1

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ГЕОЛОГИИ И ГЕОФИЗИКИ

Препринт № 18

В.Н. Доровский

ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В СИСТЕМЕ ЛИТОСФЕРА-АСТЕНОСФЕРА

НОВОСИБИРСК 1986

УДК 532.5+550.32

Доровский В.Н. Термомеханическая неустойчивость в системе литосфера-астеносфера. Новосибирск, 1986. 16с(Препринт № 18,ИГиГ СО АН СССР).

Рассматривается система "литосфера-астеносфера". Астеносфера представляется зоной частичного расплава. В приближении геометрической выделенности поверхности поглощения тепла изучается процесс необратимой передачи импульса от литосферы к астеносфере. Показано,что при значениях числа Пекле $P_e \gg 1$ фронт поглощения тепла теряет устойчивость по отношению к возмущениям формы. Инкремент неустойчивости G как функция волнового вектора k волны возмущения имеет при $k = k_*$ максимальное значение- зона поглощения импульса с необходимостью разбивается на локальные очаги поглощения тепла. Вычисляется размер диссипативной неоднородности и характерное время её формирования. Обсуждается возможность отождествления магматических камер с очагами поглощения тепла. В развитом подходе становится излишним представление о "горячих точках".

Работа представляет интерес для физиков, занимающихся исследованием диссипативных процессов в условиях гидродинамического течения; геофизиков, исследующих условия формирования магматических камер; геологов.

"Вулканическое тепло представляет собой только малую часть тепла, излучаемого Землёй... Настоящая проблема вулканизма заключается в том, чтобы определить те пути и способы, посредством которых довольно незначительные количества тепла могут быть сформированы в относительно небольших объёмах земной коры"/5, с.95/. Среди всего многообразия предложенных механизмов локализации тепловой энергии наибольшую трудность испытывают теории,связывающие динамику земной коры с процессами магмообразования, хотя очевидность такой постановки вопроса не вызывает сомнений . Трудности указанных теорий связаны с недостаточно полным представлением о динамических закономерностях, происходящих в коре Земли, верхней мантии, а также со слабой изученностью механизмов преобразования механической энергии сдвиговых крупномасштабных деформаций во внутреннюю энергию среды. Последние начали активно исследоваться с развитием представлений тектоники плит/9,10/. Можно сказать, что проблема взаимосвязи крупномасштабной динамики коры Земли и локализации тепловой энергии не нашла какого- либо отражения в известных геодинамических построениях. Экспериментальное указание на наличие зон тепловой неоднородности можно найти в известной работе А.С.Алексеева и др./ 1 /.

Исходной посылкой многих теорий в разрешении поставленной проблемы является известная гидродинамическая неустойчивость Релея-Тейлора(см.,например/ 8 /), одна из редакций которой констатирует неустойчивость лёгкого плоского слоя, находящегося под более тяжёлым. Исследуя линейную стадию неустойчивости по возмущениям к одномерному стационарному положению слоёв,устанавливают, что инкремент G как функция волнового вектора K волны возмущения положителен и принимает максимальное значение при $K = K_*$. Указанное обстоятельство позволяет выделить моду K_* с длиной волны $\lambda_* = 2\pi h_*/K_*$(где h_* -характерный размер системы) из спектра начальных возмущений, имеющую минимальное время развития,т.е. минимальное время выхода на экспоненциальную по времени асимптотику и говорить о характерном размере λ_* в рассматриваемой задаче. Исследованная таким образом неустойчивость Релея-Тейлора породила представление о диапирах/ 8 /. Используя развитый аппарат линейной теории неустойчивости и принятую интерпретацию получаемых результатов "на языке инкремента", можно, в качестве первого приближения, развить альтернативный подход к проблеме локализации тепла в верхней мантии, исходя из общепринятых геодинамических представлений. С гидродинамической точки зрения , в настоящей работе исследуется новая, насколько известно автору, неустойчивость, впервые описанная в работе/ 2 /.

Современный взгляд на астеносферу приписывает последней несколько пониженную вязкость($\sim 10^{19}$П) относительно литосферы, в остальном допуская свободу толкований. Не внося каких-либо противоречий в общепринятый взгляд, отождествим астеносферу с зоной частичного расплава, приписывая ему вязкость астеносферы и достаточно малое для этого содержание полностью расплавленной среды. За рассматриваемые в работе характерные температуропроводные времена $t_\chi = h_*^2/\chi_i$ деформации сдвига не приводят к значительному увеличению объёма магмы(необходимые оценки можно найти в работе/ 4 /) гарантируя, однако, неуменьшение её изначально возникшего в процессе трения объёма. Достаточно малый размер "твёрдотельных частиц", входящих в частичный расплав, гарантирует выравнивание температуры на их размере за времена $t_0 = h_0^2/\chi_i$, где h_0-размер "частицы", χ_i-температуропроводность . Это позволяет на размере "жидкая прослойка-твёрдая частица" не различать температуры и в силу локального фазового равновесия считать её постоянной, управляемой лишь крупномасштабными механизмами переноса. Опуская из рассмотрения кинетику процесса формирования астеносферы в переходном слое к литосфере, в предположении, что процесс формирования астеносферы происходит самосогласованно с движением литосферы, изучим возможные термомеханические свойства такой системы. Следующая задача описывает процесс термомеханического взаимодействия литосферы с астеносферой:

$$\frac{\partial v_x^{(0)}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho}\cdot\frac{\partial^2 v_x^{(0)}}{\partial y^2}, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial T_i^{(0)}}{\partial t} = \chi_i\cdot\frac{\partial^2 T_i^{(0)}}{\partial y^2} + \frac{\eta}{\rho C_p^i}\cdot\left(\frac{\partial v_x^{(0)}}{\partial y}\right)^2, \quad 0 \le y \le h, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial T_e^{(0)}}{\partial t} = \chi_e\cdot\frac{\partial^2 T_e^{(0)}}{\partial y^2}, \qquad h \le y \le h_*, \qquad (3)$$

