

**Г. А. РЫЖИКОВ**

**В. Н. ТРОЯН**

**ТОМОГРАФИЯ  
И ОБРАТНЫЕ  
ЗАДАЧИ**

**ДИСТАНЦИОННОГО  
ЗОНДИРОВАНИЯ**

С.-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

3  
872

Г.А.РЫЖИКОВ, В.Н.ТРОЯН

ТОМОГРАФИЯ  
И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ  
ДИСТАНЦИОННОГО  
ЗОНДИРОВАНИЯ



САНКТ-ПЕТЕРБУРГ  
ИЗДАТЕЛЬСТВО С.-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА  
1994

Редактор: Т. В. Мызникова

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук проф. П. В. Крауклис (СПбО Математич. ин-та РАН им. В. А. Стеклова)  
канд. физ.-мат. наук Ю. И. Лимбах (С.-Петербургский ун-т)

УДК 550.834

Рыжиков Г. А. Троян В. Н. Томография и обратные задачи дистанционного зондирования.—СПб., Издательство С.-Петербургского университета, 1994. 220 с. ISBN 5-288-00773-X

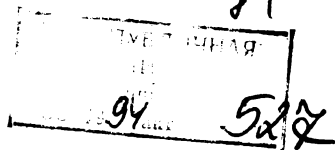
Математический аппарат, лежащий в основе томографической реконструкции изображений, использует принципы интегральной геометрии и теорию рассеяния волновых полей. Этот аппарат, введя понятие томографических функционалов, которые характеризуют влияние пространственных вариаций полей параметров среды на регистрируемый сигнал, можно с успехом применять для построения новых алгоритмов решения обратных задач дистанционного зондирования и проводить физическую интерпретацию полученных решений. Компактная и доступная форма изложения материала на физическом уровне строгости способствует пониманию освещаемых проблем.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 93059961).

Книга будет полезна научным работникам и инженерам-исследователям, занимающимся анализом и обработкой данных дистанционного зондирования при решении физических и геофизических интерпретационных задач.

Библиогр. 112 назв. Ил. 19.

94-12562



Р 1803020000-031 62-92  
076(02)-94

ISBN 5-288-00773-X

© Издательство  
С.-Петербургского  
университета, 1994

© Г. А. Рыжиков,  
В. Н. Троян, 1994

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	5
Глава 1. Элементы математического аппарата для решения обратных задач дистанционного зондирования .....	12
1. 1. Элементы прикладного функционального анализа.....	13
1. 2. Некорректно поставленные задачи .....	36
1. 3. Элементы математической статистики .....	45
Глава 2. Функциональные связи полей зондирующих сигналов и параметров .....	71
2. 1. Сейсмология и сейсморазведка .....	-
2. 2. Акустика океана.....	82
2. 3. Волновые электромагнитные поля в задачах геоэлектрики и зондирования ионосферы.....	86
2. 4. Зондирование атмосферы.....	92
Глава 3. Лучевая теория распространения волновых полей .....	96
3. 1. Основы лучевой теории .....	-
3. 2. Лучевая аппроксимация решения скалярного волнового уравнения .....	99
3. 3. Коротковолновая асимптотика решения одномерного уравнения Гельмгольца. Метод ВКБ.....	108
3. 4. Элементы лучевой теории упругих волн.....	110
3. 5. Лучевое описание почти стратифицированной среды .....	112
3. 6. Поверхностные волны в вертикально-неоднородной среде .....	118
3. 7. Лучевое приближение электромагнитных полей .....	122
3. 8. Постановка задачи кинематической лучевой томографии .....	126
Глава 4. Построение и интерпретация томографических функционалов.....	130
4. 1. Построение линейных функционалов измерений.....	131
4. 2. Томографический функционал .....	135
4. 3. Примеры построения и интерпретации томографических функционалов.....	135
4. 4. Лучевые томографические функционалы в динамико-кинематической интерпретации данных дистанционного зондирования .....	150

4. 5. Построение падающего и обращенного полей в слоистой опорной среде.....	154
<b>Глава 5. Томографическая интерпретация задач дистанционного зондирования.....</b>	<b>157</b>
5. 1. Элементы линейной томографии.....	—
5. 2. Применение инверсии Радона в дифракционной томографии.....	165
5. 3. Принципы построения алгоритмов реконструктивной томографии.....	171
5. 4. Ошибки восстановления, разрешающая длина и метод Бейкуса — Гильберта.....	181
5. 5. Обратное проецирование в дифракционной томографии.....	187
5. 6. Методы регуляризации в задачах трехмерной лучевой томографии.....	197
Приложение.....	202
Указатель литературы.....	213

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Основным инструментом изучения природы является дистанционное зондирование, которое позволяет расширить наши представления о внутреннем строении Земли, околоземного пространства и космоса. В качестве "зондирующих" сигналов, несущих информацию о структуре удаленных от точки наблюдения объектов, используются любые известные к настоящему времени физические поля или частицы. Механизмом, обеспечивающим передачу информации, служит локальное воздействие тех или иных параметров среды на дальнедействующее поле "зондирующего" сигнала. *Под зондирующим сигналом мы будем понимать любое физическое поле ( $\varphi$ ), подчиняющееся физическому закону  $L_{\theta} \varphi = s$ , где возможные источники ( $s$ ) поля ( $\varphi$ ) связаны с самим полем оператором "распространения" ( $L_{\theta}$ ), включающим свойства среды ( $\theta$ ).* Приведенное операторное уравнение в концентрированной форме представляет суть физических процессов (законов), лежащих в основе дистанционного зондирования. Возможности восстановления структуры среды  $\theta$  базируются на предположении об адекватности математической модели реальным физическим процессам. Достоверность модели распространения основывается, в свою очередь, на решении множества прямых задач, допускающих экспериментальную проверку. *Под прямыми задачами дистанционного зондирования среды ("системы") будем понимать предсказание отклика среды на возмущение при заданных параметрах системы ( $\theta$ ), известных источниках и подчинении закону развития, который включает граничные и начальные условия.* Рабочим инструментом исследователей является аппарат решения обратных задач. *Под обратными задачами будем понимать восстановление параметров системы ( $\theta$ ) по известному отклику на выходе системы ( $\varphi$ ).* Возможная неадекватность восстановленного состояния априорным физическим представлениям о

системе является основой для пересмотра и корректировки математической модели и физического содержания закона  $L_{\theta\varphi} = \nu$  (историческим примером может служить опыт Резерфорда по рассеянию  $\alpha$ -частиц на фольге, который привел к изменению представления о структуре материи). Мы будем действовать в рамках принятых законов, более того — будем считать их преимущественно линейными. Безусловно, линейные физические законы имеют заведомо ограниченную область применения и являются примером "безграничной" экстраполяции и интерполяции ограниченных физических возможностей. Поэтому, разумеется, все выводы и оценки, которые получаются в результате решения обратных задач, имеют свою область применимости, определяемую в значительной степени априорными представлениями. Роль априорной информации особенно велика при решении задач дистанционного зондирования, результатом которых является построение "изображения среды". Поскольку физически количество информации при постановке на входе обратной задачи всегда конечно, а в результате решения мы хотим получить (бесконечномерный) элемент функционального пространства, то подобная обратная задача с математической точки зрения является заведомо некорректной. Развитые методы функциональной регуляризации некорректно поставленных задач позволяют непараметрическим образом ограничивать множество функций  $\theta$ , которые априори могут быть приняты в качестве возможных решений. Можно показать, что именно эти методы регуляризации позволяют гарантировать устойчивость вычислительных процессов, неизбежно использующих дискретизацию континуальных математических моделей.

Концепция дифракционной томографии в настоящее время бурно развивается, см., например, публикации [4, 25, 56 — 60, 62, 83, 88, 90 — 94, 100 — 103, 105 — 107, 111, 112], математический язык, используемый в этих работах, внешне разнообразен, но идеи, на которых базируется решение, очень близки.

(В гл. 1 мы напомним читателю основные математические понятия и методы, используемые при решении интерпретационных задач дистанционного зондирования; кратко будут представлены элементы функционального анализа, математической статистики и методы решения экстремальных задач; особое внимание мы уделим освещению с разных точек зрения методов регуляризации некорректно поставленных задач [10, 19, 34, 40, 54, 65, 75, 78].)

Описание функциональных связей зондирующих сигналов и параметров среды, а также основ построения математических моделей распространения упругих, акустических, электромагнитных волновых полей и уравнения переноса лучистой энергии либо моноэнергетических нейтронов (гл. 2) позволяет наглядно для читателя рассмотреть прикладные аспекты проблемы. Использование широко распространенного в различных областях физики (геофизики, оптики, физической акустики и т. д.) лучевого метода, который является коротковолновой асимптотикой поля в плавно-неоднородных, медленно-нестационарных и слабо-консервативных средах, позволяет, на наш взгляд, глубже понять принципы лучевой томографии (гл. 3). В соответствии с идеологией томографического эксперимента мы ввели (гл. 4) понятие томографического функционала. *Он имеет смысл функции влияния различных пространственных областей среды на отдельное измерение. Норма томографического функционала определяется интенсивностью взаимодействия падающего и обращенного полей.* Введение этих понятий было необходимо для физической интерпретации принципов построения моделей измерений. Сравнительный анализ предложенного нами метода восстановления параметров среды и метода Бейкуса – Гильберта (гл. 5) позволяет говорить о преимуществах и большей идеологической выдержанности первого из них, причем мера информационной чувствительности поля наблюдений относительно линейного функционала параметров поля может служить эффективным инструментом выбора физически обоснованной модели.

При постановке обратной задачи часть "системы" можно считать известной, например закон ( $H$ ) трансформации физического поля  $\varphi$  под воздействием прибора, причем оператор  $H$  допустимо считать линейным с гораздо большим основанием, чем оператор  $L_{\theta}$ : "прибор" обязан быть линейным по техническим требованиям (к сожалению, аналогичных требований нельзя предъявить Природе). Устоявшейся *математической моделью измерений* ( $u$ ) стало операторное выражение

$$u = H\varphi + \epsilon,$$

содержащее аддитивный стохастический компонент — "шум" прибора. При решении интерпретационных физических задач именно измерения  $u$  (а не поле  $\varphi$ ) являются входными данными обратной задачи. При этом существенно, что восстановление



поля  $\varphi$ , даже локального, по измерениям  $u$  и представляет собой некорректно поставленную задачу (обратная фильтрация [69, 73, 74, 108], деконволюция [29, 42], редукция к идеальному прибору [49, 75]), типичной математической моделью которой может служить решение уравнения свертки. Для физика естественным является условие, что входные данные задачи дистанционного зондирования (измерения  $u$ ) "чувствуют" состояние среды  $\theta$ :  $u = \vec{P}(\theta) + \epsilon$ . (Здесь  $\vec{P}(\theta) = H\varphi$  — нелинейный оператор, который невозможно построить в явном виде.) Тем не менее именно эту модель следует считать основной в задаче дистанционного зондирования, так как она позволяет проследить адекватность априорной информации о поле  $\theta$  и тем самым более полно использовать информацию, содержащуюся в измерениях. Напомним, что попытка осуществить обратную фильтрацию потребовала бы неизбежного введения априорной информации о полях  $\varphi$ , нелинейным образом связанных с состоянием среды  $\theta$ .

Разработанные методы решения нелинейных операторных уравнений при известном операторе  $\vec{P}$  опираются на ту или иную процедуру линеаризации, которую мы запишем формально в виде

$$u = \vec{P}(\theta_0) + \vec{P}'|_{\theta_0} \delta\theta + \tilde{\epsilon},$$

где  $\tilde{\epsilon}$  включает как шумы прибора  $\epsilon$ , так и остаточный член ряда Тейлора  $O(\|\delta\theta\|^2)$ . Значение  $\vec{P}(\theta_0)$  представляет собой результат решения прямой задачи: по заданным начальным и граничным условиям, источникам  $s$ , состоянию среды (системы)  $\theta_0$  найти поле  $\varphi$ . При построении формального операторного уравнения эта задача является формально обратной:  $\varphi = L_\theta^{-1}s$ , но, к счастью, корректной. Само понятие корректности возникло из физических представлений начала XX века: малым изменениям параметров системы ( $\delta\mathcal{D}$ ) и источников ( $\delta s$ ) должны соответствовать малые изменения ( $\delta u$ ) на выходе системы. По-видимому, крушением этих "розовых" надежд следует считать "опыты" с критической массой, хотя явления бифуркации были известны естествоиспытателям намного раньше.

Возможность решить прямую задачу позволяет построить модель

$$\vec{P}(\theta_0) = H\varphi_0,$$

где  $\varphi_0$  — зондирующее поле в известной среде  $\theta_0$ . Чтобы формальная линеаризованная модель измерений приобрела конкретное содержание, необходимо уметь строить линейный оператор  $\overline{\mathcal{P}}'$ , который мы назвали *томографическим* — по аналогии с лежащими в основе реконструктивной томографии интегральными (радоновскими) проекциями неизвестной функции объекта  $\theta(x)$ .

В классической томографии радоновские проекции — интегралы от функции  $\theta(x)$  вдоль известных кривых в двумерных задачах и  $(n-1)$ -мерных поверхностей в  $n$ -мерных задачах.

Основными объектами дистанционного зондирования являются области трехмерного пространства, при этом, как можно показать, томографический оператор  $\mathcal{P} \triangleq \overline{\mathcal{P}}'$  такой, что каждое значение измерения  $u$  соответствует интегрированию поля  $\theta$  по существенно трехмерной области, и только в ограниченном числе случаев математическая модель преобразования Радона может служить адекватной моделью физического томографического эксперимента. Рентгеновское просвечивание коллимированными пучками мягких биологических тканей при полноркурсном томографировании в лабораторных условиях — один из немногих примеров адекватного применения преобразования Радона. Даже в тех случаях, когда мы можем считать прямое преобразование Радона "хорошей" моделью томографического эксперимента, вычислительная процедура инверсии Радона сама по себе имеет математические трудности, типичные для некорректных задач [21, 26, 36, 41, 48, 65 — 67, 95].

Полнота использования информации, содержащейся в измерениях, однозначно связана с областью применимости модели прямой задачи, например, модель распространения луча в волновых задачах в качестве информативных параметров предполагает либо задержки времен прихода (фазы) сигналов, либо интегральный параметр интенсивности в предположении отсутствия вклада соседних лучей. Понятно, что "сворачивание" информации в один — два параметра существенно обедняет информационное содержание эксперимента. Более полной и потому более сложной является модель "дифракционной" томографии. Она позволяет связать каждое экспериментальное значение с состоянием (в общем случае) всей среды, т. е. описывает заведомо нелучевые эффекты. Если же в невозмущенной (опорной) среде поле зондирующего сигнала представляется

нулевым членом лучевого ряда, то модель "дифракционной" томографии отражает вклад всех однократно рассеянных лучей. Именно эта ситуация и привела к использованию термина *дифракционная томография*.

Вернемся к построению томографического оператора  $P$ . Наиболее простой путь: проанализировать выражение для индивидуального экспериментального отсчета  $u_n = (H\varphi_n) \equiv \bar{h}_n(\varphi)$ , опуская шумовой компонент  $\epsilon_n$  и используя временную фурье-компоненту поля  $\tilde{\varphi}(x, \omega)$  и аппаратной функции  $\tilde{H}(x, \omega)$ . Представим индивидуальный отсчет в виде скалярного произведения в гильбертовом пространстве комплекснозначных, интегрируемых с квадратом функций:

$$\tilde{u}_n = (\tilde{h}_n | \varphi) \triangleq \int \tilde{h}_n^*(x, \omega) \varphi(x, \omega) dx.$$

Переход к фурье-образам позволяет воспользоваться стандартным математическим аппаратом сопряженных уравнений. Замечая, что поле  $\tilde{\varphi}$  функциональным образом зависит от  $\theta$ , можно выделить линейную по  $\theta$  часть, используя аппарат вариационных производных:

$$\tilde{u}_n[\theta] = \tilde{u}_n[\theta_0] + \frac{\delta}{\delta\theta} \tilde{u}_n[\delta\theta] + O(\|\delta\theta\|^2),$$

при этом

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n[\theta_0] &= (\tilde{h} | \tilde{\varphi}[\theta_0]) \triangleq (\tilde{h} | \tilde{\varphi}_0), \\ \frac{\delta}{\delta\theta} \tilde{u}_n[\delta\theta] &= \langle \langle \tilde{h} | L_0^{-1} \frac{\delta}{\delta\theta} |_{\theta_0} L \tilde{\varphi}_0 \rangle \rangle \delta\theta. \end{aligned}$$

Построение интегрального ядра томографического функционала  $p: p(\delta\theta) \triangleq \langle p | \delta\theta \rangle$  сводится к решению прямых задач в опорной среде  $\theta_0$ : 1) построение падающего поля  $\varphi_{in} = \varphi_0$ , которое удовлетворяет уравнению  $L_{\theta_0} \varphi_{in} = s$ ; 2) построение обращенного поля  $\varphi_{out}$ , которое удовлетворяет сопряженному уравнению  $L^* \varphi_{out} = \tilde{h}$ . Само интегральное ядро определяется локальным взаимодействием полей  $\varphi_{in}$  и  $\varphi_{out}$ , при этом оператор взаимодействия

$$\hat{s}^x = \left. \frac{\delta}{\delta\theta} \right|_{\theta=\theta_0} L$$

зависит только от свойств оператора распространения  $L$ :

$$\tilde{p}^x = (\tilde{\varphi}_{out} | \hat{s}^x | \tilde{\varphi}_{in}).$$

Линеаризованная модель индивидуального экспериментального отсчета окончательно имеет следующий вид:

$$u_n - u_n^0 = \langle p_n^x | \delta\theta \rangle \triangleq \int p_n(x) \delta\theta(x) dx.$$

В этом представлении каждый отсчет  $u_n$  есть значение функционала от искомого поля  $\delta\theta = \theta - \theta_0$ , при этом его интегральное ядро  $p_n(x)$  — пространственная весовая функция, с которой поле интегрируется формально по всему пространству. Аналогия с радоновской проекцией [22, 55, 79, 80]

$$u(l, n) = \int \delta(l - n \cdot x) \delta\theta(x) dx$$

очевидна.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект N 93059961).

Мы благодарны Александру Сергеевичу Благовещенскому за плодотворные обсуждения результатов исследования и полезные замечания, которые были учтены нами в процессе работы над книгой, а также признательны М.В. Холевой, Н.Б. Никифоровой и Е.С. Макарову за помощь в подготовке рукописи.

Санкт-Петербург

## Глава 1

# ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АППАРАТА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДИСТАНЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ

Численное решение томографических задач, равно как и вообще методы вычислительной математики, базируется на прикладном функциональном анализе. Операторный язык изложения удобен тем, что в компактной форме позволяет представлять алгоритмы решения обратных задач, получать оценки точности с учетом самых общих свойств входящих в алгоритм операторов, легко проследить модификации отдельных блоков алгоритмов в зависимости от конкретных функциональных связей, составляющих математическую структуру обратной задачи. Решение операторных уравнений первого рода, включающих компактный оператор, представляет собой самостоятельную математическую проблему — проблему регуляризации некорректно поставленных математических задач. Задачи же дистанционного зондирования практически во всех случаях являются некорректно поставленными. Решение любой интерпретационной задачи, связанной с обработкой экспериментальных данных, должно учитывать случайную компоненту ("шум") в данных обратной задачи, наличие которой приводит к тому, что классические методы функционального анализа становятся неприменимыми, поскольку в общем случае "зашумленные" данные не принадлежат образу оператора. Уже этот факт делает необходимым привлечение методов математической статистики для построения алгоритмов и интерпретации решения обратных задач. Существующая литература по этим направлениям: прикладной функциональный анализ, решение некорректно поставленных задач и методы математической статистики — очень обширна и не всегда соответ-

ствует стилю изложения, принятому в физической литературе, где традиционно установился уровень "физической строгости", когда доказательства, если и приводятся, то только с изложением их общей алгоритмической структуры. Безусловно, при таком изложении теряется математическое изящество и строгость, зато это позволяет заменить математическую эрудицию физической интуицией, облегчающей физическую интерпретацию решения.

## 1. 1. ЭЛЕМЕНТЫ ПРИКЛАДНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Аналитические методы решения применимы только к узкому классу задач. Поэтому в практике естественным образом возникает необходимость использования конструкций и понятий, лежащих в основе функционального анализа. Напомним читателю основные его элементы.

Как только мы ставим задачу построения приближенного решения, например нахождения функции  $\varphi$ , с достаточной степенью точности удовлетворяющей уравнению  $L\varphi = s$ , возникает необходимость определения количественной меры точности, т. е. следует найти критерий "близости" функций (малость разности). Такой мерой может быть только число — отображение элементов функционального пространства  $\varphi \in \Phi$  на ось действительных чисел  $R^1$ , иными словами, следует определить функционал  $N : \Phi \rightarrow R^1$ . Укажем требования, которым должен удовлетворять этот функционал, определяющий меру близости функций, например  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ :

а) естественно считать отклонение функций друг от друга неотрицательным числом, равным нулю, если функции совпадают:  $N(\varphi_1 - \varphi_2) \geq 0$ ,  $N(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \Leftrightarrow \varphi_1 = \varphi_2$ ;

б) умножение обеих функций на число  $\lambda$  приводит к "изменению" отклонения в  $\lambda$  раз, при этом с учетом свойства а) это изменение в общем случае должно определяться множителем  $|\lambda|$ :  $N(\lambda(\varphi_1 - \varphi_2)) = |\lambda|N(\varphi_1 - \varphi_2)$ ;

в) по аналогии с евклидовой геометрией сумма уклонений  $\varphi_0$  от  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  от  $\varphi_0$  превышает либо равна уклонению  $\varphi_1$  от  $\varphi_2$ :  $N(\varphi_1 - \varphi_0) + N(\varphi_2 - \varphi_0) \geq N((\varphi_1 - \varphi_0) + (\varphi_0 - \varphi_2))$ .

Нетрудно видеть, что это и есть определение одного из основных функционалов — *нормы функции*. Перепишем условия а), б), в), определяющие норму  $N$ , заменив  $(\varphi_1 - \varphi_2) \Rightarrow \varphi$  в

условиях а) и б),  $\varphi_1 - \varphi_0 \Rightarrow \psi$  и  $\varphi_2 - \varphi_0 \Rightarrow \varphi$  в) и  $N(\varphi) \Rightarrow \|\varphi\|$ , в следующем виде:

$$1. \|\varphi\| \geq 0, \quad \|\varphi\| \Leftrightarrow \varphi = 0$$

(неотрицательность нормы);

$$2. \|\lambda\varphi\| = |\lambda| \|\varphi\|$$

(однородность нормы);

$$3. \|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\|$$

(неравенство треугольника).

Отметим, что своим происхождением термин "норма" обязан свойству однородности, которое позволяет при любой заданной функции  $\varphi$  умножением ее на множитель  $\lambda$  сделать величину  $\|\lambda\varphi\|$  равной единице ("нормировать" функцию).

Требования, которые мы ввели в норму, удовлетворяются, во-первых, если  $\|\varphi\| = \int_a^b |\varphi(x)| dx$ , эта норма определяет пространство интегрируемых по модулю функций  $L_1$  на  $[a, b]$ ; во-вторых, если  $\|\varphi\| = \max_{x \in [a, b]} |\varphi(x)|$ , норма вводится в пространстве непрерывных функций  $C$  на  $[a, b]$ ; в-третьих, если  $\|\varphi\| =$

$\left[ \int_a^b |\varphi(x)|^2 dx \right]^{1/2}$ , эта норма определяет пространство интегрируемых с квадратом функций  $L_2$  на  $[a, b]$ ; в-четвертых, если

$\|\varphi\| = \left[ \int_a^b |\varphi(x)|^2 dx + \int_a^b |\varphi'(x)|^2 dx \right]^{1/2}$ , эта норма определяет

функцию  $W_2^1$  в пространстве Соболева на  $[a, b]$ ; в-пятых, если

$\|\varphi\| = \left[ \sum_{i=1}^n \varphi_i^2 \right]^{1/2}$ , эта норма определяет функцию в пространстве  $R^n$ .

Заметим, что понятие нормы является частным случаем понятия расстояния — метрики  $\rho$ , если в формулировке нормы определить свойство однородности (б) как  $\rho(\varphi_1, \varphi_2) = \|\varphi_1 - \varphi_2\|$ .

Метрическое пространство называется полным, если любая фундаментальная последовательность элементов этого пространства сходится к элементу этого пространства. Напомним, что фундаментальной последовательностью называется такая.

которой для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такой номер  $n(\varepsilon)$ , что для любых элементов последовательности  $n', n'' > 0$  выполняется неравенство  $\rho(\varphi_{n'}, \varphi_{n''}) < \varepsilon$ . Полное нормированное пространство называется *банаховым*.

В функциональном анализе широко используется конструкция, аналогичная векторному анализу. Преимущество понятия вектора (тензора) для физика очевидно: суть физических законов, связей выражается в векторной форме, а аналитические методы развиваются в конкретной системе координат. При этом координаты вектора определяются скалярным произведением ортов системы координат и исходного вектора. Введение операции *скалярного произведения* для элементов функциональных пространств по аналогии с векторным анализом позволяет найти

$$S(\varphi, \varphi) \geq 0, \quad S(\varphi, \varphi) = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0$$

— неотрицательность длины вектора;

$$S(\varphi, \alpha\psi_1 + \beta\psi_2) = \alpha S(\varphi, \psi_1) + \beta S(\varphi, \psi_2)$$

— свойство линейности по второму элементу;

$$S(\varphi, \psi) = S^*(\psi, \varphi)$$

для комплекснозначных элементов  $\varphi, \psi$ . Отсюда следует, что

$$S(\lambda\varphi, \psi) = \lambda^* S(\varphi, \psi),$$

т. е. скалярное произведение определяется как форма, линейная по второму элементу (второе свойство) и антилинейная по первому элементу, причем скалярное произведение элемента самого на себя неотрицательно. Заметим, что мы определили здесь скалярное произведение как линейное именно по второму элементу в соответствии с принятым у физиков — по аналогии со скалярным произведением вектора  $S(\varphi, \psi) = \varphi^T \psi$ .

Мы будем употреблять разные обозначения для скалярного произведения:

$$S(\varphi, \psi) \triangleq (\varphi, \psi),$$

$$S(\varphi, \psi) \triangleq \langle \varphi | \psi \rangle$$

(обозначение Дирака:  $\langle \varphi |$  — бра-вектор,  $| \psi \rangle$  — кет-вектор (от англ. "bracket" — скобка:  $\langle | \rangle$ ). Нетрудно проверить, что примером скалярного произведения может быть

$$S(\varphi, \psi) = \int \varphi^*(x) \psi(x) dx.$$



Банахово пространство со скалярным произведением называется *гильбертовым пространством*  $H$ . Покажем, что конструкция скалярного произведения позволяет естественным образом ввести согласованную с ним норму. Действительно:  $S(\varphi, \varphi) \geq 0$  и в этом смысле первое свойство скалярного произведения аналогично свойству, введенному для нормы:

$$S(\lambda\varphi, \lambda\varphi) = \lambda^* \lambda S(\varphi, \varphi) = |\lambda|^2 S(\varphi, \varphi),$$

т. е. в отличие от функционала  $N$ , являющегося однородной функцией первого порядка  $N(\lambda\varphi) = |\lambda| N(\varphi)$ , скалярное произведение является однородной функцией второго порядка: т. е. корень квадратный из скалярного произведения элемента  $\varphi$  на себя является однородной функцией первого порядка.

Покажем, что норма может быть введена следующим образом:

$$N(\varphi) = (S(\varphi, \varphi))^{1/2},$$

т. е. покажем, что такой функционал удовлетворяет неравенству треугольника, а следовательно, всем трем свойствам, введенным при пределинии нормы. Запишем для этого *неравенство Шварца*:

$$|(\psi, \varphi)| \leq (\varphi, \varphi)^{1/2} (\psi, \psi)^{1/2},$$

$$0 \leq (\varphi + \alpha\psi, \varphi + \alpha\psi) = (\varphi, \varphi) + \alpha(\varphi, \psi) + \alpha^*[(\psi, \varphi) + \alpha(\psi, \psi)].$$

Поскольку скалярное произведение больше либо равно нулю при любом значении  $\alpha$ , то выберем  $\alpha$  таким, чтобы член в квадратных скобках был равен нулю, т. е.  $\alpha = -(\psi, \varphi) / (\psi, \psi)$ . Отсюда получаем неравенство Шварца. Неравенство треугольника  $\|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\|$ , записанное через скалярное произведение, должно выглядеть следующим образом:

$$(\varphi + \psi, \varphi + \psi)^{1/2} \leq (\varphi, \varphi)^{1/2} + (\psi, \psi)^{1/2}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} (\varphi + \psi, \varphi + \psi) &= (\varphi, \varphi + \psi) + (\psi, \varphi + \psi) \leq \\ &\leq (\varphi, \varphi)^{1/2}(\varphi + \psi, \varphi + \psi)^{1/2} + \\ &+ (\psi, \psi)^{1/2}(\varphi + \psi, \varphi + \psi)^{1/2}. \end{aligned}$$

Здесь последнее неравенство — следствие неравенства Шварца.

Итак, мы показали, что в пространстве со скалярным произведением согласованная с ним норма, т. е. норма в гильбертовом пространстве, определяется следующим образом:

$$\|\varphi\| = (\varphi, \varphi)^{1/2}.$$

Так, например, если скалярное произведение определено как  $\int \varphi^*(x)\psi(x) dx$ , то норма такого пространства

$$\|\varphi\| = \left[ \int \varphi^*(x)\varphi(x) dx \right]^{1/2}$$

Соответствующее неравенство Шварца:

$$\left| \int \psi^*(x)\varphi(x) dx \right| \leq \left[ \int \varphi^*(x)\varphi(x) dx \right]^{1/2} \left[ \int \psi^*(x)\psi(x) dx \right]^{1/2}$$

носит название *неравенства Коши - Буняковского*. Одновременно мы показали, что функционал вида  $\left[ \int |\varphi(x)|^2 dx \right]^{1/2}$  удовлетворяет неравенству треугольника:

$$\begin{aligned} & \left[ \int (\psi(x) + \varphi(x))^* (\psi(x) + \varphi(x)) dx \right]^{1/2} \leq \\ & \leq \left[ \int |\psi(x)|^2 dx \right]^{1/2} + \left[ \int |\varphi(x)|^2 dx \right]^{1/2} \end{aligned}$$

Чтобы в нормированном пространстве можно было ввести скалярное произведение, необходимо и достаточно выполнение равенства параллелограмма\* :

$$\|\varphi + \psi\|^2 + \|\varphi - \psi\|^2 = 2(\|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2)$$

(сравните:  $|\varphi + \psi|^2 + |\varphi - \psi|^2 = 2(|\varphi|^2 + |\psi|^2)$ ). В этом случае скалярное произведение можно определить как

$$(\varphi, \psi) = \frac{1}{4} (\|\varphi + \psi\|^2 - \|\varphi - \psi\|^2).$$

**Доказательств**

$$\|\varphi + \psi\|^2 - \|\varphi - \psi\|^2 = (\varphi + \psi, \varphi + \psi) - (\varphi - \psi, \varphi - \psi) = 4(\varphi, \psi).$$

Скалярное произведение в  $R^n$ :

$$(\varphi, \psi) = \sum_{i=1}^n \varphi_i \psi_i = \varphi^T \psi,$$

\*Сумма квадратов длин двух диагоналей параллелограмма, построенного на векторах  $\varphi$  и  $\psi$ , равна сумме квадратов длин его сторон.

в пространстве  $W_2^1$ :

$$(\varphi, \psi) = \int \varphi^*(x)\psi(x)dx + \int \varphi'^*(x)\psi'(x)dx.$$

Как и в случае скалярных произведений векторов, условие ортогональности  $(\varphi, \psi) = 0$ .

Напомним определение линейной независимости элементов  $\{\varphi_i\}$ ,  $i = 1 \div n$ . Элементы  $\{\varphi_i\}$  линейно независимы, если из равенства  $\sum_i \alpha_i \varphi_i = 0$  следует  $\alpha_i = 0$  для всех значений  $i = 1 \div n$ .

*Базисом гильбертова пространства  $H$*  называется множество  $\Phi \subseteq H$ , такое, что для любого элемента пространства  $H$  найдется сходящаяся к нему последовательность, состоящая из линейной комбинации элементов  $\varphi \in \Phi$ , иными словами, множество  $\Phi$  — базис  $H$ , если оно линейно независимо и замыкание линейной оболочки  $\Phi$  совпадает с  $H$ . Базис ортонормирован, если все его элементы взаимно ортогональны и их норма равна единице, при этом размерность базиса называется *размерностью гильбертова пространства*.

Покажем, что в любом базисе представление  $\varphi = \sum_i \alpha_i \varphi_i$  единственно. Предположим, что  $\varphi$  имеет представление  $\varphi = \sum_i \beta_i \varphi_i$ , тогда  $0 = \varphi - \varphi = \sum_i (\alpha_i - \beta_i) \varphi_i$ . Из условия линейной независимости базиса следует, что  $\alpha_i = \beta_i$  при любом значении  $i$ .

Аналогом представления вектора в системе координат, который задан ортонормированным базисом  $e_i$ :  $\varphi = \sum_i (\varphi, e_i) e_i$ , в гильбертовом пространстве является обобщенный ряд Фурье:

$$\varphi(x) = \sum_i \alpha_i \varphi_i(x),$$

где  $\varphi_i(x)$  — базисные функции;  $\alpha_i$  — коэффициенты разложения, равные  $(\varphi, \varphi_i)$ . Хорошо известен пример счетного базиса в бесконечном гильбертовом пространстве  $L_2[-\pi, \pi]$  — базис тригонометрических функций:  $(2\pi)^{-1/2}$ ,  $(\pi)^{-1/2} \sin x$ ,  $(\pi)^{-1/2} \cos x$ ,  $(\pi)^{-1/2} \sin(2x)$ ,  $(\pi)^{-1/2} \cos(2x)$ , ...,  $(\pi)^{-1/2} \sin(nx)$ ,  $(\pi)^{-1/2} \cos(nx)$  ... Тогда разложение функции  $\varphi$  в ряд Фурье по тригонометри-

ческим функциям:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) dx + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \cos(kx) \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos(kx) dx + \right. \\ &\left. + \sin(kx) \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin(kx) dx \right]. \end{aligned}$$

Возможность представить функцию в виде набора коэффициентов в заданном базисе (в "системе координат") и определяет эффективность введенной конструкции скалярного произведения в функциональном пространстве.

Напомним необходимые сведения из теории операторов. Функция  $L_2$  действующая из пространства  $H_1$  в  $H_2$ , называется оператором:

$$H_1 \xrightarrow{L} H_2.$$

Если  $H_2 = R^1$ , то оператор называется функционалом. Оператор линейный, если

$$L(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha L\varphi + \beta L\psi.$$

Пример интегрального оператора в  $L_2$ :

$$L\varphi \triangleq \int \mathcal{L}(x, x')\varphi(x') dx'.$$

Если интегральное ядро  $L$  таково, что  $\iint \mathcal{L}^2(x, x') dx dx' < \infty$ , то  $L$  — оператор Гильберта — Шмидта. Нормой линейного оператора называется функционал

$$\|L\| = \sup \frac{\|L\varphi\|}{\|\varphi\|}.$$

Сравните с конечномерным векторным пространством, когда матрица  $\hat{L}$  переводит вектор  $\varphi$  в вектор  $\psi$ , т. е.  $L\varphi \triangleq \hat{L}\varphi = \psi$ , в этом случае норма оператора  $L$  — это максимально возможная длина  $|\psi|$  вектора  $\psi$ , полученного при действии матрицы  $L$  на векторы  $\varphi$ , лежащие на поверхности шара единичного радиуса

( $|\varphi| = 1$ ). Если норма  $L$  меньше бесконечности, то оператор называется *ограниченным*. Приведем пример *неограниченного оператора*  $L = d^2/dx^2$ , действующего в пространстве интегрируемых с квадратом функций на интервале  $[-\pi, \pi]$ :

$$\left\| \frac{d^2}{dx^2} \right\| = \sup \frac{\|(d^2/dx^2)\varphi\|}{\|\varphi\|}.$$

Выбирая в качестве  $\varphi$  ортонормированный тригонометрический базис, видим, что

$$\frac{\|(d^2/dx^2)\varphi_k(x)\|}{\|\varphi_k(x)\|} = k^2 \frac{\|\varphi_k(x)\|}{\|\varphi_k(x)\|} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty.$$

Из определения нормы оператора  $L$  следует неравенство

$$\|L\varphi\| \leq \|L\| \cdot \|\varphi\|.$$

Оператор  $L$  называется *компактным* или *вполне непрерывным*, если он каждую слабо расходящуюся последовательность  $\{\varphi_n\}$  из области его определения переводит в сильно сходящуюся, т. е.

$$L : (f, \varphi_n - \varphi_0) \xrightarrow{\forall f} 0 \Rightarrow \|L(\varphi_n - \varphi_0)\| \rightarrow 0.$$

Примером компактного оператора в пространстве  $L_2$  является интегральный оператор Гильберта — Шмидта

$$L\varphi \triangleq \int \mathcal{L}(x, x')\varphi(x')dx'.$$

Специфика бесконечномерного гильбертова пространства по сравнению с конечномерным проявляется в том, что из слабой сходимости не следует сильная. Сравните с векторным пространством: если

$$\forall f (f, \varphi_n - \varphi_0) \rightarrow 0,$$

то очевидно, что  $\varphi_n \rightarrow \varphi_0$ . Это утверждение эквивалентно тому, что *в бесконечномерном пространстве  $I$  — единичный оператор — некомпактен*. Действительно, последовательность элементов бесконечномерного базиса  $\{\varphi_n, n = 1 \div N\}$  слабо сходится к нулю:

$$f_n = (f, \varphi_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

поскольку из равенства Парсеваля  $\sum f_n^2 = \|f\|^2 = C < \infty$ . В то же время последовательность  $\{I\varphi_n = \varphi_n\}$  не имеет предела:

$$\begin{aligned} \|I(\varphi_{n'} - \varphi_{n''})\| &= (\varphi_{n'} - \varphi_{n''}, \varphi_{n'} - \varphi_{n''})^{1/2} = \\ &= [(\varphi_{n'}, \varphi_{n'}) + (\varphi_{n''}, \varphi_{n''})]^{1/2} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Напомним некоторые определения из теории операторов. Оператор  $L^*$  называется *сопряженным по Лагранжу*, если справедливо, что  $(\psi, L\varphi) = (L^*\psi, \varphi)$ . Оператор  $H$  самосопряжен, если  $H^* = H$ . *Самосопряженный оператор*  $H$ , связывающий пространство комплекснозначных функций, называется *эрмитовым*:  $H = H^+$  (сравните с действием матрицы  $\hat{H}$  на векторы  $\varphi, \psi$ : матрица  $\hat{H}$  самосопряжена, если  $(\hat{H}\psi, \varphi) = (\psi, \hat{H}\varphi)$  т. е. матрица  $\hat{H}$  симметрична ( $H_{ij} = H_{ji}$ )).

Оператор  $U$  называется *ортогональным*, если  $(U\varphi, U\psi) = (\varphi, \psi)$  для вещественных  $\varphi$  и  $\psi$ . Эквивалентное определение — операторное равенство:

$$U^*U = I.$$

Если  $\varphi$  и  $\psi$  — комплекснозначны, то оператор  $U$  такой, что  $U^+U = I$ , и называется *унитарным*. (Сравните:  $(\hat{U}\varphi, \hat{U}\psi) = (\varphi, \psi)$ .  $\hat{U}$  — матрица поворота, сохраняющая углы между вектора и:  $\cos(\widehat{\varphi}, \widehat{\psi}) = (\varphi, \psi)(|\varphi| \cdot |\psi|)^{-1}$  и длины векторов  $|\varphi|, |\psi|$ .)

Функции  $\varphi_\alpha$  называются *собственными функциями* оператора  $H$ , если

$$H\varphi_\alpha = \lambda_\alpha \varphi_\alpha,$$

при этом  $\lambda_\alpha$  называют *собственными значениями*. Аналог для векторов

$$\hat{H}\varphi_\alpha = \lambda_\alpha \varphi_\alpha$$

означает, что собственный вектор сохраняет направление после действия матрицы  $\hat{H}$  и изменяет длину в  $\lambda_\alpha$  раз. Собственные функции оператора  $H$  линейно независимы и образуют базис гильбертова пространства. Этот базис нетрудно сделать ортонормированным.

Приведем здесь процедуру ортогонализации Грамма — Шмидга. Пусть имеется множество собственных векторов  $\{\varphi_\alpha\}$ , тогда в качестве первого орта выберем  $e_1 = \varphi_1 \|\varphi_1\|^{-1}$ . Вторым орт определим условием  $e_2 = \Delta\varphi_2 \|\Delta\varphi_2\|^{-1}$ , где  $\Delta\varphi_2 = \varphi_2 - (\varphi_2, e_1)e_1$ , т. е. из вектора  $\varphi_2$  выделена составляющая вектора вдоль орта  $e_1$ , при этом  $(\Delta\varphi_2, e_1) = 0$ . Аналогично  $e_3 = \Delta\varphi_3 \|\Delta\varphi_3\|^{-1}$ , где  $\Delta\varphi_3 = \varphi_3 - (\varphi_3, e_2)e_2 - (\varphi_3, e_1)e_1$  и  $(\Delta\varphi_3, e_2) = 0, (\Delta\varphi_3, e_1) = 0$ . Для произвольного  $n$  получаем:  $e_n = \Delta\varphi_n \|\Delta\varphi_n\|^{-1}$ , где  $\Delta\varphi_n = \varphi_n - \sum_{\alpha=1}^{n-1} (\varphi_n, e_\alpha)e_\alpha, (\Delta\varphi_n, e_\alpha) = 0$  для  $\alpha = 1 \div n-1$ .

Элементы дифференциального исчисления в гильбертовом пространстве связаны с понятием дифференциалов. Линейный ограниченный функционал  $p' \triangleq (\delta/\delta\varphi)p$  называется *производной Фреше* или *градиентом функционала*  $p(\varphi)$ , если справедливо

$$p(\varphi_0 + \delta\varphi) - p(\varphi_0) = p'|_{\varphi_0}(\delta\varphi) + r(\varphi_0, \delta\varphi),$$

$$\text{где } r(\varphi_0, \delta\varphi) : \lim_{\|\delta\varphi\| \rightarrow 0} \frac{r(\varphi_0, \delta\varphi)}{\|\delta\varphi\|} = 0.$$

По теореме Рисса линейный ограниченный функционал  $l(\varphi)$  в гильбертовом пространстве  $H$  может быть представлен единственным образом в виде  $l(\varphi) = (l, \varphi)$ . При этом  $\|l\| = \|l\|_H$ . Иными словами, сопряженное пространство с элементами  $\{l\}$  можно отождествить с гильбертовым пространством. Выражение, представленное в определении производной Фреше, можно записать в виде

$$p(\varphi_0 + \delta\varphi) = p(\varphi_0) + \left( \frac{\delta}{\delta\varphi} \Big|_{\varphi_0} p, \delta\varphi \right) + r(\varphi_0, \delta\varphi).$$

Аналог производной Фреше в конечномерном пространстве для функции  $f$ , зависящей от многих аргументов  $(x_1, \dots, x_n) \triangleq x$ , имеет форму

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + (\nabla|_{x_0} f, \Delta x) + r(x_0, \Delta x).$$

Отметим, что определение производной функционала позволяет любую интерпретационную задачу в линейном приближении считать операторным уравнением первого рода с компактным оператором, если априори не предполагается малопараметрическое представление  $\varphi$ . Действительно, любое изменение представляет собой набор чисел, т. е. набор значений функционалов  $\{l_n\}$ , таких, что экспериментальные значения  $u_n$ , определяющие реакцию прибора на вариации состояний  $\varphi$  изучаемой системы, в общем случае могут быть представлены как  $u_n = l_n(\varphi) + \epsilon_n$  ( $n = 1 \div N$ ,  $\epsilon_n$  — стохастический шум). Тогда, считая известной реакцию прибора на состояние системы, можно, используя определение производной Фреше, записать:

$$U_n = l_n(\varphi_0) + l'_n(\delta\varphi) + r_n(\varphi_0, \delta\varphi) + \epsilon_n \triangleq \\ \triangleq u_n^0 + L_n \delta\varphi + \tilde{\epsilon}_n,$$

здесь  $\varepsilon_n = r_n(\varphi_0, \delta\varphi) + \varepsilon_n$ ,  $L_n$  —  $n$ -я компонента линейного оператора  $L$ , представляющего собой  $N$  линейных функционалов  $L'_n$ , действующих на  $\delta\varphi \in \Phi$ , т. е.  $L : \Phi \rightarrow R^N$ . Поэтому в дальнейшем уделим основное внимание операторным уравнениям первого рода. Для этого потребуются вспомнить определение положительных и положительно-определенных операторов.

Рассмотрим самосопряженный оператор  $H$ , действующий в пространстве вещественных функций и введем так называемый функционал Рэлея:

$$\lambda(\varphi) = \frac{(\varphi, H\varphi)}{(\varphi, \varphi)}.$$

Экстремальные точки этого функционала определяются условием равенства нулю вариации функционала ( $\delta\lambda(\varphi) = 0$ ) либо равенством нулю градиента функционала ( $\lambda' = 0$ ). Последнее равенство называется *уравнением Эйлера*. Запишем условие равенства нулю вариации функционала  $\lambda(\varphi)$ , учитывая, что для  $\lambda(\varphi) = F(\varphi)/\Phi(\varphi)$ .

$$\delta \frac{F(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \frac{\delta F}{\Phi} - \frac{F\delta\Phi}{\Phi^2} = \frac{\delta F}{\Phi} - \lambda(\varphi) \frac{\delta\Phi}{\Phi},$$

т. е.  $\delta\lambda(\varphi) = 0$  можно представить в виде  $\delta F - \lambda(\varphi)\delta\Phi = 0$ . Для конкретного вида функционала Рэлея будем иметь

$$(\delta\varphi, H\varphi) - \lambda(\varphi)(\delta\varphi, \varphi) = 0, \quad (1.1)$$

так как

$$\begin{aligned} \Delta(\varphi, H\varphi) &= (\varphi + \Delta\varphi, H(\varphi + \Delta\varphi)) - (\varphi, H\varphi) = \\ &= (\delta\varphi, H\varphi) + (\varphi, H\Delta\varphi) + (\Delta\varphi, H\Delta\varphi) = \\ &= 2(\Delta\varphi, H\varphi) + O(\|\Delta\varphi\|^2). \end{aligned}$$

Здесь в последнем переходе мы использовали самосопряженность оператора  $H$  ( $(\Delta\varphi, H\varphi) = (H\Delta\varphi, \varphi)$ ) и вещественность  $\varphi$  ( $(H\Delta\varphi, \varphi) = (\varphi, H\Delta\varphi)$ ); аналогично будем иметь для

$$\Delta(\varphi, I\varphi) = 2(\Delta\varphi, \varphi) + O(\|\Delta\varphi\|^2).$$

Уравнение (1.1) можно, используя линейность скалярного произведения, переписать в форме

$$(\delta\varphi, H\varphi - \lambda\varphi) = 0,$$



т. е. уравнение Эйлера для функционала Рэля, определяющее стационарные точки функционала, будет записано как

$$H\varphi = \lambda\varphi$$

и будет совпадать с уравнением на собственные значения оператора  $H$ . Попутно мы определили градиент квадратичного функционала  $(\varphi, H\varphi)$ :

$$\delta\lambda = \delta(\varphi, H\varphi) = 2(H\varphi, \delta\varphi),$$

а градиент  $\lambda'$  имеет вид

$$\lambda' = \frac{\delta}{\delta\varphi}(\varphi, H\varphi) = 2H\varphi.$$

Напомним, что самосопряженный оператор  $H = H^+$  имеет действительные собственные значения  $\lambda_\alpha^* = \lambda_\alpha$ :

$$\lambda_\alpha(\varphi_\alpha, \varphi_\alpha)(\varphi_\alpha, H\varphi_\alpha) = (H\varphi_\alpha, \varphi_\alpha)^* = \lambda_\alpha^*(\varphi_\alpha, \varphi_\alpha).$$

При этом собственные функции  $\{\varphi_\alpha\}$  образуют ортогональный базис:

$$0 = (\varphi_\alpha, H\varphi_\beta) - (H\varphi_\alpha, \varphi_\beta) = (\lambda_\alpha - \lambda_\beta)(\varphi_\alpha, \varphi_\beta) \Rightarrow (\varphi_\alpha, \varphi_\beta) = 0$$

при условии  $\lambda_\alpha - \lambda_\beta \neq 0$ . Из стационарности функционала Рэля в точках собственных функций получаем условие

$$\sup \frac{(\varphi, H\varphi)}{(\varphi, \varphi)} = \lambda_{\max},$$

где  $\lambda_{\max}$  — максимальное собственное значение оператора  $H$ . Аналогично

$$\inf \frac{(\varphi, H\varphi)}{(\varphi, \varphi)} = \lambda_{\min},$$

$\lambda_{\min}$  — минимальное собственное значение оператора  $N$ , т. е. для оператора  $H = H^*$  справедливо неравенство

$$\lambda_{\min}(\varphi, \varphi) \leq (\varphi, H\varphi) \leq \lambda_{\max}(\varphi, \varphi).$$

Ограничив неотрицательный оператор  $H$  условием  $(\varphi, H\varphi) \geq 0$  при любом значении  $\varphi$ , увидим, что это эквивалентно утверждению  $\lambda_\alpha \geq 0$ . Оператор  $H$  положителен ( $H > 0$ ), если  $(\varphi, H\varphi) > 0$ . Наконец, оператор  $H$  положительно определен, если  $(\varphi, H\varphi) \geq C(\varphi, \varphi)$ , что эквивалентно условию  $\lambda_{\min} > 0$ .

Приведем примеры самосопряженных операторов:

1. Для любого оператора  $L$  оператор  $L^*L = (L^*L)^* \geq 0$ , поскольку

$$(\psi, L^*L\varphi) = (L\psi, L\varphi) = (L^*L\psi, \varphi) = ((L^*L)^*\psi, \varphi) \geq 0.$$

2. Рассмотрим оператор

$$L = -\frac{\partial}{\partial x} \left( q(x) \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

в пространстве  $L_2$  на  $[a, b]$  при  $q(x) > 0$ . Найдем условия, при которых  $L = L^*$ :

$$\begin{aligned} (\psi, L\varphi) &= -\int_a^b \psi(x) \frac{\partial}{\partial x} \left[ q(x) \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x) \right] dx = \\ &= -\psi(x)q(x) \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x) \Big|_a^b + \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} \psi \left[ q(x) \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x) \right] dx = \\ &= -\psi(x)q \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x) \Big|_a^b + \varphi(x)q(x) \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) \Big|_a^b - \\ &- \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} \left[ q(x) \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) \right] \varphi(x) dx = (L\psi, \varphi) + \\ &+ \left\{ q(x) \left[ \varphi(x) \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) - \psi(x) \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x) \right] \right\} \Big|_a^b. \end{aligned}$$

Оператор  $L$  является самосопряженным в пространстве  $L_2$  на  $[a, b]$ , если класс функций, на который он действует, таков, что

$$\left\{ q(x) \left[ \varphi(x) \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) - \psi(x) \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x) \right] \right\} \Big|_a^b = 0.$$

Используя представление для  $(\psi, L\varphi)$ , после первого интегрирования по частям, для  $(\varphi, L\varphi)$  получим:

$$(\varphi, L\varphi) = -\varphi(x)q(x) \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x) \Big|_a^b + \int_a^b \left| \frac{\partial}{\partial x} \varphi \right|^2 q(x) dx.$$

Отсюда видно, что на классе функций

$$\left\{ \varphi : \varphi(x)q(x) \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x) \Big|_a^b = 0 \right\},$$

например:  $\varphi|_a = 0, \frac{\partial}{\partial x}\varphi|_b = 0$ , если оператор  $L$  неотрицателен:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( q(x) \frac{\partial}{\partial x} \right) \geq 0.$$

3. Приведем условия, при которых  $L = -\Delta$  является само-сопряженным. Используя теорему Гаусса-Остроградского

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F}(x) dV = \int_{\partial V} (\mathbf{F}, d\sigma)$$

и выбирая в качестве  $\mathbf{F}(x)$  произведение  $\psi \nabla \varphi$ , получаем

$$\begin{aligned} \int_V [(\nabla \psi, \nabla \varphi)] + \psi \Delta \varphi dV &= \int_{\partial V} (d\sigma, \psi \nabla \varphi) = \\ &= \int_{\partial V} (\psi d\sigma \cdot \nabla) \varphi = \int_{\partial V} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma \end{aligned}$$

(первая теорема Грина). Вычитая из правой и левой частей последнего равенства аналогичные выражения, в которых проведена замена  $\psi \rightarrow \varphi, \varphi \rightarrow \psi$ , получим формулировку второй теоремы Грина:

$$\int_V [\psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi] dV = \int_{\partial V} \left[ \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right] d\sigma.$$

Итак, если оператор  $L = -\Delta$  определен на классе функций, таких, что

$$\int_{\partial V} \left[ \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right] d\sigma = 0,$$

то он будет самосопряженным. Из первой теоремы Грина находим класс функций, на которых неотрицателен оператор  $L = -\Delta$ :

$$-\int_V \varphi \Delta \varphi dV + \int_{\partial V} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = \int_V |\nabla \varphi|^2 dV \geq 0.$$

Итак,  $(\varphi, -\Delta \varphi) \geq 0$ , т. е.  $-\Delta \geq 0$ , если

$$\psi \in \overline{\Phi} = \left\{ \varphi : \int_{\partial V} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = 0 \right\}.$$

Отметим, что на этом же классе функций  $\nabla^* = -\nabla$ .

4. Интегральный оператор с симметричным ядром, например:

$$L\varphi = \int \sum_j \mathcal{L}_{ij}(x, x') \varphi_j(x') dx',$$

$$\text{где } \mathcal{L}_{ij}(x, x') = L_{ji}(x', x),$$

является неотрицательным на  $L_2$ , если интегральное ядро  $\mathcal{L}_{ij}(x, x')$  — ядро Гильберта — Шмидта.

Положительные операторы  $H > 0$  позволяют построить гильбертово пространство, в котором скалярное произведение определено формулой

$$(\psi, \varphi)_H \triangleq (\psi, H\varphi).$$

Соответственно норма в таком пространстве Фридрихса записывается как

$$\|\varphi\|_H \triangleq (\varphi, H\varphi)^{1/2}.$$

Проверим, действительно ли форма  $(\psi, H\varphi)$  является скалярным произведением:

$$(\psi, \psi)_H = (\psi, H\psi) > 0 \quad \text{при } \psi \neq 0$$

по определению положительности оператора  $H$ ;

$$\begin{aligned} (\psi, \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2)_H &= (\psi, H(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2)) = \\ &= \alpha_1(\psi, \varphi_1)_H + \alpha_2(\psi, \varphi_2)_H \end{aligned}$$

в силу линейности оператора  $H$ ;

$$(\psi, \varphi)_H = (\psi, H\varphi) = (H\varphi, \psi)^* = (\varphi, H\psi)^* = (\varphi, \psi)_H^*,$$

здесь предпоследний переход получен в силу эрмитовости оператора  $H$  ( $H = H^+$ ).

Частным случаем пространства Фридрихса является пространство Соболева  $W_1^2$ , норма в котором определена выражением

$$\|\varphi\|_{W_1^2} = \|\varphi\|_H,$$

где  $H = I - \Delta > 0$ , т. е.

$$\|\varphi\|_{W_1^2} = (\varphi, (I - \Delta)\varphi)^{1/2} =$$

$$= [(\varphi, \varphi)_{L_2} + (\nabla\varphi, \nabla\varphi)_{L_2}]^{1/2} = \left[ \int \varphi^2 dx + \int |\nabla\varphi|^2 dx \right]^{1/2}$$

Положительность оператора  $(I - \Delta)$  есть следствие общего соотношения  $\sum_i H_i > 0$ , если хотя бы одно значение  $H_i > 0$ , а остальные неотрицательны:  $(\varphi, \sum_i H_i \varphi) = \sum_i (\varphi, H_i \varphi) > 0$ .

Рассмотрим проблемы, возникающие при решении операторных уравнений первого рода:

$$L\varphi = s, \quad (1.2)$$

где  $L$  — линейный компактный оператор. Напомним, что уравнение второго рода имеет вид  $\varphi = L\varphi + s$ . Матричное представление операторного уравнения можно получить, используя произвольный (счетный) базис гильбертова пространства  $\{\psi_\alpha\}$ . Разложим единичный оператор по проекторам:

$$I = \sum_\alpha P_\alpha = \sum_\alpha |\psi_\alpha\rangle\langle\psi_\alpha|,$$

$$I\varphi = \varphi = \sum_\alpha |\psi_\alpha\rangle\langle\psi_\alpha|\varphi = \sum_\alpha \varphi_\alpha |\psi_\alpha\rangle,$$

где  $\langle\psi_\beta|\psi_\alpha\rangle = \delta_{\beta\alpha}$ . Можно переписать исходное уравнение (1.2) в виде

$$LI\varphi = L \sum_\alpha |\psi_\alpha\rangle\langle\psi_\alpha|\varphi = \sum_\alpha L|\psi_\alpha\rangle\varphi_\alpha = s.$$

Наконец, проектируя обе части последнего равенства на  $\psi_\beta$ , получаем

$$\sum_\alpha \langle\psi_\beta|L|\psi_\alpha\rangle\varphi_\alpha = \langle\psi_\beta|s = s_\beta.$$

Вводя обозначение  $\langle\psi_\beta|L|\psi_\alpha\rangle = L_{\beta\alpha}$ , записываем матричное представление операторного уравнения:  $\sum_\alpha L_{\beta\alpha}\varphi_\alpha = s_\beta$ . Следует отметить, что операторное уравнение обращается в матричное, причем конечномерное, при любом численном методе решения вследствие дискретизации. Поэтому рассмотрим сначала вопросы устойчивости для оператора  $L$  в конечномерном пространстве. Используя линейность оператора, получаем

$$L(\varphi + \delta\varphi) = L\varphi + L\delta\varphi = s + \delta s,$$

откуда  $L\delta\varphi = \delta s$ .

Проведем анализ влияния ошибок  $\delta s$  на точность восстановления  $\varphi$ , которая определяется ошибкой  $\delta\varphi$ , при задании правой части последнего равенства. Рассмотрим для этого отно-

шение относительной ошибки решения  $\|\delta\varphi\|/\|\varphi\|$  к относительной ошибке при задании правой части  $\|\delta s\|/\|s\|$ :

$$\Delta = \frac{\|\delta\varphi\|}{\|\varphi\|} \left( \frac{\|\delta s\|}{\|s\|} \right)^{-1} = \frac{\|\delta\varphi\|}{\|\delta s\|} \frac{\|s\|}{\|\varphi\|}.$$

Запишем неравенство для верхней границы  $\Delta$ :

$$\sup \Delta \leq \sup \frac{\|\delta\varphi\|}{\|\delta s\|} \sup \frac{\|s\|}{\|\varphi\|} = \sup \frac{\|\delta\varphi\|}{\|L\delta\varphi\|} \sup \frac{\|L\varphi\|}{\|\varphi\|}.$$

Считая, что существует оператор  $L^{-1}$ , такой, что  $LL^{-1} = I$ , записываем, производя замену переменной  $\delta\varphi = L^{-1}\psi$ :

$$\sup \frac{\|\delta\varphi\|}{\|L\delta\varphi\|} = \sup \frac{\|L^{-1}\psi\|}{\|\psi\|} = \|L^{-1}\|.$$

Тогда исходное неравенство для  $\sup \Delta$  принимает вид

$$\sup \Delta \leq \|L^{-1}\| \|L\| \triangleq \text{cond } L,$$

где  $\text{cond } L$  — число обусловленности оператора  $L$ , используя которое, можно записать соотношение относительных ошибок правой части и решения:

$$\frac{\|\delta\varphi\|}{\|\varphi\|} \leq \text{cond } L \frac{\|\delta s\|}{\|s\|}.$$

Учитывая, что

$$\|L\| = \sup \frac{\|L\varphi\|}{\|\varphi\|} = \sup \frac{(\varphi, L^*L\varphi)^{1/2}}{(\varphi, \varphi)^{1/2}} = (\lambda_{\max}^{L^*L})^{1/2},$$

$$\|L^{-1}\| = \sup \frac{\|L^{-1}\varphi\|}{\|\varphi\|} = \sup \frac{\|\psi\|}{\|L\psi\|} = \left( \inf \frac{\|L\psi\|}{\|\psi\|} \right)^{-1} = (\lambda_{\min}^{L^*L})^{-1/2}$$

(здесь в последних переходах использовано соотношение Рэля  $\lambda_{\min}^H(\varphi, \varphi) \leq (\varphi, H\varphi) \leq \lambda_{\max}^H(\varphi, \varphi)$ ), для произвольного значения  $H = H^*$  число обусловленности можно представить в следующем виде:

$$\text{cond } L = \left( \lambda_{\max}^{L^*L} / \lambda_{\min}^{L^*L} \right)^{1/2}.$$

Для симметричного  $L$  имеем:  $L = L^*$ ,  $\lambda^{L^*L} = (\lambda^L)^2$ , а число обусловленности можно записать через собственные значения  $\lambda$  оператора  $L$ :

$$\text{cond } L = \lambda_{\max} / \lambda_{\min}.$$

Рассмотрим теперь, как влияют ошибки  $\delta L$  при задании оператора на ошибки  $\delta\varphi$  в решении. Пусть точное уравнение имеет вид  $L\varphi = s$ , а возмущенное —  $(L + \delta L)(\varphi + \delta\varphi) = s$ , причем предполагается, что существует  $L^{-1}$ . С учетом точного уравнения получаем

$$L\delta\varphi + \delta L(\varphi + \delta\varphi) = 0,$$

или

$$\delta\varphi = -L^{-1}\delta L(\varphi + \delta\varphi).$$

На основании этих равенств можно записать неравенство для норм:

$$\|\delta\varphi\| \leq \|L^{-1}\| \|\delta L\| \|\varphi + \delta\varphi\|.$$

Вводя в правую часть формальный множитель  $\|L\|/\|L\|$ , для относительной ошибки поля  $\delta\varphi$  получаем выражение, содержащее, как и в предыдущем случае, число обусловленности:

$$\frac{\|\delta\varphi\|}{\|\varphi + \delta\varphi\|} \leq \text{cond } L \frac{\|\delta L\|}{\|L\|}.$$

Таким образом, число обусловленности является фактором усиления как ошибок при задании правой части, так и ошибок при задании оператора. Хотя число обусловленности представляет собой максимальный коэффициент усиления ошибок, можно показать, что эта верхняя граница при применении вычислительных методов достигается практически всегда. Прежде всего отметим, что в неравенстве

$$\|L^{-1}\varphi\| \leq \|L^{-1}\| \|\varphi\|$$

равенство возможно в том случае, если функция  $\varphi$  является собственной функцией оператора  $L$  и соответствует его минимальному собственному значению. Покажем, что при последовательном увеличении числа узлов конечно-разностной схемы, если не использовать специальных стабилизирующих ("регуляризирующих") методов, число обусловленности оператора увеличивается и тем самым увеличивается ошибка решения. Отметим, что именно этот факт — возникновение неограниченных с переполнением разрядной сетки ошибок решения при использовании ЭВМ — стимулировал в свое время начало активного развития методов решения некорректных задач. Используем для этого соотношения, полученные нами при введении функционала Рэля, записанного для самосопряженного оператора

$H = H^*$ :

$$\inf \frac{(\varphi, H\varphi)}{(\varphi, \varphi)} = \lambda_{\min}.$$

Очевидно, что именно на тех функциях  $\varphi$ , на которых функционал Рэля близок к нижней границе, число обусловленности максимально, т. е. максимальны ошибки в решении операторного уравнения при условии одних и тех же ошибок округления. Посмотрим, как ведет себя нижняя граница функционала Рэля, если  $L$  — интегральный оператор Гильберта — Шмидта, т. е. оператор, интегральное ядро которого интегрируемо с квадратом. Этот оператор заведомо ограничен, (т. е.  $\|L\| < \infty$ ):

$$\begin{aligned} \frac{(L\varphi, L\varphi)}{(\varphi, \varphi)} &= \frac{\int dx [\int \mathcal{L}(x, x')\varphi(x')dx']^2}{(\varphi, \varphi)} \leq \\ &\leq \int dx \int \mathcal{L}^2(x, x')dx' = c < \infty, \end{aligned}$$

причем последний интеграл ограничен по определению.

