \begin{cases} c, & \text{если } c > 0, \\ 0, & \text{если } c \leq 0. \end{cases}$$

В результате получаем вектор $\bar{z}_1^*(x_0), \dots, \bar{z}_1^*(x_M)$.

V этап. Применив к вектору $\bar{z}_1^*(x_0), \dots, \bar{z}_1^*(x_M)$ квадратурные формулы преобразования Фурье, вычисляем $Z_2(t_k), k = 0, 1, \dots, N$.

VI этап. Переходим к первому этапу.

Докажем сходимость описанного итерационного процесса в метрике пространства $L_2(-\infty, \infty)$. При этом не будем учитывать дискретизацию. Введем функцию $\gamma(\omega)$ такую, что

$$\sup_{\omega} |1 - \gamma(\omega)B(\omega)| \leq 1.$$

Описанный выше итерационный процесс можно представить в виде последовательности формул:

$$z_n(x) = V^{-1}(Z_n(\omega)), \quad \bar{z}_n(x) = P^+P_{[a,b]}z_n(x), \quad \bar{Z}_n(\omega) = V\bar{z}_n(x),$$

$$\bar{Z}_{n+1}(\omega) = \alpha_n\bar{Z}_n(\omega) + (1 - \alpha_n)(\bar{Z}_n(\omega) - \gamma_n(\omega)(B(\omega)\bar{Z}_n(\omega) - F_1(\omega))),$$

$n = 0, 1, \dots, N^*$, где $0 < \alpha \leq \alpha_n \leq \beta < 1$.

В компактном виде итерационный процесс описывается выражением

$$\begin{aligned} Z_{n+1}(\omega) = & \alpha_n V (P^+ (P_{[a,b]} (V^{-1} Z_n(\omega)))) + \\ & + (1 - \alpha_n) (V (P^+ (P_{[a,b]} (V^{-1} Z_n(\omega)))) - \\ & - \gamma_n(\omega) (B(\omega) V (P^+ (P_{[a,b]} (F^{-1} Z_n(\omega)))) - F_1(\omega))), \end{aligned}$$

$n = 0, 1, \dots$

Нетрудно видеть, что норма оператора $KZ \equiv \bar{Z}(\omega) - \gamma(\omega)Z(\omega)B(\omega)$, где $\bar{Z}(\omega) = VP^+P_{[a,b]}V^{-1}Z(\omega)$, равна единице.

В самом деле,

$$\begin{aligned} \|KZ\| &= \|\bar{Z}(\omega) - \gamma(\omega)\bar{Z}(\omega)B(\omega)\| \leq \\ &\leq \sup_{-\infty < \omega < \infty} |1 - \gamma(\omega)B(\omega)| \|\bar{Z}(\omega)\| \leq \|\bar{Z}(\omega)\| = \\ &= \|V(P^+(P_{[a,b]}(V^{-1}Z(\omega))))\| \leq \|Z(\omega)\|. \end{aligned}$$

Из этой оценки и теоремы 10.3 из главы I следует сходимость описанного выше итерационного метода.

7.2.3. Определение границы раздела $z(x)$ при неизвестной глубине залегания H и неизвестном интервале залегания (a, b)

Аппроксимируем уравнение (7.1) нелинейным уравнением

$$G\sigma \int_a^b \frac{2Hz(\zeta) - z^2(\zeta)}{(x - \zeta)^2 + H^2} d\zeta = f(x).$$

Так как интервал (a, b) неизвестен, то вместо предыдущего уравнения рассмотрим более общее

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} G\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2Hz(\zeta) - z^2(\zeta)}{(x - \zeta)^2 + H^2} d\zeta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x). \quad (7.9)$$

Здесь полагаем, что функция $f(x)$ определена при $-\infty < x < \infty$. Итерационный процесс нахождения функции $z^*(x)$, описывающий верхнюю границу залегающего тела и глубину залегания H^* , состоит из нескольких этапов.

I этап. По нулевому приближению $z_0(x)$ (и последовательно вычисленным приближениям $z_n(x)$) находится нулевое (и последующие n -е) приближения к глубине залегания H . Для этого уравнение (7.9) интегрируется в пределах от $-\infty$ до ∞ . В результате имеем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} (2G\sigma\pi) \int_{-\infty}^{\infty} z_n(\zeta) d\zeta - G\sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} H_n^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} z_n^2(\zeta) d\zeta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

Отсюда

$$H_n = \frac{G\sigma \int_{-\infty}^{\infty} z_n^2(\zeta) d\zeta}{2G\sigma \int_{-\infty}^{\infty} z_n(\zeta) d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta) d\zeta},$$

$n = 0, 1, \dots$

II этап. От уравнения (7.9) возвращаемся к уравнению

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} G\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{z}(\zeta)}{(x - \zeta)^2 + H_n^2} d\zeta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x), \quad (7.10)$$

где $\tilde{z}(t) = 2H_n z(t) - z^2(t)$.

Применим к уравнению (7.10) преобразование Фурье. В результате получаем уравнение

$$B_n(\omega) \tilde{Z}(\omega) = F_1(\omega), \quad (7.11)$$

где

$$B_n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} G \sigma e^{-H_n(|\omega|)}, \quad \tilde{Z}_n(\omega) = V(\tilde{z}_n(t)).$$

Последующее приближение $\tilde{Z}_{n+1}(\omega)$ находится по формуле

$$\tilde{Z}_{n+1}(\omega) = \alpha_n \tilde{Z}_n(\omega) + (1 - \alpha_n)(\tilde{Z}_n(\omega) - \gamma_n(\omega)(B_n(\omega)\tilde{Z}_n(\omega) - F_1(\omega))).$$

Найдя очередное значение $\tilde{Z}_n(\omega)$, обратным преобразованием Фурье находим значения $\tilde{z}(t_k)$, а затем из уравнения $2H_n z(t_k) - z_n^2(t_k) = \tilde{z}(t_k) - z(t_k)$, $k = 1, 2, \dots, N$.

После этого происходит возврат к I этапу.

Остановка итерационного процесса производится или по заранее заданному числу итераций или по заранее заданной величине невязки.

7.3. Трехмерная задача

В этом разделе итерационные методы, описанные выше, распространяются на уравнения вида (7.5). Напомним [96], что преобразование Фурье функции $H/(x^2 + y^2 + H^2)^{3/2}$ равно $\exp(-H\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2})$.

Рассмотрим случай, когда плотность тела зависит от координат. Отметим, что в предыдущем разделе плотность предполагалась постоянной. Пусть плотность равна $\sigma(x, y, z)$. Тогда гравитационное поле тела на поверхности Земли описывается уравнением

$$HG \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(\zeta, \eta) d\zeta d\eta}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + H^2)^{3/2}} = f(x, y), \quad (7.12)$$

где

$$\psi(\zeta, \eta) = \int_{\varphi(\zeta, \eta)}^H \sigma(\zeta, \eta, u) du, \quad (7.13)$$

$z = \varphi(\zeta, \eta)$ — верхняя граница тяготеющих масс.

Применим к уравнению (7.12) преобразование Фурье.

Имеем $\Psi(\omega_1, \omega_2)K(\omega_1, \omega_2) = F(\omega_1, \omega_2)$, где $\Psi(\omega_1, \omega_2)$, $K(\omega_1, \omega_2)$, $F(\omega_1, \omega_2)$ преобразования Фурье функций $\psi(\xi, \eta)$, $HG/(\xi^2 + \eta^2)^{3/2}$, $f(x)$ соответственно.

Предположим, что уравнение (7.12) имеет единственное решение $\psi^*(\zeta, \eta) \in L_2(R_2)$, $\Psi^*(\omega_1, \omega_2)$ — преобразование Фурье функции $\psi^*(\zeta, \eta)$.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon (\varepsilon > 0)$. Найдется такое A , что

$$\int_{E_2 \setminus [-A, A]^2} |\Psi^*(\omega_1, \omega_2)|^2 d\omega_1 d\omega_2 \leq \varepsilon^2.$$

Введем сетку узлов $t_{kl} = (t_k, t_l)$, где $t_k = -A + \frac{2A}{N}$, $k = 0, 1, \dots, N$. Каждому узлу t_{kl} поставим в соответствие уравнение $\Psi(t_k, t_l)K(t_k, t_l) = F(t_k, t_l)$, $k, l = 0, 1, \dots, N$, которое решается итерационным методом

$$\Psi_{n+1}(t_k, t_l) = \alpha_n \Psi_n(t_k, t_l) + (1 - \alpha_n)(\Psi_n(t_k, t_l) - \gamma_{kl}(K(t_k, t_l)\Psi(t_k, t_l) - F(t_k, t_l))),$$

$k, l = 0, 1, \dots, N$. Сходимость этого метода обосновывается по аналогии с приведенными выше рассуждениями.

Определив по описанным выше итерационным процедурам границу $\psi(\zeta, \eta)$, функцию $\varphi(\zeta, \eta)$ вычисляем по формуле (7.13).

Исследуем возможность одновременного восстановления границы тела и его плотности в контактной задаче.

Будем исходить из уравнения

$$-G \iiint_Q \frac{\sigma(\zeta, \eta, \xi)(z - \xi)d\zeta d\eta d\xi}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \xi)^2)^{3/2}} = f(x, y, z), \quad (7.14)$$

т.е. будем предполагать, что градиент напряженности гравитационного поля известен при $z \leq 0$.

Аппроксимируем уравнение (7.14) следующим образом

$$-G \iiint_Q \frac{\sigma(\zeta, \eta, \xi)(z - \xi)d\zeta d\eta d\xi}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + (z - H)^2)^{3/2}} = f(x, y, z). \quad (7.15)$$

Введем функцию

$$\rho(\zeta, \eta, \xi) = \begin{cases} \sigma(\zeta, \eta, \xi) & \text{при } (\zeta, \eta, \xi) \in Q, \\ 0 & \text{при } (\zeta, \eta, \xi) \notin Q. \end{cases}$$

При этом будем считать, что плотность $\sigma(\zeta, \eta, \xi)$ является полиномом по степеням $\xi - H$:

$$\sigma(\zeta, \eta, \xi) = \sigma_0(\zeta, \eta) + \sigma_1(\zeta, \eta)(\xi - H) + \dots + \sigma_r(\zeta, \eta)(\xi - H)^r.$$

Тогда уравнение (7.15) можно представить в виде

$$-G \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^H \frac{\rho(\zeta, \eta, \xi)(z - \xi)d\zeta d\eta d\xi}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + (z - H)^2)^{3/2}} = f(x, y, z). \quad (7.16)$$

Обозначим через $Z = \psi(x, y)$ функцию, описывающую верхнюю часть поверхности тела Q . Тогда уравнение (7.16) записывается в виде

$$-\frac{G}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\psi(\zeta, \eta)}^H \rho(\zeta, \eta, \xi) \frac{z - \xi}{z - H} d\xi \right) \frac{(z - H)d\zeta d\eta}{(x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + (z - H)^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} f(x, y, z), \quad (7.17)$$

определенного при $-\infty \leq x, y \leq \infty, z \leq 0$.

Применим к уравнению (7.17) преобразование Фурье по переменным x и y . В результате имеем

$$GV \left(\int_{\psi(\zeta, \eta)}^H \rho(\zeta, \eta, \xi) \frac{z - \xi}{z - H} d\xi \right) e^{-|z-H|\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}} = -F_1(\omega_1, \omega_2, z). \quad (7.18)$$

Представим уравнение (7.18) в виде, удобном для дальнейших выкладок:

$$-G \int_{\psi(x, y)}^H \rho(x, y, \xi) \frac{z - \xi}{z - H} d\xi = f_2(x, y, z), \quad (7.19)$$

где $f_2(x, y, z) = V^{-1} \left(e^{|z-H|\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}} F_1(\omega_1, \omega_2, z) \right)$.

Пусть тяготеющие массы расположены в параллелепипеде $[-D, D, -D, D, H-h, H]$. Введем систему узлов: $t_k = -D + 2kD/N, k = 0, 1, \dots, N$, $\tau_k = H - h + kh/M, k = 0, 1, \dots, M$.

Рассмотрим сначала случай, когда плотность $\sigma(\zeta, \eta, \xi) = \sigma_0(\zeta, \eta)$, т.е. не зависит от ξ . В этом случае для каждого узла (t_k, t_l) составим систему уравнений:

$$\begin{aligned} G\sigma_0(t_k, t_l) \frac{\psi(t_k, t_l)^2 - H^2}{2H} &= f_2(t_k, t_l, 0), \\ G\sigma_0(t_k, t_l) \frac{(H + \psi(t_k, t_l))^2 - (2H)^2}{4H} &= f_2(t_k, t_l, -H). \end{aligned} \quad (7.20)$$

Разделив первое уравнение из (7.20) на второе, имеем

$$\frac{2((\psi(t_k, t_l))^2 - H^2)}{(\psi(t_k, t_l) - H)^2 + 4(\psi(t_k, t_l) - H)} = \frac{f_2(t_k, t_l, 0)}{f_2(t_k, t_l, -H)}.$$

Отсюда

$$\psi(t_k, t_l) = -\frac{2H - 3H\alpha(t_k, t_l)}{2 - \alpha(t_k, t_l)},$$

где $\alpha(t_k, t_l) = f_2(t_k, t_l, 0)/f_2(t_k, t_l, -H)$.

Теперь из уравнения (7.20) определяется $\sigma_0(t_k, t_l)$.

В случае, когда плотность $\sigma(\zeta, \eta, \xi)$ является полиномом по степеням ξ , задача сводится к решению нелинейной системы уравнений. Для

получения этой системы каждому из узлов (t_k, t_l) , $k, l = 0, 1, \dots, N - 1$, ставится в соответствие система уравнений

$$-G \int_{\psi(t_k, t_l)}^H \sum_{n=0}^r \sigma_n(t_k, t_l) (\xi - H)^n \frac{z_m - \xi}{z_m + H} d\xi = f_1(t_k, t_l, z_m), \quad (7.21)$$

где $z_m = mH$, $m = 0, 1, \dots, r + 1$.

Для приближенного решения нелинейной системы (7.21) применяется метод Ньютона – Канторовича. В качестве начального приближения берем приближенное решение линеаризованной задачи, алгоритм решения которой представлен выше.

8. Итерационные методы решения нелинейных обратных задач гравиметрии и магнитометрии

В этом разделе итерационные методы решения уравнений в свертках, изложенные разд. 1–6 данной главы, применяются к решению нелинейных обратных задач гравиметрии и магнитометрии.

8.1. Обзор численных методов решения обратных задач теории потенциала

Введем декартову прямоугольную систему координат, направив ось Oz вниз.

Если рудное тело залегает на глубине H , причем его нижняя поверхность совпадает с плоскостью $z = H$, а верхняя поверхность описывается функцией $z(x, y) = H - \varphi(x, y)$ с неотрицательной функцией $\varphi(x, y)$ и $\max \varphi(x, y) < H$, то гравитационное поле над поверхностью Земли описывается уравнением

$$G \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{H-\varphi(\zeta, \eta)}^H \frac{\sigma(\zeta, \eta, \xi) (\xi - z) d\zeta d\eta d\xi}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + (\xi - z)^2)^{3/2}} = f(x, y, z), \quad (8.1)$$

где G – гравитационная постоянная; $\sigma(\zeta, \eta, \xi)$ – плотность тела. Предполагается, что, во-первых, плотность $\sigma(\zeta, \eta, \xi) \equiv 0$ вне тела; во-вторых, плотность дифференцируема по ξ ; в-третьих, градиент напряженности гравитационного поля известен при $z \leq 0$.

На поверхности Земли уравнение (8.1) имеет вид

$$G \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{H-\varphi(\zeta, \eta)}^H \frac{\sigma(\zeta, \eta, \xi) \xi d\zeta d\eta d\xi}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + \xi^2)^{3/2}} = f(x, y, 0).$$

Вычислив по частям интеграл в левой части предыдущего уравнения, имеем

$$\begin{aligned}
& G \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma(\zeta, \eta, H - \varphi(\zeta, \eta)) d\zeta d\eta}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + (H - \varphi(\zeta, \eta))^2)^{1/2}} - \\
& - G \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma(\zeta, \eta, H) d\zeta d\eta}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + H^2)^{1/2}} + \\
& + G \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{H - \varphi(\zeta, \eta)}^H \frac{\sigma'_{\xi}(\zeta, \eta, \xi) d\zeta d\eta d\xi}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + \xi^2)^{3/2}} = f(x, y, 0).
\end{aligned}$$

Для упрощения дальнейших выкладок предположим, что плотность не зависит от ξ . Тогда приходим к уравнению

$$\begin{aligned}
G \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\zeta, \eta) \left[\frac{1}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + (H - \varphi(\zeta, \eta))^2)^{1/2}} - \right. \\
\left. - \frac{1}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + H^2)^{1/2}} \right] d\zeta d\eta = f(x, y, 0). \quad (8.2)
\end{aligned}$$

Линеаризация уравнения (8.2) приводит к уравнению

$$G \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\zeta, \eta) \left[\frac{H\varphi(\zeta, \eta)}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + H^2)^{3/2}} \right] d\zeta d\eta = f(x, y, 0). \quad (8.3)$$

Ниже будем считать плотность постоянной и для удобства описания предлагаемых в работе алгоритмов положим $G\sigma(\zeta, \eta) = 1/2\pi$.

Представим уравнения (8.2) и (8.3) в виде

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + (H - \varphi(\zeta, \eta))^2)^{1/2}} - \right. \\
\left. - \frac{1}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + H^2)^{1/2}} \right] d\zeta d\eta = f(x, y, 0) \quad (8.4)
\end{aligned}$$

и

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{H\varphi(\zeta, \eta)}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + H^2)^{3/2}} \right] d\zeta d\eta = f(x, y, 0). \quad (8.5)$$

Обратная задача магнитометрии по определению разделяющей поверхности двух сред сводится к интегральному уравнению [3]:

$$\Delta J \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\varphi(\zeta, \eta)}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + \varphi^2(\zeta, \eta))^{3/2}} - \frac{H}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + H^2)^{3/2}} \right] d\zeta d\eta = f(x, y), \quad (8.6)$$

где ΔJ – скачок вертикальной компоненты вектора намагниченности; $f(x, y)$ – аномальное магнитное поле, обусловленное отклонением иско-мой поверхности $\varphi(x, y)$ от асимптотической плоскости $z = H$.

Уравнение (8.6) удобно представить в виде

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\varphi(\zeta, \eta)}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + \varphi^2(\zeta, \eta))^{3/2}} \right] d\zeta d\eta = f_1(x, y), \quad (8.7)$$

положив $\Delta J = 1$,

$$f_1(x, y) = \frac{f(x, y)}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{H}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + H^2)^{3/2}} \right] d\zeta d\eta.$$

Таким образом, в обоих случаях задача сводится к решению интегральных уравнений Фредгольма первого рода.

Покажем, что и задача логарифмического потенциала при соответствующем упрощении приводит к подобным одномерным нелинейным интегральным уравнениям. Различные методы решения обратных задач логарифмического потенциала и подробная библиография приведены в [173, 175].

Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение

$$G\sigma \int_a^b \ln \frac{(x - s)^2 + H^2}{(x - s)^2 + (H - z(s))^2} ds = f(x), \quad (8.8)$$

где $z(\zeta)$ – форма поверхности тела; H – глубина залегания.

Линеаризация уравнения (8.8) приводит [183] к линейному интегральному уравнению

$$2G\sigma H \int_a^b \frac{z(\zeta) d\zeta}{(x - \zeta)^2 + H^2} = f(x). \quad (8.9)$$

Регуляризующие алгоритмы решения уравнения (8.8) исследовались в работах [91, 214]; итерационные методы решения уравнений вида (8.8), (8.9) предложены в работах [23, 56].

Аппроксимируем уравнение (8.8) более простым нелинейным уравнением

$$G\sigma \int_a^b \frac{2Hz(s) - z^2(s)}{(x-s)^2 + (H-z(s))^2} ds = f(x). \quad (8.10)$$

Для этого преобразуем подынтегральную функцию в уравнении (8.8):

$$\begin{aligned} \ln \frac{(x-s)^2 + H^2}{(x-s)^2 + (H-z(s))^2} &= \ln \frac{(x-s)^2 + (H-z(s))^2 + 2Hz(s) - z^2(s)}{(x-s)^2 + (H-z(s))^2} = \\ &= \ln \left(1 + \frac{2Hz(s) - z^2(s)}{(x-s)^2 + (H-z(s))^2} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left(\frac{2Hz(s) - z^2(s)}{(x-s)^2 + (H-z(s))^2} \right)^k. \end{aligned}$$

Полагая, что $\frac{2Hz(s) - z^2(s)}{(x-s)^2 + (H-z(s))^2} \ll 1$ и ограничиваясь первым членом предыдущего разложения, приходим к (8.10).

Наряду с уравнением (8.10) естественно рассмотреть уравнение

$$\begin{aligned} G\sigma \int_a^b \frac{2Hz(s) - z^2(s)}{(x-s)^2 + (H-z(s))^2} ds - \\ - \frac{G\sigma}{2} \int_a^b \frac{(2Hz(s) - z^2(s))^2}{((x-s)^2 + (H-z(s))^2)^2} ds = f(x), \end{aligned} \quad (8.11)$$

а также уравнения с более высоким порядком нелинейности (в разд. 2 приведены и другие нелинейные уравнения).

Продолжим функцию $f(x)$ нулем на оси $(-\infty, \infty)$ и представим уравнения (8.10), (8.11) следующим образом:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2Hz(s) - z^2(s)}{(x-s)^2 + (H-z(s))^2} ds = f(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (8.12)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2Hz(s) - z^2(s)}{(x-s)^2 + (H-z(s))^2} ds -$$

$$-\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2Hz(s) - z^2(s))^2}{((x-s)^2 + (H-z(s))^2)^2} ds = f(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (8.13)$$

Замечание. Возможны и другие способы продолжения функций $f(x)$, $f(x_1, \dots, x_l)$, $h(t, \tau)$, $h(t_1, \dots, t_l, \tau_1, \dots, \tau_l)$. Изложим эти способы на примере функции $f(x)$.

Пусть значения функции $f(x)$ известны на сегменте $[a, b]$.

Прежде всего продолжим функцию $f(x)$ на всю числовую ось. Возможны различные способы продолжения функции $f(x)$. Продолженную функцию обозначим через $\tilde{f}(x)$.

В качестве простейшего способа продолжения можно положить или

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [a, b], \\ 0, & x \in (-\infty, \infty) \setminus [a, b], \end{cases}$$

или

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [a, b], \\ C, & x \in (-\infty, \infty) \setminus [a, b], \end{cases}$$

где $C = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

Так как функция

$$f(z) = \int_a^b \frac{\varphi(\zeta)}{(z-\zeta)^2 + H^2} d\zeta$$

является аналитической в плоскости комплексной переменной $z = x + iy$ всюду за исключением сегментов, определяемых формулами

$$\{z = x + iy, a \leq x \leq b, y = \pm H\},$$

то всюду вне этих сегментов она разлагается в ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) z^k.$$

В предположении, что $H > 1$, оценим модули коэффициентов c_k , $k = 0, 1, \dots$

Проведем окружность с центром в начале координат и радиусом R , $R \geq 1$. Тогда функция $f(z)$ будет аналитической в круге $B(0, R)$ с центром в начале координат и радиуса R .

По теореме Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S(0, R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

следовательно,

$$\left| \frac{d^n f(z)}{dz^n} \right|_{z=0} = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{S(0,R)} f(\zeta) \frac{d}{dz^n} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta \right|_{z=0} \leq n! \sup_{\zeta \in S(0,R)} |f(\zeta)| \frac{1}{R^n},$$

где $S(0, R)$ – окружность радиуса R с центром в начале координат.

Таким образом, коэффициенты c_n ряда Тейлора оцениваются неравенством

$$|c_n| \leq \sup_{\zeta \in S(0,R)} |f(\zeta)| \frac{1}{R^n}.$$

Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) z^k$ можно рассматривать как продолжение функции $f(z)$ в области, где он сходится. Следовательно, ряд Тейлора равномерно сходится внутри круга радиуса H .

Если $|b - a| < H$, то функция $\varphi(\zeta)$ может быть продолжена на сегмент $[-H, H]$ при использовании последовательности полиномов Бернштейна, построенных на сегменте $[a, b]$.

Известно [213], что решение уравнений в свертках является некорректной задачей. Некорректность особенно четко проявляется при решении линейных уравнений первого рода вида:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) x(\tau) d\tau = f(t). \quad (8.14)$$

Обозначим через $H(\omega)$, $X(\omega)$, $F(\omega)$ преобразования Фурье функций $h(t)$, $x(t)$, $f(t)$.

Применив к уравнению (8.14) преобразование Фурье, получаем уравнение

$$H(\omega)X(\omega) = F(\omega) \quad (8.15)$$

в спектральной области.

Формально решение уравнения (8.15) можно записать формулой

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega)}{H(\omega)} e^{i\omega t} d\omega, \quad -\infty < t < \infty, \quad (8.16)$$

однако так как функции $F(\omega)$ и $H(\omega)$ могут быть бесконечно малыми величинами различного порядка при $\omega \rightarrow \pm\infty$, интеграл (8.16) может быть расходящимся и иметь смысл только как обобщенная функция.

В монографии [213] предложены алгоритмы регуляризации решения уравнения (8.14), заключающиеся в замене формулы (8.16) следующей:

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\omega, \alpha) F(\omega)}{H(\omega)} e^{i\omega t} d\omega, \quad -\infty < t < \infty,$$

где $\varphi(\omega, \alpha)$ — стабилизирующий множитель; α — параметр стабилизации.

Введение стабилизирующего множителя изменяет соотношение $F(\omega)/H(\omega)$ в достаточно широкой области значений ω , поэтому представляет интерес использование других методов регуляризации.

В качестве такого метода предлагается итерационно-проекционный метод в спектральной области. В применении к уравнениям вида (8.14) этот метод выглядит следующим образом.

Пусть A, B — вещественные числа; N, M — натуральные числа.

Введем сетки узлов: $t_k = -A + 2kA/N$, $k = 0, 1, \dots, N$, $\omega_k = -B + 2Bk/M$, $k = 0, 1, \dots, M$.

Для вычисления прямого преобразования Фурье функции $x(t)$ используем квадратурную формулу прямоугольников

$$X(\omega_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2A}{N} \sum_{l=0}^{N-1} x(t_l) \exp\{-i\omega_k t_l\} + R_N(x), \quad (8.17)$$

$k = 0, 1, \dots, M$.

Здесь $R_N(x)$ — погрешность квадратурной формулы.

По квадратурной формуле (8.17) вычислим преобразования Фурье $H(\omega)$ и $F(\omega)$ функций $h(t)$ и $f(t)$ на сетке узлов ω_k , $k = 0, 1, \dots, M$. Каждому значению ω_k поставим в соответствие уравнение

$$H(\omega_k)X(\omega_k) = F(\omega_k), \quad k = 0, 1, \dots, M,$$

которое будем решать методом итерации:

$$\begin{aligned} X_{n+1}(\omega_k) &= \\ &= \alpha_n X_n(\omega_k) + (1 - \alpha_n) (X_n(\omega_k) - \gamma_k (H(\omega_k)X_n(\omega_k) - F(\omega_k))), \end{aligned} \quad (8.18)$$

$n = 0, 1, \dots$

Здесь $0 < \alpha_* \leq \alpha_n \leq \alpha^* < 1$, а комплексные числа γ_k подбираются таким образом, чтобы $\gamma_k H(\omega_k) = \frac{1}{2}$.

Отметим, что если $H(\omega_k) \neq 0$, то это всегда возможно. Также заметим, что, как показано в работе [199], в линейных задачах гравиметрии функция $H(\omega)$ обращается в нуль не более чем в конечном числе точек.

Следовательно, всегда можно подобрать последовательность узлов ω_k (не обязательно равноотстоящих), для которой будет выполняться условие $H(\omega_k) \neq 0$.

Сходимость итераций (8.18) следует из теоремы 10.2 главы I. Важным свойством итерационного процесса (8.18) является его асимптотическая устойчивость в смысле Ляпунова к различного рода возмущениям.

Остановка итерационного процесса (8.18) производится по числу итераций, если число итераций $N_* = [\log_2 \frac{1}{\varepsilon}] + 1$, где ε — заданная точность.

Решение $x(t)$ уравнения (8.14) находится по квадратурным формулам вычисления обратного преобразования Фурье, использующим значения $X_{N_*}(\omega_k)$, $k = 0, 1, \dots, M$. Простейшей квадратурной формулой такого вида является формула прямоугольников:

$$x(t_l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{M-1} h_k X_{N_*}(\omega_k) e^{i\omega_k t_l}, \quad l = 0, 1, \dots, N, \quad (8.19)$$

где $h_k = \omega_{k+1} - \omega_k$, $k = 0, 1, \dots, M - 1$.

Естественно в качестве узлов ω_k , $k = 0, 1, \dots, M$, и t_l , $l = 0, 1, \dots, N$, взять равноотстоящие узлы и положить $A = B$, $N = M$.

Помимо устойчивости и фильтрационных свойств итерационного процесса (8.18), имеется еще два регуляризующих фактора в описанном алгоритме:

1) уравнения $H(\omega_k)X(\omega_k) = F(\omega_k)$, отвечающие значениям $H(\omega_k)$, равным нулю или близким к нулю, отпускаются. Возникающая при том погрешность в вычислении обратного преобразования Фурье незначительна;

2) так как A — достаточно большое, но конечное число, происходит, по сути дела, регуляризация, заключающаяся в замене операторов в прямом и обратном преобразованиях Фурье

$$U(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-i\omega t} dt, \quad u(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

операторами

$$U(\omega) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^A u(t) e^{-i\omega t} dt, \quad u(t) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^A U(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Отметим, что перечисленные выше свойства алгоритма сохраняются и при решении нелинейных уравнений более общими алгоритмами, обсуждаемыми ниже.

8.2. Приближенное решение обратной задачи логарифмического потенциала

Метод решения обратной задачи логарифмического потенциала изложим на примере уравнения (8.12).

Полагая, что $\max_{-\infty \leq s \leq \infty} |z(s)| < H$, представим левую часть уравнения (8.12) в виде ряда

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2Hz(s) - z^2(s)}{(x-s)^2 + H^2} \left(\frac{H^2 - (H - z(s))^2}{(x-s)^2 + H^2} \right)^k ds = f(x).$$

Рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2Hz(s) - z^2(s)}{(x-s)^2 + H^2} ds = f(x). \quad (8.20)$$

Введем функцию $u(s) = (2Hz(s) - z^2(s))$ и рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(s)}{(x-s)^2 + H^2} ds = f(x). \quad (8.21)$$

Применив к уравнению (8.21) преобразование Фурье, имеем

$$U(\omega) \frac{1}{H} e^{-H|\omega|} = F(\omega), \quad (8.22)$$

где $U(\omega)$ и $F(\omega)$ – преобразование Фурье функций $u(x)$ и $f(x)$ соответственно.

Пусть A – достаточно большое положительное число; N – целое число. Введем сетку узлов $\omega_k = -A + Ak/N$, $k = 0, 1, \dots, 2N$.

Пусть $q_k = \frac{He^{H|\omega_k|}}{2}$, $k = 0, 1, \dots, 2N$.

Приравнивая обе части уравнения (8.22) в точках ω_k , приходим к системе уравнений

$$\frac{1}{H} U(\omega_k) e^{-H|\omega_k|} = F(\omega_k), \quad k = 0, 1, \dots, 2N,$$

каждое из уравнений которой решается по итерационному методу

$$U^{m+1}(\omega_k) = U^m(\omega_k) - q_k \left(\frac{1}{H} U^m(\omega_k) e^{-H|\omega_k|} - F(\omega_k) \right), \quad m = 0, 1, \dots,$$

со скоростью сходимости $O\left(\left(\frac{1}{2}\right)^m\right)$.

Вычислив с необходимой точностью ε ($\varepsilon > 0$) значение $U(\omega_k)$, $k = 0, 1, \dots, 2N$, и используя квадратурные формулы вычисления обратного преобразования Фурье, находим значения $u(s_k)$ на сетке узлов s_k , $k = 0, 1, \dots, 2N$. В качестве сетки узлов s_k удобно взять $s_k = -A + Ak/N$, $k = 0, 1, \dots, 2N$. Из квадратного уравнения

$$z^2(s_k) - 2Hz(s_k) + u(s_k) = 0, \quad (8.23)$$

$k = 0, 1, \dots, 2N$, находим $z(s_k)$, $k = 0, 1, \dots, 2N$.

Из определения функции $u(s)$ видно, что уравнения (8.23) разрешимы при $-\infty < u(s) \leq H^2$. Отметим, что поставленной задаче отвечают значения $0 \leq u(s) \leq H^2$.

Опишем изменения, которые необходимо внести в вычислительную схему в предположении, что вместо уравнения (8.20) рассматривается уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2Hz(s) - z^2(s)}{(x-s)^2 + H^2} ds + \\ & + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2Hz(s) - z^2(s))(H^2 - (H - z(s))^2)}{((x-s)^2 + H^2)^2} ds = f(x). \end{aligned} \quad (8.24)$$

Введем функции $u_1(s) = (2Hz(s) - z^2(s))$, $u_2(s) = u_1(s)(H^2 - (H - z(s))^2)$ и представим уравнение (8.24) в виде

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_1(s) ds}{(x-s)^2 + H^2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_2(s) ds}{((x-s)^2 + H^2)^2} = f(x). \quad (8.25)$$

Обозначим через $U_1(\omega)$, $U_2(\omega)$, $H_1(\omega)$, $H_2(\omega)$, $F(\omega)$ преобразование Фурье функции $u_1(s)$, $u_2(s)$, $\frac{1}{s^2 + H^2}$, $\frac{1}{(s^2 + H^2)^2}$, $f(s)$ соответственно.

Применив к (8.25) преобразование Фурье, имеем

$$H_1(\omega)U_1(\omega) + H_2(\omega)U_2(\omega) = F(\omega). \quad (8.26)$$

Введем две сетки узлов: $\omega_k = -A + Ak/N$, $k = 0, 1, \dots, 2N$, $\omega_k^* = \omega_k + A/(mN)$, $k = 0, 1, \dots, 2N$, m — целое число.

Будем считать в промежутке $[\omega_k, \omega_k^*]$ функции $U_1(\omega)$, $U_2(\omega)$ постоянными.

Тогда для определения значений $U_1(\omega_k)$, $U_2(\omega_k)$ получаем $2N$ систем уравнений

$$\begin{aligned} & H_1(\omega_k)U_1(\omega_k) + H_2(\omega_k)U_2(\omega_k) = F(\omega_k), \\ & H_1(\omega_k^*)U_1(\omega_k) + H_2(\omega_k^*)U_2(\omega_k) = F(\omega_k^*), \quad k = 0, 1, \dots, 2N - 1. \end{aligned} \quad (8.27)$$

Выбором ω_k^* всегда можно добиться того, что система (8.27) будет однозначно разрешимой.

Найдя из (8.27) $U_1(\omega_k)$, $k = 0, 1, \dots, 2N - 1$, и повторяя приведенные выше рассуждения, находим значения $z(s_k)$, $s_k = -A + Ak/N$, $k = 0, 1, \dots, 2N$.

Замечание. В случае, если рассматриваются уравнения с нелинейностями третьего и более высоких порядков, для их решения нужно ввести три и более сеток узлов.

В приложении G приведены модельные примеры, иллюстрирующие эффективность изложенных в этом разделе алгоритмов.

8.3. Приближенное решение обратной задачи в трехмерном случае

Общий случай изложим на примере уравнения (8.4). Очевидно,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + (H - \varphi(\zeta, \eta))^2)^{1/2}} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + H^2)^{1/2}} \right] d\zeta d\eta = \\
& = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + H^2 + (\varphi^2(\zeta, \eta) - 2H\varphi(\zeta, \eta)))^{1/2}} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + H^2)^{1/2}} \right] d\zeta d\eta = \\
& = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + H^2)^{1/2} (1 + u)^{1/2}} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + H^2)^{1/2}} \right] d\zeta d\eta = f(x, y), \quad (8.28)
\end{aligned}$$

где $u = (\varphi^2(\zeta, \eta) - 2H\varphi(\zeta, \eta))/((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + H^2)$.

В предположении, что $|u| < 1$ функция $\frac{1}{(1+u)^{1/2}}$ разлагается в ряд

$$\frac{1}{(1 + u)^{1/2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n - 1)!!}{2^n n!} u^n. \quad (8.29)$$

Подставляя (8.29) в (8.28) и пользуясь равномерной сходимостью ряда (8.29), получаем уравнение

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\varphi^2(\zeta, \eta) - 2H\varphi(\zeta, \eta))^n d\zeta d\eta}{((x-\zeta)^2 + (y-\eta)^2 + H^2)^{n+1/2}} = f(x, y). \quad (8.30)$$

Аппроксимируем уравнение (8.30), ограничившись конечным числом слагаемых в левой части.

Если ограничиться одним слагаемым, получаем уравнение

$$-\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\varphi^2(\zeta, \eta) - 2H\varphi(\zeta, \eta)) d\zeta d\eta}{((x-\zeta)^2 + (y-\eta)^2 + H^2)^{3/2}} = f(x, y). \quad (8.31)$$

В случае двух слагаемых приходим к уравнению

$$-\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\varphi^2(\zeta, \eta) - 2H\varphi(\zeta, \eta)) d\zeta d\eta}{((x-\zeta)^2 + (y-\eta)^2 + H^2)^{3/2}} + \frac{3}{8} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\varphi^2(\zeta, \eta) - 2H\varphi(\zeta, \eta))^2 d\zeta d\eta}{((x-\zeta)^2 + (y-\eta)^2 + H^2)^{5/2}} = f(x, y). \quad (8.32)$$

Пусть $X_1(\omega_1, \omega_2)$, $X_2(\omega_1, \omega_2)$, $H_1(\omega_1, \omega_2)$, $H_2(\omega_1, \omega_2)$, $F(\omega_1, \omega_2)$ — преобразование Фурье функций $\varphi^2(x, y) - 2H\varphi(x, y)$, $(\varphi^2(x, y) - 2H\varphi(x, y))^2$, $\frac{1}{(x^2+y^2+H^2)^{3/2}}$, $\frac{1}{(x^2+y^2+H^2)^{5/2}}$, $f(x, y)$.

Применим к уравнению (8.32) преобразование Фурье.

В результате получаем уравнение в спектральной области:

$$-\frac{1}{2} X_1(\omega_1, \omega_2) H_1(\omega_1, \omega_2) + \frac{3}{8} X_2(\omega_1, \omega_2) H_2(\omega_1, \omega_2) = F(\omega_1, \omega_2). \quad (8.33)$$

Для решения уравнения (8.33) составим две сетки узлов.

Возьмем достаточно большое число A и в квадрате $[-A, A]^2$ построим сетку узлов $v_{kj} = (v_k, v_j)$, $k, j = 0, 1, \dots, 2N$, где $v_k = -A + kA/N$, $k = 0, 1, \dots, 2N$. Пусть $\alpha = A/Nm$, где m — целое число. Введем еще одну сетку узлов: $\bar{v}_{kj} = (\bar{v}_k, \bar{v}_j)$, $k, j = 0, 1, \dots, 2N-1$, где $\bar{v}_k = v_k + \alpha$, $k = 0, 1, \dots, 2N-1$.

При составлении системы уравнений сделаем следующее предположение: будем считать, что в частотной области функции $X_i(\omega_1, \omega_2)$, $i = 1, 2$, изменяются достаточно медленно. Это предположение позволяет положить значения $X_i(\omega_1, \omega_2)$, $i = 1, 2$, равными в точках v_{kj} и \bar{v}_{kj} и

построить систему, состоящую из $4N^2$ линейных систем алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}X_1(v_k, v_j)H_1(v_k, v_j) + \frac{3}{8}X_2(v_k, v_j)H_2(v_k, v_j) &= F(v_k, v_j), \\ -\frac{1}{2}X_1(v_k, v_j)H_1(\bar{v}_k, \bar{v}_j) + \frac{3}{8}X_2(v_k, v_j)H_2(\bar{v}_k, \bar{v}_j) &= F(\bar{v}_k, \bar{v}_j), \end{aligned} \quad (8.34)$$

$k, j = 0, 1, \dots, 2N - 1$.

Подобное построение системы позволяет решать параллельно $4N^2$ систем, состоящих из двух уравнений с двумя неизвестными. Однозначная разрешимость этих систем следует из того, что соответствующие определители отличны от нуля.

Вычислив значения $X_1(v_k, v_l)$, $k, l = 0, 1, \dots, 2N - 1$, по кубатурным формулам для обратного преобразования Фурье, находим значения $\varphi(x_k, x_l)$ на некоторой сетке узлов $x_{k,l}$. Отметим, что, по-видимому, удобной для этого является сетка узлов $x_{k,l} = (x_k, x_l)$, $k, l = 0, 1, \dots, 2N$, $x_k = -A + Ak/N$, $k = 0, 1, \dots, 2N$.

Замечание. При решении уравнения (8.32) используется одна сетка узлов.

8.4. Модельные примеры

Для иллюстрации изложенных выше алгоритмов рассмотрим две задачи: одномерную и двумерную.

Задача 8.1. Введем прямоугольную декартову систему координат, направив ось Oz вниз. Пусть $H = \text{const}$ и в области, ограниченной поверхностями $z = H$ и $z = H - z(x)$, расположено тело с плотностью σ , $G\sigma = 1$. Пусть вертикальная составляющая гравитационного поля, создаваемого этим телом, равна $\pi \frac{1+H}{H(x^2+(H+1)^2)}$. Требуется найти функцию $z(x)$.

Решение этой задачи описывается уравнением

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{(x-s)^2 + H^2}{(x-s)^2 + (H-z(s))^2} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1+H}{H(x^2 + (H+1)^2)}. \quad (8.35)$$

Линеаризация уравнения (8.35) описывается уравнением

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2Hz(s)ds}{(x-s)^2 + H^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1+H}{H(x^2 + (H+1)^2)}, \quad (8.36)$$

решением которого является функция $z(s) = \frac{1}{2H} \frac{1}{s^2+1}$.

Во втором приближении уравнение (8.35) аппроксимируется интегральным уравнением

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2Hz(s) - z^2(s)}{(x-s)^2 + H^2} ds = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1+H}{H(x^2 + (H+1)^2)}. \quad (8.37)$$

Вначале найдем точные решения этих уравнений.

Известно [96], что преобразование Фурье функции $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{H}{x^2+H^2}$ является табличным:

$$V \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{H}{H^2 + x^2} \right) = e^{-H|\omega|}.$$

Применяя к уравнению (8.36) преобразование Фурье, имеем

$$\sqrt{2\pi} Z(\omega) e^{-H|\omega|} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{H} e^{-(H+1)|\omega|}. \quad (8.38)$$

Из уравнения (8.38) имеем

$$Z(\omega) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{3/2}} \frac{1}{H} e^{-|\omega|},$$

следовательно,

$$z(s) = \frac{1}{2H} \frac{1}{1+s^2}. \quad (8.39)$$

Перейдем к решению уравнения (8.37).

Полагая $u(s) = 2z(s) - \frac{z^2(s)}{H}$, преобразуем уравнение (8.37) к виду

$$\frac{H}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(s)}{(x-s)^2 + H^2} ds = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1+H}{H(x^2 + (H+1)^2)}. \quad (8.40)$$

Применим к уравнению (8.40) преобразование Фурье, в результате уравнение (8.40) преобразуется к виду

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} U(\omega) e^{-H|\omega|} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{H} e^{-(H+1)|\omega|}. \quad (8.41)$$

Отсюда

$$U(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{H} e^{-|\omega|},$$

следовательно,

$$u(s) = \frac{1}{H} \frac{1}{s^2 + 1}.$$

Отсюда $z^2(s) - 2Hz(s) + 1/(s^2 + 1) = 0$.

Следовательно, функции

$$z_{1,2}(s) = H \pm \sqrt{H^2 - \frac{1}{s^2 + 1}}$$

являются формальными решениями уравнения (8.37).

Так как при $s \rightarrow \pm\infty$ $z(s) \rightarrow 0$, то решением указанной задачи является функция

$$z_2(s) = H - \sqrt{H^2 - \frac{1}{s^2 + 1}}. \quad (8.42)$$

Оценим величину поправки, обусловленной переходом от уравнения (8.36) к уравнению (8.37). Для этого разложим функцию $z_2(s)$, представленную формулой (8.42), в ряд Тейлора. Очевидно,

$$z_2(s) = \frac{1}{2H(s^2 + 1)} - \frac{1}{4H^3(s^2 + 1)^2} + \dots$$

Таким образом, поправка, вносимая переходом от уравнения (8.36) к уравнению (8.37), есть величина порядка $(1/(4H^3(s^2 + 1)^2))$.

В четвертом приближении эта задача описывается уравнением

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2Hz(s) - z^2(s)}{(x-s)^2 + H^2} ds + \\ & + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2Hz(s) - z^2(s))(H^2 - (H - z(s))^2)}{((x-s)^2 + H^2)^2} ds = \\ & = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + H}{H(x^2 + (H + 1)^2)}. \end{aligned} \quad (8.43)$$

Найдем приближенное решение уравнения (8.43).

Введем обозначения: $u_1(s) = 2z(s) - z^2(s)/H$, $u_2(s) = u_1(s)(H^2 - (H - z(s))^2)$.

Тогда уравнение (8.43) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{H}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_1(s)}{(x-s)^2 + H^2} ds + \frac{H}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_2(s)}{((x-s)^2 + H^2)^2} ds = \\ & = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + H}{H(x^2 + (H + 1)^2)}. \end{aligned} \quad (8.44)$$

В работе [96] указаны преобразования Фурье функций $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{H}{H^2+x^2}$ и $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{H}{(x^2+H^2)^2}$ равные, соответственно, $e^{-H|\omega|}$ и $-|\omega|e^{-H|\omega|}$.

Применяя преобразование Фурье к уравнению (8.44), имеем

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} U_1(\omega) e^{-H|\omega|} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} U_2(\omega) |\omega| e^{-H|\omega|} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{H} e^{-(H+1)|\omega|}. \quad (8.45)$$

Введем две сетки узлов: $\omega_k^1 = -B + 2kB/N$, $k = 0, 1, \dots, N$, $\omega_k^2 = \omega_k^1 + B/N$, $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Будем считать функции $U_1(\omega)$ и $U_2(\omega)$ постоянными в интервалах $\Delta_k = [\omega_k^1, \omega_{k+1}^1)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, полагая $U_1(\omega) = u_{1,k}$ при $\omega \in \Delta_k$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, $U_2(\omega) = u_{2,k}$ при $\omega \in \Delta_k$, $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Приравнивая левые и правые части уравнения (8.45) в точках ω_k^1, ω_k^2 , $k = 0, 1, \dots, N-1$, получаем N систем уравнений:

$$\begin{aligned} u_{1,k} e^{-H|\omega_k^1|} - u_{2,k} |\omega_k^1| e^{-H|\omega_k^1|} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{H} e^{-(H+1)|\omega_k^1|}, \\ u_{1,k} e^{-H|\omega_k^2|} - u_{2,k} |\omega_k^2| e^{-H|\omega_k^2|} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{H} e^{-(H+1)|\omega_k^2|}, \end{aligned} \quad (8.46)$$

$k = 0, 1, \dots, N-1$.

Представим систему (8.46) в более удобном виде:

$$\begin{aligned} u_{1,k} - u_{2,k} |\omega_k^1| &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{H} e^{-|\omega_k^1|}, \\ u_{1,k} - u_{2,k} |\omega_k^2| &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{H} e^{-|\omega_k^2|}, \end{aligned} \quad (8.47)$$

$k = 0, 1, \dots, N-1$.

Определитель системы (8.47) отличен от нуля: $(\text{Det})_k = |\omega_k^1| - |\omega_k^2|$.

Следовательно, системы (8.47) при $k = 0, 1, \dots, N-1$ однозначно разрешимы, их решения равны

$$u_{1k} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-|\omega_k^1|}}{H} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{|\omega_k^1|}{|\omega_k^2| - |\omega_k^1|} \cdot \frac{1}{H} \left(e^{-|\omega_k^1|} - e^{-|\omega_k^2|} \right),$$

$k = 0, 1, \dots, N-1$.

Первое слагаемое в предыдущем выражении определяет решение задачи, учитывающее второе приближение, второе слагаемое определяет поправку, вносимую третьим и четвертым приближениями.

Применяя к предыдущему выражению обратное преобразование Фурье, получаем решение задачи логарифмического потенциала в четвертом приближении.

Результаты решения задачи 8.1 приведены в приложении G.

Задача 8.2. Введем прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$, направив ось Oz вниз. Пусть $H = \text{const}$ и в области, ограниченной плоскостью $z = H$ и поверхностью $z = H - z(x, y)$, расположено тело с плотностью $\sigma = 1$. Пусть вертикальная составляющая гравитационного поля, создаваемая этим телом, известна на некоторой сетке узлов.

Требуется найти функцию $z(x, y)$. Будем решать эту задачу при разных значениях H в предположении, что:

а) гравитационное поле, создаваемое телом, известно на равномерной сетке узлов на поверхности Земли;

б) гравитационное поле, создаваемое телом, известно на неравномерной сетке узлов на поверхности Земли.

Эта задача описывается уравнением (8.28), нелинейными приближениями к которому являются уравнения (8.31) и (8.32).

В качестве модельного примера рассмотрим восстановление поверхности тела, определяемой уравнениями $z = H$ и $z = H - \varphi_1(x, y)$, где H — глубина залегания,

$$\varphi_1(x, y) = \begin{cases} \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}, & (x^2 + y^2) \leq R^2, \\ 0, & (x^2 + y^2) > 0. \end{cases} \quad (8.48)$$

Для нахождения вертикальной составляющей гравитационного поля на поверхности Земли, создаваемого полушаром, залегающим на глубине H , решаем прямую задачу

$$f_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{H-\varphi_1(\zeta, \eta)}^H \frac{\xi d\zeta d\eta d\xi}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + \xi^2)^{3/2}}. \quad (8.49)$$

Для этого правая часть в формуле (8.49) аппроксимируется кубатурной формулой прямоугольников, построенной по равноотстоящим узлам.

Результаты решения задачи 8.2 приведены в приложении G.

9. Итерационные методы восстановления пространственных изображений, искаженных системами с абберациями

При решении различных задач геофизики возникает проблема передачи изображений движущихся объектов, а также передача изображений с движущихся объектов. В этом случае возникают искажения, обусловленные движением предметов, а также абберациями.

Одной из важных является задача устранения искажений, обусловленных "смазыванием" из-за движения предметов, другими факторами, вносимыми используемыми системами, а также абберациями.

Подробный обзор методов восстановления входных сигналов, искаженных линейными, инвариантными к пространственным и временным сдвигам системами, изложен в монографиях [77, 78].

Вопросы восстановления изображений, искаженных пространственно-зависимыми системами отображений, исследовались в [159] и в обзоре [207].

В случаях, когда функция рассеивания точки (ФРТ), описывающая размывание, пространственно зависима, реставрация изображения становится невероятно сложной. В этом случае уже не может быть использовано преобразование Фурье для нахождения обратных фильтров, а методы получения оценки оказываются слишком сложными для вывода и реализации.

Один из методов коррекции пространственно зависимых изображений связан [161] с преобразованием всех непрерывно-пространственных функций в дискретную форму с помощью выборки или разложения по функциональному ряду. Теоретически в этом случае можно найти оценку распределения интенсивности излучения исходного объекта, вычислив с помощью численных методов обратные функции, а при наличии шумов — используя статистическую оценку. Однако эти грубые методы требуют достаточно большого объема вычислений.

Другой подход к восстановлению пространственно зависимых изображений основан на разбиении импульсной реакции на области, имеющие различные пространственно инвариантные ФРТ. Роббинс и Хуанг [159] показали, что в некоторых случаях возможно получение решения в замкнутой форме, если известна импульсная реакция линейной пространственно зависимой искажающей системы.

В данном разделе предлагается несколько итерационных методов восстановления изображения, искаженного линейной пространственно зависимой системой с аберрациями типа комы. Импульсную реакцию такой системы можно представить в виде $r_1^{-2}h(r_0/r_1, \Theta_0 - \Theta_1)$, где (r_0, Θ_0) , (r_1, Θ_1) — полярные координаты точек в выходной и входной плоскостях. Обозначим сигнал на входе системы через $u(r_1, \Theta_1)$; выходной сигнал $\nu(r_0, \Theta_0)$ связан с входным в полярных координатах соотношением [159]:

$$\nu(r_0, \Theta_0) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} h\left(\frac{r_0}{r_1}, \Theta_0 - \Theta_1\right) u(r_1, \Theta_1) r_1^{-1} dr_1 d\Theta_1. \quad (9.1)$$

Как видно из выражения (9.1), передающая система инвариантна к сдвигу по Θ и зависима по r . Следовательно, к нему можно применить преобразование Фурье по Θ_0 и Меллина по r_0 .

Ниже будет показано, что для сходимости метода достаточно, чтобы функция $\mathfrak{M} \mathfrak{S}h(r, \Theta)$, где \mathfrak{M} и \mathfrak{S} – соответственно операторы преобразований Меллина и Фурье, не обращалась в нуль при конечных значениях ω, z или обращалась в нуль в конечном числе точек или кривых на плоскости (ω, z) .

Обозначим через $\Omega_1, \Omega_2, D_1, D_2$ соответственно множества $0 \leq r < \infty, 0 \leq \Theta \leq 2\pi, 1/2 - i\infty < p < 1/2 + i\infty, -\infty < \omega < \infty$. Введем преобразования Фурье от периодической функции:

– прямое:

$$\mathfrak{S}f \equiv \tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(\Theta) e^{-i2\pi\omega\Theta} d\Theta;$$

– обратное:

$$\mathfrak{S}^{-1}\tilde{f} \equiv f(\Theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{i2\pi\omega\Theta} d\omega,$$

а также нормы:

$$\|f\|_{L_2(\Omega_1)} = \left(\int_{\Omega_1} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} = \left(\int_0^{\infty} f(x) \bar{f}(x) dx \right)^{1/2},$$

$$\|f\|_{L_2(\Omega_2)} = \left(\int_{\Omega_2} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} = \left(\int_0^{2\pi} f(x) \bar{f}(x) dx \right)^{1/2},$$

$$\|f\|_{L_2(D_2)} = \left(\int_{D_2} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \bar{f}(x) dx \right)^{1/2}.$$

Лемма 9.1. Если абсолютно сходится двойной интеграл

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} |f(\Theta)| |\tilde{f}(\omega)| d\Theta d\omega,$$

то

$$\|f(\Theta)\|_{L_2(\Omega_2)} = \|\tilde{f}(\omega)\|_{L_2(D_2)}.$$

Доказательство. Рассмотрим $\|\tilde{f}(\omega)\|_{L_2(D_2)}$:

$$\|\tilde{f}(\omega)\|_{L_2(D_2)}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) \overline{\tilde{f}(\omega)} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi)^{-1/2} \int_0^{2\pi} f(\Theta) e^{-i2\pi\omega\Theta} d\Theta \overline{\tilde{f}(\omega)} d\omega =$$

$$\begin{aligned}
&= (2\pi)^{-1/2} \int_0^{2\pi} f(\Theta) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\omega\Theta} \overline{\tilde{f}(\omega)} d\omega \right\} d\Theta = \\
&= (2\pi)^{-1/2} \int_0^{2\pi} f(\Theta) \overline{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi\omega\Theta} \tilde{f}(\omega) d\omega} d\Theta = \int_0^{2\pi} f(\Theta) \overline{f(\Theta)} d\Theta = \|f(\Theta)\|_{L_2(\omega_2)}^2.
\end{aligned}$$

Изменение порядка интегрирования законно в силу абсолютной сходимости интеграла $\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} |f(\Theta)| |\tilde{f}(\omega)| d\omega d\Theta$.

Лемма 9.2. Пусть функция $F(p) = \int_0^{\infty} f(t)t^{p-1}dt$ аналитическая при $\text{Re } p \geq 0,5$ ($f(t) = (2\pi i)^{-1} \int_{0,5-i\infty}^{0,5+i\infty} F(p)t^{-p}dp$). Тогда

$$\|\mathfrak{M}f(t)\|_{L_2(D_1)} = \|F(p)\|_{L_2(D_1)} = \sqrt{2\pi} \|f(t)\|_{L_2(\Omega_1)};$$

$$\|\mathfrak{M}^{-1}F(p)\|_{L_2(\Omega_1)} = \|f(t)\|_{L_2(\Omega_1)} = \left(\int_0^{\infty} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \|F(p)\|_{L_2(D_1)};$$

$$\|F(p)\|_{L_2(D_1)} = \left(\frac{1}{i} \int_{0,5-i\infty}^{0,5+i\infty} |F(p)|^2 dp \right)^{1/2}.$$

Доказательство. В преобразовании Меллина $F(p) = \int_0^{\infty} f(t)t^{p-1}dt$ сделаем замены: $t = e^\nu$ и $p = c + i\sigma$. Тогда

$$F(p) = F(c + i\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(e^\nu) e^{\nu(c+i\sigma)} d\nu,$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p)t^{-p}dp = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(c + i\sigma) e^{-\nu(c+i\sigma)} d\sigma = f(e^\nu).$$

Найдем норму преобразования Меллина в $L_2(c - i\infty, c + i\infty)$. Очевидно,

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} |F(p)|^2 dp = i \int_{-\infty}^{\infty} F(c + i\sigma) \overline{F(c + i\sigma)} d\sigma =$$

$$\begin{aligned}
&= i \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(e^\nu) e^{\nu(c+i\sigma)} d\nu \right\} \overline{F(c+i\sigma)} d\sigma = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} i f(e^\nu) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{\nu(c+i\sigma)} \overline{F(c+i\sigma)} d\sigma \right\} d\nu = \\
&= i \int_{-\infty}^{\infty} f(e^\nu) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{\nu(c-i\sigma)} F(c+i\sigma) d\sigma \right\} d\nu = \\
&= i \int_{-\infty}^{\infty} f(e^\nu) e^{2\nu c} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\nu(c+i\sigma)} F(c+i\sigma) d\sigma \right\} d\nu = \\
&= i \int_{-\infty}^{\infty} f(e^\nu) 2\pi e^{2\nu c} \overline{f(e^\nu)} d\nu.
\end{aligned}$$

Таким образом, $\int_{-\infty}^{\infty} |F(c+i\sigma)|^2 d\sigma = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(e^\nu) e^{\nu c}|^2 d\nu$. Возвращаясь к исходным переменным, получим

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} |F(p)|^2 dp = 2\pi i \int_0^{\infty} |t^c f(t)|^2 t^{-1} dt. \quad (9.2)$$

Следовательно, норма преобразования Меллина в пространстве $L_2(c-i\infty, c+i\infty)$ будет равна

$$\|F(p)\| = \left\{ \frac{1}{i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} |F(p)|^2 dp \right\}^{1/2}, \quad (9.3)$$

или

$$\|F(p)\|_{L_2(c-i\infty, c+i\infty)} = \sqrt{2\pi} \left(\int_0^{\infty} |t^c f(t)|^2 t^{-1} dt \right)^{1/2}. \quad (9.4)$$

Оценим норму $\|F(p)\|$ при различных значениях c . Пусть $c = 1/2$. Тогда $\|F(p)\|_{L_2(D_1)} = \sqrt{2\pi} \|f(t)\|_{L_2(\Omega_1)}$. Если $c \neq 1/2$, то на функцию $f(t)$ необходимо налагать дополнительные ограничения. Рассмотрим случай, когда $c > 1/2$ (случай, когда $c < 1/2$, не рассматривается, так как если функция $F(p)$ аналитическая в области $\text{Re } p > c$, $c \leq 0,5$, то она будет аналитической и в области $\text{Re } p > 0,5$). Пусть известно, что функция

$f(t)$ финитна с носителем $[0, T]$. Тогда из формулы (9.4) следует, что $\|F(p)\|_{L_2(c-i\infty, c+i\infty)} = (2\pi)^{1/2} T^{c-1/2} \|f(t)\|_{L_2(\Omega_1)}$.

Доказательство равенства $\|f(t)\| = (2\pi)^{-1/2} \|F(p)\|$ проводится аналогично ($p = 1/2 + i\sigma$).

Применяя к функции $\nu(r, \Theta_0)$, определенной уравнением (9.1), преобразование Фурье \mathfrak{F} и преобразование Меллина \mathfrak{M} , получим

$$V(p, \omega) = H(p, \omega)U(p, \omega),$$

где

$$U(p, \omega) = \mathfrak{M}\mathfrak{F}(u(r, \Theta)). \quad (9.5)$$

Наложим на функции V, H, U совокупность условий, называемую в дальнейшем условием A . Предположим:

1) $c = 1/2$ принадлежит области аналитичности функций V, H, U по переменной p ;

2) множество значений $z = H(p, \omega)$ при изменении аргументов $p \in D_1, \omega \in D_2$ расположено внутри угла, величина которого не превышает π , с вершиной в точке $(0, 0)$ плоскости комплексной переменной z и, возможно, в его вершине;

3) $H(p, \omega) \neq 0$ при конечных значениях p и ω .

Тогда существует такое комплексное число γ , что выполнено условие

$$\sup_{p \in D_1, \omega \in D_2} |1 - \gamma H(p, \omega)| = q \leq 1. \quad (9.6)$$

Замечание. Если дополнительно известно, что спектр $H(p, \omega)$ финитный с носителем в области $D_1 \times D_2$, то

$$\sup_{p \in D_1, \omega \in D_2} |1 - \gamma H(p, \omega)| = q < 1. \quad (9.7)$$

Теорема 9.1. Если выполнено условие A и спектр $H(p, \omega)$ финитен, то итерационный процесс

$$u_{n+1}(r, \Theta) = u_n(r, \Theta) - \gamma \int_0^{2\pi} \int_0^\infty h\left(\frac{r}{r_1}, \Theta - \Theta_1\right) u_n(r_1, \Theta_1) r_1^{-1} dr_1 d\Theta_1 + \gamma \nu(r, \Theta) \quad (9.8)$$

сходится к решению $u^*(r, \Theta)$ уравнения (9.1) со скоростью $\|u^* - u_n\| = O(q^n)$.

Доказательство. Оценим норму разности $\|u_{n+1}(r, \Theta) - u_n(r, \Theta)\|$. По лемме 9.1 нормы функций $f(\Theta)$ в $L_2(\Omega_2)$ и $f(\omega)$ в $L_2(D_2)$ равны, т.е.

$$\|u_{n+1}(r, \Theta) - u_n(r, \Theta)\| = \|u_n(r, \Theta) - \gamma \int_0^{2\pi} \int_0^\infty h\left(\frac{r}{r_1}, \Theta - \Theta_1\right) [u_n(r_1, \Theta_1) -$$

$$\begin{aligned}
& -u_{n-1}(r_1, \Theta_1)] r_1^{-1} dr_1 d\Theta_1 - u_{n-1}(r, \Theta) \| = \| \tilde{u}_n(r, \omega) - \\
& -\gamma \int_0^{2\pi} \tilde{h} \left(\frac{r}{r_1}, \omega \right) [\tilde{u}_n(r_1, \omega) - \tilde{u}_{n-1}(r_1, \omega)] r_1^{-1} dr_1 - \tilde{u}_{n-1}(r, \omega) \|.
\end{aligned}$$

Далее интегрирование в полученном выражении будем вести только по r_1 ; ω считаем параметром и применяем преобразование Меллина, норма которого оценена в лемме 9.2. Полагая $p = 0, 5 + i\sigma$, $-\infty < \sigma < \infty$, получим

$$\begin{aligned}
\|u_{n+1} - u_n\| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|U_n(p, \omega) - \gamma H(p, \omega)[U_n(p, \omega) - U_{n-1}(p, \omega)] - \\
& - U_{n-1}(p, \omega)\| = (2\pi)^{-1/2} \|(U_n(p, \omega) - U_{n-1}(p, \omega))(1 - \gamma H(p, \omega))\| < \\
& < (2\pi)^{-1/2} \sup_{p \in D_1, \omega \in D_2} |1 - \gamma H(p, \omega)| \| (U_n(p, \omega) - U_{n-1}(p, \omega)) \| = \\
& = (2\pi)^{-1/2} q \| (U_n(p, \omega) - U_{n-1}(p, \omega)) \|.
\end{aligned}$$

Выполняя последовательно обратные преобразования, получим

$$\|u_{n+1}(r, \Theta) - u_n(r, \Theta)\| < q \|u_n(r, \Theta) - u_{n-1}(r, \Theta)\| < q^n \|u_1(r, \Theta) - u_0(r, \Theta)\|.$$

Воспользовавшись теоремой Банаха о сжатых отображениях, завершаем доказательство теоремы.

Рассмотрим итерационный процесс

$$\begin{aligned}
u_{n+1}(r, \Theta) &= \alpha_n u_n(r, \Theta) + (1 - \alpha_n) \left[u_n(r, \Theta) - \gamma \int_0^{2\pi} \int_0^\infty h \left(\frac{r}{r_1}, \Theta - \Theta_1 \right) \times \right. \\
& \quad \left. \times u_n(r_1, \Theta_1) \frac{dr_1}{r_1} d\Theta_1 + \gamma \nu(r, \Theta) \right], \tag{9.9}
\end{aligned}$$

где $0 < \varepsilon_0 \leq \alpha_n \leq 1 - \varepsilon_1 < 1$, γ – константа, определяемая из условия $\sup_{p, \omega} |1 - \gamma H(0, 5 + i\sigma, \omega)| \leq 1$, $p = c + i\sigma$.

Теорема 9.2. Пусть уравнение (9.1) имеет единственное решение $u^*(r, \Theta)$, выполнено условие A и справедливо неравенство (9.6). Тогда последовательность $u_n(r, \Theta)$, определяемая итерационной схемой (9.9), сходится к $u^*(r, \Theta)$.

Доказательство. Из условий теоремы и лемм 9.1, 9.2 следует, что если воспользоваться свойствами преобразований Фурье и Меллина ($p = 1/2 + i\sigma$), то

$$\|Ku\| = \|u(r, \Theta) - \gamma \int_0^{2\pi} \int_0^\infty h \left(\frac{r}{r_1}, \Theta - \Theta_1 \right) u(r, \Theta_1) \frac{dr_1}{r_1} d\Theta_1\| = \|u\|,$$

т.е. $\|K\| = 1$. При выполнении условия $\|K\| = 1$ сходимость итерационного процесса (9.8) следует из утверждений теоремы 10.3 главы I.

