

**ПРИМЕНЕНИЕ ЦВМ И СРЕДСТВ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
В ГЕОЛОГИИ И ГЕОФИЗИКЕ**



1974

Министерство геологии СССР
Ниже-Волжский научно-исследовательский институт
геологии и геофизики (НВНИИГГ)

ПРИМЕНЕНИЕ ЦВМ И СРЕДСТВ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
В ГЕОЛОГИИ И ГЕОФИЗИКЕ

Под редакцией кандидата физико-математических наук
В. М. Гурьянова

ИЗДАТЕЛЬСТВО САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1974

Сборник посвящен вопросам автоматизации обработки геолого-геофизической информации на ЦВМ БЭСМ-4 и содержит результаты разработок целого ряда задач разведочной и промысловой геофизики и геохимии, проведенных в НВНИИГГ и тресте Нижволгопеттегеофизика. Программы, изложенные в сборнике, широко применяются при анализе полевых данных и результатов различных исследований. Большое место уделено вопросам конструирования устройств и приборов преобразования информации в форму, допускающую обработку на ЦВМ.

В. М. ГУРЬЯНОВ

РАЗЛОЖЕНИЕ СЕЙСМИЧЕСКОГО ВОЛНОВОГО ПОЛЯ ПО БЕГУЩИМ ВОЛНАМ

Основы теории интерференционного приема плоских волн, распространяющихся без затухания с постоянной скоростью в некоторой идеальной среде, систематически изложены в работе [1]. Если прием ведется вдоль прямой с направлением ox , то используется следующая форма волны:

$$f(t, x) = f\left(t - \frac{x}{v^*}\right), \quad (1)$$

где t — время, v^* — кажущаяся скорость распространения волны вдоль направления ox .

Теория изложена применительно к приему сейсмических волн. Однако известно, что в сейсморазведке регистрируются не плоские неизменной формы волны, а объемные, изменяющиеся в пространстве по форме. Работы [2, 3] посвящены некоторым вопросам интерференционного приема объемных неизменной формы волн, но вне связи с динамической теорией распространения сейсмических волн.

В работах [4, 5] при анализе используются плоские волны, хотя в обобщениях содержатся замечания о необходимости суммирования записей на сейсмограммах по криволинейным осям синфазности, которыми характеризуются объемные волны.

Следующим приближением к действительности и развитием идей [1—5] и им аналогичных может явиться рассмотрение интерференционного приема объемных волн, главная часть которых дается лучевым методом приближенного решения

уравнений движения идеально-упругой неоднородной среды в смещениях [6]:

$$U(t, x, y, z) = A(x, y, z) f[t - \tau(x, y, z)], \quad (2)$$

где $A(x, y, z)$ — интенсивность, $f(t)$ — форма волны, $\tau(x, y, z)$ — эйконал. Для импульсных колебаний, полученных от взрывного источника, $f(t)$ — финитная функция, такая что

$$f(t) = 0 \text{ для } t \notin [0, \Delta t] \quad (3)$$

Если регистрируются не смещения, а их скорости или ускорения, общий вид функциональной зависимости (2) не меняется. В этом можно убедиться, дифференцируя (2) по времени t .

Вдоль некоторой линии приема R_0 , заданной уравнениями

$$x = x_0(\xi), \quad y = y_0(\xi), \quad z = z_0(\xi), \quad (4)$$

волна (2) принимает вид:

$$U_0(t, \xi) = A_0(\xi) f[t - \tau_0(\xi)]. \quad (5)$$

Здесь $\tau_0(\xi)$ — линейный годограф вступления волны.

Наблюдаемую вдоль профиля R_0 волну $F(t, \xi)$ можно представить суперпозицией волн вида (5) и погрешности $\varepsilon(t, \xi)$ такого представления:

$$F(t, \xi) = \sum_{k,l} A_{k,l}(\xi) f_{k,l}[t - \tau_{k,l}(\xi)] + \varepsilon(t, \xi). \quad (6)$$

Индексом l учитывается возможность регистрации волн с одинаковыми годографами вступлений, но разными формами и интенсивностью (теоретически это соответствует учету высших лучевых приближений). В случае бесконечного числа членов в функциональном ряде (6) предполагается его равномерная сходимость по переменным ξ и t и вследствие этого — законность почленной интегрируемости по всей области изменения аргументов.

При лучевом методе основной задачей теории интерференционного приема сейсмических волн является определение вступлений $\tau_{k,l}(\xi)$ волн, составляющих наблюдаемую $F(t, \xi)$. Более широкая задача заключается в определении по $F(t, \xi)$ ее составляющих $A_{k,l}(\xi)$, $f_{k,l}(T)$ и $\tau_{k,l}(\xi)$. Пока неясно единственное решение у этой задачи или нет.

Если $f_{k,l}(t) = f(t)$ — известная функция, а $\varepsilon(t, \xi) = 0$, то $\tau_{k,l}(\xi)$ и $\sum_l A_{k,l}(\xi)$ можно определить спектральным методом выделения вступлений волн [7] или методом разыскания скрытых периодичностей [8].

Аналогично можно поступить и в общем случае, если известны функции $f_{k,l}(t)$. Действительно, спектр функции $F(t, \xi)$ по определению равен

$$S(\omega, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t, \xi) \exp(-i\omega t) dt = \\ = \sum_{k,l} S_{k,l}(\omega) H_{k,l}(\omega, \xi) + r(\omega, \xi),$$

где

$$S_{k,l}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{k,l}(y) e^{-i\omega y} dy, \\ H_{k,l}(\omega, \xi) = A_{k,l}(\xi) \exp[-i\omega \tau_k(\xi)], \\ r(\omega, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(t, \xi) e^{-i\omega t} dt.$$

Составляем частное $S(\omega, \xi)/S_{m,n}$, относительно которого осуществляем обратное преобразование Фурье:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(\omega, \xi)}{S_{m,n}(\omega)} e^{i\omega t} d\omega = A_{m,n}(\xi) \delta[t - \tau_m(\xi)] + \\ + \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{k,l \\ k \neq m \\ l \neq n}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{k,l}(\omega) H_{k,l}(\omega, \xi)}{S_{m,n}(\omega)} \exp(i\omega t) d\omega + R.$$

Это выражение неограниченно возрастает при $t \rightarrow \tau_m(\xi)$, благодаря наличию дельта-функции $\delta[t - \tau_m(\xi)]$. Однако, во-первых, обычно функции $f_{k,l}(t)$ неизвестны, а, во-вторых, способ не всегда приемлем в сейсмике, так как функция $S_{m,n}(\omega)$ может обращаться в нуль на отрезке [9].

Не нарушая общности рассмотрения, будем считать, что прием волн (6) вдоль R_0 ведется на конечном интервале, определяемом изменением параметра ξ в пределах $a \leq \xi$. Волны принимаются непрерывной интерференционной системой с плотностью распределения чувствительности $h(\xi)$. Для возможности учета искусственного запаздывания приема волн на величину $\tau(\xi)$ будем суммировать их вдоль кривых

$$t = \tau(\xi) + T. \quad (7)$$

На основании изложенного проинтегрируем по ξ обе части равенства (6) с весом $h(\xi)$ вдоль кривой (7) в пределах базы

приема. Получим принятый на выходе интерференционной системы сигнал

$$\begin{aligned} \Phi(T) &= \int_{-a}^a h(\xi) F[\tau(\xi) + T, \xi] d\xi = \\ &= \sum_{k, l} \int_{-a}^a h(\xi) A_{k, l}(\xi) f_{k, l}[T - g_k(\xi)] d\xi + \\ &+ \int_{-a}^a h(\xi) \varepsilon[\tau(\xi) + T, \xi] d\xi \end{aligned} \quad (8)$$

при

$$g_k(\xi) = \tau_k(\xi) - \tau(\xi). \quad (9)$$

Спектр сигнала $\Phi(T)$ по определению равен

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(T) e^{-i\omega T} dT = \\ &= \sum_{k, l} S_{k, l}(\omega) H_{k, l}(\omega) + r(\omega). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь

$$S_{k, l}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{k, l}(y) e^{-i\omega y} dy, \quad (11)$$

$$H_{k, l}(\omega) = \int_{-a}^a h(\xi) A_{k, l}(\xi) \exp[-i\omega g_k(\xi)] d\xi,$$

$$r(\omega) = \int_{-a}^a h(\xi) \exp[-i\omega \tau(\xi)] \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(y, \xi) e^{-i\omega y} dy d\xi.$$

В случае приема волн на той же базе дискретной интерференционной системой с приемными элементами, расположенными в точках профиля R_0 , которым соответствуют параметры ξ_j ($j=1, 2, \dots, n$) и чувствительность элементов $h_1(\xi_j)$, аналогичные рассуждения приведут к форме спектра, принимаемого на выходе системы сигнала:

$$S_1(\omega) = \sum_{k, l} S_{k, l}(\omega) H_{1, k, l}(\omega) + r_1(\omega). \quad (12)$$

где

$$H_{1, k, l}(\omega) = \sum_{j=1}^n h_1(\xi_j) A_{k, l}(\xi_j) \exp[-i\omega g_k(\xi_j)] \quad (13)$$

$$r_1(\omega) = \sum_{j=1}^n h_1(\xi_j) \exp[-i\omega \tau(\xi_j)] \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(y, \xi_j) e^{-i\omega y} dy.$$

Замечание 1. Равенства (13) можно получить из формул (11), заменяя интегралы в конечных пределах какой-либо формулой численного интегрирования с коэффициентами a_j ($j=1, 2, \dots, n$).

Получим соотношение

$$h_1(\xi_j) = a_j h(\xi_j) \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (14)$$

С помощью интеграла Лебега-Стилтьеса можно записать (11) и (13) в единой форме, но этого делать не будем, а воспользуемся связью (14), учитывая, что функция $h(\xi)$ или $h_1(\xi_j)$ подлежит определению.

Установим связь с исходными положениями теории интерференционного приема плоских волн [1]. Для этого в качестве профиля наблюдения R_0 используем ось Ox , т. е. в (3)

$$x = \xi, \quad y = 0, \quad z = 0; \quad (3')$$

интенсивности $A_{k,l}(\xi)$ будем считать постоянными и учтем их в форме волны; голографы $\tau_k(x)$ представим приближенно первыми двумя членами ряда Маклорена

$$\tau_k(x) \approx \tau_k(0) + \tau'_k(0)x$$

или, учитывая, что в принятых условиях кажущаяся скорость распространения волн вдоль R_0 равна $v_k^* = 1/\tau'_k$, получим

$$\tau_k(x) \approx \tau_k(0) + \frac{x}{v_k^*}. \quad (15)$$

Подставляя (15) в (6) и учитывая сказанное, получаем представление наблюдаемой волны с главной частью в виде суперпозиции плоских волн (1):

$$\begin{aligned} F(t, x) &= \sum_{k,l} f_{k,l} \left[t - \tau_k(0) - \frac{x}{v_k^*} \right] + n(t, x) = \\ &= \sum_k \hat{f}_k \left(t - \frac{x}{v_k^*} \right) + n(t, x). \end{aligned} \quad (6')$$

Во второй части равенства (6') видом функций \hat{f}_k учтены изменения по индексу l и константам $\tau_k(0)$. Функцией $n(t, x)$ описывается погрешность представления наблюдаемой волны $F(t, x)$ суперпозицией плоских волн.

Замечание 2. Из вышесказанного ясно, что в общем случае $|n(t, x)| > |\varepsilon(t, x)|$. Вычитанием (6) из (6') можно получить разность $n(t, x) - \varepsilon(t, x)$, которая показывает, что наделять функцию $n(t, x)$ различными статистическими свойствами — стационарностью, эргодичностью и т. д. [1] — не имея фактиче-

ски ни одной ее реализации (имеется одна реализация только функции $F(t, x)$, нет никаких оснований.

При выполнении равенств (3'), (15), (6') формулы (8) — (13) после очевидных изменений примут вид:

$$\Phi(T) = \int_{-a}^a h(x) F[\tau(x) + T, x] dx = \quad (8')$$

$$= \sum_k \int_{-a}^a h(x) f_k [T - g_k(x)] dx + \int_{-a}^a h(x) n[\tau(x) + T, x] dx;$$

$$g_k(x) = \frac{x}{v_k} - \tau(x); \quad (9')$$

$$S(\omega) = \sum_k S_k(\omega) H_k(\omega) + N(\omega), \quad (10')$$

$$S_k(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_k(y) e^{-i\omega y} dy;$$

$$H_k(\omega) = \int_{-a}^a h(x) \exp[-i\omega g_k(x)] dx, \quad (11')$$

$$N(\omega) = \int_{-a}^a h(x) \exp[-i\omega \tau(x)] \int_{-\infty}^{\infty} n(y, x) e^{-i\omega y} dy dx;$$

$$S_1(\omega) = \sum_k S_k(\omega) H_{1,k}(\omega) + N_1(\omega); \quad (12')$$

$$H_{1,k}(\omega) = \sum_{j=1}^n h_1(x_j) \exp[-i\omega g_k(x_j)], \quad (13')$$

$$N_1(\omega) = \sum_{j=1}^n h_1(x_j) \exp[-i\omega \tau(x_j)] \int_{-\infty}^{\infty} n(y, x_j) e^{-i\omega y} dy.$$

Обычные одномерные интерференционные системы [1] получаются, если в (8') — (13') считать равным нулю искусственное запаздывание $\tau(x) = 0$, и в случае дискретной одномерной группы принять равнодистантное расположение приемных элементов, т. е. $x_j - x_{j-1} = \Delta x$ для любых j . При этом, принятая в [1] связь

$$h_1(x_j) = \Delta x h(x_j), \quad (16)$$

согласно замечанию 1, соответствует формуле прямоугольников при замене интеграла во втором равенстве (11) суммой.

Одномерные интерференционные системы с искусственным запаздыванием сигналов (по [1] «задержкой»), рассмотренные в [1], получаются, если в (8') — (13') в качестве $\tau(x)$ выступает линейная функция

$$\tau(x) = \frac{x}{c}. \quad (17)$$

Исключение составляет «интерференционный прием во времени», не рассматриваемый здесь как ничего нового не вносящий.

Сравнивая исходные положения интерференционного приема плоских и объемных волн, делаем вывод, что теория расчета интерференционных систем [1] приемлема в сейсморазведке лишь в условиях малых баз группирования сейсмоприемников, когда можно пренебречь кривизной годографа и изменением с расстоянием интенсивности приходящих объемных волн. В этом случае при расчете параметров дискретных интерференционных систем нужно обращать внимание на колебания Гиббса и устранять их использованием частных сумм Фейера [8].

Из изложенного видно, что рекомендуемые в заключении [1] направления развития теории интерференционного приема сейсмических сигналов важны, но в рамках представления о приходящих волнах, как о плоских, вряд ли приведут когда-нибудь к значительному успеху. Наиболее существенно направление по уточнению общего вида приходящих волн, расчету их интенсивностей и т. д., потому что только на этой основе можно целенаправленно развивать теорию интерференционных систем.

Для дальнейшего исследования выделим в спектре (10) слагаемое $\sum_l S_{m,l}(\omega) H_{m,l}(\omega)$ и запишем этот спектр так:

$$S(\omega) = \sum_l S_{m,l}(\omega) H_{m,l}(\omega) + \sum_{k,l} {}^* S_{k,l}(\omega) H_{k,l}(\omega) + r(\omega), \quad (18)$$

где на основании обозначений (9) и (III)

$$H_{k,l}(\omega) = \int_{-a}^a h(\xi) A_{k,l}(\xi) \exp\{-i\omega[\tau_k(\xi) - \tau_l(\xi)]\} d\xi. \quad (19)$$

Звездочкой во второй сумме отмечено отсутствие членов с индексом m .

На практике, благодаря региональным геофизическим работам, часто бывает приблизительно известно строение верхней части разреза земной коры, благодаря чему можно получать годографы вступлений различных волн путем решения прямых задач геометрической сейсмики. В некоторых случаях удастся вычислить интенсивности $A_{k,l}(\xi)$. При детальных сейсмических работах появляется необходимость выяснения строения определенного горизонта. Для настройки приема на этот горизонт возникает задача выделения волн с годографом $\tau_m(\xi)$, соответствующих, к примеру, однократному отражению от этого горизонта. Тогда надо подобрать такую плотность

распределения чувствительности $h(\xi)$, чтобы, по возможности, гасились волны, имеющие отличные от $\tau_m(\xi)$ годографы вступлений. Заметим, что плотность распределения чувствительности приемных элементов определяется с точностью до постоянного множителя, дающего общее усиление (ослабление) принимаемых волн.

С учетом этого можно потребовать, чтобы частотные характеристики $H_{m,l}(\omega)$ ($l=1,2,\dots$) выделяемой волны в каком-то смысле были близки к некоторой постоянной, отличной от нуля, например, к единице, а остальные $H_{k,l}(\omega)$ ($k \neq m, l=1,2,\dots$) — близки к нулю, т. е. надо решить относительно $h(\xi)$ систему интегральных уравнений первого рода

$$H_{m,l}(\omega) \equiv \int_{-a}^a h(\xi) A_{m,l}(\xi) \exp[-i\omega g_m(\xi)] d\xi = 1 \quad (l = 1, 2, \dots) \quad (20)$$

$$H_{k,l}(\omega) \equiv \int_{-a}^a h(\xi) A_{k,l}(\xi) \exp[-i\omega g_k(\xi)] d\xi = 0 \quad \left(l = 1, 2, \dots \right) \quad (k \neq m)$$

Ясно, что в общем случае система (20) неразрешима, так как сильно переопределена. Речь может идти только об ее удовлетворении в среднем.

Если запаздывание $\tau(\xi)$ совпадает с годографом $\tau_m(\xi)$ вступления выделяемых волн, то первым уравнениям (20) удовлетворить в среднем легко, надо только соблюсти условие

$$H_{m,l}(\omega) \equiv \int_{-a}^a h(\xi) A_{m,l}(\xi) d\xi = \text{const} \neq 0. \quad (l = 1, 2, \dots). \quad (21)$$

Из равенства (21) следует, что при синфазном суммировании спектр волны, а значит и ее форма сохраняются с точностью до постоянного множителя. Этот вывод справедлив и для дискретной интерференционной системы, так как в этом случае интеграл в (21) на основании замечания 2 заменяется суммой.

Из (21) также следует важность и эффективность искусственного введения запаздывания приема сейсмических сигналов особенно в условиях лабораторной обработки сейсмограмм, когда можно гибко производить «настройку» интерференционной системы на «прием» волн от определенного горизонта в случае наличия о нем сведений.

Следует подчеркнуть важность введения искусственного запаздывания при производстве групповых направленных взрывов в соответствующих методах возбуждения сейсмических волн. Здесь нужно обратить внимание на тот факт, что

аппаратурный синтез групповых направленных взрывов на основе единичных страдает очень большим недостатком из-за ограниченности полосы пропускания частот аппаратурой и поэтому не может заменить собой групповой взрыв, произведенный в поле.

Вторым уравнением (20) удовлетворить сложнее, ибо с волнами, имеющими годографы вступлений, отличающиеся от $\tau_m(\xi)$ на постоянную, т. е.

$$\tau_k(\xi) = \tau_m(\xi) + c_k \quad (k = k_1, k_2, \dots, k_n)$$

ничего поделаться не удастся, так как частотные характеристики имеют вид

$$H_{k,l}(\omega) \equiv \int_{-a}^a h(\xi) A_{k,l}(\xi) \exp(-i\omega c_k) d\xi = D_{k,l} e^{-i\omega c_k} \\ (k = k_1, k_2, \dots, k_n) \quad (22)$$

и условия (21) и $H_{k,l}(\omega) = 0$ ($k = k_1, \dots, k_n$) могут оказаться несовместными, например, если $A_{m,l}(\xi) = A_{k,l}(\xi)$.

В поле обычно трудно ввести искусственное запаздывание приема сейсмических волн, поэтому $\tau(\xi) = 0$ и для дискретной интерференционной системы имеем вместо (20) систему уравнений относительно чувствительности приемных элементов

$$\sum_{j=1}^n h_j A_{ml}(\xi_j) \exp[-i\omega \tau_m(\xi_j)] = 1 \quad (l = 1, 2, \dots) \\ \sum_{j=1}^n h_j A_{kl}(\xi_j) \exp[-i\omega \tau_k(\xi_j)] = 0 \quad \left(\begin{matrix} k, l = 1, 2, \dots \\ k \neq m \end{matrix} \right) \quad (23)$$

Требуется, чтобы эта система удовлетворялась для любого ω при условии, что h_j вещественны. Точное решение системы (23) невозможно, так как даже первому из уравнений не удастся удовлетворить точно из-за конечного числа n приемных элементов.

В общем случае функции $\exp[-i\omega \tau_k(\xi_j)]$ ($j = 1, 2, \dots, n$) не находятся в гармоническом отношении друг с другом, т. е. отношение их периодов не равно рациональному числу, а поэтому они не обладают свойством ортогональности. Исключение составляет случай, когда годограф представляет собой прямую линию и приемные элементы расположены на одинаковом расстоянии друг от друга.

Для определения коэффициентов h_j , $A_{m,l}(\xi_j) = a_j$ применим метод наименьших квадратов, который в данном случае [8] приводит к минимизации функции

$$I(a_1, a_2, \dots, a_n) = \int_D \left[\sum_{j=1}^n a_j e^{-j\omega\tau_{m_j}} - \varphi(\omega) \right] \times \\ \times \sum_{j=1}^n a_j e^{-i\omega\tau_{m_j}} - \varphi(\omega) d\omega. \quad (24)$$

Здесь область D представляет собой совокупность отрезков, по которым берется интеграл: $\varphi(\omega)$ — вещественная функция, к ней строится приближение: $\tau_{m_j} = \tau_m(\xi_j)$.

Необходимые условия минимума дают

$$\frac{\partial I}{\partial a_k} = 2 \int_D \left\{ \sum_{j=1}^n a_j \cos[\omega(\tau_j - \tau_k)] - \varphi(\omega) \cos(\omega\tau_k) \right\} d\omega = 0. \quad (25)$$

$(k = 1, 2, \dots, n)$

В качестве области D выступают отрезки, заключающие весь диапазон доминирующих частот ω , т. е. положим $b \leq \omega \leq c$. Функцию $\varphi(\omega)$ возьмем равной 1 на отрезке $[b_1, c_1] \in [b, c]$, на котором доминирует частота волны с годографом $\tau_m(\xi)$. При этих условиях имеем систему уравнений для определения величин a_j

$$\sum_{j=1}^n a_j \frac{\sin \left[(\tau_{m_j} - \tau_{m_k}) \frac{c-b}{2} \right]}{\tau_{m_j} - \tau_{m_k}} \cos \left[(\tau_{m_j} - \tau_{m_k}) \frac{c+b}{2} \right] = \\ = \frac{1}{\tau_{m_k}} \sin \left(\tau_{m_k} \frac{c_1 - b_1}{2} \right) \cos \left(\tau_{m_k} \frac{c_1 + b_1}{2} \right) \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (26)$$

В этом случае прямо никак не учитывается выполнение вторых равенств (23). Если $\tau_{m_j} - \tau_{m_k} = (j-k)\Delta\tau$, что может быть при неравнодистантном расположении сейсмоприемников или при прямолинейности годографа, то матрицу системы (26) можно привести к диагональному виду изменением разности $c-b$. Действительно, при натуральном k и соблюдении условия

$$(\tau_{m_j} - \tau_{m_k}) \frac{c-b}{2} = (j-k) \frac{c-b}{2} \Delta\tau = k\pi \quad (27)$$

получаем равными нулю все элементы матрицы системы (26), не расположенные на главной диагонали.

Для оценки эффективности приема отдельной волны интерференционной системой нередко используется так называемый коэффициент направленного действия (кнд) [2] — отношение

«энергии» данной волны на выходе интерференционной системы к «энергии» той же волны при условии ее синфазного приема, т. е.

$$\text{кнд} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |S_{k,l}(\omega) H_{k,l}(\omega)|^2 d\omega}{a^2_{k,l} \int_{-\infty}^{\infty} |S_{k,l}(\omega)|^2 q\omega},$$

где

$$a_{k,l} = \int_{-a}^a h(\xi) A_{k,l}(\xi) d\xi.$$

Если произведение $h(\xi) A_{k,l}(\xi)$ знакопостоянно на всем интервале $[-a, a]$, получаем $\text{кнд} \leq 1$. Действительно, по определению

$$\begin{aligned} |H_{k,l}(\omega)|^2 &= \int_{-a}^a \int_{-a}^a h(\xi) h(\eta) A_{k,l}(\xi) A_{k,l}(\eta) \exp\{i[g(\eta) - \\ &- g(\xi)]d\eta d\xi = 2 \int_{-a}^a \int_{-a}^a [h(\xi) h(\eta) A_{k,l}(\xi) A_{k,l}(\eta) \cos[g(\eta) - \\ &- g(\xi)] d\eta d\xi \leq 2 \int_{-a}^a \int_{-a}^a |h(\xi) h(\eta) A_{k,l}(\xi) A_{k,l}(\eta)| d\eta d\xi = \\ &= 2 \int_{-a}^a \int_{-a}^a h(\xi) h(\eta) A_{k,l}(\xi) A_{k,l}(\eta) d\eta d\xi = a^2_{k,l}. \end{aligned}$$

Знак модуля в левой части предпоследнего равенства можно опустить только при знакопостоянстве произведения $h(\xi) A_{k,l}(\xi)$.

Если это произведение меняет знак на интервале $[-a, a]$, то кнд может неограниченно возрастать, что происходит, например, в случае, когда произведение чувствительности приемных элементов на интенсивность волны постоянно по модулю, меняет знак от элемента к элементу и число элементов четное. Кнд в этом случае не может служить мерой эффективности приема волны.

Исследуем далее с позиций лучевого метода способ С. А. Нахамкина последовательных вычитаний волн, используя только основную идею способа и не накладывая ограничений, принятых в [4] и других работах упомянутого автора, на принимаемые волны.

Покажем, что в некоторых случаях имеется принципиальная возможность приближенного разделения регистрируемых сейсмических волн на волны с одинаковыми годографами вступлений. Существенно то, что в этих случаях, в отличие от [4], не требуется знать форму интерферирующих волн и их интенсивность.

Для простоты будем считать, что в (6) погрешность $\varepsilon(t, \xi)$ равна нулю и годографы $\tau_k(\xi)$ вступлений волн таковы, что их можно упорядочить по временам вступлений следующим образом:

$$\tau_k(\xi) < \tau_j(\xi) \text{ для } k < j, \quad (28)$$

т. е. анализируются годографы 1, 2, 3, показанные на рисунке сплошными линиями, и не рассматривается вся совокупность годографов первых вступлений (1—6). Штриховыми линиями показаны времена, соответствующие задним фронтам волн. После этих времен волна исчезает, т. е. становится тождественным нулю. Равенство нулю погрешности $\varepsilon(t, \xi)$ означает, что рассмотрение проводится в рамках лучевого метода решения уравнений Ляме и погрешности приемной аппаратуры не учитываются.

Вследствие финитности (3) функций $f_{k,l}(t)$ и условия (28) имеем на интервале $\tau_1(\xi) \leq t < \tau_2(\xi)$ представление функции (6):

$$F(t, \xi) = \begin{cases} \sum_l A_{1,l}(\xi) f_{1,l}[t - \tau_1(\xi)] & \text{для } \tau_1(\xi) \leq t < \tau_2(\xi) \\ 0 & \text{для } t < \tau_1(\xi). \end{cases} \quad (29)$$

На сейсмограммах свойство (29) функции $F(t, \xi)$ выражается очень четко — после покоя следует вступление $t = \tau_1(\xi)$ первой волны и поэтому его значение снять легко.

Путем синфазного сложения n -трасс сейсмограммы по линии $t = \tau_1(\xi)$ с учетом чувствительности $h_1(\xi)$ получаем суммоленту, на которой доминирует волна

$$\begin{aligned} \sum_l f_{1,l}(T) \sum_{m=1}^n A_{1,l}(\xi_m) h_1(\xi_m) &= \sum_l A_l f_{1,l}(T) = \\ &= \sum_l A_l f_{1,l}[t - \tau(\xi)]. \end{aligned} \quad (30)$$

Остальные волны за счет интерференции будут ослаблены.

Определяем приближенно задний фронт выделенной волны

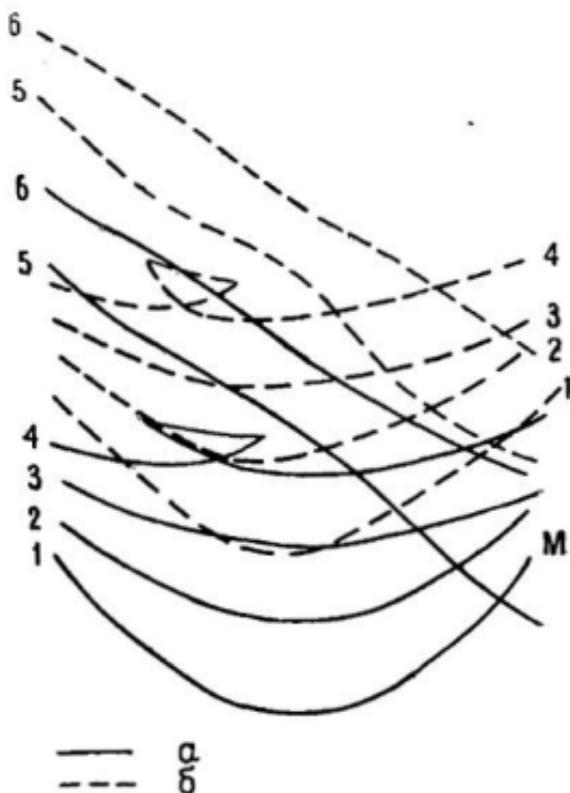
(штрих-линия 1 на рис.) по резкому спаду амплитуды колебаний. Пусть это будет при $t = \tau_1(\xi) + \Delta\tau_1$. Полагаем

$$F_1(t, \xi) = \sum_{m=1}^n F[T + \tau_1(\xi_m), \xi_m] h_1(\xi_m) = 0$$

для $t \geq \tau_1(\xi) + \Delta\tau_1$, (31)

т. е. для $t \geq \tau_1(\xi) + \Delta\tau_1$ волны гасятся лабораторным путем. Приближенно можно считать, что

$$F_1(t, \xi) \approx \sum_l A_l f_{1,l}[t - \tau_1(\xi)].$$
(32)



Годографы первых вступлений и задних фронтов волн. а — первые вступления; б — задние фронты волн.

Используя (32), (6) и учитывая, что $\epsilon(t, \xi) = 0$, составляем разность

$$\begin{aligned} F(t, \xi_r) - a_r F_1(t, \xi_r) &\approx \sum_{k,l} A_{k,l}(\xi) [f_{k,l}(t - \tau_k(\xi_r)) - \\ &- a_r \sum_l A_l f_{1,l}(t - \tau_1(\xi_r))] = \\ &= \sum_l f_{1,l}(t - \tau_1(\xi_r)) [A_{1,l}(\xi_r) - a_r A_l] + \\ &+ \sum_{\substack{k,l \\ k \neq l}} A_{k,l}(\xi_r) f_{k,l}(t - \tau_r(\xi_r)). \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь в соответствии с (30)

$$A_l = \sum_{m=1}^n A_{1,l}(\xi_m) h_1(\xi_m). \quad (34)$$

Вычитание волн с вступлением $t = \tau_1(\xi)$ будет полным только в двух случаях:

$$1) \text{ если } A_{1,l}(\xi_r) - a_r A_l = 0 \quad (l, r = 1, 2, \dots),$$

т. е. если интенсивности $A_{1,l}$ ($l = 1, 2, \dots$) отличаются одна от другой лишь постоянным множителем. Действительно, в этом случае

$$\frac{A_{1,l}(\xi_r)}{A_l} = \frac{c_l A_1(\xi_r)}{c_l \sum_{m=1}^n A_1(\xi_m) h_1(\xi_m)} = a_r \quad (35)$$

при любом l ;

$$2) \text{ если } f_{1,l}(T) = f_1(T) \quad (l = 1, 2, \dots),$$

т. е. если волны с вступлением $t = \tau_1(\xi)$ имеют одну и ту же форму.

В этом случае

$$a_r = \frac{\sum_l A_{k,l}(\xi_r)}{\sum_l A_l}. \quad (36)$$

Ясно, что в практических случаях для определения параметров a_r пользоваться формулами (35), (36) нецелесообразно. Эти параметры подбирают из условия, чтобы разность $F(t, \xi_r) - a_r F_1(t, \xi_r)$ на интервале $\tau_1(\xi) \leq t \leq \tau_1(\xi) + \Delta\tau_1$ была в среднем наименьшее значение. Может, конечно, случиться и так, что это значение будет слишком велико и не позволит выделить следующую волну. Если интенсивности $A_{1,l}(\xi)$ мало изменяются в зависимости от своего аргумента, то расстояния между нулями функции $\sum_l A_{1,l}(\xi) f_{1,l}(T)$,

обусловленные интерференцией волн $A_{1,i}(\xi)f_{1,i}(T)$, тоже мало изменяются в зависимости от ξ и поэтому можно суммировать трассы по кривой расположения по ξ нулей первой ярко выраженной фазы колебаний, а не по вступлению $t=\tau_1(\xi)$, так как оно обычно подвержено большим аппаратным искажением. На трассах сейсмограммы можно заметить большую стабильность в расстоянии между первыми нулями функции $F(t, \xi)$ от трассы к трассе.

Если процесс вычитания волн с годографом $\tau_1(\xi)$ удался, то на разностной сейсмограмме четко выступит вступление или первая доминирующая фаза волн с этим вступлением.

Процесс сложения-вычитания можно повторить уже по отношению к этим волнам и т. д.

В случае более сложной волновой картины, когда на одних пикетах до точки М (рис.) первыми приходят волны 1 с вступлениями $t=\tau_1(\xi)$, а далее — волны 6 с вступлениями $t=\tau_6(\xi)$, разделение волн предлагаемой модификацией возможно только, если форма первой из них очень сильно отличается от формы другой. Тогда легко найти положение точки М и процесс сложения-вычитания следует осуществлять по участкам.

Выводы

Лучевой метод приближенного решения уравнений движения идеально-упругой неоднородной изотропной среды в смещениях позволяет строить такую теорию интерференционного приема объемных сейсмических волн, что обычная теория для плоских волн является лишь линейным приближением этой более общей теории.

В некоторых случаях имеется принципиальная возможность приближенного разделения регистрируемых сейсмических волн на волны с одинаковыми годографами вступлений. При этом нет необходимости знать форму и интенсивность интерферирующих волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольцман Ф. М. Основы теории интерференционного приема регулярных волн. М., «Наука», 1964.
2. Беспятов Б. И. Некоторые вопросы теории группирования в сейсморазведке. Прикладная геофизика, вып. 25. Гостоптехиздат, 1960.
3. Беспятов Б. И., Юрченко В. Г. Применение теории направленного интерференционного приема для оценки и обоснования методики группирования взрывов по способу непрерывного линейного источника («плоский

фронт»). В сб. Геофизическая разведка в Нижнем Поволжье. Труды ИВНИИГГ, вып. 7. Саратов, 1968.

4. Нахамкин С. А. Оптимальный алгоритм выделения сейсмических волн на фоне регулярных волн-помех. Изв. АН СССР, Физика Земли, № 5, 1966.

5. Нахамкин С. А., Троян В. Н. Алгоритм и программа разделения регулярных волн методом последовательных вычитаний. В сб. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, вып. VIII. «Наука», 1966.

6. Алексеев А. С., Гельчинский Б. Я. О лучевом методе вычисления полей волн в случае неоднородных сред с криволинейными границами раздела. В сб. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, вып. III. Л., Изд-во ЛГУ, 1959.

7. Кац С. А. Спектральные методы выделения вступлений волн. Модели реальных сред и сейсмические волновые поля. В сб. ИФЗ им. О. Ю. Шмидта АН СССР. М., 1967.

8. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. М., Физматгиз, 1961.

9. Алексеев А. С. Обратные динамические задачи сейсмики. В сб. Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических данных. Л., «Наука», 1967.

Б. В. КОРОБОВ

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ГЛУБИННОГО РАЗРЕЗА ПО ПОВЕРХНОСТНЫМ ГОДОГРАФАМ

В связи с появившейся возможностью обработки сейсмических данных на ЭВМ вопросы автоматизированной интерпретации годографов сейсмических волн для сложных моделей среды пользуются все возрастающим интересом. Появился целый ряд работ, посвященных этим вопросам. Часть из них представляет значительный интерес.

В работе [1] автор рассматривает вопросы решения указанных задач для многослойных сред, характеризующихся постоянной скоростью распространения сейсмических волн внутри слоя. Дана постановка задачи и намечены пути ее решения. Полученные результаты могут послужить основой для разработки машинных алгоритмов и решения задачи на дискретном множестве точек, что соответствует реальным условиям.

В работе [2] для неоднородной среды с криволинейной границей отражения и скоростью распространения сейсмических волн, заданной в виде функции двух переменных, предлагается метод интерпретации линейного годографа и получения точек одной границы отражения.

В работе [3] рассматривается наиболее общий случай модели среды и подход к решению обратных задач. Показана принципиальная возможность получения решения плоских и пространственных задач для многослойной среды, характеризующейся скоростью, являющейся функцией трех переменных, и произвольными гладкими поверхностями раздела.

Настоящая работа посвящена дальнейшей детализации этой методики, вопросам, связанным с интерпретацией поверх-

ностных годографов отраженных и обменных волн для случая многослойной неоднородной среды. Дан алгоритм построения нескольких границ. Детально рассмотрен случай градиентной среды и изложен машинный алгоритм получения точек поверхности раздела. Уделено внимание вопросам рациональной организации и структуры рабочих программ для ЭВМ.

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим в декартовой системе координат XYZ упругую многослойную среду, занимающую полупространство, ограниченное поверхностью R_0 , и разделенную на слои поверхностями R_j

$$z = z_j(x, y) \quad (j = 1, 2, \dots). \quad (1)$$

Считая, что ось OZ направлена вглубь среды, пронумеруем поверхности R_j в порядке возрастания глубины

$$z_j(x, y) \leq z_{j+1}(x, y). \quad (2)$$

Случай равенства соответствует явлению выклинивания слоев.

Функции $z = z_j(x, y)$ ($j=0, 1, 2 \dots$) суть однозначные и непрерывно-дифференцируемые по x и y .

Среда характеризуется скалярными полями скоростей пространства упругих волн

$$V_i = V_{ij}(x, y, z), \quad (i = 1, 2) \quad (3)$$

если

$$z_{j-1}(x, y) \leq z \leq z_j(x, y).$$

Скорость V_i на поверхностях R_j терпит разрыв первого рода, а в каждом слое непрерывно-дифференцируема по всем своим аргументам.

Известны обобщенные годографы [4], представляющие собой функции скалярного поля времен на поверхности R_0 :

$$\tau_i = \tau_{ij}(x, y, z) \quad (i = 1, 2) \quad (4)$$

$$z = z_0(x, y) \quad (j = 1, 2, \dots),$$

где τ_i — однозначные и непрерывно-дифференцируемые по x и y функции, индексом j отмечен годограф, соответствующий поверхности R_j , а индексом i — тип волны.

Задача состоит в определении границ раздела

$$z = z_j(x, y) \quad (j = 1, 2, \dots)$$

по известным годографам (4) и законам изменения скорости в слоях.