$$-\varkappa_i \cdot \frac{\partial T_i^{(0)}}{\partial y}\Big/_h + \varkappa_e \cdot \frac{\partial T_e^{(0)}}{\partial y}\Big/_h = \rho q \frac{dh}{dt}, \tag{4}$$

$$T_i^{(0)}\Big/_h = T_e^{(0)}\Big/_h = T_0, \quad T_e^{(0)}\Big/_{h_*} = T_*, \quad \frac{\partial T_i^{(0)}}{\partial y}\Big/_0 = -R,$$

$$v_x^{(0)}\Big/_0 = 0, \quad v_x^{(0)}\Big/_h = v_0,$$

$$v_x^{(0)}(y, t=0) = \Psi(y), \; T_i^{(0)}(y, t=0) = \varphi_i(y), \; T_e^{(0)}(y, t=0) = \varphi_e(y).$$

Система уравнений (I)-(3) с соответствующими граничными и начальными условиями требует пояснений. На рис.I, иллюстрирующем геометрию задачи, среда "ext" ($h \le y \le h_*$)-движущаяся с постоянной скоростью v_0 литосфера, передающая импульс вязкой астеносфере (среда "in"). Необратимый перенос импульса в зоне частичного расплава $0 \le y \le h$ описывается уравнением Навье- Стокса (I), определяющим объёмный источник тепла в уравнении теплопроводности (2). Считаем, что выделяющееся в астеносфере тепло и постоянно присутствующая сдвиговая деформация-основные причины возникновения и формирования астеносферы. Температуры $T_i^{(0)}$, $T_e^{(0)}$ соответствующих сред определяют эволюцию фронта $y = h(t)$. Граничные условия реализуют изложенную точку зрения в максимально общем виде. Формально система уравнений (I)-(3) описывает в приближении задачи Стефана формирование одномерной зоны расплава . Следует, однако, подчеркнуть, что эта связь носит чисто формальный характер, так как речь идёт о вязкостях $\sim 10^{19}$П.

В принятой системе уравнений введены обозначения C_p^i, C_p^e - теплоёмкости, χ_i, χ_e -температуропроводности, $\varkappa^i, \varkappa^e$ -теплопроводности рассматриваемых сред, ρ -плотность, η -вязкость, T_*-температура открытой поверхности $y = h_*$. Заметим, что условия на нижней границе $y = 0$ для эффектов, рассматриваемых в настоящей работе, не являются принципиальными, являются модельными и не ограничивают физической общности полученного в работе результата. Теплоту поглощения q примем пропорциональной доли чистого расплава в единице объёма среды, представляющей частичный расплав.

Измеряя координату $y = \xi \cdot h_*$ в единицах h_*, время $t = t_\chi \cdot \tau$ в единицах характерного температуропроводного времени $t_\chi = h_*^2/\chi_i$ и вводя безразмерные температуры $T_{i,e}^{(0)} = T_0 + q\theta_{i,e}^{(0)}/C_p^{i,e}$, представим систему уравнений (I)-(3) совместно с граничными условиями в виде

$$\frac{1}{P_r}\frac{\partial v^{(0)}}{\partial \tau} = -\alpha + \frac{\partial^2 v^{(0)}}{\partial \xi^2},$$

$$\frac{\partial \theta_i^{(0)}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_i^{(0)}}{\partial \xi^2} + \sigma\left(\frac{\partial v^{(0)}}{\partial \xi^2}\right)^2, \qquad 0 \le \xi \le \xi_0,$$

$$\frac{\partial \theta_e^{(0)}}{\partial \tau} = \frac{\chi_e}{\chi_i}\cdot\frac{\partial^2 \theta_e^{(0)}}{\partial \xi^2}, \qquad \xi_0 \le \xi \le 1,$$

$$-\frac{\partial \theta_i^{(0)}}{\partial \xi}\Big|_{\xi_0} + \frac{\chi_e}{\chi_i}\cdot\frac{\partial \theta_e^{(0)}}{\partial \xi}\Big|_{\xi_0} = \frac{d\xi_0}{d\tau}, \qquad \xi_0 = \frac{h(\tau)}{h_*},$$

$$\frac{\partial \theta_i^{(0)}}{\partial \xi}\Big|_0 = -\gamma, \quad \theta_i^{(0)}\Big|_{\xi_0} = \theta_e^{(0)}\Big|_{\xi_0} = 0, \quad \theta_e^{(0)}\Big|_1 = -\frac{c_p^e}{q}\cdot(T_0 - T_*),$$

$$v^{(0)}\Big|_0 = 0, \quad v^{(0)}\Big|_{\xi_0} = 1.$$

Здесь $\alpha = h_*^2 \frac{\partial p}{\partial x} / \eta v_0$ – заданная величина, характеризующая отношение двух скоростей, $P_r = \eta / \rho\chi_i$ –число Прандтля, $\sigma = P_r v_0^2 / q$ –параметр, определяющий скорость ввода энергии в систему, $\gamma = \ell h_* c_p^i q^{-1} > 0$ –

