

В.В. Голубев

ГЕОДЕЗИЯ

**ТЕОРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОБРАБОТКИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ
ИЗМЕРЕНИЙ**

МОСКВА
ИЗДАТЕЛЬСТВО МИИГАиК
2016

УДК 528.11
ББК 26.1
Г 62

Рецензенты:
профессор **А.Г. Юнусов**
(Государственный университет по землеустройству);
доцент **Е.А. Русяева** (МИИГАиК)

Г 62 **Голубев В.В.**
Геодезия. Теория математической обработки геодезических измерений: учебник для вузов. –М.: Изд-во МИИГАиК, 2016. – 422 с.: ил.
ISBN 978-5-91188-073-6

Приведены необходимые сведения из теории вероятностей и математической статистики. Рассмотрена теория ошибок, уравнивание и проектирование геодезических сетей. Изложение теоретического материала во всех разделах учебника сопровождается решением задач из геодезической практики.

Для студентов и аспирантов геодезических вузов, может быть полезен специалистам топографо-геодезического производства.

УДК 528.11
ББК 26.1

ISBN 978-5-91188-073-6

© Голубев В.В., 2016
© Издательство МИИГАиК, 2016

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

Геодезия — наука об измерении Земли и её физических полей. Основополагающую роль в надежности результатов измерений играют геодезические инструменты, но не менее важны способы обработки выполненных измерений.

Теория математической обработки геодезических измерений — научная дисциплина в основу которой положен метод наименьших квадратов, получивший свое развитие в трудах ученых-геодезистов профессоров МИИГАиК (П.А. Гайдаев, В.Д. Большаков, Ю.И. Маркузе и др).

В 1984 г. Ученым Советом МИИГАиК и коллегией ГУГК при Совете министров СССР было принято решение создать фундаментальное многотомное издание «Геодезия». Каждый том должен был отражать ту или иную научно-техническую составляющую — всего 19 томов. В 1980–1990 гг. было издано только два тома. Отдавая должное решению об издании многотомной серии «Геодезия», к сожалению, из-за развала СССР не завершеному, издательство МИИГАиК полагает целесообразным возобновить работу над многотомником, поэтому данный учебник издается в формате и оформлении серии «Геодезия».

Предисловие автора

Учебник написан в соответствии с учебной программой и содержит элементы теории вероятностей (в объеме необходимом для понимания теории ошибок) и математической статистики, теорию ошибок, уравнивание геодезических построений по методу наименьших квадратов, проектирование геодезических построений.

Учебник призван сформировать у будущих специалистов четкое представление о принципах обработки геодезических измерений, а также профессиональные и общекультурные компетенции, предусмотренные ФГОС соответствующих направлений и специальностей.

Все разделы содержат теоретический материал, сопровождаемый выводами и практическими иллюстрациями, список контрольных вопросов, расчетные примеры и индивидуальные задания. Задания по уравниванию для каждого студента отличаются не только смоделированными и введенными ошибками измерений, но и самими значениями измерений. В заданиях по уравниванию нивелирной сети индивидуальна и геометрия сети. Среди заданий появилась задача на уравнивание линейно-угловой сети с двумя определяемыми пунктами. По усмотрению ведущего преподавателя данное задание может быть преобразовано к обратной однократной, многократной, комбинированной засечкам, путем изъятия каких-либо измерений.

Последний раздел посвящен предрасчету точности и проектированию геодезических сетей. Рассмотрены строгие и приближенные методы предрасчета. Сделан акцент на отличии понятий среднего квадратического отклонения и средней квадратической ошибки от их предрасчетных значений.

Для выполнения домашних заданий по уравнительным вычислениям предусмотрено использование алгоритмов, представленных в традиционной форме и в матричной форме. В последнем случае рекомендуется выполнять вычисления в специализированной информационной среде, например, Mathcad, Mathematika, Matlab или составить собственную программу, позволяющую совершать различные матричные операции. Можно адаптировать EXCEL под такие вычисления.

Автор выражает благодарность профессору А.Г. Юнусову и доценту Е.А. Русяевой за большой труд по рецензированию данного учебника.

ГЛАВА 1

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§1.1. Основные понятия теории вероятностей.

Формула классической вероятности

Мы живем в мире случайностей. Нас окружают случайные явления, т.е. явления, которые невозможно заранее предсказать. Например, все мы просыпаемся, выходим на улицу в разное время. Погода каждый день разная, и какая будет через неделю, через месяц мы не знаем. На улице мы часто встречаем знакомых и незнакомых людей. Проехала случайная машина, кто-то опоздал на автобус и т.д.

Казалось бы, в этом мире случайностей нет никакой закономерности, но теория вероятностей их находит.

Теорией вероятностей называется математическая дисциплина, которая изучает случайные явления и устанавливает их закономерности при массовых проявлениях.

Оказывается, если определенные случайные явления происходят часто, то начинают проявляться определенные закономерности. Например, для нас естественны фразы типа — средняя температура декабря в этом году оказалась ниже нормы на два градуса. А кто установил эту норму? Оказывается, это некоторое среднее значение температуры за много лет наблюдений. И самое главное, это значение достаточно устойчиво, т.е. практически не меняется в течение многих лет. Это и есть одна из характеристик, которые изучают в теории вероятностей.

В теории вероятностей принято любое наблюдение случайного явления при определенных условиях называть опытом, экспериментом или испытанием, а результат этого эксперимента — событием или исходом.

События принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита A, B, C, D и т.д. или буквами с индексом A_1, A_2, \dots, A_n . Например, при подбрасывании монеты (подбрасывание — это опыт), могут произойти события: A — появление «орла» (рис. 1.1), B — появление «решки» (рис. 1.2).

Событиям можно дать трактование на основе теории множеств. Например, если монету подбросить два раза, то могут произойти следующие события: $C_1 = \{A_1, A_2\}$; $C_2 = \{A_1, B_2\}$; $C_3 = \{B_1, A_2\}$; $C_4 = \{B_1, B_2\}$. Здесь, событие A_i — появление «орла» при i -ом подбрасывании монеты; B_i — появление «решки» при i -ом подбрасывании монеты; C_i — событие, которое состоит, в том что появятся сразу два события: два «орла», либо «орёл» и «решка», либо «решка» и «орёл», либо две «решки». При этом события A_i и B_i — события, которые нельзя представить с помощью комбинации других событий. Такие события называются простыми (элементарными). События C_i — события, которые могут быть представлены в виде комбинаций других событий. События C_i состоят из подмножества событий, которое включает в себя более одного события. Такие события называются сложными.

Рассмотрим еще один пример. Подбрасывается игральная кость. Рассматриваются события A_i — число выпавших очков: A_1 — выпадение 1; A_2 — выпадение 2; A_3 — выпадение 3; A_4 — выпадение 4; A_5 — выпадение 5; A_6 — выпадение 6. Здесь события A_i — простые. Но событие C , которое заключается в появлении четного числа очков, является сложным, поскольку $C = \{A_2, A_4, A_6\}$.

События можно представить графически в виде некоторых областей. Например, можно считать, что множество всех возможных событий соответствует области прямоугольника (рис. 1.3), а событие A соответствует эллипсу (говорят: если произошло событие A , то мы попали в область эллипса).

События могут быть классифицированы и по другим параметрам. Различают



Рис. 1.1. Появление «орла» — событие A



Рис. 1.2. Появление «решки» — событие B

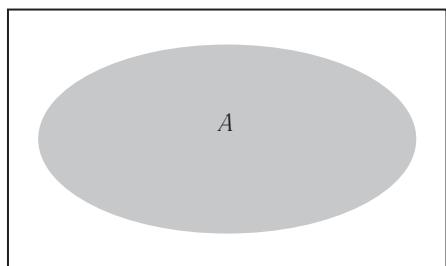


Рис. 1.3. Графическое представление события

события зависимые и независимые. Независимыми называются события, когда появление одного из них не изменяет шансов появления другого (т.е. не изменяет условий проведения опыта, результатом которого станет появление другого события) и таким образом не влияет на появление другого.

Например, если Вы вышли на улицу (событие A), то это никак не повлияет на то, что в какой-то конкретный момент времени автобус подойдет к своей остановке (событие B). Но если Вы, выйдя на улицу, помешали движению этого автобуса и задержали его, то автобус подойдет к остановке уже в другой момент времени. В этой ситуации появление события A влияет на появление события B (автобус подойдет к остановке в другой момент). Такие события называют **з а в и с и м ы м и**.

Другой пример. Рассмотрим события D и E : к вокзалу подъехал поезд (событие D); в класс школы вошел учитель (событие E). Понятно, что события независимы. Но, если известно, что учитель приехал на работу на этом поезде, то события будут зависимыми.

События могут быть совместными и несовместными. Совместными называют события, которые имеют область пересечения (могут происходить вместе). Например, если событие $B = \{A_1, A_2, A_3\}$ (состоит из множества событий A_1, A_2, A_3), а событие $C = \{A_2, A_3, A_4\}$, то они имеют область пересечения $D = \{A_2, A_3\}$. Это означает, что если произошло событие A_2 или A_3 , то произошли событие B и событие C (рис. 1.4).

Пример. Пусть из колоды карт, случайным образом достают одну карту. Рассмотрим события B — появление туза и C — появление бубновой масти. В данных условиях они могут появиться вместе, если извлеченная карта будет бубновым тузом. Это событие и есть область пересечения событий B и C . Следовательно, события B и C являются совместными.

Несовместными событиями называются события, которые не имеют области пересечения (рис. 1.5). Они не могут появиться вместе. Иначе говоря, их область пересечения есть пустое множество.

Пример. Пусть из колоды карт случайным образом достают одну карту. Рассматривают событие B — появление бубновой масти и событие C — червовой. Понятно, что в этих условиях, когда достают только одну карту, события B и C не имеют области пересечения. Следовательно, эти события несовместны.

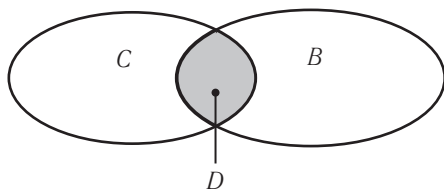


Рис. 1.4. Совместные события

События могут быть равно-возможными и неравно-возможными. Равно-возможными называют такие события, которые при заданных условиях, имеют одинаковые шансы появления. Например, в условиях предыдущего примера, появление событий A и B , достать бубновую или червовую карту, имеют одинаковые шансы (в колоде имеется по 9 карт каждой масти). Но, в этих же условиях, имеют разные шансы событие C — появление туза (таких карт только четыре) и событие D — появление карты бубновой масти. Такие события являются неравно-возможными.

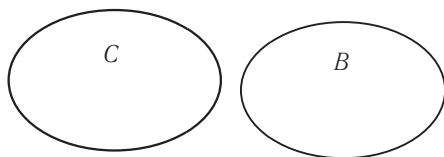


Рис. 1.5. Несовместные события

Другой пример. Производится выстрел по мишени. События попадание в мишень и промах, в общем случае являются неравно-возможными. Действительно, для того, чтобы данные события стали равно-возможными, необходимо подобрать расстояние до мишени, величину мишени, стрелка и другие параметры таким образом, чтобы частота попаданий и промахов были бы одинаковыми. Этого очень трудно добиться.

Совокупность событий, одно из которых, в заданных условиях, обязательно произойдет, называется полной группой событий. Например, события B — появление бубновой масти, C — червовой, D — винновой, E — крестовой образуют полную группу событий, т.к. других мастей не существует.

Пример. Пусть монету подбрасывают пять раз. Рассмотрим события:
 A — появление «орла» ровно 5 раз;
 B — появление «орла» не менее 4 раз;

C — появление «орла» не более 2 раз.

Можно дать геометрическую интерпретацию данным событиям:

A						5
B					4	5
C	0	1	2			

Понятно, что эти события не образуют полную группу, т.к. «орёл» может появиться 3 раза, что не встречается ни в одном из представленных событий. Но, если к данным событиям добавить любое событие, включающее в себя появление «орла» 3 раза, то будет образована полная группа событий. Например, можно добавить событие D — появление «орла» в пределах от 2 до 4 раз.

D			2	3	4	
-----	--	--	---	---	---	--

Два несовместных события, образующих полную группу, называют **противоположными**. Противоположное событие обозначают той же буквой, что и прямое событие, но с чертой сверху. Например A и \bar{A} .

Пример. Пусть монета подбрасывается пять раз. Рассматривается событие B — появление герба не менее четырех раз:

B					4	5
-----	--	--	--	--	---	---

Тогда противоположным событием \bar{B} будет событие, заключающееся в появлении герба не более трех раз:

\bar{B}	0	1	2	3		
-----------	---	---	---	---	--	--

Заметим, что события B и \bar{B} не имеют области пересечения и образуют полную группу, что и должно быть в случае противоположных событий.

В теории вероятностей введено понятие **схемы случаев**. Это совокупность равновозможных, несовместных событий, образующих полную группу.

Пример. В лотерее спортлото зачеркиваются любые пять чисел из 36. Пусть каждая такая комбинация соответствует некоторому событию A_i . Допустим, разыгрывается только один выигрыш, соответствующий угадыванию всех пяти чисел. Понятно, что каждая комбинация имеет одинаковое количество шансов быть выигрышной, эти комбинации не пересекаются и образуют полную группу событий, т.е. имеет место «схема случаев».

Одним из основных понятий теории вероятностей является вероятность появления некоторого события. Это числовая функция, которая позволяет объективно определить степень возможности появления того или иного события. Обычно вероятность появления некоторого события A обозначают $P(A)$. Для схемы случаев ее можно определить по формуле классической вероятности

$$P(A) = M/N, \quad (1.1)$$

где N — число всех возможных исходов; M — число исходов, входящих в событие A .

Так, в предыдущем примере о спортлото, N — это количество всех возможных комбинаций, включающих в себя любые пять чисел из возможных 36; M — число исходов, которые входят в событие A . Так, если в примере о спортлото, в качестве события A рассматривать выигрыш, соответствующий угадыванию трех чисел из пяти, то M — это количество комбинаций из пяти чисел, три из которых входят в пятерку чисел, выбранных во время тиража. Остальные два в эту пятерку не входят (числа, которые не появились во время тиража).

Пример. Пусть в «урне» находятся два белых шара и три черных. Случайным образом достают один шар. Определить вероятность появления белого шара. Здесь N — соответствует общему количеству шаров в «урне». Любой из них может появиться $N=5$. M — число белых шаров. Именно это число определяет количество шансов, благоприятствующих появлению события A

$$P(A) = M/N = 2/5.$$

Пример. Задумано двухзначное число. Какова вероятность угадать это число с двух попыток. Здесь N — это число всех двухзначных чисел. Оно равно количеству чисел от 10 до 99. Таких чисел 90. Число M соответствует количеству попыток угадать задуманное число ($M=2$), т.е. $P(A) = M/N = 2/90$.

Пример. Подбрасывают две игральные кости. Определить вероятность того, что сумма очков на выпавших гранях будет равна 8 (событие A). Определим общее число возможных комбинаций.

Пусть на первой кости выпадет 1. На второй может быть любая цифра от 1 до 6, т.е. 6 комбинаций. Если на первой кости выпадет 2, то возможны еще 6 комбинаций. Продолжая эти рассуждения, получим, что всего возможны 36 комбинаций $N=36$.

Подсчитаем число комбинаций, которые дают сумму очков, равную 8. Таких комбинаций 5:

$$\left. \begin{array}{l} 2 + 6 = 8 \\ 3 + 5 = 8 \\ 4 + 4 = 8 \\ 5 + 3 = 8 \\ 6 + 2 = 8 \end{array} \right\} M = 5; \quad P(A) = \frac{M}{N} = \frac{5}{36}.$$

Из определения и приведенных примеров вытекают следующие свойства вероятности: вероятность может принимать значения в пределах от 0 до 1, т.е. $0 \leq P(A) \leq 1$.

Если вероятность равна нулю, то это значит, что событие не имеет шансов появиться. В этом случае, говорят, что это событие невозможное. Обычно невозможное событие обозначают буквой U . Если вероятность равна 1, т.е. $M=N$, то событие A обязательно появится. Такое событие принято называть достоверным. Его обозначают буквой V .

Очень часто для определения чисел M и N требуются знания некоторых понятий из комбинаторики. Рассмотрим наиболее необходимые из них. Это понятия перестановок, сочетаний и размещений. Рассмотрим данные понятия на основе множества, состоящего из трех элементов (a, b, c) .

Перестановками называются комбинации из этих элементов, отличающиеся только расположением элементов внутри каждой комбинации. В данном случае это будут следующие комбинации: (a, b, c) ; (a, c, b) ; (b, a, c) ; (b, c, a) ; (c, a, b) ; (c, b, a) .

Всего шесть комбинаций. В общем случае имеется множество, состоящее из n элементов. Количество перестановок в этом случае определяется по формуле $P_n = n!$. Так при $n=3$, что соответствует нашему случаю, количество комбинаций будет равно $3! = 6$.

Пример. Пусть на пяти карточках написаны буквы К, А, Р, Т, А. Карточки рассыпают и случайным образом достают по одной. Какова вероятность того, что складывая карточки в порядке их появления мы получим слово КАРТА. Общее число возможных комбинаций здесь $N = n! = 5! = 120$. Число же комбинаций, составляющих слово карта равно 2, т.к. на карточках написаны две буквы А. И они могут переставляться местами. Следовательно, возможны две комбинации из этих пяти букв, которые образуют слово КАРТА. Таким образом $P(A) = 2/120 = 1/60$.

Сочетаниями называются комбинации из всех n элементов по k в каждой группе. При этом расположение элементов внутри

группы безразлично. Если объединять в группы элементы a, b, c по два элемента, то получим следующие группы: $(a, b); (a, c); (b, c)$, т.е. в данных условиях возможны три комбинации. В общем случае, если составлять группы из n элементов по k в каждой группе, то количество комбинаций рассчитывают по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

В нашем случае, $C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$.

Пример. Пусть в урне находится два белых шара и три черных. Из урны, случайным образом, вынимают два шара. Определить вероятность того, что оба они черные. Итак, всего в урне 5 шаров. Вынимают по два, т.е. рассматривают комбинации по два шара. Всего возможных комбинаций будет $N = 5!/2!(5-2)! = 120/24 = 5$. Число M равно числу сочетаний из трех (имеющихся черных шаров) по два, т.е. $M = 3!/2!(3-2)! = 6/2 = 3$. Искомая вероятность $P(A) = 3/5$.

Размещениями называются комбинации из всех n элементов по k в каждой группе, когда изменение положения элемента в группе приводит к образованию новой группы.

Для тех же трех элементов (a, b, c) , образуя группы по два элемента, получим следующие комбинации:

$$(a, b), (b, a), \quad (a, c), (c, a), \quad (b, c), (c, b).$$

Всего шесть комбинаций. Заметим, что внутри группы элементы не повторяются. В общем случае число таких комбинаций вычисляется по формуле

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

В нашем случае $A_3^2 = 3! / (3-2)! = 6 / 1 = 6$.

Пример. Абонент забыл три последние цифры. Помнит только, что они разные. Какова вероятность того, что набирая их случайным образом он наберет правильный номер. Здесь надо иметь ввиду, что абонент объединяет цифры (их десять) в группы по три элемента. Причем внутри группы элементы не повторяются. Абонент помнит, что цифры эти разные, т.о.

$$N = A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{10!}{(10-3)!} = 8 \times 9 \times 10 = 720.$$

$M=1$, так как имеется только одна попытка и только один правильный номер, отсюда $P(A)=1/720$.

Размещениями с повторениями называются комбинации из всех n элементов по k в каждой группе, когда элементы в группе могут повторяться.

Для тех же трех элементов, образуя группы по два элемента, получим следующие комбинации:

$(a, b), (b, a), (a, a), (a, c), (c, a), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c)$.

Всего девять комбинаций. В общем случае число таких комбинаций вычисляется по формуле $\bar{A}_n^k = n^k$. Для группы из трех элементов по два в группе, число таких комбинаций равно $\bar{A}_n^k = n^k = 3^2 = 9$.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение случайного явления.
2. Что изучает теория вероятностей?
3. Приведите примеры случайных явлений, окружающих Вас?
4. Приведите примеры явлений, которые по Вашему мнению не являются случайными.
5. Дайте определение опыта или эксперимента.
6. Что такое событие?
7. Дайте определение совместных и несовместных событий.
8. Дайте определение зависимых и независимых событий.
9. Дайте определение равновозможных событий.
10. Дайте определение полной группы событий и схемы случаев.
11. Дайте определение противоположных событий.
12. Как называются события, имеющие одинаковую объективную возможность появления?
13. Напишите формулу классического определения вероятности и поясните, какие элементы в нее входят.
14. Что такое вероятность?
15. Какими свойствами обладает вероятность?
16. Дайте определение достоверного события.
17. Дайте определение невозможного события.
18. Какие комбинации элементов множества называются перестановками?

19. Какие комбинации элементов множества называются сочетаниями?

20. Какие комбинации элементов множества называются размещениями?

Задачи с решениями

Задача 1. Подбрасываются две монеты. Определить вероятность появления двух «орлов».

Решение. В данном случае возможны следующие комбинации исходов на двух монетах:

«орёл»–«орёл», «орёл»–«решка», «решка»–«орёл», «решка»–«решка».

Всего 4 комбинации. $N=4$. Искомому событию A соответствует одна комбинация «орёл»–«орёл». $M=1$. Таким образом $P(A)=1/4=0,25$.

Задача 2. Подбрасываются две монеты. Определить вероятность появления одного «орла» и одной «решки».

Решение. В данном случае возможны следующие комбинации исходов на двух монетах:

«орёл»–«орёл», «орёл»–«решка», «решка»–«орёл», «решка»–«решка».

Всего 4 комбинации. $N=4$. Искомому событию A соответствует две комбинации «орёл»–«решка», «решка»–«орёл». $M=2$. Таким образом $P(A)=2/4=0,50$

Задача 3. Задумано двузначное число, о котором известно, что цифры в нем не повторяются. Какова вероятность угадать это число с первого раза?

Решение. Двузначными являются все числа от 10 до 99. Всего 90 чисел. По условию задачи известно, что число не имеет повторяющихся цифр, т.е. задуманное число не может быть 11, 22, 33, ..., 99 (девять чисел). Таким образом, множество чисел, среди которых может быть задуманное число, состоит из $90-9=81$ числа. $N=81$. Среди 81 числа только одно задуманное. $M=1$. Искомая вероятность $P(A)=1/81$.

Задача 4. Проводятся три измерения (например, угла). При этом возможно появление ошибок: положительных (+) или отрицательных (-). Какова вероятность появления отрицательных ошибок во всех трех измерениях?

Решение. При трех измерениях возможны следующие комбинации положительных и отрицательных ошибок: (---), (+--), (-+-), (---), (++-), (+-+), (-++), (+++). Общее число таких комбинаций равно $N=8$. Из них нужно выбрать интересующие нас комбинации, число

которых равно M . Существует только одна такая комбинация (---). $M=1$. Искомая вероятность: $P=M/N=1/8$.

Задача 5. Подбрасываются две игральные кости (на каждой из них может выпасть от одного до шести очков). Какова вероятность того, что сумма очков на выпавших гранях будет равна 12?

Решение. В данном случае возможны следующие комбинации выпавших очков:

1-1, 1-2, 1-3, 1-4, 1-5, 1-6;

2-1, 2-2, ..., 2-6; ...; 6-1, 6-2, 6-3, 6-4, 6-5, 6-6.

Всего 36 комбинаций. $N=36$. Из них только одна комбинация дает в сумме 12 очков. Это комбинация 6-6. $M=1$. Искомая вероятность $P(A)=M/N=1/36$.

Задача 6. Какова вероятность при игре в спортлото 5 из 36 угадать в одном билете ровно три числа?

Решение. Представим множество Ω , состоящее из 36 чисел в виде прямоугольника (рис. 1.6). Выделим в нем подмножество A из 5 чисел (в виде малого, заштрихованного прямоугольника), которые выпали в тираже и обозначены символом \bullet .

Эллипсом обозначено подмножество чисел B , зачеркнутых в билете. Символами \circ обозначены числа из подмножества C — чисел, не выпавших при розыгрыше. Всего чисел 36. Из них 5 входят в подмножество A . При этом события подмножества A и C не имеют общих элементов (не пересекаются). Следовательно, $C=\Omega-A$. Таким образом подмножество C состоит из 31 числа. Используем формулу классической вероятности $P(A)=M/N$. N представляет собой число сочетаний из 36 по 5: $N=C_{36}^5$; M — количество комбинаций, в которые входят любые три числа из подмножества A и два числа из подмножества C . Для подсчета M необходимо определить количество комбинаций из чисел подмножества A по 3 элемента и количество комбинаций из подмножества C по 2 элемента. Количество таких комбинаций определяется числом сочетаний:

C_5^3 и C_{31}^2 . Но каждые три числа из подмножества A могут комбинироваться с любыми двумя числами из подмножества C , поэтому общее число комбинаций, соответствующих числу M , равно произведению $M=C_5^3 C_{31}^2$, отсюда,

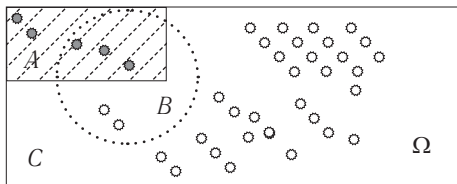


Рис. 1.6. Геометрическая иллюстрация условий задачи 6

$$\begin{aligned}
 P(A) &= \frac{C_5^3 C_{31}^2}{C_{36}^5} = \frac{5!}{3!(5-3)!} \cdot \frac{31!}{2!(31-2)!} = \frac{5!}{3!2!} \cdot \frac{31!}{2!29!} = \\
 &= \frac{10 \frac{31 \cdot 30}{2}}{32 \cdot 33 \cdot 34 \cdot 35 \cdot 36} = \frac{10 \cdot 31 \cdot 15}{32 \cdot 33 \cdot 34 \cdot 35 \cdot 36} = 0,012.
 \end{aligned}$$

Задача 7. На отдельных карточках написаны буквы: Г, Е, О, И, Д. Карточки перемешивают, затем вынимают по одной. Какова вероятность образования слова ГЕОИД, если укладывать карточки в порядке их появления?

Решение. Имеется пять элементов (карточек). Если случайным образом выбирают все элементы в порядке их появления, то такие комбинации есть перестановки. Общее число комбинаций $N = n! = 5! = 120$. Число комбинаций, образующих слово ГЕОИД, равно единице ($M = 1$). $P(A) = M/N = 1/120$.

Задача 8. В условиях задачи 7 определить вероятность того, что произвольно выбирая три карты и раскладывая их в порядке появления, образуется слово ГИД?

Решение. Имеется пять элементов (карточек). Если случайным образом выбирают часть элементов в порядке их появления, то такие комбинации есть размещения. Общее число комбинаций $N = n!/(n-k)! = 5!/(5-3)! = 60$. Число комбинаций, образующих слово ГИД, равно единице ($M = 1$). $P(A) = M/N = 1/60$.

§1.2. Теоремы сложения и умножения

Формула классической вероятности работает только в условиях схемы случаев. Кроме того, непосредственный подсчет вероятностей часто связан с трудоемкими формулами. В таких условиях приходят на помощь ряд теорем теории вероятностей, в частности, теоремы сложения и умножения, которые рассмотрим в этом параграфе. Но, прежде, приведем ряд определений, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Суммой (объединением) двух или нескольких событий называется сложное событие B , которое заключается в том, что появится хотя бы одно из событий A_i , т.е. событие B состоит в том,

что появится или событие A_1 , или A_2 , или , ..., A_n , или совместное событие, состоящее из любых комбинаций событий A_i , т.е. $A_1 A_2$, или $A_1 A_3$ или, ..., $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$.

Аналитически событие B можно записать либо как сумму

$$B = \sum_{i=1}^n A_i$$

либо, используя понятия множеств,

$$B = \bigcup_{i=1}^n A_i,$$

где \bigcup – символ операции объединения.

Событию B можно дать геометрическую интерпретацию. При такой интерпретации попадание некоторой точки в первый эллипс, означает появление события A_1 , во второй эллипс — A_2 (рис. 1.7, а). Попадание в любой из данных эллипсов означает появление события B (вся область серого цвета на рис. 1.7, б).

При такой интерпретации, площади эллипсов подбирают таким образом, чтобы они равнялись соответственно вероятностям событий A_1 и A_2 .

Пример. По мишени производится 3 выстрела. Рассматриваются события A_i — попадание в мишень при i -ом выстреле. Требуется представить событие B , заключающееся в поражении мишени хотя бы один раз через события A_i . В соответствии с определением, можно сказать, что событие B есть сумма (объединение) событий A_i , т.е. $B = A_1 + A_2 + A_3$ или $B = A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

Произведением (пересечением) двух или нескольких событий A_i называется сложное событие C , заключающееся в совместном появлении данных событий: $C = \prod_{i=1}^n A_i$ или, используя понятие множеств, $C = \bigcap_{i=1}^n A_i$.

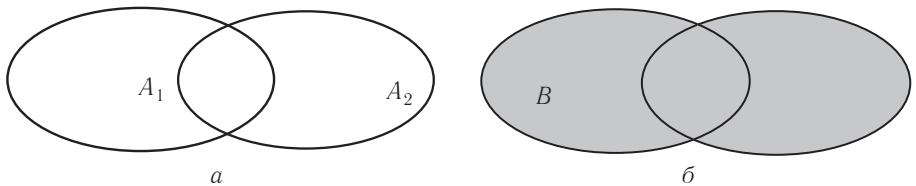


Рис. 1.7. Области событий A_1 и A_2 (а) и область события B (б)

Событие C — событие, заключающееся в совместном появлении событий A_1, A_2 , и всех других событий A_i вместе. Геометрически, для двух событий это можно представить следующим образом. (рис. 1.8). Здесь область пересечения двух событий, обозначенная серым цветом, соответствует произведению A_1 и A_2 , т.е. событию C .

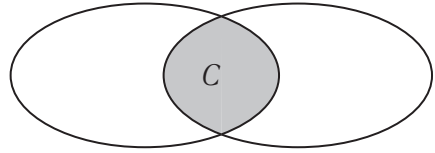


Рис. 1.8. Геометрическая интерпретация произведения (пересечения) двух событий

Пример. Пусть по мишени производится три выстрела. Рассматривают события A_i — попадание в мишень при i -ом выстреле. Представить сложное событие D , заключающееся в поражении мишени ровно два раза, в виде сумм и произведений событий A_i . При трех выстрелах два попадания могут быть в следующих комбинациях:

- в первом и втором выстрелах попадание, в третьем промах;
- в первом и третьем попадание, во втором промах;
- во втором и третьем попадание при первом промах.

Все эти комбинации представляют собой сложные события, каждое из которых можно представить в виде произведения различных комбинаций A_i и \bar{A}_i . Так первая комбинация представляет собой событие $C_1 = A_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3$, вторая — $C_2 = A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3$, третья — $C_3 = \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3$.

Событие же D наступает в случае, если произойдет хотя бы одно из событий C_i , т.е. произойдет или первая комбинация, или вторая, или третья. В таком случае

$$D = C_1 + C_2 + C_3 = A_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3 + A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3 + \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3.$$

Зная определения суммы и произведения событий, можно рассмотреть теоремы теории вероятностей.

Теорема 1. *Вероятность суммы двух или нескольких несовместных событий A_i равна сумме вероятностей данных событий.*

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

Приведем доказательство данной теоремы для суммы двух событий A и B . Данные события несовместны (рис. 1.9).

Пусть появлению события A

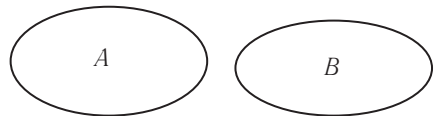


Рис. 1.9. Геометрическая интерпретация несовместных событий

благоприятствуют r шансов, событию B — t шансов. Всего возможных исходов k . Учитывая определение суммы (объединения) и несовместность событий A и B , можно сказать, что событию $C=A+B$ будет соответствовать $r+t$ благоприятствующих шансов. Отсюда, вероятность события C будет равна

$$P(C)=(r+t)/k=r/k+t/k=P(A)+P(B).$$

Распространяя данный вывод на сумму n событий получим:

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right)=\sum_{i=1}^n P(A_i). \quad (1.2)$$

Пример. Пусть в урне находятся два белых шара, один синий, три красных и четыре желтых. Из «урны», случайным образом, достают один шар. Определить вероятность того, что этот шар цветной. Обозначим событие — появление цветного шара буквой B . В данном случае под цветным шаром понимают или синий, или красный, или желтый. Как видим, здесь используется союз «или». Иначе говоря, цветной шар — это хотя бы один из названных цветов. Это соответствует определению суммы событий. т.е. $B=A_1+A_2+A_3$, где A_1 — появление синего шара; A_2 — красного; A_3 — желтого. Данные события несовместны. Следовательно, можно использовать теорему сложения для несовместных событий.

$$P(B)=P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3).$$

Вероятности же событий A_i — легко определить, пользуясь формулой классической вероятности:

$$P(A_1)=M/N=1/10; P(A_2)=M/N=3/10; P(A_3)=M/N=4/10.$$

Отсюда $P(B)=0,1+0,3+0,4=0,8$.

Следствие из теоремы 1. Вероятность суммы несовместных событий, образующих полную группу, равна единице. Действительно, для полной группы событий справедливо

$$P(A_1+A_2+\dots+A_n)=1.$$

Но поскольку, события A_i являются несовместными, то

$$P(A_1+A_2+\dots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\dots+P(A_n)=1.$$

Теорема 2. Вероятность произведения двух или нескольких зависимых событий A_i равна произведению вероятности появления события A_1 на условные вероятности последующих событий A_2, A_3 и т.д.

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n)=P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_{n-1}). \quad (1.3)$$

Здесь $P(A_2|A_1)$ — вероятность появления события A_2 , если событие A_1 произошло ранее; $P(A_n|A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_{n-1})$ — вероятность появления события A_n , при условии, что произошли все остальные события A_1, A_2, \dots, A_{n-1} .

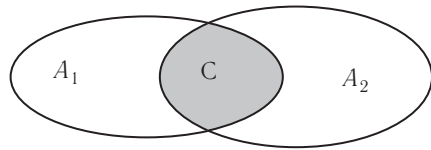


Рис. 1.10. Геометрическая интерпретация пересечения событий

На рис. 1.10 показана геометрическая интерпретация пересечения двух событий A_1 и A_2 . Пусть появлению события A_1 благоприятствуют r шансов, событию A_2 — s шансов и событию C — m шансов. Общее число исходов равно k .

В этих условиях $P(A_1)=r/k$, $P(A_2)=s/k$. Найдем условную вероятность $P(A_2|A_1)$. Если известно, что событие A_1 произошло, то количество благоприятствующих шансов для появления события A_2 сократится до m шансов, что соответствует области пересечения (см. рис. 1.10). Таким образом, $P(A_2|A_1)=m/r$.

Отсюда, $P(C)=P(A_1) \cdot P(A_2|A_1)=(r/k) \cdot (m/r)=m/k$.

Пример. На карточках написаны буквы К, А, Р, Т, А. Карточки помещаются в «урну», перемешиваются и случайным образом достаются по одной. Какова вероятность того, что получится слово КАРТА, если складывать буквы в порядке их появления? Вероятность появления первой буквы К — $P(A_1)=1/5$. Вероятность появления буквы А необходимо рассчитывать, исходя из того, что в «урне» осталось только 4 карточки, из которых две буквы А, т.о. вероятность появления буквы А — $P(A_2|A_1)=2/4$. Аналогично можно определить условные вероятности появления остальных букв. Буквы Р $P(A_3|A_1A_2)=1/3$, для буквы Т — $P(A_4|A_1A_2A_3)=1/2$ и для буквы А — $P(A_5|A_1A_2A_3A_4)=1$. Перемножая данные вероятности в соответствии с теоремой умножения для зависимых событий, получим

$$P(\text{КАРТА})=(1/5) \cdot (2/4) \cdot (1/3) \cdot (1/2) \cdot 1=2/120=1/60.$$

Теорема 3. Вероятность произведения двух или нескольких независимых событий A_i равна произведению вероятностей этих событий.

Действительно, независимые события отличаются тем, что наступление одного из них не изменяет вероятности появления другого. Таким образом, условные вероятности для независимых событий равны безусловным $P(A_2|A_1)=P(A_2)$. Отсюда,

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n)=P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n). \quad (1.4)$$

Следствие из теоремы 3. Вероятность произведения двух или нескольких независимых событий A_i , имеющих одинаковую вероятность p , равна

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n) = p^n.$$

Пример. Пусть по мишени производится три независимых выстрела. Вероятность поражения мишени при каждом выстреле равна 0,7. Определить вероятность попадания в мишень все три раза.

Искомое событие состоит в том, что мишень будет поражена все три раза. Это означает, что должны быть попадания и при первом выстреле, и при втором, и при третьем. События пересекаются. Следовательно, речь идет о произведении событий. При этом, события являются независимыми, т.к. вероятности поражения мишени от опыта, к опыту не меняются, независимо от того, была ли ранее поражена мишень. Следовательно, можно использовать теорему умножения для независимых событий.

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,7 = 0,7^3 = 0,343.$$

Теорема 4. Вероятность суммы двух или нескольких совместных событий A_i равна единице минус вероятность произведения противоположных событий.

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1 - P\left(\prod_{i=1}^n \bar{A}_i\right), \quad (1.5)$$

Если события A_i независимы, то

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1 - \prod_{i=1}^n P(\bar{A}_i). \quad (1.6)$$

Если от опыта к опыту вероятности $P(\bar{A}_i)$ не меняются и равны q , то формула примет вид

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1 - q^n. \quad (1.7)$$

Доказательство.

Под суммой событий понимается сложное событие B , которое заключается в появлении хотя бы одного из A_i (светлая область на рис. 1.11). Противоположным к такому событию является событие \bar{B} , состоящее в том, что не произойдет ни одно из событий A_i . (темная область на рис. 1.11). Иначе говоря, произойдут только события \bar{A}_i . Следовательно, $\bar{B} = \prod_{i=1}^n \bar{A}_i$.

Переходя к вероятностям, получим $P(\bar{B}) = P\left(\prod_{i=1}^n \bar{A}_i\right)$ и

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - P\left(\prod_{i=1}^n \bar{A}_i\right).$$

Для двух событий можно вычислить данную вероятность по-другому. Пусть площади эллипсов, соответствующих появлению событий A_1 и A_2 равны вероятностям появления этих событий. Из рис. 1.11 видно, что если сложить площади эллипсов, то площадь области пересечения дважды войдет в сумму. Поэтому, чтобы определить площадь фигуры, ограниченную эллипсами $P(A_1 + A_2)$, необходимо из суммы площадей этих эллипсов $P(A_1) + P(A_2)$ вычесть площадь области пересечения $P(A_1 \cdot A_2)$. Получим

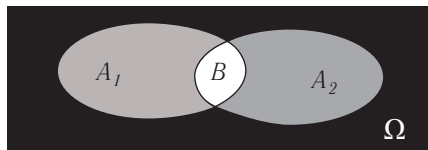


Рис. 1.11. Геометрическая интерпретация суммы совместных событий

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cdot A_2).$$

Пример. Монета подбрасывается два раза. Определить вероятность того, что «орёл» появится хотя бы один раз. «Орёл» может появиться как при первом подбрасывании, так и при втором. Это означает, что данные события совместные. Используя теорему сложения для совместных событий, получим:

$$P(A_1 + A_2) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) = 1 - 0,5 \cdot 0,5 = 0,75.$$

Здесь события \bar{A}_1 и \bar{A}_2 означают появление «решки», соответственно, при первом и втором подбрасывании монеты. Эту же задачу можно решить, используя вторую формулу:

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cdot A_2) = 0,5 + 0,5 - 0,5 \cdot 0,5 = 0,75.$$

Формула полной вероятности

Рассмотрим ситуацию, когда событие A может появляться только совместно с одним из событий H_i . При этом события H_i (их еще называют гипотезами) являются несовместными и образуют полную группу. В этих условиях требуется определить

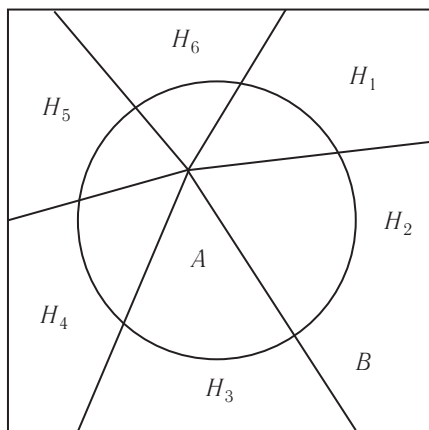


Рис. 1.12. Иллюстрация формулы полной вероятности

вероятность появления события A (рис. 1.12). Здесь B — область полной группы событий (вероятность попадания в эту область равна единице).

Из рис. 1.12 видно, что A — искомое событие, его можно представить в виде суммы следующих событий:

$$A = H_1A + H_2A + \dots + H_nA.$$

Так как события H_i несовместны, то используя теорему сложения, получим формулу полной вероятности:

$$P(A) = \sum_{i=0}^n P(H_iA) = \sum_{i=0}^n P(H_i)P(A/H_i).$$

Пример. Пусть декан собирается наугад войти в одну из трех аудиторий и вызвать студента или студентку. При этом известно, что в первой аудитории присутствуют 10 юношей и 15 девушек, во второй — 5 юношей и 20 девушек, в третьей 18 юношей и 7 девушек. Требуется определить вероятность того, что будет выбрана девушка (событие A).

Решение. Примем в качестве гипотез H_i — события, заключающиеся в выборе аудитории. Очевидно, что вероятности выбора аудитории равны. Следовательно, $P(H_i) = 1/3$. Рассчитаем вероятность вызова девушки из первой, второй, третьей аудитории:

$$P(A/H_1) = 15/25 = 0,6; \quad P(A/H_2) = 20/25 = 0,8; \quad P(A/H_3) = 7/25 = 0,28.$$

Используя полученные данные, найдем вероятность того, что будет вызвана девушка:

$$P(A) = P(H_1) \cdot (P(A/H_1) + P(A/H_2) + P(A/H_3)) \\ P(A) = 1/3 \cdot (0,6 + 0,8 + 0,28) = 0,56.$$

Контрольные вопросы

1. Что называется суммой событий?
2. Дайте геометрическую интерпретацию суммы событий.
3. Что представляет собой произведение событий?
4. Дайте геометрическую интерпретацию произведения событий.

5. Монету подбрасывают 3 раза. Представить событие появление «орла» хотя бы один раз в виде сумм и произведений событий.
6. Монету подбрасывают 3 раза. Представить событие появление «орла» не менее двух раз в виде сумм и произведений событий.
7. Монету подбрасывают 3 раза. Представить событие появление «орла» ровно два раза в виде сумм и произведений событий.
8. Монету подбрасывают 3 раза. Определить вероятность того, что «орёл» появится хотя бы один раз.
9. Рассматриваются два события: A и B . Событие B есть частный случай события A . Чему равно произведение этих событий?
10. Рассматриваются два события: A и B . Событие B есть частный случай события A . Чему равна сумма этих событий?
11. Что такое условная вероятность?
12. Надо ли учитывать зависимость событий при использовании теоремы умножения?
13. Напишите формулу определения вероятности суммы двух совместных событий. Не использовать вероятности противоположных событий.
14. Напишите формулу определения вероятности суммы трех совместных событий. Не использовать вероятности противоположных событий.

Задачи с решениями

Задача 1. Подбрасывают две монеты. Определить вероятность появления двух «орлов», используя теорему умножения.

Решение. Появление двух «орлов» (событие B) в данном случае представляет собой совместное появление «орла» на первой монете (событие A_1) и на второй (событие A_2). Следовательно, имеет место произведение событий: $B = A_1 A_2$. События A_1 и A_2 независимы. $P(B) = (1/2) \times (1/2) = 0,25$.

Задача 2. Подбрасывают две монеты. Определить вероятность появления одного «орла» и одной «решки».

Решение. Появление «орла» и «решки» (событие B) в данном случае представляет собой совместное появление «орла» на первой монете (событие A_1) и «решки» на второй (событие \bar{A}_2) или «решки» на первой монете (событие \bar{A}_1) и «орла» на второй монете (событие A_2). Искомое событие можно представить следующим образом: $B = A_1 \bar{A}_2 + \bar{A}_1 A_2$.

Сложные события $A_1 \bar{A}_2$ и $\bar{A}_1 A_2$ являются несовместными. Поэтому можно использовать теорему сложения для несовместных событий:

$$P(B) = P(A_1 \bar{A}_2) + P(\bar{A}_1 A_2).$$

События, появляющиеся в результате подбрасывания первой монеты, не влияют на результат подбрасывания второй монеты. Следовательно, пары событий A_1 и \bar{A}_2 , а также, \bar{A}_1 и A_2 являются независимыми. Отсюда

$$P(B) = P(A_1 \bar{A}_2) + P(\bar{A}_1 A_2) = P(A_1)P(\bar{A}_2) + P(\bar{A}_1)P(A_2) = \\ = 0,5 \times 0,5 + 0,5 \times 0,5 = 0,5.$$

Задача 3. Монету подбрасывают пять раз. Определить вероятность появления «орла» хотя бы один раз.

Решение. Появление герба хотя бы один раз соответствует определению суммы событий $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$, где A_i — событие, заключающееся в появлении «орла», при i подбрасывании монеты. При этом «орёл» может появиться несколько раз. Следовательно, события совместные. Используем теорему сложения для совместных событий, учитывая, что все события A_i , как и \bar{A}_i имеют одну и ту же вероятность. $P(A_i) = 0,5$; $P(\bar{A}_i) = q = 0,5$; $P(B) = 1 - q^5 = 1 - 0,5^5 = 1 - 1/32 = 31/32$.

Задача 4. Проводятся три измерения (например, угла). При этом возможно появление ошибок: положительных (+) или отрицательных (-). Какова вероятность появления отрицательных ошибок во всех трех измерениях?

Решение. Требуется определить вероятность следующей комбинации ошибок (- - -) событие B . Вероятность появления отрицательной ошибки в каждом измерении равна 0,5. Рассматривается комбинация, когда во всех измерениях появятся отрицательные ошибки (событие A_i). Отсюда $B = A_1 A_2 A_3$. Учитывая, что события A_i независимы, используем теорему умножения для независимых событий. $P(B) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0,125$.

Задача 5. Подбрасывают две игральные кости (на каждой из них может выпасть от одного до шести очков). Какова вероятность того, что сумма очков на выпавших гранях будет равна 12?

Решение. Сумма очков, равная 12 может появиться, если на первой и на второй костях выпадут по 6 очков (события A_1 и A_2). Искомое событие B представляет собой произведение исходных, независимых событий. Вероятность появления шестерки на каждой из костей равна $1/6$. Отсюда $P(B) = P(A_1) \cdot P(A_2) = (1/6) \cdot (1/6) = 1/36$.

§1.3. Многократные повторные испытания

Многократными повторными испытаниями называются n испытаний, в результате которых может появляться либо событие A , либо противоположное ему событие \bar{A} (рис. 1.13).

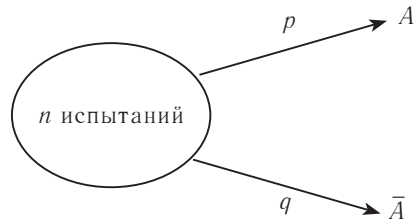


Рис. 1.13. Схема многократных повторных испытаний

Например, производится 5 выстрелов по мишени. Попадание в мишень есть событие A . Противоположным данному событию является промах — событие \bar{A} .

Мы будем рассматривать самый простой случай, когда в каждом испытании вероятности появлений событий A и \bar{A} не меняются и равны, соответственно, p и q . При этом $p+q=1$.

При многократных повторных испытаниях часто требуется определить вероятность того, что событие A при n испытаниях появится ровно k раз. Такую вероятность будем обозначать $P_n(k)$.

Рассмотрим, из чего складывается искомое событие. Пусть, для простоты $n=3$, а $k=2$. Возможные комбинации в этих условиях следующие:

во всех трех испытаниях появляется событие A — (A, A, A) ;
комбинации, в которых событие A встречается ровно два раза — (\bar{A}, A, A) ; (A, \bar{A}, A) ; (A, A, \bar{A}) ;

комбинации, в которых событие A встречается ровно один раз — (\bar{A}, \bar{A}, A) ; (\bar{A}, A, \bar{A}) ; (A, \bar{A}, \bar{A}) ;

во всех трех испытаниях появляется событие \bar{A} — $(\bar{A}, \bar{A}, \bar{A})$.

Поскольку все эти комбинации означают совместное появление событий A и \bar{A} в различных сочетаниях, то каждая такая комбинация представляет собой произведение событий. Вероятности этих событий не меняются от опыта к опыту, поэтому можно сделать вывод, что события являются независимыми. Для определения вероятности появления каждой такой комбинации необходимо применить теорему умножения для независимых событий. Отсюда, вероятности появления каждой комбинации будут равны, соответственно: p^3q^0 ; p^2q^1 ; p^2q^1 ; p^2q^1 ; p^1q^2 ; p^1q^2 ; p^1q^2 ; p^0q^3 .

Как видим, вероятности появления комбинаций, где событие A появляется дважды, одинаковы и равны p^2q^1 . Таких комбинаций три. Их можно трактовать как несовместные события. Поэтому вероятность $P_3(2)$ равна сумме вероятностей появления всех трех комбинаций $P_3(2) = p^2q^1 + p^2q^1 + p^2q^1 = 3p^2q^1$. В общем случае, когда число испытаний равно n , количество таких комбинаций равно числу сочетаний из n по k , которое принято обозначать C_n^k . Данное число определяется по формуле $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

Для случая $n=3$ и $k=2$ $C_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!2!} = 3$.

Таким образом, в общем случае

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}. \tag{1.8}$$

Данная формула называется формулой Бернулли.

Пример. Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Определить вероятность двух побед в четырех партиях (ничьи во внимание не принимаются). Поскольку шахматисты равносильные, вероятность выигрыша равна вероятности проигрыша в одной партии $p=q=1/2$. Так как во всех партиях вероятность выигрыша постоянна и неважно, в какой последовательности происходят выигрыши и проигрыши, то имеют место многократные повторные испытания и применима формула Бернулли:

$$P_4(2) = C_4^2 p^2 q^{4-2} = 4 \cdot \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{6}{16}.$$

Пример. Игральная кость подбрасывается 5 раз. Определить вероятность того, что число 4 выпадет ровно два раза. Воспользуемся формулой Бернулли (1.8).

$$P_5(2) = C_5^2 p^2 q^{5-2} = 10 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0,16.$$

Пример. Игральную кость подбрасывают 5 раз. Определить вероятность того, что число 4 выпадет ровно 0 раз, 1 раз, 2 раза, ..., 5 раз. Используем формулу Бернулли.

$$P_5(0) = C_5^0 p^0 q^5 = 1 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0,4018; \quad P_5(1) = C_5^1 p^1 q^{5-1} = 5 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0,4018;$$

$$P_5(2) = C_5^2 p^2 q^{5-2} = 10 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0,1607; \quad P_5(3) = C_5^3 p^3 q^{5-3} = 10 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0,0322;$$

$$P_5(4) = C_5^4 p^4 q^{5-4} = 5 \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right)^1 = 0,0032; \quad P_5(5) = C_5^5 p^5 q^{5-5} = 1 \left(\frac{1}{6}\right)^5 \left(\frac{5}{6}\right)^0 = 0,0001.$$

События, вероятности которых здесь определены, образуют полную группу и являются несовместными. Следовательно, сумма данных вероятностей должна быть равна единице, в соответствии со следствием 1 из теорем сложения и умножения

$$\sum_{k=0}^5 P_5(k) = 1.$$

Следствия из формулы Бернулли. Существует четыре следствия из формулы Бернулли.

При многократных повторных испытаниях, события, заключающиеся в появлении события A ровно k раз при n испытаниях несовместны. Следовательно, можно использовать теорему сложения для несовместных событий:

$$1. \sum_{k=0}^n P_n(k) = 1 \text{ — как вероятность суммы событий, образующих полную группу;}$$

2. $P_n(k \leq s) = \sum_{k=0}^s P_n(k)$ — вероятность того, что событие A появится не более чем s раз;

$$3. P_n(k \geq s) = \sum_{k=s}^n P_n(k) \text{ — вероятность того, что событие } A \text{ появится не менее чем } s \text{ раз.}$$

Исходя из данных следствий, можно записать

$$P_n(k \leq s) + P_n(k > s) = \sum_{k=0}^n P_n(k) = 1, \text{ откуда,}$$

$$4. P_n(k \leq s) = 1 - P_n(k > s) = 1 - P_n(k \geq s) + P_n(k = s).$$

Пример. Подбрасывают три игральные кости. (на каждой из них может выпасть от 1 до 6 очков). Чему равна вероятность появления грани с четырьмя очками не более 2 раз? Не менее 2 раз? Необходимо применить формулу Бернулли, учитывая, что любая из граней в одном испытании появляется с вероятностью $1/6$. Кроме того, необходимо использовать второе следствие из формулы Бернулли

$$P_n(k \leq s) = \sum_{k=0}^s P_n(k):$$

$$P_3(0) = C_3^0 p^0 q^3 = 1 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0,5787;$$

$$P_3(1) = C_3^1 p^1 q^2 = 3 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0,3472; \quad P_3(2) = C_3^2 p^2 q^1 = 3 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^1 = 0,0694.$$

Отсюда вероятность появления четверки не более двух раз равна

$$\begin{aligned} P_3(k \leq 2) &= \sum_{k=0}^2 P_3(k) = P_3(0) + P_3(1) + P_3(2) = \\ &= 0,5787 + 0,3472 + 0,0694 = 0,9953. \end{aligned}$$

Для определения вероятности появления четверки не менее двух раз воспользуемся четвертым следствием из формулы Бернулли $P_n(k \geq s) = 1 - P_n(k < s)$:

$$P_3(k \geq 2) = 1 - P_3(k < 2) = 1 - 0,5787 - 0,3472 = 1 - 0,9259 = 0,0741.$$

При многократных повторных испытаниях часто используют понятие вероятнейшего числа.

Вероятнейшим числом k_0 появления события A при n испытаниях называют такое число появлений события A (очевидно, что такое число может быть только целым), для которого $P_n(k_0) = \max$.

Тогда можно утверждать, что должны выполняться два неравенства: $P_n(k_0) \geq P_n(k_0 - 1)$; $P_n(k_0) \geq P_n(k_0 + 1)$.

Если подставить в эти неравенства правые части формулы Бернулли и преобразовать их, то получим следующее неравенство, объединяющее два, записанных выше неравенства

$$np - q \leq k_0 \leq np + p. \quad (1.9)$$

Левая и правая части данного неравенства отличаются на величину $p + q$. Данная величина, как известно, равна единице. Это обстоятельство можно использовать для контроля правильности вычислений вероятнейшего числа.

Пример. Производится 7 выстрелов по мишени с вероятностью попадания при каждом выстреле 0,7. Определить вероятнейшее число попадания в мишень. Используем (1.9): $7 \cdot 0,7 - 0,3 \leq k_0 \leq 7 \cdot 0,7 + 0,7$ или $4,6 \leq k_0 \leq 5,6$. Отсюда вероятнейшее число попаданий в мишень при 7 выстрелах равно 5.

Пример. Сколько необходимо провести испытаний, чтобы вероятнейшее число появления события A было равно 25, если вероятность появления события A при одном испытании равна 0,4. Для решения данной задачи воспользуемся тем же неравенством. Но здесь неизвестно n . Все остальные параметры известны,

поэтому получим. $0,4n - 0,6 \leq 25$ и второе неравенство $25 \leq 0,4n + 0,4$. Определим n из первого неравенства $n \leq (25 + 0,6) / 0,4 = 64$ и из второго неравенства $n \geq (25 - 0,4) / 0,4 = 61,5$. Отсюда число испытаний должно лежать в пределах $62 \leq n \leq 64$. При достаточно большом числе испытаний, вероятнейшее число принимают равным $k_0 \approx np$.

Контрольные вопросы

1. Что называется многократными повторными испытаниями?
2. Как связаны между собой вероятности p и q .
3. Может ли в схеме повторных многократных испытаний число k превосходить число n ?
4. Какое событие определяется формулой p^2q^1 в схеме повторных многократных испытаний при $n=3$?
5. Вероятность какого события определяется с помощью формулы Бернулли?
6. Объясните, почему выполняется первое следствие из формулы Бернулли?
7. Какую роль играет понятие несовместности событий во втором следствии из формулы Бернулли?
8. Монету подбрасывают 3 раза. Определить вероятность того, что «орёл» появится не менее двух раз.
9. Учитывается ли независимость событий A в каждом из n испытаний, при определении вероятности $P_n(k)$?
10. Объясните четвертое следствие из формулы Бернулли?
11. Дайте определение вероятнейшего числа?
12. В каком случае может быть два вероятнейших числа?
13. Напишите цепочку неравенств, определяющих вероятнейшее число.
14. Объясните, каким образом получается цепочка неравенств для определения вероятнейшего числа.

Задачи с решениями

Задача 1. Подбрасывают пять монет. Определить вероятность появления ровно двух «орлов».

Решение. Для решения данной задачи необходимо использовать формулу Бернулли:

$$P_5(2) = C_5^2 p^2 q^{5-2} = 10 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0,3125.$$

Задача 2. Девять раз подбрасывают пару игральных костей. Какова вероятность того, что сумма очков, равная 11, выпадет не менее двух раз?

Решение. Определим вероятность появления 11 очков при подбрасывании пары костей один раз, используя формулу классической вероятности $P=M/N$.

11 очков может появиться только при двух комбинациях:

	Первая кость	Вторая кость
Первая комбинация	5	6
Вторая комбинация.....	6	5

Таким образом, число комбинаций, благоприятствующих событию — появление 11 очков — равно 2. $M=2$. Число всех возможных исходов $N=36$. Отсюда вероятность появления 11 очков при одном подбрасывании пары костей равна $P=2/36=1/18$. Эта вероятность не будет меняться при каждом из последующих подбрасываниях пары костей. Таким образом мы имеем дело с многократными повторными испытаниями, где $n=9$, $p=1/18$, $q=17/18$. Далее воспользуемся формулой Бернулли и четвертым следствием из данной формулы.

$$P_9(0) = C_9^0 p^0 q^9 = 1 \left(\frac{1}{18}\right)^0 \left(\frac{17}{18}\right)^9 = 0,60; \quad P_9(1) = C_9^1 p^1 q^8 = 9 \left(\frac{1}{18}\right)^1 \left(\frac{17}{18}\right)^8 = 0,32.$$

Окончательно, вероятность того, что сумма очков, равная 11, появится не менее двух раз $P_9(k \geq 2) = 1 - P_9(k < 2) = 1 - 0,60 - 0,32 = 0,08$.

Задача 3. Монету подбрасывают пять раз. Определить вероятность появления «орла» хотя бы один раз.

Решение. Учитывая, что все события A_i , как и \bar{A}_i имеют одну и ту же вероятность $p=0,5$ и $q=0,5$, определим вероятность того, что «орёл» при пяти подбрасываниях монеты не выпадет ни разу:

$$P_5(0) = C_5^0 p^0 q^5 = 1 \cdot 0,5^0 \cdot 0,5^5 = \frac{1}{32}.$$

Нам же необходимо определить вероятность противоположного события: $P(B) = P_5(k \geq 1) = 1 - P_5(0) = 1 - q^5 = 1 - 1/32 = 31/32$.

Задача 4. Проводятся три измерения (например, угла). При этом возможно появление ошибок: положительных (+) или отрицательных (-). Какова вероятность появления отрицательных ошибок ровно два раза при трех измерениях?

Решение. Воспользуемся формулой Бернулли, учитывая, что вероятности появления положительных и отрицательных ошибок в каждом измерении равны между собой и равны 0,5:

$$P_3(2) = C_3^2 p^2 q^1 = 3 \cdot 0,5^2 \cdot 0,5^1 = 0,375.$$

Задача 5. Подбрасывают пару игральных костей 100 раз. Сумма очков при подбрасывании каждой пары может лежать в пределах от 2 до 12. Определить вероятнейшее число появления суммы очков, равной 11.

Решение. При решении задачи 2 была определена вероятность появления суммы очков, равной 11, при одном подбрасывании пары костей. Эта вероятность оказалась равной $p=1/18$.

Для определения вероятнейшего числа наступления события, заключающегося в появлении суммы очков, равной 11, воспользуемся неравенствами $np - q \leq k_0 \leq np + p$:

$$100 \cdot 1/18 - 17/18 \leq k_0 \leq 100 \cdot 1/18 + 1/18;$$

$$83/18 \leq k_0 \leq 101/18 \text{ или } 4,61 \leq k_0 \leq 5,61.$$

Окончательно, вероятнейшее число появления суммы 11 при 100 испытаниях, будет равно $k_0=5$.

§1.4. Понятие случайной величины

Одним из важнейших понятий теории вероятностей является понятие случайной величины.

Под случайной величиной понимается такая величина, которая обладает некоторым множеством возможных значений. При этом, заранее невозможно предсказать какое именно значение примет эта величина в результате того или иного испытания. Например, при подбрасывании игральной кости случайная величина — число выпадающих очков, может принимать значения 1, 2, 3, 4, 5, 6.

В отличие от постоянной величины случайную величину недостаточно характеризовать только числовыми значениями. Необходимо знать еще вероятности появления этих значений.

Случайные величины обозначаются заглавными буквами: X, Y, Z ..., а их значения, соответственно $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$; y_1, y_2, \dots, y_m ; z_1, z_2, \dots, z_s и т.д.

Так, в примере с игральной костью обозначим случайную величину — число выпадающих очков — через X , а множество возможных значений от 1 до 6 через $x_1=1, x_2=2, x_3=3, x_4=4, x_5=5, x_6=6$. Вероятности появления каждого из этих значений равны $1/6$.

Любые события можно описать с помощью случайной величины.

Пример. Подбрасывают монету. Присвоим событиям — появление «решки» и «орла» — числовые значения 1 и 0 соответственно. Каждое из данных событий имеет вероятность $p=1/2$. Понятно, что предсказать — какое значение из возможных примет случайная величина невозможно. Но можно установить некоторые закономерности. Например, при подбрасывании монеты частота появления «решки» (единицы) будет такой же, что и появление «орла» (нуля).

Выявление таких закономерностей — одна из задач теории вероятностей. Одним из основных понятий в теории вероятностей является закон распределения случайной величины. Поведение случайной величины полностью определяется законом распределения случайной величины, под которым понимается всякое соотношение между значениями случайной величины и вероятностями появления этих значений.

Например, при подбрасывании игральной кости в качестве случайной величины X , можно рассматривать число выпадающих очков. При одном бросании случайная величина может принимать значения от 0 до 6. Вероятности появления этих значений равны $1/6$. С вероятностной точки зрения поведение данной случайной величины здесь полностью определено.

Случайные величины подразделяют на прерывные (дискретные) и непрерывные.

Прерывной (дискретной) случайной величиной называется такая случайная величина, множество значений которой не более чем счетно (счетное множество — множество эквивалентное множеству натуральных чисел).

Для непрерывной случайной величины можно указать отрезок числовой оси, на котором сосредоточены все ее возможные значения. Таким образом, множество значений непрерывной случайной величины является бесконечным, несчетным.

Например, к дискретным случайным величинам относится число положительных (или отрицательных) ошибок измерений в геодезических сетях. Сами же ошибки измерений являются непрерывными случайными величинами.

Способы (формы) задания законов распределения дискретной случайной величины

Законы распределения можно задавать в различных формах. Для дискретных величин используют ряд (таблицу) рас-

пределения, с помощью которого устанавливают соответствие между значениями случайной величины x_i и вероятностями появления этих значений p_i .

X	X_1	X_2	...	X_n
P	P_1	P_2	...	P_n

Все возможные значения случайной величины X составляют полную группу несовместных событий.

Следовательно,
$$\sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Пример. Произведено одно измерение. Рассмотрим случайную величину X — число появлений положительной ошибки. Понятно, что число положительных ошибок может равняться либо нулю, либо единице. В этом случае можно записать $X=(0\ 1)$, т.е. множество X состоит из нуля и единицы. Построить ряд распределения данной случайной величины. Ряд распределения в этом случае примет вид (при $p_1 + p_2 = 1$):

X	0	1
P	0,5	0,5

Пример. Рассмотрим случайную величину $X=(0, 1, \dots, k, \dots, n)$, где k — число появлений интересующего нас события A при n испытаниях. Схема многократных повторных испытаний. Построим ряд ее распределения. Вероятности конкретных значений при этом следует вычислять по формуле Бернулли

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где p — вероятность появления A при одном испытании; q — вероятность появления противоположного события; C_n^k — число сочетаний из n элементов по k . Ряд распределения примет вид:

X	0	1	...	n
P	$P_n(0)$	$P_n(1)$...	$P_n(n)$

Здесь сумма вероятностей, в соответствии с первым следствием из формулы Бернулли равна единице:

$$\sum_{k=0}^n P_n(k) = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} = 1.$$

Данная сумма является результатом разложения $(p+q)^n$ с помощью формулы бинома Ньютона $(p+q)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k}$, поэтому такое распределение получило название биномиального, а коэффициенты C_n^k иногда, называют биномиальными коэффициентами.

Пример. Пусть производятся испытания, в результате которых возможно появление либо события A с вероятностью p , либо \bar{A} , с вероятностью q . Будем производить такие испытания до первого появления интересующего нас события A . Как только появляется событие A , опыты прекращают. В качестве случайной величины рассматривается количество испытаний. Требуется построить ряд распределения. В этом случае ряд распределения случайной величины (числа опытов) будет следующим:

X	1	2	3	...	n
P	pq^0	pq^1	pq^2	...	pq^{n-1}

Это пример гипергеометрического распределения, для которого

$$\sum_{i=0}^{\infty} pq^i = p(1 + q + q^2 + \dots) = p \frac{1}{1 - q} = 1.$$

Таким образом, некоторые виды распределений можно задавать аналитически. Так, для биномиального распределения зависимость между k и $P_n(k)$ устанавливается формулой Бернулли, а для гипергеометрического — формулой $P_k = q^{k-1}p$.

Для наглядности ряд распределения можно представить графически, в виде многоугольника распределения (рис. 1.14). По оси абсцисс откладывают все возможные значения случайной величины, а по оси ординат вероятности их появления. Это второй способ задания закона распределения дискретной случайной величины.

Пример многоугольника распределения (рис. 1.15) приведен для следующего ряда распределения:

X	-5	-3	2	7
P	0,1	0,4	0,3	0,2

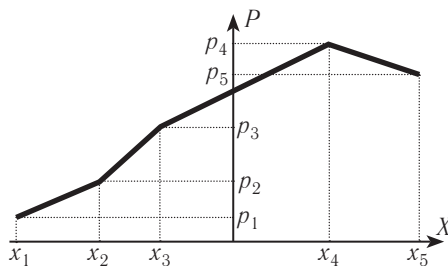


Рис. 1.14. Многоугольник распределения

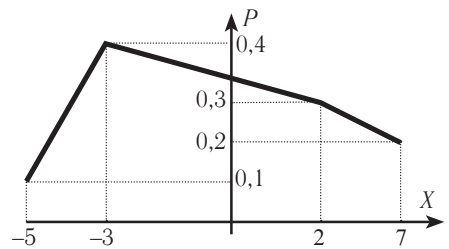


Рис. 1.15. Построение многоугольника распределения по ряду распределения

Чаще всего для задания законов распределения как дискретных, так и непрерывных случайных величин используют функцию распределения $F(x)$ — третий способ задания закона распределения дискретной случайной величины. Функцией распределения называется вероятность того, что случайная величина X принимает значение, меньшее некоторого числа x ($X \in R^1$, где R^1 — множество вещественных чисел), т.е.

$$F(x) = P(X < x). \tag{1.10}$$

Геометрически это означает вероятность попадания значений случайной величины X на отрезок числовой прямой OX левее точки x . (рис. 1.16) (если требуется подчеркнуть, что речь идет о конкретной случайной величине X или Y , то записывают $F_x(x)$ или $F_y(y)$).

Функция распределения обладает следующими тремя свойствами.

1. $F_X(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} P(X < x) = 0$. Речь идет о вероятности попадания в заштрихованную область (рис. 1.17) при $x \rightarrow -\infty$. Понятно, что если $x \rightarrow -\infty$, то вероятность появления значений меньших $-\infty$ будет стремиться к нулю.

В частном случае, если случайная величина X распределена на конкретном ограниченном отрезке, в пределах от A до B ($X \in [A, B]$), то функция распределения в точке A будет равна нулю — $F(A) = 0$ (рис. 1.18). Действительно, все значения X сосредоточены на отрезке $[A, B]$. Поэтому вероятность попасть левее этого отрезка равна нулю.

$$2. F_X(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} P(X < x) = 1.$$

Действительно, все значения случайной величины принимают значения, в общем случае, в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Функция распределения от $x \rightarrow \infty$ представляет собой ве-

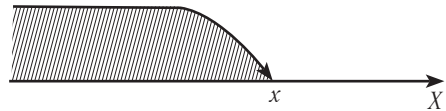


Рис. 1.16. Геометрическая интерпретация функции распределения



Рис. 1.17. Геометрическая интерпретация первого свойства $F(x)$

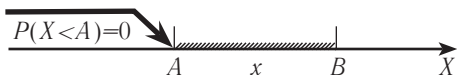


Рис. 1.18. Геометрическая интерпретация свойства $F(A) = 0$

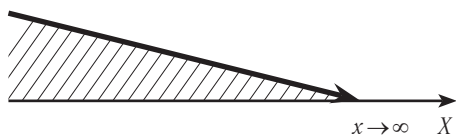


Рис. 1.19. Геометрическая интерпретация второго свойства функции распределения

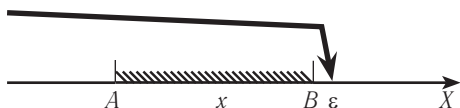


Рис. 1.20. Геометрическая интерпретация второго свойства функции распределения, для случайной величины, принимающей значения на ограниченном отрезке

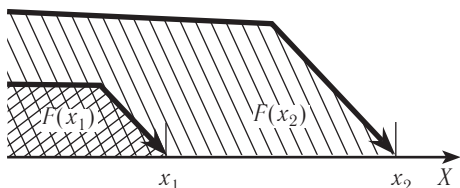


Рис. 1.21. Геометрическая интерпретация третьего свойства функции распределения

Иначе говоря, если $X \in [A, B]$, то $F(B + \epsilon) = 1$ (рис. 1.20).

3. $F(x_2) \geq F(x_1)$, если $x_2 > x_1$, т.е. функция распределения является функцией неубывающей.

На рис. 1.21 показано, что функции распределения в точках x_1 и x_2 соответствуют областям попадания левее точек x_1 и x_2 , соответственно. Из рис. 1.21 видно, что область попадания левее x_2 полностью покрывает область левее точки x_1 . Отсюда $F(x_1) = P(X < x_1)$ не может оказаться больше $F(x_2) = P(X < x_2)$. Следовательно, $F(x)$ есть неубывающая функция.

Пример. Задан ряд распределения (см. рис. 1.15). Требуется определить значения функции распределения в точках существования случайной величины и построить график функции распределения. Найдем значение функции распределения в точке -5 . Это значение наименьшее среди множества возможных значений: $F(-5) = P(X < -5) = P(X < A) = 0$. В точке -3 . $F(-3) = P(X < -3)$. Среди множества зна-

роятность того, что случайная величина X будет принимать значения меньше ∞ . Значения случайной величины физически могут располагаться в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, поэтому такая вероятность будет стремиться к единице (рис. 1.19).

Если случайная величина X распределена на некотором отрезке в пределах от A до B ($X \in [A, B]$), то функция распределения в точке B будет равна единице минус вероятность появления значения B . Если же взять функцию распределения в точке $B + \epsilon$, где ϵ — любое положительное значение, то весь отрезок $[A, B]$ окажется в области левее точки $B + \epsilon$. Это означает, что вероятность попасть левее точки $B + \epsilon$ равна единице.

чений случайной величины, только одно значение -5 попадает в область $X < -3$. Отсюда, $F(-3) = P(X < -3) = P(X = -5) = 0,1$. По аналогии найдем значения функции распределения в точках 2 и 7: $F(2) = P(X < 2) = P(X = -5) + P(X = -3) = 0,1 + 0,4 = 0,5$; $F(7) = P(X < 7) = P(X = -5) + P(X = -3) + P(2) = 0,1 + 0,4 + 0,3 = 0,8$. Добавим полученные значения к ряду распределения, в виде третьей строки в таблице.

X	-5	-3	2	7
H	$0,1$	$0,4$	$0,3$	$0,2$
$F(X)$	0	$0,1$	$0,5$	$0,8$

Используя данную таблицу, построим график функции распределения (рис. 1.22). Здесь приведены значения функции распределения только в точках существования случайной величины. Найдем значение функции распределения в произвольной точке. Например, в точке $X = -1$. В этой точке

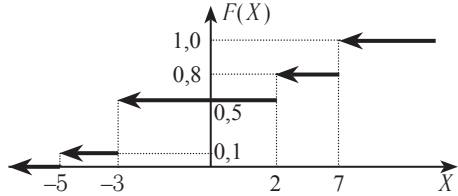


Рис. 1.22. График функции распределения дискретной случайной величины

$$F(-1) = P(X < -1) = P(X = -5) + P(X = -3) = 0,1 + 0,4 = 0,5.$$

Нетрудно заметить, что аналогичные значения функция распределения будет принимать для всех точек $-3 < X \leq 2$, поэтому, на данном участке график функции распределения будет представлен в виде отрезка, параллельного оси абсцисс. Заметим, что в точке -3 значение функции распределения будет равно $F(-3) = P(X < -3) = P(X = -5) = 0,1$. Понятно, что на отрезке $-5 < x \leq -3$, значения функции распределения будут равны 0,1. Таким образом, график будет прерываться разрывы в точках существования случайной величины. При этом величина разрыва равна вероятности появления данного значения. Заметим, что функция распределения в точке разрыва, принимает значение, соответствующее меньшему значению (см. рис. 1.22). Большее же значение на графике показано в виде выколотой точки (стрелка). В общем случае, функция распределения может иметь не более чем счетное число разрывов (рис. 1.23). Например, когда

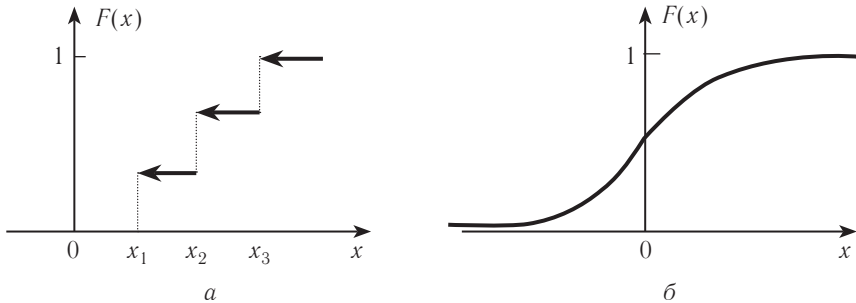


Рис. 1.23. Общий вид графиков функций распределения случайной величины: а — дискретной; б — непрерывной

дискретная случайная величина имеет только три значения x_1, x_2, x_3 , функция распределения $F(x)$ (см. рис. 1.23, а) терпит разрыв в каждой из этих точек, численно равный вероятности появления данных значений. Если количество значений будет увеличиваться и стремиться к ∞ , то случайная величина превратится в непрерывную (см. рис. 1.23, б). Отметим, что график функции распределения в общем случае имеет три области. Первая — левее области существования случайной величины, где график совпадает с осью абсцисс, вторая — область значений случайной величины, где происходит рост значений функции распределения до единицы и третья правее данной области, где все значения функции распределения равны единице. Это справедливо как для дискретных, так и для непрерывных случайных величин.

Вероятность попадания в заданный интервал для дискретной случайной величины

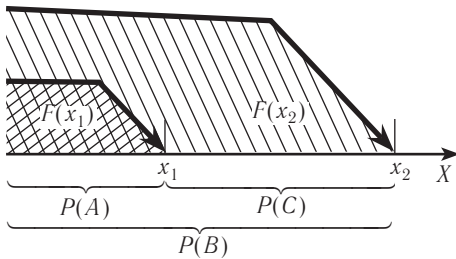


Рис. 1.24. Геометрическая интерпретация вероятности попадания в интервал $x_1 \leq X < x_2$

Пусть требуется выразить вероятность попадания случайной величины X в интервал $x_1 \leq X < x_2$ через функцию распределения. На рис. 1.24 показан некоторый отрезок $[x_1, x_2]$ и геометрическая интерпретация функций распределения в точках x_1 и x_2 .

Пусть событие A — появление значений случайной величины X левее точки x_1 ($X < x_1$), B — появление значений случайной величины X левее точки x_2 ($X < x_2$). Под событием C будем понимать появление значений случайной величины на отрезке $x_1 \leq X < x_2$. Понятно, что события A и C являются несовместными и в сумме они образуют событие B . Поэтому для определения вероятности $P(B)$ можно использовать теорему сложения для несовместных событий $P(B) = P(A) + P(C)$. Учтем, что $P(A) = P(X < x_1) = F(x_1)$ и $P(B) = P(X < x_2) = F(x_2)$, тогда,

$$P(B) = P(A) + P(C) = P(X < x_1) + P(x_1 \leq X < x_2).$$

Отсюда, получим формулу определения вероятности попадания в интервал

$$P(x_1 \leq X < x_2) = P(B) - P(A) = F(x_2) - F(x_1). \tag{1.11}$$

Здесь существенно, что точка x_1 включена в данный отрезок, а точка x_2 нет.

Например, для рассмотренного выше произвольного ряда распределения (см. табл. 1) вероятность $P(-5 \leq X < 2) = F(2) - F(-5) = 0,5 - 0 = 0,5$.

В данный отрезок включены два значения случайной величины -5 и -3 из множества возможных значений. В силу несовместности появления данных значений при одном испытании, данную вероятность можно получить и как сумму вероятностей.

$$P(-5 \leq X < 2) = P(-5) + P(-3) = 0,1 + 0,4 = 0,5.$$

Определим вероятность попадания на другой отрезок $P(-3 \leq X < 7) = F(7) - F(-3) = 0,8 - 0,1 = 0,7$. В этот отрезок включены значения -3 и 2 , поэтому, эту же вероятность можно определить используя значения вероятностей появления конкретных значений

$$P(-3 \leq X < 7) = P(-3) + P(2) = 0,4 + 0,3 = 0,7.$$

Таким образом, вероятность попадания значений случайной величины на конкретный отрезок можно получить как разность значений функции распределения, заданных в крайних точках этого отрезка и как сумму вероятностей всех значений случайной величины, попавших в данный интервал.

Непрерывные случайные величины

Непрерывной случайной величиной называется случайная величина, множество значений которой более чем счетно. Например, множество всех значений на отрезке $[0, 1]$ (рис. 1.25).

Если отрезок $[0, 1]$ согнуть так, чтобы получилась половина окружности, то можно показать, что множество точек отрезка $[0, 1]$ эквивалентно множеству точек всей оси абсцисс. Действительно, из рис. 1.25 видно, что каждой точке на отрезке $[0, 1]$, согнутой в виде дуги, соответствует точка на оси абсцисс, и наоборот любой точке оси абсцисс соответствует конкретная точка на отрезке $[0, 1]$. Таким образом, устанавливается взаимно-однозначное соответствие между

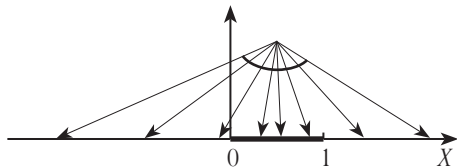


Рис. 1.25. Пример непрерывной случайной величины на отрезке $[0, 1]$

множеством точек на отрезке $[0,1]$ и множеством точек всей оси абсцисс, т.е. мощности множеств отрезка $[0,1]$ и оси абсцисс эквивалентны. Иначе говоря, множества содержат одинаковое количество элементов. Это характерно для непрерывных случайных величин.

Рассмотрим предел $\lim P(x_1 \leq X < x_2)$ при $x_2 \rightarrow x_1$.

Если случайная величина непрерывна, то

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_1} P(x_1 \leq X < x_2) = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} (F(x_2) - F(x_1)) = F(x_2) - F(x_1) = 0.$$

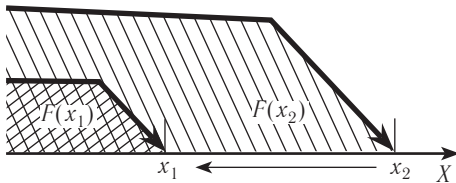


Рис. 1.26. Геометрическая интерпретация вероятности попадания в точку для непрерывной случайной величины

Вывод: для непрерывной случайной величины вероятность попадания в точку будет стремиться к нулю. Геометрическая интерпретация данного вывода представлена на рис. 1.26

Рассмотрим формы задания законов распределения для непрерывных случайных величин.

Для непрерывной случайной величины нельзя записать ряд и построить многоугольник распределения, т.к. невозможно перечислить все значения такой случайной величины. Но можно задать функцию распределения $F(x) = P(X < x)$.

Функция $F(x)$ может быть использована для задания законов распределения как дискретных, так и непрерывных величин. Поэтому ее называют универсальной формой задания закона распределения.

Для непрерывной случайной величины справедливы те же свойства, что и для дискретной.

1. $F_X(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} P(X < x) = 0$ или для $X \in [A, B]$ справедливо $F_X(A) = 0$.

2. $F_X(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} P(X < x) = 1$. Учитывая, что для непрерывной случайной величины вероятность попасть в точку равна нулю, для $X \in [A, B]$ $F_X(B) = 1$. В этом отличие от дискретной случайной величины. Равенство нулю вероятности попадания в точку для

непрерывной случайной величины приводит к тому, что формула для определения вероятности попадания случайной величины в заданный интервал может быть записана в следующем виде:

$$\begin{aligned} F(x_2) - F(x_1) &= P(x_1 \leq X < x_2) = P(x_1 < X \leq x_2) = \\ &= P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_1 < X < x_2). \end{aligned} \quad (1.12)$$

3. Функция распределения является неубывающей функцией

$$F(x_2) \geq F(x_1) \text{ при } x_2 > x_1.$$

Плотность распределения. Для непрерывных случайных величин существует еще одна форма задания закона распределения — плотность распределения, которую можно представить следующим образом:

$$\varphi(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x), \quad (1.13)$$

т.е. плотность распределения является производной от функции распределения.

Очевидно, что между $F(x)$ и $\varphi(x)$ существует обратная связь

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(z) dz, \quad (1.14)$$

где z — переменная подынтегральной функции. $F(x)$ является первообразной для $\varphi(x)$.

Свойства плотности распределения вытекают из свойств функции распределения.

1. Если $X \in [A, B]$, то для $x < A$ и $x > B$ $\varphi(x) = 0$ (т.к. производная от постоянной равна нулю).

2. $\varphi(x) \geq 0$, так как $F(x)$ является неубывающей функцией.

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1$, так как $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = F(+\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1$

или, если все возможные значения X заключены в пределах от α до β , то $\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x) dx = 1$.

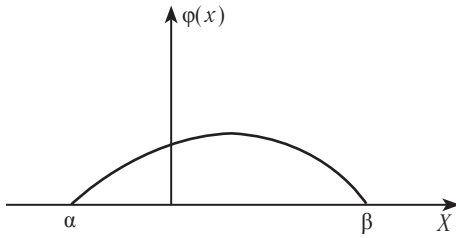


Рис. 1.27. Кривая плотности распределения

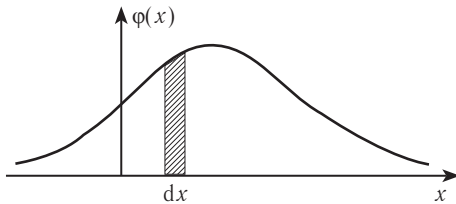


Рис. 1.28. Элемент вероятности

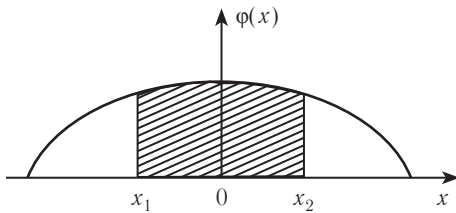


Рис. 1.29. Геометрическая интерпретация вероятности попадания на отрезок

Последнее свойство, вытекающее из второго свойства $F(x)$ и формулы (1.14), указывает на то, что площадь, заключенная между кривой $\varphi(x)$ и осью абсцисс, всегда равна единице (рис. 1.27).

В теории вероятностей величина $\varphi(x)dx$ называется элементом вероятности (рис. 1.28) и представляет собой вероятность попадания на бесконечно малый отрезок dx с точностью до бесконечно малой. Элемент вероятности является понятием, аналогичным понятию вероятности попадания в точку P_i для дискретной случайной величины.

Используя формулы (1.12) и (1.14) можно выразить вероятность попадания случайной величины в заданный интервал через плотность распределения

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) dx = F(x_2) - F(x_1). \quad (1.15)$$

Это соответствует площади между кривой $\varphi(x)$, осью абсцисс и вертикальными прямыми в точках x_1 и x_2 (рис. 1.29).

Пример. Пусть функция распределения случайной величины задана кусочно:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } X \leq A; \\ \frac{x^2}{2} & \text{при } A < X < B; \\ 1 & \text{при } X \geq B. \end{cases}$$

Требуется:

- 1) определить значения A и B ;
- 2) построить график $F(x)$;
- 3) определить вероятность попадания X в интервал $0,5 < x < 1$;
- 4) определить $\varphi(x)$;
- 5) построить график $\varphi(x)$.

1. Поскольку случайная величина задана на отрезке $[A, B]$, то используя первое свойство функции распределения можно записать $F(A) = A^2/2 = 0$, отсюда $A = 0$. Аналогично $F(B) = B^2/2 = 1$ (используется второе свойство функции распределения), отсюда $B = \sqrt{2}$.

2. График $F(x)$ на участке $0 < X < \sqrt{2}$ будет иметь вид параболы, а на участке при $X \leq 0$ — совпадать с осью абсцисс и при $X \geq \sqrt{2}$ будет параллелен оси абсцисс (рис. 1.30).

3. Определим вероятность попадания случайной величины на отрезок $0,5 < x < 1$.

$$P(0,5 < X < 1) = F(1,0) - F(0,5) = 1/2 - 0,52/2 = 0,5 - 0,125 = 0,325.$$

На рис. 1.31 показана графическая интерпретация вероятности попадания в интервал на графике функции распределения.

4. Определение вида функции плотности распределения. Плотность распределения есть производная от функции распределения

$$\varphi(x) = F'(X) = \begin{cases} 0 & \text{при } X \leq 0; \\ x & \text{при } 0 < X < \sqrt{2}; \\ 0 & \text{при } X \geq \sqrt{2}. \end{cases}$$

5. Построим график плотности распределения (рис. 1.32). Графическую интерпретацию вероятности попадания в интервал можно осуществить и на графике плотно-

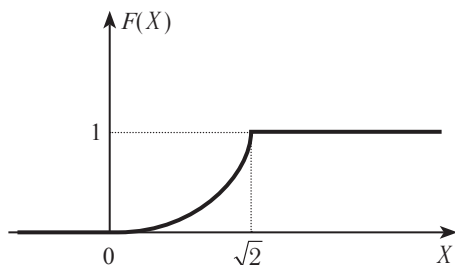


Рис. 1.30. График функции распределения

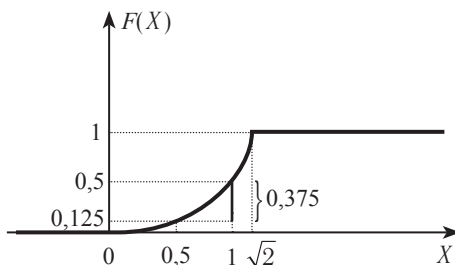


Рис. 1.31. Графическая интерпретация вероятности попадания в интервал

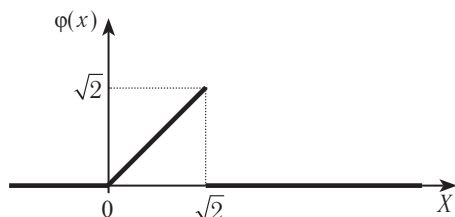


Рис. 1.32. График плотности распределения

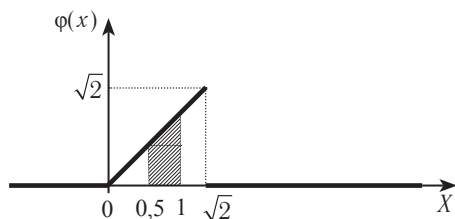


Рис. 1.33. Вероятность попадания в интервал на графике плотности распределения

сти. Здесь вероятность попадания в интервал равна площади заштрихованной фигуры, которая ограничена вертикальными прямыми в точках 0,5 и 1 (рис. 1.33).

Контрольные вопросы

1. Какие величины называются случайными?
2. Что такое закон распределения?
3. Дайте определение дискретной случайной величины.
4. Перечислите способы задания закона распределения для дискретной случайной величины.
5. Что такое ряд распределения?
6. Какому свойству должны удовлетворять вероятности ряда распределения?
7. Дайте определение многоугольника распределения.
8. Что такое функция распределения?
9. Перечислите свойства функции распределения.
10. Как определить вероятность появления случайной величины в заданном интервале?
11. Дайте определение непрерывной случайной величины.
12. Чему равна вероятность попадания в точку для непрерывной случайной величины?
13. Дайте определение плотности распределения.
14. Объясните, как взаимосвязаны между собой функция и плотность распределения.
15. Каковы свойства плотности распределения?
16. Как определить вероятность попадания в интервал через плотность распределения?
17. Что такое элемент вероятности? Каков его вероятностный смысл?

Задачи с решениями

Задача 1. Один раз подбрасывают сразу пять монет. Построить ряд распределения для случайной величины — числа появлений «орлов».

Решение. Число появлений «орлов» возможно в пределах от 0 до 5. Вероятности появления каждого значения случайной величины определяется по формуле Бернулли $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

X	0	1	2	3	4	5
P	$C_5^0 p^0 q^{5-0}$	$C_5^1 p^1 q^{5-1}$	$C_5^2 p^2 q^{5-2}$	$C_5^3 p^3 q^{5-3}$	$C_5^4 p^4 q^{5-4}$	$C_5^5 p^5 q^{5-5}$

Используя формулу Бернулли, вычислим все вероятности. Например, вероятность появления «орла» ровно два раза будет равна

$$P_5(2) = C_5^2 p^2 q^{5-2} = 10 \cdot 0,5^2 \cdot 0,5^2 = 0,3125.$$

Определяя аналогично вероятности для всех возможных значений появления «орла» получим следующий ряд распределения.

X	0	1	2	3	4	5
P	0,03125	0,15625	0,3125	0,3125	0,15625	0,03125

Сумма вероятностей равна 1, что и должно быть.

Задача 2. Для ряда распределения, построенного в предыдущей задаче, определить значения функции распределения для всех возможных значений случайной величины.

Решение:

X	0	1	2	3	4	5
P	0,03125	0,15625	0,3125	0,3125	0,15625	0,03125
$F(X)$	0	0,03125	0,1875	0,5000	0,8125	0,96875

Задача 3. Для предыдущей задачи определить вероятность попадания в интервал $1 \leq X < 4$.

Решение:

$$P(1 \leq X < 4) = F(4) - F(1) = 0,8125 - 0,03125 = 0,78125.$$

Задача 4. Распределение случайной величины X задано следующим рядом распределения.

X	-2	1	4	7
P	0,3	0,2	?	0,4

Построить график функции распределения данной случайной величины.

Решение. Определим вероятность появления значения 4, учитывая, что сумма вероятностей должна равняться единице

$$P(4) = 1 - (0,3 + 0,2 + 0,4) = 0,1.$$

Определим значения функции распределения в точках существования случайной величины:

X	-2	1	4	7
P	0,3	0,2	0,1	0,4
$F(X)$	0	0,3	0,5	0,6

Используя эти значения, построим график функции распределения (рис. 1.34).

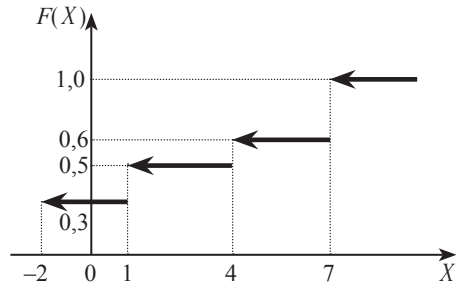


Рис. 1.34. График функции распределения

Задача 5. Задана плотность распределения

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & X < 0; \\ \cos x & 0 < X < B; \\ 0 & X > B. \end{cases}$$

Определить значение B , вид функции распределения, вероятность попадания в интервал $0 < X < \pi/4$. Построить графики функции и плотности распределения.

Решение.

1. Для определения значения B , воспользуемся свойством плотности

$$\int_A^B \varphi(x) dx = 1 :$$

$$\int_0^B \varphi(x) dx = \int_0^B \cos x dx = \sin x \Big|_0^B = \sin B - \sin 0 = \sin B = 1,$$

отсюда $B = \pi/2$.

2. Поскольку $F(x)$ есть первообразная плотности распределения, то

$$F(x) = \begin{cases} 0 & X < 0; \\ \sin x & 0 < X < \pi/2; \\ 1 & X > \pi/2. \end{cases}$$

$$3. P(0 < X < \pi/4) = \int_0^{\pi/4} \varphi(x) dx = \int_0^{\pi/4} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\pi/4} = \sin \frac{\pi}{4} - \sin 0 = \sin \frac{\pi}{4} = 0,707.$$

Построим графики плотности (рис. 1.35) и функции распределения (рис. 1.36).

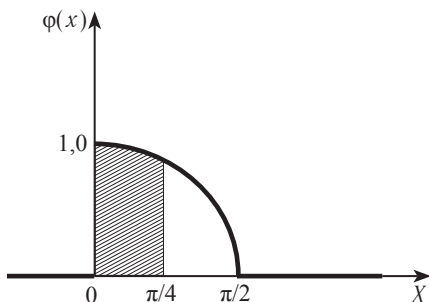


Рис. 1.35. График плотности распределения. Вероятность попадания в интервал равна площади заштрихованной фигуры

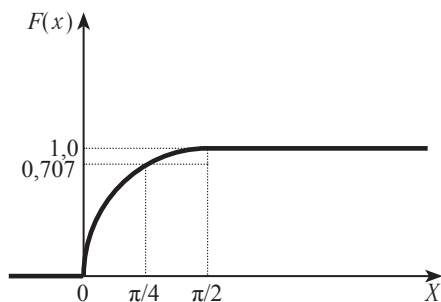


Рис. 1.36. График функции распределения

Вероятность попадания в интервал $P(0 < X < \pi/4)$ равна также разности значений функций распределения в точках $\pi/4$ и 0

$$P(0 < X < \pi/4) = F(\pi/4) - F(0) = 0,707 - 0 = 0,707.$$

§1.5. Количественные характеристики случайной величины

Функция распределения $F(x)$, плотность распределения $\phi(x)$ и другие способы задания законов распределения полностью определяют поведение случайной величины. На практике часто не требуется знать полные характеристики распределения случайной величины, а достаточно иметь только некоторые числовые характеристики (параметры) закона распределения, по которым можно судить о поведении случайной величины. К таким характеристикам можно отнести, например, некоторое значение, характеризующее центр распределения случайной величины, или степень рассеяния её значений вокруг центра.

Пример. Пусть идет стрельба по мишеням. Рассмотрим три случая результатов стрельбы (рис. 1.37). Здесь случайная величина — координаты попадания в мишень. В данном случае, для ее характеристики достаточно знать центр распределения и степень рассеяния. На рис. 1.37 мишени 1 и 2 отличаются центром распределения, 1 и 3 — степенью рассеяния вокруг центра.

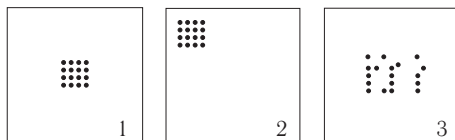


Рис. 1.37. Варианты результатов стрельбы по мишеням

Возникает вопрос: как охарактеризовать эти два свойства?

В теории вероятностей центр распределения можно определить в трех формах: мода, медиана и математическое ожидание.

Модой (μ) называется значение случайной величины X , для которого $\phi(x)$ максимально (рис. 1.38).

Медианой (μ_e) называется такое значение X , при котором выполняется равен-

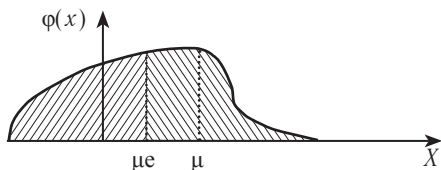


Рис. 1.38. Геометрическое представление моды и медианы

ство: $P(x < \mu_e) = P(x > \mu_e) = 0,5$, т.е. вероятность попадания левее и правее μ_e одинакова. Заштрихованные площади левее и правее μ_e на рис. 1.38 равны.

Пример. Пусть монету подбрасывают один раз. Рассматривается случайная величина X — число появления «орлов». Понятно, что число «орлов» может быть либо 0, либо 1. Требуется найти центр такого распределения, т.е. некое среднее из всех возможных значений случайной величины: $(0+1)/2=0,5$ — это и есть центр распределения. Повторим данное испытание, подбросив монету 5000 раз. (Опыт Бюффона). Каждый раз будем записывать 1, если появился «орел» и 0, если появилась «решка». Затем вычислим среднее из всех записанных значений единиц и нулей. Среднее окажется очень близко к 0,5. Проведем аналогичный эксперимент с другой монетой, у которой смещен центр тяжести. В силу этого появление «орла» при одном бросании будет происходить гораздо чаще, чем «решки». Пусть вероятность появления «орла» равна 0,7. Если повторить опыт Бюффона с такой монетой, то количество единиц будет больше, чем количество нулей. В этом случае среднее из нулей и единиц будет близко к 0,7.

Из данных испытаний становится понятным, что среднее из возможных значений случайной величины необходимо находить с учетом вероятностей их появления. Именно таким образом находится математическое ожидание $M(X)$, которое является важнейшей характеристикой любого закона распределения. Из всех рассмотренных характеристик центра распределения, математическое ожидание проще всего определяется аналитически. Математическое ожидание принято обозначать M_X , $M[X]$ или $M(X)$.

Для дискретных случайных величин математическое ожидание вычисляют по формуле

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i, \quad (1.16)$$

где x_i — возможные значения случайной величины X ; p_i — вероятности появления этих значений.

Если выражение (1.16) переписать в виде $M(X) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i p_i}{\sum_{i=1}^n p_i}$, и

учесть, что $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, то с позиций теоретической механики, значение $M(X)$ можно трактовать как центр масс или центр тяжести.

Иначе говоря, если на числовой оси распределить на отрезке прямой единичную массу по точкам с абсциссами x_i , поместив в каждую из них массу, равную p_i , то точка с абсциссой $M(X)$ есть координата центра тяжести данного отрезка прямой.

Пример. Распределение случайной величины X задано с помощью ряда распределения:

X	-2	-1	0	4	5	8
P	0,2	0,1	0,2	0,3	0,1	0,1

Требуется охарактеризовать центр распределения данной случайной величины. Используя формулу (1.16), получим

$$M_X = \sum_{i=1}^n x_i p_i = -2 \cdot 0,2 - 1 \cdot 0,1 + 0 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,3 + 5 \cdot 0,1 + 8 \cdot 0,1 = 2,0.$$

Аналогично формуле (1.16) можно записать формулу для математического ожидания непрерывной случайной величины. Для этого необходимо учесть, что вместо вероятности попадания в точку p_i для непрерывной случайной величины берется вероятность попадания на бесконечно малый отрезок — элемент вероятности $\varphi(x)dx$. Кроме того, символ Σ надо заменить на значок интеграла. И получим формулу для математического ожидания непрерывной случайной величины:

$$M_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x) dx. \quad (1.17)$$

Однако на практике вероятности p_i или плотность распределения могут быть неизвестны. В этом случае в формуле (1.16) вероятности p_i и элемент вероятности $\varphi(x)dx$ в формуле (1.17) заменяют относительной частотой $Q_i = m_i/n$, где m_i — число появлений n испытания x :

$$M^*(X) = \sum_{i=1}^n x_i Q_i. \quad (1.18)$$

Величина $M^*(X)$ называется оценкой математического ожидания $M(X)$ или его эмпирическим значением.

Пример вычисления математического ожидания непрерывной случайной величины. Пусть заданы функция распределения

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{при } X \leq 0; \\ \frac{x^2}{2} & \text{при } 0 < X < \sqrt{2}; \\ 1 & \text{при } X \geq \sqrt{2}. \end{cases}$$

Определим плотность распределения

$$\varphi(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } X \leq 0; \\ x & \text{при } 0 < X < \sqrt{2}; \\ 0 & \text{при } X \geq \sqrt{2}. \end{cases}$$

Используя формулу (1.17), определим математическое ожидание данной случайной величины:

$$M_X = \int_0^{\sqrt{2}} x\varphi(x) dx = \int_0^{\sqrt{2}} x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2})^3}{3} \approx 0,94.$$

Так как математическое ожидание легко определяется аналитически, то оно стало основой для создания целого спектра количественных характеристик случайной величины. Эти характеристики носят название **моментов**. Различают начальные, центральные и абсолютные моменты.

Начальным моментом s -го порядка случайной величины называют математическое ожидание s -й степени этой случайной величины: $\alpha_s = M(X^s)$. При $s = 1$ начальный момент будет равен математическому ожиданию: $\alpha_1 = M(X)$.

Формулы для вычисления начальных моментов имеют вид:

$$\text{для дискретных величин } \alpha_s = \sum_{i=1}^n x_i^s p_i;$$

$$\text{для непрерывных величин } \alpha_s = \int_{-\infty}^{+\infty} x^s \varphi(x) dx.$$

Центральным моментом s -го порядка случайной величины называют математическое ожидание центрированной случайной величины $X - M(X)$ в степени s : $\mu_s = M[(X - M(X))^s]$.

Для дискретных величин центральный момент вычисляют по формуле $\mu_s = \sum_{i=1}^n (x_i - M(X))^s p_i$, а для непрерывных величин —

$$\mu_s = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^s \varphi(x) dx.$$

Важнейшим из центральных моментов является момент второго порядка $\mu_2 = M[X - M(X)]^2$, который характеризует степень рассеяния случайной величины относительно центра ее

распределения. Он называется дисперсией, обозначается $D(X)$, имеет размерность квадрата случайной величины и вычисляется по формулам:

$$\text{для дискретных случайных величин } \mu_2 = \sum_{i=1}^n (x_i - M(X))^2 p_i;$$

для непрерывных случайных величин

$$\mu_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 \varphi(x) dx.$$

Более удобно пользоваться средним квадратическим отклонением (СКО) $\sigma = +\sqrt{D(X)}$, имеющим размерность случайной величины. В геодезии СКО используют в качестве меры точности измерений.

Кроме дисперсии важными являются также третий и четвертый центральные моменты μ_3 и μ_4 , с помощью которых вычисляют асимметрию $Sk = \mu_3/\sigma^3$ и эксцесс $E = \mu_4/\sigma^4 - 3$.

Асимметрия или еще ее называют скошенность характеризует асимметричность кривой плотности относительно математического ожидания. Возможны три случая (рис. 1.39):

кривая 1 — симметрична относительно математического ожидания. (В этом случае асимметрия равна нулю ($Sk=0$));

кривая 2 — положительная асимметрия ($Sk > 0$). Часть площади под кривой плотности, расположенная правее математического ожидания больше, чем часть площади, расположенная левее математического ожидания;

кривая 3 — отрицательная асимметрия ($Sk < 0$).

Эксцесс является мерой крутости (островершинности) кривой распределения. Здесь также различают три случая (рис. 1.40): с положительным, равным нулю и отрицательным эксцессом. Например, при нормальном распределении, которое будет рассмотрено далее, $E=0$. Это не значит, что при других законах распределения

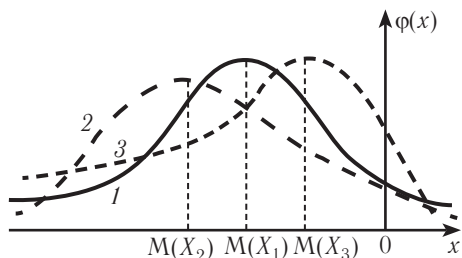


Рис. 1.39. Кривые распределения с различной асимметрией

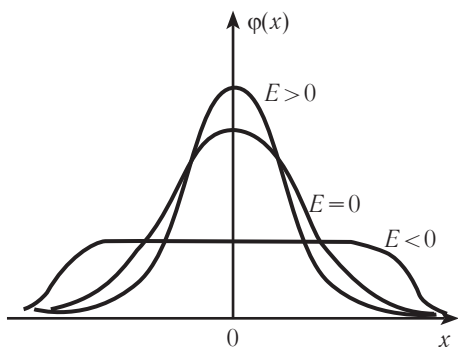


Рис. 1.40. Кривые распределения с различными эксцессами

E не будет равен нулю. Конкретное значение E зависит от вида распределения.

Центральные абсолютные моменты определяют следующим образом:

$$\nu_s = M \left[|X - M(X)|^s \right].$$

Среди них наиболее важное значение имеет момент первого порядка — среднее отклонение:

$$\nu_1 = M \left[|X - M(X)| \right], \quad (1.19)$$

которое вычисляют по формулам:

для дискретных случайных величин

$$\nu_1 = \sum_{i=1}^n |x_i - M(X)| p_i; \quad (1.20)$$

для непрерывных

$$\nu_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |x_i - M(X)| \varphi(x) dx. \quad (1.21)$$

В теории ошибок в качестве случайных величин X рассматривают измеряемые величины. В этом случае разность между результатом измерений и математическим ожиданием измеряемой величины есть истинная случайная ошибка измерения $\Delta_i = x_i - M(X)$ (здесь считается, что систематическая ошибка отсутствует). В разделе критерии точности измерений данный вопрос будет рассмотрен более детально.

Отсюда $\nu_1 = M[|\Delta|]$ и вычисляется по формулам:

$$\text{для дискретных величин } \nu_1 = \sum_{i=1}^n |x_i - M(X)| p_i = \sum_{i=1}^n |\Delta_i| p_i;$$

$$\text{для непрерывных } \nu_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Delta| \varphi(x) dx.$$

Свойства математического ожидания

В теории вероятности часто определяют моменты случайных величин, являющихся функциями других величин. При решении этой задачи следует использовать свойства математического ожидания:

1) математическое ожидание имеет размерность случайной величины;

2) $M(c) = c$, где c — постоянная величина;

3) $M[cX] = cM(X)$;

4) $M[X + Y] = M(X) + M(Y)$;

5) $|M(X)| \leq M|X|$;

6) $M[\chi_A] = P(A)$, где χ_A — индикатор события A — случайная величина, принимающая два значения $\chi = 1$, если происходит событие A и $\chi = 0$, если событие A не происходит. $P(A) = p$ — вероятность появления A при одном испытании;

7) $M(XY) = M(X)M(Y)$, если X и Y независимы;

8) $M[f(X_1, X_2, \dots, X_n)] = f[M(X_1), M(X_2), \dots, M(X_n)]$.

Докажем данные свойства.

1. По определению математическое ожидание есть некоторое среднее значение случайной величины. Следовательно размерность математического ожидания совпадает с размерностью случайной величины. Например, если случайная величина есть некоторое измеряемое расстояние, которое определяется в метрах, то и математическое ожидание будет определяться в метрах.

2. Постоянная величина c отличается от случайной тем, что она имеет только одно возможное значение с вероятностью появления равной единице. Т.е данное значение обязательно появляется.

Следовательно, $M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = M(c) = c p_c = c$.

3. Для дискретной случайной величины

$$M(cX) = \sum_{i=1}^n c x_i p_i = c \sum_{i=1}^n x_i p_i = cM(X).$$

Докажем третье свойство для непрерывной случайной величины. Рассмотрим функцию распределения случайной величины cX в точке x .

$$F_{cX}(x) = P(cX < x) = P(X < x / c) = F_X(x / c).$$

Возьмем производные от левой и правой частей полученного равенства по x :

$$\varphi_{cX}(x) = \frac{1}{c} \varphi_X(x/c).$$

Учтем данное равенство в формуле для математического ожидания

$$M_{cX} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \varphi_{cX}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x/c) \varphi_X(x/c) dx = c \int_{-\infty}^{+\infty} (x/c) \varphi_X(x/c) d(x/c) = c M_X.$$

4. Доказательство четвертого свойства проведем для дискретной случайной величины. Обозначим сумму случайных дискретных величин X и Y через Z ($Z = X + Y$).

Пусть законы распределения этих случайных величин представлены рядами распределения.

Для величины X :

x	x_1	x_2	...	x_n
p	p_{x_1}	p_{x_2}	...	p_{x_n}

Для величины Y :

y	y_1	y_2	...	y_k
p	p_{y_1}	p_{y_2}	...	p_{y_k}

Для величины Z :

z	z_1	z_2	...	z_m
p	p_{z_1}	p_{z_2}	...	p_{z_m}

где $z_1 = x_1 + y_1$; $z_2 = x_2 + y_1$; ...; $z_k = x_k + y_1$; $z_{k+1} = x_2 + y_1$; ...; $z_m = x_n + y_k$.

Математическое ожидание величины Z :

$$\sum_{l=1}^m z_l p_l = \sum_{ij} (x_i + y_j) p_{ij}, \text{ где } p_l = p_{ij} = p_{x_i} p_{y_j} = p_i p_j.$$

Таким образом,

$$\sum_{l=1}^m z_l p_l = \sum_{ij} (x_i p_i p_j + y_j p_i p_j) = \sum_{ij} x_i p_i p_j + \sum_{ij} y_j p_i p_j.$$

Рассмотрим первое из данных слагаемых

$$\sum_{ij} x_i p_i p_j = \sum_{j=1}^k (x_1 p_1 + \dots + x_n p_n) p_j = (x_1 p_1 + \dots + x_n p_n) \sum_{j=1}^k p_j,$$

здесь $\sum_{j=1}^k p_j = 1$, поэтому $\sum_{ij} x_i p_i p_j = \sum_{i=1}^n x_i p_i = M_X$.

Аналогично, и второе слагаемое будет равно математическому ожиданию случайной величины Y : $\sum_{ij} y_j p_i p_j = \sum_{j=1}^k y_j p_j = M_Y$, таким образом, $M_Z = M_X + M_Y$.

5. Произведения $x_i p_i$ могут иметь как положительный, так и отрицательный знак. Таким образом, при суммировании таких слагаемых может произойти частичная компенсация. Отсюда вытекает, что

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i p_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i p_i| \quad \text{или} \quad |M(X)| \leq M|X|.$$

6. Это свойство связано с понятием индикатора события A — χ_A .

Индикатором события A называется случайная дискретная величина, которая может принимать значение 1, если появилось событие A или 0, если событие A не появилось. Ряд распределения такой случайной величины имеет следующий вид:

χ_A	0	1
P_A	q	p

Здесь q — вероятность не появления события A ; p — вероятность появления события A , отсюда $M_{\chi_A} = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$.

7. Седьмое свойство $M_{XY} = M_X M_Y$ будет доказано позже.

8. $Mf(X_1, X_2, \dots, X_n) \approx f(M(X_1), M(X_2), \dots, M(X_n))$.

Для доказательства разложим функцию $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ в ряд Тейлора. В качестве приближенных значений аргументов примем значения математических ожиданий:

$$f(X_1, X_2, \dots, X_n) = f(M_{X_1}, M_{X_2}, \dots, M_{X_n}) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \right)_{X_i=M_{X_i}} (X_i - M_{X_i}) + R.$$

Найдем математическое ожидание данной функции, используя ранее доказанные свойства математического ожидания и полагая, что M_{X_i} , функции от M_{X_i} и производные в конкретной точке являются величинами постоянными.

$$M_{f(X_1, X_2, \dots, X_n)} = f(M_{X_1}, M_{X_2}, \dots, M_{X_n}) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \right)_{X_i=M_{X_i}} M(X_i - M_{X_i}) + M_R.$$

Здесь R — остаток, связанный со вторыми и более высокими степенями разложения в ряд Тейлора. Для большинства прикладных задач данной величиной можно пренебречь, поэтому будем считать $M_R = 0$.

Второе слагаемое здесь также равно нулю. Здесь берется численное значение частной производной в конкретной точке $X_i = M_{X_i}$, поэтому ее можно считать постоянной и вынести за знак математического ожидания. Учитывая доказанные третье и четвертое свойства и полагая, что количественные характеристики случайных величин, включая математическое ожидание, являются величинами постоянными, можно записать $M(X_i - M_{X_i}) = M_{X_i} - M_{X_i} = 0$.

Отсюда $M_{f(X_1, X_2, \dots, X_n)} \approx f(M_{X_1}, M_{X_2}, \dots, M_{X_n})$.

Знак приближенного равенства появляется здесь в силу того, что мы отбросили слагаемое R .

Свойства дисперсии

В теории математической обработки геодезических измерений одной из важнейших задач является определение дисперсий функций случайных аргументов. Для этого следует использовать основные свойства дисперсии:

1) размерность дисперсии равна квадрату размерности случайной величины;

2) $D(c) = 0$, где $c = \text{const}$;

3) $D[cX] = c^2 D(X)$;

4) $D_{\chi_A} = p(A)q(A)$, где χ_A — индикатор события A ; $q(A) = 1 - p(A)$;

5) для независимых случайных величин $D_{x+y} = D_x + D_y$;

6) для независимых случайных аргументов

$$D_{f(X_1, X_2, \dots, X_n)} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \right)_0^2 D_{X_i};$$

7) если задана функция от независимых аргументов вида:

$$Y = \frac{X_1 X_2 \dots X_k}{X_{k+1} X_{k+2} \dots X_n}, \quad \text{то} \quad \frac{D_Y}{Y^2} = \sum_{i=1}^n \frac{D_{X_i}}{X_i^2}.$$

Докажем эти свойства.

1. Первое свойство следует из определения дисперсии $D_x = M(X - M_X)^2$.

2. $D_c = M[(c - M_c)^2] = M[(c - c)^2] = 0$.

3. $D_{cX} = M[(cX - M_{cX})^2] = M[(cX - cM_X)^2] = c^2 M[(X - M_X)^2] = c^2 D_X$.

4. Ряд распределения индикатора события A имеет вид:

χ_A	0	1
P_A	q	p

поэтому

$$\begin{aligned} D_{\chi_A} &= (0 - M_{\chi_A})^2 q + (1 - M_{\chi_A})^2 p = (0 - p)^2 q + (1 - p)^2 p = \\ &= p^2 q + q^2 p = pq(p + q) = pq. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. D_{X+Y} &= M(X + Y - M_{X+Y})^2 = M((X - M_X) + (Y - M_Y))^2 = \\ &= M(X - M_X)^2 + (Y - M_Y)^2 + 2M[(X - M_X)(Y - M_Y)] = \\ &= D_{X+Y} = D_X + D_Y + 2M[(X - M_X)(Y - M_Y)] = D_X + D_Y + 2K_{XY}. \end{aligned}$$

K_{XY} называется корреляционным моментом, который для независимых случайных величин равен нулю, что будет доказано позже. Отсюда, $D_{X+Y} = D_X + D_Y$.

6. Для доказательства шестого свойства, необходимо воспользоваться разложением функции в ряд Тейлора.

$$f(X_1, X_2, \dots, X_n) = f(M_{X_1}, M_{X_2}, \dots, M_{X_n}) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \right)_{X_i=M_{X_i}} (X_i - M_{X_i}) + R.$$

Далее воспользуемся ранее доказанными свойствами дисперсии

$$D_{f(X_1, X_2, \dots, X_n)} = D_{f(M_{X_1}, M_{X_2}, \dots, M_{X_n})} + D \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \right)_{X_i=M_{X_i}} (X_i - M_{X_i}) \right) + D_R.$$

Поскольку математическое ожидание, другие количественные характеристики, а также функции от них являются постоянными величинами, то учитывая, что $D_c = 0$, первое слагаемое

$$D_{f(M_{X_1}, M_{X_2}, \dots, M_{X_n})} = 0.$$

Рассмотрим второе слагаемое. Заметим, что $\left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \right)_{X_i=M_{X_i}}$ — постоянная величина, поэтому

$$D \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \right)_{X_i=M_{X_i}} (X_i - M_{X_i}) \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \right)_{X_i=M_{X_i}}^2 D(X_i - M_{X_i}).$$

Так как $D_{M_{X_i}}=0$, то окончательно,

$$D_{f(X_1, X_2, \dots, X_n)} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \right)_0^2 D_{X_i}. \quad (1.22)$$

Если функция имеет линейный вид

$$f(X_1, X_2, \dots, X_n) = Y = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_n X_n,$$

то используя третье и пятое свойство дисперсии, можно написать формулу для дисперсии линейной функции от случайных аргументов:

$$D_Y = c_1^2 D_{X_1} + c_2^2 D_{X_2} + \dots + c_n^2 D_{X_n} = \sum_{i=1}^n c_i^2 D_{X_i}.$$

Если при этом дисперсии всех аргументов равны между собой, то получим $D_Y = D_X \sum_{i=1}^n c_i^2$.

7. Пусть задана функция $Y = \frac{X_1 X_2 \dots X_k}{X_{k+1} X_{k+2} \dots X_n}$.

Прологарифмируем её

$$\begin{aligned} \ln Y &= \ln \frac{X_1 X_2 \dots X_k}{X_{k+1} X_{k+2} \dots X_n} = \\ &= \ln X_1 + \ln X_2 + \dots + \ln X_k - \ln X_{k+1} - \dots - \ln X_n. \end{aligned}$$

Найдем дисперсию данной функции

$$D_{\ln Y} = D \left[\sum_{i=1}^n \ln X_i \right] = \sum_{i=1}^n D_{\ln X_i}.$$

Используя шестое свойство дисперсии, найдем дисперсии логарифмов.

$$\begin{aligned} D_{\ln Y} &= \left(\frac{\partial \ln Y}{\partial Y} \right)_0^2 D_Y = \left(\frac{1}{Y} \right)^2 D_Y = \frac{D_Y}{Y^2}; \\ D_{\ln X_i} &= \left(\frac{\partial \ln X_i}{\partial X_i} \right)_0^2 D_{X_i} = \left(\frac{1}{X_i} \right)^2 D_{X_i} = \frac{D_{X_i}}{X_i^2}. \end{aligned}$$

Подставляя полученные результаты в равенство для $D_{\ln Y}$, получим $\frac{D_Y}{Y^2} = \sum_{i=1}^n \frac{D_{X_i}}{X_i^2}$.

Пример. Пусть задана функция приращения координаты $\Delta X = S \cos \alpha$, где S и α измерены ($S = 100$ м, $\alpha = 30^\circ$). Заданы значения $\sigma_\alpha = 30''$, $\sigma_S = 1$ см. Требуется определить $\sigma_{\Delta X}$.

Решение. Найдем дисперсию для ΔX

$$D_{\Delta X} = \left(\frac{\partial \Delta X}{\partial S} \right)_0^2 D_S + \left(\frac{\partial \Delta X}{\partial \alpha} \right)_0^2 D_\alpha = (\cos \alpha)_0^2 D_S + (-S \sin \alpha)_0^2 D_\alpha.$$

Поскольку ΔS — задана в линейной мере (см), $\cos \alpha$ — безразмерная величина, то оба слагаемых должны быть заданы в см. В этом случае D_α должна быть задана в радианах. В данной задаче σ_α дана в секундах, поэтому для перевода в радианы D_α необходимо разделить на величину ρ (в секундах) в квадрате.

$$D_{\Delta X} = (\cos \alpha)_0^2 D_S + \left(\frac{-S \sin \alpha}{\rho''} \right)_0^2 D_\alpha.$$

Подставляя числовые значения, получим

$$D_{\Delta X} = 0,75 \cdot 1 + \frac{10^8 \cdot 0,25 \cdot 9 \cdot 10^2}{2,06^2 \cdot 10^{10}} = 1,27 \text{ см}^2;$$

$$\sigma_{\Delta X} = \sqrt{D_{\Delta X}} \approx 1,13 \text{ см}.$$

Связь между центральными и начальными моментами

Отметим, что первый центральный момент всегда равен нулю. Это легко показать, используя свойства математического ожидания

$$\mu_1 = M[(X - M_X)] = M_X - M_{M_X} = M_X - M_X = 0.$$

Выразим второй центральный момент (дисперсию) через начальные, используя свойства математического ожидания:

$$\begin{aligned} \mu_2 = D_X &= M[(X - M_X)^2] = M[X^2 - 2XM_X + M_X^2] = \\ &= M_X^2 - 2M_X M_X + M_X^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2. \end{aligned}$$

Аналогично, можно выразить другие центральные моменты через начальные:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 0; \\ \mu_2 &= \alpha_2 - \alpha_1^2; \\ \mu_3 &= \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3; \\ \mu_4 &= \alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 + 6\alpha_1\alpha_2 - 3\alpha_1^4; \\ &\dots \end{aligned} \tag{1.23}$$

Контрольные вопросы

1. Какие числовые характеристики используются для определения центра распределения случайных величин?
2. Дайте определение математического ожидания.
3. Дайте определение начальных моментов.
4. Дайте определение центральных и абсолютных центральных моментов.
5. Что характеризуют собой математическое ожидание и дисперсия?
6. Дайте определение дисперсии.
7. Дайте определение эксцесса и асимметрии.
8. Перечислите свойства математического ожидания.
9. Перечислите свойства дисперсии.
10. Дайте определение среднего отклонения.
11. Чему численно равен первый центральный момент?
12. Какова связь второго центрального момента с первым и вторым начальными моментами?
13. Как определять дисперсию функции от случайных аргументов?
14. Как определять дисперсию функции от случайных аргументов, если эта функция имеет линейный вид?
15. Как определять дисперсию функции от случайных аргументов, если эта функция представляет собой произведение аргументов?

Задачи с решениями

Задача 1. Один раз подбрасываются сразу пять монет. Построить ряд распределения для случайной величины число появлений гербов. Определить математическое ожидание и дисперсию данной случайной величины.

Решение. Ранее для данной задачи был построен ряд распределения, используя формулу Бернулли $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

$X \dots$	0	1	2	3	4	5
$P \dots$	0,03125	0,15625	0,3125	0,3125	0,15625	0,03125

$$M_X = \sum_{i=1}^n x_i p_i = 0,15625 \cdot 1 + 0,3125 \cdot 2 + 0,3125 \cdot 3 + 0,15625 \cdot 4 + 0,03125 \cdot 5 = 2,5;$$

$$D_X = \sum_{i=1}^n (x_i - M_X)^2 p_i = (0 - 2,5)^2 \cdot 0,03125 + (1 - 2,5)^2 \cdot 0,15625 + (2 - 2,5)^2 \cdot 0,3125 + (3 - 2,5)^2 \cdot 0,3125 + (4 - 2,5)^2 \cdot 0,15625 + (5 - 2,5)^2 \cdot 0,03125 = 1,25;$$

$$\sigma_X = +\sqrt{D_X} = 1,1.$$

Задача 2. Распределение случайной величины X задано следующим рядом распределения:

X	-2	1	4	7
P	0,3	0,2	0,1	0,4

Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение для данной случайной величины.

Решение.

$$M_X = -2 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,1 + 7 \cdot 0,4 = 2,8;$$

$$D_X = (-2 - 2,8)^2 \cdot 0,3 + (1 - 2,8)^2 \cdot 0,2 + (4 - 2,8)^2 \cdot 0,1 + (7 - 2,8)^2 \cdot 0,4 = 14,76;$$

$$\sigma_X = +\sqrt{D_X} = 3,84.$$

Задача 3. Задана плотность распределения.

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } X < 0, X > B; \\ x, & \text{при } 0 < X < B. \end{cases}$$

Определить значение M_X , D_X и σ_X .

Решение. 1. Определим верхнюю границу множества случайной величины, исходя из свойства плотности

$$\int_0^B \varphi(x) dx = \int_0^B x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^B = \frac{B^2}{2} - 0 = 1. \text{ Откуда } B = \sqrt{2}.$$

2. Для определения значения M_X , воспользуемся формулой

$$M_X = \int_0^{\sqrt{2}} x \varphi(x) dx.$$

$$M_X = \int_0^{\sqrt{2}} x \varphi(x) dx = \int_0^{\sqrt{2}} x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2})^3}{3} - 0 = 0,94.$$

$$3. D_X = \int_0^{\sqrt{2}} (x - M_X)^2 \varphi(x) dx = \int_0^{\sqrt{2}} (x - 0,94)^2 x dx =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} x^3 dx - 2 \int_0^1 0,94 x^2 dx + 0,94 \int_0^1 x dx =$$

$$= \frac{x^4}{4} \Big|_0^{\sqrt{2}} - 1,88 \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\sqrt{2}} + 0,94 \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{2}} = 1 - 1,77 + 0,94 = 0,17.$$

$$\sigma_X = +\sqrt{D_X} = 0,41.$$

Задача 4. Задана плотность равномерного распределения.

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } X < -0,5; X > 0,5; \\ c & \text{при } -0,5 < X < 0,5. \end{cases}$$

Определить значения M_X , D_X и σ_X . Здесь c — постоянная величина. Читателю предлагается показать, что $c=1$.

Решение. 1. Для определения значения M_X , воспользуемся формулой

$$M_X = \int_{-0,5}^{0,5} x\varphi(x)dx :$$

$$M_X = \int_{-0,5}^{0,5} x\varphi(x)dx = \int_{-0,5}^{0,5} xdx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-0,5}^{0,5} = 0.$$

$$\begin{aligned} 2. D_X = \alpha_2 - \alpha_1^2 &= \int_{-0,5}^{0,5} x^2\varphi(x)dx - 0^2 = \int_{-0,5}^{0,5} x^2dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-0,5}^{0,5} = \\ &= \frac{0,125}{3} + \frac{0,125}{3} = \frac{0,25}{3} = \frac{1}{12}; \end{aligned}$$

$$\sigma_X = +\sqrt{D_X} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Задача 5. Задана функция от случайных аргументов $S = \frac{b}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}$.

Известны математические ожидания $M_b = 2000$ мм. и $M_\varphi = 5^\circ$. Определить математическое ожидание функции S .

Решение. В соответствии с восьмым свойством математического ожидания, можно записать $M_S = \frac{M_b}{2} \operatorname{ctg} \frac{M_\varphi}{2}$, подставим в эту формулу соответствующие значения. Получим

$$M_S = \frac{2000}{2} \operatorname{ctg} \frac{5}{2} = 100 \operatorname{ctg} 2,5 = 22705 \text{ мм} = 22,7 \text{ м.}$$

Задача 6. Задана линейная функция от случайных аргументов $Y = 2X_1 - X_2 + 3X_3$. Дисперсии всех аргументов равны 4 см^2 . Определить дисперсию Y .

Решение. Используя третье и пятое свойства дисперсии, можно написать формулу для дисперсии линейной функции от случайных аргументов. Если $Y = c_1X_1 + c_2X_2 + \dots + c_nX_n$, то $D_Y = c_1^2D_{X_1} + c_2^2D_{X_2} + \dots + c_n^2D_{X_n}$.

В нашей задаче $c_1 = 2$, $c_2 = -1$, $c_3 = 3$, отсюда

$$D_Y = 2^2D_{X_1} + (-1)^2D_{X_2} + 3^2D_{X_3} = 4 \cdot 4 + 1 \cdot 4 + 9 \cdot 4 = 56 \text{ см}^2.$$

Задача 7. Пусть задана функция приращения координаты $\Delta Y = S \sin \alpha$, где S и α измерены. Заданы значения $S = 100$ м, $\alpha = 30^\circ$, $\sigma_\alpha = 0,5'$, $\sigma_S = 1$ см. Требуется определить $\sigma_{\Delta Y}$.

