

А.А.Кауфман

---

ВВЕДЕНИЕ  
В ТЕОРИЮ  
ГЕОФИЗИЧЕСКИХ  
МЕТОДОВ

Гравитационные  
электрические  
и магнитные  
поля

Часть 1

---



# **GEOPHYSICAL FIELD THEORY AND METHOD**

## **Part A Gravitational, Electric and Magnetic Fields**

**Alexander A. Kaufman  
Department of Geophysics  
Colorado School of Mines  
Golden, Colorado**

**Academic Press Inc.  
Harcourt Brace Jovanovich, Publishers  
San Diego New York Boston London  
Sydney Tokyo Toronto**



А.А.Кауфман

# ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

## Часть 1 Гравитационные, электрические и магнитные поля

Перевод с английского М.Л. Бах-  
мутского, Ив. М. Варенцова, С.А.  
Варенцовой, А.Д. Каринского

Редактор перевода доктор техни-  
ческих наук М.Н. Бердичевский



Москва «Недра» 1997



**Организация-спонсор  
Евро-Азиатское геофизическое Общество**

Рекомендована к изданию доктором технических наук М.Н. Бердичевским.

**Кауфман А.А.** Введение в теорию геофизических методов. Часть I. Гравитационные, электрические и магнитные поля. Пер. с англ.; Ред. пер. М.Н. Бердичевский. – М.: Недра, 1997. – 520 с.: ил. ISBN 5-247-03776-6.

Описана теория гравитационного, электрического и магнитного полей, используемых в разведочной геофизике. Обсуждаются физические принципы метода, физические законы, управляющие поведением поля, и области их приложения, влияние среды на поле и распределение источников тока. Даются системы управлений поля, постановка краевых задач, приближенные методы вычисления поля и др.

Для геофизиков, работающих в разведочной и глубинной геофизике. Полезна физикам и инженерам-электронщикам, а также студентам геофизических специальностей.

Табл. 5, ил. 88, список лит. – 21 назв.



# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к русскому изданию . . . . .	6
Предисловие . . . . .	7
Благодарности . . . . .	8
Список обозначений . . . . .	9

## ГЛАВА I. ПОЛЯ И ИХ ВОЗБУДИТЕЛИ

I.1. Скаляры и векторы, системы координат . . . . .	11
I.2. Телесный угол, угол видимости . . . . .	20
I.3. Поля . . . . .	30
I.4. Скалярное поле и градиент . . . . .	31
I.5. Геометрическая модель поля . . . . .	43
I.6. Поток, дивергенция, теорема Гаусса . . . . .	46
I.7. Напряжение, циркуляция, ротор, теорема Стокса . . . . .	58
I.8. Два типа полей и их возбудители, уравнения поля . . . . .	71
I.9. Гармонические поля . . . . .	87
I.10. Поля источников (безвихревые поля) . . . . .	104
I.11. Поля вихрей . . . . .	125

## ГЛАВА II. ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ

II.1. Закон притяжения Ньютона и гравитационное поле . . . . .	137
II.2. Определение гравитационного поля . . . . .	154
II.3. Система уравнений гравитационного поля и его аналитическое продолжение вверх . . . . .	173

## ГЛАВА III. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ПОЛЯ

III.1. Закон Кулона . . . . .	192
III.2. Система уравнений стационарного электрического поля и его потенциала . . . . .	204
III.3. Электрическое поле в присутствии диэлектриков . . . . .	226
III.4. Электрический ток, электропроводность и закон Ома . . . . .	238
III.5. Электрические заряды в проводящей среде . . . . .	250
III.6. Сопротивление . . . . .	258
III.7. Стороннее поле и его электродвижущая сила . . . . .	269
III.8. Работа кулоновских и сторонних сил, закон Джоуля . . . . .	281
III.9. Определение электрического поля в проводящей среде . . . . .	286
III.10. Поведение электрического поля в проводящей среде . . . . .	305

## ГЛАВА IV. МАГНИТНЫЕ ПОЛЯ

IV.1. Взаимодействие токов, закон Био-Савара, магнитное поле . . . . .	368
IV.2. Векторный потенциал магнитного поля . . . . .	375
IV.3. Система уравнений магнитного поля $\mathbf{B}$ , обусловленного токами проводимости . . . . .	392
IV.4. Определение магнитного поля $\mathbf{B}$ , обусловленного токами проводимости . . . . .	399
IV.5. Поведение магнитного поля, вызванного токами проводимости . . . . .	409
IV.6. Намагничивание и молекулярные токи: напряженность поля $\mathbf{H}$ и ее связь с магнитным полем $\mathbf{B}$ . . . . .	441
IV.7. Системы уравнений для полей $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ . . . . .	452
IV.8. Поведение магнитного поля, вызванного токами в Земле . . . . .	468
Список литературы . . . . .	515

Предметный указатель . . . . .	516
--------------------------------	-----



## ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Несколько лет назад у меня возникло желание написать серию книг, рассказывающих о физических принципах и основах теории геофизических методов. За это время уже опубликовано три книги на английском языке издательством «Academic Press». Я очень рад, что первая часть этой серии публикуется в России, где я родился, долго жил и где мое геофизическое образование формировалось под влиянием моих коллег, замечательных учителей, и прежде всего Льва Моисеевича Альпина. В научной и педагогической деятельности я неизменно с благодарностью чувствую это влияние, которое, конечно, проявляется и в этой книге. Особенно оно заметно при сравнении с книгой Л. М. Альпина «Теория поля».

В заключение я выражаю глубокую благодарность всем, кто в это трудное для публикаций научной литературы время оказал помощь в издании книги. Публикация книги была бы невозможна без помощи Н. А. Савостьянова, В. З. Гарипова, А. С. Кашика, А. П. Шиловского. Моя особая признательность профессору МГУ М. Н. Бердичевскому, усилия которого преодолели все препятствия — и книга выходит в свет.

*А. А. Кауфман*

# ПРЕДИСЛОВИЕ

В этой книге я описываю теорию полей, используемых в гравитационных, электрических и магнитных разведочных методах. Следующие книги будут посвящены теории полей, применяемых в электромагнитных, сейсмических, ядерных и геотермических методах.

Геофизические методы применяются в самых разнообразных областях. Они используются при разведке нефти и полезных ископаемых, при решении гидрогеологических и инженерных задач, при исследовании скважин. И, конечно, геофизика играет фундаментальную роль в изучении глубинных слоев Земли.

В каждом геофизическом методе полезно выделять определенные составляющие, такие как теория метода, принципы и методы измерения поля, системы наблюдаемых параметров, обработка данных, решение обратной задачи и геологическая интерпретация.

Все вместе эти элементы образуют геофизический метод и каждый из них имеет большое практическое значение. Теория каждого из отдельных элементов, однако, значительно влияет на основные черты других элементов. Действительно, в основе всех геофизических методов лежат физические законы. Выбор расстояний между точками наблюдения вдоль профилей, а также расстояний между профилями и используемых параметров обычно основан на понимании поведения поля. Независимо от метода мы всегда измеряем сигнал, который состоит из нескольких частей. Одна из этих частей содержит полезную информацию об определенных структурах Земли, таких как слои и тела с ограниченными размерами. Другие части являются искусственными и геологическими шумами и их необходимо насколько возможно уменьшить. При отделении полезного сигнала от шума, что является основной задачей обработки данных, чрезвычайно важно знать поведение поля как функции координат, частоты и времени. Наконец, решение обратной задачи в основном опирается на сравнение полезного сигнала и результатов моделирования поля.

Иногда и очень кратко я обсуждаю некоторые аспекты измерений, подавления шума и интерпретации данных, но это делается только как иллюстрация к поведению поля. Все элементы геофизического метода, кроме его теории, выходят за пределы этой работы.

При описании теории гравитационного, электрического и магнитного полей я в каждом случае использую один и тот же подход и обсуждаю только те черты, которые относятся к разведочной геофизике. Этот подход включает в себя постановку целой серии вопросов, которые я обсуждаю в следующем порядке.

1. Физические принципы метода.
2. Физические законы, управляющие поведением поля, и области их приложения.



3. Влияние среды на поле и распределение источников поля.
4. Формулировка условий, при которых физические законы не могут использоваться непосредственно для вычислений поля.
5. Системы уравнений поля и их применение в случаях, когда некоторые из источников поля неизвестны.
6. Постановка краевых задач и их значение для определения поля.
7. Вспомогательные поля и их роль в теории поля.
8. Приближенные методы вычисления поля.
9. Изучение поведения поля в различных средах в наиболее типичных обстоятельствах, при которых применяются геофизические методы, включая следующие вопросы:
  - а) постановка краевых задач и их решение;
  - б) анализ распределения источников поля;
  - в) связь между полем и параметрами среды.

Теория этих полей — основной предмет последних трех глав. В первой главе, напротив, я обсуждаю основные особенности полей независимо от их природы. Эта глава лежит в основе понимания физических принципов и методов вычисления полей, используемых в геофизике. Конечно, основной идеей этого материала является связь между полем и его возбудителями.

Я надеюсь, что эта книга будет полезна как геофизикам, работающим в разведочной и глубинной геофизике, так и физикам и инженерам-электронщикам.

## БЛАГОДАРНОСТИ

В течение двух семестров студентка факультета геофизики Горной Школы Колорадо Маурин Претти внимательно читала эту книгу и сделала множество грамматических исправлений. Благодаря ее огромным усилиям я могу представить значительно улучшенную версию этой книги.

Хочу также поблагодарить доктора Л. Табаровского из Вестерн Атлас за чтение данной работы. Благодаря его вниманию к этой книге были исправлены отдельные ошибки и сомнительные выражения.

Большую помощь в подготовке книги мне оказал мой коллега доктор Ричард Хэнсен, который потратил много времени на чтение рукописи, проверяя не только ее научное содержание, но и правильное употребление английского языка. Беседы с ним были чрезвычайно содержательными и приятными, и я особенно хочу подчеркнуть его большой вклад. Я также хотел бы выразить свою признательность доктору Норману Хартхиллу и профессору Михаилу Бродскому за очень полезные обсуждения.

Выражаю всем им свою глубокую признательность за их значительный вклад. Если книга и содержит какие-то неточности, то отвечаю за это только я один.

Благодарю также Дороти Ногс, которая напечатала рукопись.

## СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

- $a$  большая полуось сфероида  
 $b$  малая полуось сфероида  
 $A$  магнитный векторный потенциал, определяемый соотношением  $\mathbf{B} = \text{rot } A$   
 $\mathbf{B}$  индукция магнитного поля  
 $c$  скорость  
 $\mathbf{D}$  вектор диэлектрической проницаемости  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$  или склонение магнитного поля  
 $e$  электрический заряд  
 $e_s$  поверхностный заряд  
 $\mathbf{E}$  вектор напряженности электрического поля (В/м)  
 $E_n$  нормальная к поверхности компонента электрического поля  
 $\mathbf{E}_0$  первичное электрическое поле  
 $E_{\text{ext}}$  сторонняя сила  
 $\mathcal{E}$  электродвижущая сила  
 $\mathcal{E}_c$  контактная электродвижущая сила  
 $\mathbf{F}$  сила притяжения  
 $F_a$  центростремительная сила  
 $g_{m+}, g_{m-}$  конечные точки векторных линий  
 $\mathbf{g}$  гравитационное поле  
 $\mathbf{g}_N$  нормальное гравитационное поле  
 $G_b$  геометрический фактор скважины  
 $G_f$  геометрический фактор вмещающей среды  
 $G$  функция Грина  
 $h_1, h_2, h_3$  метрические коэффициенты  
 $h(q, p)$  гармоническая функция  
 $\mathbf{H}$  вспомогательная функция  
 $\mathbf{j}, \mathbf{i}$  плотность тока  
 $\mathbf{j}_m, \mathbf{i}_m$  объемная и поверхностная плотности молекулярных токов соответственно  
 $I$  ток или наклонение магнитного поля  
 $J_0(x), J_1(x)$  функции Бесселя первого рода аргумента  $x$  порядка 0 или 1 соответственно  
 $I_0, K_0, I_1, K_1$  модифицированные функции Бесселя порядка 0 или 1 первого и второго рода соответственно  
 $K_{12}$  коэффициенты контраста электропроводности  
 $K_f, K_d, K_c$  коэффициенты, описывающие собственный потенциал  
 $L$  путь интегрирования или деполяризационный множитель  
 $L_m$  краевая линия нормальной поверхности  
 $L_{qp}$  расстояние между точками  $q$  и  $p$   
 $dl_1, dl_2, dl_3$  приращения вдоль координатных линий  
 $L_{0p}$  радиус-вектор  
 $dl_m$  элемент векторной линии



$\mathbf{M}$	вектор или момент магнитного диполя
$M_k$	компоненты $\mathbf{M}$
$m$	постоянная разделения переменных или масса
$\mathbf{n}$	единичный вектор
$n$	параметр линии передачи тока
$\mathbf{P}$	вес или вектор поляризации
$p$	точка наблюдения
$P_0, P_1$	функции Лежандра первого рода
$q$	точка
$Q$	теплота
$Q_0, Q_1$	функции Лежандра второго рода
$r, \varphi, z$	цилиндрические координаты
$R, \theta, \varphi$	сферические координаты
$R$	электрическое сопротивление
$R_e$	сопротивление заземления
$S$	поверхность или продольная проводимость
$s$	отношение удельных электропроводностей
$t$	время
$T$	скалярное поле или поперечное сопротивление
$U$	потенциал поля источников (безвихревого)
$u^+, u^-$	подвижность положительных и отрицательных электрических зарядов соответственно
$V$	напряжение (разность потенциалов)
$w^+, w^-$	скорость положительных и отрицательных электрических зарядов соответственно
$W$	энергия
$Z$	вертикальная компонента магнитного поля Земли
$x, y, z$	координаты декартовой системы
$\alpha$	поляризуемость
$\beta$	диэлектрическая восприимчивость
$\gamma$	гравитационная постоянная, удельная электропроводность
$\varepsilon$	диэлектрическая проницаемость
$\varepsilon_0$	диэлектрическая постоянная
$\varepsilon_r$	относительная проницаемость
$\delta$	объемная плотность
$\delta_f, \delta_b$	объемные плотности свободных и связанных зарядов соответственно
$\Sigma$	поверхностная плотность
$\Sigma_f, \Sigma_b$	плотности свободных и связанных поверхностных зарядов соответственно
$\lambda$	линейная плотность
$\Phi$	поток
$\rho$	удельное сопротивление
$\rho_a$	кажущееся сопротивление
$\mu_0$	магнитная постоянная
$\mu$	магнитная проницаемость
$\omega$	телесный угол

## I.1. Скаляры и векторы, системы координат

Скаляр и вектор, положение точки наблюдения

Скалярная и векторная компоненты вектора  $M(p)$

Скалярное и векторное произведения векторов и некоторые их комбинации

Дифференцирование функций, содержащих скалярные и векторные величины

Скалярные и векторные компоненты вектора у поверхности и линии

Ориентированные линии и ориентированные поверхности, система криволинейных координат

I.2. Телесный угол, угол видимости

I.3. Поля

I.4. Скалярное поле и градиент

I.5. Геометрическая модель поля

I.6. Поток, дивергенция, теорема Гаусса

I.7. Напряжение, циркуляция, ротор, теорема Стокса

I.8. Два типа полей и их возбудители, уравнения поля

I.9. Гармонические поля

I.10. Поля источников

I.11. Поля вихрей

### I.1. СКАЛЯРЫ И ВЕКТОРЫ, СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

В данном разделе мы рассмотрим некоторые математические операции над скалярными и векторными функциями, которые часто встречаются в этой книге. Следует, однако, заметить, что в некоторых случаях для более глубокого изучения теории геофизических методов требуется пользоваться таким понятием как тензор.

*Скаляр и вектор, положение точки наблюдения*

В общем случае будем предполагать, что как скаляр  $T$ , так и вектор  $M$  — функции положения точки  $p$  в области  $V$ , т. е. эта точка является аргументом этих функций:

$$T = T(p) \text{ и } M = M(p). \quad (I.1)$$

Значение скаляра в каждой точке  $p$  определяется его абсолютной величиной  $|T|$  и знаком, а значение вектора характеризуется его величиной  $M(p)$  и направлением:

$$M(p) = M(p) i_m(p). \quad (I.2)$$



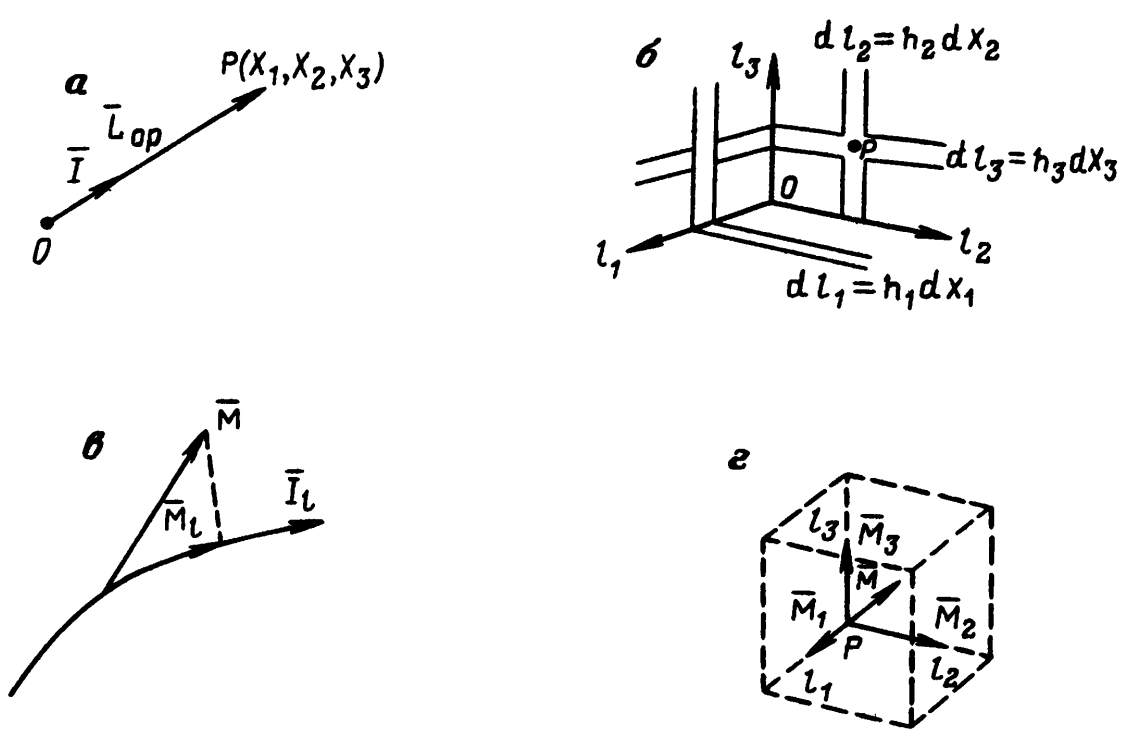


Рис. 1.1. Радиус-вектор (а); приращения координат (б); компонента вектора по направлению (в) и векторные компоненты (г)

Здесь  $M(p)$  — абсолютная величина вектора  $M$ , а  $i_M$  — единичный вектор по направлению вектора  $M$ . По определению,

$$|i_M(p)| = 1. \quad (1.3)$$

Обычно точку  $p$ , в которой рассматривают эти функции, называют точкой наблюдения; ее положение можно определить при помощи радиуса-вектора  $L_{Op}$  или трех координат точки:  $x_1, x_2, x_3$ . Конечно, в обоих случаях требуется определить положение начала (радиуса-вектора или координат)  $O$ . В соответствии с (1.2) радиус-вектор  $L_{Op}$  можно представить в следующем виде:

$$L_{Op} = L_{Op} i. \quad (1.4)$$

Здесь  $L_{Op}$  — расстояние между началом  $O$  и точкой наблюдения  $p$ , а  $i$  — единичный вектор по направлению радиуса-вектора  $L_{Op}$  (рис. 1.1, а).

Таким образом, радиус-вектор или три координаты точки могут служить аргументами функций  $T(p)$  и  $M(p)$ :

$$\begin{aligned} T(L_{Op}) & \text{ или } T(x_1, x_2, x_3) \text{ и} \\ M(L_{Op}) & \text{ или } M(x_1, x_2, x_3). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Будем пользоваться только правыми, в общем случае криволинейными, системами координат, образованными тремя взаимно ортогональными семействами координатных линий  $l_1, l_2, l_3$ , направления которых определяют единичные векторы  $i_1, i_2, i_3$  соответственно (рис. 1.1, б). Положение точки наблюдения определяют ее координаты  $x_1, x_2$  и  $x_3$ , измеряемые или отсчитываемые вдоль соответствующих линий.

## Скалярная и векторная компоненты вектора $\mathbf{M}$

Введем скалярную и векторную компоненты вектора  $\mathbf{M}$  по некоторому направлению  $l$  следующим образом (рис. I.1, в):

$$M_l = M \cos (\mathbf{M}, \mathbf{i}_l) \text{ и } \mathbf{M}_l = M_l \mathbf{i}_l. \quad (\text{I.6})$$

Здесь  $\mathbf{i}_l$  — единичный вектор по направлению  $l$ , а  $(\mathbf{M}, \mathbf{i}_l)$  — угол между векторами  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{i}_l$ .

Скалярная компонента  $M_l$  положительна, если угол  $(\mathbf{M}, \mathbf{i}_l)$  — острый, и отрицательна, когда этот угол тупой. Очень часто вектор определяют при помощи его векторных и скалярных компонент по координатным направлениям  $l_1, l_2$  и  $l_3$ :

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3$$

или (I.7)

$$\mathbf{M} = M_1 \mathbf{i}_1 + M_2 \mathbf{i}_2 + M_3 \mathbf{i}_3,$$

а

$$M_k = M_k \mathbf{i}_k, \quad M_k = M \cos (\mathbf{M}, \mathbf{i}_k) \quad (k = 1, 2, 3). \quad (\text{I.8})$$

Здесь  $(\mathbf{M}, \mathbf{i}_k)$  — угол между вектором  $\mathbf{M}$  и единичным вектором  $\mathbf{i}_k$ , определяющим направление соответствующей координатной линии.

Принимая во внимание ортогональность координатных линий, для абсолютной величины вектора и его направления получаем (рис. I.1, з)

$$M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}, \quad \cos (\mathbf{M}, \mathbf{i}_k) = \frac{M_k}{M} \quad (k = 1, 2, 3). \quad (\text{I.9})$$

Полагая, что  $\mathbf{M}$  — единичный вектор  $\mathbf{i}_l$ , характеризующий направление линии  $l$ , в соответствии с равенствами (I.7), (I.8) получаем

$$\mathbf{i}_l = \mathbf{i}_1 \cos (\mathbf{i}_l, \mathbf{i}_1) + \mathbf{i}_2 \cos (\mathbf{i}_l, \mathbf{i}_2) + \mathbf{i}_3 \cos (\mathbf{i}_l, \mathbf{i}_3). \quad (\text{I.10})$$

Таким образом, вектор  $\mathbf{i}_l$  можно определить при помощи направляющих косинусов  $\cos (\mathbf{i}_l, \mathbf{i}_k)$ .

## Скалярное и векторное произведения векторов и некоторые их комбинации

Скалярное произведение двух векторов

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i}_1 + a_2 \mathbf{i}_2 + a_3 \mathbf{i}_3 \quad \text{и} \quad \mathbf{b} = b_1 \mathbf{i}_1 + b_2 \mathbf{i}_2 + b_3 \mathbf{i}_3$$

определяется равенством

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = ab \cos (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3, \quad (\text{I.11})$$

где  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  — угол между этими векторами.

Таким образом, скалярное произведение векторов — это число (скаляр), равное сумме произведений соответствующих компонент векторов, а его знак определяется углом между этими векторами.



В частности, если векторы — взаимно перпендикулярны, скалярное произведение равно нулю. Полагая, что один из векторов — единичный, например  $\mathbf{b} = \mathbf{i}_l$ , имеем

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{i}_l = a \cos(\mathbf{a}, \mathbf{i}_l) = a_l, \quad (\text{I.12})$$

где  $a_l$  — компонента вектора  $\mathbf{a}$  по направлению  $l$ . Иначе говоря, скалярную компоненту вектора по некоторому направлению можно определить как скалярное произведение вектора и единичного вектора по этому направлению.

Если векторы имеют одинаковое направление, то  $\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 1$  и скалярное произведение векторов сводится к произведению их абсолютных величин (модулей).

Как следует из равенства (I.11), для скалярного произведения единичных векторов в ортогональной системе координат (ортов) имеем

$$\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_3 = \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_3 = 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{i}_3 = 1. \quad (\text{I.13})$$

Перейдем к рассмотрению другой операции над векторами. Векторное произведение  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  — это вектор, перпендикулярный векторам  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , а по абсолютной величине равный площади параллелограмма, построенного на этих векторах:

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad (\text{I.14})$$

и

$$\begin{aligned} \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{i}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{i}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{i}_3, \end{aligned} \quad (\text{I.15})$$

где вертикальными линиями обозначен определитель.

Из (I.15) следует, что

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}. \quad (\text{I.16})$$

Направление векторного произведения  $\mathbf{c}$  определяется из условия, что  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  образуют правую тройку векторов, как это показано на рис. I.2, а.

Согласно равенству (I.14) векторное произведение двух взаимно параллельных векторов равно нулю. При заданных модулях  $|\mathbf{a}|$  и  $|\mathbf{b}|$  абсолютная величина  $|\mathbf{c}|$  — максимальна, когда векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  взаимно перпендикулярны. В частности, для единичных векторов в ортогональной системе координат имеем

$$\mathbf{i}_3 = \mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_2, \quad \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_3 \times \mathbf{i}_1, \quad \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_3 \quad (\text{I.17})$$

и

$$\mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_3 \times \mathbf{i}_3 = 0.$$

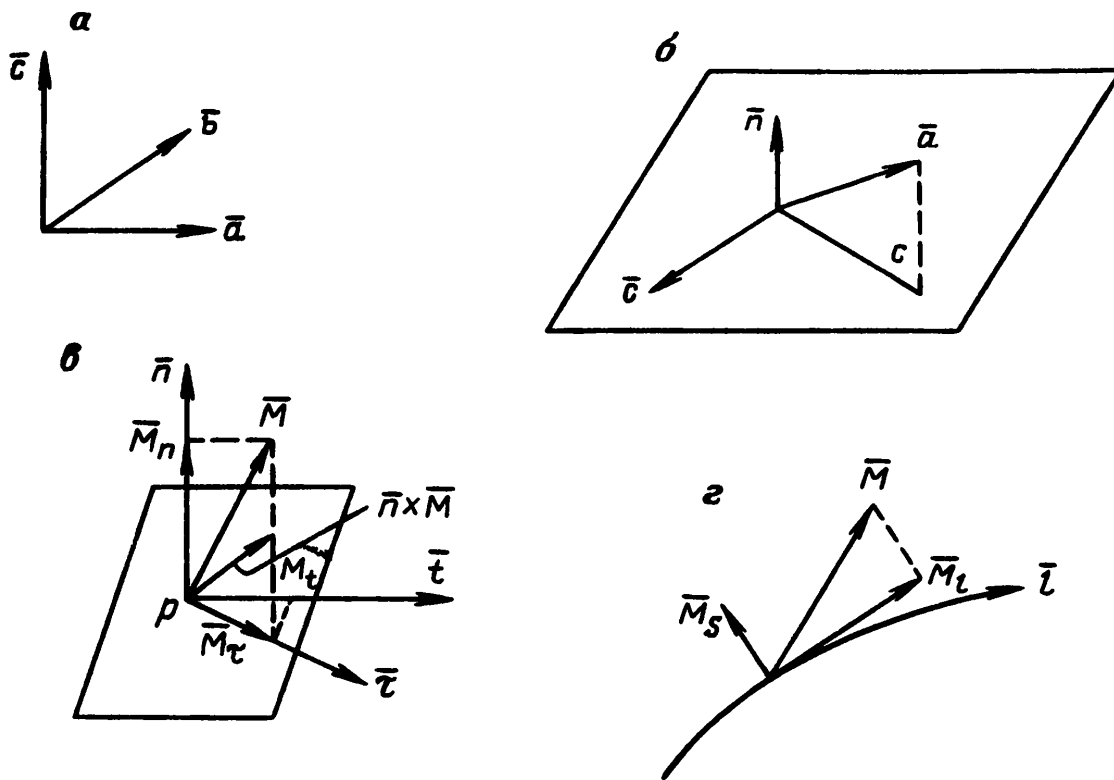


Рис. 1.2. Векторное произведение (а); векторное произведение вектора на единичную нормаль  $\bar{n}$  (б) и тангенциальные и нормальная компоненты вектора:  $\epsilon$  — у поверхности,  $z$  — у линии

Пусть  $\mathbf{b} = \mathbf{n}$  — единичный вектор, тогда

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{n} = a \sin(\mathbf{a}, \mathbf{n}) \mathbf{c}_0. \quad (\text{I.18})$$

Здесь  $\mathbf{c}_0$  — единичный вектор, лежащий в плоскости, перпендикулярной вектору  $\mathbf{n}$ .

Таким образом, векторное произведение произвольного вектора  $\mathbf{a}$  и единичного вектора  $\mathbf{n}$  дает другой вектор  $\mathbf{c}$ , лежащий в плоскости, перпендикулярной к  $\mathbf{n}$ , абсолютная величина  $|\mathbf{c}|$  которого равна длине проекции вектора  $\mathbf{a}$  на эту плоскость (рис. 1.2, б).

Выше были рассмотрены два наиболее часто употребляемых действия над векторами. Смешанное или векторно-скалярное произведение трех векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  — скаляр, абсолютная величина которого равна объему параллелепипеда, построенного на этих векторах. Для смешанного произведения имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (\text{I.19})$$

и

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = -\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{b}). \quad (\text{I.20})$$

Двойное векторное произведение векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

— вектор, который можно представить как разность двух векторов:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}. \quad (\text{I.21})$$

Это равенство очень полезно для упрощения алгебраических преобразований, и оно часто применяется в этой книге. Из определения векторного произведения следует, что

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a}. \quad (\text{I.22})$$

### *Дифференцирование комбинаций скалярных и векторных функций*

В тех случаях, когда векторные функции непрерывны, применимы те же правила дифференцирования, которые нам известны для скалярных функций. Например,

$$\frac{d}{dx} (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dx} + \frac{d\mathbf{b}}{dx}, \quad \frac{d}{dx} \varphi \mathbf{a} = \varphi \frac{d\mathbf{a}}{dx} + \mathbf{a} \frac{d\varphi}{dx}, \quad (\text{I.23})$$

$$\frac{d}{dx} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dx} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{dx}, \quad \frac{d}{dx} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dx} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{dx}.$$

Здесь  $\varphi$  — скалярная функция, а  $x$  — аргумент функций, который, в частности, может быть координатой точки наблюдения.

Подобные выражения могут быть записаны для более сложных комбинаций векторных и скалярных функций. Сделаем еще одно замечание о производной вектора. В общем случае от координат точки наблюдения зависят как абсолютная величина, так и направление вектора. Тогда, в соответствии с равенством (I.2), производная вектора  $\mathbf{M}(p)$  по какому-либо аргументу  $x$

$$\frac{d\mathbf{M}}{dx} = \frac{dM}{dx} \mathbf{i}_M + M \frac{d\mathbf{i}_M}{dx}. \quad (\text{I.24})$$

В частности, для производной векторной компоненты вектора по координатному направлению имеем

$$\frac{dM_k}{dx} = \frac{dM_k}{dx} \mathbf{i}_k + M_k \frac{d\mathbf{i}_k}{dx}. \quad (\text{I.25})$$

Здесь  $\mathbf{i}_k$  — единичный вектор по направлению линии  $l_k$ , а  $x$  — одна из координат точки наблюдения.

В криволинейной системе координат направление единичного вектора в общем случае зависит от положения точки наблюдения. При этом второе слагаемое в правой части равенства (I.25) не равно нулю.

### *Скалярные и векторные компоненты вектора у поверхности и линии*

При изучении поведения векторных функций вблизи некоторой поверхности  $S$  часто бывает полезно представить их в виде сумм нормальных и тангенциальных компонент (рис. I.2, в):

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_n + \mathbf{M}_\tau = M_n \mathbf{n} + M_\tau \boldsymbol{\tau} \quad (I.26)$$

и

$$M_n = \mathbf{M} \cdot \mathbf{n} = M \cos (\mathbf{M}, \mathbf{n}),$$

$$M_\tau = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\tau} = M \cos (\mathbf{M}, \boldsymbol{\tau}).$$

Здесь  $\mathbf{n}$  — нормаль к поверхности ( $|\mathbf{n}| = 1$ ), а  $\boldsymbol{\tau}$  — единичный вектор по направлению тангенциальной компоненты  $M_\tau$ .

Как следует из равенства (I.18), вектор  $\mathbf{n} \times \mathbf{M}$  лежит в плоскости, касательной к поверхности  $S$ , а его абсолютная величина

$$M_\tau = |\mathbf{n} \times \mathbf{M}|.$$

Составляя векторное произведение этого вектора и вектора  $\mathbf{n}$ , получаем другое представление для тангенциальной компоненты — через единичную нормаль  $\mathbf{n}$  и вектор  $\mathbf{M}$ :

$$\mathbf{M}_\tau = (\mathbf{n} \times \mathbf{M}) \times \mathbf{n}. \quad (I.28)$$

Очевидно, что угол  $\alpha$  между вектором  $\mathbf{M}$  и нормалью  $\mathbf{n}$  удовлетворяет равенству

$$\operatorname{tg} \alpha = M_\tau / M_n. \quad (I.29)$$

Наконец, для компоненты по произвольно взятому тангенциальному направлению  $t$  (рис. I.2, в) получим

$$M_t = M_t t \quad \text{и} \quad M_t = t \cdot \mathbf{M} = M \cos (\mathbf{M}, t) = M_\tau \cdot t. \quad (I.30)$$

Здесь  $t$  — единичный вектор, лежащий в плоскости, касательной к поверхности  $S$  в точке  $p$ .

Поведение вектора  $\mathbf{M}$  вблизи некоторой линии  $l$  также может быть описано при помощи компонент, нормальной и тангенциальной по отношению к этой линии:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_l + \mathbf{M}_s. \quad (I.31)$$

Здесь  $M_l$  — тангенциальная компонента по (направлению) линии  $l$  в точке  $p$ , а  $M_s$  лежит в плоскости, нормальной к этой линии (рис. I.2, г). Для этих компонент имеем

$$M_l = \mathbf{M} \cdot \mathbf{i}_l = M \cos (\mathbf{M}, \mathbf{i}_l), \quad \mathbf{M} = (\mathbf{M} \cdot \mathbf{i}_l) \mathbf{i}_l, \quad (I.32)$$

$$M_s = M \sin (\mathbf{M}, \mathbf{i}_l), \quad \mathbf{M}_s = (\mathbf{i}_l \times \mathbf{M}) \times \mathbf{i}_l.$$

Здесь  $\mathbf{i}_l$  — единичный вектор по направлению  $l$ , а вектор  $\mathbf{i}_l \times \mathbf{M}$  лежит в плоскости, нормальной к  $l$ .

*Ориентированные линии и ориентированные поверхности, система криволинейных координат*

Вначале введем понятие об элементе пути (ориентированном элементарном отрезке)  $d\mathbf{l}$ :

$$d\mathbf{l} = dl \mathbf{i}_l = d\mathbf{l}_1 + d\mathbf{l}_2 + d\mathbf{l}_3 = dl_1 \mathbf{i}_1 + dl_2 \mathbf{i}_2 + dl_3 \mathbf{i}_3. \quad (I.33)$$



Здесь  $dl$  — абсолютная величина вектора  $d\mathbf{l}$ , равная длине этого отрезка, а  $dl_k$  и  $d\mathbf{l}_k = dl_k \mathbf{i}_k$  — скалярная и векторная компоненты вектора  $d\mathbf{l}$  по координатному направлению.

Соответственно, ориентация линии  $l$  в пространстве определяется выбором ее (положительного) направления, т. е. вектором  $d\mathbf{l}$ .

Ориентированный элемент поверхности (ориентированная площадка)  $d\mathbf{S}$  определяется следующим образом:

$$d\mathbf{S} = dS \mathbf{n} = d\mathbf{S}_1 + d\mathbf{S}_2 + d\mathbf{S}_3 = dS_1 \mathbf{i}_1 + dS_2 \mathbf{i}_2 + dS_3 \mathbf{i}_3. \quad (I.34)$$

Здесь  $dS$  — абсолютная величина  $d\mathbf{S}$ , равная площади площадки;  $\mathbf{n}$  — единичная нормаль к площадке;

$$dS_k = dS \cos(\mathbf{dS}, \mathbf{i}_k), \quad d\mathbf{S}_k = dS_k \mathbf{i}_k \quad (I.35)$$

— скалярная и векторная компоненты, причем  $|dS_k|$  — проекция элемента поверхности  $dS$  на плоскость, нормальную к координатной линии  $l_k$ .

Направление нормали  $\mathbf{n}$  к поверхности  $S$  определяет ориентацию поверхности. Будем различать лицевую и оборотную стороны поверхности и предполагать, что нормаль  $\mathbf{n}$  направлена от оборотной стороны к лицевой.

Характеризуя взаимную ориентацию векторов (направлений), мы будем в этой книге пользоваться только правовинтовой (правой) системой, которую можно представить следующим образом. Пусть точка перемещается по некоторой линии  $l$  в положительном направлении  $d\mathbf{l}$  (рис. I.3, а). Этот вектор образует правовинтовую систему с направлением некоторого вектора  $\mathbf{s}$ , если наблюдатель, смотрящий по направлению  $\mathbf{s}$ , может видеть перемещение точки по ходу часовой стрелки. Если, например, мы будем рассматривать поверхность  $S$  с нормалью  $\mathbf{n}$ , ограниченную контуром  $l$  (рис. I.3, б), то в соответствии с принятым условием направление  $d\mathbf{l}$  будем выбирать таким, чтобы оно образовывало правовинтовую систему с направлением  $\mathbf{n}$ . Три вектора  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  образуют правую тройку, если их направления подчиняются правилу правой руки, как это показано на рис. I.2, а. В частности, единичные векторы в правой ортогональной системе координат связаны между собой равенствами (I.17).

Итак, мы условились пользоваться правыми тройками векторов (направлений). Опишем кратко основные свойства криволинейных ортогональных систем координат. Как уже было отмечено, через произвольную точку проходят три взаимно ортогональные координатные линии  $l_1$ ,  $l_2$  и  $l_3$ , образующие в пространстве три

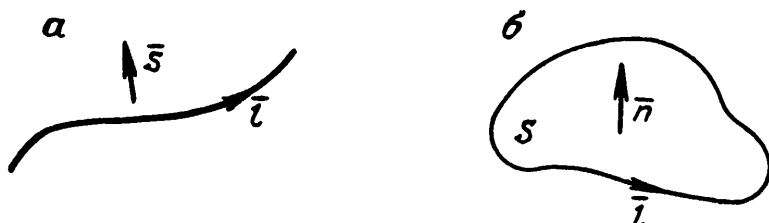


Рис. I.3. Взаимная ориентация линий и поверхностей

семейства линий. Вдоль каждой линии меняется лишь одна координата, а две другие — остаются постоянными. Например, координаты  $x_2$  и  $x_3$  точки не меняются при ее перемещении по линии  $l_1$ . Вместе с тем положение точки может быть определено при помощи трех семейств координатных поверхностей  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$  — таких, что координатная линия  $l_k$  ортогональна соответствующей поверхности  $S_k$  в каждой точке. На каждой координатной поверхности соответствующая координата имеет постоянное значение. Как три семейства координатных поверхностей, так и три семейства координатных линий взаимно ортогональны. Как видно на рис. I.1, б, для ориентированных координатных площадок, ограниченных элементами координатных линий,

$$dS_1 = dl_2 dl_3 i_1, \quad dS_2 = dl_1 dl_3 i_2, \quad dS_3 = dl_1 dl_2 i_3. \quad (I.36)$$

Соответственно, элементарный объем, ограниченный координатными площадками,

$$dV = dl_1 dl_2 dl_3. \quad (I.37)$$

Определим метрический коэффициент (коэффициент Ламэ)  $h_k$  как отношение длины элементарного отрезка координатной линии  $dl_k$  к приращению соответствующей координаты  $dx_k$ , т. е.

$$dl_1 = h_1 dx_1, \quad dl_2 = h_2 dx_2, \quad dl_3 = h_3 dx_3. \quad (I.38)$$

В общем случае коэффициенты  $h_1$ ,  $h_2$  и  $h_3$  в системе координат зависят от координат точки наблюдения. Обычно при рассмотрении конфигурации координатных линий не сложно получить аналитические выражения для коэффициентов Ламэ.

Рассмотрим три примера, соответствующих простейшим системам координат.

**Декартова система.**  $x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z.$

Все координатные линии — прямые, а координатные поверхности — плоскости:

$$\begin{aligned} h_1 = h_2 = h_3 = 1, \\ dl_1 = dx, \quad dl_2 = dy, \quad dl_3 = dz, \\ dS_1 = dy dz, \quad dS_2 = dx dz, \quad dS_3 = dx dy, \\ dV = dx dy dz. \end{aligned} \quad (I.39)$$

**Цилиндрическая система.**  $x_1 = r, \quad x_2 = \varphi, \quad x_3 = z.$

Координатные линии  $l_1$  и  $l_3$  — прямые, а  $l_2$  — окружность. Координатная поверхность  $r = \text{const}$  — круговая цилиндрическая,  $\varphi = \text{const}$  — полуплоскость, а  $z = \text{const}$  — плоскость:

$$\begin{aligned} h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = 1, \\ dl_1 = dr, \quad dl_2 = r d\varphi, \quad dl_3 = dz, \end{aligned}$$

$$dS_1 = r d\varphi dz, \quad dS_2 = dr dz, \quad dS_3 = r dr d\varphi, \quad (I.40)$$

$$dV = r dr d\varphi dz.$$

**Сферическая система.**  $x_1 = R, \quad x_2 = \theta, \quad x_3 = \varphi.$

Координатная линия  $l_1$  — прямая (луч), а линии  $l_2$  и  $l_3$  — полуокружность и окружность соответственно. Координатная поверхность  $R = \text{const}$  — сфера,  $\theta = \text{const}$  — конус вращения, а  $\varphi = \text{const}$  — полуплоскость:

$$\begin{aligned} h_1 &= 1, & h_2 &= R, & h_3 &= R \sin \theta, \\ dl_1 &= dR, & dl_2 &= R d\theta, & dl_3 &= R \sin \theta d\varphi, \\ dS_1 &= R^2 \sin \theta d\theta d\varphi, & dS_2 &= R \sin \theta dR d\varphi, & & (I.41) \\ dS_3 &= R dR d\theta, & dV &= R^2 \sin \theta d\theta d\varphi. \end{aligned}$$

## 1.2. ТЕЛЕСНЫЙ УГОЛ, УГОЛ ВИДИМОСТИ

В этом разделе рассмотрим такие понятия как телесный угол и угол видимости. Представления об угле видимости весьма полезны при выводе уравнения поля, а также, в ряде случаев, позволяют упростить расчет поля. На рис. I.4 показаны точка  $p$  и замкнутый контур  $\mathcal{Q}$  произвольной формы. Проводя лучи с началом в точке  $p$  через все точки контура  $\mathcal{Q}$ , получаем конус с вершиной в точке  $p$  и конической поверхностью  $S_c$ . Примеры конусов различной формы показаны на рис. I.4.

Все возможные линии, лежащие на конической поверхности, можно разделить на две группы: «направляющие» и «ненаправляющие» линии. Эти линии различаются тем, что каждый луч, исходящий из вершины конуса, проходит по крайней мере через одну точку направляющей линии, но некоторые из этих лучей могут не проходить через точки замкнутой ненаправляющей линии.

Каждый конус делит пространство на две части — внутреннюю

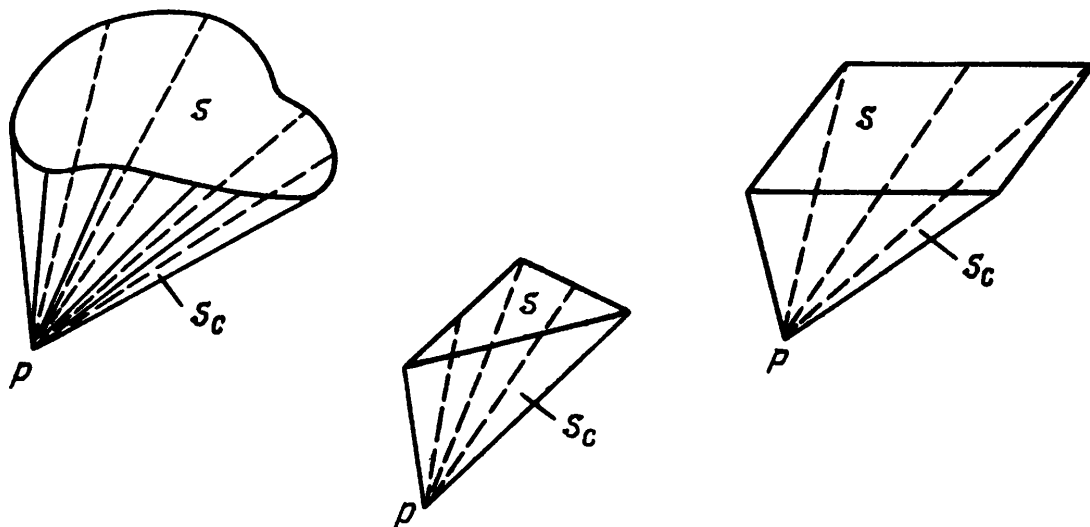


Рис. I.4. Примеры телесных углов

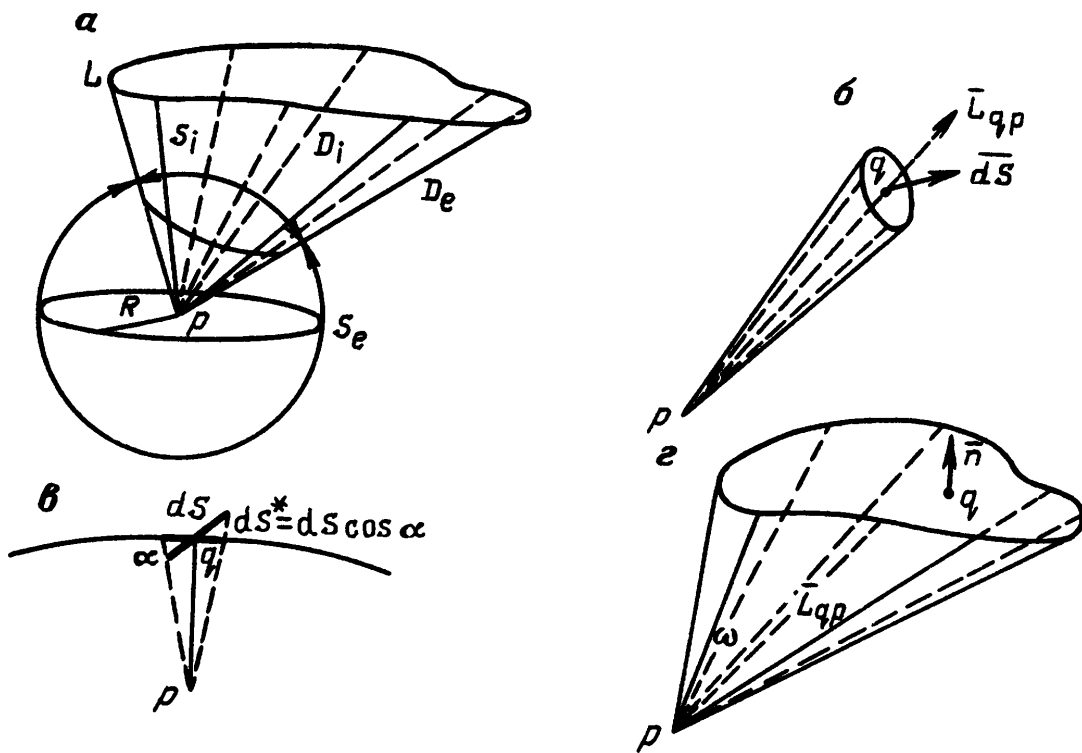


Рис. 1.5. К определению телесного угла и угла видимости

$D_i$  и внешнюю  $D_e$  (рис. 1.5, *a*). Чтобы охарактеризовать конус, оценим соотношение этих частей. Для этого можно применить разные подходы. Естественным было бы, например, рассмотреть объемы  $D_i$  и  $D_e$ , но они — бесконечно велики, поэтому применим другой подход. Начнем с того, что проведем сферическую поверхность радиусом  $R$  и с центром в вершине конуса (см. рис. 1.5, *a*). Конус делит эту поверхность на две части:  $S_i$  и  $S_e$ , которые соответствуют областям пространства  $D_i$  и  $D_e$ . Очевидно, что в принципе при помощи поверхности  $S_i$  можно охарактеризовать внутреннюю область  $D_i$ , ограниченную поверхностью конуса. Однако величина  $S_i$  не характеризует область  $D_i$  однозначно, так как площадь  $S_i$  зависит также от произвольно выбираемого радиуса  $R$ ; площадь сферической поверхности  $S$  и ее частей  $S_i$  и  $S_e$  пропорциональна квадрату радиуса. Поэтому для характеристики внутренней части конуса  $D_i$  пользуются отношением

$$\omega(p) = S_i / R^2. \quad (1.42)$$

Функция  $\omega(p)$  называется телесным углом и является характеристикой конуса — определяет ограниченную поверхностью конуса часть пространства. Представим себе, что точка наблюдения расположена в вершине  $p$ , а поверхность конуса не прозрачна. Тогда будет естественно трактовать  $\omega(p)$  как угол видимости поверхности  $S_i$ , т. е. угол, под которым  $S_i$  видна из точки  $p$ . Этот подход будет рассмотрен более детально, что позволит пояснить, почему аргументом величины  $\omega(p)$  является положение вершины конуса.

Проиллюстрируем равенство (1.42) несколькими примерами.

1.  $S_i = 0$ , т. е. коническая поверхность вырождается в луч. Тогда  $D_i = 0$  и, соответственно,  $\omega(p) = 0$ .



2. В другом предельном случае, когда внутренняя часть  $D_i$  занимает все пространство,

$$S_i = 4 \pi R^2$$

и поэтому телесный угол, соответствующий всему пространству,

$$\omega(p) = 4\pi.$$

Эти два примера показывают, что телесный угол меняется в следующих пределах:

$$0 \leq \omega(p) \leq 4\pi.$$

3. Если коническая поверхность превращается в плоскость, то  $S_i = 2 \pi R^2$  и, соответственно,

$$\omega(p) = 2\pi.$$

4. Если коническая поверхность ограничивает четверть пространства, то  $S_i = \pi R^2$ , а телесный угол

$$\omega(p) = \pi.$$

Итак, мы определили понятие телесный угол на основе двух разных, но близких между собой подходов, а именно:

1) телесный угол — это мера внутренней части пространства, ограниченной конусом (конической поверхностью);

2) телесный угол — это угол, под которым из вершины конуса виден участок сферической поверхности, отсекаемый поверхностью конуса.

Последнее для нас важнее, поэтому рассмотрим такой подход более детально. На рис. I.5, б показаны элементарная площадка  $dS$  с центром в точке  $q$  и точка наблюдения  $p$ . Проведя из точки  $p$  лучи через все точки контура, ограничивающего площадку  $dS$ , получаем конус с телесным углом  $d\omega(p)$  при вершине. Чтобы получить выражение, определяющее этот угол, возьмем проекцию площадки  $dS$  на сферическую поверхность с радиусом  $L_{pq}$  и с центром в точке  $p$ . Здесь  $L_{pq}$  — расстояние от точки  $p$  до центра элементарной площадки  $dS$ . Как видно на рис. I.5, в, проекция  $dS^*$  определяется выражением

$$dS^* = dS |\cos(\mathbf{L}_{pq}, \mathbf{n})|.$$

Здесь  $\mathbf{n}$  — единичная нормаль к площадке  $dS$ .

Определим угол видимости площадки  $dS$  из точки  $p$  следующим образом:

$$d\omega(p) = \frac{dS \cos(\mathbf{dS}, \mathbf{L}_{pq})}{L_{pq}^2}$$

или

$$d\omega(p) = \mathbf{dS} \cdot \mathbf{L}_{pq} / L_{pq}^3, \tag{I.43}$$

где  $\mathbf{dS} = dS \mathbf{n}$ .

В отличие от (I.42), угол видимости  $d\omega(p)$  определяется через элемент  $dS$  поверхности, которая в общем случае не является сферической, а сам этот угол может иметь как положительное, так и отрицательное значение. Как следует из выражения (I.43), угол видимости — положительный в том случае, когда из точки наблюдения  $p$  видна обратная сторона площадки  $dS$ , и отрицательный — в противоположном случае. В том частном случае, когда площадка  $dS$  и точка  $p$  лежат на одной плоскости, конус вырождается в сектор и угол видимости равен нулю.

Пользуясь геометрической терминологией, можем сказать, что в соответствии с (I.43) площадка  $dS$  «стягивает» угол  $d\omega$ . Очевидно, что абсолютные величины углов видимости всех площадок  $dS$ , контурами которых являются направляющие линии, лежащие на одной конической поверхности с вершиной в точке  $p$ , одинаковы.

Теперь обобщим введенное выше понятие для случая произвольной поверхности  $S$  (рис. I.5,  $z$ ). Мысленно разделяя эту поверхность на множество элементарных площадок и выполняя суммирование, получаем для угла видимости поверхности  $S$  из точки  $p$  следующее выражение:

$$\omega(p) = \int_S \frac{dS \cdot L_{pq}}{L_{pq}^3}. \quad (I.44)$$

Очевидно, что соответствующий конус образован лучами, проведенными из точки  $p$  через все точки линии, ограничивающей поверхность  $S$ . Это означает, что угол видимости любой поверхности, опирающейся на конус и ограниченной некоторой заданной линией, будет одинаков по абсолютной величине. Что же касается знака скаляра  $\omega(p)$ , то он зависит от расположения вершины  $p$  относительно лицевой и обратной сторон поверхности  $S$ . Иными словами, при заданном положении контура, ограничивающего поверхность  $S$ , абсолютная величина угла видимости любой поверхности  $S$  будет одинакова. Полагая, что нормаль  $n$  к поверхности  $S$ , ограниченной контуром  $\mathcal{L}$ , и направление обхода по линии  $\mathcal{L}$  образуют правовинтовую систему, можем сказать, что как абсолютная величина, так и знак угла видимости поверхности  $S$  определяются положением контура  $\mathcal{L}$ . Поэтому угол видимости поверхностей  $S$  из точки  $p$  одинаков для всех поверхностей, ограниченных общей (ориентируемой) линией. Отметим также, что углы видимости поверхностей, ограниченных разными контурами, будут одинаковы, если эти контуры лежат на одной и той же конической поверхности с вершиной в точке  $p$ .

Пользуясь определением угла видимости (I.44), можем найти значение этого угла в ряде существенных случаев.

1. Пусть  $S$  — часть сферической поверхности с центром в точке  $p$  и с радиусом  $L_{pq}$ . Тогда

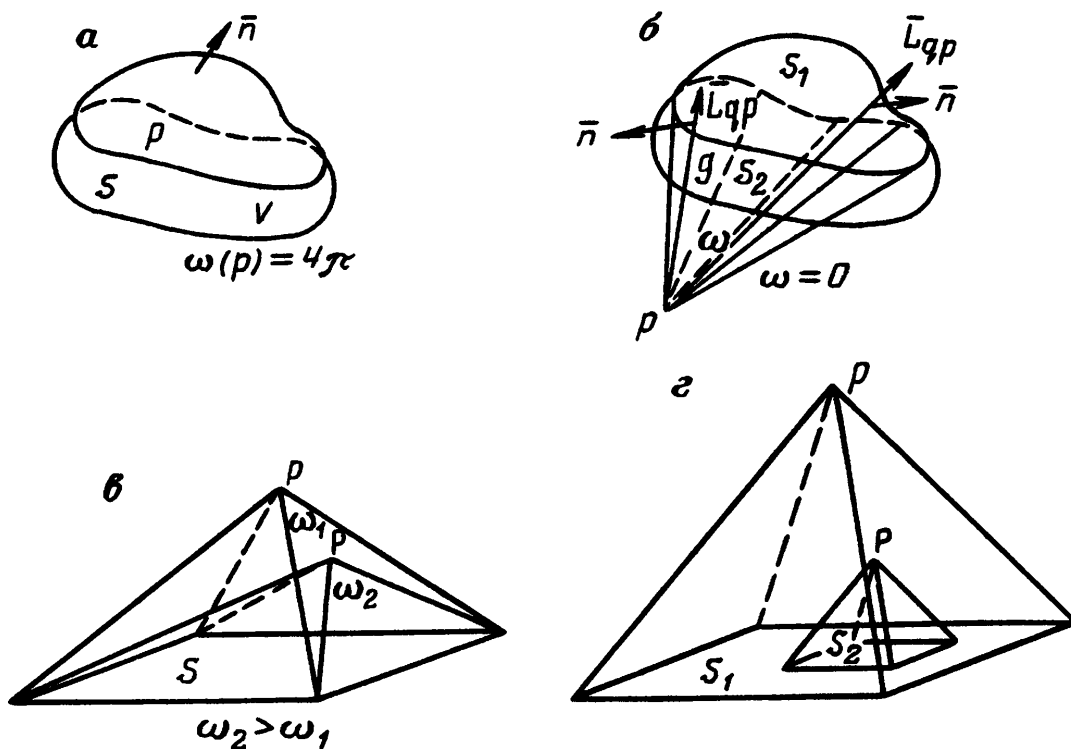


Рис. 1.6. Примеры углов видимости

$$d\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}_{pq} = dS L_{pq}$$

и, так как  $L_{pq} = \text{const}$ ,

$$\omega(p) = \frac{1}{L_{pq}^2} \int_S dS = \frac{S}{L_{pq}^2}.$$

2. Пусть  $S$  — произвольная замкнутая поверхность, а точка  $p$  находится в области  $V$ , ограниченной этой поверхностью (рис. 1.6, а). Полагаем, что нормаль  $\mathbf{n}$  к поверхности  $S$  направлена наружу — из области  $V$ . Так как сферической поверхности с центром в точке  $p$  соответствует телесный угол, равный  $4\pi$ , можем утверждать, что угол видимости любой замкнутой поверхности  $S$  из точки  $p$ , расположенной в области  $V$ , равен  $4\pi$  (рис. 1.6, а). Если нормаль  $\mathbf{n}$  имеет противоположное направление, то угол видимости равен  $-4\pi$ .

