

**вопросы
обработки**

**ГЕОЛОГО-
ГЕОФИЗИЧЕСКИХ
ДАННЫХ**

**на электронных
цифровых
машинах**

ACADEMY OF SCIENCES OF THE USSR
SIBERIAN BRANCH

INSTITUTE OF GEOLOGY AND GEOPHYSICS

**PROBLEMS
OF PROCESSING
OF GEOLOGIC
AND GEOPHYSICAL
DATA
ON ELECTRONIC
COMPUTERS**

PUBLISHING HOUSE «N A U K A»
SIBERIAN BRANCH
NOVOSIBIRSK
1967

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ИНСТИТУТ ГЕОЛОГИИ И ГЕОФИЗИКИ

**вопросы
обработки**
ГЕОЛОГО-
ГЕОФИЗИЧЕСКИХ
ДАННЫХ
**НА ЭЛЕКТРОННЫХ
ЦИФРОВЫХ
МАШИНАХ**

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
НОВОСИБИРСК

1967

Сборник «Вопросы обработки геолого-геофизических данных на электронных цифровых машинах» посвящен вопросам автоматизации как известных вычислительных операций, так и новых — формализованных, ранее выполнявшихся лишь качественно. В частности, в сборнике рассматриваются вопросы использования корреляционной схемы при качественной интерпретации гравитационных и магнитных данных, возможности применения некоторых идей автоматического опознавания образов к решению задач качественной интерпретации гравитационных и магнитных аномалий и др. Помещены некоторые разработки вопросов логического обоснования и формализации отдельных понятий и процедур совместной интерпретации геологических и геофизических данных.

Сборник рассчитан на широкий круг геологов и геофизиков.



Collected articles «Problems of Processing of Geologic and Geophysical Data on Electronic Computers» are dedicated to the problems of automation of both known calculation operations and new formalized ones which earlier were solved only qualitatively. In particular, some problems of utilization of correlation scheme for quantitative interpretation of gravitation and magnetic data, possibilities of application of some ideas of automatic recognizing of images to solving of problems of quantitative interpretation of gravitation and magnetic anomalies etc. are discussed in the book. Some problems of logical substantiation and formalization of individual conceptions and processes of combined interpretation of geologic and geophysical data are also investigated.

The book is intended for wide circle of geologists and geophysicists.

Под ред. д-ра физ.-матем. наук проф.

М. М. ЛАВРЕНТЬЕВА

Edited by

M. M. LAVRENTIEV, D. M.

*Г. И. Каратаев,
Ю. М. Гусев, Т. Л. Захарова*

К ПОСТРОЕНИЮ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ СХЕМЫ КАЧЕСТВЕННОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ГРАВИТАЦИОННЫХ И МАГНИТНЫХ АНОМАЛИЙ

1. В недавно опубликованной нами работе [1] сформулированы основные закономерности, которые использованы для построения корреляционной схемы геологической интерпретации гравитационных и магнитных аномалий на электронно-вычислительных машинах (ЭВМ), и предложена методика соответствующей обработки для случая, когда геологический элемент представляется в виде упорядоченного набора чисел, описывающего его геометрический образ.

В настоящей статье излагаются дальнейшие разработки корреляционной схемы совместной интерпретации геологических и геофизических данных на ЭВМ, рассмотрены возможности применения этой схемы для тех случаев, когда по условиям задачи геологические элементы необходимо подразделить лишь по понятиям, например, в градациях — «кислые», «средние», «основные», «ультраосновные» породы или «локальные поднятия» и «неподнятия» в осадочном чехле платформы, «поднятие» и «впадина» в фундаменте платформы или «рудные» аномалии, «нерудные» аномалии и т. п., а геофизические данные можно задать в виде такого набора количественных признаков, который представляет собой вектор $N_\lambda = (n_1, n_2, \dots, n_x)$ в x -мерном пространстве.

2. Пусть в соответствии с целевой установкой конкретной геолого-гравитационно-магнитной ситуации определено множество геофизических элементов $\Lambda^p = \{\lambda_p\}$ и множество геологических элементов $\Lambda^0 = \{\lambda_0\}$, между которыми, исходя из существования корреляционной связи, предполагается существование некоторого линейного отображения $A: \Lambda^p \rightarrow \Lambda^0$. Будем считать, что класс линейных операторов A задан. И пусть задан соответствующий этой ситуации набор экспериментальных данных $\Lambda^g = \Lambda^{og} \cup \Lambda^{pg}$, $\Lambda^{og} \subset \Lambda^0$ и $\Lambda^{pg} \subset \Lambda^p$. Необходимо из заданного класса операторов A найти линейный оператор $A^0: \Lambda^{pg} \rightarrow \Lambda^{og}$, оптимальный в смысле метрики евклидова пространства и такой, чтобы его ошибка была не больше некоторой наперед заданной величины ε_0 !

Согласно корреляционной схеме интерпретации, по всей совокупности экспериментальных данных $\Lambda^g = \{\lambda_0^g, \lambda_p^g\}$ строится оператор прогнозирования A^0 и определяется ε . Если $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, построенный оператор может быть использован для прогноза. Если $\varepsilon > \varepsilon_0$, то экспериментальные данные по

геологическим признакам необходимо подразделить на две группы $\Lambda_1^{\text{э}}$ и $\Lambda_2^{\text{э}}$, для каждой из которых предыдущая операция повторяется. В случае, если имеют место неравенства $\varepsilon_1 > \varepsilon_0$ и $\varepsilon_2 > \varepsilon_0$ (или одно из них), то $\Lambda_1^{\text{э}}$ и $\Lambda_2^{\text{э}}$ вновь подразделяются каждое на две группы. Процесс продолжается до тех пор, пока окончательно не будет выяснено, имеет ли место неравенство $\varepsilon_p \leq \varepsilon_0$. При наличии такого неравенства задача решена. Если же неравенство $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ недостижимо, следовательно, имеющихся экспериментальных данных для построения по данной схеме линейного оператора с требуемой точностью недостаточно.

Процесс построения оператора прогноза будем условно называть процессом «обучения». В результате «обучения» получим набор разнородных в структурно-геологическом отношении областей земной коры (типов земной коры) $\bar{T} = \{T_1, T_2, \dots, T_k\}$, соответствующий набору экспериментальных данных $\bar{\Lambda}^{\text{э}} = \{\Lambda_1^{\text{э}}, \Lambda_2^{\text{э}}, \dots, \Lambda_k^{\text{э}}\}$, $\Lambda^{\text{э}} = \Lambda_1^{\text{э}} \cup \Lambda_2^{\text{э}} \cup \dots \cup \Lambda_k^{\text{э}}$, набору $\bar{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ линейных операторов и набору некоторых обобщенных векторов $\bar{N}^{\text{пэ}} = \{N_1^{\text{пэ}}, N_2^{\text{пэ}}, \dots, N_k^{\text{пэ}}\}$ признаков, характеризующих в геофизическом отношении области T_1, T_2, \dots, T_k . Будем считать, что каждый обобщенный вектор есть некоторый средний вектор из группы векторов геофизических признаков, характеризующих идентичные в структурно-геологическом отношении области земной коры.

Если теперь в некоторой конкретной области по заданным на ней гравитационным и магнитным аномалиям $\lambda_{pi}^k, i = 1, 2, \dots, h$, необходимо построить какой-либо геологический элемент λ_0^k , то по аномалиям строится вектор признаков $N^{\text{пк}}$. По минимальному (в смысле метрики x -мерного эвклидова пространства) расстоянию от $N^{\text{пк}}$ до элементов из множества $\bar{N}^{\text{п}} = \{N_1^{\text{пэ}}, N_2^{\text{пэ}}, \dots, N_k^{\text{пэ}}\}$ определяется номер класса, к которому относится вектор $N^{\text{пк}}$ и в силу взаимно однозначного соответствия номер линейного оператора $A_{\phi} \in \bar{A}$. Действуя оператором A_{ϕ} на λ_{pi}^k , отыскиваем с ошибкой $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ элемент λ_0^k . Этот процесс условно будем называть процессом «распознавания».

Изложенная здесь корреляционная схема основывается, как указывалось в работе [1], на трех наиболее существенных геолого-геофизических закономерностях*, с помощью которых можно показать следующее.

а. Пусть задано некоторое разбиение множества R (R — область определения элементов) на такие непересекающиеся подмножества R_1, R_2, \dots, R_m , что $\bigcup_{\mu=1}^m R_{\mu} = R$. И пусть на каждом из них определены: 1) своими

реализациями одноименные случайные элементы $\lambda_{0\mu}^c(r_{\mu}), r_{\mu} \in R_{\mu}$ с соответствующими им векторами признаков N_{μ}^0 ** ; 2) линейные операторы A_{μ} класса H_A , преобразующие на R_{μ} случайные элементы $\lambda_{p\mu}^c(r_{\mu}), r_{\mu} \in R_{\mu}$ (или $f^c[\lambda_{p\mu}]$) в случайные элементы $\lambda_{0\mu}^c$ с ошибкой $\varepsilon_{\mu} \leq \varepsilon_0$, где ε_0 — некото-

*1. Если векторы признаков $N_{\phi}^{\text{п}}$ и $N_{\psi}^{\text{п}}$, $N_{\phi}^{\text{п}} \sim \Lambda_{\phi}^{\text{п}}$, $N_{\psi}^{\text{п}} \sim \Lambda_{\psi}^{\text{п}}$ в некотором смысле равны, то векторы признаков N_{ϕ}^0 и N_{ψ}^0 , $N_{\phi}^0 \sim \Lambda_{\phi}^0$, $N_{\psi}^0 \sim \Lambda_{\psi}^0$ также равны, и обратно.

2. Между множествами Λ_{ϕ}^0 и Λ_{ψ}^0 существует отображение $A: \Lambda_{\phi}^0 \rightarrow \Lambda_{\psi}^0$ — линейные операторы.

3. Если одноименные линейные операторы A_{ϕ} и A_{ψ} совпадают, то $N_{\phi}^0 = N_{\psi}^0$, и обратно. Если же A_{ϕ} и A_{ψ} не совпадают, то $N_{\phi}^0 \neq N_{\psi}^0$ (см. [1]). Если имеет место неравенство $\| \lambda_{0\phi} - A_{\psi} \lambda_{p\phi} \| \leq \varepsilon_0$, будем говорить, что A_{ϕ} и A_{ψ} совпадают с точностью до ε_0 .

** N^0 — вектор признаков, построенный по совокупности геологических элементов, определяющих основной характер строения и развития земной коры.

рое наперед заданное число, т. е.

$$A_\mu(R_\mu) : \Lambda_\mu^n \rightarrow \Lambda_\mu^0, \Lambda_\mu^0 = \{\lambda_{0\mu}^c\}, \Lambda_\mu^n = \{\lambda_{n\mu}^c\}.$$

Если для некоторого подмножества $\Lambda_j(R_j) = \{\lambda_{0\varphi}^c(r_\varphi), \lambda_{n\varphi}^c(r'_\varphi)\}$, ($\varphi = 1, 2, \dots, m_j, r_\varphi \in R_\varphi, r'_\varphi \in R'_\varphi$) множества $\Lambda(R) = \{\lambda_{0\mu}^c(R_\mu), \lambda_{n\mu}^c(R_\mu)\}$, ($\mu = 1, 2, \dots, m, m \geq m_j, R_j \subset R, R_j = \bigcup_{\varphi=1}^{m_j} R_\varphi$) существует неравенство

$$\|\lambda_{0\varphi}^c - A_\psi(R_\psi) \lambda_{n\varphi}^c\| \leq \varepsilon_0, \quad \psi = 1, 2, \dots, m_j; \quad \varphi = 1, 2, \dots, m_j,$$

и вектор признаков N_j^0 множества $\Lambda_j^0(R_j)$ есть центр гиперсферы радиуса $\rho(N_\varphi^0, N_j^0) = \max_{\varphi} \|N_\varphi^0 - N_j^0\|$, $N_\varphi \sim \Lambda_\varphi^0 = \{\lambda_{0\varphi}^c(r_\varphi)\}$, то линейный оператор A_j класса H_A , отображающий на R_j множество $\Lambda_j^n(R_j)$ во множество $\Lambda_j(R_j)$, $\Lambda_j^0 \cup \Lambda_j^n = \Lambda_j(R_j)$, удовлетворяет неравенству

$$\|\lambda_{0\varphi}^c - A_j \lambda_{n\varphi}^c\| \leq \varepsilon_0.$$

Действительно, по определению операторы $A_\varphi(R_\varphi)$ и $A_\psi(R_\psi)$ совпадают*, поэтому, согласно третьему условию, $N_\varphi^0 = N_\psi^0$. Но $\max_{\varphi, \psi} \|N_\varphi^0 - N_\psi^0\| \geq \max_{\varphi} \|N_\varphi^0 - N_j^0\|$, $\varphi = 1, 2, \dots, m_j; \psi = 1, 2, \dots, m_j$, т. е. $N_\varphi^0 = N_j^0$, откуда (по третьей закономерности) следует, что операторы A_j и A_φ совпадают с точностью до ε_0 .

Обратно, если на $R_j = \bigcup_{\varphi=1}^{m_j} R_\varphi$ задан линейный оператор A_j , отображающий множество Λ_j^n во множество Λ_j^0 , и такой, что $\|\lambda_{0\varphi}^c - A_j \lambda_{n\varphi}^c\| \leq \varepsilon_0$, то он совпадает с оператором того же класса $A_\varphi: \{\lambda_{n\varphi}^c(r'_\varphi)\} \rightarrow \{\lambda_{0\varphi}^c(r_\varphi)\}$, $r_\varphi \in R_\varphi, r'_\varphi \in R'_\varphi$;

б. Пусть на некоторой области R_1 своими реализациями задан элемент λ_{n1}^c , а на R_2 — элемент λ_{n2}^c . И пусть заданы линейные операторы A_1 и A_2 , удовлетворяющие неравенству

$$\|\lambda_{0\varphi}^c - A_\varphi \lambda_{n\varphi}^c\| \leq \varepsilon_0, \quad \varphi = 1, 2.$$

Если для некоторого A_j , отображающего на $R_j = R_1 \cup R_2$ множество $\Lambda_j^n = \{\lambda_{n1}^c, \lambda_{n2}^c\}$ во множество $\Lambda_j^0 = \{\lambda_{01}^c, \lambda_{02}^c\}$, справедливо неравенство

$$\|\lambda_{0\varphi}^c - A_j \lambda_{n\varphi}^c\| > \varepsilon_0, \quad \varphi = 1, 2,$$

а вектор признаков N_j^0 есть центр гиперсферы диаметра $\|N_1^0 - N_2^0\|$, то A_1 и A_2 с точностью до ε_0 не совпадают. Согласно неравенствам $\|\lambda_{0\varphi}^c - A_\varphi \lambda_{n\varphi}^c\| \leq \varepsilon_0$ и $\|\lambda_{0\varphi}^c - A_j \lambda_{n\varphi}^c\| > \varepsilon_0$, операторы A_φ и A_j не совпадают и по определению $N_j^0 \neq N_\varphi^0$. Но $\max_{\varphi} \|N_\varphi^0 - N_j^0\| \leq \|N_1^0 - N_2^0\|$, а $N_\varphi^0 \neq N_j^0$, следовательно, $N_1^0 \neq N_2^0$, отсюда (по третьему условию) операторы A_1 и A_2 не совпадают с точностью до ε_0 ;

в. Пусть теперь задана некоторая совокупность несовпадающих линейных операторов A_1, A_2, \dots, A_k и соответствующая им совокупность векторов признаков $N_1^n, N_2^n, \dots, N_k^n$, при этом (согласно третьему условию) $N_j^n \neq N_i^n, j = 1, 2, \dots, k; i = 1, 2, \dots, k$. И пусть заданы своими

* Равны в смысле (4), см. [1].

реализациями. некоторые случайные элементы λ_0^{c1} и λ_n^{c1} и вектор признаков N^{n1} случайного элемента λ_n^c .

Если вектор признаков N^{n1} , не принадлежащий совокупности $\{N_1^n, N_2^n, \dots, N_k^n\}$, равен одному из векторов признаков N_ϕ^n этой совокупности, то справедливо неравенство

$$\|\lambda_0^{c1} - A_\phi \lambda_n^{c1}\| \leq \varepsilon_0,$$

так как (по первому условию) из $N^{n1} = N_\phi^n$ следует, что $N^{01} = N_\phi^0$, а (по третьему условию), если $N_\phi^0 = N^{01}$, то операторы A' и A_ϕ совпадают ($\lambda_0^{c1} = A' \lambda_n^{c1}$).

Перейдем теперь к задаче совместной обработки на ЭВМ геологических и геофизических данных, когда геологические данные заданы некоторыми элементарными понятиями согласно какой-либо геологической схеме классификации. Здесь «обучение» будет состоять в построении обобщенных векторов признаков, а «распознавание» — в установлении факта близости (в смысле метрики x -мерного евклидова пространства) конкретного вектора к одному из обобщенных векторов признаков. Эти геолого-геофизические задачи будем называть «качественными» (качественная интерпретация). Например, при оценке вещественного состава возмущающих тел используют такие признаки, как амплитуда аномалии, соотношение осей, градиент, степень асимметрии и т. п. Можно, однако, рассматривая значения аномалий как варианты случайной величины, использовать моменты различного порядка.

3. Пусть $\lambda_{01}, \lambda_{02}, \dots, \lambda_{0t}$ есть символы некоторых элементарных геологических понятий, «названия» понятий, которым сопоставлены непересекающиеся совокупности геофизических признаков N_τ ($\tau = 1, 2, \dots, t$), $N_\tau = (n_{\tau 1}, n_{\tau 2}, \dots, n_{\tau x})$, где $n_{\tau \xi}$ ($\xi = 1, 2, 3, \dots, x$) — некоторые количественно измеримые признаки, описывающие гравитационное и магнитное аномальные поля $\lambda_{0\tau} \sim N_\tau \in n_{\tau \xi}$. Например, под λ_{01} можно понимать «рудная» аномалия, λ_{02} — «нерудная», причем $n_{\tau \xi}$ — статистические моменты различного порядка магнитных аномалий, под $\lambda_{01}, \lambda_{02}, \lambda_{03}, \dots, \lambda_{0t}$ — названия типов земной коры, $n_{\tau \xi}$ — статистические моменты различного порядка гравитационного и магнитного полей в пределах некоторой фиксированной области R_0 ; x — мерное фазовое пространство совокупностей N_τ геофизических признаков (образов).* E_x будем рассматривать как x -мерное (конечномерное) векторное (евклидово) пространство, в котором упорядоченные вещественные числа $n_{\tau \xi}$ есть координаты вектора N_τ .

Требуется по набору геофизических признаков $N_\tau = (n_{\tau 1}, n_{\tau 2}, \dots, n_{\tau x})$ установить класс геологического понятия (из совокупности $\lambda_{01}, \lambda_{02}, \dots, \lambda_{0t}$), к которому могут быть отнесены соответствующие им в плане возмущающие массы. Например, необходимо по аномалиям определить вещественный состав возмущающих масс в градациях — «кислые», «средние», «основные», «ультраосновные».

По роду геолого-геофизических причин для одного и того же элементарного геологического понятия $\lambda_{0\tau}$ одноименные количественные признаки практически будут несколько различаться, следовательно, в пространстве образов E_x для одного и того же элементарного геологического понятия λ_τ будем иметь серию векторов признаков $\{N_{\tau 1}, N_{\tau 2}, \dots, N_{\tau s_\tau}\} = \bar{N}_\tau$, т. е. серию точек. Например, в классе кислых пород мы наблюдаем различные по конфигурации и по интенсивности магнитные аномалии. В связи с этим, если

* Здесь — совокупность наиболее характерных черт геофизических полей; рассматриваемых как изображение геологического объекта.

построить по совокупности \bar{N}_τ векторов признаков, соответствующих данному геологическому понятию, некоторый обобщенный вектор N_τ^0 как модуль случайного распределения векторов признаков $N_{\tau 1}, N_{\tau 2}, \dots, N_{\tau s_\tau}$, то решение задачи может быть осуществлено следующим образом.

Пусть в распоряжении исследователя имеется представительный набор векторов геофизических признаков, для каждого из которых априори известен класс геологического понятия, т. е. заданы $\bar{N}_\tau = \{N_{\tau 1}^3, N_{\tau 2}^3, \dots, N_{\tau s_\tau}^3\}$ и $\lambda_{0\tau}^3 \sim \bar{N}_\tau \ni N_{\tau\sigma}^3, \tau = 1, 2, \dots, t; \sigma = 1, 2, \dots, s_\tau$. Пусть также заданы требуемая надежность (вероятность) разделения P_0 и число групп, на которые можно подразделить экспериментальные данные. Совокупность всех экспериментальных данных обозначим, как и выше, через Λ^3 . Вначале строятся простейшие алгоритмы распознавания *по всей совокупности* экспериментальных данных. С этой целью для каждой совокупности \bar{N}_τ вычисляется обобщенный вектор $N_\tau^0, \lambda_{0\tau}^3 \sim N_\tau^0$. Затем, считая, что множества \bar{N}_τ являются выпуклыми непересекающимися множествами, и сравнивая каждый из экспериментальных векторов $N_{\tau\sigma}^3, \tau = 1, 2, \dots, k; \sigma = 1, 2, \dots, s_\tau$ со средними векторами $N_1^0, N_2^0, \dots, N_t^0$, по минимуму расстояния между ними (в некотором смысле) определяем номер геологического класса, к которому относится вектор $N_{\tau\sigma}^3$.

Если этот класс совпадает с заданным для вектора $N_{\tau\sigma}^3$ классом $\lambda_{\tau\sigma}^3$, ему приписывается единица, если не совпадает, — нуль. Сумма единиц в τ -м классе, поделенная на число s_τ экспериментальных векторов в этом классе, представляет собой частоту W_τ . Если $W_\tau \geq P_0$, считаем, что такой способ распознавания приемлем для решения задачи. Если же $W_\tau < P_0$, то экспериментальные данные подразделяются на две группы: Λ_1^3 и Λ_2^3 (см. [1]), для каждой из которых указанный процесс повторяется до тех пор, пока не будет выполняться неравенство $W_\tau \geq P_0$ или не исчерпаются все возможные группы экспериментальных данных.

Если простейшими алгоритмами распознавания решить задачу нельзя, то весь процесс в том же порядке повторяется более сложными способами распознавания.

Пусть в результате такого «обучения» получено k групп экспериментальных данных $\Lambda_1^3, \Lambda_2^3, \dots, \Lambda_k^3$ (для каждой такой группы будем иметь свой способ распознавания A_1, A_2, \dots, A_k . В простейшем случае каждой группе будут сопоставлены t обобщенных векторов — по числу классов). По всем экспериментальным данным, входящим в j -ю группу $\Lambda_j^3, j = 1, 2, \dots, k$, независимо от геологического класса построим средний вектор N_j^0 . Если теперь для некоторого конкретного участка земной коры R_0^K необходимо указать геологический класс из заданной схемы геологической классификации $\lambda_{01}, \lambda_{02}, \dots, \lambda_{0t}$, то следует построить вектор N^K , далее, сравнивая его с $N_1^0, N_2^0, N_3^0, \dots, N_k^0$, определить номер φ способа распознавания A_1, A_2, \dots, A_k (в простейшем случае — найти совокупность обобщенных векторов $N_{\varphi 1}^0, N_{\varphi 2}^0, \dots, N_{\varphi t}^0$ с этим номером) и затем, действуя на N^K выбранным способом распознавания A_φ , определить геологический класс (в простейшем случае — сравнить N^K с каждым из обобщенных векторов $N_{\varphi 1}^0, N_{\varphi 2}^0, \dots, N_{\varphi t}^0$).

Практическая проверка корреляционной схемы качественной интерпретации показывает, что в большинстве случаев применимы простые способы распознавания [2—8 и др.]. Опишем некоторые из них.

4. Поскольку векторы признаков рассматриваются как векторы x -мерного евклидова пространства, будем считать, что конкретный вектор при-

знаков N^K описывает тот класс элементарного геологического понятия $\lambda_{0\varphi}$, для которого расстояние между N^K и N_τ^0 в евклидовом пространстве наименьшее из всех возможных:

$$\rho(N^K, N_\tau^0) = \min_{N_\tau^0 \in \bar{N}^0} \|N^K - N_\tau^0\| = \|N^K - N_\tau^0\|;$$

$$\rho(N^K, N_\tau^0) = \min_{N_\tau^0 \in \bar{N}^0} \left| \sqrt{\sum_{\xi=1}^x (n_\xi^K - n_{\tau\xi}^0)^2} \right| = \left| \sqrt{\sum_{\xi=1}^x (n_\xi^K - n_{\tau\xi}^0)^2} \right|;$$

$$\bar{N}^0 = \{N\}$$

(то же выполняется и при распознавании номеров групп).

Можно, однако, распознавание класса геологических понятий осуществлять также по величине угла между векторами N^K и N_τ^0 :

$$\min_{N_\tau^0 \in \bar{N}^0} \left| \arccos \frac{(N^K \cdot N_\tau^0)}{\|N^K\| \cdot \|N_\tau^0\|} \right| = \left| \arccos \frac{(N^K \cdot N_\tau^0)}{\|N^K\| \cdot \|N_\tau^0\|} \right|,$$

где

$$\left(\sum_{\xi=1}^x \cdot \sum_{\xi=1}^x \right)$$

Кроме того, если для каждого из наборов $N_{\tau 1}, N_{\tau 2}, \dots, N_{\tau t}$ построить гиперсферу $S_\tau(N_\tau^0, r_\tau)$ с центром в N_τ^0 и радиусом

$$\rho(N_{\tau\sigma}, N_\tau^0) = \frac{\max_{N_{\tau\sigma} \in \bar{N}} \|N_{\tau\sigma} - N_\tau^0\|}{\|N_{\tau\sigma} - N_\tau^0\|} = r_\tau, \quad \tau = 1, 2, \dots, t,$$

то задача распознавания состоит в определении номера сферы из совокупности S_1, S_2, \dots, S_t , в которую попадает конкретный вектор N^K . С этой целью определяется расстояние между векторами N^K и N_τ^0 , которое сравнивается с соответствующим r_τ . Очевидно, что вектор N^K относится к классу φ тогда, когда $\|N^K - N_\tau^0\| \leq r_\tau$.

В случае разделения только двух понятий, например, «рудных» и «нерудных» аномалий, достаточно построить в пространстве образов гиперплоскость, разделяющую это пространство на два полупространства.

5. Приведем теперь частный алгоритм, вытекающий из описанной схемы качественной интерпретации и реализованный в виде программы для счета на ЭВМ. Укажем сразу, что он может быть применен для разделения двух понятий не только по одной, но и по двум и трем заданным функциям.

Итак, пусть задано два элементарных геологических понятия λ_{01} и λ_{02} , например λ_{01} — «локальное поднятие» в осадочном чехле и λ_{02} — «неподнятия»*.

Предположим, что в некоторой эталонной области имеем s_1 «поднятий» и s_2 «неподнятий», для которых задано не более трех геофизических элементов, например, Δg , ΔT и H (рельеф местности). Для каждого «поднятия» и «неподнятия» в пределах некоторой области R_0 (в общем случае прямоугольной, со сторонами a и b) построим вектор количественных признаков

$$N_{\tau\sigma} = (n_{\tau\sigma i_1}, n_{\tau\sigma i_2}, \dots, n_{\tau\sigma i_h}) = (n_{\tau\sigma i \xi}),$$

$$\tau = 1, 2, \dots, t; \quad \sigma = 1, 2, \dots, s_\tau; \quad i = 1, 2, \dots, h; \quad \xi = 1, 2, \dots, x_i.$$

* В класс «неподнятий» включены все те структуры, которые не относятся к классу «локальных поднятий», т. е., например, моноклинали, локальные впадины и т. д.

В нашем примере $\tau = 1$ для «поднятий», $\tau = 2$ — для «неподнягий», $h = 3$.

При реализации данного алгоритма в качестве количественных признаков $n_{\tau\sigma i\bar{z}}$ взят набор из математического ожидания, центральных моментов до четвертого порядка включительно, а также матрица ковариаций («автокорреляционной функции» и «функции взаимной корреляции») значений Δg , ΔT и H в узлах равномерной сети области R_0 *.

Следовательно, имеем:

$$\begin{aligned} N_{\tau\sigma} &= (n_{\tau\sigma 11} = \overline{\Delta g}, \quad n_{\tau\sigma 12} = \mu_{g2}, \quad n_{\tau\sigma 13} = \mu_{g3}, \quad n_{\tau\sigma 14} = \mu_{g4}; \\ n_{\tau\sigma 15} &= k_g(1), \quad n_{\tau\sigma 16} = k_g(2), \dots, n_{\tau\sigma 1x_1} = k_g(\beta), \quad n_{\tau\sigma 21} = \overline{\Delta T}; \\ n_{\tau\sigma 22} &= \mu_{T2}, \quad n_{\tau\sigma 23} = \mu_{T3}, \dots, n_{\tau\sigma 2x_2} = k_T(\beta); \\ n_{\tau\sigma 31} &= \overline{H}, \quad n_{\tau\sigma 32} = \mu_{H2}, \dots, n_{\tau\sigma 3x_3} = k_H(\beta); \\ n_{\tau\sigma 41} &= k_{gT}(0), \dots, n_{\tau\sigma 4x_4} = k_{gT}(\beta), \quad n_{\tau\sigma 51} = k_{gH}(0); \dots; \\ n_{\tau\sigma 5x_5} &= k_{gH}(\beta), \quad n_{\tau\sigma 61} = k_{TH}(0), \dots, n_{\tau\sigma 6x_6} = k_{TH}(\beta)). \end{aligned}$$

Здесь символы с чертой (например, $\overline{\Delta g}$) — математические ожидания, μ_2 — дисперсия, μ_3 и μ_4 — третий и четвертый центральные моменты; $k(0)$, $k(1)$, \dots — значения «автокорреляционной функции» и «функции взаимной корреляции», соответственно, при сдвиге на 0 шагов, 1 шаг, \dots , β шагов в пределах области R_0 .

Для используемых в $N_{\tau\sigma}$ количественных признаков взяты следующие оценки статистических моментов, например, для функции Δg :

$$\begin{aligned} n_1 &= \overline{\Delta g} = \frac{\sum_{v=1}^m \Delta g_v}{m}, \quad \mu_{2g} = \frac{1}{m} \sum_{v=1}^m (\Delta g_v - \overline{\Delta g})^2; \\ \mu_{3g} &= \frac{1}{m} \sum_{v=1}^m (\Delta g_v - \overline{\Delta g})^3, \quad \mu_{4g} = \frac{1}{m} \sum_{v=1}^m (\Delta g_v - \overline{\Delta g})^4; \\ k_g(l-1) &= \frac{1}{m} \sum_{v=1}^m (\Delta g_{lv} - \overline{\Delta g})(\Delta g_{1v} - \overline{\Delta g}); \\ k_{gT}(l-1) &= \frac{1}{m} \sum_{v=1}^m (\Delta g_{lv} - \overline{\Delta g})(\Delta T_{1v} - \overline{\Delta T}); \\ k_{gH}(l-1) &= \frac{1}{m} \sum_{v=1}^m (\Delta g_{lv} - \overline{\Delta g})(H_{1v} - \overline{H}), \end{aligned}$$

где l — шаг сдвига матрицы ($l = 1, 2, \dots, (\beta + 1)$);

$m = a \times b$ — количество узлов равномерной сети в пределах палетки R_0 .

Просуммировав все признаки $n_{\tau\sigma i\bar{z}}$ по индексам $\tau = 1, 2, \dots, t$, $\sigma = 1, 2, \dots, (s_1 + s_2)$, и вычислив их средние арифметические $\bar{n}_{i\bar{z}}$, запишем следующее условие:

$$\begin{aligned} c_{11} \cdot \bar{n}_{11} &= c_{12} \cdot \bar{n}_{12} = \dots = c_{1x_1} \cdot \bar{n}_{1x_1} = c_{21} \cdot \bar{n}_{21} = \dots = \\ &= c_{2x_2} \cdot \bar{n}_{2x_2} = \dots = c_{hx_h} \cdot \bar{n}_{hx_h} = \text{const}, \end{aligned}$$

позволяющее при знании одного из коэффициентов $c_{i\bar{z}}$ привести все признаки $n_{\tau\sigma i\bar{z}}$ к одной размерности. Например, положив $c_{11} = 1$, найдем

* Отметим, что в целях экономии машинного времени дискретные значения «автокорреляционной функции» и «функции взаимной корреляции» считаются не по всей области R_0 , а лишь до ее середины, т. е. до $b/2 = \beta$.

значения всех остальных коэффициентов $c_{i\bar{z}}$. Можно коэффициент $c_{i\bar{z}}$ определить как $1/\varepsilon_{i\bar{z}}$, где $\varepsilon_{i\bar{z}}$ — стандарт, среднее квадратическое отклонение каждого $n_{i\bar{z}}$ от $\bar{n}_{i\bar{z}}$. Произведя затем перемножение координат $n_{\tau\sigma i\bar{z}}$ вектора $N_{\tau\sigma}$ на соответствующие величины $c_{i\bar{z}}$, получим новый вектор с одномерными координатами:

$$\Gamma_{\tau\sigma} = (\gamma_{\tau\sigma i1}, \gamma_{\tau\sigma i2}, \dots, \gamma_{\tau\sigma i x_i}).$$

Из полученной совокупности векторов $\Gamma_{\tau\sigma}$ построим теперь средние векторы для «поднятий» Γ_1^0 и «неподнятий» Γ_2^0 :

$$\Gamma_1^0 = (\gamma_{1i1}^0, \gamma_{1i2}^0, \dots, \gamma_{1i x_i}^0);$$

$$\Gamma_2^0 = (\gamma_{2i1}^0, \gamma_{2i2}^0, \dots, \gamma_{2i x_i}^0)$$

и вычислим для разделяемых понятий радиусы гиперсфер с центром, соответственно в Γ_1^0 и Γ_2^0 , по формуле

$$r_\tau = \max_{\sigma} \left| \sqrt{\sum_{i=1}^h \sum_{\bar{z}=1}^{x_i} (\gamma_{\tau\sigma i\bar{z}} - \gamma_{\tau i\bar{z}}^0)^2} \right|, \\ \tau = 1, 2; \sigma = 1, 2, \dots, s_\tau.$$

Для установления возможности надежного разделения «поднятий» и «неподнятий» по средним векторам Γ_1^0 и Γ_2^0 в эталонной области необходимо провести сравнение их с каждым из векторов $\Gamma_{\tau\sigma}$. Эта операция может осуществляться различными способами. Приведем три из них.

Первый заключается в вычислении расстояний от каждого из векторов $\Gamma_{\tau\sigma}$ до векторов Γ_1^0 и Γ_2^0 , например, для первого класса:

$$\rho'_{1\sigma} = \left| \sqrt{\sum_{i=1}^h \sum_{\bar{z}=1}^{x_i} (\gamma_{1\sigma i\bar{z}} - \gamma_{1i\bar{z}}^0)^2} \right|;$$

$$\rho''_{1\sigma} = \left| \sqrt{\sum_{i=1}^h \sum_{\bar{z}=1}^{x_i} (\gamma_{1\sigma i\bar{z}} - \gamma_{2i\bar{z}}^0)^2} \right|.$$

Если $\rho'_{1\sigma} \leq \rho''_{1\sigma}$, то соответствующий вектор $\Gamma_{1\sigma}$ относится к классу «поднятий», в противном случае — к классу «неподнятий».

Второй прием состоит в определении косинусов углов между векторами $\Gamma_{\tau\sigma}$ и Γ_1^0 , Γ_2^0 . Например, для $\tau = 1$ можно записать:

$$(\cos \psi)'_{1\sigma} = \theta'_{1\sigma} = \frac{\sum_{i=1}^h \sum_{\bar{z}=1}^{x_i} \gamma_{1\sigma i\bar{z}} \cdot \gamma_{1i\bar{z}}^0}{\left| \sqrt{\sum_{i=1}^h \sum_{\bar{z}=1}^{x_i} (\gamma_{1\sigma i\bar{z}})^2 \sum_{i=1}^h \sum_{\bar{z}=1}^{x_i} (\gamma_{1i\bar{z}}^0)^2} \right|};$$

$$\square (\cos \psi)''_{1\sigma} = \theta''_{1\sigma} = \frac{\sum_{i=1}^h \sum_{\bar{z}=1}^{x_i} \gamma_{1\sigma i\bar{z}} \cdot \gamma_{2i\bar{z}}^0}{\left| \sqrt{\sum_{i=1}^h \sum_{\bar{z}=1}^{x_i} (\gamma_{1\sigma i\bar{z}})^2 \sum_{i=1}^h \sum_{\bar{z}=1}^{x_i} (\gamma_{2i\bar{z}}^0)^2} \right|}.$$

При условии $\theta'_{1\sigma} > \theta''_{1\sigma}$ вектор $\Gamma_{1\sigma}$ относится к классу «поднятий», когда же

$\theta'_{1\sigma} < \theta''_{1\sigma}$ — к классу «неподнятий». Наконец, третий способ состоит в следующем. По формуле

$$\rho_{1\sigma}(\Gamma_{1\sigma}, \Gamma_2^0) = \left| \sqrt{\sum_{i=1}^h \sum_{\xi=1}^{x_i} (\gamma_{1\sigma i \xi} - \gamma_{2 i \xi}^0)^2} \right|$$

вычисляются расстояния между каждым вектором $\Gamma_{1\sigma}$, $\sigma = 1, 2, \dots, s_1$, первого класса и средним вектором Γ_2^0 второго класса. Если $\rho_{1\sigma} \leq r_2$, то соответствующий вектор $\Gamma_{1\sigma}$ относится и ко второму классу (т. е. имеет место пересечение множеств образов разделяемых понятий). Если же $\rho_{1\sigma} > r_2$, то вектор $\Gamma_{1\sigma}$ относится только к первому классу. Та же самая операция выполняется и для векторов $\Gamma_{2\sigma}$ и Γ_1^0 .

По числу правильных ответов в эталонных совокупностях образов каждого класса, отнесенному к общему количеству векторов в каждом из классов, оценивается надежность распознавания по обобщенным векторам Γ_1^0 и Γ_2^0 .

Если надежность неудовлетворительная, то мерность пространства признаков увеличивается путем добавления признаков, полученных в результате логических произведений известных признаков, т. е. $n_{\xi} \wedge n_{\varphi}$. $\xi = 1, 2, \dots, x$, $\varphi = 1, 2, \dots, x$.

При распознавании в конкретной области необходимо построить в ней по совокупности заданных геофизических элементов (в соответствии с приведенной выше схемой) вектор Γ^k и сравнить его с векторами Γ_1^0 и Γ_2^0 (в общем случае — с векторами $\Gamma_1^0, \Gamma_2^0, \dots, \Gamma_t^0$).

Для определения номера класса, к которому должен быть отнесен конкретный вектор Γ^k , вычисляются расстояния ρ_1^k, ρ_2^k и косинусы углов ψ_1^k, ψ_2^k , между вектором Γ^k и соответственно векторами Γ_1^0 и Γ_2^0 . Далее сравниваются величины ρ_1^k и ρ_2^k (первый способ): если $\rho_1^k \leq \rho_2^k$, вектор Γ^k относится к первому классу; если же $\rho_1^k > \rho_2^k$, — ко второму. Затем производится сравнение величин $\cos \psi_1^k$ и $\cos \psi_2^k$ (второй способ): если $\cos \psi_1^k < \cos \psi_2^k$, вектор Γ^k относится ко второму классу, если же $\cos \psi_1^k \geq \cos \psi_2^k$, — к первому.

Наконец, номер класса определяется по включению вектора Γ^k в ту или иную гиперсферу (третий способ). При этом возможны четыре варианта одновременного наступления двух событий:

1) $\rho_1^k \leq r_1, \rho_2^k > r_2$ (r_1 и r_2 — радиусы гиперсфер с центрами, соответственно в Γ_1^0 и Γ_2^0 известны из эталонной задачи)—вектор Γ^k относится к первому классу;

2) $\rho_1^k \leq r_2, \rho_2^k > r_1$ — вектор Γ^k относится ко второму классу;

3) $\rho_2^k \leq r_1, \rho_2^k \leq r_2$ — вектор Γ^k входит и в первый, и во второй классы, т. е. имеет место пересечение множеств образов разделяемых понятий;

4) $\rho_1^k \leq r_1, \rho_2^k > r_2$ — вектор Γ^k не входит ни в первый, ни во второй классы, т. е. логически существует еще и некоторый третий класс, обусловленный, возможно, непредставительной выборкой при эталонном анализе. Не исключено, однако, что этот третий класс реально существует, но при решении эталонной задачи не был известен.

На основе приведенного алгоритма составлены две программы решения задачи.

Первая из них (эталонная) служит для вычисления коэффициентов $c_{i\xi}$, средних векторов Γ_1^0 и Γ_2^0 , а также для анализа надежности «расознавания» в эталонной области.

← Соответствующие значения δg_v в каждой паре строк перемножаются, произведение суммируются. Результат деления полученного числа на количество узлов палетки есть значение $k_g(l-1)$.

Значение $k_{gT}(l-1)$ определяется аналогичным образом с той только разницей, что в этом случае матрица δg_v движется относительно матрицы δT_v или наоборот.

При $a=b$ вычисляются также значения $k'_g(l-1)$ и $k'_{gT}(l-1)$ при сдвиге матриц вправо (или влево). Из результатов, полученных при вертикальном и горизонтальном сдвигах, берется среднее арифметическое.

Так же определяются все остальные корреляционные моменты с тем только различием, что сдвиг делается на 2 шага, 3 шага и т. д. до β шагов.

P_1 — логический оператор, сравнивающий число вычисленных векторов количественных признаков с заданным числом геологических элементов. Если $(s_1 + s_2)_в < (s_1 + s_2)_з$, то управление передается на оператор P_2 , который вводит в оперативную память машины матрицы числовых значений функций для следующего геологического элемента, и цикл вычисления количественных признаков повторяется. Если же $(s_1 + s_2)_в = (s_1 + s_2)_з$, управление ЭВМ передается на оператор F_2 .

F_2 — оператор формирования блоков с A_2 по B_5 для заданных значений $(s_1 + s_2)$, s_1 , s_2 .

A_2 — оператор вычисления среднего вектора из $(s_1 + s_2)$ полученных векторов.

A_4 — оператор, определяющий коэффициенты $c_{i\xi}$ для перевода вектора $N_{\tau\sigma}$ в $\Gamma_{\tau\sigma}$, средний вектор «поднятий» Γ_1^0 и средний вектор «неподнятий» Γ_2^0 , радиусы r_1 и r_2 соответствующих гиперсфер и расстояние между Γ_1^0 и Γ_2^0 .

Векторы Γ_1^0 и Γ_2^0 находятся как последовательность произведений коэффициентов $c_{i\xi}$ на соответствующие координаты векторов \bar{N}_1 и \bar{N}_2 , которые, в свою очередь, определяются как последовательности средних арифметических одноименных количественных признаков векторов «поднятий» и «неподнятий».

B_1 — вывод на печать коэффициентов $c_{i\xi}$, среднего вектора «поднятий» \bar{N}_1 , среднего вектора «неподнятий» \bar{N}_2 радиусов гиперсфер r_1 и r_2 расстояния между Γ_1^0 и Γ_2^0 .

A_5 — оператор, анализирующий векторы признаков для класса «поднятий» по $\rho_{1\sigma}$.

B_2 — оператор вывода результатов анализа класса «поднятий» по $\rho_{1\sigma}$ на печать.

A_6 — оператор, анализирующий векторы признаков для класса «поднятий» по $\cos \psi_{1\sigma}$.

B_3 — вывод результатов анализа класса «поднятий» по $(\cos \psi)_{1\sigma}$ на печать.

A_7 — анализ вектора признаков для класса «неподнятий» по $\rho_{2\sigma}$.

B_4 — вывод результатов анализа класса «неподнятий» по $\rho_{2\sigma}$ на печать.

A_8 — анализ вектора признаков класса «неподнятий» по $(\cos \psi)_{2\sigma}$.

B_5 — оператор вывода результатов анализа класса «неподнятий» по $(\cos \psi)_{2\sigma}$ на печать.

A_g — анализ векторов признаков «поднятий» по включению в гиперсферу радиуса r_2 .

B_6 — оператор вывода результатов анализа по r_2 на печать.

A_{10} — анализ векторов признаков «неподнятий» по включению в гиперсферу радиуса r_1 .

B_7 — оператор вывода результатов анализа по r_1 на печать.

$Я$ — останов ЭВМ.

С целью удобства анализа в процессе «обучения» каждому правильному ответу при предъявлении машине тренировочной последовательности класса «поднятий» присваивается обозначение 1, неправильному — 0. Для класса «неподнятий» приняты обратные обозначения, т. е. при правильном ответе — 0, а при неправильном — 1.

Таким образом, результаты сравнения векторов $\Gamma_{\tau\sigma}$ с Γ_1^0 и Γ_2^0 представляют собой последовательности единиц и нулей в каждом из двух классов геологических понятий.

Надежность распознавания вычисляется по формулам:

$$\text{для I класса — } W_1 = \frac{p}{s_1};$$

$$\text{для II класса — } W_2 = 1 - \frac{q}{s_2},$$

где p — число правильных ответов в классе «поднятий»;

q — число неправильных ответов в классе «неподнятий»;

s_1 и s_2 — объемы тренировочных последовательностей в соответствующих классах.

В заключение отметим, что на базе рассмотренной программы была составлена ее упрощенная модификация, в которой в качестве количественных признаков берутся либо особым образом упорядоченные значения напряженности геофизического поля в узлах области R_0 , либо любые другие заданные количественные признаки. Эта программа позволяет установить информативность каждого признака.

7. Для решения *прогнозной задачи* необходимы следующие *исходные данные*:

1) значения функций (например, Δg , ΔT и H) в точках прогнозной матрицы (в самом общем случае такая матрица представляет собой прямоугольник размерами $v \times w$, причем w может быть каким угодно);

2) v и w — соответственно число столбцов и строк в ней;

3) коэффициенты $c_{i\bar{e}}$;

4) средние векторы \bar{N}_1 и \bar{N}_2 «поднятий» и «неподнятий»;

5) радиусы гиперсфер r_1 и r_2 ;

6) расстояние между Γ_1^0 и Γ_2^0 ;

7) размеры палетки a и b ;

8) h — число функций.

Естественно, что все приведенные данные либо взяты непосредственно из решения эталонной задачи, либо согласованы с ее исходными данными (например, h).

Прогнозные матрицы значений геофизических элементов кодируются по строкам слева направо (по одному числу в каждую ячейку). Параметры v , w , a , b , h задаются на отдельной перфокарте.

Объем оперативной памяти рассчитывается по формуле

$$3x + hvb \leq 2008,$$

где x — число количественных признаков в каждом из векторов, которое заранее известно из решения эталонной задачи.

Ввод исходных данных производится в следующем порядке. Последовательно, начиная с первой, вводится b строк матриц первой, второй и третьей функций и производится вычисление и анализ векторов для $\frac{b+1}{2}$ -й строки матриц. Затем вводятся b строк, начиная со второй, и повторяются те же операции для $\frac{b+3}{2}$ -й строки и т. д.

Программа прогнозирования отличается от эталонной только операторами A_2 и B_1 и, кроме того, несколько изменены операторы Π_1 и A_4 .

Остановимся кратко на работе палетки на прогнозной матрице.

В исходном положении ее левая сторона совмещена с первым столбцом прогнозной матрицы, а верхняя — с ее первой строкой. Таким образом, вначале палетка находится в левом верхнем углу последней.

В этом положении палетки, т. е. когда центр ее совмещен с точкой прогнозной матрицы с координатами $\frac{a+1}{2}$ и $\frac{b+1}{2}$ *, вычисляется и анализируется вектор Γ_1^k .

Далее палетка последовательно смещается вправо на один шаг, и операции в каждой точке $\frac{b+1}{2}$ -й строки повторяются. По достижении конца указанной строки палетка автоматически устанавливается своим центром в точке с координатами $\frac{a+1}{2}$ и $\frac{b+3}{2}$, и весь процесс повторяется для каждой точки $\frac{b+3}{2}$ -й строки и т. д., пока не будут исчерпаны все точки «полезной площади» прогнозной матрицы.

«Полезная площадь» представляет собой матрицу, уменьшенную относительно исходной на $\frac{a-1}{2}$ столбцов слева и справа $\frac{b-1}{2}$ строк сверху и снизу. Результаты вычислений в каждой точке «полезной площади» прогнозной матрицы выдаются в виде трех чисел g_1, g_2 и g_3 . Первое и второе могут принимать значения 0, 1 (0 — когда вектор относится ко II классу; 1 — когда анализируемый вектор относится к I классу). Третье число g_3 может принимать четыре значения 0, 1, 2, и 3; 0 и 1 при этом имеют тот же логический смысл, что и для чисел g_1 и g_2 . Двойка выдается в случае, когда анализируемый вектор не входит ни в первый, ни во второй классы; тройка — когда имеет место попадание анализируемого вектора и в первый и во второй классы.

Выдача на печать нулей, единиц, двоек и троек производится последовательно по строкам «полезной площади» (начиная с первой) в трех вариантах:

1) результаты анализа по $\rho_{\tau\sigma}$, 2) результаты анализа по $(\cos \psi)_{\tau\sigma}$, 3) результаты анализа по радиусам гипербол r_1 и r_2 .

8. Испытание рассмотренного алгоритма проведено на следующих примерах.

а. Определение вещественного состава возмущающих масс в градации — «кислые», «средние», «основные» и «ультраосновные».

В процессе «обучения» использовались известные интрузии Казахской складчатой области. В первом варианте в качестве количественных признаков были взяты характерные признаки аномалий (обусловленных интрузиями), такие как амплитуда, соотношение осей, коэффициент извилистости, коэффициент асимметрии, максимальный горизонтальный градиент и т. д. Во втором варианте в виде признаков использовались центральные моменты до четвертого порядка, а также корреляционные моменты. Тренировочная последовательность состояла из 36 векторов в каждом классе. Надежность «распознавания» по обобщенным векторам оказалась равной 0,90—0,95.

б. Выделение в осадочном чехле локальных структур.

В центральной части Западно-Сибирской низменности было взято для «обучения» 40 локальных поднятий и 46 участков, где известно, что таких структур нет.

* За начало координат принята крайняя точка в левом верхнем углу прогнозной матрицы.

Аномальные поля задавались в виде матрицы значений в 49 точках. В первом варианте количественными признаками считались сами эти значения, во втором — в качестве признаков были приняты вычисленные по матрице центральные моменты до четвертого порядка включительно, а также значения «автокорреляционной функции» и «функции взаимной корреляции». В результате «обучения» было установлено, что множества образов «поднятий» и «неподнятий» пересекаются. При этом выяснено, что из всех трех способов разделения этих множеств наиболее эффективным является распознавание по включению в гиперсферу. Заметим, что радиус гиперсферы для «поднятий» меньше радиуса гиперсферы для «неподнятий». В силу пересечения множеств образов «поднятий» и «неподнятий» распознавание по включению в гиперсферу осуществляется с надежностью около 0,80—0,85.

в. Определение формы возмущающего объекта в градации (плоская задача): цилиндр, тонкий пласт, мощный пласт, ступень.

В качестве количественных признаков использовались моменты различного порядка. «Обучение» выполнено по моделям, приведенным в атласе Д. С. Микова. Надежность распознавания составляет величину порядка 0,8—0,9.

Из приведенных примеров следует, что: 1) при решении ряда геолого-геофизических задач простейшие алгоритмы распознавания для выпуклых непересекающихся множеств вполне пригодны (для распознавания лучше всего пользоваться способом включения в гиперсферу); 2) для повышения надежности разделения нужно применять алгоритмы распознавания невыпуклых множеств; 3) предлагаемое признаковое пространство (средние значения, центральные моменты, матрица ковариаций и просто упорядоченный соответствующим образом набор значений напряженности полей) пригоден для решения ряда задач гравиразведки и магниторазведки, причем полезно комплексировать нашу программу с известными программами для разделения невыпуклых множеств.

Авторы признательны О. А. Калининой за ценные советы и редактирование рукописи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. И. Каратаев. Корреляционная схема линейного прогнозирования структуры и состава земной коры по гравитационным и магнитным аномалиям.— Геол. и геофиз., 1964, № 10.
2. В. П. Сочивко. Электронные опознающие устройства. М.— Л., изд-во «Энергия», 1964.
3. Э. М. Браверман. Опыты по обучению машины распознаванию зрительных образов.— АИТ, 1962, № 3.
4. М. М. Бонгард. Моделирование процесса узнавания на цифровой вычислительной машине.— Биофизика, 1961, № 2.
5. А. А. Харкевич. О выборе признаков при машинном опознании.— Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1963, № 2.
6. А. А. Харкевич. Опознание.— Радиотехника, 1959, т. 14, № 5.
7. В. М. Глушков. Введение в кибернетику. Киев, Изд-во АН УССР, 1964.
8. В. А. Якубович. Машины, обучающиеся распознаванию образов. Методы вычислений, вып. II. Изд. ЛГУ, 1963.

*Ю. М. Гусев, Г. И. Каратаев, О. А. Соловьев,
А. В. Черный, В. И. Авраменко, Т. Л. Захарова*

**О ВЫЯВЛЕНИИ ЛОКАЛЬНЫХ ПОДНЯТИЙ
В ОСАДОЧНОМ ЧЕХЛЕ ПЛАТФОРМ
ПО РЕЗУЛЬТАТАМ РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА
ГРАВИТАЦИОННЫХ И МАГНИТНЫХ АНОМАЛИЙ**

При выяснении геологического строения того или иного региона нередко возникает следующая задача. Пусть в некоторой области, по данным сейсморазведки и бурения, в осадочном чехле (или фундаменте) платформы задана какая-либо контактная поверхность и определены гравитационные и магнитные аномалии. И пусть задана некоторая схема классификации форм рельефа этой поверхности (например, локальные поднятия, локальные впадины, моноклинали и т. д.). Требуется построить такой алгоритм, который позволял бы только по гравитационным и магнитным аномалиям подразделять рельеф поверхности по заданным классам. В данной статье сделана попытка решить задачу подразделения форм рельефа какой-либо поверхности при помощи линейной множественной средней квадратической регрессии.

Схема решения состоит в следующем. По экспериментальным данным на некотором участке земной коры устанавливаются форма и числовые параметры связи между глубинами залегания контактной поверхности, с одной стороны, и гравитационными и магнитными аномалиями, с другой. При этом форма связи уравнения регрессии подбирается такой, чтобы в результате построения по тем же гравитационным и магнитным аномалиям заданной поверхности с помощью полученного уравнения регрессии можно было бы качественно выделить (т. е. указать контуры) искомые формы рельефа поверхности (например, локальные поднятия, локальные впадины и т. д.).

Затем на основе корреляционной схемы геологической интерпретации гравитационных и магнитных аномалий [1] эта связь используется для выявления заданного класса форм рельефа одноименной контактной поверхности в тех регионах, где заданы только аномальные поля и геологическое строение которых сходно с геологическим строением района, в котором было исследовано уравнение регрессии.

Рассмотрим некоторые формы связи геологических и геофизических элементов и методику вычисления коэффициентов уравнений регрессий.

1. Введем следующие понятия: H — геологический элемент (например, значения глубины залегания какой-либо границы в осадочном чехле или фундаменте платформы), а Δg_i и ΔT_i , $i = 0, 1, \dots, m$, — геофизические

элементы, причем Δg_0 и ΔT_0 — значения гравитационных и магнитных аномалий, Δg_i и ΔT_i , $i = 1, 2, \dots, m$, — некоторые средние значения силы тяжести и напряженности магнитного поля, вычисленные из 1, 2, ... m -й совокупностей соответственно величин Δg и ΔT ; Λ — множество перечисленных элементов, т. е. $\Lambda = \{H, \Delta g_0, \Delta g_1, \dots, \Delta g_m, \Delta T_0, \dots, \Delta T_m\}$, а R — область их определения. Участки земной коры, в которых имеются данные измерений гравитационного и магнитного полей, разобьем на два пространства — эталонное R^3 и конкретное R^k . Под эталонным пространством R^3 будем понимать те участки, в которых, по данным бурения и сейсморазведки, известны глубины залегания границ в осадочном чехле и фундаменте, под конкретным R^k — участки, геологическое строение которых необходимо выяснить.

Пусть Λ^3 есть область значений геологических и геофизических элементов на эталонном пространстве R^3 . Требуется построить на R^3 такой линейный оператор, который с точностью до ε_0 (некоторое наперед заданное число) отображает подмножество геофизических элементов $\{\Delta g_0, \dots, \Delta g_m, \Delta T_0, \dots, \Delta T_m\}$ на подмножество геологических элементов $\{H_j\}$ (эталонная задача).