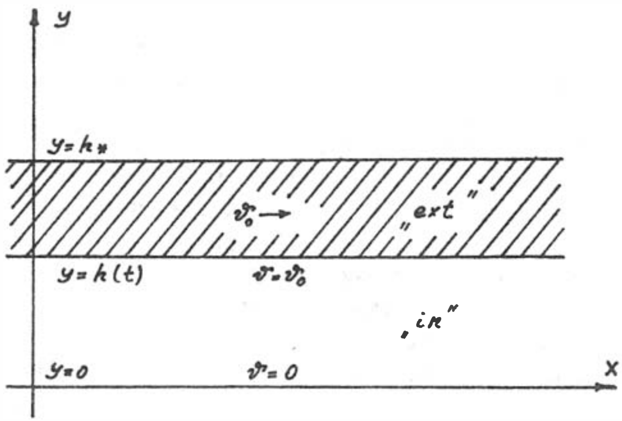

Рис.I. Иллюстрация геометрии задачи

-безразмерный тепловой поток, внешний по отношению к рассматриваемой системе. Начальные распределения температур и скорости опущены из рассмотрения. Функции

$$\vartheta^{(0)}(\xi) = \frac{\xi}{\xi_0}\cdot\left[1+\frac{d\xi_0^2}{2}\left(\frac{\xi}{\xi_0}-1\right)\right],$$

$$\theta_i^{(0)}(\xi) = \frac{\sigma}{12d^2}\cdot\left[\left(d\xi_0+C\right)^4-\left(d\xi+C\right)^4\right]+\sigma(\xi-\xi_0)\left(\frac{C^3}{3d}-\frac{\tau}{\sigma}\right), \qquad (7)$$

$$\theta_e^{(0)}(\xi) = \frac{c_p^e}{q}\cdot\frac{T_0-T_*}{1-\xi_0}\cdot\left(\xi_0-\xi\right), \quad C=\frac{1}{\xi_0}\left(1-\frac{d\xi_0^2}{2}\right)$$

представляют стационарное решение задачи (5),(6). Безразмерная координата $\xi_0 = 1-\tilde{x}$ стационарного положения фронта раздела сред определяется из трансцендентного уравнения

$$\frac{12}{d^2} = \frac{\tilde{x}\cdot(1-\tilde{x})^4}{(1-\tilde{x})Q_*-\tilde{x}-\tilde{x}\cdot(1-\tilde{x})\rho_0} = F(\tilde{x}), \qquad (8)$$

где $Q_* = (T_0-T_*)\varkappa^e/\eta v_0^2$, $\rho_0 = \tau/\sigma$. На рис.2 графически изображаются корни уравнения (8) как абсциссы пересечения функции $F(\tilde{x})$ с:

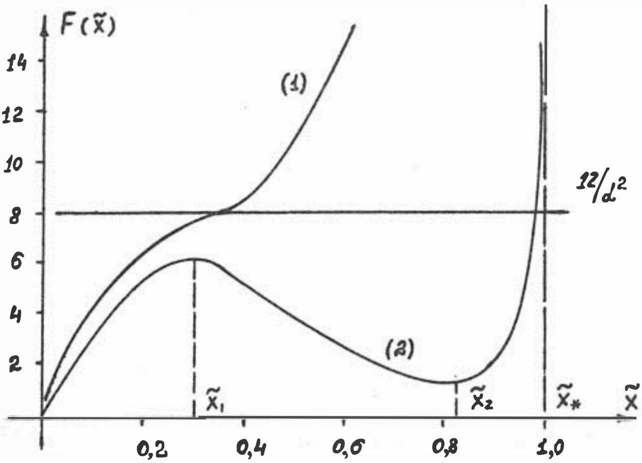

Рис.2. Графическое нахождение корней уравнения (8). Кривая (I) соответствует случаю $Q_* \le 16/9$, кривая (2) – случаю $Q_* \geq 16/9$. График функции $F(\tilde{x})$ приведён для значения $\rho_0 = 0$

постоянной $12/\alpha^2$. Функция $F(\tilde{x})$ при $\tilde{x} \to \tilde{x}_* = \frac{1+\rho_0+Q_*}{2\rho_0} \cdot \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4\rho_0 Q_*}{(1+\rho_0+Q_*)^2}}\right]$ ($\tilde{x}_* \leq 1$) асимптотически стремится к бесконечности. При $\rho_0 \to 0$ имеем $\tilde{x}_* \to Q_*/(1+Q_*)$. В случае $\rho_0 = 0$ функция $F(\tilde{x})$ при $Q_* > 16/9$ имеет два экстремума, монотонно возрастая при $x \to \tilde{x}_*$. При $Q_* \leq 16/9$ кривая $F(\tilde{x})$ монотонно возрастает во всей области $[0, x_*]$. Область значений $\tilde{x}_1 \leq \tilde{x} \leq \tilde{x}_2$ не соответствует каким-либо физическим ситуациям, так как решение (7), определяемое значениями $\tilde{x}$ из интервала $[\tilde{x}_1, \tilde{x}_2]$, неустойчиво относительно бесконечно малых возмущений стационарных состояний, не нарушающих одномерности рассматриваемой задачи /2/. При $\rho_0 = 0$ качественного поведения функция F в области $[0, \tilde{x}_*]$ не меняет. Изменяются лишь численные выражения для значений $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$ и $\tilde{x}_*$.

Исследование вопроса о пространственной неустойчивости фронта, разделяющего литосферу и астеносферу, требует обобщения на трёхмерный случай системы уравнений (I)-(4), описывающих необратимый перенос импульса в астеносфере. Пусть S – пространственная поверхность, разделяющая среды в трёхмерном случае (рис.3). Следуя /4/, представим систему уравнений для несжимаемой жидкости в области:

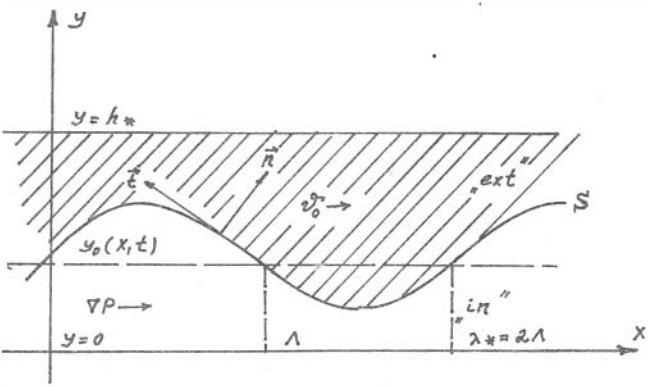

Рис.3. Иллюстрация двумерной геометрии задачи

а) астеносферы, ограниченной поверхностью S и плоскостью $y = 0$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}\,[\vec{v}, \vec{H}] + \frac{\eta}{\rho} \cdot \Delta \vec{H} ,$$

$$\vec{H} = \operatorname{rot} \vec{v} \quad , \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0 ,$$