3. Пусть точка  $p$  находится снаружи по отношению к произвольной замкнутой поверхности  $S$  — вне ограниченной  $S$  области. Проводя из точки  $p$  лучи, касательные к поверхности  $S$ , получаем конус с направляющей  $\mathcal{L}$ , которая делит поверхность  $S$  на две части:  $S_1$  и  $S_2$  (рис. 1.6, б). Во всех точках поверхности  $S_1$  функция  $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{L}_{pq})$  положительна, а в точках поверхности  $S_2$  эта функция — отрицательна. Принимая во внимание, что обе эти поверхности ограничены одной и той же линией  $\mathcal{L}$ , можем сделать вывод, что углы видимости этих поверхностей из точки  $p$  имеют противоположные знаки, но одинаковы по абсолютной величине. Поэтому угол видимости замкнутой поверхности из любой точки, расположенной вне области  $V$ , равен нулю. Это очень важное заключение, на которое часто опираются в теории полей. Таким образом, на основе последних двух примеров можем записать:

$$\omega(p) = \begin{cases} 4\pi, & \text{если } p \text{ — внутри области } V, \\ 0, & \text{если } p \text{ — вне области } V. \end{cases}$$

4. Определим угол видимости неограниченной плоскости  $S$ . Так как в этом случае коническая поверхность превращается в плоскость, параллельную  $S$ , угол видимости может быть равен или  $2\pi$  или  $-2\pi$ . Если, например, ось  $z$  направлена по нормали к  $S$ , а начало отсчета  $O$  координаты  $z$  лежит на плоскости  $z = 0$ , то

$$\omega(p) = \begin{cases} 2\pi, & \text{если } z < 0, \\ -2\pi, & \text{если } z > 0. \end{cases} \quad (I.45)$$

Существенно, что в каждом из полупространств ( $z < 0$  и  $z > 0$ ) угол видимости не зависит от положения точки  $p$ .

5. Рассмотрим, как меняется угол видимости ограниченного участка  $S$  плоскости (принадлежащего плоскости  $z = 0$ ) из точки  $p$ , расположенной на оси  $z$ , пересекающей  $S$  (рис. I.6, в).

На большом удалении точки  $p$  от участка  $S$  по сравнению с размерами этого участка расстояния от точки  $p$  до всех точек  $q$  участка  $S$  практически одинаковы, что позволяет существенно упростить выражение (I.44):

$$\omega(p) \approx \frac{1}{L_{pq_0}^3} \int_S L_{pq_0} \cdot dS = \frac{L_{pq_0} \cdot kS}{L_{pq_0}^3} = -\frac{z}{|z|} \frac{S}{z^2}, \quad (I.46)$$

где  $k$  — единичный вектор по оси  $z$ , а  $q_0$  — любая точка участка  $S$ . Таким образом, на большом удалении точки  $p$  от участка  $S$  величина  $\omega(p)$  определяется выражением, аналогичным (I.43) для угла видимости элементарной площадки, и обратно пропорциональна квадрату расстояния  $L_{pq_0}$ .

По мере приближения точки  $p$  к участку  $S$  и уменьшения расстояния  $L_{pq_0}$  абсолютная величина угла видимости возрастает, а вблизи поверхности  $S$  стремится либо к  $2\pi$ , либо к  $-2\pi$ . Действительно, когда точка  $p$  неограниченно приближается к поверхности  $S$ , коническая поверхность превращается в плоскость и, соответственно,

$$\omega(p) \rightarrow \pm 2\pi, \quad \text{если } p \rightarrow q.$$

Как видно на рис. I.6, г, при малых размерах поверхности  $S$  угол видимости последней может практически достигать этих предельных значений лишь при расположении точки  $p$  непосредственно у поверхности  $S$ .

Сравнение с предыдущим примером показывает, что предельные значения углов видимости поверхности  $S$  из точек, расположенных у этой поверхности, совпадают со значениями углов видимости неограниченной плоскости.

До этого мы рассматривали поведение угла видимости по-



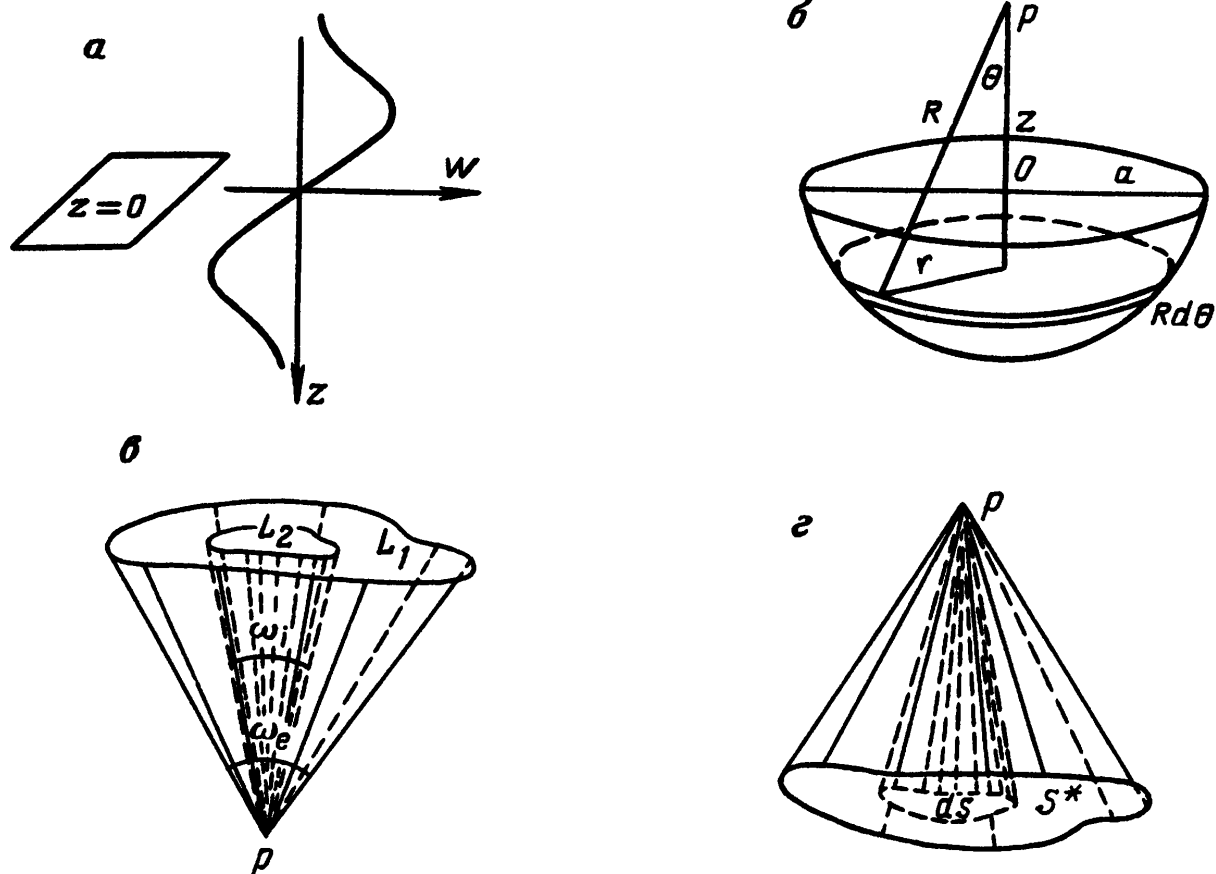


Рис. 1.7. Изменение угла видимости

верхности  $S$  из точки  $p$ , перемещающейся по такой линии, которая пересекает поверхность  $S$ . Если линия, по которой движется точка наблюдения (профиль), не пересекает поверхность  $S$ , то угол видимости будет меняться иначе (рис. 1.7, *a*). При  $z < 0$  по мере приближения точки  $p$  к плоскости  $z = 0$  угол видимости участка  $S$  этой плоскости сначала возрастает, затем на некотором расстоянии от этой плоскости достигает максимального значения и далее убывает до нуля. Во всех точках плоскости  $z = 0$ , расположенных вне участка  $S$ , угол видимости этого участка равен нулю. Очевидно также, что угол видимости — нечетная функция аргумента  $z$ :

$$\omega(z) = -\omega(-z).$$

б. Рассмотрим частный случай, когда участок  $S$  плоскости — круг с радиусом  $a$ , точка наблюдения лежит на оси  $z$ , совпадающей с осью круга, и с началом отсчета координаты  $z$  в центре круга (рис. 1.7, *б*). Очевидно, что угол видимости круга  $\omega(z)$  легко определить, получив выражение для площади ограниченного контуром круга, участка сферической поверхности, радиус которой равен расстоянию от точки  $p$  до этого контура. Чтобы решить эту задачу, найдем площадь  $dS$  показанного на рис. 1.7, *б* элементарного кольца с радиусом  $r$  и с бесконечно малой шириной  $R d\theta$ . Здесь  $R$  и  $\theta$  — сферические координаты, а

$$r = R \sin \theta.$$

Как видно на рисунке,

$$dS = 2\pi rRd\theta$$

или

$$dS = 2\pi R^2 \sin \theta d\theta .$$

Угол  $\theta$  меняется в пределах от нуля до  $\alpha$ , где

$$\alpha = \arcsin \frac{a}{R} .$$

Поэтому, выполняя интегрирование, получаем

$$S = 2\pi R^2 \int_0^{\alpha} \sin \theta d\theta = 2\pi R^2 (1 - \cos \alpha) . \quad (I.47)$$

Соответственно, угол видимости круга с радиусом  $a$  из точки на оси  $z$

$$\omega(z) = 2\pi (1 - \cos \alpha) = 2\pi \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right) . \quad (I.48)$$

В этой книге будем часто пользоваться равенством (I.48).

7. Пусть произвольная поверхность  $S$  ограничена двумя контурами —  $L_1$  и  $L_2$  (рис. I.7, в). В этом случае имеем две конические поверхности:  $S_i$  и  $S_e$ . Угол видимости поверхности  $S$  можем представить как разность двух углов видимости, соответствующих этим коническим поверхностям:

$$\omega(p) = \omega_e - \omega_i . \quad (I.49)$$

8. Рассмотрим теперь, как меняется угол видимости произвольной поверхности  $S$  из точки  $p$ , когда эта точка, перемещаясь по линии  $l$ , пересекает поверхность  $S$  в точке  $a$ . Для этого представим поверхность  $S$  как совокупность элементарной площадки  $dS$  с центром в точке  $a$  и остальной части  $S^*$  поверхности  $S$ :

$$S = dS + S^* . \quad (I.50)$$

Так как площадка  $dS$  бесконечно малая, можем рассматривать ее как элемент плоскости.

Соответственно, угол видимости  $\omega$  представим в виде суммы:

$$\omega(p) = \omega_1(p) + \omega^*(p) , \quad (I.51)$$

где  $\omega_1$  и  $\omega^*$  — углы видимости площадки  $dS$  и поверхности  $S^*$  соответственно.

Как было показано выше, угол видимости  $\omega_1$  — функция, разрывная в точке  $a$ :

$$\omega_1^+(p) = -2\pi, \quad \omega_1^-(p) = 2\pi, \quad \text{если } p \rightarrow a .$$

Здесь  $\omega_1^+$  и  $\omega_1^-$  — значения угла видимости  $\omega_1$  на лицевой и обо-

ротной сторонах площадки  $dS$  соответственно. В отличие от  $\omega_1$  функция  $\omega^*(p)$  непрерывна в точке  $a$ .

Поэтому для угла видимости всей поверхности  $S$  из точки  $p$ , расположенной на бесконечно малом расстоянии от точки  $a$  поверхности  $S$ , имеем

$$\omega^+(p) = -2\pi + \omega^*(a) \quad (I.52)$$

$$\text{и } \omega^-(p) = 2\pi + \omega^*(a), \text{ когда } p \rightarrow a.$$

Следовательно, разность значений угла видимости поверхности  $S$  из точек  $p$ , расположенных по разные стороны этой поверхности на бесконечно малых расстояниях от ее точки  $a$ ,

$$\omega^+(p) - \omega^-(p) = -4\pi \text{ при } p \rightarrow a. \quad (I.53)$$

Аналогичное соотношение было получено выше для поверхности  $S$  в виде участка плоскости, но в соответствии с (I.53) оно справедливо для любой поверхности  $S$ . Отметим, что если в окрестности точки  $a$  в поверхности  $S$  имеется отверстие («окошко»), то  $S = S^*$  и угол видимости поверхности  $S$  — функция, непрерывная в точке  $a$ .

Рассмотрим теперь, как можно определить угол видимости произвольной поверхности из точки наблюдения  $p$ . Очевидно, что абсолютные величины углов видимости из точки  $p$  всех поверхностей, ограниченных одним и тем же конусом с вершиной в этой точке, определяются одним телесным углом. С другой стороны, как следует из выражения (I.42), телесный угол численно равен площади участка  $S_i$  сферической поверхности единичного радиуса:

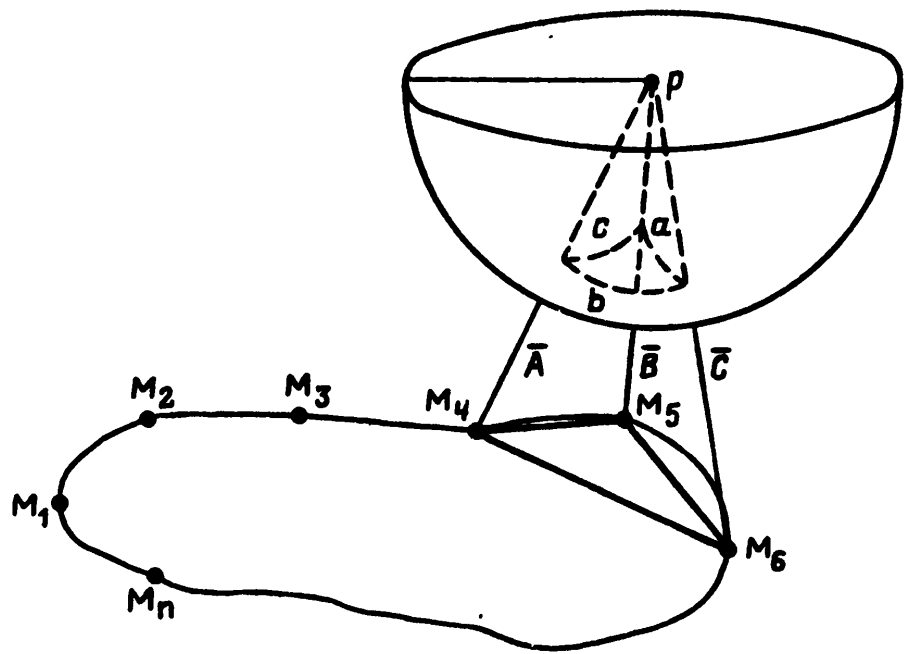
$$\omega(p) = S_i, \text{ если } R = 1. \quad (I.54)$$

Таким образом, задача определения угла видимости произвольной поверхности  $S$  сводится к нахождению площади соответствующего участка сферической поверхности. Этот вопрос детально рассматривается в сферической тригонометрии.

Выберем ряд точек  $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$  контура  $\mathcal{L}$ , ограничивающего поверхность  $S$ , и соединим эти точки прямыми отрезками (рис. I.8). Контур  $\mathcal{L}$  произвольной формы будет соответствовать многоугольник, который возьмем в качестве направляющей конической поверхности с вершиной в точке  $p$ . Таким образом, вместо конуса с направляющей  $\mathcal{L}$  мы получим бесконечную пирамиду, образованную лучами, проведенными из вершины  $p$  через все точки сторон многоугольника. Конечно, такая замена ведет к некоторой погрешности определения телесного угла, но значение этой погрешности убывает с ростом числа сторон многоугольника.

Теперь представим многоугольник как совокупность треугольников. Фактически наша задача сводится к расчету площади участка сферической поверхности единичного радиуса, ограниченного трехгранной пирамидой и численно равного телесному углу  $\omega(p)$  (см. рис. I.8), так как

Рис. 1.8. К расчету телесного угла



$$\omega(p) = \sum_{i=1}^n \omega_i(p), \quad (I.55)$$

где  $n$  — число треугольников.

Пусть положение вершин некоторого треугольника относительно точки  $p$  определяется радиусами-векторами  $A_i, B_i, C_i$ . Лучи, проведенные из точки  $p$  через все точки сторон этого треугольника, вырезают на сферической поверхности сферический треугольник, стороны которого — дуги большого круга, т. е. радиусы этих дуг равны (единичному) радиусу сферической поверхности. Соответствующий телесный угол численно равен площади сферического треугольника, определяемой по формуле Люилье

$$\operatorname{tg} \frac{\omega_i}{4} = \left\{ \operatorname{tg} \frac{l_i}{2} \operatorname{tg} \frac{l_i - a_i}{2} \operatorname{tg} \frac{l_i - b_i}{2} \operatorname{tg} \frac{l_i - c_i}{2} \right\}^{1/2}. \quad (I.56)$$

Здесь  $a_i, b_i, c_i$  — длины сторон сферического треугольника, а

$$2l_i = a_i + b_i + c_i.$$

Так как мы полагаем, что радиус сферической поверхности — единичный, то длина каждой стороны численно равна углу  $\theta$  (в радианах) между соответствующими радиусами-векторами и может быть выражена при помощи скалярного произведения этих векторов:

$$\begin{aligned} a_i &= \theta_{11} = \arccos \frac{\mathbf{B}_i \cdot \mathbf{C}_i}{|\mathbf{B}_i| |\mathbf{C}_i|}, \\ b_i &= \theta_{12} = \arccos \frac{\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{C}_i}{|\mathbf{A}_i| |\mathbf{C}_i|}, \\ c_i &= \theta_{13} = \arccos \frac{\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{B}_i}{|\mathbf{A}_i| |\mathbf{B}_i|}. \end{aligned} \quad (I.57)$$

Вычисляя телесный угол  $\omega_i(p)$ , соответствующий каждому треугольнику, и находя сумму, определяем угол видимости произвольной поверхности  $S$  из точки  $p$ .

### 1.3. ПОЛЯ

Начнем с того, что определим поле  $N$  как функцию положения точки  $p$  в пространстве, т. е.

$$N = N(p). \quad (1.58)$$

Иначе говоря, аргументом функции  $N$  являются координаты точки наблюдения  $p$  поля  $N$ . Ограничимся рассмотрением скалярных и векторных полей, которые образуют соответственно скалярные и векторные величины:  $T(p)$  и  $M(p)$ . Будем также полагать, что поле — однозначная функция положения точки. В основном будем рассматривать поведение поля в «обычных» точках, в окрестности которых оно меняется непрерывно. Однако уделим внимание и особым точкам, линиям, поверхностям, в которых поле терпит разрыв.

Как известно, непрерывность функции  $T$  в окрестности точки  $p$  означает, что любому бесконечно малому перемещению этой точки соответствует бесконечно малое изменение величины  $T$ . Если бесконечно малому перемещению  $\Delta l$  точки  $p$  по некоторому направлению  $l$  соответствует конечное или бесконечно большое изменение  $\Delta T$  величины  $T$ , то отношение  $\Delta T/\Delta l$  стремится к бесконечности и поле  $T$  имеет разрыв в точке  $p$ .

Рассмотрим поле в двух точках, расположенных на разных сторонах поверхности  $S$  на бесконечно малом расстоянии друг от друга. Поверхность  $S$  будет поверхностью разрыва поля  $T$ , если разность  $\Delta T$  значений поля  $T$  в этих точках — конечная или бесконечно большая величина, или, иначе говоря, — если разность значений поля  $T$  в двух сливающихся точках, расположенных на разных сторонах  $S$ , не стремится к нулю. В то же время по направлению, касательному к такой поверхности, поле  $T$  может меняться непрерывно. Подобные представления применимы также для особой линии поля  $T$ . Так как векторное поле  $M$  всегда можно определить скалярными компонентами  $M_1(p)$ ,  $M_2(p)$  и  $M_3(p)$ , то нарушение его непрерывности может быть охарактеризовано разрывами скалярных полей. Нередко будем рассматривать поля, которые не меняются в некоторой области  $V$ . Такие поля называются однородными; в случае векторного поля  $M$  его однородность означает, что как абсолютная величина, так и направление  $M$  не зависят от положения точки наблюдения.

Будем характеризовать изменения поля, обусловленные малыми перемещениями точки наблюдения  $p$  по разным направлениям  $l$  при помощи пространственных производных (градиент, дивергенция, ротор, лапласиан и т. д.), которые определяются для поля по аналогии с производными функции  $u(x)$  по аргументу  $x$ .



Рассматривая поле в области  $V$ , ограниченной замкнутой поверхностью  $S [V]$ , и выбирая некоторую точку  $O$  в качестве начала отсчета, можем определять положение точек  $p$ , расположенных на конечных расстояниях от  $O$ . Однако иногда требуется рассмотреть область  $V$  бесконечно больших размеров. В таком случае  $S [V]$  становится бесконечно удаленной поверхностью  $\Sigma$ . Точки, расположенные вне области  $V$ , рассматриваются как точки, бесконечно удаленные от начала  $O$ . Обычно можно представить эту поверхность  $\Sigma$  в виде сферической поверхности с центром в точке  $O$  и с площадью, равной  $4\pi R^2$ , где  $R$  — радиус поверхности  $\Sigma$ , стремящийся к бесконечности.

В общем случае будем рассматривать как постоянные поля, которые не меняются со временем, так и переменные поля, которые зависят не только от положения точки, но и от времени.

#### 1.4. СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ И ГРАДИЕНТ

Рассмотрим, как можно охарактеризовать поведение скалярного поля  $T(p)$  в окрестности точки наблюдения  $p$ . Для этого определим, как меняется поле по некоторому произвольному направлению  $l$  (рис. 1.9, *a*). Интенсивность этого изменения характеризуется производной  $T$  по направлению  $l$ :

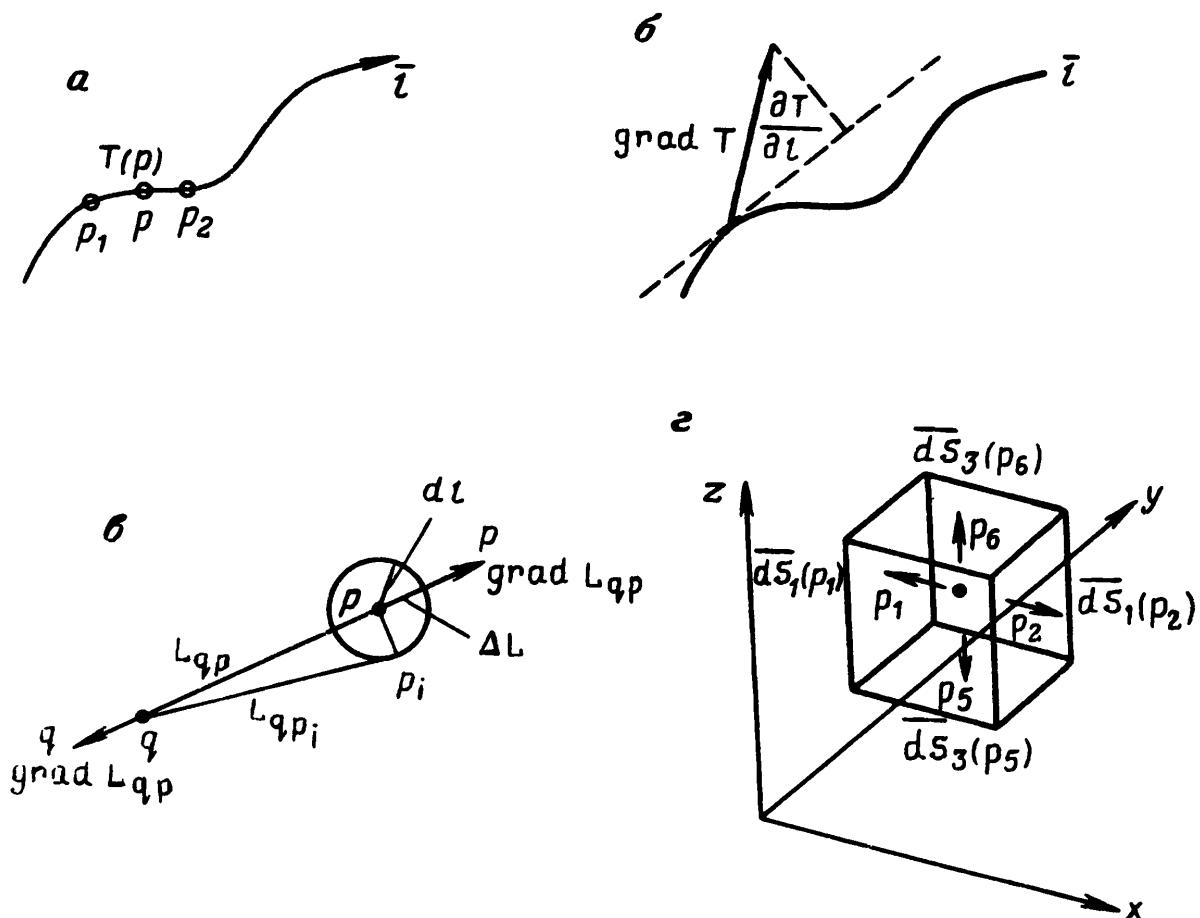


Рис. 1.9. Изменение скаляра  $T$  по направлению  $l$  (*a*); градиент-производная поля  $T$  (*б*); градиент расстояния  $L_{qp}$  (*в*) и градиент и поток скаляра (*з*)

$$\frac{\partial T}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta l}. \quad (\text{I.59})$$

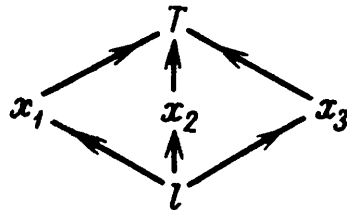
Здесь  $\Delta T$  — разность значений  $T$  в двух точках линии  $l$ :

$$\Delta T = T(p_2) - T(p_1),$$

а  $\Delta l$  — расстояние между этими точками.

Как следует из выражения (I.59), производная  $\partial T/\partial l$  — мера «быстроты» изменения поля  $T$  вдоль линии  $l$ , равная отношению  $\Delta T$  к соответствующему элементу пути  $\Delta l$ . Вполне естественно предположить, что в общем случае производная  $\partial T/\partial l$  в окрестности точки  $p$  зависит от направления  $l$  и тогда число значений такой производной в точке  $p$  может быть бесконечно велико.

Попытаемся выразить все эти производные при помощи одной функции, отражающей изменение скалярного поля. Для этого учтем, что при перемещении точки по направлению  $l$  меняются ее координаты. Зависимость поля  $T$  от координат точки  $p$  и ее положения на линии  $l$  можно иллюстрировать следующим образом:



В соответствии с выражением для полной производной имеем:

$$\frac{\partial T}{\partial l} = \frac{\partial T}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial l} + \frac{\partial T}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial l} + \frac{\partial T}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial l}, \quad (\text{I.60})$$

где

$$\frac{\partial x_1}{\partial l} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial l_1}{\partial l}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial l} = \frac{1}{h_2} \frac{\partial l_2}{\partial l}, \quad \frac{\partial x_3}{\partial l} = \frac{1}{h_3} \frac{\partial l_3}{\partial l},$$

так как в пределах элементарных отрезков координатных линий  $l_1, l_2, l_3$  коэффициенты Ламэ можно считать постоянными. Соответственно, равенство (I.60) можно переписать в виде

$$\frac{\partial T}{\partial l} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial T}{\partial x_1} \frac{\partial l_1}{\partial l} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial T}{\partial x_2} \frac{\partial l_2}{\partial l} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial T}{\partial x_3} \frac{\partial l_3}{\partial l} \quad (\text{I.61})$$

или

$$\frac{\partial T}{\partial l} = \frac{\partial T}{\partial l_1} \frac{\partial l_1}{\partial l} + \frac{\partial T}{\partial l_2} \frac{\partial l_2}{\partial l} + \frac{\partial T}{\partial l_3} \frac{\partial l_3}{\partial l}. \quad (\text{I.62})$$

Как следует из выражения (I.12),

$$\frac{\partial l_1}{\partial l} = \cos(l, l_1), \quad \frac{\partial l_2}{\partial l} = \cos(l, l_2), \quad \frac{\partial l_3}{\partial l} = \cos(l, l_3).$$

Очевидно, что правая часть равенства (I.62) может быть представлена в виде скалярного произведения двух векторов:

$$\frac{\partial T}{\partial l} = \mathbf{i}_l \cdot \text{grad } T, \quad (\text{I.63})$$

где

$$\mathbf{i}_l = \cos(l, l_1) \mathbf{i}_1 + \cos(l, l_2) \mathbf{i}_2 + \cos(l, l_3) \mathbf{i}_3$$

— единичный вектор по тому направлению  $l$ , по которому берем производную.

Вектор

$$\text{grad } T = \frac{1}{h_1} \frac{\partial T}{\partial x_1} \mathbf{i}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial T}{\partial x_2} \mathbf{i}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial T}{\partial x_3} \mathbf{i}_3 \quad (\text{I.64})$$

или

$$\text{grad } T = \frac{\partial T}{\partial l_1} \mathbf{i}_1 + \frac{\partial T}{\partial l_2} \mathbf{i}_2 + \frac{\partial T}{\partial l_3} \mathbf{i}_3$$

называется градиентом скалярного поля, и согласно (I.63) производная  $\partial T / \partial l$  скалярного поля  $T$  по любому направлению  $l$  может быть выражена через градиент  $T$ . Из этого равенства следует также, что  $\text{grad } T$  показывает то направление, по которому наиболее резко возрастает поле  $T$ , а абсолютная величина  $|\text{grad } T|$  равна максимальному из всех возможных значений производной  $\partial T / \partial l$  в данной точке (рис. I.9, б). Это означает, что градиент определяется только изменением поля и не зависит от других факторов — в частности, от применяемой системы координат. Вместе с тем выражение (I.63) ярко показывает важное значение понятия градиент, так как согласно (I.63) вместо нахождения производной  $\partial T / \partial l$  по любому направлению  $l$  достаточно просто взять проекцию вектора  $\text{grad } T$  на это направление. Чтобы подчеркнуть это, перепишем равенство (I.63) в виде

$$\frac{\partial T}{\partial l} = \text{grad}_l T, \quad (\text{I.65})$$

т. е. производная скалярного поля  $T$  по любому направлению  $l$  равна проекции градиента  $T$  на это направление.

Пользуясь равенствами (I.64), (I.39), (I.40), (I.41), получаем выражения для  $\text{grad } T$  в простейших системах координат.

1. Декартова система:

$$\text{grad } T = \frac{\partial T}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \mathbf{k}.$$

2. Цилиндрическая система:

$$\text{grad } T = \frac{\partial T}{\partial r} \mathbf{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \mathbf{i}_\varphi + \frac{\partial T}{\partial z} \mathbf{i}_z. \quad (\text{I.66})$$

### 3. Сферическая система:

$$\text{grad } T = \frac{\partial T}{\partial R} \mathbf{i}_R + \frac{\partial T}{r \partial \theta} \mathbf{i}_\theta + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \mathbf{i}_\varphi.$$

Часто бывает удобно представить  $\text{grad } T$  в следующем виде:

$$\text{grad } T = \nabla T.$$

Здесь  $\nabla$  — оператор Гамильтона (набла), определяемый различными выражениями в разных системах координат; например, в декартовой системе

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (\text{I.68})$$

Градиент, как вектор, имеет в общем случае три компоненты; но если система координат выбрана таким образом, что одно из координатных направлений, например  $l_3$ , совпадает с направлением  $\text{grad } T$ , то

$$\text{grad } T = \mathbf{i}_3 \text{grad}_3 T = \frac{1}{h_3} \frac{\partial T}{\partial x_3} \mathbf{i}_3. \quad (\text{I.69})$$

Получим теперь выражение для градиента скалярного поля  $T(\varphi)$ , где  $\varphi$  — функция точки наблюдения  $p$ :

$$T = T(\varphi) = T\{\varphi(p)\}. \quad (\text{I.70})$$

В этом случае можем записать

$$\frac{\partial T}{\partial x_k} = \frac{\partial T}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Тогда согласно выражению (I.64) имеем

$$\text{grad } T = \frac{\partial T}{\partial \varphi} \text{grad } \varphi. \quad (\text{I.71})$$

До этого предполагалось, что мы рассматриваем поле  $T$  в некоторой области  $V$ , где  $T$  является функцией трех координат. Если мы ограничиваемся рассмотрением поля на поверхности  $S$ , то уместно ввести понятие соответствующего (двухмерного) градиента  $\text{grad}^S T$ :

$$\text{grad}^S T = \frac{\partial T}{\partial t_1} \mathbf{t}_1 + \frac{\partial T}{\partial t_2} \mathbf{t}_2, \quad (\text{I.72})$$

где  $\mathbf{t}_1$  и  $\mathbf{t}_2$  — взаимно ортогональные единичные векторы, касательные к поверхности  $S$ . Тогда производную  $\partial T / \partial l$  по любому тангенциальному к этой поверхности направлению  $l$  будет определять выражение

$$\frac{\partial T}{\partial l} = \mathbf{i}_l \cdot \text{grad}^S T.$$

Конечно, при помощи двумерного градиента на поверхностях  $S$

можно также проанализировать поведение поля в области пространства, если производная  $\partial T/\partial n$  по направлениям нормалей к  $S$  считается известной.

Рассмотрим теперь, каким аналогом понятия  $\text{grad } T$  можно воспользоваться, когда  $p$  — особая точка поля  $T$ . Если поле  $T$  в окрестности точки  $p$  терпит разрыв по некоторому направлению  $l$ , то  $\partial T/\partial l \rightarrow \infty$  и, соответственно, величина  $\text{grad } T$  в этой точке теряет смысл. Если, например, поле  $T$  имеет различные значения по разные стороны поверхности  $S$ , то разность  $T_2 - T_1$  характеризует изменение поля  $T$  при переходе точки наблюдения через эту поверхность, и будет вполне естественным определить понятие поверхностного градиента следующим выражением:

$$\text{Grad } T = \{T_2 - T_1\} n. \quad (I.73)$$

Здесь  $n$  — единичная нормаль, направленная от оборотной стороны поверхности  $S$  к лицевой, а  $T_1$  и  $T_2$  — значения поля  $T$  на оборотной и лицевой сторонах поверхности  $S$  соответственно.

Пусть в некоторой точке  $p$   $\text{grad } T = 0$ . Тогда в этой точке по любому направлению  $l$  производная  $\partial T/\partial l = 0$ , т. е. поле  $T$  не меняется в окрестности этой точки. Поэтому в экстремальной точке поля  $T$  направление  $\text{grad } T$  не определено.

Если во всей области  $V$   $\text{grad } T = 0$ , то это поле не меняется в  $V$ , т. е. здесь  $T = \text{const}$ . Очевидно также, что векторное поле  $\mathbf{M} = \text{grad } T$  определяет скалярное поле  $T$  с точностью до постоянной, аналогично тому, как производная  $\partial y/\partial x$  определяет функцию  $y(x)$ .

Рассмотрим одно интересное и важное свойство производной  $\text{grad } T$ , для чего обратимся к выражению для полного дифференциала однозначной функции  $T(p)$ :

$$dT = \frac{\partial T}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial T}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial T}{\partial x_3} dx_3 = \frac{\partial T}{\partial l_1} dl_1 + \frac{\partial T}{\partial l_2} dl_2 + \frac{\partial T}{\partial l_3} dl_3.$$

Очевидно, что правую часть этого равенства можно представить в виде скалярного произведения векторов:

$$dT = d\mathbf{l} \cdot \text{grad } T = dl \text{ grad}_l T = \frac{\partial T}{\partial l} dl. \quad (I.74)$$

Пусть  $l$  — произвольный отрезок (путь), соединяющий точки  $a$  и  $b$ . Тогда согласно (I.74), интегрируя, получаем

$$\int_a^b \text{grad } T \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b dT = T(b) - T(a), \quad (I.75)$$

где  $T(a)$  и  $T(b)$  — значения поля  $T$  в начальной и конечной точках этого отрезка. Это означает, что криволинейный интеграл в левой части равенства (I.75) не зависит от формы пути интегрирования, а определяется значениями поля  $T$  в начальной

и конечной точках этого пути. В частности, для замкнутой линии  $l$

$$\oint_l \text{grad } T \cdot dl = 0. \quad (I.76)$$

Это равенство играет важную роль в теории ряда полей.

Для более детальной иллюстрации понятия градиент воспользуемся двумя примерами.

1. Вначале рассмотрим функцию, равную расстоянию между двумя точками:  $p$  и  $q$  (рис. I.9, в),

$$T = L_{qp} = L(p, q).$$

В общем случае эта функция зависит от положения обеих точек, но мы будем полагать, что положение точки  $q$  фиксировано, а координаты точки  $p$  могут меняться. Число возможных направлений элементарных перемещений  $\Delta l = dl$ , вызывающих изменение функции  $T$ , бесконечно велико. Но, как видно на рис. I.9, в, при заданной величине  $dl$  возрастание расстояния  $L_{qp}$  будет максимальным, когда направление перемещения совпадает с направлением радиуса-вектора  $L_{qp}$ . В этом случае изменение  $\Delta T$  функции  $T$  равно перемещению  $\Delta l$  и соответственно

$$\Delta T / \Delta l = 1.$$

Так как градиент характеризует направление и интенсивность максимального возрастания скалярного поля, то

$$\text{grad}_p L_{qp} = L_{qp}^0 \quad (I.77)$$

или

$$\text{grad}_p L_{qp} = L_{qp} / L_{qp}$$

ввиду того, что

$$L_{qp} = L_{qp} L_{qp}^0$$

Здесь  $L_{qp}^0$  — единичный вектор по направлению радиуса-вектора  $L_{qp}$  с началом в точке  $q$  и концом в точке  $p$ , а индекс « $p$ » указывает, что производные берутся по координатам точки  $p$ .

В противоположном случае, когда фиксировано положение точки  $p$ ,

$$\text{grad}_q L_{qp} = \frac{L_{pq}}{L_{pq}} = - \frac{L_{qp}}{L_{qp}}. \quad (I.78)$$

Здесь  $L_{pq}$  — радиус-вектор с той же, что у  $L_{qp}$ , абсолютной величиной  $L_{pq}$ , но направленный из точки  $p$  в точку  $q$ .

При сравнении выражений (I.77), (I.78) видно, что

$$\text{grad}_p L_{qp} = - \text{grad}_q L_{qp}. \quad (I.79)$$

Вывод выражений (I.77), (I.78) основывался на геометрических представлениях, а также — на смысле понятия «градиент». Получим те же результаты из равенства (I.64). Принимая во внимание, что в декартовой системе координат

$$T = L_{qp} = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 + (z_p - z_q)^2},$$

имеем

$$\frac{\partial T}{\partial x_p} = \frac{x_p - x_q}{L_{qp}}, \quad \frac{\partial T}{\partial y_p} = \frac{y_p - y_q}{L_{qp}}, \quad \frac{\partial T}{\partial z_p} = \frac{z_p - z_q}{L_{qp}}.$$

Поэтому

$${}^p \text{grad } T = \frac{L_{qp}}{L_{qp}}, \quad \text{но} \quad {}^q \text{grad } T = \frac{L_{pq}}{L_{pq}}.$$

2. Теперь рассмотрим поле  $T = 1/L_{qp}$ . Пользуясь выражением (I.71) и полагая  $\varphi = L_{qp}$ , получаем

$${}^p \text{grad } \frac{1}{L_{qp}} = -\frac{1}{L_{qp}^2} {}^p \text{grad } L_{qp} = -\frac{L_{qp}}{L_{qp}^3} \quad (\text{I.80})$$

и

$${}^q \text{grad } \frac{1}{L_{qp}} = -\frac{1}{L_{qp}^2} {}^q \text{grad } L_{qp} = \frac{L_{qp}}{L_{qp}^3}.$$

Равенствами (I.78) — (I.80) будем часто пользоваться в этой книге.

В выражениях (I.64), (I.66) градиент поля  $T$  определяется при помощи производных  $T$  по координатам точки наблюдения. Получим теперь выражение, определяющее градиент через интеграл, воспользовавшись для этого декартовой системой с координатами  $x, y, z$ . Будем полагать, что элемент пространства  $dV$  ограничен тремя парами координатных площадок:  $dS_1, dS_2$  и  $dS_3$ . Введем в рассмотрение величину, равную произведению скаляра  $T$  и ориентированной элементарной площадки  $dS$ ,

$$T dS = T dS n. \quad (\text{I.81})$$

Это — вектор, называемый потоком скаляра через площадку  $dS$ .

Определим поток скаляра  $T$  через замкнутую поверхность, ограничивающую элементарный объем  $dV$  (рис. I.9, г). Начнем с того, что определим поток  $T$  через пару взаимно параллельных площадок  $dS_1$  (противоположных граней прямоугольного параллелепипеда  $dV$ ), расстояние между которыми равно  $dl_1$ . Так как площадки  $dS_1$  бесконечно малы, будем полагать, что можно заменить средние значения поля  $T$  в пределах каждой из них значениями  $T$  в центрах этих площадок. Поток через пару площадок  $dS_1$  будет равен

$$T(p_1) dS_1 + T(p_2) dS_1. \quad (\text{I.82})$$



Ввиду того, что

$$dS_1(p_1) = -dy dz i \quad \text{и} \quad dS_1(p_2) = dy dz i,$$

для потока имеем

$$\{T(p_2) - T(p_1)\} dy dz i.$$

Принимая во внимание, что расстояние  $dl_1 = dx$  бесконечно мало, разность значений  $T$  можно выразить как произведение производной  $\partial T/\partial x$  и приращения координаты  $dx$ :

$$\{T(p_2) - T(p_1)\} dy dz = \frac{\partial T}{\partial x} dx dy dz i = \frac{\partial T}{\partial x} dV i.$$

Аналогично для потоков через две другие пары координатных площадок (рис. I.9, з) получим

$$\{T(p_4) - T(p_3)\} dx dz j = \frac{\partial T}{\partial y} dx dy dz j = \frac{\partial T}{\partial y} dV j.$$

и

$$\{T(p_6) - T(p_5)\} dy dx k = \frac{\partial T}{\partial z} dx dy dz k = \frac{\partial T}{\partial z} dV k.$$

Беря суммы левых и правых частей трех последних равенств, получаем

$$\oint_{S [dV]} T dS = \text{grad } T dV, \quad (\text{I.83})$$

где  $S [V]$  — замкнутая поверхность, ограничивающая элементарный объем  $dV$ .

Таким образом, мы получили три разных вида выражений, определяющих градиент  $T$ , а именно:

1) для обычных точек пространства

$$\text{grad } T = \frac{1}{h_1} \frac{\partial T}{\partial x_1} i_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial T}{\partial x_2} i_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial T}{\partial x_3} i_3;$$

2) на поверхности разрыва поля

$$\text{Grad } T = \{T_2 - T_1\} n;$$

3) интегральное представление

$$\text{grad } T = \frac{1}{dV} \oint_{S [\Delta V]} T dS$$

или, для предельного перехода,

$$\text{grad } T = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{S [\Delta V]} T dS. \quad (\text{I.84})$$

Как было показано выше, двухмерный градиент — это, например,

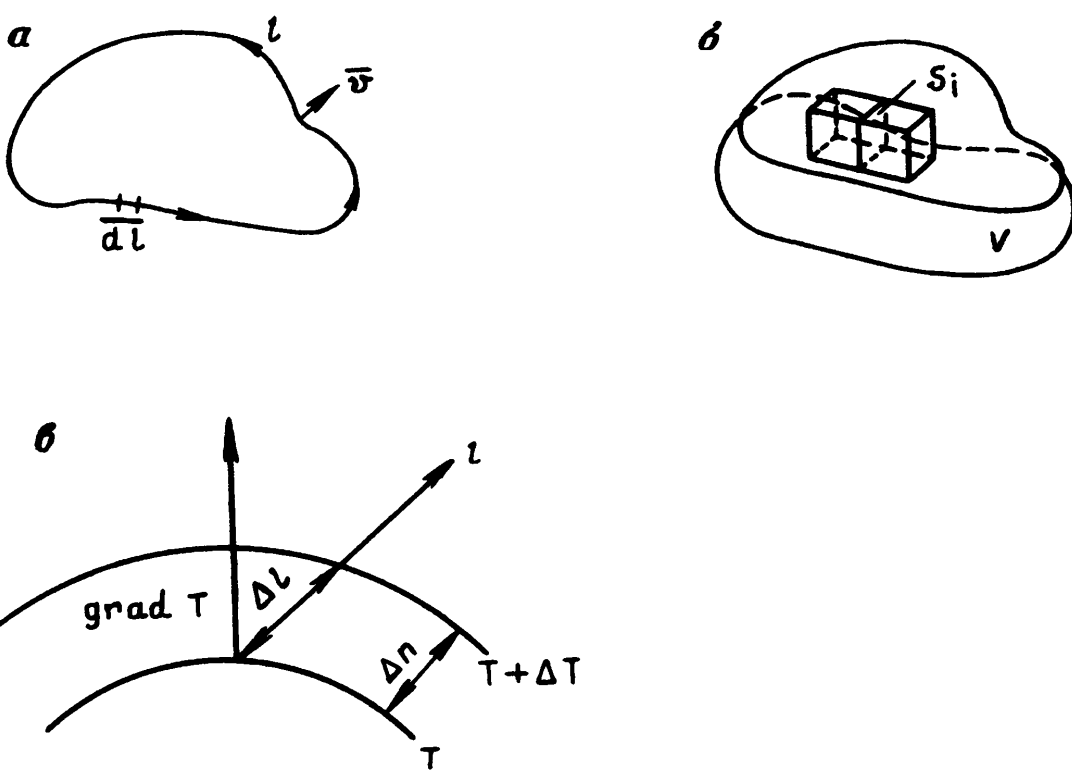


Рис. 1.10. К определению двухмерного градиента (а); к выводу интегральной формулы для градиента (б) и геометрическая интерпретация понятия градиент (в)

$$\text{grad}^S T = \frac{\partial T}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \mathbf{j},$$

а интегральное представление двухмерного градиента прямо следует из выражения (1.84):

$$\text{grad}^S T = \frac{1}{dS} \oint_{\mathcal{L} [dS]} T \nu dl. \quad (1.85)$$

Здесь  $dS$  — элементарная площадка, ограниченная контуром  $\mathcal{L}$ , а  $\nu$  — единичный вектор, направленный по нормали к линии  $\mathcal{L}$  наружу относительно площадки  $dS$  (рис. 1.10, а). Действительно, беря в качестве площадки  $dS$  координатную площадку  $dS_z$ , получаем

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{L}} T \nu dl &= T(p_2) dy \mathbf{i} - T(p_1) dy \mathbf{i} + T(p_4) dx \mathbf{j} - T(p_3) dx \mathbf{j} = \\ &= \frac{\partial T}{\partial x} dy dx \mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y} dx dy \mathbf{j} = \text{grad}^S T dS \end{aligned}$$

или

$$\text{grad}^S T = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_{\mathcal{L} [\Delta S]} T \nu dl. \quad (1.86)$$

Применяя равенство (1.84), определяющее градиент через объемный интеграл, предполагаем, что объем  $\Delta V$  достаточно мал и

градиент можно считать постоянным в пределах этого объема. Аналогичное замечание можно сделать в отношении выражения (I.86).

Приведем пример применения равенства (I.84) и при этом получим выражение, определяющее связь значений скалярного поля  $T$  в разных точках. Рассмотрим область  $V$  произвольных размеров и формы и мысленно разобьем ее на множество элементарных объемов. В соответствии с равенством (I.84) для каждого элементарного объема  $\Delta V_i$  имеем

$$\Delta V_i \operatorname{grad} T = \oint_{\Delta S_i} T d\mathbf{S}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (\text{I.87})$$

Здесь  $\Delta S_i$  — поверхность, ограничивающая объем  $\Delta V_i$ .

Беря суммы левых и правых частей равенства (I.87) при всех  $i$ , получаем для произвольной области  $V$

$$\sum_{i=1}^N \Delta V_i \operatorname{grad} T = \sum_{i=1}^N \oint_{\Delta S_i} T d\mathbf{S}. \quad (\text{I.88})$$

Так как для всех элементарных площадок  $S_i$ , расположенных внутри области  $V$  и являющихся общими гранями соседних пар элементов  $\Delta V_i$ , поток скаляра  $T d\mathbf{S}$  берется дважды и при противоположных направлениях  $d\mathbf{S}$  (рис. I.10, б), правая часть равенства (I.88) сводится к интегралу по поверхности  $S[V]$ , ограничивающей область  $V$ , и поэтому в пределе получаем

$$\int_V \operatorname{grad} T dV = \oint_{S[V]} T d\mathbf{S}. \quad (\text{I.89})$$

Аналогично в двухмерном случае

$$\int_S \operatorname{grad} T dS = \oint_{\mathcal{L}[S]} T v dl. \quad (\text{I.90})$$

Двумя последними равенствами часто пользуются в теории геофизических методов. Во-первых, они позволяют во многих случаях упростить расчеты полей путем замены объемных интегралов поверхностными, а поверхностных интегралов — криволинейными. Во-вторых, равенства (I.89), (I.90) связывают значения поля в области (на поверхности) с его значениями на ограничивающей ее поверхности (линии) и это делает понятной их важную роль при решении задач трансформации геофизических полей.

При описании скалярного поля  $T$  часто применяют геометрический подход, основанный на представлениях об уровнях поверхностей  $S_l$ . На каждой такой поверхности поле  $T$  имеет постоянное значение (рис. I.10, в):

$$T = C \quad \text{на} \quad S_l.$$

В случае рассматриваемых нами однозначных полей положение уровенных поверхностей может быть определено всюду, за исключением особых и экстремальных точек поля; это — непересекающиеся замкнутые поверхности. При помощи семейства уровенных поверхностей можно получить наглядное геометрическое изображение скалярного поля; для этого их обычно проводят таким образом, чтобы разность  $\Delta T$  значений  $T$  на двух любых соседних поверхностях была одинакова и достаточно мала. Нормали  $\mathbf{n}$  к этим поверхностям направлены в сторону возрастания поля. Часть пространства, ограниченная двумя соседними уровенными поверхностями, обычно называется уровенным слоем. Ясно, что поверхности  $S_l$  в свою очередь определяют конфигурацию линий, ортогональных уровенным поверхностям. Длина отрезка такой линии в уровенном слое характеризует мощность этого слоя.

Рассмотрим элементарный уровенный слой малой мощности  $\Delta n$ , которая в общем случае меняется вдоль слоя. Как видно на рис. 1.10,  $\Delta l$ , малый отрезок произвольной линии  $l$  между поверхностями такого слоя связан с мощностью  $\Delta n$  соотношением

$$\Delta n = \Delta l \cos(i_l, \mathbf{n}), \quad (1.91)$$

где  $\mathbf{i}_l$  — единичный вектор по направлению линии  $l$ .

Изменение поля  $T$  на отрезке  $\Delta l$

$$\Delta T_l = \frac{\partial T}{\partial l} \Delta l = \frac{\partial T}{\partial l} \frac{\Delta n}{\cos(i_l, \mathbf{n})}, \quad (1.92)$$

а изменение  $T$  на отрезке  $\Delta n$  равно

$$\Delta T_n = \frac{\partial T}{\partial n} \Delta n. \quad (1.93)$$

Так как при перемещении с одной поверхности уровенного слоя на другую изменение  $\Delta T$  поля не зависит от направления пути  $l$ , имеем

$$\Delta T_l = \Delta T_n = C = \text{const}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial n} &= \frac{C}{\Delta n}, & \frac{\partial T}{\partial l} &= \frac{C}{\Delta l}, \\ \frac{\partial T}{\partial l} &= \frac{\partial T}{\partial n} \cos(i_l, \mathbf{n}). \end{aligned} \quad (1.94)$$

Из последнего равенства следует, что производная  $\partial T / \partial l$  по любому направлению  $l$  определяется производной по направлению нормали  $\mathbf{n}$  и углом между этими направлениями. В частности, по любой линии, лежащей на уровенной поверхности, поле  $T$  не меняется и, соответственно, производная  $T$  по направлению, касательному к этой поверхности, равна нулю ( $\cos 90^\circ = 0$ ).

Сравнивая между собой выражения (I.65) и (I.94), видим, что абсолютная величина вектора  $\text{grad } T$  равна производной  $T$  по нормали  $\mathbf{n}$ , а его направление совпадает с направлением этой нормали:

$$\text{grad } T = \frac{\partial T}{\partial n} \mathbf{n} \quad (\text{I.95})$$

и

$$|\text{grad } T| = \frac{\partial T}{\partial n}. \quad (\text{I.96})$$

Отметим, что равенство (I.95) можно рассматривать как определение вектора  $\text{grad } T$ .

Итак, производная поля  $T$  по любому направлению  $l$  полностью определяется направлением нормали  $\mathbf{n}$  к уровенной поверхности и производной  $\partial T / \partial n$  по этому направлению.

Линии, ортогональные уровенным поверхностям, часто называют линиями градиента, так как вектор  $\mathbf{M} = \text{grad } T$  всюду направлен по касательной к этим линиям.

В соответствии с равенством (I.94)

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{C}{\Delta n}.$$

То есть (при заданной  $C$ ) абсолютная величина вектора  $\text{grad } T$  обратно пропорциональна мощности уровенного слоя.

Несложно получить уравнения для определения направлений линий градиента. Действительно, принимая во внимание, что ориентированный элементарный отрезок  $d\mathbf{l}$  линии  $l$  направлен, как вектор  $\text{grad } T$ , имеем

$$\cos(\text{grad } T, d\mathbf{l}) = 1 \quad (\text{I.97})$$

или

$$\frac{dl_1}{\partial T / \partial l_1} = \frac{dl_2}{\partial T / \partial l_2} = \frac{dl_3}{\partial T / \partial l_3}. \quad (\text{I.98})$$

Здесь  $dl_1$ ,  $dl_2$  и  $dl_3$  — компоненты вектора  $d\mathbf{l}$  по координатным направлениям  $l_1$ ,  $l_2$  и  $l_3$  соответственно.

Последнее равенство можем записать в следующем виде:

$$h_1^2 \frac{dx_1}{\partial T / \partial x_1} = h_2^2 \frac{dx_2}{\partial T / \partial x_2} = h_3^2 \frac{dx_3}{\partial T / \partial x_3}. \quad (\text{I.99})$$

В частности, в декартовой системе координат

$$\frac{dx}{\partial T / \partial x} = \frac{dy}{\partial T / \partial y} = \frac{dz}{\partial T / \partial z}. \quad (\text{I.100})$$

При рассмотрении поля на плоскости (или другой поверхности) его можно охарактеризовать при помощи уровенных линий (изолиний)

$$T = \text{const},$$

аналогичных уровенным поверхностям; при этом семейство линий градиента будет показывать направления векторов  $\text{grad}^S T$ .

### 1.5. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОЛЯ

В геофизических методах мы большей частью имеем дело с векторными полями, создаваемыми различными возбудителями, такими как массы, электрические заряды и токи, упругие напряжения и так далее. Например, напряженности гравитационного, магнитного, электрического полей, а также скорость распространения упругих волн — векторные поля.

В этом разделе рассмотрим геометрическую модель поля и для этого введем два понятия: векторные линии и нормальные поверхности. Это позволит нам практически без привлечения математического аппарата установить фундаментальную связь между полями и их возбудителями. Как только будут получены соответствующие уравнения поля, не будет необходимости пользоваться геометрической моделью. Выше были введены понятия: ориентированные линии и ориентированные поверхности. Существенно различать положительное и отрицательное прохождение ориентированной линии  $l$  через поверхность  $S$ . Если линия  $l$  пронизывает поверхность  $S$ , то положительным считается ее прохождение

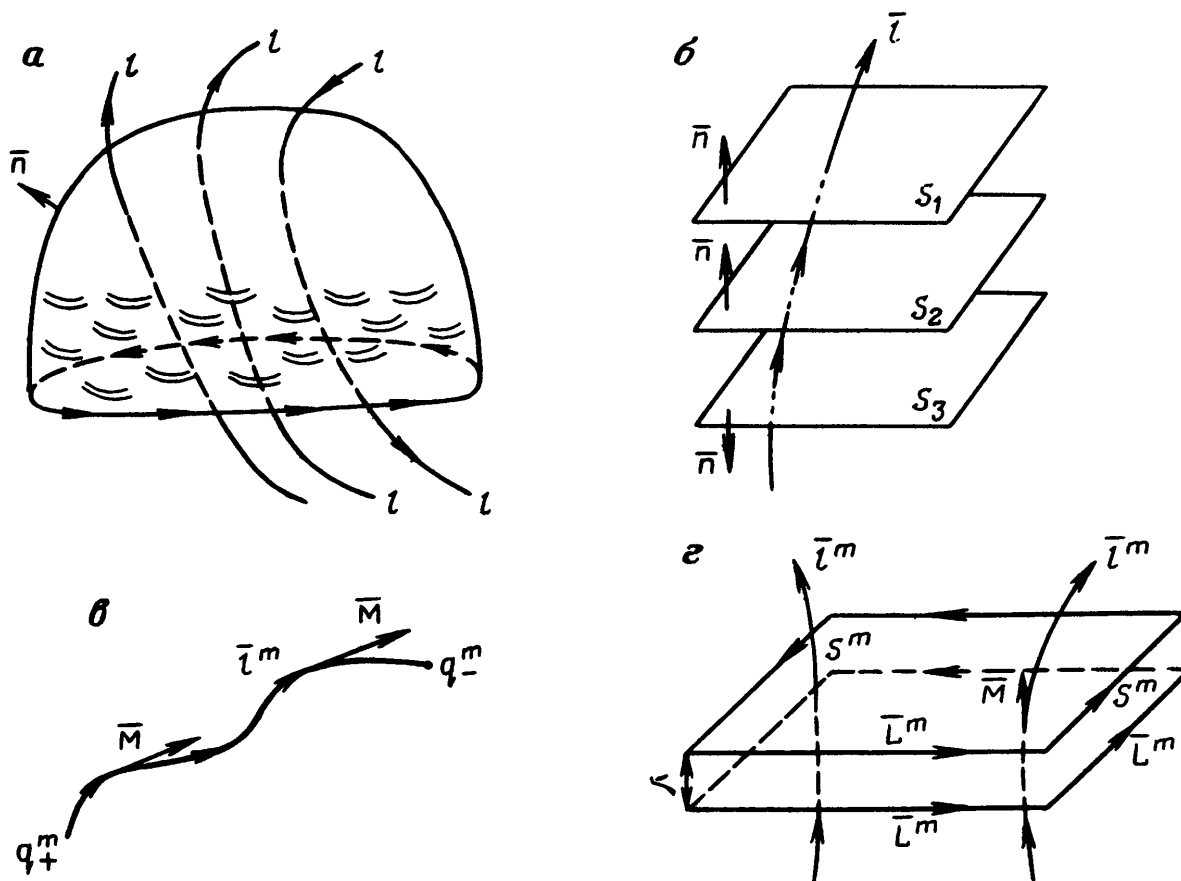


Рис. 1.11. Геометрические модели векторного поля

от оборотной стороны  $S$ , т. е. когда направление  $l$  составляет острый угол с направлением нормали к  $S$ . В противном случае прохождение линии полагают отрицательным (рис. I.11, а). Определяя число ориентированных линий, пересекающих ориентированную поверхность, следует учитывать это правило выбора знака. Подобный подход будет применяться при определении числа поверхностей, пересекаемых ориентированной линией, как показано на рис. I.11, б. Как ни странно, но столь простой подход позволяет получить фундаментальные уравнения поля независимо от его физической природы.