Посмотрим, от чего зависит нижняя граница функционала Рэля:

$$\lambda_{\min}^{L \circ L} \leq \frac{(L\varphi, L\varphi)}{(\varphi, \varphi)} = \frac{\int dx [\int \mathcal{L}(x, x')\varphi(x')dx']^2}{(\varphi, \varphi)}.$$

Выражение в квадратных скобках представляет собой скалярное произведение, зависящее как от параметра от точки  $x$ . Без ограничения общности можно считать, что  $\varphi$  нормировано на единицу и что скалярное произведение совпадает с проекцией скалярного ядра  $\mathcal{L}$  на функцию  $\varphi$ , если опустить при этом знаменатель, равный единице. Как было показано ранее, базис тригонометрических функций слабо сходится к нулю. В данном случае можно считать, что далекие фурье-компоненты интегрируемого ядра  $\mathcal{L}(x, x')$  являются бесконечно малыми величинами (более строго — экспоненциально малыми), если  $\mathcal{L}$  не имеет особенностей на вещественной оси:  $(\mathcal{L}, \varphi) \sim a(x)e^{-\omega x_1}$  ( $x_1$  — характерная длина функции  $\mathcal{L}$ , т. е. расстояние от вещественной оси до особой точки), или фурье-компоненты малы степенным образом, если особенность переходит на вещественную ось. Таким образом, мы получили:

$$\lambda_{\min}^{L \circ L} \leq \frac{(L\varphi_n, L\varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$



что позволяет сделать следующие выводы относительно оператора, который удовлетворяет единственному требованию — его интегральное ядро должно быть интегрируемо с квадратом:

- 1) нижняя граница спектра  $\lambda_{\min}^{L^*L}$  равна нулю независимо от того, является ли нуль собственным значением оператора  $L^*L$ ;
- 2) нижняя граница функционала Рэля достигается на функциях, имеющих высокочастотную составляющую.

Первое условие показывает, что понятие числа обусловленности для операторов в бесконечномерных пространствах, строго говоря, не применимо даже в том случае, если 0 не является собственным значением оператора  $L^*L$ , соответственно

$$\ker L = \{\varphi : L\varphi = 0\} = \emptyset.$$

Но так как численные методы связаны с конечномерной аппроксимацией, нетрудно проследить, как ведет себя число обусловленности с увеличением размерности аппроксимации. Понятно, что нижняя и верхняя границы, определяющие число обусловленности:

$$\inf \frac{(L\varphi, L\varphi)}{(\varphi, \varphi)}, \quad \sup \frac{(L\varphi, L\varphi)}{(\varphi, \varphi)},$$

зависят от того множества функций, на которых мы рассматриваем функционал Рэля. Конечно-разностную аппроксимацию интегрального оператора  $L$  можно рассматривать как действие оператора на множестве кусочно-постоянных или кусочно-линейных функций: представление матричного элемента оператора  $L$ :  $L_{mn} = \langle \psi_m | L | \psi_n \rangle$  соответствует тогда интегрированию по формуле прямоугольников или трапеций. Для оценки числа обусловленности оператора  $L$  на множестве кусочно-линейных функций выберем сначала  $\varphi \in \overline{\Phi}_n$ , заданные с плотностью  $n$  узлов на единице интервала, а затем  $\varphi \in \overline{\Phi}_{2n}$  (более точная конечно-разностная аппроксимация решения). Тогда можно записать следующие неравенства:

$$\inf_{\varphi \in \overline{\Phi}_n} \frac{(L\varphi, L\varphi)}{(\varphi, \varphi)} \leq \inf_{\varphi \in \overline{\Phi}} \frac{(L\varphi, L\varphi)}{(\varphi, \varphi)},$$

$$\sup_{\varphi \in \overline{\Phi}_{2n}} \frac{(L\varphi, L\varphi)}{(\varphi, \varphi)} \geq \sup_{\varphi \in \overline{\Phi}} \frac{(L\varphi, L\varphi)}{(\varphi, \varphi)}.$$

Эти неравенства являются следствием очевидного вложения  $\Phi_n \subset \Phi_{2n}$  (функция с  $n$  узлами является частным случаем функ-

ции с  $2n$  узлами). Ясно, что на более широком множестве нижняя граница может только уменьшиться, а верхняя — только увеличиться. Окончательный вывод сводится к следующему:

$$\text{cond}_{\varphi \in \overline{\Phi}_{2n}} L \geq \text{cond}_{\varphi \in \overline{\Phi}_n} L, \quad (1.3)$$

иными словами, при попытке построить более точную аппроксимацию решения (ее легко осуществить при использовании более мощных ЭВМ) мы сталкиваемся со все большей его неустойчивостью (для ЭВМ это означает переполнение любой заранее заданной разрядной сетки). Причем можно априори утверждать, что эти неустойчивые решения будут принимать знакопеременные значения (высокочастотная фурье-компонента, которая и обуславливает понижение точной нижней границы спектра конечно-разностной аппроксимации оператора  $L$ ). Разумеется, конечномерная аппроксимация оператора может быть построена с помощью любого базиса — не обязательно кусочно-постоянных или кусочно-линейных функций, которые к тому же являются неполными базисами. Наиболее естественный базис в задаче  $L\varphi = s$  — базис собственных функций оператора  $L$  (пусть  $L = A^*A$ ):

$$L\varphi_\alpha = \lambda_\alpha \varphi_\alpha, \quad (\varphi_\alpha, \varphi_\beta) = \delta_{\alpha\beta}.$$

Тогда функционал Рэля можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda_\varphi &= \frac{(\varphi, L\varphi)}{(\varphi, \varphi)} = \frac{\left( \sum_{\alpha} (\varphi, \varphi_{\alpha}) \varphi_{\alpha}, L \sum_{\beta} (\varphi, \varphi_{\beta}) \varphi_{\beta} \right)}{\left( \sum_{\alpha} (\varphi, \varphi_{\alpha}) \varphi_{\alpha}, \sum_{\beta} (\varphi, \varphi_{\beta}) \varphi_{\beta} \right)} = \\ &= \frac{\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} |(\varphi, \varphi_{\alpha})|^2 (\varphi_{\alpha}, \varphi_{\alpha})}{\sum_{\alpha} |(\varphi, \varphi_{\alpha})|^2} = \lambda_1 \frac{\sum_{\alpha} |(\varphi, \varphi_{\alpha})|^2}{\sum_{\alpha} |(\varphi, \varphi_{\alpha})|^2} + \\ &+ \frac{\sum_{\alpha} (\lambda_{\alpha} - \lambda_1) |(\varphi, \varphi_{\alpha})|^2}{\sum_{\alpha} |(\varphi, \varphi_{\alpha})|^2} \triangleq \lambda_1 + \Delta(\varphi). \end{aligned}$$

Здесь  $\lambda_1$  — минимальное собственное число оператора  $L$ , а  $\Delta(\varphi)$  больше нуля. Из этого выражения видно, что если в качестве множества функций выбрать  $\Phi_1 = \{\varphi : (\varphi, \varphi_1) = 0\}$ , то

$$\inf_{\varphi \in \Phi_1} \lambda(\varphi) = \lambda_2,$$

если  $\varphi \in \Phi_2 = \{\varphi : (\varphi, \varphi_1) = 0 \text{ и } (\varphi, \varphi_2) = 0\}$ , то

$$\inf_{\varphi \in \Phi_2} \lambda(\varphi) = \lambda_3.$$

Соответственно

$$\text{cond}_{\varphi \in \Phi} L > \text{cond}_{\varphi \in \Phi_1} L > \text{cond}_{\varphi \in \Phi_2} L > \dots,$$

если  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \dots$ . Отметим, что полученную цепочку неравенств относительно  $\text{cond} L$  можно интерпретировать по аналогии с ситуацией, рассмотренной ранее, когда рост неустойчивости мы связывали с теоретико-множественным вложением функциональных пространств (1.3):  $\Phi \supset \Phi_1 \supset \Phi_2 \supset \dots$ .

Выбрасывание из решения проекций на собственные функции, соответствующие малым собственным значениям оператора  $L = A^*A$ , способствует стабилизации решения и составляет сущность *метода сингулярного анализа*. Заметим, что аналогичные математические приемы используются и при численном решении прямых задач, включающих *неограниченные* операторы, например дифференциальные. В этом случае формальным критерием неустойчивости служит поведение  $\text{cond} L$ , связанное с максимальным собственным значением, которое достигается на том же классе быстро осциллирующих функций. Можно назвать такие процедуры, связанные с фильтрацией высокочастотных компонент: например, использование аппроксимации низкого порядка (малое число узлов в конечно-разностной аппроксимации), использование урезанного базиса собственных функций (сингулярный анализ), использование "стихийной" регуляризации.

Попытаемся устранить рассмотренные ранее сложности, возникающие при решении операторного уравнения  $L\varphi = s$  в процессе перехода к экстремальной задаче, традиционно использовавшейся при обработке экспериментальных данных. Суть такой экстремальной задачи сводится к следующему. Конечномерный вектор  $\varphi = \{\varphi_n, n = 1 \div N\}$  принимается за решение задачи  $L\varphi = s$ , если сумма квадратов отклонений  $\sum_m (\sum_n L_{mn} \varphi_n - s_m)^2$  минимальна (*метод наименьших квадратов*), т. е.

$$\hat{\varphi} = \arg \min_{\varphi} (L\varphi - s, L\varphi - s).$$

В пределе при  $m, n \rightarrow \infty$  векторное скалярное произведение переходит в квадрат нормы в пространстве  $L_2$ :

$$\hat{\varphi} = \arg \inf \|L\varphi - s\|_{L_2}^2. \quad (1.4)$$

Решение этой экстремальной задачи получается из уравнения Эйлера  $(\delta/\delta\varphi)J = 0$  для функционала:

$$J(\varphi) \triangleq \|L\varphi - s\|^2 = (\varphi, L^*L\varphi) - 2(L^*s, \varphi) + (s, s).$$

Градиент для квадратичной формы  $(\varphi, H\varphi)$  мы записывали раньше:

$$\frac{\delta}{\delta\varphi}(\varphi, H\varphi) = 2H\varphi.$$

Градиент  $(L^*s, \varphi)$  равен

$$\frac{\delta}{\delta\varphi}(L^*s, \varphi) = L^*s.$$

Окончательно уравнение Эйлера для  $J(\varphi)$  имеет следующий вид:

$$L^*L\varphi - L^*s = 0. \quad (1.5)$$

Мы получили, что функция  $\varphi$ , являющаяся решением экстремальной задачи (1.4), должна быть одновременно решением операторного уравнения первого рода (1.5). Если оператор  $L$  компактный, например интегральный, то оператор  $L^*L$  тоже компактный и неотрицательный. Точная нижняя граница спектра оператора  $L$  равна нулю, что означает неограниченность обратного оператора  $(L^*L)^{-1}$  (либо то, что он не существует, если 0 является собственным значением). Исходную задачу — метод наименьших квадратов — можно рассматривать как конечно-разностную аппроксимацию, сформулированную в пространстве  $L_2$  (1.4). При этом неустойчивость, возникающая при решении по методу наименьших квадратов, тем выше, чем больше размерность  $N$ , при условии вложенности конечно-разностных аппроксимаций (1.2).

Отметим, что для физиков естественным является предположение о непрерывности математических моделей, описывающих реальные физические процессы, т. е. малым изменениям параметров системы (среды) должен соответствовать и малый отклик. Совершенно неожиданной оказалась ситуация, возникающая при решении даже линейных обратных задач, где малые вариации в исходных данных обратной задачи (измерениях) приводят к сколь угодно большим осциллирующим решениям. Убежденность естествоиспытателей в том, что математическая модель реальных процессов обязана быть непрерывной, привела в свое время [65] к формулировке понятия *корректно*, т. е. *правильно, поставленной задачи*.

## 1. 2. НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫЕ ЗАДАЧИ

Согласно Г. Адамару, задача  $L\varphi = s$ ,  $\varphi \in \Phi$ ,  $s \in S$ , называется *корректно поставленной*, если выполнены условия:

1) разрешимости:

$$\forall s \in R(L) \exists \varphi : L\varphi = s;$$

2) единственности:

$$\dim \ker(L) = 0;$$

3) устойчивости:

$$\|L^{-1}\| = c < \infty.$$

Задачи, не удовлетворяющие этим условиям, называются *некорректными*. Как мы уже отмечали, такими задачами являются, например, все интерпретационные задачи, если априори не предполагать  $\varphi \in R^N$ , где  $N$  достаточно мало: эти задачи не удовлетворяют по меньшей мере условию устойчивости.

Задача называется *корректной по Тихонову*, если можно указать такое множество функций  $\bar{\Phi} \subset \Phi$ , что функция, определенная на этом множестве, удовлетворяет условиям 2) и 3). Суть всех методов регуляризации заключается в построении такого множества. Логической основой выделения из пространства  $\Phi$  множества  $\bar{\Phi}$  служит *априорная информация* о решении  $\varphi$ . Как было показано в предыдущем разделе, решение задачи

$$\hat{\varphi} = \arg \inf_{\varphi \in \Phi} \|L\varphi - s\|_{L_2}$$

является некорректным, что связано с компактностью оператора  $L^*L$ , т. е. с отсутствием или неограниченностью оператора  $(L^*L)^{-1}$ , а регуляризация связана с решением задачи

$$\tilde{\varphi} = \arg \inf_{\varphi \in \bar{\Phi} \subset \Phi} \|L\varphi - s\|_{L_2}.$$

Рассмотрим более общую задачу минимизации одного функционала при наличии связей, которые определяют множество  $\bar{\Phi}$  через другие функционалы  $\Delta J_i(\varphi)$ ,  $i = 1 \div m$ :

$$\tilde{\varphi} = \arg \inf_{\varphi \in \bar{\Phi}} J(\varphi),$$

$$\bar{\Phi} = \bigcap_i \varphi_i \neq \emptyset, \quad \varphi_i = \{\varphi : \Delta J_i(\varphi) \leq 0\}.$$

Покажем, что решение этой задачи эквивалентно поиску стационарной точки функции Лагранжа  $\mathcal{L}(\varphi, \lambda)$ ,  $\lambda \in R^m$ , причем

$\lambda \geq 0$ . Для упрощения будем считать, что все входящие в задачу функционалы дифференцируемы. Пусть  $\bar{\varphi}$  является решением этой задачи. Класс  $\{\delta\varphi\}$  допустимых вариаций определяется условиями

$$\delta\Delta J_j(\varphi) \leq 0, \\ j : \Delta J_j(\bar{\varphi}) = 0, \quad j = 1 \div m', \quad m' \leq m,$$

или

$$\left( \delta\varphi, \frac{\delta}{\delta\varphi} \Delta J_j |_{\varphi=\bar{\varphi}} \right) \leq 0. \quad (1.7)$$

Утверждение, что  $\bar{\varphi}$  является решением, эквивалентно утверждению: не существует  $\delta\varphi$  из класса допустимых, приводящих к уменьшению значений  $J(\varphi)$ :

$$\nexists \delta\varphi : J(\bar{\varphi} + \delta\varphi) < J(\bar{\varphi})$$

или не существуют  $\delta\varphi$  такие, что

$$\delta J = \left( \delta\varphi, \frac{\delta}{\delta\varphi} J |_{\varphi=\bar{\varphi}}(\varphi) \right) < 0. \quad (1.8)$$

Неравенство (1.8) остается справедливым, если к нему добавить неравенства (1.7), умноженные на произвольные положительные константы  $\lambda_j$ , и формально включить аналогичные выражения для связей с множителями  $\lambda_i = 0$ :

$$\left( \delta\varphi, \frac{\delta}{\delta\varphi} J |_{\varphi=\bar{\varphi}} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\delta}{\delta\varphi} \Delta J_i |_{\varphi=\bar{\varphi}} \right) < 0.$$

Условие несуществования вариации  $\delta\varphi$  приводит к требованию

$$\frac{\delta}{\delta\varphi} J |_{\varphi=\bar{\varphi}} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\delta}{\delta\varphi} \Delta J_i |_{\varphi=\bar{\varphi}} = 0,$$

причем  $H > 0$ . При регуляризации по Тихонову в качестве регуляризующего функционала используется квадрат нормы в пространстве Соболева  $W_2^n$ .

Как мы видели ранее, экстремальные задачи с ограничениями сводятся к экстремальной задаче с функцией Лагранжа:

$$\mathcal{L}(\varphi, \alpha) = J(\varphi) + \alpha \Delta J(\varphi),$$

где  $\alpha$  — множитель Лагранжа. Решение задачи с функцией Лагранжа можно рассматривать как семейство  $\alpha$ -параметрических задач с неопределенным параметром  $\alpha$ , т. е. следующим

образом решается последовательность задач: фиксируется значение  $\alpha_0$ , заведомо большое, при котором наверняка удовлетворяется исходное ограничение, и находится решение, соответствующее безусловной экстремальной задаче в пространстве  $\Phi$ , которое можно рассматривать как уравнение Эйлера для функционала Лагранжа с фиксированными коэффициентами  $\lambda_i$ :

$$\mathcal{L}(\varphi, \lambda) = J(\varphi) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \Delta J_i(\varphi).$$

Стационарная точка функционала Лагранжа дает следующие условия:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \lambda_i} \Big|_{\tilde{\lambda}_i, \tilde{\varphi}} = 0 &= \Delta J_i(\tilde{\varphi}), \quad i: \tilde{\lambda}_i > 0, \\ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} \Big|_{\tilde{\varphi}, \tilde{\lambda}} = 0 &= \frac{\delta}{\delta \varphi} J \Big|_{\varphi=\tilde{\varphi}} + \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i \frac{\delta}{\delta \varphi} \Delta J_i \Big|_{\varphi=\tilde{\varphi}}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

т. е. поиск стационарной точки (1.9) является задачей, эквивалентной задаче (1.6), и составляет основу нелинейного программирования и задач оптимального управления. Отметим, что стационарная точка функционала Лагранжа может быть только седловой в пространстве  $\Phi \times \mathbb{R}_+^m$ :

$$\mathcal{L}(\tilde{\varphi}, \lambda) \leq \mathcal{L}(\tilde{\varphi}, \tilde{\lambda}) \leq \mathcal{L}(\varphi, \tilde{\lambda}).$$

Поэтому поиск стационарной точки функционала Лагранжа сводится к минимаксной задаче:

$$\mathcal{L}(\tilde{\varphi}, \tilde{\lambda}) = \min_{\varphi \in \Phi} \max_{\lambda \in \mathbb{R}_+^m} \mathcal{L}(\varphi, \lambda),$$

либо

$$\mathcal{L}(\tilde{\varphi}, \tilde{\lambda}) = \max_{\lambda \in \mathbb{R}_+^m} \min_{\varphi \in \Phi} \mathcal{L}(\varphi, \lambda).$$

Итак, решение операторного уравнения мы свели к решению экстремальных задач. Напомним некоторые методы решения экстремальных (оптимизационных) задач. В качестве базовой рассмотрим задачу поиска экстремальной точки  $\tilde{\varphi}$  при отсутствии ограничений на  $\varphi$ :

$$\tilde{\varphi} = \arg \inf_{\varphi \in \Phi} J(\varphi)$$

в предположении, что функционал  $J(\varphi)$  ограничен снизу.

Основными методами решения этой задачи в случае дифференцируемого функционала являются методы, использующие вычисление градиента  $\delta/\delta\varphi J(\varphi)$ . Тогда общую структуру вычислительных методов можно представить в форме явной схемы итерационного (релаксационного) процесса:

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n - H_n J'_n, \quad H_n > 0, \quad H_n : \Phi^* \rightarrow \Phi,$$

где  $\delta/\delta\varphi|_{\varphi=\varphi_n} J$  — градиент функционала  $J(\varphi)$ ;  $H_n$  определяет различные методы оптимизации.

Смысл выбора направления движения  $p_n = H_n J'_n$  в функциональном пространстве  $\Phi$  можно проиллюстрировать на простейшей схеме линеаризации:

$$J(\varphi_{n+1}) = J(\varphi_n - H_n J'_n) \approx J(\varphi_n) - (J'_n, H_n J'_n) < J(\varphi_n),$$

где последнее неравенство написано с учетом условия  $J'_n \neq 0$ , означающего, что на  $n$ -м шаге мы не находились в точке локального минимума.

Простейший выбор  $H_n = \alpha_n I$  ( $\alpha_n \in R_+^1$ ) соответствует методу наискорейшего спуска (движение по антиградиенту). Один из способов определения  $\alpha$  сводится к следующему:

$$\alpha_n = \arg \min_{\alpha \geq 0} J(\varphi_n - \alpha J').$$

Выбор оператора  $H_n$  в форме

$$H_n = \left[ \frac{\delta^2}{\delta\varphi^2} \Big|_{\varphi_n} J \right]^{-1}$$

приводит к обобщенной схеме метода Ньютона, который соответствует квадратичной аппроксимации минимизируемого функционала  $J(\varphi)$  по значениям функционала и его первых двух производных на  $n$ -м шаге:

$$J(\varphi) = J(\varphi_n) + (J', \varphi - \varphi_n) + \frac{1}{2}(\varphi - \varphi_n, J''(\varphi - \varphi_n)),$$

$\tilde{\varphi}$ , минимизирующая  $J(\varphi)$ , находится из уравнения Эйлера

$$J''(\varphi - \varphi_n) + J' = 0,$$

откуда

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n - [J''_n]^{-1} J'_n.$$

Отметим, что условие применимости метода Ньютона — существование обратного оператора вторых производных функционала  $[J'']^{-1}$ , которое обеспечивается строгой выпуклостью



функционала  $J(\varphi)$ . Напомним в связи с этим свойства выпуклых функционалов. Функционал  $J(\varphi)$  называется *выпуклым*, если для любой пары  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  из области определения выполняется неравенство

$$J((1-\lambda)\varphi_1 + \lambda\varphi_2) \leq (1-\lambda)J(\varphi_1) + \lambda J(\varphi_2),$$

где  $\lambda \in (0, 1)$  аргумент функционала в левой части неравенства, который описывает отрезок прямой  $\varphi_1 + \lambda(\varphi_2 - \varphi_1)$ , соединяющий точки  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , а значение функционала справа представляет собой линейную интерполяцию значений функционалов между точками  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Выпуклым функционалом является, например, линейный функционал. Нетрудно видеть, что норма также является выпуклым функционалом:

$$\|(1-\lambda)\varphi_1 + \lambda\varphi_2\| \leq \|(1-\lambda)\varphi_1\| + \|\lambda\varphi_2\|.$$

Из неравенства треугольника и из условия однородности

$$\|(1-\lambda)\varphi_1 + \lambda\varphi_2\| \leq (1-\lambda)\|\varphi_1\| + \lambda\|\varphi_2\|.$$

*Строго выпуклым* называется функционал, удовлетворяющий строгому неравенству:

$$J((1-\lambda)\varphi_1 + \lambda\varphi_2) < (1-\lambda)J(\varphi_1) + \lambda J(\varphi_2),$$

$$\lambda \in (0, 1).$$

Например, квадрат нормы является строго выпуклым функционалом:

$$\begin{aligned} \|(1-\lambda)\varphi_1 + \lambda\varphi_2\|^2 &\leq (1-\lambda)^2\|\varphi_1\|^2 + \lambda^2\|\varphi_2\|^2 + \\ &+ 2\lambda(1-\lambda)\|\varphi_1\|\|\varphi_2\| < (1-\lambda)\|\varphi_1\|^2 + \lambda\|\varphi_2\|^2, \end{aligned}$$

а значит и  $(\varphi, H\varphi) \triangleq \|\varphi\|_H^2$ , где  $H > 0$ , также является строго выпуклым функционалом.

Выпуклые функционалы обладают следующими дифференциальными свойствами. Из определения выпуклости для произвольных  $\delta\varphi$ :

$$J(\varphi + \lambda\delta\varphi) \leq (1-\lambda)J(\varphi) + \lambda J(\varphi + \delta\varphi)$$

получаем

$$\frac{J(\varphi + \lambda\delta\varphi) - J(\varphi)}{\lambda} \leq J(\varphi + \delta\varphi) - J(\varphi).$$

При  $\lambda$ , стремящейся к нулю, неравенство запишем в виде

$$J(\varphi + \delta\varphi) - J(\varphi) \geq (J'|_{\varphi}, \delta\varphi). \quad (1.10)$$

Покажем, что вторая производная строго выпуклого функционала  $J''$  положительно определена. Запишем разложение  $J(\varphi + \delta\varphi)$  в ряд Тейлора:

$$J(\varphi + \delta\varphi) = J(\varphi) + (J', \delta\varphi) + \frac{1}{2}(\delta\varphi, J''\delta\varphi) + 0(\|\delta\varphi\|^2)$$

и, учитывая неравенство (1.10), справедливое для произвольных  $\delta\varphi$ , получим

$$J(\varphi + \delta\varphi) - J(\varphi) - (J', \delta\varphi) = \frac{1}{2}(\delta\varphi, J''\delta\varphi) + 0(\|\delta\varphi\|^2) \geq 0,$$

откуда следует  $J'' \geq 0$ . Для строго выпуклого функционала неравенство (1.10) переходит в строгое:  $J'' > 0$ .

Для примера запишем схему решения экстремальной задачи по методу Ньютона для функционала

$$J(\theta) = \|\mathcal{P}(\theta) - u\|_B^2 + \alpha \|H(\theta_n - \theta_0)\|^2, \quad (1.11)$$

где  $\mathcal{P}(\theta)$  — нелинейный оператор;  $H = H^* > 0$ ;  $B = B^* > 0$ . Запишем первую производную функционала в точке  $\theta_n$ :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_{\theta_0} J = 2[P_n^* B(u_n - u) + \alpha H(\theta_n - \theta_0)],$$

где  $P_n = \frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_{\theta_0} \mathcal{P}$ ,  $u_n = \mathcal{P}(\theta_0)$  и вторую производную:

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta_n} J = 2[P_n^* B P_n + \alpha H].$$

Приведем схему расчета производных:

$$\begin{aligned} \Delta J &= J(\theta_n + \delta\theta) - J(\theta_n) = [\mathcal{P}(\theta_n + \delta\theta), B\mathcal{P}(\theta_n + \delta\theta)] + \\ &+ \alpha[\theta_n + \delta\theta - \theta_0, H(\theta_n + \delta\theta - \theta_0)] - [\mathcal{P}(\theta_n), B\mathcal{P}(\theta_n)] - \\ &- \alpha[\theta_n - \theta_0, H(\theta_n - \theta_0)] \approx [\mathcal{P}(\theta_n) + \mathcal{P}\delta\theta, B(\mathcal{P}(\theta) + \mathcal{P}\delta\theta)] - \\ &- [\mathcal{P}(\theta_n), B\mathcal{P}(\theta_n)] + \alpha[(\delta\theta, H(\theta_n - \theta_0)) + (\delta\theta, H\delta\theta)] \approx \\ &\approx 2 \cdot (\delta\theta P_n^* B(u_n - u) + \alpha H(\theta_n - \theta_0)) + \\ &+ [\delta\theta, (P_n^* B P_n + \alpha H)\delta\theta] \triangleq (\delta\theta, J'_n) + \frac{1}{2}(\delta\theta, J''_n \delta\theta). \end{aligned}$$

Запишем, наконец, итерационный алгоритм решения нелинейной экстремальной задачи (1.11):

$$\theta_{n+1} = \theta_n - [P_n^* B P_n + \alpha H]^{-1} [P_n^* B(u_n - u) + \alpha H(\theta_n - \theta_0)].$$

Отдельно приведем первую итерацию обобщенного метода Ньютона, когда в качестве начального приближения используется значение  $\theta_0$  из (1.11):

$$\theta_1 = \theta_0 + [P_0^* B P_0 + \alpha H]^{-1} [P_0^* B (u - P(\theta_0))].$$

Отметим, что исходный функционал  $J(\theta)$  — строго выпуклый в силу строгой выпуклости  $\|H(\theta_n - \theta_0)\|^2$ . Метод Ньютона предпочтительнее по сравнению с градиентным в силу более высокой скорости сходимости.

Рассмотрим здесь множество  $\bar{\Phi}$ , которое можно представить как квадратичное по  $\varphi$  ограничение — это связано с тем, что уравнение Эйлера для таких задач линейно и формально алгоритм может быть представлен в операторном виде:  $\varphi = R s$ .

Прежде всего отметим, что проявление неустойчивости выразилось в неограниченных по амплитуде ошибках решения. Поэтому естественно ожидать, что, выбрав в качестве  $\bar{\Phi}$  шар конечного радиуса в пространстве  $\Phi$ , мы получим функцию  $\bar{\varphi}$  заведомо не содержащую больших ошибок. Эти соображения являются эвристической основой регуляризации по Иванову — Лаврентьеву

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} &= \arg \inf \{ \|L\varphi - s\|_{L_2}^2 \}, \\ \bar{\varphi} \in \bar{\Phi} &= \{ \|\varphi\|_{L_2}^2 \leq C \}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Метод регуляризации Иванова — Лаврентьева (1.12) не отфильтровывает высокочастотные компоненты, поскольку ограничение  $\|\varphi\|^2 \leq C$  носит интегральный характер для функции  $\varphi$ . Фильтрация высокочастотных компонент будет происходить, если ограничение накладывается на поведение не только амплитуды функции, но и на ее производные. Эти условия и определяют регуляризацию по Тихонову:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} &= \arg \inf \{ \|L\varphi - s\|_{L_2}^2 \}, \\ \bar{\varphi} \in \bar{\Phi} &= \{ (\|\varphi\|_{L_2}^2 + \|\nabla\varphi\|_{L_2}^2) \leq C \} \end{aligned}$$

или в более общей форме

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} &= \arg \inf \{ \|L\varphi - s\|_{L_2}^2 \}, \\ \bar{\varphi} \in \bar{\Phi} &= \left\{ \left( \varphi, \left[ \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{\partial^r}{\partial x^r} \left[ q(x) \frac{\partial^r}{\partial x^r} \right] \varphi \right) \leq C \right\}, \end{aligned} \quad (1.13)$$

где  $q(x) > 0$ . Регуляризация с дифференциальным оператором (1.13), приведенным в последнем ограничении, называется *регуляризацией  $n$ -го порядка* (нулевого, первого, второго, ...,  $n$ -го). Поэтому ограничение  $(\|\varphi\|_{L_2}^2 + \|\nabla\varphi\|_{L_2}^2) \leq C$  соответствует регуляризации по Тихонову первого порядка ( $q(x) \equiv 1$  ( $\varphi, (I - \partial^2/\partial x^2)\varphi$ ), а ограничение  $\|\varphi\|_{L_2}^2 \leq C$  — регуляризации по Тихонову нулевого порядка.

Общую схему регуляризации можно представить как решение следующей экстремальной задачи:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} &= \arg \inf \|L\varphi - s\|_B^2, \\ \bar{\varphi} \in \bar{\Phi} &= \left\{ \|\varphi\|_H^2 \triangleq (\varphi, H\varphi) \leq C \right\}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Затем уменьшаем параметр  $\alpha_1 = q\alpha_0$ ,  $q < 1$ , снова решаем безусловную экстремальную задачу (1.14). Такая процедура продолжается до тех пор, пока полученное решение не будет удовлетворять ограничению

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_\alpha &= \arg \inf \left\{ \|L\varphi - s\|_B^2 + \alpha \|\varphi\|_H^2 \right\}, \\ \alpha &: \|\bar{\varphi}_\alpha\|_H^2 \leq C. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Заметим, что при любом значении  $\alpha > 0$  экстремальная задача на безусловный экстремум является задачей выпуклого анализа и в силу строгой выпуклости  $\alpha \|\varphi\|_H^2$  имеет единственное решение, которое может быть получено любым численным методом, например методами градиентного спуска, методом Ньютона с регулировкой шага, методом сопряженных градиентов и т. д. [37]. В методах регуляризации некорректных задач (1.15)  $\alpha$  называют *параметром регуляризации*, а  $\|\varphi\|_H^2$ , обуславливающий строгую выпуклость минимизируемого ("сглаживающего") функционала — *стабилизирующим*.

Алгоритм решения некорректной задачи выглядит особенно просто именно в том случае, когда оператор в задаче  $L\varphi = s$  линейный и когда ограничения квадратичны по  $\varphi$ . Точка экстремума в этом случае должна соответствовать линейному уравнению Эйлера, которое для задачи (1.15) имеет вид

$$(L^*BL + \alpha H)\varphi = L^*Bs,$$

где операторное уравнение первого рода корректно разрешимо, поскольку оператор  $(L^*BL + \alpha H)^{-1}$  ограничен: действительно,

$$(\varphi, (L^*BL + \alpha H)\varphi) = (\varphi, L^*BL\varphi) + \alpha(\varphi, H\varphi) \geq \alpha\lambda_{\min}^H(\varphi, \varphi) > 0,$$

производная по параметру регуляризации  $\alpha$  не положительна

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \|\tilde{\varphi}_\alpha\|_H^2 \leq 0,$$

поскольку производная представляет собой квадратичную форму с симметричным, не положительным оператором. Это означает, что относительно радиуса шара  $R_\alpha$ , которому принадлежит решение  $\varphi_\alpha$ , можно записать:  $(\partial/\partial \alpha) R_\alpha \leq 0$ . Экстремальную задачу

$$J(\varphi) + \alpha \Delta J(\varphi) \longrightarrow \inf$$

можно интерпретировать как экстремальную:

$$\frac{1}{2} J(\varphi) + \Delta J(\varphi) \longrightarrow \inf,$$

что соответствует поиску функции  $\tilde{\varphi}$ :

$$\tilde{\varphi} = \arg \inf \Delta J(\varphi), \quad (1.16)$$

откуда

$$\|(L^*BL + \alpha H)^{-1}\| \leq (\alpha \lambda_{\min}^H)^{-1} = C < \infty.$$

На практике радиус компакта, задаваемого ограничением  $(\|\varphi\|_H^2 \leq C)$ , неизвестен, и идеология решения некорректных задач сводится к следующему. Решением некорректной задачи  $L\varphi = s$  объявляется  $\tilde{\varphi}$ , являющееся пределом последовательности  $\tilde{\varphi}_\alpha$  при стремлении параметра регуляризации к нулю:  $\tilde{\varphi}_\alpha \xrightarrow{\alpha \rightarrow +0} \tilde{\varphi}$ .

Покажем, что уменьшение параметра регуляризации соответствует увеличению радиуса компакта, что эквивалентно снятию ограничения: действительно,

$$\|\tilde{\varphi}_\alpha\|_H^2 = (L^*Bs, [(L^*BL + \alpha H)^{-1} H (L^*BL + \alpha H)^{-1}] \cdot L^*Bs)$$

при условии  $J(\varphi) \leq C$ , причем уменьшению параметра регуляризации  $\alpha$  соответствует уменьшение квадрата нормы невязки  $(\Delta)$ :

$$\|\Delta\|_B^2 \triangleq \|L\varphi - s\|_B^2.$$

При известном уровне ошибок в задании правой части  $s$  такой подход дает практический метод выбора параметра регуляризации (принцип невязки [40]).

Заметим, что регуляризация в аспекте решения операторных уравнений сводится к замене компактного оператора  $L^*BL$  на строго положительный  $(L^*BL + \alpha H)$  с  $\alpha > \alpha_0 > 0$ .

Если используется метод Иванова — Лаврентьева, то  $H = I$ , и при интерпретации (1.16)  $\bar{\varphi}$  называется квазирешением ( $\alpha \rightarrow +0$ ). Если используется метод Тихонова, то

$$H = \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{\partial^r}{\partial x^r} \left[ q(x) \frac{\partial^r}{\partial x^r} \right],$$

что соответствует канонической регуляризации некорректных задач, введенных при решении интегральных уравнений первого рода, например уравнения свертки.

### 1. 3. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

В развитии идеологии регуляризации некорректно поставленных задач существенное место занимало введение ограничений либо на величину  $\|\varphi\|_H^2 \leq C$ , либо на квадрат нормы невязки  $\|L\varphi - s\|_B^2 \leq C$ . На практике указать точно границу этих неравенств не представляется возможным. Попробуем смягчить жесткое требование указания границы, заменив его условием, что квадрат нормы может принимать любые значения, но средняя величина квадрата нормы равна  $C$ :  $\overline{\|\varphi\|_H^2} = C$ . Чтобы формализовать понятие среднего, необходимо каждому значению квадрата нормы приписать определенной вес, такой, что

$$p(\varphi) : (p, F(\varphi)) = C,$$

$$(p, 1) = 1,$$

$$p \geq 0.$$

В нашем случае  $F(\varphi) = \|\varphi\|_H^2$ . Попытаемся определить этот вес, внося минимум произвола в процедуру его построения. Для этого напомним читателю понятие энтропии как меры неопределенности состояния системы:

$$H = -(p, \ln p). \quad (1.17)$$

Информационный функционал Шеннона  $H$  (1.17) имеет ту же структуру и те же логические обоснования, что и физическая энтропия  $S$ , введенная Больцманом [33, 63], которая в фазовом пространстве  $(p, q)$  ( $p$  — импульс,  $q$  — координата) имеет следующий вид:

$$S = - \int \rho(p_i, q_i) \ln \rho(p_i, q_i) \prod_i dp_i dq_i,$$

а энтропия микроканонического ансамбля

$$S = \ln \delta\Gamma(E),$$

где  $\delta\Gamma(E)$  — статистический вес или объем, занимаемый в фазовом пространстве состояниями с энергиями  $E$ , аналогична мере информации, введенной Хартли [33, 63]. Изложим логику введения количественной меры неопределенности (энтропии) информации.

Пусть  $N$  состояний системы (цепочка длиной в  $N$  символов в теории информации) может быть занято  $L$  неразличимыми подсистемами (число неразличимых символов равно  $L$ ), причем число состояний  $l$ -й подсистемы определяется числом  $n_l$  ( $n_l$  раз встречается  $l$ -й символ в сообщении). Тогда число возможных распределений, соответствующих данному состоянию системы (число различных цепочек сообщений), равно числу равновероятных перестановок из  $N$  элементов:

$$W = \frac{N!}{n_1! n_2! \dots n_L!}.$$

Выбирая  $N$  достаточно большим, применим формулу Стирлинга:  $\ln N! = N(\ln N - 1)$  и, считая, что все  $n_l$  тоже велики, представим меру неопределенности, используя выражение для энтропии микроканонического ансамбля (информации Хартли):

$$S = - \sum_l N_l \ln N_l + \text{const}.$$

Определяя  $p_i = N_i/N$ , запишем представление информации по Шеннону для канала без помех:

$$H = - \sum_l p_l \ln p_l + \text{const}.$$

Перейдя к пределу ( $N \rightarrow \infty, L \rightarrow \infty$ ), будем иметь

$$H = -(p, \ln p).$$

Остающаяся константа вызывает одинаковые трудности как при интерпретации энтропии в статистической термодинамике, так и в теории информации при описании сообщений в каналах без помех. Эти трудности преодолеваются в квантовой статистике введением элементарного объема в фазовом пространстве  $(2\pi\hbar)^\nu$  ( $\nu$  — число степеней свободы), а в теории информации путем введения неизбежных для любого физического канала связи помех.

Отметим очевидные свойства функционала Шеннона.

1. Энтропия стремится к нулю, если статистический вес присущ одному значению  $F(\varphi)$ , в этом случае мы исключаем все иные значения функционала:  $p \rightarrow \delta(F - C) \Leftrightarrow H \rightarrow 0$ .

2. Энтропия максимальна, если  $p = \text{const}$ , т. е. весовая функция не выделяет ни одного из значений  $\|\varphi\|_H^2$ , и тогда конечного среднего не существует:  $p \rightarrow \text{const} \Leftrightarrow H \rightarrow \text{max}$ .

Возвращаясь к выбору весовой функции  $p$ , потребуем, чтобы функция  $H$  достигала максимального значения, или  $(p, \ln p) \rightarrow \text{min}$ , при условии, что  $(P, F) = C$  с учетом условия нормировки  $(p, 1) = 1$ . С использованием неопределенных множителей Лагранжа экстремальная задача записывается как

$$\hat{p} = \arg \inf \{ (p, \ln p) + \alpha(p, F) + \beta(p, 1) \}.$$

Соответствующее уравнение Эйлера имеет вид

$$\ln p + \alpha F + \beta 1 = 0,$$

откуда

$$\hat{p} = p_0 e^{-\alpha F},$$

где  $p_0 = e^{-\beta 1} = \text{const}$ . Заменяя  $F(\varphi)$  на  $\|\varphi\|_H^2$ , получим окончательный вид весовой функции:  $p(\varphi)$ , соответствующий минимальному произволу в выборе этой функции

$$\hat{p}(\varphi) = p_0 e^{-\alpha \|\varphi\|_H^2} = p_0 e^{-\alpha(\varphi, H\varphi)},$$

где  $\alpha > 0$ .

Отметив, что полученная весовая функция  $\hat{p}(\varphi)$  обладает всеми свойствами плотности вероятности, мы имеем возможность пользоваться всеми свойствами вероятностной меры и проводить статистическую интерпретацию всех конструкций, включающих весовую функцию  $p$ , например математическое ожидание и дисперсия:

$$E\varphi \triangleq (\varphi, p),$$

$$E[(\varphi - E\varphi)^2] \triangleq ((\varphi - (\varphi, p))^2, p).$$

Операция математического ожидания  $E$  в явном виде линейна:

$$E(\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2) = \lambda E(\varphi_1) + \mu E(\varphi_2),$$

поэтому

$$E L\varphi = L E\varphi,$$



т. е. оператор матожидания  $E$  коммутирует с линейными операторами.

Введем *корреляционный оператор* (коррелятор) при  $E\varphi = 0$ :

$$K_{\varphi\varphi} : E(\eta, \varphi)(\xi, \varphi)^* = (\eta, K_{\varphi\varphi}\xi) \forall \xi, \eta.$$

Из определения видно, что корреляционный оператор, который формально можно записать как  $K_{\varphi\varphi} = E\varphi\varphi^*$ , неотрицателен:

$$(\eta, K_{\varphi\varphi}\eta) = E(\eta, \varphi)(\eta, \varphi^*) = E|(\eta, \varphi)|^2 \geq 0.$$

Можно записать коррелятор для линейно преобразованных функций  $A\varphi$  и  $(B\varphi)^*$ :

$$E(A\varphi)(B\varphi)^* = AK_{\varphi\varphi}B^*,$$

поскольку

$$\begin{aligned} E(\eta, A\varphi)(\xi, B\varphi)^* &= E(A^*\eta, \varphi)(B^*\xi, \varphi)^* = \\ &= (A^*\eta, K_{\varphi\varphi}B^*\xi) = (\eta, (AK_{\varphi\varphi}B^*)\xi). \end{aligned}$$

В частности, если коррелятор функции  $\varphi$  равен  $K_{\varphi\varphi}$ , то коррелятор линейного преобразования  $A\varphi$  равен  $AK_{\varphi\varphi}A^*$ :

$$E\psi\psi^* \triangleq E(A\varphi)(A\varphi)^* = AK_{\varphi\varphi}A^*.$$

*Корреляционную функцию*  $k_{\varphi\varphi}(x, x')$ , являющуюся интегральным ядром корреляционного оператора  $K_{\varphi\varphi}$ , можно представить следующим образом:

$$k_{\varphi\varphi}(x, x') = E\varphi(x)\varphi^*(x'),$$

так как значения функций  $\varphi(x)$  в точках  $x$  и  $x'$  определяются проекторами  $P_x$  и  $P_{x'}$ :

$$P_x(\varphi) = \int \varphi(y)\delta(x-y)dy,$$

$$P_{x'}(\varphi) = \int \varphi(y)\delta(x'-y)dy.$$

Тогда записываем:

$$E(P_x\varphi)(P_{x'}\varphi)^* = P_x K_{\varphi\varphi} P_{x'} = k_{\varphi\varphi}(x, x').$$

Введем гильбертово пространство со скалярным произведением:

$$(\varphi, \psi) \triangleq \text{sp } E\varphi\psi^* \triangleq \text{sp } K_{\varphi\psi}.$$

Здесь оператор  $E$  задается мерой  $d\mu_{\varphi\psi} = p(\varphi, \psi)d\varphi d\psi$ ;  $K_{\varphi\psi}$  назовем *кросс-коррелятором функций*  $\varphi, \psi$ , помня, что коррелятор

$K_{\varphi\varphi}$ , по сути дела, является автокоррелятором. Проверим, что форма  $(\varphi, \psi)$  действительно является скалярным произведением:

$$1. (\varphi, \varphi) = \text{sp } K_{\varphi\varphi} > 0.$$

$$2. (\varphi, \psi) = E \varphi \psi^* \text{ sp } K_{\varphi\psi} = \int k_{\varphi\psi}(x, x) dx = \\ = \int k_{\psi\varphi}^*(x, x) dx = \text{sp } K_{\psi\varphi}^* = \text{sp}(E \psi \varphi^*)^* = (\psi, \varphi)^*.$$

$$3. (\varphi, \alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2) = \alpha_1 (\varphi, \psi_1) + \alpha_2 (\varphi, \psi_2).$$

Ортогональные функции  $\varphi$  и  $\psi$  называются *некоррелированными*:  $(\varphi, \psi) = 0$ .

Заметим, что можно ввести гильбертово пространство, определяя скалярное произведение с мерой  $d\mu_\varphi = p(\varphi)d\varphi$ . Тогда значение скалярного произведения для элементов гильбертова пространства  $\varphi(x)$  и  $\varphi(x')$  будет задаваться значением корреляционной функции в точке  $(x, x')$ :

$$(\varphi|_x, \varphi|_{x'}) = k_{\varphi\varphi}(x, x').$$

Исходя из свойств скалярного произведения, можно записать свойство корреляционной функции: из неравенства Шварца получим

$$|(\varphi|_x, \varphi|_{x'})| \leq \|\varphi|_x\| \|\varphi|_{x'}\|,$$

$$\text{т. е. } |k(x, x')|^2 \leq \sigma_\varphi^2(x) \sigma_\varphi^2(x'),$$

$$\text{где } \sigma_\varphi^2(x) = E |\varphi(x)|^2.$$

Введя коэффициент корреляции  $r$  для вещественных функций  $\varphi$ :

$$r = \frac{k_{\varphi\varphi}(x, x')}{\sigma_\varphi(x) \sigma_\varphi(x')},$$

получим соотношение для коэффициента корреляции:  $-1 \leq r \leq 1$ . Определим случайные поля  $\varphi$  как *однородные*, если выполняется усл. зие  $k_{\varphi\varphi}(x, x') = k_{\varphi\varphi}(x - x')$ , которое приводит, в частности, к условию постоянства дисперсии:  $\sigma_{\varphi\varphi}(x) = \text{const.}$

Как было показано ранее, максимальной энтропийной весовой функцией  $p(\varphi)$  является такая, что  $p \sim e^{-\alpha(\varphi, H\varphi)}$  удовлетворяет условию  $(\varphi, H\varphi) = C$ .

Функцию  $p(\varphi)$  можно интерпретировать как плотность нормального распределения, которое для  $\varphi \in R^n$  имеет вид

$$p(\varphi) = (2\pi)^{-n/2} |K_{\varphi\varphi}|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\varphi, K_{\varphi\varphi}^{-1} \varphi) \right\}.$$

Вспомним некоторые свойства гауссовых интегралов.

$$\begin{aligned}
 1. \int \exp \left[ -\frac{1}{2}(\varphi, H\varphi) \right] D\varphi &= \\
 &= \int \exp \left[ -\frac{1}{2}(U\varphi, UHU^*U\varphi) \right] \left| \frac{D\varphi}{DU\varphi} \right| DU\varphi = \\
 &= |\text{Det } U| \int \exp \left[ -\frac{1}{2}(\psi, \lambda\psi) \right] D\psi = \\
 &= \int \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \psi_{\alpha}^2 \right] \prod_{\alpha} d\psi_{\alpha}. \quad (1.18)
 \end{aligned}$$

Здесь  $U$  — унитарная матрица, строки которой составлены из собственных векторов матрицы  $H$ :  $H\varphi_{\alpha} = \lambda_{\alpha}\varphi_{\alpha}$ ,  $H\varphi_{\beta} = \lambda_{\beta}\varphi_{\beta}$  ( $\varphi_{\alpha}\varphi_{\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ );

$$U^*U = I, \quad \text{Det}U = 1, \quad UHU^* = \Lambda;$$

$\Lambda$  — диагональная матрица;  $\psi = U\varphi$ .

Напомним, чему равен однократный интеграл (потребуется для вычисления интеграла (1.18)):

$$I = \int \exp \left[ -\frac{1}{2}\lambda x^2 \right] dx.$$

Отметим, что

$$\begin{aligned}
 I^2 &= \int \exp \left[ -\frac{\lambda}{2}(x^2 + y^2) \right] dx dy = \int_0^{\infty} \exp \left( -\frac{\lambda}{2}r^2 \right) 2\pi r dr = \\
 &= \frac{2\pi}{\lambda} \int_{-\infty}^0 e^{\rho} d\rho = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad I = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}.
 \end{aligned}$$

Отсюда

$$\int \exp \left[ -\frac{1}{2}(\varphi, H\varphi) \right] d\varphi = (2\pi)^{n/2} (\text{Det } H)^{-1/2}$$

и нормировочный коэффициент

$$A : \int A \exp \left[ -\frac{1}{2}(\varphi, H\varphi) \right] d\varphi = 1$$

будет равен

$$A = (2\pi)^{-n/2} (\text{Det } H)^{1/2}.$$

2. Найдем связь оператора  $H$ , стоящего в показателе гауссовой меры и коррелятора функции  $\varphi$ :

$$E\varphi\varphi^* = \frac{\int \varphi\varphi^* \exp[-(\varphi, H\varphi)/2] d\varphi}{\int \exp[-(\varphi, H\varphi)/2] d\varphi} = \frac{\int \psi\psi^* \exp[-(\psi, \Sigma\psi)/2] D\psi}{\int \exp[-(\psi, \Sigma\psi)/2] d\psi}$$

Запишем матричный элемент  $K_{\gamma\delta}$  коррелятора  $K$ :

$$K_{\gamma\delta} = \frac{\int \psi_\gamma \psi_\delta \exp[-(1/2) \sum_{\alpha\beta} \Sigma_{\alpha\beta} \psi_\alpha \psi_\beta] \prod_\alpha d\psi_\alpha}{(2\pi)^{-n/2} (\text{Det}\Sigma)^{-1/2}} =$$

$$= -2(2\pi)^{-n/2} (\text{Det}\Sigma)^{1/2} \frac{\partial}{\partial \Sigma_{\gamma\delta}} \int \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} \Sigma_{\alpha\beta} \psi_\alpha \psi_\beta\right] \prod_\alpha d\psi_\alpha.$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \Sigma_{\gamma\delta}} \int \exp[-(\psi, \Sigma\psi)/2] D\psi = \\ & = \frac{\partial}{\partial \Sigma_{\gamma\delta}} [(2\pi)^{n/2} (\text{Det}\Sigma)^{-1/2}] = \\ & = (2\pi)^{n/2} \left(-\frac{1}{2}\right) (\text{Det}\Sigma)^{-3/2} \Sigma_{\gamma\delta}^{-}, \end{aligned}$$

где  $\Sigma_{\gamma\delta}^{-}$  — алгебраическое дополнение элемента  $\Sigma_{\gamma\delta}$  матрицы  $\Sigma$ , получаем

$$K_{\gamma\delta} = \frac{\Sigma_{\gamma\delta}^{-}}{|\text{Det}\Sigma|} = [\Sigma^{-1}]_{\gamma\delta},$$

т. е.  $K_{\varphi\varphi} = H^{-1}$ .

Полученная связь позволяет записывать плотность нормального распределения, используя коррелятор  $K_{\varphi\varphi}$ , в виде

$$p(\varphi) = \frac{\exp[-(\varphi, K_{\varphi\varphi}^{-1} \varphi)/2]}{\int \exp[-(\varphi, K_{\varphi\varphi}^{-1} \varphi)/2] d\varphi}. \quad (1.186)$$

Распределение называется невырожденным, если  $K_{\varphi\varphi} > 0$ .

Вычислим значение функционала Шеннона для нормального распределения:

$$\begin{aligned} -(p, \ln p) &= - \int A \exp[-(\varphi, K_{\varphi\varphi}^{-1} \varphi)/2] \left( \ln A - \frac{1}{2} (\varphi, K_{\varphi\varphi}^{-1} \varphi) \right) d\varphi = \\ &= - \ln A + \frac{1}{2} A \int (\varphi, K^{-1} \varphi) \exp[-(\varphi, K^{-1} \varphi)/2] d\varphi. \end{aligned}$$

Второе слагаемое, используя замену  $\xi = K^{-1/2}\varphi$ , можно представить в виде

$$\begin{aligned} A \int (\varphi, K^{-1}\varphi) \exp[-(\varphi, K^{-1}\varphi)/2] d\varphi &= \\ &= A \int (\psi, \psi) \exp[-(\psi, \psi)/2] (\text{Det } K)^{1/2} d\psi = \\ &= (\text{Det } K)^{-1/2} (\text{Det } K)^{1/2} f(n) = f(n). \end{aligned}$$

Здесь  $f(n)$  зависит только от размерности пространства. окончательно записываем:

$$H = -(p, \ln p) = \frac{1}{2} \ln \text{Det } K + f(n). \quad (1.19)$$

Если плотность вероятности  $p(\varphi)$  задается в форме (1.18), то  $E\varphi = 0$  вследствие четности  $p(\varphi)$  ( $p(\varphi) = p(-\varphi)$ ). Для плотности распределения

$$p(\varphi) = A \exp \left[ -\frac{1}{2} (\varphi - \varphi_0, K_{\varphi\varphi}^{-1} (\varphi - \varphi_0)) \right],$$

используя замену переменных  $\psi = \varphi - \varphi_0$ , получаем  $E\varphi = \varphi_0$ .

Напомним вероятностные характеристики описания системы случайных функций  $\varphi$  и  $\psi$ . Пусть совместная плотность распределения  $\varphi$  и  $\psi$  будет  $p(\varphi, \psi)$ . Проекция этой плотности на пространство  $\Phi$  называется *маргинальной плотностью вероятности*:

$$p(\psi) = \int p(\varphi, \psi) d\varphi.$$

Соответственно проекция  $p(\varphi, \psi)$  на пространство  $\psi$  дает маргинальную плотность

$$p(\varphi) = \int p(\varphi, \psi) d\psi.$$

Нормированные сечения плотности  $p(\varphi, \psi)$  определяют условные плотности — плотность вероятности  $\varphi$  при фиксированном  $\psi$ :

$$p(\varphi|\psi) = \frac{p(\varphi, \psi)}{p(\psi)},$$

плотность вероятности  $\psi$  при фиксированном  $\varphi$ :

$$p(\psi|\varphi) = \frac{p(\varphi, \psi)}{p(\varphi)}.$$

Независимыми называются такие случайные поля  $\varphi$  и  $\psi$ , для которых выполняются условия

$$p(\varphi|\psi) = p(\varphi), \quad p(\psi|\varphi) = p(\psi).$$

В качестве примера рассмотрим модель  $u = L\varphi + \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  и  $\varphi$  описываются нормальными распределениями  $\varphi \in N(0, K_\varphi)$ , т. е.

$$p(\varphi) \sim A \exp \left[ -\frac{1}{2}(\varphi, K_\varphi^{-1}\varphi) \right].$$

Это распределение принято называть *априорным относительно искомого поля  $\varphi$  и  $\varepsilon \in N(0, K_\varepsilon)$* , т. е.

$$p(\varepsilon) \sim A \exp \left[ -\frac{1}{2}(\varepsilon, K_\varepsilon^{-1}\varepsilon) \right].$$

Причем предполагаем, что  $\varphi$  и  $\varepsilon$  статистически независимы:  $p(\varphi, \varepsilon) = p(\varphi)p(\varepsilon)$ . Распределения  $p(\varphi, \varepsilon)$  и  $p(u)$  являются нормальными, так как

$$u = \|L: I\| \left\| \begin{array}{c} \varphi \\ \varepsilon \end{array} \right\|.$$

Совместная плотность вероятности  $p(\varphi, U)$  определяется коррелятором

$$\begin{aligned} K \begin{pmatrix} u \\ \varphi \end{pmatrix} &= E \left\| \begin{array}{c} u \\ \varphi \end{array} \right\| \left\| u^* \varphi^* \right\| = \\ &= \left\| \begin{array}{cc} K_{uu} & K_{u\varphi} \\ K_{\varphi u} & K_{\varphi\varphi} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} L^* K_\varphi L & K_\varepsilon \\ K_\varphi L^* & K_\varphi \end{array} \right\|. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что обратный оператор  $K \begin{pmatrix} u \\ \varphi \end{pmatrix}^{-1}$  можно

представить в форме

$$K \begin{pmatrix} u \\ \varphi \end{pmatrix}^{-1} = \left\| \begin{array}{cc} K_\varepsilon^{-1} & -K_\varepsilon^{-1}L \\ -L^* K_\varepsilon^{-1} & K_{\delta\varphi}^{-1} \end{array} \right\|,$$

$$K_{\delta\varphi} = K_\varphi - K_\varphi L^* (LK_\varphi L^* + K_\varepsilon)^{-1} LK_\varphi.$$

Если существует обратный оператор  $K_\varphi^{-1}$ , то коррелятор  $K_{\delta\varphi}$  можно представить в виде

$$K_{\delta\varphi} = (L^* K_\varepsilon^{-1} L + K_\varphi^{-1})^{-1},$$

используя тождество

$$(A + BDB^*)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(B^*A^{-1}B + D^{-1})B^*A^{-1}.$$

Запишем условную плотность вероятности  $\varphi$  при заданном значении  $u = L\varphi + \varepsilon$ , которую называют *апостериорной плотностью*:

$$p(\varphi|u) = \frac{p(u|\varphi)}{p(u)} \sim \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\varphi - \hat{\varphi}, K_{\delta\varphi}^{-1}(\varphi - \hat{\varphi})) \right\}, \quad (1.20)$$

$$\text{где } \hat{\varphi} = \int \varphi p(\varphi|u) d\varphi \triangleq E_u \varphi = K_\varphi L^* (LK_\varphi L^* + K_\varepsilon)^{-1} u; \quad (1.21)$$

$E_u \varphi$  — условное среднее  $\varphi$ .

Представим условную плотность вероятности  $u$  при фиксированном  $\varphi$ :

$$p(u|\varphi) = \frac{p(u, \varphi)}{p(\varphi)} \sim \exp \left\{ -\frac{1}{2}(u - \hat{u}, K_\varepsilon^{-1}(u - \hat{u})) \right\}, \quad (1.22)$$

$$\text{где } \hat{u} = E_\varphi u = L\varphi.$$

Нетрудно видеть, что условная плотность  $p(u|\varphi)$  независимо от типа совместного распределения  $p(u, \varphi)$  для модели связи  $u = L\varphi + \varepsilon$  совпадает с  $p_\varepsilon$ -распределением  $\varepsilon$ , т. е.

$$p(u|\varphi) = p_\varepsilon(u - L\varphi).$$

Поясним, как получены выражения (1.20) и (1.22); для этого выпишем квадратичную форму, стоящую в показателе экспоненты совместного распределения  $p(u, \varphi)$ :

$$\|u; \varphi\| K \begin{pmatrix} u \\ \varphi \end{pmatrix} \left\| \begin{matrix} u \\ \varphi \end{matrix} \right\| = (u, K_\varepsilon^{-1}u) - (u, K_\varepsilon^{-1}L\varphi) - \\ - (\varphi, L^*K_\varepsilon^{-1}u) + (\varphi, K_{\delta\varphi}^{-1}\varphi).$$

При фиксированном значении  $u$  можно выделить полный квадрат для  $\varphi$ :

$$(\varphi - K_{\delta\varphi}L^*K_\varepsilon^{-1}u, K_{\delta\varphi}^{-1}(\varphi - K_{\delta\varphi}L^*K_\varepsilon^{-1}u)).$$

а для фиксированного значения  $\varphi$  полный квадрат для  $u$  записывается как

$$(u - K_\varepsilon K_\varepsilon^{-1}L\varphi, K_\varepsilon^{-1}(u - K_\varepsilon K_\varepsilon^{-1}L\varphi)).$$

Следует отметить, что оператор  $K_{\delta\varphi}$  представляет собой разность двух положительных операторов:  $K_{\varphi} > 0$  и  $K_{\varphi}L^*(LK_{\varphi}L^* + K_{\epsilon})^{-1}LK_{\varphi} > 0$ , при этом оператор  $K_{\delta\varphi} > 0$ .

Рассмотрим статистические критерии нахождения оценок поля  $\varphi$  для модели  $u = L\varphi + \epsilon$ , используя полученные выражения для условных плотностей  $p(\varphi|u)$  и  $p(u|\varphi)$ .

1. Пусть известно лишь распределение случайного компонента (шума)  $\epsilon$ , т. е. задана плотность  $p(\epsilon)$ . Это распределение может быть получено априори путем статистического анализа ошибок измерений в эксперименте. Тогда разумно в качестве решения взять такое  $\hat{\varphi}$ , чтобы разность  $u - L\hat{\varphi}$  была максимально "похожа" на шум  $\epsilon$ , т. е.  $u - L\hat{\varphi} = \hat{\epsilon}$  должно быть таким, чтобы вероятность  $p_{\epsilon}$  была максимальной:

$$\hat{\varphi} = \arg \sup p_{\epsilon}(u - L\varphi) = \arg \sup p(u|\varphi) = \arg \sup \ln p_{\epsilon}(u - L\varphi).$$

Такой способ нахождения решения  $\varphi$  в математической статистике называется *методом максимального правдоподобия* [50], при этом  $\ln p(u|\varphi)$  называется *функцией правдоподобия*. Монотонная неубывающая функция (логарифм) выбрана в связи с тем, что многие эмпирические распределения являются экспоненциальными, в особенности это касается нормального распределения, которое согласно центральной предельной теореме [50] является самой распространенной моделью реальных распределений. Решение экстремальной задачи (1.23) может быть получено одним из численных методов. Мы здесь выделим нормальное распределение, так как функция правдоподобия в этом случае является квадратичным функционалом, и можно в явном виде выписать уравнение Эйлера:

$$\begin{aligned} \hat{\varphi} &= \arg \inf (u - L\varphi, K_{\epsilon}^{-1}(u - L\varphi)), \\ (L^*K_{\epsilon}^{-1}L)\varphi &= L^*K_{\epsilon}^{-1}u. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Анализ уравнения (1.24) показывает, что метод максимального правдоподобия в случае нормального распределения тождественен методу наименьших квадратов и обладает теми же недостатками: неустойчивостью решения в силу компактности оператора  $L^*K_{\epsilon}^{-1}L$ . В случае распределения Лапласа метод максимального правдоподобия приводит к решению экстремальной задачи в норме  $L_1$ :

$$\hat{\varphi} = \arg \inf \|u - L\varphi\|_{L_1},$$



что эквивалентно методу наименьших модулей:

$$\hat{\varphi} = \arg \inf |u - L\varphi|.$$

2. Регуляризованное решение  $\tilde{\varphi}$  мы можем получить только в том случае, если обладаем априорной информацией о решении. Пусть наряду с распределением  $p(\varepsilon)$  задано априорное распределение  $p(\varphi)$ . Представляется целесообразным в качестве решения выбрать такое, чтобы оно обеспечивало одновременно соблюдение двух условий: во-первых, функция  $\tilde{\varphi}$  должна быть такой, чтобы разность  $u - L\tilde{\varphi}$  была как можно более похожа на шум  $\varepsilon$  (аналогично условию максимального правдоподобия); во-вторых, функция  $\tilde{\varphi}$  должна как можно лучше соответствовать априорным представлениям  $p(\varphi)$ . Учитывая предположение о статистической независимости  $\varphi$  и  $\varepsilon$ , соблюдение этих условий сводится к требованию

$$\tilde{\varphi} = \arg \sup p_\varepsilon(u - L\varphi)p(\varphi) = \arg \sup p(u|\varphi)p(\varphi). \quad (1.25)$$

Согласно формуле Байеса

$$p(\varphi|u) = \frac{p(\varphi)p(u|\varphi)}{p(u)},$$

и оценку  $\tilde{\varphi}$  (1.25) можно представить как

$$\tilde{\varphi} = \arg \sup p(\varphi|u). \quad (1.26)$$

Полученное решение (1.26) называется оценкой *максимума апостериорной вероятности*.

