

А.А. КАУФМАН

ТЕОРИЯ
ИНДУКЦИОННОГО
КАРОТАЖА

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

— ● —
ИНСТИТУТ ГЕОЛОГИИ И ГЕОФИЗИКИ

А. А. КАУФМАН

ТЕОРИЯ
ИНДУКЦИОННОГО
КАРОТАЖА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
НОВОСИБИРСК

1 9 6 5

Ответственный редактор
член-корреспондент АН СССР
Э. Э. Фотиади

В В Е Д Е Н И Е

Одним из важнейших способов изучения геологического разреза, пройденного скважиной, является электрический каротаж по методу сопротивлений. Индукционный каротаж, разработке которого в последнее время уделяется много внимания, так же как каротаж сопротивлений, основан на возможности различать пласты по их удельной электропроводности.

В принципе индукционный каротажный зонд состоит из двух катушек: задающей (генераторной) и приемной. Задающая катушка питается переменным током повышенной частоты, а на выходе приемной катушки измеряется э.д.с. Оси катушек будем считать совпадающими с осью скважины, которую для простоты изложения будем полагать вертикальной. Расстояние между центрами катушек будем называть длиной зонда.

Измеряемая э. д. с. зависит от тока в задающей катушке, а также от токов, возникающих в окружающей среде. Распределение этих токов зависит от удельной электропроводности среды. Поэтому по измеряемой э. д. с. можно судить об удельной проводимости пластов, против которых проходит зонд.

Ограничимся рассмотрением случая, когда ось скважины нормальна к плоскости напластования. Поэтому будем считать токовые линии в среде, так же как и витки питающей катушки, окружностями с общей осью по оси скважины. Магнитные силовые линии лежат в плоскостях, проходящих через ось скважины.

Благодаря индуктивной связи задающей и приемной частей зонда с окружающей средой индукционный каротаж в отличие от каротажа сопротивлений осуществляется без всяких затруднений в скважинах, заполненных непроводящей жидкостью. Токовые линии лежат в плоскостях, параллельных поверхностям раздела между пластами, поэтому индукционный каротаж чувствителен к тонким пластам с повышенной удельной электропроводностью и почти не отмечает тонкие пласты повышенного удельного сопротивления.

При каротаже сопротивлений большое значение имеет выбор длины зонда. Многократный каротаж зондами различной длины (боковое каротажное зондирование) позволяет проводить более полные и эффективные исследования. При индукционном каротаже имеются дополнительные возможности повышения эффективности и полноты исследований. Во-первых, переменное поле характеризуется двумя компонентами (активной и реактивной), различно отражающими влияние среды, и сильно зависит от частоты, которую можно подбирать в соответствии с геологическими условиями. Во-вторых, с применением многокатушечных зондов значительно возрастает разрешающая способность метода.

Возможно многократное исследование скважины на разных частотах, аналогичное многократному каротажу сопротивлений с зондами различной длины (БКЗ).

Практическое осуществление индукционного каротажа сопряжено со значительными трудностями. Разработка метода индукционного каротажа идет двумя путями:

1) разработка теории, позволяющей установить взаимное соответствие между результатами индукционного каротажа и средой, окружающей скважину;

2) разработка аппаратуры индукционного каротажа и методика получения полевых каротажных кривых.

Эти два направления тесно связаны. Настоящая работа посвящена первому из указанных направлений, т. е. разработке теоретических основ метода.

Впервые приближенная теория индукционного каротажа была предложена Г. Г. Доллем [21]. Для упрощения задачи, кроме замены катушек диполями, им были приняты следующие допущения:

а) все индуцированные в проводящей среде круговые токи имеют одну и ту же фазу, сдвинутую относительно фазы тока в задающей катушке на 90° ;

б) амплитуда плотности тока в любой точке рассчитывается по упрощенной формуле и определяется только геометрическим фактором и удельной проводимостью среды в данной точке.

Эти допущения, существенно искажающие распределение переменного тока в проводящей среде, позволили Доллю создать наглядную и простую теорию индукционного каротажа. Центральное место в теории занимают геометрические факторы элементарных колец с осью на оси скважины, единичных пластов и тонких цилиндрических слоев. Опираясь этими понятиями, автор определяет долю сигнала на выходе измерительной катушки зонда, вносимого различными участками среды, радиальную и вертикальную характеристики двухкатушечного зонда и т. д. Вместе с тем в опубликованных работах Долля и других американских ученых систематически не изложена теория двухкатушечного зонда в средах с цилиндрическими и горизонтальными поверхностями раздела.

При анализе характеристик двухкатушечного зонда Доллем было установлено, что на результаты измерений может оказать сильное влияние буровой раствор и вмещающие породы. Один из способов улучшения характеристик двухкатушечного зонда, предложенный Доллем,— фокусировка поля с помощью дополнительных катушек.

Долль не указывает пределы применимости своей теории. После опубликования его книги [21] в американской печати появились работы по теории индукционного каротажа с учетом скин-эффекта. Дестергофом для отдельных случаев выполнены расчеты в средах с цилиндрическими и горизонтальными поверхностями раздела. Основное внимание им уделено влиянию скин-эффекта на величину геометрического фактора, особенно в средах с горизонтальными границами [22, 23, 24].

Некоторые вопросы теории двухкатушечного зонда изложены в работе Морана и Кунца [25]. В 1953 г. в Геофизическом институте АН СССР В. Н. Никитиной получено выражение для поля магнитного диполя на оси скважины [10]. В Волго-Уральском филиале ВНИИгеофизики были выполнены расчеты магнитного поля на оси скважины для относительно коротких двухкатушечных зондов ($L \leq 5a_c$) [6]. Значительный интерес представляют теоретические исследования Ю. Н. Кудрявцева, и в частности о влиянии конечных размеров датчиков зонда [9].

Предлагаемая вниманию читателей работа служит продолжением ранее начатых исследований в области теории индукционного каротажа. Книга состоит из пяти глав.

В первой главе исследовано решение задачи о поле магнитного диполя в однородной среде, что дало возможность глубже понять физические основы индукционного каротажа и обосновать необходимость применения более строгих методов решения прямых задач, чем метод, предложенный Г. И. Доллем.

Во второй главе изложены строгие и приближенные методы расчета электромагнитного поля вертикального магнитного диполя, использованные при разработке теории индукционного каротажа.

В третьей главе дана теория индукционного каротажа в средах с цилиндрическими границами (скважина, промежуточная зона, пласт и отдельные случаи более сложного распределения удельного сопротивления в промежуточной среде).

В этой главе также рассмотрено влияние магнитной проницаемости на многокатушечные зонды, развит математический аппарат и приведены необходимые данные для расчета микроиндукционных установок, включающих влияние скважины, описан частотный метод повышения глубинности исследования.

Теория индукционного каротажа с двухкатушечным зондом в средах с горизонтальными поверхностями раздела изложена в четвертой главе. Здесь также приведены результаты расчета магнитного поля на оси скважины в пластах конечной мощности.

Пятая глава посвящена теории многокатушечных зондов. Вначале описаны методы анализа основных свойств зондов, затем даются основы теории известных в настоящее время зондов. В заключение пятой главы настоящей книги изложены способы расчета многокатушечных фокусирующих систем.

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Изучение влияния электропроводности среды на результаты индукционного каротажа целесообразно начать с наиболее простого случая, когда электропроводность среды всюду одинакова. В первую очередь уместно рассмотреть закономерности поля магнитного диполя в однородной проводящей среде [13]. Это позволит перейти к разработке приближенных методов расчета поля в неоднородных средах и глубже понять физическую сущность индукционного каротажа.

При достаточно малых размерах задающей катушки по сравнению с длиной зонда, диаметром скважины и расстоянием до границ пласта (вблизи которых находится зонд) можно для упрощения расчетов заменить эту катушку магнитным диполем с переменным магнитным моментом

$$M = M_0 e^{-i\omega t}, \quad (1.1)$$

где $M_0 = snI$ — амплитуда момента;

$I = I_0 e^{-i\omega t}$ — сила тока;

$\omega = 2\pi f$ — круговая частота;

f — циклическая частота;

n — число витков;

s — площадь одного витка.

Квазистационарное электромагнитное поле описывается уравнениями

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \gamma \bar{E}; \quad (1.2)$$

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -\mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}; \quad (1.3)$$

$$\operatorname{div} \bar{H} = 0; \quad (1.4)$$

$$\operatorname{div} \bar{E} = 0. \quad (1.5)$$

Согласно (1.2) и (1.5), имеем

$$\bar{E} = \operatorname{rot} \bar{A}; \quad (1.6)$$

$$\bar{H} = \gamma \bar{A} - \operatorname{grad} u, \quad (1.7)$$

где \bar{A} и u — векторный и скалярный потенциалы электромагнитного поля.

Подставляя в уравнение (1.3) вместо E и H их выражения через \bar{A} и u , получаем

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{A} = -\gamma \mu \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + \mu \operatorname{grad} \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Полагая в соответствии с (1.1) $H = H_0 e^{-i\omega t}$, $E = E_0 e^{-i\omega t}$ и воспользовавшись известным из векторного анализа тождеством

$$\text{rot rot } \bar{A} = \text{grad div } \bar{A} - \nabla^2 \bar{A},$$

имеем

$$\text{grad div } \bar{A} - \nabla^2 \bar{A} = i\gamma\mu\omega \bar{A} - i\omega\mu \text{ grad } u. \quad (1.8)$$

Принимая нормирование

$$\text{div } \bar{A} = -i\omega\mu u, \quad (1.9)$$

получаем из (1.8) уравнение для \bar{A}

$$\nabla^2 \bar{A} + k^2 \bar{A} = 0, \quad (1.10)$$

где $k^2 = i\gamma\mu\omega$.

Возьмем сферическую систему координат R, φ, θ и цилиндрическую систему r, φ, z с общим началом в центре диполя и с осью z ($\sin \theta = 0$), совпадающей по направлению с моментом диполя.

В нашем случае $A_r = A_\varphi = 0$. Решая уравнение (1.10) для A_z , получаем

$$A_z = c \frac{e^{ikR}}{R}, \quad (1.11)$$

где

$$k = \sqrt{\frac{\gamma\mu\omega}{2}} \cdot (1+i) = \frac{1+i}{\delta}.$$

Здесь δ — толщина скин-слоя:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\gamma\mu\omega}};$$

R — расстояние от диполя до точки наблюдения. Согласно (1.11), имеем

$$\text{div } A = \frac{\partial A_z}{\partial z} = c \frac{e^{ikR}}{R^2} (ikR - 1) \cos \theta,$$

так как

$$\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} = \frac{\partial A_z}{\partial \theta} = 0,$$

и, следовательно, согласно (1.9),

$$i\omega\mu u = c \frac{e^{ikR}}{R^2} (1 - ikR) \cos \theta.$$

Таким образом,

$$u = \frac{ce^{ikR}}{i\omega\mu R^2} (-ikR) \cos \theta. \quad (1.12)$$

Как известно, магнитный диполь с постоянным моментом создает поле с потенциалом:

$$u_0 = \frac{M}{4\pi R^2} \cos \theta. \quad (1.13)$$

Для того чтобы при $\omega \rightarrow 0$ $u \rightarrow u_0$, положим

$$c = \frac{i\omega\mu M}{4\pi}.$$

Подставляя это выражение для c в формулы (1.11) и (1.12), получаем:

$$A_z = \frac{i\omega\mu M}{4\pi R} e^{ikR}; \quad (1.14)$$

$$u = \frac{M}{4\pi R^2} e^{ikR} (1 - ikR) \cos \theta. \quad (1.15)$$

Полученные выражения для потенциалов A и u позволяют определить напряженности электрического и магнитного полей по формулам (1.6) и (1.7). Вектор напряженности электрического поля лежит в плоскости, перпендикулярной оси диполя, и имеет только компоненту E_φ . Согласно (1.6),

$$E_\varphi = \text{rot}_\varphi A = \frac{1}{R} \left\{ \frac{\partial}{\partial R} (R A_\theta) - \frac{\partial A_R}{\partial \theta} \right\}. \quad (1.16)$$

Очевидно, что

$$A_R = A_z \cos \theta; \quad A_\theta = -A_z \sin \theta.$$

Подставив эти выражения в (1.16), после несложных преобразований получаем

$$E_\varphi = \frac{i\omega\mu M}{4\pi R^2} e^{ikR} (1 - ikR) \sin \theta. \quad (1.17)$$

Вектор напряженности магнитного поля имеет две компоненты:

$$H_\theta = \gamma A_\theta - \text{grad}_\theta u;$$

$$H_R = \gamma A_R - \text{grad}_R u.$$

Согласно (1.12),

$$\text{grad}_R u = \frac{M}{4\pi} \cos \theta e^{ikR} \left(\frac{2ik}{R^2} - \frac{2}{R^3} + \frac{k^2}{R} \right);$$

$$\text{grad}_\theta u = -\frac{M}{4\pi R^3} e^{ikR} (1 - ikR) \sin \theta.$$

Следовательно,

$$H_\theta = \frac{M}{4\pi R} e^{ikR} \sin \theta \left(-k^2 + \frac{1}{R^2} - \frac{ik}{R} \right);$$

$$H_R = \frac{2M}{4\pi R^3} e^{ikR} (1 - ikR) \cos \theta.$$

Таким образом, получаем для компонент электрического и магнитного полей диполя выражения:

$$E_\varphi = \frac{i\omega\mu M}{4\pi} \frac{e^{ikR}}{R^2} (1 - ikR) \sin \theta; \quad (1.18)$$

$$H_R = \frac{2M}{4\pi R^3} e^{ikR} (1 - ikR) \cos \theta; \quad (1.19)$$

$$H_\theta = \frac{M}{4\pi R^3} e^{ikR} (1 - ikR - k^2 R^2) \sin \theta. \quad (1.20)$$

Измеряемая на выходе приемной катушки э. д. с. $\varepsilon = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$. Согласно (1.19), имеем

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{пр}} e^{ikL} (1 - ikL), \quad (1.21)$$

где $\varepsilon_{\text{пр}}$ — первичная э. д. с., которая наводится в измерительной катушке полем задающего диполя в случае неограниченной непроводящей среды

с магнитной проницаемостью μ :

$$\varepsilon_{\text{пр}} = \frac{i\omega\mu M}{2\pi L^3}.$$

Здесь L — длина зонда.

Взяв в качестве непроводящей среды воздух, мы должны положить

$$\mu = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{2\kappa}{\text{м}}.$$

Подставив в (1.21) вместо волнового числа k его выражение, можно после некоторых преобразований представить э. д. с. ε в виде суммы двух компонент: активной, сдвинутой по фазе на 90° относительно э. д. с. прямого поля, и реактивной, находящейся в противофазе или фазе с $\varepsilon_{\text{пр}}$:

$$\varepsilon_{\text{акт}} = i\varepsilon_{\text{пр}} e^{-P} [(1+p) \sin p - p \cos p]; \quad (1.22)$$

$$\varepsilon_{\text{реакт}} = \varepsilon_{\text{пр}} e^{-P} [(1+p) \cos p + p \sin p], \quad (1.23)$$

где $p = \sqrt{\frac{\gamma\mu\omega}{2}} L = \frac{L}{\delta}$ — параметр, определяющий с точностью до момента M поле в точке, расположенной на оси диполя и отстоящей от него на расстоянии L . Подставляя значение магнитной проницаемости в воздухе, имеем

$$p = \frac{2\pi L}{10 \sqrt[3]{\frac{10\rho}{f}}}.$$

Здесь ρ — в омметрах, L — в метрах, f — в герцах.

Активная компонента обязана своим возникновением токам, индуцированным в среде, фаза которых сдвинута относительно тока в генераторной катушке на 90° , а реактивная компонента представляет собой алгебраическую сумму э. д. с. первичного и вторичного полей. Реактивная компонента э. д. с. вторичного поля обязана своим возникновением токам, индуцированным в среде, фаза которых совпадает или сдвинута на 180° относительно тока в генераторной катушке.

Рассмотрим поведение каждой из компонент э. д. с. при малых и больших значениях параметра p . Разложив в степенной ряд правые части выражений (1.22) и (1.23) по малому параметру p , найдем, что при $p \rightarrow 0$

$$\varepsilon_{\text{акт}} \approx i\varepsilon_{\text{пр}} \cdot p^2; \quad (1.24)$$

$$\varepsilon_{\text{реакт}} \approx \varepsilon_{\text{пр}} \left(1 - \frac{2}{3} p^3\right); \quad (1.25)$$

$$\varepsilon_{\text{реакт}}^{\text{втр}} \approx -\frac{2}{3} p^3 \varepsilon_{\text{пр}}. \quad (1.26)$$

При $p \rightarrow \infty$ имеем, согласно (1.22) и (1.23),

$$\varepsilon_{\text{акт}} \rightarrow 0; \quad (1.27)$$

$$\varepsilon_{\text{реакт}} \rightarrow 0;$$

$$\varepsilon_{\text{реакт}}^{\text{втр}} \rightarrow -\varepsilon_{\text{пр}}. \quad (1.28)$$

На рис. 1.1 представлены кривые зависимости активной и реактивной компонент э. д. с. от параметра p . Как видно из рис. 1.1 (кривая *a*), при увеличении параметра p активная компонента растет, достигает максимума и затем приближается к нулю. Вторичная реактивная компонента (кривая *б*)

с увеличением параметра p растет, становится при $2,2 \leq p \leq 5$ больше $\epsilon_{пр}$, а затем по абсолютной величине приближается к $\epsilon_{пр}$.

Рассмотрим более подробно характер поведения э. д. с. при малом параметре p . Из выражений (1.24) и (1.25) видно, что активная компонента значительно больше, чем вторичная реактивная компонента э. д. с. Подставив в правую часть (1.24) выражение для $\epsilon_{пр}$ и p , получим

$$\epsilon_{акт} = - \frac{\mu^2 M}{L} \omega^2 \gamma. \quad (1.29)$$

Следовательно, в области малого параметра э. д. с. в измерительной рамке пропорциональна удельной проводимости, квадрату частоты и обратно пропорциональна длине зонда. Как видно из формулы (1.24), аномальное поле при малых параметрах p составляет очень малую долю от $\epsilon_{пр}$.

При $p \leq 0,1$ формулой (1.29) можно пользоваться для расчетов $\epsilon_{акт}$ с погрешностью, не превышающей 10%. При этом значении параметра p аномальное поле составляет 1% от $\epsilon_{пр}$. В табл. 1.1 даны значения параметра p для различных величин проводимости и частоты при длине зонда 1 м. В табл. 1.2 приведены значения активной и реактивной компонент вторичного поля (выраженного в единицах первичного поля), его амплитуды, фазы, а также величины

$\frac{\gamma_{к}}{\gamma_{п}} = \frac{1}{p^2} h_z^{акт}$ в зависимости от параметра p .

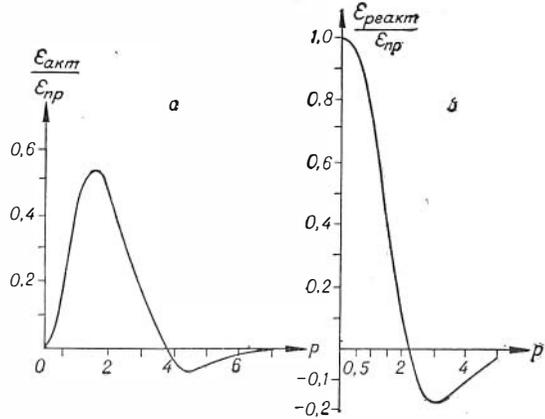


Рис. 1.1.

а — активная; б — реактивная компоненты э. д. с.

его амплитуды, фазы, а также величины

$\frac{\gamma_{к}}{\gamma_{п}} = \frac{1}{p^2} h_z^{акт}$ в зависимости от параметра p .

Таблица 1.1

$p, \text{ ом м}$ \ $f, \text{ гц}$	10^3	10^4	$2 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^4$	10^5
100	0,0063	0,0200	0,028	0,045	0,063
10	0,0200	0,0630	0,089	0,140	0,200
1	0,0630	0,200	0,280	0,450	0,630
0,1	0,200	0,630	0,890	1,40	2,00

Характер поведения э. д. с. в измерительной катушке при изменении параметра p может быть объяснен закономерностями распределения токов в среде. Из формулы (1.18) и закона Ома в дифференциальной форме $j = \gamma E$ следует, что в любой точке среды плотность тока

$$j_{\varphi} = \frac{i \gamma \mu \omega M}{4 \pi L^2} e^{i k L} (1 - i k L) \sin \theta. \quad (1.30)$$

Подставив в формулу выражение для волнового числа k , можно после преобразований, совершенно аналогичных тем, которые были сделаны в

Таблица 1.2

ρ^*	$h_z^{\text{акт}}$	$h_z^{\text{реакт}}$	A	Φ	$\gamma_{\text{к}} / \gamma_{\text{п}}$
0,01	$0,9933 \cdot 10^{-4}$	$0,6616 \cdot 10^{-6}$	$0,9933 \cdot 10^{-4}$	$-0,1564 \cdot 10^1$	0,9933
	$1403 \cdot 10^{-3}$	$1111 \cdot 10^{-5}$	$1403 \cdot 10^{-3}$	1562	9920
	1981	1865	1981	1561	9905
0,02	2796	3131	2796	1559	9887
	3946	5253	3947	1557	9866
	5567	$8810 \cdot 10^{-5}$	5567	1554	9841
0,04	$7849 \cdot 10^{-3}$	$1476 \cdot 10^{-4}$	$7850 \cdot 10^{-3}$	1551	9811
	$1106 \cdot 10^{-2}$	2473	$1106 \cdot 10^{-2}$	1548	9775
	1557	4140	1557	1544	9733
0,08	2191	$6922 \cdot 10^{-4}$	2192	1539	9683
	3079	$1156 \cdot 10^{-3}$	3081	1533	9623
	4322	1929	4327	1526	9551
0,16	6059	5212	6067	1517	9467
	$8477 \cdot 10^{-2}$	5341	$8494 \cdot 10^{-2}$	1507	9366
	$1183 \cdot 10^{-1}$	$8859 \cdot 10^{-3}$	$1187 \cdot 10^{-1}$	1496	9247
0,32	1648	$1465 \cdot 10^{-2}$	1654	1482	9106
	2288	2416	2301	1465	8938
	3164	3970	3189	1445	8739
0,64	4354	$6491 \cdot 10^{-2}$	4402	1422	8505
	5958	$1055 \cdot 10^{-1}$	6051	1395	8229
	$8094 \cdot 10^{-1}$	1704	$8272 \cdot 10^{-1}$	1363	7904
1,28	1089	2730	1123	1325	7525
	1451	4351	1514	1280	7085
	1905	$6788 \cdot 10^{-1}$	2022	1228	6577
2,56	2457	1048	2671	1167	5999
	3099	1590	3484	1096	5351
	3799	2361	4473	$1014 \cdot 10^1$	4638
5,12	4488	3412	5638	9207	3674
	5052	4772	6950	8138	3083
	5336	6414	8344	6939	2303
10,24	5169	8212	9704	6617	1577
	4434	9923	$1086 \cdot 10^1$	4202	$9568 \cdot 10^{-1}$
	3165	$1121 \cdot 10^1$	1165	2751	4830
20,48	1630	1177	1188	1373	$1758 \cdot 10^{-1}$
	$+ 2903 \cdot 10^{-1}$	1154	1154	$- 2514 \cdot 10^{-1}$	$+ 2215 \cdot 10^{-2}$
	$- 4275$	1081	1082	$+ 3950$	$- 2306$
40,96	$- 4570$	$1013 \cdot 10^1$	$1014 \cdot 10^1$	4506	$- 1743 \cdot 10^{-2}$
	$- 1665 \cdot 10^{-1}$	9868	9870	$1687 \cdot 10^{-1}$	$- 4493 \cdot 10^{-3}$
	$+ 0,1843 \cdot 10^{-2}$	0,9923	0,9923	$- 0,1857 \cdot 10^{-2}$	$+ 0,3516 \cdot 10^{-4}$

* Параметр ρ изменяется через $\sqrt{V/2}$.

формуле (1.21), представить плотность токов в виде двух компонент: активной компоненты, которая сдвинута на 90° относительно тока в генераторной катушке, и реактивной, находящейся в противофазе с этим током. Выражения для компонент плотности тока имеют следующий вид:

$$j_{\Phi}^{\text{акт}} = \frac{\gamma \mu \omega}{4\pi} \cdot \frac{rM}{L^3} e^{-\rho} [(1 + \rho) \cos \rho + \rho \sin \rho]; \quad (1.31)$$

$$j_{\Phi}^{\text{реакт}} = \frac{\gamma \mu \omega}{4\pi} \cdot \frac{rM}{L^3} e^{-\rho} [(1 + \rho) \sin \rho - \rho \cos \rho]. \quad (1.32)$$

Здесь в выражение для параметра ρ входит не длина зонда, а расстояние от генератора до точки, где определяется плотность тока. Легко установить физический смысл выражения $\frac{\gamma \mu \omega M r}{4 \pi L^3}$, которое входит в обе компоненты плотности тока. Для этого определим плотность тока, индуцирован-

ного в очень тонком кольце единичного сечения с центром на оси диполя, лежащим в плоскости, перпендикулярной этой оси (рис. 1.2). Магнитный поток, пронизывающий кольцо радиуса r , равен

$$\Phi = \int_0^{r_k} \mu H_z 2\pi r dr, \quad (1.33)$$

где H_z — z -овая компонента напряженности поля магнитного диполя. Как известно, напряженность магнитного поля в воздухе

$$H = \left(3 \frac{\overline{ML}}{L^5} \overline{L} - \frac{\overline{M}}{L^3} \right) \frac{1}{4\pi}. \quad (1.34)$$

Умножив обе части этого равенства скалярно на единичный вектор \overline{z}^0 , получим z -овую компоненту напряженности поля в виде

$$H_z = \frac{M}{4\pi L^3} (3 \cos^2 \theta - 1). \quad (1.35)$$

Подставив выражение для H_z в формулу (1.33) и проинтегрировав, получим следующее выражение для потока Φ , пронизывающего контур и созданного только полем магнитного диполя:

$$\Phi = \frac{1}{2} \mu \frac{Mr^2}{L^3}. \quad (1.36)$$

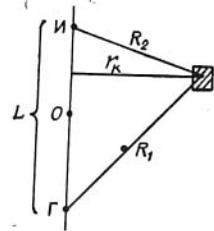


Рис. 1.2.

Магнитный поток Φ и э.д.с. в кольце связаны соотношением

$$\varepsilon = - \frac{\partial \Phi}{\partial t} = i\omega \Phi. \quad (1.37)$$

С другой стороны, электродвижущая сила индукции ε равна циркуляции вектора напряженности электрического поля по контуру, охватывающему магнитный поток:

$$\varepsilon = \int \overline{E} d\bar{l} = 2\pi r E \quad (1.38)$$

(последнее равенство написано в силу цилиндрической симметрии поля). Из формул (1.37) и (1.38) определяется вектор напряженности электрического поля E в точках рассматриваемого кольца:

$$E = \frac{i\omega \Phi}{2\pi r}. \quad (1.39)$$

Отсюда следует, что выражение для плотности тока в контуре имеет вид

$$j = \gamma E = \frac{i\gamma\mu\omega}{4\pi} \frac{rM}{L^3}. \quad (1.40)$$

Следовательно, физический смысл выражения (1.40) ясен: это плотность тока, индуцированного только первичным магнитным полем диполя. Как видно из формулы (1.40), ток по фазе сдвинут на 90° относительно тока в генераторной катушке. Если можно было бы пренебречь влиянием магнитного поля индуцированных токов на величину этих токов, то характер их распределения определялся бы формулой (1.40). В этом случае

плотность тока в любой точке зависит от расстояний до диполя L и его оси r .

На рис. 1.3 показан график j_0 в плоскости, перпендикулярной оси диполя и не проходящей через диполь. Нетрудно заметить, что расстояние от оси диполя до максимума тока j_0 увеличивается по мере удаления от диполя.

Мы довольно подробно остановились на этом простом выводе только потому, что он лежит в основе теории индукционного каротажа, предложенной Доллем.

Введем следующее обозначение: $j_0 = \frac{\gamma \mu \omega M}{4 \pi} \frac{r}{L^3}$ и перепишем формулы (1.31) и (1.32) в следующем виде:

$$j_{\Phi}^{\text{акт}} = j_0 e^{-p} [(1+p) \cos p + p \sin p]; \quad (1.41)$$

$$j_{\Phi}^{\text{реакт}} = j_0 e^{-p} [(1+p) \sin p - p \cos p]. \quad (1.42)$$

При анализе этих формул нас будет интересовать, насколько фактически существующий ток j отличается от j_0 при различных параметрах p , и в частности при различных расстояниях от генераторной катушки (так как изменение параметра p равносильно изменению расстояния от источника до точки наблюдения).

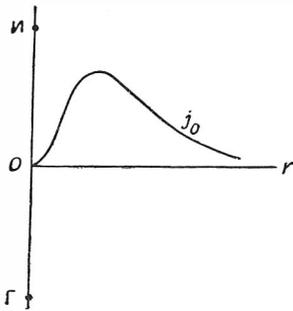


Рис. 1.3.

На рис. 1.4 представлены графики зависимости отношения активной и реактивной компонент плотности тока к току j_0 от параметра p . При малых значениях параметра p активная компонента тока практически не отличается от j_0 . С увеличением параметра это отношение уменьшается, достигает нуля, меняет знак и при больших значениях параметра стремится к нулю. График отношения реактивной компоненты тока к j_0 имеет совершенно иной характер.

При малых значениях параметра это отношение близко к нулю, затем оно растет, достигает максимума при $p \approx 1,5$ и при больших значениях параметра вновь стремится к нулю.

Из сказанного следует, что действительное распределение тока зависит не только от геометрических факторов, но и от взаимодействия токов, что в однородной среде учитывается параметром p , характеризующим перемещение поля в проводящей среде. Сравнив графики рис. 1.4, можно сделать вывод, что при малых значениях параметра p активная компонента плотности тока значительно больше, чем реактивная компонента, и, наоборот, при больших значениях параметра p реактивная компонента больше, чем активная. График на рис. 1.4, а можно рассматривать двояко:

1. Если считать заданными проводимость и частоту, то кривая определяет значение активной компоненты тока, отнесенной к току j_0 , на различных расстояниях от источника поля.

2. Если удельная проводимость или частота будет меняться от очень малых до больших величин, то кривая показывает все значения, которые будет принимать активная компонента тока, выраженная в единицах тока j_0 , в какой-либо одной точке среды.

Активная компонента тока создает ту часть магнитного поля, которая определяет активную компоненту э. д. с. в измерительной катушке. Поэтому основные закономерности в поведении активной компоненты э. д. с. должны объясняться исходя из особенностей распределения активной

компоненты плотности тока. Действительно, как видно из рис. 1.4,а, при малых значениях параметра p величина тока практически не отличается от j_0 . При очень низких частотах и высоких сопротивлениях область, в каждой точке которой ток равен j_0 , может стать настолько большой, что э. д. с. в измерительной катушке определится только токами в этой области. Величина тока j_0 пропорциональна частоте, поэтому величина э. д. с. в этом случае пропорциональна квадрату частоты (см. формулу (1.29)). В очень узком диапазоне параметров, когда область тока j_0 остается больше области исследования зонда, активная компонента э. д. с. растет прямо пропорционально квадрату частоты. С увеличением параметра (напри-

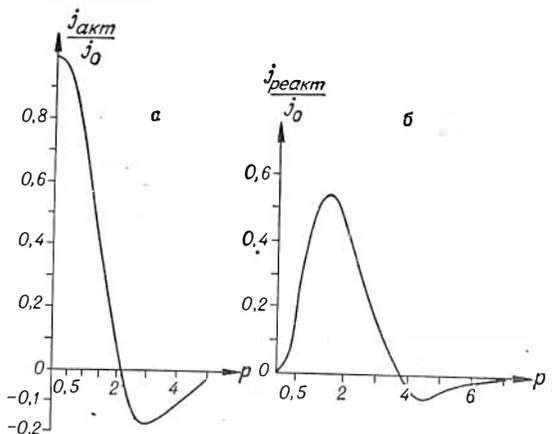


Рис. 1.4.

а — активная; б — реактивная компоненты плотности тока.

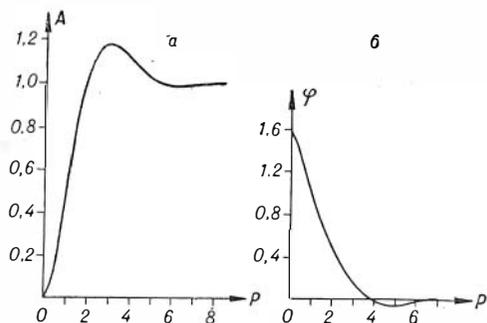


Рис. 1.5.

а — амплитуда вторичного поля; б — фаза вторичного поля.

мер, за счет увеличения частоты) область тока j_0 сужается, начинают влиять токи, величина которых меньше j_0 , и поэтому рост э. д. с. замедляется. При дальнейшем увеличении параметра из-за резкого уменьшения активной компоненты тока рост активной компоненты э. д. с. прекращается, и она начинает уменьшаться. Данное выше описание поведения активной компоненты э. д. с. на основе поведения активной компоненты тока (рис. 1.4,а) хорошо согласуется с фактическим поведением э. д. с. (рис. 1.1). Аналогично может быть объяснено поведение реактивной компоненты э. д. с. исходя из особенности распределения реактивной компоненты тока.

Можно предположить, что отмеченные закономерности в поведении активной и реактивной компонент поля и э. д. с., за редким исключением, остаются в силе и для неоднородных сред.

Согласно (1.18), э. д. с., наводимую в измерительной катушке, можно представить в виде

$$\varepsilon = \varepsilon_{np} A e^{i\varphi},$$

где

$$A = e^{-p} \sqrt{(1+p)^2 + p^2}; \quad (1.43)$$

$$\varphi = p - \arctg \frac{p}{1+p}. \quad (1.44)$$

Большой интерес представляют амплитуда и фаза вторичного поля (рис. 1.5). Амплитуда вторичного поля прямо пропорциональна частоте и удельной проводимости при несколько больших значениях параметра, чем для активной компоненты.

В результате анализа поведения поля магнитного диполя в однородной среде можно сделать ряд интересных с точки зрения практики индукционного каротажа замечаний.

1. Величина активной компоненты э. д. с. определяется главным образом токами, лежащими вблизи генераторной катушки.

2. С увеличением частоты уменьшается влияние удаленных частей среды. Поэтому есть основания предполагать, что в неоднородной среде при соответствующим образом выбранной частоте и достаточной мощности пласта активная компонента э. д. с. в измерительной цепи будет обязана своим возникновением главным образом токам, индуцированным в пласте, находящемся против зонда, т. е. влияние вмещающей среды будет мало.

3. Реактивная компонента более чувствительна к удаленным от зонда участкам среды, чем активная компонента.

Как будет показано ниже, эти выводы действительно подтверждаются данными, полученными в результате расчетов полей в средах с цилиндрическими и горизонтальными поверхностями раздела.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ
ИНДУКЦИОННОГО КАРОТАЖА

§ 1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Основная задача теории индукционного каротажа — определение зависимости квазистационарного электромагнитного поля от удельного сопротивления среды. Исходными для теоретических расчетов являются уравнения Максвелла.

Задача определения поля, вызванного токами в проводящих средах, заключается в следующем. В неограниченном пространстве имеется ряд ограниченных областей с постоянными параметрами μ_i и γ_i , где μ_i — магнитная проницаемость, а γ_i — удельная проводимость области D_i . Внутри каждой области D_i электрические и магнитные поля удовлетворяют волновым уравнениям

$$\nabla^2 \bar{H}_i + k_i^2 \bar{H}_i = 0 \quad \text{и} \quad \nabla^2 \bar{E}_i + k_i^2 \bar{E}_i = 0,$$

где

$$k_i^2 = i\gamma_i \mu_i \omega. \quad (2.1)$$

На поверхностях Σ_i , ограничивающих области D_i , волновые уравнения заменяются граничными условиями, заключающимися в непрерывности тангенциальных компонент электрического и магнитного полей. На бесконечности искомые функции должны удовлетворять условиям излучения.

Будем считать, что электрическое поле имеет только одну компоненту E_{φ_i} , тангенциальную поверхности Σ_i , и пусть в выбранной криволинейной системе координат α, β, φ поверхности раздела характеризуются координатой α_i . Тогда из первого уравнения Максвелла имеем

$$H_{\beta_i} = \frac{1}{i\omega\mu_i} \frac{1}{h_\alpha h_\varphi} \frac{\partial (h_\varphi E_\varphi)}{\partial \alpha}, \quad (2.2)$$

где h_α и h_φ — метрические коэффициенты.

Таким образом, решение задачи сводится к определению функции E_{φ_i} , удовлетворяющей волновому уравнению внутри каждой области и на поверхностях — граничным условиям

$$E_{\varphi_k} = E_{\varphi_i} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\mu_k} \frac{\partial}{\partial \alpha} (h_\varphi E_{\varphi_k}) = \frac{1}{\mu_i} \frac{\partial}{\partial \alpha} (h_\varphi E_{\varphi_i}), \quad (2.3)$$

§ 2. МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

Волновое уравнение $\nabla^2 E_{\varphi_i} \bar{\varphi}_0 + k_i^2 E_{\varphi_i} \bar{\varphi}_0 = 0$ представляет собой уравнение в частных производных второго порядка. Здесь $\bar{\varphi}_0$ — единичный вектор, касательный к координатной линии φ . В дальнейшем ограничимся случаями, когда электрическое поле зависит только от координат α и β . Будем искать решение E_{φ} (α, β) в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одной координаты $E_{\varphi_i} = T_i(\alpha) \cdot P_i(\beta)$. Подставляя это выражение в волновое уравнение и разделяя переменные, получаем вместо волнового уравнения два обыкновенных дифференциальных уравнения второго порядка*. Решением одного из них являются функции от α , а второго — от β . Так как дифференциальные уравнения второго порядка, то каждое из них имеет два решения:

$$\begin{aligned} T_{im} &= A'_{mi} u_m(k_i, \alpha) + B'_{mi} v_m(k_i, \alpha); \\ P_{im} &= C'_{mi} \varphi_m(k_i, \beta) + D'_{mi} \psi_m(k_i, \beta). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь m — постоянная разделения. Общее решение будет представлять собой интеграл (в некоторых случаях сумму), взятый по m :

$$\begin{aligned} E_{\varphi_i} &= \int_{-\infty}^{\infty} [A'_{mi} u_m(k_i, \alpha) + B'_{mi} v_m(k_i, \alpha)] \times \\ &\times [C'_{mi} \varphi_m(k_i, \beta) + D'_{mi} \psi_m(k_i, \beta)] dm. \end{aligned}$$

Обычно функции T_{im} и P_{im} являются комплексными функциями от комплексного аргумента. Во многих случаях в решении участвует только одна функция от β , например $\varphi_m(k_i, \beta)$. Тогда общее решение можно записать в виде

$$E_{\varphi_i} = \int_{-\infty}^{\infty} [A_m u_m(k_i, \alpha) + B_m v_m(k_i, \alpha)] \varphi_m(k_i, \beta) dm. \quad (2.5)$$

Неизвестные коэффициенты A_m и B_m определяются из граничных условий (2.3) и краевых условий на бесконечности и вблизи источника поля. Уравнения для A_m и B_m , согласно (2.5), имеют вид

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} [A_{m_k} u_m(k_k, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [A_{m_l} u_m(k_l, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\mu_k} \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} h_{\varphi} [A_{m_k} u_m(k_k, \alpha) + B_{m_k} v_m(k_k, \alpha)] \varphi_m(k_k, \beta) dm = \\ &= \frac{1}{\mu_l} \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} h_{\varphi} [A_{m_l} u_m(k_l, \alpha) + B_{m_l} v_m(k_l, \alpha)] \varphi_m(k_l, \beta) dm. \end{aligned} \quad (2.7)$$

* Как известно, метод разделения переменных применим не во всех ортогональных криволинейных координатах.

В общем случае функции $\varphi_m(k_k, \beta)$ и $\varphi_m(k_l, \beta)$ не ортогональны, так как зависят от волнового числа k соответствующего участка среды. Поэтому для определения неизвестных коэффициентов A_m и B_m нужно иметь представление одной из этих функций через другие. Подставив это разложение функции $\varphi_m(k_l)$, ортогональностью функций $\varphi_m(k_k, \beta)$, получаем бесконечную систему уравнений с бесконечным числом неизвестных.

В тех случаях, когда функция φ_m не зависит от волнового числа k (это имеет место, когда поверхность Σ_i совпадает со сферической поверхностью, поверхностью кругового цилиндра или плоскостью), определение неизвестных коэффициентов значительно упрощается. Вместо бесконечной системы получаем для каждой гармоники m два уравнения с четырьмя неизвестными:

$$A_{m_k} u_m(k_k, \alpha_0) + B_{m_k} v_m(k_k, \alpha_0) = A_{m_l} u_m(k_l) \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu_k} \frac{\partial}{\partial \alpha} h_\varphi [A_{m_k} u_m(k_k, \alpha_0) + B_{m_k} v_m(k_k, \alpha_0)] = \\ & = \frac{1}{\mu_l} \frac{\partial}{\partial \alpha} h_\varphi [A_{m_l} u_m(k_l) \end{aligned}$$

при $\alpha = \alpha_0$. Вместе с краевыми условиями системы уравнений вида (2.8) полностью определяют неизвестные коэффициенты A_m и B_m . Таким образом, метод разделения переменных в волновом уравнении позволяет в этих случаях записать решение в аналитическом виде. В задачах с цилиндрическими поверхностями раздела решение, как это будет показано ниже, представляется через несобственные интегралы, подынтегральное выражение которых содержит функции Бесселя от комплексного аргумента.

В средах с горизонтальными поверхностями раздела поле также выражается через несобственные интегралы, но со значительно более простой подынтегральной функцией. Последние два случая представляют наибольший интерес при разработке теории индукционного каротажа. При решении задач с одной и двумя цилиндрическими поверхностями раздела, с двумя горизонтальными границами (одиночный пласт) методом разделения переменных получаем выражения для поля, которые без особого труда могут быть запрограммированы и в частных случаях поддаются аналитическому исследованию. Однако при увеличении числа границ выражения для поля становятся настолько громоздкими, что практически исчезает возможность как проведения анализа формул, так и осуществления расчетов даже на быстродействующих электронно-вычислительных машинах. Особенно это становится заметным, когда рассматривается не кусочно-однородная среда, а предполагается непрерывное изменение удельного сопротивления, например, в промежуточной зоне, образованной в результате проникновения фильтра бурового раствора в пласт.

При решении задач для сред с более сложным распределением удельного сопротивления целесообразно применить метод оболочек, основным преимуществом которого является, во-первых, единообразный алгоритм расчета независимо от числа слоев с различным удельным сопротивлением и, во-вторых, использование в формулах функций от действительного аргумента.

§ 3. МЕТОД ОБОЛОЧЕК

Идея описываемого способа расчета полей заключается в следующем. Системой поверхностей $\alpha_i = \text{const}$ проводящая область мысленно разбивается на достаточно тонкие слои. Затем каждый слой заменяется беско-

нечно тонкой оболочкой, расположенной в средней части слоя. Продольные проводимости слоя и эквивалентной ему оболочки остаются одинаковыми. Значит, вместо сплошной области получаем систему тонких проводящих оболочек. Строгие граничные условия в этом случае можно заменить приближенными, не требующими знания поля внутри оболочек, и тем самым избавиться от необходимости решать волновое уравнение. Вне оболочек (между оболочками) поле удовлетворяет уравнению Лапласа. Следовательно, поставленная задача сведена к определению гармонической функции, удовлетворяющей приближенным граничным условиям на поверхности оболочек. Однако определение обычным путем функций, удовлетворяющих граничным условиям одновременно на всех оболочках, требует решения системы $2n$ уравнений с $2n$ неизвестными. Поэтому предлагается метод отражений, который может быть использован при вихревом возбуждении поля и позволяет относительно легко получить выражения для поля в присутствии системы оболочек, если известны некоторые характеристики поля для каждой оболочки.

Вывод приближенных граничных условий на поверхности оболочки

В криволинейной ортогональной системе координат α, β, φ поверхность оболочки совпадает с одной из координатных поверхностей α . По условию электрическое поле имеет только компоненту E_φ . Применим закон

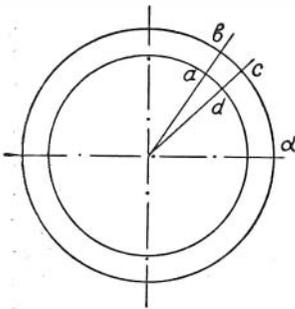


Рис. 2.1.

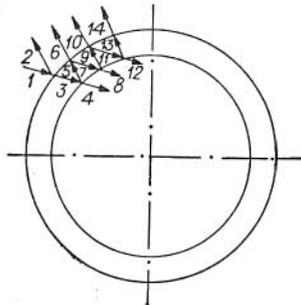


Рис. 2.2.

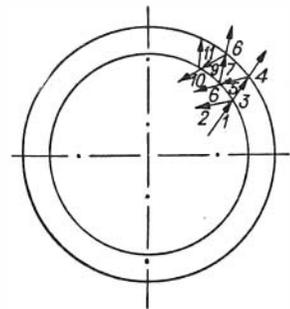


Рис. 2.3.

полного тока (второе уравнение Максвелла в интегральной форме) к контуру $abcd$ (рис. 2.1)

$$\oint_L (\vec{H} \cdot d\vec{l}) = \int_Q (\vec{j} \cdot d\vec{Q})$$

или

$$(H_\beta^e - H_\beta^i) ds_\beta = j_\varphi ds_\alpha ds_\beta. \quad (2.9)$$

Здесь \vec{H} — напряженность магнитного поля;
 $d\vec{l}$ — вектор, касательный к координатной линии β , равный по модулю ds_β ;
 H_β — компонента магнитного поля, тангенциальная поверхности оболочки*;
 $d\vec{Q}$ — векторизированный элемент площади, модуль которого равен $ds_\alpha ds_\beta$ — элемент длины вдоль координатной линии α , ds_β — элемент длины вдоль координатной линии β).

* Индекс e соответствует полю во внешней области, индекс i — во внутренней.

Элементы длины вдоль координатных линий выражаются через координаты следующим образом:

$$ds_{\alpha} = h_{\alpha} d\alpha, \quad ds_{\beta} = h_{\beta} d\beta, \quad ds_{\varphi} = h_{\varphi} d\varphi,$$

где h_{α} , h_{β} , h_{φ} — метрические коэффициенты.

В рассматриваемых ниже задачах $h_{\alpha} = 1$. Подставляя эти выражения в (2.9) и используя закон Ома в дифференциальной форме $\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$, получаем

$$H_{\beta}^e - H_{\beta}^i = \gamma d\alpha E_{\varphi} = s E_{\varphi}, \quad (2.10)$$

где $s = \gamma d\alpha$.

Эту величину будем называть продольной проводимостью оболочки. Из первого уравнения Максвелла в дифференциальной форме имеем

$$H = \frac{1}{i\omega\mu} \operatorname{rot} E.$$

Выражение для ротора в ортогональной системе координат записывается в виде

$$\operatorname{rot} E = \frac{1}{h_{\alpha} h_{\beta} h_{\varphi}} \begin{vmatrix} h_{\alpha} i_{\alpha}, & h_{\beta} i_{\beta}, & h_{\varphi} i_{\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial \alpha}, & \frac{\partial}{\partial \beta}, & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ h_{\alpha} E_{\alpha}, & h_{\beta} E_{\beta}, & h_{\varphi} E_{\varphi} \end{vmatrix}$$

По условию $E_{\alpha} = E_{\beta} = 0$; i_{α} , i_{β} , i_{φ} — единичные векторы. Раскрывая определитель, получаем

$$H_{\alpha} = -\frac{1}{i\omega\mu} \frac{1}{h_{\beta} h_{\varphi}} \cdot \frac{\partial (h_{\varphi} E_{\varphi})}{\partial \beta}; \quad (2.11)$$

$$H_{\beta} = \frac{1}{i\omega\mu} \frac{1}{h_{\alpha} h_{\varphi}} \cdot \frac{\partial (h_{\varphi} E_{\varphi})}{\partial \alpha}.$$

Подставляя (2.11) в (2.10), приходим к первому приближенному граничному условию для электрического поля на поверхности оболочки

$$\frac{\partial (h_{\varphi} E_{\varphi}^e)}{\partial \alpha} - \frac{\partial (h_{\varphi} E_{\varphi}^i)}{\partial \alpha} = in E_{\varphi} \quad (2.12)$$

при $\alpha = \alpha_0$, где $n = \omega\mu s h_{\varphi}$.

Второе граничное условие на поверхности оболочки состоит в непрерывности тангенциальной компоненты электрического поля

$$E_{\varphi}^e = E_{\varphi}^i \quad (2.13)$$

при $\alpha = \alpha_0$. Поэтому в правой части (2.12) можно вместо напряженности электрического поля внутри оболочки E_{φ} полагать либо E_{φ}^e , либо E_{φ}^i . Граничные условия (2.12) и (2.13) достаточно точно описывают поле вблизи поверхности оболочек, если:

а) величина скин-слоя $\sqrt{\frac{2}{\gamma\mu\omega}}$ в оболочке значительно больше ее толщины и

б) возбуждающее поле мало изменяется внутри оболочки по направлению нормали к поверхности.

Поэтому, выбирая детальность при мысленном разделении проводящей области на слои, необходимо обеспечить выполнение условий а) и б) применительно уже к слоям.

Расчет электромагнитного поля, вызванного токами в одной оболочке

По условию электрическое поле имеет только одну компоненту E_{φ} , которая удовлетворяет уравнению Лапласа $\nabla^2 E_{\varphi} \bar{\varphi}_0 = 0$ и зависит от двух координат α и β . Решая уравнение Лапласа методом разделения переменных, находим

$$E_{\varphi} = \int_0^{\infty} [A_m u_m(\alpha) + B_m v_m(\alpha)] \varphi_m(\beta) dm, \quad (2.14)$$

где m — постоянная разделения.

Функции $u_m(\alpha)$ и $v_m(\alpha)$ будем называть радиальными функциями (m -гармоника), функций $\varphi_m(\beta)$ — соответственно угловыми (в сферических координатах $\alpha=R$, $\beta=\theta$, в цилиндрических $\alpha=\rho$, $\beta=z$). Одна из радиальных функций при увеличении α стремится к нулю, а другая возрастает. Поэтому в выражение для поля во внешней области будет входить только одного вида функция, предположим $A_m u_m(\alpha)$, которая убывает с увеличением α . Во внутренней области обычно одна из радиальных функций конечна, а другая стремится к бесконечности в какой-либо точке или линии. Поэтому и во внутренней области в решение задачи входит только одного вида радиальная функция $B_m v_m(\alpha)$. Теперь можно перейти к решению задачи о поле, вызванном токами в оболочке.

Вначале предположим, что источники первичного магнитного поля расположены вне оболочки и их вихревое электрическое поле E_{φ}^0 можно представить в виде интеграла от произведения гармоник радиальных и угловых функций

$$E_{\varphi}^0 = i\omega\mu \int_0^{\infty} C_m^e v_m(\alpha) \varphi_m(\beta) dm, \quad (2.15)$$

где C_m^e — известные коэффициенты.

Решение вне оболочки ищем в виде суммы первичного поля E^0 и поля, вызванного токами в оболочке,

$$E_{\varphi}^e = i\omega\mu \int_0^{\infty} [C_m^e v_m(\alpha) + B_m^e u_m(\alpha)] \varphi_m(\beta) dm. \quad (2.16)$$

Поле внутри оболочки, согласно сказанному выше, строится из функций $v_m(\alpha)$:

$$E_{\varphi}^i = i\omega\mu \int_0^{\infty} A_m^e v_m(\alpha) \varphi_m(\beta) dm. \quad (2.17)$$

Подставив (2.16) и (2.17) в граничные условия (2.12) и (2.13) и воспользовавшись ортогональностью угловых функций $\varphi_m(\beta)$, получаем для

определения коэффициентов A_m^e и B_m^e два уравнения с двумя неизвестными:

$$\left. \begin{aligned} C_m^e [h'_\varphi v_m + h_\varphi v'_m] + B_m^e [h'_\varphi u_m + h_\varphi u'_m] - \\ - A_m^e [h'_\varphi v_m + h_\varphi v'_m] = in A_m^e v_m; \\ C_m^e v_m + B_m^e u_m = A_m^e v_m \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

при $\alpha = \alpha_0$. Решая полученную систему относительно A_m^e и B_m^e , имеем

$$A_m^e = C_m^e \frac{u_m d_m - t_m v_m}{inu_m v_m + u_m d_m - t_m v_m}; \quad (2.19)$$

$$B_m^e = -C_m^e \frac{inv_m^2}{inu_m v_m + u_m d_m - t_m v_m}, \quad (2.20)$$

где

$$d_m = h'_\varphi v_m + h_\varphi v'_m, \quad t_m = h'_\varphi u_m + h_\varphi u'_m.$$

Введем следующие обозначения:

$$s_{em} = \frac{u_m d_m - t_m v_m}{inu_m v_m + u_m d_m - t_m v_m}; \quad (2.21)$$

$$W_{em} = -\frac{inv_m^2}{inu_m v_m + u_m d_m - t_m v_m}. \quad (2.22)$$

Модуль функции s_{em} меняется с изменением n от единицы до нуля и характеризует ослабление m -й гармоники первичного поля при прохождении через оболочку. Структура же поля соответствующей гармоники не изменяется. Модуль функции W_{em} изменяется с увеличением n от нуля до величины $\frac{v_m}{u_m}$ и характеризует интенсивность отражения m -й гармоники первичного поля от оболочки при внешнем возбуждении. Физический смысл коэффициентов s_{em} и W_{em} почти очевиден, особенно если изменение n рассматривать как изменение частоты ω . При очень низких частотах (малые n) в оболочке индуцируются слабые вихревые токи. Поэтому поле внутри близко к первичному $s_{em} \approx 1$, $W_{em} \rightarrow 0$. Наоборот, при высоких частотах увеличивается вторичное поле вне оболочки, а поле внутри стремится к нулю (эффект полного экранирования).

Рассмотрим случай, когда источники поля расположены внутри оболочки (внутреннее возбуждение). Выражение для первичного электрического поля представим в виде

$$E_\varphi^0 = i\omega\mu \int_0^\infty C_m^i u_m(\alpha) \varphi_m(\beta) dm. \quad (2.23)$$

Решение для поля внутри оболочки ищем в виде интеграла

$$E_\varphi^i = i\omega\mu \int_0^\infty [C_m^i u_m(\alpha) + A_m^i v_m(\alpha)] \varphi_m(\beta) dm, \quad (2.24)$$

вне оболочки

$$E_\varphi^e = i\omega\mu \int_0^\infty B_m^i u_m(\alpha) \varphi_m(\beta) dm. \quad (2.25)$$

Подставив (2.24) и (2.25) в граничные условия, получаем систему

$$\left. \begin{aligned} & B_m^i [h_\varphi' u_m + h_\varphi u_m'] + C_m^i [h_\varphi' u_m + h_\varphi u_m'] - \\ & - A_m^i [h_\varphi' v_m + h_\varphi v_m'] = in B_m^i u_m; \\ & C_m^i u_m + A_m^i v_m = B_m^i u_m. \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

Решая систему относительно A_m^i и B_m^i , имеем:

$$B_m^i = \frac{d_m u_m - t_m v_m}{inu_m v_m + u_m d_m - t_m v_m} C_m^i; \quad (2.27)$$

$$A_m^i = - \frac{inu_m^2}{inu_m v_m + u_m d_m - t_m v_m} C_m^i. \quad (2.28)$$

Введем обозначения:

$$B_m^i = s_{im} C_m^i; \quad A_m^i = W_{im} C_m^i, \quad (2.29)$$

где

$$W_{im} = - \frac{inu_m^2}{inu_m v_m + u_m d_m - t_m v_m}. \quad (2.30)$$

Сравнивая (2.21) с (2.27), замечаем, что

$$s_{em} = s_{im}. \quad (2.31)$$

Существенно, что и при внутреннем возбуждении каждая гармоника первичного поля, проходя сквозь оболочку и ослабевая, не изменяет своей структуры. Таким образом, оболочки $\alpha = \text{const}$ не искажают структуру каждой гармоники независимо от расположения источников относительно оболочки. Этот факт имеет место не только для очень тонких оболочек, но и для оболочек, имеющих конечную толщину. Однако определение поля в последнем случае потребовало бы решения волнового уравнения.

Поле от двух софокусных оболочек.

Внешнее возбуждение

Предположим, что источники поля расположены вне оболочек, и считаем вначале поле, вызванное только одной гармоникой первичного поля:

$$E_m^0 = i\omega\mu C_m^e v_m(\alpha) \varphi_m(\beta). \quad (2.32)$$

Положим $i\omega\mu C_m^e = 1$. Механизм образования вторичного поля под действием m -гармоники можно представить следующим образом. Частично поле E_m^0 отражается от первой оболочки с коэффициентом отражения W_{1e} :

$$W_{1e} u_m(\alpha) \varphi_m(\beta). \quad (2.33)$$

Остальная часть первичного поля, не изменяя своей структуры, проходит через первую оболочку:

$$s_1 v_m(\alpha) \varphi_m(\beta). \quad (2.34)$$

Попадая на внутреннюю оболочку, она частично отражается (коэффициент отражения W_{2e}):

$$W_{2e} s_1 u_m(\alpha) \varphi_m(\beta). \quad (2.35)$$

Оставшаяся часть проходит сквозь внутреннюю оболочку, ослабевая в s_2 раза:

$$s_1 s_2 v_m(\alpha) \varphi_m(\beta). \quad (2.36)$$

Вернемся к той части, которая отразилась от внутренней оболочки (2.35). Она, попадая на внутреннюю поверхность внешней оболочки, частично отражается (коэффициент отражения W_{1i}):

$$s_1 W_{2e} W_{1i} v_m(\alpha) \varphi_m(\beta).$$

Остальная часть проходит через внешнюю оболочку, ослабевая в s_1 раз:

$$s_1^2 W_{2e} u_m(\alpha) \varphi_m(\beta).$$

Этот процесс продолжается до тех пор, пока не установится окончательное распределение индуцированных в оболочках токов. Выпишем суммы, через которые выражается поле вне, внутри оболочек и между оболочками. Вне оболочек

$$v_m \varphi_m + W_{1e} u_m \varphi_m + s_1^2 W_{2e} u_m \varphi_m + s_1^2 W_{2e}^2 W_{1i} u_m \varphi_m + s_1^2 W_{2e}^3 W_{1i}^2 u_m \varphi_m + \dots$$

Между оболочками

$$s_1 v_m \varphi_m + s_1 W_{2e} u_m \varphi_m + s_1 W_{2e} W_{1i} v_m \varphi_m + s_1 W_{2e}^2 W_{1i} u_m \varphi_m + s_1 W_{2e}^2 W_{1i}^2 v_m \varphi_m + \dots$$

Внутри оболочек

$$s_1 s_2 v_m \varphi_m + s_1 s_2 W_{2e} W_{1i} v_m \varphi_m + s_1 s_2 W_{2e}^2 W_{1i}^2 v_m \varphi_m + \dots$$

Полученные выражения легко суммируются, так как представляют собой геометрические прогрессии: поле вне оболочек

$$v_m \varphi_m + \left\{ W_{1e} + \frac{s_1^2 W_{2e}}{1 - W_{2e} W_{1i}} \right\} u_m \varphi_m, \quad (2.37)$$

поле внутри оболочек

$$\frac{s_1 s_2}{1 - W_{2e} W_{1i}} v_m \varphi_m. \quad (2.38)$$

На рис. 2.2 представлена схема, иллюстрирующая механизм образования поля при внешнем возбуждении. Согласно (2.37) и (2.38), поле в случае двух оболочек при внешнем возбуждении эквивалентно полю в присутствии одной оболочки, у которой коэффициент экранирования

$$s_{em} = \frac{s_1 s_2}{1 - W_{2e} W_{1i}}, \quad (2.39)$$

а коэффициент отражения

$$W_{em} = W_{1e} + \frac{s_1^2 W_{2e}}{1 - W_{2e} W_{1i}}. \quad (2.40)$$

Внутреннее возбуждение

Предположим, что источники поля расположены внутри оболочек, и по-прежнему будем вначале исследовать возбуждение в виде m -гармоники первичного поля

$$E_m^0 = u_m(\alpha) \varphi_m(\beta). \quad (2.41)$$

Механизм образования вторичного поля, вызванного токами в обеих оболочках, при внутреннем возбуждении, по существу, не отличается от предыдущего случая. Поэтому здесь ограничимся схемой рис. 2.3 и выпишем соответствующие суммы. Вне оболочек

$$[s_1 s_2 u_m + s_1 s_2 W_{1i} W_{2e} u_m + s_1 s_2 W_{1i}^2 W_{2e}^2 u_m + \dots] \varphi_m.$$

Между оболочками

$$[s_2 u_m + s_2 W_{1i} v_m + s_2 W_{1i} W_{2e} u_m + s_2 W_{1i}^2 W_{2e} v_m + s_2 W_{1i}^2 W_{2e}^2 u_m + \dots] \varphi_m.$$

Внутри оболочек

$$[u_m + W_{2i} v_m + s_2^2 W_{1i}^2 v_m + s_2^2 W_{1i}^2 W_{2e} v_m + s_2^2 W_{1i}^3 W_{2e}^2 v_m + \dots] \varphi_m.$$

Суммируя эти выражения, окончательно получаем следующие формулы: поле вне оболочек

$$\frac{s_1 s_2}{1 - W_{1i} W_{2e}} u_m(\alpha) \varphi_m(\beta), \quad (2.42)$$

поле внутри оболочек

$$u_m \varphi_m + \left\{ W_{2i} + \frac{s_2^2 W_{1i}}{1 - W_{1i} W_{2e}} \right\} v_m \varphi_m. \quad (2.43)$$

Таким образом, при внутреннем возбуждении поле от двух оболочек эквивалентно полю одной оболочки, у которой коэффициент экранирования

$$s_{im} = s_{em} = \frac{s_1 s_2}{1 - W_{1i} W_{2e}},$$

а коэффициент отражения

$$W_{1m} = W_{2i} + \frac{s_2^2 W_{1i}}{1 - W_{1i} W_{2e}}. \quad (2.44)$$

Если имеется система оболочек, расчет вторичного поля, вызванного m -гармоникой первичного поля, можно вести по такой схеме. Вначале рассчитываются характеристики двух ближайших к источнику поля оболочек, потом они заменяются одной эквивалентной им оболочкой, характеристики которой определяются по формулам (2.39), (2.40) и (2.44). Затем рассчитываются коэффициенты отражения и экранирования следующей, третьей по счету, оболочки и вновь определяются параметры оболочки, эквивалентной уже трем оболочкам. Этот процесс продолжается до тех пор, пока все оболочки не будут заменены одной эквивалентной им оболочкой. Расчет все время ведется по формулам (2.39), (2.40) и (2.44). Характеристики каждой оболочки W_{em} , W_{im} , и s_m определяются по формулам (2.22), (2.30) и (2.21). Как было отмечено ранее, эти коэффициенты выражаются через хорошо известные функции от действительного аргумента. Окончательное выражение для вторичного поля будет получено после суммирования вторичных полей, возникших под действием каждой гармоники E_m^0 .

Переход к компонентам магнитного поля осуществляется с помощью уравнения Максвелла

$$H = -\frac{1}{i\omega\mu} \operatorname{rot} E.$$

Значит, если представить сплошное проводящее тело в виде системы тонких оболочек, можно достаточно просто рассчитать электромагнитное поле, вызываемое вихревыми токами в проводнике. Поскольку удельная проводимость γ входит только в параметр n (формула (2.12)), методика расчета не зависит от распределения удельного сопротивления в среде. Иными словами, поле рассчитывается по одним и тем же формулам (2.21), (2.22), (2.30), (2.39), (2.40) и (2.44) в однородной среде, кусочно-однородной и среде с произвольным распределением удельной проводимости. Применению этой методики расчета прямых задач теории индукционного каротажа способствует исключительная быстрота, с которой электронные вычислительные машины выполняют основные арифметические операции, простота кодирования алгоритма задачи (независимо от распределения удельного сопротивления среды).

Рассмотрим в качестве примера применения метода оболочек задачу расчета переменного магнитного поля магнитного диполя на оси скважины, когда удельная проводимость γ является функцией только расстояния от оси. Как частный случай сюда входит задача расчета поля в среде с несколькими коаксиальными цилиндрическими поверхностями раздела (скважина, зона проникновения, окаймляющая зона и т. д.).

Решение задачи

Системой коаксиальных цилиндрических поверхностей $\rho = \text{const}$ проводящая область мысленно разбивается на достаточно тонкие цилиндрические слои с общей осью, совпадающей с осью скважины. Толщина слоя определяется в общем случае не только условиями (а) и (в), указанными на стр. 22, но и характером изменения удельного сопротивления в данной точке. При прочих равных условиях с увеличением скорости изменения удельной проводимости уменьшается толщина слоя. Затем каждый слой заменяется бесконечно тонкой оболочкой, расположенной в средней части слоя. Продольные проводимости слоя и эквивалентной ему оболочки остаются одинаковыми. Таким образом, вместо сплошной среды получаем систему тонких коаксиальных цилиндрических оболочек. Как известно, для эквивалентности системы оболочек сплошной среде необходимо, чтобы вектор плотности индуцированного в среде тока нигде не пересекал цилиндрических поверхностей $\rho = \text{const}$. При возбуждении поля вертикальным магнитным диполем это требование выполняется, так как силовые линии вихревого электрического поля представляют собою окружности, лежащие в горизонтальных плоскостях, центры которых расположены на оси скважины.

Возьмем цилиндрическую систему координат (ρ, z, φ) и совместим ее начало с магнитным диполем, момент которого направлен по оси z , совпадающей с осью скважины.

Электромагнитное поле вертикального магнитного диполя, направленного вдоль оси z , можно представить только через одну компоненту (A_z) вектор-потенциала электрического типа. Скалярная функция A_z удовлетворяет уравнению Лапласа, которое в цилиндрической системе координат записывается в виде

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = 0, \quad (2.45)$$

так как поле не зависит от координаты φ . После разделения переменных в уравнении (2.45) получаем два обыкновенных дифференциальных урав-

нения второго порядка:

$$Z'' + \lambda^2 Z = 0; \quad (2.46)$$

$$R'' + \frac{1}{\rho} R' - \lambda^2 R = 0. \quad (2.47)$$

Здесь Z и R — функции, зависящие соответственно только от z и ρ и связанные с A_z соотношением $A_z = Z \cdot R$; λ — постоянная разделения. Решением первого уравнения являются тригонометрические функции $\sin \lambda z$ и $\cos \lambda z$. Второе уравнение представляет собой модифицированное уравнение Бесселя, решением которого являются функции $I_0(\lambda \rho)$ и $K_0(\lambda \rho)$. Так как поле должно быть четной функцией относительно z , то в решении не должен участвовать $\sin \lambda z$. Поэтому общее решение складывается из комбинации функций вида $K_0(\lambda \rho) \cos \lambda z$ и $I_0(\lambda \rho) \cos \lambda z$.

Вектор-потенциал магнитного диполя в воздухе описывается функцией $\frac{i \omega \mu M}{4 \pi \sqrt{\rho^2 + z^2}}$, которую можно представить через элементарные решения

$$A_z = \frac{i \omega \mu M}{4 \pi} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_0(\lambda \rho) \cos \lambda z d\lambda. \quad (2.48)$$

Электрическое поле связано с z -овой компонентой вектор-потенциала A соотношением

$$E_z = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho},$$

поэтому

$$E_z^0 = \frac{i \omega \mu M}{4 \pi} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \lambda K_1(\lambda \rho) \cos \lambda z d\lambda, \quad (2.49)$$

так как

$$\frac{\partial}{\partial \rho} K_0(\lambda \rho) = -\lambda K_1(\lambda \rho).$$

Первичное возбуждение представляет собою сумму (точнее, интеграл) элементарных возбуждений вида $\lambda K_1(\lambda \rho) \cos \lambda z$. Распространение этих волн в направлении, перпендикулярном оси скважины, зависит от λ . Как это следует из характера поведения функции $K_1(\lambda \rho)$, с увеличением аргумента, в частности λ , волна затухает быстрее. Поэтому возбуждение наиболее удаленных участков среды осуществляется волнами, характеризующимися относительно малыми значениями λ .

Метод отражений применяется к каждой элементарной волне. Суммарное электрическое поле представляется в виде интеграла, подынтегральная функция которого определяет реакцию среды на действие элементарного возбуждения. Поэтому для электрического поля во внутренней области имеем следующее выражение:

$$E_z = \frac{i \omega \mu M}{4 \pi} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \lambda W_i(\lambda, \gamma, \omega) I_1(\lambda \rho) \cos \lambda z d\lambda, \quad (2.50)$$

где W_i — функция, получаемая как результат взаимодействия всех оболочек.

Теперь воспользуемся результатами, приведенными в начале этого параграфа, и заменим функции $u_m(\alpha)$ и $v_m(\alpha)$ соответственно через $\lambda K_1(\lambda\rho)$ и $\lambda I_1(\lambda\rho)$. Принимая во внимание, что в цилиндрической системе координат метрический коэффициент $h_\varphi = \rho$, получаем выражения для коэффициентов, определяющих поле одной оболочки:

$$\begin{aligned} W_{\lambda e} &= -\frac{inI_1^2(\lambda\rho)}{1+inI_1K_1}; \\ s_\lambda &= \frac{1}{1+inI_1K_1}; \\ W_{\lambda i} &= -\frac{inK_1^2(\lambda\rho)}{1+inI_1K_1}, \end{aligned} \quad (2.51)$$

где $n = \omega\mu s\rho$; $s = \gamma\Delta\rho$ — продольная проводимость оболочки; ρ — радиус оболочки; $W_{\lambda e}$ — коэффициент отражения от оболочки при внешнем возбуждении волной вида $\lambda K_1(\lambda\rho) \cos \lambda z$; $W_{\lambda i}$ — коэффициент отражения от оболочки при внутреннем возбуждении волной вида $\lambda K_1(\lambda\rho) \cos \lambda z$. Коэффициент s_λ характеризует ослабление волны при прохождении через оболочку. Взаимодействие оболочек рассчитывается по формулам (2.39), (2.40) и (2.44). В результате этого взаимодействия всех оболочек определяется функция W_i , стоящая под знаком интеграла в выражении для электрического поля в формуле (2.50).

Как известно, вертикальная компонента магнитного поля связана с электрическим полем соотношением

$$H_z = -\frac{1}{i\omega\mu} \cdot \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho E_\varphi)}{\partial\rho}.$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} \rho I_1(\lambda\rho) = \frac{1}{\rho} [I_1(\lambda\rho) + \lambda\rho I_1'(\lambda\rho)] = \lambda I_0(\lambda\rho),$$

получаем

$$h_z = \frac{L^3}{\pi} \int_0^\infty \lambda^2 W_i(\lambda, \gamma, \omega) \cos \lambda z d\lambda, \quad (2.52)$$

так как $I_0(0) = 1$. Здесь h_z — магнитное поле на оси скважины, отнесенное к полю в воздухе $\left(\frac{2M}{4\pi L^3}\right)$, где L — расстояние от магнитного диполя до точки наблюдения).

Рассмотрим некоторые особенности поведения функции $\lambda^2 W_{\lambda i}$ при фиксированном значении λ .

Представим функцию $\lambda^2 W_{\lambda i}$ в виде

$$\lambda^2 W_{\lambda i} = \frac{\lambda^2 n K_1^2(\lambda\rho)}{\sqrt{1+n^2(I_1K_1)^2}} e^{-i\left(\frac{\pi}{2} + \arctg nI_1K_1\right)}.$$

Произведение I_1K_1 не превышает единицы. Поэтому при малых значениях n фаза вторичного поля мало отличается от 90° , т. е. токи в оболочках сдвинуты на 90° относительно тока в источнике. Чем меньше радиус оболочки, тем при большей частоте и проводимости это имеет место. С увеличением радиуса оболочки возрастает аргумент $\lambda\rho$, при этом значение функции $\omega\mu s\rho I_1(\lambda\rho) K_1(\lambda\rho)$ стремится к величине $\frac{\omega\mu s}{2\lambda}$. Если $\frac{\omega\mu s}{2} \ll \lambda$, то в оболоч-

ках возникают токи, сдвинутые по фазе на 90° . Однако элементарные волны с большим λ слабо проникают в среду. Поэтому возбуждение токов в оболочках с большим радиусом осуществляется волнами, характеризующимися малыми λ , для которых, как правило, имеет место соотношение $\frac{\omega\mu s}{2} \gg \lambda$, и фаза токов стремится к 180° .

Этот анализ позволяет определить роль отдельных участков подынтегральной функции при вычислении активной и реактивной компонент поля.

Детальность разбиения среды на оболочки окончательно выбирается на основании расчетов, поскольку необходимая толщина оболочки зависит не только от произведения $\gamma\mu\omega$, но и от λ : чем больше λ , тем тоньше должна быть оболочка. Отношение толщины оболочки к ее радиусу целесообразно выбрать постоянным на определенных интервалах изменения ρ . Практически это отношение изменяется от 0,06 до 0,1. Максимальный радиус оболочки, наиболее удаленной от оси скважины, зависит от величины λ . При больших значениях $\lambda\rho$ коэффициент отражения при внутреннем возбуждении поля $W_{\lambda i}$ убывает, как $e^{-2\lambda\rho}$. Поэтому практически достаточно потребовать выполнения условия $\rho_{\max} \leq \frac{10}{\lambda}$. Внутренний радиус первой оболочки естественно принять равным радиусу непроводящей основы зонда. Когда аргумент $\lambda\rho$ значительно меньше единицы, удобно воспользоваться приближенными выражениями для коэффициентов оболочек. При $x \rightarrow 0$ функции $I_1(x)$ и $K_1(x)$ стремятся соответственно к $\frac{x}{2}$ и $\frac{1}{x}$, поэтому вместо (2,51) имеем

$$W_{\lambda e} = - \frac{in\lambda^2\rho^2}{\left[1 + \frac{in}{2}\right]^4};$$

$$s_\lambda = \frac{1}{1 + \frac{in}{2}}; \quad (2.53)$$

$$W_{\lambda i} = - \frac{in}{\left[1 + \frac{in}{2}\right] \lambda^2\rho^2}$$

при $\lambda\rho \ll 1$.

В заключение отметим, что метод оболочек можно рассматривать как способ расчета подынтегральной функции в выражении для магнитного поля (2.52).

Аналогично решается задача для среды с горизонтальными поверхностями раздела или более общий случай, когда удельное сопротивление является функцией только одной координаты z (в цилиндрической системе координат с центром в месте расположения вертикального магнитного диполя, момент которого направлен вдоль оси z).

§ 4. МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Анализ электромагнитного поля вертикального магнитного диполя на оси цилиндрических поверхностей раздела (пласты неограниченной мощности) и в средах с горизонтальными границами позволяет исследовать как влияние скважины и зоны проникновения, так и влияние конечной мощности пласта.

Наиболее естественные методы решения этих задач — метод разделения переменных и метод оболочек, которые дают возможность представить поле через известные функции.

Следующим шагом в развитии новых представлений об электромагнитных полях, применяемых в индукционном каротаже, является рассмотрение задачи о поле вертикального магнитного диполя, расположенного на оси скважины в пласте конечной мощности. В этой задаче границы сред с различной удельной проводимостью представляют собой сочетание плоских и цилиндрических поверхностей, что не позволяет эффективно применить метод разделения переменных. В основу решения рассматриваемой задачи положен метод интегральных уравнений. Для очень хорошо проводящих сред и высоких частот решение интегрального уравнения даже на современных быстродействующих машинах связано с большими трудностями, ибо специфические особенности задачи требуют большого объема памяти машины и еще более высокой скорости операций.

Однако для частот, которые в настоящее время применяются в индукционном каротаже, решение интегрального уравнения не является сложным.

Квазистационарное электромагнитное поле $\bar{E}e^{-i\omega t}$ и $\bar{H}e^{-i\omega t}$, как известно, удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\nabla^2 \bar{E} + k^2 \bar{E} = 0; \quad (2.54)$$

$$\nabla^2 \bar{H} + k^2 \bar{H} = 0. \quad (2.55)$$

При возбуждении поля вертикальным магнитным диполем, расположенным на оси скважины (момент диполя направлен перпендикулярно плоскости раздела между пластами), вихревые токи лежат в горизонтальных плоскостях и токовые линии представляют собою окружности, коаксиальные с осью скважины. Поэтому напряженность электрического поля в цилиндрической системе координат имеет только компоненту E_φ . Компоненты вектора \bar{E} в прямоугольной системе координат также являются решением уравнения Гельмгольца

$$\nabla^2 E_x + k^2 E_x = 0 \text{ и } \nabla^2 E_y + k^2 E_y = 0, \quad (2.56)$$

здесь $k^2 = i\gamma\mu\omega$, которое во вмещающей среде равно

$$k_b^2 = i\gamma_b\mu\omega;$$

в пласте

$$k_{\text{п}}^2 = i\gamma_{\text{п}}\mu\omega;$$

в скважине

$$k_c^2 = i\gamma_c\mu\omega.$$

Представим компоненту напряженности поля E_x в виде суммы:

$$E_x = E_{0x} + E_{1x}, \quad (2.57)$$

где E_{0x} — поле в пласте или вмещающей среде (без учета влияния скважины), состоящее из поля диполя в воздухе и поля вихревых токов, индуцированных в пласте и вмещающей среде;

E_{1x} — поле, вызванное присутствием скважины, буровой раствор которой имеет иное удельное сопротивление, чем сопротивление пласта.

Из уравнения (2.56) и выражения (2.57) получаем уравнение для E_{1x} :

$$\nabla^2 E_{1x} = -k^2 E_{1x} - k^2 E_{0x} - \nabla^2 E_{0x}.$$

Во вмещающей среде

$$\nabla^2 E_{0x} + k_b^2 E_{0x} = 0, \quad (2.58)$$

поэтому

$$\nabla^2 E_{1x} = -k_b^2 E_{1x}.$$

Аналогично для области, занятой пластом, имеем

$$\nabla^2 E_{1x} = -k_n^2 E_{1x}, \quad (2.59)$$

в области, занятой скважиной и расположенной против пласта,

$$\nabla^2 E_{1x} = -k_c^2 E_{1x} + (k_n^2 - k_c^2) E_{0x}, \quad (2.60)$$

и, наконец, в области скважины, расположенной против вмещающей среды,

$$\nabla^2 E_{1x} = -k_c^2 E_{1x} + (k_b^2 - k_c^2) E_{0x}. \quad (2.61)$$

Объединяя все три случая вместе, имеем

$$\nabla^2 E_{1x} = c_1 E_{1x} + c_2 E_{0x}, \quad (2.62)$$

где

$$c_1 = \begin{cases} -k_b^2 & \text{во вмещающей среде,} \\ -k_n^2 & \text{в пласте,} \\ -k_c^2 & \text{в скважине;} \end{cases}$$

$$c_2 = \begin{cases} 0 & \text{во вмещающей среде,} \\ 0 & \text{в пласте,} \\ k_n^2 - k_c^2 & \text{в той части скважины, которая рас-} \\ & \text{положена против пласта,} \\ k_b^2 - k_c^2 & \text{в той части скважины, которая рас-} \\ & \text{положена против вмещающей среды.} \end{cases}$$

Введем функцию G , непрерывную вместе с первой производной во всей области, за исключением точки P , в которой определяется поле E_{1x} . Кроме того, функция G во вмещающей среде и пласте (включая область, занятую скважиной) удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\nabla^2 G + k^2 G = 0, \quad (2.63)$$

где

$$k^2 = \begin{cases} k_b^2 & \text{во вмещающей среде,} \\ k_n^2 & \text{в пласте.} \end{cases}$$

Умножим обе части уравнения (2.62) на функцию G и вычтем из обеих частей $E_{1x} \nabla^2 G$:

$$G \nabla^2 E_{1x} - E_{1x} \nabla^2 G = c_1 E_{1x} G + c_2 E_{0x} G - E_{1x} \nabla^2 G.$$

Интегрируя последнее равенство по всему пространству, получаем

$$\int_V (G \nabla^2 E_{1x} - E_{1x} \nabla^2 G) dv = (k_n^2 - k_c^2) \int_{V_{\text{сн}}} E_{0x} G dv + (k_n^2 - k_c^2) \int_{V_{\text{сн}}} E_{1x} G dv +$$

$$+ (k_b^2 - k_c^2) \int_{V_{\text{св}}} E_{0x} G dv + (k_b^2 - k_c^2) \int_{V_{\text{св}}} E_{1x} G dv, \quad (2.64)$$

где $V_{\text{сп}}$ —объем той части скважины, которая расположена против пласта; $V_{\text{св}}$ —остальная часть скважины. Теперь применим к левой части уравнения (2.64) формулу Грина, предварительно охватив окрестность точки P поверхностью s_0 :

$$\begin{aligned} \int_V (G \nabla^2 E_{1x} - E_{1x} \nabla^2 G) dv &= \int_{s_0} \left(G \frac{\partial E_{1x}}{\partial n} - E_{1x} \frac{\partial G}{\partial n} \right) ds = \\ &= \int_{s_0} \left(E_{1x} \frac{\partial G}{\partial R} - G \frac{\partial E_{1x}}{\partial R} \right) ds. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Вблизи точки P функция E_{1x} конечна, функция G стремится к бесконечности как $\frac{1}{R}$, где R —радиус сферической поверхности s_0 . Поэтому значение интеграла, стоящего в правой части выражения (2.65), при $R \rightarrow 0$ стремится к величине $-4\pi E_{1x}(p)$.

Таким образом, для x -компоненты электрического поля получаем следующее интегральное уравнение:

$$\begin{aligned} E_{1x} &= \frac{k_c^2 - k_n^2}{4\pi} \int_{V_{\text{сп}}} E_{0x} G dv + \frac{k_c^2 - k_B^2}{4\pi} \int_{V_{\text{св}}} E_{0x} G dv + \frac{k_c^2 - k_n^2}{4\pi} \int_{V_{\text{сп}}} E_{1x} G dv + \\ &+ \frac{k_c^2 - k_B^2}{4\pi} \int_{V_{\text{св}}} E_{1x} G dv. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Аналогичное интегральное уравнение имеет место для E_{1y} :

$$\begin{aligned} E_{1y} &= \frac{k_c^2 - k_n^2}{4\pi} \int_{V_{\text{сп}}} E_{0y} G dv + \frac{k_c^2 - k_B^2}{4\pi} \int_{V_{\text{св}}} E_{0y} G dv + \\ &+ \frac{k_c^2 - k_n^2}{4\pi} \int_{V_{\text{сп}}} E_{1y} G dv + \frac{k_c^2 - k_B^2}{4\pi} \int_{V_{\text{св}}} E_{1y} G dv. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Умножая уравнения (2.66) и (2.67) соответственно на единичные векторы i и j и складывая их, получаем

$$\begin{aligned} E_{1\varphi}(p) i_{\varphi}(p) &= \frac{k_c^2 - k_n^2}{4\pi} \int_{V_{\text{сп}}} E_{0\varphi} G i_{\varphi}(q) \rho d\rho d\varphi dz + \frac{k_c^2 - k_B^2}{4\pi} \int_{V_{\text{св}}} E_{0\varphi} G i_{\varphi}(q) \rho d\rho d\varphi dz + \\ &+ \frac{k_c^2 - k_n^2}{4\pi} \int_{V_{\text{сп}}} E_{1\varphi} G i_{\varphi}(q) \rho d\rho d\varphi dz + \frac{k_c^2 - k_B^2}{4\pi} \int_{V_{\text{св}}} E_{1\varphi} G i_{\varphi}(q) \rho d\rho d\varphi dz, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} E_{1\varphi}(p) &= \frac{k_c^2 a^2 - k_n^2 a^2}{4\pi} \int_{V_{\text{сп}}} E_{0\varphi} G \cos \varphi \alpha d\alpha d\varphi dz + \\ &+ \frac{k_c^2 a^2 - k_B^2 a^2}{4\pi} \int_{V_{\text{св}}} E_{0\varphi} G \cos \varphi \alpha d\alpha d\varphi dz + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{k_c^2 a^2 - k_n^2 a^2}{4\pi} \int_{V_{\text{сп}}} E_{1\varphi} G \cos \varphi \alpha \, d\alpha \, d\varphi \, dz + \\
& + \frac{k_c^2 a^2 - k_b^2 a^2}{4\pi} \int_{V_{\text{св}}} E_{1\varphi} G \cos \varphi \alpha \, d\alpha \, d\varphi \, dz, \quad (2.68)
\end{aligned}$$

где φ — угол между единичными векторами i_φ в точке p и в точке q , по которой производится интегрирование, a — радиус скважины и $\rho = \alpha a$.

В условиях индукционного каротажа параметры

$$m_1 = \frac{k_c^2 a^2 - k_n^2 a^2}{4\pi} \quad (2.69)$$

и

$$m_2 = t m_1 = \frac{k_c^2 a^2 - k_b^2 a^2}{4\pi}, \quad (2.70)$$

стоящие перед знаком интеграла в выражении (2.68), обычно значительно меньше единицы. Так, если принять $\rho_c = 0,1$ мм, $a = 0,1$ м, $f = 10^5$ гц, то $|m_1|$ и $|m_2|$ меньше 0,01, т. е. длина волны в скважине во много раз больше радиуса скважины.

Предположим, что $|m_1| > |m_2|$, и представим функцию $E_{1\varphi}$ как сумму $E_{1\varphi} = \sum_{n=1}^{\infty} m_1^n E_{1\varphi}^{(n)}$. Подставив ее в уравнение (2.68), получаем

$$\begin{aligned}
& m_1 E_{1\varphi}^{(1)} + m_1^2 E_{1\varphi}^{(2)} + \dots = m_1 \left(\int_{V_{\text{сп}}} E_{0\varphi} G \cos \varphi \alpha \, d\alpha \, d\varphi \, dz + \right. \\
& + t \int_{V_{\text{св}}} E_{0\varphi} G \cos \varphi \alpha \, d\alpha \, d\varphi \, dz \left. + m_1 \int_{V_{\text{сп}}} \{m_1 E_{1\varphi}^{(1)} + m_1^2 E_{1\varphi}^{(2)} + \dots\} G \cos \varphi \alpha \, d\alpha \, d\varphi \, dz + \right. \\
& \left. + t m_1 \int_{V_{\text{св}}} \{m_1 E_{1\varphi}^{(1)} + m_1^2 E_{1\varphi}^{(2)} + \dots\} \cdot G \cos \varphi \alpha \, d\alpha \, d\varphi \, dz, \right.
\end{aligned}$$

откуда

$$E_{1\varphi}^{(1)} = \int_{V_{\text{сп}}} E_{0\varphi} G \cos \varphi \alpha \, d\alpha \, d\varphi \, dz + t \int_{V_{\text{св}}} E_{0\varphi} G \cos \varphi \alpha \, d\alpha \, d\varphi \, dz \quad (2.71)$$

и

$$E_{1\varphi}^{(k)} = \int_{V_{\text{сп}}} E_{1\varphi}^{(k-1)} G \cos \varphi \alpha \, d\alpha \, d\varphi \, dz + t \int_{V_{\text{св}}} E_{1\varphi}^{(k-1)} \cdot G \cos \varphi \alpha \, d\alpha \, d\varphi \, dz.$$

Как было отмечено выше, поле своим возникновением обязано токам в среде и току в генераторной катушке. Расчеты электромагнитного поля на оси скважины в пластах неограниченной мощности (см. ниже) показывают, что влияние индуцированных в среде токов обычно не превышает 20—50% по сравнению с током источника для частот, применяемых в настоящее время в индукционном каротаже. Поэтому можно, по-видимому, считать, что второе приближение составляет не более 10% от всего вторичного поля, если $|m_1| \leq 0,1$.

Аналогичное интегральное уравнение может быть получено при проникновении фильтра бурового раствора в пласт. Если в качестве

функции Грина принять z-овую компоненту для вектор-потенциала в горизонтально-слоистой среде (стр. 141), то в интегральном уравнении (2.68) добавятся интегралы по объему, занятому зоной прониновения.

Техническая сложность расчета электрического поля вызвана необходимостью вычисления объемного интеграла, причем функция Грина, являясь решением соответствующей краевой задачи, выражается через несобственные интегралы. Следовательно, фактически поле выражается через четырехкратный интеграл.

Однако, используя осевую симметрию задачи и соответствующие теоремы сложения функций Бесселя, можно проинтегрировать по φ и получить выражения поля через тройные интегралы *.

§ 5. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА

Исследование электромагнитных полей на оси скважины в пласте неограниченной мощности, основанное на решении уравнения Гельмгольца, приводит к выражению для поля (как это будет показано ниже) через несобственные интегралы Фурье, подынтегральная функция которых состоит из осциллирующего множителя и комплексной функции, представляющей собою комбинацию модифицированных функций Бесселя первого и второго рода от комплексного аргумента. Поэтому численные расчеты поля даже на быстродействующих вычислительных машинах требуют относительно большой затраты машинного времени. Еще в большей степени эти трудности проявляются при расчете поля на оси скважины в пласте конечной мощности.

Это обстоятельство требует наряду с точными расчетами развивать более простые, но приближенные способы, обеспечивающие достаточную точность в области параметров, характеризующих среды и поля, применяемые в настоящее время в индукционном каротаже. Здесь описаны два приближенных метода расчета — метод Долля и метод, предлагаемый автором.

Приближенная теория Долля

В 1949 г. американский ученый Долль разработал приближенную теорию индукционного каротажа. В основе ее лежит предположение о том, что при достаточно высоком удельном сопротивлении пород и низкой частоте можно пренебречь взаимодействием токов, индуцированных в проводящей среде. Поэтому фаза токов равна 90° независимо от расстояния до генераторной катушки, и измеряемый сигнал является суммой отдельных сигналов, создаваемых различными участками среды, причем каждое создаваемое есть функция только удельной проводимости соответствующего участка.

Как это следует из анализа поля магнитного диполя в однородной среде, такой характер поля тем ближе к действительности, чем ниже частота и выше удельное сопротивление пород.

Область частот и удельных сопротивлений, в которой справедлива эта теория для неоднородных сред, будет установлена ниже путем сравнения с результатами расчета строгими методами.

Применение теории Долля позволяет получить простые выражения для активной компоненты поля в средах с горизонтальными поверхно-

* Подобная методика использована при исследовании влияния датчиков конечных размеров (см. ниже).

стями раздела и для многих случаев достаточно точно определяет влияние токов, индуцированных в скважине и промежуточной зоне.

Формулы, полученные на основании этой теории, следует рассматривать как асимптотические, справедливые при волнах, очень длинных по сравнению с радиусом скважины, мощностью пласта и диаметром зоны проникновения.

Представим себе участок породы, вырезанный из пространства двумя горизонтальными плоскостями и двумя коаксиальными цилиндрическими поверхностями, имеющими общую со скважиной ось (рис. 2.4). Он будет

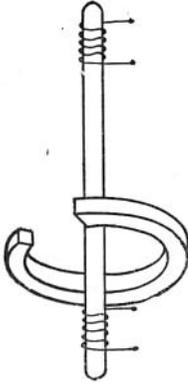


Рис. 2.4.

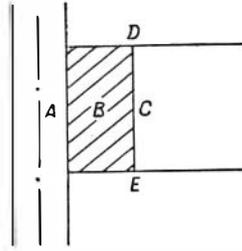


Рис. 2.5.

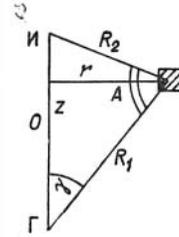


Рис. 2.6.

представлять собою горизонтальное кольцо однородной породы с центром на оси скважины. Сечение кольца является квадратом с бесконечно малыми по сравнению с диаметром кольца сторонами и площадью, равной единице. Долль называет такое кольцо элементарным единичным кольцом породы.

Найдем сигнал, который вносит такое кольцо породы в общий сигнал, измеряемый на выходе приемной катушки. Как было показано на стр. 13, ток, индуцированный в единичном кольце,

$$I = \frac{i\gamma\mu\omega}{4\pi} \frac{rM_{\Gamma}}{R_1^3}, \quad (2.72)$$

где γ — удельная проводимость кольца.

Ток в элементарном кольце радиуса r создает вторичное магнитное поле, напряженность которого на оси кольца

$$H = \frac{1}{2} \frac{Ir^2}{R_2^3}, \quad (2.73)$$

где R_2 — расстояние от точек кольца до точки наблюдения. Соответственно магнитный поток, пронизывающий приемную катушку,

$$\Phi = \frac{\mu}{2} \frac{Ir^2}{R_2^3} s_2 n_2,$$

где s_2 — площадь витка приемной катушки;
 n_2 — число витков в ней.

Для э. д. с. в приемной катушке, возникшей при изменении магнитного потока Φ , имеем выражение

$$\varepsilon = i\omega\Phi = \frac{i\omega\mu}{2} \frac{I r^2}{R_2^3} \cdot s_2 n_2. \quad (2.74)$$

Воспользовавшись формулой (2.72), получаем окончательное выражение для э.д.с. в приемной катушке

$$\varepsilon = -\frac{\pi}{2} f^2 \mu^2 \gamma I_0 s_1 s_2 n_1 n_2 \frac{r^3}{R_1^3 R_2^3}. \quad (2.75)$$

Здесь I_0 — сила тока, питающего генераторную катушку;
 s_1 и n_1 , s_2 и n_2 — соответственно площадь витка и число витков передающей
 и приемной катушек;

f — частота поля.