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} + \left(\vec{v}, \nabla T_i \right) = \chi_i \cdot \Delta T_i + \frac{\eta}{2 \rho c_p^i} \cdot \left(\partial_i v_k + \partial_k v_i \right)^2 , \tag{9}$$

$$\left. \frac{\partial T_i}{\partial y} \right|_0 = - R , \quad v_x \Big|_0 = v_y \Big|_0 = 0 ,$$

б) литосферы, ограниченной плоскостью $y = h_*$ и поверхностью S

$$\frac{\partial T_e}{\partial t} + \left(\vec{v}^{(0)}, \nabla T_e \right) = \chi_e \cdot \Delta T_e ,$$

$$T_e \Big/_{h_*} = T_* ,$$

$$\vec{v}^{(0)} = (v_0 , 0) . \tag{10}$$

На эволюционирующей в пространстве поверхности $S(t)$ выполняются условия изотермичности, обращения в ноль нормальной и касательной скоростей (в системе координат, движущейся совместно с литосферой), условие теплового баланса

$$T_i \Big/_S = T_e \Big/_S = T_0 ,$$

$$\left(\vec{n}, \vec{v} - \vec{v}_0 \right) \Big/_S = \left(\vec{t}, \vec{v} - \vec{v}_0 \right) \Big/_S = 0 , \tag{11}$$

$$- \varkappa^i \cdot \left(\vec{n}, \nabla T_i \right) \Big/_S + \varkappa^e \cdot \left(\vec{n}, \nabla T_e \right) \Big/_S = \left(\vec{n}, \vec{V} \right) \cdot \rho q ,$$

где $\vec{V} = - \vec{v}^{(0)} + \vec{n} \gamma \frac{\partial y_0}{\partial t}$ –скорость движения фронта раздела / 7 /, $y_0 (x, z, t)$–зависимость, определяющая эволюцию фронта, $\vec{n}$ – внешняя по отношению к поверхности S нормаль

$$\vec{n} = \left(- \gamma \frac{\partial y_0}{\partial x} , \ 1 , - \gamma \frac{\partial y_0}{\partial z} \right) , \quad \gamma = 1 \Big/ \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_0}{\partial z} \right)^2} ,$$

$\vec{t}$ –касательный единичный вектор к поверхности. Решение системы уравнений (9)–(II) ищем в виде

$$H_x (x, y, z, t) = H_y (x, y, z, t) = 0 , \quad H_z = H_z (x, y, t) ,$$

$$v_x = v_x (x, y, t) , \quad v_y = v_y (x, y, t) , \tag{12}$$

$$T_i = T_i(x, y, t)\ , \quad T_e = T_e(x, y, t)\ , \quad y_0 = y_0(x, t) .$$

Используя условие (I2), приходим к системе дифференциальных уравнений в частных производных и граничных условий:

а) для области $0 \le y \le y_0$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial H_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial H_z}{\partial y} = \frac{\eta}{\rho}\left(\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2}\right),$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 ,$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = H_z ,$$

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} + v_x \frac{\partial T_i}{\partial x} + v_y \frac{\partial T_i}{\partial y} = \varkappa_i \left(\frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial y^2}\right) + \frac{\eta}{\rho c_p^i}\left[2\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)^2\right], \tag{I3}$$

$$\left.\frac{\partial T_i}{\partial y}\right|_0 = -R\ , \quad v_x\Big|_{y=0} = 0\ , \quad v_y\Big|_{y=0} = 0 ,$$

б) для области $y_0 \le y \le h_*$

$$\frac{\partial T_e}{\partial t} + v_0 \frac{\partial T_e}{\partial x} = \varkappa_e \cdot \left(\frac{\partial^2 T_e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_e}{\partial y^2}\right)$$

$$T_e\Big|_{h_*} = T_*$$

в) на границе $y_0 = y_0(x, t)$

$$T_i\Big|_{y_0} = T_e\Big|_{y_0} = T_0 ,$$

$$n_x \cdot (v_x - v_0) + n_y v_y = t_x \cdot (v_x - v_0) + t_y v_y = 0 ,$$

$$-\varkappa^i \left(n_x \frac{\partial T_i}{\partial x} + n_y \frac{\partial T_i}{\partial y}\right) + \varkappa^e \left(n_x \frac{\partial T_e}{\partial x} + n_y \frac{\partial T_e}{\partial y}\right) = \rho q \left[-n_x v_0 + \gamma \frac{\partial y_0}{\partial t}\right] .$$

Здесь $\vec{t} = (t_x, t_y) = \left(\gamma, \gamma \frac{\partial y_0}{\partial x}\right)$. Система уравнений (I3) исключает из рассмотрения зависимость от координаты z. Обсуждение эффектов зависимости от z предмет отдельной работы. Выделим в явном виде малые возмущения к функциям (7), описывающим стационарное состояние системы, в безразмерном виде

$$T_i = T_i^{(0)}(y) + q \sigma \xi_0 f_0 \cdot Q / c_p^i ,$$

$$T_e = T_e^{(0)} + q\,\sigma\,\xi_0 f_0 \chi_i \cdot W \Big/ \left(c_p^e \cdot \chi_e\right),$$

$$\vartheta_x = \vartheta_x^{(0)} - \vartheta_0\,\xi_0 f_0 \cdot \partial_\xi \mathcal{D},$$

$$\vartheta_y = \xi_0 f_0 \cdot \partial_\zeta \mathcal{D},$$

$$y_0(x,t) = h_0 + h_0 \cdot f(\zeta, t),$$

$$H_z^{(0)} = -\frac{\partial \vartheta_x^{(0)}}{\partial y}$$

и, произведя линеаризацию системы уравнений (I3), приходим к уравнениям, описывающим эволюцию произвольных бесконечно малых возникших в момент времени t =0 возмущений температуры, скорости и фронта в "тепловой части" задачи