Первая геометрическая модель поля базируется на представлении о векторных линиях. Рассмотрим поле  $\mathbf{M}(p)$ . Тогда векторная линия  $l^m$  этого поля определяется из условия: угол  $(\mathbf{M}, d\mathbf{l}^m)$  между направлениями ее элемента  $d\mathbf{l}^m$  и поля  $\mathbf{M}$  равен нулю, т. е. вектор  $\mathbf{M}$  направлен по касательной к этой линии. Тогда

$$\cos(\mathbf{M}, d\mathbf{l}^m) = 1, \quad (\text{I.101})$$

а также

$$d\mathbf{l}^m = dl^m \mathbf{i}_m.$$

Здесь  $\mathbf{i}_m$  — единичный вектор по направлению поля  $\mathbf{M}$  в точке  $p$ , а  $d\mathbf{l}^m$  — ориентированный элемент векторной линии в той же точке. Так как векторы  $\mathbf{M}$  и  $d\mathbf{l}^m$  — взаимно параллельны, уравнение векторной линии

$$\frac{dl_1}{M_1} = \frac{dl_2}{M_2} = \frac{dl_3}{M_3}. \quad (\text{I.102})$$

Например, в декартовой системе координат имеем

$$\frac{dx}{M_x} = \frac{dy}{M_y} = \frac{dz}{M_z}, \quad (\text{I.103})$$

в цилиндрической системе —

$$\frac{dr}{M_r} = \frac{r d\varphi}{M_\varphi} = \frac{dz}{M_z}, \quad (\text{I.104})$$

в сферической системе —

$$\frac{dR}{M_R} = \frac{R d\theta}{M_\theta} = \frac{R \sin \theta d\varphi}{M_\varphi}. \quad (\text{I.105})$$

В общем случае имеется два типа векторных линий — разомкнутые и замкнутые. Очевидно, что первые из этих линий имеют точки обрыва; начало такой линии называется истоком  $q_+^m$ , а конец — стоком  $q_-^m$  поля  $\mathbf{M}$ . Пример такой векторной линии показан на рис. I.11, в. Отметим, что точки обрыва векторных линий могут находиться в бесконечности, т. е. практически достаточно далеко от тех точек, в которых рассматривается поле. Если векторные линии — геометрическая модель поля, то точки их обрыва ха-



рактически возбудители (источники) поля. Поэтому мы уделим особое внимание определению числа этих точек, а также их положения. При помощи векторных линий  $l^m$  можно показать не только направление поля  $M$ , но и его абсолютную величину. Для этого предположим, что они проведены с плотностью (густотой)  $\alpha M$ , где  $\alpha$  — произвольно выбранная постоянная. Тогда число векторных линий, пронизывающих элементарную площадку  $dS$  с центром в точке  $p$ , перпендикулярную направлению поля  $M$ , равно  $\alpha M(p) dS$ . Совокупность векторных линий, проходящих через все точки некоторой нелинейной линии  $l$ , образует векторную поверхность. Если линия  $l$  — замкнутая, то такая векторная поверхность ограничивает часть пространства, называемую векторной трубкой. Если векторное поле  $M$  характеризует течение, например, жидкости, или движение электрических зарядов, то векторные линии и векторные трубки называют токовыми линиями и токовыми трубками. В тех случаях, когда рассматривают силовое поле, их называют силовыми линиями и силовыми трубками, соответственно. В общем случае вдоль векторной трубки ее поперечное сечение меняется, а число векторных линий, пронизывающих поперечное сечение, пропорционально произведению

$$M(p) dS(p),$$

где  $dS(p)$  — площадь поперечного сечения.

Семейство векторных линий  $l^m$  определяет ортогональное к нему семейство поверхностей  $S^m$ , называемых нормальными поверхностями. При помощи этих поверхностей также можно описать векторное поле. Направления нормали  $n$  к такой поверхности и векторного поля  $M$  — одинаковы, и в каждой точке нормальной поверхности выполняется следующее условие:

$$\cos(M, dS^m) = 1, \quad dS^m = dS^m i_m, \quad (I.106)$$

где  $dS^m$  — элементарный участок нормальной поверхности.

Поверхности  $S^m$  могут быть разомкнутыми, либо замкнутыми. Разомкнутые поверхности  $S^m$  имеют линии обрыва  $L^m$ , которые всегда замкнуты, но иногда могут «замыкаться на бесконечности». Будем полагать, что направление линии  $L^m$  образует правовинтовую систему с направлением векторной линии  $l^m$  (рис. I.11,  $z$ ). При помощи нормальных поверхностей (аналогично тому, как это было для векторных линий) можно охарактеризовать как направление, так и абсолютную величину векторного поля  $M$ . Для этого представим себе, что нормальные поверхности проведены с плотностью  $\beta M$  (т. е.  $\beta M$  — число этих поверхностей, пересекающих отрезок линии  $l^m$  единичной длины), где  $\beta$  — некоторая произвольно выбранная постоянная. При этом число нормальных поверхностей, пересекающих элемент  $dl^m$  векторной линии, будет равно  $\beta M dl^m$ . Часть пространства, ограниченную двумя нормальными поверхностями  $S^m$ , обычно называют нормальным слоем, а длина

отрезка векторной линии, заключенного между поверхностями  $S^m$ , соответствует толщине (мощности) этого слоя. В дальнейшем основное внимание уделим случаю элементарного нормального слоя малой толщины  $\lambda$  (рис. I.11,  $z$ ), которая в общем случае зависит от положения точки  $p$  на средней поверхности этого слоя.

Мы уже неоднократно использовали такое понятие, как возбудители поля, которыми физически обусловлено это поле. Ниже приведены примеры таких возбудителей и соответствующих полей.

Возбудители	Поле
Массы	Гравитационное
Заряды	Электрическое
Токи	Магнитное
Заряды, токи, изменение магнитного и электрического полей со временем	Электромагнитное
Упругие напряжения, деформации	Упругие колебания

## 1.6. ПОТОК, ДИВЕРГЕНЦИЯ, ТЕОРЕМА ГАУССА

В этом и следующих разделах будем пользоваться представлением о векторных линиях и нормальных поверхностях и получим основные соотношения, связывающие поле и его возбудители. Прежде всего напомним, что число векторных линий, пронизывающих элемент  $dS^m$  нормальной поверхности, ортогональной векторным линиям, равно

$$aM dS^m .$$

Теперь введем понятие о потоке поля  $M$ , как о интеграле:

$$\Phi = \int_S M \cdot dS . \quad (I.107)$$

Здесь  $S$  — произвольная поверхность, а  $M$  — векторное поле.

Произведение

$$M \cdot dS = M dS \cos (M, dS) \quad (I.108)$$

— это поток вектора  $M$  через произвольно ориентированную элементарную площадку  $dS$  (рис. I.12,  $a$ ).

С математической точки зрения поток  $\Phi$  — это интегральная сумма потоков  $d\Phi$  через элементарные участки поверхности  $S$ , причем величины  $d\Phi$  могут быть положительными, отрицательными или равны нулю. Однако гораздо важнее показать, что поток  $\Phi$  может характеризовать некоторую существенную особенность поведения поля  $M$ . Рассмотрим элемент  $dS^m$  нормальной поверхности. Поток через такую элементарную площадку

$$d\Phi = M dS^m , \quad (I.109)$$

так как угол между направлениями вектора  $M$  и  $dS^m$  равен нулю.

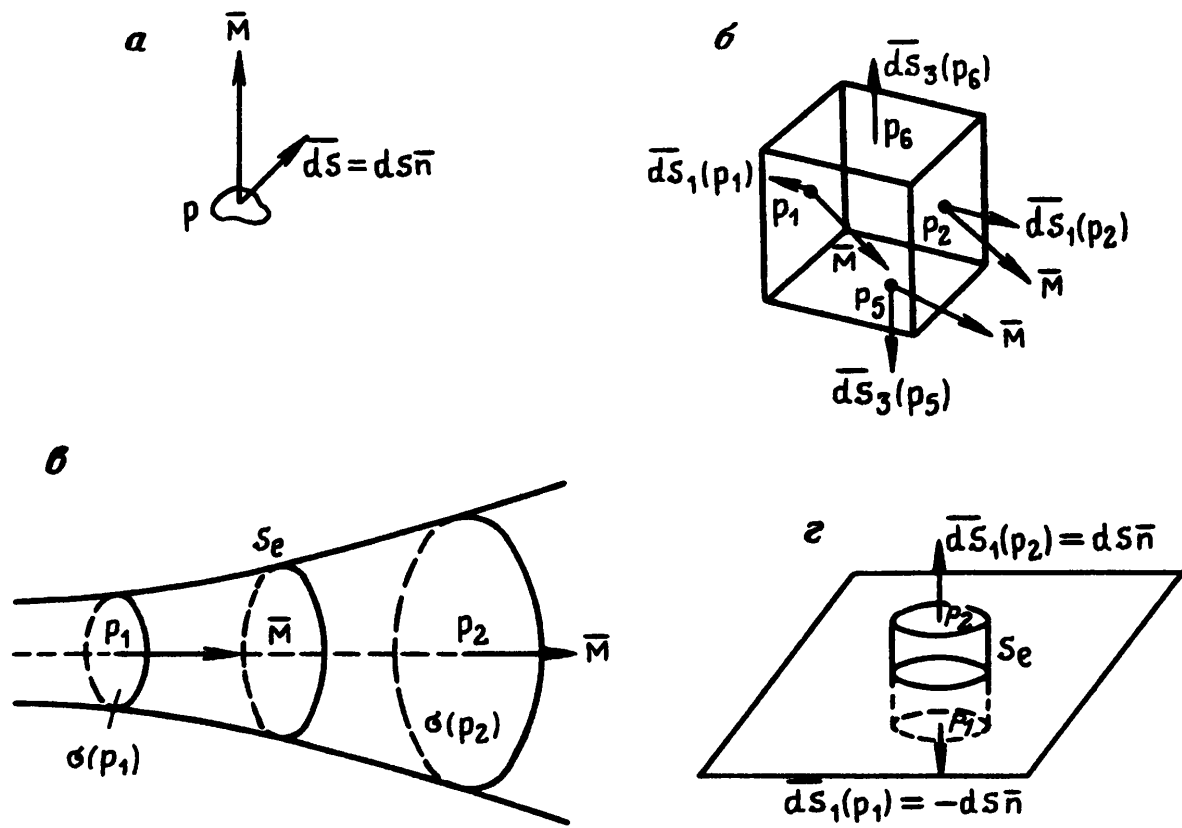


Рис. 1.12. Поток через элементарную площадку (а); к выводу выражения для дивергенции (б); поток через сечение элементарной векторной трубки (в) и к определению поверхностной дивергенции (г)

Вместе с тем, число векторных линий, пронизывающих площадку  $dS^m$

$$dN_1 = \alpha M dS^m. \quad (I.110)$$

Сопоставляя выражения (I.109), (I.110), видим, что поток и число векторных линий связаны равенством

$$d\Phi = \frac{1}{\alpha} dN_1. \quad (I.111)$$

Перейдем к случаю, когда направления  $\mathbf{M}$  и  $d\mathbf{S}$  не одинаковы. Тогда согласно (I.108) поток вектора  $\mathbf{M}$  через площадку  $dS$

$$d\Phi = \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = M dS \cos(\mathbf{M}, d\mathbf{S}) \quad (I.112)$$

(см. рис. 1.12, а). Площадку  $dS$  и ее проекцию  $dS^m$  на нормальную поверхность пронизывает одно и то же число векторных линий, т. е.

$$dN_1 = \alpha M dS^m = \alpha M dS \cos(\mathbf{M}, d\mathbf{S}) = \alpha (\mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}). \quad (I.113)$$

Если угол между направлениями нормали  $\mathbf{n}$  и поля  $\mathbf{M}$  превышает  $90^\circ$ , то согласно (I.113) число векторных линий будет отрицательным, так как они проходят через площадку  $dS$  в направлении от ее лицевой стороны к оборотной.

Интегрируя, получаем выражение, связывающее поток вектора через произвольную поверхность  $S$  с числом векторных линий, пронизывающих эту поверхность:

$$\Phi = \int_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\alpha} N_1. \quad (\text{I.114})$$

Таким образом, поток  $\Phi$  вектора через поверхность  $S$ , понятие, определяемое чисто математически, можно наглядно представить при помощи числа  $N_1$  векторных линий, пересекающих эту поверхность. В общем случае одна часть векторных линий  $l^m$ , проходящих поверхность  $S$  от оборотной стороны  $S$  к лицевой, дает положительный, а другая часть этих линий (проходящих  $S$  от лицевой стороны к оборотной) — отрицательный вклад в число  $N_1$ . Кроме того, некоторые из векторных линий могут быть направлены по касательной к поверхности  $S$  и, соответственно, они не вносят вклада в число  $N_1$ .

Рассмотрим теперь случай, когда  $S$  — произвольная замкнутая поверхность, и зададимся следующим вопросом. Что характеризует поток вектора через замкнутую поверхность? Оказывается, что ответ на этот вопрос — очень простой. Вначале предположим, что есть только одна векторная линия  $l^m$ , которая дважды пересекает замкнутую поверхность  $S$ : один раз — проходя от лицевой стороны  $S$  к оборотной, а затем, в другом месте — от оборотной стороны к лицевой. Полное число проходов  $N_1$  этой векторной линии через замкнутую поверхность равно нулю. Поэтому согласно (I.114) поток в этом случае также равен нулю.

Обобщая этот результат, можем сделать вывод, что если векторные линии не обрываются в области  $V$ , ограниченной замкнутой поверхностью  $S$ , то поток вектора через эту поверхность равен нулю. Теперь предположим, что векторная линия начинается где-либо в области  $V$ . Затем она один раз пересекает поверхность  $S$ , проходя от оборотной стороны к лицевой и, соответственно, число проходов  $N_1$  равно единице, а согласно (I.114) поток  $\Phi$  равен  $1/\alpha$ . Если направление векторной линии противоположно и она оканчивается в области  $V$ , поток равен  $-1/\alpha$ . Очевидно, что в общем случае, при произвольном числе векторных линий, поток вектора через замкнутую поверхность прямо пропорционален разности чисел начальных и конечных точек векторных линий в области, ограниченной этой поверхностью:

$$\Phi = \int_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\alpha} (q_m^+ - q_m^-) = \frac{q_m}{\alpha}. \quad (\text{I.115})$$

Здесь  $q_m^+$  и  $q_m^-$  — числа точек в области  $V$ , в которых соответственно начинаются и оканчиваются векторные линии, а

$$q_m = q_m^+ - q_m^-. \quad (\text{I.116})$$

Равенство (I.115) определяет одно из двух фундаментальных соотношений в теории поля. Конечно, тот факт, что независимо от физической природы поля (электрическое, гравитационное, магнитное, упругих колебаний и т. д.) интеграл

$$\Phi = \oint_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}$$

по любой замкнутой поверхности  $S [V]$  характеризует число точек обрыва векторных линий в области  $V$ , кажется удивительным. В дальнейшем мы покажем, что точки обрыва векторных линий — это геометрическая модель одного типа возбудителей поля, называемых источниками, и, соответственно, поток вектора через замкнутую поверхность играет роль «лакмусовой бумаги», определяя суммарное количество источников в области пространства, ограниченной этой поверхностью. Вместе с тем этот поток не зависит от того, как именно расположены точки обрыва векторных линий в пределах области  $V$ . Другими словами, поток через любую замкнутую поверхность остается неизменным, если произвольно меняется положение точек обрыва векторных линий в области  $V$ , но общее число этих точек сохраняется постоянным. Поэтому будет естественным сделать следующий шаг и ввести новое понятие, являющееся средством для более детального рассмотрения распределения точек обрыва векторных линий.

Для этого представим себе элементарный объем  $\Delta V$ , в котором точки обрыва  $q_m$  распределены равномерно. Поток вектора через поверхность  $S$ , ограничивающую область  $\Delta V$ , определяется числом точек  $q_m$  в этой области. Разделив число этих точек на объем  $\Delta V$ , введем новое понятие — плотность этих точек, а согласно (I.115)

$$\frac{\oint_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} = \frac{1}{a} \frac{q_m}{\Delta V}. \quad (\text{I.117})$$

Таким образом, поток вектора через поверхность  $S$ , ограничивающую элементарный объем  $\Delta V$ , деленный на значение этого объема, с точностью до постоянного множителя  $1/a$  равен плотности точек обрыва векторных линий в объеме  $\Delta V$ . В сущности это отношение представляет собой плотность источников поля.

Значение этого понятия трудно переоценить, так как если мы хотим определить поведение поля, естественно надо знать, как оно связано с распределением источников поля. Отношение потока вектора к соответствующему элементарному объему, входящее в выражение (I.117), называется дивергенцией:

$$\text{div } \mathbf{M} = \frac{\oint_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V}. \quad (\text{I.118})$$

Отсюда следует, что поток  $\oint_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}$  через поверхность, ограничивающую достаточно малый объем, и дивергенция  $\text{div } \mathbf{M}$  — понятия, близкие по смыслу, так как они характеризуют число точек обрыва  $q_m$  в области  $\Delta V$ . Но есть и различие между ними,

а именно — в размерности, так как дивергенция, в отличие от потока  $\Phi$ , определяет плотность этих точек.

Как следует из выражений (I.118), (I.117), для определения числа точек обрыва векторных линий по известной  $\operatorname{div} \mathbf{M}$  следует взять произведение

$$\operatorname{div} \mathbf{M} \Delta V. \quad (\text{I.119})$$

Обычно выражение для дивергенции поля  $\mathbf{M}$  записывают в следующем виде:

$$\operatorname{div} \mathbf{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V}. \quad (\text{I.120})$$

Сделаем несколько замечаний.

1.  $\operatorname{div} \mathbf{M}$  — скалярная величина, так как плотность распределения точек обрыва  $q_m$  определяется только абсолютной величиной и знаком. В следующем разделе мы рассмотрим геометрическую модель другого типа возбудителей поля, требующую применения векторной величины для описания их распределения.

2. Согласно (I.117), (I.118) можем записать выражение для  $\operatorname{div} \mathbf{M}$  в следующем виде:

$$\operatorname{div} \mathbf{M} = \frac{1}{a} \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{q_m}{\Delta V}, \quad (\text{I.121})$$

показывающем непосредственную связь между дивергенцией и плотностью точек обрыва  $q_m$ .

3. Как следует из выражения (I.120), для вычисления  $\operatorname{div} \mathbf{M}$  требуется разбить поверхность  $S$  на несколько элементарных площадок, таких, чтобы в пределах каждой из них абсолютную величину и направление вектора  $\mathbf{M}$  можно было считать постоянными. Затем находят скалярные произведения  $\mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = M dS \cos(\mathbf{M}, d\mathbf{S})$ , а после суммирования и деления на  $\Delta V$  определяют дивергенцию. Так как этот метод вычисления состоит из нескольких относительно сложных действий, заменим его одной операцией, существенно более простой.

Для этого введем систему ортогональных, в общем случае криволинейных координат  $(x_1, x_2, x_3)$  и рассмотрим координатный элемент пространства  $\Delta V$  с центром в точке  $p$  (рис. I.12, б). Так как дивергенция характеризует плотность точек обрыва векторных линий, ее значение не зависит от выбора системы координат или формы малой области  $\Delta V$  при условии, что эти точки равномерно распределены в пределах области  $\Delta V$ .

Обратимся к равенству (I.118). Очевидно, что суммарный поток вектора через поверхность  $S$  (рис. I.12, б) состоит из шести потоков. Вначале рассмотрим сумму потоков через две координатные

площадки, нормальные координатной линии  $l_1$ . Эта часть суммарного потока равна

$$\int_{dS_1(p_1)} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} + \int_{dS_1(p_2)} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}. \quad (\text{I.122})$$

Здесь  $dS_1(p_1)$  и  $dS_1(p_2)$  — координатные площадки с центрами в точках  $p_1$  и  $p_2$  соответственно.

Принимая во внимание, что среднее значение вектора  $\mathbf{M}$  в пределах элементарной площадки можно заменить значением  $\mathbf{M}$  в центре площадки, получаем вместо интегралов в (I.122) произведения:

$$\mathbf{M}(p_1) \cdot d\mathbf{S}_1(p_1) + \mathbf{M}(p_2) \cdot d\mathbf{S}_1(p_2).$$

При учете того, что

$$d\mathbf{S}_1(p_2) = dS_1(p_2) \mathbf{i}_1 \quad \text{и} \quad d\mathbf{S}_1(p_1) = -dS_1(p_1) \mathbf{i}_1,$$

а

$$\mathbf{M}(p) \cdot \mathbf{i}_1 = M_1(p),$$

имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(p_2) \cdot d\mathbf{S}_1(p_2) + \mathbf{M}(p_1) \cdot d\mathbf{S}_1(p_1) &= \\ &= M_1(p_2) dS_1(p_2) - M_1(p_1) dS_1(p_1). \end{aligned} \quad (\text{I.123})$$

Расстояние  $dl_1$  между точками  $p_1$  и  $p_2$  — бесконечно мало, поэтому можем полагать, что функция  $M_1 dS_1$  меняется линейно на отрезке  $dl_1$ . Тогда можно представить разность в правой части равенства (I.123) в следующем виде:

$$\begin{aligned} M_1(p_2) dS_1(p_2) - M_1(p_1) dS_1(p_1) &= \\ &= \frac{\partial}{\partial l_1} \{M_1(p) dS_1(p)\} dl_1, \end{aligned} \quad (\text{I.124})$$

где  $p$  — центр элемента объема  $dV$ .

Аналогичным образом для двух других пар слагаемых потока вектора  $\mathbf{M}$  имеем

$$\begin{aligned} M_2(p_4) dS_2(p_4) - M_2(p_3) dS_2(p_3) &= \\ &= \frac{\partial}{\partial l_2} \{M_2(p) dS_2(p)\} dl_2, \end{aligned} \quad (\text{I.125})$$

и

$$\begin{aligned} M_3(p_6) dS_3(p_6) - M_3(p_5) dS_3(p_5) &= \\ &= \frac{\partial}{\partial l_3} \{M_3(p) dS_3(p)\} dl_3. \end{aligned} \quad (\text{I.126})$$

Таким образом, получаем выражение для суммарного потока вектора  $\mathbf{M}$  через поверхность  $S$ , ограничивающую область  $\Delta V$ :



$$\oint_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\partial}{\partial l_1} (M_1 dS_1) dl_1 + \frac{\partial}{\partial l_2} (M_2 dS_2) dl_2 + \frac{\partial}{\partial l_3} (M_3 dS_3) dl_3, \quad (\text{I.127})$$

из которого следует, что

$$\operatorname{div} \mathbf{M} = \frac{1}{\Delta V} \left[ \frac{\partial}{\partial l_1} (M_1 dS_1) dl_1 + \frac{\partial}{\partial l_2} (M_2 dS_2) dl_2 + \frac{\partial}{\partial l_3} (M_3 dS_3) dl_3 \right]. \quad (\text{I.128})$$

Тогда согласно (I.36) — (I.38) окончательно получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{M} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 M_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_1 h_3 M_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 M_3) \right]. \quad (\text{I.129})$$

Поставленная задача решена, так как мы смогли заменить интегрирование в выражении (I.118) дифференцированием, выполнить которое обычно намного проще. В частности, согласно (I.39) — (I.41), (I.129) в трех конкретных системах координат имеем следующие выражения.

1. Декартова система:

$$\operatorname{div} \mathbf{M} = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_z}{\partial z}. \quad (\text{I.130})$$

2. Цилиндрическая система:

$$\operatorname{div} \mathbf{M} = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial (r M_r)}{\partial r} + \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} + r \frac{\partial M_z}{\partial z} \right]. \quad (\text{I.131})$$

3. Сферическая система:

$$\operatorname{div} \mathbf{M} = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \left[ \sin \theta \frac{\partial (R^2 M_R)}{\partial R} + R \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta M_\theta) + R \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} \right]. \quad (\text{I.132})$$

Очевидно, что выражения (I.118) и (I.129) имеют одинаковый смысл — оба они характеризуют плотность точек обрыва векторных линий в бесконечно малой области с центром в точке  $p$ .

4. Проще всего выглядит выражение для дивергенции, конечно, в декартовой системе координат. Однако неверное истолкование этого выражения может послужить причиной путаницы, так как очень заманчиво, рассматривая  $\operatorname{div} \mathbf{M}$  как сумму производных компонент  $M_x$ ,  $M_y$  и  $M_z$  поля по соответствующим координатам, интерпретировать  $\operatorname{div} \mathbf{M}$  как меру изменения поля, но это часто

неверно. Если, например, в окрестности некоторой точки векторные линии не обрываются, то  $\operatorname{div} \mathbf{M}$  равна нулю независимо от того, как меняется поле  $\mathbf{M}$  вблизи этой точки.

Чтобы пояснить истинный смысл дивергенции, рассмотрим отрезок элементарной векторной трубки (рис. I.12, в). Ограничивающая его поверхность состоит из векторной поверхности (боковой поверхности векторной трубки)  $S_l$  и двух нормальных сечений  $dS_1$  и  $dS_2$ . Принимая во внимание, что векторы  $\mathbf{M}$  направлены по касательной к векторной поверхности, а

$$dS_2 = \sigma(p_2) i_m(p_2), \quad dS_1 = -\sigma(p_1) i_m(p_1), \quad \mathbf{M} = M i_m,$$

получаем для потока вектора через замкнутую поверхность выражение

$$\mathbf{M}(p_2) \cdot dS_2(p_2) + \mathbf{M}(p_1) \cdot dS_1(p_1)$$

или

$$M(p_2) \sigma(p_2) - M(p_1) \sigma(p_1) = \frac{\partial}{\partial l} \{M(p) \sigma(p)\} dl.$$

Поэтому

$$\operatorname{div} \mathbf{M} = \frac{1}{\sigma(p)} \frac{\partial}{\partial l} \{M(p) \sigma(p)\}, \quad (\text{I.133})$$

так как

$$\Delta V = dl \sigma(p).$$

Здесь  $dl$  — длина отрезка векторной трубки. Согласно (I.133)  $\operatorname{div} \mathbf{M}$  можно рассматривать как скорость изменения потока (но не поля) по направлению поля, нормированную площадью нормального сечения элементарной векторной трубки.

5. При выводе выражения (I.129) мы полагали, что в окрестности точки наблюдения существуют все производные поля по координатам этой точки. Иными словами, это выражение, как и (I.118), имеет смысл только для обычных (не особых) точек.

Теперь рассмотрим иной случай, когда одна из компонент векторного поля терпит разрыв и, соответственно, не могут применяться выражения (I.128), (I.129). Подобное поведение поля часто наблюдается на границах сред с разными физическими свойствами. Определим распределение точек обрыва векторных линий на такой поверхности  $S$ . Для этого рассмотрим ее элемент  $dS$  и построим прямой цилиндр с поверхностью  $S_c$ , взяв контур площадки  $dS$  в качестве направляющей этого цилиндра (рис. I.12, г). Поток вектора  $\mathbf{M}$  через поверхность  $S_c$  можно представить как сумму трех потоков — через боковую поверхность  $S_l$ , а также через основания  $dS_1(p_1)$  и  $dS_2(p_2)$  цилиндра:

$$\oint_{S_c} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = M(p_2) \cdot dS_2(p_2) + \\ + M_1(p_1) \cdot dS_1(p_1) + \oint_{S_l} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}. \quad (\text{I.134})$$

Так как  $dS_2 = dS \mathbf{n}$ ,  $dS_1 = -dS \mathbf{n}$ , где  $\mathbf{n}$  — единичная нормаль, направленная от оборотной стороны поверхности  $S$  к лицевой, можем переписать выражение (I.134) в следующем виде:

$$\oint_{S_c} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = M_n^{(2)}(p_2) dS - M_n^{(1)}(p_1) dS + \int_{S_l} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}. \quad (\text{I.135})$$

Здесь  $M_n^{(2)}(p_2)$  и  $M_n^{(1)}(p_1)$  — нормальные компоненты поля  $\mathbf{M}$  соответственно на лицевой и оборотной сторонах поверхности  $S$ .

При бесконечно малой высоте цилиндра  $p_1$  и  $p_2$  находятся на бесконечно малом расстоянии от точки  $p$ , а если значение тангенциальной компоненты поля  $\mathbf{M}$  на поверхности  $S$  ограничено, то интеграл в правой части равенства (I.135) стремится к нулю. Вместо (I.135) получаем

$$\oint_{S_c} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} \{M_n^{(2)} - M_n^{(1)}\} dS.$$

Следующий шаг очевиден. Чтобы охарактеризовать распределение точек обрыва векторных линий на поверхности  $S$ , естественно разделить обе части последнего равенства на  $dS$ . Тогда

$$\frac{\oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}}{dS} = M_n^{(2)} - M_n^{(1)}$$

или

$$\frac{\oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}}{dS} = \frac{1}{a} \frac{q_m}{dS}.$$

Здесь  $q_m$  — число точек обрыва векторных линий на элементарной площадке  $dS$ .

Соответственно, можем ввести понятие поверхностной дивергенции:

$$\text{Div } \mathbf{M} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta S} = \frac{1}{a} \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{q_m}{\Delta S} = M_n^{(2)} - M_n^{(1)}. \quad (\text{I.136})$$

Согласно (I.136), разность значений нормальной компоненты поля на двух сторонах поверхности  $S$  определяет плотность точек обрыва векторных линий на этой поверхности. В частности, на такой поверхности, где нормальная компонента  $M_n$  непрерывна, плотность  $q_m / \Delta S$  равна нулю. Напомним, что это предполагает непрерывность значения скалярной компоненты вектора с учетом ее знака.

Таким образом, мы получили три выражения, характеризующие особенности поведения векторных линий:

$$\oint_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\alpha} q_m,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V}, \quad (\text{I.137})$$

$$\operatorname{Div} \mathbf{M} = M_n^{(2)} - M_n^{(1)} \text{ на } S.$$

Теперь, пользуясь представлением о точках обрыва векторных линий, получим одно из важнейших в теории поля соотношений. Мысленно разделим произвольную область  $V$ , ограниченную поверхностью  $S$ , на множество элементарных объемов  $dV$ . Положим в выражениях (I.115), (I.121)  $\alpha = 1$  и определим общее число точек обрыва  $q_m$  векторных линий в области  $V$ . С одной стороны, согласно (I.115) число точек  $q_m$  в области  $V$  равно поверхностному интегралу

$$\oint_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}.$$

С другой стороны, согласно (I.121) число точек  $q_m$  в элементе объема  $dV$  равно

$$\operatorname{div} \mathbf{M} dV$$

и поэтому общее число точек  $q_m$  в области  $V$  определяет объемный интеграл

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{M} dV.$$

Так как и поверхностный, и объемный интегралы определяют одно и то же число точек обрыва векторных линий, получаем теорему Гаусса<sup>1</sup>:

$$\oint_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{M} dV. \quad (\text{I.138})$$

Это равенство имеет фундаментальное значение в теории и методике интерпретации результатов геофизических методов, так как оно устанавливает связь между значениями поля в области  $V$  и на поверхности  $S$ , ограничивающей эту область. Поэтому на основе формулы Гаусса получены выражения, позволяющие определить поле где-либо в области  $V$  по его значениям на поверхности  $S$ , полученным в результате расчетов или измерений. Заметим, что благодаря применению представлений о векторных ли-

<sup>1</sup> В отечественной литературе обычно применяется название «теорема Остроградского» или «теорема Остроградского — Гаусса».

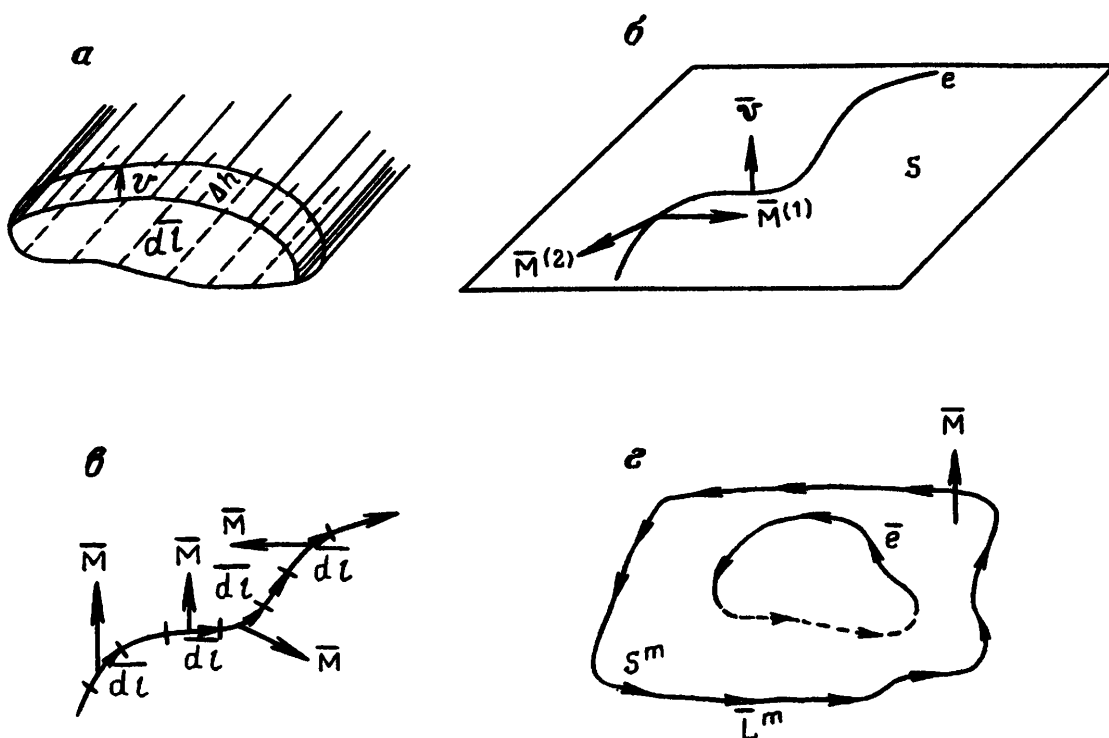


Рис. 1.13. К выводу теоремы Гаусса для двухмерного случая (а); аналог дивергенции у особой линии в двухмерном случае (б); напряжение (в); напряжение и линии обрыва нормальных поверхностей (г)

ниях и точках их обрыва нам удалось доказать теорему Гаусса исключительно простым способом.

В завершающей части этого раздела получим выражение для дивергенции в двухмерном случае, а также формулу Гаусса для этого случая, полагая, что поле не меняется по направлению некоторой прямой линии  $\mathcal{L}$ , а векторы  $\mathbf{M}$  лежат в плоскостях, нормальных к  $\mathcal{L}$ . Для этого представим себе элементарный объем  $\Delta V$  в виде прямого цилиндра с основаниями, нормальными к прямой  $\mathcal{L}$  и с высотой  $\Delta h$  (рис. 1.13, а). Поверхность  $S$  этого цилиндра состоит из двух его оснований и боковой поверхности  $S_l$ . Так как векторы  $\mathbf{M}$  на основаниях цилиндра лежат в плоскостях, которым принадлежат эти основания, поток вектора  $\mathbf{M}$  через эти участки поверхности  $S$  равен нулю и для суммарного потока

$$\oint_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_l} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}. \quad (1.139)$$

Принимая во внимание, что поле не меняется вдоль линии  $\mathcal{L}$ , а  $d\mathbf{S} = \mathbf{v} dl \Delta h$ ,  $dV = dS \Delta h$ ,

получаем выражение для двухмерной дивергенции:

$$\operatorname{div}^S \mathbf{M} = \frac{\int_{S_l} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} = \frac{\oint \mathbf{M} \cdot \mathbf{v} dl}{\Delta S} = \frac{\oint M_v dl}{\Delta S} \quad \text{при } \Delta S \rightarrow 0. \quad (1.140)$$

Здесь  $\mathbf{v}$  — единичный вектор, нормальный к замкнутой линии  $l$  и

лежащий в плоскости, к которой перпендикулярна прямая  $l$ , а  $M_v$  — компонента вектора  $\mathbf{M}$  по направлению  $v$ .

Применяя тот же подход, что и в трехмерном случае, можем выразить  $\operatorname{div}^S \mathbf{M}$  при помощи производных:

$$\operatorname{div}^S \mathbf{M} = \frac{1}{h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 M_1) - \frac{\partial}{\partial x_2} (h_1 M_2) \right\}. \quad (\text{I.141})$$

Очевидно, что это равенство непосредственно следует из выражения (I.129), если положить там  $h_3 = 1$  и  $\partial M_3 / \partial x_3 = 0$ , и оно применимо в тех точках, которые не являются особыми.

В тех случаях, когда имеются линии, на которых терпит разрыв нормальная к ним компонента поля, можно охарактеризовать распределение точек обрыва  $q_m$  вдоль такой линии следующим образом:

$$\operatorname{div}^S \mathbf{M} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{M} \cdot v \, dl}{\Delta l} = M_v^{(2)} - M_v^{(1)}. \quad (\text{I.142})$$

Здесь  $M_v^{(2)}$  и  $M_v^{(1)}$  — значения компоненты поля, нормальной к линии разрыва по разные ее стороны (рис. I.13, б).

Таким образом, мы получили три выражения, характеризующие распределение точек обрыва векторных линий в двухмерном случае, а именно:

$$\oint_l \mathbf{M} \cdot v \, dl = \frac{1}{a} q_m,$$

$$\operatorname{div}^S \mathbf{M} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{M} \cdot v \, dl}{\Delta S}, \quad (\text{I.143})$$

$$\operatorname{div}^S \mathbf{M} = M_v^{(2)} - M_v^{(1)}.$$

Теперь рассмотрим некоторый участок  $S$  плоскости, ограниченный замкнутой линией  $l$ . Мысленно разделяя этот участок на множество элементов  $\Delta S$ , для каждого такого элемента  $\Delta S_i$  согласно (I.140) имеем

$$\operatorname{div}^S \mathbf{M} \Delta S_i = \oint_{l_i} \mathbf{M} \cdot v \, dl, \quad (\text{I.144})$$

где  $l_i$  — контур площадки  $\Delta S_i$ . Суммируя левые и правые части равенств для всех элементов  $\Delta S_i$  и принимая во внимание, что интегрирование по всем внутренним участкам контуров  $l_i$  (не принадлежащим линии  $l$ ) выполняется дважды — при противоположных направлениях  $v$ , получаем формулу Гаусса для двухмерного случая:

$$\int_S \operatorname{div}^S \mathbf{M} dS = \oint_l \mathbf{M} \cdot \mathbf{v} dl = \oint_l M_\nu dl. \quad (\text{I.145})$$

В заключение отметим, что часто бывает удобно представить  $\operatorname{div} \mathbf{M}$  в виде скалярного произведения:

$$\operatorname{div} \mathbf{M} = \nabla \cdot \mathbf{M}.$$

### 1.7. НАПРЯЖЕНИЕ, ЦИРКУЛЯЦИЯ, РОТОР, ТЕОРЕМА СТОКСА

В предыдущем разделе было введено понятие потока вектора через замкнутую поверхность, а также — дивергенции, характеризующей распределение точек обрыва векторных линий. В этом разделе мы детально рассмотрим вторую группу понятий, применяемых в теории поля. Вначале ограничимся случаем векторного поля, которое можно описать, пользуясь представлениями о нормальных поверхностях. Затем полученные результаты будут обобщены для случая произвольного векторного поля.

Введем в рассмотрение нормальные поверхности  $S^m$  (см. раздел I.5) при следующих предположениях:

а) поверхности  $S^m$  проведены с плотностью, пропорциональной абсолютной величине  $M$  поля  $\mathbf{M}$ ;

б) направления поля  $\mathbf{M}$  и линий обрыва  $L^m$  нормальных поверхностей (рис. I.14, а) образуют правовинтовую систему (рис. I.11, з).

Сначала определим напряжение как криволинейный интеграл

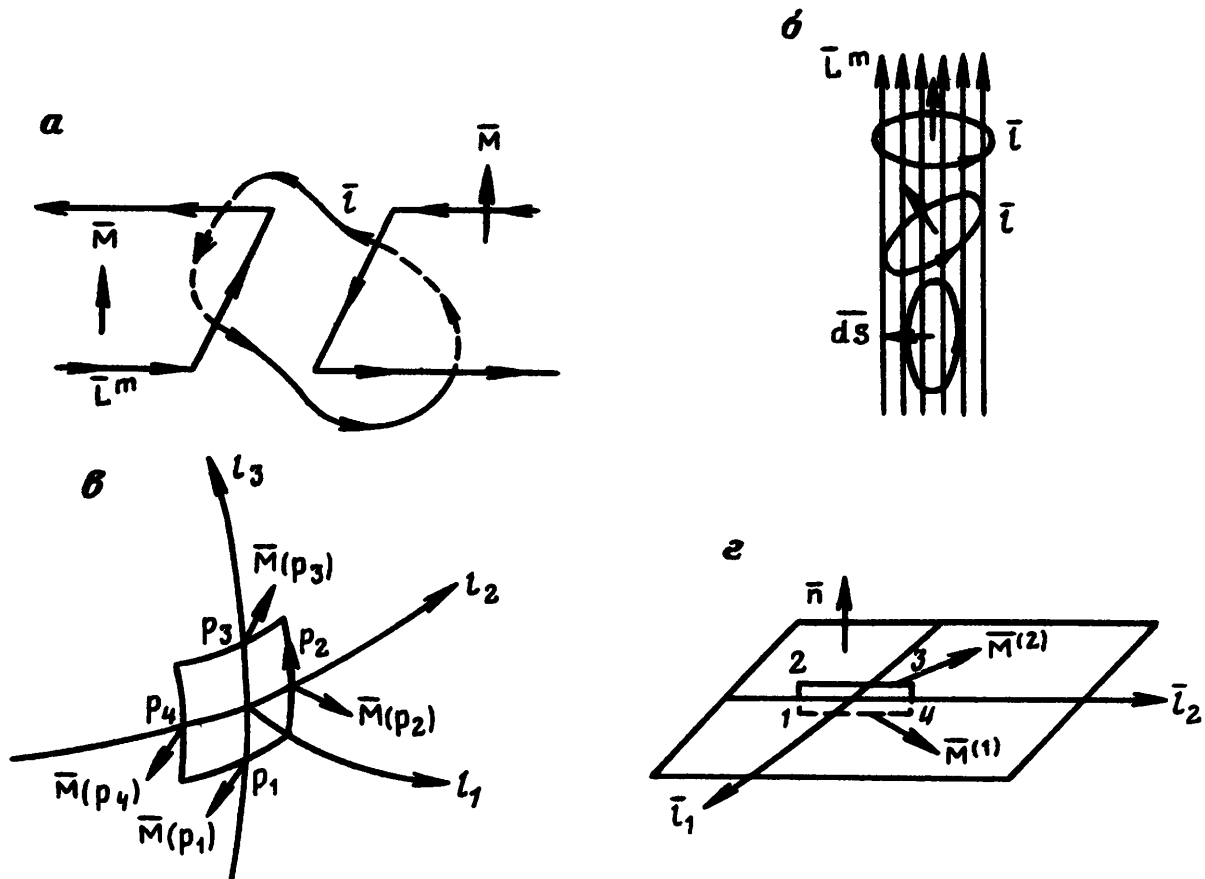


Рис. I.14. Напряжение и линии обрыва нормальных поверхностей (а); к определению понятия ротор (б); к выводу выражений: в — для ротора; з — для поверхностного ротора



$$V = \int_a^b \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{I.146})$$

по некоторому пути  $l$  от точки  $a$  до точки  $b$ .

Сделаем два замечания.

1. Обычно этот термин применяют для электрического и электромагнитного полей, но мы будем пользоваться им для всех векторных полей.

2. Как будет показано ниже, напряжение в общем случае зависит как от положения точек  $a$  и  $b$ , так и от конфигурации соединяющей их линии  $l$ . Однако имеется один вид поля, играющий очень важную роль в теории некоторых геофизических методов, для которого напряжение не зависит от формы пути.

Теперь попробуем определить напряжение на основе представлений о нормальных поверхностях. Вначале рассмотрим элемент  $d\mathbf{l}^m$  векторной линии. По определению он ортогонален нормальной поверхности  $S^m$ , и, соответственно, его направление совпадает с направлением нормали  $\mathbf{n}$ . Напряжение на этом отрезке

$$dV = M dl^m, \quad (\text{I.147})$$

так как угол между направлениями  $\mathbf{M}$  и  $d\mathbf{l}^m$  равен нулю.

В соответствии с изложенным в разделе I.5, число нормальных поверхностей, пересекающих отрезок  $d\mathbf{l}^m$ ,

$$dN_2 = \beta M dl^m. \quad (\text{I.148})$$

Из (I.147), (I.148) следует, что напряжение и число  $dN_2$  связаны равенством

$$dV = \frac{1}{\beta} dN_2 \quad (\text{I.149})$$

или

$$\mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}^m = M dl^m = \frac{dN_2}{\beta}.$$

Теперь определим напряжение на произвольно ориентированном элементарном отрезке  $d\mathbf{l}$  (см. рис. I.13, в). Так как отрезок  $d\mathbf{l}$  (с центром в точке  $p$ ) и его проекцию на векторную линию, проходящую через точку  $p$ , пересекает одно и то же число нормальных поверхностей, имеем

$$\begin{aligned} dN_2 &= \beta M dl^m = \beta M dl \cos(\mathbf{M}, d\mathbf{l}) = \\ &= \beta \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = \beta dV. \end{aligned} \quad (\text{I.150})$$

То есть и в этом случае напряжение характеризует число нормальных поверхностей, пересекающих элемент  $d\mathbf{l}$ . Из выражения (I.150) следует, что ориентация отрезка  $d\mathbf{l}$  существенно влияет на напряжение. Если, например,  $d\mathbf{l}$  — отрезок  $d\mathbf{l}^m$  векторной линии,

то его пересекает максимальное (при заданной длине отрезка) число нормальных поверхностей и напряжение также будет максимальным. Если отрезок  $d\mathbf{l}$  лежит на нормальной поверхности, то такие поверхности не пересекают его и напряжение на отрезке будет равно нулю. Наконец, если угол между направлениями  $d\mathbf{l}$  и  $d\mathbf{l}^m$  превышает  $90^\circ$ , то число пересечений отрезка  $d\mathbf{l}$  нормальными поверхностями и напряжение на этом отрезке становятся отрицательными. В частности, если направления элементарных отрезков  $d\mathbf{l}$  и  $d\mathbf{l}^m$  — противоположны, то напряжение будет отрицательным, но максимальным по абсолютной величине. Таким образом, при заданном положении центра отрезка в точке  $p$  изменение ориентации этого отрезка  $d\mathbf{l}$  приводит к изменению напряжения на  $d\mathbf{l}$ .

На основе равенства (I.146) в соответствии с (I.150) получаем для напряжения  $V$  на произвольном контуре  $l$

$$V = \int_a^b \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{\beta} N_2. \quad (\text{I.151})$$

Здесь  $N_2$  — число нормальных поверхностей поля  $\mathbf{M}$ , пересекающих путь  $l$ , при учете того, что знак вклада каждой такой поверхности  $S^m$  в  $N_2$  определяется взаимной ориентацией  $S^m$  и элемента пути  $d\mathbf{l}$ .

Как следует из выражения (I.151), изменение формы пути  $l$  не влияет на напряжение, если число поверхностей  $S^m$ , пересекающих линию  $l$ , остается постоянным.

Установив связь между напряжением и числом нормальных поверхностей, определим циркуляцию как напряжение по произвольному замкнутому контуру:

$$V = \oint_l \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}.$$

Аналогично тому, как это было при рассмотрении потока вектора через замкнутую поверхность, зададимся вопросом, характеризует ли циркуляция какие-либо существенные особенности поведения поля? Можно легко показать, что на этот вопрос следует ответить «да». Действительно, пусть одна нормальная поверхность  $S^m$  пересекает замкнутый контур  $l$ , а линия ее обрыва  $L^m$  не проходит через поверхность  $S$ , ограниченную контуром  $l$  (см. рис. I.13,  $z$ ). В этом случае нормальная поверхность дважды пересекает контур  $l$  так, что нормаль  $\mathbf{n}$  к ней в одной точке пересечения образует с отрезком  $d\mathbf{l}$  контура угол меньше  $90^\circ$ , а в другой точке — больше  $90^\circ$ .

Число пересечений контура такой нормальной поверхностью равно нулю и, поэтому, согласно (I.151), циркуляция также равна нулю. Обобщая этот вывод, можем высказать утверждение, что если внутри контура  $l$  (через некоторую ограничиваемую им по-

верхность) не проходят линии обрыва  $L^m$  нормальных поверхностей, то циркуляция  $\oint_l \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}$  равна нулю.

Теперь предположим, что линия обрыва нормальной поверхности пересекает поверхность  $S$ , ограниченную контуром  $l$ , причем имеется только одно такое пересечение. Тогда нормальная поверхность также один раз пересекает контур  $l$ , т. е. число пересечений контура  $l$  поверхностью  $S^m$  равно  $+1$  или  $-1$  (см. рис. I.14, *a*). Как было отмечено выше, знак такого пересечения определяется взаимной ориентацией линии обрыва  $L^m$  и направления обхода по контуру  $l$ . В этом случае циркуляция

$$\oint_l \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = \pm \frac{1}{\beta}.$$

Обобщая этот вывод для случая произвольного числа нормальных поверхностей, приходим к заключению, что циркуляция

$$\oint_l \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{\beta} N_2. \quad (\text{I.152})$$

Здесь  $N_2$  — суммарное число линий обрыва  $L^m$  нормальных поверхностей  $S^m$ , пронизывающих поверхность  $S$ , ограниченную контуром интегрирования  $l$ .

Сопроводим это равенство несколькими замечаниями.

1. Число  $N_2$  — алгебраическая сумма положительного и отрицательного слагаемых. Линии обрыва  $L^m$ , которые образуют правовинтовую систему с направлением обхода по контуру  $l$ , дают положительный, а линии, имеющие противоположные направления, — отрицательный вклад в эту сумму.

2. Так как линии обрыва  $L^m$  замкнуты, любую поверхность  $S$ , ограниченную данным контуром  $l$ , пересекает одно и то же число линий  $L^m$ .

3. Изменение положения (или формы, размеров) контура  $l$  [ $S$ ] не повлияет на циркуляцию, если при этом останется постоянным число линий обрыва  $L^m$ , пересекающих поверхность  $S$ . Подобное утверждение справедливо и в отношении потока вектора через замкнутую поверхность  $S$  [ $V$ ]. При перемещении или деформации  $S$  [ $V$ ] поток через эту поверхность не изменится, если число точек обрыва  $q_m$  векторных линий в области  $V$  сохранится постоянным.

4. Равенство (I.152) отражает очень важную связь, а именно то, что напряжение поля по замкнутому контуру (циркуляция) характеризует число линий обрыва нормальных поверхностей, пересекающих любую поверхность, ограниченную этим контуром.

Очевидно, что циркуляция в определенном смысле подобна потоку вектора через замкнутую поверхность, так как последний характеризует число точек обрыва  $q_m$  векторных линий в области, ограниченной этой поверхностью. Кроме того, как будет показано

в следующем разделе, линии обрыва  $L^m$  и точки обрыва  $q_m$  играют роль геометрических моделей двух типов возбудителей поля: вихрей и источников. Это основная причина, по которой обе величины

$$\oint_l \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} \quad \text{и} \quad \oint_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}$$

можно рассматривать, как наиболее фундаментальные понятия в теории поля.

Согласно (I.152), циркуляция по контуру  $l$  определяется числом линий обрыва  $L^m$ , пронизывающих поверхность  $S$ , ограниченную этим контуром, но она не несет информации о распределении линий  $L^m$ , характере изменения их плотности в пределах поверхности  $S$ . Поэтому введем еще одно понятие, пользуясь которым можно характеризовать плотность и направление этих линий. Естественно, что для этого (в отличие от случая, когда требовалось описать плотность точек обрыва  $q_m$ ) нужна векторная величина.

Пусть контур  $l$  ограничивает элементарную площадку  $dS$  (рис. I.14, б). Как всегда предполагаем, что направления обхода по контуру  $l$  и  $dS$  образуют правовинтовую систему. Также полагаем, что в пределах площадки  $dS$  направление и плотность линий обрыва  $L^m$  — постоянны. Как видно на рис. I.14, б, число линий  $L^m$ , пересекающих площадку  $dS$ , зависит от ее ориентации. Если, например, площадка  $dS$  с центром в точке  $p$  лежит в плоскости, касательной к линии  $L^m$  в точке  $p$ , то эти линии не пересекают  $dS$  и, в соответствии с (I.152), циркуляция по контуру  $l$  площадки  $dS$  равна нулю. Вращая контур  $l$  не меняя положения точки  $p$ , добьемся того, чтобы этот контур лежал в плоскости, ортогональной линии  $L^m$  в точке  $p$ , а направления  $d\mathbf{S} = dS \mathbf{n}$  и линии  $L^m$  в точке  $p$  были одинаковы. Очевидно, что при этом число линий  $L^m$ , пересекающих площадку  $dS$ , будет максимальным. Так как согласно (I.152) число линий  $L^m$ , пересекающих  $dS$ ,

$$N_2 = \beta \oint_l \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l},$$

то плотность этих линий

$$\frac{N_2}{dS} = \beta \frac{\oint_l \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}}{dS}. \quad (\text{I.153})$$

Чтобы охарактеризовать направление линий обрыва  $L^m$ , умножим обе части этого равенства на единичный вектор  $\mathbf{L}_0^m$  по направлению этих линий и тогда получим

$$\frac{N_2}{dS} \mathbf{L}_0^m = \beta \frac{\oint_l \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}}{dS} \mathbf{L}_0^m. \quad (\text{I.154})$$

Вектор, определяемый равенством (I.154), называется ротором:

$$\text{rot } \mathbf{M} = \frac{\oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}}{dS} \mathbf{L}_0^m \quad (\text{I.155})$$

или

$$\text{rot } \mathbf{M} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} \mathbf{L}_0^m$$

и характеризует плотность и направление линий  $L^m$  в окрестности точки  $p$ .

5. При выводе выражения (I.155) мы рассматривали циркуляцию по элементарному замкнутому контуру  $l$ , например, в форме окружности с центром в точке  $p$ . Однако это не означает, что векторные линии  $l^m$  в окрестности точки  $p$  также замкнуты и повторяют конфигурацию контура  $l$ .

6. Как и при рассмотрении дивергенции, целесообразно заменить громоздкую операцию интегрирования в правой части равенства (I.155) дифференцированием. Для этого введем вектор  $\mathbf{B}$ , компоненту которого по направлению любого единичного вектора  $\rho$  определяет выражение

$$B_\rho = \frac{1}{dS_\rho} \oint_l \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}. \quad (\text{I.156})$$

Здесь  $dS_\rho$  — элементарная площадка с центром в точке  $p$ , лежащая в плоскости, нормальной к  $\rho$ ;  $l$  — контур, ограничивающий эту площадку, направление обхода которого образует правовинтовую систему с направлением  $\rho$ . В частности, для компоненты вектора  $\mathbf{B}$  по координатному направлению  $l_k$  имеем

$$B_k = \frac{1}{dS_k} \oint_{l[dS_k]} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}, \quad (\text{I.157})$$

где  $dS_k$  — элементарная координатная площадка, ортогональная линии  $l_k$ , а  $l[dS_k]$  — контур этой площадки. Умножая каждую скалярную компоненту  $B_k$  на соответствующий единичный вектор и складывая векторные компоненты, получаем для вектора  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{B} = B_1 \mathbf{i}_1 + B_2 \mathbf{i}_2 + B_3 \mathbf{i}_3.$$

Очевидно, что компонента вектора  $\mathbf{B}$  по направлению этого вектора имеет максимальное значение, равное абсолютной величине  $|\mathbf{B}|$ . Поэтому при повороте площадки  $dS_\rho$  относительно точки  $p$  определяемая выражением (I.156) компонента  $B_\rho$  достигает максимального значения, равного  $|\mathbf{B}|$ , когда направление  $\rho$  совпадает с направлением  $\mathbf{B}$ . Вместе с тем, циркуляция в этом выражении,

согласно (I.152), определяется числом линий обрыва  $L^m$ , пронизывающих площадку  $dS_\rho$ , и ее значение максимально, когда вектор  $\rho$  направлен по касательной к такой линии. Иначе говоря — в этом случае площадка  $dS_\rho$  лежит в плоскости, ортогональной линии  $L^m$ , проходящей через точку  $\rho$ . Соответственно можем записать следующее выражение для вектора  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{B} = \frac{\oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}}{dS} \mathbf{L}_0^m.$$

При сравнении этого выражения с (I.155) видно, что

$$\text{rot } \mathbf{M} = \mathbf{B}, \quad (\text{I.158})$$

а компоненты этого вектора определяются в соответствии с (I.157).

Такая форма представления величины  $\text{rot } \mathbf{M}$  весьма удобна, так как мы получаем выражения для компонент этого вектора по координатным направлениям. Кроме того, при определении ротора при помощи выражений (I.157), (I.158) можно не пользоваться представлениями о нормальных поверхностях и линиях их обрыва и соответственно эти выражения для  $\text{rot } \mathbf{M}$  применимы для полей любого вида. Поэтому обычно  $\text{rot } \mathbf{M}$  и определяют выражением (I.157).