Формулу (2.75) представим в виде

$$\varepsilon = k_0 \gamma g_0, \quad (2.76)$$

где $k_0 = -\frac{\pi}{2} f^2 \mu^2 I_0 s_1 s_2 n_1 n_2$ — так называемый приборный коэффициент;

$$g_0 = \frac{r^3}{R_1^3 R_2^3} \quad (2.77)$$

— функция, зависящая от радиуса и расположения кольца породы относительно системы катушек и расстояния между катушками. Доллю назвал эту функцию геометрическим фактором элементарного кольца, или элементарным геометрическим фактором.

Таким образом, сигнал, создаваемый элементарным кольцом породы, пропорционален удельной проводимости элементарного кольца и его геометрическому фактору. Представим функцию g_0 в цилиндрических координатах r , z . Так как

$$R_1 = \left[r^2 + \left(\frac{L}{2} + z \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{и} \quad R_2 = \left[r^2 + \left(\frac{L}{2} - z \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

то для g_0 имеем

$$g_0 = \frac{r^3}{\left[r^2 + \left(\frac{L}{2} + z \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \left[r^2 + \left(\frac{L}{2} - z \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.78)$$

Вместо функции g_0 введем, следуя Доллю, новую функцию g , равную:

$$g = \frac{L}{2} g_0 = \frac{L}{2} \frac{r^3}{\left[r^2 + \left(\frac{L}{2} + z \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \left[r^2 + \left(\frac{L}{2} - z \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.79)$$

Одновременно приборный коэффициент k_0 умножается на $\frac{2}{L}$. При этом, как будет показано ниже, геометрический фактор от всего пространства равен единице.

Зная сигнал, создаваемый одним элементарным кольцом породы, можно рассчитать сигнал, создаваемый всем пространством, который будет

равен сумме сигналов элементарных колец породы, т. е.

$$\varepsilon = k \iint \gamma g ds, \quad (2.80)$$

где ds — площадь сечения кольца.

В общем случае удельная проводимость может быть непрерывной функцией координат точек пространства.

Если среда однородна, то, согласно (2.80),

$$\varepsilon = k\gamma \iint g ds = k\gamma \iiint g dr dz.$$

Так как радиусы элементарных колец могут изменяться от 0 до ∞ , а координата z от $-\infty$ до ∞ , то

$$\varepsilon = k\gamma \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g dr dz.$$

Неоднородную среду с некоторым распределением проводимости можно изобразить в виде ее сечения вертикальной плоскостью, проходящей через ось скважины (рис. 2.5). Тогда, при условии осевой симметрии, участки среды с различными проводимостями будут изображаться на вертикальном сечении в виде площадок, которые обозначим А, В, С, D, Е и т. д. Вклад каждого участка в полный сигнал равен произведению проводимости породы на геометрический фактор участка. Геометрический фактор какого-либо участка породы можно представить как сумму геометрических факторов элементарных колец по всей площади сечения рассматриваемого участка.

Если проводимости участков А, В, С и т. д. равны соответственно γ_A , γ_B , γ_C и т. д., то полный сигнал

$$\varepsilon = k \left[\gamma_A \iint_A g_A ds + \gamma_B \iint_B g_B ds + \gamma_C \iint_C g_C ds + \dots \right], \quad (2.81)$$

где $\iint_A g_A ds$, $\iint_B g_B ds$ и т. д. — геометрические факторы участков А, В, С и т. д.

Обозначая $\iint_A g_A ds = G_A$, $\iint_B g_B ds = G_B$ и т. д., получим выражение для полного сигнала в неоднородной среде в виде

$$\varepsilon = k [\gamma_A G_A + \gamma_B G_B + \gamma_C G_C + \dots]. \quad (2.82)$$

Когда среда, окружающая каротажный снаряд, однородна, получающееся значение $\frac{\varepsilon}{k}$ равно истинной удельной проводимости среды, так как геометрический фактор всего пространства равен 1. Если же среда неоднородна, то функцию $\frac{\varepsilon}{k}$ принято называть кажущейся проводимостью аналогично тому, как рассматривается кажущееся удельное сопротивление при обычном электрическом каротаже.

Кажущаяся проводимость, следовательно, равна:

$$\gamma_k = \frac{\varepsilon}{k} = \gamma_A G_A + \gamma_B G_B + \gamma_C G_C + \dots \quad (2.83)$$

Из этого выражения видно, что удельная проводимость участка породы и его геометрический фактор являются величинами равнозначными: участок породы с высокой проводимостью, но малым геометрическим фактором может дать такой же сигнал, что и участок с малой проводимостью, но большим геометрическим фактором.

Остановимся подробнее на анализе геометрического фактора g , который, как уже было показано выше, равен:

$$g = \frac{L}{2} \frac{r^3}{\left[r^2 + \left(\frac{L}{2} + z \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \left[r^2 + \left(\frac{L}{2} - z \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Легко показать, что геометрический фактор g зависит от угла, под которым видны обе катушки зонда из точек элементарного кольца породы, и равен:

$$g = \frac{\sin^3 A}{2L^2}.$$

Действительно, как видно из рис. 2.6,

$$\frac{\sin A}{L} = \frac{\sin \alpha}{R_2}; \quad \sin \alpha = \frac{r}{R_1}; \quad \frac{\sin A}{L} = \frac{r}{R_1 R_2}$$

и геометрический фактор

$$g = \frac{L}{2} \frac{r^3}{R_1^3 R_2^3} = \frac{L}{2} \frac{\sin^3 A}{L^3} = \frac{\sin^3 A}{2L^2},$$

т. е. для данного зонда геометрический фактор целиком определяется углом, под которым виден зонд из точек элементарного кольца. Следовательно, все элементарные кольца, из точек которых зонд виден под одним и тем же углом, имеют одинаковые геометрические факторы и, таким образом, вносят в общий сигнал одну и ту же величину при условии, что их проводимости равны.

Геометрическим местом сечений элементарных колец с равными геометрическими факторами вертикальной плоскостью будут окружности, проходящие через приемную и передающую катушки (см. рис. 2.6). Наибольший геометрический фактор будет у тех колец, для которых $\sin A = 1$. Сечения этих колец лежат на окружности, диаметр которой равен длине зонда.

Используя представление об элементарном геометрическом факторе, не представляет больших трудностей определить сигнал от различных участков среды. Если среда однородна, то сигналы, создаваемые различными участками, зависят только от их геометрических факторов.

При решении прямых задач теории индукционного каротажа в средах с цилиндрическими или горизонтальными поверхностями раздела Доллем соответственно вводятся понятия геометрического фактора элементарного цилиндра и геометрического фактора элементарного пласта.

Физические основы теории Долля позволили разработать чрезвычайно простой аналитический аппарат для решения задач с горизонтальными поверхностями раздела. Вместе с тем исследование задач с цилиндрическими границами с помощью геометрического фактора кольца значительно более громоздкое, и поэтому данный раздел теории был недостаточно в свое время освещен как в зарубежной, так и отечественной литературе.

Как будет показано ниже, решение этой задачи вытекает из анализа строгого решения поля вертикального магнитного диполя на оси скважины

в среде с цилиндрическими поверхностями раздела. При этом соответствующие понятия о геометрическом факторе тонкого цилиндрического слоя или цилиндра имеют удобные для расчетов аналитические выражения, что позволяет достаточно просто получить асимптотические формулы.

Приближенная теория, учитывающая скин-эффект во внешней области

В основе теории Долля лежит предположение об отсутствии скин-эффекта в проводящей среде независимо от расстояния до диполя. Однако уже анализ поля переменного магнитного диполя в однородной среде показывает, что с увеличением расстояния от источника активная компонента плотности вихревых токов становится значительно меньше, чем это следует из теории Долля. Сопоставление результатов расчета поля на оси скважины приближенным и строгим методами подтвердило отмеченную закономерность в распределении токов, поскольку значение для поля, полученное строгими расчетами, меньше, чем полученное с помощью приближенных методов.

Предлагаемый способ расчета в отличие от метода Долля при определенных условиях правильно учитывает явление скин-эффекта в среде. Идея этого способа расчета заключается в следующем. Представим все токовое пространство, окружающее индукционный зонд, состоящим из двух областей: внутренней, в которой находится зонд, и внешней, удельная проводимость которой постоянна *, и будем считать, что выполняются два условия:

1) вихревые токи во внутренней области, определяющие сигнал в измерительной катушке зонда, сдвинуты по фазе на 90° , а их плотность зависит только от геометрических параметров и удельной проводимости в данной точке, т. е. между ними отсутствует взаимодействие;

2) плотность вихревых токов во внешней области не зависит от распределения удельных сопротивлений во внутренней области, иными словами, отсутствует взаимодействие между токами внутренней и внешней областей.

Активная компонента магнитного поля на оси скважины представляет собою сумму магнитного поля, созданного токами внутренней и внешней областей

$$h_z = h_z^{(i)} + h_z^{(e)}. \quad (2.84)$$

Здесь h_z — вертикальная компонента магнитного поля, отнесенная к магнитному полю воздуха; $h_z^{(i)}$ — магнитное поле токов внутренней области; $h_z^{(e)}$ — магнитное поле однородной по проводимости внешней области. Согласно первому условию и результатам, полученным в первой главе, магнитное поле внутренней области можно представить в виде

$$h_z^{(i)} = \frac{\omega \mu L^2}{2} \gamma_K^{(i)}, \quad (2.85)$$

где μ — магнитная проницаемость воздуха, равная $4\pi \cdot 10^{-7} \frac{2H}{M}$; ω — круговая частота; L — длина двухкатушечного зонда; $\gamma_K^{(i)}$ — значение кажущейся проводимости внутренней области, связанное с истинным удельным сопротивлением известным соотношением

$$\gamma_K^i = \gamma_A G_A + \gamma_B G_B + \gamma_C G_C + \dots + \gamma_F G_F, \quad (2.86)$$

* Это требование будет в дальнейшем снято.

где G_A, G_B, \dots, G_F — геометрические факторы участков, имеющие соответственно удельные проводимости $\gamma_A, \gamma_B, \dots, \gamma_F$. Если электропроводность внутренней области принять равной удельной проводимости внешней области, то поле можно представить в виде суммы

$$h_z^{\text{одн}} = h_{ze}^{(i)} + h_z^{(e)}, \quad (2.87)$$

так как поле токов внешней области, согласно второму условию (см. стр. 40), не зависит от распределения электропроводности внутренней области. Здесь $h_z^{\text{одн}}$ — магнитное поле в однородной среде с удельной проводимостью внешней области γ_e ; $h_{ze}^{(i)}$ — магнитное поле от внутренней области с удельной проводимостью γ_e , которое можно представить, согласно первому условию, через геометрический фактор внутренней области Q_i ;

$$h_{ze}^{(i)} = \frac{\omega \mu L^2}{2} \gamma_e Q_i. \quad (2.88)$$

Таким образом, для магнитного поля от токов внешней области получаем выражение

$$h_z^e = h_z^{\text{одн}} - h_{ze}^{(i)} = h_z^{\text{одн}} - \frac{\omega \mu L^2}{2} \gamma_e Q_i \quad (2.89)$$

и для суммарного магнитного поля имеем

$$h_z = \frac{\omega \mu L^2}{2} \gamma_K^{(1)} + h_z^{\text{одн}} - \frac{\omega \mu L^2}{2} \gamma_e Q_i = h_z^{\text{одн}} + \frac{\omega \mu L^2}{2} (\gamma_K^{(1)} - \gamma_e Q_i). \quad (2.90)$$

Значит, для определения поля на оси скважины достаточно знать геометрические факторы соответствующих участков внутренней области и поле диполя в однородной среде с удельной проводимостью внешней области γ_e . В частности, удельная электропроводность во внутренней области может изменяться непрерывно. Значения активной компоненты поля диполя в однородной среде приведены в табл. 1.2. Расчет геометрических факторов или интегралов типа $(\int g ds)$ не вызывает больших трудностей. Для наиболее важных случаев эти расчеты выполнены. Активная компонента магнитного поля диполя в однородной среде, как известно, может быть записана в виде

$$h_z^{\text{одн}} = \frac{\gamma_e \mu \omega L^2}{2}, \quad (2.91)$$

если выполняется условие $\sqrt{\frac{\gamma_e \mu \omega}{2}} L \ll 1$.

Подставляя выражение для $h_z^{\text{одн}}$ из формулы (2.91) в формулу (2.90), получаем

$$h_z = \frac{\omega \mu L^2}{2} [\gamma_e (1 - Q_i) + \gamma_A G_A + \gamma_B G_B + \dots + \gamma_F G_F]$$

или

$$h_z = \frac{\omega \mu L^2}{2} [\gamma_e Q_e + \gamma_A G_A + \gamma_B G_B + \dots + \gamma_F G_F]. \quad (2.92)$$

Здесь Q_e — геометрический фактор внешней области. Последнее выражение для h_z совпадает с формулой для поля в неоднородной среде, полученной методом Долля.

Используя связь между кажущейся проводимостью и полем, получаем

$$\gamma_k = \frac{2}{\omega \mu L^2} h_z = \gamma_k^{\text{одн}} + \gamma_k^{(i)} - \gamma_e Q_i$$

или

$$\frac{\gamma_k}{\gamma_e} = \frac{\gamma_k^{\text{одн}}}{\gamma_e} + \frac{\gamma_k^{(i)}}{\gamma_e} - Q_i = \frac{\gamma_k^{\text{одн}}}{\gamma_e} + \frac{\gamma_A}{\gamma_e} G_A + \frac{\gamma_B}{\gamma_e} G_B + \dots + \frac{\gamma_F}{\gamma_e} G_F - Q_i. \quad (2.93)$$

В табл. 1.2 приведены значения $\frac{\gamma_k^{\text{одн}}}{\gamma_e}$.

Методика расчета геометрических факторов для областей произвольной формы основана на введении геометрического фактора единичного кольца g . Согласно формуле (2.81), имеем

$$G_A = \int_A g ds, \quad G_B = \int_B g ds$$

и т. д. Очевидно, что чем меньше размеры внутренней области и выше удельное сопротивление среды, тем при больших частотах можно применить этот метод расчета.

При сопоставлении с результатами строгих расчетов полей в неоднородных средах будут установлены границы применимости этого метода.

Согласно результатам, полученным выше, для поля на оси скважины в пласте неограниченной мощности (двухслойный разрез) имеем

$$h_z = h_z^{\text{одн}} + \frac{\omega \mu L^2}{2} (\gamma_c - \gamma_n) Q_c(\alpha) \quad (2.94)$$

и для кажущейся проводимости

$$\frac{\gamma_k}{\gamma_n} = \frac{\gamma_k^{\text{одн}}}{\gamma_n} + \left(\frac{\gamma_c}{\gamma_n} - 1 \right) Q_c(\alpha). \quad (2.95)$$

Здесь γ_c — удельная проводимость скважины;

γ_n — удельная проводимость пласта;

$Q_c(\alpha)$ — геометрический фактор скважины;

α — отношение длины зонда L к радиусу скважины a ;

$h_z^{\text{одн}}$ и $\gamma_k^{\text{одн}}$ — активная компонента магнитного поля и значение кажущейся проводимости в однородной среде с удельной проводимостью пласта.

Из анализа строгого решения поля магнитного диполя на оси цилиндрических поверхностей раздела (см. главу третью) было получено выражение для геометрического фактора скважины через несобственные интегралы

$$Q_c(\alpha) = 1 - \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{m}{2} [2K_0(m) K_1(m) - m(K_1^2 - K_0^2)] \cos \alpha m \, dm,$$

где $K_0(m)$ и $K_1(m)$ — модифицированные функции Бесселя второго рода.

Основные сведения, касающиеся методики вычислений функций $Q_c(\alpha)$, а также значения геометрического фактора скважины $Q_c(\alpha)$ (см. табл. 3.2), изложены ниже.

Если внутренняя область состоит из скважины и зоны проникновения, то выражения для активной компоненты h_z и γ_k принимают вид

$$h_z = h_z^{\text{одн}} + \frac{\omega \mu L^2}{2} (\gamma_c - \gamma_n) Q_c(\alpha) + \frac{\omega \mu L^2}{2} (\gamma_\Delta - \gamma_n) Q_\Delta(\alpha); \quad (2.96)$$

$$\frac{\gamma_k}{\gamma_n} = \frac{\gamma_k^{\text{одн}}}{\gamma_n} + \left(\frac{\gamma_c}{\gamma_n} - 1 \right) Q_c(\alpha) + \left(\frac{\gamma_\Delta}{\gamma_n} - 1 \right) Q_\Delta(\alpha), \quad (2.97)$$

где $Q_\Delta(\alpha)$ — геометрический фактор зоны проникновения, равный разности двух геометрических факторов скважины

$$Q_\Delta(\alpha) = Q_c\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) - Q_c(\alpha)$$

(β — отношение радиуса зоны проникновения к радиусу скважины). В дальнейшем будет показано, что предложенный способ расчета позволяет с достаточно высокой точностью получить значения для активной компоненты поля в тех случаях, которые чаще всего встречаются в практике индукционного каротажа.

Таким образом, для расчета поля с цилиндрическими границами необходимо иметь значения двух функций — активной компоненты поля диполя в однородной среде и геометрического фактора скважины $Q_c(\alpha)$.

Аналогичная методика расчета применяется для пластов конечной мощности (без цилиндрических поверхностей раздела), особенно для пластов небольшой мощности.

До этого момента мы предполагали, что внешняя область однородна по удельной проводимости. Это требование позволило получить простые формулы для расчета поля в средах с цилиндрическими или горизонтальными границами. Однако при исследовании поля на оси скважины в пласте конечной мощности мы должны отказаться от выполнения этого условия.

Представим поле в пласте конечной мощности (без учета влияния скважины) h_0 в виде суммы

$$h_0 = h_c + h_n, \quad (2.98)$$

где h_c — магнитное поле вихревых токов, индуцированных в вертикальном цилиндре с радиусом, равным радиусу скважины;

h_n — магнитное поле вихревых токов в остальной части среды

$$h_n = h_0 - h_c. \quad (2.99)$$

Магнитное поле h_c можно выразить через геометрические факторы следующим образом:

$$h_c = \frac{\mu \omega L^2}{2} [\gamma_n Q_c^n + \gamma_b Q_c^b]. \quad (2.100)$$

Здесь Q_c^n — геометрический фактор участка скважины А, расположенный против пласта; Q_c^b — геометрический фактор остальной части скважины В:

$$Q_c^n = \int_A g ds; \quad Q_c^b = \int_B g ds. \quad (2.101)$$

Очевидно, что геометрический фактор скважины Q_c равен сумме

$$Q_c = Q_c^n + Q_c^b. \quad (2.102)$$

Итак, магнитное поле вихревых токов в пласте конечной мощности без учета токов внутри скважины (непроводящая скважина) может быть представлено в виде

$$h_n = h_0 - \frac{\omega \mu L^2}{2} [\gamma_n Q_c^n + \gamma_b Q_c^b]. \quad (2.103)$$

Если скважина заполнена буровым раствором с удельной проводимостью γ_c , то суммарное магнитное поле на оси скважины в пласте конечной мощности записывается так:

$$\begin{aligned} h &= h_0 - \frac{\omega \mu L^2}{2} [\gamma_n Q_c^n + \gamma_b Q_c^b] + \frac{\omega \mu L^2}{2} \gamma_c Q_c = \\ &= h_0 + \frac{\omega \mu L^2}{2} [\gamma_c Q_c - \gamma_n Q_c^n - \gamma_b Q_c^b] = \\ &= h_0 + \frac{\omega \mu L^2}{2} [(\gamma_b - \gamma_n) Q_c^n + (\gamma_c - \gamma_b) Q_c]. \end{aligned} \quad (2.104)$$

Магнитное поле вертикального магнитного диполя h_0 в пласте конечной мощности выражается через известные функции. Имеются подробные таблицы для функции h_0 . Например, если зонд расположен симметрично относительно границ пласта, то (см. стр. 141)

$$h_0 = h_z^{\text{одн}} + L^3 \int_0^{\infty} \frac{\lambda^3}{\lambda_2} k_{12} e^{-2\lambda_2 H} \frac{e^{\lambda_2 H} + k_{12} \operatorname{ch} \lambda_2 L}{1 - k_{12}^2 e^{-2\lambda_2 H}} d\lambda$$

при $H \geq L$;

$$h_0 = 2L^3 \int_0^{\infty} \frac{\lambda^3 \lambda_2 e^{-H(\lambda_2 - \lambda_1)} d\lambda}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 [1 - k_{12}^2 e^{-2\lambda_2 H}]}$$

при $H \leq L$.

Здесь $h_z^{\text{одн}}$ — магнитное поле диполя в однородной среде с удельным сопротивлением пласта;

$$\lambda_2 = \sqrt{\lambda^2 - k_n^2}; \quad \lambda_1 = \sqrt{\lambda^2 - k_b^2}; \quad k_{12} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_1};$$

H — мощность пласта;

L — длина зонда.

В более сложном случае, когда имеет место проникновение бурового раствора в пласт, поле на оси может быть записано в виде

$$h_z = h_z^{\text{нн}} + \frac{\omega \mu L^2}{2} [(\gamma_\Delta - \gamma_n) Q_\Delta^n + (\gamma_b - \gamma_n) Q_c^n + (\gamma_c - \gamma_b) Q_c]. \quad (2.105)$$

Функция Q_Δ^n выражается через Q_c^n точно так же, как геометрический фактор зоны проникновения Q_Δ через геометрический фактор скважины Q_c .

Следовательно, расчет электромагнитного поля на оси скважины в пласте конечной мощности сводится к вычислению поля в пласте конечной мощности (без учета влияния скважины и зоны проникновения) и определению геометрических факторов вертикальных цилиндров ограниченной высоты, ось которых совпадает с осью скважины. В табл. 4.4 приведены значения функции Q_c^n .

Нетрудно получить из формулы (2.105) выражения для поля в двухслойной и трехслойной среде, выведенные нами несколько ранее. Отметим, что для поля в трехслойной среде можно получить иное приближенное выражение, которое в отличие от (2.96) справедливо в более широком диапазоне изменения частот и удельных сопротивлений, но для этого необходимо иметь результаты строгого расчета поля в двухслойной среде. Как известно, поле на оси скважины определяется параметрами

$$\sqrt{\frac{a_c}{\gamma_{\text{н}}\mu\omega}}; \quad \sqrt{\frac{L}{\gamma_{\text{н}}\mu\omega}}; \quad \frac{\gamma_{\text{н}}}{\gamma_c}.$$

Из результатов расчета поля в двухслойной среде можно получить значения поля на оси скважины, радиус которой равен радиусу зоны проникновения. Заменяв центральную часть зоны проникновения средой с удельным сопротивлением бурового раствора скважины, получаем трехслойную среду, поле в которой определяется из выражения

$$h = h_{02} + \frac{\gamma_{\text{н}}\mu\omega L^2}{2} \left(\frac{\gamma_c}{\gamma_{\text{н}}} - \frac{\gamma_{\Delta}}{\gamma_{\text{н}}} \right) Q_c(\alpha), \quad (2.106)$$

где h_{02} — поле на оси скважины, радиус которой равен радиусу зоны проникновения; L — длина зонда; $Q_c(\alpha)$ — геометрический фактор скважины.

Описанный метод расчета справедлив в том случае, когда можно выделить две области, распределение тока в которых происходит совершенно независимо друг от друга. Эти формулы для поля можно получить другим путем, а именно рассматривая первое приближение интегрального уравнения (2.71), описывающего поле на оси скважины в пласте конечной мощности.

Согласно (2.71), в первом приближении электрическое поле на оси скважины равно

$$E_{1z} = E_{0z} + m_1 \left[\int_{V_{\text{сн}}} E_{0z} G \cos \varphi \alpha \, d\alpha \, d\varphi \, dz + t \int_{V_{\text{сн}}} E_{0z} G \cos \varphi \alpha \, d\alpha \, d\varphi \, dz \right].$$

Влияние скважины определяется вторым членом в правой части формулы (2.71) и может быть объяснено следующим образом: вихревые токи в скважине возникают под действием поля вертикального магнитного диполя в пласте конечной мощности (без учета влияния токов в скважине). Между токами в скважине отсутствует взаимодействие, и, наконец, на величину токов в пласте не влияет изменение удельной проводимости бурового раствора скважины. Таким образом, результаты расчета будут тем ближе к действительным значениям поля, чем меньше параметры

$$m_{\text{н}} = \frac{k_c^2 a^2 - k_{\text{н}}^2 a^2}{4\pi} \quad \text{и} \quad m_{\text{в}} = \frac{k_c^2 a^2 - k_{\text{в}}^2 a^2}{4\pi},$$

т. е. длина волны в среде должна быть во много раз больше поперечных размеров внутренней области, в частности радиуса скважины. Сопоставление расчетов по точным и приближенным формулам позволяет выяснить характер распределения токов в скважине, зоне проникновения, пласте и тем самым установить наиболее благоприятные условия для применения фокусирующих систем.

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ
 ВЕРТИКАЛЬНОГО МАГНИТНОГО ДИПОЛЯ
 НА ОСИ КООКСИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ
 ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ РАЗДЕЛА

§ 1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

При постановке задачи примем следующие допущения:

1. Все среды, окружающие измерительную установку, однородны и изотропны.

2. Электрические свойства сред не изменяются по направлению, параллельному оси скважины. Практически это означает, что кровля и подошва пласта, в пределах которой находится каротажный зонд, достаточно удалены от него.

3. Столб жидкости, заполняющей скважину, имеет форму бесконечно длинного кругового цилиндра.

4. Промежуточная среда между буровым раствором и неизменной породой представляет собою совокупность коаксиальных цилиндрических слоев, ось которых совпадает с осью скважины.

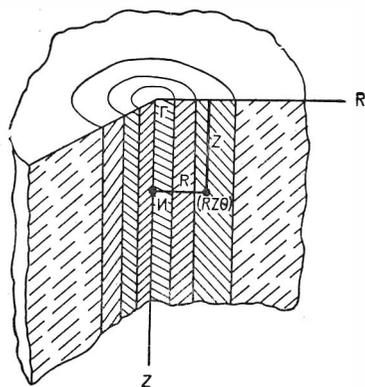


Рис. 3.1.

5. Питающие и измерительные катушки, составляющие каротажный зонд, находятся на оси скважины и по сравнению с размерами зонда и радиусом скважины могут считаться точечными*.

6. Зонд состоит из одной питающей и одной измерительной катушки.

Математически задача формулируется так: пространство разделено совокупностью $n - 1$ бесконечно протяженных коаксиальных круговых цилиндрических поверхностей с радиусами a_1, a_2, \dots, a_{n-1} на n областей, заполненных изотропными средами $1, 2, 3, \dots, n$ с электропроводностью γ_m и магнитной проницаемостью μ_m . На оси указанных цилиндрических

поверхностей находится переменный магнитный диполь, момент которого направлен по оси скважины. Требуется определить магнитное поле в точках, находящихся на этой оси (рис. 3.1).

* В дальнейшем это ограничение будет снято.

Система уравнений Максвелла для квазистационарного электромагнитного поля $\bar{E} = \text{Re } \bar{E}e^{i\omega t}$ и $\bar{H} = \text{Re } \bar{H}e^{i\omega t}$ записывается, как известно, в виде:

$$\text{rot } \bar{E} = -i\omega\mu\bar{H}; \quad (3.1)$$

$$\text{rot } \bar{H} = \gamma\bar{E}; \quad (3.2)$$

$$\text{div } \bar{E} = 0; \quad (3.3)$$

$$\text{div } \bar{H} = 0. \quad (3.4)$$

Согласно (3.3), электрическое поле представим как

$$E = -i\omega\mu \text{rot } \Pi \quad (3.5)$$

и, подставляя (3.5) в (3.1), получаем

$$\bar{H} = \text{rot rot } \bar{\Pi} = \text{grad div } \bar{\Pi} - \nabla^2 \bar{\Pi}. \quad (3.6)$$

Из уравнения (3.2) имеем

$$\text{rot } \bar{H} = -i\omega\mu\gamma \text{rot } \bar{\Pi} = k^2 \text{rot } \bar{\Pi}$$

или

$$\bar{H} = k^2 \bar{\Pi} - \text{grad } \varphi, \quad (3.7)$$

где $\bar{\Pi}$ — вектор-потенциал;

φ — скалярный потенциал.

Приравнивая (3.6) и (3.7), имеем

$$\nabla^2 \bar{\Pi} + k^2 \bar{\Pi} - \text{grad } (\text{div } \bar{\Pi} + \varphi) = 0.$$

Выбирая условие калибровки

$$\varphi = -\text{div } \bar{\Pi}, \quad (3.8)$$

получаем для вектор-потенциала $\bar{\Pi}$ уравнение Гельмгольца

$$\nabla^2 \bar{\Pi} + k^2 \bar{\Pi} = 0, \quad (3.9)$$

а компоненты поля E и H связаны с вектор-потенциалом Герца соотношением

$$\bar{E} = -i\omega\mu \text{rot } \bar{\Pi}; \quad \bar{H} = k^2 \bar{\Pi} + \text{grad div } \bar{\Pi},$$

где $k^2 = -i\omega\mu\gamma$ — квадрат волнового числа,

$$k = \sqrt{\frac{\gamma\mu\omega}{2}} (1 - i) = \frac{1 - i}{h}; \quad h = \sqrt{\frac{2}{\gamma\mu\omega}}$$

— толщина скин-слоя. Толщина скин-слоя связана с длиной волны соотношением $\lambda = 2\pi h$. Введем обозначение $k^2 = -i\kappa$, $\kappa = \gamma\mu\omega$.

§ 2. ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ВЕКТОР-ПОТЕНЦИАЛА В ОБЩЕМ ВИДЕ

Возьмем цилиндрическую систему координат (ρ, z, φ) и совместим ее начало с точечным источником A и ее ось z с осью коаксиальной системы цилиндрических поверхностей раздела. Момент магнитного диполя направлен по оси z . Будем искать выражение для z -компоненты вектор-потен-

циала $\bar{\Pi}$ (имеющего, очевидно, различные выражения $\bar{\Pi}_m$ для различных сред), удовлетворяющей следующим условиям*.

1. Функция Π_z является решением уравнения Гельмгольца во всех точках пространства, кроме начала координат

$$\nabla^2 \Pi_z + k^2 \Pi_z = 0 \quad \text{при} \quad \rho^2 + z^2 \neq 0.$$

В цилиндрических координатах это уравнение принимает вид

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + k^2 \Pi = 0. \quad (3.10)$$

2. Вблизи начала координат функция Π приближается к функции для потенциала переменного магнитного диполя в однородной среде с удельным сопротивлением ρ_1 , т. е.

$$\Pi_1 \rightarrow \frac{e^{-ik_1 R}}{4\pi R}$$

при

$$R = \sqrt{\rho^2 + z^2} \rightarrow 0.$$

3. При переходе через поверхность раздела $\rho = a_m$ тангенциальные компоненты электрического и магнитного поля меняются непрерывно. Электрическое поле имеет только компоненту E_φ , а магнитное поле — две компоненты H_ρ и H_z , которые связаны с вектор-потенциалом соотношениями

$$E_\varphi = i\omega\mu \frac{\partial \Pi}{\partial \rho}; \quad H_\rho = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \rho \partial z}; \quad H_z = k^2 \Pi + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2}. \quad (3.11)$$

Для непрерывности тангенциальных компонент электрического и магнитного поля достаточно потребовать непрерывности

$$k^2 \Pi + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} \quad \text{и} \quad \mu \frac{\partial \Pi}{\partial \rho}.$$

Итак, при переходе через поверхность раздела $\rho = a_m$ для вектор-потенциала имеют место условия

$$\begin{aligned} \mu_m \frac{\partial \Pi_m}{\partial \rho} &= \mu_{m+1} \frac{\partial \Pi_{m+1}}{\partial \rho}; \\ k_m^2 \Pi_m + \frac{\partial^2 \Pi_m}{\partial z^2} &= k_{m+1}^2 \Pi_{m+1} + \frac{\partial^2 \Pi_{m+1}}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

4. При бесконечном удалении от магнитного диполя функция Π стремится к нулю.

Кроме того, функция Π_m должна удовлетворять следующим условиям задачи.

5. Ввиду осевой симметрии поля вектор-потенциал и все компоненты поля не зависят от координаты φ , т. е. $\Pi = \Pi(\rho, z)$.

6. Вектор-потенциал и все компоненты поля не зависят от знака z ввиду симметрии поля относительно плоскости, проходящей через источник и перпендикулярной оси цилиндрических поверхностей раздела

$$\Pi(\rho, z) = \Pi(\rho, -z).$$

* Из рассмотренного ниже решения видно, что поле, представленное одной компонентой Π_z , удовлетворяет уравнению Гельмгольца, краевым и граничным условиям.

Будем искать решение уравнения Гельмгольца в виде произведения двух функций $\Pi = T(\rho) \cdot \Phi(z)$.

Подставляя это выражение для Π в (3.10), получаем вместо уравнения Гельмгольца два обыкновенных дифференциальных уравнения второго порядка:

$$\begin{aligned}\Phi''(z) + \lambda^2 \Phi(z) &= 0; \\ T''(y) + \frac{1}{y} T'(y) - T &= 0,\end{aligned}$$

где $y = \sqrt{\lambda^2 + i\kappa} \rho$; λ — постоянная разделения. Решением первого уравнения являются функции $\cos \lambda z$ и $\sin \lambda z$, решением второго уравнения — модифицированные функции Бесселя нулевого порядка $I_0(y_m)$ и $K_0(y_m)$, где

$$y_m = \sqrt{\lambda^2 + i\kappa_m} \rho = \lambda_m \rho; \quad \lambda_m = \sqrt{\lambda^2 + i\kappa_m}.$$

Принимая во внимание шестое условие и особенность возбуждения поля, выражение для вектор-потенциала в первой среде можно записать в виде

$$\Pi_1 = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{e^{-ik_1 R}}{R} + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty C_1 I_0(\lambda_1 \rho) \cos \lambda z d\lambda \right]. \quad (3.13)$$

Первичное возбуждение, как известно, можно представить в виде несобственного интеграла

$$\frac{e^{-ikR}}{R} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty K_0(\lambda_1 \rho) \cos \lambda z d\lambda.$$

Таким образом,

$$\Pi_1 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty [C_1 I_0(\lambda_1 \rho) + D_1 K_0(\lambda_1 \rho)] \cos \lambda z d\lambda,$$

где $D_1 = 1$.

В общем случае

$$\Pi_m = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty [C_m I_0(\lambda_m \rho) + D_m K_0(\lambda_m \rho)] \cos \lambda z d\lambda, \quad (3.14)$$

где $m = 1, 2, \dots, n$.

§ 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ В ВЫРАЖЕНИИ ДЛЯ Π_m

Правые части выражения для вектор-потенциала содержат $2n$ неизвестных коэффициентов C_m и D_m . Первое граничное условие позволяет получить для их определения $n-1$ уравнений типа

$$\begin{aligned}\mu_m [\lambda_m C_m I_1(\lambda_m a_m) - \lambda_m D_m K_1(\lambda_m a_m)] &= \\ = \mu_{m+1} [\lambda_{m+1} C_{m+1} I_1(\lambda_{m+1} a_{m+1}) - \lambda_{m+1} D_{m+1} K_1(\lambda_{m+1} a_m)].\end{aligned}$$

Из второго граничного условия получаем также $n-1$ уравнений вида

$$\begin{aligned}\lambda_m^2 [C_m I_0(\lambda_m a_m) + D_m K_0(\lambda_m a_m)] &= \lambda_{m+1}^2 [C_{m+1} I_0(\lambda_{m+1} a_m) + \\ + D_{m+1} K_0(\lambda_{m+1} a_m)].\end{aligned}$$

Необходимые для решения задачи еще два уравнения получаем из краевых условий. В первой области, где находится источник поля, $D_1=1$. Во внешней области Π при $R \rightarrow \infty$ поле должно удовлетворять условиям излучения, поэтому в выражении для Π_n нужно C_n положить равным нулю, так как функция $I_0(\lambda_n \rho)$ при $\rho \rightarrow \infty$ неограниченно возрастает. Остаются неизвестными $2n-2$ коэффициента

$$C_1, C_2, C_3, \dots, C_{n-1};$$

$$D_2, D_3, \dots, D_{n-1}, D_n,$$

для определения которых нужно решить систему из $2n-2$ уравнений, имеющую вид:

$$\mu_1 \lambda_1 I_1(\lambda_1 a_1) C_1 - \mu_1 \lambda_1 K_1(\lambda_1 a_1) - \mu_2 \lambda_2 I_1(\lambda_2 a_1) C_2 + \mu_2 \lambda_2 K_1(\lambda_2 a_1) D_2 = 0;$$

$$\mu_2 \lambda_2 I_1(\lambda_2 a_2) C_2 - \mu_2 \lambda_2 K_1(\lambda_2 a_2) D_2 - \mu_3 \lambda_3 I_1(\lambda_3 a_2) C_3 + \mu_3 \lambda_3 K_1(\lambda_3 a_2) D_3 = 0;$$

.....

$$\mu_{n-2} \lambda_{n-2} I_1(\lambda_{n-2} a_{n-2}) C_{n-2} - \mu_{n-2} \lambda_{n-2} K_1(\lambda_{n-2} a_{n-2}) D_{n-2} -$$

$$- \mu_{n-1} \lambda_{n-1} I_1(\lambda_{n-1} a_{n-2}) C_{n-1} + \mu_{n-1} \lambda_{n-1} K_1(\lambda_{n-1} a_{n-2}) D_{n-1} = 0;$$

$$\mu_{n-1} \lambda_{n-1} I_1(\lambda_{n-1} a_{n-1}) C_{n-1} - \mu_{n-1} \lambda_{n-1} K_1(\lambda_{n-1} a_{n-1}) D_{n-1} +$$

$$+ \mu_n \lambda_n K_1(\lambda_n a_{n-1}) D_n = 0$$

и

$$\lambda_1^2 I_0(\lambda_1 a_1) C_1 + \lambda_1^2 K_0(\lambda_1 a_1) - \lambda_2^2 I_0(\lambda_2 a_1) C_2 - \lambda_2^2 K_0(\lambda_2 a_1) D_2 = 0;$$

$$\lambda_2^2 I_0(\lambda_2 a_2) C_2 + \lambda_2^2 K_0(\lambda_2 a_2) D_2 - \lambda_3^2 I_0(\lambda_3 a_2) C_3 - \lambda_3^2 K_0(\lambda_3 a_2) D_3 = 0;$$

.....

$$\lambda_{n-2}^2 I_0(\lambda_{n-2} a_{n-2}) C_{n-2} + \lambda_{n-2}^2 K_0(\lambda_{n-2} a_{n-2}) D_{n-2} - \lambda_{n-1}^2 C_{n-1} I_0(\lambda_{n-1} a_{n-2}) -$$

$$- \lambda_{n-1}^2 K_0(\lambda_{n-1} a_{n-2}) = 0;$$

$$\lambda_{n-1}^2 I_0(\lambda_{n-1} a_{n-1}) C_{n-1} + \lambda_{n-1}^2 K_0(\lambda_{n-1} a_{n-1}) D_{n-1} - \lambda_n^2 K_0(\lambda_n a_{n-1}) D_n = 0.$$

Решая эту систему относительно C_1 , получаем $C_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, где Δ — определитель системы;

$$\Delta = \mu_1 \lambda_1 I_1(\lambda_1 a_1) \delta_1 - \lambda_1^2 I_0(\lambda_1 a_1) \delta_2;$$

$$\Delta_1 = \mu_1 \lambda_1 K_1(\lambda_1 a_1) \delta_1 + \lambda_1^2 K_0(\lambda_1 a_1) \delta_2. \tag{3.15}$$

§ 4. ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ ВЕКТОР-ПОТЕНЦИАЛА И ПОЛЯ В СЛУЧАЕ ТРЕХ СРЕД (ДВЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА)

Пусть $n=3$, т. е. имеем только три среды: внешнюю среду с удельным сопротивлением ρ_3 (пласт), простирающуюся до бесконечности, внутреннюю с удельным сопротивлением ρ_1 (скважина) и про-

межуточную (зона проникновения)—цилиндрический слой с удельным сопротивлением ρ_2 . В этом случае выражения для δ_1 , δ_2 , Δ и Δ_1 , входящие в формулу (3.15), принимают вид:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= -\lambda_2^2 I_0(\lambda_2 a_1) [\mu_2 \lambda_2 \lambda_3^2 K_1(\lambda_2 a_2) K_0(\lambda_3 a_2) - \\ &\quad - \mu_3 \lambda_3 \lambda_2^2 K_0(\lambda_2 a_2) K_1(\lambda_3 a_2)] + \lambda_2^2 K_0(\lambda_2 a_1) \times \\ &\quad \times [-\mu_2 \lambda_2 \lambda_3^2 I_1(\lambda_2 a_2) K_0(\lambda_3 a_2) - \mu_3 \lambda_3 \lambda_2^2 I_0(\lambda_2 a_2) K_1(\lambda_3 a_2)]; \\ \delta_2 &= -\mu_2 \lambda_2 I_1(\lambda_2 a_1) [\mu_2 \lambda_2 \lambda_3^2 K_1(\lambda_2 a_2) K_0(\lambda_3 a_2) - \\ &\quad - \mu_3 \lambda_3 \lambda_2^2 K_0(\lambda_2 a_2) K_1(\lambda_3 a_2)] - \mu_2 \lambda_2 K_1(\lambda_2 a_1) \times \\ &\quad \times [-\mu_2 \lambda_2 \lambda_3^2 I_1(\lambda_2 a_2) K_0(\lambda_3 a_2) - \mu_3 \lambda_3 \lambda_2^2 I_0(\lambda_2 a_2) K_1(\lambda_3 a_2)]; \\ \Delta &= [-\mu_1 \lambda_1 \lambda_2^2 I_0(\lambda_2 a_1) I_1(\lambda_1 a_1) + \mu_2 \lambda_2 \lambda_3^2 I_0(\lambda_1 a_1) I_1(\lambda_2 a_1)] \times \\ &\quad \times [\mu_2 \lambda_2 \lambda_3^2 K_1(\lambda_2 a_2) K_0(\lambda_3 a_2) - \mu_3 \lambda_3 \lambda_2^2 K_0(\lambda_2 a_2) K_1(\lambda_3 a_2)] + \\ &\quad + [\mu_1 \lambda_1 \lambda_2^2 I_1(\lambda_1 a_1) K_0(\lambda_2 a_1) + \mu_2 \lambda_2 \lambda_3^2 I_0(\lambda_1 a_1) K_1(\lambda_2 a_1)] \times \\ &\quad \times [-\mu_2 \lambda_2 \lambda_3^2 I_1(\lambda_2 a_2) K_0(\lambda_3 a_2) - \mu_3 \lambda_3 \lambda_2^2 I_0(\lambda_2 a_2) K_1(\lambda_3 a_2)]; \\ \Delta_1 &= [-\mu_1 \lambda_1 \lambda_2^2 I_0(\lambda_2 a_1) K_1(\lambda_1 a_1) - \mu_2 \lambda_2 \lambda_3^2 I_0(\lambda_1 a_1) I_1(\lambda_2 a_1)] \times \\ &\quad \times [\mu_2 \lambda_2 \lambda_3^2 K_1(\lambda_2 a_2) K_0(\lambda_3 a_2) - \mu_3 \lambda_3 \lambda_2^2 K_0(\lambda_2 a_1) K_1(\lambda_3 a_2)] + \\ &\quad + [\mu_1 \lambda_1 \lambda_2^2 K_0(\lambda_2 a_1) K_1(\lambda_1 a_1) - \mu_2 \lambda_2 \lambda_3^2 K_0(\lambda_1 a_1) K_1(\lambda_2 a_1)] \times \\ &\quad \times [-\mu_2 \lambda_2 \lambda_3^2 I_1(\lambda_2 a_2) K_0(\lambda_3 a_2) - \mu_3 \lambda_3 \lambda_2^2 I_0(\lambda_2 a_2) K_1(\lambda_3 a_2)]. \end{aligned}$$

В случае среды, однородной по μ , функцию C_1 удобно представить в виде $C_1 = \frac{\Delta'_1}{\Delta'}$, где

$$\begin{aligned} \Delta'_1 &= [-\lambda_2 I_0(\lambda_2 a_1) K_1(\lambda_1 a_1) - \lambda_1 K_0(\lambda_1 a_1) I_1(\lambda_2 a_1)] \cdot [\lambda_3 K_1(\lambda_2 a_2) K_0(\lambda_3 a_2) - \\ &\quad - \lambda_2 K_0(\lambda_2 a_2) K_1(\lambda_3 a_2)] + [\lambda_2 K_0(\lambda_2 a_1) K_1(\lambda_1 a_1) - \lambda_1 K_0(\lambda_1 a_1) K_1(\lambda_2 a_1)] \times \\ &\quad \times [-\lambda_3 I_1(\lambda_2 a_2) K_0(\lambda_3 a_2) - \lambda_2 I_0(\lambda_2 a_2) K_1(\lambda_3 a_2)]; \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \Delta' &= [-\lambda_2 I_0(\lambda_2 a_1) I_1(\lambda_1 a_1) + \lambda_1 I_0(\lambda_1 a_1) I_1(\lambda_2 a_1)] \cdot [\lambda_3 K_1(\lambda_2 a_2) K_0(\lambda_3 a_2) - \\ &\quad - \lambda_2 K_0(\lambda_2 a_2) K_1(\lambda_3 a_2)] + [\lambda_2 I_1(\lambda_1 a_1) K_0(\lambda_2 a_1) + \lambda_1 I_0(\lambda_1 a_1) K_1(\lambda_2 a_1)] \times \\ &\quad \times [-\lambda_3 I_1(\lambda_2 a_2) K_0(\lambda_3 a_2) - \lambda_2 I_0(\lambda_2 a_2) K_1(\lambda_3 a_2)]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Здесь

$$\lambda_1 = \sqrt{\lambda^2 + iN_1 l_n}; \quad \lambda_2 = \sqrt{\lambda^2 + iN_2 l_n}; \quad \lambda_3 = \sqrt{\lambda^2 + i l_n};$$

$l_n = \gamma_n \mu \omega$, где γ_n — удельная проводимость пласта; N_1 и N_2 — соответственно отношения $\frac{\gamma_c}{\gamma_n}$ и $\frac{\gamma_\Delta}{\gamma_n}$; γ_c — удельная проводимость скважины; γ_Δ — удельная проводимость зоны проникновения; a_1 — радиус скважины; a_2 — радиус зоны проникновения.

Для функций Бесселя известны следующие выражения в виде степенных рядов:

$$\left. \begin{aligned}
 I_0(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}; \\
 I_1(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}; \\
 K_0(x) &= -\left(\ln \frac{x}{2} + C\right) I_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \sum_{m=1}^k \frac{1}{m}; \\
 K_1(x) &= \frac{1}{x} + \left(\ln \frac{x}{2} + C\right) I_1(x) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} \times \\
 &\quad \times \left[\sum_{m=1}^k \frac{1}{m} + \frac{1}{2(k+1)} \right],
 \end{aligned} \right\} (3.18)$$

где C — постоянная Эйлера, равная 0,57 721 566...

При больших значениях аргумента расчет функций Бесселя может быть осуществлен по асимптотическим формулам

$$\begin{aligned}
 I_0(x) &= \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[(2k-1)!!]^2}{k! (8x)^k} \right]; \\
 I_1(x) &= \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left[1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-3)!! (2k+1)!!}{k! (8x)^k} \right]; \\
 K_0(x) &= e^{-x} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k [(2k-1)!!]^2}{k! (8x)^k} \right]; \\
 K_1(x) &= e^{-x} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \left[1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k-3)!! (2k+1)!!}{k! (8x)^k} \right].
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Пусть $\mu_2 = \mu_3 \neq \mu_1$ и $\lambda_2 = \lambda_3$, тогда, согласно (3.15), для случая двух сред получаем формулу, которая впервые была получена В. Н. Никичиной [10]:

$$C_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\mu_1 \lambda_2 K_0(\lambda_2 a_1) K_1(\lambda_1 a_1) - \mu_2 \lambda_1 K_0(\lambda_1 a_1) K_1(\lambda_2 a_1)}{\mu_1 \lambda_2 K_0(\lambda_2 a_1) I_1(\lambda_1 a_1) + \mu_2 \lambda_1 I_0(\lambda_1 a_1) K_1(\lambda_2 a_1)}. \tag{3.20}$$

К аналогичной формуле мы, очевидно, должны прийти и при

$$\mu_1 = \mu_2 \neq \mu_3 \text{ и } \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3.$$

Выражения для компонент электромагнитного поля в первой среде, согласно (3.11), принимают вид

$$E_{\varphi} = E^0 + \frac{i\omega\mu}{4\pi} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \lambda_1 C_1 I_1(\lambda_1 \rho) \cos \lambda z d\lambda; \tag{3.21}$$

$$H_z = H_z^0 - \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \lambda_1^2 C_1 I_0(\lambda_1 \rho) \cos \lambda z d\lambda; \quad (3.22)$$

$$H_\rho = H_\rho^0 - \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \lambda_1^2 C_1 I_1(\lambda_1 \rho) \sin \lambda z d\lambda, \quad (3.23)$$

где E^0 , H_z^0 и H_ρ^0 — компоненты поля в однородной среде с удельной электропроводностью γ_1 . На оси скважины

$$H_\rho = E_\phi = 0$$

и

$$H_z = H_z^0 - \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \lambda_1^2 C_1 \cos \lambda z d\lambda.$$

Поле магнитного диполя в воздухе на оси z равно $\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{2}{z^3}$, поэтому выражение для вертикальной компоненты магнитного поля, представленного в единицах поля в воздухе, записывается в виде

$$h_z = h_z^0 - \frac{z^3}{\pi} \int_0^{\infty} \lambda_1^2 C_1 \cos \lambda z d\lambda. \quad (3.24)$$

Значит, магнитное поле вихревых токов, индуцированных в проводящей среде, может быть записано в виде несобственных интегралов. Подынтегральная функция состоит из двух множителей: комплексной функции $\lambda_1^2 C_1$ и осциллирующего множителя $\cos \lambda z$.

§ 5. ПОВЕДЕНИЕ ФУНКЦИИ $\lambda_1^2 C_1$ ПРИ БОЛЬШИХ И МАЛЫХ ЗНАЧЕНИЯХ АРГУМЕНТА λ

$$\left(\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{ЭН}}{\text{М}} \right)$$

Вначале рассмотрим случай двухслойной среды (скважина — пласт). Согласно (3.20),

$$\lambda_1^2 C_1 = \lambda_1^2 \frac{\lambda_2 K_0(\lambda_2 a) K_1(\lambda_1 a) - \lambda_1 K_1(\lambda_2 a) K_0(\lambda_1 a)}{\lambda_2 K_0(\lambda_2 a) I_1(\lambda_1 a) + \lambda_1 K_1(\lambda_2 a) I_0(\lambda_1 a)}. \quad (3.25)$$

Здесь

$$\lambda_1 = \sqrt{\lambda^2 + i\kappa_c}; \quad \lambda_2 = \sqrt{\lambda^2 + i\kappa_n}; \quad \kappa_c = \gamma_c \mu \omega;$$

$$\kappa_n = \gamma_n \mu \omega \quad \text{или} \quad \lambda_1 = \sqrt[4]{\lambda^4 + \kappa_c^2} e^{i \frac{1}{2} \arctg \frac{\kappa_c}{\lambda^2}};$$

$$\lambda_2 = \sqrt[4]{\lambda^4 + \kappa_n^2} e^{i \frac{1}{2} \arctg \frac{\kappa_n}{\lambda^2}}.$$

В общем случае модуль аргумента изменяется от нуля до бесконечности, а фаза его — от 45° при $\lambda = 0$ до 0 при $\lambda \rightarrow \infty$. В двух специальных случаях выражение для $\lambda_1^2 C_1$ (3.20) несколько упрощается.

1. При бесконечно большом удельном сопротивлении бурового раствора скважины $\lambda_1 = \lambda$, поэтому

$$\lambda_1^2 C_1 = \lambda^2 \frac{\lambda_2 K_0(\lambda_2 a) K_1(\lambda a) - \lambda K_1(\lambda_2 a) K_0(\lambda a)}{\lambda_2 K_0(\lambda_2 a) I_1(\lambda a) + \lambda K_1(\lambda_2 a) I_0(\lambda a)}. \quad (3.26)$$

2. При бесконечно большом сопротивлении пласта $\lambda_2 = \lambda$ и

$$\lambda_1^2 C_1 = \lambda_1^2 \frac{\lambda K_0(\lambda a) K_1(\lambda_1 a) - \lambda_1 K_1(\lambda a) K_0(\lambda_1 a)}{\lambda K_0(\lambda a) I_1(\lambda_1 a) + \lambda_1 K_1(\lambda a) I_0(\lambda_1 a)}. \quad (3.27)$$

Пусть $\lambda \rightarrow 0$, тогда, согласно (3.25),

$$\lambda_1^2 C_1 \rightarrow i\kappa_c \frac{\sqrt{i\kappa_\pi} K_0(\sqrt{i\kappa_\pi} a) K_1(\sqrt{i\kappa_c} a) - \sqrt{i\kappa_c} K_1(\sqrt{i\kappa_\pi} a) K_0(\sqrt{i\kappa_c} a)}{\sqrt{i\kappa_\pi} K_0(\sqrt{i\kappa_\pi} a) I_1(\sqrt{i\kappa_c} a) + \sqrt{i\kappa_c} I_0(\sqrt{i\kappa_c} a) K_1(\sqrt{i\kappa_\pi} a)}. \quad (3.28)$$

Таким образом, функция $\lambda_1^2 C_1$ при $\lambda = 0$ для κ_π и κ_c , не равных нулю, имеет конечное значение.

При малых значениях λ , согласно (3.18), для функций Бесселя от действительного аргумента имеем следующие приближенные выражения (при $\lambda a \rightarrow 0$):

$$I_0(\lambda a) \rightarrow 1; \quad I_1(\lambda a) \rightarrow \frac{\lambda a}{2},$$

$$K_0(\lambda a) \rightarrow -\left(\ln \frac{\lambda a}{2} + C\right); \quad K_1(\lambda a) \rightarrow \frac{1}{\lambda a}.$$

Подставляя эти выражения в (3.26) и (3.27), имеем при $\lambda_1 = \lambda$

$$\lambda_1^2 C_1 = \lambda^2 \frac{\sqrt{i\kappa_\pi} K_0(\sqrt{i\kappa_\pi} a) \frac{1}{\lambda a} + \lambda K_1(\sqrt{i\kappa_\pi} a) \left[\ln \frac{\lambda a}{2} + C\right]}{\sqrt{i\kappa_\pi} K_0(\sqrt{i\kappa_\pi} a) \frac{\lambda a}{2} + \lambda K_1(\sqrt{i\kappa_\pi} a)}$$

$$\rightarrow \frac{1}{a} \frac{\sqrt{i\kappa_\pi} K_0(\sqrt{i\kappa_\pi} a)}{\sqrt{i\kappa_\pi} \frac{a}{2} K_0(\sqrt{i\kappa_\pi} a) + K_1(\sqrt{i\kappa_\pi} a)} \quad (3.29)$$

и при $\lambda_2 = \lambda$

$$\lambda_1^2 C_1 = i\kappa_c \frac{-\lambda \left(\ln \frac{\lambda a}{2} + C\right) K_1(\sqrt{i\kappa_c} a) - \lambda_1 \frac{1}{\lambda a} K_0(\sqrt{i\kappa_c} a)}{-\lambda \left(\ln \frac{\lambda a}{2} + C\right) I_1(\sqrt{i\kappa_c} a) + \lambda_1 \frac{1}{\lambda a} I_0(\sqrt{i\kappa_c} a)}$$

$$\rightarrow -i\kappa_c \frac{K_0(\sqrt{i\kappa_c} a)}{I_0(\sqrt{i\kappa_c} a)}. \quad (3.30)$$

Рассмотрим поведение функции $\lambda_1^2 C_1$ (3.25) при больших значениях λ . Как известно, при $x \rightarrow \infty$

$$I_0(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left(1 + \frac{0,125}{x}\right); \quad I_1(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left(1 - \frac{0,375}{x}\right);$$

$$K_0(x) \approx e^{-x} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \left(1 - \frac{0,125}{x}\right);$$

$$K_1(x) \approx e^{-x} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \left(1 + \frac{0,375}{x}\right).$$

Подставляя эти выражения в формулу (3.25), после несложных преобразований получаем

$$\lambda_1^2 C_1 \rightarrow \pi \lambda_1^2 e^{-2\lambda_1 a} \cdot \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_1} \left[1 + \frac{0,750}{\lambda a} \right] \rightarrow 0. \quad (3.31)$$

Следовательно, действительная и мнимая части функции $\lambda_1^2 C_1$ при $\lambda a \gg 1$ убывают очень быстро. Последняя формула позволяет определить величину верхнего предела интегрирования.

Рассмотрим поведение функции $\lambda_1^2 C_1$ в случае трехслойной среды. Введем следующие обозначения:

$$m_1 = -\lambda_2 I_0(\lambda_2 a_1) K_1(\lambda_1 a_1) - \lambda_1 K_0(\lambda_1 a_1) I_1(\lambda_2 a_1); \quad (3.32)$$

$$n_1 = \lambda_3 K_1(\lambda_2 a_2) K_0(\lambda_3 a_2) - \lambda_2 K_0(\lambda_2 a_2) K_1(\lambda_3 a_2); \quad (3.33)$$

$$m_2 = \lambda_2 K_0(\lambda_2 a_1) K_1(\lambda_1 a_1) - \lambda_1 K_0(\lambda_1 a_1) K_1(\lambda_2 a_1); \quad (3.34)$$

$$n_2 = -\lambda_3 I_1(\lambda_2 a_2) K_0(\lambda_3 a_2) - \lambda_2 I_0(\lambda_2 a_2) K_1(\lambda_3 a_2); \quad (3.35)$$

$$m_3 = -\lambda_2 I_0(\lambda_2 a_1) I_1(\lambda_1 a_1) + \lambda_1 I_0(\lambda_1 a_1) I_1(\lambda_2 a_1); \quad (3.36)$$

$$n_3 = \lambda_2 I_1(\lambda_1 a_1) K_0(\lambda_2 a_1) + \lambda_1 I_0(\lambda_1 a_1) K_1(\lambda_2 a_1). \quad (3.37)$$

Тогда

$$\lambda_1^2 C_1 = \lambda_1^2 \frac{m_1 n_1 + m_2 n_2}{m_3 n_1 + n_2 n_3}. \quad (3.38)$$

Пусть $\lambda_2 = \lambda_3 \neq \lambda_1$, тогда $n_1 = 0$ и $\lambda_1^2 C_1 = \frac{m_2}{n_3}$, т. е. получаем формулу для двухслойной среды (поверхность раздела $\rho = a_1$).

Если $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, то

$$\begin{aligned} m_1 &= -\lambda_2 [I_0(\lambda_2 a_1) K_1(\lambda_2 a_1) + K_0(\lambda_2 a_1) I_1(\lambda_2 a_1)] = \\ &= -\frac{1}{a_1}; \quad m_2 = 0; \quad m_3 = 0; \quad n_3 = \frac{1}{a_1} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 C_1 &= \lambda_2^2 \frac{m_1 n_1}{n_2 n_3} = -\lambda_2^2 \frac{n_1}{n_2} = \\ &= \lambda_2^2 \frac{\lambda_3 K_1(\lambda_2 a_2) K_0(\lambda_3 a_2) - \lambda_2 K_0(\lambda_2 a_2) K_1(\lambda_3 a_2)}{\lambda_3 I_1(\lambda_2 a_2) K_0(\lambda_3 a_2) + \lambda_2 I_0(\lambda_2 a_2) K_1(\lambda_3 a_2)} \end{aligned}$$

— формула для двухслойной среды, когда поверхность раздела $\rho = a_2$. В трех специальных случаях выражения для $\lambda_1^2 C_1$ несколько упрощаются.

1. $\gamma_1 = 0$; $\gamma_2 \neq 0$; $\gamma_3 \neq 0$; $\lambda_1 = \lambda$ (непроводящая скважина).

$$\begin{aligned} m_1 &= -\lambda_2 I_0(\lambda_2 a_1) K_1(\lambda a_1) - \lambda K_0(\lambda a_1) I_1(\lambda_2 a_1); \\ m_2 &= \lambda_2 K_0(\lambda_2 a_1) K_1(\lambda a_1) - \lambda K_0(\lambda a_1) K_1(\lambda_2 a_1); \\ m_3 &= -\lambda_2 I_0(\lambda_2 a_1) I_1(\lambda a_1) + \lambda I_0(\lambda a_1) I_1(\lambda_2 a_1); \\ n_3 &= \lambda_2 I_1(\lambda a_1) K_0(\lambda_2 a_1) + \lambda I_0(\lambda a_1) K_1(\lambda_2 a_1). \end{aligned} \quad (3.39)$$

2. $\gamma_2 = 0$; $\gamma_1 \neq 0$; $\gamma_3 \neq 0$; $\lambda_2 = \lambda$ (непроводящая промежуточная зона).

$$\begin{aligned}
 m_1 &= -\lambda I_0(\lambda a_1) K_1(\lambda_1 a_1) - \lambda_1 K_0(\lambda_1 a_1) I_1(\lambda a_1); \\
 n_1 &= \lambda_3 K_1(\lambda a_2) K_0(\lambda_3 a_2) - \lambda K_0(\lambda a_2) K_1(\lambda_3 a_2); \\
 m_2 &= \lambda K_0(\lambda a_1) K_1(\lambda_1 a_1) - \lambda_1 K_0(\lambda_1 a_1) K_1(\lambda a_1); \\
 n_2 &= -\lambda_3 I_1(\lambda a_2) K_0(\lambda_3 a_2) - \lambda I_0(\lambda a_2) K_1(\lambda_3 a_2); \\
 m_3 &= -\lambda I_0(\lambda a_1) I_1(\lambda_1 a_1) + \lambda_1 I_0(\lambda_1 a_1) I_1(\lambda a_1); \\
 n_3 &= \lambda I_1(\lambda_1 a_1) K_0(\lambda a_1) + \lambda_1 I_0(\lambda_1 a_1) K_1(\lambda a_1).
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

3. $\gamma_1 \neq 0$; $\gamma_2 \neq 0$; $\gamma_3 = 0$; $\lambda_3 = \lambda$ (непроводящий пласт).

$$\begin{aligned}
 n_1 &= \lambda K_1(\lambda_2 a_2) K_0(\lambda a_2) - \lambda_2 K_0(\lambda_2 a_2) K_1(\lambda a_2); \\
 n_2 &= -\lambda I_1(\lambda_2 a_2) K_0(\lambda a_2) - \lambda_2 I_0(\lambda_2 a_2) K_1(\lambda a_2).
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Если электропроводности всех трех сред отличны от нуля, то видно, что $\lambda_1^2 C_1$ при $\lambda \rightarrow 0$ стремится к конечному пределу. Пусть
1) $\gamma_1 = 0$. При $\lambda \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
 m_1 &\rightarrow -\frac{\lambda_2 I_0(\lambda_2 a_1)}{\lambda a_1}; \quad m_2 \rightarrow \frac{\lambda_2}{\lambda a_1} K_0(\lambda_2 a_1); \\
 m_3 &\rightarrow \lambda \left\{ -\frac{\lambda_2 a_1}{2} I_0(\lambda_2 a_1) + I_1(\lambda_2 a_1) \right\} = -\lambda \frac{\lambda_2 a_1}{2} I_2(\lambda_2 a_1); \\
 n_3 &\rightarrow \lambda \left\{ \frac{\lambda_2 a_1}{2} K_0(\lambda_2 a_1) + K_1(\lambda_2 a_1) \right\} = \lambda \frac{\lambda_2 a_1}{2} K_2(\lambda_2 a_1)
 \end{aligned}$$

и n_1, n_2 имеют конечное значение, поэтому

$$\begin{aligned}
 \lambda_1^2 C_1 &= \lambda^2 \frac{\frac{1}{\lambda a_1} \{-\lambda_2 I_0(\lambda_2 a_1) n_1 + \lambda_2 K_0(\lambda_2 a_1) \cdot n_2\}}{\lambda \cdot \frac{\lambda_2 a_1}{2} \{-I_2(\lambda_2 a_1) n_1 + K_2(\lambda_2 a_1) \cdot n_2\}} = \\
 &= \frac{2}{a_1^2} \frac{[I_0(\lambda_2 a_1) n_1 + K_0(\lambda_2 a_1) \cdot n_2]}{[-I_2(\lambda_2 a_1) n_1 + K_2(\lambda_2 a_1) n_2]}.
 \end{aligned}$$

2) $\gamma_2 = 0$. При $\lambda \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
 m_1 &= -\lambda \left\{ K_1(\lambda_1 a_1) + \frac{\lambda_1 a_1}{2} K_0(\lambda_1 a_1) \right\} = -\lambda \frac{\lambda_1 a_1}{2} K_2(\lambda_1 a_1); \\
 n_1 &= \frac{\lambda_3}{\lambda a_2} K_0(\lambda_3 a_2); \quad m_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda a_1} K_0(\lambda_1 a_1); \\
 n_2 &= -\lambda \left\{ \frac{\lambda_3 a_2}{2} K_0(\lambda_3 a_2) + K_1(\lambda_3 a_2) \right\} = -\lambda \frac{\lambda_3 a_2}{2} K_2'(\lambda_3 a_2); \\
 m_3 &= -\lambda \left\{ I_1(\lambda_1 a_1) - \frac{\lambda_1 a_1}{2} I_0(\lambda_1 a_1) \right\} = \lambda \frac{\lambda_1 a_1}{2} I_2(\lambda_1 a_1); \\
 n_3 &= \frac{\lambda_1}{\lambda a_1} I_0(\lambda_1 a_1).
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\lambda^2 C_1 = \lambda_1^2 \frac{-\frac{a_1}{a_2} K_0(\lambda_3 a_2) K_2(\lambda_1 a_1) + \frac{a_2}{a_1} K_0(\lambda_1 a_1) K_2(\lambda_3 a_2)}{\frac{a_1}{a_2} K_0(\lambda_3 a_2) I_2(\lambda_1 a_1) - \frac{a_2}{a_1} I_0(\lambda_1 a_1) K_2(\lambda_3 a_2)}.$$

3) $\gamma_3 = 0$.

$$n_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda a_2} K_0(\lambda_2 a_2); \quad n_2 = -\frac{1}{a_2} I_0(\lambda_2 a_2),$$

поэтому

$$\lambda_1^2 C_1 \rightarrow \lambda_1^2 \frac{m_1}{m_3}$$

при $\lambda \rightarrow 0$.

Воспользуемся асимптотическим поведением функций Бесселя и рассмотрим поведение функции $\lambda_1^2 C_1$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Согласно (3.14),

$$\begin{aligned} m_1 &= -\frac{e^{(\lambda_2 - \lambda_1) a_1}}{2a_1 \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} (\lambda_1 + \lambda_2); \quad n_2 = -\frac{e^{(\lambda_2 - \lambda_3) a_2}}{2a_2 \sqrt{\lambda_2 \lambda_3}} (\lambda_2 + \lambda_3); \\ n_1 &= \frac{\pi e^{-(\lambda_2 + \lambda_3) a_2}}{2a_2 \sqrt{\lambda_2 \lambda_3}} (\lambda_3 - \lambda_2); \quad m_3 = \frac{e^{(\lambda_1 + \lambda_2) a_1}}{2\pi a_1 \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} (\lambda_1 - \lambda_2); \\ m_2 &= \frac{\pi e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) a_1}}{2a_1 \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} (\lambda_2 - \lambda_1); \quad n_3 = \frac{e^{(\lambda_1 - \lambda_2) a_1}}{2a_1 \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} (\lambda_1 + \lambda_2). \end{aligned}$$

Значит, при $\lambda \rightarrow \infty$: 1) $m_1 n_1 \rightarrow 0$, 2) $m_2 n_2 \rightarrow 0$, 3) $n_2 n_3 \rightarrow -\frac{1}{a_1 a_2}$. Произведение $m_3 n_1$ также стремится к нулю, поскольку $a_2 > a_1$. Неограниченное возрастание функции m_3 при $\lambda \rightarrow \infty$ учитывается при составлении программы для расчета подынтегральной функции.

Итак, при $\lambda a \rightarrow \infty$ функция $\lambda_1^2 C_1$ убывает как экспонента. Непосредственные вычисления показывают, что функция $\lambda_1^2 C_1$ при изменении λ от нуля до бесконечности не имеет особых точек.

§ 6. ПОВЕДЕНИЕ ФУНКЦИИ $\lambda_1^2 C_1$ ПРИ БОЛЬШИХ И МАЛЫХ ЗНАЧЕНИЯХ АРГУМЕНТА *

Рассмотрим вначале случай двухслойной среды. Введем в правую часть формулы (3.24) новую переменную $t = \lambda a$, тогда получаем

$$h_z = h_z^0 - \frac{\alpha^3}{\pi} \int_0^\infty t_1^2 C_1 \cos \alpha t dt. \quad (3.42)$$

Здесь α — отношение длины зонда z к радиусу скважины; $t_1 = \sqrt{t^2 + i\kappa_c a^2}$; $t_2 = \sqrt{t^2 + i\kappa_{пa} a^2}$ и, наконец,

$$C_1 = \frac{t_2 K_0(t_2) K_1(t_1) - t_1 K_1(t_2) K_0(t_1)}{t_2 K_0(t_2) I_1(t_1) + t_1 K_1(t_2) I_0(t_1)}. \quad (3.43)$$

Произведение κa^2 можно представить в виде

$$\kappa a^2 = 2 \left(\frac{a}{\delta} \right)^2,$$

где δ — толщина скин-слоя, или

$$\kappa a^2 = 8\pi^2 \left(\frac{a}{\lambda} \right)^2,$$

где λ — длина волны.

Пусть длина волны (или толщина скин-слоя) во много раз больше радиуса скважины, тогда $\kappa a^2 \ll 1$. Будем считать $\Phi = t_1^2 C_1$ как функцию двух аргументов $\kappa_c a^2$ и $\kappa_n a^2$ и представим ее в виде ряда

$$\Phi = \Phi(0, 0) + \kappa_c a^2 \Phi'_{\kappa_c a^2}(0, 0) + \kappa_n a^2 \Phi'_{\kappa_n a^2}(0, 0) + \dots$$

После несложных преобразований, отбрасывая члены, содержащие (κa^2) в степени больше двух, получаем

$$\text{Im } t_1^2 C_1 = i (\kappa_n a^2 - \kappa_c a^2) \frac{t}{2} [2K_0(t)K_1(t) - t(K_1^2 - K_0^2)]. \quad (3.44)$$

Для действительной части функции $t_1^2 C_1$ получается значительно более сложное выражение (которое мы здесь не приводим). Оно содержит квадраты параметров $\kappa_n a^2$ и $\kappa_c a^2$. Нетрудно заметить, что разложение (3.44) тем лучше описывает поведение функции $t_1^2 C_1$, чем больше t по сравнению с $\kappa_c a^2$ и $\kappa_n a^2$.

С увеличением параметров κ_c и κ_n действительная и мнимая части функции растут, при этом мнимая часть — прямо пропорционально первой степени, а действительная — квадрату κ . Непосредственные вычисления показывают, что действительная часть $t_1^2 C_1$ с ростом t убывает значительно быстрее, чем мнимая часть функции; вместе с тем скорость убывания обеих частей функции уменьшается с увеличением κ_c и κ_n .

Отметим, что формулу (3.44) можно получить другим путем, используя известные функциональные соотношения между функциями Бесселя.

Так как первый член разложения соответствует функции $t_1^2 C_1$ при малых значениях κ_c и κ_n , то он, естественно, используется при расчете магнитного поля для области предельно малых параметров (приближенная теория Долля).

Теперь рассмотрим другой крайний случай, когда длина волны в одной из сред стремится к нулю.

Пусть электропроводность пласта стремится к бесконечности, тогда $\frac{\lambda a}{\lambda_n} \rightarrow \infty$, $t_2 \rightarrow \infty$, $K_1(t_2) \rightarrow 0$ и

$$t_1^2 C_1 \rightarrow t_1^2 \frac{K_1(t_1)}{I_1(t_1)}. \quad (3.45)$$

Последнее выражение для функции $t_1^2 C_1$ можно получить иначе. Действительно, на поверхности идеального проводника суммарное электрическое поле равно нулю. Поэтому, согласно (3.14),

$$C_1 I_1(t_1) - K_1(t_1) = 0 \quad \text{и} \quad C_1 = \frac{K_1(t_1)}{I_1(t_1)}.$$

Применяя граничные условия Леонтовича, можно получить выражение для функции $t_1^2 C_1$, справедливое при больших, но конечных значениях величин $\left(\frac{a}{\delta_n} \right)$. Если электропроводность бурового раствора скважины неограниченно возрастает ($t_1 \rightarrow \infty$), то функция $t_1^2 C_1 \rightarrow -t_1^2 \frac{K_0(t_1)}{I_0(t_1)} \rightarrow 0$. Функция

h_z^0 также стремится к нулю. Поэтому при $\gamma_c \rightarrow \infty$ $h_z \rightarrow 0$, т. е. в результате внутреннего скин-эффекта индуцированные токи концентрируются вокруг источника, и суммарное магнитное поле в любой точке приближается к нулю.

Исследуем поведение функции $\lambda_1^2 C_1$ в случае трёхслойной среды. Вначале будем считать частоту поля настолько малой, что во всех средах величина $\kappa = \gamma \mu \omega$ значительно меньше единицы. В трёхслойной среде функция $\lambda_1^2 C_1$ зависит от трех параметров: κ_c , κ_Δ и κ_n . Поэтому, разлагая в ряд Маклорена функцию $\Phi = \lambda_1^2 C_1$ вблизи нуля, имеем

$$\Phi(\kappa_c; \kappa_\Delta; \kappa_n) = \Phi(0, 0, 0) + \frac{\partial \Phi}{\partial \kappa_c} \kappa_c + \frac{\partial \Phi}{\partial \kappa_\Delta} \kappa_\Delta + \frac{\partial \Phi}{\partial \kappa_n} \kappa_n + \dots$$

Согласно (3.38), $\Phi(0, 0, 0) = 0$. Взяв производную от функции $\lambda_1^2 C_1$, после несложных преобразований получаем

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 C_1 = & i(\kappa_\Delta - \kappa_c) \frac{\lambda a_1}{2} [2K_0(\lambda a_1) K_1(\lambda a_1) - \lambda a_1 (K_1^2 - K_0^2)] + \\ & + i(\kappa_n - \kappa_\Delta) \frac{\lambda a_2}{2} [2K_0(\lambda a_2) K_1(\lambda a_2) - \lambda a_2 (K_1^2 - K_0^2)]. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Это соотношение применяется при расчете поля на оси скважины в трёхслойной среде в области предельно малых параметров поля.

Теперь найдем выражение для $\lambda_1^2 C_1$, когда длина волны в одной из сред стремится к нулю. Наибольший интерес представляют два случая: 1) $\gamma_\Delta \rightarrow \infty$ и 2) $\gamma_c \rightarrow \infty$.

Если удельное сопротивление промежуточной зоны стремится к нулю, то, согласно (3.32)—(3.38),

$$\begin{aligned} \lambda_2 & \rightarrow \infty, \\ m_1 & \rightarrow -\lambda_2 I_0(\lambda_2 a_1) K_1(\lambda_1 a_1); \\ n_1 & \rightarrow -\lambda_2 K_0(\lambda_2 a_2) K_1(\lambda_3 a_2); \\ m_2 & \rightarrow \lambda_2 K_0(\lambda_2 a_1) K_1(\lambda_1 a_1); \\ n_2 & \rightarrow -\lambda_2 I_0(\lambda_2 a_2) K_1(\lambda_3 a_2); \\ m_3 & \rightarrow -\lambda_2 I_0(\lambda_2 a_1) I_1(\lambda_1 a_1); \\ n_3 & \rightarrow \lambda_2 I_1(\lambda_1 a_1) K_0(\lambda_2 a_1) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} m_1 n_1 & \rightarrow 0; \quad m_2 n_2 \rightarrow \infty; \\ m_3 n_1 & \rightarrow 0; \quad n_2 n_3 \rightarrow \infty, \text{ так как } a_2 > a_1. \end{aligned}$$

Таким образом, при $\gamma_\Delta \rightarrow \infty$

$$\lambda_1^2 C_1 \rightarrow \lambda_1^2 \frac{m_2}{n_3} = \lambda_1^2 \frac{K_1(\lambda_1 a_1)}{I_1(\lambda_1 a_1)}.$$

Эта формула совпадает с соответствующей формулой для двухслойной среды, когда удельное сопротивление пласта равно нулю. Хорошо проводящая промежуточная зона экранирует поле, и оно зависит в пре-

дельном случае только от электропроводности бурового раствора скважины.

Если удельное сопротивление $\rho_c \rightarrow 0$, то $\lambda_1 \rightarrow \infty$ и

$$m_1 \rightarrow -\lambda_1 K_0(\lambda_1 a_1) I_1(\lambda_2 a_1);$$

$$m_2 \rightarrow -\lambda_1 K_0(\lambda_1 a_1) K_1(\lambda_2 a_1);$$

$$m_3 \rightarrow \lambda_1 I_0(\lambda_1 a_1) I_1(\lambda_2 a_1);$$

$$n_3 \rightarrow \lambda_1 I_0(\lambda_1 a_1) K_1(\lambda_2 a_1).$$

Таким образом,

$$m_1 n_1 \rightarrow 0; \quad m_2 n_2 \rightarrow 0;$$

$$m_3 n_1 \rightarrow \infty; \quad n_2 n_3 \rightarrow \infty;$$

поэтому

$$\lambda_1^2 C_1 \rightarrow 0,$$

т. е. независимо от распределения удельного сопротивления при $\gamma_c \rightarrow \infty$ наступает полное экранирование.

Анализ подынтегральной функции $\lambda_1^2 C_1$ закончим рассмотрением случая, когда толщина скин-слоя в промежуточной зоне значительно меньше ее радиуса. При этом будут иметь место приближенные равенства:

$$K_1(\lambda_2 a_2) = K_0(\lambda_2 a_2);$$

$$I_1(\lambda_2 a_2) = I_0(\lambda_2 a_2)$$

и

$$n_1 = K_1(\lambda_2 a_2) \{ \lambda_3 K_0(\lambda_3 a_2) - \lambda_2 K_1(\lambda_3 a_2) \} \rightarrow 0;$$

$$n_2 = -I_1(\lambda_2 a_2) \{ \lambda_3 K_0(\lambda_3 a_2) + \lambda_2 K_1(\lambda_3 a_2) \} \rightarrow \infty;$$

$$\frac{n_1}{n_2} \rightarrow 0,$$

$$\lambda_1^2 C_1 = \lambda_1^2 \frac{m_2}{n_3} = \lambda_1^2 \frac{\lambda_2 K_0(\lambda_2 a_1) K_1(\lambda_1 a_1) - \lambda_1 K_0(\lambda_1 a_1) K_1(\lambda_2 a_1)}{\lambda_2 K_0(\lambda_2 a_1) I_1(\lambda_1 a_1) + \lambda_1 I_0(\lambda_1 a_1) K_1(\lambda_2 a_1)},$$

т. е. получим выражение для подынтегральной функции в случае двухслойной среды (скважина — промежуточная зона). Значит, если толщина скин-слоя δ_Δ значительно меньше радиуса зоны проникновения, но соизмерима с радиусом скважины, удельное сопротивление пласта и размер промежуточной зоны не влияют на величину поля, измеряемого на оси скважины.

Если толщина скин-слоя δ_Δ не только значительно меньше радиуса промежуточной зоны, но и во много раз меньше радиуса скважины, то функция $\lambda_1^2 C_1$ приобретает вид (3.45). Наконец, если толщина скин-слоя δ_c во много раз меньше радиуса скважины, то нетрудно убедиться, что значение поля в однородной среде с удельной проводимостью скважины h_c^0 становится больше значения интеграла в формуле (3.24), т. е. стенки скважины не влияют на поле.

§ 7. ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ ОТ КОМПЛЕКСНОГО АРГУМЕНТА

При вычислении подынтегральной функции $\lambda_1^2 C_1$ возникает задача расчета модифицированных функций Бесселя от комплексного аргумента, для которых отсутствуют стандартные подпрограммы. Представление функций Бесселя через степенные ряды (3.18) удобно для числовых расчетов, если аргумент функции не очень большой. Особенно это важно для функций K_0 и K_1 , которые быстро убывают с увеличением модуля аргумента. Непосредственные вычисления показывают, что расчеты по формулам (3.18) дают удовлетворительные результаты при $|\lambda a| \leq 6,0$ без применения расчетов с «двойной точностью». Для вычисления функций с большим аргументом были применены два способа: один из них основан на асимптотическом представлении функций (3.19), другой — на функциональных уравнениях вида

$$Z_p(\lambda z) = \lambda^p \sum_0^{\infty} \frac{z^{p+m}(z)}{m!} \left(\frac{1-\lambda^2}{2} z\right)^m. \quad (3.47)$$

Здесь Z_p — сокращенное обозначение для $C_1 J_p(\lambda z) + C_2 N_p(\lambda z)$, где J_p и N_p — функции Бесселя первого и второго рода.

Положим в формуле (3.47) $z = \rho i$, $\lambda = e^{i\varphi}$, тогда

$$J_p(i\rho e^{i\varphi}) = e^{ip\varphi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_{p+m}(\rho i)}{m!} \frac{i^m \rho^m}{2^m} (1 - e^{2i\varphi})^m. \quad (3.48)$$

Воспользовавшись соотношением

$$J_p(iy) = i^p I_p(y),$$

получаем

$$I_p(\rho e^{i\varphi}) = e^{ip\varphi} \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^m J_{p+m}(\rho)}{m! 2^m} \rho^m (1 - e^{2i\varphi})^m. \quad (3.49)$$

Функции Ханкеля являются комбинацией функций Бесселя первого и второго рода:

$$H_p^{(1)}(i\lambda z) = J_p(i\lambda z) + iY_p(i\lambda z),$$

поэтому вместо (3.49) можно записать

$$H_p(i\lambda z) = \lambda^p \sum_0^{\infty} \frac{H_{p+m}(iz)}{m!} \frac{i^m z^m}{2^m} (1 - \lambda^2)^m. \quad (3.50)$$

Между функциями Ханкеля и Макдональда имеет место связь

$$H_p^{(1)}(i\lambda z) = -\frac{2}{\pi} i^{1-p} K_p(\lambda z). \quad (3.51)$$

Подставляя (3.51) в (3.50), окончательно получаем

$$K_p(\rho e^{i\varphi}) = e^{ip\varphi} \sum_0^{\infty} \frac{K_{p+m}(\rho)}{m!} \frac{\rho^m}{2^m} (1 - e^{2i\varphi})^m. \quad (3.52)$$

Соотношения (3.49) и (3.52) устанавливают связь между функциями I_p и K_p от действительного и комплексного аргумента. Аргумент функций

Бесселя, входящий в состав подынтегральной функции, представим в виде

$$\rho = \sqrt[4]{\lambda^4 + \kappa^2} \text{ и } \varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\kappa}{\lambda^2},$$

где

$$\kappa = \{\kappa_c; \kappa_\Delta; \kappa_{\Pi}\}.$$

С увеличением λ угол φ стремится к нулю. Эта особенность в поведении аргумента обеспечивает быструю сходимость рядов в правой части (3.49) и (3.52), когда $\kappa a \ll \lambda$. Действительно, при $\lambda^2 \gg \kappa$

$$\rho \approx \lambda a; \quad \varphi \approx \frac{1}{2} \frac{\kappa}{\lambda^2} \quad \text{и} \quad 1 - e^{i2\varphi} \approx -i2\varphi \approx -\frac{i\kappa}{\lambda^2}.$$

Тогда

$$I_p(\rho e^{i\varphi}) \approx e^{i p \varphi} \sum_0^{\infty} \frac{i^m I_{p+m}(\rho)}{m!} \left(\frac{\kappa a}{2\lambda}\right)^m;$$

$$K_p(\rho e^{i\varphi}) \approx e^{i p \varphi} \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^m i^m K_{p+m}(\rho)}{m!} \left(\frac{\kappa a}{2\lambda}\right)^m.$$

Для функций $I_0(\rho)$, $I_1(\rho)$, $K_0(\rho)$ и $K_1(\rho)$ от действительного аргумента имеются готовые стандартные подпрограммы, которые записаны в машине.

Для вычисления функций Бесселя более высокого порядка были использованы известные рекуррентные соотношения

$$I_{m+1}(\rho) = I_{m-1}(\rho) - \frac{2m}{\rho} I_m(\rho);$$

$$K_{m+1}(\rho) = K_{m-1}(\rho) + \frac{2m}{\rho} K_m(\rho).$$

В случае трехслойной среды функции Бесселя при больших значениях аргумента вычислялись по асимптотическим формулам (3.19).

§ 8. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА В ВЫРАЖЕНИИ ДЛЯ НАПРЯЖЕННОСТИ ПОЛЯ h_z (3.24)

В подынтегральную функцию (3.24) входит осциллирующий множитель $\cos \lambda z$, значительно осложняющий численное интегрирование, особенно при больших значениях z . Применение известной формулы Симпсона при интегрировании с равномерным шагом состоит в замене всей подынтегральной функции $\lambda_1^2 C \cos \lambda z$ трехчленом $a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2$. Присутствие осциллирующего множителя $\cos \lambda z$ приводит к тому, что только при очень мелком шаге интегрирования обеспечивается достаточная степень приближения трехчленом. Поэтому интегрирование с равномерным шагом приводит к очень большой затрате машинного времени.

Более эффективно интегрирование с неравномерным шагом, которое представляет собою модификацию метода Филлона. Идея метода заключается в следующем. Интервал интегрирования разбивается на отрезки неравной длины. Так как с увеличением λ подынтегральная функция убы-

вает, то естественно длину отрезков увеличивать с ростом λ . На каждом отрезке $[\lambda_i - \lambda_{i+2}]$ неосциллирующая часть подынтегральной функции $\lambda_i^2 C_1$ заменяется трехчленом

$$\Phi(\lambda) = \lambda_i^2 C_1 = a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2.$$

Поэтому интеграл на этом участке равен

$$\begin{aligned} I_i &= \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+2}} \lambda_i^2 C_1 \cos \lambda z d\lambda = \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+2}} (a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2) \cos \lambda z d\lambda = \\ &= a_0 \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+2}} \cos \lambda z d\lambda + a_1 \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+2}} \lambda \cos \lambda z d\lambda + a_2 \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+2}} \lambda^2 \cos \lambda z d\lambda. \end{aligned}$$

Интегралы в правой части, как известно, могут быть представлены в виде элементарных функций

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+2}} \cos \lambda z d\lambda &= \frac{1}{z} [\sin \lambda_{i+2} z - \sin \lambda_i z]; \\ \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+2}} \lambda \cos \lambda z d\lambda &= \frac{\cos \lambda z}{z^2} + \frac{\lambda \sin \lambda z}{z} \Big|_{\lambda_i}^{\lambda_{i+2}}; \\ \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+2}} \lambda^2 \cos \lambda z d\lambda &= \frac{2\lambda}{z^2} \cos \lambda z + \left(\frac{\lambda^2}{z} - \frac{2}{z^3} \right) \sin \lambda z \Big|_{\lambda_i}^{\lambda_{i+2}}. \end{aligned}$$

Коэффициенты a_0 , a_1 , a_2 определяются из системы

$$\begin{cases} a_0 + a_1 \lambda_i + a_2 \lambda_i^2 = \Phi(\lambda_i); \\ a_0 + a_1 \lambda_{i+1} + a_2 \lambda_{i+1}^2 = \Phi(\lambda_{i+1}); \\ a_0 + a_1 \lambda_{i+2} + a_2 \lambda_{i+2}^2 = \Phi(\lambda_{i+2}). \end{cases}$$

Окончательный результат представляет собой сумму I_i по всему интервалу интегрирования.

Из формулы (3.31) было установлено максимальное λ , которое было принято равным 160.

Интервал интегрирования был разбит на два участка: начальный участок — от $\lambda = 10^{-8}$ до $\lambda = 10^{-1}$, остальная часть интервала — от $\lambda = 10^{-1}$ до $\lambda = 160$. Интегрирование на начальном участке осуществлялось по стандартной программе Симпсона с равномерным шагом.

В результате сравнения расчетов с разным шагом на интервале $10^{-1} \leq \lambda \leq 160$ был принят шаг $\sqrt[8]{2}$, т. е. $\lambda_{i+1} = \sqrt[8]{2} \lambda_i$. В отдельных случаях (для двухслойной среды) был взят шаг $\sqrt[16]{2}$. Величина $\frac{a_c}{\lambda_c}$ изменялась с шагом $\sqrt{2}$ от 10^{-4} до 1, что позволило получить практически в каждом случае полную частотную характеристику поля.

Отношение длины зонда z к радиусу скважины a_c изменялось от 2 до 30 с равномерным шагом: 2, 4, 6, 8, ..., 28, 30.

Для двухслойной среды были рассчитаны поля для отношений $\frac{\gamma_{\Pi}}{\gamma_c}$, равных $\frac{1}{128}, \frac{1}{64}, \frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 2, 4, 8, 16, 32$.

Для трехслойной среды параметры разреза, при которых проводились расчеты, имели значения: $\frac{a_{\Delta}}{a_c} = 2, 4, 8$; $\frac{\gamma_{\Pi}}{\gamma_c} = \frac{1}{128}, \frac{1}{64}, \frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1$; $\frac{\rho_{\Delta}}{\rho_c} = 4, 8, 16, 32, 64, 128$.

В результате расчетов на быстродействующей машине ВЦ СО АН СССР в каждом случае были получены четыре величины: мнимая компонента поля $\text{Im}h_z$, действительная компонента вторичного поля $\text{Re}h_z - 1$, амплитуда вторичного поля $A = \sqrt{(\text{Re}h_z - 1)^2 + (\text{Im}h_z)^2}$ и, наконец, $\frac{\gamma_{\kappa}}{\gamma_c} = \frac{2}{\gamma_c \mu \omega z^2} \text{Im}h_z$.

§ 9. ПРИБЛИЖЕННАЯ ТЕОРИЯ ИНДУКЦИОННОГО КАРОТАЖА ДЛЯ ДВУХКАТУШЕЧНОГО ЗОНДА В СРЕДАХ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ РАЗДЕЛА

Предположим, что между токами, определяющими сигнал в измерительной катушке, отсутствует взаимодействие и плотность тока в любой точке прямо пропорциональна первичному электрическому полю магнитного диполя. В этом случае активная компонента поля, согласно формуле (3.46), в двухслойной и трехслойной среде записывается соответственно в следующем виде:

$$h_z = \frac{i\gamma_c \mu \omega z^2}{2} + \frac{iz^3}{\pi} (N_2 - 1) \kappa_c \int_0^{\infty} \frac{\lambda a_1}{2} [2K_0 K_1 - \lambda a_1 (K_1^2 - K_0^2)] \times \\ \times \cos \lambda z d\lambda \quad (3.53)$$

и

$$h_z = \frac{i\gamma_c \mu \omega z^2}{2} + \frac{iz^3}{\pi} (N_1 - 1) \kappa_c \int_0^{\infty} \frac{\lambda a_1}{2} [2K_0 K_1 - \lambda a_1 (K_1^2 - K_0^2)] \times \\ \times \cos \lambda z d\lambda + \frac{iz^3}{\pi} (N_2 - N_1) \kappa_c \int_0^{\infty} \frac{\lambda a_2}{2} [2K_0 (\lambda a_2) K_1 (\lambda a_2) - \\ - \lambda a_2 (K_1^2 - K_0^2)] \cos \lambda z d\lambda. \quad (3.54)$$

Здесь z — длина зонда; $N_1 = \frac{\gamma_{\Delta}}{\gamma_c}$; $N_2 = \frac{\gamma_{\Pi}}{\gamma_c}$; $\kappa_c = \gamma_c \mu \omega$; a_1 — радиус скважины, a_2 — радиус зоны проникновения.

Введем в формулы (3.53) и (3.54) следующие обозначения:

$$m = \lambda a; \quad \frac{z}{a_1} = \alpha; \quad \frac{a_2}{a_1} = \beta.$$

Тогда

$$h_z = \frac{i\gamma_c \mu \omega z^2}{2} + \frac{iz^3}{a_1 \pi} (N_2 - 1) \kappa_c \int_0^{\infty} \frac{m}{2} [2K_0 K_1 - m (K_1^2 - K_0^2)] \times \\ \times \cos \alpha m dm; \quad (3.55)$$

$$h_z = \frac{i\gamma_c \mu \omega z^2}{2} + \frac{iz^3}{a_1 \pi} (N_1 - 1) \kappa_c \int_0^\infty \frac{m}{2} [2K_0 K_1 - m(K_1^2 - K_0^2)] \times \\ \times \cos \alpha m d m + \frac{iz^3}{a_2 \pi} (N_2 - N_1) \kappa_c \int_0^\infty \frac{m}{2} [2K_0 K_1 - m(K_1^2 - K_0^2)] \times \\ \times \cos \frac{\alpha}{\beta} m d m. \quad (3.56)$$

В однородной среде с удельной проводимостью γ_c , согласно (1.29), функция $h_z^0 = \frac{\gamma_c \mu \omega z^2}{2}$ или $\gamma_c = \frac{2h_z^0}{\mu \omega z^2}$, аналогичное соотношение устанавливает связь между γ_c и h_z в неоднородной среде

$$\gamma_c = \frac{2h_z}{\mu \omega z^2}. \quad (3.57)$$

Таким образом, для трехслойной среды

$$\gamma_c = \gamma_c + (N_1 - 1) \gamma_c C_n(\alpha) + (N_2 - N_1) \gamma_c C_n\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \dots, \quad (3.58)$$

где

$$C_n(\alpha) = \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^\infty \frac{m}{2} [2K_0 K_1 - m(K_1^2 - K_0^2)] \cos \alpha m d m; \quad (3.59) \\ C_n\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \frac{2\alpha}{\pi \beta} \int_0^\infty \frac{m}{2} [2K_0 K_1 - m(K_1^2 - K_0^2)] \cos \frac{\alpha m}{\beta} d m.$$

При $N_2 = N_1$ и $\gamma_c = 0$ получаем формулу $\gamma_c = \gamma_n Q_n(\alpha)$ для случая двух сред при непроводящем буровом растворе, выведенную Ю. И. Кудрявцевым [9].