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau} + P_e\left(\vartheta^{(0)} - 1\right)\frac{\partial Q}{\partial \zeta} + P_e\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\Theta_i^{(0)}}{\sigma}\right)\cdot\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \zeta} = \frac{\partial^2 Q}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial \vartheta^{(0)}}{\partial \xi}\left(\frac{\partial^2 \mathcal{D}}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial^2 \mathcal{D}}{\partial \xi^2}\right),$$

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{\chi_e}{\chi_i}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \zeta^2}\right), \tag{I4}$$

$$-\frac{\partial Q}{\partial \xi}\Big|_{\xi_0} + \frac{\partial W}{\partial \xi}\Big|_{\xi_0} = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial \tau}\left(f/f_0\right) + \frac{\partial^2 \Theta_i^{(0)}}{\partial \xi^2}\Big|_{\xi_0}\cdot\frac{f}{f_0},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi}\Big|_0 = 0,\quad Q\Big|_{\xi_0} = -\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\Theta_i^{(0)}}{\sigma}\right)\Big|_{\xi_0}\cdot\frac{f}{f_0},\quad W\Big|_1 = 0,\quad W\Big|_{\xi_0} = -\frac{\chi_e}{\chi_i}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\Theta_e^{(0)}}{\sigma}\right)\Big|_{\xi_0}\cdot\frac{f}{f_0}.$$

Здесь $P_e = \vartheta_0 h_* / \chi_i$ — число Пекле, $\zeta = \frac{x}{h_*} - P_e \cdot \tau$. Возмущения нижней границы y =0 отсутствуют. "Гидродинамическая часть" задачи принимает вид

$$\frac{\partial^2 \mathcal{D}}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{D}}{\partial \xi^2} = A,$$

$$\frac{1}{P_r}\cdot\frac{\partial A}{\partial \tau} + R\left(\vartheta^{(0)} - 1\right)\frac{\partial A}{\partial \zeta} - R\frac{\partial^2 \vartheta^{(0)}}{\partial \xi^2}\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \zeta} = \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial \zeta^2},$$

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \zeta}\Big|_{\xi=0} = 0,\quad \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \xi}\Big|_{\xi=0} = 0,\quad \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \zeta}\Big|_{\xi=\xi_0} = 0,\quad \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \xi}\Big|_{\xi=\xi_0} = \frac{\partial \vartheta^{(0)}}{\partial \xi}\Big|_{\xi_0}\cdot\frac{f}{f_0},$$

которая существенно упрощается в приближении малых чисел Рейнольдса $R = \rho \vartheta_0 h_* / \eta$ и больших значений чисел Прандтля $P_r = \eta / \rho \chi_i$.

$$A = \frac{\partial^2 \mathcal{D}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{D}}{\partial \xi^2},$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \varphi}\right|_0 = \left.\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \xi}\right|_0 = \left.\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \varphi}\right|_{\xi_0}, \quad \left.\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \xi}\right|_{\xi_0} = \left.\frac{\partial \vartheta^{(0)}}{\partial \xi}\right|_{\xi_0} \cdot \frac{f}{f_0}. \qquad (I5)$$

Рассматривая эволюцию бегущих волн возмущений

$$f,\ A,\ \mathcal{D},\ Q,\ W \longrightarrow \exp(ik\varphi + G\tau) \cdot \Big|\, f_0, A, \mathcal{D}, Q, W,$$

приходим к уравнениям, определяющим "ξ -координатные" части функций

$$A(\xi,\varphi,\tau),\ \mathcal{D}(\xi,\varphi,\tau),\ Q(\xi,\varphi,\tau),\ W(\xi,\varphi,\tau),\ f(\varphi,\tau),$$

в дальнейшем для которых сохранены обозначения. В "гидродинамической части" задачи удобно исключить амплитуду A и получить обыкновенное линейное однородное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^4 \mathcal{D}}{\partial \xi^4} - 2k^2 \frac{\partial^2 \mathcal{D}}{\partial \xi^2} + k^4 \mathcal{D} = 0,$$

$$\mathcal{D}\big|_0 = \partial_\xi \mathcal{D}\big|_0 = \mathcal{D}\big|_{\xi_0} = 0, \quad \partial_\xi \mathcal{D}\big|_{\xi_0} = \left.\frac{\partial \vartheta^{(0)}}{\partial \xi}\right|_{\xi_0}, \qquad (I6)$$

решение которого имеет вид

$$\mathcal{D} = (C_1 + C_2 \cdot \xi) e^{k\xi} + (C_3 + C_4 \cdot \xi) e^{-k\xi}.$$

Постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 интегрирования определяются граничными условиями из (I6)

$$C_2 = \left(1/\xi_0 + \frac{\alpha \xi_0}{2}\right) \cdot \left[-(1+C)\,\mathrm{ch}\,k\xi_0 + e^{k\xi_0}(1+k\xi_0) + C(1-k\xi_0)e^{-k\xi_0}\right]^{-1},$$

$$C = \left(-\mathrm{sh}\,k\xi_0 + k\xi_0 e^{k\xi_0}\right)\left(\mathrm{sh}\,k\xi_0 - k\xi_0 e^{-k\xi_0}\right)^{-1}, \qquad (I7)$$

$$C_1 = -\frac{(1+C)}{2k} \cdot C_2, \quad C_3 = \frac{(1+C)}{2k} \cdot C_2, \quad C_4 = C \cdot C_2.$$