Пусть итерационный процесс задан выражением

$$\begin{aligned} u_{n+1}^T(r, \Theta) = & u_n^T(r, \Theta) - \gamma \int_0^{2\pi} \int_0^\infty h\left(\frac{r}{r_1}, \Theta - \Theta_1\right) u_n^T(r_1, \Theta_1) \frac{dr_1}{r_1} d\Theta_1 + \\ & + \gamma \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \psi_T\left(\frac{r}{r_1}, \Theta - \Theta_1\right) \nu(r_1, \Theta_1) \frac{dr_1}{r_1} d\Theta_1, \end{aligned} \quad (9.10)$$

где функция $\psi_T(r, \Theta)$ после последовательного применения введенного преобразования Фурье и преобразования Меллина имеет вид

$$\psi_T(p, \omega) = \begin{cases} 1, & (|\omega| \leq T) \cap (|\sigma| \leq T), \quad c = 0, 5, \\ 0, & (|\omega| > T) \cup (|\sigma| > T), \quad c = 0, 5. \end{cases}$$

Теорема 9.3. Пусть выполнено условие A и уравнение (9.1) имеет единственное решение $u^*(r, \Theta)$. Тогда итерационный процесс (9.10) сходится при любом начальном приближении $u_0(r, \Theta)$ со спектром, сосредоточенным в области $D : (|\sigma| \leq T) \cap (|\omega| \leq T)$, $c = 0, 5$ и справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|u^* - u_n^T\| & \leq c(q^n(T)) + \xi + |\gamma|(\xi \|h(r, \Theta)\| + (2\pi)^{-1/2} \xi_1)/(1 - q(T)), \\ \xi_1 & = \left\{ \frac{1}{i} \iint_{(D_1 \times D_2) \setminus D} |V(p, \omega)|^2 dp d\omega \right\}^{1/2}, \\ \xi & = \left\{ \frac{1}{i} \iint_{(D_1 \times D_2) \setminus D} |U^*(p, \omega)|^2 dp d\omega \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Доказательство. Подействуем на функцию $u(r, \Theta)$ последовательно преобразованиями Фурье и Меллина: $\mathfrak{M}\mathfrak{S}(u(r, \Theta)) = \mathfrak{M}(\tilde{u}(r, \omega)) = U(p, \omega)$. Введем множества $G_1 = \Omega_1 \times \Omega_2$, $G_2 = D_1 \times D_2$; нормы

$$\begin{aligned} \|u(r, \Theta)\|_{L_2(G_1)} & = \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^\infty |u(r, \Theta)|^2 dr d\Theta \right\}^{1/2}, \\ \|U(p, \omega)\|_{L_2(G_2)} & = \left\{ \frac{1}{i} \int_{0,5-i\infty}^{0,5+i\infty} \int_{-\infty}^\infty |U(p, \omega)|^2 dp d\omega \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

Допустим, что абсолютно сходится интеграл

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \int_{0,5-i\infty}^{0,5+i\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u(r, \Theta_i)| |U(p, \omega)| d\omega dp dr d\Theta.$$

Представим p и r в виде $p = 0,5 + i\sigma$, $r = e^\nu$. Распишем $\|U(p, \omega)\|^2$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{i} \int_{0,5-i\infty}^{0,5+i\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(p, \omega) \bar{U}(p, \omega) dp d\omega = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U\left(\frac{1}{2} + i\sigma, \omega\right) \overline{U\left(\frac{1}{2} + i\sigma, \omega\right)} d\sigma d\omega = \\ & = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} u(e^\nu, \Theta) e^{-i2\pi\omega\Theta} d\Theta e^{\nu(\frac{1}{2}+i\sigma)} d\nu \right] \overline{U\left(\frac{1}{2} + i\sigma, \omega\right)} d\sigma d\omega = \\ & = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(e^\nu, \Theta) e^{\nu(\frac{1}{2}+i\sigma)} \overline{\mathfrak{S}^{-1}U\left(\frac{1}{2} + i\sigma, \omega\right)} d\sigma d\Theta d\nu = \\ & = 2\pi \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |u(e^\nu, \Theta) e^{\nu/2}|^2 d\nu d\Theta = 2\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} |u(r, \Theta) r^{1/2}|^2 \frac{dr}{r} d\Theta = \\ & = 2\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} |u(r, \Theta)|^2 dr d\Theta. \end{aligned}$$

В итоге имеем $\|U(p, \omega)\| = \sqrt{2\pi} \|u(r, \Theta)\|$. Доказательство равенства $\|U(p, \omega)\| = (2\pi)^{-1/2} \|u(r, \Theta)\|$ проводится аналогично.

Докажем сходимость итерационного процесса (9.10) в метрике пространства $L_2(G_2)$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{i} \int_{0,5-i\infty}^{0,5+i\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |U^*(p, \omega)|^2 dp d\omega = \\ & = \frac{1}{i} \int_{0,5-iT}^{0,5+iT} \int_{-T}^T |U^*(p, \omega)|^2 dp d\omega + \frac{1}{i} \iint_{G_2 \setminus D} |U^*(p, \omega)|^2 dp d\omega. \end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{1}{i} \iint_{G_2 \setminus D} |U^*(p, \omega)|^2 dp d\omega \leq \xi^2.$$

Если возьмем в качестве начального приближения функцию $u_0(r, \Theta)$ с финитным спектром, сосредоточенным в области D , то для последовательных приближений $u_n^T(r, \Theta)$, повторяя выкладки, приведенные для доказательства теоремы 9.1, будем иметь

$$\|u_{n+1}^T(r, \Theta) - u_n^T(r, \Theta)\|_{L_2(G_1)} < q^n(T) \|u_1^T(r, \Theta) - u_0(r, \Theta)\|_{L_2(G_1)}.$$

По условию $A q(T) < 1$, следовательно, по теореме Банаха о сжатых отображениях, последовательность $u_n^T(r, \Theta)$ сходится к решению $u^{*T}(r, \Theta)$ уравнения

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^\infty h\left(\frac{r}{r_1}, \Theta - \Theta_1\right) u(r_1, \Theta_1) \frac{dr_1}{r_1} d\Theta_1 = \\ & = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \psi_T\left(\frac{r}{r_1}, \Theta - \Theta_1\right) \nu(r_1, \Theta_1) \frac{dr_1}{r_1} d\Theta_1. \end{aligned} \quad (9.12)$$

Оценим близость решений $u^*(r, \Theta)$ и $u^{*T}(r, \Theta)$ уравнений (9.1) и (9.12). Представим функцию $U^*(p, \omega)$ в виде $U_1^*(p, \omega) + U_2^*(p, \omega)$, где

$$U_1^*(p, \omega) = \begin{cases} U(p, \omega), & (p, \omega) \in D, \\ 0, & (p, \omega) \notin D; \end{cases}$$

$$U_2^*(p, \omega) = \begin{cases} 0, & (p, \omega) \in D, \\ U(p, \omega), & (p, \omega) \notin D. \end{cases}$$

Пусть $u_1^*(r, \Theta)$ и $u_2^*(r, \Theta)$ – результаты последовательно выполненных обратных преобразований Фурье и Меллина функций $U_1^*(p, \omega)$ и $U_2^*(p, \omega)$.

Верно равенство

$$\begin{aligned} u_1^* - u^{*T} &= u_1^*(r, \Theta) - u^{*T}(r, \Theta) - \gamma \int_0^{2\pi} \int_0^\infty h\left(\frac{r}{r_1}, \Theta - \Theta_1\right) (u_1^*(r_1, \Theta_1) - \\ & - u^{*T}(r, \Theta)) \frac{dr_1}{r_1} d\Theta_1 + \gamma \nu(r, \Theta) - \gamma \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \psi_r\left(\frac{r}{r_1}, \Theta - \Theta_1\right) \nu(r_1, \Theta_1) \frac{dr_1}{r_1} d\Theta_1 - \end{aligned}$$

$$-\gamma \int_0^{2\pi} \int_0^\infty h\left(\frac{r}{r_1}, \Theta - \Theta_1\right) u_2^*(r_1, \Theta_1) \frac{dr_1}{r_1} d\Theta_1.$$

Переходя к нормам, будем иметь

$$\begin{aligned} & \|u_1^*(r, \Theta) - u^{*T}(r, \Theta)\|_{L_2(G_1)} = \|u_1^*(r, \Theta) - u^{*T}(r, \Theta) - \\ & -\gamma \int_0^{2\pi} \int_0^\infty h\left(\frac{r}{r_1}, \Theta - \Theta_1\right) [(u_1^*(r_1, \Theta_1) - u^{*T}(r_1, \Theta_1))] \frac{dr_1}{r_1} d\Theta_1 + \gamma \nu(r, \Theta) - \\ & -\gamma \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \psi_r\left(\frac{r}{r_1}, \Theta - \Theta_1\right) \nu(r_1, \Theta_1) \frac{dr_1}{r_1} d\Theta_1 - \\ & -\gamma \int_0^{2\pi} \int_0^\infty h\left(\frac{r}{r_1}, \Theta - \Theta_1\right) u_2^*(r_1, \Theta_1) \frac{dr_1}{r_1} d\Theta_1\|_{L_2(G_1)} = \\ & = (2\pi)^{-1/2} \|U_1^*(p, \omega) - U^{*T}(p, \omega)\| (1 - \gamma H(p, \omega)) + \gamma (V(p, \omega) - \\ & - \psi(p, \omega)V(p, \omega)) + \gamma H(p, \omega) U_2^*(p, \omega)\|_{L_2(G_2)} = q(T) \|u_1^*(r, \Theta) - \\ & - u^{*T}(r, \Theta)\|_{L_2(G_1)} + (2\pi)^{-1/2} \xi_1 |\gamma| + |\gamma| \xi \|h(r, \Theta)\|_{L_2(G_1)}. \end{aligned}$$

В итоге имеем

$$\|u_1^*(r, \Theta) - u^{*T}(r, \Theta)\|_{L_2(G_1)} (1 - q(T)) \leq |\gamma| ((2\pi)^{-1/2} \xi_1 + \xi \|h(r, \Theta)\|_{L_2(G_1)}).$$

Учитывая, что $\|u^* - u^{*T}\|_{L_2(G_1)} \leq \|u_1^* - u^{*T}\|_{L_2(G_1)} + \|u_2^*\|_{L_2(G_1)}$, получаем

$$\|u^* - u^{*T}\|_{L_2(G_1)} \leq c \left(\gamma \left(\frac{\xi_1}{\sqrt{2\pi}} + \xi \|h\|_{L_2(G_1)} \right) \frac{1}{1 - q(T)} + \xi \right).$$

Пусть теперь не выполнено условие А. Введем числа $T_0^\omega, T_N^\omega, T_0^\sigma, T_L^\sigma$, достаточно большие по абсолютной величине. Введем прямоугольники $\Delta_{kj} = [T_{k-1}^\omega, T_k^\omega; T_{j-1}^\sigma, T_j^\sigma]$, $k = \overline{1, N}, j = \overline{1, L}$; $-T \leq T_0^\omega < T_1^\omega < \dots < T_N^\omega \leq T$, $-T \leq T_0^\sigma < T_1^\sigma < \dots < T_L^\sigma \leq T$. Каждому прямоугольнику Δ_{kj} поставим в соответствие комплексную константу γ_{kj} так, чтобы множество значений функции $\gamma_{kj} H(p, \omega)$ удовлетворяло условию А. Обозначим через $E_{kj}(p, \omega)$, $k = \overline{0, N}; j = \overline{0, L}$, характеристические функции областей Δ_{kj} , а через $u_{kj}^*(r, \Theta)$, $u_{kj}^0(r, \Theta)$, $\nu_{kj}(r, \Theta)$ — прообразы функций $E_{kj}(p, \omega)U^*(p, \omega)$, $E_{kj}(p, \omega)U^0(p, \omega)$, $E_{kj}(p, \omega)V(p, \omega)$.

Для нахождения решения $u^*(r, \Theta)$ будем использовать итерационный процесс

$$u^{n+1}(r, \Theta) = \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^L u_{kj}^{n+1}(r, \Theta), \quad (9.13)$$

$$u_{kj}^{n+1}(r, \Theta) = u_{kj}^n(r, \Theta) - \gamma_{kj} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} h\left(\frac{r}{r_1}, \Theta - \Theta_1\right) u_{kj}^n(r_1, \Theta_1) \frac{dr_1}{r_1} d\Theta_1 + \gamma_{kj} \nu_{kj}(r, \Theta). \quad (9.14)$$

Теорема 9.4. Пусть уравнение (9.1) имеет решение $u^*(r, \Theta)$. Тогда последовательные приближения $u^{n+1}(r, \Theta)$ сходятся к $u^*(r, \Theta)$ и верна оценка (9.11), где

$$\gamma = \max_{0 \leq k \leq N, 0 \leq j \leq L} |\gamma_{kj}|, \quad q = \max_{0 \leq k \leq N, 0 \leq j \leq L} |q_{kj}|.$$

Доказательство. Докажем сходимость итерационного процесса (9.13), (9.14). Решение $u^*(r, \Theta)$ уравнения (9.1) принадлежит пространству $L_2(G_1)$, и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая константа T , что в пространстве $L_2(G_2)$ $\frac{1}{i} \int \int_{G_2/D} |U^*(p, \omega)|^2 dp d\omega \leq \varepsilon^2$.

Возьмем в качестве начального приближения $u^0(r, \Theta)$ с финитным спектром, сосредоточенным в области D . Повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 9.1, убеждаемся, что $u_{kj}^{n+1}(r, \Theta) \rightarrow u_{kj}^*(r, \Theta)$. Следовательно, последовательность $u^{n+1}(r, \Theta)$, определяемая формулой (9.13), сходится к функции $u^{*T}(r, \Theta)$. Оценка погрешности итерационной схемы (9.13), (9.14) получается повторением выкладок, приведенных при доказательстве теоремы 9.3.

10. Применение метода гомотопии к решению обратных задач теории потенциала

В предыдущих разделах для решения обратных задач гравиразведки применялись итерационные методы, в том числе построенные в спектральной области. Так как многие обратные задачи геофизики моделируются интегральными уравнениями, правые части и ядра которых являются аналитическими функциями в некоторой области G , то представляет интерес построение методов регуляризации решений, основанных на продолжении решений по параметру.

Данный раздел посвящен построению и обоснованию метода продолжения по параметру приближенного решения линейных и нелинейных обратных задач гравиразведки. Раздел написан по материалам статьи [43].

10.1. Обратная задача теории потенциала в линейной постановке на плоскости

В разд. 7 показано, что обратная задача теории потенциала в линейной постановке описывается уравнением

$$2G\sigma H \int_a^b \frac{z(\zeta)}{(x - \zeta)^2 + H^2} d\zeta = f(x).$$

Изложим метод продолжения по параметру для более общего уравнения

$$Kx \equiv \int_{-1}^1 h(t, \tau)x(\tau)d\tau = f(t). \quad (10.1)$$

Известно, что решение уравнений Фредгольма I рода является некорректной задачей, требующей алгоритмов регуляризации. Для ее решения разработаны методы регуляризации, основанные на различных подходах [113, 124, 213]. Изложим метод, основанный на продолжении решения по параметру. Для простоты изложения предположим, что оператор K — самосопряженный. В противном случае от уравнения (10.1) можно перейти к уравнению $K^*Kx = K^*f$, где K^* — оператор, сопряженный с оператором K .

Поставим уравнению (10.1) в соответствие семейство уравнений

$$K_\lambda x \equiv (\lambda + \beta)x(\lambda, t) + \int_{-1}^1 h(t, \tau)x(\lambda, \tau)d\tau = f(t), \quad (10.2)$$

где λ — вещественный параметр, $0 \leq \lambda \leq 1$; $\beta > 0$ — параметр регуляризации.

Приближенное решение уравнения (10.2) будем искать в виде полинома

$$x_N(\lambda, t) = \sum_{k=1}^N \alpha_k(\lambda)\psi_k(t), \quad (10.3)$$

где $\psi_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, N$, — фундаментальные полиномы, построенные по узлам полинома Лежандра порядка N .

Коэффициенты $\{\alpha_k(\lambda)\}$ находим по методу механических квадратур из системы линейных алгебраических уравнений

$$K_{N,\lambda}x_N \equiv$$

$$\equiv P_N^t \left[(\lambda + \beta)x_N(\lambda, t) + \int_{-1}^1 P_N^\tau [h(t, \tau)x_N(\lambda, \tau)] d\tau \right] = P_N^t [f(t)], \quad (10.4)$$

где P_N^t — оператор проектирования на множество интерполяционных полиномов степени $(N - 1)$ по узлам полинома Лежандра N -го порядка. Верхний индекс у оператора P_N означает переменную, по которой проводится проектирование.

Обоснование метода механических квадратур для уравнений Фредгольма второго рода хорошо известно [117, 120], и поэтому не будем на этом останавливаться.

Рассмотрим последовательность значений $\lambda_j = j/M, j = 0, 1, \dots, M$.

Для каждого значения $\lambda_j, j = 0, 1, \dots, M$, решим систему уравнений (10.4). В результате получаем множество решений $\{x_N(\lambda_j; t)\}, j = 0, 1, \dots, M$.

Составим из этого множества полином Бернштейна:

$$B_M(\lambda, t) = \sum_{k=0}^M C_M^k x_N(\lambda_k, t) \lambda^k (1 - \lambda)^{M-k}.$$

Приближенное решение уравнения (10.1) определяется формулой $x_N^*(t) = B_M(-\beta, t)$.

10.2. Обратная задача теории потенциала в линейной постановке в пространстве R_3

Обратная задача гравиразведки в линейной постановке описывается уравнением

$$G \int_a^b \int_c^d \sigma(\zeta, \eta) \left[\frac{H\varphi(\zeta, \eta)}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + H^2)^{3/2}} \right] d\zeta d\eta = f(x, y, 0).$$

Здесь использованы обозначения, введенные в разд. 8.

Естественно рассмотреть более общее уравнение

$$\int_{-1}^1 \cdots \int_{-1}^1 h(t, \tau)x(\tau)d\tau = f(t), \quad (10.5)$$

где $t = (t_1, \dots, t_l), \tau = (\tau_1, \dots, \tau_l)$. Для определенности ниже полагаем $l = 2$, но все утверждения дословно переносятся на случай произвольного конечного l .

Уравнению (10.5) поставим в соответствие семейство уравнений

$$K_\lambda x \equiv (\lambda + \beta)x(\lambda, t) + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 h(t, \tau)x(\lambda, \tau)d\tau = f(t) \quad (10.6)$$

и повторим рассуждения, приведенные в предыдущем разделе.

Положим $0 \leq \lambda \leq 1$, $\beta > 0$ и введем узлы $\lambda_k = \frac{k}{M}$, $k = 0, 1, \dots, M$.

Приближенное решение уравнения (10.6) будем искать в виде полинома

$$x_N(\lambda, t) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_{ij}(\lambda)\psi_i(t_1)\psi_j(t_2), \quad (10.7)$$

где $\psi_i(t)$ — фундаментальные полиномы по узлам полиномов Лежандра степени N .

Коэффициенты $\{\alpha_{ij}(\lambda)\}$, $i, j = 1, 2, \dots, N$, находятся из системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} K_{N,\lambda}x_N &\equiv (\lambda + \beta)x_N(\lambda, t) + \\ &+ P_N^{t_1}P_N^{t_2} \left[\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_N^{\tau_1}P_N^{\tau_2} [h(t_1, t_2, \tau_1, \tau_2)x_N(\lambda, \tau_1, \tau_2)] d\tau_1 d\tau_2 \right] = \\ &= P_N^{t_1}P_N^{t_2} [f(t_1, t_2)]. \end{aligned} \quad (10.8)$$

Обоснование метода механических квадратур для уравнений Фредгольма второго рода хорошо известно [30, 117, 120].

Решим систему уравнений (10.8) для набора значений $\lambda_j = j/M$, $j = 0, 1, \dots, M$. В результате получаем набор решений $x_N(\lambda_j, t)$, $j = 0, 1, \dots, M$, из которых составляем полином Бернштейна:

$$B_N(\lambda, t) = \sum_{k=0}^M C_M^k x_N(\lambda_k, t) \lambda^k (1 - \lambda)^{M-k}.$$

Приближенное решение уравнения (10.5) определяется формулой $x_N^*(t_1, t_2) = B_N(-\beta, t)$.

10.3. Обратная задача логарифмического потенциала в нелинейной постановке

Нелинейная постановка обратной задачи для бесконечно протяженной по оси OY контактной поверхности $z(x)$ описывается [96] нелинейным интегральным уравнением

$$Kz \equiv G\sigma \int_a^b \ln \frac{(x-s)^2 + H^2}{(x-s)^2 + (H-z(s))^2} ds = f(x), \quad (10.9)$$

где $z(\zeta)$ — форма поверхности тела; H — глубина залегания; σ — плотность возмущающего тела; G — гравитационная постоянная, $|z(\zeta)| < H$.

Для простоты дальнейших обозначений положим $a = -1$, $b = 1$.

Как и в предыдущих разделах, введем параметры λ и β , $\beta > 0$, $0 \leq \lambda \leq 1$, и поставим уравнению (10.9) в соответствие семейство уравнений

$$K_\lambda z \equiv (\lambda + \beta)z(x) + G\sigma \int_{-1}^1 \ln \frac{(x-s)^2 + H^2}{(x-s)^2 + (H-z(s))^2} ds = f(x). \quad (10.10)$$

Приближенное решение уравнения (10.10) будем искать в виде полинома

$$z_N(\lambda, x) = \sum_{k=1}^N \alpha_k(\lambda) \psi_k(x),$$

где $\{\psi_k(x)\}$, $k = 1, 2, \dots, N$, — фундаментальные полиномы по узлам полинома Лежандра степени N .

Коэффициенты $\{\alpha_k(\lambda)\}$, $k = 1, 2, \dots, N$, находятся из системы нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} K_{N,\lambda}(z_N) &\equiv (\lambda + \beta)z_N(\lambda, x) + \\ &+ P_N^x \left[G\sigma \int_{-1}^1 P_N^s \left[\ln \frac{(x-s)^2 + H^2}{((x-s)^2 + (H-z(\lambda_N, s))^2)} \right] ds \right] = \\ &= P_N^x[f(x)]. \end{aligned} \quad (10.11)$$

Пусть $\lambda_j = j/M$, $j = 0, 1, \dots, M$. Для каждого значения λ_j , $j = 0, 1, \dots, M$, решаем систему уравнений (10.11) методом Ньютона — Канторовича:

$$\begin{aligned} z_N^{k+1}(\lambda, x) &= z_N^k(\lambda, x) - \\ &- [K'_{N,\lambda}(z_0(s))]^{-1} (K_{N,\lambda}(z_N^k(\lambda, x)) - P_N^x[f(x)]), \end{aligned} \quad (10.11)$$

$k = 0, 1, \dots$; $K'_{N,\lambda}(z(0))$ — производная Фреше оператора $K_{N,\lambda}z$ на начальном элементе $z(0)$. Отметим, что начальный элемент может быть как общим для всех значений параметра λ_j , так и для каждого значения λ_j можно выбирать собственное начальное приближение в зависимости от результатов решения уравнения (10.10) при других значениях λ_j .

Производная Фреше оператора $K_{N,\lambda}(z_N)$ на элементе $z_0(s)$ имеет вид

$$K'_{N,\lambda}(z_0)v_N \equiv (\lambda + \beta)v_N(\lambda, x) +$$

$$+P_N^x \left[G\sigma \int_{-1}^1 P_N^s \left[\frac{2(H - z_0(s))}{(x - s)^2 + (H - z_0(s))^2} v_N(\lambda, s) \right] ds \right].$$

Обоснование сходимости итерационного процесса (10.11) проводится на основании общих теорем метода Ньютона — Канторовича, приведенных в разд. 11 главы I.

Решив систему уравнений (10.10) методом Ньютона — Канторовича (10.11) при $\lambda_j = j/M$, $j = 0, 1, \dots, M$, получаем семейство решений $z_N^*(\lambda_j, t)$, $j = 0, 1, \dots, M$. Из функций $\{z_N^*(\lambda_j, t)\}$, $j = 0, 1, \dots, M$, составим полином Бернштейна:

$$B_N(\lambda, s) = \sum_{k=0}^M C_M^k z_N^*(\lambda_k, s) \lambda^k (1 - \lambda)^{M-k}.$$

Приближенное решение уравнения (10.8) определяется формулой $z^*(s) = B_N(-\beta, s)$.

10.4. Обратная задача теории потенциала в нелинейной постановке

В случае, если возмущающее тело залегает на глубине H , его нижняя поверхность совпадает с плоскостью $z = -H$, а верхняя поверхность описывается функцией $z(x, y) = -H + \varphi(x, y)$, причем функция $\varphi(x, y)$ неотрицательна и $\varphi(x, y) < H$, то гравитационное поле на поверхности Земли описывается следующим уравнением (см. вывод формулы (8.2)):

$$G\sigma \int_a^b \int_c^d \frac{d\zeta d\eta}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + (H - \varphi(\zeta, \eta))^2)^{1/2}} = f(x, y), \quad (10.12)$$

где G — гравитационная постоянная; σ — плотность возмущающего тела.

Для удобства обозначений уравнение (10.12) запишем в виде

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{d\zeta d\eta}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + (H - z(\zeta, \eta))^2)^{1/2}} = f(x, y), \quad (10.13)$$

где $z(x, y)$ — искомое решение.

Уравнению (10.13) поставим в соответствие семейство уравнений

$$K_\lambda(z) \equiv (\lambda + \beta)z(\lambda; x, y) +$$

$$+ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{d\zeta d\eta}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + (H - z(\lambda; \zeta, \eta))^2)^{1/2}} = f(x, y), \quad (10.14)$$

где $0 \leq \lambda \leq 1$, $\beta > 0$.

Приближенное решение уравнения (10.14) будем искать в виде полинома

$$z_N(\lambda, \zeta, \eta) = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \alpha_{kl}(\lambda) \psi_k(\zeta) \psi_l(\eta),$$

где $\psi_k(\zeta)$ — фундаментальные полиномы по узлам полинома Лежандра N порядка.

Коэффициенты $\{\alpha_{kl}(\lambda)\}$, $k, l = 1, 2, \dots, N$, находим из системы нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} K_{N,\lambda}(z_N) &= (\lambda + \beta)z_N(\lambda, x, y) + \\ &+ P_N^x P_N^y \left[\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_N^\zeta P_N^\eta \left[\frac{d\zeta d\eta}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + (H - z_N(\lambda, \zeta, \eta))^2)^{1/2}} \right] \right] = \\ &= P_N^x P_N^y [f(x, y)], \end{aligned} \quad (10.15)$$

где P_N — оператор проектирования на множество интерполяционных полиномов степени $(N - 1)$, построенных по N узлам полинома Лежандра.

Уравнение (10.15) решается методом Ньютона — Канторовича

$$\begin{aligned} &z_N^{k+1}(\lambda; x, y) = \\ &= z_N^k(\lambda; x, y) - [K'_{N,\lambda}(z_0(x, y))]^{-1} (K_{N,\lambda}(z_N^k(\lambda; x, y)) - P_N^x P_N^y [f(x, y)]), \\ &k = 0, 1, \dots, \text{ где } K'_{N,\lambda}(z_0(x, y)) \text{ — производная Фреше оператора } (K_{N,\lambda}(z_N)) \\ &\text{ на элементе } z_0(x, y); z_0(x, y) \text{ — начальное приближение.} \end{aligned}$$

Обоснование сходимости итераций проводится на основании общих теорем сходимости метода Ньютона — Канторовича, приведенных в разд. 11 главы I.

Решив уравнение (10.15) при значениях $\lambda_j = j/M$, $j = 0, 1, \dots, M$, получаем семейство решений $\{z_N^*(\lambda_j; x, y)\}$. Из этих решений составим полином Бернштейна:

$$B_M(\lambda; x, y) = \sum_{k=1}^N C_M^k z_N^*(\lambda_k; x, y) \lambda^k (1 - \lambda)^{M-k}.$$

Приближенное решение уравнения (10.12) определяется формулой $z_N^*(x, y) = B_M(-\beta; x, y)$.

10.5. Одновременное нахождение плотности и границы возмущающего тела

Рассмотрим уравнение

$$G \int_a^b \sigma(s) \ln \frac{(x-s)^2 + H^2}{(x-s)^2 + (H-z(s))^2} ds = f(x), \quad (10.16)$$

где $\sigma(s)$ — плотность тяготеющих масс.

Предположим также, что съемка проводилась также на высоте $-h$ от уровня $z = 0$.

В этом случае функции $\sigma(s)$ и $z(s)$ также связаны уравнением

$$G \int_a^b \sigma(s) \ln \frac{(x-s)^2 + (H+h)^2}{(x-s)^2 + (H+h-z(s))^2} ds = f_1(x). \quad (10.17)$$

Требуется из системы уравнений (10.16), (10.17) определить неизвестные функции $z(s)$, $\sigma(s)$, $a \leq s \leq b$.

Пусть $0 \leq \lambda \leq 1$, $\gamma > 0$. Положим $a = -1$, $b = 1$ и рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} (\lambda + \gamma)\sigma(\lambda, x) + G \int_{-1}^1 \sigma(\lambda, s) \ln \frac{(x-s)^2 + H^2}{(x-s)^2 + (H-z(\lambda, s))^2} ds &= f(x), \\ (\lambda + \gamma)z(\lambda, x) + \\ + G \int_{-1}^1 \sigma(\lambda, s) \ln \frac{(x-s)^2 + (H+h)^2}{(x-s)^2 + (H+h-z(\lambda, s))^2} ds &= f_1(x). \end{aligned} \quad (10.18)$$

Обозначим через $\sigma_0(x)$ и $z_0(x)$ начальные приближения к функциям $\sigma(x)$ и $z(x)$.

Введем векторы $U(x) = \{\sigma(x), z(x)\}^T$, $U_0 = \{\sigma_0(x), z_0(x)\}^T$, $G(x) = \{f(x), f_1(x)\}^T$ и систему уравнений (10.18) запишем как

$$KU = G. \quad (10.19)$$

Приближенное решение уравнения (10.19) по методу Ньютона — Канторовича ищется итерациями

$$u_{k+1} = u_k - [K'(U_0)](KU_k - G), \quad (10.20)$$

$k = 0, 1, \dots$

Здесь $K'(U_0)$ — производная Фреше оператора $K(U)$ на начальном приближении U_0 , определяемая вектором

$$\begin{aligned}
& (\lambda + \gamma)\sigma(\lambda, x) + G \int_{-1}^1 \sigma(\lambda, s) \frac{(x-s)^2 + H^2}{(x-s)^2 + (H - z_0(s))^2} ds - \\
& - G \int_{-1}^1 \sigma_0(s) \frac{2(H - z_0(s))}{(x-s)^2 + (H - z_0(s))^2} z(\lambda, s) ds = f(x), \\
& (\lambda + \gamma)z(\lambda, x) + G \int_{-1}^1 \sigma(\lambda, s) \frac{(x-s)^2 + (H+h)^2}{(x-s)^2 + (H+h - z_0(s))^2} ds - \\
& - G \int_{-1}^1 \sigma_0(s) \frac{2(H+h - z_0(s))}{(x-s)^2 + (H+h - z_0(s))^2} z(\lambda, s) ds = f_1(x).
\end{aligned}$$

Сходимость итераций (10.20) обосновывается при $\lambda = \lambda_j$, $\lambda_j = j/M$, $j = 0, 1, \dots, M$, $\beta > 0$, на основании теорем, приведенных в разд. 11 главы I. Можно показать, что при достаточно хороших начальных приближениях итерации (10.20) сходятся.

Для численной реализации метода Ньютона — Канторовича перейдем к приближенным методам в подпространствах.

Приближенное решение системы уравнений (10.18) ищется в виде вектора $\{\sigma_N(\lambda_N, x), z_N(\lambda, x)\}$, где

$$\sigma_N(\lambda, x) = \sum_{k=1}^N \alpha_k(\lambda) \psi_k(x), \quad z_N(\lambda, x) = \sum_{k=1}^N \beta_k(\lambda) \psi_k(x),$$

$\psi_k(x)$ — фундаментальные полиномы, построенные по узлам полинома Лежандра N -го порядка.

Коэффициенты $\{\alpha_k(\lambda)\}$, $\{\beta_k(\lambda)\}$ находятся по методу Ньютона — Канторовича из системы уравнений

$$\begin{aligned}
& GP_N^x \left[\int_{-1}^1 P_N^s \left[\sigma_N(\lambda, s) \ln \frac{(x-s)^2 + H^2}{(x-s)^2 + (H - z_N(s))^2} \right] ds \right] + \\
& + (\lambda + \gamma)\sigma_N(\lambda, x) = P_N^x[f(x)], \\
& GP_N^x \left[\int_{-1}^1 P_N^s \left[\sigma_N(\lambda, s) \ln \frac{(x-s)^2 + (H+h)^2}{(x-s)^2 + (H+h - z_N(s))^2} \right] ds \right] +
\end{aligned}$$

$$(\lambda + \gamma)z_N(\lambda, x) = P_N^x[f(x)], \quad (10.21)$$

где через P_N обозначен оператор, введенный в разд. 10.1.

Систему уравнений (10.21) представим операторным уравнением

$$K_{N,\lambda}(U_N(\lambda, x)) = G(f), \quad (10.22)$$

где

$$U_N(\lambda, x) = (\sigma_N(\lambda, x), z_N(\lambda, x)), \quad G(f) = (P_N[f(t)], P_N[f_1(t)]).$$

Уравнение (10.22) при каждом значении λ_j , $\lambda_j = j/M$, $j = 0, 1, \dots, M$, решается методом Ньютона – Канторовича:

$$U_N^{l+1}(\lambda, x) = U_N^l(\lambda, x) - [K_{N,\lambda}(U_0)]^{-1} (K_{N,\lambda}(U_N^l(\lambda, x)) - G(f)),$$

$l = 0, 1, \dots$

Здесь $U_0 = (\sigma_0(x), z_0(x))$ – начальное приближение. В результате получаем множество векторов $(\sigma_{N,j}^*(x), z_{N,j}^*(x))^T$, $j = 0, 1, \dots, M$, являющихся решениями уравнения (10.22) при λ_j , $j = 0, 1, \dots, M$.

Из этого множества составляем два полинома Бернштейна:

$$B_M(\lambda, \sigma(x)) = \sum_{k=0}^M C_M^k \sigma_{N,k}^*(x) \lambda^k (1 - \lambda)^{M-k},$$

$$B_M(\lambda, z(x)) = \sum_{k=0}^M C_M^k z_{N,k}^*(x) \lambda^k (1 - \lambda)^{M-k}.$$

Решением уравнения (10.16) является вектор

$$(\sigma^*(x), z^*(x)) = (B_M(-\gamma, \sigma(x)), B_M(-\gamma, z(x))).$$

Замечание 1. Аналогичным образом строятся итерационные схемы, предназначенные для одновременного нахождения плотности и границы возмущающего тела для обратных задач потенциала, описываемых уравнениями

$$GH \int_a^b \int_c^d \frac{\sigma(\zeta, \eta) d\zeta d\eta}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + (H - z(\zeta, \eta))^2)^{1/2}} = f(x, y, 0),$$

$$G(H+h) \int_a^b \int_c^d \frac{\sigma(\zeta, \eta) d\zeta d\eta}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + (H + h - z(\zeta, \eta))^2)^{1/2}} = f(x, y, -h).$$

Здесь $\sigma(\zeta, \eta)$ и $z(\zeta, \eta)$ – неизвестные функции.

11. О применении метода локальных поправок к приближенному решению обратных задач гравиметрии

В данном разделе, написанном на основе статей [26, 27], рассматривается обратная задача гравиметрии в следующей постановке [229]: в предположении, что гравитационный потенциал может быть определен на замкнутой поверхности, содержащей внутри себя искомый ограниченный объект, требуется найти тело заданной плотности, создающее данный потенциал.

Предположим, что из независимых наблюдений известна по крайней мере одна точка 0 , принадлежащая искомому телу T . Введем декартову систему координат, центр которой расположен в точке 0 , а ось z направлена вертикально вверх. Потенциал гравитационного поля $U(x, y, z)$, создаваемого телом, есть

$$U(x, y, z) = \iiint_T \frac{\sigma(\zeta, \eta, \xi)}{\sqrt{(x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \xi)^2}} d\zeta d\eta d\xi, \quad (11.1)$$

где $\sigma(\zeta, \eta, \xi)$ — плотность тела T .

Введем сферическую систему координат с началом в точке 0 . В предположении звездности тела T относительно точки 0 задача сводится к нахождению функции $\rho(\Theta, \varphi)$ такой, что поверхность искомого тела имеет уравнение $\rho = \rho(\Theta, \varphi)$ в построенной системе координат, и описывается нелинейным интегральным уравнением I рода следующего вида:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\rho(\Theta, \varphi)} \frac{\sigma^*(r, \Theta, \varphi) r^2 \sin \Theta}{\sqrt{r^2 - 2br + a^2}} dr d\Theta d\varphi = U(x, y, z), \quad (11.2)$$

где $b = x \cos \varphi \sin \Theta + y \sin \varphi \sin \Theta + z \cos \Theta$, $a^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $\sigma^*(r, \Theta, \varphi) = \sigma(r \sin \Theta \cos \varphi, r \sin \Theta \sin \varphi, r \cos \Theta)$.

В случае, когда плотность σ постоянная, уравнение (11.2) сводится [229] к уравнению

$$\frac{\sigma}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{r^3(\Theta, \varphi) \sin \Theta d\Theta d\varphi}{\sqrt{r^2(\Theta, \varphi) - 2br(\Theta, \varphi) + a^2}} = V(x, y, z) - \frac{1}{2}(xV_x + yV_y + zV_z), \quad (11.3)$$

где $V(x, y, z)$ — гравитационный потенциал искомого объекта.

В главе V исследовалась применимость к уравнению (11.2) алгоритмов итерационной регуляризации.

Для решения уравнения (11.3) в работе [154] применялся метод локальных поправок.

Ниже для решения уравнения (11.2) предлагается и обосновывается модификация метода локальных поправок. Отметим, что эта модификация имеет большую сходимость даже в случае уравнений с постоянными коэффициентами.

Проведем дискретизацию уравнения (11.2).

Воспользуемся квадратурными формулами прямоугольников для аппроксимации интеграла, стоящего слева в формуле (11.2) и по методу коллокации приравняем правые и левые части уравнения (11.2) в определенных ниже узлах (x_s, y_s, z_s) , $s = \overline{1, n^2}$. В результате получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi^2}{N^3} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \rho \left(\frac{l\pi}{N}, \frac{2k\pi}{N} \right) \sum_{m=1}^N \sigma^* \left(\frac{m}{N} \rho \left(\frac{l\pi}{N}, \frac{2k\pi}{N} \right), \frac{l\pi}{N}, \frac{2k\pi}{N} \right) \times \\ & \times \frac{\left(\frac{m}{N} \rho \left(\frac{l\pi}{N}, \frac{2k\pi}{N} \right) \right)^2 \sin \frac{\pi l}{N}}{\left(\left(\frac{m}{N} \rho \left(\frac{l\pi}{N}, \frac{2k\pi}{N} \right) \right)^2 - b(k, l, m, s) + a(s) \right)^{1/2}} = U_s, \quad s = \overline{1, n^2}, \end{aligned} \quad (11.4)$$

где $b(k, l, m, s) = x_s \cos \frac{2k\pi}{N} \sin \frac{l\pi}{N} + y_s \sin \frac{2k\pi}{N} \sin \frac{l\pi}{N} + z_s \cos \frac{l\pi}{N}$, $a(s) = x_s^2 + y_s^2 + z_s^2$; $U_s = U(x_s, y_s, z_s)$, x_s, y_s, z_s — точки, расположенные вне тела T , в которых известны значения потенциала U . В качестве точек (x_s, y_s, z_s) естественно взять точки, расположенные на сфере радиуса R и имеющие координаты $x_{k,l} = R \sin \frac{l\pi}{N} \cos \frac{2k\pi}{N}$, $y_{k,l} = R \sin \frac{l\pi}{N} \sin \frac{2k\pi}{N}$, $z_{k,l} = R \cos \frac{l\pi}{N}$ ($k, l = \overline{1, N}$). Ниже для простоты выкладок используются эти точки.

Опишем применение метода локальных поправок к решению системы уравнений (11.4). Пусть ρ_{lk}^n — дискретизированные значения $\rho \left(\frac{l\pi}{N}, \frac{2k\pi}{N} \right)$ искомой функции $\rho(\Theta, \varphi)$, полученные на n -м шаге итераций.

Введем обозначения: $U_{k,l} = U(x_{k,l}, y_{k,l}, z_{k,l})$,

$$\begin{aligned} U_{k_0, l_0}^n &= \frac{2\pi^2}{N^3} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \rho_{k,l}^n \sum_{m=1}^N \sigma^* \left(\frac{m}{N} \rho_{k,l}^n, \frac{l\pi}{N}, \frac{2k\pi}{N} \right) \left(\frac{m}{N} \rho_{k,l}^n \right)^2 \sin \frac{\pi l}{N} \times \\ & \times \left(\left(\frac{m}{N} \rho_{k,l}^n \right)^2 - b(k, l, m, k_0, l_0) + a(k_0, l_0) \right)^{-1/2}, \end{aligned} \quad (11.5)$$

где $b(k, l, m, k_0, l_0) = x(k_0, l_0) \cos \frac{2k\pi}{N} \sin \frac{l\pi}{N} + y(k_0, l_0) \sin \frac{2k\pi}{N} \sin \frac{l\pi}{N} + z(k_0, l_0) \cos \frac{l\pi}{N}$, $a(k_0, l_0) = x^2(k_0, l_0) + y^2(k_0, l_0) + z^2(k_0, l_0)$.

Вычисления по методу локальных поправок состоят в следующем. Вычислим разность $\Delta_{k,l}^n = |U_{k,l} - U_{k,l}^n|$ для всех пар индексов (k, l) и

найдем пару индексов (i, j) , в которой Δ_{kl} достигает максимума: $\Delta^n = \max_{kl} |\Delta_{k,l}^n| = \Delta_{i,j}^n > \Delta_{k,l}^n$ при $(k, l) \neq (i, j)$. Предположим сначала, что такая пара индексов (i, j) единственная. Приступая к $(n+1)$ -му шагу, положим $\rho_{kl}^{n+1} = \rho_{kl}^n$ при $(k, l) \neq (i, j)$, а значение ρ_{ij}^{n+1} найдем из уравнения

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi^2}{N^3} \rho_{ij} \sum_{m=1}^N \frac{\sigma^* \left(\frac{m}{N} \rho_{ij}, \frac{l\pi}{N}, \frac{2k\pi}{N} \right) \left(\frac{m}{N} \rho_{ij} \right)^2 \sin \frac{\pi l}{N}}{\left(\left(\frac{m}{N} \rho_{ij} \right)^2 - b(i, j, m, i, j) + a(i, j) \right)^{1/2}} + \\ & + \frac{2\pi^2}{N^3} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \rho_{kl}^n \sum_{m=1}^N \frac{\sigma^* \left(\frac{m}{N} \rho_{kl}^n, \frac{l\pi}{N}, \frac{2k\pi}{N} \right) \left(\frac{m}{N} \rho_{kl}^n \right)^2 \sin \frac{\pi l}{N}}{\left(\left(\frac{m}{N} \rho_{kl}^n \right)^2 - b(i, j, m, k, l) + a(i, j) \right)^{1/2}} = U_{ij}, \end{aligned} \quad (11.6)$$

где $\sum_k \sum_i'$ означает суммирование по $(k, l) \neq (i, j)$.

Вычитая из равенства (11.6) равенство (11.5), при $(k_0, l_0) \neq (i, j)$, получаем систему уравнений для нахождения ρ_{ij}^{n+1} :

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi^2}{N^3} \rho_{ij}^{n+1} \sum_{m=1}^N \frac{\sigma^* \left(\frac{m}{N} \rho_{ij}^{n+1}, \frac{l\pi}{N}, \frac{2k\pi}{N} \right) \left(\frac{m}{N} \rho_{ij}^{n+1} \right)^2 \sin \frac{\pi l}{N}}{\left(\left(\frac{m}{N} \rho_{ij}^{n+1} \right)^2 - b(i, j, m, i, j) + a(i, j) \right)^{1/2}} = \\ & = \frac{2\pi^2}{N^3} \rho_{ij}^n \sum_{m=1}^N \frac{\sigma^* \left(\frac{m}{N} \rho_{ij}^n, \frac{l\pi}{N}, \frac{2k\pi}{N} \right) \left(\frac{m}{N} \rho_{ij}^n \right)^2 \sin \frac{\pi l}{N}}{\left(\left(\frac{m}{N} \rho_{ij}^n \right)^2 - b(i, j, m, i, j) + a(i, j) \right)^{1/2}} + U_{ij} - U_{ij}^n. \end{aligned} \quad (11.7)$$

Для нахождения ρ_{ij}^{n+1} к уравнению (11.7) можно применить метод Ньютона. Однако эта задача значительно упрощается при следующем допущении. Будем считать, что функция $\sigma^*(\rho, \Theta, \varphi)$ достаточно гладкая, а шаг метода локальных поправок настолько мал, что при выполнении следующего шага итераций можно считать плотность постоянной, т.е.

$$\sigma^* \left(\frac{m}{N} \rho_{ij}^{n+1}, \frac{l\pi}{N}, \frac{2k\pi}{N} \right) = \sigma^* \left(\frac{m}{N} \rho_{ij}^n, \frac{l\pi}{N}, \frac{2k\pi}{N} \right).$$

В этом случае получаем итерационный процесс

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi^2}{N^5} (\rho_{ij}^{n+1})^3 \sum_{m=1}^N \frac{m^2 \sigma^* \left(\frac{m}{N} \rho_{ij}^n, \frac{l\pi}{N}, \frac{2k\pi}{N} \right) \sin \frac{\pi l}{N}}{\left(\frac{m}{N} \rho_{ij}^{n+1} - b(i, j, m, i, j) + a(i, j) \right)^{1/2}} = \\ & = \frac{2\pi^2}{N^5} (\rho_{ij}^n)^3 \sum_{m=1}^N \frac{m^2 \sigma^* \left(\frac{m}{N} \rho_{ij}^n, \frac{l\pi}{N}, \frac{2k\pi}{N} \right) \sin \frac{\pi l}{N}}{\left(\frac{m}{N} \rho_{ij}^n - b(i, j, m, i, j) + a(i, j) \right)^{1/2}} + U_{ij} - U_{ij}^n. \end{aligned}$$

Сделаем еще одно упрощение. В знаменателе левой части предыдущего уравнения положим ρ_{ij}^n вместо ρ_{ij}^{n+1} . Кроме того, упростим запись

в предыдущем уравнении, заметив, что выражение $\frac{m}{N}\rho_{ij}^n - b(i, j, m, i, j) + a(i, j)$ можно записать в виде $(R^2 - \rho_{ij}^n)^2 + \left(\left(\frac{m}{N}\right)^2 - 1\right)(\rho_{ij}^n)^2$. Это следует из того, что $R^2 - 2br(\Theta, \varphi) + r^2$ в знаменателе интеграла, стоящего в левой части уравнения (11.3), можно записать в виде $R - 2Rr \cos \psi + r^2$, где $\cos \psi$ – угол между радиус-векторами, соединяющими начало координат с точками (x, y, z) и (ζ, η, ξ) соответственно. В случае одной экстремальной точки $\cos \psi = 1$.

В результате получаем итерационный процесс:

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi^2}{N^5} (\rho_{ij}^{n+1})^3 \sum_{m=1}^N \frac{m^2 \sigma^* \left(\frac{m}{N} \rho_{ij}^n, \frac{l\pi}{N}, \frac{2k\pi}{N} \right) \sin \frac{\pi l}{N}}{\sqrt{(R - \rho_{ij}^n)^2 + \left(\left(\frac{m}{N} \right)^2 - 1 \right) (\rho_{ij}^n)^2}} = \\ & = \frac{2\pi^2}{N^5} (\rho_{ij}^n)^3 \sum_{m=1}^N \frac{m^2 \sigma^* \left(\frac{m}{N} \rho_{ij}^n, \frac{l\pi}{N}, \frac{2k\pi}{N} \right) \sin \frac{\pi l}{N}}{\sqrt{(R - \rho_{ij}^n)^2 + \left(\left(\frac{m}{N} \right)^2 - 1 \right) (\rho_{ij}^n)^2}} + U_{ij} - U_{ij}^n. \end{aligned} \quad (11.8)$$

Вычислив вещественное значение ρ_{ij}^{n+1} из уравнения (11.8), найдем значения функционала $\Delta^{n+1} = \max_{k,l} |U_{k,l} - U_{k,l}^{n+1}|$. Если $\Delta^{n+1} < \Delta^n$, то $(n+1)$ -й шаг итераций закончен и приступаем к $(n+2)$ -му шагу.

В случае постоянной плотности и двумерных задач в [154] показано, что если величина Δ_{kl}^n достигает максимума в одной паре точек, то следующий шаг метода локальных поправок выполним. В случае, если величина Δ_{kl}^n достигает максимума в нескольких парах точек, то следующий шаг метода локальных поправок может не привести к уменьшению $\max_{k,l} |\Delta_{kl}^{n+1}|$.

В случае переменной плотности метод локальных поправок, представленный уравнениями (11.7), (11.8), может расходиться уже с первого шага. Это связано с тем, что на изменение потенциала в некоторой точке наибольшее влияние могут оказать и достаточно далекие точки. В связи с этим необходимо внести изменение в метод локальных поправок, описанный уравнениями (11.7), (11.8).

Вернемся к уравнению (11.4). Предположим, что Δ^n достигает максимума на единственной паре индексов (r, s) . Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} U_{r,s}^n &= \frac{2\pi^2}{N^2} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \rho_{k,l}^n \sum_{m=1}^N \sigma^* \left(\frac{m}{N} \rho_{kl}^n, \frac{l\pi}{N}, \frac{2k\pi}{N} \right) \left(\frac{m}{N} \rho_{kl}^n \right)^2 \sin \frac{\pi l}{N} \times \\ & \times \left(\left(\frac{m}{N} \rho_{kl}^n \right)^2 - b(k, l, m, r, s) + a(r, s) \right)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (11.9)$$

Вычислим частные производные $\partial U_{r,s}^n / \partial \rho_{k,l}^n$ ($k, l = \overline{1, N}$) на векторе $(\rho_{11}^n, \rho_{12}^n, \dots, \rho_{NN}^n)$ и выберем наибольшую из них по модулю. Пусть максимум достигается на единственной паре индексов (i, j) . Полагая, что вариации в направлении вектора ρ_{ij}^n , оказывают наибольшее влияние на невязку Δ^n на паре индексов (r, s) , очередное приближение будем определять из уравнения

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi^2}{N^5} (\rho_{ij}^{n+1})^3 \sum_{m=1}^N \frac{m^2 \sigma^* \left(\frac{m}{N} \rho_{ij}^{n+1}, \frac{l\pi}{N}, \frac{2k\pi}{N} \right) \sin \frac{\pi l}{N}}{\left(\left(\frac{m}{N} \rho_{ij}^{n+1} \right)^2 - b(i, j, m, r, s) + a(r, s) \right)^{1/2}} = \\ & = \frac{2\pi^2}{N^5} (\rho_{ij}^n)^3 \sum_{m=1}^N \frac{m^2 \sigma^* \left(\frac{m}{N} \rho_{ij}^n, \frac{l\pi}{N}, \frac{2k\pi}{N} \right) \sin \frac{\pi l}{N}}{\left(\left(\frac{m}{N} \rho_{ij}^n \right)^2 - b(i, j, m, r, s) + a(r, s) \right)^{1/2}} + U_{rs} - U_{rs}^n. \end{aligned} \quad (11.10)$$

Для простоты записи введем обозначения

$$\begin{aligned} L_{rs}(\rho_{ij}) &= \frac{2\pi^2}{N^5} (\rho_{ij})^3 \sum_{m=1}^N \frac{m^2 \sigma^* \left(\frac{m}{N} \rho_{ij}, \frac{l\pi}{N}, \frac{2k\pi}{N} \right) \sin \frac{\pi l}{N}}{\left(\left(\frac{m}{N} \rho_{ij} \right)^2 - b(i, j, m, r, s) + a(r, s) \right)^{1/2}}, \\ K_{rs}(\rho_{ij}) &= \frac{2\pi^2}{N^5} (\rho_{ij})^3 \sum_{m=1}^N \frac{m^2 \sigma^* \left(\frac{m}{N} \rho_{ij}, \frac{l\pi}{N}, \frac{2k\pi}{N} \right) \sin \frac{\pi l}{N}}{\left(\left(\frac{m}{N} \rho_{ij} \right)^2 - b(i, j, m, r, s) + a(r, s) \right)^{1/2}} + U_{rs} - U_{rs}^n. \end{aligned}$$

Следующий, $(n+1)$ -й шаг метода локальных поправок заключается в решении уравнения

$$L_{rs}(\rho_{ij}) = K_{rs}(\rho_{ij}^n). \quad (11.11)$$

Для нахождения решения используется метод Ньютона:

$$\rho_{ij}^{n,m+1} = \rho_{ij}^{n,m} - [L'_{rs}(\rho_{ij}^{n,0})]^{-1} K_{rs}(\rho_{ij}^{n,m}), \quad (11.12)$$

где $\rho_{ij}^{n,0} = \rho_{ij}^n$.

Предельное по m значение $\rho_{ij}^{n,m}$ объявляется результатом $(n+1)$ -го шага метода локальных невязок:

$$\rho_{ij}^{n+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} \rho_{ij}^{n,m}.$$

Из условия выбора пары индексов (i, j) следует, что $L'(\rho_{ij}^n) \neq 0$, следовательно, итерации (11.12) осуществимы. Определим условия, при которых итерационный процесс (11.12) сходится. Нетрудно видеть, что

$$|\rho_{ij}^{n,m+1} - \rho_{ij}^{n,m}| = |[L'_{rs}(\rho_{ij}^{n,0})]^{-1} K_{rs}(\rho_{ij}^{n,m})| =$$

$$\begin{aligned}
&= |[L'(\rho_{ij}^{n,0})]^{-1}| |K_{rs}(\rho_{ij}^{n,m}) - K_{rs}(\rho_{ij}^{n,m-1}) - L'(\rho_{ij}^{n,0})(\rho_{ij}^{n,m} - \rho_{ij}^{n,m-1})| \leq \\
&\leq |[L'(\rho_{ij}^{n,0})]^{-1}| |L'(\rho_{ij}^{n,m-1} + \Theta(\rho_{ij}^{n,m-1})) - L'(\rho_{ij}^{n,0})| |\rho_{ij}^{n,m} - \rho_{ij}^{n,m-1}| \leq \\
&\leq |[L'(\rho_{ij}^{n,0})]^{-1}| |L''(\rho_{ij}^{n,m-1} + \Theta_1(\rho_{ij}^{n,m-1}))| |\rho_{ij}^{n,m} - \rho_{ij}^{n,m-1}|^2,
\end{aligned}$$

где $0 < \Theta, \Theta_1 < 1$.

Введем обозначения: $\eta_0 = |\rho_{ij}^{n,1} - \rho_{ij}^{n,0}|$, $b_0 = |[L'_{r,s}(\rho_{ij}^{n,0})]^{-1}|$. Пусть на сегменте $[\rho_{ij}^{n,0} - R, \rho_{ij}^{n,0} + R]$ выполнено неравенство $|L'_{r,s}(x) - L'_{r,s}(y)| \leq F|x - y|$.

Для обоснования сходимости итерационного процесса (11.12) воспользуемся утверждениями теоремы 11.2 из главы I. Пусть $h_0 = b_0 F \eta_0 < 1/2$ и $r_0 = \frac{1-\sqrt{1-2h_0}}{h_0} \eta_0 \leq R$. Тогда последовательные приближения (11.12) сходятся к решению ρ_{ij}^{n+1} уравнения

$$L_{r,s}(\rho_{ij}) = K_{r,s}(\rho_{ij}^n).$$

Замечание. На практике достаточно ограничиться вычислением нескольких последовательных приближений $\rho_{ij}^{n,1}, \rho_{ij}^{n,2}$ полагая, что последнее вычисленное значение есть ρ_{ij}^{n+1} .

Определив ρ_{ij}^{n+1} , находим Δ^{n+1} . Если $\Delta^{n+1} < \Delta^n$, то $(n+1)$ -й шаг метода завершен. Если неравенство $\Delta^{n+1} < \Delta^n$ не выполняется, то сегмент $[\rho_{ij}^n, \rho_{ij}^{n+1}]$ измельчается методом половинного деления до тех пор, пока не выполнено на некотором шаге неравенство $\Delta^{n+1} < \Delta^n$. Необходимость выполнения этого неравенства на некотором шаге деления сегмента связана с тем, что производная на направлении ρ_{ij} наибольшая по модулю, т.е. оказывает наибольшее влияние на величину Δ_{rs}^n , а $\Delta_{rs}^n > \Delta_{kl}^n$ при $(r, s) \neq (k, l)$.

Пусть теперь величина $\Delta^n = \max_{k,l} |\Delta_{k,l}^n|$ достигается на нескольких парах индексов, скажем, (r_0, s_0) и (r_1, s_1) .

Вычислим частные производные $\frac{\partial U_{r_0, s_0}}{\partial \rho_{kl}^n}$ и $\frac{\partial U_{r_1, s_1}}{\partial \rho_{kl}^n}$ на векторах $\rho_{11}^n, \rho_{12}^n, \dots, \rho_{NN}^n$ и выберем максимальную из них по модулю. Здесь возникают различные возможности. Рассмотрим каждую из них в отдельности.

Пусть наибольшей по абсолютной величине будет производная $\frac{\partial U_{r_0, s_0}}{\partial \rho_{ij}^n}$, причем этот максимум единственный среди частных производных $\frac{\partial U_{r_0, s_0}}{\partial \rho_{kl}^n}$. Предположим также, что невязки $\Delta_{r_0 s_0}^n$ и $\Delta_{r_1 s_1}^n$ имеют один и тот же знак. Тогда применяем итерации

$$\rho_{ij}^{n,m+1} = \rho_{ij}^{n,m} - [L'_{r_0 s_0}(\rho_{ij}^{n,0})]^{-1} K_{r_0 s_0}(\rho_{ij}^{n,m})$$

и завершаем $(n+1)$ -й шаг метода, полагая $\rho_{ij}^{n+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} \rho_{ij}^{n,m}$ или деля сегмент $[\rho_{ij}^n, \rho_{ij}^{n+1}]$ на части методом половинного деления.

Рассмотрим теперь общий случай, когда невязки $\Delta_{r_0s_0}^n$ и $\Delta_{r_1s_1}^n$ могут иметь различные знаки. Пусть на векторе ρ_{ij}^n

$$\left| \frac{\partial U_{r_0, s_0}}{\partial \rho_{i_0 j_0}^n} \right| \geq \max_{ij} \left| \frac{\partial U_{r_0, s_0}}{\partial \rho_{ij}^n} \right|, \quad \left| \frac{\partial U_{r_1, s_1}}{\partial \rho_{i_1 j_1}^n} \right| \geq \max_{ij} \left| \frac{\partial U_{r_1, s_1}}{\partial \rho_{ij}^n} \right|,$$

причем $(i_0, j_0) \neq (i_1, j_1)$.

Положим $\rho_{kl}^{n+1} = \rho_{kl}^n$ при $(k, l) \neq (i_0, j_0)$ и $(k, l) \neq (i_1, j_1)$. Представим уравнение (11.4) в виде

$$\begin{aligned} L_{r_0s_0}(\rho_{i_0j_0}) + L_{r_0s_0}(\rho_{i_1j_1}) + \frac{2\pi^2}{N^3} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \text{"} \rho_{kl}^n \sum_{m=1}^N \sigma^* \left(\frac{m}{N} \rho_{kl}^n, \frac{l\pi}{N}, \frac{2k\pi}{N} \right) \left(\frac{m}{N} \rho_{kl}^n \right)^2 \times \\ \times \frac{\sin \pi l}{N} \left(\left(\frac{m}{N} \rho_{kl}^n \right)^2 - b(i, j, m, r_0, s_0) + a(r_0, s_0) \right)^{-1/2} = U_{r_0s_0}; \quad (11.13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{r_1s_1}(\rho_{i_0j_0}) + L_{r_1s_1}(\rho_{i_1j_1}) + \frac{2\pi^2}{N^3} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \text{"} \rho_{kl}^n \sum_{m=1}^N \sigma^* \left(\frac{m}{N} \rho_{kl}^n, \frac{l\pi}{N}, \frac{2k\pi}{N} \right) \left(\frac{m}{N} \rho_{kl}^n \right)^2 \times \\ \times \frac{\sin \pi l}{N} \left(\left(\frac{m}{N} \rho_{kl}^n \right)^2 - b(i, j, m, r_1, s_1) + a(r_1, s_1) \right)^{-1/2} = U_{r_1s_1}, \quad (11.14) \end{aligned}$$

где $\sum \sum \text{"}$ – суммирование по $(k, l) \neq (i_0, j_0), (i_1, j_1)$.

Последовательно вычитая из уравнений (11.13) и (11.14) тождество (11.4), имеем

$$\begin{cases} L_{r_0s_0}(\rho_{i_0j_0}) + L_{r_0s_0}(\rho_{i_1j_1}) = L_{r_0s_0}(\rho_{i_0j_0}^n) + L_{r_0s_0}(\rho_{i_1j_1}^n) + U_{r_0s_0} - U_{r_0s_0}^n, \\ L_{r_1s_1}(\rho_{i_0j_0}) + L_{r_1s_1}(\rho_{i_1j_1}) = L_{r_1s_1}(\rho_{i_0j_0}^n) + L_{r_1s_1}(\rho_{i_1j_1}^n) + U_{r_1s_1} - U_{r_1s_1}^n. \end{cases} \quad (11.15)$$

Решая систему (11.15) методом Ньютона – Канторовича, находим $(n+1)$ -е приближение метода локальных поправок. Доказательство сходимости метода Ньютона – Канторовича основано на теореме 11.2 из главы I.

Применение этой теоремы может оказаться затруднительным, так как из-за непрерывности функции $\sigma(\rho, \varphi, \Theta)$ трудно сформулировать условия обратимости матрицы

$$\begin{pmatrix} L'_{r_0s_0}(\rho_{i_0j_0}) & L'_{r_0s_0}(\rho_{i_1j_1}) \\ L'_{r_1s_1}(\rho_{i_0j_0}) & L'_{r_1s_1}(\rho_{i_0j_0}) \end{pmatrix}.$$

Также может оказаться трудоемким непосредственное применение метода Ньютона — Канторовича.

Поэтому представляется целесообразным упрощение процедуры решения системы (11.15). В частности, можно воспользоваться методом виртуальных перемещений, когда задаются небольшие перемещения $\delta\rho_{i_0j_0}$ и $\delta\rho_{i_1j_1}$, по которым судят об изменениях невязки в системе уравнений (11.15).

ГЛАВА 6

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГРАВИМЕТРИИ

1. Приближенное решение обратной задачи гравиметрии методом Ньютона – Канторовича

В этом разделе численные методы решения сингулярных интегральных уравнений применяются к обратным задачам гравиметрии. Предлагается и обосновывается одна модификация метода Ньютона – Канторовича для решения обратной задачи. Раздел написан на основе работ [63, 64].

1.1. Постановка задачи. Обзор литературы

В. К. Ивановым в [108, 109] был предложен метод решения обратных задач теории логарифмического потенциала, заключающийся в их сведении к нелинейным сингулярным интегральным уравнениям с неизвестной функцией, осуществляющей конформное и однолистное отображение единичной окружности с центром в начале координат на искомую область. С этих работ началось исследование обратных задач потенциала методами теории аналитических функций комплексной переменной. Исключительную роль в становлении и развитии этого научного направления сыграли работы А. И. Прилепко, В. Н. Страхова, А. В. Цирульского, В. Г. Чередниченко, из которых в первую очередь отметим статьи [150, 151, 181, 186, 227, 229, 231, 232].

Пусть D^+ – ограниченная односвязная область с жордановой границей S в области $z = x + iy$; D^- – дополнение $\overline{D^+}$ до полной комплексной плоскости; $\mu(z, \bar{z})$ – непрерывная в $\overline{D^+}$ функция, принадлежащая классу $W^r H_\alpha$, $r = 1, 2, \dots, 0 < \alpha < 1$.

Обозначим

$$-\frac{1}{\pi} \int_{D^+} \frac{\mu(\xi, \bar{\xi})}{\xi - z} d\eta d\zeta = U^-(z, D^+, \mu), \quad \xi = \zeta + i\eta.$$

Функция $U^-(z)$ называется внешним комплексным потенциалом области D^+ с плотностью μ .

Следующая задача, цитируемая по [231], имеет многочисленные приложения в гравиметрии и магнитометрии.

Задача. В односвязной области T определена непрерывная функция $\mu(z, \bar{z})$, а в окрестности точки $z = \infty$ – аналитическая функция

$U(z)$, $U(\infty) = 0$, $\lim_{|z| \rightarrow \infty} zU(z) = c_0$, $\text{Im}c_0 = 0$. Требуется найти такую ограниченную односвязную область D^+ , $\overline{D^+} \subset T$, с жордановой границей, что $U^-(z, D^+, \mu) = U(z)$, $z \in D^-$.

В работе [231] показано, что приведенная выше задача описывается уравнением

$$\varphi^+(t) = M(z(t), \overline{z(t)}) - U(z(t)), |t| = 1, \quad (1.1)$$

где $z(t)$, $\varphi^+(t)$ – функции, аналитические при $|t| \leq 1$,

$$M_{\bar{z}}(z(t), \overline{z(t)}) = \mu(z, \bar{z}).$$

Введя, следуя [108], функцию $\varphi^-(t) = \overline{z(\overline{t^{-1}})}$ при $|t| \geq 1$, представим уравнение (1.1) в виде

$$K\varphi \equiv \varphi^+(t) - M(\overline{\varphi^-(t)}, \varphi^-(t)) + U(\overline{\varphi^-(t)}) = 0, \quad |t| = 1. \quad (1.2)$$

Отметим, что при $\mu(z, \bar{z}) = \mu = \text{const}$ получаем краевую задачу

$$\varphi^+(t) = \mu\varphi^-(t) - U(\overline{\varphi^-(t)}), \quad |t| = 1, \quad (1.3)$$

эквивалентную уравнению В. К. Иванова [108].

В работе [231] предложен приближенный метод решения обратной задачи "в малом", т.е. для тела, близкого данному. Метод заключается в следующем: в уравнении (1.2) выделяется линейная часть, а нелинейная часть возмущается дополнительным слагаемым. Затем линейная часть, которой является оператор Шварца, обращается, и доказывается сходимость полученной итерационной схемы к единственной неподвижной точке. Остроумным приемом показано, что неподвижная точка и является решением уравнения (1.2).

В данном разделе предлагается и обосновывается одна модификация метода Ньютона – Канторовича для решения обратной задачи (1.2). Метод заключается в следующем: так как производная Гато $K'(\varphi_0)$ оператора $K\varphi$ необратима, то она заменяется непрерывно обратимым оператором, являющимся возмущением оператора $K'(\varphi_0)$; затем доказывается сходимость метода Ньютона – Канторовича к решению уравнения (1.2).

Наряду с итерационным методом решения точного уравнения (1.2) предлагаются две вычислительные схемы коллокационного типа, дискретизирующие уравнение (1.2). Получены оценки быстроты сходимости и величины погрешности метода коллокации. Доказана применимость предложенной модификации метода Ньютона – Канторовича к системам нелинейных уравнений, полученных дискретизацией уравнения (1.2).

В разд. 1.2 предлагается и обосновывается вычислительная схема метода Ньютона – Канторовича для решения обратной задачи (1.2).

В разд. 1.3 описывается применение метода простой итерации к решению уравнения (1.2).

Через X обозначается линейное пространство над полем действительных чисел, состоящее из функций $x(t) \in H_\beta(0 < \beta < \alpha)$ с нормой $\|x\| = M(x) + H(x, \beta)$, где

$$M(x) = \max_{t \in \gamma} |x(t)|, \quad \gamma = \{t : |t| = 1\};$$

$$H(x, \beta) = \sup_{t_1 \neq t_2, t_1, t_2 \in \gamma} |x(t_1) - x(t_2)| / |t_1 - t_2|^\beta.$$

1.2. Метод Ньютона – Канторовича для точного уравнения

Сформулированная выше обратная краевая задача описывается уравнением (1.2). Пусть решением обратной задачи является область D^* , ограниченная кривой $z^*(t)$. Существование этого решения при ряде условий будет доказано ниже. Обозначим через $\varphi_0(t)$ ($\varphi_0 = \varphi_0^+ - \varphi_0^-$) начальное приближение к решению $\varphi^*(t)$ краевой задачи (1.2). Кроме условия близости $\varphi_0(t)$ к $\varphi^*(t)$, начальное приближение $\varphi_0(t)$ должно удовлетворять условию

$$\varphi_0^+(t) = M(\overline{\varphi_0^-(t)}, \varphi_0^-(t)) - U_0(\overline{\varphi_0^-(t)}), \quad (1.4)$$

в котором функция $U_0(\overline{\varphi_0^-(t)})$ непрерывно дифференцируема.