7. Теперь все подготовлено для того, чтобы определить  $\text{rot } \mathbf{M}$  при помощи производных. Вначале рассмотрим контур  $l$ , ограничивающий координатную площадку  $dS_1$  с нормалью вдоль координатной линии  $l_1$ , состоящий из двух пар элементарных координатных отрезков  $dl_2$  и  $dl_3$  (рис. I.14, в). Полагая, что среднее значение поля  $\mathbf{M}$  в пределах каждого такого отрезка можно заменить значением  $\mathbf{M}$  в центре отрезка, получаем следующее выражение для циркуляции по контуру  $l$ :

$$\begin{aligned} \oint_l \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = & \mathbf{M}(p_1) \cdot d\mathbf{l}(p_1) + \mathbf{M}(p_2) \cdot d\mathbf{l}(p_2) + \\ & + \mathbf{M}(p_3) \cdot d\mathbf{l}(p_3) + \mathbf{M}(p_4) \cdot d\mathbf{l}(p_4) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \oint_l \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = & M_2(p_1) dl_2(p_1) - M_2(p_3) dl_2(p_3) + \\ & + M_3(p_2) dl_3(p_2) - M_3(p_4) dl_3(p_4). \end{aligned} \quad (\text{I.159})$$

Так как расстояния между противоположными сторонами контура  $l$  бесконечно малы, разности в правой части (I.159) можем выразить при помощи первых производных. Тогда имеем

$$\oint_l \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{\partial (M_2 \cdot dl_2)}{\partial l_3} dl_3 + \frac{\partial (M_3 \cdot dl_3)}{\partial l_2} dl_2$$

или

$$\oint_l \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\partial (h_3 M_3)}{\partial x_2} dx_2 dx_3 - \frac{\partial (h_2 M_2)}{\partial x_3} dx_2 dx_3.$$

Согласно (I.157) компонента вектора  $\text{rot } \mathbf{M}$  по координатному направлению  $l_1$

$$\text{rot}_1 \mathbf{M} = \frac{1}{h_2 h_3} \left[ \frac{\partial h_3 M_3}{\partial x_2} - \frac{\partial h_2 M_2}{\partial x_3} \right], \quad (\text{I.160})$$

так как

$$dS_1 = h_2 h_3 dx_2 dx_3.$$

Применяя аналогичный подход, для двух других компонент  $\text{rot } \mathbf{M}$  получаем:

$$\begin{aligned} \text{rot}_2 \mathbf{M} &= \frac{1}{h_1 h_3} \left[ \frac{\partial h_1 M_1}{\partial x_3} - \frac{\partial h_3 M_3}{\partial x_1} \right], \\ \text{rot}_3 \mathbf{M} &= \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial h_2 M_2}{\partial x_1} - \frac{\partial h_1 M_1}{\partial x_2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{I.161})$$

Таким образом,  $\text{rot } \mathbf{M}$  в точке  $p$  определен при помощи шести производных по координатам этой точки.

Выражение для  $\text{rot } \mathbf{M}$  можно представить в более компактной форме:

$$\text{rot } \mathbf{M} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{i}_1 & h_2 \mathbf{i}_2 & h_3 \mathbf{i}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ h_1 M_1 & h_2 M_2 & h_3 M_3 \end{vmatrix}. \quad (\text{I.162})$$

Так же как при рассмотрении градиента и дивергенции, ротор можно выразить при помощи оператора набла, так как согласно (I.15), (I.39), (I.68), (I.162)

$$\text{rot } \mathbf{M} = \nabla \times \mathbf{M}.$$

Очевидно, что выражениями (I.60) — (I.162) можно пользоваться только в тех точках, которые не являются особыми для поля  $\mathbf{M}$  и в которых существуют производные поля.

Приведем выражения для компонент вектора  $\text{rot } \mathbf{M}$  в трех простейших системах координат.

1. Декартова система:

$$\begin{aligned} \text{rot}_x \mathbf{M} &= \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}, \\ \text{rot}_y \mathbf{M} &= \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x}, \end{aligned} \quad (\text{I.163})$$

$$\text{rot}_z \mathbf{M} = \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y}.$$

2. Цилиндрическая система:

$$\text{rot}_r \mathbf{M} = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial M_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial r M_\varphi}{\partial z} \right],$$

$$\text{rot}_\varphi \mathbf{M} = \frac{\partial M_r}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial r}, \quad (\text{I.164})$$

$$\text{rot}_z \mathbf{M} = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial r M_\varphi}{\partial r} - \frac{\partial M_r}{\partial \varphi} \right].$$

3. Сферическая система:

$$\text{rot}_R \mathbf{M} = \frac{1}{R \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta M_\varphi - \frac{\partial M_\theta}{\partial \varphi} \right],$$

$$\text{rot}_\theta \mathbf{M} = \frac{1}{R \sin \theta} \left[ \frac{\partial M_R}{\partial \varphi} - \sin \theta \frac{\partial R M_\varphi}{\partial R} \right], \quad (\text{I.165})$$

$$\text{rot}_\varphi \mathbf{M} = \frac{1}{R} \left[ \frac{\partial R M_\theta}{\partial R} - \frac{\partial M_R}{\partial \theta} \right].$$

8. Как было отмечено выше, в общем случае взаимная ориентация векторов  $\mathbf{M}$  и  $\text{rot } \mathbf{M}$  может быть произвольной и, соответственно, при этом нормальные поверхности  $S^m$  не могут служить для изучения поведения поля. Однако есть один вид поля  $\mathbf{M}$ , для которого эти векторы всюду взаимно перпендикулярны. Это условие выполняется, если поле может быть представлено в следующем виде:

$$\mathbf{M} = \varphi(p) \text{grad } U(p). \quad (\text{I.166})$$

Здесь  $\varphi(p)$  — скалярная дифференцируемая функция (поле).

Чтобы доказать, что вектор  $\mathbf{M}$ , определяемый выражением (I.166), и  $\text{rot } \mathbf{M}$  — взаимно перпендикулярны, достаточно показать, что

$$\mathbf{M} \cdot \text{rot } \mathbf{M} = 0.$$

Для этого воспользуемся равенством

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = -\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{b}), \quad (\text{I.167})$$

а также двумя другими равенствами:

$$\text{rot grad } U = 0 \quad (\text{I.168})$$

и

$$\text{rot}(\varphi \mathbf{a}) = \varphi \text{rot } \mathbf{a} + \text{grad } \varphi \times \mathbf{a}. \quad (\text{I.169})$$

Полагая в (I.169)  $\mathbf{a} = \text{grad } U$ , имеем



$$\operatorname{rot} \mathbf{M} = \operatorname{rot} (\varphi \operatorname{grad} U) = \varphi \operatorname{rot} \operatorname{grad} U + (\operatorname{grad} \varphi \times \operatorname{grad} U) .$$

Принимая во внимание выражения (I.166) и (I.168), получаем

$$\operatorname{rot} \mathbf{M} = \operatorname{grad} \varphi \times \operatorname{grad} U = \frac{1}{\varphi} \operatorname{grad} \varphi \times \mathbf{M} ,$$

откуда

$$\mathbf{M} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{M} = \frac{\mathbf{M}}{\varphi} \cdot (\operatorname{grad} \varphi \times \mathbf{M}) = - \frac{\operatorname{grad} \varphi}{\varphi} \cdot (\mathbf{M} \times \mathbf{M}) = 0 .$$

Таким образом, если поле  $\mathbf{M}$  удовлетворяет условию (I.166), то векторы  $\mathbf{M}$  и  $\operatorname{rot} \mathbf{M}$  — взаимно перпендикулярны. Такие поля называют квазипотенциальными и соответственно для квазипотенциального поля существует семейство нормальных поверхностей, ортогональных векторным линиям. В общем же случае — это не так и  $\operatorname{rot} \mathbf{M}$  определяют выражением (I.156). Вместе с тем любое поле всегда может быть представлено в виде суммы:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 .$$

Здесь  $\mathbf{M}_1$  — квазипотенциальное поле, а  $\mathbf{M}_2$  может быть представлено как ротор некоторого другого векторного поля.

Так как мы ставим перед собой цель — рассмотреть понятие ротор в возможно более общем смысле, то далее будем пользоваться представлениями о нормальных поверхностях и линиях их обрыва, помня при этом, что область применения таких представлений ограничена.

9. Выражения (I.162) и (I.156), определяющие ротор и его компоненту, очевидно позволяют описать одни и те же особенности поведения поля. В частности, в случае квазипотенциального поля при помощи этих выражений можно охарактеризовать плотность и направление линий обрыва  $L^m$ . Однако в тех точках, где компонента поля  $\mathbf{M}$  по некоторому направлению терпит разрыв и не существуют производные этой компоненты по соответствующим направлениям, выражение (I.162) для  $\operatorname{rot} \mathbf{M}$  теряет смысл. Как было отмечено выше, разрывы компонент поля часто наблюдаются на границах сред с разными значениями физических параметров. Чтобы получить возможность характеризовать распределение линий обрыва  $L^m$  на таких поверхностях  $S$  более просто, чем это можно сделать при помощи выражения (I.156), введем систему с координатными линиями  $l_1, l_2$ , лежащими на поверхности  $S$ , и  $l_3$  — по направлению нормали  $\mathbf{n}$ , как всегда ориентированной от оборотной стороны поверхности  $S$  к лицевой (рис. I.14,  $z$ ).

Вначале рассмотрим лежащий на координатной поверхности  $S_1$  элементарный контур  $l$  (прямоугольной формы) с центром в точке  $p$ . Очевидно, что циркуляция по этому контуру

$$\oint_l \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{M}^{(2)}(p_2) \cdot d\mathbf{l}(p_2) + \mathbf{M}^{(1)}(p_1) \cdot d\mathbf{l}(p_1) + \\ + \int_2^1 \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} + \int_4^3 \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}.$$

Здесь  $\mathbf{M}^{(2)}$  и  $\mathbf{M}^{(1)}$  — значения  $\mathbf{M}$  на лицевой и оборотной сторонах поверхности  $S$  соответственно.

Так как

$$\mathbf{M}^{(2)}(p_2) \cdot d\mathbf{l}(p_2) = -M_2^{(2)} dl_2,$$

$$\mathbf{M}^{(1)}(p_1) \cdot d\mathbf{l}(p_1) = M_2^{(1)} dl_2,$$

то, полагая, что компонента  $M_n$  имеет конечную величину, а длина сторон контура  $l$ , нормальных к поверхности  $S$ , стремится к нулю, получаем

$$\oint_l \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = - (M_2^{(2)} - M_2^{(1)}) dl_2. \quad (\text{I.170})$$

Согласно (I.152) это выражение характеризует число линий обрыва  $L^m$ , пересекающих элемент  $dl_2$  координатной линии  $l_2$ . Соответственно, плотность этих линий прямо пропорциональна отношению

$$\frac{\oint_l \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}}{dl_2} = - (M_2^{(2)} - M_2^{(1)}). \quad (\text{I.171})$$

Подобно этому, плотность линий  $L^m$ , пересекающих элемент  $dl_1$  координатной линии  $l_1$ , пропорциональна

$$\frac{\oint_l \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}}{dl_1} = M_1^{(2)} - M_1^{(1)}. \quad (\text{I.172})$$

Соответственно вектор, определяющий плотность и направление линий обрыва  $L^m$  на поверхности  $S$ , можно выразить в виде суммы:

$$\text{Rot } \mathbf{M} = (-M_2^{(2)} + M_2^{(1)}) \mathbf{i}_1 + (M_1^{(2)} - M_1^{(1)}) \mathbf{i}_2 \quad (\text{I.173})$$

и называется он поверхностным ротором вектора  $\mathbf{M}$ , так как является поверхностным аналогом вектора  $\text{rot } \mathbf{M}$ .

Выражение для  $\text{Rot } \mathbf{M}$  можно также записать в виде

$$\text{Rot } \mathbf{M} = \mathbf{n} \times (\mathbf{M}^{(2)} - \mathbf{M}^{(1)}), \quad (\text{I.174})$$

где  $\mathbf{M}^{(2)}$  и  $\mathbf{M}^{(1)}$  — значения  $\mathbf{M}$  по разные стороны поверхности  $S$ , а  $\mathbf{n}$  — единичная нормаль к этой поверхности.

Выражение (I.174) следует из формулы (I.15) для векторного произведения  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ , если положить  $\mathbf{a} = \mathbf{n}$ , т. е.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{n} \\ 0 & 0 & 1 \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Согласно (I.174), плотность линий обрыва  $L^m$  на поверхности  $S$  определяется разностями значений тангенциальных компонент поля по разные стороны этой поверхности. В частности, в тех точках поверхности  $S$ , где эти компоненты непрерывны, плотность линий  $L^m$  согласно (I.171), (I.172) равна нулю.

Обобщим полученные результаты для случая произвольного поля  $\mathbf{M}$ . Для этого представим выражение (I.156) в виде

$$B_n = \text{rot}_n \mathbf{M} = \frac{1}{dS} \oint_l \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}, \quad (\text{I.175})$$

где  $\mathbf{n}$  — единичная нормаль к элементарной площадке  $dS$  ( $d\mathbf{S} = dS \mathbf{n}$ ). Так как

$$B_n = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \quad \text{или} \quad \text{rot}_n \mathbf{M} = \mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{M},$$

имеем

$$dS \mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{M} = d\mathbf{S} \cdot \text{rot} \mathbf{M} = \oint_l \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}. \quad (\text{I.176})$$

Левая часть равенства (I.176) — это поток вектора  $\text{rot} \mathbf{M}$  через элементарную площадку  $dS$ , т. е. она характеризует число векторных линий поля  $\mathbf{V} = \text{rot} \mathbf{M}$ , пронизывающих  $dS$ . Вместе с тем согласно (I.176) циркуляция вектора  $\mathbf{M}$  по контуру  $l$  площадки  $dS$  также определяет это число векторных линий поля  $\mathbf{V}$ . Иными словами, циркуляция вектора  $\mathbf{M}$  по контуру  $l$ , ограничивающему элементарную площадку  $dS$ , равна потоку вектора  $\text{rot} \mathbf{M}$  через эту площадку. Очевидно, что равенство (I.176) справедливо при любой ориентации площадки  $dS$  относительно вектора  $\text{rot} \mathbf{M}$ .

Если применить полученное соотношение к поверхностному аналогу  $\text{Rot} \mathbf{M}$  вектора  $\text{rot} \mathbf{M}$ , то можно сказать, что в общем случае выражение (I.174) характеризует плотность и направление векторных линий поля  $\text{rot} \mathbf{M}$  на поверхности  $S$ .

Таким образом, нами получены три выражения, характеризующие распределение как линий обрыва  $L^m$  нормальных поверхностей квазипотенциального поля  $\mathbf{M}$ , так и, в общем случае, — векторных линий поля  $\mathbf{V} = \text{rot} \mathbf{M}$ :

$$\oint_l \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{\beta} N_2,$$

$$\text{rot} \mathbf{M} = \frac{\oint_l \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}}{dS} \mathbf{t}_0, \quad (\text{I.177})$$

$$\text{Rot} \mathbf{M} = \mathbf{n} \times (\mathbf{M}^{(2)} - \mathbf{M}^{(1)}).$$

Здесь  $t_0$  — единичный вектор по направлению векторной линии поля  $\mathbf{V}$ .

Не будем забывать о следующем. В первом из выражений (I.177)  $l$  — произвольный замкнутый контур, циркуляция по которому определяет число векторных линий поля  $\mathbf{V} = \text{rot } \mathbf{M}$ , пересекающих любую поверхность  $S$ , ограниченную этим контуром. Вместе с тем эта циркуляция не дает сведений о том, как именно распределены в пределах такой поверхности векторные линии. В частности, циркуляция может быть равна нулю, даже если имеются векторные линии поля  $\mathbf{V}$ , пронизывающие поверхность  $S$ . Это происходит, когда числа положительных и отрицательных проходов векторными линиями поверхности  $S$  одинаковы.

Во втором из выражений  $l$  — контур элементарной площадки  $dS$ , лежащей в плоскости, перпендикулярной единичному вектору  $t_0$ . Соответственно  $\text{rot } \mathbf{M}$  характеризует плотность и направление своих векторных линий.

Наконец, третье выражение описывает распределение этих линий на поверхности  $S$ . Как это делалось в предыдущем разделе, будет естественным задаться следующим вопросом. Почему мы столько внимания уделяем вопросу о распределении векторных линий поля  $\text{rot } \mathbf{M}$ ? Оказывается, что ответ очень прост, и в следующем разделе мы покажем, что эти линии позволяют наглядно представить распределение возбудителей поля второго типа, называемых вихрями.

11. Теперь докажем вторую теорему, играющую очень важную роль в теории полей. Начнем со случая, когда поле  $\mathbf{M}$  — квазипотенциальное, и рассмотрим скалярное произведение

$$\text{rot } \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}.$$

Здесь  $d\mathbf{S}$  — элементарная площадка, произвольно ориентированная относительно направления вектора  $\text{rot } \mathbf{M}$ . Согласно (I.154), (I.155) это произведение (при  $\beta = 1$  численно) равно числу линий обрыва  $L^m$ , пересекающих площадку  $dS$ . Тогда суммарное число линий  $L^m$ , пронизывающих произвольную поверхность  $S$ , равно интегралу

$$\int_S \text{rot } \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}. \quad (\text{I.178})$$

С другой стороны, это же число линий обрыва  $L^m$  определяет циркуляция вектора  $\mathbf{M}$  по контуру  $l$  этой поверхности  $S$

$$\oint_l \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}. \quad (\text{I.179})$$

Поэтому получаем

$$\int_S \text{rot } \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = \oint_l \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}. \quad (\text{I.180})$$

Здесь предполагается, что направления нормали к поверхности  $S$  и обхода по контуру  $l$  образуют правовинтовую систему. Таким образом, мы доказали теорему Стокса для квазипотенциальных полей, которая устанавливает связь между значениями векторного поля в точках поверхности  $S$  и ограничивающего ее контура.

Покажем, что теорема Стокса остается справедливой в случае произвольного поля  $M$ . Для этого представим произвольную поверхность  $S$  как совокупность элементарных площадок  $dS_i$ , ограниченных контурами  $l_i$ . Согласно (I.176) имеем

$$dS_i \cdot \text{rot } M = \oint_{l_i} M \cdot dl. \quad (\text{I.181})$$

Суммируя левые и правые части таких равенств для всех площадок  $dS_i$  и принимая во внимание, что интегрирование по всем внутренним участкам контуров  $l_i$ , не принадлежащим контуру поверхности  $S$ , выполняется дважды, при противоположных направлениях  $dl$ , мы снова получаем выражение (I.180):

$$\int_S \text{rot } M \cdot dS = \oint_l M \cdot dl, \quad (\text{I.182})$$

которое справедливо для любого векторного поля  $M$ . Это — теорема Стокса. Не вызывает сомнений, что теоремы Гаусса и Стокса являются основными в теории полей, применяемых в геофизике, и при их помощи получены многие важные в этой теории соотношения.

Следует заметить, что обе эти теоремы применимы в тех точках пространства, которые не являются особыми для поля  $M$ . Если же требуется рассмотреть поведение поля  $M$  на особой поверхности, то вместо производных  $\text{rot } M$  и  $\text{div } M$  пользуются их поверхностными аналогами, определяемыми при ограниченных значениях  $M$  в соответствии с (I.136), (I.173).

## 1.8. ДВА ТИПА ПОЛЕЙ И ИХ ВОЗБУДИТЕЛИ, УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ

В последних двух разделах мы ввели  $\text{div } M$  и  $\text{rot } M$  в качестве величин, позволяющих характеризовать распределение соответственно точек обрыва векторных линий и линий обрыва нормальных поверхностей квазипотенциального поля.

Ниже будет показано, что эти величины имеют фундаментальное значение в теории векторных полей. Для этого вначале рассмотрим случай квазипотенциального поля  $M$ :

$$M = \varphi(p) \text{grad } U(p). \quad (\text{I.183})$$

Здесь  $\varphi(p)$  и  $U(p)$  — непрерывные скалярные поля.

В соответствии с выражениями (I.137), (I.177) можем записать:

$$\oint_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = Q_*, \quad \operatorname{div} \mathbf{M} = Q, \quad \operatorname{Div} \mathbf{M} = Q_S, \quad (\text{I.184})$$

$$\oint_l \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = W_*, \quad \operatorname{rot} \mathbf{M} = \mathbf{W}, \quad \operatorname{Rot} \mathbf{M} = \mathbf{W}_S.$$

Здесь  $Q_*$ ,  $Q$ ,  $Q_S$  и  $W_*$ ,  $\mathbf{W}$ ,  $\mathbf{W}_S$  — скалярные и векторные функции, описывающие распределение точек обрыва  $q_m$  и линий обрыва  $L^m$ . Рассмотрим выражения (I.184) с двух противоположных точек зрения. Вначале допустим, что поле  $\mathbf{M}$  всюду известно, и требуется найти те места, где по какой-либо причине векторные линии  $l^m$  имеют точки обрыва  $q_m$  или нормальные поверхности  $S^m$  имеют линии обрыва  $L^m$ . Для любой точки, в которой существуют первые производные поля  $\mathbf{M}$ , это можно сделать путем расчета  $\operatorname{div} \mathbf{M}$  и  $\operatorname{rot} \mathbf{M}$ , так как

$$Q(p) = \operatorname{div} \mathbf{M}(p) \quad \text{и} \quad \mathbf{W}(p) = \operatorname{rot} \mathbf{M}(p), \quad (\text{I.185})$$

а для особых поверхностей, на которых какие-либо компоненты поля терпят конечный разрыв,

$$Q_S = M_n^{(2)} - M_n^{(1)} \quad \text{и} \quad \mathbf{W}_S = \mathbf{n} \times (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1). \quad (\text{I.186})$$

Конечно, вместо (I.185), (I.186) можно воспользоваться интегральными формами этих выражений

$$Q_* = \oint_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} \quad \text{и} \quad W_* = \oint_l \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}. \quad (\text{I.187})$$

Действительно, выбирая бесконечно малый объем, ограниченный замкнутой поверхностью  $S$ , а также соответствующий элементарный замкнутый контур  $l$ , тоже можем определить распределение точек  $q_m$  и линий  $L^m$ .

Таким образом, согласно (I.185) — (I.187), величины  $\operatorname{div} \mathbf{M}$  и  $\operatorname{rot} \mathbf{M}$ , как и  $\oint_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}$  и  $\oint_l \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}$ , можно рассматривать в качестве «индикаторов» тех мест, где расположены точки обрыва  $q_m$  и линии обрыва  $L^m$ , которые характеризуют также распределение этих точек и линий. Это — один подход к истолкованию выражений (I.184), и становится вполне понятной причина, по которой введены понятия дивергенции и ротора. Однако рассмотрим выражения (I.184) и с другой точки зрения.

Пусть заданы точки обрыва  $q_m$  векторных линий и линии обрыва  $L^m$  нормальных поверхностей, т. е.  $Q_*$ ,  $Q$ ,  $Q_S$  и  $W_*$ ,  $\mathbf{W}$ ,  $\mathbf{W}_S$  — известные функции. Тогда в точках, которые не являются особыми для поля  $\mathbf{M}$  и в которых существуют производные поля  $\mathbf{M}$ , будем рассматривать равенства

$$\operatorname{rot} \mathbf{M} = \mathbf{W} \quad \text{и} \quad \operatorname{div} \mathbf{M} = Q \quad (\text{I.188})$$

как уравнения для неизвестного поля  $\mathbf{M}$ .

На особых поверхностях поля  $\mathbf{M}$  вместо уравнений (I.188) имеем их поверхностные аналоги:

$$\text{Rot } \mathbf{M} = \mathbf{W}_s \quad \text{и} \quad \text{Div } \mathbf{M} = Q_s. \quad (\text{I.189})$$

Согласно (I.184), можем также представить уравнения для неизвестного поля  $\mathbf{M}$  в третьей (интегральной) форме:

$$\oint_l \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = W_* \quad \text{и} \quad \oint_s \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = Q_*. \quad (\text{I.190})$$

Левые и правые части уравнений (I.188), (I.189) описывают поведение поля  $\mathbf{M}$  и функций  $Q$ ,  $\mathbf{W}$  в окрестности одной и той же точки пространства, а уравнения (I.190) связывают значения функций  $\mathbf{M}$ ,  $W_*$  и  $\mathbf{M}$ ,  $Q_*$  в разных точках. Существенно также то, что последние уравнения не содержат производных и могут применяться при наличии особых точек поля  $\mathbf{M}$ .

При рассмотрении первого подхода к выражениям (I.184) мы видели, что определение плотности точек  $q_m$  и линий  $L^m$ , а также ориентации последних требует дифференцирования поля  $\mathbf{M}$ , и, если поле  $\mathbf{M}$  известно, то решение этой задачи не вызывает затруднений. Ситуация будет совсем другой, когда требуется найти поле  $\mathbf{M}$  в предположении, что функции  $\mathbf{W}$  и  $Q$  известны.

Обратимся сначала к уравнениям (I.188) и поставим три следующих вопроса.

1. Как решать эти уравнения?
2. Каков смысл правых частей уравнений (I.188), (I.189)?
3. Однозначно ли определяет поле  $\mathbf{M}$  эта система уравнений?

Ответ на первый вопрос в большей степени относится к предмету математической физики и выходит за рамки этой книги. Однако в следующих главах будет приведено несколько примеров, показывающих решение этого вопроса. Поэтому здесь ограничимся лишь кратким описанием подхода к решению этих уравнений. Согласно (I.188), мы имеем четыре дифференциальных уравнения с частными производными первого порядка. Действительно, в соответствии с (I.129), (I.160), (I.161) в ортогональной системе координат эта система уравнений может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial h_3 M_3}{\partial x_2} - \frac{\partial h_2 M_2}{\partial x_3} \right\} &= W_1, \\ \frac{1}{h_1 h_3} \left\{ \frac{\partial h_1 M_1}{\partial x_3} - \frac{\partial h_3 M_3}{\partial x_1} \right\} &= W_2, \\ \frac{1}{h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial h_2 M_2}{\partial x_1} - \frac{\partial h_1 M_1}{\partial x_2} \right\} &= W_3, \end{aligned} \quad (\text{I.191})$$

$$\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial h_2 h_3 M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial h_1 h_3 M_2}{\partial x_2} - \frac{\partial h_1 h_2 M_3}{\partial x_3} \right\} = Q.$$

Если имеется особая поверхность  $S$  поля  $M$ , где поле  $M$  терпит разрыв, то согласно (I.189)

$$\begin{aligned} M_{i_2}^{(2)} - M_{i_2}^{(1)} &= -W_{1S}, & M_{i_1}^{(2)} - M_{i_1}^{(1)} &= W_{2S}, \\ M_n^{(2)} - M_n^{(1)} &= Q_S. \end{aligned} \quad (\text{I.192})$$

Следовательно, на этой поверхности имеем линейные уравнения для неизвестных значений тангенциальной и нормальной компонент поля по обе стороны поверхности с заданными функциями  $W_S(p)$  и  $Q_S(p)$ .

Рассмотрим второй вопрос. Вначале предположим, что во всем пространстве отсутствуют точки обрыва  $q_m$  и линии обрыва  $L^m$ , т. е.

$$\text{rot } M = 0, \quad \text{div } M = 0 \quad (\text{I.193})$$

и

$$\text{Rot } M = 0, \quad \text{Div } M = 0. \quad (\text{I.194})$$

Левые части в уравнениях (I.193) довольно сложные, но, оказывается, что найти поле  $M$ , удовлетворяющее системе уравнений (I.193), (I.194), удивительно легко.

Действительно, так как

$$\text{rot } M = 0 \quad \text{и} \quad \text{Rot } M = 0, \quad (\text{I.195})$$

то отсутствуют незамкнутые нормальные поверхности, имеющие линии обрыва  $L^m$ . Нет также замкнутых векторных линий  $l^m$ . Если бы была хоть одна такая линия, то циркуляция  $\oint_l M \cdot dl$  по этой

линии не могла быть равна нулю, так как на этой линии векторы  $M$  и  $dl$  имеют одинаковое направление, и по определению  $\text{rot } M$  и  $\text{Rot } M$  не были бы всюду равны нулю.

Из уравнений

$$\text{div } M = 0 \quad \text{и} \quad \text{Div } M = 0 \quad (\text{I.196})$$

прямо следует, что отсутствуют разомкнутые векторные линии  $l^m$ , ограниченные точками обрыва  $q_m$ . Также можно сделать вывод, что не существуют и замкнутые нормальные поверхности  $S^m$ . Если бы такие поверхности имелись, то потоки вектора  $M$  через эти поверхности не были бы равны нулю, так как в каждой точке поверхности  $S^m$  направления нормали  $n$  и вектора  $M$  одинаковы. Это означало бы, что где-то в области пространства, ограниченной нормальной поверхностью, есть точки обрыва векторных линий, что противоречит уравнениям (I.196).

Представим результаты этого анализа ниже.



## Уравнения

$$\text{rot } \mathbf{M} = 0$$

$$\text{div } \mathbf{M} = 0$$

$$\text{Rot } \mathbf{M} = 0$$

$$\text{Div } \mathbf{M} = 0$$

нет замкнутых векторных  
линий

нет разомкнутых векторных  
линий

нет незамкнутых нормальных  
поверхностей

нет замкнутых нормальных  
поверхностей

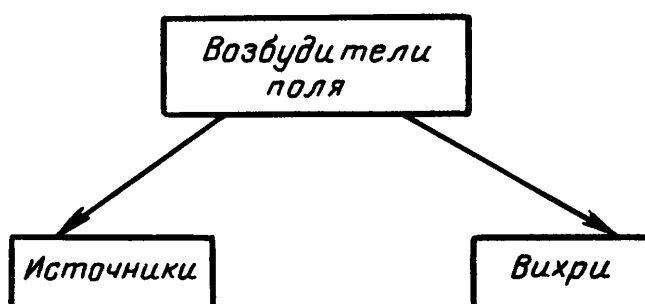
Очевидно, что те же выводы можно сделать на основе интегральной формы уравнений (I.193), (I.194):

$$\oint_l \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad \text{и} \quad \oint_s \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (\text{I.197})$$

Так как можно представить себе векторные линии и нормальные поверхности только двух типов: незамкнутые и замкнутые, то из вывода видно, что поле  $\mathbf{M}$ , во всем пространстве удовлетворяющее системе уравнений (I.193), (I.194), должно быть всюду равно нулю. Иначе говоря, если бы поле  $\mathbf{M}$  не было всюду равно нулю, то были бы места, где находились или точки обрыва  $q_m$  векторных линий, или линии обрыва  $L^m$  нормальных поверхностей, или те и другие, т. е. при отсутствии точек  $q_m$  или линий  $L^m$  поле существовать не может. Принимая во внимание, что создавать поле могут только его возбудители (заряды, токи, давления и т. д.), приходим к выводу, что эти возбудители находятся в тех местах, где имеются точки обрыва векторных линий и линии обрыва нормальных поверхностей. По существу, можно сказать, что эти точки и линии были введены для наглядного представления возбудителей поля. Становится очевидным и смысл системы уравнений (I.193), (I.194). Так как поле  $\mathbf{M}$ , удовлетворяющее во всем пространстве этой системе уравнений, не имеет возбудителей, оно, естественно, равно нулю:

$$\mathbf{M} = 0. \quad (\text{I.198})$$

Сделаем еще один шаг и проведем различие между двумя типами возбудителей поля, называемых источниками и вихрями (вихревыми линиями):

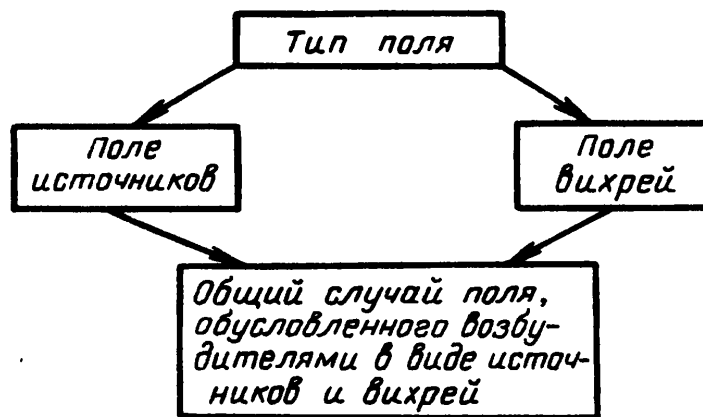


Источники — это такой тип возбудителей поля, распределение которых может быть описано при помощи точек обрыва векторных

линий. Классическими примерами источников являются гравитационные массы и электрические заряды.

Вихри — второй тип возбудителей поля, и в случае квазипотенциального поля их можно представить при помощи линий обрыва нормальных поверхностей, причем эти линии расположены в некоторых кольцевидных областях пространства. В отличие от возбудителей первого типа вихри характеризуются абсолютной величиной и направлением. Электрический ток и изменение магнитного поля со временем являются хорошо известными примерами вихрей.

Будет естественным предположить, что возбудители каждого типа порождают поля со своими характерными особенностями и поэтому целесообразно рассматривать эти поля по отдельности. В зависимости от типа возбудителей будем называть поле полем источников (безвихревым) или полем вихрей (чисто вихревым):



Вернемся теперь к уравнениям (I.188), (I.190). Учитывая важность этих уравнений, запишем их снова в виде единой системы:

$$а) \oint_l \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = W_*, \quad \oint_s \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = Q_*,$$

$$б) \operatorname{rot} \mathbf{M} = \mathbf{W}, \quad \operatorname{div} \mathbf{M} = Q, \quad (I.199)$$

$$\operatorname{Rot} \mathbf{M} = \mathbf{W}_s, \quad \operatorname{Div} \mathbf{M} = Q_s.$$

Функции  $W_*$ ,  $W$ ,  $W_s$  и  $Q_*$ ,  $Q$ ,  $Q_s$  в правых частях этих уравнений описывают возбудители поля  $\mathbf{M}$ , а в левых частях — поле  $\mathbf{M}$ , обусловленное этими возбудителями, или его производные. Какое соотношение может быть более естественным, чем связь между причиной и следствием? И это — основная причина, по которой равенства (I.199) называют системой уравнений поля в интегральной (а) и дифференциальной (б) формах.

В начале этого раздела мы предполагали, что поле  $\mathbf{M}$  — квазипотенциальное, т. е.

$$\mathbf{M}(p) = \varphi(p) \operatorname{grad} U(p), \quad (I.200)$$

и система уравнений (I.199) получена на основе представлений о точках обрыва векторных линий, а также — линиях обрыва нормальных поверхностей.

Прежде, чем мы покажем, что эта система уравнений остается справедливой для любого поля  $\mathbf{M}$ , определим величины, характеризующие распределение возбудителей квазипотенциального поля, как функции  $\varphi(\rho)$  и  $\mathbf{P}(\rho)$ , где

$$\mathbf{P} = \text{grad } U. \quad (\text{I.201})$$

Принимая во внимание, что

$$\text{rot } \mathbf{M} = \text{rot } \varphi \mathbf{P} = \varphi \text{rot } \mathbf{P} - \mathbf{P} \times \text{grad } \varphi = -\mathbf{P} \times \text{grad } \varphi, \quad (\text{I.202})$$

так как

$$\text{rot } \mathbf{P} = \text{rot grad } U = 0,$$

и

$$\text{div } \mathbf{M} = \text{div } \varphi \mathbf{P} = \varphi \text{div } \mathbf{P} + \mathbf{P} \cdot \text{grad } \varphi,$$

получаем, что с точностью до постоянного множителя возбудители поля  $\mathbf{M}$  в точках, не являющихся особыми для этого поля, определяются выражениями

$$\mathbf{W} = -\mathbf{P} \times \text{grad } \varphi, \quad (\text{I.203})$$

$$Q = \varphi \text{div } \mathbf{P} + \mathbf{P} \cdot \text{grad } \varphi.$$

Анализ выражений (I.202), (I.203) позволяет сделать следующие выводы.

1. Поле  $\mathbf{P}$ , являющееся градиентом скаляра  $U$ , — классический пример безвихревого поля и его часто называют потенциальным.

2. Вихри поля  $\mathbf{M}$  могут находиться лишь в тех точках, где векторы  $\mathbf{P}$  и  $\text{grad } \varphi$  не коллинеарны.

3. Источники квазипотенциального поля в общем случае могут быть двух типов. Источники первого типа появляются там же, где существуют источники потенциального поля  $\mathbf{P}$ , если  $\varphi(\rho) \neq 0$ , а источники второго типа — в тех местах, где вектор  $\mathbf{P}$  не перпендикулярен вектору  $\text{grad } \varphi$ . Конечно, источники двух типов могут присутствовать как в разных, так и в одних и тех же точках. В частности, они могут взаимно нейтрализоваться, и если где-то

$$\varphi \text{div } \mathbf{P} = -\mathbf{P} \cdot \text{grad } \varphi,$$

то там суммарная плотность источников равна нулю.

Теперь рассмотрим распределение возбудителей квазипотенциального поля в виде поверхностных источников и вихрей.

Так как

$$\text{Rot } \mathbf{M} = \mathbf{n} \times (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1) = \mathbf{n} \times (\varphi_2 \mathbf{P}_2 - \varphi_1 \mathbf{P}_1),$$

имеем

$$\text{Rot } \mathbf{M} = \mathbf{n} \times \frac{1}{2} \{(\varphi_2 - \varphi_1)(\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_1) + (\varphi_2 + \varphi_1)(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)\},$$

где  $\varphi_2$ ,  $\mathbf{P}_2$  и  $\varphi_1$ ,  $\mathbf{P}_1$  — значения  $\varphi$  и  $\mathbf{P}$  соответственно на лицевой

и оборотной сторонах особой поверхности  $S$ , причем, согласно условию, принятому при выводе выражения (I.173), полагаем, что величины  $\varphi$  и  $P$  на  $S$  ограничены.

Принимая во внимание выражение (I.201), можем показать, что тангенциальная компонента потенциального поля  $P$  непрерывна, т. е.

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) = 0.$$

Таким образом, функция, определяющая поверхностные вихри,

$$\mathbf{W}_S = \mathbf{n} \times \frac{1}{2} \{(\varphi_2 - \varphi_1)(\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_1)\} = (\varphi_2 - \varphi_1) \mathbf{n} \times \mathbf{P}^{\text{cp}}$$

или

$$\mathbf{W}_S = -\mathbf{P}^{\text{cp}} \times \text{Grad } \varphi. \quad (\text{I.204})$$

Здесь

$$\mathbf{P}^{\text{cp}} = (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)/2$$

— среднее из значений потенциального поля  $P$  на двух сторонах поверхности  $S$ .

Аналогично для поверхностных источников

$$\begin{aligned} \text{Div } \mathbf{M} &= M_n^{(2)} - M_n^{(1)} = \varphi_2 P_n^{(2)} - \varphi_1 P_n^{(1)} = \\ &= \frac{1}{2} \left[ (\varphi_2 - \varphi_1)(P_n^{(2)} + P_n^{(1)}) + (\varphi_2 + \varphi_1)(P_n^{(2)} - P_n^{(1)}) \right] \end{aligned}$$

или

$$Q_S = \mathbf{P}^{\text{cp}} \cdot \text{Grad } \varphi + \varphi^{\text{cp}} \text{Div } \mathbf{P}, \quad (\text{I.205})$$

где

$$\varphi^{\text{cp}} = (\varphi_1 + \varphi_2)/2.$$

Очевидно, что формулы (I.204), (I.205) очень похожи на равенства (I.203) для объемных возбудителей поля, поэтому так же, как при рассмотрении последних, сопроводим выражения (I.204), (I.205) несколькими замечаниями.

1. Поверхностные вихри имеются на тех участках поверхности  $S$ , на которых поле  $\varphi(p)$  терпит разрыв, а тангенциальная компонента потенциального поля  $\mathbf{M}$  не равна нулю.

2. В общем случае на  $S$  могут быть поверхностные источники двух типов. Источники первого типа возникают там же, где находятся поверхностные источники потенциального поля  $P$ , если  $\varphi_1 \neq -\varphi_2$ . Источники второго типа появляются там, где поле  $\varphi(p)$  терпит разрыв на поверхности  $S$ , а среднее значение нормальной компоненты поля  $P$  на разных сторонах поверхности  $S$  не равно нулю.

Приведем конкретный пример квазипотенциального поля. В соответствии с законом Ома (в дифференциальной форме) векторы

плотности тока  $\mathbf{j}(p)$  и напряженности электрического поля  $\mathbf{E}(p)$  связаны равенством

$$\mathbf{j}(p) = \gamma(p) \mathbf{E}(p),$$

где  $\gamma(p)$  — удельная электропроводность среды, в общем случае зависящая от положения точки  $p$ . Так как (постоянное) электрическое поле  $\mathbf{E}$ , создаваемое не меняющимися со временем зарядами, — потенциальное ( $\mathbf{E} = -\text{grad } U$ ), то

$$\mathbf{j}(p) = -\gamma(p) \text{grad } U.$$

При сравнении этого выражения с (I.200) видно, что постоянное поле  $\mathbf{j}(p)$  — квазипотенциальное.

Как уже было отмечено, при получении системы уравнений (I.199) мы пользовались представлениями не только о векторных линиях, но и о нормальных поверхностях поля  $\mathbf{M}$ , и, соответственно, область применения этой системы ограничена случаем квазипотенциального поля. Обобщим полученные результаты, показав, что система уравнений (I.199) справедлива для любого поля  $\mathbf{M}$ . Для этого полностью отбросим понятие «нормальные поверхности», но будем пользоваться представлениями о векторных линиях. Наша задача — показать, что при любом виде поля  $\mathbf{M}$  правые части уравнений (I.199) являются характеристиками возбудителей поля.

Применим тот же подход, что и в случае квазипотенциального поля. Предположим, что во всех точках пространства, не являющихся особыми, и на особых поверхностях  $S$  поле  $\mathbf{M}$  удовлетворяет следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{M} &= 0, & \text{div } \mathbf{M} &= 0, \\ \text{Rot } \mathbf{M} &= 0, & \text{Div } \mathbf{M} &= 0. \end{aligned} \tag{I.206}$$

Из уравнений

$$\text{rot } \mathbf{M} = 0 \quad \text{и} \quad \text{Rot } \mathbf{M} = 0,$$

а также теоремы Стокса следует, что циркуляция вектора  $\mathbf{M}$  по любому контуру  $l$  равна нулю:

$$\oint_l \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

Так как в каждой точке векторной линии векторы  $\mathbf{M}$  и  $d\mathbf{l}^m$  направлены одинаково, то, если  $d\mathbf{l}$  — элемент такой линии, имеем

$$\mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} > 0,$$

откуда следует, что рассматриваемое поле  $\mathbf{M}$  не имеет замкнутых векторных линий.

Вместе с тем, в соответствии с уравнениями

$$\text{div } \mathbf{M} = 0 \quad \text{и} \quad \text{Div } \mathbf{M} = 0,$$

векторные линии этого поля не могут быть разомкнутыми, так как они не имеют точек обрыва.

Итак, мы убедились, что поле  $M$ , удовлетворяющее уравнениям (I.206), не имеет ни замкнутых, ни разомкнутых векторных линий, а это просто означает, что поле  $M$  всюду равно нулю. Это снова заставляет нас сделать вывод, что если во всех точках пространства функции  $W$ ,  $W_s$  и  $Q$ ,  $Q_s$  равны нулю, то поле  $M$  также всюду равно нулю. Естественно предположить, что эти функции, как и в случае квазипотенциального поля, характеризуют распределение источников и вихрей.

Поэтому будем полагать, что для произвольного поля  $M$  мы имеем ту же систему уравнений, что и в случае квазипотенциального поля, т. е. в дифференциальной и поверхностной формах

$$\operatorname{rot} M = W, \quad \operatorname{div} M = Q; \tag{I.207}$$

$$\operatorname{Rot} M = W_s, \quad \operatorname{Div} M = Q_s;$$

а в интегральной форме

$$\oint_l M \cdot dl = W, \quad \oint_s M \cdot dS = Q. \tag{I.208}$$

Здесь  $M$  — любое векторное поле, а  $W$ ,  $W_s$ ,  $W$  и  $Q$ ,  $Q_s$ ,  $Q$  — функции, определяющие соответственно вихри и источники.

Здесь уместно сделать несколько замечаний.

1. Система уравнений (I.207), (I.208), как и в случае квазипотенциального поля, служит «мостиком» между полем и его возбудителями.

2. В разведочной геофизике применяются различные по физической природе поля, которые подчиняются разным физическим законам, таким, как законы Ньютона, Гука, Био — Савара, Фарадея и т. д. В свою очередь, уравнения поля всегда выступают как следствие физических законов, что схематически показано ниже.



3. Обычно функции  $W$ ,  $W_s$  и  $Q$ ,  $Q_s$  отличаются от соответствующих плотностей возбудителей поля за счет некоторых постоянных множителей, не зависящих от положения точки наблюдения.

4. Теоретическое изучение многих полей, их расчеты часто приходится проводить в случаях наличия той или иной среды. При этом некоторая часть возбудителей поля в принципе не может быть известна, пока не определено поле. Соответственно, многие физические законы, такие как закон Кулона, Фарадея и т. д.,

устанавливающие связь между полем и его возбудителями, не могут быть применены для расчета поля, и система уравнений поля оказывается единственным средством решения этой задачи. Однако и при рассмотрении системы уравнений поля сталкиваемся с проблемой «замкнутого круга», так как (при неизвестном поле) правые части этих уравнений нельзя полагать заданными в присутствии среды. Действительно, чтобы определить поле  $M$ , надо знать распределение его возбудителей, но часть этих возбудителей в принципе не может быть известна, пока не известно поле  $M$ .

Чтобы решить эту проблему, обычно вводят еще одно поле, зависящее от поля  $M$  и соответствующих параметров среды. Вместо системы двух уравнений получаем систему четырех уравнений для двух векторных полей. Классическим примером этого является система уравнений Максвелла.

Теперь можно обсудить третий из поставленных выше вопросов — о единственности решения системы уравнений (I.207). Прежде всего, с физической точки зрения почти очевидно, что если распределение возбудителей поля известно всюду, то этим однозначно определяется поле. Покажем это на конкретном примере.

Предположим, что в некоторой комнате определенным образом расставлены стулья и стол, создающие гравитационное поле, а вне этой комнаты — масс нет. Иначе говоря, полагаем, что эти стулья и стол — единственные возбудители гравитационного поля, которое, согласно закону всемирного тяготения Ньютона, зависит от расстояний между точкой наблюдения и массами. Если мы хоть немного переместим один стул, а положение остальных останется прежним, то поле изменится. Конечно, в точках, расположенных вблизи перемещенного стула, изменение поля будет значительным, а на большом расстоянии от этой массы изменение может быть очень малым. Существенным здесь является то, что как только меняется положение возбудителей, возникает другое поле, и, соответственно, следует ожидать, что при всюду заданном распределении возбудителей система уравнений (I.207) определяет поле однозначно.

К тому же выводу можем прийти, применяя другой подход. Предположим, что существуют два разных поля  $M_1(p)$  и  $M_2(p)$ , каждое из которых удовлетворяет уравнениям (I.207) с одними и теми же правыми частями, т. е.

$$\operatorname{rot} M_1 = W(p), \quad \operatorname{div} M_1 = Q(p),$$

$$\operatorname{Rot} M_1 = W_s(p), \quad \operatorname{Div} M_1 = Q_s(p)$$

и

$$\operatorname{rot} M_2 = W(p), \quad \operatorname{div} M_2 = Q(p),$$

$$\operatorname{Rot} M_2 = W_s(p), \quad \operatorname{Div} M_2 = Q_s(p).$$

(I.209)

Разность этих векторных полей

$$M_3(p) = M_2(p) - M_1(p)$$

— также векторное поле.

Принимая во внимание, что ротор и дивергенция — линейные операторы, получаем систему уравнений для поля  $M_3$ :

$$\text{rot } M_3 = 0, \quad \text{div } M_3 = 0,$$

$$\text{Rot } M_3 = 0, \quad \text{Div } M_3 = 0. \quad (\text{I.210})$$

Так как уравнения (I.210) справедливы для поля  $M_3$  во всем пространстве, то на основе выводов, сделанных при рассмотрении системы уравнений (I.206), приходим к заключению, что поле  $M_3$  всюду равно нулю. Иначе говоря, два поля  $M_1$  и  $M_2$ , создаваемые одинаково распределенными возбудителями, полностью совпадают. Таким образом, доказано, что если возбудители поля всюду известны, то система уравнений (I.207) определяет поле однозначно.

Теперь рассмотрим вопрос о единственности в более сложном случае, когда возбудители поля заданы (известны) только в некоторой части пространства. Для этого вначале предположим, что в той области  $V$ , где мы определяем поле  $M$ , его возбудителей нет, но они могут находиться вне этой области, создавая поле  $M$  всюду, в том числе в точках  $p$  области  $V$ . Тогда, принимая во внимание, что функции  $W$ ,  $W_s$ ,  $Q$  и  $Q_s$  равны нулю в области  $V$ , получаем из (I.207) систему однородных уравнений для поля  $M$  в области  $V$ :

$$\text{rot } M = 0, \quad \text{div } M = 0, \quad (\text{I.211})$$

$$\text{Rot } M = 0, \quad \text{Div } M = 0.$$

Таким образом, поле  $M$  в некоторой области  $V$  удовлетворяет системе однородных уравнений, если все его возбудители расположены вне этой области. Очевидно, что при изменении распределения возбудителей вне области  $V$  их поле также меняется, но система уравнений (I.211) для области  $V$  остается той же. Отсюда следует, что система уравнений (I.211) для поля  $M$  в области  $V$  имеет бесчисленное множество решений, каждое из которых соответствует одному из возможных распределений возбудителей поля  $M$  где-либо вне области  $V$ .

Предположим, что все возбудители поля находятся в области  $V$  и их распределение в этой области известно. Этот случай, в определенном смысле, противоположен предыдущему. Тогда система уравнений поля может быть представлена в следующем виде:

а) в области  $V$

$$\text{rot } M = W, \quad \text{div } M = Q,$$

$$\text{Rot } M = W_s, \quad \text{Div } M = Q_s; \quad (\text{I.212 a})$$



б) вне области  $V$

$$\operatorname{rot} \mathbf{M} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{M} = 0,$$

$$\operatorname{Rot} \mathbf{M} = 0, \quad \operatorname{Div} \mathbf{M} = 0, \quad (\text{I.212 б})$$

где  $W$ ,  $W_s$ ,  $Q$  и  $Q_s$  — заданные функции.

Легко показать, что эта система уравнений определяет поле однозначно. Действительно, предположим, что существуют два поля  $\mathbf{M}_1(p)$  и  $\mathbf{M}_2(p)$ , удовлетворяющих уравнениям (I.212). Это означает, что оба эти поля обусловлены одними и теми же возбудителями, расположенными в области  $V$ . Тогда очевидно, что разность этих полей

$$\mathbf{M}_3(p) = \mathbf{M}_2(p) - \mathbf{M}_1(p)$$

удовлетворяет системе однородных уравнений

$$\operatorname{rot} \mathbf{M}_3 = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{M}_3 = 0,$$

$$\operatorname{Rot} \mathbf{M}_3 = 0, \quad \operatorname{Div} \mathbf{M}_3 = 0$$

и поэтому

$$\mathbf{M}_3 = 0 \text{ или } \mathbf{M}_1(p) = \mathbf{M}_2(p).$$

Иначе говоря, поле  $\mathbf{M}$  однозначно определяется системой уравнений (I.212). Это и не удивительно, так как все возбудители поля  $\mathbf{M}$  известны.

Теперь рассмотрим вопрос о единственности решения системы уравнений (I.207) в случае, когда возбудители поля известны только в той области  $V$ , в которой определяется поле. Здесь, в отличие от предыдущего случая, вне области  $V$  могут находиться неизвестные возбудители поля, и поэтому можно предположить, что уравнения (I.207) определяют поле  $\mathbf{M}$  в области  $V$  не однозначно. Действительно, допустим, что два поля  $\mathbf{M}_1(p)$  и  $\mathbf{M}_2(p)$  удовлетворяют этой системе уравнений в области  $V$ . Тогда их разность

$$\mathbf{M}_3(p) = \mathbf{M}_2(p) - \mathbf{M}_1(p) \quad (\text{I.213})$$

— решение системы однородных уравнений в области  $V$ :

$$\operatorname{rot} \mathbf{M}_3 = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{M}_3 = 0,$$

$$\operatorname{Rot} \mathbf{M}_3 = 0, \quad \operatorname{Div} \mathbf{M}_3 = 0.$$

Как было показано при рассмотрении системы уравнений (I.211), это означает, что в общем случае поле  $\mathbf{M}_3$  не равно нулю, так как его возбудители могут находиться где-либо вне области  $V$ .

Таким образом, мы показали, что система уравнений поля в некоторой области  $V$  имеет бесчисленное множество решений, разности которых соответствуют полям возбудителей, каким-либо образом расположенных вне области  $V$ . Представим решение уравнений (I.207) в области  $V$  в виде суммы:

$$M(p) = M_i(p) + M_e(p), \quad (I.214)$$

где  $M_i(p)$  и  $M_e(p)$  — поля, возбудители которых находятся соответственно внутри и вне области  $V$ , а заданы только первые из этих возбудителей. Как было показано, поле  $M_i(p)$  определяется однозначно, так как его возбудители, т. е. функции  $W$ ,  $W_s$ ,  $Q$  и  $Q_s$  известны. Однако поле  $M_e(p)$ , независимо от распределения его возбудителей, удовлетворяет в области  $V$  системе однородных уравнений; этим и объясняется неоднозначность решения уравнений (I.207). Так как одной этой системы для некоторой области  $V$  недостаточно для определения поля в этой области, то, естественно, возникает следующий вопрос. Что еще, кроме этой системы уравнений, должно быть известно для того, чтобы поле  $M$  в области  $V$  определялось однозначно? В данном разделе не будем детально рассматривать этот вопрос, а лишь затронем проблему.

Для этого вначале рассмотрим очень простой случай, когда все возбудители поля находятся в области  $V$ , а поле  $M$  этих возбудителей определяется вне этой области. Так как в этой внешней (по отношению к  $V$ ) части пространства возбудителей поля нет, имеем вне области  $V$  систему однородных уравнений:

$$\operatorname{rot} M = 0, \quad \operatorname{div} M = 0, \quad (I.215)$$

$$\operatorname{Rot} M = 0, \quad \operatorname{Div} M = 0$$

независимо от положения возбудителей внутри области  $V$ , (I.215) имеет бесчисленное множество решений.

Если мы не знаем распределения возбудителей поля в области  $V$ , но пытаемся найти (определить) поле вне этой области, нам необходимо располагать некоторыми сведениями о поле, которые могут заменить информацию о его возбудителях. То, что таким местом, где требуется иметь сведения о поле, должна быть поверхность  $S$ , ограничивающая область  $V$ , почти очевидно.

Система уравнений (I.215) и некоторые сведения о поведении поля на поверхности  $S$  могут обеспечить единственность решения задачи определения поля вне области  $V$ . В дальнейшем будет показано, что фактически так называемая теорема единственности требует, чтобы на поверхности  $S$  мы располагали сведениями о поле одного из нескольких видов. Можно сказать, что данные, обеспечивающие единственность решения системы уравнений (I.215), включают две части, а именно:

а) вне области  $V$

$$\operatorname{rot} M = 0, \quad \operatorname{div} M = 0,$$

$$\operatorname{Rot} M = 0, \quad \operatorname{Div} M = 0;$$

б) сведения о поведении поля на поверхности  $S$ , обычно — о поведении некоторой компоненты  $M_i$  поля  $M$ , которая может быть представлена в виде

$$M_l(p) = \varphi_l(p), \quad (I.216)$$

где  $p$  — точка на поверхности  $S$ ;  $M_l(p)$  — тангенциальная либо нормальная к этой поверхности компонента поля  $M$ , а  $\varphi_l(p)$  — заданная функция <sup>1</sup>.

Таким образом, решение задачи об определении поля  $M$ , удовлетворяющего вне области  $V$  уравнениям (I.215), включает два этапа.

1. Решение системы уравнений (I.215). (Как было показано выше, этой системе удовлетворяет бесчисленное множество векторных полей  $M$ .)

2. Выбор среди этих решений такого поля  $M$ , соответствующая компонента которого равна заданной функции  $\varphi_l(p)$  на поверхности  $S$ .

Учитывая важное значение последнего этапа решения, весь процесс определения поля называют решением краевой задачи.

Здесь следует сделать несколько замечаний.

А) Аналогично тому, как это было сделано выше, можно рассмотреть случай, когда возбудители поля находятся вне области  $V$ , а поле определяется внутри этой области.

Б) Если решение уравнений (I.215) проводится для области  $V$ , ограниченной несколькими поверхностями, то краевые условия (I.216) или другого типа должны быть определены на каждой из этих поверхностей.

В) Обычно эти краевые условия получаются как следствие конкретных физических условий задачи и, как правило, они отражают поведение поля вблизи известных возбудителей и на бесконечности.

Г) В общем случае заданным краевым условиям любого типа могут соответствовать разные распределения возбудителей поля вне области  $V$ , в которой определяется поле.

Теперь перейдем к более общему случаю и предположим, что требуется определить поле  $M$  в ограниченной поверхностью  $S$  области  $V$ , где возбудители поля  $M$  известны, но все возбудители поля могут находиться как внутри, так и вне области  $V$ . Тогда, как и в предыдущем случае, решение краевой задачи включает два этапа, а именно:

а) решение системы уравнений поля (I.207) для области  $V$ ,

б) выбор из этих решений того, которое удовлетворяет краевым условиям на поверхности  $S$ .

Рассмотрим еще один вопрос, связанный с представлением поля, обусловленного возбудителями двух типов. Выразим поле  $M$  в некоторой области  $V$  в виде суммы трех полей:

<sup>1</sup> В соответствии с упомянутой выше теоремой единственности в рассматриваемом случае для единственности решения задачи требуется еще иметь сведения о поведении поля  $M$  «на бесконечности».