"Тепловая часть" задачи, описывающая эволюцию гармоники k, сводится к решению двух независимых обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \xi^2} - \left[k^2 + G + ik Pe \left(\vartheta^{(0)} - 1\right)\right] Q = \tilde{q}(\xi) = ik Pe \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\theta_i^{(0)}}{\sigma}\right) D + 2\frac{\partial \vartheta^{(0)}}{\partial \xi}\left(\partial_\xi^2 D + k^2 D\right), \tag{18}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \left(k^2 + \frac{\chi_i}{\chi_e} G\right) w = 0,$$

$$w(1) = 0, \quad w\Big|_{\xi_0} = \frac{Q_*}{1-\xi_0}, \quad \frac{\partial Q}{\partial \xi}\Big|_0 = 0, \quad Q\Big|_{\xi_0} = -\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{\theta_i^{(0)}}{\sigma}\right]_{\xi_0}, \tag{19}$$

которые замыкаются условием теплового баланса

$$-\frac{\partial Q}{\partial \xi}\Big|_{\xi_0} + \frac{\partial w}{\partial \xi}\Big|_{\xi_0} = \frac{G}{\sigma} - \left(\frac{1}{\xi_0} + \frac{\alpha \xi_0}{2}\right)^2 \tag{20}$$

Решение уравнения (18) представляет значительную трудность. Формально решение соответствующего однородного уравнения можно выразить через функцию Куммера $\Phi_k(a,c,\Omega)$ (см., например/3 /), а решение неоднородного уравнения строить, варьируя постоянные, и ответ представить в квадратурах с последующим численным анализом. Однако до настоящего времени не существует численного удовлетворительного алгоритма вычисления функции Куммера Φ_k на всей комплексной плоскости. Особые трудности вызывает случай a, $\Omega \to \infty$ при $|a/\Omega| \sim 1$, возникающий в данной работе при $Pe \gg 1$. В изучаемом приложении область значений $Pe \gg 1$ представляет определяющий интерес. Для указанных значений отношения a/Ω отсутствует аналитическое выражение асимптотического разложения функции Куммера / 3 /. В настоящей работе предлагается следующий подход. Опустим из рассмотрения область малых значений модуля $|k^2+G|$. Может случиться, что мы не в состоянии построить нейтральные кривые, знание которых имеет принципиальное значение при исследовании условий устойчивости фронта $y = h(t)$. Однако нас интересует характер пространственной неустойчивости границы раздела сред. Именно он определяет особенности двумерного развития процесса: характерный размер неустойчивости и время. При этом появляется возможность указать достаточные условия неустойчивости, которые с необходимостью отражают эволюцию исследуемой системы. В свете сказанного, условия устойчивости особого значения не имеют. В этом случае представляется возможным развить приближение Лиувилля-Грина /6 /, считая малым параметр $\varepsilon = (\kappa^2 + G)^{-1}$.

Фундаментальная система решений однородного уравнения, соответствующего уравнению (18) с точностью до квадратичных членов по малому параметру ε представима в виде

$$Q_1(\xi) = sh\,\phi,$$
$$Q_2(\xi) = ch\,\phi,$$

где $\phi = \phi(\xi) = \xi/\varepsilon + \frac{i\kappa Pe}{2}\xi\left(\frac{\xi}{2\xi_0} + \frac{\alpha\xi^2}{6} - \frac{\alpha}{4}\xi\xi_0 - 1\right)$. Вариация постоянных в общем решении однородного уравнения приводит к решению уравнения (18)

$$Q(\xi) = \frac{Q_2(\xi)}{Q_2(\xi_0)}\left[Q\Big|_{\xi_0} - Q_1(\xi_0)\int_0^{\xi_0}\frac{\tilde q(\xi)Q_2}{\phi'(\xi)}d\xi + Q_2(\xi_0)\int_0^{\xi_0}\frac{\tilde q(\xi)Q_1(\xi)}{\phi'(\xi)}d\xi\right] +$$
$$+ Q_1(\xi)\int_0^{\xi}\frac{\tilde q(\xi)Q_2(\xi)}{\phi'(\xi)}d\xi - Q_2(\xi)\int_0^{\xi}\frac{\tilde q(\xi)Q_1(\xi)}{\phi'(\xi)}d\xi,$$

удовлетворяющему заданным граничным условиям. Вычисляя производную

$$\frac{\partial Q}{\partial\xi}\Big|_{\xi_0} = \frac{Q_2'(\xi_0)}{Q_2(\xi_0)}Q\Big|_{\xi_0} + \frac{\phi'(\xi_0)}{Q_2(\xi_0)}\int_0^{\xi_0}\frac{\tilde q(\xi)Q_2(\xi)}{\phi'(\xi)}d\xi$$

решая простое дифференциальное уравнение (19),

$$w(\xi) = \frac{Q_*}{1-\xi_0}\cdot sh\left[\sqrt{\kappa^2 + \frac{\chi_i}{\chi_e}G}\,(1-\xi)\right]\cdot sh^{-1}\left[\sqrt{\kappa^2 + \frac{\chi_i}{\chi_e}G}\,(1-\xi_0)\right],$$

используя условие (20), приходим к сложному трансцендентному уравнению, которое определяет инкремент неустойчивости $G = (ReG, ImG)$

$$th\,\phi(\xi_0)\cdot\phi'(\xi_0)\left[\rho_0 + \frac{\xi_0}{3}\cdot\left(\frac{3}{\xi_0^2} + \frac{\alpha^2\xi_0^2}{4}\right)\right] + \frac{G}{\sigma} - \left(\frac{1}{\xi_0} + \frac{\alpha\xi_0}{2}\right)^2 +$$
$$+ \frac{\phi'(\xi_0)}{ch\,\phi(\xi_0)}\int_0^{\xi_0}\frac{\tilde q(\xi)\,ch\,\phi(\xi)}{\phi'(\xi)}d\xi + \frac{Q_*}{1-\xi_0}\sqrt{\kappa^2 + \frac{\chi_i}{\chi_e}G}\;cth\left[\sqrt{\kappa^2 + \frac{\chi_i}{\chi_e}G}\,(1-\xi_0)\right] = 0. \tag{21}$$