Поскольку границы раздела слоев неизвестны, предполагается, что закон изменения скорости в слое $j=1$ распространен на все полупространство, ограниченное R_0 :

$$V_i = V_{i1}(x, y, z) \quad \text{для } z_0 \leq z < \infty \quad (5)$$

Это предположение допустимо, так как для поиска первой неизвестной границы используется скорость только первого слоя. При условии (5), как будет далее показано, лучевым методом можно отыскать $z=z_1(x, y)$ и продолжить решение задачи, предполагая (при отыскании границы R_2) по аналогии, что скорость в слое $j=2$ задана в полупространстве, ограниченном поверхностью R_1 :

$$V_i = \begin{cases} V_{i1}(x_0, y_0, z) & \text{для } z_0 \leq z < z_1 \\ V_{i2}(x, y, z) & z_1 < z < \infty \end{cases} \quad (6)$$

§ 2. Метод решения

Рассмотрим метод поиска одной границы $z=z_1(x, y)$ в простейшем случае, когда функция V задана во всем полупространстве и определяется формулой (5).

Функция скалярного поля времен $t=t(x, y, z)$ находится из уравнения Гамильтона-Якоби

$$(\text{grad } t)^2 = \frac{1}{V^2} \quad (7)$$

при начальных данных

$$\tau = t(x_0, y, z) \quad (7')$$

$$z = z_0(x, y).$$

Уравнение (7) есть уравнение характеристик для системы уравнений движения в форме Ламе. Бихарактеристики этой системы при условии (7'), являясь лучами, определяются как решение системы интегральных уравнений [5]:

$$\begin{aligned} x &= x^0 + \int_{\tau}^t p V^2 dt, & p &= p^0 - \int_{\tau}^t \frac{V_x}{V} dt, \\ y &= y^0 + \int_{\tau}^t q V^2 dt, & q &= q^0 - \int_{\tau}^t \frac{V_y}{V} dt, \\ z &= z_0^0 + \int_{\tau}^t r V^2 dt, & r &= r^0 - \int_{\tau}^t \frac{V_z}{V} dt \end{aligned} \quad (8)$$

при

$$\begin{aligned} p^0 &= \tau_x - r^0 z_x, \\ q^0 &= \tau_y - r^0 z_y, \\ r^0 &= \frac{\tau_x z_x + \tau_y z_y}{\Delta^2} \pm \frac{\sqrt{\Delta^2 r^2 - V^2 \delta^2}}{V \Delta^2}, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= z_x^2 + z_y^2 + 1, \\ \delta^2 &= \tau_y^2 + \tau_x^2 + (z_x \tau_y - z_y \tau_x)^2, \\ z_0^0 &= z_0(x^0, y^0). \end{aligned}$$

Частные производные $\tau_x = \frac{\partial \tau}{\partial x}$, $\tau_y = \frac{\partial \tau}{\partial y}$, $z_x = \frac{\partial z}{\partial x}$, $z_y = \frac{\partial z}{\partial y}$ взяты в точке (x^0, y^0) и скорость $V = V(x^0, y^0, z_0^0)$.

Знак радикала в (9) определяется знаком косинуса угла между нормалью \bar{n} и скоростью \bar{V} в точке (x^0, y^0, z_0^0) [3].

Пусть положительное направление нормали к границе раздела слоев совпадает с направлением внутренней нормали, проекция которой на ось OZ в силу однозначности функций $z = z_j(x, y)$, будет всегда положительной.

Вектор скорости \bar{V} волны, распространяющейся от поверхности, и нормаль \bar{n} будут лежать по одну сторону от плоскости касательной к границе в выбранной точке. В этом случае $\cos(\bar{n}, \bar{V})$ всегда положительный, а волна называется падающей.

Отраженной волне, когда \bar{V} и \bar{n} расположены по разным сторонам от касательной плоскости, соответствует $\cos(\bar{n}, \bar{V}) < 0$.

Первые три уравнения системы (8) определяют текущие координаты x, y, z сейсмического луча, проходящего через точку x^0, y^0, z_0^0 поверхности R_0 .

Заметим, что третье уравнение системы (8) отражает монотонность возрастания функции $z = z(t)$ в окрестности указанной точки при движении по лучу падающей волны и монотонность убывания этой функции в случае отраженной волны.

Следующие три уравнения (8) определяют лучевые параметры

$$p = \frac{\partial t}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial t}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial t}{\partial z}, \quad (10)$$

величины, пропорциональные направляющим косинусам сейсмического луча:

$$\begin{aligned} pV &= \cos(\hat{i}\hat{V}), \\ qV &= \cos(\hat{j}\hat{V}), \\ rV &= \cos(\hat{k}\hat{V}). \end{aligned} \quad (11)$$

Точки поверхностей раздела слоев можно искать, как точки, принадлежащие двум лучам различных волн, для которых функции скалярного поля времен связаны между собой определенной зависимостью. Вид зависимости определяется типом волн.

Точку границы отражения можно определить, как точку пересечения лучей падающей и отраженной волн [3], для которой

$$t_{\text{пaл}} = t_{\text{отр.}}$$

Будем отмечать величины, соответствующие падающей волне индексом 1, а отраженной — индексом 2. Предполагая, что V_1 и V_2 заданы в полупространстве, ограниченном поверхностью R_0 , задачу отыскания точки отражающей границы можно сформулировать так: необходимо найти точку полупространства с координатами XYZ , удовлетворяющими уравнениям:

$$\begin{aligned} X &= x_1 = x_2 \\ Y &= y_1 = y_2 \\ Z &= z_1 = z_2, \end{aligned} \quad (12)$$

при условии $t_1 = t_2$.

Подставляя в (12) выражения для $x_1, x_2, y_1, y_2, t_1, t_2$ и дополняя их уравнениями для $p_1, q_1, r_1, p_2, q_2, r_2$ из (8), получаем систему

$$\begin{aligned} X &= x_1^0 + \int_{\tau_1}^{t_1} p_1 V_1^2 dt = x_2^0 + \int_{\tau_2}^{t_2} p_2 V_2^2 dt \\ Y &= y_1^0 + \int_{\tau_1}^{t_1} q_1 V_1^2 dt = y_2^0 + \int_{\tau_2}^{t_2} q_2 V_2^2 dt, \\ Z &= z_{01}^0 + \int_{\tau_1}^{t_1} r_1 V_1^2 dt = z_{02}^0 + \int_{\tau_2}^{t_2} r_2 V_2^2 dt, \quad (13) \\ p_i &= p_i^0 - \int_{\tau_1}^{t_1} \frac{V_{ix}}{V_i} dt \end{aligned}$$

$$q_i = q_i^0 - \int_{\tau_i}^{t_i} \frac{V_{iy}}{V_i} dt, \quad (i = 1, 2)$$

$$r_i = r_i^0 - \int_{\tau_i}^{t_i} \frac{V_{iz}}{V_i} dt, \quad t_1 = t_2$$

для определения $X, Y, Z, p_1, q_1, r_1, p_2, q_2, r_2, t_1, t_2, x^0, y^0$ как функций параметров x^0, y^0 при заданном $z = z_0(x, y)$ и данных Коши типа (9) для p^0, q^0, r^0 и p^0, q^0, z^0 .

Таким образом, нужно найти такую точку пересечения интегральных кривых решения задачи Коши двух систем уравнений характеристик типа (8), в которой $t_1 = t_2$.

Аналогичным образом можно определить точку границы, на которой происходит обмен некоторой волны и появляются продольная и поперечная волны. В этом случае знак радикала в начальных условиях (9) будет выбираться, исходя из того, что обе волны, продольная и поперечная, распространяются к поверхности R_0 .

Получение численного решения системы (13) в общем случае представляет существенные трудности технического характера. Необходимо при заданных начальных условиях для луча с индексом 2 построить последовательность начальных условий для луча с индексом 1, которой соответствует последовательность точек пересечения лучей 1 и 2, сходящаяся к решению системы (13).

В работе [3] для построения такой последовательности и отыскания решения предлагается метод деления интервала пополам.

§ 3. Метод построения нескольких границ

Обобщение метода для случая нескольких неизвестных границ состоит в рассмотрении условий продолжения решений уравнений системы (8) через известные границы раздела. Действительно, такая задача возникает после того, как изложенным выше методом найдена первая неизвестная граница R_1 , разделяющая слои $j=1$ и $j=2$. В этом случае на дневной поверхности R_0 имеется годограф, полученный от очередной неизвестной границы:

$$\begin{aligned} \tau &= t(x, y, z), \\ z &= z_0(x, y), \end{aligned} \quad (14)$$

а поле скоростей принимает вид (6), причем $V_1 \neq V_2$.

Нетрудно заметить, что правые части системы (8) на границе $z=z_1(x, y)$ не удовлетворяют условиям теоремы Пикара существования и единственности решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, ввиду разрывности функции V [6].

Разрывность параметров на границе R_1 отчетливо видна в окрестности границы по равенству

$$p^2 + q^2 + r^2 = \frac{1}{V^2} = \begin{cases} \frac{1}{V_1^2} & \text{для слоя } j = 1 \\ \frac{1}{V_2^2} & \text{для слоя } j = 2, \end{cases}$$

где правые части терпят разрыв первого рода.

Изложим способ продолжения решения в рамках лучевого метода.

Решение системы (8) существует и единственно в области

$$z_0 \leq z \leq z_1, \quad (15)$$

где $V=V_1(x, y, z)$ непрерывно-дифференцируема.

Продолжить решение через границу z_1 можно, опираясь на непрерывность луча, являющуюся следствием непрерывности поля времен. Точку пересечения луча области (15) с поверхностью $z=z_1(x, y)$ необходимо взять за начальную точку луча в области $z_1 \leq z < \infty$, пересчитав параметры p_1, q_1, r_1 на величину их скачка.

Координаты точки пересечения X, Y, Z , параметры луча p_1, q_1, r_1 и время $t=t(X, Y, Z)$ определяются при решении системы уравнений, в которую входит система (8) и уравнение $z=z_1(x, y)$ поверхности R_1 .

$$\begin{aligned} X &= x^0 + \int_{\tau}^t p_1 V_1^2 dt, \\ Y &= y^0 + \int_{\tau}^t q_1 V_1^2 dt, \\ Z &= z_1(X, Y) = z_0^0 + \int_{\tau}^t r_1 V_1^2 dt, \\ p_1 &= p^0 - \int_{\tau}^t \frac{V_{1x}}{V} dt \\ q_1 &= q^0 - \int_{\tau}^t \frac{V_{1y}}{V} dt, \end{aligned} \quad (16)$$

$$r_1 = r^0 - \int_{\tau}^t \frac{V_{z_1}}{V} dt,$$

при начальных условиях (9).

Найденное значение t является значением функции поля времени в точке пересечения или значением пересчитанного на границу $z=z_1(x, y)$ годографа $\tau: \tau^* = t [X, Y, z_1(X, Y)]$. Вследствие непрерывности скалярного поля времен частные производные τ_{x^*} и τ_{y^*} в окрестности точки $\{X, Y, Z\}$ в слоях $j=1$ и $j=2$ имеют вид:

$$\tau_{x^*} = p_1 + r_1 \frac{\partial z_1}{\partial x} = p_2 + r_2 \frac{\partial z_1}{\partial x}, \quad (17)$$

$$\tau_{y^*} = q_1 + r_1 \frac{\partial z_1}{\partial y} = q_2 + r_2 \frac{\partial z_1}{\partial y}.$$

Остается подставить найденные из системы (16) p_1, q_1, r_1 в формулы (17) и определенные таким образом τ_{x^*} и τ_{y^*} использовать в формулах типа (9) для вычисления начальных значений параметров p_2, q_2, r_2 в слое $j=2$. После этого решение системы (8) можно продолжить в области $z_1 \leq z < \infty$ при $V=V_2(x, y, z)$.

Таким образом, задача свелась к предыдущей. Граница, соответствующая годографу τ^* , будет определяться методом, разобранным в § 2.

Рассмотрим общую схему решения задачи поиска нескольких неизвестных границ. Пусть на R_0 имеются пары годографов, например, падающей и отраженной или обменной поперечной и проходящей продольной волн, соответствующие нескольким неизвестным границам:

$$\tau_1 = \tau_{1j}(x, y, z), \quad z = z_0(x, y);$$

$$\tau_2 = \tau_{2j}(x, y, z), \quad z = z_0(x, y) \quad (j=1, 2, 3)$$

и поля скоростей

$$V_1 = V_{1j}(x, y, z)$$

$$V_2 = V_{2j}(x, y, z)$$

для $z_{j-1} < z < \infty$, ($j=1, 2, 3$).

Требуется отыскать неизвестные границы $z=z_j(x, y)$ ($j=1, 2, 3$), разделяющие среду на слои.

Предлагаемый для решения задачи лучевой метод предусматривает последовательное определение границ R_j в порядке увеличения номера j .

Первая граница ($j=1$) определяется из решения системы (13) при заданных на R_0 годографах

$$\tau_1 = \tau_{11}(x, y, z) \text{ и } \tau_2 = \tau_{21}(x, y, z), \quad z = z_0(x, y)$$

и полю скоростей

$$\begin{aligned} V_1 &= V_{11}(x, y, z), \\ V_2 &= V_{21}(x, y, z), \quad z_0 \leq z < \infty \end{aligned}$$

Вторая граница ($j=2$) определяется по заданным на R_0 годографам

$$\tau_1 = \tau_{12}(x, y, z) \text{ и } \tau_2 = \tau_{22}(x, y, z), \quad z = z_0(x, y)$$

и полю скоростей

для $z_0 \leq z < z_1$ $V_1 = V_{11}(x, y, z)$ и $V_2 = V_{21}(x, y, z)$; для $z_1 \leq z < \infty$ $V_1 = V_{12}(x, y, z)$ и $V_2 = V_{22}(x, y, z)$.

Поиску границы $z=z_2(x, y)$ предшествует пересчет годографов τ_1 и τ_2 на границу $z=z_1(x, y)$ по формулам (16) и пересчет параметров по формулам (17) и (9). После пересчета получаем на R_1

$$\tau_1 = \tau_{12}^*(x, y, z) \text{ и } \tau_2 = \tau_{22}^*(x, y, z), \quad z = z_1(x, y)$$

$$V_1 = V_{12}(x, y, z) \text{ и } V_2 = V_{22}(x, y, z), \quad z_1 \leq z < \infty$$

и, решая систему (13), получаем границу $z=z_2(x, y)$.

Определению третьей границы R_3 предшествует двукратный пересчет годографов $\tau_1 = \tau_{13}$ и $\tau_2 = \tau_{23}$ и параметров с R_0 на R_1 и с R_1 на R_2 . После чего на R_2 имеются

$$\tau_1 = \tau_{13}^{**}(x, y, z) \text{ и } \tau_2 = \tau_{23}^{**}(x, y, z), \quad z = z_2(x, y),$$

$$V_1 = V_{13}(x, y, z) \text{ и } V_2 = V_{23}(x, y, z), \quad \text{для } z_2 \leq z < \infty$$

и неизвестная граница $z=z_3(x, y)$, как и в предыдущих случаях, определяется путем решения системы (13) при данных Коши, вычисленных по формулам типа (9).

§ 4. Случай градиентной среды

В частном случае, при $V=V(z)$ система (8) значительно упростится. Действительно, поскольку $V_x=V_y=0$, параметры p и q будут оставаться постоянными вдоль луча. Из формул (8) получаем

$$p = p^0, \quad q = q^0$$

При этом очевидно, что проекция луча на плоскость XOY будет представлять собой полупрямую с началом в точке $\{x^0, y^0\}$,

$$y = y^0 + \frac{q^0}{p^0}(x - x^0) \quad (18)$$

В дальнейшем это свойство проекции луча будет использовано при построении алгоритма вычисления точек неизвестной границы на ЭВМ.

Выразим r через p^0 и q^0 , пользуясь соотношениями (7), (10), (18):

$$r = \pm \frac{1}{V} \sqrt{1 - V^2(p^{0^2} + q^{0^2})} \quad (19)$$

Из формул (11) следует, что в окрестности границы R_0 (или любой другой) r будет иметь знак «+» в случае падающей и знак «-» в случае отраженной волны. Покажем постоянство знака r внутри слоя.

Для сохранения знака r необходимо отсутствие точек, в которых $r=0$. Равенства

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{p} \quad \text{и} \quad \frac{dz}{dy} = \frac{r}{q}$$

показывают, что эти точки являются точками экстремума проекций луча на плоскости XOZ и YOZ . Они характеризуются в случае градиентной среды сменой знака проекции луча на ось OZ при угле падения, равном $\pi/2$. Это означает рефракцию луча и, следовательно, отсутствие отражающей границы (или границы обмена), что исключено самой постановкой задачи.

Рассматривая формулы (9) и (19), можно заметить, что их можно унифицировать для случаев падающей и отраженной, обменной и проходящей волн, формально изменив знак скорости падающей волны на обратный. При этом у радикала в формулах (9) и (19) останется знак минус,

$$\begin{aligned} p^0 &= \tau_x - r^0 z_x, \\ q^0 &= \tau_y - r^0 z_y, \\ r_0 &= \frac{\tau_x z_x + \tau_y z_y}{\Delta^2} - \frac{\sqrt{\Delta^2 - V^2 \delta^2}}{V \Delta^2}, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= z_x^2 + z_y^2 + 1, \\ \delta^2 &= \tau_x^2 + \tau_y^2 + (z_x \tau_y - z_y \tau_x)^2. \end{aligned}$$

Перейдя затем к переменной интегрирования z , получим основную систему (13) в виде:

$$\begin{aligned} x_i &= x_i^0 - \int_{z_{0i}^0}^z \frac{p_i^0 V dz}{\sqrt{1 - V^2(p_i^{0^2} + q_i^{0^2})}}, \\ y_i &= y_i^0 - \int_{z_{0i}^0}^z \frac{q_i^0 V dz}{\sqrt{1 - V^2(p_i^{0^2} + q_i^{0^2})}}, \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \quad (21)$$

$$t_i = \tau_{01} - \int_{z_{0i}^0}^z \frac{dz}{V \sqrt{1 - V^2(p_i^{02} + q_i^{02})}},$$

где точки $\{x_i^0, y_i^0, z_{0i}^0\}$ являются начальными точками лучей на известной границе. Производные τ_x, τ_y, z_x, z_y в формулах (20) вычисляются в окрестности этих точек. Формулы (20) и (21) определяют луч падающей волны при $i=1, V=-V_1$ и луч отраженной волны при $i=2, V=V_2$.

Итак, в случае градиентной среды система (13) упрощается и представляет собой систему (21) с дополнительными условиями на границе отражения или обмена:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2, \\ y_1 &= y_2, \\ t_1 &= t_2, \end{aligned}$$

для определения $x_1, y_1, x_2, y_2, t_1, t_2, x^0, y^0, z$ при заданных x^0, y^0 и $z^0 = z_0$ (x^0, y^0).

Система (16) для пересчета годографа с R_j на R_{j+1} упрощается аналогичным образом:

$$\begin{aligned} X &= x^0 - \int_{z_j(x^0, y^0)}^{z_{j+1}(X, Y)} \frac{p^0 V dz}{V \sqrt{1 - V^2(p^{02} + q^{02})}}, \\ Y &= y^0 - \int_{z_j(x^0, y^0)}^{z_{j+1}(X, Y)} \frac{q^0 V dz}{V \sqrt{1 - V^2(p^{02} + q^{02})}}, \\ \tau^* &= \tau_j(x^0, y^0) - \int_{z_j(x^0, y^0)}^{z_{j+1}(X, Y)} \frac{dz}{V \sqrt{1 - V^2(p^{02} + q^{02})}}, \end{aligned} \quad (22)$$

где p^0, q^0 определены в окрестности границы R_j .

§ 5. Алгоритм вычисления координат точек поверхности раздела и структура рабочей программы

Численное решение рассматриваемой задачи, как в общем случае, так и в случае градиентной среды, выполнимо только с помощью высокопроизводительной ЭВМ. В связи с этим определим структуру рабочей программы и алгоритм построения границы отражения в градиентной среде как наиболее важные моменты программирования этой задачи.

Изложенная в § 2, 3, 4 методика определения границ раздела среды предусматривает простое разделение всего вычислительного процесса на периодически повторяющиеся четко разграниченные этапы. Например, при построении границы отражения таковыми будут:

- I. Получение годографа падающей волны.
- II. Вычисление значений параметров $p^0_1, q^0_1, p^0_2, q^0_2$ для каждой точки области задания годографа.
- III. Выбор начальной точки $\{x^0_2, y^0_2, z^0_{02}\}$.
- IV. Построение последовательности точек $(\{x^0_v, y^0_v, z^0_{0v}\})^v$ ($v=1, 2, \dots$), приводящей к получению точки искомой границы (§ 2).
- V. Пересчет годографов и параметров, необходимых для получения следующей искомой границы на вновь полученную границу.

Этапы II и III повторяются до получения всех возможных точек искомой границы. Весь комплекс вычислений повторяется для определения каждой новой границы.

Учитывая постановку задачи на дискретном множестве точек, легко убедиться, что II этап связан с многократным счетом по формулам (20), на IV этапе потребуются постоянно пользоваться интерполированием и экстраполированием функций двух переменных $z(x, y), \tau(x, y), p(x, y), q(x, y)$ и счетом по формулам (21), V этап характеризуется повторением счета по формуле (22). В этих условиях ярко выраженной цикличности вычислений по однотипным схемам при разработке рабочей программы был выбран метод библиотечных стандартных программ (СП). Анализ общей вычислительной схемы показал целесообразность разработки:

1. СП вычисления частных производных функции двух переменных по безразностным формулам.
2. СП вычисления интегралов

$$I_1 = \int_{z_j}^{z_{j+1}} \frac{V dz}{V \sqrt{1 - V^2(p^{0j2} + q^{0j2})}} \quad \text{и} \quad I_2 = \int_{z_j}^{z_{j+1}} \frac{dz}{V \sqrt{1 - V^2(p^{0j2} + q^{0j2})}} \quad (23)$$

входящих в формулы (21), (22).

3. СП вычисления p^0, q^0, r^0 по формулам (20) при заданных частных производных.
4. СП вычисления координат точек границы.
5. СП пересчета значений годографа с границы на границу по формулам (22).
6. СП аппроксимации функций двух переменных.

7. СП сглаживания функций двух переменных.
8. СП пересчета функции, заданной в произвольных точках на равномерную сетку.
9. СП определения области задания функции двух переменных.
10. СП выдачи поверхности t а АЦПУ или ДРП в виде структурной карты.

Этот далеко не полный перечень программ можно расширить как за счет включения СП, выполняющих предварительный этап обработки годографов, так и за счет различных вариантов указанных СП, например вариантов СП вычисления частных производных для $n=2, 3, 4..$ [7], или вариантов СП, предназначенных для интерпретации линейных годографов.

Разработанная специализированная библиотека базируется на широко распространенной на машинах типа М-20 системе ИС-2. Благодаря этому библиотека общедоступна и проста в освоении. СП могут быть использованы в самых различных задачах обработки информации.

Основное назначение специализированной библиотеки состоит в возможности решения широкого круга прямых и обратных задач геометрической сейсмологии с гладкими поверхностями раздела.

Для решения конкретной задачи достаточно при этом разработать программу, учитывающую специфику и особенности взятого случая. Функции этой управляющей программы (УП) в основном должны состоять в следующем:

1. Ввод исходных данных и предварительная обработка с учетом специфики их получения в полевых условиях.
2. Запоминание, хранение и выборка промежуточных результатов обработки информации.
3. Реализация необходимого порядка обращения к СП.
4. Контроль вычислений.

Объем и сложность УП находится в прямой зависимости от метода интерпретации и условий получения годографов. Следует заметить, что разработка основных вычислительных блоков в виде СП позволила сконцентрировать усилия на оптимизации схем счета в смысле затрат машинного времени.

В то же время, в целях ускорения освоения новой задачи УП может быть разработана с применением алгоритмического языка или автокода. Однако, учитывая важность экономии времени при повседневной производственной обработке полевой информации, следует отдать предпочтение типовым УП, составленным в кодах ЭВМ. Примером могут служить УП для

поиска границ отражения при различных методах наблюдений МОВ, для КМПВ, для решения прямой задачи.

Рассмотрим алгоритм вычисления координат точек поверхности отражения или обмена, пользуясь терминами и обозначениями языка публикаций «Алгол-60» [8].

Задача определения точек границы в реальных условиях ставится на множестве дискретных точек. Исходные данные представляют собой массивы значений аппликат известной поверхности, например дневной поверхности, и значений наблюдаемых годографов на этой поверхности в точках, проекции которых на плоскость XOY будем называть узлами $[x_l, y_m]$. Узлы образуют равномерную сетку

$$\begin{aligned} x_{l+1} &= x_l + H_x \quad (l = 0, 1, \dots, L-1), \\ y_{m+1} &= y_m + H_y \quad (m = 0, 1, \dots, M-1), \end{aligned} \quad (24)$$

где H_x и H_y — шаги между узлами вдоль соответствующих осей. Постановка задачи (§ 1) предусматривает наличие на известной поверхности годографов двух типов волн — τ_1 и τ_2 .

Будем считать, что эти условия выполнены на некоторой поверхности R (в дальнейшем для МОВ эта ситуация будет пояснена).

Массив $z[1 : L \times M + 4]$ значений аппликат поверхности R в узлах (24) задан в области D , ограниченной координатными линиями:

$$x_0 = a, \quad y_0 = b, \quad x_L = c, \quad y_M = d$$

и имеет вид: $a, c, b, d, z^{00}, z^{0i}, \dots, z^{lm}, \dots, z^{LM}$.

Здесь M и L количество строк и столбцов без единицы в области D , первое число индекса — номер строки, второе — номер столбца.

Массивы значений годографов τ_1 и τ_2 имеют аналогичный вид: $\tau_1[1 : L_1 \times M_1 + 4]$ задан в области D_1 , ограниченной координатными линиями:

$$x_{01} = a_1, \quad y_{01} = b_1, \quad x_{L_1} = c_1, \quad y_{M_1} = d_1$$

$\tau_2[1 : L_2 \times M_2 + 4]$ задан в области D_2 , ограниченной координатными линиями:

$$x_{02} = a_2, \quad y_{02} = b_2, \quad x_{L_2} = c_2, \quad y_{M_2} = d_2$$

Причем, $D_1 \cup D_2 = D$.

В областях D_1 и D_2 заданы массивы соответствующих лучевых параметров p и q :

$$\begin{aligned} P_1[1 : L_1 \times M_1] &= p_1^{00}, p_1^{01}, \dots, p_1^{lm}, \dots, p_1^{L_1, M_1}; \\ Q_1[1 : L_1 \times M_1] &= q_1^{00}, q_1^{01}, \dots, q_1^{lm}, \dots, q_1^{L_1, M_1}; \end{aligned}$$

$$P_2[1 : L_2 \times M_2] = p_2^{00}, p_2^{01}, \dots, p_2^{lm}, \dots, p_2^{L_2 M_2};$$

$$Q_2[1 : L_2 \times M_2] = q_2^{00}, q_2^{01}, \dots, q_2^{lm} \dots g_2^{L_2 M_2};$$

Скорости распространения упругих волн, полученные при скважинных наблюдениях, аппроксимируются в каждом слое кусочно-линейными функциями:

$$V_1 = \xi_k'' z + \eta_k', \quad z_k \leq z \leq z_{k+1}$$

$$V_2 = \xi_k'' z + \eta_k'', \quad (k = 1, 2 \dots K)$$

и задаются массивами коэффициентов $\xi_k', \eta_k', \xi_k'', \eta_k''$ по подслоям «к». В рассматриваемом алгоритме скорости непосредственно не участвуют, они используются при вычислении интегралов (23). Поэтому эти массивы не описываются.

Учитывая наличие СП вычисления интегралов (23) и линейной интерполяции, основное назначение программы построения границ состоит в осуществлении логики построения последовательности начальных точек падающего или проходящего луча.

Алгоритм построения последовательности базируется на следующих положениях:

1) функции $p_i = p_i(x, y)$ и $q_i = q_i(x, y)$ непрерывны в области задания D_i ($i = 1, 2$).

2) каждой точке области D_2 соответствует одна и только одна точка на искомой границе, которой в свою очередь соответствует одна и только одна точка области D_1 .

Обратное утверждение может оказаться неверным в случае МОВ для сильно искривленных границ отражения. Точки из D_1 и D_2 , соответствующие друг другу, в указанном смысле назовем сопряженными.

Первое положение следует из непрерывной дифференцируемости, а второе из однозначности функций $\tau_i = \tau_i(x, y)$. Заметим, что поворот осей координат для получения каждой новой точки несколько упрощает логику программы.

В описании алгоритма будут применяться, кроме введенных, следующие обозначения:

H_z — исходный шаг по оси OZ ,

$h_x, h_y, h_x', h_y', h_z$ — рабочие шаги вдоль соответствующих осей,

X_1, Y_1, Z — координаты точки пересечения луча $i = 1$ с плоскостью $z = Z$,

X_2, Y_2, Z — координаты точки пересечения луча $i = 2$ с плоскостью $z = Z$,

$x_{1 \text{ ст}}, y_{1 \text{ ст}}$ — координаты сопряженной точки предыдущего шага,

x_1, y_1, z_1 — координаты начальной точки луча $i = 1$,

- x_2, y_2, z_2 — координаты начальной точки луча $i=2$,
 ϵ_p — погрешность задания лучевого параметра,
 ϵ — погрешность вычисления координат x, y ,
 ϵ_z — погрешность вычисления координаты z ,
 t_1 — время прохождения луча от точки $\{x_1 y_1 z_1\}$ до $\{X_1, Y_1, Z_1\}$,
 t_2 — время прохождения луча от точки $\{x_2 y_2 z_2\}$ до $\{X_2, Z_2, Y_2\}$,
 I_1, I_2 — значения интегралов (23) в точках плоскости $z = Z$,
 A, B, C — вспомогательные признаки.

В процессе счета будут образованы массивы $S_1[1 : 250]$ — координаты x , $S_2[1 : 250]$ — координаты y , $S_3[1 : 250]$ — координаты z всех вычисленных точек границы отражения. Величины в новой системе координат будем обозначать штрихом.

После ввода массивов $z, \tau_1, \tau_2, P_1, Q_1, P_2, Q_2$ и значений $L, M, L_1, M_1, L_2, M_2, \epsilon_p, \epsilon, \epsilon_z, H_x, H_y, H_z, Z$ производится выбор первой точки в области D_2 и организация перебора точек этой области

```

begin  $x_{1ct} := y_{1ct} := 0; v := 0;$ 
 $x_2 := \tau_2 [1]; y_2 := \tau_2 [3]; A := B := F := 0;$ 
 $h_z := H_z; \Delta x := h_x := H_x; \Delta y := h_y := H_y;$ 
for  $m = 0$  step 1 until  $M_2$  do
begin for  $l = 0$  step 1 until  $L_2$  do
  
```

Далее определяется точка $\{X_2, Y_2, Z\}$, t_2 и производится анализ особого случая (ОС), когда лучи — падающий и отраженный — совпадают.

```

begin P 0347 ( $x_2, y_2$  результат :  $z_2$ )
  АО:  $P_2 = P_2[m \times (M_2 + 1) + l]; q_2 := Q_2[m \times (M_2 + 1) + l];$ 
  P 0345 ( $x_2, y_2, z_2, Z, V_2, p_2, q_2$ , результат:  $I_1, I_2$ )
     $X_2 := x_2 - p_2 \times I_2;$ 
     $Y_2 := y_2 - q_2 \times I_2;$ 
     $t_2 := \tau_2[m \times (M_2 + 1) + l + 4] - I_1;$ 
    if  $F = 2$  then go to A6;
  
```

```

A1: if  $(\tau_1 [l] \leq x_2 \wedge x_2 \leq \tau_1 [2] \wedge (\tau_1 [3] \leq y_2 \wedge y_2 \leq \tau_1 [4]))$  then
begin  $x_l := x_2; y_l := y_2; F := 0;$  go to A 2; end; go to A 4;
A2: P 0347 ( $x_1, y_1$ , результат:  $\tau_1$ );
  P 0347 ( $x_1, y_1$ , результат:  $p_1, q_1$ );
  P 0347 ( $x_1, y_1$ , результат:  $z_1$ );
  if  $F=0$  then go to A3; go to A9;
A3: P 0345 ( $x_1, y_1, z_1, Z, V_1, p_1, q_1$ , результат:  $I_1, I_2$ )
  
```

$X_1 := x_1 - p_1 \times I_2; Y_1 := y_1 - q_1 \times I_2; t_1 := \tau_1 - I_1;$
if (abs ($X_2 - X_1$) < $\varepsilon \wedge$ (abs ($Y_2 - Y_1$) < ε)) **then go to** OC;

Если случай не является особым, то осуществляется переход к новой системе координат, которая получается поворотом осей OX и OY вокруг OZ . Ось OX' новой системы координат проходит через точку $\{x_2, y_2\}$.

A4: $\sin \varphi := y_2 / \text{sgrt} (x_2 \uparrow^2 + y_2 \uparrow^2);$
 $\cos \varphi := x_2 / \text{sgrt} (x_2 \uparrow^2 + y_2 \uparrow^2);$
 $A := A = 1$

if $A < 2$ **then go to** A 5;

$h_{x'} := h_x \times \cos \varphi + h_y \times \sin \varphi;$
 $h_{y'} := -h_x \times \sin \varphi + h_y \times \cos \varphi;$
 $\Delta x := h_{x'}; \Delta y := h_{y'}; \text{go to } A6;$

A5: $h_{x_1} := \Delta x; h_{y_1} := \Delta y;$

A6: $X_2^1 := X_2 \times \cos \varphi + Y_2 \times \sin \varphi;$

$Y_2^1 := -X_2 \times \sin \varphi + Y_2 \times \cos \varphi; \text{if } F = 2 \text{ then go to } A2;$

Определяется тип интерпретируемых годографов (МОВ или МПОВ) и в соответствии с этим выбирается первая точка в области D_1 .

if $B > 1$ **then begin** $F := 1$ **go to** A2 **end;**

if $C \neq 0$ **then go to** A7; $x_1^1 := x_2; y_1^1 := 0$ **go to** A8;

A7: **if** $h_{x_1} < X_2/2$ **then** $x_1^1 := h_{x_1}$ **else** $x_1^1 := X_2/2; y_1^1 := 0;$

Перейдя к старой системе координат, проверяется принадлежность выбранной точки области D_1 :

A8: $x_1 := x_1^1 \times \cos \varphi - y_1^1 \times \sin \varphi;$

$y_1 := x_1^1 \times \sin \varphi + y_1^1 \times \cos \varphi; F := 1;$

if ($\tau_1 \{1\} \leq x_1 \wedge x_1 \leq \tau_1 \{2\}$) \wedge ($\tau_1 \{3\} \leq y_1 \wedge y_1 \leq \tau_1 \{4\}$)

then go to A2; **go to** A19;

Если $\{x_1, y_1\} \in D_1$, то в новой системе координат вычисляются p_1' и q_1' , по которым проверяется направление падающего луча, выходящего из точки $\{x_1, y_1\}$.

A9: $p_1^1 := p_1 \times \cos \varphi + q_1 \times \sin \varphi;$

$q_1^1 := -p_1 \times \sin \varphi + q_1 \times \cos \varphi;$

if $p_1^1 \leq \varepsilon_p$ **then go to** A 16;

if sign ($X_2^1 - x_1^1$) \neq sign (P_1^1) **then go to** A 16;

Учитывая прямолинейность проекции луча на плоскость XOY , вычисляется величина отклонения проекции луча от точки (см. (18))

$$y: Y_2^1 + q_1^1/p_1^1 \times (x_1^1 - X_2^1);$$

if abs $(y - y_1^1) \leq \epsilon$ then go to A 11;

if sign $(y - y_1^1) = \text{sign}(h_{y1})$ then go to A 10; $h_{y1}: -h_{y1}/2$
 A10: $y_1^1 := y_1^1 + h_{y1}$; go to A8;

Блоки A8—A10 повторяются до тех пор, пока разность $y - y_1^1$ станет меньше ϵ . Это будет означать, что проекция луча, выходящего из $\{x_1^1, y_1^1\}$, проходит через $\{X_2^1, Y_2^1\}$. Проводится луч и определяется отклонение точки $\{X_1^1, Y_1^1\}$ от точки $\{X_2^1, Y_2^1\}$.

A 11: P 0345 $(x_1^1, y_1^1, z_1, Z, p_1, q_1, V)$ результат: I_1, I_2

$$X_1^1 := x_1^1 - p_1^1 \times I_2; Y_1^1 := y_1^1 - q_1^1 \times I_2;$$

$$t_1 := \tau_1 - I_1; h_{y1} := H_{y1};$$

if abs $(X_2^1 - X_1^1) < \epsilon \wedge (\text{abs}(Y_2^1 - Y_1^1) < \epsilon)$ then go to A 13;
 if sign $(X_2^1 - X_1^1) = \text{sign}(h_{x1})$ then go to A 112; $h_{x1} := -h_{x1}/2$;

Чтобы приблизить точку $\{X_1^1, Y_1^1\}$ к $\{X_2^1, Y_2^1\}$, используя формулу (18), изменяют координаты исходной точки $\{x_1^1, y_1^1\}$

$$A 112: x_1^1 := x_1^1 + h_{x1}$$

$$y_1^1 := Y_2^1 + q_1^1/p_1^1 \times (x_1^1 - X_2^1); \text{ go to A 8};$$

При совпадении точек $\{X_1^1, Y_1^1\}$ и $\{X_2^1, Y_2^1\}$ проверяется временное соотношение и в соответствии с проверкой изменяется координата z .

$$A 13: h_{x1} := H_{x1};$$

if $(t_2 - t_1) \times h_{x1} > 0$ then go to A 14;

$$h_{z1} := -h_{z1}/2;$$

if abs $(h_{z1}) < \epsilon_z$ then go to A 17;

A 14: $z := Z + h_{z1}; F := 2$; go to A 0;

Ранее использованные блоки выглядят так:

OC: if $(t_2 - t_1) \times h_{x1} > 0$ then go to A 15;

if abs $(h_{z1}) > \epsilon_z$ then go to A 15;

$x_1 := x_2; y_1 := y_2$; go to A 17;

A 15: $Z := Z + h_{z1}$; go to A 0;

A 16: $q_1^1/p_1^1 := 0$ go to A 11;

Следующие блоки фиксируют координаты найденной точки границы и координаты сопряженных точек:

$$A 17: x_1 := x_1^1 \times \cos \varphi - y_1^1 \times \sin \varphi;$$

$$y_1 := x_1^1 \times \sin \varphi + y_1^1 \times \cos \varphi$$

A 18: $h_x := x_1 - x_{1cr}; h_y := y_1 - y_{1cr}; x_{1cr} := x_1; y_{1cr} := y_1$;

$$\begin{aligned}
 X &:= X_2' \times \cos \varphi - Y_2' \sin \varphi; \\
 Y &:= X_2' \times \sin \varphi + Y_2' \cos \varphi; \\
 S_1 [v] &:= X; S_2 [v] := Y; S_3 [v] := Z; v := v + 1; \\
 A &:= A + 1; B := B + 1; h_2 := H_2;
 \end{aligned}$$

$$A 19: x_2 := x_2 + H_x;$$

end;

$$H_x := -H_x; y_2 := y_2 + H_y;$$

end;

end; программы.

Коснемся кратко получения в случае МОВ на известной границе годографа падающей волны, поскольку на дневной поверхности R_0 он не регистрируется.