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3, \quad (\text{I.217})$$

где  $\mathbf{M}_1$  и  $\mathbf{M}_2$  — поля, обусловленные соответственно источниками и вихрями, расположенными в области  $V$ ;  $\mathbf{M}_3$  — поле, создаваемое возбудителями, находящимися вне этой области. Тогда, по определению понятий поля источников и поля вихрей, а также согласно (I.211),  $\mathbf{M}_1$ ,  $\mathbf{M}_2$  и  $\mathbf{M}_3$  удовлетворяют следующим системам уравнений:

$$\text{rot } \mathbf{M}_1 = 0, \quad \text{div } \mathbf{M}_1 = Q, \quad (\text{I.218})$$

$$\text{Rot } \mathbf{M}_1 = 0, \quad \text{Div } \mathbf{M}_1 = Q_S;$$

$$\text{rot } \mathbf{M}_2 = \mathbf{W}, \quad \text{div } \mathbf{M}_2 = 0, \quad (\text{I.219})$$

$$\text{Rot } \mathbf{M}_2 = \mathbf{W}_S, \quad \text{Div } \mathbf{M}_2 = 0;$$

$$\text{rot } \mathbf{M}_3 = 0, \quad \text{div } \mathbf{M}_3 = 0, \quad (\text{I.220})$$

$$\text{Rot } \mathbf{M}_3 = 0, \quad \text{Div } \mathbf{M}_3 = 0.$$

В следующем разделе мы рассмотрим некоторые важные свойства полей  $\mathbf{M}_1$ ,  $\mathbf{M}_2$ ,  $\mathbf{M}_3$  и, естественно, начнем с наиболее простого из этих полей — поля  $\mathbf{M}_3$ , которое можно рассматривать как частный случай полей  $\mathbf{M}_1$  или  $\mathbf{M}_2$ .

Заметим, что поле  $\mathbf{M}$  можно представить в виде:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1^* + \mathbf{M}_2^* + \mathbf{M}_3, \quad (\text{I.221})$$

где  $\mathbf{M}_1^*$  — квазипотенциальное поле, т. е.

$$\mathbf{M}_1^* = \varphi \text{ grad } U,$$

возбудители которого находятся в области  $V$ ;  $\mathbf{M}_2^*$  — поле, создаваемое одними лишь вихрями, также расположенными в этой области;  $\mathbf{M}_3$  — поле возбудителей, распределенных где-либо вне области  $V$ . Тогда для этих полей имеем следующие уравнения:

$$\text{rot } \mathbf{M}_1^* = \mathbf{W}_1^*, \quad \text{div } \mathbf{M}_1^* = Q,$$

$$\text{Rot } \mathbf{M}_1^* = \mathbf{W}_{1S}^*, \quad \text{Div } \mathbf{M}_1^* = Q_S;$$

$$\text{rot } \mathbf{M}_2^* = \mathbf{W}_2^*, \quad \text{div } \mathbf{M}_2^* = 0,$$

$$\text{Rot } \mathbf{M}_2^* = \mathbf{W}_{2S}^*, \quad \text{Div } \mathbf{M}_2^* = 0; \quad (\text{I.222})$$

$$\text{rot } \mathbf{M}_3 = 0, \quad \text{div } \mathbf{M}_3 = 0,$$

$$\text{Rot } \mathbf{M}_3 = 0, \quad \text{Div } \mathbf{M}_3 = 0,$$

где  $\mathbf{W} = \mathbf{W}_1^* + \mathbf{W}_2^*$ ;  $\mathbf{W}_S = \mathbf{W}_{1S}^* + \mathbf{W}_{2S}^*$ ;  $Q$ ,  $Q_S$ ,  $\mathbf{W}$ ,  $\mathbf{W}_S$  — расположенные в области  $V$  возбудители поля  $\mathbf{M}$ .

## 1.9. ГАРМОНИЧЕСКИЕ ПОЛЯ<sup>1</sup>

Будем рассматривать поле  $\mathbf{M}$  в некоторой области  $V$  в предположении, что возбудители — источники и вихри поля находятся снаружи относительно поверхности  $S$ , ограничивающей эту область. Тогда, как было показано выше, поле удовлетворяет системе однородных уравнений

$$\operatorname{rot} \mathbf{M} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{M} = 0,$$

$$\operatorname{Rot} \mathbf{M} = 0, \quad \operatorname{Div} \mathbf{M} = 0$$

или

(1.223)

$$\oint_l \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = 0, \quad \oint_s \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

В следующих двух разделах рассмотрим поля в присутствии источников и вихрей, но, очевидно, что и к таким полям в тех точках  $p$ , где отсутствуют возбудители, применимы выводы и результаты, полученные как следствие уравнений (1.223).

На основе системы уравнений (1.223) подробно рассмотрим поведение поля  $\mathbf{M}$ .

1. Прежде всего, очевидно, что в области  $V$  векторные линии и нормальные поверхности поля  $\mathbf{M}$  не имеют точек обрыва и линий обрыва соответственно.

2. Так как в области  $V$  отсутствуют возбудители поля, поле  $\mathbf{M}$  не имеет особенностей — особых точек, поверхностей. В частности, если представить себе некоторую поверхность в этой области, то в точках такой поверхности поле непрерывно и

$$M_i^{(2)} = M_i^{(1)}, \quad M_n^{(2)} = M_n^{(1)}. \quad (1.224)$$

Здесь  $M_i^{(2)}$ ,  $M_n^{(2)}$  и  $M_i^{(1)}$ ,  $M_n^{(1)}$  — тангенциальные и нормальные компоненты поля на лицевой и оборотной сторонах поверхности соответственно.

3. Согласно (1.223) циркуляция вектора  $\mathbf{M}$  по любому контуру, расположенному в области, равна нулю:

$$\oint_l \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (1.225)$$

Существенно, что это равенство следует только из того, что в этой части пространства отсутствуют вихри и оно остается справедливым в присутствии источников. Рассмотрим произвольный замкнутый контур  $l$  в области  $V$  (рис. 1.15, *a*). Циркуляцию по этому контуру можно представить как сумму двух напряжений:

---

<sup>1</sup> Употребляя термин «гармоническое», автор имеет в виду такое поле  $\mathbf{M}$  в области  $V$ , которое в этой области удовлетворяет системе однородных уравнений (1.223). При этом поле  $\mathbf{M}$  и его потенциал  $U$  удовлетворяют уравнению Лапласа, а компоненты поля  $\mathbf{M}$  и величина  $U$  — функции, гармонические в области  $V$  (см. ниже). В отечественной литературе такое поле  $\mathbf{M}$  иногда называют лапласовым.

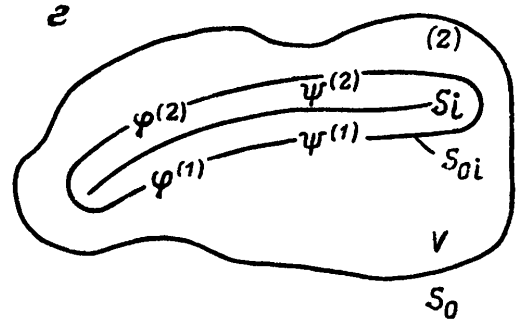
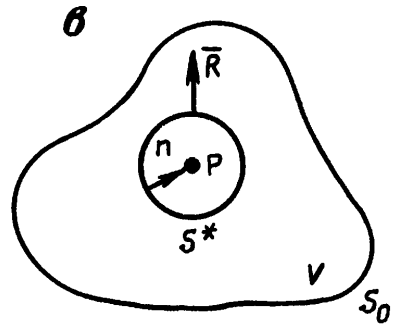
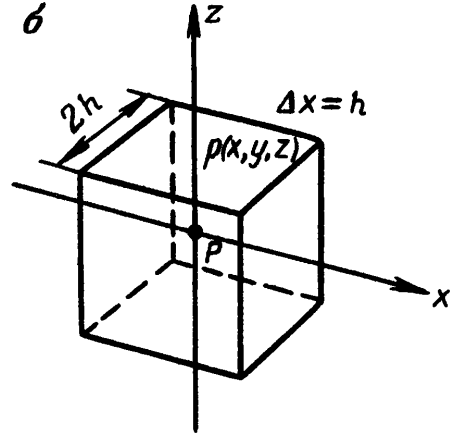
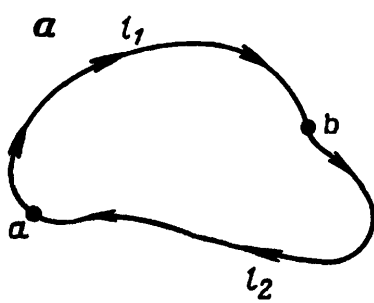


Рис. I.15. Циркуляция (а); к представлению лапласиана при помощи конечных разностей (б); к выводу формулы Грина (в, з)

$$\oint_l \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = \int_{l_1} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} + \int_{l_2} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}, \quad (I.226)$$

где

$$l = l_1 + l_2.$$

Меняя направление пути  $l_2$  на противоположное  $-l_2^*$ , получаем

$$\oint_l \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = \int_{l_1} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} - \int_{l_2^*} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

или

$$\int_{l_1} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = \int_{l_2^*} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}, \quad (I.227)$$

где  $l_1$  и  $l_2^*$  — два произвольных пути от точки  $a$  до точки  $b$ . Иначе говоря, напряжение между двумя точками  $a$  и  $b$  не зависит от (формы) пути и определяется только положением этих точек.

Чтобы вычислить напряжение, требуется разбить путь интегрирования на некоторое число элементов так, чтобы в пределах каждого элемента векторы  $\mathbf{M}$  достаточно мало отличались по абсолютной величине и направлению от значения поля  $\mathbf{M}$  в центре этого элемента. Далее, беря скалярные произведения и выполняя суммирование, получаем величину напряжения. Изменив форму контура интегрирования, для определения напряжения на новом

пути, с другими длинами и направлениями элементов пути, мы должны пользоваться и иными значениями поля  $M$ . Поэтому вполне естественным было бы предположить, что в общем случае напряжение между двумя точками существенно зависит от того, на каком именно пути его определяют. Однако, как это ни удивительно, но равенство (I.227) показывает, что для полей, удовлетворяющих уравнениям (I.223), напряжение не зависит от формы пути интегрирования. Например, напряжение гравитационного поля между двумя точками, расстояние между которыми равно одному метру, остается тем же, вычислено ли это напряжение на отрезке прямой с длиной в один метр, или — на произвольном пути длиной в тысячу километров. Отметим, что равенство (I.227) можно получить, как следствие того, что поле  $M$  является простейшим примером квазипотенциального поля, так как любой, расположенный в области  $V$  путь между двумя точками пересекает одно и то же число нормальных поверхностей.

Теперь докажем, что отсутствие вихрей в области  $V$  позволяет также выразить поле  $M$  как производную скалярного поля  $U$ , что упрощает исследование векторного поля. Для этого представим первое уравнение системы (I.223),

$$\operatorname{rot} M = 0 \quad (\text{I.228})$$

в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_1 M &= \frac{1}{h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial h_3 M_3}{\partial x_2} - \frac{\partial h_2 M_2}{\partial x_3} \right\} = 0, \\ \operatorname{rot}_2 M &= \frac{1}{h_1 h_3} \left\{ \frac{\partial h_1 M_1}{\partial x_3} - \frac{\partial h_3 M_3}{\partial x_1} \right\} = 0, \\ \operatorname{rot}_3 M &= \frac{1}{h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial h_2 M_2}{\partial x_1} - \frac{\partial h_1 M_1}{\partial x_2} \right\} = 0. \end{aligned}$$

Как легко убедиться, решение уравнения (I.228) может быть записано в виде

$$M = - \operatorname{grad} U$$

или

$$(\text{I.229})$$

$$M = - \left\{ \frac{1}{h_1} \frac{\partial U}{\partial x_1} i_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial U}{\partial x_2} i_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial U}{\partial x_3} i_3 \right\}.$$

При этом, например, для компоненты  $\operatorname{rot}_1 M$  имеем

$$\operatorname{rot}_1 M = - \frac{1}{h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{h_3}{h_3} \frac{\partial U}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{h_2}{h_2} \frac{\partial U}{\partial x_2} \right\} \equiv 0.$$

Скалярную функцию  $U(p)$  обычно называют потенциалом поля  $M$  и, как правило, выражения, связывающие ее с возбудителями, проще соответствующих выражений для поля  $M$ .

Здесь следует сделать несколько замечаний.

А. Одному и тому же полю  $\mathbf{M}$  отвечает бесконечное множество полей  $U$ , различающихся между собой некоторым постоянным слагаемым  $C$ :

$$U_2(p) = U_1(p) + C, \quad (\text{I.230})$$

где  $U_1(p)$  и  $U_2(p)$  — произвольная пара полей потенциала  $U$ . Это равенство является следствием того, что  $\text{grad } C \equiv 0$ . То, что потенциал  $U$  определяется неоднозначно, показывает, что он не имеет физического смысла, а является вспомогательной функцией, позволяющей упростить анализ векторного поля  $\mathbf{M}$ <sup>1</sup>.

Б. Квазипотенциальное поле  $\mathbf{M}$  было определено выражением

$$\mathbf{M}(p) = \varphi(p) \text{grad } U(p)$$

и можно сказать, что поле, удовлетворяющее уравнениям (I.223), представляет собой простейший случай квазипотенциального поля, у которого  $\varphi(p) = \pm 1$ .

В. В общем случае потенциал  $U$ , как и поле  $\mathbf{M}$ , может быть функцией координат точки наблюдения и времени  $t$ .

Г. Если потенциал  $U(p)$  известен, то равенство (I.229) дает возможность определить поле  $\mathbf{M}$  в области  $V$  путем простой операции дифференцирования по координатам точки  $p$ .

Д. Решение уравнения (I.228) может быть представлено либо как  $\mathbf{M} = \text{grad } U$ , либо как  $\mathbf{M} = -\text{grad } U$ , и в этой книге будем пользоваться обоими этими соотношениями.

Теперь покажем, что введение потенциала  $U$  позволяет существенно упростить расчет напряжения. Согласно (I.229),

$$\int_a^b \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = - \int_a^b \text{grad } U \cdot d\mathbf{l}. \quad (\text{I.231})$$

Очевидно, что скалярное произведение векторов

$$\text{grad } U = \frac{1}{h_1} \frac{\partial U}{\partial x_1} \mathbf{i}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial U}{\partial x_2} \mathbf{i}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial U}{\partial x_3} \mathbf{i}_3$$

и

$$d\mathbf{l} = h_1 dx_1 \mathbf{i}_1 + h_2 dx_2 \mathbf{i}_2 + h_3 dx_3 \mathbf{i}_3$$

равно

$$\text{grad } U \cdot d\mathbf{l} = \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial U}{\partial x_3} dx_3$$

<sup>1</sup> Несмотря на то, что определяемый при помощи равенства (I.229) потенциал  $U$  неоднозначен, разности потенциалов конкретных по физической природе полей  $\mathbf{M}$  могут иметь вполне определенный физический смысл. Если, например,  $\mathbf{M}$  — напряженность постоянного электрического поля, то разность потенциалов  $U$  в двух точках пространства равна разности потенциальных энергий точечных единичных положительных зарядов, помещенных в эти точки.



или

$$\text{grad } U \cdot dl = dU, \quad (I.232)$$

где  $dU$  — полный дифференциал потенциала  $U$ .

Подставляя выражение (I.232) для скалярного произведения в равенство (I.231), получаем

$$\int_a^b \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = - \int_a^b dU = U(a) - U(b). \quad (I.233)$$

Таким образом, чтобы определить напряжение, достаточно взять разность потенциалов в точках  $a$  и  $b$ . Это, конечно, гораздо проще, чем интегрирование поля  $\mathbf{M}$ . Равенством (I.233) можно пользоваться для определения потенциала  $U$  в произвольной точке области  $V$ , если известны поле  $\mathbf{M}$ , а также значение потенциала в некоторой заданной точке.

После того, как введено понятие потенциала  $U$ , следует получить уравнения, описывающие поведение поля  $U(p)$ . Из первого уравнения поля  $\mathbf{M}$

$$\text{rot } \mathbf{M} = 0$$

мы установили, что

$$\mathbf{M} = -\text{grad } U.$$

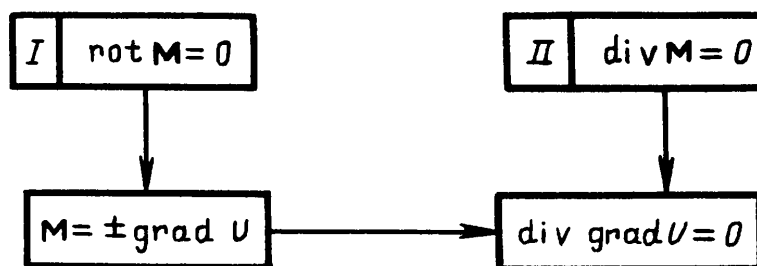
Подставляя это выражение для  $\mathbf{M}$  во второе уравнение поля

$$\text{div } \mathbf{M} = 0,$$

получаем

$$\text{div grad } U = 0. \quad (I.234)$$

Схема вывода этого уравнения показана ниже.



Таким образом, систему двух уравнений поля  $\mathbf{M}$  в области  $V$  в дифференциальной форме (применимой при описании поведения поля в обычных точках) заменяет одно уравнение

$$\text{div grad } U = 0. \quad (I.235)$$

Пользуясь выражениями (I.129), (I.64) для  $\text{div } \mathbf{M}$  и  $\text{grad } U$  в ортогональной системе координат и обозначая

$$\text{div grad } U = \nabla^2 = \Delta,$$

получаем

$$\nabla^2 U = \Delta U = 0 \quad (\text{I.236})$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial U}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial U}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial U}{\partial x_3} \right) = 0.$$

Полученное выше уравнение (I.236) — одно из важнейших в теории полей, применяемых в геофизических методах; оно называется уравнением Лапласа. В частности, в декартовой системе

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0, \quad (\text{I.237})$$

в цилиндрической системе

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + r \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right\} = 0, \quad (\text{I.238})$$

в сферической системе

$$\nabla^2 U = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \frac{\partial U}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (\text{I.239})$$

Таким образом, вместо двух уравнений с частными производными первого порядка, содержащих три неизвестные ( $M_1, M_2, M_3$ ),

$$\text{rot } \mathbf{M} = 0, \quad \text{div } \mathbf{M} = 0$$

мы получили одно дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка для одной неизвестной  $U$ .

Теперь рассмотрим, какие соотношения для потенциала  $U$  соответствуют уравнениям

$$\text{Rot } \mathbf{M} = 0, \quad \text{Div } \mathbf{M} = 0.$$

Это можно сделать следующим образом. Согласно (I.65) из уравнения  $\mathbf{M} = -\text{grad } U$  следует, что компонента поля  $\mathbf{M}$  по любому направлению  $l$  может быть представлена в виде

$$M_l = - \frac{\partial U}{\partial l}. \quad (\text{I.240})$$

Поэтому поверхностные аналоги уравнений поля  $\mathbf{M}$

$$M_t^{(2)} = M_t^{(1)} \quad \text{и} \quad M_n^{(2)} = M_n^{(1)}$$

могут быть записаны в форме

$$\frac{\partial U^{(2)}}{\partial t} = \frac{\partial U^{(1)}}{\partial t}, \quad \frac{\partial U^{(2)}}{\partial n} = \frac{\partial U^{(1)}}{\partial n}. \quad (\text{I.241})$$

Здесь  $U^{(2)}$  и  $U^{(1)}$  — значения потенциала  $U$  на разных сторонах

поверхности, расположенной в области  $V$ . Для непрерывности тангенциальной компоненты  $M_t$  очевидно достаточно непрерывности потенциала  $U$ , что позволяет несколько упростить первое из равенств (I.241):

$$U^{(1)} = U^{(2)}, \quad \frac{\partial U^{(1)}}{\partial n} = \frac{\partial U^{(2)}}{\partial n}. \quad (\text{I.242})$$

Отметим, что в общем случае из непрерывности потенциала на некоторой поверхности не следует непрерывность нормальной производной  $\partial U / \partial n$ , которая зависит от изменения потенциала по направлению, не лежащему на этой поверхности.

Таким образом, мы получили систему уравнений для потенциала, эквивалентную системе уравнений (I.223) для поля  $M$ :

$$\nabla^2 U = 0 \quad \text{и} \quad (\text{I.243})$$

$$U^{(1)} = U^{(2)}, \quad \frac{\partial U^{(1)}}{\partial n} = \frac{\partial U^{(2)}}{\partial n} \quad \text{на} \quad S.$$

Однако, принимая во внимание, что в области  $V$  отсутствуют возбудители поля, мы можем существенно упростить системы уравнений (I.223) и (I.243). Действительно, так как в области  $V$  нет особых точек, то система уравнений поля  $M$  и потенциала  $U$  принимает вид

$$\text{rot } M = 0, \quad \text{div } M = 0 \quad \text{и} \quad (\text{I.244})$$

$$\Delta U = 0.$$

Рассмотрим уравнение Лапласа более подробно, а затем перейдем к формулировке краевой задачи для этого уравнения.

Согласно (I.237) имеем

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

То есть в окрестности каждой точки области  $V$  сумма вторых производных по координатным направлениям  $l_x, l_y, l_z$  равна нулю. В связи с этим возникает, естественно, следующий вопрос. Не является ли это равенство отражением некоторых характерных особенностей поведения потенциала?

Чтобы получить ответ на этот вопрос, рассмотрим координатный элемент пространства в форме куба с центром в точке  $p$ , расположенной в области  $V$ . Длину ребра куба обозначим  $2h$  (рис. I.15, б). Как известно, производные функции в любой точке  $p$ , не являющейся особой, могут быть выражены при помощи конечных разностей значений этой функции в точках, расположенных вблизи точки  $p$ . Например, для первой и второй производных  $U$  по некоторому направлению  $l$

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{1}{\Delta l} \left[ U \left( l + \frac{\Delta l}{2} \right) - U \left( l - \frac{\Delta l}{2} \right) \right],$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial l^2} = \frac{1}{\Delta l} \left[ \frac{\partial U}{\partial l} \left( l + \frac{\Delta l}{2} \right) - \frac{\partial U}{\partial l} \left( l - \frac{\Delta l}{2} \right) \right].$$

Применяя эти соотношения для производных по координате  $x$ , получаем

$$\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} = \frac{1}{\Delta x} \left[ U \left( x + \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) - U \left( x - \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) \right]$$

и (I.245)

$$\frac{\partial^2 U(x, y, z)}{\partial x^2} = \frac{1}{\Delta x} \left[ \frac{\partial U}{\partial x} \left( x + \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) - \frac{\partial U}{\partial x} \left( x - \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) \right].$$

Здесь  $x, y, z$  — координаты центра куба, т. е. точки  $p$ .

Так как

$$\frac{\partial U}{\partial x} \left( x + \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) = \frac{1}{\Delta x} [U(x + \Delta x, y, z) - U(x, y, z)],$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} \left( x - \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) = \frac{1}{\Delta x} [U(x, y, z) - U(x - \Delta x, y, z)],$$

имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U(x, y, z)}{\partial x^2} &= \frac{1}{(\Delta x)^2} [U(x + \Delta x, y, z) + \\ &+ U(x - \Delta x, y, z) - 2U(x, y, z)], \end{aligned} \quad (I.246)$$

где  $U(x + \Delta x, y, z)$  и  $U(x - \Delta x, y, z)$  — значения потенциала  $U$  в центрах противоположных граней куба, нормальных к оси  $x$ .

По аналогии для вторых производных по координатам  $y$  и  $z$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U(x, y, z)}{\partial y^2} &= \frac{1}{(\Delta y)^2} [U(x, y + \Delta y, z) + \\ &+ U(x, y - \Delta y, z) - 2U(x, y, z)], \end{aligned} \quad (I.247)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U(x, y, z)}{\partial z^2} &= \frac{1}{(\Delta z)^2} [U(x, y, z + \Delta z) + \\ &+ U(x, y, z - \Delta z) - 2U(x, y, z)]. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = h$ , и подставляя выражения (I.246), (I.247) для вторых производных в правую часть равенства

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2},$$

получаем

$$\nabla^2 U = \frac{1}{h^2} \left[ \sum_{i=1}^6 U_i - 6U(p) \right]$$

или

$$\nabla^2 U = \frac{6}{h^2} \left[ \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 U_i - U(p) \right]. \quad (I.248)$$

Здесь  $U_i$  — значение потенциала в центре  $i$ -й грани куба, а  $U(p)$  — значение  $U$  в центре куба. Очевидно, что величина

$$\frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 U_i$$

— среднее значение потенциала в окрестности точки  $p$ :

$$U^{cp}(p) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 U_i.$$

Соответственно выражение (I.248) для лапласиана  $U$  может быть записано в виде

$$\Delta U = \nabla^2 U = \frac{6}{h^2} [U^{cp}(p) - U(p)]. \quad (I.249)$$

Таким образом, лапласиан скалярного поля характеризует разность среднего значения  $U^{cp}$  поля  $U$  в окрестности точки и значения  $U$  в этой точке. Если, например, среднее значение  $U^{cp}(p)$  больше, чем значение  $U(p)$ , то лапласиан  $U$  положителен.

Тогда, в соответствии с (I.237), (I.249), получаем простейшую форму записи уравнения Лапласа

$$U^{cp}(p) - U(p) = 0. \quad (I.250)$$

Можем утверждать, что если функция  $U(p)$  удовлетворяет уравнению Лапласа, то ей присуще весьма интересное свойство, а именно, среднее значение  $U$  в окрестности некоторой точки  $p$  тождественно равно значению  $U$  в точке  $p$ . Лишь определенный класс функций имеет эту особенность и такие функции называются гармоническими.

Соответственно, можем сделать вывод, что потенциал  $U$  поля  $M$  ( $M = -\text{grad } U$ ) — функция, гармоническая в области  $V$ , если все возбудители поля находятся вне области  $V$ . Согласно (I.249), лапласиан некоторой функции можно рассматривать как величину, показывающую, в какой степени эта функция отличается от гармонической.

В соответствии с уравнением (I.237) сумма вторых производ-

ных  $U$  по трем взаимно перпендикулярным направлениям равна нулю, если функция  $U$  — гармоническая. В то же время нам известно, что в случае функций одной переменной также имеется класс функций  $y(x)$ , у которых вторая производная равна нулю, т. е.

$$d^2y(x)/dx^2 = 0, \quad (I.251)$$

и эти функции — линейные.

На основе такого сходства в поведении вторых производных уместно предположить, что гармонические функции в двух- и трехмерном пространстве — это аналоги линейной функции в одномерном случае, и все эти функции имеют некоторые общие свойства. Отметим некоторые из этих свойств, присущих гармоническим функциям.

1. Очевидно, что если функция линейна на некотором отрезке и известны ее значения на концах отрезка, то эта функция может быть вычислена в любой точке этого отрезка. Следовательно, если значения функции, гармонической в области  $V$ , известны во всех точках поверхности, ограничивающей эту область, то эта функция может быть определена в любой точке области  $V$ .

2. Если значения линейной на отрезке функции одинаковы на концах отрезка, то таким же будет ее значение в пределах всего отрезка, т. е. функция будет равна константе. Аналогично, если функция, гармоническая в области  $V$ , имеет постоянное значение во всех точках ограничивающей эту область поверхности, то это же значение функция имеет в любой точке области  $V$ . Это — очень важное и широко применяемое свойство гармонических функций. В частности, оно позволяет дать математическое обоснование явлению электростатического экранирования.

3. Линейная функция достигает максимума и минимума на концах отрезка. Подобное поведение наблюдается у гармонической функции, которая не может иметь экстремумов внутри области  $V$ . В противном случае среднее значение функции в окрестности экстремальной точки не было бы равно значению в этой точке и, соответственно, лапласиан функции был бы отличен от нуля.

Заканчивая это сравнение, следует отметить, что если линейные функции — это простейшие функции в одномерном случае, то гармонические функции — самые простые в двух- и трехмерном случаях.

В дальнейшем будем называть поле  $M$ , удовлетворяющее системе однородных уравнений (I.223), гармоническим полем, так как его потенциал  $U$  — гармоническая функция.

В разделе I.8 мы ввели понятие краевой задачи, подчеркнув важное значение сведений о поведении поля на поверхности  $S$ , ограничивающей область  $V$ . Теперь попытаемся найти те краевые условия на поверхности  $S$ , которые однозначно определяют гар-

моническое в области  $V$  поле  $M$ . Для этого обратимся к теореме Гаусса, которая является естественным «мостиком» между значениями поля в области  $V$  и на ограничивающей  $V$  поверхности:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{X} dV = \oint_S \mathbf{X} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S X_n dS. \quad (I.252)$$

Здесь  $\mathbf{n}$  — единичная нормаль к поверхности  $S$ , направленная наружу относительно области  $V$ , а  $X_n$  — нормальная компонента произвольного векторного поля  $\mathbf{X}$ , непрерывного в области  $V$ .

Чтобы упростить математические преобразования, воспользуемся потенциалом  $U$ , который в области  $V$  удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2 U = 0. \quad (I.253)$$

Очевидно, что это уравнение имеет бесконечное множество решений, которые могут, в частности, соответствовать различным распределениям возбудителей поля вне области  $V$ . Выберем любую пару таких решений  $U_1(p)$  и  $U_2(p)$  и рассмотрим их разность

$$U_3(p) = U_2(p) - U_1(p). \quad (I.254)$$

Так как оператор Лапласа линейный, то разность  $U_3(p)$  — также решение уравнения (I.253). Для вывода краевых условий введем в рассмотрение векторное поле  $\mathbf{X}(p)$ , определив его равенством

$$\mathbf{X} = U_3 \operatorname{grad} U_3 = U_3 \nabla U_3. \quad (I.255)$$

Подставляя выражение (I.255) для  $\mathbf{X}$  в (I.252), получаем

$$\int_V \nabla \cdot (U_3 \nabla U_3) = \oint_S U_3 \operatorname{grad}_n U_3 dS, \quad (I.256)$$

где  $\operatorname{grad}_n U_3$  — компонента градиента по направлению нормали  $\mathbf{n}$ , а

$$\operatorname{grad}_n U_3 = \frac{\partial U_3}{\partial n}. \quad (I.257)$$

Поверхность  $S$ , ограничивающая область  $V$ , может состоять из нескольких поверхностей.

Как известно, оператор  $\nabla$  — линейный, поэтому

$$\nabla \cdot (U_3 \nabla U_3) = U_3 \nabla^2 U_3 + \nabla U_3 \cdot \nabla U_3 = (\nabla U_3)^2, \quad (I.258)$$

так как

$$\nabla^2 U_3 = 0.$$

Принимая во внимание выражения (I.257), (I.258), можем переписать равенство (I.256) в виде

$$\int_V (\nabla U_3)^2 dV = \oint_S U_3 \frac{\partial U_3}{\partial n} dS. \quad (I.259)$$

Это равенство, которое в сущности является теоремой Гаусса, позволяет определить важнейшие типы краевых условий; но сначала сделаем два замечания.

А. Подынтегральная функция в объемном интеграле в выражении (I.259) — неотрицательна.

Б. В уравнении (I.259), которое связывает между собой значения функции в области  $V$  со значениями этой функции на границе  $S$  области  $V$ , величина  $U_3$  — это разность двух произвольных решений уравнения Лапласа.

Теперь все подготовлено для того, чтобы определить для потенциала поля  $M$ , гармонического в области  $V$ , краевые условия, которые однозначно определяют его в этой области.

Предположим, что поверхностный интеграл в правой части равенства (I.259) равен нулю. Тогда

$$\int_V (\nabla U_3)^2 dV = 0.$$

Принимая во внимание, что подынтегральная функция в объемном интеграле не может быть отрицательной, приходим к выводу, что в каждой точке области  $V$

$$\text{grad } U_3 = 0. \quad (\text{I.260})$$

Это означает, что производная функции  $U_3$  по любому направлению  $l$  равна нулю:

$$\partial U_3 / \partial l = 0.$$

Тогда, в соответствии с (I.254), мы обнаруживаем, что если поверхностный интеграл в равенстве (I.259) принимает нулевое значение, то равны друг другу производные решений уравнения Лапласа по любому направлению  $l$ :

$$\partial U_1(p) / \partial l = \partial U_2(p) / \partial l.$$

Иными словами, эти решения могут отличаться только на константу, т. е.

$$U_1(p) = U_2(p) + C, \quad (\text{I.261})$$

где  $C$  — величина, постоянная во всех точках области  $V$ , включая ее границу  $S$ . Отметим, что величина  $C$  может быть равна нулю.

Теперь определим условия, при которых поверхностный интеграл

$$\oint_S U_3 \frac{\partial U_3}{\partial n} dS \quad (\text{I.262})$$

равен нулю и, соответственно, справедливо равенство (I.261). Ниже будут рассмотрены три типа таких условий.



## Случай 1

Пусть потенциал  $U(p)$  известен на границе  $S$  области  $V$ , т. е.

$$U(p) = \varphi_1(p) \quad \text{на } S, \quad (I.263)$$

и нам требуется найти решение уравнения Лапласа, которое удовлетворяет условиям (I.263). Предположим, что есть два разных решения этого уравнения в области  $V$ :  $U_1(p)$  и  $U_2(p)$ , которые принимают одинаковые значения на границе области:

$$U_1(p) = U_2(p) = \varphi_1(p) \quad \text{на } S.$$

Тогда их разность  $U_3$  на этой границе равна нулю:

$$U_3(p) \equiv 0 \quad \text{на } S$$

и поверхностный интеграл (I.262) обращается в нуль.

Поэтому согласно (I.261) решения уравнения Лапласа, удовлетворяющие условию (I.263), могут различаться между собой только постоянным слагаемым. Однако эта постоянная известна, она равна нулю, так как на границе  $S$  все решения должны совпадать. Иными словами, доказано, что два уравнения

$$\nabla^2 U = 0 \quad \text{в } V$$

и (I.264)

$$U(p) = \varphi_1(p) \quad \text{на } S$$

однозначно определяют в области  $V$  потенциал  $U$ , а также поле  $\mathbf{M}$ , так как

$$\mathbf{M} = -\text{grad } U.$$

Уравнения (I.264) — это краевая задача Дирихле.

В соответствии с (I.263) при заданной на поверхности  $S$  функции  $\varphi_1(p)$  на этой поверхности известна также компонента  $M_t$  поля  $\mathbf{M}$  по любому тангенциальному к  $S$  направлению  $t$ , так как  $M_t = -\partial U / \partial t$ . Следовательно, краевая задача может быть поставлена для поля  $\mathbf{M}$  в следующем виде:

$$\text{rot } \mathbf{M} = 0, \quad \text{div } \mathbf{M} = 0 \quad \text{в } V$$

и (I.265)

$$M_t = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \quad \text{на } S.$$

В этом случае ярко проявляется важное значение граничных условий

$$U(p) = \varphi_1(p) \quad \text{или} \quad M_t = -\partial \varphi_1 / \partial t.$$

Действительно, уравнение Лапласа для  $U$  или система уравнений поля  $\mathbf{M}$  в области  $V$  имеют бесчисленное множество решений, соответствующих различным распределениям возбудителей поля

вне этой области. Ведь мы можем представить себе сколь угодно большое число вариантов распределения возбудителей поля и ожидать, что число различных полей в области  $V$  также будет сколь угодно большим. Иными словами, уравнение Лапласа (I.253), как и уравнения (I.223), дает весьма ограниченные сведения о поле, а именно, все эти уравнения говорят нам только о том, что в области  $V$  отсутствуют возбудители поля. В противоположность этому краевое условие (I.263) существенно важно, так как только одно гармоническое в области  $V$  поле удовлетворяет этому условию.

Здесь следует сделать два замечания.

А. Принимая во внимание, что краевое условие (I.263) однозначно определяет поле в области  $V$ , будет естественным предположить, что существует математическое выражение, позволяющее найти потенциал  $U$  в каждой точке этой области, если известны значения  $U$  на границе  $S$ . Как было отмечено выше, это показывает аналогию, существующую между линейными и гармоническими функциями.

Б. Мы доказали, что уравнения (I.264) однозначно определяют потенциал  $U(p)$ . Очевидно, однако, что единственность определения поля  $M$  будет достигнута, даже если потенциал определен только с точностью до постоянного слагаемого, так как  $M = -\nabla U$ .

Теперь рассмотрим пример, показывающий, как эффективно можно воспользоваться единственностью решения задачи Дирихле.

Предположим, что потенциал  $U(p)$  имеет постоянное значение  $C$  на границе  $S$  области  $V$  и краевая задача может быть поставлена в следующем виде:

$$\nabla^2 U = 0, \tag{I.266}$$

$$U(p) = C \quad \text{на } S.$$

Как было доказано, существует только одна гармоническая функция  $U(p)$ , удовлетворяющая уравнениям (I.266). Оказывается, что найти эту функцию очень просто. Предположим, что в области  $V$  потенциал также равен константе  $C$ :

$$U(p) = C \quad \text{в } V. \tag{I.267}$$

Легко убедиться, что это предположение — правильное. Прежде всего, у функции, удовлетворяющей уравнению Лапласа, сумма вторых производных по декартовым координатам равна нулю и поэтому функция  $U(p) = C$  — решение этого уравнения. Вместе с тем эта функция «автоматически» удовлетворяет краевым условиям, так как мы выбрали такое решение, которое соответствует значениям потенциала на границе  $S$ . Так как определяемая выражением (I.267) функция удовлетворяет обоим уравнениям (I.266), наше предположение справедливо и потенциал  $U(p)$  в

области  $V$  — константа, равная значению  $C$  потенциала на поверхности  $S$ .

Существенно то, что вследствие единственности решения задачи Дирихле мы можем утверждать, что не существует других решений, удовлетворяющих уравнениям (I.266). Здесь мы снова видим аналогию, существующую между линейной и гармонической функциями, так как обе они не меняются в области определения, если имеют одинаковые значения в точках, ограничивающих эту область. Как следует из равенства  $\mathbf{M} = -\text{grad } U$ , в области, где потенциал постоянен, поле  $\mathbf{M}$  равно нулю.

Можно найти различное применение результатам, полученным при рассмотрении этого примера; в частности, он показывает, что принцип электростатического экранирования можно доказать путем решения задачи Дирихле.

## Случай 2

Теперь предположим, что две произвольные, гармонические в области  $V$  функции  $U_1(p)$  и  $U_2(p)$  имеют одинаковые значения нормальной производной на поверхности  $S$ , т. е.

$$\partial U_1 / \partial n = \partial U_2 / \partial n = \varphi_2(p) \quad \text{на } S, \quad (\text{I.268})$$

где  $\varphi_2(p)$  — известная функция.

Из этого равенства сразу следует, что нормальная производная разности этих функций равна нулю на границе области:

$$\partial U_3(p) / \partial n = 0 \quad \text{на } S.$$

Поэтому поверхностный интеграл в выражении (I.259), как и в предыдущем случае, равен нулю и в области  $V$

$$\nabla U_3 = 0.$$

Это означает, что любые решения уравнения Лапласа — например,  $U_1(p)$  и  $U_2(p)$  — могут отличаться друг от друга во всех точках области  $V$  только на постоянное слагаемое, если их нормальные производные на границе  $S$  совпадают.

Таким образом, эта краевая задача, которая также однозначно определяет поле  $\mathbf{M}$ , может быть поставлена так:

$$\nabla^2 U = 0$$

$$\text{и} \quad \partial U / \partial n = \varphi_2(p) \quad \text{на } S \quad (\text{I.269})$$

или

$$\text{rot } \mathbf{M} = 0, \quad \text{div } \mathbf{M} = 0$$

$$\text{и} \quad M_n = -\varphi_2(p) \quad \text{на } S; \quad (\text{I.270})$$

и она называется задачей Неймана.

В отличие от предыдущего случая, уравнения (I.269) определяют потенциал только с точностью до постоянного слагаемого, но, конечно, поле  $M$  определяется однозначно.

### Случай 3

Будем полагать, что граница  $S$  области  $V$  — эквипотенциальна, т. е.

$$U(p) = C \quad \text{на } S. \quad (\text{I.271})$$

Кроме того, предположим, что известно значение  $\varphi_3$  следующего интеграла по поверхности  $S$ :

$$\oint_S \frac{\partial U}{\partial n} dS = \varphi_3. \quad (\text{I.272})$$

Покажем теперь, что две гармонические в области  $V$  функции  $U_1(p)$  и  $U_2(p)$ , удовлетворяющие уравнениям (I.271—I.272), могут различаться между собой только постоянным слагаемым. Обратимся снова к поверхностному интегралу в уравнении (I.259):

$$\oint_S U_3 \frac{\partial U_3}{\partial n} dS.$$

Так как граница  $S$  эквипотенциальна для обоих потенциалов  $U_1$  и  $U_2$ , то их разность  $U_3(p) = U_1(p) - U_2(p)$  также постоянна на этой поверхности и, следовательно, можем записать

$$\oint_S U_3 \frac{\partial U_3}{\partial n} dS = U_3 \oint_S \frac{\partial U_3}{\partial n} dS.$$

Принимая во внимание равенство (I.272), имеем

$$\oint_S U_3 \frac{\partial U_3}{\partial n} dS = U_3 \oint_S \frac{\partial U_3}{\partial n} dS = U_3 \left\{ \oint_S \frac{\partial U_1}{\partial n} dS - \oint_S \frac{\partial U_2}{\partial n} dS \right\} = 0$$

и, в соответствии с (I.260),

$$\nabla U_3 = 0$$

или

$$U_2(p) = U_1(p) + C.$$

Таким образом, краевые условия (I.271), (I.272) определяют потенциал в области  $V$  с точностью до некоторого постоянного слагаемого. Соответственно, третья краевая задача может быть поставлена в виде

$$\nabla^2 U = 0$$

и (I.273)

$$\oint_S \frac{\partial U}{\partial n} dS = \varphi_3,$$

где  $S$  — эквипотенциальная поверхность, или

$$\operatorname{rot} \mathbf{M} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{M} = 0$$

и (I.274)

$$\oint_S M_n dS = -\varphi_3,$$

где  $\varphi_3$  — известная величина, а  $M_n$  — нормальная к  $S$  компонента поля  $\mathbf{M}$ , модуль которой совпадает с абсолютной величиной  $\mathbf{M}$ , так как на эквипотенциальной поверхности  $S$  тангенциальная компонента  $\mathbf{M}$  равна нулю.

Имеется много случаев, когда гармонические поля могут быть определены путем решения третьей краевой задачи. Например, определение электростатического поля вне проводников в предположении, что суммарный заряд на поверхности каждого проводника известен, приводит к решению этой задачи.

В заключение кратко изложим, какие основные результаты получены в этом разделе.

1. Определены три типа краевых условий, однозначно определяющих поле  $\mathbf{M}$ , гармоническое в области  $V$ .

2. Как было отмечено выше, область  $V$  может быть ограничена несколькими поверхностями и в каждой их точке должно быть задано одно из этих краевых условий.

3. Процесс определения этих условий, основанный на применении теоремы Гаусса, называется доказательством теоремы единственности.

4. Вообще говоря, ограничивающие область  $V$  поверхности могут иметь произвольные форму и расположение, но при этом удобно различать три случая. В первом случае поверхности, окружающие возбудители поля, расположены в окрестности этих возбудителей и, в сущности, краевые условия на таких поверхностях заменяют сведения о характеристиках возбудителей. Во втором случае поверхность находится на большом удалении от всех возбудителей и можно полагать, что поле  $\mathbf{M}$  очень мало во всех точках этой поверхности. Кроме того, при анализе конкретной задачи обычно можно установить, каково поведение поля на больших расстояниях от возбудителей и каким образом убывает поле. Эти сведения служат для определения краевых условий на бесконечности. И, наконец, заслуживает внимания еще один случай. Часто границу области  $V$  выбирают так, чтобы она совпадала с поверхностью, на которой проведены измерения поля; этот случай возникает при решении обратных задач.

5. Очевидно, что если поле  $\mathbf{M}$  всюду удовлетворяет уравнениям (I.223), то оно равно нулю:

$$\mathbf{M} \equiv 0.$$

Такой вывод очевиден, так как это поле не имеет возбудителей. О потенциале такого поля можем сказать, что если функция является гармонической всюду, то она равна нулю; и здесь мы снова видим аналогию с линейными функциями.

### 1.10. ПОЛЯ ИСТОЧНИКОВ <sup>1</sup>

В этом разделе будем рассматривать поле  $\mathbf{M}$  в области  $V$ , в которой имеются лишь источники поля, но при этом вне этой области могут существовать возбудители поля обоих типов. В общем случае поле  $\mathbf{M}$  в области  $V$  является суммой двух следующих полей:

1) поля, создаваемого источниками, расположенными в области  $V$ ;

2) гармонического поля «внешних» возбудителей.

Основное внимание уделим первой составляющей суммарного поля, которую естественно назвать полем источников.

Согласно (I.199), для поля источников имеем следующую систему уравнений:

$$\oint_l \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = 0, \quad \oint_s \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = Q.$$

или

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{M} &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{M} &= Q, \\ \operatorname{Rot} \mathbf{M} &= 0, & \operatorname{Div} \mathbf{M} &= Q_s. \end{aligned} \tag{I.275}$$

Понятно, что записанное в трех формах первое уравнение этой системы указывает на отсутствие вихрей в области  $V$  и, соответственно, можно ожидать, что поля источников и гармонические поля имеют некоторые общие свойства.

Обратившись к системе уравнений (I.275), охарактеризуем самые общие свойства поля источников в области  $V$ .

1. У такого поля  $\mathbf{M}$  нет линий обрыва нормальных поверхностей, но, в отличие от гармонического поля, имеются точки обрыва векторных линий — там, где находятся источники поля.

2. Поверхности, где находятся поверхностные источники поля, являются особыми для поля  $\mathbf{M}$ . Действительно, из уравнения

$$\operatorname{Div} \mathbf{M} = Q_s$$

следует, что нормальная компонента поля — разрывная функция:

$$M_n^{(2)} - M_n^{(1)} = Q_s \tag{I.276}$$

<sup>1</sup> Такие — удовлетворяющие системе уравнений (I.275) — поля  $\mathbf{M}$  называют также безвихревыми, потенциальными или ламеллярными.

и разрыв этот прямо пропорционален плотности поверхностных источников. В частности, если в окрестности какой-либо точки поверхностная плотность источников равна нулю, то компонента  $M_n$  непрерывна в этой точке.

3. В связи с отсутствием вихрей в области  $V$  тангенциальная компонента  $M_t$  (если величина  $M$  ограничена) всегда непрерывна в  $V$  при любом распределении поверхностных источников:

$$\text{Rot } \mathbf{M} = 0 \quad \text{или} \quad M_t^{(1)} = M_t^{(2)}. \quad (1.277)$$

4. Согласно первому из уравнений (1.275), циркуляция вектора  $\mathbf{M}$  по любому контуру, расположенному в области  $V$ , равна нулю. Например, часть такого контура может проходить там, где находятся источники поля, а другая часть — вне источников.

5. Как следует из первого уравнения системы в дифференциальной форме,  $\text{rot } \mathbf{M} = 0$ , поле

$$\mathbf{M} = -\text{grad } U$$

или

$$M_t = -\partial U / \partial l, \quad (1.278)$$

где  $U$  — потенциал поля источников.

Таким образом, поле источников, так же, как гармоническое поле, может быть описано при помощи скалярной функции  $U(p)$ . Такое сходство между этими полями не удивительно, так как в обоих случаях в области  $V$  отсутствуют вихри. Сделаем еще два замечания, не требующие дополнительных пояснений.

А. Потенциал  $U$  определяется уравнением (1.278) с точностью до постоянного слагаемого.

Б. Уравнение (1.278) справедливо только в тех точках, которые не являются особыми.

6. Так как циркуляция

$$\oint_l \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = 0,$$

напряжение поля источников не зависит от формы пути и, как и в случае гармонического поля, может быть выражено как разность потенциалов:

$$\int_a^b \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = U(a) - U(b). \quad (1.279)$$

7. Аналогично тому, как это было сделано при рассмотрении гармонического поля, можем получить уравнение для потенциала поля источников. Подставляя выражение (1.278) для поля  $\mathbf{M}$  во второе уравнение системы —  $\text{div } \mathbf{M} = Q$ , получаем

$$\text{div grad } U = -Q \quad (1.280)$$

или

$$\nabla^2 U = -Q.$$

Это уравнение описывает поведение потенциала в тех точках, где существуют первые и вторые производные поля  $U$ ; оно называется уравнением Пуассона. Очевидно, что вне источников уравнение Пуассона вырождается в уравнение Лапласа:

$$\nabla^2 U = 0.$$

Поэтому можем различать две области, которые вместе составляют область  $V$ . В первой из них нет источников и потенциал  $U$ , удовлетворяя уравнению Лапласа, является гармонической функцией; во второй — занятой источниками, потенциал — решение уравнения Пуассона.

Согласно (I.249) можем представить уравнение Пуассона в следующем виде:

$$\frac{6}{h^2} [U^{\text{сп}}(p) - U(p)] = -Q. \quad (\text{I.281})$$

Таким образом, если правая часть уравнения (I.281) положительная, то среднее значение потенциала в окрестности некоторой точки  $p$  больше его значения в этой точке. Так ведет себя, например, потенциал электрического поля в тех местах, где расположены отрицательные электрические заряды. В то же время (удовлетворяющий уравнению (I.280)) потенциал гравитационного поля внутри гравитационных масс, как и потенциал электрического поля в местах расположения положительных зарядов, в некоторой точке  $p$  будет больше среднего значения потенциала в окрестности этой точки.

8. Уравнение Пуассона — одно из фундаментальных уравнений в теории поля. Следует отметить, что поля источников широко применяются в геофизике. Гравитационное и электрическое поля, так же как и поле продольных упругих волн<sup>1</sup>, — типичные примеры полей источников.

9. В следующей главе мы покажем, что потенциал гравитационного поля может быть представлен как

$$U(p) = \gamma \int_V \frac{\delta(q) dV}{L_{qp}},$$

а вместе с тем вне и внутри масс он удовлетворяет уравнениям Лапласа и Пуассона, соответственно:

---

<sup>1</sup> Поле продольных упругих волн — безвихревое и может быть названо полем источников, но оно зависит от времени и характеризующие его величины, в частности скалярный потенциал поля смещений, удовлетворяют уравнениям более сложным, чем уравнение Пуассона.



$$\nabla^2 U = 0 \quad \text{и} \quad \nabla^2 U = -4\pi\gamma\delta.$$

Обобщая эти результаты, можем сказать, что для любого поля источников решение уравнения

$$\nabla^2 U = -Q$$

имеет вид

$$U(p) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{Q dV}{L_{qp}}$$

и это выражение определяет потенциал внутри и вне источников.

Конечно, существует бесконечное множество решений уравнения Пуассона для области  $V$ , различающихся между собой на потенциал гармонического поля.

10. Уравнение Пуассона эквивалентно уравнениям

$$\text{rot } \mathbf{M} = 0, \quad \text{div } \mathbf{M} = Q$$

поля  $\mathbf{M}$  для обычных (не особых) точек области  $V$ . Чтобы получить поверхностные аналоги уравнения Пуассона, обратимся снова к равенству (I.278). Тогда, согласно (I.276—I.277), тангенциальная и нормальная производные потенциала  $U(p)$  на любой поверхности, расположенной в области  $V$ , удовлетворяют следующим условиям:

$$\frac{\partial U^{(1)}}{\partial t} = \frac{\partial U^{(2)}}{\partial t} \quad \text{и} \quad \frac{\partial U^{(2)}}{\partial n} - \frac{\partial U^{(1)}}{\partial n} = -Q_s.$$

Как было показано в предыдущем разделе, первое из этих условий может быть заменено более простым:

$$U^{(1)} = U^{(2)},$$

так как из непрерывности на поверхности потенциала следует непрерывность его тангенциальной производной. Таким образом, поведение потенциала на поверхности, расположенной в области  $V$ , определяют следующие равенства:

$$U^{(1)} = U^{(2)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial U^{(2)}}{\partial n} - \frac{\partial U^{(1)}}{\partial n} = -Q_s. \quad (\text{I.282})$$

11. Согласно (I.280), (I.282) систему уравнений поля  $\mathbf{M}$  можно заменить эквивалентной системой уравнений для потенциала  $U$  в области  $V$ :

$$\nabla^2 U = -Q, \quad (\text{I.283})$$

$$U^{(1)} = U^{(2)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial U^{(2)}}{\partial n} - \frac{\partial U^{(1)}}{\partial n} = -Q_s.$$

Ее сравнение с подобной системой уравнений (I.243) для гармонических полей показывает, что система (I.283) сложнее.

Во-первых, вместо однородного уравнения Лапласа мы имеем уравнение Пуассона с правой частью, характеризующей распределение источников в области  $V$ . Во-вторых, при наличии поверхностных источников нормальная производная потенциала — разрывная функция.

На основе изложенного выше вполне естественно предположить, что, как и в случае гармонического поля, системы уравнений (I.275) или (I.283) недостаточно для однозначного определения поля источников в области  $V$ .

Рассмотрим вопрос о единственности определения поля  $M$ , а затем перейдем к краевой задаче для потенциала. В начале этого раздела поле  $M$  в области  $V$  было представлено в виде суммы двух полей:

$$M = M_i + M_e. \quad (I.284)$$

Здесь  $M_i$  — поле расположенных в области  $V$  источников, плотности которых характеризуют величины  $Q$  и  $Q_s$ , а  $M_e$  — гармоническое в области  $V$  поле, возбудители которого находятся вне этой области.

По определению, поле  $M_i$  — решение системы уравнений (I.275):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} M_i &= 0, & \operatorname{div} M_i &= Q, \\ \operatorname{Rot} M_i &= 0, & \operatorname{Div} M_i &= Q_s. \end{aligned} \quad (I.285)$$

Поле  $M_i$  определяется этой системой однозначно, так как заданному распределению источников, характеризуемому функциями  $Q$  и  $Q_s$ , соответствует лишь какое-то одно поле. Однако система уравнений (I.275) имеет и другие решения; чтобы показать это, обратимся к полю  $M_e$ . Прежде всего, это поле — гармоническое в области  $V$ , которое удовлетворяет системе однородных уравнений:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} M_e &= 0, & \operatorname{div} M_e &= 0, \\ \operatorname{Rot} M_e &= 0, & \operatorname{Div} M_e &= 0. \end{aligned} \quad (I.286)$$

Кроме того, это поле непрерывно в области  $V$ , так как его возбудители расположены вне этой области, и, в сущности, поверхностные формы уравнений этого поля можно не рассматривать. Если сложить левые и правые части соответствующих уравнений, входящих в системы (I.285), (I.286), то легко убедиться, что суммарное поле  $M$  так же, как и поле  $M_i$ , удовлетворяет системе уравнений (I.285).

В предыдущем разделе было показано, что системе однородных уравнений (I.286) удовлетворяет бесчисленное множество полей, соответствующих различным распределениям возбудителей вне области  $V$ . Поэтому система уравнений поля (I.275), как и система (I.286), также имеет бесчисленное множество решений, различающихся между собой на гармоническое поле  $M_e$ . Иными словами, системы уравнений (I.283) недостаточно для однозначного опре-

деления поля, и нам надо определить, какие краевые условия нужно задать на поверхности  $S_0$ , ограничивающей область  $V$ . Так как эти условия должны позволить однозначно определить поле  $M_e$ , гармоническое в области  $V$ , то можно воспользоваться результатами, полученными в предыдущем разделе, и определить три следующие краевые задачи.

1. Задача Дирихле<sup>1</sup>:

$$\nabla^2 U = -Q,$$

$$U^{(1)} = U^{(2)}, \quad \frac{\partial U^{(2)}}{\partial n} - \frac{\partial U^{(1)}}{\partial n} = -Q_s \quad \text{на } S_i,$$

$$U(p) = \varphi_1(p) \quad \text{на } S_0.$$

Здесь  $S_0$  — поверхность, ограничивающая область  $V$ , а  $S_i$  — поверхность (поверхности), расположенная внутри этой области.

2. Задача Неймана:

$$\nabla^2 U = -Q,$$

$$U^{(1)} = U^{(2)}, \quad \frac{\partial U^{(2)}}{\partial n} - \frac{\partial U^{(1)}}{\partial n} = -Q_s \quad \text{на } S_i,$$

$$\frac{\partial U(p)}{\partial n} = \varphi_2(p) \quad \text{на } S_0.$$

3. Третья краевая задача:

$$\nabla^2 U = -Q,$$

$$U^{(1)} = U^{(2)}, \quad \frac{\partial U^{(2)}}{\partial n} - \frac{\partial U^{(1)}}{\partial n} = -Q_s \quad \text{на } S_i,$$

$$\oint_{S_0} \frac{\partial U}{\partial n} dS = \varphi_3(p)$$

и

$$U(S_0) = \text{const.}$$

Здесь, возможно, следует сделать несколько замечаний.

Функции  $\varphi_1(p)$ ,  $\varphi_2(p)$  и  $\varphi_3(p)$  описывают поведение потенциала суммарного поля, обусловленного возбудителями, расположенными как внутри, так и вне области  $V$ .

Краевую задачу можно сформулировать и для «внешнего» поля  $M_e$ , определив соответствующие функции  $\varphi_1^e(p)$ ,  $\varphi_2^e(p)$  и  $\varphi_3^e(p)$ , при этом в случае третьей краевой задачи требуется, чтобы граница  $S_0$  была эквипотенциальной для обоих полей —  $M_i$  и  $M_e$ . Это связано с тем, что поле  $M_i$  (или его потенциал), создаваемое источниками с известным распределением в области  $V$ , может быть найдено

<sup>1</sup> Задачами Дирихле и Неймана принято называть краевые задачи для функций, гармонических в области  $V$ , и соответствующих краевых условий на поверхности  $S_0$ .

без решения краевой задачи всюду, включая границу  $S_0$ . Из этого следует, что фактически теорема единственности для поля источников сводится к такой теореме для гармонического поля, рассмотренной в предыдущем разделе.

В принципе, поле, обусловленное источниками с известным распределением в области  $V$ , может быть определено на основе физических законов — таких, как законы Кулона или Ньютона, — без решения краевой задачи. То, что определение поля на основе его системы уравнений, заданных в области  $V$ , требует также знания краевых условий — вполне понятно, если учесть, что поле создают и те возбудители, которые расположены вне области  $V$ .

По существу, теорема единственности определяет все те действия, которые надо выполнить для определения поля. Эти действия следующие.

1. Решение уравнения Пуассона.

2. Отбор из этих решений таких функций, которые удовлетворяют краевым условиям.

3. Выбор среди этих функций такой, которая удовлетворяет также условиям на особых поверхностях  $S_i$ . В современных численных методах решения краевых задач, основанных на замене дифференциальных уравнений конечными разностями, все эти операции выполняются совместно.

Согласно теореме единственности, поле в области  $V$  определяется распределением в этой области объемных и поверхностных источников и краевыми условиями, и было бы желательно получить определяющее эти связи уравнение.