Будем рассматривать в дальнейшем геологические и геофизические элементы как случайные величины с произвольным дискретным распределением, имеющим конечные моменты второго порядка. Тогда связь геологического элемента H с геофизическими элементами Δg_i и ΔT_i , $i = 0, 1, \dots, m$, можно описать уравнением множественной регрессии

$$\bar{H}(\Delta g_0, \Delta g_1, \dots, \Delta T_m) = M(H | \Delta g_0, \Delta g_1, \dots, \Delta T_m). \quad (1)$$

Здесь \bar{H} — вероятное значение геологического элемента H , обладающее дисперсией $\varepsilon^2 = M(H - \bar{H})^2$. Таблично (или графически) заданную функцию \bar{H} аппроксимируем с точностью до ε линейной функцией

$$\tilde{H}(r) = \alpha_{00} + \sum_{i=0}^m \alpha_{1i} \Delta g_i(r + \Delta r_i) + \sum_{i=0}^m \alpha_{2i} \Delta T_i(r + \Delta r_i), \quad r \in R^3, \quad (2)$$

где $\tilde{H}(r)$ — приближенная величина вероятного значения \bar{H} глубины залегания исследуемой поверхности;

α_{00} , α_{1i} и α_{2i} — коэффициенты регрессии;

m — количество окружностей интегрирующей палетки;

Δr_i — радиус i -й окружности палетки.

Коэффициенты регрессии отыскиваются на пространстве R^3 под условием минимума выражения

$$\Delta(\alpha_0, \alpha_{10}, \dots, \alpha_{1m}, \alpha_{20}, \dots, \alpha_{2m}) = \min_{\{\alpha\}} M(H - \tilde{H})^2.$$

Если на R^3 ошибка прогноза ε больше заданной ошибки ε_0 , то эталонное пространство разбивается на подпространства R_j^3 , $j = 1, 2, \dots, k$, такие, что на каждом из них функция (1) аппроксимируется уравнением (2) с точностью $\varepsilon_j \leq \varepsilon_0$.

Однако часто приблизить функцию (1) линейной комбинацией элементов Δg_i и ΔT_i с заданной точностью не удастся ($\varepsilon > \varepsilon_0$), поскольку разбиение пространства R^3 на подпространства R_j^3 , $j = 1, 2, \dots, k$, производится до тех пор, пока на каждом из R_j^3 выборка случайных величин $\{H, \Delta g_0, \Delta g_1, \dots, \Delta T_m\}$ остается представительной. Для решения задачи в этом случае строятся линейные комбинации новых элементов, представля-

ющих собой, например, элементарные функции от величин Δg_i и ΔT_i , $i = 0, 1, \dots, m$, их конечные разности различного порядка и т. п.

Прогнозирование возможных значений \hat{H} геологического элемента в конкретном пространстве R^k производится так. Прежде всего устанавливается эквивалентность множеств $\{\Delta g_0, \dots, \Delta g_m, \Delta T_0, \dots, \Delta T_m\}^k$ и $\{\Delta g_0, \dots, \Delta g_m, \Delta T_0, \dots, \Delta T_m\}^3$, элементы которых заданы на R^k и R_j^3 , например, по векторам N^k и N_j^3 признаков [1]. Затем воздействием оператора прогноза $\{\alpha_{v,i}\}$, $v = 1, 2$; $i = 0, 1, \dots, m$, построенного на R_j^3 , на совокупность геофизических элементов $\{\Delta g_0, \Delta g_1, \dots, \Delta T_m\}$ пространства R^k определяют прогнозные величины \hat{H} .

2. Построение контактных границ в осадочном чехле и фундаменте платформ или межгорных впадин осуществлялось следующим образом. Вначале исследования были направлены на отыскание подходящей линейной комбинации геофизических элементов, аппроксимирующей уравнение регрессии (1). При этом оказалось, что значения глубины залегания искомой границы, определенные по формуле (2), могут быть приняты только в качестве нулевого приближения в итерационной схеме, которая будет рассмотрена ниже.

Затем была испытана формула, в которой по аномалиям Δg и ΔT вычислялись только относительные локальные изменения рельефа искомой границы; глубины же залегания этой поверхности определялись путем последовательного суммирования приращений с некоторым наперед заданным в какой-либо одной точке значением глубины.

Поскольку глубина залегания H является функцией геофизических элементов $\Delta g_0, \Delta g_1, \dots, \Delta T_m$, то, как это следует из уравнения (1),

$$dH = \left\{ \sum_{i=0}^m \frac{\partial H}{\partial \Delta g_i} \cdot \frac{\partial \Delta g_i}{\partial r} + \sum_{i=0}^m \frac{\partial H}{\partial \Delta T_i} \cdot \frac{\partial \Delta T_i}{\partial r} \right\} dr,$$

где частные производные $\frac{\partial H}{\partial \Delta g_i}$, $\frac{\partial \Delta g_i}{\partial r}$, $\frac{\partial H}{\partial \Delta T_i}$, $\frac{\partial \Delta T_i}{\partial r}$ вычислены в некоторой точке r промежутка $[r_v, r_{v+1}]$. Эту формулу в конечных разностях можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \Delta \hat{H}(r_{v+1}) = & \alpha_{00} + \sum_{i=0}^m \alpha_{1i} [\Delta g(r_{v+1} + \Delta r_i) - \Delta g(r_v + \Delta r_i)] + \\ & + \sum_{i=0}^m \alpha_{2i} \cdot [\Delta T(r_{v+1} + \Delta r_i) - \Delta T(r_v + \Delta r_i)] \end{aligned} \quad (3)$$

и использовать ее в качестве уравнения линейной регрессии. Здесь $\Delta \hat{H}(r_{v+1})$ — приращение глубины до исследуемой границы между двумя соседними точками r_v и r_{v+1} ($r_{v+1} - r_v = \text{const}$) массива* H ; $[\Delta g(r_{v+1} + \Delta r_i) - \Delta g(r_v + \Delta r_i)]$, $[\Delta T(r_{v+1} + \Delta r_i) - \Delta T(r_v + \Delta r_i)]$ — приращения средних значений гравитационных и магнитных аномалий на соответствующих окружностях ($i = 0, 1, 2, \dots, m$) интегрирующей палетки при установках последней в двух соседних точках r_v и r_{v+1} массивов Δg и ΔT ; Δr_i — радиус i -й окружности палетки; α_{ji} , $j = 1, 2, \dots$ — матрица коэффициентов регрессии (линейный оператор). Одним из недостатков формулы (3) является то, что в пределах каждого профиля гравитационных и магнитных аномалий, по которому определяется глубина залегания геологической границы, необходимо знать хотя бы одно значение $H_j^{(0)}$, $j = 1, 2, \dots, q$ (q —

* Под массивом здесь и ниже подразумевается совокупность значений геофизических и геофизических элементов, заданных в узлах равномерной сети.

число профилей), чтобы по приращениям $\Delta \hat{H}(r_{v+1})$ получить глубину залегания границы вдоль всего профиля. Кроме того, что более существенно, глубина залегания $H_j^{(0)} + \sum_{v=1}^p \Delta \hat{H}(r_{v+1})$ (где p — число точек на профиле) при прогнозе, вследствие накопления ошибок при суммировании $\Delta \hat{H}(r_{v+1})$, вычисляется с большой погрешностью, хотя относительный рельеф поверхности приближенно соответствует истинному. Для вычисления $\hat{H}(r_v)$ относительно α_{00} была опробована также формула

$$\hat{H}(r_v) = \alpha_{00} + \sum_{i=0}^m \alpha_{1i} [\Delta g(r_v + \Delta r_i) - \Delta g(r_{00} + \Delta r_i)] + \sum_{i=0}^m \alpha_{2i} [\Delta T(r_v + \Delta r_i) - \Delta T(r_{00} + \Delta r_i)], \quad (4)$$

позволяющая при известных α_{00} , α_{1i} , α_{2i} прогнозировать непосредственно возможные значения $\hat{H}(r_v) \approx M[H(r_v)]$ глубины залегания интересующей нас поверхности. Относительные изменения рельефа $\Delta H(r_{v+\frac{3}{2}}) = \hat{H}(r_{v+\frac{3}{2}}) - \hat{H}(r_{v+\frac{1}{2}})$ в этом случае определяются с несколько большей погрешностью, чем приращения $\Delta \hat{H}(r_{v+1})$, по формуле (3). Однако возможные значения $\hat{H}(r_v)$ вычисляются точнее, нежели $H_j^{(0)} + \sum_{v=1}^p \Delta \hat{H}(r_{v+1})$ (см. ниже).

Рассмотрим теперь итерационную схему построения на R^3 оператора прогноза глубин залегания искомой поверхности. В качестве нулевого приближения $\tilde{H}_0(r)$ глубины принимаются возможные значения $\tilde{H}(r)$, вычисленные по формуле (2) при известных коэффициентах регрессии. При этом ошибка приближения оценивается по формуле

$$\delta_0 = \sqrt{M(H - \tilde{H}_0)^2}.$$

Если $\delta_0 > \varepsilon_0$, то вычисляем в каждой точке подпространства R_j^3 функцию

$$\Delta H_1(r_v) = H(r_v) - \tilde{H}_0(r_v),$$

которую аппроксимируем линейной комбинацией

$$\Delta \tilde{H}_1(r_v) = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_{1i}^{(1)} \Delta^{(1)} g(r_v + \Delta r_i; r_v + \Delta r_{i+1}) + \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_{2i}^{(1)} \Delta^{(1)} T(r_v + \Delta r_i; r_v + \Delta r_{i+1}), \quad \Delta r_0 = 0, \quad (5)$$

составленной из разделенных разностей первого порядка от $\Delta g(r_v + \Delta r_i)$ и $\Delta T(r_v + \Delta r_i)$. Далее, при известных α_{ji} и $\alpha_{ji}^{(1)}$, вычисляем первое приближение глубины залегания искомой границы

$$\tilde{H}_1(r_v) = \tilde{H}_0(r_v) + \Delta \tilde{H}_1(r_v), \quad r_v \in R_j^3, \quad (6)$$

находим погрешность первого приближения

$$\delta_1 = \sqrt{M(\Delta H_1 - \Delta \tilde{H}_1)^2} \quad (7)$$

и сравниваем ее с заданной ε_0 . Если по-прежнему $\delta_1 > \varepsilon_0$, то в каждой точке

подпространства R_j^3 отыскиваем функцию

$$\Delta H_2(r_v) = H(r_v) - \tilde{H}_1(r_v),$$

которую приближаем выражением

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{H}_2(r_v) &= \sum_{i=0}^{m-2} \alpha_{1i}^{(2)} \Delta^{(2)} g(r_v + \Delta r_i; r_v + r_{i+1}; r_v + r_{i+2}) + \\ &+ \sum_{i=0}^{m-2} \alpha_{2i}^{(2)} \Delta^{(2)} T(r_v + \Delta r_i, \dots, r_v + \Delta r_{i+2}), \end{aligned}$$

и в качестве второго приближения искомой глубины принимаем значения

$$\tilde{H}_2(r_v) = \tilde{H}_0(r_v) + \Delta \tilde{H}_1(r_v) + \Delta \tilde{H}_2(r_v).$$

Вычисляем погрешность второго приближения δ_2 и сравниваем ее с ε_0 . И вообще k -е приближение будет

$$\tilde{H}_k(r) = \tilde{H}_0(r_v) + \sum_{i=1}^k \Delta \tilde{H}_i(r_v),$$

его погрешность —

$$\delta_k = [M(\Delta H_k - \Delta \tilde{H}_k)^2]^{1/2}.$$

Если $\delta_k > \varepsilon_0$, то находим в каждой точке подпространства R_j^3 значения функции

$$\Delta H_{k+1}(r_v) = H(r_v) - \tilde{H}_k(r_v),$$

которые затем аппроксимируем линейной комбинацией

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{H}_{k+1}(r_v) &= \sum_{i=0}^{m-k-1} \alpha_{1i}^{(k+1)} \Delta^{(k+1)} g(r_v + \Delta r_i, \dots, r_v + \Delta r_{i+k+1}) + \\ &+ \sum_{i=0}^{m-k-1} \alpha_{2i}^{(k+1)} \Delta^{(k+1)} T(r_v + \Delta r_i, \dots, r_v + \Delta r_{i+k+1}), \end{aligned} \quad (8)$$

где $\Delta^{(k+1)} g(r_v + \Delta r_i, \dots, r_v + \Delta r_{i+k+1})$ и $\Delta^{(k+1)} T(r_v + \Delta r_i, \dots, r_v + \Delta r_{i+k+1})$ — разделенные разности $(k+1)$ -го порядка от $\Delta g(r_v)$ и $\Delta T(r_v)$. Эти разности, как известно [2], могут быть выражены через разделенные разности более низкого порядка. Например, разделенная разность $(k+1)$ -го порядка от $\Delta g(r_v)$ связана с разделенной разностью k -го порядка следующим рекуррентным соотношением:

$$\begin{aligned} &\Delta^{(k+1)} g(r_v + \Delta r_i, \dots, r_v + \Delta r_{i+k+1}) = \\ &= \frac{\Delta^{(k)} g(r_v + \Delta r_{i+1}, \dots, r_v + \Delta r_{i+k+1}) - \Delta^{(k)} g(r_v + \Delta r_i, \dots, r_v + \Delta r_{i+k})}{\Delta r_{i+k+1} - \Delta r_i}. \end{aligned}$$

Получив $(k+1)$ -е приближение

$$\tilde{H}_{k+1}(r_v) = \tilde{H}_0(r_v) + \sum_{i=1}^{k+1} \Delta \tilde{H}_i(r_v) \quad (9)$$

и его погрешность

$$\delta_{k+1} = [M(H - \tilde{H}_k)^2]^{1/2}, \quad (10)$$

сравниваем эту погрешность с заданной ε_0 и т. д. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет достигнуто неравенство $\delta_k \leq \varepsilon_0$.

3. Остановимся теперь подробнее на вычислении коэффициентов в линейных комбинациях (2)—(4) и (8). Для удобства последующего изложения перепишем эти уравнения в общем виде так:

$$\tilde{Y} = \beta_0 + \sum_{j=1}^n \beta_j X_j, \quad (11)$$

где под \tilde{Y} подразумеваются возможные значения глубины залегания исследуемой границы $\tilde{H}(r_v)$ или $\hat{H}(r_{v+\frac{1}{2}})$, либо приращения этой глубины $\Delta\hat{H}(r_{v+1})$ и т. п.; под X_j , $j = 1, 2, \dots, n$, — геофизические элементы, например, средние значения гравитационных и магнитных аномалий на различных окружностях интегрирующей палетки $X_1 = \Delta g_1$, $X_2 = \Delta g_2, \dots, X_m = \Delta g_m$, $X_{m+1} = \Delta T_1, \dots, X_n = \Delta T_m$ или раздельные разности первого порядка от Δg и ΔT , $X_1 = \Delta^{(1)}g(r_v; r_v + \Delta r_1), \dots, X_m = \Delta^{(1)}g(r_v + \Delta r_{m-1}; r_v + \Delta r_m)$, $X_{m+1} = \Delta^{(1)}T(r_v; r_v + \Delta r_1), \dots, X_n = \Delta^{(1)}T(r_v + \Delta r_{m-1}; r_v + \Delta r_m)$ и т. п., а под β_j , $j = 0, 1, \dots, n$, — коэффициенты регрессии геологических элементов на геофизические в соответствующих уравнениях.

Примем, что пространство геологических и геофизических элементов $\Lambda^s = \{Y, X_1, X_2, \dots, X_n\}$ является $(n+1)$ -мерным евклидовым пространством E_{n+1} .

Теперь задачу определения коэффициентов регрессии можно сформулировать следующим образом [3].

Пусть в $(n+1)$ -мерном евклидовом пространстве E_{n+1} заданы случайные величины Y, X_1, \dots, X_n с произвольным дискретным распределением, имеющим конечные моменты второго порядка. Требуется построить плоскость средней квадратической регрессии величины Y относительно X_1, X_2, \dots, X_n . Эта плоскость определяется как такая гиперплоскость, которая дает наилучшую аппроксимацию $(n+1)$ -мерного распределения в том смысле, что выражение

$$\Delta(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n) = M\left(Y - \beta_0 - \sum_{i=1}^n \beta_i X_i\right)^2 \quad (12)$$

имеет наименьшее возможное значение. Переписав (12) в виде

$$\Delta(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n) = M\left(\dot{Y} - \beta_0 - \sum_{i=1}^n \beta_i \dot{X}_i + m_Y - \sum_{i=1}^n \beta_i m_{X_i}\right)^2,$$

где

$$\dot{Y} = Y - m_Y; \quad \dot{X}_i = X_i - m_{X_i}; \quad m_Y = M(Y); \quad m_{X_i} = M(X_i), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

получим далее

$$\begin{aligned} \Delta(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n) = & \sigma_Y^2 - 2 \sum_{i=1}^n \beta_i \mu_{X_i Y} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_i \beta_j \mu_{X_i X_j} + \\ & + \left(m_Y - \beta_0 - \sum_{i=1}^n \beta_i m_{X_i}\right)^2, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\sigma^2 = M(Y - m_Y)^2; \quad \mu_{X_i Y} = M(X_i - m_{X_i})(Y - m_Y);$$

$$\mu_{X_i X_j} = M(X_i - m_{X_i})(X_j - m_{X_j}).$$

при $\|Z_j\| > \sigma_0$, $j = 1, 2, \dots, r$; $r \leq n$,
 где скаляры k_{ir} выбираются так, чтобы векторы Z_1, Z_2, \dots, Z_r были взаимно ортогональны, т. е.

$$k_{ir} = -(\dot{X}_r, Z_i) = \frac{1}{\|Z'_r\|} \left\{ (\dot{X}_r, \dot{X}_i) - \sum_{j=1}^{i-1} k_{ij} k_{jr} \right\};$$

$$\|Z'_r\| = \sqrt{(\dot{X}_r, \dot{X}_r) - \sum_{i=1}^{r-1} k_{ir}^2}, \quad i = 1, 2, \dots, r-1; \quad r = 1, 2, \dots, n; \quad i < r.$$

В ортонормированном базисе система (15) имеет вид:

$$\gamma_i = (\dot{Y}, Z_i), \quad i = 1, 2, \dots, r; \quad r \leq n,$$

где Z_i являются линейными комбинациями (17) векторов $\dot{X}_i = \{x_{i1}, \dots, x_{iN}\}$, $i = 1, 2, \dots, r$, а элементы γ_i — линейными комбинациями коэффициентов β_i :

$$\gamma_i = \|Z'_i\| \beta_i - \sum_{j=i+1}^n k_{ij} \beta_j; \quad \|Z'_1\| = \|\dot{X}_1\|.$$

В результате получается система линейных уравнений r -го порядка с правой треугольной хорошо обусловленной матрицей, эквивалентная системе (15):

$$\begin{bmatrix} \|\dot{X}_1\| - k_{12} - k_{13} - k_{14} \dots k_{1n} \\ 0 & \|Z'_2\| - k_{23} & \dots & k_{2n} \\ 0 & 0 & \|Z'_3\| - k_{34} \dots k_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \|Z'_r\| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\dot{Y}, Z_1) \\ (\dot{Y}, Z_2) \\ (\dot{Y}, Z_3) \\ \vdots \\ (\dot{Y}, Z_r) \end{bmatrix}$$

Решение этой системы определяется без затруднений.

Коэффициенты уравнения (11) можно вычислить также следующим образом. Будем рассматривать такие функции $Y(k)$, $X(k)$ и $\beta(k)$, которые задаются на множестве целых чисел и удовлетворяют следующему условию:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\lambda_k| < \infty, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

где λ есть или Y , или X , или β .

Множество всех функций $\lambda(k)$ относительно алгебраических операций сложения и умножения (свертывания) образует коммутативное нормированное кольцо S , в котором имеется нулевой (θ) и единичный (e) элементы; норма элементов $\lambda \in S$ определяется так [5]:

$$\|\lambda\| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\lambda_k|, \\ \|e\| = 1.$$

Отобразим изоморфно при помощи линейного оператора

$$\lambda^*(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k e^{itk},$$

$$t \in [-\pi, \pi]$$

кольцо S в S' , причем будем рассматривать такие функции $\lambda^*(t)$, которые на отрезке $[-\pi, \pi]$ не принимают нулевых значений. В этом случае, как известно [5], каждый элемент λ и, соответственно, λ^* имеет обратный, т. е. $\lambda \cdot \lambda^{-1} = e$. Кроме того, кольца S и S' не будут иметь делителей нуля. Это обстоятельство дает возможность вычислить коэффициенты β_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, при известных функциях \tilde{Y}_k и X_k следующим образом:

$$\beta_k = \tilde{Y} * X^{-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{Y}(n) \cdot X^{-1}(n-k).$$

Практически необходимо построить спектральные функции \tilde{Y}^* , X^* , найти $X^{*-1} = \frac{1}{X^*}$, затем вычислить

$$\beta^*(t) = \tilde{Y}^*(t) * X^{*-1}(t)$$

$$t \in [-\pi, \pi]$$

и при помощи преобразования Фурье найти искомые коэффициенты β_k , т. е.

$$\beta_k = \operatorname{Re} \int_{-\pi}^{\pi} \beta^*(t) e^{-itk} dt.$$

Если функции \tilde{Y} и X заданы на плоскости в узлах равномерной сети k и m , то при условии абсолютной суммируемости этих функций коэффициенты β_{km} определим следующим образом.

Отобразим \tilde{Y} и X с помощью линейного преобразования

$$\lambda^*(t, \tau) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \lambda_{km} e^{i(tk + \tau m)}$$

$$t \in [-\pi, \pi], \tau \in [-\pi, \pi]$$

в функции $\tilde{Y}^*(t, \tau)$ и $X^*(t, \tau)$ и затем, полагая, что $\tilde{Y}^*(t, \tau)$ и $X^*(t, \tau)$ в квадрате $-\pi \leq t \leq \pi$, $-\pi \leq \tau \leq \pi$ не принимают нулевых значений получим

$$\beta^*(t, \tau) = \tilde{Y}^*(t, \tau) \frac{1}{X^*(t, \tau)}.$$

Отсюда

$$\beta_{km} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \beta^*(t, \tau) e^{-i(tk + \tau m)} dt d\tau.$$

4. Рассмотрим программы, реализующие формулы (3), (4). Для решения эталонной задачи должны быть заданы массивы значений H , Δg и ΔT размером $p \times q$ (p — число столбцов, q — число строк) для Δg и ΔT и $(p-10) \times (q-10)$ — для H . Объем оперативной памяти ЭВМ позволяет принять $p = 27$, $q = 18$. Значения Δg , ΔT и H кодируются по строкам массивов слева направо. Интегрирующая палетка имеет размеры 11×11 шагов. В связи с этим каждой строке массива числовых значений H соответствует 11 строк массивов значений Δg и ΔT . Ввод исходных данных осу-

ществляется таким образом. Вводятся первая строка H и соответствующие ей 1—11 строки Δg и ΔT . После составления уравнений вида (3), (4) для первой строки вводится вторая строка H и 2—12 строки Δg и ΔT и т. д. до $(q - 10)$ -й строки массива значений H .

Эталонная программа в операторном виде запишется в виде:

$$P_{-1}F_0A_{1\downarrow}P_{2\downarrow}F_3^{\uparrow}F_4F_5P_6^{\uparrow}P_7\downarrow P_8^{\uparrow}P_9A_{10}A_{11}B_{12}Я.$$

P_{-1} — оператор ввода исходных данных в оперативную память ЭВМ.

F_0 — оператор, формирующий программу в зависимости от исходных данных p и q .

A_1 — блок составления уравнений погрешностей вида (3), (4) для двух соседних точек одной строки массива Δg (ΔT).

P_2 — логический оператор, определяющий число заданных функций. Если оно равно двум, то после вычислений, относящихся к первой функции, оператор A_1 формируется для второй функции, т. е. управление ЭВМ передается оператору F_3 .

При использовании только одной функции управление передается оператору F_5 .

F_3 и F_4 — операторы формирования блока A_1 соответственно для массивов Δg и ΔT .

F_5 — оператор «переадресации» блока A_1 на следующую точку. Этот оператор подготавливает блок A_1 к составлению следующего по порядку уравнения погрешностей.

P_6 — логический оператор, определяющий число точек в строке, для которых составлены уравнения погрешностей. Если это число меньше $(p - 10)$, оператор P_6 передает управление на блок A_1 . В случае же равенства этих чисел управление передается оператору P_7 .

P_7 — логический оператор, определяющий число строк, для которых составлены уравнения погрешностей. При $q_{\text{выч}} < q - 10$ управление передается на P_8 .

P_8 — оператор ввода следующих по порядку строк массивов H , Δg (ΔT). При $q_{\text{выч}} = q - 10$ управление передается на оператор P_9 .

P_9 — оператор ввода в оперативную память ЭВМ блока решения системы уравнений погрешностей способом наименьших квадратов.

A_{10} , A_{11} — операторы составления и решения системы нормальных уравнений.

B_{12} — вывод результатов решения эталонной задачи на печать. В результате решения системы нормальных уравнений получаем коэффициенты α_{ij} и среднеквадратическую ошибку ϵ .

$Я$ — останов ЭВМ.

Для решения «прогнозной» задачи необходимо задать массивы Δg , ΔT , число строк в массивах q' , число столбцов — p' , а также коэффициенты α_{ij} , полученные из решения эталонной задачи.

Порядок ввода исходных данных для решения прогнозной задачи тот же, что и для эталонной. Отличие состоит лишь в отсутствии массива значений H .

Операторная схема прогнозной программы имеет вид:

$$P_{-1}F_0A_{1\downarrow}BP_2F_3^{\uparrow}F_4F_5P_6^{\uparrow}B_1P_7P_8^{\uparrow}Я.$$

Прогнозная программа по своему строению незначительно отличается от эталонной. Здесь участвуют те же операторы, что и в решении эталонной задачи, за исключением оператора B . Оператор B вычисляет произведения коэффициентов α_{ij} на $\delta\Delta g$ и $\delta\Delta T$ и суммирует эти произведения.

B_1 — вывод результатов решения прогнозной задачи на печать.

5. Исследование алгоритмов, реализующих формулы (3) и (4), было проведено на материалах сейсморазведки, крупномасштабных гравиметрической и аэромагнитной съемок участков, расположенных в южной части Александровского вала и в южной части Ново-Васюганского вала (ныне Каймысовского свода), которые закартированы по поверхности доюрского фундамента Западно-Сибирской плиты. Была поставлена задача построить по совокупности всех перечисленных данных такие операторы, которые

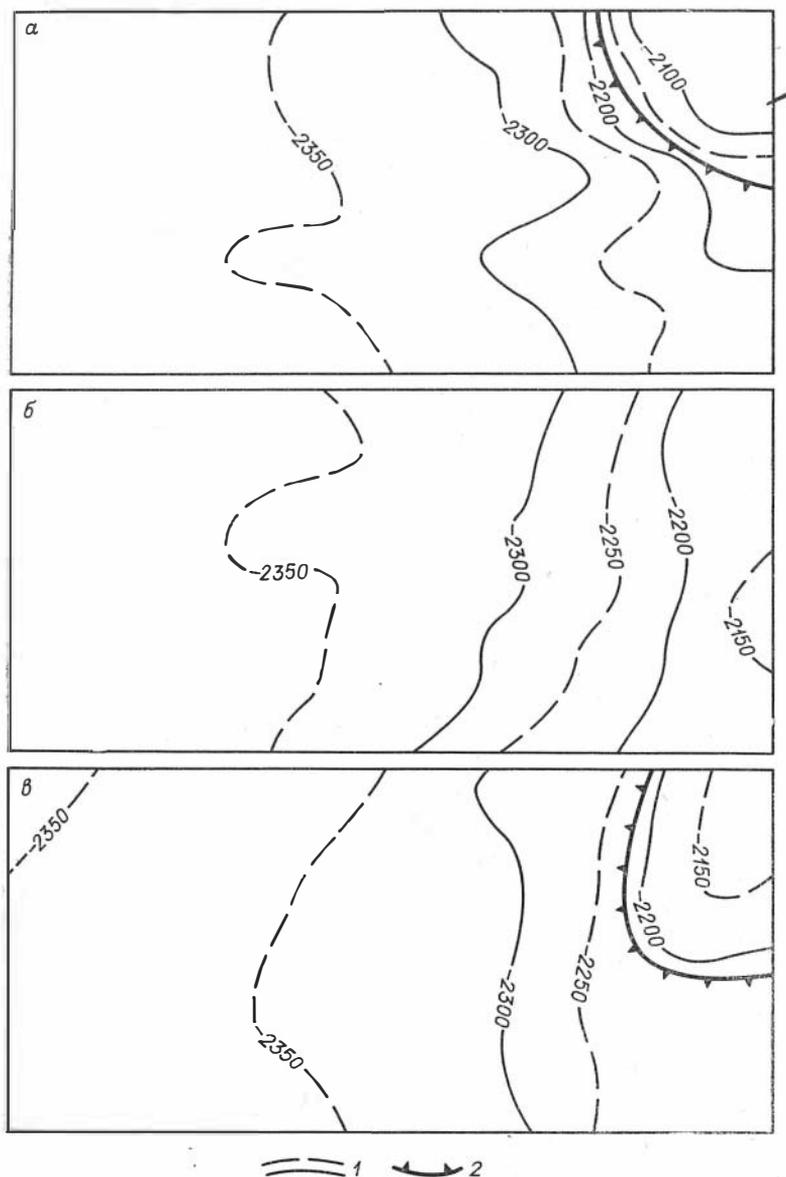


Рис. 1.

а — структурная карта поверхности доюрского фундамента южной части Александровского вала (по данным сейсморазведки); б — прогноз по формуле (3); в — прогноз по формуле (4).

1 — изогипсы поверхности доюрского фундамента; 2 — контуры основных локальных форм рельефа поверхности фундамента.

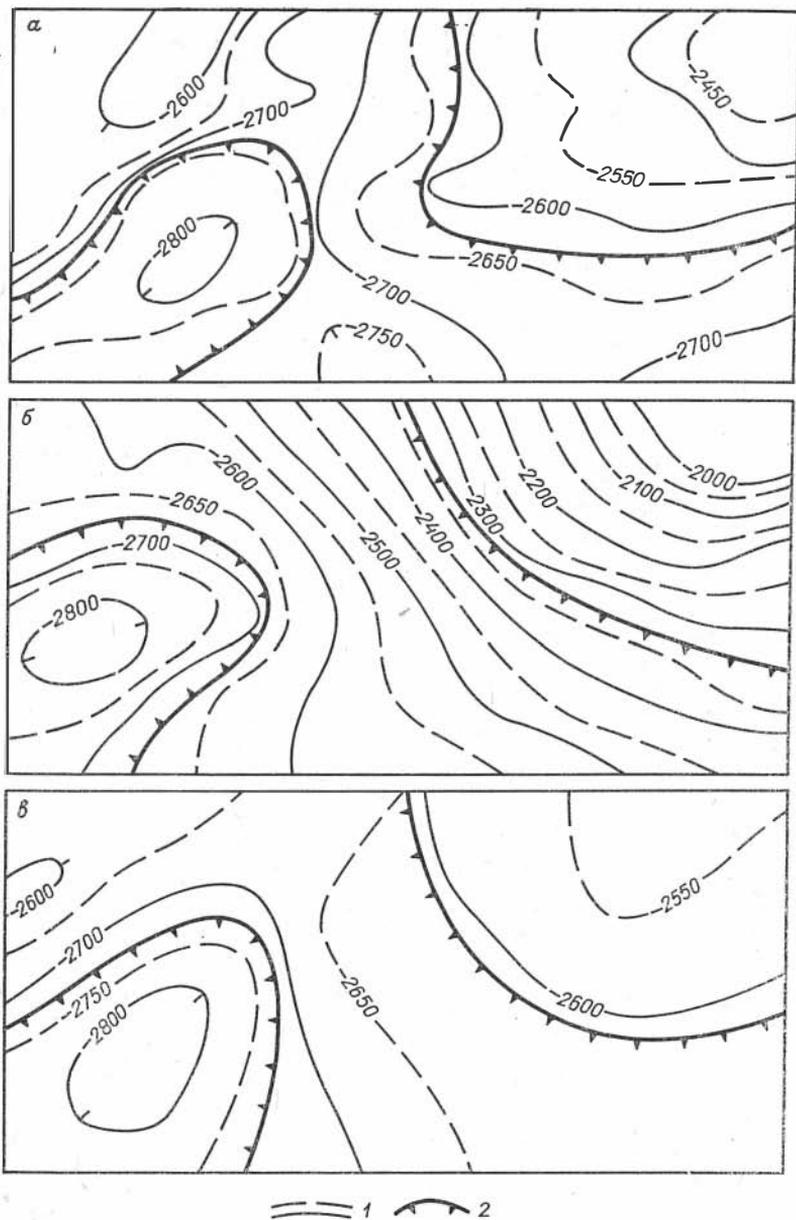


Рис. 2.

a — структурная карта поверхности доюрского фундамента южной части Ново-Васюганского вала (по данным сейсморазведки); *б* — прогноз по формуле (3); *в* — прогноз по формуле (4).

1 — изогипсы поверхности доюрского фундамента; 2 — контуры основных локальных форм рельефа поверхности фундамента.

позволили бы по гравитационным и магнитным аномалиям выявить в рельефе поверхности фундамента следующие формы — моноклинали, локальные поднятия и локальные впадины*. В частности, в пределах Александров-

* Под локальным поднятием и локальной впадиной будем понимать структуры размером менее 20×20 км.

ского вала требовалось выделить моноклиналь и ее осложнение в виде локального поднятия в северо-восточном углу участка (рис. 1, а), а в пределах Ново-Васюганского вала — локальную впадину в юго-западном и поднятие в северо-восточном углах участка (рис. 2, а). В выбранных районах с карт изогипс поверхности доюрского фундамента, гравитационных и магнитных аномалий по равномерной сети с шагом в 2 км были сняты соответственно значения H , Δg и ΔT . Затем при помощи описанных ранее программ для каждого вала по уравнениям (3) и (4), в которых вместо $\Delta \hat{H}$ и \hat{H} подставлены заданные значения ΔH и H , были составлены системы нормальных уравнений (14) и (15), которые решены по способу наименьших квадратов. В результате получено по два набора коэффициентов для того и другого участков и одновременно вычислены ошибки операторов ϵ , которые приняты за ошибки прогноза значений ΔH и H .

В табл. 1 и 2 приведены коэффициенты α_{ij} , $j = 0, 1, 2$; $i = 0, 1, 2, \dots, 6$, и средние квадратические ошибки прогноза величины \hat{H} , полученные соответственно при решении системы уравнений погрешностей вида (3) и (4) по способу наименьших квадратов.

Далее при известных коэффициентах α_{ij} по формулам (3) и (4) для тех же участков по той же сети вычислены значения $\Delta \hat{H}$ и \hat{H} и построены карты изогипс поверхности доюрского фундамента (при этом величины ΔH , полученные по формуле (3), привязаны к значениям глубин первого столбца массива H). Результаты прогноза по формуле (3) изображены на рис. 1, б и 2, б, а по формуле (4) — на рис. 1, в и 2, в. По характеру изолиний выделены, согласно заданной схеме классификации, формы рельефа этой поверхности. Нетрудно видеть, что поставленную задачу подразделения рельефа фундамента по его формам оба алгоритма решают удовлетворительно. При прогнозе по формуле (3) на Александровском валу не выделилось лишь локальное поднятие в северо-восточном углу участка. Использование же формулы (4) приводит не только к хорошему качественному выделению локальных форм рельефа доюрского фундамента (рис. 1, в и 2, в), но и к очень малой относительной погрешности в определении глубин (1,5—2%). Ввиду этого формула (4) может быть применена также и для количественного прогноза глубин, т. е. для построения карты изогипс поверхности фундамента. Прогнозные же значения глубин по формуле (3) определяются с большой относительной погрешностью (до 25%) вследствие суммирования приращений ΔH по каждому из профилей (рис. 2, б).

6. Приведенные выше коэффициенты уравнений (3) и (4) могут быть (в соответствии с корреляционной схемой геологической интерпретации аномалий) использованы для выделения моноклиналей, локальных поднятий и локальных впадин (а коэффициенты уравнения (4) — и для прогнозирования возможных значений глубин залегания поверхности фундамента) в тех районах Западно-Сибирской плиты, геологическое строение которых идентично геологическому строению Александровского или Ново-Васюганского валов. Методику установления степени сходства в структурно-геологическом отношении двух каких-либо участков опишем на примере сопоставления геолого-геофизических данных по Александровскому и Ново-Васюганскому валам.

Предположим, что геологическое строение Александровского и Ново-Васюганского валов настолько одинаково, что коэффициенты регрессии, полученные на одном из них, могут быть использованы для прогноза с требуемой точностью форм рельефа поверхности и возможных значений глубин на другом валу. В результате построения структурной карты Александровского вала по формуле (4) с коэффициентами, определенными на Ново-Васюганском валу (см. табл. 2, вторая строка коэффициентов), и

Таблица 1

Участок	α_{00}	α_{10}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{15}	α_{16}	α_{20}	α_{21}	α_{22}	α_{23}	α_{24}	α_{25}	α_{26}	$\varepsilon \Delta H, \text{ м}$	$\varepsilon \Delta H / \Delta H, \%$
Александровский	-17,89	-6,41	4,30	4,53	0,731	-4,78	-2,59	2,93	-0,341	-0,0045	0,001	0,017	0,064	-0,054	-0,052	± 20	25—50
Ново-Васюганский	4,37	-5,29	-3,25	6,03	0,964	7,12	-6,87	-0,678	1,07	-0,090	0,353	-0,151	-0,380	-0,129	0,456	± 26	43—65

Таблица 2

Участок	α_{00}	α_{10}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{15}	α_{16}	α_{20}	α_{21}	α_{22}	α_{23}	α_{24}	α_{25}	α_{26}	$\varepsilon H, \text{ м}$	$\varepsilon H / H, \%$
Александровский	2266	-8,47	-3,47	-1,48	0,665	0,488	0,826	-2,82	0,184	0,088	0,026	-0,035	-0,176	-0,033	-0,037	± 32	1,3—1,5
Ново-Васюганский	2691	23,55	7,26	-8,93	-2,57	-4,62	10,08	5,11	0,545	0,446	0,986	-0,021	-0,791	-0,238	-0,934	± 52	1,8—2,0

соответственно структурной карте Ново-Васюганского вала с коэффициентами, вычисленными на Александровском валу (табл. 2, первая строка коэффициентов), оказалось, что все искомые локальные формы рельефа поверхности фундамента практически не выделяются, а глубины определяются с ошибкой значительно большей, чем указано в табл. 1 и 2. В связи с этим, согласно третьему условию * корреляционной схемы геологической интерпретации аномалий [1], геологическое строение Александровского и Ново-Васюганского валов неодинаково; геологические данные также свидетельствуют о существенной разнородности структурно-геологического развития этих валов. Для Александровского и Ново-Васюганского валов методом, описанным в статье [6], по гравитационным и магнитным аномалиям построены векторы количественных признаков соответственно N_1 и N_2 . Кроме того, в пределах Западно-Сибирской плиты отобран еще ряд валов, геологическое строение которых сходно либо с Александровским, либо с Ново-Васюганским валами. Сопоставляя векторы признаков аномалий на этих валах с векторами признаков аномалий Александровского и Ново-Васюганского валов, получим, что радиус гиперсферы r_1 с центром в N_1 равен 26 единицам, а радиус гиперсферы r_2 с центром в N_2 — 16 единицам, при этом расстояние между векторами N_1 и N_2 равно 40 единицам. Отсюда видно, что множества векторов, группирующихся

* Если линейные операторы A_1 и A_2 не совпадают с точностью до ε_0 , т. е. если существуют неравенства $|H_1 - A_2 \{ \Delta g_1, \Delta T_1 \}| > \varepsilon_0$, $|H_2 - A_1 \{ \Delta g_2, \Delta T_2 \}| > \varepsilon_0$, то векторы признаков полей $\{ \Delta g_1, \Delta T_1 \}$ и $\{ \Delta g_2, \Delta T_2 \}$ не равны и характеризуют участки земной коры R_1 и R_2 с различным геологическим строением.

соответственно вокруг N_1 и N_2 , являются практически непересекающимися, в связи с чем можно предложить следующий порядок установления степени сходства по геологическому строению какого-либо участка земной коры с Александровским или Ново-Васюганским валами. Для такого участка R^k строится вектор признаков $N^k = (n_1^k, n_2^k, \dots, n_x^k)$ [6], затем определяются расстояния ρ_1 и ρ_2 от конца этого вектора до точек N_1 и N_2 по формуле

$$\rho_i(N^k, N_i) = \sqrt{\sum_{\xi=1}^x (n_{\xi}^k - n_{i\xi})^2}, \quad i = 1, 2.$$

Из величин ρ_1 и ρ_2 выбирается меньшая ρ_φ . Если при этом $\rho_\varphi \leq r_\varphi$, $\varphi = 1, 2$, то исследуемый участок по геологическому строению сходен с областью R_φ (которой соответствует вектор N_φ). Если же $\rho_\varphi > r_\varphi$, то считаем, что по своему геологическому строению область R^k отлична как от области R_1 , так и от области R_2 . В случае $\rho_\varphi \leq r_\varphi$ оператор A_φ (соответствующий набор коэффициентов в табл. 1 и 2) применяется для прогноза глубин и выделения форм рельефа поверхности на области R^k .

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. И. Каратаев. Корреляционная схема линейного прогнозирования структуры и состава земной коры по гравитационным и магнитным аномалиям.— Геол. и геофиз., 1964, № 10.
2. И. С. Березин, Н. П. Жидков. Методы вычислений, т. I. Физматгиз, 1960.
3. Г. Крамер. Математические методы статистики. ИЛ, 1948.
4. Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева. Вычислительные методы линейной алгебры. Физматгиз, 1963.
5. И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шиллов. Коммутативные нормированные кольца. Физматгиз, 1960.
6. Г. И. Каратаев, Ю. М. Гусев, Т. Л. Захарова. К построению корреляционной схемы качественной интерпретации гравитационных и магнитных аномалий (см. настоящий сборник).

Г. Ф. Кузнецов, Е. Г. Тверитин

АВТОМАТИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА ВЫДЕЛЕНИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ МАГНИТНЫХ АНОМАЛИЙ

Визуальное выделение магнитных аномалий, выполняемое интерпретатором при определении параметров возмущающих масс, есть не что иное, как разделение сложного магнитного поля на составляющие его аномалии. Визуально выделяемые аномалии обычно выбираются в относительно спокойном поле, где условно определяемый для них нулевой уровень принимается в виде прямой линии, и рассматриваются как отдельные изолированные аномалии, по которым выполняются все необходимые расчеты. Значения магнитного поля, принимаемого за нулевое, при определении параметров по выделяемым аномалиям не используются, т. е. считается, что данная аномалия, выделенная из сложного поля, и ее остаточное поле (принятое за нулевой фон) можно анализировать независимо друг от друга.

Принцип выделения обособленных, визуально выделяющихся аномалий и выполнения по ним расчетов параметров возмущающих тел используются в практике интерпретации магниторазведочных данных с момента первого применения магнитного метода в разведочных целях и по настоящее время. Основывается этот принцип на аддитивности магнитного поля.

В основе предлагаемой нами методики лежит тот же принцип выделения аномалий, но распространенный на случаи сложных полей. Это достигается прежде всего снятием ряда ограничений, накладываемых обычно на «нулевой уровень».

В предлагаемой методике предусматривается аналитический метод нахождения нулевого уровня выделяемых аномалий, формализованы необходимые понятия и операции, в результате чего представилась возможность разработать алгоритмы для выполнения процесса разделения сложных магнитных полей на электронно-вычислительных машинах.

На основе принципа аддитивности магнитного поля любую аномалию, вызванную одним телом, можно, как известно, путем разложения магнитного момента этого тела на некоторые составляющие представить суммой нескольких аномалий, причем так, что конфигурации этих аномалий могут быть различными, а вычисленные некоторые геометрические параметры по каждой выделенной аномалии будут совпадать и соответствовать исходному телу. В то же время можно подобрать такую группу возмущающих тел, что их суммарная аномалия, полученная на основе принципа суперпозиции магнитного поля, будет иметь вид аномалии, вызванной одним телом, при этом группа тел будет эквивалентна некоторому телу с магнитным моментом, равным векторной сумме магнитных моментов исходной группы. Параметры, вычисленные по суммарной кривой, будут соответ-

ствовать осредненным параметрам данной группы тел. Иными словами, векторная сумма магнитных моментов группы тел определяет положение эквивалентного тела, которое не может находиться за пределами контура, объединяющего группу тел. Это эквивалентное тело называется нами эффективной магнитной массой.

Если одно из тел группы по сравнению с другими будет обладать резко отличным магнитным моментом, то аномалия от этого тела как бы разделится на две аномалии: первая, обусловленная той частью магнитного момента, которая близка к магнитным моментам остальных тел группы, войдет в суммарную аномалию группы тел, вторая же, обусловленная избыточным магнитным моментом по отношению к окружающим телам, будет обособляться на фоне этой суммарной аномалии. Избыточный магнитный момент рассматривается как магнитный момент некоторого самостоятельного тела, которое также называется эффективной магнитной массой. Положение такой эффективной магнитной массы соответствует положению тела с повышенной намагниченностью.

Наложение полей магнитных аномалий друг на друга есть взаимодействие намагниченных тел, которое, согласно основным положениям теории ферромагнетизма, может привести к изменению магнитных свойств этих тел, в результате чего изменится первоначальный вид соответствовавших им магнитных аномалий. Если внести в эту систему взаимодействующих тел дополнительную магнитную массу, то она может привести вновь к изменению магнитных моментов этих тел и соответственно к некоторому перераспределению эффективных магнитных масс. При этом следует иметь в виду, что при взаимодействии намагниченных тел возможна как частичная, так и полная компенсация магнитных моментов этих тел. Следовательно, восстановление вида сложной магнитной аномалии, соответствовавшей первоначальной системе намагниченных тел (без дополнительно внесенной массы), будет невозможно. Отсюда следует, что при разделении сложного магнитного поля на составляющие аномалии принципиально не могут быть выделены те аномалии, которые соответствовали магнитным телам до их взаимодействия, а сама постановка задачи поиска первоначального вида магнитных аномалий была бы ошибочной. Вследствие взаимодействия намагниченных тел сложное магнитное поле соответствует эффективным магнитным массам, которые с большим или меньшим приближением совпадают с намагниченными телами. Следовательно, нужно отказаться от постановки задачи, в которой требуется восстановление первоначального вида магнитных аномалий и полное соответствие тел, выделенных в результате интерпретации, реально существующим телам.

На основании сказанного, задача интерпретации сложного магнитного поля была нами поставлена следующим образом. Сложное магнитное поле необходимо разделить на составляющие его элементарные аномалии и по ним найти некоторые параметры соответствующих им эффективных магнитных масс, которые позволят дать принципиальную картину распределения намагниченных тел магнитного комплекса, обусловившего данное сложное магнитное поле.

Для решения этой задачи сформулированы необходимые условия, позволяющие однозначно разделить сложное поле на составляющие его аномалии и разработать алгоритм для выполнения этого разделения на электронно-вычислительных машинах. Результаты проверки эффективности предложенной методики на ряде теоретических и экспериментальных примеров позволяют утверждать, что если распределение намагниченных тел и магнитные свойства каждого из них таковы, что в любой произвольной области нижнего полупространства график изменения магнитных свойств по линии наблюдения магнитного поля имеет довольно резко выраженный

ступенчатый характер, то, пользуясь этой методикой, можно разделить сложное магнитное поле на элементарные аномалии и определить по ним с погрешностью в среднем до 15% верхние особенности эффективных магнитных масс, отображающих расположение реальных намагниченных тел.

Перейдем к несколько более подробному описанию основных положений методики и реализующего ее алгоритма.

Основной задачей разделения сложного магнитного поля на элементарные аномалии, как уже говорилось выше, является нахождение ее относительного нулевого уровня. Прежде чем перейти к решению задачи по отысканию нулевого уровня, введем несколько определений и прежде всего напомним, какой смысл вкладывают в магниторазведке в понятие нормального поля.

Известно, что за нормальное поле крупных региональных аномалий принимается сумма двух полей — поля однородного намагниченного шара и поля материковых аномалий. В свою очередь, так называемые региональные аномалии обычно принимаются за нормальное поле для аномалий последующих порядков (локальных). (В случае, если площадь региональной аномалии много больше площади локальной аномалии, то, как уже упоминалось выше, закон изменения нормального поля в пределах локальной аномалии считается линейным.) Таким образом, поле более крупной по площади аномалии является нормальным по отношению к более «мелкой» локальной аномалии, находящейся в пределах этой площади. Из этого следует, что вид кривой нормального поля, или относительного нулевого уровня, не может быть более сложным, чем вид кривой самой локальной аномалии.

Так как основным критерием наличия магнитной аномалии является заметное изменение градиентов элементов магнитного поля, то, следовательно, нормальным (нулевым) полем для любой аномалии являются участки поля, где величины изменений градиентов приближаются к нулю, т. е. практически они становятся постоянными. В случае сложного магнитного поля выделение элементарных аномалий производится начиная с наиболее узкой аномалии. Тогда за ее относительный нулевой уровень принимаются непосредственно примыкающие к ней справа и слева участки сложного поля с постоянным горизонтальным градиентом.

Таким образом, задачу разделения сложного поля можно представить в виде процесса последовательного выделения обособленных кривых элементарных аномалий путем нахождения их относительного нулевого уровня и замены соответствующего участка сложной исходной аномальной кривой найденным отрезком относительного нулевого уровня (т. е. вычитанием кривой обособленной аномалии из сложной исходной кривой). В результате таких операций сложное поле представляется серией кривых элементарных аномалий, по которым могут быть вычислены некоторые параметры эффективных магнитных масс.

Введем следующие определения.

1. Сложными магнитными аномалиями будем считать такие аномалии, которые содержат несколько максимумов.

2. Сложность аномальной кривой условимся характеризовать количеством экстремумов (чем больше экстремумов заключает та или иная кривая, тем сложнее аномалия).

3. Элементарными аномалиями будем считать аномалии, аналогичные аномалиям от тел простых форм и имеющих только один максимум.

4. Шириной элементарной аномалии будем считать расстояние между ближайшими точками перегиба, находящимися по обе стороны от максимума.

5. Участок элементарной аномальной кривой, заключающийся между двумя точками перегиба, находящимися по обе стороны от максимума,

назовем апикальной частью аномалии, а участки, непосредственно прилегающие к ней и распространяющиеся до ближайших точек перегиба соседних аномалий или до ближайших прямолинейных участков (аналоги точек перегиба), назовем приапикальными частями аномалии.

6. Эффективной магнитной массой будем называть некоторый объем нижнего полупространства, содержащий в своем контуре или часть тела, или одно обособленное тело, или группу из нескольких тел, обладающий избыточным магнитным моментом по отношению к области, непосредственно его окружающей.

7. Каждая магнитная аномалия, состоящая из одной апикальной и примыкающих к ней двух приапикальных частей, соответствует некоторой эффективной магнитной массе, находящейся в нижнем полупространстве.

8. Магнитное поле на внешних границах приапикальных частей наиболее узкой элементарной аномалии сложной кривой, исходя из приведенного выше понятия нормального поля, является полем относительного нулевого уровня для данной элементарной аномалии.

9. Относительный нулевой уровень в пределах элементарной аномалии описывается некоторой функцией, первая производная которой на отрезке, занимаемом данной элементарной аномалией, меняет знак не более двух раз.

Задачу нахождения нулевого уровня элементарных аномалий можно сформулировать следующим образом. По магнитному полю на внешних границах приапикальных частей выделяемой элементарной аномалии найти продолжение этого поля на всем отрезке, занимаемом этой аномалией. Математически эта задача может быть сформулирована так: для некоторого интервала (a, b) необходимо найти приближенное аналитическое выражение функции $f_{\Sigma}(x)$, если известны численные значения этой функции и ее производных в дискретном ряду точек на концах этого интервала. В такой общей постановке эта задача не имеет единственного решения. Однако пользуясь принятым условием относительной сложности функции, описывающей искомые значения поля нулевого уровня, найти его аналитическое выражение становится возможным с помощью полиномов невысоких степеней. Для аппроксимации нулевого уровня выделяемых элементарных аномалий нами были использованы интерполяционные полиномы Ньютона, Лагранжа, Чебышева, ряды Фурье и некоторые др. При реализации процесса разделения на электронно-вычислительной машине в данном случае нулевой уровень аппроксимируется двумя параболой второго порядка, плавно сопрягающими внешние границы приапикальных частей выделяемых элементарных аномалий.

Обработка на машине сложного поля по описываемой ниже программе выполняется следующим образом. Таблично заданная сложная аномальная кривая, подготовленная для интерпретации, вводится в МОЗУ ЭВМ в виде таблицы чисел x и $f_{\Sigma}(x)$ с неравным шагом. Задание кривой с неравным шагом позволяет интерпретатору наиболее важные участки сложной кривой представлять более детально и одинаковым количеством точек на обособляющихся аномалии, имеющие различные протяженности по профилю.

Табличное представление исходной кривой, осуществляемое с графика магнитного поля, как правило, содержит ошибки, составляющие при вычислении первых и вторых разностей значительные величины и при анализе исследуемого поля существенно искажающие представление о его характере, что ведет к нарушению логической части работающей программы. Чтобы исключить влияние этих погрешностей, программой предусмотрено предварительное сглаживание исходных данных, описываемое ниже.

После выполнения предварительного сглаживания в машине производится логический анализ магнитного поля с точки зрения поиска в нем обособленной наиболее узкой элементарной аномалии, для которой затем

отыскиваются внешние границы ее приапикальных частей. Согласно принятому нами условию о том, что магнитное поле на внешних границах приапикальных частей элементарной аномалии является полем ее относительного нулевого уровня, эти значения поля используются для продолжения его на весь интервал, занимаемый данной элементарной аномалией.

Это достигается следующим образом. На внешних границах приапикальных частей элементарной аномалии выбираются две точки $x_{лл}$ и $x_{пп}$, расположенные соответственно слева и справа от ее эпицентра. Далее отыскиваются два полинома $P_1(x)$ и $P_2(x)$

$$\left. \begin{aligned} P_1(x) &= A_1x^2 + B_1x + C_1; & x_{лл} \leq x \leq \bar{x} \\ P_2(x) &= A_2x^2 + B_2x + C_2; & \bar{x} \leq x \leq x_{пп} \\ \bar{x} &= \frac{x_{пп} + x_{лл}}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

аппроксимирующие, соответственно, левую и правую части относительного нулевого уровня выбранной аномалии.

Коэффициенты полиномов (1) определяются из условий

$$\left. \begin{aligned} P_1(x_{лл}) &= f_{\Sigma}(x_{лл}); \\ P_1'(x_{лл}) &= f'_{\Sigma}(x_{лл}); \\ P_2(x_{пп}) &= f_{\Sigma}(x_{пп}); \\ P_2'(x_{пп}) &= f'_{\Sigma}(x_{пп}); \\ P_1(\bar{x}) &= P_2(\bar{x}); \\ P_1'(\bar{x}) &= P_2'(\bar{x}). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Условия (2) можно переписать в виде системы линейных алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} A_1x_{лл}^2 + B_1x_{лл} + C_1 &= f_{\Sigma}(x_{лл}) \\ 2A_1x_{лл} + B_1 &= f'_{\Sigma}(x_{лл}) \\ A_2x_{пп}^2 + B_2x_{пп} + C_2 &= f_{\Sigma}(x_{пп}) \\ 2A_2x_{пп} + B_2 &= f'_{\Sigma}(x_{пп}) \\ A_1\bar{x}^2 + B_1\bar{x} + C_1 - A_2\bar{x}^2 - B_2\bar{x} - C_2 &= 0 \\ 2A_1\bar{x} + B_1 - 2A_2\bar{x} - B_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Определитель этой системы, имеющий вид

$$\left. \begin{array}{cccccc} x_{лл}^2 & x_{лл} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2x_{лл} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{пп}^2 & x_{пп} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2x_{пп} & 1 & 0 \\ \bar{x}^2 & \bar{x} & 1 & -\bar{x}^2 & -\bar{x} & -1 \\ 2\bar{x} & 1 & 0 & -2\bar{x} & -1 & 0 \end{array} \right\} \quad (4)$$

при $x_{лл} \leq \bar{x} \leq x_{пп}$ не равен нулю и, следовательно, $P_1(x)$ и $P_2(x)$, удовлетворяющие условиям (2), всегда существуют, т. е. система (3) всегда имеет решение. Решение системы (3) выполняется методом Гаусса по схеме главных элементов, в результате чего находятся коэффициенты A_1 , B_1 ,

C_1, A_2, B_2, C_2 и вычисляется нулевой уровень с помощью полинома $P_j(x)$:

$$P_j(x) = \begin{cases} P_1(x), & x_{лл} \leq x \leq \bar{x} \\ P_2(x), & \bar{x} \leq x \leq x_{пп} \end{cases} \quad (5)$$

Далее по формуле

$$f_{\Sigma}(x) - P_j(x) = \left. \begin{matrix} j f_{л}(x), & x_{лл} \leq x \leq x_{пп} \\ j f_{п}(x), & x_{пп} \leq x \leq x_{лл} \end{matrix} \right\} \quad (6)$$

производится выделение элементарной аномалии, а интервал сложного поля, занимаемый этой аномалией, заменяется ее относительным нулевым уровнем $P_j(x)$. Эта замена упрощает на данном участке сложную кривую, так как при этом исключается по меньшей мере один экстремум.