Годограф падающей волны можно получить расчетным путем на некоторой фиктивной границе R_ϕ , которая представляет собой горизонтальную плоскость $z = z_\phi$, расположенную между пунктом взрыва и первой отражающей поверхностью. Расположив R_ϕ достаточно близко к R_0 , чтобы скорость можно было аппроксимировать некоторым средним значением V_{cp} , падающий годограф можно вычислить в точках R_ϕ , соответствующих узлам равномерной сетки по формуле:

$$\tau_{im} = \frac{\sqrt{(x_l - x)^2 + (y_m - y)^2 + (z_\phi - z)^2}}{V_{cp}},$$

где x, y, z — координаты пункта взрыва.

Затем в тех же точках R_ϕ по формулам (22), взяв τ_1, p^0 и q^0 , соответствующие отраженному лучу, и полагая $z_j = z_0, z_{j+1} = z_\phi, V = V_2$, можно получить значения отраженного годографа τ_2^* . Теперь построение R_1 следует вести, считая R_ϕ известной границей, на которой заданы годографы двух типов волн от одного источника.

Значения падающего годографа на границе R_1 , при построении второй искомой границы получаются на основе последнего соотношения в формулах (13). Годограф τ_1 на R_1 получается из τ_2 на R_ϕ . Полагая в (22) $z_j = z_\phi, z_{j+1} = z_1, V = V_2$ и взяв τ, p^0 и q^0 , соответствующие отраженному лучу, получим $\tau^* = \tau_1$ для R_1 . Прием пересчета годографов повторяется для всех последующих искомых границ.

Таким образом, в случае МОВ можно всегда считать, что на известной границе заданы годографы падающей и отраженной волн.

Опыт разработки рабочих программ и доведения решения задачи до числа показывает, что дискретная форма задания

исходных данных вносит дополнительные трудности в метод и алгоритм счета, эти трудности связаны в основном с наличием погрешностей в заданиях исходных данных, с появлением погрешностей при счете частных производных $\frac{\partial \tau}{\partial x}$, $\frac{\partial \tau}{\partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ с необходимостью использования, как вспомогательных, программ пересчетов, интерполяции и экстраполяции функций двух переменных.

Как следствие дискретной постановки дополнительно к изложенным задачам (§ 2, 3) возникают:

задача аппроксимации функции двух переменных, с целью минимизации ошибки в вычислении частных производных от этой функции;

задача пересчета на равномерную сетку значений функции, заданных в произвольно расположенных точках плоскости;

задача определения оптимальных размеров новой сетки.

Каждая из этих задач достаточно трудоемка и будет рассмотрена в дальнейших работах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рудницкий В. П. Сейсмические исследования в скважинах. Киев, «Наукова думка», 1968.

2. Мири-заде С. А. Алгоритм прямой и обратной задач кинематики отраженных волн в неоднородных средах с криволинейными границами раздела. В сб. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, вып. IX. Л., «Наука», 1968.

3. Гурьянов В. М. Лучевой метод интерпретации годографов сейсмических волн. Физика Земли, Изд-во АН СССР, № 9, 1965.

4. Ризниченко Ю. В. Геометрическая сейсмика слоистых сред. Тр. института теоретической геофизики АН СССР, т. II, вып. I. М., 1946.

5. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. IV. М., Гостехтеориздат, 1957.

6. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. М., ИЛ, 1962.

7. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. М., Физматгиз, 1959.

8. Бэкус Д., Бауэр Ф. Л. и др. Сообщение об алгоритмическом языке Алгол-60. Журнал вычислительной математики и математической физики, № 2, 1961.

В. М. ГУРЬЯНОВ, Б. В. КОРОБОВ

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СЕЙСМИКИ

В Нижнем Поволжье разведка на нефть и газ сейсмическими методами связана с детальным изучением рельефа кристаллического фундамента и терригенных отложений девона, расположенных на большой глубине и покрытых неоднородными пластами других отложений с неравномерной мощностью. Особенно сильно меняется мощность соляных отложений в районах с солянокупольной тектоникой.

В этих районах при определении рельефа глубоких сейсмических границ обычной линейной съемкой получают большие погрешности, обусловленные боковым уклонением сейсмических лучей от профиля. Для их устранения необходимо проводить более дорогую площадную сейсмическую съемку с последующим решением обратных пространственных задач сейсмики и выдачей структурных карт.

Вопрос выбора вида сейсмической съемки решается весьма грубо и поэтому не всегда достигается нужная точность при ведении детальных сейсмических работ.

Для разработки методов, позволяющих определять по региональным сейсмическим работам вид детальных работ (площадных или профильных), надо уметь рассчитывать поверхностные и линейные годографы отраженных сейсмических волн как однократных так и многократных для неоднородной слоистой среды с достаточно произвольными границами раздела между слоями. Необходим метод оценки погрешности аппроксимации решения пространственных обратных задач геометрии

ческой сейсмоки решениями плоских задач с целью изучения влияния бокового уклонения сейсмических лучей от профиля на точность построения глубинных разрезов.

Вопрос оценки погрешности решения кинематических задач разработан слабо. Известны результаты для точечных зондирований, полученные в институте геофизики СО АН СССР [1]. Задача по оценке погрешности аппроксимации решения пространственных обратных задач геометрической сейсмоки решениями плоских задач ставится впервые.

В статье отражены результаты первого этапа работы. Получено точное решение пространственной задачи для слоисто-однородной среды, необходимое для оценки погрешности, и рассмотрен вопрос определения ошибок при интерпретации линейных годографов. Следует отметить, что точные решения пространственных задач важны сами по себе, поскольку позволяют получить хорошее представление о поведении решения в зависимости от исходных данных.

§ 1. Построение границы отражения

Решение задач проведено при следующих условиях. Слоисто-однородная среда отнесена к системе координат $XOYZ$ (рис. 1), ось OZ которой направлена вглубь. Годограф отраженной (обменной) волны рассматривается в системе $XOYt$.

Получим сначала точное решение задачи определения поверхности отражения по годографу отраженных волн для скорости отраженной волны, равной $V = \text{const}$.

Пусть в точке $A(x_*, y_*, z_*)$ расположен источник колебаний, а в окрестности точки $B(x^0, y^0, z^0)$ дневной поверхности R_0 , заданной уравнением

$$z = z_0(x, y), \quad (1)$$

определен годограф $\tau_2 = \tau_2(x, y)$ отраженной волны.

Тогда имеем известное скалярное поле времен источника в явной форме

$$t(x, y, z) = \frac{1}{V} \sqrt{(x - x_*)^2 + (y - y_*)^2 + (z - z_*)^2} \quad (2)$$

и скалярное поле времен отраженной волны в параметрической форме [2]

$$t_2 = \tau_2(x^0, y^0) + \frac{z - z^0}{V_2 r^0},$$

$$x = x^0 + \frac{p^0}{r^0} (z - z^0)$$

$$y = y^0 + \frac{q^0}{r^0} (z - z^0) \quad (3)$$

В точке $M(x, y, z)$ границы отражения R выполняется равенство времен $t_1 = t_2$. Подставляя значения t_1 и t_2 из (2) и (3), получаем соотношение

$$\frac{1}{V} \sqrt{(x - x_*)^2 + (y - y_*)^2 + (z - z_*)^2} = \tau_2 + \frac{z - z^0}{V^2 r^0} \quad (4)$$

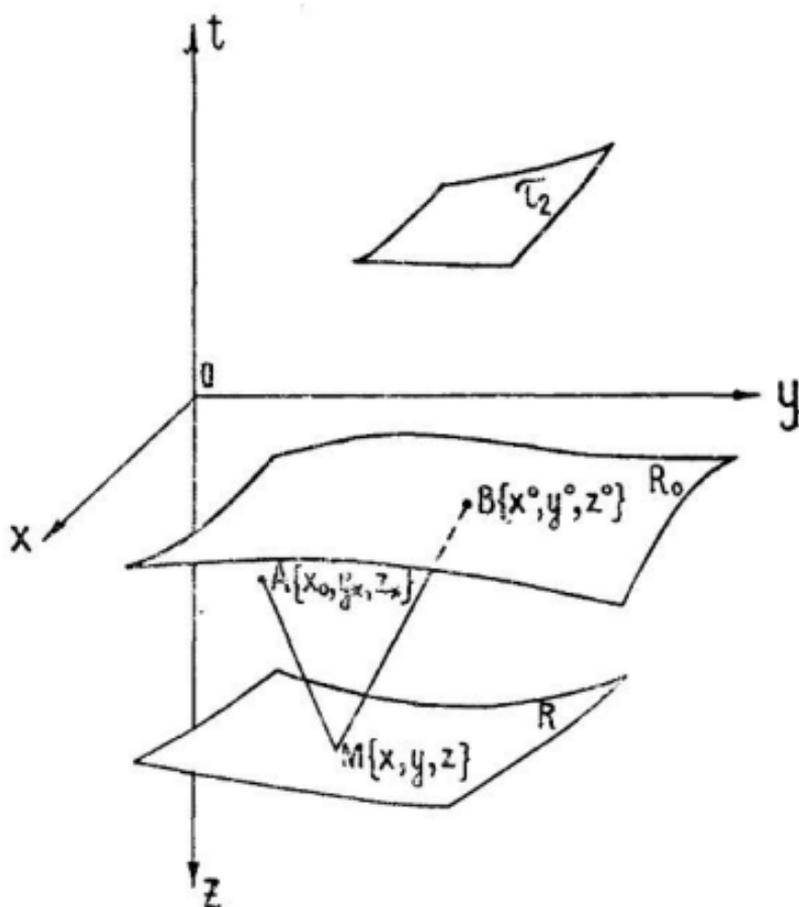


Рис. 1. Поверхностный годограф в окрестности точки В.

Решая систему уравнений (3), (4) относительно x, y, z получаем координаты поверхности отражения в функции параметров x^0, y^0, z^0 —координат точек дневной поверхности R_0 в виде

$$\begin{aligned}x &= x^0 + ap^0, \\y &= y^0 + aq^0 \\z &= z^0 + ar^0.\end{aligned}\quad (5)$$

Здесь

$$a = \frac{(x_* - x^0)^2 + (y_* - y^0)^2 + (z_* - z^0)^2 - \tau_2^2(x^0, y^0) V^2}{2[\tau_2(x^0, y^0) + p^0(x_* - x^0) + q^0(y_* - y^0) + r^0(z_* - z^0)]} \quad (6)$$

p^0, q^0 и r^0 определяются формулами:

$$\begin{aligned}p^0 &= \tau_{2x} - r^0 z_{0x}, \\q^0 &= \tau_{2y} - r^0 z_{0y}, \\r^0 &= \frac{\tau_{2x} z_{0x} + \tau_{2y} z_{0y}}{\Delta^2} \pm \sqrt{\frac{\Delta^2 - V^2 \tau_2^2}{V \Delta^2}}, \\ \Delta^2 &= z_{0x}^2 + z_{0y}^2 + 1, \\ \delta^2 &= \tau_{2x}^2 + \tau_{2y}^2 + (z_{0x} \tau_{2y} - z_{0y} \tau_{2x})^2.\end{aligned}\quad (7)$$

Формулы (5), (6), (7) показывают связь координат точек поверхности отражения с частными производными по x и y от функций τ_2 и z_0 .

§ 2. Теоретический годограф отраженных волн

Решим прямую задачу. По поверхности отражения R и дневной R_0 , заданными своими уравнениями

$$\begin{aligned}z &= z(x, y), \\z &= z_0(x, y),\end{aligned}\quad (8)$$

определим годограф τ_2 отраженной волны в случае расположения источника колебаний в точке $A\{x_*, y_*, z_*\}$ (рис. 1). Скорость V постоянна.

Годограф $t_1 = t_1(x, y)$ падающей волны на границе отражения $z = z(x, y)$ и лучевые параметры p_1, q_1 и r_1 имеют вид:

$$t_1(x, y) = \frac{1}{V} \sqrt{(x - x_*)^2 + (y - y_*)^2 + (z - z_*)^2} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}p_1 &= \frac{x - x_*}{V^2 t_1}, \\q_1 &= \frac{y - y_*}{V^2 t_1}, \\r_1 &= \frac{z - z_*}{V^2 t_1}.\end{aligned}\quad (10)$$

Для определения лучевых параметров p_2, q_2, r_2 луча отраженной волны в точке $M \{ x, y, z \}$ границы отражения воспользуемся уравнением эйконала и законом отражения: лучи падающей и отраженной волн лежат в одной плоскости с нормалью в точке M к поверхности отражения и расположены по разные стороны от этой нормали, т. е.

$$p_2^2 + q_2^2 + r_2^2 = \frac{1}{V^2},$$

$$\begin{vmatrix} \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \\ p_1 q_1 r_1 \\ p_2 q_2 r_2 \end{vmatrix} = 0, \quad (11)$$

$$p_2 \Delta_1 + q_2 \Delta_2 + r_2 \Delta_3 = - (p_1 \Delta_1 + q_1 \Delta_2 + r_1 \Delta_3),$$

где Δ_i — величины, пропорциональные направляющим косинусам нормали и равные соответственно

$$\Delta_1 = -z_x, \quad \Delta_2 = -z_y, \quad \Delta_3 = 1.$$

Разрешаем уравнение (11) относительно p_2, q_2, r_2

$$\begin{aligned} p_2 &= p_1 - a \Delta_1, \\ q_2 &= q_1 - a \Delta_2, \\ r_2 &= r_1 - a \Delta_3. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь

$$a = 2 \frac{\Delta_1 p_1 + \Delta_2 q_1 + \Delta_3 r_1}{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2}.$$

Заметим, что соотношения (12) справедливы и для неоднородной среды в окрестности точки отражения. В этом случае значение скорости берется в этой точке.

Напишем уравнения лучей отраженной волны

$$\begin{aligned} x^0 &= x + \frac{p_2}{r_2} (z^0 - z), \\ y^0 &= y + \frac{q_2}{r_2} (z^0 - z), \\ \tau_2 &= t_1 + \frac{z^0 - z}{V^2 r_2} \end{aligned} \quad (13)$$

и присоединим к ним уравнение дневной поверхности

$$z^0 = z_0(x^0, y^0). \quad (14)$$

Подставляя (14), (9) в (13), получаем уравнения годографа отраженных волн в функции параметров x, y , определяющих точки границы отражения:

$$x^0 = x + \frac{p_2}{r_2} [z_0(x^0, y^0) - z],$$

$$y^0 = y + \frac{q_2}{r_2} [z_0(x^0, y^0) - z], \quad (15)$$

$$\tau_2(x, y) = \frac{1}{V} \sqrt{(x+x_*)^2 + (y-y_*)^2 + [z(x, y)z_*]^2} + \\ + \frac{z_0(x^0, y^0) - z(x, y)}{V^2 r_2}.$$

Здесь в соответствии с (9) — (12)

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{x-x_*}{V^2 t_1} - a \Delta_1 \\ q_2 &= \frac{y-y_*}{V^2 t_1} - a \Delta_2, \\ r_2 &= \frac{z-z_*}{V^2 t_1} - a \Delta_3. \end{aligned} \quad (16)$$

При $z_0(x, y) = \text{Const}$ равенства (15) представляют собой явные параметрические уравнения годографа отраженной волны.

§ 3. Построение границы обмена

В случае обменных волн будем считать, что вдоль профиля $z_0=0$ заданы годографы поперечной волны $\tau = \tau_2(x, y)$ и продольной

$$\tau = \tau_1(x, y) = ax + by + c. \quad (17)$$

Скорости этих волн соответственно равны V_2 и V_1 .

Тогда систему уравнений можно записать в виде [2]

$$\begin{aligned} x &= x_2 + \frac{p_2}{r_2} z = x_1 + \frac{p_1}{r_1} z, \\ y &= y_2 + \frac{q_2}{r_2} z = y_1 + \frac{q_1}{r_1} z, \end{aligned} \quad (18)$$

$$t = \tau_2(x_2, y_2) + \frac{z}{V_2^2 r_2} = ax_1 + by_1 + c + \frac{z}{V_1^2 r_1},$$

где $z_0=0$, $p_1 = a$, $q_1 = b$, $r_1 = -\sqrt{\frac{1}{V_1^2} - (a^2 + b^2)}$;

$$p_2 = \frac{\partial \tau_2}{\partial x}, \quad q_2 = \frac{\partial \tau_2}{\partial y}, \quad r_2 = -\sqrt{\frac{1}{V_2^2} - (p_2^2 + q_2^2)}$$

Разрешая систему уравнений (18) относительно координат x , y , z границы обмена в функции параметров x_2 , y_2 — ко-

ординат точек выхода поперечной волны на дневную поверхность $z_0=0$, получаем параметрические уравнения границы обмена:

$$\begin{aligned}x &= x_2 + dp_2 \\y &= y_2 + dq_2 \\z &= dr_2,\end{aligned}$$

в которых

$$d = \frac{\tau_2(x_2, y_2) - ax_2 - by_2 - c}{ap_2 + bq_2 - r_2 \sqrt{\frac{1}{V_2^2} - (a^2 + b^2)} - \frac{1}{V_2^2}}.$$

§ 4. Определение величины бокового уклонения для наклонной границы отражения

Основываясь на результатах предыдущих параграфов, определим величину ошибок по глубине и в горизонтальных направлениях, получающихся при интерпретации линейных годографов отраженных волн от плоской наклоненной границы.

Для упрощения вычислений выберем дневную поверхность (рис. 2), совпадающую с плоскостью $XOY: z_0=0$, а источник колебаний расположим в начале координат:

$$x_* = y_* = z_* = 0$$

Пусть годограф τ_2 в окрестности точки $B\{x^0, y^0, z^0\}$ задан уравнением

$$\tau_2 = \frac{1}{V} \sqrt{x^{0^2} + y^{0^2} + 2 dx^0 + 2 ey^0 + f}, \quad (19)$$

определяющим гиперboloид вращения вокруг оси, проходящей через точку $\{x^0 = -d, y^0 = -e\}$ плоскости XOY .

Решая обратную задачу по формулам (5)–(7), получим

$$x = \frac{(x^0 + d)f}{2(dx^0 + ey^0 + f)} - d, \quad (20)$$

$$y = \frac{(y^0 + e)f}{2(dx^0 + ey^0 + f)} - e, \quad (21)$$

$$z = -\frac{f\sqrt{f-d^2-e^2}}{2(dx^0 + ey^0 + f)} + \sqrt{f-d^2-e^2}. \quad (22)$$

Исключив из полученных уравнений x^0 и y^0 , получим поверхность отражения R в виде плоскости

$$dx + ey - z\sqrt{f-d^2-e^2} + \frac{1}{2}f = 0, \quad (23)$$

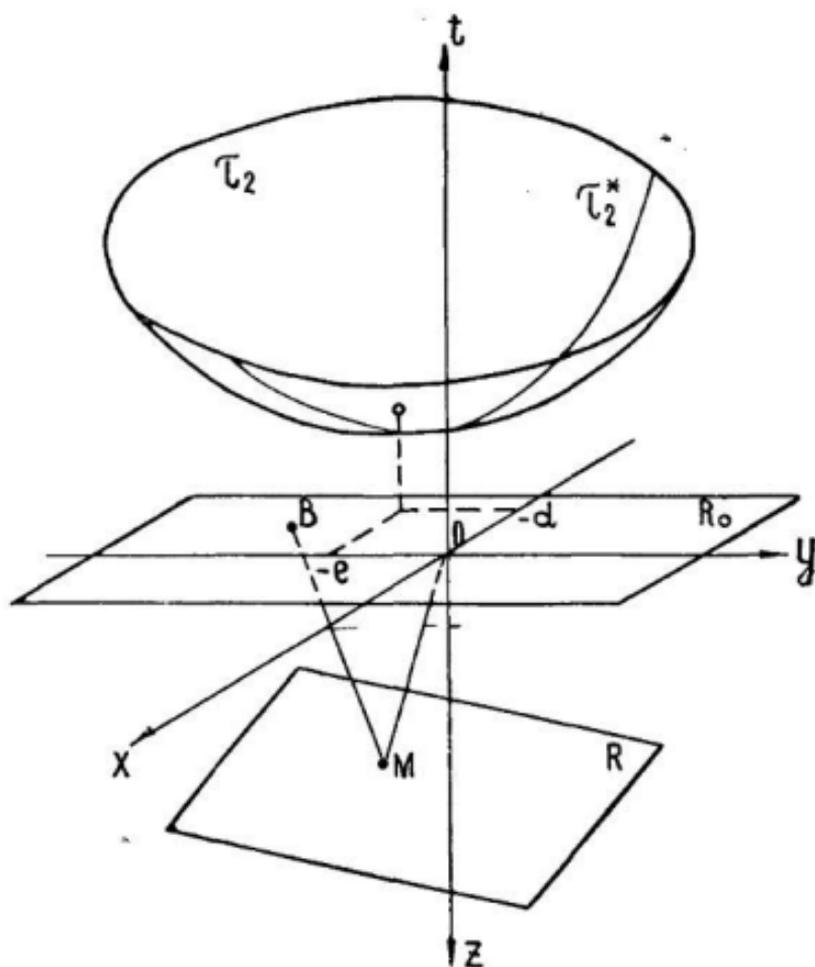


Рис. 2. Поверхностный годограф τ_2 от плосконаклоненной границы R.

внутренняя нормаль которой n образует с осями координат углы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Причем

$$\begin{aligned} \text{Cos } (in) &= \text{Cos } \varphi_1 = -\frac{d}{V\bar{f}}, \\ \text{Cos } (jn) &= \text{Cos } \varphi_2 = -\frac{e}{V\bar{f}}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\cos(kn) = \cos \varphi_3 = \frac{\sqrt{f-d^2-e^2}}{\sqrt{f}}$$

Учитывая (24), легко получить уравнение плоскости в нормальном виде, поделив (23) на $-\sqrt{f}$:

$$x \cos \varphi_1 + y \cos \varphi_2 + z \cos \varphi_3 - H = 0, \quad (25)$$

где

$$H = \frac{\sqrt{f}}{2}, \quad (26)$$

является кратчайшим расстоянием от начала координат до плоскости R . В начале координат расположен источник колебаний, поэтому H — аналог величины t_0 , применяемой в практике интерпретации временных разрезов:

$$H = \frac{t_0 V}{2}, \quad (26')$$

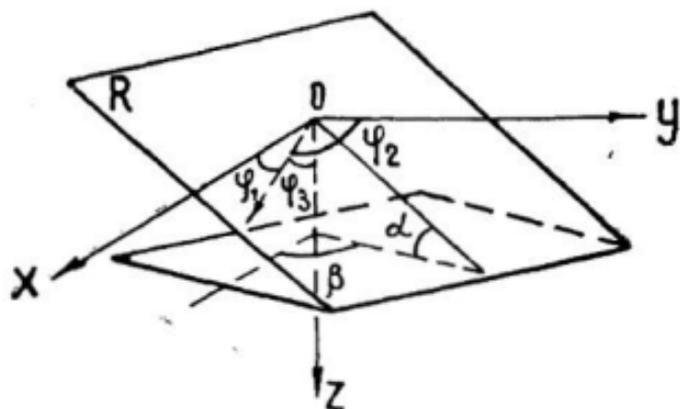


Рис. 3. Взаимосвязь углов в точке отражения M .

Углы φ_1 , φ_2 , φ_3 можно выразить через α — угол падения и β — азимут падения плоскости R . Если предположить, что ось Ox расположена в меридиональном направлении (рис. 3), то

$$\frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_1} = \operatorname{tg} \beta, \quad (27)$$

$$\alpha = \varphi_3. \quad (28)$$

Добавляя сюда известное соотношение

$$\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_3 = 1,$$

получим

$$\begin{aligned}\cos \varphi_1 &= \sin \alpha \cos \beta, \\ \cos \varphi_2 &= \sin \alpha \sin \beta.\end{aligned}\quad (29)$$

Знак произведения зависит от величины β ($\sin \alpha \geq 0$).

Теперь рассмотрим линейный годограф, полученный от известной плоскости R . При выбранном источнике колебаний продольный профиль должен лежать на прямой, проходящей через начало координат в плоскости XOY .

Не нарушая общности, профиль можно расположить по оси OX , считая d и e в уравнении годографа τ_2 параметрами. При любом другом положении профиля поворотом систем координат $XOYt$ и $XOYZ$ вокруг вертикальных осей Ot и OZ можно совместить с ним ось OX . В новой системе координат вид уравнения годографа сохранится, изменятся только значения коэффициентов d и e как параметров.

Годограф, наблюдаемый вдоль оси OX , получится пересечением поверхности τ_2 с плоскостью XOZ :

$$\tau_2^* = \frac{1}{V} \sqrt{x^0{}^2 + 2 dx^0 + \bar{f}}.$$

Решая задачу интерпретации линейного годографа τ_2^* согласно (5)–(7), получим границу отражения в виде прямой:

$$dx - z \sqrt{\bar{f} - d^2} + \frac{1}{2} \bar{f} = 0. \quad (30)$$

Эта граница мыслится интерпретатором находящейся в плоскости XOZ . Однако истинная граница, полученная сечением плоскости отражения R плоскостью XOZ , имеет вид:

$$dx - z \sqrt{\bar{f} - d^2 - e^2} + \frac{1}{2} \bar{f} = 0. \quad (31)$$

Обозначим истинную глубину границы через z_1 , а полученную через z_2 , и образуем разность или ошибку в определении глубин. Из (30) и (31) имеем:

$$\delta z = z_1 - z_2 = A \left(dx + \frac{1}{2} \bar{f} \right), \quad \text{где } A = \frac{1}{\sqrt{\bar{f} - d^2 - e^2}} - \frac{1}{\sqrt{\bar{f} - d^2}} \quad (32)$$

Легко заметить, что $\delta z = 0$ в случае $e = 0$ ($\cos \varphi_2 = \beta = 0$), т. е. когда плоскость R параллельна оси OY и, следовательно, профиль наблюдения расположен вкрест ее простираения (рис. 4). Это подтверждение известного в практике геофизических работ факта.

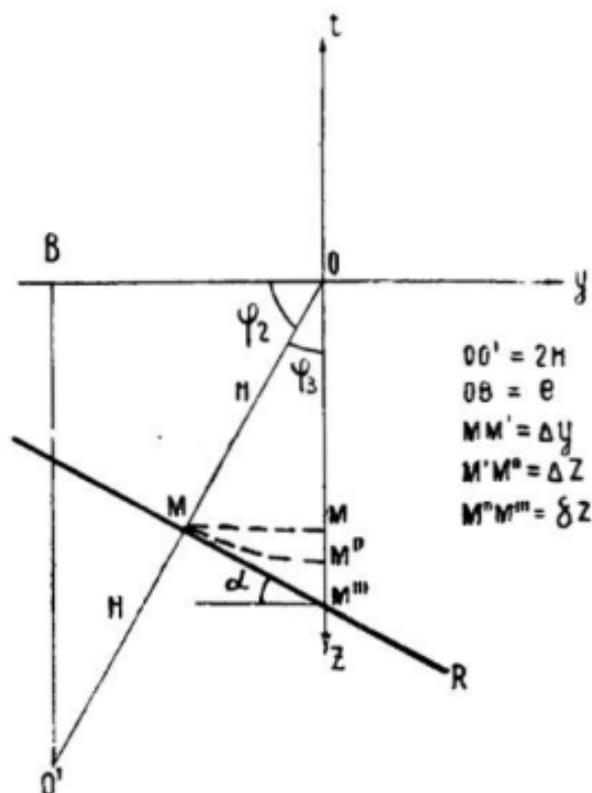


Рис. 5. Сечение $x=\text{const}$, при расположении профиля вдоль простираения R.

Из рис. 5 и (24) видно, что в этом случае

$$e^2 = f \cos^2 \varphi_2 = f \sin^2 \alpha.$$

Подставляя значение e^2 в (33), получим

$$\delta z = H (\sec \alpha - 1). \quad (34)$$

Ошибка по глубине δz зависит от угла наклона α и H . При изменении α от 0 до 90° δz возрастает от 0 до ∞ по закону секанса.

Для выяснения влияния бокового уклонения определим величины ошибок в координатах точек отражения. Пусть пункт приема находится на выбранном профиле в точке (x^0, O, O) .

Применяя формулы (5)–(7), получим координаты истинной точки отражения M

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{(x^0 + d)f}{2(dx^0 + f)} - d, \\y_1 &= \frac{ef}{2(dx^0 + f)} - e, \\z_1 &= -\frac{f\sqrt{f-d^2-e^2}}{2(dx^0 + f)} + \sqrt{f-d^2-e^2}.\end{aligned}$$

Из тех же формул для плоского случая будем иметь

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{(x^0 + d)f}{2(dx^0 + f)} - d, \\y_2 &= 0, \\z_2 &= -\frac{f\sqrt{f-d^2}}{2(dx^0 + f)} + \sqrt{f-d^2}.\end{aligned}$$

Вычисляя разности координат при учете (24), (28), (29), получим:

$$\Delta x = 0 \quad (35)$$

$$\Delta y = -BH \sin \beta \sin \alpha, \quad (36)$$

$$\Delta z = -BH (\cos \alpha - \sqrt{1 - \sin^2 \beta \sin^2 \alpha}), \quad (37)$$

где

$$B = \frac{2(x^0 \cos \beta \sin \alpha + H)}{x^0 \cos \beta \sin \alpha + 2H}. \quad (38)$$

Величина B пропорциональна z_1 и равна 1 при $x^0=0$. Если при смещении из точки $x^0 \neq 0$ по профилю глубина растет, то B становится больше 1, если она уменьшается — B меньше 1.

$B=0$ при $x^0 = \frac{H}{\cos \beta_1}$, т. е. на возможном пересечении R с линией профиля (рис. 4). При $B=1$ легко проследить зависимость Δy и Δz от α и β . В целом Δy и Δz растут при увеличении глубины залегания отражающей границы и угла α , при-

α , град.	Глубина (H), м		
	1000	1500	2000
5	87	130	174
10	173	260	346
15	258	387	516

нимая максимальные значения при $\beta=90^\circ$, т. е. при расположении профиля вдоль простираения плоскости R .

Величина Δy в нашем случае характеризует боковое уклонение. В таблице даются значения Δy в метрах при $B=1$.

ВЫВОДЫ

Аналитическое решение прямой и обратной пространственных задач геометрической сейсмологии позволяют вплотную подойти к оценке погрешности аппроксимации решения пространственных задач решениями плоских задач. Решение обратной задачи для слоисто-однородной среды с плосконаклоненной сейсмической границей дает возможность определить ошибки, имеющие место при построении глубинного разреза по продольным линейным годографам. Анализ этого случая показывает, что

1) ошибки по глубине Δz , δz и боковое уклонение сейсмического луча Δy выражаются через величину t_0 , α —угол падения и β —азимут падения плоскости отражения (26), (34)—(38).

Следует заметить, что все эти величины на практике часто бывают приближенно известны, особенно при проведенной детальной съемке;

2) ошибка в направлении профиля равна нулю (35). Истинная точка отражения может быть смещена в плане относительно предполагаемой точки в направлении, перпендикулярном профилю на величину Δy (36);

3) боковое уклонение сейсмических лучей Δy может достигать значительных размеров даже при небольших углах наклона границы (см. табл.). Поэтому при определении положения границы в плане необходимо его учитывать;

4) ошибка по глубине (34) приобретает существенную величину при углах α , превышающих 20 — 25° .

ЛИТЕРАТУРА

1. Пузырев Н. Н. Интерпретация данных сейсморазведки методом отраженных волн. М., Гостоптехиздат, 1959.
2. Гурьянов В. М. Лучевой метод интерпретации годографов сейсмических волн. Физика Земли. Изд-во АН СССР, № 9, 1965.

В. М. ГУРЬЯНОВ, О. В. КАРЕВА

ТРАНСФОРМАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ГОДОГРАФОВ ОТРАЖЕННЫХ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН

В работе [1] показана целесообразность представления линейных годографов отраженных волн в виде функции двух переменных: точки расположения источника колебаний и точки их приема. Получены дифференциальное уравнение первого порядка, которому удовлетворяет упомянутая функция, и полный интеграл этого уравнения. Нами используются результаты работы [1] для трансформации годографа ОГТ в линию t_0 и наоборот.

Будем считать, что имеется плоская сплошная двухслойная среда, отнесенная к декартовой системе координат XOZ . Вдоль профиля R_0 , заданного уравнением

$$z = 0, \quad (1)$$

в точке $A_1 \{ \xi, 0 \}$ помещается сейсмоприемник, а в точке $A_2 \{ \eta, 0 \}$ — источник колебаний. Наблюдаемый годограф τ отраженных волн в соответствии со сказанным выше представляется в виде поверхности

$$\tau = \tau(\xi, \eta) \quad (2)$$

Эту поверхность можно определить по кривой на ней, т. е. по данным Коши, и полному интегралу [1.] принимающему в данном случае вид:

$$\tau(\xi, \eta) = \frac{1}{v} (\xi - \eta)^2 + \frac{4}{1+k^2} (k\xi + b) (k\eta + b)^k, \quad (3)$$

где k и b — произвольные константы.
Введем новые константы

$$a = \frac{2k}{\sqrt{1+k^2}} \quad c = \frac{2b}{\sqrt{1+k^2}} \quad (4)$$

и запишем полный интеграл (3) в виде

$$\Psi(\xi, \eta, a, c) = v^2 \tau^2(\xi, \eta) - (\xi - \eta)^2 - (a\xi + c) \times \\ \times (a\eta + c) = 0 \quad (5)$$

Трансформация годографа ОГТ в линию t_0

Расположим начало координат в центре базы суммирования по ОГТ. В соответствии с методом ОГТ сейсмоприемник и источник колебаний должны располагаться симметрично относительно центра базы суммирования. Годограф ОГТ можно записать так:

$$\xi = -x, \quad \eta = x, \quad \varphi(x) = \tau(-x, x) \quad (6)$$

По полному интегралу (5) и данным Коши (6) получим функцию $\tau(\xi, \eta)$, пользуясь известной методикой [2].

Подставим данные Коши (6) в полный интеграл (5) и результат продифференцируем по x .

$$\Psi(-x, x, a, c) = v^2 \varphi^2(x) - 4x^2 + a^2 x^2 - c^2 = 0 \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x} = v^2 \varphi^{2'}(x) + 2(a^2 - 4)x = 0 \quad (7)$$

Отсюда получим

$$a^2 = 4 - \frac{v^2 \varphi^{2'}(x)}{2x} \quad (8) \\ c^2 = v^2 \left(\varphi^2 - \frac{x \varphi^{2'}}{2} \right).$$

Подставляя a и c из (8) в (5), получаем однопараметрическое семейство поверхностей

$$\Psi[\xi, \eta, a(x), c(x)] = 0 \quad (9)$$

Огибающая этого семейства и является искомой поверхностью $\tau = \tau(\xi, \eta)$:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = - (a' \xi + c') (a \eta + c) - (a \xi + c) \times \\ \times (a' \eta + c') = 0 \quad (10)$$

Дифференцированием по x и последующим делением результатов можно получить

$$\frac{c'}{a'} = \frac{a}{c} x^2$$

Используя это соотношение, запишем (10) в виде:

$$2ac\eta\xi + c^2(\xi + \eta) + ax^2[a(\xi + \eta) + 2c] = 0 \quad (11)$$

Таким образом, (5) дает искомую функцию $\tau(\xi, \eta)$ в функции параметра x , связь которого с ξ и η определяется соотношением (11). Для получения линии t_0 надо источник колебаний и сейсмоприемник совместить, т. е. положить в (5) и (11) $\xi = \eta = \zeta$. В итоге будем иметь по формуле (5)

$$\tau(\zeta, \zeta) = t_0(\zeta) = \frac{1}{v} (a\zeta + c), \quad (12)$$

где a и c даются формулами (8), т. е.

$$a^2 = 4 - \frac{v^2\varphi^{2r}}{2x} \quad (8)$$

$$c^2 = v^2\left(\varphi^2 - \frac{x\varphi^{2r}}{2}\right)$$

По равенству (11) получаем, учитывая, что $a\zeta + c = v\tau \neq 0$,

$$\zeta = -\frac{a}{c} x^2 \quad (13)$$

Равенства (12) и (13) дают линию $t_0(\zeta)$ в функции параметра x и годографа ОГТ $\varphi(x)$.

Пример. Пусть годограф ОГТ — гипербола:

$$\varphi(x) = \sqrt{bx^2 + d}$$

Тогда a и b постоянны

$$a^2 = 4 - bv^2, \quad c^2 = v^2d$$

и линия $t_0(\zeta)$ — прямая:

$$t_0(\zeta) = \frac{1}{v} (a\zeta + c)$$

Формула (13) в этом случае представляет собой соответствие точек на годографе ОГТ и линии t_0 .

Трансформация линии $t_0(\xi)$ в годограф ОГТ

В этом случае задана линия $t_0(\zeta)$, т. е. данные Коши

$$\xi = \eta = \zeta, \quad \tau(\zeta, \zeta) = t_0(\zeta)$$

Решение получено в [1] и имеет вид:

$$\begin{aligned} \tau(\xi, \eta) &= \frac{1}{v} (\xi - \eta)^2 + v^2[(\xi - \zeta)t_0' + t_0][(\eta - \zeta)t_0' + t_0]^* \\ &2(\xi - \zeta)(\eta - \zeta)t_0' + t_0(\xi - 2\zeta + \eta) = 0 \end{aligned}$$

Полагая $\xi = -x$, $\eta = x$, получаем годограф ОГТ

$$\tau(-x, x) = \varphi(x) = \left(\frac{4x^2}{v^2} + t_0^2(\zeta) - \frac{\zeta t_0^2}{2} \right)^{1/2} \quad (14)$$

$$x^2 = \zeta^2 - \zeta \frac{t_0(\zeta)}{t_0'(\zeta)} \quad (15)$$

Равенство (15) показывает, что при трансформации линии $t_0(\zeta)$ в годограф ОГТ должно соблюдаться условие

$$\zeta^2 - \zeta \frac{t_0(\zeta)}{t_0'(\zeta)} \geq 0,$$

из которого следует, что не всякий участок линии $t_0(\zeta)$ — может быть преобразован в годограф ОГТ. Более подробно этот вопрос рассмотрен ниже.

Пример. Пусть $t_0(\zeta)$ — прямая.

$$t_0(\zeta) = a\zeta + b \quad (16)$$

Тогда по (15) и (14) имеем

$$x^2 = -\frac{b}{a} \zeta$$

$$\varphi(x) = \left(\frac{4x^2}{v^2} + ab\zeta + b^2 \right)^{1/2} = \left[\left(\frac{4}{v^2} - a^2 \right) x^2 + b^2 \right]^{1/2}, \quad (17)$$

т. е. годограф ОГТ представляет собой гиперболу. Равенство (17) показывает, что не вся линия $t_0(\zeta)$ преобразуется в годограф ОГТ, а только те ее точки ζ , для которых выполнено условие

$$-\frac{b}{a} \zeta \geq 0$$

Построение годографа ОГТ по заданной границе отражения

При рассмотрении вопроса о влиянии изменения формы границ отражения на годограф ОГТ удобно задать уравнения границы отражения в параметрической форме с помощью некоторого параметра ψ , а затем через этот параметр выразить все функции, описывающие линию $t_0(\zeta)$ и годограф ОГТ. В вышеизложенных выводах все функции зависели от параметра ζ линии t_0 .