Отметим, что построения конкретной функции U_0 не потребуется. Достаточно лишь предположения, что такая функция существует.

Начальное приближение φ_0 к решению краевой задачи (1.2) связано с начальным приближением $z_0(t)$ к кривой $z^*(t)$ соотношением $\varphi_0^-(t) = \overline{z_0(t^{-1})}$.

Производная Гато оператора $K\varphi$ на элементе $\varphi_0(t)$ равна

$$K'(\varphi_0)\varphi \equiv \varphi^+(t) - M'_{u_1}(\overline{\varphi_0^-(t)}, \varphi_0^-(t))\overline{\varphi^-(t)} -$$

$$- M'_{u_2}(\overline{\varphi_0^-(t)}, \varphi_0^-(t))\varphi^-(t) + U'(\overline{\varphi_0^-(t)})\overline{\varphi^-(t)}. \quad (1.5)$$

Продифференцируем, следуя [231], тождество (1.4) по переменной t , воспользуемся соотношением $\varphi_0^-(t) = \overline{z_0(t^{-1})}$ и равенством $\frac{dz_0(t)}{dt} = -\overline{t^2 \left(\frac{dz_0(t)}{dt} \right)}$. В результате получается тождество

$$(\varphi_0^+(t))' = M'_{u_1}(\overline{\varphi_0^-(t)}, \varphi_0^-(t))z_0'(t) - \overline{t^2 M'_{u_2}(\overline{\varphi_0^-(t)}, \varphi_0^-(t))z_0'(t)} - U'_0(\overline{\varphi_0^-(t)})z_0'(t).$$

Выражая отсюда $M'_{u_1}(\overline{\varphi_0^-(t)}, \varphi_0^-(t)) - U'_0(\overline{\varphi_0^-(t)})$ и подставляя полученное выражение в (1.5), имеем

$$K'(\varphi_0)\varphi \equiv \varphi^+(t) - \frac{(\varphi_0^+(t))' + \overline{t^2\mu(\overline{\varphi_0^-(t)}, \varphi_0^-(t))z_0'(t)}}{z_0'(t)}\overline{\varphi^-(t)} - \\ - \mu(\overline{\varphi_0^-(t)}, \varphi_0^-(t))\varphi^-(t) + (U'\overline{\varphi_0^-(t)} - U'_0(\overline{\varphi_0^-(t)}))\overline{\varphi^-(t)}.$$

Введем оператор

$$K'_0(\varphi_0)\varphi \equiv \varphi^+(t) - \frac{(\varphi_0^+(t))' + \overline{t^2\mu(\overline{\varphi_0^-(t)}, \varphi_0^-(t))z_0'(t)}}{z_0'(t)}\overline{\varphi^-(t)} - \\ - \mu(\overline{\varphi_0^-(t)}, \varphi_0^-(t))\varphi^-(t).$$

После замены $\psi^+(t) = \varphi^+(t) - \frac{(\varphi_0^+(t))'\overline{\varphi^-(t)}}{z_0'(t)}$, $\psi^-(t) = \varphi^-(t)$ оператор $K'_0(\varphi_0)$ представим в виде

$$T_0(\varphi_0)\psi = \psi^+(t) - \mu(\overline{\varphi_0^-(t)}, \varphi_0^-(t))\psi^-(t) - \frac{\overline{t^2\mu(\overline{\varphi_0^-(t)}, \varphi_0^-(t))z_0'(t)}}{z_0'(t)}\overline{\psi^-(t)}.$$

Оператор $T_0(\varphi_0)$ имеет нулевое подпространство X_0 с базисом

$$\psi_0^+(t) = 0, \quad \psi_0^-(t) = \overline{itz_0'(t)}.$$

Сопряженным (союзным) к оператору $T_0(\varphi_0)\varphi$ является оператор

$$T_0^*(\varphi_0)\psi = \psi^-(t) - \mu(\overline{\varphi_0^-(t)}, \varphi_0^-(t))\psi^+(t) + \frac{z_0'(t)}{z_0'(t)}\mu(\overline{\varphi_0^-(t)}, \varphi_0^-(t))\overline{\psi^+(t)},$$

имеющий нулевое подпространство с базисом

$$\gamma_0(t) = \gamma_0^+(t) - \gamma_0^-(t), \quad \gamma_0^+(t) = z_0'(t), \quad \gamma_0^-(t) = 0.$$

В банаховом пространстве X выделим множество функций Y_1 , удовлетворяющих условию

$$\operatorname{Re} \int_{|t|=1} f(t)z_0'(t)dt = 0. \quad (1.6)$$

Нетрудно видеть, что множество Y_1 является подпространством пространства X .

Так как условие (1.6) – необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения $T_0(\varphi_0)\psi = f$ [129], то оператор $T_0(\varphi_0)\psi$, действующий из X на Y_1 , имеет ограниченный правый обратный оператор, который является линейным оператором, действующим из Y_1 в факторпространство X/X_0 .

Введем оператор

$$T_\alpha(\varphi_0)\psi = \psi^+(t) - \mu(\overline{\varphi_0^-(t)}, \varphi_0^-(t))\psi^-(t) - \frac{\overline{t^2\mu(\overline{\varphi_0^-(t)}, \varphi_0^-(t))z_0'(t)}}{z_0'(t)}\overline{\psi^-(t)} + \\ + \frac{\alpha}{2\pi} \left(\operatorname{Re} \int_{|\tau|=1} \psi(\tau)z_0'(\tau)d\tau \right) \overline{itz_0'(t)},$$

где α – параметр.

Обозначим через Y пространство $Y = Y_1 \otimes y(t)$, где $y(t) = \overline{Aitz_0'(t)}$, A – вещественная постоянная. Нетрудно видеть, что Y – банахово пространство с максимальной нормой $\|f(t)\| = \|f_1(t)\| + \|\overline{Aitz_0'(t)}\|$, $f \in Y$, $f_1 \in Y_1$. Покажем, что оператор T_α , действующий из X в Y , непрерывно обратим. Прежде всего покажем, что оператор T_α отображает X на Y . Пусть $f \in Y$. Покажем, что уравнение $T_\alpha\psi = f$ разрешимо. Пусть $f \in Y_1$. Тогда существует такое ψ_0 , что $T_0\psi_0 = f$. Подставляя ψ_0 в оператор T_α , имеем $T_\alpha\psi_0 = T_0\psi_0 + c\overline{itz_0'(t)}$, где $c = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int_{|\tau|=1} \psi_0(\tau)z_0'(\tau)d\tau$.

Если $c = 0$, то ψ_0 является решением уравнения $T_\alpha\psi_0 = f$. Если $c \neq 0$, то функция $\psi_0 - \frac{2\pi}{\int_0^{2\pi} |z_0'(e^{i\sigma})|^2 d\sigma} \overline{itz_0'(t)}c$ является решением уравнения $T_\alpha\psi = f$, $f \in Y_1$. Пусть $A = \operatorname{const} \neq 0$, $f = \overline{Aitz_0'(t)}$. Тогда функция $x(t) = \overline{Aitz_0'(t)} \frac{2\pi}{(\alpha \int_0^{2\pi} |z_0'(e^{i\sigma})|^2 d\sigma)}$ является решением этого уравнения.

Таким образом, уравнение $T_\alpha(\varphi_0)\psi = f$ разрешимо при любой правой части $f \in Y$. Так как оператор $T_\alpha(\varphi_0)$ отображает банахово пространство X на банахово пространство Y , то, по теореме Банаха о гомоморфизме [130], он непрерывно обратим.

Вернемся к старым переменным, полагая

$$\varphi^+(t) = \psi^+(t) + (\varphi_0^+(t))' \overline{\psi^-(t)} / z_0'(t), \varphi^-(t) = \psi^-(t).$$

Тогда оператор T_α приобретает следующий вид (с введением нормировки в последнее слагаемое):

$$\tilde{T}_\alpha\varphi \equiv \varphi^+(t) - \mu(\overline{\varphi_0^-(t)}, \varphi_0^-(t))\varphi^-(t) - M'_{u_1}(\overline{\varphi_0^-(t)}, \varphi_0^-(t))\overline{\varphi^-(t)} + \\ + U'_0(\overline{\varphi_0^-(t)})\overline{\varphi^-(t)} + \frac{\alpha}{2\pi} \left(\operatorname{Re} \int_{|\tau|=1} \varphi(\tau)z_0'(\tau)d\tau \right) \frac{\overline{itz_0'(t)}}{\int_0^{2\pi} |z_0'(e^{i\sigma})|^2 d\sigma}.$$

Так как оператор \tilde{T}_α , как и оператор T_α , отображает банахово пространство X на банахово пространство Y , то он непрерывно обратим и $\|\tilde{T}_\alpha^{-1}\| \leq A$.

Если $\|U'(\overline{\varphi_0^-}) - U'_0(\overline{\varphi_0^-})\| \|T_\alpha^{-1}\| = q < 1$, то, по теореме Банаха, оператор

$$T\varphi \equiv \varphi^+(t) - \mu(\overline{\varphi_0^-(t)}, \varphi_0^-(t))\varphi^-(t) - M'_{u_1}(\overline{\varphi_0^-(t)}, \varphi_0^-(t))\overline{\varphi^-(t)} + \\ + U'(\overline{\varphi_0^-(t)})\overline{\varphi_0^-(t)} + \frac{\alpha}{2\pi} \left(\operatorname{Re} \int_{|\tau|=1} \varphi(\tau)z'_0(\tau)d\tau \right) \frac{\overline{itz'_0(t)}}{\int_0^{2\pi} |z'_0(e^{i\sigma})|^2 d\sigma}$$

непрерывно обратим при всех $\alpha > 0$. Ниже для определенности положим $\alpha = 1$.

Для решения исследуемой обратной задачи воспользуемся итерационным методом Ньютона — Канторовича:

$$T\varphi_{n+1}(t) = -K(\varphi_n) + K'(\varphi_0)\varphi_n(t) + c(\varphi_n)\overline{itz'_0(t)}, \quad (1.7)$$

где

$$c(\varphi_n) = -\frac{1}{2\pi\alpha(z'_0)} \operatorname{Re} \int_{|\tau|=1} z'_0(\tau)(-K(\varphi_n(\tau)) + K'(\varphi_0)\varphi_n(\tau))d\tau, \\ \alpha(z'_0) = \int_0^{2\pi} |z'_0(e^{i\sigma})|^2 d\sigma.$$

В главе I показано, что метод Ньютона — Канторовича $x_{n+1} = x_n - [K'(x_0)]^{-1}Kx_n$ при выполнении условия $\|[K'(x_0)]^{-1}\| \|K'(\xi_1) - K'(\xi_2)\| = q < 1$ в сфере $S(x_0, r)$ ($r = \eta_0/(1 - q)$, $\eta_0 = \|[K'(x_0)]^{-1}Kx_0\|$) сходится к решению x^* уравнения $Kx = 0$ со скоростью $\|x^* - x_n\| \leq cq^n$.

Проверим выполнение этих условий для итерационного процесса (1.7). Нетрудно видеть, что

$$\|\varphi_{n+1} - \varphi_n\| = \|T^{-1}\| \left[\|K(\varphi_n) - K(\varphi_{n-1}) - K'(\varphi_0)(\varphi_n - \varphi_{n-1})\| + \right. \\ \left. + \left\| \frac{c(\varphi_n) - c(\varphi_{n-1})}{2\pi\alpha(z'_0)} \overline{itz'_0(t)} \right\| \right].$$

Оценим каждое слагаемое, стоящее в квадратных скобках, по отдельности. Очевидно, что

$$\|K(\varphi_n) - K(\varphi_{n-1}) - K'(\varphi_0)(\varphi_n - \varphi_{n-1})\| \leq \|K'(\xi) + K'(\varphi_0)\| \|\varphi_n - \varphi_{n-1}\|;$$

$$\begin{aligned} \left\| \frac{c(\varphi_n) - c(\varphi_{n-1})}{\alpha(z'_0)} \overline{itz'_0(t)} \right\| &\leq c \|c(\varphi_n) - c(\varphi_{n-1})\| \|tz'_0(t)\| \leq \\ &\leq c \|K(\varphi_n) - K(\varphi_{n-1}) - K'(\varphi_0)(\varphi_n - \varphi_{n-1})\| \|c\| \|tz'_0(t)\| \leq \\ &\leq c \|K'(\xi) + K'(\varphi_0)\| \|tz'_0(t)\| \|\varphi_n - \varphi_{n-1}\|. \end{aligned}$$

При выполнении условия $c \|T^{-1}\| (\|K'(\xi) - K'(\varphi_0)\| (1 + \|tz'_0(t)\|)) = q < 1$ итерационный процесс сходится к функции $\varphi^*(t)$.

Покажем, что функция $\varphi^*(t)$ является решением уравнения (1.1). Из того, что последовательные приближения $\varphi_n(t)$ сходятся к $\varphi^*(t)$, и из формулы (1.7) следует равенство

$$g(\varphi^*(t)) \overline{itz'_0(t)} = -K(\varphi^*), \quad (1.8)$$

где

$$g(\varphi^*) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int_{|\tau|=1} z'_0(\tau) (\varphi^*(\tau) - K(\varphi^*) + K'(\varphi_0)\varphi^*(\tau)) (a(z'_0(\tau)))^{-1} d\tau.$$

Покажем, следуя [231], что функционал $g(\varphi^*)$ равен нулю. Для этого равенство (1.8) умножим на $(z^*(t))'$ и проинтегрируем по окружности $|t| = 1$. В результате имеем

$$\begin{aligned} g(\varphi^*) \operatorname{Re} \left(\int_{|t|=1} \overline{itz'_0(t)} (z^*(t))' dt \right) &= \operatorname{Re} \left(\int_{|t|=1} (M(\overline{\varphi^{*-}(t)}, \varphi^{*-}(t)) - \right. \\ &\quad \left. - U(\overline{\varphi^{*-}(t)}) z^*(t))' dt \right). \end{aligned}$$

Правая часть равна нулю, так как $M(\overline{\varphi^{*-}(t)}, \varphi^{*-}(t)) - U(\overline{\varphi^{*-}(t)}) = \varphi^{*+}(t)$, а функции $\varphi^{*+}(t)$ и $z^*(t)$ — аналитические в круге $|t| < 1$. При достаточно хорошем начальном приближении

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\int_{|t|=1} \overline{itz'_0(t)} (z^*(t))' dt \right) &= \operatorname{Re} \left(\int_{|t|=1} \overline{itz'_0(t)} z'_0(t) dt \right) + \\ &\quad + \operatorname{Re} \left(\int_{|t|=1} \overline{itz'_0(t)} (z^*(t) - z_0(t))' dt \right) \geq \\ &\geq \int_0^{2\pi} |z'_0(e^{i\sigma})|^2 d\sigma - c \|z^*(t) - z_0(t)\|' > 0. \end{aligned}$$

Поэтому $g(\varphi^*) = 0$, следовательно, $K(\varphi^*) = 0$.

Теорема 1.1. Если в сфере $S(\varphi_0, r)$ ($r = \|\varphi_1 - \varphi_0\|/(1-q)$) выполнено условие $\|T^{-1}(K'(\xi) - K'(\varphi_0))\| = q < 1$, то итерационный процесс (1.7) сходится к решению $\varphi^*(t)$ уравнения (1.2) со скоростью $\|\varphi^* - \varphi_0\| < cq^n$.

При практической реализации вычислений по итерационной схеме (1.7) необходимо перейти к уравнениям в подпространствах.

Обозначим через X_n подпространство пространства X , состоящее из полиномов вида $\sum_{k=-n}^n \alpha_k t^k$. Через P_n обозначим оператор проектирования на множество интерполяционных полиномов степени n по равноотстоящим узлам $t_k = \exp(is_k)$, $s_k = 2k\pi/(2n+1)$, $k = 0, 1, \dots, 2n$.

Прежде чем исследовать сходимость метода Ньютона — Канторовича для уравнений в подпространствах, рассмотрим приближенные методы решения уравнений с сопряжением. Ряд результатов по приближенному решению уравнений с сопряжением и сдвигом опубликован в [22].

Для простоты ограничимся уравнением

$$L\varphi \equiv \varphi^+(t) + a(t)\varphi^-(t) + b(t)\overline{\varphi^-(t)} = f(t), \quad (1.9)$$

которое рассматривается на окружности $\gamma = \{t : |t| = 1\}$.

Будем считать, что функции $a(t), b(t), f(t) \in W^2H_\alpha$, а функции $a(t)$ и $1/b(t)$ не равны нулю на окружности γ .

Предположим, что индекс каждой из функций $a(t)$ и $1/b(t)$ неотрицательный.

Приближенное решение уравнения (1.9) будем искать в виде функции

$$\varphi_n^+(t) = \psi_n^+(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k, \quad \varphi_n^-(t) = \overline{b^+(t^{-1})} \psi_n^-(t) = \overline{b^+(t^{-1})} \sum_{k=-n}^{-1} a_k t^k,$$

где $b(t) = b^-(t)/b^+(t)$;

$$b^+(t) = \exp\left(\frac{1}{2} \ln(1/(b(t)t^\kappa))\right) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\ln(1/(b(\tau)\tau^\kappa))}{\tau - t} d\tau;$$

$$b^-(t) = \exp\left(-\frac{1}{2} \ln(1/(b(t)t^\kappa))\right) t^{-\kappa} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\ln(1/(b(\tau)\tau^\kappa))}{\tau - t} d\tau,$$

κ — индекс функции $1/b(t)$.

Коэффициенты a_k определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$L_n \varphi_n \equiv P_n[\varphi_n^+(t) + a(t)\varphi_n^-(t) + b(t)\overline{\varphi_n^-(t)}] = P_n[f(t)]. \quad (1.10)$$

Введем функции

$$\varphi^+(t) = \psi^+(t), \quad \varphi^-(t) = \overline{b^+(t^{-1})}\psi^-(t),$$

где $\psi^-(t)$ — функция, аналитическая в D^- и обращающаяся в нуль на бесконечности.

Введем пространство \overline{X} функций $x(t)$ вида $x(t) = \psi^+(t) + \overline{b^+(t^{-1})}\psi^-(t)$ с нормой $\|x\| = \|\psi\|$, где $\|\psi\| = M(\psi) + H(\psi, \beta)$, а также подпространство $\overline{X}_n \subset \overline{X}$, состоящее из функций $x_n(t) = \psi_n^+(t) + \overline{b^+(t^{-1})}\psi_n^-(t)$, где

$$\psi_n(t) = \sum_{k=-n}^n \alpha_k t^k, \quad \psi_n^+(t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k t^k, \quad \psi_n^-(t) = \sum_{k=-n}^{-1} \alpha_k t^k.$$

Будем считать, что оператор $L\varphi$ ($L \in [\overline{X}, X]$) непрерывно обратим в пространстве \overline{X} .

Уравнения (1.9) и (1.10) можно представить в виде

$$\psi^+(t) + a(t)\overline{b^+(t^{-1})}\psi^-(t) + b^-(t)\overline{\psi^-(t)} = f(t) \quad (1.11)$$

и

$$P_n[\psi_n^+(t) + a(t)\overline{b^+(t^{-1})}\psi_n^-(t) + b^-(t)\overline{\psi_n^-(t)}] = P_n[f(t)]. \quad (1.12)$$

Если функция $a(t)\overline{b^+(t^{-1})}$ имеет неотрицательный индекс, то ее можно представить в виде отношения $q^+(t)/q^-(t)$, и тогда уравнения (1.11) и (1.12) записываются в эквивалентной форме:

$$\overline{L}\varphi = q^-(t)\psi^+(t) + q^+(t)\psi^-(t) + q^-(t)b^-(t)\overline{\psi^-(t)} = q^-(t)f(t) \quad (1.13)$$

и

$$\begin{aligned} \overline{L}_n\varphi_n &= P_n \left[q^-(t)\psi_n^+(t) + q^+(t)\psi_n^-(t) + q^-(t)b^-(t)\overline{\psi_n^-(t)} \right] = \\ &= P_n[q^-(t)f(t)]. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Так как уравнение (1.13) эквивалентно уравнению (1.9), то оператор $\overline{L} \in [\overline{X}, X]$ непрерывно обратим. Введем оператор

$$\tilde{L}\varphi \equiv q_n^-(t)\psi^+(t) + q_n^+(t)\psi^-(t) + q_{[n/2]}^-(t)b_{[n/2]}^-(t)\overline{\psi^-(t)},$$

где $q_n = T_n[q]$, $b_n = T_n[b]$, T_n — оператор проектирования на множество полиномов наилучшего равномерного приближения степени n .

Нетрудно видеть, что

$$\|\overline{L}\varphi_n - \overline{L}_n\varphi_n\| \leq \|\overline{L}\varphi_n - \tilde{L}\varphi_n\| + \|\tilde{L}\varphi_n - \overline{L}_n\varphi_n\| \leq cn^{-r-\alpha+\beta} \ln n \|\varphi_n\|.$$

Из этой оценки и теоремы Банаха о левом обратном операторе, приведенной в главе I, следует обратимость слева оператора \overline{L}_n . Так как

оператор \overline{L}_n конечномерный, то из обратимости слева следует непрерывная обратимость. Близость решений φ^* и φ_n^* уравнений (1.9) и (1.10) оценивается по общей теории приближенных методов анализа [117] неравенством $\|\varphi^* - \varphi_n^*\| \leq An^{-r-\alpha+\beta} \ln n$.

Теорема 1.2. Пусть оператор $\overline{L} \in [\overline{X}, X]$ непрерывно обратим, $a, b, f \in W^r H_\alpha$, индексы функций a, b^{-1} неотрицательны. Тогда при n таких, что $q = cn^{-r-\alpha+\beta} \ln n < 1$, система уравнений (1.10) имеет единственное решение φ_n^* и справедлива оценка $\|\varphi^* - \varphi_n^*\| = cn^{-r-\alpha+\beta} \ln n$, где φ^* — решение уравнения (1.9).

Повторяя рассуждения, сделанные при доказательстве теоремы 1.2, легко показать, что при n таких, что $q = cn^{-r-\alpha+\beta} \ln n < 1$, оператор

$$T_n \varphi_n = P_n[\varphi_n^+(t) - \mu(\overline{\varphi_0^-(t)}, \varphi_0^-(t))\varphi_n^-(t) - M'_{u_1}(\overline{\varphi_0^-(t)}, \varphi_0^-(t))\overline{\varphi_n^-(t)} + \\ + U'(\overline{\varphi_0^-(t)})\overline{\varphi_n^-(t)} + \left(\operatorname{Re} \int_{|\tau|=1} \varphi_n(\tau) z'_{0n}(\tau) d\tau \right) \frac{\overline{itz_0'(t)}}{\int_0^{2\pi} |z_0'(e^{i\sigma})|^2 d\sigma}],$$

где $z'_{0n}(t) = T_n[z'_0(t)]$, непрерывно обратим и $\|T_n^{-1}\| \leq \|T^{-1}\|/(1-q)$.

Аппроксимируем уравнение (1.2) следующим образом:

$$K_n \varphi_n \equiv P_n[\varphi_n^+(t) - M(\overline{\varphi_n^-(t)}, \varphi_n^-(t)) + U(\overline{\varphi_n^-(t)})] = 0.$$

Приближенное решение уравнения $K_n \varphi_n = 0$ находится из итерационного процесса:

$$T_n \varphi_{m+1}(t) = -K_n(\varphi_m(t)) + K'_n(\varphi_0(t))\varphi_m(t) + c_n(\varphi_m(t))P_n[\overline{itz_0'(t)}], \quad (1.15)$$

где

$$c_n(\varphi_m(t)) = -\frac{1}{a(z'_0(t))} \operatorname{Re} \int_{|t|=1} z'_{0n}(t) (-K_n(\varphi_m(t)) + K'_n(\varphi_0(t))\varphi_m(t)) dt.$$

Точно так же, как в случае итерационного процесса (1.7), можно показать, что итерационный процесс (1.15) при хорошем начальном приближении сходится к функции $\varphi_n^*(t)$ и справедлива оценка $\|\varphi^*(t) - \varphi_n^*(t)\| = cn^{-r-\alpha+\beta} \ln n$, где $\varphi^*(t)$ — решение уравнения (1.2).

К недостаткам описанной вычислительной схемы относятся два обстоятельства: требование не отрицательности индексов функции $a(t)$, $(b(t))^{-1}$ и необходимость решать задачу факторизации для функции $b(t)$.

Рассмотрим вычислительную схему, свободную от этих недостатков. Для простоты ограничимся уравнением (1.9). Приближенное решение уравнения (1.9) будем искать в виде полинома

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=-n}^n \alpha_k t^k,$$

коэффициенты которого определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$\bar{L}_n \varphi_n \equiv P_n[\varphi_n^+(t) + a(t)\varphi_n^-(t) + b(t)\overline{\varphi_n^-(t)}] = P_n[f(t)]. \quad (1.16)$$

Теорема 1.3. Пусть оператор $\bar{L} \in [X, X]$ непрерывно обратим, функции $a(t), b(t), f(t) \in W^r H_\alpha$; $\varphi^*(t)$ – решение уравнения (1.9). Тогда при n таких, что $q = c \frac{\ln n}{n^{r+\alpha-\beta}} < 1$, система уравнений (1.16) имеет единственное решение $\varphi_n^*(t)$ и справедлива оценка $\|\varphi^*(t) - \varphi_n^*(t)\| \leq c \frac{\ln n}{n^{r+\alpha-\beta}}$.

Доказательство. Рассмотрим, следуя [129], систему уравнений, состоящую из уравнения (1.9) и краевого условия, полученного из (1.9) переходом к комплексно-сопряженным значениям:

$$\begin{aligned} \varphi^+(t) + a(t)\varphi^-(t) + b(t)\overline{\varphi^-(t)} &= f(t), \\ \overline{\varphi^+(t)} + \overline{a(t)\varphi^-(t)} + \overline{b(t)\varphi^-(t)} &= \overline{f(t)}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Аналогичным образом можно представить и систему линейных алгебраических уравнений (1.16):

$$\begin{aligned} P_n[\varphi_n^+(t) + a(t)\varphi_n^-(t) + b(t)\overline{\varphi_n^-(t)}] &= P_n[f(t)], \\ P_n[\overline{\varphi_n^+(t)} + \overline{a(t)\varphi_n^-(t)} + \overline{b(t)\varphi_n^-(t)}] &= P_n[\overline{f(t)}]. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Воспользовавшись введенными в [129] формулами

$$\Phi_1^+(t) = \varphi^+(t), \Phi_1^-(t) = \varphi^-(t), \Phi_2^+(t) = \overline{t\varphi^-(t)}, \Phi_2^-(t) = \overline{t\varphi^+(t)},$$

систему уравнений (1.17) представим в виде

$$\begin{aligned} \Phi_1^+(t) + a(t)\Phi_1^-(t) + tb(t)\Phi_2^+(t) &= f(t), \\ \Phi_2^-(t) + \overline{a(t)\Phi_2^+(t)} + \overline{tb(t)\Phi_1^-(t)} &= \overline{tf(t)}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Аналогично, введя функции

$$\begin{aligned} \Phi_{1,n}^+(t) &= \varphi_n^+(t), \Phi_{1,n}^-(t) = \varphi_n^-(t), \\ \Phi_{2,n}^+(t) &= \overline{t\varphi_n^-(t)}, \Phi_{2,n}^-(t) = \overline{t\varphi_n^+(t)}, \end{aligned}$$

систему уравнений (1.18) представим в виде

$$\begin{aligned} P_n[\Phi_{1,n}^+(t) + a(t)\Phi_{1,n}^-(t) + tb(t)\Phi_{2,n}^+(t)] &= P_n[f(t)], \\ P_n[\Phi_{2,n}^-(t) + \overline{a(t)}\Phi_{2,n}^+(t) + \overline{tb(t)}\Phi_{1,n}^-(t)] &= P_n[\overline{tf(t)}]. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Введем обозначения

$$G(t) = \frac{1}{\overline{a(t)}} \begin{pmatrix} |b(t)|^2 - |a(t)|^2 & tb(t) \\ -tb(t) & -1 \end{pmatrix},$$

$$g(t) = \frac{1}{\overline{a(t)}} \begin{pmatrix} f(t)\overline{a(t)} \\ \overline{tf(t)} \end{pmatrix}.$$

Разрешив систему уравнений (1.19) относительно вектора $\psi^+(t)$, имеем

$$\psi^+(t) = G(t)\psi^-(t) + g(t). \quad (1.21)$$

Аналогичным образом система уравнений (1.20) может быть представлена в виде

$$P_n[\psi^+(t)] = P_n[G(t)\psi^-(t)] + P_n[g(t)]. \quad (1.22)$$

Таким образом, задача обоснования вычислительной схемы (1.16) свелась к обоснованию решения системы краевых задач Римана (1.21) по вычислительной схеме (1.22). Эти вопросы исследовались в [47]. Из полученных в этой работе результатов следует, что при n таких, что $q = cn^{-r-\alpha+\beta} \ln n < 1$, система уравнений (1.22) однозначно разрешима и справедлива оценка $\|\psi^*(t) - \psi_n^*(t)\| \leq cn^{-r-\alpha+\beta} \ln n$, где $\psi^*(t)$ и $\psi_n^*(t)$ – решения систем уравнений (1.21) и (1.22) соответственно. Возвращаясь к уравнениям (1.9) и (1.16), убеждаемся в справедливости теоремы 1.3.

Повторяя рассуждения, сделанные при доказательстве теоремы 1.3, легко показать, что при n таких, что $q = cn^{-r-\alpha+\beta} \ln n$, оператор

$$\begin{aligned} \tilde{T}_n \varphi_n \equiv P_n \left[\varphi_n^+(t) - \mu(\overline{\varphi_0^-(t)}, \varphi_0^-(t))\varphi_n^-(t) - M'_{u_1}(\overline{\varphi_0^-(t)}, \varphi_0^-(t))\overline{\varphi_n^-(t)} + \right. \\ \left. + U'(\overline{\varphi_0^-(t)})\overline{\varphi_n^-(t)} + \left(\operatorname{Re} \int_{|\tau|=1} \varphi_n(\tau) z_{0n}(\tau) d\tau \right) \frac{\overline{itz'_0(t)}}{\int_0^{2\pi} |z'_0(e^{i\sigma})|^2 d\sigma} \right], \end{aligned}$$

где $\varphi_n(t) = \sum_{k=-n}^n \alpha_k t^k$, непрерывно обратим и $\|\tilde{T}_n^{-1}\| \leq \|T^{-1}\|/(1-q)$.

Уравнение (1.2) аппроксимируется следующим образом:

$$K_n \varphi_n \equiv P_n[\varphi_n^+(t) - M(\overline{\varphi_n^-(t)}, \varphi_n^-(t)) + U(\overline{\varphi_n^-(t)})] = 0.$$

Приближенное решение уравнения $K_n \varphi_n = 0$ находится из итерационного процесса

$$T_n \varphi_{m+1}(t) = -K_n(\varphi_m) + K_n'(\varphi_0) \varphi_m(t) + ic(\varphi_m) P_n[\overline{itz_0'(t)}], \quad (1.23)$$

где

$$c_n(\varphi_m) = -\frac{1}{a(z_0')} \operatorname{Re} \int_{|t|=1} z_0'(t) (-K_n(\varphi_m(t)) + K_n'(\varphi_0) \varphi_m(t)) dt.$$

Точно так же, как в случае итерационного процесса (1.7), можно показать, что итерационный процесс (1.23) при хорошем начальном приближении сходится в функции $\varphi_n^*(t)$ и справедлива оценка $\|\varphi^*(t) - \varphi_n^*(t)\| \leq cn^{-r-\alpha+\beta} \ln n$, где $\varphi^*(t)$ — решение уравнения (1.2).

1.3. Метод простой итерации

Рассмотрим уравнение (1.3). Сделав замену переменных $\psi^+(t) = \varphi^+(t)$, $\psi^-(t) = \mu \varphi^-(t)$ и воспользовавшись формулами Сохоцкого — Племяля, уравнение (1.3) приведем к следующему виду:

$$\psi(t) = -U \left(\frac{1}{\mu} \overline{\psi^-(t)} \right). \quad (1.24)$$

Решение этого уравнения будем искать методом простой итерации:

$$\psi^{v+1}(t) = -U \left(\frac{1}{\mu} \overline{\psi^-(t)^v} \right). \quad (1.25)$$

Обоснование будем проводить в метрике пространства $L_2(\gamma)$ ($\gamma = \{t : |t| = 1\}$) с нормой $\|f\|^2 = (f, f)$,

$$(f_1, f_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=1} f_1(t) \overline{f_2(t)} \frac{dt}{it} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(t) \overline{f_2(t)} d\theta, t = e^{i\theta}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \|\psi^{v+1}(t) - \psi^v(t)\| &= \left\| U \left(\frac{1}{\mu} \overline{\psi^-(t)^v} \right) - U \left(\frac{1}{\mu} \overline{\psi^-(t)^{v-1}} \right) \right\| \leq \\ &\leq \frac{1}{\mu} \left\| U' \left(\frac{1}{\mu} \overline{\psi^-(t)^{v-1}} + \theta \left(\overline{\psi^-(t)^v} - \overline{\psi^-(t)^{v-1}} \right) \right) \right\| \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \|\overline{\psi^-(t)^v} - \overline{\psi^-(t)^{v-1}}\| \leq \\
& \leq \frac{1}{\mu} L \|\overline{\psi^-(t)^v} - \overline{\psi^-(t)^{v-1}}\| \leq \dots \leq \left(\frac{L}{\mu}\right)^v \|\overline{\psi^-(t)^{(1)}} - \overline{\psi^-(t)^{(0)}}\| = \\
& = \left(\frac{L}{\mu}\right)^v \eta_0 = q^v \eta_0, \tag{1.26}
\end{aligned}$$

где $\eta_0 = \|\overline{\psi^-(t)^1} - \overline{\psi^-(t)^0}\|$, $\psi^0(t)$ – начальное приближение, L – наибольшее значение функции $\left|U' \left(\frac{1}{\mu}\varphi(t)\right)\right|$ в сфере S , определенной ниже, $q = L/\mu$.

Из (1.26) следует, что при $q < 1$ последовательность ψ^v фундаментальная в пространстве $L_2(\gamma)$ и, следовательно, сходится к функции $\psi^*(t)$, являющейся решением уравнения (1.24), причем погрешность итерационного процесса (1.25) оценивается неравенством $\|\psi^*(t) - \psi^0(t)\| \leq q^{(v-1)}\eta_0/(1-q)$. Все последовательные приближения находятся в сфере $S(x_0, r)$ ($r = \eta_0/(1-q)$) с центром в точке x_0 радиуса r . Таким образом, доказана

Теорема 1.4. Пусть оператор $U(\varphi)$ дифференцируем по Гато и в сфере $S(x_0, r)$ ($r = \eta_0/(1-q)$) выполнены условия $q = L/\mu < 1$, $\max_{\varphi \in S(x_0, r)} |U'(\varphi)| < L$. Тогда итерационный процесс (1.25) сходится к решению $\varphi^*(t)$ уравнения (1.24) со скоростью $\|\psi^*(t) - \psi^v(t)\| \leq q^{(v-1)}\eta_0/(1-q)$.

Рассмотрим проекционно-итерационный метод решения. Решение уравнения (1.24) будем искать в виде полинома $\psi_n^v(t) = \sum_{k=n}^n \alpha_n^v t^k$, коэффициенты $\{\alpha_n\}$ которого определяются из итерационной схемы

$$\begin{aligned}
\psi_n^{v-1}(t) &= -P_n \left[U \left(\frac{1}{\mu} \overline{(\psi_n^-(t))^v} \right) \right], \\
\psi_n^-(t) &= -\frac{1}{2}\psi_n(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\psi_n(\tau)}{\tau - t} d\tau. \tag{1.27}
\end{aligned}$$

По аналогии с теоремой 1.4 доказывается следующее утверждение, при формулировке которого использованы обозначения теоремы 1.4. Кроме того, через $\tilde{\eta}_0$ обозначена норма $\tilde{\eta}_0 = \|P_n \left[U \left(\frac{1}{\mu} \overline{x_0} \right) - x_0^-\right]\|$.

Теорема 1.5. Пусть $\varphi^*(t)$ – решение уравнения (1.24). Пусть оператор $U(\varphi)$ дифференцируем по Фреше и в сфере $S(x_0, \tilde{r})$ ($\tilde{r} = \tilde{\eta}_0/(1-q)$) выполнено условие $\max_{\varphi \in S(x_0, \tilde{r})} |U'(\varphi)| \leq L, q = L/\mu < 1$. Тогда итерационный процесс (1.27) сходится к функции $\psi_n^*(t)$ и справедливы оценки $\|\psi^*(t) - \psi_n^*(t)\| \leq \|\psi^*(t) - P_n \psi^*(t)\|/(1-q)$, $\|\psi_n^* - \psi_n^{*v}\| \leq q^{v-1}\tilde{\eta}_0/(1-q)$.

2. Приближенное решение обратной задачи потенциала в пространстве суммируемых функций

В данном разделе продолжается исследование приближенных методов решения обратной задачи потенциала, начатое в предыдущем разделе. Напомним постановку задачи.

Пусть D^+ — ограниченная односвязная область с жордановой границей S в плоскости $z = x + iy$; D^- — дополнение $\overline{D^+}$ до полной комплексной плоскости; $\mu(z, \bar{z})$ — непрерывная в $\overline{D^+}$ функция, удовлетворяющая условию Гельдера H_α ($0 < \alpha < 1$). Обозначим

$$-\frac{1}{\pi} \int_{D^+} \frac{\mu(\xi, \bar{\xi})}{\xi - z} d\eta d\zeta = U^-(z, D^+, \mu), \quad \xi = \zeta + i\eta.$$

Функция $U^-(z)$ называется внешним комплексным потенциалом области D^+ с плотностью μ .

Задача. В односвязной области T определена непрерывная функция $\mu(z, \bar{z})$, а в окрестности точки $z = \infty$ — аналитическая функция $U(z)$, $U(\infty) = 0$.

Требуется найти такую ограниченную односвязную область D^+ , $\overline{D^+} \subset T$, с жордановой границей, что $U^-(z, D^+, \mu) = U(z)$, $z \in D^-$.

В разд. 1 показано, что приведенная выше задача описывается уравнением

$$K\varphi \equiv \varphi^+(t) - M(\overline{\varphi^-(t)}, \varphi^-(t)) + U(\overline{\varphi^-(t)}) = 0, \quad (2.1)$$

где $\varphi^-(t) = \overline{z(\bar{t}^{-1})}$.

В разд. 1 предложена и обоснована итерационная схема метода Ньютона — Канторовича, предназначенная для приближенного решения уравнения (2.1) и аппроксимирующей (2.1) системы нелинейных алгебраических уравнений. При этом рассматривался случай, когда производная Фреше на начальном приближении имеет собственное подпространство размера 1.

В данном разделе предлагается метод приближенного решения обратной задачи гравиметрии при непрерывной обратимости производной Фреше. Однако обоснование этого метода проводится в пространстве суммируемых функций, и поэтому решением задачи является необязательно однолистная функция. Таким образом, после численного решения задачи необходима еще гравиметрическая интерпретация результата.

Метод, развитый в данном разделе, оказывается применимым и к обратной задаче электроразведки.

Пусть D^+ — ограниченная односвязная область в плоскости $z = x + iy$ с гладкой границей S^0 ; $D^- = \overline{CD^+}$ и w гармоническая в D^+ функция, $w \in C^1(\overline{D^+})$.

Обратная задача электроразведки формулируется (см., например, [234]) следующим образом.

Задача. В области T^+ задана гармоническая функция $w(x, y)$, а в T^- — гармоническая функция $v^-(x, y)$, $v^-(\infty) = 0$. Требуется найти область D^+ с гладкой границей S и функцию v^+ , гармоническую в D^+ , принадлежащую классу $C^1(S)$ и удовлетворяющую условиям

$$v^+ = v^-; \quad (2.2)$$

$$\mu_2 \frac{\partial v^+}{\partial n} - \mu_1 \frac{\partial v^-}{\partial n} = (\mu_1 - \mu_2) \frac{\partial w}{\partial n}, \quad (2.3)$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ — дифференцирование по направлению внешней относительно S нормали, действительные числа μ_1 и μ_2 ($\mu_1 \neq \mu_2$) характеризуют магнитную проницаемость среды, заполняющей D^+ и D^- .

Предполагается возможность аналитического продолжения функции v^- в области D^- и включения $v \in C^1(\overline{D^-})$.

Построим функции $U^-(z) = v^- + iv_0^-$, $U^+(z) = v^+ + iv_0^+$, $f(z) = w + iw_0$, где v_0^- , v_0^+ , w_0 — функции, гармонически сопряженные к v^- , v^+ , w соответственно, $v_0^-(\infty) = 0$, $w_0(0) = 0$. Из теории гармонических функций следует, что $U(z)$, $w_0(0) = 0$ строятся однозначно при условии $U^-(\infty) = 0$, $f(0) = 0$.

В работе [234] показано, что обратная задача электроразведки сводится к уравнению

$$\frac{2\mu_2}{\mu_1 - \mu_2} U^+(z) = \lambda U(z) - \overline{U(z)} + f(z) - \overline{f(z)}, \quad z \in S, \quad U(\infty) = 0, \quad (2.4)$$

где $\lambda = (\mu_1 + \mu_2)/(\mu_1 - \mu_2)$.

Здесь $z(t)$ — граница S области D^+ , причем $z(t)$ — функция однолиственная внутри единичной окружности с центром в начале координат.

Введем, следуя [108, 109], функцию $z^*(t) = \overline{z(\bar{t}^{-1})}$ и положим

$$\varphi^-(t) = z^*(t), \quad \varphi^+(t) = 2\mu_2 U^+(z)(t)/(\mu_1 - \mu_2).$$

Воспользовавшись функциями $\varphi^+(t)$, $\varphi^-(t)$, уравнение (2.4) представим в виде

$$T\varphi \equiv \varphi^+(t) - \lambda U(\overline{\varphi^-(t)}) + \overline{U(\varphi^-(t))} - \overline{f(\varphi^-(t))} + \overline{f(\varphi^-(t))}, \quad (2.5)$$

где $|t| = 1$.

Для приближенного решения уравнения (2.5) в предыдущем разделе предложена вычислительная схема Ньютона — Канторовича, сходимость которой к решению уравнения (2.5) удалось обосновать при выполнении достаточно громоздкого условия.

Ниже, в разд. 2.2, предлагается и обосновывается метод приближенного решения обратной задачи электроразведки, свободный от этого недостатка. Однако обоснование этого метода проводится в пространствах суммируемых функций, и поэтому полученное решение нуждается в геофизической интерпретации.

2.1. Приближенное решение обратной задачи гравиметрии

В этом разделе исследуется приближенное решение обратной задачи гравиметрии методом Ньютона — Канторовича. Пусть $M'_z(z, \bar{z})$, $M'_{\bar{z}}(z, \bar{z})$, $U'(z) \in H_\alpha(1)$.

Аппроксимируем исходное уравнение (2.1) приближенным

$$K_n \varphi_n \equiv P_n \left[\varphi_n^+(t) - M(\overline{\varphi_n^-(t)}, \varphi_n^-(t)) + U(\overline{\varphi_n^-(t)}) \right] = 0, \quad (2.6)$$

где $\varphi_n(t) = \sum_{k=-n}^n \alpha_k t^k$, P_n — оператор проектирования на множество интерполяционных тригонометрических полиномов n степени по $2n+1$ узлу $t_k = \exp(is_k)$, $s_k = 2k\pi/(2n+1)$, $k = 0, 1, \dots, 2n$.

Обоснование метода Ньютона — Канторовича будем проводить в пространстве $X = L_2(\gamma)$ ($\gamma = \{t : |t| = 1\}$) и его подпространстве X_n , состоящем из полиномов вида $\sum_{k=-n}^n \alpha_k t^k$. Нетрудно видеть, что производная Фреше оператора K_n на элементе $\varphi_0 \in X_n$ имеет вид

$$K'_n(\varphi_0) \varphi_n \equiv P_n \left[\varphi_n^+(t) - M'_{u_1}(\overline{\varphi_0^-(t)}, \varphi_0^-(t)) \overline{\varphi_n^-(t)} - \right. \\ \left. - M'_{u_2}(\overline{\varphi_0^-(t)}, \varphi_0^-(t)) \varphi_n^-(t) + U'(\overline{\varphi_0^-(t)}) \overline{\varphi_n^-(t)} \right],$$

где $M'_{u_i}(u_1, u_2)$ — частные производные функции $M(u_1, u_2)$ по переменным u_i , $i = 1, 2$.

Приближенное решение уравнения (2.6) будем искать методом Ньютона — Канторовича:

$$\varphi_n^{m+1}(t) = \varphi_n^m(t) - [K'_n(\varphi_0(t))]^{-1} K_n \varphi_n(t). \quad (2.7)$$

Для того чтобы можно было воспользоваться итерациями (2.7), нужно определить условия, при которых оператор $K'_n(\varphi_0)$ обратим.

Введем оператор

$$K'(\varphi_0)\varphi \equiv \varphi^+(t) - a(t)\varphi^-(t) - b(t)\overline{\varphi^-(t)},$$

где $a(t) = M'_{u_2}(\overline{\varphi_0^-(t)}, \varphi_0^-(t))$, $b(t) = M'_{u_1}(\overline{\varphi_0^-(t)}, \varphi_0^-(t)) - U'(\overline{\varphi_0^-(t)})$.

В предыдущем разделе в метрике пространств Гельдера показано, что если оператор $K'(\varphi_0)$ непрерывно обратим, то при достаточно больших n (их величина зависит от гладкости функций $a(t)$ и $b(t)$) оператор $K'_n(\varphi_0)$ непрерывно обратим. Аналогично можно доказать справедливость этого утверждения в метрике пространства $L_2(\gamma)$. Напомним [129, с. 277], что для непрерывной обратимости оператора $K'(\varphi_0)$ в устойчивом случае достаточно выполнения условий:

- 1) индекс $\text{Ind}(a(t))$ функции $a(t)$ равен нулю;
- 2) $|a(t)| - |b(t)| > 0$.

Условия обратимости оператора $K'(\varphi_0)$ в вырожденном случае приведены в теореме 17.2 монографии [129]. Для определенности будем считать, что рассматриваемый случай устойчивый.

Таким образом, если $\text{Ind}a(t) = 0$ и при любом $t \in \gamma$ $|a(t)| > |b(t)|$, то при достаточно больших n оператор $K'_n(\varphi_0)$ непрерывно обратим. Оценим близость операторов $K'_n(\varphi_0)$ и $K'_n(\xi_0)$. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} & \|K'_n(\varphi_0)\varphi_n(t) - K'_n(\xi_0)\varphi_n(t)\| = \\ & = \|P_n \left\{ \left[M'_{u_1}(\overline{\varphi_0^-(t)}, \varphi_0^-(t)) - M'_{u_1}(\bar{\xi}, \xi) \right] \overline{\varphi_n^-(t)} - \left[U'(\overline{\varphi_0^-(t)}) - U'(\bar{\xi}) \right] \overline{\varphi_n^-(t)} + \right. \\ & \quad \left. + \left[M'_{u_2}(\overline{\varphi_0^-(t)}, \varphi_0^-(t)) - M'_{u_2}(\bar{\xi}, \xi) \right] \varphi_n^-(t) \right\} \| = \\ & = \left\{ \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} \left| \left[M'_{u_1}(\overline{\varphi_0^-(t_k)}, \varphi_0^-(t_k)) - \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - M'_{u_1}(\bar{\xi}(t_k), \xi(t_k)) \right] \overline{\varphi_n^-(t_k)} - \left[U'(\overline{\varphi_0^-(t_k)}) - U'(\bar{\xi}(t_k)) \right] \overline{\varphi_n^-(t_k)} + \right. \\ & \quad \left. + \left[M'_{u_2}(\overline{\varphi_0^-(t_k)}, \varphi_0^-(t_k)) - M'_{u_2}(\bar{\xi}(t_k), \xi(t_k)) \right] \varphi_n^-(t_k) \right|^2 \Big\}^{1/2} \leq \\ & \leq \max_{0 \leq k \leq 2n, i=1,2} \left| M'_{u_i}(\overline{\varphi_0^-(t_k)}, \varphi_0^-(t_k)) - M'_{u_i}(\bar{\xi}(t_k), \xi(t_k)) \right|, \\ & \quad \max_{0 \leq k \leq 2n} |U'(\overline{\varphi_0^-(t_k)}) - U'(\bar{\xi}(t_k))| \|\varphi_n\| \leq |\varphi_0(t) - \xi(t)|^\alpha \|C\| \|\varphi_n\|. \end{aligned}$$

Воспользовавшись результатами разд. 11 главы I, можно показать, что если в сфере $S(\varphi_0, r)$ пространства X с центром в точке φ_0 и радиуса r , где $r = \|\varphi_1 - \varphi_0\|/(1-q)$, $q < 1$, выполнено условие $\|\xi(t) - \eta(t)\|^\alpha \|C\| \leq$

$\leq q/K$ при $\forall \xi, \eta \in S(\varphi_0, r)$, то уравнение (2.6) имеет решение $\varphi_n^*(t)$, к которому сходятся итерации (2.6). Здесь $K = \|[K'_n(\varphi_0)]^{-1}\|$.

Пусть обратная задача решается для тела, близкого к "данному". Тогда в качестве начального приближения можно взять кривую, описывающую границу, "данного" тела или аппроксимацию этой кривой полиномом степени n . Если уравнение (2.1) имеет решение $\varphi^*(t)$ ($\varphi^* \in H_\alpha$), принадлежащее сфере $S(\varphi_0, r)$, то справедлива оценка $\|\varphi^*(t) - \varphi_n^*(t)\| \leq O(n^{-\alpha})$.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 2.1. Пусть выполнены следующие условия:

1) функции $M(z, \bar{z}), U(z)$ имеют частные производные (первая по обоим переменным), удовлетворяющие условию Гельдера с коэффициентом, равным единице, и с показателем $\alpha, 0 < \alpha \leq 1$;

2) $\forall t \in \gamma \quad |M'_{u_2}(\overline{\varphi_0^-(t)}, \varphi_0^-(t))| > |M'_{u_1}(\overline{\varphi_0^-(t)}, \varphi_0^-(t)) - U'(\overline{\varphi_0^-(t)})|$,
 $\text{Ind}(M'_{u_2}(\overline{\varphi_0^-(t)}, \varphi_0^-(t))) = 0$;

3) в сфере $S(\varphi_0, r)$ ($r = \|\varphi_0 - \varphi_1\|/(1-q)$) с центром в точке φ_0 радиуса r выполнено условие $\|K'_n(\varphi_0) - K'_n(\xi)\| \leq q/K$, где $K = \|[K'_n(\varphi_0)]^{-1}\|$. Тогда уравнение (2.6) имеет в сфере $S(\varphi_0, r)$ единственное решение, к которому сходится итерационный процесс (2.7). Если уравнение (2.1) имеет решение $\varphi^*(t) \in S$, принадлежащее H_α , то справедлива оценка $\|\varphi^* - \varphi_n^*\| \leq cn^{-\alpha}$.

Замечание. Покажем, что из неравенства $\|\varphi^*(t) - \varphi_n^*(t)\|_{L_2} \leq cn^{-\alpha}$ при $\alpha > 1/2$ следует, что $\|\varphi^*(t) - \varphi_n^*(t)\|_C \leq cn^{-\alpha+1/2}$, т.е. решения $\varphi^*(t)$ и $\varphi_n^*(t)$ точного и приближенного уравнений достаточно близки. Предположим, что $\varphi^*(t) \in H_\alpha(1)$, где $\alpha > 1/2$. Обозначим через $T_n(\varphi^*(t))$ полином наилучшего равномерного приближения степени n к функции $\varphi^*(t)$. Тогда, следуя доказательству С. Н. Бернштейна [140] обратной теоремы конструктивной теории функций, имеем

$$\varphi^*(t) - \varphi_n^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (T_{2^{k+1}n}(\varphi^*) - T_{2^k n}(\varphi^*)) + T_n(\varphi^*) - \varphi_n^*.$$

Перейдем к нормам

$$\|\varphi^*(t) - \varphi_n^*(t)\|_C \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|T_{2^{k+1}n}(\varphi^*) - T_{2^k n}(\varphi^*)\|_C + \|T_n(\varphi^*) - \varphi_n^*\|_C.$$

Воспользовавшись теоремой 8.9 из главы I, имеем

$$\|\varphi^*(t) - \varphi_n^*(t)\|_C \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{k=0}^{\infty} (2^{k+1}n)^{1/2} \|T_{2^{k+1}n}(\varphi^*) - T_{2^k n}(\varphi^*)\|_{L_2} + n^{1/2} \|T_n(\varphi^*) - \varphi_n\|_{L_2} \leq \\ &\leq c \sum_{k=0}^{\infty} |(2^{k+1}n)^{1/2} (2^k n)^{-\alpha} + cn^{1/2} n^{-\alpha}| = cn^{-\alpha+1/2}. \end{aligned}$$

Таким образом, если уравнение (2.6) имеет решение $\varphi^*(t) \in H_\alpha$ ($\alpha > 1/2$), то итерационный процесс (2.7) сходится в метрике пространства C .

Рассмотрим уравнение (2.6) и итерационный процесс (2.7) в пространстве Гельдера $X = H_\beta$ с нормой $\|x\| = \max_{t \in \gamma} |x(t)| + \sup_{t_1 \neq t_2} \frac{|x(t_1) - x(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\beta}$ и его подпространстве X_n , состоящем из полиномов степени n . Так как оператор $K'_n(\varphi_0)$ однозначно отображает X_n в X_n , то он непрерывно обратим в пространстве X_n . Следовательно, итерационный процесс (2.7) сходится и в пространстве X_n и утверждения теоремы 2.1 могут быть распространены на метрику H_β (но с другими оценками погрешности и скорости сходимости).

2.2. Приближенное решение обратной задачи электроразведки

В этом разделе исследуется приближенное решение обратной задачи электроразведки методом Ньютона — Канторовича. При этом используются обозначения, введенные в предыдущем разделе. Аппроксимируем исходное уравнение (2.5) приближенным:

$$\begin{aligned} T_n(\varphi_n) \equiv P_n \left[\varphi_n^+(t) - \lambda U(\overline{\varphi_n^-(t)}) + \overline{U(\varphi_n^-(t))} - \right. \\ \left. - f(\overline{\varphi_n^-(t)}) + \overline{f(\varphi_n^-(t))} \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Нетрудно видеть, что производная Фреше оператора T_n на элементе $\varphi_0 \in X_n$ имеет вид

$$\begin{aligned} T'_n(\varphi_0)\varphi_n \equiv P_n [\varphi_n^+(t) - \lambda U'(\overline{\varphi_0^-(t)})\overline{\varphi_n^-(t)} + \\ + \overline{U'(\varphi_0^-(t))\varphi_n^-(t)} - f'(\overline{\varphi_0^-(t)})\overline{\varphi_n^-(t)} + \overline{f'(\varphi_0^-(t))\varphi_n^-(t)}]. \end{aligned}$$

Приближенное решение уравнения (2.8) будем искать методом Ньютона — Канторовича:

$$\varphi_n^{m+1}(t) = \varphi_n^m(t) - [T'_n(\varphi_0)]^{-1} T_n(\varphi_n(t)). \quad (2.9)$$

Повторяя выкладки, приведенные в предыдущем разделе, устанавливаем, что оператор $T'_n(\varphi_0)$ непрерывно обратим при выполнении условий:

$$|\overline{U'(\varphi_0^-(t)) + f'(\varphi_0^-(t))}| > |\lambda \overline{U'(\varphi_0^-(t))} + \overline{f'(\varphi_0^-(t))}|;$$

и

$$\text{Ind}(\overline{U'(\varphi_0^-(t)) + f'(\varphi_0^-(t))}) = 0.$$

Если функции U', f' в окрестности начального приближения φ_0 удовлетворяют условию Гельдера с показателем α и с коэффициентом, равным единице, то, воспользовавшись результатами разд. 11 главы I, приходим к следующему утверждению.

Теорема 2.2. Пусть выполнены следующие условия:

1) функции $U(z), f(z)$ имеют частные производные, удовлетворяющие условию Гельдера с показателем $\alpha (0 < \alpha \leq 1)$ и с коэффициентом, равным единице;

2) для всех $t \in \gamma$ $|\overline{U'(\varphi_0^-(t)) + f'(\varphi_0^-(t))}| > |\lambda \overline{U'(\varphi_0^-(t))} + \overline{f'(\varphi_0^-(t))}|$ и $\text{Ind}(\overline{U'(\varphi_0^-(t)) + f'(\varphi_0^-(t))}) = 0$;

3) в сфере $S(\varphi_0, r)$ ($r = \|\varphi_0 - \varphi_n^1\|/(1 - q), q < 1$) с центром в точке φ_0 и радиуса r выполнено условие $\|U'_n(\varphi_0) - U'_n(\xi)\| \leq qK^{-1}$, где $K = \|[U'_n(\varphi_0)]^{-1}\|$.

Тогда уравнение (2.8) имеет в сфере $S(\varphi_0, r)$ единственное решение, к которому сходится итерационный процесс (2.9). Если уравнение (2.5) имеет решение $\varphi^* \in S(\varphi_0, r)$, то справедлива оценка $\|\varphi^* - \varphi_n^*\| \leq cn^{-\alpha}$.

Рассмотрим, как и в разд. 1, уравнение (2.8) и итерационный процесс (2.9) в пространстве Гельдера $X = H_\beta$ и его подпространство X_n , состоящее из полиномов степени n . Так как оператор $T'_n(\varphi_0)$ однозначно отображает X_n в X_n , то он непрерывно обратим и в пространстве X_n . Следовательно, итерационный процесс (2.9) сходится и в пространстве X_n и утверждения теоремы 2.2 могут быть распространены на уравнение в метрике H_β (но с другими оценками погрешности и быстроты сходимости).

ГЛАВА VII

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ПРОДОЛЖЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ

1. Обзор литературы

Задача продолжения потенциальных полей является одной из наиболее важных задач теории потенциала полей. Этой задаче посвящены многочисленные публикации, из которых в первую очередь укажем на работы [103, 108, 111, 125, 170, 192, 193]. Подробная библиография по методам продолжения потенциальных полей содержится в работах [103, 125, 170]. При этом основным аппаратом при решении задач продолжения аналитических и потенциальных функций являются соответственно интегралы Коши [86, 125] и интегралы типа Коши [103].

Несмотря на актуальность задачи, численные методы продолжения потенциальных полей в трехмерном пространстве начали развиваться сравнительно недавно [34, 44, 46, 49, 52, 53, 62].

В данной главе предложены и обоснованы различные приближенные методы продолжения потенциальных полей, основанные на применении сингулярных интегральных уравнений и интегральных уравнений с интегралами типа Коши.

В главе использованы результаты работ [34, 45, 46, 49, 52, 53, 62].

2. Метод сингулярных интегральных уравнений в задачах аналитического продолжения

В этом разделе предложено и обосновано несколько вычислительных схем решения задачи аналитического продолжения, основанных на численном решении сингулярных интегральных уравнений.

Пусть дана область G , ограниченная замкнутой кривой L . Пусть $G \subset G_1$. Пусть в области G_1 задана аналитическая функция $x(z)$, значения которой известны в области G . Требуется распространить функцию $x(z)$ из области G на область G_1 .

Для простоты будем рассматривать в качестве области G внутреннюю часть единичной окружности с центром в начале координат на комплексной плоскости, которую обозначим через γ_0 . Сначала, используя значения функции $x(z)$ на единичной окружности, будем искать приближенные значения функции $x(z)$ на контуре γ_1 , который представляет собой окружность радиуса $1 + h$. Для этого нужно решить следующее

уравнение:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{x(\tau)}{\tau - t} d\tau = x(t), t \in \gamma_0. \quad (2.1)$$

Сделаем в (2.1) замену переменных:

$$\tau = (1 + h)e^{i\sigma}, d\tau = (1 + h)e^{i\sigma} i d\sigma, t = e^{is}.$$

В результате имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x((1 + h)e^{i\sigma}) (1 + h)e^{i\sigma}}{(1 + h)e^{i\sigma} - e^{is}} d\sigma = x(e^{is}). \quad (2.2)$$

Уравнение (2.2) будем решать методом коллокации. В качестве узлов коллокации возьмем $t_k = e^{is_k}$, $k = 0, \dots, 2n$, где $s_k = 2k\pi/(2n + 1)$, $k = 0, \dots, 2n$.

Приближенное решение уравнения (2.2) будем искать в виде полинома

$$x_n(t) = x_n((1 + h)e^{is}) = \sum_{k=0}^{2n} x_n(t_k^*) \psi_k(s),$$

где фундаментальный многочлен $\psi_k(t)$ определяется формулой

$$\psi_k(s) = \frac{1}{2n + 1} \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(s - s_k)}{\sin \frac{s-s_k}{2}},$$

а узлы

$$t_k^* = (1 + h)e^{is_k}, k = 0, \dots, 2n.$$

Значения $x_n(t_k^*)$, $k = 0, \dots, 2n$, определяются из системы алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2n + 1} \sum_{j=0}^{k-v_1} \frac{x_n(t_j^*) (1 + h)e^{is_j}}{(1 + h)e^{is_j} - e^{is_k}} + \\ & + \frac{2v_1}{2n + 1} \frac{x_n(t_k^*) (1 + h)e^{is_k}}{(1 + h)e^{is_k} - e^{is_k}} + \frac{1}{2n + 1} \sum_{j=k+v_1}^{2n} \frac{x_n(t_j^*) (1 + h)e^{is_j}}{(1 + h)e^{is_j} - e^{is_k}} = x(t_k), \end{aligned} \quad (2.3)$$

$k = 0, \dots, 2n$.

Здесь $v_1, v_1 = 1, 2, \dots$ — целое число, определяемое из условия разрешимости системы уравнений (2.3). В качестве одного из таких условий может быть использована теорема Адамара об обратимости квадратных матриц (см. теорему 9.4 главы I). Величина v_1 будет определена ниже.

Система уравнений (2.3) в матричной форме имеет вид $Ax = f$, где $A = \{a_{kj}\}$, $k, j = 0, 1, \dots, 2n$, $x = (x_0, \dots, x_{2n})^T$, $f = (f_0, \dots, f_{2n})^T$, $f_k = x(t_k)$, $k = 0, 1, \dots, 2n$.

Здесь

$$a_{kj} = \begin{cases} \frac{2v_1}{2n+1} \frac{(1+h)e^{is_k}}{(1+h)e^{is_k} - e^{is_k}}, & k = j; \\ 0, & k - v_1 \leq j \leq k + v_1, k \neq j; \\ \frac{1}{2n+1} \frac{(1+h)e^{is_j}}{(1+h)e^{is_j} - e^{is_k}}, & (j \leq k - v_1) \cup (j \geq k + v_1). \end{cases}$$

Из теоремы Адамара об обратимости матриц следует, что при выполнении условия

$$\frac{2}{2n+1} \sum_{k=v_1}^n \left| \frac{1+h}{(1+h)(\cos s_k + i \sin s_k) - 1} \right| < \frac{2v_1}{2n+1} \frac{1+h}{h}$$

система уравнений (2.3) однозначно разрешима. Отсюда следует условие

$$\sum_{k=v_1}^n \left| \frac{1}{(1+h)(\cos s_k + i \sin s_k) - 1} \right| < \frac{v_1}{h},$$

выполнение которого всегда можно добиться выбором h и v_1 .

Далее, зная значения функции $x(t)$ на окружности радиуса $1+h$, найдем ее значения на окружности радиуса $1+2h$. Продолжая процесс, по значениям $x(t)$ на окружности радиуса $1+lh$ найдем значения этой функции на окружности радиуса $1+h(l+1)$.

Приведенный алгоритм оказался чрезвычайно эффективным при практическом решении задач аналитического продолжения. Соответствующие примеры приведены в приложении *H*.

3. Численные методы продолжения потенциальных полей в пространстве R_3

Один из основных методов исследования многомерных потенциальных полей основан на исследовании многомерных интегралов типа Коши [103]. Приближенные методы вычисления многомерных интегралов типа Коши начали исследоваться в [52]. Численные методы продолжения трехмерных потенциальных полей исследовались в работах [45, 53, 62].

Раздел посвящен построению и обоснованию одного численного метода продолжения трехмерных потенциальных полей. При его изложении использованы результаты работ [45, 52, 53, 62].

3.1. Постановка задачи

Рассмотрим безвихревое векторное поле $\mathbf{u}(\mathbf{z})$, удовлетворяющее уравнениям $\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{r}) = q(\mathbf{r})$, $\operatorname{rot} \mathbf{u}(\mathbf{r}) = 0$, где $q(\mathbf{r})$ — объемная плотность источников поля, \mathbf{r} — радиус-вектор в декартовой системе координат XYZ .

В монографии [103] показано, что безвихревое поле потенциально во всем пространстве: $\mathbf{u}(\mathbf{r}') = \operatorname{grad} U(\mathbf{r}')$, где $U(\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{q(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dv$ — скалярный потенциал поля (ньютоновский потенциал), V — область распространения источников $q(\mathbf{r})$.

Известно, что ньютоновский потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона внутри области, в которой находятся источники, а вне области — уравнению Лапласа.

Пусть D — область, свободная от источников, а S — граница этой области. В дальнейшем будем считать, что S — кусочно-гладкая поверхность.

Справедлива [103] формула

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left[(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r})) \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + [\mathbf{n} \times \mathbf{u}(\mathbf{r})] \times \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right] ds = \\ = \begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{r}'), & \mathbf{r}' \in D; \\ 0, & \mathbf{r}' \in \overline{D}. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь дифференцирование и интегрирование ведется по переменной r , r' — фиксированная точка, $r' \in \overline{D}$, \overline{D} — дополнение области D до R_3 .

Ставится следующая задача.

Задача. Пусть известно векторное поле $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ в области D , ограниченной кусочно-гладкой поверхностью S . Требуется: 1) продолжить поле $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ на область D^* , $D \subset D^*$; 2) локализовать источники поля.

3.2. Приближенный метод

Пусть $D \subset D^*$ и на поверхности S области D известна вектор-функция $\mathbf{u}(\mathbf{r})$. Для простоты обозначений предположим, что S — сфера с центром в начале координат и радиусом R_0 .

Предположение, что в качестве S берется сфера, не снижает общности рассуждений. Из приведенных далее рассуждений легко заметить, что аналогичные рассуждения справедливы для любых конечных кусочно-гладких поверхностей S .

Предположим, что поле $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ потенциально в некоторой области D^* так, что $S \subset D^*$.

Возьмем сферу S_1 , концентрическую со сферой S , с радиусом $R_1 > R_0$. Требуется определить векторное поле на сфере S_1 .

Если поле $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ потенциально в области D^* , то для его нахождения можно воспользоваться формулой (3.1).

Обозначим через $\mathbf{u}_{S_1}(\mathbf{r})$ значение поля $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ на сфере S_1 . Тогда для $r' \in S$ справедливо уравнение

$$\iint_{S_1} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_{S_1}(\mathbf{r})) \mathbf{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + (\mathbf{n} \times \mathbf{u}_{S_1}(\mathbf{r}) \times \mathbf{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}) ds = \mathbf{u}_S(r), \quad (3.2)$$

где $r' \in S$.

Уравнение (3.2) положено в основу нескольких вычислительных схем.

Предварительно преобразуем уравнение (3.2) к более удобному виду.