Выделенная элементарная аномалия на занимаемом ею отрезке интерполируется, и вычисляются значения поля этой аномалии в 40 точках. По этим значениям вычисляется ряд Фурье, представленный 14 гармониками:

$$j f_{л}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \quad (7)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} j f_{л}(x(t)) \cos kt dt; \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} j f_{л}(x(t)) \sin kt dt, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= \frac{x_{пп} - x_{лл}}{2\pi} t + \frac{x_{пп} + x_{лл}}{2}; \\ t(x) &= \frac{\pi}{x_{пп} - x_{лл}} (2x - x_{пп} - x_{лл}). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Интегралы вида $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) dt$, участвующие в выражениях для вычисления коэффициентов Фурье, определяются по формуле Симпсона

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) dt = \frac{2\pi}{3n} [\varphi(t_0) + 4(\varphi(t_1) + \varphi(t_3) + \dots + \varphi(t_{n-1})) + 2(\varphi(t_2) + \varphi(t_4) + \dots + \varphi(t_{n-2}) + \varphi(t_n))], \quad (10)$$

где n таково, что $n + 1$ есть число точек, взятых с равным шагом на промежутке интегрирования. В нашем случае $n = 40$; $t_0 = -\pi$; $t_n = \pi$.

Полученное Фурье-разложение используется для вычисления глубины залегания верхней особенности эффективной массы по известной формуле В. К. Иванова, дополненной О. А. Соловьевым:

$$h_k(\omega) = \frac{\ln \frac{|S_z(\omega)| \max \omega}{S_z(\omega)} \cdot \frac{\omega}{2}}{\omega}, \quad (11)$$

где $h_k(\omega)$ — глубины, получаемые для соответствующих «спектральных линий» Фурье-разложения;

$S_z(\omega)$ — «спектральная линия» Фурье-разложения.

Вычислением глубины, подготовкой результатов к выдаче на печать и собственно печатью результатов заканчивается основной цикл работы машины. Далее цикл повторяется (начиная с поиска наиболее узкой из оставшихся элементарных аномалий) до тех пор, пока сложная кривая не приобретет вид одной отдельной элементарной аномалии. На этом и заканчивается работа программы.

Результаты интерпретации введенной аномальной кривой могут быть выданы на печать в виде трех вариантов.

I вариант. Выдается (в виде чисел в количестве 40 значений) элементарная аномалия, вычисленная по формуле (6), причем эти значения, разделенные нулем, вписываются в одну ячейку с соответствующими значениями абсцисс; далее выдаются пять значений глубины залегания верхней особенности эффективной магнитной массы, найденные в процессе промежуточных вычислений; окончательное значение глубины; разность абсцисс точек перегиба; абсциссы точек перегиба (левой и правой) выделяемой элементарной аномалии; коэффициенты Фурье-разложения всех 14 гармоник.

II вариант печати аналогичен первому, но без коэффициентов Фурье.

III вариант. Выдается только одно окончательное значение глубины, вписанное в одну ячейку с абсциссой максимума данной элементарной аномалии.

Приведем несколько более подробное описание блоков программы. Программа состоит из шести блоков, работающих по определенным циклам.

1. Блок настройки. Для удобства пользования и чтобы избежать ошибки, иногда возникающей при определении параметра n , авторами осуществлена автоматическая настройка программы. Для этого достаточно в конец массива $f_{\Sigma}(x)$ поместить перфокарту со служебным кодом 017 7777 7777 7777, который остается неизменным для любых массивов чисел. Блок настройки программы автоматически настраивает ее даже в том случае, если интерпретатором не учтено ограничение длины массивов чисел x и $f_{\Sigma}(x)$, которое указано в инструкции программы, т. е. если профиль задан в виде двух таблиц $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, \dots, x_n$ и $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_k), \dots, f(x_n)$ (где $f(x_k)$, $(1 \leq k \leq n)$, есть значение магнитного поля в точке x_k), а число заданных точек профиля $n > 1000_8$ (или $n > 512_{10}$), то происходит «АВОСТ» в ячейке 6505 (деление на ноль), а после нажатия кнопки пуск «ЦУС» программа настраивается по параметру $n = 1000_8$. Кроме того, в этом блоке производится перевод чисел из десятичной системы счисления в машинный код, вызывается ИС-2 и расширяется рабочее поле — α РП-7001.

2. Блок предварительного сглаживания и вычисления приведенных разностей первого и второго порядков. Как уже указывалось выше, табличное представление исходной кривой содержит ошибки, которые приводят к неправильному ходу работы программы вследствие возникающих «ложных» точек перегиба. Этот блок производит выравнивание всего массива данных, для чего по каждым пяти точкам $x_{k-2}, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}$ (где $k = 3, 4, \dots, n - 2$) строится полином второй степени

$$P(x) = A_k x_r^2 + B_k x_r + C_k, \quad (x_{k-2} \leq x_r \leq x_{k+2}), \quad (12)$$

удовлетворяющий условию

$$S = \sum_{r=k-2}^{k+2} [(A_k x_r^2 + B_k x_r + C_k) - f(x_r)]^2 = \min. \quad (13)$$

Приравнивая частные производные от S по всем коэффициентам A, B, C к нулю

$$\frac{\partial S}{\partial A_k} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial B_k} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial C_k} = 0 \quad (14)$$

и соответствующим образом преобразовывая их, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов A, B и C

$$\left. \begin{aligned} A_k \sum_{r=k-2}^{k+2} x_r^4 + B_k \sum_{r=k-2}^{k+2} x_r^3 + C_k \sum_{r=k-2}^{k+2} x_r^2 &= \sum_{r=k-2}^{k+2} x_r^2 y_r; \\ A_k \sum_{r=k-2}^{k+2} x_r^3 + B_k \sum_{r=k-2}^{k+2} x_r^2 + C_k \sum_{r=k-2}^{k+2} x_r^1 &= \sum_{r=k-2}^{k+2} x_r y_r; \\ A_k \sum_{r=k-2}^{k+2} x_r^2 + B_k \sum_{r=k-2}^{k+2} x_r + C_k \sum_{r=k-2}^{k+2} x_r^0 &= \sum_{r=k-2}^{k+2} y_r. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} \sum_{r=k-2}^{k+2} x_r^4 & \sum_{r=k-2}^{k+2} x_r^3 & \sum_{r=k-2}^{k+2} x_r^2 \\ \sum_{r=k-2}^{k+2} x_r^3 & \sum_{r=k-2}^{k+2} x_r^2 & \sum_{r=k-2}^{k+2} x_r \\ \sum_{r=k-2}^{k+2} x_r^2 & \sum_{r=k-2}^{k+2} x_r & \sum_{r=k-2}^{k+2} 1 \end{vmatrix} = D \quad (16)$$

при $x_{k-2} \leq x_r \leq x_{k+2}$ не равен нулю. Отсюда следует, что система (15) имеет решение, и притом единственное. Решением этой системы определяются коэффициенты A, B и C , вычисляется новое значение $f^*(x_k)$

$$f^*(x_k) = A_k x_k^2 + B_k x_k + C_k, \quad (17)$$

которое заносится в массив новых значений.

В результате опытного использования программы выяснилось, что при достаточно больших x и относительно малом шаге задания исходных данных система (15) оказывается плохо обусловленной. С целью улучшения обусловленности системы (15) точка x_k отображается в нуль, т. е. система решается при следующих значениях x :

$$(x_{k-2} - x_k); (x_{k-1} - x_k); 0; (x_{k+1} - x_k); (x_{k+2} - x_k). \quad (18)$$

После вычисления $f^*(x_k)$ (для всех $k = 3, 4, \dots, n-2$) переходим к вычислению значений поля в крайних точках:

$$\left. \begin{aligned} f^*(x_1) &= A_3 x_1^2 + B_3 x_1 + C_3; \\ f^*(x_2) &= A_3 x_2^2 + B_3 x_2 + C_3; \\ f^*(x_{n-1}) &= A_{n-2} x_{n-1}^2 + B_{n-2} x_{n-1} + C_{n-2}; \\ f^*(x_n) &= A_{n-2} x_n^2 + B_{n-2} x_n + C_{n-2} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

и производим замену исходных значений $f(x_k)$ значениями $f^*(x_k)$.

Как показали результаты первого опробования программы на нескольких примерах, двукратное сглаживание устраняет не очень большие

погрешности достаточно хорошо, что и послужило основанием в стандартном варианте программы применить двукратное сглаживание.

Вычисление приведенных разностей первого и второго порядков осуществляется по формулам

$$f'(x_k) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}; \quad f''(x_k) = \frac{f'(x_{k+1}) - f'(x_k)}{x_{k+2} - x_k}. \quad (20)$$

Однако на некоторых участках профиля, где вторые разности должны быть равными или близкими к нулю, после выполненного предварительного сглаживания иногда наблюдается несоответствие знаков этих вторых разностей истинному виду кривой, что приводит к неправильному ходу процесса разделения. Это несоответствие устраняется приравниванием к нулю разностей первого и второго порядков, если для них выполняются следующие неравенства

$$|f'(x_k)| < \theta'_k \left(\theta'_k = \frac{2\varepsilon}{x_{k+1} - x_k} \right); \quad (21)$$

$$|f''(x_k)| < \theta''_k \left(\theta''_k = \frac{\theta'_{k+1} + \theta'_k}{x_{k+2} - x_k} \right), \quad (22)$$

где ε — погрешность задания $f(x)$ в единицах масштаба графика. При этом нулевым значениям $f''(x)$, описывающим апикальные части аномалии, присваивается знак минус. После вычисления $f'(x)$ и $f''(x)$ управление передается на начало основной программы — в 3-й блок.

3. Блок выделения элементарной аномалии. Сглаженные исходные данные и приведенные в необходимое соответствие их производные в данном блоке подвергаются анализу с целью распознавания элементов аномальной кривой и определения по ним внешних границ приапикальных частей аномалии наименьшей ширины. Для этого «просматриваются» знаки вторых производных. И если на некотором интервале (x_q, x_l) , $(2 \leq q < l \leq n - 2)$

$$\text{sign } f''(x_{q+i}) < 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, l - q, \quad (23)$$

то существуют левая точка перегиба (x_n) в окрестности точки (x_q) и правая точка перегиба (x_n) в окрестности точки x_l , между которыми находится максимум, а если

$$\text{sign } f''(x_{q+i}) > 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, l - q, \quad (24)$$

то существуют x_n в окрестности точки x_q , x_n в окрестности точки x_l и минимум, лежащий между ними.

Так как точки перегиба отыскиваются по смене вторых производных, то при наличии в их окрестности прямолинейных участков они оказываются смещенными в сторону максимума. Уточнение положения этих точек осуществляется делением пополам примыкающих к ним прямолинейных участков.

Прямолинейным участком считается часть кривой, для которой выполняется неравенство

$$\frac{|f'(x_{k+1}) - f'(x_k)|}{f'(x_{k+1})} < \varepsilon^*, \quad \text{где } \varepsilon^* = \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2}{f'(x_{k+1})}. \quad (25)$$

Во избежание «АВОСТА» (деление на нуль) при $f'(x_{k+1}) = 0$ неравенство (25) преобразуется в следующий вид:

$$|f'(x_{k+1}) - f'(x_k)| - |f'(x_{k+1})| \varepsilon_1 < \varepsilon_2. \quad (26)$$

Начало и конец прямолинейного участка, примыкающего к точке перегиба, находятся из условий:

1. Если для предварительно найденной левой точки перегиба

$$\left. \begin{aligned} & \text{sign } f''(x_q) \cdot \text{sign } f''(x_{q+1}) < 0 \text{ и } \text{sign } f''(x_q) > 0, \\ & \text{то выполнение условия} \\ & |f'(x_{j+1}) - f'(x_{j_0})| - |f'(x_{j_0+1})| \varepsilon_1 > \varepsilon_2 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

говорит о том, что x_{j_0+1} ($2 < j_0 < q$) является внешней границей прямолинейного участка, примыкающего к левой точке перегиба.

2. Если для предварительно найденной правой точки перегиба

$$\left. \begin{aligned} & \text{sign } f''(x_{l+1}) > 0, \\ & \text{то выполнение условия} \\ & |f'(x_{i_0}) - f'(x_{i_0+1})| - |f'(x_{i_0})| \varepsilon_1 > \varepsilon_2 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

говорит о том, что i_{0+i} ($l < i_0 < n - 2$) является внешней границей прямолинейного участка, примыкающего к правой точке перегиба.

После этого определяются абсциссы точек перегиба по следующим формулам:

$$x_{\text{л}} = \frac{x_q + x_{j_0+1}}{2}; \quad x_{\text{п}} = \frac{x_{i_0+1} + x_l}{2}, \quad (29)$$

а ширина аномалии — по формуле

$$d_m = x_{\text{п}} - x_{\text{л}}, \quad (30)$$

где m — номер анализируемой аномалии.

Аномалия с наименьшей шириной отыскивается из условий:

1) если $d_m \leq d_{m+1}$, то «запоминается» d_m , 2) если $d_m > d_{m+1}$, «запоминается» d_{m+1} . Кроме того, «запоминаются» все $(x_{\text{п}}, x_{\text{л}}, i_0, j_0)$ индексы, относящиеся к данной аномалии, а m или $m + 1$ заносится в счетчик «просмотренных» в данном цикле аномалий.

Точка $x_{\text{лл}}$ (левая граница выбранной аномалии) определяется как

$$x_{\text{лл}} = \frac{x_{\rho} + x_{\rho+1}}{2}; \quad 2 < \rho < j_0. \quad (31)$$

Если для $f''(x_{\rho})$ и $f''(x_{\rho+1})$ выполняются условия

$$\text{sign } f''(x_{\rho}) < 0; \quad \text{sign } f''(x_{\rho+1}) > 0, \quad (32)$$

то левой границей аномалии является точка перегиба соседней аномалии.

Если же выполняется условие

$$|f'(x_{\rho}) - f'(x_{\rho+1})| - |f'(x_{\rho})| \varepsilon_1 < \varepsilon_2, \quad (33)$$

то левой границей является начало участка поля с постоянным горизонтальным градиентом. Аналогично вычисляется $x_{\text{пп}}$ абсцисса правой внешней границы рассматриваемой аномалии.

После вычислений $x_{\text{лл}}$ и $x_{\text{пп}}$ по интерполяционным формулам Ньютона

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= f(x_k) + (x - x_k) f'(x_k) - (x - x_k)(x - x_{k+1}) f''(x_k); \\ f'(x) &= f'(x_k) + (2x - x_k - x_{k+1}) f''(x_k) \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

находим значения функции и ее первых производных в точках $x_{\text{лл}}$ и $x_{\text{пп}}$, где x_k и x_{k+1} — две абсциссы, между которыми лежит $x_{\text{лл}}$ или $x_{\text{пп}}$.

$$\bar{x} = \frac{x_{пп} + x_{лл}}{2} \quad (35)$$

и проверкой содержимого счетчика числа аномалий, проанализированных в этом цикле, заканчивается работа 3-го блока. При этом, если в счетчике содержится единица, то это означает, что на профиле осталась одна аномалия (региональный фон), по которой вычисление глубин не производится, и в этом случае данная аномалия (фон) выдается на печать, а работа программы на этом заканчивается. Если же в счетчике число больше единицы, то осуществляется переход в следующий блок.

4. Блок вычисления коэффициентов полиномов $P_1(x)$ и $P_2(x)$. Для вычисления коэффициентов полиномов $P_1(x)$ и $P_2(x)$ работой предыдущего блока подготовлены все необходимые данные, а именно: вычислены $f(x_{лл})$, $f'(x_{лл})$, $f(x_{пп})$, $f''(x_{пп})$ и найдена точка \bar{x} , определяемая по (35). Вычисление коэффициентов сводится, как уже указывалось выше, к решению системы линейных алгебраических уравнений (3), для чего по подготовленным данным формируется эта система и методом Гаусса по схеме главных элементов находится ее решение. После получения значений вычисляемых коэффициентов управление передается в следующий блок.

5. Блок вычисления верхней особенности намагниченной массы. В этом блоке согласно выражению (5) вычисляется нулевой уровень с помощью полиномов $P_1(x)$ для интервала от $x_{лл}$ до \bar{x} и $P_2(x)$ для интервала от \bar{x} до $x_{пп}$, а затем находятся разности по формуле (6), т. е. из суммарного поля вычитается поле нулевого уровня. Разности вычисляются для интервала $(x_{лл}, x_{пп})$ с шагом

$$\Delta x = \frac{x_{пп} - x_{лл}}{40}, \quad (36)$$

т. е. в 40 точках, для чего первоначально заданные значения поля в данном участке профиля $f(x)$ интерполируются по соответствующей формуле Ньютона с шагом Δx так, что $x_p = x_{лл} + p\Delta x$, т. е.

$$f(x_p) = f(x_k) + (x_p - x_k)f'(x_k) + (x_p - x_k)(x_p - x_{k+1})f''(x_k), \quad p = 1, 2, \dots, 40, \quad (37)$$

где x_k и x_{k+1} — две абсциссы заданной таблицы, между которыми лежит точка x_p . Таким образом, в результате описанных операций выделена аномалия, которая представлена теперь таблицей из 40 значений. После получения этой таблицы аномалия разлагается в ряд Фурье на 14 гармоник и по формуле (11) вычисляется глубина до возмущающей массы.

6. Блок замены элементарной аномалии ее нулевым уровнем. Для выполнения этой операции на интервале $(x_{лл}, x_{пп})$, где обособлена элементарная аномалия, производится перевычисление нулевого уровня с равным шагом, причем число найденных точек равно числу точек, которыми была задана исходная кривая на этом интервале. После этого вычисленные значения нулевого уровня засылаются туда, где хранились значения обособляющейся аномалии, и тем самым на соответствующем участке кривой производится замена этой аномалии ее нулевым уровнем. После этого управление передается на начало 3-го блока.

Предложенная программа очень удобна при практическом ее использовании — для обработки профиля магнитного поля достаточно задать два массива чисел x и $f(x)$, а также служебный код в конце $f(x)$. Последний служит для автоматической настройки программы по параметру, соответствующему введенным исходным данным. В настоящей программе существует ограничение для количества исходных данных, а именно — каждый массив не должен содержать более 512_{10} (1000_8) чисел. Однако это требование не

является обязательным и в случае его невыполнения происходит автоматическая настройка программы на обработку части профиля, представленной первыми 512 значениями поля.

При задании исходных данных с графика сложного магнитного поля нужно руководствоваться следующим правилом. Каждая аномалия должна быть задана 9—13 точками: одна точка в максимуме, две — в точках перегиба, две — в минимумах (в случае их отсутствия — в концах прямолинейных участков, примыкающих к аномалии) и по одной-две точкам — между каждыми двумя соседними. При этом численные значения аномалии в выбранных точках должны подчиняться следующему условию: в приапикальных частях аномалии разности соседних значений должны возрастать до точек перегиба, а в апиальной части — убывать в направлении к максимуму. Выполнение этого условия обеспечивает правильный ход процесса разделения.

Интерпретатор имеет возможность осуществить «самоконтроль» задания исходных данных. Для этого после предварительной подготовки профиля машиной нужно вывести на печать таблицу, в которой содержится вся необходимая информация: в первой колонке — знаки вторых производных, во второй — знаки чисел $f(x)$, в третьей — знаки порядков чисел $f(x)$, в четвертой и пятой — порядок чисел $f(x)$, в четырех следующих — нормализованные числа $f(x)$, следующая одна колонка — порядок чисел x , четыре последние колонки — нормализованные числа x .

Величина шага задания профиля должна быть на порядок выше допускаемой погрешности задания $f(x)$ в масштабе графика. В стандартном варианте программы предусмотрено задание чисел в см, а $f(x)$ — в мм. Допускаемая погрешность задания $f(x)$ принята равной 0,25 мм.

При задании кривой в виде таблицы рекомендуется сглаживать визуально обнаруживаемые «шероховатости».

Эффективность методики разделения сложных магнитных аномалий и точность соответствия вычисленных по выделенным аномалиям глубин до возмущающих масс с глубинами залегания исходных тел были проверены на нескольких примерах. В качестве модели были взяты системы магнитных тел различных форм и размеров, расположенные так, что аппроксимировали двухэтажные распределения этих тел.

В результате интерпретации были случаи, когда группе, например, из трех тел соответствуют четыре особенности, а из одного тела — две особенности. Некоторые же тела оказались невыделенными. Это вызвано взаимодействием магнитных масс, различием их магнитных свойств, что приводит к полной или частичной компенсации магнитных моментов и к образованию эффективных масс, отличных от фактических. Однако выделенные тела принципиально отражают картину распределения исходных тел, причем вычисленные глубины с достаточной точностью соответствуют положению тел первого этажа, тела второго этажа отыскиваются уже грубее, что вполне закономерно. Меньшая точность для второго этажа объясняется уменьшающейся разрешимостью магнитного метода с удалением магнитных объектов и накапливающейся погрешностью разделения аномалий. Однако если при построении геологических границ вычисленные глубины подвергать статистическому анализу, то предыдущее замечание несущественно.

В настоящее время исследуются возможности усовершенствования предложенной программы, и главным образом для решения задачи получения большей информации из введенного в обработку магнитного поля.

В заключение пользуемся случаем выразить благодарность сотруднику Института математики СО АН СССР В. И. Шмыреву за помощь, оказанную в работе.

О. А. Соловьев

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СХЕМ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В МАГНИТОРАЗВЕДКЕ И ГРАВИРАЗВЕДКЕ

В статье рассмотрены величины погрешностей некоторых вычислительных схем, используемых в практике обработки наблюдаемых полей. Пусть на прямой x ($-\infty < x < \infty$) задана некоторая непрерывная функция $U(x)$ и требуется вычислить следующий определенный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} U(x) d(x), \quad (1)$$

для которого

$$\int_{-\infty}^{\infty} |U(x)| dx < \infty.$$

Интеграл можно вычислить по квадратурной формуле

$$\Delta x \sum_{n=-\infty}^{\infty} U(n\Delta x). \quad (2)$$

Определим погрешности этой квадратурной формулы, пользуясь известной формулой суммирования Пуассона:

$$\begin{aligned} \Delta x \sum_{n=-\infty}^{\infty} U(n\Delta x) &= \Delta x \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x) \delta(x - n\Delta x) dx = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x) \delta\left(\frac{x}{\Delta x} - n\right) dx = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x) \delta\left(\frac{2\pi x}{\Delta x} - 2\pi n\right) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} U(x) \left[2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{2\pi x}{\Delta x} - 2\pi n\right) \right] dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} U(x) dx + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x) \cos \frac{2\pi nx}{\Delta x} dx. \end{aligned} \quad (3)$$

Аналогичное выражение можно получить и для непрерывной функции $U(x, y)$, интегрируемой на плоскости:

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta y \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} U(n\Delta x, k\Delta y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x, y) dx dy = \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x, y) \cos \frac{2\pi n x}{\Delta x} dx dy = \\ &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x, y) \cos \frac{2\pi k y}{\Delta y} dx dy = \\ &= 4 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x, y) \cos \frac{2\pi n x}{\Delta x} \cos \frac{2\pi k y}{\Delta y} dx dy. \end{aligned} \quad (4)$$

1. Пусть теперь $U(x)$ — некоторая потенциальная функция, тогда

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \Delta x \sum_{n=-\infty}^{\infty} U(n\Delta x) - \int_{-\infty}^{\infty} U(x) dx = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x) \cos \frac{2\pi n x}{\Delta x} dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_0(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi \cos \frac{2\pi n x}{\Delta x} dx}{\xi^2 + (x - \xi)^2} = \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{2\pi n \zeta}{\Delta x}} \int_{-\infty}^{\infty} U_0(\xi) \cos \frac{2\pi n \xi}{\Delta x} d\xi. \end{aligned} \quad (5)$$

Следовательно,

$$|\Delta_1| \leq \frac{e^{-\frac{\pi \zeta}{\Delta x}}}{sh \frac{\pi \zeta}{\Delta x}} \int_{-\infty}^{\infty} |U_0(\xi)| d\xi. \quad (6)$$

Здесь через $U_0(\xi)$ мы обозначили функцию, определенную на уровне ζ , близком к верхней особенности потенциального поля.

2. Аналогично можно определить и следующую погрешность:

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \Delta x \sum_{n=-\infty}^{\infty} U^2(n\Delta x) - \int_{-\infty}^{\infty} U^2(x) dx = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U^2(x) \cos \frac{2\pi n x}{\Delta x} dx = \\ &= \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_0(\xi_1) d\xi_1 \int_{-\infty}^{\infty} U_0(\xi_2) d\xi_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi \cos \frac{2\pi n x}{\Delta x} dx}{[\xi^2 + (x - \xi_1)^2][\xi^2 + (x - \xi_2)^2]}. \end{aligned} \quad (7)$$

Отсюда

$$|\Delta_2| \leq \frac{2e^{-\frac{\pi \zeta}{\Delta x}}}{sh \frac{\pi \zeta}{\Delta x}} \int_{-\infty}^{\infty} U_0^2(\xi) d\xi. \quad (8)$$

3. При пересчете потенциальной функции $U(x)$ на высоту h в практике часто пользуются квадратурной формулой

$$\tilde{U}_h(0) = \frac{\Delta x}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} U(n\Delta x) \frac{h}{h + (n\Delta x)^2}. \quad (9)$$

Отсюда ошибка между вычисленной величиной $\tilde{U}_h(0)$ и действительной равна

$$\begin{aligned} \Delta_h(0) &= \tilde{U}_h(0) - U_h(0) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x) \frac{h}{h^2 + x^2} \cos \frac{2\pi n x}{\Delta x} dx = \\ &= \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_0(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h}{h^2 + x^2} \frac{\xi}{\xi^2 + (x - \xi)^2} \cos \frac{2\pi n x}{\Delta x} dx \end{aligned} \quad (10)$$

и

$$|\Delta_h(0)| \leq \frac{e^{-\frac{\pi \zeta}{\Delta x}}}{\pi s h} \frac{\pi \zeta}{\Delta x} \frac{\zeta}{\zeta^2 - h^2} \int_{-\infty}^{\infty} |U_0(\xi)| d\xi + \frac{e^{-\frac{\pi x}{\Delta x}}}{s h} \frac{\pi h}{\Delta x} \frac{|U_{-h}(0)| + |U_h(0)|}{2} \quad (11)$$

(в вычислении $|\Delta_h(0)|$ нами принято, что $h < \zeta$).

4. Рассматриваем теперь ошибку в вычислении комплексно-сопряженной функции $V(0)$:

$$\tilde{V}(0) = \frac{\Delta x}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} U(n\Delta x) \frac{1}{n\Delta x}. \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= \tilde{V}(0) - V(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x) \frac{1}{x} \cos \frac{2\pi n x}{\Delta x} dx = \\ &= \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_0(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} \frac{\xi}{\xi^2 + (x - \xi)^2} \cos \frac{2\pi n x}{\Delta x} dx. \end{aligned} \quad (13)$$

Отсюда

$$|\Delta(0)| \leq \frac{e^{-\frac{\pi \zeta}{\Delta x}}}{\pi \zeta s h} \frac{\pi \zeta}{\Delta x} \int_{-\infty}^{\infty} |U_0(\xi)| d\xi. \quad (14)$$

Отметим, что при использовании формулы (12) член при $n = 0$ нужно принимать равным $\frac{\partial U(x)}{\partial x}$.

5. Рассмотрим теперь погрешности, возникающие при вычислении спектральной функции по квадратурной формуле (2).

Итак, пусть задана некоторая потенциальная функция $U(x)$. Определяем для нее спектральную функцию

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} U(n\Delta x) e^{i\omega n \Delta x}. \quad (15)$$

Очевидно, что $S(\omega)$ будет функцией периодической — с периодом, равным $\frac{2\pi}{\Delta x}$. Если спектр $S(\omega)$ ограничить интервалом $\frac{\pi}{\Delta x}$ и сделать от $S(\omega)$ обратное преобразование, получим некоторую функцию $\tilde{U}(x)$, которую можно записать в виде

$$\tilde{U}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\Delta x}} d\omega \left[\Delta x \sum_{n=-\infty}^{\infty} U(n\Delta x) \cos \omega(x - n\Delta x) \right]. \quad (16)$$

Полученная таким образом функция $\tilde{U}(x)$ обладает рядом интересных свойств. Прежде всего, $U(x)$ является целой функцией и, кроме того, в узлах $n\Delta x$ $\tilde{U}(x) = U(x)$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}(x) dx = \Delta x \sum_{n=-\infty}^{\infty} U(n\Delta x); \quad (17)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}^2(x) dx = \Delta x \sum_{n=-\infty}^{\infty} U^2(n\Delta x). \quad (18)$$

Разность между $\tilde{U}(x)$ и $U(x)$ можно вычислить по формуле

$$\begin{aligned} \Delta(x) = \tilde{U}(x) - U(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2\Delta x}}^{\frac{\pi}{2\Delta x}} d\omega \left[\int_{-\infty}^{\infty} U(t) \cos \omega(x-t) dt + \right. \\ &\left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(t) \cos \omega(x-t) \cos \frac{2\pi n t}{\Delta x} dt \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Учитывая, что

$$U(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi U_0(\xi) d\xi}{\xi^2 + (t - \xi)^2}$$

окончательно получаем

$$\Delta(x) = \frac{\sin \frac{\pi x}{\Delta x}}{\pi} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U_0(\xi)}{\sin \frac{\pi}{\Delta x} (\xi + i\zeta)} \cdot \frac{1}{x - (\xi - i\zeta)} d\xi. \quad (20)$$

Таким образом,

$$|\Delta(x)| \leq \frac{1}{\pi} \frac{1}{\zeta \operatorname{sh} \frac{\pi \zeta}{\Delta x}} \int_{-\infty}^{\infty} U_0(\xi) |d\xi|. \quad (21)$$

В частности, для аномалии $U(x)$ от простого полюса

$$\tilde{U}(x) = \frac{\zeta}{\zeta^2 + x^2} + \frac{x}{\zeta^2 + x^2} \cdot \frac{\sin \frac{\pi x}{\Delta x}}{\operatorname{sh} \frac{\pi \zeta}{\Delta x}}. \quad (22)$$

На основании выражения (16) легко получить известную формулу Ренбоу для аналитического продолжения потенциальной функции в нижнее полупространство:

$$\begin{aligned} \tilde{U}(0) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\Delta x}} e^{h\omega} d\omega \left[\Delta x \sum_{n=-\infty}^{\infty} U(n\Delta x) \cos \omega(n\Delta x) \right] = \\ &= \frac{\Delta x}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} U(n\Delta x) \left[\frac{h}{h^2 + n^2 \Delta x^2} \left((-1)^n e^{\frac{\pi h}{\Delta x}} - 1 \right) \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

Ясно, что формула Ренбоу дает аналитическое продолжение $\tilde{U}(x)$, а не $U(x)$.

Воспользовавшись выражением (15), выводим для двух функций $U_1(x)$ и $U_2(x)$ соотношения:

$$S_1(\omega) = \frac{\Delta x}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_1(n\Delta x) e^{i\omega n\Delta x};$$

$$S_2(\omega) = \frac{\Delta x}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_2(k\Delta x) e^{i\omega k\Delta x}.$$

Отсюда

$$2\pi \int_{-\frac{\pi}{\Delta x}}^{\frac{\pi}{\Delta x}} S_1(\omega) \overline{S_2(\omega)} d\omega = \Delta x \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_1(n\Delta x) U_2(n\Delta x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}_1(x) \tilde{U}_2(x) dx. \quad (24)$$

Выражение (24) может служить основой для анализа других вычислительных схем, когда функции определяются на равномерной сети дискретных точек.

Используя формулу (4), можно определить погрешности вычисления определенных интегралов по рассмотренной квадратурной формуле и для функций, заданных на плоскости.

Теперь рассмотрим, какие погрешности могут возникнуть при использовании квадратурной формулы (2), если ограничиться конечным числом членов. Проследим погрешности на примере гравитационной аномалии Δg .

Итак, пусть гравитационная аномалия Δg вызвана некоторым двухмерным телом, ограниченным в вертикальной плоскости.

Тогда

$$\Delta g(x) = 2k \iint_D \sigma(\xi, \zeta) \frac{\zeta}{\zeta^2 + (x + \xi)^2} d\xi d\zeta, \quad (25)$$

где D — область, занимаемая возмущающим телом;

ξ, ζ — координаты возмущающего тела;

σ — избыточная плотность тела, $\sigma > 0$.

Начало координат в формуле (25) принято в некоторой точке N , выбранной так, что вертикальная прямая, проходящая через нее, расположена вне возмущающего тела.

Таким образом,

$$\begin{aligned} \Delta g^2(x) &\leq k^2 \iint_D \sigma(\xi, \zeta) d\xi d\zeta \iint_D \sigma(\xi, \zeta) \frac{\zeta^2}{[\zeta^2 + (x + \xi)^2]^2} d\xi d\zeta \leq \\ &\leq 4k^2 \iint_D \sigma(\xi, \zeta) d\xi d\zeta \iint_D \sigma(\xi, \zeta) \frac{\zeta}{\zeta^2 + \xi^2} \cdot \frac{\zeta}{\zeta^2 + x^2} d\xi d\zeta. \end{aligned} \quad (26)$$

Предположим, что все члены в формуле (2), расположенные справа от точки N , отсутствуют. Следовательно, дополнительная погрешность, которую мы вносим этой операцией в вычисление $\int_{-\infty}^{\infty} \Delta g^2(x) dx$, будет определяться неравенством

$$\begin{aligned} \Delta x \sum_{n=0}^{\infty} \Delta g^2(n\Delta x) &\leq \\ &\leq 4k^2 \iint_D \sigma(\xi, \zeta) d\xi d\zeta \iint_D \sigma(\xi, \zeta) \frac{\zeta}{\zeta^2 + \xi^2} \left[\Delta x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta}{\zeta^2 + (n\Delta x)^2} \right] d\xi d\zeta. \end{aligned} \quad (27)$$

Выражение, заключенное в квадратных скобках, можно, исходя из (3), преобразовать:

$$\begin{aligned} \Delta x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi}{\xi^2 + (n\Delta x)^2} &= \int_0^{\infty} \frac{\xi}{\xi^2 + x^2} dx + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\xi}{\xi^2 + x^2} \cos \frac{2\pi n x}{\Delta x} dx = \\ &= \frac{\pi}{2} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{2\pi n \xi}{\Delta x}} \right] = \frac{\pi}{2} \left[1 + \frac{e^{-\frac{\pi \xi}{\Delta x}}}{\operatorname{sh} \frac{\pi \xi}{\Delta x}} \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \Delta x \sum_{n=0}^{\infty} \Delta g^2(n\Delta x) &\leq 2k\pi \iint_D \sigma(\xi, \zeta) d\xi d\zeta k \iint_D \sigma(\xi, \zeta) d\xi d\zeta \frac{\xi}{\xi^2 + \xi^2} \left[1 + \frac{e^{-\frac{\pi \xi}{\Delta x}}}{\operatorname{sh} \frac{\pi \xi}{\Delta x}} \right] \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \Delta g(N) \left[1 + \frac{e^{-\frac{\pi \xi_1}{\Delta x}}}{\operatorname{sh} \frac{\pi \xi_1}{\Delta x}} \right] \int_{-\infty}^{\infty} \Delta g(x) dx, \end{aligned} \quad (29)$$

где ξ_1 — глубина до верхней границы тела.

Пусть теперь аномалию $\Delta g(x)$ необходимо пересчитать на некоторую высоту h по квадратурной формуле (2), ограничиваясь членом $\frac{N}{\Delta x}$. Тогда погрешность, которая возникает в вычислении Δg_h , можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta \Delta g_h(0) &= \frac{\Delta x}{\pi} \sum_{n=\frac{N}{\Delta x}}^{\infty} \Delta g(n\Delta x) \frac{h}{h^2 + (n\Delta x)^2} = \frac{1}{\pi} \int_N^{\infty} \Delta g(x) \frac{h}{h^2 + x^2} dx + \\ &+ \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_N^{\infty} \Delta g(x) \frac{h}{h^2 + x^2} \cos \frac{2\pi n x}{\Delta x} dx. \end{aligned} \quad (30)$$

Если $3\Delta x < \xi$, то значением второго интеграла в формуле (30) можно пренебречь, так как его величина в этом случае составит десятые процента от первого интеграла. Следовательно,

$$\begin{aligned} [\delta \Delta g_h(0)]^2 &\leq \frac{1}{\pi^2} \int_N^{\infty} \Delta g^2(x) dx \int_N^{\infty} \frac{h}{[h^2 + x^2]^2} dx \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{h}{h^2 + N^2} \int_N^{\infty} \Delta g^2(x) dx \leq \\ &\leq \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{h^2}{h^2 + N^2} \Delta g(N) \int_{-\infty}^{\infty} \Delta g(x) dx, \end{aligned} \quad (31)$$

и ошибка в вычислении $\Delta g_h(0)$ с увеличением N уменьшается.

Таким образом, при использовании квадратурной формулы (2) при уменьшении Δx ошибки уменьшаются по экспоненциальному закону, а при увеличении N — по степенному закону.

В заключение отметим, что для каждого Δx существует определенный класс функций $M(\Delta x)$, для них квадратурная формула (2) при вычислении определенных интегралов дает точное значение. К классу $M(\Delta x)$ относятся все функции, у которых спектральная функция имеет протяженность по оси ω меньше $\frac{\pi}{\Delta x}$. Кроме того, к этому же классу $M(\Delta x)$ (как следствие из формулы суммирования Пуассона) относятся различные ступенчатые функ-

ции с основанием ступеней, равным Δx , и различные линейные комбинации этих функций со взаимными операциями сдвига. Пользуясь формулой суммирования Пуассона, можно также показать, что все функции, принадлежащие классу $M(\Delta x)$ остаются в этом же классе при различных линейных преобразованиях типа свертки. В частности, отсюда следует, что аномалии Δg , Z_a и их производные от различной комбинации прямоугольных тел, имеющих основание Δx , постоянную плотность и интенсивность намагничения по горизонтали, относятся к классу $M(\Delta x)$. Кроме того, различные методы сглаживания этих аномалий, осуществляемые интегральными преобразованиями типа свертки, оставляют полученные аномалии в классе $M(\Delta x)$.

Аналогично можно построить класс функций $M(\Delta x)$ и на плоскости.

Н. Н. Черная, А. В. Черный

**ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ
РАЗЛОЖЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО И МАГНИТНОГО ПОЛЕЙ
ПО СФЕРИЧЕСКИМ ФУНКЦИЯМ
НА ЭЛЕКТРОННО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИНАХ**

При изучении фигуры земли и глубинного строения недр часто используется разложение гравитационного или магнитного потенциала U по сферическим функциям

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n (a_{ni} \cos i\lambda + b_{ni} \sin i\lambda) P_n^i(\sin \varphi),$$

где φ, λ — географические координаты;
 $P_n(\sin \varphi)$ — главный сферический многочлен;

$$P_n^i(\sin \varphi) = \frac{d^i P_n(\sin \varphi)}{d(\sin \varphi)^i} \cdot \cos^i \varphi.$$

В настоящей статье рассматриваются алгоритмы вычисления коэффициентов a_{ni} и b_{ni} в разложении по сферическим многочленам некоторой функции, заданной на сфере в узлах либо регулярной, либо нерегулярной сети. Приводятся также оценки этих коэффициентов.

1. Вычисление коэффициентов a_{ni} и b_{ni} по кубатурным формулам. Пусть на сфере $D = \left\{ -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq \lambda \leq 2\pi \right\}$ радиуса R в географической системе координат задана функция $f(\varphi, \lambda)$, являющаяся элементом гильбертова пространства, т. е. $f(\varphi, \lambda) \in L_2$. Требуется найти элемент $S_m(\varphi, \lambda)$ наилучшего приближения к $f(\varphi, \lambda) \in L_2$ в смысле метрики пространства L_2 в линейном подпространстве $H_m(S_m)$ гильбертова пространства $H_m \subset L_2$, порожденном системой основных сферических многочленов степени m .

Запишем систему основных сферических многочленов степени m :
(1) главный сферический многочлен

$$\Psi_{m0}(\varphi, \lambda) = P_m(\sin \varphi) = \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m (\sin^2 \varphi - 1)^m}{d(\sin \varphi)^m},$$

который можно переписать, воспользовавшись формулой бинома и произ-

ведя дифференцирование, в виде

$$\Psi_{m0}(\varphi, \lambda) = \sum_{k=0}^{E\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{(-1)^k (2m-2k)!}{2^m k! (m-k)! (m-2k)!} \sin^{m-2k} \varphi, \quad (1)$$

где символ $E\left[\frac{m}{2}\right]$ означает целую часть числа $\frac{m}{2}$;

(2) присоединенные многочлены m -й степени

$$\begin{aligned} \Psi_{mn}(\varphi, \lambda) &= \cos n\lambda \cos^m \varphi \frac{d^n P_m(\sin \varphi)}{d(\sin \varphi)^n} = \\ &= \cos n\lambda \cos^m \varphi \sum_{k=0}^{E\left[\frac{m-n}{2}\right]} \frac{(-1)^k (2m-2k)!}{2^m k! (m-k)! (m-2k-n)!} \sin^{m-2k-n} \varphi \end{aligned} \quad (2)$$

и

$$\Omega_{mn}(\varphi, \lambda) = \sin n\lambda \cos^m \varphi \sum_{k=0}^{E\left[\frac{m-n}{2}\right]} \frac{(-1)^k (2m-2k)!}{2^m k! (m-k)! (m-2k-n)!} \sin^{m-2k-n} \varphi. \quad (3)$$

Тогда многочлен наилучшего приближения $S_m^*(\varphi, \lambda)$ будет

$$S_m(\varphi, \lambda) = \sum_{n=0}^m \sum_{i=0}^n [a_{ni} \Psi_{ni}(\varphi, \lambda) + b_{ni} \Omega_{ni}(\varphi, \lambda)],$$

где коэффициенты a_{ni} и b_{ni} , как это следует из общей теории [1], находятся по формулам:

$$\begin{aligned} a_{ni} &= \frac{2n+1}{2\pi} \cdot \frac{(n-i)!}{(n+i)!} \int_D f(\varphi, \lambda) \cdot \Psi_{ni}(\varphi, \lambda) d\sigma; \\ a_{n0} &= \frac{2n+1}{4\pi} \int_D f(\varphi, \lambda) \cdot \Psi_{n0}(\varphi, \lambda) d\sigma; \\ b_{ni} &= \frac{2n+1}{2\pi} \cdot \frac{(n-i)!}{(n+i)!} \int_D f(\varphi, \lambda) \Omega_{ni}(\varphi, \lambda) d\sigma; \\ b_{n0} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

($d\sigma = R^2 \cos \varphi d\varphi d\lambda$ — элемент поверхности сферы радиуса R). Величина наилучшего приближения определится по формуле

$$\begin{aligned} \delta_m^2 &= \|f - S_m\|^2 = (f, f) - (S_m, f) = \\ &= \int_D f^2(\varphi, \lambda) d\sigma - \sum_{n=0}^m \frac{4\pi}{2n+1} a_{n0}^2 - \sum_{n=1}^m \sum_{i=1}^n \frac{2\pi}{2n+1} \frac{(n+i)!}{(n-i)!} (a_{ni}^2 + b_{ni}^2). \end{aligned} \quad (5)$$

В большинстве случаев интегралы (4), (5) не выражаются через элементарные функции, поэтому приходится прибегать к их приближенному вычислению.

Пусть функция $f(\varphi, \lambda)$ задана по регулярной сети в конечном числе точек $t_\tau = \{\varphi, \lambda_\tau\}$ пространства D и имеет конечные частные производные по φ и λ вплоть до 4-го порядка и конечную смешанную производную 8-го порядка. Тогда двойные интегралы (4) и (5) могут быть вычислены приближенно по одной из наиболее простых, но дающих удовлетворительную

точность формул численного интегрирования замкнутого типа *. Разобьем отрезки $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и $[0, 2\pi]$ соответственно на q и r равных частей длины $h = \frac{\pi}{2q} = \frac{2\pi}{2r}$ и обозначим значения подынтегральной функции в соответствующих точках области D через $g(0, 0) = f(0, 0) \Psi_{ni}(0, 0)$, $g(1, 0) = f(1, 0) \Psi_{ni}(1, 0)$, \dots , $g(k, 0) = f(k, 0) \Psi_{ni}(k, 0)$, \dots , $g(0, j) = f(0, j) \Psi_{ni}(0, j)$, \dots , $g(2q, 2r) = f(2q, 2r) \Psi_{ni}(2q, 2r)$ ** так, что

$$g(i, j) = g\left(\frac{i\pi}{q}, \frac{j\pi}{r}\right), \quad i = 0, 1, 2, \dots, q; \quad j = 0, 1, 2, \dots, r.$$

Применяя повторно обобщенную формулу Симпсона к внешнему и внутреннему интегралам, получим

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\pi} g(\varphi, \lambda) d\lambda = & \frac{\pi^2}{18qr} \{g(0, 0) + g(0, 2r) + g(2q, 0) + g(2q, 2r) + \\ & + 16 \sum_{k=1}^q \sum_{j=1}^r g(2k-1, 2j-1) + 8 \left[\sum_{k=1}^q \sum_{i=1}^{r-1} g(2k-1, 2j) + \right. \\ & + \left. \sum_{k=1}^{q-1} \sum_{j=1}^r g(2k, 2j-1) \right] + 4 \left[\sum_{k=1}^{q-1} \sum_{j=1}^{r-1} g(2k, 2j) + \sum_{k=1}^q g(2k-1, 0) + \right. \\ & + \left. \sum_{k=1}^q g(2k-1, 2r) + \sum_{j=1}^r g(0, 2j-1) + \sum_{j=1}^r g(2q, 2j-1) \right] + \\ & + 2 \left[\sum_{k=1}^{q-1} g(2k, 0) + \sum_{k=1}^{q-1} g(2k, 2r) + \sum_{j=1}^{r-1} g(0, 2j) + \sum_{j=1}^{r-1} g(2q, 2j) \right] \} + R_m. \end{aligned}$$

Величина остаточного члена R_m оценивается по формуле

$$R_m = - \left\{ \frac{\pi^6}{2^4 45 q^4} \frac{\partial^4 g(\varphi_1, \lambda_1)}{\partial \varphi^4} + \frac{\pi^6}{45 r^4} \frac{\partial^4 g(\varphi_2, \lambda_2)}{\partial \lambda^4} + \frac{\pi^{10}}{2^5 45^2 q^4 r^4} \frac{\partial^8 g(\varphi_3, \lambda_3)}{\partial \varphi^4 \partial \lambda^4} \right\},$$

где $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi_i \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \lambda_i \leq 2\pi$, $i = 1, 2, 3$. Приведенная кубатурная формула позволяет найти приближенные значения a_{ni} , b_{ni} и δ_m .

Пусть функция $f(\varphi, \lambda)$ задана в узлах t_τ нерегулярной сети и имеет непрерывные частные производные по φ и λ 1-го порядка на множестве D . Разобьем множество D на N непересекающихся сферических прямоугольников

$$\Delta\sigma_{kj} = \{\varphi_k \leq \varphi \leq \varphi_{k+1}, \lambda_j \leq \lambda \leq \lambda_{j+1}\}, \quad \Delta\sigma_{kj} \cap \Delta\sigma_{pl} = 0, \quad k \neq p, \quad j \neq l$$

так, чтобы в центре каждого из них было известно значение функции. Принимая в пределах каждого сферического прямоугольника $\Delta\sigma_{pj} f\left(\varphi_{p+\frac{1}{2}}, \lambda_{j+\frac{1}{2}}\right) = f(t_\tau) = \text{const}$, найдем приближенные значения интегралов в (4)

и (5). Тогда, например, значение a_{ni} примет вид:

$$a_{ni} = \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-i)!}{(n+i)!} R^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\pi} f(\varphi, \lambda) \Psi_{ni}(\varphi, \lambda) \cos \varphi d\lambda \approx$$

* Формула численного интегрирования называется формулой замкнутого типа, если концы промежутка интегрирования являются узлами интерполирования.

** При вычислении b_{nk} функция $g(i, j)$ равна $g(i, j) = f(i, j) \cdot \Omega_{nk}(i, j)$.

$$\begin{aligned}
&\approx \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-i)!}{(n+i)!} R^2 \sum_{\tau=1}^N \sum_{k=0}^E \left[\frac{n-i}{2} \right] \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k! (n-k)! (n-2k-i)!} f(t_\tau) \times \\
&\quad \times \left[\int_{\lambda_j}^{\lambda_{j+1}} \cos i\lambda d\lambda \int_{\varphi_p}^{\varphi_{p+1}} \cos^{n+1} \varphi \sin^{n-2k-i} \varphi d\varphi \right]_\tau = \\
&= \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-i)!}{(n+i)!} R^2 \sum_{\tau=1}^N \sum_{k=0}^E \left[\frac{n-i}{2} \right] \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k! (n-k)! (n-2k-i)!} f(t_\tau) \times \\
&\quad \times \left[\frac{1}{i} (\sin i\lambda_{j+1} - \sin i\lambda_j) \int_{\varphi_p}^{\varphi_{p+1}} \cos^{n+1} \varphi \sin^{n-2k-1} \varphi d\varphi \right]_\tau.
\end{aligned}$$

Значение последнего интеграла зависит от четности чисел $(n+1)$ и $(n-2k-i)$. Так, при $(n+1)$ нечетном имеем

$$\begin{aligned}
a_{ni} \approx &\frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-i)!}{i(n+i)!} R^2 \sum_{\tau=1}^N \sum_{k=0}^E \left[\frac{n-i}{2} \right] \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k! (n-k)! (n-2k-i)!} f(t_\tau) \times \\
&\times \left\{ (\sin i\lambda_{j+1} - \sin i\lambda_j) \frac{\sin^{n-2k-i+1} \varphi}{2n-2k-i+1} \left[\cos^n \varphi + \right. \right. \\
&\left. \left. + \sum_{\gamma=1}^{\frac{n}{2}} \frac{2^\gamma \left(\frac{n}{2}\right)! (2n-2k-i-2\gamma-1)!!}{\left(\frac{n}{2}-\gamma\right)! (2n-2k-i-1)!!} \cos^{n-2\gamma} \varphi \right] \right\}_{\varphi_p}^{\varphi_{p+1}} \Big|_\tau. \quad (6)
\end{aligned}$$

Если же $(n+1)$ и $(n-2k-i)$ четные числа, то

$$\begin{aligned}
a_{ni} \approx &\frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-i)!}{i(n+i)!} R^2 \sum_{\tau=1}^N \sum_{k=0}^E \left[\frac{n-i}{2} \right] \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k! (n-k)! (2n-2k-i)!} f(t_\tau) \times \\
&\times (\sin i\lambda_{j+1} - \sin i\lambda_j) \left\{ \frac{\sin^{n-2k-i+1} \varphi}{2n-2k-i+1} \left[\cos^n \varphi + \right. \right. \\
&\left. \left. + \sum_{\gamma=1}^{\frac{n+1}{2}-1} \frac{n!! (2n-2k-i-2\gamma-1)!!}{(n-2\gamma)!! (2n-2k-i-1)!!} \cos^{n-2\gamma} \varphi \right] + \right. \\
&\left. + \frac{n!! (n-2k-i+2)!!}{(2n-2k-i+1)!!} \left[-\frac{\cos \varphi}{n-2k-i} (\sin^{n-2k-i-1} \varphi + \right. \right. \\
&\left. \left. + \sum_{\gamma=1}^{\frac{n-2k-i}{2}-1} \frac{(n-2k-i-1)!! \left(\frac{n-2k-i}{2}-\gamma-1\right)!!}{2^\gamma (n-2k-i-2\gamma-1)!! \left(\frac{n-2k-i}{2}-1\right)!!} \sin^{n-2k-i-2\gamma-1} \varphi \right] \right\} + \\
&\left. + \frac{(n-2k-i-1)!!}{2^{\frac{n-2k-i}{2}} \left(\frac{n-2k-i}{2}\right)!} \varphi \right\}_{\varphi_p}^{\varphi_{p+1}} \Big|_\tau. \quad (7)
\end{aligned}$$

* Символ $n!!$ обозначает произведение натуральных чисел, не превосходящих n и одной с ним четности, так что, например, $5!! = 1 \cdot 3 \cdot 5$.

При нечетном $(n - 2k - i)$

$$\begin{aligned}
 a_{ni} \approx & \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-i)!}{i(n+i)!} R^2 \sum_{\tau=1}^N \sum_{k=0}^E \left[\frac{n-i}{2} \right] \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^{nk}! (n-k)! (n-2k-i)!} f(t_\tau) \times \\
 & \times (\sin i \lambda_{j+1} - \sin i \lambda_j) \left\{ -\frac{\cos^{n+2}\varphi}{2n-2k-i+1} \left[\sin^{n-2k-i-1}\varphi + \right. \right. \\
 + & \left. \left. \sum_{\gamma=1}^{\frac{n-2k-i-1}{2}} \frac{2^\gamma \left(\frac{n-2k-i-1}{2} \right)! (2n-2k-i-2\gamma-1)!!}{\left(\frac{n-2k-i-1}{2} - \gamma \right)! (2n-2k-i-1)!!} \sin^{n-2k-i-2\gamma-1}\varphi \right] \right\} \Big|_{\varphi_\rho}^{\varphi_{\rho+1}}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Заменяя в формулах (6)—(8) множитель $(\sin i \lambda_{j+1} - \sin i \lambda_j)$ множителем $(\cos i \lambda_j - \cos i \lambda_{j+1})$, получим выражения для коэффициента b_{ni} в зависимости от четности показателей степеней синуса и косинуса.

Найдем теперь остаточный член $R_n(f)$ формул (6)—(8). Воспользовавшись указанными свойствами функции $f(\varphi, \lambda)$, $R_n(f)$, его можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 R_n(f) = & \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-i)!}{(n+i)!} \left\{ \int_D f(\varphi, \lambda) \Psi_{ni}(\varphi, \lambda) d\sigma - \sum_{\tau=1}^N f(t_\tau) \int_{\Delta\sigma_\tau} \Psi_{ni}(\varphi, \lambda) d\sigma \right\} \leq \\
 \leq & \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-i)!}{(n+i)!} \sum_{\tau=1}^N \int_{\Delta\sigma_\tau} \max \left| \frac{\partial f(\varphi, \lambda)}{\partial \varphi} (\varphi - \varphi_{\rho+\frac{1}{2}}) - \right. \\
 & \left. - \frac{\partial f(\varphi, \lambda)}{\partial \lambda} (\lambda - \lambda_{j+\frac{1}{2}}) \right| \Psi_{ni}(\varphi, \lambda) d\sigma \leq \\
 \leq & \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-i)!}{(n+i)!} \sum_{\tau=1}^N \left\{ \max \left| \frac{\partial f(\varphi, \lambda)}{\partial \varphi} \right| \cdot \int_{\Delta\sigma_\tau} (\varphi - \varphi_{\rho+\frac{1}{2}}) \Psi_{ni}(\varphi, \lambda) d\sigma + \right. \\
 & \left. + \max \left| \frac{\partial f(\varphi, \lambda)}{\partial \lambda} \right| \cdot \int_{\Delta\sigma_\tau} (\lambda - \lambda_{j+\frac{1}{2}}) \Psi_{ni}(\varphi, \lambda) d\sigma \right\}.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Остаточный член $R_n(f)$ формул для вычисления коэффициентов b_{ni} получается из (9) заменой функции $\Psi_{ni}(\varphi, \lambda)$ функциями $\Omega_{ni}(\varphi, \lambda)$.

2. Вычисление коэффициентов a_{ni} и b_{ni} методом наименьших квадратов. Пусть задана функция $f(\varphi, \lambda)$, известная своими значениями в конечном числе нерегулярной сети точек $t_\tau = \{\varphi_\tau, \lambda_\tau\}$, $\tau = 1, 2, \dots, N$, области D . Значения функции $f(\varphi, \lambda)$ подвержены случайным ошибкам, например ошибкам измерения. Каждому значению функции $f(\varphi_\tau, \lambda_\tau)$ сопоставляется действительное число p_τ ($0 \leq p_\tau \leq 1$, $\sum_{\tau=1}^N p_\tau = 1$) — вес этого значения. Требуется найти элемент наилучшего приближения к $f(\varphi, \lambda)$ в смысле метрики

$$\delta_m^2 = \sum_{\tau=1}^N p_\tau [f(t_\tau) - S_m(t_\tau)]^2 \tag{10}$$

конечномерного линейного пространства в линейном подпространстве $H_m(S_m)$ основных сферических многочленов $S_m(\varphi, \lambda)$ степени m . Этот элемент будет единственным [2].