Итак, пусть координаты границы отражения являются функциями параметра ψ

$$X = X(\psi), \quad Z = Z(\psi) \quad (18)$$

С другой стороны, имеется связь границы отражения с линией t_0 , а, значит, и с функцией годографа ОГТ [1]

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2} \left[2 \zeta - \frac{v^2 t_0(\zeta) t_0'(\zeta)}{2} \right] \\ Z &= \frac{1}{2} v t_0 \sqrt{1 - \frac{v^2 t_0'^2(\zeta)}{4}} \end{aligned} \quad (19)$$

Приравнивая правые части (18) и (19), получаем неявно выраженную связь между некоторым параметром ψ границы отражения и параметром ζ линии t_0 , а именно

$$\begin{aligned} X(\psi) &= \zeta - \frac{v^2 t_0(\zeta) t_0'(\zeta)}{4} \\ Z(\psi) &= \frac{1}{2} v t_0(\zeta) \sqrt{1 - \frac{v^2 t_0'^2(\zeta)}{4}} \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь $\zeta = \zeta(\psi)$.

Производную от функции t_0 также возьмем по параметру ψ

$$t_0'[\zeta(\psi)] = \frac{dt_0}{d\psi} \frac{d\psi}{d\zeta} = \frac{\dot{t}_0}{\dot{\zeta}} \quad (21)$$

Точкой обозначено дифференцирование по ψ .

Приведем (20) с учетом (21) к следующему виду

$$\begin{aligned} X(\psi) &= \zeta - \frac{v^2 t_0 \dot{t}_0}{4 \dot{\zeta}} \\ Z(\psi) &= \sqrt{\frac{v^2 t_0^2}{4} - \frac{v^2 t_0 \dot{t}_0}{4 \dot{\zeta}}} \end{aligned} \quad (20')$$

Найдем явную зависимость между параметром ζ линии t_0 и ψ , которая позволит связать границу отражения с годографом ОГТ.

Определим параметр ζ из системы (20').

Из первого уравнения системы имеем

$$\zeta - X = \frac{v^2 t_0 \dot{t}_0}{4 \dot{\zeta}}$$

Подстановкой этого выражения во второе уравнение находим:

$$\zeta = X \pm \sqrt{\frac{v^2 t_0^2}{4} - Z^2} \quad (22)$$

Продифференцировав ζ в (22) по ψ , получим

$$\dot{\xi} = \dot{X} \pm \frac{\frac{v^2 t_0 \dot{t}_0}{4} - z \dot{z}}{\sqrt{\frac{v^2 t_0^2}{4} - z^2}} \quad (23)$$

Подставим выражения для ξ и $\dot{\xi}$ из (22) и (23) в первое уравнение из системы (20'):

$$X = X \pm \sqrt{\frac{v^2 t_0^2}{4} - z^2} - \frac{v^2 t_0 \dot{t}_0}{4 \left(\dot{x} \pm \frac{\frac{v^2 t_0 \dot{t}_0}{4} - z \dot{z}}{\sqrt{\frac{v^2 t_0^2}{4} - z^2}} \right)}$$

После преобразований имеем следующее выражение

$$\pm \sqrt{\frac{v^2 t_0^2}{4} - z^2} = z \frac{\dot{z}}{\dot{x}} \quad (24)$$

Подставим в (20) значение радикала из (24):

$$\xi(\psi) = X(\psi) + \frac{z(\psi) \dot{z}(\psi)}{\dot{x}(\psi)} \quad (25)$$

Это выражение дает искомую связь между параметром границы отражения ψ и параметром ξ линии t_0 .

Найдем зависимость $t_0 = t_0[\xi(\psi)]$ из выражения (24)

$$t_0[\xi(\psi)] = \frac{2z(\psi)}{v} \sqrt{1 + \left[\frac{\dot{z}(\psi)}{\dot{x}(\psi)} \right]^2} \quad (26)$$

Формула (26) позволяет получать вид линии t_0 при заданной границе отражения (18).

Чтобы установить соответствие между линией $t_0[\xi(\psi)]$ и географом ОГТ, т. е. функцией $\varphi(x)$, продифференцируем $t_0[\xi(\psi)]$ по ξ

$$t_0' = \frac{dt_0}{d\xi} \cdot \frac{1}{d\xi/d\psi}, \quad (27)$$

где $\frac{dt_0}{d\psi}$ можно получить из (26), а $\frac{d\xi}{d\psi}$ — из (25). В итоге приведем схему вычислений по выведенным формулам.

Задаются функции $X = X(\varphi)$, $Z = Z(\psi)$ (18), описывающие выбранную для изучения границу отражения. Параметр ξ ли-

нии t_0 и сама функция t_0 выражаются через этот параметр по формулам:

$$\xi(\psi) = X_1(\psi) + \frac{z(\psi)\dot{z}(\psi)}{\dot{x}(\psi)} \quad (25)$$

$$t_0[\xi(\psi)] = \frac{2z(\psi)}{v} \sqrt{1 + \left[\frac{\dot{z}(\psi)}{\dot{x}(\psi)}\right]^2} \quad (26)$$

Используя (25) и (26), вычисляется производная t_0 по ξ

$$t_0'[\xi(\psi)] = \frac{dt_0}{d\psi} \cdot \frac{1}{d\xi'/d\psi} \quad (27)$$

И, наконец, для полученных значений ξ , t_0 , t_0' подсчитываются для данного ψ значения координаты x точек взрыв-прибор

$$x^2(\psi) = \xi^2(\psi) - \xi(\psi) \frac{t_0[\xi(\psi)]}{t_0'[\xi(\psi)]} \quad (15)$$

и функция $\varphi(x)$ годографа ОГТ

$$\varphi(x) = \left\{ \frac{4x^2(\psi)}{v^2} + t_0^2[\xi(\psi)] \right\} - \xi(\psi) t_0[\xi(\psi)] t_0'[\xi(\psi)]^N \quad (14)$$

Отражение от границы и прием осуществляются при условиях $x^2 \geq 0$ в (15) и $\frac{t_0'}{2} < \frac{1}{v}$ в (27), означающих, что для точек границы, в которых эти условия не выполняются, граница отражения имеет области тени для упругой волны, т. е. отражения по методу ОГТ не существует для данного центра суммирования.

Если граница отражения задается в явном виде, т. е. $X = X(\psi) = \psi$, то приведенные выше формулы приобретают следующий вид

$$Z = Z(X) \quad (18')$$

$$\xi(X) = X + Z(X)Z'(X) \quad (25')$$

$$t_0[\xi(X)] = \frac{2z(x)}{v} \sqrt{1 + Z'^2(X)} \quad (26')$$

$$t_0'[\xi(X)] = \frac{2z(x)}{v} \frac{1}{\sqrt{1 + z'^2(x)}} \quad (27')$$

и в формулах (14—15) берутся значения ξ , t_0 , t_0' из (25'—27').

Рассмотрим конкретные формы границ и их годографы ОГТ. Пусть граница отражения (18') имеет вид:

$$Z(X) = aX + b + \alpha \sin(\omega X + \nu), \quad (18'')$$

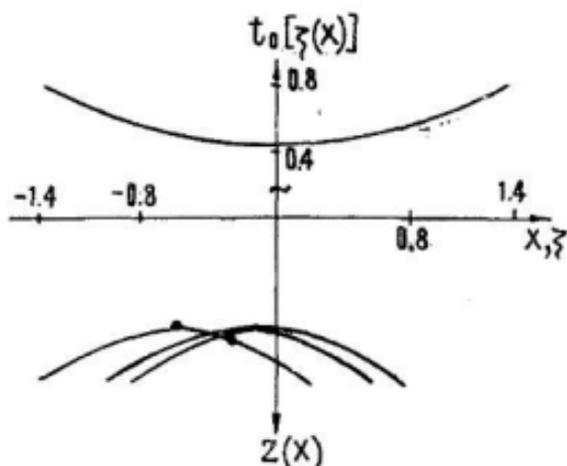
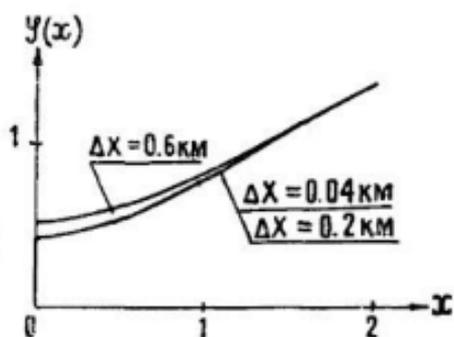


Рис.1. Трансформация купола с параметрами $v=3$ км/сек, $b=1$ км, $a=0,33$ км в годограф ОГТ — участки границы, которые дают отражения по методу ОГТ.

где a — тангенс угла регионального наклона; b — глубина его залегания; a — амплитуда структуры a , b , a ; ω — частота поднятий и погружений на границе; v — начальная фаза колебания, позволяющая ориентировать центр базы относительно границы отражения.

Примеры.

1. Граница отражения — купол (рис. 1, 2):

$$Z = b - a \sin(\omega X + v)$$

— $0,8 \text{ км} \leq X \leq 0,8 \text{ км}$ при $\omega=1,96$, $v=1,57$.

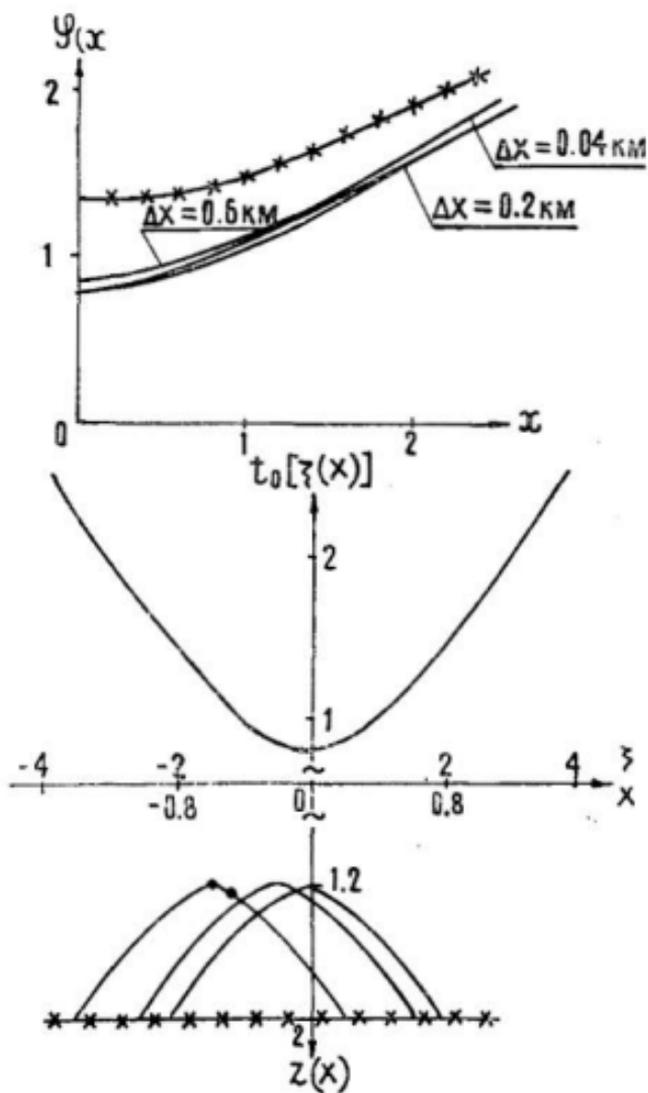


Рис. 2. Трансформация купола с параметрами $V=3 \text{ км/сек}$, $b=2 \text{ км}$, $a=0,8 \text{ км}$ в годограф ОГТ. $x-x$ — прямолинейная граница и ее годограф ОГТ.

Выбирая центры суммирования по ОГТ в интервале значений $-0,8 \text{ км} \leq X \leq 0,8 \text{ км}$ ($X=0$ соответствует вершине купола), получаем теоретически бесконечные однозначные годографы, соответствующие отражениям от небольшой области вблизи вершины.

Следует отметить (рис. 1, 2), что при одном и том же центре суммирования освещается большая область вблизи вершины для купола высотой в 300 м, чем в 800 при одинаковой протяженности куполов.

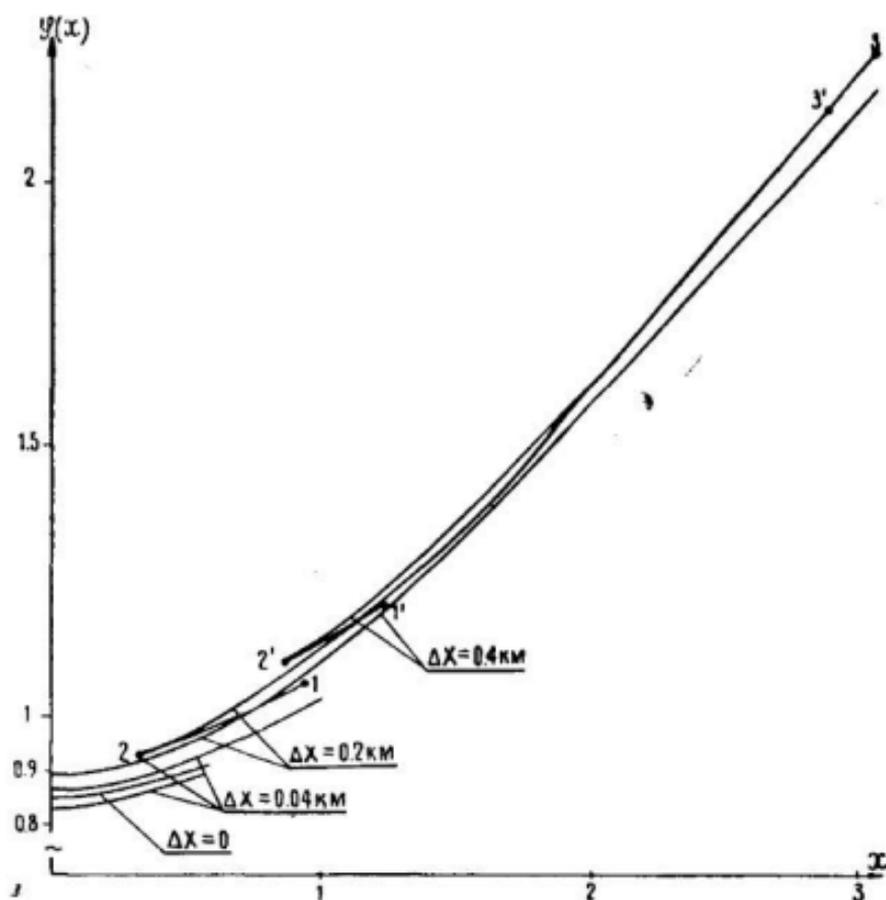


Рис. 3. Годограф мулды ($\alpha=0,33 \text{ км}$) при сдвигах центра суммирования относительно основания мулды на $\Delta x=0,04 \text{ км}$, $\Delta x=0,2 \text{ км}$, $\Delta x=0,4 \text{ км}$.

Когда центры суммирования выбираются за пределами указанной области ($0,8 \text{ км} \leq X \leq -0,8 \text{ км}$), то годограф ОГТ становится функцией многозначной, так как появляются дополнительные отражения от других участков границы, являющихся продолжением купола.

2. Граница отражения — мульда (рис. 4, 5):

$$Z = b + a \sin(\omega X + \nu)$$

$-0,8 \text{ км} \leq X \leq 0,8 \text{ км}$ при $\omega = 1,96$ и $\nu = 1,57$.

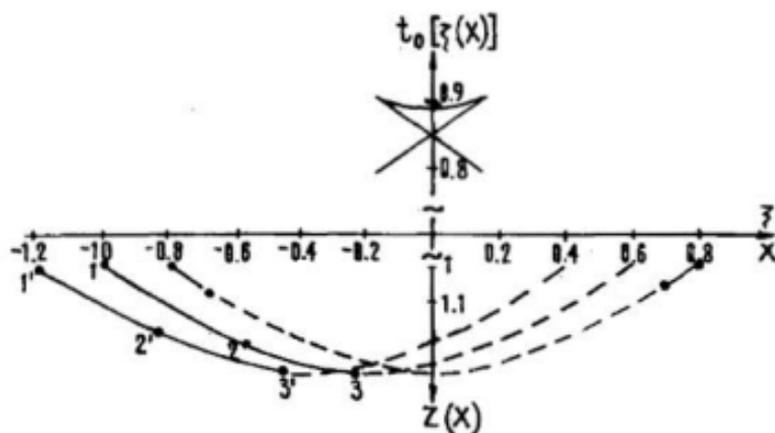


Рис. 4. Трансформация мульды с параметрами $\nu = 3 \text{ км/сек}$, $b = 1 \text{ км}$, $a = 0,3 \text{ км}$ в линию $t_0(\xi)$.

Для мульды глубиной 300 м, залегающей на глубине 1 км от дневной поверхности, линия $t_0(\zeta)$ имеет форму петли с областью определения 400 м. При любом выборе местоположения центра суммирования на профиле годограф ОГТ будет многозначной функцией.

При соответствии центра суммирования основанию мульды высвечиваются особая точка $X = 0$ основания мульды и симметричные участки на склонах, что дает в качестве годографа ОГТ гиперболу и кривую. Разность фаз между кривыми 40 мсек.

Аппроксимируя склон мульды наклонной прямой, определяем, что разность фаз между аппроксимирующим годографом и годографом для склона меняется от 30 мсек до 0.

Если центры суммирования выбираются в пределах области существования линии $t_0(\zeta)$ (например, на расстоянии 40 и 200 м по профилю от точки $X = 0$, соответствующей основанию

мульды), то годографы ОГТ для них будут трехзначными функциями (рис. 3) с разностью фаз между кусками от 30 до 60 мсек.

Если центр суммирования находится вне области существования линии $t_0(\zeta)$, то годограф ОГТ представляет собой линию с самосоприкосновением и возвратом с разностью фаз между кусками от 0 до 30 мсек.

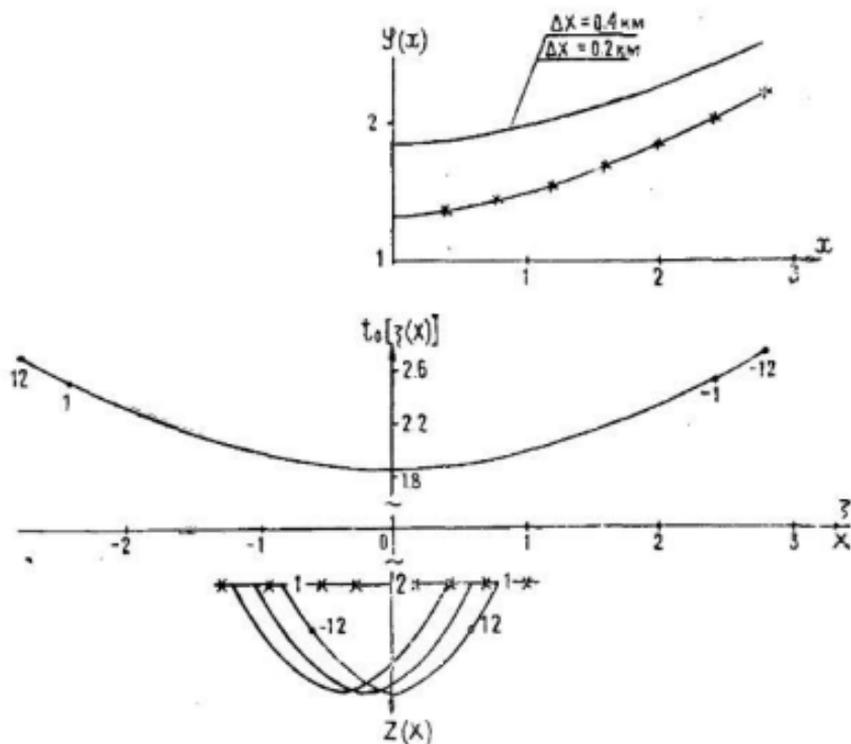


Рис. 5. Трансформация мульды с параметрами $v=3$ км/сек, $b=2$ км, $\alpha=0,8$ км в годограф ОГТ. \times — \times — годограф плоской границы.

Вблизи центра суммирования значение годографа ОГТ от мульды отсутствует. Например, для $\Delta X=0,4$ км наблюдается зона исчезновения отражений от мульды в интервале $[0; 0,9$ км] вблизи центра (рис. 3).

Для мульды глубиной 800 м, находящейся в 2 км от дневной поверхности, возникает ситуация, аналогичная той, что наблюдалась для куполов, поскольку в этом случае линия $t_0(\zeta)$ — функция однозначная.

Таким образом, для центров суммирования, выбранных внутри области определения границы, отражение от участка, близкого к основанию мульды, дают однозначные годографы ОГТ (рис. 5), которые будут иметь конечную область существования ($\pm 2,8$ км) (в отличие от годографов для куполов), что связано с наличием предельного конуса лучей у мульды.

Для центров суммирования, выбранных в интервале ($-0,8 \text{ км} \leq X \leq 0,8 \text{ км}$) будет наблюдаться многозначность в годографе ОГТ.

3. Рассмотрим годограф наклонной границы, осложненной поднятиями и погружениями вида ($18''$).

При небольших амплитудах положительных и отрицательных структур ($\alpha = 10 \text{ м}$) с увеличением угла наклона (от 10 до 15°) граница начинает освещаться полностью. При этом отраженные волны дают непрерывный годограф с возвратами ($1-5^\circ$) и приходят в каждую точку дневной поверхности от различных участков границы в одной фазе. Причем, с ростом общего угла наклона границы уменьшается область определения годографа $[0, x]$. Так, при угле наклона границы $\gamma_1 = 1^\circ$ и протяженности ее в 6 км годограф существует на интервале $[0, x] = 50 \text{ км}$, но при $\gamma_2 = 15^\circ$ и той же протяженности интервал сокращается до 3 км .

В случае значительных по амплитуде осложнений границы $\alpha = 0,12 \text{ км}$ годограф становится нестабильным. Он состоит из кусков конечной длины с возвратами и с разностью фаз между составляющими его кусками в $100 \div 380 \text{ мсек}$.

Если угол регионального наклона известен, то суммирование по годографу наклонной границы, которым аппроксимируется годограф границы с осложнениями, допустимо лишь при небольших осложнениях (с амплитудой $\alpha = 10 \div 30 \text{ м}$). В противном случае, при обработке вносятся большие искажения.

4. Граница отражения — флексура:

$$Z(X) = \begin{cases} b_1 & -a_1 \leq X \leq X_1 \\ \frac{b_2 - b_1}{2} - \alpha \sin(\omega X + v) & X_1 \leq X \leq X_2 \\ b_1 & X_2 \leq X \leq a_2 \end{cases}$$

Параметр ω выбирается в зависимости от размера крутого крыла флексуры. Расчеты проведены для следующих значений параметров:

$$Z(X) = \begin{cases} 0,5 & -0,6 \text{ км} \leq X \leq -0,3 \text{ км} \\ 0,75 - 0,25 \sin (5,232 X + 3,14), & -0,3 \text{ км} \leq X \leq 0,3 \text{ км} \\ 1,0 & -0,3 \text{ км} \leq X \leq 0,6 \text{ км} \end{cases}$$

Для выбранных центров суммирования 1, 2, 3... 12, соответствующих положениям $X = -0,5 \text{ км}$; $-0,4 \text{ км}$; ... $0,5 \text{ км}$; $0,6 \text{ км}$ относительно середины склона флексуры, были рассчитаны годографы ОГТ.

Годографы ОГТ для 1—8 центров представляют собой кривые, близкие к гиперболе с бесконечной областью определения; для 9—12 центров (как и в случае мульды) — трехзначные функции: одна кривая (с бесконечной областью определения) дает время отражения от склона флексуры; вторая (с конечной областью определения) — от основания флексуры; третья (с конечной областью определения) — от точки на платформе.

Во всех рассмотренных случаях разность фаз между кусками годографа, относящихся к одному центру суммирования, приводит к искажениям материала при приеме и обработке.

ВЫВОДЫ

Результаты изучения свойств годографа ОГТ для некоторых типов криволинейных границ указывают на необходимость тщательного расчета кинематических поправок с учетом криволинейности границы.

Так, годограф ОГТ является многозначной функцией в случаях

- а) больших по амплитуде ($\alpha = 60 \div 120 \text{ м}$) осложнений границы,
- б) мульды с пологими склонами,
- в) флексуры,
- г) выбора центра суммирования за пределами области существования купола или мульды с крутыми склонами.

При этом между составляющими годограф ОГТ участками кривых наблюдаются расфазировки, значительно превышающие длину отраженной волны, что приводит к искажениям материала при его приеме и обработке.

В случае незначительных осложнений отражающей границы (до $\alpha = 40 \text{ м}$) возможна аппроксимация границы наклонной прямой, но с учетом сокращения базы приема отражений по ОГТ при увеличении угла наклона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гурьянов В. М. Обратная задача геометрической сейсмологии для отраженных волн в случае зависимости скорости от двух переменных. Изв. АН СССР, Физика Земли, № 5, 1968.
2. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. 4. М., Гостехиздат, 1953.

ГОДОГРАФЫ НЕКОТОРЫХ МОДИФИКАЦИЙ МОВ С ЕДИНОЙ ТОЧКИ ЗРЕНИЯ

Пусть имеется плоская, сплошная, изотропная, слоистая среда, отнесенная к декартовой системе координат XOZ . Вдоль профиля R_0 , заданного в параметрической форме

$$X = X_0(\xi), \quad Z = Z_0(\xi) \quad (1)$$

в точке $A_0 \{ X_0(\xi), Z_0(\xi) \}$ помещается сейсмоприемник, а в точке $A_1 \{ X_0(\eta), Z_0(\eta) \}$ — источник колебаний.

В качестве параметра ξ берем длину дуги кривой R_0 . Направление отсчета возьмем такое, чтобы $X_0(\xi)$ возрастало с ростом параметра ξ . В соответствии со сказанным имеем

$$X_0'^2 + Z_0'^2 = 1, \quad X_0' > 0.$$

Наблюдаемый годограф τ отраженных волн зависит от места расположения приемников и источников колебаний, поэтому он является функцией двух переменных ξ и η

$$\tau = \tau(\xi, \eta) = \tau(\eta, \xi) \quad (2)$$

и представляет собой в пространстве (τ, ξ, η) поверхность, которую назовем поверхностью годографов.

Чтобы проследить геометрический смысл принципа взаимности времен (2), повернем систему координат $\xi\eta$ на 45° и перейдем к новой прямоугольной системе OUW . Координаты ξ, η связаны с U, W следующими формулами преобразования

$$U = \frac{\sqrt{2}}{2} (\xi + \eta) \quad \xi = \frac{\sqrt{2}}{2} (U + W) \quad (3)$$

$$W = \frac{\sqrt{2}}{2} (\xi - \eta) \quad \eta = \frac{\sqrt{2}}{2} (U - W)$$

В новой системе координат функция $\tau(\xi, \eta)$ примет вид:

$$\tau \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(U+W), \frac{\sqrt{2}}{2}(U-W) \right] = T(U, W) \quad (4)$$

Принцип взаимности времен —

$$T(U, W) = T(U, -W). \quad (5)$$

Четностью функции T относительно переменной W определяется свойство симметрии поверхности τ относительно плоскости сечения $W=0$.

Рассмотрим свойства поверхности годографов $\tau(\xi, \eta)$

1. Пересекая поверхность годографов плоскостями

$$\eta = \eta_i \quad (i=1, 2, 3, \dots), \quad (6)$$

параллельными плоскости $o\eta\xi$, получаем совокупность линейных нагоняющих годографов МОВ (рис. 1).

$$\tau_i = \tau(\xi, \eta_i) = \varphi(\xi) \quad (i=1, 2, 3, \dots) \quad (7)$$

2. Пересекая поверхность плоскостью $W=\text{const}$, параллельной плоскости $o\tau U$, и проектируя линию пересечения на плоскость $o\tau\xi$, получаем годограф $l\text{const}$ (рис. 1). То есть, для

$$W = \frac{\sqrt{2}}{2}(\xi - \eta) = l \text{const} \quad (8)$$

имеем

$$\tau(\xi, \eta) = T(U, l). \quad (9)$$

Положив $W = l < 0$, получаем годограф $l\text{const}$, если поменять местами источник и приемник.

Частный случай $l\text{const}=0$ или $W = \frac{\sqrt{2}}{2}(\xi - \eta) = 0$ означает совмещение источника и приемника колебаний в одной точке на кривой $R_0(\xi = \eta = \zeta)$. При этом сечение поверхности $\tau(\xi, \eta)$ плоскостью $W=0$ дает линию $t_0(\zeta)$, лежащую в плоскости симметрии поверхности τ .

3. Пересекая поверхность плоскостью $U=\text{const}$ (рис. 1), параллельной плоскости $o\tau W$, и проектируя линию пересечения на плоскость $o\eta\xi$, получаем годограф ОГТ (рис. 1) при условии

$$U = \frac{\sqrt{2}}{2}(\xi + \eta) = \text{const} \quad (10)$$

Обозначив

$$(\xi + \eta) = 2\sqrt{2} \zeta,$$

имеем

$$\xi - \sqrt{2} \zeta = \sqrt{2} \zeta - \eta$$

$$\text{Если } \zeta = 0, \text{ то } \xi = -\eta, \text{ и } \tau(\xi, -\eta) = \tau(x, -x) \quad (11)$$

**Построение поверхности
по заданному годографу МОВ на ней**

Поверхность определяется по полному интегралу [1], который удобно взять в виде [2]

$$\Psi(\xi, \eta, a, c) = v^2 \tau(\xi, \eta) - (\xi - \eta)^2 - (a\xi + c)(a\eta + c) = 0, \quad (12)$$

а также по данным Коши для линейного годографа

$$\xi = x, \eta = \eta_i = 0 \quad (6')$$

$$\tau_i = \tau(x, \eta_i) = \varphi(x) \quad (7')$$

Считая $a = a(x)$, $c = c(x)$ и решая поставленную задачу Коши с помощью полного интеграла (12), получаем соотношения, определяющие функциональные зависимости $a = a(x)$ и $c = c(x)$, такие, чтобы удовлетворялись начальные условия (6') и (7'):

$$\Psi = v^2 \varphi^2(x) - x^2 - (ax + c)c = 0$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = v^2 \varphi^{2'} - 2x - ac = 0. \quad (13)$$

Из последнего уравнения имеем

$$a = \frac{v^2 \varphi^{2'} - 2x}{c}. \quad (14)$$

Решая систему (13), получим искомые зависимости

$$c^2 = v^2 \varphi^2 - x^2 - (v^2 \varphi^{2'} - 2x)x$$

$$a^2 = \frac{(v^2 \varphi^{2'} - 2x)^2}{[v^2 \varphi^2 - x^2 - (v^2 \varphi^{2'} - 2x)x]}. \quad (14')$$

Подстановка полученных выражений a и c через x в полный интеграл (12)

$$\Psi[\xi, \eta, a(x), c(x)] =$$

$$= v^2 \tau^2(\xi, \eta) - (\xi - \eta)^2 - a^2 \xi \eta + ac(\xi + \eta) + c^2 =$$

$$v^2 \tau^2(\xi, \eta) - (\xi - \eta)^2 - \frac{(v^2 \varphi^{2'} - 2x)^2 \xi \eta}{[v^2 \varphi^2 - x^2 - (v^2 \varphi^{2'} - 2x)x]^2} -$$

$$- (v^2 \varphi^{2'} - 2x)(\xi + \eta) - [v^2 \varphi^2 - x^2 - (v^2 \varphi^{2'} - 2x)x] = 0$$

дает семейство поверхностей, зависящее от одного параметра x .

Найдя огибающую этого семейства

$$\frac{d\Psi}{dx} = \Psi_x + \Psi_a a' + \Psi_c c' = 0, \quad (16)$$

получим искомую интегральную поверхность. Система (15, 16) позволяет установить связь между параметрами x , ξ , η , обеспечивающую прохождение найденной поверхности через заданный годограф МОВ (6'), (7'). Из уравнения (16), с учетом второго равенства (13), имеем

$$\frac{a'}{c'} = - \frac{\Psi_c}{\Psi_a} = - \frac{2a\xi\eta + c(\xi + \eta)}{[a(\eta + \xi) + 2c]} \quad (17)$$

из системы (14) —

$$\frac{c'}{a'} = - \left(\frac{2}{x} + \frac{a}{c} \right)$$

Приравняв правые части отношений, получаем искомую связь между параметрами

$$x(c^2 - a^2\xi\eta) - c[2a\xi\eta + c(\xi + \eta)] = 0, \quad (18)$$

где a и c определяются формулами (14'). Уравнения (16, 18) дают решение задачи о построении поверхности по заданному годографу МОВ.

Чтобы трансформировать годограф МОВ в линию $t_0(\zeta)$, подставим в (12) условия совмещения источника и приемника в одну точку $\xi = \eta = \zeta$;

$$t_0(\zeta) = \frac{1}{v} (a\zeta + c), \quad (19)$$

где a и c определяются формулами (14').

При подстановке условия $\xi = \eta = \zeta$ в (18), получаем вид связи между координатами пунктов приема по МОВ и по методу t_0

$$\zeta = \frac{xc}{ax + c}. \quad (20)$$

Равенства (19, 20) дают линию $t_0(\zeta)$ как функцию параметра x и линейного годографа $\varphi(x, 0)$.

Трансформация линии $t_0(\zeta)$ в годограф МОВ

Задана линия $t_0(\zeta)$, т. е. данные Коши вида

$$\xi = \eta = \zeta, \quad \tau(\zeta, \zeta) = t_0(\zeta)$$

Решение [1] имеет вид:

$$\tau(\xi, \eta) = \frac{1}{v} \{ (\xi - \eta)^2 + v^2[(\xi - \zeta)t_0' + t_0] \times \\ \times [(\eta - \zeta)t_0' + t_0] \}^{\frac{1}{2}} \quad (21)$$

$$2(\xi - \zeta) \cdot (\eta - \zeta)t_0' + t_0(\xi - 2\zeta + \eta) = 0$$

Полагая в (21) $\xi = x$, $\eta = 0$, получаем линейный годограф

$$\tau(x, 0) = \varphi(x) = \frac{1}{v} \{ x^2 + v^2[(x - \zeta)t_0' + t_0] \times \\ \times [-\zeta t_0' + t_0] \}^{\frac{1}{2}}, \quad (22)$$

где

$$x = 2\zeta \left[1 + \frac{\zeta t_0'}{t_0 - 2\zeta t_0'} \right] \quad (23)$$

Получили выражение для годографа МОВ через координату ζ и годограф $t_0(\zeta)$.

Построение поверхности по заданному годографу $l = \text{const}$

Начальные данные Коши имеют вид

$$\xi = x + \frac{l}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} (U + W)$$

$$\eta = x - \frac{l}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} (U - W)$$

$$\tau(\xi, \eta) = \varphi\left(x + \frac{l}{2}, x - \frac{l}{2}\right)$$

Подставив эти данные и продифференцировав (12) по x , получим

$$\Psi(x) = v^2 \Psi^2 - l^2 - \left[a\left(x + \frac{l}{2}\right) + c \right] \left[a\left(x - \frac{l}{2}\right) + c \right] = 0 \quad (*)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = v^2 \varphi^{2'} - 2a(ax + c) = 0 \quad (24)$$

Найдем $a(x)$ и $c(x)$ из системы (24).

Из второго уравнения системы выразим

$$ax + c = \frac{v^2 \varphi^{2'}}{2a} \quad (*),$$

подставив его в первое

$$v^2 \varphi^2 - l^2 - \left(\frac{v^2 \varphi^{2'}}{2a} \right)^2 + \left(\frac{la}{2} \right)^2 = 0 \quad (**),$$

откуда после преобразований получим

$$a^2 = \frac{-2(v^2\varphi^2 - l^2) + \sqrt{4(v^2\varphi^2 - l^2)^2 + l^2(v^2\varphi^{2'})^2}}{l^2} \quad (25')$$

Для найденного значения a с вычисляется по формуле

$$c = \frac{v^2\varphi^{2'}}{2a} - ax. \quad (25'')$$

Тогда искомая поверхность является огибающей однопараметрического семейства поверхностей

$$\Psi[\xi, \eta, a(x), c(x)] = 0,$$

где зависимости $a(x)$ и $c(x)$ определяются системой (25).

Связь между параметрами x, ξ, η для метода $l \text{ const}$ устанавливается тем же путем, что и в предыдущем случае, т. е. находятся производные a' и c' из (25) и их отношение приравнивается к $\frac{a'}{c'}$ из (17).

Продолжаем указанные действия. Полученное после подстановки $(ax + c)$ выражение (xx) продифференцируем по x

$$v^2\varphi^{2'} + \frac{l^2aa'}{2} - \frac{v^4\varphi^{2'}}{2a^3}(\varphi^{2''}a - a'\varphi^{2'}) = 0$$

и найдем a'

$$a' = \frac{av^2\varphi^{2'}(v^2\varphi^{2''} - 2a^2)}{l^2a^4 + v^4(\varphi^{2'})^2} \quad (26)$$

Продифференцируем (25'') по x

$$c' = \frac{v^2\varphi^{2''}a - a'(v^2\varphi^{2'} + 2a^2x) - 2a^3}{2a^2}$$

После подстановки выражения для a' из (26) и некоторых преобразований c' имеет вид:

$$c' = \frac{a[v^2\varphi^{2''} - 2a^2][l^2a^2 - 2xv^2\varphi^{2'}]}{2[l^2a^4 + v^4(\varphi^{2'})^2]}$$

Возьмем отношение

$$\frac{a'}{c'} = \frac{2v^2\varphi^{2'}}{(l^2a^2 - 2xv^2\varphi^{2'})} \quad (27)$$

Приравнивая правые части (27) и (17), получаем уравнение, связывающее параметры x, ξ, η при трансформации линии $l \text{ const}$ в поверхность в виде

$$\frac{-a(\eta + \xi) + 2c}{2a\xi\eta + c(\xi + \eta)} = \frac{2v^2\varphi^{2'}}{l^2a^2 - 2xv^2\varphi^{2'}} \quad (28)$$

Положив в (28) $\eta = \xi = \zeta$, определяем связь между парамет-

рами x и ζ , возникающую при трансформации линии $t_0(\zeta)$ в годограф $l \text{ const}$

$$\zeta = \frac{2xv^2\varphi^2 - l^2a^2}{2v^2\varphi^2} \quad (29)$$

При $l=0$ получаем из (29) $x=\zeta$, а из (24*)

$$\varphi = \frac{1}{v}(ax+c) = t_0(\zeta),$$

т. е. при $l=0$ годограф $l \text{ const}$, определенный формулами (28) и (23), трансформируется в $t_0(\zeta)$

Трансформация линии $t_0(\zeta)$ в годограф $l \text{ const}$

Осуществляется по формулам (21), которые после замены переменных вида

$$\xi = x - \frac{l}{2}, \quad \eta = x + \frac{l}{2}$$

$$\tau(\xi, \eta) = \varphi\left(x + \frac{l}{2}, x - \frac{l}{2}\right)$$

имеют вид

$$\begin{aligned} 2\left(x + \frac{l}{2} - \zeta\right)\left(x - \frac{l}{2} - \zeta\right)t_0' + 2t_0(x - \zeta) &= 0 \\ \varphi\left[\left(x + \frac{l}{2}\right), \left(x - \frac{l}{2}\right)\right] &= \left\{\frac{l^2}{v^2} + \left[\left(x + \frac{l}{2} - \zeta\right)t_0' + t_0\right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[\left(x - \frac{l}{2} - \zeta\right)t_0' + t_0\right]\right\}^{1/4} \end{aligned} \quad (30)$$

Решаем первое уравнение системы

$$x = \left(\zeta - \frac{t_0}{2t_0'}\right) + \frac{1}{2t_0'} \sqrt{t_0^2 + t_0'^2 l^2}.$$

Выбираем один корень уравнения со знаком $+$ перед радикалом, так как при $l=0$ это уравнение должно перейти в равенство $x=\zeta$.