*Стратегия Байеса* определяет решение  $\varphi$  следующим образом:

$$\tilde{\varphi} = E_u \varphi = \int \varphi p(\varphi|u) d\varphi, \quad (1.27)$$

которое в случае симметричного апостериорного распределения  $p(\varphi|u)$  тождественно  $\tilde{\varphi}$  из (1.26).

В случае нормальных распределений  $p(\varphi)$ ,  $p(\varepsilon)$  можно записать явный вид регуляризованного решения [75,78]:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} &= \arg \inf [\|u - L\varphi\|_{K_\varepsilon^{-1}}^2 + \|\varphi\|_{K_\varphi^{-1}}^2 = \\ &= K_\varphi L^* (LK_\varphi L^* + K_\varepsilon)^{-1} u. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Анализ формулы (1.28) показывает, что при использовании априорной информации о поле  $\varphi$  экстремальная задача содержит стабилизирующий функционал  $\|\varphi\|_{K_\varphi^{-1}}^2$ , при этом корректор можно определить с точностью до множителя и тогда

экстремальная задача (1.28) принимает вид, совпадающий с общей схемой регуляризации (1.15):

$$\hat{\varphi} = \arg \inf [ \|u - L\varphi\|_{K_\varphi^{-1}}^2 + \alpha \|\varphi - \varphi_0\|_{K_\varphi^{-1}}^2 ]. \quad (1.29)$$

Решение  $\hat{\varphi}$  (см. (1.28)) принято называть решением по *методу статистической регуляризации*. Как видно из (1.21), решение, полученное с использованием стратегии Байеса, интерпретируется как условное среднее. Статистический подход дает возможность наряду с решением получить распределение ошибок решения:

$$E_u((\varphi - \hat{\varphi})(\varphi - \hat{\varphi})^*) = K_{\delta\varphi},$$

$$K_{\delta\varphi} = K_\varphi - K_\varphi L^* (LK_\varphi L^* + K_\epsilon)^{-1} LK_\varphi.$$

Рассмотрим частный случай представления корреляторов  $K_\varphi$  и  $K_\epsilon$ :

$$K_\varphi = \sigma_\varphi^2 I, \quad K_\epsilon = \sigma_\epsilon^2 I.$$

При этом решение  $\hat{\varphi}$  (1.29) находится из экстремальной задачи

$$\hat{\varphi} = \arg \inf [ \|u - L\varphi\|^2 + \alpha_0 \|\varphi\|^2 ],$$

где  $\alpha_0 = \sigma_\epsilon^2 / \sigma_\varphi^2$  - параметр регуляризации, который в этом случае имеет наглядный физический смысл: во-первых,  $\alpha_0 \rightarrow 0$  при  $\sigma_\varphi^2 \rightarrow \infty$ , т. е. стремление параметра регуляризации к нулю однозначно связано со снятием априорных ограничений; во-вторых, одна и та же степень устойчивости (регуляризации) экстремальной задачи получается при соотношении  $\sigma_\varphi^2 = 0(\sigma_\epsilon^2)$ . С учетом этих моментов физически обосновывается скорость стремления параметра регуляризации к нулю в методах функциональной регуляризации: если

$$J(\varphi) = \|L\varphi - u\|_{L_2}^2 + \alpha \|\varphi\|_H^2$$

и если  $\|L\varphi - u\|_{L_2} = \delta$ , то  $\alpha = O(\delta^2)$ .

Обратимся еще раз к методу максимального правдоподобия. В точке решения  $\hat{\varphi}$  первая производная функционала обращается в нуль:

$$\frac{\delta}{\delta\varphi} [\ln p(u|\varphi)] = 0,$$

а мерой чувствительности измерений к вариациям  $\delta\varphi$  служит вторая производная, входящая в квадратичную форму:

$$-\frac{1}{2} \left( \delta\varphi, \left[ \frac{\delta^2}{\delta\varphi^2} \ln p(u|\varphi) \right] \delta\varphi \right).$$

Проведя осреднение по всему множеству возможных значений  $u$ , получим информационный оператор Фишера [63]:

$$F = -E \left( \frac{\delta^2}{\delta \varphi^2} \ln p(u|\varphi) \right).$$

Для нормального распределения  $p$  и для нашей задачи  $u = L\varphi + \varepsilon$  будем иметь следующее выражение для оператора Фишера:

$$F = E \frac{\delta^2}{\delta \varphi^2} (L\varphi - u, K_\varepsilon^{-1} (L\varphi - u)) = L^* K_\varepsilon^{-1} L.$$

Заметим, что оператор Фишера определяет соответствие между расстояниями в пространстве решений  $\varphi$  и в пространстве измерений:

$$(\delta\varphi, F\delta\varphi) = (L\delta\varphi, K_\varepsilon^{-1} L\delta\varphi) = (\delta u, K K_\varepsilon^{-1} \delta u),$$

т. е. характеризует дискриминантную метрику в пространстве решений

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\|_F^2 = \|u_1 - u_2\|_{K_\varepsilon^{-1}}^2.$$

От оператора Фишера зависит поведение функционала правдоподобия в окрестности точки экстремума. Так, если представление оператора  $F$  в собственном базисе имеет вид

$$F = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \psi_{\alpha} \psi_{\alpha}^*,$$

где  $(\psi_{\alpha}, \psi_{\beta}) = \delta_{\alpha\beta}$ ,  $\lambda = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$ , то направления в функциональном пространстве, определяемые  $\psi_{\alpha}$  при больших значениях  $\alpha$ , являются теми направлениями, вдоль которых функционал правдоподобия близок к стационарному, т. е. функции  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  практически неразличимы:

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\|_F^2 \approx 0,$$

если

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha_0} |(\varphi_1 - \varphi_2, \psi_{\alpha})|^2 = \|\varphi_1 - \varphi_2\|^2,$$

где  $\alpha_0$  — пороговое значение индекса, при котором отношение  $\lambda_{\alpha_0}/\lambda_{\max}$  достаточно мало.

Собственный базис оператора Фишера называется *базисом Корумена - Лозва*. Нормальное распределение, записанное в

этом базисе, распадается на произведения плотностей вероятности проекций на орты базиса:

$$p(\varphi) \sim \exp \left[ -\frac{1}{2}(\varphi, F\varphi) \right] = \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} |\varphi_{\alpha}|^2 \right] = \\ = \prod_{\alpha} \exp \left[ -\frac{1}{2} \lambda_{\alpha} |\varphi_{\alpha}|^2 \right] \sim \prod_{\alpha} p(\varphi_{\alpha}),$$

где  $\varphi_{\alpha} = (\psi_{\alpha}, \varphi)$ . Записывая разложение оператора Фишера в виде

$$F = \sum_{\alpha=1}^{\alpha_0} \lambda_{\alpha} \psi_{\alpha} \psi_{\alpha}^* + \sum_{\alpha=\alpha_0+1} \lambda_{\alpha} \psi_{\alpha} \psi_{\alpha}^*,$$

плотность вероятности  $p(\varphi)$  можно приближенно представить как

$$p(\varphi) \approx \bar{p}(\varphi) \sim \prod_{\alpha=1}^{\alpha_0} \exp \left[ -\frac{1}{2} \lambda_{\alpha} |\varphi_{\alpha}|^2 \right],$$

т. е. статистический ансамбль достаточно полно в вероятностном отношении описывается проекциями на орты, соответствующие большим собственным значениям оператора Фишера  $\lambda_{\alpha}$  ( $\alpha = 1 \div \alpha_0$ ).

Дадим еще одну интерпретацию статистической регуляризации и комплексирования измерений, используя оператор Фишера.

Пусть наряду с моделью косвенных измерений поля

$$u = L\tilde{\varphi} + \varepsilon, \quad \varepsilon \in N(0, K_{\varepsilon}),$$

задана априорная информация  $\varphi \in N(\varphi_0, K_{\varphi})$ ; эту информацию можно формально представить в виде модели прямого измерения всего поля  $\varphi$ :

$$\varphi_0 = I\varphi + \eta, \quad \eta \in N(0, K_{\varphi}).$$

Отметим, что в общем случае модель прямого измерения записывается как  $u_i = P_i\varphi + \varepsilon_i$ , где  $P_i$  — проектор, вырезающий значение  $\varphi$  в отдельных точках параметрического пространства, например в отдельных пространственно-временных точках

Как мы показывали ранее, косвенные измерения  $u = L\varphi + \varepsilon$  порождают в пространстве  $\varphi$  нормальное распределение вида

$$P_L(\varphi) \sim \exp \left[ -\frac{1}{2} (\|\varphi - \hat{\varphi}\|_{L \cdot K_{\varepsilon}^{-1} L})^2 \right],$$

$P = P^*$ ,  $P = P^2$ . Если  $\epsilon_i \in N(0, K_{\epsilon_i})$ ,  $i = 1 \div M + 1$ , то оптимальная оценка поля  $\varphi$ , определяющего состояние исследуемой системы:

$$\bar{\varphi} = F^{-1} \left( \sum_{i=1}^{M+1} F_i u_i \right).$$

Здесь оператор  $F^{-1}$ , обратный оператору Фишера:

$$F = \sum_{i=1}^{M+1} F_i = \sum_{i=1}^M (L_i^* K_{\epsilon_i}^{-1} L_i) + I K_{\varphi}^{-1} I$$

определяет коррелятор ошибок решения  $\bar{\varphi}$ :

$$E(\delta\varphi\delta\varphi^*) = F^{-1}.$$

Итак, процедура комплексирования должна включать в себя априорную информацию либо прямые измерения, поскольку только в этом случае можно получить устойчивое решение. Следует отметить, что прямые измерения способны заменить априорную информацию, если они охватывают измерение всего поля  $\varphi$ , а не измерения поля в отдельных точках.

Рассмотренная статистическая интерпретация комплексирования измерений позволяет записать задачу восстановления нестационарного поля  $\varphi_t$ , описывающего состояние системы. В этом случае роль априорной информации может выполнять уравнение, описывающее динамику  $\varphi_t$ :

$$D_t \varphi_t + \eta_t = g, \quad \eta_t \in N(0, K_{\eta}),$$

$$K_{\eta} = \sigma_{\eta}^2 \delta(t - t')$$

( $g$  — функция источника) при условии ограниченности обратного оператора динамики  $D_t$ .

Заметим, что в частном случае представления динамического оператора  $D_t = (\frac{\partial}{\partial t} + A(t))$ , где  $A(t)$  — положительный оператор, получаем динамическую модель, используемую в динамической фильтрации Калмана и Калмана — Бьюси [3].

Заменив комплекс косвенных и прямых измерений оператором  $L$ , запишем систему, определяющую решение  $\varphi$  с учетом априорной информации (динамической модели):

$$L\varphi_t + \epsilon = u,$$

$$D_t \varphi_t + \eta_t = g.$$

$$\hat{\varphi} = (L^* K_{\varepsilon}^{-1} L)^{-1} L^* u,$$

а прямые (априорные) измерения описываются плотностью нормального распределения:

$$P_I(\varphi) \sim \exp \left[ -\frac{1}{2} \|\varphi - \varphi_0\|_{K_{\varphi}^{-1}}^2 \right].$$

Информация, полученная из косвенных и прямых измерений, считается независимой, поэтому совместная оценка  $\varphi$  по результатам косвенных и прямых измерений определяется произведением плотностей вероятностей. Тогда

$$\tilde{\varphi} = \arg \inf (\|\varphi - \hat{\varphi}\|_{F_1}^2 + \|\varphi - \varphi_0\|_{F_2}^2), \quad (1.30)$$

здесь операторы Фишера  $F_1$  и  $F_2$  определяют количество информации, полученной соответственно в косвенных измерениях:  $F_1 = L^* K_{\varepsilon}^{-1} L$  и количество априорной информации ("прямых" измерений):  $F_2 = K_{\varphi}^{-1}$ . Уравнение Эйлера для экстремальной задачи (1.30) имеет вид

$$(F_1 + F_2)\tilde{\varphi} = F_1\hat{\varphi} + F_2\varphi_0,$$

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} &= (F_1 + F_2)^{-1} (F_1\hat{\varphi} + F_2\varphi_0) = \\ &= (L^* K_{\varepsilon}^{-1} L + K_{\varphi}^{-1})^{-1} (L^* K_{\varepsilon}^{-1} u + K_{\varphi}^{-1} \varphi_0) = \\ &= \varphi_0 + K_{\varphi} L^* (L K_{\varphi} L^* + K_{\varepsilon})^{-1} (u - L\varphi_0) \end{aligned}$$

или

$$\tilde{\varphi} - \varphi_0 = K_{\varphi} L^* (L K_{\varphi} L^* + K_{\varepsilon})^{-1} (u - L\varphi_0),$$

т. е. мы получили оценку стандартной статистической регуляризации для модели

$$L(\varphi - \varphi_0) + \varepsilon = u - L\varphi_0.$$

Общую схему комплексирования набора  $M$  измерений (косвенных и прямых) с использованием априорной информации

$$L_1 \varphi + \varepsilon_1 = u_1,$$

$$L_2 \varphi + \varepsilon_2 = u_2,$$

.....

$$L_M \varphi + \varepsilon_M = u_M,$$

$$I_{M+1} \varphi + \varepsilon_{M+1} = u_{M+1} \equiv \varphi_0,$$

где для косвенных измерений  $L_i$  — интегральный оператор, для прямых измерений  $L_i = P_i$  — проектор, такой, что

Формальное решение можно представить через операторы Фишера, записав уравнение Эйлера:

$$(L^* K_\epsilon^{-1} L + D_t^* K_\eta^{-1} D_t) \tilde{\varphi}_t = (L^* K_\epsilon^{-1} u + D_t^* K_\eta^{-1} (g + \varphi_t^0)),$$

$$\varphi_t^0 : D_t \varphi_t^0 = 0, \varphi_t^0|_{t=0} = \varphi_0.$$

Корреляционный оператор ошибок решения является обратным к оператору Фишера  $F = F_t$ :

$$F_t = (L^* K_\epsilon^{-1} L + D_t^* K_\eta^{-1} D_t) > 0$$

в силу положительности оператора  $D_t^* K_\eta^{-1} D_t$ .

Проанализируем решения, полученные с применением идеологии математической статистики.

Пусть решение линейной задачи  $u = L\varphi + \epsilon$  достигается с помощью линейной процедуры  $R$ :

$$\hat{\varphi} = Ru = RL\varphi + R\epsilon.$$

Тогда ошибка полученного решения описывается выражением

$$\delta\varphi \triangleq \hat{\varphi} - \varphi = (RL - I)\varphi + R\epsilon.$$

Ошибка  $\delta\varphi$  не зависит от истинного значения  $\varphi$ , если  $RL = I$ . Такой оператор  $R$  мы получаем при использовании метода наименьших квадратов, если существует обратный оператор  $(L^* K_\epsilon^{-1} L)^{-1}$ . Действительно:

$$R = (L^* K_\epsilon^{-1} L)^{-1} L^* K_\epsilon^{-1},$$

$$RL = (L^* K_\epsilon^{-1} L)^{-1} (L^* K_\epsilon^{-1} L) = I.$$

Величина условного среднего от ошибки  $\delta\varphi$  называется смещением ( $b$ ):

$$b \triangleq E_\varphi \delta\varphi = (RL - I)\varphi.$$

Характеристикой точности решения является коррелятор ошибок:

$$K_{\delta\varphi} \triangleq E[\delta\varphi \delta\varphi^*].$$

Решение  $\tilde{\varphi}$  такое, что

$$\tilde{\varphi} = \arg \inf_{\varphi} \text{sp } K_{t\varphi}$$

называется *эффективным*.

Прежде всего отметим, что решение некорректных задач по методу наименьших квадратов (при существовании оператора

$(L^* K_\epsilon^{-1} L)^{-1}$  является несмещенным, но заведомо неэффективным: средние ошибки решения бесконечны. Действительно:

$$\begin{aligned} E[\delta\varphi\delta\varphi^*] &= E[(R\epsilon)(R\epsilon)^*] = R E[\epsilon\epsilon^*] R^* = R K_\epsilon R^* = \\ &= (L^* K_\epsilon^{-1} L)^{-1} L^* K_\epsilon^{-1} K_\epsilon K_\epsilon^{-1} L (L^* K_\epsilon^{-1} L)^{-1} = \\ &= (L^* K_\epsilon^{-1} L), \quad \text{sp } K_{\delta\varphi} = \infty, \end{aligned}$$

в силу неограниченности обратного оператора Фишера в некорректных задачах.

Построим оператор  $R$ , дающий эффективное решение — обладающий минимальными ошибками в среднем при всех возможных реализациях ошибок  $\epsilon$  с коррелятором  $K_\epsilon$  и возможными функциями из ансамбля с коррелятором  $K_\varphi$ . Запишем коррелятор ошибок для произвольного "решающего" оператора  $R$ :

$$K_{\delta\varphi} = E b b^* + E n n^*,$$

$$n = R\epsilon,$$

$$K_{\delta\varphi} = (RL - I)K_\varphi(RL - I)^* + RK_\epsilon R^*.$$

Условие оптимальности алгоритма  $R$ , т. е. дающего решение с минимальной дисперсией ошибок в любой пространственной точке, будет следующим:

$$\tilde{R} = \arg \inf \text{sp } K_{\delta\varphi}. \quad (1.31)$$

Введем гильбертово пространство операторов с ограниченным следом — пространство операторов Гильберта — Шмидта, определив скалярные произведения следующим выражением:

$$(A, B)_H = (A, HB) = \text{sp}(A^* HB)$$

при  $H > 0$ . Тогда задача (1.31) сводится к минимизации квадратичной формы

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= \arg \inf \{ \|(RL - I)^*\|_{K_\varphi}^2 + \|R^*\|_{K_\epsilon}^2 \} = \\ &= \arg \inf \{ (L^* R^* - I, K_\varphi(L^* R^* - I)) + (R^*, K_\epsilon R^*) \}, \end{aligned}$$

поэтому уравнение Эйлера принимает вид

$$(LK_\varphi L^* + K_\epsilon)R^* = LK_\varphi.$$

Оптимальный решающий оператор  $\tilde{R}$  описывается выражением

$$\tilde{R} = K_\varphi L^* (LK_\varphi L^* + K_\epsilon)^{-1} \quad (1.32)$$



и дает следующий коррелятор ошибок решения:

$$K_{\delta\varphi} = K_{\varphi} - K_{\varphi}L^*(LK_{\varphi}L^* + K_{\epsilon})^{-1}LK_{\varphi}.$$

При этом дисперсия ошибок в точке  $x$  минимальна по сравнению с дисперсией ошибки решения, полученного с помощью отличного от  $\tilde{R}$  линейного оператора.

Заметим, что оптимальный решающий оператор  $\tilde{R}$  (см. (1.32)) — это оператор *линейной регрессии* [3], который принято записывать в виде  $\tilde{R} = K_{\varphi u}K_u^{-1}$ . Точность восстановления поля  $\varphi$  характеризуется коррелятором

$$K_{\delta\varphi} = K_{\varphi} - K_{\varphi u}K_u^{-1}K_{u\varphi}.$$

Отклонение решающего правила ( $\Delta R$ ) от оптимального  $\tilde{R}$  приводит к увеличению коррелятора ошибок решения на положительный оператор [12]:

$$\Delta K_{\delta\varphi} = \Delta R(LK_{\varphi}L^* + K_{\epsilon})\Delta R.$$

Для решения конкретных задач необходимо ввести количественную меру информации, поскольку только в этом случае можно провести количественное сравнение различных экспериментов, поставить математическую задачу планирования эксперимента и придать смысл утверждению о достаточности либо недостаточности данных для решения обратной задачи  $L\varphi + \epsilon = u$ .

Функционал Шеннона (1.17), являющийся мерой неопределенности системы, выражается через плотность распределения случайной величины  $p_{\varphi}$ :

$$H_{\varphi} = -(p(\varphi), \ln p(\varphi)).$$

Исходя из представления совместной плотности вероятности:

$$p(\varphi, u) = p(\varphi)p(u|\varphi) = p(u)p(\varphi|u),$$

можно записать свойство аддитивности следующим образом:

$$H_{u\varphi} = H_{\varphi} + H_{u|\varphi} = H_u + H_{\varphi|u}, \quad (1.33)$$

где  $H_{u|\varphi}$  и  $H_{\varphi|u}$  — условные энтропии. В качестве меры информации о поле  $\varphi$ , содержащейся в данных  $u$ , используется разность априорной ( $H^{\text{apri}}$ ) и апостериорных ( $H^{\text{apost}}$ ) энтропий (аналогично  $\Delta S$  — разности бальцмановских энтропий при переходе системы из одного состояния в другое):

$$I_{\varphi u} \triangleq H^{\text{apri}} - H^{\text{apost}} = H_{\varphi} - H_{\varphi|u}$$

или, если используется свойство аддитивности (1.33),

$$I_{\varphi u} = H_{\varphi} + H_u - H_{u|\varphi} = H_u - H_{u|\varphi}.$$

Покажем, что информация  $I_{\varphi u}$  всегда неотрицательна, т. е.  $H_{\varphi} \geq H_{\varphi|u}$ . Докажем вспомогательное неравенство

$$-\int p(\varphi) \ln \frac{p(\varphi)}{q(\varphi)} d\varphi \leq 0, \quad (1.34)$$

где  $q(\varphi) : \int q(\varphi) d\varphi = 1$ . Используя неравенство Иенсена [50]  $E f(\varphi) \leq f(E \varphi)$ , которое справедливо для любых выпуклых  $f$ , можно записать:

$$\begin{aligned} -\int p(\varphi) \ln \frac{p(\varphi)}{q(\varphi)} d\varphi &= E \ln \frac{q(\varphi)}{p(\varphi)} \leq \ln E \frac{q(\varphi)}{p(\varphi)} = \\ &= \ln \int p(\varphi) \frac{q(\varphi)}{p(\varphi)} d\varphi = \ln 1 = 0. \end{aligned}$$

Заменив  $p(\varphi)$  на  $p(\varphi|u)$  и  $q(\varphi)$  на  $p(\varphi)$  в неравенстве (1.34), получим

$$-\int p(\varphi|u) \ln \frac{p(\varphi|u)}{p(\varphi)} d\varphi \leq 0,$$

т. е.

$$-\int p(\varphi|u) \ln p(\varphi|u) d\varphi \leq -\int p(\varphi|u) \ln p(\varphi) d\varphi.$$

Усреднив неравенства по  $u$ , запишем:

$$-\int \int p(\varphi, u) \ln p(\varphi|u) d\varphi du \leq -\int p(\varphi) \ln p(\varphi) d\varphi,$$

что и доказывает наше утверждение:  $H_{\varphi} \geq H_{\varphi|u}$ .

Отметим, что неравенство (1.34) послужило основой для введения дискриминантной метрики Кульбака [33] в пространстве распределений:

$$\begin{aligned} \rho(p_1, p_2) &= \int (p_1 - p_2) \ln \frac{p_1}{p_2} d\varphi = \\ &= \int p_1 \ln \frac{p_1}{p_2} d\varphi - \int p_2 \ln \frac{p_1}{p_2} d\varphi \geq 0, \end{aligned}$$

причем  $\rho(p_1, p_2) = 0$  только при  $p_1 = p_2$ .

Напомним, что плотности априорного и апостериорного распределений никак не связаны с методом решения обратной задачи, и в этом смысле количество информации является объективной мерой уменьшения неопределенности системы в результате проведения измерений.

Найдем явный вид информации о поле  $\varphi$ , содержащейся в данных  $u = L\varphi + \epsilon$  при  $\varphi \in N(0, K_\varphi)$  и  $\epsilon \in N(0, K_\epsilon)$ , используя соотношение (1.19) шенноновской энтропии для нормально распределенных функций:

$$\begin{aligned} I_{\varphi u} &= H^{\text{apri}} - H^{\text{apost}} = H_\varphi - H_{\varphi|u} = \\ &= -(p_\varphi, \ln p_\varphi) + [p_{\varphi|u}, \ln p(\varphi|u)] = \\ &= \frac{1}{2} \ln \text{Det } K_\varphi - \frac{1}{2} \ln \text{Det } K_{\varphi|u}, \end{aligned}$$

здесь  $K_\varphi$  — априорный коррелятор поля;

$$K_{\varphi u} \equiv K_{\delta\varphi} = K_\varphi - K_\varphi L^* (LK_\varphi L^* + K_\epsilon)^{-1} LK_\varphi$$

— апостериорный коррелятор.

Заметим, что смысл количества информации определяется разностью хартлиевских мер информации, если детерминант коррелятора интерпретировать как число независимых состояний в функциональном пространстве, пропорциональное величине объема  $V = [\prod_\alpha \lambda_\alpha]^{1/2}$ . Используя равенство

$$\text{Det } K_\varphi (\text{Det } K_{\delta\varphi})^{-1} = \text{Det } K_\varphi K_{\delta\varphi}^{-1},$$

можно представить количество информации как

$$I_{\varphi u} = \frac{1}{2} \ln \text{Det}(I + K_\varphi F),$$

где  $F$  — информационный оператор Фишера. В собственном базисе оператора  $K_\varphi F$  — информационном операторе Козлова [39, 75] — количество информации можно представить следующим образом:

$$I_{\varphi u} = \frac{1}{2} \ln \prod_\alpha (1 + \lambda_\alpha) = \frac{1}{2} \text{sp} \ln (1 + K_\varphi F).$$

Выясним физический смысл собственных значений информационного оператора Козлова:  $K_\varphi F \varphi_\alpha = \lambda_\alpha \varphi_\alpha$ . Для этого рассмотрим функционалы Рэлея вида

$$J_1(u) = \frac{(u, LK_\varphi L^* u)}{(u, u)},$$

имеющие смысл дисперсии полезного сигнала  $s = L\varphi$ , причем стационарные значения функционала  $J_1(u)$ , достигаемые на

собственных функций коррелятора  $LK_\varphi L^*$ , совпадают с собственными значениями коррелятора:

$$J_2(u) = \frac{(u, K_\epsilon u)}{(u, u)},$$

имеющего смысл дисперсии шумового компонента  $n$  модели  $u = s + n$ . Отношение  $J = J_1/J_2$  имеет физический смысл отношения сигнал/помеха:

$$J = \frac{J_1}{J_2} \Rightarrow \frac{s}{n}.$$

Этот четкий физический смысл прослеживается в том случае, если стационарные значения функционала  $J$  достигаются на функциях, являющихся одновременно собственными как для оператора  $LK_\varphi L^*$ , так и для  $K_\epsilon$ , т. е. в согласованном ("каноническом") базисе.

Функционал  $J$  можно записать либо в форме

$$J = \frac{(u, LK_\varphi L^* u)}{(u, K_\epsilon u)},$$

либо введя замену переменных  $u = K^{-1/2} \tilde{u}$ . Экстремальные свойства функционала можно исследовать на множестве функций  $\tilde{u}$ :

$$J = \frac{(\tilde{u}, K_\epsilon^{-1/2} LK_\varphi L^* K_\epsilon^{-1/2} \tilde{u})}{(\tilde{u}, \tilde{u})}.$$

Стационарные точки определяются уравнениями на собственные значения:

$$K_\epsilon^{-1/2} LK_\varphi L^* K_\epsilon^{-1/2} \tilde{u}_\alpha = \lambda_\alpha \tilde{u}_\alpha,$$

которые тождественны уравнению

$$K_\varphi F \varphi_\alpha = \lambda_\alpha \varphi_\alpha,$$

причем  $\varphi_\alpha$  и  $\tilde{u}_\alpha$  связаны соотношением  $\tilde{u}_\alpha = K^{-1/2} L \varphi_\alpha$ .

Итак, собственные значения оператора  $K_\varphi F$  имеют смысл отношения сигнал/шум для разных компонент решения в каноническом базисе, и ценновская информация показывает, какие из компонент решения  $\varphi = \sum_\alpha \varphi_\alpha$  информационно обеспечены:

$$I_{\varphi u} = \frac{1}{2} \sum_\alpha \ln(1 + \lambda_\alpha).$$

Введенные в данной главе информационные меры служат естественной базой для постановки задач математического планирования эксперимента, возможность планирования которого связана с выбором условий ( $\sigma$ ) из некоторого множества  $\Sigma$ . Например, выбор канала измерений, выбор временного и частотного интервалов измерений, выбор геометрии расстановки приборов в задачах дистанционного зондирования. Общая математическая постановка задачи планирования эксперимента (поиск  $\sigma$ ) сводится к следующему:

$$\bar{\sigma} = \arg \inf_{\sigma \in \Sigma} \Phi(\sigma) = \arg \sup_{\sigma \in \Sigma} \Phi^{-1}(\sigma).$$

Целесообразно функционал  $\Phi$  выбрать выпуклым, при этом он должен быть ограничен снизу (сверху).

Постановка эксперимента, связанная с решением обратной задачи  $L\varphi + \varepsilon = u$ , называется *регрессионной моделью*, если  $\varphi$  априори представлено в конечномерном базисе. В этом случае строится наилучшая несмещенная оценка, которая, как было показано ранее, находится методом наименьших квадратов. Стандартное представление уравнения регрессии при отсутствии априорной информации о  $\varphi$  имеет вид

$$u_{ij} = \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha} f_{\alpha}(x_i) + \varepsilon_{ij},$$

где  $\sum_{\alpha} \varphi_{\alpha} f_{\alpha}(x_i)$  — функция регрессии. Из представления  $L(x_i)\varphi = L \sum_{\alpha} \psi_{\alpha}(\psi_{\alpha}, \varphi) = \sum_{\alpha} (\psi_{\alpha}, \varphi) L\psi_{\alpha}$  следует соответствие  $\varphi_{\alpha} = (\psi_{\alpha}, \varphi)$  и  $f_{\alpha}(x_i) = L_{\alpha}(x_i)\psi_{\alpha}$  ( $\{\varphi_{\alpha}\}$  — неизвестные параметры;  $x_i$  — контролируемые переменные, например координаты регистрации  $i = 1 \div n$ , индекс  $j$  меняется от 1 до  $r_i$ ,  $\sum r_i = N$ ). *Нормированным планом эксперимента*  $\sigma(N)$  назовем совокупность величин:

$$\sigma = \left\{ \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{array} \right\},$$

где  $\sum p_i = 1$ ,  $p_i = r_i/N$ . В этом случае в качестве аргумента функционала используется информационная матрица Фишера:

$$F(\sigma) = \sum_i p_i f^T(x_i) K_i^{-1}(x_i) f(x_i),$$

$$f^T(x_i) = \|f_1(x_i), f_2(x_i) \dots f_{\alpha}(x_i) \dots\|,$$

$$f_{\alpha}(x_i) = L(x_i)\psi_{\alpha}.$$

Непрерывным планом эксперимента называют  $p(x)$ , такое, что

$$p(x) \geq 0, \quad \int_X p(x)dx = 1.$$

В качестве критериев оптимальности планов используются следующие [38, 39, 77]:

$$1. \quad \bar{\sigma} = \arg \inf \text{Det } F^{-1}(\sigma) = \arg \sup \text{Det } F(\sigma),$$

здесь  $F$  — оператор Фишера, зависящий от плана как от параметрической функции, и тогда оптимальный план  $\bar{\sigma}$  называется *D-оптимальным*. При этом минимизируется объем эллипсоида рассеяния оценки наименьших квадратов. Задача может быть бессодержательной даже в случае конечного базиса для вполне непрерывных  $L$ -операторов.

$$2. \quad \bar{\sigma} = \arg \inf \lambda_{\max}(F(\sigma)) = \arg \sup \lambda_{\min}(F(\sigma))$$

( $\lambda_{\min}, \lambda_{\max}$  — минимальное и максимальное собственные числа оператора Фишера  $F(\sigma)$ ). Этот критерий приводит к *E-оптимальному* плану, при этом минимизируется ошибка наименее информативной линейной комбинации параметров  $\varphi$ :

$$F\varphi = \lambda_{\min}\varphi.$$

$$3. \quad \bar{\sigma} = \arg \inf_{\sigma \in \Sigma} \sup_{x \in X} (f^T(x), F^{-1}(\sigma)f(x)).$$

Это выражение — критерий, минимизирующий максимальное значение дисперсии оценки функции регрессии. Соответствующий план называется *G-оптимальным*.

$$4. \quad \bar{\sigma} = \arg \inf_{\sigma} \int_X f^T(x)F^{-1}(\sigma)f(x)dx.$$

Этот критерий минимизирует среднее по  $X$  значение дисперсии оценки функции регрессии.

$$5. \quad \bar{\sigma} = \arg \inf AF^{-1}(\sigma).$$

Этот критерий минимизирует величину риска, задаваемого матрицей  $A$  при обобщенных квадратичных потерях:

$$E(\varphi - \hat{\varphi}, A(\varphi - \hat{\varphi})).$$

Такой критерий называют *L-оптимальным*.

Задачи планирования эксперимента имеют очевидное прикладное значение. При этом в число критериев оптимальности включаются оптимальные затраты, ресурсы, качественные параметры и т. д.

В каждом конкретном случае задача построения критерия может быть очень сложной, а меры, по которым производится осреднение, обладают существенной неопределенностью. Как правило, единый критерий построить не удастся. План эксперимента должен удовлетворять совокупности критериев, т. е. задача планирования становится многокритериальной. С введением векторного критерия  $\{\Phi_\alpha(\sigma)\}$  планы могут быть частично упорядочены: говорят, что  $\sigma_1$  доминирует над  $\sigma_2$  по отношению к множеству  $\{\Phi_\alpha(\sigma)\}$ , если  $\{\Phi_\alpha(\sigma_1)\} \leq \{\Phi_\alpha(\sigma_2)\}$  для всех значений  $\alpha$ , причем хотя бы для одного из них выполняется строгое неравенство. *Оптимальным по Парето* называется всякий план из множества Парето — критерия  $\Phi_\alpha$ , т. е. такого множества  $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ , для элементов которого в множестве  $\Sigma$  нет доминирующих условий  $\sigma$ .

Спецификой постановки задач математического планирования экспериментов, связанных с обратными задачами математической физики, является обязательное включение априорной информации, в частности использование согласованного базиса для регуляризации решения.

## Глава 2

### ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ СВЯЗИ ПОЛЕЙ ЗОНДИРУЮЩИХ СИГНАЛОВ И ПАРАМЕТРОВ СРЕДЫ

Основными элементами задач дистанционного зондирования являются математические модели распространения зондирующих сигналов разной физической природы в исследуемой среде. В этой главе формулируются законы распространения упругих, акустических, электромагнитных волновых полей, а также уравнение переноса лучистой энергии либо моноэнергетических нейтронов.

#### 2. 1. СЕЙСМОЛОГИЯ И СЕЙСМОРАЗВЕДКА

В качестве зондирующего сигнала в сейсмологии и в сейморазведке используются упругие волны, возбужденные либо землетрясениями (естественные источники упругих волн), либо взрывом, вибросейсмической платформой и другими искусственными источниками [1, 2, 28]. Упругие волны, регистрируемые сейсмоприемниками, несут информацию о параметрах среды, определяющих распространение упругих волн.

Так, на рис. 1 приведены примеры томографического зондирования упругими волнами (*a* — схема вертикального сейсмического профилирования, причем источники расположены на дневной поверхности *E*; *b* — сечение вертикального сейсмического профилирования в плоскости  $xOz$ ; *в* — данные наблюдений на дневной поверхности и в скважине при наличии отражающего горизонта).

Основная задача сейсмологии и сейморазведки состоит в восстановлении внутреннего строения Земли по сигналам, за-



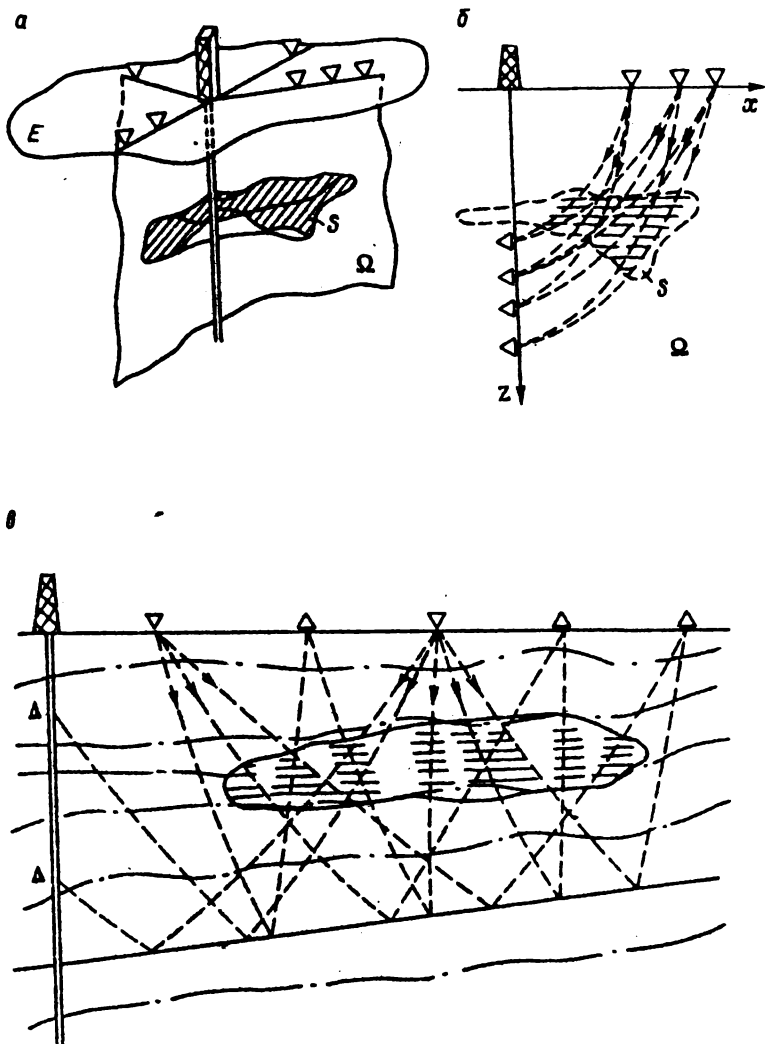


Рис. 1.

регистрированным трехкомпонентными приемниками в скважинах или на дневной поверхности Земли. Наиболее эффектив-

ный метод сейсморазведки — метод отраженных волн, применяемый наиболее широко при поисках и детальной разведке различных полезных ископаемых на суше и на море. Метод базируется на регистрации упругих волн, отраженных от поверхностей и соответствующих скачкам волновых сопротивлений геологических сред. Эти границы, как правило, соответствуют литологическим и тектоническим границам. При проведении сейсморазведки в новом неисследованном районе требуется в основном построить макромодель среды, т. е. проследить основные отражающие границы, и определить средние значения упругих параметров (желательно с их градиентами) в пределах каждого геологического пласта. При проектировании разработки месторождений макромодель известна, и цель сейсморазведки заключается в получении детальной и достоверной информации об упругих параметрах в пределах основных слоев.

Решения задач сейсмологии и сейсморазведки определяются связью свойств среды и соответствующей трансформацией зондирующего сигнала, т. е. *уравнением распространения упругих волн*.

Задача распространения сейсмических волн базируется на модели *идеально упругого тела*, в основе которого лежит линейная связь между *деформацией*, т. е. изменением формы либо объема элемента твердого тела, и возвращающей *упругой силой*. В этой модели в неявной форме закладывается предположение о "близкодействии", т. е. о том, что взаимодействие элементов твердого тела осуществляется только через поверхности разделяющих их границ. Вдали от очага землетрясения или от пункта взрыва можно считать деформации горных пород малыми, а потому можно пользоваться моделью идеально упругого тела.

Запишем основные соотношения *математической теории упругости*. Сдвиг элементов может быть вызвано объемной силой

$$df = sdV,$$

где  $s = s(x) \triangleq df/dV$  — плотность объемной силы  $f$  либо поверхностной силы  $df = t d\sigma$ . При этом  $t$  — плотность поверхностных сил, приложенных к элементу поверхности  $d\sigma$  рассматриваемого элемента  $dV$ , называемая *напряжением*:

$$t = t(x) \triangleq \frac{df}{d\sigma}.$$

Обозначим величину смещения относительно равновесного состояния элемента объемом  $dV$  с плотностью  $\rho$  через  $\varphi = \varphi(x)$ , запишем уравнение движения

$$\rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = s + s', \quad (2.1)$$

где  $s' = K\varphi$  — плотность возвращающей упругой силы, вызванной смещением  $\varphi$  и являющейся результатом интегрирования вектора плотности поверхностной силы, приложенной к выделенному элементу объема:

$$\iiint s' dV = \iint t d\sigma. \quad (2.2)$$

Учитывая, что  $t = t(n)$ , где  $n$  — направление внешней — по отношению к рассматриваемому элементу объема — нормали, можно записать:

$$t(n) = -t(-n).$$

Из условия

$$\frac{|\iint t(n) d\sigma|}{\iint d\sigma} \xrightarrow{\Delta V \rightarrow 0} 0$$

для распределения напряжений на элементарном тетраэдре (рис. 2) можно записать:

$$\frac{t(n)\Delta\sigma_n + t(-e_1)\Delta\sigma_1 + t(-e_2)\Delta\sigma_2 + t(e_3)\Delta\sigma_3}{\Delta\sigma_n + \Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2 + \Delta\sigma_3} \xrightarrow{\Delta V \rightarrow 0} 0.$$

Откуда

$$t(n) = \sum_j t(e_j)(e_j \cdot n) = \sum_j t(e_j)n_j, \quad (2.3)$$

т. е. соотношение (2.3) определяет связь плотности поверхностной силы (напряжения)  $t$ , действующей в направлении  $n$ , и плотностей поверхностной силы в направлении ортов  $e$ . Представление (2.3) дает возможность ввести *тензор напряжений*:

$$t = \hat{r}n, \quad (2.4)$$

т. е.  $t_i = \sum_j \tau_{ij}n_j$ , где  $\tau_{ij} = t_i(e_j)$  —  $i$ -я компонента вектора напряжений, действующего на плоскость, нормальную орту  $e_j$ , вызванного действием упругой возвращающей силы со стороны частей тела, внешних по отношению к выделенному элементу. Заметим, что  $\hat{r} = \hat{r}(x)$ , т. е. деформированное тело описывается

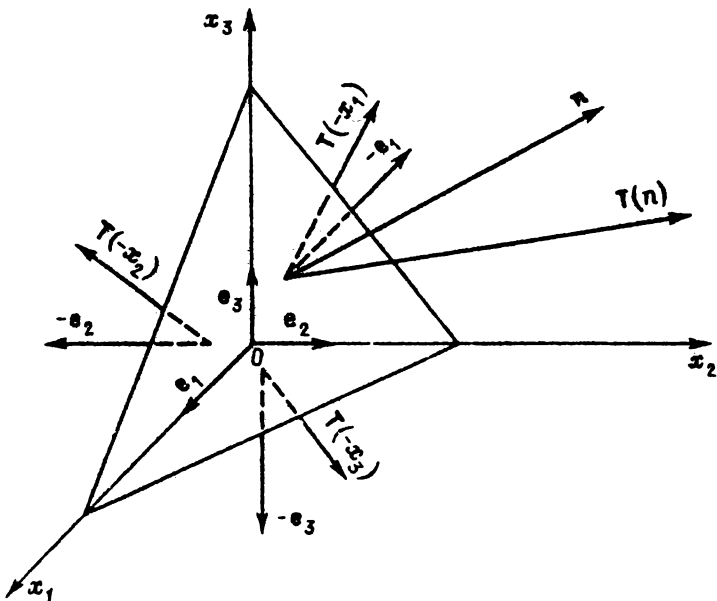


Рис. 2.

полем тензора напряжений. Симметричный тензор  $\hat{\tau}$  можно привести к диагональному виду:  $\tau_{ij} = \tau_i^0 \delta_{ij}$ , здесь  $\tau_i^0$  — главные оси напряжений;  $\delta_{ij} = 1, i = j, \delta_{ij} = 0, i \neq j$  ( $\delta_{ij}$  — символ Кронекера). Используя (2.4) и применяя теорему Остроградского — Гаусса, получаем:

$$\iint \mathbf{t}(\mathbf{n}) d\sigma = \iint \hat{\tau} \mathbf{n} d\sigma = \iiint (\nabla \cdot \hat{\tau}) dV,$$

откуда для плотности объемной возвращающей упругой силы (2.2) находим

$$\mathbf{s}' = (\nabla \cdot \hat{\tau}). \quad (2.5)$$

В линейной теории упругости связь между напряжениями и деформациями (смещениями  $\varphi$ ) принимается линейной (закон Гука), т. е.

$$\hat{\tau} = \tilde{K} \hat{\varepsilon}, \quad (2.6)$$

где  $\hat{\epsilon}$  — тензор деформаций, определяемый выражением

$$d\varphi \triangleq \hat{\xi} dx \triangleq \hat{\epsilon} dx - \hat{\eta} dx. \quad (2.7)$$

В этом выражении общий тензор  $\hat{\xi}$  представляется в виде разложения на симметричный:

$$\hat{\epsilon} = \hat{\epsilon}^+, \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right),$$

и антисимметричный:

$$\hat{\eta} = -\hat{\eta}, \quad \eta_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right).$$

Причем антисимметричный тензор  $\hat{\eta} = (\nabla \times \varphi x)/2$  описывает вращение при условии, что  $|\partial \varphi_i / \partial x_j| \ll 1$ , а  $K$  — тензор 4-го ранга модулей упругости,

$$\tau_{ij} = \sum_{kl} K_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (2.8a)$$

( $i, j, k, l = 1 \div 3$ ) определяет упругие свойства среды и обладает свойствами симметрии вследствие симметрии тензоров напряжений и деформаций:

$$K_{ijkl} = K_{jikl} = K_{ijlk} = K_{jilk}, \quad (2.8b)$$

т. е. тензор  $K$  имеет 21 независимую компоненту.

Для решения задач сейсмологии и сейсморазведки в подавляющем большинстве случаев используется модель изотропной неоднородной упругой среды, локально инвариантной относительно вращения. Рассмотрим модель среды, в которой главные оси тензора напряжений и тензора деформаций совпадают. Пусть, например, растягивающие напряжения приложены вдоль однородного стержня, который удлиняется в продольном направлении и сжимается в поперечном. Если первый координатный орт направить вдоль стержня, то можно записать (2.6) в виде

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{E} \tau_{11}, \quad (2.9a)$$

$$\epsilon_{22} = \epsilon_{33} = -\frac{\sigma}{E} \tau_{11}. \quad (2.9b)$$

Коэффициент  $E$  называется *модулем Юнга*,  $\sigma$  — *коэффициент Пуассона*, при этом  $E$  и  $\sigma$  — константы материала стержня, описывающие его упругие свойства. Все компоненты тензора напряжений, кроме  $\tau_{11}$ , и три компоненты тензора деформаций

$\epsilon_{23}, \epsilon_{12}, \epsilon_{13}$  — равны нулю. Если к тензору напряжения  $\tau_{11}$  добавить тензоры  $\tau_{22}$  и  $\tau_{33}$ , то деформация  $\epsilon_{11}$  из (2.9а) изменится в соответствии с принятой линейной моделью и условием (2.9б) следующим образом:

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{E}\tau_{11} - \frac{\sigma}{E}\tau_{22} - \frac{\sigma}{E}\tau_{33}, \quad (2.9в)$$

при этом  $\tau_{23} = 0$  и  $\epsilon_{23} = 0$ . Выражение (2.9в) можно переписать в виде

$$E\epsilon_{11} = (1 + \sigma)\tau_{11} - \sigma(\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33})$$

или  $E\hat{\epsilon} = (1 + \sigma)\hat{\tau} - \sigma \text{sp } \hat{\tau} \hat{I}, \quad (2.10)$

( $I$  — единичный оператор). Как видим, связь тензоров напряжения и деформаций в случае изотропной упругой среды определяется двумя параметрами, например модулем Юнга и коэффициентом Пуассона. Сворачивая тензоры в левой и правой частях формулы (2.10), получаем

$$E \text{sp } \hat{\epsilon} = (1 + \sigma) \text{sp } \hat{\tau} - 3\sigma \text{sp } \hat{\tau} = (1 - 2\sigma) \text{sp } \hat{\tau},$$

поэтому (2.10) можно переписать как

$$(1 + \sigma)\hat{\tau} = E\hat{\epsilon} + \frac{\sigma E}{1 - 2\sigma} \text{sp } \hat{\epsilon} \hat{I}$$

или

$$\hat{\tau} = \frac{E}{1 + \sigma} \hat{\epsilon} + \frac{\sigma E}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} \text{sp } \hat{\epsilon} \hat{I} \triangleq 2\mu \hat{\epsilon} + \lambda \text{sp } \hat{\epsilon} \hat{I}. \quad (2.11)$$

Параметры  $\mu = E/[2(1 + \sigma)]$  и  $\lambda = \sigma E/[(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)]$  известны как *параметры Ламе*. Тензор упругих модулей  $K$  из (2.6) для изотропной среды принимает вид

$$K_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}).$$

Выясним физический смысл  $\text{sp } \hat{\epsilon}$  из (2.7):

$$\text{sp } \hat{\epsilon} = (\nabla \cdot \varphi) \simeq \frac{\prod_i (1 + \partial \varphi_i / \partial x_i) dx_i - \prod_i dx_i}{\prod_i dx_i} = \frac{dV - dV_0}{dV_0},$$

т. е.  $\text{sp } \hat{\epsilon}$  численно равен относительному изменению объема, которое называется *дилатацией*, отсюда ясен смысл параметра Ламе  $\lambda$  ( $\lambda$  — коэффициент при дилатации).

Смысл второго параметра Ламе ( $\mu$ ) проявляется при деформации, не связанной с изменением объема, т. е. при деформации сдвига. Пусть брусок (рис. 3) закреплен на плоскости

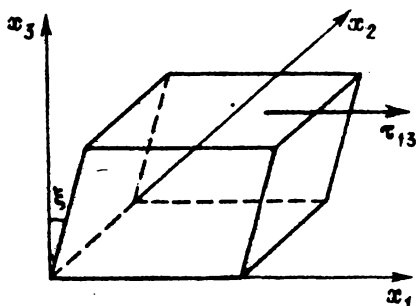


Рис. 3.

$x_3 = 0$  и к верхней грани прикладывается касательное сдвигающее напряжение  $\tau_{13}$ . Тогда малое смещение  $d\varphi_1$  можно выразить через величину угла  $\xi$ :  $d\varphi_1 = \xi dx_3$ , т. е.  $d\varphi_1/dx_3 = \xi$  из (2.7а) находим как  $\epsilon_{31} = \epsilon_{13} = \xi/2$  и  $\tau_{31} = \mu\xi$ . Следовательно, физический смысл параметра Ламе  $\mu_i$  — *модуль сдвига*. Упругая свободная энергия  $F = K\hat{\epsilon}/2$  с точностью до членов второго порядка выражается через параметры Ламе следующим образом:

$$F = \frac{\lambda}{2}(\text{sp } \hat{\epsilon})^2 + \mu \sum_{\substack{i,k \\ i \neq k}} \epsilon_{ik}^2.$$

Отмечая, что любую деформацию можно представить как сумму деформаций чистого сдвига и всестороннего сжатия ( $\hat{\epsilon} = \text{const } \hat{I}$ ), записываем:

$$\hat{\epsilon} = \left( \hat{\epsilon} - \frac{1}{3} \hat{I} \text{sp } \hat{\epsilon} \right) + \frac{1}{3} \hat{I} \text{sp } \hat{\epsilon}.$$

След тензора, записанного в круглых скобках, очевидным образом равен нулю, поэтому  $F$  можно представить в форме

$$F = \mu \sum_{\substack{i,k \\ i \neq k}} \left( \epsilon_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \text{sp } \hat{\epsilon} \right)^2 + \frac{k}{2} (\text{sp } \hat{\epsilon})^2,$$

где  $k = \lambda + 2\mu/3$  — *модуль всестороннего сжатия*. Запишем уравнение движения (2.1), используя формулу для возвращаю-

шей упругой силы (2.5) и закон Гука (см. (2.6)):

$$\rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \mathbf{s} + \nabla \cdot \tilde{K} \hat{\varepsilon} = \mathbf{s} + \nabla \cdot \tilde{K} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}}, \quad (2.12)$$

так как из (2.7) следует

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}} = \hat{\varepsilon} - \hat{\eta} = \hat{\varepsilon} - \left[ \frac{1}{2} (\nabla \times \varphi) \mathbf{x} \right],$$

$$\nabla \cdot [\tilde{K} (\nabla \times \varphi) \mathbf{x}] \equiv 0.$$

Уравнение (2.12) будем называть *уравнением Ламе*, а оператор

$$L \triangleq \rho \partial_t^2 - \nabla \cdot \tilde{K}_x \hat{\partial}_x \quad (2.13)$$

оператором Ламе, при этом (2.12) записывается как

$$L\varphi = \mathbf{s}.$$

Обобщенным оператором Ламе будем называть оператор  $\mathcal{L}$ , учитывая граничные и начальные условия (линейные), накладываемые на  $\varphi$ :

$$\hat{L}\varphi = \mathbf{s}, \quad \hat{\Gamma}\varphi = \mathbf{g}.$$

Тогда

$$\hat{\mathcal{L}} = \left\| \begin{array}{c} \hat{L} \\ \hat{\Gamma} \end{array} \right\|.$$

Для изотропной среды уравнение Ламе приобретает вид

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \varphi - \mu \Delta \varphi - \nabla \lambda \nabla \cdot \varphi - \\ - \nabla \mu \times \nabla \times \varphi - 2(\nabla \mu \cdot \nabla) \varphi = \mathbf{s}. \end{aligned} \quad (2.14a)$$

Для однородной изотропной среды ( $\lambda = \text{const}, \mu = \text{const}, \rho = \text{const}$ ) формула (2.14a) переписывается как

$$\rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \varphi - \mu \Delta \varphi = \mathbf{s}. \quad (2.14b)$$

Учитывая тождество:

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = \nabla \nabla \cdot \varphi - \nabla \times \nabla \times \varphi,$$

уравнение (2.14a) перепишем в виде

$$\rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot \varphi - \mu \nabla \times \nabla \times \varphi = \mathbf{s}. \quad (2.14b)$$



Используя теорему Гельмгольца, векторное поле  $\varphi$  можно представить как сумму потенциального ( $\varphi_p$ ) и соленоидального ( $\varphi_s$ ) векторных полей:

$$\varphi \triangleq \varphi_p + \varphi_s = -\nabla\Phi + \nabla \times \mathbf{A}, \quad (2.15)$$

где  $\mathbf{A} : \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ;  $\Phi$  — скалярный потенциал;  $\mathbf{A}$  — векторный потенциал. Подставив в (2.14в) представления  $\varphi = \varphi_p + \varphi_s$  и  $\mathbf{s} = \mathbf{s}_p + \mathbf{s}_s$ , а затем применив к правой и левой частям операторы  $\nabla \times (\cdot)$  и  $\nabla \cdot (\cdot)$ , получим систему волновых уравнений для  $\varphi_p$ :

$$\begin{aligned} \nabla \times \varphi_p = 0 &\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi_p - \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \nabla \nabla \cdot \varphi_p \triangleq \\ &\triangleq \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - v_p^2 \Delta \right) \varphi_p = s_p \end{aligned} \quad (2.16a)$$

и для  $\varphi_s$ :

$$\begin{aligned} \nabla \times \varphi_s = 0 &\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi_s - \frac{\mu}{\rho} \nabla \nabla \cdot \varphi_s \triangleq \\ &\triangleq \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - v_s^2 \Delta \right) \varphi_s = s_s. \end{aligned} \quad (2.16b)$$

Подставив частное решение уравнений (2.16) в форме

$$\varphi_{ps} = \mathbf{e}_{ps} f_{ps}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - v_p t), \quad (2.17)$$

где  $|\mathbf{e}_{p,s}| = 1$ , и учитывая, что из условия  $\nabla \times \varphi_p \equiv 0$  следует  $[\mathbf{n} \times \mathbf{e}_p] f' = 0$ , а из условия  $\nabla \cdot \varphi_s \equiv 0$  следует  $[\mathbf{n} \times \mathbf{e}_s] f' = 0$ , можно интерпретировать компоненту  $\varphi_p$  как *продольную волну*, распространяющуюся со скоростью  $v_p = ((\lambda + 2\mu)/\rho)^{1/2}$ , причем направление вектора поляризации  $\mathbf{e}_p$  совпадает с направлением распространения плоской волны с нормалью к фронту  $\mathbf{n}$ ; соответственно интерпретируем  $\varphi_s$  как *поперечную волну*, скорость которой  $v_s = (\mu/\rho)^{1/2}$ , а направление вектора смещений  $\mathbf{e}_s$  — ортогонально направлению распространения этой волны. В силу условий  $\nabla \cdot \varphi_s = s_p \hat{\varepsilon}$  и  $\nabla \cdot \varphi_s \equiv 0$  поперечная волна  $\varphi$  не связана с изменением объема, а является волной сдвига. В то же время в силу  $\nabla \times \varphi_p \equiv 0$  продольная волна является волной дилатации (сжатия — растяжения). Следует отметить, что представление о продольных и поперечной волнах является следствием трансляционной (по времени и пространству) инвариантности характеристик среды.

Рассмотрим более подробно ситуацию для однородной анизотропной среды [45 — 47]. В силу симметрии (2.8) тензор модулей упругости  $K$  можно представить в виде блочной симметричной матрицы:

$$\tilde{K} \rightarrow K_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{26} \\ K_{61} & K_{62} & K_{66} \end{vmatrix}, \quad (2.18)$$

$$K_{\alpha\beta} = K_{\beta\alpha};$$

если между парами  $ij$  и  $kl$  из (2.8) и  $\alpha, \beta$  соответственно ввести связь, например, вида  $i, i \leftrightarrow i$ ;  $(2, 3) = (3, 2) \leftrightarrow 4$ ;  $(3, 1) = (1, 3) \leftrightarrow 5$ ;  $(1, 2) = (2, 1) \leftrightarrow 6$ . Из (2.18) видно, что тензор  $\tilde{K}$  в общем случае имеет не более 21 независимого параметра. В силу трансляционной инвариантности три степени свободы определяются выбором ориентации системы координат, поэтому независимыми остаются 18 параметров.

В изотропной среде в представлении (2.18) тензор  $\tilde{K}$  имеет следующий вид:

$$\tilde{K}_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{vmatrix}.$$

Запишем уравнение движения при отсутствии источника ( $s = 0$ ):

$$\rho \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} = \sum_{k,l,j} K_{ijkl} \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi_k. \quad (2.19)$$

Подставив сюда частное решение в виде плоской волны:  $\varphi = ef(t - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}))$ , где  $\mathbf{p}$  — вектор медленности (градиент фазонала), получим условие

$$\det \left| \rho \delta_{ik} - \sum_{j,l} K_{ijkl} p_j p_l \right| = 0 \quad (2.20)$$

Общее решение уравнения (2.20) для произвольной анизотропной среды отсутствует.

В изотропной среде уравнение (2.20) сводится к трем квадратным уравнениям для компонент медленности: продольной волны и поперечной двух типов.

Акустические методы нашли широкое применение при изучении океанической толщи и океанического осадочного чехла. В ходе исследований выяснилось, что глубокий океан имеет различный рельеф дна. К его основным структурным элементам относятся абиссальные равнины, срединно-океанические хребты, малые формы (срединно-океанические острова и шельфы архипелагов), крупные зоны разломов. Особое значение детальное изучение этих структурных элементов приобрело в связи с бурным развитием геодинамики, а также при решении прикладных задач (например, при поиске железисто-марганцевых конкреций, нефти и газа в шельфовой зоне). Наличие волновода в приповерхностной водной толще, обеспечивающего дальнейшее распространение звуковых волн, обуславливает уникальность акустических сигналов при зондировании громадных акваторий. Анализ подводного распространения звука базируется на законах теоретической акустики [16-18]. Распространение звуковых колебаний подчиняется волновому уравнению с соответствующими граничными условиями на поверхности и на дне океана. Задача акустической томографии сводится к восстановлению поля скорости распространения звука, т. е. к восстановлению волнового оператора по значениям поля акустического давления в нескольких пространственных точках ("точках приема").

Запишем уравнение движения в форме 2-го закона Ньютона для элемента объема ( $dV$ ) жидкости:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho v dV = S + S', \quad (2.21)$$

где  $S = \int_V s \rho dV$  — внешняя массовая сила по аналогии с (2.1);  $S' = \int_V s' dV$  — результирующая сила воздействия окружающей жидкости на элемент объема, т. е.

$$S' = - \oint_{\partial V} p d\sigma = - \int_V \nabla p dV \quad (2.22)$$

( $p$  — давление). Чтобы записать полную производную по времени в левой части уравнения (2.21), напомним связь субстанциональной ( $d/dt$  — производной по траектории) и локальной

$(\partial/\partial t)$  производных:

$$\frac{d}{dt}f(x(t), t) = \frac{\partial}{\partial t}f + \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt},$$

т. е.  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla).$  (2.23)

Представим также выражение для субстанциальной производной от интеграла по малому объему  $V$ , движущемуся вместе с выделенным элементом жидкости, т. е. составленному из одних и тех же частиц:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{F} dV &= \frac{d}{dt} \int_{\tilde{V}} \mathbf{F} J d\tilde{V} = \int_{\tilde{V}} \frac{d}{dt} (\mathbf{F} J) d\tilde{V} = \\ &= \int_V \frac{1}{J} \frac{d}{dt} (\mathbf{F} J) dV = \int_V \left[ \frac{d}{dt} \mathbf{F} + \mathbf{F} \left( \frac{1}{J} \frac{dJ}{dt} \right) \right] dV = \\ &= \int_V \left[ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{F} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{F} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{F} \right] dV. \end{aligned}$$

Здесь  $J$  — якобиан; в последнем переходе использовано равенство

$$\frac{1}{J} \frac{dJ}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{v}.$$

С использованием формул (2.23) и (2.22) левая часть (2.21) принимает вид

$$\begin{aligned} \int_V \frac{d}{dt} (\rho \mathbf{v}) dV &= \int_V \left( \mathbf{v} \frac{d}{dt} \rho + \rho \frac{d}{dt} \mathbf{v} \right) dV = \\ &= \int_V \left\{ \mathbf{v} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \rho + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho + (\nabla \cdot \mathbf{v}) \rho \right] + \rho \frac{d}{dt} \mathbf{v} \right\} dV. \end{aligned} \quad (2.24)$$

В уравнение (2.21) входят переменные функции  $p$ ,  $\rho$ ,  $\mathbf{v}$ . Для получения замкнутого уравнения необходимо дополнить (2.21) соотношениями, связывающими эти функции. Учитывая, что термодинамическое уравнение состояния в общем случае представляется как  $p = p(\rho, H)$  ( $H$  — энтропия системы), запишем полную систему для уравнения движения в виде

$$\frac{d}{dt} (\rho \mathbf{v}) + \nabla p = \mathbf{s}; \quad (2.25)$$

для уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.26)$$

(из условия

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \oint_{\partial V} \rho \mathbf{v} \cdot d\sigma = - \int_V (\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) dV$$

$$\text{или } \frac{\partial}{\partial t} \rho + \rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho = 0;$$

для уравнения состояния:

$$p = p(\rho, H); \quad (2.27)$$

и для уравнения изоэнтропичности (адиабатичности):

$$\frac{\partial}{\partial t} H + \nabla \cdot (H \mathbf{v}) = 0 \quad (2.28)$$

(жидкость не обладает теплопроводностью).