Для этого обратимся к теореме Гаусса:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{X} dV = \oint_{S_0} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{S}, \quad (I.287)$$

полагая, что в области  $V$  векторное поле  $\mathbf{X}(q)$  непрерывно и существуют его первые производные. Выразим вектор  $\mathbf{X}$  при помощи двух скалярных функций:  $\varphi(q)$  и  $\psi(q, p)$  следующим образом:

$$\mathbf{X} = \varphi(q) \nabla \psi(q, p) - \psi(q, p) \nabla \varphi(q). \quad (I.288)$$

Здесь  $\varphi$  и  $\psi$  — непрерывные функции с непрерывными первыми и вторыми производными,  $p$  — точка наблюдения, в которой определяется потенциал, а  $q$  — произвольная точка.

Подставляя выражение (I.288) для  $\mathbf{X}$  в равенство (I.287) и принимая во внимание, что

$$\mathbf{X} \cdot d\mathbf{S} = X_n dS = \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n},$$

а

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{X} &= \nabla \varphi \cdot \nabla \psi + \varphi \nabla^2 \psi - \nabla \varphi \cdot \nabla \psi - \psi \nabla^2 \varphi = \\ &= \varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi, \end{aligned}$$

получаем

$$\int_V \{\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi\} dV = \oint_{S_0} \left\{ \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} dS. \quad (I.289)$$

Последнее равенство называется второй формулой Грина, а, в сущности, оно представляет собой теорему Гаусса для случая, когда векторное поле  $X$  определяется выражением (I.288). В частности, полагая  $\psi = \text{const}$ , получаем первую формулу Грина

$$\int_V \nabla^2 \varphi dV = \oint_{S_0} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS. \quad (I.290)$$

Наша цель — получить выражение для потенциала  $U(p)$  в области  $V$ , в которое входили бы плотность источников в этой области, а также значения потенциала и его производной на границе  $S_0$  области  $V$ . Мы рассмотрим несколько подходов к решению этой задачи. Предположим, что функция  $\varphi(q)$  — это потенциал  $U(q)$  поля источников. Принимая во внимание уравнение (I.280), можем переписать равенство (I.289) в виде

$$\int_V U(q) \nabla^2 G dV + \int_V G(q, p) Q(q) dV = \oint_{S_0} \left\{ U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right\} dS. \quad (I.291)$$

Здесь  $G(q, p) = \psi(q, p)$  — функция, называемая функцией Грина.

Оказывается, что можно получить разные выражения для потенциала  $U(p)$ , выбирая различные функции  $G(q, p)$ . Чтобы показать это, рассмотрим несколько случаев.

### Случай 1

Предположим, что функция  $G(q, p)$  определяется выражением

$$G(q, p) = \frac{1}{L_{qp}}, \quad (I.292)$$

где  $L_{qp}$  — расстояние между точками  $q$  и  $p$ . Как было показано в предыдущих разделах, такая функция Грина удовлетворяет уравнению Лапласа всюду, за исключением одной точки, т. е.

$$\nabla^2 \frac{1}{L_{qp}} = 0, \quad \text{если } q \neq p. \quad (I.293)$$

Так как вторая формула Грина была получена в предположении, что в области  $V$  нет особых точек функций  $U$  и  $G$ , мы не можем просто подставить такую функцию  $G$  в уравнение (I.291).

Чтобы преодолеть это препятствие, окружим точку  $p$  сферической поверхностью  $S_r$  с малым радиусом  $r$  и с центром в точке  $p$

и применим уравнение (I.291) к области, ограниченной поверхностями  $S_0$  и  $S_*$  (рис. I.15, в). Вначале будем полагать, что потенциал и его первые производные непрерывны в области  $V$ , т. е. в этой области нет поверхностных источников. Тогда, принимая во внимание (I.293), вместо (I.291) получим

$$\int_V \frac{Q(q)}{L_{qp}} dV = \oint_{S_0} \left\{ U(q) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{L_{qp}} - \frac{1}{L_{qp}} \frac{\partial U(q)}{\partial n} \right\} dS + \\ + \oint_{S_*} \left\{ U(q) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{L_{qp}} - \frac{1}{L_{qp}} \frac{\partial U(q)}{\partial n} \right\} dS. \quad (\text{I.294})$$

Определим, чему равно значение интеграла по сферической поверхности  $S_*$ , если ее радиус  $r$  стремится к нулю.

Так как потенциал и его производные — непрерывны, имеем

$$U(q) \rightarrow U(p) \quad \text{и} \quad \frac{\partial U(q)}{\partial n} \rightarrow \frac{\partial U(p)}{\partial n}, \quad \text{если} \quad r \rightarrow 0.$$

То есть функции  $U(q)$  и  $\partial U(q)/\partial n$  на поверхности  $S_*$  стремятся к своим значениям в точке наблюдения  $p$ .

Поместим в точку  $p$  начало сферической системы координат. На поверхности  $S_*$  координата  $R = r$ . Как видно на рис. I.15, в, на этой поверхности направление нормали  $n$  (наружной по отношению к области, заключенной между поверхностями  $S_*$  и  $S_0$ ) противоположно направлению орта  $R = \mathbf{i}_R$  и поэтому на  $S_*$

$$G = \frac{1}{L_{qp}} = \frac{1}{r} \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{L_{qp}} = - \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2}.$$

Тогда

$$\oint_{S_*} \left\{ U(q) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{L_{qp}} - \frac{1}{L_{qp}} \frac{\partial U(q)}{\partial n} \right\} dS = \\ = \frac{1}{r^2} \oint_{S_*} U(q) dS - \frac{1}{r} \oint_{S_*} \frac{\partial U(q)}{\partial n} dS.$$

Так как при  $r \rightarrow 0$

$$\oint_{S_*} U(q) dS \rightarrow 4\pi r^2 U(p), \quad \oint_{S_*} \frac{\partial U(q)}{\partial n} dS \rightarrow -4\pi r^2 \left( \frac{\partial U}{\partial R} \right)_{S_*}^{\text{сп}}$$

имеем

$$\frac{1}{r^2} \oint_{S_*} U(q) dS \rightarrow 4\pi U(p),$$

$$\frac{1}{r} \oint_{S_*} \frac{\partial U(q)}{\partial n} dS \rightarrow 0.$$

Таким образом, в пределе интеграл по поверхности  $S_*$  равен  $4\pi U(p)$ :

$$\oint_{S_*} \left\{ U(q) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{L_{qp}} - \frac{1}{L_{qp}} \frac{\partial U(q)}{\partial n} \right\} dS = 4\pi U(p), \text{ если } r \rightarrow 0. \quad (\text{I.295})$$

Этот вывод весьма важен, так как благодаря ему мы можем получить выражение для потенциала в точке  $p$  в виде явной функции. Действительно, подставляя выражение (I.295) для поверхностного интеграла в (I.294), имеем

$$U(p) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{Q(q)}{L_{qp}} dV + \frac{1}{4\pi} \oint_{S_0} \frac{\partial U(q)}{\partial n} \frac{1}{L_{qp}} dS - \frac{1}{4\pi} \oint_{S_0} U(q) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{L_{qp}} dS. \quad (\text{I.296})$$

То есть значение потенциала  $U$  может быть вычислено в любой точке  $p$  области  $V$ , если известно распределение источников в этой области, а также значение потенциала и его нормальной производной на границе  $S_0$  области  $V$ .

В частности, если поверхность  $S_0$  расположена на бесконечности (а область  $V$  — все пространство), то естественным будет предположить, что

$$U(q) \rightarrow 0 \text{ и } \frac{\partial U(q)}{\partial n} \rightarrow 0$$

и поэтому

$$U(p) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{Q(q)}{L_{qp}} dV. \quad (\text{I.297})$$

Иными словами, если источники известны всюду, то потенциал определяет выражение (I.297). Это выражение для потенциала часто называют фундаментальным решением уравнения Пуассона.

Рассмотрим другой пример, когда источники в области  $V$  отсутствуют. Тогда, согласно (I.296),

$$U(p) = \frac{1}{4\pi} \oint_{S_0} \frac{1}{L_{qp}} \frac{\partial U(q)}{\partial n} dS - \frac{1}{4\pi} \oint_{S_0} U(q) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{L_{qp}} dS. \quad (\text{I.298})$$

Таким образом, потенциал в любой точке области, в которой нет источников поля, определяется значениями потенциала и его нормальной производной на границе области; и эти значения пол-

ностью заменяют сведения о распределении возбудителей поля вне области  $V$ .

Вместе с тем, из краевых условий в задачах Дирихле и Неймана следует, что поле может быть однозначно определено в области  $V$ , если на ее границе известны либо значения потенциала  $U(q)$ , либо нормальной производной  $\partial U(q)/\partial n$ . Чтобы показать это, рассмотрим случаи, в которых функции Грина выбирают иначе, чем это было сделано выше.

## Случай 2

Введем функцию Грина по-другому, так, чтобы она удовлетворяла следующим условиям<sup>1</sup>:

1.  $\nabla^2 G = 0$ , если  $q \neq p$ .
2.  $G(q, p) \rightarrow \frac{1}{L_{qp}}$ , если  $q \rightarrow p$ . (I.299)
3.  $\frac{\partial G(q, p)}{\partial n} = 0$  на  $S_0$ .

При сравнении с предыдущим случаем видно, что интеграл по поверхности  $S_0$  по-прежнему равен  $4\pi U(p)$ , так как в обоих случаях функция Грина имеет одну и ту же особенность в точке  $p$ . Тогда, принимая во внимание, что на границе  $S_0$

$$\partial G/\partial n = 0,$$

вместо равенства (I.296) имеем

$$U(p) = \frac{1}{4\pi} \int_V Q(q) G(q, p) dV + \frac{1}{4\pi} \oint_{S_0} G(q, p) \frac{\partial U(q)}{\partial n} dS. \quad (I.300)$$

Таким образом, мы получили выражение, в котором потенциал в любой точке области  $V$  определяется плотностью источников в этой области и значениями нормальной производной потенциала на поверхности  $S_0$ ; это, конечно, соответствует краевой задаче Неймана. Так как

$$M_n = -\partial U/\partial n,$$

то мы можем переписать равенство (I.300) следующим образом:

$$U(p) = \frac{1}{4\pi} \int_V Q(q) G(q, p) dV - \frac{1}{4\pi} \oint_{S_0} M_n(q) G(q, p) dS. \quad (I.301)$$

В частности, если источников в области  $V$  нет, то получаем

<sup>1</sup> Функцию, удовлетворяющую условиям (I.299), принято называть функцией Неймана.



$$U(p) = -\frac{1}{4\pi} \oint_{S_0} M_n(q) G(q, p) dS. \quad (I.302)$$

То есть в этом случае потенциал определяется лишь значениями нормальной компоненты поля  $M$ , заданными на границе  $S_0$ .

Как следует из (I.300), определение функции  $G(q, p)$  позволяет получить решение краевой задачи Неймана. Чтобы показать это, более удобно представить функцию Грина в виде суммы:

$$G(q, p) = \frac{1}{L_{qp}} + h(q, p), \quad (I.303)$$

где  $h(q, p)$  — функция, гармоническая в области  $V$ . Тогда, в соответствии с условиями (I.299), краевая задача для функции  $h(q, p)$  может быть поставлена так:

$$\nabla^2 h(q, p) = 0, \quad (I.304)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} h(q, p) = \varphi_2(q) \quad \text{на } S_0,$$

где

$$\varphi_2(q) = -\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{L_{qp}}. \quad (I.305)$$

Иными словами, для определения потенциала на основе выражения (I.301) требуется получить решение задачи Неймана для гармонической функции  $h(q, p)$ , что обычно является достаточно трудным делом. Сложность определения этой функции в сильной степени зависит от формы поверхности  $S_0^1$ , ограничивающей область  $V$ . Однако имеются случаи, в которых найти  $h(q, p)$ , а также функцию Грина  $G(q, p)$  очень просто. Допустим, например, что граница  $S_0$  области  $V$  состоит из плоскости  $S_n$  и полусферы  $S_{сф}$  бесконечно большого радиуса. Поле на поверхности  $S_{сф}$  стремится к нулю, а функция Грина также стремится к нулю на бесконечности. Обозначим  $p_1$  точку, расположенную вне области  $V$  и зеркально симметричную точке  $p$  относительно плоскости  $S_n$ .

Тогда для расстояний  $L_{qp}$  и  $L_{qp_1}$  имеем

$$L_{qp} = \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2 + (z_q - z_p)^2} \quad (I.306)$$

и

$$L_{qp_1} = \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2 + (z_q + z_p)^2},$$

так как полагаем, что ось  $z$  направлена по нормали к плоскости  $S_n$ , а начало координат находится на этой плоскости и

<sup>1</sup> Более того, функция  $h(q, p)$  полностью определяется этой поверхностью и положением точки  $p$  в области  $V$ .

$$x_{p_1} = x_p, \quad y_{p_1} = y_p, \quad z_{p_1} = -z_p.$$

Легко убедиться, что условиям (I.304) удовлетворяет функция  $h(q, p) = 1/L_{qp_1}$ .

Принимая во внимание, что точка  $p_1$  расположена вне области  $V$  или то, что знаки координат  $z_p$  и  $z_q$  — одинаковы, видим, что такая функция — решение уравнения Лапласа, т. е.

$$\nabla^2 h(q, p) = 0.$$

На плоскости  $S_n$ , где  $z_q = 0$ ,

$$\frac{\partial}{\partial z_q} \frac{1}{L_{qp_1}} = - \frac{z_q + z_p}{L_{qp_1}^3} = - \frac{z_p}{L_{qp}^3}.$$

Вместе с тем для функции  $\varphi_2(q)$  получаем

$$\varphi_2(q) = - \frac{\partial}{\partial z_q} \frac{1}{L_{qp}} = \frac{z_q - z_p}{L_{qp}^3} = - \frac{z_p}{L_{qp}^3} \quad \text{при } z_q = 0.$$

Сравнивая полученные выражения с краевой задачей Неймана (I.304), видим, что функция  $h(q, p)$  удовлетворяет условиям (I.304). Следовательно, потенциал поля источников (в случае, если область  $V$  — полупространство) может быть вычислен по формулам (I.301) или (I.302), в которых функция Грина

$$G(q, p) = \frac{1}{L_{qp}} + \frac{1}{L_{qp_1}}. \quad (\text{I.307})$$

При помощи такой, очень простой функции можно определить потенциал в одном из полупространств, если на ограничивающей полупространство плоскости известна нормальная компонента поля  $M$ . Такой функцией часто пользуются в гравиметрии и магнитометрии для расчета поля над земной поверхностью. В этом случае интегрирование по формулам (I.301), (I.302) проводится лишь в пределах плоскости  $S_n$ .

### Случай 3

Применим другой подход для изменения уравнения (I.296), при котором выберем функцию Грина так, чтобы она удовлетворяла следующим условиям:

1.  $\nabla^2 G = 0$ , если  $q = p$ .
2.  $G(q, p) \rightarrow \frac{1}{L_{qp}}$  при  $q \rightarrow p$ .
3.  $G(q, p) = 0$  на  $S_0$ .

Тогда содержащий нормальную производную потенциала на

поверхности  $S_0$  интеграл равен нулю и вместо выражения (I.296) получаем:

$$U(p) = \frac{1}{4\pi} \int_V Q(q) G(q, p) dV - \frac{1}{4\pi} \oint_{S_0} U(q) \frac{\partial G}{\partial n} dS. \quad (I.309)$$

В частности, при отсутствии источников в области  $V$

$$U(p) = -\frac{1}{4\pi} \oint_{S_0} U(q) \frac{\partial G}{\partial n} dS. \quad (I.310)$$

Определение функции Грина, как и в предыдущем случае, требует решения краевой задачи, которую также можно поставить для гармонической функции  $h$ , удовлетворяющей равенству

$$G(q, p) = \frac{1}{L_{qp}} + h(q, p).$$

Тогда имеем следующую задачу Дирихле:

$$\begin{aligned} \nabla^2 h(q, p) &= 0, \\ h(q, p) &= -\frac{1}{L_{qp}} \text{ на } S_0. \end{aligned} \quad (I.311)$$

Конечно, в общем случае это — очень сложная задача, но она существенно упрощается в некоторых конкретных ситуациях. Например, в случае, когда область  $V$  — полупространство, ограниченное плоскостью  $S_{\pi}$ , в пределах которой  $z = 0$ , и полусферой бесконечно большого радиуса, гармоническая функция

$$h(q, p) = -\frac{1}{L_{qp_1}} = -\frac{1}{\sqrt{(x_q - x_{p_1})^2 + (y_q - y_{p_1})^2 + (z_q - z_{p_1})^2}}. \quad (I.312)$$

Здесь  $p_1$  — зеркальное отражение точки  $p$  в плоскости  $S_{\pi}$ . Тогда на этой плоскости

$$G(q, p) = 0,$$

так как нормальная производная

$$\frac{\partial}{\partial z_q} G(q, p) = \frac{z_p}{L_{qp}^3} - \frac{z_{p_1}}{L_{qp_1}^3} = \frac{2z_p}{L_{qp}^3} \text{ при } z_q = 0.$$

Соответственно, выражение (I.310) может быть записано в виде

$$U(p) = -\frac{z_p}{2\pi} \int_{S_{\pi}} \frac{U(q)}{L_{qp}^3} dS \quad (z_p < 0). \quad (I.313)$$

Можно легко убедиться, что отношение

$$z_p dS / L_{qp}^3$$

может быть выражено следующим образом:

$$\frac{z_p dS}{L_{qp}^3} = \frac{L_{qp} \cdot dS}{L_{qp}^3} = d\omega,$$

где  $d\omega$  — угол видимости элементарной площадки  $dS$  из точки  $p$ . Таким образом, можем представить равенство (I.313) в виде

$$U(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{S_n} U(q) d\omega. \quad (I.314)$$

Теперь рассмотрим еще один подход к выбору функции Грина.

#### Случай 4

Допустим, что функция Грина удовлетворяет следующим двум условиям.

А. В точке наблюдения  $p$  эта функция имеет особенность — такую же, как у рассмотренных выше функций Грина:

$$G(q, p) \rightarrow \frac{1}{L_{qp}} \quad \text{при } q \rightarrow p. \quad (I.315)$$

Б. В отличие от предыдущих случаев функция  $G$  удовлетворяет тому же уравнению, что и потенциал  $U$ :

$$\nabla^2 G = -Q. \quad (I.316)$$

Иными словами, мы далее не полагаем, что функция Грина — гармоническая.

Обращаясь снова к формуле (I.289) и принимая во внимание, что

$$\nabla^2 U = -Q \quad \text{и} \quad \nabla^2 G = -Q,$$

видим, что объемный интеграл в этой формуле равен нулю<sup>1</sup>. Поверхностный интеграл, как это делалось выше, представим как сумму двух интегралов, и тогда

$$\oint_{s_0} \left\{ U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right\} dS + \oint_{s_*} \left\{ U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right\} dS = 0.$$

Так как функция Грина имеет ту же особенность, что и в предыдущих случаях, получаем

$$U(p) = \frac{1}{4\pi} \int_{s_0} \left\{ G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right\} dS. \quad (I.317)$$

<sup>1</sup> Видимо, автор фактически имеет в виду случай, когда источники поля в области  $V$  отсутствуют. В общем случае при выполнении условия (I.316) для интеграла по области  $V$  получаем:  $\int_V Q(G - U) dV$ .

Таким образом, мы выразили потенциал в любой точке области  $V$  через значения потенциала и его нормальной производной на границе  $S_0$  этой области.

Предположим, что функция Грина имеет следующий вид:

$$G(q, p) = f(u) / L_{qp}, \quad (I.318)$$

где  $u$  зависит от расстояния  $L_{qp}$ , а  $f(u) \rightarrow 1$  при  $L_{qp} \rightarrow 0$ .

Подставляя выражение (I.318) в (I.317), имеем:

$$U(p) = \frac{1}{4\pi} \oint_{S_0} G \frac{\partial U}{\partial n} dS - \frac{1}{4\pi} \oint_{S_0} U(q) \frac{f'(u)}{L_{qp}} \frac{\partial L_{qp}}{\partial n} dS + \\ + \frac{1}{4\pi} \oint_{S_0} U(q) \frac{f(u)}{L_{qp}^2} \frac{\partial L_{qp}}{\partial n} dS, \quad (I.319)$$

где  $f'(u) = \partial f(u) / \partial n$ .

Мы рассмотрели несколько видов функций Грина, определяемых различными выражениями, позволяющими вычислить потенциал в области  $V$ . Дополним сказанное несколькими замечаниями, затрагивающими разные аспекты рассматриваемого вопроса.

1. Функцию Грина можно интерпретировать как потенциал поля, создаваемого некоторыми источниками. Например, функция  $G(q, p) = 1/4\pi L_{qp}$  — это потенциал<sup>1</sup> в точке наблюдения  $p$  поля, создаваемого единичной точечной массой (либо зарядом), расположенной в точке  $q$ .

В отличие от этого функция Грина

$$G(q, p) = \frac{f\left(t - \frac{L_{qp}}{C}\right)}{4\pi L_{qp}}, \quad (I.320)$$

где

$$f\left(t - \frac{L_{qp}}{C}\right) = \begin{cases} 0, & t < \frac{L_{qp}}{C} \\ 1, & t \geq \frac{L_{qp}}{C} \end{cases}$$

описывает потенциал поля смещений при распространении со скоростью  $C$  продольных упругих волн, возбуждаемых элементарным источником в точке  $q$ .

Подставляя выражение (I.320) в (I.319), получаем формулу Кирхгофа, играющую важную роль в теории упругих колебаний.

2. При выводе выражений для потенциала мы полагали, что он и его производные — функции, непрерывные в области  $V$ .

<sup>1</sup> С точностью до постоянного множителя, зависящего от физической природы поля и применяемой системы физических единиц.

Теперь рассмотрим случай, когда на поверхности  $S_i$  в области  $V$  имеются поверхностные источники и нормальная компонента поля  $\mathbf{M}$  — функция, разрывная на этой поверхности. Тогда, окружая эту поверхность поверхностью  $S_{0i}$  и применяя теорему Гаусса (I.287) к области, ограниченной поверхностями  $S_0$  и  $S_{0i}$ , получаем в правой части (I.289) еще одно слагаемое — интеграл по поверхности  $S_{0i}$ . В пределе — при стягивании поверхности  $S_{0i}$  к  $S_i$  получаем интеграл по лицевой и оборотной сторонам поверхности  $S_i$  (рис. I.15,  $z$ ). Принимая во внимание, что нормаль к поверхности  $S_{0i}$  имеет на оборотной стороне  $S_i$  то же направление, что и нормаль к поверхности  $S_i$ , а на лицевой стороне направления этих нормалей противоположны, имеем

$$\int_V \{\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi\} dV = \oint_{S_0} \left\{ \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} dS + \\ + \int_{S_i} \left\{ \varphi^{(1)} \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial n} - \varphi^{(2)} \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial n} - \psi^{(1)} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial n} + \psi^{(2)} \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial n} \right\} dS, \quad (\text{I.321})$$

где  $\varphi^{(1)}$ ,  $\psi^{(1)}$  и  $\varphi^{(2)}$ ,  $\psi^{(2)}$  — значения функций  $\varphi$ ,  $\psi$  соответственно на оборотной и лицевой сторонах поверхности  $S_i$ .

Полагая  $\varphi = U$  и  $\psi = G$  и считая, что потенциал, функция Грина и производная этой функции непрерывны на поверхности  $S_i$ , можем упростить последний интеграл в правой части равенства (I.321), представив его в следующем виде:

$$\int_{S_i} G \left\{ \frac{\partial U^{(2)}}{\partial n} - \frac{\partial U^{(1)}}{\partial n} \right\} dS = - \oint_{S_i} G (M_n^{(2)} - M_n^{(1)}) dS = - \oint_{S_i} G Q_s dS, \quad (\text{I.322})$$

где  $G = G^{(2)} = G^{(1)}$ , а  $M_n^{(2)}$  и  $M_n^{(1)}$  — значения нормальной компоненты поля  $\mathbf{M}$  на разных сторонах поверхности  $S_i$ .

Таким образом, в присутствии поверхностных источников в правой части полученного выше выражения для потенциала в точке  $p$  появляется дополнительное слагаемое, определяемое выражением (I.322). В частности, если функция Грина — гармоническая в области  $V$  всюду, кроме точки  $p$ , в которой имеет особенность  $1/L_{qp}$ , получаем

$$U(p) \frac{1}{4\pi} \int_V Q(q) G(q, p) dV + \frac{1}{4\pi} \int_{S_i} Q_s(q) G(q, p) dS + \\ + \frac{1}{4\pi} \oint_{S_0} \frac{\partial U(q)}{\partial n} G(q, p) dS + \frac{1}{4\pi} \oint_{S_0} U(q) \frac{\partial G(q, p)}{\partial n} dS. \quad (\text{I.323})$$

При рассмотрении равенства (I.323), как и других подобных

ему выражений, может сложиться впечатление, что решение краевых задач всегда может быть получено путем интегрирования. Однако в общем случае это не так, что связано с тем, что некоторые величины в правой части равенства (I.323) не могут считаться известными, пока не определено поле  $M$ . Рассмотрим этот вопрос более подробно.

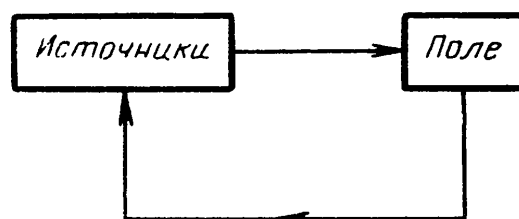
Вначале отметим, что интегралы по поверхности  $S_0$  содержат потенциал и его нормальную производную, т. е. величины, входящие в краевые условия. Как уже было сказано выше, область  $V$ , где определяется поле, обычно ограничена поверхностями, окружающими первичные источники (источники первичного поля), и бесконечно удаленной поверхностью. Соответственно, зная поле, создаваемое заданными первичными источниками, и поведение поля на бесконечности, можем полагать известными (если известна функция  $G$ ) интегралы по поверхности  $S_0$  в выражении (I.323). Этот вывод остается справедливым также в случаях, когда часть поверхности  $S_0$  не находится в бесконечности, а является (внешней) границей среды. Например, нормальная компонента вектора плотности тока у границы с вакуумом (или изолятором) или упругие напряжения на свободной границе, отделяющей упругую среду от вакуума, равны нулю.

Теперь рассмотрим те интегралы в выражении (I.323), которые содержат плотности источников поля. В общем случае эти плотности источников зависят от поля  $M$  и свойств среды. Это, например, источники, возникающие в тех местах, где тот или иной параметр среды меняется по направлению поля. Источники поля могут также появляться на границах областей с разными значениями параметров среды. В некоторых случаях бывает удобно представить плотности источников в виде сумм:

$$Q = Q_0 + Q_1 \quad \text{и} \quad Q_S = Q_{0S} + Q_{1S}, \quad (\text{I.324})$$

где  $Q_0$ ,  $Q_{0S}$  — плотности источников, которые могут считаться известными до нахождения поля, а плотности  $Q_1$ ,  $Q_{1S}$  зависят от поля.

Иными словами, мы сталкиваемся с проблемой, которую можно назвать «замкнутым кругом». Действительно, чтобы определить поле, надо знать распределение его источников, но оно, в свою очередь, зависит от поля, что можно проиллюстрировать следующей схемой:



Это означает, что совокупность всех источников поля в принципе не может быть задана, если не определено поле, и поэтому ра-

венством (I.323) и подобными ему выражениями нельзя воспользоваться для расчета потенциала  $U(p)$  путем интегрирования. Конечно, есть и исключения из этого правила, например, при расчете гравитационного поля могут считаться заданными все массы.

Продолжая рассмотрение этого вопроса и обращаясь к системе уравнений поля

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{M} &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{M} &= Q, \\ \operatorname{Rot} \mathbf{M} &= 0, & \operatorname{Div} \mathbf{M} &= Q_s, \end{aligned} \quad (\text{I.325})$$

можем сказать, что эта система в общем случае содержит две неизвестные функции — поле  $\mathbf{M}$  и его источники. Если иметь в виду расчет поля, то это означает, что правые части  $Q$  и  $Q_s$  уравнений не известны, и поэтому в таком виде эти уравнения не пригодны для решения краевых задач. Оказывается, однако, что можно изменить систему уравнений так, чтобы в нее входило лишь одно неизвестное поле, либо получить два уравнения с двумя неизвестными, что позволяет исключить любое из этих неизвестных.

Такая же проблема «замкнутого круга» возникает и для потенциала. В частности, для обычных (не особых) точек пространства имеем уравнение Пуассона

$$\nabla^2 U = -Q$$

с неизвестной правой частью и, естественно, это уравнение также требует какого-то преобразования.

То, как именно следует преобразовать систему уравнений поля и уравнение потенциала, зависит от физической природы поля (электрическое, упругих колебаний), поэтому покажем, как это делается, на двух конкретных примерах.

### Пример 1. Электростатическое поле в присутствии диэлектриков

В этом случае система уравнений электрического поля  $\mathbf{E}$  имеет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{E} &= (\delta_0 + \delta_b) / \epsilon_0, \\ \operatorname{Rot} \mathbf{E} &= 0, & \operatorname{Div} \mathbf{E} &= (\sigma_0 + \sigma_b) / \epsilon_0, \end{aligned} \quad (\text{I.326})$$

где  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная;  $\delta_0$ ,  $\sigma_0$  и  $\delta_b$ ,  $\sigma_b$  — плотности свободных и связанных зарядов, а

$$\delta = \delta_0 + \delta_b, \quad \sigma = \sigma_0 + \sigma_b$$

— объемная и поверхностная плотности полных зарядов.

В диэлектриках под действием электрического поля происходит взаимное смещение положительных и отрицательных связанных зарядов, то есть — поляризация среды. Полагая, что поляризация прямо пропорциональна электрическому полю, можно показать, что плотности связанных зарядов определяются выражениями



$$\delta_b = -\operatorname{div} \alpha \mathbf{E}, \quad \sigma_b = -\operatorname{Div} \alpha \mathbf{E}, \quad (\text{I.327})$$

где  $\alpha$  — параметр, характеризующий способность среды поляризоваться и называемый поляризуемостью.

Подставляя выражения (I.327) для плотностей связанных зарядов в (I.326), получаем

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \varepsilon \mathbf{E} = \delta_0, \quad (\text{I.328})$$

$$\operatorname{Rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{Div} \varepsilon \mathbf{E} = \sigma_0,$$

где  $\varepsilon = \varepsilon_0 + \alpha$  — (абсолютная) диэлектрическая проницаемость среды.

Таким образом, вместо (I.326) получили другую систему уравнений поля, в которых правые части могут считаться известными, что дает возможность получить решение этой системы уравнений, если выполняются два следующих, сделанных выше допущения.

А. Поляризация среды происходит под действием электрического поля.

Б. Имеется прямая пропорциональная зависимость между полем  $\mathbf{E}$  и поляризацией.

Понятно, что при определении электростатического поля в присутствии диэлектриков свободные заряды могут быть заданы, и системой уравнений (I.328), в отличие от (I.326), можно воспользоваться для определения поля.

Теперь, в соответствии с системой (I.328), получим уравнение для потенциала. Из первого уравнения системы следует, что

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} U,$$

а подставляя это выражение во второе уравнение системы, получаем

$$\operatorname{div} (\varepsilon \operatorname{grad} U) = -\delta_0$$

или

$$\nabla (\varepsilon \nabla U) = -\delta_0. \quad (\text{I.329})$$

Конечно, это уравнение несколько сложнее, чем уравнение Пуассона

$$\nabla^2 U = -\delta/\varepsilon_0,$$

но его правая часть может быть произвольно задана и поэтому им можно воспользоваться для определения потенциала.

Оказывается, что уравнение (I.329) можно очень просто представить в форме, сходной с уравнением Пуассона. Действительно, так как  $\nabla$  — линейный оператор, из (I.329) получаем

$$\nabla \varepsilon \cdot \nabla U + \varepsilon \nabla^2 U = -\delta_0$$

или

$$\nabla^2 U = - \frac{\delta_0}{\varepsilon} - \frac{\nabla \varepsilon \cdot \nabla U}{\varepsilon} = - \frac{\delta}{\varepsilon_0}, \quad (I.330)$$

где  $\delta$  — объемная плотность полных зарядов.

Выражение (I.330) можно рассматривать как уравнение Пуассона с неизвестной правой частью, содержащей потенциал и плотность свободных зарядов.

Для поверхностных аналогов уравнения потенциала  $U$  имеем

$$U_1 = U_2 \quad \text{и} \quad \varepsilon_2 \frac{\partial U_2}{\partial n} - \varepsilon_1 \frac{\partial U_1}{\partial n} = - \sigma_0.$$

**Пример 2. Постоянное электрическое поле в проводящей среде**

Так как постоянное электрическое поле в проводящей среде (стационарное электрическое поле) так же, как и электростатическое поле, создает электрические заряды, система уравнений этого поля та же, что и в предыдущем случае:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{E} &= \delta / \varepsilon_0, \\ \operatorname{Rot} \mathbf{E} &= 0, & \operatorname{Div} \mathbf{E} &= \sigma / \varepsilon_0, \end{aligned} \quad (I.331)$$

но плотности свободных, связанных и полных зарядов зависят от поля  $\mathbf{E}$ . При этом правая часть второго уравнения системы (I.331) неизвестна, и поэтому необходимо так преобразовать эту систему, чтобы сделать ее удобной для определения поля. Для этого в дополнение к полю  $\mathbf{E}$  введем в рассмотрение другое поле, существующее в проводящей среде, называемое плотностью тока  $\mathbf{j}$ , и воспользуемся двумя следующими физическими законами.

А. Закон сохранения электрического заряда, следствием которого является уравнение непрерывности постоянного электрического тока:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{Div} \mathbf{j} = 0. \quad (I.332)$$

Б. Закон Ома (в дифференциальной форме):

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}.$$

Здесь  $\gamma$  — удельная электропроводность среды.

Заменяя второе уравнение системы (I.331) уравнениями (I.332) и принимая во внимание закон Ома, получаем новую систему уравнений поля  $\mathbf{E}$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0, & \operatorname{div} \gamma \mathbf{E} &= 0, \\ \operatorname{Rot} \mathbf{E} &= 0, & \operatorname{Div} \gamma \mathbf{E} &= 0. \end{aligned} \quad (I.333)$$

Очевидно, что для потенциала в этом случае имеем уравнение

$$\nabla (\gamma \nabla U) = 0. \quad (I.334)$$

## 1.11. ПОЛЯ ВИХРЕЙ <sup>1</sup>

В этом разделе рассмотрим общие свойства полей, возбудителями которых являются только вихри. Примерами таких полей являются магнитное поле  $\mathbf{B}$ , или поле смещений, соответствующее распространению поперечных упругих волн, а также компонента  $\mathbf{E}$  переменного электромагнитного поля в отсутствие электрических зарядов. Согласно (I.207) система уравнений поля вихрей в некоторой области  $V$  имеет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{M} &= \mathbf{W}, & \operatorname{div} \mathbf{M} &= 0, \\ \operatorname{Rot} \mathbf{M} &= \mathbf{W}_s, & \operatorname{Div} \mathbf{M} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{I.335})$$

или в интегральной форме —

$$\oint_l \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = W., \quad \oint_s \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (\text{I.336})$$

То есть поток вектора  $\mathbf{M}$  через замкнутую поверхность, расположенную в области  $V$ , всегда равен нулю, а напряжение поля  $\mathbf{M}$  между двумя точками в общем случае зависит от формы пути интегрирования. В этом состоит одно из основных отличий поля вихрей от поля источников, для которого напряжение не зависит от формы пути. Конечно, могут найтись линии, соединяющие две данные точки, напряжение поля вихрей вдоль которых будет одинаковым. Такой случай, например, будем иметь, если эти линии расположены в той части области  $V$ , где вихри отсутствуют.

Как следует из второго уравнения системы (I.335), в связи с отсутствием источников векторные линии поля  $\mathbf{M}$  всегда замкнуты. В общем случае направления поля  $\mathbf{M}$  и его вихрей (вихревых линий), плотность которых характеризует величина  $\mathbf{W}$ , не являются взаимно ортогональными:

$$\mathbf{M} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{M} \neq 0$$

и к ним неприменимо понятие «нормальные поверхности». Однако имеются исключения из этого правила. Например, как показано в разделе I.6, квазипотенциальное поле

$$\mathbf{M} = \varphi \operatorname{grad} U$$

можно описать при помощи нормальных поверхностей.

Установим теперь, с какой точностью определяет поле  $\mathbf{M}$  система уравнений (I.335). Для этого применим тот же подход, которым пользовались в предыдущих разделах.

Предположим, что имеются два произвольных решения  $\mathbf{M}_1$  и  $\mathbf{M}_2$  этой системы уравнений, т. е.

---

<sup>1</sup> Такие — удовлетворяющие уравнениям (I.335), (I.336) поля  $\mathbf{M}$  — чаще называют чисто вихревыми или соленоидальными.

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} M_1 &= W, \quad \operatorname{div} M_1 = 0, \\ \operatorname{Rot} M_1 &= W_s, \quad \operatorname{Div} M_1 = 0 \end{aligned}$$

и (I.337)

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} M_2 &= W, \quad \operatorname{div} M_2 = 0, \\ \operatorname{Rot} M_2 &= W_s, \quad \operatorname{Div} M_2 = 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим разность этих решений

$$M_3 = M_2 - M_1. \quad (I.338)$$

Как следует из (I.337), поле  $M_3$  удовлетворяет системе однородных уравнений:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} M_3 &= 0, \quad \operatorname{div} M_3 = 0, \\ \operatorname{Rot} M_3 &= 0, \quad \operatorname{Div} M_3 = 0. \end{aligned} \quad (I.339)$$

Иными словами, поле  $M_3$  — гармоническое в области  $V$ , так как оно не имеет возбудителей в этой области, а все его возбудители находятся вне области  $V$ . Таким образом, можем утверждать, что система уравнений (I.335) определяет поле  $M$  с точностью до слагаемого в виде гармонического поля. Как было показано выше, гармоническое поле может быть описано при помощи скалярного потенциала  $U$ , т. е.  $M_3 = -\operatorname{grad} U$  и, соответственно,

$$M_2 = M_1 - \operatorname{grad} U.$$

Это показывает, что, как и в случае поля источников, система уравнений (I.335) однозначно определяет лишь ту часть поля, которая обусловлена его возбудителями, расположенными в области  $V$ . Вместе с тем эта система уравнений не зависит от поля  $M_3$ , создаваемого внешними возбудителями, и поэтому ее необходимо дополнить краевыми условиями. Принимая во внимание результаты, полученные в разделе I.5, можем определить две следующие краевые задачи.

1. Задача Дирихле<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} \text{а) } \operatorname{rot} M &= W, \quad \operatorname{div} M = 0, \\ \operatorname{Rot} M &= W_s, \quad \operatorname{Div} M = 0 \end{aligned}$$

и

б)  $M_t = \varphi_1(p)$  — функция, известная на границе области  $V$  ( $t$  — направление, касательное к этой границе).

2. Задача Неймана:

$$\begin{aligned} \text{а) } \operatorname{rot} M &= W, \quad \operatorname{div} M = 0, \\ \operatorname{Rot} M &= W_s, \quad \operatorname{Div} M = 0 \end{aligned}$$

и

---

<sup>1</sup> См. сноску на стр. 90.

б)  $M_n = \varphi_2(p)$  — функция, известная на границе области  $V$  ( $n$  — нормаль к этой границе).

Как было показано ранее, в случаях гармонического поля и поля источников система уравнений поля  $M$  может быть заменена уравнениями Лапласа или Пуассона для скалярного потенциала  $U$ . Однако для поля вихрей такая замена, в общем случае, невозможна, так как в тех частях области  $V$ , где имеются вихри,  $\text{rot } M$  не равен нулю. Вместе с тем систему

$$\text{rot } M = W, \quad \text{div } M = 0$$

можно заменить одним уравнением, воспользовавшись для этого равенством

$$\text{div rot } A \equiv 0,$$

из которого следует, что согласно второму уравнению системы (I.335) поле вихрей  $M$  может быть представлено в виде

$$M = \text{rot } A. \quad (\text{I.340})$$

Вектор  $A$  называется векторным потенциалом поля вихрей  $M$ , которым вектор  $A$  не определяется однозначно, так как, прибавив к  $A$  градиент произвольного скалярного поля, мы получим то же самое поле  $M$ :

$$M = \text{rot } A = \text{rot } (A + \text{grad } \varphi).$$

Этой неоднозначностью, проявляющейся даже в большей степени, чем в случае скалярного потенциала  $U$ , часто можно воспользоваться для упрощения уравнений векторного потенциала  $A$  и, следовательно, — решения прямой задачи. Целесообразность перехода от поля  $M$  источников к потенциалу  $U$  очевидна, так как гораздо проще оперировать со скалярной функцией  $U$ , чем с векторным полем  $M$ . Однако совсем не очевидно, в чем польза от введения функции  $A$  — векторной, как и поле  $M$ . Отметим, что введение векторного потенциала оказывается оправданным по нескольким причинам.

1. Иногда можно описать поле  $M$  при помощи векторного потенциала, имеющего одну или максимум две компоненты (в данной системе координат), что приводит к значительным упрощениям.

2. В общем случае системы уравнений электромагнитного поля и поля упругих волн включают четыре уравнения для двух требующих определения полей, и оказывается, что эти поля часто можно описать при помощи одного или двух векторных потенциалов, лишь некоторые компоненты которых не являются нулевыми.

Учитывая эти обстоятельства, получим уравнение для векторного потенциала  $A$  и определим краевую задачу для этой вспомогательной функции. Подставляя выражение (I.340) для поля  $M$  в первое уравнение системы (I.335), получаем

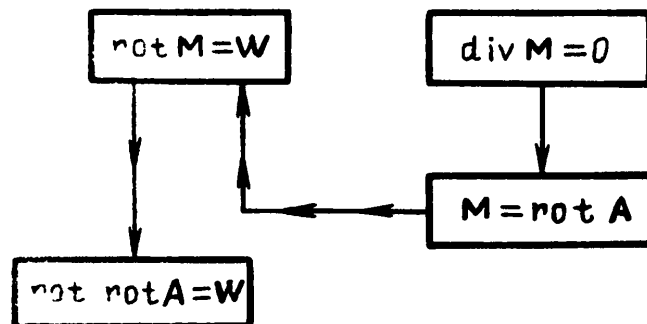
$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \mathbf{W}$$

(I.341)

или

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{W}.$$

Последовательность операций, приводящих к замене системы уравнений поля  $\mathbf{M}$  уравнением потенциала  $\mathbf{A}$ , схематически показана ниже.



Так как

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A},$$

вместо уравнения (I.341) имеем

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mathbf{W} + \text{grad div } \mathbf{A}. \quad (\text{I.342})$$

Часто при рассмотрении задачи для конкретного по физической природе поля можно определить дивергенцию векторного потенциала  $\mathbf{A}$ , полагая, что

$$\text{div } \mathbf{A} = \beta, \quad (\text{I.343})$$

где  $\beta$  — известная функция.

Например, в случае постоянного магнитного поля из закона Био — Савара и закона сохранения электрического заряда следует, что в (I.343)  $\beta \equiv 0$ .

Согласно (I.342), (I.343) имеем

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mathbf{W}_1, \quad (\text{I.344})$$

где

$$\mathbf{W}_1 = \mathbf{W} - \text{grad } \beta.$$

При рассмотрении декартовых компонент векторного потенциала можем воспользоваться результатами, полученными в предыдущих разделах для скалярного поля  $U$ , и определить, как могут быть поставлены краевые задачи для векторного поля  $\mathbf{A}$ .

Далее рассмотрим краевые задачи для  $\mathbf{A}$ , исходя непосредственно из уравнения (I.341). Вначале будем полагать, что в области  $V$  нет поверхностных вихрей и, следовательно, уравнение (I.341) справедливо во всей этой области. Допустим, что имеются два разных решения этого уравнения —  $\mathbf{A}_1$  и  $\mathbf{A}_2$ , т. е.

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}_1 = \mathbf{W} \quad \text{и} \quad \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}_2 = \mathbf{W}.$$

Тогда их разность

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1$$

удовлетворяет однородному уравнению

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = 0. \quad (\text{I.345})$$

Представляя это уравнение в иной форме:

$$\nabla^2 \mathbf{A}_3 = \text{grad div } \mathbf{A}_3$$

и пользуясь аналогией с уравнением Пуассона, видим, что даже при допущении, что  $\text{div } \mathbf{A}_3 = 0$ , уравнение (I.345) имеет бесконечное множество решений.

Теперь все подготовлено для того, чтобы выяснить, какие краевые условия для векторного потенциала  $\mathbf{A}$  позволяют однозначно определить поле. В принципе мы будем следовать той же схеме вывода краевых условий, что и в случае поля источников. Вначале введем в рассмотрение вектор

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}_3 \times \nabla \times \mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_3 \times \mathbf{M}_3. \quad (\text{I.346})$$

Применяя к вектору  $\mathbf{X}$  теорему Гаусса, получаем

$$\oint_{S_0} (\mathbf{A}_3 \times \mathbf{M}_3) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \text{div} (\mathbf{A}_3 \times \mathbf{M}_3) dV,$$

а принимая во внимание (I.340) и равенство

$$\text{div} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \text{rot } \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \text{rot } \mathbf{b},$$

имеем

$$\oint_{S_0} (\mathbf{A}_3 \times \mathbf{M}_3) \cdot d\mathbf{S} = \int_V M_3^2 dV - \int_V \mathbf{A}_3 \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}_3) dV. \quad (\text{I.347})$$

Тогда, согласно (I.345), получаем

$$\oint_{S_0} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{A}_3 \times \mathbf{M}_3) dS = \int_V M_3^2 dV. \quad (\text{I.348})$$

Очевидно, что если из краевых условий на границе  $S_0$  области  $V$  следует, что поверхностный интеграл в левой части (I.348) равен нулю, то поле  $\mathbf{M}_3$  в области  $V$  также равно нулю, и согласно (I.338) поле  $\mathbf{M}$  определяется однозначно. Определим такие краевые условия для двух случаев.

### Случай 1

Допустим, что тангенциальная компонента поля  $\mathbf{M}$  известна на границе  $S_0$  области  $V$ , т. е.

$$\mathbf{n} \times \mathbf{M} = \mathbf{n} \times \mathbf{P}, \quad (\text{I.349})$$

где  $\mathbf{n} \times \mathbf{P}$  — функция, заданная на поверхности  $S_0$ .

Тогда разность двух любых решений (системы уравнений поля вихрей в области  $V$ ), имеющих на  $S_0$  одинаковые значения тангенциальных компонент, удовлетворяет на  $S_0$  равенству

$$\mathbf{n} \times \mathbf{M}_3 = 0. \quad (\text{I.350})$$

Поэтому, принимая во внимание, что

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}),$$

можем сделать вывод, что поверхностный интеграл в выражении (I.348) равен нулю и всюду в области  $V$  имеем  $\mathbf{M}_3 = 0$ . Иными словами, показано, что уравнение (I.341) и краевые условия (I.349) определяют поле  $\mathbf{M}$  однозначно.

## Случай 2

Предположим, что на границе  $S_0$  области  $V$  известна нормальная компонента поля  $\mathbf{M}$ , т. е.

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{M} = N, \quad (\text{I.351}),$$

где  $N$  — заданная скалярная функция. Тогда для разности  $\mathbf{M}_3$  решений  $\mathbf{M}_2$  и  $\mathbf{M}_1$  на этой поверхности

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{M}_3 = 0. \quad (\text{I.352})$$

То есть вектор  $\mathbf{M}_3$  на границе  $S_0$  имеет только тангенциальную компоненту. Это означает, что векторный потенциал  $\mathbf{A}_3$  ориентирован по нормали  $\mathbf{n}$  к  $S_0$  (или против направления нормали), а так как

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{A}_3 \times \mathbf{M}_3) = \mathbf{M}_3 \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{A}_3),$$

поверхностный интеграл в выражении (I.348) равен нулю и поэтому

$$\mathbf{M}_3 \equiv 0.$$

Таким образом, доказано, что для учета в области  $V$  поля  $\mathbf{M}$ , создаваемого внешними возбудителями, достаточно знать тангенциальную либо нормальную компоненту вектора  $\mathbf{M}$  на границе  $S_0$  этой области. Два рассмотренных выше случая относятся к доказательству теоремы единственности, и нами получены краевые условия двух типов.

Теперь предположим, что в области  $V$  имеется особая поверхность  $S_i$  поля  $\mathbf{M}$ , на которой  $\mathbf{W}_S \neq 0$ . Тогда система уравнений поля имеет вид

$$\text{rot } \mathbf{M} = \mathbf{W}, \quad \text{div } \mathbf{M} = 0,$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{M}^{(2)} - \mathbf{M}^{(1)}) = \mathbf{W}_S, \quad \mathbf{n} \cdot (\mathbf{M}^{(2)} - \mathbf{M}^{(1)}) = 0,$$

а уравнения векторного потенциала  $\mathbf{A}$  в поверхностной форме —

$$\mathbf{n} \times \nabla \times (\mathbf{A}^{(2)} - \mathbf{A}^{(1)}) = \mathbf{W}_S, \quad \mathbf{n} \cdot \nabla \times (\mathbf{A}^{(2)} - \mathbf{A}^{(1)}) = 0, \quad (\text{I.353})$$



где  $A^{(1)}$  и  $A^{(2)}$  — значения векторного потенциала соответственно на оборотной и лицевой сторонах поверхности  $S_i$ .

По аналогии со случаем поля источников, можем придать равенству (I.348) более общий вид:

$$\oint_{S_0} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{A}_3 \times \mathbf{M}_3) dS + \int_{S_i} \mathbf{n} \cdot \{ \mathbf{A}_3^{(1)} \times \mathbf{M}_3^{(1)} - \mathbf{A}_3^{(2)} \times \mathbf{M}_3^{(2)} \} dS = \\ = \int_V M_3^2 dV.$$

Очевидно, что второй интеграл в левой части этого выражения будет равен нулю, если

$$\mathbf{A}_3^{(1)} \times \mathbf{M}_3^{(1)} = \mathbf{A}_3^{(2)} \times \mathbf{M}_3^{(2)}$$

или

$$\mathbf{A}_3^{(1)} \times \nabla \times \mathbf{A}_3^{(1)} = \mathbf{A}_3^{(2)} \times \nabla \times \mathbf{A}_3^{(2)},$$

а для этого достаточно, чтобы на поверхности  $S_i$  были непрерывны две векторные функции:

$$\mathbf{A}_3^{(1)} = \mathbf{A}_3^{(2)} \text{ и } \mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{A}_3^{(1)} = \mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{A}_3^{(2)}. \quad (\text{I.354})$$

По определению вектора  $A_3$  равенства (I.354) будут справедливы, если векторный потенциал  $A$  и тангенциальная компонента поля  $M$ , определяемая произведением

$$\mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{A},$$

удовлетворяют следующим условиям на поверхности  $S_i$ :

$$1. \mathbf{A}^{(2)} - \mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{N}_S. \quad (\text{I.355})$$

$$2. \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{A}^{(2)}) - \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{A}^{(1)}) = \mathbf{P}_S,$$

где  $N_S$  и  $P_S$  — заданные функции.

При сравнении второго из этих условий с уравнением поля  $A$  в поверхностной форме видно, что

$$\mathbf{P}_S = \mathbf{W}_S,$$

т. е. функция  $P_S$  характеризует распределение поверхностных вихрей.

Таким образом, в рассматриваемом случае решение краевой задачи состоит из следующих трех этапов.

$$1. \text{ Решение уравнения } \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{W}.$$

2. Определение тех из этих решений, которые удовлетворяют одному из двух граничных условий.

3. Выбор среди этих решений для функций  $A$  того, которое подчиняется условиям (I.355).

Отметим, что это доказательство несложно обобщить так, чтобы получаемые результаты были справедливы в случаях, когда в области  $V$  имеются особые линии поля.

При рассмотрении вопроса о единственности решения краевой задачи было видно, что векторный потенциал  $A$  имеет связь с вихрями в области  $V$  и краевыми условиями. Получим определяющие эту связь уравнения. В принципе, имеется два подхода к выводу таких уравнений. Первый из них основывается на представлении вектора  $A$  суммой его декартовых компонент:

$$A = A_x i + A_y j + A_z k .$$

Так как направления единичных векторов  $i, j, k$  не зависят от координат точки  $p$ , то согласно (I.342), (I.343) каждая декартова компонента (при  $\beta = 0$ ) удовлетворяет уравнению Пуассона:

$$\nabla^2 A_x = -W_x, \quad \nabla^2 A_y = -W_y, \quad \nabla^2 A_z = -W_z$$

и можно воспользоваться результатами, полученными в предыдущем разделе для удовлетворяющего этому уравнению потенциала  $U$ .

Вместе с тем, пользуясь примененным выше подходом, можно получить выражение для векторного потенциала, являющееся прямым следствием уравнения (I.341). Допустим, что векторные функции  $L$  и  $N$  положения точки  $q$ , а также их первые и вторые производные непрерывны в области  $V$  и на ее границе  $S$ . Применяя теорему Гаусса к вектору

$$X = L \times (\nabla \times N) , \tag{I.356}$$

получаем

$$\int_V \operatorname{div} (L \times \operatorname{rot} N) dV = \oint_S (L \times \operatorname{rot} N) \cdot n dS . \tag{I.357}$$

Принимая во внимание равенство

$$\operatorname{div} (a \times b) = b \times \operatorname{rot} a - a \times \operatorname{rot} b ,$$

получаем векторный аналог первой формулы Грина (Стрэттон, 1941):

$$\begin{aligned} \int_V (\operatorname{rot} L \cdot \operatorname{rot} N - L \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} N) dV = \\ = \oint_S (L \times \operatorname{rot} N) \cdot n dS \end{aligned} \tag{I.358}$$

и аналогично

$$\begin{aligned} \int_V (\operatorname{rot} L \cdot \operatorname{rot} N - N \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} L) dV = \\ = \oint_S (N \times \operatorname{rot} L) \cdot n dS . \end{aligned} \tag{I.359}$$

Приравняв разности левых и правых частей (I.358), (I.359), получаем векторный аналог второй формулы Грина:

$$\int_V (\mathbf{N} \cdot \text{rot rot } \mathbf{L} - \mathbf{L} \cdot \text{rot rot } \mathbf{N}) dV = \\ = \oint_S (\mathbf{L} \times \text{rot } \mathbf{N} - \mathbf{N} \times \text{rot } \mathbf{L}) \cdot \mathbf{n} dS. \quad (\text{I.360})$$

Здесь, чтобы получить выражение для векторного потенциала, допустим, что выполняется условие

$$\text{div } \mathbf{A} = 0, \quad (\text{I.361})$$

и, согласно (I.342),

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mathbf{W}.$$

Положим

$$\mathbf{L} = \mathbf{A}(q), \quad \mathbf{N} = \mathbf{G}(q, p), \quad (\text{I.362})$$

где  $q$  — произвольная точка в области  $V$ ;  $p$  — точка, в которой векторная функция Грина  $\mathbf{G}$  имеет особенность  $1/r$ . Величина  $r$  — это расстояние между точками  $q$  и  $p$ , т. е.

$$r = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 + (z_p - z_q)^2}.$$

Как и в случае поля источников, функцию Грина можно выбрать по-разному, но здесь мы рассмотрим лишь одну такую функцию

$$\mathbf{G}(q, p) = \mathbf{a}_0/r, \quad (\text{I.363})$$

где  $\mathbf{a}_0$  — вектор, не зависящий от положения точки  $q$ .

Так как функция Грина имеет особенность в точке  $p$ , окружим эту точку сферической поверхностью  $S_1$  малого радиуса  $r_1$ . Применяя формулу (I.360) к области, ограниченной поверхностями  $S$  и  $S_1$ , получаем

$$\int_V \{\mathbf{G} \cdot \text{rot rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \text{rot rot } \mathbf{G}\} dV = \\ = \oint_S \{\mathbf{A} \times \text{rot } \mathbf{G} - \mathbf{G} \times \text{rot } \mathbf{A}\} \cdot \mathbf{n} dS + \\ + \oint_{S_1} \{\mathbf{A} \times \text{rot } \mathbf{G} - \mathbf{G} \times \text{rot } \mathbf{A}\} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (\text{I.364})$$

Рассмотрим сначала интеграл по области  $V$ . Согласно уравнению (I.341),

$$\int_V \mathbf{G} \cdot \text{rot rot } \mathbf{A} dV = \int_V \frac{\mathbf{a}_0}{r} \cdot \mathbf{W} dV.$$

Тогда, принимая во внимание равенства

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \varphi \mathbf{a}_0 &= \varphi \operatorname{rot} \mathbf{a}_0 + \operatorname{grad} \varphi \times \mathbf{a}_0, \\
\operatorname{rot} \operatorname{rot} \varphi \mathbf{a}_0 &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \varphi \mathbf{a}_0 - \nabla^2 \varphi \mathbf{a}_0, \\
\operatorname{div} \varphi \mathbf{a}_0 &= \varphi \operatorname{div} \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_0 \cdot \operatorname{grad} \varphi, \\
\nabla^2 \frac{1}{r} &= 0
\end{aligned} \tag{I.365}$$

и то, что  $\mathbf{a}_0 = \text{const}$ , получаем

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \mathbf{G} &= \operatorname{grad} \frac{1}{r} \times \mathbf{a}_0, \\
\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{G} &= \operatorname{grad} \left( \mathbf{a}_0 \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right)
\end{aligned}$$

и

$$\mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{G} = \mathbf{A} \cdot \operatorname{grad} \left( \mathbf{a}_0 \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) = \operatorname{div} \left\{ \left( \mathbf{a}_0 \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) \mathbf{A} \right\},$$

так как  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ . Следовательно, объемный интеграл можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\int_V \left( \frac{\mathbf{a}_0}{r} \cdot \mathbf{W} - \operatorname{div} \left\{ \left( \mathbf{a}_0 \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) \mathbf{A} \right\} \right) dV = \\
&= \mathbf{a}_0 \cdot \int_V \frac{\mathbf{W}}{r} dV - \mathbf{a}_0 \cdot \oint_S (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) \operatorname{grad} \frac{1}{r} dS - \\
&- \mathbf{a}_0 \cdot \oint_{S_1} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) \operatorname{grad} \frac{1}{r} dS.
\end{aligned} \tag{I.366}$$

Теперь рассмотрим входящие в выражения (I.364), (I.366) интегралы по поверхности  $S_1$  и преобразуем подынтегральные функции следующим образом:

$$\begin{aligned}
\{\mathbf{A} \times \operatorname{rot} \mathbf{G}\} \cdot \mathbf{n} &= \left\{ \mathbf{A} \times \left( \operatorname{grad} \frac{1}{r} \times \mathbf{a}_0 \right) \right\} \cdot \mathbf{n} = \\
&= \mathbf{a}_0 \cdot \left\{ \operatorname{grad} \frac{1}{r} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{n}) \right\}
\end{aligned}$$

и

$$(\mathbf{G} \times \operatorname{rot} \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{a}_0 \cdot \frac{\mathbf{M} \times \mathbf{n}}{r}.$$

Здесь

$$\mathbf{M} = \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

Принимая во внимание (I.366), можем переписать равенство (I.364) следующим образом:

$$\int_V \frac{\mathbf{w}}{r} dV = \oint_{S+S_1} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) \operatorname{grad} \frac{1}{r} dS +$$

$$+ \oint_{S+S_1} \left\{ \operatorname{grad} \frac{1}{r} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{n}) \right\} dS + \oint_{S+S_1} \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{M}}{r} dS. \quad (I.367)$$

На сферической поверхности с центром в точке  $p$

$$\operatorname{grad} \frac{1}{r} = \frac{\mathbf{r}_0}{r^2},$$

где  $\mathbf{r}_0$  — единичная нормаль к этой поверхности, направленная к точке  $p$ .