Преобразуя полученные уравнения к виду, удобному для вычислений, имеем:

$$x = \zeta + \frac{\sqrt{t_0^2 + t_0'^2 l^2} - t_0}{2t_0'} \quad (31)$$

$$\varphi\left(x + \frac{l}{2}, x - \frac{l}{2}\right) = \left\{l^2 \left[\frac{1}{v^2} - \left(\frac{t_0'}{2}\right)^2\right] + \left[\left(x - \zeta\right)t_0' + t_0\right]^2\right\}^{1/4}.$$

Годограф $l \text{ const}$ существует при условии $1/v > \frac{t_0'}{2}$.

Построение поверхности $\tau(\xi, \eta)$ по заданному годографу ОГТ [2]

В этом случае (12) дает искомую функцию $\tau(\xi, \eta)$ в функции параметра x , связь которого с ξ и η определяется соотношением:

$$2ac\xi\eta + c^2(\xi + \eta) + ax^2[a(\xi + \eta) + 2c] = 0, \quad (32)$$

где

$$a^2 = 4 - \frac{v^2\varphi^{2'}}{2x}$$

$$c^2 = v^2\left(\varphi^2 - \frac{x\varphi^{2'}}{2}\right). \quad (33)$$

Решение задачи о трансформации линии $t_0(\zeta)$ в годограф ОГТ также получено в [2]

$$\tau(-x, x) = \varphi(x) = \left(\frac{4x^2}{v^2} + t_0^2(\zeta) - \frac{\zeta t_0^{2'}}{2}\right)^{1/2} \quad (34)$$

$$x^2 = \zeta^2 - \zeta \frac{t_0(\zeta)}{t_0'(\zeta)} \geq 0. \quad (35)$$

Во всех указанных модификациях, зная кривую на интегральной поверхности $\tau(\xi, \eta)$ (например, $t_0(\zeta)$) и скорость v , можно построить границу отражения по формулам [1]

$$X = \zeta - v_2 \frac{t_0(\zeta)t_0'(\zeta)}{2}$$

$$Z = \frac{1}{2}vt_0(\zeta) \sqrt{1 - \frac{v^2 t_0'^2(\zeta)}{4}}, \quad (36)$$

что позволяет решать задачу полностью до построения глубинного разреза.

В качестве примера на рис. 2 представлена поверхность годографов, построенная для границы отражения в форме флексуры, на которой выделены годографы t_0 , МОВ, $l \text{ const}$ и ОГТ.

Построение границы отражения по заданному годографу плоского фронта

Пусть годограф $\tau(\xi, \eta)$ имеет проекцию на плоскость $\tau_0\xi$. Если его рассматривать как семейство кривых, зависящих от параметра η , то проекция $\tau = \tau_0(\xi)$ (37) является огибающей этого семейства.

При построении границ отражения в методе плоского фронта используется лишь годограф отраженной волны и функция τ зависит только от координаты пункта приема ξ .

Исходя из этого и из определения огибающей семейства кривых, имеем

$$\frac{\partial \tau}{\partial \eta} = 0. \quad (38)$$

Это означает, что угол выхода сейсмической радиации в пунктах взрыва $(X(\eta), Z(\eta))$ равен $\pi/2$.

Поставленная задача решена полуобратным методом (при известных $v = \text{const}$ и годографе плоского фронта (37) в работе [1]:

$$\begin{aligned} X &= X_0(\xi) - \int_{Z_0(\xi)}^Z \frac{p v dz}{\sqrt{1-p^2 v^2}} \\ p &= p_0(\xi) + \int_{Z_0(\xi)}^Z \frac{v_x dz}{v^2 \sqrt{1-p^2 v^2}} \\ t &= \tau(\xi, \tau) - \int_{Z_0(\xi)}^Z \frac{dz}{v \sqrt{1-p^2 v^2}}. \end{aligned} \quad [I-(15)]$$

Здесь

$$\begin{aligned} P_0(\xi) &= X_0'(\xi) \tau_{\xi}' + Z_0' \sqrt{\frac{1}{v_0^2} - \tau_{\xi}'^2} \\ v_0 &= v[X_0(\xi), Z_0(\xi)]. \end{aligned} \quad [I-(16)]$$

Меняя местами источник и приемник колебаний, получаем уравнения для луча отраженной волны $\{X_1(\eta), Z_1(\eta)\}$.

$$\begin{aligned} X &= X_1(\eta) - \int_{Z_1(\eta)}^Z \frac{v P_1 dZ}{\sqrt{1-P_1^2 v^2}} \\ P_1 &= P_{01}(\eta) + \int_{Z_1(\eta)}^Z \frac{v_x dZ}{v^2 \sqrt{1-P_1^2 v^2}} \\ t &= \tau(\xi, \eta) - \int_{Z_1(\eta)}^Z \frac{dZ}{v \sqrt{1-P_1^2 v^2}} \end{aligned} \quad [I-(17)]$$

Здесь

$$\begin{aligned} P_{01}(\eta) &= X_1'(\eta) \tau_{\eta}' + \frac{Z_1'(\eta)}{v} \sqrt{1 - \tau_{\eta}'^2 v^2} \\ v &= v[X_1(\eta), Z_1(\eta)] \end{aligned}$$

Добавив соотношение

$$\int_{Z_0}^Z \frac{dZ}{v\sqrt{1-P_1^2v^2}} + \int_{Z_0}^Z \frac{dZ}{v\sqrt{1-P_1^2v^2}} = \tau(\xi, \eta), \quad [1-(18)]$$

имеем систему уравнений для определения X, Z, P, P_1 .

При условии $Z(X)=0$ и $v=\text{const}$ и учитывая, что $\tau_{\xi}' = \tau_{\zeta}'$, получаем $P_1 = P_{01} = 0, P = P_0(\xi) = \tau_0'$.

Уравнения принимают вид

$$X = \xi - \int_0^Z \frac{\tau_0' v dZ}{V\sqrt{1-\tau_0'^2 v^2}} \quad X = \eta$$

$$\int_0^Z \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v\sqrt{1-\tau_0'^2 v^2}} \right) dZ = \tau_0(\xi).$$

В результате интегрирования имеем

$$X = \eta = \xi - \frac{Z\tau_0'v}{\sqrt{1-\tau_0'^2 v^2}}$$

$$Z = \frac{\tau_0 v}{1 + 1/\sqrt{1-\tau_0'^2 v^2}}.$$

Если $\tau_0'^2 v^2$ мало по сравнению с единицей, то получим общепринятые формулы для расчета границы отражения

$$X = \xi - Z\tau_0'v$$

$$Z = \tau_0 v / 2, \quad (39)$$

где τ_0 — годограф плоского фронта.

ВЫВОДЫ

Представление системы нагоняющих годографов в виде функции двух переменных $\tau = \tau(\xi, \eta)$ [1] позволяет выделять на интегральной поверхности годографы $l(\text{const}, t_0, \text{МОВ}, \text{ОГТ})$ путем образования канонических сечений, а также получать годограф плоского фронта путем образования огибающей $\tau_0(\xi)$. Это дает возможность устанавливать аналитические связи между различными модификациями МОВ, а, следовательно, позволяет уточнять, корректировать построения, исходя из сопоставления годографов, лежащих на одной интегральной поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гурьянов В. М. Обратная задача геометрической сейсмологии для отраженных волн в случае зависимости скорости от двух переменных. Изв. АН СССР, Физика Земли, № 5, 1968.
2. Гурьянов В. М., Карева О. В. Трансформация линейных голографов отраженных волн. Настоящий сборник.
3. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. 4, М., Гостоптехиздат, 1953.

**В. М. ГУРЬЯНОВ, Е. А. ЗАХАРОВА, Б. В. КОРОБОВ,
А. С. САНИНСКИЙ**

ОПЫТ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЛУЧЕВОГО МЕТОДА ИНТЕРПРЕТАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ГОДОГРАФОВ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН

При интерпретации сейсморазведочных материалов все более широкое применение находят электронные вычислительные машины. К сожалению, эффективность их применения при обработке полевых материалов низка, что объясняется отсутствием первичного полевого материала, записанного в цифровой форме, и алгоритмов получения годографов по сейсмограммам.

Наиболее удобными для машинной обработки оказались кинематические методы сейсмики. Здесь достигнут определенный прогресс как при решении прямых, так и обратных задач. Методы решения динамических задач развиты слабо. Решаются простейшие, главным образом, одномерные задачи.

Несмотря на то, что использование ЭВМ для построения сейсмических границ по годографам сейсмических волн принципиально позволяет реализовать метод полей времен в лучевом варианте со всей строгостью, пока все еще в большинстве случаев на машину перекладываются ручные упрощенные способы с неизбежным арсеналом всевозможных поправок.

§ 1. Постановка задачи и описание метода решения

Пусть имеется плоская изотропная слоистая среда с заданными полями скоростей распространения сейсмических

волн в слое j .

$$V_{1j} = V_{1j}(z), \quad V_{2j} = V_{2j}(z). \quad (1)$$

Функции $V_{1j}(z)$ и $V_{2j}(z)$ считаем кусочно-непрерывными. Как обычно, отнесем эту среду к декартовой системе координат XYZ так, чтобы ось OZ пересекала все слои среды. Каждая из скоростей V_{ij} ($i=1, 2$) может быть скоростью как продольных, так и поперечных волн.

Считаем, что границы R_j ($j=1, 2, \dots, l-1$) между слоями j и $j+1$ заданы уравнениями

$$z = z_j(x) \quad (j = 1, 2, \dots, l-1) \\ x \in [a, b], \quad (2)$$

в которых $z_j(x)$ — однозначные непрерывно-дифференцируемые функции, упорядоченные следующим образом:

$$z_j(x) \leq z_{j+1}(x) \quad x \in [a, b].$$

Знак равенства достигается на части границ при выклинивании пластов.

Дневную поверхность (линию наблюдения)

$$z = z_0(x) \quad (3)$$

обозначим через R_0 . Ограничения на функцию $z_0(x)$ наложим те же самые, что и на $z_j(x)$.

Требуется вычислить координаты точек R_l — границы отражения (обмена) по обобщенным годографам

$$\tau = \tau_1(x), \quad z = z_0(x) \quad (4)$$

$$\tau = \tau_{2l}(x), \quad z = z_0(x) \quad (5)$$

и полям скоростей $V_{1j}(x)$, $V_{2j}(x)$.

Здесь $\tau_1(x)$ и $V_{1j}(z)$ — годограф и скорость падающей и проходящей продольной волны в методе отраженных (обменных) волн, $\tau_{2l}(x)$ и $V_{2j}(z)$ — годограф и скорость отраженной (обменной поперечной) волны.

Задание годографа $\tau_1(x)$ (4) на границе R_0 обусловлено тем, что в такой форме получается годограф в процессе последовательного получения границ R_l ($i=1, 2, \dots$) по годографам τ_{2i} ($i=1, 2, \dots$).

Для приведения задачи к виду, рассмотренному в [1], необходимо пересчитать годографы $\tau_1(x)$ и $\tau_{2l}(x)$ соответственно с границы R_0 на границу R_{l-1} . Эта операция осуществляется последовательно с одной границы на другую. Пересчет годографа $\tau_{j-1}(x)$ с границы R_{j-1} на границу R_j делается в такой последовательности:

а) определяется точка пересечения луча, выходящего из точки $\{\xi, z_{j-1}(\xi)\}$ границы R_{j-1} с границей R_j , т. е. находится решение системы уравнений

$$x = \xi \mp \int_{z_{j-1}(\xi)}^z \frac{P_{j-1} V_j(z) dz}{V_j(z) \sqrt{1 - P_{j-1}^2 V_j^2(z)}} dz \quad (6)$$

$$z = z_j(x)$$

относительно x и z и функции параметра ξ . Лучевой параметр P_{j-1} определяется формулой

$$P_{j-1}(\xi) = \frac{\tau'_{j-1}}{1 + z_{j-1}'^2} \pm \frac{z'_{j-1}}{V_j[z_{j-1}(\xi)] \sqrt{1 + z_{j-1}'^2}} \times$$

$$\times \sqrt{1 - \frac{\tau_{j-1}'^2 V_j^2[z_{j-1}(\xi)]}{1 + z_{j-1}'^2}}, \quad (7)$$

в которой штрих обозначает дифференцированные по ξ . *Замечание.* В (6) и (7) и далее верхний знак «+» или «-» соответствует лучу отраженной (обменной продольной и поперечной) волны, а нижний знак — лучу падающей волны;

б) по найденному z вычисляются время τ_j и производная τ_j' по формулам:

$$\tau_j = \tau_{j-1}(\xi) \mp \int_{z_{j-1}(\xi)}^z \frac{dz}{V_j(z) \sqrt{1 - P_{j-1}^2 V_j^2(z)}} \quad (8)$$

$$\frac{d\tau_j}{dx} = \tau_j' = P_{j-1}(\xi) \pm \frac{1}{V_j[z_j(x)] \sqrt{1 - P_{j-1}^2(\xi) V_j^2[z_j(x)]}} \quad (9)$$

в) по производной τ_j' и скорости $V_{j-1}[z_j(x)]$ вычисляется параметр $P_j(x)$ для слоя j

$$P_j(x) = \frac{\tau_j'}{1 + z_j'^2} \pm$$

$$\pm \frac{z_j}{V_{j+1}[z_j(x)] \sqrt{1 + z_j'^2}} \sqrt{1 - \frac{\tau_j'^2 V_{j+1}^2[z_j(x)]}{1 + z_j'^2}}. \quad (10)$$

Формулы (9) и (10) отражают собой непрерывность скалярного поля времен $t(x, z)$ рассматриваемой задачи.

Пересчитав изложенным способом годографы $\tau_1(x)$, $\tau_{2l}(x)$ на границу R_{l-1} , получим годографы $\tau_1(x)$, $\tau_2(x)$, заданные на границе R_{l-1} .

Теперь задача определения координат $\{x, z\}$ точек искомой границы R_l сводится к решению системы уравнений

$$x = \xi \pm \int_{z_{l-1}(\xi)}^z \frac{P_1(\xi) V_{1,l}(z)}{\sqrt{1 - P_1^2(\xi) V_{1,l}^2(z)}} dz \quad (11)$$

$$t_1 = \tau_1(\xi) \mp \int_{z_{l-1}(\xi)}^z \frac{dz}{V_{1,2}(z) \sqrt{1 - P_1^2(\xi) V_{1,l}^2(z)}}$$

$$x = \eta - \int_{z_{l-1}(\eta)}^z \frac{P_2(\eta) V_{2l}(z)}{\sqrt{1 - P_2^2(\eta) V_{2l}^2(z)}} dz \quad (12)$$

$$t_2 = \tau_2(\eta) - \int_{z_{l-1}(\eta)}^z \frac{dz}{V_{2l}(z) \sqrt{1 - P_2^2(\eta) V_{2l}^2(z)}} \quad (13)$$

$$t_1 - t_2 = 0$$

относительно неизвестных x, z, t_1, t_2, ξ в функции параметра η .

Уравнения (11) соответствуют лучу падающей (продольной) волны, а уравнения (12) соответствуют лучу отраженной (поперечной) волны в методе отраженных (проходящих обменных) волн. Соотношение (13) — обычное равенство времен на границе отражения (обмена).

Анализируя формулы (6) — (11) замечаем, что если выписать их с нижним знаком (там, где стоит двойной знак «+» или «—»), определяющим падающую волну, и формально присвоить скорости этой волны знак «—», то эти формулы совпадут с формулами, выписанными с верхним знаком. Таким образом, можно использовать формулы (6) — (11) только с верхним знаком «+» или «—» и для случая отраженной (обменной) и для случая падающей волны, беря для последней отрицательную скорость распространения. Это обстоятельство позволяет делать единый алгоритм интерпретации проходящих обменных и отраженных волн. Рассмотрим далее отдельные части алгоритма, по которым составлены стандартные программы.

§ 2. Аппроксимация годографов и границ

Годографы $\tau_i(x)$ и границы $z_j(x)$ заданы на дискретном множестве равностоящих одно от другого значений x_k ($k=1, 2, \dots$) аргумента, называемых узлами. Производные $\tau_i'(x)$ и $z_j'(x)$ в узлах вычисляются по формуле численного дифференцирования

$$f' = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_{k-1}))}{2h_x}, \quad (14)$$

в которой $h_x = x_k - x_{k-1}$.

Для значений аргумента x , находящихся между узлами, функции $\tau_i(x)$, $z_j(x)$ и лучевые параметры $P_i(x)$ вычисляются по формуле линейной интерполяции. Это обеспечивает достаточно плавное изменение и годографа, и лучевых параметров.

Вследствие того, что и годографы и границы подвергаются предварительному сглаживанию [2], погрешность формулы (14) может быть достаточно малой.

§ 3. Обработка наблюдаемых годографов

В работе [2] показана необходимость сглаживания наблюдаемых годографов. При сглаживании используются выравнивающие свойства уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (15)$$

Наблюдаемый годограф $\tau(x)$ представляется в виде суммы двух составляющих

$$\tau(x) = \tau_p(x) + \tau_n(x), \quad (16)$$

где $\tau_p(x)$ — гладкая функция, учитывающая поведение годографа $\tau(x)$ в целом (региональная составляющая), $\tau_n(x)$ — колеблющаяся функция, содержащая ошибки (локальная составляющая).

В качестве $\tau_p(x)$ берется характерная для годографа гладкая функция. В нашем случае обменных или отраженных волн региональной составляющей является гиперболой

$$\tau_p(x) = \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}. \quad (17)$$

Как частный случай здесь возможна прямая.

Входящие в формулу (17) числовые параметры α , β , γ получаются методом наименьших квадратов из условия наилуч-

шей аппроксимации наблюдаемого годографа $\tau(x)$, то есть из условия, что

$$I = \sum_{i=0}^n (\tau_i - \sqrt{\alpha x_i^2 + \beta x_i + \gamma})^2$$

$$(\tau_i = \tau(x_i) \quad i = 0, 1, \dots, n)$$

принимает наименьшее значение. Для этого необходимо выполнение равенств

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = \frac{\partial I}{\partial \beta} = \frac{\partial I}{\partial \gamma} = 0.$$

Это нелинейная система алгебраических уравнений. Чтобы получить линейную систему, α , β , γ определяются из условия наилучшей аппроксимации функции $\tau^2(x)$ функцией $\tau_p^2(x)$.

Полином $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ можно записать в виде линейной комбинации ортогональных полиномов Чебышева [3]

$$y(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = C_0 \varphi_0(x) + C_1 \varphi_1(x) + C_2 \varphi_2(x) \quad (18)$$

Здесь

$$\varphi_0(x) = 1$$

$$\varphi_1(x) = x - \frac{[x]}{n+1}$$

$$\varphi_2(x) = x^2 - \frac{[x^3] - \frac{[x][x^2]}{n+1}}{[x^2] - \frac{[x]^2}{n+1}} \left(x - \frac{[x]}{n+1} \right) - \frac{[x^2]}{n+1}$$

$$[x^v] = \sum_{i=0}^n x_i^v \quad (19)$$

$$C_i = \frac{[\varphi_i(x)y]}{[\varphi_i(x)\varphi_i(x)]} \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

$$[\varphi_i(x)y] = \sum_{k=0}^n \varphi_i(x_k) y(x_k)$$

$$[\varphi_i(x)\varphi_i(x)] = \sum_{k=0}^n (\varphi_i(x_k))^2.$$

α , β , γ определяются из (18), где правая часть подсчитывается по формулам (19).

Локальная составляющая годографа $\tau_A(x)$ подвергается сглаживанию.

Уравнению (15) соответствует уравнение в конечных разностях

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i &= u_i + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) \\ 0 &< \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (20)$$

Полагая в (20) $u_i = \tau_A(x_i)$, $\frac{\Delta t}{\Delta x^2} = a$, $\tilde{u}_i = \tau_A^*(x_i)$,

получаем формулу сглаживания локальной составляющей годографа

$$\begin{aligned} \tau_A^*(x_i) &= \tau_A(x_i) + a[\tau_A(x_{i-1}) - 2\tau_A(x_i) + \tau_A(x_{i+1})] \\ 0 &< a \leq \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (20')$$



Рис. 1. Влияние сглаживания на форму кривой. Составитель Гурьянов В. М.
 l — заданная кривая; l_1 — кривая, полученная из кривой l путем сглаживания с параметром $a=1/2$; l_2 — кривая, полученная из кривой l путем сглаживания с параметром $a=1/4$.

На рисунке 1 кривая l_1 получена из l путем сглаживания с параметром $a=1/2$, а l_2 — с параметром $a=1/4$. Видно, что кривая l_2 более гладкая, чем l и l_1 , и лучше характеризует пер-

воначальную кривую l . Поэтому на практике область изменения параметра a сужается:

$$0 < a \leq \frac{1}{4}.$$

Сглаженный годограф имеет вид:

$$\tau^* = \tau_p(x) + \tau_s^*(x). \quad (21)$$

По этой формуле представляются годографы $\tau_1(x)$ и $\tau_{2l}(x)$. Процедуру сглаживания можно повторить m раз. Число m определяется двумя способами: если известны ошибки наблюдений, то сглаживание производится до тех пор, пока абсолютная величина разности $\tau^*(x) - \tau(x)$ не будет близка к величине ошибки наблюдений, если же ошибки наблюдений не даны, то сглаживание производится до тех пор, пока граница отражения (обмена), построенная по сглаженному годографу, примет устойчивую форму. Дело в том, что, если сглаживание годографов не производить, то границы, построенные по ним, часто получаются в виде колеблющихся кривых. В процессе сглаживания случайные колебания пропадают и остаются лишь устойчивые формы.

§ 4. Вычисление значений лучевого параметра в узлах

В узлах x_0, x_1, \dots, x_{n_0} границы R_0 вычисляются значения лучевых параметров $P_i(x_j)$, ($i=1,2$), соответствующие значениям годографов $\tau_1(x)$ и $\tau_{2l}(x)$,

$$P_i(x_j) = \frac{\tau_i'(x_j)V_i[z_0(x_j)] + z_0'(x_j)\sqrt{1 + z_0'^2(x_j) - \tau_i'^2(x_j)}V_i^2[z_0(x_j)]}{V_i[z_0(x_j)](1 + z_0'^2(x_j))}.$$

Значения $z_0'(x_j)$ вычисляются по формуле численного дифференцирования:

$$z_0'(x_j) = \frac{z_0(x_{j+1}) - z_0(x_{j-1}))}{2h_x}$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, n_0.$$

Для вычисления $z_0'(x_0)$ и $z_0'(x_{n_0})$ вводятся фиктивные точки x_{-1} и x_{n_0+1} и фиктивные значения в них z_0 :

$$z_0(x_{-1}) = z_0(x_0), \quad z_0(x_{n_0+1}) = z_0(x_{n_0}).$$

Значения $\tau_i'(x_j)$ вычисляются по следующей формуле

$$\begin{aligned} \tau_i'(x_j) &= \tau_{ip}'(x_j) + \frac{\tau_{is}^*(x_{j+1}) - \tau_{is}^*(x_{j-1})}{2h_x} = \\ &= \frac{2\alpha x_j + \beta}{2\tau_{ip}(x_j)} + \frac{\tau_{is}^*(x_{j+1}) - \tau_{is}^*(x_{j-1})}{2h_x}. \end{aligned} \quad (22)$$

Если нарушается условие существования решения [1], то есть $|P_i| > \frac{1}{\max V_{i1}}$ (V_{i1} — скорость V_i в первом слое), то производится дополнительное сглаживание локальной составляющей $\tau_{is}(x)$.

§ 5. Вычисление проекции луча и времени прохождения фронта волны вдоль луча

Задачей этого блока является вычисление $f(z, z^*)$ — проекции на ось ОХ луча, исходящего из точки с аппликатой z и входящего в точку с аппликатой z^* , и $\varphi(z, z^*)$ — времени прохождения фронта волны вдоль этого луча по формулам

$$f(z, z^*) = \mp \int_z^{z^*} \frac{V P ds}{V \sqrt{1 - V^2 P^2}}, \quad (23)$$

$$\varphi(z, z^*) = \mp \int_z^{z^*} \frac{ds}{V \sqrt{1 - V^2 P^2}}. \quad (24)$$

Нижний знак в формулах (23), (24) соответствует случаю падающей волны, верхний — случаю отраженной (проходящей и обменной) волны.

Скорость $V(z)$ аппроксимируется кусочно-линейной функцией следующим образом:

$$\begin{aligned} V(z) = V_k(z) &= a_k z + b_k, \quad z_{k-1} \leq z \leq z_k \\ k &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (25)$$

Подставляя (25) в (23), (24) и считая, что $z_0, a_1, b_1, z_1, a_2, b_2, \dots$ известны и $z^* \in [z_{\mu-1}, z_\mu], z \in [z_{\nu-1}, z_\nu]$, получим следующие формулы для вычисления проекции луча на ось ОХ и времени прохождения фронта волны вдоль луча:

$$f(z, z^*) = \mp \left(S_1 + \sum_{k=\nu}^{\mu-2} \sigma_k + S_2 \right), \quad (23')$$

где

$$S_1 = \begin{cases} \frac{1}{Pa_v} (\sqrt{1 - (a_v z + b_v)^2 P^2} - \sqrt{1 - (a_v z_v + b_v)^2 P^2}), & a_v \neq 0 \\ \frac{Pb_v(z_v - z)}{\sqrt{1 - b_v^2 P^2}}, & a_v = 0 \end{cases}$$

$$\sigma_k = \begin{cases} \frac{1}{Pa_{k+1}} (\sqrt{1 - (a_{k+1} z_k + b_{k+1})^2 P^2} - \\ - \sqrt{1 - (a_{k+1} z_{k+1} + b_{k+1})^2 P^2}), & a_k \neq 0 \\ \frac{Pb_{k+1}(z_{k+1} - z_k)}{\sqrt{1 - b_{k+1}^2 P^2}}, & a_k = 0 \end{cases}$$

$$S_2 = \begin{cases} \frac{1}{Pa_\mu} (\sqrt{1 - (a_\mu z^* + b_\mu)^2 P^2} - \sqrt{1 - (a_\mu z_\mu + b_\mu)^2 P^2}), \\ a_\mu \neq 0 \\ \frac{Pb_\mu(z_\mu - z^*)}{\sqrt{1 - b_\mu^2 P^2}}, & a_\mu = 0 \end{cases}$$

$$\varphi(z, z^*) = \mp \left(t_1 + \sum_{k=v}^{\mu-2} \tau(x_k) + t_2 \right), \quad (24')$$

где

$$t_1 = \begin{cases} \frac{1}{a_v} \ln \frac{(a_v z_v + b_v)(1 + \sqrt{1 - (a_v z + b_v)^2 P^2})}{(a_v z + b_v)(1 + \sqrt{1 - (a_v z_v + b_v)^2 P^2})}, & a_v \neq 0 \\ \frac{z_v - z}{b_v \sqrt{1 - b_v^2 P^2}}, & a_v = 0 \end{cases}$$

$$\tau_k = \begin{cases} \frac{1}{a_{k+1}} \ln \frac{(a_{k+1} z_{k+1} + b_{k+1})(1 + \sqrt{1 - (a_{k+1} z_k + b_{k+1})^2 P^2})}{(a_{k+1} z_k + b_{k+1})(1 + \sqrt{1 - (a_{k+1} z_{k+1} + b_{k+1})^2 P^2})}, \\ a_k \neq 0 \\ \frac{z_{k+1} - z_k}{b_{k+1} \sqrt{1 - b_{k+1}^2 P^2}}, & a_k = 0 \end{cases}$$

$$t_2 = \begin{cases} \frac{1}{a_\mu} \ln \frac{(a_\mu z_\mu + b_\mu)(1 + \sqrt{1 - (a_\mu z^* + b_\mu)^2 P^2})}{(a_\mu z^* + b_\mu)(1 + \sqrt{1 - (a_\mu z_\mu + b_\mu)^2 P^2})}, & a_\mu \neq 0 \\ \frac{z_\mu - z^*}{b_\mu \sqrt{1 - b_\mu^2 P^2}}, & a_\mu = 0 \end{cases}$$

§ 6. Пересчет годографа с одной границы на другую

В узлах $x_{0j}, x_{1j}, \dots, x_{nj}$ границы R_j $z = z_j(x)$ заданы значения годографа $\tau(x)$ и соответствующие им значения лучевого параметра $P(x)$.

Требуется вычислить значения $\tau(x)$ на границе R_{j+1}

$$z = z_{j+1}(x) \geq z_j(x)$$

Для этого с заданной точностью ϵ ищем точку (x, z) пересечения границы R_{j+1} и сейсмического луча, исходящего из точки границы R_j с абсциссой x_{ij} ($i=0, \dots, n_j$), то есть находим решение системы уравнений

$$x = x_{ij} \mp \int_{z_j(x_{ij})}^z \frac{P_j V_{j+1}(z) dz}{\sqrt{1 - P_j^2 V_{j+1}^2(z)}} \quad (6')$$

$$z = z_{j+1}(x)$$

относительно x и z в функции параметра x_{ij} .

P_j вычисляется по формуле

$$P_j(x_{ij}) = \frac{\tau_j'}{1 + z_j'^2} \pm \frac{z_j'}{V_{j+1}[z_j(x_{ij})] \sqrt{1 + z_j'^2}} \sqrt{\frac{1 - \tau_j'^2 V_{j+1}^2[z_j(x_{ij})]}{1 + z_j'^2}} \quad (7')$$

Точку пересечения (x, z) находим методом деления интервала пополам.

Задаем приближенное значение z_0^* аппликаты z искомой точки пересечения. Все последующие приближения z_k^* ($k=1, 2, \dots$) аппликаты z получаем, выполняя следующие действия:

1) по известным z_0^* , $P_j(x_{ij})$ и скорости $V_{j+1}(z)$ в $(j+1)$ -ом слое находим по первой формуле (6') приближенное значение $x = x_0^*$ абсциссы точки пересечения;

2) по формуле линейной интерполяции находим $z_{j+1}(x_0^*)$:

$$z_{j+1}(x_0^*) = z_{j+1}(x_{nj+1}) + [z_{j+1}(x_{n+1j+1}) - z_{j+1}(x_{nj+1})] \times$$

$$\times \left\{ \frac{x_0^* - x_{0j+1}}{h_x} \right\}$$

$(x_{0j+1}, \dots, x_{nj+1})$ $j+1$ — узлы границы R_{j+1}

$$x_{nj+1} \leq x_0^* \leq x_{n+1j+1}$$

3) вычисляем $\Delta_0 = z_{j+1}(x_0^*) - z_0^*$

4) вычисляем

$$z = z_1^* = z_0^* + h_z \operatorname{sgn} \Delta_0 \quad (26)$$

($h_z > 0$ — некоторый шаг по оси OZ).

С приближенным значением z_1^* — выполняем действия п. 1—3 и получаем $\Delta_1 = z_{j+1}(x_1^*) - z_1^*$. Если $\operatorname{sgn} \Delta_1 = \operatorname{sgn} \Delta_0$, вычисляем согласно п. 1—4 последовательность z_i^* , Δ_i ($i=2, 3, \dots$), до тех пор пока Δ_i не сменит знак на противоположный. Пусть это произошло на k -ом шаге. Тогда $z \in [z_{k-1}^*, z_k^*]$. Формулу (26) в п. 4 заменяем следующей

$$z = z_{k+1}^* = z_k^* + \frac{h_z}{2} \operatorname{sgn} \Delta_k. \quad (26')$$

По этой же формуле вычисляется z_2^* , если $\operatorname{sgn} \Delta_1 \neq \operatorname{sgn} \Delta_0$.

Вычисление приближений к z ведется до тех пор, пока на некотором шаге l не выполнится условие $|\Delta_l| < \epsilon$, $z = z_l^*$ дает с нужной точностью аппликату точки пересечения.

По найденному z вычисляются время τ_{j+1} и производная τ'_{j+1} по формулам:

$$\tau_{j+1} = \tau_j x_{lj} \pm \int_{z_j(x_{lj})}^z \frac{dz}{V_{j+1}(z) \sqrt{1 - P_j^2 V_{j+1}^2(z)}} \quad (27)$$

$$\frac{d\tau_{j+1}}{dx} = \tau'_{j+1} = P_j(x_{lj}) \pm$$

$$\pm \frac{1}{V_{j+1}[z_{j+1}(x)] \sqrt{1 - P_j^2(x_{lj}) V_{j+1}^2[z_{j+1}(x)]}} \quad (28)$$

По производной τ'_{j+1} и скорости $V_{j+2}[z_{j+1}(x)]$ вычисляется параметр $P_{j+1}(x)$ для слоя $j+1$

$$P_{j+1}(x) = \frac{\tau'_{j+1}}{1 + z'^2_{j+1}} \pm$$

$$\pm \frac{z'_{j+1}}{V_{j+2}[z_{j+1}(x)] \sqrt{1 + z'^2_{j+1}}} \sqrt{1 - \frac{\tau'^2_{j+1} V_{j+2}^2[z_{j+1}(x)]}{1 + z'^2_{j+1}}} \quad (29)$$

§ 7. Вычисление координат точек границы отражения (обмена)

На границе R_{j-} , заданной в виде дискретных значений

$$z_0, l = z_{l-1}(x_l) \quad (l=1, 2, \dots, n),$$

даны значения годографов

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_{1i} &= \tilde{\tau}_1(x_i) \quad i = (k, k+1, \dots, s) \\ \tilde{\tau}_{2j} &= \tau_2(x_j) \quad j = (q, q+1, \dots, m) \\ & \quad i \leq k, S, q, m \leq n \end{aligned}$$

соответствующие им значения лучевых параметров

$$P_{1i} = P_1(x_i); \quad P_{2j} = P_2(x_j)$$

и скорости

$$V_1 = V_{1i}(z); \quad V_2 = V_{2j}(z)$$

Требуется вычислить координаты точек границы R_l отражения (обмена), т. е. решить систему

$$x = \xi \mp \int_{z_{l-1}(\xi)}^z \frac{P_1(\xi) V_{1i}(z) dz}{\sqrt{1 - P_1^2(\xi) V_{1i}^2(z)}} \quad (30)$$

$$t_1 = \tilde{\tau}_1(\xi) \mp \int_{z_{l-1}(\xi)}^z \frac{dz}{V_{1i}(z) \sqrt{1 - P_1^2(\xi) V_{1i}^2(z)}} \quad (31)$$

$$x = \eta - \int_{z_{l-1}(\eta)}^z \frac{P_2(\eta) V_{2j}(z) dz}{\sqrt{1 - P_2^2(\eta) V_{2j}^2(z)}}$$

$$t_2 = \tilde{\tau}_2(\eta) - \int_{z_{l-1}(\eta)}^z \frac{dz}{V_{2j}(z) \sqrt{1 - P_2^2(\eta) V_{2j}^2(z)}} \quad (32)$$

$$t_1 - t_2 = 0$$

относительно неизвестных x, z, t_1, t_2, ξ в функции параметра η , принимающего значения x_j ($j = q, q+1, \dots, m$).

Для некоторого значения j параметра $\eta = x_j$ задача решается следующим образом. Задается фиктивная граница

$$z = z_{\max} = \text{const} \gg z_e(x), \quad (33)$$

значительно более глубокая, чем предполагаемая наибольшая глубина искомой границы R_l .

Дается некоторое значение x_j параметру ξ , тем самым на границе R_{l-1} выбирается точка A_1 . Параметру $\eta = x_j$ соответствует точка A_2 границы R_{l-1} .

По первым равенствам (30), (31) и заданному $z = z^* > z_{i-1}(x)$ вычисляются абсциссы x_1^* и x_2^* концов B_1, B_2 лучей L_1, L_2 , выходящих из точек A_1, A_2 .

По разности

$$\delta = |x_2 - x_1| - |x_2^* - x_1^*|$$

можно ориентировочно судить, сходятся или расходятся с ростом глубины лучи L_1 и L_2 .

Если $\delta < 0$, то лучи расходятся, и нужно точку A_1 переместить ближе к точке A_2 . Это делается соответствующим изменением значения параметра ξ .

Процесс сближения продолжается до тех пор, пока достигается $\delta > 0$ или совмещение точек A_1 и A_2 . В последнем случае точка A_1 помещается с другой стороны точки A_2 достаточно близко от нее. Благодаря непрерывности лучевого параметра $P(x)$ лучи L_1 и L_2 пересекутся, так как они пересекаются в точке A_2 в случае совмещения с ней точки A_1 .

Если $\delta > 0$, то лучи идут параллельно, и в этом случае нужно точку A_1 совместить с точкой A_2 и снова проверить разность δ . При достаточно малом δ можно считать, что $\xi = \eta$ и находить z из уравнения (32), а x по z из (30) или (31). Эта процедура имеет следующий вид.

Задается $z_1 > z_{i-1}(\xi)$, z_1 берется в качестве первого приближения к аппликате z искомой точки границы. z_1 подставляется в левую часть временного уравнения (32) (обозначим ее Δ) и вычисляется $\Delta(M_1) = \Delta_1$. Затем выполняются следующие действия.

1. Вычисляется последовательность z_i ($i = 2, 3, \dots$) по формулам:

$$z_i = z_{i-1} + h_z, \Delta_1 < 0 \quad (34)$$

$$z_i = z_{i-1} - \frac{h_z}{2}, \Delta_1 > 0 \quad (35)$$

2. Вычисляются $\Delta_i = \Delta(x_i, z_i)$ до тех пор, пока Δ_i не сменит знак на противоположный. Пусть это происходит на k -м шаге.

3. Проверяется неравенство

$$|z_k - z_{k-1}| < \varepsilon$$

Если оно выполняется, аппликата z_{k-1} — искомая. Если неравенство не выполняется, то формулы (34), (35) заменяются соответственно формулами:

$$z = z_{i-1} - \frac{h_z}{2} \quad (34')$$

$$z = z_{i-1} + \frac{h_z}{2}, \quad (35')$$

после чего продолжают вычисления по п. 1—3.

4. По найденному z , аппликате искомой точки границы и первому уравнению (30) вычисляется x — абсцисса точки границы.

Если $\delta > 0$, то лучи сходятся и можно попытаться найти их точку пересечения при условии, что $z < z_{max}$. Точка пересечения лучей $M_1(x_1, z_1)$ ищется методом деления интервала пополам следующим образом.

1. Задается $z = z_{11} > z_{l-1}$ (ξ) и по первым равенствам (30) и (31) вычисляются

$$\bar{x} = x_{11}(\xi), \quad x = x_{11}(\eta)$$

и разность

$$\Delta_1 = x_{11}(\eta) - \bar{x}_{11}(\xi).$$

Так как возможны два случая расположения лучей ($\eta > \xi$, $\xi > \eta$), то вычисляется $\Delta = \eta - \xi$.

2. Вычисляется последовательность

$$z = z_{1i} = z_{1i-1} + h \operatorname{sgn} \Delta \operatorname{sgn} \Delta_i \quad (36)$$

($h > 0$ — шаг по оси OX), $x_{1i}(\xi)$,

$$x_{1i}(\eta), \Delta_i = x_{1i}(\eta) - \bar{x}_{1i}(\xi), \quad (i=2, 3, \dots)$$

до тех пор, пока разность Δ_i сменит знак на противоположный. Пусть это произойдет для $z = z_k$. Следовательно, искомое значение $z_i \in [z_{1k-1}, z_{1k}]$.