Перейдем в (3.2) к сферическим координатам $x = R_1 \sin \theta \cos \varphi$, $y = R_1 \sin \theta \sin \varphi$, $z = R_1 \cos \theta$, $x' = R_0 \sin \theta \cos \varphi$, $y' = R_0 \sin \theta \sin \varphi$, $z' = R_0 \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Тогда вектор нормали имеет вид $\mathbf{n}(\theta, \varphi) = \{\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta\}$. Для краткости введем обозначение $\mathbf{n} = \{n_1, n_2, n_3\}$.

Введем обозначения: $g_1 = \partial \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} / \partial x$, $g_2 = \partial \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} / \partial y$, $g_3 = \partial \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} / \partial z$. Здесь $g_1 = g_1(\theta, \varphi, \theta', \varphi')$, $g_2 = g_2(\theta, \varphi, \theta', \varphi')$, $g_3 = g_3(\theta, \varphi, \theta', \varphi')$, тогда $g = (g_1, g_2, g_3)$.

Аналогично, $u(r) = (u_1(r), u_2(r), u_3(r))$, $u_i(r) = \varphi_i(\rho, \Theta, \varphi)$, $i = 1, 2, 3$.

Проделав несложные, но громоздкие выкладки, сведем уравнение (3.2) к следующей системе, состоящей из трех интегральных уравнений с неизвестными функциями $\varphi_i(R_1, \theta, \varphi)$, $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} & -\frac{R_1^2}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \{ \varphi_1(R_1, \theta, \varphi) [n_1(\theta, \varphi)g_1(\theta, \varphi, \theta', \varphi') + \\ & + n_2(\theta, \varphi)g_2(\theta, \varphi, \theta', \varphi') + n_3(\theta, \varphi)g_3(\theta, \varphi, \theta', \varphi')] + \\ & + \varphi_2(R_1, \theta, \varphi) [n_2(\theta, \varphi)g_1(\theta, \varphi, \theta', \varphi') - n_1(\theta, \varphi)g_2(\theta, \varphi, \theta', \varphi')] + \\ & + \varphi_3(R_1, \theta, \varphi) [n_3(\theta, \varphi)g_1(\theta, \varphi, \theta', \varphi') - n_1(\theta, \varphi)g_3(\theta, \varphi, \theta', \varphi')] \} \sin \theta d\theta d\varphi = \\ & = \varphi_1(R_0, \theta', \varphi'); \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{R_1^2}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \{ \varphi_1(R_1, \theta, \varphi) [n_1(\theta, \varphi)g_2(\theta, \varphi, \theta', \varphi') - n_2(\theta, \varphi)g_1(\theta, \varphi, \theta', \varphi')] + \\ & + \varphi_2(R_1, \theta, \varphi) [n_1(\theta, \varphi)g_1(\theta, \varphi, \theta', \varphi') + n_2(\theta, \varphi)g_2(\theta, \varphi, \theta', \varphi')] + \end{aligned}$$

$$+n_3(\theta, \varphi)g_3(\theta, \varphi, \theta', \varphi')] + \varphi_3(R_1, \theta, \varphi) [n_3(\theta, \varphi)g_2(\theta, \varphi, \theta', \varphi') - n_2(\theta, \varphi)g_3(\theta, \varphi, \theta', \varphi')] \sin \theta d\theta d\varphi = \varphi_2(R_0, \theta', \varphi'); \quad (3.4)$$

$$-\frac{R_1^2}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \{ \varphi_1(R_1, \theta, \varphi) [n_1(\theta, \varphi)g_3(\theta, \varphi, \theta', \varphi') - n_3(\theta, \varphi)g_1(\theta, \varphi, \theta', \varphi')] + \varphi_2(R_1, \theta, \varphi) [n_2(\theta, \varphi)g_3(\theta, \varphi, \theta', \varphi') - n_3(\theta, \varphi)g_2(\theta, \varphi, \theta', \varphi')] + \varphi_3(R_1, \theta, \varphi) [n_1(\theta, \varphi)g_1(\theta, \varphi, \theta', \varphi') + n_2(\theta, \varphi)g_2(\theta, \varphi, \theta', \varphi') + n_3(\theta, \varphi)g_3(\theta, \varphi, \theta', \varphi')] \} \sin \theta d\theta d\varphi = \varphi_3(R_0, \theta', \varphi'). \quad (3.5)$$

Опишем одну из вычислительных схем. Введем прямоугольники $\Delta_{ij} = [\theta_{i-1}, \theta_i; \varphi_{j-1}, \varphi_j]$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, N$, где $\theta_i = \pi i/N$, $\varphi_j = \frac{2\pi j}{N}$.

Для решения поставленной задачи будем использовать метод локальных поправок. В каждом прямоугольнике Δ_{ij} введем узлы:

$$\theta_i^v = \frac{\theta_{i+1} + \theta_i}{2} + \frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{2} d_v, \quad \varphi_i^w = \frac{\varphi_{i+1} + \varphi_i}{2} + \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{2} d_w,$$

где $v = \overline{1, r}$, $w = \overline{1, r}$; d_k — нули полинома Чебышева первого рода:

$$d_k = -\cos \left(\frac{(2(k+1) - 1)\pi}{2n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Решение будем искать в виде полинома

$$\varphi_1^{ij}(\theta, \varphi) = \sum_{v=1}^{r-1} \sum_{w=1}^{r-1} \varphi_1(R_1, \theta_i^v, \varphi_j^w) \psi_v(\theta) \psi_w(\varphi);$$

$$\varphi_2^{ij}(\theta, \varphi) = \sum_{v=1}^{r-1} \sum_{w=1}^{r-1} \varphi_2(R_1, \theta_i^v, \varphi_j^w) \psi_v(\theta) \psi_w(\varphi);$$

$$\varphi_3^{ij}(\theta, \varphi) = \sum_{v=1}^{r-1} \sum_{w=1}^{r-1} \varphi_3(R_1, \theta_i^v, \varphi_j^w) \psi_v(\theta) \psi_w(\varphi),$$

где ψ_i — i -й фундаментальный полином Лагранжа. Значения $\varphi_m(\theta_i^v, \varphi_j^w)$ найдем из следующей системы линейных алгебраических уравнений.

Для первой координаты φ_1 :

$$-\frac{R_1^2}{4\pi} \left\{ \sum_{i,j=1}^N \sum_{v,w=1}^r \varphi_1(R_1, \theta_i^v, \varphi_j^w) \Delta_v^{(\theta)} \Delta_w^{(\varphi)} [n_1(\theta_i^v, \varphi_j^w)g_1(\theta_{i'}^v, \varphi_{j'}^w, \theta_i^v, \varphi_j^w) + n_2(\theta_i^v, \varphi_j^w)g_2(\theta_{i'}^v, \varphi_{j'}^w, \theta_i^v, \varphi_j^w) + n_3(\theta_i^v, \varphi_j^w)g_3(\theta_{i'}^v, \varphi_{j'}^w, \theta_i^v, \varphi_j^w)] \sin \theta_i^v + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i,j=1}^N \sum_{v,w=1}^r \varphi_2(R_1, \theta_i^v, \varphi_j^w) \Delta_v^{(\theta)} \Delta_w^{(\varphi)} \left[n_2(\theta_i^v, \varphi_j^w) g_1(\theta_{i'}^{v'}, \varphi_{j'}^{w'}, \theta_i^v, \varphi_j^w) - \right. \\
& \quad \left. - n_1(\theta_i^v, \varphi_j^w) g_2(\theta_{i'}^{v'}, \varphi_{j'}^{w'}, \theta_i^v, \varphi_j^w) \right] \sin \theta_i^v + \\
& + \sum_{i,j=1}^N \sum_{v,w=1}^r \Delta_v^{(\theta)} \Delta_w^{(\varphi)} \varphi_3(R_1, \theta_i^v, \varphi_j^w) \left[n_3(\theta_i^v, \varphi_j^w) g_1(\theta_{i'}^{v'}, \varphi_{j'}^{w'}, \theta_i^v, \varphi_j^w) - \right. \\
& \quad \left. - n_1(\theta_i^v, \varphi_j^w) g_3(\theta_{i'}^{v'}, \varphi_{j'}^{w'}, \theta_i^v, \varphi_j^w) \right] \sin \theta_i^v \} = \varphi_1(R_0, \theta_{i'}^{v'}, \varphi_{j'}^{w'}). \quad (3.6)
\end{aligned}$$

Для второй координаты φ_2 :

$$\begin{aligned}
& - \frac{R_1^2}{4\pi} \left\{ \sum_{i,j=1}^N \sum_{v,w=1}^r \varphi_1(R_1, \theta_i^v, \varphi_j^w) \Delta_v^{(\theta)} \Delta_w^{(\varphi)} \left[n_1(\theta_i^v, \varphi_j^w) g_2(\theta_{i'}^{v'}, \varphi_{j'}^{w'}, \theta_i^v, \varphi_j^w) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - n_2(\theta_i^v, \varphi_j^w) g_1(\theta_{i'}^{v'}, \varphi_{j'}^{w'}, \theta_i^v, \varphi_j^w) \right] \sin \theta_i^v + \right. \\
& + \sum_{i,j=1}^N \sum_{v,w=1}^r \varphi_2(R_1, \theta_i^v, \varphi_j^w) \Delta_v^{(\theta)} \Delta_w^{(\varphi)} \left[n_1(\theta_{i'}^{v'}, \varphi_{j'}^{w'}) g_1(\theta_{i'}^{v'}, \varphi_{j'}^{w'}, \theta_i^v, \varphi_j^w) + \right. \\
& \left. + n_2(\theta_i^v, \varphi_j^w) g_2(\theta_{i'}^{v'}, \varphi_{j'}^{w'}, \theta_i^v, \varphi_j^w) + n_3(\theta_i^v, \varphi_j^w) g_3(\theta_{i'}^{v'}, \varphi_{j'}^{w'}, \theta_i^v, \varphi_j^w) \right] \sin \theta_i^v + \\
& + \sum_{i,j=1}^N \sum_{v,w=1}^r \varphi_3(R_1, \theta_i^v, \varphi_j^w) \Delta_v^{(\theta)} \Delta_w^{(\varphi)} \left[n_3(\theta_i^v, \varphi_j^w) g_2(\theta_{i'}^{v'}, \varphi_{j'}^{w'}, \theta_i^v, \varphi_j^w) - \right. \\
& \quad \left. - n_2(\theta_i^v, \varphi_j^w) g_3(\theta_{i'}^{v'}, \varphi_{j'}^{w'}, \theta_i^v, \varphi_j^w) \right] \sin \theta_i^v \} = \varphi_2(R_0, \theta_{i'}^{v'}, \varphi_{j'}^{w'}). \quad (3.7)
\end{aligned}$$

Для третьей координаты φ_3 :

$$\begin{aligned}
& - \frac{R_1^2}{4\pi} \left\{ \sum_{i,j=1}^N \sum_{v,w=1}^r \varphi_1(R_1, \theta_i^v, \varphi_j^w) \Delta_v^{(\theta)} \Delta_w^{(\varphi)} \left[n_1(\theta_i^v, \varphi_j^w) g_3(\theta_{i'}^{v'}, \varphi_{j'}^{w'}, \theta_i^v, \varphi_j^w) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - n_3(\theta_i^v, \varphi_j^w) g_1(\theta_{i'}^{v'}, \varphi_{j'}^{w'}, \theta_i^v, \varphi_j^w) \right] \sin \theta_i^v + \right. \\
& + \sum_{i,j=1}^N \sum_{v,w=1}^r \Delta_v^{(\theta)} \Delta_w^{(\varphi)} \varphi_2(R_1, \theta_i^v, \varphi_j^w) \left[n_2(\theta_i^v, \varphi_j^w) g_3(\theta_{i'}^{v'}, \varphi_{j'}^{w'}, \theta_i^v, \varphi_j^w) - \right. \\
& \quad \left. - n_3(\theta_i^v, \varphi_j^w) g_2(\theta_{i'}^{v'}, \varphi_{j'}^{w'}, \theta_i^v, \varphi_j^w) \right] \sin \theta_i^v + \\
& + \sum_{i,j=1}^N \sum_{v,w=1}^r \Delta_v^{(\theta)} \Delta_w^{(\varphi)} \varphi_3(R_1, \theta_i^v, \varphi_j^w) \left[n_1(\theta_i^v, \varphi_j^w) g_1(\theta_{i'}^{v'}, \varphi_{j'}^{w'}, \theta_i^v, \varphi_j^w) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +n_2(\theta_i^v, \varphi_j^w)g_2(\theta_{i'}^{v'}, \varphi_{j'}^{w'}, \theta_i^v, \varphi_j^w) + n_3(\theta_i^v, \varphi_j^w)g_3(\theta_{i'}^{v'}, \varphi_{j'}^{w'}, \theta_i^v, \varphi_j^w) \Big] \sin \theta_i^v \Big\} = \\
& = \varphi_3(R_0, \theta_{i'}^{v'}, \varphi_{j'}^{w'}), \tag{3.8}
\end{aligned}$$

где $i' = \overline{1, N}$, $j' = \overline{1, N}$, $v' = \overline{1, r}$, $w' = \overline{1, r}$, а коэффициенты квадратурной формулы задаются формулами

$$\Delta_v^{(\theta)} = \frac{\pi}{2N} \int_{-1}^1 \prod_{i=1, i \neq v}^r \frac{t - d_i}{d_v - d_i} dt, \quad \Delta_w^{(\varphi)} = \frac{\pi}{N} \int_{-1}^1 \prod_{i=1, i \neq w}^r \frac{t - d_i}{d_w - d_i} dt.$$

Запишем систему уравнений (3.6)-(3.8) в виде операторного уравнения с правой частью $\Phi(R_0, \theta_{i'}^{v'}, \varphi_{j'}^{w'})$.

Пусть $\Phi^n(R_1, \theta_{i'}^{v'}, \varphi_{j'}^{w'})$ – n -е приближение. Введем обозначение

$$\begin{aligned}
& -\frac{R_1^2}{4\pi} \left\{ \sum_{i,j=1}^N \sum_{v,w=1}^r \Phi^n(R_1, \theta_i^v, \varphi_j^w) K(\theta_{i'}^{v'}, \varphi_{j'}^{w'}, \theta_i^v, \varphi_j^w) \right\} = \\
& = \Phi^n(R_0, \theta_{i'}^{v'}, \varphi_{j'}^{w'}). \tag{3.9}
\end{aligned}$$

Здесь функция $K(\theta_{i'}^{v'}, \varphi_{j'}^{w'}, \theta_i^v, \varphi_j^w)$ определяется формулами (3.6)-(3.8) и введена лишь для упрощения записи.

На $(n + 1)$ -м шаге метода находится максимальное значение величины рассогласования:

$$\max_{i', j', v', w'} \left| \Phi(R_0, \theta_{i'}^{v'}, \varphi_{j'}^{w'}) - \Phi^n(R_0, \theta_{i'}^{v'}, \varphi_{j'}^{w'}) \right| = |\Delta^n|.$$

Пусть максимум реализуется при $i' = i_1, j' = j_1, v' = v_1, w' = w_1$ и пусть это единственное значение параметров, на котором реализуется максимум.

Пусть $\Phi^{n+1}(R_1, \theta_{i'}^{v'}, \varphi_{j'}^{w'}) = \Phi^n(R_1, \theta_{i'}^{v'}, \varphi_{j'}^{w'})$ при $i' \neq i_1, j' \neq j_1, v' \neq v_1, w' \neq w_1$. Тогда последовательные приближения определяются формулой

$$\begin{aligned}
& -\frac{R_1^2}{4\pi} \Phi^{n+1}(R_1, \theta_{i_1}^{v_1} \varphi_{j_1}^{w_1}) K(\theta_{i_1}^{v_1}, \varphi_{j_1}^{w_1}, \theta_{i_1}^{v_1}, \varphi_{j_1}^{w_1}) = \\
& = -\frac{R_1^2}{4\pi} \Phi^n(R_1, \theta_{i_1}^{v_1} \varphi_{j_1}^{w_1}) K(\theta_{i_1}^{v_1}, \varphi_{j_1}^{w_1}, \theta_{i_1}^{v_1}, \varphi_{j_1}^{w_1}) + \\
& + \Phi(R_0, \theta_{i_1}^{v_1}, \varphi_{j_1}^{w_1}) - \Phi^n(R_0, \theta_{i_1}^{v_1}, \varphi_{j_1}^{w_1}). \tag{3.10}
\end{aligned}$$

Причина прекращения сходимости метода локальных невязок заключается в том, что на некотором шаге n появляются две невязки, близкие по модулю, но разных знаков. В этом случае модифицируем метод локальных невязок следующим образом.

На $(n + 1)$ -м шаге находится максимальное и минимальное значение величины рассогласования. Пусть максимум

$$\max_{i', j', v', w'} \left(\Phi(R_0, \theta_{i'}^{v'}, \varphi_{j'}^{w'}) - \Phi^n(R_0, \theta_{i'}^{v'}, \varphi_{j'}^{w'}) \right)$$

реализуется при $i' = i_1, j' = j_1, v' = v_1, w' = w_1$.

Минимум же

$$\min_{i', j', v', w'} \left(\Phi(R_0, \theta_{i'}^{v'}, \varphi_{j'}^{w'}) - \Phi^n(R_0, \theta_{i'}^{v'}, \varphi_{j'}^{w'}) \right)$$

реализуется при $i' = i_2, j' = j_2, v' = v_2, w' = w_2$.

Воспользовавшись обозначениями (3.10), получаем систему, состоящую из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{aligned} & -\frac{R_1^2}{4\pi} \Phi^{n+1}(R_1, \theta_{i_1}^{v_1} \varphi_{j_1}^{w_1}) K(\theta_{i_1}^{v_1}, \varphi_{j_1}^{w_1}, \theta_{i_1}^{v_1}, \varphi_{j_1}^{w_1}) - \\ & -\frac{R_1^2}{4\pi} \Phi^{n+1}(R_1, \theta_{i_2}^{v_2} \varphi_{j_2}^{w_2}) K(\theta_{i_1}^{v_1}, \varphi_{j_1}^{w_1}, \theta_{i_2}^{v_2}, \varphi_{j_2}^{w_2}) = \\ & = -\frac{R_1^2}{4\pi} \Phi^n(R_1, \theta_{i_1}^{v_1} \varphi_{j_1}^{w_1}) K(\theta_{i_1}^{v_1}, \varphi_{j_1}^{w_1}, \theta_{i_1}^{v_1}, \varphi_{j_1}^{w_1}) - \\ & -\frac{R_1^2}{4\pi} \Phi^n(R_1, \theta_{i_2}^{v_2} \varphi_{j_2}^{w_2}) K(\theta_{i_1}^{v_1}, \varphi_{j_1}^{w_1}, \theta_{i_2}^{v_2}, \varphi_{j_2}^{w_2}) + \\ & + \Phi(R_0, \theta_{i_1}^{v_1}, \varphi_{j_1}^{w_1}) - \Phi^n(R_0, \theta_{i_1}^{v_1}, \varphi_{j_1}^{w_1}), \\ & -\frac{R_1^2}{4\pi} \Phi^{n+1}(R_1, \theta_{i_1}^{v_1} \varphi_{j_1}^{w_1}) K(\theta_{i_2}^{v_2}, \varphi_{j_2}^{w_2}, \theta_{i_1}^{v_1}, \varphi_{j_1}^{w_1}) - \\ & -\frac{R_1^2}{4\pi} \Phi^{n+1}(R_1, \theta_{i_2}^{v_2} \varphi_{j_2}^{w_2}) K(\theta_{i_2}^{v_2}, \varphi_{j_2}^{w_2}, \theta_{i_2}^{v_2}, \varphi_{j_2}^{w_2}) = \\ & = \frac{R_1^2}{4\pi} \Phi^n(R_1, \theta_{i_1}^{v_1} \varphi_{j_1}^{w_1}) K(\theta_{i_2}^{v_2}, \varphi_{j_2}^{w_2}, \theta_{i_1}^{v_1}, \varphi_{j_1}^{w_1}) - \\ & -\frac{R_1^2}{4\pi} \Phi^n(R_1, \theta_{i_2}^{v_2} \varphi_{j_2}^{w_2}) K(\theta_{i_2}^{v_2}, \varphi_{j_2}^{w_2}, \theta_{i_2}^{v_2}, \varphi_{j_2}^{w_2}) + \\ & + \Phi(R_0, \theta_{i_2}^{v_2}, \varphi_{j_2}^{w_2}) - \Phi^n(R_0, \theta_{i_2}^{v_2}, \varphi_{j_2}^{w_2}). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Пусть определитель этой системы отличен от нуля. Тогда система уравнений (3.11) разрешима и $\Phi^{n+1}(R_1, \theta_{i_1}^{v_1}, \varphi_{j_1}^{w_1})$, $\Phi^{n+1}(R_1, \theta_{i_2}^{v_2}, \varphi_{j_2}^{w_2})$ определяются из системы (3.11).

Обоснование сходимости описанного выше метода коллокации проводится на основании теоремы Адамара об обратимости матриц (теорема 9.4 в главе I).

4. Дискретные модели продолжения потенциальных полей

В предыдущих разделах представлены методы восстановления аналитических функций и потенциальных полей, требующие задания информации о поле на замкнутом многообразии — замкнутой кривой в двумерном случае, замкнутой поверхности — в трехмерном случае.

В геофизической практике значения потенциальных полей известны, как правило, на разомкнутых поверхностях. Поэтому, прежде чем привлекать к продолжению полей численные методы, развитые в предыдущих разделах, необходимо продолжить потенциальное поле с незамкнутой поверхности в некоторую область. Решению этой задачи посвящен данный раздел, при изложении которого использованы результаты статьи [46].

4.1. Постановка задачи и вспомогательные результаты

Задача продолжения потенциальных полей может рассматриваться в различных постановках.

Во-первых, можно считать, что значения потенциальной функции заданы на некоторой плоскости и ставится задача их продолжения в некоторую область трехмерного пространства. Введем декартову систему координат с осью OZ , направленной вниз. Обозначим через $\Omega = [-A, A, -B, B]$ область в плоскости $z = 0$, на которой заданы предельные значения $u(x, y, 0) = f(x, y)$ потенциальной функции $u(x, y, z)$. Требуется продолжить потенциальную функцию $u(x, y, z)$ в область $G = \Omega \times [0, H]$, $H = \text{const} > 0$.

Во-вторых, можно считать, что значения потенциальной функции заданы на сферическом многоугольнике и ставится задача их продолжения на некоторую область, расположенную внутри сферы. Введем сферическую систему координат. Рассмотрим шар $B(0, R)$ с центром в начале координат и радиусом R . Пусть на сфере $S(0, R)$ с центром в начале координат и радиусом R задана область Ω , определенная координатами $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$, $\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1$. Пусть на поверхности Ω заданы предельные значения $u(R, \theta, \varphi) = f(\theta, \varphi)$, $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$, $\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1$, функции $u(\rho, \theta, \varphi)$, потенциальной в области $R_0 \leq \rho \leq R_1$, $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$, $\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1$. Требуется по значениям функции $f(\theta, \varphi)$, $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$, $\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1$, на поверхности Ω восстановить потенциальную функцию $u(\rho, \theta, \varphi)$ в области $G = S \times [R_0, R]$.

В-третьих, можно считать, что значение потенциальной функции заданы на разомкнутой поверхности Ляпунова G и ставится задача их продолжения на область, граница которой содержит поверхность G .

4.2. Продолжение потенциальных полей с плоской поверхности

Введем прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$, направив ось Oz вниз. Пусть граничное значение $u_0(x, y)$ гармонической функции $u(x, y, z)$ задано на прямоугольнике $\Omega_0 : [-A \leq x \leq A; -B \leq y \leq B; z = 0]$. Продолжим гармоническую функцию $u(x, y, z)$ с прямоугольника Ω_0 на область $\Omega : [-A \leq x \leq A; -B \leq y \leq B; 0 \leq z \leq H]$, где H – постоянная, значение которой будет определено ниже.

Для простоты дальнейших обозначений положим $A = B$. Введем узлы $v_k = -A + k\frac{A}{N}$, $k = 0, 1, \dots, 2N$. Обозначим через h величину $h = \frac{A}{N}$. Введем узлы $z_k = kh$, $k = 0, 1, \dots, M$, $M = [H/h]$, $z_{M+1} = H$. Для простоты обозначений будем считать, что H/h – целое число. Обозначим через t_{ijk} узлы $t_{ijk} = (v_i, v_j, z_k)$, $i, j = 0, 1, \dots, 2N$, $k = 0, 1, \dots, M$.

Рассмотрим вначале случай, когда $H \leq A$ и известно, что в области Ω нет источников. В этом случае возможны различные способы продолжения функции $u_0(x, y)$ на область $(-\infty, \infty)^2 \setminus \Omega_0$.

Во-первых, можно положить

$$u_0^1(x, y) = \begin{cases} u_0(x, y), & (x, y) \in \Omega_0, \\ 0, & (x, y) \in (-\infty, \infty)^2 \setminus \Omega_0. \end{cases}$$

Во-вторых, можно положить

$$u_0^2(x, y) = \begin{cases} u_0(x, y), & (x, y) \in \Omega_0, \\ \beta, & (x, y) \in (-\infty, \infty)^2 \setminus \Omega_0, \end{cases}$$

где

$$\beta = \frac{1}{4A^2} \iint_{\Omega_0} u_0(x, y) dx dy. \quad (4.1)$$

В-третьих, можно воспользоваться аппроксимационными свойствами полиномов Бернштейна для аналитических и целых функций.

В дискретной постановке аппаратом для продолжения потенциальных функций являются разностные аналогии оператора Лапласа. Для того чтобы можно было воспользоваться семиточечными разностными схемами, необходимо располагать значениями функций $u(x, y, z)$ в узлах t_{ij1} , $i, j = 0, 1, \dots, 2N$. При использовании разностных схем более высокого порядка необходимо располагать значениями функции $u(x, y, z)$ в узлах t_{ij1} , t_{ij2} , $i, j = 0, 1, \dots, 2N$, и, возможно, на большем числе слоев.

Для нахождения $u(t_{ij1})$, $i, j = 0, 1, \dots, 2N$, воспользуемся решением задачи Дирихле для уравнения Лапласа в полуплоскости, представленным в виде интеграла Пуассона.

Известно, что если функция $u(x, y, z)$ является гармонической в полуплоскости $z \geq 0$ и имеет непрерывное и интегрируемое на E_2 граничное значение $u_0(x, y)$, то при $z \geq 0$ функция $u(x, y, z)$ выражается интегралом Пуассона

$$u(x, y, z) = \frac{\Gamma(3/2)}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_0(x_0, y_0) z dx_0 dy_0}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (4.2)$$

где $\Gamma(\alpha)$ – гамма функция.

Замечание. Ниже по формуле Пуассона вычисляются значения $u(t_{i,j,1})$, $i, j = 1, 2, \dots, 2N$ на слое $z = h$. С теоретической точки зрения использование интеграла Пуассона для вычисления функции $u(x, y, z)$ в полуплоскости $z \geq 0$ является незаконным, так как последняя не является гармонической в этой полуплоскости. Правильнее вначале по формуле Пуассона вычислить значения $u(t_{i,j,-1})$, $i, j = 1, 2, \dots, 2N$ на слое $z = -h$, так как функция $u(x, y, z)$ гармоническая при $z < 0$. Однако, так как h достаточно мало и вычисления проводятся только на одном слое, то использование формулы для вычисления значений $u(t_{i,j,1})$, $i, j = 1, 2, \dots, 2N$, на слое $z = h$ не приводит к большим погрешностям.

Значения $u(t_{i,j,1})$, $i, j = 0, 1, \dots, 2N$, будем вычислять по одной из следующих кубатурных формул.

Предположим вначале, что функция $u(x, y, 0)$ вне области $\Omega_0 = [-A, A]^2$ продолжена нулем. Простейшей (и оптимальной по порядку на классе функций Гельдера $H_{\alpha,\alpha}$ ($0 < \alpha \leq 1$)) является формула

$$u(x', y', z) = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})z}{\pi^{3/2}} \sum_{k_1=0}^{2N-1} \sum_{k_2=0}^{2N-1} u(v_{k_1}, v_{k_2}, 0) \times \\ \times \iint_{\Delta_{k_1, k_2}} \frac{dx_0 dy_0}{((x' - x_0)^2 + (y' - y_0)^2 + z^2)^{3/2}} + R_{NN}(f), \quad (4.3)$$

где $\Delta_{kl} = [v_k, v_{k+1}; v_l, v_{l+1}]$, $k, l = 0, 1, \dots, 2N - 1$, $v_k = -A + kA/N$, $k = 0, 1, \dots, 2N$.

Погрешность формулы (4.3) на классе функций $H_{\alpha,\alpha}(1)$ оценивается соотношением $R_{NN}[H_{\alpha,\alpha}(1)] \asymp N^{-\alpha}$.

В ряде случаев целесообразно продолжить функцию $u(x, y, 0)$ на область Ω_1 ($\Omega_0 \subset \Omega_1$).

Естественно в качестве области Ω_1 взять область $\Omega_1 = [-2h - A, A + 2h]^2$, где $h = A/N$. В области $\Omega_2 = \Omega_1 \setminus \Omega_0$ положим $u(x, y, 0) \equiv \beta$, где β определено формулой (4.1).

Введем узлы $v_{-2} = -A - 2h$, $v_{-1} = -A - h$, $v_k = -A + kA/N$, $k = 0, 1, \dots, 2N$, $v_{2N+1} = A + h$, $v_{2N+2} = A + 2h$ и прямоугольники $\Delta_{kl} = [v_k, v_{k+1}; v_l, v_{l+1}]$, $k, l = -2, -1, 0, \dots, 2N + 1$.

Вычисления будем производить по формуле

$$\begin{aligned}
 & u(x', y', z) = \\
 & = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})z}{\pi^{3/2}} \sum_{k_1=0}^{2N-1} \sum_{k_2=0}^{2N-1} u(v_{k_1}, v_{k_2}, 0) \iint_{\Delta_{k_1, k_2}} \frac{dx_0 dy_0}{((x' - x_0)^2 + (y' - y_0)^2 + z^2)^{3/2}} + \\
 & + \beta \frac{\Gamma(\frac{3}{2})z}{\pi^{3/2}} \sum_{k_1=-2}^{2N+1} \sum_{k_2=-2}^{2N+1} ' \iint_{\Delta_{k_1, k_2}} \frac{dx_0 dy_0}{((x' - x_0)^2 + (y' - y_0)^2 + z^2)^{3/2}} + R_{NN}(f).
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Здесь $\sum \sum'$ означает суммирование по квадратам Δ_{k_1, k_2} таким, что их лебеговская мера пересечения с областью Ω_0 равна нулю.

В случае, если известно, что граничное значение $u(x, y, 0)$ принадлежит классу функций $W^{r,r}(B)$, $B = \text{const}$, то естественно применить более точные формулы.

Вначале рассмотрим случай, когда функция $u(x, y, 0)$ вне области $\Omega_0 = [-A, A]^2$ продолжается нулем.

Пусть $L = [N/r]$. Для простоты обозначений будем считать, что N/r – целое число. Введем узлы $v_k = -A + kA/L$, $k, l = 0, 1, \dots, 2L$. Пусть $\Delta_{kl} = [v_k, v_{k+1}; v_l, v_{l+1}]$, $k, l = 0, 1, \dots, 2L - 1$.

Введем узлы $t_i^k = v_k + ih/r$, $k = 0, 1, \dots, 2L - 1$, $i = 0, 1, \dots, r$; $t_{ij}^{kl} = (t_i^k, t_j^l)$, $k, l = 0, 1, \dots, 2L - 1$, $i, j = 0, 1, \dots, r$.

В каждом квадрате Δ_{kl} по узлам t_{ij}^{kl} , $i, j = 0, 1, \dots, r$, строим интерполяционный полином степени r по каждой переменной. Этот полином обозначим через $L_{rr}(u, \Delta_{kl})$. Так как $L_{rr}(u, \Delta_{kl})$ является полиномом степени r по каждой из переменных, то, хотя он был построен для аппроксимации функции $u(x, y, 0)$ в квадрате Δ_{kl} , он естественным образом распространяется на всю области $\Omega_0 = [-A, A]^2$. Пусть $t_{ij}^{k_1, l_1} \in \Delta_{k_1 l_1}$, где $\Delta_{k_1 l_1}$ не обязательно совпадает с Δ_{kl} .

Полином $L_{rr}(u, \Delta_{kl})$ разложим по степеням $(x - t_i^{k_1})^{v_1}$ и $(y - t_j^{l_1})^{v_2}$. Результат этого разложения обозначим через $T_r(L_{rr}(u, \Delta_{kl}), t_{ij}^{k_1, l_1})$.

Наряду с полиномом $L_{rr}(u, \Delta_{kl})$ может быть использован полином, построенный по узлам полинома Лежандра.

Интеграл (4.2) будем вычислять по кубатурной формуле

$$u(x', y', z) =$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{3}{2})z}{\pi^{3/2}} \sum_{k_1=0}^{2N-1} \sum_{k_2=0}^{2N-1} \iint_{\Delta_{kl}} \frac{\Psi_r(\Delta_{kl}; (x', y')) dx_0 dy_0}{((x' - x_0)^2 + (y' - y_0)^2 + z^2)^{3/2}} + R_{NN}(f), \quad (4.5)$$

где $\Psi_r(\Delta_{kl}; (x', y')) = T_r(L_r(u, \Delta_{kl}); (x', y'))$.

Погрешность этой формулы равна $R_{NN}[W^{rr}(1)] \asymp N^{-r}$.

Предположим теперь, что функция $u(x, y, 0)$ продолжена на область Ω_1 , $\Omega_0 \subset \Omega_1$. В качестве области Ω_1 естественно взять область $\Omega_1 = [-2h - A, A + 2h]^2$, $h = A/L$.

В области $\Omega_2 = \Omega_1 \setminus \Omega_0$ функция $u(x, y, 0)$ полагается равной константе β , определенной формулой (4.1).

Введем узлы $v_{-2} = -(A + 2h)$, $v_{-1} = -(A + h)$, $v_k = -A + kA/L$, $k = 0, 1, \dots, 2L$, $v_{L+1} = A + h$, $v_{L+1} = A + 2h$.

Пусть $\Delta_{kl} = [v_k, v_{k+1}; v_l, v_{l+1}]$, $k, l = -2, -1, 0, \dots, 2L, 2L + 1$.

Кубатурная формула имеет следующий вид:

$$u(x', y', z) = \frac{z\Gamma(\frac{3}{2})}{\pi^{3/2}} \left(\beta \sum_{l_1=-2}^{2L+1} \sum_{l_2=-2}^{2L+1} ' \iint_{\Delta_{l_1 l_2}} \frac{dx_0 dy_0}{((x' - x_0)^2 + (y' - y_0)^2 + z^2)^{3/2}} + \sum_{l_1=0}^{2L-1} \sum_{l_2=0}^{2L-1} \iint_{\Delta_{l_1 l_2}} \frac{T_r(L_{rr}(u, \Delta_{l_1 l_2}); (x', y')) dx_0 dy_0}{((x' - x_0)^2 + (y' - y_0)^2 + z^2)^{3/2}} \right) + R_{NN}(f). \quad (4.6)$$

где знак $\sum \sum'$ означает суммирование по квадратам $\Delta_{l_1 l_2}$, не входящим в область Ω_0 .

Погрешность этой формулы равна $R_{NN}[W^{rr}(1)] \asymp N^{-r}$.

После того как по формуле (4.6) вычислены значения $u(t_{ij1})$, $i, j = 0, 1, 2, \dots, 2N$, продолжение гармонической функции $u(x, y, z)$ осуществляется по 7-точечной разностной схеме

$$u(t_{ijk+1}) = 2u(t_{ijk}) - u(t_{ijk-1}) - h_z^2 \left\{ \frac{u(t_{i+1jk}) - 2u(t_{ijk}) + u(t_{i-1jk})}{h_x^2} + \frac{u(t_{ij+1k}) - 2u(t_{ijk}) + u(t_{ij-1k})}{h_y^2} \right\}. \quad (4.7)$$

Выше отмечалось, что $h_x = h_y = h_z = h = A/N$.

Счет по этой схеме проводится следующим образом. Вначале вычисляем значения $u(t_{ij2})$, $i, j = 1, 2, \dots, 2N - 1$, начиная со значения $u(t_{NN2})$. Это связано с тем, что влияние граничного значения $u_0(x, y)$ при $(x, y) \in (-\infty, \infty)^2 \setminus \Omega_0$, не учитываемого в кубатурной формуле (4.5), в наименьшей степени сказывается при $x = 0, y = 0$.

После этого последовательно вычисляются значения $u(t_{ijk})$, $i, j = k, k+1, \dots, 2N-k$, $k = 3, 4, \dots, M$, причем вычисления на каждом k -м слое начинаются с вычисления значений $u(t_{NNk})$, $k = 3, 4, \dots, M$.

Обозначим через Ω^* область, в которой вычислены значения $u(t_{ijk})$, $i, j = k, k+1, \dots, 2N-k$, $k = 1, 2, \dots, M$, а через Ω^{**} ее дополнение $\Omega^{**} = \Omega \setminus \Omega^*$.

Завершив эти вычисления, приступаем к вычислению значений $u(t_{ijM})$ при $i = N-M-1, j = N-M-1, \dots, N+M+1$; $i = N+M+1, j = N-M-1, \dots, N+M+1$; $i = N-M-1, \dots, N+M+1, j = N-M-1$; $i = N-M-1, \dots, N+M+1, j = N+M+1$, с использованием 6-точечных и 4-точечных разностных схем. В этом случае проводится продолжение функции $u(x, y, z)$ на область Ω^{**} , но в области Ω^{**} продолженная функция не удовлетворяет дискретному уравнению Лапласа. Для того чтобы продолженная функция удовлетворяла дискретному уравнению Лапласа, нужно воспользоваться семиточечными разностными схемами с различными конфигурациями узлов.

Следующим шагом вычислительной схемы является определение значений $u(t_{ijM-1})$, $i = N-M-2, \dots, N+M+2, j = N-M-2, \dots, N+M+2$, а затем значений $u(t_{ijM})$ при тех же значениях i, j .

Этот процесс продолжается до тех пор, пока не будут вычислены значения $u(t_{ijk})$, $i, j = 0, 1, \dots, 2N$, $k = 2, 3, \dots, M$.

Более эффективным является алгоритм последовательного вычисления значений u_{ijk} , когда после вычисления u_{ij1} , $i, j = 0, 1, \dots, 2N$, и u_{ij2} , $i, j = 0, 1, \dots, 2N-1$, вычисляются значения u_{ij2} , $i, j = 0, 2N$, а затем по значениям $u_{ij0}, u_{ij1}, u_{ij2}$, $i, j = 0, 1, \dots, 2N$, вычисляются значения u_{ij3} , $i, j = 1, 2, \dots, 2N-1$, и т.д.

Вычисления по данной схеме можно контролировать, используя вычислительные схемы продолжения потенциальных полей, приведенные в разд. 2. При этом возможно их различное использование.

Во-первых, эти схемы можно использовать для непосредственного продолжения потенциальных полей, считая, что "разгонные значения" получены разностной схемой.

Во-вторых, их можно использовать для контроля и остановки счета, полагая, что разность значений, полученных разностной схемой и проекционными методами, не должна превышать по порядку вычислительную погрешность.

Изложенный выше алгоритм был использован для восстановления в области $\Omega = 10 \times 10 \times 10$ км потенциального поля, заданного на поверхности 10×10 км. Результаты вычислений даны в приложении Н.

4.3. Продолжение потенциальных полей с поверхности Ляпунова

Вычислительные схемы, описанные в предыдущем разделе, практически без изменения переносятся на случай, когда предельные значения потенциальной функции определены на некоторой области, расположенной на сфере.

Более интересным является случай, когда предельные значения потенциального поля $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ определены на кусочно-гладких поверхностях Ляпунова.

Пусть граничное значение $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ потенциального поля задано на поверхности Ляпунова Ω . Требуется построить продолжение потенциального поля $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ с поверхности Ω в область G , $\Omega \in G$.

Аппроксимируем кусочно-гладкую поверхность Ω , поверхностью Ω' , полученной в результате триангуляции области Ω с использованием пространственной сетки Ω'' .

Аппроксимацию будем проводить, используя метод тесселяции с применением алгоритмов триангуляции [61]. Потребуем, чтобы полученная поверхность Ω' удовлетворяла условию Делоне.

Триангуляцией Делоне [166] называется такая триангуляция, при которой выполнено следующее условие: внутрь окружности, описанной вокруг любого треугольника, не должны попадать никакие другие узлы триангуляции.

При триангуляции вводятся ограничения: граница поверхности Ω' должна проходить по ребрам триангуляции.

При приближенном вычислении поверхностных интегралов большую роль играет способ задания узлов сетки Ω'' , являющейся каркасом области Ω' аппроксимируемой поверхности Ω , от выбора которых в большей степени зависит точность вычислительной схемы.

Замкнутая кусочно-гладкая (гладкая) поверхность Ω , определенная телом D , может быть аппроксимирована с помощью поверхности Ω' , с узлами, принадлежащими сетке Ω'' . Процесс аппроксимации называют моделированием поверхности, или геометрическим моделированием. Соответственно сетка Ω'' , построенная таким образом, называется геометрической моделью поверхности Ω .

Основой точного геометрического моделирования является прикладная геометрия. В силу возрастающей мощности компьютерных систем эта область пополнилась новыми технологиями, такими как твердотельное моделирование, B-сплайны, R-функции, лофтинг, скиннинг и др. Они успешно применяются на практике.

Самым распространенным на сегодня методом геометрического моделирования является метод тесселяции с использованием алгоритмов триангуляции поверхностей, в которых каркас формируется из треугольников.

Триангуляция широко применяется в геоинформатике при анализе геометрических моделей, в машинной графике — для построения моделей трехмерных объектов, в различных методах конечных элементов.

Одну и ту же поверхность можно триангулировать разными способами (один из таких методов описан ниже). Пусть исходная поверхность аппроксимирована поверхностью, состоящей из треугольников. Рассмотрим углы в получающихся треугольниках. Выберем минимальный угол. Триангуляция дает тем лучшую аппроксимацию, чем больше ее минимальный угол. При этом формируемые треугольники стремятся к "равноугольности".

Особенно важна максимизация минимального угла в задачах вычислительной математики, когда точность производимых вычислений очень сильно зависит от размера минимального угла триангуляции. Наилучшей в этом смысле триангуляцией является триангуляция Делоне.

Иногда даже минимальный угол триангуляции Делоне оказывается слишком малым для устойчивой работы использующего ее алгоритма. Тогда ее можно улучшить, используя метод Раперта. При этом будут добавлены новые вершины триангуляции и образованы дополнительные треугольники, но их количество невелико, а стабильность алгоритма (метода конечных элементов, например) может возрасти многократно за счет появления нижней границы для величины углов. Существуют и другие методы аналогичного улучшения триангуляции, но они дают худшие результаты.

Рассмотрим поверхность сферы $S = S(0, R)$, как наиболее важной поверхности, встречающейся в геофизике. В классических примерах при интегрировании по поверхности сферы делают переход к сферической системе координат.

Предлагается метод триангуляции поверхности, близкой или совпадающей с поверхностью сферы. В основе метода лежит задание в качестве начальной сетки икосаэдра, и ее дальнейшей модификации с помощью алгоритмов триангуляции. Икосаэдр представляет объемную фигуру, состоящую из 20 правильных треугольников, все вершины которых лежат на поверхности сферы.

Деление треугольников производится по следующему правилу. На каждой стороне треугольника берутся средние точки и проецируются

на поверхность S . Проецирование производится лучами, исходящими из центра икосаэдра и проходящими через средние точки. Полученные точки образуют новый центральный треугольник. К нему достраиваются три треугольника, используя вершины исходного треугольника. Данное правило максимально сохраняет качественные характеристики сетки и учитывает все особенности оригинальной поверхности Ω .

После того как проведена триангуляция, необходимо перенести граничные значения $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ с поверхности Ω на поверхность Ω' , полученную в результате триангуляции. Один из простейших способов переноса заключается в следующем.

Рассмотрим произвольный треугольник $\triangle ABC$, входящий в поверхность Ω' , вершины которого A , B и C расположены на поверхности Ω . Значение поля $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ в точках A , B и C обозначим через $\mathbf{F}(\mathbf{r}_A)$, $\mathbf{F}(\mathbf{r}_B)$ и $\mathbf{F}(\mathbf{r}_C)$ соответственно. Положим в $\triangle ABC$ значение поля, которое обозначим как $\mathbf{F}(\triangle ABC)$, равным $\mathbf{F}(\triangle ABC) = \frac{1}{3}(\mathbf{F}(\mathbf{r}_A) + \mathbf{F}(\mathbf{r}_B) + \mathbf{F}(\mathbf{r}_C))$. Подобное определение поля на поверхности Ω' естественно, если в дальнейшем будут использоваться простейшие квадратурные формулы типа прямоугольников.

Опишем соответствующие вычисления в предположении, что поле $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ задано в области Ω , расположенной на сфере S . Продолжим поле $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ по формуле

$$\mathbf{u}(\theta, \varphi) = \begin{cases} \mathbf{F}(\theta, \varphi), & (\theta, \varphi) \in \Omega, \\ 0, & (\theta, \varphi) \in (0, 2\pi)^2 \setminus \Omega. \end{cases}$$

Пусть внутри шара $D(0, R)$, ограниченного сферой $S(0, R)$, нет источников поля. Тогда в любой точке области D значение функции $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ может быть вычислено по формуле

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}') = \frac{-1}{4\pi} \iint_S \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + [\mathbf{n} \times \mathbf{u}] \times \mathbf{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right\} ds, \quad (4.8)$$

где $\mathbf{r}' \in D$, $\mathbf{r} \in S$. Координаты векторов \mathbf{r} и \mathbf{r}' выражаются через формулы преобразования декартовой системы координат в сферическую.

Вычисление интеграла (4.8) производится по кубатурной формуле

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{r}') &= R_N(\mathbf{u}) + \\ &+ \sum_{\substack{\Delta_i \in \Omega' \\ \Delta_i}} \iint_{\Delta_i} \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}_i)) \mathbf{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + [\mathbf{n} \times \mathbf{u}(\mathbf{r}_i)] \times \mathbf{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right\} ds, \end{aligned} \quad (4.9)$$

где $\mathbf{r}_i \in \Delta_i$, $\mathbf{r} \in D$, N – число треугольников, участвующих в триангуляции области Ω .

Можно показать, что в предположении, что каждая компонента вектора $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ на поверхности сферы S удовлетворяет условию Гёльдера с показателем α ($0 < \alpha \leq 1$), то погрешность вычисления поля $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ по кубатурной формуле оценивается величиной $cN^{-\alpha}$, где N – число треугольников, участвующих в триангуляции.

Формулы (4.8) и (4.9) применимы и в случае гладких поверхностей Ляпунова. Напомним, что определение поверхностей Ляпунова приведено в разд. 1 главы II.

Можно показать, что если Ω – гладкая поверхность Ляпунова, принадлежащая классу $H(s, A, \alpha)$ ($0 < \alpha \leq 1$), а каждая компонента граничного значения поля $F(r)$ на поверхности Ω удовлетворяет условию Гельдера H_α ($0 < \alpha \leq 1$), то погрешность вычисления поля $F(r)$ в области D по кубатурным формулам вида (4.4) оценивается величиной $cN^{-\alpha}$, где N – число треугольников, участвующих в триангуляции.

В случае, если область Ω аппроксимируется областью Ω' , построенной по более сложным алгоритмам, скажем с использованием сплайнов, то поле $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, заданное на поверхности Ω , трансформируется на область Ω' также по более общим алгоритмам. Построение подобных алгоритмов представляет интерес в случае, если наряду со значениями поля $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ на поверхности Ω будут известны и его производные (по крайней мере, абсолютные значения производных первого порядка).

Формула (4.9) позволяет получить "разгонные" значения для дальнейшего применения разностных схем или продолжения потенциальных полей по численным алгоритмам, описанным в разд. 2.

ГЛАВА VIII

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ТРАНСФОРМАЦИЙ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ

Построены методы вычисления трансформаций потенциальных полей. В основу этих методов положено понятие гиперсингулярного интеграла. Результаты, составившие данную главу, частично опубликованы в [72, 73].

1. Постановка задачи

Гравитационные поля являются интерференционными, составленными из многочисленных компонент, обусловленных влиянием различных тел с различной плотностью, расположенных под поверхностью Земли. Помимо слагаемых, имеющих геофизический характер, наблюдаемые гравитационные поля содержат случайные компоненты. К этим случайным компонентам относятся, в частности, погрешности измерений. Поэтому возникает проблема построения преобразований, которые, с одной стороны, осуществляют фильтрацию случайных полей, с другой стороны, выявляют особенности отдельных тел (источников аномалий геофизических полей) и определяют геофизический характер каждого источника.

В геофизике эти преобразования называются трансформациями и определяются следующим образом [96, с. 214].

Трансформацией называется преобразование, осуществляемое с целью подавления мешающей информации и наиболее четкого выявления полезной информации.

Математически трансформации описываются следующим образом [96, с. 214]: "Пусть $u(x, y, z)$ — некоторый элемент аномального гравитационного поля, заданный на земной поверхности S . Обычно принимают, что S — плоскость $z = 0$, в общем случае это поверхность, описываемая уравнением $z = z(x, y)$. Пусть S_T — некоторая другая поверхность (замкнутая или незамкнутая), которую назовем поверхностью трансформации. Трансформантой функции $u(x, y, z)$, заданной на S , называется функция $v(x, y, z)$, определенная на $S_T : v(x, y, z) = T(u(x, y, z))$, или, в сокращенном обозначении, $v = Tu$. Здесь T — некоторый оператор".

Приведем несколько наиболее употребительных на практике трансформаций потенциальных полей. При этом предпочтение отдадим тем трансформациям, численным методам реализации которых посвящена данная глава.

При вычислении вертикальной производной на плоскости наблюдения $z = 0$ используются трансформации

$$v(x, y, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\zeta, \eta, 0) - u(x, y, 0)}{((\zeta - x)^2 + (\eta - y)^2)^{3/2}} d\zeta d\eta$$

в трехмерном случае и

$$v(x, 0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\zeta, 0) - u(x, 0)}{(\zeta - x)^2} d\zeta$$

в двумерном случае.

При вычислении сопряженной гармонической функции на прямой $z = 0$ используется трансформация

$$v(x, 0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\zeta, 0) - u(x, 0)}{\zeta - x} d\zeta.$$

В большинстве случаев трансформация осуществляется с помощью различных интегральных преобразований, перечень части которых приведен в книге [96]. Эти трансформации можно представить в общем виде выражением

$$\begin{aligned} V(x, y, z) &= \\ &= T(U(x, y, 0)) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \zeta, y - \eta, z) U(\zeta, \eta, 0) d\zeta d\eta. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Наряду с трансформациями в интегральной форме широко применяются различные преобразования трансформаций. В частности, в теории частотной фильтрации широко применяется преобразование Фурье. Обозначим через $U(\omega_1, \omega_2, 0)$ преобразование Фурье функции $U(x, y, 0)$. Аналогично, через $K(\omega_1, \omega_2, z)$ и $V(\omega_1, \omega_2, z)$ обозначаются преобразования Фурье функций $K(x, y, z)$ и $V(x, y, z)$ по первым двум переменным.

Применяя к уравнению (1.1) теорему о свертке, имеем

$$V(\omega_1, \omega_2, z) = K(\omega_1, \omega_2, z) U(\omega_1, \omega_2, 0).$$

Тогда

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega_1, \omega_2, z) U(\omega_1, \omega_2, 0) e^{i(\omega_1 x + \omega_2 y)} d\omega_1 d\omega_2.$$

Следуя [96], дадим следующее определение.

Определение 1.1. Функция $K(\omega_1, \omega_2, z)$ называется характеристической функцией оператора T или частотной характеристикой этого оператора.

Замечание. Как правило, функция $V(x, y, z)$ рассматривается при $z = 0$.

Аналогичным образом определяются характеристические функции, основанные на других преобразованиях, в частности, на оконном преобразовании Фурье.

Замечание. Оконное преобразование Фурье изложено в [237].

Для вычисления трансформаций потенциальных полей разработаны и активно используются различные численные методы [96, с. 214].

Наиболее общим является метод прямоугольников

$$V(x, y, z) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} U_{i,j} \iint_{\Delta_{ij}} K(x - \zeta, y - \eta, z) d\zeta d\eta + R_{nm}(U),$$

где $\Delta_{ij} = [x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, $j = 0, 1, \dots, m-1$, $U_{ij} = U(x_i, y_j)$, $x_i = C + \frac{2C}{n}i$, $i = 0, 1, \dots, n$, $y_j = D + \frac{2D}{m}j$, $j = 0, 1, \dots, m$; C и D — достаточно большие положительные числа.

Несмотря на то, что численные методы трансформации полей активно развивались в течение последних нескольких десятилетий, здесь осталось много неисследованных вопросов.

В частности, в [96] отмечается, что приближенные методы вычисления трансформации имеют существенные недостатки:

- 1) способы разработаны только для случая горизонтальной поверхности и регулярной сети наблюдений;
- 2) отсутствует эффективный алгоритм учета центральной зоны для вычисления трансформант для $z = 0$, т.е. в случае, когда интеграл, описывающий трансформацию, имеет особенность в точке $x = y = 0$;
- 3) способы не являются оптимальными в смысле точности расчетов;
- 4) отсутствуют эффективные оценки точности, представление о которых можно получить на модельных примерах.

В работах [72, 73] показано, что если интегралы, описывающие трансформации, понимать в смысле Адамара [2], то можно построить эффективные численные методы трансформаций.

В данной главе описываются эффективные численные методы трансформаций потенциальных полей, основанные на концепции гиперсингулярных интегралов. Некоторые из представленных методов являются оптимальными по порядку по точности.

2. Одномерные трансформации

Рассмотрим одномерную трансформацию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad -\infty < t < \infty. \quad (2.1)$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $u(\tau)$ — финитная функция с носителем $[-A, A]$, $u(-A) = u(A) = 0$, причем в точках $\pm A$ функция $u(t)$ имеет нули порядка выше первого. Если это условие не выполняется, то вместо сегмента $[-A, A]$ можно взять сегмент $[-A-1, A+1]$.

Поэтому можно ограничиться вычислением интеграла

$$Ju = \int_{-A}^A \frac{u(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad -A \leq t \leq A. \quad (2.2)$$

Таким образом, ниже рассматриваем интеграл (2.2), предполагая, что в точках $\pm A$ функция $u(t)$ имеет нули порядка более высокого, чем $1/2$.

Представим функцию $u(t)$ в виде $u(t) = \sqrt{A^2 - t^2} \psi(t)$ и сделаем в интеграле (2.2) замену переменных $t = vA$, $\tau = wA$. В результате приходим к интегралу

$$J\psi = A \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1 - w^2} \psi^*(w)}{w - v} dw, \quad (2.3)$$

где $\psi^*(w) = \psi(Aw)$.

Функцию $\psi^*(w)$ будем аппроксимировать полиномом [65]

$$\psi_N^*(w) = L_n(\psi^*) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{\gamma_k} \sum_{i=0}^n U_i(\mu_k) U_i(w) \right) \psi^*(\mu_k), \quad (2.4)$$

где $U_n(t)$ — полином Чебышева второго рода, $U_n(t) = [2/(\pi(1 - t^2))]^{1/2} \times \sin[(n+1)\arccos t]$, $-1 \leq t \leq 1$, $\mu_k = \cos[k\pi/(n+2)]$ ($k = 1, \dots, n+1$) — корни полинома $U_{n+1}(t)$, $\gamma_k = \sum_{l=0}^n U_l^2(\mu_k)$.

Подставляя (2.4) в (2.3) и воспользовавшись формулой

$$\int_{-1}^1 \frac{(1 - \tau^2)^{1/2} U_k(\tau)}{\tau - t} d\tau = -\pi T_{k+1}(t), \quad k = 0, 1, \dots, n+1,$$

где $T_k(t) = (2/\pi)^{1/2} \cos k \arccos t$ — полином Чебышева первого рода, получаем формулу

$$\begin{aligned} & A \int_{-1}^1 \frac{(1-w^2)^{1/2} \psi^*(w)}{w-v} dw = \\ & = -A \sum_{k=0}^n \pi \frac{\psi^*(\mu_k)}{\gamma_k} \sum_{i=0}^n U_i(\mu_k) T_{i+1}(v) + R_N(\psi^*). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Возвращаясь в (2.5) к переменным t и τ , имеем

$$\begin{aligned} & \int_{-A}^A \frac{\sqrt{A^2-r^2} \psi(\tau)}{\tau-t} d\tau = \\ & = - \sum_{k=0}^n \pi \frac{\psi(A\mu_k)}{\sqrt{1-\mu_k^2} \gamma_k} \sum_{i=0}^n U_i(\mu_k) T_{i+1}\left(\frac{t}{A}\right) + R_N(\Psi). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Пусть $\psi(t) \in W^r H_\alpha$. Можно показать, что $|R_n(\psi)| \leq c A n^{-r-\alpha} \lambda_n$, где λ_n — константа Лебега интерполяционной формулы по узлам полиномов Чебышева второго рода. Известно [162], что $\lambda_n \leq A n$.

Рассмотрим теперь одномерные трансформации, описываемые интегральным преобразованием вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\tau, 0) - u(t, 0)}{(\tau - t)^2} d\tau,$$

которые широко применяются при вычислении вертикальной производной по прямой [96].

Так как из определения гиперсингулярных интегралов следует

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t, 0) d\tau}{(\tau - t)^2} = u(t, 0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{(\tau - t)^2} = 0,$$

то вычисление трансформации сводится к вычислению интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\tau, 0)}{(\tau - t)^2} d\tau,$$

который также является гиперсингулярным интегралом.

Полагая, что функция $u(\tau, 0)$ (которую ниже для краткости будем обозначать через $u(\tau)$) финитна, и повторяя рассуждения, сделанные

выше при рассмотрении интеграла (1.1), приходим к задаче вычисления интеграла Адамара:

$$\int_{-A}^A \frac{\psi(\tau)}{\sqrt{A^2 - \tau^2}(\tau - t)^2} d\tau,$$

где $\psi(t) = \sqrt{A^2 - t^2}u(t)$, или, после замены переменных, к интегралу

$$\frac{1}{A^2} \int_{-1}^1 \frac{\psi^*(w)}{\sqrt{1 - w^2}(w - v)^2} dw,$$

где $w = \tau/A$, $v = t/A$, $\psi^*(w) = \psi(Aw)$.

Будем аппроксимировать функцию $\psi^*(w)$ интерполяционным полиномом [65]

$$\psi_n^*(w) = L_n(\psi^*) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{\gamma_k} \sum_{i=0}^n T_i(\mu_k) T_i(w) \right) \psi^*(\mu_k),$$

где $T_n(t) = (2/\pi)^{1/2} \cos n \arccos t$, $\mu_k = \cos[(2k - 1)\pi/(2n + 2)]$ ($k = 1, 2, \dots, n + 1$) – корни полинома $T_{n+1}(t)$ и $\gamma_k = \sum_{l=0}^n T_l^2(\mu_k)$.

Заменяя $\psi^*(w)$ на $\psi_n^*(w)$, имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{A^2} \int_{-1}^1 \frac{\psi^*(w)}{\sqrt{1 - w^2}(w - v)^2} dw = R_n(\psi^*) + \\ & + \frac{\pi}{1 - v^2} \sum_{k=0}^n \left[\frac{\psi^*(\mu_k)}{\gamma_k} \sum_{i=2}^n T_i(\mu_k) \left(-\frac{i-1}{2} U_i(v) - \frac{i+1}{2} U_{i-2}(v) \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Возвращаясь в (2.7) к переменным t и τ , имеем

$$\begin{aligned} & \int_{-A}^A \frac{u(\tau)}{(\tau - t)^2} d\tau = R_N(u) + \frac{\pi A^3}{A^2 - t^2} \sum_{k=0}^n \frac{\sqrt{1 - \mu_k^2} \psi(A\mu_k)}{\gamma_k} \times \\ & \times \sum_{i=2}^n T_i(\mu_k) \left(-\frac{i-1}{2} U_i\left(\frac{t}{A}\right) - \frac{i+1}{2} U_{i-2}\left(\frac{t}{A}\right) \right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Можно показать, что $R_N(u) \leq c E_n(\psi) n^2 \ln n$, где $E_n(\psi)$ – наилучшее равномерное приближение функции $\psi(t)$ на сегменте $[-1, 1]$ алгебраическими полиномами n порядка. Аналогичная оценка справедлива и в среднеквадратичной метрике.

При реализации формул (2.6) и (2.8) возникает вопрос о вычислении значений функции $u(t)$ в точках $A\mu_k$, $k = 1, 2, \dots, n+1$. В геофизической практике значения $u(t_k)$, $k = 1, 2, \dots, n+1$, определяются, как правило, на нерегулярной (хаотической) сетке узлов. Поэтому возникает необходимость построения аналогов квадратурных формул вида (2.6) и (2.8) на хаотических сетках узлов. Эти вопросы будут рассмотрены в разд. 9 для одномерного и многомерного случаев.

В этом разделе остановимся на еще одном типе квадратурных формул вычисления трансформаций, который также легко реализуется на практике. Так как эти формулы строятся по одной и той же схеме, то остановимся для определенности на вычислении трансформации

$$Ju = \int_{-A}^A \frac{u(\tau)}{(\tau - t)^2} d\tau.$$

Здесь, как и выше, будем полагать, что функция $u(\tau)$ финитна и обращается в нуль в точках $\pm A$. Разобьем сегмент $[-A, A]$ на N частей точками $x_k = -A + 2Ak/N$, $k = 0, 1, \dots, N$. Обозначим через Δ_k сегменты $\Delta_k = [x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots, N-1$. Пусть $u(\tau) \in W^r(1)$, $r \geq 2$ (Отметим, что для построения вычислительной схемы условие $r \geq 2$ не требуется. Для существования гиперсингулярного интеграла достаточно, чтобы $u \in W^1H_\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$).

Введем сетку узлов $x'_k = (x_k + x_{k+1})/2$, $k = 0, 1, \dots, N-1$. Вычислим интеграл Ju в узлах x'_k ($k = 0, 1, \dots, N-1$). Для этого в каждом сегменте Δ_k , $k = 0, 1, \dots, N-1$, функцию $u(t)$ аппроксимируем интерполяционным полиномом, построенным по r узлам (в качестве узлов интерполяции можно взять равноотстоящие узлы или узлы ортогональных полиномов). Интерполяционные полиномы обозначим через $L_r(u, \Delta_k)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$. Сплайн, составленный из этих полиномов и аппроксимирующий функцию $u(t)$ на сегменте $[-A, A]$, обозначим через $u_N(t)$.

Трансформацию Ju в точке x'_i ($i = 0, 1, \dots, N-1$) будем вычислять по формуле

$$\begin{aligned} Ju(x'_i) = & \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\Delta_k} P_r \left(\frac{\psi_k(\tau, x'_i)}{(\tau - x'_i)^2}; \Delta_k \right) d\tau + \sum_{k=0}^{N-1} L_r(u, \Delta_k)(x'_i) \int_{\Delta_k} \frac{d\tau}{(\tau - x'_i)^2} + \\ & + \sum_{k=0}^{N-1} L'_r(u, \Delta_k)(x'_i) \int_{\Delta_k} \frac{1}{\tau - x'_i} d\tau + \frac{1}{2!} \sum_{k=0}^{N-1} L''_r(u, \Delta_k)(x'_i) \int_{\Delta_k} d\tau + \\ & + R_N(u). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \psi_k(\tau, x'_i) = & L_r(u, \Delta_k) - L_r(u, \Delta_k)(x'_i) - \frac{1}{1!} L'_r(u, \Delta_k)(x'_i)(\tau - x'_i) - \\ & - \frac{1}{2!} L''_r(u, \Delta_k)(x'_i)(\tau - x'_i)^2; \end{aligned}$$

$P_r(f, [a, b])$ – оператор проектирования функций $f \in C[a, b]$ на множество интерполяционных полиномов степени $(r-1)$, построенных по узлам $\zeta'_1, \dots, \zeta'_r$, являющихся образами узлов полинома Лежандра ζ_1, \dots, ζ_r при аффинном преобразовании сегмента $[-1, 1]$ на $[a, b]$.

Замечание 1. В квадратурной формуле (2.9) интерполяционные полиномы $L_r(u, \Delta_k)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, также естественно строить по узлам полинома Лежандра.

Замечание 2. Отметим, что оператор

$$\int_{\Delta_k} P_r \left(\frac{\psi_k(\tau, x'_i)}{(\tau - x'_i)^2}; \Delta_k \right) d\tau$$

является квадратурной формулой Гаусса.

Оценим погрешность квадратурной формулы (2.9):

$$\begin{aligned} |R_N(u)| & \leq \max_i \sum_{k=0}^{N-1} \left| \int_{\Delta_k} \frac{u(\tau) - L_r(u, \Delta_k)}{(\tau - x'_i)^2} d\tau \right| = \\ & = \max_i \left| \int_{\Delta_i} \frac{(u(\tau) - L_r(u, \Delta_k)) d\tau}{(\tau - x'_i)^2} \right| + \\ & + \max_i \sum_{k=0}^{N-1}{}' \left| \int_{\Delta_k} (u(\tau) - L_r(u, \Delta_k)) \frac{d\tau}{(\tau - x'_i)^2} \right| = r_1 + r_2, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где \sum' означает суммирование по $k \neq i$.

Оценим r_1 . Воспользовавшись определением интеграла в смысле главного значения по Коши – Адамару, имеем

$$\begin{aligned} r_1 = & \left| \int_{\Delta_i} \frac{(u(\tau) - L_r(u, \Delta_i))'_\tau d\tau}{\tau - x'_i} - \frac{u(x_i) - L_r(u, \Delta_i)(x_i)}{x_i - x'_i} \right| + \\ & + \left| \frac{u(x_{i+1}) - L_r(u, \Delta_i)(x_{i+1})}{x_{i+1} - x'_i} \right| \leq \end{aligned}$$

$$\leq \left| \int_{\Delta_i} (u(\tau) - L_r(u, \Delta_i))'_\tau \frac{d\tau}{\tau - x'_i} \right| +$$

$$+ \left| \frac{u(x_i) - L_r(u, \Delta_i)(x_i)}{x_i - x'_i} \right| + \left| \frac{u(x_{i+1}) - L_r(u, \Delta_i)(x_{i+1})}{x_i - x'_i} \right| = r_{11} + r_{12} + r_{13}.$$

Обозначим через $\varphi(\tau)$ функцию $\varphi(\tau) = (u(\tau) - L_r(u, \Delta_i))'_\tau$. Тогда

$$r_{11} = \left| \int_{\Delta_i} (\varphi(\tau) - \varphi(x'_i)) \frac{d\tau}{\tau - x'_i} \right| \leq \max_{t \in \Delta_i} |\varphi'(t)| \frac{2A}{N} \leq c \left(\frac{A}{N} \right)^{r-1}.$$

Для оценки r_{12} заметим, что $\max_{t \in \Delta_i} |u(t) - L_r(u, \Delta_i)(t)| \leq c(A/N)^r$.

Следовательно, $r_{12} \leq c(A/N)^{r-1}$. Аналогичная оценка справедлива и для r_{13} .

Из последних трех неравенств следует оценка

$$r_1 \leq \frac{c}{N^{r-1}}. \quad (2.11)$$

При получении этой оценки использовано неравенство А. А. Маркова (см. разд. 8 главы I).