Если $\delta_0 > \varepsilon$, то, вычислив в каждой точке t_τ области D остаточный член

$$R_0(f) = f(t_\tau) - S_0,$$

найдем наилучшее приближение $R_0(f)$ гармоникой $S_1(\varphi, \lambda)$ 1-го порядка

$$\delta_1^2 = \min_{\{a_{1i}, b_{1i}\}} \|R_0(f) - S_1\|^2.$$

При $\delta_1 > \varepsilon$ вычисляем функцию $F_1(t_\tau)$ в точках t_τ области D

$$F_1(t_\tau) = S_0 + S_1(t_\tau)$$

и остаточный член $R_1(f)$

$$R_1(f) = f(t_\tau) - F_1(t_\tau),$$

затем находим наилучшее приближение $R_1(f)$ гармоникой $S_2(\varphi, \lambda)$ 2-го порядка и т. д. Вообще на n -м шаге наилучшее приближение $R_{n-1}(f)$ гармоникой $S_n(\varphi, \lambda) \in H_m$ n -го порядка отыскивается в виде

$$\delta_n^2 = \min_{\{a_{ni}, b_{ni}\}} \|R_{n-1}(f) - S_n\|^2,$$

где

$$\delta_n^2 = \sum_{\tau=1}^N p_\tau \left\{ R_{n-1}^2(f) - \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^n a_{nk} [a_{nk} \Psi_{nk}(t_\tau) \Psi_{ni}(t_\tau) + b_{nk} \Omega_{nk}(t_\tau) \Psi_{ni}(t_\tau)] - \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^n b_{ni} [a_{nk} \Psi_{nk}(t_\tau) \Omega_{ni}(t_\tau) + b_{nk} \Omega_{nk}(t_\tau) \Omega_{ni}(t_\tau)] \right\}. \quad (12)$$

Если $\delta_n > \varepsilon$, то вычисляется функция $F_n^*(t_\tau)$

$$F_n(t_\tau) = \sum_{i=0}^n S_i(t_\tau)$$

в точках $t_\tau = \{\varphi_\tau, \lambda_\tau\}$ области D , а затем остаточный член

$$R_n(f) = f(t_\tau) - F_n(t_\tau) = R_{n-1}(f) - S_n(t_\tau)$$

в тех же точках. Далее отыскивается наилучшее приближение $R_n(f)$ гармоникой $S_{n+1}(\varphi, \lambda)$ $(n+1)$ -го порядка и т. д. Процесс вычисления останавливается на m -м шаге, как только $\delta_{n+m} \leq \varepsilon$. Таким образом, коэффициенты a_{ni} и b_{ni} гармоники n -го порядка

$$S_n(\varphi, \lambda) = \sum_{i=0}^n [a_{ni} \Psi_{ni}(\varphi, \lambda) + b_{ni} \Omega_{ni}(\varphi, \lambda)],$$

которая является элементом наилучшего приближения для $R_{n-1}(f)$, находятся из системы линейных уравнений $(2n+1)$ -го порядка:

$$\sum_{i=0}^n \{a_{ni} (\Psi_{ni}, \Psi_{nj}) + b_{ni} (\Omega_{ni}, \Psi_{nj})\} = (R_{n-1}(f), \Psi_{nj}); \quad (13)$$

$$\sum_{i=0}^n \{a_{ni} (\Psi_{ni}, \Omega_{nj}) + b_{ni} (\Omega_{ni}, \Omega_{nj})\} = (R_{n-1}(f), \Omega_{nj}), \quad j = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Матрица B этой системы уравнений так же, как и матрица A , является вещественной, симметричной и положительно определенной. Однако практически матрица B может оказаться особенной. Действительно, при численном решении систем линейных уравнений, возникающих при решении практических задач, сталкиваются с тем, что элементы матриц этих систем и свободные члены известны лишь с некоторой степенью точности. Так,

в процессе вычисления элементов матрицы В неизбежны округления чисел. Кроме того, не исключена возможность практически получить линейно зависимые элементы в матрице В, поскольку функция $f(t_\tau)$ задается приближенно в узлах $t_\tau = \{\varphi_\tau, \lambda_\tau\}$ нерегулярной сети и система оказывается несовместной. Неточность исходных данных порождает ошибки в решении. Причем оказывается, что решение системы линейных уравнений с плохо обусловленной матрицей определяется со значительно меньшей точностью, чем точность коэффициентов и свободных членов [3, 4]. Однако и плохо обусловленная система несет некоторую информацию, заключенную в данных задачи и которую необходимо сохранить в решении. Как будет показано, это можно осуществить преобразованием векторов-столбцов матрицы В к ортонормированному базису.

Для характеристики матрицы с точки зрения ее обусловленности предложены так называемые числа обусловленности [3, 5]. Одно из них, а именно N -число Тюринга, определяется так:

$$N\text{-число} = \frac{1}{n} N(A) N(A^{-1})$$

и

$$N(A) = \sqrt{\text{Sp } A'A} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2},$$

где $N(A)$ — норма матрицы.

Наименьшим значением N -числа является единица, оно достигается единичной матрицей как «наиболее обусловленной». Большие значения N -числа характерны для плохо обусловленных матриц.

Следовательно, если преобразовать систему векторов $\Psi_{n0} = \{\Psi_{n0}(t_\tau)\}$, $\Psi_{ni} = \{\Psi_{ni}(t_\tau)\}$, $\Omega_{ni} = \{\Omega_{ni}(t_\tau)\}$, $i = 1, 2, \dots, n$; $\tau = 1, 2, \dots, N$, к ортонормальному базису с метрикой (10), то тем самым будет получена «наиболее обусловленная» система линейных уравнений в этом базисе, поскольку матрица В симметрична. Необходимо отметить, что эта ортонормировка не изменит устойчивости решения системы линейных уравнений в том смысле, что невозможно уменьшить неустранимую погрешность, порождаемую этой системой.

В процессе ортонормирования системы векторов будет установлена их линейная независимость или линейная зависимость. Если процесс ортонормирования применяется к системе линейно зависимых векторов, то обязательно окажется построенным нулевой вектор. Это произойдет в первый раз точно на $(2r + 1)$ -м шаге, если векторы $\Psi_{n0} = \{\Psi_{n0}(t_\tau)\}$, $\Psi_{n1} = \{\Psi_{n1}(t_\tau)\}$, $\Omega_{n1} = \{\Omega_{n1}(t_\tau)\}$, \dots , $\Psi_{nr} = \{\Psi_{nr}(t_\tau)\}$, $\Omega_{nr} = \{\Omega_{nr}(t_\tau)\}$ линейно независимы, а векторы $\Psi_{nr+1} = \{\Psi_{nr+1}(t_\tau)\}$, $\Omega_{nr+1} = \{\Omega_{nr+1}(t_\tau)\}$, $\tau = 1, 2, \dots, N$ являются их линейной комбинацией.

Прежде чем переходить к ортонормированию векторов, сделаем следующие замечания. Норму элемента $\Psi_{ni} \in H_m$ определим в смысле введенного скалярного произведения

$$\|\Psi_{ni}\| = (\Psi_{ni}, \Psi_{ni})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sum_{\tau=1}^N \rho_\tau \Psi_{ni}^2(t_\tau)} \quad (14)$$

и будем считать вектор $\Psi_{nr+1} = \{\Psi_{nr+1}(t_\tau)\}$ нулевым, если по модулю он меньше или равен неустранимой погрешности α^* решения системы линейных уравнений. М. М. Лаврентьевым [6] показано, что неустранимая погрешность решения в ортонормированном базисе системы $A\bar{X} = B$, сво-

бодные члены b_j которой известны с точностью $|\varepsilon_j| \ll \Delta$, может быть оценена

$$\alpha^* = \sqrt{\sum_{j=1}^n \varepsilon_j^2} \ll \sqrt{n} \Delta.$$

Эта оценка существенно не может быть улучшена.

Известно [1], что систему ортонормированных векторов $\bar{\Psi}_{ni} = \{0, 0, \dots, 1_j, \dots, 0\}$, $\bar{\Omega}_{ni} = \{0, 0, \dots, 0_j, 1_{j+1}, \dots, 0\}$, $i = 0, 1, \dots, r$; $j = 1, 2, \dots, r+1$; $r \leq n$, можно выразить в виде линейной комбинации линейно независимых* векторов $\Psi_{ni} = \{\Psi_{ni}(t_\tau)\}$; $\Omega_{ni} = \{\Omega_{ni}(t_\tau)\}$, $i = 0, 1, \dots, r$; $\tau = 1, 2, \dots, r, \dots, N$; $r \leq N$, следующим образом. В качестве первого вектора выбирают

$$\bar{\Psi}_{n0} = \frac{\Psi_{n0}}{\|\Psi_{n0}\|}, \quad \|\bar{\Psi}_{n0}\| = 1.$$

Затем составляют элемент $\bar{\Psi}'_{n1} = \Psi_{n1} + \alpha_{02} \bar{\Psi}_{n0}$ и подбирают α_{02} так, чтобы $(\bar{\Psi}'_{n1}, \bar{\Psi}_{n0}) = 0$, т. е.

$$\alpha_{02} = -(\Psi_{n1}, \bar{\Psi}_{n0}).$$

Поскольку $\|\bar{\Psi}'_{n1}\| > \alpha^*$, то в качестве второго вектора $\bar{\Psi}_{n1}$ берут

$$\bar{\Psi}_{n1} = \frac{\bar{\Psi}'_{n1}}{\|\bar{\Psi}'_{n1}\|}, \quad \|\bar{\Psi}_{n1}\| = 1.$$

Составляют далее элемент $\bar{\Omega}'_{n1} = \Omega_{n1} + \alpha_{03} \bar{\Psi}_{n0} + \alpha_{23} \bar{\Psi}_{n1}$ и подбирают α_{03} и α_{23} так, чтобы $(\bar{\Psi}_{n0}, \bar{\Omega}'_{n1}) = (\bar{\Omega}'_{n1}, \bar{\Psi}_{n1}) = 0$.

Очевидно, что

$$\alpha_{03} = -(\Omega_{n1}, \bar{\Psi}_{n0}),$$

$$\alpha_{23} = -(\Omega_{n1}, \bar{\Psi}_{n1}).$$

Так как $\|\bar{\Omega}'_{n1}\| > \alpha^*$, то в качестве третьего вектора $\bar{\Omega}_{n1}$ берут

$$\bar{\Omega}_{n1} = \frac{\bar{\Omega}'_{n1}}{\|\bar{\Omega}'_{n1}\|}, \quad \|\bar{\Omega}_{n1}\| = 1.$$

Пусть уже построены $(2r-1)$ -е векторы $\bar{\Psi}_{n0}, \bar{\Psi}_{n1}, \bar{\Omega}_{n1}, \dots, \bar{\Psi}_{nr-1}, \bar{\Omega}_{nr-1}$, такие, что $\|\bar{\Psi}_{n0}\| = \|\bar{\Psi}_{n1}\| = \|\bar{\Omega}_{n1}\| = \dots = \|\bar{\Psi}_{nr-1}\| = \|\bar{\Omega}_{nr-1}\| = 1$, $(\bar{\Psi}_{ni}, \bar{\Psi}_{nj}) = (\bar{\Psi}_{ni}, \bar{\Omega}_{nj}) = (\bar{\Omega}_{ni}, \bar{\Omega}_{nj}) = 0$ при $i \neq j$, и вектор Ψ_{ni} является линейной комбинацией $\Psi_{n0}, \Psi_{n1}, \Omega_{n1}, \dots, \Psi_{nr-1}, \Omega_{nr-1}$. Затем строятся элементы

$$\bar{\Psi}'_{nr} = \Psi_{nr} + \sum_{i=0}^{r-1} \alpha_{2r, 2i} \bar{\Psi}_{ni} + \sum_{i=1}^{r-1} \alpha_{2r, 2i+1} \bar{\Omega}_{ni}; \quad (15)$$

$$\bar{\Omega}'_{nr} = \Omega_{nr} + \sum_{i=0}^{r-1} \alpha_{2r+1, 2i} \bar{\Psi}_{ni} + \sum_{i=1}^{r-1} \alpha_{2r+1, 2i+1} \bar{\Omega}_{ni}$$

* Исходя из сделанного выше замечания, векторы Ψ_{ni}, Ω_{ni} , $i = 0, 1, \dots, r-1$, считаются практически линейно зависимыми, если их линейная комбинация меньше или равна неустранимой погрешности α^* .

и подбираются числа $\alpha_{2r, 2i}$, $\alpha_{2r, 2i+1}$, $\alpha_{2r+1, 2i}$, $\alpha_{2r+1, 2i+1}$ так, чтобы $(\bar{\Psi}'_{nr}, \bar{\Psi}_{ni}) = (\bar{\Psi}_{ni}, \bar{\Omega}'_{nr}) = (\bar{\Omega}'_{nr}, \bar{\Omega}_{ni}) = 0$, $i = 0, 1, \dots, r-1$, т. е.

$$\begin{aligned} \alpha_{2r, 2i} &= -(\bar{\Psi}_{nr}, \bar{\Psi}_{ni}); \\ \alpha_{2r, 2i+1} &= -(\bar{\Psi}'_{nr}, \bar{\Psi}_{ni}); \\ \alpha_{2r+1, 2i} &= -(\bar{\Omega}_{nr}, \bar{\Psi}_{ni}); \\ \alpha_{2r+1, 2i+1} &= -(\bar{\Omega}_{nr}, \bar{\Omega}_{ni}). \end{aligned} \quad (16)$$

Так как $\bar{\Psi}'_{nr}$ и $\bar{\Omega}'_{nr}$ есть линейная комбинация векторов Ψ_{n0} , Ψ_{n1} , $\Omega_{n1}, \dots, \Psi_{nr-1}$, Ω_{nr-1} и соответственно векторов Ψ_{nr} или Ω_{nr} , которые входят в $\bar{\Psi}'_{nr}$ или $\bar{\Omega}'_{nr}$ с коэффициентом, равным единице, и поскольку векторы Ψ_{n0} , Ψ_{n1} , $\Omega_{n1}, \dots, \Psi_{nr-1}$, Ω_{nr-1} , Ψ_{nr} (Ω_{nr}) линейно независимы, то $\|\bar{\Psi}'_{nr}\| > \alpha^*$ и $\|\bar{\Omega}'_{nr}\| > \alpha^*$. Это дает возможность построить $2r$ -й вектор

$$\bar{\Psi}_{nr} = \frac{\bar{\Psi}'_{nr}}{\|\bar{\Psi}'_{nr}\|}, \quad \|\bar{\Psi}_{nr}\| = 1$$

и $(2r+1)$ -й вектор

$$\bar{\Omega}_{nr} = \frac{\bar{\Omega}'_{nr}}{\|\bar{\Omega}'_{nr}\|}, \quad \|\bar{\Omega}_{nr}\| = 1.$$

Процесс ортонормирования остановим на $(2r+1)$ -м шаге ($r \leq n$), когда модуль вектора $\bar{\Psi}'_{nr+1}$, либо $\bar{\Omega}'_{nr+1}$ окажется равным или меньше неустрашимой погрешности α^* решения системы, т. е. когда

$$\|\bar{\Psi}'_{nr+1}\| \leq \alpha^* \quad \text{или} \quad \|\bar{\Omega}'_{nr+1}\| \leq \alpha^*.$$

Итак, в процессе ортонормирования системы столбцов матрицы B $(2n+1)$ -го порядка будет найдена максимальная практически линейно независимая подсистема, состоящая из $(2r+1) \leq (2n+1)$ столбцов, причем $(2r+1) \geq (2n-1)$. Очевидно, что решение переопределенной системы линейных уравнений $(2r+1)$ -го порядка практически ничего уже не даст, поскольку оно позволит построить гармонику r -го порядка ($r < n$), а такая гармоника построена уже раньше при решении системы линейных уравнений $(2r-1)$ -го порядка.

В ортонормированном базисе система (13) имеет вид:

$$a_{ni}^* = (R_{n-1}(f), \bar{\Psi}_{nj});$$

$$b_{ni}^* = (R_{n-1}(f), \bar{\Omega}_{nj}), \quad i, j = 0, 1, \dots, n,$$

где $\bar{\Psi}_{nj}$ и $\bar{\Omega}_{nj}$ — линейные комбинации (15) векторов $\Psi_{n0} = \{\Psi_{n0}(t_\tau)\}$, $\Psi_{ni} = \{\Psi_{ni}(t_\tau)\}$ и $\Omega_{ni} = \{\Omega_{ni}(t_\tau)\}$, $i = 1, 2, \dots, n$; $\tau = 1, 2, \dots, N$,

а элементы a_{ni}^* и b_{ni}^* — линейные комбинации a_{ni} и b_{ni} с коэффициентами (16), а именно:

$$a_{n0}^* = \|\Psi_{n0}\| a_{n0} - \sum_{j=1}^n \alpha_{0,2j} a_{nj} - \sum_{j=1}^n \alpha_{0,2j+1} b_{nj};$$

$$a_{ni}^* = \|\bar{\Psi}'_{ni}\| a_{ni} - \sum_{j=i+1}^n \alpha_{2i, 2j} a_{nj} - \sum_{j=i}^n \alpha_{2i, 2j+1} b_{nj};$$

$$b_{ni}^* = \|\bar{\Omega}'_{ni}\| b_{ni} - \sum_{j=i+2}^n \alpha_{2i+1, 2j} a_{nj} - \sum_{j=i+1}^n \alpha_{2i+1, 2j+1} b_{nj}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Программа предусматривает использование внешней памяти машины (магнитной ленты и барабана). Магнитная лента разбивается на зоны, в каждой из которых записываются по 500 значений функции $f(t_\tau)$ и ее аргументов φ_τ и λ_τ . В операторном виде программу можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
 & A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 F_7 A_8 A_9 A_{10} A_{11} P_{12}^{\uparrow 8} \downarrow_{13} P_{13} \\
 & P_{14}^{\uparrow 8} \downarrow_{15} F_{15} A_{16} A_{17} A_{18} A_{19} P_{20}^{\uparrow 21} \downarrow_{22} A_{21} A_{22} F_{23} A_{24} A_{25} A_{26} A_{27} A_{28} \\
 & A_{29} A_{30} P_{31}^{\uparrow 24} \downarrow_{32} P_{32} P_{33}^{\uparrow 24} \downarrow_{34} P_{34}^{\uparrow 35} \downarrow_{38} A_{35} A_{36} A_{37} A_{38} F_{39} A_{40} A_{41} \\
 & A_{42} P_{43}^{\uparrow 40} \downarrow_{44} P_{44} P_{45}^{\uparrow 40} \downarrow_{46} - Я_{46}.
 \end{aligned}$$

- A_1 — вычислительный (обобщенный) арифметический оператор для определения количества зон, занятых на магнитной ленте, и формирования команд для записи на магнитную ленту и считывания с нее.
- A_2 — запись на ленту значений $f(\varphi_\tau, \lambda_\tau)$.
- A_3 — запись на ленту значений φ_τ .
- A_4 — запись на ленту значений λ_τ .
- A_5 — вычисление $a_{00}, s_{00}, R_0(f)$ и δ_0 .
- A_6 — запись $R_0(f)$ на магнитную ленту.
- F_7 — формирование команд программы.
- A_8 — считывание с магнитной ленты значений $f(\varphi_\tau, \lambda_\tau), \varphi_\tau, \lambda_\tau$.
- A_9 — реализация формул (1), (2).
- A_{10} — реализация формулы (3).
- A_{11} — вычисление коэффициентов системы линейных уравнений (17).
- P_{12} — сравнение счетчика с числом 500.
- P_{13} — восстановление и переадресация команд программы.
- P_{14} — сравнение счетчика с числом $E\left(\frac{N}{500}\right)$ — количеством зон на магнитной ленте.
- F_{15} — восстановление и формирование команд программы.
- A_{16} — определение коэффициентов a_{ni} и b_{ni} n -й гармоники путем решения системы линейных уравнений (17).
- A_{17} — запись коэффициентов a_{ni} и b_{ni} на барабан.
- A_{18} — выдача на печать $n, \delta_n, a_{ni}, b_{ni}$.
- A_{19} — запись на барабан выполненной части программы (с A_1 до A_{18}).
- P_{20} — сравнение счетчика с единицей.
- A_{21} — запись в МОЗУ 2-й части программы с перфокарт (с A_{22} до $Я_{46}$).
- A_{22} — запись в МОЗУ 2-й части программы с барабана.
- F_{23} — формирование команд программы.
- A_{24} — списывание с магнитной ленты значений $R_{n-1}(f), \varphi_\tau, \lambda_\tau$.
- A_{25} — вычисление $\Psi_{ni}(t_\tau)$.
- A_{26} — вычисление $\Omega_{ni}(t_\tau)$.
- A_{27} — вычисление $S_n(t_\tau) = \sum_{i=0}^n \{a_{ni}\Psi_{ni}(t_\tau) + b_{ni}\Omega_{ni}(t_\tau)\}$.
- A_{28} — вычисление $R_n(f) = R_{n-1}(f) - S_n(t_\tau)$.
- A_{29} — запись $R_n(f)$ на магнитную ленту.
- A_{30} — вычисление δ_n .
- P_{31} — сравнение счетчика с числом 500.
- P_{32} — восстановление и переадресация команд программы.
- P_{33} — сравнение счетчика с числом заполненных зон на ленте $E\left(\frac{N}{500}\right)$.
- P_{34} — сравнение вычисленного δ_n с заданным ϵ .
- A_{35} — запись на барабан 2-й части программы (от A_{22} до $Я_{46}$).

- A_{36} — запись в МОЗУ 1-й части программы (от A_1 до A_{18}).
 A_{37} — передача управления на начало программы (на F_7) для вычисления следующей гармоника.
 A_{38} — списывание с барабана коэффициентов a_{ni} , b_{ni} .
 F_{39} — формирование команд программы.
 A_{40} — вычисление $\Psi_{ni}(t_\tau)$ и $\Omega_{ni}(t_\tau)$ в 500 точках равномерной сети.
 A_{41} — вычисление $S_m(t_\tau)$ в 500 точках равномерной сети.
 A_{42} — выдача на печать $S_m(t_\tau)$.
 P_{43} — сравнение счетчика с числом 500.
 P_{44} — переадресация и восстановление команд программы.
 P_{45} — сравнение счетчика с числом $E\left(\frac{M}{500}\right)$, где M — количество точек равномерной сети.
 $Я_{46}$ — останов машины.
- В заключение авторы выражают благодарность О. А. Калининой и Г. И. Каратаеву за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. С. Березин, Н. П. Жидков. Методы вычислений, т. I, II. Физматгиз, 1960.
2. Ю. В. Линник. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. Физматгиз, 1958.
3. Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева. О плохо обусловленных системах линейных уравнений.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, 1, № 3.
4. Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева. Вычислительные методы линейной алгебры. Физматгиз, 1963.
5. А. Тюринг. Ошибки округления в матричных процессах.— Усп. матем. наук, 1951, т. 6, вып. 1.
6. М. М. Лаврентьев. Об оценке точности решения систем линейных уравнений.— Докл. АН СССР, 1954, 95, № 3.

Э. В. Никольский

О ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННОЙ ОДНОМЕРНОЙ СКОРОСТЬЮ

Как известно, при интерпретации сейсмических данных существенную роль играют динамические характеристики волн. Более того, в настоящее время в сейсмике намечаются пути решения обратных динамических задач [1, 2], т. е. непосредственного определения параметров среды по амплитудным характеристикам волн.

В сейсморазведке при практическом решении многих задач динамическая интерпретация волнового поля используется недостаточно полно. Одна из причин этого — отсутствие относительно простых алгоритмов, позволяющих рассчитывать полные волновые поля в модели сред произвольного вида. В связи с бурным ростом машинной вычислительной техники этот пробел удается в какой-то степени заполнить и предложить алгоритмы (легко реализуемые на ЭВМ), с помощью которых можно определить полные волновые поля в моделях сред произвольного вида.

В данной статье рассматривается один из таких алгоритмов и дается решение волнового уравнения (иначе, прямой задачи) в модели среды, скорость которой есть произвольная функция одной пространственной координаты z (глубины). Начальное возмущение задается в виде бегущих сферических или плоских волн*.

Решение задачи проводится в два этапа. На первом исходное волновое уравнение преобразуется и представляется в виде некоторой системы двух уравнений в частных производных 1-го порядка. Во втором решается система методом конечных разностей (методом сеток).

К преимуществу предлагаемого метода решения задач можно отнести следующее:

- 1) произвольность вида задаваемой функции скорости $v(z)$;
- 2) относительная простота реализации этого метода на ЭВМ;
- 3) разностная схема, с помощью которой осуществляется решение прямой задачи, может быть обращена, в результате чего появляется возможность решения обратных динамических задач.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть задана модель среды, изображенная на рис. 1. АВ — граница раздела двух полупространств: однородного I и неоднородного II (здесь

* Решение для плоских волн получается из решения для сферических волн путем предельного перехода $R \rightarrow \infty$.

уже учтена осевая симметрия задачи). Скорость $v(z)$ — произвольная непрерывная функция глубины z с ограниченной первой производной. В точке O находится точечный источник, «посылающий» сферические волны к неоднородной среде II.

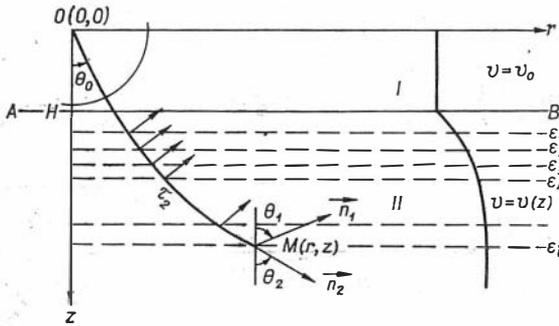


Рис. 1

Задача Коши. Найти решение волнового уравнения

$$\Delta \varphi(t, r, z) = \frac{1}{v^2(z)} \cdot \frac{\partial^2 \varphi(t, r, z)}{\partial t^2} \quad (1)$$

при следующих начальных данных:

$$\varphi(t, r, z) \Big|_{t \leq t_0} = \frac{f(t - \tau_0)}{\tau_0} = l \frac{f(t - R/v_0)}{R}; \quad (2)$$

$$f(T) \equiv 0 \text{ при } T < 0,$$

где Δ — оператор Лапласа;

$\tau = R/v_0$ — время пробега сигнала в однородной среде I;

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{r^2 + z^2} < H;$$

$t_0 = H/v_0$ (H — мощность верхнего однородного слоя);

v_0 — скорость в верхней однородной среде I.

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИСХОДНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

В модели среды, изображенной на рис. 1, проведем некоторую произвольную линию $z = z_0$. Относительно этой линии зеркально отобразим верхнюю часть среды на нижнюю. Иначе говоря, перейдем к новой модели среды (рис. 2), скоростной разрез которой зададим в виде:

$$v(z) = \begin{cases} v(z) & \text{при } z < z_0; \\ v(2z_0 - z) & \text{при } z > z_0. \end{cases} \quad (3)$$

В этой новой среде (симметричной относительно линии $z = z_0$) рассмотрим произвольно выбранную переменную точку $M(r, z)$ и два точечных источника $O(0, 0)$ и $O_1(0, 2z_0)$. Определим в такой среде две функции $\tau_2(0, r, z)$ — время пробега сигнала от точки $O(0, 0)$ до точки $M(r, z)$ и $\tau_1(z_0, r, z)$ — время пробега сигнала от точки $O_1(0, 2z_0)$ до точки $M(r, z)$.

Будем считать, что точка $M(r, z)$ лежит всегда выше линии $z = z_0$ (т. е. в старой, «невозмущенной» среде). Если оперировать понятиями лучей, вдоль которых, как мы предполагаем, выполняется закон Снелиуса:

$\frac{\sin \theta(r, z)}{v(z)} = \frac{\sin \theta_0}{v_0}$, то справедливы следующие соотношения:

$$\tau_2(0, r, z) = \frac{\sin \theta_2}{v(z)} r + \int_0^z \frac{\cos \theta_2}{v(z)} dz; \quad \text{grad } \tau_2 = \frac{\sin \theta_2}{v(z)} \vec{l}r + \frac{\cos \theta_2}{v(z)} \vec{k} \equiv \frac{\vec{n}_2}{v(z)}; \quad (4)$$

$$\tau_1(z_0, r, z) = \frac{\sin \theta_1}{v(z)} r + \int_z^{z_0} \frac{\cos \theta_1}{v(z)} dz; \quad \text{grad } \tau_2 = \frac{\sin \theta_1}{v(z)} \vec{l}r - \frac{\cos \theta_1}{v(z)} \vec{k} \equiv \frac{\vec{n}_1}{v(z)}.$$

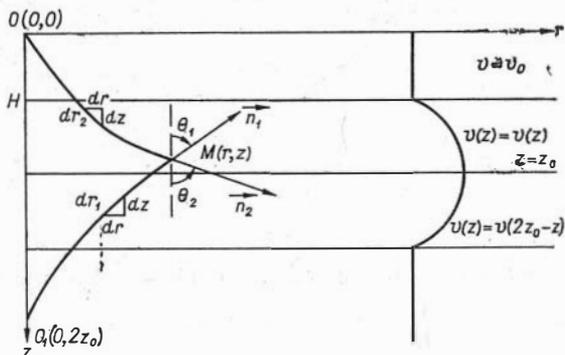


Рис. 2.

Отметим, что функции $\tau_2(0, r, z)$ и $\tau_1(z_0, r, z)$ построены таким образом (благодаря симметрии), что

$$\tau_2(0, r, z)|_{z=z_0} = \tau_1(z_0, r, z)|_{z=z_0}. \quad (5)$$

Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\frac{\vec{n}_1}{v(z)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = -\text{grad } \varphi_1 - \frac{\vec{n}_1}{v} \frac{\varphi_1}{\tau_1} + A_1 \vec{k} \varphi_1 + B_1 \vec{k} \varphi_2; \quad (6)$$

$$\frac{\vec{n}_2}{v(z)} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = -\text{grad } \varphi_2 - \frac{\vec{n}_2}{v} \frac{\varphi_2}{\tau_2} + A_2 \vec{k} \varphi_1 + B_2 \vec{k} \varphi_2,$$

где $\tau_{1,2}, \frac{\vec{n}_{1,2}}{v(z)}$ определены из (4), а коэффициенты $A_{1,2}$, и $B_{1,2}$ — из условий

$$A_1 \frac{\vec{n}_1 \vec{k}}{v} + A_2 \frac{\vec{n}_2 \vec{k}}{v} = \frac{2}{v^2 \tau_1} - \text{div } \frac{\vec{n}_1}{v} \quad (A_1 + A_2 = 0); \quad (7)$$

$$B_1 \frac{\vec{n}_1 \vec{k}}{v} + B_2 \frac{\vec{n}_2 \vec{k}}{v} = \frac{2}{v^2 \tau_2} - \text{div } \frac{\vec{n}_2}{v} \quad (B_1 + B_2 = 0).$$

Допустим, что система (6) имеет достаточно гладкое решение, отвечающее следующим начальным данным:

$$\varphi_1|_{t \leq t_0} \equiv 0; \quad \varphi_2|_{t \leq t_0} = \frac{f(t - \tau_0)}{\tau_0}. \quad (8)$$

Легко убедиться в том, что сами начальные данные (8) удовлетворяют системе (6) для однородной среды, так как в этом случае

$$\tau_2(0, r, z) = \frac{\sin \theta_2}{v_0} r + \frac{\cos \theta_2}{v_0} z = \frac{1}{v_0} \sqrt{r^2 + z^2}; \quad \text{grad } \tau_2 = \frac{r}{v_0^2 \tau_2} \vec{l}r + \frac{z}{v_0^2 \tau_2} \vec{k} = \frac{\vec{n}_2}{v_0};$$

$$\tau_1(z_0, r, z) = \frac{\sin \theta_1}{v_0} r + \frac{\cos \theta_1}{v_0} (2z_0 - z) = \frac{1}{v_0} \sqrt{r^2 + (2z_0 - z)^2}; \quad (9)$$

$$\text{grad } \tau_1 = \frac{r}{v_0^2 \tau_1} \vec{l}r - \frac{2z_0 - z}{v_0^2 \tau_1} \vec{k} = \frac{\vec{n}_1}{v_0}.$$

Следовательно, $\text{div } \frac{\vec{n}_2}{v_0} = \frac{2}{v_0^2 \tau_2}$, $\text{div } \frac{\vec{n}_1}{v_0} = \frac{2}{v_0^2 \tau_1}$, из чего вытекает, что $A_1 = A_2 = B_1 = B_2 = 0$ и (6) переходит в систему двух независимых уравнений вида

$$\frac{\vec{n}_1}{v_0} \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} = -\text{grad } \Phi_1 - \frac{\vec{n}_1}{v_0} \frac{\Phi_1}{\tau_1};$$

$$\frac{\vec{n}_2}{v_0} \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} = -\text{grad } \Phi_2 - \frac{\vec{n}_2}{v_0} \frac{\Phi_2}{\tau_2}. \quad (10)$$

Таким образом, видим, что начальные условия (8) удовлетворяют системе (10).

Рассмотрим далее, какому уравнению удовлетворяет сумма решений системы (6) вида:

$$\varphi(z_0, t, r, z) = \Phi_1(z_0, t, r, z) + \Phi_2(z_0, t, r, z). \quad (11)$$

Для этого умножим скалярно первое равенство (6) на $\frac{\vec{n}_1}{v(z)}$, второе — на $\frac{\vec{n}_2}{v(z)}$ и результаты сложим, используя значения коэффициентов $A_{1,2}$ и $B_{1,2}$ из (7)

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} = -\text{div } \frac{\vec{n}_1 \Phi_1}{v} - \text{div } \frac{\vec{n}_2 \Phi_2}{v} + \frac{\Phi_1}{v^2 \tau_1} + \frac{\Phi_2}{v^2 \tau_2}. \quad (12)$$

Дифференцируя последнее равенство по t и используя соотношения (6), (7), (12), приходим к уравнению

$$\Delta(\Phi_1 + \Phi_2) - \frac{1}{v^2(z)} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Phi_1 + \Phi_2) = -\frac{\tau_1 - \tau_2}{v^2 \tau_1 \tau_2} \left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + v^2 \text{div } \frac{\vec{n}_2 \Phi_2}{v} - \frac{\Phi_2}{\tau_2} \right]. \quad (13)$$

Следовательно, сумма вида (11) решения системы (6) (если оно существует) удовлетворяет, вообще говоря, неоднородному уравнению (13), которое удобно записать в виде:

$$\square \varphi(z_0, t, r, z) = \frac{1}{v^2(z)} k(z_0, t, r, z), \quad (14)$$

где \square — оператор Д'Аламбера;

$$k(z_0, t, r, z) \equiv \frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_1 \cdot \tau_2} \left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + v^2 \text{div } \frac{\vec{n}_2 \Phi_2}{v} - \frac{\Phi_2}{\tau_2} \right]. \quad (15)$$

Обращает на себя внимание, что в трех случаях неоднородное уравнение (14) вырождается в однородное, а именно:

- 1) в случае однородной среды $v(z) = v_0$, $k \equiv 0$;
- 2) в случае плоских волн, поскольку для них $\tau_{1,2} = \infty$, следовательно, $k = 0$;

3) в случае равенства времен пробега сигнала от источников O и O_1 до точки $M(r, z)$ ($\tau_1 = \tau_2$), которое выполняется лишь в точках линии $z = z_0$.

Подчеркнем, что равенство $k = 0$ выполняется не тождественно (т. е. не для всех точек плоскости (r, z)), а локально (только в точках линии $z = z_0$). Именно последнее обстоятельство позволяет сконструировать решение исходной задачи Коши (1), (2).

Идея конструирования решения напоминает метод Эйлера для численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

Покроем ось $z \geq H$ некоторой равномерной (одномерной) ε -сетью. Через узлы этой сети проведем прямые, параллельные оси r (см. рис. 1). В результате вся исходная среда разобьется на ε -слои, которые занумеруем сверху вниз. Для каждого i -го слоя построим (как это сделано выше, (4)) свои функции пробега $\tau_2(0, r, z)$ и $\tau_1(H + i\varepsilon, r, z)$ для $H + (i - 1)\varepsilon \leq z \leq H + i\varepsilon$. При этом построенные τ_2 и τ_1 обладают тем свойством, что в точках линии $z = H + i\varepsilon$ выполняется равенство $\tau_{1i} = \tau_{2i}$, а в точках соответствующего i -го слоя $|\tau_{1i} - \tau_{2i}| \leq N\varepsilon$.

Затем для первого слоя берем начальные данные (8) и решаем систему (6) или, что то же самое, неоднородное волновое уравнение (14) с соответствующими τ_{21} и τ_{11} . В результате находим некоторое решение в первом слое и на линии $z = H + \varepsilon$. Решение, полученное на линии $z = H + \varepsilon$, рассматриваем как новые начальные данные для второго слоя. Для него решаем свою (перестроенную) систему (6) — свое неоднородное уравнение (14) с соответствующими τ_{22} и τ_{12} . Решение, найденное на линии $z = H + 2\varepsilon$, рассматривается как начальные данные для третьего слоя, т. е. для новой системы (6) с соответствующими τ_{23} и τ_{13} и т. д.

В результате имеем некоторое решение $\varphi(H + i\varepsilon, t, r, z)$ для каждого i -го слоя, которое не совпадает с истинным решением задачи (1), (2). Спрашивается, велико ли будет их отличие?

Чтобы ответить на этот вопрос, выполним некоторые оценки.

В силу нашего предположения о гладкости решения системы (6) можно утверждать, что в каждом i -м слое $k(H + i\varepsilon, t, r, z)$ из (15) имеет оценку вида

$$|k(H + i\varepsilon, t, r, z)| \leq M_i \varepsilon \text{ при } H + (i - 1)\varepsilon \leq z \leq H + i\varepsilon, \quad (16)$$

где M_i не зависит от ε .

Пусть $\varphi_1 = \varphi(H + i\varepsilon, t, r, z)$ есть решение, получаемое в результате последовательного решения уравнений типа (14) с соответствующими начальными данными для i -го слоя. И пусть $\varphi = \varphi(t, r, z)$ есть точное решение задачи Коши (1), (2) в этом слое. Оценим равенства $|\varphi_1 - \varphi|$.

Сначала рассмотрим решение в первом слое. Его можно представить в виде

$$\varphi_1 = \varphi + \sigma_1 \text{ при } H \leq z \leq H + \varepsilon,$$

где σ_1 (для n -го слоя σ_n) — есть решение неоднородного волнового уравнения (14) с нулевыми начальными данными для первого слоя (далее — для n -го слоя).

Решение во втором слое можно записать в виде

$$\varphi_2 = \varphi + \square(\varphi_1 - \varphi) + \sigma_2 \text{ для } H + \varepsilon \leq z \leq H + 2\varepsilon,$$

где $\square(\varphi_1 - \varphi)$ есть решение однородного волнового уравнения с начальными данными $(\varphi_1 - \varphi)$, вычисленными на линии $z = H + \varepsilon$.

Для третьего слоя

$$\varphi_3 = \varphi + \square(\varphi_2 - \varphi) + \sigma_3 \text{ для } H + 2\varepsilon \leq z \leq H + 3\varepsilon$$

и т. д. Наконец, для n -го слоя

$$\Phi_n = \varphi + \square(\Phi_{n-1} - \varphi) + \sigma_n \text{ для } H + (n-1)\varepsilon \leq z \leq H + n\varepsilon, \quad (17)$$

где $\square(\Phi_{n-1} - \varphi)$ — решение однородного волнового уравнения с начальными данными $(\Phi_{n-1} - \varphi)_{z=H+(n-1)\varepsilon}$, а σ_n — решение неоднородного волнового уравнения (14) с нулевыми начальными данными, вычисленными для n -го слоя.

Таким образом, решение неоднородного уравнения (14) с нулевыми начальными данными для любого слоя имеет оценку вида

$$|\sigma_n| \leq \varepsilon \Delta t M_n, n^2,$$

где M_n не зависит от ε , а Δt_n — время пробега сигнала n -го слоя. Такая оценка получается из-за того, что:

- а) в оценке $|k(z_0, t, r, z)|$, согласно (16), появляется множитель ε ;
- б) в нулевых начальных данных появляется множитель Δt_n ;
- в) M_n есть оценка интегрирования правой части (14) по конечной области соответствующего n -го слоя.

Если отсутствует в слое «заворот луча» (иначе, отсутствует каустика, что с самого начала предполагается выполненным), то $\Delta t_n \sim \varepsilon$.

Таким образом, решение уравнения (14) с нулевыми начальными данными для любого слоя имеет оценку вида

$$(\sigma_n) \leq N\varepsilon^3,$$

где $N = \max\{M_n\}$ и не зависит от ε .

В силу корректности решения однородного волнового уравнения (погрешности в решении пропорциональны погрешностям начальных данных) можно утверждать, что:

$$\begin{aligned} |\varphi_1 - \varphi| &\leq N\varepsilon^3; \\ |\varphi_2 - \varphi| &\leq N\varepsilon^3 + N_1\varepsilon \leq 2\varepsilon^3 \max\{N, N_1\}; \\ |\varphi_3 - \varphi| &\leq N\varepsilon^3 + N_2\varepsilon \leq 3\varepsilon^3 \max\{N, N_2\}; \\ &\dots \dots \dots \\ |\varphi_n - \varphi| &\leq N\varepsilon^3 + N_{n-1}\varepsilon \leq n\varepsilon^3 \max\{N, N_{n-1}\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Если учесть, что $n\varepsilon = H - z$, то придем к неравенству*

$$|\varphi(H + n\varepsilon, t, r, z) - \varphi(t, r, z)| \leq l\varepsilon^2 \quad (20)$$

для $H + (n-1)\varepsilon \leq z \leq H + n\varepsilon$,

где l — некоторая константа, не зависящая от ε .

Иначе говоря, решение, построенное нами для n -го слоя, отличается от истинного решения задачи Коши (1), (2) очень мало, поскольку ε достаточно мало.

Переходя к пределу $\varepsilon \rightarrow 0$ (а это делать можно, поскольку оценки по ε равномерны), получим точное решение задачи Коши (1), (2). Физический смысл этого результата состоит в следующем. Как известно, решение неоднородного волнового уравнения физически означает решение задачи с распределенными источниками возмущения в среде. В нашей исходной постановке задачи (1), (2) источников возмущения в среде не должно быть вообще. Однако при решении системы (6) мы их как бы вводим, но вводим таким образом, что «интенсивность» их излучения в каждом ε -слое (за счет перестройки системы уравнений и начальных данных) может быть сделана сколь угодно малой, и тем самым в целом их влияние незначительно ($\sim \varepsilon^2$).

* Эти оценки справедливы для «бегущих» волн.

Далее легко показать, что функции φ_2 и φ_1 системы (6) описывают прямые (распространяющиеся вниз) и обратные (распространяющиеся вверх) волны в неоднородной среде. При этом в каждом слое, при начальных данных вида $\varphi_2 \neq 0, \varphi_1 = 0$ (или $\varphi_2 = 0, \varphi_1 \neq 0$), образуются как прямые (φ_2), так и обратные (φ_1) волны. Иначе говоря, из одного «падающего» луча образуются два: преломленный и отраженный.

Если $\varepsilon \rightarrow 0$, то приходим к выводу, что в пределе каждая линия $z = z_0$ неоднородной среды является как бы границей раздела, в точках которой происходит расщепление «падающего» луча на преломленный и отраженный. В силу этого система (6) хорошо интерпретируется в терминах действительного и мнимого источника. В самом деле, процесс образования отраженных и преломленных волн можно мыслить себе как результат взаимодействия сигналов, приходящих от действительного источника (точки O) и от мнимого (точки O_1). Поскольку отражение происходит в точках любой линии $z = z_0$, следует рассматривать мнимые источники по отношению к каждой линии $z = z_0$. Иначе говоря, приходим к модели непрерывно перемещающегося мнимого источника. При этом должны выполняться два условия:

а) равенство функций τ_2 и τ_1 в точках линии $z = z_0$, т. е. $\tau_2(0, r, z)|_{z=z_0} = \tau_1(z_0, r, z)|_{z=z_0}$; б) неравенство градиентов по r и z этих функций, вычисленных в точках линии $z = z_0$.

Поскольку $z = z_0$ — произвольная линия неоднородной среды, эти условия должны выполняться фактически всюду. На первый взгляд кажется, что они противоречивы. В действительности же, если $\tau_2(0, r, z)$ — функция, определенная единым образом для всех точек неоднородной среды (r, z) , то $\tau_1(z_0, r, z)$ есть фактически семейство функций, зависящее от параметра z_0 . Тогда для каждой линии $z = z_0$ из указанного семейства выбираем такую функцию, чтобы выполнялись условия а и б. При этом волновое уравнение удовлетворяется локально, т. е. только в точках линии $z = z_0$. Переходя к другой линии $z = z'_0$, берем новую функцию из указанного семейства и снова добиваемся выполнения условий а и б и т. д.

Таким образом, если перебрать все линии $z = z_0$ неоднородной среды и на каждой удовлетворить локально волновому уравнению, то в целом (согласно ранее приведенным оценкам при $\varepsilon \rightarrow 0$) получим точное решение исходной задачи (1), (2).

Последним рассуждениям можно придать несколько иную трактовку. Введем две функции

$$\tau_2(0, r, z) \text{ и } \tau_1(z, r, z), \quad (21)$$

причем первый аргумент в них характеризует положение точечного источника (для τ_2 — это точка $(0, 0)$, для τ_1 — $(0, 2z)$), а последние два — положение переменной точки $M(r, z)$. Если произвести разбиение среды на ε -слои, как это сделано выше, а затем устремить ε к нулю, то придем к выводу, что бесконечно малая вариация переменной точки $M(r, z)$ не влечет за собой вариации положения точечного источника. Иными словами, дифференцирование по переменной точке $M(r, z)$ не влечет за собой дифференцирования по координатам положения точечных источников. А это значит, что градиенты, которыми мы пользовались ранее и которые нам фактически нужны, есть частные градиенты по отношению к функции (21), т. е. градиенты, вычисленные по последней паре аргументов (r, z) . При этом по первому аргументу дифференцирование не проводится, так как он остается фиксированным, играя роль параметра. Тогда условия а и б оказываются непротиворечивыми, т. е. всегда можно построить две такие функции, что

$$\tau_2(0, r, z) = \tau_1(z, r, z), \quad (22)$$

а их частные градиенты по последней паре аргументов не будут равны между собой*.

Таким образом, можно считать, что модель непрерывно перемещающегося мнимого источника математически оправдана.

При этом если производить перестройку системы (6) для каждой линии $z = z_0$ так, чтобы в точках этой линии выполнялись условия а и б, и найти решение такой системы, то тем самым получим точное решение исходной задачи (1), (2).

Следующий основной вопрос — вопрос существования решения системы (6). Заметим, что перестройку системы по τ_2 и τ_1 легко учесть, переходя в каждом z -слое к новым переменным по формулам

$$\Psi'_{1,2} = \tau_{1,2} \Phi_{1,2} \quad **, \quad (23)$$

где $\tau_{1,2}$ определены в (4) для каждого ε -слоя.

Если перейти к пределу $\varepsilon \rightarrow 0$, то (6) переходит в систему:

$$\vec{n}_1 \cdot \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = - \text{grad } \Psi_1 + A_1 \cdot \vec{k} \cdot \Psi_1 + B_1 \cdot \vec{k} \cdot \Psi_2; \quad (24)$$

$$\vec{n}_2 \cdot \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = - \text{grad } \Psi_2 + A_2 \cdot \vec{k} \cdot \Psi_1 + B_2 \cdot \vec{k} \cdot \Psi_2.$$

Система (24) переопределена, поскольку на две функции $\Psi_{1,2}$ накладываются четыре условия. По физическому смыслу и система (6), и система (24) есть условия «переноса» функций $\Phi_{1,2}$ ($\Psi_{1,2}$) вдоль соответствующих лучей. Поэтому для разрешимости системы (24) необходимо, чтобы выполнялся локальный принцип автомодельности для каждого луча. Иначе говоря, вдоль всякого (локального) луча должно выполняться условие

$$\frac{\sin \theta(r, z)}{v(z)} = \frac{\sin \theta_0}{v_0} = \text{const}, \quad (25)$$

т. е. при движении всякого (локального) луча вариация начального угла выхода луча из источника равна нулю. Геометрически это можно пояснить так (рис. 3).

Возмущение из точки O движется по лучу OAB , причем такое движение описывается операцией градиента, который присутствует в системе (24). Проектируя градиент на оси r и z , мы фактически заменяем движение по лучу OAB движением по линии $OABC$. При этом считается, что начальный угол выхода θ_0 не меняется. Иначе, в точку C попадает не луч OC , а луч OAC . Причем чем меньше Δr и Δz (т. е. отрезки AC и CB), тем точнее приближение, и в пределе $\Delta r \rightarrow 0$ и $\Delta z \rightarrow 0$ получаем как раз движение точки по лучу OAB , что и описывается системой (24).

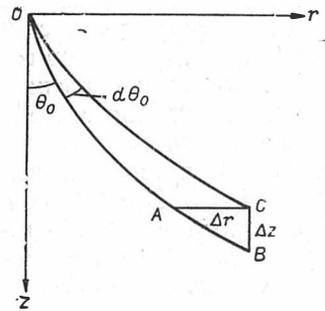


Рис. 3

* Заметим, что первый аргумент у $\tau_1(z, r, z)$ определяет нам семейство функций, из которого мы выбираем нужную нам функцию, чтобы удовлетворить условиям а и б, о чем шла речь выше.

** Такое преобразование позволяет учесть расхождение волны типа $1/r$, не связанное с актами отражения — преломления, а связанное лишь с формой волны. В однородной среде это дает учет обычного геометрического расхождения типа $1/R$.

Легко убеждаемся, что локальный (для каждого луча) принцип автономности есть не что иное, как требование рассматривать фронт сферической волны в точках луча локально-плоским, что всегда выполнимо. В этом и состоит условие разрешимости системы (24). Заметим, что для нормального падения $\sin \theta = 0$ никакой переопределенности нет, и это понятно физически, поскольку «движение» вдоль оси r отсутствует и тем самым накопление времени пробега за счет движения по оси r не происходит.

3. СОСТАВЛЕНИЕ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ СИСТЕМЫ (24)

Для составления разностной схемы системы (24) найдем явное выражение коэффициентов $A_{1,2}$ и $B_{1,2}$ из системы (7). Если использовать известные дифференциальные соотношения вдоль луча, нетрудно прийти к следующим формулам:

$$\begin{aligned} A_1 = -A_2 \equiv A &= \frac{1}{2 \cos^2 \theta} \cdot \frac{v'(z)}{v(z)} + \frac{x}{v(z) \cos \theta}; \\ -B_1 = B_2 \equiv B &= \frac{1}{2 \cos^2 \theta} \cdot \frac{\partial'(z)}{v(z)} - \frac{x}{v(z) \cos \theta}, \end{aligned} \quad (26)$$

где θ — угол, образованный лучом и положительным направлением оси z в рассматриваемой точке (r, z) , x определяется из условия

$$x \equiv \frac{v^2(z)}{\tau} - \frac{1}{\tau}, \quad (27)$$

$$\int_0^{\tau} v^2(l) dl$$

в котором τ — время пробега сигнала вдоль соответствующего луча, а $v(l)$ — скорость распространения возмущений вдоль этого же луча. Нетрудно видеть, что в однородной среде $A = B = 0$ (что уже имели раньше) и система (24) распадается на два независимых уравнения.

Идея решения системы (24) методом конечных разностей состоит в том, что движение сигнала по лучу (по линии AB , см. рис. 3), описываемое операцией градиента, заменяется движением сигнала сначала по оси r (отрезок AC), затем по оси z (отрезок CB). Последнее соответствует операции проектирования градиента на координатные оси и замене дифференциальных операторов их разностными аналогами. Причем общее время пробега сигнала вдоль ломаной ABC совпадает с истинным временем пробега по лучу AB , т. е.

$$\Delta \tau_{ACB} = \Delta \tau_r + \Delta \tau_z \equiv \frac{\sin \theta}{v(z)} \Delta r + \frac{\cos \theta}{v(z)} \Delta z = \Delta \tau_{AB}. \quad (28)$$

Далее поступим следующим образом. Для каждого начального угла выхода θ_0 луча из источника произведем разбиение τ_z (времени, накопленного движением сигнала по оси z) вида

$$\tau_z = n \Delta \tau_z = n \frac{\cos \theta}{v(z)} \Delta z. \quad (29)$$

Такая операция равносильна разбиению среды на n элементарных однородных слоев разной мощности Δz , но с одинаковым временем $\Delta \tau_z$. Для каждого разбиения Δz (иначе, для каждого n -го слоя) определим соответствующие величины Δr и $\Delta \tau_r$ согласно формулам:

$$\Delta r = \Delta z \cdot \operatorname{tg} \theta = \frac{v}{\cos \theta} \operatorname{tg} \theta \cdot \Delta \tau_z; \quad \Delta \tau_r = \operatorname{tg}^2 \theta \cdot \Delta \tau_z. \quad (30)$$

Тогда для каждого n (n -го слоя) будем иметь соответствующее m (число разбиений по оси r), определяемое из условия

$$\tau_r = \frac{\sin \theta}{v(z)} r = m_n \cdot \Delta \tau_r, \quad m_n = \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} \frac{r}{v \Delta \tau_z}. \quad (31)$$

Положим, $t = k \Delta t$, счет будем вести по характеристикам, т. е. будем считать выполненными всегда соотношения:

$$\Delta t = \Delta t_r + \Delta t_z; \quad \Delta t_z = \Delta \tau_z; \quad \Delta t_z = \Delta \tau_z.$$

Тогда разностную схему можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \Psi_1(k + 1/2, m_n, n) &= \Psi_1(k, m_{n-1}, n); \\ \Psi_2(k + 1/2, m_n, n) &= \Psi_2(k, m_{n-1}, n); \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \Psi_1(k + 1, m_n, n) &= (1 - A_n) \cdot \Psi_2(k + 1/2, m_{n+1}, n + 1) + \\ &+ B_n \cdot \Psi_2(k + 1/2, m_n, n); \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \Psi_2(k + 1, m_n, n) &= (1 + B_{n-1}) \cdot \Psi_2(k + 1/2, m_{n-1}, n - 1) - A_{n-1} \times \\ &\times \Psi_1(k + 1/2, m_n, n), \end{aligned}$$

где

$$A_n, B_n = \frac{\chi_{n+1} - \chi_n}{\chi_{n+1} + \chi_n} \pm \frac{x}{v \cos \theta} \Delta r_z$$

χ_n — нормальный импеданс среды, равный $\frac{\rho_n \cdot V_n}{\cos \theta_n}$ [3]. Здесь $k + 1/2$ соответствует движению по оси r (грубо говоря, полшага в разностной схеме).

Нетрудно показать, что разностная схема (33) для непрерывных сред правильно аппроксимирует систему (24), сходится, устойчива. Чтобы получить решение задачи (1), (2) в некоторой точке (r, z) , нужно просчитать разностную схему (33) для каждого начального угла выхода θ_0 , затем найти сумму $(\Psi_1 + \Psi_2)$ и разделить ее на τ (согласно (23)), т. е. на соответствующее k . Полученный результат и будет описывать полное волновое поле. Причем отличие его от истинного поля будет составлять величину, пропорциональную величине шагов по Δr , Δz и Δt .

В заключение отметим тот факт, что разностная схема (33) может быть обращена, т. е. по полному волновому полю с помощью операции обращения разностной схемы (33) можно получить параметры A_n , B_n , иными словами, можно решить обратную задачу.

Указанная операция обращения проделана для нормального падения плоских волн (решение соответствующей прямой задачи подробно описано в (3)). Получены весьма обнадеживающие результаты, что дает возможность рассчитывать на благоприятный исход решения этим методом обратной задачи в классе сферических волн.

Более подробно эти вопросы мы предполагаем осветить в дальнейшем.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Алексеев. Некоторые обратные задачи теории распространения волн.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1962, т. I, II, № 11.
2. G. K u n e t z. Quelques exemples d'analyse d'enregistrement sismiques.— Geophys. prospect., vol. XI, 4, 1963.
3. Л. М. Б р е х о в с к и х. Волны в слоистых средах. Академиздат, 1957.
4. Э. В. Н и к о л ь с к и й. Отражение плоских упругих волн от произвольного неоднородного слоя в случае нормального падения.— Ж. прикл. мех. и техн. физ., 1964, № 4.

М. Л. Шемякин, Ю. А. Романенко

О ВЫЧИСЛЕНИИ ПАРАМЕТРОВ СЕЙСМИЧЕСКОГО РАЗРЕЗА ПО СПОСОБУ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Всякий сейсмический разрез может быть с достаточной степенью точности представлен моделью, параметры которой (скорость, глубина и т. д.) выражаются полиномами с постоянными коэффициентами. Данная статья посвящена использованию метода наименьших квадратов для отыскания коэффициентов двухслойной модели по одиночному годографу отраженных волн.

Модель сейсмического разреза представлена на рис. 1. Поместив начало координат в пункт взрыва, получаем уравнение отражающей границы

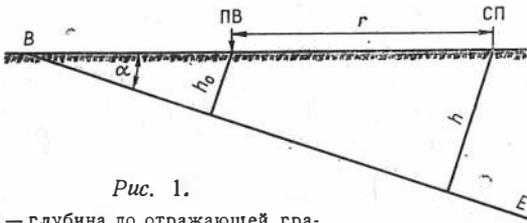


Рис. 1.

h_0 — глубина до отражающей границы в пункте взрыва; α — угол наклона отражающей границы.

$$h = h_0 + r \operatorname{tg} \alpha.$$

Скорость в покрывающей толще предполагается постоянной. Коэффициенты двухслойной модели по одиночному годографу отраженных волн необходимо определить по моментам прихода отраженной волны t_i с погрешностью ϵ_i , наблюдаемым по n сейсмоприемникам, расположенным с погрешностью установки Δa_i на расстояниях r_i от пункта взрыва.