В силу уравнения неразрывности (2.26) выражение в квадратных скобках в (2.24) будет равно нулю, и уравнение движения (2.25) (уравнение Эйлера) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{s}.$$

Линейные уравнения движения можно получить, используя ряд упрощающих предположений: несжимаемости жидкости —  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ; ее баротропности —  $p = p(\rho(t))$ ; малых возмущений стационарных течений —  $p = p_0 + p_1$ ,  $\rho = \rho_0 + \rho_1$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1$ . Заменим исходную систему уравнений (2.25) — (2.28) с учетом сделанных предположений системой вида

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{s}_0 + \epsilon \mathbf{s}_1 \quad (2.29)$$

(будем считать, что решение системы (2.25) — (2.28):  $p_0 = 0$ ,  $\rho_0 = 0$ ,  $\mathbf{v}_0 = 0$  — соответствует гидростатическому состоянию и вызвано действием массовой силы  $\mathbf{s}_0$  (например, полем силы тяжести  $\mathbf{g} \equiv \mathbf{s}_0$ , а наличие возмущений  $p_1$ ,  $\rho_1$ ,  $\mathbf{v}_1$  — действием возмущающей силы  $\epsilon \mathbf{s}_1$ , содержащей малый параметр). Система вида

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho = 0 \quad (2.30)$$

соответствует (2.26) при учете несжимаемости ( $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ). Но возможна и система вида

$$p = p(\rho). \quad (2.31)$$

Тогда система уравнений для возмущенной среды записывается следующим образом, если опустить индекс 1 ( $p_1 \Rightarrow p$ ,  $\rho_1 \Rightarrow \rho$ ,  $\mathbf{v}_1 \Rightarrow \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{s}'_1 \Rightarrow \mathbf{s}$ ):

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} - \frac{\rho}{\rho_0^2} \nabla p_0 + \frac{1}{\rho_0} \nabla p = \mathbf{s}; \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \rho_0 (\nabla \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho_0 = 0; \quad (2.33)$$

$$p \equiv \frac{dp}{d\rho} \rho \triangleq c^2 \rho. \quad (2.34)$$

Как правило, в задачах акустики океана непосредственно измеряемой величиной является давление. Для вывода замкнутого уравнения относительно  $p$  опустим в последней системе (2.32), (2.33) члены, содержащие  $\nabla p_0$  и  $\nabla \rho_0$  (пренебрегаем действием объемных сил типа силы тяжести). Продифференцировав по времени (2.33):

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho + \rho_0 (\nabla \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}) = 0$$

и подставив вместо  $\partial/\partial t \mathbf{v}$  выражение из системы (2.32), а вместо  $\rho$  — выражение из (2.34) ( $\rho = c^{-2} p$ ), получим

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p = \nabla \cdot \mathbf{s}. \quad (2.35)$$

Итак, волновое уравнение (2.35) описывает распространение волн, вызванных действием возмущающей силы ( $\mathbf{s}$ ), при этом скорость распространения звуковых волн  $c = (\partial p / \partial \rho)^{1/2}$ .

Заметим, что по известному решению (2.35)  $p = p(\mathbf{x}, t)$  можно путем интегрирования (2.32) при  $\nabla p_0 = 0$  получить поле скорости ( $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ ):

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t_0) - \frac{1}{\rho_0} \nabla \int_{t_0}^t p(\mathbf{x}, \tau) d\tau.$$

Закон распространения акустического зондирующего сигнала (2.35) можно представить теперь в операторной форме, аналогично закону распространения упругих волн (2.13):  $L\varphi = \mathbf{s}$ , здесь  $L \Rightarrow \Delta - [c^2(\mathbf{x})]^{-1} \partial_t^2$ ,  $\varphi \Rightarrow p$ ,  $\mathbf{s} \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{s}$ .

## 2. 3. ВОЛНОВЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ В ЗАДАЧАХ ГЕОЭЛЕКТРИКИ И ЗОНДИРОВАНИЯ ИОНОСФЕРЫ

Электромагнитные методы разведки основываются на влиянии параметров среды на распространение электромагнитных полей. Первичные электромагнитные поля можно возбудить, пропуская переменный ток через небольшую рамку, состоящую из многих витков провода, или большую петлю. Откликом среды будет появление вторичных электромагнитных полей. Возникающие поля можно обнаружить с помощью переменных токов, индуцируемых ими в приемной рамке под влиянием электромагнитной индукции. Первичное электромагнитное поле распространяется от генераторной рамки к приемной как выше, так и ниже поверхности Земли. В условиях однородного разреза электромагнитные поля, распространяющиеся выше земной поверхности и через разрез, различаются лишь незначительным ослаблением при прохождении через разрез. Но в присутствии проводящего тела магнитная компонента электромагнитного поля, проникающего в среду, возбуждает в теле переменные индуцированные или вихревые токи. Вихревые токи порождают собственное вторичное электромагнитное поле, приходящее к измерительному прибору, который фиксирует сигналы прихода первичного и вторичного полей. Эти сигналы отличаются как по фазе, так и по амплитуде от сигнала, обусловленного одним первичным полем. Такие различия между переданным и принятым сигналами электромагнитных полей обусловлены присутствием проводника и несут информацию о его геометрических и электрических свойствах [27]. Аномальные поля с высокой электропроводностью вызывают сильные вторичные электромагнитные поля. С начала 70-х годов для электромагнитного зондирования Земли активно применяются мощные импульсные магнитогидродинамические (МГД) генераторы. Один МГД-генератор позволяет произвести съемку на обширной территории и достичь глубин зондирования порядка первых десятков километров в разрезах с высоким сопротивлением.

Большое прикладное значение имеют также исследования ионосферы методами электромагнитного зондирования. При помощи этих методов найдены основные закономерности строения ионосферы.

Математическая модель распространения электромагнитных сигналов может быть построена на основе системы уравнений Максвелла. Приведем основные физические законы, на которых базируется построение этой системы.

**Закон Кулона**  $\mathbf{E} = (q/|r|^3)\mathbf{r}$ , откуда вследствие суперпозиции ( $\mathbf{E}$  — вектор напряженности электрического поля;  $q$  — величина заряда)

$$\oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\sigma = 4\pi \int_V q dV. \quad (2.36a)$$

Используя теорему Гаусса — Остроградского:

$$\oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\sigma = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV,$$

запишем дифференциальную форму выражения (2.36a):

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi q. \quad (2.36b)$$

*Экспериментальное подтверждение отсутствия магнитных зарядов* (поле  $\mathbf{H}$  — вихревое):

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\sigma \equiv 0 \quad (2.37a)$$

или в дифференциальной форме:

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0. \quad (2.37b)$$

*Обобщенный закон Фарадея* (связь электродвижущей силы в контуре, стягивающем поверхность  $S$ , с изменением магнитного потока через эту поверхность); на рис. 4 показаны дифференциалы векторных величин в формуле Стокса):

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{H} \cdot d\sigma. \quad (2.38a)$$

По теореме Стокса  $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\sigma$ , поэтому (2.38a) можно переписать в виде

$$\int (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\sigma = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{H} \cdot d\sigma \quad (2.38b)$$

или в дифференциальной форме:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}. \quad (2.38a)$$



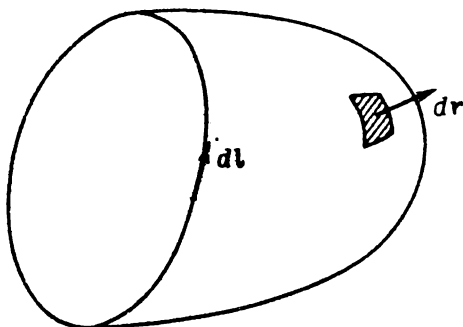


Рис. 4.

*Гипотеза Максвелла* состояла в предположении, что циркуляция магнитного поля связана с изменением потока (по аналогии с (2.38в)):

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}. \quad (2.39)$$

*Закон Эрстеда* (связь движения зарядов с возникновением магнитного поля в контуре, охватывающем ток):

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int \mathbf{j} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \frac{4\pi}{c} J \quad (2.40a)$$

или в дифференциальной форме:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (2.40b)$$

Если принять гипотезу Максвелла, то анализ выражений (2.39) и (2.40b) показывает, что циркуляция магнитного поля связана как с токами  $\mathbf{j}$ , так и с изменением  $\mathbf{E}$  ("токами смещения")

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (2.41)$$

Отметим, что гипотеза Максвелла (2.39) может быть обоснована применением уравнения неразрывности ("электрические заряды не возникают и не исчезают"), т. е. изменение заряда

внутри выделенного объема  $V$  связано лишь с потоком заряда через поверхность, охватывающую объем  $V$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V q dV &= - \oint_{\partial V} (qv) d\sigma \triangleq \\ &\triangleq - \int_{\partial V} \mathbf{j} \cdot d\sigma = - \int_V \nabla \cdot \mathbf{j} dV, \end{aligned} \quad (2.42a)$$

а в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t} q + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (2.42b)$$

Если использовать для связи циркуляции магнитного поля и тока лишь закон Эрстеда (2.40а), то, применяя оператор дивергенции к правой и левой частям этого выражения, записываем:

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \nabla \cdot \mathbf{j}.$$

Здесь левая часть уравнения тождественно равна, а правая не равна нулю: в соответствии с уравнением непрерывности (2.42б) правая часть должна быть дополнена слагаемым  $\partial/\partial t q$ , т. е.

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} q = \frac{4\pi}{c} \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \mathbf{E},$$

где при последнем переходе мы использовали закон Кулона (2.36а). Как известно, наиболее простые уравнения для динамики электромагнитных полей получаются при введении потенциалов поля. В силу (2.37б) и тождеств  $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} \equiv 0$ ,  $\forall \mathbf{A}$ , вектор  $\mathbf{H}$  всегда может быть представлен следующим образом:

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (2.43)$$

где  $\mathbf{A}$  — векторный потенциал. С использованием  $\mathbf{A}$  (2.38в) принимает вид

$$\nabla \times \mathbf{F} = -\frac{1}{c} \left( \nabla \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \right), \quad (2.44)$$

$$\text{т. е. } \nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \right) = 0.$$

Последнее равенство с учетом тождества  $\nabla \times \nabla \varphi = 0$ ,  $\forall \varphi$ , дает возможность записать представление вида

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} = -\nabla \varphi, \quad (2.45)$$

где  $\varphi$  — скалярный потенциал.

Для определения  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$  используем формулы (2.366) и (2.41). Подставив выражение для  $\mathbf{E}$  из (2.45) в (2.366), получим

$$\Delta\varphi = -4\pi q - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A}. \quad (2.46)$$

Подставив (2.43) и (2.45) в (2.41), аналогично получаем

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} - \frac{1}{c} \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (2.47a)$$

Используя тождество  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \cdot \nabla \cdot \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}$ , формулу (2.47a) перепишем в виде

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right). \quad (2.47b)$$

Наконец, используя свободу в выборе  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$ , примем следующее условие:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

— "калибровка Лоренца". В этой калибровке выражение (2.47b) принимает вид векторного волнового уравнения:

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j},$$

а выражение (2.46) — вид скалярного волнового уравнения:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi q.$$

Запишем уравнения Максвелла (2.366) — (2.41) для изотропных сред:

$$\nabla \cdot \epsilon \mathbf{E} = 4\pi q, \quad (2.48a)$$

$$\nabla \cdot \mu \mathbf{H} = 0, \quad (2.48b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}, \quad (2.48c)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \epsilon \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}. \quad (2.48d)$$

Здесь  $\epsilon$  и  $\mu$  — соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемости среды. Уравнения (2.48) обычно дополняются законом Ома:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (2.49)$$

где  $\sigma$  — удельная электропроводность среды.

В однородной изотропной среде ( $\sigma = \text{const}$ ,  $\epsilon = \text{const}$ ,  $\mu = \text{const}$ ) при отсутствии сторонних токов ( $\mathbf{j}$ ) и свободных зарядов ( $q$ ) поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  удовлетворяют однородным телеграфным уравнениям:

$$\Delta \mathbf{E} - \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} - \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0, \quad (2.50)$$

$$\Delta \mathbf{H} - \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{H} - \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0. \quad (2.51)$$

Применительно к задачам геоэлектрики можно ввести квазистационарные поля ( $\partial^2/\partial t^2 \mathbf{H} \ll \partial/\partial t \mathbf{H}$ ,  $\partial^2/\partial t^2 \mathbf{E} \ll \partial/\partial t \mathbf{E}$ ), при этом телеграфные уравнения переходят в однородные уравнения диффузии:

$$\Delta \mathbf{E} - \sigma \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} = 0, \quad (2.52)$$

$$\Delta \mathbf{H} - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H} = 0. \quad (2.53)$$

Напомним, как из уравнений (2.39) и (2.41) можно получить связь энергии и вектора потока энергии (вектора Умова — Пойнтинга). Умножив (2.39) скалярно на  $\mathbf{H}$ , а (2.41) скалярно на  $\mathbf{E}$  и сложив полученные уравнения, запишем:

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H} = c \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} - c \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot 4\pi \mathbf{j}, \quad (2.54)$$

а отмечая, что  $\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} \equiv -c \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$ , проинтегрируем обе части выражения (2.54) по объему:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) + (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H})}{8\pi} dV = \int_V \nabla \cdot \left( \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \right) dV - \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV. \quad (2.55)$$

Уравнение (2.55) становится уравнением неразрывности для сохраняющейся величины  $\mathcal{E}$ , имеющей физический смысл энергии:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V d\mathcal{E} = - \int_V \nabla \cdot \mathbf{R} dV - \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV,$$

$$\text{где } d\mathcal{E} = \frac{E^2 + H^2}{8\pi} dV;$$

$$\mathbf{R} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$$

— вектор потока энергии (в силу  $\int_V \nabla \cdot \mathbf{R} dV = - \oint_{\partial V} (\mathbf{R} \cdot d\sigma)$ ). Наконец, последнее выражение имеет физический смысл потерь на джоулево тепло (при  $\mathbf{j} = q\mathbf{v}$  сила Кулона  $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ , а работа в единицу времени равна  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ ).

Для изотропной среды аналогично из (2.48в,г) с учетом (2.49) получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{\epsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi} dV = - \oint_{\partial V} (\mathbf{R} \cdot d\sigma) - \int_V \sigma E^2 dV,$$

т. е. плотность энергии в среде описывается как

$$\frac{\epsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi} = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{8\pi},$$

а вектор Умова — Пойнтинга имеет тот же вид, что и в вакууме:  $\mathbf{R} = [c/(4\pi)] \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ ; мощность потерь на джоулево тепло выражается следующим образом:

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = (\sigma \mathbf{E}) \cdot \mathbf{E} = \sigma E^2.$$

Представленные в этом разделе соотношения служат основной математической модели распространения электромагнитных волновых полей в вакууме и изотропных средах.

## 2. 4. ЗОНДИРОВАНИЕ АТМОСФЕРЫ

Дистанционное зондирование является важным средством изучения структуры и динамики атмосферы. Так, на рис. 5 показана схема зондирования атмосферы со спутника (геометрия наблюдения лимба). Получаемая информация используется для улучшения качества прогноза погоды и разработки методов искусственного воздействия на нее, для исследования загрязнения атмосферы.

Дистанционное зондирование атмосферы основывается на явлении переноса солнечного излучения либо генерированного атмосферой теплового излучения, являющихся по своей природе электромагнитными. Феноменологическую теорию переноса можно рассматривать как предельный случай строгой статистической теории, опирающейся на стохастические волновые уравнения [7]. Теория переноса оперирует так называемыми фотометрическими понятиями (как указывают авторы работы

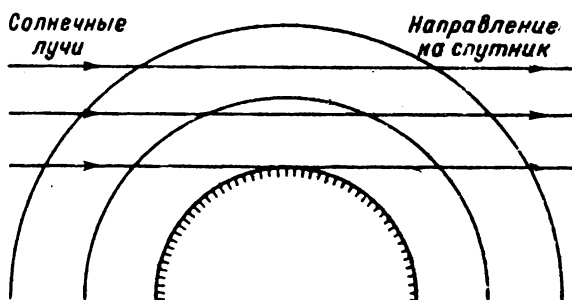


Рис. 5.

[7], фотометрические величины с равным успехом могут называться *акустометрическими*). Применимость феноменологической теории переноса обеспечивается следующими условиями: 1) волновое поле выступает как лучевое, т. е. выполнены условия применимости геометрической оптики; 2) полная некогерентность лучей (аддитивность переносимой величины), т. е. исключается интерференция; 3) наблюдаемая величина — осредненный по времени и пространству процесс (т. е. используются квадратичные величины волновых полей); 4) излучение предполагается стационарным и эргодичным.

Рассмотрим в пространственной точке  $X$  лучистый поток  $dP$  в направлении  $\mathbf{n}$  ( $|\mathbf{n}| = 1$ ), проходящий в телесном угле  $d\Omega$  через площадку  $d\sigma$  (рис. 6):

$$dP = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{n})(\mathbf{n} \cdot d\sigma)d\Omega.$$

Величина  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{n})$  называется *интенсивностью* или *яркостью* излучения, т. е.

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \frac{dP}{d\Omega d\sigma \cos(\widehat{\mathbf{n}d\sigma})}.$$

Рассмотрим физические основания для вывода интегродифференциального уравнения переноса. Изменение

интенсивности излучения ( $\Delta\varphi$ ) на малой длине ( $\Delta l$ ) в направлении  $\mathbf{n}$  связано, во-первых, с поглощением, которое пропорционально интенсивности ( $\varphi$ ), во-вторых, с рассеянием из-

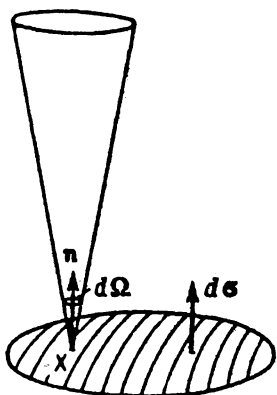


Рис. 6

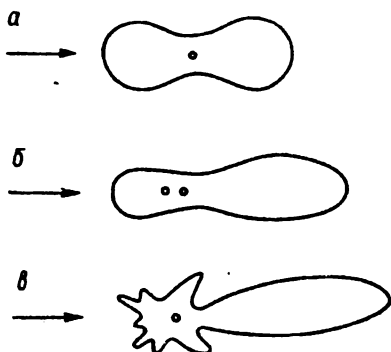


Рис. 7

лучения  $\varphi$  с направления  $\mathbf{n}$  по всем другим (на рис. 7 приведены примеры угловых распределений интенсивности излучения рассеяния мелкими (а), крупными (б) и сверхкрупными (в) частицами):

$$\begin{aligned} &\sim \frac{1}{4\pi} \int q(\mathbf{n}' \leftarrow \mathbf{n}) \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{n}) d\mathbf{n}' = \\ &= \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \frac{1}{4\pi} \int q(\mathbf{n}' \leftarrow \mathbf{n}) d\mathbf{n}', \end{aligned}$$

в-третьих, с вкладом в интенсивность потока с направлением  $\mathbf{n}$  излучения, рассеянного во всех других направлениях:

$$\sim \frac{1}{4\pi} \int q(\mathbf{n} \leftarrow \mathbf{n}') \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{n}') d\mathbf{n}',$$

в-четвертых, с источником излучения. Поэтому уравнение переноса имеет вид (с учетом  $\nabla_{\mathbf{n}} = (\mathbf{n}, \nabla)$  и  $\alpha_s + \alpha_a \triangleq \alpha$ ):

$$(\mathbf{n} \cdot \nabla) \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{n}) + \alpha \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{n}) - \frac{1}{4\pi} \int q(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{n}') \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{n}') d\mathbf{n}' = s(\mathbf{x}, \mathbf{n}), \quad (2.56)$$

а в операторной форме

$$L\varphi = s, \quad (2.57)$$

$$\text{где } L = (\mathbf{n} \cdot \nabla) + \alpha \hat{I} - \frac{1}{4\pi} \langle q(\mathbf{n}, \mathbf{n}') \rangle,$$

причем символ  $\langle q(\mathbf{n}, \mathbf{n}') \rangle$  означает  $\int q(\cdot) d\mathbf{n}'$ ;  $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{n})$  — поле зондирующего сигнала;  $s = s(\mathbf{x}, \mathbf{n})$  — источник сигнала. Подставив оператор  $L$  из (2.57) в виде  $L = L_0 - S$  ( $S$  — оператор рассеяния),

$$S = \alpha \hat{I} + \frac{1}{4\pi} \langle q(\mathbf{n}, \mathbf{n}') \rangle,$$

можно записать решение уравнения переноса в виде ряда по кратностям рассеяния:

$$\varphi = \varphi_0 + L_0^{-1} S L_0^{-1} s + L_0^{-1} S L_0^{-1} S L_0^{-1} s + \dots,$$

$$\text{где } L_0^{-1} s = \varphi_0,$$

$$\varphi = \varphi_0 \exp \left\{ - \int \alpha(\mathbf{x}) dl \right\}.$$

Отметим, что уравнение переноса (2.56) используется для решения чрезвычайно широкого круга задач, например при изучении переноса моноэнергетических нейтронов (в этом случае принято называть его уравнением Больцмана), в задачах рентгеновской и спектральной томографии, при активном лазерном зондировании и т. д.



## Глава 3

# ЛУЧЕВАЯ ТЕОРИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ

Точные решения задач распространения зондирующих сигналов построены для очень ограниченного класса моделей сред: как правило, это либо однородные среды, либо слоисто-однородные, либо однородные с включениями, имеющими высокую степень пространственной симметрии. Для интерпретации реальных геофизических полей (сейсмических, акустических, электромагнитных) необходимо построить приближенные решения для волн, распространяющихся в неоднородных средах. Так, в Земле существуют не только границы слоев, на которых упругие свойства меняются скачком, но и обширные области, внутри которых происходит систематическое и плавное изменение модулей упругих свойств. С физической точки зрения лучевая теория интерпретируется следующим образом: волны распространяются с локальной скоростью вдоль лучевых траекторий, прибывая в точку наблюдения с амплитудой, определяемой геометрическим расхождением лучей от источника к приемнику.

### 3. 1. ОСНОВЫ ЛУЧЕВОЙ ТЕОРИИ

Одним из самых распространенных методов решения уравнений для волновых полей является *метод геометрической оптики* [8,9,32,89]. Этот метод является коротковолновой асимптотикой поля в плавно-неоднородных, медленно-н стационарных и слабо-консервативных средах: характерные размеры неоднородности много больше длины волны и характерные временные интервалы нестационарности много больше периода

колебаний. Коротковолновая асимптотика позволяет считать среду локально однородной и стационарной и основывается на представлении волнового поля ( $\varphi$ ) в виде "быстрого" фазового и "медленного" амплитудного множителей.

Рассмотрим формальную схему пространственно-временного лучевого метода. Пусть поле  $\varphi$  удовлетворяет однородному линейному уравнению, которое мы, следуя публикации [7], запишем в виде интегрального:

$$L\varphi = \int L(x, x')\varphi(x')d^4x' = 0 \quad (3.1)$$

(в этом разделе мы принимаем  $x = (x_1, x_2, x_3, t)$ ). Будем считать, что оператор  $L$  содержит часть  $L_0$ , ответственную за описание динамики поля  $\varphi$  в консервативной среде, и часть  $L'$ , при которой введем формальный малый параметр  $\alpha$ :

$$L = L_0 + \alpha L'. \quad (3.2)$$

Поле  $\varphi$  представим в виде асимптотического разложения ("дубавово" разложение):

$$\varphi = \mathcal{A}(y, \alpha) \exp\left\{\frac{i}{\alpha}\tau(y)\right\}, \quad (3.3)$$

где  $y = \alpha x$  — "медленный" аргумент;  $\tau$  — фаза (или эйконал);  $\mathcal{A}$  — амплитуда волны, при этом разложение  $\mathcal{A}$  по  $\alpha$  имеет следующую форму:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0(y) + \alpha \mathcal{A}_1(y) + O(\alpha^2).$$

Пусть  $L$  — оператор, близкий к дифференциальному, т. е.  $L(x, x') \neq 0$  при малых значениях  $\Delta x = x' - x$ . Тогда разложение фазовой функции  $\exp\left\{\frac{i}{\alpha}\tau(\alpha x)\right\}$  в точке  $x'$  с точностью до  $O(\alpha^2)$  может быть представлено следующим образом:

$$\begin{aligned} \exp\left\{\frac{i}{\alpha}\tau(\alpha(x + \Delta x))\right\} &= \exp\left\{\frac{i}{\alpha}\left[\tau(\alpha x_0) + \alpha(\Delta x \cdot \partial_y)\tau + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2}\alpha^2(\Delta x \cdot \partial_y)^2\tau + O(\alpha^2)\right]\right\} = \exp\left\{\frac{i}{\alpha}\tau(y)\right\} \times \\ &\quad \times \exp\{i(p \cdot \Delta x)\} \left(1 + \frac{i}{2}\alpha(\Delta x \cdot \partial_y)^2\tau\right) + O(\alpha^2), \end{aligned}$$

где  $p \triangleq \nabla_y \tau$ . Разложение амплитуды с точностью до  $O(\alpha^2)$  записывается так:

$$\mathcal{A}(\alpha x') = \mathcal{A}(\alpha(x + \Delta x)) = (1 + \alpha(\Delta x \cdot \partial_y))\mathcal{A}(x),$$

здесь  $z = \alpha x$ . Окончательно волновое поле в точке  $x'$  выражается формулой

$$\begin{aligned} \varphi(x') = & \exp\left\{\frac{i}{\alpha}\tau(y)\right\} \exp\{i(p \cdot \Delta x)\} \times \\ & \times \left(1 - \alpha \left[(\Delta x \cdot \partial_x) + \frac{i}{2}(\Delta x \cdot \partial_y)^2 \tau(y)\right]\right) \times \\ & \times \mathcal{A}(z)|_{z=y} + O(\alpha^2). \end{aligned} \quad (3.4)$$

С учетом этого разложения уравнение (3.1) можно, оставляя члены первого порядка по  $\alpha$ , записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \int L(x, x') \varphi(x') d^4 x' = & \exp\left\{\frac{i}{\alpha}\tau(\alpha x)\right\} \times \\ & \times \int d^4 x' L(x, x') \exp\{ip(x' - x)\} \times \\ & \times \left(1 + \alpha \left[(\Delta x \cdot \partial_x) + \frac{i}{2}(\Delta x \cdot \partial_y)^2 \tau(y)\right]\right) \mathcal{A}(z) = \\ = & \exp\left\{\frac{i}{\alpha}\tau(\alpha x)\right\} \left(1 - \alpha \left[i(\partial_p \partial_x) + \frac{i}{2}(\partial_p \partial_y)^2 \tau(y)\right]\right) \times \\ & \times \int d^4 x' L(x, x') \exp[ip(x' - x)] \mathcal{A}(z). \end{aligned}$$

Введя обозначение  $\int d^4 x' L(x, x') \exp[ip(x' - x)] \equiv \hat{L}(p)$ , перепишем (3.1) в виде

$$\left(1 - i\alpha \left[(\partial_p \partial_x) + \frac{1}{2}(\partial_p \partial_y)^2 \tau(y)\right]_{y=\alpha x}\right) \hat{L}(p) \mathcal{A}(z)|_{z=\alpha x} = 0.$$

Наконец, раскладывая амплитуду в выражении для  $\mathcal{A}(z)$  в точке  $x$  по степеням  $\alpha$ , представляя  $L(p)$  в виде  $L = L_0 + \alpha L'$  и приравнивая члены одного порядка по  $\alpha$ , получаем систему рекуррентных уравнений для определения амплитуды (приравниваем теперь формальный параметр  $\alpha$  к единице):

$$\hat{L}_0(p) \mathcal{A}_0(x) = 0, \quad (3.5)$$

$$\hat{L}_0(p) \mathcal{A}_1(x) = \left\{i \left[(\partial_p \partial_x) + \frac{1}{2}(\partial_p \partial_y)^2 \tau(y)\right]_{y=x}\right\} \hat{L}_0(p) - \hat{L}'(p) \mathcal{A}_0(x) \quad (3.6)$$

и т. д.

Если поле многокомпонентно, например поле смещений в уравнениях Ламе, электромагнитное поле, поле  $\varphi$ , то амплитуда  $A$  является векторной функцией, а оператор  $\hat{L}(p)$  - матричным. Условие разрешимости (3.5) сводится к требованию равенства нулю определителя:

$$\det L_0(p) = 0. \quad (3.7)$$

Если  $L_0$  соответствует консервативной среде, то оператор  $\hat{L}_0$  - эрмитов, и справедливо каноническое представление матрицы  $L_0$ :

$$\hat{L}_0 = \sum_i \lambda_i e_i e_i^T, \quad (3.8)$$

где  $\{\lambda_i\}$  — собственные значения;  $\{e_i\}$  — ортонормированные собственные векторы матрицы  $L_0$ , т. е.  $L_0 e_i = \lambda_i e_i$  и  $e_i^T e_j = \delta_{ij}$ .

Условие разрешимости (3.7) с учетом канонической формы (3.8) дает дисперсионные уравнения:

$$\lambda_i = \lambda_i(x, p) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (3.9)$$

которые определяют как связи пространственных волновых векторов  $\partial/\partial x_1 \tau$ ,  $\partial/\partial x_2 \tau$ ,  $\partial/\partial x_3 \tau$  и частоты  $\partial/\partial x_0 \tau \triangleq \partial/\partial t \tau$ , так и поведение фазы (эйконала)  $\tau$  в пространстве и во времени. Поскольку  $p = \partial/\partial x \tau$ , то дисперсионные уравнения являются дифференциальными уравнениями первого порядка, которые обычно решаются методом характеристик. Уравнение характеристик обычно записывают в гамильтоновой форме, вводя параметр  $l$ :

$$\begin{aligned} d_l x &= \partial_p \lambda_i, \\ d_l p &= -\partial_x \lambda_i. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Уравнения (3.10) при разных значениях  $i$  описывают лучи, соответствующие волнам разных типов.

### 3. 2. ЛУЧЕВАЯ АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЯ СКАЛЯРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Скалярное волновое уравнение представляет собой математическую модель, лежащую в основе описания множества физических процессов распространения сигналов в среде. Поэтому изложение конкретных примеров использования пространствен-

но-временного лучевого метода [9] начнем с волнового уравнения:

$$\square\varphi = \Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi = 0. \quad (3.11)$$

В соответствии с нами принятой формой операторного уравнения распространения зондирующего сигнала  $L\varphi = s$  в данном случае

$$L = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}; \quad \varphi = \varphi(x, t); \quad s = 0$$

(рассматриваем волновое поле в области, не содержащей источника).

Общий вид асимптотического разложения (3.3) запишем, в явном виде выделив время, следующим образом:

$$\varphi(x, t) = A(\alpha, \alpha x, \alpha t) \exp[i/\alpha \tau(\alpha x, \alpha t)].$$

Заметим, что волновой оператор  $\square$  локален (дифференциальный), т. е. в представлении оператора  $L$  в виде интегрального ( $L\varphi = \int L(x, t; x', t')\varphi(x', t')dx'dt'$ ) ядро оператора сингулярное, т. е. интегрирование снимается.

Аппроксимация фазовой части волнового поля  $\varphi$  вблизи точки  $x_0, t_0$  (3.4) с точностью до  $O(\alpha)$  выглядит как

$$\varphi(x, t) \sim \exp[i(\mathbf{p}\Delta\mathbf{x} - p_0\Delta t)],$$

$$\text{где } \mathbf{p} = \frac{1}{\alpha} \nabla \tau|_{x_0, t_0}, \quad p_0 = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \tau|_{x_0, t_0},$$

$$\Delta t = t - t_0, \quad \Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0,$$

т. е. аппроксимация вблизи точки  $x_0, t_0$  представляет собой плоскую волну. Из уравнения разрешимости (3.5) следует, что

$$(\mathbf{p}; p) - \frac{1}{c^2(x, t)} p_0^2 = 0 \quad (3.12)$$

(здесь  $L_0 = \Delta - [c^2(x, t)]^{-1} \partial^2 / \partial t^2$ ); соответственно

$$L_0(p) = \exp[-i(\mathbf{p}\mathbf{x} - p_0 t)] \left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \exp[i(\mathbf{p}\mathbf{x} - p_0 t)].$$

Условие разрешимости (3.12), записанное нами в форме дисперсионного уравнения, дает связь частоты  $p_0 \triangleq \omega$  и волнового вектора  $\mathbf{p} \triangleq \mathbf{k}$  (пространственной частоты):

$$\omega = \omega(\mathbf{k}) = c|\mathbf{k}|, \quad (3.13)$$

где  $c = c(x, t)$ , а  $\omega$  является решением дисперсионного уравнения  $|L_0(\omega(\mathbf{k}))| = 0$ .

Лучевую аппроксимацию решения уравнения (3.11) можно представить в следующем виде:

$$\varphi(\mathbf{k}, \omega) = \mathcal{A}(\mathbf{k})\delta(L_0(\omega(\mathbf{k}))) = \mathcal{A}_{\mathbf{k}}\delta(\omega - \omega(\mathbf{k})), \quad (3.14)$$

где  $\mathcal{A}_{\mathbf{k}} \triangleq \mathcal{A}|\partial\omega L(\mathbf{k}, \omega)|^{-1}$  (следствие формулы  $\delta(f(x)) = |\partial_x f|^{-1}\delta(x - x')$ , где  $x'$  — корень уравнения  $f(x) = 0$ ). Наличие в (3.14) дельта-функции  $\delta(|L_0|)$  означает, что амплитуда поля  $\varphi$  может быть отличной от нуля лишь для волновых векторов  $\mathbf{k}$ , удовлетворяющих дисперсионному уравнению, т. е. связи частоты и модуля волнового вектора (3.13).

Отметим, что в записи (3.14) предполагается наличие одного типа волны, это соответствует одномодовому излучению в консервативной среде, а математически означает наличие единственного вещественного корня уравнения  $|L_0(\omega(\mathbf{k}))| = 0$ .

В общем случае многомодового излучения поле  $\varphi$  можно представить в виде суперпозиции нескольких типов волн (мод):

$$\varphi = \sum_{\mu} \mathcal{A}_{\mathbf{k}}\delta(\omega - \omega^{\mu}(\mathbf{k})).$$

В пространственно-временном представлении решение  $\varphi$  записывается в виде набора бегущих плоских волн:

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \mathcal{A}_{\mathbf{k}} \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega(\mathbf{k})t)] d\mathbf{k}.$$

Записывая обратное преобразование Фурье от  $\varphi(\mathbf{x}, t)$ , можно заметить, что

$$\mathcal{A}_{\mathbf{k}} e^{i\omega(\mathbf{k})t} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \varphi(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} d\mathbf{x},$$

т. е. пространственный оператор Фурье свободного волнового поля является осциллирующим.

Уравнение разрешимости (3.5), записанное для фазы  $\tau$ , называется *обобщенным уравнением эйконала*:

$$(\nabla_{\mathbf{x}}\tau, \nabla_{\mathbf{x}}\tau) = \frac{1}{c^2(\mathbf{x}, t)} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \tau \right]^2, \quad (3.15)$$

являясь обобщением уравнения эйконала для известного случая стационарных сред ( $c = c(\mathbf{x})$ ,  $\tau = \tau - t$ , обычно  $c^{-2}(\mathbf{x}) \triangleq n^2(\mathbf{x})$  — показатель преломления среды).

Уравнение (3.15) можно назвать характеристическим уравнением для волнового уравнения (3.11). Гиперповерхности  $\tau(x, t) = \text{const}$  — характеристики волнового уравнения. Уравнение (3.15) можно представить в виде уравнения Гамильтона — Якоби:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + H(\nabla_x \tau, x, t) = 0, \quad (3.16)$$

где  $H = c(x, t)|\nabla \tau|$ . Основным методом решения этого уравнения является метод характеристик. Напомним алгоритм этого метода для общего варианта уравнения (3.16):

$$H \left[ x^\mu, \frac{\partial \tau}{\partial x^\mu} \right] = 0, \quad \mu = 0, \dots, M, \quad (3.17)$$

т. е. мы рассматриваем общее уравнение в частных производных второго порядка (индекс  $\mu = 0$  связываем с параметром времени). Дополнив (3.17) начальными условиями, заданными на гиперповерхности  $Q$ , переходим к решению задачи Коши.

Считаем  $Q$  величиной, заданной параметрически, т. е.

$$Q = \{x^\mu : x_0^\mu(\gamma_1, \dots, \gamma_m)\}, \quad \gamma \in \Gamma,$$

причем векторы  $\{\partial x / \partial \gamma\}$  линейно независимы, т. е. поверхность  $Q$  регулярна (в малом). Пусть невырожден на поверхности  $Q$  детерминант  $D$ :

$$D = \left\| \begin{array}{ccc} \partial H / \partial \tau_0 & \dots & \partial H / \partial \tau_m \\ \partial x^0 / \partial \gamma_1 & \dots & \partial x^m / \partial \gamma_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial x^0 / \partial \gamma_m & \dots & \partial x^m / \partial \gamma_m \end{array} \right\| \neq 0, \quad (3.18)$$

$$\text{где } \tau_\mu \triangleq \frac{\partial}{\partial \gamma_\mu} \tau.$$

Зададим начальные условия на  $Q$  в виде

$$\tau|_Q = \tau^0(\gamma), \quad \frac{\partial \tau}{\partial x^\mu} \Big|_Q = \tau_\mu^0(\gamma).$$

Характеристической системой уравнений для (3.17) будет

$$\begin{aligned} dx^\mu / ds &= \partial H / \partial \tau_\mu, \\ d\tau_\mu / ds &= -\partial H / \partial x^\mu, \\ d\tau / ds &= -\sum_{\mu} \tau_\mu \partial H / \partial \tau_\mu, \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\text{где } s : \left| \frac{\partial(x^0, \dots, x^m)}{\partial(s, \gamma^1, \dots, \gamma^m)} \right|_{s=0} \neq 0$$

в силу предположения (3.18), т. е. локально (вблизи  $s$ ) система координат  $(s, \gamma^1, \dots, \gamma^m)$  невырождена.

Приведем здесь схему вывода системы характеристических уравнений. Уравнение (3.17) будем рассматривать как уравнение связи независимых переменных  $\{x^\mu\}$  и  $\{p^\mu \triangleq \partial\tau/\partial x^\mu\}$ , т. е. будем искать решение в фазовом пространстве  $X \times P$ , где  $X = \{x = (x^0, x^1, \dots, x^m)\}$ ,  $P = \{p = (p^0, p^1, \dots, p^m)\}$ ,  $H(x^\mu, p^\mu) = 0$ . Дифференциал  $H$  в силу этой связи обязан быть равным нулю:

$$dH = \sum_{\mu} \left( \frac{\partial H}{\partial x^\mu} dx^\mu + \frac{\partial H}{\partial p^\mu} dp^\mu \right) = 0.$$

Отсюда видно, что формальные векторы  $\partial H/\partial x$ ,  $\partial H/\partial p$  и соответственно  $dx$ ,  $dp$  ортогональны. Условие ортогональности заведомо будет выполнено, если первые компоненты  $dx$ ,  $dp$  будут пропорциональны вторым компонентам  $\partial H/\partial x$ ,  $\partial H/\partial p$ , а соотношение оставшихся компонент имеет противоположный знак коэффициента пропорциональности.

Вводя формальный параметр  $s$ , т. е. считая  $p = p(s)$ ,  $x = x(s)$ , записываем:

$$\begin{aligned} dx^\mu/ds &= \partial H/\partial p_\mu, \\ dp^\mu/ds &= -\partial H/\partial x^\mu. \end{aligned}$$

А для исключения параметра  $s$  записываем третье уравнение, определяющее  $d\tau/ds$ , с учетом того, что  $p = \partial\tau/\partial x$ :

$$\frac{d\tau}{ds} = \sum_{\mu} \frac{\partial\tau}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{ds} = \sum_{\mu} p^\mu \frac{\partial H}{\partial p^\mu}.$$

Решая систему (3.19) с учетом начальных условий, получим  $x^\mu = x^\mu(s, \gamma^1, \dots, \gamma^m)$ ,  $\tau_\mu = \tau_\mu(s, \gamma^1, \dots, \gamma^m)$ ,  $\tau = \tau(s, \gamma^1, \dots, \gamma^m)$ . Возвращаясь к исходным координатам  $(x^0, \dots, x^m)$ , приходим к функциям  $\tau = \tau(x)$  и  $\tau_\mu = \tau_\mu(x)$ , т. е. к решению задачи Коши, удовлетворяющему уравнению (3.17) и начальным условиям.

Возвращаясь к уравнению (3.16), запишем характеристиче-



скую систему ( $x_0 \equiv t$ ):

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= 1, & \frac{dx^1}{ds} &= \frac{\partial H}{\partial \tau_1} \dots \frac{dx^m}{ds} = \frac{\partial H}{\partial \tau_m}, \\ \frac{d\tau_1}{ds} &= -\frac{\partial H}{\partial x^1} \dots \frac{d\tau_m}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial x^m}, \\ \frac{d\tau}{ds} &= \tau_0 + \sum_{\mu=1}^m \hat{\tau}_\mu \frac{\partial H}{\partial \tau_\mu}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Здесь в последнем уравнении выделено слагаемое  $\tau_0 = \partial\tau/\partial t$  и учтено, что  $\partial H/\partial \tau_0 = 1$ .

Напомним аналогию лучей в оптике и траекторий в механике. Записав уравнение эйконала как

$$H(x, p) = \frac{1}{2} \left[ (p, p) - n^2(x) \right] = 0,$$

получим уравнение лучей в гамильтоновой форме:

$$\begin{aligned} dx/ds &= p, \\ \frac{dp}{ds} &= \frac{1}{2} \nabla n^2(x). \end{aligned}$$

Для эйконала  $\tau$  на основании  $\partial\tau/\partial s = (p, p)$  получаем

$$\tau = \tau^0 + \int_{s_0}^s p^2 ds = \tau^0 + \int_{s_0}^s n^2(x(s)) ds.$$

Параметр  $s$  связан с длиной дуги ( $dl$ ) луча в силу

$$(dl)^2 = (dx)^2 = \left( \frac{\partial H}{\partial p} \right)^2 ds^2$$

(в последнем равенстве мы учли первые уравнения из характеристической системы). В данном случае  $ds = dl |\partial H/\partial p|^{-1} = dl |p|^{-1} = dl/n(x)$  и зависимость  $\tau$  от длины дуги  $l$  выражается так:

$$\tau = \tau^0 + \int_A^B n(x) dl.$$

Систему уравнений относительно  $x$  и  $p$ , записанную в гамильтоновой форме, можно представить, исключив  $p$ , в виде

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{1}{2} \nabla n^2(x).$$

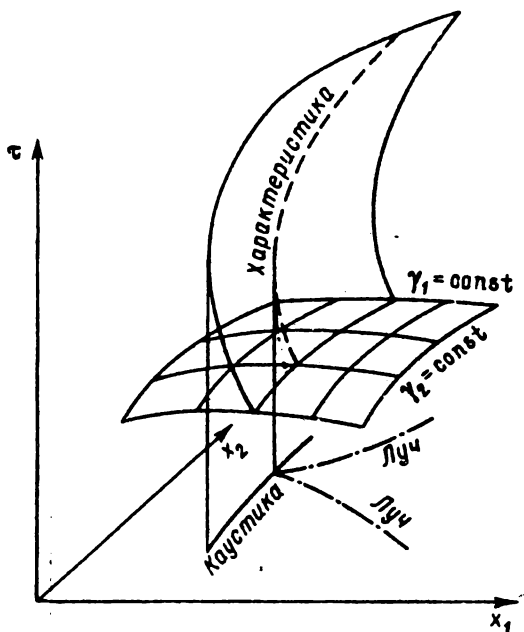


Рис. 8.

Сравним его с уравнением динамики для движения частицы в потенциальном силовом поле ( $F = -\nabla\varphi$ ):

$$d^2\mathbf{x}/dt^2 = -\nabla\varphi.$$

Эта аналогия позволяет резул. таты, полученные в оптике, использовать в механике, и наоборот. Существенным отличием постановки механических и волновых задач является задание начальных данных: в силу специфики волновых задач начальные условия определяют не единственную траекторию, как это принято в механике, а семейство (конгруэнцию) "траекторий" — лучей.

Для волновых задач представляет интерес (экзотический с точки зрения механики) случай

$$H(k\tau_i, t, \mathbf{x}) = kH(\tau_i, t, \mathbf{x}),$$

где  $i = 1 \div m$ ,  $k > 0$ , т. е. последнее уравнение системы (3.20)

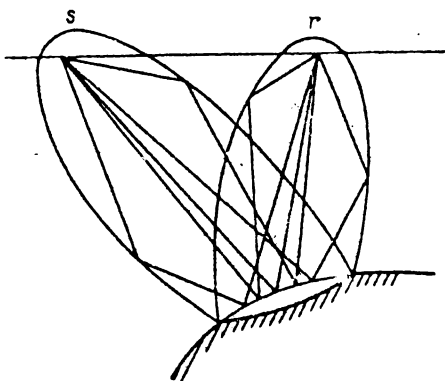


Рис. 9.

имеет вид

$$d\tau/ds = \tau_0 + H = \partial\tau/\partial t + H \equiv 0,$$

означая, что  $\tau = \text{const}$  вдоль кривой — решения системы (3.20) и имеет физический смысл отсутствия дисперсии.

Заметим, что решение характеристической системы (3.19) как системы обыкновенных дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями в силу теоремы единственности представляет собой в фазовом пространстве семейство кривых без пересечений.

Пространственно-временную проекцию характеристики уравнения эйконала принято называть в геометрической оптике *пространственно-временным лучом*,  $x^\mu = x^\mu(s, \gamma^1, \dots, \gamma^m)$ , который может быть получен либо как решение системы уравнений (3.19), либо как экстремаль функционала:

$$\tau = \int_A^B \sum_{\mu} \tau_{\mu} \frac{\partial H}{\partial \tau} ds$$

по всевозможным траекториям, соединяющим точки  $A$  и  $B$ . (На рис. 8 показаны проекции характеристики, заданной в фазовом пространстве, на физическое пространство  $x_1 x_2$  с образованием каустик.) Для простейшей функции Гамильтона  $H =$

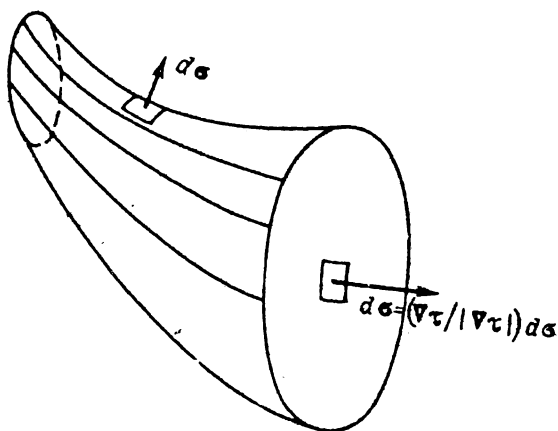


Рис. 10.

$[(p, p) - n^2(\mathbf{x})]/2$  этот функционал принимает вид

$$\tau = \int_A^B n(\mathbf{x}) dl = \int_A^B \frac{dl}{c(\mathbf{x})}$$

и имеет физический смысл времени пробега возмущения от точки  $A$  до точки  $B$ . При этом луч отвечает стационарному времени пробега. Условие стационарности функционала  $\tau$ :  $\delta\tau = 0$  называется принципом Ферма. Решение соответствующей экстремальной задачи служит основой для построения алгоритмов численного расчета лучей в неоднородных средах.

Современная интерпретация принципа Ферма опирается на представление об интерференции волновых возмущений (принцип Гюйгенса — Кирхгофа), распространяющихся из точки  $A$  в точку  $B$  по всевозможным виртуальным траекториям. При этом "выживают" лишь те траектории, для которых вариация фазового функционала (фазы) имеет величину  $\sim \lambda/2$ . На рис. 9 оставлены лучи, имеющие одну общую точку с границей зоны Френеля, т. е. с учетом зоны Френеля вклад всех остальных траекторий будет пренебрежимо мал в силу взаимной компенсации

интерферирующих волн с разными фазами (в вычислительной математике это соответствует принципу стационарной фазы). Соответственно современное представление о луче - пространственная лучевая трубка (рис. 10) с поперечником порядка первой зоны Френеля. Отметим, что в частном случае недиспергирующей среды принцип Ферма можно интерпретировать как условие стационарности времени пробега волны от точки  $A$  до точки  $B$ .

### 3. 3. КОРОТКОВОЛНОВАЯ АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА. (МЕТОД ВКБ)\*

Рассмотрим еще одну реализацию теории возмущений на примере решения уравнения Гельмгольца:

$$\frac{d^2}{dx^2}\varphi + V(x)\varphi = 0. \quad (3.21)$$

В соответствии с теорией возмущений, используемой в геометрической оптике, запишем:

$$\varphi = \exp\{i\tau(x)\}. \quad (3.22)$$

Тогда уравнение (3.21) принимает вид

$$-(\tau')^2 + i\tau'' + V = 0. \quad (3.23)$$

Предполагая  $\tau''$  малой величиной, получаем  $\tau' = \pm\sqrt{V}$ , т. е.

$$\tau(x) = \pm \int \sqrt{V} dx. \quad (3.24)$$

Условием применимости этого приближения будет

$$|\tau''| \approx \frac{1}{2} \left| \frac{V'}{\sqrt{V}} \right| \ll |V|.$$

Из формул (3.22) и (3.23) видно, что  $(\sqrt{V})^{-1}$  имеет физический смысл длины волны ("экспоненциальной длины", т. е. характерного интервала изменения  $V$  в случае  $\text{Im} \tau > 0$ ). Таким образом, приближение (3.24) справедливо, если изменение  $V$  на расстоянии порядка длины волны много меньше, чем само значение  $V$ , т. е.  $V(x)$  мало меняется на длине волны.

\*Метод Вентцеля — Крамерса — Бриллюэна был предложен для приближенного решения уравнения Шредингера.

Следующее приближение найдем, решая уравнение (3.23) с учетом

$$\begin{aligned} \tau'' &\approx \pm \frac{1}{2} \frac{V'}{\sqrt{V}}, & (\tau')^2 &\approx V \pm \frac{i}{2} \frac{V'}{\sqrt{V}}, \\ \tau' &\approx \pm \sqrt{V} + \frac{i}{4} \frac{V'}{V}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Интегрируя полученное выражение, записываем

$$\tau(x) \approx \pm \int \sqrt{V} dx + \frac{i}{4} \ln V. \quad (3.26)$$

Используя приближение (3.26), можно построить суперпозицию двух решений, соответствующих двум знакам, т. е. приближение ВКБ справедливо, если  $|\Delta V(x)| \leq |V(x)|$ .

В точке сшивания  $V(x) = 0$ , а  $\Delta V(x)$  сингулярно, соответственно точное решение (3.21) в этой точке обязано быть регулярным, в то время как решения ВКБ имеют в ней особенности. Поэтому ищем решение  $\varphi(x)$  в виде комбинации  $\tilde{\varphi}_+$  и  $\tilde{\varphi}_-$ :

$$\varphi(x) = a_+ \tilde{\varphi}_+(x) + a_- \tilde{\varphi}_-(x).$$

Эти коэффициенты определим, задавая связь для производной  $\varphi'(x)$ :

$$\varphi'(x) = a_+ \tilde{\varphi}'_+(x) + a_- \tilde{\varphi}'_-(x),$$

$a_+ = \text{const}$ ,  $a_- = \text{const}$ . Решением этой системы относительно  $a_+$  и  $a_-$  будет

$$a_+ = \frac{\varphi \tilde{\varphi}'_- - \varphi' \tilde{\varphi}_-}{\tilde{\varphi}_+ \tilde{\varphi}'_- - \tilde{\varphi}'_+ \tilde{\varphi}_-},$$

а для (3.26) —

$$\tilde{\varphi}(x) \approx (V(x))^{-1/4} \left\{ c_+ \exp\left(i \int \sqrt{V} dx\right) + c_- \exp\left(-i \int \sqrt{V} dx\right) \right\}. \quad (3.27)$$

Решение (3.27) пригодно в любой области, где выполняется условие применимости, но оно заведомо нарушается в окрестности точки  $x^0$ :  $V(x^0) = 0$  и необходимо уметь сшивать экспоненциальные (в области  $V(x) < 0$ ) и осциллирующие (при  $V(x) > 0$ ) решения, иными словами, необходимы формулы связи.

Заметим, что решения ВКБ (3.27), которые мы записали в виде  $\tilde{\varphi}_+$  и  $\tilde{\varphi}_-$  (соответствуют  $c_+ = 1$  и  $c_- = 1$ ), являются точными для уравнения вида (3.21), где  $V(x)$  заменено следующим

выражением:

$$V(x) \Rightarrow V(x) + \Delta V(x) \triangleq V(x) + \frac{1}{4} \frac{V''}{V} - \frac{5}{16} \left(\frac{V'}{V}\right)^2,$$

$$a_{\pm} = \frac{\varphi \tilde{\varphi}'_{\pm} - \varphi' \tilde{\varphi}_{\pm}}{\tilde{\varphi}_{\pm} \tilde{\varphi}'_{\mp} - \tilde{\varphi}'_{\pm} \tilde{\varphi}_{\mp}}.$$

Учитывая, что детерминант системы  $\tilde{\varphi}_{+} \tilde{\varphi}'_{-} - \tilde{\varphi}'_{+} \tilde{\varphi}_{-} = -2i$ , а  $\varphi \tilde{\varphi}''_{\mp} - \varphi'' \tilde{\varphi}_{\mp} = \Delta V(x) \varphi \tilde{\varphi}_{\mp}$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{da_{\pm}}{dx} &= \mp \frac{i}{2} \Delta V(x) \varphi \tilde{\varphi}_{\mp} = \\ &= \mp \frac{i}{2} \frac{\Delta V(x)}{\sqrt{V(x)}} \left\{ a_{\pm} + a_{\mp} \exp \mp \int_{x_0}^x \sqrt{V} dx \right\}. \end{aligned}$$

Это выражение является оценкой ошибки, которая может накопиться вдоль большого интервала  $\Delta x$  в приближении ВКБ.

### 3. 4. ЭЛЕМЕНТЫ ЛУЧЕВОЙ ТЕОРИИ УПРУГИХ ВОЛН

Согласно лучевой теории в применении к распространению сейсмических сигналов объемные волны распространяются с локальной скоростью вдоль лучевых траекторий, имеющих точки излома на границах упругих сред (в соответствии с законом Снеллиуса), с амплитудой, определяемой геометрическим расхождением лучей [8, 23, 43]. Используя общую лучевую теорию (см. раздел 3.1) и считая среду стационарной, в асимптотическом разложении представим эйконал  $\tau(x, t)$  в виде  $t - \tau(x)$ , где  $\tau(x)$  по традиции называется *волновым фронтом*. Лучевое описание связано с предположением существенно более быстрого изменения характеристик волнового процесса в направлении нормали к волновому фронту ( $\mathbf{n} = \nabla \tau / |\nabla \tau|$ ) по сравнению с изменениями характеристик среды, т. е. с *коротковолновой асимптотикой*, когда малым параметром является отношение длины волны к характерным размерам неоднородности среды.

При выбранной нами форме эйконала: волновой вектор  $\mathbf{p} = (p_0; p_1, p_2, p_3) = (p_0, \mathbf{p}) = (1, \nabla \tau)$  и вектор  $\mathbf{p}$ , совпадающий по направлению с вектором фазовой скорости (нормально к волновому фронту), называют *вектором рефракции*.

Оператор Ламе в форме (2.13) имеет векторную структуру:

$$\hat{L} = \hat{I} \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla \cdot \tilde{K} \partial_{\mathbf{x}},$$

здесь  $I$  — единичный оператор в пространстве  $R^3$ ; оператор  $\hat{\partial}_{\mathbf{x}}$ :

$$\hat{\partial}_{\mathbf{x}} \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{\partial a_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_3} & \frac{\partial a_2}{\partial x_3} & \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}.$$

Запишем конкретную форму уравнения (3.5) для оператора Ламе:

$$(\rho \hat{I} - \tilde{K} \mathbf{p} \mathbf{p}^T) \mathcal{A}_0 = 0. \quad (3.28)$$

Здесь  $(\tilde{K} \mathbf{p} \mathbf{p}^T)_{ik} = \sum_j \sum_l K_{ijkl} p_j p_l$ ,  $\mathbf{p} = \nabla \tau$ . Условие разрешимости уравнения (3.28) будет

$$\det(\rho \hat{I} - \tilde{K} \mathbf{p} \mathbf{p}^T) = 0. \quad (3.29)$$

Это уравнение описывает возможные волновые фронты в упругой среде. Запишем тензор упругих моделей  $\tilde{K}$  для изотропной упругой среды:

$$K_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}).$$

Выбрав локальную систему ортогональных координат (лучевых):

$$\mathbf{e}_\tau = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}, \quad \mathbf{e}_\beta = \mathbf{e}_\tau \times \mathbf{e}_n,$$

запишем координатное представление для  $L_0(\mathbf{p}) \mathcal{A}_0 = 0$ :

$$\begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu)(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}^T) - \rho & 0 & 0 \\ 0 & \mu(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}^T) - \rho & 0 \\ 0 & 0 & \mu(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}^T) - \rho \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{A}_\tau \\ \mathcal{A}_n \\ \mathcal{A}_\beta \end{pmatrix} = 0. \quad (3.30)$$

Условие разрешимости системы (3.30) приводит к выводу, что в изотропной упругой среде нулевое приближение лучевой асимптотики дает три типа волн (аналогично случаю однородной среды):

1) квазипродольную волну с вектором поляризации, который совпадает с  $\mathbf{e}_\tau$ , и скоростью  $(\lambda(\mathbf{x}) + 2\mu(\mathbf{x}))/\rho(\mathbf{x}) \triangleq c_p^2(\mathbf{x})$ , описываемую уравнением эйконала:

$$(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}) = \frac{\rho(\mathbf{x})}{\lambda(\mathbf{x}) + 2\mu(\mathbf{x})};$$



2) квазипоперечные волны двух типов с векторами поляризации  $e_\alpha$  и  $e_\beta$ , распространяющиеся с одинаковой скоростью  $\mu(x)/\rho(x) \triangleq c_s^2(x)$ , которая описывается уравнением  $(p \cdot p) = \rho(x)/\mu(x)$ .

### 3. 5. ЛУЧЕВОЕ ОПИСАНИЕ ПОЧТИ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЫ

Распространение акустических волн в океане достаточно хорошо аппроксимируются моделью почти стратифицированной среды, т. е. среды с плавным (по сравнению с глубиной) изменением скорости распространения сигнала в горизонтальной плоскости. Следуя логике изложения раздела 3.1, рассмотрим горизонтальные координаты  $\rho = (x, y)$  как "медленные" аргументы, а вертикальную координату  $z$  — как "быстрый" аргумент, т. е. скорость  $c = c(\alpha x, \alpha y, z)$ .

Волновое уравнение для временного фурье-компонента в области, не содержащей источников (2.35), переходит в уравнение Гельмгольца:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2(\alpha x, \alpha y, z) \right) \varphi = 0, \quad (3.31a)$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Пусть пространственной областью, в которой рассматривается решение этого уравнения, для границ водной толщи будут  $Z^\pm = Z^\pm(\alpha x, \alpha y)$  и будут справедливы граничные условия

$$[a^\pm(\alpha x, \alpha y)I \pm b^\pm(\alpha x, \alpha y)(n \cdot \nabla)]|_{z^\pm} \varphi = 0, \quad (3.31b)$$

где  $a^\pm, b^\pm$  вещественны, а внешняя нормаль

$$n^\pm = \left[ 1 + \left( \frac{\partial Z^\pm}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial Z^\pm}{\partial y} \right)^2 \right]^{-1/2} \left( -\frac{\partial Z^\pm}{\partial x}, -\frac{\partial Z^\pm}{\partial y}, 1 \right).$$

Запишем уравнение (3.1) и граничное условие (3.2) в виде  $\mathcal{L}\varphi = 0$ , причем  $\mathcal{L} = \left| \hat{L} \right|$  и оператор  $\hat{L}$  в явном в параметр асимптотического разложения.

Сжимая горизонтальные координаты, переходим к одинаковым масштабам изменения скорости по всем трем координатам:

$x_0 = \alpha x, y_0 = \alpha y, z_0 = z$ . В новых координатах оператор  $\mathcal{L}$  выглядит следующим образом:

$$\hat{L} \Rightarrow \left[ \alpha^2 + \left( \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_0^2} \right) + \left( \frac{\partial^2}{\partial z_0^2} + k^2(x_0, y_0, z_0) \right) \right] \triangleq \alpha^2 \Delta_0 + \tilde{L}_z, \quad (3.32a)$$

$$\hat{\Gamma} \Rightarrow \left[ a^\pm \hat{I} + b^\pm \left( \frac{\partial}{\partial z_0} - \alpha^2 (\mathbf{n}^\pm \cdot \nabla_0) \right) \right] \Big|_{z^\pm}. \quad (3.32b)$$

С учетом асимптотического представления

$$\varphi \sim A(x_0, y_0, z_0; \alpha) \exp \left\{ \frac{i}{\alpha} \tau(x_0, y_0) \right\}$$

условие разрешимости (3.5) при наличии заданных граничных условий (3.32b) запишем в виде

$$[e^{-i(\nabla_0 \tau \cdot \rho)} \alpha^2 \Delta_0 e^{i(\nabla_0 \tau \cdot \rho)} + \tilde{L}_z] \mathcal{A}_0 = 0,$$

$$\hat{\Gamma}_z \triangleq \left( a^\pm \hat{I} + b^\pm \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathcal{A}_0 = 0,$$

где  $\rho = (x, y)$ , т. е.

$$[(\nabla \tau \cdot \nabla \tau) - \tilde{L}_z] \mathcal{A}_0 = 0, \quad (3.33a)$$

$$\hat{\Gamma}_z \Big|_{z^\pm} \mathcal{A}_0 = 0. \quad (3.33b)$$

Уравнение (3.33a) представляет собой задачу на собственные функции и собственные значения оператора  $\tilde{L}_z$  с граничными условиями (3.33b):

$$\tilde{L}_z \mathcal{A}_0 = \lambda^2 \mathcal{A}_0, \quad (3.34)$$

$$\hat{\Gamma} \Big|_{z^\pm} = 0,$$

$$\text{где } \lambda^2 = (\nabla \tau \cdot \nabla \tau). \quad (3.35)$$

Рассмотрим подробнее уравнение (3.34) (опускаем нулевой индекс):

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathcal{A}_0^n + \left( \frac{\omega^2}{c_{x,y}^2(z)} - \lambda_n^2 \right) \mathcal{A}_0^n = \eta,$$

$$a^\pm \mathcal{A}_0^n \Big|_{z_{x,y}^\pm} + b^\pm \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{A}_0^n \Big|_{z_{x,y}^\pm} = 0.$$

Введя обозначения  $c_{x,y}(z)$ ,  $Z_{x,y}^{\pm}$ , мы выделяем "медленные" аргументы, т. е. рассматриваем задачу на собственные функции и собственные значения (задачу Штурма — Лиувилля) как параметрическую от точки  $(x, y)$ .