Согласно статье [21], формула для γ_c имеет вид

$$\gamma_c(\alpha) = \gamma_c Q_c(\alpha) + \gamma_\Delta Q_\Delta(\alpha) + \gamma_n Q_n(\alpha), \quad (3.60)$$

где $Q_c(\alpha)$, $Q_\Delta(\alpha)$ и $Q_n(\alpha)$ — геометрические факторы соответственно скважины, зоны проникновения и пласта. Сравнивая формулы (3.59) и (3.60), получаем:

$$Q_c(\alpha) = 1 - C_n(\alpha); \\ Q_\Delta(\alpha) = C_n(\alpha) - C_n\left(\frac{\alpha}{\beta}\right); \quad (3.61) \\ Q_n(\alpha) = C_n\left(\frac{\alpha}{\beta}\right).$$

Функцию

$$Q_n(\alpha) = \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^\infty A(m) \cos \alpha m d m, \quad (3.62)$$

где

$$A(m) = \frac{m}{2} [2K_0(m) K_1(m) - m(K_1^2 - K_0^2)], \quad (3.63)$$

будем называть геометрическим фактором пласта, функцию $Q_c(\alpha) = 1 - Q_n(\alpha)$ — геометрическим фактором скважины. Это основная функция, с помощью которой рассчитываются поля в средах с цилиндричес-

кими границами в тех случаях, когда справедливы физические предпосылки приближенной теории.

Для определения геометрического фактора пласта и скважины необходимо произвести численное интегрирование функции $Q_n(\alpha)$.

Рассмотрим поведение подынтегральной функции $A(m)$. При достаточно больших значениях m

$$K_0(m) = e^{-m} \sqrt{\frac{\pi}{2m}} \left(1 - \frac{0,125}{m}\right);$$

$$K_1(m) = e^{-m} \sqrt{\frac{\pi}{2m}} \left(1 + \frac{0,375}{m}\right).$$

Поэтому при $m \rightarrow \infty$

$$A(m) \rightarrow \frac{3}{4} \pi e^{-2m} \rightarrow 0.$$

Как известно, при $m \rightarrow 0$

$$K_0(m) \rightarrow -\left(\ln \frac{m}{2} + C\right) \quad \text{и} \quad K_1(m) \rightarrow \frac{1}{m},$$

где C — постоянная Эйлера. Подставляя эти выражения для функций Бесселя в формулу для A , получаем

$$A(m) \xrightarrow{m \rightarrow 0} K_0(m) \rightarrow -\left(\ln \frac{m}{2} + C\right), \quad (3.64)$$

т. е. подынтегральная функция при $m \rightarrow 0$ имеет логарифмическую особенность. Чтобы иметь возможность произвести численную квадратуру, разобьем интервал интегрирования на два участка: от нуля до единицы и от единицы до M , где M — настолько большое число, что значением интеграла от M до бесконечности можно пренебречь. Прибавим к ординатам кривой $\mu = A(m)$ ординаты кривой $\ln m$, т. е. представим вычисляемый интеграл в виде следующей суммы интегралов:

$$\begin{aligned} \int_0^M A(m) \cos \alpha m dm &= \int_0^1 (A + \ln m) \cos \alpha m dm + \\ &+ \int_1^M A(m) \cos \alpha m dm - \int_0^1 \ln m \cos \alpha m dm. \end{aligned}$$

Как видно из (3.64), функция $A + \ln m$ не имеет особенности в нуле.

Интеграл $\int_0^1 \ln m \cos \alpha m dm$ может быть представлен через табулированную функцию — интегральный синус. Действительно,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln m \cos \alpha m dm &= \frac{1}{\alpha} \int_0^1 \ln md \sin \alpha m = \frac{1}{\alpha} \ln m \sin \alpha m \Big|_0^1 - \\ &- \frac{1}{\alpha} \int_0^1 \frac{\sin \alpha m}{m} dm = -\frac{1}{\alpha} \text{Si}(\alpha). \end{aligned}$$

При

$$\alpha \rightarrow 0 \quad \text{Si}(\alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow 0,$$

$$\alpha \rightarrow \infty \quad \text{Si}(\alpha) \rightarrow \frac{\pi}{2}.$$

Таблица 3.1

α	$Q_n(\alpha)$								
0,2	0,117080	3,4	0,909207	6,6	0,975653	9,8	0,989160	13,0	0,993913
0,4	0,229928	3,6	0,918502	6,8	0,977093	10,0	0,989598	13,2	0,994099
0,6	0,334993	3,8	0,926520	7,0	0,978412	10,2	0,990012	13,4	0,994278
0,8	0,429855	4,0	0,933470	7,2	0,979621	10,4	0,990401	13,6	0,994447
1,0	0,513338	4,2	0,939524	7,4	0,980732	10,6	0,990767	13,8	0,994610
1,2	0,585344	4,4	0,944822	7,6	0,981756	10,8	0,991112	14,0	0,994765
1,4	0,646543	4,6	0,949200	7,8	0,982701	11,0	0,991440	14,2	0,994914
1,6	0,698040	4,8	0,953593	8,0	0,983575	11,2	0,991750	14,4	0,995057
1,8	0,741119	5,0	0,957239	8,2	0,984385	11,4	0,992042	14,6	0,995194
2,0	0,777060	5,2	0,960484	8,4	0,985137	11,6	0,992320	14,8	0,995325
2,2	0,807040	5,4	0,963384	8,6	0,985836	11,8	0,992583	15,0	0,995451
2,4	0,832092	5,6	0,965983	8,8	0,986488	12,0	0,992834	15,2	0,995571
2,6	0,853088	5,8	0,968321	9,0	0,987095	12,2	0,993071	15,4	0,995687
2,8	0,870756	6,0	0,970431	9,2	0,987663	12,4	0,993297	15,6	0,995791
3,0	0,885690	6,2	0,972341	9,4	0,988195	12,6	0,993512	15,8	0,995996
3,2	0,898376	6,4	0,974074	9,6	0,988692	12,8	0,993718	16,0	0,996110

Согласно (3.62),

$$Q_n(\alpha) = \frac{2\alpha}{\pi} \left[\int_0^1 \{A(m) + \ln m\} \cos \alpha m dm + \int_1^M A(m) \cos \alpha m dm \right] + \frac{2}{\pi} \text{Si}(\alpha). \quad (3.65)$$

В табл. 3.1 приведены значения функции $Q_n(\alpha)$. Из определения геометрического фактора пласта и анализа формулы (3.65) следует, что функция $Q_n(\alpha)$ при возрастании α стремится к единице. Поэтому геометрический фактор скважины стремится к нулю при $\alpha \rightarrow \infty$. При вышеописанной схеме расчета функция $Q_c(\alpha)$ для больших значений α вычисляется как разность двух близких по значению величин. Это требует очень высокой точности расчета интеграла в формуле (3.65).

Более удобен расчет непосредственно функции $Q_c(\alpha)$. Воспользуемся известным соотношением

$$\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty K_0(m) \cos \alpha m dm.$$

Тогда

$$Q_c(\alpha) = 1 - \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^\infty A(m) \cos \alpha m dm = 1 - \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} + \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^\infty [K_0(m) - A(m)] \cos \alpha m dm. \quad (3.66)$$

Т а б л и ц а 3.2

α	$Q_c(\alpha)$								
0,2	0,882920	3,4	0,0907930	6,6	0,0243469	9,8	0,0108402	13,0	0,00608748
0,4	0,770072	3,6	0,0814980	6,8	0,0229066	10,0	0,0104016	13,2	0,00590120
0,6	0,665007	3,8	0,0734805	7,0	0,0215882	10,2	0,00998841	13,4	0,00572295
0,8	0,570145	4,0	0,0665305	7,2	0,0203794	10,4	0,00959986	13,6	0,00555320
1,0	0,486662	4,2	0,0604762	7,4	0,0192681	10,6	0,00923296	13,8	0,00539026
1,2	0,414656	4,4	0,0551777	7,6	0,0182443	10,8	0,00888703	14,0	0,00523503
1,4	0,353457	4,6	0,0505196	7,8	0,0172995	11,0	0,00855995	14,2	0,00508583
1,6	0,301960	4,8	0,0464069	8,0	0,0164251	11,2	0,00825053	14,4	0,00494337
1,8	0,258881	5,0	0,0427607	8,2	0,0156154	11,4	0,00795780	14,6	0,00480654
2,0	0,222940	5,2	0,0395155	8,4	0,0148631	11,6	0,00767993	14,8	0,00467538
2,2	0,192960	5,4	0,0366163	8,6	0,0141641	11,8	0,00741690	15,0	0,00454967
2,4	0,167908	5,6	0,0340172	8,8	0,0135124	12,0	0,00716651	15,2	0,00442864
2,6	0,146912	5,8	0,0316791	9,0	0,0129048	12,2	0,00692920	15,4	0,00431286
2,8	0,129244	6,0	0,0295691	9,2	0,0123369	12,4	0,00670292	15,6	0,00420095
3,0	0,114310	6,2	0,0276591	9,4	0,0118054	12,6	0,00648796	15,8	0,00400399
3,2	0,101624	6,4	0,0259256	9,6	0,0113077	12,8	0,00628292	16,0	0,00389046

Подынтегральная функция в нуле не имеет особенности. При больших α $1 - \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} \rightarrow \frac{1}{2\alpha^2}$ и значение интеграла соизмеримо с этой величиной. В табл. 3.2 приведены значения функции $Q_c(\alpha)$.

Исследуем асимптотическое поведение интеграла в формуле (3.66) и покажем, что с увеличением α геометрический фактор скважины убывает обратно пропорционально квадрату α .

При больших значениях α значение интеграла

$$\int_0^{\infty} \Phi(m) \cos \alpha m dm,$$

где

$$\Phi(m) = K_0(m) - \frac{m}{2} [2K_0 K_1 - m(K_1^2 - K_0^2)],$$

благодаря осциллирующему характеру подынтегральной функции определяется поведением функции $\Phi(m)$ и ее первых производных вблизи нуля. Действительно, интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \Phi(m) \cos \alpha m dm &= \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} \Phi(m) d \sin \alpha m = \\ &= \frac{1}{\alpha} \Phi \sin \alpha m \Big|_0^{\infty} - \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} \Phi'(m) \sin \alpha m dm = \\ &= \frac{1}{\alpha} \Phi \sin \alpha m \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{\alpha^2} \int_0^{\infty} \Phi'(m) d \cos \alpha m = \frac{1}{\alpha} \Phi \sin \alpha m \Big|_0^{\infty} + \\ &+ \frac{1}{\alpha^2} \Phi' \cos \alpha m \Big|_0^{\infty} - \frac{1}{\alpha^2} \int_0^{\infty} \Phi''(m) \cos \alpha m dm. \end{aligned} \quad (3.67)$$

При больших значениях m функция $\Phi(m)$ и ее производные стремятся к нулю, поэтому вместо (3.67) имеем

$$\int_0^{\infty} \Phi(m) \cos \alpha m dm = \frac{1}{\alpha} \Phi(0) + \frac{1}{\alpha^2} \Phi'(0) - \frac{1}{\alpha^2} \int_0^{\infty} \Phi''(m) \cos \alpha m dm. \quad (3.68)$$

При $m \rightarrow 0$ функции $K_0(m)$ и $K_1(m)$ представим в виде

$$K_0(m) \approx -\ln m - \frac{m^2}{4} \ln m + \frac{m^2}{4} - C + \dots;$$

$$K_1(m) \approx \frac{1}{m} + \frac{m}{2} \ln m - \frac{m}{4} + \dots$$

Подставляя эти значения в $\Phi(m)$, получаем

$$\Phi(m) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{4} m^2 \ln m;$$

$$\Phi'(m) \approx \frac{m}{2} \ln m;$$

$$\Phi''(m) \approx \frac{1}{2} \ln m$$

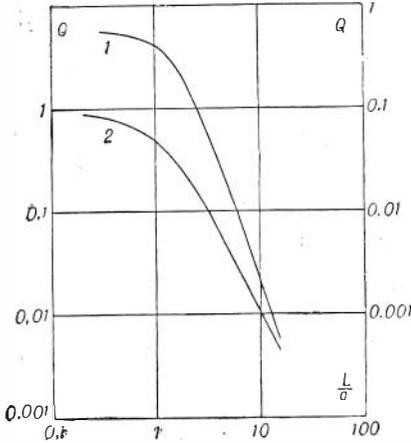
при $m \rightarrow 0$.

Таким образом,

$$\int_0^{\infty} \Phi(m) \cos \alpha m dm \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{2\alpha^2} \int_0^{\infty} \ln m \cos \alpha m dm \approx \frac{1}{2\alpha^2} \int_0^{\infty} K_0(m) \cos \alpha m dm \rightarrow \frac{1}{2\alpha^2} \cdot \frac{\pi}{2\alpha}. \quad (3.69)$$

Подставляя выражение для интеграла из формулы (3.69) в (3.66), получаем асимптотическое представление геометрического фактора скважины

$$Q_c(\alpha) \approx \frac{1}{2\alpha^2} + \frac{2\alpha\pi}{4\pi\alpha^3} = \frac{1}{\alpha^2}. \quad (3.70)$$



При малых значениях α геометрический фактор скважины близок к единице, с увеличением α функция $Q_c(\alpha)$ убывает вначале пропорционально α , а именно $Q_c(\alpha) = 1 - 0,586\alpha$ (при $\alpha \ll 1$). Как видно из табл. 3.2, при относительно небольших значениях α функция $Q_c(\alpha)$ убывает обратно пропорционально квадрату α .

Рис. 3.2

1 — производная от геометрического фактора скважины;
2 — геометрический фактор скважины.

На рис. 3.2 приведены графики функции $Q_c(\alpha)$ и ее производной $Q'_c(\alpha)$. Данные табл. 3.2 положены в основу расчетов в двухслойной и трехслойной среде для двухкатушечного зонда индукционного каротажа.

§ 10. ПАЛЕТКИ ИНДУКЦИОННОГО БОКОВОГО КАРОТАЖНОГО ЗОНДИРОВАНИЯ С ДВУХКАТУШЕЧНЫМИ ЗОНДАМИ (ИБКЗ-2)

На палетках ИБКЗ-2 сгруппированы кривые, выражающие зависимость $\frac{Y_k}{Y_c}$ от $\frac{L}{a_c}$, где L — длина зонда, a_c — радиус скважины при неограниченной мощности пласта. По аналогии с БКЗ будем различать следующие случаи и соответствующие им кривые ИБКЗ-2.

1. Основной случай — отсутствие проникновения раствора в пласт. Кривые ИБКЗ-2 для этого случая двухслойные и сведены на так называемой «двухслойной» палетке.

2. Понижающее проникновение раствора — проникновение фильтра глинистого раствора в пласт. Удельное сопротивление примыкающего к скважине промежуточного слоя породы изменяется, принимая промежуточное значение между удельным сопротивлением раствора и удельным сопротивлением неизмененного пласта. Кривые ИБКЗ-2 для этого случая в соответствии с их видом назовем приподнятыми кривыми ИБКЗ-2.

3. Повышающее проникновение раствора — в результате проникновения глинистого раствора в пласт удельное сопротивление примыкающего к скважине цилиндрического слоя становится больше удельного сопротивления раствора и неизмененного пласта. Кривые ИБКЗ-2 для этого случая назовем выположенными кривыми ИБКЗ-2.

Кривые ИБКЗ-2 при проникновении раствора в породу будем называть трехслойными в отличие от указанных выше двухслойных.

В области предельно малого параметра поля трехслойные кривые ИБКЗ-2 в общем случае определяются тремя относительными параметрами:

$\frac{\rho_{\Delta}}{\rho_c}$, $\frac{\alpha_{\Delta}}{\alpha_c}$ и $\frac{\gamma_{\Pi}}{\gamma_c}$. Соответственно с этим двухслойные кривые ИБКЗ-2 определяются одним относительным параметром $\frac{\gamma_{\Pi}}{\gamma_c}$. Параметр $\frac{\gamma_{\Pi}}{\gamma_c}$ является моду-

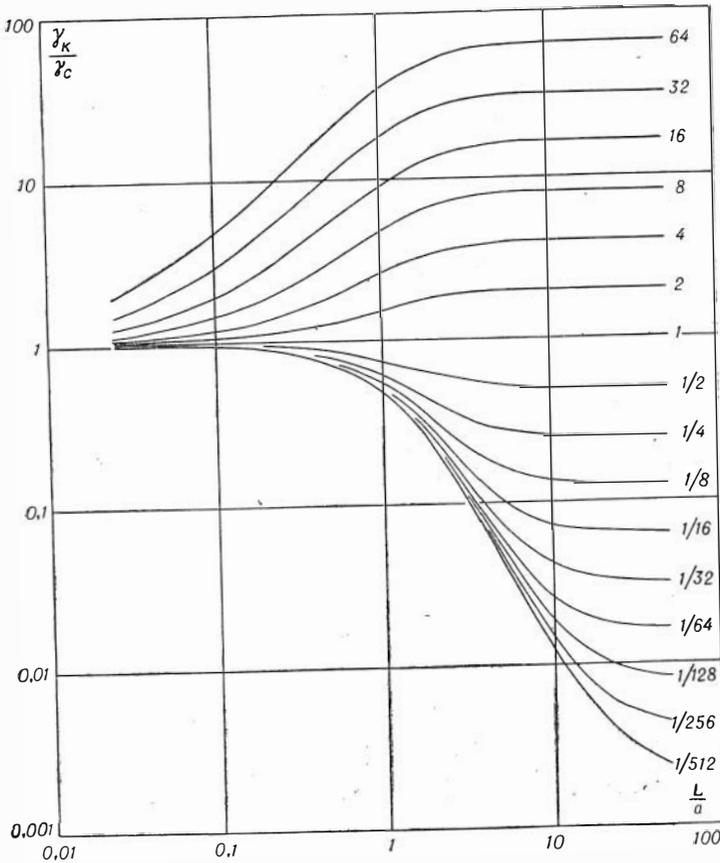


Рис. 3.3. Двухслойная кривая ИБКЗ-2.

лем кривой ИБКЗ-2. Так же, как и в БКЗ, трехслойные кривые группируются в палетки с общими параметрами $\frac{\alpha_{\Delta}}{\alpha_c}$ и $\frac{\rho_{\Delta}}{\rho_c}$. По оси абсцисс отложена длина зонда, выраженная в радиусах скважины, по оси ординат — отношение $\frac{\gamma_K}{\gamma_c}$. Рассмотрим некоторые свойства кривых ИБКЗ-2. На рис. 3.3 представлена двухслойная палетка ИБКЗ-2. Каждая из кривых имеет две асимптоты, представленные прямыми, параллельными оси абсцисс: правую, соответствующую удельной проводимости пласта γ_{Π} , и левую, соответствующую удельной проводимости раствора γ_c . Последняя является общей асимптотой всех кривых. При увеличении $\frac{L}{a}$ каждая из кривых ИБКЗ-2 переходит от левой асимптоты к правой, нигде их не пересекая.

Другая особенность двухслойных кривых ИБКЗ-2 — несколько более быстрый выход на правую асимптоту с увеличением $\frac{L}{a_c}$, чем для соответствующих кривых БКЗ. Для кривых с модулем $\frac{\gamma_{\pi}}{\gamma_c} > 1$ характерен быстрый выход кривой к правой асимптоте, практически при $\frac{L}{a_c} \geq 5$ значение γ_k не отличается от удельной проводимости пласта. С уменьшением модуля кривой, т. е. с увеличением удельного сопротивления пласта или электропроводности бурового раствора скважины, выход на правую асимптоту наступает при больших значениях $\frac{L}{a_c}$. Согласно формулам (3.60), (3.70), имеем следующее асимптотическое представление для γ_k , справедливое при больших значениях отношений $\alpha = \frac{L}{a_c}$:

$$\frac{\gamma_k}{\gamma_c} = \frac{\gamma_{\pi}}{\gamma_c} \left(1 - \frac{1}{\alpha^2} \right) + \frac{1}{\alpha^2} \quad (\alpha \gg 1). \quad (3.71)$$

Когда длина зонда стремится к нулю и во много раз меньше радиуса скважины, выражение для кажущейся проводимости имеет вид

$$\frac{\gamma_k}{\gamma_c} = k \frac{\gamma_{\pi}}{\gamma_c} \alpha + (1 - k\alpha) \quad (\alpha \ll 1), \quad (3.72)$$

где $k=0,586$. Чем выше удельная проводимость пласта, тем при меньших значениях α кривая выходит на единицу. Это вполне понятно, так как с увеличением электропроводности пласта растет роль индуцированных в нем токов.

Из сопоставления кривых ИБКЗ-2 и БКЗ видно, что последние выходят на левую асимптоту раньше, чем кривые ИБКЗ-2.

Предельная кривая для кривых с модулем, большим единицы, стремится в бесконечность. Кривая для геометрического фактора скважины $Q_c(\alpha)$ является предельной для кривых с модулем, меньшим единицы. «Глубинность исследования» двухкатушечного зонда практически такая же, как и для потенциал-зонда в методе КС, и несколько больше, чем для градиент-зонда.

Трехслойные кривые ИБКЗ-2 при понижающем проникновении раствора ($\rho_{\pi} > \rho_c$) похожи на двухслойные кривые ИБКЗ-2 при $\rho_{\pi} > \rho_c$, но отличаются от них более пологим ходом кривой ИБКЗ-2 с увеличением $\alpha = \frac{L}{a_c}$. При очень большом проникновении раствора с увеличением $\frac{L}{a_c}$ правая ветвь кривой ИБКЗ-2 стремится к двухслойной кривой ИБКЗ-2 модуля $\frac{\rho_{\pi}}{\rho_{\Delta}}$, а левая — к двухслойной кривой ИБКЗ-2 модуля $\frac{\rho_{\Delta}}{\rho_c}$. При понижающем проникновении раствора средняя часть кривой ИБКЗ-2 более приподнята, чем у двухслойной кривой того же модуля. Понижающее проникновение вызывает значительное увеличение кажущейся проводимости по сравнению с ее значением при отсутствии проникновения и, значит, требует применения более длинных зондов для определения истинной удельной проводимости пласта.

При повышающем проникновении раствора ($\rho_{\Delta} > \rho_{\pi}$), относительно небольшой длине зонда кривые ИБКЗ-2 более пологие по сравнению с двухслойными кривыми, если проводимость пласта значительно больше проводимости промежуточной зоны. При небольших отношениях $\frac{\gamma_{\pi}}{\gamma_{\Delta}}$ кривые имеют минимум. Влияние проникновения раствора (как понижающего,

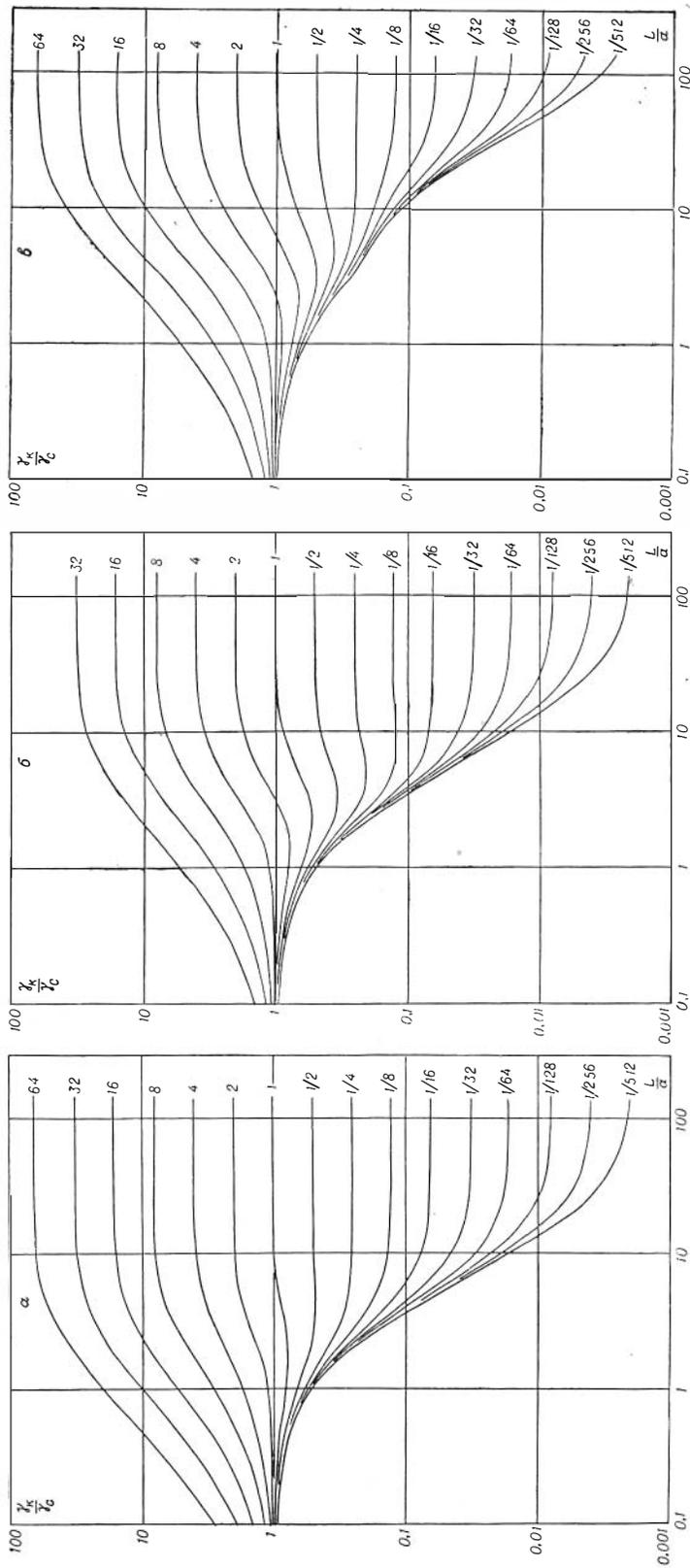


Рис. 3.4. Кривые ИБКЗ-2.

- а) $\frac{\alpha}{a_c} = 2$, б) $\frac{\alpha}{a_c} = 4$, в) $\frac{\alpha}{a_c} = 8$, $\frac{\gamma_{\Delta}}{\gamma_c} = \frac{1}{8}$, $\frac{\gamma_{\Delta}}{\gamma_c} = \frac{1}{32}$, $\frac{\gamma_{\Delta}}{\gamma_c} = \frac{1}{4}$.

так и повышающего) на кажущуюся удельную проводимость тем сильнее, чем больше глубина проникновения и чем больше изменение сопротивления пласта при проникновении в него раствора (рис. 3.4).

В методах, основанных на применении постоянного тока, направление токовых линий зависит от соотношения между удельными сопротивлениями скважины, промежуточной зоны и пласта. В индукционном каротаже при возбуждении поля вертикальным магнитным диполем токовые линии независимо от распределения удельного сопротивления в радиальном направлении представляют собою окружности, лежащие в горизонтальных плоскостях с общим центром на оси скважины, и не пересекают поверхностей раздела.

Магнитное поле, создаваемое цилиндрической оболочкой в двухкатушечном зонде, равно

$$h_z = \frac{\mu \omega z^2}{2} \gamma \left[Q_c \left(\frac{z}{r_2} \right) - Q_c \left(\frac{z}{r_1} \right) \right]. \quad (3.73)$$

Здесь r_1 и r_2 — внутренний и внешний радиусы оболочки. При уменьшении толщины оболочки разность геометрических факторов, стоящая в квадратных скобках (3.73), может быть приближенно представлена в виде произведения толщины оболочки на производную от функции $Q_c \left(\frac{z}{r} \right)$ по радиусу r . Тогда вместо (3.73) имеем

$$h_z = \frac{\mu \omega z^2}{2} Sg, \quad (3.74)$$

где S — продольная проводимость оболочки, равная $\gamma \Delta r$; g — геометрический фактор тонкой цилиндрической оболочки,

$$g = - \frac{z}{r^2} Q_c' \left(\frac{z}{r} \right).$$

Здесь r — средний радиус оболочки.

В определенных пределах оболочки, имеющие один и тот же радиус r , но отличающиеся друг от друга удельной проводимостью γ и толщиной Δr , создают практически одно и то же поле h_z , если произведение $\gamma \Delta r$ остается постоянным. С увеличением радиуса r , т. е. по мере удаления от оси скважины, эквивалентность по S может быть применена к оболочкам большей толщины.

В области предельно малых параметров принцип эквивалентности определяется чисто геометрическими факторами, связанными с распределением тока внутри соответствующего слоя.

Более подробное рассмотрение трехслойных кривых ИБКЗ-2 приводит к понятию о приближенной эквивалентности правых и левых ветвей трехслойных кривых двухслойным кривым с определенным образом выбранными параметрами.

Предположим, что имеет место слабое проникновение раствора, и исследуем правую ветвь трехслойных кривых. Если длина зонда значительно больше радиуса скважины и промежуточной зоны, то вместо (3.60) можно записать:

$$\gamma_k = \gamma_c \frac{1}{\alpha^2} + \frac{\gamma_\Delta}{\alpha^2} (\beta^2 - 1) + \gamma_n Q_n \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) \quad (3.75)$$

или

$$\gamma_k = \frac{\gamma_c \left[1 + \frac{\gamma_\Delta}{\gamma_c} (\beta^2 - 1) \right] \beta^2}{\beta^2 \alpha^2} + \gamma_n Q_n \left(\frac{\alpha}{\beta} \right). \quad (3.76)$$

Здесь $\beta = \frac{a_{\Delta}}{a_c}$. Значит, правая ветвь трехслойной кривой эквивалентна двухслойной кривой, «имеющей» следующие параметры:

- 1) радиус фиктивной скважины равен радиусу зоны проникновения;
- 2) удельная проводимость фиктивного бурового раствора связана с параметрами трехслойного разреза соотношением

$$\gamma_{\Phi} = [\gamma_c + \gamma_{\Delta} (\beta^2 - 1)] \cdot \frac{1}{\beta^2}; \quad (3.77)$$

3) удельные проводимости пласта в обоих случаях одинаковы.

При глубоком проникновении раствора только для очень длинных зондов можно воспользоваться результатами, полученными выше. Поэтому вместо формулы (3.75) при $\frac{z}{a_c} \gg 1$ можно написать:

$$\gamma_k = \frac{\gamma_c}{\alpha^2} + \gamma_{\Delta} \left[Q_c \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) - \frac{1}{\alpha^2} \right] + \gamma_n Q_n \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)$$

или

$$\gamma_k \approx \gamma_{\Delta} Q_c \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) + \gamma_n Q_n \left(\frac{\alpha}{\beta} \right), \quad (3.78)$$

т. е. получим выражение для γ_k в двухслойной среде, радиус скважины которой равен a_{Δ} , удельная проводимость бурового раствора γ_{Δ} . Последнее соотношение тем лучше описывает правую ветвь трехслойной кривой, чем больше радиус промежуточной зоны и меньше удельная проводимость бурового раствора скважины.

Когда длина зонда стремится к нулю, можно воспользоваться приближенными выражениями для функции $Q_c(\alpha)$ при $\alpha \rightarrow 0$. Тогда вместо (3.78) имеем

$$\gamma_k = \gamma_c Q_c(\alpha) + \gamma_{\Delta} Q_n(\alpha). \quad (3.79)$$

Следовательно, при сильном проникновении раствора левая ветвь трехслойной кривой приближенно соответствует двухслойной кривой.

§ 11. ПОЛЕ НА ОСИ СКВАЖИНЫ В СРЕДЕ С УДЕЛЬНЫМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ, НЕПРЕРЫВНО МЕНЯЮЩИМСЯ В НАПРАВЛЕНИИ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОМ ОСИ СКВАЖИНЫ

Как известно, между стенками скважины и неизменной частью пласта расположена промежуточная зона, удельное сопротивление которой отлично от удельного сопротивления пласта и бурового раствора скважины. Идеализируя природные условия наблюдения, мы должны представить удельное сопротивление промежуточной зоны как непрерывную функцию расстояния от оси скважины.

Вычислительные трудности расчета электрического поля постоянного тока на оси скважины — одна из главных причин, объясняющих отсутствие кривых ρ_k при произвольном распределении удельного сопротивления в промежуточной зоне.

Аналитический аппарат теории индукционного каротажа для области малых параметров в пластах неограниченной мощности позволяет предельно просто решить задачу при произвольной функции $\gamma = \gamma(r)$. Действительно, согласно (3.60), для активной компоненты магнитного поля и кажущейся проводимости имеем выражение

$$h_z = \frac{\omega \mu L^2}{2} \gamma_k,$$

где

$$\gamma_k = \gamma_c Q_c(\alpha) + \sum_{i=1}^N \gamma_i g_i + \gamma_n Q_n(\alpha). \quad (3.80)$$

Здесь g_i — геометрический фактор тонкого цилиндрического слоя. На стр. 183 показано, что функция g может быть представлена в виде

$$g(\alpha) = \frac{\Delta\rho}{\rho} \cdot \frac{1}{\alpha^2} C(\alpha).$$

Функция $C(\alpha)$ табулирована, и ее значения даны в табл. 5.1. При равномерном разбиении среды на оболочки формула (3.80) принимает вид

$$\gamma_k = \gamma_c Q_c(\alpha) + \frac{\Delta\rho}{L} \sum_{i=1}^N \gamma_i \cdot \frac{1}{\alpha_i} C(\alpha_i) + \gamma_n Q_n(\alpha_N). \quad (3.81)$$

На рис. 3.5 представлены две группы кривых. Первая группа соответствует понижающему проникновению бурового раствора в пласт. В одном случае

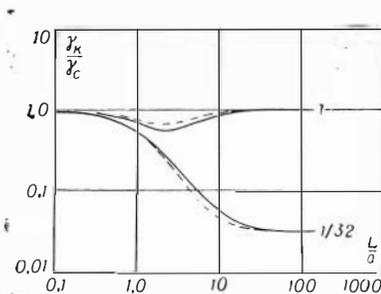


Рис. 3.5.

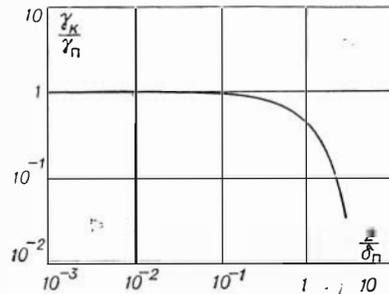


Рис. 3.6.

удельная проводимость промежуточной зоны принята постоянной: $\frac{\gamma_\Delta}{\gamma_c} = \frac{1}{8}$, в другом случае удельное сопротивление в промежуточной зоне непрерывно увеличивается от удельного сопротивления скважины до удельного сопротивления пласта как функция $\rho = 5,0e^{4,65r}$ ($0,1 \leq r \leq 0,4$). Шифр этих кривых $\frac{\gamma_n}{\gamma_c} = \frac{1}{32}$. Вторая группа соответствует повышающему проникновению ($\frac{\gamma_n}{\gamma_c} = 1$; $\frac{\gamma_\Delta}{\gamma_c} = \frac{1}{8}$). Одна из кривых, которая идет несколько выше, соответствует случаю, когда удельное сопротивление промежуточной зоны уменьшается как функция $\rho = 20e^{-6,94r}$.

Как видим, характер изменения удельного сопротивления может оказать заметное влияние на измеряемое на оси скважины поле. Отсутствие сведений о фактическом распределении удельного сопротивления в промежуточной зоне не позволяет, к сожалению, провести достаточно полное исследование этой задачи.

§ 12. ПРИБЛИЖЕННЫЙ УЧЕТ ВНУТРЕННЕГО СКИН-ЭФФЕКТА

Теория предельно малого параметра (теория Долля) не учитывает явление скин-эффекта, поэтому результаты расчета, полученные согласно этой теории, несколько завышены по сравнению с действительными значе-

ниями поля на оси скважины. Особенно это становится заметным при сопоставлении со строгими расчетами в пластах конечной мощности.

Будем вначале считать, что явление скин-эффекта проявляется только в пласте. Тогда для активной компоненты поля и кажущейся проводимости имеем следующие выражения (стр. 42): в двухслойной среде

$$h_z = h_z^{\text{одн}} + \frac{\omega \mu L^2}{2} (\gamma_c - \gamma_n) Q_c(\alpha);$$

$$\frac{\gamma_k}{\gamma_n} = \frac{\gamma_k^{\text{одн}}}{\gamma_n} + \left(\frac{\gamma_c}{\gamma_n} - 1 \right) Q_c(\alpha);$$
(3.82)

в трехслойной среде

$$h_z = h_z^{\text{одн}} + \frac{\omega \mu L^2}{2} (\gamma_c - \gamma_n) Q_c(\alpha) + \frac{\omega \mu L^2}{2} (\gamma_\Delta - \gamma_n) Q_\Delta(\alpha);$$

$$\frac{\gamma_k}{\gamma_n} = \frac{\gamma_k^{\text{одн}}}{\gamma_n} + \left(\frac{\gamma_c}{\gamma_n} - 1 \right) Q_c(\alpha) + \left(\frac{\gamma_\Delta}{\gamma_n} - 1 \right) Q_\Delta(\alpha).$$
(3.83)

Эти формулы справедливы, если в скважине и зоне проникновения отсутствует скин-эффект, а в пласте он проявляется так же, как в однородной среде с удельным сопротивлением ρ_n .

Сопоставление с результатами строгого расчета поля на оси скважины устанавливает пределы применения этой теории.

Т а б л и ц а 3.3

$\frac{\gamma_c}{\gamma_n}$	2	4	8	16	32	64	128
$\frac{a_c}{\delta_c}$	0,16	0,16	0,16	0,16	0,11	0,08	0,08

В табл. 3.3 даны максимальные значения $\frac{a_c}{\delta_c}$, для которых формулы (3.82) и (3.83) еще удовлетворительно описывают поле в двухслойной среде.

При меньших значениях отношения $\frac{a_c}{\delta_c}$ расхождение между точными и приближенными расчетами не превышает 1—3%. Соответствующие данные о максимально допустимых параметрах среды и поля в трехслойной среде приведены ниже.

Совместный анализ строгих и приближенных расчетов позволяет установить характер распределения токов в среде, что имеет большое значение при разработке и применении многокатушечных фокусирующих зондов.

Формула для γ_k в двухслойной среде в области предельно малых параметров, согласно (3.66), может быть представлена в виде

$$\frac{\gamma_k}{\gamma_n} = 1 + \left(\frac{\gamma_c}{\gamma_n} - 1 \right) Q_c(\alpha)$$
(3.84)

и отличается от формулы (3.82) присутствием единицы вместо функции $\frac{\gamma_k^{\text{одн}}}{\gamma_n}$ (рис. 3.6), которая, как известно, с увеличением параметра $\frac{\sqrt{\gamma_n \mu \omega}}{2} L$ уменьшается от единицы до нуля.

Если удельное сопротивление бурового раствора больше удельного сопротивления пласта и длина зонда в несколько раз больше радиуса скважины, то основной сигнал вносят токи, индуцированные в пласте. Поэтому ослабление сигнала за счет скин-эффекта в двухслойной среде практически такое же, как в однородной среде с удельным сопротивлением пласта.

Если электропроводность бурового раствора выше удельной проводимости пласта, то влияние скин-эффекта на величину измеряемого сигнала слабее, чем в предыдущем случае.

С увеличением длины зонда скин-эффект проявляется сильнее, так как, во-первых, уменьшается влияние токов, индуцированных в скважине (функция $Q_c(\alpha)$ убывает), и, во-вторых, растет влияние более удаленных участков пласта, где активная компонента плотности тока значительно меньше, чем это следует из приближенной теории Долля. Отношение

$$\frac{\gamma_{\kappa}^{\text{одн}}}{\gamma_{\text{п}}} + \left(\frac{\gamma_c}{\gamma_{\text{п}}} - 1 \right) Q_c(\alpha) \\ \frac{1 + \left(\frac{\gamma_c}{\gamma_{\text{п}}} - 1 \right) Q_c(\alpha)}{1 + \left(\frac{\gamma_c}{\gamma_{\text{п}}} - 1 \right) Q_c(\alpha)}$$

характеризует уменьшение сигнала в двухслойной среде в результате проявления скин-эффекта в пласте.

Если считать радиус скважины равным 0,1 м, то легко получаем максимальные значения произведения $\gamma_{\text{п}} f$ для различных отношений $\frac{\gamma_c}{\gamma_{\text{п}}}$ (табл. 3.4), которые удовлетворяют условию

$$\gamma_{\text{п}} \mu \omega \leq \frac{5,12}{N} \quad (3.85)$$

$$\text{при } a_c = 0,1 \text{ м, } N = \frac{\gamma_c}{\gamma_{\text{п}}} < 128 \text{ и } \frac{L}{a_c} \leq 20,0.$$

Т а б л и ц а 3.4

$\frac{\gamma_c}{\gamma_{\text{п}}}$	2	4	8	16	32	64	128
$\gamma_{\text{п}} f$	$3,2 \cdot 10^5$	$1,6 \cdot 10^5$	$0,8 \cdot 10^5$	$0,4 \cdot 10^5$	$0,4 \cdot 10^5$	$0,4 \cdot 10^5$	$0,2 \cdot 10^5$

Это требование в реальных условиях для частот, применяемых в современной аппаратуре индукционного каротажа, практически всегда выполняется.

Соотношение (3.85) имеет первостепенное значение, так как устанавливает область удельных сопротивлений и частот, для которых токи в скважине, определяющие сигнал в измерительной цепи зонда, сдвинуты по ф.зе на 90° и скин-эффект в пласте развивается так же, как в однородной среде с удельным сопротивлением пласта.

В рамках рассматриваемой теории увеличение радиуса скважины и удельной проводимости бурового раствора приводит к ослаблению влияния внутреннего скин-эффекта в пласте и более обоснованному применению формул приближенной теории предельно малых параметров (теории Долля).

Однако если радиус скважины становится настолько большим, что нарушается условие (3.85), то для определения поля необходимо применять строгие расчеты.

Выражение для γ_k в трехслойной среде для предельно малых параметров, согласно (3.60), записывается в виде

$$\frac{\gamma_k}{\gamma_n} = 1 + \left(\frac{\gamma_c}{\gamma_n} - \frac{\gamma_\Delta}{\gamma_n} \right) Q_c(\alpha) + \left(\frac{\gamma_\Delta}{\gamma_n} - 1 \right) Q_c\left(\frac{\alpha}{\beta}\right). \quad (3.86)$$

Аналогично вместо (3.83) имеем

$$\frac{\gamma_k}{\gamma_n} = \frac{\gamma_k^{\text{одн}}}{\gamma_n} + \left(\frac{\gamma_c}{\gamma_n} - \frac{\gamma_\Delta}{\gamma_n} \right) Q_c(\alpha) + \left(\frac{\gamma_\Delta}{\gamma_n} - 1 \right) Q_c\left(\frac{\alpha}{\beta}\right). \quad (3.87)$$

Как и в случае двухслойной среды, в последней формуле вместо единицы стоит функция $\frac{\gamma_k^{\text{одн}}}{\gamma_n}$, учитывающая скин-эффект в пласте и позволяющая в каждом отдельном случае определить пределы применимости формулы (3.86).

Очевидно, что с увеличением длины зонда повышается глубинность исследования, т. е. чувствительность к более удаленным участкам среды. Поэтому скин-эффект проявляется при длинных зондах значительно заметнее, независимо от характера распределения удельного сопротивления в скважине и промежуточной зоне.

При повышающем проникновении бурового раствора уменьшается вклад в общий сигнал от промежуточной зоны и соответственно возрастает роль скин-эффекта. При понижающем проникновении раствора доля сигнала от пласта уменьшается и формула (3.86), выведенная из предположения об отсутствии скин-эффекта, дает более точные результаты.

С увеличением диаметра промежуточной зоны соответственно уменьшается диапазон удельных сопротивлений и частот, при которых справедлива приближенная теория, учитывающая явление скин-эффекта только в пласте.

В табл. 5.6—5.17 приведены результаты строгого и приближенного расчетов для четырехкатушечного зонда в трехслойной среде. Эти материалы показывают, что если диаметр промежуточной зоны не превышает 0,8 м, то для большинства удельных сопротивлений скважины, промежуточной зоны и пласта и для применяемых ныне в индукционном каротаже частот можно использовать для расчета γ_k формулу (3.87).

Отношение

$$\frac{\frac{\gamma_k^{\text{одн}}}{\gamma_n} + \left(\frac{\gamma_c}{\gamma_n} - \frac{\gamma_\Delta}{\gamma_n} \right) Q_c(\alpha) + \left(\frac{\gamma_\Delta}{\gamma_n} - 1 \right) Q_c\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}{1 + \left(\frac{\gamma_c}{\gamma_n} - \frac{\gamma_\Delta}{\gamma_n} \right) Q_c(\alpha) + \left(\frac{\gamma_\Delta}{\gamma_n} - 1 \right) Q_c\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}$$

так же, как и в случае двухслойной среды, позволяет для каждого разреза определить погрешность, связанную с применением формулы теории предельно малых параметров.

Влияние частоты, согласно теории Долля, определяется из соотношения

$$\frac{\varepsilon^{\text{втр}}}{\varepsilon^{\text{нр}}} = \frac{\omega \mu L^2}{2} \gamma_k, \quad (3.88)$$

где $\varepsilon^{\text{втр}}$ — э.д.с., индуцированная токами в среде; $\varepsilon^{\text{нр}}$ — э.д.с. в воздухе; L — длина зонда; γ_k — кажущаяся проводимость (функция, не зависящая от частоты).

Поэтому с ростом частоты увеличивается доля полезного сигнала, но не меняется соотношение между сигналами от разных участков среды.

По мере увеличения частоты возрастает влияние скин-эффекта в более близких к скважине участках среды, и мы выходим из области параметров, где справедлива теория Долля. В первую очередь рост частоты приводит к тому, что зонд начинает чувствовать скин-эффект во внешней области, т. е. в пласте. Поэтому в данном случае функция γ_k определяется правой частью формулы (3.87) и зависит от частоты. Из анализа поля диполя в однородной среде известно, что с увеличением частоты уменьшается влияние удаленных участков среды (стр. 14). Если удельные проводимости бурового раствора и промежуточной зоны превышают удельную проводимость пласта и только в нем проявляется скин-эффект, то на величине γ_k это практически может не сказаться. Поэтому с ростом частоты наблюдается увеличение доли вторичного сигнала приблизительно такое же, как это следует из теории Долля.

Если внутренняя область (скважина и промежуточная зона) менее проводящая, чем пласт, то отношение вторичного сигнала к первичному растет медленнее, чем частота. Таблицы функций $Q_c(\alpha)$ и $\frac{\gamma_k^{\text{одн}}}{\gamma_n}$ позволяют установить для каждого конкретного случая влияние частоты на величину сигнала.

Рассмотрим несколько примеров.

Д в у х с л о й н ы й р а з р е з. Промежуточная зона отсутствует.

1. Плохопроводящий буровой раствор ($\gamma_c \ll \gamma_n$).

Согласно (3.82)

$$\frac{\varepsilon^{\text{втр}}}{\varepsilon^{\text{пр}}} = \frac{\gamma_n \mu \omega L^2}{2} \left[\frac{\gamma_k^{\text{одн}}}{\gamma_n} - Q_c \left(\frac{L}{a_c} \right) \right]. \quad (3.89)$$

Когда длина зонда L превышает в несколько раз радиус скважины a_c , функция $Q_c(\alpha)$, как правило, значительно меньше $\frac{\gamma_k^{\text{одн}}}{\gamma_n}$. Действительно,

формула (3.89) справедлива, если $\gamma_n \mu \omega a_c^2 \leq \frac{5 \cdot 10^{-2}}{N}$. При этом функция $\frac{\gamma_k^{\text{одн}}}{\gamma_n}$ уменьшается от 1 до 0,30 (для зонда длиной 1 м). Если считать радиус скважины $a_c = 0,1$ м, то значение функции $Q_c(\alpha)$ не превышает 0,01. Поэтому

$$\frac{\varepsilon^{\text{втр}}}{\varepsilon^{\text{пр}}} \approx \frac{\gamma_n \mu \omega L^2}{2} \cdot \frac{\gamma_k^{\text{одн}}}{\gamma_n} \quad (\gamma_c \ll \gamma_n). \quad (3.90)$$

Как видно из табл. 1.2, увеличение удельной проводимости пласта или частоты более чем в 100 раз (при изменении $\gamma_n \mu \omega$ от 0,01 до 256 для $L = 1$ м)

приводит к уменьшению функции $\frac{\gamma_k^{\text{одн}}}{\gamma_n}$ почти в три раза. Если принять частоту поля, например, равной 60 кГц*, то изменение параметра $\gamma_n \mu \omega$ от 0,01 до 0,64 соответствует изменению удельного сопротивления от 48 до 0,8 ом и отношение $\frac{\varepsilon^{\text{втр}}}{\varepsilon^{\text{пр}}}$ возрастает почти в 30 раз.

2. Буровой раствор, более проводящий, чем пласт ($\gamma_c > \gamma_n$).

$$\frac{\varepsilon^{\text{втр}}}{\varepsilon^{\text{пр}}} = \frac{\gamma_n \mu \omega L^2}{2} \left[\frac{\gamma_k^{\text{одн}}}{\gamma_n} + \left(\frac{\gamma_c}{\gamma_n} - 1 \right) Q_c(\alpha) \right] \approx \frac{\gamma_n \mu \omega L^2}{2} \left[\frac{\gamma_k^{\text{одн}}}{\gamma_n} + \frac{\gamma_c}{\gamma_n} Q_c(\alpha) \right].$$

* Частота 60 кГц применяется в аппаратуре ИК-2.

Пусть, например, $\frac{L}{a_c} = 10$ и $\frac{\gamma_c}{\gamma_n} = 31$, тогда

$$\frac{\varepsilon^{\text{ВТР}}}{\varepsilon^{\text{НР}}} = \frac{\gamma_n \mu \omega L^2}{2} \left[\frac{\gamma_k^{\text{одн}}}{\gamma_n} + 0,3 \right]. \quad (3.91)$$

Непосредственный расчет показывает, что влияние частоты и удельной проводимости пласта на величину отношения $\frac{\varepsilon^{\text{ВТР}}}{\varepsilon^{\text{НР}}}$ практически такое же, как в предыдущем случае.

В области малых значений $\gamma_n \mu \omega$ (0,01) доля сигнала токов, индуцированных в пласте, ко всему сигналу составляет около 80%; при $\gamma_n \mu \omega = 0,64$ сигнал от пласта составляет около 70%, но отношение $\frac{\varepsilon^{\text{ВТР}}}{\varepsilon^{\text{НР}}}$ при этом значительно возрастает. Поэтому повышение частоты при исследовании двухслойного разреза с помощью двухкатушечного зонда целесообразно до тех пор, пока сигнал от пласта больше или, по крайней мере, соизмерим с сигналом от скважины. Естественным ограничением при повышении частоты является возможность неоднозначной интерпретации, поскольку частотная характеристика активной компоненты имеет максимум. Другое обстоятельство, ограничивающее использование очень высоких частот, связано с применением фокусирующих многокатушечных зондов, для эффективности действия которых необходимо, чтобы токи в скважине были сдвинуты по фазе на 90° .

Приближенная теория справедлива, если:

а) токи в скважине сдвинуты по фазе на 90° относительно тока в источнике;

б) скин-эффект в пласте проявляется так же, как в однородной среде с удельным сопротивлением пласта.

Как показывает сравнение с результатами строгого расчета, с увеличением длины зонда точность данных, полученных приближенным способом, уменьшается. По-видимому, это связано с тем, что вначале нарушается второе условие, т. е. токи в пласте распределяются иначе, чем в однородной среде. При более коротких зондах, когда влияние более проводящей скважины преобладает, расхождение между данными приближенного и строгого расчета становится меньше. Поэтому, вероятно, можно считать, что первое условие (сдвиг по фазе на 90° токов в скважине, которые определяют сигнал в зонде) выполняется при больших значениях параметра $\frac{a}{\delta_n}$ и, в частности, частоты поля. Например, при $\frac{\rho_n}{\rho_c} = 16,0$ и $\frac{L}{a_c} = 3,0$ погрешность не превышает 3%, если $\frac{a_c}{\delta_n} \leq 0,12$. Это обстоятельство представляет известный интерес, поскольку применение короткого фокусирующего зонда с использованием высокой частоты может оказаться полезным для определения удельного сопротивления промежуточной зоны при одновременной компенсации влияния токов в скважине.

Т р е х с л о й н ы й р а з р е з. Согласно (3.87),

$$\frac{\varepsilon^{\text{ВТР}}}{\varepsilon^{\text{НР}}} = \frac{\gamma_n \mu \omega L^2}{2} \left[\frac{\gamma_k^{\text{одн}}}{\gamma_n} + \left(\frac{\gamma_c}{\gamma_n} - \frac{\gamma_\Delta}{\gamma_n} \right) Q_c(\alpha) + \left(\frac{\gamma_\Delta}{\gamma_n} - 1 \right) Q_c\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \right]. \quad (3.92)$$

Как было показано выше, область применения этой формулы сужается по мере увеличения диаметра промежуточной зоны. Влияние частоты на соотношение между первичным и вторичным сигналами и на характер распре-

деления токов существенно зависит от удельного сопротивления и диаметра промежуточной зоны. Чем глубже проникновение и меньше удельное сопротивление ρ_{Δ} , тем меньше влияет явление скин-эффекта в пласте на величину отношения $\frac{\varepsilon_{втр}}{\varepsilon_{пр}}$, но при этом заметно ослабевает сигнал от пласта.

С увеличением удельного сопротивления бурового раствора и промежуточной зоны небольшого радиуса рост частоты также приводит к ослаблению сигнала от пласта, однако при этом сигнал от пласта убывает медленнее, чем в предыдущем случае (когда увеличивался диаметр промежуточной зоны), хотя скин-эффект проявляется здесь сильнее. В области предельно малых параметров для однородной среды с увеличением длины зонда возрастает отношение вторичного поля к первичному, при этом абсолютное значение вторичного поля убывает обратно пропорционально длине зонда.

В неоднородной среде связь между сигналом и длиной зонда становится значительно сложнее. Так, в двухслойной среде с более проводящей скважиной вторичное поле при относительно коротких зондах может убывать несколько быстрее, чем в однородной среде, но с увеличением зонда поле начинает уменьшаться как $\frac{1}{L}$. Ослабление роста относительной аномалии вторичного поля $\frac{\varepsilon_{втр}}{\varepsilon_{пр}}$ с увеличением длины зонда наступает с того момента, когда зонд начинает чувствовать участки среды, в которых заметно проявляется скин-эффект.

Область применения приближенной теории, учитывающей скин-эффект во внешней среде, может быть заметно расширена. Наряду с рассмотрением поля в кусочно-однородных средах (когда удельное сопротивление промежуточной зоны принимается постоянным) представляется возможным исследовать поле в средах с непрерывно меняющимся удельным сопротивлением.

При произвольном распределении удельного сопротивления среды в промежуточной зоне выражения для вторичного поля и кажущейся проводимости записываются в виде:

$$h_z = h_z^{одн} + \frac{\omega \mu L^2}{2} (\gamma_c - \gamma_n) Q_c(\alpha) + \frac{\omega \mu L^2}{2} \int_{a_c}^{a_{\Delta}} [\gamma(r) - \gamma_n] g(r) dr; \quad (3.93)$$

$$\frac{\gamma_k}{\gamma_n} = \frac{\gamma_k^{одн}}{\gamma_n} + \left(\frac{\gamma_c}{\gamma_n} - 1 \right) Q_c(\alpha) + \int_{a_c}^{a_{\Delta}} \left[\frac{\gamma_r}{\gamma_n} - 1 \right] g(r) dr. \quad (3.94)$$

Используя оценки применимости формулы (3.83) для кусочно-однородной среды, можно в каждом конкретном случае определить область частот и удельных сопротивлений, при которых будут справедливы формулы (3.93) и (3.94).

Приближенная теория, учитывающая явление скин-эффекта во внешней среде, так же как и теория Долля, только в определенных пределах удовлетворительно описывает поведение активной компоненты поля, но для полной характеристики мы должны обратиться к результатам строгого расчета поля на оси скважины. Анализ материалов, представленных в виде таблиц и графиков, позволяет сделать некоторые выводы о поведении поля на оси скважины при одной или двух цилиндрических границах.

§ 13. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ВЕРТИКАЛЬНОГО МАГНИТНОГО ДИПОЛЯ НА ОСИ СКВАЖИНЫ

Основные особенности в поведении поля на оси скважины сводятся к следующему.

1. При возбуждении поля вертикальным магнитным диполем источником вторичного поля являются вихревые токи, токовые линии которых лежат в горизонтальных плоскостях и представляют собою окружности с центром на оси скважины.

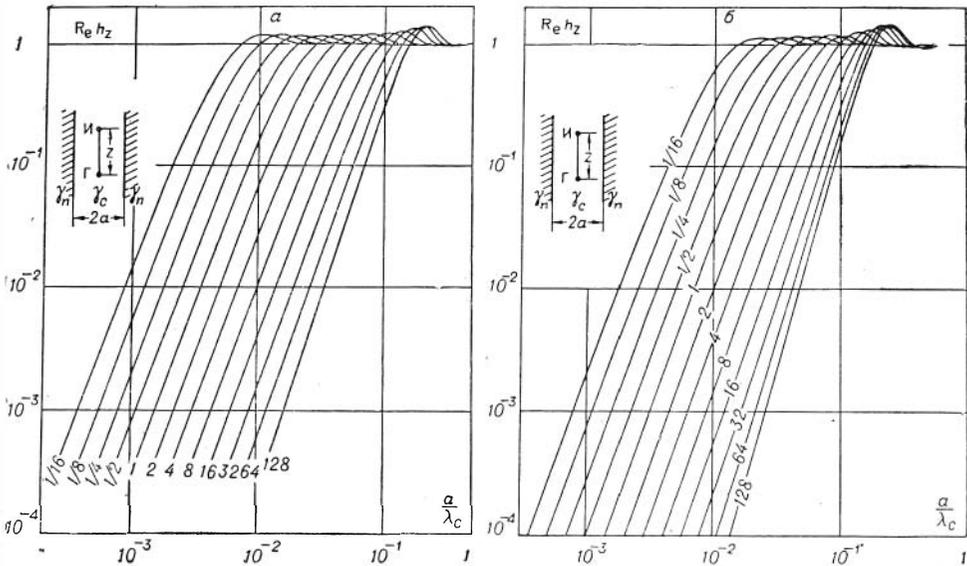


Рис. 3.7. Реактивная компонента поля в двухслойной среде.

а) $\frac{z}{a} = 12$; б) $\frac{z}{a} = 6$.

2. В сферической системе координат с центром в точке расположения диполя и осью z , направленной по оси скважины, электрическое поле имеет только одну компоненту E_φ , магнитное поле — две компоненты H_R и H_θ . На оси скважины электрическое поле E_φ и нормальная к оси компонента магнитного поля равны нулю. Магнитное поле направлено вдоль оси скважины.

3. Как известно, плотность вихревых токов j_φ в любой точке имеет две компоненты: реактивную и активную. Реактивная компонента тока находится в противофазе с током в источнике, активная компонента сдвинута по фазе на 90° . В характере распределения компонент тока есть существенные различия. Активная компонента тока преобладает вблизи источника поля и быстро убывает по мере удаления от него. С увеличением частоты и удельной проводимости пласта уменьшаются размеры области, в которой преобладает активная компонента тока.

4. При широком диапазоне изменения частот и удельных сопротивлений бурового раствора скважины, промежуточной зоны и пласта вблизи зонда преобладает активная компонента плотности тока, и явление скин-эффекта в пласте имеет такой же характер, как в однородной среде с удельной проводимостью пласта.

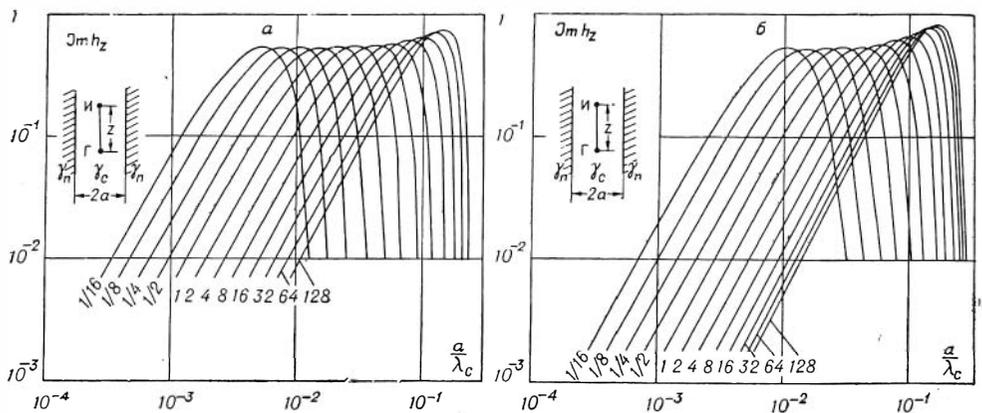


Рис. 3.8. Активная компонента поля в двухслойной среде.

а) $\frac{z}{a} = 12$; б) $\frac{z}{a} = 6$.

5. Вблизи источника активная компонента плотности тока прямо пропорциональна частоте, но чем дальше от источника, тем больше характер ее изменения определяется поглощением в среде.

6. Вблизи источника поля реактивная компонента плотности тока значительно меньше активной компоненты, по мере удаления от диполя она возрастает, достигает максимума и затем быстро уменьшается до нуля.

7. Активная и реактивная компоненты вертикальной составляющей магнитного поля на оси скважины определяются соответственно распределением в среде активной и реактивной компонент плотности тока. На рис. 3.7—3.10 представлены компоненты магнитного поля, выраженные в единицах первичного поля в воздухе, а также кривые отношения кажущейся

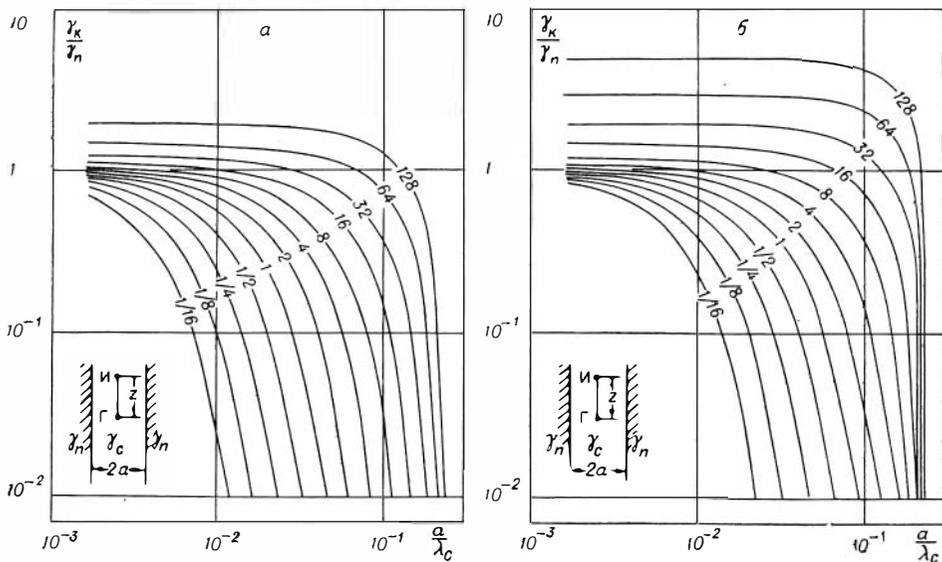


Рис. 3.9. Функция $\frac{\gamma_k}{\gamma_n}$ в двухслойной среде.

а) $\frac{z}{a} = 12$; б) $\frac{z}{a} = 6$.

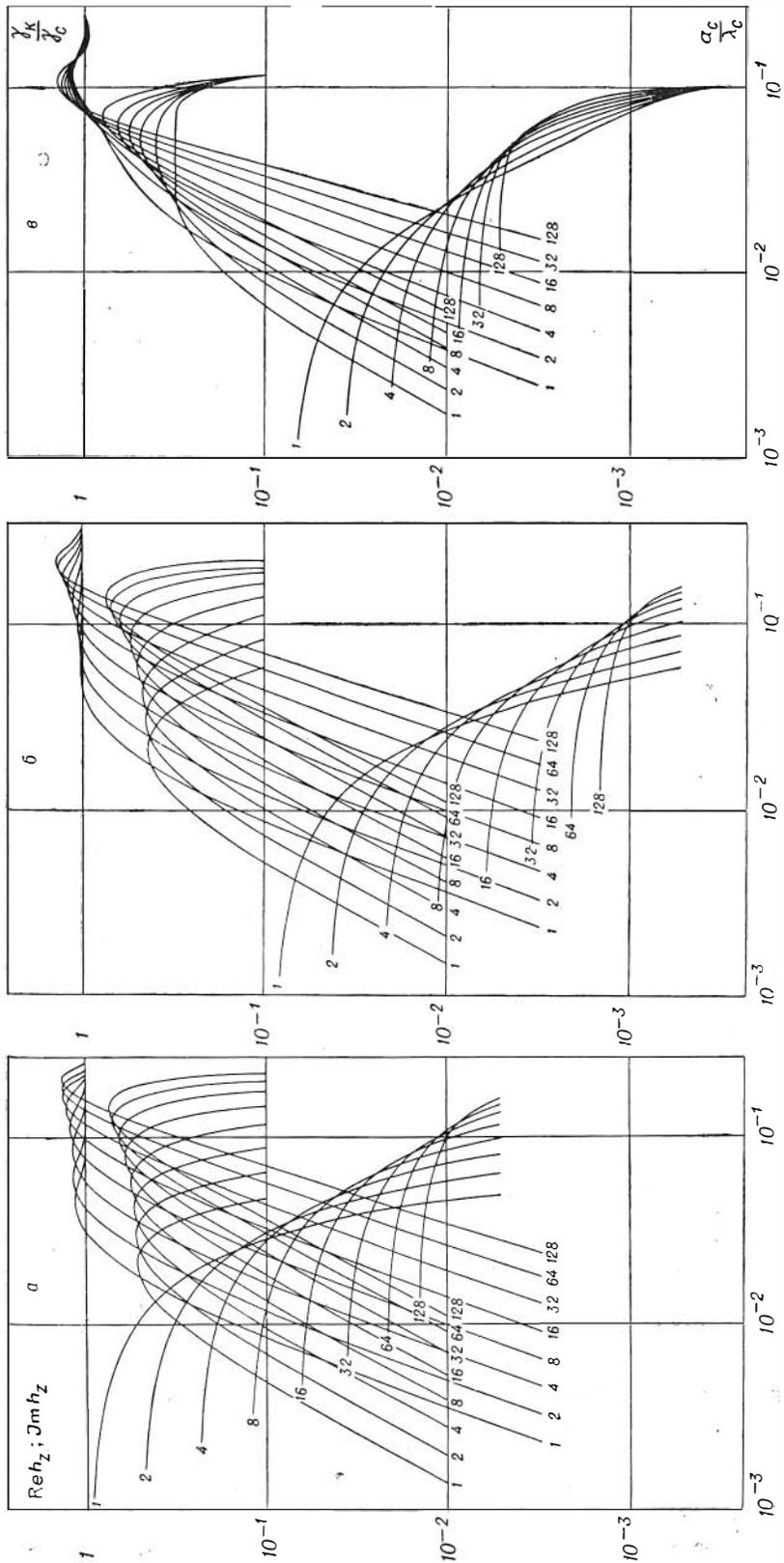


Рис. 3.10. Поля в трехслойной среде.

а) $\frac{\rho \Delta}{\rho_c} = 128$; $\frac{a \Delta}{a_c} = 2$; $\frac{z}{a_c} = 12$; б) $\frac{\rho \Delta}{\rho_c} = 128$; $\frac{a \Delta}{a_c} = 4$; $\frac{z}{a_c} = 12$; в) $\frac{\rho \Delta}{\rho_c} = 8$; $\frac{a \Delta}{a_c} = 8$; $\frac{z}{a_c} = 12$.

проводимости к проводимости пласта $\frac{\gamma_k}{\gamma_n}$. Величина $\frac{\gamma_k}{\gamma_n}$ связана с полем соотношением

$$\frac{\gamma_k}{\gamma_n} = \frac{2}{\gamma_n \mu \omega L^2} \cdot h_z^{\text{акт}}.$$

Здесь $h_z^{\text{акт}}$ — активная компонента поля. По оси абсцисс отложено отношение $\frac{a_c}{\lambda_c}$, где λ_c — длина волны в скважине, равная

$$\lambda_c = 2\pi \sqrt{\frac{2}{\gamma_c \mu \omega}} = 2\pi \delta_c = \frac{2\pi}{\sqrt{N}} \delta_n$$

(δ_n и δ_c — соответственно толщина скин-слоя в пласте и скважине, $N = \frac{\rho_n}{\rho_c}$, ρ_n и ρ_c — удельные сопротивления пласта и скважины). Шифр кривых N , шифр семейства кривых $\frac{\rho_\Delta}{\rho_c}$, $\frac{a_\Delta}{a_c}$ и $\frac{L}{a_c}$, где L — длина зонда, ρ_Δ и a_Δ — удельное сопротивление и радиус промежуточной зоны, a_c — радиус скважины. Согласно соотношению, связывающему γ_k и $h_z^{\text{акт}}$, кажущаяся проводимость в однородной среде равна истинной проводимости только в том случае, когда $h_z^{\text{акт}} = \frac{\gamma_n \mu \omega L^2}{2}$, т. е. когда отсутствует взаимодействие токов, определяющих сигнал в измерительной катушке зонда.

8. Активная компонента магнитного поля независимо от удельного сопротивления среды вначале растет прямо пропорционально частоте, достигает максимума и затем стремится к нулю*.

9. Левая асимптота частотной характеристики активной компоненты представляет собой прямую, расположенную под углом $63^\circ 30'$ к оси абсцисс. Эта часть кривой соответствует тому случаю, когда сигнал создан вихревыми токами, интенсивность которых определяется только первичным магнитным потоком и распределением удельного сопротивления в среде. Как было уже отмечено выше, область распределения вихревых токов, сдвинутых по фазе на 90° относительно тока в источнике и обязанных своим возникновением только магнитному потоку первичного поля, возрастает с уменьшением частоты и увеличением удельного сопротивления среды, особенно удельного сопротивления пласта. Вместе с тем с увеличением длины зонда возрастает глубинность исследования среды и уменьшается влияние близлежащих к зонду участков. Поэтому отход частотной характеристики от ее левой асимптоты наступает тем раньше, чем больше длина зонда.

10. Будем условно называть ту часть частотной характеристики для активной компоненты поля, которая практически совпадает с ее левой асимптотой, «областью Долля». В «области Долля» активная компонента поля значительно больше реактивной. Подробное описание магнитного поля на оси скважины и кажущейся проводимости как функции геометрических факторов и распределения удельного сопротивления было дано выше.

С увеличением частоты или удельной проводимости среды частотная характеристика располагается ниже своей левой асимптоты.

11. В двухслойном разрезе, когда удельное сопротивление бурового раствора выше удельного сопротивления пласта, выход из «области Долля» наступает практически при тех же значениях параметра $\frac{L}{\delta_n}$, как и в однородной среде с удельной проводимостью γ_n .

* Осциллирующий характер поведения активной компоненты при больших значениях a_c/λ_c , естественно, не может быть показан на логарифмическом бланке.

12. Если удельная проводимость бурового раствора в скважине больше, чем удельная проводимость пласта, и длина волны в скважине во много раз превышает ее радиус (обычно это требование выполняется в реальных условиях), то особенности в поведении поля, характерные для «области Долля», имеют место при большем значении параметра $\frac{L}{\delta_p}$, чем в однородной среде с удельным сопротивлением пласта. Это объясняется тем, что вихревые токи, индуцированные в скважине и определяющие сигнал в зонде, оказываются сдвинутыми по фазе на 90° и увеличиваются прямо пропорционально частоте и удельной проводимости.

13. Аналогичные закономерности наблюдаются в трехслойном разрезе, когда с увеличением электропроводности бурового раствора и промежуточной зоны, а также ее диаметра (до определенного предела) «области Долля» оказывается значительно больше, чем в однородной среде с удельным сопротивлением пласта. Особенно хорошо это видно на кривых $\frac{\gamma_k}{\gamma_c}$: с увеличением отношения $\frac{\gamma_c}{\gamma_p}$ и $\frac{\gamma_\Delta}{\gamma_p}$ удлиняется прямолинейный участок частотной характеристики. Однако в данном случае эта особенность в поведении кривых подчеркивается тем, что при переходе к кривым с большим отношением $\frac{\gamma_c}{\gamma_p}$ одновременно уменьшается проводимость пласта (при фиксированном значении $\frac{a_c}{\lambda_c}$).

14. С увеличением параметра $\frac{a_c}{\lambda_c}$ частотная характеристика для активной компоненты поля отходит от своей левой асимптоты, и в определенном диапазоне частот и удельных сопротивлений в скважине и в промежуточной зоне отсутствует скин-эффект, а в пласте он развивается также, как в однородной среде с удельным сопротивлением пласта. Для практики индукционного каротажа это наиболее интересная часть частотной характеристики $\text{Im}h_z$. Основные закономерности в поведении поля на этом участке, характеристики активной компоненты и соответствующий аналитический аппарат расчета рассмотрены на стр. 76—82.

15. Частотные характеристики активной компоненты для двухслойной среды имеют один максимум, величина которого растет с увеличением удельной проводимости бурового раствора в скважине. Положение максимума на кривой в основном определяется удельным сопротивлением пласта: при увеличении удельной проводимости бурового раствора более чем в сто раз максимум незначительно смещается в сторону уменьшения частот. При глубококом повышающем проникновении бурового раствора в отдельных случаях на кривой активной компоненты наблюдается два экстремума.

16. При дальнейшем увеличении частоты ослабевают влияние пласта и частотные кривые в трехслойной среде совпадают с частотной характеристикой в двухслойной среде, удельное сопротивление пласта в которой равно ρ_Δ .

17. В правой части частотной характеристики для активной компоненты наблюдается очень быстрое убывание поля с ростом частоты. В «области Долля» степень влияния скважины определяется геометрическими факторами и распределением удельного сопротивления в среде. С увеличением частоты влияние токов, индуцированных в скважине и промежуточной зоне, возрастает, поскольку плотность тока в пласте растет медленнее, чем в скважине и промежуточной зоне (явление скин-эффекта в пласте). В области очень высоких частот, когда длина волны в скважине становится соизмеримой с радиусом скважины (двухслойный

разрез), влияние пласта на активную компоненту резко возрастает. Аналогичное явление имеет место при проникновении бурового раствора.

18. Скважина с буровым раствором более высокоомным, чем пласт, при широком диапазоне частот влияет незначительно, и частотная характеристика поля в большей своей части совпадает с частотной характеристикой в однородной среде (если длина волны по крайней мере в несколько раз больше радиуса скважины).

19. При измерении только активной компоненты поля $\text{Im}h_z$ на одной частоте возможна неоднозначная интерпретация, так как частотная характеристика активной компоненты имеет экстремум. Это обстоятельство должно быть учтено при выборе частоты.

20. Выбор частоты в индукционном каротаже не возможен только на основании расчета поля с двухкатушечным зондом в средах с цилиндрическими поверхностями раздела. Однако этот материал в сочетании с результатами приближенного расчета позволяет определить область частот и удельных сопротивлений, в которой целесообразно применять многокатушечные фокусирующие зонды.

21. Частотная характеристика реактивной компоненты поля $\text{Re}h_z$ существенно отличается от характеристики активной компоненты. В области очень малых значений $\frac{a_c}{\lambda_c}$ (низкие частоты, высокие удельные сопротивления) функция $\text{Re}h_z$ стремится к нулю как $\left(\frac{a_c}{\lambda_c}\right)^3$; при этом отношение реактивной компоненты к активной также быстро убывает. В рассматриваемой области частот и удельных сопротивлений реактивная компонента плотности тока появляется на столь больших расстояниях от зонда, что ее влияние очень мало. С одной стороны, эта особенность в поведении реактивной компоненты плотности тока могла бы быть использована как естественный способ измерения величины, мало зависящей от распределения удельного сопротивления в скважине и промежуточной зоне. С другой стороны, реактивная компонента составляет настолько малую долю от первичного поля, что при существующих способах компенсации едва ли можно ее достаточно точно измерить. С увеличением отношения $\frac{a_c}{\lambda_c}$ реактивная компонента вторичного поля растет и, начиная с некоторого момента, превышает активную компоненту, а когда толщина скин-слоя в скважине становится равной или больше радиуса скважины, выходит к единице, т. е. все токи концентрируются около источника поля.

Таким образом, в правой части частотной характеристики вторичного поля преобладает реактивная компонента поля.

22. В последние годы в структурной электроразведке наряду с вертикальными электрическими зондированиями на постоянном токе начинают широко применять методы переменного тока: частотные зондирования и становление поля. Некоторые модификации этих способов исследования имеют принципиальные преимущества перед методами постоянного тока и, в частности, обладают способностью изучать разрезы под непроводящими пластами, которые являются экранами для постоянного тока.

По-видимому, с этой точки зрения частотные зондирования или метод становления поля представляют собой один из возможных способов исследования в скважинах. Вместе с тем благодаря относительно высокому удельному сопротивлению пород и главным образом небольшому расстоянию между генераторной и приемной катушками, а также небольшому диаметру промежуточной зоны для получения полной частотной характеристики необходимо проводить измерения на очень высоких частотах, где может стать заметным влияние диэлектрической проницаемости по-

род. Например, максимальная частота в среде с удельным сопротивлением 20 ом·м при длине зонда 1 м превышает 10 мГц. Только при создании многоканальной аппаратуры с одновременной регистрацией сигналов в широком диапазоне частот (от первых килогерц до десятков мегагерц) или времен: появится техническая основа для реализации этих методов.

§ 14. ЧАСТОТНЫЙ СПОСОБ ПОВЫШЕНИЯ ГЛУБИННОСТИ ИССЛЕДОВАНИЯ С ДВУХКАТУШЕЧНЫМИ И МНОГОКАТУШЕЧНЫМИ ЗОНДАМИ

Как известно, с помощью многокатушечного фокусирующего зонда можно исключить влияние скважины и частично зоны проникновения. При расчете параметров этих зондов предполагается, что удельное сопротивление является только функцией расстояния от оси скважины, т. е. оно меняется только в радиальном направлении. Действительно, в основу расчета здесь положена радиальная характеристика (дифференциальная или интегральная), определяющая сигнал в приемных датчиках зонда, создаваемых токами в любом цилиндрическом слое, на которые мысленно разбивается среда. Однако присутствие каверн, отклонение от радиального распределения удельного сопротивления из-за неравномерного проникновения бурового раствора в пласт и ограниченной мощности пласта—все это может оказать сильное влияние на фокусирующие свойства многокатушечных зондов. Рассмотрим возможности другого, основанного на иных принципах способа повышения глубинности исследования, не зависящего от перечисленных выше факторов, осложняющих применение многокатушечных зондов.

Изучение электромагнитного поля в однородной среде и в средах с цилиндрическими и горизонтальными поверхностями раздела показывает, что всегда все проводящее пространство можно представить в виде двух областей: внутренней, непосредственно примыкающей к зонду, и остальной части среды. Во внутренней области (ближняя зона) токи сдвинуты по фазе на 90°, их плотность определяется только первичным магнитным потоком и пропорциональна частоте поля. Во внутренней области отсутствует явление скин-эффекта. В общем случае внутренняя область неоднородна по удельному сопротивлению. Во внешней области существует взаимодействие между токами, но влияние токов внутренней области на распределение поля во внешней области мало. С уменьшением частоты и электропроводности среды увеличиваются размеры внутренней области, и, наконец, может наступить такой момент, когда та часть скважины и зоны проникновения, которая определяет сигнал в зонде, попадает во внутреннюю область, а граница с внешней областью переместится в пласт, где явление скин-эффекта развивается так же, как в однородной среде с удельным сопротивлением пласта.

Предположим, что выбраны две частоты, при которых граница ближней зоны проходит через пласт. Тогда выражения для поля и э.д.с. в двухкатушечном зонде записываются в виде

$$h_z(\omega_1) = \frac{\omega_1 \mu L^2}{2} \gamma_k^i + f(\omega_1; \gamma_n); \quad (3.95)$$

$$h_z(\omega_2) = \frac{\omega_2 \mu L^2}{2} \gamma_k^i + f(\omega_2; \gamma_n). \quad (3.96)$$

Здесь L — длина зонда, а γ_k^i — функция, не зависящая от частоты и представляющая собою кажущуюся проводимость в среде, состоящей из внутренней области, когда удельное сопротивление внешней области равно

бесконечности. Функция $f(\omega; \gamma_n)$ зависит только от частоты поля и электропроводности пласта.

Соответственно для э.д.с. имеем

$$\varepsilon(\omega_1) = \frac{\mu M_n M_r^0 I(\omega_1)}{2\pi L^3} \left[\frac{\omega_1^2 \mu L^2}{2} \gamma_k^i + \omega_1 f(\omega_1; \gamma_n) \right]; \quad (3.97)$$

$$\varepsilon(\omega_2) = \frac{\mu M_n M_r^0 I(\omega_2)}{2\pi L^3} \left[\frac{\omega_2^2 \mu L^2}{2} \gamma_k^i + \omega_2 f(\omega_2; \gamma_n) \right], \quad (3.98)$$

где $\varepsilon(\omega_1)$ и $\varepsilon(\omega_2)$ — активные компоненты э.д.с. в измерительной цепи на частотах ω_1 и ω_2 ; $I(\omega)$ — ток в генераторной катушке; M_r^0 — момент генераторной катушки при единичной силе тока. Значит, согласно (3.95) — (3.98), могут быть выбраны две частоты, для которых функция

$$\frac{H_{\text{акт}}(\omega_2)}{\omega_2 I_2} - \frac{H_{\text{акт}}(\omega_1)}{\omega_1^2 I_1} \quad (3.99)$$

не зависит от проводимости и размеров ближней зоны. Этим же свойством обладает функция

$$\frac{\varepsilon_{\text{акт}}(\omega_2)}{\omega_2^2 I_2} - \frac{\varepsilon_{\text{акт}}(\omega_1)}{\omega_1^2 I_1}. \quad (3.100)$$

Следующие две функции также не зависят от распределения удельной электропроводности внутри ближней зоны.

$$\varepsilon_{\text{акт}}(\omega_2) - \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 \varepsilon_{\text{акт}}(\omega_1), \quad (3.101)$$

если $I(\omega_1) = I(\omega_2)$, и

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon(\omega_2) - \varepsilon(\omega_1), \quad (3.102)$$

если

$$\omega_1^2 I(\omega_1) = \omega_2^2 I(\omega_2).$$

Если частоты подобраны так, что промежуточная зона расположена внутри ближней зоны, то выражения (3.101) и (3.102) представляют собой функции только электропроводности пласта и совпадают с аналогичными выражениями для однородной среды с удельным сопротивлением пласта. Эта простая зависимость между функциями (3.101) и (3.102) и удельным сопротивлением в однородной среде должна быть использована для перехода от измеряемой э.д.с. к удельному сопротивлению пласта.

Таким образом, частотный метод исключения влияния скважины и промежуточной зоны заключается в пропускании через генераторную катушку одновременно двух частот и определении в измерительной цепи или

$$\varepsilon_{\text{акт}}(\omega_2) - \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 \varepsilon_{\text{акт}}(\omega_1),$$

если $I(\omega_1) = I(\omega_2)$, или

$$\varepsilon_{\text{акт}}(\omega_2) - \varepsilon_{\text{акт}}(\omega_1),$$

если

$$\omega_1^2 I(\omega_1) = \omega_2^2 I(\omega_2).$$

Согласно равенству

$$\gamma_k = \frac{1}{\mu\omega L^2} h_z$$

и формулам (3.95) и (3.96), разность

$$\frac{\gamma_k}{\gamma_c}(\omega_1) - \frac{\gamma_k}{\gamma_c}(\omega_2)$$

не зависит от удельного сопротивления внутренней области, если выполняются перечисленные выше условия. Здесь γ_c — электропроводность бурового раствора скважины. На основании расчетов в трехслойной среде могут быть установлены параметры среды и частота поля, при которых сохраняется эффективность этого метода определения удельного сопротивления пласта при любых длинах зонда.

В табл. 3.5—3.22 даны значения величин $\frac{\gamma_k}{\gamma_c}(\omega_1) - \frac{\gamma_k}{\gamma_c}(\omega_2)$ для трех длин зондов: $\frac{L}{a_c} = 4,0; 8,0$ и $12,0$ при $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 4,0$.

Таблица 3.5

$\frac{\rho_\Delta}{\rho_c}$	$\frac{D}{d} = 2$	$\gamma_{\Pi} \mu \omega_1$			
		0,01	0,02	0,04	0,08
4,0 128	$\frac{L}{a_c} = 4,0$	0,0188	0,0266	0,0374	0,0526
		0,0188	0,0266	0,0374	0,0524
4,0 128	$\frac{L}{a_c} = 8,0$	0,0375	0,0528	0,0740	0,103
		0,0375	0,0527	0,0738	0,103
4,0 128	$\frac{L}{a_c} = 12,0$	0,0560	0,0784	0,109	0,149
		0,0560	0,0785	0,109	0,149

Примечание. $\frac{\rho_{\Pi}}{\rho_c} = 1,0$.

Таблица 3.6

$\frac{\rho_\Delta}{\rho_c}$	$\frac{D}{d} = 2$	$\gamma_{\Pi} \mu \omega_1$			
		0,01	0,02	0,04	0,08
4,0 128	$\frac{L}{a_c} = 4,0$	0,0942	0,0135	0,0188	0,0264
		0,0944	0,0133	0,0187	0,0263
4,0 128	$\frac{L}{a_c} = 8,0$	0,0188	0,0263	0,0371	0,0516
		0,0188	0,0264	0,0370	0,0515
4,0 128	$\frac{L}{a_c} = 12,0$	0,0280	0,0393	0,0546	0,0747
		0,0280	0,0392	0,0545	0,0745

Примечание. $\frac{\rho_{\Pi}}{\rho_c} = 2,0$.

Таблица 3.7

$\frac{\rho_{\Delta}}{\rho_c}$	$\frac{D}{d} = 2$	$\gamma_{\text{пм}\omega_1}$			
		0,01	0,02	0,04	0,08
4,0 128	$\frac{L}{a_c} = 4,0$	0,00471 0,00471	0,00666 0,00653	0,00943 0,00938	0,0133 0,0133
4,0 128	$\frac{L}{a_c} = 8,0$	0,00940 0,00938	0,0132 0,0134	0,0186 0,0186	0,0260 0,0256
4,0 128	$\frac{L}{a_c} = 12,0$	0,0140 0,0140	0,0197 0,0194	0,0274 0,0273	0,0376 0,0377

Примечание. $\frac{\rho_{\text{п}}}{\rho_c} = 4,0$.

Таблица 3.8

$\frac{\rho_{\Delta}}{\rho_c}$	$\frac{D}{d} = 2$	$\gamma_{\text{пм}\omega_1}$			
		0,01	0,02	0,04	0,08
4,0 128	$\frac{L}{a_c} = 4,0$	0,00236 0,00236	0,00335 0,00334	0,00476 0,00472	0,00680 0,00668
4,0 128	$\frac{L}{a_c} = 0,8$	0,00471 0,00470	0,00665 0,00663	0,00939 0,00932	0,0132 0,0130
4,0 128	$\frac{L}{a_c} = 12,0$	0,00702 0,00702	0,0109 0,0108	0,0138 0,0137	0,0191 0,0189

Примечание. $\frac{\rho_{\text{п}}}{\rho_c} = 8$.

Таблица 3.9

$\frac{\rho_{\Delta}}{\rho_c}$	$\frac{D}{d} = 2$	$\gamma_{\text{пм}\omega_1}$			
		0,01	0,02	0,04	0,08
4,0 128	$\frac{L}{a_c} = 4,0$	0,00119 0,00118	0,00170 0,00168	0,00244 0,00239	0,00351 0,00344
4,0 128	$\frac{L}{a_c} = 8,0$	0,00237 0,00236	0,00336 0,00333	0,00479 0,00471	0,00676 0,00665
4,0 128	$\frac{L}{a_c} = 12,0$	0,00353 0,00351	0,004498 0,00495	0,00702 0,00692	0,0108 0,0106

Примечание. $\frac{\rho_{\text{п}}}{\rho_c} = 16$.

Таблица 3.10

$\frac{\rho_{\Delta}}{\rho_c}$	$\frac{D}{d} = 2$	$\gamma_{\text{пм}\omega_1}$			
		0,01	0,02	0,04	0,08
$\frac{4,0}{128}$	$\frac{L}{a_c} = 8,0$	0,00119 0,00120	0,00169 0,00172	0,00241 0,00250	0,00348 0,00376
$\frac{4,0}{128}$	$\frac{L}{a_c} = 12,0$	0,00177 0,00178	0,00250 0,00244	0,00352 0,00363	0,00498 0,00527

Примечание. $\frac{\rho_{\text{п}}}{\rho_c} = 32$.

Таблица 3.11

$\frac{\rho_{\Delta}}{\rho_c}$	$\frac{D}{d} = 4$	$\gamma_{\text{пм}\omega_1}$			
		0,01	0,02	0,04	0,08
$\frac{4,0}{128}$	$\frac{L}{a_c} = 4,0$	0,0188 0,0188	0,0266 0,0266	0,0374 0,0374	0,0526 0,0523
$\frac{4,0}{128}$	$\frac{L}{a_c} = 8,0$	0,0375 0,0375	0,0530 0,0529	0,0740 0,0736	0,103 0,103
$\frac{4,0}{128}$	$\frac{L}{a_c} = 16,0$	0,0560 0,0560	0,0784 0,0783	0,109 0,108	0,150 0,148

Примечание. $\frac{\rho_{\text{п}}}{\rho_c} = 1$.

Таблица 3.12

$\frac{\rho_{\Delta}}{\rho_c}$	$\frac{D}{d} = 4$	$\gamma_{\text{пм}\omega_1}$			
		0,01	0,02	0,04	0,08
$\frac{4,0}{128}$	$\frac{L}{a_c} = 4,0$	0,00940 0,00937	0,0132 0,0132	0,0187 0,0185	0,0260 0,0256
$\frac{4,0}{128}$	$\frac{L}{a_c} = 8,0$	0,0187 0,0187	0,0263 0,0262	0,0368 0,0365	0,0509 0,0502
$\frac{4,0}{128}$	$\frac{L}{a_c} = 12,0$	0,0280 0,0279	0,0391 0,0390	0,0542 0,0538	0,0738 0,0728

Примечание. $\frac{\rho_{\text{п}}}{\rho_c} = 2,0$.

Таблица 3.13

$\frac{\rho_{\Delta}}{\rho_c}$	$\frac{D}{d} = 4$	$\gamma_{\Pi \mu \omega_1}$			
		0,01	0,02	0,04	0,08
4,0 128	$\frac{L}{a_c} = 4,0$	0,00471 0,00469	0,00667 0,00660	0,00943 0,00925	0,0133 0,0129
4,0 128	$\frac{L}{a_c} = 8,0$	0,00940 0,00935	0,0132 0,0131	0,0186 0,0183	0,0260 0,0252
4,0 128	$\frac{L}{a_c} = 12,0$	0,0140 0,0140	0,0197 0,0195	0,0274 0,0269	0,0376 0,0365

Примечание. $\frac{\rho_{\Pi}}{\rho_c} = 4,0$.

Таблица 3.14

$\frac{\rho_{\Delta}}{\rho_c}$	$\frac{D}{d} = 4$	$\gamma_{\Pi \mu \omega_1}$			
		0,01	0,02	0,04	0,08
4,0 128	$\frac{L}{a_c} = 4,0$	0,00237 0,00235	0,00338 0,00331	0,00485 0,00465	0,00706 0,00651
4,0 16,0 128	$\frac{L}{a_c} = 8,0$	0,00473 0,00470 0,00468	0,00671 0,00660 8,00658	0,00855 0,00827 0,00819	0,0137 0,0129 0,0127
4,0 16,0 128	$\frac{L}{a_c} = 12,0$	0,00706 0,00700 0,00699	0,00995 0,00990 0,00978	0,0140 0,0138 0,0135	0,0196 0,0187 0,0184

Примечание. $\frac{\rho_{\Pi}}{\rho_c} = 8,0$.

Таблица 3.15

$\frac{\rho_{\Delta}}{\rho_c}$	$\frac{D}{d} = 4$	$\gamma_{\Pi \mu \omega_1}$			
		0,01	0,02	0,04	0,08
4,0 16,0 128	$\frac{L}{a_c} = 4,0$	0,00120 0,00118 0,00118	0,00178 0,00170 0,00167	0,00263 0,00240 0,00236	0,00417 0,00346 0,00333
4,0 16,0 128	$\frac{L}{a_c} = 8,0$	0,00240 0,00237 0,00235	0,00348 0,00340 0,00331	0,00507 0,00473 0,00465	0,00771 0,00669 0,00648
4,0 16,0 128	$\frac{L}{a_c} = 12,0$	0,00357 0,00353 0,00350	0,00511 0,00510 0,00492	0,00787 0,00694 0,00684	0,01080 0,00964 0,00938

Примечание. $\frac{\rho_{\Pi}}{\rho_c} = 16,0$.