Решение. Найдем дисперсию для ΔY

$$D_{\Delta Y} = \left(\frac{\partial \Delta Y}{\partial S} \right)_0^2 D_S + \left(\frac{\partial \Delta Y}{\partial \alpha} \right)_0^2 D_\alpha = (\sin \alpha)_0^2 D_S + (S \cos \alpha)_0^2 D_\alpha.$$

Поскольку σ_S — задана в линейной мере (см), $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$ — безразмерные величины, то оба слагаемых должны быть заданы в см. В этом случае среднее квадратическое отклонение функции получится в см. Понятно, что, в таком случае, D_α должна быть задана в радианах. В данной задаче σ_α задана в минутах, поэтому для перевода в радианы D_α необходимо разделить на ρ^2 (в минутах):

$$D_{\Delta Y} = (\sin \alpha)_0^2 D_S + \left(\frac{S \cos \alpha}{\rho'} \right)_0^2 D_\alpha.$$

Подставляя числовые значения, получим

$$D_{\Delta Y} = 0,5 \cdot 1 + \frac{10^8 \cdot 0,75 \cdot 0,25}{3,44^2 \cdot 10^6} = 2,09 \text{ см}^2;$$

$$\sigma_{\Delta Y} = \sqrt{D_{\Delta Y}} \approx 1,44 \text{ см.}$$

Задача 8. Пусть задана функция определения стороны при ее вычислении с использованием теоремы синусов. $S = b \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2}$, где b , β_1 и β_2 измерены: $b = 500$ м, $\beta_1 = 30^\circ$, $\beta_2 = 45^\circ$, $\sigma_b = 0,10$ м. Углы измерены с одинаковой точностью $\sigma_\beta = 1'$. Требуется определить σ_S .

Решение. Найдем дисперсию для S :

$$\begin{aligned} D_S &= \left(\frac{\partial S}{\partial b} \right)_0^2 D_b + \left(\frac{\partial S}{\partial \beta_1} \right)_0^2 D_{\beta_1} + \left(\frac{\partial S}{\partial \beta_2} \right)_0^2 D_{\beta_2} = \\ &= \left(\frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} \right)^2 D_b + \left(\frac{b}{\sin \beta_2} \cos \beta_1 \right)^2 D_{\beta_1} + \left(\frac{b \sin \beta_1}{\sin^2 \beta_2} (-\cos \beta_2) \right)^2 D_{\beta_2} = \\ &= \left(\frac{0,5}{0,71} \right)^2 0,01 + \left(\frac{500}{0,71} 0,87 \right)^2 \frac{1}{3438^2} + \left(\frac{500 \cdot 0,5}{0,5} (-71) \right)^2 \frac{1}{3438^2} = 0,0472; \end{aligned}$$

$$\sigma_S = \sqrt{D_S} \approx 0,21 \text{ м.}$$

§1.6. Законы распределения для непрерывных случайных величин

Равномерное распределение

Равномерным называется распределение, плотность которого имеет следующий вид (рис. 1.41):

$$\varphi(x) = \begin{cases} c & \text{при } \alpha \leq X \leq \beta; \\ 0 & \text{при } X > \alpha \text{ и } X < \beta. \end{cases}$$

Определим c при известных α и β . В соответствии со свойствами плотности распределения, заштрихованная площадь равна единице. С другой стороны площадь заштрихованного прямоугольника равна произведению $c(\beta - \alpha)$. Отсюда, $c = S/(\beta - \alpha) = 1/(\beta - \alpha)$.

Определим математическое ожидание и дисперсию равномерного распределения

$$M_X = \int_{\alpha}^{\beta} x\varphi(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} x \frac{1}{\beta - \alpha} dx = \frac{1}{\beta - \alpha} \frac{x^2}{2} \Big|_{\alpha}^{\beta} = \frac{1}{\beta - \alpha} \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2} = \frac{\beta + \alpha}{2}.$$

При $\alpha = -\beta$, т.е. при симметричном распределении математическое ожидание принимает значение, равное нулю.

Для упрощения вычислений, дисперсию данной случайной величины определим для случая когда $\alpha = -\beta$.

$$D_X = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \alpha_2 = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\beta - \alpha} - x^2 dx = \frac{1}{\beta - \alpha} \frac{x^3}{3} \Big|_{-\beta}^{\beta} = \frac{1}{2\beta} \frac{\beta^3 + \beta^3}{3} = \frac{\beta^2}{3},$$

откуда $\sigma_X = \frac{\beta}{\sqrt{3}}$.

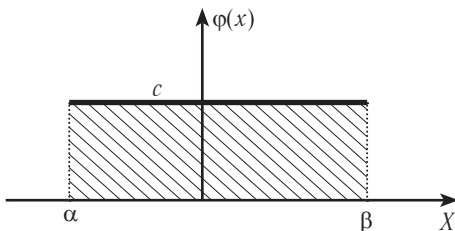


Рис. 1.41. График плотности равномерного распределения

Равномерному закону распределения подчиняются ошибки округления. Ошибки округления лежат в пределах от $-0,5$ до $+0,5$ единиц последнего знака округляемого числа. Для ошибок округления $\beta = 0,5$:

$$D_X = \frac{0,5^2}{3} = \frac{1}{12} \text{ и } \sigma_X = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Нормальное распределение

Введем понятие нормированной случайной величины.

Пусть задана некоторая случайная величина X , для которой известны M_X и D_X . Нормированной случайной величиной называется функция вида $T = \frac{X - M_X}{\sigma_X}$.

Нормированная случайная величина обладает двумя свойствами: $M_T=0$, $D_T=1$.

Докажем эти свойства.

Учтем, что $M_{M_X}=M_X$, как математическое ожидание постоянной, а дисперсия постоянной равна нулю $D_{M_X}=0$, тогда,

$$M_T = M\left[\frac{X - M_X}{\sigma_X}\right] = \frac{1}{\sigma_X} M[X - M_X] = \frac{1}{\sigma_X} (M_X - M_X) = 0; \quad (1.24)$$

$$D_T = D\left[\frac{X - M_X}{\sigma_X}\right] = \frac{1}{\sigma_X^2} D[X - M_X] = \frac{1}{\sigma_X^2} (D_X + D_{M_X}) = 1.$$

Нормальным распределением нормированной случайной величины называется распределение, плотность которого

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}. \quad (1.25)$$

График плотности $\varphi(t)$ показан на рис. 1.42.

Функция распределения нормированной случайной величины имеет вид:

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \quad (1.26)$$

Случайную величину T , подчиняющуюся нормальному закону распределения, обычно обозначают следующим образом: $T \in N(0, 1)$, где N — символ нормального распределения, а 0 и 1 — параметры распределения, соответственно, $M(T)$ и σ_T .

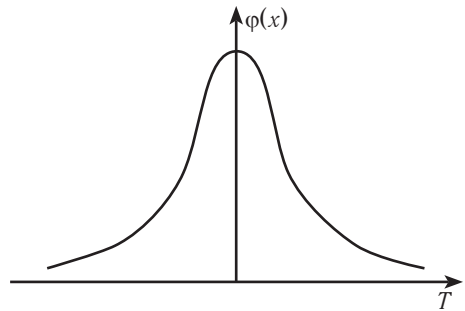


Рис. 1.42. График плотности нормального распределения нормированной случайной величины

Рассмотрим случайную величину $X \in N(a, \sigma^2)$, связанную с T линейной зависимостью: $X = \sigma T + a$.

В этом случае, для определения плотности распределения можно использовать следующую теорему.

Если существуют две случайные величины X и Y , между которыми установлена функциональная зависимость $Y=f(X)$, где $f(X)$ — монотонно возрастающая непрерывно дифференцируемая функция, то

$$\varphi_Y(x) = \varphi_X(f^{-1}(x)) \frac{d(f^{-1}(x))}{dx}. \quad (1.27)$$

Доказательство. В условиях данной теоремы функция $f(X)$ имеет обратную $f^{-1}(Y)$. Требуется определить плотность $\varphi_Y(x)$ случайной величины Y , если известна плотность $\varphi_X(x)$ случайной величины X , здесь x — множество вещественных чисел.

Напишем функцию распределения случайной величины Y :

$$F_Y(x) = F_{f(X)}(x) = P(f(X) < x) = P(x < f^{-1}(x)) = F_X(f^{-1}(x)).$$

Перейдем к плотностям случайных величин X и Y . Для этого возьмем производные от левой и правой частей данного равенства и окончательно получим формулу

$$\varphi_Y(x) = \varphi_X(f^{-1}(x)) \frac{d(f^{-1}(x))}{dx}.$$

Используя формулу (1.27), найдем функцию плотности для случайной величины X , являющейся функцией T , если $X = \sigma T + M_x$.

$$\text{Здесь } f^{-1}(x) = \frac{x - M(x)}{\sigma_x}.$$

Определим частную производную от $f^{-1}(x)$ по x :

$$\frac{d(f^{-1}(x))}{dx} = \frac{1}{\sigma_x}.$$

Теперь определим плотность $\varphi_T(f^{-1}(x))$, подставляя в (1.25)

$$\text{вместо } T \text{ величину } \frac{x - M_X}{\sigma_X}, \text{ получим } \varphi_T(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - M_X)^2}{2\sigma_X^2}}.$$

Подставляя полученные результаты в (1.27), получим плотность нормального распределения для случайной величины X :

$$\varphi_X(x) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-M_X)^2}{2\sigma_X^2}}. \quad (1.28)$$

Случайную величину X , подчиняющуюся нормальному закону распределения с параметрами M_X и D_X , обозначают следующим образом: $X \in N(M_X, D_X)$. График плотности (1.28) приведен на рис. 1.43.

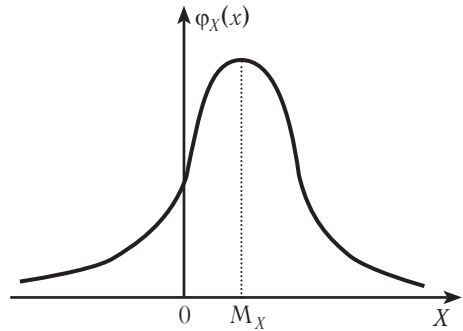


Рис. 1.43. График плотности нормального распределения

Вероятность попадания в заданный интервал случайной величины, имеющей нормальное распределение

Пусть случайная величина X подчиняется нормальному распределению $X \in N(M_X, D_X)$. Требуется определить вероятность попадания X в интервал $P(x_1 < X < x_2)$.

Вероятность попадания в интервал определяется с помощью функции распределения

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) dx = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-M_X)^2}{2\sigma_X^2}}. \quad (1.29)$$

Такая вероятность численно равна заштрихованной площади на рис. 1.44.

Однако данный способ определения вероятности достаточно трудоемкий, поскольку для определения такой вероятности каждый раз необходимо вычислять интеграл (1.29). Составление же таблиц для такого интеграла невозможно, т.к. он зависит от трех аргументов M_X , D_X , x , диапазон которых может включать все множество вещественных чисел. Данную задачу позволяет легко решить переход к нормированной случайной величине. Заметим, что функция $T = \frac{X - M_X}{\sigma_X}$ устанавливает взаимно-однозначное

соответствие между множествами значений случайных величин X и T , отсюда,

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = F(t_2) - F(t_1),$$

где $t_1 = \frac{x_1 - M_X}{\sigma_X}$; $t_2 = \frac{x_2 - M_X}{\sigma_X}$.

В этом случае

$$F(t_2) - F(t_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t_1} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Каждый такой интеграл имеет только один аргумент t . Для него легко составить таблицы, которые занимают всего одну страницу. Учитывая, что величины T и X имеют взаимно-однозначное соответствие, заштрихованные площади на рис. 1.44 и 1.45, соответствующие вероятностям попадания в интервал, равны между собой.

Пример. Пусть X случайная величина, подчиняющаяся нормальному распределению с параметрами $M_X=2$ и $\sigma_X=5$. Определить вероятность попадания на отрезок $-10 < X < 10$.

Решение. Покажем на графике (рис. 1.46) искомую вероятность

$$P(x_1 < X < x_2) = P(-10 < X < 10).$$

Но, данная вероятность

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = F(t_2) - F(t_1),$$

где $t_1 = (x_1 - M_X)/\sigma_X = (-10 - 2)/5 = -2.4$; $t_2 = (x_2 - M_X)/\sigma_X = (10 - 2)/5 = 1.6$;

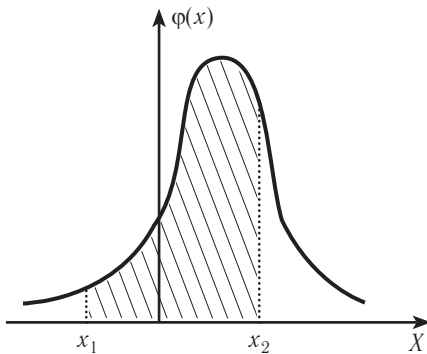


Рис. 1.44. Графическое представление вероятности попадания в интервал случайной величины $X \in N(M_X, D_X)$

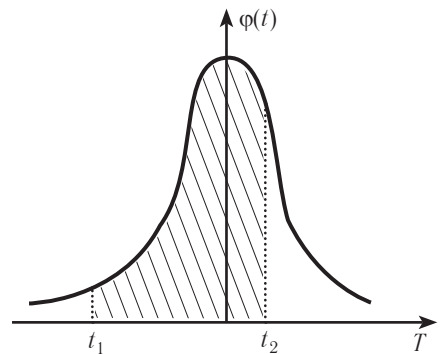


Рис. 1.45. Графическое представление вероятности попадания в интервал нормированной случайной величины $X \in N(0, 1)$

$F(-10)-F(10)=F(1,6)-F(-2,4)$. Графически вероятность попадания в интервал для нормированной случайной величины представлена на рис. 1.47. По таблицам $F(t)$ найдем значения $F(t_1)$ и $F(t_2)$: $F(t_1)=0,008$; $F(t_2)=0,945$. Таким образом, искомая вероятность будет равна $P(x_1 < X < x_2) = F(t_2) - F(t_1) = 0,945 - 0,008 = 0,937$.

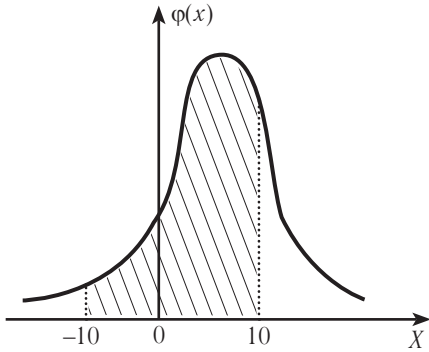


Рис. 1.46. Графическое представление вероятности $P(-10 < X < 10)$

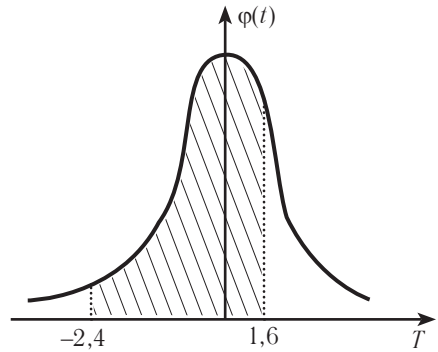


Рис. 1.47. Графическое представление вероятности $P(t_1 < T < t_2)$ для нормированной случайной величины

Интеграл вероятностей. Функция Лапласа

Интеграл вероятностей есть интеграл от плотности нормированного распределения вида

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^t e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \quad (1.30)$$

$\Phi(t)$ — вероятность $P(-t < T < t)$ или вероятность того, что величина T по абсолютному значению будет меньше t : $\Phi(t) = P(|T| < t)$.

Подставим вместо T его выражение через X :

$$\Phi(t) = P(|T| < t) = P\left(\left|\frac{X - M_X}{\sigma_X}\right| < t\right) = P(|X - M_X| < t\sigma_X) \quad (1.31)$$

или $\Phi(t) = P(M_X - t\sigma_X < X < M_X + t\sigma_X) = P(-t < T < t)$

Вероятностный смысл $\Phi(t)$ состоит в том, что данная функция есть вероятность попадания случайной величины X , подчиняющейся нормальному закону распределению, в интервал симметричный относительно математического ожидания (рис. 1.48 и 1.49).

Графически интеграл вероятностей представляет собой заштрихованные площади на графиках плотности нормального распределения для величин T и X .

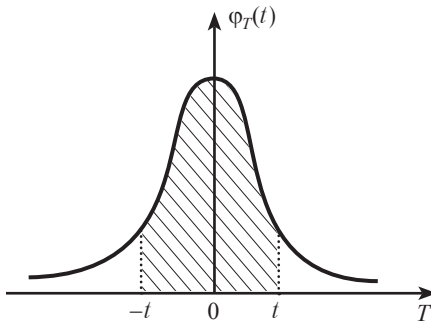


Рис. 1.48. Графическое представление $\Phi(t)$ на графике $\varphi_T(t)$

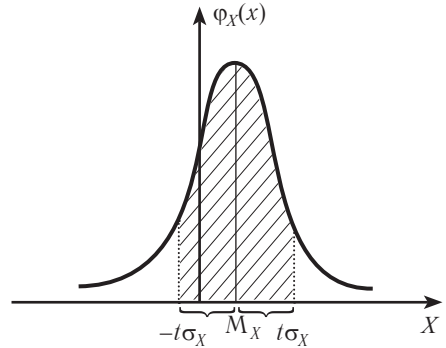


Рис. 1.49. Графическое представление $\Phi(t)$ на графике $\varphi_X(x)$

Связь интеграла вероятностей с функцией распределения

Функцию распределения случайной величины T можно представить в виде интеграла

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

$F(t)$ можно представить в виде суммы двух интегралов:

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Так как $\varphi_T(t)$ симметрична относительно нуля и, учитывая свойство плотности $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1$, получим, что интеграл

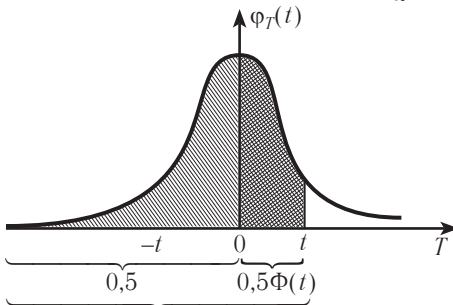


Рис. 1.50. Связь интеграла вероятностей и функции распределения

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0,5.$$

Второй же интеграл представляет собой $0,5\Phi(t)$, отсюда

$$F(t) = 0,5 + 0,5\Phi(t). \quad (1.32)$$

Графически такая связь показана на рис. 1.50.

Используя интеграл веро-

ятностей и соотношение (1.32), продолжим цепочку равенств для вероятности попадания в интервал:

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = F(t_2) - F(t_1) = 0,5(\Phi(t_2) - \Phi(t_1)). \quad (1.33)$$

Графический смысл формулы (1.33), связанной с интегралом вероятностей, показан на рис. 1.51 (заштрихованная область).

Таким образом, вероятность попадания случайной величины в заданный интервал можно определить, используя либо функцию распределения, либо интеграл вероятностей. Для обеих функций в учебниках по теории вероятностей приводятся соответствующие таблицы. При этом таблицы интеграла вероятностей имеют объем меньший, чем таблицы функции распределения, т.к. интеграл вероятностей — функция нечетная.

Действительно,

$$\Phi(-t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-(-t)}^{-t} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = F(-t) - F(t) = -\Phi(t).$$

Таблицы для $\Phi(t)$ можно составлять только для положительных значений t . При отрицательных значениях t , $\Phi(t)$ будут иметь те же значения, что и при положительных t , но со знаком минус.

Пример. Определим вероятность попадания в интервал случайной величины X для предыдущего примера через интеграл вероятностей. Пусть X случайная величина, подчиняющаяся нормальному распределению с параметрами $M_X=2$ и $\sigma_X=5$. Определим вероятность попадания на отрезок $-10 < X < 10$.

$$\begin{aligned} P(x_1 < X < x_2) &= F(x_2) - F(x_1) = 0,5(\Phi(t_2) - \Phi(t_1)) = 0,5(\Phi(1,6) - \Phi(-2,4)) = \\ &= 0,5(\Phi(1,6) + \Phi(2,4)) = 0,5(0,890 + 0,984) = 0,937. \end{aligned}$$

Получен тот же результат, что и в предыдущем примере. Значения 0,890 и 0,984 взяты из таблиц интеграла вероятностей (см. прил. 2). Интеграл вероятности можно определить с помощью разложения интеграла в ряд вида:

$$\Phi(t) = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{40} - \dots$$

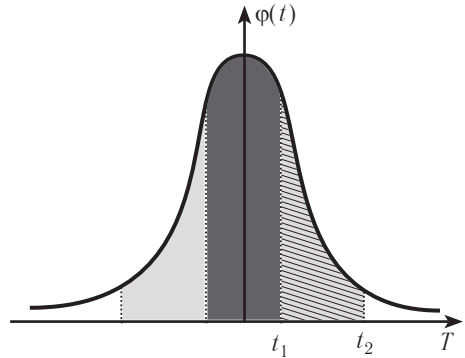


Рис. 1.51. Графическое представление вероятности попадания случайной величины в интервал

Контрольные вопросы

1. Какое распределение называется равномерным?
2. Как выглядит график плотности равномерного распределения?
3. Какая величина называется нормированной? Каковы ее свойства?
4. Какое распределение называется нормальным?
5. Как выглядит плотность нормального распределения нормированной случайной величины?
6. Как выглядит график плотности нормального распределения нормированной случайной величины?
7. Как выглядит плотность нормального распределения случайной величины $X \in N(M_X, D_X)$?
8. Как выглядит функция распределения для нормального распределения?
9. Как вычисляется вероятность попадания случайной величины в интервал, через функцию распределения?
10. Дайте определение интеграла вероятностей.
11. Как вычисляется вероятность попадания случайной величины, подчиняющейся нормальному распределению, в интервал при использовании интеграла вероятностей?
12. Как связаны между собой интеграл вероятностей и функция распределения?

Задачи с решениями

Задача 1. Производятся измерения угла со средним квадратическим отклонением $\sigma_\Delta = 10''$. Математическое ожидание ошибок измерения равно $M(\Delta) = 0$. Определить численное значение и показать на графике плотности распределения вероятность $P(\Delta < 10)$.

Решение. Представим на графике плотности вероятность $P(\Delta < 10)$ (рис. 1.52).

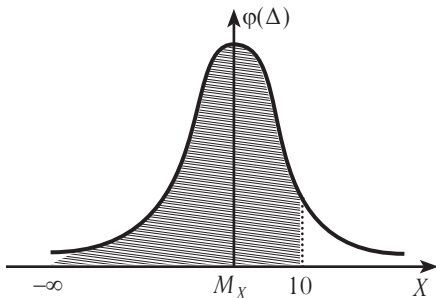


Рис. 1.52. Вероятность $P(\Delta < 10)$ на графике $\varphi(\Delta)$

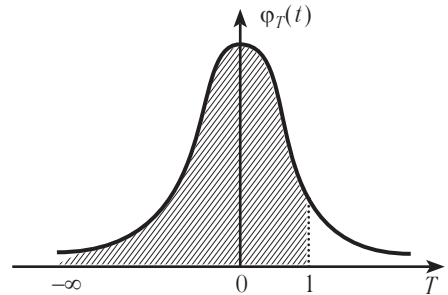


Рис. 1.53. Вероятность $F_A(1) = P(t < 1)$ на графике $\varphi(t)$

$P(\Delta < 10) = F(10)$ или переходя к нормированной случайной величине, где $t = (\Delta - M(\Delta)) / \sigma_\Delta = (10 - 0) / 10 = 1$, получим $\Phi(1) = 0,68$,

$$P(\Delta < 10) = F_\Delta(10) = F_t(1) = 0,5 + 0,5\Phi(1) = 0,5 + 0,5 \cdot 0,68 = 0,84.$$

Данная вероятность соответствует заштрихованным областям на рис. 1.52 (график плотности распределения случайной величины X) и на рис. 1.53 (график плотности распределения случайной величины T).

Задача 2. Производятся измерения угла со средним квадратическим отклонением $\sigma_\Delta = 10''$. Математическое ожидание ошибок измерения $M(\Delta) = 0$. Определить численное значение и показать на графике плотности распределения вероятность $P(|\Delta| < 10)$.

Решение. Представим искомую вероятность на графике плотности (рис. 1.54), в виде заштрихованной площади. Видно, что данная вероятность есть вероятность попадания случайной величины X в интервал симметричный относительно математического ожидания. Следовательно, искомая вероятность есть интеграл вероятностей. $P(|\Delta| < 10) = \Phi(t) = \Phi((10 - 0) / 10) = \Phi(1)$. Или по таблицам интеграла вероятностей $\Phi(1) = 0,68$. На рис. 1.55 представлена плотность распределения нормированной случайной величины T . Здесь заштрихованная площадь также соответствует искомой вероятности.

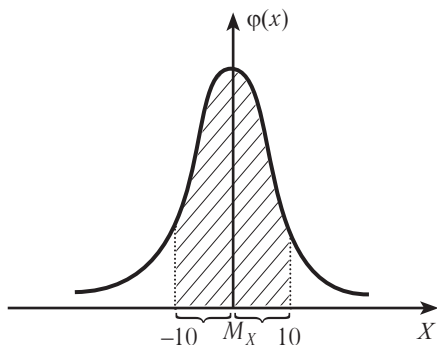


Рис. 1.54. Интеграл вероятности $\Phi(t) = P(|\Delta| < 10)$

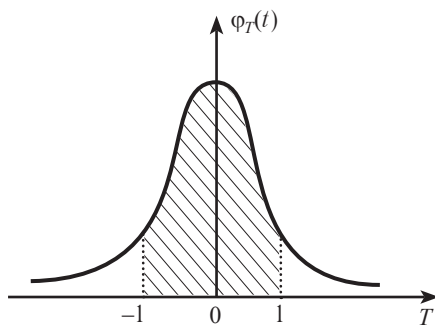


Рис. 1.55. Интеграл вероятностей $\Phi(1)$

Задача 3. Производятся измерения линии D светодальномером со средним квадратическим отклонением 5 см ($\sigma_\Delta = 5$ см). Систематическая составляющая ошибки измерения равна +1 см ($M(\Delta) = 1$ см). Определить вероятность того, что истинная ошибка измерений не превзойдет по абсолютному значению величины 10 см, т.е. определить вероятность $P(|\Delta| < 10)$.

Решение. Представим искомую вероятность на графике плотности распределения случайной величины $X=D$ (рис. 1.56). Определим граничные значения нормированной случайной величины, соответствующие граничным значениям истинной ошибки $t_1=(-10-1)/10=-1,1$ и $t_2=(10-1)/10=0,9$. На рис. 1.57 представлен график плотности распределения нормированной случайной величины T , где площадь заштрихованной области равна искомой вероятности. Запишем цепочку равенств для искомой вероятности, с учетом найденных значений t :

$$\begin{aligned} P(x_1 < X < x_2) &= F(x_2) - F(x_1) = F(t_2) - F(t_1) = 0,5(\Phi(t_2) - \Phi(t_1)) = \\ &= 0,5(\Phi(0,9) - \Phi(-1,1)) = 0,5(\Phi(0,9) + \Phi(1,1)) = \\ &= 0,5(0,63 + 0,73) = 0,68. \end{aligned}$$

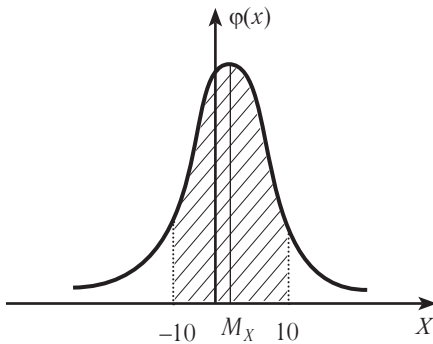


Рис. 1.56. Вероятность $P(|\Delta| < 10)$

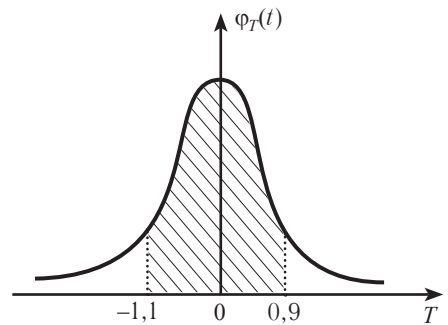


Рис. 1.57. Вероятность $P(|\Delta| < 10)$ на графике плотности нормированной случайной величины

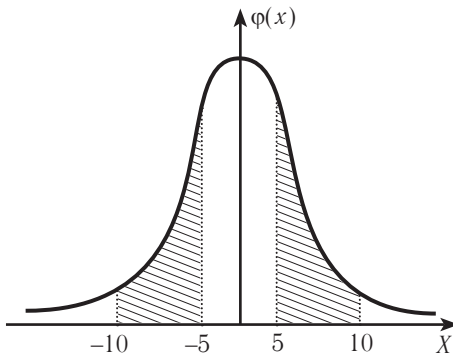


Рис. 1.58. Графическая интерпретация вероятности $P(5 < |\Delta| < 10)$

Задача 4. Производятся измерения линии светодиальномером со средним квадратическим отклонением $\sigma_\Delta = 5$ см и $M(\Delta) = 0$. Определить вероятность того, что истинная ошибка измерений по абсолютному значению будет лежать в пределах от 5 до 10 см, т.е. определить вероятность $P(5 < |\Delta| < 10)$.

Решение. Представим искомую вероятность на графике плотности распределения случайной величины $X=D$ на рис. 1.58. Площадь

заштрихованной области равна искомой вероятности. Как видим, заштрихованная область состоит из двух областей одинаковой площади. Требуется определить $P(5 < |\Delta| < 10) = P(-10 < \Delta < -5) + P(5 < \Delta < 10) = 2P(5 < \Delta < 10)$. Перейдем к нормированной случайной величине $t_1 = (5-0)/10 = 0,5$ и $t_2 = (10-0)/10 = 1,0$. Продолжим цепочку равенств

$$P(5 < |\Delta| < 10) = \Phi(t_2) - \Phi(t_1) = \Phi(1,0) - \Phi(0,5) = 0,68 - 0,38 = 0,30.$$

Заметим, что коэффициент 0,5 в данном случае отсутствует, поскольку искомая вероятность равна удвоенной вероятности $P(5 < \Delta < 10)$.

Задача 5. Производятся измерения угла. Математическое ожидание ошибок измерений $M(\Delta) = 0$. Определить среднее квадратическое отклонение σ_Δ , если $P(|\Delta| < 10) = 0,954$.

Решение. Учитывая, что $M(\Delta) = 0$, искомая вероятность есть вероятность попадания в область, симметричную относительно математического ожидания, т.е. равна интегралу вероятностей

$$P(|\Delta| < 10) = P(|\Delta| < t\sigma_\Delta) = \Phi(t) = 0,954.$$

Из таблиц интеграла вероятностей по значению функции $\Phi(t) = 0,954$ найдем значение аргумента $t = 2$. Отсюда, $t\sigma_\Delta = 2\sigma_\Delta = 10$ и $\sigma_\Delta = 10/t = 10/2 = 5$.

§1.7. Предельные теоремы

Здесь будут рассмотрены теоремы, которые справедливы в условиях, когда количество испытаний n стремится к ∞ . Такие теоремы в теории вероятности называются предельными. Мы рассмотрим некоторые из них.

Закон больших чисел. Теорема Чебышева

Пусть X — непрерывная, неотрицательная случайная величина. Тогда ее можно представить в виде суммы двух составляющих [23]:

$$X = X\chi_{(X < \varepsilon)} + X\chi_{(X \geq \varepsilon)} \quad (1.34)$$

или графически (рис. 1.59).

Здесь $\chi_{(X < \varepsilon)}$ — индикатор события, заключающегося в том, что X окажется меньше ε ; ε — любая положительная постоянная величина. Индикатор принимает значение 1, если $X < \varepsilon$ и значение 0, в случае наступления противоположного

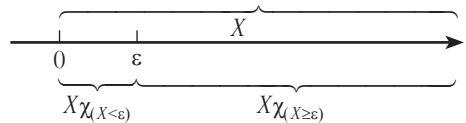


Рис. 1.59. Представление случайной величины X в виде двух составляющих

события и наоборот $\chi_{(X \geq \varepsilon)} = 1$, если $X \geq \varepsilon$ и $\chi_{(X \geq \varepsilon)} = 0$ в противоположном случае.

Учитывая, что X — неотрицательная случайная величина, из равенства (1.34) можно получить следующую цепочку неравенств:

$$X = X\chi_{(X < \varepsilon)} + X\chi_{(X \geq \varepsilon)} \geq X\chi_{(X \geq \varepsilon)} \geq \varepsilon\chi_{(X \geq \varepsilon)}.$$

Возьмем математическое ожидание от левой и правой частей данного неравенства и учтем свойство математического ожидания: $M_{\chi(A)} = P(A)$. Тогда $M_X \geq \varepsilon M_{\chi(X \geq \varepsilon)} = \varepsilon P(X \geq \varepsilon)$, отсюда, получим неравенство Чебышева

$$P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{M_X}{\varepsilon}. \quad (1.35)$$

Поскольку неравенство Чебышева справедливо для неотрицательной случайной величины X , то если взять абсолютное значение $|X|$, можно записать неравенство для произвольной случайной величины:

$$P(|X| \geq \varepsilon) = P(|X|^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{M_{|X|}}{\varepsilon}.$$

Если в качестве случайной величины рассматривать центрированную величину, то получим

$$P(|X - M_X| \geq \varepsilon) \leq \frac{M(X - M_X)^2}{\varepsilon^2} = \frac{D_X}{\varepsilon^2}. \quad (1.36)$$

Если ε в данном неравенстве заменить величиной $k\sigma_X$, то получим неравенство Бьенэме–Чебышева

$$P(|X - M_X| \geq k\sigma_X) \leq \frac{1}{k^2}.$$

Переходя к вероятности противоположного события, получим

$$P(|X - M_X| \leq k\sigma_X) \geq 1 - \frac{1}{k^2}. \quad (1.37)$$

Неравенство (1.37) имеет важное значение, поскольку на его основе можно строить доверительные интервалы для величины X независимо от ее распределения с доверительной вероятностью, не меньшей чем $1 - 1/k^2$, в виде $M(X) - k\sigma_X \leq X \leq M(X) + k\sigma_X$. Доверительный интервал показывает, что с вероятностью не менее

$1-1/k^2$, случайная величина X окажется внутри данного интервала. Заменяем в (1.36) X на среднее арифметическое $\bar{X} = \frac{[X]}{n}$ и учтем, что $M_{\bar{X}} = M_X$, а также $D_{\bar{X}} = \frac{D_X}{n}$. Получим

$$P\left(|\bar{X} - M_X| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D_X}{n\varepsilon^2} = \delta. \quad (1.38)$$

Заметим, что при увеличении числа испытаний n до ∞ (n стремится к ∞), δ будет стремиться к нулю ($\delta \rightarrow 0$).

Перейдем в неравенстве к вероятности противоположного события. Для этого умножим левую и правую часть неравенства (1.38) на -1 , заменив при этом знак неравенства на противоположный, и добавим к обеим частям единицу, тогда

$$1 - P\left(|\bar{X} - M_X| \geq \varepsilon\right) > 1 - \delta.$$

Поскольку сумма вероятностей противоположных событий равна единице, то

$$P\left(|\bar{X} - M_X| < \varepsilon\right) > 1 - \delta. \quad (1.39)$$

при $n \rightarrow \infty$ $\delta \rightarrow 0$

Неравенство (1.38) определяет теорему Чебышева, которая состоит в следующем.

Если некоторую величину X измеряют n раз, то среднее арифметическое из n измерений при $n \rightarrow \infty$, будет устойчиво стремиться к математическому ожиданию величины X .

Действительно, из (1.39) следует, что какое бы маленькое значение ε не принимало, вероятность $P\left(|\bar{X} - M_X| < \varepsilon\right)$ будет стремиться к единице при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, \bar{X} устойчиво будет стремиться по вероятности к M_X , что представляет собой суть закона больших чисел.

Теорема Бернулли

Рассмотрим в качестве случайной величины относительную частоту $Q = k/n$. Здесь k — количество появлений события A при n многократных повторных испытаниях; k подчиняется распреде-

лению Бернулли, ряд распределения которой имеет вид:

$X=k$	0	1	2	...	n
P	$C_n^0 p^0 q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$...	$C_n^n p^n q^0$

Определим математическое ожидание и дисперсию величины k , используя индикатор события A . Для этого представим k в виде суммы индикаторов событий: $k = \sum_1^n \chi_A$.

Например, пусть при пяти испытаниях появились события $\bar{A} A A \bar{A} A$. Индикатор событий примет значения 0 1 1 0 1. Сумма значений индикатора событий равна трем, т.е. числу появлений события A . Учитывая, что $M_{\chi_A} = p$, и $D_{\chi_A} = pq$ и используя свойства математического ожидания и дисперсий, получим

$$M_k = \sum_1^n M_{\chi_A} = np; \quad D_k = \sum_1^n D_{\chi_A} = npq.$$

Теперь перейдем к случайной величине $Q = k/n$. Определим математическое ожидание и дисперсию данной случайной величины:

$$M_Q = M\left[\frac{k}{n}\right] = \frac{M_k}{n} = \frac{np}{n} = p;$$

$$D_Q = D\left[\frac{k}{n}\right] = \frac{D_k}{n^2} = \frac{npq}{n^2} = \frac{pq}{n}.$$

Подставим величину Q и полученные для нее количественные характеристики в неравенство (1.34):

$$P(|Q - M_Q| \geq \epsilon) \leq \frac{D_Q}{\epsilon^2} = \frac{pq}{n\epsilon^2}.$$

Перейдем к вероятности противоположного события

$$P(|Q - P| < \epsilon) > 1 - \frac{pq}{n\epsilon^2} = 1 - \delta.$$

Заметим, что при $n \rightarrow \infty$ $\delta \rightarrow 0$.

Мы получили теорему Бернулли.

Относительная частота Q при $n \rightarrow \infty$ с вероятностью близкой к единице стремится к вероятности.

Или в другой записи $Q \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} P$.

Центральная предельная теорема Ляпунова

В геодезической практике часто приходится иметь дело с суммами достаточно большого числа независимых случайных величин. При некоторых весьма общих условиях оказывается, что эта сумма имеет распределение, близкое к нормальному, хотя каждое из слагаемых может не подчиняться нормальному закону распределения вероятностей. Различные вариации этих условий составляют содержание различных версий центральной предельной теоремы. Большой вклад в разработку этой теоремы внесли русские математики П.Л. Чебышев, А.А. Марков, А.М. Ляпунов, а также Линдберг, Леви, Феллер и др. Впервые строгое доказательство теоремы было приведено А.М. Ляпуновым, поэтому часто данную теорему называют теоремой Ляпунова. Приведем данную теорему без доказательства, поскольку строгое доказательство занимает очень много места.

Теорема Ляпунова.

Сумма достаточно большого количества случайных величин $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ с примерно одинаковыми дисперсиями стремится к нормальному распределению с параметрами $M_X = \sum M_{X_i}$ и $D_X = \sum D_{X_i}$.

Пример. Ошибки округления подчиняются равномерному распределению с плотностью $\varphi(x)$ (рис. 1.60). Сумма двух ошибок округления приводит к треугольному распределению, плотность которого имеет вид, представленный на рис. 1.61. Сумма же семи ошибок округления уже имеет распределение близкое к нормальному.

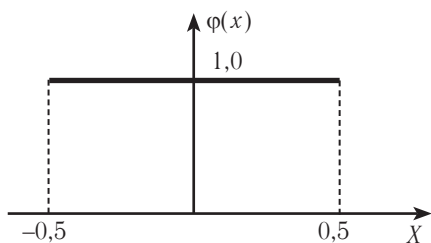


Рис. 1.60. Плотность распределения ошибок округления

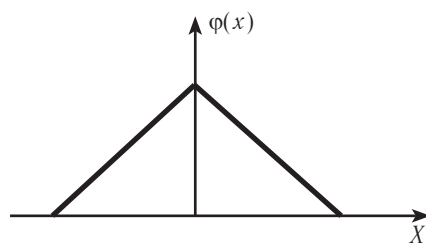


Рис. 1.61. Плотность распределения суммы двух ошибок округления

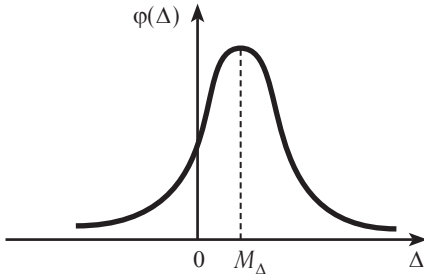


Рис. 1.62. Кривая плотности ошибок измерений

Пример. Истинная ошибка измерений представляет собой сумму целого ряда инструментальных ошибок, ошибок из-за внешних условий, ошибок наблюдателя, поэтому, в силу теоремы Ляпунова, истинные ошибки измерений подчиняются нормальному распределению с плотностью

$$\varphi(\Delta) = \frac{1}{\sigma_{\Delta}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\Delta-M_{\Delta})^2}{2\sigma_{\Delta}^2}},$$

график которой приведен на рис. 1.62.

Локальная и интегральная теоремы Муавра–Лапласа

Рассмотрим вероятность появления события A ровно k раз при многократных повторных испытаниях, когда $n \rightarrow \infty$:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Заменим все факториалы в $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ на правые части формулы Стирлинга $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$, получим

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{npq}} e^{-\frac{(k-np)^2}{npq}}.$$

Если учесть, что $D_k = npq$ и $M_k = np$, то получим локальную теорему Муавра–Лапласа

$$P_n(k) \xrightarrow{\text{при } n \rightarrow \infty} \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma}} e^{-\frac{(x-M_x)^2}{\sigma^2}}.$$

При $n \rightarrow \infty$, вероятность определяемая по формуле Бернулли, в условиях многократных повторных испытаний стремится к плотности нормального распределения.

Для доказательства интегральной теоремы Муавра–Лапласа рассмотрим предел следующего выражения:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(a \leq k \leq b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=a}^b P_n(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{npq}\sqrt{2\pi}} \sum_{k=a}^b e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}.$$

Перейдем к нормированной случайной величине

$$T = \frac{X - M_X}{\sigma_X} = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Заменим граничные значения a и b на значения нормированной случайной величины $t_a = \frac{a - np}{\sqrt{npq}}$; $t_b = \frac{b - np}{\sqrt{npq}}$.

Здесь k — целочисленная величина, поэтому любые ближайшие значения к ней отличаются друг от друга ровно на единицу. Определим соответствие разницы значений для величин k и t , когда k меняется на единицу:

$$dt = t_{k+1} - t_k = \frac{k+1 - np}{\sqrt{npq}} - \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{1}{\sqrt{npq}}.$$

Отсюда $dt \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Продолжим равенство для $\lim P(a \leq k \leq b) = \lim P(t_a \leq k \leq t_b)$, заменив при $n \rightarrow \infty$ символ суммы на знак интеграла

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(a \leq k \leq b) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(t_a \leq k \leq t_b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_a}^{t_b} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = F(t_b) - F(t_a). \quad (1.40)$$

Выражение (1.40) и определяет интегральную теорему Муавра–Лапласа.

Вероятность попадания случайной величины k , подчиняющейся биномиальному распределению при $n \rightarrow \infty$, в заданный интервал равна разности функций нормального распределения. Данное утверждение должно выполняться и в силу центральной предельной теоремы Ляпунова, поскольку k представляет собой

сумму индикаторов событий A : $k = \sum_1^n \chi^2$, где $n \rightarrow \infty$.

Пример. Выполнено 40 измерений. Найти вероятность того, что положительная ошибка появится в пределах от 15 до 25 раз.

Решение. $n=40$, $p=0,5$. Следовательно, $M_k=np=20$, $\sigma_k = \sqrt{npq}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(a \leq k \leq b) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(t_a \leq k \leq t_b) = F(t_b) - F(t_a),$$

где $t_a = \frac{a - np}{\sqrt{npq}} = \frac{15 - 20}{\sqrt{10}} = -1,58$ и $t_b = \frac{b - np}{\sqrt{npq}} = \frac{25 - 20}{\sqrt{10}} = +1,58$. Поскольку вероятности появления положительных и отрицательных ошибок при одном измерении одинаковы, то $p=q=0,5$. Отсюда

$$F(t_b) - F(t_a) = 0,5\Phi(t_b) - 0,5\Phi(t_a) = 0,5\Phi(1,58) - 0,5\Phi(-1,58) = \Phi(1,58) = 0,43.$$

Контрольные вопросы

1. Для каких условий справедливо неравенство Чебышева?
2. Для каких целей можно использовать неравенство Бьенэме–Чебышева?
3. В чем суть теоремы Чебышева?
4. Как определяются математическое ожидание и дисперсия биномиального распределения?
5. Сформулируйте теорему Бернулли.
6. Сформулируйте теорему Ляпунова.
7. Какому закону распределения подчиняются ошибки округления?
8. Какому закону распределения и почему подчиняются истинные ошибки измерений?
9. Сформулируйте локальную теорему Муавра–Лапласа.
10. Сформулируйте интегральную теорему Муавра–Лапласа.
11. Почему, в соответствии с теоремой Чебышева, при измерениях необходимо выполнять большое количество измерений некоторой величины, из которых вычислять среднее?

Задачи с решениями

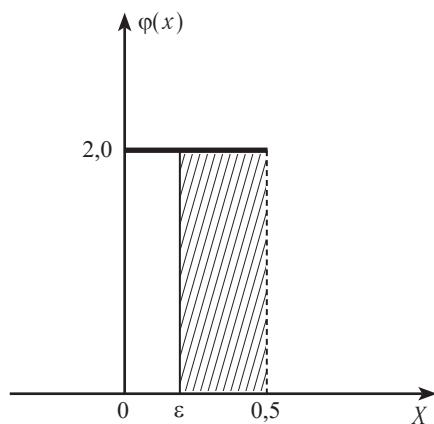


Рис. 1.63. График плотности равномерного распределения

Задача 1. Пусть задано равномерное распределение, график плотности которого приведен на рис. 1.63. Проверить выполнение неравенства Чебышева в различных частях отрезка $[0; 0,5]$.

Решение. Математическое ожидание данного распределения равно среднему из граничных значений $M_X = 0,25$, ε — произвольное положительное значение. Рассмотрим неравенство Чебышева для случаев, когда значение ε выбирается на разных частях отрезка $[0; 0,5]$. Левая часть

неравенства Чебышева $P(X \geq \varepsilon)$ связана с ε следующей функцией $P(X \geq \varepsilon) = 2(0,5 - \varepsilon) = 1 - 2\varepsilon$. Это следует из графика плотности. Правая же часть неравенства Чебышева $M_X/\varepsilon = 0,25/\varepsilon$. Графики данных функций на отрезке $[0; 0,5]$ представлены на рис. 1.64.

Как видно из графиков, M_X/ε на всем отрезке $[0; 0,5]$ больше $P(X \geq \varepsilon)$, т.е. неравенство Чебышева выполняется на всем отрезке.

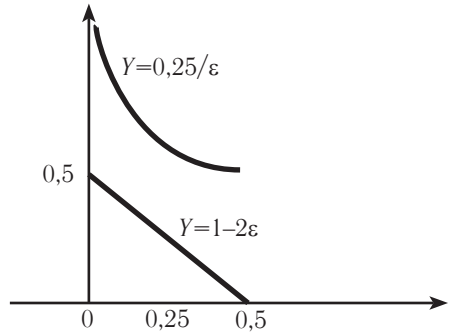


Рис. 1.64. Графики изменения $P(X \geq \varepsilon)$ и M_X/ε для равномерного распределения

Задача 2. Пусть случайная величина X имеет $M_X = 100$ и $\sigma_X = 5$.

Построить доверительный интервал для истинного значения величины X с вероятностью $0,75$.

Решение. На основе неравенства Бьенэме–Чебышева можно построить доверительный интервал $M_X - k\sigma_X \leq X \leq M_X + k\sigma_X$ с вероятностью $1 - 1/k$. Требуется принять данную вероятность равной $0,75$. Следовательно, $1 - 1/k = 0,75$. Откуда $k = 4$. Доверительный интервал примет следующий вид: $100 - 4 \cdot 5 \leq X \leq 100 + 4 \cdot 5$ или случайная величина X с вероятностью не менее $0,75$ лежит в пределах $80 \leq X \leq 120$.

Задача 3. Производятся 10 измерений линии электронным тахеометром, со средним квадратическим отклонением $\sigma_\Delta = 3$ см. В каких пределах будет отличаться среднее арифметическое значение измеряемого расстояния от математического ожидания с вероятностью не менее чем $0,95$?

Решение. В соответствии с теоремой Чебышева и по условию задачи

$$P(|\bar{X} - M_X| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{D_X}{n\varepsilon^2} = 1 - \delta = 0,95.$$

Откуда, $1 - \sigma_\Delta^2 / 10\varepsilon^2 = 0,95$ или $1 - 3^2 / 10\varepsilon^2 = 0,95$, тогда $\varepsilon = 0,23$. Следовательно, среднее арифметическое значение будет отличаться от математического ожидания на величину не более $\varepsilon = 0,23$ см, с вероятностью не менее чем $0,95$.

Задача 4. В течение дня производятся 100 измерений линий электронным тахеометром. В каких пределах будет отличаться относительная частота Q появления положительной ошибки от $0,5$ с вероятностью не менее чем $0,95$?

Решение. В соответствии с теоремой Бернулли $P(|Q - P| < \varepsilon) > 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} = 1 - \delta$ и условиями задачи, можно записать $1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} = 1 - \delta = 0,95$. Подставим в левую часть значения $p=q=0,5$ и $n=100$, получим, что Q от P могут отличаться на величину не более $\varepsilon=0,05$.

Задача 5. Производятся 100 измерений углов электронным тахеометром. Определить вероятность того, что количество положительных ошибок в данной серии измерений будет находиться в пределах от 30 до 60.

Решение. Поскольку число измерений здесь достаточно большое, используем интегральную теорему Муавра–Лапласа

$$\lim P(a \leq k \leq b) = \lim P(t_a \leq k \leq t_b) = F(t_b) - F(t_a) = 0,5\Phi(t_b) - 0,5\Phi(t_a),$$

$$\text{где } t_a = \frac{a - np}{\sqrt{npq}} = \frac{30 - 100 \cdot 0,5}{\sqrt{100 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = -4; \quad t_b = \frac{b - np}{\sqrt{npq}} = \frac{60 - 50}{5} = +2.$$

Отсюда

$$P(30 \leq k \leq 60) = 0,5\Phi(2) - 0,5\Phi(-4) = 0,5\Phi(2) + 0,5\Phi(4) = 0,5(0,954 + 1) = 0,977.$$

§1.8. Многомерные распределения. Случайный вектор

На практике существуют задачи, в которых измеряют несколько случайных величин. Например, в плановых геодезических сетях измеряют n величин, носящих случайный характер. По измерениям вычисляют координаты определяемых точек, которые так же, как измерения содержат ошибки и, следовательно, являются случайными величинами.

Вектор X , состоящий из n случайных величин X_i , называется n -мерным случайным вектором или n -мерной случайной величиной

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{pmatrix}. \quad (1.41)$$

Величины X_i называют составляющими случайными величинами вектора X или его случайными координатами.

Закон распределения случайного вектора задают в виде функции совместного распределения

$$F(x) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n) \quad (1.42)$$

или в виде плотности совместного распределения

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}. \quad (1.43)$$

Двумерная случайная величина. Частные законы распределения

Наиболее простой является двумерная случайная величина, в которую входят две составляющие. Например, координаты X и Y некоторой точки, объединенные в вектор $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$.

Закон распределения двумерных случайных величин, как дискретных, так и непрерывных, чаще всего задают в виде функции совместного распределения $F(x, y) = P(X < x, Y < y)$. Геометрически, функцию распределения можно представить, как вероятность попадания в заштрихованную зону на рис. 1.65.

Свойства функции распределения двумерной случайной величины.

1. $F(-\infty, -\infty) = P(X < -\infty, Y < -\infty) = 0$. Но в отличие от одномерной случайной величины здесь можно добавить следующие равенства: $F(x, -\infty) = P(X < x, Y < -\infty) = 0$ и $F(-\infty, y) = P(X < -\infty, Y < y) = 0$.

2. $F(\infty, \infty) = P(X < \infty, Y < \infty) = 1$.

3. Функция распределения есть функция неубывающая, т.е. $F(x_2, y_2) \geq F(x_1, y_1)$ при $x_1 < x_2$ и $y_1 < y_2$.

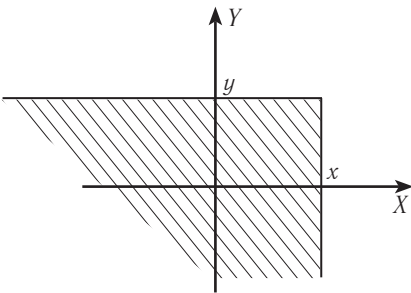


Рис. 1.65. Графическое представление функции распределения двумерной случайной величины

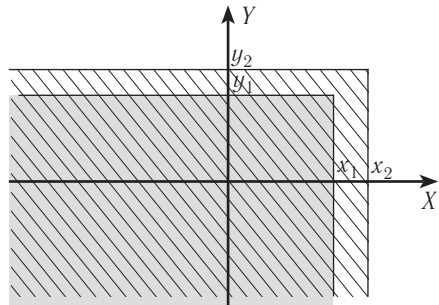


Рис. 1.66. Графическая демонстрация третьего свойства функции распределения

$F(x_2, y_2)$ на рис. 1.66 полностью перекрывает площадь, соответствующую функции $F(x_1, y_1)$.

Зная функцию совместного распределения, всегда можно получить плотность такого распределения $\varphi(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$.

И наоборот, зная плотность совместного распределения можно получить функцию распределения

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \varphi(x, y) dx dy. \quad (1.44)$$

Свойства плотности распределения:

1) $\varphi(x, y) \geq 0$, т.к. $F(x, y)$ — функция неубывающая;

$$2) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) dx dy = 1.$$

Геометрически это означает, что полный объем тела, ограниченный поверхностью распределения и плоскостью, образованной осями абсцисс и ординат, равен единице.

Если в функции распределения $F(x, y)$ фиксированное значение y перенести в ∞ , то она будет зависеть только от x :

$$F(x, \infty) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) dx dy = F_1(x). \quad (1.45)$$

$F_1(x)$ — называется функцией частного закона распределения величины X . Аналогично $F_2(y)$ — функция частного закона распределения величины Y :

$$F_2(y) = F(\infty, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^y \varphi(x, y) dx dy.$$

Частный закон распределения величины X можно задать с помощью плотности $\varphi_1(x) = \frac{\partial F_1(x)}{\partial x} = \frac{\partial F(x, \infty)}{\partial x}$.

Дифференцируя (1.45) по x , получим

$$\varphi_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) dy. \quad (1.46)$$

Аналогично,

$$\varphi_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) dx. \quad (1.47)$$

Формулы (1.46) и (1.47) позволяют найти частные законы распределения, если известна плотность совместного распределения. Однако обратную задачу — установление закона совместного распределения, зная только частные законы, можно решить не всегда. Лишь в случае, когда случайные величины X и Y независимы, справедливо выражение

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(x)\varphi_2(y). \quad (1.48)$$

Случайная величина Y называется независимой от случайной величины X , если закон распределения величины Y не зависит от того, какое значение принимает величина X .

Если величины X и Y зависимы, то плотность совместного распределения определяется как произведение

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(x)\varphi(y | x),$$

где $\varphi(y | x)$ — плотность условного распределения, т.е. распределения случайной величины Y , когда случайная величина X приняла значение x .

По аналогии, $\varphi(x, y) = \varphi_2(y)\varphi(x | y)$, здесь $\varphi(x | y)$ — плотность условного распределения, т.е. распределения случайной величины X , когда случайная величина Y приняла значение y .

Учитывая (1.48), получим условие независимости случайных величин X и Y

$$\varphi(y | x) = \varphi_2(y) \quad \text{или} \quad \varphi(x | y) = \varphi_1(x). \quad (1.49)$$

В данном случае рассматривается вероятностная (статистическая) зависимость. В отличие от функциональной, когда каждому значению аргумента соответствуют фиксированные значения функции (например, $y = x^2$; $V = 1,333\pi R^3$ и др.), при вероятностной зависимости каждому значению аргумента X соответствует распределение Y , изменяющееся с изменением значения x . Вероятностные зависимости между случайными величинами на практике встречаются очень часто.

Для вычисления вероятности попадания двумерной случайной величины в произвольную область D можно использовать формулу

$$P((x, y) \in D) = \iint_D \varphi(x, y) dx dy.$$

Следует помнить, что если область D совпадет с областью существования случайных величин X и Y , то данный интеграл примет максимальное значение, равное единице. Если область D есть некий прямоугольник $[x_1 \leq X \leq x_2]; [y_1 \leq Y \leq y_2]$ то данная формула примет вид

$$P((x, y) \in R) = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \varphi(x, y) dx dy.$$

Пример. Задана плотность совместного распределения двух случайных величин на эллипсе.

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{6\pi} & \text{при } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} < 1; \\ 0 & \text{при } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \geq 1. \end{cases}$$

Требуется установить, зависимы ли X и Y .

Решение. Для решения данной задачи необходимо определить $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(y)$ и установить — выполняется ли равенство (1.48). Если выполняется, то X и Y — независимы. В противном случае — зависимы.

$$\varphi_1(x) = \int_{-2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}^{2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}} \varphi(x, y) dy = \frac{2}{6\pi} \int_0^{2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}} dy = \frac{2}{9\pi} \sqrt{9-x^2};$$

$$\varphi_2(y) = \int_{-3\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}}^{3\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}} \varphi(x, y) dx = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4-y^2}.$$

Как видим произведение данных частных плотностей не равно плотности совместного распределения. Следовательно, случайные величины X и Y зависимы.

Некоторые виды вероятностного распределения. Количественные характеристики двумерного распределения

На практике очень часто рассматривают зависимости, при которых меняются только отдельные количественные характеристики распределения. Например, зависимость, при которой с изменением аргумента меняется математическое ожидание функции, называется *корреляционной зависимостью*.

Если изменение происходит по линейному закону, зависимость называется *прямолинейной корреляционной*. Например, рост и вес человека. Чем выше человек, тем с большей вероятностью можно ожидать, что человек будет весить больше. Для конкретного человека мы будем иметь конкретные значения роста и веса, соответственно x_i и y_i . Считая эти значения координатами случайных величин X и Y , можно получить коррелограмму (рис. 1.67), точки которой соответствуют конкретной паре значений двумерной случайной величины. На рис. 1.67 видно, что с увеличением X , значения величины Y имеют тенденцию увеличиваться по линейному закону.

Зависимость, при которой с изменением аргумента меняется дисперсия функции, называется *скедостической* (рис. 1.68).

Для выявления некоторых отдельных характеристик двумерного распределения, по аналогии с одномерным распределением, для двумерного распределения также введены понятия моментов. Такие моменты называют *смешанными*.

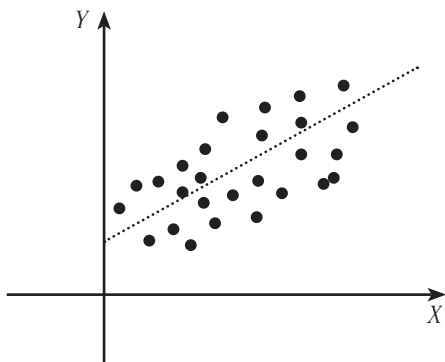


Рис. 1.67. Пример прямолинейной корреляционной зависимости

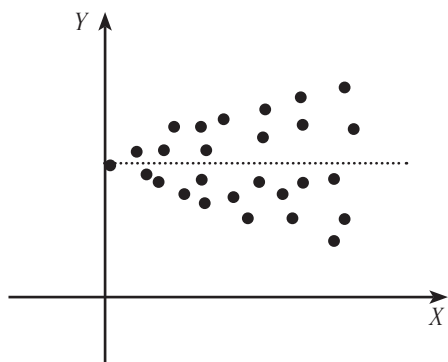


Рис. 1.68. Скедостическая зависимость величин X и Y

Начальным моментом порядка k, s называют математическое ожидание произведения $X^k Y^s$, т.е. $\alpha_{k,s} = M[X^k Y^s]$.

Для дискретных случайных величин вычисление начальных моментов осуществляется по формуле $\alpha_{k,s} = M[X^k Y^s] = \sum_i \sum_j x_i^k y_j^s p_{ij}$.

Для непрерывных $\alpha_{k,s} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^k y^s \varphi(x, y) dx dy$.

Центральным моментом порядка k, s называют математическое ожидание произведения $(X - M_X)^k (Y - M_Y)^s$

$$\mu_{k,s} = M\left[(X - M_X)^k (Y - M_Y)^s\right].$$

Вычисление центральных моментов осуществляют по следующим формулам:

для дискретных величин

$$\mu_{k,s} = \sum_i \sum_j (x_i - M_X)^k (y_j - M_Y)^s p_{ij};$$

для непрерывных величин

$$\mu_{k,s} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - M_X)^k (y - M_Y)^s \varphi(x, y) dx dy.$$

В частном случае $\alpha_{1,0} = M_X$; $\alpha_{0,1} = M_Y$; $\mu_{2,0} = D_X$; $\mu_{0,2} = D_Y$.

Среди центральных моментов важнейшее значение имеет центральный смешанный момент второго порядка, который называют корреляционным и обозначают k_{XY} :

$$\mu_{1,1} = k_{XY} = M[(X - M_X)(Y - M_Y)]. \quad (1.50)$$

Используя свойства математического ожидания, можно показать, что

$$\mu_{1,1} = k_{x,y} = M_{XY} - M_X M_Y. \quad (1.51)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \mu_{1,1} &= M[(X - M_X)(Y - M_Y)] = M(XY - XM_Y - YM_X + M_X M_Y) = \\ &= M_{XY} - M_X M_Y - M_Y M_X + M_X M_Y = M_{XY} - M_X M_Y. \end{aligned}$$

Корреляционный момент вычисляют для дискретных величин по формуле

$$k_{XY} = \sum_i \sum_j (x_i - M_X)(y_j - M_Y)p_{ij}.$$

Для непрерывных случайных величин

$$k_{XY} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - M_X)(y - M_Y)\varphi(x, y)dx dy.$$

Корреляционный момент k_{XY} характеризует тесноту корреляционной связи. Для независимых случайных величин корреляционный момент равен нулю. Если в формуле

$$k_{XY} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - M_X)(y - M_Y)\varphi(x, y)dx dy$$

учесть независимость X и Y , заменив $\varphi(x, y)$ на произведение плотностей частных распределений (1.48), то получим

$$k_{XY} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M_X)\varphi_1(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} (y - M_Y)\varphi_2(y)dy.$$

Каждый из данных интегралов представляют собой первые центральные моменты, которые всегда равны нулю. Следовательно, $k_{XY}=0$, т.е. из независимости случайных величин следует их некоррелированность. Обратное же утверждение не всегда верно. При нормальном распределении случайных величин верно и обратное утверждение. Помимо того, что корреляционный момент характеризует тесноту связи, из формул для k_{XY} следует, что он характеризует и степень рассеяния случайных величин вокруг своих математических ожиданий. В чистом виде теснота корреляционной связи характеризуется коэффициентом корреляции

$$r_{XY} = \frac{k_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}. \quad (1.52)$$

При $r_{XY}=0$ прямолинейная корреляционная зависимость отсутствует. Следует учесть, что коэффициент корреляции характеризует именно прямолинейную зависимость, поэтому, когда $r_{XY}=0$ нельзя говорить об отсутствии связи вообще. Величины X и Y могут оказаться зависимыми, но это будет уже не прямолинейная корреляционная зависимость. Нелинейная корреляционная зави-

симость будет рассмотрена в последующих разделах.

При $r_{XY} \geq 0$ существует положительная (когда с увеличением X увеличивается математическое ожидание Y) прямолинейная корреляционная зависимость.

При $r_{XY} \leq 0$ существует отрицательная (когда с увеличением X уменьшается математическое ожидание Y) корреляционная зависимость.

Коэффициент корреляции лежит в пределах $-1 \leq r_{XY} \leq 1$. При этом $r_{XY} = \pm 1$, если прямолинейная корреляционная зависимость переходит в прямолинейную функциональную зависимость вида $Y = aX + b$.

Докажем это. Будем использовать формулу $\mu_{1,1} = k_{XY} = M_{XY} - M_X M_Y$.

Пусть $Y = aX + b$. Определим M_Y , D_Y , M_{XY} и $M_X M_Y$, используя свойства математического ожидания и дисперсии:

$$M_Y = a M_X + b; \quad D_Y = a^2 D_X;$$

$$M_{XY} = M_{X(aX+b)} = a M_{X^2} + b M_X;$$

$$M_X M_Y = a M_X^2 + b M_X;$$

$$k_{XY} = a M_{X^2} + b M_X - a M_X^2 - b M_X = a M_{X^2} - a M_X^2 = a(d_2 - \alpha_1^2) = a\sigma_X^2;$$

$$r_{XY} = \frac{k_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{a\sigma_X^2}{\sigma_X |a| \sigma_X} = \pm 1.$$

Знак перед единицей зависит от знака коэффициента a .

Пример. Продолжим рассмотрение предыдущего примера. Задана плотность совместного распределения двух случайных величин на эллипсе

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{6\pi} & \text{при } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} < 1; \\ 0 & \text{при } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \geq 1. \end{cases}$$

Требуется определить корреляционный момент.

Решение. Вычислим k_{XY} . Учитывая симметричность распределения относительно математических ожиданий, можно сделать вывод, что M_X и M_Y равны нулю

$$k_{XY} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy \varphi(x, y) dx dy.$$

Учитывая, что $\varphi(x, y)$ есть постоянная величина данный интеграл можно преобразовать к виду

$$k_{XY} = \varphi(x, y) \int_{-\infty}^{+\infty} x dx \int_{-\infty}^{+\infty} y dy = 0.$$

Интегралы здесь равны нулю, так как подинтегральная функция в них нечетна, пределы интегрирования симметричны относительно начала координат. Следовательно, $k_{XY}=0$, т.е. X и Y некоррелированы, однако зависимы, как было показано раньше.

На практике часто встречаются двумерные случайные величины с нормальным распределением, когда из некоррелированности следует независимость случайных величин. Плотность двумерного нормального распределения имеет вид

$$\varphi(x, y) = a \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-r^2)} \left[\frac{(x-M_X)^2}{\sigma_X^2} + \frac{(y-M_Y)^2}{\sigma_Y^2} - 2r \frac{(x-M_X)(y-M_Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \right] \right\},$$

где r — коэффициент корреляции; $a = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-r^2}}$.

Покажем, что при нормальном законе распределения из некоррелированности следует независимость X и Y .

Пусть $k_{XY}=r_{XY}=0$, тогда

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} \exp \left\{ -0,5 \left[\frac{(x-M_X)^2}{\sigma_X^2} + \frac{(y-M_Y)^2}{\sigma_Y^2} \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} e^{-\frac{(x-M_X)^2}{2\sigma_X^2}} \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} e^{-\frac{(y-M_Y)^2}{2\sigma_Y^2}}. \end{aligned}$$

Это и означает, независимость случайных величин X и Y .

На рис. 1.67 показана прямолинейная корреляционная зависимость, при которой с увеличением X , увеличивается математическое ожидание Y . Графически зависимость определяется некоторой осредненной прямой, показанной на рисунке пунктиром. Эта прямая называется прямой регрессии, а ее уравнение — уравнением регрессии. Общий вид этого уравнения:

$$Y = M_Y + \rho_{Y/X}(X - M_X),$$

где $\rho_{Y/X} = r_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$ — коэффициент регрессии Y на X .

Иногда рассматривают обратное уравнение регрессии

$$X = M_X + \rho_{X/Y}(Y - M_Y),$$

где $\rho_{X/Y} = r_{XY} \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}$ — коэффициент регрессии X на Y .

Обратное уравнение не всегда имеет смысл, например, можно рассматривать зависимость ошибок измерений от величины измеряемого расстояния, но говорить о том, что с увеличением ошибок измерений можно ожидать увеличения длины измеряемого расстояния, нельзя.

Условное математическое ожидание

Условным математическим ожиданием $M(Y|X \subset B)$ называют математическое ожидание случайной величины Y , если известно, что случайная величина X принимает значения из области B . В частном случае область B может быть сужена до конкретного значения x_i . Тогда условное математическое ожидание записывают в виде $M(Y|X=x_i)$

Математическое ожидание дискретных случайных величин вычисляют по формуле

$$M(Y | X \subset B) = \sum_{j=1}^n y_j P(y_j | X \subset B). \quad (1.53)$$

Для непрерывных —

$$M(Y | X \subset B) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \varphi(y | X \subset B) dy. \quad (1.54)$$

Учитывая, что величина X является случайной, условное математическое ожидание тоже случайно, поскольку его значения зависят от того, какое значение принимает величина X . В [13] показано, что

$$M(M(Y|X=x_i, i=1, 2, \dots, n))=M_Y.$$

Для условного математического ожидания справедливы свойства математического ожидания одномерной случайной величины:

математическое ожидание постоянной равно самой постоянной $M(c|X=x_i)=c$;

математическое ожидание произведения постоянной на условное математическое равно произведению постоянной на математическое ожидание $M(cM(Y|X=x_i))=cM(M(Y|X=x_i))=cM_Y$;

условное математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме условных ожиданий

$$M((aZ + bY) | X = x_i) = aM(Z | X = x_i) + bM(Y | X = x_i),$$

здесь a , b и c — постоянные.

Корреляционная матрица

В начале этого параграфа введено понятие корреляционного момента. Его обобщением на многомерный случай является корреляционная матрица.

По определению $\mathbf{K}_X = M[(X - M_X)(X - M_X)^T]$, так как по определению математическое ожидание случайного вектора \mathbf{X} — это вектор, составленный из математических ожиданий элементов X , то, например, при $n = 3$ корреляционная матрица имеет следующий вид:

$$\mathbf{K}_X = M \left(\begin{pmatrix} X_1 - M_{X_1} \\ X_2 - M_{X_2} \\ X_3 - M_{X_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 - M_{X_1} & X_2 - M_{X_2} & X_3 - M_{X_3} \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} M(X_1 - M_{X_1})^2 & M((X_1 - M_{X_1})(X_2 - M_{X_2})) & M((X_1 - M_{X_1})(X_3 - M_{X_3})) \\ M((X_1 - M_{X_1})(X_2 - M_{X_2})) & M(X_2 - M_{X_2})^2 & M((X_2 - M_{X_2})(X_3 - M_{X_3})) \\ M((X_1 - M_{X_1})(X_3 - M_{X_3})) & M((X_2 - M_{X_2})(X_3 - M_{X_3})) & M(X_3 - M_{X_3})^2 \end{pmatrix}$$

или

$$\mathbf{K}_X = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & \sigma_2^2 & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & \sigma_3^2 \end{pmatrix},$$

где, как и ранее, использованы сокращенные обозначения: $\sigma_i^2 = \sigma_{X_i}^2$ — дисперсия X_i ; $k_{ij} = k_{X_i X_j}$ — корреляционный момент между X_i и X_j . В общем случае матрицу \mathbf{K}_X можно представить в виде:

$$\mathbf{K}_X = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & \sigma_2^2 & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, диагональными элементами k_{ij} корреляционной матрицы являются дисперсии случайных величин X_i , т.е. $k_{ij} = \sigma_i^2$ при $i=j$. Недиагональные элементы k_{ij} — есть корреляционные моменты между случайными величинами X_i и X_j . Так как $k_{ij} = k_{ji}$, то корреляционная матрица всегда симметрична относительно главной диагонали, т.е. $\mathbf{K}_X^T = \mathbf{K}_X$.

Для независимых случайных величин матрица \mathbf{K}_X будет диагональной:

$$\mathbf{K}_X = \mathbf{D}_X = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}.$$

Ее называют дисперсионной матрицей и, часто обозначают \mathbf{D}_X .

Если при этом все дисперсии равны между собой, т.е. $\sigma_i^2 = \sigma^2$, то $\mathbf{K}_X = \sigma^2 \mathbf{E}$, где \mathbf{E} — единичная матрица.

Из матрицы \mathbf{K}_X нетрудно составить так называемую нормированную корреляционную матрицу:

$$\bar{\mathbf{K}}_X = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{12} & 1 & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{1n} & r_{2n} & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

где r_{ij} — коэффициент корреляции между X_i и X_j , вычисляемый по формуле $r_{ij} = \frac{k_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$.

В этом случае матрицу \mathbf{K}_X часто называют ковариационной, а $\bar{\mathbf{K}}_X$ — корреляционной.

Важное значение в теории обработки геодезических измерений имеет так называемый нормальный случайный вектор, плотность распределения которого (плотность совместного распределения X_1, X_2, \dots, X_n) имеет вид

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left((2\pi)^{-\frac{n}{2}} \right) \left[\det \mathbf{K}_X \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2} (X - M_X)^T \mathbf{K}^{-1} (X - M_X) \right],$$

здесь $\det \mathbf{K}_X$ — определитель корреляционной матрицы \mathbf{K}_X , этот определитель называют обобщенной дисперсией случайного вектора X .

Обобщенная формула оценки точности

Объект $f(X)$, являющийся системой нескольких функций

$$Y = f(X) = \begin{pmatrix} f_1(X_1, X_2, \dots, X_n) \\ f_2(X_1, X_2, \dots, X_n) \\ \dots\dots\dots \\ f_m(X_1, X_2, \dots, X_n) \end{pmatrix}, \quad (1.55)$$

называют вектор-функцией. Математическое ожидание вектор-функции определяется следующим образом:

$$M_Y = M_{f(M_X)} = f(M_X) = \begin{pmatrix} f_1(M_{X_1}, M_{X_2}, \dots, M_{X_n}) \\ f_2(M_{X_1}, M_{X_2}, \dots, M_{X_n}) \\ \dots\dots\dots \\ f_m(M_{X_1}, M_{X_2}, \dots, M_{X_n}) \end{pmatrix}. \quad (1.56)$$

Линеаризуем функцию (1.55) в векторной форме, разложив ее в ряд Тэйлора, ограничиваясь первыми степенями разложения:

$$Y = f(M_X) + \mathbf{A}(X - M_X). \quad (1.57)$$

Здесь \mathbf{A} — матрица частных производных,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \frac{\partial f_1}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial X_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial X_1} & \frac{\partial f_2}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial X_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial X_1} & \frac{\partial f_m}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial X_n} \end{pmatrix}; \quad X - M_X = \begin{pmatrix} X_1 - M_{X_1} \\ X_2 - M_{X_2} \\ \dots\dots\dots \\ X_n - M_{X_n} \end{pmatrix}.$$

На практике M_{X_i} , как правило, неизвестны, поэтому пользуются их приближенными значениями X^0 , т.е.

$$Y = f(X^0) + \mathbf{A}(X - X^0) = \mathbf{A}X + f(X^0) - \mathbf{A}X^0 = \mathbf{A}X + Z, \quad (1.58)$$

где $Z = f(X^0) - \mathbf{A}X^0$.

В формуле (1.58) случайными являются векторы Y и X .

Составим теперь корреляционную матрицу для вектор-функции Y : $\mathbf{K}_Y = M[(Y - M_Y)(Y - M(Y))^T]$, где

$$\begin{aligned} M(Y) &= M[f(X^0) + \mathbf{A}(X - X^0)] = f(X^0) + \mathbf{A}M(X - X^0) = \\ &= f(X^0) + \mathbf{A}M(X) - \mathbf{A}X^0 = \mathbf{A}M(X) + Z. \end{aligned}$$

Тогда \mathbf{K}_Y можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_Y &= M[(\mathbf{A}X + Z - \mathbf{A}M(X) - Z)(\mathbf{A}X + Z - \mathbf{A}M(X) - Z)^T] = \\ &= M[(\mathbf{A}X - \mathbf{A}M(X))(\mathbf{A}X - \mathbf{A}M(X))^T] = \\ &= \mathbf{A}M[(X - M(X))(X - M(X))^T]\mathbf{A}^T = \mathbf{A}\mathbf{K}_X\mathbf{A}^T. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили формулу для вычисления корреляционной матрицы вектор-функции Y от случайных аргументов вектора X :

$$\mathbf{K}_Y = \mathbf{A}\mathbf{K}_X\mathbf{A}^T. \quad (1.59)$$

Формулу (1.59) называют еще обобщенной формулой оценки точности.

Для одномерного случая, когда вектор-функция (1.55) состоит только из одной функции, формула (1.59) преобразуется в выражение

$$\mathbf{D}_Y = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \right)_0^2 D_{X_i} + 2 \sum_{i < j} \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \right)_0 \left(\frac{\partial f}{\partial X_j} \right)_0 k_{ij}, \quad (1.60)$$

где D_{X_i} — дисперсия случайной величины X_i ; k_{ij} — корреляционный момент величин X_i, X_j .

Если случайные величины X_i и X_j некоррелированы, то

$$\mathbf{D}_Y = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \right)_0^2 D_{X_i}. \quad (1.61)$$

Формула (1.59) справедлива и в том случае, когда известна оценочная корреляционная матрица \mathbf{K}_X^* вектора X . В этом случае вычисляют \mathbf{K}_Y^* . Формулы же (1.60) и (1.61) справедливы и в случае

замены дисперсии на оценочные значения — квадраты средних квадратических ошибок:

$$m_Y^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \right)_0^2 m_{X_i}^2 + 2 \sum_{i < j} \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \right)_0 \left(\frac{\partial f}{\partial X_j} \right)_0 r_{ij} m_{X_i} m_{X_j}; \quad (1.62)$$

$$m_Y^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \right)_0^2 m_{X_i}^2. \quad (1.63)$$

Пример. Даны функции $Y_1=X_1+X_2$; $Y_2=X_1+X_3$, где X_1, X_2, X_3 — образуют вектор X независимых случайных величин, имеющий корреляционную матрицу

$$\mathbf{K}_X = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Требуется вычислить корреляционную матрицу вектора $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$.

Решение. Составим матрицу частных производных от вектор-функции Y по аргументам X_1, X_2, X_3 : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Согласно формуле (1.59) найдем

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 13 \end{pmatrix}.$$

Отсюда, используя недиагональный элемент, представляющий собой корреляционный момент $k_{12}=4$, найдем коэффициент корреляции $r_{Y_1 Y_2} = 4 / (\sqrt{9}\sqrt{13}) = 0,37$.

Пример. Используя данные предыдущего примера, найти дисперсию функции $Z=Y_1-Y_2$.

Решение. 1-й способ. Применяя формулу (1.59), и учитывая, что матрица производных в этом случае равна $\mathbf{A}=(1 \ -1)$, получим

$$\mathbf{K}_Z = \sigma_Z^2 = (1 \ -1) \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (5 \ -9) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 14.$$

2-й способ. Вычисления выполняем по формуле (1.60):

$$\sigma_Z^2 = 1^2 \sigma_{Y_1}^2 + (-1)^2 \sigma_{Y_2}^2 + (-1) K_{Y_1 Y_2} = 9 + 13 - 8 = 14.$$

3-й способ. Выразим функцию Z через независимые случайные величины X_i . Будем иметь $Z=Y_1-Y_2=X_1+X_2-(X_1+X_3)=X_2-X_3$. Применяя формулу (1.61), получим

$$\sigma_Z^2 = \sigma_{X_2}^2 + \sigma_{X_3}^2 = 5 + 9 = 14.$$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение случайного вектора.
2. Каким образом задается закон распределения многомерной случайной величины?
3. Дайте определение и геометрическую интерпретацию функции многомерного распределения.
4. Дайте определение и геометрическую интерпретацию плотности многомерного распределения.
5. Что понимается под частным законом распределения?
6. Как задается частный закон распределения?
7. Дайте определение условной плотности распределения.
8. В чем состоит условие независимости случайных величин X и Y ?
9. Дайте определение начальных моментов двумерной случайной величины.
10. Дайте определение центральных моментов двумерной случайной величины.
11. Как вычисляются начальные и центральные моменты дискретной случайной величины?
12. Дайте определение корреляционного момента.
13. Как вычисляется корреляционный момент?
14. Дайте определение коэффициента корреляции.
15. Каковы свойства коэффициента корреляции?
16. Какие случайные величины называются коррелированными, какие нет?
17. Какую зависимость называют вероятностной?
18. Дайте определение корреляционной и прямолинейной корреляционной зависимости.
19. Какой вид имеет уравнение регрессии и что оно характеризует?
20. Дайте определение условного математического ожидания.
21. Является ли условное математическое ожидание случайной величиной?
22. Назовите свойства условного математического ожидания.
23. Дайте определения корреляционной, дисперсионной и нормированной корреляционной матриц.
24. Как определить корреляционную матрицу вектора – функции случайных аргументов при известной корреляционной матрице вектора аргументов?

Задачи с решениями

Задача 1. Заданы математические ожидания и средние квадратические отклонения трех независимых случайных величин Z_1, Z_2, Z_3 . Пусть $\sigma_{Z_1} = \sigma_{Z_2} = \sigma_{Z_3} = \sigma_Z$. Найти коэффициент корреляции между функциями $X = Z_2 - Z_1$ и $Y = Z_3 - Z_2$.

Решение. По формулам (1.48) определим

$$XY = (Z_2 - Z_1)(Z_3 - Z_2) = Z_2Z_3 - Z_2^2 - Z_1Z_3 + Z_1Z_2;$$

$$\begin{aligned} M_{XY} &= M(Z_2Z_3) - M(Z_2^2) - M(Z_1Z_3) + M(Z_1Z_2) = \\ &= M(Z_2)M(Z_3) - M(Z_2^2) - M(Z_1)M(Z_3) + M(Z_1)M(Z_2); \end{aligned}$$

$$M_X = M(Z_2) - M(Z_1); \quad M_Y = M(Z_3) - M(Z_2);$$

$$M_X M_Y = M(Z_2)M(Z_3) - M(Z_2)M(Z_2) - M(Z_1)M(Z_3) + M(Z_1)M(Z_2).$$

Откуда, учитывая (1.51) $k_{XY} = M_{XY} - M_X M_Y = M(Z_2)M(Z_2) - M(Z_2^2) = -\sigma_Z^2$.

Следовательно, $r_{XY} = -\frac{\sigma_Z^2}{\sigma_X \sigma_Y}$. На основании свойств дисперсии для

независимых величин имеем: $\sigma_X^2 = \sigma_{Z_1}^2 + \sigma_{Z_2}^2 = 2\sigma_Z^2$; $\sigma_Y^2 = \sigma_{Z_2}^2 + \sigma_{Z_3}^2 = 2\sigma_Z^2$,

поэтому $r_{XY} = -\frac{\sigma_Z^2}{\sigma_Z \sqrt{2} \sigma_Z \sqrt{2}} = -0,5$.

Задача 2. Задана плотность распределения ошибок округления $\varphi(\Delta) = 1$ при $-0,5 \leq \Delta \leq 0,5$. Зададим случайную величину Y , являющуюся индикатором положительных ошибок:

$Y = \chi(\Delta > 0)$	0	1
P	0,5	0,5

Определить условное математическое ожидание $M(\Delta | Y = 1)$, т.е. математическое ожидание ошибок округления для случая, когда ошибки округления только положительные. В этом случае плотность задается только на положительной полуоси в пределах от 0 до 0,5. Плотность условного распределения здесь имеет вид равномерного распределения (рис. 1.69). Площадь под кривой плотности, очевидно, равна единице.

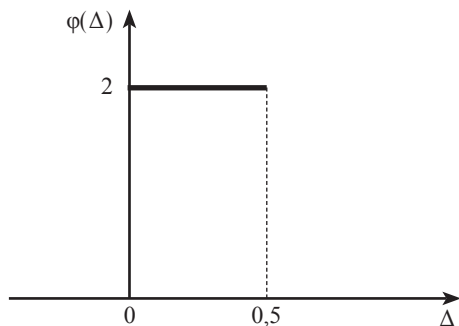


Рис. 1.69. График условной плотности равномерного распределения

Отсюда, $\varphi(\Delta | Y = 1) = \frac{\varphi(\Delta, Y)}{0,5 - 0} = \frac{1}{0,5} = 2$. Определим условное математическое ожидание

$$M(\Delta | Y = 1) = \int_0^{0,5} 2\Delta d\Delta = \frac{2\Delta^2}{2} \Big|_0^{0,5} = 0,25.$$

Поскольку Y принимает два значения 0 и 1, то случайная величина — условное математическое ожидание также принимает два значения. Следовательно, условное математическое ожидание дискретная случайная величина, которая может принимать два значения 0,25 и по симметрии $-0,25$:

$M(\Delta Y = y_i)$	$-0,25$	$0,25$
P	$0,5$	$0,5$

Используя данный ряд распределения получим $M_{\Delta} = -0,25 \cdot 0,5 + 0,25 \cdot 0,5 = 0$.

Задача 3. Задана корреляционная матрица случайного вектора X

$$K_X = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}. \text{ Определить средние квадратические отклонения } \sigma_{x_1}, \sigma_{x_2}$$

и коэффициент корреляции между элементами вектора X .

Решение. По главной диагонали корреляционной матрицы располагаются дисперсии случайных составляющих вектора X . Это означает, что $\sigma_{x_1} = \sqrt{4} = 2$. Аналогично, $\sigma_{x_2} = \sqrt{9} = 3$. Недиagonальные элементы корреляционной матрицы представляют собой корреляционные моменты. Следовательно, $k_{XY} = 0$ и $r_{XY} = 0$.

Задача 4. Задана корреляционная матрица случайного вектора X

$$K_X = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}. \text{ Определить средние квадратические отклонения } \sigma_{x_1}, \sigma_{x_2}$$

и коэффициент корреляции между элементами вектора X .

Решение. По главной диагонали корреляционной матрицы располагаются дисперсии случайных составляющих вектора X . Это означает, что $\sigma_{x_1} = \sqrt{4} = 2$. Аналогично, $\sigma_{x_2} = \sqrt{9} = 3$. Недиagonальные элементы корреляционной матрицы представляют собой корреляционные моменты.

$$\text{Следовательно, } k_{x_1x_2} = -2 \text{ и } r_{x_1x_2} = \frac{k_{x_1x_2}}{\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}} = \frac{-2}{2 \cdot 3} = -\frac{1}{3}.$$

Задача 5. В условиях предыдущей задачи построить уравнение регрессии X_2/X_1 , если $M_{X_1} = 5$, а $M_{X_2} = 10$.

Решение. Уравнение регрессии имеет вид

$$X_2 = M_{X_2} + \rho_{X_2/X_1} (X_1 - M_{X_1}),$$

где коэффициент регрессии

$$\rho_{X_2/X_1} = r_{X_1 X_2} \frac{\sigma_{X_2}}{\sigma_{X_1}} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = -0,5.$$

Отсюда, $X_2 = -0,5X_1 + 12,5$ — окончательный вид уравнения регрессии.

ГЛАВА 2

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ. ТЕОРИЯ ОШИБОК ИЗМЕРЕНИЙ

Математическая статистика — это раздел математики, посвященный математическим методам систематизации, обработки и использования статистических данных для научных и практических целей. Математическим аппаратом статистики является теория вероятностей. Математическая статистика применяется в самых разных областях. В данном учебнике рассматривается применение статистики в геодезии, кадастре и смежных областях. Раздел математической статистики, в котором рассматриваются методы обработки геодезических измерений и в качестве случайных величин рассматриваются измеряемые величины, ошибки измерений, функции от них называется теорией ошибок измерений. Поэтому здесь рассмотрены разделы математической статистики, которые необходимы для исследования ошибок измерений, обработки результатов измерений, и на основе этого изложена теория ошибок измерений.

§2.1. Основные понятия математической статистики

К основным понятиям математической статистики относится понятие генеральной совокупности. Это множество всех возможных значений случайной величины. Любое его конечное подмножество x_1, x_2, \dots, x_n , полученное в результате наблюдений, называется выборкой из генеральной совокупности, где n — объем выборки. Понятно, что n — количество значений, составляющих выборку (объем выборки), всегда ограничено. Выборка называется повторной, если ее элементы независимы и одинаково распределены (например, номер вынутого из урны шара, если шар воз-

вращен обратно), и бесповторной, если ее элементы зависимы (например, шар обратно в урну не возвращают).

Представительной (репрезентативной) называют выборку, если ее элементы выбраны случайно на всем диапазоне существования случайной величины X . Для изучения того или иного явления выборка обязательно должна быть представительной.

Любая функция от наблюдаемых значений $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется статистикой, например, среднее арифметическое

$$\bar{x} = \frac{[x]}{n}, \text{ средняя квадратическая ошибка } m = \sqrt{\frac{[(x - \bar{x})^2]}{n - 1}}.$$

Результаты измерений и их функции являются случайными величинами, поведение которых описывают законы распределений. Основные задачи математической статистики связаны с тем, что объем выборки всегда ограничен. Естественно, что выборка не дает полного представления о распределении случайной величины. Поэтому возникает необходимость по выборке выявить устойчивые признаки, присущие поведению исследуемой случайной величины, возникающие из-за ошибок в наблюдениях и ограниченности объема выборки.

Вид и количественные характеристики случайных величин часто точно не известны, поэтому на практике стремятся подобрать математические модели поведения случайных величин, наиболее точно и полно отражающие их свойства. Это относится и к законам распределения случайных величин, и к их количественным характеристикам.

В связи с этим возникает ряд задач. Иногда бывает достаточно по экспериментальным данным (выборке) определить некоторые приближенные значения (оценки) параметров распределения случайной величины и вычислить характеристики точности этих оценок. Такие задачи математической статистики называются оценением параметров случайных величин.

В других случаях требуется более полное знание поведения случайной величины. В этом случае по выборке подбирают математическую модель поведения случайной величины, которая наиболее полно характеризует ее распределение. В связи с этим возникают задачи подбора математической модели распределения

и проверки согласованности используемой модели и результатов выборки, т.е. проверки соответствия распределения измеряемых величин распределению, представляющему собой математическую модель.

С этой задачей тесно связана проблема выравнивания экспериментальных данных, которая заключается в подборке теоретической кривой плотности распределения $\varphi_X(x)$, наилучшим образом описывающей данное статистическое распределение.

Важное место в математической статистике занимают проблемы проверки различных гипотез. Например, гипотезы о равенстве математических ожиданий (средних) в различных выборках или гипотезы о равенстве дисперсий. Последнюю задачу решают с применением дисперсионного анализа. Задача прогноза поведения случайной величины решается методами корреляционного и регрессионного анализа.

Обычно выборку оформляют в виде статистического ряда, являющегося аналогом ряда распределения.

Частота	Границы интервалов			
	$x_1 \div x_2$	$x_2 \div x_3$...	$x_N \div x_{N+1}$
Абсолютная m_i	k_1	k_2	...	k_N
Относительная $Q_i = m_i/n$	Q_1	Q_2	...	Q_N

В этом случае, участок на который попали все значения выборки, разделяют на N интервалов. При этом подсчитывают количество значений k_i (абсолютную частоту), приходящихся на каждый i -й интервал, для которого вычисляют относительную частоту (частость) $Q_i = k_i/n$.

Число интервалов N выбирают порядка 10–20, а длины, как правило, одинаковыми и такими, чтобы k_i было не менее пяти. Число элементов выборки должно быть не менее 50. Чаще всего на практике в качестве модели, т.е. теоретического распределения выбирают нормальное (например, когда выполняются все условия центральной предельной теоремы).

Эмпирической функцией распределения называют относительную частоту события, заключающегося в том, что выборочные значения не превосходят некоторого фиксированного x , т.е.

$$F^*(x) = Q(X < x) = \frac{k}{n}, \quad (2.1)$$

где k — количество выборочных значений x_i , меньших величины x .

Поскольку распределение выборки дискретно, то эмпирической функции плотности распределения не существует, однако, графическим аналогом кривой плотности распределения является так называемая **гистограмма**, которую строят на основе статистического ряда распределения (рис. 2.1), когда выборочные значения сгруппированы по интервалам (x_1, x_2) ; (x_2, x_3) и т.д. На

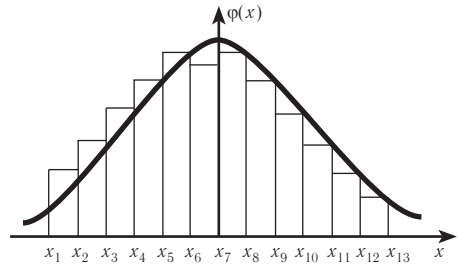


Рис. 2.1. Гистограмма и кривая выравнивания

каждом таком интервале строят прямоугольник с высотой

$$h_i = \frac{k_i}{n(x_{i+1} - x_i)},$$

где $(x_{i+1} - x_i)$ — длина i -го интервала.

Здесь площадь каждого прямоугольника равна относительной частоте попадания в данный интервал Q_i . При этом $Q_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} P_i$, где P_i — вероятности попадания случайной величины в i -й интервал, которые связаны с плотностью теоретического распределения

$$\varphi(x) \text{ соотношением } P_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi(x) dx.$$

Геометрически P_i соответствует площади между кривой плотности $\varphi(x)$ и осью абсцисс в интервале от x_i до x_{i+1} .

Эмпирическим аналогом плотности теоретического распределения является кривая плотности $\varphi(x)$, которая наилучшим образом аппроксимирует гистограмму в целом. Данная кривая называется **кривой выравнивания** (см. рис. 2.1).

§2.2. Основные понятия и задачи теории ошибок

Случайные и систематические ошибки

На практике не удастся полностью избежать ошибок измерений независимо от степени совершенства приборов и применяемой методики. Ошибки измерений представляют собой отклонения измеренных величин от их истинных значений. Различают грубые, систематические и случайные ошибки.

Теория ошибок наблюдений занимается исследованием поведения случайных и систематических ошибок при массовых измерениях с помощью методов теории вероятностей и математической статистики. Необходимо отметить, что многие положения, входящие ныне в теорию вероятностей и математическую статистику, впервые были разработаны в рамках теории ошибок и наблюдений.

Грубые ошибки являются следствием каких-либо просчетов наблюдателя, неисправностей приборов, их смещений в момент измерений, неверной методики, резкого ухудшения внешних условий и других причин. Изучением самих грубых ошибок наблюдений теория ошибок не занимается. Но с этим вопросом тесно связана одна из задач теории ошибок — отбраковка измерений, содержащих грубые ошибки.

Случайные и систематические ошибки измерений состоят из элементарных ошибок, к которым относятся: приборные, вызываемые неточностью при изготовлении и сборке деталей приборов, личные ошибки, ошибки внешних условий. Последние возникают вследствие рефракции, действия ветра, конвекционных воздушных потоков и др. Личные ошибки присущи конкретному наблюдателю и зависят, например, от остроты его зрения и др. Случайные ошибки имеют математическое ожидание, равное нулю, а систематические — отличное от нуля.

По характеру действия различают постоянные систематические ошибки, которые сохраняют знак и величину, односторонне действующие, меняющиеся по величине, но сохраняющие знак, функциональные, изменяющиеся по какому-либо закону. Систематические ошибки обусловлены также условиями измерений. Величина систематических ошибок в значительной мере зависит от применяемой методики. Для уменьшения

влияния систематических ошибок на точность измерений необходимо исследовать природу их возникновения. Так, если они вызваны личными ошибками, то при проведении наблюдений следует чередовать наблюдателей, если эти ошибки изменяются в зависимости от типа используемого прибора, то измерения следует производить сериями, каждая из которых выполняется различными приборами и т.п. Основная цель выбора методики измерений — достижение равенства нулю математического ожидания систематических ошибок, так как тогда систематические ошибки можно рассматривать как случайные.

С л у ч а й н ы е ошибки по величине чаще всего больше систематических, однако, за счет взаимных компенсаций их влияние на окончательные результаты может быть слабее. Особенно это заметно при высокоточных измерениях. Очень важно при измерениях по возможности уменьшать влияние систематических ошибок для получения окончательных результатов с заданной точностью. Она выражается определенными числовыми критериями, устанавливаемыми на основе законов теории вероятностей и характеризующими отклонения полученных результатов измерений и их функций от истинных значений данных величин.

Основные задачи теории ошибок измерений — определение указанных критериев (разработка и получение их оценки); изучение законов возникновения и распределения ошибок измерений и вычислений; установление допусков (критериев, указывающих на наличие грубых ошибок); вычисление наиболее точных по вероятности значений измеряемых величин и их функций; предвычисление ожидаемой точности и оценка точности полученных результатов.

В вопросах математической обработки измерений важны такие понятия, как необходимые и избыточные измеренные величины. Минимальное число измеренных величин, с помощью которых можно определить все недостающие, называется числом необходимых измерений. Сами измерения, входящие в это число, называются *н е о б х о д и м ы м и*, все остальные — *и з б ы т о ч н ы м и*. Они играют очень важную роль и в геодезических измерениях обязательны, так как позволяют обнаружить грубые ошибки в измерениях и вычислениях, произвести оценку точности всех измеренных и вычисленных по ним величин, повысить точность их определения.

Случайную ошибку измерений определяют по формуле: $\theta_i = x_i - M_X$, где x_i — i -й результат измерения величины X , математическое ожидание которой M_X .

Важнейшим понятием теории ошибок измерений является истинное значение измеряемой величины X и величина

$$\Delta_i = x_i - X, \quad (2.2)$$

которая называется истинной ошибкой измерения. Ее можно выразить через случайную θ_i и систематическую C ошибки измерений, т.е. $\Delta_i = x_i - M_X + M_X - X = \theta_i + C$, где $C = M_X - X$.

В классической теории ошибок полагают, что $M_X = X$, т.е. систематические ошибки в измерениях отсутствуют или скомпенсированы благодаря специальной методике измерений. В этом случае $\Delta_i = \theta_i$ и $M_{\Delta_i} = M_{\theta_i} - M_X = 0$.

Поэтому в дальнейшем, за исключением специально оговоренных ситуаций, под истинной ошибкой Δ будем понимать ее случайную составляющую θ .

Распределение случайных ошибок

Случайные ошибки измерений, как было отмечено выше, состоят из целого ряда элементарных ошибок с примерно одинаковыми дисперсиями. Поэтому их можно рассматривать как суммарную случайную величину, для которой справедлива теорема Ляпунова. Следовательно, случайные ошибки измерений подчиняются нормальному распределению, это подтверждается многочисленными экспериментальными данными.

Учитывая, что $M_{\Delta} = 0$, плотность распределения ошибок измерений имеет вид

$$\varphi(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{\frac{-\Delta^2}{2\sigma^2}}, \quad (2.3)$$

где σ — среднее квадратическое отклонение (СКО) измерений.

С понятием СКО тесно связано понятие средней квадратической ошибки измерений (ранее, в классическом определении, под средней квадратической ошибкой m понимался второй начальный момент истинной ошибки $\alpha_2 = M_{\Delta^2}$, но поскольку $\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$, а $\alpha_1 = M_{\Delta} = 0$, то понятия m и σ совпадали). Однако в настоящее

время под средней квадратической ошибкой m понимают оценку среднего квадратического отклонения, полученную по результатам измерений, которая определяется по формуле Гаусса

$$m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}} \quad (2.4)$$

или по формуле Бесселя

$$m^2 = \frac{[v^2]}{n-1}. \quad (2.5)$$

Если среднее квадратическое отклонение заменить на среднюю квадратическую ошибку, то формула (2.3) примет вид:

$$\varphi(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}m} e^{-\frac{\Delta^2}{2m^2}} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2}. \quad (2.6)$$

Данное уравнение называется уравнением кривой Гаусса (кривая ошибок измерений) (рис. 2.2). Величину h здесь называют мерой точности, $h = \frac{1}{\sqrt{2}m}$.

Свойства кривой Гаусса.

1. Кривая симметрична относительно оси ординат, т.к. функция $\varphi(\Delta)$ четная, т.е. $\varphi(\Delta) = \varphi(-\Delta)$.

Действительно,

$$\begin{aligned} \varphi(-\Delta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}m} e^{-\frac{(-\Delta)^2}{2m^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}m} e^{-\frac{\Delta^2}{2m^2}} = \varphi(\Delta). \end{aligned}$$

2. Кривая Гаусса лежит выше оси абсцисс, что обусловлено свойством плотности ее распределения.

3. Кривая имеет максимум в точке $\Delta=0$. Для определения

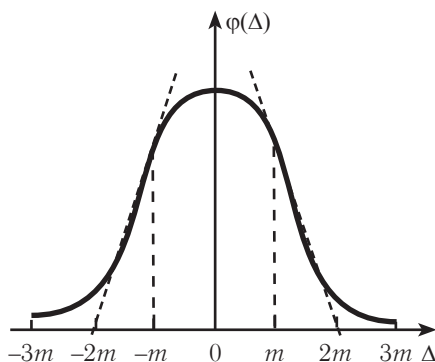


Рис. 2.2. Кривая Гаусса

максимума кривой Гаусса определим производную и приравняем ее нулю

$$\varphi'(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} m} e^{-\frac{\Delta^2}{2m^2}} \left(-\frac{2\Delta}{2m^2} \right) = 0.$$

Отсюда $\varphi'(\Delta)=0$ при $\Delta=0$. Максимальное значение плотности достигает в точке $\Delta=0$, т.е. $\varphi(\Delta=0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} m}$.

4. Кривая асимптотически приближается к оси Δ , имеет две точки перегиба — одну справа, другую слева от оси $\varphi(\Delta)$, причем абсциссы точек перегиба равны $\Delta=\pm m$.

Точка перегиба — это точка, в которой вогнутость меняется на выпуклость. Следовательно, вторая производная в ней равна нулю т.е.

$$\begin{aligned} \varphi''(\Delta) &= (\varphi'(\Delta))' = \left(-\frac{\Delta}{\sqrt{2\pi} m^3} e^{-\frac{\Delta^2}{2m^2}} \right)' = \\ &= -\frac{\Delta}{\sqrt{2\pi} m^3} e^{-\frac{\Delta^2}{2m^2}} \left(-\frac{\Delta}{m^2} \right) = -\frac{\Delta}{\sqrt{2\pi} m^3} e^{-\frac{\Delta^2}{2m^2}} \left(-1 + \frac{\Delta^2}{m^2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Поскольку первый множитель не равен нулю, то $\Delta^2=m^2$ или $\Delta=\pm m$.

5. Касательные к кривой в точках перегиба пересекают ось абсцисс в точках $\Delta=\pm 2m$.

Уравнение касательной в точке $\Delta=m$ имеет следующий вид:

$$\varphi(\Delta) = \left(\frac{d\varphi(\Delta)}{d\Delta} \right)_m (\Delta - \Delta_m) + \varphi(\Delta)_m,$$

где значение Δ в точке m есть $\Delta_m = m$.

Аналогично,

$$\varphi(\Delta)_m = \varphi(m) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi} m} e^{-0,5} \text{ и}$$

$$\left(\frac{d\varphi(\Delta)}{d\Delta} \right)_m = \varphi'(\Delta)_m = -\frac{1}{\sqrt{2\pi} m^2} e^{-0,5}.$$

Пересечение касательной с осью абсцисс можно определить в результате решения системы двух уравнений:

$$\begin{cases} \varphi(\Delta) = 0; \\ \varphi(\Delta) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi} m^2} e^{-0,5} (\Delta - m) + \frac{1}{\sqrt{2\pi} m} e^{-0,5}, \end{cases}$$

откуда $\frac{1}{\sqrt{2\pi} m} e^{-0,5} \left(\frac{m - \Delta}{m} + 1 \right) = 0$.

Приравнивая содержимое скобок к нулю, получим $m - \Delta + m = 0$ или $\Delta = 2m$.

Учитывая симметричность кривой Гаусса, касательная в точке $\Delta = -m$ пересечет ось абсцисс в точке $\Delta = -2m$.

Свойства случайных ошибок массовых наблюдений:

1) случайные ошибки Δ по абсолютной величине с заданной вероятностью P не превосходят определенного предела. Например, $|\Delta| \leq m$ с вероятностью $P = 0,67$, $|\Delta| \leq 2m$ с вероятностью $P = 0,95$. Данное утверждение следует из свойств интеграла вероятностей,

$$P(|\Delta| \leq m) = \Phi(1) = 0,67 \text{ и } P(|\Delta| \leq 2m) = \Phi(2) = 0,95;$$

2) положительные и отрицательные случайные ошибки, в силу симметрии кривой ошибок относительно оси ординат, равновозможны, т.е.

$$P\{\Delta > 0\} = P\{\Delta < 0\} = 0,5;$$

3) среднее арифметическое случайной ошибки при неограниченном возрастании числа наблюдений, в силу теоремы Чебышева (поскольку математическое ожидание случайных ошибок $M_{\Delta} = 0$), стремится к нулю, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\Delta]}{n} = 0; \tag{2.7}$$

4) малые по абсолютной величине случайные ошибки встречаются чаще, чем большие, т.к. из графика плотности нормального распределения видно, что чем ближе значения Δ к нулю, тем больше значения плотности.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение генеральной совокупности.
2. Дайте определение выборки из генеральной совокупности.
3. Дайте определение статистического ряда распределения.
4. Дайте определение статистической функции распределения.
5. Разъясните геометрический смысл гистограммы.
6. Чем занимается математическая статистика?
7. Каковы основные задачи математической статистики?
8. Назовите основные задачи теории ошибок измерений.
9. Дайте определение средней квадратической ошибки.
10. Как связаны между собой средняя квадратическая ошибка и среднее квадратическое отклонение?
11. Дайте определение истинной ошибки измерения.
12. Дайте определение вероятного отклонения.
13. Как связаны между собой истинная, случайная и систематическая ошибки измерений?
14. Какому распределению подчиняются ошибки измерений?
15. Дайте определение случайных, систематических и грубых ошибок измерений.
16. Перечислите свойства кривой ошибок измерений.
17. Каковы свойства ошибок измерений?
18. В чем суть правил 2σ и 3σ ?

Задачи с решениями

Задача 1. Задана выборка из генеральной совокупности, объем выборки $n=40$: 0,70; -0,79; 1,06; 0,61; 1,40; 0,40; 1,36; 0,89; 0,59; -0,81; 0,09; 0,43; -0,04; -0,58; -0,31; -0,71; 0,85; 0,64; -1,25; 0,28; -1,89; 1,60; -0,20; -0,45; -0,10; -1,15; -1,20; -2,10; -0,90; -0,71; -0,09; 0,35; 1,33; 0,45; 0,61; 0,49; 0,64; -0,89; 0,02; -0,08. Построить статистический ряд распределения.
Решение. Диапазон данной выборки — от -2,10 до 1,60. Разделим данный диапазон на 10 интервалов равной длины — 0,37. Подсчитаем сколько значений k_i из выборки попало в каждый интервал и значения относительной частоты $Q_i = k_i/n$.

Частота	Границы интервалов									
	-2,10÷ -1,74	-1,73÷ -1,37	-1,36÷ -1,00	-0,99÷ -0,63	-0,62÷ -0,26	-0,25÷ 0,11	0,12÷ 0,48	0,49÷ 0,85	0,86÷ 1,22	1,23÷ 1,60
k_i	2	0	3	6	4	6	5	8	2	4
$Q_i = k_i/n$	0,05	0	0,075	0,15	0,10	0,15	0,125	0,20	0,05	0,10

Задача 2. В задаче 1 определен статистический ряд распределения. Построить гистограмму для данного статистического ряда распределения.

Решение. Гистограмма является геометрическим аналогом плотности распределения, построенной по статистическому ряду распределения. На каждом интервале строится прямоугольник, площадь которого равна относительной частоте $Q_i = k_i/n$. Высота каждого прямоугольника равна его площади, т.е. Q_i , деленная на длину интервала $h_i = \frac{Q_i}{x_{i+1} - x_i}$.

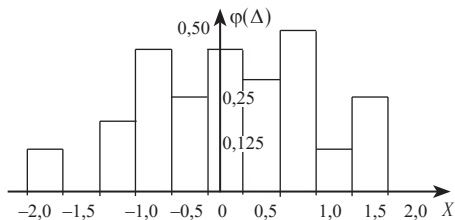


Рис. 2.3. Гистограмма

Частота	Границы интервалов									
	-2,10÷ -1,74	-1,73÷ -1,37	-1,36÷ -1,00	-0,99÷ -0,63	-0,62÷ -0,26	-0,25÷ 0,11	0,12÷ 0,48	0,49÷ 0,85	0,86÷ 1,22	1,23÷ 1,60
k_i	2	0	3	6	4	6	5	8	2	4
$Q_i = k_i/n$	0,05	0	0,075	0,15	0,10	0,15	0,125	0,20	0,05	0,10
h_i	0,14	0	0,20	0,40	0,27	0,40	0,34	0,54	0,14	0,27

Окончательно, гистограмма примет вид, представленный на рис. 2.3.

Задача 3. Задан статистический ряд распределения. (см. задачу 2). Вычислить статистическую функцию в граничных точках интервалов.

Решение.

$$\begin{aligned}
 F^*(-1,74) &= Q(X < -1,74) = 0,05; & F^*(-1,37) &= Q(X < -1,37) = 0,05; \\
 F^*(-1,00) &= Q(X < -1,00) = 0,125; & F^*(-0,63) &= Q(X < -0,63) = 0,275; \\
 F^*(-0,26) &= Q(X < -0,26) = 0,375; & F^*(0,11) &= Q(X < 0,11) = 0,525; \\
 F^*(0,48) &= Q(X < 0,48) = 0,65; & F^*(0,85) &= Q(X < 0,85) = 0,85; \\
 F^*(1,22) &= Q(X < 1,22) = 0,90; & F^*(1,61) &= Q(X < 1,61) = 1,00.
 \end{aligned}$$

Задача 4. Задана выборка из генеральной совокупности. Объем выборки $n=40$:

0,70; -0,79; 1,06; 0,61; 1,40; 0,40; 1,36; 0,89; 0,59; -0,81; 0,09; 0,43; -0,04; -0,58; -0,31; -0,71; 0,85; 0,64; -1,25; 0,28; -1,89; 1,60; -0,20; -0,45; -0,10; -1,15; -1,20; -2,10; -0,90; -0,71; -0,09; 0,35; 1,33; 0,45; 0,61; 0,49; 0,64; -0,89; 0,02; -0,08.

Определить среднее значение из данной выборки и среднюю квадратическую ошибку.

Решение. Среднее арифметическое значение из элементов выборки $\bar{x} = \frac{[x]}{n} = 0,54$. Среднюю квадратическую ошибку определим по формуле

$$\text{Бесселя } m = \sqrt{\frac{[(x - \bar{x})^2]}{n - 1}} = 0,89.$$

§2.3. Оценка параметров распределения. Случай равноточных измерений

Законы распределения случайных величин и их числовых характеристик на практике устанавливают на основе опытов, число которых всегда ограничено. Поэтому необходимо выявить устойчивые признаки, присущие исследуемому явлению, и случайные, проявляющиеся только в конкретной серии наблюдений: из-за ограниченного объема экспериментальных данных.

Часто по экспериментальным данным требуется определить некоторые приближенные значения параметров распределения. Под параметрами понимают количественные характеристики законов распределения, такие как математическое ожидание, дисперсия, а также функции от моментов.

Обычно искомые параметры, характеризующие распределение случайной величины, такие как $M(X)$, $D(X)$, скошенность Sk и другие, обозначают через a_i , а их оценки — через a_i^* . Оценки — это некоторые приближенные значения, которые определяются с помощью выборки. Всякая оценка a_i^* для неизвестных параметров распределения a_i является функцией от элементов выборки, (в геодезии от измеренных величин x_i). Таким образом, $a_i^* = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Очевидно, можно подобрать множество оценок для одного и того же параметра. Например, оценку для математического ожидания, характеризующего центр распределения можно определить, как среднее арифметическое $a_1^* = \frac{[x]}{n}$.

Или, расположив элементы выборки в порядке возрастания их значений, взять в качестве оценки математического ожидания элемент x_i , расположенный в середине такого ряда. Такая оценка является оценкой медианы $a_1^* = \mu_e = x_{n/2+1}$.

Из такого ряда можно получить оценку, как среднее арифметическое между крайними элементами выборки $a_1^* = \frac{x_1 + x_n}{2}$.

Наилучшими среди всех возможных оценок параметра a будут те, которые имеют следующие свойства [17]:

$$\text{состоятельности } a^* \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} a; \quad (2.8)$$

$$\text{несмещенности } M_{a^*} = a; \quad (2.9)$$

$$\text{эффективности } D_{a^*} = \min. \quad (2.10)$$

Оценки, обладающие этими свойствами, называют доб ро к а ч е с т в е н н ы м и . Они являются наилучшими в вероятностном смысле.

Существуют три метода нахождения оценок:

1) метод моментов, при котором математическое ожидание в формулах для начальных и центральных моментов заменяют на среднее арифметическое;

2) метод максимального правдоподобия;

3) метод наименьших квадратов.

Иногда требуется сравнить оценки, полученные данными способами, и выбрать из них наилучшую. В этом случае можно сравнивать средние квадратические отклонения оценок от истинных значений параметров $M(a^* - a)^2$.

Оценку a_1^* считают лучше, чем a_2^* , если

$$M(a_1^* - a)^2 < M(a_2^* - a)^2. \quad (2.11)$$

Для описания свойств оценок часто используют понятие смещения, под которой понимают величину $C = M_{a^* - a}$. Величина C есть систематическая ошибка определения параметра a . Среднее квадратическое отклонение связано со смещением и дисперсией оценки равенством

$$M(a^* - a)^2 = D_{a^*} + C^2. \quad (2.12)$$

В случае отсутствия систематической составляющей в неравенстве (2.11) сравнивают дисперсии оценок.

Пример. Пусть имеется выборка, состоящая из трех ошибок усечения $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ (на ЭВМ часто разряды числа, которые не умещаются в отведенные под него ячейки памяти отсекаются, т.е. отбрасываются без округления). В этом случае они подчиняются равномерному распределению на отрезке $[0,1]$. Определить наилучшую оценку.

Решение. Рассмотрим три возможные оценки математического ожидания ошибок усечения $a = M_{\Delta}$:

$$a_1^* = \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3}{3}; \quad a_2^* = \mu e^*; \quad a_3^* = \frac{\Delta_1 + \Delta_3}{2},$$

где a_1^* — среднее арифметическое; a_2^* — выборочная медиана; a_3^* — среднее из наименьшей и наибольшей ошибок. Выборочную оценку медианы определяют по следующему правилу: $\mu e^* = \Delta_{(n+1)/2}$, если n — нечетно; $\mu e^* = \frac{\Delta_{n/2} + \Delta_{(n/2)+1}}{2}$, если n — четно. В данном случае $n=3$ и $\mu e^* = \Delta_2$, при этом Δ_i расположены в порядке возрастания. Так как все оценки являются несмещенными, то для их сравнения необходимо определить их дисперсии. Дисперсию величины, подчиняющийся равномерному распределению, как известно, находят следующим образом:

$$D_X = \int_0^1 (x - M_X)^2 dx = \frac{1}{12}; \quad M_X = 0,5,$$

отсюда, дисперсия первой оценки $D_{\bar{x}} = \frac{D_X}{n} = \frac{D_X}{3} = \frac{1}{36} \approx 0,028$.

Чтобы определить дисперсию второй оценки, следует выяснить, как распределена выборочная медиана. Под Δ_2 понимают ошибку, которая находится в середине ряда ошибок, расположенных по возрастанию их значений. Вероятность попадания некоторой величины Δ на отрезок $[x, dx]$ (элемент вероятности) можно определить по формуле $P(x < \Delta < x + dx) = \varphi(x) dx$. Но в рассматриваемой ситуации именно Δ_2 попадает на отрезок $[x, dx]$. Одновременно должно выполняться неравенство $\Delta_1 < \Delta_2 < \Delta_3$. Такое совместное событие складывается из трех событий: $\Delta_2 \in [x, dx]$; $\Delta_1 < x$ и $x < \Delta_3$. Очевидно, вероятности этих событий равны, соответственно, $\varphi(x) dx$, $F(x)$, $1 - F(x)$, а вероятность появления всех трех событий одновременно в заданном порядке будет равна произведению вероятностей $\varphi(x) dx \cdot F(x) \cdot (1 - F(x))$. Всего возможны шесть комбинаций из данных трех событий, вероятности которых равны между собой, поэтому плотность распределения оценки медианы будет равна $6 \cdot \varphi(x) dx \cdot F(x) \cdot (1 - F(x))$. При этом для равномерного распределения на отрезке $[0,1]$ $\varphi(x) = 1$, $F(x) = x$, $(1 - F(x)) = 1 - x$. Определим первый и второй начальный моменты для μe^* :

$$M_{\mu e^*} = \int_0^1 6xx(1-x)dx = 0,5; \quad M_{(\mu e^*)^2} = \int_0^1 6x^2x(1-x)dx = 0,3.$$

Выразим дисперсию через начальные моменты $D_{\mu e^*} = 0,3 - 0,5^2 = 0,05$. По аналогии найдем дисперсию третьей оценки. Для этого необходимо рассмотреть в совокупности три события: $\Delta_1 \in [x, dx]$; $\Delta_3 \in [y, dy]$; $x < \Delta_2 < y$. Вероятности данных событий равны соответственно, $\varphi(x) dx$; $\varphi(y) dy$; $F(y) - F(x)$. Таким образом, рассматривая

в данных условиях случайную величину $a_3^* = \frac{\Delta_1 + \Delta_3}{2}$, получим

$$M_{(a_3^*)^2} = \int_0^1 \int_0^y 6 \left(\frac{x+y}{2} \right)^2 (x-y) dx dy = \frac{11}{40} \approx 0,275;$$

$$D_{\mu^*} = M_{(a_3^*)^2} - M_{a_3^*}^2 \approx 0,275 - 0,5^2 = 0,025.$$

Следовательно, для равномерного распределения ошибок усечения на участке $[0,1]$ наилучшей из рассмотренных оценок является третья.

Для каждого распределения необходимо находить свои наилучшие оценки. Например, при n измерениях одной и той же величины для нормального распределения наилучшей оценкой истинного значения измеряемой величины является среднее арифметическое $\bar{x} = \frac{[x]}{n}$.

В случае выборок большого объема, оценки можно сравнивать, используя так называемый асимптотический подход [15], который основан на сравнении рассеиваний величин $(a^* - a)\sqrt{n}$ при больших n . Если имеются две оценки a_1^* и a_2^* , такие, что величины

$$t_1 = (a_1^* - a) \frac{\sqrt{n}}{\sigma_1}; \quad t_2 = (a_2^* - a) \frac{\sqrt{n}}{\sigma_2},$$

где σ_1 и σ_2 — СКО оценок a_1^* и a_2^* , соответственно, принадлежит одному и тому же предельному распределению при $n \rightarrow \infty$, то оценку a_1^* считают лучше оценки a_2^* , если $\sigma_1 < \sigma_2$. Минимум величины σ означает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(|a^* - a| < \frac{x}{\sqrt{n}} \right) = \max$ при каждом x .

Рассмотренные методы сравнения оценок можно распространить и на случай многомерных случайных величин, когда a^* и a — векторы. Тогда в неравенстве (2.11) сравниваемыми величинами будут матрицы, представляющие собой вторые центральные моменты,

$$M \left[(a_1^* - a)(a_1^* - a)^T \right] \leq M \left[(a_2^* - a)(a_2^* - a)^T \right]. \quad (2.13)$$

Если оценки являются несмещенными, то данное неравенство примет вид

$$K_{a_1^*} \leq K_{a_2^*}, \quad (2.14)$$

где $K_{a_1^*}$ и $K_{a_2^*}$ — корреляционные матрицы векторов оценок параметров.

По аналогии с (2.12) выполняется равенство $M(a^* - a)^2 = K_a^* + C^T C$, где C — вектор смещений оценок от параметров составляющих вектор a . Таким образом, оценка a_1^* лучше оценки a_2^* , если выполняется неравенство (2.13) или (2.14) при отсутствии смещений.

Существуют критерии, по которым можно судить, достигнут ли минимум дисперсии оценки, а следовательно, эффективна ли она. Один из таких критериев основан на неравенстве Рао–Крамера, которое будет рассмотрено ниже.

Методы нахождения оценок

1. Метод моментов разработан К. Пирсоном. Данный метод всегда приводит к доброкачественным оценкам параметров. В этом методе используют замену математического ожидания на среднее арифметическое.

$$M^*(X) = \bar{x} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} = \frac{[x]}{n}. \quad (2.15)$$

Если в формуле для дисперсии заменить математическое ожидание на среднее арифметическое, то получим:

$$D^*(X) = M^*(X - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n}; \quad (2.16)$$

для начальных и центральных моментов:

$$\alpha_S^* = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^S}{n}; \quad \mu_S^* = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^S}{n}. \quad (2.17)$$

Символ * означает, что оценка получена по опытным данным. Некоторые из этих оценок, например, дисперсии являются смещенными. Несмещенной оценкой дисперсии является:

$$D^*(X) = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1}.$$

Аналогично получают оценки и для других характеристик законов распределения:

для эксцесса $E^* = \frac{\mu_4^*}{D^{*2}} - 3$;

скошенности $Sk^* = \frac{\mu_3^*}{\sigma^{*3}}$,

где оценки центральных моментов определяют по формуле (2.17).

На практике, часто для нахождения оценок используют формулы, связанные со статистическим рядом распределения. Выведем формулы для оценок начальных и центральных моментов на основе статистического ряда распределения.

Запишем формулу для начальных моментов в следующем виде:

$$\alpha_S^* = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^S}{n} = \frac{x_1^S + x_2^S + \dots + x_n^S}{n}$$

или

$$\alpha_S^* = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^S}{n} = \frac{[x^S]_1 + [x^S]_2 + \dots + [x^S]_n}{n},$$

где $[x^S]_j$ — сумма k_j элементов выборки, попавших в j -й интервал.

В результате умножения и деления каждого такого слагаемого на k_j и с учетом $\sum_{j=1}^N k_j = n$, получим

$$\begin{aligned} \alpha_S^* &= \sum_{i=1}^n \frac{x_i^S}{n} = \frac{\frac{[x^S]_1}{k_1} k_1 + \frac{[x^S]_2}{k_2} k_2 + \dots + \frac{[x^S]_N}{k_N} k_N}{n} = \\ &= \frac{\bar{x}_1^S k_1 + \bar{x}_2^S k_2 + \dots + \bar{x}_N^S k_N}{\sum_{j=1}^N k_j} \end{aligned}$$

и окончательно,

$$\alpha_S^* = \sum_{j=1}^N \frac{k_j \bar{x}_j^S}{\sum_{j=1}^N k_j}. \quad (2.18)$$

Аналогично можно получить формулу для центральных моментов

$$\mu_S^* = \frac{\sum_{j=1}^N k_j (\bar{x}_j - \bar{x})^S}{\sum_{j=1}^N k_j}. \quad (2.19)$$

Здесь $\bar{x} = \sum_{j=1}^N \frac{\bar{x}_j}{k_j}$ среднее арифметическое всей выборки определяется как среднее из средних по каждому интервалу, при этом средние по интервалам, практически, достаточно считать как среднее из граничных значений интервалов $\bar{x}_j = \frac{x_j + x_{j+1}}{2}$.

Полученные статистические моменты обладают теми же свойствами, что и теоретические, т.е. $D_X^* = \alpha_2^* - (\alpha_1^*)^2$. Действительно,

$$D_X^* = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - 2\bar{x} \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} + \bar{x}^2 = \alpha_2^* - \bar{x}^2 = \alpha_2^* - (\alpha_1^*)^2.$$

Аналогично можно показать, что выполняются равенства:

$$\begin{aligned} \mu_3^* &= \alpha_3^* - 3\alpha_1^* \alpha_2^* + 2(\alpha_1^*)^3; \\ \mu_4^* &= \alpha_4^* - 4\alpha_1^* \alpha_3^* + 6(\alpha_1^*)^2 \alpha_2^* - 3(\alpha_1^*)^4. \end{aligned}$$

Метод моментов можно использовать и для вывода основных формул для оценки точности измерений в теории ошибок. Замена математического ожидания на среднее арифметическое для второго начального момента, когда в качестве случайной величины рассматривается истинная ошибка измерений, приведет к формуле Гаусса

$$m^2 = M_{\Delta^2}^* = \frac{[\Delta^2]}{n} \quad \text{или} \quad m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}, \quad (2.20)$$

которая позволяет вычислить среднюю квадратическую ошибку по выборке, состоящей из n истинных ошибок равноточных измерений.

Аналогично, можно получить оценку для среднего отклонения — среднюю ошибку, используя формулу $v = M_{|\Delta|}^* = \frac{[|\Delta|]}{n}$.

Между оценками средней квадратической и средней ошибки существуют следующие соотношения, которые будут доказаны позже:

$$m \approx 1,25v = 1,25 \frac{[\Delta]}{n}; \quad v = 0,80 m.$$

2. Метод максимального правдоподобия. Основы данного метода были заложены Д. Бернулли и К. Гауссом, но свою законченность он получил в 1912 г. благодаря работам Р.А. Фишера. В данном методе предполагается знание закона распределения случайной величины.

Метод состоит в следующем. Пусть имеется ряд измеренных значений x_1, x_2, \dots, x_n . По ним составляют функции правдоподобия $L_i = L(x_i, a_1, a_2, \dots, a_k)$, совпадающие по виду с плотностью распределения $\varphi(x_i)$, где a_i — параметры распределения. При нормальном законе распределения их два $a_1 = M(X)$ и $a_2 = \sigma_x^2$.

Отличие $\varphi(x_i)$ от L_i состоит в том, что в плотности распределения параметры a_i , являются известными, а x — переменной. В функции же правдоподобия параметры a_i — неизвестные величины, а величина x_i — i -е значение выборки. Если все x_i независимы, то составляют функцию правдоподобия выборки:

$$L = L_1 \cdot L_2 \cdot \dots \cdot L_n = \prod_{i=1}^n L_i,$$

после чего находят оценки под условием $L = \max$. Для этого необходимо совместно решить k уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial a_i} = 0, \tag{2.21}$$

где k — число параметров.

Часто удобнее систему уравнений (2.21) заменить на уравнения:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a_i} = 0, \tag{2.22}$$

поскольку L достигает максимума в той же точке, что и $\ln L$. Таким образом (2.21) и (2.22) приводят к одним и тем же результатам. Поэтому выбирают те уравнения, которые имеют более простой вид и более простое решение.

Фишер доказал, что оценки, полученные по методу максимального правдоподобия, хотя принцип $L = \max$ не имеет теоретического обоснования, всегда состоятельны и эффективны. При этом они иногда смещены, но смещение легко устранимо.

Пусть даны n измерений x_1, x_2, \dots, x_n одной и той же величины. Требуется получить оценки математического ожидания и дисперсии величины X . Рассмотрим ситуацию, когда исследуемая случайная величина имеет нормальное распределение с известной дисперсией σ_X^2 . Требуется определить оценку математического ожидания $a_1^* = M_X^*$.

Так как измеряемые величины подчиняются нормальному распределению с параметрами $a_1 = M(X)$, $a_2 = \sigma_X$, то функция правдоподобия для одного измерения имеет вид:

$$L_i(x_i, a_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_i - a_1)^2}{2\sigma^2}}.$$

Функция правдоподобия выборки

$$L = \prod_{i=1}^n L_i(x_i, a_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \frac{1}{\sigma^n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - a_1)^2}{2\sigma^2}}.$$

В данном случае удобнее находить максимум

$$\ln L = \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n - n \ln \sigma - \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - a_1)^2}{2\sigma^2}.$$

Так как искомый параметр только один, то решить необходимо одно уравнение

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a_1} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - a_1^*)}{\sigma^2} = 0. \quad (2.23)$$

Заметим, что как только мы приравняем производную к нулю, т.е. выполняем условие для поиска максимума значения функции правдоподобия, в уравнение вместо параметра a , необходимо подставить его оценку a^* . Поскольку $\sigma^2 \neq 0$, то

$$\sum_{i=1}^n (x_i - a_1^*) = 0 \text{ и } a_1^* = \bar{x} = \frac{[x]}{n}. \quad (2.24)$$

Получили тот же результат, что и при использовании метода моментов. Следует помнить, что при другом распределении результат может быть иным.