Уравнение (3.34) можно решить методом ВКБ (см. раздел 3.3), который позволяет найти коротковолновую асимптотику для амплитуды  $\mathcal{A}_0^n$ . Собственные значения  $\lambda_n^2$  очевидным образом зависят от положения границ  $Z_{x,y}^{\pm}$ , частоты  $\omega$  и от конкретной зависимости скорости от глубины:

$$\lambda_n^2 = \lambda_n^2(Z_{x,y}^{\pm}, \omega, c_{x,y}(z)).$$

Уравнение (3.35) (уравнение эйконала) можно решить методом характеристик (см. раздел 3.2):

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{ds} &= p, & \frac{d\mathbf{p}}{ds} &= \frac{1}{2} \nabla \lambda^2(\rho), \\ \frac{d\tau}{ds} &= (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}), & \frac{d\tau}{ds} &= \lambda^2(\rho). \end{aligned}$$

Представим амплитуду  $\mathcal{A}_0^n$  в виде

$$\mathcal{A}_0^n = A_0(x, y, z) = a_0(x, y) \psi_n(x, y, z),$$

где  $\{\psi_n\}$  — ортонормированный базис оператора,  $\int_{z^-}^{z^+} \psi_n \psi_n dz = \delta_{nn'}$ . Тогда можно получить уравнение переноса для приведенной амплитуды  $a_0$ , зависящей только от горизонтальных координат; в соответствии с (3.6) запишем:

$$a_0 \nabla^2 \tau + 2(\nabla \tau \cdot \nabla a_0) = 0.$$

Уравнение переноса можно переписать так:

$$\nabla \cdot (a_0^2 \nabla \tau) = 0 \quad (3.36)$$

и, интегрируя (3.36) по объему лучевой трубки (см. рис. 10), а также используя теорему Гаусса, получаем:

$$\int (a_0^2 \cdot \nabla \tau) \cdot d\sigma = 0.$$

Отсюда с учетом того, что поперечное сечение лучевой трубки  $d\sigma = \nabla \tau / |\nabla \tau| \sigma$ , а вдоль стенок лучевой трубки  $\nabla \tau \cdot d\sigma = 0$ , записываем:  $\lambda_n a_0^2 \cdot \Delta \sigma = \text{const}$ . Здесь  $\Delta \sigma$  — площадь сечения лучевой трубки, т. е. приведенная амплитуда меняется как  $a_0 \sim r^{-1/2}$ .

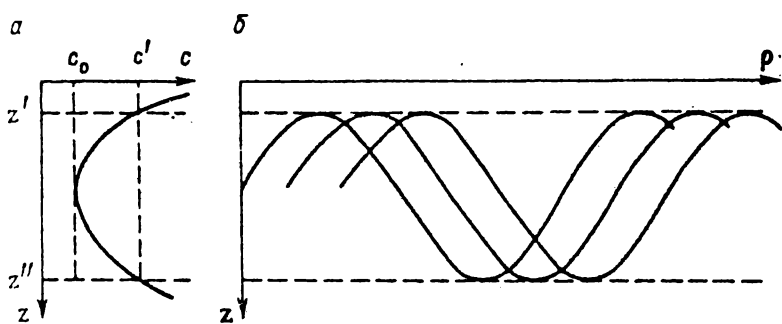


Рис. 11.

Для пространственно-временных лучей, используя асимптотическое представление вида

$$\varphi \sim \mathcal{A}(x_0, y_0, z, t_0; \alpha) \exp \left[ \frac{i}{\alpha} \tau(x_0, y_0, t_0) \right],$$

имеем

$$\lambda_n^2 = \lambda_n^2(\omega, x, y, [c(z)], t)$$

и соответственно уравнение эйконала —

$$(\nabla \tau \cdot \nabla \tau) = \lambda_n^2(\omega, x, y, [c(z)], t). \quad (3.37)$$

Тогда характеристические уравнения с учетом (3.37) записываются как

$$\begin{aligned} \frac{dx}{p_x} &= \frac{dy}{p_y} = \frac{dt}{\lambda_n \partial_\omega \lambda_n} = \frac{d\tau}{\lambda_n (\lambda_n - \omega \partial_\omega \lambda_n)} = \\ &= \frac{dp_x}{\lambda_n \partial_x \lambda_n} = \frac{dp_y}{\lambda_n \partial_y \lambda_n} = -\frac{d\omega}{\lambda_n \partial_t \lambda_n} \end{aligned} \quad (3.38)$$

( $p_x = \partial/\partial x \tau$ ,  $p_y = \partial/\partial y \tau$ ) и определяют пространственно-временные горизонтальные лучи.

Дифференцируя уравнение (3.37) по  $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$ , получаем с учетом того, что  $\omega = \omega(\mathbf{p})$ :

$$\mathbf{p} = \lambda_n \partial_\omega \lambda_n \nabla_{\mathbf{p}} \omega. \quad (3.39)$$

Используя первые два равенства из (3.38) и уравнение (3.39), можно записать:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{\mathbf{p}}{\lambda_n \partial_\omega \lambda_n} = \nabla_{\mathbf{p}} \omega.$$

Таким образом, горизонтальные пространственно-временные лучи определяют траектории точек, движущихся с групповой скоростью.

Приведем здесь представление точного решения задачи (3.31) в виде нормальных мод для стратифицированного океана. Каждая нормальная мода представляет собой решение уравнения (3.31a) с разделенными переменными:

$$\varphi(z, \rho) = \varphi^z(z)\varphi^\rho(\rho),$$

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} + (k^2(z) - \lambda_n^2) \right] \varphi^z(z) = 0, \quad (3.40)$$

$$\Gamma|_{z^\pm} \varphi^z = 0,$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \lambda_n^2 \right] \varphi^\rho(\rho) = 0,$$

$$\Gamma|_{\infty} \varphi^\rho = 0. \quad (3.41)$$

На рис. 11 показана система лучей в звуковом канале с границами  $z'$ ,  $z''$  — точками поворота (в терминологии метода ВКБ).

Задача Штурма — Лиувилля (3.40) обладает бесконечным числом простых вещественных собственных значений  $\lambda_0^2 > \lambda_1^2 > \lambda_2^2 > \dots$ , где число  $\lambda_n : \lambda_n^2 > 0$  конечно и  $\lambda^2 < 0$  бесконечно. Мы выберем  $\lambda_n > 0$ , если  $\lambda_n^2 > 0$ , и  $\text{Im} \lambda_n > 0$ , если  $\lambda_n^2 < 0$ . В этом случае решение уравнения (3.41)  $\varphi^\rho$  удовлетворяет при  $\lambda = \lambda_n$  условию излучения:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho^{1/2} \left( \frac{\partial}{\partial \rho} \varphi^\rho - i\lambda \varphi^\rho \right) = 0$$

и пропорционально функции Ханкеля  $H_0^{(1)}(\lambda_n \rho)$ :

$$\varphi^\rho \sim H_0^{(1)}(\lambda_n \rho).$$

Таким образом, точное решение однородного уравнения (3.31a)  $\varphi(z, \rho)$  с использованием базиса уравнений (3.40)  $\{\varphi_n(z)\}$  можно представить в виде бесконечного ряда:

$$\varphi(z, \rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n \varphi_n^-(z) H_0^{(1)}(\lambda_n \rho). \quad (3.42)$$

Используя это выражение, запишем решение волнового уравнения с точечным источником, т. е.

$$(\nabla^2 + k^2)\varphi = -\delta(z - z_0) \frac{\delta(\rho)}{2\pi\rho}. \quad (3.43)$$

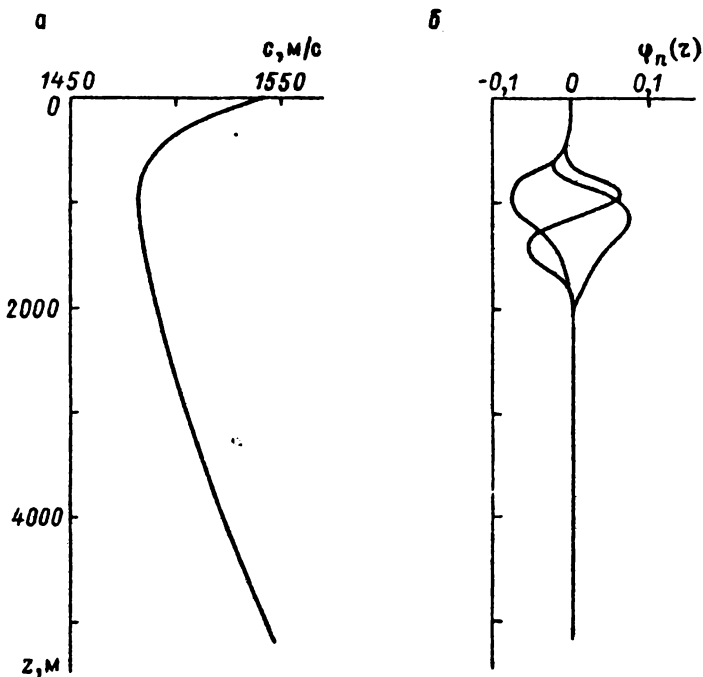


Рис. 12.

Для этого воспользуемся равенством

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \lambda_n^2 \right] H_0^{(1)}(\lambda_n \rho) = \frac{4i\delta(\rho)}{2\pi\rho}.$$

Подставив решение (3.42) однородного уравнения (3.31а) в (3.43), получим выражение, отражающее связь коэффициентов  $A_n$  и собственных функций  $\varphi_n^z(z)$ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \varphi_n^z = \frac{i}{4} \delta(z - z_0).$$

Отсюда, умножая последнее равенство скалярно на  $\varphi_n^z$ , полу-

$$A_n = \frac{i}{4} \varphi_n^z(z_0).$$

Таким образом, точное решение акустического уравнения, описывающего распространение сигнала, генерируемого точечным источником на глубине  $z_0$ , в стратифицированном океане с постоянной глубиной имеет следующее представление:

$$\varphi(\rho, z) = \frac{i}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^z(z_0) \varphi_n^z(z) H_0^{(1)}(\lambda_n \rho). \quad (3.44)$$

На рис. 12 представлен типичный профиль скорости звука в океане (а) и соответствующие ему первые три моды для частоты 30 Гц (б).

Асимптотику точного решения (3.44) в дальней зоне ( $\rho$  большое) можно записать, используя асимптотику для функций Ханкеля:

$$\varphi(\rho, z) \underset{\rho \rightarrow \infty}{\sim} \frac{i}{2^{3/2} \pi^{1/2} \rho^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{1/2} \varphi_n^z(z_0) \varphi_n^z(z) \exp \left[ i \left( \lambda_n \rho - \frac{\pi}{4} \right) \right]. \quad (3.45)$$

(Представления (3.45) будут использованы для построения практических алгоритмов.)

### 3. 6. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ В ВЕРТИКАЛЬНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

При исследовании строения земной коры и верхней мантии широко используется информация, содержащаяся в выделенных на сейсмограммах поверхностных волнах, что связано с достаточно высокой величиной отношения сигнал/помеха по сравнению с объемными волнами (амплитуды поверхностных волн определяются фактором  $\rho^{-1/2}$ , а объемных — фактором  $r^{-1}$ ). Проходя через области с различным геологическим строением, поверхностные волны аккумулируют информацию об упругих свойствах и геометрии этих областей. Наиболее концентрированно эта информация представляется зависимостью скорости распространения от частоты. В свою очередь, выделение вклада поверхностных волн обеспечивается наличием поляризации.

Дальнее распространение поверхностных волн позволяет в лучевом описании воспользоваться асимптотическим разложением, аналогичным разложению акустического поля в стратифицированном океане (см. раздел 3. 5):

$$\varphi(x, y, z, t; \alpha) = A(\alpha x, \alpha y, z; \alpha) \exp\left\{\frac{i}{\alpha}\tau(\alpha x, \alpha y, \alpha t)\right\}.$$

В этом представлении фазовая скорость  $c = |\nabla\tau|^{-1}$ , кроме того, рассматриваются лучи, лежащие в горизонтальной плоскости.

Оператор Ламе для изотропной неоднородной среды записывается как

$$L = \rho\partial_i^2 - (\lambda + \mu)\nabla(\nabla\cdot) - \mu\Delta - (\nabla\lambda)(\nabla\cdot) - (\nabla\mu) \times (\nabla \times) - 2(\nabla\mu, \nabla). \quad (3.46)$$

Чтобы использовать представление (3.5) при построении нулевого приближения геометрической оптики для векторного поля зондирующего сигнала

$$L_0(p)A_0 = 0, \quad (3.47)$$

необходимо получить  $p$ -представление оператора Ламе (3.46):

$$\exp\{-i[(p \cdot x) + p_0 t]\} L \exp\{i[(p \cdot x) + p_0 t]\} \triangleq L(p).$$

Здесь  $p = (p_x, p_y)$  — градиент по горизонтальным координатам;  $p_0 = \partial\tau/\partial t$ . В декартовой системе координат  $(x, y, z)$  матричный оператор  $L$  имеет следующие компоненты:

$$L_{ii} = \rho\partial_i^2 - \left[ (\lambda + \mu)\partial_i^2 + \mu \sum_{j=1}^3 \partial_j^2 + (\partial_i\lambda)\partial_i - \sum_{j=i+1}^{i+2} (\partial_j\mu)\partial_j + 2 \sum_{j=1}^3 (\partial_j\mu)\partial_j \right],$$

где  $i = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{matrix}$  с циклической перестановкой (например,  $\begin{matrix} 3 \\ z \\ 2 \\ y \end{matrix}$ ):

$$L_{ij} = -[(\lambda + \mu)\partial_i\partial_j + \partial_i\lambda\partial_j + (\partial_j\mu)\partial_i].$$

Соответствующие элементы оператора в  $p$ -представлении с учетом  $\tau = \tau(x, y, t)$  запишем отдельно для  $L_{ij}$ , где  $i, j \neq z$ :

$$\begin{aligned} L_{ii}(p) &= -\rho p_0^2 + (\lambda + \mu)p_i^2 + \mu(p, p) - \mu\partial_x^2 - \partial_x\mu\partial_x = \\ &= -\rho p_0^2 + (\lambda + \mu)p_i^2 + \mu(p, p) - \partial_x\mu\partial_x, \end{aligned}$$



$$L_{ij} = (\lambda + \mu)p_i p_j$$

для  $i, j \neq z$  и для компонент, содержащих

$$L_{jz} = -i[(\lambda + \mu)\partial_z + (\partial_z \mu)p_j],$$

$$L_{zj} = -i[(\lambda + \mu)p_j \partial_z + (\partial_z \lambda)p_j],$$

$$L_{zz} = -\rho p_0^2 - (\lambda + 2\mu)\partial_z^2 + \mu(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}) - (\partial_z(\lambda + 2\mu))\partial_z.$$

Выберем локальную ортогональную систему координат (систему лучевых координат) с оортами

$$\mathbf{e}_\tau = \frac{\nabla \tau}{|\nabla \tau|} \triangleq \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}, \quad \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e}_\beta = [\mathbf{e}_\tau \times \mathbf{e}_z].$$

Тогда  $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_\tau, \mathcal{A}_\beta, \mathcal{A}_z)$ ;  $\mathbf{p} = (p_\tau, p_\beta)$ , причем  $p_\beta \equiv 0$ ,

$$L_{\tau\tau}(p) = -\rho p_0^2 + (\lambda + 2\mu)(\mathbf{p}, \mathbf{p}) - \partial_z(\mu \partial_z),$$

$$L_{\beta\beta}(p) = -\rho p_0^2 + \mu(\mathbf{p}, \mathbf{p}) - \partial_z(\mu \partial_z),$$

$$L_{zz}(p) = -\rho p_0^2 + \mu(\mathbf{p}, \mathbf{p}) - \partial_z((\lambda + 2\mu)\partial_z),$$

$$L_{\tau z}(p) = -i \left[ (\lambda + \mu)p_\tau \frac{\partial}{\partial z} + (\partial_z \mu)p_\tau \right],$$

$$L_{z\tau}(p) = -i \left[ (\lambda + \mu)p_\tau \frac{\partial}{\partial z} + (\partial_z \lambda)p_\tau \right],$$

$$L_{\beta\tau} = L_{\tau\beta} = L_{\beta z} = L_{z\beta} = 0.$$

Таким образом, матрица  $\mathbf{L}(p)$  имеет следующее заполнение:

$$\mathbf{L}(p) = \begin{vmatrix} L_{\tau\tau} & 0 & L_{\tau z} \\ 0 & L_{\beta\beta} & 0 \\ L_{z\tau} & 0 & L_{zz} \end{vmatrix},$$

а векторное уравнение (3.47) представляется в виде

$$L_{\beta\beta} \mathcal{A}_\beta = 0, \tag{3.48}$$

$$L_{\tau\tau} \mathcal{A}_\tau + L_{\tau z} \mathcal{A}_z = 0, \tag{3.49}$$

$$L_{z\tau} \mathcal{A}_\tau + L_{zz} \mathcal{A}_z = 0.$$

Уравнения (3.48) и (3.49) необходимо дополнить соответствующими граничными условиями. Если рассматривается распространение поверхностных волн в полупространстве со слабой горизонтальной неоднородностью, то граничные условия должны быть заданы на дневной поверхности  $Z^0 = Z^0(\tau, \beta)$  и на  $Z \rightarrow \infty$ .

Запишем оператор  $\Gamma$  граничного условия на дневной поверхности  $\mathbf{t} = \tau \mathbf{n} = 0$ :

$$\Gamma \mathcal{A} = \Gamma_{ij} \mathcal{A}_j,$$

$$\Gamma_{ii} = n_i (\lambda + 2\mu) \partial_i + \sum_{k \neq i} n_k \mu \partial_k,$$

$$\Gamma_{ij} = n_i \lambda \partial_j + n_j \mu \partial_i.$$

Вспоминая, что

$$\mathbf{n} = (1 + (\partial_\tau Z^0)^2 + (\partial_\beta Z^0)^2)^{-1/2} (\partial_\tau Z^0, \partial_\beta Z^0, -1),$$

запишем  $p$ -представление оператора  $\Gamma$  ( $\Gamma(p) = e^{-i(\mathbf{p}, \mathbf{x})} \Gamma e^{i(\mathbf{p}, \mathbf{x})}$ ,  $p = (p_\tau, p_\beta)$ ):

$$\Gamma(p) = - \left\| \begin{array}{ccc} \mu \partial_z & 0 & i \mu p_\tau \\ 0 & \mu \partial_z & 0 \\ i \lambda p_\tau & 0 & (\lambda + 2\mu) \partial_z \end{array} \right\|.$$

Полное условие разрешимости для уравнения  $L\varphi = 0$ ,  $\Gamma\varphi = 0$  или  $\mathcal{L}\varphi = 0$  имеет вид  $\mathcal{L}_0(p) \mathcal{A}_0 = 0$ , т. е. в нашем случае уравнение для  $\beta$ -компонента амплитуды  $\mathcal{A}$  ( $L_{\beta\beta} \mathcal{A}_\beta = 0$ ,  $\Gamma \mathcal{A}_\beta = 0$ ) превращается в задачу Штурма — Лиувилля:

$$\begin{aligned} \partial_z (\mu \partial_z) \mathcal{A}_\beta - (\lambda_n^2 - \rho p_0^2) \mathcal{A}_\beta &= 0, \\ \partial_z \mathcal{A}_\beta|_{z^0} &= 0, \quad \mathcal{A}_\beta \xrightarrow{z \rightarrow 0} 0. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Здесь  $\lambda_n^2 = \mu(p, p)$ , т. е. уравнение эйконала, а соответственно и геометрия лучей поверхностных волн определяются модой  $(\lambda_n)$  и осцилляциями компоненты  $\mathcal{A}_\beta$  вдоль оси  $z$ .

Заметим, что в задаче (3.50) появляется только модуль сдвига  $\mu$ , вектор поляризации волны ортогонален направлению распространения и лежит в горизонтальной плоскости. Эта волна соответствует хорошо известной волне Лява [35].

На дневной поверхности оставшиеся граничные условия для линейной комбинации описываются вектором с поляризациями  $\mathbf{e}_z$  и  $\mathbf{e}_\tau$ :

$$\begin{aligned} \mu \partial_z \mathcal{A}_\tau - i \mu p_\tau \mathcal{A}_z &= 0, \\ i \lambda p_\tau \mathcal{A}_\tau + (\lambda + 2\mu) \partial_z \mathcal{A}_z &= 0. \end{aligned}$$

Дополненные условиями при  $\mathcal{A}_\tau \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0$  и  $\mathcal{A}_z \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0$  в сочетании с системой уравнений (3.49) они описывают волны, соответствующие волнам Рэлея [1, 35, 82].

### 3. 7. ЛУЧЕВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Описание процессов распространения в неоднородных средах основывается на лучевой теории электромагнитных полей. Важное методологическое значение этой теории состоит в том, что на ее базе можно получить уравнения переноса и установить связь между статистическими характеристиками среды и параметрами феноменологической теории переноса электромагнитного излучения.

Запишем уравнения: для вектора напряженности электромагнитного поля, используя формулы (2.4) в, г):

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\mu \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}, \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E},\end{aligned}$$

считая, что среда описывается тензором диэлектрической проницаемости  $\hat{\varepsilon}$ , а магнитная проницаемость  $\mu \approx 1$  и сторонние токи отсутствуют ( $\mathbf{j} = 0$ ):

$$\hat{L}\mathbf{E} = \left( \nabla \times \nabla - c^{-2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{\varepsilon} \right) \mathbf{E} = 0.$$

Как обычно, используем общую концепцию раздела 3.1 и в качестве асимптотического разложения вектора  $\mathbf{E}$  примем

$$\mathbf{E} = \mathcal{A}(\mathbf{y}, \alpha) \exp \left\{ \frac{i}{\alpha} \tau(\mathbf{y}) \right\},$$

где  $\mathbf{y} = (y_0, y_1, y_2, y_3) \stackrel{\Delta}{=} (\alpha t, \alpha \mathbf{x}, \alpha y, \alpha z)$ . Оператор  $L$  имеет следующее  $p$ -представление ( $p \stackrel{\Delta}{=} (p_0, p_1, p_2, p_3) \stackrel{\Delta}{=} (p_0, \mathbf{p})$ ), в данном случае ( $p_0 = \omega$ ):

$$L(p) = e^{-i(\mathbf{p}, \mathbf{x})} \hat{L} e^{i(\mathbf{p}, \mathbf{x})} = -\mathbf{p} \times \mathbf{p} \mathbf{x} - \frac{\omega^2}{c^2} \hat{\varepsilon}.$$

Оператор  $L(p)$  запишем в виде  $L = L_0 + \alpha L'$ , причем  $\alpha L' \stackrel{\Delta}{=} (-\omega^2/c^2)(\hat{\varepsilon} - \hat{I} \text{Res} \hat{\varepsilon}/3)$  описывает анизотропию и неконсервативность среды, а  $L_0 = -\mathbf{p} \times \mathbf{p} \mathbf{x} - (\omega^2/c^2) \varepsilon_0 \hat{I}$ ,  $\varepsilon_0$  вещественна и равна  $\text{Res} \hat{\varepsilon}/3$ . Уравнение для нулевого приближения лучевого метода в локальной системе координат

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\partial_s \mathbf{e}_1}{|\partial_s \mathbf{e}_1|}, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$$

имеет вид

$$\dot{L}_0 \mathcal{A} = \begin{vmatrix} \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\mathbf{p}, \mathbf{p}) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\mathbf{p}, \mathbf{p}) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathcal{A}_1 \\ \mathcal{A}_2 \\ \mathcal{A}_3 \end{vmatrix} = 0, \quad (3.51)$$

т. е. в каноническом представлении можно записать:

$$\dot{L}_0(p) = (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^T + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3^T) \left[ \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_0 - (\mathbf{p}, \mathbf{p}) \right] + \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_0.$$

Учитывая совпадение собственных значений  $\lambda_2 = \lambda_3 = (\omega^2/c^2)\varepsilon_0 - (\mathbf{p}, \mathbf{p})$ , можно сделать заключение о поляризационном вырождении поперечных волн  $((\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{p}) = 0, (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{p}) = 0)$ . Уравнение (3.9) в данном случае дает  $|\mathbf{p}|^2 = (\omega^2/c^2)\varepsilon_0$ , т. е. дисперсионное соотношение имеет вид

$$\omega - \omega(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \omega - |\mathbf{p}| c \varepsilon_0^{-1/2} = 0.$$

Групповая скорость  $\mathbf{v}_{\text{гр}} = (\partial/\partial \mathbf{p})\omega(p, \mathbf{x})$  в данном случае равна  $\mathbf{v}_{\text{гр}} = c \varepsilon_0^{-1/2} \mathbf{e}_1$ . Вместо лучевого параметра  $s$  введем длину дуги  $l$ , эти параметры связаны между собой соотношением

$$(dl)^2 = \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \right)^2 ds^2,$$

$$\text{где } H = \frac{1}{2} \left[ (\mathbf{p}, \mathbf{p}) - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_0 \right]. \quad (3.52)$$

Отсюда следует  $dl = |\mathbf{p}| ds$ .

Запишем лучевые уравнения, используя длину дуги пространственной проекции луча  $dl$ :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dl} = \frac{1}{|\mathbf{p}|} \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \frac{1}{|\mathbf{p}|} \mathbf{p} = \frac{\mathbf{v}_{\text{гр}}}{|\mathbf{v}_{\text{гр}}|} = \mathbf{e}_1, \quad (3.53a)$$

$$\frac{dt}{dl} = \frac{1}{|\mathbf{p}|} \frac{dt}{ds} = \frac{\omega}{|\mathbf{p}|} = \frac{1}{|\mathbf{v}_{\text{гр}}|}, \quad (3.53б)$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dl} = \frac{1}{|\mathbf{p}|} \frac{d\mathbf{p}}{ds} = -\frac{1}{|\mathbf{p}|} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{|\mathbf{p}| \varepsilon_0^{1/2}}{|\mathbf{p}| c} \partial_{\mathbf{x}} \omega = \mathbf{v}_{\text{гр}}^{-1} \partial_{\mathbf{x}} \omega, \quad (3.53в)$$

$$\frac{d\omega}{dl} = \frac{1}{|\mathbf{p}|} \frac{d\omega}{ds} = -\frac{1}{|\mathbf{p}|} \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{|\mathbf{p}|} \frac{\omega}{c^2} \varepsilon_0 \partial_t \omega(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \mathbf{v}_{\text{гр}}^{-1} \partial_t \omega. \quad (3.53г)$$

С учетом (3.53а,г) можно записать уравнение кинематики движения точки на луче:

$$\frac{dx}{dt} = v_{гр}.$$

Следовательно, движение точки происходит с групповой скоростью, которая в силу изотропности среды совпадает с направлением вектора  $p$ .

Из уравнений (3.53в,г) вытекает связь волнового вектора с пространственным градиентом  $\omega$ :

$$\frac{dp}{dt} = \partial_x \omega.$$

Наконец, из соотношений (3.53) следует, что полная производная от частоты  $\omega$  по времени совпадает с локальной производной:

$$\frac{d\omega}{dt} = \partial_t \omega.$$

Идеи лучевой томографии реализуются на основе не только измерений фазы (как было показано), но и измерений вектора поляризации.

Приведем схему вывода закона вращения вектора поляризации [7]. Для этого запишем соотношение (3.6) для амплитуды нулевого приближения  $E_0$ :

$$\partial_p \partial_x L_0(p) E_0(x) = L'(p) E_0(x), \quad (3.54)$$

где

$$L'(p) = -\frac{\omega^2}{c^2} (\hat{\epsilon} - \frac{1}{3} \hat{I} \operatorname{Re} \operatorname{sp} \hat{\epsilon}).$$

Используя вместо  $L_0(p)$  удвоенную функцию Гамильтона  $H$  (3.52), перепишем формулу (3.54) в виде

$$\partial_{p_0} H \partial_t E_0 + \partial_p H \partial_x E_0 = \frac{1}{2} L'(p) E_0(x).$$

Заменяя производные от функции Гамильтона:

$$\partial_{p_0} H = \frac{dt}{ds}, \quad \partial_p H = \frac{dx}{ds}$$

и перейдя к параметру  $l$  (длине дуги пространственного луча), получим

$$\frac{\partial t}{\partial l} \partial_t E_0 + \frac{dx}{dl} \partial_x E_0 = \frac{1}{2} |p| L' E_0. \quad (3.55)$$

Заметим, что в левой части равенства (3.55) стоит полная производная от  $\mathbf{E}_0$  по длине нестационарного геометрооптического луча, т. е.

$$\frac{d}{dl}\mathbf{E}_0 = \frac{\omega}{2l}\sqrt{\epsilon_0}L'\mathbf{E}_0.$$

Записывая уравнение нулевого приближения для  $\mathbf{E}_0$  на дисперсионной поверхности, иными словами — учитывая, что в соответствии с (3.51)

$$\mathbf{E}_0 = A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3,$$

спроектируем уравнение (3.55) на плоскость, ортогональную

$$P_1 d_l \mathbf{E}_0 = \frac{\omega}{2c} \sqrt{\epsilon} P_1 L' \mathbf{E}_0, \quad (3.56)$$

$$\text{где } P_1 = I - \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1^T.$$

Если анизотропия поглощения отсутствует, то  $L' = 0$ , и соотношение (3.56) переписывается в виде  $P_1 d_l \mathbf{E}_0 = 0$ , т. е. мы получаем систему двух уравнений относительно  $A_2$  и  $A_3$ . Обозначим дифференцирование по  $l$  точкой:

$$\begin{aligned} \dot{A}_2 + A_2(\mathbf{e}_2, \dot{\mathbf{e}}_2) &= 0, \\ \dot{A}_3 + A_3(\mathbf{e}_3, \dot{\mathbf{e}}_3) &= 0. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Умножая первое из уравнений (3.57) на  $A_3$ , а второе — на  $A_2$  и складывая, записываем:

$$A_3 \dot{A}_2 - A_2 \dot{A}_3 = A_2^2(\mathbf{e}_3, \dot{\mathbf{e}}_2) - A_3^2(\mathbf{e}_2, \dot{\mathbf{e}}_3). \quad (3.58)$$

Поскольку  $d_l(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 0$ , уравнение (3.58) можно переписать в виде

$$(\mathbf{e}_2, \dot{\mathbf{e}}_3) = \frac{A_3 \dot{A}_2 - A_2 \dot{A}_3}{A_2^2 + A_3^2}.$$

Заметим, что в последнем равенстве в правой части стоит производная от  $\text{arctg} A_2/A_3 = \theta$ , а скалярное произведение  $(\mathbf{e}_2, \dot{\mathbf{e}}_3)$  равно  $|\dot{\mathbf{e}}_3|$ . В свою очередь,  $|\dot{\mathbf{e}}_3|$  по определению есть *кручение кривой* (луча). Обозначив величину кручения через  $T$ , записываем закон вращения вектора поляризации:

$$d_l \theta = T.$$

### 3. 8. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ЛУЧЕВОЙ ТОМОГРАФИИ

Рассмотренная в предыдущих разделах данной главы лучевая аппроксимация полей зондирующих сигналов является естественной основой для постановки задач кинематической лучевой томографии. Во всех лучевых представлениях в явном виде содержится фазовый множитель  $e^{i\tau}$  или  $e^{i\omega\tau}$ , где значение  $\tau$  в пространственной точке  $x$  определяется значением  $\tau$  в некоторой точке  $x_0$  (например, точке источника) и интегралом от лучевого показателя преломления, взятого вдоль луча, соединяющего точки  $x_0$  и  $x$ . Поэтому, если экспериментальные данные позволяют проследить за фазой сигналов, то выявляется связь свойств среды и времени пробега зондирующего сигнала. Эта же концепция позволяет определять поле коэффициента ослабления среды.

В качестве примера лучевой интерпретации рассмотрим случай анизотропной опорной среды. Будем считать, что скалярное волновое поле  $\varphi(x, t)$  удовлетворяет уравнению распространения

$$L\varphi = 0, \quad (3.59)$$

$$\text{где } L = \partial_i^2 - \sum_{ij} A_{ij}(x)\partial_i\partial_j, \quad i, j = 1 \div 3,$$

причем матрица  $A$  положительно определена независимо от точки  $x$ , т. е. оператор  $L$  во всей области гиперболический. Уравнение характеристик в этом случае имеет вид

$$(p, \hat{A}p) = 1 \quad (3.60)$$

и играет роль уравнения эйконала; вектор  $p$  как обычно равен  $\nabla\tau$ . Приравнивая градиент характеристической поверхности нулю, получим векторное дифференциальное уравнение первого порядка относительно производных  $p$ :

$$2(\nabla \cdot p)^T \hat{A}p + (p, (\nabla \hat{A})p) = 0. \quad (3.61)$$

Из этого уравнения получаем уравнения характеристик:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \hat{A}p, \\ \frac{dp}{ds} &= -\frac{1}{2} \left( p, (\nabla \cdot \hat{A})p \right). \end{aligned} \quad (3.62)$$

Последнее равенство есть уравнение характеристик (3.60).

Характеристические уравнения (3.62) определяют бихарактеристики исходного волнового уравнения (3.59), для построения которых необходимо задать данные Коши:

$$\mathbf{x}|_{s=0} = \mathbf{x}^{(0)}, \quad \mathbf{p}|_{s=0} = \mathbf{p}^{(0)},$$

причем  $\mathbf{p}^{(0)} : (\mathbf{p}^{(0)}, A\mathbf{p}^{(0)}) = 1$ .

Направление луча в точке  $s = 0$  определяем из первого уравнения системы (3.62):

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds}\Big|_{s=0} = \hat{A}_{x^0}\mathbf{p}^{(0)}.$$

Замечая, что  $\mathbf{p} = A^{-1}d\mathbf{x}/ds$ , уравнение (3.60) представим в виде

$$\left(\frac{d\mathbf{x}}{ds}, \hat{A}^{-1}\frac{d\mathbf{x}}{ds}\right) = 1. \quad (3.63)$$

Параметр  $s$  с точностью до аддитивной постоянной совпадает со значением эйконала  $\tau$ , поскольку

$$\frac{d\tau}{ds} = \left(\nabla_x \tau, \frac{d\mathbf{x}}{ds}\right) = (\mathbf{p}, A\mathbf{p}) = 1.$$

Поэтому из уравнения (3.63) получаем

$$ds^2 = d\tau^2 = (d\mathbf{x}, \hat{A}^{-1}d\mathbf{x}),$$

на основании чего можно провести интерпретацию характеристических уравнений (3.62): поскольку

$$\tau = \tau^0 + \int_C (d\mathbf{x}, \hat{A}^{-1}d\mathbf{x})^{1/2}, \quad (3.64)$$

то характеристические уравнения (3.62) определяют параметрическое задание геодезических кривых в пространстве с метрикой  $d\tau = (d\mathbf{x}, A^{-1}d\mathbf{x})$ . Используя равенство  $|d\mathbf{x}|^2 = dl^2$  ( $dl$  — элемент длины луча), можно записать  $d\mathbf{x} = \mathbf{n}(x)dl$  ( $\mathbf{n}(x)$  — единичный вектор направления распространения сигнала в точке  $x$ ). Выражение для обратной скорости (*медленности*) можно представить в следующем виде:

$$\frac{d\tau}{dl} = v^{-1}(x, \mathbf{n}) = (\mathbf{n}, A^{-1}\mathbf{n}).$$



Поэтому интеграл из формулы (3.64) по геодезической  $\mathcal{L}$  имеет следующий смысл:

$$\int_{\mathcal{L}} (dx, A^{-1} dx)^{1/2} = \int_{\mathcal{L}} \frac{dl}{v(x, n)},$$

т. е. смысл минимального времени пробега сигнала вдоль кривой, соединяющей две пространственные точки. Зависимость скорости  $v(x, n)$  в явной форме от направления распространения сигнала ( $n$ ) отражает специфику принятой модели анизотропной среды.

Восстановление коэффициентов  $A_{ij}(x)$  по известным длинам геодезических  $\mathcal{L}$ , соединяющих произвольные пары точек  $x$  и  $x_0$ , составляет сущность обратной кинематической задачи. В стандартных постановках таких задач пары точек  $x$  и  $x_0$  считаются лежащими на границе исследуемой области. Рассмотрим постановку линейризованного варианта решения трехмерной обратной кинематической задачи. Будем считать, что опорная среда характеризуется матрицей  $A_0(x)$ , и задача состоит в том, чтобы восстановить  $A(x)$ :

$$\hat{A}(x) = \hat{A}_0(x) + \alpha \hat{A}_1(x). \quad (3.65)$$

Здесь  $\alpha$  — малый параметр,  $\hat{A}_0$  и  $\hat{A}_1$  — положительно определенные матрицы. Представим эйконал в виде разложения

$$\tau(x_0, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \tau_n(x_0, x). \quad (3.66)$$

Подставив (3.65) и (3.66) в уравнение характеристик, получим

$$(p_0 + \alpha p_1, (A_0 + \alpha A_1)(p_0 + \alpha p_1)) = 1.$$

Здесь в разложении по  $p = \nabla \tau \approx \nabla \tau_0 + \alpha \nabla \tau_1 \stackrel{\Delta}{=} p_0 + \alpha p_1$  сохранены только линейные по  $\alpha$  члены. С учетом

$$(p_0, \hat{A}_0 p_0) = 1 \quad (3.67)$$

сохраняя члены порядка  $\alpha$ , получаем уравнение

$$2(p_1, \hat{A}_0 p_0) + (p_0, \hat{A}_1 p_0) = 0. \quad (3.68)$$

Уравнение (3.67) определяет геодезическую  $\mathcal{L}_0(x_0, x)$ . Учитывая, что  $ds = d\tau_0$ , можно записать:

$$(p_1, A_0 p_0) = \left( p_1, \frac{dx_0}{d\tau_0} \right) = \frac{d\tau_1}{d\tau_0},$$

поэтому из (3.68) получаем выражение для поправки  $\tau_1$ :

$$\tau_1(x, x_0) = -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{L}_0(x_0, x)} (p_0, \hat{A}_1(x) p_0) d\tau_0. \quad (3.69)$$

Оно является основой для решения линеаризованной обратной кинематической задачи. Заметим, что на  $\hat{A}_1(x)$  необходимо наложить условие:  $(A_1(x) + A_0(x) > 0)$ .

В задачах дистанционного зондирования кинематическая постановка, как правило, связывается с изотропной опорной средой, поэтому

$$\hat{A}_0(x) = a_0(x) = v_0^2(x),$$

$$\hat{A}_1(x) = a_1(x) = v_1^2(x),$$

$$(p_0, A_1 p_0) = a_1(x)(p_0, p_0) = \frac{a_1(x)}{a_0}, \quad d\tau_0 = \frac{dl_0}{v_0},$$

и соответствующее уравнение связи поправки времени прихода сигнала из точки  $x_0$  в точку  $x$  выглядит следующим образом:

$$\tau_1(x, x_0) = -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{L}_0(x_0, x)} \frac{v_1^2(x) dl_0}{v_0^3(x)} \triangleq \int_{\mathcal{L}_0(x_0, x)} \theta(x) dl_0. \quad (3.70)$$

Здесь  $dl_0$  — длина дуги луча  $\mathcal{L}_0(x_0, x)$ , соединяющего точки  $x_0$  и  $x$  в опорной среде с полем скорости  $v_0(x)$ .

Представление (3.70) является базовым для постановки задач лучевой томографии. Как будет показано в Приложении, уравнение характеристик определяется только старшими производными оператора распространения  $L$ . Поэтому лучевая концепция легко переносится на восстановление полей коэффициентов ослабления, связанных с первыми производными, входящими в оператор распространения  $L$ :

$$\ln \frac{|\Phi(\omega)|}{|\Phi_0(\omega)|} = - \int_{\mathcal{L}_0} \beta_\omega(x) dl_0$$

( $\Phi(\omega)$  — фурье-образ зарегистрированного в точке  $x$  сигнала  $\varphi$ ;  $\Phi_0(\omega)$  — фурье-образ теоретического зондирующего сигнала, генерированного в точке  $x_0$  и распространяющегося в опорной среде; луч  $\mathcal{L}_0(x_0, x)$  соединяет точки источника и наблюдений;  $\beta_\omega(x)$  — лучевой коэффициент ослабления по фиксированной частоте  $\omega$ ).

## Глава 4

### ПОСТРОЕНИЕ И ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ТОМОГРАФИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Восстановление коэффициентов — функций пространственных координат, описывающих локальные свойства среды, — по известным характеристикам поля зондирующего сигнала составляет предмет обратной задачи в математической физике [11, 13-15, 51, 52, 76, 97]. При постановке соответствующих обратных задач исходными данными служат поля, детерминированным образом заданные на пространственно-временном континууме. В реальном физическом эксперименте, в том числе в дистанционном зондировании, наблюдения проводятся в конечном числе "точек" пространства, при цифровой записи осуществляется временное квантование регистрируемого сигнала, при этом сам зарегистрированный сигнал представляет собой трансформацию физического поля на входе приемного устройства. Свести реальный эксперимент к традиционной математической постановке можно в том случае, если считать приборную запись непрерывной во времени и сначала осуществить так называемую "редукцию к идеальному прибору" (что представляет собой широко известную некорректную задачу [49, 65]), а затем провести пространственно-временную интерполяцию. Подобная процедура приводит к потере информации, хотя и применяется в ряде случаев [81].

Чтобы сформулировать математическую модель и поставить обратную задачу, адекватную реальному физическому эксперименту (дистанционному зондированию в частности), необходимо учесть основные факторы, определяющие формирование модели. Естественной математической моделью интерпретации физического эксперимента является восстановление полей искомым параметров среды по значениям набора функци-

оналов — "функционалов" измерений. Так в интерпретационных задачах возникает сопряженное пространство линейных функционалов, являющихся математической моделью линейных приборных устройств, регистрирующих зондирующий сигнал. Как будет показано в этой главе, это сопряженное пространство позволяет дать прозрачную физическую интерпретацию структуры функционалов, действующих непосредственно на поля искоемых параметров. Эти функционалы названы нами *томографическими*.

#### 4. 1. ПОСТРОЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Первый этап решения обратной задачи дистанционного зондирования есть построение модели связи между данными измерений и неизвестными полями параметров среды. В качестве исходных данных и используются, как правило, цифровые записи, регистрируемые приемниками, локализованными в пространстве. Искомые параметры, описывающие свойства среды, являются элементами  $(\theta(\mathbf{x}))$  функциональных пространств  $(\Theta)$ :  $\theta(\mathbf{x}) \in \Theta$ , например поля магнитных и гравитационных аномалий, проводимости  $(\sigma(\mathbf{x}))$ , упругих параметров Ламе  $(\lambda(\mathbf{x}), \mu(\mathbf{x}))$ , плотности  $(\rho(\mathbf{x}))$  и т. д. Пространство измерений — это пространство функционалов  $\{h_n\}$  над полями зондирующих сигналов  $(\varphi \in \Phi)$ ; модель измерений

$$u_n : u_n = H_n(\varphi) \triangleq \langle h_n | \varphi \rangle,$$

$n = 1 \div N$  — число цифровых отсчетов приемной системы,  $\{h_n\} \in \Phi^*$ .

*Томографический эксперимент* определяется отображением функционального пространства в пространство измерений:  $\Theta(R^3) \rightarrow R^N$ . Здесь экспериментальные данные, содержащие шум, являются функционалами искоемых полей параметров:

$$u_n = P_n(\theta) + \epsilon_n. \quad (4.1)$$

Пусть процесс распространения описывается линейным оператором  $L_\theta$ :

$$L_\theta \varphi = s, \quad (4.2)$$

где  $\varphi$  — поле зондирующего сигнала;  $s$  — поле источника;

$$L_\theta : L_\theta(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha L_\theta \varphi + \beta L_\theta \psi.$$

Оператор  $L_\theta$  определяет свойства среды. Проблема интерпретации томографического эксперимента с математической точки зрения сводится к восстановлению оператора  $L_\theta$  по измеренным данным. Чтобы получить решение, необходимо построить функционалы  $\mathcal{P}_n \in \Theta^*$ , опираясь на связь  $H_n(\varphi(\theta)) = \mathcal{P}_n(\theta)$  и закон распространения (4.2).

Будем считать, что поле  $\varphi$  генерируется группой источников и регистрируется приемником с диаграммой направленности  $\Omega$  и фиксированной ориентацией главного лепестка диаграммы  $e$ . Полагая размеры приемника малыми по сравнению с характерными размерами задачи (длиной волны зондирующего сигнала, характерными масштабами неоднородности), будем считать приемник локализованным в точке. Так, например, при интерпретации сейсмических данных полный набор экспериментальных значений мы получим, если учтем, что в условиях эксперимента участвуют  $J$  групп источников,  $3 \times K$  ( $K$  — число точек приема) трасс от каждой группы и обрабатываемых отсчетов цифровой записи сейсмотрассы:  $N = 3 K J L$  отсчетов. Нужно отметить, что фиксируется не непосредственно поле  $\varphi$ , а его трансформация аппаратной функцией регистрирующего канала  $H$ , который включает временное и амплитудное квантование. Самая общая модель трансформации зондирующего сигнала, регистрируемого каналом, представляется линейным оператором свертки. Вводя сквозную нумерацию отсчетов (индекс  $n = 1 \div N$ ), отдельный отсчет цифровой записи можно представить в виде

$$u_n = H_n L_\theta^{-1} s + \epsilon_n,$$

$$H : H_n \varphi = \iiint dx d\tau d\Omega h_n(e_n, e; t_n - \tau, x_n - x) \varphi(x, e, \bar{\tau}), \quad (4.3)$$

$$e : e \in R^3,$$

здесь все неизвестные свойства среды включены в оператор  $L_\theta^{-1}$ ; экспериментальные данные — результат свертки поля  $\varphi$  с аппаратной функцией  $h$ . Только в идеализированной постановке (когда  $h_n(t_n - t) = \delta(t - t_n)$ , что соответствует бесконечной спектральной полосе пропускания приемника — физически нереализуемой, и когда диаграмма направленности  $h(e_n, e) = h(e_n^T, e)$ ) экспериментальное значение, не отягощенное случайной ошибкой  $\epsilon$ , совпадает с проекцией поля  $\varphi(x, t)$  на направление  $n$ . В качестве реальной модели детерминированной

части конкретного измерения может быть принят функционал  $h_n = h_n(\varphi)$ , который считается непрерывным по физическому смыслу задачи и линейным по техническим требованиям. В связи с нелинейностью функционала  $\mathcal{P}_n(\theta)$  из (4.1) (даже при наличии явного выражения его действия на поле  $\theta$  и при осуществлении условия  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ ) решение с необходимостью имеет интерпретационную форму. Как правило, основным элементом на каждом шаге итерации является линеаризация функционала  $\mathcal{P}_n$ . Пусть среда описывается полем  $\Theta_0 = \Theta_0(x)$ , тогда модель измерений (4.1) переходит в

$$u_n = \mathcal{P}_n(\Theta_0) + \left. \frac{\delta}{\delta\theta} \right|_{\Theta_0} \mathcal{P}_n(\delta\theta) + \tilde{\varepsilon}_n,$$

где  $\tilde{\varepsilon}_n$  включает как случайную ошибку  $\varepsilon_n$ , так и ошибку, обусловленную детерминированной частью модели и связанную с линеаризацией.

Для поля  $\Theta_0$  реализуется уравнение распространения  $L_0 \varphi = s$ . Будем считать, что искомое поле  $\theta$  является близким к полю  $\Theta_0$ , т. е.  $\theta = \Theta_0 + \delta\theta$ ,  $\delta\theta \ll \Theta_0$ . Решение  $\varphi_0$  может быть получено иногда в аналитической форме, если используется один из приближенных методов, например геометрической оптики. Формальное решение для среды с полем параметров  $\theta$  записывается как

$$\varphi = \varphi_0 + L_0^{-1} \delta L_\theta \varphi \quad (4.4)$$

( $\delta L_\theta = L_0 - L_\theta$  — возмущающий оператор). Равенство (4.4) есть следствие операторного тождества:

$$L_\theta^{-1} \equiv L_0^{-1} + L_0^{-1} (L_0 - L_\theta) L_\theta^{-1}$$

представления  $\varphi = L_\theta^{-1} s$ .

Отметим, что представленная конструкция (4.4) может быть получена в случае, если поле  $\varphi_0$  удовлетворяет однородному уравнению  $L_0 \varphi_0 = 0$ . Записав оператор  $L = L_0 - \delta L_\theta$ , а решение  $\varphi$  — в виде  $\varphi = \varphi_0 + \delta\varphi$ , получим уравнение

$$L_0 \delta\varphi = \delta L_\theta \varphi,$$

т. е. поправка возмущенного поля описывается тем же уравнением, что и поле  $\varphi_0$  в опорной среде, но уже с эффективным источником:  $s = \delta L_\theta \varphi$ , включающим в себя помимо поля  $\varphi_0$  еще и поправку  $\delta\varphi$ .

Полная модель (4.3) с учетом (4.4) будет записана как

$$u_n = H_n [\varphi_0 + L_0^{-1} \delta L_\theta \varphi] + \varepsilon_n. \quad (4.5)$$

Здесь свойства среды отражаются как членом  $\delta L_\theta$ , так и множителем  $\varphi$ . Из-за наличия зависимости  $\varphi$  от  $\delta\theta$  детерминированная часть модели измерений оказывается нелинейной относительно  $\delta\theta$ . Если  $\delta\theta$  достаточно мало, т. е. если выполняется условие

$$\frac{\|H_n L_0^{-1} \delta L_\theta (\varphi - \varphi_0)\|^2}{E(\epsilon_n^2)} \ll 1 \quad (4.6)$$

( $E$  — оператор математического ожидания), то  $\varphi$  в (4.5) может быть заменено на  $\varphi_0$ . С физической точки зрения выполнение неравенства (4.6) определяет адекватность модели  $u_n(\varphi)$  реальным измерениям; в результате замены  $\varphi$  на  $\varphi_0$  модельная ошибка в (4.5) много меньше, чем ошибка измерений.

Проанализируем норму ошибки линеаризации, используя следующее неравенство:

$$\|H L_0^{-1} \delta L_\theta (\varphi - \varphi_0)\| \leq \|H L_0^{-1} \delta L_\theta\| \|\varphi - \varphi_0\|.$$

Норма разности полей  $\varphi$  и  $\varphi_0$  ограничена, что вытекает из физических соображений (физические поля не обладают бесконечной энергией):  $\|\varphi - \varphi_0\| \leq c < \infty$ . Оператор  $H L_0^{-1} \delta L_\theta$  компактен, что связано с компактностью оператора  $H$  (интегрального оператора свертки), определяющего пространственно-временную дискретизацию. При  $\delta\theta \rightarrow 0$   $\|H L_0^{-1} \delta L_\theta\| \rightarrow 0$  и условие (4.6) заведомо удовлетворяется. Учитывая (4.6), запишем модификацию модели (4.5):

$$u_n = H_n [\varphi_0 + L_0^{-1} \delta L_\theta \varphi_0] + \tilde{\epsilon}_n. \quad (4.7)$$

Ошибки, включающие ошибки линеаризации, подавляются действием оператора  $H_n$ . Запишем модель (4.7), введя билинейную форму:

$$u_n = \langle h_n | \varphi_0 \rangle_{V,T,\Omega} + \langle h_n | L_0^{-1} \delta L_\theta \varphi_0 \rangle_{V,T,\Omega} + \tilde{\epsilon}_n,$$

$$\langle \xi | \eta \rangle_{V,T,\Omega} = \int_{\Omega} \int_V \xi(\mathbf{e}, \mathbf{x}, i) * \eta(\mathbf{e}, \mathbf{x}, t) dx d\Omega$$

(\* — знак свертки по времени;  $V$  — область зондирования;  $T$  — временной интервал измерений).

Редуцируя экспериментальные данные на известное значение:

$$u_n^0 = \mathcal{P}_n(\Theta_0) \equiv \langle h_n | \varphi_0 \rangle_{V,T,\Omega},$$

получим

$$\tilde{u}_n = \langle h_n | L_0^{-1} \delta L_\theta \varphi_0 \rangle_{V,T,\Omega} + \tilde{\varepsilon}_n, \quad (4.8)$$

где  $\tilde{u}_n = u_n - u_n^0$ .

#### 4. 2. ТОМОГРАФИЧЕСКИЙ ФУНКЦИОНАЛ

Выделим в возмущающем операторе  $\delta L_\theta$  монотонную функцию  $\nu(\delta\theta)$ . Принимая во внимание тот факт, что во многих томографических задачах оператор  $\delta L_\theta$  близок к локальному, например является дифференциальным оператором, запишем (4.8) как

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n &= \langle (L_0^{-1})^* h_n | \delta L_\theta \varphi_0 \rangle_{V,T,\Omega} + \tilde{\varepsilon}_n = \\ &= \langle \langle G_0^* h_n \left| \frac{\delta}{\delta \nu} \delta L_\theta \right| G_0 s \rangle_{T,\Omega} | \nu(\delta\theta) \rangle_V + \tilde{\varepsilon}_n, \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\text{где } G_0 = L_0^{-1}; \quad \frac{\delta}{\delta \nu} \delta L_\theta : \frac{\delta u}{\delta \nu} = \langle G_0^* h_n \left| \frac{\delta}{\delta \nu} \delta L_\theta \right| \varphi_0 \rangle_{T,\Omega}.$$

Интегральное ядро функционала относительно  $\nu(\delta\theta)$  будем называть *томографическим функционалом*:

$$P_n^\nu = \langle \varphi_{\text{out}} | s^\nu | \varphi_{\text{in}} \rangle_{T,\Omega}, \quad (4.10)$$

где  $\varphi_{\text{in}} = \varphi_0$  — падающее поле в известной опорной среде  $\Theta_0$ ;  $\varphi_0 = L_0 \varphi_0 = s$ ,  $\varphi_{\text{out}} : L_0^* \varphi_{\text{out}} = h_n$  — обращенное поле, "генерированное" приемником;  $S^\nu = (\delta/\delta\nu)\delta L_\theta$  — оператор взаимодействия полей  $\varphi_{\text{in}}$  и  $\varphi_{\text{out}}$ .

Учитывая (4.10), запишем модель (4.9) как

$$\tilde{u} = P\nu + \tilde{\varepsilon},$$

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \|\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n, \dots, \tilde{u}_N\|^T, \quad \tilde{\varepsilon} = \|\tilde{\varepsilon}_1, \dots, \tilde{\varepsilon}_n, \dots, \tilde{\varepsilon}_N\|^T, \\ P &= \left\| \begin{array}{cccc} \langle p_{11} | & & \langle p_{1m} | & \dots & \langle p_{1M} | \\ & \dots & & & \\ \langle p_{n1} | & \dots & \langle p_{nm} | & \dots & \langle p_{nM} | \\ & \dots & & & \\ \langle p_{N1} | & \dots & \langle p_{Nm} | & \dots & \langle p_{NM} | \end{array} \right\|, \quad \nu = \left\| \begin{array}{c} |\nu_1| \\ \dots \\ |\nu_m| \\ \dots \\ |\nu_M| \end{array} \right\|. \end{aligned}$$

Томографический функционал определяет влияние всех элементов пространственной области на  $n$ -й отсчет экспериментальных данных. Нужно отметить, что в традиционной лучевой томографии томографический функционал является сингулярным и локализуется вдоль луча, соединяющего источник и



приемник; вес его вдоль луча постоянен, в то время как в дифракционной томографии даже при условии применимости лучевого описания полей  $\varphi_{in}$ ,  $\varphi_{out}$  каждый элемент объема исследуемой области управляется двумя лучевыми траекториями: от приемника и источника (причем каждый элемент пространственной области имеет собственный вес, который определяется взаимодействием полей  $\varphi_{in}$ ,  $\varphi_{out}$ ). Нужно заметить, что математические методы вычислительной томографии базируются на методах решения задач интегральной геометрии, когда данные (проекции) представлены интегралами параметрических функций на многообразиях меньшей размерности (лучи, двумерные поверхности), в то время как в дифракционной томографии носители томографического функционала принадлежат пространству  $R^3$ . Отметим, что основное содержание томографического эксперимента связано с перекрытием носителей томографических функционалов, т. е. информация об одном и том же элементе объема содержится во всей последовательности измерений. Измерения связаны как с изменениями локализации группы источников ( $\varphi_{in}$  в (4.10)), так и с локализацией, ориентацией приемника и отсчетов ( $\varphi_{out}$  в (4.10)) динамических полей.

Априорные данные могут быть представлены как в вероятностной, так и детерминированной форме, например задается определенный тип пространственной симметрии. Детерминированная форма задания априорной информации позволяет перевести томографический функционал в пространство меньшей размерности. Если априори среда предполагается горизонтально однородной, то носитель томографического функционала является однородным, а соответствующий томографический функционал является проекцией Радона обобщенного томографического функционала на вертикальное направление. В случае сферической симметрии параметр ядра томографического функционала является радиальной координатой.

#### 4. 3. ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ И ИНТЕРПРЕТАЦИИ ТОМОГРАФИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Рассмотрим примеры построения и интерпретации томографических функционалов.

Скалярное волновое уравнение. Операторы  $L_0$  и  $L_\theta$  имеют

$$L_0 = -\Delta + c_0^{-2}(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$$L_\theta = -\Delta + c^{-2}(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$$\Theta_0 = c_0(x), \quad \theta = c(x), \quad x \in R^3, \quad \nu = \nu(x) = \frac{1}{c_0^2} \left( 1 - \frac{c_0^2}{c^2} \right),$$

$$S^\nu = \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad p = \left\langle \varphi_{\text{out}} \left| \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right| \varphi_{\text{in}} \right\rangle_T.$$

В этом случае сопряженный оператор Грина

$$G^* : G^*(x, x'; t - t') = G(x', x; -(t - t'))$$

определяет распространение волны от приемника в обратном времени. Носитель томографического функционала в однородной опорной среде локализуется в параболическом слое, когда падающее поле является плоской волной, и в эллиптическом слое, когда падающее поле является сферической волной (при условии точечности приемника).

На рис.13,а показано сечение носителя томографического функционала, проходящее через ось симметрии; слой параболоида образован кинематически эквивалентными точками ( $c = \text{const}$ ). На рис.13,б, в схематически дана конфигурация носителя томографического функционала, если источник ( $s$ ) точечный, а приемник ( $r$ ) с аппаратной функцией  $h(t) = \delta(t)$ , причем  $b$  — пространственно-временное представление полей  $\varphi_{\text{in}}$ ,  $\varphi_{\text{out}}$ ,  $v$  — носитель томографического функционала.

Уравнение Ламе для однородной изотропной безграничной среды. Операторы распространения волнового поля в опорной ( $L_0$ ) и возмущенной ( $L_\theta$ ) средах записываются в виде

$$L_0 \varphi = \rho_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - [(\lambda_0 - \mu_0) \nabla \nabla \cdot \varphi + \mu_0 \Delta \varphi + \nabla \lambda_0 \nabla \cdot \varphi + \nabla \mu_0 \times \nabla \times \varphi + 2(\nabla \mu_0 \cdot \nabla) \varphi],$$

$$L_\theta \varphi = \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - [(\lambda - \mu) \nabla \nabla \cdot \varphi + \mu \Delta \varphi + \nabla \lambda \nabla \cdot \varphi + \nabla \mu \times \nabla \times \varphi + 2(\nabla \mu \cdot \nabla) \varphi].$$

Здесь

$$\Theta_0 = \left\| \begin{array}{c} |\lambda_0(x)\rangle \\ |\mu_0(x)\rangle \\ |\rho_0(x)\rangle \end{array} \right\|, \quad \Theta = \left\| \begin{array}{c} |\lambda(x)\rangle \\ |\mu(x)\rangle \\ |\rho(x)\rangle \end{array} \right\|,$$

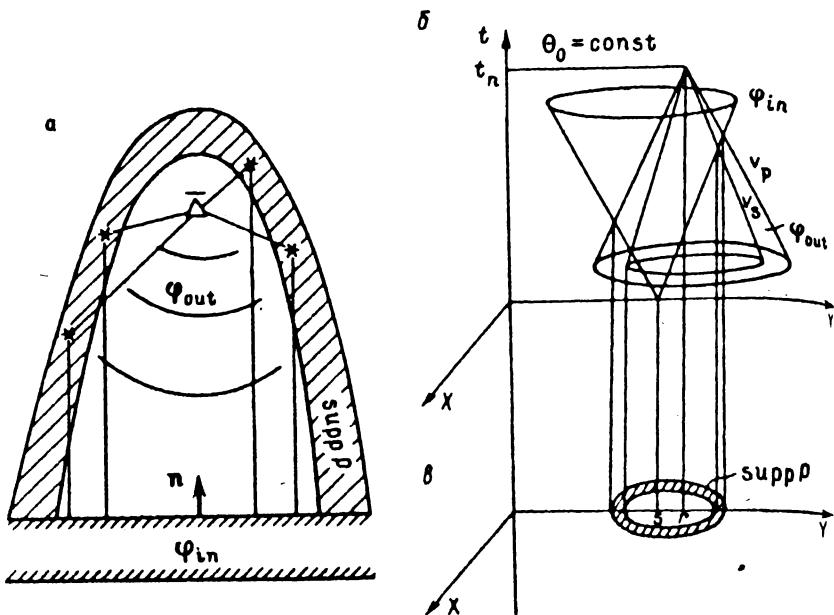


Рис. 13.

$$\begin{aligned} \nu(\delta\theta) &= \delta\theta, & \lambda(x) &= \lambda_0(x) + \delta\lambda(x), \\ \mu(x) &= \mu_0(x) + \delta\mu(x), \\ \rho(x) &= \rho_0(x) + \delta\rho(x). \end{aligned}$$

Структура оператора  $P$  в данном случае будет описываться как

$$\langle p^\nu | = || \langle P^\lambda | \langle P^\mu | \langle P^\rho | ||.$$

Возмущающий оператор  $\delta L = L_0 - L_\theta$  из (4.4) равен

$$\delta L = \delta L_\lambda + \delta L_\mu + \delta L_\rho,$$

$$\delta L_\lambda : \delta L_\lambda \varphi = \delta\lambda \nabla \nabla \cdot \varphi + \nabla \delta\lambda \nabla \cdot \varphi = \nabla(\delta\lambda \nabla \cdot \varphi), \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \delta L_\mu : \delta L_\mu \varphi &= \delta\mu \nabla \nabla \cdot \varphi + \delta\mu \Delta \varphi + \nabla \delta\mu \times \nabla \times \varphi + \\ &+ 2(\nabla \delta\mu \cdot \nabla) \varphi = 2\delta\mu \Delta \varphi + \delta\mu \times \nabla \times \nabla \varphi + \end{aligned}$$

$$+ \nabla \delta \mu \times \nabla \times \varphi + 2(\nabla \delta \mu \cdot \nabla) \varphi,$$

$$\delta L_\rho : \delta L_\rho \varphi = -\delta \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi. \quad (4.12)$$

Выражение  $(\nabla \delta \mu \cdot \nabla) \varphi$  в координатной форме с единичными векторами  $e_i$  можно записать как

$$\sum_i (\nabla \delta \mu \cdot \nabla \varphi_i) e_i.$$

Используя тождество

$$\nabla \cdot (\eta \nabla \xi) = \eta \Delta \xi + \nabla \eta \cdot \nabla \xi,$$

трансформируем выражение

$$2\delta \mu \Delta \varphi + 2(\nabla \delta \mu \cdot \nabla) \varphi$$

так, что оно примет вид

$$2 \sum_i \nabla \cdot (\delta \mu \nabla \varphi_i) e_i.$$

Используя тождество

$$\nabla \times (\xi \mathbf{f}) = \nabla \xi \times \mathbf{f} + \xi \nabla \times \mathbf{f},$$

мы получаем

$$\delta \mu \nabla \times \nabla \times \varphi + \nabla \delta \mu \times \nabla \times \varphi = \nabla \times \delta \mu \nabla \times \varphi.$$

Окончательно запишем действие оператора  $\delta L_\mu$  в форме

$$\delta L_\mu = \nabla \times (\delta \mu \nabla \times \varphi) + 2 \nabla \cdot (\delta \mu \nabla \varphi).$$

Напомним, что значения томографических функционалов (4.10) можно записать в виде

$$\langle \rho^\theta | \delta \theta \rangle_V = \int_V \varphi_{\text{out}} \otimes \delta L_\theta \varphi_{\text{in}} dx$$

для вариаций любого поля параметров  $\delta \theta$  (символ  $\otimes$  означает свертку по времени и суммирование по всем индексам входящих векторных либо тензорных выражений, символ  $*$  оставлен для обычной свертки по времени). Например:

$$\psi_{ik} \otimes \varphi_{lm} \stackrel{\Delta}{=} \psi_{ik} * \delta_{il} \delta_{km} \varphi_{lm}.$$

Детерминированную часть  $\bar{u}_n = \bar{u}_n - \bar{\varepsilon}_n$  модели (4.9) можно представить как

$$\bar{u}_n = \int_V \varphi_{\text{out}} \otimes \delta L_\lambda \varphi_{\text{in}} dx + \int_V \varphi_{\text{out}} \otimes \delta L_\mu \varphi_{\text{in}} dx + \int_V \varphi_{\text{out}} \otimes \delta L_\rho \varphi_{\text{in}} dx. \quad (4.13)$$

Выделим дивергентную часть первого слагаемого (4.13) с учетом выражения для  $\delta L_\lambda$  (4.11):

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{out}} \otimes \delta L_\lambda \varphi_{\text{in}} &= \varphi_{\text{out}} \otimes \nabla(\delta\lambda \nabla \cdot \varphi_{\text{in}}) \equiv \\ &\equiv \nabla \cdot (\varphi_{\text{out}} \otimes \delta\lambda \nabla \cdot \varphi_{\text{in}}) - \delta\lambda \nabla \cdot \varphi_{\text{out}} \otimes \nabla \varphi_{\text{in}} \end{aligned}$$

и применим теорему Гаусса — Остроградского:

$$\int_V \nabla \cdot (\varphi_{\text{out}} \otimes \delta\lambda \nabla \cdot \varphi_{\text{in}}) dx = \int_{\partial V} ds \cdot (\varphi_{\text{out}} \otimes \delta\lambda \nabla \cdot \varphi_{\text{in}}),$$

затем выбираем объем интегрирования достаточно большим, так, что можно принять  $\delta\lambda|_{\partial V} \equiv 0$ , тогда соответственно интеграл по поверхности исчезнет и первое слагаемое в (4.13) можно записать как

$$\begin{aligned} \int_V \varphi_{\text{out}} \otimes \delta L_\lambda \varphi_{\text{in}} dx &= \int_V \delta\lambda \nabla \cdot \varphi_{\text{out}} \otimes \nabla \cdot \varphi_{\text{in}} dx = \\ &= \int_V p^\lambda(x) \delta\lambda(x) dx = \langle\langle \varphi_{\text{out}} | S^\lambda | \varphi_{\text{in}} \rangle_T | \delta\lambda \rangle_V, \end{aligned}$$

$$S^\lambda : p^\lambda = \langle \varphi_{\text{out}} | S^\lambda | \varphi_{\text{in}} \rangle = -\nabla \cdot \varphi_{\text{out}} \otimes \nabla \cdot \varphi_{\text{in}}, \quad (4.14)$$

т. е. действие оператора взаимодействия  $S^\lambda$  полей  $\varphi_{\text{in}}$  и  $\varphi_{\text{out}}$  сводится к симметричной трансформации полей  $\varphi_{\text{in}}$  и  $\varphi_{\text{out}}$  в поле их дивергенций:  $\nabla \cdot \varphi_{\text{in}}$  и  $\nabla \cdot \varphi_{\text{out}}$ . Чтобы определить действие оператора  $S^\mu$ , воспользуемся тождеством

$$\nabla \cdot (\xi f) = \nabla \xi \cdot f + \xi \nabla \cdot f,$$

с учетом которого, а также выражения для  $\delta L_\mu$  из (4.12), получим

$$\begin{aligned} \int_V \varphi_{\text{out}} \otimes \nabla \cdot (\delta\mu \nabla \varphi_{\text{in}}) dx &= \int_V \nabla \cdot (\varphi_{\text{out}} \otimes \delta\mu \nabla \varphi_{\text{in}}) dx - \\ &- \int_V \nabla \varphi_{\text{out}} \otimes \delta\mu \nabla \varphi_{\text{in}} dx. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Применение теоремы Гаусса — Остроградского и учет условия  $\delta\mu|_{\partial V} = 0$  приводит к исчезновению первого интеграла в правой части (4.15), а во второй интеграл  $\delta\mu$  входит множителем.