Таблица 3.16

$\frac{\rho_{\Delta}}{\rho_c}$	$\frac{D}{d} = 4$	$\gamma_{\Pi \mu \omega_1}$			
		0,01	0,02	0,04	0,08
4,0 16,0 128	$\frac{L}{a_c} = 4,0$	0,00074 0,00059 0,00059	0,00100 0,00087 0,00085	0,00173 0,00128 0,00121	0,00357 0,00200 0,00180
4,0 16,0 128	$\frac{L}{a_c} = 8,0$	0,00125 0,00120 0,00118	0,00188 0,00171 0,00167	0,00302 0,00247 0,00247	0,00547 0,00366 0,00339
4,0 16,0 128	$\frac{L}{a_c} = 12,0$	0,00185 0,00177 0,00176	0,00272 0,00252 0,00249	0,00420 0,00361 0,00348	0,00685 0,00519 0,00487

Примечание. $\frac{\rho_{\Pi}}{\rho_c} = 32$.

Таблица 3.17

$\frac{\rho_{\Delta}}{\rho_c}$	$\frac{D}{d} = 8$	$\gamma_{\Pi \mu \omega_1}$			
		0,01	0,02	0,04	0,08
4,0 128	$\frac{L}{a_c} = 4,0$	0,0185 0,0185	0,0258 0,0256	0,0355 0,0350	0,0477 0,0464
4,0 128	$\frac{L}{a_c} = 8,0$	0,0370 0,0368	0,0514 0,0510	0,0704 0,0693	0,0937 0,0912
4,0 128	$\frac{L}{a_c} = 12,0$	0,0562 0,0550	0,0764 0,0758	0,104 0,102	0,137 0,133

Примечание. $\frac{\rho_{\Pi}}{\rho_c} = 1$.

Таблица 3.18

$\frac{\rho_{\Delta}}{\rho_c}$	$\frac{D}{d} = 8$	$\gamma_{\Pi \mu \omega_1}$			
		0,01	0,02	0,04	0,08
4,0 128	$\frac{L}{a_c} = 4,0$	0,00932 0,00924	0,0131 0,0128	0,0181 0,0175	0,0247 0,0322
4,0 128	$\frac{L}{a_c} = 8,0$	0,0186 0,0184	0,0260 0,0255	0,0357 0,0347	0,0484 0,0457
4,0 128	$\frac{L}{a_c} = 12,0$	0,0278 0,0275	0,0385 0,0379	0,0528 0,0512	0,0764 0,0667

Примечание. $\frac{\rho_{\Pi}}{\rho_c} = 2$.

Таблица 3.19

$\frac{\rho_{\Delta}}{\rho_c}$	$\frac{D}{d} = 8$	$\gamma_{\Pi \mu \omega_1}$			
		0,01	0,02	0,04	0,08
4,0 16,0 128	$\frac{L}{a_c} = 4,0$	0,00471 0,00464 0,00463	0,00667 0,00648 0,00642	0,00942 0,00891 0,00878	0,0133 0,0120 0,0117
4,0 16,0 128	$\frac{L}{a_c} = 8,0$	0,00940 0,00926 0,00922	0,0132 0,0129 0,0128	0,0186 0,0179 0,0164	0,0260 0,0236 0,0230
4,0 16,0 128	$\frac{L}{a_c} = 12,0$	0,0140 0,0138 0,0138	0,0197 0,0191 0,0190	0,0274 0,0261 0,0257	0,0376 0,0343 0,0335

Примечание. $\frac{\rho_{\Pi}}{\rho_c} = 4,0$.

Таблица 3.20

$\frac{\rho_{\Delta}}{\rho_c}$	$\frac{D}{d} = 8$	$\gamma_{\Pi \mu \omega_1}$			
		0,01	0,02	0,04	0,08
4,0 16,0 128	$\frac{L}{a_c} = 4,0$	0,00242 0,00236 0,00232	0,00341 0,00324 0,00322	0,00522 0,00456 0,00442	0,00812 0,00635 0,00591
4,0 16,8 128,0	$\frac{L}{a_c} = 8,0$	0,00481 0,00470 0,00462	0,00695 0,00664 0,00640	0,0102 0,00900 0,00875	0,0162 0,0122 0,0116
4 16 128	$\frac{L}{a_c} = 12,0$	0,00716 0,00702 0,00689	0,0103 0,00985 0,00952	0,0149 0,0133 0,0129	0,0220 0,0178 0,0169

Примечание. $\frac{\rho_{\Pi}}{\rho_c} = 8,0$.

Таблица 3.21

$\frac{\rho_{\Delta}}{\rho_c}$	$\frac{D}{d} = 8$	$\gamma_{\Pi \mu \omega_1}$			
		0,01	0,02	0,04	0,08
4,0 16,0 128	$\frac{L}{a_c} = 4,0$	0,00130 0,00118 0,00116	0,00204 0,00168 0,00162	0,00353 0,00240 0,00225	0,00704 0,00346 0,00304
4,0 16,0 128	$\frac{L}{a_c} = 8,0$	0,00256 0,00236 0,00232	0,00397 0,00334 0,00328	0,00665 0,00472 0,00443	0,0125 0,00669 0,00594
4,0 16,0 128	$\frac{L}{a_c} = 12,0$	0,00380 0,00351 0,00346	0,00597 0,00595 0,00580	0,00935 0,00694 0,00660	0,0165 0,0106 0,0086

Примечание. $\frac{\rho_{\Pi}}{\rho_c} = 16,0$.

$\frac{\rho_{\Delta}}{\rho_c}$	$\frac{D}{d} = 8$	$\gamma_{\Pi} \mu \omega_1$			
		0,01	0,02	0,04	0,08
4 8 16 128	$\frac{L}{a_c} = 4,0$	0,000834 0,000661 0,000615 0,000588	0,00167 0,00105 0,000904 0,000828	0,00409 0,00266 0,00139 0,00116	0,0115 0,00411 0,00232 0,00164
4 8 16 128	$\frac{L}{a_c} = 8,0$	0,00158 0,00130 0,00122 0,00117	0,00301 0,00202 0,00177 0,00164	0,00686 0,00518 0,00266 0,00228	0,0178 0,00176 0,00421 0,00313
4 8 16 128	$\frac{L}{a_c} = 12,0$	0,00226 0,00191 0,00180 0,00171	0,00409 0,00293 0,00262 0,00243	0,00865 0,00753 0,00386 0,00334	0,0206 0,0111 0,00696 0,00457

Примечание. $\frac{\rho_{\Pi}}{\rho_c} = 32$.

1-й случай. Диаметр зоны проникновения в два раза больше диаметра скважин ($\frac{D}{d} = 2$).

При неглубоком проникновении раствора можно с достаточно коротким зондом исключить влияние скважины и зоны проникновения, если $\gamma_{\Pi} \mu \omega_2 \leq 0,32$ или $f \leq 4 \cdot 10^4 \rho_{\Pi}$, независимо от характера проникновения.

2-й случай. Диаметр зоны проникновения в четыре раза больше диаметра скважины ($\frac{D}{d} = 4,0$).

С увеличением глубины проникновения бурового раствора в пласт несколько сужается диапазон параметров, которые соответствуют физическим предпосылкам метода. Если удельное сопротивление пласта не превышает удельное сопротивление бурового раствора более чем в 10 раз, то частотная фокусировка имеет место по крайней мере до $\gamma_{\Pi} \mu \omega_2 \leq 0,32$, независимо от характера проникновения раствора. При больших отношениях $\frac{\rho_{\Pi}}{\rho_c}$ максимальное значение $\gamma_{\Pi} \mu \omega$ становится меньше (0,04—0,06), но, по существу, не ограничивает область применения метода. Действительно, пусть $f = 1,2 \times 10^5$ гц, $\frac{\rho_{\Pi}}{\rho_c} = 32$, $\rho_c = 0,5$ ом. Тогда $\gamma_{\Pi} \mu \omega = 0,06$. При более высоком удельном сопротивлении бурового раствора и фиксированном значении $\frac{\rho_{\Pi}}{\rho_c}$ величина $\gamma_{\Pi} \mu \omega$ становится еще меньше.

3-й случай. Диаметр зоны проникновения в восемь раз больше диаметра скважины ($\frac{D}{d} = 8,0$).

Реализация частотного метода фокусировки, по-видимому, связана с большими техническими трудностями, особенно при понижении частоты. Известным недостатком метода является ухудшение вертикальной характеристики, которое в некоторой степени может быть скомпенсировано применением более коротких зондов или переходом к трехкатушечному зонду с равными моментами измерительных катушек. Этот зонд в середине пласта дает истинное удельное сопротивление, если мощность пласта равна

или больше длины зонда, а удельные сопротивления вмещающей среды по обе стороны пласта равны. С понижением частоты возрастает глубинность исследования и становится возможным определение истинного удельного сопротивления короткими зондами (до 1 м) при очень глубоком проникновении (до $8 a_c$ и больше). При переходе к двухчастотной методике исследования вертикальная характеристика ухудшается в 2—2,5 раза по сравнению с одночастотным вариантом для зонда такой же длины.

§ 15. ВЛИЯНИЕ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ ДАТЧИКОВ ЗОНДА В ИНДУКЦИОННОМ КАРОТАЖЕ

Необходимость измерения относительно малых сигналов требует применения в качестве датчиков зонда катушек, размеры которых соизмеримы с радиусом скважины. Так как создание палеточного материала, учитывающего конечные размеры датчиков, — это совершенно непосильная и едва ли необходимая задача, то представляется более целесообразным осуществить расчеты электромагнитного поля для точечных датчиков (магнитные диполи) и одновременно провести необходимый цикл исследований влияния конечных размеров генераторных и приемных катушек индукционного зонда. Теоретические работы в этом направлении проводились В. Н. Никитиной [10] и Ю. И. Кудрявцевым [9]. В настоящем разделе изложены результаты расчетов, соответствующие трем основным случаям:

1) датчики представляют собой одиночные кольца, насаженные на непроводящую основу зонда;

2) один из датчиков зонда является однослойной катушкой, другой датчик — одиночное кольцо. Радиусы датчиков равны между собой и равны радиусу непроводящей основы зонда;

3) датчики зонда представляют собой однослойные катушки одинаковой высоты, радиусы которых равны радиусу непроводящей основы зонда.

Поскольку влияние конечных размеров катушек особенно заметно сказывается при измерении с относительно короткими зондами (на которых явление скин-эффекта проявляется слабее), то можно считать в определенной мере справедливым пренебрежение в расчетах скин-эффектом. Вместе с тем из анализа магнитного поля диполя следует, что в данном случае результаты расчетов могут быть использованы, когда скин-эффект в скважине отсутствует, а во внешней среде проявляется так же, как в однородной среде. Поэтому полученные материалы могут быть использованы в более широком диапазоне частот и удельных сопротивлений. Изучение влияния конечного размера датчиков на распределение поля дает возможность, с нашей точки зрения, во-первых, получить представление о величине поправок, которые нужно внести в результаты расчета магнитного поля диполя (точечный источник), и, во-вторых, исследовать возможность создания микроиндукционных установок, фокусирующие свойства которых, в частности, определялись бы размерами датчиков. Можно ожидать, что комплексирование таких микрозондов с длинными индукционными зондами позволило бы во многих случаях определить удельное сопротивление зоны проникновения и пласта. Если явление скин-эффекта не влияет на величину сигнала от скважины в измерительной катушке, то поле, как известно, можно представить через поле в однородной среде и геометрический фактор скважины. Поэтому основное внимание нами уделено изучению зависимости геометрического фактора скважины от размеров катушек зонда, в частности в области предельно малых параметров, и изучению поведения геометрического фактора пласта.

Вначале рассмотрим наиболее простой случай, когда источником поля является вертикальный магнитный диполь, а приемником — кольцо

радиуса r_k , лежащее в горизонтальной плоскости (рис. 3.11). Как было установлено (стр. 52), электрическое поле в скважине записывается в виде

$$E = E_0 + \frac{i\omega\mu}{4\pi} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \lambda_1^2 C_1 I_1(\lambda_1 r) \cos \lambda z d\lambda. \quad (3.103)$$

Здесь E_0 — электрическое поле магнитного диполя в однородной среде с удельной проводимостью γ_c , равное:

$$E_0 = \frac{i\omega\mu}{4\pi} \frac{e^{ikR}}{R^2} (1 - ikR) \sin \theta. \quad (3.104)$$

Разлагая функцию e^{ikR} в ряд

$$e^{ikR} = 1 + ikR - \frac{k^2 R^2}{2},$$

находим выражение для E_0 в области предельно малых параметров

$$E_0 = \frac{i\omega\mu}{4\pi} \cdot \frac{1}{R^2} \sin \theta + \frac{i\omega\mu}{4\pi} \cdot \frac{k^2}{2} \sin \theta, \quad (3.105)$$

где $k^2 = i\gamma\omega\mu$. Первый член определяет вихревое электрическое поле магнитного диполя в воздухе, второе слагаемое описывает вихревое электрическое поле токов, индуцированных в среде.

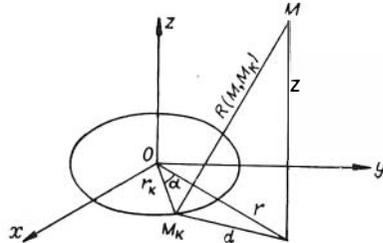
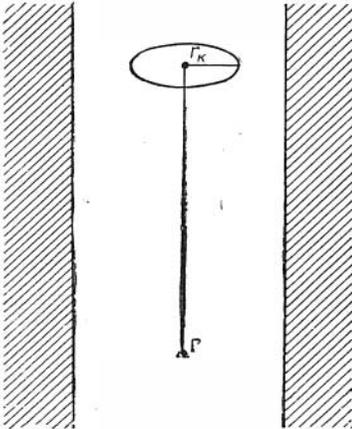


Рис. 3.12.

Рис. 3.11.

Согласно (3.103), вторичное электрическое поле в скважине (двух-слойная среда) для области предельно малого параметра записывается в виде

$$E = \frac{i\omega\mu}{4\pi} \frac{k^2}{2} \sin \theta + \frac{i\omega\mu}{4\pi} \cdot \frac{2}{\pi} (\gamma_n - \gamma_c) i\omega\mu \int_0^\infty \frac{m}{2} [2K_0 K_1 - m (K_1^2 - K_0^2)] \times \\ \times \frac{I_1(\beta m)}{m} \cos \alpha m d m. \quad (3.106)$$

Здесь $\alpha = \frac{L}{a}$; $\beta = \frac{r_k}{a}$ (a — радиус скважины). В однородной среде вторичное электрическое поле равно

$$E_0 = \frac{i\omega\mu}{4\pi} i\omega\mu\gamma \cdot \frac{1}{2} \sin \theta.$$

Поэтому выражение для кажущейся проводимости представим в виде

$$\gamma_{\kappa} = \frac{2 \cdot 4\pi E}{\omega^2 \mu^2 \sin \theta}$$

и, согласно (3.106), для двухслойной среды имеем

$$\frac{\gamma_{\kappa}}{\gamma_c} = 1 + \frac{4}{\pi \sin \theta} \left(\frac{\gamma_{\Pi}}{\gamma_c} - 1 \right) \int_0^{\infty} \frac{m}{2} [2K_0 K_1 - m(K_1^2 - K_0^2)] \frac{I_1(\beta m)}{m} \cos \alpha m dm. \quad (3.107)$$

Функцию

$$Q_{\Pi}^*(\alpha, \beta) = \frac{4}{\pi \sin \theta} \int_0^{\infty} \frac{m}{2} [2K_0 K_1 - m(K_1^2 - K_0^2)] \frac{I_1(\beta m)}{m} \cos \alpha m dm$$

будем называть геометрическим фактором пласта. Заметим, что

$$\sin \theta = \frac{r_{\kappa}}{\sqrt{r_{\kappa}^2 + L^2}} = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Если радиус кольца r_{κ} стремится к нулю ($\beta \rightarrow 0$), то

$$\frac{I_1(\beta m)}{m} \rightarrow \frac{\beta}{2} \text{ и } \sin \theta \rightarrow \frac{\beta}{\alpha}.$$

Таким образом, при $\beta \rightarrow 0$

$$Q_{\Pi}^* \rightarrow \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{m}{2} [2K_0 K_1 - m(K_1^2 - K_0^2)] \cos \alpha m dm = Q_{\Pi},$$

т. е. к значению геометрического фактора пласта при точечных датчиках зонда. Согласно (3.107),

$$Q_c^*(\alpha, \beta) = 1 - \frac{4 \left[1 + \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{m}{2} [2K_0 K_1 - m(K_1^2 - K_0^2)] \frac{I_1(\beta m)}{m} \cos \alpha m dm. \quad (3.108)$$

При $m \rightarrow 0$ подынтегральная функция стремится к $\frac{\beta}{2} K_0(m)$. Поэтому, применяя методику расчета функции $Q_c(\alpha)$, перепишем выражение (3.108) в виде

$$\begin{aligned} Q_c^*(\alpha, \beta) &= 1 - \frac{(\beta^2 + \alpha^2)^{\frac{1}{2}}}{(1 + \alpha^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{(\beta^2 + \alpha^2)^{\frac{1}{2}}}{(1 + \alpha^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{4}{\pi} \left[1 + \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \int_0^{\infty} \Phi(m) \frac{I_1(\beta m)}{m} \cos \alpha m dm = 1 - \frac{(\beta^2 + \alpha^2)^{\frac{1}{2}}}{(1 + \alpha^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{4}{\pi} \left[1 + \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \int_0^{\infty} \left[\frac{\beta}{2} K_0(m) - \Phi(m) \frac{I_1(\beta m)}{m} \right] \cos \alpha m dm, \end{aligned} \quad (3.109)$$

где

$$\Phi(m) = \frac{m}{2} [2K_0 K_1 - m(K_1^2 - K_0^2)].$$

Здесь использовано тождество

$$\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_0(m) \cos \alpha m dm.$$

Подынтегральная функция в выражении (3.109) не имеет особенностей, и формула удобна для численных расчетов при любых значениях α .

Таблица 3.23

Геометрический фактор скважины Q_c^*

$\alpha \backslash \beta$	0,025	0,050	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
1	0,4865	0,4860	0,4840	0,4763	0,4636	0,4463	0,4247
3	0,1142	0,1142	0,1139	0,1128	0,1109	0,1083	0,1051
5	0,0427	0,0427	0,0426	0,0422	0,0417	0,0408	0,0398
7	0,0215	0,0215	0,0215	0,0213	0,0210	0,0207	0,0202
9	0,0129	0,0128	0,0128	0,0127	0,0126	0,0123	0,0120
11	0,0086	0,0086	0,0085	0,0085	0,0084	0,0082	0,0080
13	0,0061	0,0061	0,0061	0,0060	0,0060	0,0058	0,0057
15	0,0045	0,0045	0,0045	0,0045	0,0044	0,0044	0,0043
17	0,0035	0,0035	0,0035	0,0035	0,0034	0,0034	0,0033

Результаты численного интегрирования приведены в табл. 3.23. Практически поправки малы и не превышают 10% даже в тех случаях, когда радиус петли составляет половину радиуса скважины. С увеличением радиуса кольца геометрический фактор скважины уменьшается, особенно это заметно для очень коротких зондов. С увеличением длины зонда поправки за счет размеров кольца быстро уменьшаются.

§ 16. ВЕКТОР-ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕМЕНТА ТОКА В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

Квазистационарное электромагнитное поле $E = Ee^{i\omega t}$ и $H = He^{i\omega t}$ в проводящей среде описывается системой уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} E = -i\omega\mu H; \quad (3.110)$$

$$\operatorname{rot} H = \gamma E. \quad (3.111)$$

$$\operatorname{div} E = 0; \quad (3.112)$$

$$\operatorname{div} H = 0. \quad (3.113)$$

Согласно уравнению (3.113),

$$H = \operatorname{rot} A, \quad (3.114)$$

где A — вектор-потенциал электрического типа. Уравнение для потенциала A находим, подставляя правую часть соотношения (3.114) в уравнение (3.111):

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} A = \operatorname{grad} \operatorname{div} A - \nabla^2 A = \gamma E. \quad (3.115)$$

С другой стороны, из уравнений (3.110) и (3.114) имеем

$$E = -i\omega\mu A - \operatorname{grad} \Phi$$

или

$$\text{grad div } A - \nabla^2 A = -i\gamma\mu\omega A - \gamma \text{grad } \Phi.$$

Последнее соотношение можно заменить двумя уравнениями:

$$\nabla^2 A + k^2 A = 0; \quad (3.116)$$

$$\text{div } A = \gamma\Phi, \quad (3.117)$$

где $k^2 = -i\gamma\mu\omega$.

Непосредственная подстановка показывает, что функция $\frac{Idl}{4\pi R} e^{-ikR}$ является решением волнового уравнения (3.116) при возбуждении поля элементом тока длиной dl :

$$A = \frac{Idl}{4\pi R} e^{-ikR}.$$

Здесь I — сила тока; R — расстояние от элемента длины dl до точки наблюдения.

§ 17. ВЕКТОР-ПОТЕНЦИАЛ КОЛЬЦА С ТОКОМ В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

Вектор-потенциал в произвольной точке M представим как сумму вектор-потенциалов, создаваемых всеми элементами токового кольца (рис. 3.12). Вектор-потенциал элемента тока dl_k в точке M записывается в виде

$$dA_k = \frac{e^{-ikR(M, M_k)} Idl_k}{4\pi R(M, M_k)}. \quad (3.118)$$

Если токовое кольцо радиуса r_k лежит в горизонтальной плоскости, то вектор-потенциал кольца имеет только компоненту A_φ (компонента A_r , как это нетрудно заметить из рис. 3.12, равна нулю).

Компонента dA_φ в точке M равна

$$dA_\varphi = \frac{e^{-ikR(M, M_k)}}{R(M, M_k)} \cdot \frac{I \cos \alpha dl_k}{4\pi} = \frac{I r_k}{4\pi} \frac{e^{-ikR(M, M_k)}}{R(M, M_k)} \cos \alpha d\alpha. \quad (3.119)$$

Воспользуемся известным интегральным представлением функции $\frac{e^{-ikR}}{R}$:

$$\frac{e^{-ikR}}{R} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty K_0(\sqrt{\lambda^2 + i\kappa} d) \cos \lambda z d\lambda. \quad (3.120)$$

Здесь $\kappa = \gamma\mu\omega$; $R = \sqrt{z^2 + d^2}$. Подставляя (3.120) в (3.119) и интегрируя по кольцу, получаем выражение для A_φ :

$$A_\varphi = \frac{I r_k}{4\pi} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos \lambda z d\lambda \int_0^{2\pi} K_0(\sqrt{\lambda^2 + i\kappa} d) \cos \alpha d\alpha. \quad (3.121)$$

Согласно теореме сложения модифицированных функций Бесселя второго рода,

$$K_0(dv) = \begin{cases} K_0(rv) I_0(r_k v) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} K_m(rv) I_m(r_k v) \cos m\alpha & (r \geq r_k); \\ K_0(r_k v) I_0(rv) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} K_m(r_k v) I_m(rv) \cos m\alpha & (r \leq r_k). \end{cases} \quad (3.122)$$

Заменяя в интеграле (3.121) функцию $K_0(dv)$ правой частью выражения (3.122) и применяя условие ортогональности тригонометрических функций

$$\int_0^{\infty} \cos m\alpha \cdot \cos \alpha d\alpha = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq 1; \\ \pi & \text{при } m = 1, \end{cases}$$

получаем интегральное представление для вектор-потенциала электрического типа токового кольца

$$A_{\varphi} = \begin{cases} \frac{4I r_{\kappa}}{4\pi} \int_0^{\infty} I_1(r_{\kappa}v) K_1(rv) \cos \lambda z d\lambda & (r \geq r_{\kappa}); \\ \frac{4I r_{\kappa}}{4\pi} \int_0^{\infty} K_1(r_{\kappa}v) I_1(rv) \cos \lambda z d\lambda & (r \leq r_{\kappa}), \end{cases} \quad (3.123)$$

где

$$v = \sqrt{\lambda^2 + i\kappa}, \quad \kappa = \gamma\mu\omega.$$

Так как вектор-потенциал имеет только компоненту A_{φ} , не зависящую от φ , то дивергенция A равна нулю и, согласно (3.117), скалярный потенциал Φ также равен нулю. Поэтому электрическое поле кольца в однородной проводящей среде записывается в виде

$$E = -\frac{i\omega\mu}{4\pi} 4I r_{\kappa} \int_0^{\infty} I_1(r_{\kappa}v) K_1(rv) \cos \lambda z d\lambda \quad (r \geq r_{\kappa}); \quad (3.125)$$

$$E = -\frac{i\omega\mu}{4\pi} \cdot 4I r_{\kappa} \int_0^{\infty} K_1(r_{\kappa}v) I_1(rv) \cos \lambda z d\lambda \quad (r \leq r_{\kappa}). \quad (3.126)$$

§ 18. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ КОЛЬЦА В СРЕДЕ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ РАЗДЕЛА

Суммарное электрическое поле складывается из поля в однородной среде с удельной проводимостью скважины и той части поля, которая обязана своим возникновением неоднородности среды

$$E_{\varphi} = -\frac{i\omega\mu}{4\pi} 4I r_{\kappa} \left[\int_0^{\infty} I_1(rv) K_1(r_{\kappa}v) \cos \lambda z d\lambda - \int_0^{\infty} C_1(\lambda) I_1(r_{\kappa}v) I_1(rv) \cdot \cos \lambda z d\lambda \right] \quad (a \geq r \leq r_{\kappa}). \quad (3.127)$$

Для определения э.д.с. в измерительном кольце достаточно умножить напряженность электрического поля E на длину кольца

$$\varepsilon = 2\pi r_{\kappa} E.$$

Функция $C(\lambda)$, стоящая под знаком интеграла, определяется из граничных условий и не зависит от того, является ли источником поля диполь, или кольцо, или другой источник вихревого поля.

Поэтому выражение для функции $C(\lambda)$ в области предельно малых параметров, согласно (3.46), записывается в виде

$$C(\lambda) = (\kappa_2 - \kappa_1) \frac{a_1}{2\lambda} [2K_0(\lambda a_1) K_1(\lambda a_1) - \lambda a_1 (K_1^2 - K_0^2)] + \\ + (\kappa_3 - \kappa_2) \frac{a_2}{2\lambda} [2K_0(\lambda a_2) K_1(\lambda a_2) - \lambda a_2 (K_1^2 - K_0^2)]. \quad (3.128)$$

Здесь $\kappa_1 = \gamma_1 \mu \omega$; $\kappa_2 = \gamma_2 \mu \omega$; $\kappa_3 = \gamma_3 \mu \omega$, где $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — удельные проводимости соответственно внутренней, средней и внешней областей; a_1 и a_2 — радиусы цилиндрических поверхностей раздела.

Предположим, что генераторное и измерительное кольца зонда расположены на непроводящей основе радиуса a_1 , т. е. $r_k = a_1$ и $\gamma_1 = 0$. Тогда выражения для компоненты электрического поля в среде с удельной проводимостью γ_2 при цилиндрической поверхности раздела между средами с удельными проводимостями γ_2 и γ_3 соответственно записываются в виде

$$E_2 = -\frac{\omega \mu}{4\pi} 4I r_k \kappa_2 \int_0^{r_k} \frac{r_k}{2\lambda} [2K_0(\lambda r_k) K_1(\lambda r_k) - \lambda r_k (K_1^2 - K_0^2)] \times \\ \times I_1^2(\lambda r_k) \cos \lambda z d\lambda; \quad (3.129)$$

$$E_3 = E_2 - \frac{\omega \mu}{4\pi} \cdot 4I r_k (\kappa_3 - \kappa_2) \int_0^{a_2} \frac{a_2}{2\lambda} [2K_0(\lambda a_2) K_1(\lambda a_2) - \\ - \lambda a_2 (K_1^2 - K_0^2)] \cdot I_1^2(\lambda r_k) \cos \lambda z d\lambda. \quad (3.130)$$

Как это принято для «области Долля», величина γ_k выводится из соотношения

$$\frac{\gamma_k}{\gamma_2} = \frac{E_3}{E_2} \quad (3.131)$$

и показывает, насколько поле в данной точке при наличии поверхностей раздела отличается от поля в среде с удельной проводимостью γ_2 . Таким образом, выражение для кажущейся проводимости при отсутствии проникновения филтрат бурового раствора в пласт имеет вид

$$\gamma_k = \gamma_2 + (\gamma_3 - \gamma_2) \times \\ \times \frac{\int_0^{a_2} \frac{a_2}{2\lambda} [2K_0(\lambda a_2) K_1(\lambda a_2) - \lambda a_2 (K_1^2 - K_0^2)] I_1^2(\lambda r_k) \cos \lambda z d\lambda}{\int_0^{a_1} \frac{a_1}{2\lambda} [2K_0(\lambda a_1) K_1(\lambda a_1) - \lambda a_1 (K_1^2 - K_0^2)] I_1^2(\lambda r_k) \cos \lambda z d\lambda}. \quad (3.132)$$

Введем в интегралах формулы (3.132) соответственно новые переменные $m = \lambda a_2$ и $m = \lambda a_1$ и обозначим:

$$\beta = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_c}{r_k}; \quad \alpha_2 = \frac{z}{a_c}; \quad \alpha_1 = \frac{z}{r_k}; \quad \nu = \frac{r_k}{a_c} = \frac{1}{\beta}; \quad \gamma_2 = \gamma_c; \quad \gamma_3 = \gamma_n.$$

Тогда

$$\gamma_k = \gamma_c + (\gamma_n - \gamma_c) \beta \cdot \frac{\int_0^{\infty} \Phi(m) \frac{I_1^2(\nu m)}{m^2} \cos \alpha_2 m dm}{\int_0^{\infty} \Phi(m) \frac{I_1^2(m)}{m^2} \cos \alpha_1 m dm}. \quad (3.133)$$

Будем называть функцию

$$\beta \cdot \frac{\int_0^{\infty} \Phi(m) \frac{I_1^2(\nu m)}{m^2} \cos \alpha_2 m dm}{\int_0^{\infty} \Phi(m) \frac{I_1^2(m)}{m^2} \cos \alpha_1 m dm}, \quad (3.134)$$

где

$$\Phi(m) = \frac{m}{2} [2K_0(m)K_1(m) - m(K_1^2 - K_0^2)],$$

геометрическим фактором пласта $Q_{\Pi}(\alpha, \beta)$.

Предположим, что радиус колец r_k вместе с радиусом непроводящей основы зонда стремится к нулю: $r_k = a_1 \rightarrow 0$. Тогда выполняются условия:

- 1) $\nu = \frac{r_k}{a_2} \rightarrow 0$,
- 2) $\alpha_1 = \frac{z}{a_1} \rightarrow \infty$.

Из первого условия следует, что вместо $\frac{I_1^2(\nu m)}{m^2}$ можно записать $\frac{\nu^2}{4}$, и числитель принимает вид

$$\frac{\beta \nu^2}{4} \int_0^{\infty} \Phi(m) \cos \alpha_2 m dm.$$

При выполнении второго условия значение интеграла, стоящего в знаменателе, определяется поведением функции $\Phi(m) \frac{I_1^2(m)}{m^2}$ вблизи нуля. Так как $\Phi(m) \rightarrow K_0(m)$ при $m \rightarrow 0$, то

$$\int_0^{\infty} \Phi(m) \frac{I_1^2(m)}{m^2} \cos \alpha_1 m dm \rightarrow \frac{1}{4} \int_0^{\infty} K_0(m) \cos \alpha_1 m dm.$$

Воспользовавшись соотношением $\alpha_1 \rightarrow \infty$ (3.128), имеем

$$\int_0^{\infty} \Phi(m) \frac{I_1^2(m)}{m^2} \cos \alpha_1 m dm \rightarrow \frac{1}{4} \frac{\pi}{2\alpha_1}.$$

Для геометрического фактора пласта получаем функцию

$$Q_{\Pi} = \frac{2\beta \nu^2 \alpha_1}{\pi} \int_0^{\infty} \Phi(m) \cos \alpha_2 m dm = \frac{2\alpha_2}{\pi} \int_0^{\infty} \Phi(m) \cos \alpha_2 m dm,$$

т. е. совпадающую с выражением для геометрического фактора пласта при точечных датчиках зонда. Как это следует из формулы (3.133), геометрический фактор скважины $Q_c(\alpha, \beta) = 1 - Q_{\Pi}(\alpha, \beta)$.

Вычисление геометрического фактора пласта Q_{Π} сводится к расчету интегралов, стоящих в числителе и знаменателе формулы (3.134). Подынтегральная функция в интеграле

$$I = \int_0^{\infty} \Phi(m) \frac{I_1^2(vm)}{m^2} \cos \alpha_2 m dm$$

имеет в нуле особенность, так как

$$\Phi(m) \frac{I_1^2(vm)}{m^2} = \frac{v^2}{4} K_0(m).$$

Поэтому представим интеграл в виде

$$I \frac{v^2}{4} = \int_0^{\infty} K_0(m) \cos \alpha_2 m dm + \int_0^{\infty} \left[\Phi(m) \frac{I_1^2(vm)}{m^2} - \frac{v^2}{4} K_0(m) \right] \times \\ \times \cos \alpha_2 m dm = \frac{v^2 \pi}{8} \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha_2^2}} + \int_0^{\infty} F(m) \cos \alpha_2 m dm,$$

где

$$F(m) = \Phi(m) \frac{I_1^2(vm)}{m^2} - \frac{v^2}{4} K_0(m).$$

Функция $F(m)$ не имеет особенности в нуле. Аналогичные преобразования подынтегральной функции проводятся в интеграле, стоящем в знаменателе формулы (3.134). Методика расчета интегралов типа I была описана выше.

В табл. 3.24 приведены значения геометрического фактора скважины $Q_c(\alpha, \beta)$.

Таблица 3.24

$\alpha \backslash \beta$	1,19	1,41	1,68	2,0	4,0	8,0	16,0
1	0,10479	0,19174	0,26179	0,31723	0,43796	0,47424	0,48359
$\sqrt{2}$	0,07889	0,14350	0,19516	0,23547	0,31875	0,3480	0,34754
2	0,05373	0,09579	0,13037	0,15563	0,20560	0,21364	0,22189
$2\sqrt{2}$	0,03316	0,05843	0,07756	0,09159	0,11806	0,12483	0,12640
4,0	0,01843	0,03206	0,04211	0,049194	0,06224	0,06548	0,06630
$4,0\sqrt{2}$	0,00957	0,01654	0,02154	0,02492	0,03133	0,03288	0,03314
8,0	0,00490	0,00820	0,01058	0,012376	0,01544	0,01621	0,01643
$8,0\sqrt{2}$	0,00231	0,00407	0,00530	0,00616	0,00765	0,00789	0,00810

Можно показать, что изменение функции $Q_c(\alpha, \beta)$ с изменением параметра β для зондов, длина которых превышает диаметр скважины, связан главным образом с изменением диаметра непроводящей основы зонда. Поэтому значение геометрического фактора скважины $Q_c(\alpha, \beta)$ с достаточной степенью точности может быть получено из формулы

$$Q_c(\alpha, \beta) = Q_c(\alpha) - Q_c(\beta\alpha),$$

где в правой части стоят функции $Q_c(\alpha)$ и $Q_c(\beta\alpha)$, рассчитанные для точечных источников.

При более коротких зондах начинает заметнее влиять соотношение между радиусом скважины и радиусом зонда.

На величину геометрического фактора пласта конечные размеры колец и присутствие непроводящей основы зонда влияют очень мало. При больших длинах зонда α значение интеграла, входящего в выражение для геометрического фактора скважины, определяется поведением подинтегральной функции вблизи нуля. Как видно из формулы (3.134), особенность поведения функции в нуле имеет такой же характер, как и в случае точечных источников. Поэтому при увеличении длины зонда геометрический фактор скважины, независимо от отношения $\frac{r_k}{a_c}$, начинает убывать обратно пропорционально квадрату α .

Согласно формуле (3.131), значения геометрического фактора скважины позволяют определить отношение $\frac{E_3}{E_2}$. Для определения напряженности электрического поля в неоднородной среде E_3 нужно знать E_2 , выражение для которого можно записать в виде

$$E_2 = -\frac{\omega\mu}{4\pi} 4I r_k^2 \gamma_{cl} \omega \int_0^{\infty} \Phi(m) \frac{I_1(m)}{m} \cos \alpha_1 m dm. \quad (3.135)$$

Интеграл в формуле (3.135) представляет знаменатель в выражении для геометрического фактора пласта и рассчитывается одновременно с этой функцией.

Обычно $\alpha_1 \gg 1$, т. е. длина зонда значительно больше диаметра непроводящей основы зонда, и, как было уже установлено выше,

$$|E_2| \rightarrow \frac{\gamma_{cl} \mu^2 \omega^2}{4\pi} \frac{I \pi r_k^3}{2L},$$

а э.д.с.

$$|\varepsilon_2| = 2\pi r_k |E_2| = \frac{\gamma_{cl} \mu^2 \omega^2}{4\pi} \cdot \frac{\pi^2 r_k^4 I}{L} = \frac{\gamma_{cl} \mu^2 \omega^2}{4\pi} \cdot \frac{M_r M_n}{L}. \quad (3.136)$$

Здесь $M_r = \pi r_k^2 I$ и $M_n = \pi r_k^2$ — моменты датчиков зонда. Формула (3.136) легко может быть приведена к известному виду

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_{пр}} = \frac{\gamma_{cl} \mu \omega L^2}{2},$$

где $\varepsilon_{пр}$ — э.д.с. в воздухе. Практически асимптотическим представлением интеграла в формуле (3.135) можно пользоваться, когда $\frac{L}{r_k} \gg 4$ (см. стр. 222).

§ 19. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ОДНОСЛОЙНОЙ КАТУШКИ В ОДНОРОДНОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

Предположим, что на единицу длины задающей катушки приходится n витков. Тогда, согласно (3.123) и (3.124), вектор-потенциал кольца с током толщиной dz_0 равен

$$dA_{\varphi} = \begin{cases} 4I r_k n_{\Gamma} Idz_0 \int_0^{\infty} I_1(r_k v) K_1(rv) \cos \lambda(z-z_0) d\lambda & (r \geq r_k); \\ 4I r_k n_{\Gamma} Idz_0 \int_0^{\infty} I_1(rv) K_1(r_k v) \cos \lambda(z-z_0) d\lambda & (r \leq r_k). \end{cases}$$

Здесь I —сила тока; r_k —радиус катушки; z —расстояние от середины катушки до измерительного кольца; z_0 —расстояние от середины катушки до центра кольца толщиной dz_0 ; $v = \sqrt{\lambda^2 + i\kappa}$ ($\kappa = \gamma\mu\omega$). Вектор-потенциал, создаваемый всей катушкой, получается в результате интегрирования

$$A_\varphi = \begin{cases} \frac{4Ir_k n_\Gamma}{4\pi} \cdot \int_0^\infty I_1(r_k v) K_1(rv) d\lambda \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \cos \lambda (z - z_0) dz_0 & (r \geq r_k); \\ \frac{4Ir_k n_\Gamma}{4\pi} \int_0^\infty I_1(rv) K_1(r_k v) d\lambda \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \cos \lambda (z - z_0) dz_0 & (r \leq r_k), \end{cases} \quad (3.137)$$

где l —длина катушки. Интеграл по z_0 равен $2\cos\lambda z \sin \frac{\lambda l}{2}$, поэтому для вектор-потенциала имеем

$$A_\varphi = \begin{cases} \frac{8Ir_k n_\Gamma}{4\pi} \int_0^\infty I_1(r_k v) \frac{\sin \frac{l}{2} \lambda}{\lambda} K_1(rv) \cos \lambda z d\lambda & (r \geq r_k); \\ \frac{8Ir_k n_\Gamma}{4\pi} \int_0^\infty K_1(r_k v) \frac{\sin \frac{l}{2} \lambda}{\lambda} I_1(rv) \cos \lambda z d\lambda & (r \leq r_k). \end{cases} \quad (3.138)$$

При уменьшении длины катушки ($l \rightarrow 0$), заменив в подынтегральном

выражении $\frac{\sin \frac{l}{2} \lambda}{\lambda}$ на $\frac{l}{2}$, приходим к формулам для вектор-потенциала токового кольца (при $ln_r = 1$), полученным ранее. Как известно, электрическое поле связано с вектор-потенциалом соотношением $E_\varphi = -i\omega\mu A_\varphi$, поэтому

$$E_\varphi = \begin{cases} -\frac{i\omega\mu 8Ir_k n_\Gamma}{4\pi} \int_0^\infty I_1(r_k v) \frac{\sin \frac{l}{2} \lambda}{\lambda} K_1(rv) \cos \lambda z d\lambda & (r \geq r_k); \\ -\frac{i\omega\mu 8Ir_k n_\Gamma}{4\pi} \int_0^\infty K_1(r_k v) \frac{\sin \frac{l}{2} \lambda}{\lambda} I_1(rv) \cos \lambda z d\lambda & (r \leq r_k). \end{cases} \quad (3.139)$$

§ 20. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В СРЕДЕ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ РАЗДЕЛА

Выражение для электрического поля в данном случае может быть записано в виде

$$E_\varphi = -\frac{i\omega\mu 8Ir_k n_\Gamma}{4\pi} \left[\int_0^\infty K_1(r_k v) \frac{\sin \frac{l}{2} \lambda}{\lambda} I_1(rv) \cos \lambda z d\lambda - \int_0^\infty C(\lambda) I_1(r_k v) \frac{\sin \frac{l}{2} \lambda}{\lambda} I_1(rv) \cos \lambda z d\lambda \right] \quad (a \geq r \leq r_k). \quad (3.140)$$

Функция $C(\lambda)$ для области предельно малых параметров была получена выше. Предположим, что однослойная задающая катушка и измерительное кольцо одеты на непроводящую основу зонда и имеют с ней одинаковый радиус. Тогда для компоненты электрического поля в среде с удельной проводимостью γ_c при цилиндрической поверхности раздела между средами с удельными проводимостями γ_c и γ_n соответственно получаем выражения

$$E_c = -\frac{\omega\mu 8I r_k n_r}{4\pi} \kappa_c \int_0^{\infty} \frac{r_k}{2\lambda} [2K_0 K_1 - \lambda r_k (K_1^2 - K_0^2)] \times \\ \times \frac{\sin \frac{l}{\lambda} \lambda}{\lambda} I_1^2(r_k \lambda) \cos \lambda z d\lambda; \quad (3.141)$$

$$E = E_c - \frac{\omega\mu 8I r_k n_r}{4\pi} (\kappa_n - \kappa_c) \int_0^{\infty} \frac{a}{2\lambda} [2K_0 K_1 - \lambda a (K_1^2 - K_0^2)] \times \\ \times \frac{\sin \frac{l}{\lambda} \lambda}{\lambda} I_1^2(r_k \lambda) \cos \lambda z d\lambda. \quad (3.142)$$

Обе формулы учитывают тот факт, что центральная часть скважины занята непроводящей основой зонда радиуса r_k . Во всех расчетах не учитывается конечная длина этой основы. По-видимому, пренебрежение магнитным полем токов, индуцированных в центральной части скважины, являющейся продолжением основы зонда, вполне обосновано, так как доля этого поля очень мала. В дальнейшем будут даны некоторые оценки влияния этих участков скважины применительно к точечным источникам зонда.

Переход к кажущейся проводимости базируется на соотношении $\frac{\gamma_k}{\gamma_c} = \frac{E}{E_c}$ и приводит к выражению для γ_k :

$$\gamma_k = \gamma_c + (\gamma_n - \gamma_c) \beta^2 \frac{\int_0^{\infty} \Phi(m) \frac{\sin ms_2}{m} \frac{I_1^2(vm)}{m^2} \cos \alpha_2 m dm}{\int_0^{\infty} \Phi(m) \frac{\sin ms_1}{m} \frac{I_1^2(m)}{m^2} \cos \alpha_1 m dm}, \quad (3.143)$$

где γ_c — удельная проводимость бурового раствора скважины;

γ_n — удельная проводимость пласта;

$\beta = \frac{a}{r_k}$ (a — радиус скважины);

r_k — радиус катушки и основы зонда;

$\nu = \frac{r_k}{a} = \frac{l}{\beta}$ — радиус катушки, выраженный в единицах радиуса скважины;

$s_2 = \frac{l}{2a}$ и $s_1 = \frac{l}{2r_k}$ — соответственно отношения длины катушки к диаметру скважины и диаметру катушки;

$\alpha_2 = \frac{L}{a}$, $\alpha_1 = \frac{L}{r_k}$ (L — длина зонда).

Функция $\Phi(m)$ равна

$$\frac{m}{2} [2K_0(m) K_1(m) - m (K_1^2 - K_0^2)].$$

α	β	1,19	1,41	1,68	2,0	4,0	8,0	16,0
1		0,10565	—	$s_2=0,2$ 0,23377	0,31990	0,44305	0,48076	0,49063
$\sqrt{2}$		0,07939	—	0,19679	0,237533	0,32224	0,34583	0,35180
2,0		0,05415	—	0,13124	0,156887	0,20743	0,22060	0,22405
$2,0\sqrt{2}$		0,03325	—	0,08802	0,092184	0,11884	0,12560	0,12703
4,0		0,01853	—	0,04222	0,049372	0,06249	0,06575	0,06648
$4,0\sqrt{2}$		0,00965	—	0,02150	0,025018	0,03136	0,03290	0,03324
8,0		0,00482	—	0,01067	0,012392	0,01547	0,016195	0,016360
$8,0\sqrt{2}$		0,00239	—	0,00527	0,006112	0,00761	0,00795	0,00804
16,0		0,00118	—	0,00261	0,003013	0,00373	0,00390	0,00393
				$s_2=0,4$				
1		0,10783	0,19723	0,26969	0,32674	0,45822	0,50000	0,51242
$\sqrt{2}$		0,08101	0,14782	0,20147	0,24362	0,33270	0,35820	0,36462
2,0		0,05512	0,09941	0,13404	0,16047	0,21298	0,22688	0,23035
$2,0\sqrt{2}$		0,03370	0,05971	0,07928	0,09376	0,12108	0,12803	0,12975
4,0		0,01872	0,03260	0,04266	0,04991	0,06322	0,06661	0,06762
$4,0\sqrt{2}$		0,00969	0,01670	0,02164	0,02517	0,03156	0,03303	0,03327
8,0		0,00487	0,00828	0,01071	0,01243	0,015516	0,01621	0,01630
$8,0\sqrt{2}$		0,00240	0,00409	0,00528	0,006123	0,00761	0,00793	0,00802
16,0		0,00119	0,00202	0,00261	0,003014	0,00373	0,00389	0,00393
				$s_2=0,8$				
1		0,11650	0,21265	0,29147	0,35608			
$\sqrt{2}$		0,08767	0,16073	0,22029	0,26845			

2,0	0,05918	0,10741	0,14570	0,17544
2,0 $\sqrt{2}$	0,03564	0,06345	0,08459	0,10036
4,0	0,01944	0,03391	0,04449	0,05214
4,0 $\sqrt{2}$	0,00992	0,01707	0,02218	0,02580
8,0	0,00491	0,00839	0,01086	0,012612
1	0,12476	0,22674	$s_2 = 1,6$	0,38257
$\sqrt{2}$	0,11113	0,20307	0,31144	0,34637
2,0	0,07742	0,14293	0,28044	0,24281
2,0 $\sqrt{2}$	0,04457	0,08081	0,19758	0,13193
4,0	0,02272	0,04003	0,10958	0,06242
4,0 $\sqrt{2}$	0,01090	0,01880	0,05295	0,02853
8,0	0,00516	0,00883	0,02448	0,01327
1	0,11919	0,21739	$s_2 = 2,0$	0,36793
$\sqrt{2}$	0,11361	0,20782	0,29917	0,35473
2,0	0,091901	0,16959	0,28715	0,29273
2,0 $\sqrt{2}$	0,05257	0,09653	0,23582	0,16136
4,0	0,02562	0,045551	0,13249	0,07185
4,0 $\sqrt{2}$	0,01172	0,02028	0,06061	0,03090
8,0	0,00537	0,00920	0,02647	0,01385
1	0,09239	0,17057	$s_p = 4,0$	0,29457
$\sqrt{2}$	0,09282	0,17144	0,23725	0,29628
2,0	0,09338	0,17272	0,23856	0,29910
2,0 $\sqrt{2}$	0,092515	0,17175	0,24060	0,29977
4,0	0,06963	0,13046	0,24022	0,23139
4,0 $\sqrt{2}$	0,02294	0,04121	0,18398	0,06620
8,0	0,00764	0,01318	0,05540	0,02000

Если длина катушки стремится к нулю ($s_2 \rightarrow 0$, $s_1 \rightarrow 0$), то вместо формулы (3.143) получаем выражение для γ_k , когда источником поля является токовое кольцо. Действительно, заменив $\frac{\sin ms}{m} = s$, имеем

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \gamma_c + (\gamma_{\Pi} - \gamma_c) \beta^2 \frac{\int_0^{s_2} \Phi(m) \frac{I_1^2(\nu m)}{m^2} \cos \alpha_2 m dm}{\int_0^{s_1} \Phi(m) \frac{I_1^2(m)}{m^2} \cos \alpha_1 m dm} = \\ &= \gamma_c + (\gamma_{\Pi} - \gamma_c) \beta \frac{\int_0^{s_2} \Phi(m) \frac{I_1^2(\nu m)}{m^2} \cos \alpha_2 m dm}{\int_0^{s_1} \Phi(m) \frac{I_1^2(m)}{m^2} \cos \alpha_1 m dm}. \end{aligned}$$

Будем называть функцию

$$\beta^2 \frac{\int_0^{s_2} \Phi(m) \frac{\sin ms_2}{m} \frac{I_1^2(\nu m)}{m^2} \cos \alpha_2 m dm}{\int_0^{s_1} \Phi(m) \frac{\sin ms_1}{m} \frac{I_1^2(m)}{m^2} \cos \alpha_1 m dm}$$

геометрическим фактором пласта Q_{Π} при возбуждении поля однослойной катушкой и измерении поля токовым кольцом (или наоборот). Как это следует из формулы (3.143), геометрические факторы пласта и скважины связаны соотношением

$$Q_c = 1 - Q_{\Pi};$$

геометрический фактор зоны проникновения связан с геометрическими факторами скважины так же, как и в случае точечных источников поля.

Геометрический фактор скважины зависит от трех параметров: α_2, β и s_2 , так как $\alpha_1 = \beta \alpha_2$ и $s_1 = \beta s_2$. Методика расчета интегралов в формуле (3.143), по существу, не отличается от методики, использованной при вычислении геометрического фактора пласта, когда датчиками зонда являлись одиночные кольца. В табл. 3.25 приведены значения геометрического фактора скважины. Увеличение диаметра зонда приводит, как это и следовало ожидать, к уменьшению влияния скважины, которое в отдельных случаях может быть весьма заметным.

Изменение геометрического фактора зондов, длина которых превышает диаметр скважины, главным образом связано с изменением диаметра непроводящей основы зонда. Поэтому значение геометрического фактора скважины $Q_c(\alpha, \beta, s_2)$ с достаточной степенью точности может быть получено из формулы

$$Q_c(\alpha, \beta, s_2) = Q_c(\alpha, s_2) - Q_c(\beta \alpha, s_2),$$

где в правой части стоят функции $Q_c(\alpha, s_2)$ и $Q_c(\beta \alpha, s_2)$, рассчитанные для очень тонких датчиков ($\frac{1}{\beta} \rightarrow 0$).

§ 21. Э.Д.С., СОЗДАВАЕМАЯ ОДНОСЛОЙНОЙ КАТУШКОЙ
В ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ОДНОСЛОЙНОЙ КАТУШКЕ

Если на единицу длины измерительной катушки радиуса r_n приходится n_n витков, то э.д.с. в катушке длиной dz , согласно (3.139), равна:

$$d\varepsilon = -\frac{i\omega\mu}{4\pi} \pi 16 I n_r n_n r_r r_n dz \int_0^{\infty} \frac{I_1(r_r v) \sin \frac{l}{2} \lambda}{\lambda} K_1(r_n v) \cos \lambda z d\lambda \quad (r_n \geq r_r);$$

$$d\varepsilon = -\frac{i\omega\mu}{4\pi} \pi 16 I n_r n_n r_r r_n dz \int_0^{\infty} \frac{K_1(r_r v) \sin \frac{l}{2} \lambda}{\lambda} I_1(r_n v) \cos \lambda z d\lambda \quad (r_n \leq r_r).$$

Полная э.д.с. в измерительной катушке определяется из соотношения

$$\varepsilon = -\frac{i\omega\mu}{4\pi} \pi 16 I n_r n_n r_r r_n \int_0^{\infty} \frac{I_1(r_r v) \sin \frac{l}{2} \lambda}{\lambda} K_1(r_n v) \int_{z_0 - \frac{b}{2}}^{z_0 + \frac{b}{2}} \cos \lambda z dz d\lambda = \quad (3.144)$$

$$= -\frac{32i\omega\mu}{4\pi} \pi I n_r n_n r_r r_n \int_0^{\infty} \frac{I_1(r_r v) \sin \frac{l}{2} \lambda}{\lambda^2} K_1(r_n v) \cos \lambda z_0 \sin \frac{b}{2} \lambda d\lambda \quad (r_n \geq r_r);$$

$$\varepsilon = -\frac{32i\omega\mu}{4\pi} \pi I n_r n_n r_r r_n \int_0^{\infty} \frac{K_1(r_r v) \sin \frac{l}{2} \lambda \sin \frac{b}{2} \lambda}{\lambda^2} I_1(r_n v) \cos \lambda z_0 d\lambda \quad (r_n \leq r_r).$$

Здесь b — длина измерительной катушки;

z_0 — расстояние между центрами генераторной и измерительной катушек.

Если линейные размеры датчиков зонда совпадают ($l = b$, $r_n = r_r$), то

$$\varepsilon = -\frac{32i\omega\mu\pi}{4\pi} I n_r n_n r_r^2 \int_0^{\infty} \frac{I_1(r_r v) \sin^2 \frac{l}{2} \lambda}{\lambda^2} K_1(r_n v) \cos \lambda z_0 d\lambda \quad (r_n = r_r). \quad (3.145)$$

Предположим, что однослойные катушки, одетые на непроводящее основание, находятся в среде с цилиндрическими поверхностями раздела. Тогда выражения для кажущейся проводимости и геометрических факторов выводятся аналогично предыдущему случаю. Так, если отсутствует зона проникновения, то

$$\gamma_k = \gamma_c + (\gamma_n - \gamma_c) \beta^3 \frac{\int_0^{\infty} \Phi(m) \frac{I_1^2(vm)}{m^2} \frac{\sin^2 s_2 m}{m^2} \cos \alpha_2 m dm}{\int_0^{\infty} \Phi(m) \frac{I_1^2(m)}{m^2} \frac{\sin^2 s_1 m}{m^2} \cos \alpha_1 m dm}, \quad (3.146)$$

где

$$\beta = \frac{a_c}{r_k}; \quad v = \frac{1}{\beta}; \quad s_2 = \frac{l}{2a_c}; \quad s_1 = \frac{l}{2r_k}; \quad \alpha_2 = \frac{z_0}{a_c}; \quad \alpha_1 = \frac{z_0}{r_k};$$

$$\Phi(m) = \frac{m}{2} [2K_0 K_1 - m(K_1^2 - K_0^2)].$$

$\alpha \backslash \beta$	1,19	1,41	1,68	2,0	4,0	8,0	16,0
$s_2 = 0,2$							
1,0	0,10636	0,19448	0,26574	0,32250	0,44817	0,48753	0,49797
$\sqrt{2}$	0,07993	0,14569	0,19835	0,23957	0,32574	0,35000	0,35673
2,0	0,05447	0,09812	0,13216	0,15808	0,20928	0,22274	0,22612
$2,0\sqrt{2}$	0,03339	0,059110	0,07844	0,09271	0,11952	0,12643	0,12817
4,0	0,01856	0,03235	0,04235	0,04955	0,05273	0,06603	0,06670
$4,0\sqrt{2}$	0,00966	0,01660	0,02156	0,02507	0,03141	0,03296	0,03325
8,0	0,00484	0,00827	0,01069	0,01240	0,01548	0,01840	0,01635
$8,0\sqrt{2}$	0,00239	0,00409	0,00528	0,00612	0,00751	0,00794	0,00803
16,0	0,00118	0,00202	0,00260	0,00301	0,00373	0,00389	0,00395
$s_2 = 0,4$							
1,0	0,11078	0,20250	0,27718	0,33748	0,47926	0,53231	0,54937
$\sqrt{2}$	0,08324	0,15216	0,20782	0,25194	0,34766	0,37657	0,38413
2,0	0,05648	0,10208	0,13793	0,16548	0,22090	0,23580	0,23956
$2,0\sqrt{2}$	0,03435	0,06095	0,08105	0,0960	0,12424	0,13148	0,13331
4,0	0,01896	0,03301	0,04326	0,0506	0,06420	0,06760	0,06843
$4,0\sqrt{2}$	0,00977	0,01681	0,02182	0,0254	0,03185	0,03350	0,03399
8,0	0,00487	0,00832	0,01076	0,0125	0,01561	0,01633	0,01637
$8,0\sqrt{2}$	0,00240	0,00410	0,00529	0,00613	0,00762	0,00789	0,00789
16,0	0,00119	0,00202	0,00260	0,00302	0,00372	0,00386	0,00389

$s_2=0,8$

1,0	0,12094	0,22005	0,30183	0,36982
$\sqrt{2}$	0,09644	0,17684	0,24355	0,29890
2,0	0,06530	0,11947	0,16349	0,19870
$2,0\sqrt{2}$	0,03860	0,069210	0,09290	0,11086
4,0	0,02053	0,03593	0,04728	0,05553
$4,0\sqrt{2}$	0,01024	0,01765	0,02294	0,02671
8,0	0,00499	0,00854	0,01105	0,01282
$8,0\sqrt{2}$	0,00244	0,00416	0,00538	0,00624
16,0	0,00120	0,00204	0,00264	0,00306

 $s_2=4,0$

1,0	0,08821	0,16355	0,22839	0,28458
$\sqrt{2}$	0,08626	0,16006	0,22366	0,27886
2,0	0,08318	0,15457	0,21629	0,27002
$2,0\sqrt{2}$	0,07839	0,14608	0,20494	0,25649
4,0	0,07056	0,13216	0,18632	0,23425
$4,0\sqrt{2}$	0,05528	0,10449	0,14862	0,18846
8,0	0,02055	0,03815	0,05311	0,06578

Таким образом, геометрический фактор скважины в данном случае имеет выражение

$$Q_c = 1 - \beta^3 \frac{\int_0^\infty \Phi(m) \frac{I_1^2(\nu m)}{m^2} \cdot \frac{\sin^2 s_2 m}{m^2} \cos \alpha_2 m dm}{\int_0^\infty \Phi(m) \frac{I_1^2(m)}{m^2} \cdot \frac{\sin^2 s_1 m}{m^2} \cos \alpha_1 m dm} \quad (3.147)$$

и зависит от трех параметров: α_2 , β и s_2 . В табл. 3.26 приведены значения геометрического фактора скважины Q_c .

Геометрический фактор скважины определяется длиной зонда, диаметром непроводящей основы зонда и длинами катушек, выраженными в единицах радиуса скважины. В отличие от точечных источников при уменьшении расстояния между катушками функция Q_c не стремится к единице:

$$Q_c \rightarrow 1 - \beta^3 \frac{\int_0^\infty \Phi(m) \frac{I_1^2(\nu m)}{m^2} \frac{\sin^2 s_2 m}{m^2} dm}{\int_0^\infty \Phi(m) \frac{I_1^2(m)}{m^2} \frac{\sin^2 s_1 m}{m^2} dm} \quad (3.148)$$

С увеличением длины зонда геометрический фактор скважины стремится к нулю. Когда длина зонда становится значительно больше радиуса скважины, функция Q_c , независимо от размеров катушек, убывает обратно пропорционально квадрату длины зонда. С увеличением диаметра непроводящей основы зонда геометрический фактор, естественно, уменьшается, это особенно заметно на относительно коротких зондах. С увеличением длины зонда поправка «за основу зонда» стремится к постоянной величине, не зависящей от длины зонда и равной квадрату отношения диаметра зонда к диаметру скважины

$$\frac{Q_c(\alpha, s, \beta)}{Q_c(\alpha, s, \infty)} \approx 1 - \frac{1}{\beta^2}.$$

Например, если диаметр зонда равен радиусу скважины, то эта поправка превышает 25%.

Геометрический фактор скважины с увеличением длины катушек возрастает. Когда длина датчиков не превышает диаметра скважины, влияние длины катушек незначительно и измеряется несколькими процентами. Исключение составляют короткие зонды, длина которых не больше одного-двух диаметров скважины.

Значит, основными параметрами, определяющими величину геометрического фактора скважины в ныне применяемых зондах, являются его длина и диаметр непроводящей основы зонда. Можно считать, что длина и диаметр катушек достаточно длинных зондов индукционного каротажа несущественно влияют на распределение токов в среде.

§ 22. ОДНОКАТУШЕЧНЫЙ ЗОНД

В магнитном каротаже достаточно широкое применение нашли однокатушечные системы, основанные на измерении вносимого в катушку сопротивления, величина которого связана с распределением магнитной

проницаемости в среде. В индукционном каротаже однокатушечные системы до настоящего времени детально не изучались, поскольку основное внимание уделялось зондам, имеющим относительно большую глубину исследования. Некоторые вопросы теории однокатушечных зондов представляют интерес, в частности, в связи с изучением удельного сопротивления промежуточной зоны проникновения.

Предположим, что зонд состоит из одного кольца радиуса r_k . Тогда, согласно (3.125) или (3.126), э.д.с., наведенная в этом кольце, определяется следующим образом:

$$\varepsilon = 2\pi r_k E = -\frac{i\omega\mu}{4\pi} 8\pi I r_k^2 \int_0^{\infty} I_1(r_k v) K_1(r_k v) d\lambda. \quad (3.149)$$

Интеграл, стоящий в правой части формулы (3.149), расходится. Действительно, при $\lambda \rightarrow \infty$ $v = \sqrt{\lambda^2 + i\kappa}$ также стремится к бесконечности, как λ . Поэтому, используя асимптотические представления для функций Бесселя

$$I_1(x) \rightarrow \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}; \quad K_1(x) \rightarrow \frac{e^{-x}}{\sqrt{2x}} \sqrt{\pi},$$

имеем

$$I_1(r_k v) K_1(r_k v) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} I_1(r_k \lambda) K_1(r_k \lambda) \rightarrow \frac{1}{2\lambda r_k}.$$

Если L не равно нулю (двухкатушечный зонд), то в подынтегральную функцию входит осциллирующий множитель $\cos \lambda L$, обеспечивающий сходимость интегралов в формулах (3.125) и (3.126). Э.д.с., наведенная в одиночном кольце, обязана своим возникновением магнитному полю тока кольца в воздухе и магнитному полю токов, индуцированных в проводящей среде. Таким образом

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1,$$

где

$$\varepsilon_0 = -\frac{i\omega\mu}{4\pi} 8\pi I r_k^2 \int_0^{\infty} I_1(r_k \lambda) K_1(r_k \lambda) d\lambda \quad (3.150)$$

представляет э.д.с. в воздухе;

$$\varepsilon_1 = -\frac{i\omega\mu}{4\pi} 8\pi I r_k^2 \int_0^{\infty} [I_1(r_k v) K_1(r_k v) - I_1(r_k \lambda) K_1(r_k \lambda)] d\lambda \quad (3.151)$$

— вторичная э.д.с. Правая часть в формуле (3.150) обращается в бесконечность. Это происходит потому, что по условию задачи кольцо предполагается бесконечно тонким, соответственно плотность тока и магнитное поле вблизи кольца обращаются в бесконечность. Следовательно,

$$\varepsilon_0 = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int B ds$$

также становится неограниченно большой. Индуктивность кольца связана с э.д.с. соотношением

$$\varepsilon = -L \frac{\partial I}{\partial t},$$

отсюда

$$L_0 = 2r_k^2 \mu \int_0^{\infty} I_1(\lambda r_k) K_1(\lambda r_k) d\lambda \rightarrow \infty.$$

Как известно, индуктивность определяется из соотношения

$$L_0 = r_k \mu \left[\ln \frac{8r_k}{\rho} - 1,75 \right], \quad (3.152)$$

где r_k — радиус кольца; ρ — радиус его поперечного сечения. При $\rho \rightarrow 0$ самоиндукция $L_0 \rightarrow \infty$. В реальных установках кольцо имеет конечное сечение и его индуктивность — конечное значение согласно формуле (3.151).

Подынтегральная функция в интеграле в правой части формулы (3.151) не имеет особенностей на интервале интегрирования и быстро убывает с увеличением λ . Действительно, при $\lambda \rightarrow \infty$

$$I_1(r_k \nu) K_1(r_k \nu) - I_1(r_k \lambda) K_1(r_k \lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{2\sqrt{\lambda^2 + i\kappa r_k}} - \frac{1}{2\lambda r_k} \approx \frac{i\kappa}{4\lambda^3 r_k}.$$

В общем случае вносимое в контур сопротивление Z комплексное, т. е. имеет активную и реактивную компоненты. Согласно формуле (3.151), для Z имеем

$$Z = \frac{\varepsilon_1}{T} = i\omega \mu 2r_k^2 \int_0^{\infty} [I_1(r_k \nu) K_1(r_k \nu) - I_1(\lambda r_k) K_1(\lambda r_k)] d\lambda. \quad (3.153)$$

Вблизи кольца преобладает активная компонента плотности тока, иными словами, токи, индуцированные в среде, сдвинуты по фазе на 90° относительно тока в кольце I . Поэтому наведенная ими э.д.с. в кольце находится в фазе с током. Значит, участки среды, непосредственно окружающие кольцо, вносят активное сопротивление, по мере удаления от источника начинает расти реактивная компонента плотности тока и эти участки среды начинают вносить реактивное сопротивление. Если частота поля и электропроводность среды достаточно низкие, то преобладает главным образом активное сопротивление, выражение для которого можно найти следующим образом. Представим подынтегральную функцию $I_1(r_k \nu) K_1(r_k \nu) - I_1(r_k \lambda) K_1(r_k \lambda)$ в виде ряда по параметру $i\kappa$ и отбросим все члены, содержащие κ во второй степени и выше. Очевидно, что

$$I_1(r_k \sqrt{\lambda^2 + i\kappa}) K_1(r_k \sqrt{\lambda^2 + i\kappa}) \approx I_1(r_k \lambda) K_1(r_k \lambda) + \frac{i\kappa r_k}{2\lambda} \{ I_1'(r_k \lambda) K_1(r_k \lambda) + I_1(r_k \lambda) K_1'(r_k \lambda) \}.$$

Поэтому

$$R = -\omega \mu 2r_k^2 \kappa \int_0^{\frac{r_k}{2\lambda}} \{ I_1'(r_k \lambda) K_1(r_k \lambda) + I_1(r_k \lambda) K_1'(r_k \lambda) \} d\lambda.$$

Введем новую переменную $m = r_k \lambda$, тогда

$$R = \omega^2 \mu^2 \gamma 2r_k^3 \int_0^{\frac{1}{2m}} \{ I_1'(m) K_1(m) + I_1(m) K_1'(m) \} dm. \quad (3.154)$$

Воспользовавшись рекуррентными формулами для модифицированных функций Бесселя

$$I_1'(m) = I_0(m) - \frac{1}{m} I_1(m);$$

$$K_1'(m) = -K_0(m) - \frac{1}{m} K_1(m),$$

получаем окончательное выражение для вносимого активного сопротивления в области предельно малых параметров

$$R = \omega^2 \mu^2 \gamma 2r_k^3 \int_0^\infty \frac{1}{2m} \left[I_0(m) K_1(m) - I_1(m) K_0(m) - \frac{2}{m} I_1(m) K_1(m) \right] dm. \quad (3.155)$$

Подынтегральная функция имеет в нуле особенность, так как при

$$m \rightarrow 0 \quad I_0(m) \rightarrow 1; \quad I_1(m) \rightarrow \frac{m}{2}; \quad K_1(m) \rightarrow \frac{1}{m}; \quad K_0(m) \rightarrow -\ln m$$

и

$$\left[I_0(m) K_1(m) - I_1(m) K_0(m) - \frac{2}{m} I_1(m) K_1(m) \right] \cdot \frac{1}{2m} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\frac{1}{m} - \frac{m}{2} K_0(m) - \frac{1}{m} \right] \cdot \frac{1}{2m} \rightarrow -\frac{1}{4} K_0(m) \rightarrow \infty.$$

Поэтому для расчета активного сопротивления представим последнее выражение в виде

$$R = -\omega^2 \mu^2 \gamma 2r_k^3 \left[\int_0^\infty \left\{ \frac{1}{4} K_0(m) - \frac{1}{2m} (I_0 K_1 - I_1 K_0 - \frac{2}{m} I_1 K_1) \right\} dm - \frac{1}{4} \int_0^\infty K_0(m) dm \right] = -\omega^2 \mu^2 \gamma 2r_k^3 \times$$

$$\times \left[\int_0^\infty \left\{ \frac{1}{4} K_0 - \frac{1}{2m} (I_0 K_1 - I_1 K_0 - \frac{2}{m} I_1 K_1) \right\} dm - \frac{\pi}{8} \right],$$

так как интеграл

$$\int_0^\infty K_0(m) dm = \frac{\pi}{2}.$$

§ 23. ОДИНОЧНОЕ КОЛЬЦО, НАДЕТОЕ НА НЕПРОВОДЯЩУЮ ОСНОВУ ЗОНДА, В СРЕДЕ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ РАЗДЕЛА

Если одиночное кольцо, надетое на непроводящую основу зонда, окружено средой с удельной проводимостью γ_c , то э.д.с., вносимая в это кольцо, согласно (3.127), равна

$$\varepsilon = -\frac{i\omega\mu}{4\pi} 8\pi I r_k^2 \left[\int_0^\infty I_1(r_k \lambda) K_1(r_k \lambda) d\lambda - \int_0^\infty C(\lambda) I_1^2(r_k \lambda) d\lambda \right]. \quad (3.156)$$

Второе слагаемое определяет э.д.с., созданную токами, индуцированными в среде. В области предельно малых параметров выражения для э.д.с. вторичного поля и вносимого активного сопротивления имеют вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_c &= -2I r_k^3 \omega \mu \kappa_c \int_0^{\infty} \frac{m}{2} [2K_0 K_1 - m(K_1^2 - K_0^2)] \frac{I_1^2(m)}{m^2} dm; \\ R_c &= -2r_k^3 \omega \mu \kappa_c \int_0^{\infty} \frac{m}{2} [2K_0 K_1 - m(K_1^2 - K_0^2)] \frac{I_1^2(m)}{m^2} dm. \end{aligned} \quad (3.157)$$

Пусть имеется вторая цилиндрическая поверхность раздела между двумя средами, имеющими удельные проводимости соответственно γ_c и γ_n . Тогда, согласно (3.130),

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_c - 2I r_k^2 a_c \mu \omega (\kappa_n - \kappa_c) \int_0^{\infty} \frac{m}{2} [2K_0 K_1 - m(K_1^2 - K_0^2)] \frac{I_1^2(vm)}{m^2} dm; \\ R &= R_c - 2r_k^2 a_c \mu \omega (\kappa_n - \kappa_c) \int_0^{\infty} \frac{m}{2} [2K_0 K_1 - m(K_1^2 - K_0^2)] \frac{I_1^2(vm)}{m^2} dm. \end{aligned}$$

Для характеристики влияния среды вводим величину

$$\frac{\gamma_k}{\gamma_c} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} \quad \text{или} \quad \frac{\gamma_k}{\gamma_c} = \frac{R}{R_c}.$$

Очевидно, что

$$\frac{\gamma_k}{\gamma_c} = 1 + \left(\frac{\gamma_n}{\gamma_c} - 1 \right) \beta \frac{\int_0^{\infty} \frac{m}{2} [2K_0 K_1 - m(K_1^2 - K_0^2)] \frac{I_1^2(vm)}{m^2} dm}{\int_0^{\infty} \frac{m}{2} [2K_0 K_1 - m(K_1^2 - K_0^2)] \frac{I_1^2(m)}{m^2} dm} = 1 + \left(\frac{\gamma_n}{\gamma_c} - 1 \right) Q_n^*,$$

где Q_n^* — геометрический фактор пласта, введенный на стр. 104.

§ 24. ОДНОСЛОЙНАЯ КАТУШКА НА НЕПРОВОДЯЩЕЙ ОСНОВЕ ЗОНДА

Воспользовавшись результатами, полученными на стр. 116, имеем следующие выражения для вносимой в катушку э.д.с. и активного сопротивления. В среде с удельной проводимостью γ_c

$$\begin{aligned} \varepsilon_c &= -8I r_k^5 n^2 \omega \mu \kappa_c \int_0^{\infty} \frac{m}{2} [2K_0 K_1 - m(K_1^2 - K_0^2)] \frac{I_1^2(m)}{m^2} \frac{\sin^2 s_1 m}{m^2} dm; \\ R_c &= -8r_k^5 n^2 \omega \mu \kappa_c \int_0^{\infty} \frac{m}{2} [2K_0 K_1 - m(K_1^2 - K_0^2)] \frac{I_1^2(m)}{m^2} \frac{\sin^2 s_1 m}{m^2} dm. \end{aligned} \quad (3.158)$$

В среде с удельной проводимостью бурового раствора γ_c и удельной проводимостью пласта γ_n

$$\varepsilon = \varepsilon_c - 8I r_k^2 n^2 a_c^3 \omega \mu (\kappa_n - \kappa_c) \int_0^\infty \frac{m}{2} [2K_0 K_1 - m(K_1^2 - K_0^2)] \times \\ \times \frac{I_1^2(\nu m)}{m^2} \frac{\sin^2 s_2 m}{m^2} dm; \quad (3.159)$$

$$R = R_c - 8r_k^2 n^2 a_c^3 \omega \mu (\kappa_n - \kappa_c) \int_0^\infty \frac{m}{2} [2K_0 K_1 - m(K_1^2 - K_0^2)] \times \\ \times \frac{I_1^2(\nu m)}{m^2} \frac{\sin^2 s_2 m}{m^2} dm.$$

И, наконец,

$$\frac{\gamma_k}{\gamma_c} = 1 + \left(\frac{\gamma_n}{\gamma_c} - 1 \right) \beta^3 \frac{\int_0^\infty \frac{m}{2} [2K_0 K_1 - m(K_1^2 - K_0^2)] \frac{I_1^2(\nu m)}{m^2} \cdot \frac{\sin^2 s_2 m}{m^2} dm}{\int_0^\infty \frac{m}{2} [2K_0 K_1 - m(K_1^2 - K_0^2)] \frac{I_1^2(m)}{m^2} \frac{\sin^2 s_1 m}{m^2} dm} = \\ = 1 + \left(\frac{\gamma_n}{\gamma_c} - 1 \right) Q_n^*, \quad (3.160)$$

где Q_n^* — геометрический фактор пласта для зонда, состоящего из однослойной катушки. Напомним обозначения, фигурирующие в формулах (3.158) и (3.160): r_k — радиус катушки, a_c — радиус скважины, l — длина катушки, $\beta = \frac{a_c}{r_k}$; $\nu = \frac{l}{\beta}$; $s_2 = \frac{l}{2a_c}$; $s_1 = \frac{l}{2r_k}$.

Рассмотрим систему, состоящую из двух однослойных катушек разной длины и одинакового радиуса, включенных навстречу друг другу и расположенных одна в другой. Тогда для вносимой в систему э.д.с. и активного сопротивления имеем следующие выражения. В среде с удельной проводимостью γ_c

$$\varepsilon_c^{1,2} = -8I r_k^5 \omega \mu \kappa_c \{ n_1^2 I_1 - n_2^2 I_2 \}; \\ R_c^{1,2} = -8r_k^5 \omega \mu \kappa_c \{ n_1^2 I_1 - n_2^2 I_2 \}, \quad (3.161)$$

где n_1 и n_2 — число витков на единицу длины в каждой катушке.

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{m}{2} [2K_0 K_1 - m(K_1^2 - K_0^2)] \frac{I_1^2(m)}{m^2} \frac{\sin^2 s_1 m}{m^2} dm; \\ I_2 = \int_0^\infty \frac{m}{2} [2K_0 K_1 - m(K_1^2 - K_0^2)] \frac{I_1^2(m)}{m^2} \frac{\sin^2 s_1' m}{m^2} dm.$$

Здесь

$$s_1 = \frac{l}{2r_k}; \quad s_1' = \frac{b}{2r_k}.$$

В среде с удельной проводимостью бурового раствора γ_c и удельной проводимостью пласта γ_n

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1,2} &= \varepsilon_c^{1,2} - 8I r_k^2 a_c^3 \omega \mu (x_n - x_c) [n_1^2 I'_1 - n_2^2 I'_2]; \\ R^{1,2} &= R_c^{1,2} - 8r_k^2 a_c^3 \omega \mu (x_n - x_c) [n_1^2 I'_1 - n_2^2 I'_2]. \end{aligned} \quad (3.162)$$

Здесь

$$\begin{aligned} I'_1 &= \int_0^\infty \frac{m}{2} [2K_0 K_1 - m(K_1^2 - K_0^2)] \frac{I_1^2(vm)}{m^2} \frac{\sin^2 s_2 m}{m^2} dm; \\ I'_2 &= \int_0^\infty \frac{m}{2} [2K_0 K_1 - m(K_1^2 - K_0^2)] \frac{I_1^2(vm)}{m^2} \frac{\sin s'_2 m}{m^2} dm, \end{aligned}$$

где

$$s_2 = \frac{l}{2a_c}; \quad s'_2 = \frac{b}{2a_c}.$$

Наконец, выражение для γ_k имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_k}{\gamma_c} &= 1 + \left(\frac{\gamma_n}{\gamma_c} - 1 \right) \beta^3 \frac{n_1^2 I'_1 - n_2^2 I'_2}{n_1^2 I_1 - n_2^2 I_2} = 1 + \left(\frac{\gamma_n}{\gamma_c} - 1 \right) \beta^3 \frac{\frac{I'_1}{I_1} - \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2 \frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{I'_2}{I_2}}{1 - \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2 \frac{I_2}{I_1}} = \\ &= 1 + \left(\frac{\gamma_n}{\gamma_c} - 1 \right) \frac{Q_{n1}^* - t^2 Q_{n2}^*}{1 - t^2}. \end{aligned} \quad (3.163)$$

Здесь Q_{n1}^* и Q_{n2}^* — геометрические факторы пласта для каждой катушки.

Формулу (3.163) представим в несколько ином виде:

$$\gamma_k = \gamma_c Q_c^* + \gamma_n Q_n^*,$$

Таблица 3.27

$\frac{a_c}{r_k}$	2,0	4,0		8,0		
$\frac{l}{2a_c}$	Q_c^*	$\frac{l}{2a_c}$	Q_c^*	$\frac{l}{2a_c}$	Q_c^*	I
0,2	0,5274	0,10	0,7665	0,050	0,8836	$0,3979 \cdot 10^{-1}$
0,3	0,5144	0,15	0,7591	0,075	0,8796	$0,8663 \cdot 10^{-1}$
0,4	0,5010	0,20	0,7509	0,100	0,8755	0,1489
0,5	0,4877	0,25	0,7424	0,125	0,8711	0,2242
0,6	0,4749	0,30	0,7339	0,150	0,8665	0,3115
0,7	0,4628	0,35	0,7253	0,175	0,8619	0,4095
0,8	0,4513	0,40	0,7169	0,200	0,8572	0,5169
0,9	0,4406	0,45	0,7086	0,225	0,8526	0,6330
1,0	0,4306	0,50	0,7000	0,250	0,8480	0,7569
1,1	0,4212	0,55	0,6926	0,275	0,8434	0,8879
1,2	0,4124	0,60	0,6849	0,300	0,8389	1,026
1,3	0,4043	0,65	0,6775	0,325	0,8345	1,170
1,4	0,3968	0,70	0,6702	0,350	0,8301	1,319
1,5	0,3895	0,75	0,6632	0,375	0,8257	1,474
1,6	0,3827	0,80	0,6565	0,400	0,8215	1,634
1,7	0,3764	0,85	0,6500	0,425	0,8173	1,797
1,8	0,3704	0,90	0,6436	0,450	0,8131	1,968
1,9	0,3648	0,95	0,6375	0,475	0,8091	2,141
2,0	0,3595	1,0	0,6316	0,500	0,8051	2,319
2,1	0,3545	1,05	0,6259	0,525	0,8011	2,500

где геометрический фактор скважины

$$Q_c^{\zeta} = 1 - \frac{Q_{п1}^* - t^2 Q_{п2}^*}{1 - t^2},$$

$$Q_{п}^{\zeta} = \frac{Q_{п1}^* - t^2 Q_{п2}^*}{1 - t^2}; \quad Q_c^{\xi} = \frac{Q_{с1}^* - t^2 Q_{с2}^*}{1 - t^2}.$$

В табл. 3.27 приведены значения функций Q_c^* и I .

§ 25. О ВЛИЯНИИ МАГНИТНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ В ИНДУКЦИОННОМ КАРОТАЖЕ

Квазистационарные электромагнитные поля, применяемые в индукционном каротаже, зависят от удельной электропроводности и магнитной проницаемости среды. Поэтому изучение влияния μ на результаты индукционного каротажа — одна из прямых задач теории метода. Большой интерес представляет исследование роли μ в двух случаях:

1. Буровой раствор содержит магнетик (обычно применяется магнетик для утяжеления раствора).

2. Пласты обладают повышенной магнитной восприимчивостью (подобные условия возникают при использовании индукционного каротажа для решения задач рудной геофизики.)

Результаты анализа влияния магнитной восприимчивости, изложенные здесь, основываются на данных строгого расчета электромагнитного поля на оси скважины (проникновение фильтрата бурового раствора в пласт отсутствует).

Предварительно рассмотрим некоторые особенности влияния μ в однородной проводящей среде.

Однородная среда

Электромагнитное поле магнитного диполя может быть представлено (см. стр. 9) в виде:

$$E_{\varphi} = \frac{i\omega\mu M}{4\pi R^2} e^{ikR} (1 - ikR) \sin \theta;$$

$$H_R = \frac{2M}{4\pi R^3} e^{ikR} (1 - ikR) \cos \theta; \quad (3.164)$$

$$H_{\theta} = \frac{M}{4\pi R^3} e^{ikR} (1 - ikR - k^2 R^2) \sin \theta.$$

Здесь R и θ — сферические координаты точки; k — волновое число, равное $\sqrt{\frac{\gamma\mu\omega}{2}}(1+i)$.

В непроводящей магнитной среде вместо (3.164) имеем:

$$E_{\varphi}^0 = \frac{i\omega\mu M}{4\pi R^2} \sin \theta;$$

$$H_R^0 = \frac{2M}{4\pi R^3} \cos \theta; \quad (3.165)$$

$$H_{\theta}^0 = \frac{M}{4\pi R^3} \sin \theta.$$

В однородной непроводящей среде напряженность магнитного поля не зависит от μ , а вихревое электрическое поле, связанное с э.д.с. соотношением $\varepsilon = \oint (\vec{E}d\vec{l})$, прямо пропорционально μ .

Если среда обладает конечной проводимостью, то магнитная проницаемость оказывает влияние на величину магнитного поля, поскольку интенсивность проявления внутреннего скин-эффекта характеризуется величиной параметра $\rho = \sqrt{\frac{\gamma\mu\omega}{2}} R$. С увеличением магнитной проницаемости μ возрастает индуктивная связь между отдельными участками среды, и кривые распределения компонент плотности тока, приведенные на стр. 15, смещаются влево.

В области предельно малого параметра для компонент магнитного поля на оси диполя, согласно (3.164), имеем:

$$H_{\text{акт}} = ip^2 H^0 = i \frac{\gamma\mu\omega L^2}{2} H^0, \quad (3.166)$$

$$H_{\text{реакт}} = \left(1 - \frac{2}{3} p^3\right) H^0 = H^0 - \frac{2}{3} p^3 H^0 \quad (3.167)$$

и для вектора индукции B

$$B_{\text{акт}} = i \frac{\gamma\mu^2\omega L^2}{2} H^0, \quad (3.168)$$

$$B_{\text{реакт}} = B^0 - \frac{2}{3} p^3 B^0.$$

Здесь L — длина зонда; H^0 и B^0 — магнитное поле и вектор индукции в непроводящей среде. Поэтому э.д.с., созданная активной компонентой тока, прямо пропорциональна квадрату магнитной проницаемости, а реактивная компонента — первой степени μ . При малых значениях параметра p вторым слагаемым в правой части формулы (3.168) можно пренебречь, $B_{\text{реакт}} = \mu H^0$. Таким образом, реактивная компонента э.д.с. является функцией только μ и практически не зависит от удельной проводимости. При заданной частоте, удельной проводимости и магнитной проницаемости среды это условие выполняется тем лучше, чем короче зонд. По-видимому, для устранения влияния удельной проводимости целесообразно использовать относительно короткие зонды и, в частности, однокатушечные системы. Однако при этом может заметно возрасти влияние каверн, диаметра скважин и т. д.

Связь между магнитной проницаемостью и восприимчивостью в системе CGSM записывается в виде

$$\mu = 1 + 4\pi\kappa \cdot 10^{-6} = 1 + \kappa_0 \quad (\kappa_0 = 4\pi \cdot 10^{-6}\kappa).$$

Предположим, что восприимчивость пород мала и $\kappa_0 \ll 1$, тогда, подставляя выражение для μ в формулу (3.168), имеем:

$$B_{\text{акт}} \approx \frac{i\gamma\omega L^2}{2} (1 + 2\kappa_0) H^0; \quad (3.169)$$

$$B_{\text{реакт}} \approx H^0 + \kappa_0 H^0 - \frac{2}{3} \left[\frac{\omega\gamma(1 + \kappa_0)}{2} z \right]^{\frac{3}{2}} (1 + \kappa_0) H^0 \approx H^0 + \kappa_0 H^0 - \frac{2}{3} \left(\frac{\gamma\omega}{2} L \right)^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{5}{2} \kappa \right) H^0.$$

Обычно первичное поле H^0 компенсируется, поэтому измеряется вторичная реактивная компонента:

$$\kappa_0 H^0 - \frac{2}{3} \left(\frac{\gamma \omega L}{2} \right)^{\frac{3}{2}} H^0. \quad (3.170)$$

Из сравнения формул (3.169) и (3.170) видно, что магнитная восприимчивость влияет на активную компоненту э.д.с. значительно меньше, чем на реактивную компоненту. Поэтому в области предельно малых параметров при слабой восприимчивости пород удельная электропроводность определяется по активной компоненте э.д.с., а магнитная восприимчивость — по измерениям реактивной компоненты. Если параметр ρ нельзя считать достаточно малым, то методика определения γ и μ по данным измерения компонент э.д.с. значительно усложняется, так как на обе компоненты э.д.с. влияет и удельная проводимость, и магнитная проницаемость среды. Очевидно, что при измерении в индукционном каротаже амплитуды вторичного поля возрастает влияние магнитной проницаемости.

Магнитное поле на оси скважины

Впервые решение задачи о поле вертикального магнитного диполя на оси скважины (двухслойный разрез) было дано В. И. Никитиной и описано в работе «Общее решение осесимметрической задачи теории индукционного каротажа» [10]. Выражение для вертикальной компоненты магнитного поля на оси скважины, как известно, имеет вид

$$h_z = h_z^{\text{одн}} - \frac{z^3}{\pi} \int_0^{\infty} \lambda_1^2 C_1 \cos \lambda z d\lambda. \quad (3.171)$$

Здесь h_z — магнитное поле, выраженное в единицах поля в воздухе; $h_z^{\text{одн}}$ — напряженность магнитного поля в однородной среде с удельной проводимостью и магнитной проницаемостью бурового раствора скважины. Функция C_1 , определяемая из граничных условий на поверхности раздела скважина — пласт, имеет вид

$$C_1 = \frac{\mu_1 \lambda_2 K_0(\lambda_2 a) K_1(\lambda_1 a) - \mu_2 \lambda_1 K_0(\lambda_1 a) K_1(\lambda_2 a)}{\mu_1 \lambda_2 K_0(\lambda_2 a) I_1(\lambda_1 a) + \mu_2 \lambda_1 I_0(\lambda_1 a) K_1(\lambda_2 a)}, \quad (3.172)$$

где μ_1 и μ_2 — соответственно магнитные проницаемости бурового раствора, скважины и пласта;

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sqrt{\lambda^2 + i\kappa_c}; & \lambda_2 &= \sqrt{\lambda^2 + i\kappa_n}; \\ \kappa_c &= \gamma_c \mu_1 \omega; & \kappa_n &= \gamma_n \mu_2 \omega; \end{aligned}$$

a — радиус скважины; z — длина зонда.

Методика вычисления функций Бесселя и интеграла, стоящего в правой части формулы (3.170), была описана выше (стр. 61). В табл. 3.28 приведены исходные данные расчета поля по формуле (3.171). В расчетах радиус скважины был принят равным 0,1 м.

В результате расчетов были получены значения реактивной и активной компонент поля, амплитуды и величины:

$$\frac{\gamma_k}{\gamma_n} = \frac{2}{\gamma_n \mu_n \omega L^2} h_z. \quad (3.173)$$

$\frac{\mu_{\text{п}}}{\mu_{\text{с}}}$	0,5	0,6	0,7	0,9	0,99	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2				
$\frac{\gamma_{\text{п}}}{\gamma_{\text{с}}}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	16	32	64	128		
$\gamma_{\text{п}} \mu_{\text{п}} \omega$	0,01		0,02			0,04		0,08							
$\alpha = \frac{z}{a}$	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	11,0	12,0	13,0	14,0	15,0	16,0	17,0

Рассмотрим поведение поля в том случае, когда магнитная проницаемость бурового раствора больше магнитной проницаемости пласта:

$$s = \frac{\mu_{\text{п}}}{\mu_{\text{с}}} < 1.$$

Впервые Доллем было показано, что в среде, однородной в магнитном отношении, в области предельно малых параметров (относительно низкие частоты и высокие удельные сопротивления) выражение для кажущейся проводимости можно представить в виде суммы:

$$\gamma_{\text{к}} = \gamma_{\text{с}} Q_{\text{с}}(\alpha) + \gamma_{\text{п}} Q_{\text{п}}(\alpha). \quad (3.174)$$

Функции $Q_{\text{с}}(\alpha)$ и $Q_{\text{п}}(\alpha)$ являются соответственно геометрическими факторами скважины и пласта, поскольку зависят только от отношения длины зонда к радиусу скважины. В среде, неоднородной по μ и γ , для определенной области частот и удельных сопротивлений выражение для кажущейся проводимости можно представить в таком же виде, как и в предыдущем случае, в частности для двухслойной среды имеем формулу (3.174). Однако множители $Q_{\text{с}}$ и $Q_{\text{п}}$ — это функции не только геометрических факторов. Они зависят и от магнитной проницаемости среды. При заданном распределении μ аргументом функций $Q_{\text{с}}$ и $Q_{\text{п}}$ является только отношение длины зонда к радиусу скважины, поэтому в дальнейшем по-прежнему будем называть функции $Q_{\text{с}}$ и $Q_{\text{п}}$ геометрическими факторами скважины и пласта.

В отличие от среды, однородной по μ , в данном случае происходит перераспределение магнитного потока в зависимости от μ , и в области предельно малых значений параметров поля плотность вихревых токов, индуцированных в среде, прямо пропорциональна потоку этого поля и удельной проводимости в данной точке (между токами отсутствует взаимодействие).

Значения функций $Q_{\text{с}}(\alpha, s)$ и $Q_{\text{п}}(\alpha, s)$ были получены из формул:

$$Q_{\text{с}}(\alpha, s) = \frac{\gamma_{\text{к}}(N_2, \alpha, s) - \gamma_{\text{к}}(N_1, \alpha, s)}{N_2 - N_1}; \quad (3.175)$$

$$Q_{\text{п}}(\alpha, s) = \frac{\gamma_{\text{к}}(N_1, \alpha, s) - N_1 Q_{\text{с}}(N_1, \alpha, s)}{\gamma_{\text{п}}}. \quad (3.176)$$

Здесь N_1 и N_2 — два значения отношений $\frac{\gamma_{\text{к}}}{\gamma_{\text{п}}}$; $\alpha = \frac{z}{a}$; $\frac{\gamma_{\text{к}}}{\gamma_{\text{п}}}$ — значения отношения кажущейся проводимости к проводимости пласта, взятые из

$\alpha \backslash s$	0,99	0,90	0,80	0,70	0,60	0,50
$Q_c(\alpha, s)$						
3,0	0,1160	0,1340	0,1610	0,1990	0,2500	0,3260
4,0	0,0675	0,0805	0,0995	0,1260	0,1670	0,2280
5,0	0,0436	0,0525	0,0662	0,0860	0,1160	0,1640
6,0	0,0302	0,0366	0,0466	0,0615	0,0837	0,1210
7,0	0,0220	0,0270	0,0345	0,0454	0,0627	0,0916
8,0	0,0168	0,0204	0,0262	0,0350	0,0484	0,0710
9,0	0,0131	0,0161	0,0206	0,0275	0,0382	0,0568
10,0	0,0106	0,0129	0,0168	0,0222	0,0307	0,0455
$Q_n(\alpha, s)$						
3,0	0,870	0,973	1,098	1,259	1,476	1,777
4,0	0,930	1,023	1,160	1,337	1,574	1,910
5,0	0,994	1,045	1,186	1,370	1,619	1,972
6,0	0,950	1,054	1,197	1,383	1,632	1,996
7,0	0,955	1,071	1,200	1,386	1,639	2,000
8,0	0,956	1,068	1,200	1,384	1,636	2,000
9,0	0,954	1,056	1,197	1,379	1,629	1,986
10,0	0,953	1,056	1,192	1,374	1,621	1,973

результатов строгого расчета поля на оси скважины. В процессе вычислений было установлено, что функции $Q_c(\alpha, s)$ и $Q_n(\alpha, s)$ не зависят от удельных сопротивлений бурового раствора скважины и пласта. Это и послужило основанием для введения понятия геометрического фактора в средах, неоднородных по γ и μ . Переход от геометрических факторов к полю осуществляется по формулам (3.173) и (3.174). В табл. 3.29 приведены значения геометрических факторов скважины и пласта при разных значениях α и s .