Нетрудно видеть, что

$$r_2 \leq c \left(\frac{A}{N} \right)^{r-1}. \quad (2.12)$$

Из оценок (2.10)-(2.12) следует неравенство

$$|R_N(u)| \leq c \left(\frac{A}{N} \right)^{r-1}.$$

Так как u — произвольная функция из множества функций $W^r(1)$, то справедлива оценка

$$R_N[W^r(1)] \leq \frac{c}{N^{r-1}}. \quad (2.13)$$

Известно [33], что при вычислении интеграла Ju по квадратурным формулам вида

$$Ju = \sum_{k=1}^N p_k(t)u(t_k) + R_N(u)$$

справедлива оценка

$$\zeta_N[W^r(1)] \geq cN^{-(r-1)}. \quad (2.14)$$

Из оценок (2.13) и (2.14) следует, что построенная квадратурная формула вычисления интеграла Ju при $-A < t < A$ является оптимальной по порядку.

После того как вычислены интегралы $(Ju)(x'_i)$, $i = 0, 1, \dots, N-1$, по их значениям строится сплайн. На сегментах $[-A, x'_{r-1}]$, $[x'_{r-1}, x'_{2r-1}]$, \dots , $[x'_{N-r}, A]$ сплайн состоит из интерполяционных полиномов степени $(r-1)$, построенных по r равноотстоящим узлам (x'_0, \dots, x'_{r-1}) , $(x'_{r-1}, \dots, x'_{2r-1})$, \dots , $(x'_{N-r}, \dots, x'_{N-1})$.

Обозначим этот сплайн через $J_N u$.

Сплайн $J_N u$ является приближенным методом вычисления трансформации Ju . Несмотря на то, что гиперсингулярные интегралы вычислены по оптимальным по порядку по точности квадратурным формулам, сплайн $J_N u$ не является оптимальным методом аппроксимации трансформации Ju .

В случае, если $t \in (-A, A)$, точность вычисления трансформации по описанному выше алгоритму меньше, чем CN^{-r+1} , из-за ухудшения аппроксимационных свойств сплайна в окрестности точек $\pm A$. Это связано с уменьшением гладкости функции

$$U(t) = \int_{-A}^A \frac{u(\tau)}{(\tau - t)^2} d\tau$$

в окрестности точек $\pm A$.

Поэтому возникает задача построения оптимального метода вычисления трансформаций, имеющего равномерную погрешность во всем сегменте $[-A, A]$.

Построение оптимального алгоритма трансформаций вида

$$J\varphi = \int_{-A}^A \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - t)^p} d\tau, \quad p = 2, 3, \dots$$

состоит из трех этапов:

- 1) исследуется гладкость классов сопряженных функций $\tilde{\Psi}$, определяемых интегралами $J\varphi$, $\varphi \in \Psi : \tilde{\varphi} = J\varphi$, $\varphi \in \Psi$, $\tilde{\varphi} \in \tilde{\Psi}$;
- 2) строятся оптимальные методы вычисления интегралов $J\varphi$, $\varphi \in \Psi$;
- 3) строится оптимальный метод восстановления функций $\tilde{\varphi} \in \tilde{\Psi}$.

Замечание. Оптимальный метод вычисления интегралов Ju построен в данном разделе. Более подробно эти вопросы изложены в работах [25], [31], [33].

3. Гладкость одномерных трансформаций

Исследуем гладкость одномерных трансформаций вида

$$\tilde{\varphi}(t) = J_1\varphi = \int_{-A}^A \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - t)^p} d\tau, \quad p = 2, 3, \dots,$$

и

$$\tilde{g}(t) = I_1g = \int_{-A}^A \frac{g(\tau)d\tau}{|\tau - t|^{p+\lambda}}, \quad p = 1, 2, \dots; \quad 0 < \lambda < 1.$$

Не ограничивая общности, можно положить $A = 1$ и исследовать гладкость гиперсингулярных интегралов

$$\tilde{\varphi}(t) = J_1\varphi \equiv \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau - t)^p}, \quad p = 2, 3, \dots; \quad -1 < t < 1; \quad (3.1)$$

$$\tilde{\varphi}(t) = I_1\varphi \equiv \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau)d\tau}{|\tau - t|^{p+\lambda}}, \quad p = 1, 2, 3, \dots; \quad -1 \leq t \leq 1, \quad (3.2)$$

где $\varphi(t) \in W^r H_\alpha(1)$ или $\varphi(t) \in \hat{W}_q^r(M)$, $r = p + 1, p + 2, \dots$; $q = 0, 1, \dots, r$; $0 < \lambda < 1$.

Вначале остановимся на случае, когда $\varphi(t) \in W^r H_\alpha(1)$.

Теорема 3.1. Пусть $\varphi(\tau) \in W^r H_\alpha(1)$, $r \geq p - 1$, $0 < \alpha \leq 1$, $\Omega = [-1, 1]$. Тогда $\tilde{\varphi}(t) \in L_{0, r-p+1, p-1}(\Omega, M)$.

Доказательство. Интегрируя по частям интеграл $J_1\varphi$, имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(t) = & -\frac{\varphi(1)}{(p-1)} \frac{1}{(1-t)^{p-1}} + \frac{\varphi(-1)(-1)^{p-1}}{(p-1)(1+t)^{p-1}} - \\ & -\frac{\varphi'(1)}{(p-1)(p-2)} \frac{1}{(1-t)^{p-2}} + \frac{\varphi'(-1)(-1)^{p-2}}{(p-1)(p-2)(1+t)^{p-2}} - \\ & \dots - \\ & -\frac{\varphi^{(p-2)}(1)}{(p-1)!} \frac{1}{(1-t)} + \frac{\varphi^{(p-2)}(-1)(-1)}{(p-1)!(1+t)} + \frac{1}{(p-1)!} \int_{-1}^1 \frac{\varphi^{(p-1)}(\tau)}{\tau - t} d\tau. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Исследуем гладкость функции

$$\psi_1(t) = \int_{-1}^1 \frac{\varphi^{(p-1)}(\tau)d\tau}{\tau - t}.$$

Из теоремы Привалова [86] следует, что функция $\psi_1(t)$ удовлетворяет условию Гельдера H_α при $-1 < t < 1$. Из очевидного равенства

$$\psi_1(t) = \varphi^{(p-1)}(t) \ln \left| \frac{1-t}{1+t} \right| + \int_{-1}^1 \frac{\varphi^{(p-1)}(\tau) - \varphi^{(p-1)}(t)}{\tau - t} d\tau$$

и с учетом того, что функция $(1+t)^{p-1}(1-t)^{p-1} \ln \left| \frac{1-t}{1+t} \right|$ ограничена при $p \geq 2$ и при всех $t \in [-1, 1]$, убеждаемся, что функция $\tilde{\varphi}(t)$ имеет особенность вида $(1-t)^{-(p-1)} \pm (1+t)^{-(p-1)}$.

Из формулы (3.3) следует, что функция $\tilde{\varphi}(t)$ допускает дифференцирование до $(r-p+1)$ -го порядка во внутренних точках области Ω .

Из этих соображений вытекает справедливость теоремы.

Замечание. Из приведенной теоремы следует, что на данном классе функций невозможно построить равномерное приближение к функции $\tilde{\varphi}(t)$ на сегменте $[-1, 1]$.

Теорема 3.2. Пусть $\varphi(t) \in \hat{W}_q^r H_\alpha(1)$, $0 < \alpha \leq 1$, $r \geq p-1$, $0 \leq q \leq p-2$. Тогда $\tilde{\varphi}(t) \in L_{0,r-p+1,p-2-q}(\Omega, M)$.

Доказательство теоремы 3.2 подобно доказательству предыдущей теоремы.

Теорема 3.3. Пусть $\varphi(t) \in \hat{W}_q^r H_\alpha(1)$, $r \geq p-1$, $p-2 < q \leq r$, $0 < \alpha \leq 1$. Тогда $\tilde{\varphi}(t) \in \bar{Q}_{q+1-p,r-q}^1(\Omega, M)$ при $p-1 \leq q \leq r-2$; $\tilde{\varphi}(t) \in W^{r-p} H_\alpha(M)$ при $q = r-1$, r и $0 < \alpha \leq 1$.

Доказательство. Пусть $\varphi(t) \in \hat{W}_q^r H_\alpha(1)$ и $p-1 \leq q \leq r-2$.

Воспользовавшись определением гиперсингулярного интеграла и интегрируя по частям, имеем

$$\tilde{\varphi}(t) = -\frac{1}{(p-1)!} \int_{-1}^1 \frac{\varphi^{(p-1)}(\tau) d\tau}{\tau - t}.$$

Продолжим этот процесс, в результате

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(t) &= \frac{1}{(p-1)!} \int_{-1}^1 \varphi^{(p)}(\tau) \ln |\tau - t| d\tau = \\ &= \frac{1}{(p-1)!} \int_{-1}^1 \varphi^{(q)}(\tau) f_{q-p}(\tau - t) d\tau = \frac{1}{(p-1)!} \left\{ \varphi^{(q)}(1) f_{q+1-p}(1-t) - \right. \\ &\quad \left. - \varphi^{(q)}(-1) f_{q+1-p}(-1-t) + \dots + \int_{-1}^1 \varphi^{(r)}(\tau) f_{r-p}(\tau - t) d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь $f_{s-p}(\tau - t)$ — результат $(s - p)$ -кратного последовательного интегрирования функции $\ln |\tau - t|$.

Из формулы (3.4) следует, что функция $\tilde{\varphi}(t)$ допускает дифференцирование до $(r - p + 1)$ -го порядка, причем производные до $(q - p)$ -го порядка ограничены по модулю константой M , а для $(q + 1 - p)$ -й производной справедлива оценка

$$|\tilde{\varphi}^{(q+1-p)}(t)| \leq M|(1 + \ln d(t, \Gamma))|,$$

где $d(t, \Gamma)$ — расстояние от точки x до концов Γ сегмента $[-1, 1]$.

Первое утверждение теоремы доказано.

Осталось рассмотреть случай, когда $q = r - 1$. В этом случае

$$\tilde{\varphi}(t) = \frac{1}{(p-1)!} \int_{-1}^1 \varphi^{(r)}(\tau) f_{r-p}(\tau - t) d\tau. \quad (3.5)$$

Равенство (3.5) можно дифференцировать $(r - p)$ раз. В результате имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}^{(r-p)}(t) &= \frac{1}{(p-1)!} \int_{-1}^1 \varphi^{(r)}(\tau) \ln |\tau - t| d\tau = \\ &= \frac{1}{(p-1)!} \int_{-1-t}^{1-t} \varphi^{(r)}(\tau + t) \ln |\tau| d\tau. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Из формулы (3.6) следует, что $\tilde{\varphi}^{(r-p)}(t) \in H_\alpha(M)$.

Второе утверждение теоремы доказано.

Теорема доказана.

Утверждения, аналогичные приведенным в теоремах 3.1-3.3, справедливы и для интегралов вида $I_1\varphi$. Для краткости приведем только аналог теоремы 3.3.

Теорема 3.4. Пусть $\Omega = [-1, 1]$, $\varphi(t) \in \hat{W}_q^r(1)$, $r \geq p$, $p - 1 \leq q \leq r$. Тогда $\tilde{\varphi}(t) \in Q_{0, r-p+1-\lambda}(\Omega, M)$ при $q = p - 1$; $\tilde{\varphi}(t) \in Q_{q+1-p, r-q-2+\lambda}(\Omega, M)$ при $p \leq q < r$ и $\tilde{\varphi}(t) \in W^{r-p}(M)$ при $q = r$.

Доказательство. Пусть $\varphi(t) \in \hat{W}_q^r(1)$, $r \geq p$, $p - 1 \leq q \leq r$. Воспользовавшись определением гиперсингулярного интеграла, имеем

$$\tilde{\varphi}(t) = -\frac{1}{p!} \int_{-1}^1 \frac{\varphi^{(p)}(\tau) d\tau}{|\tau - t|^\lambda}. \quad (3.7)$$

Рассмотрим несколько возникших возможностей. Предположим вначале, что $q = p - 1$. Тогда представим предыдущее равенство в виде

$$\tilde{\varphi}(t) = -\frac{1}{p!} \int_{-1-t}^{1-t} \frac{\varphi^{(p)}(v+t)dv}{|v|^\lambda}. \quad (3.8)$$

Из этого равенства следует, что функция $\tilde{\varphi}(t)$ имеет производные до $(r-p)$ -го порядка, причем для производной порядка $1 \leq j \leq r-p$ справедливо неравенство

$$\left| \frac{d^j \tilde{\varphi}(t)}{dt^j} \right| \leq \frac{M}{(d(t, \Gamma))^{j-1+\lambda}}, \quad (3.9)$$

где $\Gamma = \{\pm 1\}$ – концы сегмента $[-1, 1]$.

Следовательно, при $q = p - 1$ $\tilde{\varphi}(t) \in Q_{0, r-p+1-\lambda}(\Omega, M)$.

Рассмотрим случай, когда $q > p - 1$. Из равенства (3.8) следует, что функция $\tilde{\varphi}(t)$ имеет производные до $(q+1-p)$ -го порядка, ограниченные по модулю константой M и производные $(q+1-p+j)$ -го порядка, удовлетворяющие неравенству $\left| \frac{d^v \tilde{\varphi}(t)}{dt^v} \right| \leq M/(d(t, \Gamma))^{j-1+\lambda}$, где $v = q+1-p+j$, $j = 1, 2, \dots, r-q-1$. Следовательно, $\tilde{\varphi}(t) \in Q_{q+1-p, r-q-2+\lambda}(\Omega, M)$. Аналогичные рассуждения показывают, что при $q = r$ справедливо включение $\tilde{\varphi}(t) \in W^{r-p}(M)$.

Теорема доказана.

4. Оптимальные методы восстановления одномерных сопряженных функций

В этом разделе опишем метод восстановления одномерных сопряженных функций. В разд. 3 было показано, что если функция $\varphi(t) \in \hat{W}_q^r H_\alpha(M)$, $q \geq p$, то сопряженная функция принадлежит классу функций $\bar{Q}_{q+1-p, r-q}^1(\Omega, M)$, $\Omega = [-A, A]$.

В главе II вычислены поперечники Колмогорова и Бабенко для классов функций $\bar{Q}_{r, \gamma}^u(\Omega, M)$, $Q_{r, \gamma}^u(\Omega, M)$ и построены локальные сплайны, погрешность которых совпадает с величинами поперечников.

Из этих результатов следует, что

$$\delta_n(\bar{Q}_{q+1-p, r-q}^1(\Omega, M)) \asymp d_n(\bar{Q}_{q+1-p, r-q}^1(\Omega, M), C) \asymp n^{-(r+1-p)}. \quad (4.1)$$

Построим локальный сплайн на классе функций $\bar{Q}_{q-p, r-q}^1(\Omega, M)$, имеющий погрешность, определяемую правой частью формулы (4.1).

Разобьем сегмент $[-A, A]$ на $2N$ частей точками $t_k = -A + A(k/N)^v$, $\tau_k = A - A(k/N)^v$, $k = 0, 1, \dots, N$, $v = (r+1-p)/(q+1-p)$.

Через Δ_k , Δ_k^* обозначим, соответственно, сегменты $\Delta_k = [t_k, t_{k+1}]$, $\Delta_k^* = [\tau_{k+1}, \tau_k]$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$.

В сегментах Δ_0 и Δ_0^* разместим сегменты $\Delta_{0,j} = [t_{0,j}, t_{0,j+1}]$ и $\Delta_{0,j}^* = [\tau_{0,j+1}, \tau_{0,j}]$, $j = 0, 1, \dots, M$, $M = \lceil \ln N \rceil$, где $t_{0,j} = -1 + h_0 j/M$, $\tau_{0,j} = 1 - h_0 j/M$, $j = 0, 1, \dots, M$, $h_0 = |t_1 - t_0| = |\tau_1 - \tau_0|$.

В сегменте Δ_k аппроксимируем функцию $\tilde{\varphi}(x)$ интерполяционным полиномом $P_r(\tilde{\varphi}, \Delta_k)$, $k = 1, \dots, N - 1$, степени $(r - 1)$, построенным по узлам ζ_l' , $l = 1, 2, \dots, r$, являющимся образами узлов ζ_1, \dots, ζ_r полинома Чебышева первого рода степени r , полученных при отображении сегмента $[-1, 1]$ на сегмент Δ_k .

Аналогичным образом строятся полиномы $P_r(\tilde{\varphi}, \Delta_{0,j})$, $P_r(\tilde{\varphi}, \Delta_{0,j}^*)$, $j = 0, 1, \dots, M - 1$, $P_s(\tilde{\varphi}, \Delta_k^*)$, $k = 1, 2, \dots, N - 1$.

Замечание. Узлы полиномов Чебышева первого рода выбраны потому, что они обладают самой малой по порядку константой Лебега.

Сплайн, составленный из полиномов $P_r(\tilde{\varphi}, \Delta_k)$, $P_r(\tilde{\varphi}, \Delta_k^*)$, $k = 1, \dots, N - 1$, $P_r(\tilde{\varphi}, \Delta_{0,j})$, $P_r(\tilde{\varphi}, \Delta_{0,j}^*)$, $j = 0, 1, \dots, M - 1$, обозначим через $\tilde{\varphi}_n(x)$, $n = 2(N - 1 + M)$.

Повторяя рассуждения, проведенные в главе II, можно показать, что $\|\tilde{\varphi}(x) - \tilde{\varphi}_n(x)\|_{C[-1,1]} \leq cn^{-(r+1-p)}$.

5. Оптимальный метод трансформации потенциальных полей в одномерном случае

В разд. 2 была построена квадратурная формула вычисления трансформаций вида

$$\int_{-A}^A \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - t)^2} d\tau$$

на равномерной сетке узлов $t'_k = (t_k + t_{k+1})/2$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$, $t_k = -A + 2kA/N$, $k = 0, 1, \dots, N$.

Выше было показано, что для равномерного приближения трансформаций

$$\tilde{\varphi}(t) = J_1 \varphi = \int_{-A}^A \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - t)^p} d\tau, \quad p = 2, 3, \quad (5.1)$$

нужно функцию $\tilde{\varphi}(t) \in \bar{Q}_{q+1-p, r-q}^1([-A, A], M)$ интерполировать в узлах $t'_k = (t_k + t_{k+1})/2$, $\tau'_k = (\tau_{k+1} + \tau_k)/2$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$, $t_k = -A + A \left(\frac{k}{N}\right)^v$, $\tau_k = A - A \left(\frac{k}{N}\right)^v$, $k = 0, 1, \dots, N$, $v = (r + 1 - p)/r$. Таким образом, возникает проблема построения оптимальных квадратурных формул вы-

числения интегралов вида (5.1) на неравномерной сетке узлов $t'_k, \tau'_k, k = 0, 1, \dots, N - 1$.

Для построения алгоритмов равномерного приближения сопряженных функций $\tilde{\varphi}(t)$ на сегменте $[-A, A]$ необходимо, чтобы функция $\tilde{\varphi}(t) \in C[-A, A]$ и имела определенную гладкость на сегменте $[-A, A]$.

Выше уже отмечалось, что если $\varphi(t) \in W^r(1)$, то сопряженная функция $\tilde{\varphi}(t)$ имеет особенность порядка $(p - 1)$ на концах сегмента $[-A, A]$, а при $\varphi(t) \in \widehat{W}_q^r(1), p - 1 \leq q \leq r - 2$, сопряженная функция $\tilde{\varphi}(t) \in \bar{Q}_{q+1-p, r-q}^1([-A, A], M)$. Поэтому предварительно нужно преобразовать интеграл (5.1). Представим функцию $\varphi(t)$ в виде $\varphi(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)$, где $\varphi_2(t)$ — полином порядка $2(q + 1)$, удовлетворяющий условиям

$$\varphi_2^{(v)}(\pm A) = 0, \quad v = 0, 1, \dots, q.$$

Один из способов построения подобных полиномов заключается в следующем. Будем искать полином $\varphi_2(t)$ в виде $\varphi_2(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_{2q+1} t^{2q+1}$, коэффициенты $a_k, k = 0, 1, \dots, 2q + 1$, которого определяются из системы уравнений

$$a_0 + a_1 A + \dots + a_{2q+1} A^{2q+1} = \varphi(A),$$

$$a_0 - a_1 A + \dots + a_{2q+1} (-1)^{2q+1} A^{2q+1} = \varphi(-A),$$

...

$$q! a_q + (q + 1)! a_{q+1} A + \dots + (2q + 1) 2q \dots (q + 1) a_{2q+1} A^{q-1} = \varphi^{(q+1)}(A),$$

$$q! a_q - (q + 1)! a_{q+1} A + \dots + (-1)^{q+1} (2q + 1) 2q \dots (q + 1) a_{2q+1} A^{q+1} = \varphi^{(q+1)}(-A).$$

Второй способ заключается в построении интерполяционного полинома Фейера [140].

В приложениях наиболее удобным является третий способ, заключающийся в применении интерполяционной формулы Лагранжа — Эрмита. Приведем эту формулу в явном виде. Интерполяционный полином Лагранжа — Эрмита может быть представлен выражением

$$L_{n,r}(f, [a, b], t) = (t - a)^r (b - t)^r \sum_{k=1}^n \Psi_{n,k}(t) \frac{f(t_k)}{(t_k - a)^r (b - t_k)^r} +$$

$$+ (t - a)^r T_n(t) \sum_{j=0}^{r-1} \frac{(t - b)^j}{j!} \left[\frac{f(t)}{(t - a)^r T_n(t)} \right]_{t=b}^{(j)} +$$

$$+ (b - t)^r T_n(t) \sum_{j=0}^{r-1} \frac{(t - a)^j}{j!} \left[\frac{f(t)}{(b - t)^r T_n(t)} \right]_{t=a}^{(j)},$$

где $T_n(t)$ — полином Чебышева первого рода, отображенный с сегмента $[-1, 1]$ на сегмент $[a, b]$; $\Psi_{n,k}(t)$ — фундаментальные полиномы Лагранжа по узлам t_k , $k = 1, 2, \dots, n$.

Известны [264] следующие утверждения о сходимости интерполяционных полиномов Лагранжа — Эрмита:

$$f(t) - L_{n,r}(f, [a, b], t) = \frac{(t-a)^{r-1}}{(r-1)!} \left(f^{(r-1)}(\Theta) - L_{n,r}^{(r-1)}(f, [a, b], \Theta) \right),$$

где $a < \Theta < t - a$;

$$|f(t) - L_{n,r}(f, [a, b], t)| = \frac{(b-t)^{r-1}}{(r-1)!} \left(f^{(r-1)}(\Theta) - L_{n,r}^{(r-1)}(f, [a, b], \Theta) \right),$$

где $b - t < \Theta < b$.

Представим гиперсингулярный интеграл (5.1) в виде

$$\tilde{\varphi}(t) = \int_{-A}^A \frac{\varphi_1(\tau) d\tau}{(\tau-t)^p} + \int_{-A}^A \frac{\varphi_2(\tau) d\tau}{(\tau-t)^p}. \quad (5.2)$$

Второй интеграл в формуле (5.2) является табличным. Поэтому необходимо построить квадратурную формулу для вычисления интеграла

$$\tilde{\varphi}_1(t) = \int_{-A}^A \frac{\varphi_1(\tau) d\tau}{(\tau-t)^p}, \quad \varphi_1(\tau) \in \hat{W}_q^r(M),$$

на сетке узлов $t'_k = (t_k + t_{k+1})/2$, $\tau'_k = (\tau_{k+1} + \tau_k)/2$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, $t_k = -1 + (k/N)^v$, $\tau_k = 1 - (k/N)^v$, $k = 0, 1, \dots, N$. Здесь v — положительное вещественное число, определяемое значениями r , p и q . Пусть $\Delta_k^1 = [t_k, t_{k+1}]$, $\Delta_k^2 = [\tau_{k+1}, \tau_k]$, $k = 0, 1, \dots, N-1$. В каждом сегменте Δ_k^i , $i = 1, 2$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, функцию $\varphi_1(t)$ аппроксимируем интерполяционным полиномом $P_r(\varphi_1, \Delta_k^i)$, построенным по r узлам (в качестве узлов интерполяции можно взять равноотстоящие узлы или узлы ортогональных многочленов). Сплайн, составленный из этих полиномов и аппроксимирующий функцию $\varphi_1(t)$ на сегменте $[-A, A]$, обозначим через $\varphi_{1,N}(t)$. Интеграл $\int_{-A}^A \frac{\varphi_1(\tau) d\tau}{(\tau-t)^p}$ в точке t'_j будем вычислять по квадратурным формулам, описанным ниже.

Пусть функция $\varphi \in \hat{W}_q^r(1)$, где $p-1 \leq q \leq r-2$. При $p=2$ для вычисления гиперсингулярного интеграла от функции $\varphi_1(t)$ можно использовать квадратурную формулу (2.8).

Пусть $p = 2, 3, \dots$. Покроем сегмент $[-A, A]$ более мелкими сегментами $\Delta_k = [v_k, v_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots, M-1$, где $v_k = -A + 2kA/M$, $k = 0, 1, \dots, M$. В каждом сегменте Δ_k , $k = 0, 1, \dots, M-1$, функцию $\varphi_1(t)$ аппроксимируем интерполяционным полиномом $L_{r+1}(u_1, \Delta_k)$, построенным по $r+1$ равноотстоящему узлу.

Пусть $t \in [v_j, v_{j+1}]$, $j = 0, 1, \dots, M-1$. Интеграл $\int_{-A}^A \frac{\varphi_1(\tau)d\tau}{(\tau-t)^p}$ будем вычислять по квадратурной формуле

$$\int_{-A}^A \frac{\varphi_1(\tau)d\tau}{(\tau-t)^p} = \int_{\Delta_j^*} \frac{L_{3r}(\varphi_1, \Delta_j^*)d\tau}{(\tau-t)^p} + \sum_{k=0, k \neq j-1, j, j+1}^{M-1} \int_{\Delta_k} \frac{L_{r+1}(\varphi_1, \Delta_k)}{(\tau-t)^p} d\tau + R_M(\varphi_1), \quad (5.3)$$

где $\Delta_j^* = [v_{j-1}, v_{j+1}] \cap [-A, A]$.

Повторяя рассуждения, приведенные в разд. 2, можно показать, что

$$|R_M(\varphi)| \leq cM^{-(r-p+1)}.$$

Так как погрешность локального сплайна, построенного в предыдущем разделе, равна $cN^{-(r+1-p)}$, где N — число узлов сплайна, то нужно согласовать значения N и M с тем, чтобы погрешности локального сплайна и квадратурной формулы совпадали. Очевидно, нужно положить $M \asymp N$. Для более точного согласования значений N и M нужно вычислить константы в оценках погрешностей квадратурных формул и сплайнов.

Таким образом, построен оптимальный метод вычисления одномерных трансформаций, имеющий на сегменте $[-A, A]$ погрешность в r -номерной метрике, равную $cM^{-(r-p+1)}$, где M — число значений преобразуемой функции $\varphi(t)$, используемое при построении трансформанты.

Непосредственное применение формулы (5.3) на практике может оказаться затруднительным. Преобразуем формулу (5.3) к виду, более удобному для практической реализации.

Каждый из полиномов $L_{3r}(\varphi_1, \Delta_j^*)$, $L_{r+1}(\varphi_1, \Delta_j^*)$ представим в виде суммы двух функций:

$$L_{3r}(\varphi_1, \Delta_j^*)(\tau) = T_p(L_{3r}(\varphi_1, \Delta_j^*), t) + \psi_{3r}(\tau, \Delta_j^*, t),$$

$$L_{r+1}(\varphi_1, \Delta_k)(\tau) = T_p(L_{r+1}(\varphi_1, \Delta_k), t) + \psi_r(\tau, \Delta_k, t),$$

где $T_p(L_{3r}(\varphi_1, \Delta_j^*), t)$ — отрезок ряда Тейлора разложения функции $L_{3r}(\varphi_1, \Delta_j^*)$ по степеням $(\tau - t)$ до p -го порядка включительно. Аналогично определяется и полином $T_p(L_{r+1}(\varphi_1, \Delta_k), t)$.

Квадратурную формулу (5.3) преобразуем к следующему виду:

$$\begin{aligned}
& \int_{-A}^A \frac{\varphi_1(\tau) d\tau}{(\tau - t)^p} = \int_{\Delta_j^*} \frac{T_p(L_{3r}(\varphi_1, \Delta_j^*), t) d\tau}{(\tau - t)^p} + \\
& + \sum_{k=0, k \neq j-1, j, j+1}^{M-1} \int_{\Delta_k} \frac{T_p(L_{r+1}(\varphi_1, \Delta_k), t) d\tau}{(\tau - t)^p} + \int_{\Delta_j^*} P_{3r} \left[\frac{\psi_{3r}(\tau, \Delta_j^*, t)}{(\tau - t)^p}, \Delta_j^* \right] d\tau + \\
& + \sum_{k=0, k \neq j-1, j, j+1}^{M-1} \int_{\Delta_k} P_r \left[\frac{\psi_r(\tau, \Delta_k, t)}{(\tau - t)^p}, \Delta_k \right] d\tau + R_M(\varphi_1), \quad (5.4)
\end{aligned}$$

где $P_r[f, \Delta_k]$ — оператор проектирования функции f на интерполяционный полином степени $(r - 1)$, построенный по узлам $\zeta'_1, \dots, \zeta'_r$, полученным из корней ζ_1, \dots, ζ_r полинома Лежандра при аффинном преобразовании сегмента $[-1, 1]$ на Δ_k .

Нетрудно видеть, что интеграл

$$\int_{\Delta_k} P_r \left[\frac{\psi_r(\tau, \Delta_k, t)}{(\tau - t)^p}, \Delta_k \right] d\tau$$

является квадратурной формулой Гаусса. Отметим также, что первые два интеграла в правой части формулы (5.4) являются табличными.

Погрешность квадратурной формулы (5.4) совпадает с погрешностью квадратурной формулы (5.3), так как формула (5.4) получена из (5.3) тождественным преобразованием.

6. Трансформации многомерных потенциальных полей

Как уже отмечалось выше, в геофизической практике наиболее часто встречаются трансформации вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{3/2}}. \quad (6.1)$$

Интеграл (6.1) является гиперсингулярным интегралом с переменной особенностью. Его регуляризация проводится по определению 6.11, приведенному в разд. 6 главы I.

Так как аномальное потенциальное поле определено в финитной области $\Omega = [-A, A]^2$, то вместо трансформаций вида (6.1) естественно

рассматривать трансформации вида

$$\int_{-A}^A \int_{-A}^A \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{3/2}}, \quad (t_1, t_2) \in \Omega. \quad (6.2)$$

Трансформация (6.2) является частным случаем трансформаций

$$\tilde{\varphi}(t_1, t_2) = J\varphi = \int_{-A}^A \int_{-A}^A \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}}, \quad p = 3, 4, \dots \quad (6.3)$$

и

$$I\varphi = \int_{-A}^A \int_{-A}^A \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p+\lambda}}, \quad p = 1, 2, \dots, \quad 0 < \lambda < 1, \quad (6.4)$$

где $(t_1, t_2) \in \Omega$.

Построим оптимальную по порядку кубатурную формулу вычисления трансформаций (6.3) (трансформации (6.4) вычисляются аналогично). Для простоты обозначений положим $A = 1$, $\Omega = [-1, 1]^2$. Пусть $\varphi \in C_2^r(\Omega)$. Покроем область Ω квадратами $\Delta_{kl} = [x_k, x_{k+1}; x_l, x_{l+1}]$, $k, l = 0, 1, \dots, N-1$, $x_k = -1 + 2k/N$, $k = 0, 1, \dots, N$. Введем узлы $x_k^i = x_k + i(x_{k+1} - x_k)/r$, $i = 0, 1, \dots, r$, $k = 0, 1, \dots, N-1$. По узлам x_k^i , $i = 0, 1, \dots, r$, на сегменте $[x_k, x_{k+1}]$ построим интерполяционный полином Лагранжа r -го порядка $L_r(\varphi, [x_k, x_{k+1}])$, $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Через $L_{rr}(\varphi, \Delta_{kl})$ обозначим полином, интерполирующий функцию $\varphi(t_1, t_2)$ в квадрате Δ_{kl} последовательно по переменным t_1 и t_2 . Действие оператора $L_{rr}(\varphi, \Delta_{kl})$ описывается формулой

$$L_{rr}(\varphi, \Delta_{kl}) = L_r^{t_1}(L_r^{t_2}(\varphi(t_1, t_2), [x_l, x_{l+1}]), [x_k, x_{k+1}]),$$

где через $L_r^{t_2}(\varphi(t_1, t_2), [x_l, x_{l+1}])$ обозначен полином, интерполирующий функцию $\varphi(t_1, t_2)$ по переменной t_2 в сегменте $[x_l, x_{l+1}]$, а через $L_r^{t_1}(L_r^{t_2}(\varphi(t_1, t_2), [x_l, x_{l+1}]), [x_k, x_{k+1}])$ обозначен полином, интерполирующий функцию $L_r^{t_2}(\varphi(t_1, t_2), [x_l, x_{l+1}])$ по переменной t_1 в сегменте $[x_k, x_{k+1}]$.

Замечание. Здесь интерполяционные полиномы обозначаются символом L для того, чтобы подчеркнуть, что они строятся по равноотстоящим узлам.

Интеграл (6.3) будем вычислять на классах функций $W^{r,r}(1)$ и $C_2^r(1)$.

Пусть $(t_1, t_2) \in \Delta_{ij}$, $i, j = 0, 1, \dots, N-1$. Интеграл (6.1) будем вычислять по кубатурной формуле

$$H\varphi = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \int_{\Delta_{kl}} \frac{L_{rr}(\varphi, \Delta_{kl}) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} +$$

$$+ \iint_{\Delta_{ij}^*} \frac{L_{rr}(\varphi, \Delta_{ij}^*) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} + R_N(\varphi), \quad (6.5)$$

где $\Delta_{ij}^* = [x_{i-1}, x_{i+2}; x_{j-1}, x_{j+2}]$; $\sum \sum'$ означает суммирование по k и l таким, что мера пересечения квадратов Δ_{kl} с квадратом Δ_{ij}^* равна нулю.

Теорема 6.1. Пусть $\Psi = W^{r,r}(1)$. Среди всевозможных кубатурных формул вычисления интегралов вида (6.1), использующих $O(N^2)$ узлов подынтегральной функции, оптимальной по порядку является формула (6.5), имеющая погрешность $R_N[\Psi] \asymp N^{-(r+2-p)} \asymp n^{-(r+2-p)/2}$, где n — число узлов кубатурной формулы.

Доказательство. Оценим погрешность кубатурной формулы (6.5). Очевидно,

$$\begin{aligned} |R_N(\varphi)| &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \left| \iint_{\Delta_{kl}} \frac{\psi_{rr}(\varphi, \Delta_{kl}) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} \right| + \\ &+ \left| \iint_{\Delta_{ij}^*} \frac{\psi_{rr}(\varphi, \Delta_{ij}^*) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} \right| = I_1 + I_2, \end{aligned} \quad (6.6)$$

где $\psi_{rr}(\varphi, \Delta_{kl}) = \varphi(\tau_1, \tau_2) - L_{rr}(\varphi, \Delta_{kl})$, $(\tau_1, \tau_2) \in \Delta_{kl}$, $k, l = 0, 1, \dots, N-1$.

Оценим каждое из выражений I_1, I_2 в отдельности.

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \sum_{k=0}^{i-2} \sum_{l=0}^{j-2} \frac{1}{((x_i - x_k)^2 + (x_j - x_l)^2)^{p/2}} \iint_{\Delta_{kl}} |\psi_{rr}(\varphi, \Delta_{kl})| d\tau_1 d\tau_2 + \\ &+ \sum_{k=0}^{i-2} \sum_{l=j+2}^{N-1} \frac{1}{((x_i - x_k)^2 + (x_l - x_{j+1})^2)^{p/2}} \iint_{\Delta_{kl}} |\psi_{rr}(\varphi, \Delta_{kl})| d\tau_1 d\tau_2 + \\ &+ \sum_{k=i+2}^{N-1} \sum_{l=0}^{j-2} \frac{1}{((x_k - x_{i+1})^2 + (x_j - x_l)^2)^{p/2}} \iint_{\Delta_{kl}} |\psi_{rr}(\varphi, \Delta_{kl})| d\tau_1 d\tau_2 + \\ &+ \sum_{k=i+2}^{N-1} \sum_{l=j+2}^{N-1} \frac{1}{((x_k - x_{i+1})^2 + (x_l - x_{j+1})^2)^{p/2}} \iint_{\Delta_{kl}} |\psi_{rr}(\varphi, \Delta_{kl})| d\tau_1 d\tau_2 + \\ &+ \sum_{k=i-1}^{i+1} \sum_{l=0}^{j-2} \frac{1}{((x_i - x_k)^2 + (x_j - x_l)^2)^{p/2}} \iint_{\Delta_{kl}} |\psi_{rr}(\varphi, \Delta_{kl})| d\tau_1 d\tau_2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=i-1}^{i+1} \sum_{l=j+2}^{N-1} \frac{1}{((x_i - x_k)^2 + (x_l - x_{j+1})^2)^{p/2}} \iint_{\Delta_{kl}} |\psi_{rr}(\varphi, \Delta_{kl})| d\tau_1 d\tau_2 + \\
& + \sum_{k=0}^{i-2} \sum_{l=j-1}^{j+1} \frac{1}{((x_k - x_{i+1})^2 + (x_j - x_l)^2)^{p/2}} \iint_{\Delta_{kl}} |\psi_{rr}(\varphi, \Delta_{kl})| d\tau_1 d\tau_2 + \\
& + \sum_{k=i+2}^{N-1} \sum_{l=j-1}^{j+1} \frac{1}{((x_k - x_{i+1})^2 + (x_l - x_{j+1})^2)^{p/2}} \iint_{\Delta_{kl}} |\psi_{rr}(\varphi, \Delta_{kl})| d\tau_1 d\tau_2 \leq \\
& \leq \frac{c}{N^{r+2}} \left(\sum_{k=0}^{i-2} \sum_{l=0}^{j-2} \frac{N^p}{(u_1 + u_2)^{p/2}} + \sum_{k=0}^{i-2} \sum_{l=j+2}^{N-1} \frac{N^p}{(u_1 + u_3)^{p/2}} + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{k=i+2}^{N-1} \sum_{l=0}^{j-2} \frac{N^p}{(u_4 + u_2)^{p/2}} + \sum_{k=i+2}^{N-1} \sum_{l=j+2}^{N-1} \frac{N^p}{(u_4 + u_2)^{p/2}} \right) + \\
& + \frac{c}{N^{r+2}} \left(\sum_{k=i-1}^{i+1} \sum_{l=0}^{j-2} \frac{N^p}{(u_1 + u_2)^{p/2}} + \sum_{k=i-1}^{i+1} \sum_{l=j+2}^{N-1} \frac{N^p}{(u_1 + u_3)^{p/2}} + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{k=0}^{i-2} \sum_{l=j-1}^{j+1} \frac{N^p}{(u_4 + u_2)^{p/2}} + \sum_{k=i+2}^{N-1} \sum_{l=j-1}^{j+1} \frac{N^p}{(u_4 + u_2)^{p/2}} \right) \leq \\
& \leq \frac{c}{N^{r+2-p}}, \tag{6.7}
\end{aligned}$$

где $u_1 = (i - k - 1)^2$, $u_2 = (j - l - 1)^2$, $u_3 = (l - j - 1)^2$, $u_4 = (k - i - 1)^2$.

Интеграл I_2 представим следующим образом:

$$\begin{aligned}
I_2 & \leq \left| \iint_{\Delta_{ij}^* \setminus B(t_{12}, \delta_0)} \frac{\psi_{rr}(\varphi, \Delta_{ij}^*) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} \right| + \\
& + \left| \iint_{B(t_{12}, \delta_0)} \frac{\psi_{rr}(\varphi, \Delta_{ij}^*) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} \right| = I_{21} + I_{22}, \tag{6.8}
\end{aligned}$$

где $t_{12} = (t_1, t_2)$, $\delta_0 = \min(|t_1 - x_{i-1}|, |x_{i+2} - t_1|, |t_2 - x_{j-1}|, |x_{j+2} - t_2|)$.

Учитывая, что $\delta_0 \geq 2/N$, интеграл I_{21} оценивается неравенством

$$I_{21} \leq cN^p \iint_{\Delta_{ij}^*} |\psi_{rr}(\varphi, \Delta_{ij}^*)| d\tau_1 d\tau_2 \leq \frac{c}{N^{r+2-p}}. \tag{6.9}$$

Для оценки интеграла I_{22} воспользуемся определением гиперсингулярных интегралов. При оценке интеграла I_{22} нужно отдельно рассмотреть случаи, когда p — целое число и когда p — нецелое число.

Вначале рассмотрим случай, когда p — целое число.

При оценке интеграла I_{22} используется определение 6.11 из главы I:

$$I_{22} = \left| \lim_{\eta \rightarrow 0} \left(\iint_{B(t_{12}, \delta_0) \setminus B(t_{12}, \eta)} \frac{\psi_{rr}(\varphi, \Delta_{ij}^*) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} + \frac{B(\eta)}{\eta^{p-2}} + C(\eta) \ln \eta \right) \right|.$$

Для оценки этого выражения перейдем к полярной системе координат. Отметим, что приведенное выше выражение эквивалентно тому, что интеграл

$$\iint_{B(t_{12}, \delta_0) \setminus B(t_{12}, \eta)} \frac{\psi_{rr}(\varphi, \Delta_{ij}^*) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}}$$

берется по частям и слагаемые, стремящиеся к ∞ при $\eta \rightarrow 0$, ”отбрасываются”.

Из этого замечания нетрудно видеть, что, переходя к полярным координатам, имеем

$$I_{22} \leq c \left| \frac{\psi_{rr}^*(\delta_0)}{\delta_0^{p-2}} + \frac{(\psi_{rr}^*)'(\delta_0)}{\delta_0^{p-3}} + \dots + \frac{(\psi_{rr}^*)^{p-3}(\delta_0)}{\delta_0} + (\psi_{rr}^*)^{p-4}(\delta_0) |\ln \delta_0| \right|.$$

Обозначим через $\psi_{rr}(\varphi, \Delta_{ij}^*)(\rho, \Theta)$ функцию $\psi_{rr}(\varphi, \Delta_{ij}^*)$, записанную в полярной системе координат с центром в точке t_{12} . Тогда, как нетрудно видеть,

$$\psi_{rr}^*(\delta_0) = \int_0^{2\pi} \psi_{rr}(\varphi, \Delta_{ij}^*)(\delta_0, \Theta) d\Theta.$$

Отсюда следует, что $|\psi_{rr}^*(\delta_0)| \leq \frac{c}{N^r}$. Следовательно,

$$\left| \frac{\psi_{rr}^*(\delta_0)}{\delta_0^{p-2}} \right| \leq \frac{c}{N^{r-p+2}}.$$

Для оценки $|\psi_{rr}^{*'}(\delta_0)|$ воспользуемся неравенством А. А. Маркова и методом С. Н. Бернштейна доказательства обратных теорем конструктивной теории функций [140]. В результате имеем $|\psi_{rr}^{*'}(\delta_0)| \leq c/N^{r-1}$ и, следовательно, $|\psi_{rr}^{*'}(\delta_0)|/\delta_0^{p-3} \leq c/N^{r-p+2}$.

Продолжая этот процесс, окончательно получаем оценку $I_{22} \leq \leq c/N^{r-p+2}$, справедливую при целых значениях p .

Рассмотрим теперь случай, когда p — нецелое число, $p = k + \alpha > 2$. В этом случае для оценки I_{22} следует воспользоваться определением 6.12 из главы I. Повторяя приведенные выше рассуждения, имеем

$$I_{22} \leq c \left| \frac{\psi_{rr}^*(\delta_0)}{\delta_0^{k+\alpha-2}} + \frac{\psi_{rr}^{*'}(\delta_0)}{\delta_0^{k+\alpha-3}} + \dots + \frac{\psi_{rr}^{*(k-2)}(\delta_0)}{\delta_0^\alpha} + \psi_{rr}^{*(k-1)}(\delta_0)\delta_0^{1-\alpha} \right| \leq$$

$$\leq \frac{c}{N^{r-k-\alpha+2}} = \frac{c}{N^{r-p+2}}.$$

Таким образом, как при p целом, так и при p нецелом

$$I_{22} \leq \frac{c}{N^{r-p+2}}. \quad (6.10)$$

Из оценок (6.5)-(6.10) следует неравенство

$$|R_N(\varphi)| \leq \frac{c}{N^{r+2-p}} = \frac{c}{n^{(r+2-p)/2}}.$$

Из произвольности функции $\varphi \in \Psi$ имеем

$$R_N[\Psi] \leq \frac{c}{n^{(r+2-p)/2}}. \quad (6.11)$$

Сопоставляя неравенство (6.11) с приведенными в [33] оценками функционалов $\zeta_N[\Psi]$ для кубатурных формул вычисления интегралов вида (6.1), использующих $O(N^2)$ узлов подынтегральной функции, завершаем доказательство теоремы.

Теорема 6.2. Пусть $\Psi = C_2^r(1)$. Среди всевозможных кубатурных формул вычисления интегралов вида (6.1), использующих $O(N^2)$ узлов подынтегральной функции, оптимальной по порядку является формула (6.5). Ее погрешность равна

$$R_N[\Psi] \asymp \frac{c}{n^{(r+2-p)/2}},$$

где n — число узлов кубатурной формулы.

Доказательство подобно доказательству предыдущей теоремы и поэтому опускается.

Непосредственное применение кубатурной формулы (6.5) затруднительно и ее приходится модифицировать. Построим оптимальную по порядку кубатурную формулу, непосредственно применимую для программной реализации.

Обозначим через $T_{rr}(\varphi, \Delta_{kl}, (t_1, t_2))$ отрезок ряда Тейлора функции $\varphi \in C(\Delta_{kl})$ по степеням $(\tau_1 - t_1)$ и $(\tau_2 - t_2)$ до r -го порядка по каждой переменной. Отметим, что точка (t_1, t_2) не обязательно принадлежит области Δ_{kl} .

Интеграл (6.1) будем вычислять по кубатурной формуле

$$H\varphi = \sum_{k=0}^{N-1} \sum'_{l=0}^{N-1} \iint_{\Delta_{kl}} \frac{T_{r-1,r-1}(L_{rr}(\varphi, \Delta_{kl}), \Delta_{kl}, (t_1, t_2))}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} d\tau_1 d\tau_2 +$$

$$+ \sum_{v=1}^4 \iint_{\Delta_{ij,v}^*} \frac{L_{rr}(\varphi, \Delta_{ij}^*) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} + R_N(\varphi), \quad (6.12)$$

здесь $(t_1, t_2) \in \Delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, \dots, N-2$, $\Delta_{ij}^* = [x_{i-1}, x_{i+1}; x_{j-1}, x_{j+1}]$; $\sum \sum'$ означает суммирование по k и l таким, что мера пересечения квадратов Δ_{kl} и Δ_{ij}^* равна нулю. Опишем построение областей $\Delta_{ij,v}^*$, $v = 1, 2, 3, 4$. Соединим точку (t_1, t_2) с вершинами квадрата Δ_{ij}^* отрезками прямых. В результате область Δ_{ij}^* окажется покрытой четырьмя областями $\Delta_{ij,k}^*$, $k = 1, 2, 3, 4$.

Для вычисления интегралов

$$\iint_{\Delta_{ij,v}^*} \frac{L_{rr}(\varphi, \Delta_{ij}^*) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}}, \quad (6.13)$$

$v = 1, 2, 3, 4$, перейдем к полярной системе координат с центром в точке (t_1, t_2) .

В результате вычисление интегралов (6.13) сводится к последовательному интегрированию элементарных функций.

Аналогично, вычисление интегралов в первом слагаемом в правой части формулы (6.12) сводится к вычислению табличных интегралов.

Нетрудно видеть, что погрешность кубатурной формулы (6.12) совпадает с погрешностью кубатурной формулы (6.5) и, следовательно, кубатурная формула (6.12) является оптимальной по порядку.

При практическом использовании трансформаций необходимо вычислить интеграл (6.3) в большом числе точек $(t_1, t_2) \in \Omega$. Для уменьшения числа арифметических действий можно поступить следующим образом. Обозначим через x'_k точки $x'_k = (x_k + x_{k+1})/2$, $k = 0, 1, \dots, N-1$. Вычислим значения $\tilde{\varphi}(x'_k, x'_l)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, функции $\tilde{\varphi}(t_1, t_2)$, определяемой формулой (6.3). По значениям $\tilde{\varphi}(x'_k, x'_l)$, $k, l = 0, 1, \dots, N-1$, построим локальный сплайн. Для простоты обозначений положим N кратным r . Пусть $N = rn$. Разделим область Ω на квадраты $g_{kl} = [v_k, v_{k+1}; v_l, v_{l+1}]$, $k, l = 0, 1, \dots, n-1$, $v_k = -1 + \frac{2k}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n$. В каждом квадрате g_{kl} функция $\tilde{\varphi}(t_1, t_2)$ аппроксимируется интерполяционным полиномом $L_{rr}(\tilde{\varphi}, \Delta_{kl}) = L_r^{t_1}(L_r^{t_2}(\tilde{\varphi}(t_1, t_2), [v_l, v_{l+1}]), [v_k, v_{k+1}])$,

построенным по узлам (x'_i, x'_j) , $i = rk, rk + 1, \dots, r(k + 1) - 1$, $j = rl, rl + 1, \dots, r(l + 1) - 1$, $k, l = 0, 1, \dots, N - 1$.

Из интерполяционных полиномов $L_{rr}(\tilde{\varphi}, \Delta_{kl})$, $k, l = 0, 1, \dots, N - 1$, составим локальный сплайн, который обозначим через $\tilde{\varphi}_{NN}(t_1, t_2)$. Точность аппроксимации функции $\varphi(t_1, t_2)$ сплайном $\tilde{\varphi}_{NN}(t_1, t_2)$ зависит от класса функций, к которому принадлежит функция $\varphi(t_1, t_2)$. Отметим, что если функция $\varphi(t_1, t_2)$ не обращается в нуль на границе $\Gamma = \partial\Omega$, то невозможно построить равномерное приближение функции $\tilde{\varphi}(t_1, t_2)$ во всей области Ω . Сплайн $\tilde{\varphi}_{NN}(t_1, t_2)$ достаточно хорошо аппроксимирует трансформацию $\tilde{\varphi}(t_1, t_2)$ только в центре области Ω , а по мере приближения к границе области точность аппроксимации значительно ухудшается.

Возникает задача построения алгоритмов, осуществляющих равномерное приближение трансформации $\tilde{\varphi}(t_1, t_2)$ во всей области Ω . Для решения этой задачи необходимо исследовать гладкость функции $\tilde{\varphi}_{NN}(t_1, t_2)$.

7. Гладкость многомерных трансформаций

Пусть $\Omega = [-1, 1]^2$. Рассмотрим интеграл

$$\tilde{\varphi}(t_1, t_2) = (H\varphi)(t_1, t_2) = \iint_{\Omega} \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} \quad (7.1)$$

в предположении, что функция $\varphi(\tau_1, \tau_2) \in C_2^r(1)$, а переменная $t = (t_1, t_2)$ пробегает область $\Omega \setminus \Gamma$, где $\Gamma = \partial\Omega$ — граница области Ω .

Теорема 7.1. Пусть $\varphi \in C_2^r(1)$, $r \geq p + 1$, $p = 2, 3, \dots$. Тогда $\tilde{\varphi}(t) \in L_{0, r-p, p-2}(\Omega, M)$.

Доказательство. Возьмем произвольную точку $E \in \Omega \setminus \partial\Omega$ и оценим модуль функции $\tilde{\varphi}(t)$, $t = (t_1, t_2)$. Соединим точку E отрезками прямых с вершинами квадрата $\Omega = [A, B, C, D]$ и будем рассматривать треугольники AEB , BEC , CED , DEA . При этом достаточно ограничиться рассмотрением треугольника CED (рис. 7.1).

Введем полярную систему координат с центром в точке E . Обозначим через a — расстояние от точки E до прямой DC . Тогда гиперсингулярный интеграл по треугольнику CED равен

$$H_1\varphi = \lim_{\rho_1 \rightarrow 0} \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} \left[\int_{\rho_1}^{\frac{a}{\sin \Theta}} \frac{\varphi(t_1 + \rho \cos \Theta, t_2 + \rho \sin \Theta) d\rho}{\rho^{p-1}} - \frac{B(\Theta, \rho)}{\rho^{p-2}} - C(\Theta, \rho) \ln \rho \right] d\Theta. \quad (7.2)$$

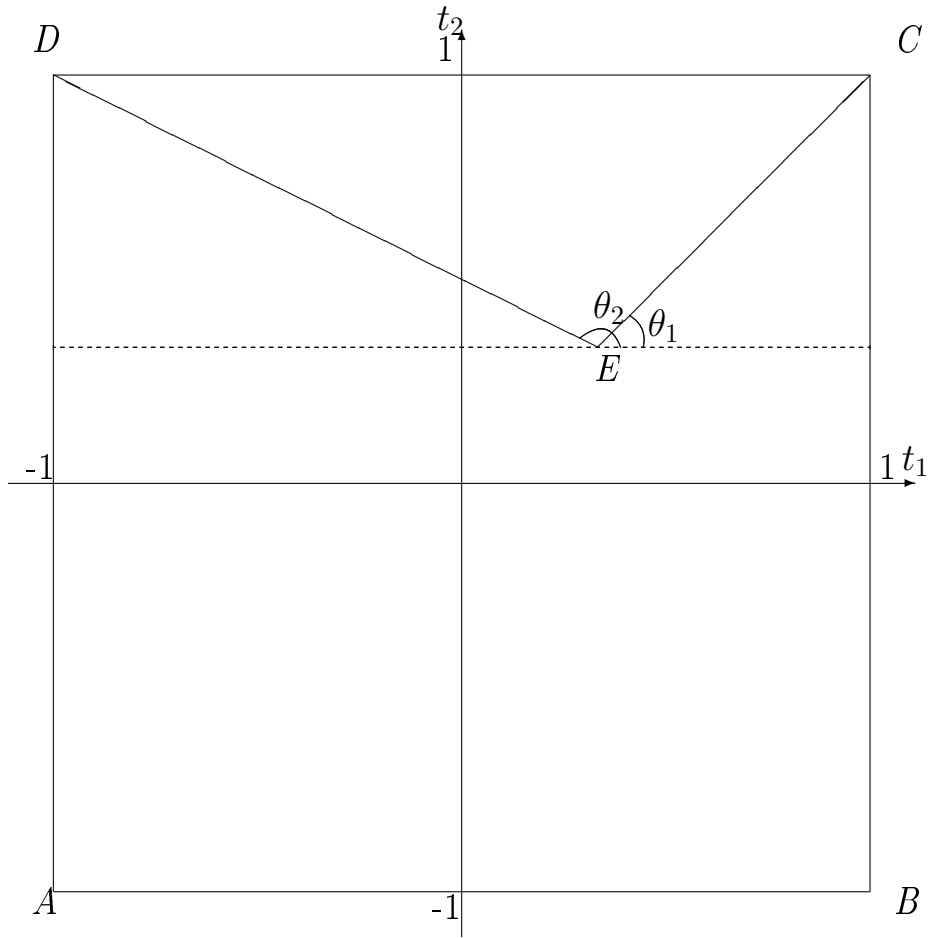


Рис. 7.1

Зафиксируем произвольное достаточно малое ρ_1 и вычислим по частям интеграл

$$\int_{\rho_1}^{\frac{a}{\sin \Theta}} \frac{\varphi(t_1 + \rho \cos \Theta, t_2 + \rho \sin \Theta) d\rho}{\rho^{p-1}}.$$

В результате получаем выражение

$$\frac{f_{p-2}(\Theta)}{a^{p-2}} + \frac{f_{p-3}(\Theta)}{a^{p-3}} + \dots + \frac{f_1(\Theta)}{a} + \frac{g_{p-2}(\Theta)}{\rho_1^{p-2}} + \frac{g_{p-3}(\Theta)}{\rho_1^{p-3}} + \dots + \frac{g_1(\Theta)}{\rho_1} + f_0(\Theta),$$

где $f_i(\Theta)$, $g_i(\Theta)$, $i = 0, 1, \dots, p-2$, — непрерывные функции.

Воспользовавшись определением гиперсингулярного интеграла и интегрируя последнее выражение по Θ , получаем

$$\frac{A_{p-2}}{a^{p-2}} + \dots + \frac{A_1}{a} + C_1.$$

Аналогичные выражения получаем и при интегрировании по остальным треугольникам. Таким образом, интеграл $H\varphi$ оценивается неравенством

$$|H\varphi(t)| \leq \frac{c}{(\rho(t, \Gamma))^{p-2}}, \quad (7.3)$$

где $\rho(t, \Gamma)$ – расстояние от точки t до границы $\Gamma = \partial\Omega$ области Ω .

Докажем законность дифференцирования гиперсингулярных интегралов вида $\tilde{\varphi}(t_1, t_2) = (H\varphi)(t_1, t_2)$ по параметрам t_1 и t_2 во внутренних точках (t_1, t_2) области Ω .

Пусть (t_1, t_2) – внутренняя точка области Ω и расстояние от нее до границы $\Gamma = \partial\Omega$ области Ω равно d ($d > 0$). Возьмем h ($0 < h < d$) и рассмотрим разность

$$\begin{aligned} & (H\varphi)(t_1 + h, t_2) - (H\varphi)(t_1, t_2) = \\ &= \iint_{\Omega} \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - (t_1 + h))^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} - \iint_{\Omega} \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} = \\ &= \iint_{\Omega_1} \frac{\varphi(\tau_1 + h, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} - \iint_{\Omega} \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} = \\ &= \iint_{\Omega^*} \frac{(\varphi(\tau_1 + h, \tau_2) - \varphi(\tau_1, \tau_2)) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} + \\ &+ \int_{-1-h}^{-1} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau_1 + h, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} - \int_{1-h}^1 \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}}, \end{aligned}$$

где $\Omega_1 = [-1 - h, 1 - h; -1, 1]$, $\Omega^* = [-1, 1 - h; -1, 1]$.

Воспользовавшись определением производной, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial(H\varphi)(t_1, t_2)}{\partial t_1} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\iint_{\Omega^*} \frac{(\varphi(\tau_1 + h, \tau_2) - \varphi(\tau_1, \tau_2)) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} + \right. \\ &+ \left. \int_{-1-h}^{-1} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau_1 + h, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} - \int_{1-h}^1 \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_{\Omega^*} \frac{\partial \varphi(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} \\
&\quad - \int_{-1}^1 \frac{\varphi(1, \tau_2) d\tau_2}{((1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} + \int_{-1}^1 \frac{\varphi(-1, \tau_2) d\tau_2}{((1 + t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}}.
\end{aligned}$$

Из этой формулы следует законность почленного дифференцирования интеграла $(H\varphi)(t_1, t_2)$ во внутренних точках области Ω .

Покажем теперь, что функция $\tilde{\varphi}(t_1, t_2)$ дифференцируема $(r - 2)$ раза.

Последовательно дифференцируя, имеем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{\varphi}(t_1, t_2)}{\partial t_1} &= \iint_{\Omega} \varphi(\tau_1, \tau_2) \frac{\partial}{\partial t_1} \frac{1}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} d\tau_1 d\tau_2 = \\
&= - \iint_{\Omega} \varphi(\tau_1, \tau_2) \frac{\partial}{\partial \tau_1} \frac{1}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} d\tau_1 d\tau_2 = \\
&= - \int_{-1}^1 \frac{\varphi(1, \tau_2)}{((1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} d\tau_2 + \int_{-1}^1 \frac{\varphi(-1, \tau_2)}{((1 + t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} d\tau_2 + \\
&\quad + \iint_{\Omega} \frac{\partial \varphi(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}}.
\end{aligned}$$

Продолжая этот процесс, имеем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^v \tilde{\varphi}(t_1, t_2)}{\partial t_1^v} &= - \int_{-1}^1 \varphi(1, \tau_2) \frac{\partial^{v-1}}{\partial t_1^{v-1}} \frac{1}{((1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} d\tau_2 - \\
&\quad - \int_{-1}^1 \frac{\partial \varphi(1, \tau_2)}{\partial t_1} \frac{\partial^{v-2}}{\partial t_1^{v-2}} \frac{1}{((1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} d\tau_2 - \dots - \\
&\quad - \int_{-1}^1 \frac{\partial^{v-1} \varphi(1, \tau_2)}{\partial t_1^{v-1}} \frac{1}{((1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} d\tau_2 + \\
&\quad + \int_{-1}^1 \varphi(-1, \tau_2) \frac{\partial^{v-1}}{\partial t_1^{v-1}} \frac{1}{((1 + t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} d\tau_2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{-1}^1 \frac{\partial \varphi(-1, \tau_2)}{\partial t_1} \frac{\partial^{v-2}}{\partial t_1^{v-2}} \frac{1}{((1+t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} d\tau_2 + \dots + \\
& + \int_{-1}^1 \frac{\partial^{v-1} \varphi(-1, \tau_2)}{\partial t_1^{v-1}} \frac{1}{((1+t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} d\tau_2 + \\
& + \iint_{\Omega} \frac{\partial^v \varphi(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1^v} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}}. \tag{7.4}
\end{aligned}$$

Исследуем условия гладкости функции $\varphi_v(\tau_1, \tau_2) = \frac{\partial^v \varphi(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1^v}$, достаточные для существования последнего интеграла.

Для этого обозначим через $B(t, R)$ круг с центром в точке t и с радиусом R , где R — расстояние от точки t до границы области Ω . Очевидно, что из существования интеграла

$$\iint_{B(t, R)} \frac{\varphi_v(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}}$$

следует существование интеграла

$$\iint_{\Omega} \frac{\varphi_v(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}}.$$

Перейдя к полярной системе координат, имеем

$$\iint_{B(t, R)} \frac{\varphi_v(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\varphi_v^*(\rho, \Theta) d\rho d\Theta}{\rho^{p-1}}.$$

Интегрируя по частям интеграл

$$\int_0^R \frac{\varphi_v^*(\rho, \Theta) d\rho}{\rho^{p-1}}$$

и воспользовавшись определением гиперсингулярного интеграла, приходим к выражению, включающему интеграл

$$\int_0^R \frac{\partial^{p-1} \varphi_v^*(\rho, \Theta)}{\partial \rho^{p-1}} |\ln \rho| d\rho.$$

Для того чтобы этот интеграл существовал, достаточно, чтобы функция $\frac{\partial^{p-1} \varphi_v^*(\rho, \Theta)}{\partial \rho^{p-1}}$ удовлетворяла условию Дини — Липшица.

Следовательно, если функция $\varphi \in C_2^r(M)$ и не введены дополнительные условия на гладкость производных r -го порядка, то для существования интеграла (7.4) следует предположить, что функция φ_v^* имеет p -ю производную. Поэтому параметры r, p и v связаны соотношением $r = p + v$, из которого вытекает, что функцию $\tilde{\varphi}(t_1, t_2)$ можно дифференцировать по переменной t_1 ($r - p$) раз. Аналогично доказывается возможность дифференцирования по переменной t_2 .

Резюмируя предыдущие выкладки, можно сделать вывод, что функции $\tilde{\varphi}(t_1, t_2)$, представимые интегралом (7.1), удовлетворяют неравенству (7.3) и имеют производные до $(r - p)$ -го порядка, причем как модуль самой функции, так и модули всех производных стремятся к бесконечности при стремлении точки (t_1, t_2) к границе области.

Замечание. Из теоремы 7.1 следует, что если $\varphi \in C_2^{r,q}(1)$, $r \geq p + 1$, $p = 2, 3, \dots, r - 1$, то $|\tilde{\varphi}(t)| \leq \frac{c}{(d(x, \Gamma))^{p-q-2}}$ при $p > q + 2$; $|\tilde{\varphi}(t)| \leq c(1 + |\ln d(x, \Gamma)|)$ при $p = q + 2$; $|\tilde{\varphi}(t)| \leq c$ при $p < q + 2$.

Из доказательства теоремы легко заметить, что если производные r -го порядка удовлетворяют условию Дини – Липшица, то предыдущее утверждение можно усилить.

Теорема 7.2. Пусть $\varphi \in C_2^r(\Omega, M)$, p – целое число и производные $\partial^r \varphi(t_1, t_2) / \partial t_1^{r_1} \partial t_2^{r_2}$, $r_1 + r_2 = r$, $r_i \geq 0$, $i = 1, 2$, удовлетворяют условию Дини – Липшица. Тогда $\tilde{\varphi}(t_1, t_2) \in L_{0, r-p+1, p-2}(\Omega, M)$.

Теорема 7.3. Пусть $\varphi \in C_2^{r,q}(1)$, $r \geq p + 1$, $q = 0, 1, \dots, r - 1$, p – целое число. Тогда справедливы оценки:

$$\left\| \frac{\partial^{|v|} \tilde{\varphi}(t_1, t_2)}{\partial t_1^{v_1} \partial t_2^{v_2}} \right\|_{C[\Omega]} \leq c$$

при $0 \leq |v| \leq q + 1$, $p - q + |v| \leq 2$;

$$\left| \frac{\partial^{|v|} \tilde{\varphi}(t_1, t_2)}{\partial t_1^{v_1} \partial t_2^{v_2}} \right| \leq c(1 + |\ln d(t, \Gamma)|), \quad t \in \Omega \setminus \partial\Omega,$$

при $0 \leq |v| \leq q + 1$, $p - q + |v| = 3$;

$$\left| \frac{\partial^{|v|} \tilde{\varphi}(t_1, t_2)}{\partial t_1^{v_1} \partial t_2^{v_2}} \right| \leq c \frac{1}{(d(t, \Gamma))^{p-q+|v|-3}}, \quad t \in \Omega \setminus \partial\Omega,$$

при $0 \leq |v| \leq q + 1$, $p - q + |v| \geq 4$;

$$\left| \frac{\partial^{|v|} \tilde{\varphi}(t_1, t_2)}{\partial t_1^{v_1} \partial t_2^{v_2}} \right| \leq c \frac{1}{(d(t, \Gamma))^{p-q+|v|-2}}, \quad t \in \Omega \setminus \partial\Omega,$$

при $q + 2 \leq |v| \leq r - p + 1$.

Доказательство. Прежде всего оценим величину $|\tilde{\varphi}(t_1, t_2)|$. Для этого, так же как и при доказательстве теоремы 7.1, представим интеграл (7.1) в виде суммы четырех интегралов по треугольникам AEB , BEC , CED , DEA (см. рис. 7.1). Для определенности ограничимся интегралом $H_1\varphi$, представленным в виде (7.2).

Проинтегрируем по частям интеграл $H_1\varphi$. Очевидно,

$$\begin{aligned} \int_{\rho_1}^{\frac{a}{\sin\Theta}} \frac{\varphi(t_1 + \rho \cos \Theta, t_2 + \rho \sin \Theta) d\rho}{\rho^{p-1}} &= - \frac{\varphi(t_1 + \rho \cos \Theta, t_2 + \rho \sin \Theta)}{(p-2)\rho^{p-2}} \Big|_{\rho_1}^{\frac{a}{\sin\Theta}} + \\ &+ \int_{\rho_1}^{\frac{a}{\sin\Theta}} \frac{\partial \varphi(t_1 + \rho \cos \Theta, t_2 + \rho \sin \Theta)}{\partial \rho} \frac{d\rho}{(p-2)\rho^{p-2}} = \\ &= - \frac{\varphi(t_1 + \frac{a}{\sin\Theta} \cos \Theta, t_2 + a)}{(p-2)(\frac{a}{\sin\Theta})^{p-2}} + \frac{\varphi(t_1 + \rho_1 \cos \Theta, t_2 + \rho_1 \sin \Theta)}{(p-2)\rho_1^{p-2}} + \\ &+ \frac{1}{p-2} \int_{\rho_1}^{\frac{a}{\sin\Theta}} \frac{\partial \varphi(t_1 + \rho \cos \Theta, t_2 + \rho \sin \Theta)}{\partial \rho} \frac{d\rho}{\rho^{p-2}} = \\ &= \frac{1}{p-2} \int_{\rho_1}^{\frac{a}{\sin\Theta}} \frac{\partial \varphi(t_1 + \rho \cos \Theta, t_2 + \rho \sin \Theta)}{\partial \rho} \frac{d\rho}{\rho^{p-2}}. \end{aligned}$$

Здесь было использовано условие обратимости функции φ в нуль на границе области.