3. Берется $h_1 = h/2$, формула (36) меняется на следующую

$$z = z_{1i} = z_{1i-1} + h_1 \operatorname{sgn} \Delta_k \operatorname{sgn} \Delta \quad i = k+1, \dots$$

и повторяются действия п. 2—3 до тех пор, пока будет достигнута нужная точность в определении координат x_1, z_1 , то есть на некотором шаге N выполнится неравенство

$$|z_{1N} - z_{1N-1}| < \varepsilon$$

Если же выполнение этого неравенства не достигнуто, а $z > z_{max}$, то нужно сблизить точки A_1, A_2 .

Точка $M_1(x_1, z_1)$ рассматривается как первое приближение к искомой точке границы $M(x, z)$, координаты которой должны удовлетворять временному уравнению (32).

Обозначим левую часть этого уравнения Δ , а $\Delta(M_1) = \Delta_1$. Для исхождения последующих приближений $M_i(x_i, z_i)$ ($i = 2, 3, \dots$) выполняются следующие действия:

- 1) вычисляется Δ_1
- 2) если $\Delta_1 < 0$, то вычисляем

$$\xi_i = \xi_{i-1} - l_i \operatorname{sgn} \Delta_1 \quad (37)$$

$$i = 2, 3, \dots, \xi_1 = \xi$$

если $\Delta_1 > 0$, то

$$\xi_i = \xi_{i-1} - \frac{l_i}{2} \operatorname{sgn} \Delta_1, \quad (38)$$

где $l_i > 0$ — шаг по оси ox . По $\{\xi_i\}$ вычисляется соответствующая последовательность $M_i(x_i, z_i)$ и последовательность $\Delta_i = \Delta(M_i)$ до тех пор, пока Δ_i не сменит знак на противоположный. Пусть это произошло на k -м шаге.

- 3) проверяется неравенство

$$|z_k - z_{k-1}| < \varepsilon \quad (39)$$

ε — заданная точность вычисления точек границы. Если неравенство (39) выполняется, вычисления прекращаются, точка $M_{k-1}(x_{k-1}, z_{k-1})$ дает с нужной точностью точку границы. Если (39) не выполняется, повторяются действия п. 2, где формулы (37), (38) заменены формулами

$$\xi_i = \xi_{i-1} - \frac{l_i}{2} \operatorname{sgn} \Delta_k \quad (37')$$

$$\xi_i = \xi_{i-1} - \frac{l_i}{2} \operatorname{sgn} \Delta_k \quad (38')$$

§ 8. Особый случай

Случай вычисления координат точек первой границы отражения в методе отраженных волн является особым, так как обобщенный годограф падающей волны вырождается в точку:

$$\tau_1(x^*) = 0 \quad z(x^*) = z^*$$

x^* , z^* — координаты пункта взрыва.

В общем случае для вычисления границы R_1 нужно, чтобы на предшествующей ей границе были заданы годографы $\tau_1(x)$, $\tau_{21}(x)$ падающей и отраженной волн и соответствующие им параметры $P_1(x)$ и $P_2(x)$.

Для приведения особого случая к общему введем некоторую дополнительную границу R:

$$z = c = \text{const} > z^*,$$

расположенную между границей R_0

$$z = z_0(x) \quad x \in [a, b]$$

и искомой границей R_1

$$z = z_1(x) \quad x \in [a, b],$$

то есть

$$z_0(x) < c < z_1(x).$$

Граница R должна быть расположена как можно ближе к R_1 , так как наибольшая кривизна годографа растет с приближением к пункту взрыва, следовательно, растет и погрешность аппроксимации годографа.

Годографы $\tau_{21}(x)$, $\tau_{22}(x)$, ..., соответствующие границам отражения R_1, R_2, \dots , пересчитываются с границы R_0 на границу R согласно § 6.

Вырожденный годограф $\tau_1(x)$ падающей волны пересчитывается на границу R следующим образом.

Для нахождения точек пересечения (x_n, c) лучей L_n с границей R нужно вычислить x_n по формулам:

$$x_n = x^* + \int_{z^*}^c \frac{P_{1n} V_1 dz}{V \sqrt{1 - P_{1n}^2 V_1^2}} \quad (40)$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Значения P_{1n} лучевого параметра, участвующие в определении x_n , неизвестны. Найдем их приближенные значения P_{1n} при условии, что

$$x_n = x^* + n h_x, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Тогда

$$\int_{z^*}^c \frac{P_{1n} V_1 dz}{V \sqrt{1 - P_{1n}^2 V_1^2}} = n h_x. \quad (41)$$

По теореме о среднем значении существует $\xi_n \in [z^*, c]$ такое, что

$$\int_{z^*}^c \frac{P_{1n} V_1 dz}{V \sqrt{1 - P_{1n}^2 V_1^2}} = \frac{(c - z^*) P_{1n} V_1(\xi_n)}{V \sqrt{1 - P_{1n}^2 V_1^2(\xi_n)}}. \quad (42)$$

Так как ξ_n неизвестно, то в качестве $V_1(\xi_n)$ берем среднюю скорость V_{1cp} , вычисляемую по формуле.

$$V_{1cp} = \frac{V_{i1} \left(\frac{z^* + z_i}{2} \right) (z_i - z^*)}{c - z^*} + \frac{\sum_{k=i+1}^{j-1} V_{k1} \left(\frac{z_{k-1} + z_k}{2} \right) (z_k - z_{k-1}) + V_{j1} \left(\frac{z_{j-1} + c}{2} \right) (c - z_{j-1})}{c - z^*} \quad (43)$$

V_1 задана следующим образом:

$$\begin{aligned} V_1(z) &= V_{k1}(z) = a_{k1}z + b_{k1} \\ z &\in [z_{k-1}, z_k], \quad k=1, 2, \dots \\ z^* &\in [z_{i-1}, z_i], \quad c \in [z_{j-1}, z_j] \end{aligned}$$

Используя (41)–(43), получаем формулу для P_{1n} :

$$P_{1n} = \frac{1}{V_{cp}} \sin \arctg \frac{nh_x}{c - z^*} \quad (44)$$

Определенные P_{1n} подставляем в формулы (40) и находим значения x_n . Значения τ_1 в точках x_n вычисляем по формуле

$$\tau_1(x_n) = \int_{z^*}^c \frac{dz}{V_1(z) \sqrt{1 - P_{1n}^2 V_1^2(z)}} \quad (45)$$

Замечание. Индекс n у x_n принимает значения $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$. N таково, что выполняются оба неравенства

$$x_{-N} \leq a, \quad x_N \geq b.$$

Упорядочив x_n и пересчитав значения P_{1n} и $\tau_1(x_n)$ на равномерный шаг h_x , получим значения годографа τ_1 и параметра P_1 в узлах границы R , предшествующей границе R_1 . Таким образом особый случай приведен к общему.

§ 9. Построение глубинного разреза по годографам сейсмических волн

В предыдущих параграфах описаны алгоритмы отдельных этапов решения задачи, поставленной в начале главы. Опишем в виде блок-схемы порядок использования упомянутых этапов при решении задачи, имея в виду такой случай задания исходных данных, когда известными могут быть не только дневная поверхность R_0 , но и несколько границ R_1, \dots, R_k . Случай, ког-

да известна только дневная поверхность R_0 , определяется индексом $k=0$.

Таким образом, имеем: скорости

$$V_{1j} = V_{1j}(z); \quad V_{2j} = V_{2j}(z) \quad (46) \\ (j=1, 2, \dots, n),$$

известные границы R_j ($j=0, 1, \dots, k$)

$$z = z_j(x), \quad x \in [a, b]$$

годографы отраженных (поперечных) волн

$$\tau_{2j} = \tau_{2j}(x) \quad (j = k+1, \dots, n)$$

годограф продольной волны

$$\tau_1 = \tau_1(x)$$

или годограф падающей волны в точке x^*, z^*

$$\tau_1 = 0.$$

Требуется вычислить координаты точек границ R_j ($j=k+1, \dots, n$).

Порядок вычислений представляется в виде блок-схемы (рис. 2).

1. Обработка наблюдаемых годографов τ_2 ($j = k+1, \dots, n$) и вычисление лучевых параметров (§ 3, 4).

2. Анализ метода: в случае отраженных волн переход к блоку 3, в случае проходящих обменных волн — к блоку 4.

3. Смена знака скоростей $V_{1j}(z)$ на противоположный, получение значений $\tau_1(x)$ и $P_1(x)$ в узлах фиктивной границы согласно § 8 и переход к блоку 7.

4. Обработка наблюдаемого годографа $\tau_1(x)$ продольной волны и вычисление лучевого параметра (см. § 3, § 4).

5. Анализ количества заданных границ k .

если $k=0$, то переход к блоку 9, если $k \neq 0$, то переход к блоку 6.

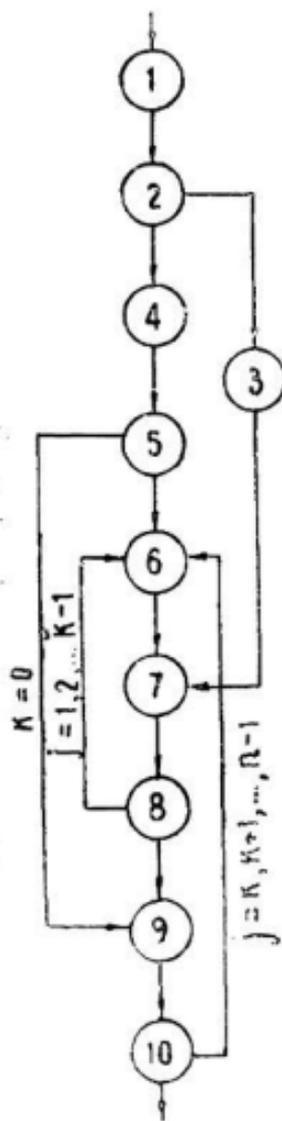


Рис. 2. Блок-схема. Составитель Коробов Б. В.

6. Пересчет годографа $\tau_1(x)$ с границы R_{j-1} на границу R_j ($j=1, \dots, k$). (см. § 6).

7. Пересчет годографов $\tau_{2l}(x)$ ($l=k+1, \dots, n$) с границы R_{j-1} на границу R_j ($j=1, \dots, k$) (см. §6).

8. Анализ разности $j-k$:
если $j-k < 0$, то переход к блоку 6,
если $j-k \geq 0$, то переход к блоку 9.

9. Вычисление координат точек границы R_{k+1} (см. § 7).

10. Анализ на конец счета:
если $j=n$, то вычисление прекращается,
если $j < n$, то переход к блоку 6 на продолжение вычислений.

§ 10. Примеры построения глубинных разрезов по наблюдаемым годографам

По описанному в предыдущем параграфе методу были составлены экспериментальные программы для ЭВМ «БЭСМ-4» на основе интерпретирующей системы автоматизации программирования «ИС-2», производящие расчеты координат точек границ обмена (отражения).

Из построенных профилей взяты такие примеры, на которых исследовалось влияние сглаживания годографов. Рассмотрим отдельно эти примеры по типам волн.

1. Проходящие обменные волны. На рис. 3 показано действие операции сглаживания на наблюдаемый годограф. Сплошной линией показан наблюдаемый годограф; крестиками отмечены максимально сместившиеся точки сглаживания путем использования формулы (20') один раз; штриховой линией показан годограф, сглаженный применением формулы (20') — 10 раз, штрих-пунктирной линией — годограф, сглаженный 100 раз.

Дальнейшее увеличение количества сглаживаний очень мало меняет форму годографа на графике. Для более яркого представления результатов сглаживания годографы сильно вытянуты по оси времени τ и тонкой сплошной линией показана наилучшая в среднем прямая, аппроксимирующая наблюдаемый годограф (региональная составляющая). Эта прямая несколько отклонена вправо вследствие того, что на рис. 3 с целью экономии места приведен не весь обработанный наблюдаемый годограф, а только его часть.

Из рис. 3 ясно, что наиболее быстрому сглаживанию подвергаются участки годографа, испытывающие сильные колебания (в некоторых таких местах были обнаружены ошибки, до-

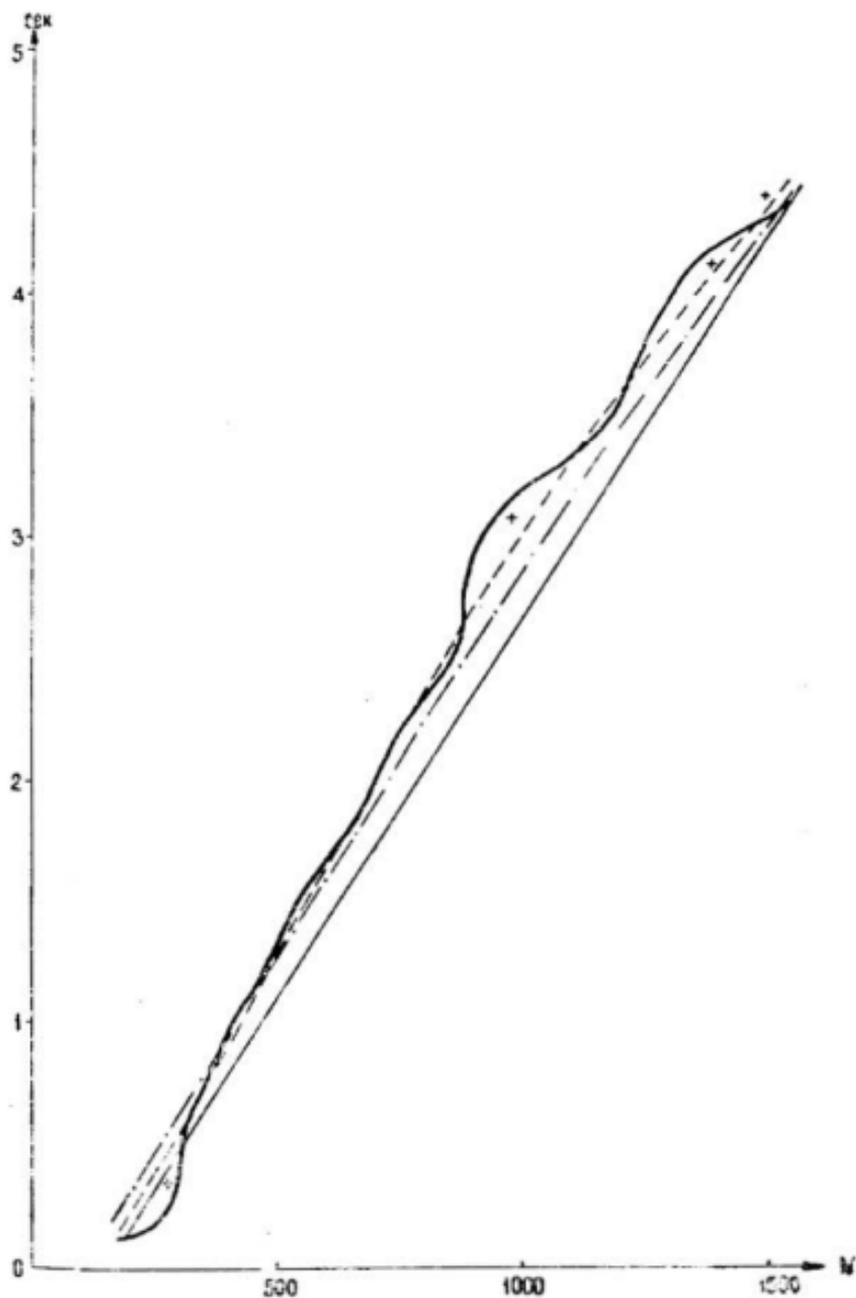


Рис. 3. Наблюдаемый годограф обменной волны под влиянием сглаживания. Составитель Захарова Е. А.

пущенные при корреляции годографов по сейсмограммам). После ликвидации местных отклонений наблюдаемого годографа, нарушающих его плавное изменение, сглаживание многократным применением формулы (20') изменяет форму годографа очень мало.

На рис. 4 показаны формы границ обмена в зависимости от степени сглаженности наблюдаемых годографов. Сплошной линией показана граница (R_1), построенная по годографам, сглаженным один раз; пунктирной линией показаны границы (R_1, R_2), построенные по годографам, сглаженным 10 раз, штриховой линией — границы (R_1, R_2) с 50-кратным сглаживанием годографов. Штрих-пунктирной линией показаны границы (R_1, R_2)₁ построенные по годографам, сглаженным 200

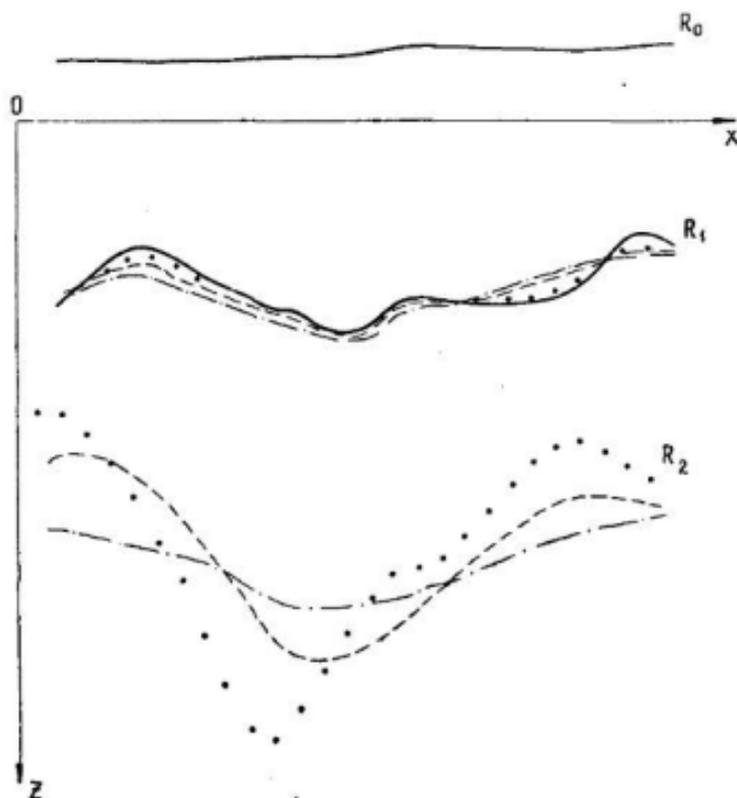


Рис. 4. Сейсмические границы обмена под влиянием сглаживания годографа. Составитель Гурьянов В. М.

раз. Дальнейшее увеличение количества сглаживаний очень медленно изменяет форму границ в региональном плане.

Для более яркого представления об изменении формы границ в зависимости от степени сглаженности годографов границы сильно вытянуты по вертикали (отношение масштабов равно 20). Рис. 5 дает правильное представление о взаимном расположении границ и их форме. На нем показаны границы (R_1, R_2, R_3, R_4), построенные по годографам, сглаженным в 200 раз.

Заметим, что граница R_0 представляет собой сечение дневной поверхности, R_1 является границей карбонатного палеозоя. Эта граница очень быстро приобретает устойчивую форму, что является, видимо, следствием того, что наблюдаемый годограф поперечной волны от нее коррелируется очень уверенно.

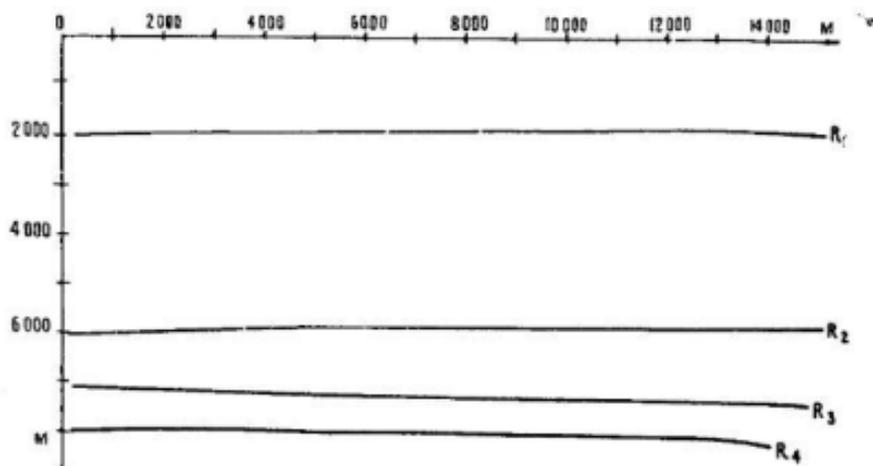


Рис. 5. Сейсмические границы обмена. Составитель Гурьянов В. М.

Граница R_2 приурочена к тульским отложениям. На ней очень хорошо видно, как ее вначале неустойчивая форма под влиянием сглаживания годографов становится устойчивой.

Граница R_3 связывается с кровлей кыновских отложений, а R_4 с кристаллическим фундаментом. Эти границы построены по годографам, сглаженным 200 раз. При меньшей степени сглаженности годографов сплошных границ получить не удастся. Здесь, видимо, сказывается то обстоятельство, что годо-

графы коррелируются по сейсмограммам не совсем уверенно.

В заключение следует заметить, что расчленение разреза по скоростям, на наш взгляд, было весьма грубым. Если продольные скорости определялись по скважинным наблюдениям и осреднялись, то поперечные скорости определялись путем расчета из условия, что границы обмена совпадали с вскрытыми скважиной границами.

2. Отраженные волны. Результаты обработки наблюдений представлены в той же последовательности, что и по обменным волнам. Разница заключается в том, что эти годографы требуют меньшего сглаживания, чем годографы проходящих обменных волн, что объясняется, видимо, их лучшей коррелируемостью. Сглаживание проводилось по формуле (20'), в которой коэффициент α принимался равным $1/8$. Это обеспечивало более деликатное исправление годографа. На рис. 6 сплошной линией показан наблюдаемый годограф, соответствующий границе R_1 , крестиками намечены точки годографа, сглаженного по формуле (20') 1 раз, пунктирной, штриховой и штрих-

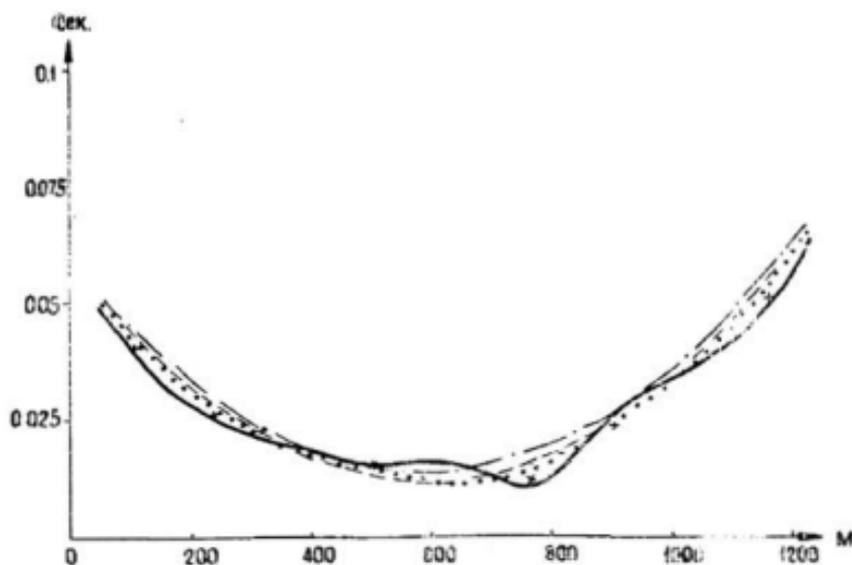


Рис 6 Наблюденный годограф отраженной волны под действием сглаживания. Составитель Захарова Е. А.

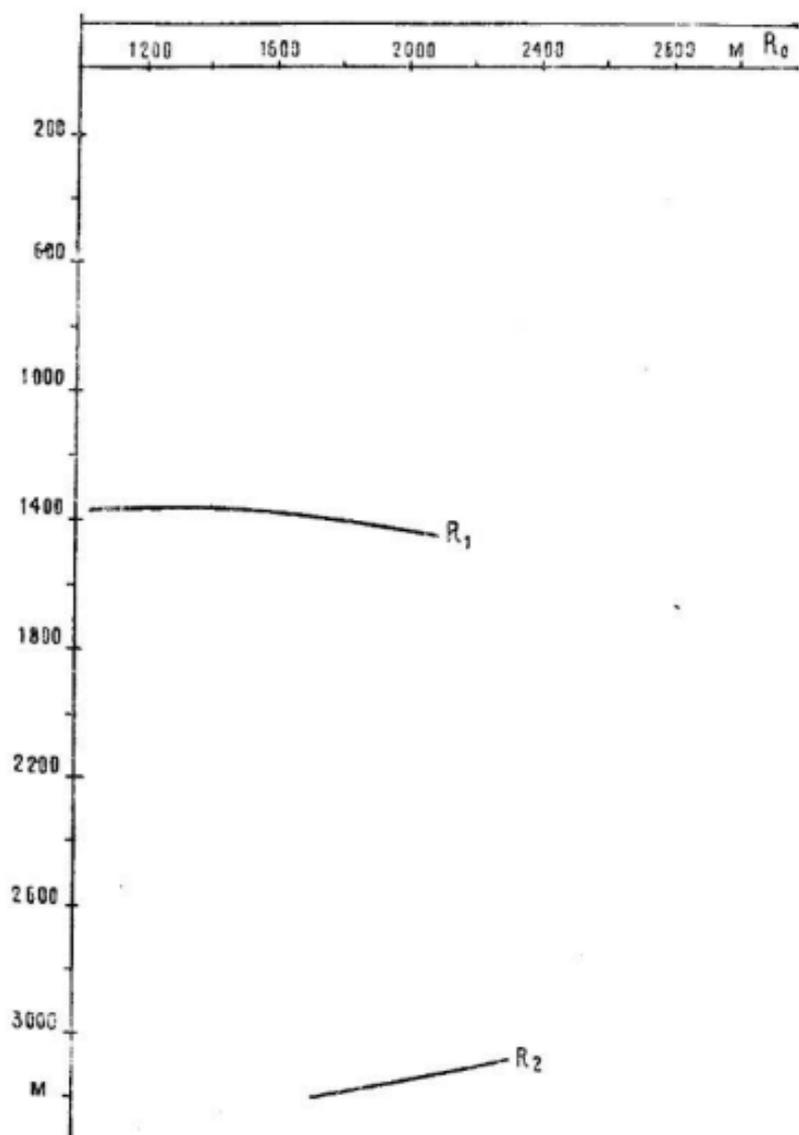


Рис. 7. Сейсмические границы отражения. Составитель
Санинский А. С.

пунктирной линиями показан годограф, сглаженный 5, 20, 100 раз соответственно.

На рис. 7 все границы представлены в нормальном масштабе. Звездочкой помечено место пункта взрыва. Здесь граница R_1 показана при 20 сглаживаниях, а R_2 —при 100.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гурьянов В. М. Лучевой метод интерпретации годографов сейсмических волн. Изв. АН СССР, Физика Земли, № 9, 1965.
2. Гурьянов В. М. Сглаживание годографов сейсмических волн. Изв. АН СССР, Физика Земли, № 10, 1969.
3. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. М., Физматгиз, 1962.

А. Н. САЛЬНИКОВ, Г. Х. ШЕРМАН

РАСЧЕТ ПОЛЯ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО МАГНИТНОГО ДИПОЛЯ В ТРЕХСЛОЙНОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ С ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ГРАНИЦАМИ

Задача, строгая постановка и решение которой являются предметом статьи, есть обобщение известной задачи Зоммерфельда А. [3] о поле горизонтального магнитного диполя при наличии плоской «земли» с произвольными электромагнитными свойствами.

Решение строится в виде интегралов, представляющих суперпозицию собственных функций задач Штурма-Лиувилля. Общие выражения для поля исследованы в области предельно малого параметра. Полученные численные результаты дают возможность оценить влияние среднего слоя на суммарное поле, возникающее в среде, и могут оказаться полезными при разработке аппаратуры и методов интерпретации данных поперечного индукционного каротажа.

1. Формулировка задачи

Пусть все пространство разбито двумя параллельными плоскостями на три среды. Электропроводность среднего слоя, мощностью H , — σ_2 , а двух прилегающих, простирающихся в бесконечность — σ_1 (рис. 1 и 2). Магнитная проницаемость во всем пространстве принимается равной проницаемости воздуха $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ гн/м. Выберем цилиндрическую систему координат, ось z которой направлена перпендикулярно границам среднего слоя.

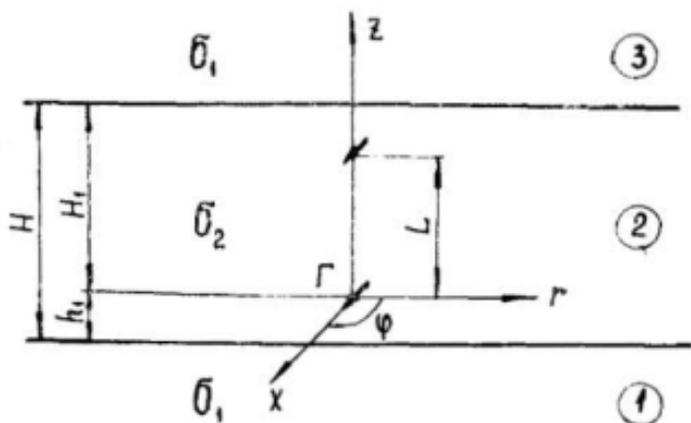


Рис. 1. Трехслойная среда. Источник в среднем слое.

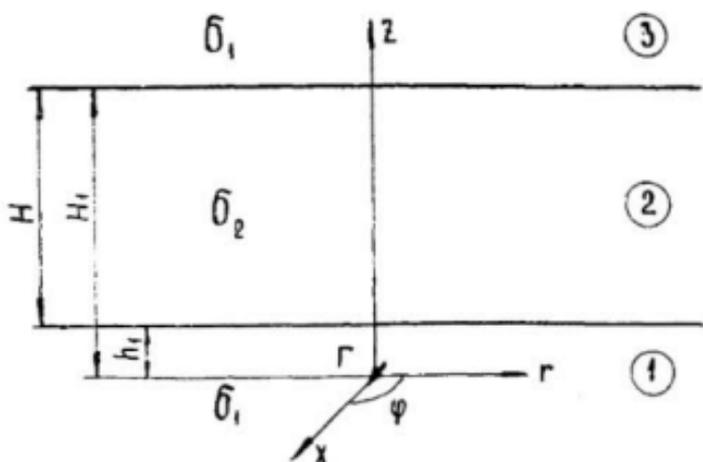


Рис. 2. Трехслойная среда. Источник поля вне среднего слоя.

Предположим, что поле в среде возбуждается магнитным диполем Г, физическим аналогом которого является катушка с током I , числом витков n_z и площадью поперечного сечения витка s_z , определяющими момент диполя $M_0 = In_z s_z$. Требуется найти магнитное поле в любой точке среды, если момент диполя направлен по оси r (горизонтальный магнитный диполь) при произвольном расположении источника относительно границ.

Если по катушке течет синусоидальный переменный ток частотой ω , $I = I_0 e^{-j\omega t}$, то в среде возникает квазистационарный волновой процесс, описываемый системой Максвелла-Герца:

$$\text{rot } \vec{H} = \sigma \vec{E}, \quad (1)$$

$$\text{rot } \vec{E} = j\omega\mu \vec{H}, \quad (2)$$

$$\text{div } \vec{H} = 0 \quad (3)$$

$$\text{div } \vec{E} = 0 \quad (4)$$

Равенство (4) не нарушится, если

$$\vec{E} = \text{rot } \vec{A}, \quad (5)$$

где \vec{A} — векторный потенциал электромагнитного поля.

Из (1)–(3) с учетом (5) найдем связь магнитного поля с векторным потенциалом [1]

$$\vec{H} = \sigma \left[\vec{A} + \frac{1}{k^2} \text{grad div } \vec{A} \right] \quad (6)$$

и уравнение, которому удовлетворяет векторный потенциал

$$\nabla^2 \vec{A} + k^2 \vec{A} = 0 \quad (7)$$

$k^2 = j\omega\mu\sigma$ — квадрат волнового числа.

Обратимся к выводу краевых условий.

Поскольку момент диполя направлен параллельно границе раздела, то поля \vec{E} и \vec{H} будут полностью определены, если в решении учитывать только A_x и A_z , при $A_y = 0$ [3].

Выпишем физические требования к векторам \vec{E} и \vec{H} на границе, состоящие в непрерывности их тангенциальных компонент [5]:

$$[\vec{n} \vec{E}_i] = [\vec{n} \vec{E}_{i+1}], \quad [\vec{n} \vec{H}_i] = [\vec{n} \vec{H}_{i+1}] \quad (8)$$

\vec{n} — нормаль к границе раздела, а индексы i и $i+1$ показыва-

ют положение точки в любых двух средах бесконечно близко к разделяющей их границе. Отметим, что второе условие из (8) обусловлено отсутствием поверхностных токов на границе раздела [1].

Перепишывая (8) в координатах с учетом (5) и (6) и того, что $A_y = 0$, определим условия на границе [3]:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_i A_{xi} &= \sigma_{i+1} A_{xi+1} \\ \frac{\partial A_{xi}}{\partial z} &= \frac{\partial A_{xi+1}}{\partial z} \\ A_{zi} &= A_{zi+1} \\ \operatorname{div} \vec{A}_i &= \operatorname{div} \vec{A}_{i+1} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Вблизи источника поле должно иметь постоянную величину и совпадать с полем диполя в однородной среде, чему удовлетворяет функция источника вида:

$$A_x = M_0 \frac{e^{jkR}}{R} \quad (10)$$

Записывая условие излучения на бесконечности

$$A_x \rightarrow 0, \quad A_z \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty), \quad (11)$$

полностью определим краевые условия (9) — (11).

Уравнение (7) с условиями (9) — (11) будет предметом дальнейшего исследования.

2. Метод решения. Компонента A_x

Перепишем векторное уравнение (7) в цилиндрических координатах, помня, что оно справедливо для каждой компоненты вектора \vec{A} :

$$\frac{\partial^2 A_q}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_q}{\partial r} + \frac{\partial^2 A_q}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_q}{\partial \varphi^2} + k^2 A_q = 0 \quad (12)$$

Индекс q означает либо x -, либо z -компоненту векторного потенциала.

Так как x -компонента векторного потенциала направлена параллельно границе, то для нее вдоль азимута не существует какого-либо выделенного направления, т. е. $A_x = A_x(r, z)$. Поэтому уравнение (12) переписывается в виде:

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + k^2 A_x = 0 \quad (13)$$

Полагая $A_x(r, z) = A'_x(r) \cdot A''_x(z)$ и разделяя переменные, приходим к двум уравнениям:

$$\frac{d^2 A'_x}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dA'_x}{dr} + \lambda^2 A'_x = 0$$

$$\frac{d^2 A''_x}{dz^2} - (\lambda^2 - k^2) A''_x = 0,$$

решение которых соответственно:

$$A'_x(r) = a J_0(\lambda r) + b Y_0(\lambda r) \quad \text{и}$$

$$A''_x(z) = ce^{-\sqrt{\lambda^2 - k^2} z} + de^{\sqrt{\lambda^2 - k^2} z},$$

λ — параметр разделения, $J_0(\lambda r)$ и $Y_0(\lambda r)$ — функции Бесселя первого и второго рода. Так как $Y_0(\lambda r)$ при $r=0$ обращается в бесконечность, а условие (10) требует конечности решения, то $b=0$. Общее решение уравнения (13) представляется непрерывной суперпозицией плоских волн, бегущих вдоль оси z :

$$A_x = \int_0^{\infty} \{ace^{-\sqrt{\lambda^2 - k^2} z} + ade^{\sqrt{\lambda^2 - k^2} z}\} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (14)$$

Выберем $Re\sqrt{\lambda^2 - k^2} > 0$. Тогда A_x — компонента векторного потенциала в каждом слое, запишется в виде:

$$A_{x1} = \frac{j\omega\mu}{4\pi} \int_0^{\infty} C_1 e^{\lambda_1 z} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (15)$$

$$A_{x2} = \frac{j\omega\mu}{4\pi} \int_0^{\infty} \{C_2 e^{\lambda_2 z} C_3 e^{-\lambda_2 z}\} J_0(\lambda r) b \lambda, \quad (16)$$

$$A_{x3} = \frac{j\omega\mu}{4\pi} \int_0^{\infty} C_4 e^{-\lambda_2 z} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (17)$$

$$\lambda_1 = \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}; \quad \lambda_2 = \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}$$

Первичное возбуждение представим интегралом Зоммерфельда [3]:

$$\frac{e^{jkR}}{R} = \int_0^{\infty} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} e^{-\sqrt{\lambda^2 - k^2} |z|} J_0(\lambda r) d\lambda. \quad (18)$$

Так как поле в среде есть первичное возбуждение плюс вторичное поле, то окончательно найдем

$$A_x = \frac{j\omega\mu}{4\pi} \frac{e^{jkR}}{R} + A_{xi}. \quad (19)$$

В (19) первичное возбуждение необходимо суммировать с векторным потенциалом A_{xi} , характеризующим вторичное поле в слое, где расположен источник ($i=1, 2, 3$), а множитель $j\omega\mu/4\pi$ определяет единичный момент диполя M_0 .

3. Компонента A_z

Распишем последнее равенство из (9):

$$\frac{\partial A_{xi}}{\partial x} + \frac{\partial A_{zi}}{\partial z} = \frac{\partial A_{xi+1}}{\partial x} + \frac{\partial A_{zi+1}}{\partial z}.$$

Так как A_{xi} и A_{xi+1} зависят от x и y только в силу их зависимости от $r = \sqrt{x^2 - y^2}$, то $\frac{\partial A_{xi}}{\partial x} = \frac{\partial A_{xi}}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial A_{xi}}{\partial r} \cos \varphi$,

φ — угол между x и r . Аналогично выражается $\frac{\partial A_{xi+1}}{\partial x}$. Производные $\frac{\partial A_{xi}}{\partial x}$ и $\frac{\partial A_{xi+1}}{\partial x}$ согласно (15) — (17) и вышенаписанных равенств будут содержать $\cos \varphi$ и функцию Бесселя первого рода первого порядка, поскольку $\frac{\partial J_0(\lambda r)}{\partial r} = -\lambda J_1(\lambda r)$.

С учетом сказанного найдем:

$$A_{z1} = \frac{j\omega\mu}{4\pi} \cos \varphi \int_0^{\infty} D_1 e^{\lambda z} J_1(\lambda r) d\lambda \quad (20)$$

$$A_{z2} = \frac{j\omega\mu}{4\pi} \cos \varphi \int_0^{\infty} (D_2 e^{\lambda z} + D_3 e^{-\lambda z}) J_1(\lambda r) d\lambda \quad (21)$$

$$A_{z3} = \frac{j\omega\mu}{4\pi} \cos \varphi \int_0^{\infty} D_4 e^{-\lambda z} J_1(\lambda r) d\lambda \quad (22)$$

Равенства (20), (21), (22) определяют A_z -компоненты, которые характеризуют только вторичное, нормальное к границам раздела поле, поскольку первичное возбуждение учтено уже в выражениях для A_{xi} -компонент.