Рассмотрим ситуацию, когда при нормальном распределении неизвестны оба параметра — математическое ожидание и дисперсия. Требуется получить их оценки $a_1^* = M_X^*$ и $a_2^* = (\sigma_X^*)^2$.

Запишем функции правдоподобия:

$$\text{для одного измерения — } L_i(x_i, a_1, a_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a_2}} e^{-\frac{(x_i - a_1)^2}{2a_2}};$$

$$\text{для всей выборки — } L = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n (a_2)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{\sum_i (x_i - a_1)^2}{2a_2}}.$$

В результате логарифмирования функция правдоподобия преобразуется к виду:

$$\ln L = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n - \frac{n}{2} \ln a_2 - \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - a_1)^2}{2a_2}.$$

Решение двух уравнений $\frac{\partial \ln L}{\partial a_1} = 0$ и $\frac{\partial \ln L}{\partial a_2} = 0$ приводит к следующим выражениям:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a_1} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - a_1^*)}{a_2^*} = 0; \quad (2.25)$$

и

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a_2} = -\frac{n}{2a_2^*} + \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - a_1^*)^2}{2(a_2^*)^2} = 0. \quad (2.26)$$

Из (2.25) легко получить оценку первого параметра

$$a_1^* = \bar{x} = \frac{[x]}{n}. \quad (2.27)$$

Величину \bar{x} называют простой арифметической серединой.

Из (2.25), (2.26) и (2.27) следует, что

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0 \quad (2.28)$$

и

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \min, \quad (2.29)$$

откуда следует, что принцип максимального правдоподобия приводит к выполнению условию метода наименьших квадратов (2.29), и наоборот. Таким образом, для случайных величин, подчиняющихся нормальному распределению, оценки, полученные с помощью методов максимального правдоподобия и наименьших квадратов, совпадают.

Из (2.26) определим оценку второго параметра

$$a_2^* = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}. \quad (2.30)$$

3. Метод наименьших квадратов. Широко используется для оценивания параметров и не требует знания закона распределения случайной величины, в отличие от метода максимального правдоподобия. Этот метод может быть применен как в случае одномерной, так и в случае многомерной случайной величины. Рассмотрим задачи оценивания параметров одномерной случайной величины.

Пусть задана выборка случайной величины x_1, x_2, \dots, x_n . Определение оценки математического ожидания $a_1^* = M_X^*$ по методу наименьших квадратов сводится к определению минимума

$$\Phi = \sum_{i=1}^n (a_1 - x_i)^2 = \min. \quad (2.31)$$

Для этого найдем производную $\frac{\partial \Phi}{\partial a_1}$ и приравняем ее к нулю:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_1} = 2(a_1^* - x_1) + 2(a_1^* - x_2) + \dots + 2(a_1^* - x_n) = 0.$$

Обозначим разности $a_1^* - x_i = v_i$, тогда можно записать $2[v] = [v] = 0$ и $a_1^* = x_i + v_i$. Суммируя последние уравнения по всем i , получим $[x] + [v] = n a_1^*$. Или, учитывая, что при выполнении (2.31)

$$[v] = 0 \quad [x] = n a_1^*, \text{ откуда } a_1^* = \frac{[x]}{n} = \bar{x}.$$

Это совпадает с результатами, полученными как методом моментов, так и методом максимального правдоподобия. При этом поправки v_i обладают двумя свойствами:

- 1) $[v] = 0$;
- 2) $[v^2] = \min$, что следует из (2.31).

Второе свойство означает, что если в качестве оценки параметра взять некоторую величину a_1' , такую что $v_i = a_1' - x_i$, то $[v^2] \leq [v^2]$. При этом данное неравенство обращается в равенство только в случае $a_1' = a_1^*$.

Свойства оценок

Рассмотрим свойства полученных тремя способами оценок

$$a_1^* = \frac{[x]}{n} = \bar{x} \quad \text{и} \quad a_2^* = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}.$$

1. Состоятельность оценки \bar{x} вытекает из теоремы Чебышева, в которой утверждается: среднее арифметическое по вероятности, при $n \rightarrow \infty$, стремится к математическому ожиданию.

2. Так как все значения x_i имеют одно и то же математическое ожидание $M_{x_i} = M_x$, то $M\left(\frac{[x]}{n}\right) = \frac{1}{n} M([x]) = \frac{1}{n} n M_x = M_x$.

Таким образом, оценка \bar{x} является несмещенной.

3. Для доказательства эффективности требуется показать, что \bar{x} имеет минимальную дисперсию из всех возможных оценок математического ожидания. С этой целью необходимо воспользоваться неравенством Рао–Крамера [11], которое определяет

нижнюю границу дисперсий среди всех возможных оценок

$$M\left[(a^* - a)^2\right] \geq \frac{(1 + C'(a))^2}{I(a)}. \quad (2.32)$$

Неравенство (2.32) позволяет определить, достигнут ли минимум дисперсии оценки, т.е. эффективна ли оценка a^* , здесь $C(a) = M_a^*$ — смещение оценки a^* ; $I(a) = -M\left[\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a^2}\right]$ — функция информации Фишера. В частном случае, когда оценка a^* несмещенная, т.е. $C(a) = M(a^*) = a$ и производная от $C(a) = 0$, преобразуется к виду

$$D_a^* \geq \frac{1}{I(a)} = -\frac{1}{M\left[\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a^2}\right]}. \quad (2.33)$$

В неравенствах (2.32) и (2.33) правая часть является нижней границей дисперсий D_a^* для множества всех возможных оценок a^* , поэтому равенство левой и правой частей в этих неравенствах означает, что оценка a^* является эффективной. Данные неравенства могут быть распространены и на многомерный случай. При этом функция информации Фишера преобразуется в квадратную симметричную матрицу информации, элементами которой являются $I_{ij}(a) = -M\left[\frac{\partial \ln L}{\partial a_i} \frac{\partial \ln L}{\partial a_j}\right]$ и неравенство (2.33) примет вид $K_a^* \geq I(a)^{-1}$.

Возвратимся к нашему случаю. Найдем вторую производную от $\ln L$, используя (2.25), по a_1 $\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a_1^2} = -\frac{n}{\sigma^2}$, откуда, $\min D(a^*) = -\frac{1}{M\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a_1^2}\right)} = \frac{\sigma^2}{n}$.

Теперь определим дисперсию оценки $a_1^* = \frac{[x]}{n} = \bar{x}$, это можно сделать по формуле для оценки точности функции некоррелированных аргументов: $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 + \dots + \sigma_{x_n}^2}{n^2}$.

Так как измерения равноточные, то $\sigma_{x_1} = \sigma_{x_2} = \dots = \sigma_{x_n} = \sigma$ и $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{n\sigma_x^2}{n^2} = \frac{\sigma_x^2}{n}$, что совпадает с нижней границей в неравенстве

Рао–Крамера. Следовательно, оценка \bar{x} является эффективной и доброкачественной.

Свойства оценки a_2^ .*

1. **Состоятельность:**

$$\begin{aligned} a_2^* &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - M_X + M_X - \bar{x})^2}{n} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - M_X)^2}{n} - (\bar{x} - M_X)^2. \end{aligned}$$

Второе слагаемое, согласно теореме Чебышева, по вероятности стремится к нулю. Если каждое из значений x_i появляется k_i раз, то первое слагаемое примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - M_X)^2}{n} &= \frac{\sum_{i=1}^n k_i (x_i - M_X)^2}{n} = \\ &= \sum_{j=1}^r Q_j (x_j - M_X)^2 \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{p} \sum_{j=1}^r P_j (x_j - M_X)^2 = D_X. \end{aligned}$$

Данное равенство следует из теоремы Бернулли и относится к дискретным случайным величинам. Если рассмотреть непрерывную случайную величину, то при $r \rightarrow \infty$ получим

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^r P_j (x_j - M_X)^2 = \int_a^b (x - M_X)^2 \varphi(x) dx = D_X.$$

Это означает, что оценка a_2^* состоятельна как в случае дискретной, так и непрерывной случайных величин.

2. **Несмещенность.** Можно показать, что эта оценка смещена. Для доказательства данного свойства найдем

$$\begin{aligned}
 M(a_2^*) &= M\left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}\right) = M\left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - M(X))^2}{n}\right) - M(\bar{x} - M(X))^2 = \\
 &= \sigma_x^2 - \sigma_{\bar{x}}^2 = \sigma_x^2 - \frac{\sigma_x^2}{n} = \frac{n-1}{n} \sigma_x^2 \neq \sigma_x^2.
 \end{aligned}$$

Следовательно, оценка $a_2^* = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$ смещена.

Чтобы оценка a_2^* стала несмещенной, необходимо ее умножить на коэффициент, обратный смещению, т.е. на $\frac{n}{n-1}$. Так как данный коэффициент является постоянной величиной, то он может быть вынесен за знак математического ожидания

$$M\left(\frac{n}{n-1} a_2^*\right) = \frac{n}{n-1} M(a_2^*) = \frac{n}{n-1} \frac{n-1}{n} \sigma_x^2 = \sigma_x^2.$$

Таким образом несмещенной оценкой будет величина

$$m^2 = \frac{n}{n-1} a_2^* = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}.$$

Следовательно, средняя квадратическая ошибка должна вычисляться по формуле

$$m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}. \quad (2.34)$$

Формула (2.34) носит название формулы Бесселя. Она позволяет вычислить среднюю квадратическую ошибку одного измерения по отклонениям измерений от их среднего значения.

Возможен случай, когда параметр a_1 , равный $M(X)$, известен и возникает задача оценки только a_2 . Например, в треугольнике сумма углов заранее известна и равна 180° , тогда разность между

суммой измеренных углов и 180° — истинная ошибка. Если в измерениях отсутствует систематическая составляющая, то оценка a_2^* является несмещенной

$$a_2^* = m^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - M_X)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i^2}{n}; \quad m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}. \quad (2.35)$$

Мы получили формулу Гаусса (2.35), которая используется в том случае, если известны истинные ошибки измерений. Если известны отклонения от среднего, используется формула Бесселя (2.34).

В ситуации, о которой говорилось выше, когда в качестве истинных ошибок выступают невязки треугольников $w_i = 180 - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)_i$ и N — число треугольников (i — номер треугольника), то средняя квадратическая ошибка невязок будет

$$\text{определяться по формуле Гаусса } m_w = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n w_i^2}{N}} = \sqrt{\frac{[w^2]}{N}}.$$

Однако обычно требуется получить среднюю квадратическую ошибку измерения угла β . Воспользуемся формулой оценки точности функции от случайных аргументов (свойством дисперсий):

$$D_{f(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} \right)_0^2 D_{x_i}.$$

Заменяя дисперсии на квадраты средних квадратических ошибок, получим

$$m_{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} \right)_0^2 m_{x_i}^2.$$

Возьмем в качестве функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ невязку w_i . Будем считать, что углы измерены с одинаковыми средними квадратическими ошибками и независимо, тогда $m_w^2 = 3m_\beta^2$. Подставим правую часть данного равенства в формулу для m_w и определим

$$m_\beta = \sqrt{\frac{[w^2]}{3N}}. \quad \text{Данная формула называется формулой Ферреро.}$$

3. Эффективность. Так как результаты измерений подчиняются нормальному распределению, то при отсутствии систематических ошибок, величина средней квадратической ошибки подчиняется распределению χ^2 с плотностью

$$\varphi(x) = \frac{2(n/2)^{n/2}}{\sigma^n \Gamma(n/2)} x^{n-1} e^{-\frac{nx^2}{2\sigma^2}}. \quad (2.36)$$

Используя данную плотность, можно найти математическое ожидание

$$M \left[\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} \right] = \sqrt{\frac{2}{n}} \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)} \sigma = Z\sigma.$$

Математическое ожидание оценки a_2^* равно σ^2 . Определяя дисперсию через начальные моменты, получим

$$D(\sqrt{a_2^*}) = M(a_2^*) - M^2(\sqrt{a_2^*}) = \sigma^2 - Z^2\sigma^2 = (1 - Z^2)\sigma^2 \approx \frac{\sigma^2}{2n}.$$

Определим нижнюю границу для дисперсии, используя функцию правдоподобия, совпадающую с плотностью χ^2 -распределения

(2.36), тогда $\frac{-1}{M \left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial (a_2^*)^2} \right)} = \frac{\sigma^2}{2n}$. Таким образом, оценка a_2^* является

эффективной и доброкачественной.

Критерии оценки точности измерений

Основным критерием точности измерений является средняя квадратическая ошибка — оценка среднего квадратического отклонения. Среднеквадратическое отклонение с учетом систематической составляющей, в классическом понимании, имеет вид:

$$\sigma^2 = M_\Delta^2 = M_{(\theta+C)}^2 = M(\theta^2 + C^2 + 2\theta C) = M_\theta^2 + M_C^2 + 2M_\theta M_C.$$

Так как $M_\theta = 0$, то $\sigma^2 = M_\theta^2 + M_C^2$ или, полагая C постоянной, $\sigma^2 = M_\theta^2 + C^2$.

Средняя квадратическая ошибка m , в случае отсутствия систематической составляющей, определяется по формулам Гаусса или Бесселя. Если необходимо учесть систематическую ошибку,

то используют формулу $m^2 = \frac{[v^2]}{n-1} + C^2$.

В дальнейшем под m будем понимать среднюю квадратическую ошибку измерений при отсутствии систематических ошибок. Случаи, когда необходим учет систематических ошибок, будут рассмотрены специально. Кроме средней квадратической ошибки в качестве критериев точности измерений используют также среднюю, вероятную, предельную и относительную ошибки.

Средним отклонением v называется математическое ожидание абсолютного значения истинной ошибки

$$v = M(|\Delta|). \quad (2.37)$$

Установим связь между средним и средним квадратическим отклонениями при нормальном законе распределении:

$$v = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} |\Delta| e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}} d\Delta. \quad (2.38)$$

При замене переменной t на Δ/σ получим $|\Delta| = |t|\sigma$; $d\Delta = \sigma dt$.

С учетом симметричности подынтегральной функции выражение (2.38) примет вид:

$$\begin{aligned} v &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |t| e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt = -\sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} de^{-\frac{t^2}{2}} = \\ &= -\sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \Big|_0^t = -\sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} (0 - 1) = \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \end{aligned}$$

откуда

$$v = \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} \approx 0,80\sigma; \quad (2.39)$$

$$\sigma = v \sqrt{\frac{\pi}{2}} \approx 1,25v. \quad (2.40)$$

Используя метод моментов, легко получить формулу для средней ошибки, являющейся оценкой среднего отклонения $v^* = \frac{[\Delta]}{n}$.

Заметим, что формулы (2.39) и (2.40) справедливы и для оценок, т.е. $v^* = \sqrt{\frac{2}{\pi}}m \approx 0,80m$; $m = v^* \sqrt{\frac{\pi}{2}} \approx 1,25v$.

Вероятным отклонением r называется величина, численно равная половине длины отрезка, симметричного относительно математического ожидания, вероятность попадания в который равна $1/2$.

Аналитически эта величина определяется из формулы для интеграла вероятностей $\Phi(t)$:

$$\Phi\left(t = \frac{r}{m}\right) = P\{|X - M(X)| < r\} = P\{|X - M(X)| > r\} = 0,5.$$

Например, из таблиц интеграла вероятностей по значению $\Phi(t)=0,5$ определяют $t=0,6745$. Таким образом,

$$r = t\sigma \approx 0,67\sigma; \quad \sigma \approx 1,48r. \quad (2.41)$$

Данные соотношения справедливы и для оценок $r^* = tm \approx 0,67m$; $m \approx 1,48r^*$.

Величина r^* (вероятная ошибка) может быть вычислена по полученным истинным ошибкам измерений (выборке), если все ошибки расположить в порядке возрастания их абсолютных значений. Величину r^* принимают равной абсолютному значению ошибки, расположенной в середине такого ряда:

$$r^* = \left| \Delta_{\frac{n+1}{2}} \right| \text{ — если количество ошибок } n \text{ — нечетно;}$$

$$r^* = \frac{\left| \Delta_{\frac{n}{2}} \right| + \left| \Delta_{\frac{n}{2}+1} \right|}{2} \text{ — когда число элементов ряда } n \text{ — четно.}$$

В качестве предельных ошибок измерений $\Delta_{\text{пр}}$ на практике выбирают величины, определяемые по правилу « $2m$ » и « $3m$ ». При этом случайная ошибка не превышает по абсолютному значению пределов, равных $2m$ и $3m$, с вероятностями соответственно $0,954$ и $0,997$.

Это означает, что в среднем, при большом числе испытаний, только четыре ошибки из каждой сотни измерений превышают значения $2m$ и три из каждой 1000 — $3m$. Правила « $2m$ » и « $3m$ » играют очень важную роль, поскольку позволяют устанавливать допуски в измерениях.

Среднюю квадратическую m , среднюю v , вероятную r , истинную Δ и предельную $\Delta_{\text{пр}}$ ошибки называют а б с о л ю т н ы м и . Под относительной ошибкой понимают отношение одной из перечисленных выше абсолютных ошибок к значению измеренной величины X . Относительную ошибку обычно выражают в виде дроби с числителем, равным единице. Так как на практике истинное значение измеряемой величины остается неизвестным, его заменяют результатом измерения x .

Например:

$m/x = 1/N_1$ — средняя квадратическая относительная ошибка величины X ;

$v/x = 1/N_2$ — средняя относительная ошибка величины X ;

$r/x = 1/N_3$ — вероятная относительная ошибка;

$\theta/x = 1/N_4$ — истинная относительная ошибка;

$\Delta_{\text{пр}}/x = 1/N_5$ — предельная относительная ошибка.

Знаменатель относительной ошибки и значения абсолютных ошибок целесообразно округлять до двух–трех значащих цифр.

Доверительное оценивание

В предыдущих разделах были рассмотрены вопросы определения оценок для математического ожидания и дисперсии измеряемой величины. Такие оценки называются т о ч е ч н ы м и . Интересным представляется вопрос определения расхождений с вероятностной точки зрения между оценками и оцениваемыми величинами. На этот вопрос можно ответить, если определить вероятность попадания параметра a в интервал вида $(a^* - \varepsilon, a^* + \varepsilon)$.

Такая вероятность может быть записана в виде $P(|a - a^*| < \varepsilon) = \alpha$.

При этом $P(|a - a^*| < \varepsilon) = P(-\varepsilon < a - a^* < \varepsilon) = P(a^* - \varepsilon < a < a^* + \varepsilon)$.

Здесь α — вероятность, с которой интервал $(a^* - \varepsilon, a^* + \varepsilon)$ накрывает точное значение параметра a , которое неизвестно. В этом случае интервал $(a^* - \varepsilon, a^* + \varepsilon)$ и вероятность α называются д о в е р и т е л ь н ы м и . Такой способ оценивания параметра называется

доверительным оцениванием. Доверительный интервал может быть как симметричным, так и несимметричным, в зависимости от распределения оценки a^* , вида оцениваемого параметра и других причин.

На практике значение доверительной вероятности назначают таким образом, чтобы событие, заключающееся в том, что доверительный интервал накроет истинное значение параметра, было практически достоверным. В теории математической обработки геодезических измерений значение доверительной вероятности назначают, исходя из правил 2σ и 3σ , т.е. $\alpha=0,954$ или $\alpha=0,997$. В математической статистике выбирают интервалы с вероятностями 0,9; 0,99; 0,999.

Для построения доверительного интервала необходимо знать закон распределения оценки a^* . От этого зависит вид доверительного интервала (симметричный или несимметричный) и его ширина. Доверительный интервал в любом случае строится вокруг точечной оценки параметра a^* . Но построить доверительный интервал непосредственно для a бывает затруднительно, поскольку функция распределения $F_{a^*}(x, a)$ зависит и от истинного значения параметра a , которое неизвестно. Поэтому строят некоторую функцию от a^* и a с известным распределением. Обычно такую функцию строят в виде $C_1(x_1, x_2, \dots, x_n)g_1(a^*-a)$ или $C_2(x_1, x_2, \dots, x_n)g_1(a^*/a)$, где C_1 и C_2 — некоторые коэффициенты, зависящие от выборки.

Рассмотрим три случая построения доверительного интервала.

1. Построение доверительного интервала для параметра $a=M(X)=X$ (будем полагать, что математическое ожидание совпадает с истинным значением измеряемой величины X), если

$a_1^* = \frac{[x]}{n} = \bar{x}$ — несмещенная оценка и значения x_i являются элементами выборки из нормальной совокупности с известным средним квадратическим отклонением σ . При этом среднее квадратическое

отклонение среднего значения $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Как известно, в этом

случае величина $T = \frac{X - a_1^*}{a_2^*} = \frac{X - \bar{x}}{\sigma_{\bar{x}}}$ имеет также нормальное рас-

пределение. Здесь $g_1(a^* - a) = X - a_1^*$, а $C_1 = 1/\sigma_{\bar{x}}$. Таким образом,

доверительный интервал, в данном случае, можно строить, исходя из вероятностного смысла интеграла вероятностей

$$P\left(-t < T = \frac{X - \bar{x}}{\sigma_{\bar{x}}} < t\right) = \Phi\left(t = \frac{\varepsilon}{\sigma_{\bar{x}}}\right) = P(|\bar{x} - X| < \varepsilon) = \alpha.$$

Значение t можно определить по таблицам интеграла вероятностей и доверительный интервал представить в виде

$$\bar{x} - t\sigma_{\bar{x}} < X < \bar{x} + t\sigma_{\bar{x}}. \quad (2.42)$$

2. В случае, если среднее квадратическое отклонение σ не известно, то определяют его оценку — среднюю квадратическую ошибку m , вычисляемую по формулам Гаусса или Бесселя. Тогда случайная величина $T = \frac{X - \bar{x}}{m_{\bar{x}}}$ подчиняется распределению

Стьюдента с числом степеней свободы r . Здесь $r = n - 1$ если использовалась формула Бесселя или $r = n$, если формула Гаусса. Здесь $m_{\bar{x}} = m/\sqrt{n}$ — средняя квадратическая ошибка среднего арифметического из результатов выборки (измерений).

Поскольку закон распределения T известен, то можно вычислить вероятность того, что она не превзойдет по абсолютному значению какого-либо числа:

$$P(|T| < t_{\alpha}) = \alpha \text{ или} \\ P\left(\left|\frac{X - \bar{x}}{m_{\bar{x}}}\right| < t_{\alpha}\right) = P(\bar{x} - t_{\alpha}m_{\bar{x}} < X < \bar{x} + t_{\alpha}m_{\bar{x}}) = \alpha.$$

Отсюда доверительный интервал

$$\bar{x} - t_{\alpha}m_{\bar{x}} < X < \bar{x} + t_{\alpha}m_{\bar{x}} \quad (2.43)$$

с вероятностью α накрывает истинное значение величины X . Значение коэффициента Стьюдента выбирают из таблиц по заданной вероятности α и числу степеней свободы r .

3. При построении доверительного интервала оценки $\sigma^2 = a_2$, исходят из того, что статистика $Z = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2} = (n - 1) \frac{m^2}{\sigma^2}$ имеет χ^2 -распределение с $n - 1$ числом степеней свободы. Таким образом, $g_2(a^*/a) = m^2/\sigma^2 = a_2^*/a_2$; $C_2 = n - 1$.

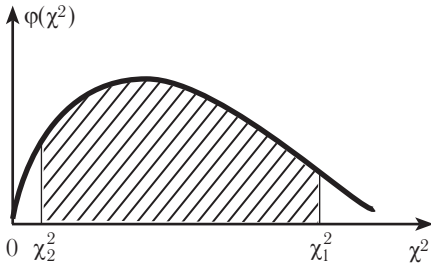


Рис. 2.4. Доверительный интервал для Z

Зная закон распределения случайной величины Z , можно построить для нее доверительный интервал, представляющий собой заштрихованную область под кривой плотности распределения (рис. 2.4) с доверительной вероятностью $P(\chi_2^2 < Z < \chi_1^2) = \alpha$.

Распределение χ^2 несимметрично, поэтому точки χ_1^2 и χ_2^2 выбирают таким образом, чтобы $P(Z < \chi_2^2) = \frac{1-\alpha}{2}$ и $P(Z > \chi_1^2) = \frac{1-\alpha}{2}$.

В этом случае вероятность того, что интервал накроет истинное значение Z , равна α . Действительно,

$$\begin{aligned} P(\chi_2^2 < Z < \chi_1^2) &= F(\chi_2^2) - F(\chi_1^2) = 1 - P(Z > \chi_1^2) - P(Z < \chi_2^2) = \\ &= 1 - \frac{1-\alpha}{2} - \frac{1-\alpha}{2} = 1 - 1 + \alpha = \alpha. \end{aligned}$$

Таким образом, доверительный интервал для Z имеет вид

$$\chi_2^2 < Z = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2} < \chi_1^2 \quad \text{или} \quad \chi_2^2 < \frac{m^2(n-1)}{\sigma^2} < \chi_1^2,$$

что соответствует интервалу

$$\frac{m^2(n-1)}{\chi_1^2} < \sigma^2 < \frac{m^2(n-1)}{\chi_2^2} \quad (2.44)$$

или

$$\gamma_1 m < \sigma < \gamma_2 m, \quad (2.45)$$

где коэффициенты $\gamma_1 = \sqrt{\frac{n-1}{\chi_1^2}}$, $\gamma_2 = \sqrt{\frac{n-1}{\chi_2^2}}$ выбирают по таблицам по числу степеней свободы $n-1$ и вероятностям $P_1 = \frac{1-\alpha}{2}$ и $P_2 = \frac{1+\alpha}{2} = 1 - P_1$.

Доверительный интервал для σ является несимметричным относительно m .

Если измерения независимы и известны истинные значения ошибок измерений Δ_i , то доверительный интервал для оценивания σ имеет вид (2.45), где $m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}$, а $\gamma_1 = \sqrt{\frac{n}{\chi_1^2}}$, $\gamma_2 = \sqrt{\frac{n}{\chi_2^2}}$, определяются по таблицам по числу степеней свободы n , в отличие от предыдущего случая.

При построении доверительного интервала для среднего квадратического отклонения среднего арифметического $\sigma_{\bar{x}}^2$ необходимо учесть, что

$$Z = \frac{(n-1)m_{\bar{x}}^2}{\sigma_{\bar{x}}^2} = \frac{(n-1) \left[\left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right) / n(n-1) \right]}{\sigma^2/n} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2},$$

откуда вытекает, что доверительный интервал для $\sigma_{\bar{x}}^2$ следует строить точно так же, как и для σ^2 . При этом в неравенствах заменяют только точечную оценку m на $m_{\bar{x}}$ т.е.

$$\gamma_1 m_{\bar{x}} < \sigma_{\bar{x}} < \gamma_2 m_{\bar{x}}. \quad (2.46)$$

Доверительные интервалы можно использовать для проверки статистических гипотез. Например, если имеется ряд истинных ошибок Δ_i измерений одной величины, то для математического ожидания $M(\Delta)$ можно построить доверительный интервал

$$\bar{\Delta} - t_{\alpha} m_{\bar{\Delta}} \leq M(\bar{\Delta}) \leq \bar{\Delta} + t_{\alpha} m_{\bar{\Delta}},$$

где $\bar{\Delta} = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i}{n}$; $m_{\bar{\Delta}} = \frac{m}{\sqrt{n}}$.

Если гипотеза $M(\Delta)=0$ справедлива, то, очевидно, с вероятностью α должны выполняться неравенства:

$$\bar{\Delta} - t_{\alpha} m_{\bar{\Delta}} \leq 0; \quad \bar{\Delta} + t_{\alpha} m_{\bar{\Delta}} \geq 0.$$

Объединением этих неравенств будет $|\bar{\Delta} - t_{\alpha} m_{\bar{\Delta}}| \leq 0$, откуда следует критерий

$$|\bar{\Delta}| \leq t_{\alpha} m_{\bar{\Delta}} \quad (2.47)$$

обнаружения систематических ошибок. Если неравенство (2.47) выполняется, то гипотеза об отсутствии систематических ошибок принимается.

При большом n для упрощения вычислений можно принять $m_{\Delta}=1,25v$, где $v=[\Delta]/n$ — средняя ошибка, тогда вместо неравенства (2.47) будет применяться критерий

$$|\bar{\Delta}| \leq 1,25t_{\alpha} \frac{[\Delta]}{n\sqrt{n}} \quad \text{или} \quad \left| \frac{[\Delta]}{n} \right| \leq 1,25t_{\alpha} \frac{[\Delta]}{n\sqrt{n}}.$$

Следовательно, $[\Delta] \leq 1,25t_{\alpha} \frac{[\Delta]}{\sqrt{n}}$.

При $t_{\alpha}=2$, что соответствует вероятности $\alpha=0,95$ и $n>30$

$$[\Delta] \leq 2,5 \frac{[\Delta]}{\sqrt{n}}. \quad (2.48)$$

Обработка ряда равноточных измерений

В геодезии часто обрабатывают измерения x_1, x_2, \dots, x_n одной и той же величины X . В предыдущем разделе было показано, что наилучшей оценкой для математического ожидания является так называемая простая арифметическая середина (среднее арифметическое) $\bar{x} = \frac{[x]}{n}$, а для дисперсии одного измерения — квадрат средней квадратической ошибки (формула Бесселя)

$$m^2 = \frac{[v^2]}{n-1}, \quad (2.49)$$

где $v_i = x_i - \bar{x}$ — отклонения от простой арифметической середины, обладающие свойствами $[v]=0$, $[v^2]=\min$.

Средняя квадратическая ошибка $m_{\bar{x}}$ величины \bar{x} имеет вид

$$m_{\bar{x}} = M = \frac{m}{\sqrt{n}}. \quad (2.50)$$

Совместное влияние случайных и постоянной систематической ошибок может быть выражено формулой

$$M = \sqrt{\frac{m^2}{n} + C^2},$$

где C — систематическая ошибка.

Поэтому постоянное увеличение числа измерений не ведет к беспредельному повышению точности \bar{x} . При этом полагают, что должно выполняться неравенство $C < \frac{1}{5} \frac{m}{\sqrt{n}}$.

Точность определения средней квадратической ошибки $m = \sqrt{[v^2]/(n-1)}$ при достаточно большом n , как случайной величины, может быть охарактеризована ошибкой, которую можно вычислить по формуле $m_m \approx m/\sqrt{2(n-1)}$.

Если выполняют измерения S однородных величин, каждую n_i раз, например, углы на различных пунктах, то среднюю квадратическую ошибку вычисляют по формуле

$$m^2 = \frac{\sum_{i=1}^S [v^2]_i}{\sum_{i=1}^S n_i - S},$$

где $[v^2]_i$ — сумма квадратов отклонений результатов измерений от \bar{x}_i на каждом пункте.

Порядок вычислений на калькуляторах при обработке ряда равноточных измерений одной величины следующий.

1. Вместо формулы $\bar{x} = \frac{[x]}{n}$ часто применяют формулу

$\bar{x} = x' + \frac{[\varepsilon]}{n}$, где x' — приближенное значение для \bar{x} ; $\varepsilon_i = x_i - x'$.

2. Вычисляют отклонения $v_i = x_i - \bar{x}_{\text{окр}}$ и выполняют контроль $[v] = -n\Delta_{\text{окр}}$, где $\Delta_{\text{окр}}$ — ошибка округления при вычислении \bar{x} , т.е. $\Delta_{\text{окр}} = \bar{x}_{\text{окр}} - \bar{x}$. Обычно число десятичных знаков $\bar{x}_{\text{окр}}$ на один больше, чем в измеренных значениях x_i . Значения $\bar{x}_{\text{окр}}$ получают в результате округления \bar{x} , при вычислении которого берут на два десятичных знака больше, чем измеренные значения и на один знак больше, чем $\bar{x}_{\text{окр}}$.

3. Далее вычисляют $[v^2]$ с контролем $[v^2] = [\varepsilon^2] - [\varepsilon^2]/n$ и ошибки m , M , и $m_M = M/\sqrt{2n}$.

4. Строят доверительные интервалы:

$$\bar{x} - t_\alpha m_{\bar{x}} < X < \bar{x} + t_\alpha m_{\bar{x}}; \quad \gamma_1 m \leq \sigma \leq \gamma_2 m; \quad \gamma_1 m_{\bar{x}} \leq \sigma_{\bar{x}} \leq \gamma_2 m_{\bar{x}}.$$

Докажем справедливость контрольных равенств.

1. $\bar{x}_{\text{окр}} = \bar{x} + \Delta_{\text{окр}}$, то подставим в формулу $v_i = x_i - \bar{x}_{\text{окр}}$ вместо $\bar{x}_{\text{окр}}$ величину $\bar{x} + \Delta_{\text{окр}}$ получим $v_i = x_i - \bar{x} - \Delta_{\text{окр}}$. Сложим данные n равенств $[v] = [x] - n\bar{x} - n\Delta_{\text{окр}}$, но $[x] - n\bar{x} = 0$, следовательно, $[v] = -n\Delta_{\text{окр}}$.

2. Рассмотрим разность $v_i - \varepsilon_i$:

$$v_i - \varepsilon_i = x_i - \bar{x} - x_i + x' = -x' - \frac{[\varepsilon]}{n} + x' = -\frac{[\varepsilon]}{n},$$

откуда $\varepsilon_i = v_i + \frac{[\varepsilon]}{n}$.

Возведем левую и правую части данного равенства в квадрат и просуммируем все n равенств. Получим $[\varepsilon^2] = [v^2] + 2[v]\frac{[\varepsilon]}{n} + n\left(\frac{[\varepsilon]}{n}\right)^2$.

Так как $[v]=0$, то $[v^2] = [\varepsilon^2] - \frac{[\varepsilon]^2}{n}$.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение точечной оценки параметра.
2. Какая оценка является доброкачественной?
3. Дайте определение состоятельной, смещенной и эффективной оценки.
4. Назовите методы нахождения доброкачественной оценки.
5. В чем суть метода момента?
6. Какая функция называется функцией правдоподобия?
7. Под каким условием определяется оценка параметра методом максимального правдоподобия?
8. Под каким условием определяется оценка параметра методом наименьших квадратов?
9. Напишите формулу по которой определяется оценка математического ожидания при равноточных измерениях.
10. Напишите формулы Гаусса и Бесселя для определения средней квадратической ошибки одного измерения.
11. Когда используется формула Гаусса, а когда формула Бесселя?
12. В чем суть доверительного оценивания параметров?

13. Как строится доверительный интервал для математического ожидания случайной величины или для истинного значения измеряемой величины?
14. Назовите критерии точности измерений.
15. Какова связь среднего квадратического отклонения и средней квадратической ошибки?
16. Дайте определение среднего отклонения и средней ошибки. Как они вычисляются?
17. Дайте определение вероятного отклонения и вероятной ошибки. Как они вычисляются?
18. Как связаны среднее и вероятное отклонения со средним квадратическим отклонением.
19. Как определяется средняя квадратическая ошибка при наличии систематической ошибки?
20. В чем суть критерия наличия систематической составляющей в ряде истинных ошибок измерений?

Задачи с решениями

Задача 1. Задан ряд истинных ошибок измерений Δ_i , объем выборки $n=10$: 0,70; -0,79; 1,06; 0,61; -1,40; 0,40; 1,36; 0,89; 0,59; -0,81. Определить точечные оценки для математического ожидания, среднего квадратического отклонения, вероятного отклонения, среднего отклонения.

Решение. Используя метод моментов, определим данные оценки.

$$M_{\Delta}^* = \bar{\Delta} = \frac{[\Delta]}{n} = 0,26;$$

$$\sigma_{\Delta}^* = m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}} = \sqrt{\frac{8,38}{10}} = 0,92;$$

$$m_{\Delta} = \frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{0,92}{\sqrt{10}} = 0,29.$$

Среднюю ошибку (оценку среднего отклонения) определим по формуле

$$v^* = \frac{[|\Delta|]}{n} = \frac{8,61}{10} = 0,86.$$

Для определения вероятной ошибки (оценки вероятного отклонения) расположим исходный ряд ошибок в порядке возрастания абсолютных значений: 0,40; 0,59; 0,61; 0,70; -0,79; -0,81; 0,89; 1,06; 1,36; -1,40. Данный ряд содержит четное число ошибок. Следовательно, вероятную ошибку следует определять, как среднее значение из абсолютных значений двух ошибок, находящихся в середине данного ряда. Таким образом,

$$r^* = \frac{|-0,79| + |-0,81|}{2} = 0,80.$$

Задача 2. Для условий предыдущей задачи определить доверительные интервалы для Δ и σ_{Δ} .

Решение. Доверительный интервал для истинного значения X имеет вид $\bar{\Delta} - t_{\alpha} m_{\Delta} < \Delta < \bar{\Delta} + t_{\alpha} m_{\Delta}$. Коэффициент Стьюдента находим из таблиц по вероятности $\alpha=0,9$ и числу степеней свободы $n=10$, $t_{\alpha}=1,8$. Подставив численные значения в данное неравенство, получим

$$0,26 - 1,8 \cdot 0,29 < \Delta < 0,26 + 1,8 \cdot 0,29,$$

откуда, окончательно $-0,26 < \Delta < 0,78$. Доверительный интервал для среднего квадратического отклонения $\gamma_1 m_{\Delta} < \sigma_{\Delta} < \gamma_2 m_{\Delta}$. Для вероятности 0,90 значения коэффициентов $\gamma_1=0,74$ и $\gamma_2=1,60$. Отсюда, $0,21 < \sigma_{\Delta} < 0,46$. Используя выражение (2.48), установим наличие систематической ошибки в данной выборке: $|\Delta| < 2,5 [|\Delta|] / \sqrt{n}$. Отсюда, $2,61 < 6,80$. Поскольку данное неравенство выполнено, то по данному критерию систематическая составляющая в данной выборке отсутствует.

Задача 3. В результате измерений одного и того же угла получены 12 значений. Все измерения выполнены наблюдателем в одинаковых условиях, одним прибором, одинаковым числом приемов, т.е. с одной и той же средней квадратической ошибкой. Требуется произвести обработку ряда равноточных измерений.

Решение приведено в таблице.

Номер измерения	Результат измерения	v_i	v_i^2	ε_i	ε_i^2
1	57°23'44"	-0,7	0,49	4	16
2	40"	-4,7	22,1	0	0
3	43"	-1,7	2,89	3	9
4	45"	0,3	0,09	5	25
5	46"	1,3	1,69	6	36
6	43"	-1,7	2,89	3	9
7	48"	3,3	10,9	8	64
8	45"	0,3	0,09	5	25
9	48"	3,3	10,9	8	64
10	46"	1,3	1,69	6	36
11	47"	2,3	5,29	7	49
12	41"	-3,7	13,7	1	1
	$x' = 57^{\circ}23'40''$ $\bar{x}_{\text{окр}} = 57^{\circ}23'44,7''$ $\bar{x} = 57^{\circ}23'44,67''$	$\Sigma_- = -12,5$ $\Sigma_+ = +12,1$ $\Sigma = -0,4$	$\Sigma = 72,9$	$\Sigma = 56$	$\Sigma = 334$

$$\frac{[\varepsilon]}{n} = \frac{56}{12} = 4,67''; \quad \bar{x} = x' + \frac{[\varepsilon]}{n} = 57^\circ 23' 40'' + \frac{56}{12} = 57^\circ 23' 44,67''.$$

Контроль: $\Delta_{\text{окр}} = \bar{x}_{\text{окр}} - \bar{x} = 57^\circ 23' 44,7'' - 57^\circ 23' 44,67''; \quad \Delta_{\text{окр}} = 0,03'';$

$$-n\Delta_{\text{окр}} = 0,03'' \cdot 12 = -0,4''; \quad [v^2] = [\varepsilon^2] - \frac{[\varepsilon]^2}{n} = 334 - \frac{56^2}{12} = 72.$$

$$m = \sqrt{72,9/11} = 2,57''; \quad m_m = \frac{m}{\sqrt{2n}} = 0,55'';$$

$$M = m_{\bar{x}} = 2,57/\sqrt{12} = 0,74; \quad m_M = \frac{M}{\sqrt{2n}} = 0,16''.$$

Доверительные интервалы:

для X: $\bar{x} - tm_{\bar{x}} < X < \bar{x} + tm_{\bar{x}}$

$$57^\circ 23' 44,67'' - 2,2 \cdot 0,74 < X < 57^\circ 23' 44,67'' + 2,2 \cdot 0,74;$$

$$57^\circ 23' 43,04'' < X < 57^\circ 23' 46,30'';$$

для среднего квадратического отклонения: $\gamma_1 m_{\bar{x}} < \sigma_{\bar{x}} < \gamma_2 m_{\bar{x}}$.

Для вероятности 0.95 значения коэффициентов $\gamma_1 = 0,71$ и $\gamma_2 = 1,70$, отсюда, $0,52 < \sigma_{\bar{x}} < 1,26$.

§2.4. Обработка и оценка точности неравноточных измерений

Понятие весов

Неравноточными называются измерения, дисперсии которых не равны между собой. К ним следует отнести измерения, выполненные приборами различной точности или в существенно различных условиях. В то же время выбор модели равноточных или неравноточных измерений прежде всего определяется общими соображениями и основан на накопленном опыте. Например, величины углов, измеренных разными наблюдателями, но теодолитами одинаковой точности, считают равноточными.

Неравноточные измерения характеризуются, кроме средних квадратических ошибок, весами, которые являются относительной мерой точности. Вес определяют как отношение дисперсий: измерения, принятого для всего ряда за эталон, и измерения, вес которого вычисляют, т.е.

$$P_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}, \quad (2.51)$$

где σ_i — среднеквадратическое отклонение i -го измерения; P_i — вес этого измерения; σ_0 — среднеквадратическое отклонение эталонного измерения.

Таким образом, вес определяет соотношение точностей эталонного и i -го измерений. При равенстве средних квадратических отклонений эталонного и i -го измерений, вес $P_i=1$. Следовательно, σ_0^2 — это дисперсия измерения, вес которого равен единице (дисперсия единицы веса).

Если значения средних квадратических отклонений неизвестны, используют их оценки, т.е. средние квадратические ошибки и тогда

$$P_i \approx \frac{\mu^2}{m_i^2}. \quad (2.52)$$

Вес, определенный по формуле (2.52), является приближенным.

Необходимо отметить, что эталонное измерение с весом, равным единице, может быть как реально выполненным, так и фиктивным. Выбор эталонного измерения произволен и определяется исходя из удобства вычислений.

Часто, пользуясь свободой выбора σ_0 и μ , веса измерений можно установить, не зная σ_i или m_i . При вычислении весов достаточно учитывать две значащие цифры.

Примеры.

1. Пусть одним и тем же прибором измерено n линий длиной S_i . Определить веса измерений.

Решение. Полагая, что измерение каждого километра линии выполняется с одним и тем же средним квадратическим отклонением, выберем в качестве эталонного измерения — измерение линии длиной 1 км. Тогда $\sigma_{1\text{км}} = \sigma_0$. Будем считать, что каждую измеряемую линию S_i можно представить как сумму k отрезков $S_j=1$ км, т.е. $S_i=S_1+S_2+\dots+S_k$, тогда, можно написать

$$\sigma_{S_i}^2 = \sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial S_i}{\partial S_j} \right)^2 \sigma_{S_{1\text{км}}}^2 = \sum_{j=1}^k (1)^2 \sigma_0^2 = \sigma_0^2 k.$$

Здесь j — номер километрового отрезка в линии S_i ; k — число километровых отрезков в линии S_i . Отсюда вес измерения данной линии

$$P_{S_i} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{S_i}^2 k} = \frac{1}{k}.$$

В данных вычислениях за измерение с весом, равным единице, принято фиктивное измерение линии, длиной 1 км.

2. Измерено несколько углов одним прибором числом приемов n_i каждый. Найти веса средних значений каждого угла.

Решение.

Обозначив среднее квадратическое отклонение измерения угла одним приемом через σ_1 , имеем

$$\sigma_{\text{ср}}^2 = \sigma_1^2/n_i; \quad P_i = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_{\text{ср}}^2} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2/n_i} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2/n_i} = n_i.$$

За эталонное измерение с весом, равным единице, принято измерение угла одним приемом, поэтому $\sigma_0 = \sigma_1$. Получили, что $P_i = n_i$. Если за эталонное измерение принять среднее значение угла из C приемов, то $\sigma_0^2 = \sigma_1^2/C$, то в этом случае, вес среднего значения i -го угла из n_i приемов будет

$$P_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{\text{ср}}^2} = \frac{\sigma_1^2/C}{\sigma_1^2/n_i} = \frac{n_i}{C}.$$

3. Вычислена сумма углов n_i -угольника измеренных одним и тем же прибором, например, найдена сумма углов в треугольнике ($n_i=3$). Найти вес суммы.

Решение. Обозначив СКО измерения одного угла в n_i -угольнике через σ_1 , СКО

суммы углов представим в виде $\sigma_i = \sigma_1\sqrt{n_i}$, а вес $P_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2 n_i}$.

Если $\sigma_0 = \sigma_1$, то $P_i = 1/n_i$. Если имеется функция $u = x\sqrt{P}$, где x — результат измерения, а P — его вес, то вес такой функции определяют по формуле $P_u = \left(\sqrt{P}\right)^2 \frac{1}{P} = 1$.

Следовательно, при умножении результата измерения на корень квадратный из его веса, вес произведения будет равен единице. По этому принципу и осуществляется приведение неравноточных измерений к равноточным.

Учитывая формулу (1.22) легко определить обратный вес функции независимых аргументов $Y=f(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Действительно, разделив в выражении (1.22) левые и правые части на σ_0^2 , можно вычислить обратный вес функции

$$\frac{1}{P_Y} = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \right)_0^2 \frac{1}{P_{X_i}}. \quad (2.53)$$

Примеры.

1. В треугольнике измерены три угла β_i со средними квадратическими ошибками одного измерения и числом приемов, соответственно равными $m_1=3''$; $n_1=4$; $m_2=4''$; $n_2=9$; $m_3=5''$; $n_3=12$. Найти веса среднего значения каждого угла и вес невязки, приняв за ошибку единицы веса ошибку $\mu = m_1$.

Решение. Веса средних значений углов определим по формуле $P_i = \frac{\mu}{M_i^2}$, где $M_i = m_i/\sqrt{n_i}$, причем $\mu = m_1$. Имеем:

$$P_1 = \frac{m_1^2}{m_1^2} n_1 = 4; \quad P_2 = \frac{m_1^2}{m_2^2} n_2 = \frac{9}{16} \cdot 9 = 5,1; \quad P_3 = \frac{m_1^2}{m_3^2} n_3 = \frac{9}{25} \cdot 12 = 4,3.$$

Вес невязки найдем по формуле (2.53), где $u = \Sigma \beta_i - 180^\circ$, а именно

$$1/P_u = 1/P_1 + 1/P_2 + 1/P_3 = 0,25 + 0,20 + 0,23 = 0,68,$$

тогда $P_u = 1,47$.

2. Найти вес приращения координат $\Delta x = S \cos \alpha$, приняв m_S за ошибку единицы веса μ .

Решение. Имеем $\frac{1}{P_{\Delta x}} = \frac{1}{P_S} \cos^2 \alpha + \frac{1}{P_\alpha} S^2 \sin^2 \alpha$; $P_S = \frac{\mu^2}{m_S^2} = 1$; $P_\alpha = \frac{m_S^2}{m_\alpha^2}$.

При этом ошибку m_α следует выразить в радианах, т.е. m_α разделить на ρ .

3. Найти вес функции

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i P_i}{\sum_{i=1}^n P_i}, \quad (2.54)$$

где x_i — результаты измерения, P_i — их веса.

Решение. Известно, что $\frac{\partial \bar{x}}{\partial x_i} = \frac{P_i}{\sum_{i=1}^n P_i}$, поэтому

$$\frac{1}{P_{\bar{x}}} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{P_i}{\sum_{i=1}^n P_i} \right)^2 \frac{1}{P_i} = \frac{\sum_{i=1}^n P_i}{\left(\sum_{i=1}^n P_i \right)^2} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n P_i}; \quad P_{\bar{x}} = \sum_{i=1}^n P_i. \quad (2.55)$$

При вычислении весов однородных результатов измерений по формулам (2.51) или (2.52) размерность $C = \sigma_0^2$ (или μ^2) принимают равной размерности σ_i^2 (m_i^2). В этом случае вес — величина безразмерная.

Если измерения неоднородны, то веса необходимо выбирать таким образом, чтобы после вычисления P по неоднородным измерениям некоторых однородных величин веса последних были бы одной размерности.

Например, пусть требуется определить среднее весовое значение отметки репера, полученной из геометрического и тригонометрического нивелирования, выполненных при одной постановке прибора на базе B . Для упрощения ситуации можно принять, что угол наклона $\nu=0^\circ$.

Пусть $m_\nu=5''$, а средняя квадратическая ошибка отметки, полученная из геометрического нивелирования, $m_H^\Gamma = 5$ мм. Примем эту ошибку за среднюю квадратическую ошибку единицы веса μ .

Данную задачу можно решить с использованием формул (1.22). С учетом того, что $\nu=0^\circ$, среднюю квадратическую ошибку m_H^T можно выразить в виде

$$m_H^T = \sqrt{\left(\frac{\partial H}{\partial \nu}\right)^2 \frac{m_\nu^2}{\rho^2}} = \frac{B}{\cos^2 \nu} \frac{m_\nu}{\rho} = \frac{B}{\rho} m_\nu, \quad (2.56)$$

где $H^T = H_{\text{исх}} + B \operatorname{tg} \nu$.

Отсюда

$$P_H^T = \frac{(m_H^\Gamma)^2}{(m_H^T)^2} = \frac{(m_H^\Gamma)^2}{m_\nu^2} \frac{\rho^2}{B^2} = \frac{\rho^2}{B^2}. \quad (2.57)$$

По формуле (2.56) и из геометрического нивелирования получены средние квадратические ошибки отметок точек, являющихся однородными величинами. При $\mu = m_H^\Gamma$, веса P_H^Γ и P_H^T являются безразмерными величинами. Далее для определения среднего весового значения отметки можно воспользоваться формулой (2.54).

Эту же задачу можно решить с использованием формулы (2.53), для чего необходимо установить веса измерений, являющихся неоднородными. Так

$$P_H^\Gamma = 1; \quad P_\nu = \frac{(m_H^\Gamma)^2}{m_\nu^2 / \rho^2} = \frac{S^2}{S^2} \rho^2 = \rho^2.$$

Далее

$$\frac{1}{P_H^T} = \left(\frac{\partial H}{\partial \nu}\right)^2 \frac{1}{P_\nu} = \frac{B^2}{\cos^4 \nu} \frac{1}{\rho^2} = \frac{B^2}{\rho^2}$$

и P_H^T совпадает с (2.57).

Тот же самый результат можно получить, если назначить вес P_H^T , исходя из соотношения m_H^T и m_v , которые с базисом B образуют прямоугольный треугольник:

$$m_H^T = \frac{m_v}{\rho} B; \quad P_H^T = \frac{(m_H^T)^2}{m_v^2 B^2} \rho^2 = \frac{\rho^2}{B^2}. \quad (2.58)$$

В этом случае вес будет приближенным, поскольку в отличие от предыдущих способов остается неучтенным значение угла v . Результаты совпали только благодаря тому, что угол наклона v был равным нулю. На практике результаты, полученные с помощью формулы (2.58), считаются удовлетворительными.

Необходимо отметить, что при уравнивании линейно-угловых построений вес угла обычно вычисляются по формуле

$$P_\beta = \frac{m_S^2}{m_\beta^2}. \quad (2.59)$$

Это не противоречит приведенным рассуждениям, так как при уравнивании, величина ρ входит в коэффициенты уравнений поправок и свободный член l .

Обобщенная формула оценки точности для определения обратной весовой матрицы вектор-функции

Учитывая формулы (1.60), (1.61) или (1.62), (1.63), легко определить обратный вес функции $Y=f(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Действительно, разделив в выражениях (1.60) и (1.61) левые и правые части на σ_0^2 , и учитывая (2.51), обратный вес функции аргументов можно вычислить по формуле:

для коррелированных

$$\frac{1}{P_Y} = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \right)_0 \frac{1}{P_{X_i}} + 2 \sum_{i < j} \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \right)_0 \left(\frac{\partial f}{\partial X_j} \right)_0 \frac{r_{X_i X_j}}{\sqrt{P_{X_i} P_{X_j}}}; \quad (2.60)$$

для некоррелированных аргументов

$$\frac{1}{P_Y} = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \right)_0^2 \frac{1}{P_{X_i}}. \quad (2.61)$$

Формулу (2.60) можно обобщить на случай, когда необходимо определить веса совокупности нескольких функций, образующих

вектор-функцию (многомерный случай). Для этого вводится понятие обратной весовой матрицы, которая связана с корреляционной матрицей следующим соотношением:

$$\mathbf{P}_X^{-1} = \frac{1}{\sigma_0^2} \mathbf{K}_X, \quad (2.62)$$

где

$$\mathbf{P}_X^{-1} = \mathbf{Q}_X = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1n} \\ Q_{21} & Q_{22} & \dots & Q_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{1n} & Q_{2n} & \dots & Q_{nn} \end{pmatrix}. \quad (2.63)$$

Из определения корреляционной матрицы и формулы (2.62) становится ясным смысл элементов обратной весовой матрицы, представляющих собой матрицу

$$\mathbf{P}_X^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{m_{x_1}^2}{\mu^2} & \frac{K_{x_1 x_2}}{\mu^2} & \dots & \frac{K_{x_1 x_n}}{\mu^2} \\ \frac{K_{x_1 x_2}}{\mu^2} & \frac{m_{x_2}^2}{\mu^2} & \dots & \frac{K_{x_2 x_n}}{\mu^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{K_{x_1 x_n}}{\mu^2} & \frac{K_{x_2 x_n}}{\mu^2} & \dots & \frac{m_{x_n}^2}{\mu^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{P_{x_1}} & \frac{r_{x_1 x_2}}{\sqrt{P_{x_1} P_{x_2}}} & \dots & \frac{r_{x_1 x_n}}{\sqrt{P_{x_1} P_{x_n}}} \\ \frac{r_{x_1 x_2}}{\sqrt{P_{x_1} P_{x_2}}} & \frac{1}{P_{x_2}} & \dots & \frac{r_{x_2 x_n}}{\sqrt{P_{x_2} P_{x_n}}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{r_{x_1 x_n}}{\sqrt{P_{x_1} P_{x_n}}} & \frac{r_{x_2 x_n}}{\sqrt{P_{x_2} P_{x_n}}} & \dots & \frac{1}{P_{x_n}} \end{pmatrix}.$$

Далее разделив в формуле (1.59) левую и правую часть на дисперсию единицы веса, можно получить

$$\frac{1}{\sigma_0^2} \mathbf{K}_Y = \frac{1}{\sigma_0^2} \mathbf{A} \mathbf{K}_X \mathbf{A}^T. \quad (2.64)$$

Откуда получим обратную весовую матрицу вектор-функции Y :

$$\mathbf{P}_Y^{-1} = \mathbf{A} \mathbf{P}_X^{-1} \mathbf{A}^T \quad (2.65)$$

или

$$\mathbf{Q}_Y = \mathbf{A} \mathbf{Q}_X \mathbf{A}^T. \quad (2.66)$$

Формула (2.66) — есть обобщенная формула оценки точности применительно к обратной весовой матрице.

Обработка ряда неравноточных измерений

Если имеется ряд независимых измерений (x_1, x_2, \dots, x_n) с весами, соответственно равными (P_1, P_2, \dots, P_n) , то в этом случае наилучшей оценкой для математического ожидания $M(X)$ (а при отсутствии систематических ошибок — для истинного значения X), является общая арифметическая средина (весовая средняя)

$$\bar{x} = \frac{[Px]}{[P]}. \quad (2.67)$$

Для дисперсии единицы веса — квадрат средней квадратической ошибки

$$\mu^2 = \frac{[Pv^2]}{n-1} \quad (2.68)$$

(формула Бесселя для неравноточных измерений). При этом, как и ранее, $v_i = x_i - \bar{x}$ отклонения от общей арифметической средины обладают свойствами: $[Pv]=0$; $[Pv^2]=\min$.

Это можно доказать, используя метод максимального правдоподобия. Так как x_i подчиняются нормальному распределению, то функция правдоподобия имеет вид

$$L = L(x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, a_2) = \prod_{i=1}^n L(x_i, a_1, a_2), \quad (2.69)$$

где $a_1 = M(X)$; $a_2 = \sigma_0^2$; x_i — значение i -го измерения с весом $P_i = \sigma_0^2 / \sigma_i^2$. Следовательно, L можно определить по формуле

$$L(x_i, a_1, a_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-\frac{(x_i - a_1)^2}{2\sigma_i^2}} \quad (2.70)$$

или учитывая, что $\sigma_i^2 = \sigma_0^2 / P_i$,

$$L(x_i, a_1, a_2) = \frac{\sqrt{P_i}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{a_2}} e^{-\frac{(x_i - a_1)^2 P_i}{2a_2}}, \quad (2.71)$$

откуда

$$L = \prod_{i=1}^n L(x_i, a_1, a_2) = \frac{\sqrt{P_1 P_2 \dots P_n}}{(\sqrt{2\pi})^n} a_2^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n P_i (x_i - a_1)^2}{2a_2}}. \quad (2.72)$$

Логарифм выражения (2.72) определяют по формуле

$$\ln L = \ln \frac{\sqrt{P_1 P_2 \dots P_n}}{(\sqrt{2\pi})^n} - \frac{n}{2} \ln a_2 - \frac{\sum_{i=1}^n P_i (x_i - a_1)^2}{2a_2}. \quad (2.73)$$

Для определения максимума данной функции необходимо составить и решить два уравнения: $\frac{\partial \ln L}{\partial a_1} = 0$; $\frac{\partial \ln L}{\partial a_2} = 0$

или

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a_1} = - \frac{\sum_{i=1}^n P_i (x_i - a_1^*)}{a_2^*} = 0; \quad (2.74)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a_2} = - \frac{n}{2a_2^*} + \frac{\sum_{i=1}^n P_i (x_i - a_1^*)^2}{2(a_2^*)^2} = 0. \quad (2.75)$$

Из уравнения (2.74) следует, что $\sum_{i=1}^n P_i x_i = a_1^* \sum_{i=1}^n P_i$. Тогда оценкой

математического ожидания будет $a_1^* = \frac{[Px]}{[P]} = \bar{x}$.

Из уравнения (2.75) можно найти оценку дисперсии единицы веса $a_2^* = \frac{[P\sigma^2]}{n}$, где $v_i = x_i - \bar{x}$.

В §2.3 было показано, что в случае равноточных измерений оценки $a_1^* = \bar{x}$ и $\frac{n-1}{n} a_2^*$ являются доброкачественными.

Аналогично можно доказать справедливость данного утверждения и для случая неравноточных измерений. Следовательно, несмещенной оценкой a_2^* является величина μ^2 , определяемая по

формуле Бесселя $\mu = \sqrt{\frac{[P\sigma^2]}{n-1}}$.

Из уравнения (2.74) следует, что $[Pv]=0$.

Максимум функции L достигается при выполнении условия метода наименьших квадратов $[Pv^2]=\min$. Следовательно, оценки, получаемые методом максимального правдоподобия и наименьших квадратов в случае ряда измерений, подчиняющихся нормальному распределению, совпадают.

Величина \bar{x} определяется с ошибкой $m_{\bar{x}} = M = \mu/\sqrt{[P]}$, а при наличии систематических ошибок $M = \sqrt{\frac{\mu^2}{[P]} + c^2}$. Для определения средних квадратических ошибок самих ошибок используют формулы

$$m_{\mu} = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}}; \quad m_M = \frac{m_{\mu}}{\sqrt{[P]}}.$$

Доверительные интервалы для истинного значения X и дисперсии единицы веса строят так же, как и при обработке равноточных измерений. Они имеют вид:

$$\bar{x} - t_{\alpha} m_{\bar{x}} < X < \bar{x} + t_{\alpha} m_{\bar{x}}; \quad \gamma_1^2 \mu^2 \leq \sigma_0^2 \leq \gamma_2^2 \mu^2.$$

Для σ_0 и $\sigma_{\bar{x}}$ доверительные интервалы будут следующими:

$$\gamma_1 \mu \leq \sigma_0 \leq \gamma_2 \mu; \quad \gamma_1 m_{\bar{x}} \leq \sigma_{\bar{x}} \leq \gamma_2 m_{\bar{x}}.$$

Если известны истинные ошибки измерений $\Delta_i = x_i - X$, то задача сводится к оценке точности измерений по формуле Гаусса

$$\mu^2 = \frac{[P\Delta^2]}{n}.$$

Вычисления при обработке ряда неравноточных измерений выполняют в следующем порядке.

1. Вместо выражения (2.54) применяют формулу $\bar{x} = x' + [P\varepsilon]/[P]$, где $\varepsilon_i = x_i - x'$; x' — приближенное значение для X .

2. Определяют уклонения v_i и выполняют контроль $[Pv] = -\Delta_{\text{окр}}[P]$, где ошибка округления при вычислении \bar{x} будет $\Delta_{\text{окр}} = \bar{x}_{\text{окр}} - \bar{x}$.

3. Вычисляют $[Pv^2]$ с контролем

$$[Pv^2] = [P\varepsilon^2] - \frac{[P\varepsilon]^2}{[P]}, \quad (2.76)$$

ошибки μ , M , m_μ , m_M или строят доверительные интервалы. Результат записывают в виде выражения $x_{\text{окр}} \pm M$ или доверительного интервала.

Докажем контрольные равенства для $[Pv]$ и $[Pv^2]$.

При вычислениях используют округленное значение $\bar{x}_{\text{окр}}$, поэтому $v_i = x_i - \bar{x} - \Delta_{\text{окр}}$. Таким образом, $[Pv] = [Px] - [P]\bar{x} - [P]\Delta_{\text{окр}}$, так как $[Px] = [P]\bar{x}$, то $[Pv] = -\Delta_{\text{окр}}[P]$.

Если образовать разность $v_i - \varepsilon_i = x_i - \bar{x} - x_i + x' = -\frac{[P\varepsilon]}{[P]}$, то

$$\varepsilon_i = v_i + \frac{[P\varepsilon]}{[P]}.$$

После возведения левой и правой частей данных равенств в квадрат, умножения на P_i и сложения их по i можно получить:

$$[P\varepsilon^2] = [Pv^2] + 2[Pv]\frac{[P\varepsilon]}{[P]} + [P]\left(\frac{[P\varepsilon]}{[P]}\right)^2.$$

Так как $[Pv]=0$, то $[Pv^2] = [P\varepsilon^2] - \frac{[P\varepsilon]^2}{[P]}$.

Пример.

Произвести математическую обработку средних значений одного угла x_i , измеренного разным числом приемов n_i . Для удобства вычислений целесообразно применять формулу $P_i = n_i/3$. Вычисления выполняют в таблице.

Решение

Номер измерения	x_i	n_i	p_i	ε_i	$p_i\varepsilon_i$	$p_i\varepsilon_i^2$	v_i	p_iv_i	$p_iv_i^2$
1	89°47'16"	6	2	+10	+20	200	+6	+12	72
2	09	18	6	+3	+18	54	-1	-6	6
3	06	3	1	0	0	0	-4	-4	16
4	10	15	5	+4	+20	80	0	0	0
5	23	6	2	+7	+14	98	+3	+6	18
6	08	12	4	+2	+8	16	-2	-8	16
$x' = 89°47'06''$			$\Sigma=20$		$\Sigma=80$	$\Sigma=448$		$\Sigma=0$	$\Sigma=128$

$$\frac{[P\varepsilon]}{[P]} = 4,0; \quad \bar{x} = 89°47'10,0''; \quad \Delta_{\text{окр}} = 0; \quad \mu = \sqrt{\frac{128}{5}} = 5,1''; \quad M = \frac{5,1}{\sqrt{20}} = 1,1''.$$

Средние квадратические ошибки также являются случайными величинами. Следовательно, для них тоже можно найти средние квадратические ошибки (ошибки ошибок) по следующим формулам:

$$m_{\mu} = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{5,1}{\sqrt{10}} = 1,6''; \quad m_M = \frac{m_{\mu}}{\sqrt{[P]}} = 0,36''.$$

Таким образом, получен результат $89^{\circ}47'10,0''+1,1''$.

Доверительный интервал при $\alpha=0,95$ имеет вид $89^{\circ}47'07,2'' < X < 89^{\circ}47'12,8''$.

Коэффициент $t_{\alpha}=2,57$ выбираем из таблиц распределения Стьюдента (приложение 2) по $\alpha=0,95$ и числу степеней свободы $r=6-1=5$. Для построения доверительного интервала для $\sigma_{\bar{x}}$ по таблицам распределения χ^2 по числу степеней свободы $r=n-1$ и вероятности $\alpha=0,95$ находим $\gamma_1=0,624$; $\gamma_2=2,45$. Тогда $3,18'' < \sigma_0^2 < 12,45''$. Далее строим доверительные интервалы $1,8'' < \sigma_0 < 3,5''$ и $0,40'' < \sigma_{\bar{x}} < 0,78''$.

Оценка точности по разностям двойных равноточных и неравноточных измерений

На практике часто производят так называемые двойные измерения, когда каждую из однородных величин измеряют дважды. При этом оценку их точности осуществляют по разностям измеренных значений одной и той же величины.

Пусть некоторые однородные величины X_1, X_2, \dots, X_n измерены дважды и получены результаты:

первого измерения x_1, x_2, \dots, x_n ;

второго измерения x'_1, x'_2, \dots, x'_n .

При отсутствии систематических ошибок вычисленные разности двойных измерений

$$d_i = x_i - x'_i \tag{2.77}$$

можно рассматривать как истинные ошибки величины d , истинное значение которого равно нулю. Для оценки точности d можно использовать формулу Гаусса. Для равноточных измерений

$$m_d = \sqrt{\frac{[d^2]}{n}}, \tag{2.78}$$

с учетом формулы (2.77) $m_d^2 = 2m_x^2$. Следовательно, среднюю квадратическую ошибку одного измерения можно выразить в виде

$$m_x = \frac{m_d}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}}. \tag{2.79}$$

При двойных равноточных измерениях в дальнейшую обработку включают среднее по двум наблюдениям $\bar{x}_i = \frac{x_i + x'_i}{2}$, средняя квадратическая ошибка которого

$$m_{\bar{x}_i} = \frac{m_x}{\sqrt{2}} = \frac{m_d}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[d^2]}{n}}. \quad (2.80)$$

Если в измерениях x_i присутствуют постоянные систематические ошибки, то

$$M(d_i) = M(X_i) - M(X'_i) = X_i + C - X_i - C'_i = C_i - C'_i. \quad (2.81)$$

Математическое ожидание разностей d_i равно разности систематических ошибок в двойных измерениях, эту остаточную часть можно исключить. Для ее определения используют критерий (2.48), подставив вместо истинных ошибок Δ_i значения разностей d_i ,

$$[d] \leq 2,5 \frac{[d]}{\sqrt{n}}. \quad (2.82)$$

Если данное неравенство выполняется, то считают, что остаточная составляющая систематической ошибки отсутствует, и оценку точности выполняют по формулам (2.78)–(2.80).

Если условие (2.82) не выполняется, то следует исключить систематическую составляющую из разностей d_i . При этом $v_{d_i} = d_i - \bar{d}$, где $\bar{d} = [d]/n$ можно трактовать как уклонение от среднего арифметического и, следовательно, для оценки точности необходимо применить формулу Бесселя

$$m_d = \sqrt{\frac{[v_d^2]}{n-1}}. \quad (2.83)$$

Формулы для m_x и $m_{\bar{x}}$ аналогичны выражениям (2.79) и (2.80):

$$m_x = \frac{m_d}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[v_d^2]}{2(n-1)}}; \quad (2.84)$$

$$m_{\bar{x}} = \frac{m_x}{\sqrt{2}} = \frac{m_d}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[v_d^2]}{(n-1)}}. \quad (2.85)$$

Должны выполняться и контрольные равенства:

$$[v_d] = -n\Delta_{\text{окр}}, \quad (2.86)$$

где $\Delta_{\text{окр}} = \bar{d}_{\text{окр}} - \bar{d}$;

$$[v_d^2] = [d^2] - \frac{[d]^2}{n}. \quad (2.87)$$

Иногда вместо неравенства (2.82) используют более жесткий критерий $|[d]| < 0,25[d]$.

Пример.

Даны результаты нивелирования между точками при двух положениях нивелира. Вычислить средние квадратические ошибки одного измерения и среднего из двойных.

Решение.

Номер измерения	x_i	x'_i	d	v_d	v_d^2
1	+1,273	+1,270	+3	+1	1
2	+0,987	+0,988	-1	-3	9
3	+1,069	+1,065	+4	+2	4
4	+0,542	+0,542	0	-2	4
5	+0,768	+0,766	+2	0	0
6	+0,895	+0,891	+4	+2	4
7	+1,166	+1,166	-1	-3	9
8	+1,304	+1,304	+2	0	0
9	+1,198	+1,194	+4	+2	4
10	+0,484	+0,481	+3	+1	1
		Σ	+20	0	36
		$[d]$	24		

Используем критерий (2.82). Имеем $20 \geq 2,5 \frac{2,4}{\sqrt{10}} \approx 19,0$. Следовательно, неравенство (2.82) не выполняется, поэтому для вычислений используем формулу Бесселя. Определим $\bar{d} = \frac{[d]}{n} = +\frac{20}{10} = 2,0$ мм и m_d по формуле (2.83).

Средняя квадратическая ошибка превышения при одном положении нивелира:

$$m_x = \frac{m_d}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[v_d^2]}{2(n-1)}} = \sqrt{\frac{36}{18}} = 1,4 \text{ мм.}$$

Средняя квадратическая ошибка превышения, полученного как среднее из результатов нивелирования при двух положениях прибора, составит

$$m_{\bar{x}} = \frac{1,4}{\sqrt{2}} = 1,00 \text{ мм.}$$

Наиболее часто на практике встречаются неравноточные измерения, когда измерения внутри каждой пары равноточны, т.е. величины x_i и x_j при $i \neq j$ неравноточны, а x_i и x'_i равноточны. Таким образом, можно говорить о том, что величины x_i и x'_i имеют один и тот же вес P_i .

Очевидно, вес разности $\frac{1}{P_{d_i}} = \frac{1}{P_i} + \frac{1}{P_i} = \frac{2}{P_i}$. Отсюда $P_{d_i} = \frac{P_i}{2}$.

Поэтому при отсутствии систематических ошибок среднюю квадратическую ошибку измерения, вес которого равен единице, можно представить в виде

$$\mu = \sqrt{\frac{[P_d d^2]}{n}} = \sqrt{\frac{[P d^2]}{2n}}. \quad (2.88)$$

Тогда средняя квадратическая ошибка i -го измерения будет вычисляться по формуле $m_{x_i} = \mu / \sqrt{P_i}$, а средние квадратические ошибки средних значений $\bar{x}_i = (x_i + x'_i) / 2$,

$$m_{\bar{x}_i} = \frac{\mu}{\sqrt{2P_i}}, \quad (2.89)$$

так как $P_{\bar{x}_i} = 2P_i$.

В случае когда разности d_i содержат систематические ошибки и $\bar{d} = [pd] / [p]$ заметно отличается от нуля, то

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv_d^2]}{2(n-1)}}. \quad (2.90)$$

По аналогии с критерием (2.48) и (2.47), можно построить критерий наличия систематической составляющей для неравноточных измерений

$$|\bar{d}| \leq t_\alpha m_{\bar{d}}; \quad \frac{[P_d d]}{P_d} \leq t_\alpha \frac{\mu}{\sqrt{[P_d]}}. \quad (2.91)$$

Заменим μ на среднюю ошибку $\mu = 1,25v^*$, где $v^* = M^*(|\bar{d}|)$. Оценку математического ожидания по методу моментов определяют как среднее из выборки, но поскольку измерения неравноточные, то необходимо математическое ожидание заменить на среднее весовое

$$v^* = M(|\bar{d}|) = [P_d d] / [P_d], \quad (2.92)$$

$$\frac{[P_d d]}{P_d} \leq t_\alpha \frac{1,25 [P_d d]}{[P_d] \sqrt{[P_d]}}$$

Принимая $t_\alpha=2$, получим критерий наличия постоянной систематической ошибки

$$[P_d d] \leq 2,5 \frac{[P_d d]}{\sqrt{[P_d]}} \quad (2.93)$$

аналогичного (2.82). Неравенство (2.93) можно переписать, подставив вместо P_{d_i} веса измерений $P_i/2$, при этом

$$[Pd] \leq 3,5 \frac{[Pd]}{\sqrt{[P]}}$$

Контроль вычислений осуществляют по формулам

$$[pv_d] = -[p] \Delta_{\text{окр}} \quad \text{и} \quad [pv_d^2] = [pd^2] - \frac{[pd]^2}{[p]},$$

где $\Delta_{\text{окр}}$ — ошибка округления $\bar{d} = [Pd]/[P]$; $v_{d_i} = d_i - \bar{d}$.

Формула (2.89) для $m_{\bar{x}_i}$ применима и при наличии систематических ошибок.

Пример. Даны разности d_i двойных измерений и их веса. Требуется выполнить оценку точности.

d_i	$P_{x_i} = P_i$	$P_i d_i$	d_i^2	$P_i d_i^2$	$m_{\bar{x}_i}$
+2,4	1,11	2,67	5,8	6,4	1,1
-6,2	0,28	-1,74	38,4	10,7	2,3
-2,2	0,62	-1,36	4,8	3,0	1,5
+1,3	0,32	0,41	1,7	0,5	2,1
-0,6	0,27	-0,16	0,4	0,1	2,3
+2,1	0,71	1,49	4,4	3,1	1,4
-4,0	0,43	-1,72	16,0	6,9	1,8
+1,4	0,45	0,63	2,0	0,9	1,8
+7,5	0,48	3,60	56,2	27,0	1,7
-1,3	0,53	-0,69	1,7	0,9	1,7
$\Sigma=0,4$	$\Sigma=5,20$	$\Sigma=3,13$	$\Sigma=131,4$	$\Sigma=59,5$	

Решение. Проверим наличие систематической составляющей, используя критерий

$$| [Pd] | \leq 3,5 \frac{[Pd]}{\sqrt{[P]}} : \quad 3,13 < 3,5 \frac{11,93}{2,28} = 18,3.$$

Так как неравенство выполняется, то принимаем гипотезу об отсутствии систематических ошибок. Поэтому средняя квадратическая ошибка единицы веса

$$\mu = \sqrt{\frac{[Pd^2]}{2n}} = \sqrt{\frac{59,4}{20}} = 1,7.$$

Значения $m_{\bar{x}_i}$, в последней графе, вычисляем по формуле (2.89).

Контрольные вопросы

1. Дайте определение веса.
2. Для какой цели введено понятие веса?
3. Можно ли определить вес, если известны средние квадратические ошибки, а σ — не известны?
4. Что такое среднее квадратическое отклонение единицы веса?
5. Как определить вес функции случайных аргументов, если известны веса этих аргументов?
6. Как выглядит функцией правдоподобия для случая неравноточных измерений?
7. Дайте определение корреляционной и обратной весовой матрицы.
8. Какие элементы корреляционной матрицы стоят на главной диагонали этой матрицы?
9. Что представляют собой недиагональные элементы корреляционной и обратной весовой матриц?
10. Запишите обобщенную формулу оценки точности.
11. Как связаны между собой корреляционная и обратная весовая матрицы?
12. Чему равен вес среднего весового?
13. Чему равен вес среднего арифметического?
14. Напишите формулу по которой определяется оценка математического ожидания при неравноточных измерениях.
15. Напишите формулы Гаусса и Бесселя для определения средней квадратической ошибки единицы веса.
16. Когда используется формула Гаусса, а когда формула Бесселя?
17. В чем суть доверительного оценивания параметров?
18. Как строятся доверительные интервалы для математического ожидания случайной величины и среднего квадратического отклонения, в случае неравноточных измерений?
19. Как строится критерий наличия систематической ошибки в случае равноточных измерений?

20. Как строится критерий наличия систематической ошибки в случае неравноточных измерений?
21. Какова последовательность оценки точности по разностям двойных равноточных измерений?
22. Какова последовательность оценки точности по разностям двойных неравноточных измерений?

Задачи с решениями

Задача. Определить вес функции случайных аргументов $S = \frac{b}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}$, если $b = 3$ м, $\sigma_b = 0,02$ мм, $\varphi = 7^\circ 12' 43,5''$, $\sigma_\varphi = 2''$.

Решение. Для определения веса P_S необходимо выбрать эталонное измерение и дисперсию единицы веса. Выберем в качестве эталонного измерения — измерение угла φ со средним квадратическим отклонением

$\sigma_0 = \sigma_\varphi$. Понятно, что $P_\varphi = 1$, а $P_b = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_b^2} = \frac{\sigma_\varphi^2}{\sigma_b^2} = \frac{4}{9}$, с размерностью $(\prime\prime)^2/\text{мм}^2$.

В этом случае $\sigma_S^2 = \left(\frac{\partial S}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 \sigma_\varphi^2$, откуда,

$$\sigma_S^2 = \left(0,5 \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}\right)^2 \sigma_b^2 + \left(\frac{b}{4 \sin^2(\varphi/2)} \frac{-1}{\rho^2}\right)^2 \sigma_\varphi^2.$$

Размерность результата в данном выражении (мм^2) должна соответствовать размерности каждого из двух слагаемых. Поэтому в формуле появилось значение одного радиана в секундах. Подставляя производные в численном виде, получим

$$\sigma_S^2 = \left(0,5 \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}\right)^2 \sigma_b^2 + \left(\frac{b}{4 \sin^2(\varphi/2)} \frac{-1}{\rho^2}\right)^2 \sigma_\varphi^2 = 0,025 + 3,379 = 3,404 \text{ мм}^2.$$

Откуда $\sigma_S = 1,85$ мм. Теперь можно определить вес расстояния S :

$P_S = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_S^2} = \frac{\sigma_\varphi^2}{\sigma_S^2} = \frac{2^2}{1,84^2} = 1,18$. Заметим, что поскольку мы имеем дело с разнородными величинами, имеющими разную размерность, вес тоже будет иметь размерность. В данном случае, размерность P_S будет $(\prime\prime)^2/\text{мм}^2$.

§2.5. Проверка статистических гипотез

Гипотезы о распределении. Критерии согласия.

Ошибки первого и второго рода

Вернемся к задаче проверки согласованности выборочных данных с каким-либо конкретным теоретическим распределением. Совершенно понятно, что при соответствии выборки и теоретического распределения, при большом объеме выборки, выборочная функция распределения $F^*(x)$ должна быть достаточно близка к функции распределения $F(x)$, рассматриваемой в качестве теоретической (гипотетической).

Для сравнения этих результатов строят меру DF отклонения $F^*(x)$ от $F(x)$. Данная мера представляет собой некоторую функцию, характеризующую отличие выборочного от теоретического распределения. При конкретных значениях выборки DF принимает конкретное числовое значение, которое и характеризует, значимо ли отличие $F^*(x)$ от $F(x)$. Поскольку DF является числовой функцией от выборки, то она случайна. Если данное распределение установлено и известна функция распределения, то можно вычислить вероятности $\beta = P(DF > D)$, где D — некоторое число. При этом с увеличением D вероятность $\beta = P(DF > D)$ уменьшается. Можно установить столь малую вероятность, что событие $DF > D$ будет практически невозможным, тогда D будет называться критическим $D_{кр}$. Зная распределение DF , можно найти величину $D_{кр}$, соответствующую вероятности β , с помощью функции распределения

$$F_{DF}(D_{кр}) = P(DF < D_{кр}) = 1 - P(DF > D_{кр}) = 1 - \beta = \alpha.$$

Выбирают такие меры DF , функции распределения которых известны. Если для функции распределения $F_{DF}(D)$ составлены таблицы, то с помощью них, по значению α определяют величину $D_{кр}$.

Проверка согласованности выборочных данных с теоретическим распределением, заданным функцией распределения $F(x)$, выполняется следующим образом. По конкретной выборке и $F(x)$ определяют численное значение DF . Если DF больше $D_{кр}$, то это означает, что произошло практически невозможное событие. Следовательно, распределение $F(x)$, принятое в качестве гипотетического, значимо отличается от выборочного распределения, и гипотеза

считается опровергнутой. Если же $DF < D_{кр}$, то считают, что выборочное распределение не противоречит гипотезе (теоретическому распределению). При такой проверке вероятность β носит название уровня значимости (иногда уровень значимости обозначают через $\beta_{кр}$), а критерий — критерия согласия.

Так как проверку гипотезы, как правило, осуществляют по единственной выборке, то возможны ошибки в ее принятии или опровержении. Действительно, гипотезу отвергают на основании неравенства $DF > D_{кр}$. Но данное неравенство, хотя и очень редко, но может выполняться в рамках принятой гипотезы, а именно с вероятностью β . В математической статистике принято опровержение верной гипотезы называть ошибкой первого рода, принятие же неверной гипотезы — ошибкой второго рода.

Чтобы уменьшить возможность ошибок второго рода, в математической статистике делают повторные проверки согласованности распределения выборочных значений с гипотетическим.

Критерий Пирсона

Мера отклонения DF может быть определена различными способами. Чаще всего для проверки гипотез используют критерий согласия χ^2 (данный критерий введен К. Пирсоном).

В критерии Пирсона в качестве меры отклонения DF используют величину

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(k_i - nP_i)^2}{nP_i}. \quad (2.94)$$

Определим математическое ожидание данной случайной величины

$$M(\chi^2) = \sum_{i=1}^N \frac{M(k_i - nP_i)^2}{nP_i} = \sum_{i=1}^N \frac{D_{k_i}}{nP_i} = \sum_{i=1}^N \frac{np_i q_i}{np_i} = \sum_{i=1}^N (1 - p_i) = N - 1.$$

К. Пирсон доказал теорему о том, что величина χ^2 , определяемая по формуле (2.94), при $n \rightarrow \infty$ стремится к χ^2 -распределению с $N-1$ степенями свободы.

Критерий согласия χ^2 состоит в следующем. Если задано критическое значение $\chi_{\beta_{кр}}^2$ с уровнем значимости $\beta_{кр}$ и полученное по формуле (2.94) значение χ^2 оказалось больше $\chi_{\beta_{кр}}^2$, то это означает,

что произошло практически невозможное событие и гипотеза должна быть отвергнута. Если же $\chi^2 < \chi_{\beta_{кр}}^2$, то гипотеза принимается с уровнем значимости $\beta_{кр}$.

Заштрихованная площадь на рис. 2.5 численно равна вероятности $P(\chi^2 < \chi_{\beta}^2) = F(\chi_{\beta}^2) = 1 - \beta$; не заштрихованная — $P(\chi^2 > \chi_{\beta}^2) = 1 - F(\chi_{\beta}^2) = \beta$.

В теории ошибок часто задают некоторую критическую вероятность $\beta_{кр}$ того, что $\chi^2 > \chi_{\beta_{кр}}^2$. Затем вычисляют значение χ_{β}^2 по формуле (2.94) и по таблицам распределения χ^2 выбирают соответствующую вероятность β . Если β больше $\beta_{кр}$, и, следовательно, $\chi^2 < \chi_{\beta_{кр}}^2$, то гипотеза принимается, в противном случае отвергается.

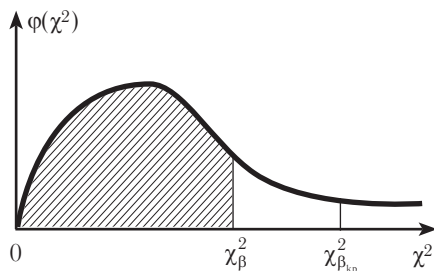


Рис. 2.5. Кривая плотности χ^2 -распределения

Обычно $\beta_{кр}$ принимают равной 0,05 или 0,10 или, выражая вероятность в процентах, что принято для уровня значимости в математической статистике, $\beta_{кр}$ равно 5 или 10%.

Рассмотренная ситуация соответствует частному случаю, когда в качестве гипотезы принято конкретное распределение с известными параметрами. На практике, однако, параметры распределения редко бывают известны. И из целого класса функций распределений конкретного вида (нормального распределения) необходимо выбрать распределение, наилучшим образом согласованное с выборочными данными. Вид распределений данного класса один и тот же. Различия функций распределения состоят в оценках параметров распределения. В этом случае вычисляют доброкачественные оценки параметров, используя методы, рассмотренные в предыдущих параграфах. В качестве функции гипотетического распределения выбирают такую, в которой теоретическим значениям параметров соответствуют их оценки a^* . Так, в случае нормального распределения

$$\varphi(a_1^*, a_2^*, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a_2^*}} e^{-\frac{(x - a_1^*)^2}{2a_2^*}}.$$

В этом случае число степеней свободы χ^2 -распределения $r=N-K-1$, где K — число оцениваемых параметров. Для нормального распределения $K=2$ и $r=N-3$. Однако, если исследуется выборка, состоящая из ошибок измерений, то, иногда, полагают, что $M(\Delta)=0$ и a_1 принимают равным нулю. При этом $r=N-2$.

Критерий А.Н. Колмогорова

Пусть имеется выборка x_1, x_2, \dots, x_n для случайной величины X и принята гипотеза, согласно которой функция распределения данной случайной величины есть $F(x)$. В качестве меры отклонения DF , А.Н. Колмогоров предложил выбрать функцию, определяющую верхнюю границу (супремум) разности $|F(x)-F^*(x)|$, т.е.

$$DF = \text{Sp} |F(x) - F^*(x)|. \quad (2.95)$$

Практически функцию DF вычисляют по формуле [6]:

$$DF = \max \left(\max_{1 \leq k \leq n} \left(\frac{k}{n} - F(x_k) \right), \max_{1 \leq k \leq n} \left(F(x_k) - \frac{k-1}{n} \right) \right). \quad (2.96)$$

Здесь k — номер элемента выборки x_k , когда все элементы расположены в порядке возрастания.

А.Н. Колмогоров доказал, что случайная величина $\sqrt{n}DF$ при $n \rightarrow \infty$ и непрерывной функции $F(x)$ стремится к распределению Колмогорова

$$P(\sqrt{n}DF < Z) \rightarrow F(Z) = \begin{cases} 0 & \text{при } Z < 0; \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 Z^2} & \text{при } Z > 0. \end{cases} \quad (2.97)$$

Для данного распределения существуют таблицы, с помощью которых по заданному уровню значимости β можно определить критическое значение $D_{\text{кр}} = \sqrt{n}DF_{\text{кр}}$. Если в результате эксперимента получено, что $DF > D_{\text{кр}}$, то согласно критерию Колмогорова с уровнем значимости β , гипотеза должна быть отвергнута. $D_{\text{кр}}$ часто вычисляют не по таблицам, а используя приближенное равенство

$$D_{\text{кр}} \approx \sqrt{\frac{1}{2n} \left(-\ln \beta - \frac{2 \ln^2 \beta + 4 \ln \beta - 1}{18n} \right)} - \frac{1}{6n}. \quad (2.98)$$

Данная формула дает хорошую точность уже при $n \geq 10$ и $0,01 \leq \beta \leq 0,20$.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение ошибок первого и второго рода.
2. В чем суть задачи проверки гипотез о распределении случайной величины?
3. Как строится мера DF ? Что это за функция и каким условиям она должна отвечать?
4. Что такое уровень значимости?
5. Как осуществляется проверка согласованности выборочных данных с теоретическим распределением?
6. Какие значения уровня значимости обычно выбирают при проверке гипотез о распределении случайной величины?
7. В чем суть использования критерия согласия?
8. Какая функция является мерой отличия статистической и теоретической функций распределения при использовании критерия Пирсона?
9. Покажите на графике функции плотности распределения суть критерия Пирсона.
10. Какая функция является мерой отличия статистической и теоретической функций распределения при использовании критерия Колмогорова?

Задачи с решениями

Задача 1. Задана выборка из генеральной совокупности ошибок измерений, объем выборки $n=48$.

$-1,38; 1,16; 0,58; 0,02; -5,68; 0,95; -0,37; 1,47; -3,94; -1,49; -0,21; -0,60; 2,21; -2,64; 0,10; -3,40; 1,94; 1,20; 3,04; 2,3; 1,62; -1,39; 0,34; 1,19; 0,25; 2,37; 2,25; -1,90; -0,00; 1,15; -1,11; -0,83; -1,78; -3,57; -0,44; 0,01; -0,65; 0,77; 1,11; 2,51; -3,69; 5,03; 2,04; -0,15; -0,89; 0,61; -3,31; 1,49$. Построить статистический ряд распределения, гистограмму распределения, выравнивающую кривую плотности. Проверить гипотезу о нормальном распределении случайной величины, для которой получена данная выборка, используя критерий Пирсона.

Решение.

1. Определим оценки количественных характеристик. Среднее арифметическое значение из элементов выборки $\bar{\Delta} = \frac{[\Delta]}{n} = -0,14$. Среднюю

квадратическую ошибку определим по формуле $m = \sqrt{\frac{[(\Delta - \bar{\Delta})^2]}{n - 1}} = 2,27$.

2. Проверим можно ли считать, что данный ряд ошибок не содержит систематической составляющей. Для этого используем критерий $|\bar{\Delta}| \leq t_{\alpha} m_{\bar{\Delta}}$. Подставим сюда значения. Левая граница равна 0,14,

правая — $t_{\alpha} m_{\bar{\Delta}} = \frac{t_{\alpha} m}{\sqrt{n}} = 2,5 \frac{2,27}{\sqrt{48}} = 0,82$. Таким образом неравенство

выполняется: $0,14 < 0,82$. Отсюда можно сделать вывод об отсутствии систематической составляющей в ошибках измерений и в дальнейшем можно считать $M_{\Delta} = 0$. В противном случае, при переходе к нормированной случайной величине необходимо использовать формулу $t = \frac{\Delta - M_{\Delta}}{m_{\Delta}}$.

Например, границы первого интервала в нашем примере следовало бы искать так:

$$t_1 = \frac{-6,84 - (-0,14)}{2,27} = -2,95; \quad t_2 = \frac{-5,70 - (-0,14)}{2,27} = -2,45.$$

Если математическое ожидание принять равным нулю, получим коэффициенты $t_1 = -3,0$ и $t_2 = -2,5$. В нашем примере, в силу выполнения неравенства $|\bar{\Delta}| \leq t_{\alpha} m_{\bar{\Delta}}$, данное отличие не сыграет существенной роли и результат будет тот же. И математическое ожидание примем равным нулю.

3. Построим статистический ряд распределения. Для этого разделим отрезок существования случайной величины на 12 интервалов, начиная от нуля влево и вправо по шесть интервалов. Таким образом длина интервала будет равна 1,14. Подсчитаем — сколько значений k_i из выборки попало в каждый интервал. Занесем в таблицу значения относительной частоты $Q_i = k_i/n$.

Параметры	Границы и номера интервалов											
	-6,84÷ -5,70	-5,69÷ -4,55	-4,54÷ -3,43	-3,42÷ -2,28	-2,27÷ -1,14	-1,13÷ 0	0 ÷ 1,13	1,14÷ 2,27	2,28÷ 3,42	3,43÷ 4,54	4,55÷ 5,69	5,70÷ 6,84
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
k_i	0	1	3	3	5	10	10	11	4	0	1	0
$Q_i = k_i/n$	0	0,02	0,062	0,06	0,10	0,21	0,21	0,23	0,08	0	0,02	0
h_i	0	0,02	0,05	0,05	0,09	0,19	0,19	0,20	0,07	0	0,02	0

4. По данной выборке построим гистограмму. Для этого определим высоты каждого прямоугольника гистограммы, которые равна их площадям

(т.е. Q_i), деленным на длину интервала $h_i = \frac{Q_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{Q_i}{0,5m} = \frac{Q_i}{1,135}$.

По виду построенной гистограммы (рис. 2.6) можно выдвинуть гипотезу о том, что данная случайная величина подчиняется нормальному распределению.

5. Построим выравнивающую кривую нормального распределения вида

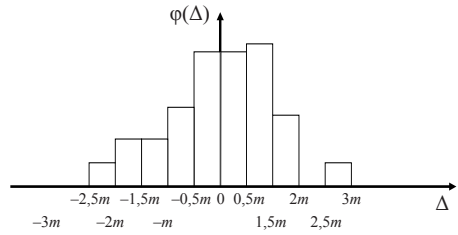


Рис. 2.6. Гистограмма распределения

$$\varphi(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}m} e^{-\frac{\Delta^2}{2m^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 2,27} e^{-\frac{\Delta^2}{2 \cdot 2,27^2}}.$$

В данной формуле мы считаем, что $M(\Delta)=0$, т.к. систематическая составляющая в данном случае отсутствует.

Найдем значения данной плотности распределения в точках, соответствующих границам интервалов. Для этого запишем предыдущую формулу в виде

$$\varphi(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 2,27} e^{-\frac{\Delta^2}{2 \cdot 2,27^2}} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 2,27} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}m} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} = hy'.$$

Здесь $t=\Delta/2,27$; $h = \frac{1}{\sqrt{2}m} = 0,31$. Величина h называется мерой точности.

Для величины y' составлены таблицы (см. Прил. 2). Определены значения $\varphi(\Delta)$ в граничных точках.

Параметры	Границы и номера интервалов											
	-6,84÷ -5,70	-5,69÷ -4,55	-4,54÷ -3,43	-3,42÷ -2,28	-2,27÷ -1,14	-1,13÷ 0	0 ÷ 1,13	1,14÷ 2,27	2,28÷ 3,42	3,43÷ 4,54	4,55÷ 5,69	5,70÷ 6,84
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	Правые границы интервалов в единицах t											
	-2,5m	-2m	-1,5m	-m	-0,5m	0	0,5m	m	1,5m	2m	2,5m	3m
y'	0,02	0,08	0,18	0,34	0,50	0,56	0,50	0,34	0,18	0,08	0,02	0,01
$\varphi(\Delta)_i=hy'$	0,00	0,02	0,06	0,12	0,16	0,17	0,16	0,12	0,06	0,02	0,0	0

По полученным значениям ординат $\varphi(\Delta)_i$ построим выравнивающую кривую нормального распределения, которую наложим на гистограмму (рис. 2.7).

6. Определим значения вероятностей попадания ошибок измерений в каждый интервал при нормальном распределении. Для этого воспользуемся формулой

$$P_i = 0,5(\Phi(t_{i+1}) - \Phi(t_i)).$$

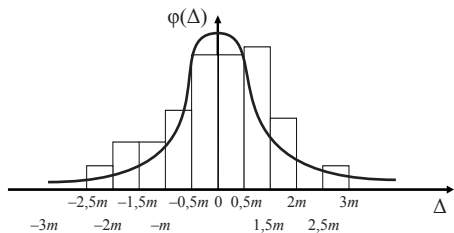


Рис. 2.7. Выравнивающая кривая плотности нормального распределения

Определим данные вероятности для интервалов, расположенных на положительной полуоси абсцисс, т.е. для интервалов с 7 по 12. Для интервалов с 1 по 6 вероятности перепишем из положительной полуоси, воспользовавшись симметрией кривой плотности нормального распределения.

Параметры	Номера интервалов											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\varphi(t_{i+1})$						0	0,38	0,67	0,87	0,95	0,987	0,997
P_i	0,005	0,02	0,04	0,10	0,15	0,19	0,19	0,15	0,10	0,04	0,02	0,005

7. Проверим гипотезу о нормальном распределении ошибок измерений, воспользовавшись критерием Пирсона.

Параметры	Номера интервалов											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P_i	0,005	0,02	0,04	0,10	0,15	0,19	0,19	0,15	0,10	0,04	0,02	0,005
nP_i ($n=48$)	0	1	2	5	7	9	9	7	5	2	1	0
k_i	0	1	3	3	5	10	10	11	4	0	1	0
$k_i - nP_i$	0	0	1	-2	-2	1	1	4	-1	-2	0	0
$[(k_i - nP_i)^2 / nP_i]$	0	0	0,5	0,8	0,57	0,11	0,11	2,29	0,2	2,0	0	0

Суммируя элементы последней строки, получим, что

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(k_i - np_i)^2}{np_i} = 6,58.$$

Здесь N — число интервалов. Поскольку в исследуемой выборке можно принять $M(\Delta)=0$, то $r=N-2=10$. Из таблиц распределения $P(\chi^2 > \chi^2_{кр})$ (см. Прил. 2) по значению $\chi^2=6,58$ определим, что значение вероятности $\beta=0,70$. Это значение превосходит уровень значимости $\beta_{кр}=0,1$. Следовательно, гипотезу о нормальном законе распределении можно принять с уровнем значимости 0,1.

Задача 2. Решить задачу 1, используя критерий Колмогорова.

Решение. Вычислим значение функции, определяющей различие статистического и теоретического распределений по формуле

$$DF = \max \left(\max_{1 \leq k \leq n} \left(\frac{k}{n} - F(x_k) \right), \max_{1 \leq k \leq n} \left(F(x_k) - \frac{k-1}{n} \right) \right).$$

Для простоты будем рассматривать значения x_k только в точках, являющихся границами интервалов. Для этого воспользуемся следующей таблицей.

Определяемые параметры	Номера интервалов											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	Правые границы интервалов											
	-5,70	-4,55	-3,43	-2,28	-1,14	0	1,13	2,27	3,42	4,54	5,69	6,84
P_i	0,005	0,02	0,04	0,10	0,15	0,19	0,19	0,15	0,10	0,04	0,02	0,005
$F(x)$	0,00	0,02	0,06	0,16	0,31	0,50	0,69	0,84	0,94	0,98	1,00	1,00
k_i	0	1	4	7	12	22	32	43	47	47	48	48
k_i/n	0,00	0,02	0,08	0,15	0,25	0,46	0,67	0,90	0,98	0,98	1,00	1,00
$(k_i-1)/n$	0,00	0,00	0,06	0,12	0,21	0,44	0,65	0,88	0,96	0,96	0,98	0,98
Максимальное расхождение	0	0,02	0,02	0,03	0,10	0,06	0,04	0,06	0,04	0,02	0,02	0,02

Под k_i понимается абсолютная частота появления значений от левой границы до правой границы i -го интервала.

Таким образом верхняя граница расхождений равна максимальному значению в последней строке в таблице $(-0,10)$. Далее определяем критическое значение по формуле, принимая уровень значимости $\beta=0,1$

$$D_{\text{кр}} \approx \sqrt{\frac{1}{2n} \left(-\ln \beta - \frac{2 \ln^2 \beta + 4 \ln \beta - 1}{18n} \right)} - \frac{1}{6n} = 0,15.$$

Имеем максимальное расхождение 0,10, полученное по выборке меньше критического значения 0,15. Следовательно, по критерию Колмогорова гипотеза о нормальном распределении не отвергается. Таким образом и критерий Пирсона и критерий Колмогорова привели к одному результату.

§2.6. Корреляционный и регрессионный анализ

Прямолинейная корреляционная зависимость

Частным случаем вероятностной зависимости является корреляционная. Эта зависимость выражается формулой [10]:

$$f(X) = M(Y|X = x_i), \quad (2.99)$$

где $M(Y|X = x_i)$, — условное математическое ожидание. Иначе говоря, корреляционной зависимостью называется вероятностная зависимость, при которой с изменением значений аргумента X

меняется математическое ожидание функции Y . Уравнение вида (2.99) называется уравнением регрессии.

Корреляционный и регрессионный анализы позволяют получить оценочное уравнение регрессии по экспериментальным данным. Цель регрессионного анализа заключается в установлении вида зависимости (2.99) и подборе по экспериментальным данным эмпирической кривой регрессии для прогноза значений функции. Степень зависимости между случайными величинами определяют в результате корреляционного анализа.

Для определения корреляционной зависимости выполняют попарные измерения (измерение аргумента x_i и функции y_i , соответствующей данному значению аргумента). Совокупность точек x_i, y_i дает первоначальное представление о виде зависимости. Для надежного ее определения необходимо, чтобы число пар измерений было не менее двадцати.

Используя один из методов определения оценок параметров и подставляя полученные оценки в выражение (2.99), получают эмпирические формулы, аппроксимирующие данную корреляционную зависимость. При этом предъявляют определенные требования к точности аппроксимации, которая позволяет судить о том насколько отличается реальная зависимость между случайными величинами от зависимости, представленной уравнением регрессии. Кроме того, уравнения регрессии стараются представить в наиболее простой форме.

Из всех видов зависимостей наиболее простой является прямойлинейная. В этом случае выражение (2.99) имеет вид

$$Y = f(X) = M_Y + r_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (X - M_X), \quad (2.100)$$

где $\rho_{Y/X} = r_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$ — коэффициент регрессии Y на X ; r_{XY} — коэффициент корреляции между величинами X, Y ; σ_x, σ_y — средние квадратические отклонения величин X и Y , соответственно M_X и M_Y — их математические ожидания.

Из теории вероятностей известно, что коэффициент корреляции $r_{xy} = k_{xy} / (\sigma_x \sigma_y)$, где $k_{xy} = M[(X - M_x)(Y - M_y)]$ — корреляционный момент (второй центральный смешанный момент). Коэффициент

корреляции является мерой тесноты линейной корреляционной зависимости. Максимальные значения ± 1 он принимает в случае функциональной прямолинейной зависимости. Равенство $r_{XY}=0$ говорит об отсутствии линейной корреляционной зависимости. Если $r_{XY}>0$, то существует положительная корреляционная зависимость, при которой увеличение аргумента вызывает увеличение математического ожидания функции. Если $r_{XY}<0$, имеет место отрицательная корреляционная зависимость, когда с увеличением аргумента математическое ожидание функции уменьшается. Чем меньше отличается коэффициент корреляции от ± 1 , тем ближе корреляционная зависимость к прямолинейной и тем сильнее зависимость.

Как правило, на практике значения $M_X, M_Y, r_{XY}, \sigma_X, \sigma_Y$ неизвестны, поэтому определяют их оценки по n наблюдаемым парам:

$$x_1, x_2, \dots, x_n;$$

$$y_1, y_2, \dots, y_n.$$

Математическое ожидание в формуле (2.100) заменяют средним арифметическим. При этом несмещенную оценку коэффициента корреляции можно выразить в виде

$$r_{XY}^* = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{(n-1)m_X m_Y}, \tag{2.101}$$

где $m_X = \sqrt{\frac{[v_X^2]}{n-1}}$; $m_Y = \sqrt{\frac{[v_Y^2]}{n-1}}$; $v_{x_i} = x_i - \bar{x}$; $v_{y_i} = y_i - \bar{y}$.

Очевидно, то же значение дает формула

$$r_{XY}^* = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n m_X m_Y}, \tag{2.102}$$

где $m_X = \sqrt{\frac{[v_X^2]}{n}}$; $m_Y = \sqrt{\frac{[v_Y^2]}{n}}$.

Возникает вопрос, с какой надежностью вычислено само значение коэффициента корреляции и при каком минимальном абсолютном его значении можно считать связь реально существующей.

Для оценки надежности коэффициента корреляции известный ученый статистик В.И. Романовский рекомендует при числе измерений $n \geq 50$ (в этом случае оценка коэффициента корреляции подчиняется нормальному распределению) применять СКО коэффициента корреляции, определяемого как

$$\sigma_r \approx \frac{1 - r^{*2}}{\sqrt{n}}. \quad (2.103)$$

Связь считают установленной, если выполняется условие

$$|r^*| \geq 3\sigma_r. \quad (2.104)$$

Напомним, что предельная ошибка при нормальном законе распределения равна 3σ . Теоретически, при отсутствии прямолинейной зависимости, коэффициент корреляции равен нулю. Поэтому, если оценка коэффициента корреляции не превосходит предельной ошибки этой оценки, нельзя утверждать, что связь установлена. И, наоборот, если значение коэффициента корреляции оказалось больше его предельной ошибки, можно утверждать, что это является следствием наличия прямолинейной корреляционной зависимости.

Кроме того полагают, что r^* должно превосходить некоторое граничное значение — наименьшую величину коэффициента корреляции r_{\min} , которую вычисляют по формуле

$$r_{\min} = \frac{\sqrt{n+36} - \sqrt{n}}{6}. \quad (2.105)$$

При $n < 50$ оценка коэффициента корреляции подчиняется логарифмически нормальному распределению, поэтому переходят к функции, подчиняющейся нормальному распределению — функции Фишера:

$$Z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}. \quad (2.106)$$

СКО величины Z определяют по формуле $\sigma_Z = 1/\sqrt{n-3}$. В этом случае легко построить доверительный интервал для истинного значения Z , которое связано с истинным значением коэффициента корреляции формулой (2.106) $z^* - t\sigma_z < Z < z^* + t\sigma_z$ или, обозначая $z_1^* = z^* - t\sigma_z$ и $z_2^* = z^* + t\sigma_z$,

$$z_1^* < Z < z_2^*. \quad (2.107)$$

Значения величины z^* могут быть вычислены по коэффициенту корреляции r^* , вычисленному по опытным данным, непосредственно по формуле (2.106) или по таблицам данной функции. Далее от неравенства (2.107) переходят к доверительному интервалу для r , определяя r_1^* по z_1^* , r_2^* по z_2^* , и используя функцию, обратную к

$$(2.106) \quad r = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}, \text{ получим}$$

$$r_1^* < r < r_2^*. \quad (2.108)$$

Связь считают установленной, если граничные значения для r имеют один и тот же знак, т.е. интервал не содержит нулевого значения для r . Кроме того, левое граничное значение должно быть по абсолютному значению не меньше, чем $r_{\min} = \frac{\sqrt{n+36} - \sqrt{n}}{6}$.

Уравнение регрессии при этом можно записать в виде

$$Y = \bar{y} + r^* \frac{m_y}{m_x} (X - \bar{x}). \quad (2.109)$$

Иногда составляют уравнение регрессии X на Y , тогда

$$X = \bar{x} + r^* \frac{m_x}{m_y} (Y - \bar{y}).$$

СКО коэффициентов регрессии при большом n вычисляют по формулам

$$\sigma_{p_{y/x}} = \frac{m_y}{m_x} \sqrt{\frac{1-r^{*2}}{n-3}}; \quad \sigma_{p_{x/y}} = \frac{m_x}{m_y} \sqrt{\frac{1-r^{*2}}{n-3}}. \quad (2.110)$$

Если случайные величины X и Y подчиняются нормальному закону распределения, то часто для оценки надежности коэффициента корреляции используют второй критерий Фишера: по значению r^* вычисляют величину

$$V = \frac{r^*}{\sqrt{1-r^{*2}}} \sqrt{n-2}. \quad (2.111)$$

Корреляционная зависимость между величинами X и Y считается установленной, если значение V , соответствующее значению r^* , не попадает в интервал $-t_\beta < V < t_\beta$, где t_β выбирают из таблиц распределения Стьюдента по числу степеней свободы $n-2$ и вероятности $\beta \approx 1$.

В качестве критерия надежности коэффициента корреляции можно применять критерий, основанный на построении доверительного интервала для коэффициента регрессии. Если отличие коэффициента регрессии от нуля несущественно, то говорят об отсутствии корреляционной зависимости между X и Y .

На основании этого утверждения можно записать $t_\alpha = \frac{|a^* - 0|}{m_{a^*}} = \frac{|a^*|}{m_{a^*}}$ (здесь a^* — оценка коэффициента регрессии).

Данная величина имеет распределение Стьюдента и ее можно определить по таблицам Стьюдента (см. Прил. 2). Если выполняется неравенство $|a^*| \leq t_\alpha m_{a^*}$, то можно считать, что прямолинейная корреляционная связь отсутствует. В противном случае связь считается установленной.

Задача 1. Измерены расстояния D_i , являющиеся аргументами x_i , и известны ошибки (значения функции y_i) этих измерений [2]. Вычислить коэффициенты корреляции и регрессии, оценить их точность с вероятностью не менее 0,90 и составить уравнение регрессии.

№ п/п	Результаты наблюдений		Результаты вычислений				
	D_i км	$ \Delta_i $, см	δD_i	$\delta \Delta_i $	δD_i^2	$\delta \Delta_i ^2$	$\delta D_i \delta \Delta_i $
1	8,7	7,0	+3,8	+3,2	14,44	10,24	+12,16
2	3,7	3,0	-1,2	-0,8	1,44	0,64	+0,96
3	6,0	4,0	+1,1	+0,2	1,21	0,04	+0,22
4	3,3	3,0	-1,6	-0,8	2,56	0,64	+1,28
5	5,1	4,0	+0,2	+0,2	0,04	0,04	+0,04
6	6,1	4,0	+1,2	+0,2	1,44	0,04	+0,24
7	2,7	3,0	-2,2	-0,8	4,84	0,64	+1,76
8	4,9	4,0	0,0	+0,2	0,00	0,04	0,00
9	3,1	4,0	-1,8	+0,2	3,24	0,04	-0,36
10	3,7	2,0	-1,2	-1,8	1,44	3,24	+2,16
11	5,7	6,0	+0,8	+2,2	0,64	4,84	+1,76
12	4,9	5,0	0,0	+1,2	0,00	1,44	0,00
13	5,6	3,0	+0,7	-0,8	0,49	0,64	-0,56
14	7,6	4,0	+2,7	+0,2	7,29	0,04	+0,54
15	4,2	3,0	-0,7	-0,8	0,49	0,64	+0,56
16	2,0	2,0	-2,9	-1,8	8,41	3,24	+5,22
17	4,0	2,0	-0,9	-1,8	0,81	3,24	+1,62
18	6,5	5,0	+1,6	+1,2	2,56	1,44	+1,92
19	7,2	6,0	+2,3	+2,2	5,29	4,84	+5,06
20	2,7	2,0	-2,2	-1,8	4,84	3,24	+3,96
	$\bar{D} = 4,9$ км	$ \bar{\Delta} = 3,80$ см	$\Sigma = -0,3$	$\Sigma = 0,0$	$\Sigma = 61,47$	$\Sigma = 39,20$	$\Sigma = +38,54$

Решение. Вначале построим график взаимного расположения точек (x_i, y_i) (рис. 2.8), который в данном случае указывает на наличие корреляции между D и $|\Delta|$. В результате вычислений имеем $m_D = \sqrt{61,5 / 20} = 1,75$ км, $m_{|\Delta|} = \sqrt{39,2 / 20} = 1,40$ см. Коэффициент корреляции, определенный по формуле (2.102), равен

$$r^* = \frac{38,54}{20 \cdot 1,75 \cdot 1,40} \approx +0,79.$$

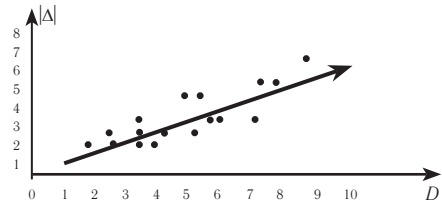


Рис. 2.8. Коррелограмма и прямая регрессии

Оценим надежность коэффициента корреляции. Так как число измерений сравнительно небольшое, для оценки надежности применим критерий Фишера. По таблице значений функции Z (Прил. 2, табл. П6), принимая коэффициент корреляции $r^* = +0,79$ в качестве аргумента, находим $Z = 1,0714$. СКО Z определим по формуле $\sigma_Z = 1/\sqrt{n-3} = 1/\sqrt{20-3} = 0,243$. С вероятностью 0,90 ($t = 1,645$) величина Z может принимать значения на интервале $1,0714 - t\sigma_Z < Z < 1,0714 + t\sigma_Z$, т.е. $0,672 \leq Z \leq 1,471$. Из таблицы значений функции Z по значениям 0,67 и 1,47 находим соответствующие крайним значениям Z граничные значения доверительного интервала для коэффициента корреляции $+0,59 \leq r \leq +0,90$. Следовательно, с вероятностью не менее 0,90 истинный коэффициент корреляции может иметь значения от $+0,59$ до $+0,90$. Минимальное значение r_{\min} (при данном числе измерений $n=20$) $r_{\min} = (\sqrt{20+36} - \sqrt{20})/6 = 0,50$, что меньше левой границы 0,59. Следовательно, прямолинейную корреляционную связь по данному критерию можно считать установленной. Применим критерий Романовского. Этот критерий не совсем подходит в данном случае, так как $n < 50$. Тем не менее, определим σ_r по формуле (2.103), $\sigma_r \approx (1 - 0,79^2)/\sqrt{20} = 0,085$. Предельная ошибка для коэффициента корреляции $3\sigma_r = 3 \cdot 0,085 = 0,26$, что меньше значения коэффициента корреляции, равного 0,79. Таким образом, можно сделать вывод, что формула (2.104) иногда дает хорошие результаты и при $20 \leq n \leq 50$, хотя принято считать необходимым условием ее применения $n \geq 50$. Наличие корреляционной связи определим также и по критерию Фишера (2.111), полагая, что $|\Delta|$ и D подчинены нормальному распределению. По таблицам для числа степеней свободы 18 и вероятности $\beta = 0,90$ находим $t_\beta = 1,7$. По формуле (2.111)

имеем $V = \frac{0,79}{\sqrt{1 - 0,79^2}} \sqrt{18} = 5,47$. Таким образом, V не попадает в интервал от $-1,7$ до $+1,7$ и следует признать, что $X = D$ и $Y = |\Delta|$ зависимы. Составим теперь

уравнение регрессии $|\Delta|$ на D : $|\Delta| = |\bar{\Delta}| + \rho_{|\Delta|/D} (D - \bar{D})$, где $\rho_{|\Delta|/D} = r^* \frac{m_{|\Delta|}}{m_D}$ или $|\Delta| = \rho_{|\Delta|/D} D + (|\bar{\Delta}| - \rho_{|\Delta|/D} \bar{D})$. Подставляя в данное уравнение численные значения r^* , $m_{|\Delta|}$, m_D , получим $|\Delta| = +0,79 \frac{1,40}{1,75} D + 3,8 - 0,79 \frac{1,40}{1,75} 4,9$; $|\Delta| = 0,63D + 0,70$ см.

На рис. 2.8 на коррелограмму наложена прямая регрессии, полученная по данному уравнению. Оценим приближенно надежность коэффициента регрессии

$$\rho_{|A|/D} = 0,63 \text{ по формуле (2.110): } \sigma_{\rho_{|A|/D}} = \frac{1,40}{1,75} \sqrt{\frac{1-0,79^2}{20-3}} = 0,12, \text{ следовательно, } \rho_{|A|/D} = 0,63 \pm 0,12.$$

Уравнение регрессии вида (2.109) строится на основе метода моментов и его можно преобразовать к виду $Y = a^*X + b^*$, где

$$a^* = r^* \frac{m_Y}{m_X} \text{ и } b^* = \bar{y} - r^* \frac{m_y}{m_x} \bar{x}.$$

Проверим критерий наличия корреляционной зависимости, используя неравенство $|a^*| \leq t_\alpha m_{a^*}$. Мы получили $a^* = 0,63$. Учтывая, что $m_{a^*} \approx \sigma_\rho = 0,12$, $t_\alpha = 1,7$ при вероятности $\beta = 0,90$, получим $0,63 > 1,7 \cdot 0,12 = 0,20$. Следовательно, можно считать прямолинейную корреляционную зависимость установленной по данному критерию.

При использовании метода наименьших квадратов линейное уравнение регрессии записывают в виде $Y = aX + b$. Здесь a и b — неизвестны. Для их определения, в уравнение подставляют соответствующие пары измерений x_i, y_i . В результате получают n уравнений вида $y_i = ax_i + b, i = 1, 2, \dots, n$.

Понятно, что при $n > 2$ такая система уравнений будет переопределена и поэтому не имеет решения относительно неизвестных a и b . Можно получить только их оценки. Лучшее решение, связанное с определением доброкачественных оценок неизвестных a^* и b^* , можно найти по методу наименьших квадратов (МНК), т.е. уравнение регрессии в окончательном виде будет иметь вид

$$Y = a^*X + b^*. \tag{2.112}$$

Такое решение определяется под условием $[v] = [(y - y^*)^2] = \min$, из уравнений $y_i + v_i = y_i^* = a^*x_i + b^*$ или

$$\begin{aligned} v_1 &= a^*x_1 + b^* - y_1; \\ v_2 &= a^*x_2 + b^* - y_2; \\ &\dots\dots\dots \\ v_n &= a^*x_n + b^* - y_n. \end{aligned} \tag{2.113}$$

Запишем коэффициенты при неизвестных параметрах в виде

матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \dots & \dots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}$. Свободные члены образуют вектор $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} -y_1 \\ -y_2 \\ \dots \\ -y_n \end{pmatrix}$.

Вектор неизвестных $\Delta = \begin{pmatrix} a^* \\ b^* \end{pmatrix}$.

Решение уравнений (2.113) под условием $[vv]=\min$ приводит к системе нормальных уравнений $\mathbf{A}^T \mathbf{A} \Delta + \mathbf{A}^T \mathbf{L} = 0$, которую можно записать в виде

$$\begin{aligned} [x^2]a^* + [x]b^* - [xy] &= 0; \\ [x]a^* + nb^* - [y] &= 0. \end{aligned}$$

Решая данную систему получим,

$$\Delta = \begin{pmatrix} a^* \\ b^* \end{pmatrix} = -(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{L} = -\begin{pmatrix} [x^2] & [x] \\ [x] & n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -[xy] \\ -[y] \end{pmatrix}.$$

Обратную матрицу для двух уравнений легко найти в общем виде через определители матриц (метод Крамера):

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} [x^2] & [x] \\ [x] & n \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{[x^2]n - [x]^2} \begin{pmatrix} n & -[x] \\ -[x] & [x^2] \end{pmatrix}.$$

Используя обратную матрицу, найдем решение системы уравнений

$$a^* = \frac{n[xy] - [x][y]}{[x^2]n - [x]^2}; \quad b^* = \frac{-[x][xy] + [x^2][y]}{[x^2]n - [x]^2}.$$

Задача 2. Решим задачу 1 с теми же исходными данными по методу наименьших квадратов. Примем в качестве аргументов x_i — расстояния D_i , а в качестве функции y_i — абсолютные значения ошибок измерений. Требуется найти линейный вид уравнения регрессии между $X=D$ и $Y=|\Delta|$.

Решение. Используя формулу Крамера, найдем обратную матрицу $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} 0,016 & -0,079 \\ 0,079 & 0,438 \end{pmatrix}$ и неизвестные коэффициенты $a^*=0,627$; $b^*=0,737$.

Окончательно, получим следующее уравнение регрессии $|\Delta|=0,63D+0,74$.

Ранее, методом моментов было получено $|\Delta|=0,63D+0,70$. Произведем оценку точности полученных результатов.

X	Y	Y^*	$v_i = y_i - y_i^*$	v^2	X	Y	Y^*	$v_i = y_i - y_i^*$	v^2
8,7	7	6,22	0,78	0,61	5,7	6	4,33	1,67	2,79
3,7	3	3,07	-0,07	0,01	4,9	5	3,83	1,17	1,38
6	4	4,52	-0,52	0,27	5,6	3	4,27	-1,27	1,61
3,3	3	2,82	0,18	0,03	7,6	4	5,53	-1,53	2,33
5,1	4	3,95	0,05	0,00	4,2	3	3,39	-0,39	0,15
6,1	4	4,58	-0,58	0,34	2	2	2	0	0
2,7	3	2,44	0,56	0,31	4	2	3,26	-1,26	1,59
4,9	4	3,83	0,17	0,03	6,5	5	4,84	0,16	0,03
3,1	4	2,69	1,31	1,71	7,2	6	5,28	0,72	0,52
3,7	2	3,07	-1,07	1,15	2,7	2	2,44	-0,44	0,19

$[v] = [(y - y^*)^2] = 15,04$; $m = \sqrt{\frac{[(y - y^*)^2]}{n - 2}} = \sqrt{\frac{15,04}{18}} = 0,87$. Далее, оценивая точность полученных коэффициентов, имеем

$$m_{a^*} = m\sqrt{Q_{11}} = 0,87\sqrt{0,016} = 0,11; \quad m_{b^*} = m\sqrt{Q_{22}} = 0,87\sqrt{0,438} = 0,58.$$

Здесь m — средняя квадратическая ошибка аппроксимации результатов наблюдений прямой регрессии. Поскольку a^* и b^* являются точечными оценками, то необходимо построить доверительные интервалы для a и b . При достаточно большом числе испытаний можно считать, что величины a^* и b^* подчиняются распределению Стьюдента с $n-2$ степенями свободы. Тогда доверительные интервалы примут вид:

$$a^* - t_{\alpha} m_{a^*} \leq a \leq a^* + t_{\alpha} m_{a^*}; \quad b^* - t_{\alpha} m_{b^*} \leq b \leq b^* + t_{\alpha} m_{b^*}.$$

При $\alpha=0,9$ и $r=n-2=20-2=18$, $t_{\alpha}=1,70$. Отсюда для данного примера

$$0,63 - 1,70 \cdot 0,11 < a < 0,63 + 1,70 \cdot 0,11; \quad 0,44 < a < 0,82;$$

$$0,74 - 1,70 \cdot 0,58 < b < 0,74 + 1,70 \cdot 0,58; \quad -0,25 < b < 1,73.$$

Кроме доверительных интервалов для a и b , полезно указать доверительную область для самого уравнения регрессии. В точке $X = \bar{x} = \frac{[x]}{n}$ построение доверительного интервала для функции $y(x)$ связано с распределением Стьюдента, т.е. величина $\frac{y(\bar{x}) - Y}{m_{y(\bar{x})}}$ подчиняется этому распределению, поэтому доверительный интервал в этой точке будет следующим:

$$y(\bar{x}) - t_{\alpha} m_{y(\bar{x})} < Y < y(\bar{x}) + t_{\alpha} m_{y(\bar{x})}, \quad (2.114)$$

где $y(\bar{x}) = a^* \bar{x} + b^*$; $m_{y(\bar{x})}^2 = \bar{x}^2 m_{a^*}^2 + m_{b^*}^2$.

Если рассматривать доверительный интервал для Y в произвольной точке $y(x)$ на некотором интервале $[c, d]$, то величина $U = \frac{y(x) - Y}{m_{y(x)}}$ имеет функцию распределения довольно сложного вида [5]:

$$F(u) = \frac{\Psi}{\pi} \left(1 + \frac{u^2}{n-2}\right)^{-\frac{n-2}{2}} + \frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{u^2}{n-2}\right)^{-\frac{n-2}{2}} \operatorname{ctg} \frac{\Psi}{2} \int_0^{\frac{dx}{(1+x^2) \left(1 + \frac{u^2 x^2}{u^2 + n-2}\right)^{n-2}}}, \quad (2.115)$$

где $\Psi = \arccos \frac{1+nCD}{\sqrt{(1+nC^2)(1+nD^2)}}$; $C = \frac{c-\bar{x}}{\sqrt{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}}$; $D = \frac{d-\bar{x}}{\sqrt{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}}$.

При этом Ψ принимает значения в пределах $0 \leq \Psi \leq \pi$. В точке $\Psi=0$, как было отмечено выше, U подчиняется распределению Стьюдента и доверительный интервал имеет вид (2.114). В точке $\Psi=\pi$ величина U имеет F -распределение с числом степеней свободы $r_1=2$ и $r_2=n-2$. Для построения доверительного интервала используют таблицы F -распределения, которые в данной книге не приведены. Для интервала $0 \leq \Psi \leq \pi$ вместо Ψ вводится переменная

$$\lambda = \sin \frac{\Psi}{2} = \sqrt{0,5 \left[1 - \frac{1+nCD}{(1+nC^2)(1+nD^2)}\right]}. \quad (2.116)$$

Для этого случая составлены таблицы для случайной величины $u_{n-2}(\alpha, \lambda)$, где α — доверительная вероятность. Пользуясь данными таблицами, можно построить доверительную область для уравнения регрессии $Y=aX+b$ с доверительной вероятностью α . Данная область ограничена функциями (рис. 2.9)

$$f(x) = a^*x + b^* \pm u_{n-2}(\alpha, \lambda) m_{y(x)}. \quad (2.117)$$

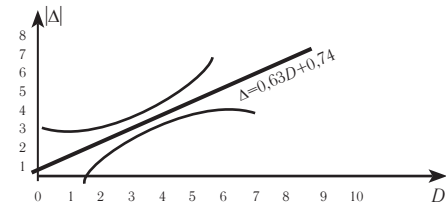


Рис. 2.9. Доверительный интервал для истинной прямой регрессии

Задача 3. Приведем построение доверительной области для прямой регрессии, полученной в задаче 2. Для этого определим среднюю квадратическую ошибку $m_{y(x)}$ величины Y в произвольной точке x . Подставляя в $m_{y(x)} = \sqrt{x^2 m_a^2 + m_b^2}$ полученные ранее значения, запишем $m_{y(x)} = \sqrt{0,1^2 x^2 + 0,58^2}$. Доверительную область будем строить на отрезке $2 < x < 10$. Учитывая, что $\bar{x} = 4,9$, а $\sum_i (x_i - \bar{x})^2 = 61,5$,

по формулам (2.115) получим $C = \frac{2-4,9}{\sqrt{61,5}} = -0,37$; $D = \frac{10-4,9}{\sqrt{61,5}} = 0,65$.

Далее по формуле (2.116) вычислим

$$\lambda = \sin \frac{\Psi}{2} = \sqrt{0,5 \left(1 - \frac{1 + 20(-0,37) \cdot 0,65}{(1 + 20 \cdot 0,37^2)(1 + 20 \cdot 0,65^2)} \right)} = 0,91.$$

Из таблиц (Прил. 2, табл. П8) для $u_{n-2}(\alpha, \lambda)$ по $\alpha=0,90$, $r=n-2=18$ и $\lambda=0,91$ находим $u_{n-2}(\alpha, \lambda)=3,442$. Поэтому с доверительной вероятностью 0,90 можно утверждать, что на отрезке $2 < x < 10$ прямая регрессии (см. рис. 2.9) заключена между графиками функций $f(|\Delta|) = 0,63D + 0,74 \pm 3,442\sqrt{0,11^2 D^2 + 0,58^2}$. Следует отметить, что самым узким интервал получится в точке $D = \bar{D}$. По мере удаления от этой точки надежность вычисления $|\Delta|$ по уравнению регрессии уменьшается, а доверительный интервал расширяется. Критерий наличия связи между X и Y проверим с помощью критерия, основанного на построении доверительного интервала для коэффициента регрессии a . Если выполняется неравенство $|a^*| \leq t_\alpha m_a$, то можно считать, что прямолинейная корреляционная связь отсутствует. В противном случае связь считается установленной. Так для нашего примера по $\alpha=0,90$, $r=n-2=18$, $t_\alpha=1,7$. Произведение $1,7 \cdot 0,11=0,19$, что меньше оценочного значения коэффициента регрессии 0,63. Следовательно, связь считается установленной.

Нелинейная корреляционная зависимость

В общем случае, если корреляционная зависимость имеет вид $Y=f(X)$, ее представляют в виде полинома степени m :

$$Y = a_m X^m + a_{m-1} X^{m-1} + \dots + a_1 X + a_0. \quad (2.118)$$

При этом m должна быть не более $n-1$, где n — число пар измерений. Поскольку построение полинома степени $n-1$ нецелесообразно, так как он задает кривую, проходящую через все n точек (x_i, y_i) , и существующая закономерность искажена вследствие наличия случайных ошибок наблюдений, то с помощью метода наименьших квадратов подбирают полином меньшей степени m , который сглаживает их влияние.