Аналогично взаимодействие  $\varphi_{out}$  со вторым слагаемым в (4.15) дает

$$\begin{aligned} \int_V \varphi_{out} \otimes \nabla \times (\delta\mu \nabla \times \varphi_{in}) dx &= \\ &= \int_V \nabla \cdot \int_T dt' \varphi_{out}(t-t') \times \delta\mu \nabla \times \varphi_{in}(t') dx + \\ &+ \int_V (\delta\mu \nabla \times \varphi_{out} \otimes \nabla \times \varphi_{in}) dx. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Здесь первый интеграл в правой части имеет дивергентную форму и исчезает:  $\delta\mu|_{\partial V} = 0$ . Окончательно, используя (4.15) и (4.16), находим:

$$\begin{aligned} \int_V \varphi_{out} \otimes \delta L_\mu \varphi_{in} dx &= \int_V dx [\nabla \times \varphi_{out} \otimes \nabla \times \varphi_{in} - \\ &- 2\nabla \varphi_{out} \otimes \nabla \varphi_{in}] \delta\mu = \int_V dx p^\mu(x) \delta\mu(x) = \langle (\varphi_{out} | S^\mu | \varphi_{in})_T | \delta\mu \rangle_V, \end{aligned}$$

$$S^\mu : p^\mu = \langle \varphi_{out} | S^\mu | \varphi_{in} \rangle = \nabla \times \varphi_{out} \otimes \nabla \times \varphi_{in} - 2\nabla \varphi_{out} \otimes \nabla \varphi_{in}. \quad (4.17)$$

Действие оператора  $S^\rho$  с учетом (4.12) определяется выражением

$$\int_V \varphi_{out} \otimes \delta L_\rho \varphi_{in} dx = - \int_V \varphi_{out} \otimes \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi_{in} dx, \quad (4.18)$$

которое можно записать в явно симметричной относительно полей ( $\varphi_{out}$  и  $\varphi_{in}$ ) форме; проводя интегрирование в (4.18) по частям:

$$\varphi_{out} \otimes \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi_{in} = \int_{-\infty}^{\infty} dt \varphi_{out}(T-t) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi_{in}(t) =$$

$$= \varphi_{\text{out}} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{\text{in}} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{\text{out}} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{\text{in}} dt$$

и принимая во внимание, что  $\varphi_{\text{out}}|_{+\infty} = 0$ ,  $\partial/\partial t \varphi_{\text{in}}|_{-\infty} = 0$ , получим

$$S^p : p^p = \langle \varphi_{\text{out}} | S^p | \varphi_{\text{in}} \rangle = \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{\text{out}} \otimes \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{\text{in}}. \quad (4.19)$$

Итак, формулы (4.14), (4.17) и (4.19) определяют операторы взаимодействия  $S^\lambda$ ,  $S^\mu$  и  $S^p$  полей  $\varphi_{\text{in}}$  и  $\varphi_{\text{out}}$ . Физическая интерпретация томографических функционалов заключается в том, что их интегральные ядра представляют собой пространственные функции влияния вариаций полей искомым параметров среды на отсчетные экспериментальные значения волнового поля зондирующего сигнала. Носитель томографического функционала определяется областью взаимодействия полей  $\varphi_{\text{in}}$  и  $\varphi_{\text{out}}$ , заведомо ограниченной в силу физических условий томографического эксперимента (конечный временной интервал измерений и конечная скорость распространения поля  $\varphi_{\text{out}}$ ).

Норма томографического функционала обусловлена амплитудой функции влияния, связанной с оператором взаимодействия. На рис. 14 приведены диаграммы амплитуды воздействия полей  $\varphi_{\text{in}}$  и  $\varphi_{\text{out}}$  в однородной опорной среде: *a* — оба поля — продольные волны, *b* — поле  $\varphi_{\text{in}}$  является продольной, а поле  $\varphi_{\text{out}}$  — поперечной волнами (пунктирные окружности на рис. *b* определяют эквивалентные амплитуды  $\varphi_{\text{out}}$ -волны). Поле генерируется "источником" с временной зависимостью, определяемой аппаратной функцией сейсморегирующего канала. Вследствие ограниченной полосы частот аппаратной функции при взаимодействии полей  $\varphi_{\text{in}}$  и  $\varphi_{\text{out}}$ , которое во всех случаях носит характер свертки во временной области (соответственно произведения — в спектральной области), выписываются лишь перекрывающиеся спектральные компоненты полей  $\varphi_{\text{in}}$  и  $\varphi_{\text{out}}$ .

Анализ томографических функционалов позволяет провести математическое планирование томографического эксперимента, управляя входящими в структуру томографического функционала параметрами (пространственной локализацией источников и приемников  $\varphi_{\text{in}}$  и  $\varphi_{\text{out}}$ , формой зондирующего сигнала  $\varphi_{\text{in}}$ , выбором временного интервала регистрации  $\varphi_{\text{out}}$ ). При этом характер взаимодействия определяется только влиянием параметров среды на физику распространения зондиру-

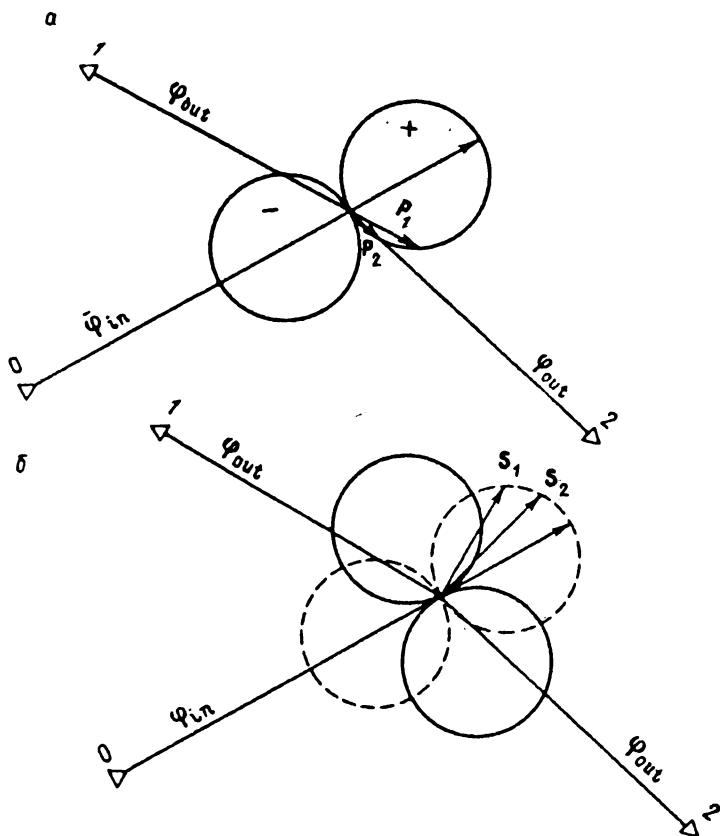


Рис. 14.

ющего сигнала: например, если поле является чисто вихревым (поперечная волна в опорной однородной среде), то томографический функционал  $p^\lambda$  становится нулевым, соответственно такой томографический эксперимент заведомо обладает нулевой информативностью по отношению к полю параметра  $\lambda$ . Физически содержательный томографический эксперимент определяется не только нормой томографических функционалов, но и областью пересечения носителей.

Отдельно рассмотрим ситуацию, при которой *опорную среду*



можно считать *однородной*.

Пусть вариации упругих параметров в однородной изотропной среде таковы, что  $|\nabla\lambda|$ ,  $|\nabla\mu|$  и  $\delta\rho$  достаточно малы. Рассмотрим две ситуации, когда поле  $\varphi_{in}$  является чисто продольной волной и когда  $\varphi_{in}$  — чисто поперечная волна. В первом случае введем функцию

$$\nu_p(v_p^2) = \rho_0 \left[ \frac{v_p^2}{v_{p0}^2} - 1 \right],$$

при этом  $\rho_0 \delta(v_p^2) = \delta(\lambda + 2\mu)$ . Записав действие оператора возмущения на поле  $\varphi_{in} \equiv \varphi_p$ , где  $\varphi_p : \nabla \times \varphi_p \equiv 0$ , получим:

$$\begin{aligned} \delta L \varphi_p &= \delta\lambda \nabla \nabla \cdot \varphi_p + 2\delta\mu \Delta \varphi_p = \\ &= (\delta\lambda + 2\delta\mu) \Delta \varphi_p = \delta(\lambda + 2\mu) \Delta \varphi_p. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Замечая, что в точках пространства, где отсутствует источник, справедливо уравнение

$$\left( \rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - (\lambda_0 + 2\mu_0) \Delta \right) \varphi_p = 0,$$

заменяем в (4.20)  $\Delta \varphi_p$  на  $\frac{\rho_0}{\lambda_0 + 2\mu_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi_p$ . Тогда

$$\delta L \varphi_p = \delta\nu_p \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi_p.$$

Соответствующий томографический функционал и оператор взаимодействия имеют вид

$$S^{\nu_p} : p^{\nu_p} = \langle \varphi_{in} | S^{\nu_p} | \varphi_{out} \rangle = -\frac{\partial}{\partial t} \varphi_{in} \otimes \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{out}. \quad (4.21)$$

Во втором случае введем функцию

$$\nu_s(v_s^2) = \rho_0 \left[ \frac{v_s^2}{v_{s0}^2} - 1 \right],$$

тогда

$$\rho \delta(v_s^2) = \delta\mu.$$

Запишем действие возмущающего оператора на поле  $\varphi_{in} \equiv \varphi_s$ , где  $\varphi_s : \nabla \cdot \varphi_s \equiv 0$ :

$$\delta L \varphi_s = \delta\mu \Delta \varphi_s.$$

Используя уравнение для соленоидального поля  $\varphi_s$ :

$$\left( \rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu \Delta \right) \varphi_s = 0,$$

получаем

$$\delta L \varphi_s = \delta v_s \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi_s.$$

Томографический функционал для  $v_s$  имеет вид

$$S^{v_s} : p^{v_s} = \langle \varphi_{in} | S^{v_s} | \varphi_{out} \rangle = - \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{in} \otimes \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{out}. \quad (4.22)$$

Несмотря на то, что операторы  $S^{v_p}$  (4.21) и  $S^{v_s}$  в (4.22), определяющие взаимодействие полей  $\varphi_{in}$  и  $\varphi_{out}$ , идентичны, носители соответствующих томографических функционалов различны, что связано с разными скоростями распространения волн сжатия ( $v_p$ ) и сдвига ( $v_s$ ). Чтобы проиллюстрировать конфигурацию носителя томографического функционала, рассмотрим плоскую падающую волну.

На рис. 15,а изображены характеристические конусы, соответствующие полю точечного источника  $\varphi_{out}$ , генерированному приемником в момент  $t_n$  и распространяющемуся в обратном времени. Внешняя коническая поверхность соответствует распространению со скоростью волны сжатия внутренней волны сдвига. В трехмерном пространстве  $R^3$  поле сосредоточено между этими коническими поверхностями (для упрощения на рис. 15,а опущено действие свертки по времени, в предположении, что "источник" моделируется  $\delta$ -функцией по времени). Нормаль к фронту плоской волны ориентирована в направлении, противоположном  $e_z$ . На этом рисунке поле  $\varphi_{in}$  представляет собой плоскую волну сжатия с конечной длительностью сигнала. Носитель томографического функционала (рис. 15,б) ограничен в пространстве двумя поверхностями: внешняя — параболоид вращения, являющийся пространственной проекцией сечения внешнего характеристического конуса ( $v_p$ ) плоскостью фронта падающей  $P$ -волны. Внутренняя поверхность — эллипсоид вращения, соответствующий пространственной проекции сечения внутреннего конуса ( $v_s$ ) плоскостью падающего поля  $P$ -волны. Оси симметрии обеих поверхностей, ограничивающих носитель томографического функционала, совпадают с  $e_z$ .

На рис. 15,в падающая волна  $\varphi_{in}$  — плоская  $S$ -волна. В этом случае внешняя поверхность, ограничивающая носитель функционала (рис. 15,з), — гиперболоид вращения, внутренняя — параболоид вращения, ось симметрии та же:  $e_z$ .

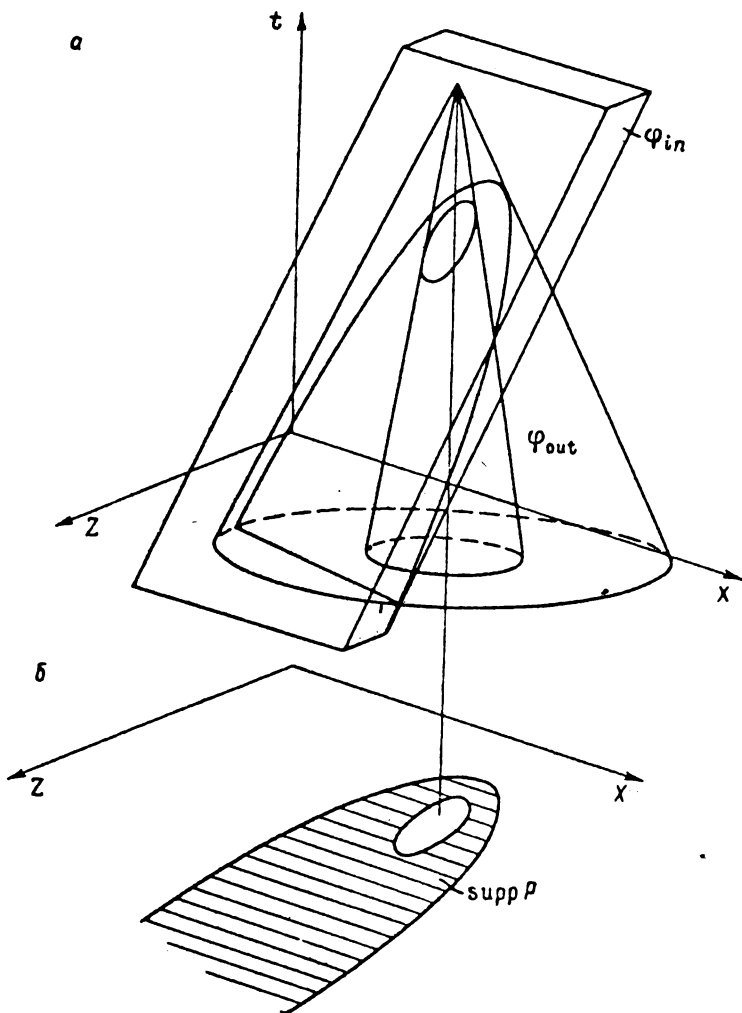


Рис. 15, а, б

**Уравнение переноса стационарного зондирующего сигнала.** При исследовании пространственной структуры атмосферы Земли и других планет, плазменных объектов в широком

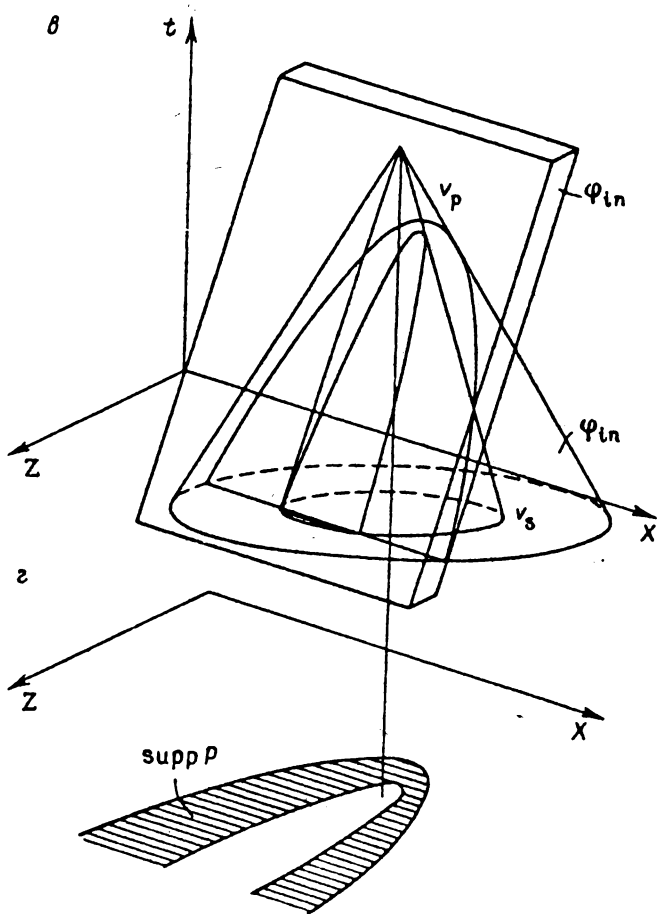


Рис. 15, а, з

классе физических экспериментов, где измеряемые величины являются квадратичными функциями волновых полей, а также при описании прохождения потоков частиц в среде возникает

уравнение переноса.

Пусть поле зондирующего сигнала будет:

$$\varphi(x, n), \quad n \in \Omega = \{n : n \in R^3, |n| = 1\}.$$

Запишем операторы уравнения переноса для опорной ( $L_0$ ) и возмущенной ( $L_\theta$ ) сред в случае изотропного рассеяния:

$$L_0 \varphi = (n, \nabla \varphi) + \alpha_0(x) \varphi - \sigma_0(x) \int_{\Omega} \varphi(x, n) dn, \quad (4.23)$$

$$L_\theta \varphi = (n, \nabla \varphi) + \alpha(x) \varphi - \sigma(x) \int_{\Omega} \varphi(x, n) dn \quad (4.23)$$

( $\alpha$  — коэффициент абсорбции;  $\beta$  — коэффициент рассеяния;  $\Theta_0 = \|\alpha_0(x), \beta_0(x)\|$ ,  $\nu(\delta\theta) = \delta\theta$ ). Оператор взаимодействия имеет два компонента:  $S^\nu = [S^\alpha, S^\sigma]$ , а томографический функционал представляется как  $\langle p^\nu | = [\langle p^\alpha |, \langle p^\sigma |]$ . Операторы взаимодействия  $S^\alpha$  и  $S^\sigma$  легко находятся из представления оператора возмущения для уравнений (4.23) и (4.24):

$$\delta L = \delta L_\alpha + \delta L_\sigma, \quad .$$

$$\delta L_\alpha : \delta L_\alpha \varphi = \delta \alpha \varphi, \quad (4.25)$$

$$\delta L_\sigma : \delta L_\sigma \varphi = \delta \sigma \int_{\Omega} \varphi(x, n') dn'. \quad (4.26)$$

Томографические функционалы записываются в виде

$$\langle p^\alpha | \delta \alpha \rangle_{\Omega} = \int_{\Omega} \varphi_{out} \delta L_\alpha \varphi_{in} dn,$$

$$\langle p^\sigma | \delta \sigma \rangle_{\Omega} = \int_{\Omega} \varphi_{out} \delta L_\sigma \varphi_{in} dn.$$

Подставив  $\delta L_\alpha$  и  $\delta L_\sigma$  в форме (4.25), (4.26), получим

$$S^\alpha : \langle p^\alpha(x) | = \langle \varphi_{out} | S^\alpha | \varphi_{in} \rangle_{\Omega} = \langle \varphi_{out} | S^\sigma | \varphi_{in} \rangle_{\Omega}, \quad (4.27)$$

$$S^\sigma : \langle p^\sigma | = \langle \varphi_{out} | S^\sigma | \varphi_{in} \rangle_{\Omega} = \langle \varphi_{out} | \int_{\Omega} \varphi_{in}(x, n') dn' \rangle_{\Omega}. \quad (4.28)$$

Анализ формул (4.27) и (4.28) показывает, что в изотропном случае действие томографического функционала, соответствующего коэффициенту поглощения  $\alpha$ , сводится к интегрированию произведения полей  $\varphi_{in}$  и  $\varphi_{out}$  по полному телесному

углу, а действие томографического функционала коэффициента рассеяния определяется произведением интегралов по полному телесному углу полей  $\varphi_{in}$  и  $\varphi_{out}$ . Отметим, что поле  $\varphi_{in}$ , входящее в выражение томографических функционалов, является решением уравнения переноса в опорной среде (4.23). Поле  $\varphi_{out}$  удовлетворяет сопряженному уравнению

$$-(\mathbf{n}, \nabla \varphi) + \alpha_0(\mathbf{x}) - \sigma_0(\mathbf{x}) \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{n}') d\mathbf{n}' = h,$$

где  $h$  — поле, "генерированное" приемником.

**Уравнение диффузии.** В задачах геоэлектрики, как правило, рассматривают квазистационарные поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , которые при отсутствии токов и зарядов удовлетворяют однородным уравнениям диффузии:

$$\Delta \varphi - \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0,$$

где  $\varphi$  является вектором  $\mathbf{E}$  или  $\mathbf{H}$ . Эволюционные операторы в опорной ( $L_0$ ) и возмущенной ( $L_\sigma$ ) средах имеют вид

$$L_0 = \Delta - \sigma_0(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial t},$$

$$L_\sigma = \Delta - \sigma(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial t},$$

где  $\sigma(\mathbf{x}) = \sigma_0(\mathbf{x}) + \delta\sigma(\mathbf{x})$ . Оператор возмущения  $\delta L_\sigma$  можно записать  $\delta L_\sigma = \delta\sigma \partial/\partial t$ , тогда томографический функционал будет выражаться как

$$p^\sigma = \varphi_{in} \otimes \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{out}. \quad (4.29)$$

Заметим, что  $\varphi_{in}$  и  $\varphi_{out}$  в (4.29) удовлетворяют уравнениям соответственно

$$L_0 \varphi_{out} = 0, \quad L_0^* \varphi_{in} = h,$$

$$\text{где } L_0^* = \Delta + \sigma_0(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial t}.$$

#### 4. 4. ЛУЧЕВЫЕ ТОМОГРАФИЧЕСКИЕ ФУНКЦИОНАЛЫ В ДИНАМИКО-КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ДАННЫХ ДИСТАНЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ

Интерпретация данных дистанционного зондирования велась в двух вариантах: в качестве данных томографического эксперимента использовались либо фазовая характеристика зондирующего сигнала — и тогда мы имели дело с лучевой томографией, либо волновое поле самого зондирующего сигнала — и тогда это соответствовало дифракционной томографии. В последнем случае структура волнового поля сигнала содержит в себе информацию о пространственной области, ограниченной лишь кинематически, в то время как в лучевой томографии сбор информации о характеристиках среды происходит в окрестности криволинейного луча. Кинематическое ограничение в дифракционной томографии возникает только при наличии включенного в некоторый момент времени источника, до начала действия которого среда находилась в покое. Можно построить томографическую интерпретацию и при наличии стационарных сигналов. Она будет учитывать как кинематическое, так и динамическое ограничения, причем интерференционный принцип формирования волнового поля позволит строить его спектральную амплитуду как суперпозицию полей, имеющих лучевую структуру.

Проиллюстрируем формирование амплитудного спектра волны на примере акустического поля, созданного точечным источником внутри однородного поля толщиной  $h$  и удовлетворяющего однородным граничным условиям на верхней и нижней границах слоя:

$$(\nabla^2 + k^2)\varphi = -\delta(z - z_0) \frac{\delta(\rho)}{2\pi\rho}, \quad (4.30)$$

$$\varphi|_{z=0} = 0, \quad \varphi|_{z=h} = 0.$$

Рассмотрим сначала удовлетворяющее условию излучения решение (4.30), не учитывая граничные условия, т. е.  $\varphi_0(\mathbf{x}) = e^{ikl}/(4\pi l)$  ( $l$  — отрезок прямой (отрезок "луча"), соединяющий точку источника  $(0, z_0)$  и точку наблюдений  $\mathbf{x} = (\rho, z)$ ). Интерпретация отрезка  $l$  как отрезка "луча" усиливается характером убывания амплитуды обратно пропорционально площади поперечного сечения лучевой трубки. Лучи, падающие на верхнюю

границу  $z = 0$ , отражаются от нее, при этом характер отражения определяется граничным условием  $\varphi|_{z=0} = 0$ . Чтобы сумма падающего и отраженного полей равнялась нулю, необходимо считать коэффициент отражения равным  $-1$ . Поскольку все отраженные лучи ведут себя так, как будто они были испущены из мнимого источника, расположенного зеркально относительно плоскости  $z = 0$  в точке  $z = -z_0$ , то отраженная волна ведет себя как  $e^{ikl}/(4\pi l)$  ( $l$  — отрезок прямой от мнимого источника до точки наблюдения). Аналогично происходит отражение от нижней границы, коэффициент отражения от которой будет равен  $+1$ , а мнимый источник расположен в точке  $(2h - z_0)$ . Тогда многократное отражение приводит к появлению семейств лучей, каждый из которых генерируется мнимыми источниками с координатами  $(2hn + z_0)$ , где  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Волновое поле в этом случае равно сумме падающей и многократно отраженных волн. Каждая из отраженных волн — это сферическая волна, излученная соответствующим мнимым источником (метод изображения):

$$\varphi(x) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \left[ \frac{e^{ikl_{\uparrow}}}{l_{\uparrow}} - \frac{e^{ikl_{\downarrow}}}{l_{\downarrow}} \right], \quad (4.31)$$

$$\text{где } l_{\uparrow} = [\rho^2 + ((z - z_0) + 2hn)^2]^{1/2}$$

— луч, выходящий из источника по направлению к верхней границе;

$$l_{\downarrow} = [\rho^2 + ((z + z_0) + 2hn)^2]^{1/2}$$

— луч, выходящий из источника по направлению к нижней границе.

Покажем, как связано простейшее лучевое представление (4.31) с более сложной аппроксимацией волнового поля в вертикально неоднородной среде. Учитывая осевую симметрию задачи, запишем волновое уравнение для ханкель-образов поля  $\bar{\varphi}(ka, z)$ :

$$\bar{\varphi}(ka, z) = 2\pi \int_0^{\infty} J_0(ka\rho) \varphi(\rho, z) \rho d\rho,$$

где  $J_0(ak\rho)$  — функция Бесселя нулевого порядка;

$$2\pi \int_0^{\infty} J_0(ka\rho) \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) d\rho + \frac{\partial^2 \varphi(ka, z)}{\partial z^2} +$$



$$+ k^2 n^2(z) \bar{\varphi}(ka, z) = \delta(z - z_0); \quad (4.32)$$

$$\bar{\varphi}(ka, 0) = 0; \quad \partial \bar{\varphi} / \partial z - (ka, h) = 0;$$

$n(z)$  — лучевой показатель преломления. Учитывая, что

$$2\pi \int_0^{\infty} J_0(ka\rho) \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) d\rho = -k^2 a^2 \bar{\varphi}(ka, z),$$

получим следующую форму записи для (4.32):

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}(ka, z)}{\partial z^2} + k^2 [n^2(z) - a^2] \bar{\varphi}(ka, z) = -\delta(z - z_0) \quad (4.33)$$

с теми же граничными условиями. Вводя для решения уравнения (4.33), удовлетворяющего первому граничному условию, обозначение  $\bar{\varphi}_1(ka, z_>)$ , а для решения, удовлетворяющего второму граничному условию —  $\bar{\varphi}_2(ka, z_<)$ , можно записать общее решение:

$$\bar{\varphi}(ka, z) = \bar{\varphi}_1(ka, z_<) \bar{\varphi}_2(ka, z_>) / W(ka), \quad (4.34)$$

$$\text{где } W = \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_1 & \bar{\varphi}_2 \\ \frac{\partial \bar{\varphi}_1}{\partial z} & \frac{\partial \bar{\varphi}_2}{\partial z} \end{pmatrix} - \text{вронскиан}$$

символ  $z_>$ ,  $z_<$  означает, что  $z > z_0$  и  $z < z_0$  соответственно.

С учетом представлений

$$\bar{\varphi}_1(ka, z_<) = U(ka, z_<) + r_1(ka, z_<) D(ka, z_<),$$

$$\bar{\varphi}_2(ka, z_>) = D(ka, z_>) + r_2(ka, z_>) U(ka, z_>).$$

Здесь  $U$  — решение однородного уравнения, представляющего асимптотически при больших значениях  $ka$  в окрестностях  $z_0$  волны, распространяющиеся вверх (*up*) в направлении отрицательных значений  $z$ ;  $D$  — соответственно волна, уходящая вниз (*down*). При этом нормировка  $U$  и  $D$  выбрана так, что

$$W[U, D] = -2ik,$$

$$r_1 = \frac{U(ka, 0)}{D(ka, 0)}, \quad r_2 = \frac{\partial_z D(ka, h)}{\partial_z U(ka, h)}$$

— коэффициенты отражения соответственно на верхней и нижней границах.

Учитывая, что

$$W(\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2) = (1 - r_1 r_2) W(U, D) = 2ik(1 - r_1 r_2),$$

запишем окончательное представление для волнового поля, используя ханкель-образ  $\tilde{\varphi}(ka, z)$  (4.34):

$$\varphi(\rho, z) = \frac{ik}{4\pi} \int_0^{\infty} J_0(ka\rho) [U(ka, z_<) + r_1 D(ka, z_<)] \times \\ \times [D(ka, z_>) + r_2 U(ka, z_>)] (1 - r_1 r_2)^{-1} a da.$$

Раскладывая бином  $(1 - r_1 r_2)^{-1}$  на множители, получаем представление многократного рассеяния, аналогичное лучевому:

$$\varphi(\rho, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{ik}{4\pi} \int_0^{\infty} J_0(ka, \rho) [(r_1 r_2)^n U(ka, z_<) D(ka, z_>) + \\ + (r_1 r_2)^{n+1} U(ka, z_>) D(ka, z_<) + r_1^{n+1} r_2^n D(ka, z_<) \times \\ \times D(ka, z_>) + r_1^n r_2^{n+1} U(ka, z_>) U(ka, z_<)] a da. \quad (4.35)$$

Здесь первое слагаемое описывает волну, которая вышла из источника вверх, отразилась  $n$  раз на каждой границе и распространяется вниз; второе слагаемое описывает такую же картину с  $(n+1)$ -кратным отражением от каждой границы; третье и четвертое слагаемые интерпретируются как волна, вышедшая из источника в одном направлении, отразившаяся  $n$  раз от одной границы и  $n+1$  раз от другой и распространяющаяся после этого в противоположном направлении. Понятие отражения включает здесь понятие рефракции, т. е. соответствующие точки поворота описываются равенством  $n^2(z) = a^2$  (см. (4.33)).

Решение, полученное для (4.35), представляет собой волновое поле для точечного источника, помещенного в точку  $\rho = 0$  и  $z = z_0$ , т. е. функцию Грина. Лучевая интерпретация функции Грина, проведенная ранее, в значительной степени опирается на тот факт, что функцию Грина для волнового уравнения можно записать в виде лучевой суммы:

$$G(x, x_0) = \sum_j g_j(x, x_0) \exp[i\omega\tau_j(x, x_0)],$$

где  $g_j$  — амплитуда волнового поля, отвечающая  $j$ -му лучу;  $\tau_j$  — соответствующий эйконал. Очевидно, что все эти лучи лежат в плоскости, ортогональной к границам слоев.

#### 4. 5. ПОСТРОЕНИЕ ПАДАЮЩЕГО И ОБРАЩЕННОГО ПОЛЕЙ В СЛОИСТОЙ ОПОРНОЙ СРЕДЕ

Входящие в конструкцию томографических функционалов (4.10) поля  $\varphi_{in}$  и  $\varphi_{out}$  являются решениями прямых задач, которые в случае произвольной опорной среды связаны со значительными математическими трудностями. Как обычно, решение таких прямых задач упрощается, если опорную среду можно считать априори наделенной определенными свойствами симметрии. Наибольшей симметрией, естественно, является однородная безграничная среда, и имеющиеся аналитические представления полей  $\varphi_{in}$  и  $\varphi_{out}$  относятся именно к такому случаю. Следующий класс сред, обладающий меньшей симметрией, — класс слоисто-однородных сред. Такие среды чрезвычайно широко распространены (это задачи дистанционного зондирования в геофизике) в силу оболочечной структуры Земли и околоземного пространства. При локальном описании сферически-симметричные оболочки аппроксимируются плоско-параллельными слоями. Опишем алгоритмическую структуру построения полей  $\varphi_{in}$  и  $\varphi_{out}$  в этом случае [16, 43, 96].

Задачи распространения упругих акустических и электромагнитных волн с нулевыми начальными условиями могут быть сведены к решению дифференциального матричного уравнения первого порядка [109, 110]:

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \tilde{\varphi} = \beta \tilde{L} \tilde{\varphi} = \beta \begin{vmatrix} 0 & \tilde{L}_1 \\ \tilde{L}_2 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \tilde{\varphi}_1 \\ \tilde{\varphi}_2 \end{vmatrix}. \quad (4.36)$$

Так, если уравнение  $L\varphi = 0$  описывает распространение упругих волн в изотропной среде с параметрами  $\rho, \lambda, \mu$ , то записываем фурье-преобразование по латеральным координатам  $(x_1, x_2)$  и по временной частоте  $\omega$ :

$$\varphi(\omega, p_1, p_2, x_3) = \iiint_{-\infty}^{\infty} dt dx_1 dx_2 \varphi(t, x_1, x_2, x_3) \times \\ \times \exp[i\omega t - ip_1 x_1 - ip_2 x_2]. \quad (4.37)$$

Для  $\tilde{\varphi}$  получим представление

$$\tilde{\varphi}_1 = \begin{vmatrix} \partial_t \tilde{\varphi}(3) \\ \tilde{\sigma}(1) \\ \tilde{\sigma}(2) \end{vmatrix}, \quad \tilde{\varphi}_2 = \begin{vmatrix} \tilde{\sigma}(3) \\ \partial_t \tilde{\varphi}(1) \\ \partial_t \tilde{\varphi}(2) \end{vmatrix},$$

где  $\partial_t \varphi_{(i)}$  — скорость частиц в направлении  $i$ -го орта;  $\sigma_i = \sigma_{3i}$  — компонент тензора напряжений; тильда означает соответствующую фурье-трансформанту.

В этом случае

$$\tilde{L}_1 = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{1}{\lambda+2\mu} & \frac{\lambda S_1}{\lambda+2\mu} & \frac{\lambda S_2}{\lambda+2\mu} \\ \frac{\lambda S_1}{\lambda+2\mu} & a & -\frac{\mu(3\lambda+2\mu)S_1 S_2}{\lambda+2\mu} \\ \frac{\lambda S_2}{\lambda+2\mu} & -\frac{\mu(3\lambda+2\mu)S_1 S_2}{\lambda+2\mu} & b \end{array} \right\|$$

где  $a = \rho - \frac{4\mu(\lambda+\mu)S_1^2}{\lambda+2\mu} - \mu S_2^2$ ;  $b = \rho - \mu S_2^2 - \frac{4\mu(\lambda+\mu)S_2^2}{\lambda+2\mu}$ ;

$$\tilde{L}_2 = \left\| \begin{array}{ccc} \rho & S_1 & S_2 \\ S_1 & \mu^{-1} & 0 \\ S_2 & 0 & \mu^{-1} \end{array} \right\|.$$

Здесь  $S_i = p_i / \omega$  ( $i = 1; 2$ ) — компоненты вектора медленности;  $\beta = -i\omega$ .

Уравнение (4.36) описывает плоскую  $P-SV$ -волну с нормалью  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1$ , если начальные условия выбирать в виде  $\tilde{\sigma}_2 = \partial_t \tilde{\varphi}_2 = 0$ , и плоскую  $SH$ -волну, если начальные условия выбирать в виде  $S_1 = 0$ ,  $\tilde{\sigma}_1 = \tilde{\sigma}_3 = \partial_t \tilde{\varphi}_1 = \partial_t \tilde{\varphi}_3 = 0$ . Наконец, если в качестве нормали к фронту плоской волны выбрать  $\mathbf{e}_3$  и начальные условия  $\tilde{\sigma}_1 = \tilde{\sigma}_2 = \partial_t \tilde{\varphi}_1 = \partial_t \tilde{\varphi}_2 = 0$ , то уравнение (4.36) будет описывать плоскую  $P$ -волну.

Для электромагнитных волн записывается уравнение Максвелла для изотропной среды:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.$$

Для фурье-трансформант, аналогичных (4.37), получим следующее представление  $\tilde{L}_1$ ,  $\tilde{L}_2$ ,  $\tilde{\varphi}_1$  и  $\tilde{\varphi}_2$  из уравнения (4.36):

$$\beta = -i\omega, \quad \tilde{\varphi}_1 = \left\| \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \end{array} \right\|, \quad \tilde{\varphi}_2 = \left\| \begin{array}{c} -H_2 \\ H_1 \end{array} \right\|,$$

$$\tilde{L}_1 = \left\| \begin{array}{cc} \mu - \frac{S_1^2}{\gamma} & -\frac{S_1 S_2}{\gamma} \\ -\frac{S_1 S_2}{\gamma} & \mu - \frac{S_2^2}{\gamma} \end{array} \right\|, \quad \tilde{L}_2 = \left\| \begin{array}{cc} \gamma - \frac{S_2^2}{\mu} & \frac{S_1 S_2}{\mu} \\ \frac{S_1 S_2}{\mu} & \gamma - \frac{S_1^2}{\mu} \end{array} \right\|.$$

Здесь  $S_i = p_i / \omega$ ,  $i = 1; 2$  и  $\gamma = \sigma / (\omega i) + \epsilon$ .

Граничные условия требуют, чтобы тангенциальные компоненты  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  были непрерывными при переходе через границу.

В случае горизонтально-слоистой среды это требование сводится к непрерывности векторов  $\tilde{\varphi}_1$  и  $\tilde{\varphi}_2$ . Выбор составляющих вектора  $\tilde{\varphi}$  сделан с таким расчетом, чтобы поток энергии в  $x_3$ -направлении представлялся в виде

$$R_3 = -\frac{1}{4}(\tilde{\varphi}_1^* \tilde{\varphi}_2 + \tilde{\varphi}_2^* \tilde{\varphi}_1) = -\frac{1}{4} \tilde{\varphi}^* M \tilde{\varphi},$$

$$M = \begin{vmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{vmatrix}$$

( $\mathbf{I}$  — единичная матрица размерностью  $2 \times 2$ ).

Для акустической среды представление векторов  $\tilde{\varphi}_1$  и  $\tilde{\varphi}_2$  и матриц  $\tilde{L}_1$  и  $\tilde{L}_2$  уравнения (4.36) дается в виде

$$\beta = -i\omega, \quad \tilde{\varphi}_1 = \|\partial_t \tilde{\varphi}_3\|, \quad \tilde{\varphi}_2 = \|\tilde{\sigma}\|, \\ \tilde{L}_1 = \left\| \frac{1}{\lambda} - \frac{S^2}{\rho} \right\|, \quad \tilde{L}_2 = \|\rho\|, \quad S^2 = \frac{S_1^2 + S_2^2}{\omega^2}.$$

Решение эволюционного уравнения (4.36) может быть представлено в общей форме через матрицу перехода  $P(x_3, x_3^0)$ , удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x_3} P(x_3, x_3^0) = \beta \tilde{L}(x_3) P(x_3, x_3^0) \quad (4.38)$$

и начальным условиям  $P(x_3^0, x_3^0) = I$ .

Учитывая, что уравнение (4.38) можно представить в эквивалентной форме:

$$P(x_3, x_3^0) = I + \beta \int_{x_3^0}^{x_3} dx'_3 L(x'_3) P(x'_3, x_3^0),$$

запишем матрицу перехода в итерационной форме:

$$P = I + \int_{x_3^0}^{x_3} \tilde{L}(x'_3) dx'_3 + \int_{x_3^0}^{x_3} dx'_3 \tilde{L}(x'_3) \int_{x_3^0}^{x'_3} dx''_3 \tilde{L}(x''_3) + \\ + \int_{x_3^0}^{x_3} dx'_3 \tilde{L}(x'_3) \int_{x_3^0}^{x'_3} dx''_3 \tilde{L}(x''_3) \int_{x_3^0}^{x''_3} dx'''_3 \tilde{L}(x'''_3) + \dots$$

Отметим, что матрица перехода для сопряженного уравнения отличается знаком  $\beta$ .

## Глава 5

### ТОМОГРАФИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЗАДАЧ ДИСТАНЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ

Представление о реконструктивной томографии как о задаче восстановления изображения объекта по его лучевым проекциям постепенно трансформировалось в задачу интегральной геометрии — восстановить функцию  $\theta(x)$  по значениям заданного  $u$ :

$$u(x) = \int_{\Sigma(x)} \theta(x') w(x, x') d\sigma,$$

$x \in R^n$ ;  $\Sigma(x)$  — семейство  $k$ -мерных многообразий в  $R^k$ ,  $k < n$ ;  $w(x, x')$  — весовая функция;  $d\sigma$  — элемент меры на  $\Sigma(x)$ . Как мы видели в предыдущей главе, где было введено понятие томографического функционала, задачей реконструктивной томографии можно считать любую задачу восстановления распределенных параметров системы, в частности любую задачу дистанционного зондирования. При этом исходными данными томографической задачи считаются интегралы от параметрических функций, заданных на многообразиях той же размерности, что и размерность области определения. В линейном приближении эти многообразия фиксированы, в общем случае они перестраиваются неявным образом на каждом шаге итерации.

#### 5. 1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ ТОМОГРАФИИ

Математическую основу классической томографии составляет преобразование Радона [79, 80]:

$$u(p, n) = \hat{R}\varphi = \int_x \varphi(x) \delta(p - x \cdot n) dx \triangleq (\delta(p - x \cdot n) | \varphi(x)),$$

где  $u(p, n)$  — радон-образ функции  $\varphi(x)$ , заданной в  $N$ -мерном пространстве;  $\delta(p - x \cdot n)$  — сингулярное ядро преобразования Радона, вырезающее  $(N - 1)$ -мерную гиперплоскость (прямую в двумерном случае), заданную вектором нормали  $n$  и параметром прицельного расстояния  $p$ -расстоянием от начала координат до гиперплоскости:  $x \cdot n = p$ .

Преобразование Радона возникло в классической томографии как математическая модель описания многоракурсных просвечиваний рентгеновскими лучами биологических "мягких" объектов, т. е. объектов, в которых рассеяние рентгеновских лучей можно считать малым. Уравнение переноса точечного ( $x_0$ ), моноэнергетического ( $E_0$ ), коллимированного ( $\nu_0$ ) источника рентгеновского излучения есть редуцированное уравнение переноса:

$$(\nu \cdot \nabla)I(x) + \varphi(x)I(x) = c\delta(x - x_0)\delta(\nu - \nu_0)\delta(E - E_0) \quad (5.1)$$

( $I(x)$  — поток первичных рентгеновских фотонов;  $\nu$  — направление коллимации источника;  $\varphi(x, E)$  — линейный коэффициент ослабления;  $E$  — энергия фотонов). При этом предполагается, что векторы  $\nu$  компланарны, т. е. задача рассматривается как двумерная. Решение уравнения (5.1) можно записать, проведя замену переменных  $x \rightarrow (p, n)$ :

$$I(p, n, E_0) = c_0 \exp\left\{- \int_{\mathcal{L}(p, n)} \varphi(x) dx\right\}, \quad (5.2)$$

где  $\mathcal{L}(p, n)$  — линия, вдоль которой распространяется излучение. Логарифмируя соотношение (5.2), получаем запись преобразования Радона для двумерной задачи:

$$-\ln \frac{I(p, n, E_0)}{c} \triangleq u(p, n) = \int_{\mathcal{L}} \varphi(x) dx = \int_x \varphi(x)\delta(p - x \cdot n) dx,$$

здесь в последнем равенстве интегрирование распространяется на всю область определения  $\varphi(x)$ .

Модель планарного сечения объекта возникает при описании зондирования плоским лазерным пучком ("световым ножом"), если исследуется плазма. При этом плоский пучок после прохождения исследуемого объема плазмы фокусируется на фотодиод. Как нетрудно видеть, в обоих случаях томографический эксперимент опирается на адекватное использование лучевого описания распространения зондирующего сиг-

нала (длина волны мала по сравнению с характерными размерами неоднородности и сильно вытянутой вперед индикатрисой рассеяния).

Перед рассмотрением основных свойств прямого преобразования Радона напомним некоторые свойства линейных непрерывных функционалов — обобщенных функций:

$$l(\varphi) \triangleq (l, \varphi) = (l(x), \varphi(x)),$$

где  $x \in R^n$ .

**Замена переменных.** Пусть  $x = Ly + x_0$  — невырожденное преобразование, тогда

$$|(Ly + x_0), \varphi(y)| = |L|^{-1} |(x), \varphi(L^{-1}(x - x_0))|,$$

отсюда для дельта-функции

$$\langle \delta(Ly + x_0) | \varphi(y) \rangle \triangleq \langle \delta(x) | |L|^{-1} \varphi(L^{-1}(x - x_0)) \rangle.$$

В частности,

$$\text{а) } \langle \delta(x - x_0) | \varphi \rangle = \varphi(x_0);$$

$$\text{б) } \langle \delta(ay) | \varphi(y) \rangle = \langle \delta(x) | |a|^{-n} \varphi(a^{-1}x) \rangle;$$

в) если  $L : L^*L = I$  и  $x_0 = 0$ , то

$$\langle \delta(Ly) | \varphi(y) \rangle = \langle \delta(x) | \varphi(L^*x) \rangle;$$

$$\begin{aligned} \text{г) } \langle \delta(\mathcal{L}(x)) \varphi(x) \rangle &= \sum_k \langle \delta(y) | |L'|_{x_k}|^{-1} \varphi(|L'|_{x_k}^{-1}y + x_k) \rangle = \\ &= \sum_k |L'|_{x_k}|^{-1} \varphi(x_k), \end{aligned}$$

где  $x_k : \mathcal{L}(x_k) = 0$ .

Например:

$$\delta(x^2 - c^2t^2) = \frac{1}{2ct} [\delta(x - ct) + \delta(x + ct)];$$

$$\delta(\sin x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - k\pi);$$

$$\delta(x - x_0) = \left[ \prod_i |h_i| \right]^{-1} \prod_i \delta(q_i - q_i^0).$$



Здесь  $q_i = q_i(x)$ ,  $h_i = \sum_k (\partial x_k / \partial q_i)^2$ , что соответствует переходу от декартовых к криволинейным ортогональным координатам  $q_i(x)$ .

**Дифференцирование обобщенных функций.** Пусть  $l \in C^n$ ,  $|\alpha| \leq n$ , тогда

$$(D^\alpha l, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (l, D^\alpha \varphi).$$

В частности,

$$\langle D^\alpha \delta | \varphi \rangle \stackrel{\Delta}{=} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi(0).$$

Перечислим основные свойства [48, 79] преобразования Радона. 1) Линейность следует из определения

$$\hat{R}[\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2] = \alpha_1 \hat{R}[\varphi_1] + \alpha_2 \hat{R}[\varphi_2].$$

2) На основании (5.2) поворот объекта приводит к повороту вектора  $\mathbf{n}$  в аргументе радон-образа:

$$\hat{R}[\varphi(Ox)] = u(p, O\mathbf{n}), \quad (4.7)$$

преобразование подобия с коэффициентом  $\alpha \neq 0$  приводит к увеличению прицельного расстояния в  $\alpha$  раз и уменьшению значений радон-образа в  $\alpha^{1-n}$  раз:

$$R[\varphi(\alpha x)] = \alpha^{-n} u\left(p, \frac{\mathbf{n}}{\alpha}\right) = \alpha^{1-n} u(\alpha p, \mathbf{n}).$$

3) Сдвиг объекта на  $\mathbf{x}_0$  приводит к сдвигу прицельного расстояния на  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_0$ :

$$\hat{R}[\varphi(x - \mathbf{x}_0)] = u(p - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_0, \mathbf{n}).$$

4) Радон-образ от производной функции  $\varphi$ , описывающей объект, записывается как

$$\hat{R}[(\mathbf{k} \cdot \nabla)\varphi] = \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \frac{\partial u(p, \mathbf{n})}{\partial p},$$

соответственно для смешанной производной

$$\hat{R}[(\mathbf{k} \cdot \nabla)(\mathbf{l} \cdot \nabla)\varphi] = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{l} \cdot \mathbf{n}) \frac{\partial^2 u(p, \mathbf{n})}{\partial p^2}.$$

Отсюда

$$\hat{R}[(\nabla \cdot \nabla)\varphi(x)] = |\mathbf{n}|^2 \frac{\partial^2 u}{\partial p^2} = \frac{\partial^2 u(p, \mathbf{n})}{\partial p^2}. \quad (5.3)$$

Наконец, по отношению к произвольным линейным дифференциальным операторам с постоянными коэффициентами  $\hat{L} = L(\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \dots, \partial/\partial x_k)$

$$\hat{R}[\hat{L}\varphi(x)] = \hat{L}\left(n_1 \frac{\partial}{\partial p}, \dots, n_k \frac{\partial}{\partial p}\right) u(p, n).$$

В качестве примера использования свойства (5.3) применим прямое преобразование Радона к трехмерному волновому уравнению:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \varphi(x, t) = 0,$$

$$\hat{R}\left[\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \varphi\right] = \left(\frac{\partial^2}{\partial p^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u(p, n),$$

что позволяет свести трехмерное волновое уравнение к одномерному.

5) Дифференцирование радон-образа

$$(\mathbf{k} \cdot \nabla) \hat{R}[\varphi(x)] = -\frac{\partial}{\partial p} \hat{R}[(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})\varphi(x)]$$

для двух векторов  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{l}$  и производных по компонентам единичного вектора  $\mathbf{n}$  позволяет записать:

$$(\mathbf{k} \cdot \nabla)(\mathbf{l} \cdot \nabla) u(p, \mathbf{n}) = \frac{\partial^2}{\partial p^2} \hat{R}[(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{l} \cdot \mathbf{x})\varphi(x)].$$

6) Радон-образ свертки функций будет следующим:

$$\hat{R}\left[\int g(x-x')s(x')dx'\right] = \int s(x')dx' \int g(x-x')\delta(p-\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})dx.$$

Проведя замену переменных:  $x-x'=y$ , получим

$$\begin{aligned} u(p, \mathbf{n}) &= \int s(x') dx' \int g(y)\delta(p-\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}' - \mathbf{n} \cdot \mathbf{y}) dy = \\ &= \int s(x') \hat{R}[g(p-\mathbf{n} \cdot \mathbf{y}, \mathbf{n})] dx' = \\ &= \int \hat{R}[g(p-p', \mathbf{n})] dp' \int s(x')\delta[p'-\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'] dx', \end{aligned}$$

$$\text{т. е. } \hat{R}[g * s] = \hat{R}[g] * \hat{R}[s].$$

Отметим, что радон-образ от многомерной свертки равен одномерной свертке—по прицельному расстоянию  $p^*$  радон-образов.

7) Связь преобразования Радона с преобразованием Фурье. Запишем преобразование Фурье по прицельному расстоянию от радон-образа  $u(p, \mathbf{n})$ :

$$\begin{aligned} \tilde{u}(p, \mathbf{n}) &= (2\pi)^{-1/2} \int e^{-i p \nu} dp \int \varphi(\mathbf{x}) \delta(p - \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}) d\mathbf{x} = \\ &= (2\pi)^{-1/2} \int d\mathbf{x} \varphi(\mathbf{x}) \int e^{-i p \nu} \delta(p - \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}) dp = \\ &= (2\pi)^{-1/2} \int \varphi(\mathbf{x}) e^{-i \nu (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n})} d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

а в операторной форме:

$$F_p [u(p, \mathbf{n})] \triangleq F_p [\hat{R}[\varphi(\mathbf{x})]] = (2\pi)^{(n-1)/2} F_{\mathbf{x}} [\varphi(\mathbf{x})]. \quad (5.4)$$

Одномерное преобразование Фурье радон-образа эквивалентно многомерному преобразованию Фурье от функции  $\varphi(\mathbf{x})$ , характеризующей объект. Полученная связь фурье-преобразования радоновского образа и многомерного фурье-преобразования от  $\varphi$  формулируется как обобщенная теорема о центральном сечении: при фиксированном  $\mathbf{n}$  одномерное фурье-преобразование от радон-образа дает центральное сечение многомерного спектра Фурье вдоль луча  $\nu \mathbf{n}$ , проходящего через начало координат.

Приведем вывод обратного преобразования Радона, пользуясь соотношением (5.4):

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}) &= (2\pi)^{(-n+1)/2} F_{\mathbf{x}}^{-1} F_p u(p, \mathbf{n}) = \\ &= C_n \int d(\nu \mathbf{n}) e^{i \nu \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}} \int dp e^{-i \nu p} u(p, \mathbf{n}) = \\ &= C_n \int d(\nu \mathbf{n}) \int dp e^{i \nu (q-p)} u(p, \mathbf{n}), \end{aligned}$$

где  $q = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}$ . Учитывая, что  $d(\nu \mathbf{n}) = d\mathbf{n} \nu^{n-1} d\nu$ , запишем представление  $\varphi(\mathbf{x})$  в виде

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}) &= C_n \int_{|\mathbf{n}|=1} d\mathbf{n} \int_0^{\infty} d\nu \nu^{n-1} \int dp e^{i \nu (q-p)} u(p, \mathbf{n}) = \\ &= C_n \int_{|\mathbf{n}|=1} d\mathbf{n} J(\mathbf{n}, q). \end{aligned}$$

Расширим пределы интегрирования по  $\nu$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , введя четную функцию  $J_e(\mathbf{n}, q)$ :

$$J_e(\mathbf{n}, q) = \frac{1}{2}[J(\mathbf{n}, q) + J(-\mathbf{n}, -q)]$$

или используя явный вид интеграла  $J(\mathbf{n}, q)$ :

$$\begin{aligned} J_e(\mathbf{n}, q) &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \nu^{n-1} d\nu \int_{-\infty}^{\infty} u(p, \mathbf{n}) e^{i\nu(q-p)} dp + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \nu^{n-1} d\nu \int_{-\infty}^{\infty} u(p, -\mathbf{n}) e^{-i\nu(q-p)} dp + \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |\nu|^{n-1} d\nu \int_{-\infty}^{\infty} u(p, \mathbf{n}) e^{i\nu(q-p)} dp. \end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно случаи четного и нечетного значений  $n$ . 1)  $n$  — нечетное. Проведя интегрирование по частям  $J_n(\mathbf{n}, q)$   $n-1$  раз, получим

$$\begin{aligned} J_n(\mathbf{n}, q) &= \frac{1}{2} (i)^{1-n} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \int_{-\infty}^{\infty} dp \left( \frac{\partial}{\partial p} \right)^{n-1} u(p, \mathbf{n}) e^{i\nu(q-p)} = \\ &= \frac{1}{2} (i)^{1-n} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial}{\partial p} \right)^{n-1} u(p, \mathbf{n}) \delta(q-p) dp = \\ &= \frac{1}{2} (i)^{1-n} \left( \frac{\partial}{\partial p} \right)^{n-1} \Big|_{p=q=\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}} u(p, \mathbf{n}). \end{aligned}$$

Итак, для нечетного значения  $n$  вычисление интеграла  $J_n(\mathbf{n}, q)$  сводится к взятию производной  $(n-1)$ -го порядка по прицельному расстоянию  $p$  в точке  $p = q = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}$  от радион-образа  $u(p, \mathbf{n})$ . Окончательная формула обращения Радона в этом случае представляется в форме

$$\varphi(\mathbf{x}) = C_n \int_{|\mathbf{n}|=1} \left( \frac{\partial}{\partial p} \right)^{n-1} \Big|_{p=\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}} u(p, \mathbf{n}) d\mathbf{n}, \quad (5.5)$$

где  $C_n = (2\pi i)^{1-n} / 2$ .

2)  $n$  — четное. Аналогично случаю нечетных  $n$  проведем интегрирование по частям  $n - 1$  раз интеграла  $J_{textq}(n, g)$ :

$$\begin{aligned} J_q(n, q) &= \frac{1}{2}(i)^{1-n} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(\nu) d\nu \int dp e^{-i\nu(p-q)} \left(\frac{\partial}{\partial p}\right)^{n-1} u(p, n) = \\ &= \frac{1}{2}(i)^{1-n} \int_{-\infty}^{\infty} dp \left(\frac{\partial}{\partial p}\right)^{n-1} u(p, n) \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \operatorname{sgn}(\nu) e^{-i\nu(p-q)} = \\ &= \frac{(i)^{-n}}{2\pi} \int \frac{(\partial/\partial p)^{n-1} u(p, n)}{p - q} dp. \end{aligned}$$

Здесь использовано соотношение

$$F[\operatorname{sgn}(\nu)] = \frac{i}{\pi} \mathcal{P}\left(\frac{1}{p}\right),$$

$\mathcal{P}$  — символ интегрирования в смысле главного значения Коши. Вводя обозначение  $\mathcal{H}$  для преобразования Гильберта:

$$\mathcal{H}(u) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P}\left(\frac{1}{p} * u(p)\right),$$

можно записать обращение Радона в четномерном пространстве:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= -iC_n \int_{|\mathbf{n}|=1} d\mathbf{n} \left[ \mathcal{H}\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial p}\right)^{n-1} u(p, n) \right\} \right] (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}, n) = \\ &= -\frac{iC_n}{\pi} \int_{|\mathbf{n}|=1} d\mathbf{n} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\partial/\partial p)^{n-1} u(p, n)}{p - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}} dp. \end{aligned} \quad (5.6)$$

В случае четного значения  $n$  восстановление функции  $\varphi(x)$  требует последовательного применения операции производной  $(n - 1)$ -го порядка по прицельному расстоянию  $p$  от радон-образа  $u(p, n)$ , преобразования Гильберта по прицельному расстоянию  $p$ , интегрирования по сфере.

Анализируя представления инверсии Радона для четно- и нечетномерных пространств (5.5), (5.6), можно отметить "локальность" инверсии Радона при  $n$  нечетном. В этом случае используются радоновские поверхности по гиперплоскостям, проходящим в окрестности пространственной точки восстановления  $x$ . В нечетномерных пространствах инверсия Радона

существенно нелокальна, что в явном виде представлено интегральным преобразованием Гильберта. Проявление локальности и нелокальности инверсии Радона вызвано глубокими связями между преобразованием Радона и гармоническими функциями. В частности, эта связь проявляется в нелокальности волнового фронта в четномерных пространствах: за волновым фронтом следует диффузионный шлейф в отличие от локального резко очерченного волнового фронта в нечетномерном пространстве.

Представим преобразования Радона в операторной форме. Для произвольной функции  $\psi(p, n)$  (где  $p = n \cdot x$ ), такой, что  $\psi(p, n) = \psi(-p, -n)$ , введем сопряженный оператор Радона  $R^*$ :

$$R^* \psi = \int_{|n|=1} \psi(n \cdot x, n) dn.$$

Тогда инверсия Радона для нечетного значения  $n$  имеет следующую операторную форму:

$$R^- = R^* \Gamma_n,$$

$$\Gamma_n = C_n \left( \frac{\partial}{\partial p} \right)^{n-1} \Bigg|_{p=n \cdot x},$$

а для четного значения  $n$  —

$$R^- = R^* \Gamma_n,$$

$$\Gamma_n = -i C_n \mathcal{H} \left( \frac{\partial}{\partial p} \right)^{n-1}.$$

Операторы  $\Gamma_o$  и  $\Gamma_e$  являются аналогами оператора  $(RR^*)^-$ , входящего в структуру решения интегрального уравнения  $R\varphi = u$  методом наименьших квадратов:  $\varphi = R^*(RR^*)^-u$ . Индекс в обращении Радона  $R^-$  использован нами в связи с тем, что инверсия Радона является неустойчивой процедурой и требует применения регуляризации [48, 66].