4. Магнитное поле H_x . Источник в среднем слое

Погрузим источник в средний слой и зафиксируем положение его относительно верхней и нижней границ на расстояниях H_1 и h_1 (рис. 1). Коэффициенты $C_1, C_2, C_3, C_4, D_1, D_2, D_3, D_4$ определим, решая систему линейных алгебраических уравнений, получающуюся после подстановки (15)–(17) и (20)–(22) в граничные условия (9)

$$C_1 = \frac{2\lambda_2\sigma_2}{\lambda_2\sigma_1 + \lambda_1\sigma_2} e^{-(\lambda_2 - \lambda_1)h_1} \frac{1 + L_{12}e^{-2\lambda_2 H_1}}{1 - L_{12}^2 e^{-2\lambda_2 H_1}}, \quad (23)$$

$$C_2 = \frac{\lambda L_{12} e^{-2\lambda_2 H_1} (1 + L_{12} e^{-2\lambda_2 h_1})}{\lambda_2 (1 - L_{12}^2 e^{-2\lambda_2 H_1})}, \quad (24)$$

$$C_3 = \frac{\lambda L_{12} e^{-2\lambda_2 h_1} (1 + L_{12} e^{-2\lambda_2 H_1})}{\lambda_2 (1 - L_{12}^2 e^{-2\lambda_2 H_1})} \quad (25)$$

$$C_4 = \frac{2\lambda_2}{\lambda_2\sigma_1 + \lambda_1\sigma_2} e^{-(\lambda_2 - \lambda_1)H_1} \frac{1 + L_{12} e^{-2\lambda_2 h_1}}{1 - L_{12}^2 e^{-2\lambda_2 H_1}} \quad (26)$$

$$D_1 = e^{-(\lambda_2 - \lambda_1)h_1} \frac{2\lambda^2(\sigma_1 - \sigma_2)}{(\lambda_2 + \lambda_1)(\lambda_2\sigma_1 + \lambda_1\sigma_2)} e^{-2\lambda_2 H_1} \left[\frac{(1 + L_{12} e^{-2\lambda_2 h_1})(1 + k_{12})}{(1 - L_{12}^2 e^{-2\lambda_2 H_1})(1 - k_{12}^2 e^{-2\lambda_2 H_1})} - \frac{(1 + L_{12} e^{-2\lambda_2 H_1})(1 + k_{12} e^{-2\lambda_2 H_1})}{(1 - L_{12}^2 e^{-2\lambda_2 H_1})(1 - k_{12}^2 e^{-2\lambda_2 H_1})} \right] \quad (27)$$

$$D_2 = \frac{2\lambda^2(\sigma_1 - \sigma_2)}{(\lambda_2 + \lambda_1)(\lambda_2\sigma_1 + \lambda_1\sigma_2)} \times \frac{e^{-2\lambda_2 H_1} (1 + L_{12} e^{-2\lambda_2 h_1}) - k_{12} e^{-2\lambda_2 H_1} (1 + L_{12} e^{-2\lambda_2 h_1})}{(1 - L_{12}^2 e^{-2\lambda_2 H_1})(1 - k_{12}^2 e^{-2\lambda_2 H_1})} \quad (28)$$

$$D_3 = \frac{2\lambda^2(\sigma_1 - \sigma_2)}{(\lambda_2 + \lambda_1)(\lambda_2\sigma_1 + \lambda_1\sigma_2)} \times \frac{e^{-2\lambda_2 h_1} (1 + L_{12} e^{-2\lambda_2 H_1}) - k_{12} e^{-2\lambda_2 H_1} (1 + L_{12} e^{-2\lambda_2 h_1})}{(1 - L_{12}^2 e^{-2\lambda_2 H_1})(1 - k_{12}^2 e^{-2\lambda_2 H_1})} \quad (29)$$

$$D_4 = e^{-(\lambda_2 - \lambda_1)H_1} \frac{2\lambda^2(\sigma_1 - \sigma_2)}{(\lambda_2 + \lambda_1)(\lambda_2\sigma_1 + \lambda_1\sigma_2)} \left[\frac{(1 + L_{12} e^{-2\lambda_2 h_1})(1 + k_{12} e^{-2\lambda_2 H_1})}{(1 - L_{12}^2 e^{-2\lambda_2 H_1})(1 - k_{12}^2 e^{-2\lambda_2 H_1})} - \frac{e^{-2\lambda_2 h_1} (1 + L_{12} e^{-2\lambda_2 H_1})(1 + k_{12})}{(1 - L_{12}^2 e^{-2\lambda_2 H_1})(1 - k_{12}^2 e^{-2\lambda_2 H_1})} \right] \quad (30)$$

$$L_{12} = \frac{\lambda_2\sigma_1 - \lambda_1\sigma_2}{\lambda_2\sigma_1 + \lambda_1\sigma_2}; \quad k_{12} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_1};$$

H определим из (6):

$$H_{xi} = \sigma_i A_{xi} + \frac{1}{j\omega\mu} \left[\frac{\partial^2 A_{xi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_{zi}}{\partial x \partial z} \right] \quad (31)$$

Интересуемся далее полем H_{xz} на оси z , т. е. при $r=0$. Дифференцируя A_{x2} и A_{z2} по соответствующим переменным и подставляя производные в (31), получим:

$$\begin{aligned} H_{xz}(r=0) = & \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda_2} (j\omega\mu\sigma_2 - \frac{1}{2}\lambda^2) e^{-\lambda_2 z} d\lambda + \right. \\ & + \int_0^{\infty} (j\omega\mu\sigma_2 - \frac{1}{2}\lambda^2) (C_2 e^{\lambda_2 z} + C_3 e^{-\lambda_2 z}) d\lambda + \\ & \left. + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \lambda \lambda_2 (D_2 e^{\lambda_2 z} - D_3 e^{-\lambda_2 z}) d\lambda \right\} \quad (32) \end{aligned}$$

5. Магнитное поле H_x . Источник вне среднего слоя

Поместим источник вне среднего слоя (рис. 2). Процесс определения коэффициентов ничем не отличается от рассмотренного выше. В этом случае

$$C_1' = - \frac{\lambda l_{12} e^{-2\lambda_1 h_1} (1 - e^{-2\lambda_2 H})}{\lambda_1 (1 - l_{12}^2 e^{-2\lambda_2 H})}, \quad (33)$$

$$C_2' = \frac{2\lambda\sigma_1 l_{12} e^{-2\lambda_2 H} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) h_1}}{(\lambda_2\sigma_1 + \lambda_1\sigma_2) (1 - l_{12}^2 e^{-2\lambda_2 H})}, \quad (34)$$

$$C_3' = \frac{2\lambda\sigma_1 e^{-(\lambda_1 - \lambda_2) h_1}}{(\lambda_2\sigma_1 + \lambda_1\sigma_2) (1 - l_{12}^2 e^{-2\lambda_2 H})}, \quad (35)$$

$$C_4' = \frac{4\lambda\lambda_2\sigma_1\sigma_2 e^{-(\lambda_1 - \lambda_2) H}}{(\lambda_2\sigma_1 + \lambda_1\sigma_2)^2 (1 - l_{12}^2 e^{-2\lambda_2 H})}, \quad (36)$$

$$\begin{aligned} D_1' = & 2\lambda^2 (\sigma_1 - \sigma_2) e^{-2\lambda_1 h_1} \times \\ & \frac{2\lambda_2\sigma_1 (1 + k_{12}) e^{-2\lambda_2 H}}{(\lambda_2\sigma_1 + \lambda_1\sigma_2)^2 (\lambda_2 + \lambda_1) (1 - l_{12}^2 e^{-2\lambda_2 H}) (1 - k_{12}^2 e^{-2\lambda_2 H})} - \\ & - \frac{(\lambda_2\sigma_1 + \lambda_1\sigma_2) (1 + l_{12} e^{-2\lambda_2 H}) (1 + k_{12} e^{-2\lambda_2 H})}{(\lambda_2\sigma_1 + \lambda_1\sigma_2)^2 (\lambda_2 + \lambda_1) (1 - l_{12}^2 e^{-2\lambda_2 H}) (1 - k_{12}^2 e^{-2\lambda_2 H})} \quad (37) \\ D_2' = & 2\lambda^2 (\sigma_1 - \sigma_2) e^{-\lambda_2 (H_1 + H)} \times \end{aligned}$$

$$\times \frac{2\lambda_2\sigma_1 - k_{12}(\lambda_2\sigma_1 + \lambda_1\sigma_2)(1 + L_{12}e^{-2\lambda_2 H})}{(\lambda_2\sigma_1 + \lambda_1\sigma_2)^2(\lambda_2 + \lambda_1)(1 - L_{12}^2 e^{-2\lambda_2 H})(1 - k_{12}^2 e^{-2\lambda_2 H})} \quad (38)$$

$$D_3' = 2\lambda^2(\sigma_1 - \sigma_2)e^{(\lambda_2 - \lambda_1)h_1} \times$$

$$\times \frac{2\lambda_2\sigma_1 e^{-2\lambda_2 H} K_{12} - (\lambda_2\sigma_1 + \lambda_1\sigma_2)(1 + L_{12}e^{-2\lambda_2 H})}{(\lambda_2\sigma_1 + \lambda_1\sigma_2)^2(\lambda_2 + \lambda_1)(1 - L_{12}^2 e^{-2\lambda_2 H})(1 - k_{12}^2 e^{-2\lambda_2 H})} \quad (39)$$

$$D_4' = 2\lambda^2(\sigma_1 - \sigma_2)e^{(\lambda_1 - \lambda_2)H} \times$$

$$\times \frac{2\lambda_2\sigma_1(1 + k_{12}e^{-2\lambda_2 H})}{(\lambda_2 + \lambda_1)(\lambda_2\sigma_1 + \lambda_1\sigma_2)^2(1 - L_{12}^2 e^{-2\lambda_2 H})(1 - k_{12}^2 e^{-2\lambda_2 H})}$$

$$- \frac{(\lambda_2\sigma_1 + \lambda_1\sigma_2)(1 + k_{12})(1 + L_{12}e^{-2\lambda_2 H})}{(\lambda_2\sigma_1 + \lambda_1\sigma_2)^2(\lambda_2 + \lambda_1)(1 - L_{12}^2 e^{-2\lambda_2 H})(1 - k_{12}^2 e^{-2\lambda_2 H})} \quad (40)$$

Определим поле H_x в первом и третьем слоях. В соответствии с (31) будем иметь:

$$H_{x2}(r=0) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_0^\infty (j\omega\mu\sigma - \frac{1}{2}\lambda^2)(C_2'e^{\lambda_2 z} + C_3'e^{-\lambda_2 z})d\lambda + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \int_0^\infty \lambda\lambda_2(D_2'e^{\lambda_2 z} - D_3'e^{-\lambda_2 z})d\lambda \right\} \quad (41)$$

$$H_{x3}(r=0) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty [(j\omega\mu\sigma_1 - \frac{1}{2}\lambda^2)C_4' - \frac{1}{2}\lambda\lambda_1 D_4'] e^{-\lambda_2 z} d\lambda \quad (42)$$

Выражения (32), (41) и (42) полностью определяют поле горизонтального магнитного диполя при произвольном расположении его относительно границ в точке с координатами $z, r=0$.

6. Анализ поля (32) при малом параметре

Рассмотрим поле при малых параметрах $n_1 = \sigma_1\mu\omega L^2$ и $n_2 = \sigma_2\mu\omega L^2$, т. е. в области Долля [7]. Такой подход позволит нам выявить основные особенности поля, не прибегая к анализу общих интегралов (32), (41) и (42), для вычисления которых необходимо обращение к численным методам. Анализ проведем на примере выражения (32).

Выделим в (32) ту часть поля, которая связана только со

средним слоем и не определяется границами:

$$H_{x_0} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda_2} (j\omega\mu\sigma_2 - \frac{1}{2}\lambda^2) e^{-\lambda z} d\lambda \quad (43)$$

и будем искать отношение $H_{x_2}/H_{x_0} = h_{x_2}$, где

$$H_{x_0} = \frac{1}{4\pi z^3} \quad (44) \text{ — поле диполя в среде с электропроводностью } \sigma = 0 [5], \text{ т. е. поле в воздухе.}$$

Подставляя в (32) необходимые коэффициенты и учитывая (44), найдем:

$$\begin{aligned} h_{x_2} = & h_{x_2}^0 + 2j\omega\mu\sigma_2 L^2 \int_0^{\infty} \frac{m}{m_2} l_{12} \frac{e^{-m\xi} + l_{12} e^{-2m\xi} c h m_2}{1 - l_{12}^2 e^{-2m\xi}} dm - \\ & - \int_0^{\infty} \frac{m^3}{m^2} l_{12} \frac{e^{-m\xi} + l_{12} e^{-2m\xi} c h m_2}{1 - l_{12}^2 e^{-2m\xi}} dm + \\ & + 2 \int_0^{\infty} \frac{m^3 m_2 (\sigma_1 - \sigma_2)}{(m_2 + m_1)(m_2 \sigma_1 + m_1 \sigma_2)} \frac{e^{-m\xi} + l_{12} e^{-2m\xi} c h m_2}{(1 - l_{12}^2 e^{-2m\xi})(1 - k_{12}^2 e^{-2m\xi})} dm - \\ & - 2 \int_0^{\infty} \frac{m^3 m_2 (\sigma_1 - \sigma_2) k_{12} e^{-2m\xi} (l_{12} e^{-m\xi} + c h m_2)}{(m_2 + m_1)(m_2 \sigma_1 + m_1 \sigma_2)(1 - l_{12}^2 e^{-2m\xi})(1 - k_{12}^2 e^{-2m\xi})} dm, \quad (45) \end{aligned}$$

где $h_{x_2}^0$ — поле в однородной среде с проводимостью среднего слоя, выраженное в единицах поля в воздухе;

$$\xi = \frac{H}{L}; \quad m = \lambda L; \quad m_1 = \lambda_1 L; \quad m_2 = \lambda_2 L;$$

$$l_{12} = \frac{m_2 \sigma_1 - m_1 \sigma_2}{m_2 \sigma_1 + m_1 \sigma_2}; \quad k_{12} = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}$$

$z = L$ — координата точки наблюдения.

Соотношение (45) получено в предположении, что точка наблюдения и источник расположены внутри среднего слоя симметрично относительно его границ, т. е. когда

$$\frac{2h_1}{L} = \frac{H}{L} - 1; \quad \xi \gg 1.$$

Разложим l_{12} и K_{12} в степенные ряды по малому параметру n_1 .

Так как $m_1 = m - \frac{jn_1}{2m}$; $m_2 \approx m - \frac{jNn_1}{2m}$, то

$$K_{12} \simeq \frac{j(1-N)n_1}{4m^2}; \quad l_{12} \simeq \frac{1-N}{1+N}; \quad m_2\sigma_1 + m_1\sigma_2 \simeq m(\sigma_1 + \sigma_2); \quad (46)$$

$$m_2 + m_1 \simeq 2m; \quad N = \frac{\sigma_2}{\sigma_1};$$

Подставим (46) в (45):

$$h_{x2} = h_{x2}^0 + 2j\omega\mu\sigma_2 L^2 \int_0^\infty l_{12} \frac{e^{-m\xi} + l_{12}e^{-2m\xi}}{1 - l_{12}^2 e^{-2m\xi}} chm \, dm -$$

$$- \frac{j(1-N)\mu\omega\sigma_1 L^2}{4} \int_0^\infty l_{12} \frac{(l_{12}e^{-m\xi} + chm)e^{-2m\xi}}{1 - l_{12}^2 e^{-2m\xi}} \, dm; \quad (47)$$

При малом параметре n_1 [5]

$$h_{x2}^0 = - \frac{j\omega\mu\sigma_2}{2} L^2 \quad (48)$$

Введем эквивалентный параметр

$$\sigma_k = \frac{2j}{\omega\mu L^2}, \quad (49)$$

характеризующий наличие неоднородностей в среде. Деля обе части (47) на $-j\omega\mu\sigma_2\Delta L^2/2$ (и вычисляя интегралы [2], получим:

$$\frac{\sigma_k}{\sigma_2} = 1 - \frac{2l_{12}}{\xi} \left[{}_1F_1(l_{12}^2, 1, \frac{1}{2}) + \frac{l_{12}^2}{2} {}_1F_1(l_{12}^2, 1, 1 + \frac{1}{2\xi}) + \right.$$

$$\left. + \frac{l_{12}^2}{2} {}_1F_1(l_{12}^2, 1, 1 - \frac{1}{2\xi}) \right] + \frac{(1-N)l_{12}}{4N\xi} \left[l_{12} {}_1F_1(l_{12}^2, 1, \frac{3}{2}) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} {}_1F_1(l_{12}^2, 1, 1 + \frac{1}{2\xi}) + \frac{1}{2} {}_1F_1(l_{12}^2, 1, 1 - \frac{1}{2\xi}) \right] \quad (50)$$

${}_1F_1$ — функции Куммера соответствующих аргументов [6]. Интегралы вычислены в предположении $l_{12}^2 \leq 1$ и $l_{12}^2 \neq 1$, т. е. при условии непределенных отношений электропроводностей слоев, ибо $l_{12}^2 \neq 1 \rightarrow \frac{1-N}{1+N} \neq 1$, т. е. $1-N \neq 1+N$ или $N = \sigma_2/\sigma_1 \neq 0$.

Формула (50) определяет асимптотику поля при малых электропроводностях и частотах возбуждающего тока. На рис. 3 показаны зависимости $\frac{\sigma_k}{\sigma_2}$ от $\xi = \frac{H}{L}$. Параметром кривых является $\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$. При малых отношениях σ_2/σ_1 и малых H/L влия-

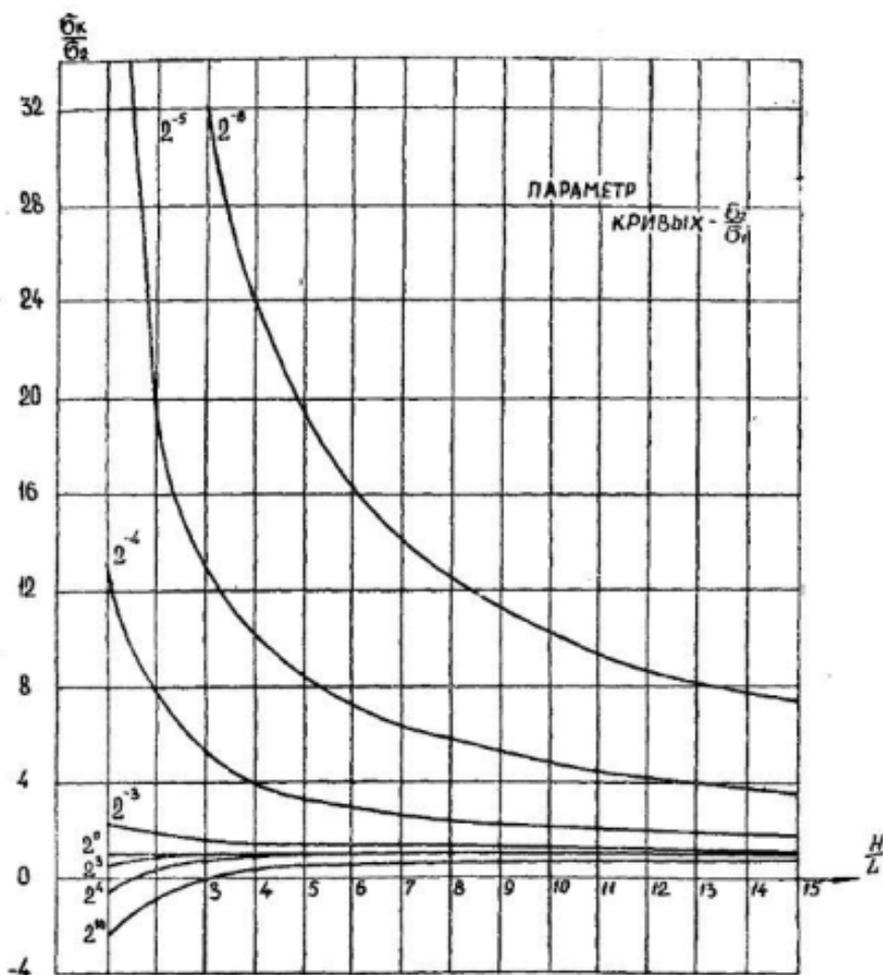


Рис. 3. Зависимость σ_k/σ_2 от $\frac{H}{L}$. Прямая $\sigma_k/\sigma_2=1$ (параметр $\sigma_2/\sigma_1=2^0$) характеризует однородную изотропную среду.

ние внешних сред на поле в среднем слое велико и они дают основной вклад в суммарное поле. С увеличением H/L влияние уменьшается, причем характер этого уменьшения различен для разных кривых. С ростом σ_2/σ_1 влияние внешних сред уменьшается и становится конечной величиной, определяемой предельным отношением электропроводностей слоев $\sigma_2/\sigma_1 = \infty$

(в нашем случае это кривая с параметром $\sigma_2/\sigma_1=2^{10}$). При очень больших H/L все кривые асимптотически стремятся к единице, т. е. распределение поля будет таким же, как в однородной среде, поскольку с удалением границ от источника отраженная волна быстро затухает.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурсиан В. Р. Теория электромагнитных полей, применяемых в электроразведке, ч. I, ГТТИ, 1933, ч. II, ЛГУ, 1936.
2. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.
3. Зоммерфельд А. Дифференциальные уравнения в частных производных физики. М., ИЛ, 1950.
4. Кауфман А. А. Теория индукционного каротажа. М., «Наука», 1965.
5. Тамм И. Е. Основы теории электричества. М., «Наука», 1966.
6. Ямке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. М., «Наука» 1968.
7. Doll H. G. Introduction to induction logging and application to logging of wells drilled with oil base mud. Petrol. Technol, NO 4, 1946.

Г. И. ТИМОФЕЕВ, О. К. НАВРОЦКИЙ

**О ЦИКЛИЧНОСТИ НАКОПЛЕНИЯ
ОРГАНИЧЕСКОГО ВЕЩЕСТВА
В ЮРСКИХ И МЕЛОВЫХ ОТЛОЖЕНИЯХ
СЕВЕРО-ЗАПАДНОГО ПРИКАСПИЯ**

Изучение количественных закономерностей в распределении рассеянного органического вещества в осадочных толщах имеет определенное значение при выявлении благоприятных условий для нефтегазообразования и оценки перспектив нефтегазоносности [1, 2]. Для этого в геохимической практике обычно исследуется характер изменения по разрезу концентраций $C_{орг}$, выделяются толщи разной обогащенности органическим веществом. Однако, сложность распределения $C_{орг}$ в осадочных породах не всегда позволяет уверенно дифференцировать разрез, а проведение границ между участками разрезов с различным содержанием $C_{орг}$ порой не имеет четких количественных обоснований.

Для решения этой задачи необходимо в разрезах выделить участки с одногипным распределением органического вещества, т. е. представляющие собой однородную совокупность по содержанию органики. Каждый из участков должен соответствовать периоду времени, на протяжении которого процессы накопления органического вещества носили стабильный характер. Выделение таких участков в значительной мере основывается на данных опробования и может быть проведено на точной количественной основе, для чего можно применить метод разделения всей совокупности значений величин $C_{орг}$ в изучаемых отложениях на основе статистической теории однородности. Подобные задачи рассматриваются Д. А. Родио-

новым [3] как нахождение границ в геологических совокупностях. Этот метод использован для изучения закономерностей накопления органического вещества в юрских и меловых отложениях северо-западного Прикаспия по материалам Новоузенской опорной скважины и Уральской площади.

Сущность решения задачи заключается в нахождении оценок математического ожидания для каждой из m (число компонентов опробования) одномерных случайных величин для обеих частей любого из $n-1$ (n — число интервалов опробования) возможных разбиений разреза T на две части. Если гипотеза об однородности совокупности (H_0) верна, то при любом из $n-1$ возможных разбиений T на две части

$$\frac{1}{k} \sum_{t=1}^k \bar{x}_t = \frac{1}{n-k} \sum_{t=k+1}^n \bar{x}_t = \bar{X}_0.$$

$(k=1, 2, \dots, n-1).$

Если совокупность неоднородна, то наиболее вероятное нахождение границы будет соответствовать тому значению k , при котором абсолютная величина разности между средними значениями двух совокупностей, на которые разбита изучаемая совокупность, будет наибольшей.

Доказано [3], что наиболее вероятное нахождение границы будет соответствовать тому значению k , при котором

$$V_k = \frac{k(n-k)}{n} \cdot \frac{\bar{x}_k' - \bar{x}_k''}{s^2} = \max.$$

После определения границы для выделенных совокупностей вновь проводится проверка гипотез об однородности.

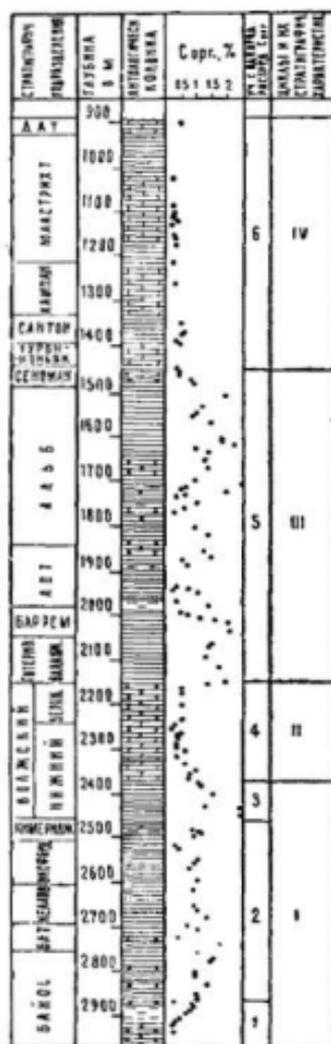
Процесс такого дробления продолжается до тех пор, пока гипотеза об однородности не подтвердится во всех подразделениях.

В исследованных разрезах юрские и меловые отложения представлены в наиболее полном стратиграфическом объеме, начиная от нижней юры (?) и кончая датом (см. рис.). Каждый разрез охарактеризован большим количеством образцов, исследованных на содержание органического углерода.

По Новоузенской опорной скважине было выполнено 128 определений $C_{орг}$, по Уральской — 59. Образцы для анализа $C_{орг}$ отбирались с таким расчетом, чтобы каждый стратиграфический горизонт был по возможности охарактеризован полно и равномерно.

В рассматриваемых разрезах на основе вычисленных ста-

а



б

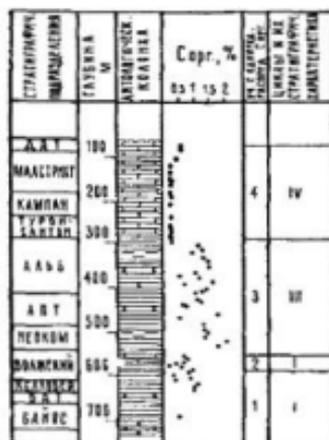


Схема выделения циклов накопления органического вещества в юрских и меловых отложениях северо-западного Прикаспия. а — геолого-геохимический разрез Новоузенской опорной скважины I.

Статистическая характеристика циклов:

$$IV \bar{x}=0,10 \quad \sigma=0,13 \quad V_k=15$$

$$III \bar{x}=0,94 \quad \sigma=0,64 \quad V_k=10$$

$$II \bar{x}=0,35 \quad \sigma=0,21 \quad V_k=8$$

$$I \bar{x}=0,74 \quad \sigma=0,29$$

б — сводный геолого-геохимический разрез Уральской площади.

Статистическая характеристика циклов:

$$IV \bar{x}=0,17 \quad \sigma=0,29 \quad V_k=23$$

$$III \bar{x}=1,2 \quad \sigma=0,52 \quad V_k=11$$

$$II \bar{x}=0,8 \quad \sigma=0,27 \quad V_k=7$$

$$I \bar{x}=0,85 \quad \sigma=0,33$$

I — известняки, 2 — мергели, 3 — алевриты, 4 — песчаники, 5 — горючие сланцы, 6 — глины.

тистик V_k по программам для ЭВМ «Урал-2» [4] установлены границы между однородными по органическому углероду совокупностями, для каждой такой совокупности в пределах разреза подсчитаны средние содержания органического вещества (\bar{x}) и оценен характер его распределения по площади (σ).

Сравнительный анализ показывает, что выделенные в каждом из разрезов участки с однородным распределением $C_{орг}$ соответствуют определенным литолого-стратиграфическим подразделениям.

Как в разрезе Новоузенской опорной скважины, так и на Уральской площади выделяются участки, охватывающие верхний мел, нижний мел и сеноман, верхи нижневолжского яруса и верхневолжский и часть разреза от байоса до низов нижневолжского яруса включительно.

Для подтверждения однотипности условий накопления органического вещества в мезозойских отложениях северной части западного Прикаспия нами проводился литолого-стратиграфический анализ выделенных однородных совокупностей и устанавливались существенные или несущественные различия в средних значениях (\bar{x}) и дисперсиях (σ^2) в сравниваемых выборках [5].

Сравнение средних проводилось по формуле:

$$d = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{N_1} + \frac{\sigma_2^2}{N_2}}}$$

где \bar{x}_1, \bar{x}_2 — средние значения; σ_1^2, σ_2^2 — дисперсия; N_1, N_2 — количество анализов.

Оценка дисперсионных отношений проводилась по критерию Фишера $F = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$.

Сравнение средних значений и дисперсионных отношений выполнялось при различных уровнях значимости:

$$q = 1\%; \quad q = 5\%.$$

Доказанное равенство дисперсий и средних при различных уровнях значимости принималось как показатель однородности сравниваемых выборок.

Анализ средних значений и дисперсий выделенных разновозрастных участков разреза по исследуемым площадям указывает на их несущественные различия, что отражает однотипность условий накопления органического вещества в тот или иной отрезок времени (см. табл.).

Стратиграфические подразделения	Однородные участки разреза по $C_{орг}$		Вычисленные значения F	Табличные значения		Вычисленные значения d	Табличные значения	
	Новоузенская опорная скв.	Уральская площадь		q_1	q_2		q_1	q_2
Байос-низы нижневолжского яруса	2	1	1,36	3,26	2,32	0,89	2,75	2,04
Верхи нижневолжского яруса и верхневолжский	4	2	1,60	4,34	2,81	0,41	3,81	2,07
Нижний мел + сеноман	5	3	1,54	2,42	1,85	1,83	2,63	1,99
Верхний мел	6	4	5,9	3,40	2,35	2,35	2,75	2,04

Табличные значения F и d превышают вычисленные значения, и поэтому сравниваемые выборки можно отнести к одной совокупности. Исключение составляет верхний мел, где F и d превышают табличные значения. Однако сопоставление верхнемелового участка № 6 Новоузенской опорной скв. с нижнемеловым № 3 Уральского сводного разреза указывает на резкое различие распределения в них органического вещества:

$$\begin{aligned}
 F \text{ вычисл.} &= 17,7 \\
 F \text{ табл.} &= 3,05 \text{ при } q=1\% \\
 F \text{ табл.} &= 2,17 \text{ при } q=5\% \\
 d \text{ вычисл.} &= 9,76 \\
 d \text{ табл.} &= 2,70 \text{ при } q=1\% \\
 d \text{ табл.} &= 2,02 \text{ при } q=5\%
 \end{aligned}$$

Это позволяет нам отнести отложения верхнего мела на исследуемых территориях к единому геохимическому циклу накопления органического вещества.

Таким образом, анализ выделенных однородных участков по содержанию $C_{орг}$ по разрезу и по площади позволяет выделить в юрских и меловых отложениях северной части западного Прикаспия четыре цикла.

К первому циклу отнесен стратиграфический диапазон от байоса до низов нижневолжского яруса, соответствующий од-

ному из максимумов накопления органического вещества в юрско-меловых отложениях северо-западного Прикаспия.

Содержание $C_{\text{орг}}$ достаточно высоко — от 0,74 до 0,85%. Интересно сравнение этих величин с кларком органического углерода для осадочных отложений Русской платформы, составляющим 0,4% [1]. Сопоставление показывает, что в этот период времени произошло накопление относительно высоких концентраций органического вещества, количество которого почти в два раза выше среднего содержания для осадочных отложений Русской платформы. Высокая обогатенность $C_{\text{орг}}$ обуславливалась благоприятными палеогеографическими и фациальными условиями бассейна седиментации в этот период.

Обращает на себя внимание широкое развитие в отложениях этого цикла тонкозернистых осадков глинисто-алевритового типа, составляющих в изученных разрезах более $\frac{2}{3}$ от мощности осадков данного цикла. Условия накопления осадков этого типа наиболее благоприятны для фоссилизации органического вещества [1, 6].

Видимо, существенную роль в накоплении повышенных масс органического вещества в осадках этого времени играл принос растительного материала с окружающих источников сноса, на что указывает, в частности, обильное содержание в рассматриваемых отложениях обуглившегося растительного детрита.

На фоне постоянного ($\sigma=0,29-0,33\%$) и высокого уровня накопления органического вещества в этом цикле наблюдаются колебания его концентраций по разрезу, что обусловлено изменениями литофациального состава этих отложений. В Новоузенской скважине отмечается резкое увеличение накопления органики в нижневожское время, когда накапливались горючие сланцы ($\bar{x}=1,70\%$; $\sigma=1,53\%$; $V_k=20$). Некоторое обеднение органическим веществом наблюдается в самом цикле ($\bar{x}=55\%$; $\sigma=0,45\%$; $V_k=7$), что вполне согласуется с увеличением в этой части разреза роли песчаных пород.

Второй цикл выделяется в верхней части нижневожского яруса и верхневожском и в литологическом отношении представлен терригенно-карбонатными породами.

Литофациальный состав отложений указывает, что их формирование происходило в условиях открытого, мелководного, сильно регрессирующего бассейна [7], когда значительно снизился темп накопления органического материала в осадках. Среднее содержание $C_{\text{орг}}$ в отложениях этого цикла составля-

ет 0,30—0,35%, что более чем в два раза меньше содержания органического вещества в осадках предшествующего периода. Это связано с изменением фациальных условий, появлением карбонатных осадков (мергели, известняки) и, очевидно, с уменьшением общего количества сносимого в бассейн органического материала и снижением биологической продуктивности.

О постоянстве условий накопления органического вещества в течение этого цикла свидетельствуют незначительные величины среднеквадратичных отклонений распределения $C_{орг}$ в исследуемых отложениях ($\sigma=0,21—0,27\%$).

Третий цикл соответствует всему нижнему мелу и сеноманскому ярусу.

В это время накапливались максимальные количества органического вещества в осадках, содержание которого в среднем для отложений этого цикла составляет 0,94—1,20%, что связано, возможно, с увеличением биологической продуктивности бассейна и появлением благоприятных условий для массового поступления и захоронения органического материала. В течение этого цикла формировались преимущественно терригенные отложения, среди которых значительную роль играли алевроитово-глинистые отложения. Терригенный состав отложений свидетельствует о возросшем влиянии на бассейн седиментации окружавшей его суши, откуда сносилось большое количество обломочного и органического материала.

Интересно отметить увеличение среднеквадратичных отклонений ($\sigma=0,52—0,54\%$), которое может рассматриваться как показатель некоторой дифференцированности геологических условий накопления органического вещества в этот период.

Четвертый цикл охватывает период накопления верхнемеловых отложений (за исключением сеномана) и характеризуется незначительным масштабом накопления органического вещества (0,17—0,19%). Это обусловлено особенностями палеогеографической и фациальной обстановки бассейна — в верхнемеловую эпоху территория юго-востока Русской платформы была покрыта обширным мелководным морем открытого типа.

Рассматриваемый район располагался вдали от источников сноса, что способствовало формированию карбонатных осадков. При этом, как известно, обстановка малоблагоприятна для фоссилизации больших масс органического вещества, которые обычно формируются в пелагических частях бассейна

с низкой продуктивностью планктонной пленки при отсутствии приноса органического материала с суши [6].

Подобные фашиальные условия накопления органического вещества существовали на протяжении всей верхнемеловой эпохи, на что указывает незначительная величина среднеквадратичного отклонения (σ), составляющая 0,13—0,29%.

Выделенные циклы накопления органического вещества в юрских и меловых отложениях северо-западного Прикаспия прослеживаются и по многим другим районам рассматриваемой территории, что позволяет говорить об их региональном значении.

Каждый цикл характеризуется определенным уровнем и характером накопления органического вещества, что в полной мере увязывается с особенностями геологической, палеогеографической и литофашиальной обстановки седиментации в эти периоды. С нефтегеологической точки зрения наибольший интерес представляют отложения первого и третьего циклов, когда в осадках накапливались наибольшие количества органического вещества, что создавало благоприятные условия для нефтегазообразования. С отложениями этих циклов, как показывает анализ, связано большинство нефтегазопоявлений не только в северо-западном Прикаспии, но и по всей территории западной части Прикаспийской впадины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ронов А. Б. Органический углерод в осадочных породах (в связи с их нефтегазонасностью). *Геохимия*, № 5, 1958.
2. Жабров Д. В., Мехтиева Ш. Ф. К битуминологии третичного комплекса юго-востока Азербайджана. М., Изд-во АН СССР, 1959.
3. Родионов Д. А. К вопросу о статистической теории однородности геологических совокупностей. *Геохимия*, № 4, 1965.
4. Ляпская В. А. Программа разделения статистической совокупности на однородные группы. В сб. *Вычислительные методы и программирование для ЭВМ «Урал-2», «Урал-4»*. Саратов, Изд-во СГУ, 1966.
5. Руководство по предварительной математической обработке геохимической информации при поисковых работах. М., «Недра», 1965.
6. Страхов Н. М. Образование осадков в современных водоемах. М., Изд-во АН СССР, 1954.
7. Виноградов А. П. и др. История геологического развития Русской платформы и ее обрамления. М., «Недра», 1964.

О. К. НАВРОЦКИЙ, Е. В. СОЛОДКОВА, Г. И. ТИМОФЕЕВ

ОПЫТ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЭВМ В ПРАКТИКЕ ГЕОХИМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Геохимические методы поисков месторождений ископаемых требуют точной количественной оценки геохимического фона и выбора оптимальной границы между фоновыми и поисковыми концентрациями элемента. Приемы, предлагаемые для решения подобных задач [1], основаны на изучении законов распределения химических элементов в различных природных объектах. Большинство химических элементов в горных породах подчиняется нормальному или логнормальному закону распределения [2, 3]. Поэтому возникает необходимость вычисления статистических оценок параметров распределения и проверки гипотезы о непротиворечивости эмпирического распределения нормальному или логнормальному закону.

Одним из методов проверки является метод моментов [4], позволяющий получать статистические характеристики распределения по несгруппированным выборкам.

Подготовка материала для ЭВМ БЭСМ-4 заключается в последовательной записи результатов анализов друг за другом для каждого элемента. В случае отсутствия анализа записывается—1. В конце каждого m -ого массива ставится признак окончания 777 7777 7777 7777 и $K\Sigma$.

В общем виде заданный материал может быть представлен следующим образом:

$$\begin{array}{cccccccc} X_{11} & X_{12} & X_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & X_{1m} \\ X_{21} & -1 & X_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & X_{2m} \\ \cdot & \cdot \\ X_{n1} & X_{n2} & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & X_{nm} \end{array}$$

где m — число исследуемых элементов; n — число проб; —1 — отсутствие анализа в данной пробе.