Для полинома (2.118) строят уравнения поправок, которые имеют вид

$$\begin{aligned} a_m^* x_1^m + a_{m-1}^* x_1^{m-1} + \dots + a_1^* x_1 + a_0^* - y_1 &= v_1; \\ a_m^* x_2^m + a_{m-1}^* x_2^{m-1} + \dots + a_1^* x_2 + a_0^* - y_2 &= v_2; \\ \dots &\dots \\ a_m^* x_n^m + a_{m-1}^* x_n^{m-1} + \dots + a_1^* x_n + a_0^* - y_n &= v_n. \end{aligned} \quad (2.119)$$

Отсюда, матрица коэффициентов уравнений поправок имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_1^m & x_1^{m-1} & \dots & x_1 & 1 \\ x_2^m & x_2^{m-1} & \dots & x_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^m & x_n^{m-1} & \dots & x_n & 1 \end{pmatrix},$$

матрица коэффициентов нормальных уравнений

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{pmatrix} [x^{2m}] & [x^{2m-1}] & \dots & [x^m] \\ [x^{2m-1}] & [x^{2(m-1)}] & \dots & [x^{m-1}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [x^m] & [x^{m-1}] & \dots & n \end{pmatrix},$$

и вектор свободных членов уравнений поправок — $\mathbf{A}^T \mathbf{L} = \begin{pmatrix} -[x^m y] \\ -[x^{m-1} y] \\ \dots \\ -[y] \end{pmatrix}$.

Таким образом, система нормальных уравнений примет вид в матричном виде $\mathbf{A}^T \mathbf{A} \Delta + \mathbf{A}^T \mathbf{L} = 0$ или в обычной записи

$$\begin{aligned} [x^{2m}] a_m^* + [x^{2m-1}] a_{m-1}^* + \dots + [x^m] a_0^* - [x^m y] &= 0; \\ [x^{2m-1}] a_m^* + [x^{2m-2}] a_{m-1}^* + \dots + [x^{m-1}] a_0^* - [x^{m-1} y] &= 0; \\ \dots & \dots; \\ [x^m] a_m^* + [x^{m-1}] a_{m-1}^* + \dots + n a_0^* - [y] &= 0. \end{aligned}$$

Решая данную систему, получают эффективные оценки коэф-

фициентов уравнения (2.118): $a^* = \begin{pmatrix} a_m^* \\ a_{m-1}^* \\ \dots \\ a_0^* \end{pmatrix} = -\mathbf{Q} \mathbf{A}^T \mathbf{L}$, где $\mathbf{Q} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}$.

Однако, с увеличением степени полинома ухудшается обусловленность данной системы нормальных уравнений. В связи с этим для решения такой системы требуются, как правило, специальные методы решения, позволяющие получить приемлемую точность определяемых коэффициентов. Это могут быть методы регуляризации, масштабирования коэффициентов и др.

Среднюю квадратическую ошибку аппроксимации данных уравнением регрессии, в виде полинома степени m , вычисляют по

формуле $m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n - m - 1}}$. Далее, зная матрицу \mathbf{Q} , получают средние квадратические ошибки оценок коэффициентов a^* по формуле $m_{a_k^*} = m\sqrt{Q_{kk}}$. Для коэффициентов a_k можно построить доверительные интервалы в виде $a_k^* - t_\alpha m_{a_k^*} \leq a_k \leq a_k^* + t_\alpha m_{a_k^*}$.

Корреляционное отношение

Выше было отмечено, что коэффициент корреляции является мерой тесноты связи только для прямолинейной корреляционной зависимости. Возникает вопрос — можно ли подобрать аналогичную меру тесноты связи для нелинейной корреляционной зависимости? Такой мерой может служить корреляционное отношение $\eta_{Y/X}^2$.

Величину $\eta_{Y/X}^2$, которую называют корреляционным отношением Y на X , определяют следующим образом:

$$\eta_{Y/X}^2 = 1 - M\left(\frac{D(Y/x_i)}{D_Y}\right), \quad (2.120)$$

где D_Y — дисперсия величины Y ; $D(Y/x_i) = \sigma_{Y/X}^2$ — условная дисперсия величины Y при фиксированном значении X . Она характеризует рассеяние величины Y в области условного математического ожидания $M(Y/X=x_i)$, т.е.

$$D(Y/x_i) = \sigma_{Y/X}^2 = M(Y - M(Y/X = x_i))^2. \quad (2.121)$$

Условное математическое ожидание $M(Y/X=x_i)$ является случайной величиной, так как зависит от конкретных значений выборки случайной величины X , которому соответствует условная плотность

распределения $\varphi(y/x) = \frac{\varphi(x, y)}{\varphi_1(x)}$. Таким образом,

$$M(Y/X = x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} y\varphi(y/x) dy = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} y\varphi(x, y) dy}{\varphi_1(x)}.$$

Определим $M(Y)$, учитывая, что математическое ожидание от условного математического ожидания равно безусловному математическому ожиданию. Для этого умножим левую и правую части данного равенства на $\varphi_1(x)$ и проинтегрируем обе части по x :

$$M(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} M(Y/X = x_i) \varphi_1(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y\varphi(x, y) dy dx.$$

Далее определим дисперсию Y через условную дисперсию:

$$\begin{aligned} D_Y = \sigma_Y^2 &= M(Y - M_Y)^2 = M(Y - M(Y/X = x_i) + M(Y/X = x_i) - M_Y)^2 = \\ &= M\left((Y - M(Y/X = x_i)) - (M_Y - M(Y/X = x_i))\right)^2 = \\ &= M(Y - M(Y/X = x_i))^2 + 2M(Y - M(Y/X = x_i))M(M(Y/X = x_i) - M_Y) + \\ &+ M(M(Y/X = x_i) - M_Y)^2. \end{aligned}$$

Поскольку первые центральные моменты всегда равны нулю, второе слагаемое здесь равно нулю. Отсюда,

$$\sigma_Y^2 = M(Y - M(Y/X = x_i))^2 + M(M(Y/X = x_i) - M_Y)^2.$$

Разделим левую и правую части данного равенства на σ_Y^2 :

$$1 = \frac{\sigma_{Y|X}^2}{\sigma_Y^2} + \frac{M(M(Y/X = x_i) - M_Y)^2}{\sigma_Y^2},$$

откуда

$$\frac{M(M(Y/X = x_i) - M_Y)^2}{\sigma_Y^2} = 1 - \frac{\sigma_{Y|X}^2}{\sigma_Y^2}. \quad (2.122)$$

Сравнив (2.122) с (2.120), можно сделать вывод о том, что корреляционное отношение случайной величины Y по X является отношением дисперсии условного математического ожидания Y к дисперсии Y . Из (2.122) вытекает, что корреляционное отношение может изменяться в пределах $0 \leq \eta_{Y/X}^2 \leq 1$. Из (2.122) следует, что если условная и безусловная дисперсии равны $\sigma_{Y|X}^2 = \sigma_Y^2$, что возможно только при равенстве условного и безусловного мате-

математических ожиданий (а это и означает независимость X и Y), то корреляционное отношение будет равно нулю.

Если же $\sigma_{Y/X}^2 = 0$, т.е. рассеяние вокруг условного математического ожидания отсутствует, то можно сделать вывод о том, что в этом случае существует функциональная — самая тесная зависимость между величинами X и Y . В этом случае корреляционное отношение равно единице. Если кривая регрессии является прямой, то значение корреляционного отношения совпадает с коэффициентом корреляции.

В случае нелинейной зависимости $\eta_{Y/X}$ превосходит коэффициент корреляции $r_{X,Y}$ на величину, характеризующую отклонение кривой от прямой, которая дает наилучшую аппроксимацию корреляционной зависимости измеренных значений. Если эта разность достаточно большая, то от гипотезы о прямолинейной корреляционной зависимости следует отказаться.

Аналогично определяют и корреляционное отношение $\eta_{X/Y}$.

Вычислить оценку корреляционного отношения по результатам наблюдений можно с помощью метода моментов. Предварительно, все наблюдения группируют по интервалам в порядке возрастания величины X . Если таких интервалов N , то по каждому интервалу определяют среднее значение $\bar{y}_j(x_i) = \left(\sum_{i=1}^{n_j} y_j^i \right) / n_j$, которое

является оценкой условного математического ожидания. Здесь j — номер интервала, n_j — число пар наблюдений в j -м интервале, i — номер пары наблюдений из j -го интервала. Величина $\bar{y}_j(x_i)$ является оценкой условного математического ожидания $M(Y/X=x_i)$. Оценкой величины $M(M(Y/X=x_i) - M(Y))^2$ является величина

$$m_{\bar{y}(x_i)} = \sqrt{\left(\sum_{j=1}^N (\bar{y}_j(x_i) - \bar{y})^2 \right) / N}, \text{ оценкой } \sigma_Y^2 - m_y = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \right) / n},$$

где n — число пар наблюдений по всем N интервалам; $n = \sum_{j=1}^N n_j$.

В этом случае оценку корреляционного отношения, полученную по опытным данным, исходя из (2.122), находят по формуле

$$\eta_{Y/X}^2 = \frac{m_{\bar{y}_j(x_i)}}{m_y^2}.$$

Линеаризация нелинейной зависимости

Иногда нелинейную зависимость удается свести к линейной, т.е. выровнять ее. Например, если зависимость определяется функцией $y=ax^b$, то ее можно преобразовать к виду $\ln Y = \ln a + b \ln X$. Далее можно рассматривать зависимость между $\ln Y$ и $\ln X$, и вычислять коэффициент корреляции уже между этими величинами

$$r = \frac{M[(\ln X - \ln M_x)(\ln Y - \ln M_y)]}{\sigma_{\ln X} \sigma_{\ln Y}}.$$

Оценку коэффициента корреляции по выборке можно вычислить по формуле

$$r^* = \frac{[(\ln x - \overline{\ln x})(\ln y - \overline{\ln y})]}{\sqrt{[(\ln x - \overline{\ln x})]^2 [(\ln y - \overline{\ln y})^2]}}, \quad (2.123)$$

где $\overline{\ln x} = \frac{[\ln x]}{n}$; $\overline{\ln y} = \frac{[\ln y]}{n}$.

Используя рассмотренные ранее критерии Романовского, Фишера, можно установить, существует ли прямолинейная корреляционная зависимость между $\ln Y$ и $\ln X$. При ее наличии полагают, что установлена корреляционная зависимость между X и Y в виде уравнения регрессии $Y=aX^b$.

Аналогично можно выравнивать корреляционные зависимости, представленными такими функциями, как $Y=ae^{bX}$, $y=a/x^b$ и др.

Пример. Даны длины сторон [16] нивелирной сетки квадратов l и соответствующие им средние квадратические ошибки m объемов земляных работ, приходящиеся на один квадрат. Предполагается, что между указанными величинами существует корреляционная зависимость, характеризующаяся уравнением регрессии следующего вида $m=al^b$. Необходимо проверить данную гипотезу.

Решение. Сначала приведем уравнение регрессии к линейному виду $\lg m = \lg a + b \lg l$. Разместим вычисления в таблице. Откуда определим

$$\overline{\lg l} = \frac{[\lg l]}{n} = 1,3615; \quad \overline{\lg m} = \frac{[\lg m]}{n} = 1,2517;$$

$$r^* = \frac{[(\lg l - \overline{\lg l})(\lg m - \overline{\lg m})]}{\sqrt{[(\lg l - \overline{\lg l})]^2 [(\lg m - \overline{\lg m})^2]}} = \frac{1,00103}{\sqrt{0,3644 \cdot 3,01748}} = 0,9546;$$

№	l	m	$\lg l$	$\lg m$	$\delta \lg l$	$\delta \lg m$	$\delta^2 \lg l$	$\delta^2 \lg m$	$\delta \lg l \cdot \delta \lg m$
1	10	2,1	1	0,32222	-0,36150	-0,92948	0,13068	0,86393	0,33600
2	15	4,2	1,17609	0,62325	-0,18541	-0,62845	0,03438	0,39495	0,11652
3	30	13,0	1,47712	1,11394	0,11562	-0,13776	0,01337	0,01898	-0,01593
4	25	25,0	1,39794	1,39794	0,03644	0,14624	0,00133	0,02138	0,00533
5	30	39,4	1,47712	1,59550	0,11562	0,34380	0,01337	0,11820	0,03975
6	40	116	1,60206	2,06446	0,24056	0,81276	0,05787	0,66058	0,19552
7	27	30,4	1,43136	1,48287	0,06986	0,23117	0,00488	0,05344	0,01615
8	18	10,1	1,25527	1,00432	-0,10623	-0,24738	0,01128	0,06120	0,02628
9	38	87,8	1,57978	1,94349	0,21828	0,69179	0,04765	0,47858	0,15101
10	24	21,9	1,38021	1,34044	0,01871	0,08874	0,00035	0,00788	0,00166
11	14	5,0	1,14613	0,69897	-0,21537	-0,55273	0,04639	0,30551	0,11904
12	26	27,1	1,41497	1,43297	0,05347	0,18127	0,00286	0,03286	0,00969
Σ	297	382	16,3380	15,02037	0,00006	-0,00002	0,36440	3,01748	1,00103

$$m_{\lg l} = \sqrt{\frac{(\lg l - \overline{\lg l})^2}{n-1}} = 0,182; \quad m_{\lg m} = \sqrt{\frac{(\lg m - \overline{\lg m})^2}{n-1}} = 0,523.$$

Вычислим коэффициенты уравнения регрессии $\lg a$ и b , используя метод моментов. Уравнение регрессии $\lg m = b \lg l + \lg a$ перепишем в виде, которое используется в методе моментов:

$$\lg m = r \frac{m_{\lg m}}{m_{\lg l}} \lg l + \left(\overline{\lg m} - r \frac{m_{\lg m}}{m_{\lg l}} \overline{\lg l} \right).$$

Отсюда видно, что представляют собой искомые коэффициенты.

$$b = r \frac{m_{\lg m}}{m_{\lg l}}; \quad \lg a = \overline{\lg m} - r \frac{m_{\lg m}}{m_{\lg l}} \overline{\lg l}.$$

Используя полученные выше оценки, вычислим

$$b = r \frac{m_{\lg m}}{m_{\lg l}} = 0,9546 \frac{0,523}{0,182} = 2,743;$$

$$\lg a = \overline{\lg m} - r \frac{m_{\lg m}}{m_{\lg l}} \overline{\lg l} = 1,2517 - 0,9546 \frac{0,523}{0,182} 1,3615 = -2,483.$$

Оценим надежность полученного коэффициента корреляции по критерию Фишера: $z^* = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r^*}{1-r^*} = 1,8812$, где $r^* = 0,9546$. Определим $\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{n-3}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = 0,333$.

Доверительный интервал для функции Z имеет вид: $z^* - t \sigma_z < Z < z^* + t \sigma_z$. Приняв доверительную вероятность $\alpha = 0,95$ из таблиц для $\Phi(t)$ найдем $t = 2$ (см. Прил. 2, табл. П...). И доверительный интервал примет вид: $1,215 < Z < 2,548$. Перейдем к доверительному интервалу для r , используя таблицы для Z $0,84 < r < 0,99$. Доверительный интервал не включает в себя значение нуля, лежит в зоне положительных значений, поэтому можно считать прямолинейную корреляционную зависимость между величинами $\ln l$ и $\ln m$, а следовательно,

корреляционную зависимость вида $m=al^b$ между l и m установленной. Здесь значение $a=10^{-2.483}=0,00329$.

Множественная регрессия и корреляция

Если Y — функция только одной случайной величины X , то используют двумерный корреляционный анализ. Если Y зависит более чем от одного X , то связь множественная, и для анализа этой связи применяют методы множественной корреляции.

Методы множественной регрессии используют для прогноза Y по заданным значениям независимых переменных X_1, X_2, \dots, X_k . Если неизвестно, зависит ли Y от конкретной величины X_i , то сначала осуществляют парный корреляционный анализ (двумерный случай), затем включают в рассмотрение еще одну переменную X_i . Если последняя оказывает влияние на поведение Y (в этом случае говорят, что величина X_i релевантная), то при ее введении в уравнение регрессии средняя квадратическая ошибка аппроксимации измеренных данных уменьшается, а сводный коэффициент корреляции (между Y и совокупностью величин X_i) увеличивается. Если же X_i не оказывает влияние на поведение Y , то средняя квадратическая ошибка аппроксимации увеличивается, а сводный коэффициент корреляции уменьшается.

Общий вид уравнения регрессии для линейной зависимости следующий:

$$Y = b_{Y1.23\dots k}X_1 + b_{Y2.134\dots k}X_2 + \dots + b_{Yk.123\dots k-1}X_k + b_{Y123\dots k}. \quad (2.124)$$

Здесь коэффициенты b — коэффициенты регрессии, которые имеют индексы, введенные Юлом. Каждый коэффициент имеет $k+1$ индекс, причем первые два индекса означают, соответственно, функцию и номер той переменной, при которой стоит данный коэффициент регрессии. Остальные индексы, отделенные от первых двух точкой, соответствуют остальным номерам переменных, которые входят в уравнение регрессии.

Для определения коэффициентов данного уравнения, производят n групп измерений. В каждой i -й группе производят измерения всех аргументов X_j^i и функции Y_i (здесь j — номер аргумента X). Например, для двух аргументов X_1 и X_2 при выполнении седьмого измерения всех переменных, используют следующие обозначения x_1^7, x_2^7, y^7 .

Важно, что количество групп измерений должно быть больше чем число аргументов k . Тогда для определения оценок коэффициентов регрессии используют метод наименьших квадратов. При этом уравнения поправок имеют вид:

$$v_1 = b_{\gamma_{1.23\dots k}}x_1^{(1)} + b_{\gamma_{2.134\dots k}}x_2^{(1)} + \dots + b_{\gamma_{k.123\dots k-1}}x_k^{(1)} + b_{\gamma_{123\dots k}} - y^{(1)};$$

$$v_2 = b_{\gamma_{1.23\dots k}}x_1^{(2)} + b_{\gamma_{2.134\dots k}}x_2^{(2)} + \dots + b_{\gamma_{k.123\dots k-1}}x_k^{(2)} + b_{\gamma_{123\dots k}} - y^{(2)};$$

.....

$$v_n = b_{\gamma_{1.23\dots k}}x_1^{(n)} + b_{\gamma_{2.134\dots k}}x_2^{(n)} + \dots + b_{\gamma_{k.123\dots k-1}}x_k^{(n)} + b_{\gamma_{123\dots k}} - y^{(n)}.$$

Здесь верхний индекс i — номер группы измерений, нижний индекс — номер аргумента.

Матрица коэффициентов уравнений поправок, в данном случае, имеет вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \dots & x_k^{(1)} & 1 \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \dots & x_k^{(2)} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & \dots & x_k^{(n)} & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Вектор свободных членов } \mathbf{L} = \begin{pmatrix} -y^{(1)} \\ -y^{(2)} \\ \dots \\ -y^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Матрица коэффициентов нормальных уравнений примет вид:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{pmatrix} [x_1^2] & [x_1 x_2] & \dots & [x_1 x_k] & [x_1] \\ [x_1 x_2] & [x_2^2] & \dots & [x_2 x_k] & [x_2] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [x_1] & [x_2] & \dots & [x_k^2] & n \end{pmatrix}.$$

$$\text{Вектор свободных членов } \mathbf{A}^T \mathbf{L} = \begin{pmatrix} -[x_1 y] \\ -[x_2 y] \\ \dots \\ -[y] \end{pmatrix}.$$

В результате решения системы нормальных уравнений получим вектор оценок коэффициентов регрессии

$$B^* = \begin{pmatrix} b_{Y1.23\dots k}^* \\ b_{Y2.13\dots k}^* \\ \dots\dots\dots \\ b_{Yk.123\dots k-1}^* \\ b_{Y123\dots k}^* \end{pmatrix} = -QA^T L, \text{ где } Q=(ATA)^{-1}.$$

Вычисленные таким образом коэффициенты регрессии подставляют в уравнение регрессии

$$y^* = b_{Y1.23\dots k}^* x_1 + b_{Y2.134\dots k}^* x_2 + \dots + b_{Yk.123\dots k-1}^* x_k + b_{Y123\dots k}^*, \quad (2.125)$$

которое используют для вычисления прогнозных значений y^* по значениям аргументов X_i . Если имеется только одна переменная X , то уравнение регрессии представляет собой уравнение прямой. В случае двух аргументов, уравнение регрессии определяет плоскость в трехмерном пространстве. В общем случае, уравнение регрессии (2.125) определяет некоторую поверхность в R_{k+1} линейном пространстве размерности $k+1$.

Среднюю квадратическую ошибку аппроксимации множественной регрессии (2.125) определяют по формуле $m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-k-1}}$.

Коэффициент корреляции между Y и y^* можно рассматривать как характеристику корреляционной связи между величиной Y и всей совокупностью величин X_1, X_2, \dots, X_k , поэтому он называется сводным коэффициентом корреляции и имеет вид

$$r_{Yy^*} = \frac{M(Y - M_Y)(y^* - M_{y^*})}{\sigma_Y \sigma_{y^*}}. \quad (2.126)$$

По результатам измерений данный коэффициент корреляции можно вычислить по формуле

$$r_{Yy^*} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(y_i^* - \bar{y}^*)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \sum_{i=1}^n (y_i^* - \bar{y}^*)^2}}, \quad (2.127)$$

где y_i — результат i -го измерения величины Y ; y_i^* — величина, вычисленная по формуле (2.125). При этом сводный коэффициент корреляции r_{Yy^*} может изменяться в пределах от 0 до 1. Если $r_{Yy^*}=1$, то имеет место линейная функциональная зависимость между Y и совокупностью всех X_j . Сводный коэффициент корреляции $r_{Yy^*}=0$ тогда и только тогда, когда все парные коэффициенты корреляций $r_{YX_j}=0$, т.е. Y не коррелирована ни с одним из значений X_j ($j=1, 2, \dots, k$).

В более сложных ситуациях уравнение регрессии может быть нелинейным. Тогда уравнение регрессии может иметь вид полинома второй или более высокой степени.

Пример. Произведены измерения величин Y, X_1, X_2 [19]. В качестве функции принята функция Y , ее аргументами являются X_1, X_2 . Требуется провести множественный корреляционный анализ.

№ измерения	Y	X_1	X_2	X_1Y	X_2Y	X_1X_2	Y^2	X_1^2	X_2^2
1	239	14	219	3346	52341	3066	57121	196	47961
2	207	16	200	3312	41400	3200	42849	256	40000
3	202	17	188	3434	37976	3196	40804	289	35344
4	264	24	251	6336	66264	6024	69696	576	63001
5	300	28	274	8400	82200	7672	90000	784	75076
6	190	18	179	3420	34010	3222	36100	324	32041
7	220	20	204	4400	44880	4080	48400	400	41616
8	170	18	167	3060	28390	3006	28900	324	27889
9	220	24	227	5280	49940	5448	48400	576	51529
10	110	11	105	1210	11550	1155	12100	121	11025
11	249	26	239	6474	59511	6214	62001	676	57121
12	222	21	208	4662	46176	4368	49284	441	43264
13	260	25	210	6500	54600	5250	67600	625	44100
14	230	20	248	4600	57040	4960	52900	400	61504
15	200	18	189	3600	37800	3402	40000	324	35721
16	230	17	195	3910	44850	3315	52900	289	38025
17	140	12	150	1680	21000	1800	19600	144	22500
18	142	11	133	1562	18886	1463	20164	121	17689
19	202	14	177	2828	35754	2478	40804	196	31329
20	230	21	211	4830	48530	4431	52900	441	44521
Сумма	4227	375	3974	82844	873098	77750	932523	7503	821256
Среднее	211,35	18,75	198,7	3873,75	43654,9	3648,55	46626,15	350,35	41062,8

Решение. Определим сначала зависимость Y от X_1 , не принимая X_2 во внимание. Найдем уравнение регрессии Y от X_1 по методу наименьших квадратов. Напишем нормальные уравнения: $[x_1^2]a^* + [x_1]b^* - x_1y = 0$, в численном виде $7503a^* + 375b^* - 82844 = 0$; $[x_1]a^* + nb^* - [y] = 0$, в численном виде $375a^* + 20b^* - 4227 = 0$.

Обратная матрица \mathbf{Q} примет вид $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0,002892263 & -0,05278380 \\ -0,05278380 & 1,013304405 \end{pmatrix}$.

И уравнение регрессии примет вид $Y=7,605X_1+68,75$.

При этом $m_Y = \sqrt{\frac{[(y - \bar{y})^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{39162}{19}} = 45,4$; $m_{X_1} = \sqrt{\frac{[(x_1 - \bar{x}_1)^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{471,2}{19}} = 4,98$;

коэффициент корреляции $r_{X_1Y}^* = \frac{\rho_{Y/X_1}}{m_Y m_{X_1}} = \frac{7,605}{45,4 \cdot 4,98} = +0,83$. Здесь средняя квадратическая ошибка аппроксимации величины Y уравнением регрессии

Y/X_1 определяется так $m_{YX_1} = \sqrt{\frac{[(y - y_i^*)^2]}{n-2}} = \sqrt{\frac{11861}{18}} = 25,67$. Здесь y_i — результаты измерений, приведенные в таблице; y_i^* — значения, вычисленные при подстановке в уравнение регрессии значений величины X_1 .

Аналогично проведем корреляционный анализ зависимости Y от X_2 .

Система нормальных уравнений для данного случая имеет вид

$$821256a^* + 3974b^* - 873098 = 0$$

$$3974a^* + 20b^* - 4227 = 0.$$

Решая которую, получим уравнение регрессии вида $Y=1,050X_2+2,779$. Отсюда получим $m_{X_2}=40,8$; $m_Y=45,4$; $r_{X_2Y}=+0,94$. Средняя квадратическая ошибка аппроксимации величины Y уравнением регрессии Y/X_2 будет $m_{YX_2}=15,5$.

Для случая трех переменных общий вид уравнения множественной регрессии будет следующий

$$Y_{X_1X_2} = b_{Y1.2}X_1 + b_{Y2.1}X_2 + b_{Y12}. \quad (2.128)$$

Уравнение имеет три параметра — коэффициенты регрессии $b_{Y1.2}$, $b_{Y2.1}$, b_{Y12} . Для определения оценок этих коэффициентов составим систему нормальных уравнений:

$$[x_1^2] b_{Y1.2}^* + [x_1x_2] b_{Y2.1}^* + [x_1] b_{Y12}^* + [x_1y] = 0;$$

$$[x_1x_2] b_{Y1.2}^* + [x_2^2] b_{Y2.1}^* + [x_2] b_{Y12}^* + [x_2y] = 0;$$

$$[x_1] b_{Y1.2}^* + [x_2] b_{Y2.1}^* + nb_{Y12}^* + [y] = 0.$$

В числовом виде матрица коэффициентов нормальных уравнений примет вид

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 7503 & 77750 & 375 \\ 77750 & 821256 & 3974 \\ 375 & 3974 & 20 \end{pmatrix}. \text{ Вектор свободных членов } \mathbf{A}^T \mathbf{L} = \begin{pmatrix} [x_1y] \\ [x_2y] \\ [y] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -82844 \\ -873098 \\ -4227 \end{pmatrix}.$$

Решив данную систему, получим оценки $b_{Y1.2} = 1,350$; $b_{Y2.1} = 0,911$; $b_{Y12} = 4,93$ и уравнение множественной регрессии примет вид

$$Y=1,350X_1+0,911X_2+4,93. \quad (2.129)$$

Средняя квадратическая ошибка аппроксимации данным уравнением регрессии равна $m_Y=15,4$. Вычислим сводный коэффициент корреляции

$$r_{Yy^*} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(y_i^* - \bar{y}^*)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \sum_{i=1}^n (y_i^* - \bar{y}^*)^2}} = \frac{35082}{\sqrt{39147 \cdot 35067}} = 0,95.$$

Как видим средняя квадратическая ошибка аппроксимации $m_{YX_1}=25,67$ значительно больше средней квадратической ошибки аппроксимации $m_Y=15,4$ уравнением (2.129). Коэффициент же корреляции увеличился. Это означает, что влияние величины X_2 является значительным. В этом случае говорят, что случайная величина X_2 — релевантна. Средняя квадратическая ошибка $m_{YX_2}=15,5$. Коэффициент же корреляции равен 0,94, что почти совпадает со сводным коэффициентом корреляции уравнения (2.129). Это означает, что влияние X_1 , по сравнению с величиной X_2 является незначительным. Поэтому можно считать, что X_1 нерелевантна. Это означает, что достаточно использовать уравнение регрессии $Y=1,050X_2+2,779$ вместо уравнения (2.129).

Контрольные вопросы

1. Дайте определение корреляционной зависимости.
2. Запишите общий вид уравнения регрессии.
3. Какая зависимость называется прямолинейной корреляционной?
4. Дайте определение коэффициента регрессии. Какие величины входят в коэффициент регрессии? Что они характеризуют?
5. Напишите формулу для вычисления оценки коэффициента корреляции по опытным данным.
6. В чем суть критерия Романовского? В каких условиях он применяется?
7. В чем суть критерия Фишера?
8. В чем суть второго критерия Фишера для определения прямолинейной зависимости при нормальном законе распределения?
9. Как определяется прямолинейная корреляционная зависимость?
10. Как строится коррелограмма и график уравнения регрессии?
11. Как оценить надежность коэффициента регрессии?
12. Как определяется уравнение регрессии методом наименьших квадратов?
13. Как строится доверительный интервал для прямолинейного уравнения регрессии?
14. Каким образом строится уравнение регрессии для нелинейной корреляционной зависимости?
15. Дайте определение корреляционного отношения. В чем его суть?
16. В чем суть множественной регрессии? Как определяется эта зависимость по опытным данным?

ГЛАВА 3

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

§3.1. Общие понятия

Данный раздел посвящен обработке измерений многомерной случайной величины по методу наименьших квадратов. В геодезии к многомерным случайным величинам можно отнести величины, объединенные в единую геодезическую сеть. Это — сети триангуляции, трилатерации, линейно-угловые построения, комбинированные сети из наземных и спутниковых измерений. В геодезии принято выполнять измерения в большем количестве, чем это требуется, поэтому различают понятия необходимых, избыточных и всех измерений. В дальнейшем будем обозначать число всех измерений n , число необходимых измерений k , число избыточных измерений r .

Под числом необходимых измерений k понимают минимальное количество измерений, с помощью которых можно вычислить все элементы геодезической сети. Сами такие измерения называют *необходимыми*. Измерения, выполненные сверх необходимых, называют *избыточными* измерениями. Понятно, что число таких измерений равно разности между числом всех измерений и необходимых измерений $r = n - k$.

Избыточные измерения приводят к неоднозначности в определении элементов сети. Приведем примеры выполнения избыточных измерений. На рис. 3.1 приведена простейшая нивелирная сеть. Марки $M1$ и $M2$ являются исходными пунктами, репера $Rp1$, $Rp2$ и $Rp3$ — определяемыми. Для вычисления их отметок измерены превышения h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 . Ясно, что для определения отметок трех реперов достаточно было бы измерить три превышения, поэтому в данном случае имеем число всех измерений $n=5$, число необходи-

мых измерений $k=3$, число избыточных измерений $r=n-k=5-3=2$. Сами отметки трех искоемых реперов можно получить, используя различные комбинации измеренных превышений. Например: H_{Rp1} можно вычислить, используя превышение h_1 — $H_{Rp1}=H_{M1}+h_1$; H_{Rp2} можно вычислить, используя превышения h_1 и h_5 — $H_{Rp2}=H_{M1}+h_1+h_5$ и $H_{Rp3}=H_{M2}-h_3$. В этом случае превышения h_1 , h_3 и h_5 являются необходимыми, превышения h_2 и h_4 — избыточными.

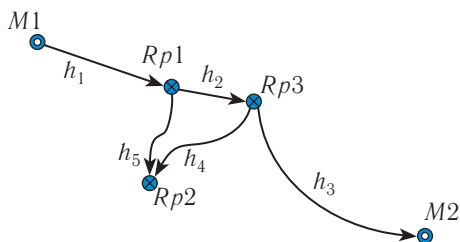


Рис. 3.1. Пример нивелирной сети

Направление измерения превышения обозначено на рис. 3.1 стрелкой, в соответствии с которой и ставиться знак «+» или «-». Напомним, превышение равно разности между отметками конечного и начального пункта. Но отметки реперов можно получить и по другим возможным путям.

Например, $H'_{Rp1}=H_{M2}-h_3-h_2$.

Понятно, что из-за ошибок измерений значения H_{Rp1} и H'_{Rp1} не совпадут, т.е. избыточные измерения приводят к неоднозначности определения величин геодезического построения. Тогда зачем нужно делать избыточные измерения?

Есть несколько целей для выполнения избыточных измерений:
контроль измерений;

повышение точности определяемых элементов геодезической сети;

оценка точности измерений и других элементов геодезического построения.

Приведем еще один пример. На рис. 3.2 A и B — исходные пункты. Их координаты известны и являются исходными (твердыми) при последующей обработке. Пункт C — определяемый, координаты этого пункта необходимо получить, используя координаты исходных пунктов и результаты измерений. Измерены три угла, ясно, что для определения координат X_C и Y_C достаточно было бы выполнить только два измерения, например, первый и второй угол — β_1 и β_2 . В данном случае, измерения этих углов будут — необходимыми. Измерение же третьего угла β_3 будет избыточным и приведет к

неоднозначности в определении координат пункта C .

Действительно, координату X_C можно получить, используя различные комбинации измеренных углов:

$$X_C = f(\beta_1, \beta_2);$$

$$X'_C = f(\beta_1, \beta_3);$$

$$X''_C = f(\beta_2, \beta_3).$$

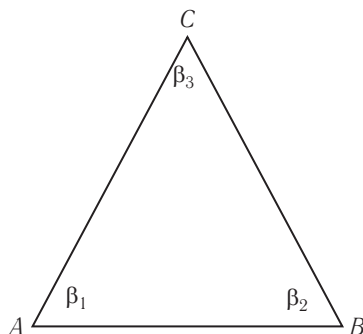


Рис. 3.2. Измерения углов в треугольнике

Из-за ошибок в измерениях эти координаты будут различаться. Очевидно, необходимо ликвидировать неоднозначность в определении элементов сети, т.е. уравнивать сеть. Но это только одна из задач уравнивания.

Задачи уравнивания:

ликвидация неоднозначности определения элементов сети;

определение уравненных элементов сети — доброкачественных оценок;

повышение точности определяемых элементов сети;

оценка точности вычисленных элементов сети.

Существуют два основных способа уравнивания, отличия которых связаны с различными проявлениями неоднозначности, что приводит к различным исходным уравнениям. В параметрическом способе (первый способ) составляются уравнения, связывающие искомые неизвестные и измеряемые величины. В качестве таких неизвестных могут быть выбраны, например, координаты определяемых пунктов (подробнее этот способ будет рассмотрен ниже). Такие уравнения будут справедливы для истинных значений. Из-за ошибок измерений равенства в таких уравнениях нарушаются. Задача уравнивания — восстановить равенства.

Второй способ — коррелятивный. Избыточные измерения приводят к тому, что между измеряемыми величинами возникают математические зависимости. Например, для треугольника (см. рис. 3.2) возникает связь вида $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - 180 = 0$. Сумма углов в треугольнике должна равняться 180° . Неоднозначность здесь проявляется в том, что из-за ошибок измерений сумма углов не

будет равна 180° . Уравнения такого вида и являются исходными в коррелятном способе.

§3.2. Параметрический способ уравнивания

Общая теория параметрического способа

Алгоритмы уравнивания как в параметрическом, так и в коррелятном способе не зависят от вида геодезического построения. Для всех видов сетей — триангуляции, трилатерации, линейно-угловой сети и других построений алгоритм уравнивания для параметрического способа будет единым. Для коррелятного способа последовательность уравнивания, как и алгоритм, также будет единый. Как было отмечено выше, в параметрическом способе уравнивания рассматривают два вида величин: измеряемые и искомые неизвестные (координаты, отметки определяемых пунктов и др.), которые будем называть параметрами. Поэтому для изложения алгоритма уравнивания введем обозначения именно для этих двух видов величин:

X_j — истинные значения параметров;

x_j — приближенные значения параметров;

δx_j — поправки к приближенным значениям параметров;

$\bar{x}_j = x_j + \delta x_j$ — уравненные значения параметров;

Y_i — истинные значения измеряемых величин;

y_i — результаты измерений;

v_i — поправки к результатам измерений из уравнивания;

\hat{y}_i — уравненные значения измеренных величин, $\hat{y}_i = y_i + v_i$.

Важнейшим этапом уравнивания является выбор параметров уравнивания. В качестве параметров можно выбирать различные величины. Например, координаты определяемых пунктов, измеряемые или какие-либо другие величины. Но, в любом случае, параметры должны отвечать двум требованиям:

1) число параметров должно быть равным числу необходимых измерений k ;

2) параметры не должны быть зависимыми друг от друга, т.е. не должно существовать функций вида $X_j = f(X_1, X_2, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_k)$.

Цель таких условий — создание базиса в некоем метрическом пространстве, которое образуется для любой геодезической сети.

Например, построение базиса в двумерном пространстве — на плоскости. Здесь базис должен состоять из двух неколлинеарных, т.е. не лежащих на одной прямой или параллельных друг другу векторов. Если векторы \bar{x}_1 и \bar{x}_2 лежат на одной прямой, то они легко могут быть выражены друг через друга путем линейной комбинации $\bar{x}_2 = k\bar{x}_1$. Следовательно, эти вектора зависимые и через них нельзя определить вектор, не лежащий на данной прямой. Поэтому в двумерном пространстве (плоскость) базис должен состоять из двух неколлинеарных векторов.

Таким образом при правильном выборе через параметры — как через базис — можно выразить любой элемент геодезической сети. В том числе и все измерения

$$Y_i = f_i(X_1, X_2, \dots, X_k), \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (3.1)$$

Такие уравнения называют параметрическими уравнениями связи. Их составляют для каждого из n измерений.

Рассмотрим треугольник с измеренными углами (рис. 3.3).

В качестве параметров здесь можно выбрать как координаты определяемого пункта $X_1 = X_C$ и $X_2 = Y_C$, так и углы $X_1 = Y_1$ и $X_2 = Y_2$. Обе эти пары удовлетворяют двум необходимым условиям. Но уравнения связи, когда в качестве параметров берутся координаты, будут нелинейными. Измеренные углы в этом случае должны быть выражены через координаты пунктов.

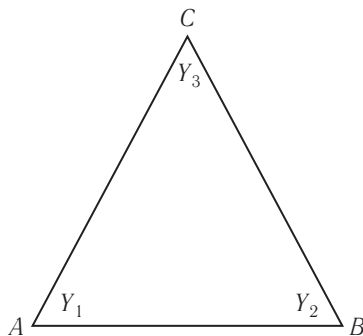


Рис. 3.3. Треугольник с измеренными углами

Например, для угла Y_1 , уравнение связи будет иметь вид:

$$Y_1 = \arctg\left(\frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A}\right) - \arctg\left(\frac{Y_C - Y_A}{X_C - X_A}\right).$$

Здесь $X_A, Y_A, X_B, Y_B, X_C, Y_C$ — координаты исходных точек A, B и определяемой точки C . Аналогично составляют уравнения связи для углов Y_2 и Y_3 .

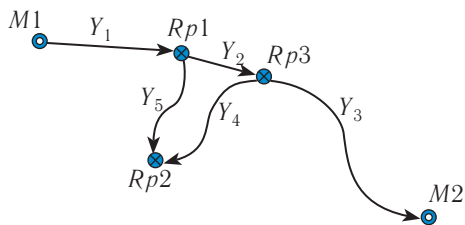


Рис. 3.4. Составление параметрических уравнений связи для нивелирной сети

Гораздо проще уравнения связи будут выглядеть, если в качестве параметров выбрать углы $X_1=Y_1$ и $X_2=Y_2$. Уравнения связи в этом случае примут вид: $Y_1=X_1$; $Y_2=X_2$; $Y_3=180-X_1-X_2$.

Рассмотрим составление уравнений связи для нивелирной сети (рис. 3.4). В качестве параметров выберем три определяемые отметки реперов, которые можно вычислить, используя измеренные превышения и исходные данные:

$$\begin{aligned} X_1 &= H_{Rp1} = H_{M1} + Y_1; \\ X_2 &= H_{Rp2} = H_{M1} + Y_1 + Y_5; \\ X_3 &= H_{Rp3} = H_{M2} - Y_3. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Из (3.2) в дальнейшем получим приближенные значения параметров. Отметки марок, как и ранее являются исходными. Параметрические уравнения связи для каждого превышения записываются в следующем виде: $Y_1=X_1-H_{M1}$ — превышение определяется как разность отметок конечного и начального пунктов, аналогично, для других превышений: $Y_2 = X_2 - X_1$; $Y_3 = H_{M2} - X_3$; $Y_4 = X_2 - X_3$; $Y_5 = X_2 - X_1$.

Понятно, что равенства в параметрических уравнениях связи будут выполняться для истинных значений параметров и измеряемых величин. Однако истинные значения X_j и Y_i неизвестны. Известны результаты измерений y_i и приближенные значения параметров, которые можно получить, используя сами измерения. Например, для предыдущего примера по формулам (3.2).

Если подставить такие значения в (3.1), равенства в них, из-за ошибок измерений, нарушатся $y_i \neq f_i(x_1, x_2, \dots, x_k)$ при $i = 1, 2, \dots, n$.

Обозначим величину, на которую нарушатся равенства (3.1), через $l_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_k) - y_i$.

Как отмечалось ранее, одна из задач уравнивания состоит в восстановлении равенств в уравнениях связи. Для этого вводят поправки v_i в измеренные значения y_i и δx_j — в приближенные значения параметров x_j :

$$\hat{y}_i = y_i + v_i = f_i(x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, \dots, x_k + \delta x_k) \quad (3.3)$$

или

$$\hat{y}_i = \overline{f_i}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_k).$$

Таким образом, для восстановления равенств и получения системы (3.3) необходимо найти поправки v_i и δx_j . Для упрощения этой задачи приведем функции в (3.3) к линейному виду, разложив их в ряд Тэйлора:

$$\begin{aligned} y_i + v_i &= f_i(x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, \dots, x_k + \delta x_k) = \\ &= f_i(x_1, x_2, \dots, x_k) + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1} \right)_0 \delta x_1 + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_2} \right)_0 \delta x_2 + \dots + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right)_0 \delta x_k. \end{aligned}$$

Индекс ноль при частных производных означает, что это численные значения производных. Для вычисления последних необходимо знать приближенные значения параметров, которые определяют, используя измеренные значения. Это достаточно для обеспечения требуемой точности вычислений. Введем обозначения

$a_{ij} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_0$, перенесем величину y_i в правую часть равенства.

Получим систему параметрических уравнений поправок

$$v_i = a_{i1} \delta x_1 + a_{i2} \delta x_2 + \dots + a_{ik} \delta x_k + l_i,$$

которая в полной записи примет следующий вид:

$$\begin{aligned} v_1 &= a_{11} \delta x_1 + a_{12} \delta x_2 + \dots + a_{1k} \delta x_k + l_1 \\ v_2 &= a_{21} \delta x_1 + a_{22} \delta x_2 + \dots + a_{2k} \delta x_k + l_2 \\ &\dots \\ v_n &= a_{n1} \delta x_1 + a_{n2} \delta x_2 + \dots + a_{nk} \delta x_k + l_n \end{aligned} \quad (3.4)$$

Рассмотрим примеры составления параметрических уравнений связи для треугольника (см. рис. 3.3), в котором измерены все углы и примеры нивелирной сети (см. рис. 3.4, табл. 3.1).

Поскольку в данных примерах уравнения связи имеют линейный вид, то коэффициенты (производные) при δx_j в уравнениях поправок совпадают с коэффициентами при X в уравнениях связи. Для вычисления свободных членов должны быть известны

Т а б л и ц а 3.1

Параметрические уравнения связи	Параметрические уравнения поправок	Свободные члены уравнений поправок
Для треугольников		
$Y_1 = X_1$	$v_1 = \delta x_1 + l_1$	$l_1 = x_1 - y_1$
$Y_2 = X_2$	$v_2 = \delta x_2 + l_2$	$l_2 = x_2 - y_2$
$Y_3 = 180 - X_1 - X_2$	$v_3 = -\delta x_1 - \delta x_2 + l_3$	$l_3 = 180 - x_1 - x_2 - y_3$
Для нивелирной сети		
$Y_1 = X_1 - H_{M1}$	$v_1 = \delta x_1 + l_1$	$l_1 = x_1 - H_{M1} - y_1$
$Y_2 = X_3 - X_1$	$v_2 = -\delta x_1 + \delta x_3 + l_2$	$l_2 = x_3 - x_1 - y_2$
$Y_3 = H_{M2} - X_3$	$v_3 = -\delta x_3 + l_3$	$l_3 = H_{M2} - x_3 - y_3$
$Y_4 = X_2 - X_3$	$v_4 = \delta x_2 - \delta x_3 + l_4$	$l_4 = x_2 - x_3 - y_4$
$Y_5 = X_2 - X_1$	$v_5 = -\delta x_1 + \delta x_2 + l_5$	$l_5 = x_2 - x_1 - y_5$

результаты измерений и приближенные значения параметров x_j , которые можно вычислить, используя любую возможность. Например, равенства (3.2).

Итак, мы привели систему параметрических уравнений связи $\hat{y}_i = f_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k)$ к линейному виду. Запишем данную систему параметрических уравнений поправок в матричном виде:

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{X} + \mathbf{L}, \quad (3.5)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix}; \quad \Delta\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \dots \\ \delta x_k \end{pmatrix}; \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}; \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \dots \\ l_n \end{pmatrix}.$$

Для примера, данные которого приведены в табл. 3.1, матрица \mathbf{A} для треугольника примет вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Здесь первый столбец — коэффициенты при δx_1 , второй столбец — при δx_2 .

Для облегчения составления матрицы \mathbf{A} неизвестные δx_j со своими коэффициентами в табл. 3.1 записаны друг под другом, поэтому матрица \mathbf{A} для нивелирной сети имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в системе уравнений поправок $\mathbf{V} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{X} + \mathbf{L}$ неизвестными являются векторы \mathbf{V} и $\Delta\mathbf{X}$. Число уравнений здесь n , общее число неизвестных $n+k$. Конечно, было бы хорошо обойтись без поправок \mathbf{V} , поскольку измерения выполняются с большой точностью и отягощать их поправками не хотелось бы. Но, так как число уравнений n здесь больше числа неизвестных k , система $\mathbf{A}\Delta\mathbf{X} + \mathbf{L} = 0$ является переопределенной, несовместной и не имеет решения, поэтому и появляется вектор \mathbf{V} . Систему $\mathbf{V} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{X} + \mathbf{L}$ решают минимизируя вектор \mathbf{V} .

Понятно, что нельзя минимизировать сумму поправок $[v]$, т.к. даже значительные величины поправок могут скомпенсироваться в сумме за счет положительных и отрицательных значений. Для того, чтобы этого не произошло, необходимо суммировать либо абсолютные значения поправок, либо их квадраты, т.е. решать систему уравнений поправок под одним из условий:

$[|v|] = \min$ — метод наименьших модулей;

$[v^2] = \min$ — метод наименьших квадратов.

При этом ни в том, ни в другом случае компенсации при суммировании не происходит. Метод наименьших квадратов используется чаще и выглядит предпочтительнее, поскольку обладает более простой теорией и алгоритмом решения. Мы будем использовать именно этот метод. Найдем решение системы уравнений поправок, записанных как в обычной форме, так и в матричной.

Начнем с обычной записи уравнений. Решим систему (3.4) под условием $\Phi = [v^2] = \min$. Для этого найдем частные производные от функции Φ по каждой поправке δx_j , используя правила определения производной от сложной функции, и приравняем их

нулю. Так производная по δx_1 имеет вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \delta x_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial v_1} \frac{\partial v_1}{\partial \delta x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial v_2} \frac{\partial v_2}{\partial \delta x_1} + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial v_n} \frac{\partial v_n}{\partial \delta x_1} = 0.$$

Аналогично, найдем производные по другим поправкам δx_j :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \delta x_2} = \frac{\partial \Phi}{\partial v_1} \frac{\partial v_1}{\partial \delta x_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial v_2} \frac{\partial v_2}{\partial \delta x_2} + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial v_n} \frac{\partial v_n}{\partial \delta x_2} = 0;$$

.....

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \delta x_k} = \frac{\partial \Phi}{\partial v_1} \frac{\partial v_1}{\partial \delta x_k} + \frac{\partial \Phi}{\partial v_2} \frac{\partial v_2}{\partial \delta x_k} + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial v_n} \frac{\partial v_n}{\partial \delta x_k} = 0.$$

Учитывая, что $\frac{\partial \Phi}{\partial v_i} = 2v_i$, а производная $\frac{\partial v_i}{\partial \delta x_j} = a_{ij}$ запишем полученные равенства в виде: $2a_{1j}v_1 + 2a_{2j}v_2 + \dots + 2a_{nj}v_n = 0$, где $j=1, 2, \dots, k$. Сократив постоянную величину 2, получим систему равенств, которая называется леммой Гаусса:

$$\begin{aligned} a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \dots + a_{n1}v_n &= 0; \\ a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \dots + a_{n2}v_n &= 0; \\ \dots & \\ a_{1k}v_1 + a_{2k}v_2 + \dots + a_{nk}v_n &= 0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Данную систему можно переписать более компактно, используя символы гауссовой суммы:

$$\begin{aligned} [a_1 v] &= 0; \\ [a_2 v] &= 0; \\ \dots & \\ [a_k v] &= 0. \end{aligned}$$

В матричном виде система примет вид: $\mathbf{A}^T \mathbf{V} = 0$.

Повторим вывод леммы Гаусса в матричном виде.

Условие метода наименьших квадратов в матричном виде $\Phi = [\mathbf{v}^2] = \mathbf{V}^T \mathbf{V} = \min$.

Определим минимум данной функции, учитывая уравнения поправок (3.5) $\frac{\partial \Phi}{\partial \Delta \mathbf{X}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{V}} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \Delta \mathbf{X}} = 2\mathbf{V}^T \mathbf{A} = 0$ или $\mathbf{V}^T \mathbf{A} = 0$.

для нивелирной сети

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вектор свободных членов системы нормальных уравнений

$$\mathbf{A}^T \mathbf{L} = \begin{pmatrix} [a_1 l] \\ [a_2 l] \\ \dots \\ [a_k l] \end{pmatrix}.$$

Система нормальных уравнений имеет единственное решение в случае, если геодезическая сеть имеет достаточное количество исходных данных (координат), чтобы задать ее положение в пространстве. Так, если в треугольнике (см. рис. 3.3), в качестве исходной будет задана только одна точка, например, точка A , то треугольник не будет зафиксирован в пространстве. Можно вращать его вокруг точки A . Углы треугольника при этом не будут изменяться, а искомая точка C может получать любые координаты на окружности, которую она будет описывать. Но сам треугольник при этом сохранит свою форму. Таким образом, в данном построении недостаточно иметь одну точку в качестве исходной, т.к. при этом матрица коэффициентов нормальных уравнений будет иметь определитель, равный нулю, а система — бесконечное множество решений. В случае же, когда в треугольнике будут заданы две твердые точки, система нормальных уравнений будет иметь единственное решение.

Обычно, в геодезической практике число исходных данных является достаточным и система нормальных уравнений в этих условиях также будет иметь единственное решение. Недостаточное число исходных данных встречается в геодезической практике, например, при наблюдениях за деформациями земной поверхности, когда все исходные пункты могут смещаться. Геодезические построения в этом случае называются свободными геодезическими

сетями. Для их уравнивания используют дополнительные условия. В данном курсе решение таких задач не предусмотрено.

Итак, будем считать, что система нормальных уравнений имеет единственное решение. Из решения нормальных уравнений поправок можно определить вектор поправок к приближенным значениям параметров. Зная этот вектор, из системы (3.4) можно найти и вектор поправок к результатам измерений, а затем вычислить уравненные значения параметров и уравненные результаты измерений, решив таким образом основную задачу уравнивания — получение доброкачественных оценок измеряемых величин и параметров.

Уравнивание параметрическим способом выполняется в следующей последовательности.

1. Определение числа всех измерений n , необходимых k и избыточных r измерений.

2. Выбор параметров X_1, X_2, \dots, X_k , которые должны удовлетворять двум условиям — число их равно k , и они должны быть независимыми друг от друга, т.е. ни один из параметров не должен выражаться через другие. Не должно существовать функции $X_j = f(X_1, X_2, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_k)$.

3. Составление параметрических уравнений связи $Y_i = f_i(X_1, X_2, \dots, X_k)$.

4. Составление параметрических уравнений поправок

$$\mathbf{V} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{X} + \mathbf{L}.$$

5. Составление нормальных уравнений поправок $\mathbf{R} \Delta \mathbf{X} + \mathbf{A}^T \mathbf{L} = 0$.

6. Решение системы нормальных уравнений поправок

$$\Delta \mathbf{X} = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{L}.$$

7. Вычисление поправок к результатам измерений $\mathbf{V} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{X} + \mathbf{L}$.

8. Вычисление уравненных значений параметров $\bar{x}_j = x_j + \delta x_j$ и измеряемых величин $\hat{y}_i = y_i + v_i$.

9. Окончательный контроль уравнивания. В параметрические уравнения связи необходимо подставить уравненные значения измеряемых величин в левую часть и уравненные значения параметров — в правую часть: $\hat{y}_i = f_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k)$. Если левая часть равна правой части для всех уравнений связи — сеть уравнена.

10. Оценка точности.

Уравнивание неравноточных измерений параметрическим способом

Как известно, если величину Y с весом P_Y умножить на корень из собственного веса, то получим величину с весом равным единице: $F = Y\sqrt{P_Y}$.

$$\text{Действительно, } \frac{1}{P_F} = \left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)^2 \frac{1}{P_Y} = (\sqrt{P_Y})^2 \frac{1}{P_Y} = 1.$$

По аналогии, для случая неравноточных измерений, когда мы имеем дело с вектором случайных величин $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_n \end{pmatrix}$, с известной

весовой матрицей $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{pmatrix}$, легко перейти к вектору,

элементы которого имеют веса, равные единице: $\mathbf{F} = \mathbf{P}^{0,5}\mathbf{Y}$.

Используя обобщенную формулу оценки точности, получим

$$\mathbf{Q}_F = \mathbf{P}^{0,5}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}^{0,5} = \mathbf{E}.$$

Таким образом вектор \mathbf{F} является равноточным. Все элементы этого вектора имеют веса, равные единице. Используем это для получения алгоритма уравнивания неравноточных измерений параметрическим способом.

Исходными уравнениями для параметрического способа являются параметрические уравнения связи $\mathbf{Y} = \overline{f(\overline{X})}$. Пусть вектор измерений представляет собой ряд независимых, неравноточных

измерений, с весовой матрицей $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{pmatrix}$.

Тогда, умножив левую и правую часть параметрических уравнений связи на $\mathbf{P}^{0,5}$, мы перейдем к случаю равноточных измерений

$$\mathbf{P}^{0,5}\mathbf{Y} = \mathbf{P}^{0,5}\overline{f(X)}. \quad (3.7)$$

Параметрические уравнения поправок представляют собой те же уравнения связи, но приведенные к линейному виду. Поэтому этот же прием можно распространить и на параметрические уравнения поправок. Получим $\mathbf{P}^{0,5}\mathbf{V} = \mathbf{P}^{0,5}(\mathbf{A}\Delta\mathbf{X} + \mathbf{L})$.

Раскрывая скобки и сделав новые переобозначения, получим систему параметрических уравнений поправок, приведенную к случаю равноточных измерений

$$\mathbf{V}' = \mathbf{A}'\Delta\mathbf{X} + \mathbf{L}', \quad (3.8)$$

где $\mathbf{V}' = \mathbf{P}^{0,5}\mathbf{V}$; $\mathbf{A}' = \mathbf{P}^{0,5}\mathbf{A}$; $\mathbf{L}' = \mathbf{P}^{0,5}\mathbf{L}$.

Система нормальных уравнений в этом случае примет вид:

$$\mathbf{A}'^T \mathbf{A}' \Delta\mathbf{X} + \mathbf{A}'^T \mathbf{L}' = 0$$

или, учитывая (3.8),

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P}^{0,5} \mathbf{P}^{0,5} \mathbf{A} \Delta\mathbf{X} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}^{0,5} \mathbf{P}^{0,5} \mathbf{L} = 0.$$

Окончательно система нормальных уравнений поправок в случае неравноточных измерений имеет вид:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \Delta\mathbf{X} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L} = 0. \quad (3.9)$$

Перемножив данные матрицы, получим систему нормальных уравнений:

$$[pa_1a_1] \delta x_1 + [pa_1a_2] \delta x_2 + \dots + [pa_1a_k] \delta x_k + [pa_1l] = 0;$$

$$[pa_1a_2] \delta x_1 + [pa_2a_2] \delta x_2 + \dots + [pa_2a_k] \delta x_k + [pa_2l] = 0;$$

.....

$$[pa_1a_k] \delta x_1 + [pa_2a_k] \delta x_2 + \dots + [pa_k a_k] \delta x_k + [pa_k l] = 0.$$

Уравнения (3.9) можно вывести по-другому.

Главное условие метода наименьших квадратов $\Phi = \mathbf{V}^T \mathbf{V}' = \min$ запишем в виде $\Phi = \mathbf{V}^T \mathbf{P}^{0,5} \mathbf{P}^{0,5} \mathbf{V} = \mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V} = [p\upsilon\upsilon] = \min$ и будем его использовать для вывода нормальных уравнений. Найдем минимум данной функции, учитывая параметрические уравнения поправок

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{X} + \mathbf{L}. \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\Delta\mathbf{X}} = \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{V}} \frac{\partial\mathbf{V}}{\partial\Delta\mathbf{X}} = 2\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{A} = 0; \quad \mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{A} = 0.$$

Протраспонирав, получим лемму Гаусса для случая неравно- точных измерений $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{V} = 0$. Подставим сюда вместо \mathbf{V} правую часть параметрических уравнений поправок (3.5) $\mathbf{A}^T \mathbf{P} (\mathbf{A} \Delta \mathbf{X} + \mathbf{L}) = 0$. Получим ту же систему нормальных уравнений $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \Delta \mathbf{X} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L} = 0$ или $\mathbf{R} \Delta \mathbf{X} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L} = 0$, где $\mathbf{R} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$ — матрица коэффициентов нор- мальных уравнений для случая неравноточных измерений.

Дополним пример нивелирной сети (см. рис. 3.4), длинами ходов. Пусть $L_1 = 1,5$ км, $L_2 = 1,5$ км, $L_3 = 0,75$ км, $L_4 = 0,75$ км, $L_5 = 1,5$ км. Вычислим веса измеренных превышений по формуле $p_i = C/L_i = 1,5/L_i$, получим $p_1 = 1,5/1,5 = 1$; $p_2 = 1,5/1,5 = 1$; $p_3 = 1,5/0,75 = 2$; $p_4 = 1,5/0,75 = 2$; $p_5 = 1,5/1,5 = 1$.

Сформируем из этих весов весовую матрицу, которая имеет диагональный вид

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим матрицу коэффициентов нормальных уравнений для данных, приведенных в табл. 3.1, дополнив их полученной весовой матрицей

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Порядок уравнивания неравноточных измерений параметриче- ским способом отличается от случая равноточных измерений только составлением нормальных уравнений, где требуется учесть веса, поэтому необходимо добавить этап вычисления весов измерений.

Последовательность вычислений при уравнивании неравно- точных измерений параметрическим способом.

1. Определение числа всех измерений n , необходимых k и из- быточных r измерений.

2. Выбор параметров X_1, X_2, \dots, X_k , которые должны удовлетворять двум условиям — число их равно k , и они должны быть независимыми друг от друга, т.е. ни один из параметров не должен выражаться через другие. Не должно существовать функции $X_j = f(X_1, X_2, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_k)$.

3. Составление параметрических уравнений связи. $Y_i = f_i(X_1, X_2, \dots, X_k)$ или в матричном виде $Y = f(X)$.

4. Составление параметрических уравнений поправок

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{X} + \mathbf{L}.$$

5. Вычисление весов измерений \mathbf{P} .

6. Составление системы нормальных уравнений поправок

$$\mathbf{R}\Delta\mathbf{X} + \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{L} = 0, \text{ где } \mathbf{R} = \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}.$$

7. Решение системы нормальных уравнений поправок

$$\Delta\mathbf{X} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{L}.$$

8. Вычисление поправок к результатам измерений $\mathbf{V} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{X} + \mathbf{L}$.

9. Вычисление урвненных значений параметров $\bar{x}_j = x_j + \delta x_j$ и измеряемых величин $\hat{y}_i = y_i + v_i$. В векторной форме, соответственно, $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \Delta\mathbf{X}$ и $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + \mathbf{V}$.

10. Окончательный контроль уравнивания. В параметрические уравнения связи необходимо подставить урвненные значения измеряемых величин, в левую часть. И урвненные значения параметров, в правую часть: $\hat{y}_i = f_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k)$. Если левая часть равна правой части для всех уравнений связи, то сеть урвнена.

11. Оценка точности.

Типовые виды параметрических уравнений связи и поправок

Рассмотрим наиболее типичные виды параметрических уравнений связи, правила их формирования и составления параметрических уравнений поправок. Отдельно рассмотрим правила составления таких систем уравнений для нивелирной сети и для плановых линейно-угловых сетей. Вид параметрических уравнений связи зависит от типа (измеряется расстояние, превышение, угол и т.д.) самого измерения и от выбранных параметров. Как правило, в качестве параметров выбирают координаты или отметки определяемых пунктов. Для составления типовых параметрических уравнений поправок, мы так и поступим. Вспомним, что в параметрических уравнениях связи устанавливается связь между

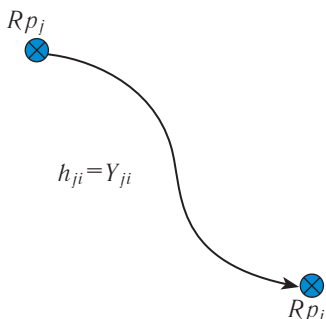


Рис. 3.5. Фрагмент нивелирной сети

рыми измерено превышение. В данном случае параметрическое уравнение связи будет иметь вид $Y_{ji} = H_{R_{p_i}} - H_{R_{p_j}} = X_i - X_j$.

Превышение вычисляется как разность отметок конечной i и начальной j точек. Уравнение поправок примет вид $v_{ji} = \delta x_j - \delta x_i + l_{ji}$, где $l_{ji} = x_i - x_j - y_{ji}$.

Если какая-либо из отметок является исходной, например, пункт i , то отметка этой точки не является параметром и поправка к ней не определяется $Y_{ji} = H_{R_{p_i}} - H_{R_{p_j}} = H_{R_{p_i}} - X_j$, $v_{ji} = -\delta x_j + l_{ji}$, где $l_{ji} = H_{R_{p_i}} - x_j - y_{ji}$.

Рассмотрим составление параметрических уравнений связи и поправок для плановых сетей. Будем придерживаться обозначений, принятых в геодезии: измеряемые углы β , стороны S , координаты X, Y и т.д. Это более удобно, когда мы рассматриваем не общую теорию, а конкретное измерение. В качестве параметров будем выбирать координаты определяемых пунктов.

Параметрическое уравнение связи и поправок для измеренной стороны

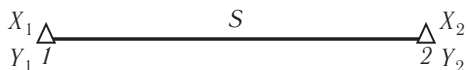


Рис. 3.6. Случай измерения длины стороны между пунктами 1 и 2

расстояние (рис. 3.6). Необходимо выразить расстояние между пунктами через координаты:

измеряемыми величинами и параметрами.

В нивелирных сетях измеряются превышения. В общем случае превышение равно разности отметок определяемых точек. На рис. 3.5 показано измеренное превышение между пунктами j и i . В качестве параметров X_j и X_i выберем отметки реперов, между которыми измерено превышение.

В данном случае параметрическое уравнение связи будет иметь вид $Y_{ji} = H_{R_{p_i}} - H_{R_{p_j}} = X_i - X_j$.

Превышение вычисляется как разность отметок конечной i и начальной j точек. Уравнение поправок примет вид $v_{ji} = \delta x_j - \delta x_i + l_{ji}$, где $l_{ji} = x_i - x_j - y_{ji}$.

Если какая-либо из отметок является исходной, например, пункт i , то отметка этой точки не является параметром и поправка к ней не определяется $Y_{ji} = H_{R_{p_i}} - H_{R_{p_j}} = H_{R_{p_i}} - X_j$, $v_{ji} = -\delta x_j + l_{ji}$, где $l_{ji} = H_{R_{p_i}} - x_j - y_{ji}$.

Рассмотрим составление параметрических уравнений связи и поправок для плановых сетей. Будем придерживаться обозначений, принятых в геодезии: измеряемые углы β , стороны S , координаты X, Y и т.д. Это более удобно, когда мы рассматриваем не общую теорию, а конкретное измерение. В качестве параметров будем выбирать координаты определяемых пунктов.

Параметрическое уравнение связи устанавливает зависимость между измеряемой величиной S и параметрами — координатами пунктов, между которыми измеряется

$$S = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2}.$$

Параметрические уравнения поправок являются линейным представлением уравнений связи. Уравнение поправок для данного случая имеет вид $v_S = a_1 \delta x_1 + a_2 \delta y_1 + a_3 \delta x_2 + a_4 \delta y_2 + l_S$.

Здесь коэффициенты a — частные производные от уравнения связи по каждому параметру, $\delta x_i, \delta y_i$ — поправки в приближенные значения параметров, соответственно в координаты x_i и y_i .

Найдем производные

$$a_1 = \frac{\partial S}{\partial X_1} = -\cos \alpha_{12}; \quad a_2 = \frac{\partial S}{\partial Y_1} = -\sin \alpha_{12};$$

$$a_3 = \frac{\partial S}{\partial X_2} = \cos \alpha_{12}; \quad a_4 = \frac{\partial S}{\partial Y_2} = \sin \alpha_{12}.$$

Отсюда уравнение поправок примет вид:

$$v_S = -\cos \alpha_{12} \delta x_1 - \sin \alpha_{12} \delta y_1 + \cos \alpha_{12} \delta x_2 + \sin \alpha_{12} \delta y_2 + l_S,$$

где $l_S = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} - S$.

Параметрическое уравнение связи и поправок для измеренного дирекционного угла

Как и в предыдущем случае, в качестве параметров выберем координаты пунктов 1 и 2 (рис. 3.7). Выразим дирекционный угол через координаты и получим параметрическое уравнение связи для измеренного дирекционного угла

$$\alpha_{12} = \arctg \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}.$$

Для того,

чтобы записать уравнение поправок, найдем производные от уравнения связи по каждому параметру:



Рис. 3.7. Случай измерения дирекционного угла для направления между пунктами 1 и 2

$$a_1 = \frac{\partial \alpha}{\partial X_1} = \frac{1}{1 + (\Delta Y / \Delta X)^2} \Delta Y \frac{1}{\Delta X^2} = \frac{\Delta Y}{S^2} = \frac{\sin \alpha_{12}}{S} = b'_{12};$$

$$a_2 = \frac{\partial \alpha}{\partial Y_1} = \frac{1}{1 + (\Delta Y / \Delta X)^2} \frac{-1}{\Delta X} = \frac{-\Delta X}{S^2} = \frac{-\cos \alpha_{12}}{S} = -c'_{12};$$

$$a_3 = \frac{\partial \alpha}{\partial X_2} = \frac{1}{1 + (\Delta Y / \Delta X)^2} \Delta Y \frac{-1}{\Delta X^2} = \frac{-\Delta Y}{S^2} = \frac{-\sin \alpha_{12}}{S} = -b'_{12};$$

$$a_4 = \frac{\partial \alpha}{\partial Y_2} = \frac{1}{1 + (\Delta Y / \Delta X)^2} \frac{1}{\Delta X^2} = \frac{\Delta X}{S^2} = \frac{\cos \alpha_{12}}{S} = c'_{12}.$$

Заметим, что каждая такая производная имеет размерность, обратную размерности измерения длины линии S . Учитывая, что общий вид параметрического уравнения поправок в этом случае имеет вид $v_\alpha = a_1 \delta x_1 + a_2 \delta y_1 + a_3 \delta x_2 + a_4 \delta y_2 + l_\alpha$, каждое слагаемое здесь будет безразмерным. Следовательно, и поправка v в дирекционный угол будет безразмерной, т.е. в радианной мере. Чтобы поправка получилась в градусной мере, например, в секундах, необходимо каждую производную умножить на ρ в секундах $b_{12} = \rho b'_{12}$, $c_{12} = \rho c'_{12}$. Свободный член l_α также должен быть задан в секундах. Тогда уравнение поправок для дирекционного угла примет вид: $v_\alpha = b_{12} \delta x_1 - c_{12} \delta y_1 + b_{12} \delta x_2 + c_{12} \delta y_2 + l_\alpha$.

Очень похожим на данное уравнение является уравнение поправок для измеренного направления.

Параметрическое уравнение связи и поправок для измеренного направления



Рис. 3.8. Случай измерения направления с пункта 1 на пункт 2

Измеренное значение направления получают как разность между отсчетом по лимбу, когда алидада сориентирована на точку 2 и нулевым значением отсчета (рис. 3.8). Здесь через Z_0 обозначен дирекционный угол направления, проходящего через

нулевой отсчет на лимбе. Тогда N_{12} можно трактовать как разность между дирекционным углом с точки 1 на точку 2 и дирекционным углом Z_0 : $N_{12} = \arctg \alpha_{12} - Z_0$.

Как и в предыдущем случае, в качестве параметров выберем координаты пунктов 1 и 2. Понятно, что при измерении некоторого множества направлений на одном пункте лимб не вращается и его нулевой отсчет должен быть направлен в одну и ту же точку, т.е. Z_0 должен считаться постоянной, исходной величиной при измерении всех направлений на пункте. Z_0 можно считать дополнительным необходимым измерением, которое приводит к возникновению дополнительного параметра.

Параметрическое уравнение связи для измеренного направления окончательно примет вид $N_{12} = \arctg \left(\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \right) - Z_0$.

Как видим данное уравнение отличается от уравнения связи измеренного дирекционного угла только наличием ориентирующего дирекционного угла Z_0 , поэтому и уравнения поправок будут отличаться только наличием поправки в ориентирующий дирекционный угол $v_N = b_{12}\delta x_1 - c_{12}\delta y_1 - b_{12}\delta x_2 + c_{12}\delta y_2 - \delta Z_0 + l_N$. На каждом пункте поправка δZ_0 будет единая для всех измеренных на пункте направлений.

Параметрическое уравнение связи и поправок для измеренного угла

Параметрическое уравнение связи для измеренного угла β (рис. 3.9), когда в качестве параметров берут координаты определяемых пунктов, можно получить как разность дирекционных углов направлений 1-2 и 1-3:

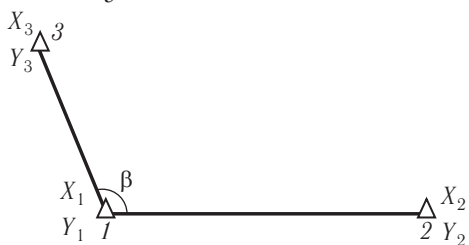


Рис. 3.9. Случай измерения угла на пункте 1 между пунктами 2 и 3

$$\beta = \arctg \left(\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \right) - \arctg \left(\frac{Y_3 - Y_1}{X_3 - X_1} \right).$$

Запишем параметрическое уравнение поправок для угла, беря за основу уравнение поправок для дирекционного угла. Обратим внимание только на то, что производные по X_2 и Y_2 будут точно такие же, как и в предыдущих случаях. Производные по X_3 и Y_3 — поменяют знак, т.к. arctg , в который входят координаты пункта Z имеет знак минус. Заметим также, что координаты пункта I входят как в первое, так и во второе слагаемое. Учитывая это, легко записать уравнение поправок для измеренного угла

$$v_{\beta} = (b_{12} - b_{13})\delta X_1 + (-c_{12} + c_{13})\delta Y_1 - b_{12}\delta X_2 + c_{12}\delta Y_2 + b_{13}\delta X_3 - c_{13}\delta Y_3 + l_{\beta}.$$

Оценка точности в параметрическом способе уравнивания

Одна из задач уравнивания — оценка точности. Что входит в эту задачу? Необходимо оценить точность измерений как до уравнивания, так и после уравнивания, определить корреляционную матрицу уравненных значений параметров и любых других элементов геодезической сети.

Для случая равноточных измерений, когда все измерения имеют одну и ту же среднюю квадратическую ошибку, средняя квадратическая ошибка измерений до уравнивания определяется

по формуле Бесселя:
$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n - k}}.$$

В отличие от случая измерений одной величины, где число необходимых измерений равняется единице, здесь в формуле фигурирует величина необходимых измерений, равная k . Вывод формулы Бесселя для этого случая будет приведен позже, при описании коррелятного способа уравнивания.

Для случая неравноточных измерений по формуле Бесселя определяется средняя квадратическая ошибка единицы веса, т.е. средняя квадратическая ошибка измерений, вес которых равен единице:

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n - k}}. \quad (3.10)$$

Определение средних квадратических ошибок других измере-

ний, вес которых отличен от единицы, выполняется с использованием весов этих измерений p_i : $m_i = \mu / \sqrt{p_i}$.

Сложнее выполняется оценка точности уравненных величин. В этом случае необходимо определить корреляционные матрицы таких величин с учетом алгоритма уравнивания. При этом такие величины следует разделить на три группы: 1) параметры; 2) измерения; 3) все другие величины, не относящиеся к первым двум группам.

Корреляционная матрица уравненных параметров \bar{X} определяется с учетом обратной весовой матрицы вектора параметров $Q_{\bar{X}}$:

$$K_{\bar{X}} = \mu^2 Q_{\bar{X}}. \quad (3.11)$$

Уравненные значения измерений можно оценить по аналогичной формуле $K_{\bar{Y}} = \mu^2 Q_{\bar{Y}}$. Для всех других величин F , используем эту же формулу, но со своей обратной весовой матрицей:

$$K_{\bar{F}} = \mu^2 Q_{\bar{F}}. \quad (3.12)$$

Как видно из формул (3.11), (3.12) для определения корреляционных матриц необходимо найти обратные весовые матрицы. Для этой цели всегда используется обобщенная формула оценки точности (2.64) и (2.66).

Для этого необходимо выразить оцениваемый вектор через вектор с известной обратной весовой матрицей. Так из системы (3.9) определяется вектор поправок к приближенным значениям параметров $\Delta X = -R^{-1}A^T PL$ и вектор уравненных значений параметров

$$\bar{X} = x - R^{-1}A^T PL. \quad (3.13)$$

Здесь вектор $L = \overline{\hat{f}(x)} - y$, где вектор y — вектор измерений с известной обратной весовой матрицей Q_y .

Приближенные значения параметров x , как и вектор функций от приближенных параметров $\overline{\hat{f}(x)}$, можно рассматривать как вектор постоянных величин. Поэтому обратная весовая матрица вектора L совпадет с обратной весовой матрицей вектора y . Действительно, используя обобщенную формулу оценки точности для функции $L = \overline{\hat{f}(x)} - y$, получим $Q_L = EQ_y E^T = Q_y$, где E — единичная матрица. Для (3.13) также применим обобщенную формулу оценки точности

$$Q_{\bar{X}} = R^{-1}A^T P Q_L P A R^{-1} = R^{-1}A^T P P^{-1} P A R^{-1} = R^{-1}A^T P A R^{-1} = R^{-1}R R^{-1} = R^{-1}.$$

Таким образом, обратная весовая матрица вектора уравненных параметров имеет вид

$$\mathbf{Q}_{\bar{X}} = \mathbf{R}^{-1}. \quad (3.14)$$

Напомним, что по главной диагонали обратной весовой матрицы стоят обратные веса элементов вектора \bar{X} . Отсюда, из (3.11) легко найти средние квадратические ошибки каждого уравненного значения параметра

$$m_{\bar{x}_i} = \mu \sqrt{Q_{jj}} = \mu \sqrt{\frac{1}{p_{\bar{x}_i}}}. \quad (3.15)$$

Поскольку параметры выбирались таким образом, что через них можно выразить любой элемент сети $\bar{F}_j = \bar{F}_j(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k)$, то обратную весовую матрицу таких элементов, объединенных в один

вектор $\bar{F} = \begin{pmatrix} \bar{F}_{\bar{x}_1} \\ \bar{F}_{\bar{x}_2} \\ \dots \\ \bar{F}_{\bar{x}_s} \end{pmatrix}$, можно определить, используя обобщенную фор-

мулу оценки точности,

$$\mathbf{Q}_{\bar{F}} = \mathbf{f} \mathbf{Q}_{\bar{X}} \mathbf{f}^T. \quad (3.16)$$

Здесь $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial \bar{x}_1} & \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial \bar{x}_2} & \dots & \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial \bar{x}_k} \\ \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \bar{x}_1} & \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \bar{x}_2} & \dots & \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \bar{x}_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \bar{F}_s}{\partial \bar{x}_1} & \frac{\partial \bar{F}_s}{\partial \bar{x}_2} & \dots & \frac{\partial \bar{F}_s}{\partial \bar{x}_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1k} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{s1} & f_{s2} & \dots & f_{sk} \end{pmatrix}$ — матрица част-

ных производных от вектора функций уравненных параметров по каждому параметру.

Таким образом, средние квадратические ошибки любого элемента сети можно определять по формуле

$$m_{\bar{F}_i} = \mu \sqrt{Q_{F_{ii}}} = \mu \sqrt{\frac{1}{p_{\bar{F}_i}}}.$$

Выберем в качестве функций от уравненных параметров измеряемые величины $\bar{y}_j = \bar{F}_j(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k)$. Полученные уравнения — это параметрические уравнения связи, для которых матрица частных производных есть матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок \mathbf{A} . Таким образом, для оценки уравненных значений измеряемых величин необходимо в формуле (3.16) заменить матрицу \mathbf{f} на матрицу \mathbf{A} :

$$\mathbf{Q}_{\bar{y}} = \mathbf{A} \mathbf{Q}_{\bar{x}} \mathbf{A}^T. \quad (3.17)$$

Средние квадратические ошибки уравненных измерений

$$m_{\bar{y}_j} = \mu \sqrt{Q_{y_{jj}}} = \mu \sqrt{\frac{1}{p_{\bar{y}_j}}}.$$

Пример 1. В §3.2 приведены матрицы коэффициентов нормальных уравнений для треугольника, в котором измерены все три угла, и для нивелирной

сети: $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Произведем оценку точности для данных случаев. Определим обратные весовые матрицы для обоих случаев, обратив матрицы \mathbf{R} . Для этого можно использовать известные алгоритмы, которые рассматриваются в курсе математики. Алгоритм Гаусса будет приведен в следующем параграфе. Сейчас же воспользуемся известными программными средствами, такими как Matlab. Здесь достаточно ввести прямую матрицу, указать функцию ее обращения и получить результат. В первом случае, получим

$$\mathbf{Q}_{\bar{x}} = \mathbf{R}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0,667 & -0,333 \\ -0,333 & 0,667 \end{pmatrix}.$$

Напомним, что по главной диагонали здесь расположены обратные веса соответственно первого и второго параметра (первого и второго угла) в треугольнике уже после уравнивания $Q_{11} = \frac{1}{p_{\bar{x}_1}} = 0,667$ и $Q_{22} = \frac{1}{p_{\bar{x}_2}} = 0,667$. В данном случае

измерения углов выполнялись равноточно, с весами равными единице. Как видим после уравнивания веса стали равняться $1/0,667=3/2=1,5$, т.е. веса измерений увеличились в полтора раза. Если при этом известны средние квадратические ошибки измерений, например, $m=2''$, то легко получить и средние квадратические ошибки уравненных параметров:

$$m_{\bar{x}_1} = m \sqrt{Q_{11}} = 2 \sqrt{0,667} = 1,64''; \quad m_{\bar{x}_2} = m \sqrt{Q_{22}} = 2 \sqrt{0,667} = 1,64''.$$

Понятно, поскольку первый и второй параметры совпадают с первым и вторым измерениями, то средние квадратические ошибки этих измерений будут равны тем же значениям.

Для оценки точности всех уравненных измерений можно воспользоваться формулой (3.17)

$$\mathbf{Q}_{\bar{y}} = \mathbf{A}\mathbf{Q}_{\bar{x}}\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,667 & -0,333 \\ -0,333 & 0,667 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,667 & -0,333 & -0,333 \\ -0,333 & 0,667 & -0,333 \\ -0,333 & -0,333 & 0,667 \end{pmatrix}.$$

Корреляционная матрица уравненных углов

$$\mathbf{K}_{\bar{y}} = m^2 \mathbf{Q}_{\bar{y}} = 2^2 \begin{pmatrix} 0,667 & -0,333 & -0,333 \\ -0,333 & 0,667 & -0,333 \\ -0,333 & -0,333 & 0,667 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,667 & -1,333 & -1,333 \\ -1,333 & 2,667 & -1,333 \\ -1,333 & -1,333 & 2,667 \end{pmatrix}.$$

По главной диагонали здесь стоят квадраты средних квадратических ошибок уравненных измерений. Отсюда, для всех трех углов $m_{\bar{y}_i} = \sqrt{2,667} = 1,64''$.

Корреляционная матрица позволяет определить коэффициенты корреляции между элементами оцениваемого вектора. В данном треугольнике все углы измерялись независимо друг от друга, поэтому исходная весовая матрица результатов измерений до уравнивания является диагональной. Корреляционная матрица уравненных измерений уже не является диагональной. Как видим, все недиагональные элементы (корреляционные моменты) матрицы имеют одну и ту же величину $-1,333$. Следовательно, и коэффициенты корреляции между уравненными углами будут одинаковыми

$$r_{\bar{y}_i \bar{y}_j} = \frac{k_{\bar{y}_i \bar{y}_j}}{m_{\bar{y}_i} m_{\bar{y}_j}} = \frac{-1,333}{\sqrt{2,667} \sqrt{2,667}} = -0,5.$$

Пример 2. Для нивелирной сети (см. рис. 3.4) определим обратную весовую матрицу вектора уравненных параметров (определяемых отметок реперов):

$$\mathbf{Q}_{\bar{x}} = \mathbf{R}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0,524 & 0,333 & 0,238 \\ 0,333 & 0,667 & 0,333 \\ 0,238 & 0,333 & 0,381 \end{pmatrix}.$$

Как правило, в нивелирной сети измерения выполняются неравноточно, поэтому при уравнении вычисляют среднюю квадратическую ошибку единицы веса μ . Примеры с результатами измерений, когда можно вычислить среднюю квадратическую ошибку единицы веса μ , будут рассмотрены позже. В данном случае, мы рассматриваем пример без результатов измерений, поэтому здесь назначим точность измерений. Пусть $\mu=10$ мм, тогда $m_{\bar{x}_1} = \mu\sqrt{Q_{11}} = 10\sqrt{0,524} = 7,2$ мм; $m_{\bar{x}_2} = \mu\sqrt{Q_{22}} = 10\sqrt{0,667} = 8,2$ мм; $m_{\bar{x}_3} = \mu\sqrt{Q_{33}} = 10\sqrt{0,381} = 6,2$ мм.

В соответствии с формулой (2.63) недиагональные элементы матрицы \mathbf{Q} связаны с коэффициентом корреляции соотношением $Q_{ij} = \frac{r_{ij}}{\sqrt{p_i p_j}}$, отсюда,

$$r_{ij} = Q_{ij} \sqrt{p_i p_j} = \frac{Q_{ij}}{\sqrt{\frac{1}{p_i} \frac{1}{p_j}}} = \frac{Q_{ij}}{\sqrt{Q_{ii} Q_{jj}}}.$$

Коэффициенты корреляции между уравненными значениями отметок определяемых реперов вычислим с использованием данных формул

$$r_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} = \frac{Q_{12}}{\sqrt{\frac{1}{p_1} \frac{1}{p_2}}} = \frac{0,333}{\sqrt{0,524 \cdot 0,667}} = 0,77;$$

$$r_{\bar{x}_1 \bar{x}_3} = \frac{Q_{13}}{\sqrt{\frac{1}{p_1} \frac{1}{p_3}}} = \frac{0,238}{\sqrt{0,524 \cdot 0,381}} = 0,53;$$

$$r_{\bar{x}_2 \bar{x}_3} = \frac{Q_{23}}{\sqrt{\frac{1}{p_2} \frac{1}{p_3}}} = \frac{0,333}{\sqrt{0,667 \cdot 0,381}} = 0,66.$$

Произведем оценку точности уравненных измерений

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\bar{y}} = \mathbf{A} \mathbf{Q}_{\bar{x}} \mathbf{A}^T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,524 & 0,333 & 0,238 \\ 0,333 & 0,667 & 0,333 \\ 0,238 & 0,333 & 0,381 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0,524 & -0,286 & -0,238 & 0,095 & -0,190 \\ -0,286 & 0,429 & -0,143 & -0,143 & 0,286 \\ -0,238 & -0,143 & 0,381 & 0,048 & -0,095 \\ -0,095 & -0,143 & 0,048 & 0,381 & 0,238 \\ -0,190 & 0,286 & -0,095 & 0,238 & 0,524 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Все вычисления здесь выполнены в среде Matlab.

Отсюда, средние квадратические ошибки уравненных измерений

$$m_{\bar{y}_1} = \mu \sqrt{Q_{11}} = 10 \sqrt{0,524} = 7,2 \text{ мм}; \quad m_{\bar{y}_2} = \mu \sqrt{Q_{22}} = 10 \sqrt{0,429} = 6,5 \text{ мм};$$

$$m_{\bar{y}_3} = \mu \sqrt{Q_{33}} = 10 \sqrt{0,381} = 6,2 \text{ мм}; \quad m_{\bar{y}_4} = \mu \sqrt{Q_{44}} = 10 \sqrt{0,381} = 6,2 \text{ мм};$$

$$m_{\bar{y}_5} = \mu \sqrt{Q_{55}} = 10 \sqrt{0,524} = 7,2 \text{ мм}.$$

Определим коэффициенты корреляции между некоторыми парами уравненных измерений. Например, между первым и четвертым и между вторым и пятым измерениями:

$$r_{\bar{y}_1 \bar{y}_4} = \frac{Q_{14}}{\sqrt{\frac{1}{p_1} \frac{1}{p_4}}} = \frac{0,095}{\sqrt{0,524 \cdot 0,381}} = 0,24; \quad r_{\bar{y}_2 \bar{y}_5} = \frac{Q_{25}}{\sqrt{\frac{1}{p_2} \frac{1}{p_5}}} = \frac{0,286}{\sqrt{0,429 \cdot 0,524}} = 0,36.$$

Помимо оценки точности уравненных параметров и измерений может возникнуть необходимость оценки точности других величин, например, разности отметок H_{Rp3} и H_{M1} . Для оценки точности этой величины, необходимо выразить ее через параметры, т.е. составить функцию $F = H_{Rp3} - H_{M1} = X_3 - H_{M1}$. Отсюда вектор частных производных этой функции по параметрам x_j имеет вид $f = (0 \ 0 \ 1)$.

Далее применяем формулу (3.16) и находим обратный вес этой функции от уравненных параметров

$$\mathbf{Q}_{\bar{F}} = \frac{1}{\mathbf{P}_{\bar{F}}} = f \mathbf{Q}_{\bar{x}} f^T = (0 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} 0,524 & 0,333 & 0,238 \\ 0,333 & 0,667 & 0,333 \\ 0,238 & 0,333 & 0,381 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,381.$$

Средняя квадратическая ошибка этой функции (превышения между $M1$ и $Rp3$) $m_{\bar{F}} = \mu \sqrt{\frac{1}{p_{\bar{F}}}} = 10\sqrt{0,381} = 6,2$ мм.

Алгоритмы вычислений при уравнивании параметрическим способом

Уравнивательные вычисления в производственных условиях выполняются на компьютерах, с использованием специальных программ. При этом алгоритмы вычислений скрыты от исполнителя. Бывают ситуации, когда необходимо проследить весь алгоритм шаг за шагом. Это может быть, например, при отладке новых алгоритмов вычислений, при плохой обусловленности матрицы коэффициентов нормальных уравнений, при необходимости получить некоторые промежуточные результаты, в образовательном процессе и других случаях. Поэтому для студентов недостаточно знать алгоритм уравнивания, представленный в матричной форме.

Ниже приведены промежуточные алгоритмы вычислений, которые важны при знакомстве с уравниванием геодезических измерений.

Решение нормальных уравнений методом Гаусса

Рассмотрим алгоритм решения нормальных уравнений. В курсе математики студенты знакомятся со многими алгоритмами, позво-

ляющими решить данную задачу. Это методы последовательного исключения неизвестных: Холецкого, квадратных корней, Жордана, Гаусса, Крамера и др. Важно выбрать такой метод, который отличается простым, легко программируемым алгоритмом. Но, в то же время, он должен обеспечивать высокую вычислительную точность, соответствующую точности измерений.

Таковыми свойствами обладает способ Гаусса, который является модификацией метода последовательного исключения неизвестных. Матрица коэффициентов нормальных уравнений является симметричной, поэтому метод Гаусса может быть использован при решении нормальных уравнений. Рассмотрим его применительно к системе трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{aligned} [a_1 a_1] \delta x_1 + [a_1 a_2] \delta x_2 + [a_1 a_3] \delta x_3 + [a_1 l] &= 0; \\ [a_1 a_2] \delta x_1 + [a_2 a_2] \delta x_2 + [a_2 a_3] \delta x_3 + [a_2 l] &= 0; \\ [a_1 a_3] \delta x_1 + [a_2 a_3] \delta x_2 + [a_3 a_3] \delta x_3 + [a_3 l] &= 0. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Путем эквивалентных преобразований приведем данную систему к треугольному виду так, чтобы коэффициенты, стоящие ниже главной диагонали, стали нулевыми. Чтобы добиться этого,

умножим первое уравнение из (3.18) на коэффициент $-\frac{[a_1 a_2]}{[a_1 a_1]}$ и сложим со вторым уравнением. Получим

$$\begin{aligned} \left([a_1 a_2] - \frac{[a_1 a_1][a_1 a_2]}{[a_1 a_1]} \right) \delta x_1 + \left([a_2 a_2] - \frac{[a_1 a_2][a_1 a_2]}{[a_1 a_1]} \right) \delta x_2 + \\ + \left([a_2 a_3] - \frac{[a_1 a_2][a_1 a_3]}{[a_1 a_1]} \right) \delta x_3 + \left([a_2 l] - \frac{[a_1 a_2][a_1 l]}{[a_1 a_1]} \right) = 0. \end{aligned}$$

Поскольку коэффициент при первом неизвестном равен нулю, перепишем это равенство в виде

$$\begin{aligned} \left([a_2 a_2] - \frac{[a_1 a_2][a_1 a_2]}{[a_1 a_1]} \right) \delta x_2 + \left([a_2 a_3] - \frac{[a_1 a_2][a_1 a_3]}{[a_1 a_1]} \right) \delta x_3 + \\ + \left([a_2 l] - \frac{[a_1 a_2][a_1 l]}{[a_1 a_1]} \right) = 0. \end{aligned}$$

или, обозначив содержимое скобок следующим образом: $[a_2a_2 \cdot 1]$; $[a_2a_3 \cdot 1]$; $[a_2l \cdot 1]$, получим $[a_2a_2 \cdot 1]\delta x_2 + [a_2a_3 \cdot 1]\delta x_3 + [a_2l \cdot 1] = 0$. Такие обозначения ввел Гаусс. Здесь единица, стоящая после точки, обозначает количество исключенных на данный момент неизвестных. Коэффициент, стоящий перед единицей, тот же самый, что и в исходном уравнении. Это удобно для дальнейших вычислений. Такая система обозначений облегчает понимание теории решения системы уравнений, делает однотипным последовательность действий при ее решении. Кроме того, данный алгоритм отличает надежный контроль промежуточных результатов вычислений, что является одним из достоинств метода, позволяющего с успехом использовать его на протяжении многих лет в учебном процессе.

Аналогично, умножив первое уравнение на коэффициент $-\frac{[a_1a_3]}{[a_1a_1]}$ и сложив с третьим уравнением системы (3.18), можно исключить первое неизвестное в третьем уравнении:

$$\begin{aligned} & \left([a_1a_3] - \frac{[a_1a_1][a_1a_3]}{[a_1a_1]} \right) \delta x_1 + \left([a_2a_3] - \frac{[a_1a_2][a_1a_3]}{[a_1a_1]} \right) \delta x_2 + \\ & + \left([a_3a_3] - \frac{[a_1a_3][a_1a_3]}{[a_1a_1]} \right) \delta x_3 + \left([a_3l] - \frac{[a_1a_3][a_1l]}{[a_1a_1]} \right) = 0. \end{aligned}$$

Первый коэффициент здесь равен нулю. Данное уравнение с использованием обозначений Гаусса примет вид

$$[a_2a_3 \cdot 1]\delta x_2 + [a_3a_3 \cdot 1]\delta x_3 + [a_3l \cdot 1] = 0.$$

Запишем второе и третье уравнение как систему двух уравнений:

$$\begin{aligned} [a_2a_2 \cdot 1]\delta x_2 + [a_2a_3 \cdot 1]\delta x_3 + [a_2l \cdot 1] &= 0; \\ [a_2a_3 \cdot 1]\delta x_2 + [a_3a_3 \cdot 1]\delta x_3 + [a_3l \cdot 1] &= 0. \end{aligned}$$

Продолжим эквивалентные преобразования с полученной системой двух уравнений. Умножим первое уравнение на коэффициент $-\frac{[a_2a_3 \cdot 1]}{[a_2a_2 \cdot 1]}$ и сложим результат со вторым уравнением

$$\left([a_2 a_3 \cdot 1] - \frac{[a_2 a_3 \cdot 1][a_2 a_2 \cdot 1]}{[a_2 a_2 \cdot 1]} \right) \delta x_2 + \left([a_3 a_3 \cdot 1] - \frac{[a_2 a_3 \cdot 1][a_2 a_3 \cdot 1]}{[a_2 a_2 \cdot 1]} \right) \delta x_3 + \left([a_3 l \cdot 1] - \frac{[a_2 a_3 \cdot 1][a_2 l \cdot 1]}{[a_2 a_2 \cdot 1]} \right) = 0.$$

Первый коэффициент здесь равен нулю и, учитывая, что исключено второе неизвестное, можно записать $[a_3 a_3 \cdot 2] \delta x_3 + [a_3 l \cdot 2] = 0$.

Из полученных уравнений легко составить треугольную систему уравнений

$$\begin{aligned} [a_1 a_1] \delta x_1 + [a_1 a_2] \delta x_2 + [a_1 a_3] \delta x_3 + [a_1 l] &= 0; \\ [a_2 a_2 \cdot 1] \delta x_2 + [a_2 a_3 \cdot 1] \delta x_3 + [a_2 l \cdot 1] &= 0; \\ [a_3 a_3 \cdot 2] \delta x_3 + [a_3 l \cdot 2] &= 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Коэффициенты такой системы получаются в специальной схеме Гаусса. Процесс получения такой системы называют прямым ходом решения нормальных уравнений в схеме Гаусса. Система (3.19) называется *э к в и в а л е н т н о й* системой нормальных уравнений, которая легко решается. Действительно, из третьего уравнения находится третье неизвестное. Подставляя его во второе уравнение, получим второе неизвестное и, зная эти два неизвестных, из первого уравнения получим первое неизвестное. Здесь реализуется обратный ход решения нормальных уравнений в схеме Гаусса. Запишем уравнения из которых получают неизвестные:

$$\begin{aligned} \delta x_1 &= -\frac{[a_1 a_2]}{[a_1 a_1]} \delta x_2 - \frac{[a_1 a_3]}{[a_1 a_1]} \delta x_3 - \frac{[a_1 l]}{[a_1 a_1]}; \\ \delta x_2 &= -\frac{[a_2 a_3 \cdot 1]}{[a_2 a_2 \cdot 1]} \delta x_3 - \frac{[a_2 l \cdot 1]}{[a_2 a_2 \cdot 1]}; \\ \delta x_3 &= -\frac{[a_3 l \cdot 2]}{[a_3 a_3 \cdot 2]}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Система (3.20) называется системой *э л л и м и н а ц и о н н ы х* нормальных уравнений. Приведем общее правило раскрытия алгоритма Гаусса, на примере

$$[a_4 a_5 \cdot 3] = [a_4 a_5] - \frac{[a_1 a_4][a_1 a_5]}{[a_1 a_1]} - \frac{[a_2 a_4 \cdot 1][a_2 a_5 \cdot 1]}{[a_2 a_2 \cdot 1]} - \frac{[a_3 a_4 \cdot 2][a_3 a_5 \cdot 2]}{[a_3 a_3 \cdot 2]}.$$

Преобразованный алгоритм Гаусса равен непреобразованному алгоритму минус количество дробей, которое соответствует числу исключенных неизвестных (в общем случае k , в данном случае — три). Знаменатели дробей равны квадратичным коэффициентам эквивалентных уравнений, последовательно от первого до $k-1$ уравнения. Числители же состоят из произведений двух алгоритмов, буквы и индексы которых составлены из комбинаций непреобразованного алгоритма и алгоритма, стоящего в знаменателе данной дроби.

Решение нормальных уравнений выполняется в схеме Гаусса, в которой чередуются строки эквивалентного и элиминационного уравнений (табл. 3.2).

Т а б л и ц а 3.2

δx_1	δx_2	δx_3	l
$[a_1 a_1]$	$[a_1 a_2]$	$[a_1 a_3]$	$[a_1 l]$
-1	$-\frac{[a_1 a_2]}{[a_1 a_1]}$	$-\frac{[a_1 a_3]}{[a_1 a_1]}$	$-\frac{[a_1 l]}{[a_1 a_1]}$
	$[a_2 a_2 \cdot 1]$	$[a_2 a_3 \cdot 1]$	$[a_2 l]$
	-1	$-\frac{[a_2 a_3 \cdot 1]}{[a_2 a_2 \cdot 1]}$	$-\frac{[a_2 l \cdot 1]}{[a_2 a_2 \cdot 1]}$
		$[a_3 a_3 \cdot 2]$	$[a_3 l \cdot 2]$
		-1	$-\frac{[a_3 l \cdot 2]}{[a_3 a_3 \cdot 2]}$
δx_1	δx_2	δx_3	

Табл. 3.2 заполняется сверху вниз. Первая строчка состоит из коэффициентов первого исходного нормального уравнения, вторая получается делением первой строки на $-[a_1 a_1]$. Для получения третьей строки к коэффициентам второго исходного уравнения добавляется произведение коэффициента $-\frac{[a_1 a_2]}{[a_1 a_1]}$, стоящего в столбце квадратичного коэффициента, на вышестоящую строку. Далее эквивалентная

строка делится на свой квадратичный коэффициент со знаком минус.

Как видим, после каждых двух строк происходит сдвиг на один столбец вправо (последовательно исключаются неизвестные). Аналогичные действия производятся для заполнения $2k$ строк, где k — число неизвестных. Затем последовательно вычисляются неизвестные, начиная с последнего, используя элиминационные уравнения. Неизвестные записывают в последнюю строчку табл. 3.2.

Унифицируя алгоритм, табл. 3.2 можно записать в следующем виде:

δx_1	δx_2	δx_3	l
\mathcal{E}_{11}	\mathcal{E}_{12}	\mathcal{E}_{13}	\mathcal{E}_{14}
-1	G_{12}	G_{13}	G_{14}
	\mathcal{E}_{22}	\mathcal{E}_{23}	\mathcal{E}_{24}
	-1	G_{23}	G_{24}
		\mathcal{E}_{33}	\mathcal{E}_{34}
		-1	G_{24}
δx_1	δx_2	δx_3	

Здесь $\mathcal{E}_{ij} = I_{ij} + G_{1i}\mathcal{E}_{1j} + G_{2i}\mathcal{E}_{2j} + \dots + G_{i-1,i}\mathcal{E}_{i-1,j} = I_{ij} + \sum_{k=1}^{i-1} G_{ki}\mathcal{E}_{kj}$;

$G_{ki} = -\mathcal{E}_{ki}/\mathcal{E}_{kk}$; I_{ij} — коэффициент при j -ом неизвестном в i -ом исходном уравнении.

Рассмотрим пример решения системы нормальных уравнений.

Пусть задана система нормальных уравнений:

$$3\delta x_1 + \delta x_2 - \delta x_3 - 2,5 = 0;$$

$$\delta x_1 + 3\delta x_2 - 2\delta x_3 + 3,0 = 0;$$

$$-\delta x_1 - 2\delta x_2 + 5\delta x_3 + 4,7 = 0.$$

Решим ее в схеме Гаусса:

δx_1	δx_2	δx_3	l
3	1	-1	-2,5
-1	-0,3333	0,3333	0,8333
	2,6667	-1,6667	3,8333
	-1	0,6250	-1,4375
		3,6250	6,2625
		-1	-1,7276
$\delta x_1=1,097$	$\delta x_2=-2,517$	$\delta x_3=-1,728$	

Контроли вычислений в параметрическом способе

Все вычисления, на каждом этапе при уравнивании сопровождаются контролями (рис. 3.10). Как видим, схема выполнения контролей устроена наподобие «матрешки». На каждом этапе могут использоваться несколько контролей, но при выполнении вычислений на ЭВМ с использованием специальных программ уравнивания, как правило, предусматривают только некоторые контроли. Обязательно выполняют окончательный контроль и часто – контроль решения параметрических уравнений поправок. Остальные виды контролей используются при вычислениях без применения специализированных программ, например, при уравнивании в среде Excel, на калькуляторах, включая макрокалькуляторы. Это позволяет избежать повторных вычислений при совершении какой-либо вычислительной ошибки. Она фиксируется на конкретном этапе и следующие этапы уже не выполняются до исправления совершенной ошибки. Специальные же программы заранее подвергаются процессу отладки. Здесь исключены ошибки, вызванные невнимательностью человека, но могут возникнуть значительные ошибки вычислений, вызванные, например, плохой геометрией геодезического построения, что приводит к плохой обусловленности матрицы коэффициентов нормальных уравнений. Поэтому окончательный контроль уравнивания предусмотрен во всех профессионально составленных программах уравнивания. В

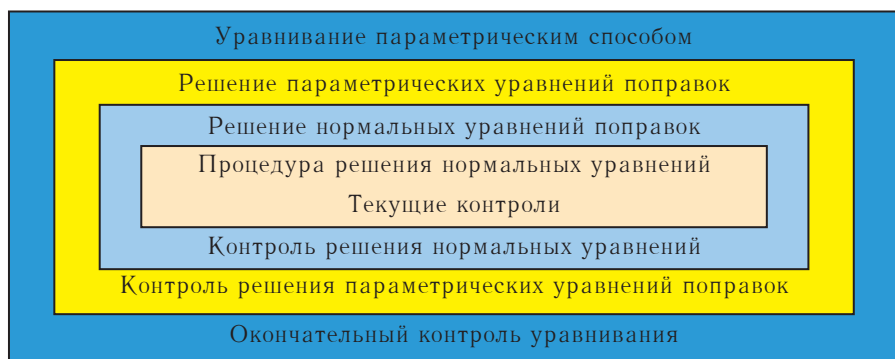


Рис. 3.10. Схема вычислительных контролей при уравнивании параметрическим способом

$$\begin{aligned}
-\frac{[a_1 s]}{[a_1 a_1]} &= -1 - \frac{[a_1 a_2]}{[a_1 a_1]} - \dots - \frac{[a_1 a_k]}{[a_1 a_1]} - \frac{[a_1 l]}{[a_1 a_1]} \\
-\frac{[a_2 s \cdot 1]}{[a_2 a_2 \cdot 1]} &= -1 - \frac{[a_2 a_3 \cdot 1]}{[a_2 a_2 \cdot 1]} - \dots - \frac{[a_2 a_k \cdot 1]}{[a_2 a_2 \cdot 1]} - \frac{[a_2 l \cdot 1]}{[a_2 a_2 \cdot 1]} \quad (3.23) \\
&\dots\dots\dots \\
-\frac{[a_k s \cdot (k-1)]}{[a_k a_k \cdot (k-1)]} &= -1 - \frac{[a_k l \cdot (k-1)]}{[a_k a_k \cdot (k-1)]}.
\end{aligned}$$

Контрольные равенства (3.22) и (3.23) используются в схеме Гаусса для проверки правильности вычислений в каждой строке. Для предыдущего примера введем вектор **S**:

Система нормальных уравнений	S — сумма коэффициентов по строке
$3\delta x_1 + \delta x_2 - \delta x_3 - 2,5 = 0$	0,5
$\delta x_1 + 3\delta x_2 - 2\delta x_3 + 3,0 = 0$	5,0
$-\delta x_1 - 2\delta x_2 + 5\delta x_3 + 4,7 = 0$	6,7

В схему Гаусса добавим столбец S, в котором будем вести вычисления, аналогичные столбцу l:

δx_1	δx_2	δx_3	l	S	Контроль
3	1	-1	-2,5	0,5	0,5
-1	-0,3333	0,3333	0,8333	-0,1667	-0,1667
	2,6667	-1,6667	3,8333	4,8333	4,8333
	-1	0,6250	-1,4375	-1,8125	-1,8125
		3,6250	6,2625	9,8875	9,8875
		-1	-1,7276	-2,7276	-2,7276
$\delta x_1=1,097$	$\delta x_2=-2,517$	$\delta x_3=-1,728$			

В столбец «Контроль» записаны суммы элементов по каждой строке, начиная с первого столбца до столбца l (правая часть равенств (3.22) и (3.23)). В столбце S проведены вычисления в соответствии с алгоритмами Гаусса (левая часть равенств (3.22) и (3.23)). В данном случае все элементы последнего и предпоследнего столбцов совпадают. Следовательно, все вычисления выполнены без ошибок.

На следующем этапе контролируется правильность решения нормальных уравнений поправок. Проще всего это сделать подставив полученные неизвестные $\delta x_1=1,097$; $\delta x_2=-2,517$; $\delta x_3=-1,728$ в нормальные уравнения поправок (3.18).

$$\begin{aligned} 3 \cdot 1,097 - 2,517 - (-1,728) - 2,5 &= 0; \\ 1,097 + 3(-2,517) - 2(-1,728) + 3,0 &= 0; \\ -1,097 - 2(-2,517) + 5(-1,728) + 4,7 &= 0. \end{aligned}$$

В итоге получили нули, следовательно, система нормальных уравнений решена.

Один из основных — это контроль решения параметрических уравнений поправок. В качестве контрольных равенств здесь можно использовать равенства леммы Гаусса $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{V} = 0$. Если при подстановке вычисленных поправок в равенства леммы справа получаем нули, значит поправки вычислены верно. Решение параметрических уравнений поправок можно проконтролировать с помощью следующей цепочки контрольных равенств:

$$[p v v] = [p v l] = [p v s] = [p l l \cdot k] = [p l s \cdot k] = [p s s \cdot k].$$

Заметим, что последние три алгоритма вычисляют в схеме Гаусса. Здесь приведем доказательства некоторых из этих равенств. Для доказательства первого равенства умножим систему параметрических уравнений поправок $\mathbf{V} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{X} + \mathbf{L}$ слева на $\mathbf{V}^T \mathbf{P}$, получим $\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V} = \mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \Delta \mathbf{X} + \mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{L}$.

Но здесь $\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{A} = 0$ в соответствии с леммой Гаусса, откуда, $\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V} = \mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{L}$ или $[p v v] = [p v l]$.

Аналогично можно доказать следующее равенство. Умножим $\mathbf{V}^T \mathbf{P}$ на систему контрольных равенств $\mathbf{S} = \mathbf{A} e + \mathbf{L}$. Получим $\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{S} = \mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{A} e + \mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{L}$. С учетом того, что $\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{A} = 0$ получим $\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{S} = \mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{L}$ или $[p v s] = [p v l]$.

Для доказательства следующего равенства припишем к системе нормальных уравнений равенство $\mathbf{L}^T \mathbf{P} \mathbf{V} = \mathbf{L}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \Delta \mathbf{X} + \mathbf{L}^T \mathbf{P} \mathbf{L}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \Delta \mathbf{X} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L} &= 0; \\ \mathbf{L}^T \mathbf{P} \mathbf{V} &= \mathbf{L}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \Delta \mathbf{X} + \mathbf{L}^T \mathbf{P} \mathbf{L} \end{aligned} \tag{3.24}$$

получено умножением слева $\mathbf{L}^T \mathbf{P}$ на $\mathbf{V} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{X} + \mathbf{L}$.

В обычной записи данная система имеет вид:

$$\begin{aligned}
 [pa_1a_1]\delta x_1 + [pa_1a_2]\delta x_2 + \dots + [pa_1a_k]\delta x_k + [pa_1l] &= 0 \\
 [pa_1a_2]\delta x_1 + [pa_2a_2]\delta x_2 + \dots + [pa_2a_k]\delta x_k + [pa_2l] &= 0 \\
 \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots & \\
 [pa_1a_k]\delta x_1 + [pa_2a_k]\delta x_2 + \dots + [pa_k a_k]\delta x_k + [pa_k l] &= 0 \\
 [pa_1l]\delta x_1 + [pa_2l]\delta x_2 + \dots + [pa_k l]\delta x_k + [pll] &= [plv].
 \end{aligned}$$

Применим к системе (3.24) эквивалентные преобразования, исключив все неизвестные. Последнее эквивалентное уравнение примет вид $[pll\cdot k]=[pv l]$.

Заключительный контроль уравнивания состоит в проверке уравнений связи, когда в них подставлены уравненные значения измеренных величин и параметров $\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k)$. Если равенства выполняются, сеть уравнена.

Примеры контроля на всех этапах уравнивания приведены ниже.

Вычисление обратной весовой матрицы и обратного веса функции в схеме Гаусса

Ранее было показано, что обратная весовая матрица вектора уравненных параметров есть $\mathbf{Q}_{\bar{x}} = \mathbf{R}^{-1}$, откуда $\mathbf{RQ}_{\bar{x}} - \mathbf{E} = 0$ или

$$\begin{pmatrix} [a_1a_1] & [a_1a_2] & \dots & [a_1a_k] \\ [a_1a_2] & [a_2a_2] & \dots & [a_2a_k] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [a_1a_k] & [a_2a_k] & \dots & [a_k a_k] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1k} \\ Q_{21} & Q_{22} & \dots & Q_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{k1} & Q_{k2} & \dots & Q_{kk} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Перемножив матрицу R на первый столбец матрицы Q , получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
 [pa_1a_1]Q_{11} + [pa_1a_2]Q_{12} + \dots + [pa_1a_k]Q_{1k} - 1 &= 0 \\
 [pa_1a_2]Q_{11} + [pa_2a_2]Q_{12} + \dots + [pa_2a_k]Q_{1k} &= 0 \\
 \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots & \\
 [pa_1a_k]Q_{11} + [pa_2a_k]Q_{12} + \dots + [pa_k a_k]Q_{1k} &= 0.
 \end{aligned} \quad (3.25)$$

Данная система имеет те же самые коэффициенты, что и система нормальных уравнений, но имеет другие неизвестные из-за

другого вектора свободных членов. Вместо вектора $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L} = \begin{pmatrix} [pa_1l] \\ [pa_2l] \\ \dots \\ [pa_kl] \end{pmatrix}$

используется вектор $e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Отсюда понятно, что при решении данной системы в схеме Гаусса, требуется заменить численные значения исходного вектора свободных членов $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L}$ на вектор e_1 . При этом в схему Гаусса добавляют новый столбец свободных членов и производят в данном столбце те же вычисления, что и в столбце свободных членов при решении системы нормальных уравнений. При решении системы с новыми свободными членами получим в качестве неизвестных первую строку (первый столбец) матрицы \mathbf{Q} .

Для вычисления второй и последующих строк матрицы \mathbf{Q} , необходимо перемножить матрицу \mathbf{R} на соответствующие столбцы матрицы \mathbf{Q} . Получим остальные $k-1$ систем вида:

$$\begin{aligned} [pa_1a_1]Q_{21} + [pa_1a_2]Q_{22} + \dots + [pa_1a_k]Q_{2k} &= 0 \\ [pa_1a_2]Q_{21} + [pa_2a_2]Q_{22} + \dots + [pa_2a_k]Q_{2k} - 1 &= 0 \\ \dots & \\ [pa_1a_k]Q_{21} + [pa_2a_k]Q_{22} + \dots + [pa_ka_k]Q_{2k} &= 0 \\ \dots & \\ [pa_1a_1]Q_{k1} + [pa_1a_2]Q_{k2} + \dots + [pa_1a_k]Q_{kk} &= 0 \\ [pa_1a_2]Q_{k1} + [pa_2a_2]Q_{k2} + \dots + [pa_2a_k]Q_{kk} &= 0 \\ \dots & \\ [pa_1a_k]Q_{k1} + [pa_2a_k]Q_{k2} + \dots + [pa_ka_k]Q_{kk} - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Все эти системы отличаются только свободными членами, из-за чего возникают другие неизвестные. Исходные векторы свободных членов здесь имеют вид:

$$e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \dots; \quad e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Для решения таких систем в схеме Гаусса достаточно вводить дополнительные столбцы свободных членов для решения каждой системы. Продолжим рассматривать пример использования схемы Гаусса, в которую включено также и обращение матрицы \mathbf{R} , т.е. получение элементов матрицы $\mathbf{Q}_{\bar{x}}$. В схему (табл. 3.3) введены дополнительные столбцы, в каждом из которых производятся вычисления, аналогичные вычислениям в столбце свободных членов l .

Т а б л и ц а 3.3

δx_1	δx_2	δx_3	l	S	Контроль	e_1	e_2	e_3
3	1	-1	-2,5	0,5	0,5	-1	0	0
-1	-0,3333	0,3333	0,8333	-0,1667	-0,1667	0,3333	0	0
	2,6667	-1,6667	3,8333	4,8333	4,8333	0,3333	-1	0
	-1	0,6250	-1,4375	-1,8125	-1,8125	-0,1250	0,3750	0
		3,6250	6,2625	9,8875	9,8875	-0,1250	-0,6250	-1
		-1	-1,7276	-2,7276	-2,7276	0,0345	0,1724	0,2758
$\delta x_1=1,097$	$\delta x_2=-2,517$	$\delta x_3=-1,728$						
$Q_{11}=0,379$	$Q_{12}=-0,103$	$Q_{13}=0,034$						
$Q_{21}=-0,103$	$Q_{22}=0,483$	$Q_{23}=0,172$						
$Q_{31}=0,034$	$Q_{32}=0,172$	$Q_{33}=0,276$						

При этом элементы матрицы \mathbf{Q} вычисляются построчно, аналогично вычислению неизвестных, i -я строчка элементов матрицы \mathbf{Q} вычисляется с использованием элементов, стоящих в столбце e_i вместо элементов из столбца l . Одним из контролей вычислений может служить свойство симметричности матрицы \mathbf{Q} , что здесь выполняется.

Обращение матрицы \mathbf{R} можно выполнить и не вводя дополнительные столбцы. Для этого необходимо матрицу \mathbf{Q} вычислять, начиная с последней строки. Кроме того необходимо использовать свойство симметричности $Q_{ij}=Q_{ji}$.

В последнем столбце число 0,276, которое является неизвестным Q_{kk} и всегда получается делением -1 на квадратичный

Обозначим ноль, стоящий в последнем уравнении через \hat{f}_{k+1} , продляя таким образом ряд $\hat{f}_1, \hat{f}_2, \dots, \hat{f}_k$, и с помощью эквивалентных преобразований исключим все неизвестные в данной системе. Последнее уравнение, с использованием обозначений Гаусса, примет вид

$$[\hat{f}_{k+1} \cdot k] = -\frac{1}{P_F}. \quad (3.26)$$

Данный алгоритм раскрывается по аналогии с алгоритмом $[pll \cdot k]$, если использовать вместо вектора свободных членов

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L} = \begin{pmatrix} [pa_1 l] \\ [pa_2 l] \\ \dots \\ [pa_k l] \end{pmatrix} \text{ вектор } \mathbf{\hat{f}} = \begin{pmatrix} \hat{f}_1 \\ \hat{f}_2 \\ \dots \\ \hat{f}_k \end{pmatrix}$$

$$[pll \cdot k] = [pll] - \frac{[pa_1 l][pa_1 l]}{[pa_1 a_1]} - \frac{[pa_2 l \cdot 1][pa_2 l \cdot 1]}{[pa_2 a_2 \cdot 1]} - \dots - \frac{[pa_k l \cdot (k-1)][pa_k l \cdot (k-1)]}{[pa_k a_k \cdot (k-1)]},$$

$$[\hat{f}_{k+1} \cdot k] = \hat{f}_{k+1} - \frac{\hat{f}_1 \hat{f}_1}{[pa_1 a_1]} - \frac{[\hat{f}_2 \cdot 1][\hat{f}_2 \cdot 1]}{[pa_2 a_2 \cdot 1]} - \dots - \frac{[\hat{f}_k \cdot (k-1)][\hat{f}_k \cdot (k-1)]}{[pa_k a_k \cdot (k-1)]}.$$

Продолжим пример со схемой Гаусса, дополнив ее вычислением обратного веса функции. Пусть требуется оценить функцию $F = X_2 - X_3$, тогда вектор $\mathbf{\hat{f}}$, элементы которого равны $\left(\frac{\partial F}{\partial x_j} \right)_0$, примет вид $\mathbf{\hat{f}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

По аналогии с вычислением матрицы \mathbf{Q} , введем в схему Гаусса дополнительный столбец \hat{f} (табл. 3.4).

Реализуя формулу (3.26), обратный вес функции получим в схеме как сумму произведений следующих чисел, расположенных в столбце \hat{f} :

$$-1/P_F = 0 \cdot 0 + 0,667 \cdot (-0,250) + (-0,583) \cdot 0,161 = -0,261.$$

Таким образом, в схеме Гаусса можно вычислять обратной вес только одной функции. Если существует вектор функция, то

Т а б л и ц а 3.4

δx_1	δx_2	δx_3	l	S	Контроль	e_1	e_2	e_3	f
3	1	-1	-2,5	0,5	0,5	-1	0	0	0
-1	-0,3333	0,3333	0,8333	-0,1667	-0,1667	0,3333	0	0	0
	2,6667	-1,6667	3,8333	4,8333	4,8333	0,3333	-1	0	0,667
	-1	0,6250	-1,4375	-1,8125	-1,8125	-0,1250	0,3750	0	-0,250
		3,6250	6,2625	9,8875	9,8875	-0,1250	-0,6250	-1	-0,583
		-1	-1,7276	-2,7276	-2,7276	0,0345	0,1724	0,2758	0,161
$\delta x_1=1,097$	$\delta x_2=-2,517$	$\delta x_3=-1,728$						$-1/P_f=-0,261$	
$Q_{11}=0,379$	$Q_{12}=-0,103$	$Q_{13}=0,034$							
$Q_{21}=-0,103$	$Q_{22}=0,483$	$Q_{23}=0,172$							
$Q_{31}=0,034$	$Q_{32}=0,172$	$Q_{33}=0,276$							

для получения обратной весовой матрицы функции уравненных параметров необходимо использовать обобщенную формулу оценки точности (3.16).

Контрольные вопросы

1. Дайте определение необходимых и избыточных измерений.
2. Под какими условиями выбираются параметры? Приведите примеры для различных построений.
3. Запишите общий вид параметрических уравнений связи. Поясните их смысл. Для каких величин выполняются равенства в уравнениях связи?
4. Запишите параметрические уравнения поправок. Поясните каким образом получаются параметрические уравнения поправок.
5. Приведите примеры линейных параметрических уравнение связи и поправок.
6. Запишите параметрические уравнения связи и поправок для nivelirной сети.
7. Запишите параметрические уравнения связи и поправок для измеренной стороны.
8. Запишите параметрические уравнения связи и поправок для измеренного дирекционного угла, направления и угла.
9. На какую величину нарушаются равенства в уравнениях связи, при подстановке в них результатов измерений и приближенных значений параметров?
10. Под каким условием решаются параметрические уравнения поправок?

11. В чем состоит лемма Гаусса?
12. Запишите общий вид системы нормальных уравнений поправок в матричном виде. Каковы свойства этой системы?
13. Приведите систему нормальных уравнений, записанную в матричной форме к обычному виду.
14. Как раскрывается алгоритм Гаусса?
15. Назовите методы решения нормальных уравнений поправок.
16. В чем состоит способ Гаусса решения нормальных уравнений? Как получаются системы эквивалентных и эллиминационных нормальных уравнений?
17. Как вычисляются поправки к параметрам и поправки к результатам измерений?
18. Какова последовательность уравнивания геодезических сетей параметрическим способом?
19. Какие контроли вычислений используются при уравнивании?
20. Что понимается под оценкой точности в параметрическом способе? Какие величины оцениваются?
21. Приведите последовательность уравнивания параметрическим способом геодезических построений для неравноточных измерений.
22. Приведите алгоритм оценки параметров и уравненных измерений при уравнивании параметрическим способом.

Задачи с решениями

Задача 1. На рис. 3.11 приведена схема измерения углов во всех комбинациях и результаты измерений: $Y_1 = 61^\circ 48' 17,4''$; $Y_2 = 60^\circ 55' 41,9''$; $Y_3 = 54^\circ 43' 38,1''$; $Y_4 = 122^\circ 43' 56,7''$; $Y_5 = 115^\circ 39' 19,7''$; $Y_6 = 177^\circ 27' 36,8''$. Требуется уравнивать углы параметрическим способом и произвести оценку точности.

Решение

1. Вычислим число необходимых и избыточных измерений. Число всех измерений $n=6$, число необходимых измерений $k=3$, число избыточных измерений $r=n-k=6-3=3$.
2. Выбор параметров: параметры должны быть независимыми и их число должно быть $k=3$, таким свойствам отвечают первые три угла. Их и выберем в качестве параметров $X_1=Y_1$; $X_2=Y_2$; $X_3=Y_3$.
3. Составим параметрические уравнения связи: $Y_1=X_1$; $Y_2=X_2$; $Y_3=X_3$; $Y_4=X_1+X_2$; $Y_5=X_2+X_3$; $Y_6=X_1+X_2+X_3$.
4. Вычислим приближенные значения параметров. Поскольку параметры равны первым трем измерениям, примем приближенные значения параметров равными измеренным значениям углов
 $x_1=y_1=61^\circ 48' 17,4''$; $x_2=y_2=60^\circ 55' 41,9''$; $x_3=y_3=54^\circ 43' 38,1''$.

5. Составим параметрические уравнения поправок:

$$v_1 = \delta x_1 + l_1; \quad v_2 = \delta x_2 + l_2; \quad v_3 = \delta x_3 + l_3;$$

$$v_4 = \delta x_1 + \delta x_2 + l_4; \quad v_5 = \delta x_2 + \delta x_3 + l_5;$$

$$v_6 = \delta x_1 + \delta x_2 + \delta x_3 + l_6,$$

здесь

$$l_1 = x_1 - y_1 = 0; \quad l_2 = x_2 - y_2 = 0;$$

$$l_3 = x_3 - y_3 = 0; \quad l_4 = x_1 + x_2 - y_4 = +2,6;$$

$$l_5 = x_2 + x_3 - y_5 = +0,3;$$

$$l_6 = x_1 + x_2 + x_3 - y_6 = +0,6.$$

Матрица коэффициентов уравнений поправок имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

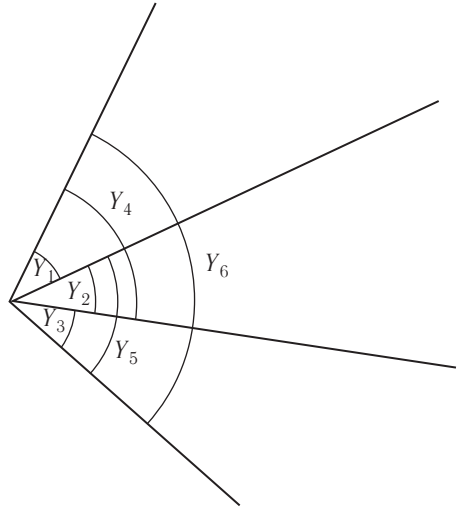


Рис. 3.11. Углы, измеренные на станции во всех комбинациях

6. Составим систему нормальных уравнений. Запишем данную матрицу в таблицу коэффициентов уравнений поправок, в которой вычислим свободные члены, контрольные суммы по строкам S и коэффициенты нормальных уравнений.

№ измерения	a_1	a_2	a_3	l	S
1	1	0	0	0	1
2	0	1	0	0	1
3	0	0	1	0	1
4	1	1	0	+2,6	4,6
5	0	1	1	+0,3	2,3
6	1	1	1	+0,6	3,6
	$a_1]$	$a_2]$	$a_3]$	$l]$	$S]$
$[a_1$	3	2	1	3,2	9,2
$[a_2$	2	4	2	3,5	11,5
$[a_3$	1	2	3	0,9	6,9
$[l$	3,2	3,5	0,9	7,21	14,81
$[S$	9,2	11,5	6,9	14,81	42,4

В столбце S вычислены суммы элементов по каждой строке, которые будут использованы для контроля вычислений при составлении и решении нормальных уравнений. В нижней части таблицы подсчитаны коэффициенты нормальных уравнений.

Например, $[a_2 a_3]$ — представляет собой сумму произведений элементов из столбца a_2 и столбца a_3 .

$$[a_2 a_3] = a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} + a_{42}a_{43} + a_{52}a_{53} + a_{62}a_{63} = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2.$$

Матрицу коэффициентов нормальных уравнений можно получить и перемножением матриц

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Для решения нормальных уравнений используем сначала схему Гаусса. Поскольку в схеме производится и вычисление обратной весовой матрицы и обратного веса функции, составим функцию от уравненных параметров для оценки. Пусть требуется оценить точность четвертого угла. В этом случае функция будет иметь вид $F = Y_4 = X_1 + X_2$. Отсюда

вектор $f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Напомним, в схеме Гаусса вводится дополнительный

столбец f , в котором вычисляется обратный вес функции. Вычисления в этом столбце подобны вычислению элементов в столбце свободных членов.

7. Решим систему нормальных уравнений в схеме Гаусса (табл. 3.5).

Т а б л и ц а 3.5

δx_1	δx_2	δx_3	l	S	Контроль	e_1	e_2	e_3	f
3	2	1	3,2	9,2	9,2	-1	0	0	1
-1	-0,6667	-0,3333	-1,0667	-3,0667	-3,0667	0,3333	0	0	-0,3333
	2,6667	1,3333	-0,6667	5,3667	5,3667	0,6667	-1	0	0,3333
	-1	-0,5000	-0,5125	-1,0125	-1,0125	-0,2500	0,3750	0	-0,125
		2,0000	-0,8450	1,1500	1,1500	0,000	0,500	-1	-0,500
		-1	0,4250	-0,5750	-0,5750	0,000	-0,250	0,500	0,250
			2,735	2,735				-1/PF	-0,416
$\delta x_1 = -0,725$ $Q_{11} = 0,500$ $Q_{21} = -0,250$ $Q_{31} = 0$	$\delta x_2 = -0,725$ $Q_{12} = -0,250$ $Q_{22} = 0,500$ $Q_{32} = -0,250$	$\delta x_3 = 0,425$ $Q_{13} = 0$ $Q_{23} = -0,250$ $Q_{33} = 0,500$							

В столбце f здесь получен обратный вес функции, равный 0,416. Следовательно вес функции (четвертого угла) равен $P_f=1/0,416=2,40$.

Из вычисленной обратной весовой матрицы получим, что веса всех параметров после уравнивания равны $P_{\bar{x}_j} = 1/0,5 = 2,0$. Кроме того, выполнен контроль $[ll \cdot k]=[lS \cdot k]=2,73$.