Так как

$$\frac{\partial \varphi(t_1 + \rho \cos \Theta, t_2 + \rho \sin \Theta)}{\partial \rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos \Theta + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \sin \Theta,$$

эта производная и последующие производные до q -го порядка включительно обращаются в нуль на отрезке DC .

Таким образом,

$$\begin{aligned} H_1\varphi &= \lim_{\rho_1 \rightarrow 0} \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} \left[\int_{\rho_1}^{\frac{a}{\sin\Theta}} \frac{\partial^{q+1} \varphi(t_1 + \rho \cos \Theta, t_2 + \rho \sin \Theta)}{\partial \rho^{q+1}} \frac{d\rho}{\rho^{p-q-2}} - \frac{B(\Theta, \rho)}{\rho^{p-q-1}} - \right. \\ &\quad \left. - C(\Theta, \rho) \ln \rho \right] d\Theta. \end{aligned}$$

Из последнего выражения можно сделать три вывода:

1) абсолютная величина функции $H\varphi$ при $p \geq q + 4$ оценивается неравенством

$$|\tilde{\varphi}(t)| = |(H\varphi)(t)| \leq \frac{c}{(d(t, \Gamma))^{p-q-3}};$$

2) при $p = q + 3$ абсолютная величина функции $\tilde{\varphi}(t)$ оценивается неравенством

$$|\tilde{\varphi}(t)| = |(H\varphi)(t)| \leq c(1 + |\ln(d(t, \Gamma))|);$$

3) при $p \leq q + 2$ функция $\tilde{\varphi}(t)$ ограничена по модулю

$$|\tilde{\varphi}(t)| = |(H\varphi)(t)| \leq c.$$

Возьмем производную по t_1 от интеграла (7.1). Воспользовавшись определением гиперсингулярного интеграла (определение 6.11 из главы I), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\varphi}(t_1, t_2)}{\partial t_1} &= \iint_{\Omega} \varphi(\tau_1, \tau_2) \frac{\partial}{\partial t_1} \left(\frac{1}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} \right) d\tau_1 d\tau_2 = \\ &= - \iint_{\Omega} \varphi(\tau_1, \tau_2) \frac{\partial}{\partial \tau_1} \left(\frac{1}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} \right) d\tau_1 d\tau_2 = \\ &= - \lim_{\eta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^4 \iint_{\Delta_i} \varphi(\tau_1, \tau_2) \frac{\partial}{\partial \tau_1} \left(\frac{1}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} \right) d\tau_1 d\tau_2, \quad (7.5) \end{aligned}$$

где $\Delta_1 = ABC_2D_3$, $\Delta_2 = B_1C_2D_2C_1$, $\Delta_3 = D_2CDC_3$, $\Delta_4 = D_3A_1D_1C_3$, $A_1 = (t_1 - \eta, t_2 - \eta)$, $B_1 = (t_1 + \eta, t_2 - \eta)$, $C_1 = (t_1 + \eta, t_2 + \eta)$, $D_1 = (t_1 - \eta, t_2 + \eta)$, $E = (t_1, t_2)$ (см. рис. 7.2).

Так как особая точка (t_1, t_2) принадлежит области $\Delta_5 = A_1B_1C_1D_1$, то интегралы по областям $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$, стоящие в третьей строчке формулы (7.5), не имеют особенностей при всех значениях $\eta > 0$. Следовательно, эти интегралы можно вычислять по частям при всех значениях $\eta > 0$.

Рассмотрим в отдельности каждый из интегралов в правой части равенства (7.5). Нетрудно видеть, что

$$\iint_{\Delta_1} \varphi(\tau_1, \tau_2) \frac{\partial}{\partial \tau_1} \left(\frac{1}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} \right) d\tau_1 d\tau_2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-1}^{t_2-\eta} d\tau_2 \int_{-1}^1 \varphi(\tau_1, \tau_2) \frac{\partial}{\partial \tau_1} \left(\frac{1}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} \right) d\tau_1 d\tau_2 = \\
&= - \iint_{\Delta_1} \frac{\partial \varphi(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1} \frac{1}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} d\tau_1 d\tau_2.
\end{aligned}$$

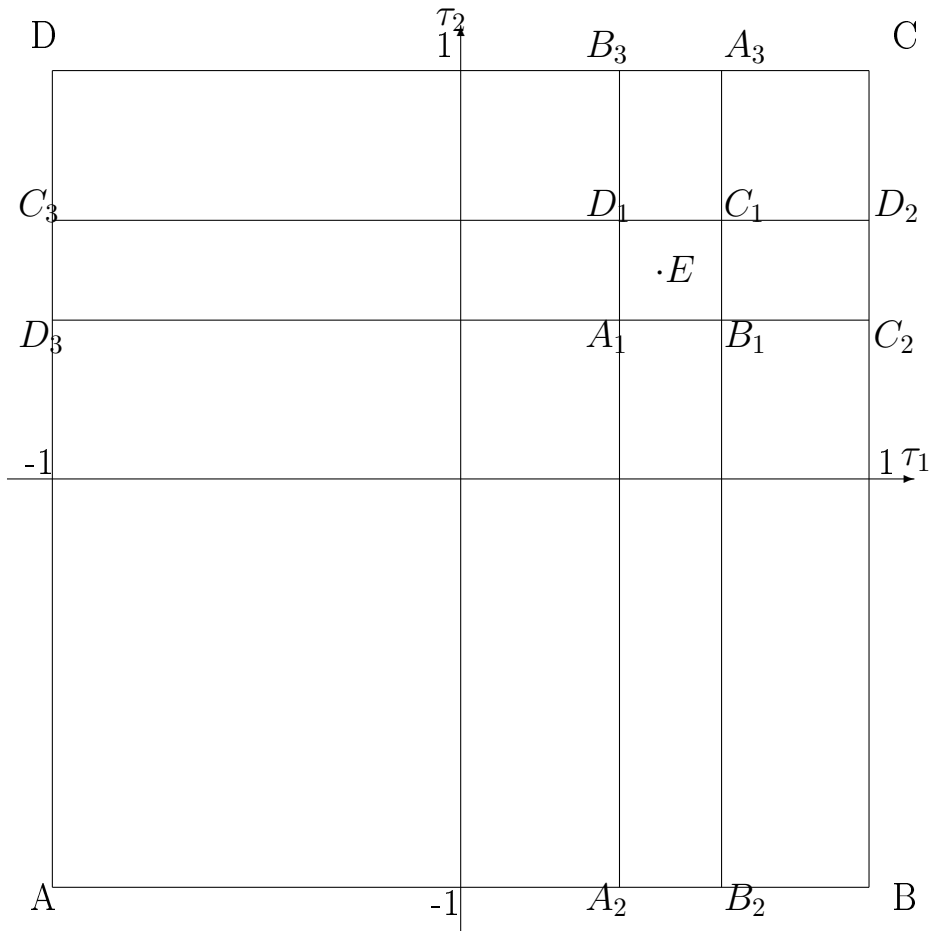


Рис. 7.2

Аналогичным образом, используя определение гиперсингулярного интеграла (определение 6.11 из главы I), вычисляются интегралы по областям Δ_2 , Δ_3 , Δ_4 .

Таким образом,

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}(t_1, t_2)}{\partial t_1} = \iint_{\Omega} \frac{\partial \varphi(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}}.$$

Продолжая этот процесс и вычисляя производные до $(q + 1)$ -го порядка, имеем

$$\frac{\partial^{q+1}\tilde{\varphi}(t_1, t_2)}{\partial t_1^{q_1}\partial t_2^{q_2}} = \iint_{\Omega} \frac{\partial^{q+1}\varphi(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1^{q_1}\partial \tau_2^{q_2}} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}}, \quad (7.6)$$

где $q + 1 = q_1 + q_2$.

Из формулы (7.6) следует, что при $|v| \leq q + 1$

$$\frac{\partial^{|v|}\tilde{\varphi}(t_1, t_2)}{\partial t_1^{v_1}\partial t_2^{v_2}} = \iint_{\Omega} \frac{\partial^{|v|}\varphi(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1^{v_1}\partial \tau_2^{v_2}} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}}. \quad (7.7)$$

Для оценки производных порядка $|v|$ при $|v| > q + 1$ воспользуемся представлением (7.6), в котором для простоты дальнейших обозначений будем рассматривать производные только по одной переменной. Тогда из формулы (7.6) следует, что

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^v \tilde{\varphi}(t_1, t_2)}{\partial t_1^v} = \\ & = - \int_{-1}^1 \frac{\partial^{v-q-2}}{\partial t_1^{v-q-2}} \left(\frac{1}{((1-t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} \right) \frac{\partial^{q+1}\varphi(t_1, \tau_2)}{\partial t_1^{q+1}} \Big|_{t_1=1} d\tau_2 - \dots - \\ & \quad - \int_{-1}^1 \frac{1}{((1-t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} \frac{\partial^{v-1}\varphi(t_1, \tau_2)}{\partial t_1^{v-1}} \Big|_{t_1=1} d\tau_2 + \\ & \quad + \int_{-1}^1 \frac{\partial^{v-q-2}}{\partial t_1^{v-q-2}} \left(\frac{1}{((1+t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} \right) \frac{\partial^{q+1}\varphi(t_1, \tau_2)}{\partial t_1^{q+1}} \Big|_{t_1=-1} d\tau_2 + \dots + \\ & \quad + \int_{-1}^1 \frac{1}{((1+t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} \frac{\partial^{v-1}\varphi(t_1, \tau_2)}{\partial t_1^{v-1}} \Big|_{t_1=-1} d\tau_2 + \\ & \quad + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial^v \varphi(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1^v} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Для существования последнего интеграла в равенстве (7.8) достаточно выполнения условия $r - v \geq p - 1$. Отсюда следует, что возможно вычисление производных до $(r - p + 1)$ -го порядка.

Оценим абсолютную величину функции $\frac{\partial^{|v|}\tilde{\varphi}(t_1, t_2)}{\partial t_1^{v_1}\partial t_2^{v_2}}$ при $q + 1 < |v| \leq \leq r - p + 1$. Из формулы (7.8) следует, что

$$\left| \frac{\partial^{|v|}\tilde{\varphi}(t_1, t_2)}{\partial t_1^{v_1}\partial t_2^{v_2}} \right| \leq \frac{c}{(d(t, \Gamma))^{p+|v|-q-2}}$$

при $q + 2 \leq |v| \leq r - p + 1$.

Интеграл, стоящий в правой части формулы (7.8), можно, как и интеграл $H\varphi$, представить в виде суммы четырех интегралов. Повторяя рассуждения, приведенные при исследовании интеграла $H\varphi$, можно показать, что при $|v| \leq q + 1$ и $p - q + |v| \geq 4$

$$\left| \frac{\partial^{|v|}\tilde{\varphi}(t_1, t_2)}{\partial t_1^{v_1}\partial t_2^{v_2}} \right| \leq \frac{c}{(d(t, \Gamma))^{p-q+|v|-3}};$$

при $|v| \leq q + 1$ и $p - q + |v| = 3$

$$\left| \frac{\partial^{|v|}\tilde{\varphi}(t_1, t_2)}{\partial t_1^{v_1}\partial t_2^{v_2}} \right| \leq c(1 + \ln d(t, \Gamma));$$

при $|v| \leq q + 1$ и $p - q + |v| \leq 2$

$$\left| \frac{\partial^{|v|}\tilde{\varphi}(t_1, t_2)}{\partial t_1^{v_1}\partial t_2^{v_2}} \right| \leq c;$$

при $q + 2 \leq |v| \leq r - p + 1$

$$\left| \frac{\partial^{|v|}\tilde{\varphi}(t_1, t_2)}{\partial t_1^{v_1}\partial t_2^{v_2}} \right| \leq \frac{c}{(d(t, \Gamma))^{p-q+|v|-2}}.$$

Теорема доказана.

8. Оптимальные методы вычисления трансформаций, представимых многомерными гиперсингулярными интегралами

В данном разделе исследуются оптимальные методы вычисления трансформаций, представимых гиперсингулярными интегралами вида

$$\tilde{\varphi}(t_1, t_2) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}}, \quad \varphi(\tau_1, \tau_2) \in \Psi. \quad (8.1)$$

В качестве класса функций Ψ в этом разделе берутся множества функций $W^{s_1, s_2}(M)$, $\hat{W}_q^{s_1, s_2}(M)$, $C_2^s(M)$, $C_2^{s, q}(M)$.

Двумерные гиперсингулярные интегралы рассматриваются только ради краткости обозначений и описания. Аналогичные результаты справедливы и для трансформаций, представимых многомерными гиперсингулярными интегралами большей размерности. Оптимальные методы приближения функций многих переменных на классах $Q_{r,\gamma}^u(\Omega, 1)$, $\bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, 1)$ рассмотрены в главе II.

Множество функций $\tilde{\varphi}(t_1, t_2)$, являющихся образом множества функций Ψ при отображении (8.1), обозначим через $\tilde{\Psi}$.

В предыдущем разделе была исследована гладкость сопряженных функций $\tilde{\varphi}(t_1, t_2)$ в предположении, что $\varphi(t_1, t_2) \in W^{s_1, s_2}(M)$, $\hat{W}_q^{s_1, s_2}(M)$, $C_2^s(M)$, $C_2^{s,q}(M)$.

Было показано, что при $\varphi \in W^{s_1, s_2}(M)$ и $\varphi \in C_2^s(M)$ функции $\tilde{\varphi}(t_1, t_2)$ принадлежат классу $L_{0,s,\gamma}(\Omega, M)$ и их равномерная аппроксимация во всей области определения в метрике пространства C невозможна.

В случае, если $\varphi(t_1, t_2) \in \hat{W}_q^{s_1, s_2}(M)$ или $\varphi(t_1, t_2) \in C_2^{s,q}(M)$, то, как показано в предыдущем разделе, функция $\tilde{\varphi}(t_1, t_2) \in Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$. В этом случае возможна равномерная аппроксимация функций $\tilde{\varphi}(t_1, t_2)$ в области Ω .

Оптимальное восстановление сопряженных функций состоит из нескольких этапов.

Вначале определяются параметры r, γ класса функций $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$, к которому принадлежит сопряженная функция $\tilde{\varphi}(t_1, t_2)$. После того как определен класс функций $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$, к которому принадлежат функции $\tilde{\varphi}(t_1, t_2)$, находятся узлы локального сплайна, осуществляющего наилучшую аппроксимацию функций из класса $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$. Взяв узлы локального сплайна в качестве параметров (t_1, t_2) по оптимальным кубатурным формулам, построенным в данной главе, вычисляем гиперсингулярные интегралы от функций $\varphi(t_1, t_2)$, принадлежащих соответствующему классу функций Ψ . Затем по вычисленным значениям гиперсингулярных интегралов в узлах локальных сплайнов строятся уже сами локальные сплайны, которые являются оптимальным методом восстановления сопряженных функций, представимых гиперсингулярными интегралами (8.1) при $\varphi \in \Psi$, $\Psi \in C_{2,q}^s(M)$.

Остановимся на вопросе согласования числа узлов, используемых в кубатурной формуле и в сплайне. Это согласование зависит от класса функций Ψ , к которому принадлежит интегрируемая функция φ .

Предположим, что $\varphi \in \Psi = C_{2,q}^{s,q}(1)$, $q \geq p - 1$.

В разд. 6 было показано, что на этом классе функций величина погрешности вычисления гиперсингулярных интегралов по оптимальным

кубатурным формулам равна $R_N[\Psi] \asymp N^{-(s+2-p)} \asymp n^{-(s+2-p)/2}$, где n — число узлов кубатурной формулы.

В разд. 7 было показано, что если $\varphi \in C_2^{s,q}(1)$, то функция $\tilde{\varphi} \in \tilde{\Psi}$, где $\tilde{\Psi} = Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$ при $p-1 \leq q < r-1$ и $\tilde{\Psi} = C_2^{s-p+1}$ при $q = r-1$. Параметры r и γ зависят от величин p, q, s . Эта зависимость выражена теоремой 7.3. В случае, если $\tilde{\Psi} = Q_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$ или $\tilde{\Psi} = \bar{Q}_{r,\gamma}^1(\Omega, M)$, то погрешность локальных сплайнов, аппроксимирующих функции $\tilde{\varphi}(t_1, t_2)$, оценена в главе II. Для $\varphi \in C_2^r(M)$ поперечники Бабенко и Колмогорова вычислены в [206].

Естественно потребовать, чтобы погрешность используемых в методе кубатурных формул и сплайнов была согласована с величиной ε , с которой требуется восстановить сопряженную функцию. Тогда число узлов кубатурной формулы определяется из равенства $\frac{\varepsilon}{2} = \lambda R_N[\Psi]$, а число узлов локального сплайна — из равенства $\frac{\varepsilon}{2} = \gamma(\tilde{\Psi}, C)$, где λ — константа Лебега полиномов, используемых при построении локального сплайна; $\gamma(\tilde{\Psi}, C)$ — погрешность локальных сплайнов на классе функций $\tilde{\Psi}$ в метрике пространства C . Слагаемое $\lambda R_N[\Psi]$ возникает из-за того, что значения сопряженной функции $\tilde{\psi}(t_1, t_2)$ заданы не точно, а вычислены по оптимальным кубатурным формулам, имеющим погрешность $R_N[\Psi]$.

Тогда полная погрешность вычисления трансформаций $\tilde{\varphi}(t_1, t_2) \in \tilde{\Psi}$ равна $\varepsilon = \gamma(\tilde{\Psi}, C) + \lambda R_N[\Psi]$.

Выше отмечалось, что построение приближенных методов вычислений трансформаций вида (8.1), имеющих равномерную погрешность в области $\Omega = [-1, 1]^2$, возможно только в случае, когда функция $\tilde{\varphi}(t_1, t_2)$ принадлежит одному из следующих классов функций: $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $\bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$, $Q_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$, $B_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $\bar{B}_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$, $B_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$, $\tilde{B}_{0,\alpha,\gamma}^u(\Omega, M)$, $M = \text{const}$.

Из доказательств теорем, приведенных в предыдущем разделе, следует, что для того чтобы функция $\tilde{\varphi}(t_1, t_2)$ принадлежала одному из этих классов, достаточно, чтобы функция $\varphi(t_1, t_2)$ обращалась в нуль с производными до $(p-1)$ -го порядка (и более высоких порядков) включительно в точках $(\pm 1, \pm 1)$.

Преобразуем интеграл (8.1) к виду

$$\tilde{\varphi}(t) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\varphi_1(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} +$$

$$+ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\varphi_2(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}}, \quad (8.2)$$

где $\varphi(t_1, t_2) \in C_2^r$, $\varphi_1(t_1, t_2) = \varphi(t_1, t_2) - \varphi_2(t_1, t_2)$, $\varphi_2(t_1, t_2)$ – интерполяционный полином, обращающийся в нуль вместе с частными производными не ниже $(p - 1)$ -го порядка в точках $(\pm 1, \pm 1)$. В качестве такого полинома может быть использован интерполяционный полином Эрмита.

Первый интеграл в правой части формулы (8.2) является функцией, принадлежащей (в зависимости от сочетаний констант r, p, q) одному из классов функций $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $\bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$, $Q_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$, $B_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $\bar{B}_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$, $B_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$, $\tilde{B}_{0,\alpha,\gamma}^u(\Omega, M)$, $M = \text{const}$, второй интеграл является табличным.

9. Кубатурные формулы на хаотических сетках и их применение к приближенным методам трансформации потенциальных полей

В разд. 1 было процитировано замечание из монографии [96] об основных недостатках численных методов трансформации потенциальных полей:

- а) известные вычислительные схемы предназначены для вычисления по равномерным сеткам;
- б) отсутствуют способы учета центральной зоны трансформации, т.е. зоны, в которой интеграл не берется ни в смысле Римана, ни в смысле Лебега;
- в) отсутствуют оптимальные алгоритмы.

В данном разделе строятся вычислительные схемы, свободные от первого недостатка.

Так как вычисление интегральных представлений и трансформаций по неравномерным сеткам является, скорее, правилом, нежели исключением в гравиметрии, то в данном разделе подробно рассматриваются методы вычисления на неравномерных (хаотических) сетках интегралов Римана, сингулярных интегралов, интегралов типа Коши и гиперсингулярных интегралов. При этом описаны алгоритмы и даны оценки погрешности. Отметим, что возможен и другой подход к построению методов вычислений на хаотических сетках: можно построить интерполяционный полином на хаотической сетке, затем вычислить соответствующий интеграл от этого полинома. Этот подход представляется менее эффективным, так как, во-первых, построение интерполяционного полинома

по хаотической сетке является сложной процедурой, а во-вторых, оценки подобной интерполяции получены при достаточно жестких ограничениях на разброс узлов в хаотической сетке [135].

9.1. Кубатурные формулы на классах функций Гельдера

Рассмотрим вначале методы вычисления регулярных (без особенностей) интегралов Римана на классах функций Гельдера.

Для простоты обозначений ниже рассматриваются двумерные интегралы. Полученные результаты легко переносятся на трехмерные интегралы.

Пусть N — натуральное число.

Пусть требуется вычислить интеграл

$$(Jf)(t, s) = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy,$$

предполагая, что функция $f(x, y)$ определена N значениями $f(x_k, y_k)$, $k = 1, 2, \dots, N$, в произвольным образом заданных точках (x_k, y_k) , $k = 1, 2, \dots, N$; $(x_k, y_k), (t, s) \in [a, b; c, d]$.

Интеграл Jf вычисляется по кубатурным формулам вида

$$(Jf)(t, s) = \sum_{k=0}^N p_k f(x_k, y_k) + R_N(f, p_k, (x_k, y_k), (t, s)) \quad (9.1)$$

или по кубатурным формулам вида

$$Jf = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M p_{kl} f(x_k, y_l) + R_{NM}(f, p_{kl}, (x_k, y_l), (t, s)). \quad (9.2)$$

В последнем случае используется NM значений функции $f(x, y)$.

Для вычисления двумерных интегралов Римана по кубатурным формулам (9.1), (9.2) на классах функций Гельдера построены оптимальные [141] кубатурные формулы.

Поставим в соответствие интегралу Jf кубатурную формулу

$$Jf = 4hq \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M f(t_k^*, \tau_l^*) + R_{NM}(f), \quad (9.3)$$

где $t_k^* = a + (2k - 1)h$, $k = 1, \dots, N$, $\tau_l = c + (2l - 1)q$, $l = 1, \dots, M$, $h = (b - a)/2N$, $q = (d - c)/2M$.

Известно [141], что на классе $H_{\alpha,\alpha}(1)$ кубатурная формула (9.3) является оптимальной среди всевозможных кубатурных формул вида (9.2) и ее погрешность равна

$$R_{NN}(H_{\alpha,\alpha}(1)) = \frac{(b-a)(d-c)}{1+\alpha} \left(\left(\frac{b-a}{2N} \right)^\alpha + \left(\frac{d-c}{2M} \right)^\alpha \right). \quad (9.4)$$

Опишем теперь метод построения кубатурных формул на хаотических сетках и оценим погрешность построенной кубатурной формулы.

Пусть функция $f(x, y)$ задана своими значениями в $N_1 = NM$ точках (v_k, w_k) , $k = 1, 2, \dots, N_1$, произвольным образом расположенных в области Ω . Каждому узлу (t_k^*, t_l^*) , $k = 1, 2, \dots, N, l = 1, 2, \dots, M$, оптимальной кубатурной формулы (9.3) поставим в соответствие ближайший из узлов хаотической сетки узлов (v_i, w_i) , $i = 1, 2, \dots, N_1$. Если таких узлов несколько, берется произвольный. Обозначим выбранный ближайший к (t_k^*, t_l^*) узел через (v_k^*, w_l^*) .

Назовем мерой неоптимальности хаотической сетки $\xi\{v_i, w_i\}$ на классе $\Psi = H_{\alpha,\alpha}(1)$ величину

$$\Lambda(\Psi, \xi) = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M (|t_k^* - v_k^*|^\alpha + |t_l^* - w_l^*|^\alpha),$$

где через ξ обозначена сетка узлов (v_k, w_k) , $k = 1, \dots, N_1$.

Введем кубатурную формулу

$$Jf = \frac{(b-a)(d-c)}{NM} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M f(v_k^*, w_l^*) + R_{NM}(f). \quad (9.5)$$

Теорема 9.1. Пусть $f \in \Psi = H_{\alpha,\alpha}(1)$. Погрешность кубатурной формулы (9.5) на классе функций Ψ оценивается неравенством

$$\begin{aligned} & |R_{NN}(f)| \leq \\ & \leq \frac{(b-a)(d-c)}{1+\alpha} \left(\left(\frac{b-a}{2N} \right)^\alpha + \left(\frac{d-c}{2M} \right)^\alpha \right) + \frac{4(b-a)(d-c)}{NM} \Lambda(\Psi, \xi). \end{aligned}$$

Доказательство. Оценим погрешность кубатурной формулы (9.5). Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} |R_{NM}(f)| & \leq \left| \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy - \frac{(b-a)(d-c)}{NM} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M f(t_k^*, t_l^*) \right| + \\ & + \frac{(b-a)(d-c)}{NM} \left| \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M (f(t_k^*, t_l^*) - f(v_k^*, w_l^*)) \right| = I_1 + I_2. \quad (9.6) \end{aligned}$$

Оценим каждое из выражений I_1 и I_2 в отдельности. Выражение I_1 является погрешностью оптимальной кубатурной формулы при вычислении интеграла Jf и определяется равенством (9.4).

Нетрудно видеть, что

$$I_2 \leq \frac{(b-a)(d-c)}{NM} \Lambda(\Psi, \xi). \quad (9.7)$$

Из неравенства (9.6) и (9.7) следует справедливость теоремы.

Замечание. В качестве "модельной" не обязательно брать оптимальную кубатурную формулу.

9.2. Кубатурные формулы на классе функций $W^{r,r}(M)$

Для простоты обозначений в качестве области интегрирования в интеграле Jf вместо $[a, b; c, d]$ возьмем $[-A, A]^2$.

Пусть N — натуральное число, $N_1 = rN$, $N_2 = (rN)^2$. Разделим область $\Omega = [-A, A; -A, A]$ на N^2 квадратов $\Delta_{kl} = [s_k, s_{k+1}; s_l, s_{l+1}]$, $k, l = 0, 1, \dots, N-1$; $s_k = -A + 2kA/N$, $k = 0, 1, \dots, N$.

В качестве "модельной" возьмем следующую кубатурную формулу. Пусть ζ_1, \dots, ζ_r — корни полинома Чебышева первого рода степени r , ортогонального с весом $(1-t^2)^{-1/2}$ на сегменте $[-1, 1]$. Образы точек ζ_1, \dots, ζ_r при отображении сегмента $[-1, 1]$ на сегмент $[s_k, s_{k+1}]$ обозначим через $\zeta_1^*, \dots, \zeta_r^*$. Полином, интерполирующий функцию $g(x)$ по узлам $\zeta_1^*, \dots, \zeta_r^*$ на сегменте $[s_k, s_{k+1}]$, обозначим через $P_r(g, [s_k, s_{k+1}])$. В случае, если возникает необходимость отметить, что интерполяция проводится по переменной x , будем писать $P_r^x(f, [s_k, s_{k+1}])$. В квадрате Δ_{kl} функция $f(x, y)$ аппроксимируется интерполяционным полиномом $P_{r,r}(f, \Delta_{kl}) = P_r^x(P_r^y(f(x, y), [s_l, s_{l+1}]), [s_k, s_{k+1}])$.

Сплайн, составленный из полиномов $P_{r,r}(f, \Delta_{kl})$, обозначим через $f_{rr}(x, y)$.

Поставим в соответствие интегралу Jf кубатурную формулу

$$Jf = \int_{-A}^A \int_{-A}^A f_{rr}(x, y) dx dy + R_{N,N}(f). \quad (9.8)$$

Погрешность кубатурной формулы (9.8) оценивается неравенством

$$R_{N,N}(W^{r,r}(M)) \leq c \frac{(2A)^{r+2}}{N^r} \frac{1}{r!2^r} = c \frac{(2A)^{r+2}}{N^r}. \quad (9.9)$$

Перенумеруем узлы, используемые при построении локального сплайна $P_{rr}(f, \Omega)$, введя для них обозначение (t_k, t_l) , $k, l = 1, 2, \dots, N_1$.

Пусть значения функции $f(x, y)$ определены в N_2 хаотически заданных узлах $(v_k, w_k), k = 1, 2, \dots, N_2$.

Построим кубатурную формулу, предназначенную для вычисления интеграла Jf на хаотической сетке узлов $(v_k, w_k), k = 1, 2, \dots, N_2$.

Каждому узлу (t_k, t_l) кубатурной формулы (9.8) поставим в соответствие ближайший (в евклидовой метрике) из узлов хаотической сетки $(v_k, w_k), k = 1, 2, \dots, N_2$. Если таких узлов несколько, выберем любой из них. Выбранный узел обозначим через (v_k^*, w_l^*) .

Построим кубатурную формулу на хаотической сетке узлов. Для этого построим локальный сплайн $f_{rr}^*(x, y)$, в котором при проведении интерполяции вместо значений $f(t_k, t_l)$ используются значения $f(v_k^*, w_l^*), k, l = 1, 2, \dots, N_2$.

Оценим погрешность, возникающую при такой интерполяции. Назовем мерой отклонения в узле (t_k, t_l) величину $|f(t_k, t_l) - f(v_k^*, w_l^*)|, k = 1, 2, \dots, N_2$. При построении локального сплайна в квадрате Δ_{ij} использовалось r^2 расположенных в нем узлов (t_k, t_l) . Назовем мерой отклонения в квадрате Δ_{ij} величину $\Lambda(f, \Delta_{ij}) = \max_{(t_k, t_l) \in \Delta_{ij}} |f(t_k, t_l) - f(v_k^*, w_l^*)|$.

Интерполяционный полином $P_{rr}(f, \Delta_{ij})$ можно представить в виде

$$P_{rr}(f, \Delta_{ij}) = \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r f(t_k, t_l) \psi_{t_k}(x) \psi_{t_l}(y),$$

где $\psi_{t_k}(x)$ — фундаментальный полином, соответствующий узлу t_k при интерполяции по r узлам $t_u, u = 1, 2, \dots, r$, на сегменте $[s_i, s_{i+1}]$.

Интерполяционный полином, построенный в Δ_{ij} по хаотической сетке узлов, обозначается через $\tilde{P}_{rr}(f, \Delta_{ij})$ и имеет вид

$$\tilde{P}_{rr}(f, \Delta_{ij}) = \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r f(v_k^*, w_l^*) \psi_{t_k}(x) \psi_{t_l}(y).$$

Сплайн, интерполирующий функцию $f(x, y)$ в области Ω и состоящий из интерполяционных полиномов $\tilde{P}_{rr}(f, \Delta_{ij})$, выше был обозначен через $f_{rr}^*(f, \Omega)$.

Введем кубатурную формулу

$$Jf = \int_{-A}^A \int_{-A}^A f_{rr}^*(f, \Omega) dx dy + R_{N,N}(f),$$

предназначенную для вычисления интеграла Jf по хаотической сетке узлов.

Теорема 9.2. Пусть $f \in W^{rr}(M)$, $r = 1, 2, \dots$. Справедлива оценка $R_{NN}[W^{rr}(A)] \leq c(2A)^{r+2}/N^r + \max_{ij} \Delta(f, \Delta_{ij})4A^2$.

Доказательство подобно доказательству теоремы 9.1.

9.3. Вычисление одномерных сингулярных интегралов на классах Гельдера

При решении многих задач геофизики возникает необходимость в вычислении интегралов типа Коши. Например, хорошо известны аналитические представления гравитационных полей в виде интегралов типа Коши

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\tau)}{\tau - z} d\tau. \quad (9.10)$$

Представляет значительный интерес исследование методов вычисления интегралов вида (9.10) в случае, когда функция $f(t)$ известна в узлах, имеющих в достаточной степени произвольный характер.

В случае, когда точка z достаточно далеко отстоит от кривой γ , можно воспользоваться формулами, изложенными в разд. 9.1, 9.2. Однако, если точка z достаточно близка к γ , а тем более если она лежит на γ , то необходимо специальное исследование. Этому вопросу в случае, если $f(t) \in H_{\alpha}(1)$, $0 < \alpha \leq 1$, посвящен данный раздел.

Для определенности будем рассматривать интеграл

$$If = \int_{-D}^D \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad t \in (-D, D). \quad (9.11)$$

Введем узлы $t_k = -D + 2Dk/N$, $k = 0, 1, \dots, 2N$, $t'_k = (t_k + t_{k+1})/2$, $k = 0, 1, \dots, 2N - 1$. Пусть $t \in [t_j, t_{j+1})$, $j = 0, 1, \dots, 2N - 1$. Будем считать, что $0 \leq j < 2N - 2$. Случай, когда $2 \leq j < 2N$, рассматривается аналогично. Интегралу (9.11) поставим в соответствие квадратурную формулу

$$If(t) = \begin{cases} f(t_0) \ln \left| \frac{t_2 - t}{t_0 - t} \right| + \sum_{k=3}^{2N-2} f(t'_k) \ln \left| \frac{t_{k+1} - t}{t_k - t} \right| + f(t_{2N}) \ln \left| \frac{t_{2N} - t}{t_{2N-1} - t} \right| + \\ \quad + R_N(f), \quad t \in (-D, t_2); \\ f(t_0) \ln \left| \frac{t_1 - t}{t_0 - t} \right| + \sum_{k=1}^{j-1} f(t'_k) \ln \left| \frac{t_{k+1} - t}{t_k - t} \right| + \sum_{k=j+2}^{2N-1} f(t'_k) \ln \left| \frac{t_{k+1} - t}{t_k - t} \right| + \\ \quad + f(t_{2N}) \ln \left| \frac{t_{2N} - t}{t_{2N-1} - t} \right| + f(t'_j) \ln \left| \frac{t_{j+2} - t}{t_{j-1} - t} \right| + \\ \quad + R_N(f), \quad t \in [t_2, t_{2N-2}]. \end{cases} \quad (9.12)$$

Известно [31], что оценка погрешности формулы (9.12) на классе H_α равна $cN^{-\alpha} \ln N$.

Пусть известны значения функции $f(t)$ в узлах v_k , $k = 0, 1, \dots, 2N$, расположенных произвольным образом на сегменте $[-D, D]$.

Рассмотрим два типа квадратурных формул.

Первый тип квадратурных формул. Здесь предполагается, что известны значения функции $f(t)$ в точках $-D$ и D , т.е. $v_0 = -D$ и $v_{2N} = D$, а остальные узлы v_k , $k = 1, 2, \dots, 2N - 1$, произвольны. Тогда каждому узлу t'_k , $k = 0, 1, \dots, 2N$, квадратурной формулы (9.12) поставим в соответствие узел v_k^* , выбрав из множества узлов v_l , $l = 0, 1, 2, \dots, 2N$, ближайший. В этом случае в квадратурной формуле (9.12) значение $f(t'_k)$ заменяем на $f(v_k^*)$. Если таких узлов несколько, то можно выбрать или любой из них, или в качестве $f(t'_k)$ взять их среднее арифметическое.

В результате при $t \in [t_0, t_{2N-2}]$ получаем квадратурную формулу

$$If = \begin{cases} f(v_0^*) \ln \left| \frac{t_2-t}{t_0-t} \right| + \sum_{k=3}^{2N-2} f(v_k^*) \ln \left| \frac{t_{k+1}-t}{t_k-t} \right| + f(v_{2N}^*) \ln \left| \frac{t_{2N}-t}{t_{2N-1}-t} \right| + \\ \quad + R_N(f), \quad t \in (-D, t_2); \\ f(v_0^*) \ln \left| \frac{t_1-t}{t_0-t} \right| + \sum_{k=1}^{j-2} f(v_k^*) \ln \left| \frac{t_{k+1}-t}{t_k-t} \right| + \sum_{k=j+2}^{2N-1} f(v_k^*) \ln \left| \frac{t_{k+1}-t}{t_k-t} \right| + \\ \quad + f(v_{2N}^*) \ln \left| \frac{t_{2N}-t}{t_{2N-1}-t} \right| + f(v_j^*) \ln \left| \frac{t_{j+2}-t}{t_{j-1}-t} \right| + R_N(f), \\ \quad t \in [t_2, t_{2N-2}]. \end{cases} \quad (9.13)$$

Случай, когда $t \in [t_{2N-2}, t_{2N}]$, рассматривается аналогично.

Оценим погрешность квадратурной формулы (9.13). Эта погрешность складывается из двух составляющих: погрешности квадратурной формулы (9.12), взятой в качестве "эталонной" на классе $H_\alpha(1)$ и погрешности, возникающей при переходе от квадратурной формулы (9.12) к квадратурной формуле (9.13). Как отмечалось выше, величина первой составляющей равна $cN^{-\alpha} \ln N$, причем эта величина не улучшаемая по порядку.

Оценим величину второй составляющей, которую обозначим через $S_N(f)$. Пусть $t \in (-D, t_2]$, тогда

$$\begin{aligned} S_N(f) &\leq \\ &\leq \sum_{k=3}^{2N-2} |f(t'_k) - f(v_k^*)| \left| \ln \left| \frac{t_{k+1}-t}{t_k-t} \right| \right| \leq \sum_{k=3}^{2N-2} |f(t'_k) - f(v_k^*)| \ln \frac{k-1}{k-2}. \end{aligned} \quad (9.14)$$

В случае, если $t \in [t_2, t_{2N-2}]$, справедлива оценка

$$S_N(f) \leq \sum_{k=1}^{j-2} |f(t'_k) - f(v_k^*)| \left| \ln \frac{t_{k+1} - t}{t_k - t} \right| + \sum_{k=j+2}^{2N-1} |f(t'_k) - f(v_k^*)| \left| \ln \frac{t_{k+1} - t}{t_k - t} \right| + \\ + |f(t'_j) - f(v_j^*)| \left| \ln \left| \frac{t_{j+2} - t}{t_{j-1} - t} \right| \right|. \quad (9.15)$$

Из (9.14), (9.15) следует оценка

$$|R_N|(f) \leq CN^{-\alpha} \ln N + \Delta(H_\alpha(1), \xi) \ln 2N, \quad (9.16)$$

где $\Delta(H_\alpha(1), \xi)$ – мера неоптимальности представления функции из класса $H_\alpha(1)$ на сетке $\xi = t'_k$, $k = 0, 1, \dots, 2N$.

Более точно отражает аппроксимационные свойства квадратурной формулы (9.13) оценка

$$|R_N(f)| \leq c \frac{\ln N}{N^\alpha} + (1 + \ln 2)^{1/2} \ln N \left[\left(\sum_{k=0}^j |f(t'_k) - f(v_k^*)|^2 \right)^{1/2} (2 \ln N + \right. \\ \left. + |\ln |1 + t||) + \left(\sum_{k=j}^{2N} |f(t'_k) - f(v_k^*)|^2 \right)^{1/2} \right].$$

Для получения этой оценки заметим, что

$$S_N(f) \leq |f(t'_j) - f(v_j^*)| |\ln |t_{j-1} - t|| + \sum_{k=1}^{j-2} |f(t'_k) - f(v_k^*)| \left| \ln \frac{t_{k+1} - t}{t_k - t} \right| + \\ + |f(t'_j) - f(v_j^*)| |\ln(t_{j+2} - t)| + \sum_{k=j+2}^{2N-1} |f(t'_k) - f(v_k^*)| \left| \ln \frac{t_{k+1} - t}{t_k - t} \right| \leq \\ \leq \left(\sum_{k=1}^j |f(t'_k) - f(v_k^*)|^2 \right)^{1/2} \left(|\ln |t_{j-1} - t||^2 + \sum_{k=1}^{j-2} \left| \ln \frac{t_{k+1} - t}{t_k - t} \right|^2 \right)^{1/2} + \\ + \left(\sum_{k=j}^{2N} |f(t'_k) - f(v_k^*)|^2 \right)^{1/2} \left(|\ln(t_{j+2} - t)|^2 + \sum_{k=j+2}^{2N-1} \left| \ln \frac{t_{k+1} - t}{t_k - t} \right|^2 \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=0}^j |f(t'_k) - f(v_k^*)|^2 \right)^{1/2} (1 + \ln 2)^{1/2} (\ln N) + \\ + \left(\sum_{k=j}^{2N} |f(t'_k) - f(v_k^*)|^2 \right)^{1/2} (1 + \ln 2)^{1/2} (\ln N).$$

Из этой оценки видно, что если отклонение узлов сетки v_k^* от узлов модельной сетки t'_l не превосходит $N^{-\beta}$, $1/2\alpha < \beta$, то связанная с этим отклонением погрешность не превосходит $cN^{-(\alpha\beta-1/2)} \ln N$.

Рассмотрим теперь **второй тип квадратурных формул**. В этом случае предполагается, что функция $f(t)$ известна своими значениями в узлах v_l , $l = 0, 1, \dots, 2N$, причем $-D < v_0 < v_1 < \dots < v_{2N} < D$.

В этом случае интеграл $g(t)$ вычисляется при значениях $t \in [t_1, t_{2N-1}]$ (при $t \in [t_j, t_{j+1})$, $j = 1, 2, \dots, 2N - 1$) по квадратурной формуле

$$If = f(v_0^*) \ln \left| \frac{t_1 - t}{t_0 - t} \right| + \sum_{k=1}^{j-2} f(v_k^*) \ln \left| \frac{t_{k+1} - t}{t_k - t} \right| + \sum_{k=j+2}^{2N-1} f(v_k^*) \ln \left| \frac{t_{k+1} - t}{t_k - t} \right| + \\ + f(v_{2N}^*) \ln \left| \frac{t_{2N} - t}{t_{2N-1} - t} \right| + R_N(f).$$

Можно показать, что погрешность этой квадратурной формулы оценивается неравенством

$$|R_N(f)| \leq cN^{-\alpha} \ln N + \sum_{k=0}^{j-1} |f(t'_k) - f(v_k^*)| \left| \ln \frac{t_{k+1} - t}{t_k - t} \right| + \\ + \sum_{k=j+2}^{2N-1} |f(t'_k) - f(v_k^*)| \left| \ln \frac{t_{k+1} - t}{t_k - t} \right| + |f(t'_j) - f(v_j^*)| \left| \ln \frac{t_{j+2} - t}{t_{j-1} - t} \right|,$$

где для простоты обозначений положено $t'_0 = t_0$, $t'_{2N-1} = t_{2N}$.

9.4. Вычисление одномерных сингулярных интегралов на классах Соболева

Рассмотрим теперь интеграл (9.11) в предположении, что функция $f(t) \in W^r(1)$, $r = 1, 2, \dots$. Пусть функция $f(t)$ известна своими значениями в узлах v_k , $k = 1, 2, \dots, N$, где N для удобства дальнейших выкладок полагается равным rN_1 , N_1 — целое число.

Введем узлы $t_k = -D + 2Dk/N$, $k = 0, 1, \dots, N$. Через Δ_k обозначим сегменты $\Delta_k = [t_{rk}, t_{r(k+1)}]$, $k = 0, 1, \dots, N_1 - 1$. Обозначим через $P_r(f, \Delta_k)$ полином, интерполирующий функцию f в сегменте Δ_k по узлам $t_{kr}, t_{kr+1}, \dots, t_{(k+1)r}$.

Пусть в интеграле (9.11) $t \in \Delta_j$, $1 \leq j \leq N - 1$. Тогда интегралу (9.11) поставим в соответствие квадратурную формулу

$$If = \sum_{k=0}^{j-2} \int_{\Delta_k} \frac{P_r(f, \Delta_k)}{\tau - t} d\tau + \int_{\Delta_j^*} \frac{P_{3r}(f, \Delta_j^*)}{\tau - t} d\tau + \sum_{k=j+2}^{N_1-1} \int_{\Delta_k} \frac{P_r(f, \Delta_k)}{\tau - t} d\tau + R_N(f), \quad (9.17)$$

где $\Delta_j^* = \Delta_{j-1} \cup \Delta_j \cup \Delta_{j+1}$.

Отметим, что полином $P_{3r}(f, \Delta_{j-1} \cup \Delta_j \cup \Delta_{j+1})$ можно построить и другим способом. Для этого построим полином $P_r(f, \Delta_j)$ и распространим его на сегмент $\Delta_{j-1} \cup \Delta_j \cup \Delta_{j+1}$. Погрешность аппроксимации функции $f(t)$ на сегменте $\Delta_{j-1} \cup \Delta_j \cup \Delta_{j+1}$ имеет тот же порядок, что и погрешность аппроксимации $f(t)$ на сегменте Δ_j .

Известно [31], что погрешность квадратурной формулы (9.17) оценивается неравенством $|R_N(f)| \leq cN^{-r} \ln N$.

Для вычисления интеграла (9.11) по узлам v_l , $l = 1, 2, \dots, N$, поступим следующим образом. Каждому узлу t_k , $k = 1, 2, \dots, N$, поставим в соответствие ближайший из узлов системы узлов $\{v_l\}_1^N$, который обозначим через v_k^* , и будем считать, что в точке t_k значение функции $f(t)$ равно $f(v_k^*)$. По значениям $f(v_k^*)$, $k = rs, rs + 1, \dots, r(s + 1)$, строится интерполяционный полином $P_r^*(f, \Delta_s)$ в сегментах Δ_s , $s = 0, 1, \dots, j - 1, j + 2, \dots, N_1 - 1$. Полином $P_{3r}^*(f, \Delta_{j-1} \cup \Delta_j \cup \Delta_{j+1})$ строится аналогично. Интеграл (9.11) вычисляется по формуле

$$If = \sum_{k=0}^{j-2} \int_{\Delta_k} \frac{P_r^*(f, \Delta_k)}{\tau - t} d\tau + \int_{\Delta_j^*} \frac{P_{3r}^*(f, \Delta_j^*)}{\tau - t} d\tau + \sum_{k=j+2}^{N_1-1} \int_{\Delta_k} \frac{P_r^*(f, \Delta_k)}{\tau - t} d\tau + R_N(f). \quad (9.18)$$

Относительно $P_{3r}(f, \Delta_j)$ справедливо сделанное выше замечание.

Оценим погрешность квадратурной формулы (9.18).

Эта погрешность складывается из двух составляющих: погрешности квадратурной формулы (9.17) и погрешности, связанной с переходом от формулы (9.17) к формуле (9.18).

Как было отмечено выше, первая составляющая оценивается неравенством $cN^{-r} \ln N$.

Приступим к оценке второй составляющей. Из построения интерполяционного полинома $P_r^*(f, \Delta_s)$ следует, что $\|P_r^*(f, \Delta_s) - P_r(f, \Delta_s)\|_C \leq M\Lambda(t_k, v_k^*)\lambda_r$, где $M = \max_{-D \leq t \leq D} |f'(t)|$, $\Delta(t_k, v_k^*) = \max_{rs \leq k \leq r(s+1)} |t_k - v_k^*|$, λ_r — константа Лебега. Тогда

$$\begin{aligned} R_N(f) &= \sum_{k=0}^{j-2} \left| \int_{\Delta_k} \frac{\psi_r(f, \Delta_k)}{\tau - t} d\tau \right| + \left| \int_{\Delta_j^*} \frac{\psi_{3r}(f, \Delta_j^*)}{\tau - t} d\tau \right| + \sum_{j+2}^{j+2} \left| \int_{\Delta_k} \frac{\psi_r(f, \Delta_k)}{\tau - t} d\tau \right| = \\ &= r_1 + r_2 + r_3, \end{aligned} \quad (9.19)$$

где $\psi_r(f, \Delta_k) = P_r(f, \Delta_k) - P_r^*(f, \Delta_k)$.

Нетрудно видеть, что

$$r_1 \leq \sum_{k=0}^{j-2} \frac{N}{r(j-k+1)} \frac{2}{N} |\psi_r(f, \Delta_k)| \leq \frac{2}{r} \sum_{k=0}^{j-2} \frac{1}{j+1-k} |\psi_r(f, \Delta_k)|.$$

Аналогичным образом оценивается

$$r_3 \leq \frac{2}{r} \sum_{k=j+2}^{N_1-1} \frac{1}{k-j-1} |\psi_r(f, \Delta_k)|.$$

Приступим к оценке r_2 . Пусть $h = \min(|t - t_{j-1}|, |t_{j+2} - t|)$. Положим для определенности $h = |t - t_{j-1}|$. Тогда

$$r_2 \leq \left| \int_{t-h}^{t+h} \frac{\psi_{3r}(f, \Delta_j^*)}{\tau - t} d\tau \right| + \left| \int_{t+h}^{t_{j+2}} \frac{\psi_{3r}(f, \Delta_j^*)}{\tau - t} d\tau \right| = r_{21} + r_{22}.$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} r_{21} &= \left| \int_{t-h}^{t+h} \frac{\psi_{3r}(f, \Delta_j^*)(\tau) - \psi_{3r}(f, \Delta_j^*)(t)}{\tau - t} d\tau \right| = \\ &= \left| \int_{t+h}^{j+2} |\psi'_{3r}(f, \Delta_j^*)(t + \Theta(\tau - t))| d\tau \right| \leq 2h \max_t |\psi'_{3r}(f, \Delta_j^*)(t)|. \end{aligned}$$

Из неравенства А. А. Маркова (см. разд. 8 главы I) следует, что

$$|\psi'_{3r}(f, \Delta_j^*)(t)| \leq \max |\psi_{3r}(f, \Delta_j^*)| r^2 / 2h.$$

Следовательно, $r_{21} \leq r^2 \max |\psi_{3r}(f, \Delta_j^*)|$.

Нетрудно видеть, что

$$r_{22} \leq \frac{1}{h} \int_{t+h}^{t_{j+2}} |\psi_{3r}(f, \Delta_j^*)| dv \leq \max |\psi_{3r}(f, \Delta_j^*)|.$$

Собирая полученные оценки, имеем

$$\begin{aligned} R_N(f) &\leq cN^{-r} \ln N + \frac{2}{r} \sum_{k=0}^{j-2} \frac{1}{j+1-k} \|\psi_r(f, \Delta_k)\|_C + \\ &+ \frac{2}{r} \sum_{k=j+2}^{N_1-1} \frac{1}{k-j-1} \|\psi_r(f, \Delta_k)\|_C + (1+r^2) \|\psi_{3r}(f, \Delta_j^*)\|_C \leq cN^{-r} \ln N + \\ &+ \frac{2M}{r} \lambda_r \left(\sum_{k=0}^{j-2} \frac{1}{j+1-k} \delta_k + \sum_{k=j+2}^{N_1-1} \frac{1}{k-1-j} \delta_k + (1+r^2) \delta_j^* \right), \quad (9.20) \end{aligned}$$

где $\delta_k = \Lambda(t_l, v_l^*)$, $l = rk, rk+1, \dots, r(k+1)$, $\delta_j^* = \Lambda(t_l, v_l^*)$, $l = rj, rj+1, \dots, r(j+2)$.

Мы оставляем оценку в виде (9.20), хотя возможно дальнейшее упрощение по аналогии с приведенным при рассмотрении сингулярных интегралов на классах функций Гельдера.

Замечание. В случае, если в узлах v_j^* известны значения как функции $f(t)$, так и ее производных до r -го порядка, то пересчет значений функции $f(t)$ в узле квадратурной формулы можно делать по формуле Тейлора.

Представляет значительный интерес распространение полученных выше результатов на полисингулярные и многомерные сингулярные интегралы. Однако мы не будем на этом останавливаться, так как ниже рассматривается вычисление многомерных гиперсингулярных интегралов на хаотических сетках.

9.5. Приближенное вычисление гиперсингулярных интегралов на хаотических сетках

9.5.1. Одномерный случай

Пусть $p = 2, 3, \dots$, $f \in W^r(1)$, $r = p, p+1, \dots$. Рассмотрим интеграл

$$Hf = \int_{-D}^D \frac{f(\tau)}{(\tau-t)^p} d\tau, \quad -D < t < D. \quad (9.21)$$

Отметим, что результаты, полученные ниже, легко переносятся на интегралы вида

$$\int_{-D}^D \frac{f(\tau)}{|\tau - t|^{p+\lambda}} d\tau, \quad p = 1, 2, \dots, 0 < \lambda < 1, -D \leq t \leq D.$$

В этом пункте используются обозначения, введенные в разд. 9.4.

Пусть в интеграле (9.21) $t \in \Delta_j$, $1 \leq j \leq N_1 - 1$. Поставим интегралу (9.21) в соответствие квадратурную формулу

$$Hf = \sum_{k=0}^{j-2} \int_{\Delta_k} \frac{P_r(f, \Delta_k)}{(\tau - t)^p} d\tau + \int_{\Delta_j^*} \frac{P_r(f, \Delta_j^*)}{(\tau - t)^p} d\tau + \sum_{k=j+2}^{N_1-1} \int_{\Delta_k} \frac{P_r(f, \Delta_k)}{(\tau - t)^p} d\tau + R_N(f). \quad (9.22)$$

Известно [31], что погрешность квадратурной формулы (9.22) оценивается неравенством

$$|R_N|(f) \leq cN^{-r-1+p}.$$

Предположим что функция $f(t)$ задана своими значениями в узлах v_l , $l = 1, 2, \dots, N$. При этих условиях интеграл (9.21) будем вычислять по квадратурной формуле

$$Hf = \sum_{k=0}^{j-2} \int_{\Delta_k} \frac{P_r^*(f, \Delta_k)}{(\tau - t)^p} d\tau + \int_{\Delta_j^*} \frac{P_{3r}^*(f, \Delta_j^*)}{(\tau - t)^p} d\tau + \sum_{k=j+2}^{N_1-1} \int_{\Delta_k} \frac{P_r^*(f, \Delta_k)}{(\tau - t)^p} d\tau + R_N^*(f). \quad (9.23)$$

Погрешность квадратурной формулы (9.23) складывается из двух составляющих: погрешности $R_N(f)$ квадратурной формулы (9.22) и погрешности $S_N(f)$ перехода от формулы (9.22) к формуле (9.23).

Нетрудно видеть, что

$$S_N(f) \leq \sum_{k=0}^{j-2} \left| \int_{\Delta_k} \frac{\psi_r(f, \Delta_k)}{(\tau - t)^p} d\tau \right| + \left| \int_{\Delta_j^*} \frac{\psi_{3r}(f, \Delta_j^*)}{(\tau - t)^p} d\tau \right| + \sum_{k=j+2}^{N_1-1} \left| \int_{\Delta_k} \frac{\psi_r(f, \Delta_k)}{(\tau - t)^p} d\tau \right| = r_1 + r_2 + r_3.$$

Оценим каждое слагаемое в отдельности. Очевидно,

$$r_1 \leq \sum_{k=0}^{j-2} \left(\frac{N_1}{2(j+1-k)} \right)^p \frac{2}{N_1} \|\psi_r(f, \Delta_k)\|_C.$$

Аналогично оценивается

$$r_3 \leq \sum_{k=j+2}^{N_1-1} \left(\frac{N_1}{2(k-j-1)} \right)^p \frac{2}{N_1} \|\psi_r(f, \Delta_k)\|_C.$$

Для оценки слагаемого r_2 воспользуемся определением интеграла Коши – Адамара (определение 6.4 из главы I). В результате имеем

$$\begin{aligned} r_2 &\leq c \left[\left| \int_{\Delta_j^*} \frac{\psi_{3r}^{(p-1)}(f, \Delta_j^*)}{\tau - t} d\tau \right| + \sum_{l=0}^{p-1} \frac{1}{(\tau - t)^{p-1-l}} \left| \psi_{3r}^{(l)}(f, \Delta_j^*) \right|_{t_{j-1}}^{t_{j+2}} \right] \leq \\ &\leq \frac{c}{h^p} \|\psi_{3r}(f, \Delta_j^*)\|_C \leq cN_1^p \|\psi_{3r}(f, \Delta_j^*)\|_C. \end{aligned}$$

Пользуясь определением интеграла Коши – Адамара, легко оценить константу c .

Собирая вместе полученные оценки, имеем

$$|R_N(f)| \leq cN^{-(r+1-p)} + cN_1^p \left(|\Delta_j^*| + \frac{1}{N_1} \sum_{k=0, k \neq j-1, j+1}^{N_1} |\Delta_k| \right).$$

9.5.2. Многомерный случай

Рассмотрим интеграл

$$Tf = \int_{-D}^D \int_{-D}^D \frac{f(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}}, \quad (9.24)$$

где $-D < t_1, t_2 < D$, $p = 3, 4, \dots$

Отметим, что полученные ниже результаты легко распространяются на интегралы вида

$$\int_{-D}^D \int_{-D}^D \frac{f(\tau_1, \tau_2)}{|(\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2|^{(p-\lambda)/2}} d\tau_1 d\tau_2,$$

где $p = 2, 3, \dots$, $0 < \lambda < 1$.

В этом разделе мы ограничиваемся двумерным случаем, хотя все результаты дословно переносятся на случай любого конечного числа переменных.

Пусть функция $f(t_1, t_2)$ определена в узлах (v_k, w_k) , $k = 1, 2, \dots, N$. Пусть $n = [\sqrt{N/r}]$. Для простоты обозначений будем считать $\sqrt{N/r}$ целым числом.

Введем узлы $t_k = -D + 2Dk/N$, $k = 0, 1, \dots, N$. Через Δ_{kl} обозначим квадраты $\Delta_{kl} = [t_{rk}, t_{r(k+1)}; t_{rl}, t_{r(l+1)}]$, $k, l = 0, 1, \dots, n-1$. В квадратах Δ_{kl} построим интерполяционные полиномы $P_{rr}(f, \Delta_{kl}) = P_r^{t_1}(P_r^{t_2}(f(t_1, t_2), [t_{rl}, t_{r(l+1)}])), [t_{rk}, t_{r(k+1)}])$.

Пусть $(t_1, t_2) \in \Delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n-1$.

Введем кубатурную формулу

$$Tf = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} * \iint_{\Delta_{kl}} \frac{P_{rr}(f, \Delta_{kl})}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} d\tau_1 d\tau_2 + \iint_{\Delta_{ij}^*} \frac{P_{rr}(f, \Delta_{ij}^*)}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} d\tau_1 d\tau_2 + R_N(f), \quad (9.25)$$

где $\sum \sum^*$ означает суммирование по $(k, l) \neq (i-1, j-1), (i-1, j), (i-1, j+1), \dots, (i+1, j+1)$, $\Delta_{kj}^* = \Delta_{i-1, j-1} \cup \dots \cup \Delta_{i+1, j+1}$.

Известно [33], что погрешность кубатурной формулы (9.25) оценивается неравенством

$$|R_N(f)| \leq cn^{-(r+2-p)}. \quad (9.26)$$

Построим теперь кубатурную формулу для вычисления интеграла Tf , использующую узлы (v_k, w_k) . Каждому узлу (t_s, t_u) поставим в соответствие ближайший из узлов из множества (v_k, w_k) , $k = 1, 2, \dots, N$, который обозначим через q_{su} и будем считать, что функция $f(t_1, t_2)$ в узле (t_s, t_u) равна $f(q_{su})$. Функцию, принимающую в узлах (t_k, t_l) , $k, l = 1, 2, \dots, n$, значения $f(q_{kl})$, обозначим через $f^*(t_1, t_2)$ (значения вне сетки (t_k, t_l) , $k, l = 1, 2, \dots, n$, ниже не используются и поэтому не определяются).

Обозначим через $P_{rr}(f^*, \Delta_{kl})$ полином, интерполирующий функцию $f^*(t_1, t_2)$ в квадрате Δ_{kl} по узлам (t_v, t_u) , $v = rk, rk+1, \dots, r(k+1)$, $u = rl, rl+1, \dots, r(l+1)$.

Интеграл Tf вычисляется по кубатурной формуле

$$Tf = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} * \iint_{\Delta_{kl}} \frac{P_{rr}(f^*, \Delta_{kl}) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} + \iint_{\Delta_{ij}^*} \frac{P_{rr}(f^*, \Delta_{ij}^*) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} + R_N^*(f). \quad (9.27)$$

Оценим погрешность кубатурной формулы (9.27). Эта погрешность складывается из двух составляющих: погрешности кубатурной формулы

(9.25) и погрешности, обусловленной переходом от кубатурной формулы (9.25) к кубатурной формуле (9.27). Погрешность кубатурной формулы (9.25) оценивается неравенством (9.26). Оценим теперь погрешность, обусловленную переходом от кубатурной формулы (9.25) к кубатурной формуле (9.27). Эта погрешность оценивается неравенством

$$S_{nn}(f) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} \int \int_{\Delta_{kl}} \frac{|P_{rr}(f, \Delta_{kl}) - P_{rr}(f^*, \Delta_{kl})|}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} d\tau_1 d\tau_2 + \left| \int \int_{\Delta_{ij}^*} \frac{P_{rr}(f, \Delta_{ij}^*) - P_{rr}(f^*, \Delta_{ij}^*)}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} d\tau_1 d\tau_2 \right| = s_1 + s_2.$$

Оценим каждое слагаемое s_1 и s_2 в отдельности. Нетрудно видеть, что

$$s_1 \leq c \left(\sum_{k=j+2}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} + \sum_{k=0}^{j-2} \sum_{l=0}^{n-1} + \sum_{k=j-1}^{j+1} \sum_{l=0}^{i-2} + \sum_{k=j-1}^{j+1} \sum_{l=i+2}^{n-1} \right) \times \frac{n^p}{((k-j)^2 + (l-i)^2)^{p/2}} \int \int_{\Delta_{kl}} |P_{rr}(f, \Delta_{kl}) - P_{rr}(f^*, \Delta_{kl})| d\tau_1 d\tau_2 \leq \leq cn^{p-2} \left(\sum_{k=j+2}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} + \sum_{k=0}^{j-2} \sum_{l=0}^{n-1} + \sum_{k=j-1}^{j+1} \sum_{l=0}^{i-2} + \sum_{k=j-1}^{j+1} \sum_{l=i+2}^{n-1} \right) \Lambda(f, \Delta_{kl}) \times \times \frac{1}{((k-j)^2 + (l-i)^2)^{p/2}}. \quad (9.28)$$

Возможно (по аналогии с интегралами в смысле Римана) дальнейшее упрощение оценки (9.28). Однако в случае интегралов Адамара (и сингулярных интегралов) это нецелесообразно, так как значения $\Lambda(f, \Delta_{kl})$ входят в общую оценку неравномерно (с соответствующими весами, значения которых зависят от расположения точки (t_1, t_2)).

Отметим очевидную оценку

$$s_1 \leq cn^{p-2} \max_{kl} \Lambda(f, \Delta_{kl}).$$

Приступим к оценке выражения s_2 . Для простоты введем обозначение $\psi_{rr}(\tau_1, \tau_2; t_1, t_2) = P_{rr}(f, \Delta_{ij}^*)(\tau_1, \tau_2) - P_{rr}(f^*, \Delta_{ij}^*)(t_1, t_2)$. Тогда выражение s_2 можно оценить неравенствами

$$s_2 \leq \left| \int \int_{\Delta_{ij}^*} \frac{\psi_{rr}(\tau_1, \tau_2, t_1, t_2) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} \right| \leq$$

$$\begin{aligned} & \leq \left| \iint_{B(t_{1,2},r)} \frac{\psi_{rr}(\tau_1, \tau_2, t_1, t_2) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} \right| + \\ & + \left| \iint_{\Delta_{ij}^* \setminus B(t_{1,2},r)} \frac{\psi_{rr}(\tau_1, \tau_2, t_1, t_2) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} \right| = s_{21} + s_{22}. \end{aligned} \quad (9.29)$$

Здесь $t_{1,2} = (t_1, t_2)$; $B(t_{1,2}, r)$ – круг наибольшего радиуса с центром в точке $t_{1,2}$, вписанный в квадрат Δ_{ij}^* .

Оценим каждое из слагаемых s_{21} и s_{22} в отдельности.

Переходя в интеграле s_{21} к полярной системе координат и воспользовавшись определением гиперсингулярного интеграла (определение 6.11 из главы I), имеем

$$\begin{aligned} |s_{21}| & \leq \left| \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{\psi_{rr}(\rho, \theta)}{\rho^{p-1}} d\rho d\varphi \right| \leq \\ & \leq \left| \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{l=0}^{p-2} \left(\frac{\partial^l}{\partial \rho^l} \psi_{rr}(\rho, \theta) \right) \Big|_{\rho=r} \frac{1}{r^{p-2-l}} \right\} d\varphi \right| \leq \\ & \leq \frac{c}{r^{p-2}} \Lambda(f, \Delta_{ij}^*) = cN^{p-2} \Lambda(f, \Delta_{ij}^*). \end{aligned} \quad (9.30)$$

Использованное здесь обозначение $\psi_{rr}(\rho, \theta)$ очевидно.

Оценку s_{22} получаем из цепочки неравенств

$$\begin{aligned} s_{22} & \leq \frac{c}{r^p} \iint_{\Delta_{ij}^*} |\psi_{rr}(\tau_1, \tau_2, t_1, t_2)| d\tau_1 d\tau_2 \leq \\ & \leq \frac{c}{r^{p-2}} \Lambda(f, \Delta_{ij}^*) \leq cN^{p-2} \Lambda(f, \Delta_{ij}^*). \end{aligned} \quad (9.31)$$

Из (9.29)–(9.31) следует оценка

$$s_2 \leq cN^{p-2} \Lambda(f, \Delta_{ij}^*). \quad (9.32)$$

Объединяя оценки (9.26), (9.28), (9.32), получаем оценку погрешности вычисления интеграла Адамара Tf на неравномерных сетках.

Замечание. Возможен и другой способ построения трансформаций на хаотической сетке узлов, в основу которого положено применение полиномов Бернштейна. Изложим этот метод на примере одномерных трансформаций функций, заданных на сегменте $[0, 1]$. Пусть на сегменте $[0, 1]$ функция $f(t)$ задана своими значениями в произвольном образом расположенных узлах $v_k, k = 1, 2, \dots, N + 1$.

Классический полином Бернштейна, аппроксимирующий функцию $f(t)$ на сегменте $[0, 1]$, определяется формулой

$$B_N(f) = \sum_{k=0}^N C_N^k f\left(\frac{k}{N}\right) t^k (1-t)^{N-k}.$$

Поставим каждому узлу $k/N, k = 0, 1, \dots, N$, в соответствие ближайший из узлов хаотической сетки $v_l, l = 0, 1, \dots, N+1$. Выбранный, ближайший к (k/N) , узел обозначим через v_k^* . Построим полином Бернштейна на хаотической сетке узлов:

$$B_N^*(f) = \sum_{k=0}^N C_N^k f(v_k^*) t^k (1-t)^{N-k}.$$

Оценим погрешность $\|f(t) - B_N^*(f)\|_{C[0,1]}$. Пусть $f(t) \in H_\alpha(1)$, $0 < \alpha < 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \|f(t) - B_N^*(f)\| &\leq \|f(t) - B_N(f)\| + \|B_N(f) - B_N^*(f)\| \leq \\ &\leq cN^{-\alpha} + \left| \sum_{k=0}^N C_N^k \left(f\left(\frac{k}{N}\right) - f(v_k^*) \right) t^k (1-t)^{N-k} \right| \leq \\ &\leq cN^{-\alpha} + \Delta^\alpha \sum_{k=0}^N C_N^k t^k (1-t)^{N-k} \leq C(N^{-\alpha} + \Delta^\alpha), \end{aligned}$$

где $\Delta = \max_{0 \leq k \leq N} |v_k^* - k/N|$.