Как известно, уравнение годографа для рассматриваемой модели имеет вид

$$t = \frac{1}{v} \sqrt{4h_0^2 + 4rh_0 \sin \alpha + r^2}. \quad (1)$$

Обозначив $V^2 = x$, $t_i = b_i$, $\sin \alpha = z$, $h_0 = y$, $r_i = a_i$, получим для заданной расстановки n сейсмоприемников систему n нелинейных уравнений с тремя неизвестными

$$4y^2 + 4a_i y z - x b_i^2 + a_i^2 = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2)$$

Заметим, что при обработке годографов отраженных волн на практике обычно вначале определяется скорость v , которая затем используется для определения h_0 [1]. Такая последовательность сложилась, видимо, потому, что, во-первых, система (2) является линейной относительно x , а во-вторых, при определении скорости v часто используются различные априорные данные (например, данные сейсмокаротажа), благодаря чему определение

скорости v обычно оформлено как самостоятельный, но предварительный по отношению к h_0 этап интерпретации. Следует отметить, что этот порядок интерпретации не является единственным и, более того, уступает по точности методам решения системы (2), в которой коэффициенты x , y , z рассматриваются как «равноправные».

Рассмотрим следующий алгоритм вычисления вероятнейших значений коэффициентов x , y , z :

1) из системы (2) выбираются три уравнения, по которым определяются первые приближения искомых коэффициентов (в качестве первых приближений можно использовать априорные сведения о параметрах);

2) полученные приближения используют для линеаризации системы (2), после чего по способу наименьших квадратов [2] определяются вероятнейшие поправки коэффициентов;

3) если поправки достаточно малы, то вычисления заканчиваются, в противном случае по найденным поправкам определяются следующие приближения, и процесс продолжается. Этот процесс сходится, если первые поправки не очень велики, поэтому первые три уравнения выбираются так, чтобы решение было устойчивым.

Для вычисления первого приближенного значения коэффициентов составим систему, например, из первых трех уравнений:

$$\begin{aligned} 4y^2 + 4a_1yz - xb_1 + a_1^2 &= 0; \\ 4y^2 + 4a_2yz - xb_2 + a_2^2 &= 0; \\ 4y^2 + 4a_3yz - xb_3 + a_3^2 &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Решения этой системы, удовлетворяющие условию задачи, таковы:

$$x_0 = v^2 = \frac{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)}{b_3(a_1 - a_2) - b_2(a_1 - a_3) + b_1(a_2 - a_3)}; \quad (4)$$

$$y_0^2 = \frac{x_0(a_3b_1 - a_1b_3) + a_1a_3(a_3 - a_1)}{4(a_3 - a_1)}; \quad y_0 = \sqrt{y_0^2}; \quad (5)$$

$$z_0 = \frac{x_0b_1 - a_1^2 - 4y_0^2}{4a_1y_0}. \quad (6)$$

Абсолютные ошибки вычисленных значений x_0 , y_0 , z_0 в зависимости от ошибок Δa в установке сейсмоприемников (СП) и Δb в определении квадрата времен прихода волны можно приближенно представить в виде выражений:

$$\begin{aligned} |\Delta x| \approx & \left| \frac{\partial x}{\partial a_1} \Delta a_1 \right| + \left| \frac{\partial x}{\partial a_2} \Delta a_2 \right| + \left| \frac{\partial x}{\partial a_3} \Delta a_3 \right| + \left| \frac{\partial x}{\partial b_1} \Delta b_1 \right| + \\ & + \left| \frac{\partial x}{\partial b_2} \Delta b_2 \right| + \left| \frac{\partial x}{\partial b_3} \Delta b_3 \right|, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\frac{\partial x}{\partial a_1} \Delta a_1 = \left[\frac{(a_3 - a_2)(2a_1 - a_2 - a_3)}{K} - \frac{U(b_3 - b_2)}{K^2} \right] \Delta a_1,$$

причем

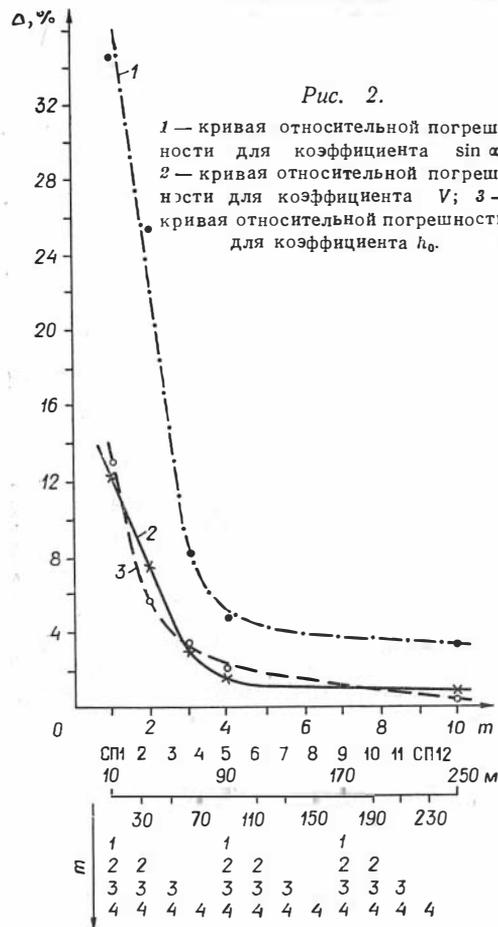
$$U = (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_2 - a_3);$$

$$K = b_3(a_1 - a_2) - b_2(a_1 - a_3) + b_1(a_2 - a_3);$$

$$\frac{\partial x}{\partial a_2} \Delta a_2 = \left[\frac{(a_3 - a_2)(2a_2 - a_3 - a_1)}{K} - \frac{U(b_1 - b_3)}{K^2} \right] \Delta a_2;$$

$$\frac{\partial x}{\partial a_3} \Delta a_3 = \left[\frac{(a_1 - a_2)(2a_3 - a_2 - a_1)}{K} - \frac{U(b_2 - b_1)}{K^2} \right] \Delta a_3;$$

нием разности между временами прихода волны на соседних СП, поэтому, увеличивая разность времен благодаря удлинению расстояний между точками наблюдений, используемых для определения первых приближений, можно значительно повысить их точность, тем самым обеспечив сходимость процесса вычислений. Вычисления показывают, что эта сходимость достигается, если разность времен прихода сигнала к крайним точкам отрезка $[a_1, a_3]$, более 40 мсек.



С учетом сделанных выше выводов для системы (3) вычислим коэффициенты на базе 250 м. Первые приближенные значения коэффициентов были получены с относительной погрешностью 10—35% по данным трех СП, установленных с точностью ± 4 м при погрешности отсчета времен $\pm 0,003$ сек. Для этих первых приближений вычислялись вероятные поправки по системам уравнений, составленных по данным более чем трех СП. При этом исследовалась зависимость относительной погрешности от переопределения*. По результатам вычислений построен график (рис. 2), на котором видим, что кривая относительной погрешности уже при переопределении, равном четырем, выходит на асимптоту. Последнее свидетельствует о том, что вычисление вероятных значений коэффициентов параметров данной модели при базе в 250 м по данным более чем 12 СП не приводит к увеличению точности.

Отметим, что относительная погрешность в определении h_0 не превосходит относительной погрешности в определении скорости, откуда следует, что излагаемый здесь «равноправный» подход к определению параметров имеет преимущество в точности по сравнению со сложившимся на практике определением h_0 после предварительного вычисления скорости, так как в последнем случае всегда

$$\left| \frac{\Delta h_0}{h_0} \right| > \left| \frac{\Delta v}{v} \right|.$$

Предлагаемую методику нетрудно обобщить на случай, когда имеется несколько годографов (благодаря чему значительно увеличивается устойчивость в определении α) и когда некоторые из параметров заданы точно.

ЛИТЕРАТУРА

2. Г. А. Гамбургев. Основы сейсморазведки. Госгостехиздат, 1959.
1. Ю. В. Линник. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. Физматгиз, 1962.

* Под переопределением понимается отношение числа уравнений к числу неизвестных; в нашем случае — отношение числа СП к числу вычисляемых коэффициентов.

С. В. Голдин

ЛОГИЧЕСКИЕ СХЕМЫ КОРРЕЛЯЦИИ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН

В теории алгоритмов интерпретации данных геофизической разведки можно выделить два основных направления:

1. Построение оптимальных алгоритмов для всей интерпретации в целом. Обычно структура алгоритма заранее не устанавливается, а вытекает из оптимального решения общей (конечной) задачи интерпретации. Сюда следует отнести работы по решению обратных геофизических задач, в которых наблюдаемое геофизическое поле рассматривается в целом, а также работы по построению оптимальных (в смысле теории статистических решений) схем интерпретации, основанных на разделении наблюдаемого поля на полезную составляющую и помехи.

2. Исследование эффективности конкретных схем интерпретации, имеющих заданную структуру. Характерной чертой применяемых схем интерпретации данных сейсморазведки и ряда других методов является наличие большого числа последовательно выбираемых с некоторым произволом частных процедур, применяющихся к небольшой части имеющегося материала. Исторически это обусловлено тем, что в процессе развития геофизических методов общая задача интерпретации расчленялась на ряд отдельных задач, каждая из которых решалась более или менее самостоятельно. Исследованию этих отдельных процедур посвящена большая часть работ по теории интерпретации. Однако этих исследований недостаточно, поскольку при построении конкретных алгоритмов интерпретации необходимо знать не только эффективность различных способов выполнения тех или иных частных процедур, но и их взаимоотношение в общих схемах интерпретации, а также эффективность схем, содержащих эти частные процедуры, с точки зрения конечных результатов интерпретации. В частности, возникает вопрос о целесообразности степени расчлененности интерпретационных схем.

В данной работе эти вопросы освещаются применительно к схемам корреляции сейсмических волн, представляющим важнейший этап интерпретации данных сейсморазведки. Эффективность схем корреляции будем рассматривать только с алгоритмической точки зрения, т. е. с точки зрения выбора наилучших схем переработки информации. Предполагается, что в основу этих схем положена физическая модель, в которой все наблюдаемое волновое поле разделяется на помеху и полезную составляющую, содержащую конечное число интерпретируемых волн. Физическая эффективность соответствующих схем интерпретации (т. е. адекватность моделей этого класса по отношению к реальным средам, а также полнота описания

волновых процессов, используемая в конкретных способах интерпретации) здесь не рассматривается.

Поскольку нас интересует не эффективность различных способов выполнения тех или иных частных процедур, а эффективность введения самих этих процедур в схему интерпретации, эти процедуры будут задаваться не конструктивно, а функционально, т. е. по тем функциям, которые они выполняют в общей схеме корреляции независимо от способа осуществления этих функций. Таким образом, мы будем изучать классы процедур с фиксированным функциональным назначением. В основу формального описания рассматриваемых схем положен операторный метод А. А. Ляпунова [1].

Изложенный выше подход позволяет исследовать такие свойства схем, которые являются общими для любой конкретной модели данного класса. Отсюда, конечно, не следует, что схемы корреляции могут быть сформулированы независимо от конкретной физической модели. Но зависимость от конкретной модели всегда проявляется в виде некоторой совокупности детерминированных и вероятностных условий, накладываемых на параметры волн и области их регистрации, которые и учитываются при обработке. Поэтому если условия сформулировать в наиболее абстрактном виде, то задача будет решаться в общем виде. Отсюда, в частности, следует, что и сама физическая модель должна иметь абстрактную формулировку. В дальнейшем под физической моделью \mathfrak{M} понимается тройка множество $(\mathcal{B}, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, где \mathcal{B} — множество объектов среды (границы, слои, скорости и т. п.), \mathcal{A} — множество интерпретируемых волн и \mathcal{P} — непротиворечивая (с точки зрения физической теории распространения волн) система высказываний, заданная на $\mathcal{B} \cup \mathcal{A}$, которую мы будем называть описанием модели \mathfrak{M} .

Перейдем к рассмотрению схемы корреляции при наличии полного описания модели \mathfrak{M} .

1. Операторной схемой алгоритма называется произведение операторов и логических условий (со стрелками), от которых зависит порядок действия операторов. Всякий оператор A определяется формулой вида $x \rightarrow y$, означающей, что информация x преобразуется в информацию y . Следовательно, оператор A задает отображение f множества $X = \{x\}$ в множество $Y = \{y\}$. Два оператора A_1 и A_2 эквивалентны ($A_1 \equiv A_2$), если они задают одно и то же отображение f . Поскольку всякая схема, преобразующая информацию, также задает отображение (а именно, отображение множества всех начальных данных в множество результатов), то это определение эквивалентности естественным образом переносится и на операторные схемы. Если оператор A эквивалентен некоторой операторной схеме, то последняя будет называться представлением оператора A . Ясно, что все представления одного оператора

эквивалентны. Условимся говорить, что схема $\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{k_i} B_{ij}$ построена по типу

схемы $\prod_{i=1}^n A_i$, если для всех $i \leq n$ подсхема $\prod_{j=1}^{k_i} B_{ij}$ является представлением оператора A_i .

Пусть F есть класс отображений f фиксированного множества X на фиксированное множество Y . Класс операторов, задающий все отображения $f \in F$, назовем обобщенным оператором, а всякую схему, содержащую хотя бы один обобщенный оператор, — логической схемой (термин «обобщенный оператор» можно рассматривать как синоним выражения «всякий оператор, задающий отображение из F »). Описанные выше операторные

схемы можно рассматривать либо как конкретные реализации логических схем, либо как вырожденные логические схемы, получающиеся в том случае, когда классы F содержат только одно отображение.

Пусть подмножество X^* интерпретируется как множество реализаций входных данных, свободных от помех. Класс F и соответствующий обобщенный оператор A назовем регулярным, если сужение всех отображений $f \in F$ на X^* определяет одно и то же отображение f^* множества X^* в Y , где $f^*(x)$ при $x \in X^*$ интерпретируется как правильное решение. Ясно, что все реализации обобщенного оператора регулярны и, следовательно, эквивалентны на множестве X^* .

Два обобщенных оператора A_1 и A_2 эквивалентны, если они определяют один и тот же класс отображений F . Пусть обобщенные операторы A_1 и A_2 определяют классы F_1 и F_2 . Обобщенный оператор A_1 является более общим, чем A_2 (A_1 включает A_2), если $F_2 \subset F_1$. Отношение включения для операторов будем записывать в виде $A_1 \supseteq A_2$. Это определение легко переносится на логические схемы.

Логическую схему C условимся называть точным или частным представлением обобщенного оператора A в зависимости от того, какое из отношений $A \equiv C$ или $A \supseteq C$ имеет место. Ясно, что частные представления одного и того же обобщенного оператора не обязательно эквивалентны.

Оператор A^0 , задающий отображение $f_0 \in F$, который удовлетворяет в этом классе некоторому критерию оптимальности, назовем оптимальной реализацией обобщенного оператора A . Пусть логическая схема $\prod A_i$ определяет класс отображений $F' \subset F$. Обозначим оптимальную реализацию обобщенного оператора A_i через A_i^0 , тогда в общем случае $A^0 \neq \prod A_i^0$ и, более того, операторная схема $\prod A_i^0$ может задавать отображение f , не являющееся оптимальным к F' .

Отсюда следует, что задача оптимизации обобщенного оператора не эквивалентна задаче оптимизации логических схем и частных процедур, представляющих этот оператор.

Учитывая, что в дальнейшем операторы, как правило, обобщенные, а также то, что конкретные операторы можно считать частными случаями обобщенных, прилагательное «обобщенный» в дальнейшем опускается.

2. Пусть D — область исследования. Назовем $q = (M, M')$ (где M и $M' \in D$) наблюдением, если в точке M принимались сейсмические колебания при их возбуждении в M' . Множество всех наблюдений на D обозначим Σ . Сейсмические колебания, регистрируемые в $q \in \Sigma$, обозначим через $x_q = x_q(t)$, а множество всех таких колебаний — через X_Σ ; $X_\Sigma = \{x_q | q \in \Sigma\}$. В результате интерпретации, определяемой некоторым алгоритмом I , наблюдаемой совокупности X_Σ сопоставляется описание γ геологической среды (т. е. определяются параметры объектов из множества \mathcal{B} модели \mathfrak{M}).

Легко показать, что существуют способы интерпретации, алгоритмы которых не содержат корреляции волн. Для примера достаточно определить способ подбора следующих образом. Пусть X_Σ^Y — совокупность теоретических записей в Σ , отвечающих описанию γ (при известной форме возбуждаемого импульса). Тогда соответствующий алгоритм интерпретации I отыскивает такие описания γ , которые минимизируют расстояние между X_Σ и X_Σ^Y , вычисленное в некоторой метрике.

Этот способ относится к методам интерпретации, основанным на решении обратной динамической задачи, в которых записи X_Σ (волновые

поле) рассматриваются в целом и в которых корреляция волн * также отсутствует. Эти методы частично из-за сложности вычислений, частично из-за неразработанности (а в значительной мере и из-за отсутствия данных о форме входного импульса) на практике не применяются.

Наиболее широкое распространение получили методы интерпретации, основанные на моделях $\mathfrak{M} = (\mathcal{B}, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ с конечным множеством \mathcal{A} интерпретируемых волн. В этих методах используется лишь часть волнового поля, представляющая совокупность волн достаточно простых типов, остальные колебания считаются помехами. Таким образом, для каждого $q \in \Sigma$

$$x_a(t) = \sum_{a \in \mathcal{A}} u_q^{(a)}(t) + \xi_q(t), \quad (1)$$

где $u_q^{(a)}(t)$ — колебания волны a ;
 $\xi_q(t)$ — помеха.

Мы будем рассматривать только такие схемы интерпретации, в которых для определения γ используются параметры $\omega_q^{(a)}$ волн $a \in \mathcal{A}$.

Пусть $\Theta = \{\omega\}$ — множество параметров интерпретируемых волн, наблюдаемых в Σ (и с заданным отображением на Σ). Действие оператора I , осуществляющего преобразование θ в γ , зависит от принимаемой физической модели \mathfrak{M} (с достаточно полным для определения γ описанием), поэтому, перед применением оператора I к множеству Θ это множество Θ должно быть интерпретировано в \mathfrak{M} , что осуществляется заданием однозначного отображения φ множества Θ в множество \mathcal{A} , удовлетворяющего следующему условию непротиворечивости:

а) пусть $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ — множество высказываний из \mathcal{P} , определенных на \mathcal{A} , и пусть \mathcal{P}_U — множество высказываний на $U = \{u\}$ (где u — наблюдаемые в Σ волны), определяемое значениями параметров ω из Θ . Интерпретация Θ в \mathfrak{M} непротиворечива, если при данном φ высказывания $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ и \mathcal{P}_U непротиворечивы;

б) для большинства реальных моделей в \mathfrak{A} содержится следующее формальное условие (которое в дальнейшем всегда предполагается). Пусть θ — множество параметров волн, определенных в наблюдении q . Тогда необходимо, чтобы для любых $a \in \mathcal{A}$ и $q \in \Sigma$ множество $\varphi^{-1}(a) \cap Q_q$ содержало не более одного параметра ω (т. е. чтобы каждая волна в любом q характеризовалась только одним векторным параметром ω).

Отображение φ совместно с отображением Θ на Σ образует (по терминологии [2]) параметризацию множества Θ .

Оператор G вида $(X_{\Sigma}, \mathfrak{M}) \rightarrow (\Theta, \varphi)$, осуществляющий определение параметров и их непротиворечивую интерпретацию в \mathfrak{M} , будем называть оператором полной корреляции X_{Σ} относительно \mathfrak{M} . Тогда в случае, если полностью известна модель \mathfrak{M} , получим следующее частное представление оператора интерпретации I :

$$I \equiv G I. \quad (2)$$

Оператор полной корреляции часто представляется в виде последовательности (произведения) двух операторов: оператора общей корреляции

* Понятие волны (уточнение которого выходит за рамки данной работы) носит здесь очень условный характер. В частности, одно и то же колебание в одном контексте может рассматриваться как отдельная волна, в другом — как сумма волн. Кроме того, помеха $\xi_q(t)$ также может быть представлена в виде суммы большого (бесконечного) числа волн, часть из которых может иметь интенсивность того же порядка, что и интерпретируемые волны (регулярные помехи).

G_0 , осуществляющего предварительную интерпретацию Θ в некотором множестве индексов K (т. е. нумерацию волн), и оператора N , интерпретирующего K в модели \mathfrak{M} . Дадим точное определение оператора G_0 . Пусть \mathcal{M} — фиксированный класс моделей и пусть $\tilde{\mathcal{A}} = \bigcup_{\mathfrak{M} \in \mathcal{M}} \mathcal{A}$. Тогда оператором общей корреляции назовем оператор G_0 вида $(X_\Sigma, \mathcal{M}) \rightarrow (\theta, K, \Phi_0)$, где Φ_0 — отображение Θ на конечное множество индексов K при условии v ;

в) для каждого $k \in K$ найдется такой класс волн $S \subset \tilde{\mathcal{A}}$, при котором $\Phi_0^{-1}(k)$ непротиворечиво интерпретируется как совокупность параметров волны $a \in S$.

Ясно, что общая корреляция G_0 , не обязательно имеет непротиворечивую интерпретацию в \mathfrak{M} , поэтому

$$G \cong \downarrow G_0^{(i)} N^{(i)} P(\mathfrak{M}) \uparrow, \quad (3)$$

где N — оператор идентификации, определяющий интерпретацию K в \mathfrak{M} заданием однозначного отображения Φ_* множества K в множество \mathcal{A} ; $P(\mathfrak{M})$ — логическое условие непротиворечивости интерпретации Θ в \mathfrak{M} (задаваемой отображением $\Phi = \Phi_0 \Phi_*$); i — индекс при операторах G_0 и N , указывающий на зависимость от числа циклов (в дальнейшем он опускается).

Ясно, что представление (3) является регулярным, если все операторы этой схемы регулярны.

Нужно иметь в виду, что не всякая схема интерпретации, основанная на модели с конечным числом интерпретируемых волн, содержит оператор полной корреляции. В качестве примера такой схемы приведем операторную схему определения γ методом максимального правдоподобия [3]. Пусть $p(\Xi)$ — плотность вероятности для совокупности псмех $\Xi = \{\xi_q(t) | q \in \Sigma\}$ и пусть $U^\gamma = \left\{ \sum_{a \in \mathcal{A}^q} u_q^a(t) | q \in \Sigma \right\}$ — полезная часть волнового поля, определяемая описанием γ . Тогда выбираются описания γ , максимизирующие $p(X_\Sigma - U^\gamma)$:

$$I_{\text{м. п.}} = \downarrow R_0 R_1 R_2 R_3 P_m \uparrow, \quad (4)$$

где R_0 — оператор выбора γ из множества допустимых описаний,

$$R_1: (\mathfrak{M}, \gamma) \rightarrow \theta^\gamma; \quad R_2: \mathcal{C}^\gamma \rightarrow U^\gamma; \quad R_3: (L^\gamma, X_\Sigma) \rightarrow p(X_\Sigma - U^\gamma)$$

и P_m — условие максимума. Вместо $p(X_\Sigma - U^\gamma)$ может быть использована любая монотонная функция от $p(X_\Sigma - U^\gamma)$. Схема (4) по существу является одной из реализаций способа подбора. Это вовсе не означает, что всякий способ подбора не содержит корреляции. В частности, если описание γ выбирается из сравнения θ с θ^γ , мы получим схему (2) при

$$I = \downarrow R_0 R_1 R_3' P_m' \uparrow, \quad (5)$$

где R_3' : $(\theta^\gamma, \theta) = \rho(\theta, \theta^\gamma)$; P_m' — условие минимума для расстояния $\rho(\theta, \theta^\gamma)$; остальные операторы уже определялись.

Таким образом, введенные здесь операторы G и G_0 характеризуют определенный подкласс интерпретационных схем, основанных на моделях с конечным числом волн.

3. Операторы корреляции G и G_0 (введенные в 2) определяют очень широкий класс алгоритмов корреляции, содержащий, в частности, и такие алгоритмы, которые по своей структуре далеки от применяемых на практике. Чтобы показать это, воспользуемся опять методом максимального

правдоподобия, определив оператор полной корреляции формулой

$$G_{м. п.} = \downarrow R_0' R_2 R_3 P_m \uparrow, \quad (6)$$

где R_0' — оператор выбора совокупности параметров θ из множества $\Omega(\mathfrak{M})$ всех совокупностей θ , непротиворечиво интерпретированных в \mathfrak{M} (отображение Φ задается соответствующей индексацией параметров ω_a^a в θ); остальные операторы определялись в (4).

Схема (6), отличие которой от применяемых ранее схем станет ясным ниже, характеризуется рядом особенностей, которые присущи всем схемам полной корреляции и которые удобно рассмотреть на примере именно этой схемы. Предположим, что множество $\Omega(\mathfrak{M})$ является метрическим пространством. Тогда плотность $p(X_\Sigma - U^0)$ как функция от θ может иметь в $\Omega(\mathfrak{M})$ несколько локальных максимумов со значениями $p(X_\Sigma - U^0)$, мало отличающимися от $\max p(X - U^0)$. Соответствующие значения θ естественно

рассматривать как ⁽⁰⁾варианты полной корреляции, а значения θ , в которых достигается $\max p(X - U^0)$, — как ⁽⁰⁾главные варианты. Вариант корреляции

назовем правильным, если он является ближайшим к истинному значению θ_0 в множестве всех вариантов. Правильный вариант не обязательно является главным, поэтому схема (6), отыскивающая главный вариант, не обязательно дает правильную корреляцию даже в том случае, когда главный вариант единственен.

Наличие вариантов корреляции, резко отличающихся от правильного, обычно связано с присутствием регулярных волн, не включенных в модель \mathfrak{M} (в особенности если плотность $p(\Xi)$ определена только для нерегулярной составляющей помехи). В этом легко убедиться, положив $p(X_\Sigma - U^0) = p(\Xi + U' - U^0)$, где U' — сумма всех регулярных волн. Ясно, что локальные максимумы $p(X_\Sigma - U^0)$ имеют место всякий раз, когда θ близко к параметрам любого из подмножеств U' , содержащего столько же волн, что и множество \mathcal{A} (конечно, не для всякого такого подмножества $\theta \in \Omega(\mathfrak{M})$). Заметим также, что наложение волн, не включенных в модель \mathfrak{M} , на волны $a \in \mathcal{A}$, вызывает сильные отклонения правильного варианта от θ_0 . Основными путями уточнения корреляции являются: учет априорной информации, позволяющей уменьшить область допустимых значений $\Omega(\mathfrak{M})$, и построение более полных моделей (в частности, включение в модель регулярных помех). Априорная информация наиболее полно учитывается при переходе к максимизации $p(\theta) p(X_\Sigma - U^0)$, где $p(\theta)$ — априорная плотность для θ_0 .

Основная трудность, связанная с применением схемы (6), заключается в том, что пространство $\Omega(\mathfrak{M})$, в котором отыскивается наибольшее значение функции $p(X_\Sigma - U^0)$, в реальных ситуациях имеет огромную размерность*. Дополнительной трудностью является невыпуклость функции $p(X_\Sigma - U^0)$, что ограничивает возможность применения известных методов отыскания наибольшего значения функции многих переменных. Обе трудности частично устраняются при достаточно полной априорной информации-позволяющей, в частности, наложить линейные связи на параметры $\omega \in \cdot$ (и тем самым уменьшить размерность), однако эта информация в большинстве случаев становится известной только после осуществления корреляции. Это же касается и самой плотности $p(\Xi)$, которая заранее для всей системы наблюдений Σ неизвестна. Аналогичные трудности характерны и для дру-

* Приведем простой расчет. Пусть прослеживаются три волны, каждая из которых на каждой трассе характеризуется двумя параметрами; всего имеется 50 сейсмограмм по 25 трассам. Тогда размерность равна 7500.

гих схем, в которых совокупность параметров θ рассматривается в целом что и обуславливает их практическую нереализуемость.

4. Наиболее универсальным методом уменьшения размерности пространства, в котором ищется решение, является отказ от определения θ «в целом» за один шаг и переход к определению θ «по частям» за некоторое число шагов.

Пусть во множестве \mathcal{A} задана классификация волн на классы $A_1, A_2, \dots, A_m, m \geq 1$ (классами могут быть и отдельные волны) и пусть в совокупности наблюдений Σ задана система Δ непересекающихся подмножеств σ , которые условимся называть сейсмограммами. В частности, в качестве сейсмограмм могут быть взяты отдельные наблюдения q и сама совокупность Σ .

Назовем частным оператором полной корреляции и обозначим через $G(A_j, \sigma)$ оператор, осуществляющий на $X_\sigma = \{x_q(t) | q \in \sigma\}$ полную корреляцию относительно подмодели $\mathfrak{M}_j = (\mathcal{B}, A_j, \mathcal{P}_j)$, где \mathcal{P}_j — множество высказываний относительно волн $a \in A_j$, иначе, оператор вида $(X_\sigma, \mathfrak{M}_j) \rightarrow \theta_\sigma^j$, (где $\theta_\sigma^j = \{\omega^a | a \in A_j, q \in \sigma\}$ — совокупность параметров, непротиворечиво интерпретированных в \mathfrak{M}_j); множество всевозможных таких совокупностей обозначим Ω_σ^j . Мы будем искать такое частное представление оператора полной корреляции G , которое содержит подсхему

$$\prod_{(j, \sigma)} G(A_j, \sigma). \quad (7)$$

Результатом применения подсхемы (7) к X_Σ является совокупность $\theta' = \{\theta_\sigma^j | j = \overline{1, m}; \sigma \in \Delta\}$, которая принадлежит пространству $\Omega(\mathcal{A})$, являющемуся метрическим произведением пространств $\Omega_\sigma^j (j = \overline{1, m}; \sigma \in \Delta)$ [4]. Поскольку из непротиворечивости интерпретации для θ' вытекает непротиворечивость интерпретации для всех θ_σ^j (а обратное, вообще говоря, несправедливо), то $\Omega(\mathfrak{M} \subset \Omega(\mathcal{A}))$. Легко доказываются следующие теоремы:

Т е о р е м а 1. Пусть: 1) операторы $G(A_j, \sigma)$ регуляры, 2) для каждого $q \in \Sigma$ и любых $j, j' \leq m$ колебания $\sum_{a \in A_j} u_q^a(t)$ и $\sum_{a \in A_{j'}} u_q^a(t)$ располагаются в непересекающихся интервалах и 3) для всех $j, j' \leq m$ и $\sigma \in \Delta$ $\Omega_\sigma^j \cap \Omega_\sigma^{j'} = \emptyset$. Тогда схема (7) является регулярным оператором полной корреляции.

Действительно, из условия 2 следует, что волны из различных классов A_j не являются помехами по отношению друг к другу, а из условия 3 вытекает, что неправильная интерпретация измеряемых параметров в модели исключена, следовательно, если при всех $q \in \Sigma$ $\xi_q(t) \equiv 0$, то регулярные операторы $G(A_j, \sigma)$ дают истинные значения θ_σ^j , а тогда и $\theta' = \{\theta_\sigma^j | j = \overline{1, m}; \sigma \in \Delta\} = \theta_0$.

Первые два условия теоремы 1 будем называть условиями регулярности. Заметим, что неприменимость стандартной фазовой корреляции в зонах интерференции связана именно с невыполнением условия регулярности, а не с использованием фаз (как иногда считается).

С каждым оператором $G(A_j, \sigma)$ в пространстве Ω_σ^j связано некоторое множество вариантов для θ_σ^j , которые в свою очередь порождают множество вариантов для θ' . Вариант θ' назовем главным в $\Omega(\mathcal{A})$, если для всех $j \leq m$ и $\sigma \in \Delta$ значения θ_σ^j суть главные варианты в пространствах Ω_σ^j . Вариант θ' назовем правильным в $\Omega(\mathcal{A})$, если он является ближайшим к θ_0 среди всех других вариантов в $\Omega(\mathcal{A})$. Легко показать, что θ' тогда и только тогда является правильным вариантом в $\Omega(\mathcal{A})$, когда для всех j и σ значения θ_σ^j — правильные варианты в Ω_σ^j (доказательство основывается на том,

что $\Omega(\mathcal{A})$ — метрическое произведение пространств). Возникает вопрос, имеется ли соответствие между вариантами θ' в $\Omega(\mathcal{A})$ и вариантами θ в $\Omega(\mathfrak{M})$.

Ответ, естественно, зависит от конкретных алгоритмов корреляции. Пусть $G(A_j, \sigma)$ — оператор максимального правдоподобия, максимизирующий $p(X_\sigma - U_\sigma^j)$, где $U_\sigma^j = \{\sum_{a \in A_j} u_q^a | q \in \Sigma\}$ с параметрами из θ_σ^j . Тогда имеет место другая теорема.

Т е о р е м а 2. Если: 1) параметры волн из разных классов A_j^z функционально независимы, 2) параметры волн одного класса в разных сейсмограммах независимы и 3) для каждого $q \in \Sigma$ и любых $j, j' \leq m$ колебания $\sum_{a \in A_j} u_q^a(t)$ и $\sum_{a \in A_{j'}} u_q^a(t)$ располагаются в непересекающихся интервалах на расстоянии, большем радиуса корреляции помехи, то варианты корреляции в $\Omega(\mathfrak{M})$ являются вариантами корреляции в $\Omega(\mathcal{A})$ и, в частности, главные варианты совпадают. Следовательно, в этом случае схема (7) является точным представлением оператора полной корреляции.

Не давая здесь полного доказательства, заметим, что из условий 1 и 2 следует $\Omega(\mathfrak{M}) = \Omega(\mathcal{A})$, а эти же условия и 3 обеспечивают возможность сведения максимизации $p(X_\Sigma - U)$ к максимизации произведения функций правдоподобия по каждой паре (A_j, σ) .

П р и м е ч а н и е. Если фигурирующая в условиях 1 и 2 независимость параметров является статистической, то теорема будет справедливой и при максимизации $p(\theta) p(X - U)$, так как в этом случае $p(\theta) = \prod_{j, \sigma} p(\theta_\sigma^j)$.

Если условия теоремы не выполнены, то варианты θ и θ' не совпадают, к тому же не исключено, что ни один из вариантов θ' не принадлежит $\Omega(\mathfrak{M})$. В качестве решения тогда естественно взять значение $\hat{\theta} \in \Omega(\mathfrak{M})$, являющееся ближайшим к множеству вариантов в $\Omega(\mathcal{A})$, т. е. удовлетворяющее условию

$$\rho(\hat{\theta}, \Omega'(\mathcal{A})) = \min_{\theta \in \Omega(\mathfrak{M})} \rho(\theta, \Omega'(\mathcal{A})), \quad (8)$$

где $\Omega'(\mathcal{A})$ — множество вариантов в $\Omega(\mathcal{A})$; $\rho(\theta, \theta')$ — метрика в $\Omega(\mathcal{A})$.

Равенство (8) имеет смысл и тогда, когда существуют непротиворечиво интерпретируемые варианты θ' (в этом случае $\rho(\hat{\theta}, \Omega'(\mathcal{A})) = 0$ и $\theta' = \hat{\theta}$), поэтому может быть взято в качестве общего условия для выбора решения.

Множество вариантов $\Omega'(\mathcal{A})$ всегда можно предположить конечным в любой ограниченной области пространства $\Omega(\mathcal{A})$. А тогда для всякого θ' , удовлетворяющего условию (8), найдется такой вариант $\hat{\theta}' \in \Omega'(\mathcal{A})$, что

$$\rho(\hat{\theta}', \Omega(\mathfrak{M})) = \min_{\theta' \in \Omega'(\mathcal{A})} \rho(\theta', \Omega(\mathfrak{M})) \quad (9)$$

и

$$\rho(\hat{\theta}, \Omega'(\mathcal{A})) = \rho(\hat{\theta}, \hat{\theta}'). \quad (10)$$

Действительно, расстояние (8) есть расстояние между множествами $\Omega'(\mathcal{A})$ и $\Omega(\mathfrak{M})$, которое по определению есть расстояние между точкой $\hat{\theta} \in \Omega(\mathfrak{M})$, ближайшей к $\Omega'(\mathcal{A})$, и точкой $\hat{\theta}' \in \Omega'(\mathcal{A})$, ближайшей к $\Omega(\mathfrak{M})$. Из равенств (8) — (10) следует, что оператор G может работать по схеме $X_\Sigma \rightarrow \hat{\theta}' \rightarrow \hat{\theta}$. Отсюда вытекает следующее частное представление оператора полной корреляции: с помощью схемы (7) и логического условия $P(\mathcal{A}, \Sigma)$ выбирается вариант $\hat{\theta}'$, ближайший к $\Omega(\mathfrak{M})$ (т. е. удовлетворяющий условию (10), после чего применяется оператор B вида $\hat{\theta}' \rightarrow \hat{\theta}$, определяющий

ближайшее к $\hat{\theta}'$ значение из $\Omega(\mathfrak{M})$. Таким образом,

$$G \rightleftharpoons \downarrow \prod_{(j, \sigma)} G(A_j, \sigma) P(\mathcal{A}, \Sigma) \uparrow B. \quad (11)$$

При отсутствии помех $\hat{\theta}' = \hat{\theta} = \theta_0$, поэтому из регулярности схемы (7) следует регулярность представления (11).

Обычно к корреляции относят только ту часть схемы (11), которая предшествует оператору B .

Вместо условия $P(\mathcal{A}, \Sigma)$, проверяющего минимум для расстояния $\rho(\theta', \Omega(\mathfrak{M}))$, в схеме (11) может быть применено условие, проще реализуемое, устанавливающее принадлежность варианта θ' к некоторой фиксированной окрестности $\Omega(\mathfrak{M})$. Оба эти условия будем называть расширенными условиями непротиворечивости.

Приведем простейший пример схемы (11) для стандартной фазовой корреляции. Пусть Σ есть обычная сейсмограмма, σ — отдельные трассы и пусть модель \mathfrak{M} содержит только одну волну. Тогда каждый частный оператор $G(A, \sigma)$, выбирает фазу на трассе σ , логическое условие $P(\mathcal{A}, \Sigma)$ проверяет правильность выбора фаз на всех трассах, а оператор B определяет уравнение годографа (например, методом наименьших квадратов).

5. Сейсмограмму σ назовем G -сейсмограммой, если оператор $G(A, \sigma)$ не имеет представления $\prod_{\sigma' \in \Delta(\sigma)} G(A, \sigma')$, где $\Delta(\sigma)$ — некоторое семейство под-

множеств $\sigma' \subset \sigma$. Аналогично вводится определение G -классов волн. Из теоремы 2 следует, что достоверность схем типа (11) зависит, вообще говоря, от G -классификации волн и выбора G -сейсмограмм.

Принципы правильной классификации следуют из второго условия регулярности и условия 1 теоремы 2: в один и тот же G -класс объединяются наиболее зависимые и интерферирующие волны. Этот принцип легко выразить в формальном виде. Пусть r_{ik} — некоторая мера зависимости (например, коэффициент корреляции) между параметрами волн a_i и a_k в произвольном наблюдении q , и пусть r_* — некоторое пороговое значение r_{ik} . Будем писать $a_i \odot a_k$, если либо $r_{ik} \geq r_*$, либо волны a_i и a_k интерферируют хотя бы в одном $q \in \Sigma$ (либо и то и другое вместе). Тогда отношение \odot определяет на \mathcal{A} симметричный граф [5], компоненты связности которого являются G -классами правильно построенной G -классификации волн. Если получающийся граф (\mathcal{A}, \odot) является связным (т. е. если имеется только одна компонента связности), то естественно потребовать, чтобы для всякого j подграф (A_j, \odot) , образуемый G -классом A_j и отношением \odot , был связным.

Нетрудно видеть, что при увеличении порога r_* число компонент связности графа (\mathcal{A}, \odot) может только увеличиться. Поэтому, увеличивая r_* , можно добиться увеличения числа классов правильной G -классификации. Вообще, условие регулярности (т. е. отсутствие интерференции) является для G -классификации более существенным, нежели зависимость между параметрами, так как эта зависимость частично учитывается условием $P(\mathcal{A}, \Sigma)$. Если отношение \odot определяется только интерференцией, то можно построить зависящую от σ G -классификацию, определяемую графами $(\mathcal{A}, \odot_\sigma)$, где $a_i \odot_\sigma a_k$ при a_i и a_k , интерферирующих на σ .

Аналогичным принципам подчиняется разбиение Δ множества наблюдений на G -сейсмограммы. Естественно считать, что зависимость между параметрами одной и той же волны тем больше, чем «ближе» эти наблюдения. Следовательно, в Σ можно определить связанное с метрикой в D расстояние $d(q_1, q_2)$ между любыми наблюдениями q_1 и q_2 , функцией которого является рассматриваемая зависимость. Расстояние $d(q_1, q_2)$ определяет

структуру (точнее, топологию) множества Σ , которая, таким образом, зависит от характера изменения параметров волн, в конечном счете — от физической модели среды.

Пусть в модели \mathfrak{M} выполнен принцип взаимности. Обозначим $q_i = (M_i, M'_i)$. И пусть $d_0(M_1, M_2)$ — расстояние между точками в D . Тогда с точностью до эквивалентности, определяемой принципом взаимности, величина

$$d(q_1, q_2) = \min \left(\sqrt{d_0^2(M_1, M_2) + d_0^2(M'_1, M'_2)}, \sqrt{d_0^2(M_1, M'_2) + d_0^2(M'_1, M_2)} \right), \quad (12)$$

(где $\min(a, b)$ означает наименьшее из a и b) является метрикой в Σ^* . Метрика $d(q_1, q_2)$ определена не только для наблюдений $q \in \Sigma$, но и для множества Q всех пар (M, M') точек, принадлежащих D . Множество $Q = D \times D$, рассматриваемое вместе с метрикой $d(q_1, q_2)$, будем называть обобщенным пространством наблюдений. Если D — профиль, Q совпадает с обобщенной плоскостью наблюдений, введенной Г. А. Гамбурцевым [6], что и оправдывает данное нами название.

Всякие другие метрики, которые могут быть определены в моделях с выполненным принципом взаимности, топологически эквивалентны метрике (12).

Назовем наблюдения q_1 и q_2 смежными, если $d(q_1, q_2) \leq \varepsilon$ (ε достаточно мало, выбор его определяется различными факторами, в том числе уровнем помех). Отношение смежности определяет на Σ симметричный граф, который будем обозначать тем же символом Σ . Всякое подмножество $\Sigma' \subset \Sigma$ будем называть связным (ε -связным), если подграф, образуемый Σ' и отношением смежности, связный. Для правильного разбиения Δ теперь можем сформулировать следующий принцип: если разбиение Δ правильно, то все G -сейсмограммы являются связными.

Если множество Σ связное, то его принято называть непрерывной системой наблюдения. Несвязные множества Σ с большим числом компонент связности (расстояние между которыми больше, чем их диаметры) называют дискретными системами.

Перейдем теперь к рассмотрению логических схем корреляции, когда модель \mathfrak{M} в той или иной степени неизвестна.

1. Схема (11) предполагает такое детальное знание модели \mathfrak{M} , которое достигается в исключительно редких случаях. В частности, в этой схеме предполагаются, известными области регистрации каждой волны $a \in \mathcal{A}$ (т. е. предполагается, что для каждого $q \in \Sigma$ известно, наблюдается в q

* Напомним, что взаимным к $q_i (M_i, M'_i)$ наблюдением называется наблюдение $q_i^* (M'_i, M_i)$. Обозначим через $d_0(q_1, q_2)$ расстояние между q_1 и q_2 в метрическом произведении $D \times D$ [4], тогда не трудно видеть, что $d(q_1, q_2)$ есть наименьшее из расстояний $d_0(q_1, q_2)$ и $d_0(q_1, q_2^*)$, следовательно, $d(q_1, q_2)$ равно нулю тогда и только тогда, когда q_1 и q_2 либо равны между собой, либо взаимны. Для доказательства осталось убедиться в справедливости неравенства треугольника: $d(q_1, q_3) \leq d(q_1, q_2) + d(q_2, q_3)$. Поскольку $d_0(q_1, q_2)$ суть метрика, $d_0(q_1, q_2) \leq d_0(q_1, q_2) + d_0(q_2, q_3)$, а тогда из неравенства $d(q_1, q_3) \leq d_0(q_1, q_3)$ следует $d(q_1, q_3) \leq d_0(q_1, q_2) + d_0(q_2, q_3)$ (1). Поскольку $d(q_1, q_3) = d(q_1, q_3^*) \leq d_0(q_1, q_3^*)$, из неравенства $d_0(q_1, q_3^*) \leq d_0(q_1, q_2^*) + d_0(q_2^*, q_3^*)$ и тождества $d_0(q_2, q_3) \equiv d_0(q_2^*, q_3^*)$ получим $d(q_1, q_3) \leq d_0(q_1, q_2^*) + d_0(q_2, q_3)$ (2). Из неравенств (1) и (2) следует $d(q_1, q_3) \leq d(q_1, q_2) + d_0(q_2, q_3)$ (3). Аналогично можно получить неравенства $d(q_1, q_3) \leq d_0(q_1, q_2^*) + d_0(q_2^*, q_3)$ и $d(q_1, q_3) \leq d_0(q_1, q) + d_0(q_2^*, q_3)$, из которых следует $d_0(q_1, q_3) \leq d(q_1, q_2) + d_0(q_2^*, q_3)$. Сравнивая это неравенство с (3), получим требуемое неравенство треугольника.

волна a или нет). Поэтому кроме функции оценки параметров частные операторы полной корреляции должны носить функцию обнаружения волн.

Допустим для простоты, что волны $a \in A_j$ могут присутствовать в q только одновременно и если волна $a \in A_j$ имеется хотя бы в одном наблюдении $q \in \sigma$, то она имеется во всех $q \in \sigma$.

Введем оператор $\tilde{G}(A_j, \sigma)$ (называемый расширенным частным оператором полной корреляции), задающий отображение множества \mathfrak{X}_σ — множества реализаций вектора X_σ — на множество $\tilde{\Omega}_\sigma^j$, которое состоит из элементов множества Ω_σ^j и пустого элемента ϕ , интерпретируемого как отсутствие волны. Тогда, обозначая через G оператор полной корреляции X_Σ при наличии неточно известной модели, получим

$$\tilde{G} \cong \downarrow \prod_{(j, \sigma)} \tilde{G}(A_j, \sigma) P(\mathcal{A}, \Sigma) \uparrow B. \quad (13)$$

Включая сведения (если они имеются) относительно областей регистрации и логическое условие $P(\mathcal{A}, \Sigma)$, всегда можем построить такие конкретные операторы $\tilde{G}(A_j, \sigma)$, зависящие от номера цикла, что получающиеся реализации схемы (13) эквивалентны схеме (11). Следовательно, оператор \tilde{G} является более общим, чем схема (11), независимо от характера информации относительно областей регистрации.

Схемы, представляющие оператор $\tilde{G}(A_j, \sigma)$, содержат оператор $Z(A_j, \sigma)$, обнаруживающий волны $a \in A_j$ на σ . Оператор $Z(A_j, \sigma)$ может быть выполнен как логическое условие $Z_1(A_j, \sigma)$, вводящее в действие оператор $G(A_j, \sigma)$, если принимается решение о наличии волны

$$\tilde{G}(A_j, \sigma) \cong Z_1(A_j, \sigma) \uparrow G(A_j, \sigma) \downarrow. \quad (14)$$

Оператор Z_1 в схеме (14) может иметь функции не только логического условия, но и определять начальные параметры, обуславливающие порядок работы оператора $G(A_j, \sigma)$.

Представление (14) не единственно. В методе максимального правдоподобия решение о наличии волны принимается по правилу [3]:

$$\frac{\max_{\theta_\sigma^j \in \Omega_\sigma^j} p(X_\sigma - U^{\theta_\sigma^j})}{p(X_\sigma)} \geq \lambda_*. \quad (15)$$

Решение о наличии волн G -класса A_j принимается здесь после получения оценки максимального правдоподобия для θ_σ^j , следовательно, возможно такое представление оператора $\tilde{G}(A_j, \sigma)$:

$$\tilde{G}(A_j, \sigma) \cong G(A_j, \sigma) Z_2(A_j, \sigma), \quad (16)$$

где оператор Z_2 проверяет неравенство (15) и в зависимости от выполнения (15) запоминает или аннулирует результат оператора $G(A_j, \sigma)$. Это же представление имеет место, когда наличие волны $a \in A_j$ проверяется по отличию полученной оценки для θ_σ^j от ожидаемого значения $\bar{\theta}_\sigma^j$, т. е. по неравенству

$$\rho(\hat{\theta}_\sigma^j, \bar{\theta}_\sigma^j) \leq \rho_*. \quad (17)$$

В общем случае параметры волн, используемые для их обнаружения, не обязательно совпадают с параметрами, необходимыми для отыскания, следовательно, общее представление оператора $\tilde{G}(A_j, \sigma)$, содержащего оператор обнаружения, имеет вид

$$\tilde{G}(A_j, \sigma) \cong G_1(A_j, \sigma) Z_{1,2}(A_j, \sigma) \uparrow G_2(A_j, \sigma) \downarrow, \quad (18)$$

где один из операторов — G_1 или G_2 — может отсутствовать. Представления типа (14) характерны для визуальных способов, а представления (16) удобны в алгоритмизированных способах корреляций.

Схема (13) и представления (14) применимы и в том случае, когда условие (*) не выполнено. Оператор $Z_1(A_j, \sigma)$ тогда определяется как оператор вида $(X_\sigma, \mathfrak{M}_j) \rightarrow G(A'_j, \sigma')$, где $A'_j \subset A_j$, $\sigma' \subset \sigma$. Иными словами, оператор Z_1 играет роль распознавателя, который по виду записи X_σ выбирает наиболее предпочтительный оператор $G(A'_j, \sigma')$ из некоторого множества операторов (включая нулевой). Во всех случаях оператор $Z_1(A_j, \sigma)$ определяет классификацию на множестве \mathfrak{X}_σ .

Ясно, что операторы Z и G не обязательно должны быть применены к одним и тем же сейсмограммам и классам волн. Поскольку оператор Z осуществляет значительно более грубую классификацию множества \mathfrak{X}_σ , чем оператор G , то при одном и том же числе наблюдений в σ и волн в A_j оператор $Z(A_j, \sigma)$ конструктивно проще оператора $G(A_j, \sigma)$, поэтому сейсмограммы для оператора Z (Z -сейсмограммы) и классы волн для этого оператора (Z -классы) естественно выбирать более крупными, чем G -сейсмограммы и G -классы соответственно.

Примером несовпадения G - и Z -сейсмограмм является визуальная корреляция, для которой характерна приводимая ниже схема (19), в которой σ суть обычные сейсмограммы. Метод РНП представляет пример совпадения G - и Z -сейсмограмм.

Обозначим A_j j -ый Z -класс. Тогда определим правильные G -классы на σ как компоненты связности графа (A_j, \odot_σ) . Поскольку области интерференции заранее не известны, оператор G , в котором Z - и G -классы не совпадают, должен содержать распознающий оператор $I(A_j, \sigma)$, устанавливающий правильную G -классификацию волн $a \in A_j$ на σ . Полагая для простоты, что G -сейсмограммы совпадают с отдельными наблюдениями q , получим следующее представление оператора $\tilde{G}(A_j, \sigma)$:

$$\tilde{G}(A_j, \sigma) \cong Z_1(A_j, \sigma) \uparrow I(A_j, \sigma) \downarrow \prod_{A_i \in \sigma_j} \downarrow \prod_{q \in \sigma} G(A_i, q) P \times \\ \times (A_i, \sigma) \uparrow P(A_j, \sigma) B(A_j, \sigma) \downarrow. \quad (19)$$

Оценку θ_σ^j , получаемую до применения оператора $B(A_j, \sigma)$, условимся называть G -оценкой θ_σ^j , а с момента применения этого оператора — Z -оценкой θ_σ^j .

2. Осуществление корреляции с применением частных операторов $G(A, \sigma)$ упрощается, если логическое условие $P(A, \Sigma)$ выразить в виде композиции отдельных условий, учитывающих либо связь параметров различных Z -классов, либо изменение этих параметров в Σ . Возможны два типа представления этого условия:

$$1) P(A, \Sigma) \cong \prod_{\sigma \in \Delta} P(A, \sigma) P(\Sigma); \quad (20)$$

$$2) P(A, \Sigma) \cong \prod_{j=1}^m P(A_j, \Sigma) P(A),$$

где $P(A, \sigma)$ и $P(A_j, \Sigma)$ — сужения условия $P(A, \Sigma)$ на Z -сейсмограмму σ и подмодель \mathfrak{M}_j соответственно; $P(\Sigma)$ и $P(A)$ — логические условия, учитывающие только изменение параметров в Σ и только взаимоотношение параметров различных Z -классов соответственно.

Отметим, что условие $P(\mathcal{A}, \sigma)$ при визуальной корреляции выражает вторичные признаки корреляции [10].

Согласно этому, выделяются два основных типа схем полной корреляции «по частям»:

$$\tilde{G}_I \equiv \downarrow \prod_{\sigma \in \Delta}^2 \downarrow \prod_{j=1}^m \tilde{G}(\mathcal{A}_j, \sigma) P(\mathcal{A}, \sigma) \uparrow P(\Sigma) \uparrow^2 B(\mathcal{A}, \Sigma) \quad (21)$$

и

$$\tilde{G}_{II} \equiv \downarrow \prod_{j=1}^m \downarrow \prod_{\sigma \in \Delta} \tilde{G}(\mathcal{A}_j, \sigma) P(\mathcal{A}_j, \Sigma) \uparrow P(\mathcal{A}) \uparrow^2 B(\mathcal{A}, \Sigma). \quad (22)$$

Выбор представления оператора полной корреляции зависит от того, какое из условий: $P(\mathcal{A}, \sigma)$ или $P(\mathcal{A}_j, \sigma)$ является более сильным (т. е. от того, какие зависимости между параметрами являются более тесными). И действительно, предположим, что выполнено условие 1 теоремы 2. Тогда легко получить, что формулы (20) эквивалентны формулам:

$$1) P(\mathcal{A}, \Sigma) \equiv P(\Sigma); \quad (20a)$$

$$2) P(\mathcal{A}, \Sigma) \equiv \prod_{i=1}^m P(\mathcal{A}_i, \sigma).$$

Напротив, если выполнено условие 2, то из (20) получим:

$$1) P(\mathcal{A}, \Sigma) \equiv \prod_{\sigma \in \Delta} P(\mathcal{A}, \sigma); \quad (20b)$$

$$2) P(\mathcal{A}, \Sigma) \equiv P(\mathcal{A}).$$

Таким образом, представление 1 оказывается более эффективным в случае слабой зависимости между параметрами в различных наблюдениях, а представление 2 — в случае слабой зависимости между параметрами различных Z -классов. Отсюда следует, что оператор \tilde{G}_I является более эффективным, когда зависимость между волнами более тесная, чем между параметрами одной волны на разных сейсмограммах. В частности, это имеет место при больших расстояниях $d(\sigma, \sigma^*)$ между соседними сейсмограммами. Поэтому схемы типа (21), в которых сначала на каждой сейсмограмме проводится полная корреляция и результаты корреляции на разных сейсмограммах сравниваются в целом (по всем волнам одновременно), являются более типичными для дискретных систем наблюдения. Схемы типа (22) более характерны для непрерывных систем.

Эти схемы могут комбинироваться. Так, например, при корреляции в дискретных системах наблюдений совокупность Z -сейсмограмм коррелируется по схеме (21), а каждая сейсмограмма (при использовании представления (19)) коррелируется по схеме (22):

$$\tilde{G} \equiv \downarrow \prod_{\sigma \in \Delta}^5 \downarrow \prod_{j=1}^m Z(\mathcal{A}_j, \sigma) \uparrow H(\mathcal{A}_j, \sigma) \downarrow \prod_{A_i \in \mathcal{A}_j}^3 \downarrow \prod_{q \in \sigma}^2 G(A_i, q) P(A_i, \sigma) \uparrow \times \\ \times P(\mathcal{A}_j, \sigma) \uparrow^3 B(\mathcal{A}_j, \sigma) \downarrow P(\mathcal{A}, \sigma) \uparrow P(\Sigma) \uparrow^5 B. \quad (23)$$

Из общего условия $P(\mathcal{A}_j, \Sigma)$ принято выделять условие $P(\mathcal{A}_j; \sigma, \sigma^*)$, связывающее корреляцию на соседних (смежных) сейсмограммах σ и σ^* . В условии $P(\mathcal{A}_j; \sigma, \sigma^*)$, в частности, входит критерий взаимности, критерий

разностного годографа и т. п. Отсюда вытекает следующее представление условия $P(\mathcal{A}_j, \Sigma)$:

$$P(\mathcal{A}_j, \Sigma) \equiv \prod_{\sigma \in \Delta} P(\mathcal{A}_j, \sigma, \sigma^*) P'(\mathcal{A}_j, \Sigma), \quad (24)$$

откуда следует

$$\tilde{G}_{II} \equiv \downarrow \prod_{j=1}^m \downarrow \prod_{\sigma \in \Delta} \downarrow \tilde{G}(\mathcal{A}_j, \sigma) P(\mathcal{A}_j, \sigma, \sigma^*) \uparrow P'(\mathcal{A}_j, \Sigma) \uparrow P(\mathcal{A}) \uparrow. \quad (22a)$$

Если $\tilde{G}(\mathcal{A}_j, \sigma)$ имеет представление (19), а $P(\mathcal{A}_j, \sigma, \sigma^*) \equiv P(\mathcal{A}_j, q, q^*)$ где $q \in \sigma$, $q^* \in \sigma^*$, $d(q, q^*) \leq \epsilon$, и при этом

$$P(\mathcal{A}_i, \sigma) = \prod_{k=2}^n P(\mathcal{A}_i, q_k, q_{k-1}),$$

где n — число наблюдений в σ , то схема (22a) представляет пример схемы непрерывной корреляции. Ее отличительной особенностью является эквивалентность логического условия корреляции между сейсмограммами логическому условию корреляции в пределах сейсмограммы (иначе говоря, эквивалентность позиционной и транспозиционной корреляции). В отличие от этого в схемах так называемой дискретной корреляции представление (19) для расширенного оператора полной корреляции является не обязательным, условие $P(\mathcal{A}_j, \sigma, \sigma^*)$ не сводится к условию $P(\mathcal{A}_j, q, q^*)$ и определяется непосредственно на Z -оценках параметра θ_{σ}^j (либо на некоторых функциях от Z -оценок θ_{σ}^j). Эти данные могут быть положены в основу формального определения непрерывной и дискретной корреляций.