8. Вычислим поправки к результатам измерений, подставив полученные поправки к параметрам в уравнения поправок:

$$v_1=\delta x_1+l_1=-0,72; \quad v_2=\delta x_2+l_2=-0,72; \quad v_3=\delta x_3+l_3=0,42; \quad v_4=\delta x_1+\delta x_2+l_4=-1,16; \\ v_5=\delta x_2+\delta x_3+l_5=0,00; \quad v_6=\delta x_1+\delta x_2+\delta x_3+l_6=0,18.$$

Обычно, данные формулы реализуют в форме таблицы (табл. 3.6).

Т а б л и ц а 3.6

№ измерения	a_1	a_2	a_3	l	s	v	a_1v	a_2v	a_3v	vv	vl	vs
1	1	0	0	0	+1	-0,72	-0,72	0	0	0,52	0	-0,72
2	0	1	0	0	+1	-0,72	0	-0,72	0	0,52	0	-0,72
3	0	0	1	0	+1	+0,42	0	0	0,42	0,18	0	+0,42
4	1	1	0	+2,6	+4,6	+1,15	+1,15	+1,15	0	1,32	2,99	5,29
5	0	1	1	+0,3	+2,3	0	0	0	0	0,00	0	0
6	1	1	1	+0,6	+3,6	-0,42	-0,42	-0,42	-0,42	0,18	-0,26	-1,51
	$\delta x_1=-0,725$	$\delta x_2=-0,725$	$\delta x_3=0,425$			Σ	0,01	0,01	0,00	2,72	2,73	2,76

В табл. 3.6 осуществлен контроль решения системы уравнений поправок в заключительной, суммарной строке. Согласно лемме Гаусса все алгоритмы $[a_jv]=0$ с точностью до ошибок округления. Произведен контроль равенства $[vv]=[vl]=[vs]$. Следовательно, система уравнений поправок решена верно.

9. В табл. 3.7 вычислены уравненные значения параметров и измеренных углов, с одновременной проверкой окончательного контроля уравнивания.

Т а б л и ц а 3.7

Углы	Значения углов	v	Уравненные углы $\bar{y}_i = y_i + v_i$	Уравненные параметры $\bar{x}_j = x_j + \delta x_j$	Правая часть уравнений связи	Значения углов вычисленные через уравненные параметры
y_1	61°48'17,4"	-0,72	61°48'16,7"	61°48'16,7"	X_1	61°48'16,7"
y_2	60°55'41,9"	-0,72	60°55'41,2"	60°55'41,2"	X_2	60°55'41,2"
y_3	54°43'38,1"	0,42	54°43'37,7"	54°43'37,7"	X_3	54°43'37,7"
y_4	122°43'56,7"	1,15	122°43'57,9"		X_1+X_2	122°43'57,9"
y_5	115°39'19,7"	0	115°39'19,7"		X_2+X_3	115°39'19,7"
y_6	177°27'36,8"	-0,42	177°27'36,4"		$X_1+X_2+X_3$	177°27'36,4"

10. Оценка точности:

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{n-k}} = \sqrt{\frac{2,73}{6-3}} = 0,95''; \quad m_{\bar{x}_i} = m\sqrt{Q_{jj}} = 0,95\sqrt{0,50} = 0,67'';$$

$$m_{\bar{F}} = m\sqrt{1/P_F} = 0,95\sqrt{0,416} = 0,61''.$$

Задача 2. На рис. 3.12 приведена схема нивелирной сети, в табл. 3.8 — отметки исходных пунктов и результаты измерений. Требуется уравнивать нивелирную сеть параметрическим способом и произвести оценку точности.

Т а б л и ц а 3.8

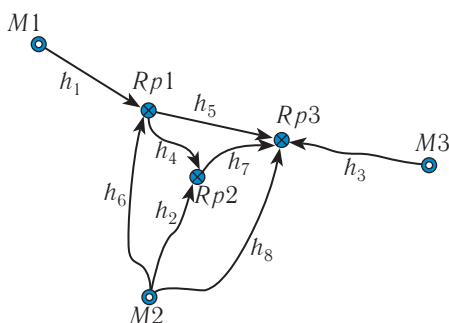


Рис. 3.12. Схема нивелирной сети

Отметки исходных пунктов	№ измерения	Измеренные превышения $h(y)$, м	Длины ходов L , км
$H_{M1}=150,209$	1	-3,567	4,00
$H_{M2}=150,531$	2	-0,283	6,67
$H_{M3}=147,182$	3	-0,126	4,00
	4	3,533	5,00
	5	0,428	1,05
	6	-3,861	1,67
	7	-3,131	5,00
	8	-3,448	3,33

Решение. Уравнивание нивелирной сети будем выполнять в матричной форме, используя готовые программы умножения и обращения матриц, подробно поясняя все промежуточные действия. Для закрепления навыков работы со схемой Гаусса, параллельно приведем решение нормальных уравнений поправок в этой схеме. В дальнейшем, все примеры будут решены только в матричной форме.

1. Вычислим число необходимых и избыточных измерений. Число всех измерений $n=8$. Число необходимых измерений равно числу определяемых реперов ($Rp1, Rp2, Rp3$) $k=3$. Число избыточных измерений $r=n-k=8-3=5$.

2. Выбор параметров: параметры должны быть независимыми и их число должно быть $k=3$, таким свойствам отвечают три отметки определяемых реперов. Их и выберем в качестве параметров. $X_1=H_{Rp1}$, $X_2=H_{Rp2}$, $X_3=H_{Rp3}$.

3. Составим параметрические уравнения связи, используя схему нивелирной сети: $Y_1=X_1-H_{M1}$; $Y_2=X_2-H_{M2}$; $Y_3=X_3-H_{M3}$; $Y_4=X_2-X_1$; $Y_5=X_3-X_1$; $Y_6=X_1-H_{M2}$; $Y_7=X_3-X_2$; $Y_8=X_3-H_{M2}$.

4. Вычислим приближенные значения параметров. Используем для определения приближенных значений параметров измеренные значения превышений и первые три уравнения связи

$$x_1=y_1+HM_1=146,642; \quad x_2=y_2+H_{M2}=150,248; \quad x_3=y_3+H_{M3}=147,056.$$

5. Составим параметрические уравнения поправок и вычислим свободные члены в сантиметрах:

$$\begin{aligned} v_1 &= \delta x_1 + l_1 & l_1 &= x_1 - H_{M1} - y_1 = 0 \\ v_2 &= \delta x_2 + l_2 & l_2 &= x_2 - H_{M2} - y_2 = 0 \\ v_3 &= \delta x_3 + l_3 & l_3 &= x_3 - H_{M3} - y_3 = 0 \\ v_4 &= -\delta x_1 + \delta x_2 + l_4 & l_4 &= x_2 - x_1 - y_4 = +7,3 \\ v_5 &= -\delta x_1 + \delta x_3 + l_5 & l_5 &= x_3 - x_1 - y_5 = -1,4 \\ v_6 &= \delta x_1 + l_6 & l_6 &= x_1 - H_{M2} - y_6 = -2,8 \\ v_7 &= -\delta x_2 + \delta x_3 + l_7 & l_7 &= x_3 - x_2 - y_7 = -6,1 \\ v_8 &= \delta x_3 + l_8 & l_8 &= x_3 - H_{M2} - y_8 = -2,7 \end{aligned}$$

Матрица коэффициентов уравнений поправок

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Определим веса измерений, приняв за эталонное измерение — измерение превышений по ходу, длиной 2 км, $P_i=C/L_i=2/L_i$.

Номер измерения i	L_i	$P_i=C/L_i$
1	4,00	0,50
2	6,67	0,30
3	4,00	0,50
4	5,00	0,40
5	1,05	1,90
6	1,67	1,20
7	5,00	0,40
8	3,33	0,60

7. Составим систему нормальных уравнений поправок $R\Delta X + A^T P L = 0$, где матрица коэффициентов нормальных уравнений

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -0,4 & -1,9 \\ -0,4 & 1,1 & -0,4 \\ -1,9 & -0,4 & 3,4 \end{pmatrix};$$

вектор свободных членов системы нормальных уравнений $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} = \begin{pmatrix} -3,62 \\ 5,36 \\ -6,72 \end{pmatrix}$.

Если решать систему нормальных уравнений в схеме Гаусса, для составления системы нормальных уравнений лучше использовать таблицу с контрольными суммами S .

№ измерения	P	a_1	a_2	a_3	l	S
1	0,5	1	0	0	0	1
2	0,3	0	1	0	0	1
3	0,5	0	0	1	0	1
4	0,4	-1	1	0	+7,3	7,3
5	1,9	-1	0	1	-1,4	-1,4
6	1,2	1	0	0	-2,8	-1,8
7	0,4	0	-1	1	-6,1	-6,1
8	0,6	0	0	1	-2,7	-1,7
7		$a_1]$	$a_2]$	$a_3]$	$l]$	$S]$
	$[pa_1$	4	-0,4	-1,9	-3,62	-1,92
	$[pa_2$	-0,4	1,1	-0,4	5,36	5,66
	$[pa_3$	-1,9	-0,4	3,4	-6,72	-5,62
	$[pl$	-3,62	5,36	-6,72	53,71	48,73
	$[pS$	-1,92	5,66	-5,62	48,73	46,85

Окончательно, система нормальных уравнений в численном виде примет вид

$$\begin{aligned} 4\delta x_1 - 0,4\delta x_2 - 1,9\delta x_3 - 3,62 &= 0; \\ -0,4\delta x_1 + 1,1\delta x_2 - 0,4\delta x_3 + 5,36 &= 0; \\ -1,9\delta x_1 - 0,4\delta x_2 + 3,4\delta x_3 - 6,72 &= 0. \end{aligned}$$

8. Вычислим обратную матрицу $\mathbf{Q}=\mathbf{R}^{-1}$, которая является и обратной весовой матрицей вектора уравненных параметров

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R}^{-1} = \begin{pmatrix} 0,389 & 0,230 & 0,245 \\ 0,230 & 1,086 & 0,257 \\ 0,245 & 0,257 & 0,461 \end{pmatrix}.$$

Приведем обращение матрицы \mathbf{R} в схеме Гаусса (табл. 3.9)

Т а б л и ц а 3.9

δx_1	δx_2	δx_3	Q_{11}	Q_{12}	Q_{13}
4	-0,4	-1,9	-1	0	0
-1	0,1	0,475	0,25	0	0
	1,1	-0,4	0	-1	0
	-0,04	-0,19	-0,1	0	0
	1,06	-0,59	-0,1	-1	0
	-1	0,5567	0,0943	0,9434	0
		3,4	0	0	-1
		-0,9025	-0,475	0	0
		-0,3284	-0,0557	-0,5566	0
		2,1691	-0,5307	-0,5567	-1
		-1	0,2446	0,2566	0,4610
0,389	0,230	0,245			
0,230	1,086	0,257			
0,245	0,257	0,461			

9. Вычислим вектор поправок к приближенным значениям параметров

$$\Delta \mathbf{X} = -\mathbf{QA}^T \mathbf{PL} = \begin{pmatrix} 1,82 \\ -3,26 \\ 2,61 \end{pmatrix} \text{ (см).}$$

Приведем решение данной системы в схеме Гаусса (табл. 3.10).

Т а б л и ц а 3.10

δx_1	δx_2	δx_3	l	S	f
4	-0,4	-1,9	-3,62	-1,92	-1
-1	0,100	0,475	0,905	0,48	0,25
	1,1	-0,4	5,36	5,66	0
	-0,040	-0,190	-0,362	-0,192	-0,100
	1,060	-0,590	4,998	5,468	-0,100
	-1	0,56	-4,72	-5,16	0,09
		3,4	-6,72	-5,62	1
		-0,902	-1,719	-0,912	-0,475
		-0,3284	2,7819	3,0435	-0,0557
		2,1691	-5,6576	-3,4885	0,4693
		-1	2,6083	1,6083	-0,2164
			53,71	48,73	0
			-3,2761	-1,7376	-0,25
			-23,5660	-25,7821	-0,0094
			-14,7565	-9,0989	-0,1016
			12,11	12,11	-0,36
1,82	-3,26	2,61	[II • k]	[Is • k]	-1/PF
δx_1	δx_2	δx_3			

10. Используя систему уравнений поправок, вычислим вектор поправок (в см) к результатам измерений

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{X} + \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1,82 \\ -3,26 \\ 2,61 \\ 2,22 \\ -0,61 \\ -0,98 \\ -0,23 \\ -0,09 \end{pmatrix}.$$

11. Выполним контроль вычисления данных поправок, используя лемму Гаусса $\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{V}=0$ и контрольное равенство $\mathbf{V}^T\mathbf{P}\mathbf{V}=\mathbf{V}^T\mathbf{P}\mathbf{L}$.

$$A^T P V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,82 \\ -3,26 \\ 2,61 \\ 2,22 \\ -0,61 \\ -0,98 \\ -0,23 \\ -0,09 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,00 \\ 0,00 \\ 0,00 \end{pmatrix}.$$

Аналогично получим $V^T P V = 12,11$ и $V^T P L = 12,11$.

Делаем вывод — параметрические уравнения поправок решены без значительных вычислительных ошибок.

12. Произведем окончательный контроль уравнивания (табл. 3.11).

Т а б л и ц а 3.11

Отметки исходных пунктов, м	Приближенные значения параметров, м	Поправки к приближенным значениям параметров ΔX , см	Уравненные параметры $\bar{x} = x + \Delta X$, м	Уравненные превышения, полученные по уравненным отметкам	Измеренные превышения, м	Поправки к измеренным превышениям, см	Уравненные превышения $\bar{y} = y + \Delta V$, м
$H_1=150,209$	$x_1=146,642$	1,82	146,660	-3,549	-3,567	1,82	-3,549
$H_2=150,531$	$x_2=150,248$	-3,26	150,215	-0,316	-0,283	-3,26	-0,316
$H_3=147,182$	$x_3=147,056$	2,61	147,082	-0,100	-0,126	2,61	-0,100
				3,555	3,533	2,22	3,555
				0,422	0,428	-0,61	0,422
				-3,871	-3,861	-0,98	-3,871
				-3,133	-3,131	-0,23	-3,133
				-3,449	-3,448	-0,09	-3,449

Уравненные превышения, вычисленные по уравненным отметкам и по измеренным превышениям с введенными в них поправками полностью совпали. Окончательный контроль показал, что нивелирная сеть уравнена. Неоднозначность в определении любых элементов сети устранена.

13. Оценка точности. Средняя квадратическая ошибка единицы веса, т.е. измеренного превышения по ходу длиной 2 км, ($C=2$):

$$\mu = \sqrt{\frac{[p v v]}{n - k}} = \sqrt{\frac{12,11}{5}} = 1,55 \text{ см};$$

средняя квадратическая ошибка по ходу длиной 1 км

$$m_{\text{КМ}} = \frac{\mu}{\sqrt{C}} = \frac{1,55}{\sqrt{2}} = 1,10 \text{ см.}$$

Корреляционная матрица вектора уравненных параметров имеет вид

$$\mathbf{K}_{\bar{x}} = \mu \mathbf{Q}_{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 0,94 & 0,56 & 0,59 \\ 0,56 & 2,63 & 0,62 \\ 0,59 & 0,62 & 1,12 \end{pmatrix}.$$

Отсюда средние квадратические ошибки уравненных отметок определяемых точек:

$$m_{\bar{x}_1} = \sqrt{0,94} = 0,94 \text{ см; } m_{\bar{x}_2} = \sqrt{2,63} = 1,62 \text{ см; } m_{\bar{x}_3} = \sqrt{1,12} = 1,06 \text{ см.}$$

Коэффициенты корреляции между уравненными отметками определим следующим образом:

$$r_{\bar{x}_1\bar{x}_2} = \frac{0,56}{0,94 \cdot 1,62} = 0,37; \quad r_{\bar{x}_1\bar{x}_3} = \frac{0,59}{0,94 \cdot 1,06} = 0,56; \quad r_{\bar{x}_2\bar{x}_3} = \frac{0,62}{1,06 \cdot 1,62} = 0,34.$$

Выполним оценку точности функции от уравненных параметров. В качестве функции возьмем пятое превышение $\bar{y}_5 = X_3 - X_1$. Откуда вектор производных $\mathbf{f} = (-1 \ 0 \ 1)$. Определим обратный вес данной функции

$$\frac{1}{\mathbf{P}_F} = \mathbf{Q}_F = \mathbf{f} \mathbf{Q}_{\bar{x}} \mathbf{f}^T = (-1 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} 0,389 & 0,230 & 0,245 \\ 0,230 & 1,086 & 0,257 \\ 0,245 & 0,257 & 0,461 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,36.$$

Средняя квадратическая ошибка пятого уравненного превышения

$$m_{\bar{y}_5} = \mu \sqrt{\frac{1}{\mathbf{P}_F}} = 1,55 \sqrt{0,361} = 0,93 \text{ см.}$$

Можно оценить и сразу все уравненные превышения, если определить обратную весовую матрицу вектора уравненных измерений

$$\mathbf{Q}_F = \mathbf{A} \mathbf{Q}_{\bar{x}} \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 0,39 & 0,23 & 0,24 & -0,16 & -0,14 & 0,39 & 0,02 & 0,24 \\ 0,23 & 1,09 & 0,26 & 0,86 & 0,03 & 0,23 & -0,83 & 0,26 \\ 0,24 & 0,26 & 0,46 & 0,01 & 0,22 & 0,24 & 0,20 & 0,46 \\ -0,16 & 0,86 & 0,01 & 1,02 & 0,17 & -0,16 & 0,84 & 0,01 \\ -0,14 & 0,03 & 0,22 & 0,17 & 0,36 & -0,14 & 0,19 & 0,22 \\ 0,39 & 0,23 & 0,24 & -0,16 & -0,14 & 0,39 & 0,02 & 0,25 \\ 0,02 & -0,83 & 0,20 & 0,84 & 0,19 & 0,02 & 1,03 & 0,20 \\ 0,24 & 0,26 & 0,46 & 0,01 & 0,22 & 0,25 & 0,20 & 0,46 \end{pmatrix}.$$

Корреляционная матрица вектора уравненных превышений

$$K_F = \mu^2 Q_F = \begin{pmatrix} 0,93 & 0,55 & 0,59 & -0,38 & -0,34 & 0,93 & 0,04 & 0,24 \\ 0,55 & 2,61 & 0,61 & 2,05 & 0,06 & 0,55 & -1,99 & 0,62 \\ 0,59 & 0,61 & 1,10 & 0,03 & 0,52 & 0,59 & 0,49 & 1,11 \\ -0,38 & 2,05 & 0,03 & 2,44 & 0,41 & -0,38 & -2,03 & 0,03 \\ -0,34 & 0,06 & 0,52 & 0,41 & 0,86 & -0,35 & 0,45 & 0,52 \\ 0,93 & 0,55 & 0,59 & -0,38 & -0,35 & 0,93 & 0,04 & 0,59 \\ 0,04 & -1,99 & 0,49 & -2,03 & 0,45 & 0,04 & 2,48 & 0,49 \\ 0,24 & 0,62 & 1,11 & 0,03 & 0,52 & 0,59 & 0,49 & 1,11 \end{pmatrix}.$$

Откуда, средние квадратические ошибки уравненных превышений:

$$m_{\bar{y}_1} = 0,96 \text{ см}; \quad m_{\bar{y}_2} = 1,61 \text{ см}; \quad m_{\bar{y}_3} = 1,05 \text{ см}; \quad m_{\bar{y}_4} = 1,56 \text{ см}; \\ m_{\bar{y}_5} = 0,93 \text{ см}; \quad m_{\bar{y}_6} = 0,96 \text{ см}; \quad m_{\bar{y}_7} = 1,57 \text{ см}; \quad m_{\bar{y}_8} = 1,05 \text{ см}.$$

Задача 3. На рис. 3.13 приведена схема линейно-угловой сети, в табл. 3.12 приведены координаты исходных пунктов и результаты измерений углов и длин сторон. При этом известно, что тахеометр, которым производились измерения, обеспечивал следующую точность. Среднее квадратическое отклонение измерения угла $\sigma_\beta = 5''$, стороны $\sigma_S = 1$ см. Требуется уравнивать сеть параметрическим способом и произвести оценку точности.

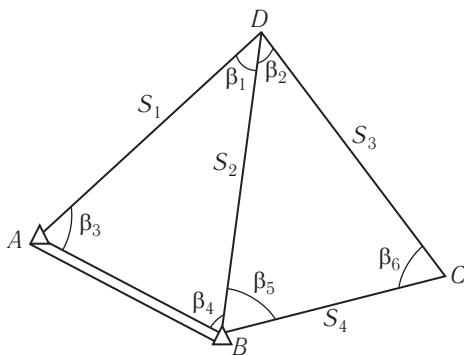


Рис. 3.13. Линейно-угловая сеть

Т а б л и ц а 3.12

Координаты исходных пунктов, м	Измеренные значения углов β_i	Длины сторон, м
$X_A=7821,407$ $Y_A=10444,703$ $X_B=7617,443$ $Y_B=11431,562$	$\beta_1=74^\circ 51' 04,5''$ $\beta_2=74^\circ 05' 07,9''$ $\beta_3=45^\circ 17' 20,4''$ $\beta_4=59^\circ 51' 34,9''$ $\beta_5=67^\circ 59' 35,7''$ $\beta_6=37^\circ 55' 21,2''$	$S_1=902,847$ $S_2=741,952$ $S_3=1119,230$ $S_4=1160,908$

Решение. Уравнивание линейно-угловой сети будем выполнять в матричной форме, используя готовые программы умножения и обращения матриц, но подробно пояснять все промежуточные действия. Поскольку в данном примере использованы разнородные измерения, используем обозначения, которые приняты в геодезии. Углы будем обозначать через β_i , измеренные стороны через S_i .

1. Вычислим число необходимых и избыточных измерений. Число всех измерений $n=10$, число необходимых измерений (количество координат определяемых пунктов) $k=4$, число избыточных измерений $r=n-k=10-4=6$.

2. Выбор параметров. Параметры должны быть независимыми и их число должно быть $k=4$. Выберем в качестве параметров координаты определяемых пунктов X_D, Y_D, X_C, Y_C , которые отвечают необходимым свойствам параметров.

3. Составим параметрические уравнения связи, в которых измеряемые углы и длины сторон выразим через координаты пунктов.

$$\beta_1 = \arctg \frac{Y_A - Y_D}{X_A - X_D} - \arctg \frac{Y_B - Y_D}{X_B - X_D}; \quad \beta_2 = \arctg \frac{Y_B - Y_D}{X_B - X_D} - \arctg \frac{Y_C - Y_D}{X_C - X_D};$$

$$\beta_3 = \arctg \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} - \arctg \frac{Y_D - Y_A}{X_D - X_A}; \quad \beta_4 = \arctg \frac{Y_D - Y_B}{X_D - X_B} - \arctg \frac{Y_A - Y_B}{X_A - X_B};$$

$$\beta_5 = \arctg \frac{Y_C - Y_B}{X_C - X_B} - \arctg \frac{Y_D - Y_B}{X_D - X_B}; \quad \beta_6 = \arctg \frac{Y_D - Y_C}{X_D - X_C} - \arctg \frac{Y_B - Y_C}{X_B - X_C};$$

$$S_1 = \sqrt{(Y_A - Y_D)^2 + (X_A - X_D)^2}; \quad S_2 = \sqrt{(Y_B - Y_D)^2 + (X_B - X_D)^2};$$

$$S_3 = \sqrt{(Y_C - Y_D)^2 + (X_C - X_D)^2}; \quad S_4 = \sqrt{(Y_C - Y_B)^2 + (X_C - X_B)^2}.$$

4. Вычислим приближенные значения параметров — координат определяемых пунктов. Используем для определения приближенных значений параметров измеренные значения углов и сторон. Для вычисления координат пункта D вычислим дирекционный угол стороны AD , используя дирекционный угол исходной стороны AB и измеренное значение угла β_3 :

$$\alpha_{AB} = \arctg \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} = \arctg \frac{11431,562 - 10444,703}{7617,443 - 7821,407} = 101^\circ 40' 39,0'';$$

$$\alpha_{AD} = \alpha_{AB} - \beta_3 = 101^\circ 40' 39,0'' - 45^\circ 17' 20,1'' = 56^\circ 23' 18,6''.$$

Далее, вычислим приближенные координаты пункта D :

$$X_D = X_A + S_{AD} \cos \alpha_{AD} = 7821,407 + 902,847 \cdot 0,5535589 = 8321,186 \text{ м};$$

$$Y_D = Y_A + S_{AD} \sin \alpha_{AD} = 10444,703 + 902,847 \cdot 0,8328100 = 11196,604 \text{ м}.$$

Аналогично вычислим приближенные координаты пункта С:
 $\alpha_{BC} = \alpha_{BA} + \beta_4 + \beta_5 = 281^\circ 40' 39,0'' + 59^\circ 51' 34,9'' + 67^\circ 59' 35,7'' - 360^\circ = 49^\circ 31' 51,1''$;
 $X_C = X_B + S_{BC} \cos \beta_{BC} = 7617,443 + 1160,908 \cdot 0,64903854 = 8370,917$ м;
 $Y_C = Y_B + S_{BC} \sin \alpha_{BC} = 11431,562 + 1160,908 \cdot 0,76075553 = 12314,730$ м.

5. Составим параметрические уравнения поправок, учитывая общий вид параметрических уравнений поправок для угла (см. §3.2):

$$v_{\beta_i} = (b_{ij} - b_{ik}) \delta X_i + (-c_{ij} + c_{ik}) \delta Y_i - b_{ij} \delta X_j + c_{ij} \delta Y_j + b_{ik} \delta X_k - c_{ik} \delta Y_k + l_{\beta_i},$$

где $b_{ij} = \sin \alpha_{ij} \frac{\rho}{S}$; $c_{ij} = \cos \alpha_{ij} \frac{\rho}{S}$

и сторон $v_S = -\cos \alpha_{12} \delta x_1 - \sin \alpha_{12} \delta y_1 + \cos \alpha_{12} \delta x_2 + \sin \alpha_{12} \delta y_2 + l_S$.

Для наглядности, запишем в буквенном виде матрицу **A** коэффициентов уравнений поправок в табл. 3.13. При формировании данной матрицы необходимо соблюдать размерность каждого коэффициента. В уравнениях поправок для углов размерность коэффициентов должна быть в угл.с/см, поэтому длины сторон необходимо выразить в сантиметрах. Уравнения поправок сторон имеют безразмерные коэффициенты.

Т а б л и ц а 3.13

Номер измерения	Измерения	1	2	3	4
		δx_D	δy_D	δx_C	δy_C
1	β_1	$b_{DA} - b_{DB}$	$-c_{DA} + c_{DB}$	0	0
2	β_2	$b_{DB} - b_{DC}$	$-c_{DB} + c_{DC}$	b_{DC}	$-c_{DC}$
3	β_3	b_{AD}	$-c_{AD}$	0	0
4	β_4	$-b_{BD}$	c_{BD}	0	0
5	β_5	b_{BD}	$-c_{BD}$	$-b_{BC}$	c_{BC}
6	β_6	$-b_{CD}$	c_{CD}	$b_{CD} - b_{CB}$	$-c_{CD} + c_{CB}$
7	s_1	$-\cos \alpha_{DA}$	$-\sin \alpha_{DA}$	0	0
8	s_2	$-\cos \alpha_{DB}$	$-\sin \alpha_{DB}$	0	0
9	s_3	$-\cos \alpha_{DC}$	$-\sin \alpha_{DC}$	$\cos \alpha_{DC}$	$\sin \alpha_{DC}$
10	s_4	0	0	$\cos \alpha_{BC}$	$\sin \alpha_{BC}$

В численном виде матрица

$$A = \begin{pmatrix} -2,783 & -1,372 & 0 & 0 \\ -0,961 & 2,719 & 1,841 & -0,082 \\ 1,903 & -1,265 & 0 & 0 \\ 0,880 & 2,637 & 0 & 0 \\ -0,880 & -2,637 & -1,352 & 1,153 \\ 1,841 & -0,082 & -0,489 & -1,071 \\ 0,554 & 0,833 & 0 & 0 \\ 0,949 & -0,317 & 0 & 0 \\ -0,044 & -0,999 & 0,044 & 0,999 \\ 0,000 & 0,000 & 0,649 & 0,761 \end{pmatrix}.$$

Вектор свободных членов вычислим, используя параметрические уравнения связи, подставляя в них координаты исходных пунктов, приближенные координаты определяемых пунктов и результаты измерений. Первые шесть свободных членов здесь выражены в секундах, остальные в сантиметрах

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} -0,57 \\ -5,33 \\ 0 \\ 0,747 \\ 0,747 \\ -0,296 \\ 0 \\ -2,183 \\ 0,136 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

6. Определение весов измерений. В данную сеть включены разнородные измерения, поэтому веса, в отличие от предыдущих примеров, будут иметь размерность. Примем за эталонное измерение — измерение

угла. Вес угла, в этом случае, равен единице, $P_{\beta} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{\beta}^2} = \frac{\sigma_{\beta}^2}{\sigma_{\beta}^2} = 1$. Вес

измеренного угла — величина безразмерная. Вес измерения стороны

$$P_S = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_S^2} = \frac{25}{1} = 25 \text{ угл.с}^2/\text{см}^2.$$

Полагая, что измерения выполнялись независимо друг от друга, весовую матрицу получим следующего вида:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}.$$

7. Составление матрицы \mathbf{R} коэффициентов нормальных уравнений $\mathbf{R}\Delta\mathbf{X}+\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{L}=0$.

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 47,431 & 8,419 & -1,529 & -4,019 \\ 8,419 & 69,585 & 7,500 & -28,126 \\ -1,529 & 7,500 & 16,037 & 12,268 \\ -4,019 & -28,126 & 12,268 & 41,904 \end{pmatrix}.$$

Вектор свободных членов в системе нормальных уравнений

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{L} = \begin{pmatrix} -45,758 \\ 0,182 \\ -10,533 \\ 5,022 \end{pmatrix}.$$

8. Решение системы нормальных уравнений. Обратим матрицу коэффициентов нормальных уравнений и получим обратную весовую матрицу вектора уравненных параметров (вектора уравненных координат). Одним из контролей вычислений является симметричность матрицы относительно главной диагонали, что выполняется в данном случае

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R}^{-1} = \begin{pmatrix} 0,0218 & -0,044 & 0,0061 & -0,0026 \\ -0,044 & 0,0333 & -0,423 & 0,0343 \\ 0,0061 & -0,423 & 0,1340 & -0,0670 \\ -0,0026 & 0,0343 & -0,0670 & 0,0663 \end{pmatrix}.$$

Найдем вектор поправок (в см) к приближенным значениям параметров

$$\Delta\mathbf{X} = -\mathbf{Q}\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1,08 \\ -0,82 \\ 2,04 \\ -1,17 \end{pmatrix}.$$

9. Вычисление вектора поправок к результатам измерений:

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{X} + \mathbf{L} = \begin{pmatrix} -2,44'' \\ -4,76'' \\ 3,09'' \\ -0,48'' \\ -2,12'' \\ 2,01'' \\ -0,09 \text{ см} \\ -0,90 \text{ см} \\ -0,16 \text{ см} \\ 0,44 \text{ см} \end{pmatrix}.$$

10. Контроль решения системы уравнений поправок. Проверим выполнение равенств в лемме Гаусса. Для этого вычислим элементы

вектора $\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{V}$ в среде Matlab $\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0,00 \\ 0,00 \\ 0,00 \\ 0,00 \end{pmatrix}$. Поскольку вычисления

производились на ЭВМ, до 14 знаков, то можно было ожидать выполнение равенств в лемме Гаусса с высокой точностью. В нашем случае, отличие от нуля составило 10^{-13} .

11. Вычисление уравненных значений координат определяемых пунктов приведено в табл. 3.14.

Т а б л и ц а 3.14

Приближенные координаты, м	Поправки из уравнивания, см	Уравненные координаты, м
8321,186	1,08	$X_D=8321,197$
11196,604	-0,82	$Y_D=11196,595$
8370,917	2,04	$X_C=8370,938$
12314,730	-1,17	$Y_C=12314,718$

12. Вычисление уравненных значений измеряемых величин приведено в табл. 3.15.

Т а б л и ц а 3.15

Обозначение измерений	Результаты измерений	Поправки к измерениям	Уравненные значения
β_1	74°51'04,5"	-2,44	74°51'02,1"
β_2	74°05'07,9"	-4,76	74°05'03,2"
β_3	45°17'20,4"	3,09	45°17'23,5"
β_4	59°51'34,9"	-0,48	59°51'34,4"
β_5	67°59'35,7"	-2,12	67°59'33,6"
β_6	37°55'21,2"	2,01	37°55'23,2"
S_1	902,847	-0,09	902,846
S_2	741,952	-0,90	741,943
S_3	1119,230	-0,16	1119,228
S_4	1160,908	0,44	1160,913

13. Окончательный контроль уравнивания выполнен в табл. 3.16.

Т а б л и ц а 3.16

Обозначение измерений	Уравненные значения измеряемых величин. Левая часть уравнений связи \hat{y}_i	Исходные координаты и уравненные координаты определяемых пунктов	Формулы определения измеряемых величин через координаты. Правая часть уравнений связи $\hat{f}_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k)$	Уравненные значения измеряемых величин, вычисленные по координатам, $\hat{f}_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k)$
1	2	3	4	5
β_1	74°51'02,1"	$X_A=7821,407$	$\beta_1 = \arctg \frac{Y_A - Y_D}{X_A - X_D} - \arctg \frac{Y_B - Y_D}{X_B - X_D}$	74°51'02,1"
β_2	74°05'03,2"	$Y_A=10444,703$	$\beta_2 = \arctg \frac{Y_B - Y_D}{X_B - X_D} - \arctg \frac{Y_C - Y_D}{X_C - X_D}$	74°05'03,2"
β_3	45°17'23,5"	$X_B=7617,443$	$\beta_3 = \arctg \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} - \arctg \frac{Y_D - Y_A}{X_D - X_A}$	45°17'23,5"
β_4	59°51'34,4"	$Y_B=11431,562$	$\beta_4 = \arctg \frac{Y_D - Y_B}{X_D - X_B} - \arctg \frac{Y_A - Y_B}{X_A - X_B}$	59°51'34,4"
β_5	67°59'33,6"	$X_D=8321,197$	$\beta_5 = \arctg \frac{Y_C - Y_B}{X_C - X_B} - \arctg \frac{Y_D - Y_B}{X_D - X_B}$	67°59'33,6"
β_6	37°55'23,2"	$Y_D=11196,595$	$\beta_6 = \arctg \frac{Y_D - Y_C}{X_D - X_C} - \arctg \frac{Y_B - Y_C}{X_B - X_C}$	37°55'23,2"
S_1	902,846	$X_C=8370,938$	$S_1 = \sqrt{(Y_A - Y_D)^2 + (X_A - X_D)^2}$	902,846
S_2	741,943	$Y_C=12314,718$	$S_2 = \sqrt{(Y_B - Y_D)^2 + (X_B - X_D)^2}$	741,943
S_3	1119,228		$S_3 = \sqrt{(Y_C - Y_D)^2 + (X_C - X_D)^2}$	1119,228
S_4	1160,913		$S_4 = \sqrt{(Y_C - Y_B)^2 + (X_C - X_B)^2}$	1160,913

Окончательный контроль уравнивания выполнен. Левая часть уравнений связи — уравненные значения измеряемых величин (см. табл. 3.16, графа 2) совпадают с правой частью уравнений связи (графа 5).

14. Оценка точности. Вычислим сумму $\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V} = [p v v] = 72,83$. Выполним контроль этой суммы, вычислив $\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{L} = [p v l] = 72,83$. Контроль выполнен. Определим среднюю квадратическую ошибку единицы веса —

$$\mu = m_p = \sqrt{\frac{[p v v]}{n - k}} = \sqrt{\frac{72,83}{6}} = 3,5'' \text{ и среднюю квадратическую ошибку}$$

$$\text{измерения длин сторон } m_s = \mu \sqrt{\frac{1}{p_s}} = 3,5 \sqrt{\frac{1}{25}} = 0,7 \text{ см. Здесь вес стороны}$$

имеет размерность угл.с²/см², μ выражена в секундах, поэтому m_s определена в сантиметрах.

Умножив обратную весовую матрицу уравненных параметров на μ^2 , получим корреляционную матрицу уравненных параметров, по главной диагонали которой стоят квадраты средних квадратических ошибок координат определяемых пунктов

$$\mathbf{K}_{\bar{x}} = \mu^2 \mathbf{Q}_{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 0,265 & -0,053 & 0,075 & -0,032 \\ -0,053 & 0,405 & -0,513 & 0,417 \\ 0,075 & -0,513 & 1,626 & -0,813 \\ -0,032 & 0,417 & -0,813 & 0,804 \end{pmatrix}.$$

Отсюда, легко вычислить средние квадратические ошибки уравненных координат определяемых пунктов

$$m_{\bar{x}_D} = \sqrt{0,265} = 0,51 \text{ см}; \quad m_{\bar{y}_D} = \sqrt{0,405} = 0,64 \text{ см};$$

$$m_{\bar{x}_C} = \sqrt{1,626} = 1,28 \text{ см}; \quad m_{\bar{y}_C} = \sqrt{0,804} = 0,90 \text{ см}.$$

Средние квадратические ошибки положения определяемых пунктов:

$$m_D = \sqrt{m_{\bar{x}_D}^2 + m_{\bar{y}_D}^2} = 0,82 \text{ см}; \quad m_C = \sqrt{m_{\bar{x}_C}^2 + m_{\bar{y}_C}^2} = 1,56 \text{ см}.$$

Иногда, представляют интерес коэффициенты корреляции между уравненными координатами определяемых пунктов. В качестве примера, определим коэффициент корреляции между уравненными координатами X_D и Y_C . Корреляционный момент между ними равен $-0,513$, отсюда

$$r_{\bar{y}_D \bar{x}_C} = \frac{K_{\bar{y}_D \bar{x}_C}}{m_{\bar{y}_D} m_{\bar{x}_C}} = \frac{-0,513}{0,64 \cdot 1,28} = -0,63.$$

Используя обобщенную формулу оценки точности, вычислим корреляционную матрицу вектора уравненных измерений, получив таким образом средние квадратические ошибки уравненных измерений:

$$K_{\bar{y}} = AK_x A^T = \begin{pmatrix} 2,41 & 0,48 & -0,75 & -1,66 & 0,43 & -0,92 & -0,71 & -0,50 & -0,02 & -0,04 \\ 0,48 & 3,68 & -0,71 & 0,23 & -2,84 & -0,84 & 0,00 & -0,30 & -0,49 & 0,73 \\ -0,75 & -0,71 & 1,86 & -1,11 & -0,63 & 1,34 & -0,19 & 0,74 & 0,03 & 0,07 \\ -1,66 & 0,23 & -1,11 & 2,77 & 0,20 & -0,43 & 0,90 & -0,23 & -0,01 & -0,02 \\ 0,43 & -2,84 & -0,63 & 0,20 & 3,40 & -0,56 & 0,00 & -0,27 & 0,73 & -0,47 \\ -0,92 & -0,84 & 1,34 & -0,43 & -0,56 & 1,40 & -0,00 & 0,57 & -0,24 & -0,26 \\ -0,71 & 0,00 & -0,19 & 0,90 & 0,00 & -0,00 & 0,31 & -0,00 & -0,00 & -0,00 \\ -0,50 & -0,30 & 0,74 & -0,23 & -0,27 & 0,57 & -0,00 & 0,31 & 0,01 & 0,03 \\ -0,02 & -0,49 & 0,03 & -0,01 & 0,73 & -0,24 & -0,00 & 0,01 & 0,35 & 0,12 \\ -0,04 & 0,73 & 0,07 & -0,02 & -0,47 & -0,26 & -0,00 & 0,03 & 0,12 & 0,35 \end{pmatrix}.$$

Например, средняя квадратическая ошибка уравненного значения первого угла $m_{\bar{\beta}_1} = \sqrt{2,41} = 1,55''$, а средняя квадратическая ошибка уравненного значения третьей стороны $m_{\bar{s}_3} = \sqrt{0,35} = 0,56$ см. Вычислим обратную весовую матрицу уравненных измерений:

$$Q_{\bar{y}} = A Q_x A^T = \begin{pmatrix} 0,1985 & 0,0399 & -0,0617 & -0,1368 & 0,0356 & -0,0755 & -0,0583 & -0,0413 & -0,0019 & -0,0037 \\ 0,0399 & 0,3035 & -0,0585 & 0,0186 & -0,2341 & -0,0694 & 0,0000 & -0,0247 & -0,0403 & 0,0602 \\ -0,0617 & -0,0585 & 0,1534 & -0,0916 & -0,0523 & 0,1108 & -0,0160 & 0,0606 & 0,0028 & 0,0054 \\ -0,1368 & 0,0186 & -0,0916 & 0,2284 & 0,0167 & -0,0353 & 0,0743 & -0,0193 & -0,0009 & -0,0017 \\ 0,0356 & -0,2341 & -0,0523 & 0,0167 & 0,2801 & -0,0460 & 0,0000 & -0,0221 & 0,0601 & -0,0389 \\ -0,0755 & -0,0694 & 0,1108 & -0,0353 & -0,0460 & 0,1154 & -0,0000 & 0,0468 & -0,0198 & -0,0213 \\ -0,0583 & 0,0000 & -0,0160 & 0,0743 & 0,0000 & -0,0000 & 0,0258 & -0,0000 & -0,0000 & -0,0000 \\ -0,0413 & -0,0247 & 0,0606 & -0,0193 & -0,0221 & 0,0468 & -0,0000 & 0,0256 & 0,0012 & 0,0023 \\ -0,0019 & -0,0403 & 0,0028 & -0,0009 & 0,0601 & -0,0198 & -0,0000 & 0,0012 & 0,0288 & 0,0097 \\ -0,0037 & 0,0602 & 0,0054 & -0,0017 & -0,0389 & -0,0213 & -0,0000 & 0,0023 & 0,0097 & 0,0286 \end{pmatrix}.$$

По главной диагонали здесь стоят обратные веса уравненных измерений. До уравнивания веса всех углов были равны единице, сторон — 25. После уравнивания веса получили различные значения. Например, $P_{\bar{\beta}_1} = 1/0,1985 = 5,0$; $P_{\bar{s}_3} = 1/0,0288 = 34,7$.

Для оценки точности элементов, не относящихся к параметрам и измеряемым величинам, необходимо составить функцию от параметров. Например, для оценки точности дирекционного угла стороны DC , составим функцию, которая определяет данный дирекционный угол через координаты $\alpha_{DC} = \arctg \frac{Y_C - Y_D}{X_C - X_D}$.

Определим строчку частных производных от этой функции по параметрам.

$$f = \left(\frac{\partial \alpha_{DC}}{\partial X_D} \quad \frac{\partial \alpha_{DC}}{\partial Y_D} \quad \frac{\partial \alpha_{DC}}{\partial X_C} \quad \frac{\partial \alpha_{DC}}{\partial Y_C} \right) = (b_{CD} \quad -c_{CD} \quad -b_{CD} \quad c_{CD}) = (1,841 \quad -0,082 \quad -1,841 \quad 0,082).$$

Вычислим обратный вес

$$\frac{1}{P_F} = jQ_{\bar{x}}j^T = (1,841 \quad -0,082 \quad -1,841 \quad 0,082) \begin{pmatrix} 0,0218 & -0,0044 & 0,0061 & -0,0026 \\ -0,0044 & 0,0333 & -0,0423 & 0,0343 \\ 0,0061 & -0,0423 & 0,1340 & -0,0670 \\ -0,0026 & 0,0343 & -0,0670 & 0,0663 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,841 \\ -0,082 \\ -1,841 \\ 0,082 \end{pmatrix} = 0,495$$

и среднюю квадратическую ошибку функции

$$m_F = m_{\alpha_{DC}} = \mu\sqrt{Q_F} = 3,5\sqrt{0,495} = 1,7''.$$

§3.3. Коррелатный способ уравнивания

Общая теория коррелатного способа

Коррелатный способ уравнивания — второй способ уравнивания по методу наименьших квадратов. В отличие от параметрического способа, в коррелатном способе исходные уравнения составляются с измерениями в качестве аргументов. Для простоты изложения теории этого способа начнем его с примеров. Рассмотрим треугольник, в котором измерены два угла (рис. 3.14). В такой фигуре число необходимых измерений $k=2$, т.е. здесь нет избыточных измерений, не возникает проблемы неоднозначности в определении каких-либо элементов сети, и задача уравнивания не возникает. Но если осуществить третье измерение — измерить

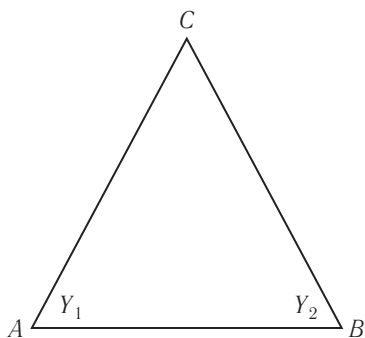


Рис. 3.14. Измерения углов в треугольнике

угол Y_3 , которое является избыточным, то возникает зависимость между измеряемыми значениями: $Y_1 + Y_2 + Y_3 - 180 = 0$. Одно избыточное измерение привело к появлению одной математической связи между измеренными величинами.

Рассмотрим нивелирную сеть (рис. 3.15). Здесь три определяемых репера, три измерения и одна исходная марка.

Все измерения являются необходимыми $n=k=3$. Избыточные измерения отсутствуют $r=0$.

Добавим к сети одно избыточное измерение (рис. 3.16). Получили следующие количественные характеристики сети $n=4, k=3, r=1$. Имеем одно избыточное измерение, которое привело к возникновению математической связи между измерениями $Y_2+Y_3-Y_4=0$.

Добавим еще одно измерение, соединив данную сеть с исходной маркой $M2$ (рис. 3.17). В данном случае $n=5, k=3, r=2$. Второе избыточное измерение привело к появлению второй математической зависимости между измерениями. Сумма превышений между исходными марками $M2$ и $M1$ должна равняться разности отметок этих исходных марок $Y_1+Y_2+Y_5-(H_{M2}-H_{M1})=0$.

Таким образом, каждое избыточное измерение приводит к появлению одной зависимости. В общем случае, в сети с r избыточными измерениями возникает r уравнений вида:

$$\begin{aligned}
 \Phi_1(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) &= 0; \\
 \Phi_2(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) &= 0; \\
 \dots & \\
 \Phi_r(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.27}$$

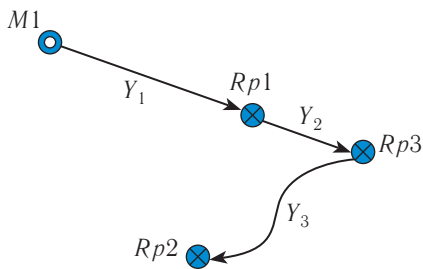


Рис. 3.15. Пример нивелирной сети без избыточных измерений

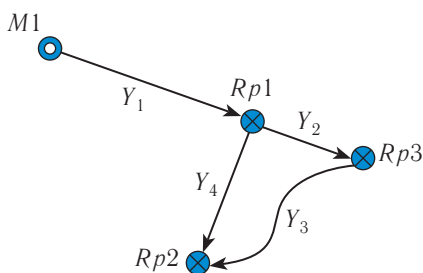


Рис. 3.16. Пример нивелирной сети. Одно избыточное измерение

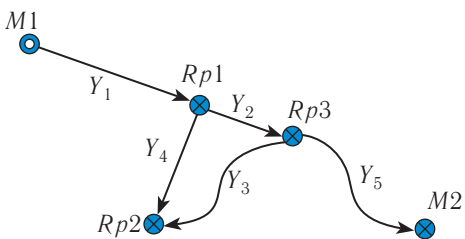


Рис. 3.17. Пример нивелирной сети. Два избыточных измерения

Уравнения (3.27) называются условными уравнениями связи. Такие уравнения являются исходными для коррелятного способа уравнивания и подобны параметрическим уравнениям связи (3.1). В матричном виде условные уравнения связи записывают как $\overline{\varphi(Y)} = 0$.

Очевидно, что уравнения связи удовлетворяются для истинных значений измеряемых величин. Если в них подставить результаты измерений, то из-за ошибок измерений равенства нарушатся:

$$\begin{aligned} \varphi_1(y_1, y_2, \dots, y_n) &= \omega_1 \neq 0; \\ \varphi_2(y_1, y_2, \dots, y_n) &= \omega_2 \neq 0; \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi_r(y_1, y_2, \dots, y_n) &= \omega_r \neq 0. \end{aligned}$$

Например, в треугольнике сумма измеренных углов будет отличаться от 180° $y_1 + y_2 + y_3 - 180 = \omega \neq 0$. Фактически, мы имеем дело с проявлением неоднозначности в определении элементов сети при выполнении избыточных измерений, т.к. измерения отягощены ошибками измерений. Величина ω в данных уравнениях называется невязкой.

Одна из задач уравнивания, как и при параметрическом способе уравнивания, состоит в восстановлении равенств в условных уравнениях связи. Для этого вводят поправки v_i в измеренные значения y_i . Получают $\hat{y}_i = y_i + v_i$ и

$$\begin{aligned} \varphi_1(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_n) &= 0; \\ \varphi_2(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_n) &= 0; \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi_r(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_n) &= 0 \end{aligned} \tag{3.28}$$

или в матричном виде $\overline{\varphi(\hat{y})} = 0$.

Так же, как и в параметрическом способе поправки v_i будем определять по методу наименьших квадратов. Для упрощения решения системы (3.28) приведем ее к линейному виду, разложив в ряд Тэйлора

$$\begin{aligned} \varphi_i(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_n) &= \varphi_i(y_1, y_2, \dots, y_n) + \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_1} \right)_0 v_1 + \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_2} \right)_0 v_2 + \dots + \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_n} \right)_0 v_n + R = \\ &= a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + \dots + a_{in}v_n + \omega_i = 0. \end{aligned}$$

В отличие от параметрического способа, когда находился абсолютный экстремум функции (3.30), в коррелятном способе данный экстремум связан условиями (3.29). В математике такие задачи называют задачами на условный экстремум. Обычно такие задачи решают методом Лагранжа.

В этом случае, функцию (3.30) заменяют на функцию, включающую в себя условия (3.29),

$$\phi' = \phi + \rho^T(\mathbf{B}\mathbf{V} + \mathbf{W}) = \min, \quad (3.31)$$

где ρ^T — вектор неопределенных множителей Лагранжа.

Для определения экстремума функции (3.31) найдем производную от этой функции по вектору поправок \mathbf{V} и приравняем эту производную нулю $\frac{\partial \phi'}{\partial \mathbf{V}} = 2\mathbf{V}^T\mathbf{P} + \rho^T\mathbf{B} = 0$.

Отсюда определяется вектор \mathbf{V} . Для упрощения преобразований вектор неопределенных коэффициентов обозначим $\rho^T = -2\mathbf{K}^T$, тогда получим $2\mathbf{V}^T\mathbf{P} - 2\mathbf{K}^T\mathbf{B} = 0$, откуда $\mathbf{V}^T\mathbf{P} = \mathbf{K}^T\mathbf{B}$.

Сделаем транспонирование левой и правой частей равенства: $\mathbf{P}\mathbf{V} = \mathbf{B}^T\mathbf{K}$ (так как матрица \mathbf{P} является симметричной, то она совпадает со своей транспонированной матрицей). Затем умножим левую и правую части данного равенства на \mathbf{P}^{-1} и получим вектор поправок к результатам измерений:

$$\mathbf{V} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}. \quad (3.32)$$

Здесь вектор \mathbf{K} называется вектором коррелат (ранее коррелаты назывались коррелятами),

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \dots \\ k_r \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{r1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{r2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{rn} \end{pmatrix}.$$

Обратная весовая матрица результатов измерений \mathbf{P}^{-1} состоит из обратных весов результатов измерений. Для независимых измерений она является диагональной:

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/p_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1/p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & q_n \end{pmatrix}.$$

Как упражнение, студентам рекомендуется перемножить матрицы в (3.32) и получить систему:

$$\begin{aligned}
 v_1 &= q_1(a_{11}k_1 + a_{21}k_2 + \dots + a_{r1}k_r); \\
 v_2 &= q_2(a_{12}k_1 + a_{22}k_2 + \dots + a_{r2}k_r); \\
 &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
 v_n &= q_n(a_{1n}k_1 + a_{2n}k_2 + \dots + a_{rn}k_r).
 \end{aligned}$$

Система (3.32) называется системой коррелятивных уравнений поправок. Мы выразили поправки через корреляты. Но они пока являются неизвестными. Чтобы определить вектор коррелят подставим правую часть коррелятивных уравнений поправок (3.32) вместо поправок **V** в систему условных уравнений поправок **BV+W=0** получим

$$\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K} + \mathbf{W} = \mathbf{0}. \tag{3.33}$$

Система (3.33) называется системой нормальных уравнений коррелят, где

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} [qa_1a_1] & [qa_1a_2] & \dots & [qa_1a_r] \\ [qa_2a_1] & [qa_2a_2] & \dots & [qa_2a_r] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [qa_ra_1] & [qa_ra_2] & \dots & [qa_ra_r] \end{pmatrix} -$$

матрица коэффициентов нормальных уравнений.

В обычной записи система нормальных уравнений коррелят (3.33) имеет вид:

$$\begin{aligned}
 [qa_1a_1]k_1 + [qa_1a_2]k_2 + \dots + [qa_1a_r]k_r + \omega_1 &= 0; \\
 [qa_2a_1]k_1 + [qa_2a_2]k_2 + \dots + [qa_2a_r]k_r + \omega_2 &= 0; \\
 &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
 [qa_ra_1]k_1 + [qa_ra_2]k_2 + \dots + [qa_ra_r]k_r + \omega_r &= 0.
 \end{aligned}$$

Система (3.33) квадратная, состоит из r уравнений с r неизвестными и всегда имеет единственное решение

$$\mathbf{K} = -(\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T)^{-1}\mathbf{W} = -\mathbf{N}^{-1}\mathbf{W}. \tag{3.34}$$

Определив из (3.34) корреляты и подставив их в коррелятные уравнения поправок (3.32), вычислим поправки к результатам измерений. Далее введем поправки в результаты измерений, получив их уравненные значения.

Последовательность уравнивания геодезических построений коррелятным способом.

1. Определение числа всех измерений n , числа необходимых измерений k и числа избыточных измерений $r=n-k$.

2. Составление условных уравнений связи $\overline{\varphi(Y)} = 0$.

3. Составление условных уравнений поправок $\mathbf{BV} + \mathbf{W} = 0$.

4. Составление нормальных уравнений коррелат $\mathbf{NK} + \mathbf{W} = 0$.

5. Решение нормальных уравнений коррелат $\mathbf{K} = -\mathbf{N}^{-1}\mathbf{W}$.

6. Вычисление поправок к результатам измерений $\mathbf{V} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}$.

7. Вычисление уравненных значений измеряемых величин

$$\hat{y} = y + \mathbf{V}.$$

8. Окончательный контроль уравнивания $\overline{\varphi(\hat{y})} = 0$.

9. Оценка точности.

Виды условных уравнений связи

Рассмотрим типичные условные уравнения связи и уравнения поправок, возникающие в нивелирных и различных плановых геодезических сетях. В нивелирных сетях условные уравнения связи строят, используя полигоны. При этом различают замкнутые и разомкнутые полигоны (рис. 3.18).

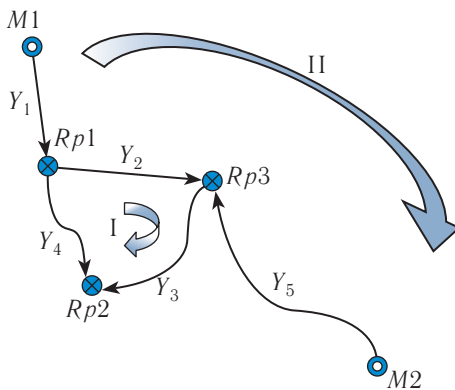


Рис. 3.18. Формирование замкнутых и разомкнутых полигонов

На рис. 3.18 представлена сеть с пятью измеренными превышениями ($n=5$) и тремя определяемыми реперами (число необходимых измерений $k=3$). Следовательно, число избыточных измерений $r=2$. Таким образом, должны быть сформированы два полигона, соответствующие двум условным уравнениям связи.

Здесь первый полигон сформирован по замкнутому контуру (обозначен объемной стрелкой I, направление стрелки может быть выбрано произвольно). Понятно, что сумма превышений по замкнутому полигону всегда равна нулю. В данном случае $Y_2+Y_3-Y_4=0$.

Разомкнутые полигоны формируются между исходными точками. В данном случае между первой и второй марками. Понятно, что сумма превышений между двумя исходными марками должна быть равна разности отметок — отметка конечной марки минус отметка начальной марки. Таким образом, возникает следующая связь между измеренными превышениями: $Y_1+Y_2-Y_5-(H_{M2}-H_{M1})=0$. При этом знак плюс перед Y_i ставится в том случае, если направление обхода полигона (направление стрелки) совпадает с направлением измерения превышения. Если они не совпадают, то ставится знак минус. Выбор направления обхода по полигону действительно может быть произвольным, так как изменение направления будет равносильно умножению уравнения связи на -1 . Так для рис. 3.18, изменив направление обхода первого полигона, получим следующее уравнение связи $-Y_2-Y_3+Y_4=0$, для второго полигона $-Y_1-Y_2+Y_5-(H_{M1}-H_{M2})=0$.

В общем случае, число разомкнутых полигонов равно числу исходных марок минус единица $r_p=T-1$. Общее же число полигонов должно равняться числу избыточных измерений $r=r_p+r_3$, где T — число исходных пунктов; r_p — число разомкнутых полигонов; $r_3=r-r_p$ — число замкнутых полигонов.

Рассмотрим типовые условные уравнения связи и поправок для плановых сетей. Их можно разделить на две группы:

- 1) линейные уравнения связи;
- 2) нелинейные уравнения связи.

Рассмотрим некоторые линейные уравнения связи. При измерении углов в треугольнике (рис. 3.19) возникает условие, называемое условием фигур $Y_1+Y_2+Y_3-180=0$. Это условие мы рассматривали выше. Уравнение связи имеет линейный вид, поэтому все коэффициенты a_{ij} при поправках

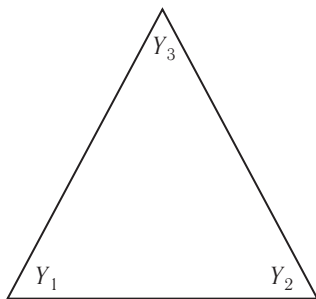


Рис. 3.19. Условие фигур

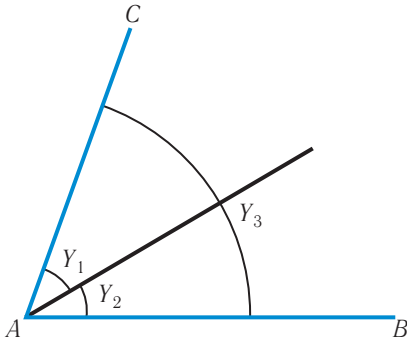


Рис. 3.20. Условие станции

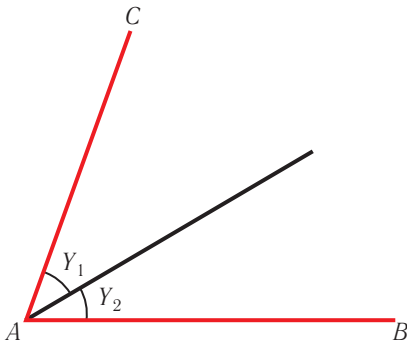


Рис. 3.21. Условие жесткого угла

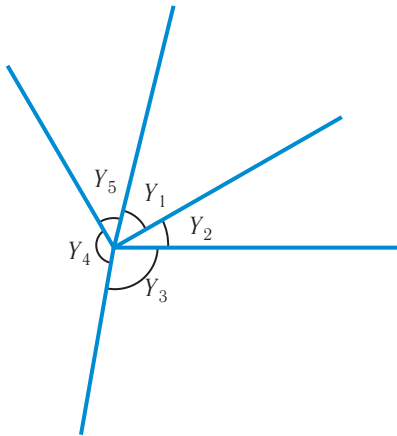


Рис. 3.22. Условие горизонта

будут совпадать с коэффициентами при Y_j в уравнении связи.

Уравнение поправок для треугольника имеет вид $v_1+v_2+v_3+w=0$, где невязка вычисляется по уравнению связи при подстановки в них результатов измерений $w=y_1+y_2+y_3-180$. Если на станции измеряются три угла, то возникает условие станции (рис. 3.20) $Y_1+Y_2-Y_3=0$. Уравнение поправок для станции записывается в виде $v_1+v_2-v_3+w=0$, где невязка вычисляется по уравнению связи с измеренными углами $w=y_1+y_2-y_3$.

Разновидностью условия станции является условие жесткого угла. Отличие его состоит в том, что третий, суммарный угол на пункте A не измеряется, а является твердым, исходным (рис. 3.21). Отсюда, возникает следующее условное уравнение связи $Y_1+Y_2-\angle A=0$ с уравнением поправок $v_1+v_2-w=0$, где $w=y_1+y_2-\angle A$.

Если углы измеряются на станции с замыканием горизонта (рис. 3.22), то возникает условие горизонта

$$Y_1+Y_2+Y_3+Y_4+Y_5-360^\circ=0.$$

Уравнение поправок данного условия имеет вид:

$$v_1+v_2+v_3+v_4+v_5+w=0,$$

где $w=y_1+y_2+y_3+y_4+y_5-360^\circ$.

В полигонометрическом ходе (рис. 3.23) возникает одно линейное условное уравнение связи — условие дирекционного угла и два нелинейных уравнения — условия координат. При этом в полигонометрическом ходе выполняются неоднородные измерения — угловые и линейные. В этом случае, поскольку уже изложена общая теория коррелятного способа, вернемся к системе обозначений, принятых в геодезии.

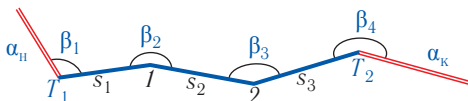


Рис. 3.23. Полигонометрический ход:
 — исходные стороны; T_1 и T_2 — исходные пункты; α_n и α_k — соответственно начальный и конечный дирекционные углы;
 β_i — измеряемые углы; S_i — измеренные стороны. Определяемыми здесь являются пункты I и 2

Измеряемые углы позволяют получить дирекционные углы для всех сторон, опираясь на α_n , включая дирекционный угол α_k . Таким образом, можно записать

$$\alpha_k = \sum \beta_i - 180k + \alpha_n = \alpha_n + \beta_1 - 180 + \beta_2 - 180 + \beta_3 - 180 + \beta_4.$$

Откуда, окончательно, условное уравнение связи дирекционного угла примет вид $\sum_i \beta_i - 180k - (\alpha_k - \alpha_n) = 0$, где k — число измеряемых сторон.

Перейдем к уравнению поправок

$$\sum_i v_i + \omega = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + \omega = 0,$$

где $\omega = \sum_i \beta'_i - 180k - (\alpha_k - \alpha_n)$; β'_i — измеренные углы.

Рассмотрим нелинейные уравнения связи, к которым относятся и координатные условные уравнения в полигонометрическом ходе. Суть таких уравнений состоит в том, что сумма приращений координат должна быть равна разности координат исходных пунктов. Для полигонометрического хода (см. рис. 3.23).

$$\sum_{i=1}^n \Delta X_i - (X_{T_2} - X_{T_1}) = \Delta X_1 + \Delta X_2 + \Delta X_3 - (X_{T_2} - X_{T_1}) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n \Delta Y_i - (Y_{T_2} - Y_{T_1}) = \Delta Y_1 + \Delta Y_2 + \Delta Y_3 - (Y_{T_2} - Y_{T_1}) = 0.$$

Первое из этих уравнений называется условием абсциссы, второе — условием ординаты. Но в условных уравнениях связи, в качестве аргументов должны использоваться измеряемые

величины, поэтому приращения координат в уравнениях необходимо выразить через измеряемые углы и стороны. Сначала запишем уравнения в следующем виде:

$$\varphi_2 = S_1 \cos \alpha_1 + S_2 \cos \alpha_2 + S_3 \cos \alpha_3 - (X_{T_2} - X_{T_1}) = 0;$$

$$\varphi_3 = S_1 \sin \alpha_1 + S_2 \sin \alpha_2 + S_3 \sin \alpha_3 - (Y_{T_2} - Y_{T_1}) = 0,$$

затем выразим дирекционные углы через измеренные углы и, опустив обозначение функций φ_2 и φ_3 , получим

$$\begin{aligned} & S_1 \cos(\alpha_1 + \beta_1) + S_2 \cos(\alpha_1 + \beta_1 + \beta_2 - 180) + \\ & \quad + S_3 \cos(\alpha_1 + \beta_1 + \beta_2 - 180 + \beta_3 - 180) - (X_{T_2} - X_{T_1}) = 0; \\ & S_1 \sin(\alpha_1 + \beta_1) + S_2 \sin(\alpha_1 + \beta_1 + \beta_2 - 180) + \\ & \quad + S_3 \sin(\alpha_1 + \beta_1 + \beta_2 - 180 + \beta_3 - 180) - (Y_{T_2} - Y_{T_1}) = 0. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Для перехода к условным уравнениям поправок, т.е. для линеаризации уравнений, необходимо найти производные от данных уравнений по каждому аргументу. Производные от уравнения абсцисс по измеряемым сторонам S_i равны $\cos \alpha_i$. Действительно, производная от уравнения абсцисс (обозначим ее, с учетом условия дирекционного угла, φ_2) $\frac{\partial \varphi_2}{\partial S_i}$ совпадает с производной от i -го слагаемого (i -го приращения координат) по S_i :

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial S_i} = \frac{\partial S_i \cos \alpha_i}{\partial S_i} = \cos \alpha_i,$$

откуда

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial S_1} = \cos \alpha_1; \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial S_2} = \cos \alpha_2; \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial S_3} = \cos \alpha_3.$$

Найдем производные по измеряемым углам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \beta_3} &= \frac{\partial \Delta X_3}{\partial \beta_3} = -S_3 \sin(\alpha_n + \beta_1 - 180 + \beta_2 - 180 + \beta_3) \\ &= -S_3 \sin \alpha_3 = -\Delta Y_3 = -(Y_{T_2} - Y_2); \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \beta_2} = \frac{\partial(\Delta X_2 + \Delta X_3)}{\partial \beta_2} = -S_2 \sin \alpha_2 - S_3 \sin \alpha_3 = -\Delta Y_2 - \Delta Y_3 = -(Y_{T_2} - Y_1);$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \beta_1} &= \frac{\partial(\Delta X_1 + \Delta X_2 + \Delta X_3)}{\partial \beta_1} = -S_1 \sin \alpha_1 - S_2 \sin \alpha_2 - S_3 \sin \alpha_3 = \\ &= -\Delta Y_1 - \Delta Y_2 - \Delta Y_3 = -(Y_{T_2} - Y_{T_1}). \end{aligned}$$

Поскольку четвертый угол не входит в условное уравнение абсциссы, то $\frac{\partial \varphi_2}{\partial \beta_4} = 0$.

Общий вид уравнений поправок $a_{j1}v_1 + a_{j2}v_2 + \dots + a_{jn}v_n + \omega_j = 0$. Здесь ω_2 определяется по уравнениям связи (3.35), если подставить в них измеренные значения сторон и углов. Понятно, что невязки ω_2 и ω_3 должны иметь линейную размерность, т.е. должны быть выражены в сантиметрах, метрах, миллиметрах и т.д. Это означает, что и каждое слагаемое $a_{ji}v_i$ (где $a_{ji} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial \beta_i}$) и $a_{jk}v_k$ (где $a_{jk} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial S_k}$) в уравнениях поправок тоже должно быть представлено в этой же размерности. Чтобы достичь этого производные по углам необходимо разделить на число ρ'' , поскольку поправки в углы обычно выражаются в секундах, т.о.

$$a_{21} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial \beta_1} = \frac{-(Y_{T_2} - Y_{T_1})}{\rho}; \quad a_{22} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial \beta_2} = \frac{-(Y_{T_2} - Y_1)}{\rho};$$

$$a_{23} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial \beta_3} = \frac{-(Y_{T_2} - Y_2)}{\rho}; \quad a_{24} = 0.$$

Аналогично определим условное уравнение поправок для условия ординат:

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial \beta_1} = \frac{\partial(\Delta Y_1 + \Delta Y_2 + \Delta Y_3)}{\partial \beta_1} = \frac{S_1 \cos \alpha_1 + S_2 \cos \alpha_2 + S_3 \cos \alpha_3}{\rho} =$$

$$= \frac{\Delta X_1 + \Delta X_2 + \Delta X_3}{\rho} = \frac{(X_{T_2} - X_{T_1})}{\rho};$$

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial \beta_2} = \frac{\partial(\Delta Y_2 + \Delta Y_3)}{\partial \beta_2} = \frac{S_2 \cos \alpha_2 + S_3 \cos \alpha_3}{\rho} = \frac{\Delta X_2 + \Delta X_3}{\rho} = \frac{(X_{T_2} - X_1)}{\rho};$$

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial \beta_3} = \frac{\partial \Delta Y_3}{\partial \beta_3} = \frac{S_3 \cos \alpha_3}{\rho} = \frac{\Delta X_3}{\rho} = \frac{(X_{T_2} - X_2)}{\rho}; \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial \beta_4} = 0.$$

Частные производные от условного уравнения ординат по сторонам равны $\frac{\partial \varphi_3}{\partial S_i} = \frac{\partial S_i \sin \alpha_i}{\partial S_i} = \sin \alpha_i$,

откуда

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial S_1} = \sin \alpha_1; \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial S_2} = \sin \alpha_2; \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial S_3} = \sin \alpha_3.$$

Запишем окончательно три уравнения поправок для полигонометрического хода, представленного на рис. 3.23:

$$\begin{aligned} v_{\beta_1} + v_{\beta_2} + v_{\beta_3} + v_{\beta_4} + \omega_\alpha &= 0; \\ \cos \alpha_1 v_{S_1} + \cos \alpha_2 v_{S_2} + \cos \alpha_3 v_{S_3} - \\ &- \frac{Y_{T_2} - Y_{T_1}}{\rho''} v_{\beta_1} - \frac{Y_{T_2} - Y_1}{\rho''} v_{\beta_2} - \frac{Y_{T_2} - Y_2}{\rho''} v_{\beta_3} + \omega_X = 0; \\ \sin \alpha_1 v_{S_1} + \sin \alpha_2 v_{S_2} + \sin \alpha_3 v_{S_3} + \\ &+ \frac{X_{T_2} - X_{T_1}}{\rho''} v_{\beta_1} + \frac{X_{T_2} - X_1}{\rho''} v_{\beta_2} + \frac{X_{T_2} - X_2}{\rho''} v_{\beta_3} + \omega_Y = 0. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Из системы (3.36) легко сформировать матрицу коэффициентов условных уравнений поправок **B**. Здесь важно помнить, что нельзя менять местами коэффициенты внутри матрицы, поэтому матрицу коэффициентов уравнений поправок запишем в табл. 3.17, в которой расположим в первую строчку коэффициенты условного уравнения поправок дирекционного угла, во вторую — условия абсцисс, в третью — ординат. Столбцы же соответствуют измененным сторонам и углам.

Т а б л и ц а 3.17

№	Условие	S_1	S_2	S_3	β_1	β_2	β_3	β_4
1	Дирекционного угла	0	0	0	1	1	1	1
2	Абсцисс	$\cos \alpha_1$	$\cos \alpha_2$	$\cos \alpha_3$	$-\frac{Y_{T_2} - Y_{T_1}}{\rho}$	$-\frac{Y_{T_2} - Y_1}{\rho}$	$-\frac{Y_{T_2} - Y_2}{\rho}$	0
3	Ординат	$\sin \alpha_1$	$\sin \alpha_2$	$\sin \alpha_3$	$+\frac{X_{T_2} - X_{T_1}}{\rho}$	$+\frac{X_{T_2} - X_1}{\rho}$	$+\frac{X_{T_2} - X_2}{\rho}$	0

Обратим внимание на то, что если в уравнении связи и поправок отсутствует некоторое измерение, то в матрицу **B**, на соответствующее место записывается ноль. Так в координатные условия четвертый угол не входит, поэтому в столбце, соответствующем

четвертому углу, записаны нули. В условии дирекционных углов отсутствуют измеряемые стороны, поэтому первые три элемента первой строки заполнены нулями.

Рассмотрим некоторые виды условных уравнений связи, возникающие в сетях триангуляции.

Синусные условные уравнения связи, к которым относят два типа условий: базисное и полюсное.

Базисное условное уравнение связи. Данное условие возникает в плановых сетях, в которых измерены два базиса. Например, в сети триангуляции (рис. 3.24).

Суть базисного условия состоит в том, что значение второго базиса должно быть равно вычисленному значению этого базиса, которое получается от первого базиса по измеренным углам

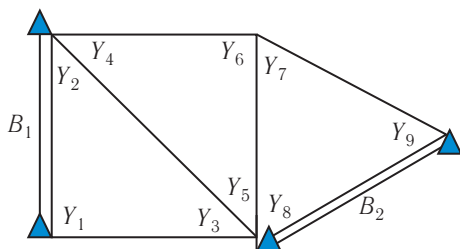


Рис. 3.24. Сеть триангуляции с двумя базисами

$$B_2 = B_1 \frac{\sin Y_1 \sin Y_4 \sin Y_7}{\sin Y_3 \sin Y_6 \sin Y_9}.$$

Приведем данное уравнение к общему виду условных уравнений связи (3.29).

Возможны два варианта:

либо перенести B_2 в правую часть $B_1 \frac{\sin Y_1 \sin Y_4 \sin Y_7}{\sin Y_3 \sin Y_6 \sin Y_9} - B_2 = 0$;

либо использовать логарифмирование

$$\varphi(Y_1, Y_2, \dots, Y_9) = \ln \frac{B_1 \sin Y_1 \sin Y_4 \sin Y_7}{B_2 \sin Y_3 \sin Y_6 \sin Y_9} = 0. \quad (3.37)$$

Уравнение связи (3.37), записанное в логарифмическом виде, более удобно для перехода к условным уравнениям поправок. Действительно, учитывая свойства логарифмов, запишем

$$\ln B_1 - \ln B_2 + \ln \sin Y_1 - \ln \sin Y_3 + \ln \sin Y_4 - \ln \sin Y_6 + \ln \sin Y_7 - \ln \sin Y_9 = 0. \quad (3.38)$$

Каждое слагаемое здесь включает в себя только одну переменную Y_i . Следовательно, частные производные от уравнения связи

по измеряемым величинам совпадут с производными от каждого слагаемого по Y_i :

$$\frac{\partial \varphi(Y_1, Y_2, \dots, Y_9)}{\partial Y_i} = \pm \frac{\partial \ln \sin Y_i}{\partial Y_i} = \pm \frac{\cos Y_i}{\sin Y_i} = \pm \operatorname{ctg} Y_i = a_i.$$

Знаки + или - здесь соответствуют знакам в (3.38).

Общий вид уравнения поправок для данной сети можно записать в следующем виде:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4 + a_5 v_5 + a_6 v_6 + a_7 v_7 + a_8 v_8 + a_9 v_9 + \omega_b = 0. \quad (3.39)$$

Здесь v_i — поправка в i -й угол. Обычно эти поправки выражают в секундах. Это более удобно и привычно, нежели в радианной мере, но невязка здесь

$\omega_b = \ln B_1 - \ln B_2 + \ln \sin y_1 - \ln \sin y_3 + \ln \sin y_4 - \ln \sin y_6 + \ln \sin y_7 - \ln \sin y_9$ выражена в единицах логарифма. Иначе говоря она безразмерна, поэтому каждое слагаемое $a_i v_i$ уравнения (3.39) должно быть тоже безразмерно. При этом каждую поправку v_i необходимо оставить в секундах. Для этого уравнение (3.39) разделим на $\rho'' = 206264,8$. Понятно, что в этом случае, слагаемые в (3.39) станут достаточно маленькими числами, работать с которыми неудобно, поэтому выровняем коэффициенты, умножив все уравнение на 10^k . Таким образом, коэффициенты при Y примут вид $\Delta_i = \pm \frac{\mu 10^k}{\rho} \operatorname{ctg} Y_i$. Здесь $\mu = 1$, если используются натуральные логарифмы и $\mu = 0,4343$, в случае использования десятичных логарифмов. $\mu = \lg e = \frac{1}{\ln 10} = 0,4343$ называется модулем перехода от десятичного логарифма к натуральному.

Учитывая, что в (3.38) отсутствуют углы Y_2, Y_5, Y_8 , окончательно базисное условное уравнение поправок запишем в виде

$$\Delta_1 v_1 - \Delta_3 v_3 + \Delta_4 v_4 - \Delta_6 v_6 + \Delta_7 v_7 - \Delta_9 v_9 + \omega_b = 0. \quad (3.40)$$

Полюсные условные уравнения связи возникают в центральных фигурах и в геодезическом четырехугольнике. Рассмотрим случай с центральной фигурой. Центральной фигурой называется построение из треугольников, имеющих общую вершину (рис. 3.25).

Представим, сторона AO является исходной, тогда, опираясь на нее, из первого треугольника, используя измеренные углы, можно вычислить сторону OB . Опираясь же на сторону OB , из второго треугольника, получим сторону OC . И, из последнего треугольника снова вычислим сторону AO . Фактически мы получили условие базиса, аналогичное (3.37). От базиса S_{AO} перешли к этому же базису:

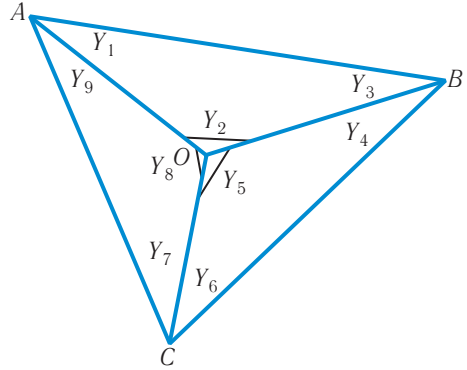


Рис. 3.25. Полюсное условие в центральной фигуре

$$\varphi(Y_1, Y_2, \dots, Y_9) = \ln \frac{S_{AO} \sin Y_1 \sin Y_4 \sin Y_7}{S_{AO} \sin Y_3 \sin Y_6 \sin Y_9} = 0.$$

Сократив сторону S_{AO} , окончательно получим полюсное уравнение связи (условие полюса):

$$\varphi(Y_1, Y_2, \dots, Y_9) = \ln \frac{\sin Y_1 \sin Y_4 \sin Y_7}{\sin Y_3 \sin Y_6 \sin Y_9} = 0. \quad (3.41)$$

Понятно, что уравнение поправок здесь будет иметь тот же вид, что и базисное условие $\Delta_1 v_1 - \Delta_3 v_3 + \Delta_4 v_4 - \Delta_6 v_6 + \Delta_7 v_7 - \Delta_9 v_9 + \omega_b = 0$. Здесь невязка вычисляется по условным уравнениям связи при подстановке в них измеренных значений углов.

Центральная точка O на рис. 3.25, называется полюсом, именно эта точка входит во все стороны, которые последовательно вычисляются в данном условии — $S_{AO} \sim S_{BO} \sim S_{CO} \sim S_{AO}$.

Геодезическим четырехугольником называется фигура, изображенная на рис. 3.26. В отличие от центральной фигуры, на точке O углы не измеряются. Эта точка есть

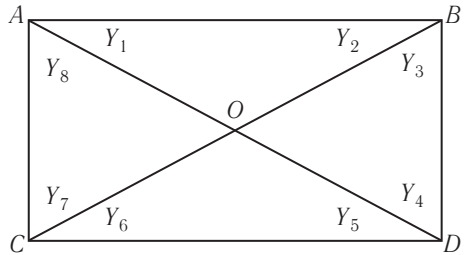


Рис. 3.26. Полюсное условие в геодезическом четырехугольнике

пересечение визирных лучей. Но, данные углы не участвуют в полюсном условии. Действительно, возьмем в качестве условной исходной стороны S_{AO} . Последовательно перейдем от нее к сторонам S_{AO} , S_{BO} , S_{DO} , S_{CO} и снова к S_{AO} . Получим условие полюса, с полюсом в точке O :

$$\ln \frac{\sin Y_1 \sin Y_3 \sin Y_5 \sin Y_7}{\sin Y_2 \sin Y_4 \sin Y_6 \sin Y_8} = 0.$$

Условное уравнение поправок, в этом случае, примет вид

$$\Delta_1 v_1 - \Delta_2 v_2 + \Delta_3 v_3 - \Delta_4 v_4 + \Delta_5 v_5 - \Delta_6 v_6 + \Delta_7 v_7 - \Delta_8 v_8 + \omega_p = 0,$$

где $\omega_p = \ln \frac{\sin Y_1 \sin Y_3 \sin Y_5 \sin Y_7}{\sin Y_2 \sin Y_4 \sin Y_6 \sin Y_8}$.

В геодезическом четырехугольнике за полюс можно выбрать любую вершину четырехугольника, например, точку D . Возьмем в качестве исходной стороны сторону S_{CD} . Последовательно перейдем от нее к стороне S_{AD} , используя треугольник ACD . Затем из треугольника ABD определим S_{BD} . И, наконец, из треугольника BCD вернемся к S_{CD} . Получим условие полюса, с полюсом в точке D :

$$\ln \frac{\sin Y_{6+7} \sin Y_1 \sin Y_3}{\sin Y_8 \sin Y_{2+3} \sin Y_6} = 0.$$

Отсюда, условное уравнение поправок

$$(\Delta_{6+7} - \Delta_6) v_6 + \Delta_{6+7} v_7 - \Delta_8 v_8 - \Delta_1 v_1 - \Delta_{2+3} v_2 + (-\Delta_{2+3} + \Delta_3) v_3 - \Delta_6 v_6 + \omega_p = 0,$$

где $\omega_p = \ln \frac{\sin Y_{6+7} \sin Y_1 \sin Y_3}{\sin Y_8 \sin Y_{2+3} \sin Y_6}$; $\Delta_{6+7} = \frac{\mu l O_k}{\rho} \operatorname{ctg}(Y_6 + Y_7)$.

Аналогично, вычисляются другие коэффициенты, относящиеся к сумме углов.

Оценка точности в коррелятном способе уравнивания

При коррелятном способе уравнивания необходимо установить — допустимы ли полученные невязки. Для этого следует определить обратную весовую матрицу невязок, используя обобщенную формулу оценки точности.

Исходной системой уравнений в коррелятном способе является система условных уравнений связи $\overline{\varphi(Y)} = 0$. Разложим данную систему в ряд Тэйлора

$$\overline{\varphi(Y)} = \overline{\varphi(y)} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_0 (Y - y) + R = \overline{\varphi(y)} + B(Y - y) + R = 0.$$

Здесь R — остаток от разложения в ряд, вызванный тем, что разложение осуществляется только с учетом линейных членов разложения. Полагаем, что измерения достаточно точные и результаты измерений достаточно близки к истинным значениям измеряемых величин. Поэтому членами ряда с более высокими степенями разложения, образующими R , пренебрегаем. Они оказывают ничтожно малое влияние на результат разложения.

$$\overline{\varphi(Y)} = \overline{\varphi(y)} + B(Y - y) = \overline{\varphi(y)} + B(-\Delta) = 0$$

или $\omega + B(-\Delta) = 0$, откуда, $\omega = B\Delta$. Здесь $\Delta = y - Y$ — вектор истинных ошибок измерений, имеющий обратную весовую матрицу, совпадающую с обратной весовой матрицей вектора измерений $\mathbf{P}_{\Delta}^{-1} = \mathbf{P}_y^{-1} = \mathbf{P}^{-1}$.

Для определения \mathbf{Q}_{ω} воспользуемся обобщенной формулой оценки точности, учитывая, что $\omega = B\Delta$, получим

$$\mathbf{Q}_{\omega} = \mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T = \mathbf{N}. \quad (3.42)$$

Таким образом, обратная весовая матрица невязок совпадает с матрицей коэффициентов нормальных уравнений. Известно, что по главной диагонали обратной весовой матрицы стоят обратные веса невязок $Q_{\omega_j} = \frac{1}{P_{\omega_j}}$. Если известно среднее квадратическое отклонение единицы веса σ_0 или средняя квадратическая ошибка единицы веса μ , то легко получить допустимую величину невязки по следующей формуле:

$$\omega_{j\text{доп}} = t\sigma_0 \sqrt{\frac{1}{P_{\omega_j}}} = t\sigma_0 \sqrt{Q_{jj}},$$

где t — принимается равным 2; 2,5 или 3, в зависимости от принятой вероятности 0,95; 0,974 или 0,997 (смотри правило 2σ , $2,5\sigma$ или 3σ в параграфе о критерии точности измерений).

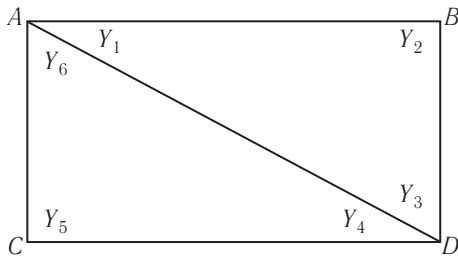


Рис. 3.27. Определение предельных невязок в цепочке треугольников

Пример. Пусть в цепочке треугольников (рис. 3.27) углы измеряются с точностью $\sigma=2,0''$.

Невязки в треугольниках получились равными $7''$ и $9''$. Определить — допустимы ли данные невязки.

В данной цепочке треугольников возникают два условия фигур, с системой уравнений поправок

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 + v_3 + \omega_1 &= 0; \\ v_4 + v_5 + v_6 + \omega_2 &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда, система нормальных уравнений $\mathbf{B}\mathbf{B}^T\mathbf{K} + \omega = 0$ с матрицей коэффициентов нормальных уравнений

$$\mathbf{B}\mathbf{B}^T = \mathbf{N} = \mathbf{Q}_\omega = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Поскольку диагональные элементы матрицы \mathbf{Q}_ω , равные обратным весам невязок, одинаковы, допустимые невязки для треугольников также будут одинаковыми. С вероятностью 0,997 получим

$$\omega_{\text{доп}} = t\sigma_0 \sqrt{\frac{1}{P_{\omega_j}}} = t\sigma_0 \sqrt{Q_{jj}} = 3 \cdot 2\sqrt{3} = 10,4''.$$

Таким образом невязки треугольников, равные $7''$ и $9''$, являются допустимыми. Аналогично, зная матрицу коэффициентов нормальных уравнений, легко вычислить допустимые невязки для любого условия в произвольном геодезическом построении.

Далее выведем формулу для определения средней квадратической ошибки по вектору истинных, зависимых ошибок.

Для этого необходимо ввести понятие ортогональной матрицы. Матрица \mathbf{F} называется ортогональной, если удовлетворяет следующим свойствам:

$$\mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{E}; \quad \mathbf{F}\mathbf{Q}\mathbf{F}^T = \mathbf{D}; \quad \mathbf{D}^{-1} = \mathbf{F}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{F}^T,$$

где \mathbf{D} — диагональная матрица.

Пусть задан вектор истинных ошибок Δ с полной обратной весовой матрицей \mathbf{Q}_Δ . Полная матрица \mathbf{Q}_Δ означает зависимость элементов вектора Δ .

На основе ортогональной матрицы введем вектор преобразования следующего вида $\mathbf{Z}=\mathbf{D}^{-0,5}\mathbf{F}\mathbf{\Lambda}$. Данное преобразование приводит к независимости элементов вектора \mathbf{Z} . Кроме того, его элементы равноточны, даже если элементы вектора $\mathbf{\Lambda}$ не равноточны. Докажем это, воспользовавшись обобщенной формулой оценки точности $\mathbf{Q}_Z=\mathbf{D}^{-0,5}\mathbf{F}\mathbf{Q}_\Delta\mathbf{F}^T\mathbf{D}^{-0,5}=\mathbf{D}^{-0,5}\mathbf{D}\mathbf{D}^{-0,5}=\mathbf{E}$. Следовательно, элементы вектора \mathbf{Z} являются независимыми и равноточными. Тогда для вычисления средней квадратической ошибки измерения можно воспользоваться формулой Гаусса $m = \sqrt{\frac{\mathbf{Z}^T\mathbf{Z}}{n}}$. Учитывая преобразование $\mathbf{\Lambda}$ через \mathbf{Z} и свойства ортогональной матрицы, найдем

$$\mathbf{Z}^T\mathbf{Z}=\mathbf{\Lambda}^T\mathbf{F}^T\mathbf{D}^{-0,5}\mathbf{D}^{-0,5}\mathbf{F}\mathbf{\Lambda}=\mathbf{\Lambda}^T\mathbf{F}^T\mathbf{D}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{\Lambda}=\mathbf{\Lambda}^T\mathbf{F}^T\mathbf{F}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{F}\mathbf{\Lambda}=\mathbf{\Lambda}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{\Lambda}.$$

Подставляя данный результат в формулу Гаусса, получим формулу определения средней квадратической ошибки для зависимых измерений $\mu = \sqrt{\frac{\mathbf{\Lambda}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{\Lambda}}{n}}$, где n — число элементов в векторе $\mathbf{\Lambda}$.

Применим эту формулу для оценки точности измерений в коррелятном способе уравнивания. В качестве вектора ошибок $\mathbf{\Lambda}$ возьмем вектор невязок. Отличительной особенностью невязок является то, что для них известно теоретическое значение или математическое ожидание. Оно равно нулю. Следовательно, сама величина невязки может рассматриваться как отличие от этого теоретического значения и трактоваться как истинная ошибка. При этом, в общем случае, невязки являются зависимыми, так как часто вычисляются с использованием одних и тех же измерений. Итак, запишем полученную выше формулу, используя невязки вместо истинных ошибок

$$\mu = \sqrt{\frac{\mathbf{W}^T\mathbf{Q}_W^{-1}\mathbf{W}}{r}} = \sqrt{\frac{\mathbf{W}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{W}}{r}} = \sqrt{\frac{-\mathbf{W}^T\mathbf{K}}{r}}.$$

Докажем, что $-\mathbf{W}^T\mathbf{K}=\mathbf{V}^T\mathbf{P}\mathbf{V}$.

Учитывая коррелятные уравнения поправок (3.32) найдем

$$\mathbf{V}^T\mathbf{P}\mathbf{V}=\mathbf{V}^T\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}=\mathbf{V}^T\mathbf{B}^T\mathbf{K}.$$

Из уравнений поправок $\mathbf{BV}+\mathbf{W}=0$ следует $\mathbf{V}^T\mathbf{B}^T=-\mathbf{W}^T$.
Отсюда, $\mathbf{V}^T\mathbf{B}^T\mathbf{K}=-\mathbf{W}^T\mathbf{K}=\mathbf{V}^T\mathbf{PV}$.

Окончательно получим формулу Бесселя

$$\mu = \sqrt{\frac{\mathbf{V}^T\mathbf{PV}}{r}} = \sqrt{\frac{[p\upsilon\upsilon]}{n-k}}. \quad (3.43)$$

Зная среднюю квадратическую ошибку единицу веса, произведем оценку точности уравненных значений измерений, используя, как всегда, обобщенную формулу оценки точности. Уравненные значения измеряемых величин выразим через элементы, для которых известна обратная весовая матрица

$$\bar{y} = y + \upsilon = y + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K} = y - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{W}.$$

Далее получим (с учетом того, что $\mathbf{W}=\mathbf{B}\Delta$, $\Delta=y-Y$)

$$\bar{y} = Y + \Delta - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{B}\Delta = Y + (\mathbf{E} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{B})\Delta = Y + \mathbf{C}\Delta.$$

Теперь, когда уравненные значения представлены через вектор истинных ошибок, для которых известна обратная весовая матрица, можно использовать обобщенную формулу оценки точности. Учтем, что $\mathbf{Q}_\Delta=\mathbf{P}^{-1}$

$$\mathbf{Q}_{\bar{y}} = \mathbf{C}\mathbf{Q}_\Delta\mathbf{C}^T = (\mathbf{E} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{B})\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{E} - \mathbf{B}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}).$$

Раскроем скобки

$$\mathbf{Q}_{\bar{y}} = \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}.$$

Рассмотрим последнее слагаемое

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}.$$

Таким образом, это слагаемое в формуле для $\mathbf{Q}_{\bar{y}}$ сократится с предыдущим и окончательно получим:

для случая неравноточных измерений

$$\mathbf{Q}_{\bar{y}} = \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}; \quad (3.44)$$

для случая равноточных измерений

$$\mathbf{Q}_{\bar{y}} = \mathbf{E} - \mathbf{B}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{B}. \quad (3.45)$$

Зная $\mathbf{Q}_{\bar{y}}$, легко получить корреляционную матрицу $\mathbf{K}_{\bar{y}} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{\bar{y}}$ или ее оценку $\mathbf{K}_{\bar{y}} = \mu^2 \mathbf{Q}_{\bar{y}}$, где диагональные элементы представляют собой средние квадратические ошибки уравниваемых результатов измерений $m_{\bar{y}_i} = \mu \sqrt{Q_{ij}} = \mu \sqrt{Q_{\bar{y}_i}}$.

Пример. Пусть задано условие фигур $Y_1 + Y_2 + Y_3 - 180 = 0$ с матрицей коэффициентов уравнений поправок $\mathbf{B} = (1 \ 1 \ 1)$. Все измерения выполнены равноточно, поэтому для определения обратной весовой матрицы уравниваемых значений измерений воспользуемся формулой

$$Q_{\bar{y}} = \mathbf{E} - \mathbf{B}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} (1 \ 1 \ 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, обратные веса уравниваемых измерений равны $2/3$. До уравнивания измерения были равноточными. Их веса были равны единице. Отношение весов измерений после уравнивания и до уравнивания определяется следующим выражением $\frac{P_{\bar{y}}}{P_y} = \frac{3/2}{1} = \frac{3}{2} = \frac{n}{k}$. Таким образом, для треугольника это соотношение равно отношению общего числа измерений к числу необходимых измерений.

В общем случае, соотношение $\frac{P_{\bar{y}}}{P_y} \approx \frac{n}{k}$ выполняется приближенно. Поскольку $n > k$, то веса измеренных величин после уравнивания будут больше, чем до уравнивания, следовательно, точность уравниваемых величин выше точности этих же величин до уравнивания.

Мы решили задачу оценки точности уравниваемых измерений. Для оценки других элементов геодезической сети, выразим эти элементы через измеренные величины. Например, для оценки точности координаты некоторой точки (рис. 3.28) составим функцию от измеренных величин $X_1 = X_H + \Delta X = X_H + S \cos(\alpha + \beta)$.

Здесь S и β измеренные величины. Величины X_H и α являются исходными. В общем виде, для S таких функций можно составить S -мерный вектор

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} F_1(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n) \\ F_2(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n) \\ \dots \\ F_S(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n) \end{pmatrix}.$$

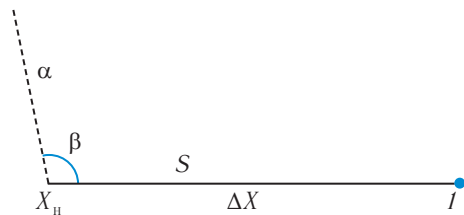


Рис. 3.28. Оценка точности приращеня координат

Используя обобщенную формулу оценки точности, получим обратную весовую матрицу данного вектора $\mathbf{Q}_{\bar{F}} = \mathbf{f}\mathbf{Q}_{\bar{y}}\mathbf{f}^T$, где

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_S}{\partial y_1} & \frac{\partial F_S}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_S}{\partial y_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{f}_{11} & \hat{f}_{12} & \cdots & \hat{f}_{1n} \\ \hat{f}_{21} & \hat{f}_{22} & \cdots & \hat{f}_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{f}_{S1} & \hat{f}_{S2} & \cdots & \hat{f}_{Sn} \end{pmatrix}.$$

Подставляя сюда (3.44) и (3.45) получим:
для не равноточных измерений

$$\mathbf{Q}_{\bar{F}} = \mathbf{f}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{f}^T - \mathbf{f}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{f}^T; \quad (3.46)$$

для равноточных измерений

$$\mathbf{Q}_{\bar{F}} = \mathbf{f}\mathbf{f}^T - \mathbf{f}\mathbf{B}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{f}^T. \quad (3.47)$$

Корреляционная матрица вектора функций примет вид $\mathbf{K}_{\bar{F}} = \sigma_0^2\mathbf{Q}_{\bar{F}}$. Такую функцию обычно используют для предрасчета точности, поскольку диагональные элементы здесь — дисперсии функций (дисперсии элементов геодезического построения) после уравнивания. Для оценки же точности необходимо вместо дисперсии единицы веса σ_0^2 использовать квадрат средней квадратической ошибки единицы веса μ , тогда $\mathbf{K}_{\bar{F}} = \mu^2\mathbf{Q}_{\bar{F}}$.

Диагональные элементы здесь есть квадраты средних квадратических ошибок каждой функции, вычисленной по результатам уравненных измерений, отсюда, $m_{\bar{F}_i} = \mu\sqrt{Q_{\bar{F}_{ii}}} = \mu\sqrt{\frac{1}{P_{\bar{F}_i}}}$.

Связь коррелятного и параметрического способов

Результаты уравнивания параметрическим и коррелятным способом приводят к одним и тем же результатам. Докажем это. Разделим систему параметрических уравнений поправок $\mathbf{V}=\mathbf{A}\Delta\mathbf{X}+\mathbf{L}$ на две подсистемы:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{A}_1 \Delta \mathbf{X} + \mathbf{L}_1; \quad (3.48)$$

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{A}_2 \Delta \mathbf{X} + \mathbf{L}_2, \quad (3.49)$$

где первая подсистема состоит из k уравнений с k неизвестными, вторая из r уравнений с k неизвестными.

В обычной записи эти системы выглядят следующим образом

$$v_1 = a_{11} \delta x_1 + a_{12} \delta x_2 + \dots + a_{1k} \delta x_k + l_1;$$

$$v_2 = a_{21} \delta x_1 + a_{22} \delta x_2 + \dots + a_{2k} \delta x_k + l_2;$$

.....

$$v_k = a_{k1} \delta x_1 + a_{k2} \delta x_2 + \dots + a_{kk} \delta x_k + l_k;$$

$$v_{k+1} = a_{k+1,1} \delta x_1 + a_{k+1,2} \delta x_2 + \dots + a_{k+1,k} \delta x_k + l_{k+1};$$

.....

$$v_n = a_{n1} \delta x_1 + a_{n2} \delta x_2 + \dots + a_{nk} \delta x_k + l_n.$$

Пусть матрица \mathbf{A}_1 имеет обратную (в противном случае, необходимо какие-то уравнения из (3.48) поменять с уравнениями из (3.49), такими действиями всегда можно добиться данного условия). Выразим из (3.48) вектор ΔX : $\Delta X = A_1^{-1} V_1 - A_1^{-1} L_1$ и подставим правую часть вместо ΔX в (3.49) $V_2 = A_2 (A_1^{-1} V_1 - A_1^{-1} L_1) + L_2$.

Раскроем скобки и перенесем V_2 в правую часть

$$A_2 A_1^{-1} V_1 - V_2 - A_2 A_1^{-1} L_1 + L_2 = 0. \quad (3.50)$$

Первые два слагаемых перепишем в виде произведения блочной строки $B = (A_2 A_1^{-1} - E)$ на столбец V : $(A_2 A_1^{-1} - E) \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = BV$.

Слагаемые $-A_2 A_1^{-1} L_1 + L_2$ представляют собой преобразованные в вектор размера $r \times 1$ свободные члены параметрических уравнений поправок. В преобразованном виде их можно обозначить через W и считать вектором невязок, поэтому, окончательно, (3.50) можно переписать в виде условных уравнений поправок из коррелятного способа $BV + W = 0$.

В качестве примера такого перехода рассмотрим систему параметрических уравнений поправок нивелирной сети (рис. 3.29).

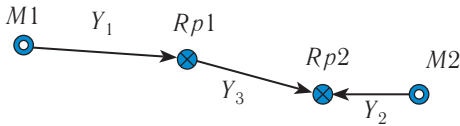


Рис. 3.29. Пример, демонстрирующий связь параметрического и коррелятного способов

Составим для данной сети систему параметрических уравнений поправок, минуя этап составления уравнений связи:

- 1) $v_1 = \delta x_1 + l_1$;
- 2) $v_2 = \delta x_2 + l_2$;
- 3) $v_3 = -\delta x_1 + \delta x_2 + l_3$.

Первые два уравнения здесь образуют систему (3.48), третье уравнение есть система (3.49). Выразим из первых двух уравнений δx_1 и δx_2 :

$$\Delta X = A_1^{-1}V_1 - A_1^{-1}L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}$$

или в обычной записи $\delta x_1 = v_1 - l_1$; $\delta x_2 = v_2 - l_2$.

Подставим правые части в третье уравнение поправок, получим $v_3 = -v_1 + l_1 + v_2 - l_2 + l_3$. Если принять приближенные значения параметров $x_1 = H_{M1} + y_1$; $x_2 = H_{M2} + y_2$, то легко понять, что $l_1 = x_1 - H_{M1} + y_1 = 0$; $l_2 = x_2 - H_{M2} + y_2 = 0$; $l_3 = x_2 - x_1 - y_3$.

Но в коррелятном способе невязка определяется по полигону. Допустим, направление полигона выбрано от второй марки к первой. Тогда невязка, равная сумме превышений по полигону минус разность исходных отметок, будет

$$\omega = -y_1 - y_3 + y_2 - (H_{M1} - H_{M2}) = H_{M1} - x_1 - y_3 + x_2 - H_{M2} - (H_{M1} - H_{M2}) = l_3.$$

Таким образом третье уравнение представляет собой условное уравнение поправок

$$-v_3 - v_1 + l_1 + v_2 - l_2 + l_3 = 0 \text{ или } -v_3 - v_1 + v_2 + \omega = 0.$$

Контрольные вопросы

1. Как связаны между собой число избыточных измерений и количество условных уравнений связи?
2. Какие величины являются аргументами в условных уравнениях связи?
3. Напишите общий вид условных уравнений связи. Приведите примеры уравнений связи для различных геодезических построений.
4. Каким образом получают условные уравнения поправок? Как

вычисляются коэффициенты этих уравнений для линейных уравнений связи? Приведите примеры.

5. Как вычисляются невязки в условных уравнениях поправок?

6. Напишите общий вид условных уравнений связи и поправок для нивелирной сети.

7. Напишите условные уравнения связи и поправок для полигонометрического хода в общем виде.

8. Запишите следующие условные уравнения связи и поправок для плановых сетей: условие фигур, условие жесткого угла, условие станции, условие горизонта.

9. Как выглядит базисное условное уравнение связи? Запишите для него уравнение связи и уравнение поправок.

10. Как выглядит полюсное условное уравнение связи? В каких случаях оно возникает? Запишите для него уравнение связи и уравнение поправок.

11. Как выглядят координатные условные уравнения связи? В каких случаях они возникают? Запишите для них уравнения связи и уравнения поправок.

12. Как подсчитать количество нормальных уравнений в коррелятном и параметрическом способах уравнивания?

13. Запишите общий вид систем условных уравнений связи и поправок в матричном виде. Перейдите от матричной записи к обычной.

14. Запишите общий вид нормальных уравнений для коррелятного способа в матричном виде. Перемножив матрицы, перейдите к обычному виду нормальных уравнений.

15. Как выглядят коррелятные уравнения поправок?

16. Как определяются средние квадратические ошибки измерений по результатам уравнивания?

17. Как вычисляется обратная весовая матрица вектора уравненных измерений, вектора функций от уравненных измерений?

18. Как определить — допустимы ли полученные невязки?

19. Как выполнить окончательный контроль уравнивания в коррелятном способе?

20. Запишите последовательность уравнивания коррелятным способом для равноточных и неравноточных измерений.

21. Покажите связь параметрического и коррелятного способов.

Задачи с решениями

Задача 1. Уравнять и произвести оценку точности нивелирной сети (рис. 3.30) коррелятным способом. В §3.1 данная сеть была предложена для уравнивания параметрическим способом. Исходные данные представлены в табл. 3.18.

Т а б л и ц а 3.18

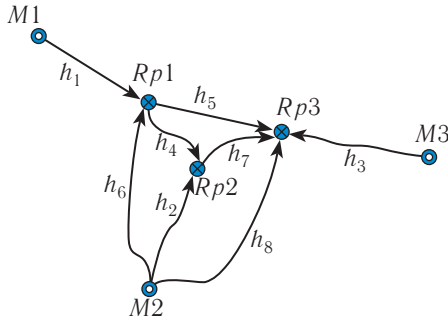


Рис. 3.30. Схема нивелирной сети

Отметки исходных пунктов, м	Номер измерения	Измеренные превышения $h(y)$, м	Длины ходов L , км
$H_{M1}=150,209$	1	-3,567	4,00
$H_{M2}=150,531$	2	-0,283	6,67
$H_{M3}=147,182$	3	-0,126	4,00
	4	3,533	5,00
	5	0,428	1,05
	6	-3,861	1,67
	7	-3,131	5,00
	8	-3,448	3,33

Решение

1. Определение числа необходимых и избыточных измерений. Число необходимых измерений равно числу определяемых реперов. $k=3$. Число избыточных измерений $r=n-k=8-3=5$.

2. Для составления пяти условных уравнений связи наметим на схеме сети пять независимых друг от друга полигонов. Количество разомкнутых полигонов должно равняться числу исходных пунктов минус единица. Мы имеем три исходных отметки. Следовательно, число разомкнутых полигонов равно двум. Остальные из пяти полигонов замкнутые.

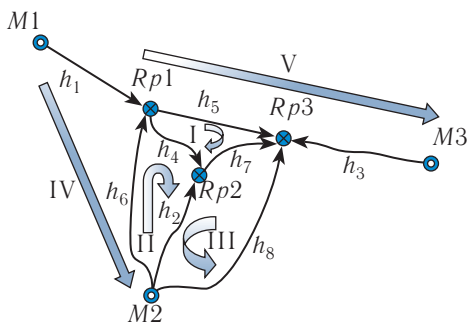


Рис. 3.31. Схема нивелирной сети с полигонами

Существует несколько вариантов выбора полигонов, но результаты уравнивания не будут зависеть от такого выбора. Важно только, чтобы полигоны, а с ними и уравнения связи были бы независимыми друг от друга. На рис. 3.31 показан один из возможных вариантов выбора полигонов. Римскими цифрами здесь обозначены но-

мера полигонов, стрелки показывают направление обхода полигона, первые три полигона замкнутые, два оставшихся разомкнутые.

По каждому полигону составим условные уравнения связи. По первому полигону сумма превышений должна равняться нулю, если двигаться по направлению обхода полигона. Получим $-Y_4+Y_5-Y_7=0$. Аналогично, составим остальные уравнения связи:

$$\begin{aligned} -Y_2+Y_4+Y_6 &= 0; \\ -Y_2-Y_7+Y_8 &= 0; \\ Y_1-Y_6-(H_{M2}-H_{M1}) &= 0; \\ Y_1-Y_3+Y_5-(H_{M3}-H_{M1}) &= 0. \end{aligned}$$

3. Составим условные уравнения поправок, используя полученные уравнения связи и вычислим невязки по всем полигонам (табл. 3.19).

Т а б л и ц а 3.19

Исходные условные уравнения связи	Вычисление невязок	Вид уравнений поправок
$-Y_4+Y_5-Y_7=0$	$w_1=-y_4+y_5-y_7=$ $=-3,533+0,428+3,131=+2,6$ см	$-v_4+v_5-v_7+2,6=0$
$-Y_2+Y_4+Y_6=0$	$w_2=-y_2+y_4+y_6=$ $=0,283+3,533-3,861=-4,5$ см	$-v_2+v_4+v_6-4,5=0$
$-Y_2-Y_7+Y_8=0$	$w_3=-y_2-y_7+y_8=$ $=0,283+3,131-3,448=-3,4$ см	$-v_2-v_7+v_8-3,4=0$
$Y_1-Y_6-(H_{M2}-H_{M1})=0$	$w_4=y_1-y_6-(H_{M2}-H_{M1})=$ $=-3,567+3,861-$ $-(150,531-150,209)=-2,8$ см	$v_1-v_6-2,8=0$
$Y_1-Y_3+Y_5-(H_{M3}-H_{M1})=0$	$w_5=y_1-y_3+y_5-(H_{M3}-H_{M1})=$ $=-3,567+0,126+0,428-$ $-(147,182-150,209)=+1,4$ см	$v_1-v_3+v_5+1,4=0$

Запишем систему условных уравнений поправок в матричном виде $\mathbf{BV}+\mathbf{W}=0$ или

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +2,6 \\ -4,5 \\ -3,4 \\ -2,8 \\ +1,4 \end{pmatrix} = 0.$$

4. Составление нормальных уравнений коррелат.

Вычислим веса измерения превышений, приняв как и при уравнивании параметрическим способом $C=2$. $P_i=C/L_i=2/L_i$. Получим:

Номер измерения i	L_i	$P_i=C/L_i$
1	4,00	0,50
2	6,67	0,30
3	4,00	0,50
4	5,00	0,40
5	1,05	1,90
6	1,67	1,20
7	5,00	0,40
8	3,33	0,60

Система нормальных уравнений коррелат $\mathbf{NK}+\mathbf{W}=0$, где $\mathbf{N}=\mathbf{BP}^{-1}\mathbf{B}^T$. Перемножив и сложив данные матрицы, получим систему нормальных уравнений в численном виде:

$$\begin{pmatrix} 5,526 & -2,500 & 2,500 & 0,000 & 0,526 \\ -2,500 & 6,667 & 3,333 & -0,833 & 0,000 \\ 2,500 & 3,333 & 7,500 & 0,000 & 0,000 \\ 0,000 & -0,833 & 0,000 & 2,833 & 2,000 \\ 0,526 & 0,000 & 0,000 & 2,000 & 4,526 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \\ k_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +2,6 \\ -4,5 \\ -3,4 \\ -2,8 \\ +1,4 \end{pmatrix} = 0$$

или

$$\begin{aligned} 5,526k_1 - 2,500k_2 + 2,500k_3 + 0,526k_5 + 2,6 &= 0; \\ -2,500k_1 + 6,667k_2 + 3,333k_3 - 0,833k_4 - 4,5 &= 0; \\ 2,500k_1 + 3,333k_2 + 7,500k_3 - 3,4 &= 0; \\ -0,833k_2 + 2,833k_4 + 2,000k_5 - 2,8 &= 0; \\ 0,526k_1 + 2,000k_4 + 4,526k_5 + 1,4 &= 0. \end{aligned}$$

5. Решение системы нормальных уравнений:

$$\mathbf{K} = -\mathbf{N}^{-1}\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0,146 \\ 1,034 \\ -0,055 \\ 2,213 \\ -1,304 \end{pmatrix}.$$

6. Вычисление вектора поправок к результатам измерений:

$$\mathbf{V} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1,82 \\ -3,26 \\ 2,61 \\ 2,22 \\ -0,61 \\ -0,98 \\ -0,22 \\ -0,09 \end{pmatrix}.$$

Данные результаты отличаются от параметрического способа не более, чем на 1 мм. Такое отличие может быть вызвано точностью самого вычислительного процесса, поэтому можно считать, что результаты уравнивания совпали. Произведем контроль решения системы условных уравнений поправок. Для этого используем равенство $\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V} = -\mathbf{W}^T \mathbf{K}$:

$$\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V} = [pvv] = 12,12;$$

$$\mathbf{W}^T \mathbf{K} = [wk] = -12,12.$$

7. Вычисление уравненных значений измеряемых величин и окончательный контроль уравнивания (табл. 3.20).

Т а б л и ц а 3.20

Измеренные превышения y , м	Поправки к измеренным превышениям, см	Уравненные превышения $\bar{y}_i = y_i + v_i$, м	Уравнения связи в буквенном виде	Уравнения связи в числовом виде
-3,567	1,8	-3,549	$-Y_4 + Y_5 - Y_7 = 0$	$-3,554 + 0,422 + 3,132 = 0,0$
-0,283	-3,3	-0,317	$-Y_2 + Y_4 + Y_6 = 0$	$0,317 + 3,554 - 3,871 = 0,0$
-0,126	2,6	-0,100	$-Y_2 - Y_7 + Y_8 = 0$	$0,317 + 3,132 - 3,449 = 0,0$
3,533	2,2	3,554	$Y_1 - Y_6 - (H_{M2} - H_{M1}) = 0$	$-3,549 + 3,871 -$
0,428	-0,6	0,422	$Y_1 - Y_3 + Y_5 -$	$-(150,531 - 150,209) = 0,0$
-3,861	-1,0	-3,871	$-(H_{M3} - H_{M1}) = 0$	$-3,549 + 0,100 + 0,422 -$
-3,131	-0,2	-3,132		$-(147,182 - 150,209) = 0,0$
-3,448	-0,1	-3,449		

В последней графе табл. 3.20 произведен контроль выполнения равенств уравнений связи после уравнивания. Равенства нулю выполнены, т.е. сеть уравнена.

8. Оценка точности.

Средняя квадратическая ошибка единица веса

$$\mu = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-k}} = \sqrt{\frac{12,12}{5}} = 1,55 \text{ см.}$$

Вычислим обратную весовую матрицу вектора уравненных измерений:

$$\mathbf{Q}_{\bar{y}} = \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,39 & 0,23 & 0,24 & -0,16 & -0,14 & 0,39 & 0,01 & 0,24 \\ 0,23 & 1,09 & 0,26 & 0,86 & 0,03 & 0,23 & -0,83 & 0,26 \\ 0,24 & 0,26 & 0,46 & 0,01 & 0,22 & 0,24 & 0,20 & 0,46 \\ -0,16 & 0,86 & 0,01 & 1,01 & 0,17 & -0,16 & -0,84 & 0,01 \\ -0,14 & 0,03 & 0,22 & 0,17 & 0,36 & -0,14 & 0,19 & 0,22 \\ 0,39 & 0,23 & 0,24 & -0,16 & -0,14 & 0,39 & 0,01 & 0,24 \\ 0,01 & -0,83 & 0,20 & -0,84 & 0,19 & 0,01 & 1,03 & 0,20 \\ 0,24 & 0,26 & 0,46 & 0,01 & 0,22 & 0,24 & 0,20 & 0,46 \end{pmatrix}.$$

Корреляционная матрица вектора уравненных измерений

$$\mathbf{K}_{\bar{y}} = \mu^2\mathbf{Q}_{\bar{y}} =$$

$$\begin{pmatrix} 0,94 & 0,55 & 0,59 & -0,38 & -0,35 & 0,94 & 0,03 & 0,59 \\ 0,55 & 2,61 & 0,62 & 2,06 & 0,06 & 0,55 & -1,99 & 0,62 \\ 0,59 & 0,62 & 1,11 & 0,03 & 0,52 & 0,59 & 0,49 & 1,11 \\ -0,38 & 2,06 & 0,03 & 2,44 & 0,41 & -0,38 & -2,02 & 0,03 \\ -0,35 & 0,06 & 0,52 & 0,41 & 0,87 & -0,35 & 0,46 & 0,52 \\ 0,94 & 0,55 & 0,59 & -0,38 & -0,35 & 0,94 & 0,03 & 0,59 \\ 0,03 & -1,99 & 0,49 & -2,02 & 0,46 & 0,03 & 2,48 & 0,49 \\ 0,59 & 0,62 & 1,11 & 0,03 & 0,52 & 0,59 & 0,49 & 1,11 \end{pmatrix}.$$

Откуда получим, средние квадратические ошибки уравненных превышений:

$$m_{\bar{y}_1} = \sqrt{0,94} = 1,0 \text{ см}; \quad m_{\bar{y}_2} = \sqrt{2,61} = 1,6 \text{ см}; \quad m_{\bar{y}_3} = \sqrt{1,11} = 1,1 \text{ см};$$

$$m_{\bar{y}_4} = \sqrt{2,44} = 1,6 \text{ см}; \quad m_{\bar{y}_5} = \sqrt{0,87} = 0,9 \text{ см}; \quad m_{\bar{y}_6} = \sqrt{0,94} = 1,0 \text{ см};$$

$$m_{\bar{y}_7} = \sqrt{2,48} = 1,6 \text{ см}; \quad m_{\bar{y}_8} = \sqrt{1,11} = 1,1 \text{ см}.$$

Определим среднюю квадратическую ошибку отметки $Rp2$. Для этого составим функцию $F = H_{Rp2} = H_{M1} + Y_1 + Y_4$. Вектор производных данной функции по аргументам (превышениям) имеет вид $f = (1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$.

Обратный вес уравненного значения данной отметки $\frac{1}{P_{\bar{F}}} = \frac{1}{P_{H_{Rp2}}} = fQ_{\bar{y}}f^T = 1,09$ и $m_{H_{Rp2}} = \sqrt{0,54} = 1,0$ см. Этот же результат получим, если отметку $Rp2$ определим от другой марки, например, от марки $M2$. $H_{Rp2} = H_{M2} + Y_2$. В этом случае $f = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$ и получим тот же результат $\frac{1}{P_{\bar{F}}} = \frac{1}{P_{H_{Rp2}}} = fQ_{\bar{y}}f^T = 1,09$.

Задача 2. Уравнять и произвести оценку точности сети триангуляции в виде геодезического четырехугольника коррелятным способом (рис. 3.32). Здесь пункты C и D являются исходными, A и B — определяемыми.

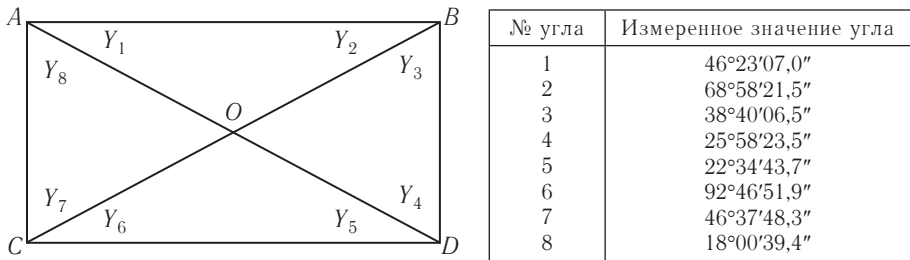


Рис. 3.32. Схема геодезического четырехугольника

Решение

1. Определим число всех измерений, необходимых и избыточных: $n=8$, $k=4$ (k равно числу координат определяемых пунктов), $r=n-k=4$.
2. Составление условных уравнений связи.
В такой сети возникают четыре условных уравнения связи — три условия фигуры и одно полюсное условное уравнение:

$$\begin{aligned}
 Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 - 180 &= 0; \\
 Y_5 + Y_6 + Y_7 + Y_8 - 180 &= 0; \\
 Y_1 + Y_2 + Y_7 + Y_8 - 180 &= 0; \\
 \ln \frac{\sin Y_1 \sin Y_3 \sin Y_5 \sin Y_7}{\sin Y_2 \sin Y_4 \sin Y_6 \sin Y_8} &= 0.
 \end{aligned}$$

3. Составление условных уравнений поправок. Общий вид условных уравнений поправок для полученных уравнений связи:

$$\begin{aligned}
 v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + w_1 &= 0; \\
 v_5 + v_6 + v_7 + v_8 + w_2 &= 0; \\
 v_1 + v_2 + v_7 + v_8 + w_3 &= 0; \\
 \Delta_1 v_1 - \Delta_2 v_2 + \Delta_3 v_3 - \Delta_4 v_4 + \Delta_5 v_5 - \Delta_6 v_6 + \Delta_7 v_7 - \Delta_8 v_8 + w_4 &= 0.
 \end{aligned}$$

Определим численные значения невязок, подставив результаты измерений в уравнения связи:

$$\omega_1 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 - 180 =$$

$$= 46^\circ 23' 07,0'' + 68^\circ 58' 21,5'' + 38^\circ 40' 06,5'' + 25^\circ 58' 23,5'' - 180^\circ = -1,5'';$$

$$\omega_2 = y_5 + y_6 + y_7 + y_8 - 180 =$$

$$= 22^\circ 34' 43,7'' + 92^\circ 46' 51,9'' + 46^\circ 37' 48,3'' + 18^\circ 00' 39,4'' - 180^\circ = +3,3'';$$

$$\omega_3 = y_1 + y_2 + y_7 + y_8 - 180 =$$

$$= 46^\circ 23' 07,0'' + 68^\circ 58' 21,5'' + 46^\circ 37' 48,3'' + 18^\circ 00' 39,4'' - 180^\circ = -3,8'';$$

$$\omega_4 = \ln \frac{\sin Y_1 \sin Y_3 \sin Y_5 \sin Y_7}{\sin Y_2 \sin Y_4 \sin Y_6 \sin Y_8} = +8,574$$

и коэффициенты полюсного условного уравнения поправок $\Delta_i = \pm \frac{\mu 10^k}{\rho} \operatorname{ctg} Y_i$.

Здесь $\mu=1$, т.к. используем натуральные логарифмы, $\rho=2,063'' \cdot 10^5$.

$$\Delta_1=0,462; \Delta_2=0,186; \Delta_3=0,606; \Delta_4=0,995;$$

$$\Delta_5=1,166; \Delta_6=-0,024; \Delta_7=0,458; \Delta_8=1,491.$$

Подставим полученные невязки и коэффициенты в (3.43). Получим общую систему условных уравнений поправок:

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 - 1,5 = 0;$$

$$v_5 + v_6 + v_7 + v_8 + 3,3 = 0;$$

$$v_1 + v_2 + v_7 + v_8 - 3,8 = 0;$$

$$0,462v_1 - 0,186v_2 + 0,606v_3 - 0,995v_4 + 1,166v_5 +$$

$$+ 0,024v_6 + 0,458v_7 - 1,491v_8 + 8,574 = 0.$$

При этом матрица коэффициентов условных уравнений поправок имеет вид

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0,462 & -0,186 & 0,606 & -0,995 & 1,166 & 0,024 & 0,458 & -1,491 \end{pmatrix}.$$

Условные уравнения поправок в матричном виде $\mathbf{BV} + \mathbf{W} = 0$ или в численном виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0,462 & -0,186 & 0,606 & -0,995 & 1,166 & 0,024 & 0,458 & -1,491 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1,5 \\ +3,3 \\ -3,8 \\ +8,574 \end{pmatrix} = 0.$$

4. Составление нормальных уравнений коррелат.

В данной сети все углы измерены равноточно, поэтому матрица коэффициентов нормальных уравнений

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}\mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & -0,114 \\ 0 & 4 & 2 & 0,156 \\ 2 & 2 & 4 & -0,758 \\ -0,114 & 0,156 & -0,758 & 5,398 \end{pmatrix}.$$

Общий вид системы нормальных уравнений в матричном виде $\mathbf{N}\mathbf{K} + \mathbf{W} = 0$. В обычной записи

$$\begin{aligned} 4k_1 + 0k_2 + 2k_3 - 0,114k_4 - 1,5 &= 0; \\ 0k_1 + 4k_2 + 2k_3 + 0,156k_4 + 3,3 &= 0; \\ 2k_1 + 2k_2 + 4k_3 - 0,758k_4 - 3,8 &= 0; \\ -0,114k_1 + 0,156k_2 - 0,758k_3 + 5,398k_4 + 8,574 &= 0. \end{aligned}$$

Матрица коэффициентов нормальных уравнений равна обратной весовой матрице вектора невязок. Откуда можно определить, допустимы ли полученные невязки. Будем полагать, что углы измерялись прибором, обеспечивающим точность 2".

Для определения допустимых значений невязок воспользуемся формулой

$$\omega_{j\text{доп}} = t\sigma_0 \sqrt{\frac{1}{P_{w_j}}} = t\sigma_0 \sqrt{Q_{w_{jj}}}.$$

Примем $t=2$ (вероятность 0,95). Поскольку три значения матрицы \mathbf{N} , стоящие на главной диагонали, равны 4, то все три допустимые невязки для условий фигур будут одинаковыми

$$\omega_{1\text{доп}} = \omega_{2\text{доп}} = \omega_{3\text{доп}} = t\sigma_0 \sqrt{Q_{w_{jj}}} = 2 \cdot 2\sqrt{4} = 8,0'', \quad \omega_{4\text{доп}} = 4\sqrt{5,40} = 9,3.$$

Все невязки получились допустимыми с вероятностью 0.95. Заметим, что четвертая невязка здесь получена в единицах натурального логарифма в пятом знаке после запятой.

5. Решение системы нормальных уравнений.

Определим обратную матрицу коэффициентов нормальных уравнений:

$$\mathbf{N}^{-1} = \begin{pmatrix} 0,380 & 0,133 & -0,263 & -0,033 \\ 0,133 & 0,386 & -0,268 & -0,046 \\ -0,263 & -0,268 & 0,530 & 0,077 \\ -0,033 & -0,046 & 0,077 & 0,197 \end{pmatrix}.$$

Далее, определим вектор коррелат:

$$\mathbf{K} = -\mathbf{N}^{-1}\mathbf{W} = - \begin{pmatrix} 0,380 & 0,133 & -0,263 & -0,033 \\ 0,133 & 0,386 & -0,268 & -0,046 \\ -0,263 & -0,268 & 0,530 & 0,077 \\ -0,033 & -0,046 & 0,077 & 0,197 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1,5 \\ 3,3 \\ -3,8 \\ 8,574 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,585 \\ -1,698 \\ 1,847 \\ -1,292 \end{pmatrix}.$$

Контроль вычисления коррелат можно выполнить подстановкой полученных значений в систему нормальных уравнений коррелат.

6. Вычисление вектора поправок к результатам измерений. Вычисления осуществляются с помощью коррелатных уравнений поправок

$$\mathbf{V} = \mathbf{B}^T \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0,462 \\ 1 & 0 & 1 & -0,186 \\ 1 & 0 & 0 & 0,606 \\ 1 & 0 & 0 & -0,995 \\ 0 & 1 & 0 & 1,166 \\ 0 & 1 & 0 & 0,024 \\ 0 & 1 & 1 & 0,458 \\ 0 & 1 & 1 & -1,491 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,585 \\ -1,698 \\ 1,847 \\ -1,292 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7'' \\ 1,5'' \\ -1,4'' \\ 0,7'' \\ -3,2'' \\ -1,7'' \\ -0,4'' \\ 2,1'' \end{pmatrix}.$$

Выполним контроль решения уравнений поправок, используя равенство $[pvv] = -[wk]$. $[pvv] = \mathbf{V}^T \mathbf{V} = 22,82$, $[wk] = \mathbf{W}^T \mathbf{K} = -22,82$. Контроль выполнен. Следовательно, система уравнений поправок решена верно.

7. Вычисление уравненных значений углов и окончательный контроль уравнивания (табл. 3.21).

Т а б л и ц а 3.21

№ угла	Измеренное значение угла	v	Уравненные значения углов	Уравнения связи	Контроль выполнения равенств в уравнениях связи
1	46°23'07,0"	0,7	46°23'07,7"	$Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 - 180 = 0$	0,0
2	68°58'21,5"	1,5	68°58'23,0"		
3	38°40'06,5"	-1,4	38°40'05,1"	$Y_5 + Y_6 + Y_7 + Y_8 - 180 = 0$	0,1
4	25°58'23,5"	0,7	25°58'24,2"		
5	22°34'43,7"	-3,2	22°34'40,5"	$Y_1 + Y_2 + Y_7 + Y_8 - 180 = 0$	0,1
6	92°46'51,9"	-1,7	92°46'50,2"		
7	46°37'48,3"	-0,4	46°37'47,9"	$\ln \frac{\sin Y_1 \sin Y_3 \sin Y_5 \sin Y_7}{\sin Y_2 \sin Y_4 \sin Y_6 \sin Y_8} = 0$	0,0
8	18°00'39,4"	2,1	18°00'41,5"		

Окончательный контроль уравнивания выполнен с точностью 0,1".