На рис. 3.13 представлены графики геометрических факторов скважины и пласта в зависимости от α . Шифр кривых s . Расчеты геометрических факторов были выполнены при условии, что $\gamma_{пн} \mu_{п\omega} = 0,01$, но сопоставление результатов строгого расчета с вычислениями через геометрические факторы показывает, что геометрические факторы можно использовать при значении $\gamma_{пн} \mu_{п\omega}$, равном 0,08. По-видимому, и при несколько больших значе-

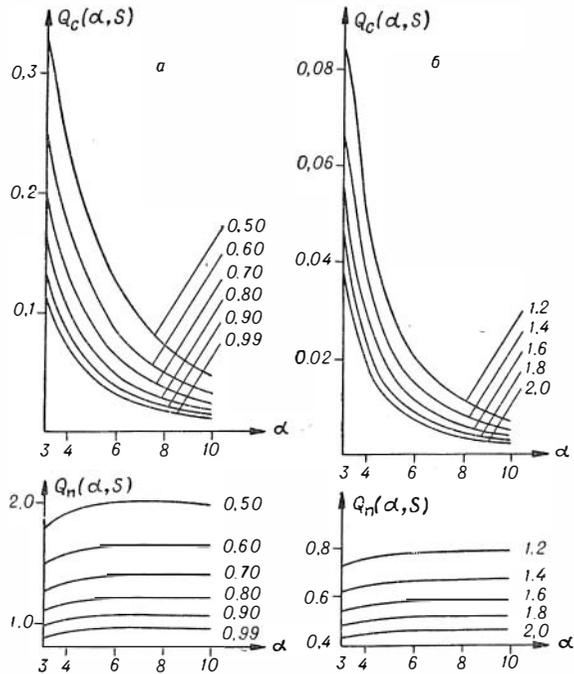


Рис. 3.13. Геометрические факторы скважины и пласта.

а) $s < 1$; б) $s > 1$.

ниях $\gamma_{\text{н}}\mu_{\text{н}}\omega$ эти формулы дают удовлетворительный результат, особенно для относительно коротких зондов.

Сумма геометрических факторов скважины и пласта, в общем случае, отлична от единицы, так как магнитная проницаемость скважины не равна магнитной проницаемости пласта. В табл. 3.30 приведены значения суммы геометрических факторов скважины и пласта $F(\alpha, s) = Q_{\text{с}}(\alpha, s) + Q_{\text{п}}(\alpha, s)$. Как видно, эта сумма практически не зависит от длины зонда и является только функцией отношения магнитной проницаемости пласта

Таблица 3.30

$\alpha \backslash s$	0,99	0,90	0,80	0,70	0,60	0,50	1,0
3,0	0,986	1,107	1,259	1,458	1,726	2,103	0,985
4,0	0,998	1,104	1,260	1,463	1,741	2,138	0,982
5,0	0,988	1,098	1,252	1,456	1,735	2,136	0,976
6,0	0,980	1,091	1,244	1,445	1,716	2,116	0,972
7,0	0,977	1,098	1,234	1,431	1,702	2,092	0,966
8,0	0,973	1,088	1,226	1,419	1,684	2,071	0,962
9,0	0,967	1,072	1,218	1,407	1,667	2,043	0,958
10,0	0,964	1,069	1,209	1,396	1,652	2,019	0,952

к магнитной проницаемости скважины. Сопоставление с расчетом для среды, однородной в магнитном отношении, показывает, что внутренний скин-эффект уменьшает сумму геометрических факторов скважины и пласта, особенно с возрастанием длины зонда.

Согласно (3.173), активная компонента вторичного поля, выраженная в единицах первичного поля, записывается в виде

$$h_z = \frac{\mu_{\text{н}}\omega L^2}{2} [\gamma_{\text{с}} Q_{\text{с}}(\alpha, s) + \gamma_{\text{п}} Q_{\text{п}}(\alpha, s)]. \quad (3.177)$$

В среде, однородной в электрическом отношении ($\gamma_{\text{с}} = \gamma_{\text{п}}$),

$$h_z^0 = \frac{\mu_{\text{н}}\omega L^2}{2} \gamma_{\text{п}} F(s). \quad (3.178)$$

Функция $F(s)$ при $s \neq 1$ отлична от единицы. Целесообразно нормировать геометрические факторы так, чтобы сумма их была равна единице. Для этого достаточно разделить $Q_{\text{с}}$ и $Q_{\text{п}}$ на функцию $F(s)$. Тогда

$$h_z = \frac{\mu_{\text{н}}\omega L^2 F(s)}{2} [\gamma_{\text{с}} Q_{\text{с}}^{\text{нп}}(\alpha, s) + \gamma_{\text{п}} Q_{\text{п}}^{\text{нп}}(\alpha, s)], \quad (3.179)$$

где

$$Q_{\text{с}}^{\text{нп}} = \frac{Q_{\text{с}}}{F(s)}, \quad Q_{\text{п}}^{\text{нп}} = \frac{Q_{\text{п}}}{F(s)}. \quad (3.180)$$

В табл. 3.31 даны приведенные значения геометрических факторов $Q_{\text{с}}^{\text{нп}}(\alpha, s)$ и $Q_{\text{п}}^{\text{нп}}(\alpha, s)$.

Таким образом, увеличение магнитной проницаемости скважины приводит к увеличению напряженности магнитного поля на оси скважины и росту геометрического фактора скважины $Q_{\text{с}}^{\text{нп}}$. Геометрический фактор $Q_{\text{с}}^{\text{нп}}$ с увеличением α стремится к функции $\frac{k(s)}{\alpha^2}$. В табл. 3.32 приведены значения $k(s)$. Независимо от величины s асимптотика в поведении функции $Q_{\text{с}}^{\text{нп}}$ наступает практически с одних и тех же α .

Таблица 3.31

$\alpha \backslash s$	0,99	0,90	0,80	0,70	0,60	0,50
$Q_c^{np}(\alpha, s)$						
3,0	0,1180	0,1210	0,1280	0,1370	0,1450	0,1550
4,0	0,0680	0,0728	0,0790	0,0862	0,0960	0,1070
5,0	0,0442	0,0478	0,0529	0,0590	0,0668	0,0768
6,0	0,0308	0,0335	0,0375	0,0426	0,0488	0,0572
7,0	0,0225	0,0246	0,0280	0,0318	0,0368	0,0438
8,0	0,0172	0,0187	0,0214	0,0247	0,0287	0,0342
9,0	0,0135	0,0151	0,0169	0,0195	0,0228	0,0278
10,0	0,0110	0,0121	0,0139	0,0159	0,0186	0,0224
$Q_{II}^{np}(\alpha, s)$						
3,0	0,882	0,879	0,872	0,863	0,855	0,845
4,0	0,932	0,927	0,921	0,914	0,904	0,893
5,0	0,956	0,952	0,947	0,941	0,933	0,923
6,0	0,969	0,966	0,962	0,957	0,951	0,943
7,0	0,977	0,975	0,972	0,968	0,963	0,956
8,0	0,983	0,981	0,979	0,975	0,971	0,966
9,0	0,986	0,985	0,983	0,980	0,977	0,972
10,0	0,989	0,988	0,986	0,984	0,981	0,978

Таблица 3.32

s	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5
$k(s)$	1,0	1,2	1,4	1,6	1,85	2,24

Таблица 3.33

$$\eta_s = \frac{Q_c^{np}(s)}{Q_c^{np}(0,99)}$$

$\alpha \backslash \eta_s$	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
$\eta_{0,9}$	1,02	1,07	1,03	1,09	1,09	1,09	1,12	1,10
$\eta_{0,8}$	1,08	1,16	1,20	1,22	1,24	1,24	1,25	1,26
$\eta_{0,7}$	1,16	1,27	1,33	1,38	1,42	1,43	1,44	1,45
$\eta_{0,6}$	1,23	1,41	1,51	1,59	1,64	1,67	1,69	1,69
$\eta_{0,5}$	1,31	1,57	1,73	1,86	1,95	1,99	2,06	2,04

С увеличением длины зонда возрастает до определенного предела влияние магнитной восприимчивости на величину Q_c^{np} . В табл. 3.33 приведены значения отношения

$$\eta_s = \frac{Q_c^{np}(s)}{Q_c^{np}(0,99)}$$

Для уменьшения влияния хорошо проводящего и магнитного бурового раствора могут быть использованы многокатушечные зонды. В качестве первого примера рассмотрим трехкатушечный зонд, состоящий из одной генераторной и двух измерительных катушек, расстояние между которыми значительно меньше расстояния до генераторной катушки. Моменты измерительных катушек подобраны так, что э. д. с. прямого поля ϵ^{np} в измерительной цепи равна нулю.

В среде, однородной по проводимости, для двухкатушечного зонда, согласно формуле (3.178),

$$\varepsilon_{\text{одн}} = \frac{\gamma_{\text{н}} \mu_{\text{н}} \omega L^2}{2} \varepsilon_{0\text{с}} \cdot F(s), \quad (3.181)$$

где $\varepsilon_{0\text{с}}$ — э. д. с. в измерительной катушке в непроводящей среде с магнитной проницаемостью $\mu_{\text{с}}$; $F(s)$ — сумма геометрических факторов скважины и пласта. Отсюда для э. д. с. в трехкатушечном зонде получаем выражение

$$\varepsilon_{\text{одн}} = \frac{\omega \mu_{\text{н}} \varepsilon_{\text{с}}}{2} [L_1^2 F_1(s) - L_2^2 F_2(s)] \gamma_{\text{н}} = \frac{\omega \mu_{\text{н}} L_1^2 F(s)}{2} \varepsilon_{0\text{с}} [1 - t^2] \gamma_{\text{н}}, \quad (3.182)$$

где

$$t = \frac{L_2}{L_1} \quad \text{и} \quad F(s) = F_1(s) = F_2(s).$$

В среде, неоднородной по γ , на оси скважины для э. д. с. имеем

$$\varepsilon = \frac{\omega \mu_{\text{н}} L_1^{(2)} F(s)}{2} \varepsilon_{0\text{с}} [\gamma_{\text{к}}^{(1)} - t^2 \gamma_{\text{к}}^{(2)}]. \quad (3.183)$$

Здесь $\varepsilon_{0\text{с}}$ — э. д. с. в непроводящей среде с магнитной проницаемостью $\mu_{\text{с}}$; $\gamma_{\text{к}}^{(1)}$ и $\gamma_{\text{к}}^{(2)}$ — кажущиеся проводимости для двухкатушечных зондов длиной L_1 и L_2 . Поэтому выражение для кажущейся проводимости при измерении с трехкатушечными зондами записывается в виде

$$\frac{\gamma_{\text{к}}}{\gamma_{\text{н}}} = \frac{1}{(1-t^2)} \left[\frac{\gamma_{\text{к}}}{\gamma_{\text{н}}}(L_1) - t^2 \frac{\gamma_{\text{к}}}{\gamma_{\text{н}}}(L_2) \right]$$

или

$$\frac{\gamma_{\text{к}}}{\gamma_{\text{н}}} = \frac{1}{(1-t^2)} [(N-1) \{Q_{\text{с}}^{\text{нп}}(\alpha_1, s) - t^2 Q_{\text{с}}^{\text{нп}}(\alpha_2, s)\} + (1-t^2)].$$

Здесь $N = \frac{\gamma_{\text{с}}}{\gamma_{\text{н}}}$.

Если длины зондов L_1 и L_2 значительно больше радиуса скважины, то функция $Q_{\text{с}}^{\text{нп}}(\alpha)$ практически равна $\frac{K(s)}{\alpha^2}$, где $\alpha = \frac{L}{a}$, и функция в первой скобке, определяющая сигнал от скважины, стремится к нулю. Был выполнен расчет величины $\frac{\gamma_{\text{к}}}{\gamma_{\text{н}}}$ для трехкатушечного зонда ($\alpha = 10$ и $t = 0,9$) при $\gamma_{\text{н}} \mu_{\text{н}} \omega = 0,08$. Отношение $\frac{\gamma_{\text{с}}}{\gamma_{\text{н}}}$ изменилось от 2 до 128 (2, 4, 8, 16, 32, 64, 128), а параметр s менялся от 0,99 до 0,50. Во всех случаях величина $\frac{\gamma_{\text{к}}}{\gamma_{\text{н}}}$ оказалась равной 0,87. Отклонение от единицы связано со скин-эффектом и практически такое же, как в однородной среде с удельным сопротивлением пласта. Коэффициент трехкатушечного зонда является функцией s , в частности магнитной проницаемости бурового раствора, поэтому для интерпретации данных измерений с трехкатушечным зондом необходимо знать магнитную проницаемость скважины. Если $\mu_{\text{с}}$ не меняется вдоль скважины, то сведения о ней могут быть получены лабораторным путем. По-видимому, в реальных условиях магнитная проницаемость изменяется с глубиной, так как концентрация магнитного вещества в растворе непостоянна. В этом случае необходимо одновременно с измерением $\gamma_{\text{к}}$ определять $\mu_{\text{с}}$. Для определения магнитной проницаемости можно

воспользоваться тем, что реактивная компонента поля в широком диапазоне изменения величин $\gamma_n \mu \omega$ и $\frac{\gamma_c}{\gamma_n}$ не зависит от удельной проводимости среды и является функцией s . В табл. 3.34 приведены значения реактивной компоненты магнитного поля, выраженной в единицах поля в воздухе, для двухкатушечных зондов длиной α .

Таблица 3.34

Re $h_z - 1$

$\alpha \backslash s$	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5
3,0	0,0728	0,159	0,263	0,391	0,550
4,0	0,100	0,222	0,374	0,568	0,822
5,0	0,114	0,255	0,435	0,671	0,991
6,0	0,120	0,271	0,466	0,726	1,088
7,0	0,122	0,278	0,480	0,753	1,139
8,0	0,123	0,280	0,485	0,765	1,164
9,0	0,123	0,280	0,485	0,768	1,173
10,0	0,122	0,279	0,484	0,766	1,172

При изменении величины $\gamma_n \mu \omega$ от 0,01 до 0,08 значения реактивной компоненты практически не изменяются, поэтому можно считать, что значения поля, приведенные в табл. 3.34, совпадают с магнитным полем постоянного тока. Принцип действия одновременной регистрации γ и μ можно представить в самых общих чертах так: по данным измерений реактивной компоненты трехкатушечным зондом или одним из двухкатушечных зондов определяется μ_c , которой соответствует определенное значение коэффициента зонда.

В качестве второго примера зонда, одновременно измеряющего γ и μ и компенсирующего влияние токов, индуцированных в скважине, рассмотрим четырехкатушечный симметричный зонд с внутренним расположением фокусирующих катушек. Согласно (3.181), э. д. с. в четырехкатушечном зонде в однородной по проводимости среде записывается в виде

$$\varepsilon_{\text{одн}} = \frac{\omega \mu_n \gamma_n L_1^2}{2} \varepsilon_{0c}^{(1)} \left[1 - \frac{2c}{p} + \frac{c^2}{1-2p} \right] F(s).$$

В неоднородной среде на оси скважины с магнитной проницаемостью μ_c для э. д. с. имеем

$$\varepsilon = \frac{\omega \mu_n L_1^2}{2} \varepsilon_{0c}^{(1)} \left[\gamma_k^{(1)} - \frac{2c}{p} \gamma_k^{(2)} + \frac{c^2}{1-2p} \gamma_k^{(3)} \right] F(s).$$

Поэтому выражение для кажущейся проводимости четырехкатушечного зонда имеет вид

$$\frac{\gamma_k}{\gamma_n} = \frac{1}{\left[1 - \frac{2c}{p} + \frac{c^2}{1-2p} \right]} \left[\frac{\gamma_c}{\gamma_n} Q_c^\xi + Q_n^\xi \right], \quad (3.184)$$

где p — отношение длины фокусирующего зонда к длине основного зонда; c — отношение числа витков фокусирующей и основной катушек зонда.

$$Q_c^\xi = Q_c^{np}(\alpha) - \frac{2c}{p} Q_c^{np}(p\alpha) + \frac{c^2}{1-2p} Q_c^{np}[(1-2p)\alpha]; \quad (3.185)$$

$$Q_n^\xi = Q_n^{np}(\alpha) - \frac{2c}{p} Q_n^{np}(p\alpha) + \frac{c^2}{1-2p} Q_n^{np}[(1-2p)\alpha].$$

Здесь α — длина основного зонда, выраженная в единицах радиуса скважины; Q_c^{np} и Q_{II}^{np} — геометрические факторы скважины и пласта для двухкатушечного зонда, значения которых приведены в табл. 3.31.

Параметры зонда (α , ρ и c), исключаяющего влияние скважины, определяются из условия

$$Q_c^z = 0. \quad (3.186)$$

Для реактивной компоненты э.д.с., отнесенной к э.д.с. в непроводящей среде с магнитной проницаемостью μ_c , имеет место соотношение

$$\frac{e_{\text{реакт}}}{e_{0c}} = h_z^{\text{реакт}}(\alpha) - \frac{2c}{\rho^3} h_z^{\text{реакт}}(\rho\alpha) + \frac{c^2}{(1-2\rho)^3} h_z^{\text{реакт}}[(1-2\rho)\alpha]. \quad (3.187)$$

В отличие от трехкатушечного зонда одновременная регистрация γ и μ с помощью четырехкатушечного зонда имеет два существенных недостатка:

1) в состав четырехкатушечного зонда входят короткие зонды, на которые значительно влияет диаметр скважины. Поэтому изменение диаметра скважины может привести к большим ошибкам в определении μ_c ;

Таблица 3.35

$\alpha \backslash s$	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$Q_c(\alpha)$					
3,0	0,0860	0,0675	0,0545	0,0456	0,0385
4,0	0,0476	0,0358	0,0278	0,0225	0,0185
5,0	0,0298	0,0218	0,0167	0,0123	0,0107
6,0	0,0204	0,0147	0,0112	0,0088	0,0071
7,0	0,0148	0,0107	0,00805	0,0063	0,0050
8,0	0,0112	0,00803	0,0061	0,0048	0,0038
9,0	0,00882	0,0064	0,0048	0,0038	0,0030
10,0	0,00710	0,0052	0,0039	0,0030	0,0025
$Q_{II}(\alpha)$					
3,0	0,7213	0,6146	0,5351	0,4735	0,4248
4,0	0,7539	0,6406	0,5573	0,4920	0,4408
5,0	0,7689	0,6531	0,5673	0,5048	0,4492
6,0	0,7761	0,6597	0,5733	0,5069	0,4544
7,0	0,7794	0,6630	0,5765	0,5100	0,4574
8,0	0,7806	0,6644	0,5782	0,5118	0,4590
9,0	0,7803	0,6646	0,5787	0,5125	0,4599
10,0	0,7792	0,6640	0,5786	0,5125	0,4600
$Re h_z - 1$					
3,0	0,1157	0,2034	0,2720	0,3271	0,3722
4,0	0,1541	0,2666	0,3522	0,4194	0,4735
5,0	0,1712	0,2933	0,3845	0,4551	0,5113
6,0	0,1786	0,3035	0,3963	0,4675	0,5239
7,0	0,1805	0,3069	0,3998	0,4710	0,5273
8,0	0,1811	0,3073	0,4001	0,4712	0,5273
9,0	0,1803	0,3066	0,3992	0,4700	0,5260
10,0	0,1801	0,3055	0,3978	0,4685	0,5244

2) при изменении с глубиной магнитной проницаемости нарушается условие компенсации токов в скважине, которое рассчитывается для определенного значения μ_c . При большом отношении $\frac{\gamma_c}{\gamma_{II}}$ это может привести к значительным ошибкам при определении удельной проводимости пласта. В заключение приведем таблицы значений геометрических фак-

торов скважины и пласта (табл. 3.35), когда $s > 1$, т. е. магнитная проницаемость пласта больше магнитной проницаемости бурового раствора скважины. Эти данные могут быть положены в основу расчета многокатушечных зондов при $s > 1$.

С увеличением магнитной проницаемости пласта геометрические факторы скважины и пласта уменьшаются. Реактивная компонента магнитного поля $h_z^{\text{реакт}}$ практически не зависит от удельной проводимости среды при параметре $\gamma_{\text{н}} \mu_{\text{н}} \omega < 0,08$; ее значения приведены в табл. 3.35.

Выше было рассмотрено влияние магнитной проницаемости. Вопросы, связанные с изучением магнитной восприимчивости, не затрагивались. Но результаты расчета геометрических факторов дают косвенное подтверждение возможности измерения γ в средах, магнитная восприимчивость которых не превышает 0,01 CGSM, без одновременной регистрации μ , так как в указанных пределах геометрические факторы скважины и пласта практически не зависят от магнитных свойств среды.

§ 26. О ВЛИЯНИИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ В ИНДУКЦИОННОМ КАРОТАЖЕ

Согласно 2-му уравнению Максвелла

$$\text{rot } H = \gamma E + \frac{\partial D}{\partial t}, \quad (3.188)$$

магнитное поле определяется токами проводимости и токами смещения. Под последними понимается скорость изменения вектора индукции D . Для переменного поля $E = E_0 e^{i\omega t}$ и $H = H_0 e^{i\omega t}$ уравнение (3.188) принимает вид

$$\text{rot } H = \gamma E + i\omega \epsilon E. \quad (3.189)$$

Теория индукционного каротажа построена в предположении, что токи смещения во много раз меньше токов проводимости. Поэтому в уравнении (3.189) при решении задач пренебрегают членом $i\omega \epsilon E$, считая, что

$$\alpha = \frac{\epsilon \omega}{\gamma} \ll 1. \quad (3.190)$$

Рассмотрим следующий пример. Пусть $f = 3 \cdot 10^5$, $\rho = 200$ ом·м и $\epsilon = 20\epsilon_0$. Тогда

$$\alpha = \frac{20 \cdot 10^{-9} \cdot 2\pi \cdot 3 \cdot 10^5 \cdot 200}{36\pi \cdot 6} \approx 0,07.$$

Значит, в средах с большим удельным сопротивлением и при высокой для индукционного каротажа частоте параметр α значительно меньше единицы. Условие (3.190) уже в какой-то мере отражает тот факт, что влияние ϵ в индукционном каротаже мало, но для окончательного решения этой задачи исследуем влияние ϵ на компоненты поля в случае однородной среды и двухслойной среды с цилиндрической границей раздела.

В данном примере квадрат волнового числа $k^2 = i\gamma\mu\omega(1 - i\alpha)$ значительно меньше единицы. Поэтому для зонда длиной 1 м произведение (kL) также мало ($kL \approx 0,15$). Воспользуемся известным разложением по малому параметру функции, описывающей вертикальную компоненту поля (см. стр. 10). Тогда

$$h_z = -\frac{\kappa^2}{2} - \frac{1}{3} \kappa^3 - \frac{\kappa^4}{6} \dots$$

Здесь $\kappa^2 = i\gamma\mu\omega L^2(1 - i\alpha)$. Поэтому активная компонента поля определяется главным образом токами проводимости. С другой стороны, реактивная компонента поля в области малых параметров обязана в этом случае своим возникновением как токам смещения, так и токам проводимости, причем влияние первых может преобладать. Это вполне объяснимо, так как вихревое электрическое поле вблизи источника сдвинуто по фазе на 90° , а ток смещения — на 180° , т. е. появляется реактивная компонента э. д. с., в то время как реактивная компонента э. д. с., обязанная своим возникновением проводимости среды, возникает в результате вторичного эффекта, т. е. взаимодействия токов.

Для определения поля на оси скважины обратимся к первому приближению решения интегрального уравнения (см. стр. 42). Магнитное поле на оси скважины, выраженное в единицах первичного поля, согласно (2.106), записывается в виде

$$h_z = h_z^{\text{одн}} + \frac{k_c^2 - k_{\Pi}^2}{2} L^2 Q_c(\alpha).$$

Поэтому влияние ε на поле практически остается таким же, как в однородной среде.

**ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ
ВЕРТИКАЛЬНОГО МАГНИТНОГО ДИПОЛЯ
В ПЛАСТАХ КОНЕЧНОЙ МОЩНОСТИ**

Одна из наиболее важных задач в теории индукционного каротажа — изучение влияния удельной проводимости вмещающих пород, конечной мощности пласта и его удельной проводимости. Исследования в этом направлении проводил Дестергоф. Результаты расчета отдельных случаев опубликованы [22]. В этой работе дано выражение для поля, когда длина двухкатушечного зонда меньше мощности пласта. Однако в процессе расчета подынтегральная функция была заменена первыми членами ряда, что определило до некоторой степени приближенный характер результатов вычислений. Результаты расчета представлены в виде кривых геометрического фактора с учетом скин-эффекта и могут быть использованы для построения кривых кажущейся проводимости. Кривые реактивной и активной компонент магнитного поля и кажущейся проводимости в работе Дестергофа не приводятся.

В этой главе дан вывод выражений для поля, измеряемого двухкатушечным зондом, при различных его положениях относительно границ пласта, исследуется характер подынтегральной функции и асимптотическое поведение интеграла при больших и малых значениях параметров, определяющих поле. Данные расчеты поля представлены в виде частотных характеристик компонент поля и кажущейся проводимости; установлены пределы применимости приближенных теорий в средах с горизонтальными границами, и исследовано влияние удельной проводимости пласта и вмещающих пород и частоты поля на вертикальные характеристики двухкатушечного зонда, а также роль отношения мощности пласта к длине зонда.

Данные расчеты поля в пластах конечной мощности могут быть использованы при анализе многокатушечных зондов и при решении более сложной задачи, когда зонд расположен на оси скважины в пласте конечной мощности.

§ 1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Представим себе пространство, разделенное двумя поверхностями на три среды. Выберем цилиндрическую систему координат. Ось перпендикулярна плоскости раздела. Начало координат — в месте расположения диполя. Обозначим удельные проводимости пласта и вмещающей среды γ_n и γ_b . Магнитный момент диполя направлен по оси z и равен единице. Кроме того, будем считать магнитную проницаемость μ в средах одинаковой и равной $4\pi \cdot 10^{-7} \frac{2H}{M}$. Требуется определить поле, возбуждаемое переменным магнитным диполем, момент которого направлен вдоль оси z , при любом положении источника относительно поверхностей раздела.

Для квазистационарного поля уравнения Максвелла, как известно, записываются в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} E &= -\frac{\partial B}{\partial t}; & \operatorname{div} E &= 0; \\ \operatorname{rot} H &= \gamma E; & \operatorname{div} H &= 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Диполь питается током, зависимость которого от времени можно представить в виде $e^{-i\omega t}$ и

$$E = E_0 e^{-i\omega t}; \quad H = H_0 e^{-i\omega t}. \quad (4.1)$$

Уравнения I теперь имеют вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} E_0 &= i\omega\mu H_0; & \operatorname{div} E_0 &= 0; \\ \operatorname{rot} H_0 &= \gamma E_0; & \operatorname{div} H_0 &= 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Согласно теории электромагнитного поля, введем вектор-потенциал Π , связанный с основными векторами E_0 и H_0 соотношениями

$$\begin{aligned} H_0 &= k^2 \Pi + \operatorname{grad} \operatorname{div} \Pi; \\ E_0 &= i\omega\mu \operatorname{rot} \Pi, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $k^2 = i\gamma\mu\omega$ (γ — удельная проводимость, ω — круговая частота, μ — магнитная проницаемость). Как известно, вектор-потенциал Π удовлетворяет волновому уравнению

$$\nabla^2 \Pi + k^2 \Pi = 0. \quad (4.3)$$

Так как рассматривается вертикальный магнитный диполь, то его поле может быть представлено только через одну вертикальную составляющую

$$\Pi = \Pi_z. \quad (4.4)$$

Вектор-потенциал зависит от двух координат r и z :

$$\Pi = \Pi(r, z), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Составляющие векторов поля на основании формул (4.2) и (4.4) связаны с вертикальной компонентой Π_z следующим образом:

$$\begin{aligned} H_{0r} &= \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial r \partial z}; & H_{0z} &= k^2 \Pi_z + \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial z^2}; & H_{0\varphi} &= 0; \\ E_{0r} &= E_{0z} = 0; & E_{0\varphi} &= -i\omega\mu \frac{\partial \Pi_z}{\partial r}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Граничные условия для вертикальной компоненты Π_z вследствие непрерывности тангенциальных компонент поля имеют вид

$$\Pi_i = \Pi_k; \quad \frac{\partial \Pi_i}{\partial z} = \frac{\partial \Pi_k}{\partial z} \quad (4.6)$$

при $z = h_{ik}$.

Вблизи полюса (точка 0) поле должно совпадать с полем диполя в однородном пространстве, для этого необходимо, чтобы функция Π обращалась при $R \rightarrow 0$ в бесконечность порядка $\frac{1}{R}$, так как

для диполя в однородном пространстве функция Герца равна

$$\Pi = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikR}}{R}.$$

На бесконечности ($R \rightarrow \infty$) функция Герца стремится к нулю. Таким образом, для решения сформулированной задачи мы должны проинтегрировать систему уравнений

$$\nabla^2 \Pi_1 + k_1^2 \Pi_1 = 0;$$

$$\nabla^2 \Pi_2 + k_2^2 \Pi_2 = 0;$$

$$\nabla^2 \Pi_3 + k_3^2 \Pi_3 = 0,$$

(k_1, k_3 — волновые числа вмещающей среды, k_2 — то же, пласта) и обеспечить выполнение граничных условий (4.6) и указанных выше краевых условий в начале координат и в бесконечности.

Рассмотрим сначала частные решения волнового уравнения $\nabla^2 \Pi + k^2 \Pi = 0$. Если $\Pi = \Pi(R)$, то последнее уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \Pi}{\partial R} + k^2 \Pi = 0,$$

или

$$\frac{\partial^2 (\Pi R)}{\partial R^2} + k^2 (\Pi R) = 0,$$

откуда

$$\Pi R = A e^{ikR} + B e^{-ikR}.$$

Условимся брать комплексные k с положительной мнимой частью, так что в дальнейшем $\operatorname{Re} ik < 0$, где Re — вещественная часть комплексного числа. Функция Π при $R \rightarrow \infty$ должна стремиться к нулю, поэтому, положив $B = 0$ и приняв $A = 1$, получаем

$$\Pi = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e^{ikR}}{R}. \quad (4.7)$$

Последняя формула определяет функцию Герца для диполя в однородной среде. Функция (4.7) получила название первичного возбуждения.

Теперь рассмотрим решение волнового уравнения в цилиндрических координатах (r, z) , так как поле не зависит от азимута φ . В этих координатах волновое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial R^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi}{\partial R} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + k^2 \Pi = 0.$$

Полагая $\Pi = u(r) \cdot v(z)$, приходим после разделения переменных к двум уравнениям:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda^2 u = 0;$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - (\lambda^2 - k^2) v = 0.$$

Здесь λ — постоянная разделения.

Первое уравнение есть уравнение Бесселя, имеющее частным решением функции Бесселя первого и второго рода $J_0(\lambda r)$ и $Y_0(\lambda r)$:

$$u(r) = AJ_0(\lambda r) + BY_0(\lambda r).$$

Функция $Y_0(\lambda r)$ при $r=0$ обращается в бесконечность, поэтому эта функция не может принимать участие в конструировании решения. Второе уравнение имеет решение вида

$$v(z) = Ce^{-\sqrt{\lambda^2 - k^2} z} + De^{\sqrt{\lambda^2 - k^2} z}.$$

Общее решение волнового уравнения записывается в виде

$$\Pi(r, z) = \int_0^\infty \left\{ Me^{\sqrt{\lambda^2 - k^2} z} + Ne^{-\sqrt{\lambda^2 - k^2} z} \right\} J_0(\lambda r) d\lambda. \quad (4.8)$$

Условимся выбирать знак квадратного корня в показателе степени так, чтобы вещественная часть корня была положительна, т. е.

$$\operatorname{Re} \sqrt{\lambda^2 - k^2} > 0. \quad (4.9)$$

Поле в среде, где находится диполь, представим в виде суммы первичного и вторичного возбуждений

$$\Pi_1 = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikR}}{R} + \Pi_1^{(1)}. \quad (4.10)$$

Как известно, первичное возбуждение можно представить через интеграл Зоммерфельда

$$\frac{e^{ikR}}{R} = \int_0^\infty \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} J_0(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k^2} |z|} d\lambda. \quad (4.11)$$

§ 2. ПОЛЕ МАГНИТНОГО ДИПОЛЯ, РАСПОЛОЖЕННОГО ВНЕ ПЛАСТА (РИС. 4.1)

Введем следующие обозначения: область, в которой находится диполь, отметим индексом (1), пласт — индексом (2) и вмещающую среду, расположенную по другую сторону пласта, — индексом (3). Выражения для вектор-потенциала в каждой области соответственно записываются в виде:

$$\Pi_z^{(1)} = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{\lambda}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 |z|} + D_1 e^{\lambda_1 z} \right\} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (z \leq h_1); \quad (4.12)$$

$$\Pi_z^{(2)} = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \{ D_2 e^{\lambda_2 z} + D_3 e^{-\lambda_2 z} \} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (h_1 \leq z \leq h_2); \quad (4.13)$$

$$\Pi_z^{(3)} = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty D_4 e^{-\lambda_1 z} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (z \geq h_2). \quad (4.14)$$

Здесь h_1 — расстояние от диполя до ближней границы пласта; $h_2 = h_1 + H$; H — мощность пласта; $\lambda_1 = \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}$; $\lambda_2 = \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}$.

Для определения неизвестных коэффициентов D_1 , D_2 , D_3 и D_4 , согласно граничным условиям (4.6), получаем систему четырех линейных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\lambda}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 h_1} + D_1 e^{\lambda_1 h_1} = D_2 e^{\lambda_2 h_1} + D_3 e^{-\lambda_2 h_1}; \\ -\lambda e^{-\lambda_1 h_1} + \lambda_1 D_1 e^{\lambda_1 h_1} = \lambda_2 D_2 e^{\lambda_2 h_1} - \lambda_2 D_3 e^{-\lambda_2 h_1}; \\ D_2 e^{\lambda_2 h_2} + D_3 e^{-\lambda_2 h_2} = D_4 e^{-\lambda_1 h_2}; \\ \lambda_2 D_2 e^{\lambda_2 h_2} - \lambda_2 D_3 e^{-\lambda_2 h_2} = -\lambda_1 D_4 e^{-\lambda_1 h_2}. \end{cases} \quad (4.15)$$

Решая систему, получаем:

$$D_1 = -\frac{\lambda k_{12} e^{-2\lambda_1 h_1} [1 - e^{-2\lambda_2 H}]}{\lambda_1 [1 - k_{12}^2 e^{-2\lambda_2 H}]}; \quad (4.16)$$

$$D_2 = \frac{2\lambda k_{12} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) h_1} e^{-2\lambda_2 H}}{(\lambda_1 + \lambda_2) [1 - k_{12}^2 e^{-2\lambda_2 H}]}; \quad (4.17)$$

$$D_3 = \frac{2\lambda e^{-(\lambda_1 - \lambda_2) h_1}}{(\lambda_1 + \lambda_2) [1 - k_{12}^2 e^{-2\lambda_2 H}]}; \quad (4.18)$$

$$D_4 = \frac{4\lambda_1 \lambda_2 e^{-(\lambda_2 - \lambda_1) H}}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 [1 - k_{12}^2 e^{-2\lambda_2 H}]} \quad (4.19)$$

Подставляя выражения для коэффициентов в формулы (4.12) и (4.14), имеем:

$$\Pi_z^{(1)} = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda}{\lambda_1} \left\{ e^{-\lambda_1 |z|} - \frac{k_{12} (1 - e^{-2\lambda_2 H}) e^{-\lambda_1 (2h_1 - z)}}{1 - k_{12}^2 e^{-2\lambda_2 H}} \right\} J_0(\lambda r) d\lambda; \quad (4.20)$$

$$\Pi_z^{(2)} = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{2\lambda e^{-\lambda_1 h_1} e^{-\lambda_2 (z - h_1)} [1 + k_{12} e^{2\lambda_2 (z - h_1 - H)}]}{(\lambda_1 + \lambda_2) [1 - k_{12}^2 e^{-2\lambda_2 H}]} J_0(\lambda r) d\lambda; \quad (4.21)$$

$$\Pi_z^{(3)} = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{4\lambda \lambda_2 e^{-(\lambda_2 - \lambda_1) H} e^{-\lambda_1 z}}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 [1 - k_{12}^2 e^{-2\lambda_2 H}]} J_0(\lambda r) d\lambda. \quad (4.22)$$

Параметр z , входящий в формулы (4.11) и (4.22), есть расстояние между диполем и точкой измерения, т. е. длиной двухкатушечного зонда. В индукционном каротаже наибольший интерес представляет исследование вертикальной компоненты магнитного поля на оси источника

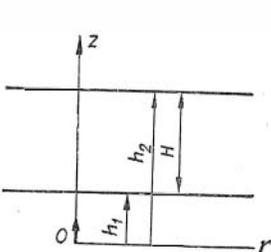


Рис. 4.1.

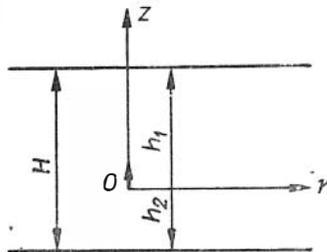


Рис. 4.2.

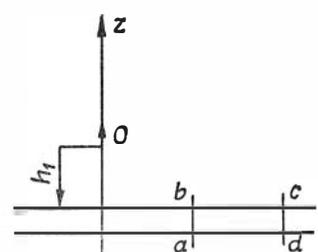


Рис. 4.3.

поля ($r = 0$). Согласно формулам (4.5) и (4.20) — (4.22), получаем выражения для вертикальной компоненты магнитного поля, отнесенной к полю в воздухе,

$$h_z^{(1)} = h_z^0 - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{m^3}{m_1} \frac{k_{12} (1 - e^{-2m_2 \alpha}) \cdot e^{-m_1 (2\beta - 1)}}{1 - k_{12}^2 e^{-2m_2 \alpha}} dm \quad (\beta \geq 1); \quad (4.23)$$

$$h_z^{(2)} = \int_0^{\infty} \frac{m^3 e^{-m_1 \beta} e^{-m_2 (1 - \beta)} [1 + k_{12}^2 e^{2m_2 (1 - \beta - \alpha)}]}{(m_1 + m_2) [1 - k_{12}^2 e^{-2m_2 \alpha}]} dm \quad (1 \geq \beta \geq 1 - \alpha); \quad (4.24)$$

$$h_z^{(3)} = \int_0^{\infty} \frac{2m^3 m_2 e^{-(m_2 - m_1) \alpha} e^{-m_1} dm}{(m_1 + m_2)^2 [1 - k_{12}^2 e^{-2m_2 \alpha}]} \quad (\alpha \leq 1). \quad (4.25)$$

Здесь

$$m = \lambda z; \quad h_z = H_z \cdot \frac{2}{4\pi z^3};$$

$$m_1 = \sqrt{m^2 - k_{12}^2 z^2}; \quad m_2 = \sqrt{m^2 - k_{12}^2 z^2}; \quad k_{12} = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}; \quad \alpha = \frac{H}{z}; \quad \beta = \frac{h_1}{z};$$

H — мощность пласта; h_z^0 — вертикальная компонента магнитного поля магнитного диполя в однородной проводящей среде с удельной проводимостью γ_1 . Последняя формула соответствует случаю, когда пласт расположен между диполем и точкой измерения, т. е. между датчиками зонда, и, как это следует из формулы (4.26), поле не зависит от положения пласта относительно катушек зонда.

§ 3. ПОЛЕ МАГНИТНОГО ДИПОЛЯ, РАСПОЛОЖЕННОГО ВНУТРИ ПЛАСТА (РИС. 4.2)

В отличие от предыдущей задачи диполь расположен внутри пласта. Поэтому выражения для вектор-потенциала можно записать в виде:

$$\Pi_1 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} D_1 e^{\lambda_1 z} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (z \leq h_2); \quad (4.26)$$

$$\Pi_2 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{\lambda}{\lambda_2} e^{-\lambda_2 |z|} + D_2 e^{\lambda_2 z} + D_3 e^{-\lambda_2 z} \right\} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (h_2 \leq z \leq h_1); \quad (4.27)$$

$$\Pi_3 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} D_4 e^{-\lambda_2 z} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (z \geq h_1), \quad (4.28)$$

где h_1 — расстояние от диполя до верхней границы пласта; $h_2 = H - h_1$; H — мощность пласта. Для определения неизвестных коэффициентов, согласно граничным условиям, получаем систему уравнений вида

$$\begin{cases} D_1 e^{-\lambda_1 h_2} = \frac{\lambda}{\lambda_2} e^{-\lambda_2 h_2} + D_2 e^{-\lambda_2 h_2} + D_3 e^{\lambda_2 h_2}; \\ \lambda_1 D_1 e^{-\lambda_1 h_2} = \lambda e^{-\lambda_2 h_2} + \lambda_2 D_2 e^{-\lambda_2 h_2} - \lambda_2 D_3 e^{\lambda_2 h_2}; \\ D_4 e^{-\lambda_1 h_1} = \frac{\lambda}{\lambda_2} e^{-\lambda_2 h_1} + D_2 e^{\lambda_2 h_1} + D_3 e^{-\lambda_2 h_1}; \\ -\lambda_1 D_4 e^{-\lambda_1 h_1} = -\lambda e^{-\lambda_2 h_1} + \lambda_2 D_2 e^{\lambda_2 h_1} - \lambda_2 D_3 e^{-\lambda_2 h_1}. \end{cases} \quad (4.29)$$

В этой задаче нас интересует только поле внутри пласта, так как остальные случаи вытекают из решения ранее рассмотренной задачи. Решая систему (4.29), находим:

$$D_2 = \frac{\lambda k_{12} e^{-2\lambda_2 h_1} [1 + k_{12} e^{-2\lambda_2 h_2}]}{\lambda_2 [1 - k_{12}^2 e^{-2\lambda_2 H}]} ; \quad (4.30)$$

$$D_3 = \frac{\lambda k_{12} e^{-2\lambda_2 h_2} [1 + k_{12} e^{-2\lambda_2 h_1}]}{\lambda_2 [1 - k_{12}^2 e^{-2\lambda_2 H}]} . \quad (4.31)$$

Подставляя эти выражения в формулу (4.27), получаем

$$\Pi_2 = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{\lambda}{\lambda_2} e^{-\lambda_2 |z|} + \frac{\lambda k_{12} [e^{-\lambda_2 (2h_1 - z)} + e^{-\lambda_2 (2h_2 + z)} + 2k_{12} e^{-2\lambda_2 H} \operatorname{ch} \lambda_2 z]}{\lambda_2 [1 - k_{12}^2 e^{-2\lambda_2 H}]} \right\} \times \\ \times J_0(\lambda r) d\lambda . \quad (4.32)$$

Выражение для вертикальной (4.32) компоненты магнитного поля на оси диполя, отнесенной к полю в воздухе, согласно (4.5) и (4.32), имеет вид

$$h_z = h_z^0 + \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{m^3 k_{12} [e^{-(1+2\beta)m_2} + e^{-(2\alpha-2\beta-1)m_2} + 2k_{12} e^{-2\alpha m_2} \operatorname{ch} m_2]}{m_2 [1 - k_{12}^2 e^{-2\alpha m_2}]} dm . \quad (4.33)$$

Здесь

$$\alpha = \frac{H}{z} ; \quad \beta = \frac{h_2}{z} .$$

Если датчики зонда расположены симметрично относительно поверхностей раздела, то $2\beta = \alpha - 1$, и последнее выражение может быть представлено в виде

$$h_z = h_z^0 + \int_0^\infty \frac{m^3 k_{12} e^{-2\alpha m_2}}{m_2!} \cdot \frac{e^{\alpha m_2} + k_{12} \operatorname{ch} m_2}{1 - k_{12}^2 e^{-2\alpha m_2}} dm . \quad (4.34)$$

§ 4. ПОЛЕ ВЕРТИКАЛЬНОГО МАГНИТНОГО ДИПОЛЯ В ПРИСУТСТВИИ ТОНКОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ ПЛАСТИНЫ (РИС. 4.3)

Если длина зонда значительно больше мощности пласта, его удельная электропроводность в несколько раз превышает удельную проводимость вмещающих пород и, наконец, длина волны в пласте больше его мощности, то пласт эквивалентен тонкой пластинке с продольной проводимостью s и строгие граничные условия могут быть заменены двумя приближенными условиями, не требующими знания поля внутри пластины. Первое граничное условие состоит в непрерывности тангенциальных компонент электрического поля

$$E_\varphi^{(1)} = E_\varphi^{(2)} . \quad (4.35)$$

Циркуляция вектора H вдоль контура $abcd$ равна току, пронизывающему этот контур. Поэтому

$$\oint (\vec{H} \vec{dl}) = H_r^{(1)} dr - H_r^{(2)} dr = \gamma dr dh E_\varphi, \quad h \rightarrow 0$$

или

$$H_r^{(1)} - H_r^{(2)} = s E_\varphi, \quad (4.36)$$

где $s = \gamma h$ — продольная проводимость пластины ($\gamma \rightarrow \infty$, $h \rightarrow 0$, но произведение γh конечно). Согласно формулам (4.5), (4.35) и (4.36), граничные условия для вектор-потенциала принимают вид

$$\begin{aligned} \Pi_z^{(1)} &= \Pi_z^{(2)}; \\ \frac{\partial \Pi_z^{(1)}}{\partial z} - \frac{\partial \Pi_z^{(2)}}{\partial z} &= -i\omega\mu_s \Pi_z^{(2)} \end{aligned} \quad (4.37)$$

при $z = -h_1$. Функция Π_z является решением уравнения Гельмгольца и может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{\lambda}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 |z|} + D_1 e^{-\lambda_1 z} \right\} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (z \leq h_1); \\ \Pi_2 &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty D_2 e^{\lambda_2 z} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (z \geq h_1). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Подставляя эти выражения в граничные условия (4.36) и (4.37), получаем систему для определения D_1 и D_2

$$\begin{cases} -D_1 e^{\lambda_1 h_1} + D_2 e^{-\lambda_1 h_1} = \frac{\lambda}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 h_1}; \\ \lambda_1 D_1 e^{\lambda_1 h_1} + (\lambda_1 - i\omega\mu_s) D_2 e^{-\lambda_1 h_1} = \lambda e^{-\lambda_1 h_1}. \end{cases} \quad (4.39)$$

Решая систему (4.39), получаем:

$$D_1 = \frac{\lambda k_s^2 e^{-2\lambda_1 h_1}}{\lambda_1 (2\lambda_1 - k_s^2)}; \quad (4.39')$$

$$D_2 = \frac{2\lambda}{2\lambda_1 - k_s^2}, \quad (4.39'')$$

где $k_s^2 = i\omega\mu_s$.

Подставляя (4.39') и (4.39'') в выражения для вектор-потенциала, имеем:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{\lambda}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 |z|} + \frac{\lambda k_s^2 e^{-2\lambda_1 h_1}}{\lambda_1 (2\lambda_1 - k_s^2)} e^{-2\lambda_1 z} \right\} J_0(\lambda r) d\lambda; \\ \Pi_2 &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{2\lambda}{2\lambda_1 - k_s^2} e^{\lambda_1 z} J_0(\lambda r) d\lambda. \end{aligned}$$

Для вертикальной компоненты магнитного поля на оси диполя, согласно формуле (4.5), получаем выражения

$$\begin{aligned} h_z^{(1)} &= h_z^0 + \frac{n_s}{2} \int_0^\infty \frac{m^3 e^{-m(1+2\alpha)}}{m_1 (2m_1 - n_s)} dm; \\ h_z^{(2)} &= \int_0^\infty \frac{m^3 e^{m_1} dm}{2m_1 - n_s}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Здесь $m = \lambda z$; $m_1 = \sqrt{m^2 - k_1^2 z^2}$; $\alpha = \frac{h_1}{z}$; $n_s = i\omega\mu_s z$.

Основные расчеты электромагнитного поля магнитного диполя были выполнены для двух случаев: 1) двухкатушечный зонд расположен симметрично относительно поверхностей раздела, и мощность пласта больше или равна длине зонда, т. е. $\alpha \geq 1$, 2) зонд также расположен симметрично относительно границ, но его длина больше мощности пласта ($\alpha < 1$).

Одновременно были проведены расчеты поля при произвольном расположении зонда относительно границ пласта, что позволило построить кривые профилирования против пластов конечной мощности и установить возможности метода при определении мощности пласта.

Интегрирование производилось по методу Симпсона с неравномерным шагом на быстродействующей машине Вычислительного центра СО АН СССР.

Вычисления были выполнены при следующих значениях параметров:

$$\frac{\gamma_{\text{п}}}{\gamma_{\text{в}}} = \frac{1}{128}; \frac{1}{64}; \frac{1}{32}; \frac{1}{16}; \frac{1}{8}; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; 2, 4, 8; 16; 32; 64; 128;$$

$$\alpha = 0,125; 0,125\sqrt{2}; 0,250; 0,250\sqrt{2}; 500; 0,500\sqrt{2}; 1; \sqrt{2}; 2; 2\sqrt{2};$$

$$4,0; 4,0\sqrt{2}; 8,0; 8,0\sqrt{2}; 16.$$

Параметр, в который входит частота, менялся так, чтобы можно было получить полную частотную характеристику поля.

В отличие от расчета поля в средах с цилиндрическими поверхностями раздела в данном случае напряженность магнитного поля на оси диполя представлена интегралами, в которые входят элементарные функции. Поэтому анализ поведения подынтегральной функции не представляет большого интереса и легко проводится для больших и малых значений m . Отметим, что функция не имеет особенностей и очень быстро убывает с возрастанием m благодаря присутствию экспоненциального множителя.

§ 5. ТЕОРИЯ ДВУХКАТУШЕЧНОГО ЗОНДА В ОБЛАСТИ ПРЕДЕЛЬНО МАЛЫХ ПАРАМЕТРОВ

Предположим, что частота поля и электропроводность среды настолько малы, что параметры $n_1 = \gamma_{\text{в}} \mu \omega z^2$ и $n_2 = \gamma_{\text{п}} \mu \omega z^2$ значительно меньше единицы. В этом случае может быть легко построена теория индукционного каротажа в средах с горизонтальными поверхностями. Есть два пути решения задачи: один способ заключается в том, что находятся асимптотические выражения для поля в области предельно малых параметров; второй способ — более наглядный — исходит из понятия о геометрическом факторе тонкого пласта. Ниже изложена теория предельно малого параметра, основанная на представлении о геометрическом факторе.

Геометрический фактор элементарного пласта

Согласно Доллю, будем называть элементарным единичным пластом пласт, мощность которого очень мала по сравнению с длиной зонда и равна единице. Геометрический фактор такого элементарного пласта найдем, просуммировав геометрические факторы всех элементарных колец, расположенных на одной и той же высоте z относительно начала координат и составляющих этот пласт. Радиусы элементарных колец изменяются от нуля до бесконечности. Потому геометрический фактор элементарного

* $\gamma_{\text{п}}$ и $\gamma_{\text{в}}$ — удельные проводимости соответственно пласта и вмещающей среды.

пласта $G_z = \int_0^{\infty} g dr$, где g — геометрический фактор элементарного кольца. Согласно формуле (2.78),

$$G_z = \frac{L}{2} \int_0^{\infty} \frac{r^3 dr}{\left[r^2 + \left(\frac{L}{2} + z \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \left[r^2 + \left(\frac{L}{2} - z \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Введя обозначения

$$\frac{L}{2} + z = m;$$

$$\frac{L}{2} - z = n;$$

$$r^2 = x,$$

получим для G_z выражение

$$G_z = \frac{L}{4} \int_0^{\infty} \frac{x dx}{[x^2 + x(m^2 + n^2) + m^2 n^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Обозначив

$$m^2 + n^2 = b; \quad m^2 n^2 = c,$$

получаем табличный интеграл

$$G_z = \frac{L}{4} \int_0^{\infty} \frac{x dx}{(x^2 + bx + c) \sqrt{x^2 + bx + c}},$$

который равен

$$\frac{Lc}{(4c - b^2) \sqrt{c}} - \frac{Lb}{2(4c - b^2)}.$$

Произведя обратную замену c и b через m и n и необходимые упрощения, получаем выражение для G_z :

$$G_z = \frac{L}{2(m+n)^2}.$$

Возможны два случая: $m > 0, n > 0$ или $m < 0, n < 0$. В первом случае рассматриваемый элементарный пласт находится в интервале между датчиками зонда ($\frac{L}{2} > z$ и $z > -\frac{L}{2}$). Тогда его геометрический фактор G_z равен

$$G_z = \frac{1}{2L}. \quad (4.41)$$

Во втором случае пласт расположен вне зонда ($z > \frac{L}{2}, z < -\frac{L}{2}$). Тогда

$$G_z = \frac{L}{8z^2}. \quad (4.42)$$

Из полученных формул следует, что геометрический фактор всего пространства равен

$$G = \frac{L}{8} \int_{\frac{L}{2}}^{\infty} \frac{dz}{z^2} + \frac{L}{2L} + \frac{L}{8} \int_{-\infty}^{\frac{L}{2}} \frac{dz}{z^2} = \frac{L}{8} \cdot \frac{2}{L} + \frac{1}{2} + \frac{L}{8} \cdot \frac{2}{L} = 1. \quad (4.43)$$

Согласно формулам (4.41) и (4.42), геометрические факторы элементарных пластов, расположенных вне интервала зонда, уменьшаются обратно пропорционально z^2 , а геометрические факторы элементарных пластов, расположенных внутри интервала зонда, равны между собою независимо от z . Кривая, изображающая зависимость G_z от z , приведена на рис. 4.4. На оси ординат нанесены расстояния между элементарными пластами и центром системы катушек, по оси абсцисс — значения геометрического фактора. Когда влияние скважины отсутствует, вертикальная характеристика зонда приобретает определенный физический смысл. Геометрический фактор элементарного пласта численно совпадает с сигналом, создаваемым этим пластом, если его удельное сопротивление равно 1 ом , а окружающая среда имеет бесконечно высокое сопротивление. Поэтому кривая зависимости G_z от z отображает чувствительность зонда к токам в элементарных пластах. Долю называют кривую зависимости G_z от z чувствительностью зонда, или вертикальной характеристикой.

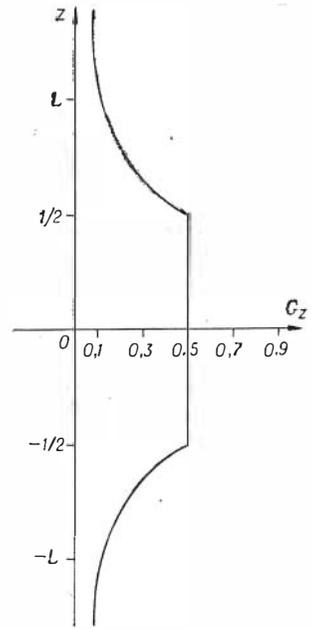


Рис. 4.4.

Геометрический фактор пласта конечной мощности

Зная выражения для геометрического фактора элементарного пласта, нетрудно найти геометрический фактор пласта конечной мощности. Для этого нужно разбить пласт на ряд элементарных пластов и просуммировать их геометрические факторы. Рассмотрим несколько вариантов расположения пласта и зонда.

I случай. Зонд находится вне интервала пласта конечной мощности (рис. 4.5). Чтобы получить геометрический фактор такого пласта, надо просуммировать функцию $g = \frac{L}{8z^2}$ по z в интервале от z_1 до z_2 , где z_1 и z_2 — координаты границ пласта:

$$G_{\text{п}} = \frac{L}{8} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{z^2} = \frac{L}{8} \left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} \right). \quad (4.44)$$

Введя новую координату z_0 , равную расстоянию от середины пласта до центра системы катушек, получим:

$$z_1 = z_0 - \frac{L}{2};$$

$$z_2 = z_0 + \frac{L}{2},$$

и формула (4.44) принимает вид

$$G_{\text{п}} = \frac{Lh}{2} \frac{1}{\left[z_0^2 - \left(\frac{H}{2} \right)^2 \right]}, \quad (4.45)$$

где H — мощность пласта. Эта формула применима до тех пор, пока верхняя катушка зонда не пересечет нижнюю границу пласта, т. е. пока $z_1 \geq \frac{L}{2}$ или $z_0 \geq \frac{L}{2} + \frac{H}{2}$.

II случай. Одна катушка зонда находится внутри интервала пласта, другая — вне его (рис. 4.6). Для получения геометрического фактора пласта мощностью H при таком положении зонда нужно сложить геометрические факторы частей пласта, расположенных вне и внутри интервала зонда. Первый из них G_1 , согласно (4.42), равен

$$G_1 = \frac{L}{8} \left(\frac{1}{\frac{L}{2}} - \frac{1}{z_0 + \frac{H}{2}} \right) = \frac{1}{4} - \frac{L}{8 \left(z_0 + \frac{H}{2} \right)}.$$

Геометрический фактор той части пласта, которая расположена внутри интервала зонда и имеет мощность h_1 , вычисляется следующим образом:

$$G_2 = \frac{1}{2L} h_1 = \frac{1}{2L} \left(\frac{L}{2} - z_0 + \frac{H}{2} \right),$$

так как $h_1 = \frac{L}{2} - \left(z_0 - \frac{H}{2} \right)$. Полный геометрический фактор пласта $G_{\text{п}} = G_1 + G_2$ равен

$$G_{\text{п}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2L} \left(z_0 - \frac{H}{2} \right) - \frac{L}{8 \left(z_0 + \frac{H}{2} \right)}. \quad (4.46)$$

Эта формула применима до тех пор, пока верхний электрод зонда находится в интервале пласта, если мощность пласта меньше длины зонда ($H < L$), т. е. пока $z_2 \geq \frac{L}{2}$ или $z_0 \geq \frac{L}{2} - \frac{H}{2}$, но $z_0 \leq \frac{L}{2} + \frac{H}{2}$. В том случае, когда мощность пласта больше длины зонда ($H > L$), формула применима до тех пор, пока нижний электрод не пересечет нижнюю границу пласта, т. е. $z_1 \geq -\frac{L}{2}$ или $z_0 \geq \frac{H}{2} - \frac{L}{2}$.

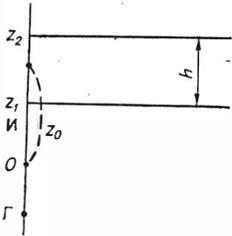


Рис. 4.5.

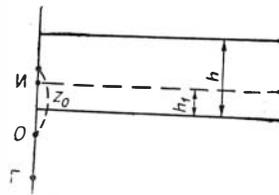


Рис. 4.6.

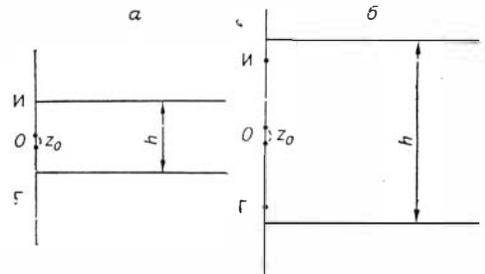


Рис. 4.7.

а) $H < L$; б) $H > L$.

III случай. Зонд находится целиком против интервала пласта. Возможны два варианта: вариант «а» ($H < L$) и вариант «б» ($H > L$) (рис. 4.7). Для варианта «а»

$$G_{\text{п}} = \frac{H}{2L}. \quad (4.47)$$

Для варианта «б»

$$G_{\text{п}} = \frac{L}{2L} + \frac{L}{8} \left(\frac{1}{\frac{L}{2}} - \frac{1}{z_0 + \frac{H}{2}} \right) + \frac{L}{8} \left(\frac{1}{\frac{L}{2}} - \frac{1}{\frac{H}{2} - z_0} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{L}{8 \left(z_0 + \frac{H}{2} \right)} + \frac{1}{4} + \frac{L}{8 \left(z_0 - \frac{H}{2} \right)} = 1 + \frac{LH}{8 \left[z_0^2 - \left(\frac{H}{2} \right)^2 \right]}. \quad (4.48)$$

Эти формулы применимы для

$$0 \leq z_0 \leq \frac{L}{2} - \frac{H}{2}$$

при $H < L$ и для

$$0 \leq z_0 \leq \frac{H}{2} - \frac{L}{2}$$

при $H > L$.

Полученные для геометрического фактора пласта формулы дают представление о кажущейся проводимости пласта, залегающего в среде бесконечно высокого удельного сопротивления.

Действительно, при $\gamma_B = 0$

$$\gamma_K = G_n \gamma_n + G_B \gamma_B = G_n \gamma_n.$$

Для получения кривой кажущейся проводимости при $\gamma_B = 0$ нужно умножить значения геометрических факторов пласта на его проводимость. Если вмещающая среда имеет небесконечно высокое удельное сопротивление, то она также участвует в формировании измеряемого сигнала, т. е. формировании кажущейся проводимости. При этом в зависимости от взаимного расположения пласта и зонда возможны три выше приведенных случая. Прежде чем перейти к расчету кажущейся проводимости против пласта конечной мощности, рассмотрим влияние одной горизонтальной поверхности раздела.

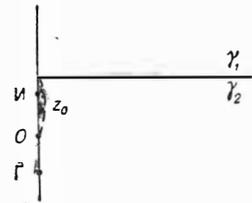


Рис. 4.8.

1. Зонд целиком в среде с проводимостью γ_2 (рис. 4.8). Выражение для кажущейся проводимости будет представлять сумму из двух слагаемых: $\gamma_1 G_1$ и $\gamma_2 G_2$. На основании формулы (4.44)

$$G_1 = \frac{L}{8z_0};$$

$$G_2 = \frac{L}{8} \left(\frac{1}{\frac{L}{2}} - \frac{1}{z_0} \right) + \frac{L}{2L} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{\frac{L}{2}}$$

и

$$\gamma_K = \gamma_2 - (\gamma_2 - \gamma_1) \frac{L}{8z_0}.$$

Эта формула применима для $z_0 \geq \frac{L}{2}$, т. е. до тех пор, пока электрод не пересечет поверхность раздела.

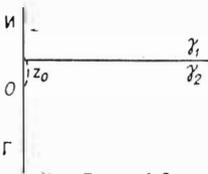


Рис. 4.9.

2. Зонд вошел в среду с удельной проводимостью γ_2 (рис. 4.9). Геометрический фактор среды с проводимостью γ_1 равен:

$$G_1 = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{\frac{L}{2}} + \frac{1}{2L} \left(\frac{L}{2} - z_0 \right) = \frac{1}{2} - \frac{z_0}{2L};$$

$$G_2 = \frac{1}{2L} \left(\frac{L}{2} + z_0 \right) + \frac{L}{8} \cdot \frac{1}{\frac{L}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{z_0}{2L}$$

и

$$\gamma_K = \frac{1}{2} (\gamma_1 + \gamma_2) + (\gamma_2 - \gamma_1) \frac{z_0}{2L}.$$

В том случае, когда центр зонда переходит в среду с удельной проводимостью γ_2 , т. е. для $z_0 < 0$, формулы останутся такими же, только γ_1 и γ_2 меняются местами:

$$\gamma_k = \frac{1}{2} (\gamma_1 + \gamma_2) + (\gamma_1 - \gamma_2) \frac{z_0}{2L} \quad 0 > z_0 > -\frac{L}{2};$$

$$\gamma_k = \gamma_1 - (\gamma_1 - \gamma_2) \frac{L}{8z_0} \quad -\frac{L}{2} > z_0 > -\infty.$$

Кривые кажущейся проводимости в среде с одной горизонтальной поверхностью раздела при различных значениях γ_1 и γ_2 приведены на рис. 4.10.

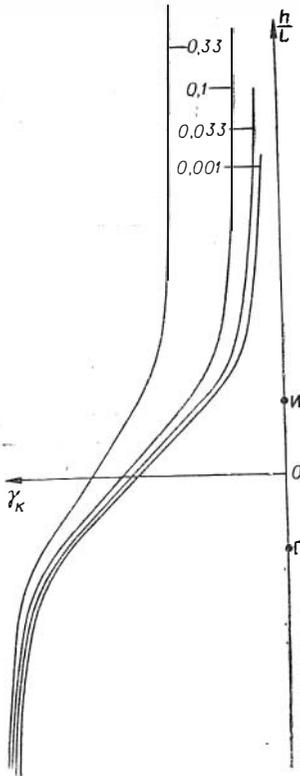


Рис. 4.10.

Когда середина зонда расположена против контакта, значение кажущейся проводимости равно среднему значению проводимости среды.

При наличии двух поверхностей раздела, т. е. пласта с удельной проводимостью γ_n , залегающего в среде с удельной проводимостью γ_B , отличной от γ_n , кривая кажущейся проводимости симметрична относительно середины пласта, поэтому можно ограничиться рассмотрением только случая $z_0 \geq 0$.

Для построения кривой γ_k при различных взаимных положениях зонда и пласта воспользуемся формулами, выведенными для геометрических факторов пласта.

I случай. Зонд находится целиком вне интервала пласта конечной мощности. Выражение для γ_k представляет сумму двух слагаемых: $\gamma_k = \gamma_n G_n + \gamma_B G_B$.

Геометрический фактор пласта G_n для данного расположения зонда относительно пласта равен

$$G_n = \frac{LH}{8 \left[z_0^2 - \left(\frac{H}{2} \right)^2 \right]}.$$

Геометрический фактор вмещающей среды представляет собою сумму

$$G_B = G_1 + G_2,$$

где G_1 — геометрический фактор части вмещающей среды, расположенной над пластом;

G_2 — геометрический фактор вмещающей среды, подстилающей пласт,

$$G_B = \frac{L}{8 \left(z_0 + \frac{H}{2} \right)} - \frac{L}{8 \left(z_0 - \frac{H}{2} \right)} + 1.$$

Подставляя полученные выражения для геометрических факторов в уравнение для γ_k , получаем

$$\gamma_k = \gamma_B + (\gamma_n - \gamma_B) \frac{LH}{8 \left[z_0^2 - \left(\frac{H}{2} \right)^2 \right]}. \quad (4.49)$$

Эта формула применима до тех пор, пока верхний электрод не пересечет нижнюю границу пласта, т. е. пока $z_0 \geq \frac{H}{2} + \frac{L}{2}$.

II случай. Один из электродов зонда находится внутри интервала пласта.

$$\gamma_k = \gamma_B(G_1 + G_2) + \gamma_n G_n;$$

$$G_n = \frac{1}{2} - \frac{z_0 - \frac{H}{2}}{2L} - \frac{L}{8\left(z_0 + \frac{H}{2}\right)};$$

$$G_1 = \frac{L}{8\left(z_0 + \frac{H}{2}\right)}; \quad G_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2L}\left(\frac{L}{2} + z_0 - \frac{H}{2}\right);$$

$$\gamma_k = \gamma_n \left[\frac{1}{2} - \frac{z_0 - \frac{H}{2}}{2L} - \frac{L}{8\left(z_0 + \frac{H}{2}\right)} \right] + \gamma_B \left[\frac{L}{8\left(z_0 + \frac{H}{2}\right)} + \frac{1}{2} + \frac{z_0 - \frac{H}{2}}{2L} \right]$$

или

$$\gamma_k = \frac{\gamma_n + \gamma_B}{2} + \frac{\gamma_B - \gamma_n}{2L} \left(z_0 - \frac{H}{2} \right) + \frac{(\gamma_B - \gamma_n)L}{8\left(z_0 + \frac{H}{2}\right)}. \quad (4.50)$$

Эта формула применима для

$$z_0 \leq \frac{L}{2} + \frac{H}{2} \quad \text{и} \quad z_0 \geq \frac{L}{2} - \frac{H}{2},$$

если $H \leq L$. Если $H > L$, то

$$z_0 \geq \frac{H}{2} - \frac{L}{2}.$$

III случай. Пласт целиком находится внутри интервала зонда, если $H \leq L$, или зонд находится внутри интервала пласта, если $H > L$ (варианты «а» и «б», рис. 4.7). Для варианта «а» ($H \leq L$)

$$\gamma_k = \gamma_B G_B + \gamma_n G_n,$$

где

$$G_n = \frac{H}{2L}; \quad G_B = G_1 + G_2.$$

Здесь

$$G_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2L} \left[\frac{L}{2} - z_0 - \frac{H}{2} \right]; \quad G_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2L} \left(\frac{L}{2} + z_0 - \frac{H}{2} \right);$$

$$\gamma_k = \gamma_n \frac{H}{2L} + \gamma_B \left[1 + \frac{1}{2L} \left(z_0 - \frac{H}{2} \right) - \frac{1}{2L} \left(z_0 + \frac{H}{2} \right) \right] =$$

$$= \gamma_B + (\gamma_n - \gamma_B) \cdot \frac{H}{2L}. \quad (4.51)$$

Последняя формула применима для

$$0 \leq z_0 \leq \frac{L}{2} - \frac{H}{2}$$

при $H < L$.

Для варианта «б» ($H > L$)

$$G_b = G_1 + G_2;$$

$$G_1 = \frac{L}{8 \left(z_0 + \frac{H}{2} \right)}; \quad G_2 = \frac{L}{8 \left(\frac{H}{2} - z_0 \right)};$$

$$G_n = 1 + \frac{Lh}{8 \left[z_0^2 - \left(\frac{H}{2} \right)^2 \right]};$$

$$\gamma_k = \gamma_n + (\gamma_n - \gamma_b) \frac{LH}{8 \left[z_0^2 - \left(\frac{H}{2} \right)^2 \right]}. \quad (4.52)$$

Формула применима для

$$0 < z_0 \leq \frac{H}{2} - \frac{L}{2}.$$

Представим полученные формулы так, чтобы они были пригодны для зонда любой длины и не содержали L . Для этого введем новые координаты ξ и η уравнениями

$$z_0 = \eta L; \quad H = \xi L.$$

Тогда формулы примут вид:

$$1. \quad \gamma_k = \gamma_b + (\gamma_n - \gamma_b) \frac{\xi}{8 \left[\eta^2 - \left(\frac{\xi}{2} \right)^2 \right]}$$

для $\eta \geq 0,5 + \frac{\xi}{2}$.

$$2. \quad \gamma_k = \frac{1}{2} \gamma_n + \frac{1}{2} \gamma_b + \frac{\gamma_b - \gamma_n}{2} \left(\eta - \frac{\xi}{2} \right) + \frac{\gamma_b - \gamma_n}{8 \left(\eta + \frac{\xi}{2} \right)}$$

для $\eta \leq 0,5 + \frac{\xi}{2}$ при $H < L$, т. е. $\xi < 1$, и для $\eta \geq 0,5 - \frac{\xi}{2}$ при $H > L$; $\xi > 1$; $\eta \geq \frac{\xi}{2} - 0,5$.

$$3a. \quad \gamma_k = \gamma_b + (\gamma_n - \gamma_b) \cdot \frac{\xi}{2}; \quad \xi \leq 1;$$

$$0 < \eta < 0,5 - \frac{\xi}{2}.$$

$$3б. \quad \gamma_k = \gamma_n + \frac{\gamma_n - \gamma_b}{8} \frac{\xi}{\eta^2 - \left(\frac{\xi}{2} \right)^2}$$

при $\xi > 1$; $0 < \eta \leq \frac{\xi}{2} - 0,5$.

На рис. 4.11 представлены кривые зависимости величины $\frac{\gamma_k}{\gamma_n}$ от отношения мощности пласта к длине зонда при $\frac{H}{L} \geq 1$. Шифр кривых $\frac{\gamma_n}{\gamma_b}$. Центр двухкатушечного зонда совпадает с серединой пласта. С увеличением удельной проводимости вмещающих пород и уменьшением мощности пласта возрастает влияние вмещающих пород.

Расчет величин $\frac{\gamma_k}{\gamma_n}$ производится по формуле

$$\frac{\gamma_k}{\gamma_n} = 1 + \left(\frac{\gamma_B}{\gamma_n} - 1 \right) \frac{1}{2\xi}. \quad (4.53)$$

Если удельное сопротивление пласта значительно больше удельного сопротивления вмещающих пород, то, как это следует из формулы (4.53) (см. также кривые на рис. 4.11), выход на асимптоту наступает в пластах, мощность которых составляет десятки длин зондов. Поэтому вертикальная характеристика двухкатушечного зонда значительно хуже вертикальной характеристики потенциал-зонда в методе сопротивлений.

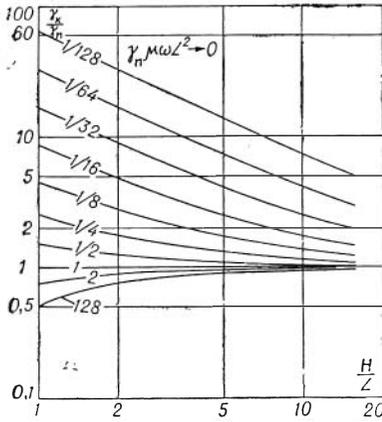


Рис. 4.11.

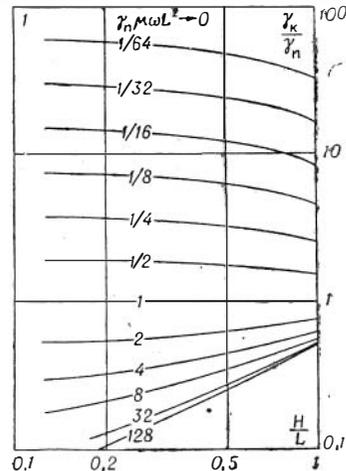


Рис. 4.12.

Если электропроводность пласта больше проводимости вмещающих пород, то при наиболее типичных отношениях $\frac{\gamma_n}{\gamma_B}$ влияние вмещающей среды становится незначительным при $\frac{H}{L} \geq 4$. На рис. 4.12 даны кривые зависимости величины $\frac{\gamma_k}{\gamma_n}$ от отношения мощности пласта к длине зонда при $\frac{H}{L} \leq 1$. Формула для расчета имеет вид

$$\frac{\gamma_k}{\gamma_n} = \frac{\gamma_B}{\gamma_n} + \left(1 - \frac{\gamma_B}{\gamma_n} \right) \cdot \frac{H}{2L} \quad (4.54)$$

или

$$\frac{\gamma_k}{\gamma_B} = 1 + \left(\frac{\gamma_n}{\gamma_B} - 1 \right) \cdot \frac{H}{2L}. \quad (4.55)$$

Согласно формуле (4.55), если удельное сопротивление пласта выше удельного сопротивления вмещающей среды и мощность пласта H меньше $0,2 L$, то такой тонкий пласт практически не отмечается на кривых индукционного каротажа. Это обстоятельство является важным преимуществом индукционного каротажа перед методом сопротивлений, в котором явление экранирования осложняет интерпретацию кривых.

Напротив, низкоомные тонкие пласты хорошо отмечаются на кривых индукционного каротажа. Действительно, с увеличением отношения $\frac{\gamma_n}{\gamma_B}$

величина γ_k стремится к постоянной, равной $\frac{S_n}{2L}$ (S_n — продольная проводимость пласта $\gamma_n H$), и может оказаться значительно больше γ_b . Это хорошо видно на примере кривых с шифром $\frac{\gamma_n}{\gamma_b} > 1$ (см. рис. 4.12). Предположим, что зонд расположен против участка среды с тонкослойной структурой. Тогда выражение для γ_k , очевидно, можно представить в виде

$$\gamma_k = \gamma_b \left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{2L} \right) + \gamma_n \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{2L} = \gamma_b \left(1 - \frac{H}{2L} \right) + \frac{\gamma_n H}{2L}. \quad (4.56)$$

Здесь h_i — мощность каждого пропластка; n — число пропластков;

$$H = \sum_{i=1}^n h_i.$$

Таким образом, в области предельно малых параметров пачка тонких пропластков, расположенных между датчиками зонда, эквивалентна одному пласту с той же электропроводностью и мощностью, равной сумме мощностей тонких пластов.

Принцип эквивалентности по S легко может быть распространен и на более общий случай, когда удельные сопротивления и мощности тонких пластов различны.

§ 6. СТРОГАЯ ТЕОРИЯ ИНДУКЦИОННОГО КАРТАЖА В ПЛАСТАХ ОГРАНИЧЕННОЙ МОЩНОСТИ

При симметричном расположении датчиков двухкатушечного зонда относительно границ пласта вертикальная компонента магнитного поля диполя на его оси определяется тремя параметрами: 1) отношением длины зонда L к толщине скин-слоя в пласте δ_n^* : $\frac{L}{\delta_n}$; 2) отношением удельной проводимости пласта к удельной проводимости вмещающих пород: $\frac{\gamma_n}{\gamma_b}$; 3) отношением мощности пласта к длине зонда: $\frac{H}{L}$ (рис. 4.13 — 4.14).

Как известно, магнитное поле в проводящей среде состоит из двух компонент: реактивной и активной. Реактивная компонента находится в противофазе, а активная компонента сдвинута по фазе на 90° относительно тока в задающей катушке (диполе).

Анализ материалов расчета магнитного поля на оси диполя в пластах конечной мощности позволяет установить следующее.

1. При малых значениях $\frac{L}{\delta_n}$ (низкие частоты, большое удельное сопротивление) реактивная компонента значительно меньше активной. С увеличением параметра $\frac{L}{\delta_n}$ реактивная компонента растет и, осциллируя, приближается к единице. При относительно небольших значениях $\frac{L}{\delta_n}$ токи, наведенные во вмещающей среде, влияют на реактивную компоненту значительно сильнее, чем на активную. Это одна из причин, объясняющая,

* Толщина скин-слоя связана с удельным сопротивлением и частотой поля, как известно, соотношением $\delta_n = \frac{1}{2\pi} 10^3 \sqrt{\frac{40\rho_n}{f}}$.

почему активная компонента является практически единственным объектом измерения в индукционном каротаже.

2. В области низких частот и больших удельных сопротивлений (малые значения $\frac{L}{\delta_{\text{п}}}$) активная компонента растет прямо пропорционально частоте и удельной проводимости. Эти закономерности в поведении активной компоненты имеют место в «области Долля», которая, таким образом, является левой асимптотой функции $\text{Im } h_z = \text{Im } h_z \left(\frac{L}{\delta_{\text{п}}} \right)$. С увеличением параметра $\frac{L}{\delta_{\text{п}}}$ активная компонента растет, достигает максимума и затем, осциллируя, быстро стремится к нулю. Следовательно, в левой части частотной характеристики вторичного поля преобладает активная компонента, в правой — реактивная*. Наибольший интерес представляет изучение левой части частотной характеристики поля, поскольку для применяемых ныне в индукционном каротаже частот и наиболее типичных удельных сопротивлений пород величина параметра $\frac{L}{\delta_{\text{п}}}$ обычно меньше единицы.

Выражение для вертикальной компоненты магнитного поля диполя на его оси, согласно (4.34), имеет вид

$$h_z = h_z^0 + \int_0^{\infty} \frac{m^3 k_{12} e^{-2\alpha m} e^{\alpha m_2} + k_{12} \text{ch } m_2}{m_2 (1 - k_{12}^2 e^{-2\alpha m_2})} dm.$$

Здесь h_z^0 — поле в однородной среде с удельной проводимостью пласта, выраженное в единицах поля в воздухе;

$$m_2 = \sqrt{m^2 - in_2}; \quad m_1 = \sqrt{m^2 - in_1}; \quad k_{12} = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}$$

$$\left(n_1 = \gamma_{\text{в}} \mu \omega L^2; \quad n_2 = \gamma_{\text{п}} \mu \omega L^2 = N n_1; \quad N^* = \frac{\gamma_{\text{п}}}{\gamma_{\text{в}}}; \quad \alpha = \frac{H}{L} \right).$$

Рассмотрим интеграл в правой части формулы как функцию n и найдем его приближенное значение при $n_1 \rightarrow 0$. Разлагая подынтегральную функцию в ряд по малому параметру n_1 и ограничиваясь в разложении первым членом, получаем для функции выражение

$$-\frac{i}{4} (N - 1) n_1 e^{-\alpha m_1},$$

а значит, интеграл равен

$$-\frac{i}{4\alpha} (N - 1) \gamma_{\text{в}} \mu \omega L^2.$$

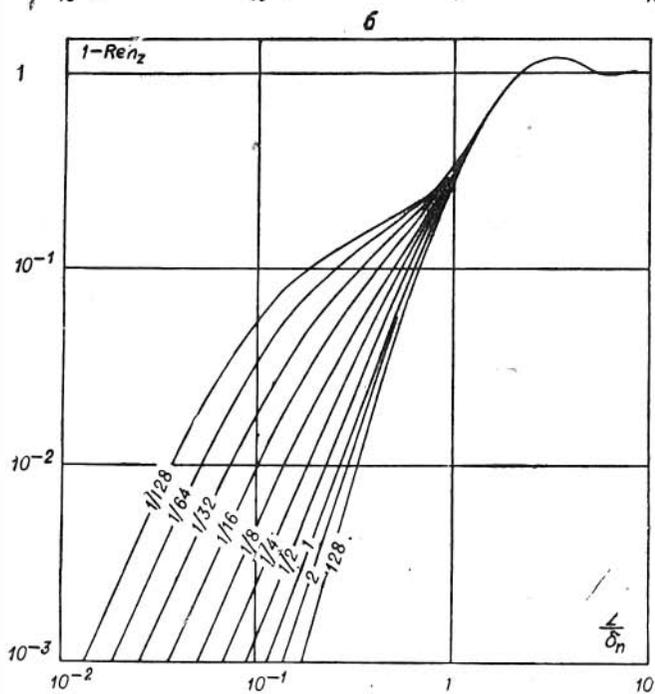
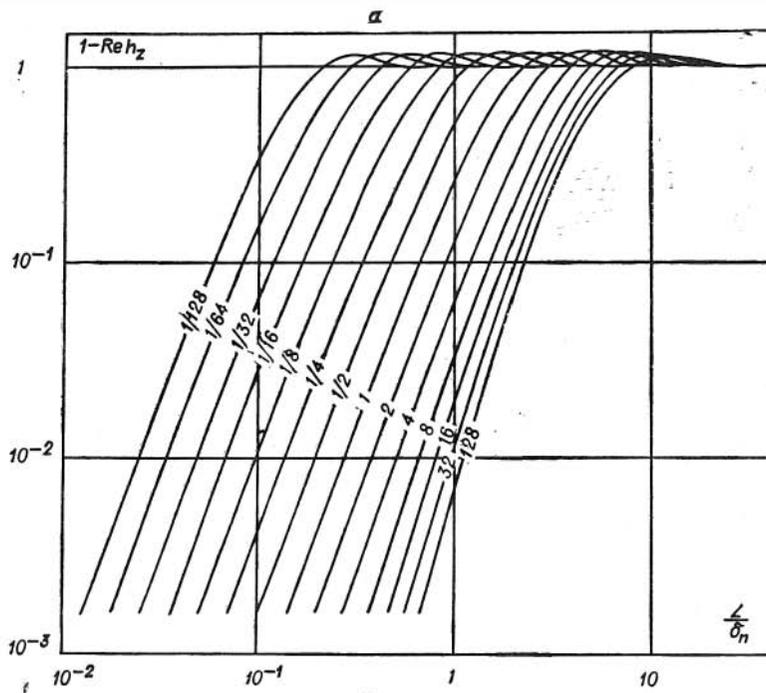
Таким образом, поле h_z в области очень малых значений параметра n_1 равно

$$h_z = \frac{i \gamma_{\text{п}} \mu \omega L^2}{2} - \frac{i}{4\alpha} \left(\frac{\gamma_{\text{п}}}{\gamma_{\text{в}}} - 1 \right) \gamma_{\text{в}} \mu \omega L^2.$$

Используя связь между полем h_z и кажущейся проводимостью

$$\gamma_{\text{к}} = \frac{2}{\mu \omega L^2} h_z, \quad (4.57)$$

* Функцию $h_z = h_z \left(\frac{L}{\delta_{\text{п}}} \right)$ можно рассматривать как частотную характеристику поля, если все параметры, за исключением частоты, считать постоянными.



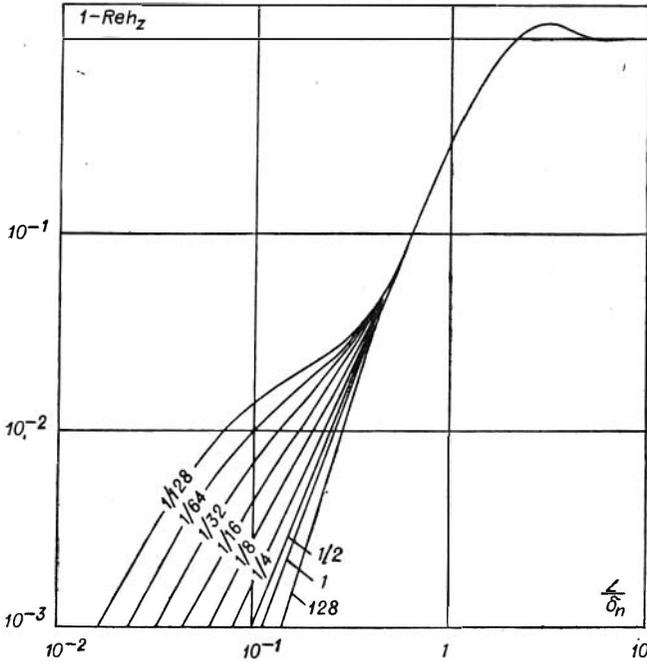


Рис. 4.13. Реактивная компонента поля.

$$a) \frac{H}{L} = 0,125; \quad б) \frac{H}{L} = 2; \quad в) \frac{H}{L} = 4.$$

получаем выражение для γ_k , когда зонд расположен внутри пласта симметрично относительно границ

$$\gamma_k = \gamma_n + \frac{1}{2\alpha}(\gamma_B - \gamma_n) \quad (\alpha \geq 1), \quad (4.58)$$

которое полностью совпадает с формулой (4.53).

Следовательно, теория Долля является теорией предельно малых параметров, в которые обязательно входят линейные размеры (длина зонда, мощность пласта и т. д.).

С уменьшением длины зонда возрастает роль токов, индуцированных вблизи источника, которые сдвинуты по фазе на 90° и не взаимодействуют друг с другом.

Последняя формула для h_z была получена в результате разложения подынтегральной функции в ряд по малому параметру n_1 . По существу, это разложение в ряд по степеням $\frac{n_1}{m}$. Действительно,

$$\sqrt{m^2 - in_1} \approx m \left(1 - \frac{in_1}{2m^2} \right) = m - \frac{in_1}{2m};$$

$$\sqrt{m^2 - in_2} \approx m \left(1 - \frac{iNn_1}{2m^2} \right) = m - \frac{iNn_1}{2m} \text{ и т. д.}$$

Поэтому если интеграл определяется поведением подынтегральной функции при малых значениях m , то асимптотическое представление для поля h_z будет иметь место для очень малых значений n_1 . С увеличением

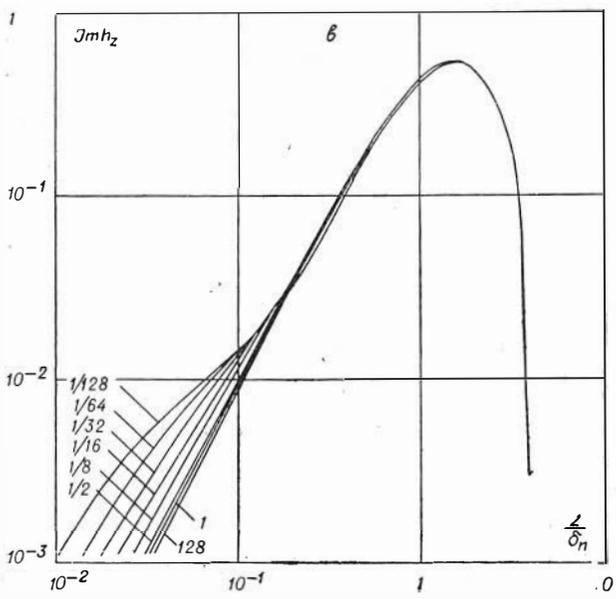
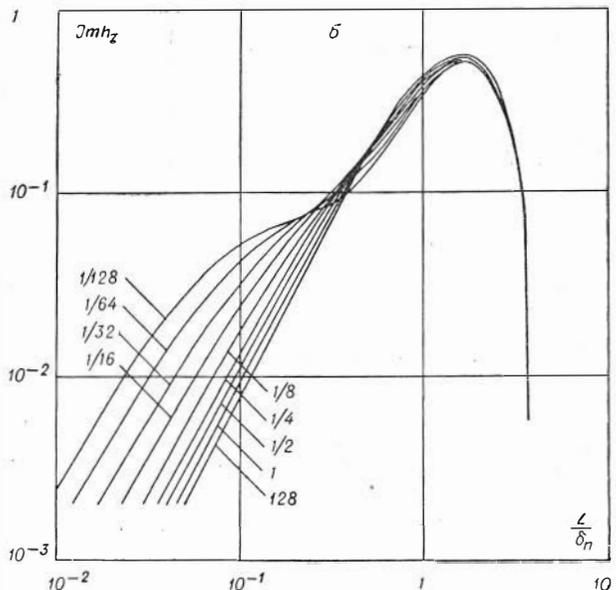
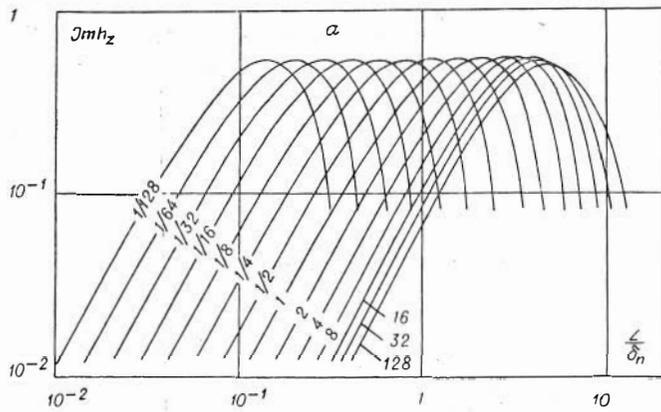


Рис. 4.14. Активная компонента поля.
 а) $\frac{H}{L} = 0,125$; б) $\frac{H}{L} = 2$; в) $\frac{H}{L} = 4$.

мощности пласта возрастает α , параметр, который стоит в показателе $e^{-2\alpha m_2}$, и основную роль играет функция вблизи нуля. Соответственно, асимптотические формулы для поля при заданных параметрах n_1 и N будут тем точнее описывать поле, чем меньше мощность пласта, или, другими словами, чем меньше мощность пласта, тем при больших значениях n_1 и N будут справедливы формулы для предельно малого параметра. Параметр Nn_1 , входящий в выражение $m_2 = \sqrt{m^2 - iNn_1}$, до определенного момента играет роль, обратную α . Поэтому в отличие от высокоомных пластов в пластах более низкоомных приближенные формулы справедливы при больших значениях параметра n_1 .

В области Долля существует наиболее простая связь между полем h_z (или γ_k) и параметрами среды. Действительно, величина $\frac{\gamma_k}{\gamma_n}$ зависит только от двух параметров: $\frac{\gamma_n}{\gamma_b}$ и $\frac{H}{L}$ и не зависит от абсолютных значений удельных сопротивлений среды и частоты поля. Поэтому методика интерпретации в индукционном каротаже для «области Долля» такая же, как в каротаже сопротивлений. Палетки для двухкатушечного зонда описаны выше.

Представляет значительный интерес установить частоты, удельные сопротивления пород, длины зондов, мощности пластов, для которых справедлива формула (4.58).

Как было показано ранее, формула (4.58) может быть получена из геометрической теории Долля, которая, строго говоря, справедлива лишь тогда, когда все токи независимо от расстояния до источника поля сдвинуты по фазе на 90° , т. е. отсутствует их взаимодействие. Но поскольку формула (4.58) для γ_k получена также в результате предельного перехода от строгого выражения для поля, физические предпосылки этой теории можно трактовать несколько иначе. Сигнал, создаваемый в измерительной катушке, определяется главным образом токами в некоторой области, внутри которой расположен зонд. Поэтому формула (4.58) справедлива, если токи в этой области сдвинуты по фазе на 90° , пропорциональны частоте, удельной проводимости независимо от характера токов, индуцированных в остальной части среды.

Анализ поля магнитного диполя в однородной проводящей среде (стр. 15) и очевидные соображения геометрического характера показывают, что: 1) вблизи источника преобладают токи, пропорциональные частоте и сдвинутые по фазе на 90° ; 2) с увеличением расстояния возрастает роль реактивной компоненты тока; 3) глубинность исследования возрастает с увеличением длины зонда. Поэтому в рассматриваемой задаче можно ожидать, что «область Долля» будет сужаться по мере увеличения мощности пласта, длины зонда и отношения удельной проводимости вмещающих пород к удельной проводимости пласта.