Такая система записи позволяет использовать этот же перфорационный материал для обработки его по программе вычисления коэффициентов корреляции. Подсчет статистических оценок параметров распределения проводится по следующим формулам:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \text{ — оценка среднего содержания;}$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1} \text{ — оценка дисперсии;}$$

$$A = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{n \cdot s^3} \text{ — оценка асимметрии;}$$

$$\mathcal{E} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{n \cdot s^4} \text{ — оценка эксцесса;}$$

$$\sigma(A) = \sqrt{\frac{6}{n}}, \quad \sigma(\mathcal{E}) = 2\sqrt{\frac{6}{n}} \text{ — значения соответствующих стандартных отклонений } A \text{ и } \mathcal{E};$$

$$\pm \lambda_{5\%} = \frac{1,96 \cdot s}{\sqrt{n}} \text{ — ошибка при } 5\% \text{ уровне значимости;}$$

$$V = \frac{s}{\bar{x}} \text{ — коэффициент вариации при нормальном распределении;}$$

$$V = \sqrt{10^{5^2 \lg} - 1} \text{ — коэффициент вариации при логнормальном распределении.}$$

На печать результаты выдаются в следующей последовательности:

$$n, \bar{x}, s^2, s, A, \sigma(A), A : \sigma(A), \mathcal{E}, \sigma(\mathcal{E}), \mathcal{E} : \sigma(\mathcal{E}), \lambda_{5\%}, V$$

Все значения X_i переводятся в логарифмы и проводится подсчет статистических оценок для логарифмов содержаний. Кроме того дополнительно вычисляется среднее содержание

(a), дисперсия (b^2) и стандартное отклонение (b) при помощи максимально правдоподобной оценки [2]

$$a = 10^{\overline{\lg x}} e^t \left\{ 1 - \frac{t(t+1)}{n} + \frac{t^2(3t^2 + 22t + 21)}{6n^2} \right\}.$$

На печать результаты выдаются в последовательности:

$$n, \lg x, s_{1g}^2, s_{1g}, A_{1g}, \sigma(A_{1g}), A_{1g} : \sigma(A_{1g}), \mathcal{E}_{1g}, \sigma(\mathcal{E}_{1g}), \\ \mathcal{E}_{1g} : \sigma(\mathcal{E}_{1g}), \lambda_{5\%}, V, a, b^2, b.$$

Условиями нормальности распределения будет соблюдение неравенств:

$$\left| \frac{A}{\sigma(A)} \right| \leq 3, \quad \left| \frac{\mathcal{E}}{\sigma(\mathcal{E})} \right| \leq 3.$$

Аналогичные условия необходимы для соблюдения логарифмической нормальности.

Наряду с анализом статистических оценок параметров распределения элементов в природных объектах возникает необходимость выяснения зависимости элементов друг от друга и построения парагенетических ассоциаций.

В качестве оценки силы парагенетических связей между элементами и минералами в геохимии используются различные модификации коэффициентов корреляции [5].

Подготовка материала для обработки на ЭВМ аналогична выше описанной. Если используется перфорационный материал после получения статистических оценок функции распределения, то из него убираются признаки окончания массивов 777 7777 7777 7777 и КЭ.

Дополнительно пробивается карточка информации следующего вида:

0	0500	0	0	КА
0	0	n	0	
0	0	m	0	
0	0	l	0,	

где n — число анализов, m — число признаков, l — число массивов.

Подготовительный материал обрабатывается по специальной программе, которая из данного массива исключает те пробы, в которых отсутствует хотя бы один анализ, т. е. производится построение новой матрицы без —1.

Преобразованная таким образом матрица используется для подсчетов коэффициентов корреляции по следующим формулам [6, 7].

1. Парный коэффициент корреляции

$$r_{ij} = r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)}{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right] \left[\sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 \right]}}$$

В качестве статистического критерия для проверки гипотезы $H_0: \rho = 0$ вычисляется величина

$$t = \frac{|r_{ij}|}{\sqrt{1-r_{ij}^2}} \cdot \sqrt{n-2},$$

которая в условиях нулевой гипотезы распределена по закону Стьюдента с $n-2$ степенями свободы. При $t > t$ табл. при заданном уровне значимости (q) гипотеза $H_0: \rho = 0$ отвергается и зависимость считается установленной.

Если n мало, то и в качестве оценки $H_0: \rho = 0$ используют величину

$$u = \frac{z}{\sigma_z},$$

где z — преобразование Фишера

$$z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}, \quad \sigma_z = \sqrt{\frac{1}{n-3}}.$$

Если $|u| > 1,96$, то гипотеза $H_0: \rho = 0$ может быть отклонена при $q = 0,05$.

Результаты подсчета парного коэффициента корреляции с критериями t и u выдаются в виде таблиц на широкую печать.

2. Частный коэффициент корреляции (ρ_{ij}).

$$\rho_{ij}(1 \dots i-1, i+1 \dots j-1, j+1 \dots m) = -\frac{P_{ij}}{\sqrt{P_{ii}P_{jj}}},$$

где P_{ij} , P_{ii} , P_{jj} — алгебраические дополнения корреляционной матрицы P .

Необходимость подсчета частного коэффициента корреляции часто возникает при анализе различных парагенетических ассоциаций элементов с целью выявления ложных r_{ij} , причем, ρ_{ij}' дает возможность выделить действительную корреляцию между парой элементов, исключив влияние всех остальных, а $\rho_{ij}(k)$ позволяет оценить последовательно влияние каждого элемента на данную пару.

3. Множественный коэффициент корреляции.

$$r_i(1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, m) = \sqrt{1 - \frac{P}{P_{ii}}},$$

где

$$P = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{k1} & r_{k2} & \dots & r_{kk} \end{pmatrix}.$$

Этот коэффициент дает оценку связи одного элемента одновременно со всей совокупностью.

В качестве примера реализации выше описанных программ при решении геохимических задач приведем выделение в однородных геологических объектах геохимического фона по степени битуминизации (β). Предполагается, что содержание битумоидов в осадочных породах обусловлено наличием органического вещества и вторичного аллохтонного битумоида. Так как при решении этой задачи необходимо учитывать все факторы, обуславливающие процесс автохтонного битумообразования, исследуемые образцы с помощью перфокартотеки были разбиты на однородные по условиям битумообразования совокупности: по литологии, степени карбонатности, составу органического вещества, глубине залегания и окислительно-восстановительным условиям.

Подсчет парных коэффициентов корреляций между органическим углеродом ($C_{орг}$) и битумоидом (Б) в песчаниках, алевролитах и глинах в большинстве случаев оказался очень низким ($r < 0,5$), что указывает на слабую взаимосвязь исследуемых компонентов. Однако $t > t_{табл.}$ дают возможность предположить, что в данном случае хотя связь и низка, но реальна. Затусшевание взаимосвязи (соответственно и понижение коэффициента корреляции) между органическим веществом и битумоидом обусловлено в первую очередь наличием миграционного битумоида. Для выявления пород, содержащих аллохтонный (аномальный, не обусловленный содержанием в породе органическим веществом) битумоид, необходимо определить для данной однородной геологической совокупности геохимический фон по степени битуминозности. Предварительно проверялась гипотеза о непротиворечивости распределения коэффициента битуминозности пород (β) нормальному и логнормальному закону.

Анализ функции распределения β показал, что в большинстве случаев закон распределения β не противоречит нормальному. В случае логнормального распределения исследовались максимально правдоподобные оценки среднего значения и

стандартного отклонения в предложении, что в исследуемых случаях возникновение логнормального распределения скорее обусловлено аналитическими данными, чем распределением этой величины в природном объекте.

Геохимический фон в пределах одной выделенной совокупности определялся последовательно по формуле:

$$\begin{aligned} \text{фон } \langle \beta \rangle &= \bar{x} \pm t_i s \quad i = 1, 2, 3, 4. \\ t_1 &= 1, \quad t_2 = 0,75, \quad t_3 = 0,5, \quad t_4 = 0,25. \end{aligned}$$

Подобный выбор t_i обусловлен тем, что стандартное отклонение в выделенных совокупностях в большинстве случаев соизмеримо со средним значением и даже превосходит его. Для каждой выделенной таким образом новой совокупности подсчитывался $r_{C_{орг2}-Б}$. Анализ материалов показал, что им также определялся фон, т. е., чем меньше было t_i , тем выше коэффициент корреляции. В различных однородных совокупностях $r_{C_{орг2}-Б}$ достигал высоких значений при различных t_i . Для разделения пород с автохтонным и аллохтонным битумоидом выбирался такой размах фона, при котором $r_{C_{орг2}-Б}$ достигал 0,7—0,9 при $t > t_{\text{табл}}$. Такой уровень $r_{C_{орг2}-Б}$, подсчитанный по данным А. П. Лисицына [8], характеризует взаимосвязь органического вещества и битумоида в современных осадках Курило-Камчатской впадины.

Выделенные подобным образом автохтонные и аллохтонные битумоиды различаются и по качественному составу: аллохтонные, в отличие от автохтонных, имеют более высокую степень восстановленности, нейтральности, содержат больше масел, а в элементарном составе хлороформенной фракции— больше углерода, водорода и меньше гетероатомов ($N+O+S$).

В качестве другого примера использования коэффициентов корреляции приведем построение парагенетических ассоциаций химических элементов в песчано-алевритовых глинах апта междуречья Урал—Волга. Известно, что распределение химических элементов в породе зависит от форм их миграции, которые в свою очередь обусловлены физико-географическими условиями седиментации [9]. Накоплен некоторый материал по построению парагенетических ассоциаций химических элементов в различных типах пород (магматических, метаморфических, осадочных) на основе корреляционного анализа, который показывает, что в условиях преобладания на водоразделах химической денудации над механической в осадочных породах намечается распад группы железа, обособле-

Значения парных коэффициентов корреляции и статистического критерия значимости (u)

Элементы											
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
V	Cu	Ni	Mn	Sr	Ba	Li	Fe ⁺⁺	Fe ⁺⁺	Fe ₃	Сор ₂	Б
1	+0.270 2.47	+0.269 2.45	-0.035 0.760	-0.016 0.410	0.114 1.02	+0.125 1.12	+0.312 2.87	-0.111 0.991	-0.050 0.450	+0.112 1.00	+0.096 0.858
2		+0.118 1.05	-0.061 0.549	-0.117 1.05	-0.051 0.455	-0.004 0.037	+0.153 1.37	+0.010 0.180	+0.183 1.64	+0.055 0.495	+0.022 0.195
3			+0.220 1.98	-0.129 1.24	-0.072 0.649	+0.007 0.066	+0.171 1.53	+0.191 1.71	+0.166 1.49	+0.065 0.587	+0.303 2.78
4				-0.032 0.824	-0.149 1.34	+0.029 0.263	+0.041 0.371	+0.769 9.05	-0.146 1.31	-0.124 1.10	-0.080 0.719
5					+0.548 5.47	+0.367 3.42	-0.003 0.078	-0.151 1.35	-0.171 1.54	-0.202 1.82	-0.128 1.14
6						-0.401 3.78	+0.208 1.88	-0.046 0.410	-0.224 2.03	-0.209 1.88	-0.220 1.99
7							+0.127 1.13	+0.012 0.108	-0.157 1.41	-0.032 0.288	-0.049 0.443
8								+0.109 0.978	-0.094 0.843	+0.082 0.735	-0.109 0.973
9									-0.170 1.52	-0.113 1.00	-0.052 0.468
10										+0.567 5.71	+0.442 4.23
11											+0.698 7.68

Таблица 2

Значения множественных и частных коэффициентов корреляций

Элементы												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	V	Cu	Ni	Mn	Sr	Ba	Li	Fe ⁺⁺	Fe ⁺	Fe _s	С _{орг}	Б
1	+0.612	+0.242	+0.304	-0.046	-0.062	+0.099	+0.053	+0.242	-0.197	-0.235	+0.232	-0.068
2		+0.506	+0.055	-0.116	-0.001	-0.174	+0.146	+0.037	+0.121	+0.179	-0.075	-0.057
3			+0.671	+0.244	-0.154	+0.110	-0.055	+0.144	+0.001	+0.278	-0.388	+0.460
4				+0.838	+0.106	-0.179	+0.080	+0.035	+0.597	+0.025	+0.111	-0.219
5					+0.996	+0.533	+0.176	-0.080	-0.300	+0.099	-0.171	+0.151
6						+0.783	+0.239	+0.156	+0.296	-0.130	-0.025	-0.143
7							0.593	+0.091	+0.016	-0.071	+0.122	-0.006
8								+0.621	+0.068	-0.109	+0.154	-0.181
9									+0.830	-0.047	-0.032	+0.098
10										+0.707	+0.455	-0.073
11											+0.052	+0.687
12												+0.807

ние ассоциации $Sr-Ba-$ (еще в континентальных условиях) и, наконец, в условиях морской седиментации происходит распад и этой ассоциации и возникают новые, например $Sr-Mn$ [10].

Результаты подсчета r_{ij} и u между микроэлементами, аутигенно-минералогическими формами железа, органическим углеродом и битумоидом представлены в табл. 1.

Для наглядности нанесем на «корреляционное кольцо» [11] только те связи, которые соответствуют 5-процентному уровню значимости (см. рис.). Анализ рисунка позволяет выделить три группы ассоциации элементов:

V, Cu, Ni, Mn, Fe^{3+} , Fe^{2+}

Sr, Ba, Li.

Fe_s , $C_{орг}$



Схема выделения парагенетических ассоциаций химических элементов в аптских песчано-алевритовых глинах междуречья Урал — Волга.

Связь $B-Ni$ мы относим к межгрупповой. Истинные взаимоотношения элементов между собой внутри группы проконтролируем r_{ij} (табл. 2). Первое число в каждой строке табл. 2 является множественным коэффициентом корреляции, отражающим связь одного элемента со всей совокупностью.

Контроль r_{ij} по ρ_{ij} осуществляем по следующему принципу: если $\rho_{ij} \approx r_{ij}$ или $\rho_{ij} > r_{ij}$, то элементы действительно связаны между собой; если ρ_{ij} существенно меньше r_{ij} или равны нулю, то следует признать, что рассматриваемые элементы между собой не связаны и высокое значение r_{ij} ложно.

Тогда по $\rho_{ij}(k)$, где исключается последовательно влияние каждого элемента, можно выделить причину возникновения ложной корреляции.

Анализ материала показывает, что выделенная первая группа не претерпевает никаких изменений, вторая состоит из двух подгрупп — стронций-барий и стронций-барий-литий, в третьей группе исчезает связь битумоид-пиритное железо. Таким образом, хотя образование песчано-алевритовых глин апта, отложившихся в основном в западной части междуречья Урал—Волга [12], происходило в условиях начавшегося химического выветривания (отдельные ассоциации в первой группе: $V-Cu$, $V-Ni$; $Ni-Mn$), однако осадки несут на себе черты континентального характера (резко обособившаяся, но не распавшаяся ассоциация $Sr-Ba$).

Корреляция $Mn-Fe$ позволяет говорить о том, что марганец, очевидно, тоже присутствует в двухвалентной форме. В свою очередь гидраты окисей и закисей железа и марганца сорбируют на своей поверхности другие элементы ($V-Ni$), являясь для них элементами-хозяевами. Органическое вещество в данном случае не оказывает непосредственного влияния на распределение микроэлементов. Пиритное железо фиксирует благоприятную обстановку для битумообразования, в процессе которого часть никеля, очевидно, входит в состав металлоорганических соединений, связывая свою судьбу с битумной частью породы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Руководство по предварительной математической обработке геохимической информации при поисковых работах. М., «Недра», 1965.
2. Родионов Д. А. Функции распределения содержаний элементов и минералов в изверженных горных породах. М., «Наука», 1964.
3. Воробьев В. Я., Липская В. А. О типе закона распределения элементов в горных породах, почвах и растениях. Геология и геофизика, № 7, 1967.
4. Крамер Г. Математические методы статистики. М., ИЛ, 1948.
5. Вистелиус А. Б., Зульфугарлы Д. И. Естественные парагенезисы некоторых компонентов нефтей Азербайджана. Изв. АН СССР, № 2, 1952.
6. Ван дер Варден. Математическая статистика. М., ИЛ, 1960.

7. Андерсон Т. Введение в многомерный статистический анализ. М., Физматгиз, 1963.
8. Лисицын А. П. Процессы современного осадкообразования в Беринговом море. М., «Наука», 1966.
9. Страхов Н. М. Основы теории литогенеза. М., Изд-во АН СССР, 1962.
10. Бурков Ю. К. Линейные парагенезисы малых элементов в осадочных толщах как индикаторы условий седиментогенеза. К ин. Физические и химические процессы и фации. М., «Наука», 1968.
11. Терентьев П. В. Метод корреляционных плянд. Вестник ЛГУ, № 9, 1959.
12. Казаков М. П., Чарыгин М. М. и др. Тектоническое строение и история развития Прикаспийской впадины и смежных областей в связи с вопросами нефтегазоносности. М., Гостоптехиздат, 1958.

О. К. НАВРОЦКИЙ, Е. В. СОЛОДКОВА

**ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ
 t_i - КРИТЕРИЯ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
ХИМИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ
В ЮРСКИХ И НИЖНЕМЕЛОВЫХ ОТЛОЖЕНИЯХ
ЗАПАДНОЙ ЧАСТИ ПРИКАСПИЙСКОЙ ВПАДИНЫ**

Химические элементы, обладающие различными свойствами и минералогическими характеристиками, по-разному реагируют на физико-химические условия накопления их в осадке, что обуславливает их разнообразные формы миграции и распределение в породах.

По миграционной способности химических элементов, которая оценивается распределением средних содержаний на идеальном литологическом профиле, восстанавливаются палеогеографические условия осадконакопления [1]. Изменение во времени физико-географических условий (размеров бассейна, состава размываемых пород в областях денудации, тектонической активности исследуемой территории, климата) обуславливает различное накопление химических элементов в однотипных породах разного возраста. Сравнение средних содержаний элементов в разновозрастных петрографических профилях пород позволит выявить особенности накопления элементов во времени.

Обычное, визуальное, сравнение средних содержаний может привести к ошибкам, так как при незначительной разнице между ними расхождение может быть существенным и, наоборот, при значительной — несущественным.

Чтобы избежать подобных ошибок, рекомендуется применять ряд статистических критериев: критерий Стьюдента —

при нормальном распределении случайных величин в сравниваемых выборках [2], критерий Д. А. Родионова — в условиях логарифмически-нормального распределения [3] и критерий F , применяемый даже тогда, когда не известен закон распределения [2].

В данной работе рассматривается критерий, аналогичный критерию Стьюдента, который приводит к однозначным результатам при сравнении целого ряда оценок средних содержаний. Он заключается в нахождении величины

$$t_i = \frac{y_i \sqrt{(N-2) n_i}}{\sqrt{N-n_i-n_i y_i^2}},$$

где

$$y_i = \frac{\bar{x}_i - \bar{x}}{s};$$

$$\bar{x}_i = \sum x_i / n_i;$$

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i x_i;$$

$$N = \sum_{i=1}^k n_i;$$

$$s^2 = \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^k (n_i - 1) s_i^2;$$

k — число рассматриваемых одновременно совокупностей; \bar{x}_i — средние арифметические в сравниваемых группах; n_i — число наблюдений в i -ой группе; s_i^2 — оценка дисперсии в i -ой группе.

Если для k -совокупностей, в которых проведено по n_i наблюдений одного и того же признака и подсчитаны средние арифметические, хотя бы одно из вычисленных значений t_i превысит табличное при заданном уровне значимости при $N-2$ степеней свободы, то нулевая гипотеза ($H_0: \bar{X}_1 = \bar{X}_2 = \bar{X}_3 \dots = \bar{X}_k$) отвергается и, следовательно, в истории накопления того или иного элемента произошли существенные изменения, которые и создали некоторые аномалии в распределении средних содержаний элементов в изучаемых совокупностях.

Если для всех совокупностей i -го элемента сохраняется неравенство $t_i < t_{\alpha, N-2}$, то гипотеза о равенстве средних принимается, т. е. никаких существенных изменений в накопле-

нии того или иного элемента в рассматриваемые периоды не произошло.

Для выявления различий в средних содержаниях ряда k -совокупностей объектов составлена программа в кодах ЭВМ БЭСМ-4, обрабатывающая числовой материал длиной не более 3200 результатов наблюдений в каждом из исследуемых объектов.

Подготовка материала для машины заключается в последовательной записи анализов для каждого признака. При отсутствии данных записывается — 1. В общем виде заданный материал выглядит так:

I объект	II объект	k -объект
$X_{11}' X_{12}' \dots X_{1m}'$	$X_{11}'' X_{12}'' \dots X_{1m}''$	$X_{11}^k X_{12}^k \dots X_{1m}^k$
$X_{21}' X_{22}' \dots X_{2m}'$	$X_{21}'' X_{22}'' \dots X_{2m}''$	$X_{21}^k X_{22}^k \dots X_{2m}^k$
.....
$X_{n1}' X_{n2}' \dots X_{nm}'$	$X_{n1}'' X_{n2}'' \dots X_{nm}''$	$X_{n1}^k X_{n2}^k \dots X_{nm}^k$

где m — число исследуемых признаков.

В конце каждого массива ставится карточка информации вида:

0	00	0500	0	0	КА
0	00	0	n_i	0	
0	00	0	m	0	

Число анализов (n_i) и признаков (m) в каждом из массивов пробивается в восьмеричном виде. Число исследуемых объектов (k) заносится с пульта в восьмеричном виде в 0502 ячейку после ввода первого объекта.

Основным блоком программы, к которому происходит обращение $k-1$ раз при обработке одного признака, является формула (1). Перед каждым новым обращением выбрасывается объект, для которого выполняется условие $|\bar{X}_i - \bar{X}| = \max$. Это рекомендуется при выявлении однородных совокупностей: подсчет значений t_i -критерия производится до тех пор, пока для всех из оставшихся объектов не будет выполнено неравенство $t_i \leq t_{q, N-2}$ [4].

Результаты вычисления значений t_i -критерия в нормализованном виде выдаются на АЦПУ-128 в виде матрицы из $k-1$ строк и $k+1$ столбцов. Объекты, для которых выполняется условие $X_i - X = \max$, отмечаются в столбцах нулями (табл. 1).

Таблица 1

Схема подсчета t_i —критерия в песчаниках юры и нижнего мела междуречья Урал-Волга

Число степеней свободы	Стратиграфические подразделения (совокупности)					
	байос песчаный	байос глинистый	волжский ярус	неоком	апт	альб
$.2800 \cdot 10^{+03}$.4014	.6385	$.6884 \cdot 10^{+01}$	$.3283 \cdot 10^{+01}$	$.4825 \cdot 10^{+01}$	$.1877 \cdot 10^{+01}$
$.2640 \cdot 10^{+03}$.9183	.9520	$.6961 \cdot 10^{+01}$	0	$.5740 \cdot 10^{+01}$.5823
$.2170 \cdot 10^{+03}$	$.2613 \cdot 10^{+01}$	$.1852 \cdot 10^{+01}$	$.5547 \cdot 10^{+01}$	0	0	$.1863 \cdot 10^{+01}$
$.1350 \cdot 10^{+03}$.1006	.4114	0	0	0	.2245
$.1110 \cdot 10^{+03}$.9114	0	0	0	0	.9114

Распределение $t_1 > t_{5\%}$, $N=2$ в терригенных отложениях юры и нижнего мела междуречья Урал-Волга

Тип породо-	Стратиграфические подразделения	Химические элементы													Σ $t_1 > t_{5\%}$	
		V	Cu	Ni	Mn	Fe	Sr	Ba	Li	Fe ⁺⁺	Fe ³⁺	Fe _s	Co _{ppr}			
Песчанники	байос песчаный		+	+					+				+			4
	байос глинистый					+		+						+		1
	волжский ярус			+				+						+		7
	неоком	+												+		2
	апт	+												+		2
альб	+												+		2	
Алевролиты	байос песчаный	+		+	+											3
	байос глинистый	+		+	+									+		5
	бат		+	+												4
	келловей +															
	оксфорд +															
	киммеридж					+										2
	волжский ярус	+		+										+		7
	неоком	+		+												2
апт	+				+										6	
альб	+		+												4	
Глины	нижняя юра?	+		+												5
	байос песчаный	+		+	+									+		5
	байос глинистый	+		+	+									+		7
	бат		+											+		7
	келловей +													+		4
	оксфорд +													+		8
	киммеридж													+		
	волжский ярус	+			+									+		11
неоком	+												+		2	
апт	+			+									+		3	
альб	+		+	+									+		4	

Для определения изменения геохимических условий в истории осадконакопления на территории междуречья Урал — Волга рассмотрено распределение микроэлементов (*V, Cu, Ni, Mn, Fe, Sr, Ba, Li*), аутигенно-минералогических форм железа и органического вещества в разрезе юрских и нижнемеловых отложений. В терригенном юрско-нижнемеловом комплексе пород выделен петрографический профиль из песчаников, алевролитов и глин. Статистическая обработка (подсчет t_i) проведена по типам пород для тех стратиграфических подразделений, которые достаточно насыщены керном (в таблице 2 квадраты с плюсом соответствуют $t_i > t_{5\%, N-2}$).

Картина распределения квадратов с плюсом, свидетельствующих о существенных изменениях в накоплении i -ого элемента на том или ином отрезке времени, довольно пестра. Эти изменения требуют в каждом конкретном случае своих объяснений, что выходит за рамки данной статьи. Однако простой подсчет элементов по стратиграфическим подразделениям, для которых $t_i > t_{5\%, N-2}$, показывает, что в истории осадконакопления почти всех изучаемых элементов по всем типам пород намечается резкая граница, падающая на отложения волжского яруса, где число элементов с $t_i > t_{5\%, N-2}$ максимально.

Характерной особенностью этой геохимической границы является резкое обеднение почти всеми исследуемыми элементами всех типов пород волжского яруса (см. рис.). Это вызвано, очевидно, тем, что именно в волжское время на территории Прикаспийской впадины происходит самая крупная регрессия юрского периода, сопровождающаяся обмелением и сокращением бассейна седиментации, перемывом ранее отложившихся осадков, уменьшением интенсивности химического выветривания в областях денудации и возрастанием роли механической дифференциации вещества [5, 6, 7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Страхов Н. М. Основы теории литогенеза. М., Изд-во АН СССР, 1962.
2. Ван дер Варден. Математическая статистика. М., ИЛ, 1960.
3. Родионов Д. А. Функции распределения содержания элементов и минералов в изверженных горных породах. М., «Наука», 1964.
4. Шарипов И. П. Применение математической статистики в геологии. М., «Недра», 1965.
5. Сазонова И. Г., Сазонов Н. Т. Палеогеография Русской платформы в юрское и раннемеловое время. Л., «Недра», 1967.
6. Казаков М. П. и др. Тектоническое строение и история развития Прикаспийской впадины и смежных областей в связи с вопросами нефтегазоносности. М., Гостоптехиздат, 1958.
7. История геологического развития Русской платформы и ее обрамления. М., «Недра», 1964.

Е. А. КАРЕВ

ПРИМЕНЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В МЕТОДЕ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

При использовании метода наименьших квадратов для определения приближенной функциональной зависимости функции $z=f(x, y)$ по значениям, известным в конечном числе точек $\{x_i, y_i, z_i\}$, функция z обычно представляется алгебраическим полиномом:

$$z = \sum_{i,j=0}^k a_{ij} x^i y^j. \quad (1)$$

В этом случае для определения коэффициентов a_{ij} надо решать линейную систему уравнений.

Можно расширить класс аппроксимирующих функций $z=f(x, y)$ до класса алгебраических функций, оставляя систему уравнений относительно неизвестных параметров линейной.

Функция $z=f(x, y)$ есть алгебраическая функция от x и y , если x, y, z удовлетворяют соотношению вида $F(x, y, z)=0$, где $F(x, y, z)$ — многочлен относительно x, y, z :

$$F(x, y, z) = \sum_{i,j,l=0}^k a_{ijl} x^i y^j z^l = 0, \quad (2)$$

т. е. искомую функцию z удобно искать в неявном виде. Для n -мерного пространства можно записать

$$\varphi = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n=0} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_n} x_1^{i_1} \cdot x_2^{i_2} \cdot \dots \cdot x_n^{i_n} = 0, \quad (3)$$

где $x_n = z$.

Задание функции x_n в виде (3) позволяет, кроме расширения класса исследуемых функций до алгебраических функций, сохранить равнопредставительность и функции x_n и аргументов x_i ($i=1, 2, \dots, n-1$).

Степень полинома зависит от сложности функции $z=z(x_1 \dots x_{n-1})$ и обычно с повышением этой степени точность аппроксимации повышается.

Однако, не исключено обратное явление [1], заключающееся в том, что для некоторых частных случаев линейная интерполяция дает лучший результат, чем аппроксимирующий полином более высокой степени.

При расположении функции в ряд полагаем, что свободный член полинома (3) не равен нулю. Это позволяет вычислить коэффициенты полинома $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_n}$ с точностью до произвольного множителя.

Такое предположение означает, что искомая гиперповерхность не проходит через начало координат.

Для определения коэффициентов $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_n}$ получаем систему уравнений:

$$\varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i_1 i_2 \dots i_n=0} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_n} x_{1j}^{i_1} \cdot x_{2j}^{i_2} \cdot \dots \cdot x_{nj}^{i_n}, \quad (4)$$

$$(j = 1, 2, \dots, m)$$

которая решается методом наименьших квадратов.

В системе (4) m — количество точек, которые выбираются для определения функциональной зависимости.

Подстановка найденных значений $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_n}$ в (3) сводит задачу определения функциональной зависимости к численным методам определения корней полинома.

Уравнение (3) является алгебраическим уравнением, где $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_n}$ — действительные числа.

Из основной теоремы алгебры следует, что алгебраическое уравнение степени n имеет ровно n корней. Выбор нужного корня определяется, исходя из физического смысла задачи.

Поясним изложенное примерами:

Пример 1.

Для построения структурных карт удобно использовать метод дифференциальной геометрии изучения поверхностей, рассматривающий поверхность в достаточно малой окрестности некоторой точки M .

Достаточно малая окрестность точки аппроксимируется произвольно ориентированной поверхностью второго порядка.

При перемещении точки M искомая поверхность локально аппроксимируется кусками поверхностей второго порядка. Следует заметить, что целесообразность использования в геологии произвольных поверхностей второго порядка в качестве аппроксимирующих отмечал Р. И. Фан-Юнг.

Общее уравнение второго порядка имеет вид:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{34}x_3 + a_{44} = 0, \quad (5)$$

где введены обозначения

$$x = x_1; \quad y = x_2; \quad z = x_3,$$

причем функция x_3 задана неявно.

Полагая, что начало системы координат не лежит на искомой поверхности, заданной совокупностью точек $\{x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}\}$ ($i=1, 2 \dots n$), а этого всегда можно добиться переносом системы координат, считаем, что коэффициент $a_{44}=1$.

Для определения девяти оставшихся коэффициентов уравнения (5) составляем неоднородную систему m уравнений:

$$\sum_{k,i=1}^4 a_{ki}x_{ij}x_{kj} = 1, \quad (6)$$

$$(j = 1, 2, \dots, m),$$

в которой число уравнений m должно быть не менее числа неизвестных, т. е. $m \geq 9$.

При $m=9$ систему (6) можно решать, минуя метод наименьших квадратов.

Метод наименьших квадратов сводит переопределенную систему (6) в систему m уравнений с m неизвестными, т. е. получаем систему:

$$A^*A\alpha = A^*e, \quad (7)$$

где A — матрица системы (6);

A^* — транспонированная матрица A ;

$\alpha = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{44} \end{pmatrix}$ — неизвестные a_{ki} можно рассматривать как координаты неизвестного вектора;

$e = m$ — мерный вектор, все компоненты которого равны единице.

Если определитель системы (6) для случая $m=9$ или (7) для случая $m > 9$ не равен нулю, то систему можно решать любым из известных методов.

Равенство нулю определителя означает линейную зависимость координат выбранных точек, что соответствует случаям расположения точек либо на одной прямой, либо в одной плоскости.

Таким образом, необходимо проводить анализы на взаимное расположение выбранных точек:

1) анализ на принадлежность точек одной прямой. Через любые две выбранные точки P_1, P_2 проводится прямая, нормальное уравнение прямой запишется в виде [2]

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0. \quad (8)$$

Расстояние от оставшихся точек $P_j(x_j, y_j)$ до прямой определяется соотношением:

$$d_j = x_j \cos \alpha + y_j \sin \alpha - p. \quad (9)$$

Если все $|d_j| \leq \epsilon$, где ϵ — величина, зависящая от точности задания координат выбранных точек, то все точки лежат на одной прямой, в этом случае следует или увеличивать количество точек, или менять их;

2) если хоть одно значение $|d_j| > \epsilon$, то следует вести анализ на принадлежность точек одной плоскости. Через прежние точки P_1, P_2 и точку, не лежащую на прямой, проводится плоскость, нормальное уравнение которой имеет вид:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0. \quad (10)$$

Расстояние от оставшихся точек до плоскости определяется соотношением

$$d_j = x_j \cos \alpha + y_j \cos \beta + z_j \cos \gamma - p. \quad (11)$$

Если все $|d_j| \leq \epsilon$, то все точки лежат в одной плоскости, в этом случае следует или увеличивать количество точек, или менять их. Если точки не лежат в одной плоскости, то решается система (6) или (7) в зависимости от m .

Решая систему уравнений, находим значения коэффициентов с точностью до постоянного множителя в силу определения a_{44} .

Подставив коэффициенты a в уравнение (5), получаем алгебраический многочлен, в котором сохраняется равнопредставительность и функции z и аргументов x и y .

В уравнение (5) функция z входит во второй степени, поэтому при решении этого уравнения получаем два корня, но для построения структурной карты нужен один корень.

При выборе нужного корня следует руководствоваться правилами, вытекающими из физического смысла задачи.

Из основной теоремы алгебры следует, что при решении уравнения (5) могут получиться либо 2 комплексных корня, либо 2 действительных:

а) если получено два комплексных корня, значит точка, в которой ищется значение функции, лежит вне проекции на плоскость XOY , например вне эллипсоида;

б) если получено два действительных корня, то выбирается тот, разность которого с ближайшим z_j минимальна.

Пример 2.

Для снятия регионального наклона пластов удобно использовать наилучшую в среднем плоскость. Общее уравнение плоскости имеет вид:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (12)$$

где функция Z задана опять же в неявном виде. Относительно свободного члена D делаем те же самые предположения, что и в примере 1, т. е. полагаем $D=1$.

Для определения оставшихся коэффициентов плоскости составляем систему m уравнений:

$$\varphi_j = \sum_{i=1}^3 a_{ij} x_{ij} = 1 \quad (j=1, 2, \dots, m), \quad (13)$$

где m — общее количество точек, через которые проводится плоскость.

Метод наименьших квадратов сводит систему (13) к системе нормальных уравнений (7).

Разрешая систему (7) методом ортогонализации [3], который применяется при решении систем невысокого порядка, определяем коэффициенты плоскости, разрешая уравнение (12) относительно z , получаем

$$z = ax + by + c. \quad (14)$$

Теперь наблюдаемые значения z_i ($i=1, 2, \dots, n$) можно представить в виде суммы двух составляющих — региональной и локальной.

Региональная составляющая $z(x_i)$ вычисляется по формуле (14). Зная наблюдаемые значения z и региональные составляющие $z(x_i)$, можно найти локальные составляющие z_i^* по формуле

$$z_i^* = z_i - z(x_i). \quad (15)$$

Региональный наклон плоскости характеризуется двумя углами α и β (см. рис.).

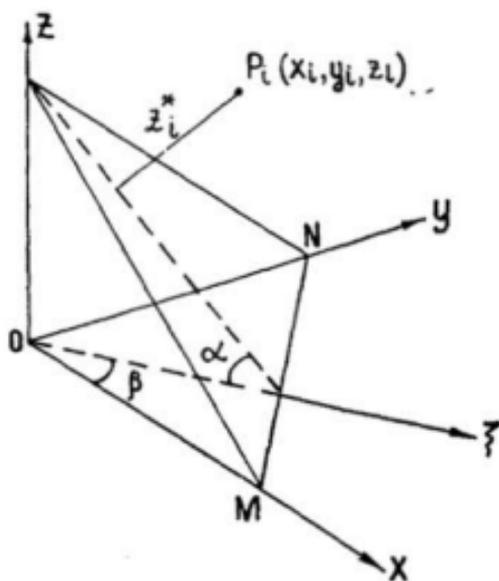
1. Двугранный угол α образуется наилучшей в среднем плоскостью и координатной плоскостью $Z=0$.

Угол α определяется формулой

$$\operatorname{tg} \alpha = a \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}. \quad (16)$$

2. Угол β образуется осью OX и направлением $O\xi$, перпендикулярным линии MN . Линия MN образуется пересечением наилучшей в среднем плоскости и плоскостью $Z=0$.

За положительное направление $O\xi$ принимается положительное значение проекции $O\xi$ на ось OX .



Региональная плоскость и ее определяющие углы

Для этого угла справедливо соотношение

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}. \quad (17)$$

Таким образом, использование метода наименьших квадратов для установления функциональной зависимости функции x_n , заданной в неявном виде (2), расширяет класс функций до класса алгебраических функций и сохраняет равнопредставительность функции x_n и аргументов x_i ($i=1, 2, \dots, n=1$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бут Э. Д. Численные методы. М., Физматгиз, 1959.
2. Привалов И. И. Аналитическая геометрия. М., Физматгиз, 1959.
3. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. М., Физматгиз, 1959.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Гурьянов В. М.</i> Разложение сейсмического волнового поля по бегущим волнам	3
<i>Коробов Б. В.</i> Алгоритм построения глубинного разреза по поверхностным годографам	19
<i>Гурьянов В. М., Коробов Б. В.</i> Точное решение некоторых пространственных задач геометрической сейсмологии	39
<i>Гурьянов В. М., Карева О. В.</i> Трансформация линейных годографов отраженных сейсмических волн	53
<i>Гурьянов В. М., Карева О. В.</i> Годографы некоторых модификаций МОВ с единой точки зрения	68
<i>Гурьянов В. М., Захарова Е. А., Коробов Б. В., Саянский А. С.</i> Опыт использования лучевого метода интерпретации линейных годографов сейсмических волн	81
<i>Сальников А. Н., Шерман Г. Х.</i> Расчет поля горизонтального магнитного диполя в трехслойной проводящей среде с плоскопараллельными границами	107
<i>Тимофеев Г. И., Навроцкий О. К.</i> О цикличности накопления органического вещества в юрских и меловых отложениях северо-западного Прикаспия	120
<i>Навроцкий О. К., Солодкова Е. В., Тимофеев Г. И.</i> Опыт использования ЭВМ в практике геохимических исследований	128
<i>Навроцкий О. К., Солодкова Е. В.</i> Об использовании χ^2 -критерия для изучения распределения химических элементов в юрских и нижнемеловых отложениях западной части Прикаспийской впадины	139
<i>Карев Е. А.</i> Применение алгебраических функций в методе наименьших квадратов	146

ПРИМЕНЕНИЕ ЦВМ И СРЕДСТВ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ В ГЕОЛОГИИ И ГЕОФИЗИКЕ

Ответственный за выпуск
Ю. В. Балаев

Редактор *С. Ф. Солдатова*
Технический редактор *Л. В. Агальцова*
Корректор *О. Е. Найденова*

НГ05106. Сдано в набор 13.XII-1972 г. Подписано к печати 22.IV.1974 г.
Формат 60×84^{1/16}. Усл. печ. л. 8,83 (9,5). Уч.-изд. л. 8,7.
Заказ 1928. Тираж 600 экз. Цена 87 коп.

Издательство Саратовского университета, Университетская, 42.
Типография издательства «Коммунист», проспект Ленина, 94.

87 коп.