Построенный полином $B_N^*(f)$ может быть использован для построения трансформаций. В частности, вместо трансформаций (9.12) и (9.13) может быть использована трансформация

$$\int_{-D}^D \frac{B_N^*(f, D)}{\tau - t} d\tau,$$

где $B_N^*(f, D)$ — интерполяционный полином Бернштейна, построенный на хаотической сетке узлов, расположенных на сегменте $[-D, D]$.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Вычисления полиномов Лежандра

В главе III при составлении системы линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов Фурье a_{nm} и b_{nm} используются значения присоединенных полиномов Лежандра $\hat{P}_n^m(\mu_k)$ при различных значениях μ_k .

Так как непосредственное использование формул, определяющих присоединенные полиномы Лежандра невозможно, то возникает необходимость в разработке численных методов. Этому вопросу посвящено данное приложение.

Напомним основные формулы теории полиномов Лежандра, используемые в дальнейшем:

$$P_n^m(\cos \theta) = 0, \quad m > n, \quad (\text{A.1})$$

$$P_n^{-m}(\cos \theta) = (-1)^m P_n^m(\cos \theta), \quad m = 0, 1, \dots, n, \quad (\text{A.2})$$

$$P_n^{-m}(\cos(\pi - \theta)) = (-1)^{n+m} P_n^m(\cos \theta), \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \quad (\text{A.3})$$

Нормировку присоединенных полиномов Лежандра будем проводить по формуле

$$\hat{P}_n^m(\cos \theta) = \frac{n!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta). \quad (\text{A.4})$$

Последовательные вычисления будем проводить по рекуррентной формуле [200]

$$\hat{P}_{n+1}^m(\cos \theta) = \cos \theta \hat{P}_n^m(\cos \theta) + \frac{\sin \theta}{2} (\hat{P}_n^{m+1}(\cos \theta) - \hat{P}_n^{m-1}(\cos \theta)), \quad (\text{A.5})$$

$n \geq 0, m = 0, 1, \dots, n$.

Как следует из формулы (A.5), для вычисления $\hat{P}_n^m(\cos \mu)$ необходимо вычислить значение $\hat{P}_n^l(\cos \mu)$ при $-k \leq l \leq k, k = 0, 1, \dots, n-1$. Поэтому вычисление полинома Лежандра $\hat{P}_n^m(\cos \theta)$ при каждом значении θ состоит из нескольких этапов.

Предположим, что нужно вычислить значения присоединенных полиномов $\hat{P}_n^m(\cos \theta)$ при $0 \leq n \leq N, m = 0, 1, \dots, n$.

Для нахождения значений $\hat{P}_n^m(\cos \theta)$ при данном фиксированном значении θ составляется табл. А.1 размером $(2N+1)(N+1)$. Составление

этой таблицы проводится в несколько этапов. Предварительно все элементы этой таблицы полагаются равными нулю.

Первый этап. Вычисляются значения $\hat{P}_0^m(\cos \theta)$, $-N \leq m \leq N$. Известно, что $\hat{P}_0^0(\cos \theta) = 1$ при любом θ , а $\hat{P}_0^m(\cos \theta) = 0$ при $m \neq 0$. На первом этапе составляется первая строчка табл. А.1. Очевидно, $\hat{P}_0^0(\cos \theta) = 1$, $\hat{P}_0^m(\cos \theta) = 0$, $m \neq 0$.

Второй этап. По рекуррентной формуле (А.5) находим $\hat{P}_1^m(\cos \theta)$, $m = -1, 0, 1$; $\hat{P}_1^m(\cos \theta) = 0$, $1 < |m| \leq N$.

Третий и последующие этапы. На каждом из l -х этапов, $l = 3, \dots, N + 1$, находятся по рекуррентной формуле (А.5) значения $\hat{P}_{l-1}^m(\cos \theta)$, $m = -l + 1, \dots, -1, 0, 1, l - 1$, $l = 3, \dots, N + 1$.

В результате выполнения этих действий заполняется табл. А.1 для каждого фиксированного значения θ .

Таблица А.1.

\hat{P}_N^{-N}	\hat{P}_N^{-N+1}	...	\hat{P}_N^{-3}	\hat{P}_N^{-2}	\hat{P}_N^{-1}	\hat{P}_N^0	\hat{P}_N^1	\hat{P}_N^2	\hat{P}_N^3	...	\hat{P}_N^{N-1}	\hat{P}_N^N
0	0	...	\hat{P}_3^{-3}	\hat{P}_3^{-2}	\hat{P}_3^{-1}	\hat{P}_3^0	\hat{P}_3^1	\hat{P}_3^2	\hat{P}_3^3	...	0	0
0	0	...	0	\hat{P}_2^{-2}	\hat{P}_2^{-1}	\hat{P}_2^0	\hat{P}_2^1	\hat{P}_2^2	0	...	0	0
0	0	...	0	0	\hat{P}_1^{-1}	\hat{P}_1^0	\hat{P}_1^1	0	0	...	0	0
0	0	...	0	0	0	\hat{P}_0^0	0	0	0	...	0	0

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Составление систем уравнений для приближенного представления потенциальных полей рядами по сферическим функциям

Опишем алгоритм, предназначенный для составления левых частей в системе уравнений

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n \frac{\widehat{P}_n^m(\cos \theta)}{r_k^{n+1}} a_{nm} \cos m\varphi_k + \\ & + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^n \frac{\widehat{P}_n^m(\cos \theta)}{r_k^{n+1}} b_{nm} \sin m\varphi_k = U(x^k), \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

где $k = 1, 2, \dots, N_1$, $N_1 = (N + 1)^2$, $x^k = (r_k, \theta_k, \varphi^k)$.

Подробное описание построения системы уравнений (B.1) было дано в главе IV.

Перепишем систему уравнений (B.1) в виде

$$\sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n V_{nm}(k) a_{nm} + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^n W_{nm}(k) b_{nm} = f_k, \quad (\text{B.2})$$

где

$$f_k = U(x^k), k = 1, 2, \dots, N_1,$$

$$V_{nm}(k) = \frac{\widehat{P}_n^m(\cos \theta)}{r_k^{n+1}} \cos m\varphi_k, n = 0, 1, \dots, N, m = 0, 1, \dots, n,$$

$$W_{nm}(k) = \frac{\widehat{P}_n^m(\cos \theta)}{r_k^{n+1}} \sin m\varphi_k, n = 1, \dots, N, m = 1, \dots, n.$$

Вместо a_{nm} и b_{nm} введем единые обозначения для неизвестных z_k , $k = 1, 2, \dots, N_1$.

Переменные z_k , $k = 1, 2, \dots, N_1$ и a_{nm} и b_{nm} связаны следующими соотношениями $a_{nm} = z_{m+1+(n+1)n/2}$, $n = 0, 1, \dots, N$, $m = 0, 1, \dots, n$; $b_{nm} = z_{(N+1)(N+2)/2+(n-1)n/2+m}$, $n = 1, 2, \dots, N$, $m = 1, 2, \dots, n$.

Представим систему уравнений (B.1) в виде $\sum_{l=1}^{N_1} c_{kl} z_l = f_k$, где $f_k = U(x^k)$, $k = 1, 2, \dots, N_1$, а коэффициенты c_{kl} и $V_{nm}(k)$, $W_{kl}(k)$ связаны между собой формулами $V_{nm}(k) = c_{k,(n+1)n/2+m+1}$, $n = 0, 1, \dots, N$,

$$m = 0, 1, \dots, n, \quad W_{nm}(k) = c_{k,(N+1)(N+2)/2+(n-1)n/2+m}, \quad n = 1, 2, \dots, N, \\ m = 1, 2, \dots, n.$$

Аналогичным образом составляются левые части систем уравнений при нахождении моментов производных потенциальных полей.

Опишем алгоритм построения правых частей системы уравнений вида (В.2) при решении модельных примеров.

Описание модельных примеров дано в приложении D. Здесь же опишем процедуру возмущения правых частей.

Для исследования устойчивости вычислительных схем и эффективности фильтрации по Страхову правые части систем уравнений подвергались различным типам возмущений.

Первый тип возмущений описывает фоновую погрешность, распределенную по всему вектору правых частей.

Второй тип возмущений описывает погрешность, обусловленную значительными ошибками в измерениях.

Первый тип возмущений. Обозначим через $f = (f_1, \dots, f_{N_1})$ вектор правых частей систем уравнений вида (В.2). Каждой компоненте $f_k (k = 1, 2, \dots, N_1)$ вектора f дается приращение $\delta_k (k = 1, 2, \dots, N_1)$, которое вычисляется следующим образом. Пусть $\varepsilon_k (k = 1, 2, \dots)$ – последовательность чисел, выдаваемая датчиком случайных чисел, $0 \leq \varepsilon_k \leq 1, k = 1, 2, \dots$. В качестве приращения $\delta_k (k = 1, 2, \dots, N_1)$ берутся значения $\delta_k = 2c (\varepsilon_k - 1/2) (k = 1, 2, \dots, N_1)$, где коэффициент c определяется из следующих соображений.

$$\text{Введем обозначения } \delta f = (\delta_1, \dots, \delta_{N_1}), \quad df = (df_1, \dots, df_{N_1}), \quad df_k = \\ = f_k + \delta_k, \quad k = 1, 2, \dots, N_1, \quad \delta = \|\delta f\| = [\sum_{k=1}^{N_1} \delta_k^2]^{1/2}, \quad \|df\| = [\sum_{k=1}^{N_1} df_k^2]^{1/2}, \\ \eta^2 = \frac{\|\delta f\|^2}{\|df\|^2} = \frac{\delta^2}{\|df\|^2}.$$

Параметр η характеризует возмущения правых частей, которые задаются априори. Задавая значения $\eta = 0.1, 0.01, 0.001$ и т.д. и полагая $\delta_k = 2c(\varepsilon_k - 1/2), (k = 1, 2, \dots, N_1), df_k = f_k + 2(\varepsilon_k - 1/2), k = 1, 2, \dots, N_1,$ из соотношения $\eta^2 = \frac{\sum_{k=1}^{N_1} |2c(\varepsilon_k - 1/2)|^2}{\sum_{k=1}^{N_1} |f_k + 2(\varepsilon_k - 1/2)|^2}$ находим значения параметра c .

Второй тип возмущений. Как было отмечено выше, этот тип возмущений связан с большими погрешностями в измерении значений полей. Поэтому в качестве вектора возмущений $\delta f = (\delta_1, \dots, \delta_{N_1})$ берется вектор, у которого все компоненты равны нулю, за исключением l компонент $1 \leq l \leq [N_1/2]$, причем эти l компонент разбросаны по вектору δf случайным образом, а модули отличных от нуля компонент равны $\delta_v = mf_v$, где m – целое число.

ПРИЛОЖЕНИЕ С

Итерационные методы

В данном приложении задача синтеза потенциальных полей решается методами В. Н. Страхова и А. Н. Тихонова, подробно описанными в главе IV.

Эта задача связана с необходимостью решения системы уравнений

$$AX = F, \quad (\text{C.1})$$

где $A = \{a_{kl}\}, k, l = \overline{1, N_1}$; $X = (x_1, \dots, x_{N_1}), F = (f_1, \dots, f_{N_1})$, больших размеров. При этом система (C.1), как правило, неустойчива. Методы В. Н. Страхова и А. Н. Тихонова были реализованы в виде следующих вычислительных схем:

1) метод В. Н. Страхова:

$$Z_{n+1} = (1 - \beta)Z_n - \gamma(AA^*Z_n - F); \quad (\text{C.2})$$

$$Z_{n+1} = Z_n - \gamma(\beta Z_n + AA^*Z_n - F); \quad (\text{C.3})$$

$$Z_{n+1} = \mu_n Z_n + (1 - \mu_n)(Z_n - \gamma(\beta Z_n + AA^*Z_n - F)), \quad (\text{C.4})$$

где $A^*Z = X, 0 < \mu_* < \mu_n \leq \mu^* < 1, \gamma = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\|AA^*\|}\right)$; β — параметр регуляризации;

2) метод А. Н. Тихонова:

$$X_{n+1} = (1 - \alpha)X_n - \gamma(A^*AX_n - A^*F); \quad (\text{C.5})$$

$$X_{n+1} = X_n - \gamma(\alpha X_n + A^*AX_n - A^*F); \quad (\text{C.6})$$

$$X_{n+1} = \beta_n X_n - (1 - \beta_n)(X_n - \gamma(\alpha X_n + A^*AX_n - A^*F)), \quad (\text{C.7})$$

где $0 < \beta_* \leq \beta_n \leq 1 - \beta_* < 1, \gamma = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\|A^*A\|}\right)$; α — параметр регуляризации.

В случае, если система уравнений (C.1) решалась методом В. Н. Страхова, предварительно проводилось фильтрование данных.

При решении отфильтрованной системы уравнений итерационными методами выбор параметров регуляризации α (при регуляризации по Тихонову) и β (при регуляризации по Страхову) осуществлялся следующим образом. Возьмем начальные значения α_0 и β_0 параметров α и β . Значения параметров α_l и β_l определяются формулами $\alpha_l = \alpha_0/2^l$,

$\beta_l = \beta_0/2^l, l = 1, 2, \dots, L$. Для каждого значения параметра α_l (или β_l) система уравнений (С.1) (в случае метода В. Н. Страхова система получается из (С.1) методом фильтрации) по итерационному методу (С.2)-(С.4) (или (С.5)-(С.7)) решается отдельно.

При решении на каждом шаге итерационного процесса (или через каждые несколько шагов) проводится вычисление невязки.

Остановка итерационного процесса осуществлялась по одному из следующих правил: а) невязка становится меньшей некоторого ранее заданного значения; б) итерации заканчиваются, когда значения невязки начинают устойчиво возрастать с каждым последующим шагом. В этом случае запоминается решение задачи, давшее минимальную невязку.

Опишем действия, проводимые после окончания первого итерационного процесса для α_0 (по методу А. Н. Тихонова) и для β_0 (по методу В. Н. Страхова).

Так как все действия проводятся аналогично, то для определенности остановимся на методе В. Н. Страхова.

После того как проведены вычисления по итерационной схеме (С.2)-(С.4) для значения β_0 , запоминаются значения:

- а) β_0 ;
- б) номер итерации, при котором достигнута минимальная невязка;
- в) значение минимальной невязки;
- г) вектор решения, при котором достигнута минимальная невязка.

Затем переходим к реализации итерационной схемы (С.2)-(С.4) при β_1 . В результате вычислений точно также запоминается:

- а) параметр β_1 ;
- б) номер итерации, в которой достигается минимальная невязка;
- в) значение минимальной невязки;
- г) вектор решения, который реализует минимальную невязку.

Затем происходит сравнение двух итерационных процессов. Выбирается тот процесс, при котором достигнута меньшая минимальная невязка и в качестве результирующей двух итерационных процессов запоминаются характеристики итерационного процесса с наименьшей минимальной невязкой. В результате сравнения запоминается:

- а) значение параметра β , при котором получена наименьшая минимальная невязка;
- б) номер итерации (в процессе с наименьшей минимальной невязкой), при котором получена минимальная невязка;
- в) значение наименьшей минимальной невязки;
- г) решение, реализующее наименьшую минимальную невязку.

Этот процесс продолжается до тех пор, пока не будут реализованы итерационные процессы при всех значениях параметров $\beta_k, k = 0, \dots, L$.

В результате этих вычислений мы получаем решение, минимизирующее невязку при всех заданных параметрах регуляризации и заданных длительностях итерационных процессов.

ПРИЛОЖЕНИЕ D

Модельные примеры к главе IV

Для иллюстрации эффективности изложенных в главе IV алгоритмов было решено несколько модельных примеров.

Пример 1. Центральная задача.

Введем прямоугольную декартову систему координат $OXYZ$. Поместим в начало координат точечное тело с массой m . Это тело создает в точке P с координатами (x, y, z) гравитационное поле

$$F(P) = -G \frac{m}{r^2}, \quad (D.1)$$

где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, и потенциальное поле

$$U(P) = G \frac{m}{r}. \quad (D.2)$$

Известно, что для поля $U(P)$, выраженного формулой (D.2), система уравнений

$$\sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n \frac{\widehat{P}_n^m(\cos \theta_k)}{r_k^{n+1}} (a_{nm} \cos m\varphi_k + b_{nm} \sin m\varphi_k) = U(P_k), \quad (D.3)$$

$k = 1, 2, \dots, N_1, N_1 = (N + 1)^2$, имеет единственное решение $a_{00} = m, b_{00} = 0; a_{ij} = 0, b_{ij} = 0$ при $(ij) \neq (00)$.

Здесь $(r_k, \theta_k, \varphi_k)$ – сферические координаты точки $P_k, k = 1, \dots, N_1$. Сферические координаты (r, θ, φ) точки $x = (x_1, x_2, x_3)$ определяются формулами

$$x_1 = r \cos \theta, x_2 = r \cos \varphi \sin \theta, x_3 = r \sin \varphi \sin \theta. \quad (D.4)$$

Требуется, располагая значениями потенциального поля $U(P)$ в произвольно взятых $N_1 = (N + 1)^2$ точках, определить коэффициенты $a_{kl}, l = 0, 1, \dots, k$, и $b_{kl}, k = 1, 2, \dots, N, l = 1, 2, \dots, k$.

Точки, в которых считаются известными значения $U(P_k)$, задавались различными способами:

а) точки располагались на сфере одного и того же радиуса R в узлах сферической сетки $(R, \theta_k, \varphi_l), k, l = 0, 1, \dots, n_1, n_1^2 = N_1$, где $\theta_k = k\pi/n_1, k = 0, 1, \dots; n_1, \varphi_l = 2\pi l/n_1, l = 0, 1, \dots, n_1$;

б) точки $P_k, k = 0, 1, \dots, N_1$, расположены на сфере одного и того же радиуса, но с неравномерным распределением по Θ и φ ;

в) точки $P_k, k = 0, 1, \dots, N_1$, расположены в узлах $(R_{jk}, \theta_j, \varphi_l)$ где $\theta_j = \pi/n_1, j = 0, 1, \dots, n_1, \varphi_l = 2\pi l/n_1, l = 0, 1, \dots, n_1, n_1^2 = N_1$, радиусы $R_{jk}, j, k = 0, 1, \dots, n_1$, принимают различные значения, расположенные на сегменте $[R_1, R_2]$;

г) точки $P_k, k = 1, 2, \dots, N_1$, расположены в сферических прямоугольниках $[R_1, R_2; \Theta_1, \Theta_2; \Phi_1, \Phi_2]$, причем $R_1, R_2; \Theta_1, \Theta_2; \Phi_1, \Phi_2$ принимают различные значения.

При решении модельных примеров значениям $U(P_k), k = 1, 2, \dots, N_1$, придавалось возмущение $\varepsilon \xi_k, k = 1, 2, \dots, N_1$, где ε – задаваемый модуль возмущений; $\xi_k, k = 1, 2, \dots, N_1$ – смещенные на $-0,5$ значения датчика случайных чисел.

Прежде чем приступить к решению модельного примера при возмущенных правых частях, проводилась фильтрация уравнений методом В. Н. Страхова.

Выше уже упоминалось, что решение системы уравнений (D.3) имеет вид $a_{00} = m, a_{kl} = 0$, при $k = 1, 2, \dots, N, l = 0, 1, \dots, k; b_{kl} = 0$ при $k = 1, 2, \dots, N, l = 1, 2, \dots, k$. Поэтому предполагая, что решение системы уравнений (4.3) при правых частях, заданных с амплитудой возмущения ε , расположены в параллелепипеде $[-\beta, m + \beta; -\beta, \beta; \dots; -\beta, \beta]$, проводим отбраковку уравнений системы (D.3) при различных значениях ε и β . В результате остается k уравнений, где $0 \leq k \leq N_1$.

Оставшиеся в результате фильтрации уравнения (система из $k \times N_1$ уравнений) решались методами регуляризации по В. Н. Страхову (при решении задачи методом регуляризации по А. Н. Тихонову отбраковка уравнений не производилась).

Регуляризованные по А. Н. Тихонову и В. Н. Страхову системы решались итерационным методом, определяемым уравнениями:

– в случае регуляризации по А. Н. Тихонову:

$$X_{n+1} = (1 - \alpha)X_n - \gamma(A^*AX_n - A^*F), \quad (D.5)$$

$$X_{n+1} = \mu X_n - (1 - \mu)(X_n - \gamma(\alpha X_n + A^*AX_n - A^*F)), \quad (D.6)$$

где $0 < \mu < 1, \gamma = 1/(2\|A^*A\|)$;

– в случае регуляризации по В. Н. Страхову:

$$Z_{n+1} = (1 - \beta)Z_n - \gamma(AA^*Z_n - F), \quad (D.7)$$

$$Z_{n+1} = \mu Z_n + (1 - \mu)(Z_n - \gamma(\beta Z_n + AA^*Z_n - F)), \quad (D.8)$$

где $0 < \mu < 1, \gamma = 1/(2\|AA^*\|)$.

Реализация вычислительных схем (D.5)-(D.8) подробно описана в приложении С.

Пример 2. Смещенный центр.

В качестве примера рассмотрим задачу нахождения моментов потенциального поля, создаваемого точечным телом с массой 1, расположенным в точке с координатами $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$. В этом случае потенциальное поле в точке с координатами $(r_k, \theta_j, \varphi_i)$ имеет вид

$$\frac{1}{r_k^2 + r_0^2 - 2r_k r_0 (\cos \theta_j \cos \theta_0 + \sin \theta_j \sin \theta_0 \times \cos(\varphi_i - \varphi_0))}.$$

Помимо вычисления моментов потенциальных полей, создаваемых отдельными материальными точками, рассматривались примеры вычисления моментов потенциальных полей, создаваемых отдельными телами.

В частности, вычислялись моменты потенциальных полей, создаваемых сферическими секторами и сегментами.

Рассматривается область, ограниченная поверхностями, уравнения которых в сферической системе координат имеют вид

$$r = R_0, r = R_1; \theta = \Theta_0, \theta = \Theta_1; \varphi = \Phi_0, \varphi = \Phi_1.$$

В случае, когда

$$\Theta_0 = 0, \Theta_1 = \pi, \Phi_0 = 0, \Phi_1 = 2\pi,$$

эту задачу можно решать как центральную.

Поле, создаваемое этим телом, вычислялось следующим образом.

Введем сетку узлов

$$r_k = R_0 + (R_1 - R_0)k/N, k = 0, 1, \dots, N; \theta_j = \Theta_0 + (\Theta_1 - \Theta_0)j/N_1,$$

$$j = 0, 1, \dots, N_1; \varphi_i = \Phi_0 + (\Phi_1 - \Phi_0)i/N_2, i = 0, 1, \dots, N_2.$$

Пусть $\Delta_{kji} = [r_k, r_{k+1}; \theta_j, \theta_{j+1}; \varphi_i, \varphi_{i+1}]$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$; $j = 0, 1, \dots, N_1 - 1$; $i = 0, 1, \dots, N_2 - 1$.

В предположении, что в каждом сферическом параллелепипеде Δ_{kji} , $k = 0, 1, \dots, N - 1$; $j = 0, 1, \dots, N_1 - 1$; $i = 0, 1, \dots, N_2 - 1$, плотность тела является постоянной, вычисляется поле создаваемое каждым параллелепипедом Δ_{kji} в отдельности. Затем производится суммирование по всем сферическим параллелепипедам Δ_{kji} , $k = 0, 1, \dots, N - 1$; $j = 0, 1, \dots, N_1 - 1$; $i = 0, 1, \dots, N_2 - 1$.

Наряду со случаями, когда измерялись значения потенциального поля, рассматривались случаи, когда измерялись значения производной

потенциального поля и по этим значениям определялись моменты a_{nm} и b_{nm} потенциального поля

$$U(P) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n \frac{\widehat{P}_n^m(\cos\theta_k)}{r_k^{n+1}} (a_{nm} \cos m\varphi_k + b_{nm} \sin m\varphi_k). \quad (\text{D.9})$$

Эти коэффициенты определялись из системы алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} & - \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n \frac{(n+1)^2 - m^2}{(n+1)r_k^{n+2}} \widehat{P}_{n+1}^m(\cos\theta_k) (a_{nm} \cos m\varphi_k + b_{nm} \sin m\varphi_k) - \\ & - \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{r_k^{n+2}} \widehat{P}_n^n(\cos\theta_k) \cos\theta_k (a_{nn} \cos n\varphi_k + b_{nn} \sin n\varphi_k) = f_k. \end{aligned}$$

Организация вычислений производилась так же, как и в случае, когда правая часть уравнения являлась потенциалом, т.е. рассматривалась центральная задача для точки и тела, а также задача со смещенным центром для точки и тела.

Кроме того, рассматривалась задача вычисления производных потенциальных полей. В этом случае находились коэффициенты a_{nm} и b_{nm} из системы уравнений

$$\sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n \frac{\widehat{P}_n^m(\cos\theta_k)}{r_k^{n+2}} (a_{nm} \cos m\varphi_k + b_{nm} \sin m\varphi_k) = \frac{\partial U(P)}{\partial z} \Big|_{P_k}. \quad (\text{D.10})$$

Организация вычислений производилась так же, как и в случае, когда правая часть уравнения являлась потенциалом, т.е. рассматривалась центральная задача, а также задача со смещенным центром.

Решение модельных примеров синтеза потенциальных полей методами В. Н. Страхова и А. Н. Тихонова приведено в таблицах D.1-D.4. В этих таблицах использованы следующие обозначения: r — радиус сферы, на которой известны значения потенциального поля (в центральной задаче); $c_1 = \|x\|$ — норма в l_2 предполагаемого решения (задается при фильтрации по В. Н. Страхову); df — коэффициент, на который умножаются значения датчика случайных чисел, лежащие в интервале $(-1, 1)$; η — параметр, характеризующий возмущение правых частей системы (параметр η введен в приложении В).

Для описания невязок введем следующие обозначения. Пусть $AX = F$ — решаемая система, где $A = a_{ij}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, — матрицы размером $n \times n$; X и F — n -мерные векторы. В результате фильтрации по

В. Н. Страхову получаем систему $\overline{A}X = \overline{F}$, где \overline{A} — матрица размером $n_0 \times n$; X — n -мерный вектор; \overline{F} — n_0 -мерный вектор.

Тогда в методе В. Н. Страхова

$$\omega_1 = \|\overline{A}X - \overline{F}\|;$$

$$\omega_2 = \|\beta Z + \overline{A}A^*Z - \overline{F}\|,$$

где Z — решение уравнения $\beta Z + \overline{A}A^*Z - \overline{F}$;

$$\omega_3 = \|\overline{A}A^*Z - \overline{F}\|,$$

где $X = \overline{A}^*Z$.

Отметим, что ω_1 и ω_3 практически совпадают (это следует из определения векторов X и Z и подтверждается на практике. Различия наблюдаются в 12-м знаке после запятой).

Каждому определению невязки ($\omega_i, i = 1, 2, 3$) соответствуют значение параметра β_i ($i = 1, 2, 3$) и число итераций l_i ($i = 1, 2, 3$), при которых достигается минимум невязки.

В методе А. Н. Тихонова анализируются невязки:

$$\omega_1 = \|AX - F\|;$$

$$\omega_2 = \|\alpha X + A^*AX - A^*F\|;$$

$$\omega_3 = \|A^*AX - A^*F\|.$$

Каждому определению невязки $\omega_j, (j = 1, 2, 3)$ соответствует значение параметра $\alpha_j, (j = 1, 2, 3)$ при котором достигается наименьшая невязка.

В случае, если известно точное решение модельной задачи, с минимумом каждой из невязок ($\omega_l, l = 1, 2, 3$) связываем соответствующее значение погрешности ($R_l, l = 1, 2, 3$), которые вычисляются при тех значениях параметров регуляризации и числе итераций, при которых были вычислены невязки.

Погрешность вычисляется как норма разности в l_2 между точным и приближенным решениями.

Точность счета характеризуется еще одним дополнительным параметром $\varepsilon = \frac{\omega^2}{\|F + F_\delta\|^2}$, где F_δ — вектор возмущения правых частей системы уравнений (В.1).

Отметим, что для простоты обозначений параметры регуляризации $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (в методе А. Н. Тихонова) и $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ (в методе В. Н. Страхова) в таблицах обозначаются через ρ_1, ρ_2, ρ_3 соответственно.

В случае, когда вычисления проводились при втором типе возмущений правых частей, вместо параметра c_1 в таблицах вводятся параметры m и l . Здесь l — число отличных от нуля компонент в векторе возмущений $\delta f = (\delta_1, \dots, \delta_N)$, m — коэффициент, определяющий величину отличной от нуля компоненты возмущения $\delta_k : \delta_k = m f_k$, где $f = (f_1, \dots, f_N)$ — вектор правых частей.

Наряду с вычислениями по итерационным схемам (С.3) и (С.6) проводились вычисления по итерационным схемам (С.4) и (С.7). Особых различий при вычислении по этим схемам не было, и поэтому соответствующие таблицы не приводятся.

Результаты решения модельных примеров приведены в таблицах D1-D4.

Таблицы D1—D5 иллюстрируют результаты применения описанных выше вычислительных схем при решении задачи синтеза потенциальных полей. Все приведенные примеры вычислялись методом А. Н. Тихонова по итерационным схемам (С.2)—(С.4) и методом В. Н. Страхова по итерационным схемам (С.5)—(С.7).

В таблице D1 иллюстрируется решение центральной задачи без возмущения правых частей.

В таблице D2 иллюстрируется решение центральной задачи с возмущением правых частей.

В таблице D3 иллюстрируется вычисление коэффициентов Фурье производных потенциальных полей.

В таблице D4 иллюстрируется решение задачи синтеза потенциальных полей в случае смещения источника поля.

В таблице D5 иллюстрируется вычисление коэффициентов Фурье производных потенциальных полей в случае смещения источника поля.

Анализ данных, приведенных в табл. D1—D5, позволяет сделать следующие выводы:

1) при решении задачи синтеза потенциальных полей метод регуляризации по В. Н. Страхову оказывается, как правило, более эффективным: величина $\varepsilon = \omega^2 / \|F + F_\delta\|^2$ в методе В. Н. Страхова на несколько порядков меньше, чем в методе А. Н. Тихонова;

2) фильтрация по методу В. Н. Страхова оказывается чрезвычайно эффективной в случаях, когда правые части уравнений имеют большие "выбросы".

Таблица D.1

Параметры	Метод Страхова	Метод Тихонова
r	2	2
$\ x\ $	1	
n	144	144
n_0	144	
η	0	0
ρ_1	1,00000000000100E-0004	1,00000000000100E-0004
ρ_2	1,00000000000100E-0001	1,00000000000100E-0001
ρ_3	1,00000000000100E-0004	1,00000000000100E-0004
l_1	2999	2999
l_2	2999	2999
l_3	2999	2999
ω_1	5,84012754219487E-0005	5,84012657511290E-0005
ω_2	9,18537602774723E-0007	1,57612832746984E-0007
ω_3	5,84012695902802E-0005	1,00468823461041E-0004
R_1	1,13767794591623E-0003	1,13767795011909E-0003
R_2	8,85063260294316E-0003	8,85063260493268E-0003
R_3	1,13767794591623E-0003	1,13767795011909E-0003
ε	8,27662823375347E-0011	2,44826025603084E-0012

Таблица D.2

Параметры	Метод Страхова	Метод Тихонова
r	2	2
$\ x\ $	1.2	
n	144	144
n_0	138	
η	5df	5df
ρ_1	1,00000000000100E-0004	1,00000000000100E-0004
ρ_2	1,00000000000100E-0001	1,00000000000100E-0001
ρ_3	1,00000000000100E-0004	1,00000000000100E-0004
l_1	999	999
l_2	999	999
l_3	999	999
ω_1	3,83817547575660E-0004	4,56696758421458E+0000
ω_2	9,22151652826830E-0005	3,45286084009331E-0002
ω_3	3,83817552497945E-0004	1,34951696186135E-0001
R_1	2,16276761234369E-0003	2,74261497082625E+0000
R_2	9,47384066684265E-0003	1,85970085721237E+0000
R_3	2,16276761234369E-0003	2,74261497082625E+0000
ε	4,23161388861984E-0009	2,52114015333760E-0004

Таблица D.3

Параметры	Метод Страхова	Метод Тихонова
r	1	1
$\ x\ $	0.5	
n	144	144
n_0	48	
η	0	0
r_0	0.3	0.3
θ_0	0	0
φ_0	0	0
ρ_1	1,00000000000100E-0004	1,00000000000100E-0004
ρ_2	1,00000000000100E-0003	1,00000000000100E-0001
ρ_3	1,00000000000100E-0004	1,00000000000100E-0004
l_1	627	878
l_2	821	960
l_3	722	980
ω_1	7,47275702603356E-0006	1,00781156155693E-0005
ω_2	3,07943263618832E-0012	6,962208464357536E-009
ω_3	7,47278074166025E-0006	1,33656965837727E-0004
R_1	1,00001006453921E-0001	2,72656015923512E-0001
R_2	1,00001724941093E-0001	2,92236789764956E-0001
R_3	1,00001006453011E-0001	4,92656015894408E-0001
ε	4,75439393666040E-0025	3,56664314510535E-0021

Таблица D.4

Параметры	Метод Страхова	Метод Тихонова
r	2	2
$\ x\ $	1	
n	144	144
n_0	139	
η	1,00000000000000E-0003	1,00000000000000E-0003
r_0	0.1	0.1
θ_0	$\pi/10$	$\pi/10$
φ_0	$\pi/10$	$\pi/10$
$\ \bar{A}\bar{A}^*\ $	3,54635732542374E+0001	
$\ A^*A\ $		3,67252386971959E+0001
γ	1,40989740772994E-0002	
ρ_1	1,25000000000000E+0000	1,25000000000000E+0000
ρ_2	5,00000000000000E+0000	5,00000000000000E+0000
ρ_3	1,25000000000000E+0000	1,25000000000000E+0000
l_1	955	957
l_2	354	385
l_3	959	844
ω_1	2,71248763998301E-0001	2,77250114751496E-0001
ω_2	4,37479725624681E-0012	2,40517355190220E-0011
ω_3	2,71248764011943E-0001	1,20706426895958E+0000
R_1	5,84073318230776E-0002	7,42318353155724E-0002
R_2	1,07594896379351E-0001	1,47873785577758E-0001
R_3	2,84073318266019E-0002	7,42318353406972E-0002
ε	5,47727456333840E-0025	5,80887021662143E-0022

Таблица D.5

Параметры	Метод Страхова	Метод Тихонова
r	5	5
$\ x\ $	1	
n	144	144
n_0	85	
η	1,00000000000000E-0003	1,00000000000000E-0003
r_0	0.1	0.1
θ_0	$\pi/10$	$\pi/10$
φ_0	$\pi/10$	$\pi/10$
$\ \bar{A}\bar{A}^*\ $	3,40195017377846E+0000	
$\ A^*A\ $		5,76818046725384E+0000
γ	1,46974521806214E-0001	
ρ_1	1,25000000000000E+0000	1,25000000000000E+0000
ρ_2	5,00000000000000E+0000	1,25000000000000E+0000
ρ_3	1,25000000000000E+0000	1,25000000000000E+0000
l_1	73	140
l_2	23	48
l_3	96	126
ω_1	4,87123169831193E-0001	4,36220472564401E-0001
ω_2	4,06936949936946E-0013	5,86437258768074E-0014
ω_3	4,87123169936946E-0001	1,03011651311681E+0000
R_1	1,03222327821459E-0001	1,96995459201162E-0001
R_2	1,13488072702239E-0001	4,73549663102858E-0001
R_3	1,03222327762342E-0001	1,96995459473555E-0001
ε	5,07116131220556E-0026	1,30056132943932E-0024

ПРИЛОЖЕНИЕ Е

Решение обратных задач гравиметрии на компьютерах с параллельными процессорами

В данном приложении исследуется метод распараллеливания при решении обратной задачи гравиметрии.

Введем декартову систему координат $0XYZ$, направив ось $0Z$ вниз. Предположим, что возмущающее тело G расположено в параллелепипеде $D = [a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3]$. Пусть: $H_i = b_i - a_i$, $i = 1, 2, 3$. Введем сетки узлов $x_k = a_1 + (b_1 - a_1)k/n_1$, $k = 0, 1, \dots, n_1$; $y_k = a_2 + (b_2 - a_2)k/n_2$, $k = 0, 1, \dots, n_2$; $z_k = a_3 + (b_3 - a_3)k/n_3$, $k = 0, 1, \dots, n_3$. Каждому узлу $\zeta_{ijk} = (x_i, y_j, z_k)$ поставим в соответствие неизвестную пока точечную массу m_{ijk} , равную массе параллелепипеда $\Delta_{ijk} = [x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1}; z_k, z_{k+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n_1 - 1$, $j = 0, 1, \dots, n_2 - 1$, $k = 0, 1, \dots, n_3 - 1$.

Пусть на поверхности Земли (причем здесь имеется в виду реальная поверхность Земли) известны значения вертикальной составляющей $f_z(x, y, z)$ силы тяжести в узлах сетки η_l , $l = 1, \dots, N$, $N = n_1 n_2 n_3$.

Будем считать, что проекции узлов η_l , $l = 1, \dots, N$, на плоскость $z = 0$ расположены в параллелограмме $[a_1, b_1; a_2, b_2]$. Значения $f_z(x, y, z)$ в узлах η_l будем обозначать через f_l , $l = 1, \dots, N$.

Перенумеруем узлы ζ_{ijk} следующим образом: $\xi_l = \zeta_{ijk}$, где $l = kn_1 n_2 + jn_1 + i + 1$, $i = 0, 1, \dots, n_1 - 1$, $j = 0, 1, \dots, n_2 - 1$, $k = 0, 1, \dots, n_3 - 1$.

Обозначим через a_{vw} проекцию на ось $0Z$ силы тяжести, создаваемой в точке η_v единичной массой, расположенной в точке ξ_w . В результате получаем систему уравнений

$$\sum_{l=1}^N a_{kl} u_l = f_k, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (\text{E.1})$$

где $u_l = m_{ijk}$, $l = kn_1 n_2 + jn_1 + i + 1$, $i = 0, 1, \dots, n_1 - 1$, $j = 0, 1, \dots, n_2 - 1$, $k = 0, 1, \dots, n_3 - 1$.

При решении конкретных задач приходится иметь дело с системами уравнений больших размеров (до 10^6 уравнений с 10^6 неизвестными).

Непосредственное решение таких задач предъявляет чрезвычайно высокие требования к используемым алгоритмам, системному обеспечению и компьютерам. Поэтому возникает задача распараллеливания системы уравнений (E.1).

Разобьем параллелепипед D на более мелкие параллелепипеды D_{kl} , $k = 0, 1, \dots, m_1 - 1$, $l = 0, 1, 2, \dots, m_2 - 1$, $m_1 \ll n_1$, $m_2 \ll n_2$. Определим параллелепипед D_{kl} следующим образом: $D_{kl} = [x_{Lk}, x_{L(k+1)}; y_{Ll}, x_{L(l+1)}; a_3, b_3]$, $k = 0, 1, \dots, m_1 - L$, $l = 0, 1, 2, \dots, m_2 - 1$, L — целочисленная константа. Предполагается, что L такая, что $Lm_1 = n_1$, $Lm_2 = n_2$.

Каждому параллелепипеду D_{kl} поставим в соответствие точку d_{kl} , являющуюся пересечением его диагоналей. В точку d_{kl} поместим неизвестную пока массу M_{kl} , которая сопоставляется с параллелепипедом D_{kl} . В случае необходимости в каждом параллелепипеде D_{kl} берется несколько узлов, в которые помещаются искомые массы.

Обозначим через \bar{F}_{kl} среднее значение функций $f_z(\eta_l)$ по тем значениям η_l , $l = 1, 2, \dots, N$, проекции которых на плоскость $0XY$ расположены в прямоугольнике $\Pi_{kl} = [x_{Lk}, x_{L(k+1)}; y_{Ll}, y_{L(l+1)}]$, $k = 0, 1, \dots, m_1 - 1$, $l = 0, 1, \dots, m_2 - 1$. Через $\bar{\eta}_{kl}^*$ обозначим точку, координаты которой являются средними значениями координат точек η_{kl} , проекции которых на плоскость $0XY$ расположены в прямоугольнике Π_{kl} .

Перенумеруем параллелепипеды D_{ij} , пользуясь только одним индексом: $D_l = D_{ij}$, $l = i + 1 + jm_1$, $i = 0, 1, \dots, m_1 - 1$, $j = 0, 1, \dots, m_2$. Аналогичным образом перенумеруем узлы $\bar{\eta}_{ij}$ — через $\bar{\eta}_l$; узлы d_{ij} — через d_l , массы \bar{M}_{ij} , размещенные в узлах d_{ij} , — через \bar{u}_l .

В результате приходим к системе уравнений

$$\sum_{l=1}^M \bar{a}_{kl} \bar{u}_l = \bar{f}_k, \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad M = m_1 m_2. \quad (\text{E.2})$$

При решении многих практических задач систему (E.2) можно значительно упростить практически без уменьшения точности.

Введем целочисленную константу δ и систему уравнений (E.2) заменим системой

$$\sum_{l=1}^M a_{kl}^* \bar{u}_l = \bar{f}_k, \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad (\text{E.3})$$

где $a_{kl}^* = 0$, если $|k - l| \geq \delta$. Величина δ выбирается таким образом, чтобы влияние массы, сосредоточенной в узле d_l , практически не сказывалось в узлах $\bar{\eta}_k$ при $|k - l| > \delta$. Для этого, очевидно, достаточно взять $\delta = 2, 3$. В результате мы получим систему уравнений (E.3) с блочно-диагональной матрицей, у которой элементы $\delta + 1$ блоков, прилегающих к главной диагонали, отличны от нуля, а элементы остальных блоков равны нулю.

Систему уравнений (Е.2) (аналогично (Е.3)) будем решать итерационным методом:

$$\bar{U}_{n+1} = \alpha_n \bar{U}_n + (1 - \alpha_n)((1 - \beta_n)\bar{U}_n - \gamma(\bar{A}^* \bar{A} U_n - \bar{A}^* \bar{F})), \quad (\text{Е.4})$$

$n = 0, 1, \dots$, где \bar{A} – матрица системы (Е.2); \bar{F} – вектор $\bar{F} = (\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_M)$; \bar{U} – вектор неизвестных: $\bar{U} = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_M)$, $0 < \alpha_* \leq \alpha_n \leq 1 - \alpha^* < 1$; $\beta_n (\beta_n \geq 0)$ – параметр регуляризации, $\gamma = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\|\bar{A}^* \bar{A}\|}\right)$.

Обоснование сходимости итерационного метода (Е.4) приведено в главе IV.

Так как итерационный процесс (Е.4) сходится при любом начальном приближении, то, задав величину невязки $\varepsilon (\varepsilon > 0)$, можно получить решение \bar{U}_n^ε , при котором $\|(1 - \beta_n)\bar{U}_n^\varepsilon - \gamma(\bar{A}^* \bar{A} U_n^\varepsilon - \bar{A}^* \bar{F})\| \leq \varepsilon$.

После вычисления вектора \bar{U}_n^ε , который в дальнейшем для краткости будем обозначать через \bar{U}_ε , мы получаем возможность распараллелить алгоритм решения обратной задачи.

Рассмотрим произвольный параллелепипед D_l . С этим параллелепипедом связаны точка d_l , являющаяся пересечением его диагоналей, и вычисленная из системы уравнений (Е.2) масса M_l .

Обозначим через η_{ij}^l элементы исходной сети η_{ij} на поверхности Земли, проекции которых на плоскость $z = 0$ принадлежат D_l . Обозначим через ζ_{ijk}^l те узлы сетки ζ_{ijk} , которые принадлежат параллелепипеду D_l .

Предполагая, что масса M_l параллелепипеда D_l сосредоточена в узле d_l , легко находим вертикальные проекции силы тяжести f_{ijk}^l , создаваемые в узлах η_{ijk}^l массой M_l , сосредоточенной в узле d_l .

Располагая значениями f_{ijk}^l , составим систему уравнений для вычисления неизвестных масс m_{ijk}^l , сосредоточенных в узлах ζ_{ijk}^l . В результате получаем систему уравнений

$$\sum_{v=1}^R b_{kv} u_v = f_k^l, \quad (\text{Е.5})$$

где $R = N_3 L^2$.

Решая системы вида (Е.5) для параллелепипедов D_j , $j = 1, 2, \dots, N^*$, где N^* – общее число параллелепипедов D_j , покрывающих D , и объединяя все полученные решения, получаем приближенное решение системы уравнений (Е.1), которое обозначим через $U_N^* = (u_1, \dots, u_N)$. В случае, если полученная в результате невязка удовлетворяет предъявленным к задаче требованиям, можно ограничиться приближенным решением U_N^* . В противном случае, взяв его в качестве начального значения,

можно вычислить несколько последовательных приближений. При этом система уравнений (Е.1) предварительно упрощается аналогично тому, как из системы (Е.2) была получена система (Е.3). После этого к упрощенной системе применяется итерационная схема типа (Е.4).

Более точным, хотя и более трудоемким, является следующий алгоритм распараллеливания. Вначале, как и выше, находится вектор \bar{U}_n^ε , который является решением системы уравнений (Е.2). Далее процесс распараллеливания начинается с параллелепипеда D_{ij} , которому "отвечает" наибольшее по абсолютной величине отклонение гравитационного поля от среднего по исследуемой области. Для параллелепипеда D_{ij} и соседних с ним параллелепипедов составляется система уравнений вида (Е.5), состоящая из $9N_3L^2$ уравнений с таким же числом неизвестных. Назовем ее системой G . Отметим, что параллелепипед D_{ij} может быть окаймлен не одним, а несколькими слоями прилегающих параллелепипедов, и тогда размерность системы уравнений G должна быть увеличена. В качестве правых частей f_k^l в системе уравнений G берутся значения исходного гравитационного поля в точках η_k^l , из которых вычитаются проекции на ось OZ сил притяжения, создаваемых массами \bar{u}_l , сосредоточенными в узлах d_l тех параллелепипедов D_l , которые не рассматривались при составлении системы уравнений G . Из решения системы уравнений G выделяются только те массы \bar{u}_l , которые сосредоточены в узлах, принадлежащих параллелепипеду D_{ij} . Эти массы включаются в решение системы (Е.2). В дальнейшем при составлении систем уравнений вида (Е.5), связанных с параллелепипедами, отличными от D_{ij} , при вычислении правых частей учитывается в отдельности влияние каждой из масс \bar{u}_l , расположенной в параллелепипеде D_{ij} . Описанный алгоритм последовательно применяется ко всем параллелепипедам, покрывающим область D .

Остановимся на вопросе о числе арифметических действий, которое необходимо при реализации описанного выше алгоритма. Предположим, что дана система (Е.1), в которой $N = 10^6$. Представим ее в виде 1000 систем уравнений, каждая из которых содержит 1000 уравнений с 1000 неизвестных. Предварительно нужно решить систему (Е.2), построение которой было описано выше. Ее решение методом Гаусса требует $O(10^9)$ арифметических действий. Затем по полученному решению строится 1000 систем уравнений. Нахождение их правых частей требует $O(10^9)$ арифметических действий. Затем решение 1000 систем уравнений с 1000 неизвестными требует $O(10^{12})$ арифметических действий. Таким образом, общее число арифметических действий, необходимых для ре-

лизации описанного выше алгоритма, есть величина $O(10^{12})$. Отметим, что если решать непосредственно систему (Е.1) методом Гаусса, то потребуется $O(10^{18})$ арифметических действий. Таким образом, описанный выше метод в $O(10^6)$ раз более эффективен, чем непосредственное применение метода Гаусса.

ПРИЛОЖЕНИЕ F

Приближенное вычисление производных высоких порядков

Ниже предлагается несколько алгоритмов, эффективных при вычислении производных функций одной и нескольких переменных.

Одним из таких методов является описанный в книге [126, с. 330] метод дифференцирования с помощью интегрирования. Этот метод основан на применении формулы

$$f'(x) \approx \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^h tf(x+t)dt, \quad (\text{F.1})$$

где h — достаточно малая величина.

Если функция $f(t)$ имеет производные до третьего порядка, то, разлагая функцию $f(x+t)$ по степеням t по формуле Тейлора, имеем

$$\frac{3}{2h^3} \int_{-h}^h tf(x+t)dt = f'(x) + \frac{1}{10}h^2 f'''(\xi), \quad x < h < \xi < x + h.$$

Формула (F.1) позволяет вычислять производную и в том случае, когда функция $f(t)$ задана с недифференцируемой погрешностью. Нетрудно оценить величину погрешности и в этом случае. Пусть $f(t) = f^*(t) + \varepsilon(t)$, где $f^*(t)$ — точное задание функции; $\varepsilon(t)$ — не дифференцируемая функция, не превосходящая по модулю константы ε ($\max |\varepsilon(t)| < \varepsilon$). Тогда

$$\begin{aligned} f'(x) &\approx \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^h tf(x+t)dt = \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^h tf^*(x+t)dt + \\ &+ \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^h t\varepsilon(x+t)dt = (f^*)'(x) + \frac{1}{10}h^2(f^*)'''(\xi) + \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^h t\varepsilon(x+t)dt. \end{aligned}$$

Замена производной функции $f^*(x)$ выражением $\frac{3}{2h^3} \int_{-h}^h tf(x+t)dt$, в котором фигурирует неточно заданная функция $f(t)$, дает погрешность $\frac{h^2}{10}(f^*)'''(\xi) + \frac{3\varepsilon}{2h}$. Выбирая значение h , минимизирующее последнюю сумму в зависимости от значений $(f^*)'''(\xi)$ и ε (если они известны), получаем достаточно эффективный алгоритм вычисления производных.

Рассмотрим еще один устойчивый метод вычисления производных, основанный на применении квадратурных формул вычисления сингулярных интегралов [25, 31]. Функция $x^{(n)}$ может быть представлена в виде

$$x^{(n)} = \frac{n!}{2\pi i} \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau) d\tau}{(\tau - t + i\eta)^{n+1}} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau) d\tau}{(\tau - t - i\eta)^{n+1}} \right].$$

Обозначим через $H_1(A, K)$ класс функций $\varphi(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, удовлетворяющих условиям $|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leq A|t_1 - t_2|$, $|\varphi(0)| \leq K$.

Через $W^r(A, K)$ обозначим класс функций $\varphi^{(r)}$, $t \in (-\infty, \infty)$, имеющих непрерывные производные до $(r - 1)$ -го порядка, удовлетворяющие условиям $\max |\varphi^{(r)}(t)| \leq A$, $\max(|\varphi(t)|, |\varphi'(t)|, \dots, |\varphi^{(r-1)}(t)|) \leq K$. Функция $\varphi(t) \in H_{1\rho}(A, K)$, $\varphi(t) \in W_\rho^r(A, K)$, если $\varphi(t) = \rho(t)\psi(t)$, где $\rho(t)$ – весовая функция, $\psi(t) \in H_1(A, K)$, $\psi(t) \in W^r(A, K)$.

В качестве весовых использованы функции $\rho_1(t) = a^{|t|}$, $\rho_2(t) = e^{-t^2}$, $\rho_3(t) = 1/(1+t^2)$. Введем обозначения: N – целое число, $t_{k,l}^i = k + l/N_k^i$, $k = -A_i, \dots, -1, 0, 1, \dots, A_i - 1$; $l = 0, 1, \dots, N_k^i$, $i = 1, 2, 3$, $A_1 = [\log_a N]$, $A_2 = [\sqrt{\ln N}]$, $A_3 = [(N/\ln N)^{1/(2\alpha+1)}]$; $N_k^1 = [N/a^k]$, $N_k^2 = [N/e^{k^2}]$ при $k \geq 0$; $N_k^1 = [N/a^{|k|-1}]$, $N_k^2 = [N/e^{(|k|-1)^2}]$ при $k < 0$; $N_k^3 = [N/k^{2\alpha-1}]$ при $k \neq 0$, $N_0^3 = N$, $\bar{t}_{k,l} = (t_{k,l} + t_{k,l+1})/2$. Здесь $[a]$ – антье a .

Пусть $t \in [t_{i,j}, t_{i,j+1}]$. Вычисление функции $x^{(n)}(t)$ будем проводить по формуле

$$\begin{aligned} x^{(n)}(t) = & -\frac{(n-1)!}{2\pi i} \sum_{k=-A_v}^{A_v-1} \sum_{l=0}^{N_k-1} x(t_{k,l}^v) \left[\frac{1}{(t_{k,l+1}^v - \bar{t}_{i,j}^v + ih)^n} - \right. \\ & - \frac{1}{(t_{k,l-1}^v - \bar{t}_{i,j}^v - ih)^n} - \frac{1}{(t_{k,l}^v - \bar{t}_{i,j}^v + ih)^n} + \\ & \left. + \frac{1}{(t_{k,l}^v - \bar{t}_{i,j}^v - ih)^n} \right] + R_N(x), \quad v = 1, 2, 3, \quad n = 1, 2, \dots, r, \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

в которой параметр h выбирается из условий, определенных ниже. Можно показать, что если функция $x(t) \in W_\rho^r H_\alpha(A, K)$ и задана с погрешностью ε (т.е. $|x(t) - \bar{x}(t)| \leq \varepsilon$), то квадратурная формула (F.2) при $h = N^{-\alpha/(n+1)}$ имеет погрешность $|R_N(x)| \leq c(N^{-\alpha/(n+1)} + \varepsilon N^{r/(n+1)})$.

В случае, если необходимо вычислять значения функции на сегменте $[a, b]$, то нет необходимости в интегрировании по бесконечному контуру. Предположим, что вычисляются значения $x^{(n)}(t)$ при $t \in [0, 1]$. Введем

обозначения: $t_l = l/N$, $l = 0, 1, \dots, N$, $\bar{t}_l = (t_l + t_{l+1})/2$. Пусть $t \in [t_j, t_{j+1}]$. Вычисления $x(t)$ будем проводить по формуле

$$x^{(n)}(t) = \frac{n!}{2\pi i} \sum_{l=0}^{N-1} x(\bar{t}_l) \left[\int_{t_l}^{t_{l+1}} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_j + ih)^{n+1}} - \int_{t_l}^{t_{l+1}} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_j - ih)^{n+1}} \right] + R_N(x), \quad (\text{F.3})$$

$n = 1, 2, \dots, r$.

Если функция $x(t) \in W^r H_\alpha(1)$, $r = 1, 2, \dots$, $0 < \alpha \leq 1$, задана на сегменте $[0, 1]$ значениями $\tilde{x}(t_l)$, определенными с точностью до ε , $|\tilde{x}(t_l) - x(\bar{t}_l)| \leq \varepsilon$, то при $h = N^{-1/(r+1)}$ погрешность формулы (F.3) оценивается неравенством $|R_N(x)| \leq c(N^{-1/(n+1)} + \varepsilon N^{r/(n+1)})$.

Обозначим через $P_n(x, \Delta)$ интерполяционный полином степени n , построенный по $n + 1$ узлам полиномов Чебышева первого рода, трансформированных с сегмента $[-1, 1]$ на сегмент Δ . Обозначим через Δ_k сегменты $\Delta_k = [t_k, t_{k+1}]$, $t_k = k/N$, $k = 0, 1, \dots, N$.

Пусть $t \in \Delta_j$.

Функцию $x^{(n)}(t)$ будем вычислять по формуле

$$x^{(n)}(t) = \frac{n!}{2\pi i} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} P_n(\tilde{x}, \Delta_k) \left[\frac{1}{(\tau - t + ih)^{n+1}} - \frac{1}{(\tau - t - ih)^{n+1}} \right] d\tau \right] + R_N(x), \quad (\text{F.4})$$

где $\tilde{x}(t)$ – функция, аппроксимирующая $x(t) \in W^r H_\alpha$ ($r \leq n$) с точностью ε , $h = N^{-r/(n+1)}$. Погрешность формулы (F.4) равна

$$c(h + \varepsilon(h^n + N - nh^n)) = O(N^{-r/(n+1)} + \varepsilon N^{-nr/(n+1)}).$$

Обоснование этих и подобных алгоритмов приведено в работе [33].

В случае функций многих переменных для построения алгоритмов вычисления частных производных можно использовать полигиперсингулярные интегралы. Ниже ограничимся рассмотрением бигиперсингулярных интегралов. Известно следующее обобщение формулы Сохоцкого – Племяля [86]:

$$\frac{\partial^{n_1+n_2} \varphi(t_1, t_2)}{\partial t_1^{n_1} \partial t_2^{n_2}} = \Phi^{++}(t_1, t_2) - \Phi^{+-}(t_1, t_2) - \Phi^{-+}(t_1, t_2) + \Phi^{--}(t_1, t_2), \quad (\text{F.5})$$

где

$$\Phi^{++}(t_1, t_2) = \lim_{\eta_1 \rightarrow 0, \eta_2 \rightarrow 0} \int_L \frac{(\partial^{n_1+n_2} \varphi(\tau_1, \tau_2) / \partial \tau_1^{n_1} \partial \tau_2^{n_2}) d\tau_1 d\tau_2}{[\tau_1 - (t_1 - \bar{n}_1 \eta_1)] [\tau_2 - (t_2 - \bar{n}_2 \eta_2)]};$$

$$\Phi^{+-}(t_1, t_2) = \lim_{\eta_1 \rightarrow 0, \eta_2 \rightarrow 0} \int_L \frac{(\partial^{n_1+n_2} \varphi(\tau_1, \tau_2) / \partial \tau_1^{n_1} \partial \tau_2^{n_2}) d\tau_1 d\tau_2}{[\tau_1 - (t_1 - \bar{n}_1 \eta_1)] [\tau_2 - (t_2 + \bar{n}_2 \eta_2)]};$$

$$\Phi^{-+}(t_1, t_2) = \lim_{\eta_1 \rightarrow 0, \eta_2 \rightarrow 0} \int_L \frac{(\partial^{n_1+n_2} \varphi(\tau_1, \tau_2) / \partial \tau_1^{n_1} \partial \tau_2^{n_2}) d\tau_1 d\tau_2}{[\tau_1 - (t_1 + \bar{n}_1 \eta_1)] [\tau_2 - (t_2 - \bar{n}_2 \eta_2)]};$$

$$\Phi^{--}(t_1, t_2) = \lim_{\eta_1 \rightarrow 0, \eta_2 \rightarrow 0} \int_L \frac{(\partial^{n_1+n_2} \varphi(\tau_1, \tau_2) / \partial \tau_1^{n_1} \partial \tau_2^{n_2}) d\tau_1 d\tau_2}{[\tau_1 - (t_1 + \bar{n}_1 \eta_1)] [\tau_2 - (t_2 + \bar{n}_2 \eta_2)]},$$

$L = L_1 \times L_2$, где L_1, L_2 — замкнутые контуры.

Положим, что L_1, L_2 — действительные оси координат в плоскостях комплексных переменных z_1, z_2 . Предположим, что функция $\varphi(t_1, t_2)$ и ее частные производные $\frac{\partial^{v_1+v_2} \varphi(t_1, t_2)}{\partial t_1^{v_1} \partial t_2^{v_2}}$, $v_i = 0, 1, \dots, n_i, i = 1, 2$, стремятся к нулю при $t_i \rightarrow \pm\infty$.

Интегрируя по частям интегралы в последних четырех формулах, имеем

$$\Phi^{++}(t_1, t_2) = \lim_{\eta_1 \rightarrow 0, \eta_2 \rightarrow 0} \int_L \frac{(-1)^{n_1+n_2} n_1! n_2! \varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{[\tau_1 - (t_1 - \bar{n}_1 \eta_1)]^{n_1+1} [\tau_2 - (t_2 - \bar{n}_2 \eta_2)]^{n_2+1}};$$

$$\Phi^{+-}(t_1, t_2) = \lim_{\eta_1 \rightarrow 0, \eta_2 \rightarrow 0} \int_L \frac{(-1)^{n_1+n_2} n_1! n_2! \varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{[\tau_1 - (t_1 - \bar{n}_1 \eta_1)]^{n_1+1} [\tau_2 - (t_2 + \bar{n}_2 \eta_2)]^{n_2+1}};$$

$$\Phi^{-+}(t_1, t_2) = \lim_{\eta_1 \rightarrow 0, \eta_2 \rightarrow 0} \int_L \frac{(-1)^{n_1+n_2} n_1! n_2! \varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{[\tau_1 - (t_1 + \bar{n}_1 \eta_1)]^{n_1+1} [\tau_2 - (t_2 - \bar{n}_2 \eta_2)]^{n_2+1}};$$

$$\Phi^{--}(t_1, t_2) = \lim_{\eta_1 \rightarrow 0, \eta_2 \rightarrow 0} \int_L \frac{(-1)^{n_1+n_2} n_1! n_2! \varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{[\tau_1 - (t_1 + \bar{n}_1 \eta_1)]^{n_1+1} [\tau_2 - (t_2 + \bar{n}_2 \eta_2)]^{n_2+1}}.$$

Аппроксимируя интегралы в правых частях последних четырех формул кубатурными формулами вычисления гиперсингулярных интегралов [33], получаем устойчивый алгоритм вычисления частных производных высоких порядков.

ПРИЛОЖЕНИЕ G

1. Модельные примеры к разд. 8 главы V

Рассмотрим две задачи: одномерную и двумерную.

Задача 1. Введем прямоугольную декартову систему координат, направив ось Oz вниз. Пусть $H = \text{const}$ и в области, ограниченной поверхностями $z = H$ и $z = H - z(x)$, расположено тело с плотностью σ , $G\sigma = 1$. Пусть вертикальная составляющая гравитационного поля, создаваемого этим телом, равна $\pi \frac{1+H}{H(x^2+(H+1)^2)}$. Требуется найти функцию $z(x)$.

Эта задача моделируется уравнением

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{(x-s)^2 + H^2}{(x-s)^2 + (H-z(s))^2} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1+H}{H(x^2 + (H+1)^2)}. \quad (\text{G.1})$$

Линеаризация уравнения (G.1) описывается уравнением

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2Hz(s)ds}{(x-s)^2 + H^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1+H}{H(x^2 + (H+1)^2)}, \quad (\text{G.2})$$

решением которого является функция $z(s) = \frac{1}{2H} \frac{1}{s^2+1}$.

Во втором приближении уравнение (G.1) аппроксимируется интегральным уравнением

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2Hz(s) - z^2(s)}{(x-s)^2 + H^2} ds = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1+H}{H(x^2 + (H+1)^2)}. \quad (\text{G.3})$$

В четвертом приближении эта задача описывается уравнением

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2Hz(s) - z^2(s)}{(x-s)^2 + H^2} ds + \\ & + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2Hz(s) - z^2(s))(H^2 - (H - z(s))^2)}{((x-s)^2 + H^2)^2} ds = \\ & = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1+H}{H(x^2 + (H+1)^2)}. \end{aligned} \quad (\text{G.4})$$

Метод приближенного решения уравнения (G.4) описан в разд. 8 главы V.

В таблице G.1 приведены результаты решения уравнения (G.1) при его аппроксимации уравнениями (G.2)-(G.4) на сегменте $[-a, a]$ при $a = 5$. Выход из итерационных процессов решения уравнений (G.2), (G.3), (G.4) осуществлялся при числе итераций $N = 25$.

В таблице G.1 использованы следующие обозначения: через $[-b, b]$ обозначен сегмент, на котором вычисляются преобразования Фурье правых частей и ядер соответствующих уравнений; через H обозначена глубина залегания тела; σ_1 означает абсолютную погрешность; σ_2 означает среднюю погрешность.

Таблица G.1

Параметры				Уравнение (G.1)		Уравнение (G.2)		Уравнение (G.3)	
a	b	H	N	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2
5	10	1	25	0,2770	0,0835	0,2302	0,0902	0,1209	0,0986
5	10	1,5	25	0,1934	0,0408	0,1834	0,0378	0,0972	0,0561
5	10	2	25	0,1908	0,0596	0,1802	0,0602	0,0912	0,0586
5	5	3	25	0,2071	0,0917	0,2051	0,0904	0,1704	0,0748
5	7	3	25	0,2049	0,0588	0,2029	0,5804	0,1680	0,0450
5	10	3	25	0,2003	0,0503	0,1983	0,5020	0,1629	0,0457
5	10	4	25	0,1829	0,0462	0,1829	0,0461	0,1659	0,0425
5	10	5	25	0,1637	0,0441	0,1635	0,0440	0,1543	0,0410
5	10	5	25	0,1682	0,0441	0,1679	0,0440	0,1588	0,0409
5	10	10	25	0,1017	0,0389	0,1017	0,0389	0,0999	0,0373
5	10	15	25	0,0727	0,0334	0,0727	0,0334	0,0726	0,0327

Задача 2. Введем прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$, направив ось Oz вниз. Пусть $H = \text{const}$ и в области, ограниченной плоскостью $z = H$ и поверхностью $z = H - z(x, y)$, расположено тело с плотностью $\sigma = 1$. Пусть вертикальная составляющая гравитационного поля, создаваемая этим телом, известна на некоторой сетке узлов.

Требуется найти функцию $z(x, y)$.

Эта задача решается при разных значениях H в предположении, что:

а) гравитационное поле, создаваемое телом, известно на равномерной сетке узлов на поверхности Земли;

б) гравитационное поле, создаваемое телом, известно на неравномерной сетке узлов на поверхности Земли.

Эта задача описывается уравнением

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{((x-\zeta)^2 + (y-\eta)^2 + (H - \varphi(\zeta, \eta))^2)^{1/2}} - \frac{1}{((x-\zeta)^2 + (y-\eta)^2 + H^2)^{1/2}} \right] d\zeta d\eta = f(x, y), \quad (\text{G.5})$$

приближениями к которому являются следующие уравнения.

Если ограничиться одним слагаемым в разложении подынтегральной функции в ряд по степеням $\varphi^2(\zeta, \eta) - 2H\varphi(\zeta, \eta)$, то получаем нелинейное уравнение

$$-\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\varphi^2(\zeta, \eta) - 2H\varphi(\zeta, \eta))d\zeta d\eta}{((x-\zeta)^2 + (y-\eta)^2 + H^2)^{3/2}} = f(x, y). \quad (\text{G.6})$$

В случае двух слагаемых приходим к уравнению

$$-\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\varphi^2(\zeta, \eta) - 2H\varphi(\zeta, \eta))d\zeta d\eta}{((x-\zeta)^2 + (y-\eta)^2 + H^2)^{3/2}} + \frac{3}{8} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\varphi^2(\zeta, \eta) - 2H\varphi(\zeta, \eta))^2 d\zeta d\eta}{((x-\zeta)^2 + (y-\eta)^2 + H^2)^{5/2}} = f(x, y). \quad (\text{G.7})$$

В качестве примера восстановим поверхность тела, определяемую уравнениями $z = H$ и $z = H - \varphi_1(x, y)$, где H — глубина залегания,

$$\varphi_1(x, y) = \begin{cases} \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}, & (x^2 + y^2) \leq R^2 \\ 0, & (x^2 + y^2) > R^2 \end{cases} \quad (\text{G.8})$$

Метод приближенного решения уравнения (G.5) описан в разд. 8 главы V.

В таблице G.2 описано восстановление формы тяготеющих масс при использовании алгоритмов, построенных на равномерной сетке узлов. При этом использованы следующие обозначения: $\Omega = [-a, a]^2$ — область, в которой измеряются значения гравитационного поля; R — радиус полусферы, залегающего на глубине H ; m — число итераций, N — число узлов по каждой координате, в которых измеряются значения гравитационного поля; N_1 — число узлов по каждой координате, в которых вычисляется

преобразование Фурье. В столбце "Погрешность" представлена точность решения уравнения (G.5) численным методом (G.6) на равномерной сетке узлов.