На рис. 4.15 показаны кривые зависимости $\frac{\gamma_k}{\gamma_n}$ от величины $\frac{L}{\delta_n}$ для двух отношений $\frac{H}{L}$. Шифр кривых $\frac{\gamma_n}{\gamma_b}$. Для переменных электромагнитных полей величину γ_k можно ввести различными способами. Согласно формуле (3.57), кажущаяся проводимость равна истинной проводимости в однородной среде только в «области Долля», в остальных случаях γ_k отлично от истинной проводимости $\gamma_{ист}$. Но, зная связь между $\gamma_{ист}$ и $\frac{L}{\delta_n}$ в однородной среде, можно внести поправку за счет внутреннего скин-эффекта. Целесообразность именно такого подхода к выбору связи между кажущейся проводимостью и полем h_z подтверждается тем, что в

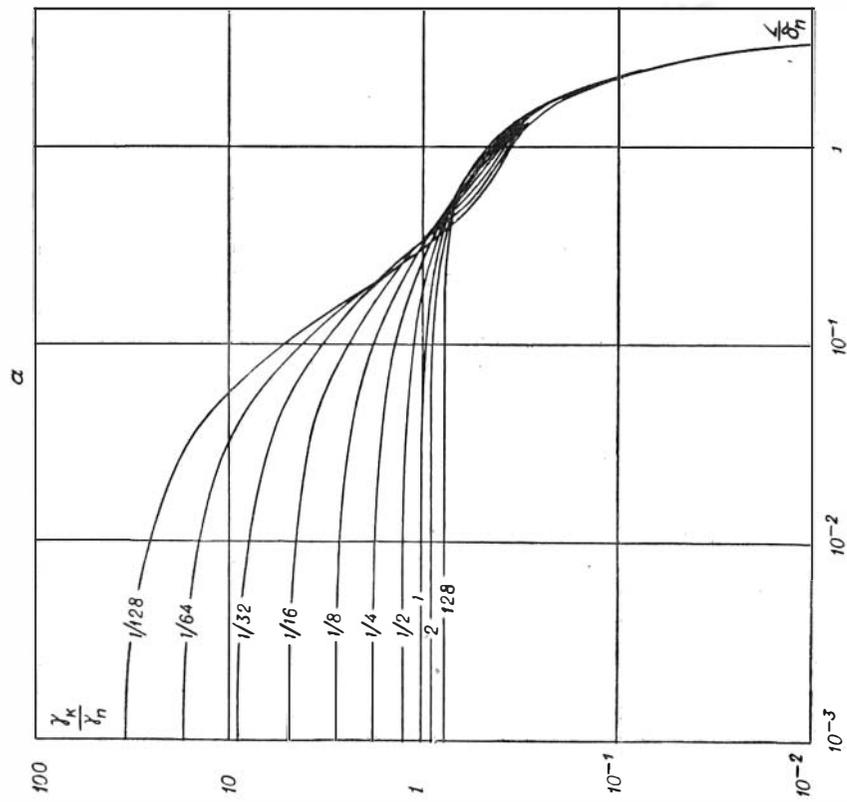
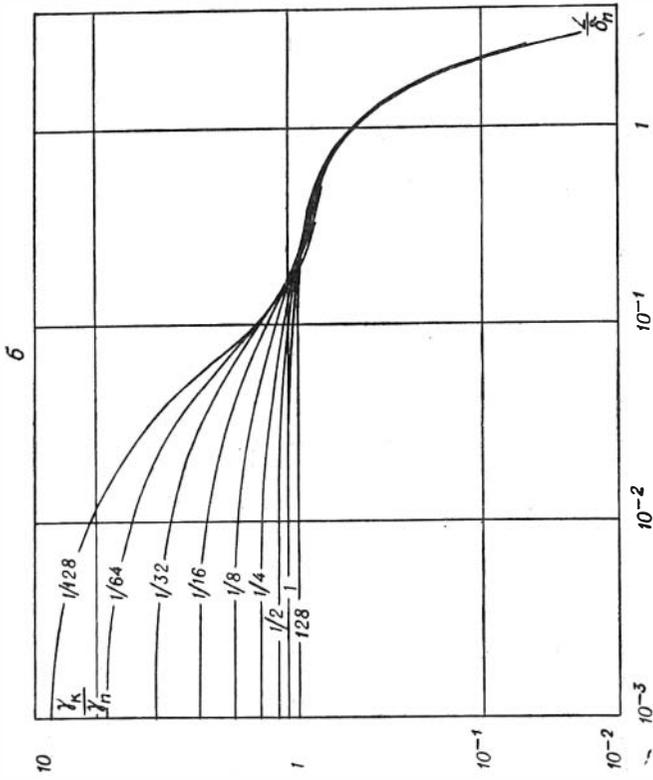


Рис. 4.15.
 а) $\frac{H}{L} = 2$; б) $\frac{H}{L} = 4$.

подавляющем большинстве случаев, встречающихся в практике индукционного каротажа, характер поля соответствует либо «области Долля», либо области, примыкающей к ней.

Все кривые в левой части рис. 4.15 (область малых значений $\frac{L}{\delta_{\text{п}}}$) идут вначале параллельно оси абсцисс, что соответствует «области Долля», но с увеличением отношения $\frac{\gamma_{\text{в}}}{\gamma_{\text{п}}}$ быстрее проявляется влияние скин-эффекта, который отсутствует в «области Долля». Эта закономерность находится в полном соответствии с нашими представлениями о распределении активной компоненты в проводящей среде. Действительно, с увеличением расстояния от источника активная компонента становится меньше, чем это предполагает теория Долля, а так как с увеличением проводимости вмещающей среды возрастает роль этой части среды, то соответственно увеличивается отклонение от данных расчета по формуле (4.58). Практически это означает, что влияние вмещающей среды на величину $\gamma_{\text{к}}$ с увеличением $\gamma_{\text{в}}$ становится меньше, чем это следует из теории Долля.

С увеличением мощности пласта также наблюдается выход из «области Долля», особенно это становится заметно, когда удельная проводимость вмещающих пород больше удельной проводимости пласта. В табл. 4.1 приведены значения параметров $\frac{L}{\delta_{\text{п}}}$, которые соответствуют «области Долля» (с точностью до 10%).

Таблица 4.1

α $\gamma_{\text{п}}/\gamma_{\text{б}}$	1,0	$\sqrt{2}$	2,0	$2\sqrt{2}$	4,0	8,0
$\frac{1}{128}$	0,0085	0,0065	0,0048	0,0034	0,0027	0,0020
1,0	0,15	0,15	0,15	0,15	0,15	0,15
128	0,67	0,55	0,44	0,36	0,28	0,15

Таблица 4.2

$\rho_{\text{омм}}$	$f, \text{ гц}$					
	$2 \cdot 10^4$	$4 \cdot 10^4$	$6 \cdot 10^4$	$8 \cdot 10^4$	10^5	$2 \cdot 10^5$
1	0,280	0,396	0,485	0,560	0,625	0,885
5	0,125	0,177	0,216	0,250	0,280	0,396
10	0,089	0,125	0,154	0,178	0,198	0,280
20	0,063	0,089	0,109	0,126	0,141	0,200
40	0,045	0,064	0,078	0,090	0,101	0,142
60	0,036	0,051	0,062	0,072	0,081	0,114
100	0,028	0,040	0,049	0,056	0,063	0,089

Табл. 4.2 содержит значения параметров для различных частот и удельных сопротивлений в диапазоне 1—100 *омм* при длине двухкатушечного зонда 1 *м*.

В настоящее время в индукционном каротаже применяется аппаратура на 20 и 60 *кГц*. Из сопоставления кривых на рис. 4.15 с данными табл. 4.2 видно, что при частоте 20 *кГц* и $\gamma_{\text{п}} > \gamma_{\text{в}}$ поправки за счет внутреннего скин-эффекта малы, и только для относительно большой мощности пласта ($\alpha > 8$) и при низком удельном сопротивлении ($\rho_{\text{п}} = 1 \text{ омм}$) это влияние достигает 10—20%.

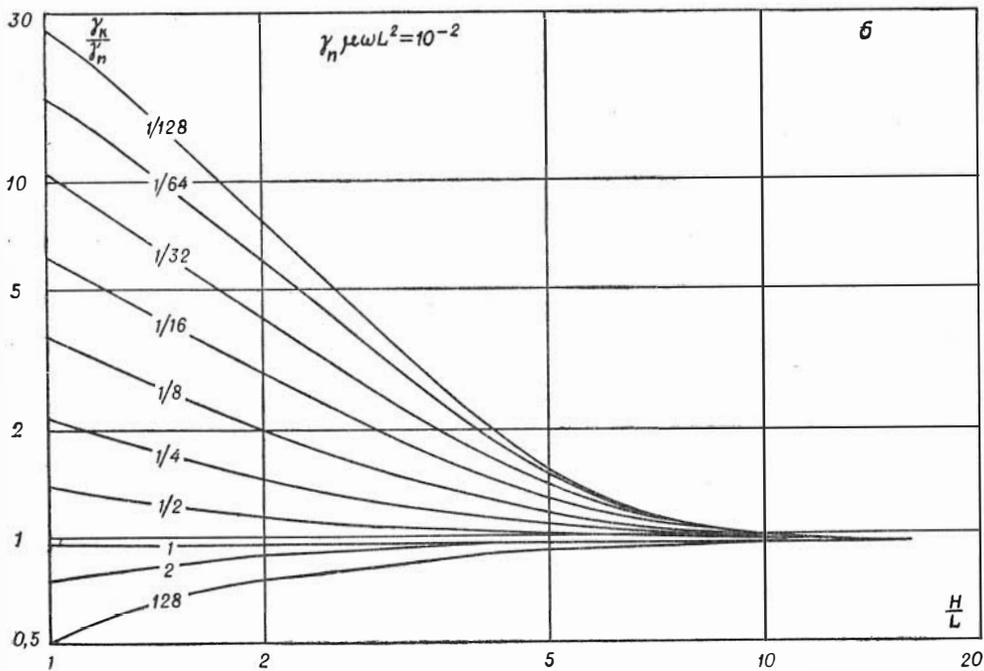
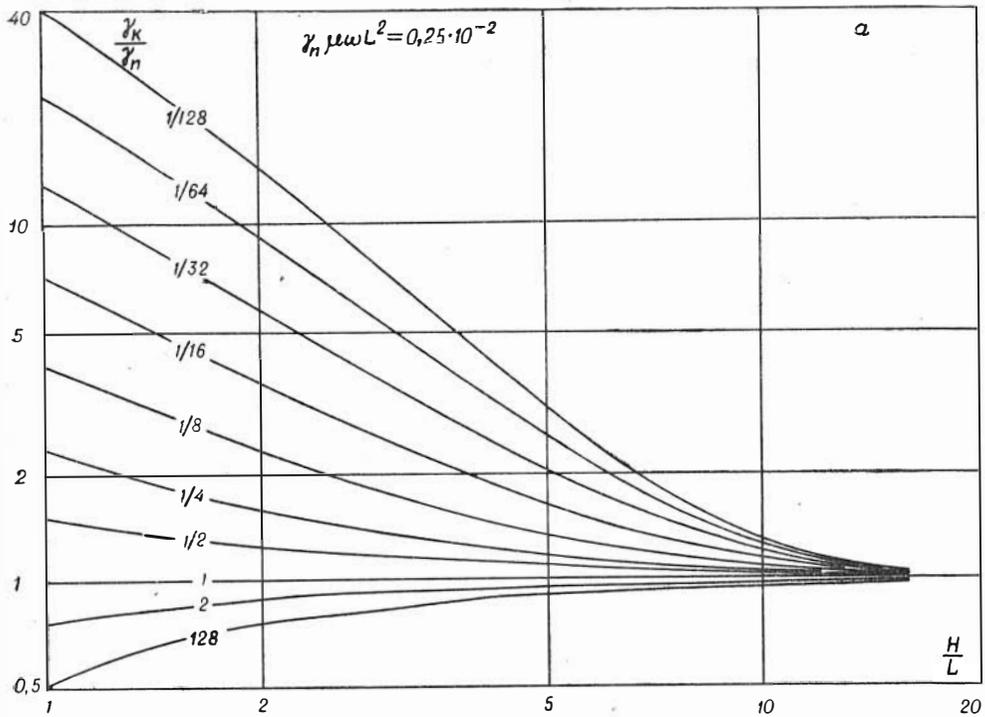
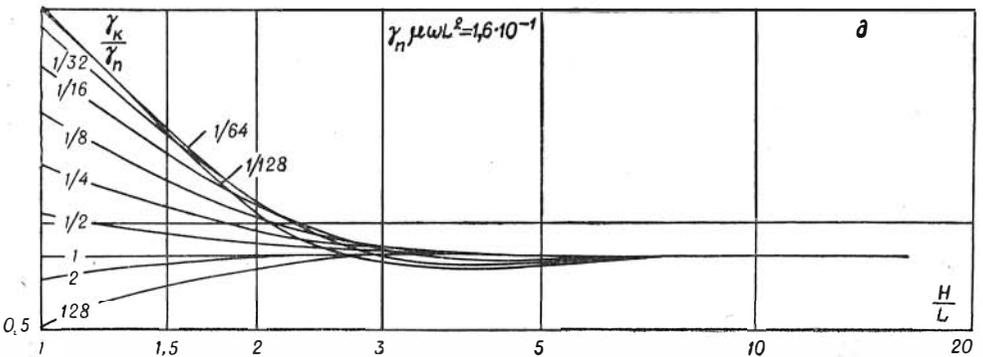
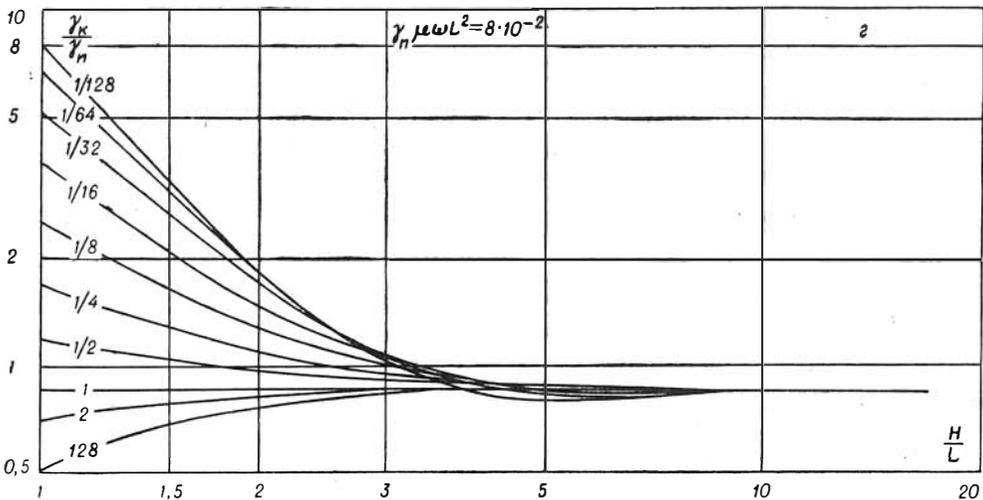
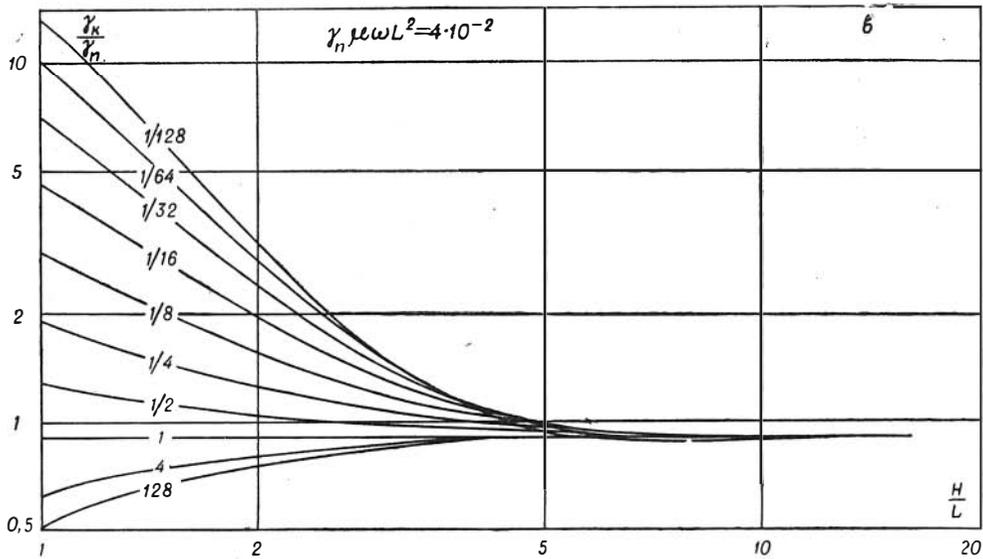


Рис. 4.16. Зависимость $\frac{\gamma_K}{\gamma_n}$
 $\gamma_n \mu \omega L^2$ (шифр



от α для различных значений
кривых $\left(\frac{\gamma_{II}}{\gamma_B} \right)$.

Если удельная проводимость пласта меньше удельной проводимости вмещающих пород, то влияние скин-эффекта может оказаться большим. Так, при $\rho_{\text{п}}=20 \text{ ом м}$, $\rho_{\text{в}}=2,5 \text{ ом м}$, $L=1 \text{ м}$ и $H=2 \text{ м}$ значение $\frac{\gamma_{\text{к}}}{\gamma_{\text{п}}}$ равно 2 вместо 2,8, как это следует из формулы (4.58).

Еще в большей степени это относится к индукционному каротажу при частоте 60 кГц. Из сравнения кривых с одним шифром на рис. 4.15 видно, что с увеличением длины зонда внутренний скин-эффект проявляется сильнее. Это может быть объяснено повышением чувствительности к более удаленным участкам среды.

Значит, расчеты, учитывающие влияние скин-эффекта, совершенно необходимы, особенно если принять во внимание, что удельное сопротивление пласта часто больше удельного сопротивления вмещающих пород.

Т а б л и ц а 4.3

α	$\sqrt{2}$	2	$2\sqrt{2}$	4,0	8,0	16,0
$\frac{L}{\delta_{\text{п}}}$	2,0	1,2	0,7	0,40	0,10	0,04

Анализ материалов расчета поля в средах с цилиндрическими поверхностями раздела (скважина, зона проникновения, пласт) также подтверждает необходимость учета скин-эффекта, однако в этом случае он, как правило, проявляется несколько слабее. Известно, что с увеличением частоты происходит концентрация токов около источника и ослабевает влияние удаленных участков среды, в частности вмещающих пород. Поэтому можно выбрать такую высокую частоту, при которой влияние вмещающей среды станет практически незаметным. В табл. 4.3 даны значения параметра $\frac{L}{\delta_{\text{п}}}$, при которых кривые $\frac{\gamma_{\text{к}}}{\gamma_{\text{п}}}$ сливаются в одну кривую, соответствующую однородной среде с удельной проводимостью $\gamma_{\text{п}}$ (если $\gamma_{\text{в}} \leq 128\gamma_{\text{п}}$).

Повышение частоты особенно необходимо для высокоомных и не очень мощных пластов, но в этих случаях для исключения влияния вмещающих пород нужно использовать очень высокие частоты, иногда достигающие нескольких десятков мегагерц.

Большие технические трудности, связанные с измерением компоненты поля на таких высоких частотах, уменьшение глубинности исследования в радиальном направлении, особенно при понижающем проникновении бурового раствора, увеличение влияния проводящей скважины — все это, по-видимому, существенно сужает принципиальные возможности практически полного исключения влияния вмещающих пород с помощью частоты. Вместе с тем в определенных пределах повышение частоты, не усложняя аппаратуру индукционного каротажа и незначительно уменьшая глубинность исследования в радиальном направлении, может заметно улучшить вертикальную характеристику зонда.

Из рис. 4.16 видно, как с увеличением параметра $\gamma_{\text{п}}\omega L^2$ уменьшается влияние более проводящих вмещающих пород, особенно это становится заметным с увеличением мощности пласта.

Теперь рассмотрим основные особенности в поведении функции $\frac{\gamma_{\text{к}}}{\gamma_{\text{п}}}$ в том случае, когда мощность пласта меньше длины зонда и пласт расположен между катушками зонда.

Как показано выше, поле не зависит от положения пласта внутри зонда и может быть представлено в виде

$$h_2 = 2 \int_0^{\infty} \frac{m^3 m_2 e^{-(m_2 - m_1) \alpha} e^{-m_1}}{(m_1 + m_2)^2 [1 - k_{12}^2 e^{-2\alpha m_2}] } dm \quad (\alpha < 1).$$

Здесь

$$m_1 = \sqrt{m^2 - k_B^2 L^2}; \quad m_2 = \sqrt{m^2 - k_{\Pi}^2 L^2};$$

$$k_{12} = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}.$$

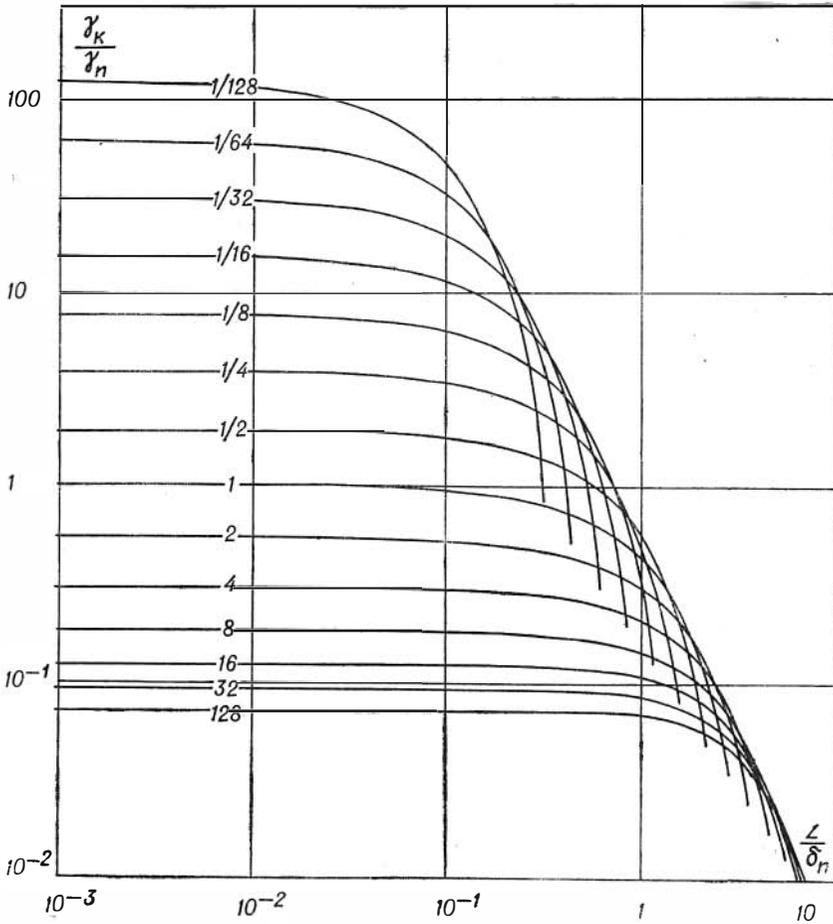


Рис. 4.17. $\frac{\gamma_K}{\gamma_{\Pi}}$ как функция $\frac{L}{\delta_{\Pi}}$ ($\frac{H}{L} = 0,125$).

На рис. 4.17 приведены кривые зависимости $\frac{\gamma_K}{\gamma_{\Pi}}$ от $\frac{L}{\delta_{\Pi}}$. Шифр кривых $\frac{\gamma_{\Pi}}{\gamma_B}$. В отличие от ранее рассмотренных кривых для $\alpha > 1$ в данном случае кривые при значительно больших значениях параметра $\frac{L}{\delta_{\Pi}}$ идут параллельно оси абсцисс. Асимптотическое представление для величины

$\frac{\gamma_k}{\gamma_n}$ при $\frac{L}{\delta_n} \rightarrow 0$ можно получить так же, как и формулу (4.58). Поэтому, опуская промежуточные выкладки, получаем

$$\frac{\gamma_k}{\gamma_n} = \frac{\gamma_B}{\gamma_n} - \left(\frac{\gamma_B}{\gamma_n} - 1 \right) \frac{\alpha}{2} \quad (\alpha \leq 1). \quad (4.59)$$

Эта формула совпадает с соответствующим выражением, полученным с помощью геометрического фактора, и с достаточной степенью точности определяет величину $\frac{\gamma_k}{\gamma_n}$ для тонких пластов. Вместе с тем представляется возможным получить простое аналитическое выражение для $\frac{\gamma_k}{\gamma_n}$ при больших значениях параметра $\frac{L}{\delta_n}$, если воспользоваться первым приближением в решении интегрального уравнения для поля магнитного диполя в пластах конечной мощности.

Предположив, что в таком пласте токи сдвинуты по фазе на 90° и отсутствует взаимодействие между токами, индуцированными во вмещающей среде и в пласте, получаем выражение для γ_k

$$\frac{\gamma_k}{\gamma_n} = \frac{\gamma_k^{\text{одн}}}{\gamma_n} - \left(\frac{\gamma_B}{\gamma_n} - 1 \right) \frac{\alpha}{2}, \quad (4.60)$$

где $\gamma_k^{\text{одн}}$ — значение γ_k в однородной среде с удельной проводимостью γ_B . В «области Долля» эта величина совпадает с γ_B . Формула (4.60) справедлива при больших значениях параметра $\frac{L}{\delta_n}$, чем формула (4.59), особенно это заметно для высокоомных пластов.

Анализ кривых зависимости $\frac{\gamma_k}{\gamma_n}$ от мощности пласта α при фиксированных значениях γ_n и ωL^2 (рис. 4.18) показывает следующее.

1. Тонкие пласты, удельное сопротивление которых больше удельного сопротивления вмещающих пород, в области относительно малых значений $\frac{L}{\delta_n}$ не отмечаются на кривых индукционного каротажа. Практически при $\alpha \leq 0,3$ и $\frac{\gamma_n}{\gamma_B} \leq \frac{1}{8}$ влияние пласта не превышает 5—10%.

2. Тонкие, хорошо проводящие пласты достаточно четко отмечаются по данным измерения индукционным методом. Так, при малых значениях $\frac{L}{\delta_n}$ для $\alpha \approx 0,3$ и $\frac{\gamma_n}{\gamma_B} = 8,0$ влияние пласта достигает 50%.

Табличный и графический материал, полученный в результате расчетов, позволяет количественно оценить влияние пластов конечной мощности и определить область параметров, в которой индукционный каротаж обладает преимуществами перед другими методами исследования скважин. Эти данные могут быть положены в основу пале.ок индукционного каротажа в пластах конечной мощности (без учета влияния скважины), которые можно представить в двух вариантах.

В а р и а н т 1. По оси абсцисс откладывается отношение $\frac{H}{L}$, по оси ординат — $\frac{\gamma_k}{\gamma_B}$, шифром палетки служит величина $\gamma_B \mu \omega L^2$. Шифр кривых $\frac{\gamma_n}{\gamma_B}$. Зная мощность пласта, длину зонда, удельную проводимость вмещающих пород, частоту поля и измеряя γ_k , можно определить γ_n .

В а р и а н т 2 отличается тем, что по оси абсцисс откладывается величина $\gamma_B \mu \omega L^2$ и шифром палетки служит отношение мощности пласта к длине зонда $\frac{H}{L}$.

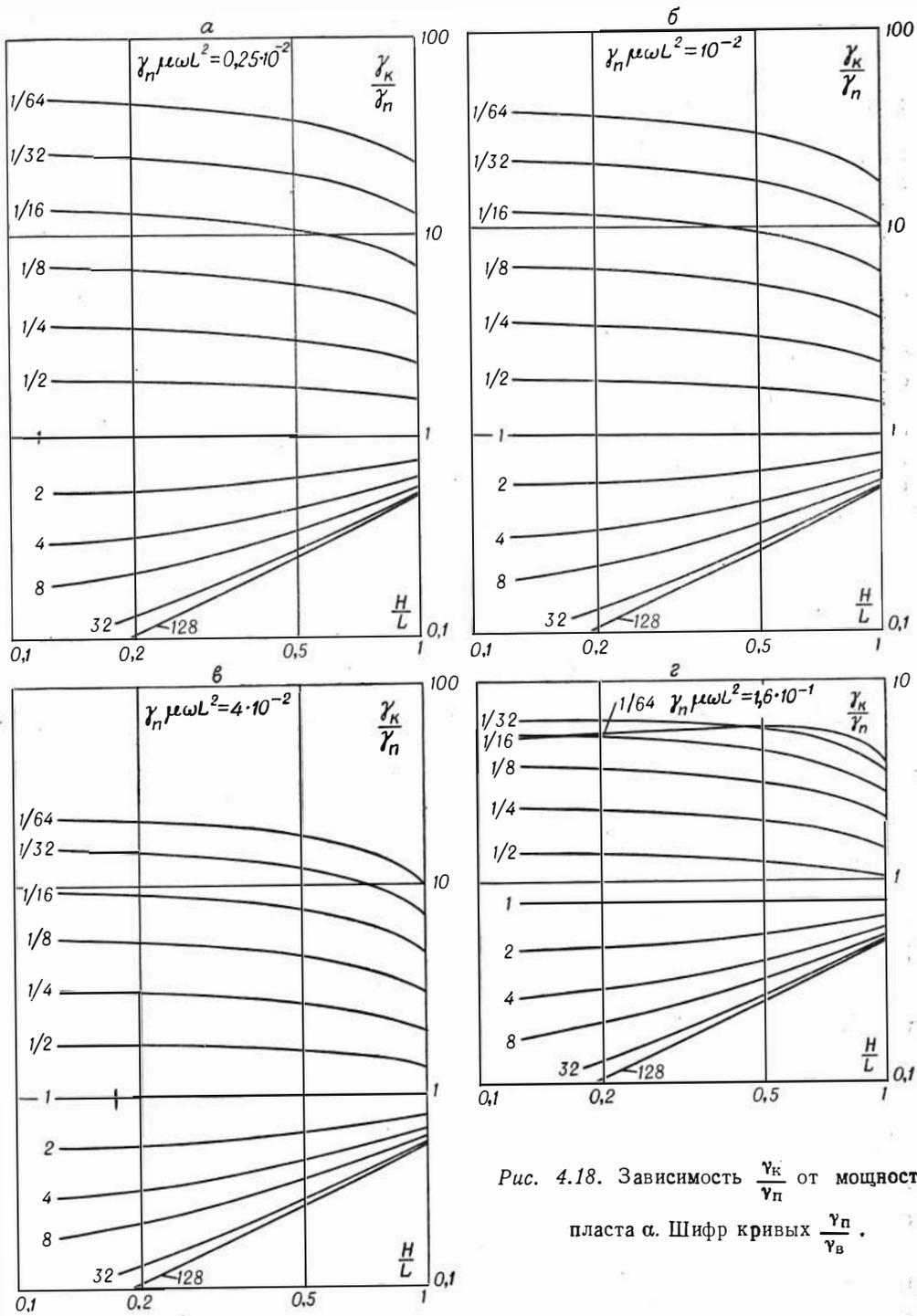


Рис. 4.18. Зависимость $\frac{\gamma_K}{\gamma_n}$ от мощности пласта α . Шифр кривых $\frac{\gamma_n}{\gamma_b}$.

**§ 7. КРИВЫЕ ПРОФИЛИРОВАНИЯ С ДВУХКАТУШЕЧНЫМ ЗОНДОМ
В СРЕДАХ С ДВУМЯ ГОРИЗОНТАЛЬНЫМИ ГРАНИЦАМИ
(ПЛАСТ КОНЕЧНОЙ МОЩНОСТИ)**

Поле, определяющее сигнал в измерительной катушке зонда, и кажущаяся проводимость зависят от следующих параметров:

1) произведения удельной проводимости вмещающих пород γ_B на магнитную проницаемость μ , частоту поля ω и квадрат длины зонда L^2 ($n_B = \gamma_B \mu \omega L^2$);

2) отношения мощности пласта к длине зонда: $\frac{H}{L}$;

3) отношения удельной проводимости пласта к удельной проводимости вмещающих пород: $N = \frac{\gamma_{II}}{\gamma_B}$;

4) положения зонда относительно пласта, которое можно характеризовать расстоянием от середины пласта до центра зонда, выраженного в единицах длины зонда.

При построении кривой профилирования целесообразно выделить четыре наиболее характерных положения зонда относительно границ пласта. Формулы, по которым производится вычисление в каждом случае, отличаются друг от друга.

1. Зонд находится вне пласта.

$$h_z = h_z^B - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{m^3 k_{12} (1 - e^{-2m_2 \alpha}) e^{-m_1 (2\beta_1 - 1)}}{m_1 [1 - k_{12}^2 e^{-2m_2 \alpha}]} dm;$$

$$\beta_1 = \frac{h_1}{z} \geq 1; \quad \alpha = \frac{H}{L}.$$

2. Датчики зонда находятся по разные стороны одной границы пласта.

$$h_z = \int_0^{\infty} \frac{m^3 e^{-m_1 \beta_2} e^{-m_2 (1 - \beta_2)} [1 + k_{12} e^{2m_2 (1 - \beta_2)}]}{(m_1 + m_2) [1 - k_{12}^2 e^{-2m_2 \alpha}]} dm \quad (1 \geq \beta_2).$$

3. Зонд находится внутри пласта.

$$h_z = h_z^B + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{m^3 k_{12} [e^{-(1+2\beta_2) m_2} + e^{-(2\alpha - 2\beta_2 - 1) m_2} + 2k_{12} e^{-2\alpha m_2} \operatorname{ch} m_2]}{m_2 [1 - k_{12}^2 e^{-2\alpha m_2}]} dm \quad (H \geq L).$$

4. Пласт расположен между датчиками зонда.

$$h_z = 2 \int_0^{\infty} \frac{m^3 m_2 e^{-(m_2 - m_1) \alpha} e^{-m_1}}{(m_1 + m_2)^2 [1 - k_{12}^2 e^{-2m_2 \alpha}]} dm \quad (H \leq L).$$

Между кажущейся проводимостью и активной компонентой h_z имеет место соотношение $\frac{\gamma_K}{\gamma_{II}} = \frac{2}{\gamma_{II} \mu \omega L^2} h_z$.

Рассмотрим влияние перечисленных выше факторов на форму кривых профилирования (см. рис. 4.19—4.41). Кривые профилирования соответствуют различным соотношениям $\frac{\gamma_{II}}{\gamma_B}$, $\frac{H}{L}$ (шифр семейства кривых); для каждого случая построены кривые, соответствующие определенному значению параметра n_B (шифр кривой). На графиках по горизонтальной

оси отложена величина $\frac{\gamma_k}{\gamma_n}$, по вертикальной оси — расстояние от центра пласта до точки измерения (середины зонда), выраженное в единицах мощности пласта. Рассматривая влияние указанных факторов, можно выделить четыре случая:

1. Удельная проводимость пласта больше удельной проводимости вмещающей среды, и его мощность больше длины зонда ($\gamma_n > \gamma_b; H \geq L$).

2. Пласт более высокоомный, чем окружающая среда, и мощность его больше длины зонда ($\gamma_n < \gamma_b; H \geq L$).

3. Маломощный пласт в среде с проводимостью меньшей, чем проводимость пласта ($\gamma_n > \gamma_b; H \leq L$).

4. Мощность пласта меньше длины зонда, а его удельное сопротивление превышает удельное сопротивление вмещающей среды ($\gamma_n < \gamma_b, H < L$).

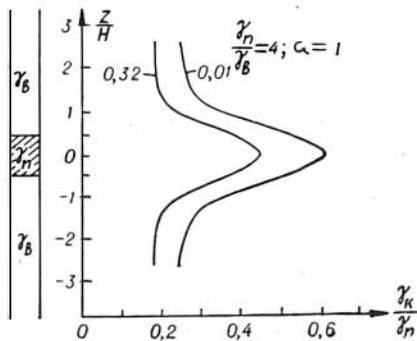
1 случай ($H \geq L; \frac{\gamma_n}{\gamma_b} > 1$). Все кривые симметричны относительно центра пласта (рис. 4.19—4.27). С увеличением параметра n_b , что соответствует, например, увеличению частоты, уменьшается ширина переходной зоны, где γ_k отличается от γ_k в однородной среде с удельным сопротивлением вмещающей среды. При этом дифференциация кривых становится более слабой, т. е. несколько уменьшается отношение величины $\frac{\gamma_k}{\gamma_n}$ в центре пласта к значению этой величины во вмещающих породах. Например, при $\frac{H}{L} = 4$ и $\frac{\gamma_n}{\gamma_b} = 4$ величина отношения, рассчитанного исходя из теории Долля, равна 3,6, а при параметре $n_b = 0,32$ это отношение равно 2,8. Для случая $\frac{H}{L} = 4$ и $\frac{\gamma_n}{\gamma_b} = 16$ величины этих отношений соответственно равны 11,9 и 9,5.

С увеличением параметра n заметно улучшается вертикальная характеристика зонда, т. е. измеренная величина γ_k становится ближе к γ_k в однородной среде с удельным сопротивлением пласта. Так, при $\frac{H}{L} = 2$ и $\frac{\gamma_n}{\gamma_b} = 4$ величина $\frac{\gamma_k}{\gamma_n}$, полученная по теории Долля, равна 0,82, а при $n_b = 0,32$ $\gamma_k = \gamma_n$. При меньшей мощности пласта ($\frac{H}{L} = 1, \frac{\gamma_n}{\gamma_b} = 4$) также наблюдается улучшение вертикальной характеристики, и величина $\frac{\gamma_k}{\gamma_n}$ соответственно равна 0,63 и 0,88.

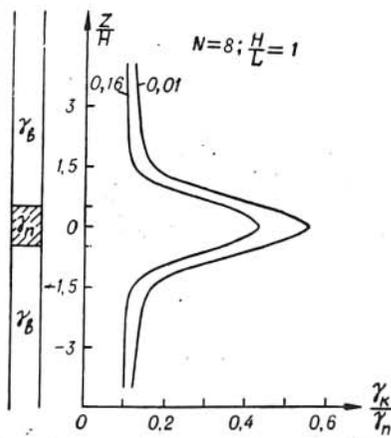
Рассмотрим возможности метода при определении мощности пласта по данным измерения с двухкатушечным зондом. Согласно теории Долля, отношение амплитуды аномалии на границе пласта к амплитуде аномалии в центре пласта определяется формулой

$$\eta = \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{4\alpha}}{1 - \frac{1}{2\alpha}}, \quad \alpha = \frac{H}{L} \geq 1,$$

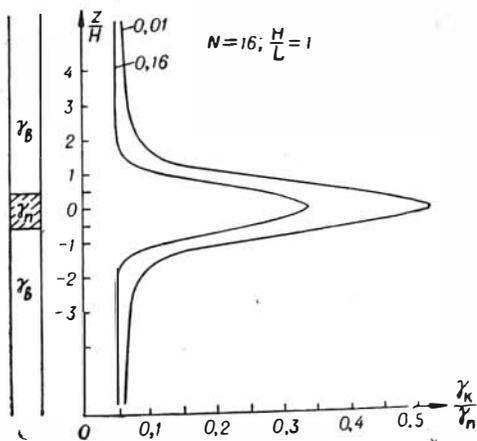
из которой видно, что только при очень больших отношениях мощности пласта к длине зонда η близко к 0,5. Например, при $\alpha = 4$ $\eta \approx 0,54$, при $\alpha = 10$ $\eta \approx 0,51$. Если проводить определение мощности пласта по точкам кривой профилирования, соответствующим половине амплитуды аномалии, то ошибка при этом не превышает 2,5%, при $\alpha = 4, 0$ и 10% при $\alpha = 2, 0$, но достигает 60%, когда мощность пласта становится равной длине зонда. Анализ кривых профилирования показывает, что при заданной



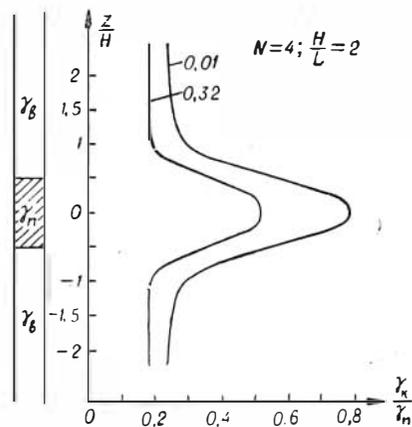
Puc. 4.19.



Puc. 4.20.



Puc. 4.21.



Puc. 4.22.

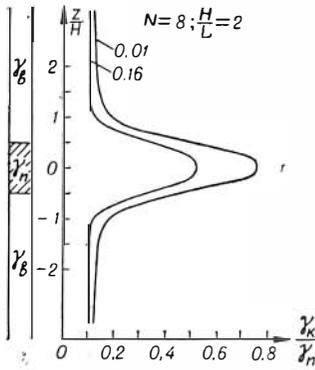


Рис. 4.23.

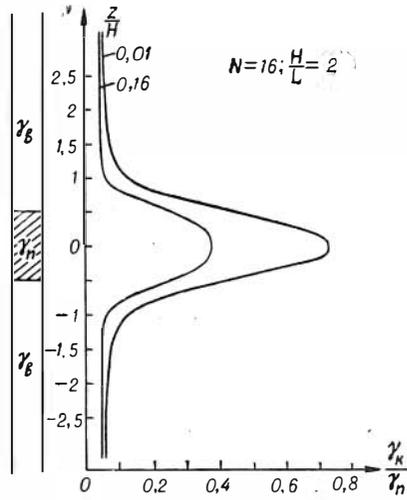


Рис. 4.24.

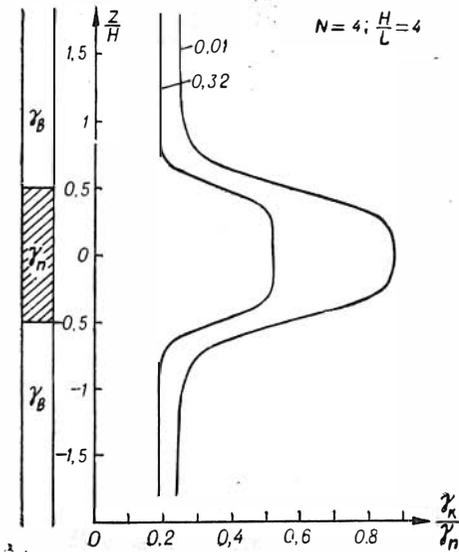


Рис. 4.25.

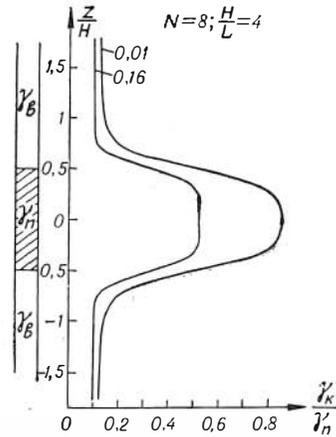


Рис. 4.26.

мощности пласта параметр n (в диапазоне его изменения до 1,28) и величина отношения проводимости пласта к проводимости вмещающей среды $\frac{\gamma_n}{\gamma_b}$ практически не влияют на величину η .

2 случай ($H \geq L$; $\gamma_n < \gamma_b$). Для всех кривых с ростом параметра n_b уменьшаются размеры промежуточной зоны (рис. 4.28—4.33). В отличие

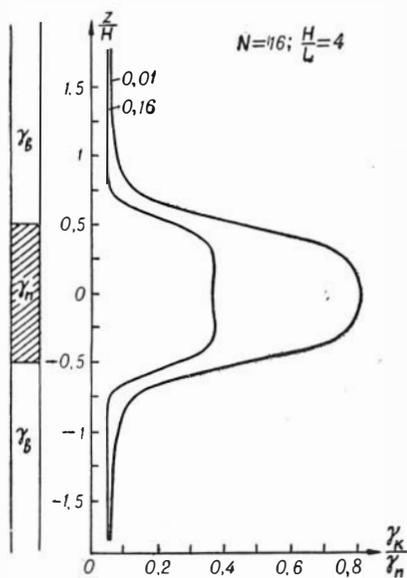


Рис. 4.27.

от предыдущего случая дифференциация кривых с увеличением параметра n_b несколько улучшается, т. е. возрастает отношение $\frac{\gamma_k}{\gamma_n}$ во вмещающих породах к $\frac{\gamma_k}{\gamma_n}$ в середине пласта. Так, при $\frac{\gamma_n}{\gamma_b} = \frac{1}{16}$ и $\frac{H}{L} = 4,0$ величина этого отношения, полученная по теории Долля, равна 5,25, а для кривой с параметром $n_b = 0,64$ она равна 10. Таким образом, в данном случае повышение частоты улучшает четкость выделения относительно высокоомных пластов. Это на первый взгляд парадоксальное явление можно объяснить так: сигнал в измерительной катушке зонда удобно рассматривать как сумму сигналов от среды, непосредственно окружающей зонд, и от остальной, более удаленной, части пространства.

Повышение частоты приводит в результате скин-эффекта к относительному ослаблению активной компоненты тока в удаленных участках среды и уменьшению величины $\frac{\gamma_k}{\gamma_n}$. Когда зонд находится в пласте, то

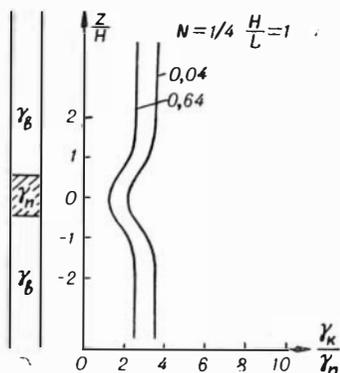


Рис. 4.28.

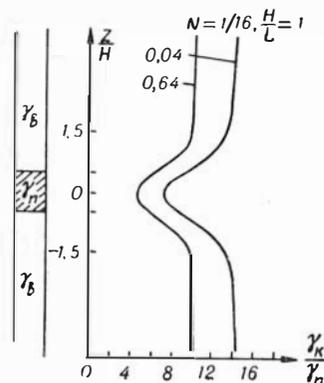
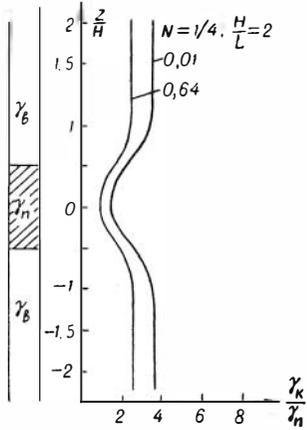
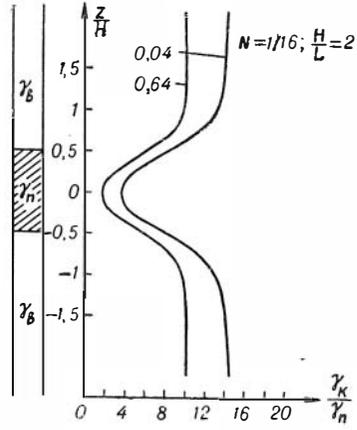


Рис. 4.29.

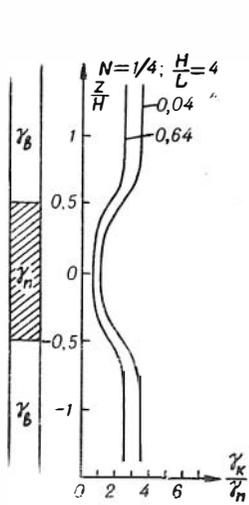
он непосредственно окружен более высокоомными породами, и изменение активной компоненты плотности тока в далеких участках среды чувствуется заметнее, чем если бы зонд был расположен во вмещающей среде. Поэтому с увеличением частоты (до определенного значения) возрастает отношение $\frac{\gamma_k}{\gamma_n}$ во вмещающей среде к $\frac{\gamma_k}{\gamma_n}$ против середины пласта.



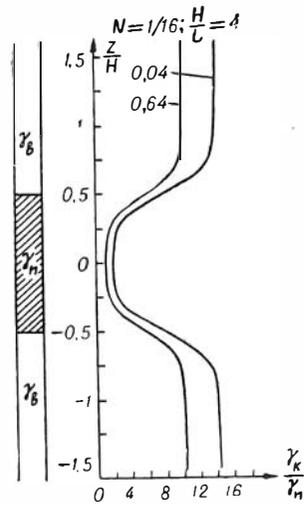
Puc. 4.30.



Puc. 4.31.



Puc. 4.32.



Puc. 4.33.

С повышением частоты также улучшается вертикальная характеристика зонда. Так, при $\frac{\gamma_{\text{п}}}{\gamma_{\text{в}}} = \frac{1}{4}$ и $\frac{H}{L} = 4$ величина $\frac{\gamma_{\text{к}}}{\gamma_{\text{п}}}$ по Доллю равна 1,35, а для параметра $n_{\text{в}}=0,16$ это отношение равно 1,02; при $\frac{\gamma_{\text{п}}}{\gamma_{\text{в}}} = \frac{1}{16}$ и $\frac{H}{L} = 4$ величина $\frac{\gamma_{\text{к}}}{\gamma_{\text{п}}}$ соответственно равна 1,9 и 1,1.

С точки зрения определения мощности пласта по кривым профилирования здесь отмечаются такие же зависимости, как и в предыдущем случае.

3 случай ($H \leq L; \frac{\gamma_{\text{п}}}{\gamma_{\text{в}}} > 1$). На рис. 4.34—4.37 представлены кривые профилирования при $\frac{H}{L} = 0,125; 0,500$ и $\frac{\gamma_{\text{п}}}{\gamma_{\text{в}}} = 4,16$. С увеличением параметра, как и в первом случае, дифференциация кривых несколько ухудшается. Определение мощности пласта по точкам на уровне половины амплитуды аномалии, естественно, неприменимо, так как полученное таким образом значение мощности может в отдельных случаях превышать во много раз истинную мощность пласта.

4 случай ($H \leq L; \frac{\gamma_{\text{п}}}{\gamma_{\text{в}}} < 1$). На рис. 4.38—4.41 даны кривые профилирования при $\frac{H}{L} = 0,125; 500$ и $\frac{\gamma_{\text{п}}}{\gamma_{\text{в}}} = \frac{1}{4}$ и $\frac{1}{16}$. Основные особенности кривых профилирования (дифференциация, ширина промежуточной области, вертикальная характеристика) с увеличением параметра n изменяются в том же направлении, как и в случае 2. Хотя вертикальная характеристика зонда с увеличением частоты улучшается, но даже при больших значениях параметра n величина кажущейся проводимости значительно отличается от истинной проводимости пласта. Так, при $\frac{\gamma_{\text{п}}}{\gamma_{\text{в}}} = \frac{1}{16}; \frac{H}{L} = 0,5$ и $n_{\text{в}}=0,16$ отношение $\frac{\gamma_{\text{к}}}{\gamma_{\text{п}}} = 2,5$. Определение мощности пласта по измерениям с двухкатушечным зондом здесь также невозможно из-за больших ошибок. Если $H \leq \frac{1}{4}L$ и $\frac{\gamma_{\text{п}}}{\gamma_{\text{в}}} \leq \frac{1}{8}$, то такие пласты практически не выделяются на кривых профилирования.

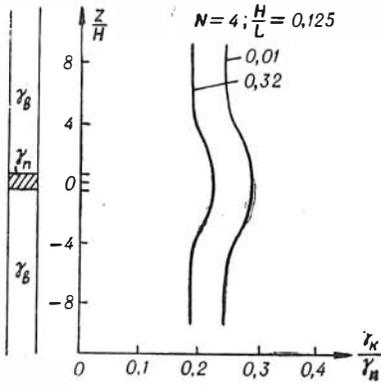
§ 8. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ НА ОСИ СКВАЖИНЫ В ПЛАСТАХ ОГРАНИЧЕННОЙ МОЩНОСТИ

Как было показано выше (стр. 42), в определенном диапазоне частот и удельных сопротивлений токи, индуцированные в скважине, зависят только от первичного магнитного потока и электропроводности бурового раствора. Поэтому в выражения для поля и кажущейся проводимости входят геометрические факторы отдельных участков скважины. Например, если зонд расположен симметрично относительно границ пласта, то формула для $\gamma_{\text{к}}$, согласно (2.104), имеет вид

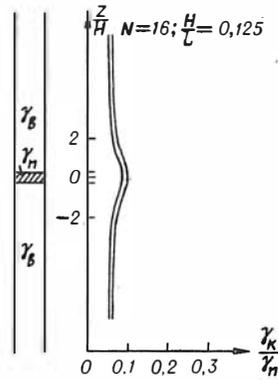
$$\gamma_{\text{к}} = \gamma_{\text{к}}^{\text{п}} + (\gamma_{\text{в}} - \gamma_{\text{п}}) Q_{\text{с}}^{\text{п}} + (\gamma_{\text{с}} - \gamma_{\text{в}}) Q_{\text{с}}^{\text{в}}. \quad (4.61)$$

Здесь $\gamma_{\text{к}}$ — отношение $\frac{2}{\mu\omega L^2} (h_z$ — активная компонента поля, выраженная в единицах первичного поля и полученная из строгого решения задачи для сред с горизонтальными поверхностями раздела);

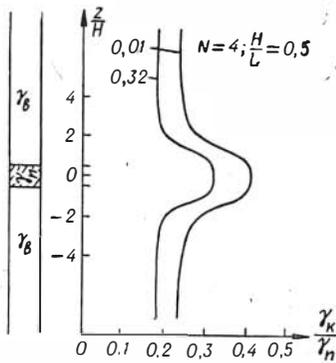
$Q_{\text{с}}$ — геометрический фактор скважины;



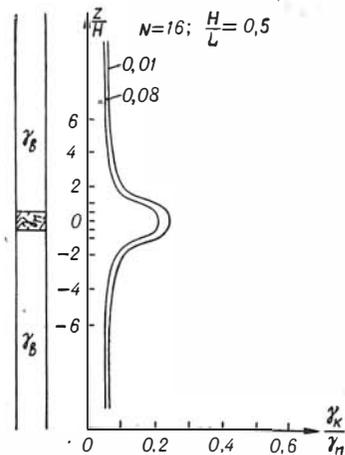
Puc. 4.34.



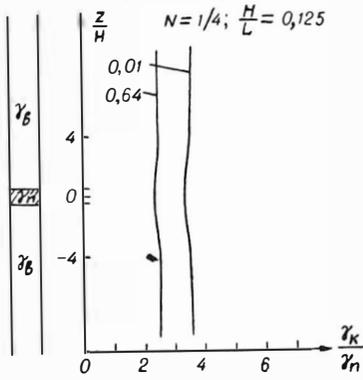
Puc. 4.35.



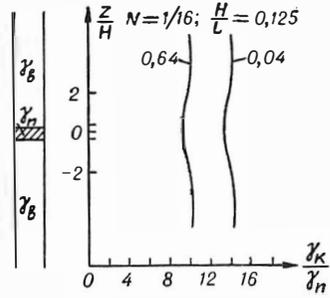
Puc. 4.36.



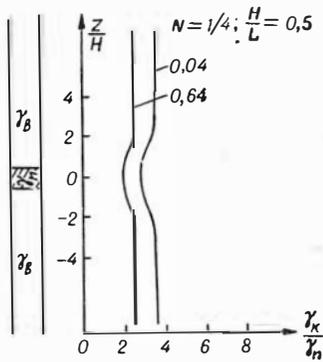
Puc. 4.37.



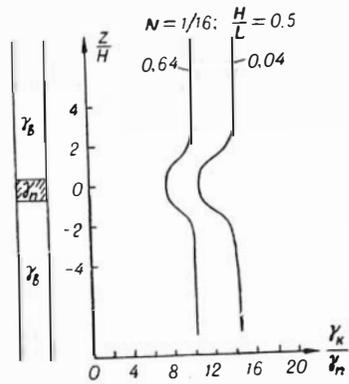
Puc. 4.38.



Puc. 4.39.



Puc. 4.40.



Puc. 4.41.

- Q_c^n — геометрический фактор участка скважины, расположенного против пласта;
 Q_c^B — геометрический фактор той части, которая расположена против вмещающих пород;
 $\gamma_n, \gamma_B, \gamma_c$ — удельные проводимости пласта, вмещающей среды и бурового раствора скважины.

Таблица 4.4

$\frac{h}{2L} \backslash \frac{a}{L}$	0,05	$0,05\sqrt{2}$	0,1	$0,1\sqrt{2}$
0,1	$0,102 \cdot 10^{-4}$	$0,399 \cdot 10^{-4}$	$0,153 \cdot 10^{-3}$	$0,568 \cdot 10^{-3}$
0,2	$0,234 \cdot 10^{-4}$	$0,912 \cdot 10^{-4}$	$0,348 \cdot 10^{-3}$	$0,127 \cdot 10^{-2}$
0,3	—	$0,182 \cdot 10^{-3}$	$0,707 \cdot 10^{-3}$	$0,241 \cdot 10^{-2}$
0,4	$0,125 \cdot 10^{-3}$	$0,458 \cdot 10^{-3}$	$0,158 \cdot 10^{-2}$	$0,498 \cdot 10^{-2}$
0,5	—	$0,290 \cdot 10^{-2}$	$0,614 \cdot 10^{-2}$	$0,131 \cdot 10^{-1}$
0,6	—	$0,495 \cdot 10^{-2}$	$0,987 \cdot 10^{-2}$	$0,196 \cdot 10^{-1}$
0,7	—	$0,507 \cdot 10^{-2}$	$0,101 \cdot 10^{-1}$	$0,207 \cdot 10^{-1}$
0,8	$0,252 \cdot 10^{-2}$	$0,510 \cdot 10^{-2}$	$0,103 \cdot 10^{-1}$	$0,210 \cdot 10^{-1}$
1,6	$0,252 \cdot 10^{-2}$	$0,511 \cdot 10^{-2}$	$0,104 \cdot 10^{-1}$	$0,211 \cdot 10^{-1}$
3,2	$0,252 \cdot 10^{-2}$	$0,511 \cdot 10^{-2}$	$0,104 \cdot 10^{-1}$	$0,211 \cdot 10^{-1}$

$\frac{h}{2L} \backslash \frac{a}{L}$	0,2	0,4	0,8	1,6
0,1	$0,196 \cdot 10^{-2}$	$0,155 \cdot 10^{-1}$	$0,519 \cdot 10^{-1}$	$0,830 \cdot 10^{-1}$
0,2	$0,432 \cdot 10^{-2}$	$0,323 \cdot 10^{-1}$	0,105	0,166
0,3	$0,780 \cdot 10^{-2}$	$0,523 \cdot 10^{-1}$	0,159	0,250
0,4	$0,142 \cdot 10^{-1}$	$0,775 \cdot 10^{-1}$	0,217	0,334
0,5	—	0,110	0,278	0,418
0,6	$0,386 \cdot 10^{-1}$	—	0,325	0,487
0,7	$0,414 \cdot 10^{-1}$	—	—	0,532
0,8	$0,422 \cdot 10^{-1}$	0,152	0,369	0,563
1,6	$0,427 \cdot 10^{-1}$	0,157	0,397	0,641
3,2	$0,427 \cdot 10^{-1}$	0,157	0,398	0,652

В табл. 4.4. приведены значения функции Q_c^n , а на рис. 4.42 — соответствующие кривые зависимости геометрического фактора цилиндрического столбика от отношения $\frac{h}{2L}$, где L — длина зонда; h — высота цилиндра. Шифр кривых — отношение радиуса цилиндра к длине зонда $\frac{a}{L}$; функция Q_c^n определяется только размерами столбика (радиусом и высотой), выраженными в единицах длины зонда.

С увеличением параметра $\frac{h}{2L}$ кривые достаточно быстро приближаются к своим асимптотам, которые соответствуют геометрическим факторам бесконечно длинного цилиндра (функция Q_c). Чем больше длина зонда, тем раньше наблюдается выход кривых к своим правым асимптотам. Для зондов, длина которых больше диаметра цилиндра, геометрический фактор последнего практически совпадает с геометрическим фактором бесконечно длинного цилиндра, если $h \geq 1,2$. Иными словами, основной вклад в сигнал вносит цилиндр, высота которого несколько больше длины зонда, а остальная часть цилиндра (в частности, скважины), по существу, не влияет на величину сигнала.

С увеличением радиуса цилиндра (или с уменьшением длины зонда) выход на асимптоту наступает при больших значениях $\frac{h}{2L}$. Это обстоятельство играет важную роль при обосновании фокусирующих систем, предназначенных для уменьшения влияния скважины и промежуточной зоны, поскольку радиус зоны может оказаться равным или больше длины зондов, входящих в состав многокатушечного зонда.

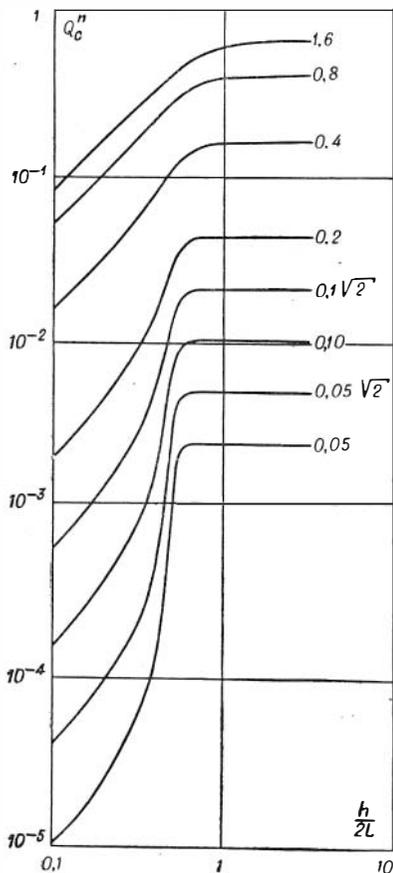


Рис. 4.42.

При расчетах радиальной характеристики многокатушечного зонда предполагается, что пласты имеют неограниченную мощность, и в основу расчета положен геометрический фактор бесконечно длинного цилиндра, удельное сопротивление которого не меняется в направлении, параллельном оси скважины.

Будем рассматривать геометрический фактор Q_c^n как сумму геометрических факторов двух цилиндров, равных по высоте и с общим основанием ($z = 0$), пересекающим середину зонда. Геометрический фактор каждого цилиндра равен $\frac{1}{2} Q_c^n$. Теперь не представляет труда получить значение геометрического фактора цилиндра, координаты оснований которого соответственно z_1 и z_2 . Очевидно, что геометрический фактор цилиндрического столбика, расположенного несимметрично относительно зонда, определяется из соотношения

$$Q_1\left(\frac{z_2}{L}; \frac{z_1}{L}; \frac{a}{L}\right) = \frac{1}{2} \left[Q_c^n\left(\frac{z_2}{L}; \frac{a}{L}\right) \pm Q_c^n\left(\frac{z_1}{L}; \frac{a}{L}\right) \right].$$

Аналогично геометрический фактор цилиндрического слоя с координатами $z_1; z_2; a_1; a_2$ может быть представлен в виде

$$Q_2\left(\frac{z_2}{L}; \frac{z_1}{L}; \frac{a_2}{L}; \frac{a_1}{L}\right) = Q_1\left(\frac{z_2}{L}; \frac{z_1}{L}; \frac{a_2}{L}\right) - Q_1\left(\frac{z_2}{L}; \frac{z_1}{L}; \frac{a_1}{L}\right).$$

Это соотношение можно применять для определения влияния каверн на измерения с зондами различных типов. Комбинируя геометрические факторы Q_2 , можно получать геометрические факторы областей с довольно сложной и произвольной формой.

Функция $Q_c(\alpha)$ показывает, как изменяется сигнал от бесконечно длинного проводящего цилиндра при увеличении его радиуса. Вместе с тем представляет интерес исследовать роль отдельных участков сважин.

Кривые рис. 4.43 иллюстрируют зависимость влияния достаточно тонких цилиндров от их положения относительно датчиков зонда. Если длина зонда больше радиуса, то основной вклад в величину сигнала вносят участки скважины, непосредственно окружающие датчики зонда.

Перепишем формулу (4.61) в виде

$$\frac{\gamma_K}{\gamma_n} = \frac{\gamma_K^{\text{п}}}{\gamma_n} + \left(\frac{\gamma_B}{\gamma_n} - 1 \right) Q_c^{\text{п}} + \left(\frac{\gamma_c}{\gamma_n} - \frac{\gamma_B}{\gamma_n} \right) Q_c \quad (4.62)$$

или

$$\frac{\gamma_K}{\gamma_n} = \frac{\gamma_K^{\text{п}}}{\gamma_n} + \frac{\gamma_B}{\gamma_n} (Q_c^{\text{п}} - Q_c) + \frac{\gamma_c}{\gamma_n} Q_c - Q_c^{\text{п}}.$$

При увеличении мощности пласта $Q_c^{\text{п}} \rightarrow Q_c$, $\frac{\gamma_K}{\gamma_n} \rightarrow \frac{\gamma_K^{\text{одн}}}{\gamma_n}$, поэтому вместо формулы (4.61) имеем

$$\frac{\gamma_K}{\gamma_n} = \frac{\gamma_K^{\text{одн}}}{\gamma_n} + \left(\frac{\gamma_c}{\gamma_n} - 1 \right) Q_c(\alpha), \quad (4.63)$$

т. е. получили выражение для $\frac{\gamma_K}{\gamma_n}$ в двухслойной среде (одна цилиндрическая поверхность раздела).

Расхождение между точными и приближенными значениями $\frac{\gamma_K}{\gamma_n}$, полученными соответственно из формул (4.61) и (4.63), зависит от того, насколько $\frac{\gamma_K^{\text{п}}}{\gamma_n}$ близко к $\frac{\gamma_K^{\text{одн}}}{\gamma_n}$ (т. е. от степени влияния вмещающих пород) и насколько функция $Q_c^{\text{п}}$ отличается от $Q_c(\alpha)$.

Из рассмотрения поля в пластах конечной мощности (без учета влияния токов, индуцированных в скважине) и поведения функции $Q_c^{\text{п}}$ следует, что при увеличении мощности пласта выражение для $\frac{\gamma_K}{\gamma_n}$ (4.62) вначале переходит в формулу

$$\frac{\gamma_K}{\gamma_n} = \frac{\gamma_K^{\text{п}}}{\gamma_n} + \left(\frac{\gamma_c}{\gamma_n} - 1 \right) Q_c(\alpha), \quad (4.64)$$

и только при относительно большой мощности пласта можно применять формулу (4.63).

Формула (4.64) соответствует случаю, когда мощность пласта больше длины зонда и часть скважины, расположенная против вмещающих пород, не влияет на сигнал, хотя поле токов, индуцированных во вмещающей среде, по-прежнему соизмеримо с полем токов в пласте и может даже превышать эту часть поля, особенно когда пласт менее проводящий, чем окружающая его среда.

В области предельно малых параметров, когда отсутствует взаимодействие между токами, имеют место следующие выражения для γ_K : а) мощность пласта меньше длины зонда, и пласт расположен между датчиками зонда

$$\frac{\gamma_K}{\gamma_n} = \frac{\gamma_B}{\gamma_n} + \left(1 - \frac{\gamma_B}{\gamma_n} \right) \frac{H}{2L} + \frac{\gamma_B}{\gamma_n} (Q_c^{\text{п}} - Q_c) + \frac{\gamma_c}{\gamma_n} Q_c - Q_c^{\text{п}}; \quad (4.65)$$

б) зонд расположен симметрично относительно границ пласта ($H \geq L$)

$$\frac{\gamma_K}{\gamma_n} = 1 + \left(\frac{\gamma_B}{\gamma_n} - 1 \right) \frac{L}{2H} + \frac{\gamma_B}{\gamma_n} (Q_c^{\text{п}} - Q_c) + \frac{\gamma_c}{\gamma_n} Q_c - Q_c^{\text{п}}. \quad (4.66)$$

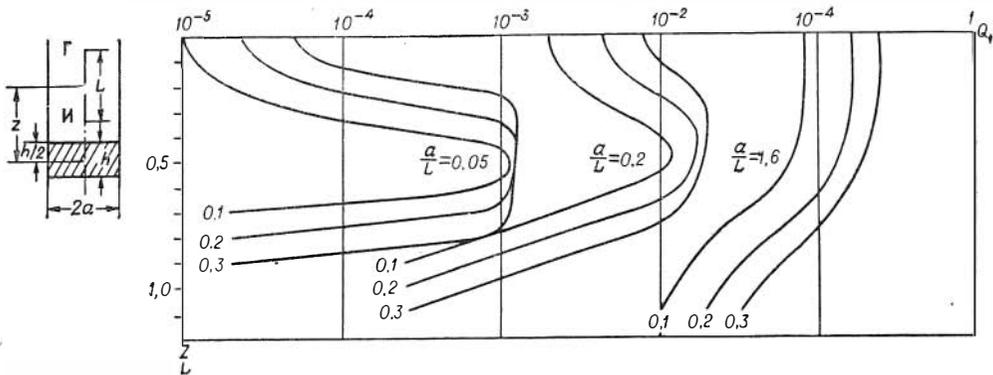


Рис. 4.43.

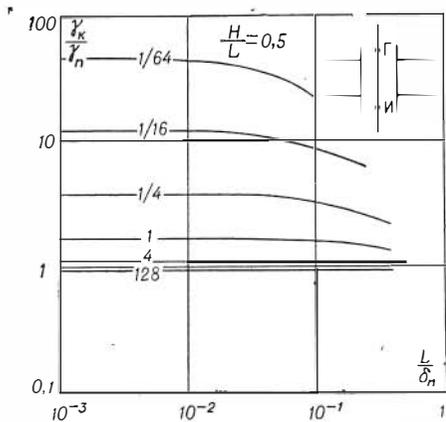


Рис. 4.44.

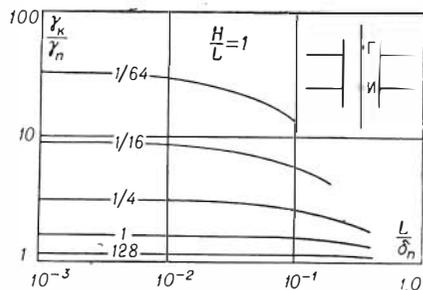


Рис. 4.45.

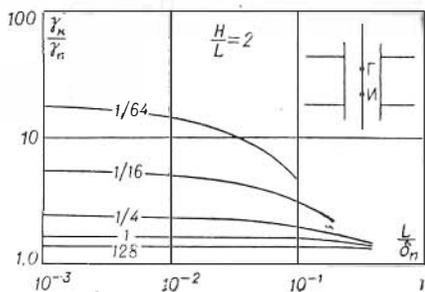


Рис. 4.46.

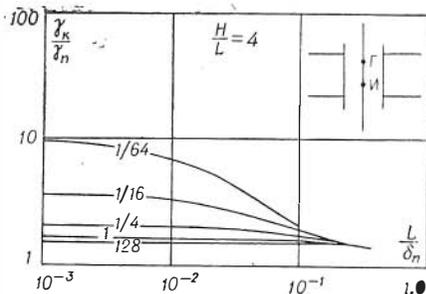


Рис. 4.47.

Как было показано выше, формула (4.61) справедлива в значительно более широком диапазоне частот и удельных сопротивлений, чем формула (4.66).

На рис. 4.44—4.47 даны кривые $\frac{\gamma_k}{\gamma_n}$ в пластах конечной мощности на оси проводящей скважины. По оси абсцисс отложено отношение длины зонда к толщине скин-слоя в пласте $\frac{L}{\gamma_n}$. Шифр кривых $\frac{\gamma_n}{\gamma_v}$; шифр семейства кривых $\frac{L}{a_c} = 5,0$ и $\frac{\gamma_n}{\gamma_c} = \frac{1}{16}$.

Расхождение между γ_k и значением γ_k в однородной среде с удельным сопротивлением пласта определяется влиянием скважины, вмещающих пород и величиной параметра $\frac{L}{\delta_n}$. С увеличением удельного сопротивления вмещающих пород, мощности пласта и $\frac{L}{\delta_n}$ возрастает относительная роль скважины, особенно это становится заметным, когда $\rho_v > \rho_n$.

Кривая с шифром $\frac{\gamma_n}{\gamma_v} = 1$ соответствует двухслойному разрезу с одной цилиндрической поверхностью раздела.

Аналогично могут быть получены кривые γ_k при проникновении бурового раствора в пласт, если при этом, конечно, соблюдаются физические предпосылки для способа расчета.

МНОГОКАТУШЕЧНЫЕ ЗОНДЫ

§ 1. СПОСОБЫ АНАЛИЗА МНОГОКАТУШЕЧНЫХ ЗОНДОВ ИНДУКЦИОННОГО КАРОТАЖА

Как показали расчеты в средах с горизонтальными и цилиндрическими границами, двухкатушечный зонд не обладает заметными преимуществами перед зондами в методе сопротивлений*. Влияние токов, индуцированных в скважине и промежуточной зоне, настолько значительно, что для определения удельного сопротивления пласта необходимо применить двухкатушечные зонды такой же длины, как и в методе сопротивлений.

В области частот и удельных сопротивлений, где скин-эффект проявляется очень слабо, влияние вмещающей среды больше, чем в методе сопротивлений. Но с увеличением частоты, электропроводности среды и мощности пласта поглощение электромагнитного поля существенно улучшает вертикальную характеристику зонда.

Применение двухкатушечного зонда нецелесообразно еще и потому, что требует аппаратуры более сложной, чем в методе сопротивлений. Поэтому в 1946 г. Долль выдвинул идею многокатушечных фокусирующих зондов и предложил графический способ определения их параметров.

Вначале рассмотрим многокатушечные зонды в рамках теории предельно малого параметра, когда можно пренебречь взаимодействием между токами, т. е. любой участок среды (как бы далеко он ни находился от источника поля) создает сигнал, который определяется только электропроводностью и геометрическим фактором этого участка.

Роль отдельных участков среды в образовании сигнала зависит от длины зонда; например, с увеличением длины зонда растет влияние более удаленных элементов среды и уменьшается доля сигнала от той части, которая близко прилегает к оси скважины. Применяя зонды различной длины с разным числом витков в катушках, включенных как последовательно, так и навстречу друг другу, можно значительно уменьшить сигнал, создаваемый любым элементом среды, независимо от расстояния до зонда. Однако для улучшения характеристик двухкатушечного зонда недостаточно уменьшение величины сигнала от элемента среды. Основная задача состоит в изменении соотношения между величинами сигналов от различных участков.

* Исключение составляют условия непроводящего бурового раствора и низкоомный разрез с высокоомными пропластками.

Для улучшения радиальной характеристики двухкатушечного зонда (при определении удельной электропроводности пласта) нужно уменьшить долю сигнала от скважины и промежуточной зоны по сравнению с сигналом от пласта, т. е. уменьшить влияние близлежащих к зонду участков среды, незначительно ослабляя при этом долю сигнала от более удаленных участков*. Иными словами, в однородной среде сигнал от многокатушечного зонда не должен быть во много раз меньше сигнала от основного двухкатушечного зонда, в противном случае возникают сложные радиотехнические задачи, связанные с обеспечением высокой чувствительности и стабильности аппаратуры.

Для улучшения вертикальной характеристики двухкатушечного зонда нужно уменьшить долю сигнала от вмещающих пород по сравнению с сигналом от пласта, против которого находится зонд, т. е. уменьшить влияние далеко лежащих от зонда участков среды, при этом незначительно уменьшив долю сигнала от близлежащих участков (если мощность пласта больше длины зонда). Таким образом, в этом случае к многокатушечным зондам, которые должны иметь удовлетворительные радиальные и вертикальные характеристики, предъявляются противоречивые требования.

Если мощность пласта меньше расстояния между крайними катушками многокатушечного зонда и часть двухкатушечных зондов расположена против вмещающих пород, то, как уже отмечалось ранее [14], можно улучшить вертикальную характеристику зонда, при этом величина γ_k в середине пласта становится ближе к истинному значению его удельной проводимости. Если расстояние между крайними катушками меньше мощности пласта, то можно заметно уменьшить ошибку при определении мощности пласта по точкам, соответствующим половине амплитуды аномалии, а также существенно ослабить влияние вмещающих пород, когда длина фокусирующего зонда больше длины основного (симметричные зонды с внешней фокусировкой).

Когда мощность пласта меньше длины многокатушечного зонда и наблюдается проникновение фильтра бурового раствора, радиальная характеристика может оказаться совершенно неудовлетворительной из-за изменения удельного сопротивления в промежуточной зоне в вертикальном направлении на интервале, расположенном против зонда.

Любой многокатушечный зонд будем представлять как сумму двухкатушечных зондов. В настоящее время известны симметричные и несимметричные многокатушечные зонды. К первой группе относятся зонды аппаратуры ИК-1, ИК-2, ко второй группе — четырехкатушечный зонд аппаратуры ПИК-1 и трехкатушечные зонды, моменты одноименных катушек которых либо равны, либо подобраны так, что э. д. с. прямого поля равна нулю. Последний тип зонда может быть использован для улучшения вертикальной характеристики. Как правило, в индукционном каротаже, использующем одну частоту, сигнал от токов в задающих катушках значительно больше сигнала от токов, индуцированных в среде. Поэтому для повышения точности измерений в многокатушечные зонды обычно вводится дополнительная компенсационная катушка, благодаря которой суммарный сигнал от токов в задающих катушках практически равен нулю. Исключение составляют трехкатушечный зонд и зонд аппаратуры ПИК-1, в которых компенсация первичного поля осуществляется с помощью катушек, расположенных внутри электронной части снаряда.

* Современные зонды индукционного каротажа как за рубежом, так и в Советском Союзе предназначены для определения удельного сопротивления пласта.

§ 2. ГРАФИЧЕСКИЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ МНОГОКАТУШЕЧНОГО ЗОНДА

В основе методов подбора параметров зонда* лежит представление о дифференциальной и интегральной характеристиках двухкатушечного зонда.

Дифференциальная радиальная характеристика определяет сигнал от тонкого цилиндрического бесконечно длинного слоя, отнесенного к сигналу от однородного пространства, как функцию расстояния от оси, на которой расположен зонд.

Согласно работе [21], для дифференциальной радиальной характеристики имеем выражение

$$G_p = d\rho \int_{-\infty}^{\infty} g dz. \quad (5.1)$$

Здесь $gd\rho dz$ — геометрический фактор кольца, сечение которого равно $d\rho dz$; $g = \frac{L}{2} \frac{\rho^3}{R_1^3 R_2^3}$ (L — длина зонда);

$$R_1 = \left[\rho^2 + \left(z - \frac{L}{2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}; \quad R_2 = \left[\rho^2 + \left(z + \frac{L}{2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}};$$

ρ и z — цилиндрические координаты точки (начало координат совпадает с серединой зонда).

Впервые расчеты функции G_p по формуле (5.1) были выполнены Доллем и опубликованы в статье [21]. Позже эти вычисления были повторены и использовались для анализа фокусирующих систем [14]. Вместе с тем для детального исследования свойств функции G_p удобнее воспользоваться ее интегральным представлением.

Как известно (стр. 29), магнитное поле на оси скважины, создаваемое токами в цилиндрической оболочке и отнесенное к полю в воздухе, определяется из соотношения

$$h_z = \frac{L^3}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{in\lambda^2 K_1^2(\lambda\rho)}{1 + inI_1(\lambda\rho) K_1(\lambda\rho)} \cos \lambda L d\lambda. \quad (5.2)$$

Здесь ρ — радиус оболочки; $n = \omega\mu\gamma\Delta\rho \cdot \rho$; ω — частота; μ — магнитная проницаемость воздуха, равная $4\pi \cdot 10^{-7} \frac{2H}{M}$; γ и $\Delta\rho$ — удельная электропроводность и толщина оболочки; $I_1(\lambda\rho)$ и $K_1(\lambda\rho)$ — модифицированные функции Бесселя.

Выпишем выражения для функций Бесселя при малых и больших значениях аргумента. При $\lambda\rho \rightarrow 0$

$$I_1(\lambda\rho) \rightarrow \frac{\lambda\rho}{2}; \quad K_1(\lambda\rho) \rightarrow \frac{1}{\lambda\rho};$$

при $\lambda\rho \rightarrow \infty$

$$I_1(\lambda\rho) \rightarrow \frac{e^{\lambda\rho}}{\sqrt{2\pi\lambda\rho}}; \quad K_1(\lambda\rho) \rightarrow \frac{e^{-\lambda\rho}}{\sqrt{2\lambda\rho}} \sqrt{\pi}.$$

* Под параметрами зонда понимается расстояние между катушками и их моменты.

Произведение $I_1(\lambda\rho)K_1(\lambda\rho)$ не превышает $1/2$ при изменении λ от нуля до бесконечности. Поэтому в области очень низких частот и высоких удельных сопротивлений

$$h_z \approx in \frac{L^3}{\pi} \int_0^\infty \lambda^2 K_1^2(\lambda\rho) \cos \lambda L d\lambda. \quad (5.3)$$

С другой стороны, между полем h_z и кажущейся проводимостью существует связь: $\gamma_k = \frac{2}{\mu\omega L^2} h_z$. Таким образом,

$$\gamma_k = \gamma \frac{\rho\Delta\rho}{L^2} \cdot \frac{2\alpha^3}{\pi} \int_0^\infty m^2 K_1^2(m) \cos \alpha m dm \quad (5.4)$$

(здесь $\alpha = \frac{L}{\rho}$) или

$$\gamma_k = \gamma G_\rho, \quad (5.5)$$

где

$$G_\rho = \frac{\rho\Delta\rho}{L^2} \cdot \frac{2\alpha^3}{\pi} \int_0^\infty m^2 K_1^2(m) \cos \alpha m dm = \frac{\Delta\rho}{\rho} \cdot \frac{1}{\alpha^2} C(\alpha) \quad (5.6)$$

и

$$C(\alpha) = \frac{2\alpha^3}{\pi} \int_0^\infty m^2 K_1^2(m) \cos \alpha m dm.$$

Очевидно, что

$$h_z = \frac{\gamma\mu\omega L^2 \Delta\rho}{2} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{\alpha^2} C(\alpha)$$

и э. д. с. в измерительной цепи двухкатушечного зонда

$$\varepsilon = \frac{\gamma\mu\omega L^2 \Delta\rho}{2} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{\alpha^2} C(\alpha) \cdot \frac{M_I M_{II} \omega \mu}{2\pi L^3} = \frac{\mu^2 \omega^2 M_I M_{II}}{4\pi} \cdot \frac{1}{L} G_\rho \gamma. \quad (5.7)$$

Рассмотрим поведение функции $C(\alpha)$ при больших и малых значениях α . Пусть $\alpha \rightarrow \infty$. Введем обозначение для подынтегральной функции

$$\Phi(m) = m^2 K_1^2(m).$$

Применяя интегрирование по частям, имеем асимптотическое представление

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \Phi(m) \cos \alpha m dm &= \frac{1}{\alpha} \Phi(m) \sin \alpha m \Big|_0^\infty + \frac{1}{\alpha^2} \Phi'(m) \cos \alpha m \Big|_0^\infty - \\ &- \frac{1}{\alpha^2} \int_0^\infty \Phi''(m) \cos \alpha m dm. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что $\Phi(0) = 1$ и функция вместе с производными обращается в нуль при $m \rightarrow \infty$, имеем

$$\int_0^\infty \Phi(m) \cos \alpha m dm = -\frac{1}{\alpha^2} \Phi'(0) - \frac{1}{\alpha^2} \int_0^\infty \Phi''(m) \cos \alpha m dm.$$

При $m \rightarrow 0$

$$K_1(m) = \frac{1}{m} + \frac{m}{2} \ln m,$$

поэтому

$$\Phi(m) = m^2 K_1^2(m) \approx 1 + m^2 \ln m;$$

$$\Phi'(m) \approx 2m \ln m;$$

$$\Phi''(m) \approx 2 \ln m \approx -2K_0(m);$$

$$\int_0^{\infty} \Phi(m) \cos \alpha m dm \approx \frac{2}{\alpha^2} \int_0^{\infty} K_0(m) \cos \alpha m dm \approx \frac{2}{\alpha^3} \cdot \frac{\pi}{2},$$

так как

$$\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_0(m) \cos \alpha m dm.$$

Следовательно,

$$C(\alpha) \rightarrow \frac{2\alpha^3}{\pi} \cdot \frac{2}{\alpha^3} \cdot \frac{\pi}{2} = 2,0 \quad (\alpha \rightarrow \infty).$$

При $\alpha \rightarrow 0$ функция $C(\alpha)$ убывает прямо пропорционально α^3 , поскольку интеграл $\int_0^{\infty} m^2 K_1^2(m) \cos \alpha m dm$ при $\alpha \rightarrow 0$ стремится к постоянной величине $\int_0^{\infty} m^2 K_1^2(m) dm$, которая будет определена ниже. В табл. 5.1 приведены значения функции $C(\alpha)$.

Таблица 5.1

α	$C(\alpha)$	α	$C(\alpha)$	α	$C(\alpha)$
0,1	$0,58620 \cdot 10^{-3}$	2	1,3110	11	2,1161
0,2	$0,46248 \cdot 10^{-2}$	3	1,8546	12	2,1056
0,3	$0,15254 \cdot 10^{-1}$	4	2,0724	13	2,0962
0,4	$0,35029 \cdot 10^{-1}$	5	2,1473	14	2,0879
0,5	$0,65736 \cdot 10^{-1}$	6	2,1551	15	2,0806
0,6	0,10830	7	2,1634	16	2,0740
0,7	0,16280	8	2,1530	17	2,0683
0,8	0,22858	9	2,1404	18	2,0632
0,9	0,30437	10	2,1278	19	2,0586
1,0	0,38843			20	2,0545

Дифференциальная радиальная характеристика зависит от двух параметров: отношения длины зонда к радиусу оболочки и толщины оболочки к ее радиусу: $\frac{L}{\rho}$ и $\frac{\Delta\rho}{\rho}$. Будем вначале считать для всех оболочек $\frac{\Delta\rho}{\rho} = \text{const}$. В этом случае представим функцию G_ρ в виде

$$G_\rho = \frac{\Delta\rho}{\rho L^2} \rho^2 C(\alpha).$$

При $\rho \rightarrow 0$ $\alpha \rightarrow \infty$, $C(\alpha) \rightarrow 2$ и

$$G_\rho \rightarrow \frac{2\Delta\rho}{\rho L^2} \rho^2$$

и, наоборот, при $\rho \rightarrow \infty \alpha \rightarrow 0$, $C(\alpha) \rightarrow k\alpha^3$ и

$$G_\rho \rightarrow k \frac{\Delta\rho}{\rho} L \cdot \frac{1}{\rho}.$$

Значит, если среда мысленно разбита на цилиндрические слои, толщина которых растет прямо пропорционально радиусу, то их геометрические факторы изменяются следующим образом: при очень малых радиусах оболочки ее геометрический фактор мал и вначале растет прямо пропорционально квадрату радиуса, затем достигает максимума и при больших радиусах убывает обратно пропорционально ρ (рис. 5.1). Теперь предста-

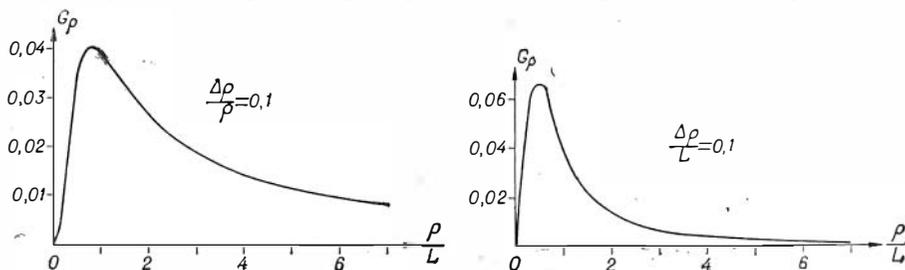


Рис. 5.1.

вим среду в виде коаксиальных цилиндрических слоев одинаковой толщины: $\Delta\rho = \text{const}$ и запишем для G_ρ выражение

$$G_\rho = \frac{\Delta\rho}{L} \cdot \frac{1}{\alpha} C(\alpha).$$

При $\rho \rightarrow 0$

$$G_\rho \rightarrow \frac{\Delta\rho}{L} \cdot \frac{2}{L} \cdot \rho,$$

при $\rho \rightarrow \infty$

$$G_\rho \rightarrow k\Delta\rho L \cdot \frac{1}{\rho^2}.$$

Вначале функция G_ρ растет прямо пропорционально ρ , затем рост ее замедляется, она достигает максимума и при больших значениях ρ убывает обратно пропорционально квадрату ρ (рис. 5.1). Соответственно смещаются относительно друг друга максимумы на кривых геометрических факторов при равномерном и неравномерном разбиении среды на оболочки.

Графический способ построения многокатушечных зондов таков. Путем наложения нескольких дифференциальных характеристик двухкатушечных зондов параметры многокатушечного зонда подбираются так, чтобы значительно уменьшить долю сигнала от близлежащих к зонду оболочек, стремясь при этом охватить как можно больше оболочек (соответственно возрастает глубинность исследования зонда). Если дифференциальная радиальная характеристика многокатушечного зонда на некотором участке равна нулю, то это означает, что геометрический фактор любого тонкого цилиндрического слоя на данном участке также равен нулю, т. е. создаваемое таким слоем магнитное поле в одной группе двухкатушечных зондов дает положительный сигнал, а в другой — сигнал, равный по величине, но обратный по знаку.

Очевидно, что радиальная дифференциальная характеристика многокатушечного зонда не зависит от распределения электропроводности в радиальном направлении, если внутри каждого цилиндрического слоя удельное сопротивление остается постоянным. В определении дифференциальной характеристики содержится элемент неопределенности, поскольку не указываются размеры оболочки. Поэтому возникает задача: установить максимальную толщину оболочки, геометрический фактор которой характеризуется функцией G_ρ . Геометрический фактор оболочки толщиной $\Delta\rho$ может быть представлен как разность геометрических факторов двух цилиндров с радиусами ρ_e и ρ_i (внешний и внутренний радиусы оболочки).

При достаточно тонкой оболочке, согласно (5.6), должно иметь место равенство

$$G_\rho(\alpha) = \frac{\Delta\rho}{\rho} \cdot \frac{1}{\alpha^2} C(\alpha) = Q_c(\alpha_e) - Q_c(\alpha_i). \quad (5.8)$$

Здесь $\alpha_e = \frac{L}{\rho_e}$; $\alpha_i = \frac{L}{\rho_i}$; $\alpha = \frac{L}{\rho}$, где L — длина зонда и

$$\rho = \frac{\rho_i + \rho_e}{2} \quad \left(\rho_e = \rho + \frac{\Delta\rho}{2}; \quad \rho_i = \rho - \frac{\Delta\rho}{2} \right).$$

Очевидно, что

$$\alpha_e = \alpha \frac{1}{1 + \frac{\Delta\rho}{2\rho}}; \quad \alpha_i = \alpha \frac{1}{1 - \frac{\Delta\rho}{2\rho}}.$$

Рассмотрим предельные случаи.

1. При $\rho \rightarrow 0$ $\alpha \rightarrow \infty$, $C(\alpha) \rightarrow 2$, $Q_c(\alpha) \rightarrow \frac{1}{\alpha^2}$, поэтому

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} \cdot \frac{2}{\alpha^2} = \frac{\Delta\rho}{\rho} \frac{2}{\alpha^2}.$$

Значит, если внешний радиус оболочки во много раз меньше длины зонда, то ее эквивалентность бесконечно тонкой оболочке не зависит от толщины этой оболочки*.

2. При $\rho \rightarrow \infty$ $\alpha \rightarrow 0$, $Q_c(\alpha) \rightarrow 1 - k\alpha$, $C(\alpha) = k\alpha^3$, поэтому

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} k\alpha \approx k(\alpha_i - \alpha_e),$$

или

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} \alpha \left[1 - \frac{1}{1 - \left[\frac{\Delta\rho}{2\rho} \right]^2} \right] \approx 0.$$

Это соотношение выполняется тем лучше, чем меньше отношение $\frac{\Delta\rho}{\rho}$.

Непосредственный расчет показывает, что при $\frac{\Delta\rho}{\rho} \leq 0,2$ условие (5.8) выполняется практически при всех значениях α , т. е. геометрический фактор оболочки описывается функцией G_ρ .

Вторая радиальная характеристика зонда — его интегральная характеристика (прямая и обратная).

* Здесь предполагается отсутствие скин-эффекта внутри оболочки.

Прямая интегральная радиальная характеристика определяет сигнал от цилиндра, отнесенный к сигналу от однородного пространства, как функцию расстояния от оси, на которой расположен зонд. Как известно, геометрический фактор скважины определяется функцией $Q_c(\alpha)$, где $\alpha = \frac{L}{a}$. Если вместо радиуса скважины a ввести переменный радиус ρ и длину зонда L считать постоянной, то функция $Q_c\left(\frac{\rho}{L}\right)$ является прямой интегральной характеристикой двухкатушечного зонда. При $\rho \rightarrow 0 \alpha \rightarrow \infty$, $Q_c(\alpha) \rightarrow \frac{1}{\alpha^2} = \frac{\rho^2}{L^2}$, т. е. геометрический фактор цилиндра вначале растет прямо пропорционально квадрату его радиуса и обратно пропорционально квадрату длины зонда. При $\rho \rightarrow \infty \alpha \rightarrow 0$, $Q_c(\alpha) \rightarrow 1 - k\alpha = 1 - k\frac{L}{\rho}$, т. е. пря-

мая радиальная характеристика стремится к единице. Коэффициент k , согласно расчетам, равен 0,586... и совпадает с соответствующим коэффициентом в выражении для дифференциальной характеристики при $\alpha \rightarrow 0$. Это легко можно установить, используя связь между характеристиками (5.8).

Обратная радиальная характеристика дает представление о той части среды, которая расположена вне цилиндра заданного радиуса и связана с функцией $Q_c(\alpha)$ соотношением $Q^{обр} = 1 - Q_c(\alpha)$. На рис. 5.2

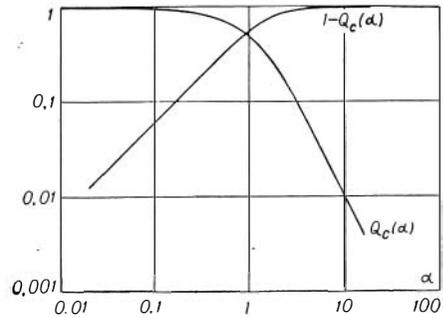


Рис. 5.2.