В приведенных схемах зависимость между параметрами различных волн учитывается только логическими условиями. Более рационально (особенно при машинной обработке) использовать схемы с условными частными операторами, в которых зависимость между параметрами учитывается до применения логических условий, что позволяет уменьшить число циклов. Пусть $\mathcal{A}_k \subset \mathcal{A}$ — класс опорных волн (в том смысле, что с вероятностью 1 главный вариант для оператора $\tilde{G}(\mathcal{A}_k, \sigma)$ совпадает с правильным для всех $\sigma \in \Delta$), тогда $\tilde{G}(\mathcal{A}_j, \sigma | \theta_{\sigma}^k)$ является условным частным оператором, если он определяет θ_{σ}^j при известном θ_{σ}^k (значение θ_{σ}^k отыскивается в множестве таких θ_{σ}^k , которые вместе с заданным θ_{σ}^k дают непротиворечиво интерпретированную совокупность $(\theta_{\sigma}^j, \theta_{\sigma}^k)$). При использовании условных операторов схемы (21) и (22) принимают вид:

$$\tilde{G}_I \equiv \downarrow \prod_{\sigma} \tilde{G}(\mathcal{A}_k, \sigma) \downarrow \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \tilde{G}(\mathcal{A}_j, \sigma | \theta_{\sigma}^k) P(\mathcal{A}, \sigma) \uparrow P(\Sigma) \uparrow B; \quad (21a)$$

$$\tilde{G}_{II} \equiv \downarrow \prod_{\sigma \in \Delta} \tilde{G}(\mathcal{A}_k, \sigma) P(\mathcal{A}_k, \Sigma) \uparrow \downarrow \prod_{j=1}^m \downarrow \prod_{\sigma \in \Delta} \tilde{G}(\mathcal{A}_j, \sigma | \theta_{\sigma}^k) P(\mathcal{A}_j, \Sigma) \uparrow P(\mathcal{A}) \uparrow B. \quad (22b)$$

Аналогично вводятся относительные операторы $\tilde{G}(\mathcal{A}_j, \sigma | \sigma^*)$, отыскивающие значения θ_{σ}^j при данном значении $\theta_{\sigma^*}^j$ (где σ^* — предшествующая сейсмограмма или объединение предшествующих сейсмограмм). Тогда вместо (22a) получим

$$\tilde{G} \cong \downarrow \prod_{(i)} \downarrow \prod_{\sigma \in \Delta} \tilde{G}(\mathcal{A}_j, \sigma | \sigma^*) P(\mathcal{A}_j, \Sigma) \uparrow P(\mathcal{A}_j) \uparrow B. \quad (22в)$$

Эта схема оказывается более общей, чем (22а), потому что последняя рассчитана на использование только априорной информации относительно $\Omega(\mathcal{M})$, тогда как схема (22в) может быть эффективно использована для накопления и учета информации, получаемой при измерении параметров θ_σ^j на предшествующих сейсмограммах. Возможность использования накапливаемой информации исключена в схемах корреляции «в целом» и возможна только в расчлененных схемах корреляции.

3. Согласно определению (см. стр. 90—92), результат применения оператора общей корреляции к X_Σ можно представить в виде $(\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots, \theta^{(m)})$, где $\theta^k = \varphi_0^{-1}(k)$, $k \in K$ удовлетворяет] условию (см. там же), т. е. $\theta^{(k)} \in \bigcup_{\alpha \in \sigma^k} \Omega_\Sigma^\alpha$.

Соответственно этому определим частный оператор общей корреляции $G_0(\tilde{\mathcal{A}}, \sigma)$ как оператор вида $(X_\sigma, \mathcal{M}) \rightarrow \{\theta_\sigma^{(1)}, \dots, \theta_\sigma^{(m_\sigma)}\}$, где для каждого $k \leq m_\sigma$ $\theta_\sigma^k \in \bigcup \Omega_\sigma^\alpha$. Множество индексов $1, 2, \dots, m_\sigma$ обозначим K_σ . Оператор $G_0(\tilde{\mathcal{A}}, \sigma)$ может быть реализован как оператор типа максимального правдоподобия, который отыскивает и классифицирует (по неравенству (15)) максимумы функции $p(X_\sigma - U_\sigma^{\theta_\sigma^k})$ при $\theta_\sigma^k \in \bigcup_{\alpha \in \sigma^k} \Omega_\sigma^\alpha$.

Поскольку в схемах с общей корреляцией число волн заранее не задано, частный оператор общей корреляции наряду с функцией обнаружения параметров обязательно имеет функции обнаружения волн. В этом смысле он сходен с расширенным оператором полной корреляции $\tilde{G}(\mathcal{A}_j, \sigma)$. Обнаруживающие и измерительные функции оператора сосредоточиваются в различных операторах, образующих представление оператора G_0 . В частности, оператор $G_0(\mathcal{A}, \sigma)$ имеет следующее частное представление:

$$G_0(\tilde{\mathcal{A}}, \sigma) \cong Z(\tilde{\mathcal{A}}, \sigma) \downarrow \prod_{k \in K_\sigma} G(k, \sigma) P(K_\sigma, \sigma) \downarrow, \quad (25)$$

где оператор $Z(\tilde{\mathcal{A}}, \sigma)$ определяет множество индексов K_σ и для каждого $k \in K_\sigma$ задает начальные параметры операторов $G(k, \sigma)$ вида $k \rightarrow \theta_\sigma^k$, а $P(K_\sigma, \sigma)$ — логическое условие вида $\{\theta_\sigma^k | k \in K_\sigma\} \in \bigcup \Omega_\sigma^{\sigma^k}$ (по всем $\mathcal{A} \subset \tilde{\mathcal{A}}$, имеющим m_σ волн).

Необходимо различать оператор идентифицированного обнаружения $Z(\mathcal{A}_j, \sigma)$, улавливающий уже интерпретированные (идентифицированные) волны, число которых фиксировано; короче говоря, оператор, обнаруживающий фиксированную простую или составную волны, и оператор неидентифицированного обнаружения $Z(\tilde{\mathcal{A}}, \sigma)$, улавливающий волны, число которых заранее не задано и не ограничено сверху. В операторах идентифицированного обнаружения используется большая априорная информация, поэтому они более помехоустойчивы.

Если в σ имеет место состояние волн, то оператор общей корреляции должен быть уточнен, так как определение параметров интерферирующих волн операторами $G(k, \sigma)$, рассчитанными для одиночных волн, является неточным (вследствие нарушения условий регулярности). Уточнение достигается тем, что в класс $\tilde{\mathcal{A}}$ вводятся интерференционные волны и определяются операторы $G(k, \sigma)$, работающие в классе интерференционных волн. Теперь достаточно ввести в схему (25) оператор $H(K_\sigma, \sigma)$, классифицирующий волны на простые и интерференционные:

$$G_0(\tilde{\mathcal{A}}, \sigma) \cong Z(\tilde{\mathcal{A}}, \sigma) H(K_\sigma, \sigma) \downarrow \prod_{k \in K_\sigma} G(k, \sigma) P(K_\sigma, \sigma) \uparrow. \quad (25a)$$

В более общем случае на $\tilde{\mathcal{A}}$ существует такая H -классификация волн, классами эквивалентности которой являются волны, требующие применения одинаковых операторов оценки параметров. Схема (25а) остается справедливой, если $H(K_\sigma, \sigma)$ осуществляет H -классификацию волн.

Назовем $\theta_\sigma^{k_a}$ ($k_a \in k_\sigma$) оценкой параметров волны a на σ , если

$$\rho(\theta_\sigma^{k_a}, \theta_j^a) = \min_{a' \in \mathcal{A}_\sigma} \rho(\theta_\sigma^{k_a}, \theta_\sigma^{a'}) = \min_{k \in K_\sigma} \rho(\theta_\sigma^k, \theta_\sigma^a), \quad (26)$$

где θ_σ^a — истинное значение параметров волны a ;

$\tilde{\mathcal{A}}_\sigma$ — множество волн класса \mathcal{A} на сейсмограмме σ .

Введем теперь оператор идентификации $N(\mathcal{A}_j, \sigma)$, который из заданной совокупности $\{\theta_\sigma^k | k \in K_\sigma\}$ выделяет и интерпретирует параметры волн класса \mathcal{A}_j . Этот оператор имеет следующие частные представления:

$$N(\mathcal{A}_j, \sigma) \cong \downarrow \prod_{a \in \mathcal{A}} N(a, \sigma) P_1(\mathcal{A}_j, \sigma) \uparrow \quad (27)$$

и

$$N(\mathcal{A}_j, \sigma) \cong \prod_{k \in K_\sigma} W(k, \mathcal{A}_j, \sigma) \times P_2(\mathcal{A}_j, \sigma),$$

где $N(a, \sigma)$ — оператор вида $\{\theta_\sigma^k | k \in K_\sigma\} \rightarrow \theta_\sigma^{k_a}$;

$W(k, \mathcal{A}_j, \sigma)$ — оператор вида $\theta_\sigma^k \rightarrow a \in \mathcal{A}_j$ (если $\theta_\sigma^k = \theta_\sigma^{k_a}$), $N(\mathcal{A}_j, \sigma)$ может также иметь представления, не эквивалентные ни одному из представлений (27).

Определяя $\theta_\sigma^{k_a} = \phi$, если $\{\theta_\sigma^k | k \in K_\sigma\}$ не содержит оценки параметров волны a , получим

$$G_0(\tilde{\mathcal{A}}, \sigma) N(\mathcal{A}_j, \sigma) \cong \tilde{G}(\mathcal{A}_j, \sigma), \quad (28)$$

что дает новое представление оператора $\tilde{G}(\tilde{\mathcal{A}}, \sigma)$. Следовательно, оператор общей корреляции $G_0(\tilde{\mathcal{A}}, \sigma)$ может быть использован в схемах предыдущего пункта.

4. Рассмотрим применение частных операторов $G_0(\tilde{\mathcal{A}}, \sigma)$ в схемах типа (3). Пусть к каждой Z -сейсмограмме $\sigma \in \Delta$ применен оператор $G_0(\tilde{\mathcal{A}}, \sigma)$ и, следовательно, задано множество $\tilde{\theta} = \{\tilde{\theta}_\sigma^i | i = \overline{1, m_\sigma}, \sigma \in \Delta\}$. Общая корреляция этого множества, как известно, осуществляется заданием отображения Φ_0 этого множества на некоторое заранее не заданное множество индексов K . Отображение Φ_0 задает в множестве $\tilde{\theta}$ (а следовательно, и в $\tilde{K} = \bigcup_{\sigma \in \Delta} K_\sigma$) разбиение на классы эквивалентности. Классами этого разбиения являются прообразы $\Phi_0^{-1}(k)$ ($k \in K$), а смысл эквивалентности определяется как «принадлежность одной и той же волне». Известно [8] и обратное: всякое разбиение некоторого множества на классы эквивалентности определяет отображение этого множества на систему классов эквивалентности, что и позволяет находить Φ_0 при неизвестном числе классов в K , так как критерии эквивалентности не зависят от этого числа. Таким образом, общая корреляция суть классификация множества $\tilde{\theta}$ (или \tilde{K}) относительно указанной эквивалентности.

Пусть к двум сейсмограммам σ и σ' применен частный оператор общей корреляции $G_0(\tilde{\mathcal{A}}, \sigma)$. Обозначим через a $[\theta_\sigma^k]$ волну, для которой $\theta_\sigma^{k_a} = \theta_\sigma^k$, и введем оператор идентификации $N(a[\theta_\sigma^k], \sigma') : (\theta_\sigma^1, \dots, \theta_\sigma^{m_{\sigma'}}) \rightarrow \theta_\sigma^{k'}$, где

$\theta_{\sigma'}^k \sim \theta_{\sigma}^k$. Тогда общая корреляция двух сейсмограмм может быть задана формулой

$$G_0 \cong G_0(\tilde{\mathcal{A}}, \sigma) G_0(\tilde{\mathcal{A}}, \sigma') \prod_{k \in K_{\sigma}} N(a[\theta_{\sigma}^k], \sigma') \quad (29)$$

либо, учитывая (28),

$$G_0 \cong G_0(\tilde{\mathcal{A}}, \sigma) \prod_{k \in K_{\sigma}} \tilde{G}(a[\theta_{\sigma}^k], \sigma'). \quad (30)$$

Согласно формуле (14), полагая в (30)

$$\tilde{G}(a[\theta_{\sigma}^k], \sigma') = Z_1(a[\theta_{\sigma}^k], \sigma') \uparrow G(a[\theta_{\sigma}^k], \sigma') \downarrow, \quad (31)$$

получим представление G_0 , которое не содержит оператора $G_0(\tilde{\mathcal{A}}, \sigma')$, следовательно, содержит только идентифицированное обнаружение волн операторами $Z_1(a[\theta_{\sigma}^k], \sigma')$. Поскольку оператор $\tilde{G}(a[\theta_{\sigma}^k], \sigma')$ осуществляет корреляцию X_{σ} относительно $X_{\sigma'}$, его можно записать в виде относительного оператора $\tilde{G}(k, \sigma' | \theta_{\sigma}^k)$.

Схемы типа (29) — (31), в которых осуществляется обнаружение волн и их классификация относительно волн, обнаруженных на предыдущих сейсмограммах, естественно назвать схемами прослеживания. При этом схемы типа (29), в которых сначала производится обнаружение всех волн, а затем их классификация, назовем прослеживанием первого типа, а схемы типа (30), (31), в которых осуществляется идентифицированное обнаружение (т. е. обнаружение одновременно с классификацией), назовем прослеживанием второго типа. Применяя прослеживание первого типа к произвольной упорядоченной системе Z -сейсмограмм, получим следующее представление G_0 :

$$G_0 \cong \downarrow \prod_{(i)} G_0(\tilde{\mathcal{A}}, \sigma_i) \prod_{k \in K_{\sigma_{i-1}}} N(a[\theta_{\sigma_{i-1}}^k], \sigma_i) \prod_{k \in K} P(k, \Sigma) \uparrow, \quad (32)$$

где $P(k, \Sigma)$ есть условие $\{\theta_{\sigma}^k | \sigma \in \Delta\} \subset \bigcup_{a \in \mathcal{A}} \Omega_{\Sigma}^a (P(k, \Sigma) = \prod_{(i)} P(k_i \sigma_i, \sigma_{i-1}))$.

Прослеживание второго типа реализуется в схемах общей корреляции по типу схем (22). Пусть имеется такая сейсмограмма $\sigma_1 \in \Delta$, что $\Phi_0(K_{\sigma_1}) = K$, тогда

$$G_0 \cong G_0(\tilde{\mathcal{A}}, \sigma) \prod_{k \in K_{\sigma_1}} \downarrow \prod_{(i)} \tilde{G}(a[\theta_{\sigma_{i-1}}^k], \sigma_i) P(K, \sigma) \uparrow P(k, \Sigma) \uparrow. \quad (33)$$

Если такой сейсмограммы σ_1 нет, то выбирается минимальное подмножество $\Delta' \subset \Delta$, удовлетворяющее условию $\Phi_0(\bigcup_{\sigma \in \Delta'} K_{\sigma}) = K$.

Поскольку в схемах общей корреляции используются более слабые операторы и логические условия, чем в схемах (стр. 90—96), то применение общей корреляции при наличии полностью известной модели приводит к результатам, которые по крайней мере не более достоверны, чем схемы расширенной полной корреляции с идентифицированным обнаружением. Значение общей корреляции станет ясным при обсуждении ситуации, в которой модель \mathfrak{M} неизвестна.

5. Мы рассмотрели ситуацию, когда в модели \mathfrak{M} заданы множества \mathcal{A} и \mathcal{B} , но описание \mathcal{P} недостаточно полно. Если модель \mathfrak{M} неизвестна в том смысле, что ни множество волн \mathcal{A} , ни множество объектов среды \mathcal{B} точно не заданы, то обычно известен класс моделей \mathcal{M} , к которому принадлежит искомая модель. В этом случае корреляция осуществляется одновременно с отысканием \mathfrak{M} .

Теоретически возможным способом корреляции в этом случае является способ подбора моделей: в частности, метод максимального правдоподобия с максимизацией $\rho_{\mathfrak{M}}(X - U^0)$ по всем θ и по всем моделям $\mathfrak{M} \in \mathcal{M}$. Поскольку для каждой модели $\mathfrak{M} \in \mathcal{M}$ область Σ_a существования волны a является неизвестной, варьировать приходится не только по θ и \mathfrak{M} , но и по всем Σ_a ($a \in \mathcal{A}$), следовательно, этот метод приводит к решению задачи отыскания максимума в пространстве, размерность которого по крайней мере на порядок выше, чем для корреляции «в целом» относительно модели, известной полностью.

Другим теоретически возможным способом является применение распознающего (классифицирующего) оператора $R(\mathcal{M})$, задающего отображение множества \mathfrak{X}_{Σ} (множества всех реализаций X_{Σ}) на множество моделей \mathcal{M} . Однако осуществление распознавания с учетом всех значений, взятых, скажем, в соответствии с теоремой отсчетов, всех функций $x_q \in X_{\Sigma}$ практически неосуществимо. Наиболее реальным путем является представление оператора $R(\mathcal{M})$ в виде произведения оператора $\Delta \rightarrow \sigma^*$, где σ^* — «типичная» сейсмограмма, и частного распознающего оператора $R(\mathcal{M}, \sigma^*)$ вида $X_{\sigma^*} \rightarrow \mathfrak{M}$. Если одной такой сейсмограммы нет, то может быть выбран набор сейсмограмм $\Delta^* \subset \Delta$, к которым¹ применяются операторы $R'(\mathcal{M}, \sigma)$ вида $X_{\sigma} \rightarrow \mathcal{M}_{\sigma}$ (\mathcal{M}_{σ} — подкласс моделей из \mathcal{M}), после чего модель \mathfrak{M} отыскивается в множестве моделей $\bigcap_{\sigma \in \Delta^*} \mathcal{M}_{\sigma}$.

Однако и в этом случае построение классификации \mathfrak{X}_{σ} непосредственно по значениям функций $x_q \in X_{\sigma}$ неэффективно.

Из теории распознавания образов известно [9], что эффективные распознающие системы осуществляют классификацию изображений не непосредственно по самим изображениям, а по некоторым информативным признакам (особенностям), характеризующим эти изображения. Поскольку основная информация, которая содержится в X_{σ} относительно рассматриваемого типа моделей, сосредоточена в параметрах волн, определенных в моделях класса \mathcal{M} , эффективная схема распознавания должна начинаться с отыскания на $\sigma \in \Delta^*$ волн $a \in \tilde{\mathcal{A}}$, после чего модель \mathfrak{M} определяется путем классификации выделенных волн. Отсюда вытекает важное следствие, определяющее практическое значение схем общей корреляции: если модель \mathfrak{M} неизвестна, то эффективная схема корреляции содержит частные операторы общей корреляции.

Таким образом, схемы прослеживания, рассмотренные в предыдущем пункте, не только применимы при неизвестной модели (что было ясно заранее), но в этой ситуации даже эффективны.

Классификацию волн $a \in \tilde{\mathcal{A}}$, используемую для определения модели \mathfrak{M} , будем называть S -классификацией, а ее классы S_1, S_2, \dots, S_r — S -классами (в качестве примеров могут быть такие классы: продольные отраженные волны, головные волны PPS и т. п.). Пусть \mathfrak{M} — фиксированная модель из \mathcal{M} и пусть $\mathcal{A} = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ — упорядоченное множество волн модели \mathfrak{M} . Назовем типом модели \mathfrak{M} набор $(S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_m})$, где S_{i_k} ($i_k \leq r$) — тот S -класс, к которому принадлежит волна a_k . Тогда S -классификация множества $\tilde{\mathcal{A}}$ является полной относительно \mathcal{M} , если все модели этого класса имеют различные типы.

Ясно, что если S -классификация полна, то тип модели однозначно определяет модель \mathfrak{M} .

Если $\mathfrak{M}_0 = \bigcap_{\mathfrak{M} \in \mathcal{M}} \mathfrak{M} \neq 0$ (т. е. всякая модель $\mathfrak{M} \in \mathcal{M}$ содержит невырожденную подмодель \mathfrak{M}_0), то схема корреляции может включать как подсхему полной корреляции относительно подмодели \mathfrak{M}_0 , так и подсхему общей корреляции, выделяющей волны, которые не входят в \mathfrak{M}_0 . Тогда

при наличии полной S -классификации

$$\tilde{G} \cong G(\mathcal{A}_0) G_0(\mathcal{A}') N(S),$$

где $\mathcal{A}' = \tilde{\mathcal{A}} \setminus \mathcal{A}_0$, $N(S)$ — оператор S -классификации.

6. На схемы, приведенные ниже, с некоторыми добавлениями переносится понятие правильности корреляции, сформулированное на стр. 95—96.

Общая корреляция является правильной с точностью до идентификации, если для каждого $k \in K$ существует такая волна $a \in \mathcal{A}$, что при каждом σ оценка θ_σ^k является оценкой волны a .

Общая корреляция волны a_k ($k \in K_\sigma$) является правильной с точностью до варианта, если при каждом σ оценка θ_σ^k волны a_k является правильным вариантом корреляции волны a_k в σ . Здесь предполагается, что если $a_k \notin \tilde{\mathcal{A}}_\sigma$, то правильный вариант для a_k есть ϕ .

Очевидно, что если общая корреляция правильна с точностью до варианта, то она правильна и с точностью до идентификации. Ясно также, что полная корреляция правильна (в некотором смысле) тогда и только тогда, когда в этом же смысле правильна общая корреляция и для всех $k \in K$ θ_σ^k есть оценка волны $a = \varphi_*(k)$, где φ_* — отображение K в \mathcal{A} .

Если существуют такие две сейсмограммы σ и σ' , что θ_σ^k и $\theta_{\sigma'}^k$ являются оценками параметров различных волн a и a' , то говорят, что в Σ имеется переход с волны на волну.

Сформулированные здесь понятия правильности корреляции могут быть выражены в терминах как Z -, так и G -оценок.

Легко видеть, что правильность корреляции с точностью до варианта отвечает понятию правильности с точностью до фазы, принятому в фазовой корреляции. Отсюда следует, что фазовая корреляция может быть в точности интерпретирована в терминах излагаемой здесь общей теории корреляции, если под выбором фазы волны понимать выбор оценки параметров этой волны, что в действительности и имеет место (в стандартной корреляции параметры волны просто отождествляются с параметрами одного из ее экстремумов, либо, в крайней случае, являются простыми функциями этих параметров).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. В работе приводятся разнообразные логические схемы, совокупность которых позволяет строить конкретные операторные схемы корреляции для самых различных практических ситуаций. Поскольку всякая конкретная операторная схема корреляции есть реализация операторов G и G_0 , можно утверждать и большее: всякий алгоритм корреляции может быть представлен как реализация некоторой композиции рассмотренных здесь операторов и логических схем.

Логические схемы корреляции содержат операторы идентифицированного и неидентифицированного обнаружения волн, операторы оценки параметров, классифицирующие операторы и операторы идентификации, логические условия. В формальном смысле операторы обнаружения и идентификации и логические условия являются частными случаями классифицирующих операторов (так, например, оператор обнаружения классифицирует функции по признаку «есть волна» и «нет волны», а логические условия разделяют совокупности параметров на противоречивые и непротиворечивые), поэтому самые различные задачи корреляции формально выражаются в терминах задач оценки параметров и классификации.

2. Если модель \mathfrak{M} известна и ее описание является достаточно полным, то эффективная схема корреляции содержит только операторы оценки параметров, при этом оптимальная расчлененность логических схем (в частности, и выделение корреляции как самостоятельной процедуры) регламентируется, с одной стороны, простотой их реализации, а с другой,— их надежностью. При неполном описании модели в схему корреляции включаются операторы идентифицированного обнаружения и классифицирующие операторы, сводящие задачу построения модели к большому числу отдельных задач, каждая из которых решается соответствующим классифицирующим оператором по сравнительно небольшому числу данных. Этот способ корреляции оказывается значительно более эффективным, чем варьирование моделями «в целом», что и обуславливает преимущество расчлененных схем (в частности, схем прослеживания) при наличии неизвестных или неполностью известных моделей. Поскольку логические условия прослеживания $P(k, \sigma, \sigma^*)$ эффективны только для близких сейсмограмм σ и σ^* (в противном случае они оказываются слишком слабыми), схемы прослеживания оказываются эффективными лишь при наличии непрерывных систем наблюдения.

Вместе с тем схемы прослеживания и другие схемы общей корреляции, сравнительно мало учитывающие специфические черты конкретных моделей, являются менее надежными, чем схемы расширенной полной корреляции. Поэтому для повышения надежности корреляции необходимо по мере накопления информации о модели \mathfrak{M} заменять схемы прослеживания схемами расширенной полной корреляции, а при наличии достаточных сведений о зависимостях между параметрами волн переходить к более крупным Z - и G -классам и Z - и G -сейсмограммам.

Этот резерв повышения надежности в очень малой степени используется в стандартной фазовой корреляции, в которой обычно применяется неидентифицированное обнаружение, а накапливаемая информация используется только для усиления логических условий, но не для изменения самой схемы корреляции. В этой связи большое значение имеет развивающаяся сейчас теория дискретной корреляции (Пузырев, Крылов, Потапьев), поскольку в дискретных системах, в которых схемы прослеживания неэффективны, корреляция может осуществляться только в форме полной корреляции. Использование критериев полной (в частности, дискретной) корреляции в разведочных системах наблюдений позволит не только увеличить надежность производственной корреляции, но и снизить детальность наблюдений, которая в настоящее время, как известно, является избыточной (с точки зрения окончательных результатов) и регламентируется только требованиями, накладываемыми на надежность корреляции.

3. В заключение остановимся на постановке задач по оптимизации корреляции. В первых работах этого направления [11] рассматривалась оптимизация некоторых частных операторов корреляции. В дальнейшем наметилась тенденция к построению оптимальных реализаций оператора полной корреляции G , а также к построению оптимальных реализаций оператора интерпретации I , представление которого, как было показано (стр. 81—90), вообще может не содержать корреляцию.

Соответствующие результаты, получаемые методами теории статистических решений (или близкими методами), несомненно, будут иметь большое значение для построения оптимальных методов обработки сейсмических материалов. Вместе с тем они имеют ограниченный характер, что связано не только с трудоемкостью реализаций соответствующих алгоритмов (это не является принципиальным), но главным образом с тем, что во многих случаях сведения о модели \mathfrak{M} и априорных распределениях параметров

волн $p_{\text{ж}}(\theta)$ и помехи $p_{\text{ж}}(\Xi)$ являются недостаточными для конкретной статистической постановки задачи на оптимизацию корреляции «в целом»*.

Для того чтобы оптимальные статистические решения могли использоваться в интерпретации, необходимая информация должна быть приобретена в процессе обработки материала, что, в свою очередь, приводит к необходимости введения расчлененных схем корреляции, содержащих схемы непрерывного прослеживания, которые представляют наиболее эффективный способ быстрого накопления информации.

Из этих рассуждений вытекает следующая структура эффективной интерпретации при наличии неполностью известной модели с конечным числом интерпретируемых волн. Вначале применяются сильно расчлененные схемы общей корреляции (в частности, схемы прослеживания), операторы которой не обязательно являются оптимальными в точном смысле этого слова. Этот этап можно назвать этапом накопления информации. Затем применяются различные классифицирующие и идентифицирующие операторы с целью уточнения модели (этап обработки информации). На следующем этапе полученная информация используется для определения оптимальных частных операторов полной корреляции, а при достаточно полной информации о модели возможен переход к схемам оптимальной корреляции «в целом» и к схемам оптимальной интерпретации без корреляции.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Ляпунов. О логических схемах программ. Проблемы кибернетики вып. I. Физматгиз, 1958.
2. Р. И. Подловченко. О преобразованиях схем программ и их применении в программировании. Проблемы кибернетики, вып. 7. Физматгиз, 1962.
3. Э. Леман. Проверка статистических гипотез. «Наука», 1964.
4. П. С. Александров. Введение в общую теорию множеств и функций. М.—Л., ОГИЗ ГИТТЛ, 1948.
5. К. Берж. Теория графов и ее применение. ИЛ, 1962.
6. Г. А. Гамбургцев. Об изображении сейсмических полей.— Изв. АН СССР, серия геогр. и геофиз., 1946, № 1, 10.
7. Н. Н. Пузырев. Интерпретация данных сейсморазведки методом отраженных волн. Гостехиздат, 1959.
8. А. Г. Курош. Лекции по общей алгебре. Физматгиз, 1962.
9. В. М. Глушков. Введение в кибернетику. Физматгиз, 1964.
10. Н. Н. Пузырев, С. В. Крылов, С. В. Потапьев. Точечные сейсмические зондирования. Сб. «Вопросы методики сейсморазведки. «Наука» (в печати).
11. Ф. М. Гольцман. К теории оптимального приема сейсмических сигналов, ч. 1 и 2. Сб. «Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн», вып. 4. Изд. ЛГУ, 1962.

* Этот вывод относится только к методам интерпретации, основанным на моделях с конечным числом интерпретируемых волн, и не относится к методам решения обратных динамических задач, в которых требуется меньшая априорная информация о среде.

Ю. А. Воронин

О ФОРМАЛИЗАЦИИ ПОНЯТИЙ ГЕОЛОГИИ

Известно, что априорные геологические представления играют существенную роль при постановке геофизических исследований, при выборе модели для решения прямых геофизических задач, а также при выборе предположений для решения обратных геофизических задач. До сих пор геофизики лишены возможности описывать сколько-нибудь приемлемо с формальных позиций те геологические ситуации, с которыми имеют дело. Больше того, при геологической интерпретации геофизических данных вынуждены оперировать геологическими понятиями, которые являются совершенно неудовлетворительными с формальных позиций. Естественно, что отмеченное обстоятельство приводит к ряду весьма нежелательных последствий для геофизики.

Тот факт, что в собственно геологических рассуждениях оперируют большим набором понятий, не выдерживающих никакой формальной критики, безусловно, пагубно сказывается на развитии и самой геологии.

Недостаточная формализация геологических понятий существенно тормозит и процесс внедрения математических методов и ЭВМ в практику исследований в науках о Земле*.

Ниже излагаются результаты пересмотра и замены основных понятий геологии с более общих и более строгих позиций, чем это сделано в работах [1, 2].

Для того чтобы удовлетворительно провести пересмотр и замену огромного количества геологических понятий, существует, по-видимому, единственный путь: попытаться выделить из этого количества по возможности небольшое число основных понятий, основных в том смысле, что после договоренности относительно одной части этих понятий и формализации другой можно вывести остальные необходимые понятия путем логических операций, в частности классифицирования и систематизирования [3]. Ясно, что выделение таких основных понятий можно провести различным образом, желательно только, чтобы при этом учитывались уже сложившиеся традиции. Естественно сразу же позаботиться о проверке предлагаемых понятий на работоспособность, поскольку формальное совершенство понятий является хотя и необходимым, но далеко еще недостаточным условием их научной плодотворности. Так как процесс выработки понятий является принципи-

* Ясно, что прежде чем говорить о внедрении математики и ЭВМ в геологию, необходимо пересмотреть те основные понятия, которыми геология оперирует. См. «Общие вопросы применения математики в экономике и планировании», т. I. Изд-во АН СССР, 1961, стр. 156—158; а также : Е. С. Федоров. «Курс кристаллографии», 1897, стр. 2—3.

ально неалгоритмизируемым [4] и его можно толковать как выбор аксиом, при его проведении и проверке следует опираться в основном на содержательные геологические соображения, используя при этом математические и другие абстракции как очень важный, но вспомогательный инструмент.

Благодаря специальному анализу [5—8 и др.*] было показано, что в качестве основных понятий, которые применяются без формальных обоснований, следует взять понятия «геологического пространства» и «геологического времени», а в качестве тех основных понятий, которые формализуются,— понятия различных геологических пространств и различных границ и тел в этих пространствах. Геологическое пространство толкуется как некоторое специальное функциональное пространство, а геологическое время — как физическое время со специальной шкалой**.

При формализации использованы требования, более сильные, чем те, которые изложены в работе [9], в частности, требовалось:

чтобы формулировка понятия X указывала (хотя бы неявно), как отделить X и что значит описать X ;

чтобы процессы отделения и описания X были увязаны с экспериментально осуществимыми операциями;

и, наконец, требовались проверка возможности формулировки X посредством анализа и синтеза (из чего состоит X , что образует X) и выбор «оптимального» из этих путей.

При выводе из основных понятий других путем классифицирования и систематизирования был выбран принцип «возможности и цели» [10]: проводились различные процедуры выделения и описания объектов в геологическом пространстве.

Были использованы элементарные понятия, заимствованные из математической физики [11], теории множеств и теории метрических пространств [12], а также понятия из математической логики [13]. Считаем важным подчеркнуть, что предпринимались попытки учесть и теорию конструкций [10, 14, 15].

В целях проверки предлагаемой системы понятий показано (см. IX, п. 5), что эта система может рассматриваться как развитие известных идей «геометризации» [16, 17] и «математизации» [18] геологии, а также что эти понятия естественно увязываются, положим, с понятиями кристаллографии [19] и геофизики [11]. Предлагаемая система понятий позволяет сформулировать основные задачи структурного и фациального анализов так, как их сейчас принято понимать [20, 21]; выяснить, какой математический аппарат следует привлечь для их решения, каковы возможности автоматизации процессов решения [22], а также дает возможность провести отделение задач, имеющих решение, от таких задач структурного и фациального анализов, которые пока решения не имеют (см. X, XI). Приложение к данной работе свидетельствует о том, что эта система понятий дает возможность поставить ряд новых задач, связанных с «изученностью» геологических пространств.

Сразу заметим, что изложение ведется языком не только не экономным, но, говоря вообще, и не очень строгим — первое сообщение хотелось сделать по возможности доходчивым***.

* Готовится к печати работа, где проведен сравнительный анализ и исследование более 1000 геологических понятий и определений.

** То, что геологическое время толкуется как физическое время со специальной шкалой без формальных обоснований, является существенным недостатком, от которого предполагается в дальнейшем избавиться.

*** В целях экономии места оказалось необходимым опустить подробные геологические иллюстрации, которые будут даны в специальной работе Ю. А. Косыгина и Ю. А. Воронина.

Какая оценка излагаемых результатов, следует отметить, что:

с узких геофизических позиций они представляют пока ограниченный интерес — позволяют упорядочить некоторые вопросы геологической интерпретации геофизических данных, могут быть полезными при уточнении рабочих понятий геофизики *;

в то же время — опять-таки с узких геологических позиций — они представляются достаточно интересными, так как уже сейчас благодаря выведенным понятиям дают возможность перейти к строгой постановке традиционных и новых геологических задач и установить, какой математический аппарат может быть привлечен для их решения, позволяют уточнить возможности автоматизации решения этих задач, помогают разделить те задачи геологии, которые допускают строгое решение, от тех вопросов, которые таких решений не имеют (это особенно важно для так называемых генетических проблем), открывают возможность построения формальной теории поиска полезных ископаемых, без чего нельзя улучшить положение с разведочными сетями, поиском полезных ископаемых, подсчетом, определением категоричности и нормированием запасов полезных ископаемых **;

с общих позиций наук о Земле они, видимо, позволяют освоить и развить опыт внедрения математических методов в эти науки, дают возможность преодолеть внутренние и внешние языковые барьеры [2], без чего нельзя обеспечить комплексирование методов в науках о Земле.

Следует подчеркнуть, что для практической реализации всех упомянутых возможностей излагаемые результаты должны быть еще раз тщательно проверены и значительно дополнены ***.

Автор благодарит Э. Э. Фотиади за внимание к работе и ряд важных замечаний и советов, а также Ю. А. Косыгина, занимающегося разработкой этих проблем [1, 2, 23].

1. КЛАССИФИКАЦИЯ И СИСТЕМАТИЗАЦИЯ

1. В дальнейшем придется неоднократно обращаться к процедурам классифицирования и систематизирования. Подробно о них, применительно к нуждам геологии, говорится в [3]. Здесь ограничимся только уточнением понятий, которыми оперируют при этих процедурах, леммой, важной для последующего изложения, и общими замечаниями.

2. Пусть A — формально заданное множество. Обозначим через U бинарное отношение эквивалентности [3, 24], определенное на всем A , удовлетворяющее законам:

- 1) рефлексивности aUa , $a \in A$;
- 2) симметрии $a_iUa_k \Rightarrow a_kUa_i$, $a_i, a_k \in A$;
- 3) транзитивности a_iUa_k и $a_kUa_l \Rightarrow a_iUa_l$, $a_i, a_k, a_l \in A$. Известно [24]****, что всякое U , определенное на всем A , задает разбиение множе-

* Известно, что в геофизике, положим, в сейсмике, сейчас нуждаются в формальном уточнении целого круга рабочих понятий, так или иначе связанных с системой геологических понятий [23].

** См., например: Л. В. Пустовалов. «О состоянии и основных направлениях дальнейшего развития науки о Земле». — Сов. геол., 1964, № 8; В. В. Богацкий. «Математический анализ разведочной сети». Госгеолтехиздат, 1963 и, например, [17], а также: «Инструкция по применению классификации запасов к месторождениям нефти и газа». Госгеолтехиздат, 1960.

*** Все необходимые пояснения к используемым математическим символам и операциям можно найти либо в литературе, которая упоминается в данной работе, либо в сб. «Опыт анализа и построения геологических классификаций на основе представлений конечной математики». Тр. ИГиГ СО АН СССР. Новосибирск, 1964.

**** См. также К. Б е р ж. «Теория графов и ее применение». ИЛ., 1962, стр. 9.

ства A на классы эквивалентности

$$\begin{aligned} & A_1, A_2, \dots, A_n : \\ & A_i \cap A_k = 0, \quad i = k; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \bigcup_{i=1}^n A_i = A; \\ & A_i \neq 0, \quad i, k = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

и, наоборот, всякое разбиение A вида (1) задает некоторое отношение эквивалентности U , определенное на всем A .

Разбиение множества A вида (1) будем называть классификацией множества A на основе отношения эквивалентности U .

Рассмотрим $A_i \subset A$, $i = 1, 2, \dots, n$. На каждом A_i определим свое отношение эквивалентности U_i . Тогда для каждого A_i будем иметь:

$$\begin{aligned} & A_i^l \cap A_i^m = 0, \quad l \neq m; \\ & \bigcup_{l=1}^{n_i} A_i^l = A_i; \end{aligned} \quad (2)$$

$$A_i^l \neq 0; \quad l, m = 1, 2, \dots, n_i.$$

Обозначив $N = \sum_{i=1}^n n_i$ и проведя перенумерацию A_i^l , получим следующее представление множества A :

$$\begin{aligned} & A_i \cap A_k = 0, \quad i \neq k; \\ & \bigcup_{i=1}^N A_i = A; \end{aligned} \quad (3)$$

$$A_i \neq 0, \quad i, k = 1, 2, \dots, N.$$

Такое же представление множества A можно найти иначе: например, сначала путем объединения A_1, A_2, \dots, A_n из (1) получить A'_1, A'_2, \dots, A'_n , а затем на каждом A'_i определить свое отношение эквивалентности U'_i . В общем случае к (3) можно прийти от (1) посредством сколь угодно длинной последовательности логических операций разбиения и объединения, используя различные отношения эквивалентности, установленные на различных подмножествах A , причем может оказаться, что $N < n$.

Представление A , задаваемое (3), независимо от конкретной последовательности логических операций разбиения и объединения будем называть систематизацией множества A .

Если известно, каким именно способом получено (3), можно договориться отмечать этот способ особо. В нашем примере (3) представляет собой систематизацию множества A на основе отношений эквивалентности $U, U_1(U), U_2(U), \dots, U_n(U)$.

Имеет место лемма:

Всякая систематизация (3) является классификацией (1).

Действительно, непосредственно из (3) вытекает, что (3) представляет собой разбиение множества A , следовательно, оно устанавливает на всем A некоторое одно отношение эквивалентности U^+ , а потому (3) может быть истолковано как классификация множества A на основе отношения эквивалентности U^+ .

Эта лемма, далеко не очевидная из содержательных соображений, показывает, что с формальных позиций классификация и систематизация не раз-

личаются между собой: то, что они получаются различным путем, формально несущественно *. Иное дело, если оценивать классификацию и систематизацию с содержательных позиций: для того чтобы использовать некоторое разбиение множества A в содержательных целях, надо учитывать, каким образом оно получено, каков смысл $\{U\}$, так как без этого нельзя установить, в частности, как можно сопоставлять между собой объекты, принадлежащие разным классам [25].

Заметим, что результаты [24] и лемма ничего не говорят о том, как можно, например, на основе $U, U_1(U), U_2(U), \dots, U_n(U)$ получить U^+ . По-видимому, такая проблема является убедительной иллюстрацией неалгоритмических проблем.

3. Современную систему понятий геологии можно представлять себе как систематизацию множества A , где классы A_i «определены» посредством словесных описаний и «конкретных» примеров. На первом этапе может идти речь о формальном задании и формальном разбиении множества A , таком, которое дает A_i , «близкие» по содержательному смыслу A_i , уже описанным и используемым сейчас.

II. ГЕОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

1. Под геологическим пространством R условимся понимать пространство, занятое планетой Земля, а также любую часть этого пространства.

Через T обозначим геологическое время и будем понимать его как физическое время со специальной шкалой.

Взяв точку $M \in R$ в качестве центра, построим сферу радиуса E_M . Эту сферу в момент T_0 можно «в среднем» охарактеризовать значениями различных свойств и приписать эти значения самой точке $M \in R$. В этом смысле можно говорить, что в $M \in R$ определена в момент T_0 некоторая совокупность свойств.

2. Предположим, что выбрана некоторая процедура измерения $T - P_T$ и выбран с учетом возможностей и целей некоторый масштаб измерения $T - S_T$. Возьмем некоторый конечный список независимо измеряемых в $M \in R$ свойств: f_1, f_2, \dots, f_n . Обозначим через $P_{f_1}, P_{f_2}, \dots, P_{f_n}$ фиксированные процедуры измерения свойств, через $S_{f_1}, S_{f_2}, \dots, S_{f_n}$ — фиксированные масштабы измерения свойств, через $f_1(M, T_0), f_2(M, T_0), \dots, f_n(M, T_0)$ — значения свойств в $M \in R$ в момент T_0 .

Если заданы $T_0, M \in R$, например, в геоцентрической системе координат: $x_M, y_M, z_M, f_1(M, T_0), f_2(M, T_0), \dots, f_n(M, T_0); P_{f_1}, P_{f_2}, \dots, P_T$ и $S_{f_1}, S_{f_2}, \dots, S_{f_n}, S_T$, то будем говорить, что $M \in R$ является *статической формальной точкой* R в момент T_0 по списку свойств f_1, f_2, \dots, f_n с учетом процедур $P_{f_1}, P_{f_2}, \dots, P_{f_n}, P_T$ и масштабов $S_{f_1}, S_{f_2}, \dots, S_{f_n}, S_T$ *.

Если каждая $M \in R$ является статической формальной точкой, то R будет называться *полнозаданным статическим формальным геологическим пространством* — R^F .

Если только некоторые $M' \in R$ являются статическими формальными точками, а другие $M'' \in R$ не являются таковыми, то R будет называться *неполнозаданным статическим формальным геологическим пространством* — \bar{R}^F .

* Это обстоятельство и было использовано в [3], хотя это, строго говоря, неверно. Классификация дает упорядоченное множество, а систематизация — частично упорядоченное множество [24].

** Предполагается, что само R задается независимо от f_1, f_2, \dots, f_n .

Если все формальные точки R^F или \bar{R}^F являются статическими формальными точками в один и тот же момент T_0 , то R^F или \bar{R}^F будет называться *гомогенным по времени*.

R^F или \bar{R}^F будет называться *гетерогенным по времени*, если же одни формальные точки R^F или \bar{R}^F являются статическими формальными точками в один момент T_0 , а другие — в другой T'_0 .

Если все формальные точки R^F или \bar{R}^F являются статическими формальными точками по одному и тому же списку свойств f_1, f_2, \dots, f_n , то \bar{R}^F или R^F будет называться *гомогенным по свойствам*.

Если же некоторые формальные точки R^F или \bar{R}^F являются статическими формальными точками по одному списку свойств f_1, f_2, \dots, f_n , а некоторые — по другому f'_1, f'_2, \dots, f'_n , то R^F или \bar{R}^F будет называться *гетерогенным по свойствам, которые входят в один список и не входят в другой, и гомогенным по свойствам, которые входят в оба списка*. Иначе, такие R^F или \bar{R}^F будут называться *частично гомогенными по свойствам*.

Если все формальные точки R^F или \bar{R}^F являются статическими формальными точками по таким спискам свойств, что никакие два списка свойств не имеют ни одного общего свойства, то R^F или \bar{R}^F будет называться *гетерогенным по свойствам*.

R^F или \bar{R}^F будет называться *гомогенным по масштабу S_T* , если все формальные точки R^F или \bar{R}^F являются статическими формальными точками с учетом одного и того же масштаба S_T .

Если же некоторые формальные точки R^F или \bar{R}^F являются статическими формальными точками с учетом одного масштаба S_T , а некоторые с учетом другого масштаба S'_T , то R^F или \bar{R}^F будет называться *гетерогенным по масштабу S_T* .

Если R^F или \bar{R}^F является гомогенным по некоторому свойству f_i и все формальные точки R^F или \bar{R}^F — статические формальные точки с учетом одного и того же масштаба S_{f_i} , то \bar{R}^F или R^F будет называться *гомогенным по масштабу S_{f_i}* .

Если R^F или \bar{R}^F гомогенно по некоторому свойству f_i и некоторые формальные точки R^F или \bar{R}^F являются статическими формальными точками с учетом одного масштаба S_{f_i} , а некоторые с учетом другого масштаба S'_{f_i} , то R^F или \bar{R}^F будет называться *гетерогенным по масштабу S_{f_i}* .

Рассмотрим формальные точки \bar{R}^F . Совокупность этих точек можно толковать как систему точек, каждая из которых занимает определенное положение, например, в геоцентрической системе координат. \bar{R}^F будет называться *правильным (\tilde{R}^F)*, если путем последовательных сдвигов этой системы точек вправо и влево, вверх и вниз [19, 26] можно получить систему точек, удовлетворяющую следующим условиям:

- (1) система должна содержать бесконечное множество точек;
- (2) число точек, лежащих внутри шара (круга, отрезка), должно быть пропорционально r^3 (r^2 , r);
- (3) во всякой конечной области должно находиться конечное число точек;
- (4) расположение системы точек относительно любой точки должно быть одинаково.

На основе изложенного можно провести классификацию статических формальных геологических пространств, выделив три типа (R^F — полнозадан-

ные*, \tilde{R}^F — неполнозаданные правильные, \bar{R}^F — неполнозаданные неправильные), и каждый тип разбить на 20 подтипов в соответствии с табл. 1**.

Таблица 1

Классификации $R^F, \tilde{R}^F, \bar{R}^F$

а				б				
Гомогенные по T		Гетерогенные по T		Гомогенные по свойствам		Частично гомогенные по свойствам		Гетерогенные по всем свойствам
Гомогенные по S_T	Гетерогенные по S_T	Гомогенные по S_T	Гетерогенные по S_T	Гомогенные по всем S_{f_i}	Гетерогенные хотя бы по одному S_{f_i}	Гомогенные по всем общим S_{f_i}	Гетерогенные хотя бы по одному общему S_{f_i}	
k_1	k_2	k_3	k_4	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5

Примечание. $j = 1, 2, 3, 4$.

Рассматривая какое-нибудь R^F, \tilde{R}^F или \bar{R}^F , принадлежащее любому подтипу (см. табл. 1), *безотносительно к тому*, какие именно свойства f_1, f_2, \dots, f_n имелись в виду, как поступали ранее, условимся говорить о *статическом топологическом геологическом пространстве*. Название же статического формального геологического пространства закрепим в дальнейшем на тот случай, когда *фиксировано*, какие именно свойства f_1, f_2, \dots, f_n имеются в виду. Исходя из этого, можно специализировать $R^F, \tilde{R}^F, \bar{R}^F$ любого подтипа в зависимости от *специального* выбора списка свойств f_1, f_2, \dots, f_n . Таким образом, приходим к понятию *специализированного статического формального геологического пространства*, например, петрографического, биостратиграфического.

До сих пор свойства f_1, f_2, \dots, f_n рассматривались как *непосредственно измеряемые, имеющие операционный смысл в точке*. От этих свойств можно перейти на основе некоторых *алгоритмов* к другим свойствам $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k$, которые можно считать функционально не зависящими между собой, непрерывными в R всюду или почти всюду, за исключением, может быть, множества меры нуль [27], имеющими смысл, возможно, только на подмножествах R . Таким образом, приходим к более широкому понятию статического геологического пространства***. В случае, когда такой переход от f_1, f_2, \dots, f_n к $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k$ осуществлен хотя бы частично, условимся заменять слово «формальное» словом «теоретическое».

3. Отрегулируем с учетом обобщений сивмолику. Когда имеются в виду различные специализированные статические теоретические геологические пространства, будем писать $R^{\Phi}, \tilde{R}^{\Phi}, \bar{R}^{\Phi}$, полагая, что штрих указывает на фиксацию списка свойств $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k$. Иногда будет удобно вместо штриха использовать значок i снизу слева ($i = 1, 2, \dots, n$). Когда имеются в виду различные статические топологические геологические пространства, будем писать $R^{\Phi}, \tilde{R}^{\Phi}, \bar{R}^{\Phi}$, имея в виду, что относительно списка свойств $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \dots, \Phi_k$ ничего не предполагается, за исключением того, что он

* По определению, R^F является неправильным, так как для него не выполняется, например, (3).

** Для R^F некоторые классы в табл. 1 не имеют смысла, в частности, класс 5.

*** Такое расширение, как легко убедиться, не противоречит предыдущему, в частности, сохраняет смысл табл. 1.

конечен. Подтип пространства (см. табл. 1) можно условиться фиксировать с помощью значка k сверху слева ($k = 1, 2, \dots, 20$). Если иметь в виду R, R^Φ или $R^{\Phi'}$, то можно условиться фиксировать *мерность* пространства с помощью значка l снизу справа ($l = 3, 2, 1, 0$). R, R^Φ или $R^{\Phi'}$ могут быть трехмерными (объем), двумерными (поверхность), одномерными (линия), нульмерными (конечное число точек)*. Таким образом, будем иметь дело с символами:

$$\begin{aligned} & {}^k R_l^\Phi, {}^k \tilde{R}_0^\Phi, {}^k \bar{R}_0^\Phi; \\ & {}^k_i R_l^\Phi, {}^k_i \tilde{R}_0^\Phi, {}^k_i \bar{R}_0^\Phi; \\ & ({}^k R_l^{\Phi'}, {}^k \tilde{R}_0^{\Phi'}, {}^k \bar{R}_0^{\Phi'}). \end{aligned}$$

Например, символ ${}^S R_2^\Phi$ будет означать полнозаданное статическое топологическое геологическое двумерное пространство, гомогенное по T и S_T , гетерогенное по φ_i ; символ ${}^1_6 \tilde{R}_0^\Phi$ будет означать неполнозаданное правильное статическое теоретическое, допустим, литологическое, нульмерное геологическое пространство, гомогенное по T ; S_{T_i} ; φ_i и S_{φ_i} .

4. Если заданы: промежуток геологического времени (T', T'') , «положение» $M \in R$, например, в геоцентрической системе координат $x_M = x_M(T)$, $y_M = y_M(T)$, $z_M = z_M(T)$, $T' \leq T \leq T''$, значения $\varphi_1(M, T), \varphi_2(M, T), \dots, \varphi_k(M, T)$, $T' \leq T \leq T''$, а также $P_T, P_{\varphi_1}, P_{\varphi_2}, \dots, P_{\varphi_k}$ и $S_T, S_{\varphi_1}, S_{\varphi_2}, \dots, S_{\varphi_k}$, то будем говорить, что $M \in R$ является *динамической формальной точкой в R и в промежутке (T', T'') по списку свойств $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ с учетом процедур $P_T, P_{\varphi_1}, P_{\varphi_2}, \dots, P_{\varphi_k}$ и масштабов $S_T, S_{\varphi_1}, S_{\varphi_2}, \dots, S_{\varphi_k}$* . Опираясь на это понятие, аналогично предыдущему можно было бы ввести понятие о различных *динамических геологических пространствах*. Однако такая система формализмов была бы бессодержательной, так как сейчас не видно какого-либо *реального* пути для изучения таких пространств, исключая представление динамических пространств через последовательность статических**.

5. Приведем некоторые содержательные оправдания по поводу предыдущих формальных построений.

Выбор в качестве исходных понятий геологического пространства и геологического времени обусловлен их общностью и интуитивной очевидностью для геолога и геофизика. Относительно геологического времени уже была сделана оговорка. С геологическим временем тесно связано понятие геологического возраста. Для того, чтобы формализовать понятие геологического времени, необходимо, опираясь на физическое время, формализовать понятие геологического возраста, геологического события.

Введение формальной точки обусловлено дискретностью наблюдений, связью их с определенными свойствами и их временной привязкой, а также формальными удобствами.

Детальное обсуждение процедур и масштабов было вызвано необходимостью подчеркнуть, что *удовлетворительная* теория не может базироваться на «возможных» и «воображаемых» свойствах, не может не учитывать точности реальных процедур измерения, масштабов. Это обстоятельство игнорируется сейчас во всех генетических построениях и во многих других случаях.

* По определению, $\tilde{R}^\Phi, \bar{R}^\Phi, \tilde{R}^{\Phi'}, \bar{R}^{\Phi'}$ считаются нульмерными.

** На этом пути можно искать аргументы против «генетических» концепций в геологии, которые буквально захлестнули все геологические проблемы. Трудно недооценить вред этих концепций.

Переход от f_i к ϕ_i был необходим для того, чтобы учесть *модельность* наших представлений о свойствах. Например, в сейсмике непосредственно измеряют только времена прихода волн и (с точностью до искажения) их форму, а построения приводят в пространстве координат, скоростей распространения волн и плотностей.

Введение статического пространства обусловлено экспериментальными возможностями. Есть основания полагать, что все задачи геологии, имеющие практическое значение в настоящее время, должны были бы решаться именно в статическом пространстве без привлечения генезиса и истории, всегда в высшей степени гипотетичных.

Упоминание о динамическом пространстве было необходимо, чтобы особо подчеркнуть реальные возможности изучения генезиса и истории. Было бы неправомерным отрицать генезис и историю как цель, но рассматривать их как средство, например, поиска полезных ископаемых, как это делается сейчас, нет никаких оснований. Введение неполнозаданных пространств диктуется опять-таки экспериментальными возможностями.

Введение правильного неполнозаданного пространства связано с тем, что исследования ведутся не только в дискретной сети, но и в правильной сети, везде, где позволяют условия. Кроме того, это позволяет учесть опыт кристаллографии [19] и облегчает процедуры интерполяции и экстраполяции.

Введение полнозаданных пространств обусловлено тем, что только такие пространства достаточно хорошо отвечают реальным объектам, только в таких пространствах возможны, например, структурные, геофизические геохимические, фациальные и другие теоретические построения. В неполнозаданных пространствах, которые «наблюдаются», даже такие понятия, как форма, объем, теряют смысл в том плане, в каком ими оперируют в геологии*. Переход от неполнозаданных пространств к полнозаданным является переходом от наблюдаемых фактов к *модели*. Такой подход хорошо иллюстрируется переходом от процесса картирования к построению карты.

Введение специализированных пространств вполне отвечает сложившимся традициям.