8. Оценка точности.

Вычислим среднюю квадратическую ошибку измерения угла по формуле

$$\text{Бесселя: } m = \sqrt{\frac{[pvv]}{r}} = \sqrt{\frac{22,82}{4}} = 2,4''.$$

Для вычисления средних квадратических ошибок углов после уравнивания определим обратную весовую матрицу вектора уравненных измерений

$$\mathbf{B}_{\bar{y}} = \mathbf{E} - \mathbf{B}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{B} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,53 & -0,38 & -0,18 & 0,03 & 0,00 & 0,15 & -0,21 & 0,05 \\ -0,38 & 0,62 & -0,13 & -0,12 & 0,12 & 0,13 & -0,13 & -0,12 \\ -0,18 & -0,13 & 0,59 & -0,27 & -0,21 & -0,11 & 0,07 & 0,24 \\ 0,03 & -0,12 & -0,27 & 0,36 & 0,09 & -0,17 & 0,27 & -0,18 \\ 0,00 & 0,12 & -0,21 & 0,09 & 0,45 & -0,34 & -0,24 & 0,12 \\ 0,15 & 0,13 & -0,11 & -0,17 & -0,34 & 0,62 & -0,10 & -0,18 \\ -0,21 & -0,13 & 0,07 & 0,27 & -0,24 & -0,10 & 0,55 & -0,21 \\ 0,05 & -0,12 & 0,24 & -0,18 & 0,12 & -0,18 & -0,21 & 0,27 \end{pmatrix}$$

и корреляционную матрицу

$$\mathbf{K}_{\bar{y}} = m^2 \mathbf{Q}_{\bar{y}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3,04 & -2,17 & -1,05 & 0,18 & 0,00 & 0,88 & -1,19 & 0,31 \\ -2,17 & 3,57 & -0,73 & -0,67 & 0,68 & 0,72 & -0,74 & -0,66 \\ -1,05 & -0,73 & 3,35 & -1,57 & -1,17 & -0,61 & 0,41 & 1,37 \\ 0,18 & -0,67 & -1,57 & 2,06 & 0,50 & -0,99 & 1,51 & -1,03 \\ 0,00 & 0,68 & -1,17 & 0,50 & 2,59 & -1,92 & -1,36 & 0,68 \\ 0,88 & 0,72 & -0,61 & -0,99 & -1,92 & 3,52 & -0,57 & -1,03 \\ -1,19 & -0,74 & 0,41 & 1,51 & -1,36 & -0,57 & 3,15 & -1,22 \\ 0,31 & -0,66 & 1,37 & -1,03 & 0,68 & -1,03 & -1,22 & 1,57 \end{pmatrix}.$$

Наибольшее значение из элементов, стоящих на главной диагонали, получилось 3,57. Это значение относится ко второму углу. Следовательно, средняя квадратическая ошибка второго угла после уравнивания

$m_{\bar{y}_2} = \sqrt{3,57} = 1,9''$. Наименьшее значение средней квадратической ошибки и, следовательно, более высокую точность имеет восьмой угол

— $m_{\bar{y}_8} = \sqrt{1,57} = 1,3''$.

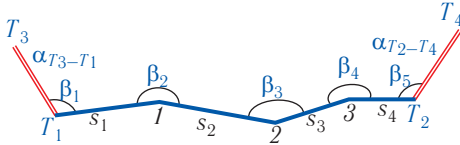


Рис. 3.33. Полигонометрический ход

Задача 3. Уравнять и произвести оценку точности полигонометрического хода, представленного (рис. 3.33). Координаты исходных пунктов и результаты измерений приведены в табл. 3.22.

Таблица 3.22

№ точки поворота	X	Y	Исходные дирекционные углы α	Измеренные значения сторон S, м	Измеренные значения левых углов поворота β
T_1	8638,987	10169,000	$\alpha_{T_3-T_1}=120^\circ46'19,5''$	$S_1=501,028$	$137^\circ35'46,8''$
1				$S_2=895,105$	$138^\circ49'51,6''$
2				$S_3=756,810$	$139^\circ39'41,2''$
3				$S_4=606,670$	$142^\circ09'39,6''$
T_2	10666,645	10761,656	$\alpha_{T_2-T_4}=272^\circ32'36,2''$		$133^\circ31'13,8''$

Решение

1. Определение числа всех необходимых и избыточных измерений: $n=9$; $k=6$; $r=3$.

2. Составление условных уравнений связи.

В полигонометрическом ходе возникает одно условное уравнение дирекционного угла и два уравнения координат:

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 - 180 \cdot 4 - (\alpha_{T_2-T_4} - \alpha_{T_3-T_1}) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^4 \Delta X_i - (X_{T_2} - X_{T_1}) = \Delta X_1 + \Delta X_2 + \Delta X_3 + \Delta X_4 - (X_{T_2} - X_{T_1}) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^4 \Delta Y_i - (Y_{T_2} - Y_{T_1}) = \Delta Y_1 + \Delta Y_2 + \Delta Y_3 + \Delta Y_4 - (Y_{T_2} - Y_{T_1}) = 0.$$

Или записывая условные уравнения координат в окончательном виде, выражая уравнения связи через измеряемые величины, получим

$$S_1 \cos(\alpha_1 + \beta_1) + S_2(\cos \alpha_1 + \beta_1 + \beta_2 - 180) + S_3(\cos \alpha_1 + \beta_1 + \beta_2 - 180 + \beta_3 - 180) + S_3(\cos \alpha_1 + \beta_1 + \beta_2 - 180 + \beta_3 - 180 + \beta_4 - 180) - (X_{T_2} - X_{T_1}) = 0;$$

$$S_1 \sin(\alpha_1 + \beta_1) + S_2(\sin \alpha_1 + \beta_1 + \beta_2 - 180) + S_3(\sin \alpha_1 + \beta_1 + \beta_2 - 180 + \beta_3 - 180) + S_3(\sin \alpha_1 + \beta_1 + \beta_2 - 180 + \beta_3 - 180 + \beta_4 - 180) - (Y_{T_2} - Y_{T_1}) = 0,$$

где $\alpha_1 = \alpha_{T_1-T_3}$.

3. Составление условных уравнений поправок. Система условных уравнений поправок для полигонометрического хода с тремя сторонами определим по формуле (3.36). Запишем условные уравнения поправок для нашего полигонометрического хода, имеющего четыре измеренные стороны:

$$v_{\beta_1} + v_{\beta_2} + v_{\beta_3} + v_{\beta_4} + v_{\beta_5} + \omega_{\alpha} = 0;$$

$$\cos \alpha_1 v_{S_1} + \cos \alpha_2 v_{S_2} + \cos \alpha_3 v_{S_3} + \cos \alpha_4 v_{S_4} - \\ - \frac{Y_{T_2} - Y_{T_1}}{\rho''} v_{\beta_1} - \frac{Y_{T_2} - Y_1}{\rho''} v_{\beta_2} - \frac{Y_{T_2} - Y_2}{\rho''} v_{\beta_3} - \frac{Y_{T_2} - Y_3}{\rho''} v_{\beta_4} + \omega_X = 0;$$

$$\sin \alpha_1 v_{S_1} + \sin \alpha_2 v_{S_2} + \sin \alpha_3 v_{S_3} + \sin \alpha_4 v_{S_4} + \\ + \frac{X_{T_2} - X_{T_1}}{\rho''} v_{\beta_1} + \frac{X_{T_2} - X_1}{\rho''} v_{\beta_2} + \frac{X_{T_2} - X_2}{\rho''} v_{\beta_3} + \frac{X_{T_2} - X_3}{\rho''} v_{\beta_4} + \omega_Y = 0.$$

Вычисление невязки ω_{α} приведено в табл. 3.23.

Т а б л и ц а 3.23

№ точки поворота	Исходные дирекционные углы α	Измеренные значения левых углов поворота β	Дирекционные углы сторон	Y	X
T1	$\alpha_{T_3-T_1}=120^{\circ}46'19,5''$	$137^{\circ}35'46,8''$	$120^{\circ}46'19,5''$	10169,000	8638,987
1		$138^{\circ}49'51,6''$	$78^{\circ}22'06,3''$		
2		$139^{\circ}39'41,2''$	$37^{\circ}11'57,9''$		
3		$142^{\circ}09'39,6''$	$356^{\circ}51'39,1''$		
T2	$\alpha_{T_2-T_4}=272^{\circ}32'36,2''$	$133^{\circ}31'13,8''$	$319^{\circ}01'18,7''$ $272^{\circ}32'32,5''$	10761,656	10666,645

Дирекционные углы в четвертой графе табл. 3.24 получены по измеренным углам по формуле $\alpha_{i+1}=\alpha_i+\beta_i\pm 180$.

Невязка условия дирекционного угла вычислена, как разность между вычисленным значением дирекционного угла стороны T_2-T_4 и исходным, твердым значением дирекционного угла этой стороны

$$\omega_{\alpha}=272^{\circ}32'32,5''-272^{\circ}32'36,2''=-3,7''.$$

Для вычисления элементов матрицы **B** необходимо вычислить синусы и косинусы дирекционных углов, а также координаты пунктов или приращения координат по каждой стороне (табл. 3.24).

Таблица 3.24

№ точки поворота	Дирекционные углы α , вычисленные по измеренным сторонам	Измеренные значения сторон S	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	ΔX	ΔY
T1	120°46'19,5"					
1	78°22'06,3	501,028	0,201617803	0,979464273	101,0163	490,7390
2	37°11'57,9	895,105	0,796535968	0,604591144	712,9835	541,1724
3	356°51'39,1	756,810	0,998499506	-0,054760713	755,6746	-41,4435
T2	319°01'18,7	606,670	0,754959814	-0,655771057	458,0115	-397,8367
	272°32'32,5				$\omega_X=+2,78$	$\omega_Y=-2,48$

Далее сформируем матрицу коэффициентов условных уравнений поправок:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0,2016 & 0,7965 & 0,9985 & 0,7550 & -0,2873 & -0,0494 & 0,2130 & 0,1929 & 0 \\ 0,9794 & 0,6046 & -0,0548 & -0,6558 & 0,9830 & 0,9341 & 0,5884 & 0,2220 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Составление системы нормальных уравнений коррелат.

Для формирования системы нормальных уравнений необходимо вычислить веса измерений. Веса определяются по формуле $P_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$.

Полигонометрический ход включает в себя разнородные измерения — углы и стороны. Предварительно точность измерений определяется, исходя из характеристик используемого тахеометра. Пусть среднее квадратическое отклонение измерения угла, которое обеспечивает тахеометр, равно 3", а среднее квадратическое отклонение измерения стороны равно 1 см ($\sigma_\beta=3''$, $\sigma_S=1$ см).

Будем считать, что все углы измерены равноточно, все стороны также измерены с одним и тем же средним квадратическим отклонением. Выберем в качестве эталонного измерения — измерение угла, т.е. $\sigma_0^2 = \sigma_\beta^2$. Отсюда веса измеренных значений углов примем равными единице, а веса измеренных значений сторон $P_S = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_S^2} = \frac{\sigma_\beta^2}{\sigma_S^2} = \frac{9}{1} = 9$.

Следовательно, диагональные элементы весовой матрицы результатов измерений $P=\{9 \ 9 \ 9 \ 9 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1\}$.

Матрица коэффициентов нормальных уравнений $\mathbf{N}=\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T$ —

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 5 & 0,0692 & 2,7275 \\ 0,0692 & 0,4167 & -0,1461 \\ 2,7275 & -0,1461 & 2,4296 \end{pmatrix}.$$

Вектор невязок

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} -3,70 \\ 2,78 \\ -2,48 \end{pmatrix}.$$

В обычной записи система нормальных уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} 5,000k_1+0,069k_2+2,728k_3-3,7&=0; \\ 0,069k_1+0,417k_2-0,146k_3+2,78&=0; \\ 2,728k_1-0,146k_2+2,430k_3-2,48&=0. \end{aligned}$$

5. Решение системы нормальных уравнений коррелат.

Для решения системы, в среде Matlab, вычислим

$$\mathbf{N}^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5541 & -0,3167 & -0,6410 \\ -0,3167 & 2,6326 & 0,5138 \\ -0,6410 & 0,5138 & 1,1621 \end{pmatrix}$$

и вектор коррелат

$$\mathbf{K} = -\mathbf{N}^{-1}\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 1,444 \\ -7,290 \\ -1,079 \end{pmatrix}.$$

6. Вычисление вектора поправок к результатам измерений и контроль вычисления поправок:

$$\mathbf{V} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K} = \begin{pmatrix} -0,28 \\ -0,72 \\ -0,80 \\ -0,53 \\ 2,48 \\ 0,80 \\ -0,74 \\ -0,20 \\ 1,44 \end{pmatrix}.$$

Выполним контроль решения условных уравнений поправок, используя равенство $\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V} = -\mathbf{W}^T \mathbf{K}$ или $[p\upsilon\upsilon] = -[wk]$. Результаты вычислений следующие: $[p\upsilon\upsilon] = 23,2$; $[wk] = -23,2$.

Следовательно, система условных уравнений поправок решена верно.

7. Вычисление уравниваемых значений измеренных величин приведено в табл. 3.25.

Т а б л и ц а 3.25

№ точки поворота	Измеренные значения левых углов поворота β	Поправки	Уравниваемые значения углов	Измеренные значения сторон	Поправки, см	Уравниваемые значения сторон
T1	137°35'46,8"	2,5	137°35'49,3"	501,028	-0,28	501,0254
1	138°49'51,6"	0,8	138°49'52,4"	895,105	-0,72	895,0980
2	139°39'41,2"	-0,7	139°39'40,5"	756,810	-0,80	756,8021
3	142°09'39,6"	-0,2	142°09'39,4"	606,670	-0,53	606,6647
T2	133°31'13,8"	1,4	133°31'15,2"			

8. Окончательный контроль уравнивания (табл. 3.26).

Т а б л и ц а 3.26

№ точки поворота	Дирекционные углы α , вычисленные по измеренным сторонам	Уравниваемые значения углов	Уравниваемые значения сторон S	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	Уравниваемые	
						ΔX	ΔY
T_3	120°46'19,5"						
T_1		137°35'49,3"					
	78°22'08,8"		501,0254	0,979465628	0,201611217	101,0097	490,7377
1		138°49'52,4"					
	37°12'01,2"		895,0980	0,604599501	0,796529625	712,9692	541,1796
2		139°39'40,5"					
	356°51'41,7"		756,8021	-0,054760713	0,998500133	755,6670	-41,4336
3		142°09'39,4"					
	319°01'21,1"		606,6647	-0,655762056	0,754967633	458,0121	-397,8278
T_2		133°31'15,2"			Сумма приращ	2027,658	592,6559
T_4	272°32'36,3"					2027,658	592,656
$\alpha_{\text{исх}}$	272°32'36,2"					$\omega_X = -0,000$	$\omega_Y = -0,000$

Максимальное отклонение от нуля равенств в уравнениях связи координатных условий равно 1.4 мм, что может быть вызвано

погрешностью вычислений. Вычисленный дирекционный угол конечной точки совпадает с твердым. Сеть уравнена.

9. Оценка точности.

Используя формулу Бесселя, вычислим среднюю квадратическую ошибку единицы веса, представляющую собой среднюю квадратическую

$$\text{ошибку измерения угла } \mu = m_p = \sqrt{\frac{\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V}}{r}} = \sqrt{\frac{23,14}{3}} = 2,8''.$$

Произведем оценку точности уравненных элементов сети – уравненных измерений, уравненного значения дирекционного угла второй стороны, и координат второго определяемого пункта. Начнем с оценки точности уравненных измерений. Для этого определим обратную весовую матрицу вектора уравненных измерений:

$$\mathbf{Q}_{\bar{y}} = \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,0935 & -0,0194 & -0,0119 & 0,0004 & -0,0258 & -0,0463 & -0,0288 & 0,0241 & 0,0769 \\ -0,0194 & 0,0791 & -0,0289 & -0,0134 & 0,0265 & -0,0311 & -0,0586 & -0,0079 & 0,0711 \\ -0,0119 & -0,0289 & 0,0794 & -0,0206 & 0,0652 & -0,0011 & -0,0597 & -0,0356 & 0,0312 \\ 0,0004 & -0,0134 & -0,0206 & 0,0927 & 0,0734 & 0,0278 & -0,0347 & -0,0463 & -0,0201 \\ -0,0258 & 0,0265 & 0,0652 & 0,0734 & 0,4742 & -0,3734 & -0,1021 & 0,0161 & -0,0149 \\ -0,0463 & -0,0311 & -0,0011 & 0,0278 & -0,3734 & 0,6392 & -0,2246 & -0,0704 & 0,0291 \\ -0,0288 & -0,0586 & -0,0597 & -0,0347 & -0,1021 & -0,2246 & 0,6847 & -0,2486 & -0,1094 \\ 0,0241 & -0,0079 & -0,0356 & -0,0463 & 0,0161 & -0,0704 & -0,2486 & 0,6535 & -0,3507 \\ 0,0769 & 0,0711 & 0,0312 & -0,0201 & -0,0149 & 0,0291 & -0,1094 & -0,3507 & 0,4459 \end{pmatrix}.$$

Корреляционная матрица

$$\mathbf{K}_{\bar{y}} = \mu^2 \mathbf{Q}_{\bar{y}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,7211 & -0,1498 & -0,0918 & 0,0032 & -0,1987 & -0,3574 & -0,2220 & 0,1855 & 0,5925 \\ -0,1498 & 0,6102 & -0,2230 & -0,1036 & 0,2044 & -0,2397 & -0,4516 & -0,0612 & 0,5481 \\ -0,0918 & -0,2230 & 0,6119 & -0,1588 & 0,5025 & -0,0087 & -0,4602 & -0,2744 & 0,2408 \\ 0,0032 & -0,1036 & -0,1588 & 0,7147 & 0,5661 & 0,2140 & -0,2679 & -0,3569 & -0,1553 \\ -0,1987 & 0,2044 & 0,5025 & 0,5661 & 3,6562 & -2,8786 & -0,7868 & 0,1243 & -0,1151 \\ -0,3574 & -0,2397 & -0,0087 & 0,2140 & -2,8786 & 4,9285 & -1,7316 & -0,5425 & 0,2242 \\ -0,2220 & -0,4516 & -0,4602 & -0,2679 & -0,7868 & -1,7316 & 5,2787 & -1,9167 & -0,8437 \\ 0,1855 & -0,0612 & -0,2744 & -0,3569 & 0,1243 & -0,5425 & -1,9167 & 5,0385 & -2,7036 \\ 0,5925 & 0,5481 & 0,2408 & -0,1553 & -0,1151 & 0,2242 & -0,8437 & -2,7036 & 3,4382 \end{pmatrix}$$

позволяет легко определить средние квадратические ошибки всех измерений. По главной диагонали здесь стоят квадраты средних квадратических ошибок измерений — сначала измеренных сторон (в см²), затем измеренных углов (в угл. с²).

Откуда, средние квадратические ошибки уравненных превышений равны:

$$\begin{aligned}
 m_{\bar{y}_1} &= m_{\bar{s}_1} = \sqrt{k_{11}} = \sqrt{0,72} = 0,85 \text{ см}; & m_{\bar{y}_2} &= m_{\bar{s}_2} = \sqrt{k_{22}} = \sqrt{0,61} = 0,78 \text{ см}; \\
 m_{\bar{y}_3} &= m_{\bar{s}_3} = \sqrt{k_{33}} = \sqrt{0,61} = 0,78 \text{ см}; & m_{\bar{y}_4} &= m_{\bar{s}_4} = \sqrt{k_{44}} = \sqrt{0,71} = 0,84 \text{ см}; \\
 m_{\bar{y}_5} &= m_{\bar{\beta}_1} = \sqrt{k_{55}} = \sqrt{3,66} = 1,9''; & m_{\bar{y}_6} &= m_{\bar{\beta}_2} = \sqrt{k_{66}} = \sqrt{4,93} = 2,2''; \\
 m_{\bar{y}_7} &= m_{\bar{\beta}_3} = \sqrt{k_{77}} = \sqrt{5,28} = 2,3''; & m_{\bar{y}_8} &= m_{\bar{\beta}_4} = \sqrt{k_{88}} = \sqrt{5,03} = 2,2''; \\
 m_{\bar{y}_9} &= m_{\bar{\beta}_5} = \sqrt{k_{99}} = \sqrt{3,44} = 1,8''.
 \end{aligned}$$

Как видим, точность уравненных значений углов примерно одинакова для всех значений. Она оказалась выше точности измеренных значений примерно на 25%. Средние квадратические ошибки уравненных сторон также примерно одинаковы.

Выполним оценку точности уравненных значений дирекционного угла второй стороны и координат второго пункта, которые расположены в середине хода — в «слабом» месте. Для оценки точности дирекционного угла и координат точки необходимо составить для них функции, аналогичные уравнениям связи:

$$\begin{aligned}
 \bar{F}_1 &= \bar{\alpha}_2 = \alpha_{T_1-T_3} + \beta_1 + \beta_2 - 180; \\
 \bar{F}_2 &= \bar{x}_2 = X_{T_2} + \bar{s}_1 \cos(\alpha_{T_1-T_3} + \bar{\beta}_1) + \bar{s}_2 \cos(\alpha_{T_1-T_3} + \bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2 - 180); \\
 \bar{F}_3 &= \bar{y}_2 = Y_{T_2} + \bar{s}_1 \sin(\alpha_{T_1-T_3} + \bar{\beta}_1) + \bar{s}_2 \sin(\alpha_{T_1-T_3} + \bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2 - 180).
 \end{aligned}$$

Приведем данные уравнения к линейному виду:

$$\begin{aligned}
 \Delta F_1 &= v_{\beta_1} + v_{\beta_2}; \\
 \Delta F_2 &= \cos \alpha_1 v_{S_1} + \cos \alpha_2 v_{S_2} - \frac{Y_2 - Y_{T_1}}{\rho''} v_{\beta_1} - \frac{Y_2 - Y_1}{\rho''} v_{\beta_2}; \\
 \Delta F_3 &= \sin \alpha_1 v_{S_1} + \sin \alpha_2 v_{S_2} + \frac{X_2 - X_{T_1}}{\rho''} v_{\beta_1} + \frac{X_2 - X_1}{\rho''} v_{\beta_2}.
 \end{aligned}$$

Откуда матрица коэффициентов данных уравнений имеет вид

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & 0 & 0 & -(Y_2 - Y_{T_1}) / \rho'' & -(Y_2 - Y_1) / \rho'' & 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha_1 & \sin \alpha_2 & 0 & 0 & (X_2 - X_{T_1}) / \rho'' & (X_2 - X_1) / \rho'' & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

или в численном виде

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,20 & 0,80 & 0 & 0 & -0,50 & -0,26 & 0 & 0 & 0 \\ 0,98 & 0,60 & 0 & 0 & 0,39 & 0,35 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обратная весовая матрица вектора функций

$$\mathbf{Q}_{\bar{F}} = \mathbf{f}\mathbf{Q}_y\mathbf{f}^T = \mathbf{f}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{f}^T - \mathbf{f}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{f}^T = \begin{pmatrix} 0,367 & -0,138 & 0,059 \\ -0,138 & 0,115 & 0,007 \\ 0,059 & 0,007 & 0,092 \end{pmatrix}.$$

Корреляционная матрица вектора функций

$$\mathbf{K}_{\bar{F}} = \mu^2\mathbf{Q}_{\bar{F}} = 7,7 \begin{pmatrix} 0,367 & -0,138 & 0,059 \\ -0,138 & 0,115 & 0,007 \\ 0,059 & 0,007 & 0,092 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,82 & -1,06 & 0,45 \\ -1,06 & 0,88 & 0,05 \\ 0,45 & 0,05 & 0,71 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, средняя квадратическая ошибка уравненного значения дирекционного угла второй стороны $m_{\bar{F}_1} = m_{\alpha_2} = \sqrt{2,82} = 1,7''$.

Средние квадратические ошибки координат второго пункта

$$m_{\bar{F}_2} = m_{\bar{x}_2} = \sqrt{0,88} = 0,94 \text{ см}; \quad m_{\bar{F}_3} = m_{\bar{y}_2} = \sqrt{0,71} = 0,84 \text{ см}.$$

Средняя квадратическая ошибка положения второго пункта

$$m_2 = \sqrt{m_{\bar{x}_2}^2 + m_{\bar{y}_2}^2} = 1,26 \text{ см}.$$

§3.4. Двухгрупповое уравнивание

Общая теория двухгруппового способа уравнивания.

Способ Крюгера

При уравнивании обширных геодезических сетей число совместно решаемых нормальных уравнений может быть значительным. В этом случае систему нормальных уравнений разделяют на две или более независимых систем нормальных уравнений, с меньшим числом уравнений в каждой группе. Такие способы уравнивания называют многогрупповыми. Частным случаем многогруппового способа уравнивания является двухгрупповое. Двухгрупповые и многогрупповые способы могут использоваться при параметрическом и при коррелятном способе уравнивания. Рассмотрим общую теорию двухгруппового уравнивания для коррелятного

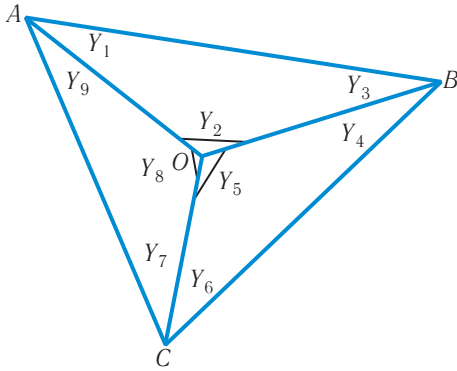


Рис. 3.34. Полусное условие в центральной фигуре

способа (способ Крюгера) на примере центральной фигуры (рис. 3.34).

В такой сети возникают пять условных уравнения связи — три условия фигур, условие горизонта и одно полюсное уравнение:

$$\begin{aligned} Y_1 + Y_2 + Y_3 - 180 &= 0; \\ Y_4 + Y_5 + Y_6 - 180 &= 0; \\ Y_7 + Y_8 + Y_9 - 180 &= 0; \\ Y_2 + Y_5 + Y_8 - 360 &= 0; \\ \ln \frac{\sin Y_1 \sin Y_4 \sin Y_7}{\sin Y_3 \sin Y_6 \sin Y_9} &= 0, \end{aligned}$$

которые приводят к следующим условным уравнениям поправок:

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 + v_3 + \omega_1 &= 0; \\ v_4 + v_5 + v_6 + \omega_2 &= 0; \\ v_7 + v_8 + v_9 + \omega_3 &= 0; \\ v_2 + v_5 + v_8 + \omega_4 &= 0; \end{aligned} \tag{3.52}$$

$$\Delta_1 v_1 - \Delta_3 v_3 + \Delta_4 v_4 - \Delta_6 v_6 + \Delta_7 v_7 - \Delta_9 v_9 + \omega_5 = 0.$$

В матричном виде система (3.52) имеет вид $\mathbf{BV} + \mathbf{W} = 0$.

Разобьем эту систему на две части

$$\mathbf{B}_1 \mathbf{V} + \mathbf{W}_1 = 0;$$

$$\mathbf{B}_2 \mathbf{V} + \mathbf{W}_2 = 0.$$

В первую часть войдут три условных уравнения фигур (в дальнейшем будем называть условные уравнения первой группы), во вторую — условие горизонта и полюсное условие (условные уравнения второй группы). В общем случае, в первой группе будет r_1 уравнений, во второй — r_2 уравнений, при этом $r = r_1 + r_2$. В нашем случае $r_1 = 3$ и $r_2 = 2$.

Коэффициенты первых трех уравнений поправок образуют матрицу

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

коэффициенты двух остальных уравнений поправок, входящих во вторую часть — матрицу

$$\mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \Delta_1 & 0 & -\Delta_3 & \Delta_4 & 0 & -\Delta_6 & \Delta_7 & 0 & -\Delta_9 \end{pmatrix}.$$

Векторы невязок, соответственно, равны

$$\mathbf{W}_1 = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{W}_2 = \begin{pmatrix} \omega_4 \\ \omega_5 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в блочном виде система условных уравнений поправок может быть записана следующим образом:

$$\mathbf{B}\mathbf{V} + \mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{pmatrix} \mathbf{V} + \begin{pmatrix} \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{W}_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Определим вид матрицы коэффициентов нормальных уравнений через матрицы \mathbf{B}_1 и \mathbf{B}_2 :

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1^T & \mathbf{B}_2^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}_1^T & \mathbf{B}_1\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}_2^T \\ \mathbf{B}_2\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}_1^T & \mathbf{B}_2\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}_2^T \end{pmatrix}.$$

Следовательно, система нормальных уравнений в блочном виде примет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}\mathbf{K} + \mathbf{W} &= \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}_1^T & \mathbf{B}_1\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}_2^T \\ \mathbf{B}_2\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}_1^T & \mathbf{B}_2\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{K}_1 \\ \mathbf{K}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{W}_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{N}_{11} & \mathbf{N}_{12} \\ \mathbf{N}_{21} & \mathbf{N}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{K}_1 \\ \mathbf{K}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{W}_2 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{11}\mathbf{K}_1 + \mathbf{N}_{12}\mathbf{K}_2 + \mathbf{W}_1 &= 0; \\ \mathbf{N}_{21}\mathbf{K}_1 + \mathbf{N}_{22}\mathbf{K}_2 + \mathbf{W}_2 &= 0, \end{aligned} \tag{3.53}$$

где $\mathbf{N}_{12} = \mathbf{B}_1\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}_2^T = (\mathbf{B}_2\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}_1^T)^T = \mathbf{N}_{21}^T$.

Если путем эквивалентных преобразований добиться того, чтобы $\mathbf{N}_{12}=0$, то система (3.53) примет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{11}\mathbf{K}_1 + \mathbf{W}_1 &= 0; \\ \mathbf{N}_{22}\mathbf{K}_2 + \mathbf{W}_2 &= 0. \end{aligned} \tag{3.54}$$

Получились две независимые системы уравнений, размерности которых равны r_1 и r_2 . Решить такие две системы значительно проще, чем одну систему (3.53), размерность которой $r=r_1+r_2$. Условие $\mathbf{N}_{12} = \mathbf{N}_{21}^T = 0$ называют условием независимости двух групп уравнений (3.54).

Рассмотрим алгоритм преобразования системы $\mathbf{B}\mathbf{V}+\mathbf{W}=0$ в две независимые системы уравнений

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_1\mathbf{V}+\mathbf{W}_1&=0; \\ \mathbf{B}_2\mathbf{V}+\mathbf{W}_2&=0.\end{aligned}$$

Сделаем эквивалентные преобразования данной системы, умножив первую группу уравнений на некоторый вектор ρ^T , который пока неизвестен. Сложим результат со второй группой условных уравнений связи, получим

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_1\mathbf{V}+\mathbf{W}_1&=0; \\ (\mathbf{B}_2+\rho^T\mathbf{B}_1)\mathbf{V}+(\mathbf{W}_2+\rho^T\mathbf{W}_1)&=0.\end{aligned}$$

Обозначим $\overline{\mathbf{B}}_2 = (\mathbf{B}_2 + \rho^T\mathbf{B}_1)$ и $\overline{\mathbf{W}}_2 = (\mathbf{W}_2 + \rho^T\mathbf{W}_1)$.

В этом случае систему условных уравнений поправок можно записать в виде

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_1\mathbf{V} + \mathbf{W}_1 &= 0; \\ \overline{\mathbf{B}}_2\mathbf{V} + \overline{\mathbf{W}}_2 &= 0.\end{aligned}$$

Вторую систему называют преобразованной системой условных уравнений поправок второй группы. Но коэффициенты этой системы неизвестны, т.к. неизвестен вектор ρ . Определим его под условием независимости двух групп $\overline{\mathbf{N}}_{12} = 0$. Это означает, что

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{N}}_{12} &= \mathbf{B}_1\mathbf{P}^{-1}\overline{\mathbf{B}}_2^T = \mathbf{B}_1\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{B}_2 + \rho^T\mathbf{B}_1)^T = \\ &= \mathbf{B}_1\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}_2^T + \mathbf{B}_1\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}_1^T\rho = \mathbf{N}_{11}\rho + \mathbf{N}_{12} = 0,\end{aligned}$$

отсюда,

$$\rho = -\mathbf{N}_{11}^{-1}\mathbf{N}_{12}. \quad (3.55)$$

Таким образом, если вектор ρ вычислить по формуле (3.55), то выполнится условие независимости двух групп и система нормальных уравнений распадется на две независимые системы

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_{11}\mathbf{K}_1 + \mathbf{W}_1 &= 0; \\ \overline{\mathbf{N}}_{22}\mathbf{K}_2 + \overline{\mathbf{W}}_2 &= 0,\end{aligned}$$

из которых определяются вектор коррелат, относящийся к первой группе условий $\mathbf{K}_1 = -\mathbf{N}_{11}^{-1}\mathbf{W}_1$, и вектор коррелат второй группы $\mathbf{K}_2 = \bar{\mathbf{N}}_{22}^{-1}\bar{\mathbf{W}}_2$.

Теперь легко определить вектор поправок, как сумму поправок за условия первой группы V' (первичные поправки) и условия второй группы V'' (вторичные поправки)

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K} = \mathbf{P}^{-1}\begin{pmatrix} \mathbf{B}_1^T & \bar{\mathbf{B}}_2^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{K}_1 \\ \mathbf{K}_2 \end{pmatrix} = \\ &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}_1^T\mathbf{K}_1 + \mathbf{P}^{-1}\bar{\mathbf{B}}_2^T\mathbf{K}_2 = \mathbf{V}' + \mathbf{V}''.\end{aligned}\quad (3.56)$$

Исходя из вышеизложенного, можно написать следующую последовательность уравнивания двухгрупповым способом — способом Крюгера.

1. Определение общего числа измерений n , числа необходимых k и избыточных измерений r .

2. Составление системы условных уравнений связи $\overline{\varphi(Y)} = 0$.

3. Составление системы условных уравнений поправок $\mathbf{BV} + \mathbf{W} = 0$.

4. Разделение системы условных уравнений поправок на две группы: $\mathbf{B}_1\mathbf{V} + \mathbf{W}_1 = 0$ — с числом уравнений r_1 и $\mathbf{B}_2\mathbf{V} + \mathbf{W}_2 = 0$ — с числом уравнений r_2 , где $r = r_1 + r_2$.

5. Составление и решение системы нормальных уравнений первой группы: $\mathbf{N}_{11}\mathbf{K}_1 + \bar{\mathbf{W}}_1 = 0$, откуда, $\mathbf{K}_1 = -\mathbf{N}_{11}^{-1}\mathbf{W}_1$.

6. Вычисление вектора первичных поправок $\mathbf{V}' = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}_1^T\mathbf{K}_1$.

7. Вычисление вектора предварительно уравненных за условия первой группы измерений $y' = y + V'$.

8. Вычисление матрицы преобразованных коэффициентов уравнений поправок второй группы $\bar{\mathbf{B}}_2 = \mathbf{B}_2 + \rho^T\mathbf{B}_1$ и вектора преобразованных невязок второй группы $\bar{\mathbf{W}}_2 = \mathbf{W}_2 + \rho^T\mathbf{W}_1$, где $\rho = -\mathbf{N}_{11}^{-1}\mathbf{N}_{12}$.

9. Составление и решение системы нормальных уравнений второй группы $\bar{\mathbf{N}}_{22}\mathbf{K}_2 + \bar{\mathbf{W}}_2 = 0$, откуда, $\mathbf{K}_2 = -\bar{\mathbf{N}}_{22}^{-1}\bar{\mathbf{W}}_2$.

10. Вычисление вторичных поправок $\mathbf{V}'' = \mathbf{P}^{-1}\bar{\mathbf{B}}_2^T\mathbf{K}_2$ и уравненных измерений $\bar{y} = y' + V''$.

11. Окончательный контроль уравнивания $\overline{\varphi(\bar{y})} = 0$.

12. Оценка точности.

Заметим, что предварительно уравненные значения измеряемых величин y' должны удовлетворять равенствам в уравнениях связи, входящих в первую группу условий $\overline{\varphi_1(y')} = 0$. Поэтому, если невязки второй группы условий вычислять, используя предварительно уравненные углы $\overline{W_2} = \overline{\varphi_2(y')}$, то $\overline{W_1} = \overline{\varphi_1(y')} = 0$. Отсюда, $\overline{W_2} = \mathbf{W}_2 + \rho^T \mathbf{W}_1 = \mathbf{W}_2 = \overline{\varphi_2(y')}$.

3.4.2. Оценка точности в способе Крюгера

Рассмотрим квадратичную форму, которая используется в формуле Бесселя

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V} &= (\mathbf{V}' + \mathbf{V}'')^T \mathbf{P} (\mathbf{V}' + \mathbf{V}'') = \\ &= \mathbf{V}'^T \mathbf{P} \mathbf{V}' + \mathbf{V}'^T \mathbf{P} \mathbf{V}'' + \mathbf{V}''^T \mathbf{P} \mathbf{V}' + \mathbf{V}''^T \mathbf{P} \mathbf{V}'' = \\ &= [p v' v'] + [p v' v''] + [p v'' v'] + [p v'' v''] = [p v v], \end{aligned}$$

здесь $\mathbf{V}'^T \mathbf{P} \mathbf{V}'' = \mathbf{K}_1^T \mathbf{B}_1 \mathbf{P}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{P}^{-1} \overline{\mathbf{B}}_2^T \mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_1^T \overline{\mathbf{N}}_{12} \mathbf{K}_2 = 0$.

Очевидно, что и $\mathbf{V}''^T \mathbf{P} \mathbf{V}' = \mathbf{K}_2^T \overline{\mathbf{N}}_{21} \mathbf{K}_1 = 0$.

Таким образом,

$$\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V}' = \mathbf{V}'^T \mathbf{P} \mathbf{V}' + \mathbf{V}''^T \mathbf{P} \mathbf{V}' = [p v' v'] + [p v'' v''] = [p v v].$$

Следовательно, формула Бесселя для определения средней квадратической ошибки единицы веса может быть записана в следующем виде

$$\mu = \sqrt{\frac{[p v v]}{r}} = \sqrt{\frac{[p v' v'] + [p v'' v'']}{r_1 + r_2}}.$$

Рассмотрим оценку точности функций для двухгруппового уравнивания. Пусть требуется выполнить оценку точности функции $\overline{F(\bar{y})} = 0$. Разложим ее в ряд Тэйлора $f v + \Delta F = 0$, где $\Delta F = F(\bar{y}) - F(y)$.

Припишем данную систему функций к системе уравнений поправок первой группы $\mathbf{B}_1 \mathbf{V} + \mathbf{W}_1 = 0$; $\mathbf{f} \mathbf{V} + \Delta \mathbf{F} = 0$. Будем рассматривать систему функций как уравнения второй группы и выполним эквивалентные преобразования под условием независимости, аналогичные тем, которые выполняли для второй группы условий.

Умножим систему условных уравнений первой группы на вектор ρ^T и сложим результат с системой функций (в данном случае,

играющей роль второй группы условных уравнений связи). Получим $\rho^T(\mathbf{B}_1\mathbf{V}+\mathbf{W}_1)+\mathbf{f}\mathbf{V}+\Delta\mathbf{F}=0$.

Раскроем скобки и получим матрицу коэффициентов при \mathbf{V} $(\mathbf{f}+\rho^T\mathbf{B}_1)\mathbf{V}+\Delta\mathbf{F}+\rho^T\mathbf{W}_1=0$. Здесь $\bar{\mathbf{f}} = (\mathbf{f} + \rho^T\mathbf{B}_1)$ можно рассматривать, как преобразованную матрицу коэффициентов второй группы. Вычислим вектор ρ под условием независимости двух групп — $\mathbf{B}_1\bar{\mathbf{f}}^T = 0$ или $\mathbf{B}_1(\mathbf{f} + \rho^T\mathbf{B}_1)^T = \mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^T\rho + \mathbf{B}_1\mathbf{f}^T = \mathbf{N}_{11}^{-1}\rho + \mathbf{B}_1\mathbf{f}^T = 0$, отсюда $\rho = -\mathbf{N}_{11}^{-1}\mathbf{B}_1\mathbf{f}^T$.

Для случая неравноточных измерений условие независимости будет иметь вид $\mathbf{B}_1\mathbf{P}^{-1}\bar{\mathbf{f}}^T = 0$ и $\rho = -\mathbf{N}_{11}^{-1}\mathbf{B}_1\mathbf{P}^{-1}\bar{\mathbf{f}}^T$.

Ранее была выведена формула для обратной весовой матрицы вектора функций от уравненных значений измеряемых величин для коррелятного способа уравнивания $\mathbf{Q}_F = \mathbf{f}\mathbf{P}^{-1}\bar{\mathbf{f}}^T - \mathbf{f}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}\bar{\mathbf{f}}^T$.

Запишем эту формулу с преобразованными коэффициентами $\bar{\mathbf{f}}$. Так как преобразования эквивалентные, то вид формулы не изменится $\mathbf{Q}_F = \bar{\mathbf{f}}\mathbf{P}^{-1}\bar{\mathbf{f}}^T - \bar{\mathbf{f}}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}\bar{\mathbf{f}}^T$.

Отдельно рассмотрим произведение $\mathbf{B}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{B}$, стоящее внутри второго слагаемого, с учетом преобразованных матриц \mathbf{B}_2 и $\bar{\mathbf{f}}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{B} &= \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1^T & \bar{\mathbf{B}}_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{N}_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{N}}_{22}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \bar{\mathbf{B}}_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1^T\mathbf{N}_{11}^{-1} & \bar{\mathbf{B}}_2^T\bar{\mathbf{N}}_{22}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \bar{\mathbf{B}}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{B}_1^T\mathbf{N}_{11}^{-1}\mathbf{B}_1 + \bar{\mathbf{B}}_2^T\bar{\mathbf{N}}_{22}^{-1}\bar{\mathbf{B}}_2.\end{aligned}$$

Подставим в формулу для обратной весовой матрицы полученный результат

$$\mathbf{Q}_F = \bar{\mathbf{f}}\mathbf{P}^{-1}\bar{\mathbf{f}}^T - \bar{\mathbf{f}}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}_1^T\mathbf{N}_{11}^{-1}\mathbf{B}_1\mathbf{P}^{-1}\bar{\mathbf{f}}^T - \bar{\mathbf{f}}\mathbf{P}^{-1}\bar{\mathbf{B}}_2^T\bar{\mathbf{N}}_{22}^{-1}\bar{\mathbf{B}}_2\mathbf{P}^{-1}\bar{\mathbf{f}}^T.$$

Во второе слагаемое входит произведение $\mathbf{B}_1\mathbf{P}^{-1}\bar{\mathbf{f}}^T$, которое в соответствии с условием независимости двух групп равно нулю. Следовательно, все второе слагаемое равно нулю. И, окончательно

$$\mathbf{Q}_F = \bar{\mathbf{f}}\mathbf{P}^{-1}\bar{\mathbf{f}}^T - \bar{\mathbf{f}}\mathbf{P}^{-1}\bar{\mathbf{B}}_2^T\bar{\mathbf{N}}_{22}^{-1}\bar{\mathbf{B}}_2\mathbf{P}^{-1}\bar{\mathbf{f}}^T. \quad (3.57)$$

Таким образом, обратная весовая матрица определяется с использованием только коэффициентов преобразованных уравнений поправок второй группы и преобразованных коэффициентов функций от измеряемых величин. Коэффициенты первой группы уча-

ствуют в преобразовании коэффициентов второй группы и таким образом влияют на элементы обратной весовой матрицы функций.

Способ Крюгера–Урмаева

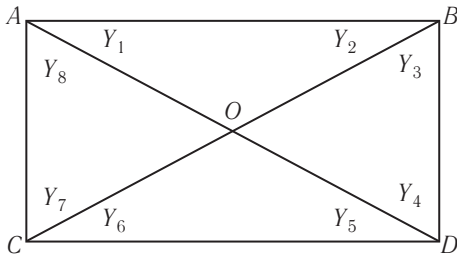


Рис. 3.35. Полусное условие в геодезическом четырехугольнике

только условия фигур, причем таких, которые не имеют общих углов. Например, в геодезическом четырехугольнике, изображенном на рис. 3.35 возникает два таких условия.

Если рассматривать не пересекающиеся треугольники, то они не имеют общих углов. Например, для треугольников ABC и BCD условия фигур $Y_1+Y_2+Y_7+Y_8-180^\circ=0$ и $Y_3+Y_4+Y_5+Y_6-180^\circ=0$ не имеют общих углов. Все остальные условия относят ко второй группе условных уравнений. Например, треугольник ABD пересекает эти два треугольника и имеет общие с ними углы. Условие фигур такого треугольника $Y_1+Y_2+Y_3+Y_4-180^\circ=0$. В способе Крюгера–Урмаева

это условие, как и условие полюса $\ln \frac{\sin Y_1 \sin Y_3 \sin Y_5 \sin Y_7}{\sin Y_2 \sin Y_4 \sin Y_6 \sin Y_8} = 0$

необходимо отнести ко второй группе условий.

В центральной фигуре (см. рис. 3.34), все три условия фигур, как и в способе Крюгера, следует отнести к первой группе условий.

Во вторую группу войдут условие горизонта и полусное условие.

Предложения Урмаева по выбору условий первой группы значительно упрощают ее решение. Рассмотрим решение первой группы условий для центральной фигуры, представленной на рис. 3.34.

Способ Крюгера может быть использован для любых конфигураций геодезических сетей. Способ Крюгера–Урмаева учитывает особенности триангуляции и предназначен только для сетей триангуляции. Урмаев предложил в первую группу условных уравнений связи относить только

Ранее была получена матрица коэффициентов уравнений поправок первой группы

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица коэффициентов нормальных уравнений имеет вид

$$\mathbf{N}_{11} = \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, когда условия фигур, входящих в первую группу условий, не имеют общих углов, матрица коэффициентов нормальных уравнений имеет диагональный вид. Понятно, что система нормальных уравнений распадается на три независимых уравнения:

$$3k_1 + \omega_1 = 0$$

$$3k_2 + \omega_2 = 0$$

$$3k_3 + \omega_3 = 0.$$

Решим эту систему, отдельно определяя каждую коррелату из соответствующего уравнения $k_1 = -\omega_1/3$, $k_2 = -\omega_2/3$, $k_3 = -\omega_3/3$.

Определим первичные поправки по коррелятным уравнениям поправок

$$\mathbf{V}' = \mathbf{B}_1^T \mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-\omega_1}{3} \\ \frac{-\omega_1}{3} \\ \frac{-\omega_1}{3} \\ \frac{-\omega_2}{3} \\ \frac{-\omega_2}{3} \\ \frac{-\omega_2}{3} \\ \frac{-\omega_3}{3} \\ \frac{-\omega_3}{3} \\ \frac{-\omega_3}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\omega_1}{3} \\ \frac{-\omega_1}{3} \\ \frac{-\omega_1}{3} \\ \frac{-\omega_2}{3} \\ \frac{-\omega_2}{3} \\ \frac{-\omega_2}{3} \\ \frac{-\omega_2}{3} \\ \frac{-\omega_3}{3} \\ \frac{-\omega_3}{3} \\ \frac{-\omega_3}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \\ v'_4 \\ v'_5 \\ v'_6 \\ v'_7 \\ v'_8 \\ v'_9 \end{pmatrix}.$$

Мы показали, что решение условных уравнений связи первой группы, при условии, что сюда включены условия фигур непересекающихся треугольников, сводится к распределению невязок j -го треугольника поровну на все его углы. Это значительно упрощает вычисления в способе Крюгера–Урмаева.

Перейдем ко второй группе условных уравнений поправок. Преобразование коэффициентов второй группы, в способе Крюгера, выполняется следующим образом: $\bar{\mathbf{B}}_2 = \mathbf{B}_2 + \rho^T \mathbf{B}_1$, где $\rho = -\mathbf{N}_{11}^{-1} \mathbf{N}_{12}$.

Далее

$$\bar{\mathbf{B}}_2 = \mathbf{B}_2 + \rho^T \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 - \mathbf{N}_{12}^T \mathbf{N}_{11}^{-1} \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_1^T \mathbf{N}_{11}^{-1} \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 (\mathbf{E} - \mathbf{B}_1^T \mathbf{N}_{11}^{-1} \mathbf{B}_1).$$

Ранее было показано, что

$$\mathbf{Q}_{\bar{y}} = \mathbf{E} - \mathbf{B}_1^T \mathbf{N}_{11}^{-1} \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

есть обратная весовая матрица уравненных углов в отдельном треугольнике. В данном случае она относится только к условиям первой группы, поэтому $\mathbf{Q}_{\bar{y}} = \mathbf{E} - \mathbf{B}_1^T \mathbf{N}_{11}^{-1} \mathbf{B}_1$ и $\bar{\mathbf{B}}_2 = \mathbf{B}_2 \mathbf{Q}_{\bar{y}}$.

Пусть во вторую группу условий входят два уравнения поправок. Матрица \mathbf{B}_2 , в общем случае имеет вид

$$\mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 & \alpha_8 & \alpha_9 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 & \beta_7 & \beta_8 & \beta_9 \end{pmatrix}.$$

В общем случае матрица преобразованных коэффициентов второй группы имеет вид

$$\bar{\mathbf{B}}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 & \alpha_8 & \alpha_9 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 & \beta_7 & \beta_8 & \beta_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{y'_1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_{y'_2} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{Q}_{y'_3} \end{pmatrix}.$$

Здесь $\mathbf{Q}_{y'_j}$ — обратная весовая матрица предварительно уравненных (за условия первой группы) углов для j -го треугольника

$$\bar{\mathbf{B}}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 & \alpha_8 & \alpha_9 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 & \beta_7 & \beta_8 & \beta_9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/3 & -1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Произведя перемножение данных матриц и обозначив преобразованные коэффициенты через латинские буквы с чертой, получим:

$$\begin{pmatrix} \bar{\alpha}_1 & \bar{\alpha}_2 & \bar{\alpha}_3 \\ \bar{\beta}_1 & \bar{\beta}_2 & \bar{\beta}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3}{3} & \frac{-\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3}{3} & \frac{-\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3}{3} \\ \frac{2\beta_1 - \beta_2 - \beta_3}{3} & \frac{-\beta_1 + 2\beta_2 - \beta_3}{3} & \frac{-\beta_1 - \beta_2 + 2\beta_3}{3} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \bar{\alpha}_4 & \bar{\alpha}_5 & \bar{\alpha}_6 \\ \bar{\beta}_4 & \bar{\beta}_5 & \bar{\beta}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 \\ \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2\alpha_4 - \alpha_5 - \alpha_6}{3} & \frac{-\alpha_4 + 2\alpha_5 - \alpha_6}{3} & \frac{-\alpha_4 - \alpha_5 + 2\alpha_6}{3} \\ \frac{2\beta_4 - \beta_5 - \beta_6}{3} & \frac{-\beta_4 + 2\beta_5 - \beta_6}{3} & \frac{-\beta_4 - \beta_5 + 2\beta_6}{3} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \bar{\alpha}_7 & \bar{\alpha}_8 & \bar{\alpha}_9 \\ \bar{\beta}_7 & \bar{\beta}_8 & \bar{\beta}_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_7 & \alpha_8 & \alpha_9 \\ \beta_7 & \beta_8 & \beta_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2\alpha_7 - \alpha_8 - \alpha_9}{3} & \frac{-\alpha_7 + 2\alpha_8 - \alpha_9}{3} & \frac{-\alpha_7 - \alpha_8 + 2\alpha_9}{3} \\ \frac{2\beta_7 - \beta_8 - \beta_9}{3} & \frac{-\beta_7 + 2\beta_8 - \beta_9}{3} & \frac{-\beta_7 - \beta_8 + 2\beta_9}{3} \end{pmatrix}.$$

Полученные результаты можно преобразовать следующим образом:

$$\bar{\alpha}_1 = \frac{2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3}{3} = \alpha_1 - \frac{-\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3}{3} = \alpha_1 - \frac{\sum_{i \in j} \alpha_i}{3};$$

$$\bar{\beta}_1 = \frac{2\beta_1 - \beta_2 - \beta_3}{3} = \beta_1 - \frac{-\beta_1 - \beta_2 - \beta_3}{3} = \beta_1 - \frac{\sum_{i \in j} \beta_i}{3}.$$

Аналогично, можно записать и другие преобразованные коэффициенты условий второй группы. В общем виде

$$\bar{\alpha}_k^j = \alpha_k^j - \frac{\sum_{i \in j} \alpha_i}{3}; \quad \bar{\beta}_k^j = \beta_k^j - \frac{\sum_{i \in j} \beta_i}{3}.$$

Т.е. преобразование происходит отдельно по первому, второму, третьему углу (первый треугольник). Отдельно по четвертому, пятому и шестому углу (второй треугольник). И, наконец, по седьмому, восьмому и девятому углу (третий треугольник). Здесь j — номер треугольника, входящего в первую группу условий; k — текущий номер угла, т.е. преобразованные коэффициенты вычисляются как отклонение непреобразованного коэффициента от среднего арифметического из непреобразованных коэффициентов, относящихся к j -му треугольнику. Как было доказано ранее, сумма отклонений от среднего арифметического должна быть равна нулю. Следовательно, вычисления преобразованных коэффициентов можно контролировать. Сумма трех преобразованных коэффициентов по каждому j -му треугольнику должна равняться нулю.

Окончательно, преобразованная матрица коэффициентов второй группы

$$\bar{\mathbf{B}}_2 = \begin{pmatrix} \bar{\alpha}_1 & \bar{\alpha}_2 & \bar{\alpha}_3 & \bar{\alpha}_4 & \bar{\alpha}_5 & \bar{\alpha}_6 & \bar{\alpha}_7 & \bar{\alpha}_8 & \bar{\alpha}_9 \\ \bar{\beta}_1 & \bar{\beta}_2 & \bar{\beta}_3 & \bar{\beta}_4 & \bar{\beta}_5 & \bar{\beta}_6 & \bar{\beta}_7 & \bar{\beta}_8 & \bar{\beta}_9 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в отличие от способа Крюгера в способе Крюгера—Урмаева для вычислений преобразованных коэффициентов не потребовалось находить вектор ρ , что значительно упростило вычислительный процесс.

Далее последовательность уравнивания совпадает с последовательностью вычислений в способе Крюгера. Зная преобразованную матрицу коэффициентов уравнений поправок второй группы, составляют и решают систему нормальных уравнений второй группы $\bar{\mathbf{N}}_{22} \bar{\mathbf{K}}_2 + \mathbf{W}_2 = 0$ и $\bar{\mathbf{K}}_2 = -\bar{\mathbf{N}}_{22}^{-1} \mathbf{W}_2$.

Далее вычисляют вторичные поправки $\mathbf{V}'' = \bar{\mathbf{B}}_2^T \bar{\mathbf{K}}_2$ и уравненные значения углов $\hat{y} = y' + \mathbf{V}''$.

Контрольные вопросы

1. В чем суть двухгруппового уравнивания?
2. Каким образом система условных уравнений поправок делится на две группы?
3. Запишите условие независимости двух групп.
4. Какова последовательность уравнивания в двухгрупповом способе Крюгера?
5. Как вычисляется средняя квадратическая ошибка единицы веса в двухгрупповом способе?
6. Как формируются условия первой группы в способе Крюгера–Урмаева?
7. Какие условия относятся к первой группе в геодезическом четырехугольнике в способе Крюгера–Урмаева?
8. Какие условия относятся к первой группе в центральной фигуре в способе Крюгера–Урмаева?
9. Запишите условные уравнения связи и поправок первой и второй групп для геодезического четырехугольника.
10. Как вычисляются коэффициенты преобразованных уравнений второй группы в способе Крюгера–Урмаева?
11. Как производится оценка точности уравненных значений функций от измеряемых величин при двухгрупповом уравнивании (способ Крюгера)?
12. Как вычисляются первичные поправки и предварительно уравненные, за условия первой группы, значения измеренных величин в способе Крюгера и Крюгера–Урмаева?
13. Как вычисляются вторичные поправки и уравненные значения измеренных величин?
14. Как выполнить окончательный контроль уравнивания при двухгрупповом уравнивании?

Задачи с решениями

№ угла	Угол u_i
1	46°23'07,0"
2	68°58'21,5"
3	38°40'06,5"
4	25°58'23,5"
5	22°34'43,7"
6	92°46'51,9"
7	46°37'48,3"
8	18°00'39,4"

Задача. Уравнять и произвести оценку точности сети, изображенной на рис. 3.35 двухгрупповым способом Крюгера–Урмаева. Произвести оценку точности стороны CD после уравнивания, если сторона AB является исходной и равна 1240,120 м. Измеренные значения углов даны в таблице.

Решение.

Данная сеть была уравнена в §3.3 коррелятным способом. Уравняем эту сеть способом Крюгера–Урмаева.

1. Число всех измерений $n=8$, $k=4$ (определяемые пункты C и D), $r=n-k=4$. Составление условных уравнений связи. В геодезическом четырехугольнике возникают четыре условных уравнения связи — три условия фигур и одно полюсное условное уравнение:

$$\begin{aligned} Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 - 180 &= 0; \\ Y_5 + Y_6 + Y_7 + Y_8 - 180 &= 0; \\ Y_1 + Y_2 + Y_7 + Y_8 - 180 &= 0; \\ \ln \frac{\sin Y_1 \sin Y_3 \sin Y_5 \sin Y_7}{\sin Y_2 \sin Y_4 \sin Y_6 \sin Y_8} &= 0. \end{aligned}$$

2. Составление условных уравнений поправок. Общий вид условных уравнений поправок для полученных уравнений связи следующий

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + w_1 &= 0; \\ v_5 + v_6 + v_7 + v_8 + w_2 &= 0; \\ v_1 + v_2 + v_7 + v_8 + w_3 &= 0; \\ \Delta_1 v_1 - \Delta_2 v_2 + \Delta_3 v_3 - \Delta_4 v_4 + \Delta_5 v_5 - \Delta_6 v_6 + \Delta_7 v_7 - \Delta_8 v_8 + w_4 &= 0. \end{aligned}$$

В способе Крюгера—Урмаева в первую группу относят условия фигур непересекающихся (не имеющих общих углов) треугольников. Первые два условия фигур не имеют общих углов, поэтому эти условия отнесем к первой группе условий, остальные два условия — фигуры и полюсное — ко второй группе.

3. Решение первой группы условных уравнений поправок табл. 3.27.

Т а б л и ц а 3.27

№ треугольника	№ угла	Измеренные углы y_i	V'	$y'_i = y_i + v'_i$
1	1	46°23'07,0"	+0,3	46°23'07,3"
	2	68°58'21,5"	+0,4	68°58'21,9"
	3	38°40'06,5"	+0,4	38°40'06,9"
	4	25°58'23,5"	+0,4	25°58'23,9"
	$\Sigma =$	179°59'58,5"	$\Sigma =$	180°00'00,0"
	$w_1 =$	-1,5"		
2	5	22°34'43,7"	-0,8	22°34'42,9"
	6	92°46'51,9"	-0,8	92°46'51,1"
	7	46°37'48,3"	-0,8	46°37'47,5"
	8	18°00'39,4"	-0,9	18°00'38,5"
	$\Sigma =$	180°00'03,3"	$\Sigma =$	180°00'00,0"
	$w_2 =$	+3,3"		

Здесь в треугольниках по четыре угла. Невязка распределена поровну на четыре угла.

4. Вычисление невязок в условных уравнениях поправок второй группы по предварительно исправленным углам. Вычисление невязки условия фигур приведено в табл. 3.28.

Т а б л и ц а 3.28

№ треугольника	№ угла	Углы, уравненные за условия первой группы, y'_i
1	1	46°23'07,3"
	2	68°58'21,9"
	7	46°37'47,5"
	8	18°00'38,5"
	$\Sigma=$	179°59'55,2"
	$\omega_3=$	-4,8"

Вычисление невязки полюсного условного уравнения связи выполним по формуле $\omega_4 = 10^5 \ln \frac{\sin y'_1 \sin y'_3 \sin y'_5 \sin y'_7}{\sin y'_2 \sin y'_4 \sin y'_6 \sin y'_8} = +8,506$.

5. Вычисление преобразованных коэффициентов уравнений поправок второй группы.

Непреобразованные уравнения второй группы имеют вид

$$v_1 + v_2 + v_7 + v_8 - 4,8 = 0;$$

$$0,462v_1 - 0,186v_2 + 0,606v_3 - 0,995v_4 + 1,166v_5 +$$

$$+ 0,024v_6 + 0,458v_7 - 1,491v_8 + 8,506 = 0.$$

Преобразование коэффициентов приведены в табл. 3.29.

Т а б л и ц а 3.29

№ треугольника условий фигур первой группы	№ угла	α_i	Преобразованные коэффициенты условия фигур $\bar{\alpha}_i = \alpha_i - \alpha_{cp}$	β_i	Преобразованные коэффициенты условия полюса $\bar{\beta}_i = \beta_i - \beta_{cp}$
1	1	1	0,5	0,462	0,490
	2	1	0,5	-0,186	-0,158
	3	0	-0,5	0,606	0,634
	4	0	-0,5	-0,995	-0,967
	Σ	2	0,0	-0,113	-0,001
	α_{cp}	0,5		β_{cp} -0,028	
2	5	0	-0,5	1,166	1,127
	6	0	-0,5	0,024	-0,015
	7	1	0,5	0,458	0,419
	8	1	0,5	-1,491	-1,530
	Σ	2	0,0	0,157	+0,001
	α_{cp}	0,5		β_{cp} 0,039	

Преобразованные коэффициенты представляют собой отклонения от среднего арифметического по каждому треугольнику. Поэтому их сумма должна равняться нулю (с точностью, определяемой ошибками округления), что является контролем вычисления преобразованных коэффициентов. В нашем случае эти суммы равны $-0,001$ для первого треугольника и $+0,001$ — для второго треугольника.

Запишем систему преобразованных уравнений второй группы:

$$\begin{aligned} 0,5v_1+0,5v_2-0,5v_3-0,5v_4-0,5v_5-0,5v_6+0,5v_7+0,5v_8-4,8=0; \\ 0,490v_1-0,158v_2+0,634v_3-0,967v_4+1,127v_5- \\ -0,015v_6+0,419v_7-1,530v_8+8,506=0. \end{aligned}$$

6. Составление и решение системы нормальных уравнений коррелат. Вычислим матрицу коэффициентов нормальных уравнений второй группы

$$\bar{\mathbf{N}}_2 = \bar{\mathbf{B}}_2 \bar{\mathbf{B}}_2^T = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & -0,5 & -0,5 & -0,5 & -0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,490 & -0,158 & 0,634 & -0,967 & 1,127 & -0,015 & 0,419 & -1,530 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 0,5 & 0,490 \\ 0,5 & -0,158 \\ -0,5 & 0,634 \\ -0,5 & -0,967 \\ -0,5 & 1,127 \\ -0,5 & -0,015 \\ 0,5 & 0,419 \\ 0,5 & -1,530 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -0,779 \\ -0,779 & 5,389 \end{pmatrix}.$$

Далее, определим обратную матрицу

$$\bar{\mathbf{N}}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5298 & 0,0766 \\ 0,0766 & 0,1966 \end{pmatrix}$$

и вектор коррелат

$$\mathbf{K}_2 = -\bar{\mathbf{N}}_2^{-1} \bar{\mathbf{W}}_2 = \begin{pmatrix} 1,8917 \\ -1,3050 \end{pmatrix}.$$

7. Вычисление вектора вторичных поправок $\mathbf{V}'' = \bar{\mathbf{B}}_2^T \mathbf{K}_2$. В численном виде

$$\mathbf{V}'' = \begin{pmatrix} 0,31 \\ 1,15 \\ -1,77 \\ 0,32 \\ -2,42 \\ -0,93 \\ 0,40 \\ 2,94 \end{pmatrix}.$$

8. Вычисление урвненных значений углов и окончательный контроль уравнивания (табл. 3.30).

Т а б л и ц а 3.30

№ треу- гольника	№ угла	Измеренные углы, y_i	V'	$y'_i = y_i + v'_i$	V''	$\hat{y}_i = y'_i + v''$
1	1	46°23'07,0"	+0,3	46°23'07,3"	0,3	46°23'07,6"
	2	68°58'21,5"	+0,4	68°58'21,9"	1,2	68°58'23,1"
	3	38°40'06,5"	+0,4	38°40'06,9"	-1,8	38°40'05,1"
	4	25°58'23,5"	+0,4	25°58'23,9"	0,3	25°58'24,2"
	$\Sigma =$ $\omega_1 =$	179°59'58,5" -1,5"	$\Sigma =$	180°00'00,0"	0,0	180°00'00,0"
2	5	22°34'43,7"	-0,8	22°34'42,9"	-2,4	22°34'40,5"
	6	92°46'51,9"	-0,8	92°46'51,1"	-0,9	92°46'50,2"
	7	46°37'48,3"	-0,8	46°37'47,5"	0,4	46°37'47,9"
	8	18°00'39,4"	-0,9	18°00'38,5"	2,9	18°00'41,4"
	$\Sigma =$ $\omega_2 =$	180°00'03,3" +3,3"	$\Sigma =$	180°00'00,0"	0,0	180°00'00,0"

Поскольку условия фигур, входящие в первую группу урвнены, то сумма углов по этим треугольникам равна 180°. И вторичные поправки не должны нарушить эти равенства, поэтому сумма вторичных поправок по углам, входящим в условия фигур первой группы, должна равняться нулю. Это условие выполнено.

Проверим выполнение условий, входящих во вторую группу. В табл. 3.31 запишем углы, входящие в условие фигуры второй группы. Сумма вторичных поправок по треугольнику равна невязке с обратным знаком. Естественно, что сумма углов после уравнивания равна 180°.

№ треуголь- ника	№ угла	Углы, уравнен- ные за условия первой группы, y'_i	V''	Уравненные углы
1	1	46°23'07,3"	0,3	46°23'07,6"
	2	68°58'21,9"	1,2	68°58'23,1"
	7	46°37'47,5"	0,4	46°37'47,9"
	8	18°00'38,5"	2,9	18°00'41,4"
	$\Sigma=$ $\omega_3=$	179°59'55,2" -4,8"	+4,8	180°00'00,0"

Проверим выполнение равенства в условии полюса, после подстановки в него уравненных значений углов $10^5 \ln \frac{\sin y_1'' \sin y_3'' \sin y_5'' \sin y_7''}{\sin y_2'' \sin y_4'' \sin y_6'' \sin y_8''} = 0,072$,

т.е. отличие от нуля составляет 7,2 единицы седьмого знака после запятой. Можно считать равенство нулю выполнено. Таким образом окончательный контроль для всех условий выполнен.

9. Оценка точности.

Вычислим среднюю квадратическую ошибку измерения угла. Для этого вычислим $[v'v'] = 3,30$ и $[v''v''] = 20,00$.

Контрольное равенство для вторичных поправок $[k_2\omega_2] = -20,18$.

Вычислим среднюю квадратическую ошибку измерения угла

$$m_{\beta} = \sqrt{\frac{[v'v'] + [v''v'']}{r_1 + r_2}} = \sqrt{\frac{3,30 + 20,00}{2 + 2}} = 2,4''.$$

Выполним оценку точности стороны CD . Для этого составим функцию для $S_{CD} = S_{AB} \frac{\sin y_1}{\sin y_4} \frac{\sin y_3}{\sin y_6}$ или, прологарифмировав

$$F = \ln S_{CD} = \ln S_{AB} \frac{\sin y_1}{\sin y_4} \frac{\sin y_3}{\sin y_6}.$$

Определим вектор частных производных от данной функции по всем углам, полагая, что S_{AB} — твердая сторона

$$\begin{aligned} \dot{f} &= \left(\frac{\partial F}{\partial y_1} \quad \frac{\partial F}{\partial y_2} \quad \frac{\partial F}{\partial y_3} \quad \frac{\partial F}{\partial y_4} \quad \frac{\partial F}{\partial y_5} \quad \frac{\partial F}{\partial y_6} \quad \frac{\partial F}{\partial y_7} \quad \frac{\partial F}{\partial y_8} \right) = \\ &= (\Delta_1 \quad 0 \quad \Delta_3 \quad -\Delta_4 \quad 0 \quad \Delta_6 \quad 0 \quad 0). \end{aligned}$$

В численном виде

$$\dot{f} = (0,462 \quad 0 \quad 0,606 \quad -0,995 \quad 0 \quad 0,024 \quad 0 \quad 0).$$

В табл. 3.32 вычислены преобразованные коэффициенты для функции.

Т а б л и ц а 3.32

№ треугольника условий фигур первой группы	№ угла	f	Преобразованные коэффициенты функции $\bar{f}_i = \dot{f}_i - \dot{f}_{cp}$
1	1	0,462	0,444
	2	0	-0,018
	3	0,606	0,588
	4	-0,995	-1,013
	Σ	0,073	0,001
	α_{cp}	0,018	
2	5	0	-0,006
	6	0,024	0,018
	7	0	-0,006
	8	0	-0,006
	Σ	0,024	+0,000
	α_{cp}	0,006	

Вектор с преобразованными коэффициентами функции имеет вид

$$\bar{\vec{f}} = (0,444 \quad -0,018 \quad 0,588 \quad -1,013 \quad -0,006 \quad 0,018 \quad -0,006 \quad -0,006),$$

отсюда

$$\frac{1}{P_F} = \bar{\vec{f}}\bar{\vec{f}}^T - \bar{\vec{f}}\bar{B}_2^T \bar{N}_{22}^{-1} \bar{B}_2 \bar{\vec{f}}^T = 0,89$$

и $m_{\ln S_{CD}} = m_{\beta} \sqrt{\frac{1}{P_F}} = 2,4\sqrt{0,89} = 2,3$ единицы пятого знака логарифма

после запятой ($2,3 \cdot 10^{-5}$), т.к. Δ включает коэффициент 10^5 , определяющий, в каком знаке вычисляется ошибка. Но нам необходимо вычислить среднюю квадратическую ошибку стороны. Поскольку $F = \ln S_{CD}$, то

$$m_F^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial S}\right)^2 m_S^2 = \left(\frac{\partial \ln S_{CD}}{\partial S}\right)^2 m_S^2 = \frac{1}{S^2} m_S^2$$

или $m_{\ln S_{CD}} = \frac{1}{S_{CD}} m_{S_{CD}}$.

Откуда, учитывая $S_{CD} = S_{AB} \frac{\sin y_1 \sin y_3}{\sin y_4 \sin y_6} = 1240 \frac{\sin 46,3^\circ \sin 36,7^\circ}{\sin 26,0^\circ \sin 92,7^\circ} = 1218$ м

и, переводя S в сантиметры, получим $S_{CD} = 1,218 \cdot 10^5$ см,

$$m_{S_{CD}} = S_{CD} m_{\ln S_{CD}} = 1,218 \cdot 10^5 \cdot 2,3 \cdot 10^{-5} = 2,8 \text{ см.}$$

§3.5. Проектирование геодезических построений

В предыдущих параграфах мы рассматривали вопросы математической обработки результатов измерений. Но существует еще одна важнейшая инженерная задача — проектирование сетей и, связанная с ней, задача предрасчета точности уравниваемых величин.

Например, государственная геодезическая сеть создана в виде иерархической системы, когда более низкий класс сети встраивается в сеть более высокого класса. Каждая сеть удовлетворяет определенным требованиям. Понятно, что необходимо выполнить предварительные расчеты точности, которую обеспечит та или иная схема построения сети. Для решения такой задачи на уровне государственной геодезической сети необходимы знания по курсу высшей геодезии. Данный же курс предназначен для студентов второго курса, поэтому мы ограничимся проектированием инженерных сетей местного значения.

В этом случае задача похожа на задачу оценки точности при уравнивании сетей. Отличие состоит в том, что при проектировании сетей необходимо выполнить предрасчет точности, проверить как геометрические характеристики сети влияют на точность определения заданных параметров. Для этого определяют обратную весовую матрицу \mathbf{Q}_F данных параметров по алгоритмам, рассмотренным нами при уравнивании. Далее вместо средней квадратической ошибки измерения (или средней квадратической ошибки единицы веса) задают некое проектное значение, которое определяется точностью используемых для измерений инструментов (обычно паспортной). Например, это предполагаемое среднее квадратическое отклонение единицы веса σ_0 . И вычисляют корреляционную матрицу $\mathbf{K}_F = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_F$, по главной диагонали которой стоят квадраты предвычисленных средних квадратических отклонений функций, для которых предварительно задают некие предельные значения. Если значения диагональных элементов не превосходят заранее заданных значений, то делается вывод о том, что запроектированная сеть отвечает требованиям заданной точности.

Иногда решают обратную задачу. Назначают среднее квадратическое отклонение некоторой величины (функции F) $\sigma_{\bar{F}}$,

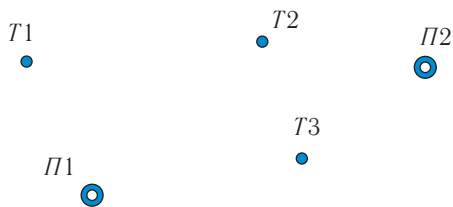


Рис. 3.36. Примерное расположение определяемых и исходных пунктов

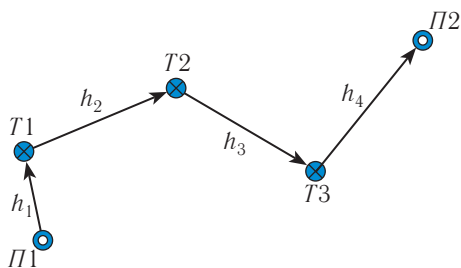
определяют обратный вес этой величины после уравнивания, используя алгоритмы оценки точности функций $1/P_f$. А затем вычисляют σ_0 , связанную с точностью измерений. И таким образом определяют необходимые для обеспечения требуемой точности измерений геодезические инструменты.

Рассмотрим следующую задачу. Требуется определить отметки трех точек ($T1$, $T2$ и $T3$) (рис. 3.36). Вблизи расположены два исходных пункта $П1$ и $П2$. Требуется построить нивелирную сеть, обеспечивающую среднюю квадратическую ошибку определения высот определяемых пунктов относительно исходных не более 5 мм.

Очевидно, что мы должны соединить нивелирными ходами определяемые и исходные пункты. Попытаемся это сделать так, чтобы общая протяженность ходов была минимальна. Например, соединив все точки только одним ходом (рис. 3.37).

Определим – обеспечит ли данная сеть требуемую точность, если принять $\sigma_0 = \sigma_{1\text{км}} = 5\text{мм}$.

Для этого необходимо определить обратную весовую матрицу вектора уравненных отметок (параметров). Заметим, что эту матрицу можно определить и в ситуации, когда измерения отсутствуют. Действительно, напишем параметрические уравнения связи (выбрав в качестве параметров отметки определяемых пунктов) и параметрические уравнения поправок:



Длины ходов	
№ хода	L , км
1	1,8
2	1,7
3	2,8
4	2,4

Рис. 3.37. Нивелирный ход

$$\begin{aligned}
 h_1 &= X_1 - H_{\text{П1}}; & v_1 &= \delta x_1 + l_1; \\
 h_2 &= X_2 - X_1; & v_2 &= \delta x_2 - \delta x_1 + l_2; \\
 h_3 &= X_3 - X_2; & v_3 &= \delta x_3 - \delta x_2 + l_3; \\
 h_4 &= H_{\text{П2}} - X_3; & v_4 &= -\delta x_3 + l_4.
 \end{aligned}$$

Матрица коэффициентов уравнений поправок

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для получения матрицы коэффициентов нормальных уравнений вычислим веса измерения превышений, используя формулу $p_i = \frac{c}{L_i} = \frac{1}{L_i}$: $p_1 = 1/1,8 = 0,56$; $p_2 = 1/1,7 = 0,59$; $p_3 = 1/2,8 = 0,36$; $p_4 = 1/2,4 = 0,42$.

Тогда весовая матрица \mathbf{P} и матрица коэффициентов нормальных уравнений в численном виде будут иметь вид:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,56 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,59 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,42 \end{pmatrix} \text{ и } \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1,15 & -0,59 & 0 \\ -0,59 & 0,95 & -0,36 \\ 0 & -0,36 & 0,78 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Отсюда } \mathbf{Q}_{\bar{x}} = \mathbf{R}_{\bar{x}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1,42 & 1,07 & 0,49 \\ 1,07 & 2,08 & 0,96 \\ 0,49 & 0,96 & 1,72 \end{pmatrix}.$$

Имея $\sigma_0 = \sigma_{1\text{км}} = 5$ мм, легко получить корреляционную матрицу вектора уравненных отметок (параметров)

$$\mathbf{K}_{\bar{x}} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 35,4 & 26,7 & 12,3 \\ 26,7 & 52,0 & 24,0 \\ 12,3 & 24,0 & 43,1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом обеспечивается следующая точность уравненных отметок определяемых реперов:

$$\sigma_{\bar{x}_1} = \sqrt{35,4} = 6,0 \text{ мм}; \quad \sigma_{\bar{x}_2} = \sqrt{52,0} = 7,2 \text{ мм}; \quad \sigma_{\bar{x}_3} = \sqrt{43,1} = 6,6 \text{ мм}.$$

Как видим, требуемая точность в 5 мм не удовлетворена. При этом наибольшая ошибка, равная 7,2 мм, получена для точки 2, расположенной в середине хода и наиболее удаленной от исходных пунктов. Такую точку называют слабым местом хода (или сети). При проектировании сетей слабому месту необходимо уделять наибольшее внимание. Если для него требуемая точность будет удовлетворяться, то для остальных точек она будет только выше.

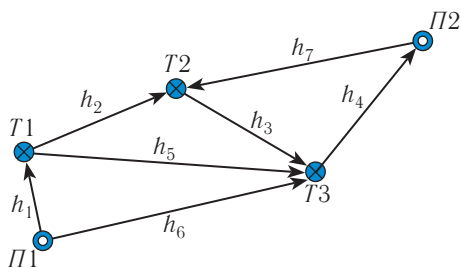


Рис. 3.38. Проектируемая нивелирная сеть

Следует иметь в виду, что в нивелирном ходе имеется одно избыточное измерение. Это означает, что надежность оценки точности будет невысокой, поэтому добавим к схеме три дополнительных измерения (рис. 3.38) и посмотрим как изменится точность определения параметров после уравнивания.

Для решения задачи необходимо знать длины ходов добавленных превышений. Это можно сделать по имеющимся схемам, картам. Точность определения длин ходов в этом случае будет вполне достаточна для предрасчета точности. Пусть $L_5=2,5$ км; $L_6=2,1$ км; $L_7=3,1$ км. Веса ходов равны $p_5=1/2,5=0,40$; $p_6=1/2,1=0,48$; $p_7=1/1,9=0,53$.

Составим матрицу коэффициентов уравнений поправок

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ и матрицу } \mathbf{R} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1,55 & -0,59 & -0,40 \\ -0,59 & 1,48 & -0,36 \\ -0,40 & -0,36 & 1,66 \end{pmatrix}.$$

Вычислим обратную весовую матрицу вектора уравненных параметров

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{Q}_{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 0,89 & 0,43 & 0,31 \\ 0,43 & 0,92 & 0,30 \\ 0,31 & 0,30 & 0,74 \end{pmatrix}$$

и корреляционную матрицу

$$\mathbf{K}_{\bar{x}} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 22,2 & 10,7 & 7,7 \\ 10,7 & 23,0 & 7,6 \\ 7,7 & 7,6 & 18,5 \end{pmatrix}.$$

Таким образом данная сеть, при $\sigma_0 = \sigma_{1\text{км}} = 5$ мм, обеспечит требуемую точность, т.к. все средние квадратические отклонения $\sigma_{\bar{x}_1} = \sqrt{22,2} = 4,7$ мм; $\sigma_{\bar{x}_2} = \sqrt{23,0} = 4,8$ мм; $\sigma_{\bar{x}_3} = \sqrt{18,5} = 4,3$ мм. оказались меньше 5 мм.

В линейной алгебре известна формула Шермана–Моррисона–Вудбери [25, 26]: $(\mathbf{A} + \mathbf{UCV})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}(\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{VA}^{-1}\mathbf{U})^{-1}\mathbf{VA}^{-1}$, справедливая для невырожденных матриц \mathbf{A} и \mathbf{C} . Применительно к обозначениям параметрического способа уравнивания эта формула имеет вид

$$(\mathbf{R} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{R}^{-1} - \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A}^T (\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{A} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A} \mathbf{R}^{-1}.$$

В частном случае, когда \mathbf{A} есть вектор a , а \mathbf{P} — число p , получим

$$(\mathbf{R} + paa)^{-1} = \mathbf{R}^{-1} \frac{\mathbf{R}^{-1} a^T a \mathbf{R}^{-1}}{(1/p + a \mathbf{R}^{-1} a^T)^{-1}}.$$

Профессор Ю.И. Маркузе предложил формулы рекуррентного уравнивания, которые удобно использовать при проектировании сетей [14, 15]. Эти формулы позволяют получать последовательность обратных весовых матриц при добавлении или при удалении очередного измерения. Если известна \mathbf{Q}_{i-1} для сети, содержащей $i-1$ измерений, то при добавлении i -го измерения, обратная весовая матрица может быть вычислена по формуле $\mathbf{Q}_{\bar{x}_i} = \mathbf{Q}_{\bar{x}_{i-1}} - \Delta \mathbf{Q}_i$, где $\Delta \mathbf{Q}_i = \frac{1}{g_i} \mathbf{Z}_i^T \mathbf{Z}_i$; $\mathbf{Z}_i^T = \mathbf{Q}_{\bar{x}_{i-1}} a_i^T$; $g_i = \frac{1}{p_i} + a_i \mathbf{Z}_i^T$.

При удалении измерения формула принимает вид $\mathbf{Q}_{\bar{x}_{i-1}} = \mathbf{Q}_{\bar{x}_i} - \Delta \mathbf{Q}_i$ и $g_i = -\frac{1}{p_i} + a_i \mathbf{Z}_i^T$, где $\mathbf{Z}_i^T = \mathbf{Q}_{\bar{x}_i} a_i^T$, a_i — i -я строка

матрицы \mathbf{A} , соответствующая данному измерению; p_i — вес i -го измерения.

Используя формулы рекуррентного уравнивания, определим для рассматриваемого примера обратную весовую матрицу без седьмого измерения. Это измерение имеет вес $p_7=0,53$. Седьмая строка коэффициентов матрицы \mathbf{A} имеет вид $a_7=(0 \ 1 \ 0)$, отсюда,

$$\mathbf{z}_i^T = \mathbf{Q}_{\bar{x}_i} a_i^T = \begin{pmatrix} 0,89 & 0,43 & 0,31 \\ 0,43 & 0,92 & 0,30 \\ 0,31 & 0,30 & 0,74 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,43 \\ 0,92 \\ 0,30 \end{pmatrix}.$$

Здесь индекс $i=7$, т.к. обратная весовая матрица вычислена для всех семи измерений:

$$g_7 = -\frac{1}{p_7} + a_7 \mathbf{z}_7^T = -1,9 + (0 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 0,43 \\ 0,92 \\ 0,30 \end{pmatrix} = -0,98;$$

$$\Delta \mathbf{Q}_i = \frac{1}{g_i} \mathbf{z}_i^T \mathbf{z}_i = -\frac{1}{0,98} \begin{pmatrix} 0,43 \\ 0,92 \\ 0,30 \end{pmatrix} (0,43 \ 0,92 \ 0,30) = - \begin{pmatrix} 0,19 & 0,40 & 0,13 \\ 0,40 & 0,86 & 0,28 \\ 0,13 & 0,28 & 0,09 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, обратная весовая матрица сети, состоящей из шести измерений

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{x_{i-1}}^- &= \mathbf{Q}_{x_i}^- - \Delta \mathbf{Q}_i = \begin{pmatrix} 0,89 & 0,43 & 0,31 \\ 0,43 & 0,92 & 0,30 \\ 0,31 & 0,30 & 0,74 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,19 & 0,40 & 0,13 \\ 0,40 & 0,86 & 0,28 \\ 0,13 & 0,28 & 0,09 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1,08 & 0,83 & 0,44 \\ 0,83 & 1,78 & 0,58 \\ 0,44 & 0,58 & 0,83 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

а соответствующая корреляционная матрица

$$\mathbf{K}_{\bar{x}_{i-1}} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{\bar{x}_{i-1}}^- = 5^2 \begin{pmatrix} 1,08 & 0,83 & 0,44 \\ 0,83 & 1,78 & 0,58 \\ 0,44 & 0,58 & 0,83 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26,9 & 20,9 & 11,0 \\ 20,9 & 44,9 & 14,8 \\ 11,0 & 14,8 & 20,9 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, предрасчетные значения средних квадратических ошибок отметок определяемых точек в сети с шестью измерениями получились следующими:

$$\sigma_{\bar{x}_1} = \sqrt{26,9} = 5,2 \text{ мм}; \quad \sigma_{\bar{x}_2} = \sqrt{44,9} = 6,7 \text{ мм}; \quad \sigma_{\bar{x}_3} = \sqrt{20,9} = 4,6 \text{ мм}.$$

Удаление седьмого измерения приводит к невыполнению требуемой по условию задачи точности. Следовательно, седьмое измерение удалять нельзя. Поэтому будем считать, что сеть с семью измерениями представляет окончательный вариант проектируемой сети.

Возникает вопрос — а можно ли удалить пятое или шестое измерение так, чтобы точность получаемых отметок удовлетворяла исходным требованиям? Предлагаем читателю, используя приведенные формулы, самому ответить на этот вопрос.

Используя рекуррентные формулы, при проектировании сетей можно рассчитывать допустимые значения свободных членов, относящихся к избыточным измерениям. Покажем это на примере нашей нивелирной сети (см. рис. 3.37), здесь приведен нивелирный ход, который имеет одно избыточное измерение — четвертое превышение, которое позволяет проконтролировать измерения, выявить грубые ошибки. Понятно, что свободные члены в первых трех уравнениях поправок будут равны нулю. Свободный член будет отличен от нуля только для четвертого и последующих измерений, т.к. все они являются избыточными.

Определим допустимое значение свободного члена для четвертого измерения. Как известно, свободные члены в параметрических уравнениях поправок вычисляются по уравнениям связи, когда в них подставляются приближенные значения параметров и результаты измерений $l_i = f(x_1, x_2, \dots, x_k) - y_i$. Определим вес свободного члена по формуле обобщенной оценки точности с учетом того, что новое измерение независимо от приближенных значений параметров, которые находились по необходимым измерениям. Тогда справедливо

$$\frac{1}{\rho_{l_i}} = f \mathbf{Q}_{x_0} f^T + \left(\frac{\partial l_i}{\partial y_i} \right)^2 \frac{1}{\rho_{y_i}} = a_i \mathbf{Q}_{x_0} a_i^T + \frac{1}{\rho_{y_i}}.$$

Здесь \mathbf{Q}_{x_0} — обратная весовая матрица вектора приближенных

параметров, полученных с использованием только необходимых измерений, a_i — i -я строка матрицы \mathbf{A} .

Таким образом для определения обратного веса свободного члена необходимо знать \mathbf{Q}_{x_0} . В этом случае предельное значение

свободного члена можно определить по формуле $|l_i|_{\text{доп}} = t\sigma_0\sqrt{\frac{1}{p_{l_i}}}$.

Здесь t — коэффициент, связанный с вероятностью того, что свободный член l_i окажется допустимым; σ_0 — среднее квадратическое отклонение единицы веса. При вероятности 0,95 коэффициент $t=2$, при вероятности 0,997 — $t=3$.

Вернемся к нивелирной сети. Для четвертого превышения свободный член определяется по формуле $l_4 = H_2 - x_3 - h_4$, где $x_3 = H_1 + h_1 + h_2 + h_3$.

$$\text{Откуда, } \frac{1}{p_{x_3}} = \frac{1}{p_{h_1}} + \frac{1}{p_{h_2}} + \frac{1}{p_{h_3}} = 1,8 + 1,7 + 2,8 = 6,3.$$

Величины x_3 и h_4 независимы, поэтому

$$\frac{1}{p_{l_4}} = \frac{1}{p_{x_3}} + \frac{1}{p_{h_4}} = 6,3 + 2,4 = 8,7.$$

Аналогичный результат можно получить используя формулу $\frac{1}{p_{l_4}} = a_4 \mathbf{Q}_{x_0} a_4^T + \frac{1}{p_{h_4}}$, где $a_4 = (0 \ 0 \ -1)$.

Определим матрицу коэффициентов нормальных уравнений и обратную весовую матрицу вектора приближенных параметров

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{x_0} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,56 & 0 & 0 \\ 0 & 0,59 & 0 \\ 0 & 0 & 0,36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1,15 & -0,59 & 0 \\ -0,59 & 0,95 & -0,36 \\ 0 & -0,36 & 0,36 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{Q}_{x_0} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} 1,15 & -0,59 & 0 \\ -0,59 & 0,95 & -0,36 \\ 0 & -0,36 & 0,36 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1,79 & 1,79 & 1,79 \\ 1,79 & 3,48 & 3,48 \\ 1,79 & 3,48 & 6,26 \end{pmatrix}.$$

Найдем обратный вес свободного члена

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_{l_4}} &= a_4 \mathbf{Q}_{x_0} a_4^T + \frac{1}{p_{h_4}} = \\ &= (0 \quad 0 \quad -1) \begin{pmatrix} 1,79 & 1,79 & 1,79 \\ 1,79 & 3,48 & 3,48 \\ 1,79 & 3,48 & 6,26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 2,4 = 6,3 + 2,4 = 8,7. \end{aligned}$$

Для вычисления допустимого значения свободного члена прием коэффициент $t=2$ (с вероятностью 0,95), и $\sigma_0=5$ мм.

$$|l_i|_{\text{доп}} = t\sigma_0 \sqrt{\frac{1}{p_{l_i}}} = 2 \cdot 5 \sqrt{8,7} = 29,5 \text{ мм} \approx 3,0 \text{ см.}$$

Для вычисления допустимых значений свободных членов пятого, шестого и седьмого превышений, можно использовать

матрицу \mathbf{Q}_{x_0} . В этом случае свободные члены i -го превышения (соответственно, l_5 , l_6 и l_7) должны быть определены только по необходимым измерениям и i -му измерению. Например, $l_7 = x_2 - H_2 - h_7$, где $x_2 = H_1 + h_1 + h_2$ и $\frac{1}{P_{l_7}} = a_7 \mathbf{Q}_{x_6} a_7^T + \frac{1}{P_{h_7}}$.

Но, следует помнить, что при использовании рекуррентного метода для целей уравнивания, обратная весовая матрица и параметры перевычисляются для каждого измерения, поэтому после обработки $i-1$ измерений, будут известны вектор уравненных параметров \bar{x}_{i-1} (здесь индекс — количество измерений, по которым производилось уравнивание) и матрица $\mathbf{Q}_{x_{i-1}}$.

В этом случае для вычисления допустимого значения i -го измерения можно использовать $\mathbf{Q}_{x_{i-1}}$ вместо \mathbf{Q}_{x_0} , т.е. для седьмого

измерения $\frac{1}{P_{l_7}} = a_7 \mathbf{Q}_{x_6} a_7^T + \frac{1}{P_{h_7}}$. Но тогда и свободный член l_i должен определяться по уравненным параметрам \bar{x}_{i-1} , полученным из уравнивания $i-1$ измерений. Так для седьмого превышения $\frac{1}{P_{l_7}} = a_7 \mathbf{Q}_{x_6} a_7^T + \frac{1}{P_{h_7}}$, а свободный член $l_7 = \bar{x}_2^6 - H_2 - h_7$.

Здесь \bar{x}_2^6 — уравненное значение второго параметра после обработки шести измерений.

Аналогичный подход используется для проектирования и предрасчета точности плановых сетей. Для определения предрасчетной корреляционной матрицы вектора уравненных параметров вычисляется обратная весовая матрица данного вектора и умножается на квадрат планируемого среднего квадратического отклонения. Например, рассмотрим линейно-угловую сеть (см. рис. 3.13). Решим задачу предрасчета точности данной сети.

Пусть данная сеть запроектирована на топографической карте. Требуется обеспечить точность в 3 см в положении определяемых пунктов относительно исходных пунктов A и B .

В данной сети планируется выполнить измерения шести углов и четырех сторон. Ранее, в §3.2 была получена обратная весовая матрица уравненных параметров для всех 10 измерений. Теперь будем считать, что измерения только проектируются. При проектировании сети достаточно знать приближенные значения углов (до нескольких градусов) и сторон (до сотен метров), которые можно получить со схем или топографических карт, с аэроснимков. Этого будет достаточно для решения задачи предрасчета точности. Данные необходимы для формирования матрицы \mathbf{A} и весов. Пусть предполагается использовать тахеометр, обеспечивающий точность измерения угла $5''$, и точность измерения сторон 1 см. В качестве эталонного измерения примем измеряемый угол, т.е. $\sigma_0 = \sigma_\beta = 5''$.

Тогда вес измеряемого угла $p_\beta = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_\beta^2} = \frac{\sigma_\beta^2}{\sigma_\beta^2} = 1$ и вес стороны $p_s = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_s^2} = \frac{\sigma_\beta^2}{\sigma_s^2} = \frac{25}{1} = 25$.

Эти значения весов совпадают с весами из примера, приведенного при уравнивании данной сети. Обратная весовая матрица параметров совпадет с матрицей, приведенной в примере, поэтому вычисленные матрицы \mathbf{R} и \mathbf{Q} возьмем из примера:

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 47,431 & 8,419 & -1,529 & -4,019 \\ 8,419 & 69,585 & 7,500 & -28,126 \\ -1,529 & 7,500 & 16,037 & 12,268 \\ -4,019 & -28,126 & 12,268 & 41,904 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R}^{-1} = \begin{pmatrix} 0,0218 & -0,0044 & 0,0061 & -0,0026 \\ -0,0044 & 0,0333 & -0,0423 & 0,0343 \\ 0,0061 & -0,0423 & 0,1340 & -0,0670 \\ -0,0026 & 0,0343 & -0,0670 & 0,0663 \end{pmatrix}.$$

Рассчитаем корреляционную матрицу вектора уравниваемых координат (параметров)

$$\mathbf{K}_x^- = \sigma_0^2 \mathbf{Q} = 25 \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0,54 & -0,11 & 0,15 & -0,06 \\ -0,11 & 0,83 & -1,06 & 0,86 \\ 0,15 & -1,06 & 3,35 & -1,68 \\ -0,06 & 0,86 & -1,68 & 1,66 \end{pmatrix}.$$

Как видим, пункт C определяется с меньшей точностью (третий и четвертый элементы главной диагонали — предвычисленные значения дисперсий координат пункта C), поэтому сделаем расчеты для данного пункта

$$\sigma_{xc}^- = \sqrt{3,35} = 1,8 \text{ см}; \quad \sigma_{yc}^- = \sqrt{1,66} = 1,3 \text{ см}.$$

В качестве характеристики точности положения данного пункта относительно исходных будем считать величину

$$\sigma_c = \sqrt{\sigma_{xc}^{-2} + \sigma_{yc}^{-2}} = 2,2 \text{ см}.$$

Требуемая точность (3 см) — обеспечена.

Возникает вопрос: можно ли сократить измерения в данной сети без существенной потери точности? Попробуем убрать измерение шестого угла, поскольку в этом случае нет необходимости ставить инструмент на пункт C .

Используем данные в примере уравнивания. Из матрицы \mathbf{A} уберем шестую строку и получим новую матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2,783 & -1,372 & 0 & 0 \\ -0,961 & 2,719 & 1,841 & -0,082 \\ 1,903 & -1,265 & 0 & 0 \\ 0,880 & 2,637 & 0 & 0 \\ -0,880 & -2,637 & -1,352 & 1,153 \\ 0,554 & 0,833 & 0 & 0 \\ 0,949 & -0,317 & 0 & 0 \\ -0,044 & -0,999 & 0,044 & 0,999 \\ 0,000 & 0,000 & 0,649 & 0,761 \end{pmatrix}.$$

Весовая матрица является диагональной, по главной диагонали которой стоят элементы $P=\{1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 25 \ 25 \ 25 \ 25\}$.

Матрица коэффициентов нормальных уравнений в этом случае равна

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 43,98 & 8,36 & -0,62 & -2,03 \\ 8,36 & 69,53 & 7,74 & -28,20 \\ -0,62 & 7,74 & 15,82 & 11,75 \\ -2,03 & -28,20 & 11,75 & 40,72 \end{pmatrix}.$$

Вычислим обратную весовую матрицу уравненных параметров

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R}^{-1} = \begin{pmatrix} 0,024 & -0,005 & 0,007 & -0,005 \\ -0,005 & 0,034 & -0,043 & 0,036 \\ 0,007 & -0,043 & 0,134 & -0,068 \\ -0,005 & 0,036 & -0,068 & 0,069 \end{pmatrix}.$$

Расчетная корреляционная матрица уравненных координат будет следующей:

$$\mathbf{K}_x = 25\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0,59 & -0,14 & 0,17 & -0,11 \\ -0,14 & 0,85 & -1,07 & 0,89 \\ 0,17 & -1,07 & 3,36 & -1,70 \\ -0,11 & 0,89 & -1,70 & 1,72 \end{pmatrix}.$$

Как легко видеть, удаление шестого угла не оказало никакого влияния на точность определения уравненных координат опреде-

ляемых пунктов:

$$\sigma_{xc}^- = \sqrt{3,36} = 1,8 \text{ см}; \quad \sigma_{yc}^- = \sqrt{1,72} = 1,3 \text{ см}; \quad \sigma_c = \sqrt{\sigma_{xc}^{-2} + \sigma_{yc}^{-2}} = 2,2 \text{ см}.$$

Таким образом, можно рекомендовать при выполнении полевых измерений в данной сети шестой угол не измерять. Заметим, что этот же результат можно получить, если использовать формулы рекуррентного уравнивания для удаления шестого угла из уравнивания.

При проектировании обширных геодезических построений можно рекомендовать использовать многогрупповой способ Пранис—Праневича совместно с рекуррентным методом. В способе Пранис—Праневича сеть разбивают на две сети (или несколько сетей), убирая на первом этапе все измерения, которые связывают их. В общем случае, в первой сети будет k_1 параметров, во второй — k_2 параметров. Поскольку две сети при разделении становятся полностью независимыми, то их можно обрабатывать независимо друг от друга, получить матрицы нормальных уравнений \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2 . Затем обращают их и получают обратные весовые матрицы уравненных параметров отдельно для первой и второй сетей $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{R}_1^{-1}$, $\mathbf{Q}_2 = \mathbf{R}_2^{-1}$.

На следующем этапе формируют общую обратную весовую матрицу в блочном виде $\mathbf{Q}_{x_i}^- = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_2 \end{pmatrix}$. Такой вид матрицы обусловлен независимостью первой и второй групп. Далее можно использовать формулы рекуррентного уравнивания для получения общей обратной весовой матрицы, используя измерения, связывающие две независимых сети:

$$\mathbf{Q}_{x_i}^- = \mathbf{Q}_{x_{i-1}}^- - \Delta \mathbf{Q}_i; \quad \Delta \mathbf{Q}_i = \frac{1}{g_i} \mathbf{Z}_i^T \mathbf{Z}_i,$$

где $\mathbf{Z}_i^T = \mathbf{Q}_{x_{i-1}}^- \mathbf{A}_i^T$; $g_i = \mathbf{P}_i^{-1} + \mathbf{A}_i \mathbf{Z}_i^T$; \mathbf{A}_i^T и \mathbf{P}_i^{-1} — соответственно, матрица коэффициентов уравнений поправок группы измерений, связывающих первую и вторую сеть, и обратная весовая матрица этой группы измерений.

Данный подход можно использовать как для проектирования сетей, так и для их уравнивания. В последнем случае начальную

обратную весовую матрицу \mathbf{Q}_0 рекомендуется принять равной $\mathbf{Q}_0 = 10^K \mathbf{E}$. Матрицу \mathbf{Q}_0 необходимо выбирать из условия, что измерения не выполнялись [14]. В этом случае веса координат определяемого пункта равны нулю, а их обратные веса равны ∞ . При реальных вычислениях разрядность величины k принимают максимально возможной для представления на ЭВМ [14].

Для проектирования геодезических построений и предрасчета точности можно использовать не только параметрический, но и коррелятный способ. Принцип предрасчета точности здесь аналогичный. Необходимо определять веса некоторых уравненных элементов сети, для которых заранее установлены точностные требования. При этом данные элементы представляются в виде вектор-функции измеренных величин $F = F(\bar{y})$. Далее задается среднее квадратическое отклонение единицы веса и определяются расчетные значения средних квадратических отклонений элементов, заданных с помощью функций. Если полученные значения соответствуют требуемой точности, то проект сети утверждается.

Мы рассмотрели методы предрасчета точности для проектирования геодезических построений, основанные на методе наименьших квадратов (строгие методы). Однако они требуют большого объема вычислений. Иногда, при отсутствии избыточных измерений, для предрасчета точности удастся использовать формулу оценки точности функций некоррелированных измерений. В этом случае получают некоторую формулу предрасчета точности для конкретной схемы геодезического построения. Это касается некоторых видов однократных засечек. Такие формулы широко известны. Их можно встретить во многих литературных источниках. Рассмотрим некоторые из них.

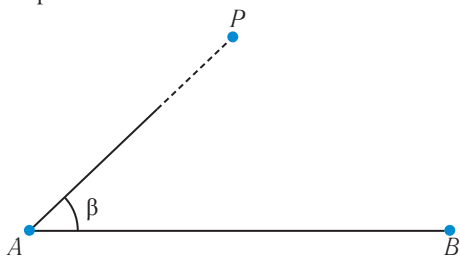


Рис. 3.39. Полярный метод определения координат

Полярный метод. Пусть требуется определить координаты пункта P , если известны координаты пункта A и значение дирекционного угла стороны AB (рис. 3.39).

При полярном методе измеряются угол и сторона S_{AP} , координаты определяются по

формулам $X_p = X_A + S \cos(\alpha_{AB} - \beta)$; $Y_p = Y_A + S \sin(\alpha_{AB} - \beta)$.

Полагая, что измерения независимые, рассчитаем точность определения координат пункта P :

$$\sigma_{x_p}^2 = \left(\frac{\partial X}{\partial S}\right)_0^2 \sigma_S^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial \beta}\right)_0^2 \sigma_\beta^2 = \cos^2 \alpha_{AP} \sigma_S^2 + \left(\frac{S \sin \alpha_{AP}}{\rho''}\right)^2 \sigma_\beta^2;$$

$$\sigma_{y_p}^2 = \left(\frac{\partial Y}{\partial S}\right)_0^2 \sigma_S^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \beta}\right)_0^2 \sigma_\beta^2 = \sin^2 \alpha_{AP} \sigma_S^2 + \left(\frac{-S \cos \alpha_{AP}}{\rho''}\right)^2 \sigma_\beta^2.$$

Обычно полагают, что среднее квадратическое отклонение в положении точки относительно исходных равно $\sigma_p^2 = \sigma_{x_p}^2 + \sigma_{y_p}^2$, поэтому

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= (\cos^2 \alpha_{AP} + \sin^2 \alpha_{AP}) \sigma_S^2 + \left(\frac{S \sin \alpha_{AP}}{\rho''}\right)^2 \sigma_\beta^2 + \left(\frac{-S \cos \alpha_{AP}}{\rho''}\right)^2 \sigma_\beta^2 = \\ &= \sigma_S^2 + \frac{S_{AP}^2}{\rho^2} \sigma_\beta^2. \end{aligned}$$

или $\sigma_p = \sqrt{\sigma_S^2 + \frac{S^2}{\rho^2} \sigma_\beta^2}$.

Чтобы получать величину σ_p в сантиметрах, необходимо либо значение стороны выразить в сантиметрах, либо выразить значение стороны в километрах, а величину ρ в секундах разделить на 10^5 . Тогда, ограничив точность вычислений двумя значащими цифрами,

получим формулу $\sigma_p = \sqrt{\sigma_S^2 + \frac{S^2}{4,3} \sigma_\beta^2}$, которая дает результат в сантиметрах.

Как видим, точность определения положения пункта зависит от точности измерения расстояния, угла и величины расстояния. Например, при $\sigma_\beta=3''$, $\sigma_S=1$ см и значении стороны 1,5 км, получим

$$\sigma_p = \sqrt{1 + \frac{1,5^2}{4}} 3^2 = 2,4 \text{ см.}$$

Прямая угловая засечка. На рис. 3.40 представлена схема прямой угловой засечки. Здесь координаты пунктов A и B — известны. Координаты пункта P определяются с использованием

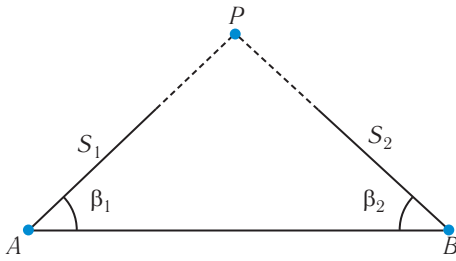


Рис. 3.40. Схема прямой угловой засечки

измеренных углов β_1 и β_2 .

Поскольку сторона AB является исходной, то зная измеренные углы, используя теорему синусов, вычислим стороны S_1 и S_2

$$S_1 = \frac{S_{AB}}{\sin(180 - \beta_1 - \beta_2)} \sin \beta_2;$$

$$S_2 = \frac{S_{AB}}{\sin(180 - \beta_1 - \beta_2)} \sin \beta_1 ;$$

и дирекционные углы сторон AP и BP $\alpha_{AP} = \alpha_{AB} - \beta_1$, $\alpha_{BP} = \alpha_{BA} + \beta_2$.

Далее легко получить координаты пункта P :

$$x_p = X_A + S_1 \cos \alpha_{AP} = X_A + \frac{S_{AB}}{\sin(180 - \beta_1 - \beta_2)} \sin \beta_2 \cos(\alpha_{AB} - \beta_1);$$

$$y_p = Y_A + \frac{S_{AB}}{\sin(180 - \beta_1 - \beta_2)} \sin \beta_2 \sin(\alpha_{AB} - \beta_1).$$

Отсюда, по аналогии с полярным методом, получим

$$\sigma_p = \frac{\sigma_\beta}{\rho \sin \gamma} \sqrt{S_1^2 + S_2^2}, \text{ где } \gamma = (180 - \beta_1 - \beta_2).$$

Так при $\sigma_\beta = 3''$, $\sigma_S = 1$ см, значениям сторон 1,5 км и $\gamma = 60^\circ$ получим $\sigma_p = \frac{3}{2,06 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1,5^2 + 1,5^2} \approx 3,6$ см.

Линейная засечка. В случае линейной засечки, производится измерение двух сторон S_1 и S_2 , опирающихся на два исходных пункта A и B (рис. 3.41).

Необходимо выполнить предрасчет точности положения пункта P относительно исходных.

Такой предрасчет можно выполнить по формуле [24]

$$\sigma_p = \frac{\sqrt{\sigma_{S_1}^2 + \sigma_{S_2}^2}}{\sin \gamma}.$$

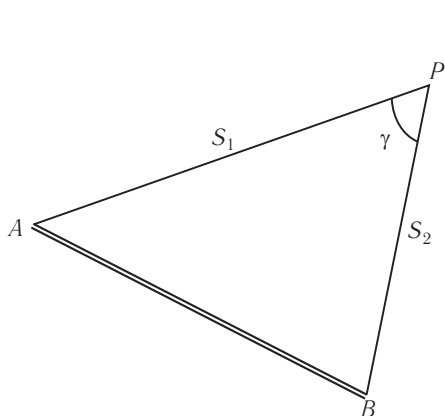


Рис. 3.41. Схема линейной засечки

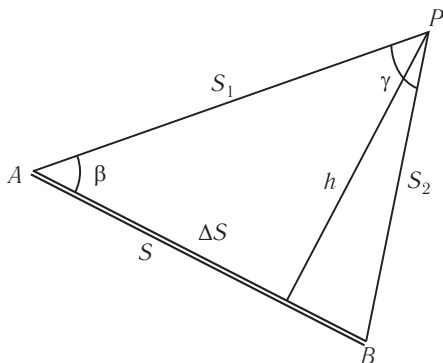


Рис. 3.42. Линейная засечка. Иллюстрация алгоритма вычисления координат пункта P

Пусть $\sigma_S=1$ см и $\gamma=60^\circ$. Подставляя значения в формулу, получим ожидаемое значение точности определения положения пункта P относительно исходных пунктов:

$$\sigma_P = \frac{\sqrt{1+1}}{\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}/2} = 1,63 \text{ см.}$$

Координаты пункта P вычисляются по следующему алгоритму. По значениям твердой стороны S и измеренных сторон S_1 и S_2 , вычислим угол β (рис. 3.42): $\beta = \arccos \frac{\Delta S}{S}$, где ΔS вычисляется, исходя из следующего. Из точки P опустим перпендикуляр на сторону AB , тогда

$$S_2 = h^2 + (S - \Delta S)^2;$$

$$S_1 = h^2 + \Delta S^2.$$

Вычтем из первого равенства второе

$$\begin{aligned} S_2^2 - S_1^2 &= (S - \Delta S)^2 - \Delta S^2 = S^2 - 2S\Delta S + \Delta S^2 - \Delta S^2 = \\ &= S^2 - 2S\Delta S. \end{aligned}$$

Отсюда $\Delta S = \frac{S^2 + S_1^2 - S_2^2}{2S}$.

Далее вычислим дирекционный угол стороны AP : $\alpha_{AP} = \alpha_{AB} - \beta$ и координаты пункта P $X_P = X_A + S_1 \cos \alpha_{AP}$; $Y_P = Y_A + S_1 \sin \alpha_{AP}$.

Для ряда геодезических построений выведены приближенные формулы предрасчета точности. Например, для полигонометрического хода, имеющего вытянутую форму, средняя квадратическая ошибка положения конечной точки относительно исходной определяется из формулы

$$M^2 = nm_S^2 + \frac{m_\beta^2}{\rho^2} L^2 \frac{n+1,5}{3},$$

где n — число сторон полигонометрического хода; m_S — средняя квадратическая ошибка измерения сторон (полагая, что все стороны измеряются равноточно); m_β — средняя квадратическая ошибка измерения угла (полагая, что все углы измеряются равноточно); L — общая протяженность хода, км;

Полагают, что конечная точка хода является «слабым местом» хода, если он опирается только на начальный пункт. Если ход проложен между двумя твердыми точками, то считают, что после уравнивания «слабым местом» хода является середина хода. В этом случае имеем следующую формулу [22]

$$(2M^2) = nm_S^2 + \frac{m_\beta^2}{\rho^2} L^2 \frac{n+1,5}{3}, \quad (3.58)$$

где M — средняя квадратическая ошибка пункта, расположенного в середине хода.

При предрасчете точности решается прямая или обратная задача. В прямой задаче в качестве исходных задаются m_S и m_β . Вычисляется значение M , которое должно удовлетворять определенному нормативному значению. Обратная задача состоит в том, что задается нормативное значение M , а вычисляются величины m_S и m_β , т.е. определяется — с какой точностью необходимо производить измерения.

Мы рассмотрели различные подходы для проектирования геодезических построений и предрасчета точности. При решении таких задач следует различать четыре понятия.

1. Среднее квадратическое отклонение — теоретическая характеристика степени рассеяния случайной величины (измерения). Это величина всегда остается неизвестной, как и истинное значение измеряемой величины.

2. Средняя квадратическая ошибка измерения m , которая является оценкой σ , определяется в результате обработки результатов измерений.

3. Предрасчетная величина среднего квадратического отклонения — определяется предварительно, перед измерениями, исходя из условий задачи и заданных характеристик точности. Например, предполагается использовать электронный тахеометр, обеспечивающий точность измерения угла одним приемом 3" и точность измерения сторон 0,5 см. В этом случае, для предрасчета точности каких-либо величин (например, координат определяемых пунктов) или для вычисления весов измерений, принимают $\sigma_\beta=3''$ и $\sigma_S=0,5$ см. Понятно, что эти значения не совпадут с реальными средними квадратическими ошибками, вычисленными по результатам измерений. Но они будут отличаться и от средних квадратических отклонений реальных измерений. Поскольку истинные ошибки измерений включают в себя не только инструментальные ошибки, но и личные ошибки наблюдателя, и ошибки из-за внешних условий наблюдений. А эти ошибки в разных условиях будут различными.

Очень часто проектные средние квадратические отклонения обозначают через m и называют проектными средними квадратическими ошибками. Здесь важно понимать с какой величиной вы имеете дело.

4. Некоторые нормативные характеристики точности. Например, предельное значение ошибки в положении определяемой точки (относительно исходных или относительно ближайших пунктов). Данные характеристики определяются требованиями различных нормативных документов. Например, в межевых планах средняя квадратическая ошибка положения характерных точек земельного участка в населенных пунктах не должна превышать 0,1 м. Используя данные значения можно сделать предрасчет точности измерений, которые обеспечат эту точность. В пункте 3, наоборот, задаются проектные характеристики точности измерений, а далее определяют — удовлетворяют ли такие точности измерений нормативным требованиям. Т.е. в этом случае задача является обратной по отношению к задаче из пункта 3.

В настоящее время в межевых планах требуется записывать нормативное, предельное значение ошибки в положении характер-

ных точек в графу «средняя квадратическая ошибка». Это приводит к тому, что одна и та же величина (например, 10 см) записывается для всех точек. А это неверно. По результатам измерений все точки будут иметь собственные значения ошибок. Их можно и необходимо вычислить. Нормативные же значения, как и предрасчетные вычисляются без измерений и не характеризуют реальную точность.

Контрольные вопросы

1. Чем отличаются понятия среднего квадратического отклонения, предельной ошибки и средней квадратической ошибки?

2. В чем состоит задача проектирования геодезических построений?

3. Как выполняется предрасчет точности с использованием метода наименьших квадратов?

4. Как выполняется предрасчет точности прямой угловой засечки?

5. Как выполняется предрасчет точности прямой линейной засечки?

6. Как выполняется предрасчет точности полярной засечки?

7. Как использовать формулы рекуррентного уравнивания для предрасчета точности?

8. Как вычислять допустимые значения свободных членов в параметрическом способе?

9. Как использовать двухгрупповой способ Пранис–Праневича для предрасчета точности?

10. Как использовать коррелятный способ для предрасчета точности?

Примеры решения задач

Задача 1. Выполнить предрасчет точности полигонометрического хода, имеющего вытянутую форму. Пусть $n=5$, $m_S=1$ см, $m_B=5''$, $L=3.5$ км. Требуется предрасчитать точность определения координат пункта, расположенного в середине хода после уравнивания.

Решение

Используем формулу (3.58). L переведем в сантиметры:

$$2M^2 = nm_S^2 + \frac{m_B^2}{\rho^2} L^2 \frac{n+1,5}{3} = 5 \cdot 1 + \frac{25}{2,06 \times 10^5} 3,5 \cdot 10^5 \frac{5+1,5}{3} = 97,0.$$

Откуда $M = \sqrt{97}/2 = 4,9$ см.

Задача 2. Произвести предрасчет точности обратной угловой засечки (рис. 3.43). При обратной однократной засечке на определяемом пункте измеряют два угла на три исходных пункта. Исходные данные необходимо взять из примера уравнивания линейно-угловой сети, приведенного в §3.2 (см. рис. 3.13, табл. 3.12), оставив в качестве измеренных значений только первые два угла. Исходными пунктами, в данном случае,

являются пункты A , B и C , определяемым пункт — D .

Решение.

Выполним предрасчет точности, используя уже полученные ранее данные из линейно-угловой сети (элементы матрицы A). Применим формулы рекуррентного уравнивания. Как ранее отмечалось матрицу Q_0 необходимо выбирать из условия, что измерения не выполнялись [14]. При вычислениях на ЭВМ, зададим эту матрицу как диагональную с максимально возможными значениями величин (примем их равными 10^9), стоящих по главной диагонали, т.о. начальная обратная весовая матрица координат пункта D

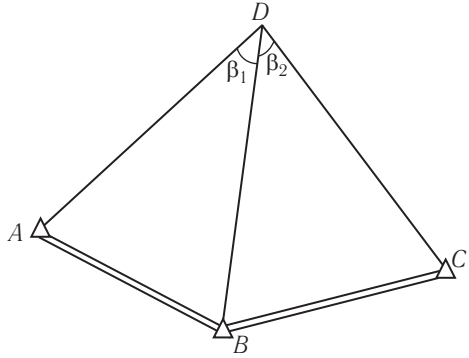


Рис. 3.43. Обратная угловая засечка

$$Q_0 = \begin{pmatrix} 10^9 & 0 \\ 0 & 10^9 \end{pmatrix}.$$

Для использования рекуррентной формулы, примем веса измерения углов, равными единице, $p_p=1$, поскольку измерения углов предполагается выполнять равномерно, т.к. ранее, для линейно-угловой сети матрица A была вычислена, используем ее. Выберем строки a_i из этой матрицы A , относящиеся к двум углам β_1 и β_2 , и пункту D

$$a_1 = (-2,783 \quad -1,372); \quad a_2 = (-0,961 \quad 2,719).$$

Далее произведем вычисления для первого угла β_1 :

$$Z_1^T = Q_0 a_1^T = 10^9 \begin{pmatrix} -2,783 \\ -1,372 \end{pmatrix}; \quad g_1 = 1/p_1 + a_1 Z_1^T = 9,6275 \cdot 10^9;$$

$$\Delta Q_1 = \frac{1}{g_1} Z_1^T Z_1 = 10^8 \begin{pmatrix} 8,0448 & 3,9660 \\ 3,9660 & 1,9552 \end{pmatrix}; \quad Q_1 = Q_0 - \Delta Q_1 = 10^8 \begin{pmatrix} 1,9552 & -3,9660 \\ -3,9960 & 8,0448 \end{pmatrix}.$$

И для второго угла β_2 :

$$a_2 = (-0,961 \quad 2,719); \quad Z_2^T = Q_1 a_2^T = 10^9 \begin{pmatrix} -1,2663 \\ 2,5685 \end{pmatrix};$$

$$g_2 = 1/p_2 + a_2 Z_2^T = 8,2007 \cdot 10^9;$$

$$\Delta Q_2 = \frac{1}{g_2} Z_2^T Z_2 = 10^8 \begin{pmatrix} 1,9552 & -3,9660 \\ -3,9660 & 8,0448 \end{pmatrix};$$

$$Q_2 = Q_1 - \Delta Q_2 = \begin{pmatrix} 0,118 & -0,015 \\ -0,015 & 0,110 \end{pmatrix}.$$

При проектной точности измерения угла $\sigma_\beta = \sigma_0 = 5''$, точность определения пункта D составит:

$$\sigma_x = \sigma_0 \sqrt{0,118} = 1,7 \text{ см}; \quad \sigma_y = \sigma_0 \sqrt{0,110} = 1,7 \text{ см}; \quad \sigma_D = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} = 2,4 \text{ см}.$$

Может возникнуть вопрос. Почему ранее, при уравнивании линейно-угловой сети с гораздо большим числом измерений, получена примерно та же точность? Дело в том, что для линейно-угловой сети рассчитывалась точность определения координат пункта C , а не D . В схеме же обратной засечки пункт C , который был «слабым местом» в линейно-угловой сети, является исходным. Фактически, эти сети оказались разными.

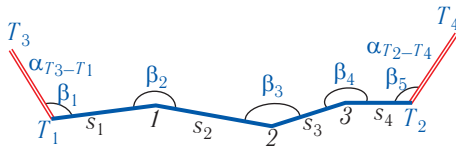


Рис. 3.44. Полигонометрический ход

Задача 3. Произвести предрасчет точности положения точки, расположенной в середине полигонометрического хода (рис. 3.44). Необходимо обеспечить точность положения данного пункта относительно исходных 8 см.

Для предрасчета использовать данные из табл. 3.33. Эти данные определены с топографической карты, с помощью транспорта и измерителя.

Т а б л и ц а 3.33

№ точки поворота	X	Y	Исходный дирекционный угл α	Измеренные значения сторон S, м	Измеренные значения левых углов поворота β
T_1	6840	10020	$\alpha_{T_3-T_1} = 40^\circ$	$S_1 = 916$	143
1				$S_2 = 751$	147
2				$S_3 = 855$	130
3				$S_4 = 714$	144
T_2	8260	8230	$\alpha_{T_2-T_4} = 202^\circ$		138

Решение

1. Определение числа всех, необходимых и избыточных измерений $n=9$, $k=6$, $r=3$.
2. Составление условных уравнений связи. В полигонометрическом ходе возникает одно условное уравнение дирекционного угла и два уравнения координат:

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 - 180 \times 4 - (\alpha_{T_2-T_4} - \alpha_{T_3-T_1}) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^4 \Delta X_i - (X_{T_2} - X_{T_1}) = \Delta X_1 + \Delta X_2 + \Delta X_3 + \Delta X_4 - (X_{T_2} - X_{T_1}) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^4 \Delta Y_i - (Y_{T_2} - Y_{T_1}) = \Delta Y_1 + \Delta Y_2 + \Delta Y_3 + \Delta Y_4 - (Y_{T_2} - Y_{T_1}) = 0.$$

Условные уравнения координат в окончательном виде через измеряемые величины:

$$S_1 \cos(\alpha_1 + \beta_1) + S_2 \cos(\alpha_1 + \beta_1 + \beta_2 - 180) + S_3 \cos(\alpha_1 + \beta_1 + \beta_2 - 180 + \beta_3 - 180) + S_4 \cos(\alpha_1 + \beta_1 + \beta_2 - 180 + \beta_3 - 180 + \beta_4 - 180) - (X_{T_2} - X_{T_1}) = 0;$$

$$S_1 \sin(\alpha_1 + \beta_1) + S_2 \sin(\alpha_1 + \beta_1 + \beta_2 - 180) + S_3 \sin(\alpha_1 + \beta_1 + \beta_2 - 180 + \beta_3 - 180) + S_4 \sin(\alpha_1 + \beta_1 + \beta_2 - 180 + \beta_3 - 180 + \beta_4 - 180) - (Y_{T_2} - Y_{T_1}) = 0,$$

где $\alpha_1 = \alpha_{T_1-T_3}$.

3. Составление условных уравнений поправок. Система (3.27) — условные уравнения поправок для полигонометрического хода с тремя сторонами. Запишем условные уравнения поправок для нашего полигонометрического хода, имеющего четыре измеренные стороны:

$$v_{\beta_1} + v_{\beta_2} + v_{\beta_3} + v_{\beta_4} + v_{\beta_5} + \omega_\alpha = 0;$$

$$\cos \alpha_1 v_{S_1} + \cos \alpha_2 v_{S_2} + \cos \alpha_3 v_{S_3} + \cos \alpha_4 v_{S_4} -$$

$$- \frac{Y_{T_2} - Y_{T_1}}{\rho''} v_{\beta_1} - \frac{Y_{T_2} - Y_1}{\rho''} v_{\beta_2} - \frac{Y_{T_2} - Y_2}{\rho''} v_{\beta_3} - \frac{Y_{T_2} - Y_3}{\rho''} v_{\beta_4} + \omega_X = 0;$$

$$\sin \alpha_1 v_{S_1} + \sin \alpha_2 v_{S_2} + \sin \alpha_3 v_{S_3} + \sin \alpha_4 v_{S_4} +$$

$$+ \frac{X_{T_2} - X_{T_1}}{\rho''} v_{\beta_1} + \frac{X_{T_2} - X_1}{\rho''} v_{\beta_2} + \frac{X_{T_2} - X_2}{\rho''} v_{\beta_3} + \frac{X_{T_2} - X_3}{\rho''} v_{\beta_4} + \omega_Y = 0.$$

Для вычисления элементов матрицы **B** необходимо вычислить синусы и косинусы приближенных дирекционных углов, а также приближенные координаты пунктов или приращения координат по каждой стороне. Такие вычисления приведены в табл. 3.34.

Т а б л и ц а 3.34

№ точки поворота	дирекционные углы α , вычисленные по измеренным сторонам	β	Измеренные значения сторон S	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	ΔY	ΔX
T_1	40	143					
1	3	147	916	0,06	1,00	58	916
2	330	130	751	-0,49	0,87	-371	653
3	280	144	855	-0,98	0,19	-839	160
T_2	244	138	714	-0,90	-0,43	-644	-308
	202						

Сформируем матрицу

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1,00 & 0,87 & 0,19 & -0,43 & 0,87 & 0,90 & 0,72 & 0,31 & 0 \\ 0,06 & -0,49 & -0,98 & -0,90 & 0,69 & 0,25 & -0,07 & -0,15 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Для формирования системы нормальных уравнений необходимо вычислить веса измерений. Веса определяются по формуле $P_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$.

Полигонометрический ход включает в себя разнородные измерения — углы и стороны. Предварительно точность измерений определяется, исходя из характеристик используемого тахеометра. Пусть среднее квадратическое отклонение измерения угла, которое обеспечивает тахеометр, равно $5''$, а среднее квадратическое отклонение измерения стороны 1 см: $\sigma_\beta = 5''$, $\sigma_S = 1$ см. Будем считать, что все углы измерены равномерно. Все стороны также измерены с одним и тем же средним квадратическим отклонением. Выберем в качестве эталонного измерения — измерение угла, т.е. $\sigma_0^2 = \sigma_\beta^2$. Отсюда, веса измеренных значений углов примем равными единице, а веса измеренных значений сторон $P_S = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_S^2} = \frac{\sigma_\beta^2}{\sigma_S^2} = \frac{25}{1} = 25$. Следовательно, диагональные элементы весовой матрицы будут следующими $\mathbf{P} = \{25 \ 25 \ 25 \ 25 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1\}$.