даны прямые и обратные интегральные характеристики двухкатушечного зонда. Графическим путем можно подбирать соответствующие характеристики для многокатушечных зондов. С точки зрения глубинности исследования прямая интегральная характеристика многокатушечного зонда должна удовлетворять двум требованиям. Ее значения вблизи зонда, во-первых, должны быть минимальны, во-вторых, медленно приближаться к своей асимптоте, которая для всех зондов равна единице.

Графический способ подбора радиальных характеристик многокатушечного зонда имеет ряд недостатков.

1. Процесс подбора параметров весьма трудоемок.

2. Точность получаемых малых значений геометрического фактора в начальной части характеристики обычно очень низкая. Особенно это становится заметным при переходе к неоднородной среде, например к двухслойному разрезу, в котором буровой раствор более проводящий, чем пласт. В этих условиях фокусирующие свойства зонда могут оказаться недостаточными, чтобы практически полностью исключить влияние скважины или промежуточной зоны в трехслойном разрезе, особенно при понижающем проникновении фильтра бурового раствора. Поэтому фиксирующие свойства многокатушечного зонда, параметры которого выбраны графическим путем, проявляются, как правило, только при относительно небольших отношениях $\frac{\rho_{п}}{\rho_c}$.

3. С увеличением числа датчиков зонда становится все труднее подбор параметров.

4. При графическом способе отсутствует возможность выбора оптимальных параметров, когда одновременно с уменьшением сигнала от

скважины и промежуточной зоны обеспечивается максимум сигнала от более удаленной части пласта.

5. Способ наложения радиальных характеристик двухкатушечных зондов практически не позволяет получить зонды, чувствительные только к отдельным участкам среды, в частности установки, решающие такие же задачи, как микрозонды в методах постоянного тока.

Аналитический способ анализа и расчета параметров многокатушечного зонда устраняет некоторые из вышеперечисленных недостатков, свойственных графическому методу, предложенному Доллем.

§ 3. АНАЛИТИЧЕСКИЙ СПОСОБ ПОДБОРА ПАРАМЕТРОВ МНОГОКАТУШЕЧНОГО ЗОНДА

Э. д. с., создаваемая токами, индуцированными в среде, в измерительной цепи двухкатушечного зонда может быть представлена в виде

$$\varepsilon = h_z \varepsilon^{\text{нр}} = \frac{\mu \omega L^2}{2} \gamma_{\text{к}} \varepsilon^{\text{нр}}, \quad (5.9)$$

где

$$\varepsilon^{\text{нр}} = \frac{M_{\Gamma} M_{\text{н}} \omega \mu}{2\pi L^3},$$

или

$$\varepsilon = \frac{\omega^2 \mu^2 M_{\Gamma} M_{\text{н}}}{4\pi} \cdot \frac{1}{L} \gamma_{\text{к}}. \quad (5.10)$$

Здесь $\gamma_{\text{к}} = \sum_{i=1}^n \gamma_i Q_i$, где γ_i и Q_i — удельная проводимость и геометрический фактор i -го участка среды. Пусть зонд состоит из s генераторных и t измерительных катушек, тогда он может быть представлен как система, состоящая из st двухкатушечных зондов, и э. д. с., наводимая в измерительной цепи этого многокатушечного зонда, записывается в виде двойной суммы

$$\varepsilon = \sum_{\alpha=1}^s \sum_{\beta=1}^t \varepsilon_{\alpha\beta}. \quad (5.11)$$

(α — генераторная катушка; β — измерительная катушка).

Согласно формулам (5.10) и (5.11),

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon^2 \mu^2}{4\pi} \sum_{\alpha=1}^s \sum_{\beta=1}^t \left[\frac{M_{\Gamma\alpha} M_{\text{н}\beta}}{L_{\alpha\beta}} \sum_{i=1}^n \gamma_i Q_i (L_{\alpha\beta}) \right]. \quad (5.12)$$

Таким образом, например, подбор параметров многокатушечного зонда, исключая влияние k произвольных участков среды, сводится к решению системы из k уравнений

$$\sum_{\alpha=1}^k \sum_{\beta=1}^s \sum_{\gamma=1}^t \frac{M_{\Gamma\alpha} M_{\text{н}\beta}}{L_{\alpha\beta}} Q_i (L_{\alpha\beta}) = 0. \quad (5.13)$$

Параметры зонда — длины двухкатушечных зондов и моменты катушек.

Число уравнений можно взять равным числу неизвестных параметров или большим. В последнем случае, если система линейная, может быть применен метод наименьших квадратов или, в более общем случае, — градиентные методы.

При выборе радиальной характеристики функция Q_i является геометрическим фактором тонкого цилиндрического слоя (дифференциальная характеристика) или геометрическим фактором цилиндра (интегральная характеристика).

Аналитический способ применим не только для выбора параметров, но и удобен для анализа известных многокатушечных систем, например ИК-1, ИК-2, ПИК и трехкатушечных зондов. Особенно простой вид приобретает система, когда установка состоит из одной генераторной катушки, а остальные катушки — измерительные (или наоборот), т. е. система уравнений становится линейной относительно моментов катушек.

Формулировка задачи выбора параметров аналитическим методом дает возможность сделать следующий шаг в развитии теории многокатушечных зондов, а именно наметить пути решения задачи о выборе оптимальных параметров зонда, обеспечивающих, с одной стороны, необходимую глубинность исследования либо чувствительность только к определенному участку среды, с другой стороны — максимальный сигнал от этих участков. При исследовании дифференциальной характеристики соотношение (5.13), согласно формуле (5.6), можно представить в виде

$$\sum_{i=1}^k \sum_{\alpha=1}^s \sum_{\beta=1}^t \frac{M_{\Gamma\alpha} M_{\Pi\beta}}{L_{\alpha\beta}} \frac{1}{\alpha_i^2} C(\alpha_i) = 0. \quad (5.14)$$

Значения функции $C(\alpha_i)$ приведены в табл. 5.1.

Из выражения для э. д. с. в многокатушечном зонде и в соответствии с определением интегральной радиальной характеристики имеем

$$Q = \frac{\sum_{\alpha=1}^s \sum_{\beta=1}^t \frac{M_{\Gamma\alpha} M_{\Pi\beta}}{L_{\alpha\beta}} Q_c \left(\frac{L_{\alpha\beta}}{\rho} \right)}{\sum_{\alpha=1}^s \sum_{\beta=1}^t \frac{M_{\Gamma\alpha} M_{\Pi\beta}}{L_{\alpha\beta}}}. \quad (5.15)$$

Здесь $Q_c \left(\frac{L_{\alpha\beta}}{\rho} \right)$ — геометрический фактор цилиндра радиуса ρ для двухкатушечного зонда длиной $L_{\alpha\beta}$. В знаменателе стоит сумма, создаваемая токами в однородной среде и пропорциональная э. д. с. в многокатушечном зонде.

Формула (5.15) может быть также использована для расчета радиальных характеристик многокатушечных зондов в разрезах, неоднородных в магнитном отношении.

§ 4. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФОКУСИРОВКИ

До сих пор предполагалось, что между токами отсутствует взаимодействие, т. е. все токи, индуцированные в проводящей неоднородной среде, независимо от расстояния до источника, сдвинуты по фазе на 90° . Поэтому э. д. с., наводимые в измерительных катушках зонда, находятся в фазе друг с другом и складываются или вычитаются так же, как скаляры, а не как векторы. Если измеряется только одна компонента э. д. с., например активная, то над нею производятся те же операции, что и над скалярами, независимо от того, сдвинуты ли токи по фазе на 90° , или проявляется внутренний скин-эффект, в результате которого в каждой точке среды имеется как активная, так и реактивная компонента тока. Однако

в последнем случае величина плотности тока зависит не только от первичного магнитного потока, но и от интенсивности токов в соседних участках, т. е., по существу, от распределения электропроводности в среде. Фактически это приводит к тому, что величина геометрических факторов становится иной, чем это следует из теории предельно малого параметра, когда пренебрегается скин-эффектом. Поэтому фокусирующие свойства зонда, в основе расчета которых лежит предположение об отсутствии взаимодействия между токами, могут в реальных условиях практически исчезнуть.

Степень влияния скин-эффекта зависит от частоты поля, распределения удельных сопротивлений и линейных размеров установки. Учесть искажающее действие скин-эффекта на величину геометрических факторов не представляется возможным до тех пор, пока не будет решена прямая задача метода в данной среде, что, естественно, сводит на нет практическую ценность исследования с такими зондами. Поэтому необходимое условие применения фокусирующих зондов — отсутствие взаимодействия между токами в тех участках среды, влияние которых должно быть значительно уменьшено. Иными словами, эти участки среды должны находиться в «области Долля», где плотность тока определяется первичным магнитным потоком и удельной электропроводностью в данной точке. При выборе зондов с повышенной в радиальном направлении глубиной исследования нужно исключить влияние близлежащих к источнику поля участков среды. Как показывают расчеты, это условие может быть выполнено и при достаточно высоких частотах.

Однако отсутствия скин-эффекта в ближней области, влияние которой надо исключить, еще недостаточно для эффективности действия многокатушечного зонда. Действительно, представим сигнал в зонде как сумму сигналов от ближней зоны, где отсутствует взаимодействие токов, и от пласта. Мы знаем, что по мере удаления от источника все сильнее проявляется скин-эффект и в общем случае распределение токов в пласте зависит от величин токов в ближней зоне. Поэтому, если даже удается исключить сигнал от токов в тех участках среды, влияние которых надо уменьшить, все равно их влияние может проявляться косвенно, изменяя распределение токов в пласте. В этом случае сигнал от пласта является функцией не только электропроводности пласта, но и зависит от распределения удельной проводимости внутри ближней зоны, в частности от удельного сопротивления бурового раствора скважины и промежуточной зоны. Следовательно, второе требование при выборе частоты для многокатушечного зонда состоит в том, чтобы сигнал от пласта не зависел от токов в ближней зоне, т. е. чтобы скин-эффект в пласте проявился так же, как и в однородной среде с удельным сопротивлением пласта. Поскольку известна связь между сигналом и удельной проводимостью в однородной среде, то учет влияния скин-эффекта на величину γ_k осуществляется непосредственно в процессе градуировки зонда с помощью колец, рассчитанных с учетом скин-эффекта, или при измерениях в баках с водой, удельное сопротивление которой соответствует реальным условиям.

Итак, для эффективности фокусировки многокатушечных систем, имеющих повышенную глубину исследования, частота должна быть выбрана так, чтобы было обеспечено выполнение двух условий.

1. Область среды, в которую входят скважина и промежуточная зона, должна быть «областью Долля», т. е. токи, индуцированные в ней, сдвинуты по фазе на 90° и определяются изменением первичного магнитного потока и электропроводностью в данной точке.

2. В остальной части среды (в пласте) явление скин-эффекта должно проявляться так же, как в однородной среде с удельным сопротивлением

пласта, иными словами, должно отсутствовать взаимодействие между токами ближней зоны и токами в пласте.

Сопоставление результатов расчета по приближенной теории (стр. 76) с результатами строгого расчета позволяет установить максимальные частоты, при которых для данного распределения удельных сопротивлений выполняются оба условия.

Как показывают расчеты электромагнитного поля вертикального магнитного диполя в пластах конечной мощности (стр. 152), в реальных условиях нужны очень низкие частоты (значительно меньше применяемых в настоящее время в индукционном каротаже), при которых сигнал от пласта и вмещающей среды был бы таким, как это следует из теории Долля. Поэтому в данном случае особенно важно исследование влияния частоты, удельной проводимости среды на фокусирующие свойства зонда. Поскольку с увеличением частоты вертикальная характеристика двухкатушечного зонда становится лучше, то едва ли при этом будет ухудшаться вертикальная характеристика многокатушечного зонда. Примеры, приведенные ниже, иллюстрируют положительную роль частоты с точки зрения уменьшения влияния вмещающих пород.

§ 5. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ И РАСЧЕТНЫЕ РАДИАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗОНДОВ

Камерное и кольцевое моделирование дает возможность определить сигнал в модели изучаемого зонда, расположенного на оси цилиндра, в зависимости от радиуса цилиндра при фиксированной частоте и удельной проводимости среды. При этом пространство, окружающее цилиндр, имеет бесконечно большое сопротивление. Результаты измерения представляются в следующем виде: по оси абсцисс откладывается отношение радиуса или диаметра цилиндра к длине зонда, по оси ординат — отношение величины ε д. с., созданной токами в цилиндре радиуса ρ , к ε д. с. от всего однородного пространства, имеющего такое же удельное сопротивление, как и удельное сопротивление цилиндра. Примером экспериментальной радиальной характеристики может служить прямая интегральная характеристика четырехкатушечного зонда аппаратуры ИК-2, приведенная в работе [11]. Естественно, возникает вопрос, в какой мере эта характеристика позволяет получить представление о фокусирующих свойствах зонда и о поведении поля в неоднородной среде при произвольном изменении сопротивления в радиальном направлении. До тех пор, пока сигнал от цилиндрического проводника не зависит от токов, индуцированных во внешней среде (независимо от ее сопротивления), эта функция может быть использована для определения эффективности фокусировки зонда как в однородной, так и неоднородных средах. Чем ниже частота и выше удельное сопротивление, тем при больших значениях радиуса цилиндра радиальная характеристика достаточно точно описывает поведение поля в неоднородной среде. Но если частота и удельная проводимость среды, заполняющей цилиндр, настолько велики, что в нем проявляется скин-эффект, то эта характеристика не отражает фактического поведения поля как в однородной среде с удельным сопротивлением цилиндра, так и в неоднородной среде.

Поэтому радиальная характеристика, полученная экспериментальным или расчетным путем, может быть полезна для анализа зонда, если отсутствует скин-эффект в цилиндре и можно пренебречь взаимодействием между токами во внешней и внутренней областях.

На рис. 5.3 изображены прямые интегральные характеристики для двухкатушечного и четырехкатушечного зондов аппаратуры ИК-2. Шифр кривых — произведение $\gamma\omega$, где

$$\mu = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{ЗН}}{\text{М}}; \quad \omega = 2\pi f; \quad \gamma = \gamma [\text{ОММ}^{-1}].$$

Как видно из рис. 5.3, чем выше частота и ниже удельное сопротивление среды, тем большее влияние оказывают близлежащие участки среды. Это понятно, так как с увеличением произведения γf заметнее становится явление скин-эффекта и уменьшается сигнал от всей среды, в то время как от близлежащих участков среды сигнал практически не ослабевает. Поэтому расхождение с радиальной характеристикой, рассчитанной без учета взаимодействия между токами, начинается с самого начала. Анализ

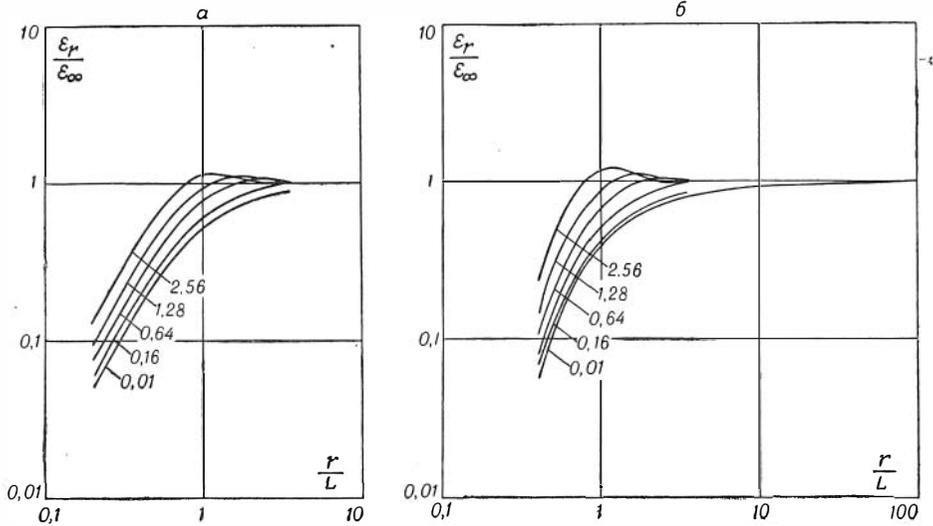


Рис. 5.3. Радиальные характеристики двухкатушечного (а) и четырехкатушечного (б) зондов.

радиальной характеристики зонда, по-видимому, следует рассматривать как первый, весьма приближенный, этап в исследовании фокусирующих свойств зонда, расположенного в неоднородных средах с цилиндрическими границами. Особенно он полезен, когда экспериментальным путем снимается радиальная характеристика реального зонда, главным образом участков среды, в которых отсутствует практически скин-эффект, а удельное сопротивление окружающих пород достаточно высоко, так что токи в них не оказывают влияния на эти участки. Вместе с тем наиболее полное представление о поведении зонда может быть получено только на основании анализа строгого расчета магнитного поля на оси скважины в неоднородной среде или путем моделирования.

§ 6. СИММЕТРИЧНЫЕ ЗОНДЫ

Из известных симметричных зондов в практике применяются четырехкатушечные, состоящие из основных и фокусирующих катушек, расположенных симметрично относительно центра зонда. Фокусирующие измерительная и генераторная катушки включены последовательно с измерительной и генераторной катушками основного зонда, но с противопо-

ложным направлением витков. При этом возможно получение фокусирующих зондов четырех типов в зависимости от расположения фокусирующих катушек (рис. 5.4). Измерительная и генераторная катушки основного зонда обозначены соответственно И и Г, фокусирующего зонда — I_{Φ} и Γ_{Φ} . Весь сигнал зонда складывается из сигнала от основной пары катушек ИГ, катушек $I_{\Phi}\Gamma$ и $I\Gamma_{\Phi}$ и, наконец, $I_{\Phi}\Gamma_{\Phi}$, причем сигналы от пар катушек $I_{\Phi}\Gamma$ и $I\Gamma_{\Phi}$ вычитаются из основного сигнала, так как фокусирующие катушки включены навстречу основным; сигнал от пары катушек $I_{\Phi}\Gamma_{\Phi}$ положителен, поскольку в обеих катушках одинаковое направление витков. Под длиной зонда будем по-прежнему понимать расстояние между основными катушками зонда.

Из числа симметричных четырехкатушечных зондов наиболее распространены зонды с внутренним расположением фокусирующих зондов, например зонды аппаратуры ИК-1—2. Эти зонды определяются тремя параметрами: расстоянием между основными катушками, отношением длины фокусирующего зонда $I\Gamma_{\Phi}$ к длине основного зонда, которое обозначим через p , и отношением моментов фокусирующих катушек к моменту основных катушек (параметр c).

Для симметричного зонда произведение моментов в одной половине зонда равно произведению моментов в другой и, в частности, можно при расчетах считать, что $M_{\Gamma} = M_{\Gamma_{\Phi}}$; $M_{\Gamma} = M_{I_{\Phi}}$. Помимо катушек, предназначенных для улучшения радиальной характеристики, в зонд вводится пятая катушка для компенсации э. д. с. первичного поля в воздухе, которая незначительно изменяет его фокусирующие свойства. В рассматриваемых зондах с помощью графического метода подбора и моделирования были выбраны следующие значения параметров: $p = 0,4$, $c = 0,05$, длина зонда аппаратуры ИК-1 1,6 м, для ИК-2 1,2 м [11].

Ниже рассматриваются основные свойства этих зондов, вначале в рамках теории предельно малого параметра, а затем — с использованием строгих расчетов в средах с цилиндрическими и горизонтальными поверхностями раздела.

Интегральная характеристика зонда

На основании расчетов с датчиками конечных размеров (стр. 110) было показано, что катушки в рассматриваемых зондах можно считать точечными. Поэтому сигнал в симметричном четырехкатушечном зонде может быть записан в виде

$$\varepsilon = \varepsilon_{\Gamma\Gamma} - 2\varepsilon_{\Gamma I_{\Phi}} + \varepsilon_{I_{\Phi}\Gamma_{\Phi}} = \frac{\omega^2 \mu^2 M_{\Gamma} M_{\Gamma_{\Phi}}}{4\pi L_0} \times \left\{ \sum \gamma_i \left[Q_i(\alpha) - \frac{2c}{p} Q_i(p\alpha) + \frac{c^2}{1-2p} Q_i\{(1-2p)\alpha\} \right] \right\}. \quad (5.16)$$

Здесь L_0 — длина основного зонда ИГ;

pL_0 — длина зонда $I_{\Phi}\Gamma$;

$(1-2p)L_0$ — длина зонда $I\Gamma_{\Phi}$.

В однородной среде

$$\varepsilon_{одн} = \frac{\omega^2 \mu^2 M_{\Gamma} M_{\Gamma_{\Phi}}}{4\pi L_0} \gamma \left(1 - \frac{2c}{p} + \frac{c^2}{1-2p} \right),$$

так как геометрические факторы всей среды для двухкатушечных зондов $Q_i(\alpha)$, $Q_i(p\alpha)$ и $Q_i\{(1-2p)\alpha\}$ равны единице (α — отношение длины основ-

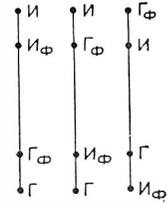


Рис. 5.4.

ного зонда к радиусу цилиндра, на оси которого расположен зонд). Таким образом, коэффициент зонда равен

$$k_s = \frac{4\pi L_0'}{\omega^2 \mu^2 M_\Gamma M_H \left(1 - \frac{2c}{p} + \frac{c^2}{1-2p}\right)}, \quad (5.17)$$

и геометрический фактор от всего пространства равен единице, так же как для двухкатушечного зонда. Поэтому выражение для γ_k имеет вид

$$\gamma_k = \sum \gamma_i Q_i^\zeta = k_s \varepsilon, \quad (5.18)$$

где

$$Q_i^\zeta = \frac{Q_i(\alpha) - \frac{2c}{p} Q_i(p\alpha) + \frac{c^2}{1-2p} Q_i[(1-2p)\alpha]}{1 - \frac{2c}{p} + \frac{c^2}{1-2p}}. \quad (5.19)$$

Эта функция, в частности, представляет собой геометрический фактор цилиндра для четырехкатушечного зонда с параметрами p , c и α , т. е. является его интегральной радиальной характеристикой. Нормализация геометрического фактора Q_c^ζ позволяет сравнивать радиальные характеристики различных зондов.

Исследуем поведение функции $Q_c^\zeta(\alpha)$ в зависимости от радиуса цилиндра $\rho \left(\alpha = \frac{L_0}{\rho}\right)$. При $\rho \rightarrow 0$ ($\alpha \rightarrow \infty$)

$$Q_c(\alpha) \rightarrow \frac{1}{\alpha^2}; \quad Q_c(p\alpha) \rightarrow \frac{1}{p^2 \alpha^2}; \quad Q_c[(1-2p)\alpha] \rightarrow \frac{1}{(1-2p)^2 \alpha^2}.$$

Подставляя эти значения в формулу (5.19), имеем

$$Q_c^\zeta \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{2c}{p^3} + \frac{c^2}{(1-2p)^3}}{1 - \frac{2c}{p} + \frac{c^2}{1-2p}} \cdot \frac{1}{\alpha^2} = k_1 \frac{1}{\alpha^2}, \quad (5.20)$$

где

$$k_1 = \frac{1 - \frac{2c}{p^3} + \frac{c^2}{(1-2p)^3}}{1 - \frac{2c}{p} + \frac{c^2}{1-2p}}.$$

Следовательно, чем меньше коэффициент k_1 , тем меньше значение геометрического фактора зонда для области, непосредственно окружающей зонд. С другой стороны, э. д. с. прямого поля, наведенная в измерительной цепи токами в генераторных катушках, равна

$$\varepsilon_{пр} = \frac{\omega \mu M_\Gamma M_H}{2\pi L_0^3} \left(1 - \frac{2c}{p^3} + \frac{c^2}{(1-2p)^3}\right). \quad (5.21)$$

Поэтому степень компенсации э. д. с. прямого поля определяет величину коэффициента k_1 : чем больше длина двухкатушечных зондов, входящих в состав «нулевого»* четырехкатушечного зонда, тем больше радиус цилиндра, геометрический фактор которого мал. При $p = 0,4$ и $c = 0,05$ коэффициент $k_1 = 0,32$. При введении пятой компенсационной катушки коэффи-

* Зонд, первичная э. д. с. которого равна нулю.

коэффициент k_1 становится равным нулю и несколько улучшается радиальная характеристика в ее начальной части. При $\rho \rightarrow \infty$ ($\alpha \rightarrow 0$)

$$Q_c(\alpha) \rightarrow 1 - k\alpha; \quad Q_c(\rho\alpha) \rightarrow 1 - k\rho\alpha;$$

$$Q_c[(1-2\rho)\alpha] \rightarrow 1 - k(1-2\rho)\alpha,$$

где $k \approx 0,586$

Подставляя эти выражения в формулу (5.19), имеем

$$Q^* = 1 - k \frac{1-2c+c^2}{1-\frac{2c}{\rho} + \frac{c^2}{1-2\rho}} \alpha = 1 - k k_2 \alpha. \quad (5.22)$$

Здесь

$$k_2 = \frac{1-2c+c^2}{1-\frac{2c}{\rho} + \frac{c^2}{1-2\rho}}. \quad (5.23)$$

Коэффициент k_2 больше единицы, поэтому радиальная характеристика приближается к своей асимптоте медленнее, чем характеристика двухкатушечного зонда, т. е. четырехкатушечный зонд обладает большей глубиной исследования по сравнению с основным двухкатушечным зондом. При $\rho = 0,4$ и $c = 0,05$ $k_2 \approx 1,2$. Функция $k k_2 \alpha$ определяет при малых значениях α долю сигнала от среды, внешней по отношению к цилиндру.

На рис. 5.5 представлена интегральная характеристика четырехкатушечного зонда при $\rho = 0,4$; $c = 0,05$. Независимо от длины основного зонда радиальные характеристики четырехкатушечных симметричных зондов с параметрами $\rho = 0,4$; $c = 0,05$ описываются одной и той же функцией $Q^*\left(\frac{\rho}{L_0}\right)$. Поэтому можно одновременно рассматривать характеристики зондов ИК-1 и ИК-2, отличающихся только длиной L_0 . В отличие от двухкатушечного зонда вначале кривая идет ниже оси, т. е. начальные участки вносят небольшие, но отрицательные сигналы; при $\frac{\rho}{L_0} \approx 0,27$ пересекает ось и затем начинает расти, асимптотически приближаясь к единице. Значит, цилиндрическая область, радиус которой около $0,3L_0$, вносит незначительный сигнал, если только ее удельная проводимость не во много раз больше удельной проводимости внешней части среды.

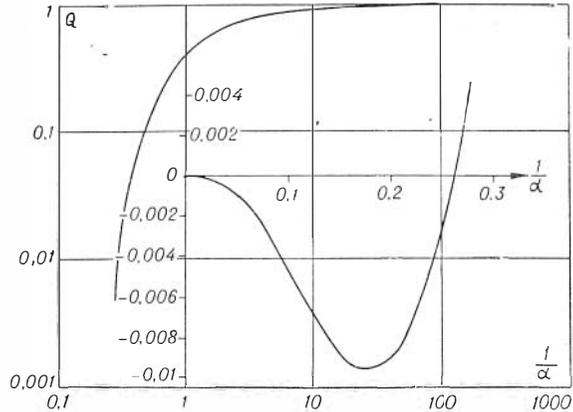


Рис. 5.5. Геометрический фактор для четырехкатушечного зонда ($\rho = 0,4$; $c = 0,05$).

Дифференциальная характеристика зонда

Согласно формуле (5.16), э. д. с. в измерительной цепи зонда, созданная токами в тонком цилиндрическом слое, записывается в виде

$$\varepsilon = \frac{\omega^2 \mu^2}{4\pi} \frac{M_\Gamma M_{II}}{L_0} \gamma \left\{ G_p(\alpha_0) - \frac{2c}{\rho} G_p(\rho\alpha_0) + \frac{c^2}{1-2\rho} G_p[(1-2\rho)\alpha_0] \right\}, \quad (5.24)$$

где $G_p(\alpha) = \frac{\Delta\rho}{\rho} \frac{1}{\alpha^2} C(\alpha)$. Значения функции $C(\alpha)$ приведены в табл. 5.1. Формулу (5.24) представим в виде

$$\varepsilon = \frac{1}{k_1} \gamma G_p^\xi,$$

где

$$G_p^\xi = \frac{G_p(\alpha) - \frac{2c}{\rho} G_p(p\alpha) + \frac{c^2}{1-2\rho} G_p[(1-2\rho)\alpha]}{1 - \frac{2c}{\rho} + \frac{c^2}{1-2\rho}}. \quad (5.25)$$

Функция G_p^ξ является дифференциальной характеристикой четырехкатушечного зонда и определяет отношение сигнала от тонкого цилиндрического слоя к сигналу от однородной среды. Из формулы (5.25) имеем

$$G_p^\xi = \frac{C(\alpha_0) - \frac{2c}{\rho^3} C(p\alpha_0) + \frac{c^2}{(1-2\rho)^3} C[(1-2\rho)\alpha_0]}{1 - \frac{2c}{\rho} + \frac{c^2}{1-2\rho}} \cdot \frac{1}{\alpha_0^2} \frac{\Delta\rho}{\rho}. \quad (5.26)$$

Рассмотрим два способа разбиения среды на оболочки и соответственно две дифференциальные характеристики. В первом случае среда разбивается на оболочки равной толщины $\Delta\rho = \text{const}$, во втором случае отношение толщины оболочки к ее радиусу постоянно $\frac{\Delta\rho}{\rho} = \text{const}$. При равномерном разбиении функцию G_p^ξ удобно представить в виде

$$G_p^\xi = \frac{\Delta\rho}{L_0} \frac{C(\alpha_0) - \frac{2c}{\rho^3} C(p\alpha_0) + \frac{c^2}{(1-2\rho)^3} C[(1-2\rho)\alpha_0]}{\alpha_0 \left(1 - \frac{2c}{\rho} + \frac{c^2}{1-2\rho} \right)}. \quad (5.27)$$

Как известно (стр. 174), при $\alpha \rightarrow 0$ $C(\alpha) \rightarrow k\alpha^3$, при $\alpha \rightarrow \infty$ $C(\alpha) \rightarrow 2$. Поэтому при $\rho \rightarrow 0$ ($\alpha_0 \rightarrow \infty$)

$$G_p^\xi \rightarrow 2 \frac{\Delta\rho}{L_0} k_1 \cdot \frac{1}{\alpha_0};$$

$$G_{p_1}^\xi \rightarrow 2 \frac{\Delta\rho}{\rho} k_1 \cdot \frac{1}{\alpha_0^2}.$$

Вновь условие компенсации э. д. с. прямого поля обеспечивает минимум геометрического фактора цилиндрических слоев, непосредственно примыкающих к зонду.

При $\rho \rightarrow \infty$ ($\alpha \rightarrow 0$)

$$G_p^\xi \rightarrow \frac{\Delta\rho}{L_0} k k_2 \alpha_0^2; \quad (5.28)$$

$$G_{p_1}^\xi \rightarrow \frac{\Delta\rho}{\rho} k k_2 \alpha_0.$$

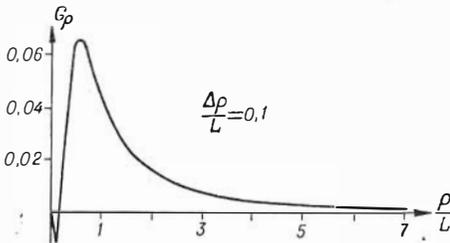


Рис. 5.6.

На рис. 5.6 приведены дифференциальные характеристики четырехкатушечного зонда ($p=0,4$ и $c=0,05$) при равномерном разбиении среды на оболочки. Согласно формуле (5.18), выражение для γ_k в трехслойной среде (скважина—промежуточная зона—пласт) имеет вид

$$\gamma_k = \gamma_c Q_c^\xi + \gamma_\Delta Q_\Delta^\xi + \gamma_n Q_n^\xi, \quad (5.29)$$

где

$$Q_c^{\xi} = \frac{Q_c(\alpha) - \frac{2c}{p} Q_c(p\alpha) + \frac{c^2}{1-2p} Q_c[(1-2p)\alpha]}{1 - \frac{2c}{p} + \frac{c^2}{1-2p}};$$

$$Q_{\Delta}^{\xi} = \frac{Q_{\Delta}(\alpha) - \frac{2c}{p} Q_{\Delta}(p\alpha) + \frac{c^2}{1-2p} Q_{\Delta}[(1-2p)\alpha]}{1 - \frac{2c}{p} + \frac{c^2}{1-2p}};$$

$$Q_n^{\xi} = \frac{Q_n(\alpha) - \frac{2c}{p} Q_n(p\alpha) + \frac{c^2}{1-2p} Q_n[(1-2p)\alpha]}{1 - \frac{2c}{p} + \frac{c^2}{1-2p}}.$$

Очевидно, что

$$Q_c^{\xi} + Q_{\Delta}^{\xi} + Q_n^{\xi} = 1$$

и

$$Q_{\Delta}^{\xi}(\alpha) = Q_c^{\xi}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) - Q_c(\alpha),$$

где β — отношение радиуса промежуточной зоны Q_{Δ} к радиусу скважины a_c ($\beta = \frac{Q_{\Delta}}{a_c}$).

Расчеты были выполнены для зонда аппаратуры ИК-2 ($L = 1,2$ м, $p = 0,4$, $c = 0,05$). При диаметре скважины $9\frac{3}{4}$ " длина зонда составляет десять радиусов скважины ($\alpha = 10$).

Двухслойный и трехслойный разрезы

Предположим, что отсутствует проникновение бурового раствора в пласт. Тогда

$$\gamma_k = \gamma_c Q_c^{\xi}(\alpha) + \gamma_n Q_n^{\xi}(\alpha).$$

Здесь $Q_c^{\xi} = -0,0045$; $Q_n^{\xi} = 1,0045$. Табл. 5.2 содержит значения $\frac{\gamma_k}{\gamma_c}$ для двухкатушечного зонда и зонда аппаратуры ИК-2 в зависимости от величины $\frac{\rho_n}{\rho_c}$. При небольшом отношении $\frac{\rho_n}{\rho_c}$ ($\frac{\rho_n}{\rho_c} < 10$) различие фокусирующих свойств двухкатушечного и четырехкатушечного зондов незначительно. Если электропроводность бурового раствора не превышает более

Т а б л и ц а 5.2

Зонды	γ_n / γ_c					
	0,500	0,250	0,125	0,0625	0,0313	0,0156
Двухкатушечный ($\alpha = 10$)	0,505	0,258	0,133	0,0724	0,0414	0,0259
Четырехкатушечный ($p = 0,4$, $c = 0,05$)	0,498	0,246	0,121	0,0580	0,0268	0,0111

Тип зонда		γ_{Π}									
		$\frac{a_{\Delta}}{a_c} = 2$							$\frac{a_{\Delta}}{a_c}$		
		1	0,500	0,250	0,125	0,0625	0,0313	0,0156	1,00	0,500	0,250
2-катушечный 4 »	$\frac{\gamma_{\Delta}}{\gamma_c} = \frac{1}{4}$	0,975 1,003	0,500 0,499	0,255 0,247	0,140 0,121	0,0800 0,0575	0,0500 0,0260	0,0330 0,0102	0,900 0,955	0,480 0,483	0,250 0,248
2 » 4 »	$\frac{\gamma_{\Delta}}{\gamma_c} = \frac{1}{8}$	0,980 1,004	0,500 0,499	0,250 0,247	0,132 0,121	0,0750 0,0580	0,0450 0,0265	0,0300 0,0107	0,986 0,947	0,475 0,475	0,240 0,239
2 » 4 »	$\frac{\gamma_{\Delta}}{\gamma_c} = \frac{1}{16}$	0,980 1,004	0,500 0,500	0,250 0,247	0,130 0,121	0,0720 0,0583	0,0430 0,0268	0,0280 0,0110	0,986 0,943	0,440 0,471	0,230 0,235
2 » 4 »	$\frac{\gamma_{\Delta}}{\gamma_c} = \frac{1}{32}$	1,000 1,004	0,500 0,500	0,250 0,248	0,129 0,122	0,0710 0,0584	0,0420 0,0269	0,0265 0,0111	0,986 0,941	0,440 0,469	0,230 0,233
2 » 4 »	$\frac{\gamma_{\Delta}}{\gamma_c} = \frac{1}{64}$	1,000 1,004	0,500 0,500	0,250 0,248	0,129 0,122	0,0710 0,0585	0,0420 0,0270	0,0260 0,0112	0,986 0,940	0,440 0,468	0,220 0,232

чем в 30 раз электропроводность пласта, то зонд ИК-2 практически полностью исключает влияние скважины*.

Независимо от удельного сопротивления промежуточной зоны ($4 \leq \frac{\rho_{\Delta}}{\rho_c} \leq 64$), если $\frac{\rho_{\Pi}}{\rho_c} \leq 30$, влияние токов в скважине и промежуточной зоне на показания зонда мало (табл. 5.3). При $\frac{\rho_{\Pi}}{\rho_c} \leq 10$ влияние промежуточной зоны на двухкатушечный зонд также мало. Поэтому при слабом проникновении раствора и небольшом отношении $\frac{\rho_{\Pi}}{\rho_c}$ величина γ_k с двухкатушечным зондом близка к истинной проводимости пласта, и в этих условиях роль фокусирующих свойств зонда, независимо от его типа, незначительна. С увеличением проникновения бурового раствора в пласт заметнее проявляются фокусирующие свойства зонда. Практически значения γ_k близки к γ_{Π} , если отношение $\frac{\rho_{\Pi}}{\rho_c}$ не меньше 1/20. При этом характер проникновения несущественно влияет на величину γ_k .

При глубоком проникновении раствора ($\frac{a_{\Delta}}{a_c} = 8,0$) фокусирующие свойства зонда не позволяют получить истинное удельное сопротивление пласта даже в том случае, когда буровой раствор и промежуточная зона отличаются более высоким сопротивлением, чем пласт. Это объясняется тем, что геометрический фактор пласта равен 0,700, поэтому при совершенно непроводящей промежуточной зоне и буровом растворе с $\gamma_c = 0$ кажущаяся проводимость отличается на 30% от истинной проводимости пласта. Повышение электропроводности скважины и промежуточной зоны несколько увеличивает γ_k , но, тем не менее, она остается почти во всех случаях меньше γ_{Π} .

До сих пор предполагалось, что во всех точках среды токи сдвинуты по фазе на 90° , т. е. отсутствует скин-эффект. Теперь рассмотрим резуль-

* Пятая, компенсационная, катушка несколько улучшает фокусирующие свойства зонда.

γ_c				$\frac{a\Delta}{a_c} = 8$						
= 4										
0,125	0,0625	0,0313	0,0156	1,000	0,500	0,250	0,125	0,0625	0,0313	0,0156
0,150 0,128	0,100 0,0696	0,0750 0,0401	0,0640 0,0253	0,700 0,764	0,405 0,418	0,260 0,248	0,172 0,158	0,1500 0,115	0,128 0,0931	0,120 0,0823
0,135 0,121	0,0830 0,0621	0,0570 0,0326	0,0430 0,0178	0,650 0,726	0,360 0,380	0,205 0,207	0,135 0,120	0,0975 0,0767	0,0800 0,0551	0,0650 0,0443
0,125 0,117	0,0730 0,0583	0,0485 0,0288	0,0330 0,0140	0,620 0,707	0,318 0,361	0,180 0,188	0,110 0,101	0,0720 0,0580	0,0530 0,0361	0,0450 0,0253
0,120 0,115	0,0680 0,0564	0,0420 0,0269	0,290 0,12	0,600 0,697	0,320 0,351	0,170 0,178	0,0960 0,0915	0,0600 0,0482	0,0420 0,0266	0,0322 0,0158
0,120 0,114	0,0650 0,0554	0,0400 0,0259	0,0250 0,0112	0,600 0,692	0,320 0,346	0,168 0,173	0,0920 0,0868	0,0550 0,0435	0,0360 0,0219	0,0250 0,0111

таты строгого решения задачи, основанные на расчетах электромагнитного поля на оси скважины в трехслойной среде для двухкатушечного зонда.

Э. д. с. в измерительной цепи четырехкатушечного симметричного зонда представляет собою сумму $\varepsilon = \varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3$. С другой стороны, $\varepsilon = h_z \varepsilon^{\text{пр}}$, где h_z — активная компонента поля, выраженная в единицах первичного поля и являющаяся результатом расчета; $\varepsilon_{\text{пр}}$ — э. д. с. первичного поля. Поэтому

$$\varepsilon = \varepsilon^{\text{пр}(1)} \left[h_z^{(1)} - 2h_z^{(2)} \cdot \frac{\varepsilon^{\text{пр}(2)}}{\varepsilon^{\text{пр}(1)}} + h_z^{(3)} \frac{\varepsilon^{\text{пр}(3)}}{\varepsilon^{\text{пр}(1)}} \right],$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon^{\text{пр}(2)}}{\varepsilon^{\text{пр}(1)}} &= \frac{\omega \mu M_{\Gamma} M_{\text{нф}}}{L_{\Gamma \text{нф}}^3} : \frac{\omega \mu M_{\Gamma} M_{\text{н}}}{L^3} = \frac{c}{\rho^3}; \\ \frac{\varepsilon^{\text{пр}(3)}}{\varepsilon^{\text{пр}(1)}} &= \dots = \frac{c^2}{(1-2\rho)^3}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Э. д. с. в измерительной цепи, отнесенная к э. д. с. в воздухе, для основного двухкатушечного зонда записывается в виде

$$h_z = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_B^{(1)}} = h_z^{(1)} - \frac{2c}{\rho^3} h_z^{(2)} + \frac{c^2}{(1-2\rho)^3} h_z^{(3)},$$

и соответственно выражение для $\gamma_{\text{к}}$ имеет вид

$$\frac{\gamma_{\text{к}}}{\gamma_c} = \frac{1}{1 - \frac{2c}{\rho} + \frac{c^2}{1-2\rho}} \left[\frac{\gamma_{\text{к}}^{(1)}}{\gamma_c} - \frac{2c}{\rho} \frac{\gamma_{\text{к}}^{(2)}}{\gamma_c} + \frac{c^2}{1-2\rho} \frac{\gamma_{\text{к}}^{(3)}}{\gamma_c} \right]. \quad (5.31)$$

Здесь $\frac{\gamma_{\text{к}}^{(1)}}{\gamma_c}$; $\frac{\gamma_{\text{к}}^{(2)}}{\gamma_c}$; $\frac{\gamma_{\text{к}}^{(3)}}{\gamma_c}$ — выражения для $\frac{\gamma_{\text{к}}}{\gamma_c}$ двухкатушечных зондов: основного — ГИ и фокусирующих — ГИ_ф и Г_фИ_ф. Одновременно будем

Таблица 5.4

$\frac{\rho_{\Pi}}{\rho_c}$	1,0		4,0		16,0		32,0	
$\gamma_{\Pi} \mu \omega a_c^2$	Расчет							
	строгий	приблж.	строгий	приблж.	строгий	приблж.	строгий	приблж.
$\frac{a_{\Delta}}{a_c} = 2, \quad \frac{\rho_{\Delta}}{\rho_c} = 8$								
1·10 ⁻⁴	0,940	0,949	0,233	0,233	0,0545	0,0546	0,0247	0,0248
2·10 ⁻⁴	0,924	0,924	0,228	0,227	0,0532	0,0533	0,0240	0,0240
4·10 ⁻⁴	0,892	0,894	0,219	0,220	0,0510	0,0510	0,0229	0,0230
8·10 ⁻⁴	0,848	0,849	0,208	0,208	0,0483	0,0484	0,0215	0,0216
16·10 ⁻⁴	0,785	0,785	0,192	0,193	0,0441	0,0442	0,0194	0,0196
32·10 ⁻⁴	0,700	0,698	0,171	0,171	0,0383	0,0385	0,0164	0,0169
64·10 ⁻⁴	0,585	0,583	0,141	0,142	0,0304	0,03070	0,0119	0,0133
$\frac{a_{\Delta}}{a_c} = 2, \quad \frac{\rho_{\Delta}}{\rho_c} = 16$								
1·10 ⁻⁴	0,950	0,950	0,233	0,234	0,0549	0,0550	0,0250	0,0250
2·10 ⁻⁴	0,924	0,925	0,227	0,228	0,0533	0,0534	0,0243	0,0244
4·10 ⁻⁴	0,892	0,893	0,220	0,221	0,0514	0,0515	0,0233	0,0234
8·10 ⁻⁴	0,847	0,848	0,208	0,209	0,0483	0,0484	0,0218	0,0219
16·10 ⁻⁴	0,786	0,788	0,192	0,193	0,0445	0,0446	0,0197	0,0200
32·10 ⁻⁴	0,700	0,701	0,171	0,172	0,0387	0,0388	0,0167	0,0168
64·10 ⁻⁴	0,585	0,586	0,142	0,143	0,0309	0,0310	0,0125	0,0126
$\frac{a_{\Delta}}{a_c} = 2, \quad \frac{\rho_{\Delta}}{\rho_c} = 32$								
1·10 ⁻⁴	0,947	0,947	0,234	0,235	0,0550	0,0552	0,0251	0,0252
2·10 ⁻⁴	0,924	0,924	0,228	0,229	0,0536	0,0536	0,0244	0,0244
4·10 ⁻⁴	0,893	0,894	0,220	0,221	0,0515	0,0516	0,0234	0,0235
8·10 ⁻⁴	0,847	0,848	0,209	0,210	0,0485	0,0486	0,0219	0,0220
16·10 ⁻⁴	0,785	0,785	0,193	0,194	0,0446	0,0446	0,0199	0,0200
32·10 ⁻⁴	0,700	0,702	0,171	0,172	0,0388	0,0389	0,0169	0,0170
64·10 ⁻⁴	0,583	0,585	0,142	0,143	0,0312	0,0313	0,0127	0,0130
$\frac{a_{\Delta}}{a_c} = 2, \quad \frac{\rho_{\Delta}}{\rho_c} = 64$								
1·10 ⁻⁴	0,947	0,949	0,234	0,234	0,0550	0,0551	0,0252	0,0253
2·10 ⁻⁴	0,925	0,924	0,228	0,229	0,0537	0,0537	0,0245	0,0245
4·10 ⁻⁴	0,892	0,894	0,219	0,220	0,0514	0,0515	0,0234	0,0235
8·10 ⁻⁴	0,847	0,849	0,209	0,210	0,0485	0,0486	0,0220	0,0221
16·10 ⁻⁴	0,785	0,785	0,193	0,194	0,0446	0,0447	0,0199	0,0201
32·10 ⁻⁴	0,700	0,698	0,171	0,172	0,0390	0,0394	0,0170	0,0174
64·10 ⁻⁴	0,583	0,583	0,142	0,143	0,0313	0,0318	0,0128	0,0138
$\frac{a_{\Delta}}{a_c} = 4, \quad \frac{\rho_{\Delta}}{\rho_c} = 8$								
1·10 ⁻⁴	0,890	0,891	0,225	0,226	0,0589	0,0590	0,0311	0,0310
2·10 ⁻⁴	0,865	0,866	0,219	0,220	0,0572	0,0574	0,0303	0,0302
4·10 ⁻⁴	0,834	0,836	0,211	0,213	0,0552	0,0555	0,0292	0,0292
8·10 ⁻⁴	0,788	0,791	0,200	0,202	0,0522	0,0524	0,0277	0,0278
16·10 ⁻⁴	0,728	0,727	0,184	0,185	0,0482	0,0483	0,0256	0,0258
32·10 ⁻⁴	0,643	0,640	0,163	0,164	0,0422	0,0429	0,0219	0,0231
64·10 ⁻⁴	0,538	0,535	0,135	0,137	0,0340	0,0358	0,0164	0,0195
$\frac{a_{\Delta}}{a_c} = 4, \quad \frac{\rho_{\Delta}}{\rho_c} = 16$								
1·10 ⁻⁴	0,886	0,887	0,221	0,223	0,0548	0,0549	0,0272	0,0273
2·10 ⁻⁴	0,860	0,860	0,215	0,217	0,0525	0,0525	0,0264	0,0265
4·10 ⁻⁴	0,830	0,831	0,207	0,210	0,0514	0,0515	0,0253	0,0255
8·10 ⁻⁴	0,785	0,787	0,196	0,198	0,0481	0,0483	0,0239	0,0240
16·10 ⁻⁴	0,722	0,725	0,180	0,182	0,0445	0,0446	0,0217	0,0220
32·10 ⁻⁴	0,640	0,643	0,158	0,160	0,0388	0,0390	0,0187	0,0193
64·10 ⁻⁴	0,532	0,534	0,131	0,132	0,0309	0,0312	0,0141	0,0157
$\frac{a_{\Delta}}{a_c} = 4, \quad \frac{\rho_{\Delta}}{\rho_c} = 32$								
1·10 ⁻⁴	0,882	0,882	0,219	0,220	0,0524	0,0526	0,0251	0,0252
2·10 ⁻⁴	0,860	0,862	0,213	0,215	0,0510	0,0510	0,0244	0,0246
4·10 ⁻⁴	0,827	0,829	0,205	0,206	0,0493	0,0496	0,0234	0,0236
8·10 ⁻⁴	0,782	0,784	0,194	0,195	0,0465	0,0466	0,0219	0,0221
16·10 ⁻⁴	0,722	0,725	0,179	0,180	0,0425	0,0427	0,0198	0,0200
32·10 ⁻⁴	0,635	0,637	0,157	0,158	0,0371	0,0375	0,0169	0,0173
64·10 ⁻⁴	0,528	0,520	0,130	0,132	0,0294	0,0298	0,0127	0,0137

$\frac{\rho_{\Pi}}{\rho_c}$	1,0		4,0		16,0		32,0	
$\gamma_{\Pi} \mu \omega a_c^2$	Расчет							
	строгий	приближ.	строгий	приближ.	строгий	приближ.	строгий	приближ.
$\frac{a_{\Delta}}{a_c} = 4, \quad \frac{\rho_{\Delta}}{\rho_c} = 64$								
1·10 ⁻⁴	0,881	0,884	0,218	0,219	0,0518	0,0520	0,0242	0,0242
2·10 ⁻⁴	0,859	0,859	0,212	0,213	0,0503	0,0506	0,0234	0,0234
4·10 ⁻⁴	0,828	0,829	0,204	0,205	0,0483	0,0487	0,0224	0,0224
8·10 ⁻⁴	0,782	0,784	0,193	0,194	0,0457	0,0460	0,0209	0,0210
16·10 ⁻⁴	0,722	0,720	0,178	0,179	0,0415	0,0418	0,0189	0,0190
32·10 ⁻⁴	0,640	0,633	0,156	0,158	0,0362	0,0364	0,0161	0,0163
64·10 ⁻⁴	0,531	0,518	0,129	0,131	0,0288	0,0290	0,0120	0,0127
$\frac{a_{\Delta}}{a_c} = 8, \quad \frac{\rho_{\Delta}}{\rho_c} = 8$								
1·10 ⁻⁴	0,677	0,679	0,193	0,195	0,0740	0,0740	0,0538	0,0537
2·10 ⁻⁴	0,655	0,654	0,189	0,189	0,0722	0,0723	0,0530	0,0529
4·10 ⁻⁴	0,623	0,624	0,181	0,181	0,0704	0,0704	0,0519	0,0519
8·10 ⁻⁴	0,578	0,579	0,170	0,170	0,0675	0,0676	0,0503	0,0505
16·10 ⁻⁴	0,519	0,515	0,154	0,154	0,0628	0,0636	0,0469	0,0485
32·10 ⁻⁴	0,443	0,428	0,135	0,132	0,0558	0,0581	0,0412	0,0458
64·10 ⁻⁴	0,351	0,313	0,109	0,104	0,0452	0,0510	0,0290	—
$\frac{a_{\Delta}}{a_c} = 8, \quad \frac{\rho_{\Delta}}{\rho_c} = 16$								
1·10 ⁻⁴	0,657	0,660	0,175	0,176	0,0549	0,0549	0,0348	0,0347
2·10 ⁻⁴	0,635	0,635	0,170	0,170	0,0533	0,0533	0,0340	0,0339
4·10 ⁻⁴	0,603	0,605	0,161	0,162	0,0514	0,0514	0,0328	0,0329
8·10 ⁻⁴	0,558	0,560	0,151	0,151	0,0484	0,0486	0,0314	0,0315
16·10 ⁻⁴	0,501	0,496	0,136	0,135	0,0442	0,0446	0,0290	0,0295
32·10 ⁻⁴	0,425	0,409	0,116	0,113	0,0387	0,0391	0,0254	0,0268
64·10 ⁻⁴	0,334	0,294	0,0923	0,0850	0,0309	0,0320	0,0196	0,0232
$\frac{a_{\Delta}}{a_c} = 8, \quad \frac{\rho_{\Delta}}{\rho_c} = 32$								
1·10 ⁻⁴	0,648	0,650	0,166	0,166	0,0452	0,0454	0,0251	0,0252
2·10 ⁻⁴	0,625	0,625	0,160	0,160	0,0438	0,0438	0,0244	0,0244
4·10 ⁻⁴	0,595	0,595	0,152	0,152	0,0417	0,0419	0,0235	0,0234
8·10 ⁻⁴	0,551	0,550	0,141	0,141	0,0388	0,0391	0,0218	0,0220
16·10 ⁻⁴	0,492	0,486	0,126	0,125	0,0350	0,0351	0,0198	0,0200
32·10 ⁻⁴	0,417	0,400	0,108	0,103	0,0299	0,0296	0,0171	0,0173
64·10 ⁻⁴	0,326	0,284	0,0842	0,0775	0,0234	0,0225	0,0127	0,0137
$\frac{a_{\Delta}}{a_c} = 8, \quad \frac{\rho_{\Delta}}{\rho_c} = 64$								
1·10 ⁻⁴	0,643	0,646	0,161	0,161	0,0404	0,0407	0,0203	0,0204
2·10 ⁻⁴	0,621	0,621	0,155	0,155	0,0390	0,0391	0,0196	0,0196
4·10 ⁻⁴	0,588	0,591	0,147	0,147	0,0370	0,0372	0,0186	0,0186
8·10 ⁻⁴	0,544	0,546	0,137	0,136	0,0342	0,0344	0,0172	0,0172
16·10 ⁻⁴	0,487	0,482	0,122	0,120	0,0306	0,0304	0,0152	0,0152
32·10 ⁻⁴	0,412	0,395	0,103	0,098	0,0254	0,0250	0,0125	0,0125
64·10 ⁻⁴	0,324	0,280	0,080	0,070	0,0193	0,0178	0,00896	0,00890

рассматривать поле, э.д.с. и γ_K на основании приближенной теории, исходя из предположения, что в скважине и промежуточной зоне, независимо от ее размеров и величины удельного сопротивления, токи сдвинуты по фазе на 90°, а в пласте проявляется скин-эффект так же, как в однородной среде с удельным сопротивлением пласта. В этом случае, согласно (2.96),

$$\gamma_K = (\gamma_c - \gamma_{\Pi}) Q_c^{\xi} + (\gamma_{\Delta} - \gamma_{\Pi}) Q_{\Delta}^{\xi} + \gamma_K^{\text{одн}}$$

или

$$\frac{\gamma_K}{\gamma_c} = \left(1 - \frac{\gamma_{\Pi}}{\gamma_c}\right) Q_c^{\xi} + \left(\frac{\gamma_{\Delta}}{\gamma_c} - \frac{\gamma_{\Pi}}{\gamma_c}\right) Q_{\Delta}^{\xi} + \frac{\gamma_{\Pi}}{\gamma_c} \frac{\gamma_K^{\text{одн}}}{\gamma_{\Pi}}. \quad (5.32)$$

В табл. 5.4 приведены результаты строгого и приближенного расчетов $\frac{\gamma_k}{\gamma_c}$ по формулам (5.31) и (5.32).

В табл. 5.5 приведены значения $\frac{\gamma_k}{\gamma_{\Pi}}$ в однородной среде, а также значения $\frac{\gamma_k^{\text{одн}}}{\gamma_{\Pi}} \cdot \frac{\gamma_{\Pi}}{\gamma_c}$.

Таблица 5.5

$\frac{\rho_{\Pi}}{\rho_c} \backslash \gamma_{\Pi} \mu \omega \cdot a_c^2$	$1 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$8 \cdot 10^{-4}$	$16 \cdot 10^{-4}$	$32 \cdot 10^{-4}$	$64 \cdot 10^{-4}$	$128 \cdot 10^{-4}$
1	0,945	0,921	0,891	0,844	0,781	0,695	0,576	0,432
2	0,473	0,461	0,446	0,422	0,391	0,348	0,288	0,216
4	0,236	0,230	0,233	0,211	0,195	0,174	0,144	0,108
8	0,118	0,115	0,111	0,106	0,0976	0,0869	0,0720	0,0540
16	0,0590	0,0575	0,0557	0,0528	0,0488	0,0434	0,0360	0,0270
32	0,0295	0,0287	0,0278	0,0264	0,0244	0,0217	0,0180	0,0135
64	0,0148	0,0143	0,0139	0,0132	0,0122	0,0108	0,0090	0,0065

Примечание. $\alpha=10$, $L=1$ м.

Сопоставление с результатами расчета для предельно малых параметров показывает, что влияние скин-эффекта в низкоомных разрезах может значительно изменить величину $\frac{\gamma_k}{\gamma_c}$. Так, при $\frac{\rho_{\Delta}}{\rho_c} = 32$; $\frac{\rho_{\Pi}}{\rho_c} = 16$ и $\frac{D}{d} = 4$ величина $\frac{\gamma_k}{\gamma_c}$, рассчитанная по формулам теории Долля, равна 0,0564. Если частота поля 60 кГц и $\rho_{\Pi} = 1,1$ ом.м, то фактическое значение $\frac{\gamma_k}{\gamma_c}$ равно 0,0298, т. е. почти вдвое меньше.

Ослабление поля и соответственно уменьшение γ_k — результат главным образом скин-эффекта в пласте (для параметров, при которых рассматривается поле). Это следует из совпадения результатов строгих и приближенных расчетов, обусловленного тем, что в основе последних лежит предположение об отсутствии скин-эффекта в скважине и промежуточной зоне. Скин-эффект в данном случае не нарушает фокусирующих свойств зонда, поскольку изменение величины γ_k происходит так же, как в однородной среде с удельным сопротивлением пласта. Из данных расчета видно, что условия ближней зоны соблюдаются в широком диапазоне изменения удельных сопротивлений и размеров скважины и промежуточной зоны. Область этих параметров, где эффективны фокусирующие свойства зонда, более ограничена. Это дает возможность обоснованнее подойти к выбору частоты для данного типа зонда. Как известно, с увеличением частоты улучшается вертикальная характеристика зонда и можно производить измерения в более высокоомных породах. Однако неограниченное увеличение частоты может привести к тому, что, во-первых, появится многозначность при интерпретации* и, во-вторых, радиальная характеристика зонда окажется значительно хуже характеристики, рассчитанной в предположении отсутствия скин-эффекта. Сопоставление результатов строгого и приближенного расчетов определяет максимальную частоту, при которой еще отсутствует скин-эффект в скважине и промежуточной зоне, а в пласте скин-эффект проявляется так же, как в однородной среде с удельным сопротивлением пласта.

* Активная компонента сигнала как функция проводимости имеет максимум. Положение максимума для сред с цилиндрическими границами в основном определяется проводимостью пласта.

Можно считать, что максимально допустимая частота для зонда аппаратуры ИК-2, полученная указанным выше способом с учетом его радиальной характеристики, определяется из соотношения *

$$f \leq (2,0 \div 2,2) \rho_{\min} \cdot 10^5 \text{ гц.} \quad (5.33)$$

Если принять максимальное удельное сопротивление среды 1 *омм*, то частота поля может быть увеличена до 200—220 *кГц*.

Исследование фокусирующих свойств зонда ИК-2 в средах с цилиндрическими поверхностями раздела позволило установить область частот, удельных сопротивлений и размеры промежуточной зоны, токи в которой не влияют на величину измеряемого поля. При повышающем проникновении эта зона не превосходит четырех радиусов скважины, если $\frac{\rho_{\text{п}}}{\rho_{\text{с}}} \leq 20,0$, и становится меньше при понижающем проникновении раствора в пласт. Значит, при выполнении определенных условий величина $\gamma_{\text{к}}$ в пластах практически неограниченной мощности совпадает с кажущейся проводимостью в однородной среде, имеющей удельное сопротивление пласта $\gamma_{\text{к}}^{\text{одн}}$.

В более сложных случаях, когда на измеряемую величину э. д. с. влияет удельное сопротивление бурового раствора скважины, промежуточной зоны и ее диаметр, возникает необходимость составления палеток. Неизвестными здесь являются удельная проводимость промежуточной зоны, ее диаметр и удельная проводимость пласта: $\frac{\gamma_{\Delta}}{\gamma_{\text{с}}}$; $\frac{a_{\Delta}}{a_{\text{с}}}$; $\frac{\gamma_{\text{п}}}{\gamma_{\text{с}}}$. Поэтому палетку для интерпретации в пласте неограниченной мощности можно представить, например, в следующем виде: по оси абсцисс откладывается величина $\frac{\gamma_{\Delta}}{\gamma_{\text{с}}}$, по оси ординат $\frac{\gamma_{\text{к}}}{\gamma_{\text{с}}}$, шифр кривых $\frac{\gamma_{\text{п}}}{\gamma_{\text{с}}}$. Шифр палетки — удельное сопротивление бурового раствора $\rho_{\text{с}}$ и отношение $\frac{a_{\Delta}}{a_{\text{с}}}$. Для фиксированного удельного сопротивления $\rho_{\text{с}}$ должен быть набор, состоящий из нескольких палеток при различных значениях $\frac{a_{\Delta}}{a_{\text{с}}}$. Если с помощью иных способов исследования найдены γ_{Δ} и a_{Δ} , то соответственно определяется $\gamma_{\text{п}}$. Следовательно, общее количество палеток для интерпретации в средах с цилиндрическими границами может оказаться достаточно большим, чтобы их применение стало практически невозможным. Вместе с тем сочетание индукционного каротажа с другими методами исследования, особенно чувствительными к удельному сопротивлению и радиусу промежуточной зоны,— это, по-видимому, одно из направлений, с помощью которого удастся значительно упростить задачу определения основных параметров среды **.

Пласты ограниченной мощности

Часто необходимо составить палетки, учитывающие конечную мощность пласта. Без них не обойтись, например, тогда, когда электропроводность вмещающих пород выше электропроводности пласта. Были проведены расчеты для кажущейся проводимости, регистрируемой зондом ИК-2, расположенным симметрично относительно границ пласта (влияние скважины и промежуточной зоны не учитывалось). Вычисления $\gamma_{\text{к}}$ для

* Это соотношение не учитывает влияние ϵ , которое может оказаться заметным только в очень высокоомных средах.

** В США используется комплекс из индукционного, бокового и микрозондов.

$\rho_B = 1 \text{ ом}$

$\frac{H}{L} \backslash \frac{\gamma_{\Pi}}{\gamma_B}$	1,0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{128}$
1	0,56	0,42	0,34	0,31	—	—	0,27
$\sqrt{2}$	0,56	0,38	0,28	0,22	0,21	0,20	0,170
2	0,56	0,35	0,23	0,16	0,13	0,12	0,094
$2\sqrt{2}$	0,56	0,34	0,20	0,12	0,085	0,070	0,049
4,0	0,56	0,34	0,18	0,110	0,065	0,042	0,026
$4\sqrt{2}$	0,56	0,34	0,18	0,105	0,056	0,032	—
8	0,56	0,34	0,18	0,105	0,054	0,029	—
$8\sqrt{2}$	0,56	0,34	0,18	0,105	0,053	0,028	—
16	0,56	0,34	0,18	0,105	0,053	0,028	—

Таблица 5.7

 $\rho_B = 2 \text{ ом}$

$\frac{H}{L} \backslash \frac{\gamma_{\Pi}}{\gamma_B}$	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
1	0,99	0,68	0,51	0,42	0,37	—
$\sqrt{2}$	1,10	0,68	0,45	0,33	0,27	0,25
2	1,10	0,68	0,41	0,27	0,19	0,17
$2\sqrt{2}$	1,10	0,68	0,40	0,23	0,15	0,11
4,0	1,10	0,68	0,39	0,22	0,13	0,080
$4,0\sqrt{2}$	1,10	0,68	0,39	0,21	0,12	0,065
8,0	1,10	0,68	0,39	0,21	0,11	0,058
$8,0\sqrt{2}$	1,10	0,68	0,39	0,21	0,11	0,057
16	1,10	0,68	0,39	0,21	0,11	0,057

четырёхкатушечного зонда были выполнены путем суперпозиции данных расчета для двухкатушечных зондов. Как уже отмечалось,

$$\frac{\gamma_K}{\gamma_B} = \frac{1}{1 - \frac{2c}{\rho} + \frac{c^2}{1-2\rho}} \left[\frac{\gamma_K^{(1)}}{\gamma_B} - \frac{2c}{\rho} \frac{\gamma_K^{(2)}}{\gamma_B} + \frac{c^2}{1-2\rho} \frac{\gamma_K^{(3)}}{\gamma_B} \right].$$

Здесь $\frac{\gamma_K^{(1)}}{\gamma_B}$ и $\frac{\gamma_K^{(3)}}{\gamma_B}$ — величины $\frac{\gamma_K}{\gamma_B}$ для двухкатушечных зондов, располо-

женных симметрично относительно границ пласта; $\frac{\gamma_K^{(2)}}{\gamma_B}$ — величина $\frac{\gamma_K}{\gamma_B}$ для зонда, смещенного относительно центра пласта. Палетки для внесения поправок, учитывающих влияние конечной мощности пласта, помещены на рис. 5.7. По оси абсцисс отложена величина $\gamma_B \omega L^2$, по оси ординат — $\frac{\gamma_K}{\gamma_B}$.

Шифр кривых $\frac{\gamma_{\Pi}}{\gamma_B}$. Шифр палетки — отношение мощности пласта к длине зонда $\frac{H}{L}$. При фиксированной длине зонда и частоте поля ось абсцисс представляет собой ось, на которой нанесена электропроводность вмещающей среды.

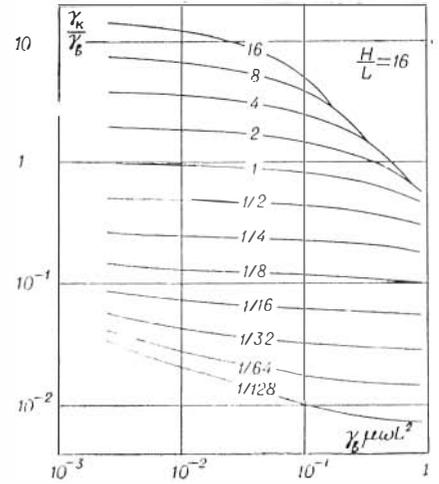
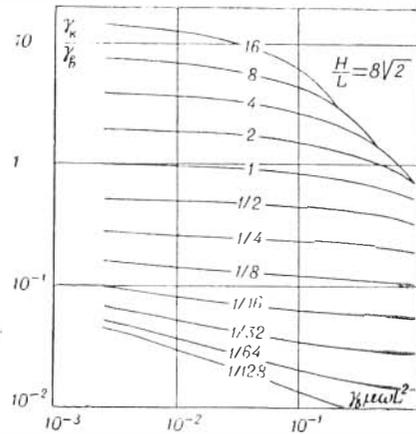
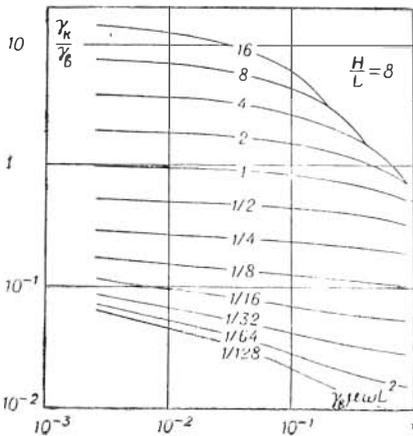
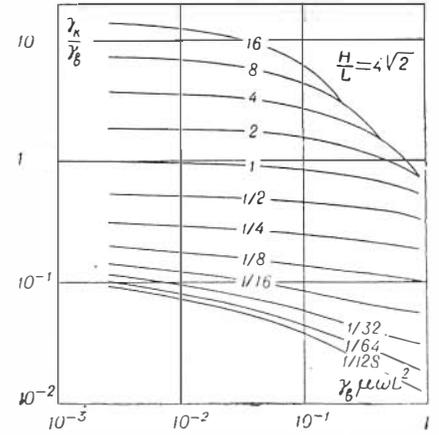
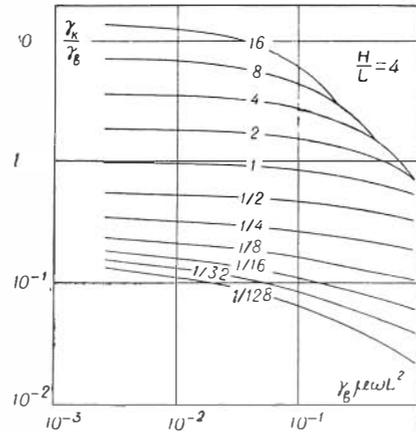
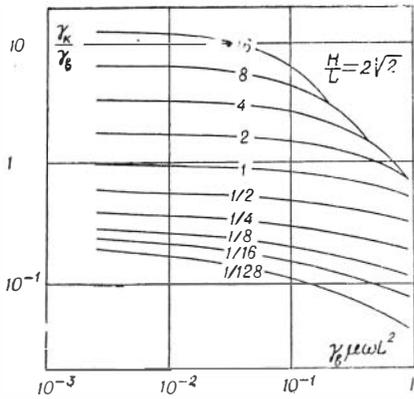
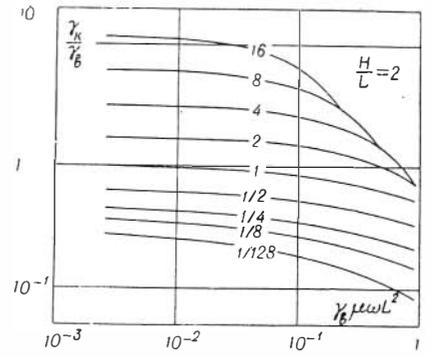
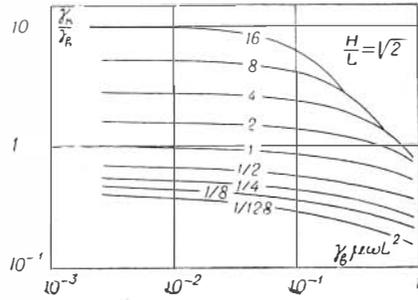
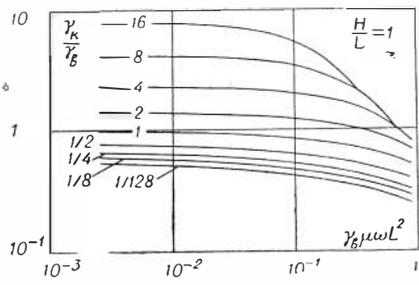


Рис. 5.7. Палетки ИК-2.

Таблица 5.8

$\rho_B = 4 \text{ мм}$

$\frac{H}{L} \backslash \frac{\gamma_{\Pi}}{\gamma_B}$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
1	1,80	1,18	0,77	0,58	0,48	0,420
$\sqrt{2}$	2,10	1,25	0,77	0,50	0,39	0,320
2	2,20	1,35	0,77	0,46	0,31	0,230
$2\sqrt{2}$	2,30	1,40	0,77	0,44	0,27	0,180
4,0	2,25	1,40	0,77	0,42	0,24	0,145
$4,0\sqrt{2}$	2,20	1,40	0,77	0,41	0,22	0,125
8,0	2,20	1,40	0,77	0,41	0,22	0,120
$8\sqrt{2}$	2,20	1,40	0,77	0,41	0,22	0,115
16	2,20	1,40	0,77	0,41	0,22	0,115

Таблица 5.9

$\rho_B = 8 \text{ мм}$

$\frac{H}{L} \backslash \frac{\gamma_{\Pi}}{\gamma_B}$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
1	3,40	2,00	1,25	0,85	0,63	0,55
$\sqrt{2}$	4,10	2,40	1,40	0,85	0,56	0,42
2	4,40	2,60	1,50	0,85	0,51	0,34
$2\sqrt{2}$	4,50	2,80	1,50	0,85	0,48	0,30
4,0	4,50	2,80	1,55	0,85	0,46	0,27
$4,0\sqrt{2}$	4,50	2,80	1,55	0,85	0,46	0,24
8,0	4,50	2,80	1,55	0,85	0,45	0,23
$8\sqrt{2}$	4,50	2,80	1,55	0,85	0,44	0,23
16	4,50	2,80	1,55	0,85	0,44	0,22

Таблица 5.10

$\rho_B = 16 \text{ мм}$

$\frac{H}{L} \backslash \frac{\gamma_{\Pi}}{\gamma_B}$	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$
1	6,6	3,8	2,3	1,3	0,90	0,68
$\sqrt{2}$	8,2	4,6	2,6	1,5	0,90	0,60
2	9,0	5,2	2,9	1,6	0,90	0,55
$2\sqrt{2}$	9,0	5,5	3,0	1,6	0,90	0,50
4,0	9,0	5,5	3,0	1,7	0,90	0,48
$4\sqrt{2}$	9,0	5,5	3,0	1,7	0,90	0,47
8,0	9,0	5,5	3,0	1,7	0,90	0,46
$8,0\sqrt{2}$	9,0	5,5	3,0	1,7	0,90	0,46
16	9,0	5,5	3,0	1,7	0,90	0,46

Если $f = 6 \cdot 10^4 \text{ гц}$; $L = 1,2 \text{ м}$, то $\gamma_B \mu \omega L^2 = 0,69 \gamma_B$, или $\gamma_B = 1,44 (\gamma_B \mu \omega L^2)$. Таким образом, удельная проводимость вмещающей среды изменяется на палетках от тысячных долей мм^{-1} до единицы и несколько больше. На каждой палетке нанесены два семейства кривых, разделенных кривой для однородной среды ($\frac{\gamma_{\Pi}}{\gamma_B} = 1$). Выше ее — кривые, соответствующие

пласту более проводящему, чем вмещающая среда. Максимальное отношение $\frac{\gamma_n}{\gamma_v} = 16$. Ниже расположено семейство кривых для более высокоомных пластов, минимальное отношение $\frac{\gamma_n}{\gamma_v} = \frac{1}{128}$. Значения $\frac{\gamma_k}{\gamma_v}$ при изменении удельного сопротивления среды от 1 до 32 *омм* см. в табл. 5.6—5.10. Если пласт более проводящий, чем вмещающая среда, и его мощность больше двух длин зондов, то значение кажущейся проводимости практически совпадает с γ_k в однородной среде с удельным сопротивлением пласта. При этом изменение удельного сопротивления вмещающей среды от 1 до 16 *омм* существенно не влияет на вертикальную характеристику зонда. Только при относительно высокой электропроводности вмещающей среды и небольшом отношении $\frac{\gamma_n}{\gamma_v}$ $\gamma_k = \gamma_k^{\text{одн}}$ для меньшей мощности пласта. Если пласт более высокоомный, чем вмещающая среда, но его удельное сопротивление не превышает 10 *омм*, то влияние вмещающей среды становится практически незаметным, когда мощность пласта больше 3,0—3,5 длин зонда.

При слабой дифференциации по проводимости, когда удельное сопротивление пласта и вмещающей среды отличаются меньше чем в 2—3 раза, $\gamma_k = \gamma_k^{\text{одн}}$ при меньшей мощности пласта. С увеличением удельного сопротивления среды влияние вмещающих пород заметно возрастает. Сопоставление с палетками для двухкатушечного зонда показывает, что влияние вмещающей среды на четырехкатушечный зонд несколько больше, чем на двухкатушечный той же длины, когда мощность пласта равна или больше длины зонда. Однако это различие не составляет более 10—15%.

Величина γ_k связана с э. д. с. в измерительной цепи четырехкатушечного зонда через коэффициент k_3 , который равен *

$$k_3 = \frac{4\pi L}{\omega^2 \mu^2 M_r M_n \left(1 - \frac{2c}{\rho} + \frac{c^2}{1-2\rho} \right)}. \quad (5.34)$$

При анализе коэффициента зонда с датчиками конечных размеров было показано, что для рассматриваемого зонда можно при вычислении его коэффициента воспользоваться формулой (5.34). Масштаб записи кривой проводимости n устанавливается из соотношения $n = \frac{k_3}{A} m$, где m — постоянная прибора по напряжению. Аппаратурный коэффициент A может быть определен с помощью стандарт сигналов. Если известна градуировочная кривая для прибора, полученная, например, в результате измерений в баке с водой или с помощью колец, то масштаб записи кривой проводимости определяется следующим образом (стр. 223):

$$n = u \frac{\gamma_k^{\text{одн}}}{\gamma_n} m.$$

Здесь u — коэффициент пропорциональности между напряжением на входе измерительного прибора и удельной проводимостью среды, в которую опущен снаряд ($\gamma = u\Delta V$); $\frac{\gamma_k^{\text{одн}}}{\gamma_n}$ — функция, зависящая от удельной проводимости однородной среды ($\frac{\gamma_n}{\gamma_v} = 1$). Ее график дан на каждом бланке палеток.

* Введение пятой, компенсационной, катушки практически не меняет значение k_3 .

Палетки рассчитаны в предположении, что отсутствуют скважина и промежуточная зона. Подобная идеализация реальных условий при построении палеток для двухкатушечного зонда неизбежно привела бы к большим ошибкам. Но для фокусирующего зонда эти ошибки во многих случаях очень малы. Действительно, с одной стороны, известно, что зонд в определенном диапазоне изменения ρ_c и ρ_Δ исключает влияние скважины и промежуточной зоны. С другой стороны, анализ геометрических факторов цилиндрических столбиков показывает, что как только высота столбика становится больше длины зонда, ее геометрический фактор практически делается равным геометрическому фактору бесконечно длинного цилиндра. Поэтому если мощность пласта равна или больше длины зонда, то, во-первых, на величину измеряемой э. д. с. не влияет та часть скважины, которая расположена против вмещающей среды, и, во-вторых, геометрический фактор участка скважины, расположенный против пласта, совпадает с геометрическим фактором скважины, и благодаря фокусировке эта часть среды, а следовательно, и вся скважина не влияют на сигнал. Аналогичные соотношения имеют место и для промежуточной зоны. С увеличением мощности пласта и удельного сопротивления вмещающих пород ошибки в определении γ_k уменьшаются. Практически можно применять палетки при выполнении следующих условий:

1. Минимальное удельное сопротивление среды должно быть больше или равно 0,5—1 *ом.м*, а удельное сопротивление вмещающих пород — больше удельного сопротивления пласта. Если удельное сопротивление вмещающих пород значительно меньше удельного сопротивления пласта, то применение палетки с шифром $\frac{H}{L} = 1$, а в некоторых случаях (особенно при глубоком повышающем проникновении, когда $\rho_\Delta > \rho_B$) и с шифром $\frac{H}{L} = \sqrt{2}$ может привести к ошибкам в определении γ_n .

2. Параметры скважины и промежуточной зоны не должны влиять на величину γ_k . При определении удельного сопротивления пласта необходимо знать мощность пласта H и удельное сопротивление вмещающей среды ρ_B .

§ 7. ТРЕХКАТУШЕЧНЫЕ ЗОНДЫ

Трехкатушечный зонд представляет собой систему, состоящую из двух измерительных и одной генераторной катушек (либо одной измерительной и двух генераторных). Расстояние между одноименными катушками значительно меньше расстояния до удаленного датчика. Сближенные катушки включены навстречу друг другу. Длиной трехкатушечного зонда будем считать расстояние между крайними катушками (рис. 5.8). Воспользуемся выражением для кажущейся проводимости в трехслойной среде с двухкатушечным зондом

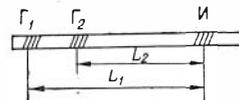


Рис. 5.8.

$$\gamma_k = \gamma_c Q_c(\alpha) + \gamma_\Delta Q_\Delta(\alpha) + \gamma_n Q_n(\alpha)$$

и связью между э. д. с. в измерительной цепи трехкатушечного зонда и величиной γ_k :

$$\varepsilon = \frac{\omega \mu L^2}{2} \varepsilon^{np} \gamma_k,$$

на основании которых для э. д. с., наведенной в измерительной цепи трехкатушечного зонда, получим выражение

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{\omega\mu}{2} \left[\varepsilon^{\text{пр}(1)} L_1^2 \gamma_K^{(1)} - \varepsilon^{\text{пр}(2)} L_2^2 \gamma_K^{(2)} \right] \\ \text{или} \quad \varepsilon &= \frac{\omega\mu}{2} \left[\gamma_c \left\{ \varepsilon^{\text{пр}(1)} L_1^2 Q_c^{(1)} - \varepsilon^{\text{пр}(2)} L_2^2 Q_c^{(2)} \right\} + \gamma_\Delta \left\{ \varepsilon^{\text{пр}(1)} L_1^2 Q_\Delta^{(1)} - \varepsilon^{\text{пр}(2)} L_2^2 Q_\Delta^{(2)} \right\} + \right. \\ &\quad \left. + \gamma_\Pi \left\{ \varepsilon^{\text{пр}(1)} L_1^2 Q_\Pi^{(1)} - \varepsilon^{\text{пр}(2)} L_2^2 Q_\Pi^{(2)} \right\} \right]. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Здесь L_1 , $\varepsilon^{\text{пр}(1)}$, L_2 и $\varepsilon^{\text{пр}(2)}$ — соответственно длина и э. д. с. прямого поля для двухкатушечных зондов, входящих в состав трехкатушечного зонда ($L_1 > L_2$). Для э. д. с. в однородной среде ($\gamma_c = \gamma_\Delta = \gamma_\Pi$)

$$\varepsilon^{\text{одн}} = \frac{\omega\mu}{2} \left[\varepsilon^{\text{пр}(1)} L_1^2 - \varepsilon^{\text{пр}(2)} L_2^2 \right] \gamma. \quad (5.36)$$

Коэффициент зонда равен

$$k_c = \frac{\gamma}{\varepsilon} = \frac{2}{\omega\mu \left[\varepsilon^{\text{пр}(1)} L_1^2 - \varepsilon^{\text{пр}(2)} L_2^2 \right]}. \quad (5.37)$$

Первое слагаемое в формуле (5.35) определяет влияние скважины, поэтому условие компенсации токов, индуцированных в скважине, записывается в виде

$$\varepsilon^{\text{пр}(1)} L_1^2 Q_c(L_1) = \varepsilon^{\text{пр}(2)} L_2^2 Q_c(L_2) \quad (5.38)$$

или

$$\frac{M_n^{(1)}}{L_1} Q_c(L_1) = \frac{M_n^{(2)}}{L_2} Q_c(L_2),$$

где $M_n^{(1)}$ и $M_n^{(2)}$ — соответственно моменты измерительных катушек. Поскольку геометрический фактор скважины является функцией отношения длины зонда к радиусу скважины, то вместо формулы (5.38) можно записать:

$$\varepsilon^{\text{пр}(1)} \alpha_1^2 Q_c(\alpha_1) = \varepsilon^{\text{пр}(2)} \alpha_2^2 Q_c(\alpha_2)$$

или

$$\frac{M_n^{(1)}}{\alpha_1} Q_c(\alpha_1) = \frac{M_n^{(2)}}{\alpha_2} Q_c(\alpha_2). \quad (5.39)$$

Здесь $\alpha_1 = \frac{L_1}{a}$; $\alpha_2 = \frac{L_2}{a}$; a — радиус скважины. Следовательно, с помощью трехкатушечного зонда, подобрав надлежащим образом длины зондов α_1 и α_2 и моменты измерительных катушек $M_n^{(1)}$ и $M_n^{(2)}$, можно исключить влияние скважины. Если длина зонда в несколько раз больше радиуса скважины, то, как известно, ее геометрический фактор убывает обратно пропорционально α^2 ; $Q_c(\alpha) \approx \frac{1}{\alpha^2}$, и чем больше α , тем точнее это соотношение. В равной мере это относится к геометрическому фактору зоны проникновения, если под величиной α понимать отношение длины зонда к радиусу зоны. Как видно из формулы (5.39), при $\alpha \gg 1$ условие компенсации токов в скважине совпадает с требованием компенсации э. д. с. первичного поля. Поэтому трехкатушечный зонд, моменты которого подобраны так, что компенсируется э. д. с. первичного поля, одновременно исключает влияние токов в скважине и частично в промежуточной зоне (при $\alpha \gg 1$).

Рассмотрим вначале трехкатушечные зонды только с одновременной компенсацией первичного поля. Согласно формулам (5.35) и (5.36), для э. д. с. в измерительной цепи имеем

$$\varepsilon = \frac{\omega\mu}{2} \varepsilon^{\text{np}} [\gamma_{\text{к}}^{(1)} L_1^2 - \gamma_{\text{к}}^{(2)} L_2^2]. \quad (5.40)$$

Коэффициент зонда равен

$$k = \frac{2}{\omega\mu\varepsilon^{\text{np}} (L_1^2 - L_2^2)}, \quad (5.41)$$

и для $\gamma_{\text{к}}$ имеем выражение

$$\gamma_{\text{к}} = \frac{1}{1-t^2} [\gamma_{\text{к}}^{(1)} - t^2 \gamma_{\text{к}}^{(2)}].$$

Здесь

$$t = \frac{L_2}{L_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}.$$

В однородной среде с удельной проводимостью γ э. д. с. равна

$$\varepsilon = \frac{\omega\mu}{2} \varepsilon^{\text{np}} L_1^2 (1-t^2) \gamma.$$

Поэтому с увеличением параметра t уменьшается сигнал от токов, наведенных в среде. При расчетах кривых индукционного бокового каротажного зондирования был взят параметр $t = 0,9$. В общем случае фокусирующие свойства зонда зависят от величины параметра t . Однако, например, при $\alpha = 10$ изменение параметра t от 0,9 до 0,7 практически не влияет на компенсацию токов в скважине.

Фокусирующие свойства трехкатушечного зонда обладают интересной особенностью: если геометрический фактор скважины стремится к нулю, то стремится к нулю и геометрический фактор любого тонкого цилиндрического слоя с радиусом, меньшим радиуса скважины. Представим геометрический фактор тонкой оболочки как разность геометрических факторов двух цилиндров

$$Q^{06}(\alpha) = Q_c(\alpha_1) - Q_c(\alpha_2) = \frac{1}{\alpha_1^2} - \frac{1}{\alpha_2^2} = \frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{L^2}$$

или

$$Q^{06}(\alpha) = \frac{2a_0\Delta h}{L_2},$$

где

$$a_0 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$$

— радиус оболочки и Δh — ее толщина. Э. д. с., наводимая в измерительной цепи токами оболочки, определяется из соотношения

$$\varepsilon = \frac{\omega\mu}{2} \varepsilon^{\text{np}} \gamma_{06} [L_1^2 Q^{06}(L_1) - L_2^2 Q^{06}(L_2)].$$

При $\alpha \gg 1$

$$\varepsilon \approx \frac{\omega\mu\gamma_{06}}{2} \varepsilon^{\text{np}} 2a_0\Delta h \left[L_1^2 \cdot \frac{1}{L_1^2} - L_2^2 \cdot \frac{1}{L_2^2} \right] \rightarrow 0.$$

Поэтому относительно небольшие изменения диаметра скважины как в сторону увеличения, так и уменьшения практически не нарушают условия компенсации токов в скважине. На рис. 5.9 представлены интеграль-

ные радиальные характеристики для трехкатушечных зондов с различными значениями параметра t . Особенностью этих характеристик является почти полное отсутствие отрицательных значений Q_c^t и более медленное приближение к правой асимптоте, т. е. к единице, чем для симметричного четырехкатушечного зонда с параметрами $p = 0,4$ и $c = 0,05$. Действительно, выражение для интегральной характеристики трехкатушечного зонда имеет вид

$$Q_c^t = \frac{Q_c(\alpha) - t^2 Q_c(t\alpha)}{1 - t^2}.$$

Поэтому при $\rho \rightarrow \infty$ $\alpha \rightarrow 0$ и $Q_c^t \rightarrow 1 - k_2 \alpha$, где $k_2 = \frac{1-t^3}{1-t^2}$. При параметре $t = 0,8$ коэффициент $k_2 = 1,4$, в то время как этот коэффициент для зонда

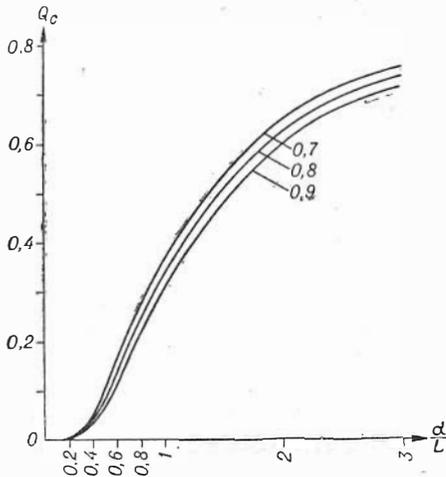


Рис. 5.5.

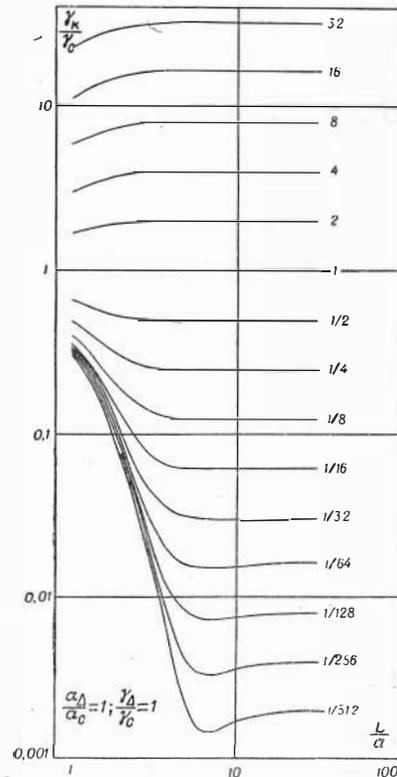


Рис. 5.10. Двухслойная кривая ИБКЗ-3.

ИК-2 равен 1,2, т. е. трехкатушечный зонд обладает несколько большей глубиной исследования, что и подтверждается анализом палеточного материала.

При расчете кривых ИБКЗ-3 используем соотношение

$$Q_c(\alpha) + Q_\Delta(\alpha) + Q_n(\alpha) = 1$$

и выражаем геометрические факторы зоны проникновения и пласта через геометрический фактор скважины. Так как сигнал, создаваемый каждым участком среды, не зависит от проводимости других участков среды, то имеют место следующие соотношения: для геометрического фактора зоны проникновения

$$Q_\Delta(\alpha) = Q_c\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) - Q_c(\alpha);$$

для геометрического фактора пласта

$$Q_n(\alpha) = 1 - Q_c \left(\frac{\alpha}{\beta} \right).$$

Здесь β — отношение радиуса зоны проникновения к радиусу скважины.

На рис. 5.10 даны двухслойные кривые ИБКЗ-3. По оси абсцисс отложено отношение длины зонда к радиусу скважины, по оси ординат — отношение $\frac{\gamma_{\text{к}}}{\gamma_{\text{с}}}$. Шифр кривых $\frac{\gamma_{\text{п}}}{\gamma_{\text{с}}}$. Семейство кривых, лежащих в верхней части рис. 5.10, соответствует случаю, когда удельная проводимость пласта больше удельной проводимости скважины. При длине зонда в 3—4 радиуса скважины кривые практически выходят на асимптоту. Это наиболее благоприятное соотношение сопротивлений для индукционного каротажа.

В нижней части рис. 5.10 расположены кривые для разрезов, удельное сопротивление пласта которых больше сопротивления бурового раствора. С увеличением удельного сопротивления пласта кривые выходят на правую асимптоту при более длинных зондах и наблюдается пересечение кривой своей асимптоты. Эта особенность в поведении кривых начинает заметно проявляться при $\frac{\rho_{\text{п}}}{\rho_{\text{с}}} > 50$. Выход кривых на свою правую асимптоту для трехкатушечного зонда наступает значительно раньше, чем для двухкатушечного индукционного и потенциал-зонда в методе сопротивлений. Так, при $\frac{\gamma_{\text{п}}}{\gamma_{\text{с}}} = \frac{1}{256}$ значение кажущейся проводимости практически совпадает с удельной проводимостью пласта для трехкатушечного зонда при $L = 12a$, для двухкатушечного зонда — при $L = 80a$ и, наконец, для потенциал-зонда — при $L = 200a$. Аналогичны соотношения и при других удельных сопротивлениях пласта и скважины. Сравнение двухслойных кривых индукционного каротажа и в методе сопротивлений показывает, что для получения истинного сопротивления пласта с помощью трехкатушечного зонда можно применять зонды, длина которых значительно меньше, чем длина потенциал- и градиент-зонда (особенно это заметно при больших отношениях $\frac{\rho_{\text{п}}}{\rho_{\text{с}}}$). Как следует из рис. 5.10, при небольшом отношении $\frac{\rho_{\text{п}}}{\rho_{\text{с}}}$, не превышающем 30, на короткий зонд длиной $L = 5a$ скважина практически не влияет.

Трехслойные кривые ИБКЗ-3 сгруппированы в палетки с общими параметрами $\frac{a_{\Delta}}{a_{\text{с}}}$ и $\frac{\gamma_{\Delta}}{\gamma_{\text{с}}}$; на каждой палетке нанесены кривые со значениями $\frac{\gamma_{\Delta}}{\gamma_{\text{п}}}$, меньшими и большими единицы, соответствующими повышающему и понижающему проникновению. По оси абсцисс отложено отношение длины зонда к радиусу скважины, по оси ординат — $\frac{\gamma_{\text{к}}}{\gamma_{\text{с}}}$. Шифр кривых $\frac{\gamma_{\text{п}}}{\gamma_{\text{с}}}$. Расчеты были выполнены для следующих случаев проникновения фильтра бурового раствора; $\frac{a_{\Delta}}{a_{\text{с}}} = 2, 4, 8$ и 16.