Введение топологических пространств следует считать основой предлагаемого подхода, обусловленного:

во-первых, возможностью выработать понятия, обладающие такой общностью, которая позволит с *единых* позиций рассмотреть существующие сейчас в *различных* областях геологии *теоретически не связанные между собой* приемы теоретических построений (например, структурных, фациальных);

во-вторых, на основе общих понятий можно будет ставить задачу о выработке *единого* языка для *всех* специальностей геологии. При этом имеется возможность опереться на уже разработанные языки теории множеств, теории метрических пространств, математической логики, функционального анализа;

в-третьих, с помощью выработанных понятий можно будет провести взаимное теоретическое обогащение различных специализаций геологии путем переноса приемов из областей, формально хорошо разработанных, в области, формально менее разработанные. Например, структурные приемы кристаллографии можно использовать в петрографии, литологии, структурной геологии; фациальные приемы минералогии — в петрографии, литологии; приемы построения и прослеживания границ геофизики — в структурной геологии;

* Это не исключает введения аналогов понятий формы и объема в неполнозаданных пространствах, но это вопрос будущего.

в-четвертых, впоследствии можно будет удовлетворительно сформулировать задачи и методы *теоретической геологии*, которая должна (опираясь прежде всего на конкретный опыт различных специальностей геологии) заниматься вопросами топологического характера, т. е. общими для всех специальностей геологии;

в-пятых, на основе предыдущего можно будет указать наиболее эффективные пути внедрения математических методов и ЭВМ в геологию, избегая кустарщины.

Вернемся к табл. 1. Введение пространств гомогенных и гетерогенных по свойствам и масштабам для свойств диктуется опять-таки экспериментальными возможностями. Наши возможности измерения, например в приповерхностных и глубинных частях Земли, различны. Введение пространств, гомогенных и гетерогенных по времени и временному масштабу, обусловлено требованиями геоморфологии и неотектоники, а также теоретическими соображениями — при попытках изучения динамических пространств с помощью последовательности статических пространств надо предусмотреть разбиение пространств на части в различные моменты времени и с различными временными масштабами. (Впоследствии покажем, что табл. 1 значительно облегчает, в частности, анализ различных карт, разрезов, колонок.)

6. Процедуры перехода от различных подтипов неполнозаданных статических пространств к полнозаданным статическим полностью гомогенным пространствам ${}^1R_i^\Phi$, ${}_iR_i^\Phi$ будем называть *построением моделей статических геологических пространств*. Эти процедуры требуют специальной теории. Допустив, что такая теория имеется, сейчас ограничимся только установлением некоторых общих положений, символики и терминологии*.

Через $S_T (R \rightarrow R)$ обозначим процедуру выравнивания в R временного масштаба, через $T_0 (R \rightarrow R)$ — приведения R к одному моменту времени, через $\varphi (R \rightarrow R)$ — приведения R к одному списку свойств, через $S_\varphi (R \rightarrow R)$ — процедуру выравнивания в R масштабов по свойствам.

Обозначив через ${}_k(R \rightarrow R)_1$ процедуру приведения R к полностью гомогенному виду, примем для нее пока (с учетом толкования T), такой порядок:

$${}_k(R \rightarrow R)_1 : S_T (R \rightarrow R), T_0 (R \rightarrow R), \varphi (R \rightarrow R), S_\varphi (R \rightarrow R). \quad (4)$$

Если обозначить через $(\bar{R} \rightarrow \tilde{R} \rightarrow R)$ процедуру перехода от неполнозаданных пространств к полнозаданным, а через $(R_i \rightarrow {}^1R_i^\Phi)$ — процедуру перехода к полнозаданному статическому полностью гомогенному пространству, то для процедуры построения модели статического геологического пространства ${}^1R_i^\Phi$ примем (с учетом 4) такой порядок:

$$(R_i \rightarrow {}^1R_i^\Phi) : {}_k(R \rightarrow R)_1, (\bar{R} \rightarrow \tilde{R} \rightarrow R). \quad (5)$$

В предыдущем предполагалось, что само R задано независимо от списка Φ , и не указывалось, какой список Φ^+ имелся в виду при задании R .

Если необходимо указать, какой именно список имелся в виду при задании R , то вместо (4) и (5) будем писать:

$${}_k(R \rightarrow R)_1^{\Phi^+} : S_T (R \rightarrow R)^{\Phi^+}, T_0 (R \rightarrow R)^{\Phi^+}, \varphi (R \rightarrow R)^{\Phi^+}, S_\varphi (R \rightarrow R)^{\Phi^+}; \quad (4')$$

$$(R_i \rightarrow {}^1R_i^\Phi)^{\Phi^+} : {}_k(R \rightarrow R)_1^{\Phi^+}, (\bar{R} \rightarrow \tilde{R} \rightarrow R)^{\Phi^+}. \quad (5')$$

* Есть основание полагать, что рассмотрение этих процедур позволит сформулировать ряд задач, представляющих и математический интерес (см. приложение).

Когда это удобно, (5') будем называть *достроением* модели статического геологического пространства ${}^1R_l^{\Phi+U\Phi}$. Иногда ${}^1R_l^{\Phi+}$ будем называть априорной моделью, а ${}^1R_l^{\Phi+U\Phi}$ — апостериорной.

Очевидно, что в зависимости от конкретных процедур: $S_T (R \rightarrow R)$, $T_0 (R \rightarrow R)$, $\varphi (R \rightarrow R)$, $S_\varphi (R \rightarrow R)$ и $(\bar{R} \rightarrow \tilde{R} \rightarrow R)$, часть из которых может быть лишней, результат построения $(R_l \rightarrow {}^1R_l^\Phi)$ может быть *различным* при одном и том же R_l . Иначе, исходя из одних и тех же экспериментальных данных, можно получить разные модели. Выбор из множества моделей какой-либо одной должен определяться *содержательными* целями. Чтобы разумно осуществить такой выбор, надо знать, каким образом модель будет эксплуатироваться содержательно; а для этого необходимо уточнить те формальные операции, которые будут проводиться в этой модели. Дальнейшее изложение как раз и связано с уточнением, которое естественно проводить в некоторых упрощающих предположениях.

III. ГЕОЛОГИЧЕСКИЕ ГРАНИЦЫ

1. Пусть нам удалось получить ${}^1R_l^\Phi$, $l = 3, 2, 1$. Предположим, что имеем дело со списком свойств $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$, моментом T_0 и масштабами $S_T, S_{\varphi_1}, S_{\varphi_2}, \dots, S_{\varphi_k}$, которые будем считать как угодно подробными. Займемся определением границ в ${}^1R^\Phi$, которые связаны *только со свойствами, имеющими смысл в точке* $M \in {}^1R_l^\Phi$. Другие границы пока рассматривать не будем. К этим другим границам, как увидим в дальнейшем, относятся, например, структурные, стратиграфические и фациальные границы.

Условимся через $\varphi_i^{(l)}$ обозначать l -ю производную от φ_i по координатам. Всякую φ_i или $\varphi_i^{(l)}$, равно как и любую *непрерывную* функцию от φ_i и $\varphi_i^{(l)}$, будем называть характеристикой, обозначая ее через ψ_i . Совокупность характеристик ψ_i будем обозначать через $\{\psi\}$.

2. Определим вначале так называемые геологические границы в ${}^1R_l^\Phi$, $l = 3, 2, 1$.

Под геологической границей в ${}^1R_l^\Phi$ будем понимать поверхность (линию, точку), при переходе через которую какие-либо характеристики ψ_i терпят разрыв непрерывности.

Обозначим такие границы в ${}^1R_l^\Phi$ через ${}^1\Gamma_{l-m}^\Phi$, $m = 1, 2, 3$; $l - m \geq 0$.

По определению, ${}^1\Gamma_{l-m}^\Phi$ (а также прочие границы, с которыми придется иметь дело) является геологическим пространством, мерность которого на m единиц меньше мерности исходного геологического пространства ${}^1R_l^\Phi$. Это пространство обладает особыми свойствами — в данном случае в точках этого пространства некоторые ψ_i терпят разрыв непрерывности. Будем считать, что если $M^1 \in {}^1\Gamma_{l-m}^\Phi$, то для ψ_i , терпящих разрыв непрерывности, имеет место

$$\psi_i(M', T_0) = \frac{1}{2} [\psi_i(M' + 0, T_0) + \psi_i(M' - 0, T_0)].$$

То, что ${}^1\Gamma_{l-m}^\Phi$ (и другие границы) является геологическим пространством, необходимо было подчеркнуть для того, чтобы пояснить связь между пространством и границами в нем, а также для того, чтобы в дальнейшем после установления процедур описания ${}^1R_l^\Phi$ можно было использовать их для описания ${}^1\Gamma_{l-m}^\Phi$ (и других границ).

Этот тип геологических границ в ${}^1R_l^\Phi$ разобьем на подтипы, опираясь пока только на процедуры выделения этих границ и не принимая во внимание способы их описания (что будет учтено ниже).

Под *несоставной* геологической границей в ${}^1R_l^\Phi$ будем понимать поверхность (линию, точки), при переходе через которую терпят разрыв непрерывности какие-либо характеристики ψ_i , причем одни и те же во всех точках этой поверхности (линии, точках), и вдоль которой остаются непрерывными, по крайней мере, с одной стороны хотя бы те характеристики ψ_i , которые терпят разрыв непрерывности при переходе через эту поверхность (линию, точки).

Обозначим такие границы через ${}^1\Gamma_{l-m}^\Phi \{\psi\}$.

Этот подтип *несоставных* геологических границ обладает важной особенностью: можно указать *единый* перечень экспериментальных процедур*, такой, что с помощью *любой* процедуры из этого перечня можно выделить ${}^1\Gamma_{l-m}^\Phi \{\psi\}$ *целиком*. Относительно границ этого подтипа можно утверждать, что если такие границы выделяются, то выделяются целиком.

Пусть имеется ${}^1\Gamma_{l-m}^\Phi$ и пусть $\{\psi\}_j$, $j = 1, 2, \dots, p$ — совокупности характеристик, которые необходимы для выделения ${}^1\Gamma_{l-m}^\Phi$ *по частям* (считается, что каждая часть ${}^1\Gamma_{l-m}^\Phi$ есть ${}^1\Gamma_{l-m}^\Phi \{\psi\}_j$). Если найдется хотя бы одна такая ψ_k , которая входит во все $\{\psi\}_j$, то ${}^1\Gamma_{l-m}^\Phi$ будет называться *составной* геологической границей. Обозначать такие границы будем через ${}^1\check{\Gamma}_{l-m}^\Phi \{\psi\}$. Если же не найдется ни одной такой ψ_k , которая входит во все $\{\psi\}_j$, то ${}^1\Gamma_{l-m}^\Phi$ будет называться *сугубо составной* геологической границей. Обозначать такие границы будем через ${}^1\hat{\Gamma}_{l-m}^\Phi \{\psi\}$.

Подтип составных геологических границ обладает такой особенностью, что любая ${}^1\Gamma_{l-m}^\Phi \{\psi\}$ может быть сделана несоставной, если из списка свойств $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ выбросить некоторые φ_i . Для сугубо составных геологических границ такой процедуры проделать нельзя.

3. Следуя геологическим традициям [20, 21, 28] и пользуясь известным из [29] понятием *разрыва сплошности* определим поверхность (линию, точки) разрыва сплошности ${}^1R_{l,l}^\Phi$, $l = 3, 2, 1$ как *дизъюнктивную* геологическую границу. Обозначим такие границы через ${}^1\Gamma_{l-n}^\Phi \{d\}$. Формально будет считаться, что в точках разрыва сплошности ψ_j принимает комплексное значение: $\psi_j = \psi'_j + i\psi''_j$. В смысле процедур выделения такие границы будут считаться несоставными.

4. Рассмотрим совокупность ${}^1\Gamma_{l-m}^\Phi$ и ${}^1\Gamma_{l-m}^\Phi \{d\}$.

Если ${}^1\Gamma_{l-m}^\Phi$ есть ${}^1\Gamma_{l-m}^\Phi \{\psi\}$, то будем говорить, что имеем дело с *нарушенной несоставной* геологической границей. Такие границы обозначим через ${}^1\Gamma_{l-m}^\Phi \{\psi, d\}$.

Если ${}^1\Gamma_{l-m}^\Phi$ есть ${}^1\check{\Gamma}_{l-m}^\Phi \{\psi\}$, то будем говорить, что имеем дело с *нарушенной составной* геологической границей. Обозначим такие границы через ${}^1\check{\Gamma}_{l-m}^\Phi \{\psi, d\}$.

Если ${}^1\Gamma_{l-m}^\Phi$ есть ${}^1\hat{\Gamma}_{l-m}^\Phi \{\psi\}$, то будем говорить, что имеем дело с *нарушенной сугубо составной геологической границей*. Обозначать такие границы будем через ${}^1\hat{\Gamma}_{l-m}^\Phi \{\psi, d\}$.

5. В некоторых частных задачах оказывается необходимым с точки зрения процедур выделения границ учесть *резкость* геологических границ по ψ_j . Рассмотрим, например, ${}^1\Gamma_{l-m}^\Phi \{\psi\}$, полагая, что $\{\psi\}$ сводится к ψ_i ,

* В частном случае этот перечень может сводиться к одной процедуре.

и ψ_{i_2} , причем $\psi_{i_1} = \varphi_{i_1}$, а $\psi_{i_2} = \varphi_{i_2}^{(n)}$. В этом случае будем говорить, что ${}^1\Gamma_{l-m} \{\psi\}$ является границей резкости ноль по φ_{i_1} и резкости l — по φ_{i_2} .

6. С учетом геологических традиций [20, 21, 28] перейдем к организации еще одного типа границ в ${}^1R_i^{\Phi}$, $l = 3, 2, 1$ — так называемых *условных* геологических границ, которые можно считать связанными со свойствами, имеющими смысл в точке $M \in {}^1R_i^{\Phi}$.

Под условной геологической границей *первого подтипа* в ${}^1R_i^{\Phi}$ будем понимать поверхность (линию, точки), на которой некоторые ψ_{i_k} принимают фиксированные значения. Обозначать границы будем через ${}^1\gamma_{l-m}^{\Phi} \{\psi = c\}$.

Если в ${}^1R_i^{\Phi}$ задана какая-нибудь ${}^1\Gamma_{l-m}^{\Phi}$, то в точках $M \in {}^1\Gamma_{l-m}^{\Phi}$ можно определить различные функции, имеющие определенный геометрический смысл, например, расстояние от некоторой фиксированной поверхности (линии, точки) до $M \in {}^1\Gamma_{l-m}^{\Phi}$, радиус кривизны в $M \in {}^1\Gamma_{l-m}^{\Phi}$, показатель выпуклости-вогнутости в $M \in {}^1\Gamma_{l-m}^{\Phi}$ и др.). Будем обозначать такие функции через $h(M)$.

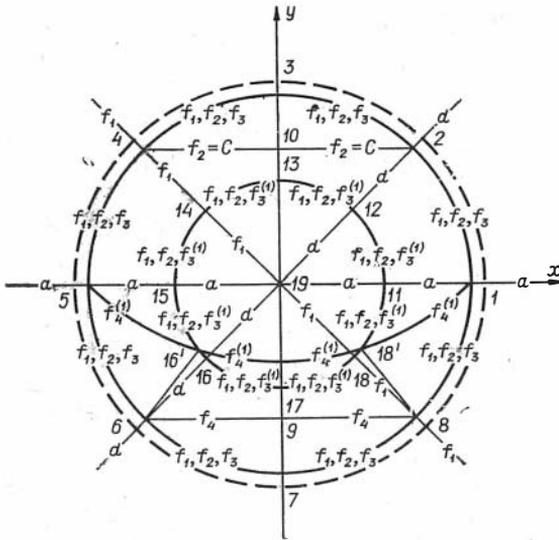


Рис. 1.

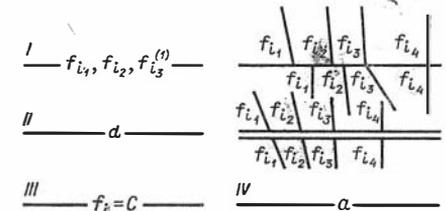


Рис. 2. Условные обозначения к рис. 1:

I — скачок $f_{i_1}, f_{i_2}, f_{i_3}$, непрерывна f_{i_4} , II — разрыв сплошности; III — линия постоянства f_{i_2} ; IV — административная граница.

Точки $M' \in {}^1\Gamma_{l-m}^{\Phi}$, в которых $h(M)$ (или ее какая-либо производная) принимает фиксированное значение c , будем называть *разделительными* точками ${}^1\Gamma_{l-m}^{\Phi}$ и обозначать через M' (${}^1\Gamma_{l-m}^{\Phi}, h, c$).

Если задана совокупность $\{{}^1\Gamma_{l-m}^{\Phi}\}$, то выбрав некоторую одну $h(M)$, $M \in \{{}^1\Gamma_{l-m}^{\Phi}\}$ и некоторые (возможно, различные для различных ${}^1\Gamma_{l-m}^{\Phi} \in \{{}^1\Gamma_{l-m}^{\Phi}\}$) фиксированные значения $h(M)$ (или ее какой-либо производной), можно получить совокупность разделительных точек M' ($\{{}^1\Gamma_{l-m}^{\Phi}\}, h$).

Всякую поверхность (линию, точки), построенную в ${}^1R_i^{\Phi}$ на основе некоторой *однозначной* операции Π_h , при условии, что все $M \in M'$ ($\{{}^1\Gamma_{l-m}^{\Phi}\}, h$) принадлежат этой поверхности (линии, точкам), будем называть условной геологической границей *второго подтипа*. Обозначать такие границы будем через ${}^1\gamma_{l-m}^{\Phi} \{\Gamma, \Pi_h\}$.

Всякую поверхность (линию, точки), выделенную в ${}^1R_i^{\Phi}$ на основе некоторой *однозначной* операции Π_a , из политико-административных соображений будем называть условной геологической границей *третьего подтипа*. Обозначать такие границы будем через ${}^1\gamma_{l-m}^{\Phi} \{\Pi_a\}$.

Договоримся пока все прочие поверхности (линии, точки) в ${}^1R_l^\Phi$, *однозначный* способ выделения которых не был оговорен выше, называть условными геологическими границами *четвертого подтипа*, обозначая их через ${}^1\gamma_{l-m}^\Phi$. Сюда временно будут включены и те границы, которые считаются связанными со свойствами, не имеющими смысла в точке (например, структурные, стратиграфические, фациальные).

7. Систематизируем изложенное, дадим формальные иллюстрации и попытаемся содержательно оправдать предыдущие построения. В табл. 2 дана систематизация границ в ${}^1R_l^\Phi$, $l = 3, 2, 1$.

Допустим, что имеем дело с ${}^1R_2^\Phi$, к которому будем относить все $M(x, y)$, для которых выполнено $x^2 + y^2 \leq R^2 + \varepsilon$. Будем считать, что, список свойств сводится к f_1, f_2, f_3, f_4 , расположение границ дается на рис. 1 (условные обозначения на рис. 1 поясняются рис. 2). Отметим, что при построении ${}^1\gamma_1^\Phi \{ \Gamma, \Pi_h \}$ приняты во внимание две границы:

$$1-8-9-6-5 \text{ и } 1-18'-18-17-16-16'-5.$$

На этих границах выделялись точки, где наблюдается скачок кривизны (на первой — 8 и 6, на второй — 18' и 16'). В качестве процедуры Π_h рассматривалась процедура отыскания для разделительных точек первой границы *ближайшей* разделительной точки на второй границе и соединения этих точек прямой линией.

Используя введенные определения для границ и обозначения рис. 2, на рис. 1 легко найти все границы, о которых речь шла выше.

Выделение границ подтипов 1, 2 и 3 (табл. 2) не нуждается в содержательном обосновании: именно такими границами оперируют при объективных исследованиях в геофизике, геохимии, петрографии, литологии. Эти подтипы различаются между собой по сложности прослеживания.

Т а б л и ц а 2

Систематизация границ в ${}^1R_l^\Phi$, $l = 3, 2, 1$

Геологические							Условные геологические			
несоставные	составные	сугубо составные	дизъюнктивные	нарушенные несоставные	нарушенные составные	нарушенные сугубо составные	первого подтипа	второго подтипа	третьего подтипа	четвертого подтипа
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
${}^1\Gamma_{l-m}^\Phi \{ \Psi \}$	${}^1\Gamma_{l-m}^\Phi \{ \Psi \}$	${}^1\Gamma_{l-m}^\Phi \{ \Psi \}$	${}^1\Gamma_{l-m}^\Phi \{ \alpha \}$	${}^1\Gamma_{l-m}^\Phi \{ \Psi, \alpha \}$	${}^1\Gamma_{l-m}^\Phi \{ \Psi, \alpha \}$	${}^1\Gamma_{l-m}^\Phi \{ \Psi, \alpha \}$	${}^1\Gamma_{l-m}^\Phi \{ \Psi = \zeta \}$	${}^1\Gamma_{l-m}^\Phi \{ \Gamma, \Pi_h \}$	${}^1\Gamma_{l-m}^\Phi \{ \Pi_d \}$	${}^1\Gamma_{l-m}^\Phi$

Выделение границ подтипа 4, как уже отмечалось, отвечает требованиям структурной геологии и тектоники (где эти границы носят, как правило, генетический характер [20]).

Подтипы 5, 6 и 7 являются производными от подтипов 1, 2, 3 и 4, которые необходимо учесть ради полноты рассмотрения.

Границы подтипа 8 соответствуют тем границам, с которыми имеем дело при «геометризации» [17], их построение может зависеть и от конъюнктурных соображений.

Границы подтипа 9 отвечают тем границам, которые используются в структурной геологии, в частности при выделении антиклиналей и синклиналей. Приведенная выше формулировка позволяет искать пути их объективного выделения [30]. Подтип 10 не нуждается в обосновании.

Подтип 11 выделяется в целях полноты рассмотрения.

Отметим, что построение границ является основной операцией при геологических исследованиях, однако до сих пор эта операция не подвергалась сколько-нибудь обстоятельному обсуждению. На основании того, что при систематизации границ главным является принцип выделения, была предпринята попытка выявить существо операций, проводящихся традиционно. Грубо говоря, границы разделены на такие подтипы, проведение которых зависит от распределения вещества (непосредственно или опосредованно, без привлечения временных и генетических гипотез или с привлечением этих гипотез) и не зависит от распределения вещества (обусловливается удобствами и произволом, зависящими от исследователя либо не зависящими от него).

Понятна причина, по которой всюду подчеркивалась необходимость однозначности операций выделения границ. Дальнейшее разделение границ, в частности, с учетом способов их описания можно будет провести только после того, как будет показано, что границы могут рассматриваться как геологические тела определенной мерности.

IV. ГЕОЛОГИЧЕСКИЕ ТЕЛА

1. Будем иметь в виду те же самые предположения, о которых речь шла ранее (см. III, п. 1). В целях экономии введем символ κ_{i-m}^i , $i=1, 2, \dots, 11$, с помощью которого условимся изображать различные границы в ${}^1R_l^\Phi$, $l=3, 2, 1$ (см. табл. 2).

2. Определим геологическое тело в ${}^1R_l^\Phi$, $l=3, 2, 1$, как связную область внутри ${}^1R_l^\Phi$, ограниченную со всех сторон κ_{i-m}^i , $m=1, 2, 3$; $l-m \geq 0$.

По определению, геологическое тело в ${}^1R_l^\Phi$ является геологическим пространством той же мерности, что и исходное ${}^1R_l^\Phi$. Опираясь на существующие представления о процедурах описания геологических тел в ${}^1R_l^\Phi$, в дальнейшем можно будет установить процедуры описания ${}^1R_l^\Phi$, а затем и κ_{i-m}^i .

3. Введем в рассмотрение совокупность эталонных форм в ${}^1R_l^\Phi$ — α_i , $l=3, 2, 1$. Будем считать, что для части однородного пространства R_l , ограниченной любой $\alpha_i \in \{\alpha_i\}$, можно указать в конечном виде [26]:

формулы для вычисления объема (площади, длины);

формулы для вычисления координат центра масс;

формулы для определения ориентации относительно некоторого репера*.

В остальном $\alpha_i \in \{\alpha_i\}$ могут быть совершенно произвольными.

Будем считать заданной некоторую однозначную процедуру $\Pi\alpha_i^*$, т. е. процедуру представления любой геометрической формы α_i^* в ${}^1R_l^\Phi$ через $\alpha_i \in \{\alpha_i\}$, которая позволяет дать при использовании соответствующих формул для $\alpha_i \in \{\alpha_i\}$ в конечном виде для части однородного пространства R_l , огра-

* Если α_i^* «изометрична», можно условиться приписывать ей какое-либо фиксированное направление.

ниченной α_i^* , формулы для вычисления, во-первых, объема (площади, длины) с точностью до меры заполнения χ_i ; во-вторых, координат центра масс с точностью до ε_i ; в-третьих, ориентации относительно некоторого репера с точностью до θ_i .

В остальном Π_{α^*} может быть произвольной.

При фиксированных $\{\alpha_i\}$, χ_i , ε_i , θ_i , $l = 3, 2, 1$, и фиксированной Π_{α^*} всевозможные геометрические формы α_i^* в ${}^1R_l^\Phi$, $l = 3, 2, 1$, можно разбить на два класса:

$\{\alpha_i^+\}$ — представимые через какую-либо одну эталонную форму $\alpha_i' \in \{\alpha_i\}$;

$\{\alpha_i^-\}$ — представимые через набор эталонных форм $\alpha_i' \in \{\alpha_i\}$.

Сейчас неважно, каков конкретный вид $\{\alpha_i\}$, как выбраны χ_i , ε_i , θ_i и какова именно Π_{α^*} ; уточнение возможно, видимо, только с учетом конкретного выбора ${}^1R_l^\Phi$, конкретного списка свойств $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$, конкретных масштабов $S_{\varphi_1}, S_{\varphi_2}, \dots, S_{\varphi_k}$, а также с учетом минимальных по размеру тел в ${}^1R_l^\Phi$, которые условились принимать в расчет. Сейчас важно установить общие для всех ${}^1R_l^\Phi$ необходимые и достаточные требования, которые должны быть наложены на процедуры представления форм тел в ${}^1R_l^\Phi$.

4. Пусть ${}^1C_l^\Phi$ — геологическое тело в ${}^1R_l^\Phi$, а $\alpha({}^1C_l^\Phi)$ — форма ${}^1C_l^\Phi$, $l = 3, 2, 1$.

Геологическое тело ${}^1C_l^\Phi$ в ${}^1R_l^\Phi$ будет называться *простым по форме*, если $\alpha({}^1C_l^\Phi) \in \{\alpha_i^+\}$; если же $\alpha({}^1C_l^\Phi) \in \{\alpha_i^-\}$, то оно будет называться *сложным по форме*.

Геологическое тело ${}^1C_l^\Phi$ в ${}^1R_l^\Phi$ будет называться *простым по содержанию*, если внутри ${}^1C_l^\Phi$ на основе списка свойств $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ нельзя провести никаких границ ${}^1\Gamma_{l-m}^\Phi\{\varphi_i^{(q)}\}$, $m = 1, 2, 3$; $l - m \geq 0$; $q = 0, 1$; если же внутри ${}^1C_l^\Phi$ можно провести хотя бы одну такую границу, то оно будет называться *сложным по содержанию*.

Геологическое тело ${}^1C_l^\Phi$ в ${}^1R_l^\Phi$ будет называться *монолитным*, если внутри его не имеется никаких границ ${}^1\Gamma_{l-m}^\Phi\{\alpha\}$; если же внутри его имеется хотя бы одна такая граница, оно будет называться *нарушенным*.

5. Систематизируем предыдущее, установим символику, дадим формальные иллюстрации и попытаемся содержательно оправдать построения.

В ${}^1R_l^\Phi$, $l = 3, 2, 1$, геологические тела можно разбить на 11 типов в соответствии с подтипом их границ κ_{l-1}^i (см. табл. 2). Каждый из этих типов, в свою очередь, можно разбить на 8 подтипов (табл. 3).

Таблица 3

Разбиение геологических тел в ${}^1R_l^\Phi$, $l = 3, 2, 1$, на подтипы

Простые по форме				Сложные по форме			
простые по содержанию		сложные по содержанию		простые по содержанию		сложные по содержанию	
монолитные	нарушенные	монолитные	нарушенные	монолитные	нарушенные	монолитные	нарушенные
1	2	3	4	5	6	7	8

Таким образом, получаем в ${}^1R_l^\Phi$, $l = 3, 2, 1$, $11 \times 8 = 88$ подтипов геологических тел.

Геологические тела в ${}^1R_l^\Phi$ с *неусловными* границами будем изображать с помощью символов ${}^1A_l^\Phi(i, k)$, с *условными* — с помощью символов ${}^1B_l^\Phi(i, k)$.

В ${}^1A_l^\Phi(i, k)$, $l = 3, 2, 1$, значок i может принимать значения 1, 2, ..., ..., 7 (см. табл. 2), а значок k — значения 1, 2, ..., 8 (см. табл. 3);

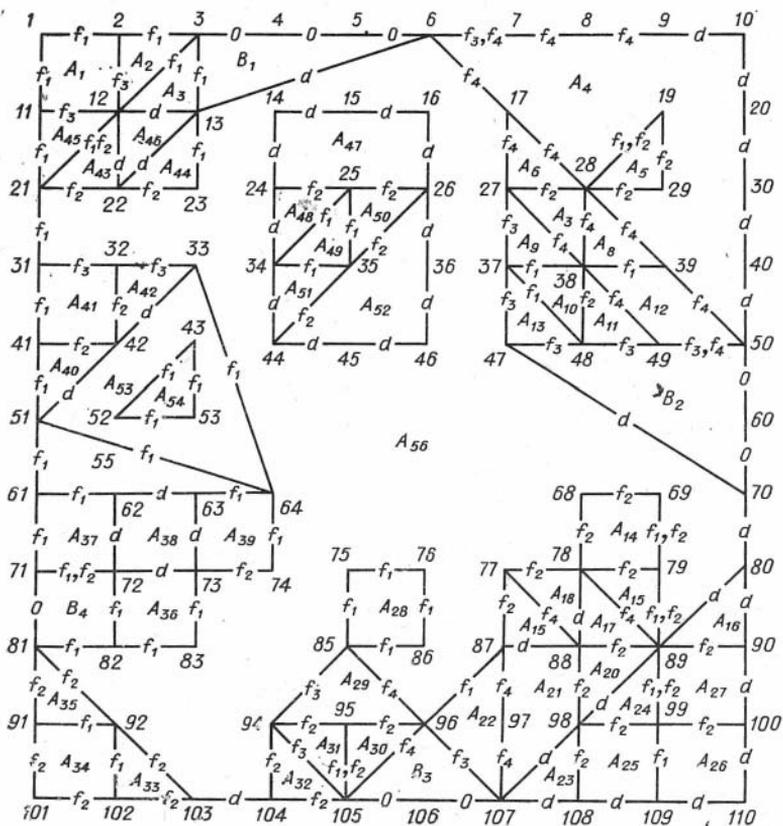


Рис. 3.

в ${}^1B_l^\Phi(i, k)$, $l = 3, 2, 1$, значок i может принимать значения 8, 9, 10, 11 (см. табл. 2), а значок k — значения 1, 2, ..., 8 (см. табл. 3).

На рис. 3 приведены различные ${}^1A_2^\Phi(i, k)$, за исключением нарушенных*. Предполагается, что в качестве эталонных форм в ${}^1R_l^\Phi$ на рис. 3 выбрано множество треугольников, а в качестве процедуры $\Pi_{\alpha_2}^*$ — процедура сшивания треугольников по любой целой стороне, $\chi_2 = 0$, $\varepsilon_2 = 0$, $\theta_2 = 0$.

Обсуждение процедуры представления форм геологических тел было необходимо для того, чтобы попытаться ограничить тот произвол, который существует сейчас в геологии. В построении процедуры представления

* Для того чтобы получить нарушенные ${}^1A_2^\Phi(i, k)$, достаточно внутри приведенных тел построить ${}^1\Gamma_l^\Phi\{\alpha\}$, $l = 1, 0$.

учтен опыт рудной геофизики, где в качестве $\{\alpha_l\}$, $l = 3, 2, 1$, выбирают эллипсоиды (эллипсы, прямые), а в качестве $\Pi_{\alpha_l}^*$ используют построение выпуклых оболочек [26]. Рассмотренная нами процедура позволяет разобратся в способах описания форм, которые применяются сейчас, например, в структурной геологии и тектонике. Так, в качестве $\{\alpha_l\}$, $l = 3, 2, 1$, используются «штоки», «массивы», «жилы» и т. п. (без каких-либо формальных уточнений), а в качестве $\Pi_{\alpha_l}^*$ — фактически различные процедуры «деформации» (в терминах теории упругости и пластичности, которые в таких вопросах обычно лишены смысла*), а также процедуры проведения границ ${}^1\gamma_{l-1}^{\Phi}$ (Γ , Π_h) [25], которые являются, вообще говоря, лишними одно-значного смысла [22]. Надо сказать, что конкретизация вопросов описания форм представляет большой геологический и математический интерес. Есть основания полагать, что решение этих вопросов в широком плане нужно искать вне рамок дифференциальной геометрии (см. X, п. 3)**.

Разделение на простые и сложные по содержанию геологические тела вполне отвечает геологическим традициям.

Разделение на монолитные и нарушенные тела диктуется практическими требованиями, например, структурной геологии и тектоники.

Разделение геологических тел на подтипы было проведено на основе способов их выделения (см. табл. 2) и описания (см. табл. 3). Ясно, что различные классы 1, 2, . . . , 8 (см. табл. 3) требуют различного подхода в описании. Достаточно, например, сравнить классы 1 и 8.

Важно подчеркнуть *относительность* понятий сложного и простого по форме и содержанию геологического тела. Эти понятия теряют смысл, если не оговорены эталонные формы и список свойств.

V. ЭЛЕМЕНТАРИЗАЦИЯ И РАЗБИЕНИЕ ГЕОЛОГИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

1. Пусть задано ${}^1R_l^{\Phi}$, $l = 3, 2, 1$. Используя список свойств $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k$, можно провести в ${}^1R_l^{\Phi}$ различные геологические границы, с помощью которых ${}^1R_l^{\Phi}$ как-то разобьется на геологические тела. Рассмотрим некоторые частные случаи такого разбиения.

Условимся геологические тела в ${}^1R_l^{\Phi}$ *простые по составу* независимо от прочих их характеристик называть *элементарными*, а *сложные по составу* — *неэлементарными*. Первые будем обозначать через ${}^1\bar{C}_l^{\Phi}$, вторые — через ${}^1\tilde{C}_l^{\Phi}$, полагая, что $C = A$, если рассматриваемое тело имеет безусловную границу, и $C = B$, если оно имеет условную границу (см. табл. 2).

2. Имеет место лемма:

Всякое заданное ${}^1R_l^{\Phi}$, $l = 3, 2, 1$, посредством проведения геологических границ ${}^1\Gamma_{l-m}^{\Phi}$, $m = 1, 2, 3$; $l - m \geq 0$, связанных со списком $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k$, может быть однозначно представлено как совокупность эле-

* См. Г. И. Гуревич. «О так называемом «механическом анализе» в геологической литературе». — Изв. АН СССР, серия геофиз., 1954, № 3.

** Особого внимания заслуживает «матричный» способ представления форм геологических тел. Можно набросить на тело некоторую правильную сеть, отметить граничные точки, перенумеровать их от 1 до n , построить матрицу $\{r_{ik}\}$, где элементы r_{ik} являются расстояниями между i -й и k -й граничными точками, отнесенными к максимальному расстоянию между граничными точками. Можно показать, что такой подход позволяет, в частности, дать формальные критерии для разделения форм на: «большие в одном направлении», «малые в двух других» («штоки»), «большие в двух направлениях», «малые в одном» («слои», «жилы»), «большие в трех направлениях» («массивы»).

ментарных геологических тел, целиком принадлежащих ${}^1R_l^\Phi - \{\bar{1}A_l^\Phi\}$, которая может, в частном случае, не содержать ни одного $\bar{1}A_l^\Phi$.

Проведем в ${}^1R_l^\Phi$ различные геологические границы ${}^1\Gamma_{l-m}^\Phi$ и совокупность этих границ обозначим через $\{{}^1\Gamma_{l-m}^\Phi\}$. Возьмем некоторую точку $M_1 \in {}^1R_l^\Phi$, $M_1 \in \{{}^1\Gamma_{l-m}^\Phi\}$. Очевидно, что M_1 может принадлежать одному и только одному ${}^1C_l^\Phi$, целиком принадлежащему ${}^1R_l^\Phi$. Выделим это первое ${}^1C_l^\Phi$ (1). Возьмем некоторую другую точку $M_2 \in {}^1R_l^\Phi$, $M_2 \in \{{}^1\Gamma_{l-m}^\Phi\}$, $M_2 \in {}^1C_l^\Phi$ (1) и выделим второе ${}^1C_l^\Phi$ (2), которое тоже целиком принадлежит ${}^1R_l^\Phi$. Путем повторения такой процедуры получим конечную совокупность $\{{}^1C_l^\Phi\}$, которую можно представить в виде $\{{}^1C_l^\Phi\} = \{\bar{1}A_l^\Phi\} \cup \{\bar{1}B_l^\Phi\}$. Выбросим из рассмотрения $\{\bar{1}B_l^\Phi\}$, которые могут появиться за счет задания ${}^1R_l^\Phi$, и получим представление ${}^1R_l^\Phi$ как совокупность $\{\bar{1}A_l^\Phi\}$. Из самой процедуры следует, что $\{\bar{1}A_l^\Phi\}$ зависит только от процедур проведения ${}^1\Gamma_{l-m}^\Phi$ и задания ${}^1R_l^\Phi$, но не от произвола в выборе M_1, M_2, \dots, M_N . В силу однозначности проведения ${}^1\Gamma_{l-m}^\Phi$ лемму можно считать доказанной. В частном случае $\{\bar{1}A_{l-m}^\Phi\}$ может оказаться и нулевой*.

Эту процедуру представления ${}^1R_l^\Phi$, $l = 3, 2, 1$, в виде $\{\bar{1}A_{l-m}^\Phi\}$ будем называть *элементаризацией* ${}^1R_l^\Phi$.

Рассмотрим $\bar{1}A_l^\Phi \in \{\bar{1}A_l^\Phi\}$. Как будет показано далее (см. VI, п. 2), всякому $\bar{1}A_l^\Phi \in \{\bar{1}A_l^\Phi\}$ можно приписать параметр v ($\bar{1}A_l^\Phi$), характеризующий размер $\bar{1}A_l^\Phi$. Пусть v_m^l — некоторая константа. Если из $\{\bar{1}A_l^\Phi\}$ выбросить все $\bar{1}A_l^\Phi$, для которых $v(\bar{1}A_l^\Phi) < v_m^l$, получим $\{\bar{1}A_l^\Phi\}_{v_m^l}$. Процедуру представления $\bar{1}R_l^\Phi$, $l = 3, 2, 1$, в виде $\{\bar{1}A_l^\Phi\}_{v_m^l}$ будем называть *элементаризацией* $\bar{1}R_l^\Phi$ вплоть до v_m^l **.

На рис. 3 проиллюстрирована элементаризация $\bar{1}R_2^\Phi$ с учетом списка свойств f_1, f_2, f_3, f_4 и границ ${}^1\Gamma_{2-m}^\Phi$, $m = 1, 2$.

3. Пусть в ${}^1R_l^\Phi$, $l = 3, 2, 1$, задана некоторая граница κ_{i-m}^l , $m = 1, 2, 3$; $l - m \geq 0$; $i = 1, 2, \dots, 11$ (см. табл. 2). Как уже отмечалось, всякая κ_{i-m}^l может быть рассмотрена как ${}^1R_{i-m}^\Phi$. Следовательно, на основе предыдущей леммы всякую κ_{i-m}^l можно элементаризовать, т. е. представить в виде совокупности $\{\bar{1}A_{i-m}^\Phi\}$. Если в ${}^1R_l^\Phi$, $l = 3, 2, 1$, проведена элементаризация как самого ${}^1R_l^\Phi$, так и всех границ κ_{i-m}^l в нем, будем говорить, что в ${}^1R_l^\Phi$ проведена *полная элементаризация*. Ясно, что можно говорить и о *полной элементаризации* ${}^1R_l^\Phi$ вплоть до v_m^l , $l = 3, 2, 1$.

4. Из содержательных соображений может оказаться полезным разбиение данного ${}^1R_l^\Phi$, $l = 3, 2, 1$, на *неэлементарные* геологические тела $\bar{1}A_l^\Phi$. Легко убедиться, что такое разбиение можно провести *различными* способами.

В содержательных и формальных целях наибольший интерес представляет такое разбиение ${}^1R_l^\Phi$, при котором каждое полученное $\bar{1}A_l^\Phi$ могло бы быть сделано *элементарным*, если из списка свойств $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$, исклю-

* В этом случае ${}^1R_l^\Phi$ оказывается ${}^1C_l^\Phi$.

** Например, при графическом отображении элементаризованного $\bar{1}R_l^\Phi$ возникает проблема «зашивания» дыр, отвечающих выброшенным $\bar{1}A_l^\Phi$, что будет рассмотрено позднее.

чить некоторые φ_i . Частным случаем такого разбиения является *разбиение, predeterminedное элементаризацией*.

Рассмотрим ${}^1R_l^\Phi$ вначале только с учетом списка свойств $\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, \dots, \dots, \varphi_{i_j}$. Проведем его элементаризацию по этому списку свойств вплоть до $v_{m_j}^l$. Закрепив полученное представление ${}^1R_l^{\Phi'}$ в виде $\{\bar{A}_l^{\Phi'}\}_{v_{m_j}^l}$, каждое $\bar{A}_l^{\Phi'} \in \{\bar{A}_l^{\Phi'}\}_{v_{m_j}^l}$, которое является тоже ${}^1R_l^{\Phi'}$, элементаризируем по списку свойств $\varphi_{i_{j+1}}, \varphi_{i_{j+2}}, \dots, \varphi_{i_k}$ вплоть до $v_{m_k}^l \leq v_{m_j}^l$. В результате получим predeterminedное элементаризацией разбиение ${}^1R_l^\Phi$ на совокупность $\{A_l^\Phi\}$, часть из которых может оказаться \bar{A}_l^Φ , а часть — \tilde{A}_l^Φ .

Будем иметь:

$${}^1R_l^\Phi : (\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, \dots, \varphi_{i_j}; v_{m_j}^l, \varphi_{i_{j+1}}, \varphi_{i_{j+2}}, \dots, \varphi_{i_k}; v_{m_k}^l) : \{\bar{A}_l^\Phi\} \cup \{\tilde{A}_l^\Phi\}. \quad (6)_1$$

Если $j = k$, то (6) будет отвечать элементаризации ${}^1R_l^\Phi$ по списку свойств $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ вплоть до v_m^l . Если $j < k$, то (6) будет отвечать разбиению ${}^1R_l^\Phi$ по списку свойств $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ вплоть до $v_{m_k}^l$, predeterminedному элементаризацией ${}^1R_l^\Phi$ по списку свойств $\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, \dots, \varphi_{i_j}$ вплоть до $v_{m_j}^l, v_{m_k}^l \leq v_{m_j}^l$. Очевидно, что вторая операция является однозначно определенной, если установлены $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k, \varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, \dots, \varphi_{i_j}, v_{m_j}^l, v_{m_k}^l$.

5. Процедуры элементаризации и разбиения ${}^1R_l^\Phi, l = 3, 2, 1$, вполне отвечают тем способам исследования, которые используются сейчас в геологии*. В частности, элементаризация и разбиение (в самых различных модификациях) предшествуют построению геологических карт, схем, разрезов, колонок. При этом, как правило, эти процедуры формально не определяются, что, естественно, затрудняет их анализ и оценку содержательной ценности геологических карт, схем, разрезов, колонок. В дальнейшем конкретным анализом будет показано, что в геологических картах, схемах, разрезах и колонках положение даже хуже, чем в геологических классификациях и систематизациях [5, 7, 8, 31]. Есть основание полагать, что формальное обоснование и развитие используемых сейчас процедур элементаризации и разбиения геологических пространств, с учетом их графического представления, приведет к ряду интересных геологических и математических вопросов.

6. Введем некоторые определения, которые потребуются в дальнейшем в связи с процедурами элементаризации и разбиения ${}^1R_l^\Phi, l = 3, 2, 1$. Пусть задано ${}^1R_l^{\varphi_i}$. Проведем его элементаризацию. Получим $\{A_l^{\varphi_i}\}$. Определим для свойства φ_i показатель элементаризации:

$$\sigma_{\varphi_i} = - \sum_{j=1}^k v_j \log v_j; \quad (6)_2$$

$$v_j = \frac{n_j}{n},$$

где n_j — число тел из $\{A_l^{\varphi_i}\}$, которые обладают размерами v_j , а n — число тел в $\{A_l^{\varphi_i}\}$. Аналогично можно ввести показатель элементаризации для списка свойств $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$.

Рассмотрим свойства φ_i и φ_j . Будем говорить, что φ_i согласно в ${}^1R_l^\Phi$ с φ_j , если из того факта, что φ_j терпит разрыв непрерывности в $M' \in {}^1R_l^\Phi$, сле-

* См., например, К. Д а н б а р, Д. Р о д ж е р с. «Основы стратиграфии», ч. IV. ИЛ, 1962.

дует, что и φ_i терпит разрыв непрерывности в $M' \in {}^1R_i^\Phi$. Если φ_i согласно в ${}^1R_i^\Phi$ с φ_j и φ_j согласно с φ_i в ${}^1R_i^\Phi$, будем говорить, что φ_i и φ_j взаимно согласны в ${}^1R_i^\Phi$. Будем говорить, что φ_i не согласно в ${}^1R_i^\Phi$ с φ_j , если во всех $M' \in {}^1R_i^\Phi$, где φ_j терпит разрыв непрерывности, φ_i оказывается непрерывной. Если φ_i несогласно в ${}^1R_i^\Phi$ с φ_j и φ_j несогласно с φ_i в ${}^1R_i^\Phi$, будем говорить, что φ_i и φ_j взаимно несогласны в ${}^1R_i^\Phi$.

Аналогичные определения можно получить для характеристик ψ_i и ψ_j .

VI. ОБ ОПИСАНИИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ ТЕЛ

1. Пусть в ${}^1R_i^\Phi$, $l = 3, 2, 1$, выделено некоторое ${}^1\bar{C}_i^\Phi$. Рассмотрим возможную процедуру описания ${}^1\bar{C}_i^\Phi$, близкую к традиционной, исключив пока описание границы ${}^1\bar{C}_i^\Phi$.

2. В предположениях (см. IV, п. 3) с точки зрения *геометрических* характеристик ${}^1\bar{C}_i^\Phi$, $l = 3, 2, 1$, можно приписать:

- а) с точностью до χ_i размер $v({}^1\bar{C}_i^\Phi)$;
- б) с учетом $\{\alpha_i\}$, Π_{α^*} форму $\alpha({}^1\bar{C}_i^\Phi)$;
- в) с учетом ε_i координаты центра масс, положим, в геоцентрической системе координат:

$$x_c({}^1\bar{C}_i^\Phi), y_c({}^1\bar{C}_i^\Phi), z_c({}^1\bar{C}_i^\Phi) \text{ или } \vec{r}({}^1\bar{C}_i^\Phi);$$

г) ориентацию в той же системе координат — $\vec{l}({}^1\bar{C}_i^\Phi)$.

Размер $v({}^1\bar{C}_i^\Phi)$ (объем, площадь, длина) может быть вычислен в любых абсолютных [1] или относительных единицах, например, по отношению к $v({}^1R_i^\Phi)$.

Форму $\alpha({}^1\bar{C}_i^\Phi)$ можно в частности задать посредством Π_{α^*} и перечнем тех $\alpha_i \in \{\alpha_i\}$, которые привлекаются для представления $\alpha({}^1\bar{C}_i^\Phi)$. Как уже отмечалось, для «изометричных» $\alpha({}^1\bar{C}_i^\Phi)$ можно условиться $\vec{l}({}^1\bar{C}_i^\Phi)$ приписывать какое-либо одно направление.

3. С точки зрения фиксированного списка свойств $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ (иначе, с точки зрения *вещественной* характеристики) наиболее полно ${}^1\bar{C}_i^\Phi$, $l = 3, 2, 1$, можно описать k -мерной вектор-функцией:

$$\varphi(M, T_0) = \{\varphi_1(M, T_0), \varphi_2(M, T_0), \dots, \varphi_k(M, T_0)\}; M \in {}^1\bar{C}_i^\Phi. \quad (7)$$

Вероятно, наиболее близким к традиционному будет описание «в среднем». Можно ввести $\bar{\varphi}_i(M, T_0)$:

$$\bar{\varphi}_i(M, T_0) = \frac{1}{v({}^1\bar{C}_i^\Phi)} \int_{{}^1\bar{C}_i^\Phi} \varphi_i(M, T_0) \alpha v_i, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (8)$$

и вместо (7) использовать k -мерный вектор

$$\vec{\varphi}({}^1\bar{C}_i^\Phi) = \{\bar{\varphi}_1(M, T_0), \bar{\varphi}_2(M, T_0), \dots, \bar{\varphi}_k(M, T_0)\}. \quad (7')$$

4. Будем предполагать, что ${}^1\bar{C}_i^\Phi$, $l = 3, 2, 1$, описывается почти пол-

* Считается, что M является внутренней точкой ${}^1\bar{C}_i^\Phi$ [12].

ностью, за исключением границы ${}^1\bar{C}_l^\Phi$, пятью характеристиками:

$$\{v({}^1\bar{C}_l^\Phi), \alpha({}^1\bar{C}_l^\Phi), \vec{r}_c({}^1\bar{C}_l^\Phi), \vec{l}({}^1\bar{C}_l^\Phi); \quad (9)$$

$$\vec{\Phi}({}^1\bar{C}_l^\Phi). \quad (9')$$

Выражение «почти полностью» следует понимать так, что описание с помощью (9) удовлетворяет довольно широкому кругу геологических задач. В дальнейшем мы покажем это на разборе геологических карт, схем, разрезов, колонок и т. п. Естественно, что могут встретиться задачи, где такое описание является избыточным или недостаточным. Характеристики в и г нужны, в частности, для упрощения вида (7).

VII. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ ОБ ОПИСАНИИ НЕЭЛЕМЕНТАРНЫХ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ ТЕЛ

1. Пусть в ${}^1\bar{R}_l^\Phi$, $l = 3, 2, 1$, выделено ${}^1\tilde{C}_l^\Phi$. Проведем предварительное обсуждение, возможной процедуры описания ${}^1\tilde{C}_l^\Phi$, близкой к традиционной, опять-таки исключая пока описание границы ${}^1\tilde{C}_l^\Phi$.

2. Вначале предположим, что рассматриваемое ${}^1\tilde{C}_l^\Phi$, $l = 3, 2, 1$, таково, что если из списка свойств $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ исключить свойства $\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, \dots, \varphi_{i_j}$, то ${}^1\tilde{C}_l^\Phi$ по списку свойств $\varphi_{i_{j+1}}, \varphi_{i_{j+2}}, \dots, \varphi_{i_k}$ будет элементарным — ${}^1\bar{C}_l^\Phi$. Принимая во внимание пока только список свойств $\varphi_{i_{j+1}}, \varphi_{i_{j+2}}, \dots, \varphi_{i_k}$, можем приписать ${}^1\tilde{C}_l^\Phi$ характеристики:

$$v({}^1\tilde{C}_l^\Phi), \alpha({}^1\tilde{C}_l^\Phi), \vec{r}_c({}^1\tilde{C}_l^\Phi), \vec{l}({}^1\tilde{C}_l^\Phi); \quad (9)_1$$

$$\vec{\Phi}'({}^1\tilde{C}_l^\Phi), \quad (9')_1$$

где

$$\vec{\Phi}'({}^1\tilde{C}_l^\Phi) = \{\varphi_{i_{j+1}}(M, T_0), \varphi_{i_{j+2}}(M, T_0), \dots, \varphi_{i_k}(M, T_0)\}. \quad (10)$$

Такое описание (9)₁, (9')₁, (10) для ${}^1\tilde{C}_l^\Phi$ является заведомо неполным. Нетрудно доказать, что оно не удовлетворяет традиционным требованиям. В дальнейшем дополним это описание посредством введения понятий структуры и вещественной ассоциации ${}^1\tilde{C}_l^\Phi$.

3. Положим теперь, что ${}^1\tilde{C}_l^\Phi$, $l = 3, 2, 1$, таково, что его нельзя сделать элементарным посредством исключения из списка свойств $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ каких-либо некоторых свойств.

Такое ${}^1\tilde{C}_l^\Phi$ будем называть *сугубо неэлементарным* по списку свойств $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$.

Формально это означает, что $j = k$. Очевидно, что характеристики (9)₁ при этом будут иметь смысл, поскольку они геометрического характера. Что же касается характеристики (9')₁, то на случай $j = k$ доопределим ее так:

$$\vec{\Phi}'({}^1\tilde{C}_l^\Phi) = \infty. \quad (9)_2$$

Таким образом, в случае, когда ${}^1\tilde{C}_l^\Phi$ является сугубо неэлементарным, заведомо неполное описание ${}^1\tilde{C}_l^\Phi$ будет даваться (9)₁ и (9)₂*

* Процедуры описания геологических тел являются очень важными и тоже формально плохо разработанными. В геологической литературе при описании тел часто нарушается принцип «возможности и целей», по существу, описание толкуется как описание ради описания. (См., например: Стратиграфический словарь СССР, 1956).

VIII. СТРУКТУРА И ВЕЩЕСТВЕННЫЕ АССОЦИАЦИИ

1. Пусть в ${}^1R_l^\Phi$, $l = 3, 2, 1$, выделено некоторое ${}^1\tilde{C}_l^\Phi$, ${}^1\tilde{C}_l^\Phi \equiv C_s$ такое, что по списку свойств $\Phi_{i_{j+1}}, \Phi_{i_{j+2}}, \dots, \Phi_{i_k}$ оно является *элементарным*, а по списку свойств $\Phi_{i_1}, \Phi_{i_2}, \dots, \Phi_{i_k}$ — *сугубо неэлементарным*. Будем иметь в виду результаты [23] и VII.

2. На основе леммы (см. V, п. 1), используя только $\Phi_{i_1}, \Phi_{i_2}, \dots, \Phi_{i_s}, C_s$ можем представить в виде совокупности $\{\bar{A}_l^\Phi\}_s$, $l = 3, 2, 1$.

Рассмотрим ${}^1\bar{A}_l^\Phi(p) \in \{\bar{A}_l^\Phi\}_s$ только с точки зрения геометрических характеристик, инвариантных относительно преобразования движения [26], т. е. характеристик $v({}^1\bar{A}_l^\Phi(p))$ и $\alpha({}^1\bar{A}_l^\Phi(p))$ из (9), и обозначим его через $H_s^l(p)$.

На основе $\{\bar{A}_l^\Phi\}_s$ выбранному C_s можно приписать перечень

$$H_s^l(p), p = 1, 2, \dots, m_s.$$

Всякое $H_s^l(p)$ из этого перечня будем называть *структурным элементом* C_s .

Под *структурой* C_s условимся понимать взаимное расположение $H_s^l(1), H_s^l(2), \dots, H_s^l(m_s)$. Обозначать структуру C_s будем через G_s . По определению G_s будет считаться такой характеристикой C_s , которая не зависит от $\vec{l}(C_s), \vec{r}(C_s)$ и $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k$.

Если $m_s = 0$, то будем говорить, что C_s имеет *элементарную структуру*, если $1 \leq m_s \leq 10$, будем говорить, что C_s имеет *структуру*; если $10 < m_s \leq 100$, будем говорить, что C_s имеет *тонкую структуру*; если же $m_s > 100$, будем говорить, что C_s имеет *сверхтонкую структуру*.

Подобное различие структур диктуется содержательными целями, а также тем, что эффективные способы описания G_s для различных m_s различны. В этом убеждаемся, рассмотрев случаи малых и больших m_s . Оценки 10 и 100 выбраны из предварительных исследований (см. X).

3. Рассмотрим теперь ${}^1\bar{A}_l^\Phi(p) \in \{\bar{A}_l^\Phi\}_s$, $l = 3, 2, 1$, только с точки зрения характеристик $v({}^1\bar{A}_l^\Phi(p))$ и $\vec{\Phi}''({}^1\bar{A}_l^\Phi(p))$ **:

$$\vec{\Phi}''({}^1\bar{A}_l^\Phi(p)) = \{\vec{\Phi}_{i_1}(M, T_0), \vec{\Phi}_{i_2}(M, T_0), \dots, \vec{\Phi}_{i_j}(M, T_0)\}. \quad (11)$$

Здесь $\vec{\Phi}_{i_2}(M, T_0)$ определяются в соответствии с (8). При таком рассмотрении ${}^1\bar{A}_l^\Phi(p) \in \{\bar{A}_l^\Phi\}_s$ будем обозначать через $P_s^l(p)$.

На основе $\{\bar{A}_l^\Phi\}_s$ выбранному C_s можно сопоставить перечень $P_s^l(p)$, $p = 1, 2, \dots, m_s$.