5. Составление матрицы коэффициентов нормальных уравнений коррелат:

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 5,00 & 2,80 & 0,71 \\ 2,80 & 2,26 & 0,71 \\ 0,71 & 0,71 & 0,64 \end{pmatrix}, \text{ где } \mathbf{N} = \mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T.$$

6. Вычисление обратной матрицы

$$\mathbf{N}^{-1} = \begin{pmatrix} 0,69 & -0,94 & 0,29 \\ -0,94 & 1,97 & -1,15 \\ 0,29 & -1,15 & 2,52 \end{pmatrix}.$$

Выполним предрасчет точности уравненных значений дирекционного угла второй стороны и координат второго пункта, которые расположены в середине хода — в «слабом» месте. Для оценки точности дирекционного угла и координат точки, необходимо составить функции, аналогичные уравнениям связи:

$$\bar{F}_1 = \bar{\alpha}_2 = \alpha_{T_1-T_3} + \beta_1 + \beta_2 - 180;$$

$$\bar{F}_2 = \bar{x}_2 = X_{T_2} + \bar{s}_1 \cos(\alpha_{T_1-T_3} + \bar{\beta}_1) + \bar{s}_2 \cos(\alpha_{T_1-T_3} + \bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2 - 180);$$

$$\bar{F}_3 = \bar{y}_2 = Y_{T_2} + \bar{s}_1 \sin(\alpha_{T_1-T_3} + \bar{\beta}_1) + \bar{s}_2 \sin(\alpha_{T_1-T_3} + \bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2 - 180).$$

Приведем данные уравнения к линейному виду:

$$\Delta F_1 = v_{\beta_1} + v_{\beta_2};$$

$$\Delta F_2 = \cos \alpha_1 v_{S_1} + \cos \alpha_2 v_{S_2} - \frac{Y_{T_2} - Y_{T_1}}{\rho''} v_{\beta_1} - \frac{Y_{T_2} - Y_1}{\rho''} v_{\beta_2};$$

$$\Delta F_3 = \sin \alpha_1 v_{S_1} + \sin \alpha_2 v_{S_2} + \frac{X_{T_2} - X_{T_1}}{\rho''} v_{\beta_1} + \frac{X_{T_2} - X_1}{\rho''} v_{\beta_2}.$$

Откуда, матрица коэффициентов данных уравнений имеет вид:

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & 0 & 0 & -(Y_{T_2} - Y_{T_1})/\rho'' & -(Y_{T_2} - Y_1)/\rho'' & 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha_1 & \sin \alpha_2 & 0 & 0 & (X_{T_2} - X_{T_1})/\rho'' & (X_{T_2} - X_1)/\rho'' & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

или в численном виде

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1,00 & 0,87 & 0 & 0 & 0,15 & 0,18 & 0 & 0 & 0 \\ 0,06 & -0,49 & 0 & 0 & 0,76 & 0,32 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обратная весовая матрица вектора функций

$$\mathbf{Q}_{\bar{F}} = \mathbf{fP}^{-1}\mathbf{f}^T - \mathbf{fP}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{BP}^{-1}\mathbf{f}^T = \begin{pmatrix} 0,278 & 0,027 & 0,065 \\ 0,027 & 0,058 & -0,002 \\ 0,065 & -0,002 & 0,062 \end{pmatrix}$$

и корреляционная матрица вектора функций

$$\mathbf{K}_{\bar{F}} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{\bar{F}} = 25 \begin{pmatrix} 0,278 & 0,027 & 0,065 \\ 0,027 & 0,058 & -0,002 \\ 0,065 & -0,002 & 0,062 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,95 & 0,67 & 1,62 \\ 0,67 & 1,44 & -0,06 \\ 1,62 & -0,06 & 1,54 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, предрасчетные значения средних квадратических отклонений уравненных значений функций

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{F}_1} &= \sigma_{\alpha_2} = \sqrt{6,95} = 2,6''; \\ \sigma_{\bar{F}_2} &= \sigma_{x_2} = \sqrt{1,44} = 1,2 \text{ см}; \\ \sigma_{\bar{F}_3} &= \sigma_{y_2} = \sqrt{1,54} = 1,2 \text{ см}. \end{aligned}$$

Предрасчетное значение среднего квадратического отклонения положения пункта 2 (в слабом месте — в середине хода) относительно исходных пунктов $\sigma_2 = \sqrt{1,44 + 1,54} = 1,7 \text{ см}$.

Требуемая точность при данной геометрии сети и выбранном инструменте обеспечивается с большим запасом. Выполним аналогичный предрасчет, используя приближенную формулу для вытянутого хода

$$2M^2 = nm_S^2 + \frac{m_{\beta}^2}{\rho^2} L^2 \frac{n+1,5}{3} = 4 \cdot 1^2 + \frac{25}{4,24} 3,2^2 \frac{5,5}{3} = 114,6.$$

Средняя квадратическая ошибка положения пункта в слабом месте хода $M^2 = \sqrt{\frac{114,6}{4}} = 5,4 \text{ см}$ — это аналог σ_2 . Расхождение получилось значительное. Но здесь необходимо иметь в виду, что последняя формула приближенна и выведена для вытянутого хода, поэтому лучше для предрасчета точности использовать строгие формулы.

Литература

1. Айвазян С.Н., Енюков Н.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика. – М.: Финансы и статистика, 1983.
2. Большаков В.Д., Маркузе Ю.И., Голубев В.В. Уравнивание геодезических построений. – М.: Недра, 1989.
3. Большаков В.Д., Маркузе Ю.И. Практикум по теории математической обработки геодезических измерений. – М.: Недра, 1984.
4. Большаков В.Д. и др. Справочник геодезиста. – М.: Недра, 1975.
5. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. – М.: Наука, 1983.
6. Боровков А.А. Математическая статистика. – М.: Наука, 1984.
7. Гайдаев П.А. Математическая обработка геодезических сетей. – М.: Недра, 1977.
8. Голубев В.В. Основы теории ошибок. – М.: МИИГАиК, 2005.
9. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. – М.: Финансы и статистика, 1986.
10. Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Наука, 1985.
11. Крамер Гаральд. Математические методы статистики. – М.: Мир, 1975.
12. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. – М.: Физматгиз, 1962.
13. Маркузе Ю.И. Уравнивание и оценка точности плановых геодезических сетей. – М.: Недра, 1982.
14. Маркузе Ю.И. Алгоритмы для уравнивания геодезических сетей на ЭВМ. – М.: Недра, 1989.
15. Маркузе Ю.И. Основы уравнивательных вычислений. – М.: Недра, 1990.
16. Маркузе Ю.И., Бойко Е.Г., Голубев В.В. Геодезия. Вычисление и уравнивание геодезических сетей. – М.: Картгеоцентр-Геодезиздат, 1994.
17. Маслов А.В., Гордеев А.В., Батраков Ю.Г. Геодезия. – М.: Колос, 2006.

18. *Математическая энциклопедия*. – М.: Советская энциклопедия, 1985.
19. *Мелник М.* Основы прикладной статистики, М.: Энергоатомиздат, 1983.
20. *Рао С.Р.* Линейные статистические методы и их применение. – М.: Наука, 1968.
21. *Скейвалас И.М.* Математическая обработка зависимых измерений. – М.: Недра, 1990.
22. *Селиханович В.Г.* Геодезия. –М.: Недра, 1981.
23. *Чистяков В.П.* Курс теории вероятностей. –М.: Дрофа, 2008.
24. *Юнусов А.Г., Беликов А.Б., Баранов., Каширкин Ю.Ю.* Геодезия: Учебник. – М.: Гаудеамус, Академический проект, 2011.
25. *Sherman, J. and Morrison, W.J.* Adjustment of an inverse matrix corresponding to changes in the elements of a given column or a given row of the original matrix. *The Annals of Mathematical Statistics*, 21(1950), 134-127.
26. *Woodbury, M.A.* Inverting modified matrices. Memorandum Report 42, Statistical Research Group, Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey, 600., June 14, 1950.

Интернет-ресурсы

- <http://matrixcalc.org/>
- <http://ru.onlimeschool.com/math/assistance/equation/matr/>
- <http://www.matworld.ru/calculator/matrix-calculator-1.php>
- <http://math.semestr.ru/matrix/equations.php>
- <http://matrixcalc.appspot.com/ru/index.html>
- http://ru.wikipedia.org/wiki/Метод_наименьших_квадратов
- http://lib.ssga.ru/fulltext/Учебные%20пособия_метод.%20указания_PDF/2007/Лесных%20Н.Б.%20Метод%20наименьших%20квадратов%20на%20примерах%20уравнивания%20полигонометрических%20сетей.%202007.pdf
- <http://www.armig.org/polygonometry.htm>
- <http://medstatistic.ru/calculators.html>
- [http://www.phys.nsu.ru/ok03/Praktikum/main\(\).html](http://www.phys.nsu.ru/ok03/Praktikum/main().html)

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Индивидуальные задания для студентов

Задания к §1.1

1. Проводятся три измерения (например, угла). При этом возможно появление ошибок: положительных (+) или отрицательных (-). Какова вероятность появления двух положительных и одной отрицательной ошибки?

2. В условиях предыдущей задачи определить вероятность появления хотя бы одной отрицательной ошибки?

3. Какова вероятность того, что на обеих игральных костях будут нечетные цифры?

4. Подбрасываются две игральные кости. Какова вероятность того, что сумма очков на выпавших гранях будет равна 6?

5. В памяти ЭВМ находятся 5 простых и 3 сложных задачи. Из них, случайным образом, выбирается одна задача и выдается на экран дисплея. Какова вероятность того, что на экране появится простая задача?

6. В памяти ЭВМ находятся 5 простых и 3 сложных задачи. Из них, случайным образом, выбирается одна задача и выдается на экран дисплея. Какова вероятность появления сложной задачи?

7. В памяти ЭВМ находятся 5 простых и 3 сложных задачи. Из них, случайным образом, выбираются две задачи и выдаются на экран дисплея. Какова вероятность того, что обе задачи сложные?

8. В памяти ЭВМ находятся 5 простых и 3 сложных задачи. Из них, случайным образом, выбираются две задачи и выдаются на экран дисплея. Какова вероятность того, что обе задачи простые?

9. В памяти ЭВМ находятся 5 простых и 3 сложных задачи. Из них, случайным образом, выбираются две задачи и выдаются на экран дисплея. Какова вероятность того, что одна задача простая, а другая сложная?

10. В урне находятся 2 белых и 3 черных шара. Одновременно вынимают 2 шара. Какова вероятность того, что оба шара белые?

11. В урне находятся 2 белых и 3 черных шара. Одновременно вынимают 2 шара. Какова вероятность того, что оба шара черные?

12. В урне находятся 2 белых и 3 черных шара. Одновременно вынимают 2 шара. Какова вероятность того, что один из шаров будет черным?

13. В урне находятся 2 белых и 3 черных шара. Одновременно вынимают 2 шара. Какова вероятность того, что хотя бы один из шаров будет черным?

14. На отдельных карточках написаны буквы: А, Н, А, Н, А, С. Карточки рассыпаются и собираются по одной случайным образом. Какова вероятность того, что появятся слово АНАНАС?

15. На отдельных карточках написаны буквы: А, Н, А, Н, А, С. Карточки рассыпаются и собираются по одной случайным образом. Какова вероятность того, что первая буква будет С?

16. Код цифрового замка состоит из 4 цифр. Какова вероятность открыть замок с первой попытки?

17. Код цифрового замка состоит из 4 цифр. Какова вероятность открыть замок, если известно, что код состоит из одинаковых цифр?

18. Абонент, набирая номер телефона, забыл три последние цифры. Какова вероятность набрать нужные три цифры с первой попытки?

19. Абонент, набирая номер телефона, забыл три последние цифры. Какова вероятность набрать нужные цифры, если известно, что все 3 цифры различны?

Задания к §1.2

1. Проводятся три измерения (например, угла). При этом возможно появление ошибок: положительных (+) или отрицательных (-). Какова вероятность появления двух положительных и одной отрицательной ошибки?

2. В условиях предыдущей задачи определить вероятность появления хотя бы одной отрицательной ошибки?

3. Какова вероятность того, что на обеих игральные костях будут нечетные цифры?

4. Подбрасываются две игральные кости. Какова вероятность того, что сумма очков на выпавших гранях будет равна 6?

5. В памяти ЭВМ находятся 5 простых и 3 сложных задачи. Из них случайным образом выбирается одна задача и выдается на экран дисплея. Какова вероятность того, что на экране появится простая задача?

6. В памяти ЭВМ находятся 5 простых и 3 сложных задачи. Из них, случайным образом, выбирается одна задача и выдается на экран дисплея. Какова вероятность появления сложной задачи?

7. В памяти ЭВМ находятся 5 простых и 3 сложных задачи. Из них, случайным образом, выбираются две задачи и выдаются на экран дисплея. Какова вероятность того, что обе задачи сложные?

8. В памяти ЭВМ находятся 5 простых и 3 сложных задачи. Из них, случайным образом, выбираются две задачи и выдаются на экран дисплея. Какова вероятность того, что обе задачи простые?

9. В памяти ЭВМ находятся 5 простых и 3 сложных задачи. Из них, случайным образом, выбираются две задачи и выдаются на экран дисплея. Какова вероятность того, что одна задача простая, а другая сложная?

10. В урне находятся 2 белых и 3 черных шара. Одновременно вынимают 2 шара. Какова вероятность того, что оба шара белые?

11. В урне находятся 2 белых и 3 черных шара. Одновременно вынимают 2 шара. Какова вероятность того, что оба шара черные?

12. В урне находятся 2 белых и 3 черных шара. Одновременно вынимают 2 шара. Какова вероятность того, что один из шаров будет черным?

13. В урне находятся 2 белых и 3 черных шара. Одновременно вынимают 2 шара. Какова вероятность того, что хотя бы один из шаров будет черным?

14. На отдельных карточках написаны буквы: А, Н, А, Н, А,С. Карточки рассыпаются и собираются по одной случайным образом. Какова вероятность того, что появятся слово АНАНАС?

15. На отдельных карточках написаны буквы: А, Н, А, Н, А,С. Карточки рассыпаются и собираются по одной случайным образом. Какова вероятность того, что первая буква будет С?

16. Код цифрового замка состоит из 4 цифр. Какова вероятность открыть замок с первой попытки?

17. Код цифрового замка состоит из 4 цифр. Какова вероятность открыть замок, если известно, что код состоит из одинаковых цифр?

18. Абонент, набирая номер телефона, забыл три последние цифры. Какова вероятность набрать нужные три цифры с первой попытки?

19. Абонент, набирая номер телефона, забыл три последние цифры. Какова вероятность набрать нужные цифры, если известно, что все 3 цифры различны?

Задания к §1.3

1. Проводятся три измерения (например, угла). При этом возможно появление ошибок: положительных (+) или отрицательных (-). Какова вероятность появления двух положительных и одной отрицательной ошибки? Какова вероятность появления не более двух положительных ошибок? Не менее двух положительных ошибок?

2. В условиях предыдущей задачи определить вероятность появления хотя бы одной отрицательной ошибки?

3. Какова вероятность того, что при подбрасывании пары игральных костей 7 раз на обеих костях будут нечетные цифры не менее 3-х раз?

4. Подбрасываются две игральные кости 5 раз. Какова вероятность того, что ровно 3 раза сумма очков на выпавших гранях будет не более 6 (событие А)? Каково вероятнейшее число появления события А в данных условиях?

5. В памяти ЭВМ находятся 5 простых и 3 сложных задачи. Из них, случайным образом, выбирается одна задача и выдается на экран дисплея. Какова вероятность того, что на экране появится простая задача?

6. В памяти ЭВМ находятся 5 простых и 3 сложных задачи. Из них, случайным образом, выбирается одна задача и выдается на экран дисплея. Какова вероятность появления сложной задачи? Опыт повторяют 4 раза. Определить вероятности того, что сложная задача появится ровно 0 раз, 1 раз, 2 раза, 3 раза, 4 раза? Определить вероятнейшее число появления сложной задачи в данных условиях.

7. В памяти ЭВМ находятся 5 простых и 3 сложных задачи. Из них, случайным образом, выбираются две задачи и выдаются на экран дисплея. Какова вероятность того, что обе задачи сложные (событие А)? Если повторять данное испытание 7 раз, какова вероятность, что две сложные задачи появятся не менее 3 раз? Чему равно вероятнейшее число появления события А при 7 испытаниях?

8. В памяти ЭВМ находятся 5 простых и 3 сложных задачи. Из них, случайным образом, выбираются две задачи и выдаются на экран дисплея. Какова вероятность того, что обе задачи простые (событие А)? Если повторять данное испытание 7 раз, какова вероятность, что две простые задачи появятся не более 3 раз? Чему равно вероятнейшее число появления события А при 7 испытаниях?

9. В памяти ЭВМ находятся 5 простых и 3 сложных задачи. Из них, случайным образом, выбираются две задачи и выдаются на экран дисплея. Какова вероятность того, что одна задача простая, а другая сложная (событие А)? Если повторять данное испытание 7 раз, какова вероятность, что событие А появится не более 3 раз? Чему равно вероятнейшее число появления события А при 7 испытаниях?

10. В урне находятся 2 белых и 3 черных шара. Одновременно вынимают 2 шара. Какова вероятность того, что оба шара белые (событие А)? Если повторять данное испытание 5 раз, какова вероятность, что событие А появится не более 3-х раз? Не менее 3-х раз? Чему равно вероятнейшее число появления события А при 5 испытаниях?

11. В урне находятся 2 белых и 3 черных шара. Одновременно вынимают 2 шара. Какова вероятность того, что оба шара черные (событие А)? Данное испытание повторяется 6 раз. Определить вероятность появления события А ровно 0 раз, 1 раз, 2 раза, 3 раза, 4 раза, 5 раз, 6 раз.

12. В урне находятся 2 белых и 3 черных шара. Одновременно вынимают 2 шара. Какова вероятность того, что один из шаров будет черный (событие А)? Если повторять данное испытание 5 раз, какова вероятность, что событие А появится не более 3-х раз? Не менее 3-х раз? Чему равно вероятнейшее число появления события А при 5 испытаниях?

13. В урне находятся 2 белых и 3 черных шара. Одновременно вынимают 2 шара. Какова вероятность того, что хотя бы один из шаров будет черный (событие А)? Если повторять данное испытание 5 раз, какова вероятность, что событие А появится не более 3-х раз? Не менее 3-х раз? Чему равно вероятнейшее число появления события А при 5 испытаниях?

14. На отдельных карточках написаны буквы: А, Н, А, Н, А, С. Карточки рассыпаются и собираются по одной случайным образом. Какова вероятность того, что появится слово АНАНАС (событие А)? Если повторять данное испытание 5 раз, какова вероятность, что событие А появится не более 3-х раз? Не менее 3-х раз? Чему равно вероятнейшее число появления события А при 5 испытаниях?

15. Абонент, набирая номер телефона, забыл три последние цифры. Какова вероятность набрать нужные три цифры с первой попытки (событие А)? Если повторять данное испытание 5 раз, какова вероятность, что событие А появится не более 3-х раз? Не менее 3-х раз? Чему равно вероятнейшее число появления события А при 5 испытаниях?

16. Абонент, набирая номер телефона, забыл три последние цифры. Какова вероятность набрать нужные цифры, если известно, что все 3 цифры различны (событие А)? Если повторять данное испытание 4 раза, какова вероятность, что событие А появится не более 3-х раз? Чему равно вероятнейшее число появления события А при 4 испытаниях?

Задания к §1.4

1. Проводятся три измерения (например, угла). Рассматривается случайная величина — число положительных ошибок. Построить для данной случайной величины ряд распределения, многоугольник распределения, график функции распределения.

2. Задан график функции распределения (рис. П1). По данному графику определить вероятность появления числа 3, числа 5, вероятности попадания в интервалы $0 \leq X < 4$, $-1 \leq X < 2$, $0 < X < 2$. Построить ряд и многоугольник распределения данной случайной величины.

3. Игральная кость подбрасывается 5 раз. Рассматривается случайная величина — число появлений грани с цифрой 6. Построить ряд распределения данной случайной величины, многоугольник распределения. Определить значения функции распределения при всех возможных значениях появления случайной величины. Определить вероятность попадания случайной величины в интервалы $0 < X \leq 2$, $0 \leq X < 5$. Определить вероятнейшее число появления числа 6 при 5 подбрасываниях кости.

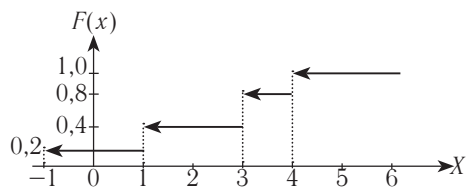


Рис. П1. График функции распределения

4. Подбрасываются две игральные кости до тех пор, пока на обеих костях выпадут грани с шестерками. Рассматривается случайная величина — число подбрасываний. Построить ряд и многоугольник распределения данной случайной величины. Определить функцию распределения $F(3)$, вероятность попадания в интервал $0 \leq X < 4$.

5. Задана следующая функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } X < A; \\ x^2 - 1 & \text{при } A < X < B; \\ 1 & \text{при } X > B. \end{cases}$$

Определить значения A и B , т.е. пределы существования случайной величины. Построить график данной функции распределения. Определить вероятность попадания случайной величины в интервалы $0 \leq X < 4$, $1,2 \leq X < \sqrt{2}$, $1 < X < \sqrt{2}$. Определить вид функции плотности распределения и построить ее график. На графиках функции и плотности распределения показать графическое представление вероятностей попадания в интервалы, показанные в данной задаче.

6. Задана следующая функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } X < A; \\ 2\sqrt{x} & \text{при } A < X < B; \\ 1 & \text{при } X > B. \end{cases}$$

Определить значения A и B , т.е. пределы существования случайной величины. Построить график данной функции распределения. Определить вероятность попадания случайной величины в интервалы $0 \leq X < 0,16$, $1 \leq X < \sqrt{2}$, $0,01 < X < 0,25$. Определить вид функции плотности распределения и построить ее график. На графиках функции и плотности распределения показать графическое представление вероятностей попадания в интервалы, показанные в данной задаче.

7. Задана следующая функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } X < A; \\ \ln x & \text{при } A < X < B; \\ 1 & \text{при } X > B. \end{cases}$$

Определить значения A и B , т.е. пределы существования случайной величины. Построить график данной функции распределения. Определить вероятность попадания случайной величины в интервалы $0 \leq X < 1$, $1 \leq X < 2$, $1 < X < e$. Определить вид функции плотности распределения и построить ее график. На графиках функции и плотности распределения показать графическое представление вероятностей попадания в интервалы, показанные в данной задаче.

8. Задана следующая функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } X < A; \\ \log x & \text{при } A < X < B; \\ 1 & \text{при } X > B. \end{cases}$$

Определить значения A и B , т.е. пределы существования случайной величины. Построить график данной функции распределения. Определить вероятность попадания случайной величины в интервалы $0 \leq X < 1$, $1 \leq X < 2$, $1 < X < 10$.

Определить вид функции плотности распределения и построить ее график. На графиках функции и плотности распределения показать графическое представление вероятностей попадания в интервалы, показанные в данной задаче.

9. Задана следующая функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } X < A; \\ 2 \ln x & \text{при } A < X < B; \\ 1 & \text{при } X > B. \end{cases}$$

Определить значения A и B , т.е. пределы существования случайной величины. Построить график данной функции распределения. Определить вероятность попадания случайной величины в интервалы $0 \leq X < 1$, $1 \leq X < 2$, $1 < X < e$. Определить вид функции плотности распределения и построить ее график. На графиках функции и плотности распределения показать графическое представление вероятностей попадания в интервалы, показанные в данной задаче.

10. Задана следующая функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } X < A; \\ 2 \sin x & \text{при } A < X < B; \\ 1 & \text{при } X > B. \end{cases}$$

Определить значения A и B , т.е. пределы существования случайной величины. Построить график данной функции распределения. Определить вероятность попадания случайной величины в интервалы $0 \leq X < \pi$, $\pi/6 \leq X < \pi/4$, $0 < X < \pi/4$. Определить вид функции плотности распределения и построить ее график. На графиках функции и плотности распределения показать графическое представление вероятностей попадания в интервалы, показанные в данной задаче.

11. Задана следующая функция плотности распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } X < A; \\ 2 \sin x & \text{при } A < X < B; \\ 0 & \text{при } X > B. \end{cases}$$

Определить значения A и B , т.е. пределы существования случайной величины. Построить график данной функции плотности. Определить вероятность попадания случайной величины в интервалы $7\pi/6 \leq X < 2\pi$, $\pi/6 \leq X < \pi/4$, $0 < X < \pi/4$. Определить вид функции распределения и построить ее график. На графиках функции и плотности распределения показать графическое представление вероятностей попадания в интервалы, показанные в данной задаче.

12. Задана следующая функция плотности распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } X < A; \\ 1/x & \text{при } A < X < B; \\ 0 & \text{при } X > B. \end{cases}$$

Определить значения A и B , т.е. пределы существования случайной величины. Построить график данной функции плотности. Определить вероятность

попадания случайной величины в интервалы $7\pi/6 \leq X < 2\pi$, $\pi/6 \leq X < \pi/4$, $0 < X < \pi/4$. Определить вид функции распределения и построить ее график. На графиках функции и плотности распределения показать графическое представление вероятностей попадания в интервалы, показанные в данной задаче.

Задания к §1.5

1. Проводятся три измерения (например, угла). Рассматривается случайная величина — число положительных ошибок. Построить для данной случайной величины ряд распределения и найти математическое ожидание и дисперсию числа положительных ошибок.

2. Задан график функции распределения (см. рис. П1). По данному графику определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины.

3. Игральная кость подбрасывается 5 раз. Рассматривается случайная величина — число появлений грани с цифрой 6. Определить M_X , D_X и σ_X случайной величины — числа появления грани с цифрой 6.

4. Задана следующая функция распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } X < A; \\ x^2 - 1 & \text{при } A < X < B; \\ 1 & \text{при } X > B. \end{cases}$$

Определить значения A и B , т.е. пределы существования случайной величины. Определить M_X , D_X и σ_X случайной величины.

5. Задана следующая функция распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } X < A; \\ 2x & \text{при } A < X < B; \\ 1 & \text{при } X > B. \end{cases}$$

Определить значения A и B , т.е. пределы существования случайной величины. Определить M_X , D_X и σ_X случайной величины.

6. Задана следующая функция плотности распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } X < A; \\ 1/x & \text{при } A < X < B; \\ 0 & \text{при } X > B. \end{cases}$$

Определить значения A и B , т.е. пределы существования случайной величины. Определить M_X , D_X и σ_X случайной величины.

7. Задана следующая функция распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } X < A; \\ 2 \ln x & \text{при } A < X < B; \\ 1 & \text{при } X > B. \end{cases}$$

Определить значения A и B , т.е. пределы существования случайной величины. Определить M_x , D_x и σ_x случайной величины.

8. Задана функция определения расстояния с помощью короткобазисной параллактической полигонометрии $S = \frac{b}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}$. Задана следующая информация:

$b=2,000$ м; $\sigma_b=0,1$ мм; $\sigma_\varphi=2''$. Определить среднее квадратическое отклонение σ_s , если параллактический угол $\varphi=5^\circ 30'$.

9. Задана следующая функция от случайных аргументов: $h=d \operatorname{tg} \nu$, где горизонтальное проложение $d=250$ м, $\sigma_d=5$ см, вертикальный угол $\nu=-1^\circ 30'$, $\sigma_\nu=5''$. Определить дисперсию превышения D_h .

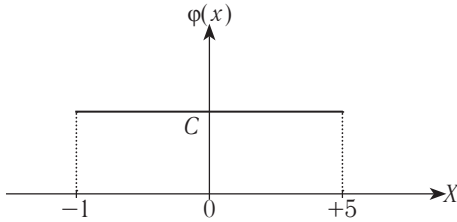


Рис. П2. График плотности равномерного распределения

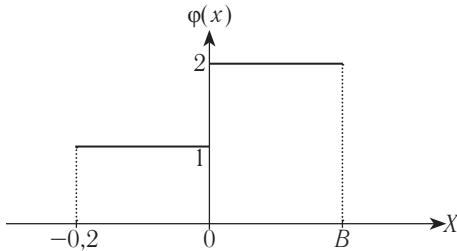


Рис. П3. График плотности распределения

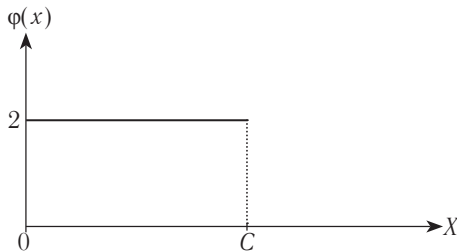


Рис. П4. График плотности распределения

Задания к §1.6

1. Задан график плотности равномерного распределения (рис. П2). Определить математическое ожидание и дисперсию данного распределения. Найти вероятности попадания в интервал $P(-10 < \Delta < -3)$, $P(-1 < \Delta < 3)$.

2. На рис. П3 задан график плотности распределения. Определить величину B , математическое ожидание и дисперсию данного распределения. Найти вероятности попадания в интервал $P(-0,10 < \Delta < 0,3)$, $P(0 < \Delta < 3)$.

3. На рис. П4 задан график плотности распределения. Определить постоянную C , математическое ожидание, дисперсию данного равномерного распределения и вероятности попадания в интервал $P(0,2 < \Delta < 0,3)$, $P(0 < \Delta < 1)$.

4. Производятся измерения угла со средним квадратическим отклонением 10". Математическое ожидание ошибок измерения равно 0. Чему равна вероятность $P(\Delta < 10)$?

5. Производятся измерения угла со средним квадратическим отклонением 10". Математическое ожидание ошибок измерения равно 0. Чему равна вероятность $P(\Delta > 10)$?

6. Производятся измерения линии светодальномером со средним квадратическим отклонением i см., где i — номер студента в журнале. Систематическая составляющая ошибки измерения равна +1 см. Чему равна вероятность $P(|\Delta| > 3)$?

7. Производятся измерения линии светодальномером со средним квадратическим отклонением 8 см. Систематическая составляющая ошибки измерения равна +2 см. Определить вероятности $P(\Delta > 16)$, $P(\Delta < 16)$.

8. Производятся измерения угла со средним квадратическим отклонением 5". Математическое ожидание ошибок измерения равно 0. Чему равна вероятность $P(5 < |\Delta| < 10)$?

9. Производятся измерения угла со средним квадратическим отклонением 5". Математическое ожидание ошибок измерения равно -1". Чему равна вероятность $P(5 < |\Delta| < 10)$?

10. Производятся измерения угла со средним квадратическим отклонением 5". Математическое ожидание ошибок измерения равно -1". Чему равна вероятность $P(-5 < \Delta < 10)$?

11. Производятся измерения угла со средним квадратическим отклонением 5". Математическое ожидание ошибок измерения равно 0". Чему равна вероятность $P(|\Delta| < 10)$?

12. Производятся измерения угла без систематических ошибок. Задана вероятность $P(|\Delta| < 15) = 0,95$. Определить среднее квадратическое отклонение?

13. Производятся измерения угла без систематических ошибок. Определить вероятность $P(|\Delta| < 3\sigma)$.

14. Производятся измерения угла без систематических ошибок. Определить вероятность $P(|\Delta| < 2r)$, где r — вероятное отклонение.

15. Производятся измерения угла без систематических ошибок. Определить вероятность $P(|\Delta| > 2\sigma)$.

16. Производятся измерения угла. Математическое ожидание ошибок измерений $M(\Delta)$. Определить вероятность $P(|\Delta - M(\Delta)| > 2\sigma)$.

17. Производятся измерения угла. Математическое ожидание ошибок измерений $M(\Delta)$. Определить вероятность $P(|\Delta - M(\Delta)| < 2\nu)$. Здесь ν — среднее отклонение.

Задания к §1.7

1. Пусть случайная величина X имеет $M_X=300$ и $\sigma_X=40$. Построить доверительный интервал для истинного значения величины X с вероятностью 0,75.

2. Пусть случайная величина X имеет $M_X=1000$ и $\sigma_X=40$. Построить доверительный интервал для истинного значения величины X с вероятностью 0,9.

3. Сколько измерений линии, со средним квадратическим отклонением 3 см, необходимо произвести электронным тахеометром, чтобы среднее арифметическое из произведенных измерений отличалось от математического ожидания на величину не более чем 5 см с вероятностью не менее 0,95?

4. Сколько измерений линии, со средним квадратическим отклонением 5 см, необходимо произвести электронным тахеометром, чтобы среднее арифметическое из произведенных измерений отличалось от математического ожидания на величину не более чем 10 см с вероятностью не менее 0,95?

5. Производятся 5 измерений линии электронным тахеометром, со средним квадратическим отклонением 3 см, $\sigma_A=3$ см. В каких пределах будет отличаться среднее арифметическое значение измеряемого расстояния от математического ожидания с вероятностью не менее чем 0,95?

6. Производятся 5 измерений угла электронным тахеометром, со средним квадратическим отклонением 2". $\sigma_A=2$ ". В каких пределах будет отличаться среднее арифметическое значение измеряемого угла от математического ожидания с вероятностью не менее чем 0,9?

7. Сколько измерений угла, со средним квадратическим отклонением 2", необходимо произвести электронным тахеометром, чтобы среднее арифметическое из произведенных измерений отличалось от математического ожидания на величину не более чем 10" с вероятностью не менее 0,95?

8. В течение дня производятся 100 измерений углов электронным тахеометром. В каких пределах будет отличаться относительная частота Q появления положительной ошибки от 0,5 с вероятностью не менее чем 0,75?

9. Производятся 300 измерений углов электронным тахеометром. В каких пределах будет отличаться относительная частота Q появления положительной ошибки от 0,5 с вероятностью не менее чем 0,9?

10. Производятся 100 измерений углов электронным тахеометром. Определить вероятность того, что количество положительных ошибок в данной серии измерений будет находиться в пределах от 20 до 40.

11. Производятся 100 измерений углов электронным тахеометром. Определить вероятность того, что количество положительных ошибок в данной серии измерений будет находиться в пределах от 50 до 60.

12. Производятся 50 измерений углов электронным тахеометром. Определить вероятность того, что количество положительных ошибок в данной серии измерений будет находиться в пределах от 20 до 30.

Задания к §1.8

1. Задана корреляционная матрица случайного вектора X

$$K_X = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Определить средние квадратические отклонения σ_{x_1} , σ_{x_2} и коэффициент корреляции между элементами вектора X .

2. Задана корреляционная матрица случайного вектора X

$$K_X = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Определить средние квадратические отклонения σ_{x_1} , σ_{x_2} и коэффициент корреляции между элементами вектора X .

3. Задана корреляционная матрица случайного вектора X

$$K_X = \begin{pmatrix} 16 & -4 \\ -4 & 25 \end{pmatrix}.$$

Определить средние квадратические отклонения σ_{x_1} , σ_{x_2} и коэффициент корреляции между элементами вектора X .

4. Задана корреляционная матрица случайного вектора X и математические ожидания $M_{x_1}=2$, $M_{x_2}=3$.

$$K_X = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}.$$

Определить средние квадратические отклонения σ_{x_1} , σ_{x_2} и коэффициент корреляции между элементами вектора X , построить уравнение и график прямой регрессии X_2/X_1 .

5. Задана корреляционная матрица случайного вектора X и математические ожидания $M_{x_1}=-1$, $M_{x_2}=3$.

$$K_X = \begin{pmatrix} 16 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$$

Определить средние квадратические отклонения σ_{x_1} , σ_{x_2} и коэффициент корреляции между элементами вектора X , построить уравнение и график прямой регрессии X_2/X_1 .

6. Задана корреляционная матрица случайного вектора X и математические ожидания $M_{x_1}=0$, $M_{x_2}=3$.

$$K_X = \begin{pmatrix} 16 & -4 \\ -4 & 25 \end{pmatrix}.$$

Определить средние квадратические отклонения σ_{X_1} , σ_{X_2} и коэффициент корреляции между элементами вектора X , построить уравнение и график прямой регрессии X_2/X_1 .

7. Задана плотность совместного распределения двух случайных величин на квадрате. Установить, зависимы ли X и Y .

$$\varphi(x, y) = Z \begin{cases} C, & -1 < X < 1; \quad -1 < Y < 1; \\ 0 & \text{вне квадрата.} \end{cases}$$

Определить C , плотности частных распределений.

8. Задана плотность совместного распределения двух случайных величин на квадрате.

$$\varphi(x, y) = Z \begin{cases} C, & -0,5 < X < 0,5; \quad -1 < Y < 1; \\ 0 & \text{вне квадрата.} \end{cases}$$

Определить C , установить — зависимы ли X и Y .

9. Задана плотность совместного распределения двух случайных величин на квадрате.

$$\varphi(x, y) = Z \begin{cases} C, & -1 < X < 1; \quad -1 < Y < 1; \\ 0 & \text{вне квадрата.} \end{cases}$$

Определить C , установить, зависимы ли X и Y , определить условное математическое ожидание величины X , если известно, что Y приняло значение в области $B = [-1; 0]$.

10. Задана корреляционная матрица случайного вектора X

$$K_X = \begin{pmatrix} 16 & -4 \\ -4 & 25 \end{pmatrix}$$

и преобразование $Y_1 = X_1 - 0,5X_2$; $Y_2 = 2X_1 - X_2$.

Определить корреляционную матрицу вектора Y .

11. Задана корреляционная матрица случайного вектора X . Вектор X связан с вектором Y следующими соотношениями $Y_1 = X_1 - X_2$; $Y_2 = 2X_1 - X_2$; $Y_3 = X_1 - 2X_2$

$$K_X = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 16 \end{pmatrix}.$$

Определить корреляционную матрицу вектора Y .

12. Задана корреляционная матрица случайного вектора X . Вектор X связан с вектором Y следующими соотношениями $Y_1 = -X_1 + 2X_2$; $Y_2 = -2X_1 - 3X_2$; $Y_3 = X_1 - X_2$

$$K_X = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Определить корреляционную матрицу вектора Y .

Задания к §2.1

Задача 1. Задана выборка из генеральной совокупности, объем выборки $n=100$

0,862	0,916	0,673	-1,044	0,069	-0,693	0,466	-0,151	-0,863	2,114
-1,236	-1,694	0,386	-1,429	-0,411	0,874	-0,569	-0,91	-0,868	1,097
-1,023	0,617	-0,245	-0,086	0,685	0,791	0,358	-0,211	-0,156	0,136
0,864	1,958	0,069	0,565	0,557	1,891	1,479	-2,294	0,662	-0,441
-0,474	0,089	-0,699	0,347	-0,875	1,9	-2,726	0,87	2,179	1,085
1,176	-0,971	-1,576	0,464	1,474	1,165	-0,763	0,509	0,496	-0,802
-0,627	-0,553	-0,346	-0,464	0,251	-0,373	-0,273	1,29	0,194	2,086
-1,562	0,079	0,42	1,627	0,62	-1,717	-1,373	2,396	0,733	-0,002
-0,846	-1,017	-1,631	-1,054	1,116	0,945	0,76	-1,062	-0,413	1,607
0,024	-0,332	-0,456	0,397	0,496	-0,079	0,083	0,422	-0,772	1,681

Построить статистический ряд распределения. Вычислить среднее арифметическое и среднюю квадратическую ошибку для данной выборки по формуле Гаусса.

Задача 2. Для предыдущей задачи построить гистограмму.

Задача 3. Задан статистический ряд распределения. (см. предыдущую задачу). Вычислить статистическую функцию в граничных точках интервалов.

Задача 5. Студент должен решить задания, приведенные в задачах 1–3 для своего варианта (табл. П1). Выборки сформированы программами моделирования нормального распределения с математическим ожиданием M и средним квадратическим отклонением σ .

Варианты индивидуальных заданий. Объем выборки $n=100$

Вариант 1. $M=1; \sigma=2$									
0,122	-0,359	0,053	-0,903	-2,371	1,087	0,759	2,113	5,384	2,617
2,97	2,724	2,831	2,346	-1,089	1,138	-0,511	2,393	0,636	-0,289
-0,446	-0,033	2,116	0,51	1,179	3,524	-0,411	1,004	3,215	2,785
-4,802	-3,314	1,412	-0,232	-1,395	1,198	2,542	1,612	1,023	-0,529
0,182	-0,348	0,736	3,036	1,361	2,027	2,48	0,967	1,558	1,324
1,857	0,05	-0,391	7,096	0,427	-1,56	2,519	0,215	-1,407	-1,074
0,961	1,064	1,53	1,983	1,477	-0,369	-2,23	3,823	2,943	-1,312
1,287	4,394	0,359	-3,062	-1,822	-1,651	-0,034	1,124	-0,192	0,339
2,078	1,437	1,81	-1,312	-1,21	-1,207	0,185	-1,627	-4,681	3,552
2,582	1,286	-1,013	-0,854	-0,756	1,555	0,196	3,604	-1,756	-1,098

Вариант 2. $M=1; \sigma=2$									
1,761	1,875	4,521	-0,295	2,102	4,093	-2,643	3,616	-1,098	1,918
-1,104	-1,484	1,848	-2,833	0,752	1,826	3,931	-1,458	0,231	1,953
1,372	1,392	2,041	2,646	2,863	2,794	1,52	-0,387	1,931	0,699
-0,726	5,229	-1,472	-2,388	1,773	-1,858	0,178	2,748	-0,138	-0,819
-0,735	3,194	-1,046	-1,503	2,249	-0,475	2,082	2,328	2,039	1,292
0,898	1,632	1,498	0,659	0,095	1,587	1,301	-0,868	2,585	2,433
3,088	2,622	2,234	0,51	0,828	2,37	2,582	1,716	0,577	0,689
1,272	2,728	4,917	1,138	2,129	2,114	4,782	3,958	-3,588	2,325
0,119	0,053	1,178	-0,398	1,694	-0,75	4,8	-4,452	2,74	5,358
3,17	3,351	-0,943	-2,152	1,928	3,949	3,331	-0,527	2,019	0,185

Вариант 3. $M=-1; \sigma=2$									
-0,008	-2,605	-2,254	-2,107	-1,692	-1,929	-0,498	-1,747	-1,546	1,579
-0,612	3,173	-4,125	-0,842	-0,159	2,255	0,24	-4,434	-3,745	3,792
0,466	-1,005	-2,692	-3,035	-4,262	-3,108	1,232	0,891	0,519	-3,123
-1,827	2,214	-0,953	-1,663	-1,913	-0,206	-0,008	-1,158	-0,834	-0,155
-2,544	-1,269	-3,926	-0,596	2,361	-2,815	0,573	-1,251	-3,235	0,448
-0,418	-2,764	-4,867	-2,919	-3,654	-1,787	-3,017	-2,188	0,894	0,609
-1,666	-4,596	0,349	-6,413	-1,486	-3,726	-2,594	-2,215	-1,488	-0,341
1,268	-2,216	-2,224	-3,181	-2,053	-1,614	-1,296	-2,953	-1,569	-1,713
-3,288	-2,224	-3,181	-2,053	-1,614	-1,296	-2,953	-1,569	-1,713	-3,288
-1,191	-1,534	-4,071	-0,458	-0,172	-6,195	-3,393	-2,809	0,641	1,126

Вариант 4. $M=-1; \sigma=2$									
-2,603	-1,604	-1,258	-0,642	-1,058	-1,938	-1,495	-2,71	-0,385	-2,695
-2,00	-0,88	-1,996	-0,888	-2,64	-1,095	-1,503	-0,962	2,572	-1,145
-1,939	1,071	1,783	-3,934	1,576	-3,332	-3,8	-2,031	-1,357	0,283
-1,415	-4,15	-1,046	-0,265	0,561	2,233	-2,22	-0,723	-3,38	-6,192
2,024	-1,909	-4,606	-4,274	-0,545	0,032	-2,83	2,28	0,19	1,593
-0,033	-3,537	0,986	-3,341	-1,057	-1,649	-2,929	-4,382	-0,303	0,287
-1,432	0,848	-1,104	-1,74	-4,985	-2,904	1,162	-1,345	-1,563	1,242
-0,539	-0,934	-2,117	-0,175	-2,342	-2,94	0,475	-4,217	-1,906	-2,166
-1,571	0,285	0,333	-2,622	-3,423	-2,241	-3,184	0,409	-0,843	0,032
1,137	-1,076	0,108	2,047	-4,296	-1,953	-0,562	-1,484	0,283	-1,415

Продолжение табл. П1

Вариант 5. $M=0; \sigma=2$									
0,412	1,349	0,462	-0,864	-0,819	2,722	-1,969	-0,746	-2,446	-0,798
-4,089	2,441	-2,07	-4,103	-2,249	1,052	0,843	-1,183	-1,371	0,301
-5,098	0,452	-1,79	-3,441	1,464	-3,501	-3,185	4,409	0,347	2,445
0,551	1,706	-1,161	3,05	-5,745	0,528	-0,706	1,182	2,171	-0,514
2,271	-3,76	4,486	3,059	0,144	0,211	-3,104	-2,504	-0,279	-0,747
2,141	-3,859	1,363	-0,537	-0,024	1,213	-2,498	-1,05	0,102	-0,706
0,845	-3,307	2,229	-3,766	1,662	-1,089	2,866	-1,593	2,419	1,419
2,048	-0,418	2,322	-0,007	2,646	-0,846	-0,955	-2,14	-2,743	1,687
0,553	1,431	0,594	0,245	-6,247	-3,295	-0,278	-3,236	-0,869	-0,632
-1,685	-3,395	0,953	1,365	0,244	-2,751	-0,067	0,677	2,909	0,301

Вариант 6. $M=0; \sigma=2$									
0,535	-1,063	0,388	1,659	1,052	-2,745	0,675	-1,1	-0,593	0,14
-2,146	-0,384	-0,607	1,182	1,077	-0,256	-1,442	1,966	-1,048	3,499
-3,39	3,055	4,782	-0,47	-1,388	1,168	0,58	0,027	-5,687	0,95
-0,379	1,478	-3,949	-1,492	-0,218	-0,607	2,215	-2,643	0,109	-3,404
1,943	1,207	3,041	2,36	1,628	-1,397	0,344	1,197	0,256	2,376
2,258	-1,908	-0,002	1,15	-1,111	-0,833	-1,783	-3,572	-0,442	0,016
-0,652	0,772	1,111	2,516	-3,694	5,034	2,04	-0,153	-0,899	0,615
-3,311	1,492	-0,021	-1,671	-0,981	-2,312	-1,004	2,368	-0,299	1,837
1,793	-1,061	-2,788	-2,217	0,87	-2,176	-0,609	-1,67	-1,718	0,203
0,635	-0,963	2,574	-1,558	2,525	-0,815	-1,751	-0,918	1,08	0,109

Вариант 7. $M=0; \sigma=5$									
-0,175	1,879	3,569	2,52	2,193	5,255	-4,12	0,161	-3,738	-3,864
-3,289	-2,939	-12,494	1,145	-1,578	-0,13	8,799	-7,536	8,249	1,064
-5,026	-1,649	-2,729	-2,634	-6,972	6,685	-6,416	7,078	-0,366	-6,392
-3,772	-3,408	-3,787	0,63	-2,397	-6,434	-3,294	-2,662	3,131	-3,364
-3,072	2,619	-3,72	7,647	-1,404	-3,713	-1,13	-6,926	-5,502	-6,942
5,454	5,086	-1,497	-1,503	-5,586	-0,654	-1,117	0,766	6,981	-1,188
8,612	3,862	-8,266	9,079	-0,474	0,109	-2,686	-5,366	-1,54	-4,508
3,889	0,566	0,831	-1,071	9,86	6,171	-1,093	8,248	5,484	7,618
5,424	3,017	-3,132	5,843	-0,798	2,812	-1,625	2,199	-12,249	-0,089
-5,77	-3,596	-1,346	-5,126	2,823	-4,586	-7,171	0,941	-5,391	-1,13

Вариант 8. $M=0; \sigma=5$									
0,462	-0,248	5,62	6,927	-7,072	-4,34	-0,502	-0,551	2,879	15,309
-10,145	3,766	-6,441	-1,325	6,176	-5,079	-4,423	0,793	-9,019	-5,833
2,793	-7,486	1,155	-2,61	-17,123	-9,504	0,751	-1,526	-3,138	0,598
1,755	-4,497	-6,504	3,193	7,276	-4,103	5,193	0,552	-5,978	-3,747
5,154	7,284	4,922	-0,971	-2,218	-2,253	-2,069	-4,381	11,521	-2,694
-2,988	-9,564	1,56	-7,074	1,365	12,175	3,435	1,577	6,694	14,232
5,026	3,59	3,394	0,52	-2,11	7,208	-0,512	4,42	7,104	-1,443
2,06	-0,356	3,179	-0,357	-0,948	-3,481	2,765	6,308	1,112	-7,939
-0,104	1,175	0,991	0,605	-6,369	1,83	-4,142	4,57	0,927	1,26
7,749	-4,025	4,728	-1,653	-0,968	-4,78	6,41	-3,693	-6,815	1,365

Продолжение табл. П1

Вариант 9. $M=2; \sigma=10$									
0,731	-7,973	-3,181	3,269	2,687	13,069	-14,685	-14,771	5,779	11,746
13,832	-6,716	3,978	-11,842	5,725	-13,079	-8,198	-5,779	-13,806	-13,291
-2,746	-8,842	-15,809	4,01	-0,873	-14,518	2,476	-7,85	4,52	-7,298
16,466	10,958	-6,602	-8,217	6,608	-2,894	-1,123	4,735	10,297	1,532
-3,679	-20,032	0,437	-20,238	-11,758	-6,495	2,645	-9,197	-7,721	11,049
-6,542	-2,392	2,728	-13,706	0,62	16,978	13,618	-5,721	-1,888	-1,948
12,494	-15,033	3,366	-18,288	-15,723	7,188	-4,403	-15,529	9,194	1,761
-3,545	-9,46	-7,315	9,044	9,258	21,015	14,766	11,001	1,604	-8,36
3,646	9,73	-0,863	-3,027	-10,48	-7,823	5,793	-1,871	-11,882	-14,854
-10,374	4,461	0,144	-21,834	14,732	-11,983	-4,274	5,157	-11,293	0,62

Вариант 10. $M=2; \sigma=10$									
11,375	-2,843	15,65	-10,935	3,669	-3,176	-14,012	3,093	12,725	-6,749
-1,306	-1,354	1,589	4,358	7,288	22,181	-1,845	-5,923	-0,253	1,351
1,969	-11,377	14,094	-0,573	-2,769	-13,427	-21,139	9,977	-8,658	-1,156
9,483	-3,62	-3,355	-13,602	11,095	-4,924	-5,057	-9,369	-2,639	16,851
-1,047	12,571	1,244	-1,896	1,632	-7,634	-6,629	11,886	-7,059	-20,114
1,392	-0,211	8,819	-2,247	-7,634	-6,629	11,886	-7,059	-20,114	1,392
-0,211	8,819	-2,247	-0,065	-3,538	9,545	-6,567	9,158	0,836	4,554
-8,251	6,821	-5,571	0,061	-0,172	-3,786	-2,604	-9,277	-10,179	-22,271
-5,352	-3,666	-19,087	-3,022	-5,498	-0,593	11,535	-2,583	2,334	-3,728
-7,912	-13,095	4,384	1,259	-11,312	-5,168	4,128	1,075	2,604	-0,065

Вариант 11 $M=0; \sigma=3$									
-1,317	-2,038	-1,42	-2,854	-5,057	0,131	-0,362	1,669	6,575	2,426
2,955	2,587	2,747	2,019	-3,133	0,207	-2,267	2,09	-0,546	-1,933
-2,169	-1,55	1,674	-0,735	0,269	3,785	-2,117	0,005	3,323	2,678
-8,703	-6,471	0,618	-1,848	-3,593	0,297	2,312	0,918	0,034	-2,293
-1,227	-2,022	-0,396	3,054	0,542	1,54	2,219	-0,049	0,836	0,486
1,285	-1,426	-2,087	9,144	-0,859	-3,84	2,278	-1,178	-3,611	-3,111
-0,058	0,096	0,795	1,475	0,715	-2,053	-4,844	4,234	2,915	-3,468
0,431	5,092	-0,961	-6,094	-4,234	-3,976	-1,551	0,186	-1,787	-0,992
1,617	0,656	1,215	-3,468	-3,315	-3,31	-1,222	-3,94	-8,521	3,828
2,373	0,429	-3,019	-2,781	-2,634	0,833	-1,207	3,906	-4,134	1,54

Вариант 12. $M=0; \sigma=3$									
-3,157	-3,726	1,272	-5,75	-0,372	1,24	4,397	-3,687	-1,154	1,429
0,559	0,588	1,562	2,469	2,794	2,691	0,78	-2,08	1,397	-0,452
-2,59	6,343	-3,708	-5,081	1,159	-4,287	-1,233	2,623	-1,707	-2,729
-2,603	3,291	-3,069	-3,755	1,874	-2,213	1,623	1,992	1,559	0,438
-0,154	0,948	0,747	-0,512	-1,358	0,881	0,452	-2,802	2,378	2,149
3,131	2,433	1,851	-0,735	-0,257	2,054	2,373	1,073	-0,634	-0,467
0,408	2,592	5,875	0,206	1,694	1,671	5,673	4,436	-6,882	1,987
-1,322	-1,421	0,267	-2,096	1,042	-2,625	5,7	-8,178	2,611	6,537
3,255	3,527	-2,914	-4,728	1,392	4,423	3,496	-2,29	1,528	1,488
-2,407	-1,881	-1,66	-1,038	-1,393	0,753	-1,12	-0,819	3,869	0,452

Продолжение табл. П1

Вариант 13. $M=1; \sigma=3$									
1,582	7,259	-3,687	1,237	2,261	5,882	2,859	-4,151	-3,118	8,188
3,2	0,992	-1,538	-2,052	-3,892	-2,161	4,348	3,836	3,279	-2,185
-0,24	5,821	1,071	0,005	-0,369	2,191	2,488	0,763	1,249	2,267
-1,316	0,597	-3,389	1,605	6,042	-1,723	3,359	0,623	-2,353	3,172
1,873	-1,645	-4,801	-1,878	-2,981	-0,181	-2,026	-0,782	3,84	3,414
0,008	-4,394	3,024	-7,12	0,27	-3,09	-1,391	-0,823	0,268	1,989
4,402	-0,824	-0,836	-2,271	-0,579	0,079	0,557	-1,929	0,147	-0,069
-2,432	0,714	0,199	-3,607	1,813	2,243	-6,792	-2,59	-1,714	3,461
4,19	-1,405	0,093	0,613	1,537	0,914	-0,407	0,257	-1,566	1,922
-1,543	-0,499	1,179	-0,494	1,169	-1,46	0,858	0,246	1,058	-2,59

Вариант 14. $M=1; \sigma=3$									
6,358	0,783	-0,408	4,107	5,174	-3,4	4,864	-2,498	-3,2	-0,547
0,465	2,925	0,378	-3,726	0,931	2,102	3,342	5,849	-0,83	1,415
-2,57	-6,789	5,537	-0,364	-4,409	-3,911	1,682	2,547	-1,745	5,92
2,785	4,89	2,451	-2,805	3,979	-2,511	0,915	0,027	-1,894	-4,072
2,045	2,931	0,352	3,772	0,845	-0,11	-4,978	-1,856	4,243	0,483
0,155	4,362	1,692	1,099	-0,675	2,237	-1,013	-1,91	3,212	-3,825
-0,359	-0,748	0,144	2,928	3	-1,432	-2,635	-0,862	-2,276	3,113
1,235	2,548	4,206	0,887	2,661	5,57	-3,944	-0,43	1,657	0,273
1,617	3,023	1,693	-0,296	-0,229	5,082	-1,953	-0,118	-2,669	-0,197
-5,133	4,662	-2,105	-5,155	-2,374	2,578	2,265	-0,774	-1,057	0,27

Вариант 15. $M=1; \sigma=3$									
1,451	-6,647	1,678	-1,685	-4,161	3,196	-4,252	-3,777	7,613	1,521
4,667	1,827	3,559	-0,741	5,575	-7,618	1,792	-0,059	2,773	4,256
0,229	4,407	-4,64	7,729	5,589	1,217	1,316	-3,656	-2,756	0,582
-0,121	4,212	-4,789	3,045	0,194	0,964	2,82	-2,747	-0,575	1,153
-0,059	2,267	-3,96	4,343	-4,65	3,492	-0,634	5,298	-1,39	4,629
3,128	4,072	0,374	4,484	0,989	4,968	-0,269	-0,432	-2,21	-3,115
3,53	1,829	3,146	1,891	1,368	-8,371	-3,943	0,583	-3,854	-0,304
0,052	-1,528	-4,092	2,429	3,047	1,366	-3,127	0,899	2,016	5,364
1,802	-0,595	1,583	3,488	2,578	-3,117	2,013	-0,65	0,11	1,21
-2,219	0,424	0,09	2,773	2,615	0,616	-1,163	3,949	-0,572	0,144

Вариант 16. $M=-1; \sigma=3$									
4,248	-6,085	3,582	6,174	-1,705	-3,082	0,752	-0,129	-0,96	-9,531
0,425	-1,568	1,218	-6,923	-3,237	-1,327	-1,911	2,323	-4,965	-0,836
-6,105	1,915	0,81	3,562	2,54	1,443	-3,096	-0,484	0,795	-0,617
2,563	2,387	-3,863	-1,003	0,725	-2,666	-2,249	-3,675	-6,359	-1,662
-0,976	-1,978	0,158	0,666	2,774	-6,541	6,55	2,061	-1,229	-2,349
-0,077	-5,966	1,238	-1,032	-3,506	-2,471	-4,468	-2,506	2,552	-1,449
1,755	1,69	-2,591	-5,181	-4,325	0,306	-4,264	-1,914	-3,505	-3,577
-0,695	-0,047	-2,445	2,86	-3,336	2,787	-2,222	-3,627	-2,377	0,62
-1,105	0,128	1,141	0,512	0,316	2,153	-3,472	-0,904	-3,243	-3,318
-2,973	-2,763	-8,496	-0,313	-1,947	-1,078	4,279	-5,521	3,95	-0,572

Продолжение табл. П1

Вариант 17. $M=-1; \sigma=4$									
-0,149	-5,021	-2,319	-3,183	-3,107	-6,578	4,348	-6,132	4,662	-1,293
-6,113	-4,017	-3,727	-4,03	-0,496	-2,917	-6,147	-3,635	-3,13	1,505
-3,691	-3,458	1,095	-3,976	5,117	-2,123	-3,971	-1,904	-6,541	-5,401
-6,554	3,363	3,069	-2,197	-2,203	-5,469	-1,523	-1,893	-0,388	4,585
-1,951	5,89	2,09	-7,613	6,263	-1,379	-0,913	-3,149	-5,292	-2,232
-4,606	2,112	-0,547	-0,336	-1,857	6,888	3,937	-1,875	5,599	3,387
5,094	3,339	1,413	-3,505	3,674	-1,638	1,249	-2,3	0,76	-10,8
-1,071	-5,616	-3,877	-2,077	-5,101	1,259	-4,669	-6,737	-0,247	-5,313
-0,63	-1,198	3,496	4,542	-6,658	-4,472	-1,401	-1,441	1,303	11,247
-9,116	2,013	-6,153	-2,06	3,941	-5,064	-4,538	-0,365	-8,215	-3,318

Вариант 18. $M=-1; \sigma=4$									
-5,666	1,234	-6,989	-0,076	-3,088	-14,698	-8,603	-0,399	-2,221	-3,51
-0,521	0,404	-4,597	-6,203	1,554	4,82	-4,282	3,155	-0,559	-5,783
-3,998	3,124	4,827	2,938	-1,777	-2,775	-2,803	-2,655	-4,505	8,217
-3,155	-3,39	-8,651	0,248	-6,659	0,092	8,74	1,748	0,262	4,355
10,386	3,021	1,872	1,715	-0,584	-2,688	4,767	-1,41	2,536	4,683
-2,155	0,648	-1,285	1,543	-1,285	-1,758	-3,785	1,212	4,047	-0,111
-7,352	-1,083	-0,06	-0,207	-0,516	-6,095	0,464	-4,314	2,656	-0,259
0,008	5,199	-4,22	2,783	-2,323	-1,775	-4,824	4,128	-3,954	-6,452
0,093	-3,389	-1,472	1,107	0,875	5,028	-6,074	-6,108	2,112	4,498
5,333	-2,886	1,391	-4,937	2,09	-5,432	-3,479	-2,512	-5,723	-0,247

Вариант 19. $M=1; \sigma=4$									
-3,516	0,702	-1,737	-4,524	3,404	1,451	-4,007	2,79	-1,34	3,608
-1,119	8,387	6,183	-0,841	-1,487	4,443	0,643	1,351	3,694	5,919
2,413	0,329	-6,213	1,975	-6,295	-2,903	-0,798	2,858	-1,879	-1,288
6,22	-0,817	0,843	2,891	-3,682	2,048	8,591	7,247	-0,489	1,045
1,021	6,798	-4,213	3,146	-5,515	-4,489	4,675	0,039	-4,411	5,478
2,504	0,382	-1,984	-1,126	5,418	5,503	10,206	7,706	6,2	2,442
-1,544	3,258	5,692	1,455	0,589	-2,392	-1,329	4,117	1,052	-2,953
-4,142	-2,35	3,584	1,858	-6,933	7,693	-2,993	0,091	3,863	-2,717
6,35	0,663	8,06	-2,574	3,268	0,53	-3,805	3,037	6,89	-0,9
1,278	1,258	2,436	3,543	4,715	10,673	1,062	-0,569	1,699	-2,323

Вариант 20. $M=1; \sigma=4$									
2,341	2,588	-2,751	7,438	1,571	0,692	-3,571	-6,655	5,791	-1,663
1,338	5,593	0,352	0,458	-3,641	6,238	-0,17	-0,223	-1,947	0,744
8,54	1,381	6,828	2,298	1,042	2,453	-1,254	-0,852	6,554	-1,024
-6,246	2,357	1,716	5,327	0,901	1,774	0,385	5,618	-0,827	5,463
2,135	3,622	-1,5	4,528	-0,429	1,824	1,731	0,286	0,758	-1,911
-2,272	-7,108	-0,341	0,334	-5,835	0,591	-0,399	1,563	6,414	0,767
2,734	0,309	-1,365	-3,438	3,554	2,304	-2,725	-0,267	3,451	2,23
2,842	-1,087	3,019	-3,199	2,113	-1,154	-0,123	2,191	-2,281	1,785
3,824	-1,31	5,479	6,475	2,129	10,751	-2,82	3,51	0,41	0,277
3,582	-2,144	5,277	0,829	2,854	-2,5	-0,317	-3,627	-0,376	-0,9

Продолжение табл. П1

Вариант 21. $M=0; \sigma=4$									
2,537	1,168	0,566	1,391	-1,534	-0,28	-3,855	-2,237	-8,228	-0,663
0,417	2,846	-4,894	6,143	-0,378	-3,407	-8,56	-1,1	0,194	-3,952
5,182	-1,223	-1,219	3,52	6,146	3,073	-2,269	-5,964	-2,237	-0,948
-2,991	2,917	0,922	-1,004	-0,683	2,126	-2,612	-0,956	-2,861	1,413
1,544	-4,069	4,032	2,19	5,552	1,709	1,215	-4,081	3,507	-2,132
-3,112	-0,17	0,063	6,501	7,426	5,094	9,162	-3,048	0,638	7,392
4,524	5,14	-1,518	-1,623	1,396	-5,715	-0,152	-0,804	3,047	6,124
3,42	-0,776	7,388	3,261	-0,466	3,851	-1,359	-4,868	2,095	-3,639
4,363	-0,553	-2,203	4,445	-2,575	-0,086	-3,983	1,546	5,763	2,746
-6,039	2,665	-5,02	3,001	7,618	-0,821	-3,204	-1,106	-2,65	0,41

Вариант 22. $M=0; \sigma=4$									
1,456	3,86	1,733	3,062	-6,887	2,135	-0,674	-2,212	-7,383	-3,416
-10,179	0,181	1,679	-0,537	-5,642	0,208	-0,743	-1,337	-0,581	0,225
0,815	0,64	-7,943	1,516	1,429	8,219	3,388	-3,811	-1,193	4,69
-0,037	0,877	-1,84	4,532	6,512	-6,98	7,647	2,553	10,171	0,511
5,104	8,036	1,922	0,64	-0,184	4,189	0,386	-1,747	0,171	-0,956
5,863	4,891	-1,383	4,322	-2,527	-1,117	1,494	7,062	-5,142	0,42
-3,521	-6,019	-4,038	-7,987	1,241	0,095	5,152	-0,389	-5,45	1,553
-3,399	-0,682	0,733	7,059	3,067	-1,912	11,243	-4,465	2,195	2,339
-7,942	-1,313	-4,424	6,219	4,668	-2,99	-4,908	-0,147	-3,698	1,346
-5,208	-0,404	1,209	-3,932	-5,503	-1,984	-0,03	-0,258	-0,358	3,001

Вариант 23. $M=0; \sigma=5$									
-3,643	-4,632	2,8	-6,399	-1,309	1,694	-0,327	-6,437	-3,574	2,138
2,822	1,191	-3,314	-7,198	1,527	3,16	-8,925	1,458	-1,449	-3,48
-0,117	-0,711	8,304	-2,335	-1,853	2,69	1,805	10,523	-0,848	-4,042
3,85	-0,486	0,897	-0,478	-2,125	-0,57	-10,592	7,792	4,476	-0,091
-11,316	-6,851	1,909	-6,318	7,709	7,078	0,421	6,345	-6,669	4,75
-5,017	1,232	-5,78	-0,454	2,943	-0,829	-1,472	5,068	2,7	-1,791
-1,909	2,542	-5,25	-1,868	0,485	1,432	-2,808	2,733	-3,291	-2,679
5,515	-7,316	1,916	2,097	9,113	3,633	-0,423	2,784	2,813	-5,411
-4,409	-7,359	-2,312	2,105	-2,187	4,702	5,619	1,68	-2,627	1,305
7,914	-2,396	6,66	0,791	-8,28	6,78	1,437	2,569	1,116	-0,03

Вариант 24. $M=0; \sigma=5$									
3,636	-0,668	-4,529	-2,252	7,945	-10,396	1,228	-1,373	-6,94	10,308
2,167	4,842	8,129	1,092	2,962	6,424	-8,683	5,557	-3,361	1,406
-2,209	-7,838	-4,697	5,829	2,102	-1,042	1,945	0,411	0,734	-3,912
3,765	5,998	-2,999	4,823	-4,996	1,884	5,671	2,825	-3,602	6,837
2,849	3,511	6,214	2,57	0,059	10,978	-6,543	-0,437	0,434	-6,578
1,326	5,803	1,35	2,099	-0,735	3,828	-3,756	5,233	-3,85	-0,789
10,403	-0,304	5,303	-3,028	4,322	1,099	2,412	0,158	-3,884	-1,672
-3,057	-3,067	-3,979	0,069	2,809	1,767	3,051	-0,647	-5,438	6,809
-12,189	-3,823	-1,95	4,5	-3,131	-5,48	6,79	8,11	-3,524	4,545
-2,633	-2,353	4,724	-5,345	2,795	-3,048	-9,162	-9,709	0,802	-2,396

Вариант 25. $M=0; \sigma=1$									
0,796	-0,889	0,417	0,811	0,173	-1,679	-1,057	0,506	1,746	1,277
1,556	-0,129	0,308	-0,587	-0,043	1,561	0,063	0,459	-0,872	-0,892
-1,798	-0,689	0,387	0,532	-0,535	0,21	-0,402	0,334	-1,289	-0,06
0,012	-0,065	-0,272	-0,965	-1,132	-0,146	-0,937	-0,129	0,583	1,336
0,073	-2,023	-0,271	0,609	1,774	0,574	-0,509	-1,427	0,211	1,014
0,08	-0,302	-0,872	-0,29	0,62	0,506	2,32	-2,564	0,255	-1,856
-0,745	-0,628	1,816	-0,749	-0,054	0,465	1,561	-0,356	0,734	1,654
0,517	-0,686	-0,052	-1,208	0,606	0,71	0,19	1,549	0,393	-1,519
-0,622	-0,168	0,676	1,62	0,522	-1,542	-0,029	0,818	0,604	-0,966
0,297	0,035	1,616	0,206	-0,175	0,818	0,768	-0,558	-0,284	-0,647

Вариант 26. $M=0; \sigma=1$									
0,695	-0,278	2,076	0,111	-1,089	0,822	-0,176	0,911	-1,858	-1,241
-0,554	-0,406	-0,204	0,333	0,247	-0,244	1,307	-0,081	1,322	-1,401
-0,189	0,963	-0,667	1,006	-3,231	-1,239	0,187	0,825	0,948	1,218
0,484	-0,445	3,06	-1,392	-0,174	0,037	-0,434	-0,512	-0,934	1,062
-0,227	2,5	0,088	0,801	-1,827	-0,323	0,301	-1,206	-0,804	-1,849
-0,906	0,485	-0,683	0,407	0,497	-1,607	0,058	0,923	0,906	-0,159
0,249	-1,796	-0,033	-1,351	0,177	0,294	-1,513	0,972	0,193	0,18
-1,813	-1,04	-1,392	0,601	1,088	1,309	-0,822	-0,872	0,562	-0,809
2,083	-1,715	0,026	1,22	-1,611	-0,495	-1,136	0,406	-0,669	-0,293
-0,084	0,016	0,123	0,27	-0,539	1,328	-0,265	0,535	-2,389	0,71

Вариант 27. $M=-1; \sigma=1$									
-0,179	-1,047	-0,792	-1,115	-0,614	-2,273	-1,423	-1,105	-1,771	0,23
-1,775	1,118	-1,744	-1,289	0,284	-0,713	-0,364	-2,704	-1,256	-1,861
-0,167	-0,165	-1,975	-0,876	0,512	-1,024	1,867	0,851	-1,831	-0,251
-0,949	0,103	-1,34	-0,889	-2,577	0,519	-3,136	-1,93	-0,013	0,599
-1,404	-1,27	-1,763	-1,951	-2,19	-1,158	-2,534	0,442	-2,501	-1,728
-1,281	0,298	-0,823	-1,384	-0,574	-1,533	0,579	-0,964	1,105	-1,781
-1,433	0,357	-1,313	-0,167	-1,807	-0,628	0,395	-0,311	0,201	-1,817
-0,764	0,581	-1,621	-0,873	0,307	-1,321	-1,972	-0,438	-1,767	-0,374
-1,943	0,441	-0,04	-1,542	-1,331	-1,835	-0,235	-0,617	-1,456	-0,727
-0,69	-0,198	-0,355	-2,02	-1,888	-1,271	0,668	-0,222	-0,245	-0,464

Вариант 28. $M=-1; \sigma=1$									
-1,296	-1,095	-3,587	-0,111	-1,599	-0,641	-0,541	-2,131	-1,044	-1,535
-1,783	-1,048	-0,372	0,673	-1,965	-0,895	-0,629	-0,691	0,499	-0,368
-0,055	0,188	-0,343	0,306	-1,733	-1,019	-2,149	-1,068	-1,058	-1,623
-1,838	0,888	1,66	-1,893	-2,361	-1,371	-2,816	-1,368	-0,827	-0,103
0,746	-1,017	-1,508	1,784	-1,42	-0,601	0,219	-0,041	-2,012	-2,556
-0,89	-1,484	-1,497	-1,117	-0,299	0,609	-1,757	-0,766	0,792	-1,16
-1,495	-3,513	0,419	-0,678	-1,894	-1,836	-0,388	-0,856	-0,532	-1,8
-1,247	-0,513	0,631	-0,654	-0,172	-0,375	-0,671	-0,912	-0,928	-1,987
0,815	0,062	-0,339	-0,515	-1,237	-1,025	-0,043	-0,491	-1,663	-0,002
-0,938	0,095	-1,633	0,141	-0,929	-0,58	-0,218	-0,217	-0,82	-0,69

Вариант 29. $M=1; \sigma=1$									
1,679	0,974	0,376	0,955	1,341	-0,024	2,353	0,591	2,196	1,489
0,011	-0,825	0,48	1,672	-0,012	-0,582	0,257	0,265	1,006	0,739
0,348	1,148	1,875	-0,812	1,685	1,148	2,326	1,566	1,328	1,928
0,011	0,82	1,78	0,216	0,955	0,805	0,327	-0,817	1,72	1,002
0,886	1,661	0,006	1,4	0,746	-0,629	1,719	0,993	1,048	1,374
2,14	1,502	0,894	1,36	-0,346	2,245	0,851	1,865	0,749	0,103
-0,931	2,302	1,475	0,228	1,92	0,069	1,832	2,168	0,259	0,47
0,291	1,872	1,917	0,486	1,003	1,988	0,62	2,448	2,595	1,312
0,036	-0,394	0,304	1,612	2,696	1,402	-0,02	2,058	2,034	2,873
0,229	1,461	0,419	0,749	2,549	2,818	-0,588	1,491	-1,444	-0,671

Вариант 30. $M=1; \sigma=1$									
0,274	0,62	1,288	-0,003	1,827	1,726	1,203	0,917	0,522	1,405
-0,653	1,23	1,367	2,054	1,612	-1,478	1,621	0,057	0,415	0,921
2,033	-0,239	1,863	1,17	-0,091	2,478	1,724	1,749	2,635	0,408
1,284	1,361	1,957	2,288	1,527	1,552	0,747	1,472	0,91	-0,1
-0,547	-0,598	0,864	2,303	1,081	0,634	0,021	0,19	1,16	-1,071
1,248	1,169	1,334	1,976	-1,421	0,042	1,94	0,626	2,309	0,374
1,215	1,171	2,46	0,188	1,568	0,788	1,247	1,938	1,859	0,671
0,067	1,524	1,377	0,145	1,898	0,903	0,604	-0,65	-0,964	1,671
1,783	2,3	3,147	0,44	-0,423	1,003	2,66	0,652	1,496	1,696
0,413	1,886	1,665	1,69	1,661	3,296	-0,946	1,942	0,805	2,168

Задания к §2.3

Задача 1. Угол измерен 10 раз (табл. П2). Все измерения выполнены равномерно, т.е. с одной и той же точностью. Обработать данный ряд измерений одной и той же величины. Определить точечные оценки для математического ожидания, среднего квадратического отклонения, вероятного отклонения, среднего отклонения. С доверительной вероятностью 0.95 определить доверительные интервалы для M_X и σ_X .

Т а б л и ц а П 2

Номер варианта	Измеренные значения угла, угловые секунды (для каждого варианта 10 значений)	
	2	3
1	37°15'	37,6; 37,6; 40,2; 41,6; 39,33; 35,5; 37,8; 41,3; 40,4; 38,3
2	45°14'	41,9; 42,9; 37,6; 38,0; 40,9; 38,9; 40,1; 39,0; 42,6; 42,9
3	14°43'	40,6; 37,5; 39,4; 40,5; 38,9; 40,4; 39,9; 37,5; 42,9; 38,3
4	34°12'	9,8; 11,4; 9,3; 9,8; 12,8; 10,6; 10,0; 11,9; 7,9; 11,3
5	35°56'	9,3; 13,0; 10,0; 11,8; 10,2; 9,3; 6,5; 11,6; 7,7; 8,2
6	23°24'	9,2; 7,9; 11,4; 8,5; 8,4; 8,0; 8,4; 9,5; 7,6; 12,4

1	2	3
7	45°35'	10,4; 14,3; 9,7; 12,1; 12,3; 12,4; 10,8; 10,2; 8,6; 8,7
8	25°46'	8,8; 9,1; 8,4; 6,5; 11,6; 8,9; 10,0; 9,5; 11,6; 10,4
9	56°21'	16,2; 18,8; 18,0; 15,1; 16,9; 15,3; 16,6; 19,0; 16,9; 17,3
10	32°52'	17,5; 15,9; 14,8; 13,5; 18,7; 13,3; 19,8; 17,7; 19,5; 17,3
11	54°32'	13,8; 15,2; 16,9; 15,7; 18,5; 21,0; 18,6; 14,5; 12,8; 18,0
12	34°23'	16,8; 15,9; 16,4; 17,2 17,2; 22,2; 18,4; 16,6; 19,9; 17,5
13	53°21'	16,5; 18,6; 14,8; 17,1; 15,0; 17,3; 15,3; 13,0; 17,3; 15,1
14	23°54'	18,9; 18,2; 18,9; 18,0; 17,3; 19,5; 19,3; 20,2; 20,0; 18,5
15	45°32'	17,6; 18,1; 20,1 19,0; 18,1; 20,2; 19,0; 20,9; 20,5; 17,6
16	34°46'	19,1; 19,6; 20,8; 16,9; 19,3; 23,0; 20,7; 20,4; 19,7; 16,7
17	12°37'	19,6; 20,1; 16,5; 16,5; 19,4; 17,0; 15,0; 17,5; 16,8; 15,9
18	14°43'	19,5; 19,4; 20,0; 19,4; 19,7; 19,7; 20,2; 17,5; 18,7; 19,5
19	26°32'	30,1; 28,4; 26,9; 31,1; 30,1; 27,9; 30,4; 27,9; 27,4; 26,4
20	34°21'	30,0; 28,8; 29,4; 29,3; 31,3; 27,3; 30,5; 27,5; 29,8; 26,5
21	23°32'	30,3; 28,2; 29,4; 28,6; 30,6; 25,8; 29,1; 30,6 32,7; 27,3
22	56°43'	29,4; 29,5; 29,3; 30,2; 29,5; 27,9; 30,6; 29,2; 27,7; 30,4
23	32°24'	27,8; 29,9; 29,6; 30,2; 30,2; 29,2; 28,5; 30,8; 30,0; 29,0
24	35°53'	37,6; 39,2; 40,2; 38,3; 40,2; 38,8; 39,3; 40,4; 38,0; 36,9
25	45°36'	37,7; 42,1; 40,9; 40,0; 39,1; 36,5; 35,5; 38,9; 39,5; 38,6
26	53°21'	37,6; 39,5; 40,9; 40,3; 39,8; 39,8; 39,4; 39,3; 39,4; 38,5
27	44°55'	39,8; 39,9; 36,8; 38,7; 40,7; 38,3; 38,1; 38,7; 38,8; 38,7
28	44°47'	39,0; 40,3; 38,2; 39,4; 36,7; 39,6; 39,2; 36,4; 40,7; 41,0
29	32°42'	49,7; 49,3; 46,7; 49,4; 47,4; 50,0; 47,1; 49,7; 46,1; 49,6
30	11°46'	47,7; 48,1; 47,6; 47,7; 49,1; 50,5; 51,5; 50,0; 47,0; 46,9
31	34°22'	44,9; 48,1; 46,5; 50,8; 47,7; 50,9; 49,0; 49,8; 52,1; 48,4
32	33°21'	48,9; 50,4; 50,1; 50,2; 50,1; 46,0; 50,6; 49,6 47,6; 46,7
33	22°45'	46,7; 49,2; 47,1; 49,4; 47,9; 49,3; 46,0; 48,3; 48,5; 48,1
34	44°22'	46,3; 43,5; 44,5; 45,6; 46,5; 47,4; 44,0; 44,1; 43,7; 46,8
35	22°46'	46,9; 45,7; 46,7; 45,1; 44,8; 46,2; 43,3; 46,2; 44,2; 43,9
36	47°44'	45,4; 43,9; 42,0; 43,0; 45,2; 45,0; 45,3; 44,4; 44,4; 44,4
37	56°11'	42,9; 47,1; 45,7; 44,3; 45,0; 44,4; 43,5; 42,8; 44,5; 42,5
38	33°53'	44,9; 45,8; 44,7; 44,5; 47,3; 45,3; 43,8; 44,4; 42,7; 45,4
39	42°14'	26,3; 24,4; 24,7; 22,1; 27,4; 28,0; 26,8; 25,5; 26,0; 26,2
40	45°25'	21,0; 23,9; 26,5; 23,2; 24,4; 23,5; 23,2; 20,7; 21,9; 24,9

Задания к §2.4

Задача 1. Задан ряд из пяти неравноточных измерений одной и той же величины (табл. ПЗ). Проведены измерения превышений, по ходам различной протяженности от нескольких твердых точек. В результате получены отметки одной и той же точки, вычисленные по нивелирным ходам протяженностью L_i . Произвести обработку данного неравноточного ряда. Вычислить наиболее надежное значение отметки, среднюю квадратическую ошибку этой отметки и построить доверительные интервалы для истинного значения отметки и для среднего квадратического отклонения среднего весового.

Т а б л и ц а ПЗ

Исходные данные

Номер варианта	Номер измерения	H_i , м	L_i , км	Номер варианта	Номер измерения	H_i , м	L_i , км
1	2	3	4	1	2	3	4
1	1	134,476	2,4	6	1	134,816	2,4
	2	134,457	3,6		2	134,820	3,6
	3	134,489	5,2		3	134,807	3,2
	4	134,441	1,9		4	134,883	4,8
	5	134,464	4,0		5	134,838	3,9
2	1	124,939	2,4	7	1	134,761	2,4
	2	125,037	3,6		2	134,729	5,2
	3	125,101	5,2		3	134,929	3,6
	4	125,031	1,9		4	134,801	2,6
	5	125,036	2,4		5	134,805	1,9
3	1	135,000	3,6	8	1	134,768	2,4
	2	134,981	5,2		2	134,741	3,9
	3	135,066	1,9		3	134,769	3,7
	4	134,888	2,4		4	134,777	2,7
	5	135,026	3,6		5	134,856	1,9
4	1	235,072	5,2	9	1	134,884	2,4
	2	235,059	1,9		2	134,710	3,6
	3	235,046	2,7		3	134,865	5,2
	4	235,003	6,5		4	134,814	1,9
	5	235,054	3,5		5	134,790	3,5
5	1	134,778	2,4	10	1	134,819	2,4
	2	134,690	3,6		2	134,826	3,6
	3	134,688	5,2		3	134,677	5,2
	4	134,737	1,9		4	135,007	1,9
	5	134,810	3,0		5	134,821	2,4

Продолжение табл. ПЗ

1	2	3	4	1	2	3	4
11	1	134,933	3,6	19	1	134,457	3,6
	2	134,902	5,2		2	134,489	5,2
	3	134,709	1,9		3	134,441	1,9
	4	134,708	2,4		4	134,476	2,4
	5	134,847	3,6		5	134,457	3,6
12	1	134,893	5,2	20	1	134,723	5,2
	2	134,764	1,9		2	134,778	1,9
	3	134,738	2,7		3	134,873	2,9
	4	134,733	2,5		4	134,750	3,6
	5	134,798	1,9		5	134,457	1,8
13	1	134,882	2,4	21	1	134,697	2,4
	2	134,805	3,6		2	134,780	3,6
	3	134,675	5,2		3	134,897	5,2
	4	134,683	1,9		4	134,852	1,9
	5	134,897	2,6		5	134,809	3,0
14	1	134,788	2,4	22	1	134,861	2,4
	2	134,835	3,6		2	134,907	3,6
	3	134,700	5,2		3	134,723	5,2
	4	134,828	1,9		4	134,726	1,9
	5	134,793	1,7		5	134,723	2,8
15	1	134,770	2,4	23	1	134,776	2,4
	2	134,724	3,6		2	134,707	3,6
	3	134,807	5,2		3	134,910	5,2
	4	134,939	1,9		4	134,715	1,9
	5	134,843	2,8		5	134,758	2,8
16	1	134,863	2,4	24	1	134,737	2,4
	2	134,976	3,6		2	134,768	3,6
	3	134,844	5,2		3	134,796	5,2
	4	134,742	1,9		4	134,694	1,9
	5	134,799	1,7		5	134,792	3,7
17	1	134,775	2,4	25	1	134,939	2,4
	2	134,919	3,6		2	134,689	3,6
	3	134,854	5,2		3	134,891	5,2
	4	134,940	1,9		4	134,658	1,9
	5	134,746	4,0		5	134,783	4,0
18	1	134,839	2,4	26	1	134,821	2,4
	2	134,715	3,6		2	134,816	3,6
	3	134,758	5,2		3	134,897	5,2
	4	134,967	1,9		4	134,704	1,9
	5	134,968	2,4		5	134,708	2,4

Продолжение табл. ПЗ

1	2	3	4	1	2	3	4
27	1	134,858	3,6	35	1	134,663	3,6
	2	134,934	5,2		2	134,687	5,2
	3	134,736	1,9		3	134,913	1,9
	4	134,652	2,4		4	134,825	2,4
	5	134,776	3,6		5	134,714	3,6
28	1	134,819	5,2	36	1	134,754	5,2
	2	134,740	1,9		2	134,771	1,9
	3	134,776	4,6		3	134,737	3,7
	4	134,678	3,8		4	134,709	4,7
	5	134,615	2,0		5	134,938	5,0
29	1	134,609	2,4	37	1	134,846	2,4
	2	134,835	3,6		2	134,653	3,6
	3	134,698	5,2		3	134,819	5,2
	4	134,781	1,9		4	134,799	1,9
	5	134,885	2,8		5	134,755	2,9
30	1	134,776	2,4	38	1	134,657	2,4
	2	134,793	3,6		2	134,821	3,6
	3	134,848	5,2		3	134,760	5,2
	4	134,831	1,9		4	134,619	1,9
	5	134,799	3,6		5	134,788	4,0
31	1	134,694	2,4	39	1	134,895	2,4
	2	134,882	3,6		2	134,865	3,6
	3	134,798	5,2		3	134,877	5,2
	4	134,790	1,9		4	134,773	1,9
	5	134,805	1,8		5	134,753	5,0
32	1	134,735	2,4	40	1	134,744	2,4
	2	134,739	3,6		2	134,710	3,6
	3	134,895	5,2		3	134,992	5,2
	4	134,935	1,9		4	134,888	1,9
	5	134,803	4,9		5	134,843	3,8
33	1	134,692	2,4	41	1	134,849	2,4
	2	134,895	3,6		2	134,825	3,6
	3	134,705	5,2		3	134,608	5,2
	4	134,717	1,9		4	134,791	1,9
	5	134,590	4,0		5	134,759	4,0
34	1	134,680	2,4	42	1	134,897	2,4
	2	134,693	3,6		2	134,691	3,6
	3	134,842	5,2		3	134,792	5,2
	4	134,732	1,9		4	134,852	1,9
	5	134,751	2,4		5	134,889	2,4

1	2	3	4	1	2	3	4
43	1	134,761	3,6	46	1	134,931	2,4
	2	134,699	5,2		2	134,852	3,6
	3	134,695	1,9		3	134,673	5,2
	4	134,587	2,4		4	134,863	1,9
	5	134,907	3,6		5	134,953	2,9
44	1	134,771	5,2	47	1	134,768	2,4
	2	134,852	1,9		2	134,894	3,6
	3	134,773	3,0		3	134,745	5,2
	4	134,663	4,5		4	134,963	1,9
	5	134,963	2,0		5	134,633	3,7
45	1	134,671	2,4	48	1	134,691	2,4
	2	134,852	3,6		2	134,652	3,6
	3	134,873	5,2		3	134,983	5,2
	4	134,663	1,9		4	134,663	1,9
	5	134,970	3,9		5	134,863	4,6

Задача 2. Произвести обработку ряда неравноточных измерений одной и той же величины (табл. П4).

Таблица П4

Исходные данные

Номер варианта	H, м	L, км	Номер варианта	H, м	L, км	Номер варианта	H, м	L, км
1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	180,112	7,2	4	138,385	1,3	7	159,562	7,0
	180,104	2,9		138,377	4,2		159,570	4,4
	180,111	2,8		138,372	7,1		159,561	6,7
	180,092	7,1		138,378	7,5		159,571	4,2
	180,123	2,6		138,393	2,9		159,574	4,2
	180,102	6,6		138,406	2,1		159,585	4,2
	180,105	7,4		138,385	7,1		159,573	3,9
2	146,246	2,7	5	146,649	5,5	8	193,105	1,0
	146,224	1,3		146,659	7,8		193,137	3,1
	146,228	1,5		146,647	5,7		193,125	1,3
	146,228	5,5		146,670	7,1		193,116	5,9
	146,249	2,3		146,663	1,1		193,123	5,6
	146,233	6,9		146,639	2,0		193,105	7,9
	146,222	2,2		146,645	6,7		193,126	4,9
3	141,944	8,0	6	160,125	7,2	9	158,009	2,4
	141,973	4,1		160,116	6,1		158,015	5,4
	141,975	3,4		160,116	5,8		157,989	6,1
	141,972	3,2		160,095	3,4		158,028	3,6
	141,943	3,6		160,114	2,2		158,012	1,1
	141,953	3,8		160,118	2,1		157,976	3,9
	141,954	5,1		160,105	2,3		158,012	6,3

Продолжение табл. П4

1	2	3	1	2	3	1	2	3
10	185,590 185,581 185,592 185,591 185,557 185,536 185,598	7,4 6,9 3,6 5,3 6,1 2,4 7,3	11	169,850 169,845 169,838 169,821 169,848 169,824 169,832	5,4 2,6 4,8 7,5 3,3 5,6 3,7	12	173,909 173,923 173,918 173,892 173,934 173,913 173,940	5,9 3,8 3,9 5,6 6,9 3,6 4,0
13	171,602 171,611 171,611 171,624 171,607 171,607 171,579	5,0 6,0 4,6 6,4 4,4 2,3 5,9	14	198,773 198,795 198,786 198,786 198,787 198,793 198,780	6,6 5,9 4,4 1,8 5,7 3,6 2,0	15	169,660 169,684 169,666 169,679 169,655 169,671 169,689	6,8 5,7 8,0 7,7 1,4 3,5 4,8
16	148,297 148,328 148,317 148,322 148,313 148,262 148,320	5,2 1,3 5,0 5,9 7,7 6,3 6,2	17	160,273 160,251 160,220 160,211 160,239 160,220 160,215	5,4 6,6 1,6 7,6 7,4 5,2 2,8	18	191,143 191,179 191,066 191,159 191,111 191,170 191,069	4,6 6,1 4,0 7,7 1,5 4,9 3,0
19	190,051 190,059 190,045 190,051 190,012 190,024 190,033	3,4 5,8 1,4 3,5 4,5 4,0 4,9	20	173,174 173,146 173,210 173,168 173,108 173,150 173,144	1,8 7,3 6,3 6,5 6,7 5,7 2,4	21	149,119 149,110 149,108 149,094 149,114 149,073 149,135	5,4 4,8 1,4 1,6 2,9 3,9 4,3
22	193,590 193,609 193,625 193,637 193,627 193,681 193,678	5,2 3,3 4,3 5,2 2,1 6,8 7,7	23	171,707 171,691 171,664 171,675 171,646 171,677 171,674	1,2 6,7 5,3 5,9 1,6 4,0 3,6	24	141,683 141,653 141,633 141,622 141,633 141,654 141,698	6,8 6,9 4,2 7,7 2,0 7,1 6,4
25	161,101 161,117 161,112 161,108 161,121 161,129 161,093	5,3 7,7 5,5 2,7 3,5 2,3 4,4	26	158,640 158,656 158,679 158,686 158,633 158,677 158,644	4,2 5,3 1,5 3,2 5,3 2,2 5,3	27	147,207 147,233 147,245 147,200 147,172 147,216 147,234	5,1 4,5 4,3 4,8 7,6 3,4 3,8
28	151,541 151,585 151,528 151,562 151,515 151,500 151,558	3,9 3,0 3,8 4,5 6,1 3,1 1,8	29	160,989 160,991 161,012 160,986 161,047 161,022 160,991	4,3 1,1 5,6 6,1 3,0 2,8 6,0	30	184,843 184,841 184,868 184,798 184,849 184,828 184,880	7,9 4,3 7,3 4,2 6,6 6,8 2,2

Окончание табл. П4

1	2	3	1	2	3	1	2	3
31	157,591	4,6	32	155,631	3,1	33	187,112	7,8
	157,578	6,0		155,606	7,0		187,134	2,6
	157,570	5,0		155,658	6,3		187,112	5,9
	157,494	4,2		155,648	7,6		187,149	4,7
	157,574	4,1		155,630	4,9		187,144	7,5
	157,547	1,6		155,668	1,1		187,124	6,0
	157,565	4,1		155,688	5,2		187,123	2,6
34	161,460	2,2	35	147,590	7,5	36	135,698	7,0
	161,493	7,8		147,556	1,9		135,706	4,9
	161,470	3,5		147,589	7,6		135,703	3,2
	161,472	1,3		147,555	5,9		135,660	3,6
	161,450	6,3		147,587	6,9		135,684	7,1
	161,481	7,3		147,550	2,5		135,693	3,6
	161,529	3,0		147,598	4,2		135,654	1,5
37	143,993	1,3	38	187,664	1,3	39	146,403	7,5
	144,004	5,0		187,647	5,2		146,382	1,4
	143,963	1,9		187,621	7,6		146,414	2,8
	143,970	4,7		187,652	3,0		146,435	8,0
	144,004	1,8		187,634	7,2		146,413	2,5
	143,989	6,4		187,621	1,7		146,417	4,5
	143,999	3,6		187,679	1,5		146,403	3,0
40	177,090	7,7	41	187,147	7,9	42	148,432	6,3
	177,110	6,4		187,176	1,1		148,428	5,6
	177,089	5,7		187,173	6,7		148,424	2,5
	177,094	1,9		187,170	5,3		148,393	5,2
	177,082	1,7		187,126	4,9		148,432	5,2
	177,079	1,1		187,161	2,7		148,422	5,6
	177,087	3,0		187,176	6,8		148,435	2,3
43	174,570	2,2	44	151,733	6,5	45	145,867	4,6
	174,557	4,8		151,753	3,2		145,880	4,2
	174,565	5,4		151,717	7,5		145,885	5,9
	174,552	5,8		151,718	5,8		145,944	5,1
	174,552	5,7		151,743	1,5		145,909	4,6
	174,551	7,1		151,729	1,5		145,892	1,5
	174,539	1,1		151,759	1,1		145,901	2,4

Задача 3. Произвести оценку точности по разностям двойных неравноточных измерений. В качестве таких измерений в табл. П5 приведены значения превышений, полученные при измерениях прямо h и обратно h' . Согласно приведенным вариантам произвести оценку точности измеренных превышений и значений превышений, вычисленных как среднее из прямого и обратного ходов.

Т а б л и ц а П 5

Исходные данные

Номер варианта	h , м	h' , м	L , км	Номер варианта	h , м	h' , м	L , км
1	2	3	4	1	2	3	4
1	5,310	5,322	8,7	4	6,374	6,369	2,1
	21,345	21,384	3,6		-4,046	-4,073	7,2
	3,544	3,589	6,2		-4,033	-4,059	5,1
	2,317	2,310	5,4		0,841	0,823	8,5
	12,880	12,925	8,2		-4,353	-4,342	5,3
	-0,135	-0,138	7,3		-5,626	-5,589	4,9
	-13,333	-13,348	5,2		8,781	8,808	7,9
	-5,563	-5,552	2,1		-8,146	-8,156	5,7
	7,556	7,555	7,7		-2,584	-2,627	3,4
	-9,119	-9,095	5,1		4,933	4,938	6,7
2	13,717	13,730	6,3	5	-8,027	-8,042	7,9
	2,456	2,425	7,5		-0,083	-0,119	2,1
	1,188	1,128	8,5		6,276	6,285	6,8
	3,847	3,858	7,2		1,544	1,555	4,7
	-0,702	-0,722	3,2		25,807	25,824	7,8
	-5,783	-5,765	4,8		-13,062	-13,068	5,5
	4,693	4,725	8,5		10,235	10,227	7,0
	12,997	12,977	8,4		7,778	7,774	5,0
	16,348	16,368	4,9		-8,339	-8,342	4,1
	-7,028	-7,025	8,3		-5,867	-5,862	3,3
3	8,073	8,061	2,4	6	0,657	0,690	3,4
	-10,275	-10,243	4,5		-0,123	-0,121	6,8
	12,945	12,935	7,7		-0,770	-0,757	4,1
	0,149	0,174	2,1		-15,586	-15,544	5,8
	2,187	2,219	3,0		17,026	17,019	3,1
	17,132	17,090	3,4		-4,690	-4,675	6,9
	-20,788	-20,729	3,4		0,946	0,952	4,6
	1,129	1,156	6,2		2,871	2,854	8,0
	-10,865	-10,844	3,9		9,194	9,143	8,0
	-15,583	-15,598	3,4		5,101	5,054	6,2

Продолжение табл. П5

1	2	3	4	1	2	3	4
7	2,454	2,447	5,5	8	-0,282	-0,287	7,1
	-14,005	-14,017	8,3		-12,437	-12,463	4,2
	9,696	9,688	7,8		7,330	7,355	7,9
	15,937	15,909	6,5		0,596	0,626	6,0
	-14,379	-14,375	7,7		1,491	1,496	4,6
	-15,342	-15,338	6,6		15,959	15,930	6,9
	-0,747	-0,761	4,4		-7,773	-7,759	5,8
	0,815	0,830	4,0		15,503	15,452	5,1
	-8,432	-8,465	4,4		10,550	10,539	6,9
	-5,646	-5,668	5,7		-1,667	-1,602	6,3
	9	3,145	3,154		7,6	10	5,651
14,196		14,173	8,7	7,399	7,395		2,1
3,273		3,291	5,7	2,201	2,200		8,3
4,757		4,751	8,2	13,128	13,142		3,4
3,988		4,008	3,2	6,292	6,276		4,1
-0,728		-0,735	8,9	-11,080	-11,096		6,6
13,148		13,175	3,9	-4,470	-4,470		4,0
9,783		9,803	3,8	-7,260	-7,274		5,3
17,221		17,225	8,1	3,540	3,511		2,5
-4,123		-4,129	7,2	-5,068	-5,050		8,9
11	-21,037	-21,043	6,1	12	-4,964	-4,953	3,5
	-6,647	-6,678	5,0		12,353	12,362	4,7
	14,501	14,493	5,6		0,409	0,396	7,5
	-3,298	-3,301	4,3		7,485	7,490	6,8
	27,019	26,972	5,0		12,308	12,281	5,2
	-16,349	-16,377	3,6		3,049	3,035	6,0
	-5,363	-5,400	6,1		10,778	10,764	7,6
	5,472	5,494	7,3		7,652	7,655	2,4
	14,926	14,923	5,7		-13,196	-13,232	6,2
	-4,552	-4,530	6,5		-5,092	-5,120	2,4
13	5,551	5,555	4,9	14	-4,074	-4,090	3,5
	-19,576	-19,547	4,1		14,281	14,287	6,5
	-7,605	-7,597	8,1		-13,532	-13,511	4,2
	-24,439	-24,448	2,1		9,040	9,006	8,7
	-6,594	-6,595	7,4		5,417	5,395	7,1
	-1,148	-1,146	8,8		-4,650	-4,654	4,9
	3,001	3,040	8,9		24,304	24,313	7,2
	-5,840	-5,841	7,5		20,205	20,186	3,9
	-30,737	-30,719	5,1		7,973	7,960	5,1
	15,510	15,509	5,5		0,310	0,322	8,5

Продолжение табл. П5

1	2	3	4	1	2	3	4
15	5,407	5,381	6,8	16	3,608	3,606	5,2
	6,839	6,860	3,5		-0,804	-0,824	2,3
	-5,901	-5,883	7,9		7,493	7,478	2,2
	-2,611	-2,624	6,4		-17,920	-17,920	4,2
	15,171	15,184	2,9		12,132	12,152	2,1
	10,073	10,098	3,4		-0,605	-0,617	4,7
	3,034	3,041	6,3		-3,925	-3,896	6,8
	-8,171	-8,154	6,4		6,095	6,079	2,6
	-4,912	-4,909	4,6		6,436	6,449	2,2
	8,675	8,675	6,0		10,195	10,169	6,3
17	9,344	9,327	6,3	18	8,262	8,256	2,6
	12,286	12,276	2,1		-9,793	-9,796	5,2
	-2,495	-2,490	2,1		-1,043	-1,039	5,1
	-7,076	-7,038	3,3		1,278	1,287	4,5
	-5,938	-5,936	6,1		0,625	0,659	3,1
	-2,623	-2,631	2,4		3,716	3,756	6,7
	12,428	12,439	4,6		-1,040	-1,026	6,9
	-15,489	-15,513	6,4		-6,968	-6,995	7,1
	-3,868	-3,870	7,0		-3,868	-3,861	5,3
	2,751	2,760	6,8		0,161	0,150	5,9
19	13,692	13,671	2,8	20	5,809	5,812	3,6
	4,169	4,183	5,2		17,786	17,790	3,7
	0,687	0,697	7,0		-9,381	-9,406	2,3
	2,942	2,938	8,2		-9,167	-9,153	2,5
	4,726	4,719	3,9		3,760	3,769	6,5
	17,827	17,810	3,8		9,098	9,127	3,3
	2,606	2,569	8,1		1,542	1,532	7,9
	15,107	15,075	3,6		-2,023	-2,023	3,2
	3,170	3,146	7,6		14,887	14,877	3,2
	8,035	8,026	8,4		-6,216	-6,202	9,0
21	8,095	8,117	5,1	22	6,453	6,439	8,5
	19,288	19,298	4,4		-17,713	-17,731	3,9
	3,961	4,016	4,2		0,596	0,593	3,1
	-8,614	-8,617	4,6		-7,602	-7,583	8,1
	24,319	24,328	4,8		-16,909	-16,878	3,7
	-8,405	-8,445	6,1		11,037	11,045	6,5
	2,805	2,794	2,8		14,625	14,614	8,8
	8,204	8,166	2,3		2,362	2,366	6,7
	12,278	12,276	5,2		-10,977	-10,992	8,1
	-0,636	-0,662	8,1		24,152	24,133	2,1

Продолжение табл. П5

1	2	3	4	1	2	3	4
23	-4,021	-4,049	3,0	24	3,679	3,651	5,0
	9,141	9,103	7,7		-6,028	-6,035	8,0
	-1,360	-1,361	5,0		-8,521	-8,532	5,4
	13,142	13,155	8,2		6,551	6,549	7,7
	3,224	3,228	7,1		14,702	14,694	5,2
	-4,765	-4,765	6,8		-8,104	-8,121	5,2
	0,762	0,762	4,4		-12,762	-12,796	5,2
	-1,051	-1,063	3,2		17,223	17,214	4,9
	14,170	14,208	3,1		1,019	0,988	8,3
	7,079	7,075	3,3		-8,020	-8,022	2,0
25	-12,508	-12,490	4,1	26	24,681	24,666	4,6
	12,377	12,425	2,3		-6,692	-6,703	2,1
	15,282	15,292	6,9		2,599	2,616	4,9
	17,769	17,777	6,6		-3,723	-3,722	7,3
	6,312	6,333	8,9		13,186	13,149	7,6
	0,833	0,841	5,9		-6,531	-6,494	8,4
	21,400	21,426	4,8		0,622	0,635	7,9
	12,635	12,631	3,4		-7,359	-7,390	4,6
	-17,506	-17,504	6,4		-1,793	-1,801	6,3
	-0,144	-0,157	7,1		10,847	10,851	7,1
27	1,369	1,354	3,4	28	12,395	12,410	6,4
	-0,156	-0,158	8,3		1,257	1,273	6,9
	-9,385	-9,378	6,0		1,797	1,794	4,8
	-14,781	-14,760	6,4		-6,051	-6,053	4,9
	3,619	3,591	3,6		-10,369	-10,385	6,6
	4,778	4,757	5,8		-2,953	-2,943	7,9
	3,217	3,205	8,5		14,561	14,586	4,6
	-18,776	-18,772	4,3		18,025	18,051	5,0
	6,805	6,832	6,6		-13,336	-13,342	6,2
	2,334	2,373	4,7		3,873	3,877	6,0
29	-0,228	-0,215	7,0	30	-6,422	-6,429	2,8
	1,106	1,095	5,6		-1,804	-1,845	6,7
	8,128	8,133	7,4		7,179	7,210	4,6
	-10,091	-10,084	5,4		3,014	3,019	3,0
	-10,046	-10,035	3,3		15,489	15,502	6,0
	2,830	2,817	6,9		-0,442	-0,465	7,8
	2,898	2,924	8,9		-0,297	-0,293	6,7
	-2,473	-2,453	7,6		-3,821	-3,787	9,0
	-2,189	-2,236	6,9		-5,539	-5,525	8,7
	8,987	8,965	5,4		9,324	9,339	2,4

Окончание табл. П5

1	2	3	4	1	2	3	4
31	-13,158	-13,146	4,5	32	-17,813	-17,823	5,0
	-3,015	-3,016	5,8		-6,604	-6,599	6,4
	-25,996	-26,018	3,8		13,514	13,529	7,6
	7,801	7,844	6,2		21,364	21,345	2,6
	6,029	6,002	2,3		1,668	1,680	8,6
	9,428	9,437	6,0		-17,052	-17,017	8,4
	-10,239	-10,231	6,9		2,765	2,767	6,2
	-0,678	-0,637	8,7		3,945	3,997	3,8
	0,818	0,811	7,3		-0,986	-0,999	8,1
	-17,670	-17,641	7,2		1,764	1,820	5,6
	33	-18,379	-18,379		7,1	34	5,065
-15,023		-15,017	5,0	-10,286	-10,238		5,5
8,192		8,174	8,7	0,994	0,988		5,0
-2,346		-2,385	2,5	-1,164	-1,160		5,9
-16,316		-16,322	5,9	6,892	6,911		6,3
-3,179		-3,168	4,0	18,833	18,822		2,8
-7,963		-7,946	8,0	3,254	3,232		8,3
6,908		6,875	4,4	-0,952	-0,984		7,3
-0,420		-0,459	6,8	0,312	0,335		7,5
3,240		3,232	2,4	-6,138	-6,128		7,7
35		-17,313	-17,280	6,7			
	4,788	4,779	3,4				
	-4,478	-4,458	3,9				
	3,868	3,909	6,4				
	0,530	0,542	5,8				
	-4,861	-4,860	2,4				
	2,445	2,413	2,6				
	7,183	7,208	3,9				
	1,535	1,549	4,9				
	1,338	1,322	5,3				

Задания к §2.5

Задача. К §2.1 в данном приложении приведены 30 вариантов выборок ошибок измерений, полученных в результате моделирования нормального распределения с параметрами $M(X)$ и σ^2_x . Требуется произвести исследование ряда ошибок. По заданной выборке определить оценки параметров и проверить гипотезу о нормальном распределении.

Задания к §2.6

Задача. Измерены 50 расстояний D_i , являющиеся аргументами x_i , и известны ошибки $|\Delta_i|$ (значения функции y_i) этих измерений. Вычислить коэффициенты корреляции и регрессии, оценить их точность с вероятностью не менее 0,90 и составить уравнение регрессии. В табл. П6 приведены 28 вариантов задачи, смоделированные с использованием генераторов равномерного и нормального распределений.

Исходные данные

Вариант 1		Вариант 2		Вариант 3		Вариант 4		Вариант 5		Вариант 6		Вариант 7	
$D, \text{ м}$	$ \Delta , \text{ см}$	$D, \text{ м}$	$ \Delta , \text{ см}$	$D, \text{ м}$	$ \Delta , \text{ см}$	$D, \text{ м}$	$ \Delta , \text{ см}$	$D, \text{ м}$	$ \Delta , \text{ см}$	$D, \text{ м}$	$ \Delta , \text{ см}$	$D, \text{ м}$	$ \Delta , \text{ см}$
5,5	6,10	3,4	4,16	5,9	6,16	7,8	8,11	3,3	5,30	2,4	2,07	8,6	9,69
7,0	3,96	6,3	6,82	4,8	3,61	6,7	9,24	7,9	8,76	2,6	1,20	4,4	4,32
5,0	6,02	6,4	5,89	3,4	5,64	9,0	9,40	3,2	5,50	3,9	0,95	4,8	3,74
4,1	3,44	4,6	3,95	6,4	7,65	8,7	7,73	3,2	5,31	4,9	0,44	4,2	6,58
3,3	9,39	6,0	7,09	7,1	9,28	2,4	3,66	9,0	9,34	5,3	3,64	4,9	5,46
3,4	7,31	5,2	3,06	4,6	8,03	4,5	4,99	5,1	4,24	8,4	5,93	4,0	2,18
6,8	5,71	2,3	3,27	2,1	0,84	5,8	7,14	4,4	3,12	6,2	3,03	4,8	4,61
4,1	6,03	2,2	2,30	4,9	6,42	3,8	5,50	4,2	5,03	4,3	4,54	5,5	4,23
5,8	3,76	4,2	3,41	7,3	6,08	6,2	3,10	4,6	6,25	5,3	2,95	7,1	11,12
3,1	5,27	2,1	2,52	7,6	8,04	2,3	4,52	4,8	5,50	6,2	5,57	4,1	1,74
6,9	4,19	4,7	4,04	8,4	9,63	6,0	7,57	6,1	7,16	3,1	2,88	2,8	4,78
4,6	6,90	6,8	7,73	7,9	6,39	6,9	6,86	2,8	1,46	7,8	6,27	5,1	2,91
8,0	7,31	2,6	4,06	4,6	3,22	8,7	10,82	2,3	0,72	8,7	8,39	5,3	3,03
8,0	5,63	2,2	3,60	6,3	7,77	7,3	8,93	5,2	1,13	6,2	8,12	2,1	0,18
6,2	7,38	6,3	6,17	7,1	8,28	7,2	9,22	8,1	11,07	2,2	1,43	6,6	3,85
5,5	4,51	6,3	5,56	3,4	5,99	5,0	3,53	8,5	6,75	7,7	5,58	7,1	6,71
8,3	4,70	2,1	1,42	8,3	5,98	6,4	6,30	3,9	4,47	6,3	4,30	4,0	2,19
7,8	6,93	2,1	1,27	6,0	8,00	7,6	7,47	3,1	5,33	6,9	3,22	3,8	3,41
6,5	6,79	3,3	2,81	6,4	8,29	2,6	1,84	8,1	8,23	2,6	1,60	7,0	7,44
7,7	5,39	6,1	4,34	3,6	7,26	8,6	9,42	3,7	0,84	5,0	5,39	7,5	3,12
6,6	6,48	2,4	2,73	5,8	6,77	8,4	10,62	6,5	3,28	4,6	7,59	8,9	4,95
4,4	4,93	4,6	5,05	8,5	9,84	6,2	9,30	8,8	11,08	3,2	4,66	5,3	6,64
4,0	3,60	6,4	6,26	4,3	5,37	3,8	6,35	6,7	4,96	7,8	8,88	8,3	6,35
4,4	4,80	7,0	6,34	6,6	5,91	8,1	9,25	8,1	8,62	7,9	4,95	5,2	2,45
5,7	1,65	6,8	6,87	4,7	6,58	5,6	4,54	2,1	3,75	5,2	5,55	7,6	5,92
7,1	3,65	2,6	2,11	6,4	4,74	7,1	7,76	3,0	5,33	8,7	9,84	7,8	7,11
4,2	3,50	5,2	4,93	6,9	6,34	5,0	6,67	7,7	8,33	3,0	1,73	3,2	-0,02
7,9	7,06	5,1	5,55	4,8	5,91	8,7	9,78	5,0	5,93	8,1	8,36	4,8	3,86
6,0	2,43	4,5	4,96	4,9	7,03	2,5	3,67	8,2	8,32	7,4	3,63	5,6	5,44
4,6	8,53	3,1	2,04	6,6	8,86	5,9	5,35	7,1	7,45	5,1	5,68	7,0	5,97
6,9	8,08	6,7	7,49	7,9	9,25	4,0	1,96	6,8	6,01	6,3	2,11	6,0	4,89
5,8	8,39	6,9	6,40	4,6	9,08	8,0	8,66	4,4	3,47	8,7	4,81	5,2	1,61
5,1	6,54	7,1	6,12	5,0	8,63	4,4	6,69	3,2	2,88	6,5	4,32	5,1	2,84
6,9	5,63	5,3	3,25	6,2	5,74	6,8	7,78	3,1	2,31	3,7	2,55	2,6	-0,46
6,3	4,53	5,9	4,78	6,0	9,37	2,4	4,28	3,3	3,51	4,5	7,24	5,1	4,30
7,6	3,42	2,8	2,87	7,0	9,00	4,5	5,39	5,0	5,96	3,3	3,81	4,6	2,97
8,7	5,81	5,2	4,59	5,6	10,04	5,5	7,57	8,0	8,03	5,4	4,16	4,1	2,26
5,7	3,93	7,0	5,53	7,4	9,54	5,0	8,34	5,4	7,03	4,9	5,52	8,0	5,84
8,2	8,97	8,2	9,06	5,4	6,51	5,9	4,89	7,7	7,26	5,2	4,44	7,3	5,76
3,2	7,63	3,9	5,22	3,3	5,09	6,3	5,16	5,2	7,51	6,3	4,16	8,6	5,99
8,9	3,81	3,8	3,65	6,9	11,68	2,8	1,80	5,2	3,35	2,5	0,81	5,9	4,24
3,9	6,34	8,1	8,35	8,9	9,94	8,3	11,18	5,2	5,36	4,2	2,90	2,1	-1,54
3,8	3,25	3,6	4,71	7,6	4,47	7,3	9,66	4,9	2,46	6,3	6,27	6,2	5,50
8,1	4,47	7,6	7,23	6,9	4,63	7,5	7,19	8,3	6,87	3,2	2,74	7,7	4,97
7,2	8,99	8,4	7,80	5,4	4,59	7,7	9,35	2,0	0,30	6,3	6,26	8,8	5,47
3,0	6,30	3,6	4,12	2,8	1,34	6,7	5,35	4,1	4,92	3,7	3,92	3,6	4,20
2,1	2,79	3,7	3,59	6,7	6,29	3,4	4,12	2,3	1,76	6,1	1,28	6,9	4,15
8,3	5,96	2,3	2,03	4,6	4,87	3,9	8,75	6,9	5,44	5,5	6,35	5,7	5,46
3,4	6,09	2,5	2,24	3,0	2,73	6,4	7,03	6,6	6,72	5,3	4,11	8,5	7,45
4,1	3,29	6,5	6,59	6,0	4,00	5,8	7,93	8,9	8,79	5,8	5,46	7,0	9,83

Продолжение табл. П6

Вариант 8		Вариант 9		Вариант 10		Вариант 11		Вариант 12		Вариант 13		Вариант 14	
<i>D</i> , м	$ \Delta $, см	<i>D</i> , м	$ \Delta $, см	<i>D</i> , м	$ \Delta $, см	<i>D</i> , м	$ \Delta $, см	<i>D</i> , м	$ \Delta $, см	<i>D</i> , м	$ \Delta $, см	<i>D</i> , м	$ \Delta $, см
3,6	2,94	8,7	11,30	4,2	4,6	7,0	8,7	3,1	4,2	5,9	5,8	5,3	8,6
5,1	9,14	7,4	11,24	6,5	7,0	3,8	5,8	7,8	8,5	6,3	7,1	3,4	4,1
3,2	7,27	6,7	9,51	8,9	10,5	8,5	10,1	3,3	5,2	6,6	6,9	6,1	2,8
8,8	13,11	2,9	6,59	5,5	7,3	3,0	4,1	6,5	6,6	6,3	8,5	6,7	9,3
4,5	7,57	2,7	5,39	8,6	9,0	5,7	5,6	6,7	7,4	6,8	7,0	6,7	3,2
2,3	5,17	2,1	6,03	7,8	9,7	8,3	8,1	7,4	6,0	5,6	7,5	8,6	9,9
7,3	12,32	4,0	9,46	8,4	8,3	8,6	9,5	4,7	5,9	7,0	7,4	7,4	8,3
8,3	9,50	7,7	9,97	2,8	3,6	4,3	4,3	5,1	5,9	5,6	5,0	7,2	7,7
4,0	5,67	8,9	13,09	7,7	10,4	5,1	4,4	5,4	2,5	6,2	8,9	8,1	8,1
3,8	6,83	2,1	4,37	8,4	10,8	5,3	6,6	6,3	3,4	8,8	10,4	8,9	10,8
8,5	12,20	7,7	10,11	3,1	6,3	3,0	1,6	3,2	5,3	7,8	7,2	5,5	8,4
2,9	2,58	6,3	9,24	2,9	4,8	3,0	4,0	2,0	1,9	4,2	5,6	6,4	8,2
8,6	11,92	5,9	8,43	7,3	9,5	5,7	8,1	7,5	8,3	6,1	7,1	7,5	9,2
6,9	10,16	3,7	5,66	7,1	7,1	7,1	8,0	5,6	4,9	2,9	3,3	5,1	5,9
7,9	10,82	7,8	8,21	6,6	8,2	4,8	4,7	3,5	4,3	3,8	3,9	5,7	8,2
3,5	6,15	3,8	4,92	7,3	9,2	4,5	4,6	2,7	2,2	7,6	9,4	3,2	5,1
5,2	7,27	7,3	11,28	6,6	7,4	4,0	4,9	3,1	6,3	6,7	9,2	2,9	0,7
2,6	8,42	6,6	12,29	8,2	11,5	8,1	8,6	4,9	6,9	2,1	2,6	3,5	5,1
8,0	13,94	3,5	4,27	3,9	7,0	6,4	5,9	4,9	2,6	5,9	9,1	2,7	4,5
5,9	7,41	6,2	8,34	4,9	5,4	3,7	5,9	2,4	5,6	5,2	6,7	3,0	3,3
4,2	7,92	6,2	10,65	3,5	2,8	8,8	11,3	8,6	9,4	8,3	10,9	5,2	6,1
4,6	7,99	6,6	9,45	2,2	0,9	6,5	7,2	3,0	4,5	4,0	4,2	7,5	7,5
8,1	12,57	3,3	8,44	2,6	3,8	3,6	5,8	4,7	7,2	2,5	4,3	4,0	4,8
4,6	7,44	6,5	8,10	8,0	7,7	6,8	7,5	4,2	5,8	5,3	3,6	3,6	4,3
2,5	4,69	3,2	5,45	4,4	4,4	6,7	9,9	3,2	5,9	8,9	13,2	8,4	9,8
3,4	6,49	5,8	5,59	5,3	8,1	2,9	2,4	8,3	8,0	8,5	9,1	2,1	1,4
2,3	2,89	6,4	7,55	8,4	8,1	2,2	1,5	4,3	3,6	5,9	8,0	6,1	7,8
6,0	8,58	6,8	11,94	3,6	5,1	3,8	6,2	7,1	8,7	6,6	9,4	5,8	7,6
2,9	2,58	6,7	10,28	8,0	8,1	2,8	5,0	4,9	6,0	7,4	9,6	6,6	6,3
5,7	11,30	8,1	10,28	6,6	5,7	2,5	3,6	4,8	4,4	2,7	2,1	4,2	5,2
2,8	4,98	2,1	5,64	8,2	11,0	8,0	10,2	5,5	6,4	2,0	2,6	3,6	4,1
7,4	11,71	4,2	6,04	5,4	7,7	3,3	6,9	3,2	1,7	5,8	6,4	4,9	7,2
4,6	11,15	7,5	11,41	8,9	11,0	2,2	2,4	5,7	7,7	2,0	3,6	4,1	5,3
7,8	9,22	4,2	3,89	4,6	5,9	7,1	6,9	6,5	7,9	5,2	6,4	6,7	8,8
2,3	4,72	8,5	13,46	5,7	6,6	5,8	10,2	2,1	4,1	3,4	4,5	8,6	7,4
6,2	8,13	6,8	10,00	3,3	4,3	3,9	4,1	7,9	10,6	7,5	11,4	4,4	5,7
8,6	11,08	2,5	6,57	5,5	7,7	4,6	2,1	7,6	7,6	6,3	10,3	5,9	5,1
4,0	8,76	2,5	4,32	5,0	6,0	2,1	3,8	6,9	7,2	2,1	6,5	2,8	4,1
8,2	7,80	2,1	2,84	6,6	6,5	8,2	7,6	5,2	6,1	8,2	10,9	3,2	3,2
2,7	7,71	3,6	4,28	6,7	6,5	8,1	8,6	2,6	4,6	7,3	7,0	4,0	5,9
2,5	6,75	5,6	5,13	8,7	11,9	3,8	3,7	7,7	10,3	8,3	6,7	5,9	5,7
3,6	6,98	5,2	8,45	3,3	4,5	6,0	6,6	3,4	4,9	7,3	7,2	5,4	6,5
8,5	12,66	6,9	7,22	2,8	1,3	3,1	5,3	5,1	6,0	4,7	6,7	8,7	9,9
2,4	4,80	6,1	11,21	6,0	6,2	6,2	8,1	2,1	4,8	4,3	5,2	3,6	4,3
3,8	9,27	5,6	7,52	8,8	9,3	4,3	4,5	4,2	4,6	5,5	6,4	5,4	8,9
9,0	12,21	2,5	7,78	2,2	4,0	6,6	5,8	8,1	11,3	6,0	6,7	5,7	8,5
3,5	5,44	3,4	6,25	8,1	11,3	8,0	12,2	7,8	7,1	7,4	10,3	7,5	7,6
5,5	7,82	4,7	5,81	2,2	5,2	6,0	7,4	4,3	5,0	7,5	10,0	3,4	1,4
4,0	9,62	3,9	7,13	5,6	6,5	8,9	7,6	8,2	8,6	5,4	6,2	8,4	6,0
6,7	9,83	7,4	13,24	3,3	4,0	7,5	9,4	5,4	2,9	7,6	9,4	8,5	8,2

Продолжение табл. П6

Вариант 15		Вариант 16		Вариант 17		Вариант 18		Вариант 19		Вариант 20		Вариант 21	
<i>D</i> , м	$ \Delta $, см	<i>D</i> , м	$ \Delta $, см	<i>D</i> , м	$ \Delta $, см	<i>D</i> , м	$ \Delta $, см	<i>D</i> , м	$ \Delta $, см	<i>D</i> , м	$ \Delta $, см	<i>D</i> , м	$ \Delta $, см
2,1	0,1	4,2	5,4	3,1	4,5	8,8	9,4	8,2	11,0	4,6	4,4	5,8	4,4
7,4	8,0	4,1	5,0	3,1	4,2	7,0	7,0	4,4	6,2	4,6	7,4	4,0	5,8
8,6	10,6	7,0	10,3	4,2	6,2	7,5	9,1	2,4	1,7	5,4	3,9	4,6	5,3
7,7	10,9	8,7	8,9	2,2	-0,9	3,7	5,8	7,0	6,2	8,8	10,4	2,5	3,2
8,5	10,3	2,9	4,4	4,5	4,1	3,4	6,3	8,7	10,7	4,4	6,1	5,8	6,3
3,4	3,4	2,5	5,4	2,2	2,6	3,8	1,6	3,1	1,5	3,8	5,4	7,9	8,4
6,7	5,7	2,9	1,7	7,6	10,4	7,0	4,9	4,9	6,0	6,1	7,1	3,0	4,3
8,5	11,3	3,2	2,7	9,0	10,7	8,8	8,9	2,7	2,5	5,7	6,1	3,2	2,3
4,4	5,1	8,4	10,2	2,8	6,9	6,5	7,7	5,1	9,5	3,1	4,1	2,5	3,3
6,2	11,4	3,0	4,9	6,4	5,1	5,8	5,1	8,1	8,9	5,4	5,2	7,8	7,6
6,3	7,2	6,3	7,5	2,9	4,5	7,9	8,2	4,7	7,4	5,5	6,6	2,9	5,1
2,0	2,2	3,9	5,7	4,2	4,7	7,6	9,9	3,8	3,8	7,9	10,2	8,2	8,9
8,9	9,1	3,5	2,2	2,9	0,5	6,7	8,2	4,5	4,5	7,6	7,5	5,6	7,1
8,3	11,5	7,0	7,4	3,6	5,0	6,7	6,7	7,2	7,3	8,0	10,8	8,7	9,9
6,8	6,8	5,8	5,3	4,8	8,1	7,7	8,0	6,6	8,0	6,3	6,7	2,8	3,5
5,1	6,6	8,6	8,5	2,9	3,0	8,8	10,3	8,6	6,7	6,0	4,3	2,3	4,3
6,9	11,4	4,3	2,8	3,7	4,9	5,4	10,1	7,8	6,8	6,3	6,9	4,7	7,4
6,3	8,2	6,9	8,3	8,5	8,8	7,7	10,3	5,3	7,4	2,7	5,9	4,9	3,9
4,1	5,5	8,6	9,2	4,7	6,9	6,5	8,8	6,4	5,8	3,1	7,5	4,8	6,3
8,0	10,8	6,1	8,0	5,6	9,6	4,1	5,6	2,4	3,1	4,9	5,5	4,9	4,8
2,8	5,2	8,2	6,6	2,7	1,4	6,6	6,2	5,8	6,4	5,9	8,7	4,6	5,1
4,0	4,8	7,2	6,9	2,2	4,2	4,5	3,9	5,2	7,0	3,9	3,6	8,4	9,8
2,7	4,4	4,7	6,9	3,1	3,1	8,6	7,2	8,0	7,5	7,5	8,6	6,7	10,1
4,8	5,4	7,1	8,7	7,9	10,9	5,4	4,5	8,0	10,0	4,7	4,4	8,7	10,2
4,3	5,2	3,1	2,3	8,2	12,2	2,6	5,1	5,3	4,6	2,2	4,5	3,1	1,1
8,6	8,4	8,7	10,8	3,3	3,9	6,7	7,7	7,5	6,4	6,1	7,9	7,2	11,8
7,9	8,7	3,4	8,3	8,9	6,4	5,6	7,1	6,6	7,5	5,9	10,7	4,6	5,7
3,8	4,5	7,4	9,7	7,0	7,0	3,6	3,8	2,0	2,2	3,4	5,7	5,2	5,7
2,3	4,5	6,3	8,6	8,1	11,9	7,1	6,8	2,9	2,4	2,6	4,1	2,3	4,3
2,0	2,8	3,1	3,7	5,4	5,9	2,5	3,2	5,5	6,8	8,5	8,9	5,9	9,3
6,0	7,0	2,2	6,2	5,5	6,6	8,7	9,3	2,3	2,5	3,8	4,5	4,6	5,6
7,2	10,3	4,0	3,8	4,0	4,7	3,5	4,6	3,6	6,1	3,4	4,7	7,5	10,7
7,6	10,1	8,8	12,5	2,4	3,9	3,1	3,9	4,3	4,9	2,3	2,0	7,6	9,1
6,5	5,9	8,7	10,2	3,8	3,3	6,5	7,1	8,3	10,2	6,2	5,7	4,7	4,1
3,8	8,4	3,6	6,2	3,3	5,1	2,0	4,5	4,2	8,0	5,8	6,2	3,8	4,3
3,0	6,5	8,7	7,8	8,4	10,6	4,3	5,5	3,8	1,9	2,7	5,7	4,4	5,3
6,6	6,0	6,8	8,0	2,9	2,2	3,9	4,1	5,0	4,2	6,5	9,1	8,8	11,1
8,6	9,9	2,4	2,2	2,1	3,1	2,3	1,6	7,9	10,8	5,1	7,4	5,4	7,3
7,7	9,4	6,2	7,3	4,6	5,2	2,7	5,0	3,3	2,5	2,5	3,5	4,6	5,2
8,5	9,6	4,8	5,2	6,9	7,0	4,9	6,8	5,6	6,5	4,6	6,8	7,4	8,5
4,2	5,8	3,5	6,7	8,2	12,7	7,7	4,9	5,2	6,5	3,7	6,8	4,6	5,6
3,9	3,9	3,3	5,2	6,2	6,8	8,1	9,2	4,3	6,5	8,5	10,1	8,3	9,3
5,8	7,5	2,5	7,5	3,1	3,0	2,2	2,6	4,7	3,2	6,4	8,0	3,3	3,9
3,1	4,1	2,1	4,9	4,2	6,4	7,1	8,5	8,2	8,8	8,1	12,6	4,6	6,5
3,5	5,6	7,5	9,0	3,6	3,5	7,9	9,8	7,3	7,1	6,5	8,6	8,4	11,2
3,5	5,9	2,1	3,3	2,1	1,4	7,1	6,9	8,2	9,6	7,6	7,3	5,6	6,1
6,6	8,1	8,1	6,0	4,8	7,2	8,7	9,1	5,2	6,0	5,0	5,9	2,6	4,8
2,4	3,6	4,5	7,2	6,5	9,4	6,6	4,8	7,6	9,2	8,9	10,0	7,1	5,8
3,6	6,9	7,1	7,8	2,6	4,1	7,2	8,4	2,9	5,1	2,7	3,8	2,0	4,6
6,7	8,1	8,8	9,6	7,4	8,0	4,4	4,5	2,5	3,6	5,7	7,2	6,2	7,5

Вариант 22		Вариант 23		Вариант 24		Вариант 25		Вариант 26		Вариант 27		Вариант 28	
D, м	Δ, см	D, м	Δ, см	D, м	Δ, см	D, м	Δ, см	D, м	Δ, см	D, м	Δ, см	D, м	Δ, см
8,7	8,3	4,9	6,4	2,9	0,7	8,9	11,2	4,9	6,7	8,3	8,8	3,2	2,0
4,8	7,1	4,0	5,5	6,8	9,0	3,4	0,7	3,4	5,8	6,2	8,8	2,3	4,2
7,1	6,2	4,0	3,7	4,1	5,1	8,4	10,9	5,6	6,9	3,0	4,5	4,2	5,8
6,8	7,2	7,3	9,4	6,5	6,8	6,7	8,7	7,0	7,9	3,1	4,6	7,7	10,2
8,8	10,6	2,7	2,7	5,2	5,0	5,2	6,1	8,1	9,3	8,2	8,8	3,6	5,7
3,4	4,4	2,5	4,7	8,5	9,2	2,3	4,0	7,2	8,7	8,9	7,6	6,1	9,8
6,2	9,5	7,0	8,9	3,7	5,8	5,2	6,6	9,0	10,1	6,2	7,5	8,5	12,6
8,7	8,6	7,4	8,7	6,6	6,2	7,6	6,6	8,1	8,9	4,5	6,7	4,3	6,4
3,8	4,9	6,6	7,7	4,3	7,4	4,0	3,1	5,4	5,2	3,6	3,8	3,4	4,5
5,6	5,0	7,7	11,5	5,3	5,1	6,9	9,5	8,3	8,7	5,1	5,0	4,6	6,6
6,5	4,6	4,6	6,6	5,3	4,7	3,8	6,5	2,1	3,3	6,5	7,1	8,8	8,5
4,8	6,5	4,1	5,6	6,9	7,8	7,0	9,6	6,5	5,3	3,7	4,9	7,0	7,8
5,4	5,4	4,6	4,9	3,7	4,2	7,0	10,7	8,6	10,8	5,3	6,0	6,5	7,1
7,3	5,8	6,9	8,7	7,0	8,6	7,1	8,1	2,3	4,3	5,5	6,1	7,5	8,6
2,9	4,0	3,2	3,8	8,1	4,9	6,4	5,7	4,0	3,4	2,5	3,9	5,3	7,1
2,3	4,7	7,7	5,3	4,9	4,8	8,9	9,7	6,7	9,5	7,4	6,9	3,6	3,1
4,6	4,9	5,3	5,3	5,0	5,3	3,1	2,8	6,1	7,5	2,3	0,5	4,2	3,6
6,9	11,2	7,1	8,3	8,7	9,1	3,4	4,9	2,5	2,6	3,2	3,5	7,5	4,7
8,6	9,3	9,0	9,9	8,2	9,3	7,7	9,6	8,2	6,3	7,4	9,8	6,4	7,1
5,3	7,6	4,5	4,0	6,9	8,1	2,4	5,0	5,4	7,3	3,5	7,0	6,6	8,1
2,9	4,2	7,1	8,0	4,1	3,8	5,8	5,9	8,2	10,1	3,8	3,3	5,8	7,5
5,4	9,1	6,5	8,5	7,8	6,6	3,3	5,8	7,3	8,2	4,8	6,0	8,4	7,7
8,6	9,3	6,8	8,7	8,8	11,6	6,2	7,6	6,6	8,9	5,4	6,0	7,5	8,3
4,6	5,8	2,1	3,2	4,1	6,2	4,0	6,7	8,8	9,0	5,6	7,8	4,3	5,7
4,3	6,5	6,6	8,7	9,0	10,2	2,6	5,7	3,2	5,2	6,4	10,6	7,2	8,7
7,4	10,5	8,6	8,4	5,1	6,3	5,5	6,1	3,0	4,4	6,4	6,4	5,1	6,3
4,1	4,1	6,3	8,7	2,0	2,6	8,2	11,6	7,3	10,2	8,9	9,7	6,1	7,4
3,2	2,8	7,5	6,7	4,0	5,6	6,3	7,0	4,2	8,2	4,5	5,0	2,8	2,9
6,8	8,7	2,0	4,7	6,8	9,8	2,3	4,5	5,2	10,8	3,9	8,1	4,2	4,0
3,8	5,1	7,6	8,7	5,4	6,3	8,7	7,8	4,4	5,9	6,7	8,8	6,4	6,0
5,2	4,0	6,5	6,2	2,6	6,6	3,2	2,7	2,1	2,9	5,6	6,8	8,3	9,5
7,9	6,3	3,2	6,9	3,4	4,1	7,8	8,5	4,3	3,9	3,9	5,3	8,7	10,7
8,2	8,9	5,7	6,8	8,8	11,6	6,3	6,0	3,7	2,7	6,1	10,5	2,1	3,0
6,9	9,7	3,5	6,0	4,6	1,8	7,9	9,9	9,0	12,2	7,8	9,4	2,8	4,3
7,3	8,6	5,8	4,5	3,0	5,8	2,8	3,2	8,3	10,9	8,6	9,8	4,8	5,6
8,8	10,2	2,4	2,4	2,1	7,7	6,5	5,9	4,4	5,6	5,1	4,6	2,7	5,4
4,8	6,7	6,1	8,8	6,5	7,1	2,8	4,4	3,9	2,2	5,0	8,0	4,1	7,1
2,9	4,8	4,9	6,6	7,2	9,7	5,3	7,2	2,7	4,1	9,0	11,6	6,8	5,9
7,1	9,2	3,3	7,5	2,2	2,6	6,8	7,2	3,7	3,9	6,3	7,8	8,9	9,7
8,3	7,5	2,4	3,9	2,7	2,7	2,9	3,0	8,3	11,8	8,6	11,7	4,8	6,8
3,2	3,1	2,5	2,1	8,3	8,6	5,2	4,9	4,3	5,5	8,4	11,4	7,7	10,7
2,3	3,6	4,2	3,9	7,3	6,7	2,5	2,9	6,0	4,7	7,7	4,6	2,9	5,6
5,4	7,2	8,6	11,5	6,1	5,4	6,1	8,8	3,3	1,2	6,8	9,5	7,9	10,1
2,7	2,4	8,9	7,6	6,8	5,6	6,0	6,3	7,2	8,2	4,2	5,3	3,6	3,0
6,6	6,7	5,9	7,8	8,8	9,3	3,8	3,8	2,8	4,1	5,9	8,9	2,5	0,7
8,7	8,6	8,9	8,6	5,9	6,7	3,7	4,5	4,7	7,8	6,5	6,8	4,3	4,7
5,2	4,4	6,8	6,9	7,4	7,5	2,1	5,4	8,0	8,5	7,4	7,5	6,0	7,3
5,8	5,1	3,7	4,1	6,3	5,0	4,7	6,6	8,0	11,0	2,4	3,3	3,0	2,2
2,5	5,5	7,7	8,5	8,9	8,0	7,3	6,7	7,7	6,4	2,8	3,7	8,1	8,4
5,5	6,3	8,5	9,6	2,3	3,4	6,0	8,6	3,7	7,3	7,9	7,0	4,3	4,6

Задания к §3.2

Задача 1. На рис. П5 приведена схема измерения углов во всех комбинациях. В табл. П7 представлены 48 вариантов. Необходимо уравнивать данную сеть параметрическим способом и произвести оценку точности.