## 5. 2. ПРИМЕНЕНИЕ ИНВЕРСИИ РАДОНА В ДИФРАКЦИОННОЙ ТОМОГРАФИИ

Линеаризованная модель измерений в задачах зондирования объекта сигналом  $\varphi$  с законом распространения  $L\varphi = s$  пред-

ставлена выражением (4.9):

$$\begin{aligned}\tilde{u}_n &= \langle (L_0^{-1})^* h_n | \delta L_\theta \varphi_0 \rangle + \tilde{\varepsilon}_n \triangleq \\ &\triangleq \langle \varphi_{n(\text{out})} | \delta L_\theta | \varphi_{\text{in}} \rangle + \tilde{\varepsilon}_n.\end{aligned}$$

Идеализированный аналог этой модели получим, если аппаратную функцию ( $h_n$ ) представим точечным приемником с бесконечной полосой пропускания, т. е. если  $h_n \Rightarrow \delta(x-x_n)\delta(t-t_n)$ , и пренебрежем шумами:  $\tilde{\varepsilon}_n \Rightarrow 0$ . Тогда модель  $\tilde{u}_n$  будет представлена как рассеянное поле в точке наблюдения  $x_n$ , т. е.

$$\tilde{u}_n = \tilde{\varphi}|_{x_n} \triangleq (\varphi - \varphi_{\text{in}})|_{x_n}.$$

Запишем эту модель:

$$\tilde{\varphi} = \langle \varphi_{\text{out}} | \delta L_\theta | \varphi_{\text{in}} \rangle.$$

Рассмотрим пример скалярного волнового уравнения  $(c^{-2} \partial^2 / \partial t^2 - \Delta)\varphi = 0$  в случае, когда опорная среда считается однородной, т. е.  $c_0(x) = c_0 = \text{const}$ . Как было показано в разделе 4.3, томографический функционал  $p$  для скалярного волнового уравнения имеет вид

$$p: \tilde{\varphi} = \langle p | \nu(x) \rangle,$$

где  $\nu(x) = c_0^{-2}(1 - c_0^2/c^2(x))$ , а интегральное ядро томографического функционала представлено выражением

$$p = \langle \varphi_{\text{out}} | \frac{\partial^2}{\partial t^2} | \varphi_{\text{in}} \rangle_T.$$

Для точечного источника  $s$  в однородной среде поля  $\varphi_{\text{in}}$  и  $\varphi_{\text{out}}$  имеют одинаковую структуру:

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{in}} &= \frac{1}{4\pi|x-x_s|} \delta\left(t-t_s - \frac{|x-x_s|}{c_0}\right), \\ \varphi_{\text{out}} &= \frac{1}{4\pi|x-x_r|} \delta\left(t_r-t - \frac{|x-x_r|}{c_0}\right)\end{aligned}$$

( $x_s, t_s$  — соответственно местоположение и момент включения источника  $s$ ;  $x_r, t_r$  — соответственно местоположение приемника и текущее время регистрации). Конкретный вид томографического функционала:

$$\begin{aligned}p_r &= \frac{1}{(4\pi)^2} \int_T dt \frac{1}{|\Delta x_r|} \delta\left(t_r-t - \frac{|\Delta x_r|}{c_0}\right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \times \\ &\times \frac{1}{|\Delta x_s|} \delta\left(t-t_s - \frac{|\Delta x_s|}{c_0}\right),\end{aligned}$$

$$|\Delta x_s| = |x - x_s|, \quad |\Delta x_r| = |x - x_r|.$$

Раскладывая  $|\Delta x_r|$  и  $|\Delta x_s|$  в ряд и оставляя в знаменателе первые члены разложения, а в аргументах  $\delta$ -функции два первых члена разложения (что соответствует приближению Фраунгофера), будем иметь

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{(4\pi)^2 |x_r| |x_s|} \int_T dt \delta \left( t_r - t - \frac{|x_r|}{c_0} - \frac{\mathbf{n}_r \cdot \mathbf{x}}{c_0} \right) \times \\ &\times \delta'' \left[ t - t_s - \frac{|x_s|}{c_0} - \frac{\mathbf{n}_s \cdot \mathbf{x}}{c_0} \right] = \frac{1}{(4\pi)^2 |x_r| \cdot |x_s|} \times \\ &\times \delta'' \left[ (t_r - t_s) - \frac{(|x_s| + |x_r|)}{c_0} - \frac{(\mathbf{n}_r + \mathbf{n}_s, \mathbf{x})}{c_0} \right] = \\ &= \frac{c_0}{(4\pi)^2 |x_r| |x_s|} \delta''(q_r - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}), \\ &\quad q_r = (t_r - t_s)C_0 - (|x_s| + |x_r|), \\ &\quad \mathbf{n}_r = \frac{\mathbf{x}_r}{|x_r|}, \quad \mathbf{n}_s = \frac{\mathbf{x}_s}{|x_s|}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{n}_r + \mathbf{n}_s. \end{aligned}$$

Здесь вектор  $\mathbf{n}$  соответствует нормали к плоскости, относительно которой пучок  $\varphi_{in}$  с вектором  $\mathbf{n}$  зеркально отражается в направлении  $-\mathbf{n}_r$ . Окончательно рассеянное поле связано с функцией  $\nu(x)$  преобразованием Радона:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} &= \langle p | \nu(x) \rangle = \frac{c_0}{(4\pi)^2 |x_r| |x_s|} \int \nu(x) \delta''(q_r - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) dx = \\ &= \text{const} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \int \nu(x) \delta(p - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) dx. \end{aligned}$$

Преобразование Радона, формально записанное как интеграл по точкам плоскости  $\{X : p = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}\}$ , при разных значениях времени регистрации ( $t_r$ ) является аппроксимацией представления  $\tilde{\varphi}$ :

$$\tilde{\varphi} = \frac{c_0}{(4\pi)^2 |x_r| |x_s|} \delta''[(t_r - t_s)c_0 - (|\Delta x_r| + |\Delta x_s|)].$$

Эта форма записи предполагает при различных значениях времени регистрации интегрирование по соответствующим эллипсоидам вращения с осью симметрии, проходящей через точки источника ( $x_s$ ) и приема ( $x_r$ ) — фокусы эллипсоидов, что соответствует физически прозрачной интерпретации: происходит интегрирование по множеству кинематически эквивалентных



точек в пространстве, т. е. по уровням постоянной суммарной фазы.

Обобщенную инверсию Радона в идеализированной дифракционной томографии рассмотрим на более сложном примере, приведенном в работе [88]. Скалярное волновое уравнение в опорной среде со скоростью распространения  $c_0(x)$

$$\left( \frac{1}{c_0^2(x)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \varphi(x, t) = 0$$

представим в форме уравнения Гельмгольца

$$(k^2 n_0^2(x) + \Delta) \varphi_{\text{in}}(x, k) = 0,$$

где  $k^2 n^2(x) = \omega^2 / c_0^2(x)$ ,  $\omega$  — круговая частота. Вводя безразмерную функцию  $\mu(x)$ :

$$\mu(x) = -\frac{\omega^2}{k^2} \nu(x),$$

$$\nu(x) = \frac{1}{c_0^2(x)} \left( 1 - \frac{c_0^2(x)}{c^2(x)} \right),$$

запишем уравнение Гельмгольца в среде со скоростью распространения волн  $c(x)$ :

$$[k^2 (n_0^2(x) + \mu(x)) + \Delta] \varphi(x, k) = 0.$$

Возмущающий оператор (оператор умножения) имеет вид  $\delta L = k^2 \mu(x)$ . Будем считать, что опорная среда такова, что поля  $\varphi_{\text{in}}$  и  $\varphi_{\text{out}}$  достаточно хорошо аппроксимируются нулевыми членами лучевого разложения. Тогда рассеянное поле представляется как

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(k, x_r) &= k^2 \langle \varphi_{\text{out}} | \mu(x) | \varphi_{\text{in}} \rangle = \langle p_r | \mu(x) \rangle = \\ &= k^2 \int \mathcal{A}_{\text{out}}(x, x_r) e^{ikr(x, x_r)} \mu(x) \mathcal{A}_{\text{in}}(x, x_s) e^{-kr(x, x_s)} dx. \end{aligned}$$

Амплитуды  $\mathcal{A}$  удовлетворяют уравнению переноса, а  $\tau$  удовлетворяет уравнению эйконала:

$$(\nabla \tau, \nabla \tau) = n_0^2(x),$$

$$\left[ (\nabla \tau, \nabla) + \frac{1}{2} \Delta \tau \right] \mathcal{A} = 0.$$

Томографический функционал  $p$  представляется интегральным ядром:

$$p = k^2 \mathcal{A}_{\text{out}}(x) \mathcal{A}_{\text{in}} \exp\{ik[\tau(x, x_r) + \tau(x, x_s)]\} \triangleq \\ \triangleq k^2 \mathcal{A}(x) \exp(ik\tau).$$

Определим обобщенное причинное преобразование Радона, ассоциированное с представлением рассеянного поля  $\tilde{\varphi} = \langle p | \mu \rangle$  в форме

$$R\mu = \langle \mathcal{A}(x) \delta(q - \tau(x)) | \mu(x) \rangle,$$

причем  $R \equiv 0$  при  $t < 0$ .

Заметим, что рассеянное поле  $\tilde{\varphi}$  с точностью до множителя  $c$  можно представить как преобразование Фурье от обобщенного радон-образа  $R\mu$ :

$$\tilde{\varphi} = c F_q R\mu.$$

Пусть точка локализации источника  $x$ , находится внутри замкнутой области  $V$  с границей  $\partial V$  в предположении таких опорной среды и границы, что каждая точка на границе может быть соединена единственным лучом с точкой источника, при этом лучи не пересекаются. В этом случае можно параметризовать точки на границе  $\partial V$  соответствующими точками на единичной сфере, окружающими источник. Тогда действие сопряженного оператора  $R^*$  определяется следующим образом:

$$R^* \psi = \int_{\partial V} \psi(q, x_r) |_{q=\tau(x_r, x_s, x)} w(x, x_r) dx_r,$$

где  $w(x, x_r)$  — гладкая неотрицательная весовая функция, которая выбирается в виде

$$w(x, x_r) = D(x, x_r) \mathcal{A}^{-1}(x, x_r) h(x, x_r),$$

где  $h(x, x_r)$  — режущий множитель, обеспечивающий неотрицательность  $w(x, x_r)$ , т. е. взаимную однозначность точек на  $\partial V$  и на единичной сфере:

$$D(x, x_r) = \begin{vmatrix} \partial_{x_1}^2 \tau & \partial_{x_2}^2 \tau & \partial_{x_3}^2 \tau \\ \partial_{x_1 x_{r,1}}^2 \tau & \partial_{x_2 x_{r,1}}^2 \tau & \partial_{x_3 x_{r,1}}^2 \tau \\ \partial_{x_1 x_{r,2}}^2 \tau & \partial_{x_2 x_{r,2}}^2 \tau & \partial_{x_3 x_{r,2}}^2 \tau \end{vmatrix},$$

$$\mathcal{A}^{-1}(x, x_r) = [\mathcal{A}_{\text{out}}(x, x_r) \mathcal{A}_{\text{in}}(x)]^{-1}.$$

Можно показать [88], что  $D dx_r = D_0 d\Omega$  ( $\Omega$  — телесный угол) и что  $D_0(x, x_r) = n(x)[1 + \cos\theta(x)]$  ( $\cos\theta(x) = \mathbf{e}_{\text{out}} \cdot \mathbf{e}_{\text{in}}$ ,  $\mathbf{e} = \mathbf{e}(x)$  — единичный вектор направления луча в точке  $x$ ).

Запишем обобщенный интегральный оператор Фурье, определенный следующим образом:

$$\Phi\mu(x) = \frac{1}{(4\pi)^3} \int_0^\infty \int_{\partial V} \int_V e^{ik\tau(x, x', x_r)} \bar{a}(x, x', x_r) \mu(x') dx' dx_r k^2 dk, \quad (5.7)$$

где  $\tau(x, x', x_r) = \tau(x', x_r, x_s) - \tau(x, x_r, x_s)$ ;

$$a(x, x', x_r) = \frac{A(x', x_r)}{A(x, x_r)} D(x, x_r) h(x, x_r).$$

Замечая, что обобщенный оператор Фурье ( $\Phi$ ) включает в себя оператор Фурье ( $F^+$ ):

$$F^+ : F_k^+ \varphi = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^\infty \tilde{\varphi} e^{-ikq} dk,$$

можно записать обобщенное преобразование Фурье как композицию трех операторов:

$$\Phi = R^* F_k^+ F_q.$$

Проанализировать смысл введенного обобщенного фурье-оператора можно, записывая линейный член разложения фазы:

$$\tau(x, x') \approx \nabla_x \tau(x, x_r, x_s)(x - x'),$$

$$I_{\partial V^0} \mu = \frac{1}{(4\pi)^3} \int_0^\infty \int_{\partial V^0} \int_V e^{ik \nabla_x \tau(x, x_r, x_s)(x - x')} \times \\ \times D(x, x_r) \mu(x') dx' dx_r k^2 dk.$$

Вводя замену переменных  $p = k \nabla_x \tau(x, x_r, x_s)$ , последний интеграл можно переписать в форме

$$I_{\partial V^0} \mu = \frac{1}{(4\pi)^3} \int_{\Omega^0(x)} \int_V e^{ip(x - x')} \mu(x) dx' dp.$$

Здесь  $\Omega^0(x)$  — образ области интегрирования при принятой замене переменной.

Анализ формулы (5.7) показывает, что обобщенный оператор Фурье обеспечивает восстановление спектра функции  $\mu(x)$ , определяемой спектральной областью  $\Omega^0(x)$ , последняя, в свою очередь, связана с частью поверхности границы  $\partial V^0$ , по которой ведется интегрирование рассеянного поля  $\tilde{\varphi}$ , и с невырожденностью якобиана перехода от координат на поверхности (координат регистрации) к лучевым координатам. Поэтому приближенное операторное равенство

$$I_{\partial V^0} \approx R^* F_k^+ F_q$$

определяет оператор реконструкции

$$\mu \approx R^* F_k^+ \tilde{\varphi}.$$

Отметим, что полученное решение является математически изящным, но, на наш взгляд, достаточно далеким от реальных интерпретационных задач. Даже при сделанных идеализированных предположениях о связи рассеянного поля с восстанавливаемой структурой среды используется линеаризованная модель, которая опирается на лучевое представление волновых полей в опорной среде. Невырожденность якобиана, входящего в обобщенный сопряженный оператор  $R^*$ , заведомо не выполняется, если поле  $\varphi_{in}$  имеет какую-либо временную структуру, отличную от  $\delta$ -функции по времени. Это нетрудно видеть из обобщенного преобразования Радона, включающего  $\delta(q - \tau(x))$  — многообразие той же размерности, что и размерность задачи. Каждое значение соответствует интегрированию по трехмерной области. Так, в случае точечных источников такой областью является поверхность эллипсоида с фокусами в точках  $x_r$  и  $x_s$ , если временная зависимость представляется  $\delta$ -функцией и слоем эллипсоида вращения при конечной длительности поля  $\varphi_{in}$  (см. рис. 13,б).

### 5. 3. ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ АЛГОРИТМОВ РЕКОНСТРУКТИВНОЙ ТОМОГРАФИИ

Чтобы построить алгоритм реконструкции, запишем модель (4.9), используя понятие томографического функционала:

$$u_n = \sum_{\mu} \langle p_{\mu n} | \nu_{\mu}(\delta\theta) \rangle + \varepsilon_n \quad (5.8)$$

( $\mu$  — индекс соответствующего поля,  $\mu = 1 \div M$ ). Невязка  $\varepsilon$ ; включает как случайный компонент, генерируемый полями неидентифицируемых источников и аппаратурными шумами, так и возможную неадекватность модели, порожденную, во-первых, ошибками в задании аппаратной функции; во-вторых, ошибками в априорном представлении о среде, т. е. игнорированием диссипативных и нелинейных эффектов в описании процессов распространения зондирующих сигналов; в-третьих, ошибками вследствие линейризации поля  $\varphi$ ; в-четвертых, предположением гладкости  $\theta(x)$ , и т. д. Исходя из физических представлений о стохастической структуре шумового поля как о сумме большого числа независимых источников, допустимо рассматривать случайную компоненту как аддитивную и нормально распределенную [24, 71, 72]. Статистический анализ экспериментальных данных обычно ограничивается определением первых двух моментов случайного компонента. Как мы уже упоминали в гл.1, при заданных двух моментах максимально энтропийным распределением является нормальное, что служит еще одним аргументом в пользу выбора гауссовых случайных величин при построении модели.

Наиболее простой и чаще всего используемой моделью ( $K_\varepsilon$ ) при построении практических алгоритмов является модель равнооточных некоррелированных ошибок, т. е.  $K_\varepsilon = \sigma_\varepsilon^2 I$  ( $I$  — единичная матрица, а единственный параметр  $\sigma_\varepsilon^2$  — дисперсия случайного компонента). Для неравнооточных некоррелированных наблюдений

$$K_\varepsilon = \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \sigma_2^2 \end{vmatrix}.$$

Простейший для математической обработки способ описания коррелированных ошибок наблюдений — модель марковского случайного процесса с матрицей корреляций

$$K_\varepsilon = \begin{vmatrix} 1 & \gamma & \gamma^2 & \gamma^N \\ \gamma & 1 & \gamma & \gamma^{N-1} \\ \gamma^2 & \gamma & 1 & \gamma^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma^N & \gamma^{N-1} & \gamma^{N-2} & 1 \end{vmatrix}.$$

Эта форма удобна тем, что можно в явном виде записать обрат-

ную матрицу  $K_{\epsilon}^{-1}$ :

$$K_{\epsilon}^{-1} = \frac{1}{1-\gamma^2} \begin{vmatrix} 1 & -\gamma & 0 & \dots & 0 \\ -\gamma & 1+\gamma^2 & -\gamma & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\gamma \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Заметим, что  $K_{\epsilon}^{-1}$  представляет собой конечноразностный аналог симметричного положительного оператора  $(-\Delta + \gamma I)$ , который часто используется при регуляризации по А.Н. Тихонову.

В дальнейшем изложении будем предполагать матрицу ковариаций ошибок измерений известной, однако одновременное оценивание параметров распределения и искомым параметров среды не представляет принципиальных трудностей, хотя и требует дополнительных затрат машинного времени, поскольку задача оценивания становится при этом заведомо нелинейной [75].

В силу того, что случайный компонент  $\epsilon$  принципиально неустраним, любая процедура решения обратной задачи, связанная с интерпретацией реальных экспериментальных данных, с неизбежностью становится задачей статистического оценивания. Отметим, что все представленные в гл.1 методы регуляризации позволяют строить формально устойчивые решения томографических задач, представляя искомые поля  $\nu(\delta\theta)$  в любой точке исследуемой области пространства. Поля, представляющие среду, можно считать многокомпонентными [106]. Однако решение таких задач при интерпретации данных дистанционного зондирования теряет физический смысл вследствие информационной необеспеченности, т. е. практически не происходит уточнения априорных представлений о полях параметров среды. Идеология восстановления полей по значениям конечного числа функционалов измерений развивалась в геофизике в работах [84, 85]. В соответствии с этой идеологией попытаемся заменить поле параметров среды во всем пространстве восстановлением значений некоторого числа линейных функционалов  $l$  от поля  $\nu(\delta\theta)$ . Эта задача корректна только в том случае, когда искомый функционал  $l$  принадлежит линейной оболочке томографических функционалов  $\{p_n, n = 1 \div N\}$ , т. е. лежит в подпространстве

$$\Theta^* = \{l : \exists \alpha : (l - P^* \alpha) \nu(\delta\theta) = 0 \forall \nu\}.$$

Этот способ регуляризации сложился стихийно в процессе решения практических обратных задач и широко используется в различных модификациях, хотя и без должного анализа.

Если априорная информация о  $\nu(\delta\theta)$  отсутствует, то устойчивость решения, полученного по методу максимального правдоподобия, определяется оператором Фишера, который заведомо вырожден. Вырожденность оператора Фишера означает, что в пространстве  $\Theta$  существует направление, определяющее также элементы функционального пространства, о которых отсутствует информация, а потому дисперсия соответствующего линейного функционала неограничена. В то же время функционал  $l$  является линейной комбинацией томографических функционалов  $\{p_n\}$ , иными словами, если разрешимо сопряженное уравнение  $P^* \alpha - l = 0$ , то его решение обладает конечной дисперсией.

На практике часто применяется способ решения обратных задач путем представления искомого решения  $\nu(\delta\theta)$  в виде конечного ряда:

$$|\nu(\delta\theta)\rangle = \sum_q |\psi_q\rangle \langle\psi_q | \nu(\delta\theta)\rangle \leftrightarrow \sum_q \nu_q |\psi_q\rangle.$$

В этом случае необходимо, чтобы оценки коэффициентов  $\nu_q$  имели конечную дисперсию, т. е. должны быть разрешимы уравнения  $P_\alpha^* - \nu_q = 0$ . В качестве базиса  $\{\nu_q\}$  используется либо несколько функций из полного ортонормированного набора (например, ряд Фурье, Фурье — Бесселя, базис Карунена — Лоева и т. д. — выбор базиса, как правило, определяется интуитивными априорными представлениями о среде), но заведомо не полный базис (характеристические функции непересекающихся пространственных областей,  $B$ -сплайны и т. д. [68, 70]), либо эвристический (неполный, неортогональный) — функции типа "модельных тел" (например, представление полей в магнито- и гравиразведке).

Ошибка  $\Delta\nu$  в восстановлении поля  $\nu(\delta\theta)$  при представлении в виде конечного ряда:

$$|\nu(\delta\theta)\rangle = \sum_q \nu_q |\psi_q\rangle$$

определяется, во-первых, ошибками  $\Delta\nu_q$  в восстановлении коэффициентов  $\nu_q$ , т. е. значений линейных функционалов  $\langle\psi_q | \nu\rangle$ ; во-вторых, составляющей поля  $\nu(\delta\theta)$ , не вошедшей в данное

$$\Delta \nu(\delta \theta) = \sum_q \Delta \nu_q |\psi_q\rangle + \tilde{\nu},$$

$$\text{где } \tilde{\nu} \in \Theta = \left( I - \sum_q |\psi_q\rangle \langle \psi_q| \right) \Theta.$$

Отметим, что при анализе решений практических задач бесконечная ошибка, связанная с  $\tilde{\theta}$ , обычно игнорируется, т. е. интуитивно предполагается, что искомое решение действительно принадлежит подпространству, соответствующему выбранному базису.

Задача восстановления значения произвольного линейного функционала может быть введена в класс корректности, если использовать дополнительную информацию либо путем введения вероятностной (невырожденной) меры в пространстве  $\Theta$ , либо введением детерминированных ограничений (как правило, квадратичных). Введение вероятностной меры, например гауссовой с положительным коррелятором  $K_\theta$ , приводит к тому, что дисперсия  $\sigma_l^2$  любого линейного функционала  $l$  становится конечной:

$$\sigma_l^2 = l(K_\theta \Delta l) = l((F + K_\theta^{-1})^{-1} l),$$

здесь  $F = P^* K_\epsilon^{-1} P$  — оператор Фишера;  $\Delta l = l - P^* \alpha$ . Понятно, что если ввести детерминированное ограничение, зафиксировав замкнутую область в пространстве параметров, например шар:  $\|\nu(\delta \theta)\|_{L_2} = 1$ , то дисперсия любого линейного функционала будет конечной. Но далеко не всегда такая постановка содержательна: ошибка может достигать размеров поперечника априорной области, даже если разрешимо  $P^* \alpha = l$  [40].

Регуляризация с введением компактов в пространстве  $\Theta$ , например множества монотонных ограниченных функций в  $L_2$  [10], реализуется методами математического программирования — в отличие от случая квадратичных ограничений соответствующие алгоритмы нельзя представить в виде замкнутой формулы: эти алгоритмы существенно многошаговые.

Следует отметить, что все ранее приведенные выводы являются следствием связи  $(l, \nu) = l(\tilde{\nu})$ , т. е. наилучшая оценка линейного функционала поля  $\nu$  совпадает со значением этого функционала от наилучшей оценки поля. Все основные формулы и связи могут быть получены аналогично оптимальному



решающему оператору, схема построения которого была приведена в гл.1. Тем не менее, чтобы подчеркнуть совпадающие и различающиеся моменты в подходе Бейкуса — Гильберта и в подходе, излагаемом в данной главе, представим схему решения обратной задачи.

По  $N$  значениям  $u_n$  суммы  $M$  линейных функционалов  $p_\mu$  восстановить значение заданного линейного функционала  $l$  от неизвестного поля параметров среды  $\nu_\mu$ . Для произвольного линейного функционала  $l(\nu)$  мы будем искать решение в форме линейной комбинации измерений:

$$l(\nu) = \sum_n \alpha_n u_n = (\alpha, u), \quad (5.9)$$

$$l(\nu) \equiv \langle l|u \rangle.$$

Используя модель экспериментального материала (5.8), запишем линейную оценку (5.9) в окрестности точки  $X$ :

$$\nu_\mu(\delta\theta) = \sum_{\mu'} \langle (\alpha_\mu^X, p_{\mu'}) | \nu_{\mu'}(\delta\theta) \rangle_V + (\alpha_\mu^X, \varepsilon).$$

Уточним теперь формулировку "поле в окрестности точки  $x$ ": в качестве  $\nu(\delta\theta_\mu^X)$  можно принять, например, среднее значение в шаре радиусом  $\rho$  с центром в точке  $X$ , т. е. значение линейного функционала от неизвестного поля  $\nu(\delta\theta_\mu^X)$ :

$$\nu_\mu(\delta\theta^X) = \langle l^X | \nu_\mu \rangle_V,$$

$$l^X = \left( \frac{4}{3} \pi \rho^3 \right)^{-1} H(\rho - |x - X|),$$

$$H(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{при } \xi < 0, \\ 1 & \text{при } \xi \geq 0. \end{cases}$$

Независимо от конкретного выбора линейной процедуры ошибку  $\eta_\mu^X$  восстановления  $\langle l^X | \nu_\mu \rangle$  можно формально записать в виде

$$\begin{aligned} \eta_\mu^X &= \langle l | \nu_m \rangle - \sum_{\mu'} \langle \alpha, (p_{\mu'}) | \nu_{\mu'} \rangle - (\alpha, \varepsilon) = \\ &= \langle l - (\alpha, p_\mu) | \nu_\mu \rangle \sum_{\mu' \neq \mu} \langle (\alpha, p_{\mu'}) | \nu_{\mu'} \rangle - (\alpha, \varepsilon). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Проведем качественную интерпретацию этого выражения. Ошибка  $\eta_\mu$  зависит как от искомого поля  $\nu_\mu(\delta\theta)$  (первый член

в (5.10)), так и от других полей  $\nu_{\mu'}$  ( $\mu' \neq \mu$ ), а также от случайной компоненты  $\epsilon$ . Составляющая ошибки, зависящая от поля  $\nu_{\mu}$ , тем меньше, чем меньше норма функционала  $l - (\alpha, p_{\mu})$ , т. е. чем лучше аппроксимация оцениваемого функционала  $l$  линейной комбинацией томографических функционалов  $p_{\mu}$ . Нетрудно видеть, что удовлетворительную аппроксимацию  $l$ , носитель которого сосредоточен в окрестности точки  $X$ , можно осуществить только в том случае, когда в совокупность  $\{p_{\mu n}\}$  входят такие функционалы, что их носители имеют пересечения с этой окрестностью. Ошибка  $\eta_{\mu}^l$  — сумма линейных форм от неизвестных  $\nu_{\mu}$  ( $\mu = 1 \div M$ ) и  $\epsilon$ , при этом каждая из форм зависит от вектора коэффициентов  $\alpha$ , определяющего выбор конкретной процедуры восстановления.

Вектор  $\alpha$  следует выбирать так, чтобы модельные ошибки восстановления  $|\eta_{\mu}|$  или  $(\eta_{\mu})^2$  были минимальными. В свою очередь, квадрат ошибки можно охарактеризовать квадратичной формой, в которую должны войти все линейные формы, составляющие  $\eta_{\mu}$  в (5.10).

Мы рассмотрим решение, которое минимизирует квадрат ошибки восстановления:

$$\hat{\alpha} = \operatorname{arginf}[(\Lambda - Q^* \alpha)^* K (\Lambda - Q^* \alpha)],$$

где  $Q = \| |P| I \|$  и  $I$  — единичный оператор размерностью числа измерений;

$$(Q^* \alpha)^* = \| |\alpha_1 \dots \alpha_n \dots \alpha_N| \| x$$

$$\times \begin{vmatrix} \langle p_{11}(x) | & \dots & \langle p_{\mu 1}(x) | & \dots & \langle p_{M1}(x) | & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \langle p_{1n}(x) | & \dots & \langle p_{\mu n}(x) | & \dots & \langle p_{Mn}(x) | & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \langle p_{1N}(x) | & \dots & \langle p_{\mu N}(x) | & \dots & \langle p_{MN}(x) | & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\Lambda^* = \| |\lambda_1^* \dots \lambda_{\mu}^* \dots \lambda_M^* \dots \lambda_{M+1}^* \dots \lambda_{M+N}^* | \|,$$

где  $\lambda^*$  с индексом  $1 \div M$  равны  $\langle 0 |$  (кроме  $\lambda_{\mu}^* = \langle l(x) |$ ), а  $\lambda^*$  с индексами  $(M+1) \div (M+N)$  равны нулю. Оператор  $K$  должен быть положительным.

Оптимальная оценка  $\hat{\alpha}$ , которая в силу линейности модели и линейности оцениваемого функционала определяет и оптимальную оценку самого функционала  $l$ , в этом случае дается выражением

$$\hat{\alpha} = (Q K Q^*)^{-1} Q K \Lambda. \quad (5.11)$$

Поскольку ошибка оценки (5.10) зависит от неизвестных полей  $\nu_\mu(\delta\theta)$  и случайных величин  $\epsilon$ , то выбор конкретного оператора  $K$  в критерии определяет класс функций  $\{\nu_\mu, \mu = 1 \div M\}$  и статистическую структуру случайного компонента  $\epsilon$ , что эквивалентно введению априорной информации.

Приведем статистическую интерпретацию оператора  $K$  и оценки  $\hat{\alpha}$ . Если множество полей  $\{\nu_\mu(\delta\theta)\}$ , принимаемых в качестве допустимых решений, характеризуется гауссовой мерой в соответствующем функциональном пространстве и случайная компонента имеет нормальное распределение, то решение, реализующее минимум квадрата ошибки восстановления  $E(\eta'_\mu)$  (среднее по полям  $\{\nu_\mu(\delta\theta)\}$  и реализациям  $\epsilon$ ):

$$K = \begin{vmatrix} K_{\nu_1\nu_1} & \dots & K_{\nu_1\nu_n} & K_{\nu_1\nu_M} & K_{\nu_1\epsilon} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{\nu_n\nu_1} & \dots & K_{\nu_n\nu_n} & K_{\nu_n\nu_M} & K_{\nu_n\epsilon} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{\epsilon\nu_1} & \dots & K_{\epsilon\nu_n} & K_{\epsilon\nu_M} & K_{\epsilon\epsilon} \end{vmatrix}.$$

Здесь  $K_{\nu_\mu\nu_{\mu'}}$  — оператор интегрального типа, такой, что для любых линейных функционалов  $\xi$  и  $\eta$  выполняется условие

$$\langle \xi | K_{\nu_\mu\nu_{\mu'}} | \eta \rangle = E \langle \xi | \nu_\mu \rangle \langle \nu_{\mu'} | \eta \rangle,$$

$$K_{\epsilon\epsilon} = E(\epsilon\epsilon^T),$$

$$K_{\epsilon\nu_\mu} : E\epsilon \langle \nu_\mu | \eta \rangle = K_{\epsilon\nu_\mu} | \eta \rangle.$$

Оптимальная оценка  $\hat{\alpha}$  из (5.11) определяет структуру алгоритма восстановления с минимальной дисперсией ошибок. Можно записать оценку, в которой в явной форме представлены статистические связи полей  $\nu_\mu$  и  $\nu_{\mu'}$  (в предположении отсутствия связей между полями  $\nu_\mu$  и случайным компонентом  $\epsilon$   $K_{\mu\epsilon} = 0$ ):

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} = & \left[ P_\mu K_{\nu_\mu\nu_\mu} P_\mu^* + \sum_{\mu' \neq \mu} (P_{\mu'} K_{\nu_{\mu'}\nu_{\mu'}} P_{\mu'}^* + P_\mu K_{\nu_\mu\nu_{\mu'}} P_{\mu'}^*) + \right. \\ & \left. + \sum_{\mu' \neq \mu} \sum_{\mu'' \neq \mu} P_{\mu'} K_{\nu_{\mu'}\nu_{\mu''}} P_{\mu''}^* + K_{\epsilon\epsilon} \right]^{-1} \times \\ & \times \left( P_\mu K_{\nu_\mu\nu_\mu} + \sum_{\mu' \neq \mu} P_{\mu'} K_{\nu_{\mu'}\nu_\mu} \right) | l \rangle. \end{aligned}$$

В частном случае, когда отсутствуют статистические связи различных полей  $\nu_\mu(\delta\theta)$  и  $\nu_{\mu'}(\delta\theta)$ , а также связи  $\nu_\mu(\delta\theta)$  и  $\epsilon$ , оптимальная оценка (5.11) примет вид

$$\hat{\alpha}_M = \left( P_\mu K_{\nu_\mu \nu_\mu} P_\mu^* + \sum_{\mu' \neq \mu} P_{\mu'} K_{\nu_{\mu'} \nu_{\mu'}} P_{\mu'}^* + K_{\epsilon\epsilon} \right)^{-1} P_\mu K_{\nu_\mu \nu_\mu} |l\rangle,$$

$$P_\mu K_{\nu_\mu \nu_\mu} P_\mu^* = \begin{pmatrix} \langle p_{1\mu} | K_{\nu_\mu \nu_\mu} | p_{1\mu} \rangle & \dots & \langle p_{1\mu} | K_{\nu_\mu \nu_\mu} | p_{N\mu} \rangle \\ \langle p_{n\mu} | K_{\nu_\mu \nu_\mu} | p_{1\mu} \rangle & \dots & \langle p_{n\mu} | K_{\nu_\mu \nu_\mu} | p_{N\mu} \rangle \\ \langle p_{N\mu} | K_{\nu_\mu \nu_\mu} | p_{1\mu} \rangle & \dots & \langle p_{N\mu} | K_{\nu_\mu \nu_\mu} | p_{N\mu} \rangle \end{pmatrix}$$

— ковариационная матрица полезного — относительно восстанавливаемого  $\mu$ -го поля параметров — сигнала;

$\left( \sum_{\mu' \neq \mu} P_{\mu'} K_{\nu_{\mu'} \nu_{\mu'}} P_{\mu'}^* + K_{\epsilon\epsilon} \right)$  — ковариационная матрица эффективного шума, включающая статистические связи полей  $\{\nu_{\mu'}, \mu' \neq \mu\}$ , а также случайного компонента  $\epsilon$ . Запишем дисперсию ошибки оценки (5.12):

$$E(\eta_\mu^l)^2 = \langle l | K_{\nu_\mu \nu_\mu} - K_{\nu_\mu \nu_\mu} P_\mu^* \left( P_\mu K_{\nu_\mu \nu_\mu} P_\mu^* + \sum_{\mu' \neq \mu} P_{\mu'} K_{\nu_{\mu'} \nu_{\mu'}} P_{\mu'}^* + K_{\epsilon\epsilon} \right)^{-1} P_\mu K_{\nu_\mu \nu_\mu} | l \rangle$$

или, вводя оператор Фишера:

$$E(\eta_\mu^l)^2 = \langle l | F_\mu^{-1} | l \rangle,$$

$$F_\mu = \left[ P_\mu^* \left( \sum_{\mu' \neq \mu} P_{\mu'} K_{\nu_{\mu'} \nu_{\mu'}} P_{\mu'}^* + K_{\epsilon\epsilon} \right)^{-1} P_\mu + K_{\nu_\mu \nu_\mu}^{-1} \right].$$

Из последнего выражения с очевидностью следует, что качество оценки  $\mu$ -го поля тем лучше, чем выше чувствительность обрабатываемых данных к вариациям  $\mu$ -го поля и чем меньше влияние вариаций остальных полей ( $\mu' \neq \mu$ ) на экспериментальные данные.

Модель экспериментального материала (5.8) формально включает [69] все поля параметров среды, которые входят в уравнения распространения зондирующего сигнала. Априори

ясно, что не все поля из  $\nu_\mu(\delta\theta)$  обладают необходимой величиной отношения сигнал/помеха, учитывая систему наблюдений при выбранном плане эксперимента. Чтобы построить адекватную модель экспериментального материала, надо ввести количественную меру влияния вариаций каждого параметра на поле измерений. С этой целью введем понятие *информационной чувствительности поля наблюдений* ( $u$ ) по отношению к фиксированному линейному полю параметров ( $\nu(\delta\theta)$ ) — как предел производной информации Шеннона  $I_\alpha(l(\nu)/u)$  по  $\alpha$  (отношение сигнал/помеха) при  $\alpha \rightarrow 0$ :

$$S_i^P = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \alpha} I_\alpha \left( \frac{l(\nu)}{u_P} \right),$$

$$I_\alpha \left( \frac{l(\nu)}{u_P} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{E(\eta_{\text{апр}}^l)^2}{E(\eta_\alpha^l)^2}, \quad E(\eta_{\text{апр}}^l)^2 = \langle l | K_{\nu\nu} | l \rangle,$$

$$E(\eta_\alpha^l)^2 = \langle l | (P^* K_{\epsilon\epsilon}^{-1} P + K_{\nu\nu}^{-1})^{-1} | l \rangle,$$

$$K_{\epsilon\epsilon} = \sigma_\epsilon^2 I, \quad K_{\nu\nu} = \sigma_\nu^2 I, \quad \alpha = \sigma_\nu^2 / \sigma_\epsilon^2.$$

Найдем явный вид производной по  $\alpha$ :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} I_\alpha \left( \frac{l(\nu)}{u_P} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\langle l | l \rangle}{\langle l | I - \alpha P^* (\alpha P P^* + I)^{-1} P | l \rangle} \times$$

$$\times \left[ -\frac{\langle l | P^* (\alpha P P^* + I)^{-1} P | l \rangle}{\langle l | l \rangle} + \right.$$

$$\left. + \alpha \frac{\langle l | P^* (\alpha P P^* + I)^{-1} P P^* (\alpha P P^* + I)^{-1} P | l \rangle}{\langle l | l \rangle} \right]$$

и, переходя к пределу при  $\alpha \rightarrow 0$ , получим:

$$S_i^P = \lim_{\alpha \rightarrow 0} I_\alpha \left( \frac{l(\nu)}{u_P} \right) = \frac{1}{2} \frac{\langle l | P^* P | l \rangle}{\langle l | l \rangle} = \frac{1}{2} \frac{\| |P| l \rangle\|^2_{RN}}{\| |l \rangle\|^2_{L_2}}. \quad (5.13)$$

Сфера применения информационной чувствительности поля наблюдений — формирование модели экспериментального материала и планирование томографического эксперимента.

Физический смысл выражения (5.13) следующий: информационная чувствительность данной системы томографических функционалов тем выше, чем больше энергия полезного сигнала, прошедшего через среду с неоднородностью, поле которой совпадает с весовой функцией оцениваемого функционала  $l$ . В случае лучевой томографии и оцениваемого функционала

типа среднего в элементе объема подобный качественный вывод очевиден. Но важной особенностью введенной меры информационной чувствительности является то, что она позволяет получить количественную характеристику для произвольных томографических функционалов (напомним, что дифракционные томографические функционалы знакопеременны — см. раздел 2.3) и произвольных оцениваемых функционалов (например, оценивания коэффициентов пространственного фурье-преобразования искомого поля параметра). Мера информационной чувствительности позволяет определить вклад каждого из входящих в модель (5.8) полей и построить адекватную модель, исключив из нее поля, информационно не обеспеченные данным планом эксперимента (набором томографических функционалов).

#### 5. 4. ОШИБКИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ, РАЗРЕШАЮЩАЯ ДЛИНА И МЕТОД БЕЙКУСА — ГИЛЬБЕРТА

Анализ ошибок восстановления проведем, следуя схеме, использованной в гл. 1. Пренебрегая влиянием всех полей  $\nu_\mu$ , кроме одного, перепишем ошибку оценки (5.10):

$$\eta^l = \langle l - (\alpha, p)\nu \rangle - (\alpha, \epsilon) \quad (5.14)$$

или, вводя обозначения  $b$  (смещение) и  $e$  (шум):

$$\eta = b + e,$$

где  $b = E_\nu \eta = \langle l - (\alpha, p)\nu \rangle \equiv \langle l - \tilde{l} | \nu \rangle$ ;

$$e = -(\alpha, \epsilon);$$

$E_\nu$  — символ условного математического ожидания.

Заметим, что основной причиной некорректной постановки задачи оценивания является отсутствие априорной информации о множестве решений  $\{\nu(\delta\theta)\}$  [84,85]. Действительно, несмещенную оценку можно построить только в том случае, когда оцениваемый функционал  $l$  принадлежит линейной оболочке томографических функционалов  $(\alpha, p)$ , но это условие заведомо не выполняется, если, например,  $l$  сингулярен, а  $p_n$  регулярны ( $n = 1 \div N$ ). Поэтому ошибка оценки  $\eta^l$  в силу неограниченности множества  $\{\nu(\delta\theta)\}$  в общем случае может быть бесконечной, и невозможно ввести какой-либо критерий оптимальности оценивания.

В этой связи приведем анализ метода Бейкуса — Гильберта (В—G), получившего в последние годы достаточно широкое распространение в отечественной и зарубежной литературе [2, 72, 81, 98]. Кратко изложим идею и алгоритмическую структуру работы [85], в которой признается наличие случайной компоненты в измерениях, но декларируется отсутствие априорной информации о множестве решений  $\{\nu(\delta\theta)\}$ . Используя обозначения формулы (5.14), запишем критерий оптимальности в смысле критерия Бейкуса — Гильберта. В публикации [59] рассматривается одномерная задача:  $x \in R^1$ . В критерий  $J_{B-G}$  включены две составляющие. Первая часть:  $R$ -критерий "дельтаобразности": оценивается сингулярный функционал  $\langle \hat{l}_{B-G} | = \delta(x - X)$  и, если обозначить  $(\alpha, p) \equiv (\alpha(X), p(x)) \equiv \tilde{l}$ , то

$$R = \langle l_{B-G} - \tilde{l} | K_{B-G} | l_{B-G} - \tilde{l} \rangle,$$

где интегральный оператор  $K_{B-G}^X$  имеет сингулярное ядро вида

$$k_{B-G}^X(x', x'') = c(x' - X)(x'' - X)\delta(x' - x''),$$

в явной форме содержащее точку оценивания  $X, a$ , а относительно параметров  $\alpha$ :

$$R = (\alpha, V^* \alpha),$$

где

$$\begin{aligned} V^* : v_{nm} &= c \iint dx' dx'' p_n(x')(x' - X)\delta(x' - x'')(x'' - X)p_m(x'') = \\ &= c \iint p_n(x)p_m(x)(x - X)^2 dx. \end{aligned}$$

Величина  $R$  связывается с разрешающей способностью метода по координате  $x$ ; для этого константу  $c$  в  $R$  полагают равной 12 из того условия, что если в критерий

$$R = 12 \int \tilde{l}(x)(x - X)^2 dx$$

вместо линейной комбинации

$$\tilde{l} = \sum_{n=1}^N \alpha_n(X)p_n(x),$$

образующей "разрешающее ядро", подставить равномерное на интервале  $\Delta$  распределение, то  $R$  численно будет равно величине интервала  $\Delta$ , т. е.

$$R = 12 \int \tilde{l}^2(x)(x - X)^2 dx \leftarrow 12 \int_{x-\Delta/2}^{x+\Delta/2} \left[ \frac{1}{\Delta}(x - X)^2 \right] dx \equiv \Delta.$$

При этом  $\Delta$  интерпретируется как разрешающая длина по координате  $x$ .

Влияние случайного компонента  $\epsilon$ , вызванного, например, ошибками измерений, учитывается второй составляющей критерия  $J_{B-G}$ :

$$N(\alpha, K_\epsilon \alpha)$$

( $K_\epsilon = E(\epsilon\epsilon^T)$  — ковариационная матрица ошибок измерений).

Окончательно, в качестве критерия оптимальности оценивания функционала  $I$  предлагается минимизировать сумму взвешенных квадратичных по  $\alpha$  форм  $R$  и  $N$ :

$$J_{B-G} = (1 - \gamma)R + \gamma N, \quad \gamma \in [0, 1],$$

или

$$J_{B-G} = (1 - \gamma)(I - \tilde{l}|K_{B-G}|I - \tilde{l}) + \gamma(\alpha, K_\epsilon \alpha)$$

при условии  $\langle \tilde{l} | 1 \rangle = 1$ . Дополнительное условие введено по аналогии с  $\langle I_{B-G} | 1 \rangle \equiv \int \delta(x - X) dx$ . Легко видеть, что без этого дополнительного условия критерий дает единственное — нулевое — решение.

Минимизацию критерия  $J_{B-G}$  предлагается проводить при разных значениях параметра  $\gamma$ , и в качестве оптимальной оценки ( $\hat{\alpha}$ ) выбирается такое значение, которое соответствует минимуму суммы  $R$  и  $N$ , обеспечивающее в интерпретации метода Бейкуса — Гильберта компромиссный выбор между "разрешающей длиной" и "ошибкой".

Проведем сравнение критериев оптимальности  $J_{B-G}$  и критерия оптимальности, вводимого нами для реконструктивной томографии (P-T) и рассмотренного в разделе 5.3:

$$J_{P-T} = [(\Lambda - Q^* \alpha)^* K_{P-T} (\Lambda - Q^* \alpha)],$$

который для данного случая (единственное одномерное оцениваемое поле без априорной связи  $\nu(\delta\theta)$  и  $\epsilon$ ) запишем в виде

$$J_{P-T} = \langle I_{P-T} - \tilde{l} | K_{\nu\nu} | I_{P-T} - \tilde{l} \rangle + (\alpha, K_\epsilon \alpha).$$



Как уже указывалось, первая составляющая критерия  $J_{P-T}$ , связанная со смещением  $b$ , обязана включать априорную информацию о  $\nu(\delta\theta)$ , и в критерии  $J_{P-T}$  эта априорная информация задается оператором  $K_{P-T}$ , определяющим множество возможных решений  $\{\nu(\delta\theta)\}$ . Априорная информация может быть задана введением вероятностей, например гауссовой, меры на множестве  $\{\nu(\delta\theta)\}$  и тогда  $K_{P-T}$  имеет смысл априорного ковариационного оператора поля  $\{\nu(\delta\theta)\}$ .

Класс решений  $\nu(\delta\theta)$  можно также задать условием  $\langle \nu | H | \nu \rangle \leq C$ , где  $H$  — эрмитов положительный оператор, например в случае

$$x \in R^1, \quad H = \sum_{q=0}^r \partial_q (u \partial_q), \quad u < 0,$$

и тогда с точностью до множителя  $\gamma$  — параметра регуляризации —  $K_{P-T}$  представляет оператор Грина для оператора  $H$ , при этом класс  $\{\nu(\delta\theta)\}$  интерпретируется как класс решений  $r$ -й степени гладкости.

Нетрудно видеть, что в критерии  $J_{B-G}$  первая составляющая представляет собой квадратичную форму смещения, причем в качестве оператора, ответственного за априорную информацию о классе решений, используются интегральный оператор  $K_{B-G}$  с сингулярным ядром. Этот оператор в явной форме зависит от точки  $X$ , а так как выбор оцениваемой точки  $X$  произволен, то "априорные" представления в методе Бейкуса — Гильберта волевым образом трансформируются вместе с изменением точки  $X$ , что недопустимо при обработке фиксированного объема экспериментальных данных. Кроме того, интерпретация первой составляющей  $J_{B-G}$ , связанной со смещением, как разрешающей длины представляется неравномерной, хотя бы потому, что "разрешающее" ядро  $((\alpha(X), p(x)))$  является знакопеременным. Более естественно использовать в качестве оцениваемого функционала не  $I^x = \delta(x - X)$ , а функционал, имеющий наглядный физический смысл среднего значения искомого поля  $\nu(\delta\theta)$  в окрестности точки  $X$ , при этом диаметр окрестности определяет "разрешающую длину", а ошибка оценки имеет дисперсию  $\langle |F| |I \rangle$  и включает в себя как смещение  $b$ , так и шум  $e$ .

Линейное условие  $\langle \tilde{l} | 1 \rangle$ , используемое в  $J_{B-G}$ , привнесено искусственно, его введение обусловлено двумя факторами: во-первых, оцениваемый функционал сосредоточен в точке  $X$ ; во-

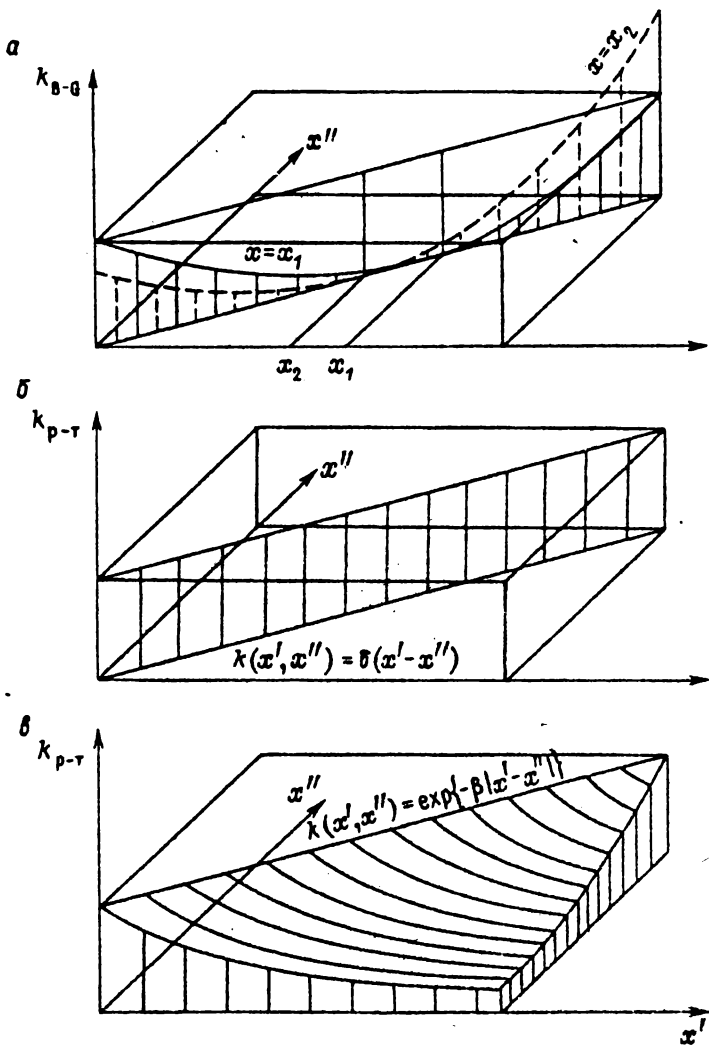


Рис. 16.

вторых, ядро  $K_{B-G}^X$  обращается в нуль в той же точке, отсутствие линейного условия не позволяет получить осмысленной оценки. Следует подчеркнуть, что дельта-функция Дирака определяется не условием  $\langle l^X | 1 \rangle = 1$ , а условием  $\langle l^X | \psi \rangle = \psi(X)$ , и если быть последовательными в развитии логики метода Бейкуса — Гильберта, то необходимо накладывать бесконечное множество линейных условий "дельтообразности"  $\langle \tilde{l} | \psi_r \rangle = \psi(X)$  ( $\{\psi_r\}$  — полная система базисных функций).

Если же ядро  $k_{B-G}^X$  не обращается в нуль в точке  $X$ , то критерий оптимальности не требует линейных условий. Отметим, что в работе [85] были рассмотрены разные варианты задания ядра  $k_{B-G}^X$ , но в дальнейшем в подавляющем большинстве приложений используется именно форма ядра  $k_{B-G}^X = c(x' - X)(x'' - X)\delta(x' - x'')$ .

Можно показать, что введение линейного условия в Р-Т алгоритме приводит к увеличению дисперсии оценки. В этом случае (Р-Т)-критерий имеет форму

$$\tilde{J}_{P-T} = J_{P-T} + \gamma \langle l - \tilde{l} | \nu_M \rangle$$

( $\nu_M$  — модельное поле) и оптимальная оценка

$$\tilde{\alpha} = \arg \inf \tilde{J}_{P-T}$$

определяется в виде

$$\tilde{\alpha} = K_{uu}^{-1}(u_r + \kappa u_M),$$

где  $u_r = PK_{\nu\nu}|l$ ;  $u_M = P\nu_M$ ;  $K_{uu} = PK_{\nu\nu}P^* + K_c$ ;

$$\kappa = \frac{\langle l^X | \nu_M \rangle - u_r^T K_{uu}^{-1} u_M}{u_M^T K_{uu}^{-1} u_M}.$$

Используя выражение для  $\kappa$ , окончательно получаем

$$\tilde{\alpha} = \left[ I - \frac{1}{u_M^T K_{uu}^{-1} u_M} K_{uu}^{-1} u_M u_M^T \right] K_{uu}^{-1} u_r + \langle l^X | \nu_M \rangle \frac{K_{uu}^{-1} u_M}{u_M^T K_{uu}^{-1} u_M}.$$

Запишем увеличение дисперсии оценки функционала  $l^X$  при введении дополнительного линейного условия в критерий

$$\Delta\eta^2 = (\tilde{\eta} - \eta)^2 = \frac{(\langle l^X | \nu_M \rangle - u_M^T K_{uu}^{-1} u_r)^2}{u_M^T K_{uu}^{-1} u_M} \geq 0.$$

Анализ  $\Delta\eta^2$  показывает, что введение дополнительного линейного условия  $\langle l^X - \tilde{l} | \nu_M \rangle = 0$  аналогично использованию в критерии Бейкуса — Гильберта условия  $\langle \tilde{l} | 1 \rangle = 1$  приводит к уменьшению эффективности оценки.

Проведенный анализ позволяет заключить, что корректное построение вычислительного алгоритма восстановления полей упругих параметров по сейсмотомографическим данным следует проводить на основе квадратичного критерия оптимальности:

$$J_{P-T} = \langle l_{P-T}^X - \bar{l} | K_{P-T} | l_{P-T}^X - \bar{l} \rangle,$$

здесь в качестве оцениваемого функционала  $l_{P-T}^X$  используется функционал, который имеет наглядный физический смысл среднего значения искомого поля в окрестности точки  $X$ ; например, в прямоугольном параллелепипеде  $abc$  с центром в точке  $(X_1, X_2, X_3)$ :

$$l_{P-T}^X = (abc)^{-1} H\left(\frac{a}{2} - |x_1 - X_1|\right) H\left(\frac{b}{2} - |x_2 - X_2|\right) H\left(\frac{c}{2} - |x_3 - X_3|\right),$$

$$H(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{при } \xi \geq 0, \\ 0 & \text{при } \xi < 0. \end{cases}$$

Дисперсия оценки имеет вид

$$E \eta^2 = \langle l_{P-T}^X | F^{-1} | l_{P-T}^X \rangle$$

и включает в себя как смещение  $b$ , так и шум  $e$ .

Критерий  $J_{P-T}$  в полной мере учитывает как априорные представления об упругих полях, так и статистическую структуру ошибок наблюдений. На рис. 16 представлены интегральные ядра корреляционных операторов, входящих в критерий  $K_{B-G}(x', x'') = (x' - X)(x'' - X)\delta(x' - x'')$  (а),  $K_{P-T}$  для некоррелированного однородного поля (б) и  $K_{P-T}$  для марковского однородного поля (в), которые характеризуют задание априорной информации в В-Г- и Р-Т-методах.

## 5. 5. ОБРАТНОЕ ПРОЕЦИРОВАНИЕ В ДИФРАКЦИОННОЙ ТОМОГРАФИИ

Напомним еще раз модель данных дифракционного томографического эксперимента:

$$u = P\theta + \epsilon,$$

где томографический оператор  $P$

$$P\theta \Rightarrow \int p_i(\xi, x)\theta(x)dx,$$

$$P_t(\xi, x) = \langle G_0^* h_t^{\xi r} | S_{[x]}^\theta | G_0 S^{\xi \cdot} \rangle \equiv \varphi_{\text{out}\{t\}} | S_{[x]}^\theta | \varphi_{\text{in}}^{\xi \cdot} \rangle,$$

причем  $G_0^*$  включает в себя инверсию времени при интерпретации нестационарного зондирующего сигнала; интегральное ядро томографического функционала  $p(\cdot, x)$  представляет собой весовую функцию вклада вариации параметров среды в точке  $x$  в цифровой отсчет, полученный в момент  $t$  на экспериментальной записи, соответствующей  $\xi$ -й паре источник — приемник, и возникает в результате локального взаимодействия  $S_{[x]}^\theta$  обращенного поля  $\varphi_{\text{out}\{t\}}^{\xi r} : L_0^* \varphi_{\text{out}} = h_t^{\xi r}$ , генерированного приемником  $h_t^{\xi r}$ , "включенным" (в обратном времени) в момент  $t$  в точке  $\xi_r$ , и падающего поля  $\varphi_{\text{in}}^{\xi \cdot} : L_0 \varphi_{\text{in}} = s^{\xi \cdot}$ .

Регуляризованный алгоритм  $\hat{R} : \hat{\theta} = Ru$  обращения данных и строится на основе решения экстремальной задачи:

$$\hat{R} = \arg \inf ( \|RP - I\|_{K_\theta}^2 + \|R\|_{K_\epsilon}^2 ),$$

где  $\|A\|_B = (\text{sp } ABA^*)^{1/2}$ , и имеет вид

$$\hat{R} = K_\theta P^* (PK_\theta P^* + K_\epsilon)^{-1}, \quad (5.15)$$

обеспечивая минимальную дисперсию ошибок восстановления, т. е.

$$\hat{R} = \arg \inf_R \text{sp } K_{\delta\theta},$$

$$K_{\delta\theta} = K_\theta - RK_u R^*, \quad K_u = PK_\theta P^* + K_\epsilon.$$

Построение оптимального оператора  $\hat{R}$  связано с большими вычислительными трудностями. С аналогичными трудностями сталкиваются и при реализации точных алгоритмов в традиционной лучевой томографии. Но в задачах вычислительной томографии эти трудности обходятся путем построения эвристических алгоритмов, позволяющих эффективно использовать хотя бы часть содержащейся в экспериментальных данных информации. Один из наиболее употребимых алгоритмов такого рода — процедура обратного проецирования [20, 36, 88]. Необходимо отметить, что обратное проецирование является компонентом точного аналитического обращения Радона [79, 80], в котором в качестве данных для обратного проецирования используются не непосредственно экспериментальные данные (значения радоновских проекций), а произвольные от гильберт-образов.

Рассмотрим субоптимальный алгоритм  $\tilde{R}$  восстановления изображений среды, в основе которого лежат принципы методов обращения зарегистрированных волновых полей и обратного проецирования. Запишем алгоритм  $\tilde{R}$  в виде

$$\tilde{\theta}(x) = \tilde{R}u(x) = \alpha^{-1} \sum_{\xi} \langle \Phi_{\text{out}}^{\xi} | S_{[x]}^{\theta} | \Phi_{\text{in}}^{\xi} \rangle,$$

где суммирование идет по результатам обработки отдельных экспериментов;  $\Phi_{\text{in}}^{\xi}$  — прямое продолжение волнового поля, генерированного  $s$ -й группой источников;  $\Phi_{\text{out}}^{\xi}$  — обращенное продолжение поля, зарегистрированного  $r$ -й группой приемников;  $\alpha$  — размерный множитель, пропорциональный числу обработанных экспериментальных данных. Вводя параметризацию экспериментальной записи в виде

$$u_{(t)}^{\xi} = \sum_{t_n} \sum_{\xi_s} \sum_{\xi_r} u^{\xi r \xi_s t_n} \delta(t - t_n) \delta(x_s - \xi_s) \delta(x_r - \xi_r),$$

перепишем выражение для оценки  $\tilde{\theta}(x)$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}(x) &= \alpha^{-1} \sum_{t_n} \sum_{\xi_s} \sum_{\xi_r} u^{\xi r \xi_s t_n} p^{\xi r \xi_s t_n} \equiv \\ &\equiv \alpha^{-1} \sum_{t_n} \sum_{\xi} u^{\xi}(t_n) p_{t_n}(\xi, x) = \alpha^{-1} P^* u. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Ядро томографического функционала  $p_{t_n}(\xi, x)$  в данном случае порождается модельной аппаратной функцией регистрирующего канала  $h_{t_n}^{\xi r} = \delta(t - t_n) \delta(x_r - \xi_r)$ , что соответствует предположению о широкополосной регистрации экспериментальных данных. Отметим, что в последнем выражении для оценки  $\tilde{\theta}(x)$  в явной форме записана процедура обратного проецирования.

Покажем место обратного проецирования в алгоритме обобщенного обращения, рассмотренного в разделе 5.3. Для этого запишем результат оптимального восстановления произвольного линейного функционала  $l(\theta) \equiv \langle l | \theta \rangle$  [62]:

$$\hat{l}(\theta) = \langle \hat{l} | \theta \rangle = \langle u(PK_{\theta}P^* + K_{\epsilon})^{-1}PK_{\theta} | l \rangle$$

и рассмотрим упрощенный вариант, когда  $K_{\theta} \Rightarrow I$ ,  $\langle l | \Rightarrow \langle l_{[x]} | \equiv \langle \delta(x - [x]) |$ . Тогда выражение для  $\hat{l}(\theta)$  принимает вид

$$\hat{\theta}_{[x]} \equiv \langle \hat{l}_{[x]} | \theta \rangle = \langle u | (PP^* + K_{\epsilon})^{-1}P | l_{[x]} \rangle.$$

Учитывая, что

$$P|l_{[x]} \Rightarrow \int P_t(\xi, x)\delta(x - [x])dx = P_t(\xi, [x]),$$

и полагая  $(PP^* + K_t) \sim \alpha I$ , получаем аналог действия алгоритма  $\tilde{R}$ :

$$\hat{\theta}_{[x]} \sim \alpha^{-1} \sum_{t_n} \sum_{\xi} u^{\xi}(t_n) P_{t_n}(\xi, [x]).$$

Сравнение формул (5.15) и (5.16) позволяет увидеть, какими недостатками обладает обобщенное обратное проецирование: не учитывается статистика ошибок измерений, не принимаются априорные представления о полях параметров среды, игнорируется связь различных обобщенных радоновских проекций.

Несомненным достоинством обратного проецирования является его технологичность — алгоритм сводится к хорошо разработанным процедурам продолжения волновых полей [27, 30, 31, 44, 87, 104].

Напомним, что классические методы продолжения упругих полей [29, 44, 64, 86] сводятся к процедуре  $\hat{u} = G_0^* u$ . Как следует из анализа алгоритма обобщенного обратного проецирования (5.16), процедура обращенного продолжения входит в качестве одной из составляющих процедуры восстановления изображения среды:  $\Phi_{\text{out}} = G_0^* u$ . Из (5.15) видно, что для применения продолжения в качестве метода восстановления необходимо использовать информацию о свойствах зондирующего сигнала  $\Phi_{\text{in}}$  и характере взаимодействия прямого и обращенного продолженных полей ( $S^{\theta}$ ). Алгоритм обобщенного обратного проецирования эквивалентен процедуре обобщенного продолжения при условиях, что падающее поле  $\Phi_{\text{in}}$  представляет собой плоский фронт, а оператор взаимодействия  $S^{\theta}$  — оператор умножения.