Всякое $P_s^l(p)$ из этого перечня будем называть *вещественным элементом* C_s .

Под *вещественной ассоциацией* C_s будем понимать перечень $P_s^l(p)$, $p = 1, 2, \dots, m_s$, с указанием характеристики $\vec{\Phi}'(C_s)$:

$$\vec{\Phi}'(C_s) = \{\vec{\Phi}_{i_{j+1}}(M, T_0), \vec{\Phi}_{i_{j+2}}(M, T_0), \dots, \vec{\Phi}_{i_k}(M, T_0)\}. \quad (12)$$

Обозначать вещественную ассоциацию C_s будем через F_s .

* Иначе говоря, G не зависит от расположения C_s в пространстве и от его вещественного состава. Таким образом, G_s является геометрической характеристикой C_s , инвариантной относительно преобразования движения. Ее можно было бы трактовать как инвариантную относительно преобразования подобия [26].

** Учет $v({}^1\bar{A}_l^\Phi(p))$ необходим из содержательных целей.

По определению, F_s будет считаться не зависящей от

$$\vec{r}_c(C_s), \vec{l}(C_s), \alpha(C_s), \vec{r}_c({}^1\bar{A}_i^\Phi), \vec{l}({}^1\bar{A}_i^\Phi), \alpha({}^1\bar{A}_i^\Phi),$$

где

$${}^1\bar{A}_i^\Phi \in \{{}^1\bar{A}_i^\Phi\}_s.$$

В соответствии с п. 2 можно говорить об элементарной вещественной ассоциации, вещественной ассоциации, тонкой вещественной ассоциации, сверхтонкой вещественной ассоциации C_s .

Кроме того, целесообразно выделить *несобственные* вещественные ассоциации F_s , для которых (12) равно ∞ , следовательно, можно говорить и о *несобственных* структурах G_s .

4. Только что введенные характеристики C_s (G_s и F_s) используются для того, чтобы получить полное описание C_s . Для формального удобства G_s и F_s можно считать не зависящими друг от друга: это позволяет свести изучение одной сложной структурно-вещественной характеристики C_s [23] к двум менее сложным. Предположение о независимости G_s и F_s можно обосновать и содержательно — целями гибкого и эффективного описания C_s , так как иногда могут интересоваться только структуры G_s , а иногда — только вещественные ассоциации F_s ; это предположение отвечает также и сложившимся традициям. Сложнее обстоит дело с геологическим смыслом G_s и F_s .

Предварительные исследования показали, что G_s и F_s достаточно близки к соответствующим традиционным характеристикам*. Так, если под $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k$ понимать литолого-петрографические свойства, ограничить $v({}^1\bar{A}_3^\Phi)$ сверху и снизу и, возможно, ввести в $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k$ генезис (что является совершенно *незаконным* с точки зрения объективного подхода), то можно убедиться, что $H_s^l(p)$ представляет собой не что иное, как то, что называют «структурными формами» [20], а $P_s^l(p)$ — как то, что называют «породами» [32]. К сожалению, сейчас никто не может сказать, как конкретно выбрать для этих целей $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k$ и как ограничить $v({}^1\bar{A}_3^\Phi)$. Это связано с тем, что в настоящее время в геологии совершенно не учитывается *операционность* [14] в понятиях, таких, например, как «структурная форма», «порода», «структура», «вещественная ассоциация»**.

Четкий содержательный смысл имеют элементарные вещественные ассоциации, отвечающие тому, что понимается сейчас под «образцом породы».

Отметим еще одно важное обстоятельство, которое в настоящее время игнорируется. Совершенно недостаточно *как-то* ввести G_s и F_s , необходимо разработать формальные приемы работы с ними, разные для различных m_s .

IX. ОБ ОПИСАНИИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ЧАСТИ ГЕОЛОГИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

1. Чтобы покончить с процедурами описания ${}^1R_l^\Phi, {}^1C_l^\Phi, \chi_{i-m}^i$, $l = 3, 2, 1, m = 1, 2, 3; l - m \geq 0; i = 1, 2, \dots, 11$ (см. табл. 2), необходимо суммировать изложенное в V—VIII. Ограничимся случаями, связанными со структурами (случай тонкой и сверхтонкой структур требу-

* Правильность введения G_s и F_s можно подкрепить «предельным» переходом ${}^1\bar{C}_l^\Phi \rightarrow {}^1\bar{C}_l^\Phi$ (см. IX), а также анализом понятий «структура» и «формация» [23].

** Главное, что никогда не отмечается, какие Φ_i используются для выделения, например, «пород», и какие Φ_j — для их описания или классификации.

ет особого подхода). Учтем, что понятие элементарности и неэлементарности ${}^1C_l^\Phi$ может быть распространено и на κ_{l-m}^i .

Пусть требуется описать ${}^1C_l^\Phi \equiv C_s$, выделенное в ${}^1R_l^\Phi$ и имеющее границу $\kappa_{l-m}^i \equiv \kappa_s$, $l = 3, 2, 1$.

Могут встретиться следующие четыре случая (табл. 4).

Можно считать, что в случаях 1, 2, 3 и 4 описание C_s сводится, соответственно, к заданию следующих характеристик:

$$\begin{aligned} &v(C_s), \alpha(C_s), \vec{r}_c(C_s), \vec{e}(C_s); \\ &\vec{\Phi}(C_s); \\ &v(\kappa_s); \\ &\vec{\Phi}(\kappa_s); \end{aligned} \quad (11)_1$$

$$\begin{aligned} &v(C_s), \alpha(C_s), \vec{r}_c(C_s), \vec{l}(C_s); \\ &\vec{\Phi}(C_s); \\ &v(\kappa_s), G(\kappa_s); \\ &F(\kappa_s); \end{aligned} \quad (11)_2$$

$$\begin{aligned} &v(C_s), \alpha(C_s), \vec{r}(C_s), \vec{l}(C_s), G(C_s); \\ &F(C_s); \\ &v(\kappa_s); \\ &\vec{\Phi}(\kappa_s); \end{aligned} \quad (11)_3$$

$$\begin{aligned} &v(C_s), \alpha(C_s), \vec{r}_c(C_s), \vec{l}(C_s), G(C_s); \\ &F(C_s); \\ &v(\kappa_s), G(\kappa_s); \\ &F(\kappa_s). \end{aligned} \quad (11)_4$$

По существу, процесс описания C_s рассматривался как полная элементаризация C_s ; в связи с этим лемма (V, п. 1) гарантирует *однозначность* такого описания. О *полноте* его с содержательных позиций пока ничего сказать нельзя [25]. Это ясно и из VIII, п. 4.

Если $l - 1 > 0$, то процесс описания κ_s следует рассматривать как процесс описания C_s до тех пор, пока $l - m$ не будет равно нулю.

3. Пусть C_s таково, что по списку свойств $\Phi_{i_{j+1}}, \Phi_{i_{j+2}}, \dots, \Phi_{i_k}$ является элементарным, а по списку свойств $\Phi_{i_1}, \Phi_{i_2}, \dots, \Phi_{i_j}$ — сугубо неэлементарным. Тогда — на основе (9)₁ и (9)₂ ему можно приписать характеристики:

$$v(C_s), \alpha(C_s), \vec{r}(C_s), \vec{l}(C_s); \quad (12)_1$$

$$\vec{\Phi}'(C_s), \quad (12)_2$$

где с учетом (8)

$$\vec{\Phi}'(C_s) = \{\bar{\Phi}_{i_{j+1}}(M, T_0), \bar{\Phi}_{i_{j+2}}(M, T_0), \dots, \bar{\Phi}_{i_k}(M, T_0)\}.$$

На основе же VIII C_s можно дополнительно приписать характеристики:

$$G_s = \{H_s^l(1), H_s^l(2), \dots, H_s^l(m_s)\}; \quad (13)$$

$$F_s = \{P_s^l(1), P_s^l(2), \dots, P_s^l(m_s), \vec{\varphi}'(C_s)\}. \quad (14)$$

В свою очередь, с каждым $H_s^l(p)$ связаны характеристики:

$$\begin{aligned} v({}^1\bar{A}_l^{\Phi'}(p)), \quad \alpha({}^1\bar{A}_l^{\Phi'}(p)); \\ {}^1\bar{A}_l^{\Phi'}(p) \in C_s, \quad p = 1, 2, \dots, m_s, \end{aligned} \quad (15)$$

а с каждым $P_s^l(p)$ — характеристики:

$$\begin{aligned} v({}^1\bar{A}_l^{\Phi'}(p)), \quad \vec{\varphi}''({}^1\bar{A}_l^{\Phi'}(p)); \\ {}^1\bar{A}_l^{\Phi'}(p) \in C_s; \\ \vec{\varphi}''({}^1\bar{A}_l^{\Phi'}(p)) = \{\bar{\varphi}_{i_1}(M, T_0), \bar{\varphi}_{i_2}(M, T_0), \dots, \bar{\varphi}_{i_j}(M, T_0)\}, \\ p = 1, 2, \dots, m_s. \end{aligned} \quad (16)$$

Из (12)—(16) следует, что для описания C_s , исключая границу κ_s , требуется задать, по крайней мере*:

а) $m_s + 1$ скалярных величин

$$v(C_s), v_1, v_2, \dots, v_{m_s};$$

б) $m_s + 1$ форм

$$\alpha(C_s), \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m_s};$$

в) два 3-мерных вектора

$$\vec{r}_c(C_s), \vec{l}(C_s);$$

г) один $(k - j)$ -мерный вектор

$$\vec{\varphi}'(C_s);$$

д) m_s j -мерных векторов

$$\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2, \dots, \vec{\varphi}_{m_s};$$

Таким образом, для описания C_s требуется, по крайней мере, $N = (m_s + 1) + (m_s + 1) + 6 + (k - j) + m_s j$ скалярных величин. Для $m_s = 10$, $k = 5$, $j = 3$ (что отвечает, пожалуй, наиболее простому случаю геологической практики) потребуется минимум 60 скалярных величин. Таким образом, стремясь приблизиться к традиционному способу описания C_s со стороны грубого объективного описания, пришлось прийти к довольно громоздкому описанию, хотя мы и исходили из самых простых предположений. Это еще раз доказывает, что эффективное описание C_s требует специальной формальной разработки и использования ЭВМ.

4. Рассмотрим «предельные» переходы, когда $C_s \rightarrow \bar{C}_s$ (элементарному) и $C_s \rightarrow \hat{C}_s$ (сугубо неэлементарному). Переход $C_s \rightarrow \bar{C}_s$ отвечает $j = 0$, при этом $m_s \rightarrow 1$ или 0, $F_s \rightarrow \vec{\varphi}'(C)_s$, $G_s \rightarrow \alpha(C_s)$.

Переход $C_s \rightarrow \hat{C}_s$ отвечает $j \rightarrow k$, и при этом $\vec{\varphi}'(C_s) \rightarrow \infty$. В таком случае, приходим к сугубо неэлементарным G_s и F_s .

При $j \rightarrow 0$ $N \rightarrow 2 + 6 + k$ или $4 + 6 + k$; при $j \rightarrow k$ $N \rightarrow 2(m_s + 1) + 6 + m_s k$, $m_s \geq 1$.

* Сейчас явно не учитывается взаимное расположение $H_s^l(p)$ относительно друг друга. Неявно же оно учитывается $\alpha(C_s), \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m_s}$.

Это позволяет утверждать, что наиболее эффективные приемы описания произвольной части ${}^1R_l^\Phi - {}^1C_l^\Phi$, $l = 3, 2, 1$, следует искать на пути *полной элементаризации* ${}^1C_l^\Phi$ вплоть до некоторой фиксированной константы v_m .

Характеристики же $G({}^1C_l^\Phi)$ и $F({}^1C_l^\Phi)$ до тех пор, пока не найдены эффективные способы их учета, надо использовать в объективном описании с большой осторожностью.

5. Изложенное естественно попытаться очень кратко увязать с работами направлений П. К. Соболевского и А. Б. Вистелнуса, а также с кристаллографией [19], геофизикой [11] и тектонофизикой [20].

Обратимся, например, к [18], где речь идет, во-первых, о формальном построении моделей ${}^1R_l^\Phi$ на основе ${}^1R_l^\Phi$; во-вторых, о содержательной эксплуатации этих моделей.

Построение ${}^1R_l^\Phi$ ведется хорошо разработанными методами [33] с учетом некоторых формально нечетких гипотез и с привлечением ЭВМ. Предполагается, что каждой модели ${}^1R_l^\Phi$, построенной исходя из ${}^1R_l^\Phi$, можно приписать определенную «вероятность» p . Для эксплуатации выбираются модели ${}^1R_l^\Phi$, которым отвечает якобы максимальное p .

Содержательная эксплуатация ${}^1R_l^\Phi$ проводится на базе *совершенно неформализованных традиционных геологических понятий*.

Нельзя не видеть эклектичности такого подхода. Независимо от того, сколь строго] произведено построение ${}^1R_l^\Phi$ и получены оценки p , такая содержательная эксплуатация этих моделей ${}^1R_l^\Phi$ является субъективной. Это обстоятельство отлично иллюстрируется, например, статьей М. Д. Белонина [18], где речь идет о каких-то «основных чертах (?) эволюции (!) структур (?)».

Напрашивается вывод, что вероятностные представления в геологии обусловлены не самой природой объектов, с которыми приходится иметь дело, а спецификой теоретического подхода. Действительно, сталкиваешься с единственным объектом — планетой Земля, который в любой своей части и в любом смысле вполне детерминирован.

Возможность привлечения вероятностных концепций, допустим, к «залежам нефти и газа» может быть реализована тогда, когда удастся организовать классы «залежей нефти и газа». Основная трудность и заключается в целевой организации таких классов.

Обратимся к работам [16, 17]. Там тоже речь идет о построении ${}^1R_l^\Phi$, исходя из ${}^1R_l^\Phi$ и о содержательной эксплуатации этих моделей.

Содержательная эксплуатация ведется аналогично предыдущему.

Построение же проводится также на основе формально нечетких гипотез и при некоторых жестких предположениях: считается, что φ_i являются всюду непрерывными в ${}^1R_l^\Phi$, линии $\varphi_i = \text{const}$ замкнутые, не пересекающиеся; при построении оперируют только дифференциальными свойствами [30] геометрических объектов.

В геофизике *построение моделей* не может вызвать возражений [11], но их содержательная *геологическая* эксплуатация затруднена, так как тоже проводится на базе совершенно неформализованных геологических представлений. То же самое имеем и в кристаллографии [19].

Значительно хуже обстоит дело в тектонофизике [20].

Сказанное отнюдь не зачеркивает всего того, что сделано физико-математическими приемами в геологии.

По-видимому, излагаемое здесь оттеняет слабые стороны всех физико-математических приемов исследования в геологии и может рассматриваться

только как самая первая и *грубая* попытка преодолеть их на базе критического учета предыдущего опыта этих исследований, формализации системы геологических понятий и привлечения более абстрактного аппарата (элементов теории множеств, теории метрических пространств, математической логики функционального анализа).

X. К ФОРМАЛЬНОЙ ПОСТАНОВКЕ НЕКОТОРЫХ СТРУКТУРНЫХ ЗАДАЧ ГЕОЛОГИИ

1. Уже отмечалось, что для эффективного использования структуры $G_s (H_s^l(1), H_s^l(2), \dots, H_s^l(m_s), l = 3, 2, 1; 1 \leq m_s \leq 10$, необходимо предварительно разработать формальные приемы ее использования, в частности, приемы описания и сопоставления. Можно убедиться [23], что из содержательных соображений нельзя сразу же ввести какие-либо ограничения на структурные элементы $H_s^l(p)$, а также на возможные способы расположения $H_s^l(p)$ относительно друг друга*. Следовательно, подходить к формальной постановке структурных задач желательно с самых общих позиций.

2. Пусть $H^l = \{H_1^l, H_2^l, \dots, H_n^l\}$ — некоторое множество l -мерных структурных элементов, $l = 3, 2, 1, 0$. Относительно H_k^l не будем делать никаких предположений за исключением того, что H_k^l можно приписать форму и размер.

Всякую связную, упорядоченную в смысле взаимного расположения совокупность из m элементов $H_{\alpha_1}^l, H_{\alpha_2}^l, \dots, H_{\alpha_m}^l, H_{\alpha_k}^l \in H^l$, которой можно приписать форму и размер, будем называть l -мерной m -элементной геоструктурой**.

Обозначать l -мерные m -элементные геоструктуры будем через G_m^l или $G_m^l(H_{\alpha_1}^l, H_{\alpha_2}^l, \dots, H_{\alpha_m}^l)$. Под заданием G_m^l будем понимать:

- а) задание перечня структурных элементов $H_{\alpha_1}^l, H_{\alpha_2}^l, \dots, H_{\alpha_m}^l$;
- б) задание взаимного расположения каждого структурного элемента $H_{\alpha_p}^l$ относительно каждого структурного элемента $H_{\alpha_q}^l, p, q = 1, 2, \dots, m$, без учета расположения их центров масс и ориентации;
- в) задание расположения центров масс структурных элементов $H_{\alpha_1}^l, H_{\alpha_2}^l, \dots, H_{\alpha_m}^l$.
- г) задание ориентации структурных элементов $H_{\alpha_1}^l, H_{\alpha_2}^l, \dots, H_{\alpha_m}^l$ относительно некоторого репера.

Условимся характеристику а — называть *перечнем* G_m^l , обозначая ее через G_{m0}^l , характеристику б — *логической конфигурацией* $C_m^l = G_{m1}^l$, в — *конфигурацией* $G_m^l = G_{m2}^l$, г — *ориентацией* $G_m^l = G_{m3}^l$.

Предположим, что $G_{mi}^l, i = 0, 1, 2, 3$, не зависят друг от друга. При подобном предположении изучение одной сложной характеристики G_m^l можно свести к изучению четырех менее сложных — G_{m3}^l .

* Это следует, в частности, из того, что при изучении структуры C_s может оказаться необходимым вначале изучить структуры различных проекций и разрезов C_s .

** Ср. с определением структуры (текстуры) в петрографии и в [24]. Отметим, что геоструктура по определению может рассматриваться, если это необходимо, как структурный элемент.

Ясно, что ни о каком эффективном использовании G_m^1 в содержательных целях нельзя говорить до тех пор, пока не удастся решить хотя бы проблемы перечисления G_{mi}^1 , $i = 0, 1, 2, 3$, грубо говоря, пока не будет установлено, в каких пределах они изменяются и как можно варьировать масштабы их измерения. Чтобы решать такие задачи, желательно, конечно, построить алгоритмы для реализации решений на ЭВМ [23].

3. Обратимся к задачам перечисления G_{m0}^1 . Естественно первоначально рассмотреть плоские $G_{m0}^1 - G_{m0}^2: H_{\alpha_1}^2, H_{\alpha_2}^2, \dots, H_{\alpha_m}^2$.

Очевидно, что при перечислении G_{m0}^2 нет смысла различать между собой подобные $H_{\alpha_i}^2$ [26], а также такие $H_{\alpha_i}^2$, которые отличаются между собой дифференциальными свойствами границ [34], такие, например, как на рис. 4.

Действительно, фигуры на рис. 4 с точки зрения хотя бы их обнаружения оказываются одинаковыми и, так сказать, с объективных геологических позиций — практически неразличимыми. Однако с позиций дифференциальной геометрии [26] фигуры на рис. 4 оказываются, как известно, *существенно* различными. Из геологических соображений явствует, что тот геометрический подход, который бытует сейчас в геологии, оказывается не очень удачным. Что же касается иного подхода [34], то он малоизвестен и недостаточно разработан.

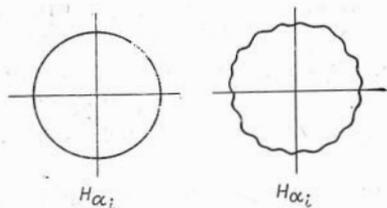


Рис. 4

Учитывая сказанное, вероятно, первоочередную задачу, связанную с задачами перечисления G_{m0}^2 , можно сформулировать так.

Задано n квадратов со стороной a . Два квадрата могут сшиваться между собой по любой целой стороне. Сколько различных и каких именно фигур можно сшить из этих n квадратов?

Различными считаются фигуры, которые не могут быть совмещены между собой на основе преобразований вида [35]:

$$\pm x' = \frac{x}{ak} \cos \alpha - \frac{y}{ak} \sin \alpha + h_1 a; \quad (17)$$

$$\pm y' = \frac{x}{ak} \sin \alpha + \frac{y}{ak} \cos \alpha + h_2 a,$$

где k, h_1, h_2 — целые положительные числа.

Кроме того, требуется множество перечисленных фигур $H_1^2, H_2^2, \dots, H_{N(n)}^2$ разбить на классы

$$\{H_{\alpha_1}^2\}_1, \{H_{\alpha_2}^2\}_2, \dots, \{H_{\alpha_i}^2\}_i \quad (18)$$

так, чтобы две любые *равновеликие* фигуры $H_{\alpha_i}^2$ и $H_{\alpha_k}^2, H_{\alpha_i}^2, H_{\alpha_k}^2 \in \{H_{\alpha_i}^2\}_i$ имели бы в некотором приближении одинаковую вероятность обнаружения $p_j(S, b)$ с помощью, например, квадратной сети со стороной b (s). Фигуру можно считать обнаруженной, если при бросании сети на фигуру хотя бы r узлов сети окажется внутри фигуры.

4. Рассмотрим вопрос о перечислении G_{m1}^1 . Пусть $U_i = \{U_1^1, U_2^1, \dots, U_s^1\}$ — множество бинарных отношений [24], отвечающих таким случаям взаимного расположения $H_{\alpha_i}^1$ и $H_{\alpha_k}^1$, которые необходимо различать между собой из *содержательных* соображений. Запись $H_{\alpha_i}^1 U_p^1 H_{\alpha_k}^1$ будем

5. Если обратиться к вопросам перечисления G_{m2}^l и $G_{rпз}^l$, то можно вновь убедиться, что для объективного использования такой характеристики, как структура, необходимо предварительно решить еще ряд вспомогательных задач, связанных, например, с [13, 34, 26]. На основе пп. 3 и 4 эти задачи представляются для теоретической геологии специфическими.

Посмотрим на существующие классификации структур в геологии [20] с позиций G_{mi}^l , $i = 0, 1, 2, 3$. Все они построены только на учете G_{m0}^l — учете неформальном, связанном с генезисом. Ясно, что такие классификации не могут быть в принципе удовлетворительными из содержательных соображений.

В последнее время в качестве структурных элементов часто используют «вырезы» поверхностей раздела и пытаются применять к анализу структур статистический подход, что пока обосновать затруднительно.

XI. К ФОРМАЛЬНОЙ ПОСТАНОВКЕ НЕКОТОРЫХ ФАЦИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ГЕОЛОГИИ

1. После рассмотрения структуры G_s , естественно было бы обратиться к вещественной ассоциации F_s . Однако такое рассмотрение, вероятно, провести удовлетворительно нельзя до тех пор, пока не поставлены «генетические» проблемы, связанные с F_s . Попытаемся поставить, хотя бы грубо, так называемые фациальные задачи, которые сейчас принято рассматривать как центральные [21, 28]*.

2. Обозначим через

$$X = \{x\} \quad (21)$$

некоторый класс геологических тел ${}^1C_i^\Phi$, выделенных в ${}^1R_i^\Phi$. Пусть Y — множество функций, описывающих обстановки, в которых образовались $x \in X$ (сюда может быть включено и «время образования» $x \in X$), а Z — множество функций, описывающих свойства $x \in X$. Условимся толковать Y и Z как системы наборов формальных признаков [3]:

$$Y = \{y', y^2, \dots, y^q\}; \quad (22)$$

$$y^k = \{y_1^k, y_2^k, \dots, y_n^k\},$$

$$k = 1, 2, \dots, q$$

$$Z = \{z', z^2, \dots, z^r\};$$

$$z^l = \{z_1^l, z_2^l, \dots, z_m^l\}, \quad (23)$$

$$l = 1, 2, \dots, r.$$

С учетом (23) можем (21) переписать в виде

$$X \{x_1, x_2, \dots, x_p\}, \quad (24)$$

полагая, что построена классификация-перечисления (21) по (23) [3].

* Недавно понятие фации в геологии было вновь подвергнуто очередному геологическому анализу [37—39]. Автор пишет, что «скоро ни один человек не сможет понять, о чем идет речь, когда говорят о фациях». См. также: В. П. Маркевич. Понятие «фация». Изд. АН СССР, 1957.

Введем q осей координат, на которых условимся откладывать признаки из (22). В q -мерном пространстве получим множество точек, каждая из которых отвечает какой-либо *возможной* обстановке образования $x_i \in X$. Это множество назовем пространством обстановок Y .

Введем еще r осей координат, на которых условимся откладывать признаки из (23). В r -мерном пространстве получим множество точек, каждая из которых отвечает какому-либо $x_i \in X$.

Пусть $Y_i \subset Y$ отвечает обстановкам, в которых *мог* образоваться $x_i \in X$, а $Y_{\bar{i}} \subset Y$ — обстановкам, в которых $x_i \in X$ образоваться *не мог*.

3. Обозначим через $Y_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j}$ подпространство Y , отвечающее обстановкам, в которых *могли* образоваться и x_{α_1} , и x_{α_2}, \dots , и x_{α_j} ; $x_{\alpha_i} \in X$. По определению,

$$Y_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_j} = \bigcap_{k=1}^j Y_{\alpha_k}. \quad (25)$$

Обозначим через $\bar{Y}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_j}$ подпространство Y , отвечающее обстановкам, в которых *могли* образоваться и x_{α_1} и x_{α_2}, \dots и x_{α_j} , но *не могли* образоваться никакие *другие* $x_{\alpha_k} \in X$. По определению,

$$\bar{Y}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_j} = \bigcap_{k=1}^j Y_{\alpha_k} \bigcap_{l \neq k} Y_{\bar{\alpha}_l}. \quad (26)$$

Если $\bar{Y}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_j} \neq 0$, условимся обозначать его через $\bar{Y}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_j}^0$ и связывать с ним совокупность $\{x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_j}\}^0$. Можно доказать, исходя из (25) и (26), что имеет место:

$$Y_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_j}^0 \subseteq Y_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_j}; \quad (27)$$

$$Y_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_i \dots \alpha_j}^0 \cap Y_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_i' \dots \alpha_j}^0 = 0; \quad (28)$$

$$\bigcup Y_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_j}^0 = Y. \quad (29)$$

Кроме того, *может* иметь место

$$\{x_{\alpha_i}\}^0 \cap \{x_{\alpha_i'}\}^0 \neq 0, \quad (30)$$

Рассмотрим *произвольную* совокупность $\{x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_j}\}$. Всякому x_{α_i} из этой совокупности можно привести в соответствие функцию алгебры логики [13]:

$$f_{\alpha_i} = z_{p_i^1}^1 \& z_{p_i^2}^2 \& \dots \& r_{p_i^r}^r, \quad (31)$$

где $z_{p_i^k}^k$ — признаки из (23), принимающие значение единицы на x_{α_i} . Используя (31) для $\{x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_j}\}$, можем получить *

$$F_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_j} = f_{\alpha_1} \& f_{\alpha_2} \& \dots \& f_{\alpha_j}. \quad (32)$$

Введем операцию сокращения правой части (32) — подставим значения f_{α_i} из (31) и проведем упорядочение по верхнему значку. Условимся, что

$$\bigg\&_{i=1}^j z_{p_i^k}^k \equiv \begin{cases} z_l^k, & \text{если все } p_i^k = l; \\ 1, & \text{если не все } p_i^k = l. \end{cases} \quad (33)$$

Функцию алгебры логики, полученную из (32) за счет (33), обозначим через $F_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_j}^*$.

Наконец, x_{α_i} и x_{α_k} будем называть *изофациальными*, если $Y_{\alpha_i} = Y_{\alpha_k}$. Изофациальные совокупности $\{x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_j}\}$ обозначим через $\{x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_j}\}^+$. Очевидно,

$$\{x_{\alpha_i}\}^+ \cap \{x_{\alpha_j}\}^+ = 0. \quad (34)$$

Если $F_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_j}^*$ определялось для $\{x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_j}\}^0$, будем писать $F_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_j}^0$; если же для $\{x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_j}\}^+$, то $F_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_j}^+$.

Опираясь на [37—39] и, например, [21, 28], назовем $Y_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_j}^0$ j -местной Y -фацией; $\{x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_j}\}^0$ — j -местной X -фацией, $F_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_j}^0$ — j -местной Z -фацией, а $\{x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_j}\}^+$ — j -местной фацией X на основе Y и $F_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_j}^+$ — ее образом.

Можно убедиться, что $Y_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_j}^0$ отвечает такому понятию фации, которое устанавливается в *пространстве обстановок*; $\{x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_j}\}^0$ — такому, которое устанавливается на множестве объектов (при этом x_{α_i} и x_{α_k} считаются «изофациальными», если они *могли* образоваться в одних и тех же обстановках); $F_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_j}^0$ — такому, которое устанавливается в пространстве признаков (возможно, включая «возраст»); $\{x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_j}\}^+$ — такому, которое устанавливается на множестве объектов, при этом x_{α_i} и x_{α_k} считаются изофациальными, если они могли образоваться в одних и только одних обстановках. Легко убедиться, что перечисленные выше формулировки исчерпывают все, что рассмотрено в [37—39] и, пожалуй, все понятия «фации», которые можно придумать **.

4. В простейшем варианте, видимо, первоочередную задачу фациального анализа можно сформулировать таким образом.

Для всех $x_{\alpha_i} \in X$ известны f_{α_i} из (31), для всех $x_{\alpha_k} \in X'$, $X' \subset X$ известны Y_{α_k} . Требуется исследовать, считая известными, например, результаты [4] и [13], в каких *предположениях* можно определить Y_{α_i} , $x_{\alpha_i} \in X''$, $X' \cup X'' = X$.

Далее можно поставить обратную задачу: для всех $x_{\alpha_j} \in X$ известны Y_{α_i} , для всех $x_{\alpha_k} \in X'$, $X' \subset X$ — из (31) f_{α_k} . Требуется исследовать, в каких *предположениях* можно определить f_{α_i} , $x_{\alpha_i} \in X''$, $X' \cup X'' = X$.

5. Проведенные исследования задач (п. 4) пока привели к негативным результатам: не удалось указать никаких приемлемых с точки зрения экспериментальных возможностей предположений, которые позволили бы говорить о решении этих задач. Более того, оказалось, что на основе $\{x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_j}\}^0$ в ${}^1R_i^\Phi$ нельзя провести фациальных границ. Эти границы могут быть проведены только на основе $\{x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_j}\}^+$, что ясно из (30) и (34).

* Точнее (32) следовало бы представлять в виде $f_{\alpha_1} \vee f_{\alpha_2} \vee \dots \vee f_{\alpha_j}$ и вместо (33) использовать минимизацию конъюнктивных форм (13).

** Действительно, так или иначе приходится иметь дело с объектами x_{α_i} ; в конечном счете, все будет зависеть от того, какие два объекта x_{α_i} и x_{α_k} будут считаться изофациальными: либо такие, которые могли образоваться в одних, и только одних, обстановках, либо такие, которые могли образоваться как в одних и тех же, так и в различных обстановках.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе была предпринята попытка оценить последствия, вытекающие из формальной недоработанности системы геологических понятий для геофизики, геологии и для других наук о Земле, предложен план формальной доработки системы геологических понятий, даны пояснения и обоснования к этому плану, а также была проведена предварительная оценка полученных результатов.

В дальнейшем необходимо значительно расширить формальный анализ опыта конкретных геологических наук по выработке понятий и построению классификаций (в первую очередь структурной геологии, петрографии, литологии), перейти к случаю конечной точности измерений, постановке и решению конкретных геологических задач (в особенности поиска полезных ископаемых), провести с общих геологических позиций обстоятельное освоение опыта использования математических методов в кристаллографии, горном деле, геофизике, геохимии и тектонофизике. Следует также учиться, что после предварительной разработки формализмов потребуются обосновать их с физико-химических позиций, решить, в частности, геологические проблемы [29]. Есть основание полагать, что проблемы *формального* освоения всего предшествующего опыта геологии имеют реальное и такое же важное значение, как и разработка теоретических проблем в отдельных областях геологии.

ПРИЛОЖЕНИЕ

К ОЦЕНКЕ ИЗУЧЕННОСТИ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

1. Рассмотрим класс функций $\{\varphi(x)\}$, таких, что для $\varphi_i(x) \subset \{\varphi(x)\}$ в области X имеют место

$$\varphi_i^* \leq \varphi_i(x) \leq \varphi_i^{**}; \quad |\varphi_i'(x)| \leq c_i. \quad (1)$$

Пусть установлено

$$\varphi_i^*(x_k) \leq \varphi_i(x_k) \leq \varphi_i^{**}(x_k); \quad x_k \in X, \quad k = 1, 2, \dots, p(i). \quad (2)$$

За счет интерполяции и экстраполяции можно получить

$$\varphi_i^*(x) \leq \varphi_i(x) \leq \varphi_i^{**}(x); \quad x \in X, \quad (3)$$

такие, что

$$\Delta\varphi_i(x) = \varphi_i^{**}(x) - \varphi_i^*(x), \quad x \in X \quad (4)$$

не возрастает с увеличением $p(i)$ и уменьшением $\Delta\varphi_i(\bar{x}_k)$ из (2).

2. Определим коэффициент изученности $\varphi_i(x)$ в $x' \in X$:

$$\eta(\varphi_i, x') = 1 - \frac{\Delta\varphi_i(x')}{\Delta\varphi_i}; \quad (5)$$

$$\Delta\varphi_i(x') = \varphi_i^{**}(x') - \varphi_i^*(x');$$

$$\Delta\varphi_i = \varphi_i^{**} - \varphi_i^*.$$

Так как $0 \leq \Delta\varphi_i(x') \leq \Delta\varphi_i$, то $1 \geq \eta(\varphi_i, x') \geq 0^*$.
 Определим средний коэффициент изученности $\varphi_i(x)$ в $X' \subset X$:

$$\begin{aligned} \bar{\eta}(\varphi_i, X') &= 1 - \frac{\Delta\bar{\varphi}_i(X')}{\Delta\varphi_i}; \\ \Delta\bar{\varphi}_i(X') &= \frac{1}{\nu(X')} \int_{X'} \Delta\varphi_i(x) dx, \end{aligned} \quad (6)$$

минимальный коэффициент изученности $\varphi_i(x)$ в $X' \subset X$:

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}(\varphi_i, X') &= 1 - \frac{\Delta\tilde{\varphi}_i(X')}{\Delta\varphi_i}; \\ \Delta\tilde{\varphi}_i(X') &= \min_{x' \in X'} \Delta\varphi_i(x') \end{aligned} \quad (7)$$

и максимальный коэффициент изученности $\varphi_i(x)$ в $X' \subset X$:

$$\begin{aligned} \hat{\eta}(\varphi_i, X') &= 1 - \frac{\Delta\hat{\varphi}_i(X')}{\Delta\varphi_i}; \\ \Delta\hat{\varphi}_i(X') &= \max_{x' \in X'} \Delta\varphi_i(x'). \end{aligned} \quad (8)$$

Определим коэффициент средней изученности $\{\varphi_i(x)\}$ в $x' \in X$:

$$\eta(\{\bar{\varphi}_i\}, x') = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \eta(\varphi_i, x'), \quad (9)$$

* Любопытно сравнить $\eta(\varphi_i, x')$ с так называемым информационным коэффициентом А. Б. Вистелиуса [18]. Легко показать, что из (5) следует:

- 1) $\eta(x, x') = 1$;
- 2) $\eta(a, x') = 1, a = \text{const}$;
- 3) $\eta(a\varphi_i, x') = \eta(\varphi_i, x')$;
- 4) $\eta(\varphi_i \pm a, x') = \eta(\varphi_i, x')$;
- 5) $\eta(\varphi_i \pm \varphi_j, x') = \frac{\eta(\varphi_i, x') \Delta\varphi_i + \eta(\varphi_j, x') \Delta\varphi_j}{\Delta\varphi_i + \Delta\varphi_j}$;
- 6) $\eta(\varphi_i\varphi_j, x') = 1 - \left(\frac{(\bar{\varphi}_i(x)\Delta\varphi_j + \bar{\varphi}_j(x)\Delta\varphi_i)}{\bar{\varphi}_i\Delta\varphi_j + \bar{\varphi}_j\Delta\varphi_i} - \frac{\eta(\varphi_i, x')\bar{\varphi}_j(x)\Delta\varphi_i + \eta(\varphi_j, x')\bar{\varphi}_i(x)\Delta\varphi_j}{\bar{\varphi}_i\Delta\varphi_j + \bar{\varphi}_j\Delta\varphi_i} \right)$;
- 7) $\eta(\varphi_i/\varphi_j, x') = 1 - \left(\frac{(\bar{\varphi}_i(x)\Delta\varphi_j + \bar{\varphi}_j(x)\Delta\varphi_i)}{\bar{\varphi}_i\Delta\varphi_j + \bar{\varphi}_j\Delta\varphi_i} - \frac{\eta(\varphi_i, x')\bar{\varphi}_j(x)\Delta\varphi_i + \eta(\varphi_j, x')\bar{\varphi}_i(x)\Delta\varphi_j}{\bar{\varphi}_i\Delta\varphi_j + \bar{\varphi}_j\Delta\varphi_i} \right) \left(\frac{\tilde{\varphi}_i}{\bar{\varphi}_i(x)} \right)^2$.

Здесь:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_i(x) &= \frac{1}{2} [\varphi_i^{++}(x) + \varphi_i^+(x)]; \\ \varphi_i &= \frac{1}{2} [\varphi_i^{++} + \varphi_i^+]; \\ \tilde{\varphi}_i(x) &= \sqrt{\varphi_i^{++}(x)\varphi_i^+(x)}; \\ \tilde{\varphi}_i &= \sqrt{\varphi_i^{++}\varphi_i^+}. \end{aligned}$$

где m — число функций в $\{\varphi_i(x)\}$; коэффициент минимальной изученности $\{\varphi_i(x)\}$ в $x' \in X$:

$$\eta(\{\tilde{\varphi}_i\}, x') = \min_{\{\varphi_i\}} \eta(\varphi_i, x') \quad (10)$$

и коэффициент максимальной изученности $\{\varphi_i(x)\}$ в $x' \in X$:

$$\eta(\{\hat{\varphi}_i\}, x') = \max_{\{\varphi_i\}} \eta(\varphi_i, x'). \quad (11)$$

Определим средний коэффициент средней изученности $\{\varphi_i(x)\}$ в $X' \subset X$:

$$\bar{\eta}(\{\bar{\varphi}_i\}, X') = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{\eta}(\varphi_i, X'); \quad (12)$$

минимальный коэффициент средней изученности $\{\varphi_i(x)\}$ в $X' \subset X$:

$$\tilde{\eta}(\{\bar{\varphi}_i\}, X') = \min \eta(\{\bar{\varphi}_i\}, x'); \quad x' \in X'; \quad (13)$$

максимальный коэффициент средней изученности $\{\varphi_i(x)\}$ в $X' \subset X$:

$$\hat{\eta}(\{\bar{\varphi}_i\}, X') = \max \eta(\{\bar{\varphi}_i\}, x'); \quad x' \in X', \quad (14)$$

средний коэффициент минимальной изученности $\{\varphi_i(x)\}$ в $X' \subset X$:

$$\bar{\eta}(\{\tilde{\varphi}_i\}, X') = \frac{1}{v(X')} \int_{X'} \eta(\{\tilde{\varphi}_i\}, x) dx; \quad (15)$$

минимальный коэффициент минимальной изученности $\{\varphi_i(x)\}$ в $X' \subset X$:

$$\tilde{\eta}(\{\tilde{\varphi}_i\}, X') = \min \eta(\{\tilde{\varphi}_i\}, x'); \quad x' \in X', \quad (16)$$

максимальный коэффициент минимальной изученности $\{\varphi_i(x)\}$ в $X' \subset X$:

$$\hat{\eta}(\{\tilde{\varphi}_i\}, X') = \max \eta(\{\tilde{\varphi}_i\}, x'); \quad x' \in X', \quad (17)$$

средний коэффициент максимальной изученности $\{\varphi_i(x)\}$ в $X' \subset X$:

$$\bar{\eta}(\{\hat{\varphi}_i\}, X') = \frac{1}{v(X')} \int_{X'} \eta(\{\hat{\varphi}_i\}, x) dx; \quad (18)$$

минимальный коэффициент максимальной изученности $\{\varphi_i(x)\}$ в $X' \subset X$:

$$\tilde{\eta}(\{\hat{\varphi}_i\}, X') = \min \eta(\{\hat{\varphi}_i\}, x'); \quad x' \in X' \quad (19)$$

и максимальный коэффициент максимальной изученности $\{\varphi_i(x)\}$ в $X' \subset X$:

$$\hat{\eta}(\{\hat{\varphi}_i\}, X') = \max \eta(\{\hat{\varphi}_i\}, x'); \quad x' \in X'. \quad (20)$$

3. Выражение

$$\Theta(x', \{\varphi_i\}) = \sum_{i=1}^m \eta(\varphi_i, x') \quad (21)$$

будем толковать как изученность $x' \in X$ по $\{\varphi_i(x)\}$; выражение

$$\bar{\Theta}(X', \{\varphi_i\}) = \sum_{i=1}^m \bar{\eta}(\varphi_i, X') \quad (22)$$

как среднюю изученность X' по $\{\varphi_i(x)\}$; выражение

$$\tilde{\Theta}(X', \{\varphi_i\}) = \sum_{i=1}^m \tilde{\eta}(\varphi_i, X') - \quad (23)$$

как минимальную изученность X' по $\{\varphi_i(x)\}$, а выражение

$$\hat{\Theta}(X', \{\varphi_i\}) = \sum_{i=1}^m \hat{\eta}(\varphi_i, X') - \quad (24)$$

как максимальную изученность X' по $\{\varphi_i(x)\}$. Если $m = 1$, то (21)—(24) переходят соответственно в (5)—(8).

4. На основании предыдущего можно установить процедуры сопоставления изученности $\varphi_i(x)$ в x' , $x'' \in X$ и в X' , $X'' \subset X$, например, таким образом:

$$\zeta(\varphi_i, x', x'') = \frac{\eta(\varphi_i, x') - 1}{\eta(\varphi_i, x'') - 1}; \quad (25)$$

$$\bar{\zeta}(\varphi_i, X', X'') = \frac{\bar{\eta}(\varphi_i, X') - 1}{\bar{\eta}(\varphi_i, X'') - 1}; \quad (26)$$

$$\tilde{\zeta}(\varphi_i, X', X'') = \frac{\tilde{\eta}(\varphi_i, X') - 1}{\tilde{\eta}(\varphi_i, X'') - 1}; \quad (27)$$

$$\hat{\zeta}(\varphi_i, X', X'') = \frac{\hat{\eta}(\varphi_i, X') - 1}{\hat{\eta}(\varphi_i, X'') - 1}, \quad (28)$$

процедуры сопоставления изученности $\{\varphi_i(x)\}$ в x' , $x'' \in X$ и в X' , $X'' \subset X$, например, так:

$$\zeta(\{\bar{\varphi}_i\}, x', x'') = \frac{\eta(\{\bar{\varphi}_i\}, x') - 1}{\eta(\{\bar{\varphi}_i\}, x'') - 1}; \quad (29)$$

$$\zeta(\{\tilde{\varphi}_i\}, x', x'') = \frac{\eta(\{\tilde{\varphi}_i\}, x') - 1}{\eta(\{\tilde{\varphi}_i\}, x'') - 1}; \quad (30)$$

$$\zeta(\{\hat{\varphi}_i\}, x', x'') = \frac{\eta(\{\hat{\varphi}_i\}, x') - 1}{\eta(\{\hat{\varphi}_i\}, x'') - 1}; \quad (31)$$

$$\bar{\zeta}(\{\bar{\varphi}_i\}, X', X'') = \frac{\bar{\eta}(\{\bar{\varphi}_i\}, X') - 1}{\bar{\eta}(\{\bar{\varphi}_i\}, X'') - 1}; \quad (32)$$

$$\bar{\zeta}(\{\tilde{\varphi}_i\}, X', X'') = \frac{\bar{\eta}(\{\tilde{\varphi}_i\}, X') - 1}{\bar{\eta}(\{\tilde{\varphi}_i\}, X'') - 1}; \quad (33)$$

$$\hat{\zeta}(\{\bar{\varphi}_i\}, X', X'') = \frac{\hat{\eta}(\{\bar{\varphi}_i\}, X') - 1}{\hat{\eta}(\{\bar{\varphi}_i\}, X'') - 1}; \quad (34)$$

$$\hat{\zeta}(\{\tilde{\varphi}_i\}, X', X'') = \frac{\hat{\eta}(\{\tilde{\varphi}_i\}, X') - 1}{\hat{\eta}(\{\tilde{\varphi}_i\}, X'') - 1}; \quad (35)$$

$$\tilde{\zeta}(\{\bar{\varphi}_i\}, X', X'') = \frac{\tilde{\eta}(\{\bar{\varphi}_i\}, X') - 1}{\tilde{\eta}(\{\bar{\varphi}_i\}, X'') - 1}; \quad (36)$$

$$\hat{\xi}(\{\tilde{\varphi}_i\}, X', X'') = \frac{\hat{\eta}(\{\tilde{\varphi}_i\}, X'') - 1}{\hat{\eta}(\{\tilde{\varphi}_i\}, X') - 1}; \quad (37)$$

$$\bar{\xi}(\{\hat{\varphi}_i\}, X', X'') = \frac{\bar{\eta}(\{\hat{\varphi}_i\}, X') - 1}{\bar{\eta}(\{\hat{\varphi}_i\}, X'') - 1}; \quad (38)$$

$$\tilde{\xi}(\{\hat{\varphi}_i\}, X', X'') = \frac{\tilde{\eta}(\{\hat{\varphi}_i\}, X') - 1}{\tilde{\eta}(\{\hat{\varphi}_i\}, X'') - 1}; \quad (39)$$

$$\hat{\xi}(\{\hat{\varphi}_i\}, X', X'') = \frac{\hat{\eta}(\{\hat{\varphi}_i\}, X') - 1}{\hat{\eta}(\{\hat{\varphi}_i\}, X'') - 1}, \quad (40)$$

процедуры сопоставления изученности $x', x'' \in X$ и $X', X'' \subset X$ по $\{\varphi_i(x)\}$, например, так:

$$\zeta(x', x'', \{\varphi_i\}) = \frac{\Theta(x', \{\varphi_i\}) - m}{\Theta(x'', \{\varphi_i\}) - m}; \quad (41)$$

$$\bar{\zeta}(X', X'', \{\varphi_i\}) = \frac{\bar{\Theta}(X', \{\varphi_i\}) - m}{\bar{\Theta}(X'', \{\varphi_i\}) - m}; \quad (42)$$

$$\tilde{\zeta}(X', X'', \{\varphi_i\}) = \frac{\tilde{\Theta}(X', \{\varphi_i\}) - m}{\tilde{\Theta}(X'', \{\varphi_i\}) - m}; \quad (43)$$

$$\hat{\zeta}(X', X'', \{\varphi_i\}) = \frac{\hat{\Theta}(X', \{\varphi_i\}) - m}{\hat{\Theta}(X'', \{\varphi_i\}) - m}. \quad (44)$$

При $m = 1$ (41)—(44) переходят соответственно в (25)—(28). Выбором можно обеспечить для (25)—(44) $1 \leq \zeta \leq \infty$.

5. Можно установить на основе предыдущего и процедуру сравнения изученности, например, $\varphi_p(x)$ и $\varphi_q(x)$ в $x', x'' \in X$:

$$\zeta(\varphi_p, x'; \varphi_q, x'') = \frac{\eta(\varphi_p, x') - 1}{\eta(\varphi_q, x'') - 1}. \quad (45)$$

Можно надеяться, что введенные коэффициенты позволят осуществить информационный подход к оценке изученности функций в точке и областях, а также изученности точек и областей, с которыми приходится иметь дело в геологии.

Этот подход обеспечивает информационную оценку процедур построения моделей геологических пространств (см. II, п. 6), позволяет формулировать решающие правила для выбора рациональной разведочной сети, если считать, что такая сеть должна обеспечивать максимум изученности данной области по данной совокупности свойств при минимуме затрат; с помощью этих коэффициентов легко построить оптимальные схемы подсчета, определения категоричности и нормирования запасов полезных ископаемых.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. А. Косыгин, Ю. А. Воронин, В. А. Соловьев. Опыт формализации некоторых тектонических понятий.— Геол. и геофиз., 1964, № 1.
2. Ю. А. Косыгин, Ю. А. Воронин. Некоторые фундаментальные понятия структурной геологии.— Геотектоника, 1965, № 1.
3. Ю. А. Воронин, С. В. Гольдин. Вопросы теории конечных геологических классификаций.— Геол. и геофиз., 1964, № 8.
4. Т. Андерсен. Введение в многомерный статистический анализ. Физматгиз, 1963.

5. Ю. А. Воронин, Н. А. Гольдина. Совместный упрощенный математико-логический анализ нескольких геологических классификаций.— Сб. «Опыт анализа и построения геологических классификаций на основе представлений конечной математики». Тр. ИГиГ СО АН СССР. Новосибирск, 1964.
6. Ю. А. Воронин, Н. А. Гольдина. Упрощенная схема математико-логического разбора геологических классификаций. Сб. «Опыт анализа и построения геологических классификаций на основе представлений конечной математики». Тр. ИГиГ СО АН СССР. Новосибирск, 1964.
7. Ю. А. Воронин и др. Краткие результаты анализа некоторых геологических классификаций. Сб. «Опыт анализа и построения геологических классификаций на основе представлений конечной математики». Тр. ИГиГ СО АН СССР. Новосибирск, 1964.
8. М. Н. Иванова. Математико-логический анализ некоторых тектонических классификаций.— Сб. «Опыт анализа и построения геологических классификаций на основе представлений конечной математики». Тр. ИГиГ СО АН СССР. Новосибирск, 1964.
9. Г. Клаус. Введение в формальную логику. ИЛ, 1960.
10. Д. Вриджтап. The logic of modern physics. N. Y., 1927.
11. Г. Н. Положий. Уравнения математической физики. «Высшая школа», 1964.
12. Ж. Дьедонне. Основы современного анализа. «Мир», 1964.
13. П. С. Новиков. Введение в математическую логику. Физматгиз, 1959.
14. Р. Карнап. Значение и необходимость. ИЛ, 1959.
15. С. К. Шаумян и др. Операционные определения и их применение в фонологии.— Сб. «Применение логики в науке и технике». Изд-во АН СССР, 1960.
16. П. К. Соболевский. Современная горная геометрия. Социал. реконструкция и наука, 1937, № 7.
17. П. А. Рыжов. Геометрия недр. «Недра», 1964.
18. Советская геология, 1964, № 12.
19. Б. Делоне, Н. Падуров, А. Александров. Математические основы структурного анализа кристаллов. ОНТИ, ГТТИ, 1934.
20. Г. Д. Ажгирей. Структурная геология. Изд-во МГУ, 1956.
21. В. Д. Наливкин. Учение о фациях. Изд-во АН СССР, 1956.
22. М. А. Айзерман и др. Логика, автоматы, алгоритмы. Физматгиз, 1963.
23. Ю. А. Косыгин. Геологические структуры и структурно-вещественные ассоциации.— Геол. и геофиз., 1964, № 6.
24. А. Г. Курош. Лекции по общей алгебре. Физматгиз, 1961.
25. Ю. А. Воронин. О формальном описании геологических тел.— Сб. «Опыт анализа и построения геологической классификации на основе представлений конечной математики». Тр. ИГиГ СО АН СССР. Новосибирск, 1964.
26. Д. Гильберт, С. Кон-Фоссен. Наглядная геометрия. Гостехиздат, 1951.
27. Г. Е. Шилов, Б. Л. Гуревич. Интеграл, мера и производная. «Наука», 1964.
28. Л. Б. Рухин. Основы литологии. Гостоптехиздат, 1961.
29. Реология. (Теория и приложение). Сборник статей. Под ред. Ф. Эйриха, ИЛ, 1962.
30. Р. М. Грановская, В. А. Ганзен. Алгоритм для опознавания контурных изображений. Вычислительная техника и вопросы программирования, вып. 3. Изд-во ЛГУ, 1964.
31. Н. А. Гольдина. Применение упрощенного математико-логического анализа на примере классификации залежей нефти и газа И. О. Брода.— Сб. «Опыт анализа и построения геологических классификаций на основе представлений конечной математики». Тр. ИГиГ СО АН СССР. Новосибирск, 1964.
32. Справочное руководство по петрографии осадочных пород. т. I. Л., 1958.
33. Е. С. Венцель. Теория вероятностей. Физматгиз, 1962.
34. Дж. Сантало. Интегральная геометрия. ИЛ, 1956.
35. А. М. Яглом. Геометрические преобразования, т. I. Физматгиз, 1955.
36. Дж. Риордан. Введение в комбинаторный анализ. ИЛ, 1963.
37. D. Franke. Zu Fragen geologischer Terminologie und Klassifikation (I). Der Begriff Formation (I)— Zeitschr. f. angewand. Geol., 1962, Bd 8, H. 4.
38. D. Franke. Zu Fragen geologischer Terminologie und Klassifikation (II). Der Begriff Faries (I)— Zeitschr. f. angewand. Geol., 1963, Bd 9, H. 1.
39. D. Franke. Zu Fragen geologischer Terminologie und Klassifikation (III).— Der Begriff Faries (II).— Zeitschr. f. angewand. Geol., 1963, Bd 9, H. 2.
40. Высшая алгебра. Справочная математическая библиотечка. Физматгиз, 1962.
41. Г. И. Теодорович. Учение об осадочных породах. Гостоптехиздат, 1958.

CONTENTS

G. I. Karatayev, Yu. M. Gusev, T. L. Zakharova. To the Construction of Correlation Scheme of Qualitative Interpretation of Gravitation and Magnetic Anomalies	5
Yu. M. Gusev, G. I. Karatayev, O. A. Solovyov, A. V. Chorny, V. I. Avramenko, T. L. Zakharova. On Recognizing of Local Uplifts in Platform Sedimentary Cover on the Basis of Results of Regressional Analysis of Gravitation and Magnetic Anomalies	19
G. F. Kuznetsov, E. G. Tveritin. Automation of the Process of Isolation of Elementary Magnetic Anomalies	34
O. A. Solovyov. Investigation of Some Calculation Schemes Used in Magnetic and Gravitation Survey	46
N. N. Chornaya, A. V. Chorny. Calculation of Separation Factor of Gravitation and Magnetic Fields According to Spherical Function on Electronic Computers	53
E. V. Nikolsky. On Numerical Method of Solution of Wave Equation with Alternating Unidimensional Speed	66
M. L. Shemyakin, Yu. A. Romanenko. On Calculation of Parameters of Seismic Profile by the Least Square Method	76
Z. V. Goldin. Logical Schemes of Seismic Wave Correlation	81
Yu. A. Voronin. On Formalization of Geologic Conceptions	102

О Г Л А В Л Е Н И Е

Г. И. Каратаев, Ю. М. Гусев, Т. Л. Захарова. К построению корреляционной схемы качественной интерпретации гравитационных и магнитных аномалий	5
Ю. М. Гусев, Г. И. Каратаев, О. А. Соловьев, А. В. Черный, В. И. Авраменко, Т. Л. Захарова. О выявлении локальных поднятий в осадочном чехле платформы по результатам регрессионного анализа гравитационных и магнитных аномалий	19
Г. Ф. Кузнецов, Е. Г. Тверитин. Автоматизация процесса выделения элементарных магнитных аномалий	34
О. А. Соловьев. Исследование некоторых вычислительных схем, используемых в магниторазведке и гравиразведке	46
Н. Н. Черная, А. В. Черный. Вычисление коэффициентов разложения гравитационного и магнитного полей по сферическим функциям на электронно-вычислительных машинах	53
Э. В. Никольский. О численном методе решения волнового уравнения с переменной одномерной скоростью	66
М. Л. Шемякин, Ю. А. Романенко. О вычислении параметров сейсмического разреза по способу наименьших квадратов	76
С. В. Гольдин. Логические схемы корреляции сейсмических волн	81
Ю. А. Воронин. О формализации понятий геологии	102

ВОПРОСЫ ОБРАБОТКИ
ГЕОЛОГО-ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ДАННЫХ
НА ЭЛЕКТРОННЫХ ЦИФРОВЫХ МАШИНАХ

Ответственный редактор
Михаил Михайлович
Лаврентьев

Редактор *Н. Г. Рязанова*
Художественный редактор *М. Ф. Глазырина*
Художник *Н. А. Савельева*
Технический редактор *Т. К. Овчинникова*
Корректоры *М. П. Оськина, Р. С. Митяева*

Сдано в набор 29 марта 1966 г. Подписано в печать 26 января 1967 г. МН03508 Бумага 70×108^{1/16}
9 печ. л., 12,6 усл. печ. л., 9,9 уч. изд. л. Тираж 1800 экз.

Издательство «Наука», Сибирское отделение. Новосибирск, Советская, 20. Зак. № 1311
2-я типография издательства «Наука». Москва, Г-99, Шубинский пер., 10. Цена 89 коп.