При численном анализе полученного уравнения чрезвычайно эффективным оказался итерационный метод поиска комплексных корней трансцендентных уравнений-метод Моллера. Результаты численного анализа приведём для характерных значений $h_* \sim 10^5$ м, $\vartheta_0 \sim 3 \cdot 10^{-9}$

м/с, $\varkappa_i = 10^{-6}$ м^2/с, $\varkappa_i/\varkappa_e = 10^{-1}$. Принятые численные значения характеризуют астеносферу и указывают на область значений гидродинамических чисел, представляющих особый интерес: $R = 50-500$, $\sigma = 0{,}01-30$, $\bar{\xi}_0 = 0{,}1-1$.

В области указанных значений чисел Pe , Pr , R , σ исследуемая система обладает свойством пространственной неустойчивости фронта, разделяющего среды. Процесс необратимой передачи импульса от литосферы к астеносфере носит существенно двумерный характер. Принятый подход позволяет выявить основные свойства двумерного протекания процесса- характерное время выхода на экспоненциальную по времени асимптотику, характерный размер локализованных очагов частичного плавления и их размещение в пространстве. Численно обнаружена ветвь дисперсионной кривой с $Re\,G(k)>0$. На рис.4 представлен график зависимости инкремента неустойчивости как функции волнового вектора k для ряда значений числа Пекле. Зависимость $Re\,G(k)$ имеет максимальное значение G^*_{Pe} при $k = k_*$. Таким образом, существует мода $k = k_*$,

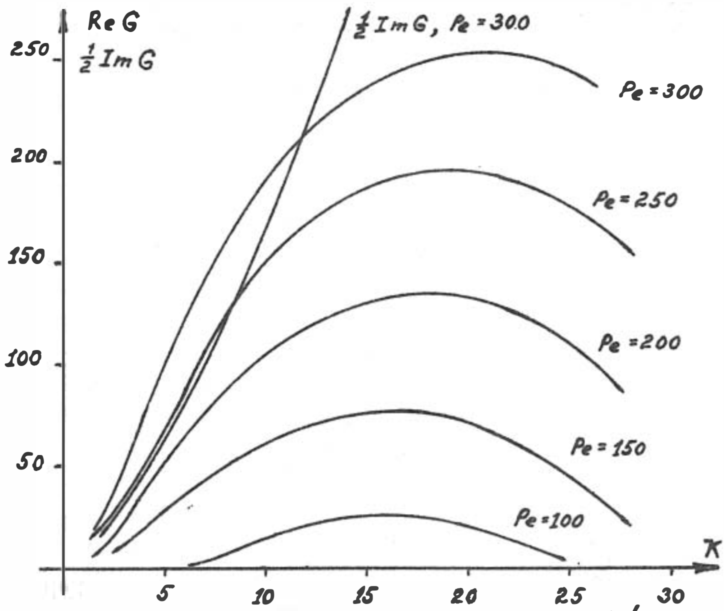

Рис.4. Приведён случай $\sigma = 4$, $Q_* = 2$, $\varkappa_i/\varkappa_e = 0{,}1$, $\alpha = -1$

имеющая минимальное время выхода на экспоненциальную асимптотику. Можно полагать, что на нелинейной стадии развития процесса определяющую роль будут играть гармоники, находящиеся в достаточно узком интервале ΔK в окрестности точки $K = K_*$. Отмеченное обстоятельство позволяет выделить размер $\Lambda = \pi h_*/K_*$ и связать его с размером области локализации частичного расплава. При этом локализованные очаги в пространстве будут отстоять друг от друга на расстоянии 2Λ. Локализованный очаг частичного расплава может служить прообразом магматической камеры. Перемещающаяся с постоянной скоростью литосфера приводит к диссипации передающего астеносфере импульса уже в локализованных очагах. Здесь можно ожидать последующий рост температуры и давления. Оценим характерный размер Λ и характерное время выхода $t_* = t_\chi / G^*_{Pe}$ на экспоненциальную асимптотику для моды K_*. Пусть $h_* \sim 10^5$ м, $v_0 \sim 2\cdot 10^{-9}$ м/с, $\chi_i \sim 10^{-6}$ м^2/с, $\eta \sim 10^{20}$ П, так что $P_e \sim 200$, $P_2 \sim 3\cdot 10^{21}$. Если принять $q \sim 13\cdot 10^5$ Дж/кг (что соответствует присутствию в частичном расплаве процентному соотношению 3–5% полностью расплавленной магмы), то $\sigma = 4$. Из рис.4 имеем значения $K_* = 18$, $G^*_{pe} = 140$, позволяющие оценить время t_* и размер Λ

$$t_* = \frac{h_*^2}{\chi_i\cdot 140} \sim \frac{10^{14}}{10^{-2}\cdot 140} \sim 7.1\cdot 10^{13}\,\text{с} \sim 2\ \text{млн. лет},$$

$$\Lambda = \frac{\pi h_*}{K_*} \sim 17\ \text{км}.$$

В использованных оценках полагалось значение плотности $\rho = 3{,}3\cdot 10^3$ кг/м^3. Сокращение времени развития неустойчивости происходит с ростом числа Пекле. С увеличением P_e инкремент $G_{Pe}(K)$ „выходит" на линейную асимптотику (см. рис.4). Скорость движения выделенного объёма можно оценить по обычной формуле $dx/dt = v_0 - \chi_i \operatorname{Im} G_{pe}(K_*)\cdot (h_*\cdot K_*)^{-1}$. Для приведённых выше числовых значений: $dx/dt \sim 1{,}75\cdot 10^{-9}$ м/с, что соответствует "медленному дрейфу гармоники K_*" в направлении противоположном невозмущённому потоку (в системе координат неподвижной литосферы). На рис.5 представлена зависимость $G_\alpha(K)$ для ряда значений отношения $\alpha = h_*^2 \frac{\partial P}{\partial x} / \eta v_0$: скорости, характеризующей течения Пуазейля и скорости движения литосферы v_0. При фиксированной скорости движения литосферы с увеличением $-\alpha$ значение $G_\alpha(K)$ уменьшается, принимая максимальное значение при $\alpha = 0$. Мнимая часть инк-