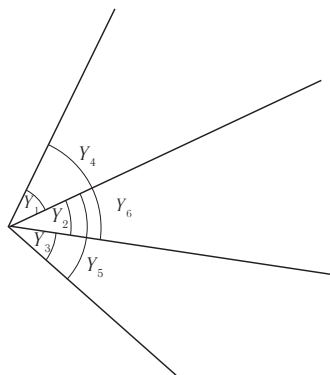


Рис. П5. Углы, измеренные на станции во всех комбинациях

Т а б л и ц а П 7

Исходные данные

Номер варианта	Угол	Измеренное значение	Номер варианта	Угол	Измеренное значение
1	2	3	1	2	3
1	Y_1	31°04'09,0"	4	Y_1	77°03'03,0"
	Y_2	82 16 29,0		Y_2	88 40 04,8
	Y_3	61 09 27,6		Y_3	31 22 31,0
	Y_4	113 20 33,4		Y_4	165 43 06,9
	Y_5	143 25 55,6		Y_5	120 02 37,8
	Y_6	174 30 06,0		Y_6	197 05 30,7
2	Y_1	95°13'39,5"	5	Y_1	77°41'22,5"
	Y_2	62 37 12,3		Y_2	56 33 49,9
	Y_3	59 18 19,8		Y_3	88 13 29,6
	Y_4	157 50 49,9		Y_4	134 15 08,8
	Y_5	121 55 31,9		Y_5	144 47 25,1
	Y_6	217 09 06,7		Y_6	222 28 43,3
3	Y_1	89°14'06,7"	6	Y_1	65 11 50,0
	Y_2	66 45 37,5		Y_2	79 39 47,1
	Y_3	44 11 02,7		Y_3	60 01 19,0
	Y_4	155 59 45,5		Y_4	144 51 34,0
	Y_5	110 56 45,9		Y_5	139 41 09,0
	Y_6	200 10 54,3		Y_6	204 52 53,7

Продолжение табл. П7

1	2	3	1	2	3
7	Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 Y_5 Y_6	51°19'25,9" 43 16 34,5 43 32 22,2 94 35 55,5 86 48 53,8 138 08 14,4	14	Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 Y_5 Y_6	67°23'04,0" 80 53 52,3 51 39 00,1 148 16 58,9 132 32 55,1 199 56 06,0
8	Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 Y_5 Y_6	77°45'23,2" 51 11 35,1 67 55 02,8 128 56 57,6 119 06 38,5 196 51 55,7	15	Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 Y_5 Y_6	88°41'39,4" 69 45 51,7 55 55 43,5 158 27 37,3 125 41 35,9 214 23 15,9
9	Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 Y_5 Y_6	40°33'37,1" 78 51 09,3 56 29 06,4 119 24 47,2 135 20 24,8 175 54 00,6	16	Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 Y_5 Y_6	79°11'30,1" 68 15 35,7 61 08 31,3 147 27 04,6 129 24 05,3 208 35 34,9
10	Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 Y_5 Y_6	90°12'00,7" 89 45 21,0 71 32 54,5 179 57 20,0 161 18 18,2 251 30 24,7	17	Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 Y_5 Y_6	78°37'10,7" 73 29 34,8 85 38 13,1 152 06 37,1 159 07 46,5 237 44 53,3
11	Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 Y_5 Y_6	64°45'31,6" 92 59 03,8 87 30 47,0 157 44 31,7 180 29 51,6 245 15 20,0	18	Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 Y_5 Y_6	96°58'44,7" 66 34 50,9 91 36 37,4 163 33 39,0 158 11 28,0 255 10 07,0
12	Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 Y_5 Y_6	75°08'33,5" 87 15 32,3 76 12 57,4 162 24 05,0 163 28 29,3 238 37 05,0	19	Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 Y_5 Y_6	42°06'25,3" 98 35 01,0 49 00 07,8 140 41 16,4 147 35 00,7 189 41 23,8
13	Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 Y_5 Y_6	53°56'13,6" 50 16 54,9 53 53 01,6 104 13 12,0 104 09 55,1 158 06 06,2	20	Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 Y_5 Y_6	47°39'43,9" 91 18 03,3 81 36 42,0 138 57 52,7 172 54 48,2 220 34 34,0

Продолжение табл. П 7

1	2	3	1	2	3
21	Y_1	39°33'21,3"	28	Y_1	56°35'18,8"
	Y_2	30 49 23,8		Y_2	84 49 58,7
	Y_3	92 34 24,5		Y_3	77 39 36,8
	Y_4	70 22 51,7		Y_4	141 25 11,0
	Y_5	123 23 40,9		Y_5	162 29 32,0
	Y_6	162 57 04,6		Y_6	219 04 43,8
22	Y_1	43°56'25,9"	29	Y_1	62°16'37,7"
	Y_2	50 54 37,0		Y_2	69 44 52,1
	Y_3	76 17 59,4		Y_3	85 35 42,5
	Y_4	94 51 01,9		Y_4	132 01 30,8
	Y_5	127 12 46,4		Y_5	155 20 33,7
	Y_6	171 09 06,6		Y_6	217 37 12,6
23	Y_1	49°54'36,8"	30	Y_1	34°08'40,9"
	Y_2	62 50 46,0		Y_2	72 12 04,6
	Y_3	34 32 10,4		Y_3	33 31 07,7
	Y_4	112 45 14,5		Y_4	106 20 39,8
	Y_5	97 22 45,9		Y_5	105 43 10,9
	Y_6	147 17 19,7		Y_6	139 51 41,4
24	Y_1	99°11'04,0"	31	Y_1	59°04'35,9"
	Y_2	70 47 40,2		Y_2	51 20 59,7
	Y_3	59 38 43,0		Y_3	91 12 19,7
	Y_4	169 58 42,1		Y_4	110 25 38,0
	Y_5	130 26 26,2		Y_5	142 33 25,8
	Y_6	229 37 21,7		Y_6	201 37 53,1
25	Y_1	66°05'09,2"	32	Y_1	31°03'02,7"
	Y_2	53 22 29,8		Y_2	83 45 21,1
	Y_3	60 18 11,0		Y_3	97 57 35,0
	Y_4	119 27 46,1		Y_4	114 48 18,8
	Y_5	113 40 47,3		Y_5	181 42 59,4
	Y_6	179 46 00,9		Y_6	212 45 59,5
26	Y_1	45 48 57,5	33	Y_1	99°18'21,6"
	Y_2	70 35 04,4		Y_2	85 13 16,8
	Y_3	83 13 28,3		Y_3	60 42 21,1
	Y_4	116 24 13,9		Y_4	184 31 33,6
	Y_5	153 48 43,0		Y_5	145 55 31,3
	Y_6	199 37 43,8		Y_6	245 13 50,9
27	Y_1	67 05 18,3	34	Y_1	64°52'52,3"
	Y_2	74 50 06,3		Y_2	44 58 39,6
	Y_3	44 38 03,6		Y_3	75 02 38,4
	Y_4	141 55 26,0		Y_4	109 51 29,2
	Y_5	119 28 15,1		Y_5	120 01 22,0
	Y_6	186 33 33,0		Y_6	184 54 11,1

1	2	3	1	2	3
35	Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 Y_5 Y_6	52°24'08,9" 97 12 24,8 80 51 50,5 149 36 35,0 178 04 15,3 230 28 20,0	42	Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 Y_5 Y_6	51°53'18,2" 30 53 59,2 56 52 37,8 82 47 18,9 87 46 41,4 139 40 03,3
36	Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 Y_5 Y_6	58°50'09,1" 82 07 11,3 48 45 18,9 140 57 21,7 130 52 30,5 189 42 42,0	43	Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 Y_5 Y_6	77°49'04,4" 36 30 02,9 32 28 29,8 114 18 55,7 68 58 16,5 146 47 25,1
37	Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 Y_5 Y_6	60°47'37,9" 95 20 10,6 77 50 00,3 156 07 52,4 173 10 14,7 233 57 51,7	44	Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 Y_5 Y_6	72°52'03,1" 72 35 52,2 31 06 14,0 145 27 53,7 103 42 01,5 176 34 06,7
38	Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 Y_5 Y_6	44°52'40,5" 88 44 48,1 74 00 53,9 133 37 34,1 162 45 43,3 207 38 30,7	45	Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 Y_5 Y_6	31°08'41,4" 43 18 19,6 71 05 06,6 74 27 02,1 114 23 17,0 145 32 05,8
39	Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 Y_5 Y_6	39°21'49,1" 44 29 58,2 72 30 14,1 83 51 46,4 117 00 18,0 156 22 01,5	46	Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 Y_5 Y_6	34°01'52,9" 55 43 49,1 74 12 09,6 89 45 38,6 129 55 50,8 163 57 42,8
40	Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 Y_5 Y_6	74°05'27,5" 55 56 05,5 70 15 38,2 130 01 28,5 126 11 39,3 200 17 12,9	47	Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 Y_5 Y_6	80°13'56,5" 78 29 14,1 35 53 08,3 158 43 14,8 114 22 18,6 194 36 21,2
41	Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 Y_5 Y_6	61°35'56,4" 33 04 22,0 31 54 10,2 94 40 17,2 64 58 35,8 126 34 31,3	48	Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 Y_5 Y_6	61°48'17,4" 60 55 41,9 54 43 38,1 122 43 56,7 115 39 19,7 177 27 36,8

Задача 2. На рис. П6 задана схема нивелирной сети III класса, которая определяет только ее общую структуру. В табл. П8 приведены варианты исходных данных и измеренных превышений. Варианты имеют различное число измерений и исходных пунктов, различные направления ходов и их нумерацию, поэтому при выполнении задания, студенту необходимо, используя свой вариант, сначала нарисовать схему нивелирной сети, соответствующую данному варианту. Требуется уравнять нивелирную сеть и произвести оценку точности параметров, измерений и функций от уравненных параметров. Исходные пункты здесь обозначены как марки, определяемые как репера. Это сделано для упрощения восприятия информации студентами. Понятно, что реально и марки и репера могут быть как исходными пунктами, так и определяемыми.

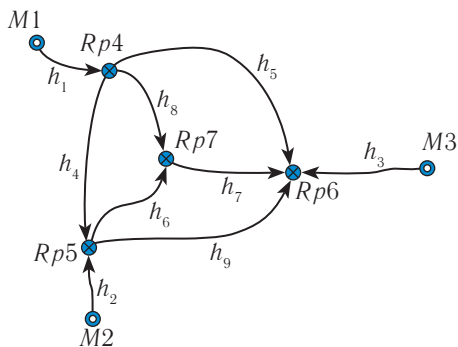


Рис. П6. Схема нивелирной сети

Т а б л и ц а П 8

Исходные данные

Номер варианта	Отметки твердых точек, м	Направление хода	h , м	L , км	Номер варианта	Отметки твердых точек, м	Направление хода	h , м	L , км
1	$n=8$ $H1=161,681$ $H2=156,876$ $H3=157,356$	$Rp4 \rightarrow M1$ $Rp5 \rightarrow M2$ $Rp6 \rightarrow M3$ $Rp5 \rightarrow Rp4$ $Rp6 \rightarrow Rp4$ $Rp7 \rightarrow Rp5$ $Rp6 \rightarrow Rp7$ $Rp7 \rightarrow Rp4$	5,105 -0,567 0,916 -0,846 0,166 0,139 0,878 -0,701	3,4 6,1 2,2 6,2 2,8 5,9 5,2 4,8	4	$n=9$ $H1=109,483$ $H2=105,925$ $H3=109,126$	$Rp4 \rightarrow M1$ $Rp5 \rightarrow M2$ $M3 \rightarrow Rp6$ $Rp5 \rightarrow Rp4$ $Rp4 \rightarrow Rp6$ $Rp5 \rightarrow Rp7$ $Rp6 \rightarrow Rp7$ $Rp7 \rightarrow Rp4$ $Rp6 \rightarrow Rp5$	3,594 -5,186 -1,189 -5,215 2,071 0,406 3,599 -5,656 3,169	1,3 8,3 5,7 3,5 4,0 8,4 3,9 1,3 2,4
2	$n=8$ $H1=187,083$ $H2=181,782$ $H3=183,603$	$M1 \rightarrow Rp4$ $Rp5 \rightarrow M2$ $Rp6 \rightarrow M3$ $Rp5 \rightarrow Rp4$ $Rp6 \rightarrow Rp4$ $Rp7 \rightarrow Rp5$ $Rp6 \rightarrow Rp7$ $Rp4 \rightarrow Rp7$	-2,470 -4,411 -1,371 -1,574 -0,390 2,053 -0,833 -0,486	3,1 3,0 7,0 7,7 9,5 4,9 8,7 4,7	5	$n=7$ $H1=174,939$ $H2=173,408$ $H3=172,604$	$M1 \rightarrow Rp4$ $M2 \rightarrow Rp5$ $Rp6 \rightarrow M3$ $Rp4 \rightarrow Rp5$ $Rp6 \rightarrow Rp4$ $Rp7 \rightarrow Rp5$ $Rp7 \rightarrow Rp6$	-6,623 -5,379 5,240 -0,260 0,935 -1,548 -2,190	9,0 1,2 3,0 9,6 2,5 5,1 3,2
3	$n=8$ $H1=173,160$ $H2=174,933$ $H3=172,713$	$Rp4 \rightarrow M1$ $Rp5 \rightarrow M2$ $Rp6 \rightarrow M3$ $Rp5 \rightarrow Rp4$ $Rp4 \rightarrow Rp6$ $Rp5 \rightarrow Rp7$ $Rp6 \rightarrow Rp7$ $Rp4 \rightarrow Rp7$	-5,932 0,733 1,008 4,900 -7,355 3,176 5,637 -1,682	0,7 6,0 7,9 9,4 2,6 6,9 5,3 9,0	6	$n=7$ $H1=159,056$ $H2=156,439$ $H3=156,117$	$M1 \rightarrow Rp4$ $Rp5 \rightarrow M2$ $M3 \rightarrow Rp6$ $Rp5 \rightarrow Rp4$ $Rp4 \rightarrow Rp6$ $Rp7 \rightarrow Rp5$ $Rp6 \rightarrow Rp7$	-3,555 -3,782 2,144 -4,656 2,743 5,017 -3,093	8,7 9,1 3,6 4,5 4,8 1,9 1,8

Продолжение табл. П8

1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
7	$n=7$ $H1=204,768$ $H2=202,873$ $H3=202,291$	$M1 \rightarrow Rp4$ $M2 \rightarrow Rp5$ $Rp6 \rightarrow M3$ $Rp4 \rightarrow Rp5$ $Rp4 \rightarrow Rp6$ $Rp7 \rightarrow Rp5$ $Rp7 \rightarrow Rp6$	-0,780 -5,508 2,291 -6,685 -3,984 -0,468 2,166	3,5 3,8 9,5 9,1 4,5 9,0 5,1	13	$n=7$ $H1=108,679$ $H2=107,646$ $H3=108,808$	$Rp4 \rightarrow M1$ $M2 \rightarrow Rp5$ $M3 \rightarrow Rp6$ $Rp4 \rightarrow Rp5$ $Rp4 \rightarrow Rp6$ $Rp5 \rightarrow Rp7$ $Rp7 \rightarrow Rp6$	1,068 -3,049 -4,612 -3,040 -3,435 0,993 -1,375	0,6 5,5 0,7 4,7 2,4 7,7 6,2
8	$n=8$ $H1=144,666$ $H2=147,707$ $H3=149,677$	$Rp4 \rightarrow M1$ $M2 \rightarrow Rp5$ $Rp6 \rightarrow M3$ $Rp5 \rightarrow Rp4$ $Rp6 \rightarrow Rp4$ $Rp5 \rightarrow Rp7$ $Rp7 \rightarrow Rp6$ $Rp4 \rightarrow Rp7$	-5,404 2,346 -1,005 0,069 -0,583 -0,944 1,541 -0,937	2,4 2,0 1,2 6,1 6,3 2,2 4,3 7,0	14	$n=8$ $H1=182,850$ $H2=183,456$ $H3=180,633$	$M1 \rightarrow Rp4$ $M2 \rightarrow Rp5$ $Rp6 \rightarrow M3$ $Rp4 \rightarrow Rp5$ $Rp6 \rightarrow Rp4$ $Rp7 \rightarrow Rp5$ $Rp6 \rightarrow Rp7$ $Rp4 \rightarrow Rp7$	-2,553 -2,436 0,512 0,750 0,233 0,644 0,306 0,078	6,7 9,1 7,5 7,2 8,4 9,5 5,1 6,3
9	$n=9$ $H1=188,636$ $H2=191,158$ $H3=187,876$	$M1 \rightarrow Rp4$ $Rp5 \rightarrow M2$ $M3 \rightarrow Rp6$ $Rp4 \rightarrow Rp5$ $Rp6 \rightarrow Rp4$ $Rp7 \rightarrow Rp5$ $Rp7 \rightarrow Rp6$ $Rp7 \rightarrow Rp4$ $Rp6 \rightarrow Rp5$	2,755 1,893 3,990 -2,134 -0,513 -4,256 -1,627 -2,158 -2,655	8,3 2,2 0,9 7,2 5,4 3,1 3,9 0,7 8,6	15	$n=8$ $H1=113,241$ $H2=114,120$ $H3=116,343$	$M1 \rightarrow Rp4$ $Rp5 \rightarrow M2$ $Rp6 \rightarrow M3$ $Rp4 \rightarrow Rp5$ $Rp6 \rightarrow Rp4$ $Rp5 \rightarrow Rp7$ $Rp6 \rightarrow Rp7$ $Rp4 \rightarrow Rp7$	2,537 -2,407 2,587 3,761 2,019 -3,744 1,969 -0,077	3,4 2,7 4,3 3,3 6,7 9,0 3,7 5,7
10	$n=8$ $H1=122,151$ $H2=122,582$ $H3=124,583$	$M1 \rightarrow Rp4$ $M2 \rightarrow Rp5$ $Rp6 \rightarrow M3$ $Rp4 \rightarrow Rp5$ $Rp6 \rightarrow Rp4$ $Rp5 \rightarrow Rp7$ $Rp6 \rightarrow Rp7$ $Rp4 \rightarrow Rp7$	2,426 -0,852 -4,270 -2,827 -4,262 0,771 -6,337 -2,063	4,0 4,6 4,9 6,1 2,2 0,6 7,7 5,2	16	$n=8$ $H1=205,397$ $H2=203,743$ $H3=201,718$	$M1 \rightarrow Rp4$ $Rp5 \rightarrow M2$ $M3 \rightarrow Rp6$ $Rp4 \rightarrow Rp5$ $Rp6 \rightarrow Rp4$ $Rp5 \rightarrow Rp7$ $Rp6 \rightarrow Rp7$ $Rp4 \rightarrow Rp7$	-1,559 0,678 -1,105 -0,745 3,201 1,949 4,451 1,227	8,9 2,4 6,7 8,9 3,7 6,0 6,1 0,6
11	$n=8$ $H1=114,827$ $H2=109,805$ $H3=111,824$	$Rp4 \rightarrow M1$ $Rp5 \rightarrow M2$ $M3 \rightarrow Rp6$ $Rp5 \rightarrow Rp4$ $Rp4 \rightarrow Rp6$ $Rp7 \rightarrow Rp5$ $Rp7 \rightarrow Rp6$ $Rp4 \rightarrow Rp7$	6,469 -0,923 3,431 -2,366 6,934 -4,199 0,349 6,587	2,1 5,3 6,4 0,7 8,1 7,8 6,9 4,8	17	$n=7$ $H1=119,644$ $H2=122,001$ $H3=120,959$	$Rp4 \rightarrow M1$ $Rp5 \rightarrow M2$ $Rp6 \rightarrow M3$ $Rp5 \rightarrow Rp4$ $Rp4 \rightarrow Rp6$ $Rp5 \rightarrow Rp7$ $Rp7 \rightarrow Rp6$	-2,233 5,091 4,353 4,976 -5,344 1,787 -2,155	1,0 0,7 5,8 7,3 7,9 6,3 2,9
12	$n=8$ $H1=131,860$ $H2=130,778$ $H3=125,544$	$M1 \rightarrow Rp4$ $Rp5 \rightarrow M2$ $M3 \rightarrow Rp6$ $Rp4 \rightarrow Rp5$ $Rp4 \rightarrow Rp6$ $Rp5 \rightarrow Rp7$ $Rp6 \rightarrow Rp7$ $Rp4 \rightarrow Rp7$	-1,931 1,718 7,141 -0,843 2,742 -1,410 -4,980 -2,218	7,0 5,2 6,1 9,3 8,0 3,5 5,9 1,8	18	$n=7$ $H1=192,232$ $H2=196,078$ $H3=193,294$	$Rp4 \rightarrow M1$ $Rp5 \rightarrow M2$ $M3 \rightarrow Rp6$ $Rp5 \rightarrow Rp4$ $Rp6 \rightarrow Rp4$ $Rp5 \rightarrow Rp7$ $Rp7 \rightarrow Rp6$	-0,689 -0,722 2,224 -3,930 -2,618 1,826 -3,156	3,4 7,1 9,2 1,8 1,2 1,7 2,1

Продолжение табл. П8

1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
19	$n=8$ $H1=196,874$ $H2=202,718$ $H3=200,489$	$M1 \rightarrow Rp4$ $M2 \rightarrow Rp5$ $M3 \rightarrow Rp6$ $Rp4 \rightarrow Rp5$ $Rp4 \rightarrow Rp6$ $Rp7 \rightarrow Rp5$ $Rp6 \rightarrow Rp7$ $Rp7 \rightarrow Rp4$	-1,402 -2,869 -2,311 4,371 2,703 3,072 -1,413 -1,281	9,2 2,4 7,6 6,1 2,1 0,9 3,2 9,3	25	$n=8$ $H1=128,632$ $H2=131,907$ $H3=126,644$	$Rp4 \rightarrow M1$ $M2 \rightarrow Rp5$ $Rp6 \rightarrow M3$ $Rp4 \rightarrow Rp5$ $Rp4 \rightarrow Rp6$ $Rp7 \rightarrow Rp5$ $Rp6 \rightarrow Rp7$ $Rp4 \rightarrow Rp7$	-0,601 -3,110 -1,124 -0,459 -1,461 0,576 0,443 -1,017	0,6 1,8 5,1 0,9 2,6 3,6 8,7 3,4
20	$n=7$ $H1=187,361$ $H2=180,249$ $H3=184,348$	$Rp4 \rightarrow M1$ $Rp5 \rightarrow M2$ $M3 \rightarrow Rp6$ $Rp5 \rightarrow Rp4$ $Rp4 \rightarrow Rp6$ $Rp7 \rightarrow Rp5$ $Rp6 \rightarrow Rp7$	6,877 -1,604 -3,903 -1,433 0,018 0,711 0,712	9,3 2,0 2,1 3,4 0,9 3,8 0,8	26	$n=9$ $H1=187,482$ $H2=185,498$ $H3=185,146$	$M1 \rightarrow Rp4$ $M2 \rightarrow Rp5$ $Rp6 \rightarrow M3$ $Rp4 \rightarrow Rp5$ $Rp6 \rightarrow Rp4$ $Rp7 \rightarrow Rp5$ $Rp7 \rightarrow Rp6$ $Rp7 \rightarrow Rp4$ $Rp6 \rightarrow Rp5$	-1,980 -4,050 3,259 -4,083 3,589 -2,482 -2,018 1,554 -0,450	9,3 3,7 2,9 5,9 5,3 2,1 5,0 5,1 8,2
21	$n=8$ $H1=129,241$ $H2=130,853$ $H3=130,243$	$Rp4 \rightarrow M1$ $Rp5 \rightarrow M2$ $M3 \rightarrow Rp6$ $Rp5 \rightarrow Rp4$ $Rp4 \rightarrow Rp6$ $Rp7 \rightarrow Rp5$ $Rp7 \rightarrow Rp6$ $Rp7 \rightarrow Rp4$	-6,878 1,070 -1,389 6,348 -7,246 -1,987 -2,808 4,361	8,2 8,5 2,3 9,5 7,0 8,4 4,9 5,1	27	$n=8$ $H1=144,826$ $H2=147,289$ $H3=146,288$	$Rp4 \rightarrow M1$ $M2 \rightarrow Rp5$ $Rp6 \rightarrow M3$ $Rp5 \rightarrow Rp4$ $Rp4 \rightarrow Rp6$ $Rp5 \rightarrow Rp7$ $Rp7 \rightarrow Rp6$ $Rp7 \rightarrow Rp4$	-6,841 2,050 -5,050 2,370 -0,370 0,095 1,904 2,242	9,0 2,9 2,4 1,0 6,1 5,5 1,5 6,3
22	$n=8$ $H1=179,199$ $H2=176,475$ $H3=175,746$	$M1 \rightarrow Rp4$ $M2 \rightarrow Rp5$ $Rp6 \rightarrow M3$ $Rp5 \rightarrow Rp4$ $Rp6 \rightarrow Rp4$ $Rp7 \rightarrow Rp5$ $Rp7 \rightarrow Rp6$ $Rp4 \rightarrow Rp7$	-1,034 1,346 -0,972 0,371 1,466 1,071 -0,013 -1,413	1,4 7,5 9,3 7,0 7,6 2,7 2,4 3,0	28	$n=9$ $H1=112,436$ $H2=115,091$ $H3=115,352$	$Rp4 \rightarrow M1$ $M2 \rightarrow Rp5$ $Rp6 \rightarrow M3$ $Rp4 \rightarrow Rp5$ $Rp4 \rightarrow Rp6$ $Rp7 \rightarrow Rp5$ $Rp7 \rightarrow Rp6$ $Rp7 \rightarrow Rp4$ $Rp5 \rightarrow Rp6$	-2,837 0,319 0,294 0,160 -0,193 -3,911 -4,237 -4,088 -0,316	8,1 1,9 2,1 1,2 8,0 1,8 8,6 5,2 9,3
23	$n=9$ $H1=163,824$ $H2=166,507$ $H3=166,023$	$M1 \rightarrow Rp4$ $Rp5 \rightarrow M2$ $M3 \rightarrow Rp6$ $Rp4 \rightarrow Rp5$ $Rp6 \rightarrow Rp4$ $Rp5 \rightarrow Rp7$ $Rp7 \rightarrow Rp6$ $Rp4 \rightarrow Rp7$ $Rp6 \rightarrow Rp5$	0,342 1,912 1,066 0,395 -2,924 5,782 -3,265 6,176 -2,510	1,4 6,7 5,2 2,6 7,1 1,2 9,3 2,5 2,1	29	$n=8$ $H1=179,474$ $H2=183,659$ $H3=177,924$	$M1 \rightarrow Rp4$ $Rp5 \rightarrow M2$ $M3 \rightarrow Rp6$ $Rp5 \rightarrow Rp4$ $Rp6 \rightarrow Rp4$ $Rp7 \rightarrow Rp5$ $Rp6 \rightarrow Rp7$ $Rp7 \rightarrow Rp4$	-0,114 -0,100 2,651 -4,391 -1,181 6,597 -3,418 2,236	7,7 7,8 4,0 2,9 3,7 9,3 4,9 3,9
24	$n=9$ $H1=141,184$ $H2=141,997$ $H3=145,106$	$Rp4 \rightarrow M1$ $M2 \rightarrow Rp5$ $M3 \rightarrow Rp6$ $Rp4 \rightarrow Rp5$ $Rp4 \rightarrow Rp6$ $Rp5 \rightarrow Rp7$ $Rp6 \rightarrow Rp7$ $Rp7 \rightarrow Rp4$ $Rp5 \rightarrow Rp6$	-3,168 4,685 0,692 2,303 1,445 -3,778 -2,912 1,454 -0,852	3,7 1,1 7,1 9,2 2,0 4,3 1,4 4,6 8,4	30	$n=8$ $H1=112,964$ $H2=115,587$ $H3=118,166$	$Rp4 \rightarrow M1$ $M2 \rightarrow Rp5$ $M3 \rightarrow Rp6$ $Rp5 \rightarrow Rp4$ $Rp4 \rightarrow Rp6$ $Rp5 \rightarrow Rp7$ $Rp6 \rightarrow Rp7$ $Rp7 \rightarrow Rp4$	-7,142 0,860 -4,499 3,655 -6,489 0,061 2,852 3,602	5,9 9,2 2,9 5,2 6,3 4,2 5,0 7,4

Продолжение табл. П8

1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
31	$n=9$ $H1=108,136$ $H2=105,054$ $H3=109,503$	$Rp4 \rightarrow M1$ $Rp5 \rightarrow M2$ $M3 \rightarrow Rp6$ $Rp5 \rightarrow Rp4$ $Rp6 \rightarrow Rp4$ $Rp5 \rightarrow Rp7$ $Rp7 \rightarrow Rp6$ $Rp7 \rightarrow Rp4$ $Rp5 \rightarrow Rp6$	-3,793 -2,896 -0,909 4,016 3,315 -3,129 3,776 7,102 0,621	8,5 6,9 7,4 9,4 4,2 1,8 7,1 8,7 2,1	37	$n=8$ $H1=117,042$ $H2=113,900$ $H3=117,980$	$Rp4 \rightarrow M1$ $Rp5 \rightarrow M2$ $M3 \rightarrow Rp6$ $Rp4 \rightarrow Rp6$ $Rp7 \rightarrow Rp5$ $Rp6 \rightarrow Rp7$ $Rp7 \rightarrow Rp4$	-0,840 -1,448 -2,757 -2,472 -2,612 1,910 -1,810 4,395	8,0 6,1 8,2 1,6 6,4 1,6 4,9 6,7
32	$n=8$ $H1=152,401$ $H2=154,582$ $H3=149,523$	$Rp4 \rightarrow M1$ $Rp5 \rightarrow M2$ $Rp6 \rightarrow M3$ $Rp4 \rightarrow Rp5$ $Rp6 \rightarrow Rp4$ $Rp7 \rightarrow Rp5$ $Rp6 \rightarrow Rp7$ $Rp4 \rightarrow Rp7$	-0,067 2,753 -2,545 -0,657 0,396 5,140 -5,401 -5,757	6,5 7,9 4,0 3,4 3,9 7,0 2,1 7,9	38	$n=8$ $H1=133,985$ $H2=133,257$ $H3=129,087$	$M1 \rightarrow Rp4$ $M2 \rightarrow Rp5$ $Rp6 \rightarrow M3$ $Rp5 \rightarrow Rp4$ $Rp4 \rightarrow Rp6$ $Rp5 \rightarrow Rp7$ $Rp6 \rightarrow Rp7$ $Rp4 \rightarrow Rp7$	1,600 -0,809 -6,609 3,155 0,098 2,201 -1,000 -0,934	9,6 8,4 5,0 8,7 0,8 6,3 9,1 1,0
33	$n=8$ $H1=138,556$ $H2=138,850$ $H3=135,445$	$M1 \rightarrow Rp4$ $M2 \rightarrow Rp5$ $M3 \rightarrow Rp6$ $Rp5 \rightarrow Rp4$ $Rp4 \rightarrow Rp6$ $Rp5 \rightarrow Rp7$ $Rp7 \rightarrow Rp6$ $Rp4 \rightarrow Rp7$	0,372 -2,323 -2,517 2,360 -5,974 0,937 -4,544 -1,448	2,6 5,5 1,1 5,9 4,3 2,3 1,2 1,3	39	$n=8$ $H1=192,759$ $H2=194,746$ $H3=191,645$	$M1 \rightarrow Rp4$ $Rp5 \rightarrow M2$ $Rp6 \rightarrow M3$ $Rp4 \rightarrow Rp5$ $Rp6 \rightarrow Rp4$ $Rp7 \rightarrow Rp5$ $Rp7 \rightarrow Rp6$ $Rp7 \rightarrow Rp4$	3,334 3,676 -1,595 -4,993 2,841 -6,017 -3,831 -1,004	3,6 2,8 9,5 8,8 3,7 3,1 1,4 2,8
34	$n=9$ $H1=193,731$ $H2=190,585$ $H3=194,776$	$Rp4 \rightarrow M1$ $M2 \rightarrow Rp5$ $Rp6 \rightarrow M3$ $Rp4 \rightarrow Rp5$ $Rp6 \rightarrow Rp4$ $Rp5 \rightarrow Rp7$ $Rp7 \rightarrow Rp6$ $Rp4 \rightarrow Rp7$ $Rp6 \rightarrow Rp5$	-2,159 -0,054 -1,378 -5,376 -0,211 1,113 4,432 -4,237 -5,557	4,9 4,8 7,0 2,8 7,1 8,4 4,3 4,4 9,2	40	$n=9$ $H1=105,858$ $H2=110,754$ $H3=106,204$	$M1 \rightarrow Rp4$ $Rp5 \rightarrow M2$ $M3 \rightarrow Rp6$ $Rp4 \rightarrow Rp5$ $Rp6 \rightarrow Rp4$ $Rp7 \rightarrow Rp5$ $Rp6 \rightarrow Rp7$ $Rp4 \rightarrow Rp7$ $Rp5 \rightarrow Rp6$	0,717 3,040 2,146 1,167 -1,848 -0,913 0,254 2,072 0,653	3,9 2,7 4,6 6,4 2,8 4,8 5,1 1,3 7,5
35	$n=7$ $H1=181,049$ $H2=181,871$ $H3=184,125$	$Rp4 \rightarrow M1$ $M2 \rightarrow Rp5$ $Rp6 \rightarrow M3$ $Rp5 \rightarrow Rp4$ $Rp6 \rightarrow Rp4$ $Rp5 \rightarrow Rp7$ $Rp7 \rightarrow Rp6$	0,271 0,746 2,815 -1,850 -0,471 1,689 -3,021	1,9 0,7 6,4 7,2 0,8 1,5 8,6	41	$n=8$ $H1=187,015$ $H2=183,967$ $H3=185,963$	$M1 \rightarrow Rp4$ $M2 \rightarrow Rp5$ $Rp6 \rightarrow M3$ $Rp5 \rightarrow Rp4$ $Rp4 \rightarrow Rp6$ $Rp5 \rightarrow Rp7$ $Rp7 \rightarrow Rp6$ $Rp4 \rightarrow Rp7$	-0,475 3,727 4,027 -1,059 -4,672 -5,264 -0,492 -4,208	8,0 9,1 4,6 4,4 9,6 6,1 9,1 8,8
36	$n=8$ $H1=117,042$ $H2=113,900$ $H3=117,980$	$Rp4 \rightarrow M1$ $Rp5 \rightarrow M2$ $M3 \rightarrow Rp6$ $Rp4 \rightarrow Rp5$ $Rp4 \rightarrow Rp6$ $Rp7 \rightarrow Rp5$ $Rp6 \rightarrow Rp7$ $Rp7 \rightarrow Rp4$	-0,840 -1,448 -2,757 -2,472 -2,612 1,910 -1,810 4,395	8,0 6,1 8,2 1,6 6,4 1,6 4,9 6,7	42	$n=9$ $H1=168,723$ $H2=167,745$ $H3=170,798$	$Rp4 \rightarrow M1$ $Rp5 \rightarrow M2$ $Rp6 \rightarrow M3$ $Rp4 \rightarrow Rp5$ $Rp6 \rightarrow Rp4$ $Rp5 \rightarrow Rp7$ $Rp6 \rightarrow Rp7$ $Rp7 \rightarrow Rp4$ $Rp6 \rightarrow Rp5$	-0,962 1,668 1,436 -3,658 0,301 0,889 -2,384 2,760 -3,279	3,9 9,4 7,1 6,4 7,6 4,8 2,7 3,5 7,7

1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
43	$n=8$ $H1=123,810$ $H2=125,924$ $H3=127,875$	$Rp4 \rightarrow M1$ $Rp5 \rightarrow M2$ $M3 \rightarrow Rp6$ $Rp4 \rightarrow Rp5$ $Rp4 \rightarrow Rp6$ $Rp7 \rightarrow Rp5$ $Rp7 \rightarrow Rp6$ $Rp7 \rightarrow Rp4$	-0,550 -4,289 -1,988 5,824 1,501 3,057 -1,273 -2,805	1,5 3,2 6,7 9,4 4,2 8,0 1,8 8,2	49	$n=8$ $H1=196,760$ $H2=194,185$ $H3=195,090$	$M1 \rightarrow Rp4$ $Rp5 \rightarrow M2$ $M3 \rightarrow Rp6$ $Rp4 \rightarrow Rp5$ $Rp6 \rightarrow Rp4$ $Rp5 \rightarrow Rp7$ $Rp7 \rightarrow Rp6$ $Rp4 \rightarrow Rp7$	-2,832 1,125 -0,365 -0,878 -0,802 6,560 -4,924 5,702	3,9 7,6 3,7 7,6 1,9 1,9 6,4 1,4
44	$n=8$ $H1=148,458$ $H2=146,519$ $H3=141,961$	$Rp4 \rightarrow M1$ $M2 \rightarrow Rp5$ $M3 \rightarrow Rp6$ $Rp4 \rightarrow Rp5$ $Rp6 \rightarrow Rp4$ $Rp7 \rightarrow Rp5$ $Rp7 \rightarrow Rp6$ $Rp7 \rightarrow Rp4$	3,709 -2,580 0,769 -0,822 2,006 -0,049 -1,258 0,771	8,1 6,4 3,5 0,8 3,8 7,3 3,3 2,2	50	$n=8$ $H1=107,053$ $H2=111,125$ $H3=110,071$	$M1 \rightarrow Rp4$ $Rp5 \rightarrow M2$ $Rp6 \rightarrow M3$ $Rp4 \rightarrow Rp5$ $Rp4 \rightarrow Rp6$ $Rp7 \rightarrow Rp5$ $Rp6 \rightarrow Rp7$ $Rp7 \rightarrow Rp4$	4,618 5,852 1,500 -6,377 -3,071 -2,802 -0,515 3,630	5,4 5,1 5,0 4,0 5,3 7,9 2,5 2,2
45	$n=7$ $H1=194,805$ $H2=195,460$ $H3=197,374$	$Rp4 \rightarrow M1$ $M2 \rightarrow Rp5$ $M3 \rightarrow Rp6$ $Rp4 \rightarrow Rp5$ $Rp6 \rightarrow Rp4$ $Rp5 \rightarrow Rp7$ $Rp6 \rightarrow Rp7$	1,310 -4,201 -2,578 -2,209 -1,317 2,727 -0,837	8,9 4,6 1,0 9,3 0,7 5,6 9,0	51	$n=8$ $H1=165,370$ $H2=166,197$ $H3=171,746$	$M1 \rightarrow Rp4$ $Rp5 \rightarrow M2$ $Rp6 \rightarrow M3$ $Rp4 \rightarrow Rp5$ $Rp6 \rightarrow Rp4$ $Rp7 \rightarrow Rp5$ $Rp7 \rightarrow Rp6$ $Rp7 \rightarrow Rp4$	0,242 0,069 0,478 0,541 -5,660 -4,047 1,107 -4,548	2,1 1,4 5,4 7,5 4,4 8,1 7,8 0,7
46	$n=8$ $H1=203,587$ $H2=203,031$ $H3=206,224$	$M1 \rightarrow Rp4$ $M2 \rightarrow Rp5$ $Rp6 \rightarrow M3$ $Rp4 \rightarrow Rp5$ $Rp4 \rightarrow Rp6$ $Rp7 \rightarrow Rp5$ $Rp6 \rightarrow Rp7$ $Rp4 \rightarrow Rp7$	-3,048 1,340 4,874 3,860 0,833 1,613 1,421 2,281	7,8 8,9 4,1 4,8 1,4 8,9 6,7 6,4	52	$n=7$ $H1=201,705$ $H2=202,108$ $H3=200,397$	$M1 \rightarrow Rp4$ $Rp5 \rightarrow M2$ $Rp6 \rightarrow M3$ $Rp4 \rightarrow Rp5$ $Rp4 \rightarrow Rp6$ $Rp7 \rightarrow Rp5$ $Rp6 \rightarrow Rp7$	1,795 -1,227 -0,707 -0,104 -2,363 5,836 -3,578	6,9 0,6 8,1 8,6 0,8 1,5 4,0
47	$n=8$ $H1=175,099$ $H2=177,648$ $H3=178,838$	$M1 \rightarrow Rp4$ $M2 \rightarrow Rp5$ $Rp6 \rightarrow M3$ $Rp4 \rightarrow Rp5$ $Rp4 \rightarrow Rp6$ $Rp5 \rightarrow Rp7$ $Rp7 \rightarrow Rp6$ $Rp7 \rightarrow Rp4$	4,103 0,689 3,057 -0,880 -3,424 1,128 -3,710 -0,297	7,3 8,0 2,9 6,9 3,3 1,3 8,5 1,3	53	$n=8$ $H1=106,460$ $H2=111,312$ $H3=106,916$	$M1 \rightarrow Rp4$ $Rp5 \rightarrow M2$ $M3 \rightarrow Rp6$ $Rp4 \rightarrow Rp5$ $Rp6 \rightarrow Rp4$ $Rp5 \rightarrow Rp7$ $Rp7 \rightarrow Rp6$ $Rp7 \rightarrow Rp4$	-0,256 5,050 4,625 0,033 -5,344 -0,240 5,515 0,179	6,8 4,2 4,0 8,7 9,1 4,9 0,8 8,0
48	$n=7$ $H1=158,214$ $H2=157,863$ $H3=159,345$	$M1 \rightarrow Rp4$ $Rp5 \rightarrow M2$ $Rp6 \rightarrow M3$ $Rp5 \rightarrow Rp4$ $Rp6 \rightarrow Rp4$ $Rp5 \rightarrow Rp7$ $Rp7 \rightarrow Rp6$	-3,285 -0,806 3,336 -3,718 -1,084 -2,189 -0,445	8,9 6,3 1,2 6,3 7,4 7,5 7,9	54	$n=8$ $H1=133,950$ $H2=132,311$ $H3=134,485$	$Rp4 \rightarrow M1$ $M2 \rightarrow Rp5$ $M3 \rightarrow Rp6$ $Rp4 \rightarrow Rp5$ $Rp6 \rightarrow Rp4$ $Rp5 \rightarrow Rp7$ $Rp7 \rightarrow Rp6$ $Rp7 \rightarrow Rp4$	-0,199 2,694 -2,390 0,894 2,064 -0,882 -2,021 0,020	8,0 9,5 1,2 9,4 8,9 9,2 5,7 9,2

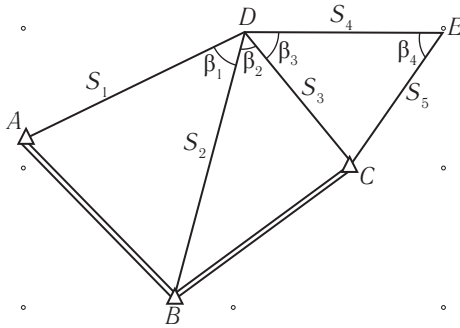


Рис. П7. Линейно-угловая сеть

Задача 3. На рис. П7 приведена линейно-угловая сеть. Измерены углы и стороны (табл. П9). Измерения проводились тахеометром, обеспечивающим точность измерения углов со средним квадратическим отклонением 5" и сторон со средним квадратическим отклонением 1 см. Уравнять данную сеть параметрическим способом. Произвести оценку точности уравненных координат, измерений и функцию, которую задаст преподаватель.

Т а б л и ц а П 9

Исходные данные

Номер варианта	Координаты исходных пунктов	Измеренные значения пяти сторон и четырех углов
	2	3
1	$X_A=7209,069; Y_A=10379,818;$ $X_B=7071,608; Y_B=11462,794;$ $X_C=7667,274; Y_C=12177,707$	$S_k: 729,543; 1010,600; 1404,325; 1577,681; 825,155$ $\beta_k: 75^\circ47'30,7''; 41^\circ26'61,0''; 31^\circ26'47,6''; 62^\circ36'28,3''$
2	$X_A=7415,375; Y_A=10304,999;$ $X_B=7793,096; Y_B=11377,619;$ $X_C=8855,404; Y_C=11593,265$	$S_k: 1094,467; 1275,697; 1317,295; 1432,612; 1049,108$ $\beta_k: 56^\circ43'29,4''; 49^\circ23'18,6''; 44^\circ36'42,6''; 61^\circ51'26,5''$
3	$X_A=7213,963; Y_A=10643,492;$ $X_B=6942,443; Y_B=11459,524;$ $X_C=7374,164; Y_C=12431,253$	$S_k: 833,989; 877,026; 1258,726; 1838,382; 1266,688$ $\beta_k: 60^\circ17'13,1''; 56^\circ21'52,4''; 43^\circ27'13,2''; 43^\circ6'54,6''$
4	$X_A=7683,332; Y_A=10212,560;$ $X_B=7582,804; Y_B=11327,657;$ $X_C=7978,498; Y_C=11984,575$	$S_k: 1014,962; 1042,374; 1271,576; 1582,592; 1087,573$ $\beta_k: 65^\circ55'31,3''; 37^\circ03'51,3''; 43^\circ06'00,4''; 53^\circ01'22,9''$
5	$X_A=7451,425; Y_A=10043,895;$ $X_B=7544,476; Y_B=10751,395;$ $X_C=8077,720; Y_C=11214,748$	$S_k: 746,365; 736,005; 893,516; 1489,553; 1106,215$ $\beta_k: 57^\circ32'42,0''; 50^\circ15'07,4''; 47^\circ38'36,3''; 36^\circ38'44,9''$
6	$X_A=7608,540; Y_A=10015,760;$ $X_B=7760,575; Y_B=10707,425;$ $X_C=8452,240; Y_C=11420,559$	$S_k: 1015,714; 792,698; 952,536; 1363,524; 1146,338$ $\beta_k: 43^\circ59'27,1''; 68^\circ41'28,0''; 56^\circ00'08,7''; 43^\circ32'46,2''$
7	$X_A=7084,079; Y_A=10454,355;$ $X_B=7178,262; Y_B=11370,441;$ $X_C=7823,316; Y_C=11803,256$	$S_k: 1063,779; 1014,467; 960,764; 1101,266; 1077,428$ $\beta_k: 52^\circ32'30,8''; 46^\circ13'01,5''; 62^\circ33'50,2''; 52^\circ19'16,0''$
8	$X_A=7121,047; Y_A=10450,754;$ $X_B=6834,525; Y_B=11469,157;$ $X_C=7146,947; Y_C=12245,179$	$S_k: 816,187; 1040,242; 1407,618; 1690,483; 1254,212$ $\beta_k: 68^\circ15'26,9''; 36^\circ11'02,9''; 46^\circ39'46,7''; 54^\circ42'58,7''$

9	$X_A=7231,894;$ $X_B=7442,190;$ $X_C=8252,722;$	$Y_A=10239,313;$ $Y_B=10933,015;$ $Y_C=11552,910$	$S_k: 786,942; 817,455; 1230,340; 1986,614; 1297,132$ $\beta_k: 53^\circ40'36,9''; 55^\circ26'50,9''; 39^\circ23'44,7''; 37^\circ00'50,2''$
---	---	---	--

Продолжение табл. П9

1	2	3	
10	$X_A=7439,791;$ $X_B=7520,405;$ $X_C=8237,819;$	$Y_A=10340,048;$ $Y_B=11193,357;$ $Y_C=11731,172$	$S_k: 719,036; 599,103; 954,066; 1669,966; 1234,978$ $\beta_k: 80^\circ33'26,2''; 65^\circ58'53,1''; 46^\circ58'47,3''; 34^\circ23'29,4''$
11	$X_A=7934,237;$ $X_B=7733,447;$ $X_C=8196,837;$	$Y_A=10264,449;$ $Y_B=11018,318;$ $Y_C=11693,546$	$S_k: 1032,425; 1047,598; 1003,703; 847,698; 804,983$ $\beta_k: 44^\circ02'52,1''; 47^\circ00'00,4''; 50^\circ41'26,7''; 74^\circ44'22,5''$
12	$X_A=7137,010;$ $X_B=6890,728;$ $X_C=7503,099;$	$Y_A=10818,756;$ $Y_B=11700,074;$ $Y_C=12574,408$	$S_k: 782,978; 732,633; 1115,355; 1613,358; 895,582$ $\beta_k: 74^\circ11'48,0''; 66^\circ53'44,5''; 32^\circ12'51,1''; 41^\circ35'55,2''$
13	$X_A=7422,452;$ $X_B=7215,677;$ $X_C=7696,019;$	$Y_A=10855,976;$ $Y_B=11778,204;$ $Y_C=12575,003$	$S_k: 906,154; 834,298; 1082,185; 1164,891; 802,790$ $\beta_k: 65^\circ37'57,8''; 56^\circ18'43,3''; 41^\circ39'34,4''; 63^\circ38'39,9''$
14	$X_A=7297,406;$ $X_B=7187,930;$ $X_C=7962,943;$	$Y_A=10049,162;$ $Y_B=11090,011;$ $Y_C=11995,004$	$S_k: 799,378; 839,177; 1393,451; 1884,670; 1166,656$ $\beta_k: 79^\circ21'00,5''; 58^\circ22'33,0''; 38^\circ06'49,6''; 47^\circ29'37,5''$
15	$X_A=7375,885;$ $X_B=7215,583;$ $X_C=8023,707;$	$Y_A=10009,876;$ $Y_B=10905,574;$ $Y_C=11647,331$	$S_k: 883,859; 968,561; 1135,613; 1479,235; 1165,685$ $\beta_k: 58^\circ37'34,5''; 62^\circ14'34,8''; 50^\circ53'46,5''; 49^\circ06'51,3''$
16	$X_A=7193,893;$ $X_B=7103,431;$ $X_C=7641,629;$	$Y_A=10904,812;$ $Y_B=11885,251;$ $Y_C=12500,205$	$S_k: 867,600; 1039,554; 1239,986; 1360,279; 995,946$ $\beta_k: 61^\circ22'50,6''; 40^\circ50'25,0''; 44^\circ44'45,7''; 61^\circ12'54,9''$
17	$X_A=7627,315;$ $X_B=7681,466;$ $X_C=8558,415;$	$Y_A=10699,080;$ $Y_B=11596,039;$ $Y_C=12131,701$	$S_k: 912,579; 781,964; 923,146; 1363,843; 1082,832$ $\beta_k: 63^\circ29'54,3''; 73^\circ35'44,9''; 52^\circ18'15,0''; 42^\circ25'14,1''$
18	$X_A=7716,542;$ $X_B=7724,637;$ $X_C=8344,735;$	$Y_A=10511,311;$ $Y_B=11599,482;$ $Y_C=12093,699$	$S_k: 1103,305; 1248,938; 1270,656; 1151,464; 1042,441$ $\beta_k: 54^\circ41'19,9''; 36^\circ40'31,4''; 50^\circ41'42,6''; 70^\circ35'03,9''$
19	$X_A=7114,613;$ $X_B=7334,102;$ $X_C=8252,715;$	$Y_A=10664,856;$ $Y_B=11519,818;$ $Y_C=11870,814$	$S_k: 1199,733; 1080,090; 887,918; 739,376; 829,446$ $\beta_k: 45^\circ10'53,1''; 59^\circ00'00,3''; 60^\circ28'26,6''; 68^\circ39'56,1''$
20	$X_A=7360,311;$ $X_B=7303,888;$ $X_C=7800,287;$	$Y_A=10548,513;$ $Y_B=11377,480;$ $Y_C=11905,390$	$S_k: 1181,180; 1065,172; 904,047; 856,045; 1170,013$ $\beta_k: 43^\circ01'49,2''; 42^\circ11'48,4''; 83^\circ16'30,8''; 50^\circ07'02,2''$
21	$X_A=7431,873;$ $X_B=7747,387;$ $X_C=8875,381;$	$Y_A=10634,266;$ $Y_B=11689,625;$ $Y_C=12010,452$	$S_k: 826,794; 966,065; 1326,117; 1527,095; 1056,631$ $\beta_k: 75^\circ22'02,4''; 59^\circ04'56,3''; 42^\circ45'12,3''; 58^\circ25'09,0''$
22	$X_A=7732,651;$ $X_B=8080,167;$ $X_C=8888,718;$	$Y_A=10422,227;$ $Y_B=11550,610;$ $Y_C=12098,511$	$S_k: 867,906; 1142,367; 1595,830; 1723,694; 826,692$ $\beta_k: 70^\circ25'33,7''; 37^\circ22'05,4''; 28^\circ30'33,2''; 67^\circ07'29,1''$
23	$X_A=7356,656;$ $X_B=7316,674;$ $X_C=7834,511;$	$Y_A=10498,305;$ $Y_B=11414,653;$ $Y_C=12279,832$	$S_k: 1077,255; 1108,147; 1406,494; 1595,539; 1207,468$ $\beta_k: 49^\circ36'24,3''; 45^\circ22'46,9''; 46^\circ54'45,6''; 58^\circ17'18,0''$

24	$X_A=7670,004; Y_A=10200,876;$ $X_B=7596,376; Y_B=11034,174;$ $X_C=8032,048; Y_C=11899,066$	$S_k: 835,723; 608,380; 1046,805; 1629,288; 1037,022$ $\beta_k: 68^\circ44'34,9''; 65^\circ30'23,2''; 38^\circ21'17,1''; 38^\circ47'01,3''$
----	---	--

Продолжение табл. П9

1	2	3
25	$X_A=7908,989; Y_A=10596,247;$ $X_B=7922,149; Y_B=11460,625;$ $X_C=8505,087; Y_C=12271,400$	$S_k: 1178,099; 1127,276; 1283,743; 1324,532; 814,350$ $\beta_k: 43^\circ58'47,5''; 48^\circ24'03,0''; 36^\circ20'41,1''; 69^\circ06'05,8''$
26	$X_A=7812,118; Y_A=10610,114;$ $X_B=8107,241; Y_B=11618,563;$ $X_C=8877,468; Y_C=12107,751$	$S_k: 1116,584; 831,394; 965,206; 1176,528; 1025,769$ $\beta_k: 63^\circ18'40,6''; 60^\circ30'04,6''; 56^\circ11'47,3''; 51^\circ25'53,0''$
27	$X_A=7956,601; Y_A=10147,153;$ $X_B=7744,369; Y_B=11262,100;$ $X_C=8310,041; Y_C=11990,281$	$S_k: 1019,965; 1217,361; 1395,473; 1607,506; 976,351$ $\beta_k: 60^\circ12'01,1''; 40^\circ36'57,0''; 37^\circ06'12,1''; 59^\circ34'02,2''$
28	$X_A=7187,860; Y_A=10490,644;$ $X_B=7210,894; Y_B=11394,988;$ $X_C=7767,226; Y_C=12232,525$	$S_k: 1004,161; 803,182; 1126,215; 1725,182; 1110,485$ $\beta_k: 58^\circ49'12,1''; 60^\circ04'23,3''; 39^\circ11'54,6''; 39^\circ51'51,2''$
29	$X_A=7245,960; Y_A=10587,358;$ $X_B=7269,391; Y_B=11540,097;$ $X_C=8107,315; Y_C=12030,159$	$S_k: 900,899; 788,654; 897,398; 1359,746; 1005,784$ $\beta_k: 68^\circ18'15,7''; 69^\circ57'44,2''; 47^\circ41'34,1''; 41^\circ17'21,9''$
30	$X_A=7285,939; Y_A=10394,128;$ $X_B=7139,073; Y_B=11334,232;$ $X_C=7492,656; Y_C=12110,612$	$S_k: 933,365; 845,590; 1140,861; 1766,743; 1132,090$ $\beta_k: 64^\circ26'53,9''; 48^\circ05'16,8''; 38^\circ48'18,9''; 39^\circ09'53,9''$
31	$X_A=7724,062; Y_A=10281,634;$ $X_B=7603,557; Y_B=11103,758;$ $X_C=8455,087; Y_C=11787,284$	$S_k: 1151,376; 947,058; 710,273; 1257,180; 1202,262$ $\beta_k: 45^\circ21'57,6''; 81^\circ03'40,4''; 69^\circ00'52,3''; 33^\circ28'27,9''$
32	$X_A=7828,864; Y_A=10166,270;$ $X_B=7815,867; Y_B=11063,129;$ $X_C=8580,836; Y_C=11795,546$	$S_k: 922,670; 823,893; 1074,018; 1628,279; 1021,745$ $\beta_k: 61^\circ29'42,2''; 66^\circ19'15,8''; 37^\circ52'35,5''; 40^\circ11'38,9''$
33	$X_A=7366,300; Y_A=10302,534;$ $X_B=7163,452; Y_B=11410,033;$ $X_C=7859,970; Y_C=12356,185$	$S_k: 998,030; 743,576; 1189,696; 1736,324; 1288,546$ $\beta_k: 79^\circ04'13,5''; 70^\circ35'17,9''; 47^\circ53'54,5''; 43^\circ14'22,9''$
34	$X_A=7221,908; Y_A=10703,684;$ $X_B=6935,867; Y_B=11621,159;$ $X_C=7289,033; Y_C=12617,071$	$S_k: 786,099; 801,612; 1339,014; 1575,791; 977,806$ $\beta_k: 74^\circ29'36,5''; 52^\circ05'36,0''; 38^\circ07'23,0''; 57^\circ42'30,9''$
35	$X_A=7049,047; Y_A=10755,339;$ $X_B=7219,714; Y_B=11889,981;$ $X_C=7977,046; Y_C=12218,712$	$S_k: 1170,420; 867,189; 750,601; 1099,696; 1223,852$ $\beta_k: 66^\circ37'32,5''; 60^\circ51'51,6''; 80^\circ24'25,5''; 37^\circ12'35,6''$
36	$X_A=7209,272; Y_A=10455,092;$ $X_B=7029,557; Y_B=11173,491;$ $X_C=7452,424; Y_C=12058,698$	$S_k: 1133,896; 884,818; 828,468; 1081,792; 836,844$ $\beta_k: 40^\circ44'42,0''; 69^\circ46'26,2''; 49^\circ49'35,2''; 49^\circ09'07,7''$
37	$X_A=7209,272; Y_A=10455,092;$ $X_B=7029,557; Y_B=11173,491;$ $X_C=7452,424; Y_C=12058,698$	$S_k: 1133,896; 884,818; 828,468; 1081,792; 836,844$ $\beta_k: 40^\circ44'42,0''; 69^\circ46'26,2''; 49^\circ49'35,2''; 49^\circ09'07,7''$
38	$X_A=7597,913; Y_A=10949,150;$ $X_B=7371,501; Y_B=11762,629;$ $X_C=7583,558; Y_C=12482,852$	$S_k: 1166,520; 854,961; 824,052; 1161,102; 932,096$ $\beta_k: 46^\circ16'21,8''; 53^\circ05'10,2''; 52^\circ44'44,2''; 44^\circ43'11,4''$

39	$X_A=7999,532;$ $X_B=8137,874;$ $X_C=9092,712;$	$Y_A=10211,988;$ $Y_B=11151,057;$ $Y_C=11554,000$	$S_k: 1033,028; 1038,198; 1018,596; 1271,750; 847,669$ $\beta_k: 54^\circ33'08,3''; 60^\circ30'31,0''; 41^\circ38'21,3''; 52^\circ58'15,7''$
----	---	---	---

О к о н ч а н и е т а б л . П 9

1	2		3
40	$X_A=7014,864;$ $X_B=6646,355;$ $X_C=7054,483;$	$Y_A=10288,193;$ $Y_B=11333,505;$ $Y_C=11912,868$	$S_k: 980,082; 1028,690; 1041,758; 1357,569; 1211,011$ $\beta_k: 66^\circ55'25,0''; 40^\circ01'36,3''; 58^\circ53'11,2''; 47^\circ25'58,0''$
41	$X_A=7263,212;$ $X_B=7467,424;$ $X_C=8330,724;$	$Y_A=10753,635;$ $Y_B=11763,006;$ $Y_C=12269,793$	$S_k: 791,715; 930,936; 1300,762; 1514,481; 885,166$ $\beta_k: 72^\circ55'13,9''; 50^\circ00'18,4''; 35^\circ38'13,6''; 58^\circ53'47,4''$
42	$X_A=7539,601;$ $X_B=7410,803;$ $X_C=7860,968;$	$Y_A=10623,394;$ $Y_B=11658,356;$ $Y_C=12703,985$	$S_k: 1089,521; 890,585; 1338,277; 1987,871; 1263,337$ $\beta_k: 62^\circ37'07,8''; 57^\circ17'22,8''; 38^\circ47'56,1''; 41^\circ35'12,6''$
43	$X_A=7678,720;$ $X_B=7924,455;$ $X_C=8661,868;$	$Y_A=10074,321;$ $Y_B=10767,381;$ $Y_C=11111,080$	$S_k: 1051,651; 855,597; 734,420; 1006,404; 1054,588$ $\beta_k: 43^\circ52'28,7''; 60^\circ59'22,0''; 72^\circ41'02,2''; 41^\circ40'06,0''$
44	$X_A=7074,290;$ $X_B=7212,605;$ $X_C=8023,799;$	$Y_A=10193,236;$ $Y_B=11072,222;$ $Y_C=11793,434$	$S_k: 1193,330; 1061,422; 1165,536; 1550,397; 1273,890$ $\beta_k: 46^\circ01'41,9''; 58^\circ06'54,1''; 53^\circ42'08,0''; 47^\circ30'51,1''$
45	$X_A=7828,026;$ $X_B=7664,474;$ $X_C=8100,668;$	$Y_A=10917,557;$ $Y_B=11656,207;$ $Y_C=12724,735$	$S_k: 1081,264; 747,073; 927,617; 1434,880; 1125,808$ $\beta_k: 44^\circ21'49,5''; 86^\circ25'22,3''; 51^\circ38'39,1''; 40^\circ14'56,2''$
46	$X_A=7754,023;$ $X_B=7934,869;$ $X_C=8583,763;$	$Y_A=10663,162;$ $Y_B=11790,495;$ $Y_C=12428,084$	$S_k: 740,576; 759,671; 1316,806; 1641,068; 970,146$ $\beta_k: 99^\circ06'19,7''; 42^\circ08'32,5''; 36^\circ14'06,8''; 53^\circ21'20,7''$
47	$X_A=7466,155;$ $X_B=7262,524;$ $X_C=7953,974;$	$Y_A=10913,763;$ $Y_B=11702,179;$ $Y_C=12463,308$	$S_k: 1196,300; 983,291; 695,755; 1083,175; 1065,618$ $\beta_k: 42^\circ29'04,3''; 73^\circ17'03,6''; 69^\circ44'54,8''; 37^\circ46'22,9''$
48	$X_A=7181,316;$ $X_B=7079,487;$ $X_C=7899,880;$	$Y_A=10501,944;$ $Y_B=11407,333;$ $Y_C=12041,341$	$S_k: 755,605; 663,618; 984,579; 1682,984; 1284,598$ $\beta_k: 79^\circ35'19,2''; 75^\circ09'19,4''; 49^\circ30'46,5''; 35^\circ39'28,3''$
49	$X_A=7023,744;$ $X_B=7014,017;$ $X_C=7630,015;$	$Y_A=10870,216;$ $Y_B=11583,588;$ $Y_C=12087,964$	$S_k: 1166,955; 863,833; 483,794; 961,817; 1060,809$ $\beta_k: 37^\circ31'25,7''; 65^\circ30'40,3''; 87^\circ54'58,3''; 27^\circ06'51,6''$
50	$X_A=7895,202;$ $X_B=7933,126;$ $X_C=8495,972;$	$Y_A=10942,387;$ $Y_B=11809,100;$ $Y_C=12556,435$	$S_k: 966,269; 694,122; 955,264; 1323,055; 999,340$ $\beta_k: 60^\circ23'14,6''; 66^\circ57'28,3''; 48^\circ49'18,2''; 46^\circ00'32,7''$

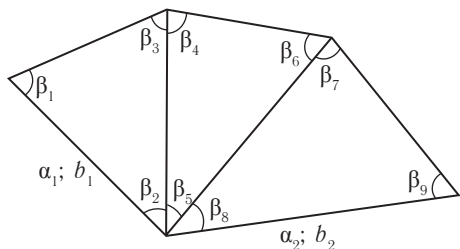


Рис. П8. Сеть треугольников — вставка в угол

Задания к §3.3

Задача 1. Уравнять нивелирную сеть коррелятным способом (см. рис П6). Произвести оценку точности, сравнить с результатами уравнивания параметрическим способом.

Задача 2. Уравнять и произвести оценку точности сети триангуляции (рис. П8) коррелятным способом. Исходные данные приведены в табл. П10.

Т а б л и ц а П 1 0

Исходные данные

Но- мер вари- анта	Исходные дирекционные углы	Базис b , м	Измерен- ные углы	Но- мер вари- анта	Исходные дирекцион- ные углы	Базис b , м	Измерен- ные углы
1	2	3	4	1	2	3	4
1	$\alpha_1=69^\circ20'29,6''$ $\alpha_2=227\ 20\ 20,6$	$b_1=1950,129$ $b_2=1732,241$	$58^\circ12'18,1''$ 54 34 42,8 67 12 55,1 66 44 20,9 62 51 44,2 50 23 55,6 53 41 40,9 40 33 18,3 85 45 03,8	4	$\alpha_1=5^\circ53'30,7''$ $\alpha_2=165\ 13\ 38,8$	$b_1=1838,118$ $b_2=1732,350$	$60^\circ26'20,3''$ 51 23 01,5 68 10 38,1 64 57 13,7 55 05 00,6 59 57 42,8 61 17 00,8 52 52 03,2 65 50 55,1
2	$\alpha_1=60^\circ49'46,4''$ $\alpha_2=227\ 18\ 40,8$	$b_1=1138,891$ $b_2=419,675$	$45^\circ57'41,8''$ 58 06 47,9 75 55 29,1 48 09 53,6 45 57 53,4 85 52 15,0 40 27 28,2 62 24 14,6 77 08 20,1	5	$\alpha_1=56^\circ53'46,0''$ $\alpha_2=234\ 32\ 60,0$	$b_1=1304,617$ $b_2=555,471$	$45^\circ48'11,6''$ 60 28 00,5 73 43 47,5 49 04 54,2 56 15 00,7 74 39 61,4 44 31 35,5 60 56 14,1 74 32 16,1
3	$\alpha_1=279^\circ32'39,7''$ $\alpha_2=88\ 01\ 21,2$	$b_1=1445,096$ $b_2=971,653$	$53^\circ58'44,2''$ 52 33 31,3 73 27 39,6 65 23 11,1 55 45 17,8 58 51 33,2 46 04 47,3 60 09 53,4 73 45 24,6	6	$\alpha_1=258^\circ00'12,5$ $\alpha_2=82\ 09\ 02,7$	$b_1=1378,373$ $b_2=1579,597$	$65^\circ36'35,9''$ 57 48 23,5 56 35 01,2 54 53 45,6 66 59 35,0 58 06 37,2 64 38 55,9 59 20 49,7 56 00 15,9

Продолжение табл. П10

1	2	3	4	1	2	3	4
7	$\alpha_1=198^\circ04'05,8''$ $\alpha_2=352\ 03\ 40,0$	$b_1=1817,974$ $b_2=1070,464$	$50^\circ15'29,1''$ 48 41 31,3 81 02 58,6 50 14 10,4 56 01 21,7 73 44 30,6 61 48 49,6 49 16 44,5 68 54 27,9	13	$\alpha_1=204^\circ15'13,4''$ $\alpha_2=344\ 34\ 19,7$	$b_1=1783,329$ $b_2=1235,933$	$53^\circ49'55,6''$ 57 02 05,0 69 07 58,1 63 49 35,0 41 46 33,0 74 23 51,2 58 05 08,9 41 30 28,5 80 24 18,7
8	$\alpha_1=170^\circ25'18,3''$ $\alpha_2=343\ 29\ 22,7$	$b_1=1838,496$ $b_2=1371,898$	$51^\circ06'43,9''$ 61 04 55,3 67 48 16,5 56 23 49,2 53 20 47,3 70 15 23,9 60 50 16,1 58 38 20,8 60 31 26,5	14	$\alpha_1=91^\circ29'58,6''$ $\alpha_2=264\ 44\ 27,9$	$b_1=1415,375$ $b_2=2097,869$	$66^\circ13'49,0''$ 40 27 02,9 72 19 07,3 63 02 17,4 69 07 32,9 47 50 10,6 69 42 06,9 63 39 59,7 46 37 54,6
9	$\alpha_1=287^\circ03'10,9''$ $\alpha_2=110\ 25\ 10,5$	$b_1=1794,821$ $b_2=1021,614$	$55^\circ40'41,4''$ 66 24 17,2 57 55 02,9 45 11 19,7 69 23 33,1 65 25 06,1 48 08 34,8 47 34 13,7 84 17 11,9	15	$\alpha_1=149^\circ29'36,2''$ $\alpha_2=329\ 57\ 35,0$	$b_1=1438,659$ $b_2=905,377$	$46^\circ25'11,0''$ 59 18 19,4 74 16 33,4 49 36 01,3 68 48 10,5 61 35 44,8 61 47 54,5 52 21 31,9 65 50 35,8
10	$\alpha_1=221^\circ11'30,5''$ $\alpha_2=7\ 21\ 42,9$	$b_1=1875,742$ $b_2=1041,899$	$44^\circ05'44,8''$ 40 21 09,9 95 33 05,0 66 48 60,1 45 58 27,8 67 12 30,2 48 57 43,6 59 50 36,9 71 11 40,5	16	$\alpha_1=80^\circ23'03,0''$ $\alpha_2=253\ 37\ 33,3$	$b_1=1744,566$ $b_2=1626,879$	$53^\circ11'50,7''$ 68 00 03,4 58 48 02,6 60 30 01,2 46 22 34,8 73 07 21,2 65 10 37,5 58 51 48,6 55 57 34,5
11	$\alpha_1=140^\circ46'02,2''$ $\alpha_2=313\ 08\ 26,8$	$b_1=1284,409$ $b_2=709,081$	$41^\circ56'35,8''$ 69 38 62,2 68 24 19,1 57 29 03,5 52 42 16,6 69 48 41,6 55 27 55,7 50 01 06,8 74 30 56,0	17	$\alpha_1=62^\circ08'23,3''$ $\alpha_2=219\ 36\ 27,9$	$b_1=1133,773$ $b_2=716,831$	$58^\circ12'56,3''$ 58 53 47,6 62 53 13,8 51 06 51,3 57 15 19,0 71 37 51,3 53 32 31,2 41 19 01,6 85 08 23,6
12	$\alpha_1=67^\circ47'05,9''$ $\alpha_2=241\ 12\ 22,5$	$b_1=1432,907$ $b_2=931,263$	$57^\circ23'37,2''$ 62 48 38,7 59 47 39,1 55 53 38,8 59 12 59,8 64 53 22,4 46 16 17,1 51 23 40,3 82 19 62,1	18	$\alpha_1=93^\circ48'19,9''$ $\alpha_2=246\ 28\ 54,0$	$b_1=1027,185$ $b_2=396,492$	$40^\circ23'09,2''$ 51 31 07,2 88 05 43,4 60 29 37,6 42 47 06,6 76 43 12,4 41 03 36,8 58 22 21,9 80 34 06,8

Продолжение табл. П10

1	2	3	4	1	2	3	4
19	$\alpha_1=4^{\circ}43'40,6''$ $\alpha_2=151\ 06\ 04,1$	$b_1=1608,540$ $b_2=740,955$	40°29'23,2" 45 42 07,9 93 48 24,2 57 36 25,1 41 43 36,3 80 39 54,6 51 01 36,5 58 56 36,8 70 01 45,2	25	$\alpha_1=260^{\circ}57'36,7''$ $\alpha_2=74\ 27\ 15,4$	$b_1=1458,598$ $b_2=868,204$	68°01'36,2" 47 56 00,5 64 02 20,4 44 48 33,6 66 11 07,9 69 00 20,2 47 08 12,4 59 22 29,6 73 29 20,9
20	$\alpha_1=207^{\circ}48'02,9''$ $\alpha_2=12\ 17\ 54,0$	$b_1=1717,634$ $b_2=700,209$	42°31'19,6" 53 37 51,1 83 50 50,6 53 15 21,7 50 35 48,3 76 08 49,4 44 36 31,6 60 16 08,8 75 07 18,1	26	$\alpha_1=199^{\circ}28'45,7''$ $\alpha_2=11\ 02\ 58,2$	$b_1=1966,887$ $b_2=1263,762$	66°06'45,8" 40 17 53,2 73 35 26,7 44 06 38,9 64 33 45,7 71 19 35,1 52 54 18,9 66 42 34,7 60 23 06,8
21	$\alpha_1=218^{\circ}15'09,9''$ $\alpha_2=35\ 12\ 21,1$	$b_1=1699,213$ $b_2=1150,929$	54°21'06,1" 56 38 46,0 69 00 13,0 43 37 57,0 53 31 22,4 82 50 49,2 61 28 34,7 66 47 04,6 51 44 17,3	27	$\alpha_1=206^{\circ}11'49,5''$ $\alpha_2=2\ 35\ 27,2$	$b_1=1734,908$ $b_2=852,700$	50°23'02,6" 44 58 55,5 84 38 07,1 44 40 06,4 45 44 01,1 89 35 54,6 52 40 20,0 65 40 47,4 61 38 50,3
22	$\alpha_1=76^{\circ}25'50,8''$ $\alpha_2=237\ 49\ 57,4$	$b_1=1273,102$ $b_2=1109,884$	65°58'07,6" 46 58 11,6 67 03 42,3 64 08 44,9 67 15 08,0 48 36 04,7 46 57 24,8 47 10 41,7 85 51 48,7	28	$\alpha_1=244^{\circ}46'49,6''$ $\alpha_2=31\ 02\ 06,5$	$b_1=1490,250$ $b_2=1016,768$	53°49'23,7" 53 43 16,7 72 27 22,0 53 31 14,1 52 21 57,1 74 06 42,6 67 02 52,5 40 10 03,6 72 47 02,0
23	$\alpha_1=23^{\circ}30'54,8''$ $\alpha_2=184\ 17\ 15,7$	$b_1=1049,754$ $b_2=707,942$	59°13'29,0" 45 43 35,1 75 02 58,7 65 18 56,6 45 13 03,4 69 28 01,6 45 07 27,7 69 49 43,7 65 02 51,2	29	$\alpha_1=14^{\circ}44'55,5''$ $\alpha_2=176\ 47\ 44,9$	$b_1=1297,406$ $b_2=1209,366$	60°47'40,8" 59 30 13,6 59 42 03,6 69 29 22,7 56 34 48,7 53 55 48,1 52 00 08,7 45 57 48,6 82 02 00,4
24	$\alpha_1=102^{\circ}00'51,8''$ $\alpha_2=251\ 51\ 22,9$	$b_1=1439,791$ $b_2=641,968$	49°25'37,4" 50 57 04,2 79 37 14,8 51 47 48,5 57 44 42,7 70 27 25,0 43 35 35,7 41 08 37,8 95 15 51,9	30	$\alpha_1=220^{\circ}00'31,8''$ $\alpha_2=30\ 30\ 50,2$	$b_1=1625,201$ $b_2=1332,575$	51°16'33,6" 40 17 47,1 88 25 35,2 52 35 43,9 62 36 34,4 64 47 36,7 63 48 56,1 67 35 54,6 48 35 06,8

Окончание табл. П10

1	2	3	4	1	2	3	4
31	$\alpha_1=110^\circ19'33,1''$ $\alpha_2=298\ 21\ 44,1$	$b_1=1844,722$ $b_2=1330,711$	$58^\circ37'26,3''$ 61 56 20,1 59 26 15,0 45 49 02,6 67 08 39,8 67 02 19,9 57 04 34,9 58 57 14,3 63 58 15,0	32	$\alpha_1=164^\circ38'04,7''$ $\alpha_2=327\ 25\ 12,3$	$b_1=1234,413$ $b_2=1184,400$	$67^\circ56'49,9''$ 50 03 21,8 61 59 47,6 59 39 56,2 51 45 29,9 68 34 36,5 58 49 07,2 60 58 24,2 60 12 30,0

Задача 3. Уравнять и произвести оценку точности коррелятным способом цепочки треугольников (рис. П9). Данная задача является продолжением задачи 2. Измеренные значения углов в табл. П11 записаны в порядке нумерации на рис. П9.

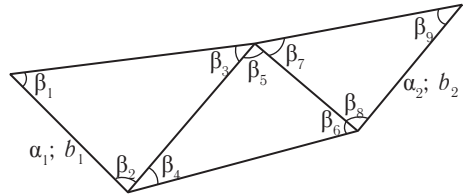


Рис. П9. Цепь треугольников

Т а б л и ц а П 11

Исходные данные

Но- мер вари- анта	Исходные дирекционные углы	Базис b , м	Измерен- ные углы	Но- мер вари- анта	Исходные дирекцион- ные углы	Базис b , м	Изме- ренные углы
1	2	3	4	1	2	3	4
1	$\alpha_1=124^\circ05'19,2''$ $\alpha_2=193\ 25\ 50,8$	$b_1=1397,184$ $b_2=1098,537$	$59^\circ39'20,8''$ 65 07 40,4 55 13 00,4 51 08 51,9 52 45 27,6 76 05 38,7 57 50 21,3 56 58 22,1 65 11 16,6	3	$\alpha_1=145^\circ29'20,8''$ $\alpha_2=225\ 55\ 25,3$	$b_1=1703,568$ $b_2=925,572$	$43^\circ26'14,3''$ 59 56 41,0 76 36 56,3 50 57 40,0 44 12 04,8 84 50 16,5 57 00 10,0 64 41 23,5 58 18 23,2
2	$\alpha_1=153^\circ23'36,4''$ $\alpha_2=211\ 15\ 13,9$	$b_1=1716,542$ $b_2=1675,636$	$63^\circ17'32,4''$ 54 40 47,9 62 01 38,0 45 34 38,3 61 01 08,8 73 24 17,4 69 28 52,0 64 12 01,3 46 19 13,6	4	$\alpha_1=299^\circ50'03,1''$ $\alpha_2=343\ 03\ 54,1$	$b_1=1673,949$ $b_2=1042,991$	$68^\circ50'56,7''$ 41 45 57,7 69 23 08,3 50 48 34,8 56 27 15,9 72 44 08,4 47 51 12,7 57 55 14,5 74 13 38,3

Продолжение табл. П11

1	2	3	4	1	2	3	4
5	$\alpha_1=171^\circ19'02,1''$ $\alpha_2=237\ 00\ 50,7$	$b_1=1049,278$ $b_2=1111,476$	$61^\circ01'33,2''$ 68 52 05,8 50 06 20,0 62 30 51,1 62 12 00,2 55 17 05,0 52 57 21,1 59 01 39,4 68 00 54,8	11	$\alpha_1=143^\circ27'30,0''$ $\alpha_2=160\ 28\ 50,0$	$b_1=1328,955$ $b_2=1236,015$	$57^\circ54'56,7''$ 44 50 34,0 77 14 27,8 64 53 05,9 68 41 02,0 46 25 56,3 57 51 55,8 40 51 45,3 81 16 17,4
6	$\alpha_1=25^\circ09'51,5''$ $\alpha_2=100\ 26\ 16,0$	$b_1=1803,026$ $b_2=2277,972$	$68^\circ21'49,9''$ 67 28 42,5 44 09 27,6 58 03 33,6 47 36 24,5 74 20 00,5 66 12 10,8 55 24 09,9 58 23 40,9	12	$\alpha_1=183^\circ02'02,7''$ $\alpha_2=239\ 31\ 37,9$	$b_1=1812,118$ $b_2=1007,573$	$61^\circ02'39,9''$ 42 45 55,2 76 11 21,2 52 44 45,9 51 16 02,1 75 59 10,3 44 59 07,4 64 59 40,7 70 01 13,9
7	$\alpha_1=126^\circ40'04,7''$ $\alpha_2=170\ 8\ 34,4$	$b_1=1732,651$ $b_2=1517,622$	$68^\circ50'30,5''$ 42 09 41,4 68 59 47,4 56 36 09,7 48 45 34,3 74 38 16,2 65 44 19,9 50 04 17,5 64 11 20,6	13	$\alpha_1=135^\circ29'03,2''$ $\alpha_2=175\ 26\ 03,5$	$b_1=1838,640$ $b_2=1899,447$	$68^\circ41'56,2''$ 44 24 54,2 66 53 15,0 66 05 54,1 63 04 58,1 50 49 09,8 53 19 30,0 58 37 08,2 68 03 21,5
8	$\alpha_1=16^\circ01'60,0''$ $\alpha_2=57\ 30\ 32,1$	$b_1=1680,204$ $b_2=999,779$	$50^\circ41'56,8''$ 54 56 55,5 74 21 07,0 53 01 57,8 56 52 24,7 70 05 33,9 58 29 58,3 43 24 00,9 78 06 02,0	14	$\alpha_1=192^\circ00'10,4''$ $\alpha_2=241\ 46\ 13,4$	$b_1=1951,689$ $b_2=868,655$	$47^\circ25'14,5''$ 50 34 52,7 81 59 53,0 45 38 09,9 54 43 12,1 79 38 42,8 52 16 44,4 53 54 23,4 73 48 55,8
9	$\alpha_1=226^\circ21'55,5''$ $\alpha_2=303\ 34\ 29,0$	$b_1=1898,252$ $b_2=1523,060$	$63^\circ44'00,9''$ 64 26 58,3 51 49 07,7 60 06 03,7 46 01 32,1 73 52 24,5 48 11 33,1 58 47 14,0 73 01 12,0	15	$\alpha_1=21^\circ21'01,9''$ $\alpha_2=78\ 35\ 31,1$	$b_1=1610,944$ $b_2=715,758$	$49^\circ25'37,7''$ 58 15 09,0 72 19 13,1 45 15 02,2 58 37 50,2 76 07 03,8 47 22 44,1 57 37 11,9 75 00 00,1
10	$\alpha_1=17^\circ51'04,4''$ $\alpha_2=69\ 39\ 23,9$	$b_1=1536,852$ $b_2=969,383$	$42^\circ40'05,9''$ 48 08 20,4 89 11 33,0 52 16 24,6 54 13 16,9 73 30 23,2 67 16 12,3 57 53 13,7 54 50 38,2	16	$\alpha_1=139^\circ26'01,2''$ $\alpha_2=207\ 59\ 47,0$	$b_1=1506,053$ $b_2=924,468$	$56^\circ14'32,8''$ 68 16 12,8 55 29 16,2 50 15 07,3 52 03 17,8 77 41 35,2 49 13 54,0 52 20 46,9 78 25 18,8

Продолжение табл. П11

1	2	3	4	1	2	3	4
17	$\alpha_1=118^\circ14'17,8''$ $\alpha_2=190\ 32\ 08,3$	$b_1=1285,939$ $b_2=751,295$	55°05'24,0" 61 39 33,6 63 15 01,3 49 11 08,6 43 21 48,9 87 26 54,1 53 17 55,8 54 00 10,0 72 41 54,0	23	$\alpha_1=106^\circ42'53,4''$ $\alpha_2=188\ 46\ 21,3$	$b_1=1968,820$ $b_2=1118,943$	41°28'17,3" 62 39 36,1 75 52 05,8 66 50 38,3 48 35 04,0 64 34 13,2 47 32 10,9 67 58 52,9 64 28 53,5
18	$\alpha_1=199^\circ12'56,0''$ $\alpha_2=255\ 59\ 42,6$	$b_1=1014,669$ $b_2=915,687$	61°43'18,4" 48 26 56,8 69 49 43,9 47 51 15,0 61 15 15,9 70 53 27,8 63 30 57,2 69 35 03,1 46 53 57,9	24	$\alpha_1=282^\circ14'45,1''$ $\alpha_2=359\ 33\ 25,5$	$b_1=1130,982$ $b_2=640,618$	61°03'19,9" 65 25 49,6 53 30 50,6 46 16 44,8 53 39 13,1 80 04 10,0 42 25 56,1 65 32 00,4 72 02 01,9
19	$\alpha_1=270^\circ50'44,3''$ $\alpha_2=345\ 36\ 56,8$	$b_1=1473,343$ $b_2=1060,939$	53°31'55,8" 64 08 06,0 62 19 58,1 64 51 56,9 44 59 17,0 70 08 44,7 51 49 02,3 55 37 21,5 72 33 39,1	25	$\alpha_1=95^\circ47'20,0''$ $\alpha_2=161\ 05\ 48,7$	$b_1=1562,049$ $b_2=770,024$	51°14'46,3" 66 02 01,2 62 43 08,0 51 09 58,5 42 12 40,0 86 37 26,6 45 59 41,9 41 29 05,4 92 31 13,8
20	$\alpha_1=170^\circ45'24,7''$ $\alpha_2=219\ 53\ 15,3$	$b_1=1718,124$ $b_2=780,106$	53°49'28,4" 53 21 32,4 72 48 58,4 42 37 56,9 53 18 15,4 84 03 46,3 50 59 20,5 49 04 36,2 79 56 00,9	26	$\alpha_1=36^\circ34'38,7''$ $\alpha_2=70\ 14\ 11,9$	$b_1=1566,710$ $b_2=1207,063$	55°39'52,5" 43 30 43,2 80 49 31,2 63 05 52,6 51 15 07,1 65 39 04,8 64 42 08,3 41 23 56,8 73 53 56,9
21	$\alpha_1=227^\circ50'37,7''$ $\alpha_2=296\ 00\ 33,9$	$b_1=1851,845$ $b_2=1728,411$	68°29'35,2" 56 44 15,3 54 46 10,5 40 25 32,3 57 53 06,7 81 41 15,8 64 29 09,4 69 18 45,6 46 12 00,8	27	$\alpha_1=284^\circ44'42,4''$ $\alpha_2=17\ 26\ 37,0$	$b_1=1597,913$ $b_2=734,439$	48°39'50,6" 66 39 55,9 64 40 18,4 43 02 50,1 41 57 35,8 94 59 34,5 47 01 43,7 67 59 35,7 64 58 42,9
22	$\alpha_1=211^\circ06'18,4''$ $\alpha_2=277\ 25\ 00,6$	$b_1=1221,908$ $b_2=910,939$	55°39'40,3" 67 59 11,3 56 21 05,3 61 24 01,1 46 50 31,3 71 45 29,8 53 29 17,6 45 09 56,7 81 20 39,8	28	$\alpha_1=79^\circ15'55,1''$ $\alpha_2=145\ 39\ 0,1$	$b_1=1063,128$ $b_2=1047,354$	69°59'08,3" 46 21 31,7 63 39 15,8 54 57 09,4 48 42 52,9 76 19 62,2 60 10 56,8 68 44 24,6 51 04 37,9

Окончание табл. П11

1	2	3	4	1	2	3	4
29	$\alpha_1=199^\circ50'13,6''$ $\alpha_2=263\ 37\ 05,6$	$b_1=1766,552$ $b_2=1000,421$	$43^\circ55'39,5''$ 42 51 45,9 93 12 30,6 40 26 42,7 48 38 43,7 90 54 26,8 64 30 08,1 69 33 51,7 45 56 01,8	31	$\alpha_1=64^\circ13'07,9''$ $\alpha_2=121\ 58\ 31,2$	$b_1=1659,645$ $b_2=1244,750$	$58^\circ03'48,4''$ 58 08 47,9 63 47 18,2 59 47 04,4 45 30 02,7 74 42 49,9 59 05 44,7 45 06 34,5 75 47 40,0
30	$\alpha_1=245^\circ49'04,4''$ $\alpha_2=300\ 34\ 24,1$	$b_1=1017,363$ $b_2=604,107$	$58^\circ38'01,2''$ 56 48 22,0 64 33 32,9 47 19 10,6 64 39 35,4 68 01 05,0 47 53 47,5 62 36 33,7 69 29 40,9	32	$\alpha_1=187^\circ01'05,7''$ $\alpha_2=270\ 19\ 27,5$	$b_1=1539,601$ $b_2=1227,832$	$60^\circ34'35,4''$ 60 19 15,1 59 06 13,7 66 18 15,4 40 23 12,1 73 18 28,0 49 18 44,9 63 22 21,6 67 18 55,0

Задача 4. Уравнять и произвести оценку точности коррелятным способом полигонометрического хода.

Т а б л и ц а П12

Исходные данные

Номер варианта	Координаты исходных пунктов, м	Исходные дирекционные углы	Измеренные углы	Измеренные стороны, м
1	2	3	4	5
1	$X_A=10027,185; Y_A=5812,685;$ $X_B=12019,595; Y_B=5301,553$	$\alpha_1=13^\circ51'31,6''$ $\alpha_2=304\ 37\ 29,0$	$168^\circ23'48,7''$ 198 18 39,6 139 17 06,1 133 32 00,2 191 14 23,4	$S_1=804,275$ $S_2=507,861$ $S_3=508,134$ $S_4=595,036$
2	$X_A=10586,918; Y_A=5557,581;$ $X_B=8333,401; Y_B=7035,309$	$\alpha_1=120^\circ16'13,5''$ $\alpha_2=128\ 17\ 21,6$	$193^\circ08'40,4''$ 201 45 49,6 199 16 02,0 138 24 31,8 175 26 09,0	$S_1=720,901$ $S_2=676,633$ $S_3=576,783$ $S_4=837,822$
3	$X_A=10699,213; Y_A=6227,509;$ $X_B=8913,066; Y_B=8244,082$	$\alpha_1=153^\circ30'55,1''$ $\alpha_2=177\ 03\ 07,5$	$185^\circ29'03,0''$ 142 06 17,0 175 04 30,8 201 35 20,1 219 17 00,8	$S_1=636,560$ $S_2=627,403$ $S_3=932,816$ $S_4=616,187$

Продолжение табл. П12

1	2	3	4	5
4	$X_A=10804,872; Y_A=6408,398;$ $X_B=13360,246; Y_B=6576,733$	$\alpha_1=79^\circ34'05,9''$ $\alpha_2=309\ 29\ 01,0$	153°55'52,6" 134 58 33,0 137 50 19,4 194 04 53,0 149 05 18,4	$S_1=921,929$ $S_2=586,921$ $S_3=585,392$ $S_4=997,150$
5	$X_A=10439,791; Y_A=5840,048;$ $X_B=10999,356; Y_B=8950,203$	$\alpha_1=104^\circ15'54,7''$ $\alpha_2=05\ 02\ 13,4$	166°30'28,8" 169 19 29,1 189 09 08,4 141 58 30,0 133 48 48,0	$S_1=729,318$ $S_2=934,914$ $S_3=967,123$ $S_4=632,229$
6	$S_1=729,318; S_2=934,914;$ $S_3=967,123; S_4=632,229$	$\alpha_1=81^\circ21'50,7''$ $\alpha_2=147\ 09\ 35,7$	194°34'57,2" 226 41 18,0 196 29 37,4 217 02 16,9 130 59 34,6	$S_1=568,507$ $S_2=909,365$ $S_3=715,072$ $S_4=945,170$
7	$X_A=10734,908; Y_A=6187,324;$ $X_B=12917,258; Y_B=7858,888$	$\alpha_1=113^\circ50'00,9''$ $\alpha_2=42\ 57\ 09,6$	146°36'10,6" 145 33 42,1 149 06 43,0 172 14 40,9 215 35 50,7	$S_1=745,101$ $S_2=907,923$ $S_3=730,405$ $S_4=728,667$
8	$X_A=10450,689; Y_A=5912,219;$ $X_B=7884,871; Y_B=4864,447$	$\alpha_1=280^\circ28'58,6''$ $\alpha_2=200\ 01\ 36,6$	130°33'30,9" 159 44 26,5 134 54 58,5 199 19 03,0 195 00 36,4	$S_1=991,486$ $S_2=776,313$ $S_3=700,016$ $S_4=599,424$
9	$X_A=10625,201; Y_A=6233,363;$ $X_B=10709,354; Y_B=9298,530$	$\alpha_1=122^\circ45'56,3''$ $\alpha_2=162\ 29\ 20,2$	130°59'15,6" 171 59 06,4 205 22 01,0 209 23 11,6 221 59 41,9	$S_1=922,356$ $S_2=683,896$ $S_3=810,403$ $S_4=865,652$
10	$X_A=10193,893; Y_A=6404,812;$ $X_B=7212,796; Y_B=5974,651$	$\alpha_1=180^\circ45'42,2''$ $\alpha_2=198\ 56\ 17,9$	193°10'42,0" 153 26 27,7 184 52 41,0 223 09 27,6 163 31 08,4	$S_1=827,784$ $S_2=695,952$ $S_3=813,644$ $S_4=849,556$
11	$X_A=10397,184; Y_A=5913,629;$ $X_B=8297,369; Y_B=3473,897$	$\alpha_1=206^\circ33'50,0''$ $\alpha_2=236\ 02\ 55,3$	213°45'31,1" 167 09 36,9 172 31 33,8 189 27 59,4 186 34 28,8	$S_1=858,294$ $S_2=755,642$ $S_3=888,175$ $S_4=744,671$
12	$X_A=10185,904; Y_A=6200,635;$ $X_B=12808,440; Y_B=5162,879$	$\alpha_1=304^\circ48'45,5''$ $\alpha_2=332\ 16\ 35,0$	210°39'48,9" 200 21 22,7 178 29 47,9 141 27 43,6 196 29 06,9	$S_1=682,670$ $S_2=570,017$ $S_3=783,400$ $S_4=911,487$

Продолжение табл. П12

1	2	3	4	5
13	$X_A=10673,949; Y_A=6499,447;$ $X_B=9053,289; Y_B=3889,441$	$\alpha_1=298^\circ29'27,3''$ $\alpha_2=231 10 15,5$	$135^\circ53'08,0''$ 166 01 51,8 184 51 04,5 156 10 38,0 189 44 03,0	$S_1=524,636$ $S_2=785,520$ $S_3=850,427$ $S_4=981,175$
14	$X_A=10750,518; Y_A=6239,993;$ $X_B=7924,005; Y_B=7066,562$	$\alpha_1=139^\circ33'43,3''$ $\alpha_2=227 49 11,5$	$193^\circ25'34,5''$ 210 18 06,8 138 23 18,1 224 32 44,8 221 35 39,4	$S_1=800,981$ $S_2=626,791$ $S_3=936,736$ $S_4=756,696$
15	$X_A=10732,651; Y_A=5922,227;$ $X_B=10181,312; Y_B=3254,796$	$\alpha_1=298^\circ24'39,6''$ $\alpha_2=259 31 40,7$	$137^\circ12'17,2''$ 185 20 27,1 159 11 57,4 215 47 48,9 163 34 28,7	$S_1=840,100$ $S_2=526,709$ $S_3=678,307$ $S_4=749,128$
16	$X_A=10434,441; Y_A=6062,458;$ $X_B=8348,410; Y_B=5040,740$	$\alpha_1=194^\circ59'10,8''$ $\alpha_2=282 12 29,4$	$141^\circ20'03,0''$ 219 49 29,8 205 27 18,6 209 06 43,6 211 29 41,8	$S_1=835,009$ $S_2=600,453$ $S_3=636,586$ $S_4=813,090$
17	$X_A=10536,852; Y_A=5559,504;$ $X_B=13141,222; Y_B=6205,088$	$\alpha_1=36^\circ41'18,7''$ $\alpha_2=52 39 15,7$	$157^\circ07'48,9''$ 170 54 28,1 177 24 14,1 220 53 53,4 189 37 29,6	$S_1=664,509$ $S_2=739,111$ $S_3=798,625$ $S_4=580,734$
18	$X_A=10829,474; Y_A=6456,122;$ $X_B=8169,587; Y_B=6576,261$	$\alpha_1=188^\circ39'51,8''$ $\alpha_2=163 07 52,5$	$132^\circ52'33,1''$ 211 12 41,7 191 00 38,6 200 08 56,9 139 13 13,0	$S_1=712,422$ $S_2=687,801$ $S_3=583,065$ $S_4=916,587$
19	$X_A=10838,640; Y_A=5951,614;$ $X_B=12124,626; Y_B=3480,297$	$\alpha_1=296^\circ58'49,5''$ $\alpha_2=332 06 39,0$	$144^\circ42'53,0''$ 216 59 36,0 206 56 33,1 174 24 57,2 192 03 44,2	$S_1=975,838$ $S_2=820,030$ $S_3=623,651$ $S_4=676,304$
20	$X_A=10187,860; Y_A=5990,644;$ $X_B=9268,942; Y_B=8361,214$	$\alpha_1=132^\circ46'56,3''$ $\alpha_2=89 36 44,8$	$176^\circ21'06,7''$ 191 05 41,8 137 07 00,4 161 25 41,7 190 50 20,0	$S_1=587,468$ $S_2=810,501$ $S_3=622,966$ $S_4=793,659$
21	$X_A=10506,053; Y_A=5964,779;$ $X_B=7748,957; Y_B=5312,442$	$\alpha_1=172^\circ25'32,4''$ $\alpha_2=162 56 25,0$	$224^\circ13'57,2''$ 164 10 36,3 170 10 49,5 160 46 10,1 171 09 23,1	$S_1=642,970$ $S_2=697,048$ $S_3=751,519$ $S_4=860,985$

Продолжение табл. П12

1	2	3	4	5
22	$X_A=10306,209; Y_A=5612,164;$ $X_B=8902,153; Y_B=8486,484$	$\alpha_1=142^\circ59'13,2''$ $\alpha_2=108\ 06\ 17,5$	176°40'35,5" 131 28 02,1 196 24 18,5 202 24 24,0 158 09 52,7	$S_1=630,920$ $S_2=854,235$ $S_3=891,948$ $S_4=993,080$
23	$X_A=10473,343; Y_A=6402,819;$ $X_B=7503,245; Y_B=6341,024$	$\alpha_1=145^\circ19'03,5''$ $\alpha_2=166\ 44\ 56,8$	210°27'03,8" 212 53 12,2 146 37 37,2 169 23 25,6 182 04 35,2	$S_1=859,099$ $S_2=784,584$ $S_3=730,405$ $S_4=722,637$
24	$X_A=10087,745; Y_A=5943,483;$ $X_B=7684,254; Y_B=6858,035$	$\alpha_1=119^\circ53'23,8''$ $\alpha_2=212\ 02\ 43,9$	160°15'13,5" 215 10 59,4 205 56 54,6 224 58 33,8 185 47 38,4	$S_1=507,141$ $S_2=798,083$ $S_3=908,100$ $S_4=988,521$
25	$X_A=10894,813; Y_A=5786,150;$ $X_B=9262,178; Y_B=7738,895$	$\alpha_1=85^\circ21'36,6''$ $\alpha_2=190\ 46\ 01,0$	223°16'24,5" 143 05 54,5 224 04 54,5 200 11 03,8 214 46 01,5	$S_1=604,641$ $S_2=727,521$ $S_3=540,530$ $S_4=925,542$
26	$X_A=10562,049; Y_A=5819,296;$ $X_B=9335,548; Y_B=7682,106$	$\alpha_1=122^\circ28'11,2''$ $\alpha_2=28\ 46\ 08,8$	216°46'44,1" 167 13 01,4 137 22 07,6 149 59 02,0 134 56 57,3	$S_1=783,376$ $S_2=560,957$ $S_3=761,026$ $S_4=558,530$
27	$X_A=10769,918; Y_A=5875,056;$ $X_B=9458,769; Y_B=3739,247$	$\alpha_1=257^\circ00'58,2''$ $\alpha_2=284\ 08\ 57,0$	134°39'49,2" 189 47 29,4 224 54 55,1 158 52 49,7 218 52 58,6	$S_1=550,798$ $S_2=532,657$ $S_3=617,138$ $S_4=966,592$
28	$X_A=10063,128; Y_A=5764,218;$ $X_B=10360,236; Y_B=2979,156$	$\alpha_1=309^\circ51'34,2''$ $\alpha_2=323\ 01\ 21,6$	151°11'55,2" 179 50 24,7 159 02 59,3 197 16 32,2 225 47 54,6	$S_1=883,288$ $S_2=833,087$ $S_3=565,454$ $S_4=547,709$
29	$X_A=10014,864; Y_A=5788,193;$ $X_B=10744,766; Y_B=3021,273$	$\alpha_1=255^\circ01'09,7''$ $\alpha_2=305\ 22\ 45,7$	228°32'53,8" 131 44 08,2 211 56 23,8 192 06 49,9 186 01 21,0	$S_1=622,001$ $S_2=910,991$ $S_3=631,612$ $S_4=876,819$
30	$X_A=10659,645; Y_A=5714,063;$ $X_B=7662,190; Y_B=4593,626$	$\alpha_1=190^\circ38'06,3''$ $\alpha_2=166\ 06\ 03,3$	190°29'41,1" 195 57 00,0 148 20 15,3 193 39 19,9 147 01 47,4	$S_1=769,767$ $S_2=811,686$ $S_3=842,941$ $S_4=838,673$

Окончание табл. П12

1	2	3	4	5
31	$X_A=10876,830; Y_A=5512,891;$ $X_B=9033,110; Y_B=6753,127$	$\alpha_1=103^\circ07'14,4''$ $\alpha_2=129\ 43\ 48,6$	207°54'30,2" 160 43 45,1 222 40 02,7 197 52 18,8 137 25 55,7	$S_1=535,340$ $S_2=505,986$ $S_3=613,589$ $S_4=758,091$
32	$X_A=10458,204; Y_A=6203,203;$ $X_B=8560,440; Y_B=8244,516$	$\alpha_1=184^\circ44'42,6''$ $\alpha_2=78\ 01\ 20,1$	180°55'15,6" 137 25 45,9 149 19 26,3 167 57 40,1 157 38 37,2	$S_1=885,427$ $S_2=656,962$ $S_3=819,048$ $S_4=993,293$
33	$X_A=10502,876; Y_A=6447,703;$ $X_B=11725,213; Y_B=3928,375$	$\alpha_1=258^\circ24'27,9''$ $\alpha_2=299\ 08\ 52,5$	221°45'20,8" 141 18 27,6 211 12 44,0 220 49 32,4 145 38 15,3	$S_1=561,067$ $S_2=881,327$ $S_3=860,890$ $S_4=825,819$
34	$X_A=10754,023; Y_A=6163,162;$ $X_B=8644,300; Y_B=4434,242$	$\alpha_1=275^\circ02'53,0''$ $\alpha_2=127\ 10\ 58,1$	157°12'56,3" 171 56 33,9 151 18 00,3 133 33 36,9 138 07 01,5	$S_1=925,273$ $S_2=670,079$ $S_3=733,094$ $S_4=956,882$
35	$X_A=10228,577; Y_A=6362,045;$ $X_B=10128,003; Y_B=3679,663$	$\alpha_1=206^\circ59'08,0''$ $\alpha_2=284\ 39\ 11,5$	219°07'04,3" 178 48 51,5 229 15 48,4 167 19 59,5 183 08 14,2	$S_1=590,644$ $S_2=750,999$ $S_3=711,079$ $S_4=830,205$

Задания к §3.4

Задача 1. Уравнять и произвести оценку точности сети триангуляции (см. рис. П8) способом Крюгера–Урмаева. Исходные данные приведены в табл. П10.

Задача 2. Уравнять и произвести оценку точности сети триангуляции (см. рис. П9) способом Крюгера–Урмаева. Исходные данные приведены в табл. П11.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Таблицы значений статистических функций

Интеграл вероятностей $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^{+t} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$

<i>t</i>	$\Phi(t)$	<i>t</i>	$\Phi(t)$	<i>t</i>	$\Phi(t)$
0,00	0,00000	1,25	0,78870	2,50	0,98758
0,05	0,03988	1,30	0,80640	2,55	0,98922
0,10	0,07966	1,35	0,82298	2,60	0,99068
0,15	0,11924	1,40	0,83849	2,65	0,99195
0,20	0,15852	1,45	0,85294	2,70	0,99307
0,25	0,19741	1,50	0,86639	2,75	0,99404
0,30	0,23582	1,55	0,87886	2,80	0,99489
0,35	0,27366	1,60	0,89040	2,85	0,99563
0,40	0,31084	1,65	0,90106	2,90	0,99627
0,45	0,34729	1,70	0,91087	2,95	0,99682
0,50	0,38292	1,75	0,91988	3,00	0,99730
0,55	0,41768	1,80	0,92814	3,10	0,99806
0,60	0,45149	1,85	0,93569	3,20	0,99863
0,65	0,48431	1,90	0,94257	3,30	0,99903
0,70	0,51607	1,95	0,94882	3,40	0,99933
0,75	0,54675	2,00	0,95450	3,50	0,99953
0,80	0,57629	2,05	0,95964	3,60	0,99968
0,85	0,60468	2,10	0,96427	3,70	0,99978
0,90	0,63188	2,15	0,96844	3,80	0,99986
0,95	0,65789	2,20	0,97219	3,90	0,44440
1,00	0,68269	2,25	0,97555	4,00	0,99994
1,05	0,70628	2,30	0,97855	4,10	0,99996
1,10	0,72867	2,35	0,98123	4,20	0,99997
1,15	0,74986	2,40	0,98360	4,40	0,99999
1,20	0,76986	2,45	0,98571	4,50	0,999994

Коэффициенты Стьюдента t_{β}

$r \setminus \beta$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
2	0,16	0,33	0,51	0,73	1,00	1,38	2,0	3,1	6,3	12,7	31,8	63,7	636,6
3	14	29	45	52	0,82	1,06	1,3	1,9	2,9	4,3	7,0	9,9	31,6
4	14	28	42	58	77	0,98	1,3	1,6	2,4	3,2	4,5	5,8	12,9
5	13	27	41	57	74	94	1,2	1,5	2,1	2,8	3,7	4,6	8,6
6	13	27	41	56	73	92	1,2	1,5	2,0	2,6	3,4	4,0	6,9
7	13	27	40	55	72	90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,1	3,7	6,0
8	13	26	40	55	71	90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,0	3,5	5,4
9	13	26	40	54	71	90	1,1	1,4	1,9	2,3	2,9	3,4	5,0
10	13	26	40	54	70	88	1,1	1,4	1,8	2,3	2,8	3,3	4,8
11	13	26	40	54	70	88	1,1	1,4	1,8	2,2	2,8	3,2	4,6
12	13	26	40	54	70	87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,1	4,5
13	13	26	40	54	70	87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,1	4,3
14	13	26	39	54	69	87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,0	4,2
15	13	26	39	54	69	87	1,1	1,3	1,8	2,1	2,6	3,0	4,1
16	13	26	39	54	69	87	1,1	1,3	1,8	2,1	2,6	2,9	4,0
17	13	26	39	54	69	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,6	2,9	4,0
18	13	26	39	53	69	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,6	2,9	4,0
19	13	26	39	53	69	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,6	2,9	3,9
20	13	26	39	53	69	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,9	3,9
21	13	26	39	53	69	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,8
22	13	26	39	53	69	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,8
23	13	26	39	53	69	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,8
24	13	26	39	53	69	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,8
25	13	26	39	53	69	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,7
26	13	26	39	53	68	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,7
27	13	26	39	53	68	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,7
28	13	26	39	53	68	86	1,1	1,3	1,7	2,0	2,5	2,8	3,7
29	13	26	39	53	68	86	1,1	1,3	1,7	2,0	2,5	2,8	3,7
30	13	26	39	53	68	85	1,1	1,3	1,7	2,0	2,5	2,8	3,7
40	13	26	39	53	68	85	1,1	1,3	1,7	2,0	2,4	2,7	3,6
60	13	25	39	53	68	85	1,0	1,3	1,7	2,0	2,4	2,7	3,5
120	13	25	39	53	68	85	1,0	1,3	1,7	2,0	2,4	2,6	3,4

Коэффициенты γ_1 и γ_2 в выражении $\gamma_1 m^2 < \sigma^2 < \gamma_2 m^2$

<i>r</i>	β							
	0,99		0,98		0,95		0,90	
	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2
1	0,356	159	0,388	79,8	0,446	31,9	0,510	15,9
2	0,434	14,1	0,466	9,97	0,521	6,28	0,578	4,40
3	0,483	6,47	0,514	5,11	0,566	3,73	0,620	2,92
4	0,519	4,39	0,549	3,67	0,599	2,87	0,649	2,37
5	0,546	3,48	0,576	3,00	0,624	2,45	0,672	2,090
6	0,569	2,98	0,597	2,62	0,644	2,202	0,690	1,916
7	0,588	2,66	0,616	2,377	0,661	2,035	0,705	1,797
8	0,604	2,440	0,631	2,205	0,675	1,916	0,718	1,711
9	0,618	2,277	0,644	2,076	0,688	1,826	0,729	1,645
10	0,630	2,154	0,656	1,977	0,699	1,755	0,739	1,593
11	0,641	2,056	0,677	1,898	0,708	1,698	0,748	1,550
12	0,651	1,976	0,677	1,833	0,717	1,651	0,755	1,515
13	0,660	1,910	0,685	1,779	0,725	1,611	0,762	1,485
14	0,669	1,854	0,683	1,733	0,732	1,577	0,769	1,460
15	0,676	1,806	0,700	1,694	0,739	1,548	0,775	1,437
16	0,683	1,764	0,707	1,659	0,745	1,522	0,780	1,418
17	0,690	1,727	0,713	1,629	0,750	1,499	0,785	1,400
18	0,696	1,695	0,719	1,602	0,756	1,479	0,790	1,385
19	0,702	1,666	0,725	1,578	0,760	1,460	0,794	1,370
20	0,707	1,640	0,730	1,556	0,765	1,444	0,798	1,358
21	0,712	1,917	0,734	1,536	0,769	1,429	0,802	1,346
22	0,717	1,595	0,739	1,519	0,773	1,416	0,805	1,335
23	0,722	1,576	0,743	1,502	0,777	1,402	0,809	1,326
24	0,726	1,558	0,747	1,487	0,781	1,391	0,812	1,316
25	0,730	1,541	0,751	1,473	0,784	1,380	0,815	1,308
26	0,734	1,526	0,755	1,460	0,788	1,371	0,818	1,300
27	0,737	1,512	0,758	1,448	0,791	1,361	0,820	1,293
28	0,741	1,499	0,762	1,436	0,794	1,352	0,823	1,286
29	0,744	1,487	0,765	1,426	0,796	1,344	0,825	1,279
30	0,748	1,475	0,768	1,417	0,799	1,337	0,823	1,274
40	0,774	1,390	0,792	1,344	0,821	1,279	0,847	1,228
50	0,793	1,336	0,810	1,297	0,837	1,243	0,861	1,199
60	0,808	1,299	0,824	1,265	0,849	1,217	0,871	1,179
70	0,820	1,272	0,835	1,241	0,858	1,198	0,879	1,163
80	0,829	1,250	0,844	1,222	0,866	1,183	0,886	1,151
90	0,838	1,233	0,852	1,207	0,873	1,171	0,892	1,141

**Значения χ^2_p при вероятности того, что $P(\chi^2 \geq \chi^2_p)$
при числе степеней свободы r**

r	P												
	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01
1	0,0001	0,00062	0,0039	0,016	0,064	0,148	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635
2	0,0201	0,0404	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,937	11,34
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,195	3,357	4,878	5,980	7,779	9,488	11,67	13,28
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,343	3,000	4,351	6,064	7,289	9,236	11,07	13,39	15,09
6	0,872	1,134	1,635	2,204	3,070	3,828	5,348	7,231	8,558	10,64	12,59	15,03	16,81
7	1,239	1,564	2,167	2,833	3,722	4,671	6,346	8,383	9,803	12,02	14,07	16,62	18,48
8	1,646	2,032	2,733	3,490	4,594	5,527	7,344	9,524	11,03	13,36	15,51	18,17	20,09
9	2,088	2,532	3,325	4,168	5,380	6,393	8,343	10,66	12,24	14,68	16,92	19,68	21,67
10	2,558	3,059	3,940	4,965	6,179	7,267	9,342	11,78	13,44	15,99	18,31	21,16	23,21
11	3,053	3,609	4,575	5,578	6,989	8,148	10,34	12,90	14,63	17,28	19,68	22,62	24,72
12	3,571	4,178	5,226	6,304	7,807	9,034	11,34	14,01	15,81	18,55	21,03	24,05	26,22
13	4,107	4,765	5,892	7,042	8,634	9,926	12,34	15,12	16,98	19,81	22,36	25,47	27,69
14	4,660	5,368	6,571	7,790	9,967	10,82	13,34	16,22	18,15	21,06	23,68	26,87	29,14
15	5,299	5,985	7,261	8,547	10,31	11,72	14,34	17,32	19,31	22,31	25,00	28,26	30,58
16	5,812	6,614	7,962	9,314	11,15	12,62	15,34	18,42	20,46	23,54	26,30	29,63	32,00
17	6,408	7,255	8,672	10,08	12,00	13,53	16,34	19,51	21,62	24,77	27,59	31,00	33,41
18	7,015	7,906	9,390	10,86	12,86	14,44	17,34	20,60	22,76	25,99	28,87	32,35	34,80
19	7,633	8,567	10,117	11,65	13,72	15,35	18,34	21,69	23,90	27,20	30,11	33,69	36,19
20	8,260	9,237	10,851	12,44	14,58	16,27	19,34	22,78	25,04	28,41	31,41	35,02	37,57
21	8,897	9,915	11,591	13,24	15,44	17,18	20,34	23,86	26,17	29,62	32,67	36,34	38,93
22	9	10,600	12,338	14,04	16,31	18,10	21,34	24,94	27,30	30,81	33,92	37,66	40,29
23	10,195	11,293	13,191	14,85	17,19	19,02	22,34	26,02	28,43	32,01	35,17	38,97	41,64

Функция распределения $F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$

$\pm t$	$F(-t)$	$F(t)$	$\pm t$	$F(-t)$	$F(t)$	$\pm t$	$F(-t)$	$F(t)$	$\pm t$	$F(-t)$	$F(t)$
0,00	0,500	0,500	1,00	0,159	0,841	2,00	0,023	0,977	3,00	0,001	0,999
0,10	0,460	0,540	1,10	0,136	0,864	2,10	0,018	0,982	3,10	0,001	0,999
0,20	0,421	0,579	1,20	0,115	0,885	2,20	0,014	0,986	3,20	0,001	0,999
0,30	0,382	0,618	1,30	0,097	0,903	2,30	0,011	0,989	3,30	0	1,000
0,40	0,345	0,655	1,40	0,081	0,919	2,40	0,008	0,992			
0,50	0,308	0,692	1,50	0,067	0,933	2,50	0,006	0,994			
0,60	0,274	0,726	1,60	0,055	0,945	2,60	0,005	0,995			
0,70	0,242	0,758	1,70	0,045	0,955	2,70	0,004	0,996			
0,80	0,212	0,788	1,80	0,036	0,964	2,80	0,003	0,997			
0,90	0,184	0,816	1,90	0,029	0,971	2,90	0,002	0,998			
1,00	0,159	0,841	2,00	0,023	0,977	3,00	0,001	0,999			

$$\text{Функция } Z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}$$

r^*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0100	0,0200	0,0300	0,0400	0,0500	0,0601	0,0701	0,0802	0,0902
0,1	0,1003	0,1104	0,1206	0,1307	0,1409	0,1511	0,1614	0,1717	0,1820	0,1923
0,2	0,2027	0,2132	0,2237	0,2342	0,2448	0,2554	0,2661	0,2769	0,2877	0,2986
0,3	0,3095	0,3205	0,3316	0,3428	0,3541	0,3654	0,3769	0,3881	0,4001	0,4118
0,4	0,4236	0,4356	0,4477	0,4599	0,4722	0,4847	0,4973	0,5101	0,5230	0,5361
0,5	0,5493	0,5627	0,5763	0,5901	0,6042	0,6184	0,6328	0,6475	0,6625	0,6777
0,6	0,6931	0,7089	0,7250	0,7414	0,7582	0,7753	0,7928	0,8107	0,8291	0,8480
0,7	0,8673	0,8872	0,9076	0,9287	0,9505	0,9730	0,9962	1,0203	1,0454	1,0714
0,8	1,0986	1,1270	1,1568	1,1881	1,2212	1,2562	1,2933	1,3331	1,3758	1,4219
0,9	1,4722	1,5275	1,5890	1,6584	1,7380	1,8318	1,9459	2,0923	2,2976	2,6466
0,99	2,6466	2,6996	2,7587	2,8257	2,9031	2,9945	3,1063	3,2504	3,4534	3,8002

* В первой графе записаны значения r до 0,1; в первой строке дописаны сотые доли r .

Функция $y' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta^2}$ для вычисления ординат кривой
 нормального распределения по формуле $y=y'h$

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5641	0,5641	0,5641	0,5640	0,5637	0,5634	0,5631	0,5629	0,5624	0,5619
0,1	0,5614	0,5607	0,5602	0,5595	0,5588	0,5579	0,5571	0,5561	0,5551	0,5541
0,2	0,5580	0,5518	0,5507	0,5494	0,5481	0,5469	0,5455	0,5440	0,5425	0,5409
0,3	0,5394	0,5377	0,5360	0,5343	0,5325	0,5306	0,5288	0,5268	0,5250	0,5228
0,4	0,5209	0,5187	0,5166	0,5143	0,5121	0,5098	0,5076	0,5052	0,5028	0,5003
0,5	0,4979	0,4954	0,4929	0,4903	0,4876	0,4849	0,4822	0,4796	0,4769	0,4740
0,6	0,4712	0,4684	0,4656	0,4626	0,4598	0,4568	0,4538	0,4507	0,4477	0,4446
0,7	0,4417	0,4385	0,4354	0,4322	0,4291	0,4258	0,4227	0,4195	0,4162	0,4129
0,8	0,4097	0,4064	0,4030	0,3998	0,3964	0,3932	0,3898	0,3864	0,3831	0,3797
0,9	0,3763	0,3729	0,3695	0,3661	0,3627	0,3594	0,3558	0,3524	0,3490	0,3456
1,0	0,342	0,339	0,336	0,332	0,329	0,326	0,322	0,318	0,315	0,312
1,1	0,308	0,304	0,302	0,298	0,295	0,292	0,288	0,284	0,282	0,278
1,2	0,275	0,272	0,268	0,265	0,262	0,258	0,256	0,252	0,248	0,246
1,3	0,242	0,240	0,236	0,233	0,230	0,227	0,224	0,221	0,218	0,214
1,4	0,212	0,209	0,206	0,203	0,200	0,197	0,194	0,192	0,189	0,186
1,5	0,183	0,180	0,178	0,175	0,172	0,170	0,167	0,165	0,162	0,169
1,6	0,156	0,154	0,152	0,149	0,147	0,145	0,142	0,140	0,138	0,135
1,7	0,133	0,131	0,129	0,126	0,124	0,122	0,120	0,118	0,116	0,114
1,8	0,112	0,110	0,108	0,106	0,104	0,102	0,100	0,098	0,096	0,094
1,9	0,093	0,091	0,090	0,088	0,086	0,084	0,083	0,081	0,080	0,078
2,0	0,076	0,076	0,075	0,073	0,072	0,069	0,068	0,066	0,065	0,063
2,1	0,062	0,061	0,060	0,058	0,057	0,056	0,055	0,053	0,052	0,051
2,2	0,050	0,049	0,048	0,047	0,046	0,045	0,044	0,043	0,042	0,041
2,3	0,040	0,039	0,038	0,038	0,037	0,036	0,036	0,034	0,033	0,032
2,4	0,032	0,031	0,030	0,030	0,029	0,028	0,027	0,027	0,026	0,025
2,5	0,025	0,024	0,024	0,023	0,022	0,022	0,021	0,021	0,020	0,020
2,6	0,010	0,019	0,018	0,018	0,017	0,017	0,016	0,016	0,016	0,015
2,7	0,015	0,014	0,014	0,014	0,013	0,017	0,012	0,012	0,012	0,011
2,8	0,011	0,011	0,011	0,010	0,010	0,010	0,0096	0,0094	0,0092	0,0090
2,9	0,0085	0,0082	0,0080	0,0078	0,0076	0,0074	0,0071	0,0069	0,0067	0,0066
3,0	0,0063									

* В первой графе записаны значения t до 0,1; в первой строке дописаны сотые доли t .

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1. Основы теории вероятностей	6
§1.1. Основные понятия теории вероятностей. Формула классической вероятности	6
§1.2. Теоремы сложения и умножения.....	17
§1.3. Многократные повторные испытания	27
§1.4. Понятие случайной величины	33
§1.5. Количественные характеристики случайной величины	49
§1.6. Законы распределения для непрерывных случайных величин	66
§1.7. Предельные теоремы	77
§1.8. Многомерные распределения. Случайный вектор	86
Глава 2. Элементы математической статистики. Теория ошибок измерений	106
§2.1. Основные понятия математической статистики.....	106
§2.2. Основные понятия и задачи теории ошибок	110
§2.3. Оценка параметров распределения. Случай равноточных измерений.....	118
§2.4. Обработка и оценка точности неравноточных измерений .	147
§2.5. Проверка статистических гипотез.....	165
§2.6. Корреляционный и регрессионный анализ.....	173
Глава 3. Метод наименьших квадратов	197
§3.1. Общие понятия.....	197
§3.2. Параметрический способ уравнивания.....	200
§3.3. Коррелятный способ уравнивания.....	260
§3.4. Двухгрупповое уравнивание	303
§3.5. Проектирование геодезических построений	323
Литература	348
Приложение 1. Индивидуальные задания для студентов.....	350
Приложение 2. Таблицы значений статистических функций	413

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Учебное издание

ВЛАДИМИР ВИКТОРОВИЧ ГОЛУБЕВ
ГЕОДЕЗИЯ. ТЕОРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ
ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Редактор *Е.А. Евтеева*
Оригинал-макет *Б.В. Кузнецов*
Дизайн обложки *А.Ю. Боков*

Подписано в печать 07.11.2016. Гарнитура Таймс
Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать цифровая
Объем 26,25 усл. печ. л.
Тираж 500 экз. Заказ 106. Цена договорная.

Издательство МИИГАиК
105064, Москва, Гороховский пер., 4

Отпечатано в типографии МИИГАиК