Кривые ИБКЗ-3 (рис. 5.11) при понижающем проникновении раствора ($\gamma_{\text{п}} < \gamma_{\Delta}$) похожи на двухслойные кривые ИБКЗ-3 при $\gamma_{\text{п}} < \gamma_{\text{с}}$, но отличаются от них более пологим ходом кривой с увеличением длины зонда. При очень большом проникновении бурового раствора с увеличением $\frac{a_{\Delta}}{a_{\text{с}}}$ правая ветвь кривой ИБКЗ-3 стремится к двухслойной кривой ИБКЗ-3.

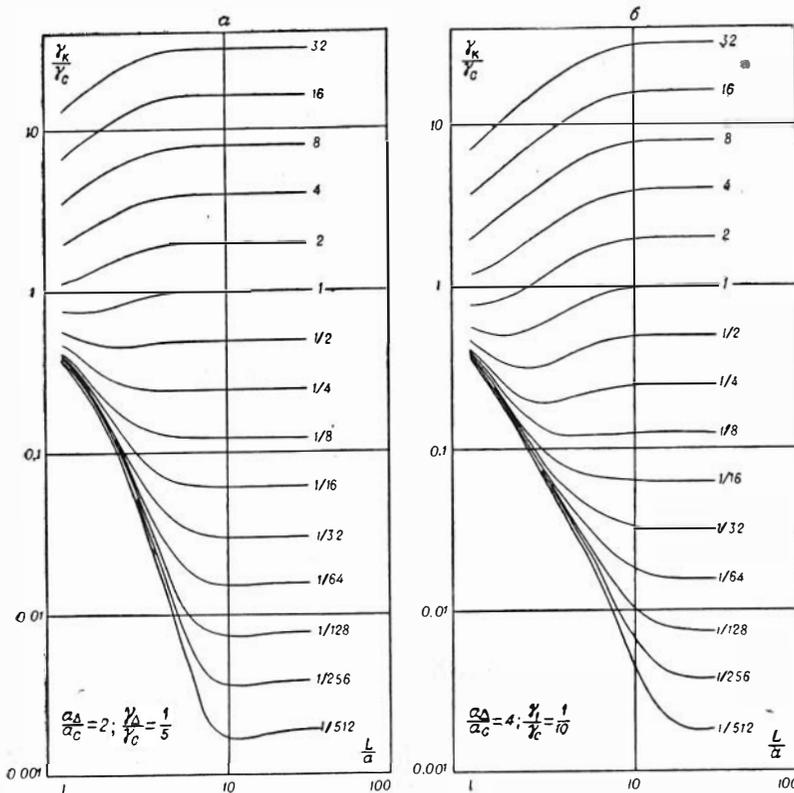


Рис. 5.11. Трехслой-

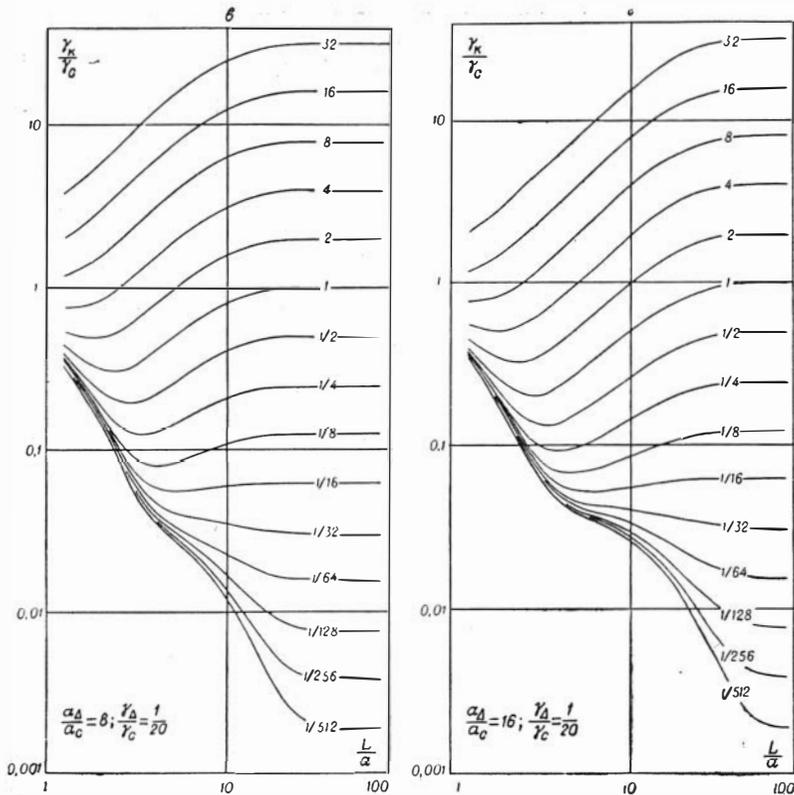
модуля $\frac{\gamma_n}{\gamma_\Delta}$, а левая ветвь — к двухслойной кривой ИБКЗ-3 модуля $\frac{\gamma_\Delta}{\gamma_c}$.

Кривые ИБКЗ-3 при повышающем проникновении раствора ($\gamma_n > \gamma_\Delta$) похожи на двухслойные кривые ИБКЗ-3 при $\gamma_n > \gamma_c$.

Кривая, соответствующая повышающему проникновению, выходит на правую асимптоту значительно раньше, чем кривая того же модуля, но при понижающем проникновении.

Сравнение палеток ИБКЗ-3 и БКЗ для трехслойных сред показывает, что трехкатушечный зонд обладает значительно большей глубиной исследования, чем потенциал- и градиент-зонд в методе сопротивлений. Например, если максимальная глубина проникновения фильтрата бурового раствора не превышает восьми радиусов скважины и отношение $\frac{\rho_n}{\rho_c}$ не больше тридцати, трехкатушечный зонд длиной 1,6 м определяет истинное удельное сопротивление пласта, т. е. $\gamma_k = \gamma_n$, как в случае понижающего, так и повышающего проникновения.

Благодаря большой глубинности исследования максимальная длина трехкатушечного зонда, входящего в состав комплекта зондов ИБКЗ-3, в реальных условиях не превышает 2—2,5 м. В отличие от четырех- и пятикатушечных зондов трехкатушечные зонды значительно проще в конструктивном отношении объединить друг с другом и создать установки с несколькими зондами разной длины. Данные измерения с трехкатушечными зондами позволяют получить кривую зондирования и определить параметры разреза. К сожалению, в настоящее время технические трудности мешают этому.



ные кривые ИБКЗ-3

Выше было показано, что относительно короткие трехкатушечные зонды исключают при определенных условиях влияние сважины. Эта особенность, по-видимому, может быть положена в основу применения комплекса, состоящего из двух трехкатушечных зондов, для определения удельного сопротивления пласта и характера проникновения бурового раствора в пласт, а в отдельных случаях и величины ρ_{Δ} .

Результаты анализа трехкатушечных зондов на основании теории предельно малого параметра могут быть значительно уточнены, если предположить, что скин-эффект проявляется только в пласте, но отсутствует в скважине и промежуточной зоне. Согласно результатам, полученным для двухкатушечного зонда,

$$\frac{\gamma_k}{\gamma_c} = \left(1 - \frac{\gamma_{\Pi}}{\gamma_c}\right) Q_c^{\xi} + \left(\frac{\gamma_{\Delta}}{\gamma_c} - \frac{\gamma_{\Pi}}{\gamma_c}\right) Q_{\Delta}^{\xi} + \frac{\gamma_{\Pi}}{\gamma_c} \cdot \frac{\gamma_k^{\text{одн}}}{\gamma_{\Pi}}$$

Здесь Q_c^{ξ} и Q_{Δ}^{ξ} — геометрические факторы скважины и промежуточной зоны для трехкатушечного зонда; $\frac{\gamma_k^{\text{одн}}}{\gamma_{\Pi}}$ — значения для трехкатушечного зонда, приведенные в табл. 5.11.

Из сравнения этих данных с соответствующими значениями для четырехкатушечного зонда (при $p = 0,4$, $c = 0,05$) видно, что для трехкатушечного зонда влияние скин-эффекта проявляется сильнее. Рис. 5.12 иллюстрирует зависимость от $\frac{2\pi L}{10^3 \sqrt{\frac{10\rho}{f}}}$ активной компоненты э. д. с. отне-

Таблица 5.11

$\frac{\gamma_p}{\gamma_c} \backslash \gamma_{п\mu\omega}$	0,01	0,02	0,04	0,08	0,16	0,32	0,64	1,28
1	0,915	0,890	0,844	0,776	0,695	0,570	0,433	0,260
1/2	0,456	0,445	0,422	0,388	0,346	0,285	0,216	0,130
1/4	0,228	0,223	0,211	0,194	0,173	0,142	0,108	0,0650
1/8	0,114	0,111	0,106	0,0970	0,0867	0,071	0,054	0,0325
1/16	0,0570	0,0556	0,0527	0,0485	0,0433	0,0355	0,027	0,0162
1/32	0,0285	0,0277	0,0263	0,0242	0,0216	0,0177	0,0135	0,0081
1/64	0,0143	0,0139	0,0132	0,0121	0,0108	0,0089	0,0067	0,0040

Примечание. $L=1,2$ м, $t=0,7$.

сенной к полю в воздухе, для трехкатушечного зонда в однородной среде при двух значениях параметра t (0,9; 0,8). В отличие от соответствующей кривой для двухкатушечного зонда максимум кривой на рис. 5.12 наступает несколько раньше (при $p=0,95$). С увеличением частот поля или электропроводности среды отношение активной компоненты э. д. с. в трехкатушечном зонде к активной компоненте э. д. с. в двухкатушечном зонде уменьшается. Относительно небольшое отношение вторичного поля к полю тока в генераторной катушке является известным недостатком трехкатушечного зонда. В табл. 5.12 приведены значения активной компоненты поля $h_z^{акт}$ в однородной среде для двухкатушечного и трехкатушечного зонда ($t=0,8$) одной и той же длины ($L=1$ м) в зависимости от $\gamma_{п\mu\omega}$. На основании строгих расчетов были получены $\frac{\gamma_k}{\gamma_c}$ при различных значениях $\frac{\rho_\Delta}{\rho_c}$ и $\frac{a_\Delta}{a_c}$ для зонда, у которого $L=1,2$ м, $t=0,833$, $a_c=0,1$ м (табл. 5.13).

Таблица 5.12

$\gamma_{п\mu\omega}$	Двухкатушечный зонд	Трехкатушечный зонд
0,01	$0,474 \cdot 10^{-2}$	$0,169 \cdot 10^{-2}$
0,02	$0,929 \cdot 10^{-2}$	$0,328 \cdot 10^{-2}$
0,04	$0,180 \cdot 10^{-1}$	$0,630 \cdot 10^{-2}$
0,08	$0,345 \cdot 10^{-1}$	$0,117 \cdot 10^{-1}$
0,16	$0,648 \cdot 10^{-1}$	$0,217 \cdot 10^{-1}$
0,32	0,118	$0,377 \cdot 10^{-1}$
0,64	0,204	$0,610 \cdot 10^{-1}$
1,28	0,327	$0,848 \cdot 10^{-1}$
2,56	0,464	$0,889 \cdot 10^{-1}$
5,12	0,532	$0,387 \cdot 10^{-1}$

Как видно из табл. 5.13, при небольшом проникновении ($\frac{a_\Delta}{a_c}=2$) величина $\frac{\gamma_k}{\gamma_c}$ практически не отличается от соответствующей величины для однородной среды с удельным сопротивлением пласта, если величина $\gamma_{п\mu\omega}$ не превышает по крайней мере 0,64. В рассматриваемом диапазоне сопротивлений скважина и промежуточная зона не влияют на величину γ_k , которая определяется только удельным сопротивлением пласта. При глубоком проникновении величина γ_k отличается от кажущейся проводимости в однородной среде с удельным сопротивлением пласта.

$\gamma_{II} \mu\omega$	$\frac{\rho_{II}}{\rho_c}$		1		4		16		32	
	1	4	16	32	1	4	16	32	1	4
	$\frac{a_{\Delta}}{a_c} = 2,0;$		$\frac{\rho_{\Delta}}{\rho_c} = 8,0;$		$\frac{a_{\Delta}}{a_c} = 2,0;$		$\frac{\rho_{\Delta}}{\rho_c} = 16,0$			
0,01	0,924	0,230	0,0574	0,0286	0,923	0,231	0,0573	0,0286	0,923	0,231
0,02	0,895	0,222	0,0554	0,0275	0,890	0,224	0,0557	0,0275	0,890	0,224
0,04	0,845	0,210	0,0527	0,0261	0,848	0,212	0,0527	0,0261	0,848	0,212
0,08	0,783	0,194	0,0487	0,0242	0,783	0,197	0,0491	0,0239	0,783	0,197
0,16	0,695	0,174	0,0432	0,0215	0,700	0,174	0,0434	0,0213	0,700	0,174
0,32	0,585	0,144	0,0356	0,0173	0,583	0,146	0,0361	0,0176	0,583	0,146
0,64	0,441	0,108	0,0257	0,0120	0,437	0,109	0,0260	0,0123	0,437	0,109
	$\frac{a_{\Delta}}{a_c} = 2,0;$		$\frac{\rho_{\Delta}}{\rho_c} = 32;$		$\frac{a_{\Delta}}{a_c} = 2,0;$		$\frac{\rho_{\Delta}}{\rho_c} = 64$			
0,01	0,922	0,231	0,0573	0,0286	0,924	0,232	0,0575	0,0287	0,924	0,232
0,02	0,890	0,223	0,0555	0,0275	0,889	0,224	0,0540	0,0276	0,889	0,224
0,04	0,845	0,211	0,0527	0,0264	0,848	0,211	0,0526	0,0263	0,848	0,211
0,08	0,785	0,197	0,0488	0,0242	0,784	0,195	0,0490	0,0244	0,784	0,195
0,16	0,706	0,175	0,0434	0,0214	0,700	0,175	0,0435	0,0215	0,700	0,175
0,32	0,683	0,146	0,0360	0,0177	0,588	0,146	0,0358	0,0176	0,588	0,146
0,64	0,435	0,108	0,0264	0,0124	0,441	0,109	0,0263	0,0125	0,441	0,109
	$\frac{a_{\Delta}}{a_c} = 4;$		$\frac{\rho_{\Delta}}{\rho_c} = 8;$		$\frac{a_{\Delta}}{a_c} = 4;$		$\frac{\rho_{\Delta}}{\rho_c} = 16$			
0,01	0,910	0,225	0,0587	0,0298	0,905	0,228	0,0572	0,0296	0,905	0,228
0,02	0,877	0,220	0,0563	0,0283	0,875	0,219	0,0556	0,0282	0,875	0,219
0,04	0,826	0,209	0,0536	0,0272	0,830	0,207	0,0524	0,0266	0,830	0,207
0,08	0,770	0,193	0,0496	0,0258	0,768	0,193	0,0490	0,0250	0,768	0,193
0,16	0,686	0,172	0,0440	0,0216	0,687	0,171	0,0427	0,0214	0,687	0,171
0,32	0,574	0,144	0,0356	0,0182	0,570	0,143	0,0362	0,0180	0,570	0,143
0,64	0,433	0,108	0,0260	0,0120	0,433	0,107	0,0260	0,0123	0,433	0,107
	$\frac{a_{\Delta}}{a_c} = 4,0;$		$\frac{\rho_{\Delta}}{\rho_c} = 32;$		$\frac{a_{\Delta}}{a_c} = 4,0;$		$\frac{\rho_{\Delta}}{\rho_c} = 64$			
0,01	0,910	0,226	0,0570	0,0286	0,907	0,226	0,0568	0,0283	0,907	0,226
0,02	0,882	0,220	0,0545	0,0275	0,874	0,218	0,0550	0,0273	0,874	0,218
0,04	0,830	0,208	0,0520	0,0260	0,830	0,208	0,0520	0,0259	0,830	0,208
0,08	0,772	0,192	0,0481	0,0242	0,768	0,191	0,0478	0,0241	0,768	0,191
0,16	0,684	0,172	0,0428	0,0214	0,682	0,170	0,0427	0,0212	0,682	0,170
0,32	0,570	0,143	0,0353	0,0174	0,590	0,142	0,0357	0,0174	0,590	0,142
0,64	0,440	0,107	0,0260	0,0124	0,428	0,107	0,0255	0,0123	0,428	0,107
	$\frac{a_{\Delta}}{a_c} = 8;$		$\frac{\rho_{\Delta}}{\rho_c} = 8;$		$\frac{a_{\Delta}}{a_c} = 8;$		$\frac{\rho_{\Delta}}{\rho_c} = 16$			
0,01	0,780	0,207	0,0670	0,0439	0,769	0,200	0,0574	0,0338	0,769	0,200
0,02	0,748	0,203	0,0661	0,0429	0,738	0,192	0,0555	0,0327	0,738	0,192
0,04	0,706	0,189	0,0628	0,0413	0,694	0,181	0,0527	0,0313	0,694	0,181
0,08	0,643	0,176	0,0580	0,0390	0,634	0,166	0,0488	0,0291	0,634	0,166
0,16	0,564	0,155	0,0530	0,0350	0,554	0,145	0,0433	0,0260	0,554	0,145
0,32	0,460	0,128	0,0440	0,0280	0,453	0,119	0,0358	0,0214	0,453	0,119
0,64	0,342	0,095	0,0310	0,0157	0,335	0,088	0,0260	0,0145	0,335	0,088
	$\frac{a_{\Delta}}{a_c} = 8;$		$\frac{\rho_{\Delta}}{\rho_c} = 32;$		$\frac{a_{\Delta}}{a_c} = 8;$		$\frac{\rho_{\Delta}}{\rho_c} = 64$			
0,01	0,764	0,195	0,0523	0,0286	0,762	0,192	0,0498	0,0260	0,762	0,192
0,02	0,732	0,186	0,0504	0,0276	0,730	0,185	0,0478	0,0248	0,730	0,185
0,04	0,690	0,176	0,0476	0,0262	0,686	0,173	0,0452	0,0237	0,686	0,173
0,08	0,630	0,161	0,0438	0,0242	0,627	0,158	0,0412	0,0217	0,627	0,158
0,16	0,550	0,141	0,0385	0,0214	0,547	0,138	0,0361	0,0190	0,547	0,138
0,32	0,448	0,115	0,0315	0,0175	0,447	0,113	0,0296	0,0154	0,447	0,113
0,64	0,328	0,085	0,0230	0,0143	0,330	0,083	0,0213	0,0109	0,330	0,083

Сопоставление палеток для трехкатушечного зонда в пластах конечной мощности (рис. 5.13) с аналогичными палетками для двухкатушечного зонда показывает, что для пластов, мощность которых превышает длину зонда, влияние вмещающей среды на трехкатушечный зонд несколько больше, чем на двухкатушечный зонд той же длины.

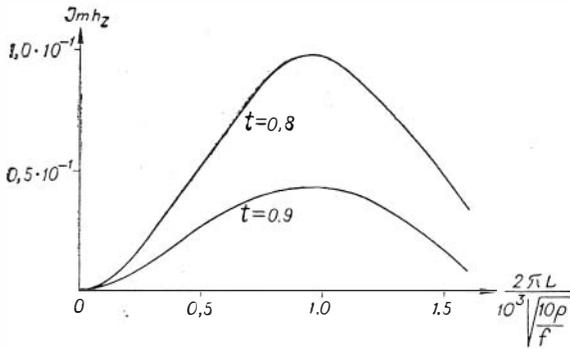


Рис. 5.12.

Условия, при которых токи в скважине и промежуточной зоне не влияют на измеряемое поле и становится возможным применение палеток, практически совпадают с аналогичными условиями для четырехкатушечного зонда.

Трехкатушечный зонд небольшой длины может быть положен в основу устройства, позволяющего исследовать промежуточную зону. Но в этом случае моменты одноименных катушек, включенных навстречу друг другу, должны быть равны.

Согласно (5.35), для э. д. с. в измерительной цепи зонда имеем

$$\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{\omega \mu}{2} [\gamma_k^{(1)} L_1^2 \varepsilon^{(1)} - \gamma_k^{(2)} L_2^2 \varepsilon^{(2)}] = \frac{\omega^2 \mu^2 M_r M_n}{4\pi L_1} [\gamma_k^{(1)} - t \gamma_k^{(2)}]. \quad (5.42)$$

Здесь $t = \frac{L_1}{L_2} > 1$. Поэтому коэффициент зонда

$$k_3 = \frac{4\pi L_1}{\omega^2 \mu^2 M_r M_n (1-t)},$$

а геометрические факторы скважины и пласта соответственно равны

$$Q_c^3 = \frac{Q_c(\alpha) - t Q_c\left(\frac{\alpha}{t}\right)}{1-t}; \quad (5.43)$$

$$Q_n^3 = \frac{Q_n(\alpha) - t Q_n\left(\frac{\alpha}{t}\right)}{1-t}$$

При малых значениях α геометрический фактор пласта для двухкатушечного зонда равен $k\alpha$, где $k = 0,586 \dots$ При этом геометрический фактор пласта для трехкатушечного зонда стремится к нулю:

$$Q_n^3 = \frac{k\alpha - tk \frac{\alpha}{t}}{1-t} \rightarrow 0.$$

В табл. 5.14 приведены значения геометрических факторов скважины и пласта для зонда с параметром $t = 1,25$. С увеличением частоты влияние токов, индуцированных в пласте, становится еще меньше.

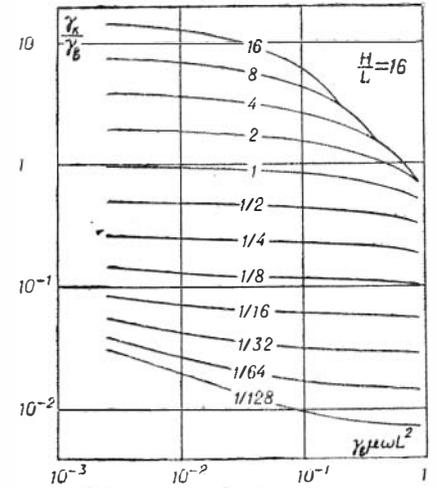
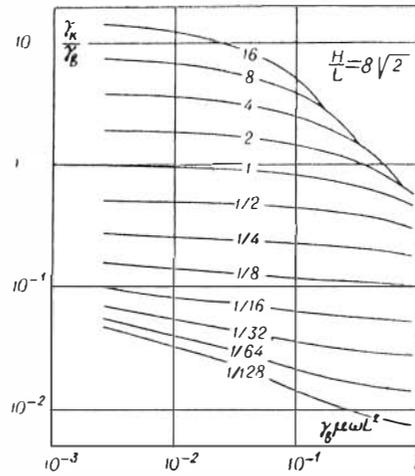
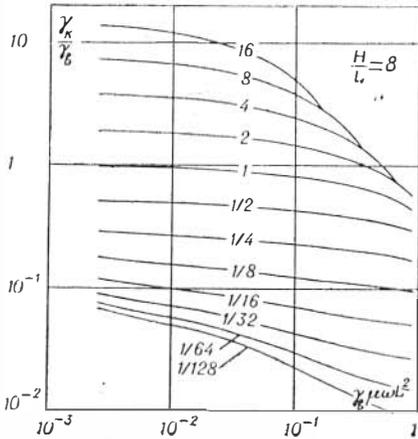
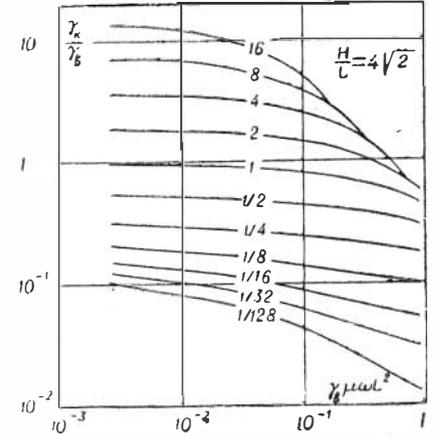
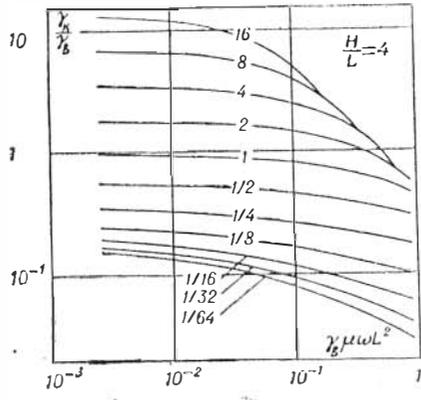
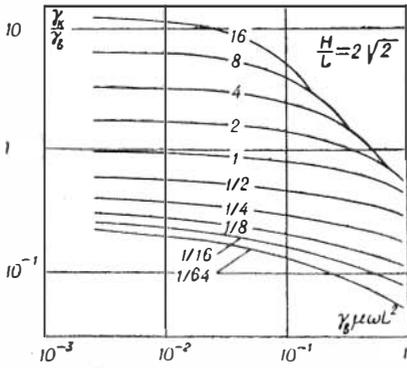
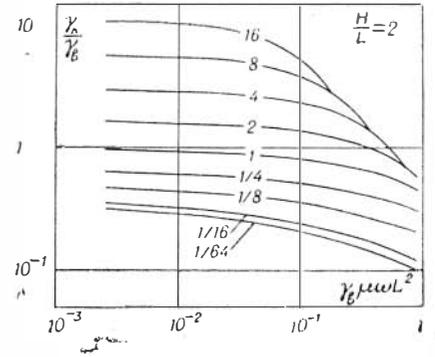
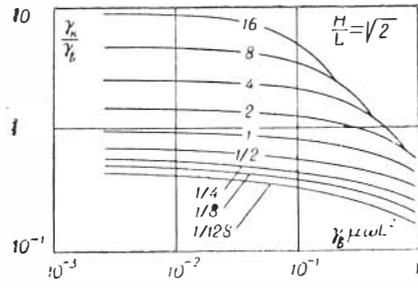
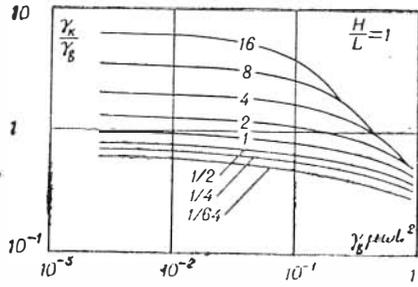


Рис. 5.13.

Геометрический фактор скважины для трехкатушечного зонда в несколько раз больше (в 2—3 раза) геометрического фактора для двухкатушечного зонда. Поэтому для определения удельного сопротивления промежуточной зоны необходимо значительно уменьшить влияние скважины. Это, по-видимому, можно сделать с помощью вертикальных резиновых пла-

Таблица 5.14

Геометрические факторы	α			
	2,0	1,0	0,5	0,25
Q_c	0,620	0,910	0,980	1,00
Q_n	0,380	0,090	0,020	0,00

Примечание. $\alpha = \frac{L}{\rho}$.

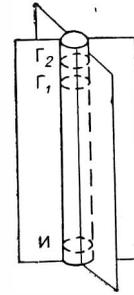


Рис. 5.14.

стин, которые должны исключить токовые линии вокруг зонда (рис. 5.14). Очевидно, что с увеличением числа пластин влияние скважины уменьшится, однако при этом зонд с большим трудом будет перемещаться в скважине.

Как видно из табл. 5.14, при длине зонда 0,15—0,20 м, радиусе скважины 0,1 м и радиусе промежуточной зоны 0,3—0,4 м токи, индуцированные в пласте, практически не влияют на сигнал. Вертикальная характеристика рассматриваемого типа зонда обладает интересной особенностью,

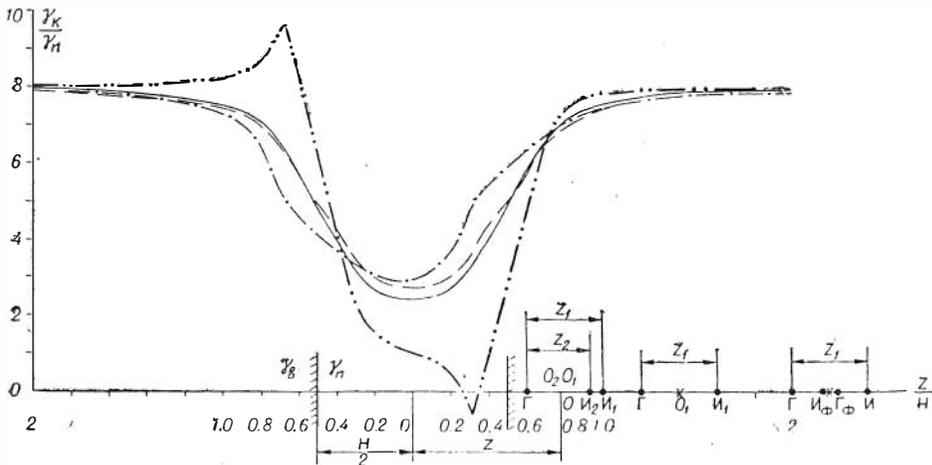


Рис. 5.15. Кривые профилирования $\left(\frac{z_2}{H} = 0,333, \frac{z_1}{H} = 0,400, \frac{\gamma_B}{\gamma_n} = 8 \right)$.

— — — трехкатушечный зонд ($\epsilon_1^B z_1^3 = \epsilon_2^B z_2^3$); - - - трехкатушечный зонд ($\epsilon_1^B = \epsilon_2^B$);
 — — — двухкатушечный зонд; - - - - четырехкатушечный зонд ($\rho = 0,4; c = 0,05$).

которая отличает его от всех других зондов индукционного каротажа. Как было показано [14], значение γ_k в центре пласта равно его истинной проводимости, если длина зонда меньше или равна мощности пласта. Переходы от вмещающей среды к пласту и наоборот отмечаются достаточно четкими и резкими изменениями γ_k , напоминающими поведение кривой

ρ_k для градиент-зонда (рис. 5.15). Поэтому по данным измерения с трехкатушечным зондом можно также определить мощность пласта.

Если удельные сопротивления в кровле и подошве пласта не равны, то необходимо в измеряемую величину вносить поправки, которые легко могут быть определены.

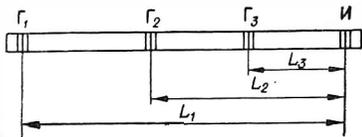


Рис. 5.16. Зонд ПИК-1.

В аппаратуре индукционного коротажа ПИК-1, разработанной в тресте «Азнефтегеофизика», применен четырехкатушечный зонд (рис. 5.16), имеющий параметры: $L_1 = 0,75$ м, $L_2 = 0,44$ м, $L_3 = 0,20$ м, $n_{Г1} = 400$, $n_{Г2} = 1216$, $n_r = 4$, $n_n = 2000$ витков. На рис. 5.17

приведена радиальная характеристика этого зонда, на рис. 5.18—палетки для зонда такого типа в пластах конечной мощности, аналогичные подобным палеткам для трехкатушечного зонда и зонда аппаратуры ИК-2.

Совместное рассмотрение радиальных и вертикальных характеристик известных зондов (см. рис. 5.17) показывает следующее:

1. Наилучшей характеристикой обладает американский зонд 6FF40, ему несколько уступает зонд типа ПИК-1, затем следуют трехкатушечные зонды с компенсацией первичного поля, и последнее место в этом ряду занимает зонд типа 5Ф1,2.

2. Влияние вмещающей среды при измерении зондами типа ПИК-1, 5Ф1,2 и трехкатушечным больше, чем при измерении с двухкатушечным зондом соответствующей длины. Лучшей вертикальной характеристикой обладает зонд ИК-2. Вместе с тем увеличение влияния вмещающей среды при измерении с трехкатушечным зондом не превышает 10—15% по сравнению с зондом ИК-2.

3. Когда удельные сопротивления в кровле и подошве пласта равны, кривая профилирования с зондом типа ИК-2 симметрична относительно середины пласта. На кривой профилирования с трехкатушечным зондом при компенсации первичного поля наблюдается асимметрия, еще в большей степени это относится к зонду типа ПИК-1.

4. Относительное уменьшение величины сигнала в результате действия скин-эффекта особенно заметно проявляется в зондах несимметричного типа.

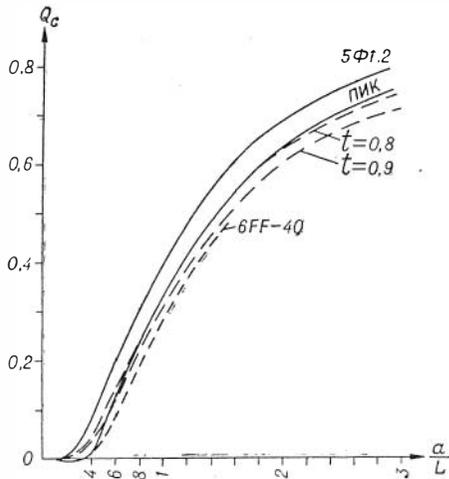


Рис. 5.17. Радиальная характеристика зонда ПИК-1.

§ 8. К ОПРЕДЕЛЕНИЮ КОЭФФИЦИЕНТА МНОГОКАТУШЕЧНОГО ЗОНДА

Предположим, что двухкатушечный зонд, размеры датчиков которого значительно меньше его длины, находится в однородной среде и длина волны во много раз больше расстояния между катушками. Тогда, согласно

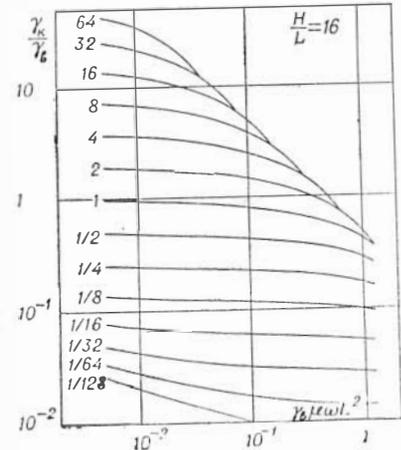
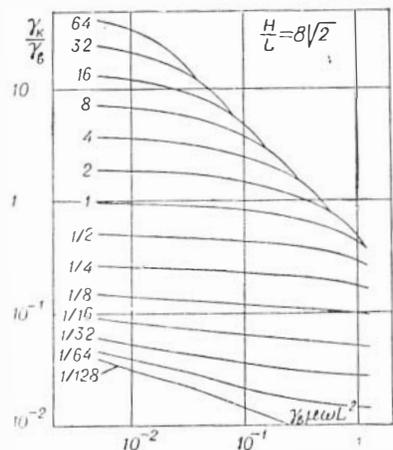
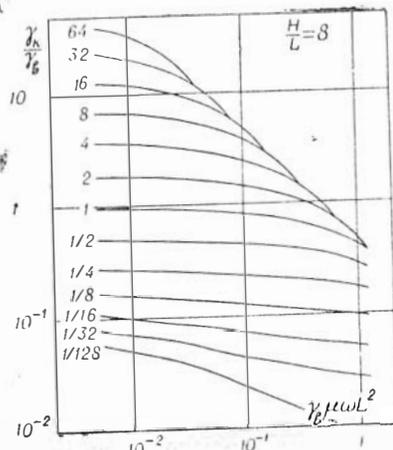
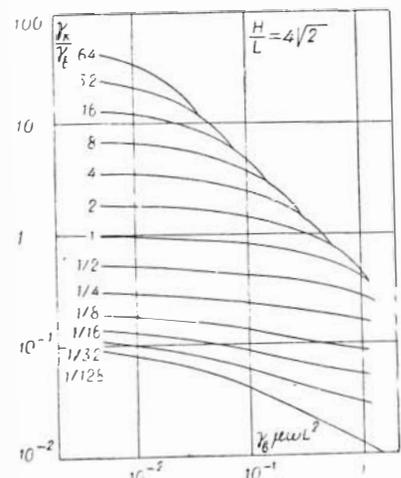
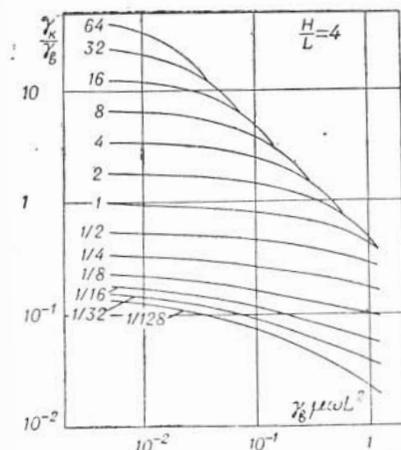
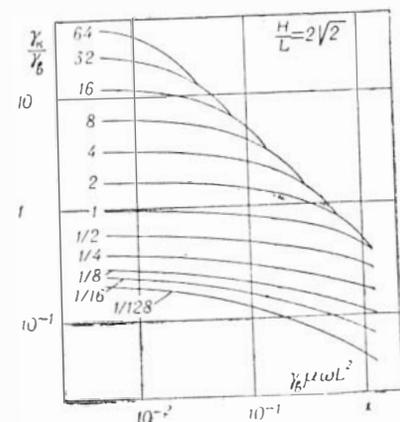
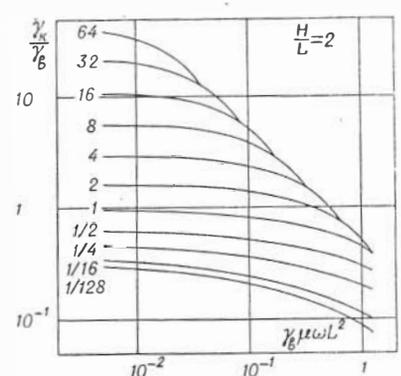
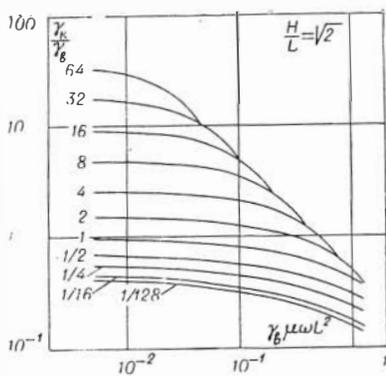
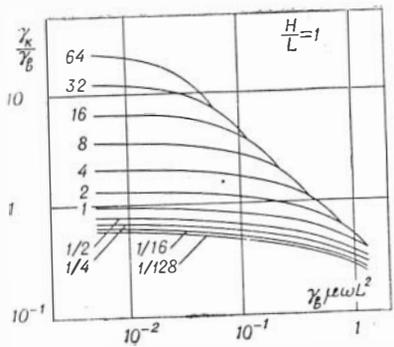


Рис. 5.18. Палетки ПИК-1.

(1.29), для э. д. с., наводимой в измерительной катушке зонда, имеем выражение

$$\varepsilon = \frac{\mu^2 \omega^2 M_{\Gamma} M_{\Pi}}{4\pi i} \gamma, \quad (5.44)$$

т. е. э.д.с. зависит от электропроводности среды, частоты поля, длины зонда и моментов катушек. Поэтому в двух зондах, отличающихся моментами катушек или длиной (или тем и другим), в одной и той же среде наводятся различные э. д. с. Естественно исключить влияние этих легко поддающихся учету факторов, зависящих только от параметров зонда, и ввести величину кажущейся проводимости, которая в однородной среде для предельно малого параметра совпадает с истинной проводимостью среды. В соответствии с формулой (1.29)

$$\gamma_{\kappa} = \frac{4\pi L}{\mu^2 \omega^2 M_{\Gamma} M_{\Pi}} \varepsilon = k \varepsilon,$$

где

$$k = \frac{4\pi L}{\mu^2 \omega^2 M_{\Gamma} M_{\Pi}}, \quad (5.45)$$

k — коэффициент зонда; в отличие от соответствующих коэффициентов зондов в методе КС в него входит не только длина зонда L , но и моменты катушек. Формулу (5.45) можно записать в другом виде:

$$k = \frac{2}{\mu \omega L^2 \varepsilon^{\text{пр}}}. \quad (5.46)$$

Здесь $\varepsilon^{\text{пр}}$ — э. д. с. прямого поля, созданного только током в генераторной катушке.

В неоднородной среде величина γ_{κ} зависит от распределения удельного сопротивления среды и длины зонда, и для интерпретации данных наблюдений результаты решения прямой задачи теории индукционного каротажа целесообразно представлять как зависимость γ_{κ} от длины зонда и параметров среды. Зная длину зонда и э. д. с. прямого поля, легко вычислить коэффициент зонда и перейти от э. д. с. вторичного поля к кажущейся проводимости. Однако при использовании этих расчетов для определения величины γ_{κ} возможны ошибки в вычислении моментов катушек и расстояния между ними или при измерении э. д. с. прямого поля. В последнем случае ошибки обусловлены тем, что вся аппаратура индукционного каротажа настраивается на измерения значительно меньших величин. В соответствии с формулой (5.11) коэффициент многокатушечного зонда записывается в виде

$$k = \frac{4\pi}{\omega^2 \mu^2 \sum_1^s \sum_1^t \frac{M_{\Gamma\alpha} M_{\Pi\beta}}{L_{\alpha\beta}}} \quad (5.47)$$

и зависит от расстояния между катушками и величины их моментов. Представим коэффициент зонда через прямое поле одного из двухкатушечных зондов, например L_{11} . Тогда вместо (5.47) имеем

$$k = \frac{2}{\mu \omega L_{11}^2 \varepsilon_{11}^{\text{пр}} \sum_1^s \sum_1^t \frac{C_{\Gamma\alpha} C_{\Pi\beta}}{\rho_{\alpha\beta}}} \quad (5.48)$$

Здесь ε_{11}^{pp} — э. д. с. прямого поля в зонде L_{11} ; $\rho_{\alpha\beta}$ — отношение длины зонда $L_{\alpha\beta}$ к длине зонда L_{11} ; $c_{r\alpha}$ и $c_{r\beta}$ — отношение моментов катушек к моменту одного из датчиков зонда L_{11} . Для определения коэффициента многокатушечного зонда, согласно формуле (5.48), необходимо измерение э. д. с. прямого поля одного из двухкатушечных зондов, что требует отключения двух датчиков из общей цепи и, по-видимому, практически невозможно. Поэтому для многокатушечного зонда расчет коэффициента может быть осуществлен только по формуле (5.47).

При выводе формулы для коэффициента k предполагается, что датчики зонда точечные, т. е. их радиус и длина во много раз меньше длины зонда, и э. д. с., наводимая токами в среде, зависит только от расстояния между центрами катушек и величины их моментов. Ниже показано, что при определении коэффициента зонда влияние конечных размеров датчиков, применяемых в зондах современной аппаратуры индукционного каротажа, на величину э. д. с. вторичного поля незначительно и им можно пренебречь. Но в общем случае при расчете коэффициентов двухкатушечных и многокатушечных зондов необходимо учитывать влияние конечных размеров катушек.

Предположим, что датчики двухкатушечного зонда представляют собою однослойные катушки, расположенные на непроводящей основе зонда. Тогда, согласно результатам, полученным на стр. 120, для э. д. с., наводимой в измерительной катушке, имеем выражение

$$\varepsilon = \frac{32\omega\mu}{4\pi} \pi n_r n_n r_k^2 \gamma \mu \omega I \int_0^{\infty} \frac{r_k}{2\lambda} [2K_0 K_1 - \lambda r_k (K_1^2 - K_0^2)] \times \\ \times \frac{\sin \lambda \frac{l}{2} \sin \lambda \frac{b}{2}}{\lambda^2} J_1^2(\lambda r_k) \cos \lambda L_0 d\lambda.$$

Здесь n_r и n_n — число витков на единицу длины в генераторной и измерительной катушках; I — сила тока; l и b — длины катушек; L_0 — расстояние между центрами катушек; r_k — радиус катушек. Введем следующие обозначения: $\lambda r_k = m$; $n_r \pi r_k^2 I$ и $n_n \pi r_k^2$ — моменты генераторной и измерительной катушек на единицу длины — M_r^0 и M_n^0 ; $\frac{l}{2r_k} = s_1$; $\frac{b}{2r_k} = s_2$; $\frac{L}{r_k} = \alpha$. После несложных преобразований имеем

$$\varepsilon = \gamma \frac{8\omega^2 \mu^2}{\pi^2} r_k M_r^0 M_n^0 \int_0^{\infty} \Phi(m) \frac{\sin ms_1}{m} \frac{\sin ms_2}{m} \cdot \frac{I_1^2(m)}{m^2} \cos \alpha m dm.$$

Отсюда коэффициент зонда для однослойных катушек определяется выражением

$$k = \frac{\pi^2}{8\omega^2 \mu^2 r_k M_r^0 M_n^0 \int_0^{\infty} \Phi(m) \frac{\sin ms_1 \cdot \sin ms_2}{m^2} \frac{I_1^2(m)}{m^2} \cos \alpha m dm},$$

где

$$\Phi(m) = \frac{m}{2} [2K_0(m) K_1(m) - m(K_1^2 - K_0^2)]. \quad (5.49)$$

Выражение для коэффициента k при точечных источниках (5.46) может быть получено из формулы (5.49), если считать, что линейные размеры

катушек во много раз меньше длины зонда. В этом случае $\alpha = \frac{L_0}{r_{\text{к}}} \rightarrow \infty$, и интеграл в формуле (5.49) определяется поведением подынтегральной функции в нуле. При $m \rightarrow 0$

$$\frac{\sin ms_1}{m} \rightarrow s_1; \quad \frac{\sin ms_2}{m} \rightarrow s_2;$$

$$\frac{I_1^2(m)}{m^2} \rightarrow \frac{1}{4} \text{ и } \Phi(m) \rightarrow K_0(m).$$

Поэтому

$$\int_0^{\infty} \Phi(m) \frac{\sin ms_1}{m} \frac{\sin ms_2}{m} \cdot \frac{I_1^2(m)}{m^2} \cos \alpha m dm \rightarrow \frac{s_1 s_2}{4} \cdot \int_0^{\infty} K_0(m) \cos \alpha m dm.$$

С другой стороны, известно, что

$$\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_0(m) \cos \alpha m dm.$$

Итак,

$$\int_0^{\infty} \Phi(m) \frac{\sin ms_1}{m} \frac{\sin ms_2}{m} \frac{I_1^2(m)}{m^2} \cos \alpha m dm = \frac{\pi s_1 s_2}{8 \sqrt{1+\alpha^2}} \approx \frac{\pi s_1 s_2}{8 \alpha}.$$

Подставляя это значение интеграла в формулу (5.49), окончательно получаем

$$k = \frac{4\pi}{\omega^2 \mu^2 M_{\Gamma} M_{\Pi} L},$$

где

$$M_{\Gamma} = M_{\Gamma}^0 l; \quad M_{\Pi} = M_{\Pi}^0 b.$$

Если длина катушек зонда одинаковая, то $s_1 = s_2 = s$, и выражение для коэффициента зонда имеет вид

$$k = \frac{\pi^2}{8 \omega^2 \mu^2 r_{\text{к}} M_{\Gamma}^0 M_{\Pi}^0} \int_0^{\infty} \Phi(m) \frac{\sin^2 ms}{m^2} \frac{I_1^2(m)}{m^2} \cos \alpha m dm. \quad (5.50)$$

Для многокатушечного зонда, расположенного в однородной среде с удельной проводимостью γ , э. д. с. в измерительной цепи определяется из соотношения

$$\varepsilon = \sum \varepsilon_i = \sum \frac{1}{k_i} \gamma = \gamma \sum \frac{1}{k_i}.$$

Здесь ε_i и k_i — соответственно э. д. с. и коэффициент любого двухкатушечного зонда, входящего в состав многокатушечной системы.

Следовательно, коэффициент многокатушечного зонда может быть представлен в виде

$$k = \frac{1}{\sum \frac{1}{k_i}}, \quad (5.51)$$

Таблица 5.15

s	0,2		0,4		0,8		1,6		2,0		4,0	
	точное	приблж.	точное	приблж.								
1	$0,811 \cdot 10^{-2}$	$0,157 \cdot 10^{-1}$	$0,325 \cdot 10^{-1}$	$0,626 \cdot 10^{-1}$	0,130	0,250	0,483	1,000	0,718	1,570	$0,227 \cdot 10$	6,28
$\sqrt{2}$	0,711	$0,111 \cdot 10^{-1}$	0,285	0,444	0,116	0,177	0,454	0,710	0,684	1,110	0,223	4,44
2	0,594	$0,782 \cdot 10^{-2}$	0,239	0,314	$0,974 \cdot 10^{-1}$	0,125	0,404	0,500	0,625	0,783	0,214	3,14
$2\sqrt{2}$	0,472	$0,556 \cdot 10^{-2}$	0,190	0,222	0,773	$0,885 \cdot 10^{-1}$	0,330	0,355	0,530	0,556	0,200	2,22
4,0	0,359	$0,391 \cdot 10^{-2}$	0,144	0,156	0,585	0,624	0,247	0,250	0,403	0,392	0,176	1,57
$4\sqrt{2}$	0,265	0,278	0,106	0,111	0,429	0,443	0,177	0,177	0,285	0,278	$0,140 \cdot 10^{-1}$	1,11
8,0	0,192	0,196	$0,768 \cdot 10^{-2}$	$0,782 \cdot 10^{-2}$	0,309	0,312	0,126	0,125	0,200	0,196	0,933	0,784
$8\sqrt{2}$	0,137	0,139	0,549	0,560	0,220	0,221	$0,890 \cdot 10^{-1}$	0,890	0,140	0,139	0,602	0,560
16,0	0,976	$0,978 \cdot 10^{-3}$	0,391	0,391	0,156	0,156	$0,629 \cdot 10^{-1}$	$0,625 \cdot 10^{-1}$	$0,986 \cdot 10^{-1}$	$0,980 \cdot 10^{-1}$	0,408	0,392
$16\sqrt{2}$	0,692	0,700	0,279	0,280	0,111	0,111	$0,444 \cdot 10^{-1}$	0,445	0,695	0,695	0,283	0,280
32	0,490	0,489	0,196	0,196	$0,784 \cdot 10^{-1}$	0,780	$0,314 \cdot 10^{-1}$	0,313	0,491	0,490	0,198	0,196

и $\gamma_k = k\varepsilon$, где ε — э. д. с., наводимая в измерительной цепи многокатушечного зонда. При определении коэффициента k основную трудность представляет вычисление интеграла, стоящего в знаменателе формулы (5.50). Для случая, когда длины катушек двухкатушечного зонда равны, в табл. 5.15 приведены значения интеграла

$$\int_0^{\infty} \Phi(m) \frac{\sin^2 ms}{m^2} \cdot \frac{I_1^2(m)}{m^2} \cos am dm$$

и его асимптотические значения, соответствующие точечным источникам. С увеличением длины зонда наступает выход к асимптотическим значениям, при этом длина катушек (в определенных пределах) не играет существенной роли. В известных зондах влияние конечных размеров датчиков на величину коэффициента зонда незначительно. Так, четырехкатушечный зонд аппаратуры ИК-2 имеет следующие параметры: $\alpha_1 = 24$; $\alpha_2 = 9,6$; $\alpha_3 = 4,8$; $s_{\max} \approx 1$; $p = 0,4$; $c = 0,05$.

Принимая во внимание соотношение числа витков катушек, можно считать, что коэффициент зонда такой же, как и для точечных источников. Еще в большей степени это справедливо для трехкатушечных зондов, длина которых превышает в 4—5 раз радиус скважины.

Если зонды достаточно короткие и катушки отличаются по длине, то для определения коэффициента k вычисления выполняются по формуле (5.47).

Напряжение, подаваемое на измерительный прибор, связано с э. д. с., наводимой в катушках зонда аппаратурным коэффициентом A , который зависит от очень многих факторов (параметров датчиков зонда, коэффициента усиления, схемы детектирования и т. д.) и определяется введением в измерительную цепь стандарт-сигналов,

интенсивность которых соответствует амплитудам измеряемых сигналов. Между напряжением и величиной γ_k существует зависимость

$$\Delta V = A\varepsilon = \frac{A}{k} \gamma_k. \quad (5.52)$$

Если запись производится прибором с постоянной по напряжению (число милливольт, соответствующих 1 см шкалы), равной m , то масштаб кривой проводимости n (число оом^{-1} на 1 см шкалы) равен

$$n = \frac{k}{A} m. \quad (5.53)$$

В том случае, когда коэффициент A не зависит от амплитуды сигнала, подаваемого на вход прибора, масштаб записи кривой удельной проводимости становится линейным. Результаты измерений могут быть использованы для интерпретации с помощью палеток, если величина γ_k , введенная в этих палетках, связана с э. д. с. через фактический коэффициент зонда. Например, в палетках ИК-2 коэффициент зонда принят такой же, как для точечных источников. Как было показано, это предположение достаточно обосновано. Влияние скин-эффекта учитывается в палетках, так как по оси абсцисс отложена величина, пропорциональная проводимости среды.

Связь между измеряемым напряжением и удельной проводимостью среды может быть установлена экспериментально: градуировкой зонда в баке с водой или при измерениях с кольцами. Оба способа в настоящее время применяются как в аппаратуре ИК-2, так и при измерениях с ПИК-1 [1, 11].

При градуировке зонда в баке с водой снимается кривая зависимости напряжения на выходе измерительной цепи от удельной проводимости однородной среды, в которую помещен зонд. Если не вводить поправок, учитывающих влияние конечной мощности пласта, и считать, что зонд исключает влияние скважины и промежуточной зоны, т. е. как бы находится в однородной среде с электропроводностью пласта, то градуировочная кривая, естественно, позволяет определить истинное сопротивление пласта. Однако если необходимо прибегнуть к интерпретации, например внесению поправок, учитывающих влияние конечной мощности пласта, то нужно воспользоваться соответствующими палетками и представить их в такой форме, чтобы они соответствовали данной аппаратуре. Рассмотрим возможные пути решения этой задачи.

1 с п о с о б состоит в моделировании зонда не только в однородной среде, но и в тех неоднородных средах, которые соответствуют реальным условиям. Но этот наиболее прямой путь наименее реален, так как практически невозможно моделирование в масштабе 1 : 1.

2 с п о с о б заключается в моделировании зонда, все линейные размеры которого уменьшены в определенное число раз. Моделирование устанавливает зависимость между напряжением в измерительной цепи модели зонда и параметрами среды (удельная проводимость, мощность пласта и т. д.). Обычно измерение на модели и в натуре выполняется на разных частотах и в средах с различной удельной проводимостью, но при этом соблюдаются критерии подобия.

Если измерения с зондом и его моделью проведены в однородной среде при одних и тех же значениях параметра $p = \frac{L}{\delta_n}$, то устанавливается соответствие между напряжениями на выходе зонда и его модели. Это позво-

ляет представить результаты моделирования в виде палеток, по оси ординат которых отложено напряжение на выходе измерительной цепи моделируемого прибора. Но такая форма неудобна; более приемлемым является переход от напряжения к кажущейся проводимости, которая может быть введена различными путями. Здесь рассмотрим два варианта. В первом случае γ_k связана с э. д. с. в неоднородной среде соотношением

$$\frac{\epsilon^{\text{неодн}}}{\epsilon^{\text{одн}}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_{\text{п}}}, \quad (5.54)$$

Здесь $\epsilon^{\text{одн}}$ — э. д. с. в однородной среде с удельной проводимостью $\gamma_{\text{п}}$. Значение $\epsilon^{\text{одн}}$ может быть получено из градуировочной кривой или при моделировании в однородной среде. В данном случае коэффициент зонда есть функция проводимости среды $k = \frac{\gamma_{\text{п}}}{\epsilon^{\text{одн}}}$, и независимо от скин-эффекта в однородной среде γ_k равно $\gamma_{\text{п}}$. Можно ввести величину γ_k следующим образом:

$$\frac{\epsilon^{\text{неодн}}}{\epsilon_0^{\text{одн}}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_{\text{п}}}. \quad (5.55)$$

Здесь $\epsilon_0^{\text{одн}}$ — значение э. д. с. в области относительно высоких удельных сопротивлений, где $\epsilon_0^{\text{одн}}$ меняется прямо пропорционально квадрату частоты и удельной проводимости среды. Коэффициент в данном случае не зависит от удельного сопротивления среды. При этом способе введения кажущаяся проводимость равна истинной проводимости однородной среды только в области предельно малых параметров (очень низкие частоты и высокие сопротивления), а в остальных случаях отличается от нее в результате проявления скин-эффекта.

Оба способа введения величины γ_k не имеют заметных преимуществ друг перед другом. Таким образом, устанавливается соответствие между параметрами зонда и палетками, полученными в результате моделирования. Применение палеток, полученных путем моделирования, возможно, если: а) измерения с помощью зонда и его модели выполняются в одних и тех же условиях, например в однородной среде, б) модель зонда точно копирует используемый в реальных условиях зонд, т. е. учитывается не только расстояние между катушками, но и их линейные размеры.

З с п о с о б состоит в расчете палеток на основе известных параметров зонда. Электромагнитное поле и э. д. с. в неоднородной среде определяются по формулам, которые учитывают конечные размеры датчиков зонда. Если принять второй путь для введения величины γ_k , то это равносильно вычислению коэффициента зонда k по формуле (5.51). Зная коэффициент зонда k и аппаратный коэффициент A , полученный в результате калибровки аппаратуры, можно определить масштаб записи кривой проводимости.

Измерение в баке с водой, имеющей достаточно высокое удельное сопротивление, чтобы можно было пренебречь скин-эффектом, позволяет экспериментально определить величину отношения k/A^* . Но такие измерения сопряжены с некоторыми трудностями, так как применяемые в аппаратуре индукционного каротажа зонды достаточно длинные, а значит, необходимы большие резервуары с водой (в противном случае на измерения могут влиять стенки бака и поверхности раздела с воздухом и дном бака). Поэтому применяется другой способ градуировки зонда, а именно измере-

* При условии, что коэффициент A не зависит от величины входного сигнала, когда удельное сопротивление среды изменяется.

ние с кольцами. Кольцо устанавливается в определенное положение относительно датчиков зонда. Выводится формула для э. д. с. в измерительной цепи зонда, созданной током в кольце $\varepsilon = M\dot{I}$, где M — коэффициент взаимной индукции между кольцом и датчиком зонда. Величина M зависит от линейных размеров катушек. Можно подобрать размеры кольца и его удельное сопротивление так, чтобы э. д. с. от кольца равнялась э. д. с. от среды с заданным удельным сопротивлением. Расчет может быть выполнен как с учетом, так и без учета скин-эффекта. Измерения с помощью колец, так же как и моделирование в баке с водой, позволяет определить величину k/A и тем самым линейный масштаб записи кривой удельной проводимости.

В том случае, когда коэффициент A зависит от амплитуды сигнала и не представляется возможным осуществить калибровку с помощью сигналов, непосредственно вводимых в измерительную цепь, градуировочные кривые остаются единственным способом установления масштаба кривой. Нелинейность шкалы проводимостей, устанавливаемой в результате градуировки, может быть вызвана двумя причинами: во-первых, изменением коэффициента A и, во-вторых, проявлением скин-эффекта. Последний фактор легко учесть, поскольку из расчета известно влияние поглощения на величину поля в однородной среде. Практически нужно умножить коэффициент $u(\gamma_k = u_{\Delta} v)$ на величину $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0^{\text{одн}}} < 1$. Здесь $\varepsilon_0^{\text{одн}}$ — э. д. с. при отсутствии скин-эффекта. Например, на каждой палетке ИК-2 представлена зависимость

$$\frac{\gamma_k^{\text{одн}}}{\gamma_n} \left(\frac{\gamma_k^{\text{одн}}}{\gamma_n} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0^{\text{одн}}} \right)$$

как функция $\gamma_{\text{в}} \omega L^2$. Масштаб записи кривой проводимости определяется из соотношения

$$n = u \frac{\gamma_k^{\text{одн}}}{\gamma_n} m.$$

Если при этом наблюдается нелинейность шкалы, то она объясняется изменением коэффициента A . Заметим, что можно поступить иначе, исправив значения γ_k на палетках. Действительно, если на палетках величина γ_k связана с э. д. с. соотношением

$$\gamma_k = \frac{\gamma_n}{\varepsilon_0^{\text{одн}}} \varepsilon,$$

то, умножив обе части этого равенства на отношение $\frac{\varepsilon_0^{\text{одн}}}{\varepsilon_{\text{одн}}}$, получаем исправленное значение γ_k :

$$\gamma_k^{\text{испр}} = \frac{\gamma_k \cdot \varepsilon_0}{\varepsilon_{\text{одн}}} = \frac{\gamma_n}{\varepsilon_{\text{одн}}} \cdot \varepsilon.$$

Здесь $\varepsilon_{\text{одн}}$ — значение э. д. с. в однородной среде с учетом скин-эффекта. Величина $\frac{\gamma_n}{\varepsilon_{\text{одн}}}$ является коэффициентом зонда и в общем случае зависит от электропроводности среды. Масштаб записи кривой проводимости устанавливается непосредственно из градуировочной кривой, без внесения поправок, и в низкоомных разрезах носит явно нелинейный характер.

§ 9. К ВЫБОРУ ЧАСТОТЫ В ИНДУКЦИОННОМ КАРОТАЖЕ

Из анализа магнитного поля переменного магнитного диполя в однородной проводящей среде было установлено, что с увеличением частоты относительно возрастает роль близлежащих к источнику участков среды

[13]. Поэтому заметно улучшается вертикальная характеристика двухкатушечного зонда, но одновременно уменьшается влияние токов, индуцированных в пласте, по сравнению с сигналом от скважины и промежуточной зоны. В отличие от двухкатушечного зонда влияние среды, непосредственно окружающей многокатушечный зонд, очень мало, и увеличение частоты (до определенного предела) практически не изменяет его радиальной характеристики.

Помимо улучшения вертикальной характеристики многокатушечного зонда, переход к измерению на более высоких частотах позволяет применять индукционный каротаж в более высокоомных средах. Целесообразность применения относительно высоких частот отмечалась и раньше. Это нашло свое отражение в аппаратуре, разрабатываемой в Московском геологоразведочном институте. Однако в то время не существовало способа определения максимальной частоты, при которой не искажается радиальная характеристика зонда.

Сопоставление результатов строгих расчетов и данных, полученных из приближенной теории, для трехслойного разреза (скважина, промежуточная зона и пласт) дает возможность решить эту задачу (стр. 81). Действительно, в основе приближенной теории лежат два предположения: 1) в скважине и промежуточной зоне отсутствует скин-эффект; 2) в пласте скин-эффект проявляется так же, как в однородной среде с удельным сопротивлением пласта. Поэтому совпадение данных этих расчетов устанавливает максимальные частоты, для которых, во-первых, геометрический фактор скважины и промежуточной зоны остается таким же, как и в области предельно низких частот, и, во-вторых, сигнал от пласта не зависит от токов, индуцированных в скважине и промежуточной зоне. Выбор частоты определяется фокусирующими свойствами зонда*. Так, при переходе к зондам с большей глубиной исследования в более проводящих средах частота должна быть меньше. В частности, было установлено, что для зонда аппаратуры ИК-2 и трехкатушечного зонда такой же длины максимальная частота определяется из соотношения**

$$f_{\max} \leq (2,0 \div 2,2) \cdot 10^5 \cdot \rho_{\min}.$$

Если принять $\rho_{\min} = 1$ ом·м, максимальная частота может быть поднята от 60 до 220 кГц. Увеличение частоты почти в четыре раза приводит к значительному улучшению вертикальной характеристики зонда, особенно в низкоомных разрезах; становится возможным каротаж в разрезах с удельным сопротивлением выше 100 ом·м.

§ 10. О СПОСОБАХ РАСЧЕТА МНОГОКАТУШЕЧНЫХ ЗОНДОВ, ПРЕНАЗНАЧЕННЫХ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ УДЕЛЬНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ ЗОНЫ И ПЛАСТА

Будем исходить из следующих предположений:

1. Токи в скважине, промежуточной зоне и пласте, определяющие сигнал в измерительном устройстве, сдвинуты по фазе на 90° , и плотность тока зависит только от электропроводности в данной точке.

2. Удельное сопротивление среды не изменяется в направлении, параллельном оси скважины: поверхности раздела сред с различной удельной проводимостью представляют собою коаксиальные цилиндрические поверхности с общей осью, совпадающей с осью скважины.

* Дополнительное ограничение при выборе частоты требует, чтобы в однородной среде была обеспечена однозначность интерпретации.

** Это соотношение не учитывает влияние диэлектрической проницаемости ϵ , которое может оказаться заметным в средах с очень большим удельным сопротивлением.

Мысленно заменим промежуточную зону с непрерывно меняющимся значением ρ системой коаксиальных цилиндрических слоев с удельным сопротивлением, постоянным внутри каждого слоя.

Выражение для э. д. с. двухкатушечного зонда, согласно (5.11), имеет вид

$$\varepsilon = \frac{\mu\omega L^2}{2} \varepsilon^{\text{np}} \sum_1^N \gamma_i Q_{\Delta}(\alpha_i), \quad (5.56)$$

где $Q_{\Delta}(\alpha_i)$ — геометрический фактор i -слоя с электропроводностью γ_i . Функция $Q_{\Delta}(\alpha_i)$ связана с известной функцией $Q_c(\alpha)$ соотношением

$$Q_{\Delta}(\alpha_i) = Q_c(\alpha_i) - Q_c(\alpha_{i-1}).$$

Вклад, вносимый любым слоем в общий сигнал, существенно зависит от длины зонда, которая является основным параметром двухкатушечного зонда. Поэтому последний можно рассматривать как своего рода фильтр, усиливающий влияние одних участков среды и ослабляющий роль других. Вместе с тем анализ дифференциальной радиальной характеристики и соответствующие расчеты в неоднородных средах с цилиндрическими поверхностями раздела показывают, что двухкатушечный зонд не имеет острой избирательности.

Используя аналитические методы, рассмотрим возможность построения многокатушечных зондов с более острой избирательностью. Дифференциальная характеристика идеального в этом смысле зонда будет близка к характеристике, имеющей вид прямоугольного импульса заданной ширины, расположенного на определенном расстоянии от оси скважины, так как необходимо исключить влияние от остальных $N-1$ слоев, т. е. геометрический фактор каждого из N слоев должен быть равен нулю. Это требование приводит к решению системы из $N-1$ линейных уравнений с $N-1$ неизвестными. За неизвестные удобно считать моменты катушек $c_1, c_2, c_3 \dots, c_{N-1}$.

Система записывается в виде

$$\left. \begin{aligned} Q_c(\alpha_0) + \frac{c_1}{p_1} Q_c(p_1\alpha_0) + \frac{c_2}{p_2} Q_c(p_2\alpha_0) + \dots + \frac{c_{N-1}}{p_{N-1}} Q_c(p_{N-1}\alpha_0) &= 0; \\ Q_{\Delta}^{(1)}(\alpha_1) + \frac{c_1}{p_1} Q_{\Delta}^{(1)}(p_1\alpha_1) + \frac{c_2}{p_2} Q_{\Delta}^{(1)}(p_2\alpha_1) + \dots + \frac{c_{N-1}}{p_{N-1}} Q_{\Delta}^{(1)}(p_{N-1}\alpha_1) &= 0; \\ Q_{\Delta}^{(2)}(\alpha_2) + \frac{c_1}{p_1} Q_{\Delta}^{(2)}(p_1\alpha_2) + \frac{c_2}{p_2} Q_{\Delta}^{(2)}(p_2\alpha_2) + \dots + \frac{c_{N-1}}{p_{N-1}} Q_{\Delta}^{(2)}(p_{N-1}\alpha_2) &= 0; \\ \dots &\dots \\ Q_{\Delta}^{(k-1)}(\alpha_{k-1}) + \frac{c_1}{p_1} Q_{\Delta}^{(k-1)}(p_1\alpha_{k-1}) + \frac{c_2}{p_2} Q_{\Delta}^{(k-1)}(p_2\alpha_{k-1}) + \dots + \\ &+ \frac{c_{N-1}}{p_{N-1}} Q_{\Delta}^{(k-1)}(p_{N-1}\alpha_{k-1}) = 0; \\ Q_{\Delta}^{(k+1)}(\alpha_{k+1}) + \frac{c_1}{p_1} Q_{\Delta}^{(k+1)}(p_1\alpha_{k+1}) + \frac{c_2}{p_2} Q_{\Delta}^{(k+1)}(p_2\alpha_{k+1}) + \dots + \\ &+ \frac{c_{N-1}}{p_{N-1}} Q_{\Delta}^{(k+1)}(p_{N-1}\alpha_{k+1}) = 0; \\ \dots &\dots \\ Q_{\Delta}^{(N-1)}(\alpha_{N-1}) + \frac{c_1}{p_1} Q_{\Delta}^{(N-1)}(p_1\alpha_{N-1}) + \frac{c_2}{p_2} Q_{\Delta}^{(N-1)}(p_2\alpha_{N-1}) + \dots + \\ &+ \frac{c_{N-1}}{p_{N-1}} Q_{\Delta}^{(N-1)}(p_{N-1}\alpha_{N-1}) = 0. \end{aligned} \right\} (5.57)$$

Левая часть первой строчки определяет геометрический фактор скважины *, который приравнен к нулю; вторая строчка — геометрический фактор от первого слоя в промежуточной зоне и т. д. Левая часть последней строки определяет геометрический фактор N -слоя в пласте; вне этого слоя, по предположению, токи не влияют на величину измеряемого сигнала.

Следовательно, из $2N-1$ параметров зонда $N-1$ являются решением системы (5.57), остальные N параметров, т. е. расстояние между катушками, должны быть подобраны так, чтобы обеспечить оптимальные с точки зрения фокусировки свойства зонда.

Сигнал от исследуемого k -слоя прямо пропорционален геометрическому фактору слоя для данного многокатушечного зонда. Согласно (5.56), имеем

$$Q_{\Delta}^{(k)} = Q_{\Delta}^{(k)}(\alpha_k) + \frac{c_1}{p_1} Q_{\Delta}^{(k)}(p_1 \alpha_k) + \dots + \frac{c_{N-1}}{p_{N-1}} Q_{\Delta}^{(k)}(p_{N-1} \alpha_k). \quad (5.58)$$

Поэтому желательно подобрать параметры зонда так, чтобы обеспечить максимум функции (5.58).

При реализации многокатушечного зонда параметры его, г. е. моменты катушек и расстояние между ними, несколько отличаются от принятых в расчете. Поэтому возникает задача изучения помехоустойчивости системы (5.57) при изменении параметров в незначительных, но возможных при конструировании пределах.

Геометрический фактор любого слоя можно рассматривать как сумму геометрических факторов более тонких слоев. Поэтому равенство геометрического фактора i -слоя нулю возможно, если часть элементарных слоев вносит положительный фактор в эту сумму, а остальные — отрицательный.

Когда ширина i -слоя недостаточно мала и удельное сопротивление внутри слоя изменяется в радиальном направлении, сигнал от слоя не равен нулю, поскольку в расчетах принято, что удельное сопротивление внутри слоя постоянно. Эта величина сигнала пропорциональна максимальной амплитуде колебания геометрического фактора внутри слоя. Поэтому при выборе параметров необходимо добиться, чтобы максимальная амплитуда геометрического фактора внутри слоя (среди всех $N-1$ слоев) была во много раз меньше максимальной амплитуды геометрического фактора исследуемого слоя.

Чем меньше максимальная амплитуда характеристики внутри слоя и чем чаще она принимает нулевое значение, тем слабее влияние изменения удельного сопротивления внутри слоя.

Взаимозаменяемость передающих и приемных катушек зонда указывает на отсутствие прямой связи избирательных свойств зонда с распределением плотности вихревых токов. Вместе с тем можно ожидать, что анализ распределения плотности тока будет полезен как с точки зрения увеличения сигнала от исследуемого слоя, так и для ослабления влияния изменения удельного сопротивления внутри слоев, сигналы от которых должны быть равны нулю.

Количество датчиков зонда находится в прямой зависимости от числа слоев, на которое мысленно разбивается вся среда. В принципе с увеличением числа слоев растет детальность исследования среды и устойчивость к изменению удельного сопротивления. Однако для каждого типа зонда (симметричного или несимметричного) существует предел, после которого, как показывают расчеты, с увеличением количества датчиков начинает резко уменьшаться полезный сигнал и ухудшаются фокусирующие свойства зонда.

* В общем случае скважина может быть представлена в виде нескольких слоев.

Аналогично рассчитывается зонд, предназначенный для определения удельного сопротивления пласта.

При конструировании новых зондов, естественно, возрастает требование к чувствительности и стабильности аппаратуры индукционного каротажа.

При измерении с двухкатушечным зондом или зондом, исключаящим сигнал от скважины, наводимая э. д. с. представляет собою сумму сигналов от многих цилиндрических слоев, где полезный сигнал* составляет относительно небольшую долю. Поэтому повышение чувствительности главным образом связано с выделением полезного сигнала и подавлением той части сигнала, которая в данном измерении является помехой. Описываемый способ исследования удельного сопротивления среды принципиально можно рассматривать как метод интерпретации по данным измерения с соответствующими двухкатушечными зондами, состоящий в определении удельной проводимости i -слоя по формуле (5.58). Однако при известной точности измерений электрических величин в скважине такой способ обработки наблюдений едва ли удастся реализовать.

Параметры многокатушечного зонда, полученные из решения линейной системы (5.57), не обеспечивают максимум сигнала от исследуемого участка среды независимо от того, является ли он тонким цилиндрическим слоем или цилиндром с практически неограниченным внешним радиусом.

Для определения оптимальных с этой точки зрения параметров зонда воспользуемся методами линейного программирования.

Сигнал в измерительной цепи двухкатушечного зонда, созданной токами в тонком цилиндрическом слое, определяется из соотношения

$$\varepsilon = \frac{M_r M_n \omega^2 \mu^2}{4\pi L_0} \gamma G_\rho(\alpha),$$

или

$$\varepsilon = \frac{M_r M_n \omega^2 \mu^2}{4\pi L_0^2} \gamma \Delta \rho \cdot \frac{1}{\alpha} C(\alpha).$$

Предположим, что зонд состоит из одной генераторной (измерительной) и N измерительных (генераторных) катушек. Тогда сигнал в измерительной цепи многокатушечного зонда определяется из соотношения

$$\varepsilon = \sum \varepsilon_i = \frac{\omega^2 \mu^2 M_r}{4\pi} \gamma \Delta \rho \sum_1^N c_i g \left(\frac{\rho}{L_i} \right),$$

где

$$c_i = \frac{M_n^i}{L_i^2}; \quad g = \frac{\rho}{L_i} C \left(\frac{\rho}{L_i} \right).$$

Здесь M_n^i — момент i -измерительной катушки;

L_i — расстояние между генераторной и i -измерительной катушками;

ρ — радиус цилиндрического слоя толщиной $\Delta \rho$;

$C\left(\frac{\rho}{L_i}\right)$ — функция, значения которой приведены в табл. 5.1.

П о с т а н о в к а з а д а ч и. Пусть задано число одноименных датчиков зонда N . Нужно подобрать моменты измерительных (генераторных) катушек M_i и расстояние между ними так, чтобы резко повысить чувствительность многокатушечного зонда к исследуемым участкам среды. Это

* Сигнал от исследуемого слоя.

равносильно следующей математической задаче: для данного ε определить c_i, L_i ($i=1,2,\dots,N$) при условиях: *

$$\left| \sum_1^N c_i g\left(\frac{\rho}{L_i}\right) \right| \leq \varepsilon \quad (0 \leq \rho \leq a; \quad b \leq \rho \leq R),$$

а функция

$$\int_a^b \sum_1^N c_i g\left(\frac{\rho}{L_i}\right) d\rho$$

максимальна. Для установок, предназначенных для определения удельного сопротивления пласта, точка b совпадает с концом отрезка R .

Рассмотрим сеточный аналог задачи и возьмем с произвольным шагом на отрезке $(0, R)$ точки r_j ($j=1,\dots,M$). Тогда

$$-\sum c_i g\left(\frac{r_j}{L_i}\right) \leq \varepsilon \quad (0 \leq r_j \leq a),$$

$$\sum c_i g\left(\frac{r_j}{L_i}\right) \leq \varepsilon \quad (b \leq r_j \leq R)$$

и

$$\sum_{j \in J} \sum_{i=1}^N c_i g\left(\frac{r_j}{L_i}\right) \Delta r - \max,$$

$$J = \{j/r_j \in [a, b]\}.$$

Чем больше точек на отрезке, тем меньше будет амплитуда функции в промежуточной точке r ($r_j < r < r_{j+1}$). Действительно,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N c_i g\left(\frac{r}{L_i}\right) &= \sum_{i=1}^N c_i g\left(\frac{r}{L_i}\right) - \sum_{i=1}^N c_i g\left(\frac{r_j}{L_i}\right) + \sum_{i=1}^N c_i g\left(\frac{r_j}{L_i}\right) \leq \\ &\leq \sum |c_i| \left| g\left(\frac{r}{L_i}\right) - g\left(\frac{r_j}{L_i}\right) \right| + \varepsilon \leq \varepsilon + A|r - r_j| = \varepsilon + A\Delta r_j, \end{aligned}$$

где A — некоторая постоянная, зависящая от c_i и g . Поставленная задача является задачей нелинейного программирования без предположения о выпуклости (вогнутости) функций $\sum c_i g\left(\frac{r}{L_i}\right)$. Без этого предположения существующие методы либо не пригодны, либо, в лучшем случае, ведут к локальному экстремуму. Поэтому линеаризируем задачу, придав фиксированные значения расстояниям L_1, L_2, \dots, L_N . Значит, поставленная задача сводится к задаче линейного программирования, т. е. оптимизации линейной функции

$$\sum_{j \in J} \sum_{i=1}^N c_i g\left(\frac{r_j}{L_i}\right); \quad J = \{j/r_j \in [a, b]\}$$

* R устанавливается из характера поведения функции g для двухкатушечного зонда и в расчетах принят равным 20.

на множестве переменных c_1, c_2, \dots, c_N , удовлетворяющих системе неравенств

$$\sum_1^N c_i g\left(\frac{r_i}{L_i}\right) \leq \varepsilon;$$

$$-\sum_1^N c_i g\left(\frac{r_i}{L_i}\right) \leq \varepsilon.$$

Здесь

$$r_i \in [0, \alpha]; [b, R].$$

Для решения задачи линейного программирования разработаны эффективные математические методы и вычислительные алгоритмы, запрограммированные в системе команд быстродействующих электронных машин. В данной задаче используется метод последовательного улучшения плана [8]. В некоторых случаях проще решать двойственную задачу. К решению задачи приступаем следующим образом. Пусть многокатушечный зонд состоит из N генераторных и одной измерительной катушек. Вначале возьмем $N = N_1$ и примем расстояния между катушками равными $L_i = \frac{1}{N_1} i$.

Выбрав $L_i^0 = \frac{1}{N_1} i$, мы делаем ошибку в определении L_i меньшую, чем $\frac{1}{2N_1} \left(\left| L_i^0 - L_i^* \right| < \frac{1}{2N_1} \right)$. Чем ближе друг к другу расположены катушки, тем меньше ошибка в определении истинного значения L_i^* . Выбрав L_i^0 , решаем поставленную задачу относительно коэффициентов c_i . Теперь будем уменьшать N , при этом величина максимума убывает. Рассмотрим два ряда значений $L_1^0, L_2^0, L_3^0, \dots, L_{N_1}^0$ и соответствующие им коэффициенты $c_1^0, c_2^0, c_3^0, \dots, c_{N_1}^0$. Если датчики $i, i+1, \dots, i+k$ имеют моменты одного знака, то они выполняют одинаковую роль при выделении сигнала от исследуемого слоя. Поэтому их целесообразно объединить. Расстояние L_i^0 до датчика, заменяющего датчики $i, i+1, \dots, i+k$, находилось как средневзвешенное:

$$L_i^1 = \frac{L_i^0 c_i^0 + L_{i+1}^0 c_{i+1}^0 + \dots + L_{i+k}^0 c_{i+k}^0}{c_i^0 + \dots + c_{i+k}^0}.$$

Объединив все группы датчиков, моменты которых имеют одинаковые знаки, получаем новое распределение из N_2 датчиков, расположенных на расстояниях $L_1^1, L_2^1, L_3^1, \dots, L_{N_2}^1$. Снова решаем задачу линейного программирования с L_i^1 при той же сеточной модели и получаем новый набор параметров $c_i^1 (i=1, \dots, N_2)$. Если нужно еще уменьшить N_2 , то этот процесс продолжается, причем может оказаться, что моменты смежных датчиков имеют разные знаки. Тогда определение расстояния до датчика, эквивалентного заменяемому, выполняется по формуле

$$L_i'' = \frac{L_i^1 |c_i^1| + L_{i+k}^1 |c_{i+k}^1|}{|c_i^1| + \dots + |c_{i+k}^1|}.$$

Естественно, что последняя операция приводит к значительному уменьшению максимума и поэтому, вообще говоря, нежелательна. Табл. 5.16 содержит значения параметров многокатушечных зондов ($N=10$), обладающих значительно более высокой чувствительностью к исследуемому слою, чем соответствующие двухкатушечные зонды. На рис. 5.19 дана дифференциальная радиальная характеристика одного из таких зондов.

По-видимому, наиболее существенные результаты можно получить при исследовании с многокатушечными зондами зон, непосредственно окружающих скважину. По мере увеличения расстояния цилиндрических

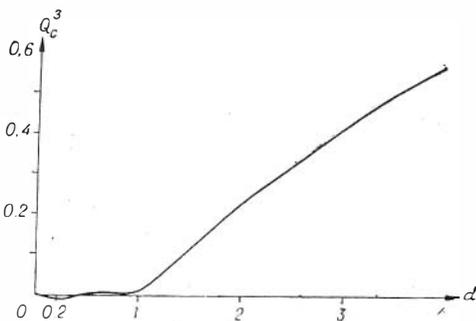
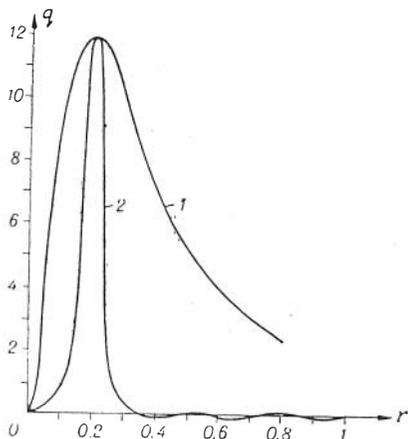


Рис. 5.20.

Рис. 5.19.

1 — двухкатушечный, 2 — многокатушечный зонды.

слоев от оси скважин возникает необходимость увеличения их размеров и соответственно уменьшается детальность исследования разреза.

Аналогично решается задача определения параметров зонда, предназначенного для определения удельного сопротивления пласта. Ниже

Таблица 5.16

L	c	Примечание
0,20	0,26	Интервал исследования $0,1 \leq r \leq 0,3$. Отношение сигнала от исследуемого слоя к сигналу от среды ($0 \leq r \leq 0,1$ и $0,3 \leq r \leq 20$) для многокатушечного зонда $\eta_{10} = 85,0$. Это отношение для двухкатушечного зонда ($L = 0,4$ м) равно $\eta_2 = 0,5$. Чувствительность к слою повышается в 170 раз
0,25	-13,20	
0,30	30,10	
0,35	-21,70	
0,40	-17,90	
0,45	40,30	
0,55	-23,50	
0,65	13,20	
0,80	-17,50	
0,90	10,60	
0,05	0,77	Интервал исследования $0,2 \leq r \leq 0,6$. Отношение сигнала от исследуемого слоя к сигналу от среды ($0 \leq r \leq 0,2$; $0,3 \leq r \leq 2$) для многокатушечного зонда $\eta_{10} = 13,0$. Это отношение для двухкатушечного зонда ($L = 0,8$) равно $\eta_2 = 0,45$. При увеличении размеров исследуемой зоны чувствительность возрастает в тридцать раз
0,10	-1,11	
0,15	-3,41	
0,23	16,40	
0,35	-34,85	
0,49	30,05	
0,59	-9,27	
0,69	24,00	
0,84	-36,93	
0,99	15,03	
0,10	3,21	Интервал исследования $0,3 \leq r \leq 0,9$. Отношение сигнала от исследуемого слоя к сигналу от среды ($0 \leq r \leq 0,3$; $0,9 \leq r < 2,0$) для многокатушечного зонда $\eta_{10} = 28$. Это отношение для двухкатушечного зонда ($L = 1,2$) равно $\eta = 1$
0,15	-12,34	
0,20	13,71	
0,28	-4,52	
0,36	3,39	
0,48	-7,96	
0,61	-3,43	
0,78	15,64	
0,89	3,29	
0,95	-10,66	

приведены значения c_i , L_i для семикатушечного зонда, а на рис. 5.20 его интегральная радиальная характеристика.

L_i	0,134	0,240	0,400	0,590	0,770	0,960
c_i	1,138	-4,000	+7,400	-3,356	-9,372	+8,927
$\frac{M_\Gamma^i}{M_\kappa}$	0,0205	-0,230	1,182	-1,171	-5,55	+8,21

Можно показать, что в области предельно малых параметров сигнал в однородной среде для многокатушечного зонда в 5,5 раза меньше, чем для двухкатушечного зонда с теми же моментами крайних катушек.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. М. Аксельрод. О градуировке аппаратуры индукционного каротажа.— Изв. вузов, «Нефть и газ», 1960, № 5.
2. С. М. Аксельрод и Е. А. Саркисова. Палетки для учета влияния скважины и зоны проникновения на результаты измерения при индукционном каротаже.— «Азербайджан. нефт. хоз.», 1962, № 7.
3. С. М. Аксельрод. Высокочастотные методы исследования скважин. Госгеолтехиздат, 1962.
4. С. М. Аксельрод. О масштабе кривых индукционного каротажа.— Изв. вузов, «Нефть и газ», 1961, № 3.
5. Л. М. Альпин. К теории электрического каротажа буровых скважин.— ОНТИ НКТП СССР, 1938.
6. Г. Н. Зверев, В. А. Курсов. Магнитный диполь в среде с цилиндрической границей раздела.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1963, № 1.
7. С. Г. Комаров. Картаж по методу сопротивлений. Госгиптехиздат, 1950.
8. Л. В. Кантарович. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. АН СССР, 1959.
9. Ю. И. Кудрявцев. Некоторые вопросы теории индукционного каротажа.— Прикл. геофизика. 1960, № 28.
10. В. Н. Никитина. Решение осесимметрической задачи.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1960, № 4.
11. М. И. Плюсин. О выборе основных параметров аппаратуры индукционного каротажа.— Геофиз. разведка, 1962, вып. 10.
12. Е. А. Саркисова. Палетки для индукционного каротажа.— Развед. и промысл. геофизика, 1960, № 37.
13. А. А. Кауфман. К обоснованию индукционного каротажа.— Изв. вузов, «Геология и разведка», 1960, № 7.
14. А. А. Кауфман. О приближенной теории индукционного каротажа.— Изв. вузов. «Геология и разведка», 1961, № 4.
15. А. А. Кауфман, Р. П. Шапиро, Л. Р. Хитрова. К основам теории индукционного каротажа.— Изв. вузов, «Геология и разведка», 1961, № 6.
16. А. А. Кауфман, Р. П. Шапиро. Разработка кольцевого индукционного каротажного интегратора.— Изв. вузов. «Геология и разведка», 1959, № 10.
17. А. А. Кауфман. К расчету электромагнитного поля на оси скважины в пласте конечной мощности.— Геология и геофизика, 1963, № 11.
18. А. А. Кауфман. Приближенный метод расчета поля на оси скважины.— Геология и геофизика, 1964, № 3.
19. А. А. Кауфман. Введение в теорию индукционного каротажа.— Сб. тр. ИГиГ СО АН СССР, 1964.
20. А. А. Кауфман. Методика расчета электромагнитного поля вертикального магнитного диполя на оси скважины.— Прикл. геофизика, 1964, № 38.
21. H. G. Doll. Introduction to induction logging and application to logging of wells drilled with oil base mud.— J. of petroleum Technology, 1946, VI.
22. W. C. Duesterhoeft. Propagation effects in induction Logging.— Geophysics, 1961, V, 26.
23. W. C. Duesterhoeft., R. E. Hartline and H. S. Thomesen. The effect of coil design on the performance of the induction log.— J. of Petroleum. Technology, 1961, V, 13.
24. W. C. Duesterhoeft. Propagation effects on radial response in induction logging.— Geophysics, 4, 1962.
25. J. H. Morgan and K. S. Kunz. Basic theory of induction logging and application to study of two-coil sondes.— Geophysics, 6, 1962.

О Г Л А В Л Е Н И Е

В в е д е н и е	3
Глава первая. Электромагнитное поле в однородной среде	7
Глава вторая. Методы решения прямой задачи индукционного каротажа	17
§ 1. Формулировка задачи	17
§ 2. Метод разделения переменных	18
§ 3. Метод оболочек	19
§ 4. Метод интегральных уравнений	30
§ 5. Приближенные методы расчета	35
Глава третья. Электромагнитное поле вертикального магнитного диполя на оси коаксиальной системы цилиндрических поверхностей раздела	46
§ 1. Формулировка задачи	46
§ 2. Выражения для вектор-потенциала в общем виде	47
§ 3. Определение коэффициентов в выражении для Π_m	49
§ 4. Выражение для вектор-потенциала и поля в случае трех сред (две цилиндрические поверхности раздела)	50
§ 5. Поведение функции $\lambda_1^2 C_1$ при больших и малых значениях аргумента λ	53
§ 6. Поведение функции $\lambda_1^2 C_1$ при больших и малых значениях аргумента κ	57
§ 7. Вычисление функций Бесселя от комплексного аргумента	61
§ 8. Вычисление интеграла в выражении для напряженности поля h_z (3.24)	62
§ 9. Приближенная теория индукционного каротажа для двухкатушечного зонда в средах с цилиндрическими поверхностями раздела	64
§ 10. Палетки индукционного бокового каротажного зондирования с двухкатушечными зондами (ИБКЗ-2)	70
§ 11. Поле на оси скважины в среде с удельным сопротивлением, непрерывно меняющимся в направлении, перпендикулярном оси скважины	75
§ 12. Приближенный учет внутреннего скин-эффекта	76
§ 13. Магнитное поле вертикального магнитного диполя на оси скважины	83
§ 14. Частотный способ повышения глубинности исследования с двухкатушечными и многокатушечными зондами	89
§ 15. Влияние конечных размеров датчиков зонда в индукционном каротаже	98
§ 16. Вектор-потенциал элемента тока в проводящей среде	101
§ 17. Вектор-потенциал кольца с током в проводящей среде	102
§ 18. Электрическое поле кольца в среде с цилиндрическими поверхностями раздела	103
§ 19. Электрическое поле однослойной катушки в однородной проводящей среде	107
§ 20. Электрическое поле в среде с цилиндрическими поверхностями раздела	0
§ 21. Э. д. с., создаваемая однослойной катушкой в измерительной однослойной катушке	113
§ 22. Однокатушечный зонд	116
§ 23. Одночное кольцо, надетое на непроводящую основу зонда, в среде с цилиндрическими поверхностями раздела	119
§ 24. Однослойная катушка на непроводящей основе зонда	120
§ 25. О влиянии магнитной проницаемости в индукционном каротаже	123
§ 26. О влиянии диэлектрической проницаемости в индукционном каротаже	33
Глава четвертая. Электромагнитное поле вертикального магнитного диполя в пластах конечной мощности	135
§ 1. Формулировка задачи	135
§ 2. Поле магнитного диполя, расположенного вне пласта	138
§ 3. Поле магнитного диполя, расположенного внутри пласта	140

§ 4. Поле вертикального магнитного диполя в присутствии тонкой проводящей пластины	141
§ 5. Теория двухкатушечного зонда в области предельно малых параметров	143
§ 6. Строгая теория индукционного каротажа в пластах ограниченной мощности	152
§ 7. Кривые профилирования с двухкатушечным зондом в средах с двумя горизонтальными границами(пласт конечной мощности)	166
§ 8. Магнитное поле на оси скважины в пластах ограниченной мощности	172
<i>Глава пятая. Многокатушечные зонды</i>	180
§ 1. Способы анализа многокатушечных зондов индукционного каротажа	180
§ 2. Графический способ определения параметров многокатушечного зонда	182
§ 3. Аналитический способ подбора параметров многокатушечного зонда	188
§ 4. Физические основы фокусировки	189
§ 5. Экспериментальные и расчетные радиальные характеристики зондов	191
§ 6. Симметричные зонды	192
§ 7. Трехкатушечные зонды	207
§ 8. К определению коэффициента многокатушечного зонда	218
§ 9. К выбору частоты в индукционном каротаже	222
§ 10. О способах расчета многокатушечных зондов, предназначенных для определения удельного сопротивления промежуточной зоны и пласта	226
Литература	234

Александр Аркадьевич. Кауфман
ТЕОРИЯ ИНДУКЦИОННОГО КАРОТАЖА

Редактор *И. П. Зайцева*. Художественный редактор *В. Г. Бурягин*.
Обложка художника *Н. А. Савдоловой*. Технический редактор *Е. М. Елистратова*.
Корректоры *Г. А. Иванчук, Л. И. Коричинская*.

Сдано в набор 26 апреля 1965 г. Подписано в печать 20 ноября 1965 г. МН 00615.
Бумага 70X108¹/₁₆, 14,75 печ. л., 20,5 усл.-печ. л.+3вкл., 16,6 уч.-изд. л.
Тираж 1500. Заказ № 2552.

Издательство «Наука», Сибирское отделение.
Новосибирск, Советская, 20.

2-я типография изд-ва «Наука». Москва, Г-99, Шубинский пер., 10.

Цена 1 р. 26 к.