Следовательно, интегралы по поверхности  $S_1$  в (I.367) могут быть записаны в виде

$$\frac{1}{r_1^2} \oint_{S_1} \mathbf{r}_0 (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) dS + \frac{1}{r_1^2} \oint_{S_1} \{ \mathbf{r}_0 \times (\mathbf{A} \times \mathbf{n}) \} dS +$$

$$+ \frac{1}{r_1} \oint_{S_1} (\mathbf{n} \times \mathbf{M}) dS. \quad (I.368)$$

Пользуясь тождественным равенством

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}),$$

можем представить подынтегральную функцию во втором слагаемом в (I.368) следующим образом:

$$\mathbf{r}_0 \times (\mathbf{A} \times \mathbf{n}) = (\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{A} - \mathbf{n} (\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{A} - \mathbf{r}_0 (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}),$$

так как  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{n}$ . Поэтому для интегралов по поверхности, окружающей точку  $p$ ,

$$\frac{1}{r_1^2} \oint_{S_1} \mathbf{r}_0 (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) dS + \frac{1}{r_1^2} \oint_{S_1} \mathbf{A} dS - \frac{1}{r_1^2} \oint_{S_1} \mathbf{r}_0 (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) dS +$$

$$+ \frac{1}{r_1} \oint_{S_1} (\mathbf{n} \times \mathbf{M}) dS = \frac{1}{r_1^2} \oint_{S_1} \mathbf{A} dS + \frac{1}{r_1} \oint_{S_1} (\mathbf{n} \times \mathbf{M}) dS.$$

Принимая во внимание, что с уменьшением радиуса  $r_1$  до нуля второй интеграл стремится к нулю, получаем

$$\frac{1}{r_1^2} \oint_{S_1} \mathbf{A} dS + \frac{1}{r_1} \oint_{S_1} (\mathbf{n} \times \mathbf{M}) dS = \frac{\mathbf{A}^{\text{cp}}}{r_1^2} 4\pi r_1^2, \quad (I.369)$$

где  $\mathbf{A}^{\text{cp}}$  — среднее значение векторного потенциала на поверхности  $S_1$ .

Из равенства (I.369) следует, что в пределе ( $r_1 \rightarrow 0$ ) сумма интегралов по поверхности, окружающей точку  $p$ , равна  $4\pi A(p)$ . Согласно (I.367),

$$A(p) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{W(q)}{r} dV - \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{M}}{r} dS - \\ - \frac{1}{4\pi} \oint_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}) \operatorname{grad} \frac{1}{r} dS - \frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{ (\mathbf{n} \times \mathbf{A}) \times \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right\} dS. \quad (\text{I.370})$$

Таким образом, мы получили выражение, в котором векторный потенциал в точке  $p$  области  $V$  определяется вихрями в этой области и значениями поля  $\mathbf{M}$  и его потенциала  $A$  на границе области  $V$ . Очевидно, что поверхностные интегралы в выражении (I.370) описывают векторный потенциал, отвечающий полю вихрей, расположенных вне области  $V$ . Дополним сказанное следующими замечаниями.

1. Выше упоминалось, что функцию Грина можно выбрать по-разному. В частности, она может быть решением того же уравнения, которому удовлетворяет векторный потенциал, и, благодаря этому, в некоторых случаях исчезает объемный интеграл в выражении (I.364).

2. Уравнение (I.370) было получено в предположении, что в области  $V$  могут находиться только объемные вихри. Применяя тот же подход, что и в случае поля источников, нетрудно учесть в этом уравнении присутствие в области  $V$  особых поверхностей или линий.

3. В общем случае вихри, возникающие в среде, существенно зависят от поля  $\mathbf{M}$ , и, следовательно, они не могут быть заданы, если поле неизвестно. Иными словами, как и в случае поля источников, мы снова сталкиваемся с так называемой «проблемой замкнутого круга», и это требует значительного изменения системы уравнений поля.

## Глава II. ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ

### II.1. Закон притяжения Ньютона и гравитационное поле

### II.2. Определение гравитационного поля

Поправка за высоту (за свободный воздух)

Поправка Буге (за промежуточный слой)

Двумерная модель

Трехмерное тело

### II.3. Система уравнений гравитационного поля и его аналитическое продолжение вверх

Интегральная форма уравнений гравитационного поля

Дифференциальная форма уравнений гравитационного поля

### II.1. ЗАКОН ПРИТЯЖЕНИЯ НЬЮТОНА И ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ

Гравитационный метод — это изучение распределения силы притяжения Ньютона, порожденной всеми массами Земли. Одна компонента этой силы обеспечивает равномерное движение массы вокруг оси вращения Земли, другая компонента порождает силу тяжести. Таким образом,

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_a + \mathbf{P},$$

где  $\mathbf{F}_a$  — центробежная сила, направленная к оси вращения;  $\mathbf{P}$  — сила тяжести. Направления этих сил показаны на

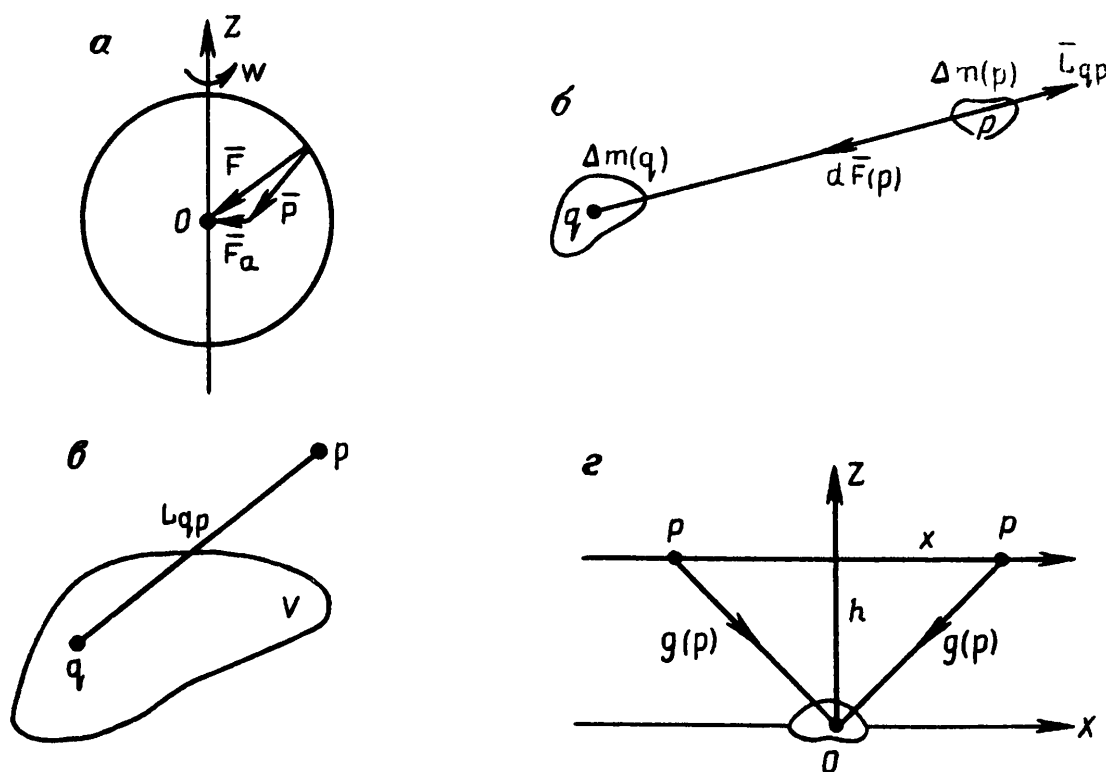


Рис. II.1. Гравитационная сила и ее компоненты (а); взаимодействие между элементарными массами (б); произвольное распределение масс (в); поле, вызванное элементарной массой (г)

рис. II.1, а. Существенно то, что центростремительную силу можно легко учесть вместе с силой притяжения всей массы Земли.

Поскольку  $F_a$  можно вычислить очень точно и исключить из рассмотрения, будем уделять внимание только составляющей силы  $F$ , которая подчиняется закону Ньютона. Для того, чтобы сформулировать этот закон, предположим, что существуют две массы  $\Delta m(p)$  и  $\Delta m(q)$ , заключенные в элементарные объемы  $\Delta V(p)$  и  $\Delta V(q)$  соответственно. Точки  $p$  и  $q$  характеризуют положение этих объемов. Расстояние между точками обозначим через  $L_{qp}$  (рис. II.1, б). Размеры объемов  $\Delta V(p)$  и  $\Delta V(q)$  значительно меньше, чем расстояние  $L_{qp}$ ; данный факт является самой важной особенностью элементарных объемов. В соответствии с законом Ньютона, элементарная масса  $\Delta m(q)$  взаимодействует с элементарной массой  $\Delta m(p)$  с силой  $dF(p)$ , равной

$$dF(p) = -\gamma \frac{\Delta m(q) \Delta m(p)}{L_{qp}^3} L_{qp}, \quad (\text{II.1})$$

где  $\gamma$  — коэффициент пропорциональности или гравитационная постоянная, которая в Международной системе единиц (СИ) равна  $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$ ;  $L_{qp}$  — вектор;  $L_{qp}^0$  — единичный вектор, направленный от точки  $p$  к точке  $q$  вдоль прямой, соединяющей эти точки.  $\Delta V(q)$  и  $\Delta V(p)$  — элементарные объемы. Ясно, что только в этом случае сила притяжения масс, заключенных в этих объемах, не зависит от положения точек  $p$  и  $q$ . Из этого определения следует, что размеры элементарных объемов в различных задачах могут меняться от очень маленьких значений до чрезвычайно больших.

Таким образом, в соответствии с уравнением (II.1), масса  $\Delta m(p)$  подвергается действию силы  $dF(p)$ , которая пропорциональна произведению обеих масс, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и направлена в сторону, противоположную вектору  $L_{qp}$ .

Эта чрезвычайно простая формула, описывающая основной физический закон гравиметрии, нуждается в нескольких, почти очевидных комментариях, а именно:

1. Элементарные массы  $\Delta m(q)$  и  $\Delta m(p)$  могут быть различными.

2. Закон Ньютона утверждает, что благодаря наличию любой массы  $\Delta m$  другие массы испытывают действие силы, которая стремится притянуть эти массы к  $\Delta m$ . Этот эффект уменьшается с увеличением расстояния от  $\Delta m$ .

3. Закон притяжения Ньютона является математическим описанием одного из наиболее фундаментальных явлений природы. Заметим, однако, что он не объясняет механизма передачи этой силы в пространстве.

4. В соответствии с принципом суперпозиции, сила притяжения между двумя массами не зависит от наличия других масс



при условии, что их положение в пространстве остается постоянным.

5. Гравитационные массы, в отличие от электрических зарядов, имеют только положительные значения, поэтому наблюдается только притяжение.

6. В системе единиц СИ расстояние измеряется в метрах, масса в килограммах и сила в ньютонах.

7. Как следует из уравнения (II.1), сила, действующая на массу  $\Delta m(q)$  и вызванная массой  $\Delta m(p)$ , определяется выражением

$$dF(q) = -\gamma \frac{\Delta m(q) \Delta m(p)}{L_{pq}^3} L_{pq}.$$

Поскольку  $L_{qp}^3 = L_{pq}^3$  и  $L_{qp}^0 = -L_{pq}^0$ , то  $dF(q) = -dF(p)$ .

Теперь мы готовы представить концепцию гравитационного поля. Принимая во внимание тот факт, что сила  $dF(p)$  пропорциональна элементарной массе  $\Delta m(p)$ , которая подвергается действию этой силы, естественно рассмотреть их отношение

$$dg(p) = \frac{dF(p)}{\Delta m(p)} = \gamma \frac{\Delta m(q)}{L_{qp}^3} L_{qp} \quad (\text{II.2})$$

или

$$dg(p) = -\gamma \frac{\Delta m(q)}{L_{qp}^2} L_{qp}^0.$$

Функция  $dg(p)$  называется гравитационным полем в точке  $p$ , вызванным элементарной массой  $\Delta m(q)$ . Она имеет размерность силы на единицу массы, т. е.  $[g] = \text{м}/\text{с}^2$ .

На практике поле обычно измеряется в миллигалах, которые связаны с единицей  $\text{м}/\text{с}^2$  следующим соотношением:

$$1 \text{ Гал} = 1 \frac{\text{см}}{\text{с}^2} = 100 \text{ мГал} \quad \text{и} \quad 1 \text{ м}/\text{с}^2 = 100 \text{ Гал} = 10^5 \text{ мГал}$$

(единица измерения Гал была введена в честь Галилея).

Для данной массы  $\Delta m(q)$  функция  $dg(p)$  является векторным полем, поскольку ее величина и направление зависят только от координат точки наблюдения.

Из уравнения (II.1) нетрудно найти силу, действующую на любую элементарную массу, когда поле известно:

$$dF(p) = \Delta m(p) dg(p). \quad (\text{II.3})$$

Полезно рассматривать уравнение (II.2) как связь между элементарной массой и гравитационным полем, вызванным этой массой и существующим в любой точке независимо от наличия или отсутствия других элементарных масс в этой точке.

Теперь предположим, что вместо одной элементарной массы существует некоторое распределение масс в объеме  $V$  (рис. II.1, в). Для нахождения поля  $g$ , вызванного всеми массами внутри этого

объема, будем использовать принцип суперпозиции. Мысленно разобьем объем  $V$  на множество элементарных объемов, размеры которых удовлетворяют двум условиям:

а) они малы по отношению к расстоянию между данным объемом и точкой наблюдения;

б) внутри каждого элементарного объема массы распределены равномерно.

Последнее предположение позволяет представить массу элементарного объема  $\Delta m$  как

$$\Delta m(q) = \delta(q) dV, \quad (\text{II.4})$$

где  $\delta(q)$  — плотность распределения массы, которая может произвольно меняться внутри объема  $V$ .

Поскольку гравитационное поле, вызванное элементарной массой,

$$d\mathbf{g}(p) = -\gamma \frac{\delta(q) dV}{L_{qp}^3} \mathbf{L}_{qp},$$

то полное поле — это сумма полей, обусловленных всеми массами:

$$\mathbf{g}(p) = -\gamma \int_V \frac{\delta(q)}{L_{qp}^3} \mathbf{L}_{qp} dV. \quad (\text{II.5})$$

Это уравнение описывает гравитационное поле в любой точке наблюдения  $p$ , расположенной внутри или снаружи масс. Необходимо отметить, что массы могут быть определены до расчета гравитационного поля, вызванного ими. Этот факт очень сильно упрощает определение поля — в соответствии с уравнением (II.5) оно сводится лишь к численному интегрированию. Далее при рассмотрении других полей, применяемых в геофизических методах, будет показано, что определение полей обычно является значительно более сложной проблемой.

Используя уравнение (II.5), рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих некоторые особенности поведения поля.

### Пример 1. Поле элементарной массы

Будем изучать поле, вызванное элементарной массой  $\Delta m$ , расположенной внутри элементарного объема  $\Delta V$  в окрестности точки  $q$  (рис. II.1,  $z$ ). Поскольку по определению точки наблюдения расположены на значительном по отношению к размеру элементарного объема расстоянии, можно пренебречь изменением расстояния от точки наблюдения до любой точки внутри данного элементарного объема. Соответственно, вместо реальной элементарной массы можно рассматривать такую же массу, сосредоточенную в точке  $q$ . Конечно, физически это невозможно, однако вполне допустимо при вычислении поля. Таким образом, точечная

масса является полезным понятием при изучении поля на расстояниях, значительно превосходящих размеры элементарного объема. С учетом данного определения получаем выражение для поля точечной массы:

$$\mathbf{g}(p) = -\gamma \frac{m(q)}{L_{qp}^3} \mathbf{L}_{qp}. \quad (\text{II.6})$$

Для простоты будем использовать декартову систему координат с началом в точке  $q$ . Тогда для вектора  $\mathbf{L}_{qp}$  и его длины получим

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{qp} &= \mathbf{L}_{0p} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}, \\ L_{qp} &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

и направление гравитационного поля противоположно направлению вектора  $\mathbf{L}_{0p}$ . Поскольку  $x$ ,  $y$  и  $z$  — проекции радиус-вектора  $\mathbf{L}_{0p}$  на координатные оси, компоненты поля имеют вид

$$\begin{aligned} g_x &= \mathbf{g} \cdot \mathbf{i} = -\gamma \frac{m}{L_{0p}^3} \mathbf{L}_{0p} \cdot \mathbf{i} = -\frac{\gamma m}{L_{0p}^3} x; \\ g_y &= \mathbf{g} \cdot \mathbf{j} = -\gamma \frac{m}{L_{0p}^3} \mathbf{L}_{0p} \cdot \mathbf{j} = -\frac{\gamma m}{L_{0p}^3} y; \\ g_z &= \mathbf{g} \cdot \mathbf{k} = -\gamma \frac{m}{L_{0p}^3} \mathbf{L}_{0p} \cdot \mathbf{k} = -\frac{\gamma m}{L_{0p}^3} z. \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

Для иллюстрации рассмотрим поведение поля на плоскости  $xOz$ , где в соответствии с (II.7), (II.8)

$$\begin{aligned} g_x &= -\gamma \frac{mx}{(x^2 + h^2)^{3/2}}; \\ g_y &= 0; \\ g_z &= -\gamma \frac{mh}{(x^2 + h^2)^{3/2}}, \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

поскольку  $y = 0$ . Здесь  $h$  — константа для профиля, характеризующая положение масс.

Поведение компонент поля показано на рис. II.2, а. Горизонтальная компонента  $g_x$  положительна для отрицательных значений  $x$ , возрастает с возрастанием  $x$ , достигает максимума и затем стремится к нулю при  $x \rightarrow 0$ . Для положительных значений  $x$

$$g_x(x) = -g_x(-x),$$

т. е. это нечетная функция.

Вертикальная компонента  $g_z$  ведет себя проще, она является симметричной функцией аргумента  $x$ :

$$g_z(x) = g_z(-x)$$

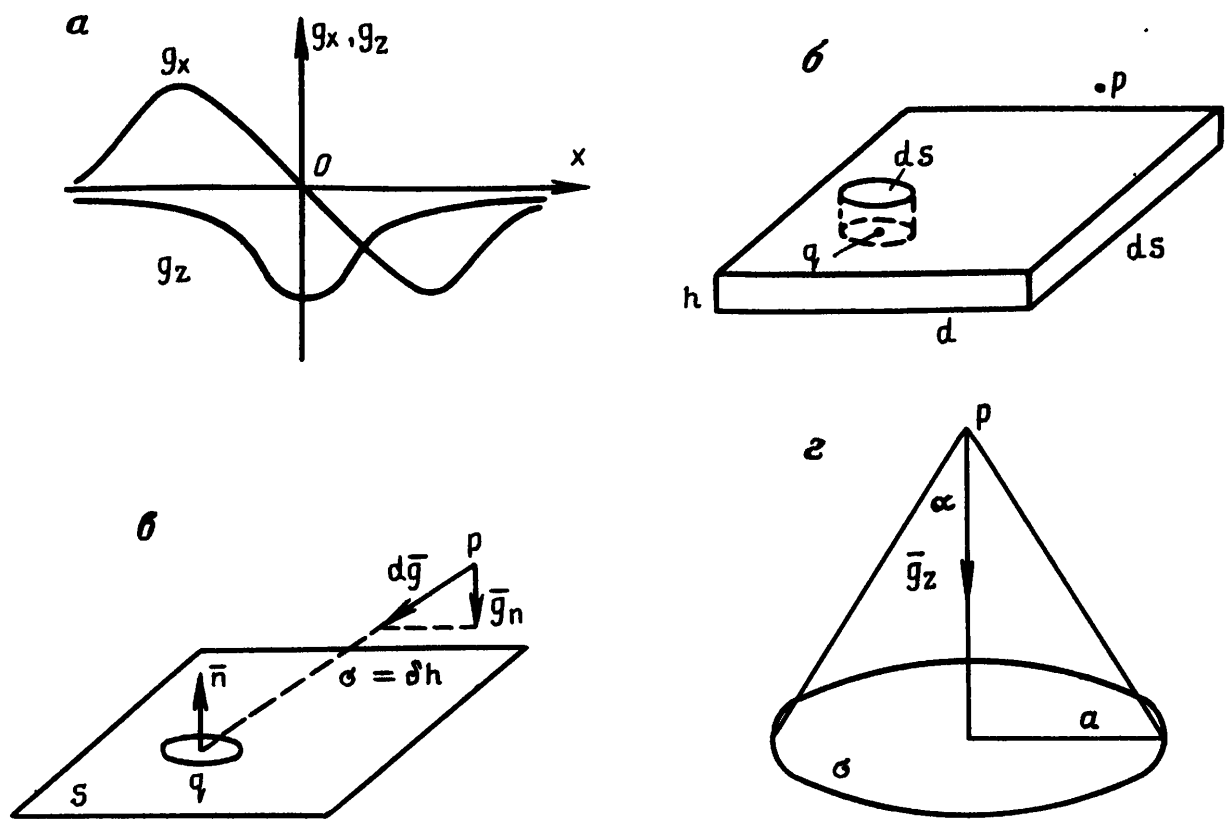


Рис. 11.2. Компоненты  $g_x$  и  $g_z$ , вызванные элементарной массой (а); поверхностные массы (б); нормальная компонента  $g_n$  вблизи поверхностной массы (в); поле  $g_z$  вблизи диска (г)

и достигает минимума в точке  $x = 0$ , где расстояние между точкой наблюдения и массой минимально.

Отрицательные значения вертикальной компоненты объясняются тем фактом, что вдоль профиля векторная проекция поля на ось  $z$  имеет направление, противоположное направлению этой оси. По этой же причине горизонтальная компонента  $g_x$  положительна для отрицательных значений  $x$  и становится отрицательной при  $x > 0$ . Теперь посмотрим на эти формулы с геофизической точки зрения, т. е. попытаемся найти положение массы и ее значение. Прежде всего, смена знака  $g_x$  и максимальное значение абсолютной величины компоненты  $g_z$  при  $x = 0$  указывают, что масса расположена на оси  $z$ . Тогда в соответствии с (11.9) отношение компонент

$$\frac{g_z}{g_x} = \frac{h}{x} \quad \text{или} \quad h = \frac{g_z}{g_x} x. \quad (11.10)$$

Это отношение позволяет определить положение массы. Наконец, сама масса  $m$  также может быть вычислена с помощью значений  $g_z$  либо  $g_x$ . Конечно, оба параметра  $m$  и  $h$  могут быть найдены только по одной из компонент поля. Можно видеть, что точечная масса упрощает реальное распределение масс. Однако сказанное становится справедливым с увеличением расстояния от масс, распределенных внутри объема произвольной формы и размеров, по мере того как их поле приближается к полю точечной массы и

независимо от того, где именно внутри объема эта масса расположена. Этот результат непосредственно следует из уравнения (II.5), поскольку любую массу можно трактовать как элементарную, если рассматривать ее поле вдали от этой массы. Действительно, с увеличением расстояния от точки наблюдения до объемной массы мы имеем

$$\begin{aligned} g(p) &= -\gamma \int_V \frac{\delta(q) L_{qp}}{L_{qp}^3} dV \rightarrow -\gamma \frac{L_{q_0 p}}{L_{q_0 p}^3} \int \delta(q) dV = \\ &= -\gamma \frac{L_{q_0 p}}{L_{q_0 p}^3} m, \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

где  $q_0$  — произвольная точка внутри объема  $V$ ;  $m$  — общая масса этого объема.

Теперь посмотрим внимательней на уравнение (II.9). Вычисляя первую производную горизонтальной компоненты  $g_x$  по переменной  $x$ , находим абсциссу точки экстремума данной компоненты

$$x = \pm h/\sqrt{2}. \quad (\text{II.12})$$

Как видно из уравнения (II.9), с увеличением координаты  $x$  абсолютные значения обеих компонент сближаются; они становятся равными при

$$x = h. \quad (\text{II.13})$$

По мере увеличения  $x$  горизонтальная компонента становится доминирующей, это непосредственно следует из анализа геометрии поля.

Следует отметить, что уравнение (II.10) служит наглядным доказательством связи между вертикальной и горизонтальной компонентами поля, вызванного элементарной массой. Исходя из принципа суперпозиции, можно ожидать, что для произвольной массы и точки наблюдения также существует связь между этими компонентами поля, которая, конечно, является более сложной, чем (II.10). Подобные связи показывают, что обе компоненты поля, измеренные вдоль одного профиля, содержат одинаковую информацию о распределении масс и что в принципе достаточно измерять только одну из них.

Как видно из уравнения (II.9), горизонтальная компонента в отличие от вертикальной является нечетной функцией переменной  $x$  и поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_x dx = 0. \quad (\text{II.14})$$

Далее будет показано, что в общем случае, когда компонента  $g_x$  не является нечетной функцией, это уравнение остается в силе.

## Пример 2. Нормальная компонента гравитационного поля материальной поверхности

Предположим, что массы распределены внутри плоского слоя, толщина которого значительно меньше расстояний от этих масс до точки наблюдения (рис. II.2, б). Другими словами, расстояние между точкой наблюдения и произвольной точкой элементарного объема практически одно и то же. Учитывая этот факт, можно заменить этот слой плоской поверхностью с той же массой, расположенной в середине слоя (рис. II.2, в).

Поскольку любой элементарный объем содержит массу

$$dm = \delta(q) h dS,$$

то ее поверхностное распределение имеет вид

$$dm = \sigma(q) dS,$$

где

$$\sigma(q) = \delta(q) h. \quad (\text{II.15})$$

Функцию  $\sigma(q)$  называют поверхностной плотностью или плотностью поверхностных масс. Последняя, так же как и точечные массы, является чисто математической концепцией, введенной для упрощения вычислений. Конечно, любой элемент поверхности  $S$  имеет такую же массу, что и соответствующий элементарный объем слоя. Нашим следующим шагом является нахождение поля, вызванного этими поверхностными массами. Прежде всего будем различать заднюю и переднюю стороны поверхности и выберем направление нормали  $\mathbf{n}(q)$  в каждой точке поверхности от задней к передней стороне.

В соответствии с уравнением (II.2) поле, вызванное элементарной массой на поверхности  $dS$ ,

$$d\mathbf{g}(p) = -\gamma \frac{dm}{L_{qp}^3} \mathbf{L}_{qp} = -\gamma \frac{\sigma dS}{L_{qp}^3} \mathbf{L}_{qp}. \quad (\text{II.16})$$

Для простоты предположим, что поверхность является плоской и массы на ней распределены равномерно, т. е.  $\sigma = \text{const}$ . В каждой точке поле может быть представлено как сумма двух компонент:

$$\mathbf{g}(p) = g_n(p) \mathbf{n} + g_t \mathbf{t}, \quad (\text{II.17})$$

где  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{t}$  — соответственно перпендикулярный и касательный к поверхности единичные векторы. Как видно из рис. II, в, нормальная компонента поля в точке  $p$

$$dg_n(p) = dg \cos(\mathbf{L}_{qp}, \mathbf{n}) = dg \frac{\mathbf{L}_{qp} \cdot \mathbf{n}}{L_{qp}^3} = -\gamma \frac{\sigma dS}{L_{qp}^3} \mathbf{L}_{qp} \cdot \mathbf{n}, \quad (\text{II.18})$$

где  $(\mathbf{L}_{qp}, \mathbf{n})$  — угол между векторами  $\mathbf{L}_{qp}$  и  $\mathbf{n}$ .

Применяя принцип суперпозиции, получаем для нормальной

компоненты поля, обусловленной всеми поверхностными массами:

$$g_n(p) = \gamma \sigma \int_S \frac{dS \cdot L_{qp}}{L_{qp}^3}, \quad (\text{II.19})$$

поскольку  $dS = dS n$ .

Учитывая, что  $L_{qp} = -L_{pq}$  и  $L_{qp}^3 = L_{pq}^3$ , имеем для нормальной компоненты поля

$$g_n(p) = \gamma \sigma \int_S \frac{dS \cdot L_{pq}}{L_{pq}^3}. \quad (\text{II.20})$$

Как следует из уравнения (I.44), интеграл в его правой части описывает телесный угол

$$\omega(p) = \int_S \frac{dS \cdot L_{pq}}{L_{pq}^3}. \quad (\text{II.21})$$

Таким образом, нормальная компонента гравитационного поля, вызванного равномерно распределенными на плоской поверхности массами, может быть описана как

$$g_n(p) = \gamma \sigma \omega(p). \quad (\text{II.22})$$

Используя результаты, полученные в главе I, опишем поведение нормальной компоненты  $g_n$ . С увеличением расстояния от поверхности телесный угол становится меньше и нормальная компонента уменьшается. С другой стороны, с приближением к поверхности телесный угол стремится к своим предельным значениям:  $-2\pi$  и  $+2\pi$  соответственно на передней и задней сторонах поверхности. Таким образом, для нормальной компоненты  $g_n$  на поверхности  $S$  имеем:

$$g_n = \begin{cases} -2\pi \gamma \sigma & \text{на передней стороне,} \\ 2\pi \gamma \sigma & \text{на задней стороне.} \end{cases} \quad (\text{II.23})$$

Соответственно, разрыв нормальной компоненты поля на поверхности масс  $S$

$$g_n^+ - g_n^- = -4\pi \gamma \sigma,$$

где  $g_n^+$  и  $g_n^-$  — значения поля на передней и задней сторонах поверхности.

Из следующего примера будет видно, что поле является всюду непрерывной функцией, а разрыв появляется вследствие замены объемных масс поверхностными. Рассмотрим два частных случая:

а) бесконечно протяженная плоская поверхность. Тогда телесный угол, под которым плоскость видна с передней и задней стороны, не зависит от положения точки  $p$  и равен  $\pm 2\pi$  соот-

ветственно. Другими словами, поверхностные массы бесконечной плоскости постоянной плотности создают в каждом из полупространств однородное поле;

б) плоская поверхность в форме диска радиуса  $a$  с нормальной компонентой, измеренной вдоль оси (рис. II.2, г).

В этом случае, используя уравнение (I.48), имеем

$$g_z(z) = \pm 2\pi \gamma (1 - \cos \alpha) \sigma, \quad (\text{II.24})$$

где

$$\cos \alpha = \frac{|z|}{\sqrt{z^2 + a^2}}.$$

С увеличением расстояния  $z$  угол  $\alpha$  стремится к нулю и поле  $g_z$  уменьшается. Разлагая выражение  $(z^2 + a^2)^{1/2}$  в ряд

$$(z^2 + a^2)^{-1/2} = |z|^{-1} \left(1 + \frac{a^2}{z^2}\right)^{-1/2} \approx |z|^{-1} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{a^2}{z^2} + \frac{3}{8} \frac{a^4}{z^4}\right),$$

получаем

$$g_z(z) \approx \pm \gamma \frac{\pi a^2 \sigma}{z^2} \left(1 - \frac{3}{4} \frac{a^2}{z^2}\right)$$

или

$$g_z(z) \approx \pm \gamma \frac{m}{z^2} \left(1 - \frac{3}{4} \frac{a^2}{z^2}\right) \quad \text{при } z \gg a,$$

где  $m$  — суммарная масса диска.

Из этого уравнения легко оценить минимальное расстояние  $z$ , на котором поле масс, расположенных на диске, совпадает с полем точечной массы.

С приближением к диску поле стремится к пределу, равному  $\mp 2\pi \gamma \sigma$  и соответствующему полю бесконечной материальной плоскости с постоянной плотностью  $\sigma$ . Используя разложение в ряд, записанное выше, имеем

$$g_z(z) \approx \mp 2\pi \gamma \sigma \left(1 - \frac{|z|}{a}\right) \quad \text{при } a \gg |z|.$$

**Пример 3.** Поле, вызванное объемным распределением масс в однородном слое толщины  $h$  и плотности  $\delta$  (рис. II.3, а)

Прежде всего введем декартову систему координат с началом в середине слоя и с осью  $z$ , перпендикулярной его поверхности. Отметим, что слой является бесконечным вдоль осей  $x$  и  $y$ .

Сначала предположим, что точка наблюдения расположена вне слоя, т. е.  $|z| > h/2$ . Затем мысленно разделим данный слой на множество тонких слоев, которые, в свою очередь, заменим системой материальных плоскостей с плотностью  $\sigma = \delta \Delta h$ , где  $\Delta h$  — толщина элементарного слоя. С учетом бесконечных размеров этих



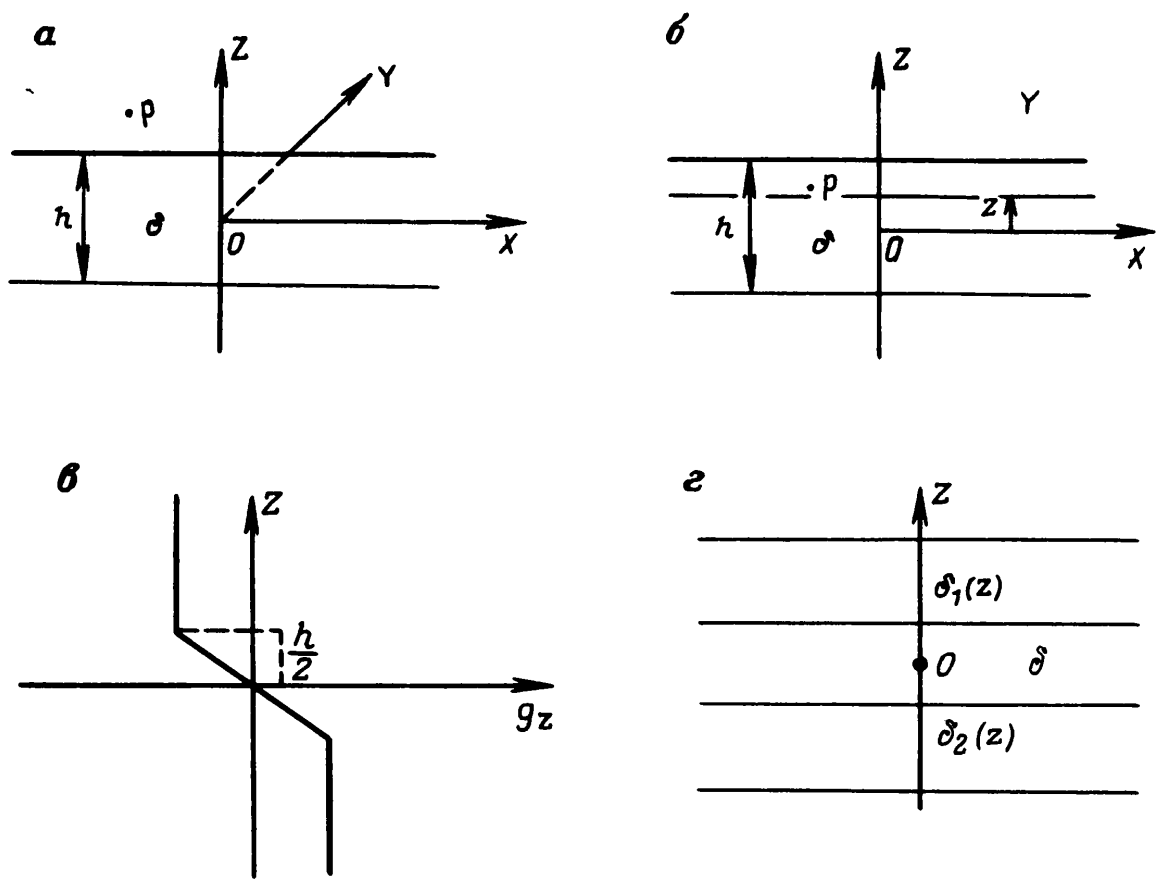


Рис. 11.3. Модель однородного слоя (а); точка наблюдения внутри слоя (б); поведение компоненты поля  $g_z$  (в) и система слоев (г)

поверхностей, телесный угол, под которым они видны, не зависит от положения точки наблюдения и равен  $-2\pi$  либо  $+2\pi$ .

Соответственно, каждая плоская поверхность порождает одно и то же поле:

$$dq_z = -2\pi \gamma \delta \Delta h \quad \text{при } z > h/2$$

и

$$dq_z = 2\pi \gamma \delta \Delta h \quad \text{при } z < -h/2.$$

В результате суммирования получаем полное поле, обусловленное всеми массами слоя:

$$g_z = -2\pi \gamma \delta h \quad \text{при } z \geq h/2$$

и (11.25)

$$g_z = 2\pi \gamma \delta h \quad \text{при } z \leq -h/2.$$

Интересно отметить, что данные формулы используются в гравиметрии для вычисления поправки Буге.

Теперь рассмотрим гравитационное поле внутри слоя, когда координата  $z$  точки наблюдения удовлетворяет условию

$$|z| < h/2.$$

Сначала предположим, что  $z > 0$ . Тогда поле может быть представлено в виде суммы двух полей: одного, вызванного массами в части слоя толщиной  $(h/2) - z$ , и второго, порождаемого мас-

сами оставшейся части слоя толщиной  $z + h/2$  (рис. II.3, б). В соответствии с уравнением (II.25) эти поля вычисляются по формулам

$$g_z^{(1)} = 2\pi \gamma \delta \left( \frac{h}{2} - z \right)$$

и

$$g_z^{(2)} = -2\pi \gamma \delta \left( z + \frac{h}{2} \right).$$
(II.26)

Для полного поля

$$g_z = g_z^{(1)} + g_z^{(2)} = -4\pi \gamma \delta z, \quad \text{если} \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2},$$

и аналогично

$$g_z = -4\pi \gamma \delta z, \quad \text{если} \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq 0. \quad \text{(II.27)}$$

Поведение поля, обусловленного массами внутри слоя, показано на рис. II.3, в. Для отрицательных значений  $z$  поле является положительным, поскольку массы в верхней части слоя создают поле вдоль оси  $z$  и их притяжение преобладает над эффектом, вызванным массами, расположенными ниже точки наблюдения. В середине слоя при  $z = 0$  поле равно нулю. Конечно, любая элементарная масса слоя генерирует поле на плоскости  $z = 0$  в соответствии с законом Ньютона (II.2), однако благодаря симметрии суммарное поле оказывается равным нулю. Для положительных значений  $z$  поле имеет противоположное направление и его величина линейно возрастает с увеличением  $z$ . Как следует из уравнений (II.25) — (II.27), в пределах слоя поле меняется как непрерывная функция.

Следует отметить еще одну черту поведения поля. Поскольку в горизонтальной плоскости поле бесконечно, распределение масс обладает осевой симметрией по отношению к любой прямой, параллельной оси  $z$  и проходящей через точку наблюдения. По этой причине всегда можно найти две элементарные массы, тангенциальные компоненты поля которых равны нулю. Поле всех масс слоя имеет только нормальную компоненту, описываемую уравнениями (II.25) — (II.27).

Теперь рассмотрим поле внутри слоя, расположенного между двумя другими слоями с плотностями  $\delta_1(z)$  и  $\delta_2(z)$ , являющимися произвольными функциями переменной  $z$  (рис. II.3, г). В соответствии с уравнениями (II.25) — (II.27) поле в среднем слое может быть представлено как

$$g_z(z) = g_{1z} + g_{2z} - 4\pi \gamma \delta z \quad \text{при} \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2},$$

где  $\delta$  — постоянная плотность среднего слоя, а  $g_{1z}$  и  $g_{2z}$  — поля, вызванные массами верхнего и нижнего слоев и не изменяющиеся внутри среднего слоя.

Предположим, что требуется найти плотность  $\delta$ . Тогда после определения поля в двух точках слоя мы имеем

$$g_z(z_1) = g_{1z} + g_{2z} - 4\pi \gamma \delta z_1,$$

$$g_z(z_2) = g_{1z} + g_{2z} - 4\pi \gamma \delta z_2.$$

Следовательно,

$$g_z(z_1) - g_z(z_2) = 4\pi \gamma \delta (z_2 - z_1)$$

и

$$\delta = \frac{g_z(z_1) - g_z(z_2)}{4\pi \gamma (z_2 - z_1)}.$$

Отметим, что данный подход используется при измерении плотности пород в скважинах.

**Пример 4.** Поле, вызванное тонкой сферической оболочкой плотности  $\sigma$

Рассматривая сферическую форму тела (рис. II.4, а), выберем сферическую систему координат  $R, \theta, \varphi$  с началом в центре оболочки. В общем случае можно ожидать три компоненты поля  $g_R, g_\theta$

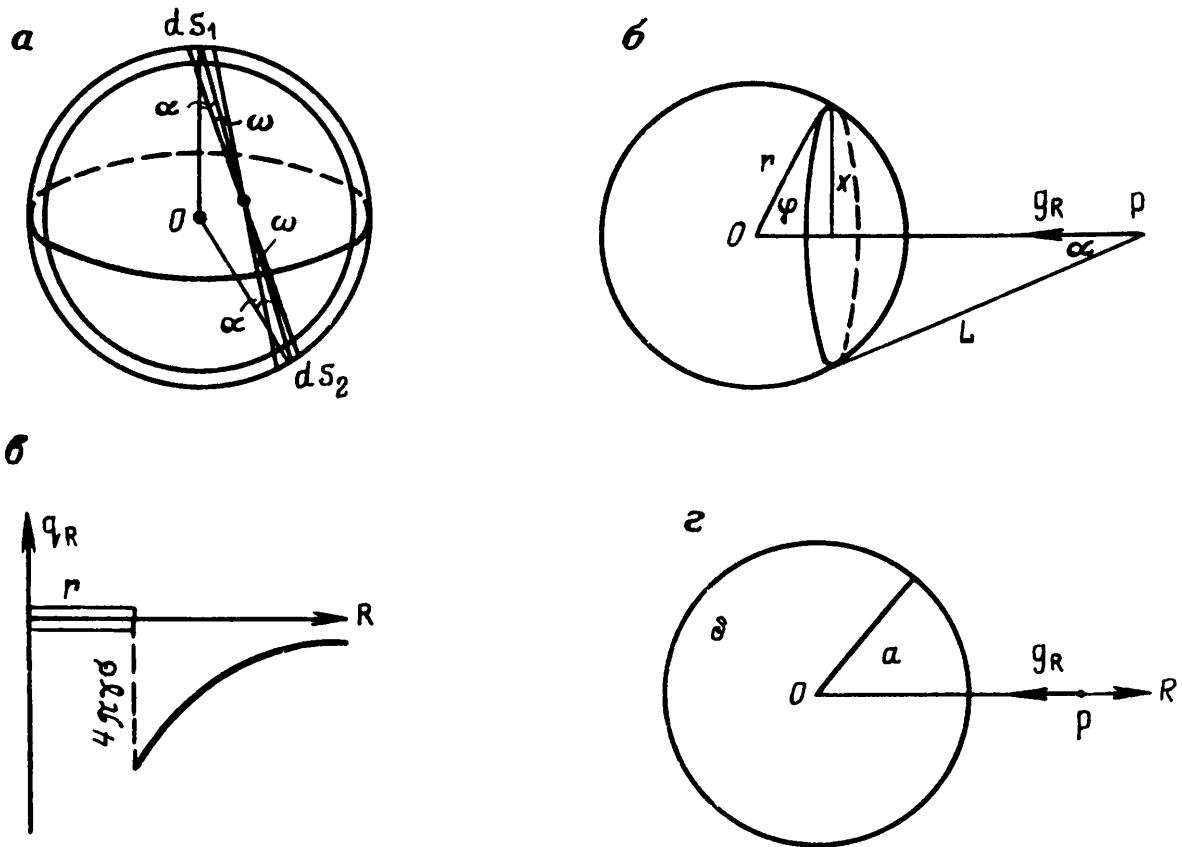


Рис. II.4. Измерение поля: а — внутри оболочки, б — вне оболочки; поведение поля, вызванного массами оболочки (в); сферическая масса радиуса  $a$  и плотности  $\delta$  (г)

и  $g_\varphi$ , направленные вдоль соответствующих координатных линий. Однако, благодаря симметрии, нетрудно показать, что компоненты  $g_\theta$  и  $g_\varphi$  всюду равны нулю. Действительно, координатные плоскости  $\theta = \text{const}$  и  $\varphi = \text{const}$  являются плоскостями симметрии, поэтому для любой элементарной массы всегда возможно найти другую массу, симметрично расположенную по отношению к первой и такую, что поля, вызываемые обеими массами, не имеют компонент  $g_\theta$  и  $g_\varphi$ . Соответственно, суммарное поле материальной оболочки имеет только одну радиальную компоненту  $g_R$ . Сначала изучим в произвольной точке  $p$  внутри оболочки поле, вызванное двумя элементарными массами  $\sigma dS_1$  и  $\sigma dS_2$ , показанными на рис. II.4, а.

В соответствии с (II.2) эти поля вычисляются по формулам

$$dg_{1R} = -\gamma \frac{\sigma dS_1}{L_{pq_1}^2}, \quad dg_{2R} = -\gamma \frac{\sigma dS_2}{L_{pq_2}^2}.$$

Поскольку

$$\frac{dS_1}{L_{pq_1}^2} = \frac{dS_2}{L_{pq_2}^2} = \frac{d\omega}{\cos \alpha}$$

( $d\omega$  — телесный угол) и поля имеют противоположные направления, то суммарное поле, вызванное этими двумя элементарными массами, равно нулю. Рассматривая сферическую оболочку как систему таких пар, заключаем, что поле внутри однородной сферической оболочки равно нулю.

Теперь изучим поле вне оболочки (рис. II.4, б). Сначала определим поле, вызванное массами внутри элементарного кольца радиуса  $r$  и толщины  $rd\varphi$ , расположенного на поверхности оболочки. Каждая элементарная масса кольца создает в точке  $p$  поле

$$dg = -\gamma \frac{\sigma rd\varphi dl}{L^2},$$

где  $rd\varphi dl$  — площадь элементарной массы, а  $L$  — расстояние от массы до точки наблюдения. Как видно из рис. II.4, б, радиальная компонента поля имеет вид

$$dg_R = dg \cos \alpha = dg \frac{R - r \cos \varphi}{L}$$

или

$$dg_R = -\gamma \frac{\sigma rd\varphi dl}{L^3} (R - r \cos \varphi),$$

где

$$\sin \varphi = x/r.$$

Поскольку все элементы кольца расположены на одном и том же расстоянии от точки наблюдения, приходим к следующему

выражению для радиальной компоненты, порожденной кольцевой массой:

$$dg_R = -\gamma\sigma \frac{rd\varphi 2\pi x}{L^3} (R - r \cos \varphi).$$

Заменяя  $L$  и  $x$  на соответственно  $L = (r^2 + R^2 - 2rR \cos \varphi)^{1/2}$ ,  $x = r \sin \varphi$  и интегрируя, получаем поле, вызванное всеми массами оболочки:

$$g_R = -\gamma\sigma 2\pi r^2 \int_0^\pi \frac{\sin \varphi (R - r \cos \varphi)}{(r^2 + R^2 - 2rR \cos \varphi)^{3/2}} d\varphi \quad (\text{II.28})$$

или

$$g_R = -\gamma\sigma 2\pi r^2 \{RI_1 - rI_2\},$$

где

$$I_1 = \int_0^\pi \frac{\sin \varphi d\varphi}{(r^2 + R^2 - 2rR \cos \varphi)^{3/2}};$$

$$I_2 = \int_0^\pi \frac{\sin \varphi \cos \varphi d\varphi}{(r^2 + R^2 - 2rR \cos \varphi)^{3/2}}.$$

Будем использовать обозначения

$$a = r^2 + R^2, \quad b = 2rR.$$

Тогда имеем

$$I_1 = \int_0^\pi \frac{\sin \varphi d\varphi}{(a - b \cos \varphi)^{3/2}};$$

$$I_2 = \int_0^\pi \frac{\sin \varphi \cos \varphi d\varphi}{(a - b \cos \varphi)^{3/2}}.$$

Вводя переменную

$$z = a - b \cos \varphi,$$

получим

$$dz = b \sin \varphi d\varphi$$

и

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{b} \int \frac{dz}{z^{3/2}} = -\frac{2}{b} \frac{1}{\sqrt{z}} = -\frac{2}{b} \frac{1}{(a - b \cos \varphi)^{1/2}} \Big|_0^\pi \\ &= \frac{2}{b} \left\{ \frac{1}{(a - b)^{1/2}} - \frac{1}{(a + b)^{1/2}} \right\}. \end{aligned}$$

Для второго интеграла

$$I_2 = \frac{1}{b^2} \int \frac{a-z}{z^{3/2}} dz = -\frac{2}{b^2} \left\{ \frac{a}{\sqrt{a+b}} - \frac{a}{\sqrt{a-b}} + \sqrt{a+b} - \sqrt{a-b} \right\}.$$

Поскольку

$$(a+b)^{1/2} = R+r \quad \text{и} \quad (a-b)^{1/2} = R-r,$$

имеем

$$I_1 = \frac{2}{R(R^2-r^2)}, \quad I_2 = -\frac{2}{rR^2} + \frac{2}{r(R^2-r^2)},$$

откуда

$$g_R = -\varphi \frac{4\pi\sigma r^2}{R^2} = -\gamma \frac{m}{R^2}, \quad (\text{II.29})$$

где  $m$  — общая масса сферической поверхности.

Таким образом, массы, расположенные с плотностью  $\sigma$  на сферической оболочке, генерируют поле, совпадающее вне этой поверхности с полем точечного источника той же самой массы, расположенного в центре оболочки. Поведение поля  $g_R$  внутри и вне оболочки показано на рис. II.4, в. Как следует из анализа, нормальная компонента  $g_R$ , как и в случае плоской поверхности, имеет различные значения на каждой из сторон оболочки. В соответствии с (II.23) и (II.29) ее разрыв является одним и тем же для обеих поверхностей. Это совпадение не случайно. Можно показать, что для произвольной материальной поверхности соответствующая разность между нормальными компонентами гравитационного поля равна  $-4\pi\gamma\sigma(q)$ , здесь  $\sigma(q)$  — поверхностная плотность в окрестности точки  $q$ , в которой изучается поле.

Следующий пример является естественным обобщением рассмотренного выше.

### Пример 5. Гравитационное поле сферы (рис. II.4, г)

Применяя тот же подход, что и в предыдущем примере, можно заключить, что поле имеет только радиальную компоненту  $g_R (g_\theta = g_\varphi = 0)$ . Для вычисления этой компоненты мысленно разобьем сферу радиуса  $a$  и объемной плотности  $\delta$  на множество тонких сферических слоев с поверхностной плотностью  $\sigma = \delta_{dR}$ , где  $dR$  — толщина слоя. Сперва предположим, что точка наблюдения расположена вне сферы ( $R > a$ ). Применяя принцип суперпозиции и используя уравнение (II.29), получаем

$$g_R = - \frac{4\pi\delta\varphi}{R^2} \int_0^a r^2 dr = - \frac{4\pi a^3}{3} \gamma \frac{\delta}{R^2} = - \gamma \frac{m}{R^2} \quad \text{при } R \geq r, \quad (\text{II.30})$$

где  $m = \frac{4}{3} \pi a^3 \delta$  — общая масса сферы.

Если же точка наблюдения расположена внутри сферы и имеет координату  $R$ , то, как следует из предыдущего примера, все сферические оболочки с радиусом  $r > R$  не вносят никакого вклада в гравитационное поле в точке наблюдения. Соответственно, используя уравнение (II.29), получаем

$$g_R = - \gamma \frac{4\pi\delta}{R^2} \int_0^R r^2 dr = \frac{4\pi}{3} \gamma \delta R. \quad (\text{II.31})$$

Таким образом, внутри сферы абсолютное значение поля линейно возрастает от нуля к своему максимальному значению на поверхности сферы, равному  $(4\pi/3) \gamma \delta a$ , и затем уменьшается обратно пропорционально расстоянию (рис. II.5, а). Нетрудно обобщить этот результат на случай, когда плотность является функцией радиуса. Ясно, что внутри сферы поле уменьшается с приближением к ее центру, в то время как вне сферы оно ведет себя как поле точечного источника. Основная часть гравитационного поля Земли ведет себя именно таким образом.

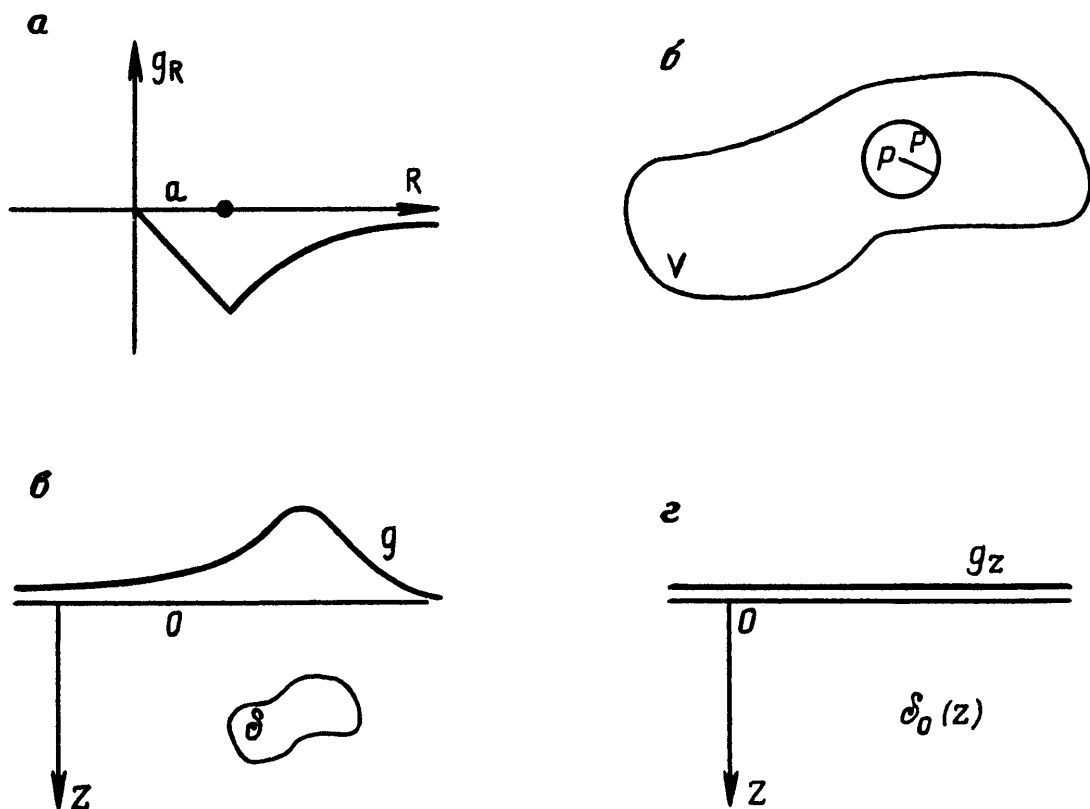


Рис. II.5. Поле, вызванное сферической массой (а); точка  $p$  — центр элементарной сферической массы (б); вторичное поле (в); одномерная модель среды (z)

Как и в случае слоя, поле внутри сферы имеет всюду конечные значения и является непрерывной функцией. Рассмотрим этот факт, вытекающий из уравнения (II.31). Представим полное поле в точке  $p$  как сумму двух полей. Первая часть поля вызвана массами внутри элементарного сферического объема с центром в точке  $p$ , а вторая часть — оставшимися массами (рис. II.5, б). Последние расположены на расстояниях, равных или превосходящих сферический радиус  $\rho$ , их поле имеет конечное значение в точке  $p$  и является непрерывной функцией вблизи этой точки.

С другой стороны, в соответствии с уравнением (II.31) первая часть поля равна нулю в точке  $p$ . Таким образом, полное поле имеет конечное значение в любой точке внутри массы. Учитывая, что на поверхности элементарной сферической массы согласно уравнению (II.31) ее поле прямо пропорционально радиусу  $\rho$ , можно заключить, что с уменьшением этого радиуса вклад первой части поля становится пренебрежимо малым, что обеспечивает непрерывность общего поля. Отметим, что подобное рассуждение можно применить и к произвольному распределению масс.

Как следует из уравнения (II.30), поведение горизонтальной и вертикальной компонент  $g_x$  и  $g_z$  вдоль некоторого профиля вне сферы совпадает с полем точечного источника, рассмотренного в первом примере. Это означает, в частности, что как направление, так и величина поля не меняются, если радиус сферы и ее плотность изменяются таким образом, что общая масса остается постоянной. Конечно, это справедливо только для случая, когда точка наблюдения расположена вне сферы. Это рассуждение показывает, что, измеряя гравитационное поле вдоль некоторого профиля или системы профилей, можно определить только общую массу сферы — т. е. произведение  $(4/3)\pi\delta a^3$  и положение центра сферы, но невозможно найти отдельно плотность масс  $\delta$  и радиус сферы  $a$ .

Этот пример наглядно демонстрирует простейший случай неединственности, при которой различные распределения масс возбуждают в точности одни и те же поля в точках измерения вне масс. Конечно, это отрицательное обстоятельство, которое накладывает ограничения на возможность определения распределения масс. Позже мы обсудим более сложные типы подобных неопределенностей в различных геофизических методах.

В данном разделе мы достигли определенного понимания поведения поля, пользуясь законом притяжения Ньютона и принципом суперпозиции. Теперь рассмотрим их приложение к теории гравитационного метода.

## II.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

В этом разделе мы продолжим изучение поведения поля, однако основное внимание уделим вычислениям гравитационного поля, вызванного массами, расположенными под земной поверхностью.