Отметим, что процедуру обобщенного обратного проецирования можно интерпретировать как обработку голограммы. Напомним, что в основе оптической голографии лежит возможность фиксации амплитуды и фазы оптического сигнала. В оптике это достигается записью интерференционной картины, возникающей в результате суперпозиции фронтов монохроматического (лазерного) опорного пучка и поля волны, рассеянной объектом. Если в оптической голографии использование монохроматического пучка — единственная возможность

зафиксировать помимо амплитуды еще и фазу волны, то во многих задачах дистанционного зондирования зарегистрированное поле сигналов содержит оба этих параметра рассеянного поля. Аналогия с голографией прослеживается в явном виде в процедуре обобщенного обратного проецирования:

$$\hat{\theta} \sim \alpha^{-1} (G^*(u - u_0) | S^{\theta} | \varphi_{in}),$$

$$u_0 = \varphi_{in} |_{x=\xi_r}.$$

Роль опорного пучка играет в данном случае произвольное поле  $\varphi_{in}$ , но, как и в оптической голографии, не несущее никакой информации. "Голографическое" изображение возникает в результате взаимодействия опорного поля  $\varphi_{in}$  и освещенной "голограммы"  $u - u_0$ , при этом передача информации в пространство происходит по тем же законам, что и распространение опорного поля  $\varphi_{in}$ . Оператор взаимодействия  $S^{\theta}$ , как мы видели, в общем случае отличен от оператора умножения и определяется только законом распространения зондирующего сигнала.

Покажем, что процедура построения поля  $\varphi_{out}$  в виде  $G^*u$  может быть представлена в явной форме аналитического продолжения поля, зарегистрированного на некоторой части пространственной поверхности. Сделаем это на примере продолжения скалярного волнового поля.

Используя вторую теорему Грина в форме

$$\int_V [\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi] dV = \oint_{\partial V} [\varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi] \cdot d\sigma,$$

где  $d\sigma = n d\sigma$ , выберем  $\psi$  такое, что

$$\psi: \left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi = -4\pi \delta(x - x'),$$

причем  $x'$  лежит внутри объема  $V$ , ограниченного замкнутой поверхностью  $\partial V$ , а поле  $\varphi$  генерируется источниками, лежащими вне объема  $V$ . Запишем интеграл Кирхгофа [34, 86, 87]:

$$\varphi(x') = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} [\psi \nabla \varphi - \varphi \nabla \psi] \cdot d\sigma. \quad (5.17)$$

Здесь в явном виде записана связь параметров поля в любой точке объема  $x'$  и поля на замкнутой поверхности, т. е.



интеграл Кирхгофа представляет форму аналитического продолжения поля с поверхности внутрь объема, ограниченного этой поверхностью. Эта форма продолжения не всегда удобна для практического использования, так как кроме задания самой функции  $\varphi$  на поверхности  $\partial V$  требуется еще знание нормальной производной поля  $(\mathbf{n} \cdot \nabla)\varphi$ . Пусть  $\varphi$  — поле давлений, тогда в фурье-представлении по времени с учетом того, что  $\nabla\varphi = -i\omega\rho\mathbf{v}$  ( $v$ ), интеграл Кирхгофа записывается как

$$\varphi(x') = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} \left[ \omega(x) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\exp(-ik|x-x'|)}{|x-x'|} \right) + i\omega\rho v_n \frac{\exp(-ik|x-x'|)}{|x-x'|} \right] d\sigma$$

Добавим к полю  $\psi$  поле  $\psi_0$ , такое, что  $\psi_0$  удовлетворяет однородному волновому уравнению:

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi_0 = 0$$

и граничному условию на  $\partial V$ :

$$(\mathbf{n} \cdot \nabla|_{\partial V} \psi' \triangleq \mathbf{n} \cdot \nabla|_{\partial V})(\psi + \psi_0),$$

т. е.

$$\left. \frac{\partial \psi^0}{\partial n} \right|_{\partial V} = -(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}) \frac{1 + ik|x-x'|}{|x-x'|^2} \exp(-ik|x-x'|),$$

$$\mathbf{e} = (\mathbf{x}' - \mathbf{x})|x-x'|^{-1}.$$

Граничному условию можно легко удовлетворить, если в качестве границы взять часть плоскости  $x_3 = x_3^0$ , тогда  $\psi^0$  — поле точечного источника, расположенного зеркально по отношению к точке  $x'$ . При таком выборе поля  $\psi'$  интеграл Кирхгофа принимает вид

$$\varphi(x') = \frac{i\omega\rho}{2\pi} \int (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}(x)) \frac{\exp(-ik|x-x'|)}{|x-x'|} d\rho, \quad (5.18)$$

где  $\rho = (x_1, x_2)$ . Интеграл по части сферы, замыкающей границу  $\partial V$ , полагается равным нулю в предположении, что радиус сферы достаточно большой, а продолжаемое поле  $\varphi$ , генерированное включенным в момент  $t = 0$  источником вне объема  $V$ , интересует нас лишь в ограниченном временном интервале  $(0, T)$ . Интеграл (5.18) описывает продолжение нормальной составляющей поля скорости  $\mathbf{v}(x)$ , заданной на части плоскости  $x_3 = x_3^0$  в поле давлений  $\varphi(x')$  в направлении  $(-\mathbf{n})$ : еще раз

напомним, что в формуле Грина  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль. Это интегральное представление называют *интегралом Рэлея*.

Второй интеграл Рэлея получается при выборе поля  $\psi^0$  так, чтобы выполнялось условие

$$\psi'|_{\partial V} \triangleq (\psi + \psi^0)|_{\partial V} = 0.$$

Тогда представление интеграла Кирхгофа записывается как

$$\varphi(x') = \frac{1}{2\pi} \int (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}(x)) \varphi|_{x_3=x_3^0}(x) \frac{1 + ik|x - x'|}{|x - x'|} \times \\ \times \exp(-ik|x - x'|) d\rho, \quad (5.19)$$

$\rho = (x_1, x_2)$ . Выражение (5.19) описывает прямое продолжение поля давления с плоскости  $x_3 = x_3^0$  в направлении  $(-\mathbf{n})$  и его также называют *интегралом Рэлея*.

Представление (5.19) можно получить, используя эволюционную форму представления волнового уравнения, параметром эволюции при этом будем считать  $x_3 \equiv z$ . Для фурье-компонент поля  $\tilde{\varphi}(k_x, k_y, z, \omega)$  волновое уравнение принимает вид уравнения Гельмгольца:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tilde{\varphi} + k_z^2 \tilde{\varphi} = 0,$$

где  $k_z^2 = -k_x^2 - k_y^2 + \omega^2/c^2$ .

Представляя приближенное решение  $\tilde{\varphi}$  в виде не взаимодействующих полей  $\tilde{\varphi}_\uparrow$  и  $\tilde{\varphi}_\downarrow$ , удовлетворяющем уравнениям

$$\left( \frac{\partial}{\partial z} - ik_z \right) \tilde{\varphi}_\uparrow = 0, \quad \left( \frac{\partial}{\partial z} + ik_z \right) \tilde{\varphi}_\downarrow = 0,$$

можно записать решение в форме

$$\tilde{\varphi}_{\{\uparrow\downarrow\}}(z_2) = \tilde{\varphi}_{\{\uparrow\downarrow\}}(z_1) \exp \left\{ \pm i \int_{z_1}^{z_2} k_z dz \right\}. \quad (5.20)$$

Аналогичное выражение можно получить для ВКБ-приближения (см. раздел 3.3), где уравнение эйконала при  $\varphi = \varphi_0 \exp[i\tau(z)]$   $(\partial\tau(z)/\partial z)^2 = k_z^2$  в предположении слабонеоднородной по координатам  $x, y$  среде, т. е. среда является квазислоистой. Уравнение эйконала распадается на два:

$$\frac{\partial\tau}{\partial z} = k_z, \quad \frac{\partial\tau}{\partial z} = -k_z.$$

При малых значениях  $\Delta z$  (5.20) можно приближенно записать как

$$\bar{\varphi}(z + \Delta z) \approx \bar{\varphi}(z) \exp\{\pm ik_z \cdot \Delta z\},$$

где  $\exp(\pm ik_z \cdot \Delta z)$  является оператором продолжения в частотной области, при этом положительный знак отвечает случаю, когда направление распространения волны и направление продолжения вектора волнового поля противоположны, что соответствует продолжению в обратном времени, а минус — соответственно при совпадении этих направлений:

$$\tilde{H}_- = \exp(ik_z \cdot \Delta z), \quad \tilde{H}_+ = \exp(-ik_z \cdot \Delta z),$$

при этом операторы прямого и обращенных продолжений связаны соотношением  $\tilde{H}_- = \tilde{H}_+^*$ .

Для установления связи второго интеграла Рэлея и оператора прямого продолжения рассмотрим поле точечного источника, который расположен в начале координат:

$$\bar{\varphi}_0|_{z=0} = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-ik\rho)}{\rho} \exp(-i(k_x x + k_y y)) d\rho = \frac{1}{ik_z},$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Это поле продолжено с плоскости  $z = 0$  на некоторый уровень  $\Delta z \neq 0$ . Продолженное поле должно иметь вид  $\exp(ikr)/r$ , применив оператор прямого продолжения к полю  $\varphi_0|_{z=0}$ , получим равенство

$$\frac{e^{-ikr}}{r} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{ik_z} \exp\{-ik_z \Delta z\} \exp\{i(k_x x + k_y y)\} dk_x dk_y,$$

где  $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ . Дифференцируя обе части этого равенства по  $z$ , будем иметь

$$-\frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{-ikr}}{r} \int \exp\{-ik_z \Delta z\} \exp\{i(k_x x + k_y y)\} dk_x dk_y \triangleq$$

$$\triangleq 2\pi F_{k_x}^{-1} F_{k_y}^{-1} \tilde{H}_+.$$

Отсюда пространственно-частотное представление оператора  $\tilde{H}_+$  имеет вид

$$H_+ = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}}{2\pi} \frac{(1 + ikr)}{r^2} \exp(-ikr) = \frac{\Delta z}{2\pi} \frac{(1 + ikr)}{r^3} \exp(-ikr).$$

Таким образом, мы показали, что продолжение волнового поля, полученного из эволюционного уравнения с параметром эволюции  $z$ , тождественно продолжению волнового поля, выраженного через второй интеграл Рэлея.

Еще раз подчеркнем, что построение поля  $\varphi_{\text{out}}$  связано с использованием сопряженной функции Грина, которая в пространственно-временной области соответствует распространению сигнала в обратном времени, а в пространственно-частотной области это находит отражение в комплексном сопряжении функции Грина.

Покажем, как концепция обратного проецирования появляется естественным образом при решении нелинейной задачи

$$u = \mathcal{P}(\theta) + \varepsilon,$$

где  $\mathcal{P}(\theta)$  — нелинейный обобщенный томографический оператор.

Как мы показывали в гл. 1 (см. раздел 1), метод Ньютона решения экстремальной задачи

$$\tilde{\theta} = \arg \inf \{ \|u - \mathcal{P}(\theta)\|_{K_\varepsilon^{-1}}^2 + \|\theta - \theta_0\|_{K_\theta^{-1}}^2 \}$$

приводит к итерационному процессу

$$\begin{aligned} \theta_{n+1} = \theta_n - [P_n^* K_\varepsilon^{-1} P_n + K_\theta^{-1}]^{-1} \times \\ \times [P_n^* K_\varepsilon^{-1} (u_n - u) + K_\theta^{-1} (\theta_n - \theta_0)], \end{aligned}$$

первый шаг которого является точным решением, если выражение

$$u = \mathcal{P}(\theta_0) + \left. \frac{\delta}{\delta\theta} \right|_{\theta_0} \mathcal{P}\delta\theta + \varepsilon$$

удовлетворительно аппроксимирует исходную модель.

Градиентный метод решения экстремальной задачи на каждой итерации в явном виде включает оператор обратного проецирования:

$$\theta_{n+1} = \theta_n - \alpha [P_n^* K_\varepsilon^{-1} (u_n - u) + K_\theta^{-1} (\theta_n - \theta_0)],$$

поэтому, если линеаризованная модель удовлетворительна, то направление градиентного спуска определяется выражением

$$\delta\theta = \tilde{\alpha} P^* K_\varepsilon^{-1} (u - \mathcal{P}(\theta_0))$$

либо, заменяя исходную модель эквивалентной:  $K_\varepsilon^{-1/2} u = K_\varepsilon^{-1/2} \mathcal{P}(\theta) + K_\varepsilon^{-1/2} \varepsilon$  или  $\tilde{u} = \tilde{\mathcal{P}}(\theta) + \tilde{\varepsilon}$ , получаем явную запись обратного проецирования:

$$\delta\tilde{\theta} = \tilde{\alpha} \tilde{P}^* (\tilde{u} - \tilde{\mathcal{P}}(\theta_0)).$$

Заметим, что ньютоновскую процедуру решения нелинейной задачи можно представить вариантом обобщенного градиентного метода, если считать, что количество информации о  $\theta$ , содержащееся в  $U$ , мало, т. е. оператор Фишера  $F_n$  не вносит существенного вклада в априорную информацию:  $\|F_n\| \ll \|K_\theta^{-1}\|$ . В этом случае обратная вторая производная исходного регуляризованного функционала равна  $K_\theta$  и первый шаг итерации дает обратное проецирование с последующей фильтрацией:

$$\delta \doteq \tilde{\alpha} \tilde{K}_\theta \tilde{P}^*(\tilde{u} - \tilde{P}(\theta_0)).$$

Причем фильтрация целиком определяется априорной информацией и соответствует сглаживанию с ядром оператора  $\tilde{K}_0$ . Если коррелятор  $\tilde{K}_\theta$  описывает однородные поля  $\theta$ , то фильтрация сводится к операции свертки изображения, полученного обратным проецированием, поскольку ядро  $k_\theta(x, x')$  коррелятора  $K_\theta$  такое, что  $k_\theta(x, x') = k_\theta(|x - x'|)$  и  $\delta\tilde{\theta} = k_\theta * \delta\theta$ .

Заметим, что именно обращенное проецирование с последующей фильтрацией входит в формальный алгоритм градиентного спуска, применяемый в работах [62, 106, 99], где интерпретационные модели сейсмотомографии записаны в предположении, что физическая аппаратура обладает бесконечной полосой пропускания. Алгоритм, представленный в этих работах, можно интерпретировать как последовательность, состоящую в распространении поля сейсмического сигнала, генерированного физическими источниками, в прямом времени  $\varphi_{in}$ , затем обращенного продолжения поля невязок с поверхности регистрации  $\varphi_{out}$  и взаимодействие полей  $\varphi_{in}$  и  $\varphi_{out}$  с последующей фильтрацией. Так, в работе [106] алгоритм представлен в виде

$$\theta^{(n+1)} = \theta^{(n)} - \alpha^{(n)} K_\varphi (S^\theta \varphi_{in}^{(n)})^T \varphi_{out}^{(n)},$$

$$\text{где } \varphi_{in}^{(n)} : L_{\theta_n} \varphi_{in}^{(n)} = s;$$

$s$  — функция источника;

$$\varphi_{out}^{(n)} : L_{\theta_n}^* \varphi_{out}^{(n)} = \delta s^{(n)},$$

где  $\delta s^{(n)} = K_\epsilon^{-1} \varphi_{in}^{(n)} - \varphi_{obs}$ ;  $\varphi_{obs}$  — поле измерений, предполагается, что поле  $\varphi_{obs}$  с точностью до аддитивной  $\epsilon$  совпадает в точках наблюдений с полем сейсмического сигнала.

## 5. 6. МЕТОДЫ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ В ЗАДАЧАХ ТРЕХМЕРНОЙ ЛУЧЕВОЙ ТОМОГРАФИИ

Традиционная томографическая интерпретация данных дистанционного зондирования опирается на лучевое представление распространения сигнала, при этом траектория луча в опорной среде предполагается известной [19]. Использование аналитического обращения Радона в задачах дистанционного зондирования в силу заведомой неполноты данных ведет к грубым ошибкам [6]. Методы алгебраической реконструкции используют либо априорное разбиение среды на блоки [5], либо конечный базис пространственных функций [37].

Как мы уже отмечали, даже при обработке данных "полноракурсной" томографии необходимо применять методы регуляризации вследствие неизбежных ошибок наблюдений и ошибок округления при расчетах на ЭВМ [66], в реальном же томографическом эксперименте к этим ошибкам добавляются ошибки, связанные с малой ракурсностью наблюдений. В математическом аспекте решение обратной задачи связано с обращением вполне непрерывного оператора  $P$  и действием на функцию, заведомо не принадлежащую образу оператора  $P$ , т. е. обратная задача является существенно некорректной.

Рассмотрим возможности метода регуляризации при решении обратных трехмерных задач и дадим физическую интерпретацию алгоритмов [61]. При этом примем во внимание, что регуляризацию целесообразно осуществлять для уравнений, записанных в функциональных пространствах. Только в этом случае можно гарантировать, что алгебраизированные аналоги этих уравнений будут регуляризованы, независимо от размерности соответствующих евклидовых пространств.

Как обычно, в качестве модели принимаем:

$$P\nu + \varepsilon = u. \quad (5.21)$$

Здесь  $\nu$  — поле, связанное с физическими параметрами среды, например скоростью распространения упругой волны или коэффициентом ослабления, включающим в себя поглощение и рассеяние в задачах сейсмологии;  $P$  — интегральный оператор с сингулярным ядром:  $\delta(\mathcal{L}_{\{i=1\dots n\}}(x))\varphi_0(x)$ ,  $\varepsilon$  — невязка модельных и экспериментальных значений, которая предполагается случайной, распределенной по нормальному закону с нулевым

средним и положительно определенной матрицей ковариации  $K_\epsilon = E \epsilon \epsilon^T$ , и включает ошибку наблюдений и ошибку линеаризации.

Модель экспериментальных данных в форме (5.21) вводится в предположении, что  $\nu(x)$  представляет собой малые плавные отклонения относительно  $\mu_0$  — поля параметров опорной среды, т. е.  $\nu(x) = (\mu - \mu_0)/\mu_0$  нигде не обращается в нуль, где  $\mu$  — поле абсолютных значений физических параметров, которое предполагается плавным по отношению к характерным масштабам задачи, в данном случае — по отношению к характерной длине волны зондирующего сигнала. Следует заметить, что, во-первых, плавность  $\nu$  является необходимым условием для лучевой интерпретации распространения упругой волны; во-вторых, малость  $\mu(x)$  обуславливает допустимость линеаризации:

$$\mathcal{P}(\mu) = \mathcal{P}(\mu_0) + \mathcal{P}'|_{\mu_0}(\mu - \mu_0)\mathcal{P}(\mu_0) + \mathcal{P}_\nu,$$

$$P = \mathcal{P}'|_{\mu_0}\hat{\mu}_0.$$

В общем случае линеаризацию можно рассматривать как первый шаг итеративного решения нелинейной задачи, но при обработке данных лучевой сейсмотомографии последующие итерации, как правило, информационно не обеспечены.

Физические требования к применимости модели (5.21) как раз и определяют способы регуляризации решения обратной задачи: найти

$$\hat{\nu} = \arg \inf \|P\nu - u\|_{K_\epsilon^{-1}}^2$$

при условии гладкости и ограниченности  $\nu$ . Формализация этих условий сводится к рассмотренной в гл. 1 регуляризации по Тихонову [65], которая с использованием параметра регуляризации  $\alpha$  приводит к решению экстремальной задачи:

$$\hat{\nu} = \arg \inf \|P\nu - u\|_{K_\epsilon^{-1}}^2 + \alpha(\nu, (I - \Delta)\nu), \quad (5.22)$$

$$\text{где } \|f\|_{K_\epsilon^{-1}}^2 = \sum_i \sum_j [k_\epsilon^{-1}]_{ij} f_i f_j;$$

$I$  — единичный оператор;  $\Delta$  — оператор Лапласа;  $(\cdot, \cdot)$  — символ скалярного произведения в гильбертовом пространстве  $(\nu, (I - \Delta)\nu) \Rightarrow (\nu, \nu) + (\nabla\nu, \nabla\nu)$  при условии исчезновения  $\nu$  или  $\nabla\nu$  на границах области интегрирования.

Решение задачи (5.22) можно записать в виде

$$\hat{\nu} = D^{-1}P^*(PD^{-1}P^* + K_\epsilon)^{-1}u,$$

где  $P^*$  — оператор, сопряженный по Лагранжу оператору  $P$ ,  $D^{-1} = \alpha^{-1}(I - \Delta)^{-1}$  — интегральный оператор с ядром, равным функции Грина для оператора  $D \triangleq \alpha(I - \Delta)$ :

$$D^{-1}(\mu(x)) = \int dx' \frac{1}{\alpha} \frac{\exp(-|x - x'|)}{|x - x'|} \mu(x') \equiv \frac{1}{\alpha} \frac{\exp(-|x|)}{|x|} * \mu(x), \quad (5.23)$$

где  $\alpha^{-1} \exp(-|x|)/|x|$  — потенциал Юкавы, известный в квантовой механике и теории поля.

Упрощенная регуляризация по Тихонову соответствует решению экстремальной задачи в классе только гладких функций  $\nu$ , т. е.

$$\hat{\nu} \arg \inf \{ \|P\nu - u\|_{K_\epsilon^{-1}}^2 + \alpha \|\nabla \nu\|^2 \},$$

и дает оператор  $D_1^{-1}$ , такой, что

$$D_1^{-1}(\mu(x)) = \int dx' \frac{1}{\alpha} \frac{1}{|x - x'|} \mu(x') = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{|x|} * \mu(x), \quad (5.24)$$

где  $\alpha^{-1}|x|^{-1}$  — кулоновский потенциал.

Рассмотрим композицию операторов  $PD^{-1}P^*$  и  $D^{-1}P^*$ . Учитывая действие оператора  $P$ , соответствующего интегрированию пространственной функции  $\nu(x)$  по траекториям лучей, и действие операторов  $D^{-1}$  и  $D_1^{-1}$ , видим, что матричный элемент  $(PD^{-1}P^*)_{ij}$  получится в результате свертки  $\delta$ -функций, локализованных на траекториях лучей  $i$  и  $j$ , с соответствующими потенциалами:

$$\begin{aligned} (PD_1^{-1}P^*)_{ij} &= \frac{1}{\alpha} \iint \mu_0(x') \delta(\mathcal{L}_i(x')) \delta(\mathcal{L}_j(x'')) \frac{\mu_0(x'')}{|x' - x''|} dx' dx'' = \\ &= \mu_0 \delta(\mathcal{L}_i(x)) * \frac{1}{\alpha} \frac{1}{|x|} * \mu_0 \delta(\mathcal{L}_j(x)), \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} (PD^{-1}P^*)_{ij} &= \frac{1}{\alpha} \iint \delta(SL_i(x')) \delta(SL_j(x'')) \frac{\exp(|x' - x''|)}{|x' - x''|} dx' dx'' = \\ &= \delta(\mathcal{L}_i(x)) * \frac{\exp(-|x|)}{\alpha|x|} * \delta(SL_j(x)). \end{aligned} \quad (5.26)$$



Физический смысл матричного элемента  $(PD_1^{-1}P^*)_{ij}$  формулы (5.25) — энергия кулоновского взаимодействия двух заряженных с плотностями заряда  $(4\pi/\alpha)^{1/2}\mu_0$  нитей, локализованных вдоль  $i$ -го и  $j$ -го лучей; матричный элемент (5.26) — энергия нитей  $i$  и  $j$ , взаимодействующих через потенциал Юкавы.

Результат действия оператора  $D^{-1}P^*$  — набор  $m$  полей (по числу лучей), создаваемых в каждой точке пространства каждым из  $m$  лучей с кулоновским или юкавовским полем.

При статистической интерпретации алгоритма (5.22) оценка поля соответствует оптимальной статистической экстраполяции или регрессии:

$$\hat{\nu} = K_{\nu u} K_{uu}^{-1} u,$$

где  $K_{\nu u} = D^{-1}P^*$ ,  $K_{uu} = PD^{-1}P^* + K\epsilon$ , т. е. соответствует априорным представлениям о поле  $\nu$  как о случайном однородном и изотропном поле с корреляционными функциями, совпадающими в (5.23) с потенциалом Юкавы и в (5.24) — с кулоновским потенциалом.

Если воспользоваться концепцией локальной регуляризации [56], нетрудно записать регуляризационный алгоритм, адекватно включающий более полную априорную информацию. Такой априорной информацией может быть представление о поле  $\nu$  как о случайном однородном анизотропном. Это может быть связано с геофизическими представлениями о пространственном распределении неоднородностей среды: так, например, в случае слоистой модели опорной среды встречается ситуация, когда ориентация неоднородностей совпадает с пространственной ориентацией слоев, причем можно указать характерные размеры неоднородностей, т. е. величины осей априорного эллипсоида рассеяния случайного поля  $\nu$ . Если существует априорная информация о преимущественной локализации неоднородностей, то метод локальной регуляризации позволяет интерпретировать поле  $\nu$  как случайное изотропное неоднородное и адекватным образом включать эту информацию в вычислительную процедуру. При этом должно соблюдаться соответствие между априорными представлениями о характерных размерах неоднородностей, масштабах корреляции и принятой лучевой моделью распространения зондирующего сигнала: наименьший радиус должен быть не меньше характерной длины волны. Тем самым физические требования к лучевой интерпретации сейсмотомографии с необходимостью приводят

к тому, что при решении этих задач должна применяться регуляризация по Тихонову не ниже первого порядка.

Применение локальной регуляризации основано на том, что в регуляризирующем функционале  $(\nu, (I_\Delta)\nu)$  вместо эллиптического оператора  $\Delta$  используется оператор  $K_{ij}\partial_i\partial_j$  с положительно определенной матрицей коэффициентов  $K$ , что в представлении корреляционных функций соответствует замене  $|x| \rightarrow (x, K^{-1}x)^{1/2}$ . Следует отметить, что введение локальной регуляризации оставляет в силе все доказательства теорем тихоновской регуляризации вследствие эквивалентности норм соответствующих пространств Соболева.

При практической реализации алгоритмов матрица  $K^{-1}$  задается шестью параметрами: величинами трех осей корреляции и тремя углами Эйлера, определяющими ориентацию эллипсоида относительно системы координат, связанной со схемой наблюдений — матричные элементы  $(K^{-1})_{ij}$  рассчитываются путем преобразования подобия, индуцированного матрицей поворота от собственной системы координат эллипсоида к системе координат схемы наблюдений.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИЙ ГРИНА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ ЗОНДИРУЮЩИХ СИГНАЛОВ

Будем рассматривать слабый зондирующий сигнал, например малые смещения в сейсмике, тогда процесс распространения сигнала в среде можно представить в виде линейного операторного уравнения

$$\hat{L}_\theta \varphi = s,$$

где  $\hat{L}_\theta$  — тензорный линейный оператор, зависящий от полей параметров среды;  $\varphi$  — векторное поле зондирующего сигнала;  $s$  — векторная функция источника, которую полагаем известной. Одним из основных элементов решения обратной задачи дистанционного зондирования является проблема восстановления поля  $\varphi(x, t)$  в опорной среде с известным полем  $\theta_0(x)$  при заданной функции источника  $s$ :

$$\varphi = \hat{L}^{-1} s \quad \text{или} \quad \varphi = \hat{G}s,$$

где  $\hat{L}\hat{G} = \hat{I}$ ;  $\hat{G}$  — оператор Грина.

Приведем примеры построения функции Грина для полей зондирующих сигналов различной физической природы.

**Функция Грина для волнового уравнения.** Пусть имеем "волновое уравнение", заданное в форме

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + H \right) \varphi = 0, \quad (1)$$

где  $H$  — оператор, действующий на пространственные переменные. Чтобы найти функцию Грина уравнения (1), предста-

вим решение в виде бесконечного ряда по собственным функциям оператора  $H$ :

$$\varphi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) \varphi_n(x), \quad (2)$$

здесь  $\varphi_n(x)$  такие, что  $H\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$  и  $(\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{nm}$ . Подставив представление (2) в волновое уравнение (1), будем иметь

$$\sum_n (\ddot{A}_n + A_n \lambda_n) \varphi_n = 0. \quad (3)$$

Умножив равенство (3) скалярно на  $\varphi_n$ , получим для каждого значения  $n$  уравнение для коэффициентов  $A_n(t)$ :

$$\ddot{A}_n(t) + A_n(t) \lambda_n = 0,$$

которое имеет следующее решение:

$$A_n(t) = a_n e^{i\sqrt{\lambda_n}t} + b_n e^{-i\sqrt{\lambda_n}t}. \quad (4)$$

Отметим, что  $A_n(0) = a_n + b_n$ , а производная в  $t=0$   $\dot{A}_n(0) = i\sqrt{\lambda}(a_n - b_n)$ . Задавая начальные условия решения волнового уравнения

$$\dot{\varphi}(x, t)|_{t=0} \triangleq \dot{\varphi}_0 \quad (5a)$$

$$\text{и } \varphi(x, t) \triangleq \varphi_0, \quad (5b)$$

можно получить систему уравнений для коэффициентов  $a_n, b_n$ :

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \sum_n (a_n + b_n) \varphi_n, \\ \dot{\varphi}_0 &= i \sum_n \sqrt{\lambda_n} (a_n - b_n) \varphi_n. \end{aligned} \quad (6)$$

Умножив скалярно систему (6) на  $\varphi_n$ , будем иметь

$$(\varphi_n, \varphi_0) = a_n + b_n,$$

$$(\varphi_n, \dot{\varphi}_0) = i\sqrt{\lambda_n} (a_n - b_n).$$

Каждый из коэффициентов имеет следующее представление:

$$a_n = \frac{1}{2} \left[ (\varphi_n, \varphi_0) - \frac{i}{\sqrt{\lambda_n}} (\varphi_n, \dot{\varphi}_0) \right], \quad (7a)$$

$$b_n = \frac{1}{2} \left[ (\varphi_n, \varphi_0) + \frac{i}{\sqrt{\lambda_n}} (\varphi_n, \dot{\varphi}_0) \right]. \quad (7b)$$

Поскольку в волновом уравнении начальные условия представляются двумя функциями (5а,б), можно для каждой из них построить функцию Грина и общее решение представить в виде

$$\varphi = G_1 \varphi_0 + G_2 \dot{\varphi}_0.$$

Подставив представления (7а,б) в (4) и коэффициенты  $A_n(t)$  — в (2), получаем

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) = & \sum_n \cos \sqrt{\lambda_n} t \varphi_n(x) (\varphi_n, \varphi_0) + \\ & + \sum_n \frac{\sin \sqrt{\lambda_n} t}{\sqrt{\lambda_n}} \dot{\varphi}_n(x) (\dot{\varphi}_n, \dot{\varphi}_0). \end{aligned} \quad (8)$$

Замечая, что представление оператора  $H$  через собственные функции может быть записано в виде

$$H = \sum_n \lambda_n \varphi_n \varphi_n^*$$

и соответственно

$$f(H) = \sum_n f(\lambda_n) \varphi_n \varphi_n^*,$$

можно записать функции Грина  $G_1$  и  $G_2$  в операторном представлении:

$$\hat{G}_1 = \cos \sqrt{H} t, \quad \hat{G}_2 = \frac{\sin \sqrt{H} t}{\sqrt{H}}.$$

Из выражения (8) легко можно вывести координатную форму функции Грина:

$$\begin{aligned} g_1(x, t; x', t') = & \sum_n \cos \sqrt{\lambda_n} (t - t') \varphi_n(x) \varphi_n^*(x'), \\ g_2(x, t; x', t') = & \sum_n \frac{\sin \sqrt{\lambda_n} (t - t')}{\sqrt{\lambda_n}} \dot{\varphi}_n(x) \dot{\varphi}_n^*(x'). \end{aligned}$$

Конкретные представления функции Грина для волнового уравнения можно получить, имея систему собственных функций оператора  $H$ .

В качестве примера рассмотрим *волновое уравнение без источника*, описывающее распространение волн в однородной безграничной среде:

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi = 0.$$

Собственные функции оператора, в данном случае равного  $(-\Delta)$  ( $x \in R^3$ ), определяются как

$$\varphi_k = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{ikx}, \quad x \in R^3.$$

Здесь нормировочный коэффициент соответствует условию  $(\varphi_k, \varphi_{k'}) = \delta(k - k')$ . Тогда координатное представление  $\hat{G}_2$  будет иметь вид

$$\begin{aligned} g_2(x, t; x', t') &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin c|k|(t-t')}{c|k|} e^{ik(x-x')} d^3k = \\ &= \frac{1}{4\pi c|x-x'|} \{ \delta(|x-x'| + c(t-t')) - \delta(|x-x'| - c(t-t')) \}. \end{aligned}$$

Из этого представления видно, что при условии  $t > t'$  срабатывает только вторая часть функции Грина, т. е.

$$g_2(x, t; x', t') = \frac{1}{4\pi c} \left\{ -\frac{\delta(|x-x'| - c(t-t'))}{|x-x'|} \right\} \triangleq G_{(-)} \quad (9)$$

при  $t > t'$ , что соответствует распространению волны в прямом времени, в то время как функция Грина для распространения волны в обратном времени  $t < t'$  равна

$$g_2(x, t; x', t') = \frac{1}{4\pi c} \left[ -\frac{\delta(|x-x'| + c(t-t'))}{|x-x'|} \right] \triangleq G_{(+)}$$

при  $t < t'$ .

Функция Грина для "уравнения Пуассона". Запишем уравнение Пуассона в форме

$$H\varphi = s,$$

где  $H > 0$ ,  $s = s(x)$  — функция источника. Функция Грина в операторной форме записывается как  $G = H^{-1}$  в координатном представлении

$$G(x, x') = \sum_{\lambda_n \neq 0} \lambda_n^{-1} \varphi_n(x) \varphi_n^*(x'). \quad (10)$$

Здесь  $\lambda_n$  — собственные значения оператора  $H$ . В представлении (10) суммирование ведется только по  $\lambda_n \neq 0$ , что эквивалентно представлению решения в виде

$$\varphi = H^{-1} s + k\varphi_0,$$

где  $\varphi_0$  — собственная функция оператора  $H$ , соответствующая  $\lambda_n = 0$  и приводящая к равенству

$$H\varphi = s = H\varphi + kH\varphi_0$$

для произвольного коэффициента  $k$ . Если оператор  $H$  равен  $-\Delta$  ( $x \in R^3$ ), (мы рассматриваем уравнение Пуассона в безграничном пространстве), то функция Грина в координатном представлении

$$\begin{aligned} G(x, x') &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{\exp[ik(x - x')]}{k^2} d^3k = \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{|x - x'|} \int_0^\infty \frac{\sin k|x - x'|}{k} dk = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x - x'|}. \end{aligned} \quad (11)$$

Решение уравнения Пуассона записывается в виде

$$\varphi(x) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{s(x') dx'}{|x - x'|} + k\varphi_0(x),$$

где  $\varphi_0: \Delta\varphi_0 = 0$ ;  $k$  — произвольное число.

Функция Грина для уравнения Ламе в однородной изотропной неограниченной среде. Векторное уравнение Ламе  $L\varphi = s$  имеет единственное решение, которое может быть выражено через тензор Грина  $\hat{G}$ , такой, что его интегральное ядро — тензор-функция  $\hat{g}(x, t; x', t')$  — удовлетворяет уравнению

$$L\hat{g} = \delta(x - x') \delta(t - t') I.$$

В безграничном однородном пространстве запаздывающая функция Грина  $g_-(x, x'; t, t')$  удовлетворяет условию  $g_- \equiv 0$  при  $t < t'$ . Чтобы построить в явном виде фундаментальное решение уравнения Ламе, вводят, пользуясь теоремой Гельмгольца, представление векторных полей через скалярные и векторные потенциалы (2.15):

$$\begin{aligned} \varphi &= -\nabla\Phi + \nabla \times \mathbf{A}, \\ \mathbf{s} &= -\nabla\Phi_s + \nabla \times \mathbf{A}_s, \end{aligned}$$

которые удовлетворяют соответственно скалярному и векторному волновым уравнениям:

$$\ddot{\Phi} - v_p^2 \Delta\Phi = \frac{\Phi_s}{\rho}, \quad (12)$$

$$\ddot{\mathbf{A}} - v_s^2 \Delta\mathbf{A} = \frac{\mathbf{A}_s}{\rho}. \quad (13)$$

Представление вектора  $\mathbf{s}$  в виде суммы векторов потенциального и соленоидального полей позволяет ввести векторное поле  $\mathbf{H}$ , такое, что

$$-\nabla^2 \mathbf{H} = \mathbf{s} = -\nabla \Phi_s + \nabla \times \mathbf{A}_s.$$

Учитывая тождество  $-\nabla^2 \mathbf{H} = -\nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) + \nabla \times (\nabla \times \mathbf{H})$ , можно увидеть, что

$$\Phi_s = \nabla \cdot \mathbf{H}, \quad (14)$$

$$\mathbf{A}_s = \nabla \times \mathbf{H}. \quad (15)$$

Для векторного точечного источника, локализованного в начале прямоугольной системы координат, первый орт которой коллинеарен вектору силы, т. е.  $\mathbf{s}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{e}_1 s(t) \delta(\mathbf{x})$ , можно записать решение векторного уравнения Пуассона  $\nabla^2 \mathbf{H} = -\mathbf{s}$ , пользуясь функцией Грина для скалярного уравнения Пуассона (11):

$$H(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_V d\mathbf{x}' \frac{s(t) \delta(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{4\pi} \mathbf{e}_1 \frac{s(t)}{|\mathbf{x}|}. \quad (16)$$

Используя соотношения для скалярного потенциала (14) и векторного (15) и представление  $\mathbf{H}$  в виде (16), получим

$$\Phi_s = \nabla \cdot \left( \frac{1}{4\pi} \mathbf{e}_1 \frac{s(t)}{|\mathbf{x}|} \right) = \frac{s(t)}{4\pi} \partial_1 |\mathbf{x}|^{-1}, \quad (17)$$

$$\mathbf{A}_s = \nabla \times \left( \frac{1}{4\pi} \mathbf{e}_1 \frac{s(t)}{|\mathbf{x}|} \right) = \frac{s(t)}{4\pi} \left\| \begin{array}{c} 0 \\ \partial_3 |\mathbf{x}|^{-1} \\ \partial_2 |\mathbf{x}|^{-1} \end{array} \right\|. \quad (18)$$

Подставив функции источников в виде (17) и (18), перепишем волновые уравнения (12) и (13):

$$\ddot{\Phi} - v_p^2 \Delta \Phi = \frac{s(t)}{4\pi \rho} \partial_1 |\mathbf{x}|^{-1}, \quad (19)$$

$$\ddot{\mathbf{A}} - v_s^2 \Delta \mathbf{A} = \frac{s(t)}{4\pi \rho} \left\| \begin{array}{c} 0 \\ \partial_3 |\mathbf{x}|^{-1} \\ -\partial_2 |\mathbf{x}|^{-1} \end{array} \right\|. \quad (20)$$

Запишем запаздывающие функции Грина для волновых уравнений (19), (20), используя запаздывающую функцию Грина, полученную для  $L = (\Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2)$  (см.(9)):

$$\begin{aligned} g_\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t - t') &= \frac{1}{4\pi v_p^3} \frac{\delta(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| - v_p(t - t'))}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \\ &= \frac{1}{4\pi v_p^2} \frac{\delta((t - t') - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/v_p)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \end{aligned} \quad (21)$$



$$g_A(x, x'; t - t') = I \frac{1}{4\pi v_s^2} \frac{\delta((t - t') - |x - x'|/v_s)}{|x - x'|}. \quad (22)$$

Решение волновых уравнений (19) и (20) представляется в форме

$$\Phi(x, t) = \int dx' dt' g_\Phi(x, x'; t - t') \left[ \frac{s(t')}{4\pi\rho} \partial_1 |x'|^{-1} \right], \quad (23)$$

$$A(x, t) = \int dx' dt' g_A(x, x'; t - t') \frac{s(t')}{4\pi\rho} \left\| \begin{array}{c} 0 \\ \partial_3 |x'|^{-1} \\ -\partial_2 |x'|^{-1} \end{array} \right\|. \quad (24)$$

С использованием выражений для функций Грина (21) и (22) решения (23), (24) записываются в виде

$$\begin{aligned} \Phi(x, t) &= \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2 \rho v_p^2} \int dx' dt' \frac{\delta((t - t') - |x - x'|/v_p)}{|x - x'|} s(t') \partial_1 |x'|^{-1}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} A(x, t) &= \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2 \rho v_s^2} \int dx' dt' \frac{\delta((t - t') - |x - x'|/v_s)}{|x - x'|} s(t') \left\| \begin{array}{c} 0 \\ \partial_3 |x'|^{-1} \\ -\partial_2 |x'|^{-1} \end{array} \right\|. \end{aligned} \quad (26)$$

Интегрируя по  $t'$  решение (25) и введя замену переменных:  $|x - x'|/v_p = \tau$ , получим для скалярного потенциала

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{(4\pi)^2 \rho v_p^2} \int_0^\infty d\tau \frac{s(t - \tau)}{\tau} \oint_{|x - x'| = v_p \tau} \partial_1 |x'|^{-1} d\sigma. \quad (27)$$

Для вычисления интеграла по поверхности в (27) рассмотрим интеграл вида

$$\partial_i \oint_{|x - x'| = r} \frac{d\sigma}{|x'|}, \quad (28)$$

где  $r = v_p \tau$ ,  $d\sigma = 2\pi r^2 \sin \theta d\theta$ ,  $x' = x - r$ ,  $(x', x') = (x, x) - 2(x, r) + (r, r)$  (рис. 17) или  $x'^2 = x^2 - 2xr \cos \theta + r^2$ . Записывая полный дифференциал последнего выражения, получим

$$x' dx' = xr \sin \theta d\theta,$$

откуда

$$d\sigma = \frac{2\pi r |x'| dx'}{|x'|}.$$

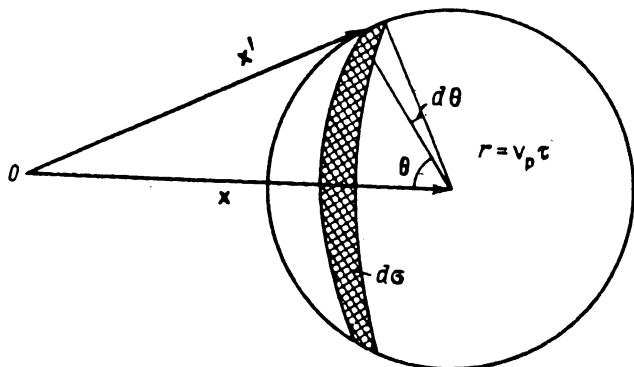


Рис. 17.

Интеграл (28) легко вычисляем:

$$\partial_i \oint_{|x-x'|=r} \frac{d\sigma}{|x'|} = 2\pi r \partial_i |x|^{-1} \int_{|x|-r}^{|x|+r} dx' = \begin{cases} 4\pi r^2 \partial_i |x| & \text{при } r < |x|, \\ 0 & \text{при } r > |x|. \end{cases} \quad (29)$$

Используя представление (29) для интеграла по поверхности, перепишем выражение (27) для потенциала  $\Phi(x, t)$ :

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{4\pi\rho} (\partial_1 |x|^{-1}) \int_0^{|x|/v_p} \tau s(t - \tau) d\tau. \quad (30)$$

Аналогично вычисляется векторный потенциал после замены переменных в (26):  $|x - x'|/v_p = \tau$  и с учетом (29):

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi\rho} \int_0^{|x|/v_p} \tau s(t - \tau) d\tau \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_3 |x|^{-1} \\ -\partial_2 |x|^{-1} \end{pmatrix}. \quad (31)$$

По полученным решениям для скалярного и векторного потенциалов (30) и (31) восстановим потенциальную и соленоидальную компоненты поля  $\varphi_p$  и  $\varphi_s$ :

$$\varphi_p = -\nabla\Phi = -\frac{1}{4\pi\rho} \begin{pmatrix} \partial_1^2 |x|^{-1} \\ \partial_2 \partial_1 |x|^{-1} \\ \partial_3 \partial_1 |x|^{-1} \end{pmatrix} \int_0^{|x|/v_p} d\tau s(t - \tau) \tau$$

$$-\frac{|\mathbf{x}| s(t - |\mathbf{x}|/v_p)}{4\pi \rho v_p^2} \left\| \begin{array}{l} \partial_1 |\mathbf{x}|^{-1} \partial_1 |\mathbf{x}| \\ \partial_1 |\mathbf{x}|^{-1} \partial_2 |\mathbf{x}| \\ \partial_1 |\mathbf{x}|^{-1} \partial_3 |\mathbf{x}| \end{array} \right\|,$$

$$\varphi_s = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{4\pi r} \left\| \begin{array}{l} -\partial_2^2 |\mathbf{x}|^{-1} - \partial_3^2 |\mathbf{x}|^{-1} \\ \partial_1 \partial_2 |\mathbf{x}|^{-1} \\ \partial_1 \partial_3 |\mathbf{x}|^{-1} \end{array} \right\| \int_0^{|\mathbf{x}|/v_s} \tau s(t - \tau) d\tau +$$

$$+ \frac{|\mathbf{x}| s(t - |\mathbf{x}|/v_s)}{4\pi \rho v_s^2} \left\| \begin{array}{l} -\partial_2 |\mathbf{x}|^{-1} \partial_2 |\mathbf{x}| - \partial_3 |\mathbf{x}|^{-1} \partial_3 |\mathbf{x}| \\ \partial_2 |\mathbf{x}|^{-1} \partial_1 |\mathbf{x}| \\ \partial_3 |\mathbf{x}|^{-1} \partial_1 |\mathbf{x}| \end{array} \right\|.$$

Введя обозначения  $\gamma_i = \partial_i |\mathbf{x}|$  и полагая, что направление действия источника  $\mathbf{e}_j$ , т. е. заменив 1 на  $j$ , получим после простых преобразований

$$\varphi = \varphi_p + \varphi_s = \frac{\hat{P}}{4\pi \rho v_p^2 |\mathbf{x}|} s\left(t - \frac{|\mathbf{x}|}{v_p}\right) + (\hat{I} - \hat{P}) \mathbf{x}$$

$$\times \frac{1}{4\pi \rho v_s^2 |\mathbf{x}|} s\left(t - \frac{|\mathbf{x}|}{v_s}\right) + (3\hat{P} - \hat{I}) \frac{1}{4\pi \rho |\mathbf{x}|^3} \int_{|\mathbf{x}|/v_p}^{|\mathbf{x}|/v_s} \tau s(t - \tau) d\tau.$$

Запаздывающая функция Грина после интегрирования по  $\tau$  может быть представлена в виде

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t - t') = \frac{1}{4\pi \rho} \left\{ \frac{\hat{P}}{v_p^2} \frac{\delta(t - t' - r/v_p)}{r} + \frac{(\hat{I} - \hat{P})}{v_s^2} \frac{\delta(t - t' - r/v_s)}{r} + \right.$$

$$\left. + (3\hat{P} - \hat{I}) \frac{(t - t') [\theta(t - t' - r/v_p) - \theta(t - t' - r/v_s)]}{r^3} \right\},$$

где  $\theta(t)$  — функция Хевисайда,

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0; \end{cases}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}', \quad r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|; \quad \mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, \quad P = (\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_r^T).$$

Функция Грина для уравнения диффузии. Запишем "уравнение диффузии" в виде

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + H \right) \varphi = 0, \quad (32)$$

где  $H > 0$ . Оператор  $H$  действует только на пространственные переменные. Для нахождения функции Грина уравнения (32) представим решение в виде разложения по собственным функциям оператора  $H$ :

$$\varphi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) \varphi_n(x). \quad (33)$$

Подставив (33) в (32), получим уравнение для коэффициентов  $A_n(t)$ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\dot{A}_n + A_n \lambda_n) \varphi_n = 0,$$

т. е.

$$A_n(t) = A_n(0) e^{-\lambda_n t}. \quad (34)$$

В разложении (33) коэффициент  $A_n(t)$  равен проекции функции  $\varphi(x, t)$  на орт собственного базиса оператора  $H$   $\varphi_n$ , т. е.

$$A_n(t) = (\varphi_n, \varphi).$$

Обозначая  $\varphi(x, t=0)$  через  $\varphi_0$ , запишем:

$$A_n(0) = (\varphi_n, \varphi_0). \quad (35)$$

Подставив (35) в (34) и далее (34) — в разложение (33), найдем связь между  $\varphi(x, t)$  и  $\varphi(x, t=0)$ :

$$\varphi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \varphi_n(x) (\varphi_n, \varphi_0). \quad (36)$$

Из формулы (36) видно, что функция Грина в операторной форме может быть записана как  $\hat{G} = e^{-\hat{H}t}$ , а в координатном представлении как

$$G(x, x'; t, t') = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n(t-t')} \varphi_n(x) \varphi_n^*(x').$$

Пусть оператор  $H = -a^2 \nabla^2$  ( $x \in R^3$ ), тогда функция Грина для уравнения диффузии ( $t > t'$ ) записывается как

$$G(x, t; x', t') = \frac{1}{a(2\sqrt{\pi}(t-t'))^3} \exp\left\{-\frac{(x-x')^2}{4a^2(t-t')}\right\}.$$

Функция Грина для операторного уравнения второго рода. Запишем необходимое уравнение в форме

$$\varphi + H\varphi = s, \quad (37)$$

здесь  $H > 0$ . Представив уравнение (37) в виде  $(I + H)\varphi = s$ , можно записать координатное представление оператора Грина  $G = (I + H)^{-1}$ :

$$G(x, x') = \sum_{n=0}^{\infty} (1 + \lambda_n)^{-1} \varphi_n(x) \varphi_n^*(x').$$

Для примера найдем функцию Грина уравнения  $(-\nabla^2 + m)\varphi = s$ . Координатным представлением функции Грина будет

$$\begin{aligned} G(x, x') &= \frac{1}{8\pi^3} \int d^3k \frac{\exp[ik(x - x')]}{k^2 + m} = \\ &= \frac{1}{4\pi^2 i|x - x'|} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[ik|x - x'|]}{k^2 + m} k dk = \frac{1}{4\pi} \frac{\exp[-m|x - x'|/2]}{|x - x'|}. \end{aligned}$$

Последнее выражение носит название *потенциала Юкавы*.

1. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология. Т.1,2. М., 1983.
2. Акустика дна океана / Под ред. У.Купермана и Ф.Енсена. М., 1984.
3. Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. М., 1977.
4. Алексеев А.С., Кремлев А.Н., Жерняк Т.Ф. Об обратной задаче дифракции акустических волн и методов визуализации и волновой миграции // Геология и геофизика. 1981, N 1.
5. Алексеев А.С., Михайленко В.Г., Чеверда В.А. Численные методы решения прямых и обратных задач теории распространения волн // Актуальные проблемы вычисл. и прикл. математики. Новосибирск, 1983.
6. Алексеев А.С., Лаврентьев М.Н., Преображенский Н.Г. Вопросы реконструктивной томографии. Новосибирск, 1985.
7. Апресян Л.А., Кравцов Ю.А. Теория переноса излучения. М., 1983.
8. Бабич В.М., Булдырев В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М., 1972.
9. Бабич В.М., Булдырев В.С., Молотков И.А. Пространственно — временной лучевой метод // Линейные и нелинейные волны. Л., 1985.
10. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Некорректные задачи // Численные методы и приложения. М., 1989.
11. Бельшев М.И. Уравнение типа Гельфанда-Левитана в многомерной обратной задаче для волнового уравнения // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1987. Т. 156, вып.17.
12. Бирюлина М.С. О влиянии возмущения решающего оператора на точность решения обратной задачи // Вопросы обработки и интерпретации данных измерений с метеорологических ИСЗ. 1985, вып. 20.
13. Благовещенский А.С. О локальном методе решения нестационарной обратной задачи для неоднородной среды // Труды Матем. ин-та АН СССР. 1971, N 65.
14. Благовещенский А.С. Обратные задачи теории распространения упругих волн // Изв. АН СССР. Сер. физ. Земли. 1978. N 12.

15. Благовещенский А.С. Об обратной задаче теории распространения сейсмических волн // Пробл. мат. физики. 1981. Вып. 10.
16. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М., 1973.
17. Бреховских Л.М., Годин О.А. Акустика слоистых сред. М., 1989.
18. Бреховских Л.М., Лысанов Ю.П. Теоретические основы акустики океана. Л., 1982.
19. Бухгейм А.Л. Введение в теорию обратных задач. Новосибирск, 1988.
20. Василенко Г.И., Тараторин А.Н. Восстановление изображений. М., 1986.
21. Введение в современную томографию / К.С.Терновой, М.В.Синьков, А.И.Закидальский и др.: Под ред. К.С.Тернового, М.В.Синькова. Киев., 1983.
22. Гельфанд И.М., Граев М.И., Виленкин Н.Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. М., 1962.
23. Гольдин С.В. Интерпретация данных сейсмического метода отраженных волн. М., 1979.
24. Гольцман Ф.М. Статистические модели интерпретации. М., 1971.
25. Горюнов А.А., Сасковец А.В. Обратные задачи рассеяния в акустике. М., 1989.
26. Дайнс К., Лайтл Р. Машинная томография в геофизике // Труды Ин-та инженеров по электротехнике и радиоэлектронике. 1979. Т. 67, N 7.
27. Жданов М.С., Матусевич В.Ю., Френкель М.А. Сейсмическая и электромагнитная миграция. М., 1988.
28. Карус Е.В., Кузнецов О.Л., Файзуллин И.С. Межскважинное прозвучивание. М., 1986.
29. Клаербоут Д.Ф. Теоретические основы обработки геофизической информации. М., 1981.
30. Клаербоут Д.Ф. Сейсмические изображения земных недр. М., 1989.
31. Козлов Е.А. Миграционные преобразования в сейсморазведке. М., 1986.
32. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М., 1980.
33. Кульбак С. Теория информации и статистика. М., 1967.

34. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск, 1962.
35. Левшин А.Л., Яновская Т.Б., Ландер А.В. Поверхностные сейсмические волны в горизонтально неоднородной Земле. М., 1987.
36. Линейные и нелинейные задачи вычислительной томографии / Под ред. В.Р.Кирейтова, В.В.Пикалова. Новосибирск, 1985.
37. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М., 1989.
38. Математические методы планирования эксперимента // Под ред. В.В.Пененко. Новосибирск, 1981.
39. Математическая теория планирования эксперимента // Под ред. С.М.Ермакова. М., 1983.
40. Морозов В.А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М., 1987.
41. Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии. М., 1990.
42. Никитин А.А. Статистические методы выделения геофизических аномалий. М., 1979.
43. Петрашень Г.И., Молотков Л.А., Крауклис П.В. Волны в слоисто-однородных упругих средах. Л., 1985.
44. Петрашень Г.И., Нахамкин С.А. Продолжение волновых полей в задачах сейсморазведки. Л., 1973.
45. Петрашень Г.И. Основы математической теории распространения упругих волн // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. 1978. Вып. 18.
46. Петрашень Г.И. Распространение волн в анизотропных упругих средах. Л., 1980.
47. Петрашень Г.И., Каштан Б.М. Элементарная теория распространения объемных волн в анизотропных упругих средах // Распространение объемных волн и методы расчета волновых полей в анизотропных упругих средах. Л., 1984.
48. Пикалов В.В., Преображенский Н.Г. Реконструктивная томография в газодинамике и физике плазмы. Новосибирск, 1983.
49. Пытьев Ю.П. Методы анализа и интерпретации эксперимента. М., 1990.
50. Рао С.Р. Линейные статистические методы и их применение. М., 1968.



51. Романов В.Г. Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа. Новосибирск, 1972.
52. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. М., 1984.
53. Рыжиков Г.А. О сходимости итерационных методов решения некорректных задач /Проблемы физики атмосферы. 1976. Вып. 14.
54. Рыжиков Г.А. Построение алгоритма решения некорректных задач с использованием дробно-рациональных операторных функций / Проблемы физики атмосферы. 1982. Вып. 17.
55. Рыжиков Г.А., Троян В.Н. Применение методов вычислительной томографии при решении интерпретационных сейсмических задач // Вестник Ленингр. ун-та. 1985. N 25.
56. Рыжиков Г.А., Троян В.Н. Определение волнового поля и скорости в среде с использованием метода теории возмущений //Вестник Ленингр. ун-та. 1986. N 25.
57. Рыжиков Г.А., Троян В.Н. Два подхода к задаче обработки данных гидролокации // Деп. ВИНТИ от 12.09.86 г. N 6649-B86.
58. Рыжиков Г.А., Троян В.Н. Восстановление поля скорости в трехмерной среде по функционалам от полей упругих волн // Изв. АН СССР, сер. Физика Земли. 1986. N 7.
59. Рыжиков Г.А., Троян В.Н. Линейное оценивание Функционалов от полей упругих параметров и сейсмотомографов // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. 1987. Вып. 27.
60. Рыжиков Г.А., Троян В.Н. Томографические функционалы в интерпретационных задачах зондирования упругими волнами // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. 1989. Вып. 28.
61. Рыжиков Г.А., Троян В.Н., Юрин А.В. Методы регуляризации в задачах трехмерной лучевой сейсмотомографии // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. 1989. Вып. 28.
62. Рыжиков Г.А., Троян В.Н. Обратное проецирование в дифракционной томографии // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. 1990. Вып. 29.
63. Стратонович Р.Л. Теория информации. М., 1975.
64. Тимошин Ю.В. Импульсная сейсмическая голография. М., 1978.

65. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М., 1986.
66. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я., Тимонов А.А. Математические задачи компьютерной томографии. М., 1987.
67. Троицкий И.Н. Статистическая теория томографии. М., 1989.
68. Троян В.Н. Применение сплайн-функции для аппроксимации геофизической информации // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. 1981. Вып. 20.
69. Троян В.Н. Статистические методы обработки сейсмической информации при исследовании сложных сред. М., 1982.
70. Троян В.Н. Решение интерпретационных сейсмических задач методом конечных элементов // Вестник Ленингр. ун-та. 1983. N 16.
71. Троян В.Н. Оценивание параметров сейсмических сигналов корректным методом моментов // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. 1984. Вып. 24.
72. Троян В.Н. Метод локального оценивания параметров сейсмических волн // Вестник Ленингр. ун-та. 1985. N 11.
73. Троян В.Н. Методы обработки сейсмической информации при отклонениях от стандартной модели сейсмограммы // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. 1989. Вып. 29.
74. Троян В.Н., Соколов Ю.М. Методы аппроксимации геофизических данных на ЭВМ. Л., 1987.
75. Турчин В.Ф., Козлов В.П., Малкевич Н.С. Использование методов математической статистики для решения некорректных задач // Усп. физич. наук. 1970. Т. 102. Вып. 3.
76. Фаддеев Л.Д. Обратная задача квантовой теории рассеяния / Современные проблемы математики (Итоги науки и техники). М., 1974. Т. 3.
77. Федоров В.В. Теория оптимального Эксперимента. М., 1971.
78. Федотов А.М. Линейные некорректные задачи со случайными ошибками в данных. Новосибирск, 1982.
79. Хелгасон С. Преобразование Радона. М., 1983.
80. Хермен Г. Восстановление изображений по проекциям: Основы реконструктивной томографии. М., 1983.
81. Яновская Т.Б., Порохова Л.Н. Обратные задачи геофизики. Л., 1983.

82. Яновская Т.Б. Томографические исследования земной коры при использовании поверхностных волн // Изв. вузов. Геология и разведка. 1988. N 12.
83. Angelier J., Tarantola A., Vallette B. Inversion of field data in fault tectonics to obtain the regional stress // Geophys. J.R.Astr. Soc. 1982. Vol. 69.
84. Backus G., Gilbert F. Numerical applications of a formalism for geophysical inverse problems // Geophys. J.R.Astr. Soc. 1967. Vol. 13.
85. Backus G., Gilbert F. The resolving power of gross Earth data // Geophys. J.R.Astr. Soc. 1968. Vol. 16.
86. Berkhout A.J. Seismic migration — Imaging of acoustic energy by wave field extrapolation (theoretical aspects). Amsterdam, New York, 1980.
87. Berkhout A.J. Seismic migration — Imaging of acoustic energy by wave field extrapolation (practical aspects). Amsterdam, New York, 1984.
88. Beylkin G. Imaging of discontinuities in the inverse scattering problem by inversion of a causal generalized Radon transform // J.Math. Phys. 1985. Vol. 26. N 1.
89. Bleistein N. Mathematical methods for wave phenomena. Acad. Press, New York, 1984.
90. Carrion Ph. Inverse problems and tomography in acoustics and seismology. Atlanta, 1988.
91. Cohen J.K., Frank G.H., Bleistein N. Three-dimensional Born inversion with an arbitrary reference // Geophys. 1986. Vol. 51. N 8.
92. Devaney A. Geophysical diffraction tomography // IEEE. 1984. Vol. GE-22.
93. Devaney A. Diffraction tomography // Inverse methods in electromagnetic imaging. 1985. Vol. 2.
94. Devaney A. Reconstructive tomography with diffracting wavefields // Inverse Problems. 1986. Vol. 2.
95. Ivansson S. Seismic borehole tomography theory and computational methods // IEEE. 1986. Vol. 74.
96. Kennett T. Seismic wave propagation in stratified media. Cambridge. 1983.
97. Newton R.G. Inversion reflection data for layered media: a review of exact methods // Geophys. J. Roy. Astr. Soc. 1981. Vol. 65. N 1.

98. **Nolet G.** Solving or resolving inadequate and noisy tomographic systems // *J.Comp. Phys.* 1985. Vol. 61.
99. **Nolet G., Trier J., Huisman R.** A formalism for nonlinear inversion of seismic surface waves // *Geophys. Res. Lett.* 1986. Vol. 13. N 1.
100. **Pratt R.G., Worthington M.H.** The application of diffraction tomographie to cross-hole seismic data // *Geophys.* 1988. Vol. 53. N 2.
101. **Raz S.** Three-dimensional velocity profile inversion from finite-offset scattering data // *Geophys.* 1981. Vol. 46. N 6.
102. **Ryzhikov G., Troyan V.** The solution of an inverse dynamic seismic problem for three-dimensional inhomogeneous media // *Revista de geofisica.* 1988. Vol. 44.
103. **Seismic tomography with application in global seismology and exploration geophysics** // Ed. G.Nolet. Dordrecht, Boston, Tokyo, 1987.
104. **Stolt R.H., Weglein A.B.** Migration and inversion of seismic data // *Geophys.* 1985. Vol. 50. N 8.
105. **Tarantola A.** Inverse problem theory: Methods for data fitting and model parameter estimation. Amsterdam, New York, Tokyo, 1987.
106. **Tarantola A.** Inversion of seismic reflection data in the acoustic approximation // *Geophys.* 1984. Vol. 49. N 4.
107. **Tarantola A., Nercessian A.** Three dimensional inversion without blocks // *Geophys. J.R.Astr. Soc.* 1984. Vol. 76.
108. **Troyan V.N.** Application of statistical methods for the processing of seismic information // *Revista de geofisica.* 1988. Vol. 44.
109. **Ursin B.** Review of elastic and electromagnetic wave propagation in horizontally layered media // *Geophys.* 1983. Vol. 48. N 2.
110. **Ursin B., Berteussen K.-A.** Comparison of some inverse methods for wave propagation in layered media // *IEEE.* 1986. Vol. 74.
111. **Wenzel F.** The relation between Born inversion and standart migration schemes // *J. Geophys.* 1988. Vol. 62. N 3.
112. **Wu Ru-Shan J., Taksöz M.N.** Diffraction tomography and multisource holography applied to seismic imaging // *Geophys.* 1987. Vol. 52. N 1.

*Геянадий Анатольевич Рыжиков*  
*Владимир Николаевич Троян*

ТОМОГРАФИЯ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ  
ДИСТАНЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ

Редактор *Т. В. Мызникова*  
Художественный редактор *Е. И. Егорова*  
Технический редактор *Л. А. Топорина*  
Корректор *Е. К. Терехтеева*

ИБ № 3643

Лицензия ЛР N 040050 от 05.08.91 г.

---

Подписано в печать 10.03.94. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная.  
Печать офсетная. Усл. печ. л. 12,79. Усл. кр.-отт. 12,86. Уч.-изд. л.  
11,76. Тираж 257 экз. Заказ 045.

Издательство СПбГУ. 199034, С.-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Участок оперативной полиграфии типографии Издательства СПбГУ.  
199061, С.-Петербург, Средний пр., 41.