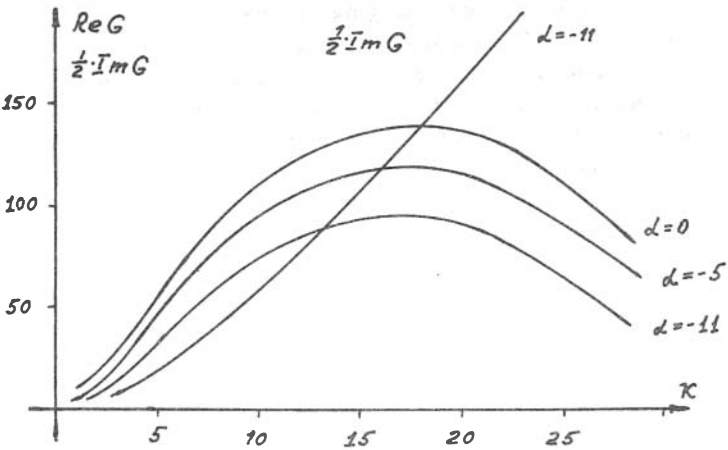

Рис.5. Зависимости для значений:
$\sigma=4$, $Q_*=2$, $P_e=200$, $\chi_i/\chi_e=0{,}1$

рента с уменьшением длины волны возмущения выходит на линейную асимптотику по K. На рис. 6 иллюстрируется зависимость

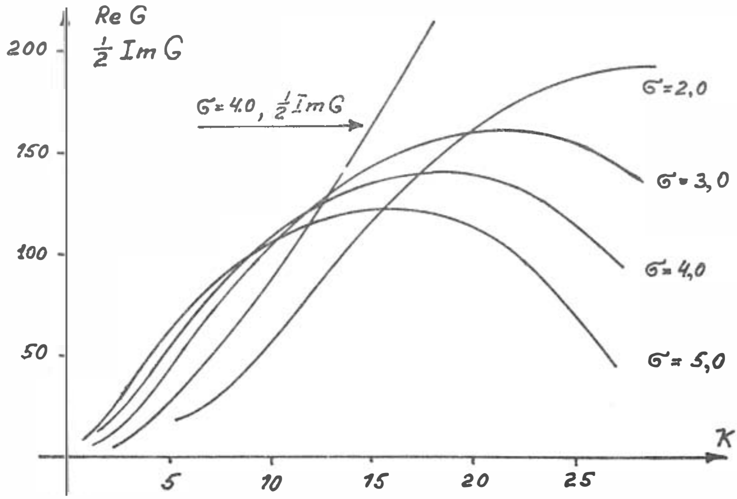

Рис.6. Зависимости для значений:
$\alpha=0$, $Q_*=2$, $P_e=200$, $\chi_i/\chi_e=0{,}1$

инкремента $G_\sigma(k)$ как функцию волнового вектора для четырёх значений величины σ . Увеличение скорости ввода энергии в систему приводит к увеличению длины волны λ_*, соответствующей моде k_*, что, естественным образом, приводит к уменьшению инкремента.

Таким образом, предложенный подход позволяет объяснить формирование первичных очагов магматических камер, используя современные геодинамические представления. Пространственная периодичность очагов в динамической теории, чувствительность величин t_*, k_* от физических переменных Re, Q, α, σ позволяет с новой точки зрения взглянуть на необходимость введения представления о "горячих точках".

Литература

I. Алексеев А.С., Ваньян Л.Л., Бердичевский М.Н. и др. Схема астеносферных зон Советского Союза. - ДАН СССР, 1977, т.234, №4, с.980-983.

2. Делегодина Л.А., Доровский В.Н. Зоны, очаги частичного плавления-прообразы магматических камер. Новосибирск, 1986.-21с. (Препринт № 1 ИГиГ СО АН СССР).

3. Бейтман Г., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции. Т.1,2. М.: Наука, 1973. - 296 с.

4. Доровский В.Н. Об одном механизме образования расплава. Новосибирск, 1984. - 16 с. (Препринт № 6 ИГиГ СО АН СССР).

5. Йодер Х. Образование базальтовой магмы. М.:Мир, 1976. - 239 с.

6. Найфэ А.Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. - 455 с.

7. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т.1. М.:Наука, 1983.- 528 с.

8. Теркот Д., Шуберт Дж. Геодинамика. Т.1-2. М.: Мир, 1985. - 375 с.

9. Griggs D., Handin J., Observation on fracture and a hapothesis of earthquakes.- In: D. Griggs, J. Handin (eds.) Rosk diformation.-Geol. Sos. Am. Mem., 1966, v.79, p.347-364.

10. Toksos M.N., Minear J.W., Julian B.R., Temperature fieid and geophysical effects of a downgoin slab.-J. Geophys. Res., 1971, v.76, p.1113-1138.

Технический редактор Н.Н. Александрова

Подписано к печати 23.06.86. МН 12179.
Бумага 60×84/16. Печ.л. 1,0. Уч.-изд.л. 0,95.
Тираж 200. Заказ 232. Бесплатно.

Институт геологии и геофизики СО АН СССР
Новосибирск, 90. Ротапринт.