Таблица G.2

a	b	H	R	M	N	N_1	Погрешность
3	7	5	0,5	15	15	25	0,022189
3	7	5	0,5	15	20	25	0,128492
3	7	5	1,0	15	15	25	0,326361
3	7	7	0,5	15	15	25	0,002812
3	7	7	0,7	15	15	25	0,009632
3	7	7	1,0	20	20	35	0,156631
5	7	10	1,0	15	20	35	0,014668
5	7	1	0,1	15	20	35	0,000529
5	7	4	0,1	15	20	35	0,000234
5	7	8	0,1	15	20	35	0,000041
5	7	1	0,2	15	20	35	0,002943
5	7	7	0,6	15	35	45	0,004926
5	7	7	0,7	15	35	45	0,009813

В таблице G.3 описано восстановление формы тяготеющих масс при использовании алгоритмов, построенных на неравномерной сетке узлов. При этом использованы следующие обозначения: $\Omega = [-a, a]^2$ — область, в которой измеряются значения гравитационного поля; R — радиус полушара, залегающего на глубине H ; m — число итераций; N — число узлов (по каждой координате), в которых измеряются значения гравитационного поля; N_1 — число узлов (по каждой координате), в которых вычисляется преобразование Фурье. В столбце "Погрешность" представлена норма разности точного решения уравнения (G.5) и приближенного решения, полученного численным методом (G.6) на неравномерной сетке узлов.

Вычислительный эксперимент показал, что точность решения модельного примера по вычислительной схеме для уравнения (G.7), использующей третью и четвертую степени искомой функции, при значениях параметров $1 \leq N, N_1 \leq 100$ сопоставима с точностью решения по вычислительной схеме для уравнения (G.6), использующей первые

и вторые степени искомой функции. Эффект использования вычислительной схемы для уравнения (G.7) начинает сказываться при значениях $N, N_1 > 100$. При решении практических задач это требует более 10 000 значений наблюдаемого поля. Поэтому при решении практических задач естественно ограничиться вычислительной схемой для уравнения (G.6).

Таблица G.3

a	b	H	R	M	N	N_1	Погрешность
3	7	5	0,5	15	15	25	0,037935
3	7	5	0,5	15	20	25	0,197726
3	7	5	1,0	15	15	25	0,483971
3	7	7	0,5	15	15	25	0,005312
3	7	7	0,7	15	15	25	0,010832
3	7	7	1,0	20	20	35	0,184538
5	7	10	1,0	15	20	35	0,045658
5	7	1	0,1	15	20	35	0,001082
5	7	4	0,1	15	20	35	0,000394
5	7	8	0,1	15	20	35	0,000098
5	7	1	0,2	15	20	35	0,006431
5	7	7	0,6	15	35	45	0,008288
5	7	7	0,7	15	35	45	0,020055

Замечание. Неравномерность сетки определяется следующим образом. Пусть h_* и h^* — соответственно наименьшее и наибольшее из расстояний между соседними узлами. Используются сетки, у которых $h^*/h_* \leq 2$. Для построения алгоритма восстановления формы тела при неравномерной сетке узлов использовались два подхода:

1) по значениям функции $f_1(x, y)$ на неравномерной сетке узлов с использованием локальных сплайнов вычислялись приближенные значения функции $f_1(x, y)$ на равномерной сетке узлов. Затем использовался тот же алгоритм восстановления формы возмущающего тела, что и при равномерной сетке узлов;

2) кубатурные формулы вычисления прямого преобразования Фурье строились по неравномерной сетке узлов.

Вычислительный эксперимент показал, что более точным является первый подход.

Из анализа решения модельной задачи G.1 можно сделать следующие выводы.

Пусть тело расположено между плоскостями $z = H - R$ и $z = H$. Нетрудно видеть, что при R/H , значительно меньших единицы ($R/H \leq 1/8$), точность решения линейных уравнений сопоставима с точностью решения нелинейных уравнений. При $R/H > 1/8$ и особенно при $R/H = 1/3, 1/2$ точность решения нелинейных уравнений в два-три раза выше точности решения линейных уравнений. При дальнейшем увеличении соотношения R/H ($1/2 \leq R/H < 1$) необходимо рассматривать уравнения с нелинейностями третьего и более высоких порядков.

Из анализа решения модельных задач G.1 и G.2 можно сделать еще один вывод. Неравномерное задание сетки наблюдений на поверхности Земли, при котором максимальное расстояние между соседними узлами равно d_n (d_n — вещественное положительное число), вносит погрешность порядка $M\varepsilon_0$, по сравнению с погрешностью восстановления формы тела при равномерной сетке узлов. Здесь ε_0 — погрешность восстановления формы тела при равномерном разбиении, $M = (d_n/d_r)$, где d_r — расстояние между узлами сетки при равномерном разбиении.

Замечание. Решения модельных примеров проиллюстрированы на цветных вкладках в конце книги. На вкладках через H обозначена глубина залегания тела, через N число измерений вертикальной составляющей поля силы тяжести на поверхности.

ПРИЛОЖЕНИЕ Н

Модельные примеры к разд. 2 главы VII

Пример 1 [34]. Осуществить аналитическое продолжение с единичной окружности с центром в начале координат функции $x(z) = \frac{1}{z-20}$, имеющей особую точку $z_0 = 20$.

Вычисления показали, что эту функцию удается аналитически продолжить с единичной окружности с центром в начале координат на область, ограниченную окружностью радиуса, равного 15. Результаты приведены в табл. Н.1. Максимальная погрешность вычислений на окружности радиуса 15 равна 0,068348959.

Таблица Н.1

Точка	Приближенное значение	Точное значение	Погрешность
$15.40 - i0.00$	$-0.1514 - i0.0133$	$-0.2173 - i0.0000$	0.067261685
$12.49 + i9.01$	$-0.0675 - i0.0686$	$-0.0545 - i0.0654$	0.013377419
$-4.62 + i14.69$	$-0.0291 - i0.0181$	$-0.0299 - i0.0178$	0.000843845
$-12.34 + i9.21$	$-0.0296 - i0.0059$	$-0.0286 - i0.0081$	0.002433113
$12.63 - i8.82$	$-0.0238 + i0.0129$	$-0.0285 + i0.0077$	0.007037722
$4.39 - i14.76$	$-0.0153 + i0.0257$	$-0.0338 + i0.0319$	0.019527604
$12.20 - i9.40$	$-0.0759 + i0.0883$	$-0.0522 + i0.0630$	0.034645035
$15.39 - i0.48$	$-0.1528 - i0.0067$	$-0.2146 + i0.0224$	0.068348959

Пример 2 [34]. Осуществить аналитическое продолжение с единичной окружности с центром в начале координат функции $x(z) = \frac{1}{z-z_1} + \frac{2}{z-z_2} + \frac{3}{z-z_3}$, имеющей три особые точки $z_1 = 2$, $z_2 = 2+4i$, $z_3 = 2-4i$.

Результаты вычислений показали, что, используя метод, изложенный в разд. 2 главы VII, эту функцию можно продолжить на достаточно широкую область. Отметим, что удается аналитически продолжить функцию $x(z)$ на область, границы которой отстоят от особых точек на расстояние 0,18, причем на это расстояние можно приблизиться при аналитическом продолжении функции к каждой особой точке в отдельности, т.е. можно выявить особые точки функции. Результаты вычислений представлены в таблице Н.2. Максимальная погрешность равна 0,07648767292.

Таблица Н.2

Точки	Приближенные значения	Точные значения	Погрешность
1.82−i0.00	−5.5293−i0.0553	−5.5780−i0.0000	0.07373310181
2.18+i0.00	5.5279−i0.2290	5.5596−i0.2967	0.07477648527
2.00−i0.18	0.0877+i5.4876	0.1500+i5.5284	0.07442063466
2.00+i0.18	0.1978−i5.4730	0.1500−i5.5284	0.07321768895
1.82+i4.00	−5.5221−i0.4296	−5.5695−i0.3744	0.07281191598
2.18+i4.00	5.5181−i0.6037	5.5511−i0.6716	0.07549964906
2.00+i3.82	0.0863+i5.1207	0.1498+i5.1612	0.07532685935
2.00+i4.18	−0.3750−i5.8538	−0.4459−i5.8758	0.07424163382
1.82−i4.00	−5.5196+i0.3188	−5.5695+i0.3744	0.07470752844
2.18−i4.00	5.5207+i0.1447	5.5512+i0.0772	0.07412592775
2.00−i4.18	0.0887+i5.8715	0.1497+i5.9124	0.07347147147
2.00−i3.82	−0.3727−i5.1030	−0.4460−i5.1247	0.07648767292

Пример 3 [34]. Пусть

$$x(z) = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau,$$

где $\varphi(\tau)$ — аналитическая функция. В качестве контура L берется окружность на комплексной плоскости радиуса r и с центром в точке $a + ib$, $r = 1, a = 4, b = 0$. Требуется продолжить функцию $x(z)$ с единичной окружности с центром в начале координат.

Эта функция имеет особенность на линии интегрирования L . Результаты вычислений показали, что эту функцию можно аналитически продолжить с единичной окружности с центром в начале координат на достаточно широкую область, наибольшее расстояние границы которой от линии особенностей не превосходит 0, 2. Максимальная погрешность равна 0,05708610862.

Модельные примеры к разд. 4 главы VII

Постановка задачи. Задан куб, со стороной, равной 10 км, в основании которого расположено тело, создающее гравитационное поле \mathbf{F} . На верхней поверхности куба известны значения гравитационного поля с шагом 100 метров. Нужно вычислить значение гравитационного поля \mathbf{F} внутри куба.

Решение. Введем равномерную 3-мерную сетку в кубе. Вычислим с помощью интеграла Пуассона (формула (4.2) в главе VII) значение гравитационного поля \mathbf{F} на 1-м слое (саму поверхность считаем 0-м слоем), начиная сверху. Воспользуемся разностными схемами (формула (4.7) и аналогичные в главе VII) для вычисления значений поля на остальных слоях сетки.

Для сравнения значения поля на 1-м слое вычислим по разным кубатурным формулам (формула Симсона и формула Ньютона – Котеса третьего порядка).

Результаты расчетов приведены в таблице Н.2.

Для подтверждения эффективности предложенной вычислительной схемы приведем результаты расчетов, полученные в предположении, что заранее известны значения поля на нулевом и первом слоях равномерной сетки и на вертикальных границах. Результаты счета продолжения потенциального поля дискретным аналогом оператора Лапласа даны в таблице Н.3, в которой приведена погрешность реализации дискретной модели оператора Лапласа (100 узлов по вертикали).

Таблица Н.3

Номер слоя	Вычисление интеграла Пуассона по формуле Симсона		Вычисление интеграла Пуассона по формуле Ньютона – Котеса	
	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
1	0,072	$3,4 \cdot 10^{-4}$	0,018	$4,1 \cdot 10^{-5}$
2-30	0,241	0,005	0,173	0,006
31-50	0,489	0,093	0,354	0,071
51-70	1,998	0,211	1,681	0,157
71-80	8,412	0,831	7,236	0,758
81-90	28,910	1,651	23,570	1,462
91-95	472,300	3,122	383,500	2,321
96-98	7124,000	7,214	5924,000	6,127

Таблица Н.4

Номер слоя	Прямоугольная сетка 100×100 узлов на горизонтальной поверхности		Прямоугольная сетка 1000×1000 узлов на горизонтальной поверхности	
	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
2-30	0,116	0,005	0,081	0,004
31-50	0,277	0,051	0,187	0,041
51-70	1,481	0,135	0,968	0,124
71-80	4,914	0,511	3,714	0,481
81-90	13,790	0,943	9,364	0,840
91-95	128,500	1,294	111,500	1,131
96-98	4354,000	4,812	3275,000	3,587

Сравнивая эти результаты с результатами известных работ [7, 195, 196], отметим, что предлагаемые алгоритмы обладают значительными преимуществами перед известными:

- 1) применимы к произвольной поверхности Ляпунова;
- 2) требуют граничных значений только на одной разомкнутой поверхности;
- 3) обладают не меньшей точностью, чем известные.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Монография посвящена приближенным методам решения прямых и обратных задач гравиметрии и гравиразведки. Построены оптимальные по точности методы аппроксимации потенциальных полей, определенных в различных областях и создаваемых различными источниками. При этом исследованы различные способы приближения потенциальных полей – в виде непрерывных локальных сплайнов и в виде сопряженных функций, определяемых сингулярными и гиперсингулярными интегралами, а также многомерными интегралами типа Коши.

Подробно исследованы приближенные методы продолжения потенциальных полей. Аппаратом продолжения в двумерном случае являются интегралы Коши и нелинейные сингулярные интегральные уравнения, в трехмерном – многомерные интегралы типа Коши.

Предложены и обоснованы итерационные методы решения обратных задач логарифмического потенциала и ньютоновского потенциала.

Используя концепцию гиперсингулярных интегралов, построены оптимальные методы вычисления трансформаций потенциальных полей.

Монография отличается от известных работ по приближенным методам решения прямых и обратных задач гравиметрии и гравиразведки двумя концепциями: построением оптимальных методов и использованием гиперсингулярных интегралов.

Список литературы

- [1] Адамар, Ж. Исследование психологии процесса изобретения в области математики / Ж. Адамар. – М. : Совет. радио, 1970. – 152 с.
- [2] Адамар, Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа / Ж. Адамар. – М. : Наука, 1978. – 351 с.
- [3] Акимова, Е. Н. Решение обратной задачи магнитометрии с использованием параллельных технологий / Е. Н. Акимова, В. В. Васин, Г. Я. Пересторонина // Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей : материалы 33 сессии Международного семинара им. Д. Г. Успенского. – Екатеринбург, 2006. – С. 447–450.
- [4] Акимова, Е. Н. Параллельные алгоритмы решения обратной задачи гравиметрии и организация удаленного взаимодействия между МВС-1000 и пользователем / Е. Н. Акимова, Д. В. Гемайдинов // Вычислительные методы и программирование. – 2008. – Т. 9, № 1. – С. 133–144.
- [5] Алексидзе, М. А. Исследование некоторых вопросов трансформации потенциальных полей / М. А. Алексидзе, М. С. Гелашвили, К. М. Картвелишвили. – Тбилиси : Мецниереба, 1972. – 284 с.
- [6] Алексидзе, М. А. Приближенные методы решения прямых и обратных задач гравиметрии / М. А. Алексидзе – М. : Наука, 1987. – 336 с.
- [7] Арсанукаев, З. З. Восстановление гравитационного поля при решении дискретного уравнения Лапласа с различными краевыми условиями / З. З. Арсанукаев // Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей : материалы 33 сессии Международного семинара им. Д. Г. Успенского. – Екатеринбург, 2006. – С. 7–11.
- [8] Аронов, В. И. Методы математической обработки геологических данных на ЭВМ / В. И. Аронов. – М : Недра, 1977. – 168 с.
- [9] Аронов, В. И. Методы построения карт геолого-геофизических признаков и геометризация залежей нефти и газа на ЭВМ / В. И. Аронов. – М. : Недра, 1990. – 304 с.

- [10] Бабенко, К. И. О некоторых задачах теории приближений и численного анализа / К. И. Бабенко // Успехи математических наук. – 1985. – Т. 40, № 1. – С. 3–28.
- [11] Бабенко, К. И. Основы численного анализа / К. И. Бабенко. – М. : Наука, 1986. – 744 с.
- [12] Бакушинский, А. Б. О решении некоторых интегральных уравнений I рода методом последовательных приближений / А. Б. Бакушинский, В. Н. Страхов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1968. – Т. 8, № 1. – С. 181–185.
- [13] Бакушинский, А. Б. Применение алгоритмов итерационной регуляризации для решения обратных задач гравиметрии / А. Б. Бакушинский, А. В. Гончарский, Д. Д. Степанова // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. – 1986. – № 10. – С. 43–50.
- [14] Бакушинский, А. Б. Итеративные методы решения некорректных задач / А. Б. Бакушинский, А. В. Гончарский. – М. : Наука, 1989. – 130 с.
- [15] Бахвалов, Н. С. О свойствах оптимальных методов решения задач математической физики / Н. С. Бахвалов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1970. – Т. 10, № 3. – С. 555–568.
- [16] Бахвалов, Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М. : Бином. Лаборатория знаний, 2003. – 632 с.
- [17] Бенерджи, П. Метод граничных элементов в прикладных задачах / П. Бенерджи, Р. Батерфилд. – М. : Мир, 1984, – 494 с.
- [18] Бердичевский, М. Н. Возможности и проблемы современной магнитотеллурики / М. Н. Бердичевский, В. И. Дмитриев, М. С. Жданов // Известия РАН. Физика Земли. – 2010. – № 8. – С. 4–11.
- [19] Бирман, М. Ш. Кусочно-полиномиальные приближения функций классов W_p^r / М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк // Математический сборник. – 1967. – Т. 73, № 3. – С. 331–355.
- [20] Блох, Ю. И. Обнаружение и разделение гравитационных и магнитных аномалий / Ю. И. Блох. – М. : Московская государственная геологоразведочная академия, 1995. – 80 с.

- [21] Бойков, И. В. Некоторые вопросы приближенного решения нелинейных операторных уравнений методом Ньютона – Канторовича / И. В. Бойков // Сборник аспирантских работ. Сер. Точные науки. – Казань : Изд-во КГУ, 1970. – С. 82–94.
- [22] Бойков, И. В. Приближенное решение краевых задач и сингулярных интегральных уравнений со сдвигом / И. В. Бойков // Межвуз. сб. науч. тр. – Пенза : Изд-во ППИ, 1979. – Вып. 1. – С. 3–20.
- [23] Бойков, И. В. Об итерационных методах решения обратных задач магнито- и гравиметрии, представляемых интегральными уравнениями типа свертки / И. В. Бойков // Геофизический журнал. – 1991. – Т. 13, № 4. – С. 69–75.
- [24] Бойков, И. В. Пассивные и адаптивные алгоритмы приближенного вычисления сингулярных интегралов / И. В. Бойков. – Пенза : Изд-во Пенз. ГТУ, 1995. – ч. 1. – 214 с.
- [25] Бойков, И. В. Пассивные и адаптивные алгоритмы приближенного вычисления сингулярных интегралов / И. В. Бойков. – Пенза : Изд-во Пенз. ГТУ, 1995. – ч. 2. – 128 с.
- [26] Бойков, И. В. Метод локальных поправок в задачах аналитического продолжения / И. В. Бойков // Геофизический журнал. – 1995. – Т. 17, № 1. С. 42–49.
- [27] Бойков, И. В. О применении метода локальных поправок к приближенному решению обратных задач гравиметрии / И. В. Бойков // Физика Земли. – 1993. – № 3. – С. 86–90.
- [28] Бойков, И. В. Аппроксимация некоторых классов функций локальными сплайнами / И. В. Бойков // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1998. – Т. 38, № 1. – С. 25–33.
- [29] Бойков, И. В. Оптимальные алгоритмы восстановления функций и вычисления интегралов на одном классе бесконечно дифференцируемых функций / И. В. Бойков // Известия вузов. Математика. – 1998. – № 9. – С. 14–20.
- [30] Бойков, И. В. Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2004. – 316 с.
- [31] Бойков, И. В. Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Часть I. Сингулярные интегралы / И. В. Бойков. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2005. – 360 с.

- [32] Бойков, И. В. Оптимальные методы приближения функций и вычисления интегралов / И. В. Бойков. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2007. – 236 с.
- [33] Бойков, И. В. Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Часть II. Гиперсингулярные интегралы / И. В. Бойков. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2009. – 252 с.
- [34] Бойков, И. В. Метод сингулярных интегральных уравнений в задачах аналитического продолжения / И. В. Бойков, Н. Ю. Блинкова // Геофизический журнал. – 2000. – № 1. – С. 3–15.
- [35] Бойков, И. В. Оптимальные методы восстановления потенциальных полей / И. В. Бойков, А. И. Бойкова // Известия РАН. Физика Земли. – 1998. – № 8. – С. 70–78.
- [36] Бойков, И. В. Оптимальные методы восстановления потенциальных полей. I / И. В. Бойков, А. И. Бойкова // Известия РАН. Физика Земли. – 2001. – № 12. – С. 78–89.
- [37] Бойков, И. В. Оптимальные по точности методы восстановления потенциальных полей / И. В. Бойков, А. И. Бойкова // Вопросы теории и практики комплексной геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей : материалы международной школы-семинара. Т. 1. ОИФЗ. – М, 2001. – С. 65–76.
- [38] Бойков, И. В. Восстановление геофизических полей интерполяционными полиномами, составленными из потенциальных функций / И. В. Бойков, А. И. Бойкова // Известия РАН. Физика Земли. – 2002. – № 2. – С. 20–25.
- [39] Бойков, И. В. Оптимальные по точности методы восстановления потенциальных полей. II / И. В. Бойков, А. И. Бойкова // Известия РАН. Физика Земли. – 2003. – № 3. – С. 87–93.
- [40] Бойков, И. В. Оптимальные методы представления потенциальных полей / И. В. Бойков, А. И. Бойкова // Известия РАН. Физика Земли. – 2003. – № 4. – С. 68–76.
- [41] Бойков, И. В. Об одном параллельном методе решения нелинейных обратных задач гравиметрии и магнитометрии / И. В. Бойков, А. И. Бойкова // Известия РАН. Физика Земли. – 2009. – № 3. – С. 73–82.

- [42] Бойков, И. В. Итерационные методы решения одного класса уравнений в свертках / И. В. Бойков, А. И. Бойкова // Дифференциальные уравнения. – 2010. – Т. 46, № 9. – С. 1313–1319.
- [43] Бойков, И. В. Применение метода гомотопии к решению обратных задач теории потенциала / И. В. Бойков, А. И. Бойкова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 3. – С. 17–28.
- [44] Бойков, И. В. Оптимальные методы разделения потенциальных полей // Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей : материалы 33 сессии Международного семинара им. Д. Г. Успенского / И. В. Бойков, А. И. Бойкова, В. И. Крючко, А. В. Филиппов. – Екатеринбург, 2006. – С. 59–64.
- [45] Бойков, И. В. Оптимальные методы восстановления геофизических полей и их приложение к разделению потенциальных полей / И. В. Бойков, А. И. Бойкова, В. И. Крючко, А. В. Филиппов // Труды Средневолжского математического общества. – 2006. – Т. 8, № 1. – С. 13–23.
- [46] Бойков, И. В. Дискретные модели продолжения потенциальных полей / И. В. Бойков, А. И. Бойкова, В. И. Крючко, А. В. Филиппов // Геофизический журнал. – 2007. – Т. 29, № 4. – С. 67–82.
- [47] Бойков, И. В. Приближенное решение систем сингулярных интегральных уравнений на разомкнутых контурах интегрирования / И. В. Бойков, И. И. Жечев // Приложение функционального анализа к приближенным вычислениям. – Казань : Изд-во Казанского ун-та, 1974. – С. 24–40.
- [48] Бойков, И. В. Оптимальные квадратурные формулы для вычисления интегралов Пуассона и интегралов типа Коши / И. В. Бойков, Т. И. Жукова // Оптимальные методы вычислений и их применение к обработке информации : межвуз. сб. науч. тр. – Пенза : Изд-во Пенз. политехн. ин-та, 1992. – Вып. 11. – С. 45–86.
- [49] Бойков, И. В. Оптимальные методы восстановления потенциальных полей / И. В. Бойков, М. В. Кравченко // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 1. – С. 25–43.

- [50] Бойков, И. В. Приближенные методы глобального гармонического сферического анализа потенциальных полей / И. В. Бойков, М. В. Кравченко // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 4. – С. 101–110.
- [51] Бойков, И. В. О приближенном методе восстановления потенциальных полей / И. В. Бойков, М. В. Кравченко, В. И. Крючко // Известия РАН. Физика Земли. – 2010. – Т. 46, № 4. – С. 67–77.
- [52] Бойков, И. В. Приближенные методы восстановления потенциальных полей / И. В. Бойков, В. И. Крючко // Труды Средневолжского математического общества. – 2005. – Т. 7, № 1. – С. 163–168.
- [53] Бойков, И. В. Об одном приближенном методе продолжения потенциальных полей / И. В. Бойков, В. И. Крючко // Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей : материалы 33 сессии Международного семинара им. Д. Г. Успенского. – Екатеринбург, 2006. – С. 54–59.
- [54] Бойков, И. В. Двухступенчатый коллокационный метод разложения потенциальных полей по сферическим функциям / И. В. Бойков, В. И. Крючко // Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей : материалы 36 Международного симпозиума. – Казань : Изд-во Казанского государственного университета, 2009. – С. 55–58.
- [55] Бойков, И. В. Приближенное вычисление экстремальных значений гармонических функций / И. В. Бойков, Е. В. Кучумов // Математическое и компьютерное моделирование естественнонаучных и социальных проблем : сб. ст. IV Международной научно-технической конференции молодых специалистов, аспирантов и студентов. – Пенза : Приволжский Дом знаний, 2010. – С. 75–80.
- [56] Бойков, И. В. Об одном итерационном методе решения обратной задачи гравиметрии для контактной поверхности / И. В. Бойков, Н. В. Мойко // Известия РАН. Физика Земли. – 1999. – № 2. – С. 52–56.
- [57] Бойков, И. В. Численные методы восстановления измеряемых сигналов датчиков линейных скоростей движения в системах ди-

- агностики механизмов / И. В. Бойков, А. Н. Николаев, Т. В. Черушева // Проблемы машиностроения и автоматизации. – М. ; Будапешт, 1989. – Т. 26. – С. 28–33.
- [58] Бойков, И. В. Асимптотически оптимальные алгоритмы вычисления интегралов Пуассона, Шварца и типа Коши / И. В. Бойков, Т. И. Полякова // Оптимальные методы вычислений и их применение к обработке информации : межвуз. сб. науч. тр. – Пенза : Изд-во ПензГТУ, 1996. – Вып. 12. – С. 17–46.
- [59] Бойков, И. В. Приближенные методы идентификации динамических систем / И. В. Бойков, Т. В. Черушева // Измерительная техника. – 1992. – № 7. – С. 8–9.
- [60] Бойков, И. В. Итерационные методы восстановления пространственных изображений, искаженных системами с аберрацией / И. В. Бойков, Т. В. Черушева // Оптика и спектроскопия. – 1993. – Т. 74, № 2. – С. 412–421.
- [61] Бойков, И. В. Повышение точности приближенного вычисления поверхностных интегралов / И. В. Бойков, А. В. Филиппов // Надежность и качество : тр. Междунар. симпозиума. – Пенза, 2006. – С. 297–298.
- [62] Бойков, И. В. Оптимальные методы продолжения потенциальных полей и их приложение к решению обратных задач теории потенциала / И. В. Бойков, А. В. Филиппов // Труды Средневолжского математического общества. – 2007. – Т. 9, № 1. – С. 106–116.
- [63] Бойков, И. В. Приближенное решение обратной задачи гравиметрии методом Ньютона – Канторовича / И. В. Бойков, В. Е. Щукина // Известия АН СССР. Физика Земли. – 1989. – № 11. – С. 67–78.
- [64] Бойков, И. В. Об одном приближенном методе решения обратной задачи гравиметрии / И. В. Бойков, В. Е. Щукина // Известия АН СССР. Физика Земли. – 1992. – № 2. – С. 67–75.
- [65] Бойкова, А. И. Об одном классе интерполяционных полиномов / А. И. Бойкова // Оптимальные методы вычислений и их применение. – Пенза : Изд-во Пенз. ГТУ, 1996. – С. 141–148.

- [66] Бойкова, А. И. Об одном приближенном методе решения прямой задачи гравиметрии / А. И. Бойкова // Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей // Тезисы докладов международной конференции-семинара им. Д. Г. Успенского. – Ухта, 1998. – С. 44–46.
- [67] Бойкова, А. И. Об одном приближенном методе решения обратных задач гравиметрии / А. И. Бойкова // Геофизика и математика : материалы 1-й Всероссийской конференции. – М. : Объединенный институт физики Земли, 1999. – С. 17–20.
- [68] Бойкова, А. И. Об одном итерационном методе решения обратных задач гравиметрии / А. И. Бойкова // Вопросы теории и практики комплексной геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей : материалы международной школы-семинара. – М. : ОИФЗ РАН, 2001. – Т. 1. – С. 76–82.
- [69] Бойкова, А. И. Применение кубатурных формул к вычислению трансформации потенциальных полей / А. И. Бойкова // Кубатурные формулы и их приложения. – Уфа, 2001. – С. 34–37.
- [70] Бойкова, А. И. Кубатурные формулы на хаотических сетках / А. И. Бойкова // Надежность и качество : тр. Международного симпозиума. – Пенза, 1999. – С. 145–148.
- [71] Бойкова, А. И. Применение сферических функций к приближенному решению задач гравиметрии : дис. кан. физ.-мат. наук / А. И. Бойкова. – М. : Объединенный институт физики Земли, 2000. – 218 с.
- [72] Бойкова, А. И. Об одном приближенном методе вычисления трансформаций потенциальных полей / А. И. Бойкова // Известия РАН. Физика Земли. – 2004. – № 1. – С. 58–69.
- [73] Бойкова, А. И. Оптимальные методы вычисления трансформаций потенциальных полей / А. И. Бойкова // Известия РАН. Физика Земли. – 2008. – Т. 44, № 4. – С. 83–92.
- [74] Бродский, М. А. О единственности в обратной задаче гравиметрии для однородных многогранников / М. А. Бродский // Известия АН СССР. Физика Земли. – 1983. – № 12. – С. 60–67.

- [75] Бродский, М. А. О решении обратной задачи потенциала для многогранников с переменными полиномиальными плотностями / М. А. Бродский, В. Н. Страхов // ДАН СССР. – 1987. – Т. 293, № 2. – С. 336–339.
- [76] Булах, Е. Г. Применение метода минимизации для решения задач структурной геологии по данным гравиразведки / Е. Г. Булах, В. А. Ржаницын, В. Н. Маркова. – Киев : Наукова думка, 1976. – 219 с.
- [77] Василенко, Г. И. Теория восстановления сигналов / Г. И. Василенко. – М. : Сов. радио, 1979. – 272 с.
- [78] Василенко, Г. И. Восстановление изображений / Г. И. Василенко, А. М. Тараторин. – М. : Радио и связь, 1986. – 304 с.
- [79] Васин, В. В. Решение трехмерных обратных задач гравиметрии и магнитометрии для трехслойной среды / В. В. Васин, Г. Я. Пересторина, И. Л. Пруткин, Л. Ю. Тимерханова // Математическое моделирование. – 2003. – Т. 15, № 2. – С. 69–76.
- [80] Векуа, И. Н. Обобщенные аналитические функции / И. Н. Векуа. – М. : Наука. 1988. – 512 с.
- [81] Верлань, А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. – Киев : Наукова думка, 1986. – 544 с.
- [82] Веселов, В. В. Вариационный подход к задачам интерполяции физических полей / В. В. Веселов, Д. П. Гонтов, Л. М. Пустыльников. – М. : Наука, 1983. – 171 с.
- [83] Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей. – М. : ОИФЗ РАН, 1997. – 122 с.
- [84] Вороновская, Е. В. Определение асимптотического вида приближения функций полиномами С. Н. Бернштейна / Е. В. Вороновская // ДАН СССР, Серия (А). – 1932. – С. 79–85.
- [85] Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1967. – 576 с.
- [86] Гахов, Ф. Д. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – М. : ГИФМЛ, 1963. – 639 с.

- [87] Гахов, Ф. Д. Уравнения типа свертки / Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский. – М. : Наука, 1978. – 296 с.
- [88] Гаусс, К. Ф. Избранные труды по земному магнетизму / К. Ф. Гаусс. – Л. : Академия Наук СССР, 1952. – 344 с.
- [89] Гаусс, К. Ф. Избранные геодезические сочинения / К. Ф. Гаусс. – М. : Геодезиздат, 1957. – 144 с.
- [90] Гельфанд, И. М. Обобщенные функции и действия над ними / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шиллов. – Вып. 1. – М. : ГИФМЛ, 1956. – 439 с.
- [91] Гласко, В. Б. О восстановлении глубин и формы контактной поверхности на основе регуляризации / В. Б. Гласко, А. Х. Остромогильный, В. Г. Филатов // Журнал вычислительной математики и математической физики – 1970. – Т. 10, № 5. – С. 1292–1297.
- [92] Гобсон, Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций / Е. В. Гобсон. – М. : ИЛ, 1952; 1987. 476 с.
- [93] Гончаров, В. Л. Теория интерполирования и приближения функций / В. Л. Гончаров. – М. : Гостехиздат, 1954. – 270 с.
- [94] Гордин, В. М. Применение критерия Колмогорова – Винера при решении задач фильтрации и разделения геофизических аномалий / В. М. Гордин, В. О. Михайлов // Известия АН СССР. Физика Земли. – 1977. – № 2. – С. 48–62.
- [95] Гохберг, И. Ц. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения / И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман. – М. : Наука, 1971. – 352 с.
- [96] Гравиразведка / под ред. Е. А. Мудрецов. – М. : Наука, 1981. – 397 с.
- [97] Гравиразведка / под ред. Е. А. Мудрецов и К. Е. Веселова. – М. : Недра, 1990. – 607 с.
- [98] Голиздра, Г. Я. Особые точки аналитического продолжения гравитационного поля и их связь с формой возмущающих масс / Г. Я. Голиздра // Дополнительные главы курса гравиразведки и магниторазведки. – Новосибирск : Наука, 1966. – С. 273–388.

- [99] Гюнтер, Н. М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики / Н. М. Гюнтер. – М. : ГИТТЛ, 1953. – 415 с.
- [100] Данфорд, Н. Линейные операторы. Т. 1. Общая теория / Н. Данфорд, Дж. Шварц. – М. : ИЛ, 1962. – 896 с.
- [101] Деч, Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования / Г. Деч. – М. : Наука, 1971. – 288 с.
- [102] Добровольский, И. П. Гравитационные предвестники тектонического землетрясения / И. П. Добровольский // Известия РАН. Физика Земли. – 2005. – № 4. – С. 23–28.
- [103] Жданов, М. С. Аналоги интеграла типа Коши в теории геофизических полей / М. С. Жданов. – М. : Наука, 1984. – 327 с.
- [104] Жданов, М. С. Совместная трехмерная инверсия магнитотеллурических и магнитовариационных данных / М. С. Жданов, В. И. Дмитриев, А. В. Грибенко // Физика Земли. – 2010. – № 8. – С. 12–26.
- [105] Задирака, В. К. Теория вычисления преобразования Фурье / В. К. Задирака. – Киев : Наукова думка, 1983. – 213 с.
- [106] Заморев, А. А. Решение обратной задачи теории потенциала / А. А. Заморев. – ДАН СССР. – 1941. – Т. 32, № 8. – С. 546–547.
- [107] Заморев, А. А. Определение формы тела по производным внешнего гравитационного потенциала / А. А. Заморев // Известия АН СССР. Геогр. и геофиз. – 1942. – № 1. С. 48–54.
- [108] Иванов, В. К. Интегральное уравнение обратной задачи логарифмического потенциала / В. К. Иванов // ДАН СССР. – 1955. – Т. 105, № 3. – С. 409–412.
- [109] Иванов, В. К. О разрешимости обратной задачи логарифмического потенциала в конечном виде / В. К. Иванов // ДАН СССР. – 1956. – Т. 106, № 4. – С. 598–593.
- [110] Иванов, В. К. Обратная задача теории потенциала для тела, близкого к данному / В. К. Иванов // Известия АН СССР. Математика. – 1956. – Т. 20. – С. 793–818.

- [111] Иванов, В. К. Теория единственности обратной задачи логарифмического потенциала для звездных множеств / В. К. Иванов // Известия вузов. Математика. – 1958. – № 3. – С. 99–106.
- [112] Иванов, В. К. О линейных некорректных задачах / В. К. Иванов // ДАН СССР. – 1962. – Т. 145, № 2. – С. 270–272.
- [113] Иванов, В. К. Теория линейных некорректных задач и ее приложения / В. К. Иванов, В. В. Васин, В. П. Танака. – М. : Наука, 1976. – 206 с.
- [114] Интегральные уравнения. Справочная математическая библиотека. – М. : Наука, 1968. – 448 с.
- [115] Кабан, М. К. Новые возможности гравитационного моделирования с использованием данных спутников CHAMP и GRACE / М. К. Кабан, К. Райгбер // Физика Земли. – 2005. – № 11. – С. 101–109.
- [116] Канторович, Л. В. О сходимости последовательности полиномов С. Н. Бернштейна за пределами основного интервала / Л. В. Канторович // Известия АН СССР. Физ.-мат. – 1931. – С. 1103–1115.
- [117] Канторович, Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М. : Наука, 1977. – 744 с.
- [118] Колтон, Д. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния / Д. Колтон, Р. Кресс. – М. : Мир, 1987. – 311 с.
- [119] Корнейчук, Н. П. Точные константы в теории приближения / Н. П. Корнейчук. – М. : Наука, 1987. – 424 с.
- [120] Красносельский, М. А. Приближенное решение операторных уравнений / М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко и др. – М. : Наука, 1969. – 456 с.
- [121] Крылов, В. И. Приближенное вычисление интегралов / В. И. Крылов. – М. : Наука, 1967. – 500 с.
- [122] Кудря, А. В. Решение обратной задачи гравиметрии по гармоническим моментам гравитационного поля / А. В. Кудря // ДАН СССР. – 1972. – Т. 205, № 2. – С. 574–577.
- [123] Кук, Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей / Р. Кук. – М. : ИЛ, 1960. – 472 с.

- [124] Лаврентьев, М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики / М. М. Лаврентьев. – Новосибирск : Изд-во СО АН СССР, 1962. – 92 с.
- [125] Лаврентьев, М. М. Некорректные задачи математической физики и анализа / М. М. Лаврентьев, В. Г. Романов, С. П. Шишатских. – М. : Наука, 1980. – 288 с.
- [126] Ланцош, К. Практические методы прикладного анализа / К. Ланцош. – М. : ГИФМЛ, 1961. – 524 с.
- [127] Лебедев, В. И. Вычисление интегралов в смысле главного значения, весов и узлов квадратурных формул Гаусса / В. И. Лебедев, О. В. Бабурин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1965. – Т. 5, № 3. – С. 454–462.
- [128] Линьков, А. М. Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости / А. М. Линьков. – СПб, 1999. – 382 с.
- [129] Литвинчук, Г. С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом / Г. С. Литвинчук. – М. : Наука, 1977. – 448 с.
- [130] Люстерник, Л. А. Элементы функционального анализа / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. – М. : Наука, 1965. – 510 с.
- [131] Магарил-Ильяев, Г. Г. φ -средние поперечники классов функций на прямой / Г. Г. Магарил-Ильяев // Успехи математических наук. – 1990. – Т. 45, № 2. – С. 211–212.
- [132] Маловичко, А. К. Гравиразведка / А. К. Маловичко, В. И. Костицын. – М. : Недра, 1992. – 357 с.
- [133] Мартышко, П. С. Построение региональных геофизических моделей на основе комплексной интерпретации гравитационных и сейсмических данных / П. С. Мартышко, И. В. Ладовский, И. В. Цидаев // Известия РАН. Физика Земли. – 2010. – № 11. – С. 23–35.
- [134] Мартышко, П. С. Технология разделения источников гравитационного поля по глубине / П. С. Мартышко, И. Л. Пруткин // Геофизический журнал. – 2003. – Т. 25, № 3. – С. 159–168.
- [135] Матвеев, О. В. Методы приближенного восстановления функций, заданных на хаотических сетках / О. В. Матвеев // Известия РАН. Математика. – 1996. – Т. 60, № 5. – С. 111–156.

- [136] Михайлов, В. О. Некоторые вопросы интерпретации данных тензорной градиентометрии / В. О. Михайлов, М. Диаман // Известия РАН. Физика Земли. – 2006. – № 12. – С. 3–10.
- [137] Михлин, С. Г. Курс математической физики / С. Г. Михлин. – СПб. : Лань, 2002. – 575 с.
- [138] Мориц, Г. Современная физическая геодезия / Г. Мориц. – М. : Недра, 1983. – 392 с.
- [139] Моторный, В. П. О наилучшей квадратурной формуле вида $\sum_{k=1}^n p_k f(x_k)$ для некоторых классов периодических дифференцируемых функций / В. П. Моторный // Известия АН СССР. Математика. – 1974. – № 3. – С. 583–614.
- [140] Натансон, И. П. Конструктивная теория функций / И. П. Натансон. – М.; Л, 1949. – 688 с.
- [141] Никольский, С. М. Квадратурные формулы / С. М. Никольский. – М. : Наука, 1979. – 254 с.
- [142] Никольский, С. М. Курс математического анализа / С. М. Никольский. – М. : Наука, 1975. – Т. 1. – 432 с.
- [143] Никольский, С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С. М. Никольский. – М. : Наука, 1977. – 456 с.
- [144] Новиков, П. С. О единственности обратной задачи потенциала / П. С. Новиков // ДАН СССР. – 1938. – Т. 18, № 3. – С. 165–168.
- [145] Обломская, Л. Я. О методах последовательных приближений для линейных уравнений / Л. Я. Обломская // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1968. – Т. 8, № 2. – С. 417–426.
- [146] Оганесян, С. М. Тела нулевого внешнего гравитационного потенциала: о забытых работах и современном состоянии теории / С. М. Оганесян, В. И. Старостенко // Известия АН СССР. Физика Земли. – 1985. – № 3. – С. 49–62.
- [147] Пеллинен, Л. П. Высшая геодезия (теоретическая геодезия) / Л. П. Пеллинен. – М. : Недра, 1978. – 264 с.
- [148] Препарата, Ф. Вычислительная геометрия: Введение / Ф. Препарата, М. Шеймос. – М. : Мир, 1989. – 478 с.

- [149] Привалов, И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного / И. И. Привалов. – М. : Наука, 1984. – 432 с.
- [150] Прилепко, А. И. Обратные задачи теории потенциала / А. И. Прилепко // Математические заметки. – 1973. – Вып. 14, № 5. – С. 755–765.
- [151] Прилепко, А. И. О разрешимости обратной задачи объемного потенциала переменной плотности для тела, близкого к данному / А. И. Прилепко // Сибирский математический журнал. – 1970. – Т. 11, № 6. – С. 1321–1333.
- [152] Проскуряков, И. В. Сборник задач по линейной алгебре / И. В. Проскуряков. – М. : Наука, 1967. – 384 с.
- [153] Прудников, А. Н. Интегралы и ряды / А. Н. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. – М. : Наука. 1981. – 800 с.
- [154] Пруткин, И. Л. О приближенном решении трехмерных обратных задач гравиметрии и магнитометрии методом локальных поправок / И. Л. Пруткин // Известия АН СССР. Физика Земли. – 1983. – Т. 1. – С. 53–58.
- [155] Пруткин, И. Л. О предварительной обработке измерений, заданных на площади / И. Л. Пруткин // Методы интерпретации и моделирования геофизических полей. – Свердловск : Изд-во УрО АН СССР, 1988. – С. 11–15.
- [156] Раковщик, Л. С. О методе Ньютона – Канторовича / Л. С. Раковщик // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1968. – Т. 8, № 6. – С. 1207–1217.
- [157] Раппопорт, И. М. О плоской обратной задаче потенциала / И. М. Раппопорт // ДАН СССР. – 1940. – Т. 28, № 4. – С. 305–309.
- [158] Раппопорт, И. М. О некоторых достаточных условиях единственности решения обратной задачи теории потенциала / И. М. Раппопорт // Доклады АН УССР. – 1940. – № 6. – С. 501–504.
- [159] Роббинс, Г. Принципы обратной фильтрации для линейных пространственно зависимых систем отображения / Г. Роббинс, Т. Хуанг // Обработка изображений при помощи цифровых вычислительных машин. – М., 1973. – С. 163–174.

- [160] Роджерс, К. Укладки и покрытия / К. Роджерс. – М. : Мир, 1968. – 134 с.
- [161] Савчук, А. Пространственно зависимые искажения изображения, вызванные движением, и реставрация изображений / А. Савчук // Обработка изображений при помощи цифровых вычислительных машин. – М. : Наука, 1973. – С. 153–162.
- [162] Сеге, Г. Ортогональные многочлены / Г. Сеге. – М. : ИЛ, 1962. – 500 с.
- [163] Сейсмическая томография / под ред. Г. Нолета. – М. : Мир, 1990. – 416 с.
- [164] Сизиков, В. С. Математические методы обработки результатов измерений / В. С. Сизиков. – СПб. : Политехника, 2001 – 240 с.
- [165] Сизиков, В. С. Моделирование месторождений сфероидами / В. С. Сизиков, И. Н. Голов // Известия РАН. Физика Земли. – 2009. – № 3. – С. 83–96.
- [166] Скворцов, А. В. Применение триангуляции для решения задач вычислительной геометрии / А. В. Скворцов, Ю. Л. Костюк // Геоинформатика: Теория и практика. – Вып. 1. – Томск, 1998. – С. 127–138.
- [167] Смоляк, С. А. Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них : дис. ... канд. физ.-мат. наук / С. А. Смоляк. – М. : МГУ, 1965. – 140 с.
- [168] Соболев, С. Л. Введение в теорию кубатурных формул / С. Л. Соболев. – М. : Наука, 1974. – 808 с.
- [169] Сретенский, Л. Н. Теория ньютоновского потенциала / Л. Н. Сретенский. – М. : Гостехиздат, 1946. – 318 с.
- [170] Старостенко, В. И. Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии / В. И. Старостенко. – Киев : Наукова думка, 1978. – 226 с.
- [171] Старостенко, В. И. Решение прямой задачи гравиметрии на шарообразной Земле / В. И. Старостенко, А. Г. Манукян // Известия АН СССР. Физика Земли. – 1984. – № 12. – С. 11–17.

- [172] Старостенко, В. И. Методы решения прямых задач гравиметрии и магнитометрии на шарообразных планетах / В. И. Старостенко, А. Г. Манукян, А. Н. Заворотько. – Киев : Наукова думка, 1986. – 112 с.
- [173] Старостенко, В. И. Обратная задача гравиметрии для контактной поверхности. I / В. И. Старостенко, Н. Н. Черная, А. В. Черный. – Известия РАН. Физика Земли. – 1992. – № 6. – С. 48–58.
- [174] Старостенко, В. И. Обратная задача гравиметрии для контактной поверхности. II / В. И. Старостенко, Н. Н. Черная, А. В. Черный. – Известия РАН. Физика Земли. – 1993. – № 7. – С. 47–56.
- [175] Старостенко, В. И. Обратная задача гравиметрии для контактной поверхности. III / В. И. Старостенко, Н. Н. Черная, А. В. Черный. – Известия РАН. Физика Земли. – 1993. – № 7. – С. 57–66.
- [176] Старостенко, В. И. Интеграл Шварца для полосы и его приложения в геофизике / В. И. Старостенко, О. А. Кислинская // Доклады Академии наук Украины. – 1993. – № 10. – С. 126–129.
- [177] Старостенко, В. И. Магнитные поля трехмерных анизотропных тел: теория и практика вычислений / В. И. Старостенко, В. Н. Шуман, И. Н. Иващенко и др. – Известия РАН. Физика Земли. – 2009. – № 8. – С. 20–35.
- [178] Страхов, В. Н. К вопросу о точности задания гармонических функций их значениями в узлах прямоугольной сети / В. Н. Страхов // Геология и геофизика. – 1964. – № 3. – С. 112–139.
- [179] Страхов, В. Н. К вопросу о построении наилучших вычислительных схем для трансформации потенциальных полей / В. Н. Страхов // Известия АН СССР. Физика Земли. – 1965. – № 11. – С. 35–47.
- [180] Страхов, В. Н. О решении линейных некорректных задач в гильбертовом пространстве / В. Н. Страхов // Дифференциальные уравнения. – 1970. – Т. 6, № 8. – С. 1490–1495.
- [181] Страхов, В. Н. К теории плоской обратной задачи магнитного потенциала при переменной намагниченности / В. Н. Страхов // Известия АН СССР. Физика Земли. – 1970. – № 3. – С. 44–58.
- [182] Страхов, В. Н. Некоторые вопросы плоской обратной задачи магнитного потенциала / В. Н. Страхов // Известия АН СССР. Физика Земли. – 1970. – № 9. – С. 31–41.

- [183] Страхов, В. Н. Некоторые вопросы плоской задачи гравиметрии / В. Н. Страхов // Известия АН СССР. Физика Земли. – 1970. – № 12. – С. 32–44.
- [184] Страхов, В. Н. К теории обратной задачи логарифмического потенциала для контактной поверхности / В. Н. Страхов // Известия АН СССР. Физика Земли. – 1974. – № 2. – С. 43–65.
- [185] Страхов, В. Н. Эквивалентность в плоской задаче гравиметрии при переменной плотности масс / В. Н. Страхов // Известия АН СССР. Физика Земли. – 1977. – № 5. – С. 48–60.
- [186] Страхов, В. Н. Современные проблемы математической теории задач гравиметрии и магнитометрии / В. Н. Страхов // Известия АН СССР. Физика Земли. – 1979. – № 8. – С. 3–28.
- [187] Страхов, В. Н. Эквивалентность к обратной задаче гравиметрии и возможности ее практического использования при интерпретации гравитационных аномалий. II / В. Н. Страхов // Известия АН СССР. Физика Земли. – 1980. – № 9. – С. 38–69.
- [188] Страхов, В. Н. О синтезе разложения внешнего гравитационного потенциала в ряд по шаровым функциям / В. Н. Страхов // ДАН СССР. 1980. – Т. 254, № 4. – С. 839–841.
- [189] Страхов, В. Н. Будущее теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий / В. Н. Страхов // Комплексные исследования по физике Земли. – М. : Наука, 1989. – С. 68–88.
- [190] Страхов, В. Н. Основные направления развития теории и методологии интерпретации геофизических данных на рубеже XXI столетия. I / В. Н. Страхов // Geofizika, Euro-Asian Geophysical Society Journal. – 1995. – № 3. – С. 9–18.
- [191] Страхов, В. Н. Основные направления развития теории и методологии интерпретации геофизических данных на рубеже XXI столетия. II / В. Н. Страхов // Geofizika, Euro-Asian Geophysical Society Journal. – 1995. – № 4. – С. 10–20.
- [192] Страхов, В. Н. Третья парадигма в теории и практике интерпретации потенциальных полей (гравитационных и магнитных аномалий). Часть I / В. Н. Страхов // Вестник ОГГГН РАН. – 1997. – № 1. – С. 163–198.

- [193] Страхов, В. Н. Третья парадигма в теории и практике интерпретации потенциальных полей (гравитационных и магнитных аномалий). Часть II / В. Н. Страхов // Вестник ОГГГГН РАН. – 1997. – № 2. – С. 56–82.
- [194] Страхов, В. Н. Третья парадигма в теории и практике интерпретации потенциальных полей (гравитационных и магнитных аномалий). Часть III / В. Н. Страхов // Вестник ОГГГГН РАН. – 1998. – № 1. – С. 100–152.
- [195] Страхов, В. Н. Высокоточные дискретные аппроксимации оператора Лапласа и их использование в проблеме нахождения пространственного распределения аномальных гравитационных полей. Случай двумерной задачи / В. Н. Страхов, З. З. Арсанукаев // Актуальные вопросы математической геофизики. Т. 2. Ч. 1. – М. : ОИФЗ РАН, 2001. – С. 193–202.
- [196] Страхов, В. Н. Теория дискретного гравитационного поля (двумерный вариант) и ее использование при решении задач гравиметрии / В. Н. Страхов, З. З. Арсанукаев // Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей : материалы 28-й сессии Междунар. семинара им. Д. Г. Успенского (Екатеринбург). – М. : ОИФЗ РАН, 2002. – Ч. 2. – С. 73–77.
- [197] Страхов, В. Н. О приближенном представлении потенциальных геофизических полей / В. Н. Страхов, А. И. Бойкова // Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей. – М. : ОИФЗ РАН, 1997. – С. 111–115.
- [198] Страхов, В. Н. Об одной модификации монтажного метода / В. Н. Страхов, А. И. Бойкова // Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей. – М. : ОИФЗ РАН, 2000. – С. 489–495.
- [199] Страхов, В. Н. О решении линейных обратных задач гравиразведки / В. Н. Страхов, Т. А. Гванцеладзе // Сообщения АН ГССР. – 1989. – Т. 33, № 2. – С. 289–292.
- [200] Страхов, В. Н. Методы синтеза рядов по шаровым функциям, представляющих элементы потенциальных геофизических полей /

- В. Н. Страхов, А. Б. Ефимов, М. М. Хохрякова // Известия АН СССР. Физика Земли. – 1988. – № 5. – С. 41–57.
- [201] Страхов, В. Н. Метод аналитического продолжения трехмерных потенциальных полей / В. Н. Страхов, С. Н. Иванов // Теория и практика геологической интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. – Алма-Ата, 1984. – Т. 2. – С. 68–70.
- [202] Страхов, В. Н. Монтажный метод решения обратной задачи гравиметрии / В. Н. Страхов, М. И. Лапина // Доклады АН СССР. – 1976. – Т. 227, № 2. – С. 344–347.
- [203] Страхов, В. Н. Методы решения прямых задач гравиметрии, используемые при моделировании глобальных и региональных гравитационных аномалий / В. Н. Страхов, Т. В. Романюк, Н. К. Фролова // Новые методы интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. – М. : Ин-т Физики Земли АН СССР, 1989. – С. 118–236.
- [204] Страхов, В. Н. Аппроксимация и оптимизация при решении прямой задачи гравиметрии и магнитометрии / В. Н. Страхов, К. М. Успенская // Известия АН СССР. Физика Земли. – 1979. – № 5. – С. 56–80.
- [205] Суетин, П. К. Классические ортогональные многочлены / П. К. Суетин. – М. : Наука, 1976. – 382 с.
- [206] Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики / под ред. К. И. Бабенко. – М. : Наука, 1979. – 196 с.
- [207] Теребиж, В. Восстановление изображений при минимальной априорной информации / В. Теребиж // Успехи физических наук. – 1995. – № 2. – С. 143–176.
- [208] Тиман, А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного / А. Ф. Тиман. – М. : Физматгиз, 1960. – 624 с.
- [209] Тиман, А. Ф. Введение в теорию гармонических функций / А. Ф. Тиман, В. Н. Трофимов. – М. : Физматгиз, 1968. – 208 с.
- [210] Тихомиров, В. М. Теория приближений / В. М. Тихомиров // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. – М. : Наука, 1987. – Т. 14. – С. 103–269.

- [211] Тихонов, А. Н. О решении некорректно поставленных задач / А. Н. Тихонов // Доклады АН СССР. – 1963. – Т. 153, № 1. – С. 49–52.
- [212] Тихонов, А. Н. О решении нелинейных интегральных уравнений первого рода / А. Н. Тихонов // Доклады АН СССР. – 1964. – Т. 156, № 6. – С. 1296–1299.
- [213] Тихонов, А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М. : Наука, 1974. – 224 с.
- [214] Тихонов, А. Н. Применение метода регуляризации в нелинейных задачах / А. Н. Тихонов, В. Б. Гласко // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1965. – Т. 5, № 3. – С. 463–473.
- [215] Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 2004. – 798 с.
- [216] Тот, Л. Ф. Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве / Л. Ф. Тот. – М. : Мир, 1958. – 364 с.
- [217] Филатов, В. Г. Применение метода Тсубои в обратных задачах гравиразведки / В. Г. Филатов // Прикладная геофизика. – Вып. 68. – М. : Недра, 1972. – С. 147–152.
- [218] Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Физматлит, 2001. – Т. 3. – 662 с.
- [219] Фридман, В. М. Метод последовательных приближений для интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода / В. М. Фридман // Успехи математических наук. – 1956. – Т. XI, № 1. – С. 233–234.
- [220] Харди, Г. Г. Расходящиеся ряды / Г. Г. Харди. – М. : ИЛ, 1951. – 504 с.
- [221] Харди, Г. Г. Неравенства / Г. Г. Харди, Д. Е. Литлвуд, Г. М. Полиа. – М. : ИЛ, 1948. – 456 с.
- [222] Хачай, О. А. Об интерпретации повысотных аэромагнитных наблюдений / О. А. Хачай, А. В. Цирульский // Известия АН СССР. Физика Земли. – 1988. – № 12. – С. 47–56.

- [223] Хургин, Я. И. Фinitные функции в физике и технике / Я. И. Хургин, В. П. Яковлев. – М. : Наука, 1971. – 408 с.
- [224] Цалюк, З. Б. Интегральные уравнения Вольтерра / З. Б. Цалюк // Итоги науки и техники. Математический анализ. – 1979. – Т. 17. – С. 131–198.
- [225] Цирульский, А. В. О некоторых свойствах комплексного логарифмического потенциала однородной области / А. В. Цирульский // Известия АН СССР. Серия геофизическая. – 1963. – № 7. – С. 1072–1076.
- [226] Цирульский, А. В. О связи задачи аналитического продолжения логарифмического потенциала с проблемой определения границ возмущающей области / А. В. Цирульский // Известия АН СССР. Серия геофизическая. – 1964. – № 11. – С. 1646–1693.
- [227] Цирульский, А. В. О единственности решения обратной задачи теории потенциала / А. В. Цирульский // Известия АН СССР. Физика Земли. – 1969. – № 6. – С. 60–65.
- [228] Цирульский, А. В. О решении прямой и обратной задачи гравиметрии / А. В. Цирульский // Известия АН СССР. Физика Земли. – 1974. – № 7. – С. 84–90.
- [229] Цирульский, А. В. О решении обратной задачи гравиметрии для произвольных классов двумерных и трехмерных потенциалов / А. В. Цирульский, И. Л. Пруткин // Известия АН СССР. Физика Земли. – 1981. – № 11. – С. 54–61.
- [230] Чередниченко, В. Г. О разрешимости "в малом" обратной задачи логарифмического потенциала / В. Г. Чередниченко // Дифференциальные уравнения. – 1975. – Т. 11, № 1. – С. 161–169.
- [231] Чередниченко, В. Г. О разрешимости "в малом" обратной задачи потенциала с переменной плотностью в двумерном случае / В. Г. Чередниченко // Сибирский математический журнал. – 1976. – Т. 17, № 5. – С. 1168–1176.
- [232] Чередниченко, В. Г. Обратная задача для потенциала слоистых сред в двумерном случае / В. Г. Чередниченко // Дифференциальные уравнения. – 1978. – Т. 14, № 1. – С. 140–147.

- [233] Чередниченко, В. Г. Достаточные условия разрешимости обратной задачи потенциала на плоскости / В. Г. Чередниченко // Известия АН СССР. Физика Земли. – 1982. – № 11. – С. 33–38.
- [234] Чередниченко, В. Г. Об обратной задаче сопряжения гармонических функций и обратной к ней / В. Г. Чередниченко // Дифференциальные уравнения. – 1982. – Т. 18, № 4. – С. 282–289.
- [235] Чикин, Л. А. Особые случаи краевой задачи Римана и сингулярных интегральных уравнений / Л. А. Чикин // Ученые записки Казанского государственного университета. – 1953. – Т. 113, № 10. – С. 57–105.
- [236] Шалаев, С. В. Геологическое истолкование геофизических аномалий с помощью линейного программирования / С. В. Шалаев. – Л. : Недра, 1972. – 144 с.
- [237] Шафер, Р. У. Итерационные алгоритмы восстановления сигналов при наличии ограничений / Р. У. Шафер, Р. М. Мерсеро, М. А. Ричардс // ТИИЭР. – 1981. – Т. 69, № 4. – С. 34–55.
- [238] Шрайбман, В. И. Корреляционные методы преобразования и интерпретации геофизических аномалий / В. И. Шрайбман, М. С. Жданов, О. В. Витвицкий. – М. : Недра, 1977. – 237 с.
- [239] Янке, Е. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. – М. : Наука, 1964. – 344 с.
- [240] Baker, C. T. H. A perspective on the numerical treatment of Volterra equations / C. T. Baker // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2000. – V. 125. – P. 217–249.
- [241] Bethencourt, A. Using personal computers in spherical harmonic synthesis of high degree earth geopotential models / A. Bethencourt, O. Wang, C. Rizos, A. H. W. Kearsley // Dynamic Planet. – 2005. – P. 125–130.
- [242] Boikov, I. V. Numerical methods of computation of singular and hypersingular integrals / I. V. Boikov // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. – 2001. – V. 28, № 3. – P. 127–179.
- [243] Boykov, I. V. Fundamental Solutions for Thick Sandwich Plate / I. V. Boykov, A. I. Boykova, E. S. Ventsel // Engineering Analysis and Boundary Elements. – 2004. – V. 28. – P. 1437–1444.

- [244] Boykov, I. V. An approximation methods for evaluating hypersingular integrals / I. V. Boykov, A. I. Boykova, E. S. Ventsel // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2006. – V. 30. – P. 799–807.
- [245] Boykov, I. V. Accuracy optimal methods for evaluating hypersingular integrals / I. V. Boykov, E. S. Ventsel, A. I. Boykova // Applied Numerical Mathematics. – 2009. – V. 59, № 6. – P. 1366–1385.
- [246] Boykov, I. V. Optimal approximation and Kolmogorov widths estimates for certain singular classes related to equations of mathematical physics / I. V. Boykov // arXiv. math 1303.0416
- [247] Brunner, H. On the History of Numerical Methods for Volterra Integral Equations / H. Brunner. – CWI Newsletter, 1986. – № 11. – 20 p.
- [248] Brunner, H. The Numerical Solution of Volterra Equations / H. Brunner. – Amsterdam, 1986. – 588 p.
- [249] Colombo, O. L. Numerical Methods for Harmonic Analysis on the Sphere / O. L. Colombo. – Ohio : The Ohio State University. Department of Geodetic Science and Surveying, 1981. – 310 p.
- [250] Ellsaesser, H. W. Expansion of Hemispheric Meteorological Data in Antisymmetric Surface Spherical Harmonic (Laplace) Series / H. W. Ellsaesser // J. Appl. Meteorology. – 1966. – № 5. – P. 263–276.
- [251] DeVore, R. A. Constructive Approximation / R. A. DeVore, G. G. Lorentz. – Springer, 1993. – 449 p.
- [252] Fletcher, R. Practical methods of optimization / R. Fletcher. – New York : John Willey and Sons, Chichester, 1995. – 436 p.
- [253] Gerya, T. Introduction to Numerical Geodynamics Modelling / T. Gerya. – Cambridge, 2010. – 345 p.
- [254] Hadamard, J. Lecons sur la propagation des ondes et les equations de l'hydrodynamics Herman / J. Hadamar. – Paris : Herman, 1903. – 240 p.
- [255] Hajela, D. P. Optimal Estimation on High Degree Gravity Field from a Global Set of $1^0 \times 1^0$ Anomalies to Degree and Order 250 / D. P. Hajela // Department of Science Science and Surveying. – Columbus : The Ohio State University. Ohio, – 358 p.

- [256] Hobson, E. W. The theory of spherical and ellipsoidal harmonics / E. W. Hobson. – Cambridge of the University press, 1931. – 514 p.
- [257] Hofsommer, D. J. On the Expansion of a Function in a Series of Spherical Harmonics / D. J. Hofsommer. – Amsterdam : Computation Department of the Mathematical Centre, 1957. – 344 p.
- [258] Kac, M. Une remarque sur les polynomes de S. Bernstein / M. Kac // Studia Math., 1938. – V. 7. – P. 49–51.
- [259] Kaya A.C. On the solution of integral equations with strongly singular kernels / A. C. Kaya, F. Erdogan // Quarterly of applied mathematics. – 1987. – V. XLV, № 1. – P. 105–122.
- [260] Lorentz, G. G. Approximation of functions / G. G. Lorentz. – New York : Chelsia Publication Company, 1986. – 190 p.
- [261] Lorentz, G. G. Constructive Approximation: Advanced Problems / G. G. Lorentz, M. V. Golitschek, Yu. Makovoz. – Berlin : Springer. – 1996. – 649 p.
- [262] Lorentz, G. G. Bernstein polynomials / G. G. Lorentz. – New York : Chelsia Publication Company, 1986. – 134 p.
- [263] Migliaccio, F. Collocation versus numerical integration in GOCE data analysis / F. Migliaccio, M. Reguzzoni, F. Sanso, C. C. Tscher-ning // Poster presented IUGG/IAG General Assembly, Symposium G03, Sapporo, July 2003.
- [264] Monegato, G., Numerical evaluation of hypersingular integrals / G. Monegato // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 1994. – V. 50.– P. 9–31.
- [265] Neumann, F. Uber eine nene Eigenschaft der Laplaceschen $y^{(n)}$ und ihre Anwendung zur Analytischen Darstellung Derjenigen Phanomene / F. Neumann // Schumachers Astron. Nachr. – 1838. – V. 15. – P. 313–325.
- [266] Neumann, F. Vorlesungen uber die Theorie des Potentials und der Kugelfunctionen / F. Neumann. – Leipzig : Teubner, 1887. – P. 135–154.

- [267] Nocedal, J. Numerical optimization / J. Nocedal, S. J. Wright. – New York ; London ; Paris ; Berlin ; Heidelberg ; Tokio : Springer – Verlag. – 1999. – 636 p.
- [268] Payne, M. H. Truncation Effects in Geopotential Modelling / M. H. Payne. – Maryland : Analytical Mechanics Associates, 1971. – 367 p.
- [269] Popoviciu, T. Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre superieur / T. Popoviciu // Mathematica. – 1934. – V. 10. – P. 49–54.
- [270] Prey, A. Darstellung der Hohen - und Tiefenverhältnisse der Erde durch eine Entwicklung nach Kugelfunktionen / A. Prey // Math. Phys. Kl. Neue Folge. – 1922. – V. 11, № 1. – P. 134–167.
- [271] Prutkin, I. Gravity and magnetic data inversion for 3D topography of the Mono discontinuity in the northern Red Sea area, Egypt / I. Prutkin, A. Saleh // Journal of Geodynamics. – 2009. – V. 47. – P. 237–245.
- [272] Rapp, R. H. Gravity anomalies and sea surface heights derived from a combined GEOS-3/SEASAT altimeter data set / R. H. Rapp // J. Geophys Res. – 1986. – V. 91, № B5. – P. 4867–4876.
- [273] Rizos, C. An efficient computer technique for the evaluation of geopotential from spherical harmonic models / C. Rizos // Aust. J. Geodesy and Surveying. – 1979. – № 31. – P. 161–169.
- [274] Sanso, F. Fast spherical collocation theory and examples / F. Sanso, C. C. Tscherning // Journal of Geodesy. 2003. V. 77. – P. 101–112.
- [275] Sneeuw, N. Global spherical harmonic analysis by least squares and numerical quadrature methods in historical perspective / N. Sneeuw // Geophysical Journal International. – 1994. – V. 118, № 3. – P. 709–716.
- [276] Stenger, F. Numerical Methods Based on Whittaker Cardinal or Sinc Functions / F. Stenger // SIAM REV – 1981. – V. 23, № 2. – P. 165–224.
- [277] Tscherning, C. C. Computation of second order derivatives of the normal potential on the representation by a Legendre series / C. C. Tscherning // Manuscripta Geodaetica. – 1976. – V. 1. – P. 71–92.
- [278] Tscherning, C. C. A comparison of methods for computing gravimetric qualities from high degree spherical harmonic expansions /

C. C. Tscherning, R. H. Rapp, C. C. Goad // Manuscripta
Geodaetica. – 1983. – V. 8. – P. 246-272.

[279] Zhdanov, M. S. Integral transforms in geophysics / M. S. Zhdanov. –
New York, Berlin, London, Tokyo : Springer-Verlag. 1988. – 367 p.

[280] Zhdanov, M. S. Geophysical Inverse Theory and Regularization
Problems / M. S. Zhdanov. – N. Y. : Elsevier 2002. – 610 p.