Порода	Плотность, кг/м <sup>3</sup>	Порода	Плотность, кг/м <sup>3</sup>
Нефть	900	Гранит	2500—2700
Вода	1000	Ангидрит	2960
Песок (мокрый)	1950—2050	Диабаз	2500—3200
Песок (сухой)	1400—1650	Базальт	2700—3200
Уголь	1200—1500	Габбро	2700—3200
Английский мел	1940	Сфалерит	4000
Песчаник	1800—2700	Халькопирит	4200
Каменная соль	2100—2400	Хромит	2700—3200
Мергель	2230—2600	Пирротин	4600
Известняк (плотный)	2600—2700	Пирит	5000
Кварцит	2600—2700	Гематит	5100
Гнейс	2700	Магнетит	5200
		Галенит	7500

Учитывая, что поля определяются распределением масс, приведем ниже сведения относительно некоторых горных пород (табл. П.1). Плотность пород дана в кг/м<sup>3</sup> (по Parasnis, 1979 г.).

Как видно из этой таблицы, плотность осадочных пород меняется в относительно небольшом диапазоне и она меньше плотности изверженных и метаморфических пород. Например, разница в плотности между каменной солью и песчаником имеет максимальное значение 600 кг/м<sup>3</sup> или приблизительно 30% от их значений.

Гравитационное поле Земли, как хорошо известно, зависит от таких факторов, как:

- 1) географическая широта точки наблюдения;
- 2) земные приливы;
- 3) высота точки наблюдения;
- 4) рельеф местности, где измеряется поле;
- 5) горизонтальные изменения плотности пород.

Учитывая эти факторы, представим полное гравитационное поле как

$$G = g_N + g, \quad (\text{П.32})$$

где  $g_N$  — нормальное поле, зависящее от широты, а  $g$  — аномальное поле, зависящее от высоты, рельефа и горизонтальных изменений плотности пород.

Поскольку нашей основной задачей является изучение аномального поля, очень кратко опишем нормальное поле. Поверхность Земли можно рассматривать приблизительно как сферическую, слегка расширенную на экваторе и сплюснутую на полюсах: отношение экваториального и полярного радиусов составляет примерно 1,003. В каждой точке этой поверхности нормальное поле перпендикулярно сфероиду и может быть описано формулой

$$g_N = g_0 (1 + \alpha \sin^2 \varphi + \beta \sin^2 2\varphi), \quad (\text{П.33})$$

где  $g_0 = 978,0318$  Гал — нормальное поле на экваторе;  $\alpha = 0,0053024$ ;  $\beta = -0,0000058$  и  $\varphi$  — широта.

Сделаем несколько комментариев относительно нормального поля.

1. Поверхность сфероида можно рассматривать как первое приближение к поверхности геоида. Уравнение, описывающее поверхность сфероида, может быть получено в предположении, что сфероид — это жидкость, которая вращается вокруг своей полярной оси. Максимальные расстояния между поверхностями сфероида и геоида составляют  $-105$  м и  $+73$  м.

2. Уравнение (II.33) описывает поле, вызванное массами сфероида и центробежной силой. Отметим, что если бы Земля не являлась вращающейся сферой, гравитационное поле не зависело бы от широты.

3. Изменения поля, вызванные притяжением Луны и Солнца (приливы), обычно бывают плавными и имеют максимальное значение, приблизительно равное  $0,3$  мГал.

Предполагая, что нормальное поле известно, сконцентрируем внимание только на аномальном или вторичном поле. Поскольку вертикальная компонента поля  $g_z$  является основным предметом измерений в гравитационном методе, далее будем изучать только эту компоненту. Сначала сравним величины нормального и аномального полей. С этой целью рассмотрим несколько примеров.

1. Предположим, что Земля является сферой радиуса  $R = 6370$  км плотностью  $\delta = 5500$  кг/м<sup>3</sup>. Тогда в соответствии с уравнением (II.31) нормальное поле на ее поверхности

$$g = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{4}{3} \pi 5500 \cdot 6370 = 9,8 \text{ м/с}^2 = 980 \text{ Гал} = \\ = 0,98 \cdot 10^6 \text{ мГал.}$$

2. В этом примере оценим вклад в нормальное поле осадочных пород в предположении, что их плотность и мощность имеют значения  $\delta = 2000$  кг/м<sup>3</sup> и  $h = 5$  км соответственно. Заменяя этот сферический слой поверхностью с плотностью

$$\sigma = \delta h = 2000 \text{ кг/м}^3 \cdot 5 \text{ км} = 10^7 \text{ кг/м}^2$$

и используя уравнение (II.29), получаем

$$g = 4\pi \gamma \sigma = 4\pi \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 10^7 = 0,84 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}^2 = 0,84 \text{ Гал.}$$

Другими словами, осадочные породы слабо участвуют в нормальном поле.

3. Теперь вычислим поле на оси  $z$ , образованное диском (рис. II.2,  $z$ ). Предположим, что радиус и толщина диска равны  $1$  км и  $0,5$  км соответственно, а его плотность  $1000$  кг/м<sup>3</sup>. Подобную модель можно рассматривать как первое приближение к

некоторой структуре фундамента. Полагая  $z = 2$  км и используя уравнение (II.24), имеем

$$g = 2\pi \gamma \delta h (1 - \cos \alpha) = 2\pi \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 10^3 \cdot 500 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{4+1}}\right) = \\ = 2,2 \cdot 10^{-5} \text{ м/с}^2 = 2,2 \cdot 10^{-3} \text{ Гал} = 2,2 \text{ мГал.}$$

То есть данный эффект чрезвычайно мал по сравнению с нормальным полем. Однако на практике в гравиметрии измеряются даже меньшие сигналы.

4. Предположим, что радиус сферы равен 1 м и ее плотность равна  $1000 \text{ кг/м}^3$ . Тогда поле на ее поверхности

$$g = \frac{4}{3} \pi \delta \gamma R = \frac{4}{3} \pi \cdot 10^3 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 10^5 \text{ мГал} = 0,03 \text{ мГал.}$$

Примерно такой эффект может производить валун, расположенный вблизи точки наблюдения.

Прежде чем начать вывод формул для вертикальной компоненты поля, опишем в наиболее общей форме основные черты интерпретации гравитационных данных. Для упрощения нашей задачи начнем с наиболее простых моделей и постепенно подойдем к более сложным.

Сначала предположим, что измерения гравитационного поля выполнены вдоль профиля, показанного на рис. II.5, в. Здесь  $\delta_0(z)$  и  $\delta$  — плотности вмещающей среды и аномального тела соответственно. В общем случае плотность  $\delta_0$  является произвольной функцией координаты  $z$ . В частном случае среда, окружающая тело, может быть описана с помощью горизонтально слоистой модели. Ясно, что в отсутствие тела гравитационное поле вдоль профиля не меняется и, соответственно, аномальное поле исчезает. Однако при наличии тела с плотностью, отличной от плотности среды, появляется вторичное поле и его значение растет с увеличением разности плотностей  $\Delta\delta = \delta - \delta_0$ . Этот простой анализ показывает, что можно мысленно представить исходную модель среды как комбинацию двух более простых моделей, а именно:

1) полупространства с плотностью  $\delta_0(z)$ , не создающего вторичного поля (рис. II.5, г);

2) тела с плотностью  $\Delta\delta = \delta - \delta_0(z)$ , окруженного свободным пространством и создающего аномальное или вторичное поле (рис. II.6, а).

Несомненно, эта модель проще исходной, и при вычислении вторичного поля с помощью закона Ньютона (II.5) достаточно выполнить необходимое интегрирование только внутри объема тела.

Очевидны следующие выводы.

1. На поверхности горизонтально-слоистой среды поле не меняется, т. е. информация о среде, полученная с помощью из-

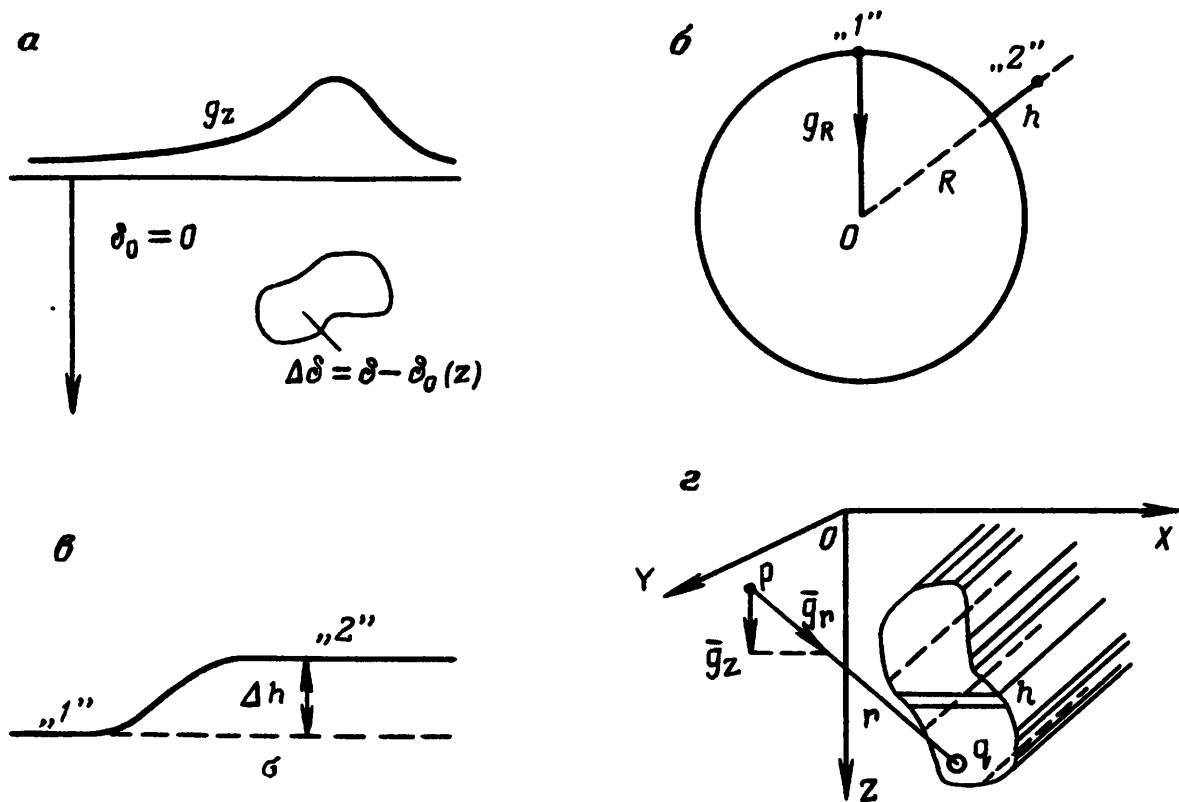


Рис. II.6. Эквивалентная модель неравномерной среды (а); поправка за высоту (б); поправка Буге (в); вычисления поля в двухмерной модели (г)

мерений в одной точке или вдоль профиля, одна и та же. Однако поле зависит от многих параметров этой модели, таких как плотности и мощности слоев, поэтому их определение с помощью гравиметрии становится невозможным.

2. Для применения гравитационного метода должны существовать горизонтальные изменения плотности пород.

Теперь мы готовы обсудить некоторые аспекты интерпретации в гравиметрии. Предположим, что поле известно из измерений вдоль профиля или системы профилей (см. рис. II.6, а). Тогда основная цель интерпретации состоит в определении местоположения, формы, размеров и плотности нижележащих тел. Эту задачу часто называют обратной задачей теории гравитационного поля, поскольку необходимо найти распределение масс по вызванному ими полю, известному вдоль некоторого профиля или системы профилей. Существенно, что поле неизвестно в объеме, занимаемом массами, поскольку измерения всегда выполняются на некотором расстоянии от них, и тем самым интерпретация обычно заметно усложняется. В соответствии с законом Ньютона в каждой точке наблюдения поле может быть представлено как сумма полей, вызванных элементарными массами тела; их вклад зависит от размера и расположения соответствующих объемов.

В частности, те массы внутри тела, которые расположены относительно далеко от точки наблюдения, слабо влияют на значение поля. Строго говоря, в каждой точке наблюдения поле подвергается влиянию всех параметров тела, хотя и в различной

степени, и их относительный эффект меняется от точки к точке, поскольку эти точки имеют различное положение по отношению к телу. То есть в принципе вся информация о массах содержится в измеренном поле. Учитывая этот простой, но фундаментальный факт, сформулируем основные шаги интерпретации.

Сначала сделаем несколько предположений о распределении масс и соответственно припишем значения тем параметрам тела, которые характеризуют его геометрию и контраст плотности. Подобный шаг обычно называют первым приближением, обычно он основан на имеющейся геологической информации. Например, если гравиметрия выполняется для обнаружения соляных куполов, то обычно существуют сведения о плотности как окружающих пород, так и соляных куполов, а также о форме и расположении куполов. Конечно, разница между первым приближением и фактическими значениями параметров тела может значительно меняться в зависимости от наших знаний геологии.

Второй шаг интерпретации состоит в вычислении вертикальной компоненты поля вдоль профиля для параметров первого приближения и в сравнении измеренного и вычисленного полей. Совпадение этих полей указывает на близость выбранных параметров модели к действительным параметрам. Если же наблюдаются расхождения между измеренными и вычисленными полями, то все параметры первого приближения или некоторые из них изменяются таким образом, чтобы было достигнуто лучшее соответствие между этими полями. Таким образом, мы получаем второе приближение к распределению масс. В тех случаях, когда даже этот новый набор параметров не дает удовлетворительного соответствия полей, вычисления должны быть продолжены. Как видно из этого процесса, каждый шаг интерпретации требует применения закона Ньютона. Эту процедуру, основанную на законе Ньютона, часто называют решением прямой задачи гравитационного поля. В итоге можно сказать, что процесс интерпретации для простейших случаев, показанных на рис. II.5, в, включает в себя два шага, а именно:

- 1) построение первого приближения для параметров тела;
- 2) решение прямой задачи, которое включает в себя изменение параметров модели для достижения лучшего соответствия между измеренными и вычисленными полями.

Поскольку в процессе интерпретации гравитационных данных каждый шаг достаточно хорошо определен, может создаться впечатление, что процедура интерпретации является простой и не содержит никаких трудностей. К сожалению, это не так даже в случае, когда поле вызвано только массами тела, — т. е. когда мы имеем дело лишь с полезным сигналом и «шум» отсутствует.

Предположим, что как вычисленные, так и измеренные поля известны с очень высокой точностью. Тогда, несколько раз повторяя решение прямой задачи, можно получить такое множество

параметров, что невязка между этими полями будет ничтожно мала. В этой связи встают следующие вопросы. Значит ли, что при получении идеального соответствия между измеренными и вычисленными полями всегда возможно определить с бесконечно малой ошибкой форму, размеры, плотность и положение масс, которые создают данное поле? Как показывает теория, ответ отрицательный и в общем случае решение обратной задачи является не единственным, т. е. различные распределения масс могут создавать вдоль профиля или системы профилей в точности одни и те же поля. Другими словами, в общем случае различные тела могут возбуждать поле, точно соответствующее измеренному полю. Простейшим примером такой неединственности является случай, когда поле вызвано различными сферами с одинаковой массой и общим центром, но с разными плотностями и радиусами.

Подобное явление не очевидно. Действительно, закон притяжения Ньютона говорит, что изменение распределения масс должно привести к изменению поля. Однако из неединственности следует, что различные распределения масс могут создавать во внешней области одни и те же поля, независимо от точности измерений. Таким образом, невозможно обнаружить разницу между полями, возбужденными этими массами. Неединственность — действительно удивительный факт, который более естественно рассматривать как парадокс, чем как очевидное следствие поведения гравитационного поля.

Теперь посмотрим на неединственность с практической точки зрения и представим себе, что неединственность всегда наблюдается при решении обратной задачи гравитационного поля. Ясно, что тогда интерпретация гравитационных данных невозможна. Действительно, при определении параметров тела, которое возбуждает данное поле, придется предполагать, что благодаря неединственности существуют другие распределения масс, создающие в точности такое же поле.

Конечно, можно сказать, что подобная неопределенность была бы бедствием для гравитационного метода. К счастью, неединственность не всегда проявляет себя и существуют такие типы распределения масс, для которых решение обратной задачи единственно. Более того, некоторые из этих случаев представляют большой практический интерес, поскольку позволяют с достаточной точностью приблизиться к реальному распределению масс. Например, обратная задача однозначно разрешима, если тело можно представить как призму или систему призм, даже если их плотность неизвестна.

Другой пример соответствует более общей форме тела, когда любой луч, проведенный из произвольной точки внутри объема, пересекает поверхность тела только один раз. Оказывается, что для таких, так называемых звездных тел, обратная задача также однозначно разрешима, если известна плотность. Далее будем

рассматривать только те распределения масс, для которых решение обратной задачи единственно.

Теперь мы готовы сделать следующий шаг и обсудить некоторые аспекты интерпретации для реальных условий, когда гравитационное поле измеряется с некоторой ошибкой, т. е. числа, описывающие поле, имеют лишь несколько верных значащих цифр. Из этого следует, что точность вычисления поля может практически не отличаться от точности его измерения и поэтому всегда существует разница между этими полями. По этой причине не имеет смысла добиваться соответствия вычисленных и измеренных полей с точностью, превосходящей точность их определения.

Учитывая, что невязка между измеренными и вычисленными полями всегда имеет конечное значение, достигающее нескольких процентов от значения поля, рассмотрим влияние этого фактора на интерпретацию. Как было отмечено, в каждой точке наблюдения вертикальную компоненту поля можно представить как сумму полей, вызванных различными массами внутри тела, и их вклад существенно зависит от расположения и расстояния от этих масс до точки наблюдения. В частности, массы, расположенные ближе, дают больший вклад, в то время как удаленные части тела вызывают меньший эффект. Очевидно, внутри тела всегда существуют такие массы, вклад которых в суммарное поле настолько мал, что с заданной точностью измерений он не может быть обнаружен. Например, можно представить себе такие изменения формы, размеров, положения тела и плотности его частей, что измеренное поле останется тем же самым. Другими словами, благодаря ошибкам в определении вторичного поля может существовать неограниченное число различных распределений масс, которые порождают практически одно и то же поле.

Поскольку вторичное поле вызывается всеми массами внутри тела, т. е. измеряется интегральный эффект, некоторые изменения масс в относительно удаленных частях тела могут оказаться значительными, однако их вклад в поле остается малым. В то же время подобные изменения в тех частях тела, которые расположены ближе к точке наблюдения, приведут к значительно более сильным изменениям поля. По этой причине при выполнении интерпретации следует различать две группы параметров, описывающих распределение масс, а именно:

1) параметры, достаточно сильно влияющие на поле, для которых относительно малые изменения их значений приводят к заметному его изменению;

2) параметры, имеющие заметное влияние на поле только в случае их значительного изменения. Проще говоря, их нельзя определить, если поле измерено с некоторой ошибкой.

Таким образом, можно сказать, что интерпретация или решение обратной задачи состоит в определении первой группы пара-

метров тела, даже если обычно они не полностью характеризуют распределение масс. Ясно, что подобная «устойчивая» группа параметров описывает модель тела, которая до некоторой степени отличается от истинной, однако обе модели имеют общие параметры. Например, ими могут быть глубина залегания верхней части тела или произведение его толщины и плотности и т. д.

Прежде чем продолжить изложение материала, подведем итоги обсуждения и выделим следующие особенности решения обратной задачи.

1. В общем случае решение обратной задачи гравитационного поля не единственно.

2. В то же время существуют типы тел, для которых решение обратной задачи единственно. В частности, это справедливо для тел, которые можно представить в виде призмы или системы призм, и этот факт является одной из теоретических основ интерпретации гравитационных данных.

3. При обсуждении проблемы единственности предполагается, что поле известно точно.

4. Интерпретация выполняется в пределах класса моделей, для которых решение единственно.

5. Наиболее важным фактором, по существу определяющим все черты интерпретации, является тот факт, что измеренное поле, вызванное каким-либо распределением масс, известно с некоторой ошибкой. Поэтому единственность сама по себе не гарантирует, что ошибка в определении какого-либо параметра имеет конечное значение. Действительно, эта ошибка может быть бесконечно большой. Подобные обратные задачи называются некорректно поставленными или неустойчивыми задачами.

6. В общем случае обратные задачи в гравиметрии, так же как и в других геофизических методах, являются некорректно поставленными. Чтобы проиллюстрировать этот факт, напишем следующее соотношение между изменениями поля  $\Delta g$  и параметров тела  $\Delta p_i$ :

$$\Delta p_i = k_i \Delta g.$$

Здесь  $k_i$  — коэффициент пропорциональности для  $i$ -го параметра тела и  $\Delta g$  — изменение поля в некотором диапазоне, вызванное наличием ошибки, которая меняется от точки к точке.

В случае некорректно поставленной задачи верхний предел значения коэффициента  $k_i$  в принципе не может быть установлен. Другими словами, даже неограниченное изменение некоторых параметров тела не может привести к заметному изменению поля и в результате невозможно определить диапазон, в котором изменяются эти параметры.

Подобная неопределенность в определении параметров поля является препятствием, до некоторой степени сравнимым с неединственностью. Для преодоления этого препятствия интерпре-



тация обычно выполняется в пределах сильно суженного класса моделей тела, где параметр  $k_i$  имеет конечный верхний предел, т. е. обратная задача становится устойчивой или корректно поставленной. Например, если приближение к реальному распределению масс выполнено с помощью различных призм с одинаковым числом сторон, то обратная задача оказывается корректно поставленной.

7. Переход от некорректной к корректно поставленной задаче называется регуляризацией обратной задачи и имеет большое практическое значение.

8. С увеличением числа параметров модели приближение к реальному распределению масс может в принципе стать лучше. Однако увеличивается и ошибка, с которой определяются эти параметры.

9. Очевидно, что интерпретация гравитационных данных полезна, если параметры модели, аппроксимирующие реальное распределение масс, определены в диапазоне значений, допустимых с практической точки зрения. Обычно выбор подобной группы параметров производится автоматически с использованием соответствующего алгоритма решения обратной задачи.

10. Интерпретация гравитационных данных значительно упрощается при наличии дополнительной информации относительно источников поля, которая обычно бывает известна из геологии или других геофизических методов.

Теперь, учитывая тот очевидный факт, что уменьшение ошибки в определении поля имеет большое значение, рассмотрим факторы, которые вместе с ошибками измерения и интерполяции между точками наблюдения определяют точность выделения полезного сигнала во вторичном поле. Первый фактор связан с изменением положения точки наблюдения относительно масс, создающих нормальное поле. Если, к примеру, измерения выполняются на различных расстояниях от поверхности земли, то нормальное поле изменяется в соответствии с уравнением (II.29). Для определения вторичного поля, которое обычно значительно меньше нормального поля, нужно учитывать изменения последнего. Подобная процедура называется поправкой за высоту.

Второй фактор возникает благодаря наличию поверхностных структур, поскольку массы внутри них создают поле, которое тоже может меняться от точки к точке. По этой причине необходимо определять этот эффект и затем отделять его от измеренного поля. Эта процедура называется поправкой на рельеф, для очень пологого рельефа она сводится к поправке Буге.

Третий фактор, также влияющий на аномальное поле, представляется полем, которое вызвано горизонтальными изменениями плотности, не связанными с источником полезного сигнала. Эта часть поля обычно называется геологическим шумом и в основном вызвана источниками, расположенными в относительной близости

к поверхности земли. Исключить их влияние непросто. Один из методов, позволяющих подавить геологический шум, будет описан в следующем разделе. Конечно, второй фактор тоже можно трактовать как частный случай геологического шума.

Точность, с которой могут учитываться все эти факторы, вместе с точностью измерения определяет и точность определения полезного сигнала, что в свою очередь влияет на качество интерпретации.

В связи с первыми двумя факторами отметим, что процедуры для их коррекции не предусматривают изменения положений точек наблюдения.

Теперь покажем применение закона Ньютона для вычисления необходимых поправок и полезного сигнала.

### *Поправка за высоту (за свободный воздух)*

Как видно из рис. II.6, б, точки «1» и «2» расположены на различных высотах по отношению к поверхности земли и, соответственно, нормальное поле в этих точках тоже разное. Ясно, что в точке «2» поле меньше; для учета этого изменения достаточно предположить, что Земля является сферой. Тогда ее гравитационное поле в обеих точках совпадает с полем точечного источника. Используя уравнение (II.29), получаем разность вертикальных компонент поля, обусловленную изменением высоты:

$$\begin{aligned} \Delta g_z &= g_z(R) - g_z(R+h) = g_z(R) \left[ 1 - \frac{g_z(R+h)}{g_z(R)} \right] = \\ &= g_z(R) \left\{ 1 - \frac{R^2}{(R+h)^2} \right\}, \end{aligned}$$

где  $R$  — радиус Земли,  $h$  — высота.

Поскольку в действительности  $h/R \ll 1$ , имеем

$$\frac{R^2}{(h+R)^2} = \frac{1}{(1+h/R)^2} = \left( 1 + \frac{h}{R} \right)^{-2} \approx 1 - \frac{2h}{R},$$

$$\Delta g_z = g_z(R) \frac{2h}{R}. \quad (\text{II.34})$$

Предположив, что радиус Земли  $R$  и нормальное гравитационное поле  $g_z$  равны  $R = 6378$  км и  $g_z = 980$  Гал, получим

$$\Delta g_z/h = 0,3086 \text{ мГал/м}. \quad (\text{II.35})$$

Если, например, точка «2» имеет большую высоту, чем точка «1», то добавим поправку к измеренному полю  $g_z(R+h)$ , чтобы компенсировать уменьшение поля из-за высоты. Часто значение аномального поля около 1 мГал или меньше. В этом случае высота должна быть известна с точностью до нескольких санти-

метров. Отметим, что формула стандартной поправки получена с использованием модели сфероида.

### *Поправка Буге (за промежуточный слой)*

Снова сравним поля в точках «1» и «2», предположив, что последняя расположена над некоторым слоем пород, который отсутствует в точке «1» (рис. II.6, в). Наличие этого слоя ведет к увеличению поля в точке «2». В отличие от предыдущего слоя, где рассматривалась разность нормальных полей, здесь обратим внимание на изменение вторичного поля. Если предположить, что влияние конечных по горизонтали размеров слоя на поле в точке «2» незначительно, то можно использовать результаты раздела II.1 (пример 3). Тогда в соответствии с уравнением (II.23) поле, вызванное слоем толщиной  $h$ ,

$$\Delta g_z = 2\pi \gamma \delta \Delta h. \quad (\text{II.36})$$

Например, полагая  $\delta = 2600$  кг/м<sup>3</sup>, имеем

$$\Delta g_z / \Delta h \approx 0,11 \text{ мГал/м.}$$

Уравнение (II.36) описывает поправку Буге и вместе с поправкой (II.35) широко используется в практике гравиметрии. Если модель слоя не способна адекватно описать эффект, вызванный рельефом, то используются более сложные формулы.

Далее получим формулы, основанные на законе Ньютона

$$\mathbf{g}(p) = -\gamma \int_V \frac{\Delta \delta(q) dV}{L_{qp}^3} \mathbf{L}_{qp}. \quad (\text{II.37})$$

Для вычисления вертикальной компоненты поля, вызванного некоторым распределением масс под поверхностью Земли, начнем с двумерного случая.

Прежде чем обсудить вопрос о подавлении геологического шума, получим несколько уравнений, позволяющих упростить вычисления полезного сигнала.

### *Двухмерная модель*

Предположим, что тело настолько сильно вытянуто в некотором направлении, что его можно рассматривать как двумерное. Другими словами, увеличение размеров тела в этом направлении практически не меняет поле в точках наблюдения. Будем рассматривать двумерное тело с произвольным поперечным сечением и введем декартову систему координат  $x, y, z$  (см. рис. II.6, г) таким образом, чтобы тело было вытянуто вдоль оси  $y$ . Ясно, что на любой плоскости  $y = \text{const}$  поле ведет себя одинаково. Для проведения вычислений выполним следующие две процедуры:

1. Поперечное сечение тела мысленно разобьем на множество

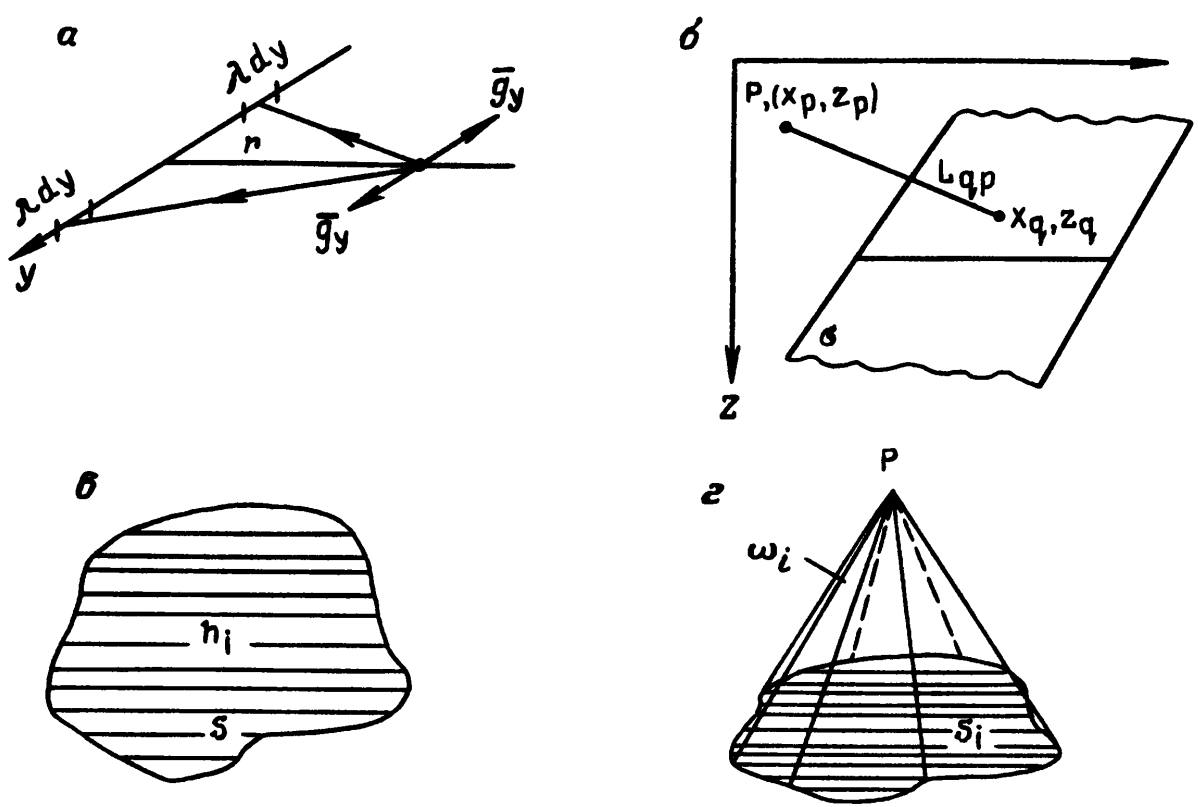


Рис. II.7. Поле, вызванное линейной массой (а); модель поверхностной массы (б); поперечное сечение трехмерного тела (в); телесный угол видимости элементарного слоя из точки  $p$  (г)

элементарных площадок и соответственно будем рассматривать модель как систему элементарных призм. Размеры каждой элементарной площадки выберем много меньше расстояния между точкой наблюдения и любой точкой на этой площадке.

2. Каждую элементарную призму заменим бесконечно тонкой линией, направленной вдоль оси  $y$  и порождающей такую же массу на единицу длины, как и призма.

Эти два шага позволяют заменить двумерное тело системой бесконечно тонких линий, параллельных между собой, распределение масс которых определяется из равенства

$$dm = \Delta\delta(q) dS(q) dy = \lambda(q) dy,$$

поскольку

$$\lambda(q) = \Delta\delta(q) dS(q), \quad (\text{II.38})$$

где  $\lambda(q)$  — линейная плотность масс линии, проходящей через точку  $q$ ;  $dS(q)$  — площадь элементарного поперечного сечения призмы. Плотность является функцией координат  $x$  и  $z$ , но не зависит от  $y$ .

Вывод формулы гравитационного поля, вызванного бесконечно тонкой линией с плотностью  $\lambda$ , очень прост (рис. II.7, а). Рассмотрим поле на плоскости  $y = 0$ . Благодаря симметрии распределения масс всегда можно найти пару элементарных масс  $\lambda dy$  и  $-\lambda dy$ , которые не создают компоненту поля  $g_y$ , направленную вдоль оси  $y$ , соответственно, поле, возбуждаемое всеми элементами

линии, имеет лишь компоненту  $g_r$ , расположенную на плоскости  $y = 0$ . Здесь  $r$  — координата цилиндрической системы координат с полюсом в точке  $O^*$ , а линия ориентирована вдоль оси системы координат. Как видно из рис. II.7, а, компонента  $dg_r$ , порождаемая элементарной массой, находящейся на расстоянии  $dy$ , определяется формулой

$$dg_r = -\gamma \frac{\lambda dy}{R^2} \cdot \frac{r}{R} = -\gamma \lambda r \frac{dy}{R^3}$$

или

$$dg_r = -\gamma \lambda r \frac{dy}{(y^2 + r^2)^{3/2}}.$$

Предположим, что длина линии равна  $2l$ . Интегрируя поля, вызванные всеми элементами, получаем

$$g_r = -\gamma \lambda r \int_{-l}^{+l} \frac{dy}{(y^2 + r^2)^{3/2}}.$$

Вводя новую переменную  $\varphi$  и учитывая, что

$$y = r \operatorname{tg} \varphi,$$

имеем

$$dy = r \sec^2 \varphi d\varphi$$

и

$$g_r = -\frac{\gamma \lambda}{r} \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \cos \varphi d\varphi = -\frac{2\gamma \lambda}{r} \sin \varphi_0,$$

где

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = l/r.$$

Поскольку

$$\sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)^{1/2}},$$

получаем

$$g_r = -\frac{2\gamma \lambda}{r} \frac{l}{(l^2 + r^2)^{1/2}}. \quad (\text{II.39})$$

Предположив, что  $l \gg r$ , представим последнее выражение в форме ряда:

$$g_r = -\frac{2\lambda \gamma}{r} \frac{1}{\left(1 + \frac{r^2}{l^2}\right)^{1/2}} \approx -\frac{2\lambda \gamma}{r} \left\{1 - \frac{1}{2} \frac{r^2}{l^2} + \frac{1}{8} \frac{r^4}{l^4} \dots\right\}. \quad (\text{II.40})$$

Первый член этого ряда описывает поле, вызванное бесконечно тонкой линией, и в этом случае

$$g_r = -2\gamma\lambda/r. \quad (\text{II.41})$$

Сравнение двух последних уравнений позволяет определить ошибку, которая возникает при замене линии конечной длины бесконечной линией, и затем применить этот результат к реальному вытянутому телу. Например, если длина линии в 10 раз больше, чем расстояние от тела до точки наблюдения, то эта ошибка составляет меньше половины процента.

Как следует из рис. II.6,  $z$ , вертикальная компонента поля

$$g_z = g_r \frac{z_p - z_q}{r} = \frac{2\gamma\lambda}{r^2} (z_q - z_p).$$

В частности, на поверхности Земли, где  $z_p = 0$ ,

$$g_z = \frac{2\gamma\lambda z_q}{r^2} = \frac{2\gamma\Delta\delta(q) dS(q)}{r^2} z_q \quad (\text{II.42})$$

и

$$r^2 = (x_p - x_q)^2 + z_q^2. \quad (\text{II.43})$$

Уравнение (II.42) описывает вертикальную компоненту поля, вызванного массами внутри элементарной призмы. Соответственно, для поля  $g_z$ , вызванного двумерным телом, имеем

$$g_z = 2\gamma \int_S \frac{\Delta\delta(q) dS(q)}{r^2} z_q \quad \text{при } z_p = 0. \quad (\text{II.44})$$

То есть вместо объемного интеграла поле можно представить в виде поверхностного интеграла, что упрощает вычисления.

Если функция  $\Delta\delta(q)$  является постоянной, то получаем

$$g_z(p) = 2\gamma\Delta\delta \int_S \frac{z_q dS}{r^2} \quad (\text{II.45})$$

или

$$g_z(p) = 2\gamma\Delta\delta \iint \frac{z_q dx dz}{(x_p - x_q)^2 + z_q^2} \quad \text{при } z_p = 0.$$

В тех случаях, когда поперечное сечение тела имеет относительно простую форму, интегралы в правой части уравнения (II.45) обычно можно выразить через элементарные функции — например, для цилиндра, тонкого стержня, пластины, разлома, тонкой призмы и т. д. Однако в более сложных случаях поле определяют с помощью численного интегрирования уравнения (II.45). Для дальнейшего упрощения вычислений предположим,

что двумерное тело ориентировано вдоль оси  $y$  и его толщина много меньше, чем расстояние между телом и точками наблюдения, т. е.

$$h(x) \ll r_{qp},$$

где  $h(x)$  — толщина тела. Как  $h(x)$ , так и плотность  $\delta$  могут быть функциями координат  $x$  и  $z$ . Очевидно, что если поле заменить двумерной полосой (рис. II.7, б), порождающей такую же массу и расположенную где-либо внутри тела, поле в точке наблюдения не изменится. Тогда уравнение (II.44) значительно упрощается:

$$g_z(p) = 2\gamma z_q \int_{x_{1q}}^{x_{2q}} \frac{\sigma(x_q) dx_q}{m^2 + z_q^2}, \quad (\text{II.46})$$

где  $m = x_p - x_q$ ;  $z_q$  — координата полосы на оси  $z$ ; величина

$$\sigma(x_q) = \Delta\delta(x_q) h(x_q)$$

— поверхностная плотность масс полосы;  $x_{1q}$  и  $x_{2q}$  — координаты краевых точек полосы. Подобная модель полезна при вычислении, например, гравитационного поля, вызванного двумерными структурами (антиклиналями, впадинами) на поверхности фундамента, где их амплитуды малы по сравнению с мощностью осадочных пород.

Теперь сделаем еще одно упрощение и предположим, что поверхностная плотность  $\sigma$  является постоянной. Тогда

$$g_z(p) = 2\gamma z_q h \Delta\delta \int_{x_{1q}}^{x_{2q}} \frac{dx_q}{m^2 + z_q^2}.$$

Снова выполняя подстановку

$$m = z_q \operatorname{tg} \varphi,$$

можно представить поле  $g_z$ , вызванное массами полосы, как

$$g_z(p) = 2\varphi h \Delta\delta (\varphi_1 - \varphi_2), \quad (\text{II.47})$$

где

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{x_p - x_{1q}}{z_q},$$

$$\varphi_2 = \operatorname{arctg} \frac{x_p - x_{2q}}{z_q} \quad \text{при} \quad x_{1q} < 0, \quad x_{2q} > 0.$$

В предельном случае, когда полоса становится плоскостью, снова получаем формулы поправки Буге.

Действительно, в этом случае  $\varphi_1 = \pi/2$ ,  $\varphi_2 = -\pi/2$ , поэтому

$$g_z(p) = 2\pi\gamma h \Delta\delta.$$

Предположим, что точка наблюдения расположена на плоскости  $x_p = 0$  и  $x_{1q} = -x_{2q} = x$ . Тогда можно переписать уравнение (II.47) в форме

$$g_z(x) = 4\gamma h \Delta\delta \operatorname{arctg} \frac{|x|}{z_q}.$$

Предположив, что  $|x| \gg z_q$ , разложим  $\operatorname{arctg} \frac{|x|}{z_q}$  в ряд:

$$\operatorname{arctg} \frac{|x|}{z_q} \approx \frac{\pi}{2} - \frac{z_q}{|x|} + \frac{1}{3} \frac{z_q^3}{x^3}$$

и затем получим

$$g_z(p) \approx 2\pi\gamma h \Delta\delta \left\{ 1 - \frac{z_q}{|x|} + \frac{2}{3\pi} \frac{z_q^3}{|x|^3} \dots \right\}.$$

Это уравнение позволяет оценить разность между полями, вызванными бесконечной плоскостью и полосой конечной ширины. Конечно, эту оценку можно получить и непосредственно из уравнения (II.47).

Покажем, что, используя это уравнение, можно вычислить гравитационное поле, вызванное массами двумерного тела с произвольным поперечным сечением. С этой целью мысленно разделим поперечное сечение тела на достаточное число относительно тонких слоев толщиной  $h_i$  (см. рис. II.6, г). Применяя принцип суперпозиции и уравнение (II.47) для каждого элементарного слоя, получаем

$$g_z(p) = 2\gamma \sum_{i=1}^N h_i \Delta \delta_i (\varphi_{1i} - \varphi_{2i}). \quad (\text{II.48})$$

Здесь  $g_z(p)$  — аномальное поле, вызванное всеми массами тела,  $h_i = z_{i+1} - z_i$ ,  $z_{i+1}$  и  $z_i$  — вертикальные координаты подошвы и кровли  $i$ -го слоя,  $N$  — число элементарных слоев и

$$\varphi_{2i} = \operatorname{arctg} \frac{x_p - x_{2i}}{z_{0i}}, \quad \varphi_{1i} = \operatorname{arctg} \frac{x_p - x_{1i}}{z_{0i}},$$

где

$$z_{0i} = (z_{i+1} + z_i)/2;$$

$x_{2i}$ ,  $x_{1i}$  — горизонтальные координаты краевых точек  $i$ -го слоя;  $\Delta\delta_i$  характеризует распределение масс в элементарном слое. В частности, если  $\Delta\delta_i$  является постоянной внутри тела, то



$$g_z(p) = 2\gamma \Delta \delta \sum_{i=1}^N (z_{i+1} - z_i) (\varphi_{2i} - \varphi_{1i}). \quad (\text{II.49})$$

С увеличением числа элементарных слоев возрастает точность определения поля.

### Трехмерное тело

Предположим, что гравитационное поле вызвано массами трехмерного тела (рис. II.7, в). В принципе, поле может быть вычислено с помощью закона Ньютона [см. уравнение (II.5)], однако численное интегрирование по всему объему для многих точек наблюдения даже на быстрых компьютерах требует очень много времени. Поэтому естественно применять методы, которые позволяют упростить это интегрирование. Два таких метода описываются в данном разделе. По аналогии с предыдущим случаем представим трехмерное тело как систему горизонтальных элементарных слоев, чья толщина значительно меньше расстояния до точек наблюдения (рис. II.7, г). В этом случае каждый слой можно заменить горизонтальной поверхностью конечных размеров с плотностью

$$\sigma(q) = \Delta \delta(q) h(q).$$

Соответственно, вертикальная компонента поля, вызванного всеми массами тела, может быть представлена как сумма полей  $g_{iz}$ , вызванных элементарными поверхностными массами:

$$g_z = \sum_{i=1}^N g_{iz}. \quad (\text{II.50})$$

Как было показано в первом разделе, поле, вызванное поверхностными массами, выражается через телесный угол  $\omega_i(p)$ , под которым поверхность видна из точки наблюдения  $p$ . Предположив, что разность плотностей  $\Delta \sigma_i(q)$  постоянна на поверхности с номером  $i$ , и используя уравнение (II.22), имеем

$$g_{iz} = \gamma \Delta \sigma_i(z_q) \omega_i(p), \quad (\text{II.51})$$

где

$$\Delta \sigma_i = \Delta \sigma_i h_i.$$

Для всего поля получаем

$$g_z(p) = \gamma \sum_{i=1}^N \Delta \delta_i (z_{i+1} - z_i) \omega_i(p), \quad (\text{II.52})$$

где  $z_{i+1} - z_i = h_i$  — толщина элементарного слоя.

В частности, если функция  $\Delta \delta_i$  постоянна внутри тела, то окончательно получаем

$$g_z(p) = \gamma \Delta \delta \sum_{i=1}^N (z_{i+1} - z_i) \omega_i(p). \quad (\text{II.53})$$

Определение вертикальной компоненты поля, вызванного массами трехмерного тела, состоит в вычислении множества телесных углов (данная процедура описана в главе I).

Другой подход, позволяющий упростить вычисления поля, основан на использовании уравнения (I.89):

$$\int_V \text{grad}^q T dV = \oint_S T dS,$$

где  $S$  — поверхность, окружающая объем тела;  $dS = dS \mathbf{n}$ , и  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к элементу поверхности, направленный наружу;  $T$  — непрерывная функция в объеме  $V$ .

Предполагая, что функция  $\Delta\delta$  постоянна, и учитывая уравнение (I.80), запишем

$$\frac{L_{qp}}{L_{qp}^3} = \text{grad}^q \frac{1}{L_{qp}}$$

и представим уравнение (II.37) в виде

$$\mathbf{g}(p) = \gamma \Delta \delta \int_V \frac{L_{qp}}{L_{qp}^3} dV = \gamma \Delta \delta \int_V \text{grad}^q \frac{1}{L_{qp}} dV, \quad (\text{II.54})$$

где индекс « $q$ » означает, что дифференцирование ведется по отношению к точке  $q$ .

Используя уравнение (I.89), получаем

$$\mathbf{g}(p) = \gamma \Delta \delta \oint_S \frac{dS}{L_{qp}}.$$

Соответственно, для вертикальной компоненты поля имеем

$$g_z(p) = -\gamma \Delta \delta \mathbf{k} \cdot \oint_S \frac{dS}{L_{qp}},$$

где  $\mathbf{k}$  — единичный вектор, направленный вдоль оси  $z$ .

Поскольку

$$dS \cdot \mathbf{k} = dS \cos \beta,$$

где  $\beta$  — угол между векторами  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{k}$ , зависящий от точки  $q$  на поверхности, записываем

$$g_z(p) = -\gamma \Delta \delta \oint_S \frac{dS(q)}{L_{qp}} \cos \beta(q). \quad (\text{II.55})$$

Таким образом, вместо объемного интеграла (II.5) получено выражение для поля, требующее интегрирования только по поверхности. Формулы, описанные в двух данных разделах, позволяют во многих случаях при вычислении полезного сигнала упростить решение прямой задачи. Они также применяются для учета вли-

яния рельефа и поправок за изменение высоты точек наблюдения и за промежуточный слой (Буге).

Как было установлено выше, существует еще один фактор, сильно влияющий на качество интерпретации. Геологический шум в основном вызван горизонтальными изменениями плотности пород вблизи земной поверхности. Конечно, разделение геологического шума и полезного сигнала не может быть произведено без некоторой ошибки и очень часто последняя в конечном счете определяет степень неоднозначности интерпретации. Если бы имелась достаточно надежная информация о распределении масс, формирующих геологический шум, то использование закона Ньютона было бы самым естественным путем для оценки его вклада. Однако подобная информация обычно отсутствует и на практике для такого разделения решение прямых задач не применяется.

Источники полезного сигнала расположены, как правило, глубже, чем источники геологического шума, что приводит к разнице в геометрии этих двух частей аномального поля. По этой причине подавление геологического шума основано на изучении геометрии поля, вызванного источниками, расположенными на различных расстояниях от точек наблюдения. В следующем разделе будут описаны теоретические основы подобного подхода. Для решения этой задачи необходимо получить систему уравнений гравитационного поля, ввести его потенциал и использовать формулу Грина (см. главу I).

### II.3. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ И ЕГО АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ВВЕРХ

Как было показано в главе I, уравнения поля отражают связь между полем и его возбудителями. В случае гравитационного поля существует единственный тип возбудителей — источники (массы), вихревой тип возбудителей отсутствует. Исходя из этого представления, получим систему уравнений поля. Сначала рассмотрим элементарную массу, расположенную в точке  $q$ , и вычислим поток ее поля через элементарную поверхность в точке  $p$ , как показано на рис. II.8,  $a$ . Применяя закон Ньютона, получаем

$$\mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = -\gamma \frac{dm L_{qp} \cdot d\mathbf{S}}{L_{qp}^3} = -\gamma dm d\omega, \quad (\text{II.56})$$

где  $d\omega$  — телесный угол, под которым поверхность  $d\mathbf{S}$  видна из точки  $q$ .

Очевидно, что поток через произвольную поверхность представляет собой сумму элементарных потоков, поэтому

$$\int_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = -\gamma dm \omega,$$

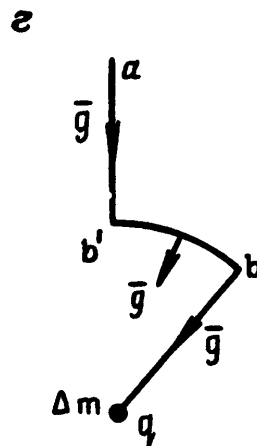
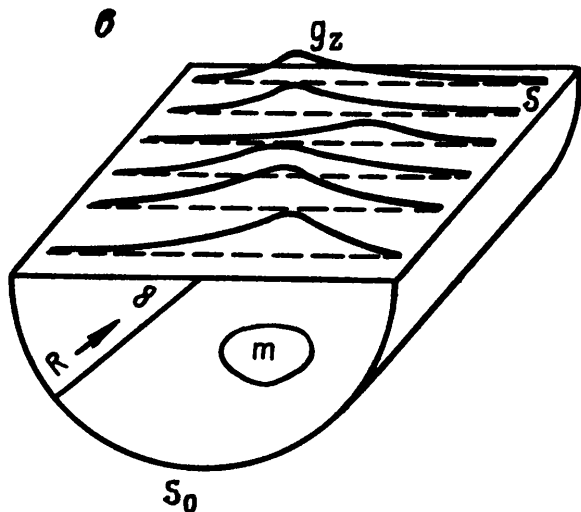
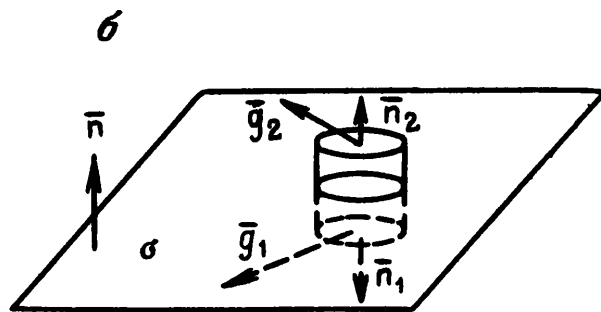
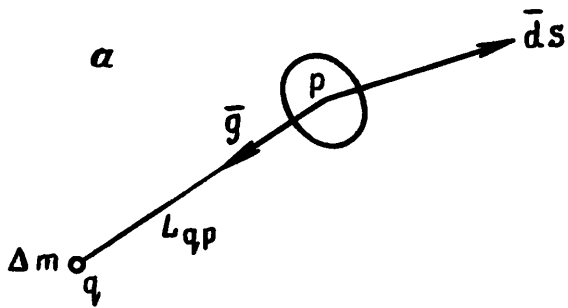


Рис. II.8. Поток через элементарную поверхность (а); поток для поверхностных масс (б); определение массы, создающей вторичное поле (в); напряженность, обусловленная элементарной массой (г)

где  $\omega$  — телесный угол, под которым поверхность  $S$  видна из точки  $q$ . В частности, поток через произвольную замкнутую поверхность, окружающую элементарную массу  $dm$ ,

$$\oint_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi\gamma dm, \quad (\text{II.57})$$

поскольку телесный угол, под которым замкнутая поверхность видна из точки  $q$ , всегда равен  $4\pi$  независимо от формы поверхности и положения точки  $q$  в объеме, окруженном поверхностью  $S$ .

Теперь, используя принцип суперпозиции и предполагая, что внутри объема  $V$  существует произвольное распределение масс, получаем

$$\oint_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi\gamma m, \quad (\text{II.58})$$

где  $m$  — полная масса в объеме  $V$ .

Уравнение (II.58) называется вторым уравнением гравитационного поля в интегральной форме. В связи с этим сделаем два комментария.

1. Теория поля, описанная в главе I, показывает, что поток любого поля через замкнутую поверхность характеризует коли-

чество источников в объеме, окруженном поверхностью  $S$ , т. е. естественно, что масса  $m$  присутствует в правой части этого уравнения. В то же время наличие коэффициента  $-4\pi\gamma$  непосредственно вытекает из закона Ньютона, а его значение определяется системой единиц.

2. Массы, расположенные вне объема, влияют на поля всюду, включая точки поверхности  $S$ , окружающей данный объем. Этот факт доказан в главе I для произвольного поля независимо от его природы. Однако он также следует из уравнения (II.56), поскольку телесный угол, под которым замкнутая поверхность видна из точки, расположенной вне ее, всегда равен нулю. Этот замечательный факт трудно было бы предсказать, если бы не было известно, что поток поля через произвольную замкнутую поверхность определяется только массами внутри объема, окруженного данной поверхностью.

Предполагая, что объемное распределение масс характеризуется плотностью  $\delta$ , представим уравнение (II.58) в следующем виде:

$$\oint_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi\gamma \int_V \delta dV. \quad (\text{II.59})$$

Теперь можно вывести дифференциальную форму этого уравнения. В соответствии с теоремой Гаусса,

$$\oint_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \text{div } \mathbf{g} dV = -4\pi\gamma \int_V \delta dV. \quad (\text{II.60})$$

Поскольку данное равенство справедливо для произвольного объема, то подынтегральные выражения также равны:

$$\text{div } \mathbf{g} = -4\pi\gamma\delta. \quad (\text{II.61})$$

Это дифференциальная форма второго уравнения гравитационного поля, справедливая для регулярных точек, в которых существуют первые производные поля  $\mathbf{g}$ . В частности, вне масс это уравнение существенно упрощается:

$$\text{div } \mathbf{g} = 0. \quad (\text{II.62})$$

На практике мы сталкиваемся с объемными распределениями масс конечной величины  $\delta(a)$ . Однако, как было показано в первом разделе, в некоторых условиях полезно ввести поверхностные распределения масс плотности  $\sigma(q)$ . В подобных случаях, используя уравнение (I.135), нетрудно получить поверхностный аналог второго уравнения. Предположим, что существует поверхностное распределение масс, показанное на рис. II.8,  $z$ , и представим себе цилиндрическую поверхность, окружающую точку  $q$ . Тогда, применяя уравнение (II.58), получаем

$$\mathbf{g}_2 \cdot d\mathbf{S}_2 + \mathbf{g}_1 \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_1} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi\gamma\sigma dS,$$

где

$$dS_2 = dS n; \quad dS_1 = -dS n;$$

$S_l$  — боковая поверхность цилиндра;  $n$  — единичный вектор, направленный от задней к передней стороне поверхности;  $\sigma dS$  — элементарная масса внутри цилиндра.

В пределе, когда высота цилиндра стремится к нулю, получаем

$$g_{2n} - g_{1n} = -4\pi\gamma\sigma, \quad (II.63)$$

где  $g_{2n}$  и  $g_{1n}$  — нормальные компоненты поля на каждой стороне поверхности. Таким образом, разность нормальных компонент поля на двух сторонах поверхности определяется поверхностной плотностью в данной точке.

Уравнение (II.63) представляет собой поверхностный аналог уравнения (II.61) в окрестности точек, где наблюдается сингулярность в поведении поля. Таким образом, получены три формы второго уравнения гравитационного поля:

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} &= -4\pi\gamma m, \\ \operatorname{div} \mathbf{g} &= -4\pi\gamma\delta, \\ g_{2n} - g_{1n} &= -4\pi\gamma\sigma. \end{aligned} \quad (II.64)$$

Прежде чем получить следующее уравнение поля, проиллюстрируем одно приложение уравнения (II.58) при интерпретации гравитационных данных. Предположим, что измерения поля выполняются в некоторой области и введены соответствующие поправки. Также предположим, что полезный сигнал пренебрежимо мал на границах этой области (рис. II.8, в). Тогда объемом, в котором расположены все источники данного поля, является нижнее полупространство. Этот объем окружен областью измерения и полусферической поверхностью  $S_0$  со столь большим радиусом, что поле на  $S_0$  можно рассматривать как поле точечного источника. Соответственно, поток через данную поверхность

$$\int_{S_0} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = -2\pi\gamma m.$$

По этой причине поток через замкнутую поверхность, окружающую данный объем, выражается в терминах поверхностного интеграла только по области наблюдения, т. е.

$$\oint \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = - \int_S g_z dS - 2\pi\gamma m = -4\pi\gamma m, \quad (II.65)$$

поскольку

$$\mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = -g_z dS.$$

Таким образом, при условии отсутствия геологического шума, найдено выражение общей массы, вызывающей полезный сигнал:

$$m = \frac{1}{2\pi\gamma} \int g_z dS. \quad (\text{II.66})$$

Теперь выведем первое уравнение гравитационного поля с использованием двух подходов. Первый подход основан на результатах, описанных в главе I, где показано, что циркуляция любого поля характеризует количество вихревых возбудителей. Поскольку гравитационное поле вызывается только источниками (массами), то можно сразу написать все три формы первого уравнения поля:

$$\oint \mathbf{g} \cdot d\mathbf{l} = 0, \quad \text{rot } \mathbf{g} = 0, \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1) = 0, \quad (\text{II.67})$$

где  $\mathbf{n}$  — нормаль к поверхности,  $\mathbf{q}_2$  и  $\mathbf{q}_1$  — соответственно поля на передней и задней сторонах поверхности.

Второй подход основан на законе Ньютона. Опишем его более детально. Предположим, что в точке  $q$  существует элементарная масса, и рассмотрим напряженность

$$\int_a^b \mathbf{g} \cdot d\mathbf{l}$$

между двумя точками вдоль пути  $bb'$  и  $b'a$ , где  $bb'$  — дуга, а  $b'a$  — перемещение вдоль радиуса (рис. II.8,  $z$ ). В случае элементарной массы напряженность можно представить как

$$\begin{aligned} \int_b^a \mathbf{g} \cdot d\mathbf{l} &= \int_b^{b_1} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{l} + \int_{b_1}^a \mathbf{g} \cdot d\mathbf{l} = -\gamma dm \int_{b_1}^a \frac{dl}{L_{qp}^2} = \\ &= -\gamma dm \int_b^a \frac{dl}{L_{qp}^2}, \end{aligned} \quad (\text{II.68})$$

поскольку вдоль дуги  $bb'$  поле  $\mathbf{g}$  и смещение  $d\mathbf{l}$  взаимно перпендикулярны, то скалярное произведение  $\mathbf{g} \cdot d\mathbf{l}$  равно нулю, в то время как вдоль пути  $b'a$  смещения  $d\mathbf{l}$  и  $d\mathbf{L}$  совпадают. Выполняя интегрирование в (II.68) и учитывая, что  $L_{qb_1} = L_{qb}$ , получаем

$$\int_b^a \mathbf{g} \cdot d\mathbf{l} = \gamma dm \left[ \frac{1}{L_{qb}} - \frac{1}{L_{qa}} \right]. \quad (\text{II.69})$$

Теперь представим произвольный путь между точками  $b$  и  $a$  как систему элементарных дуг и малых перемещений вдоль радиуса (рис. II.9,  $a$ ). Тогда, учитывая, что интегрирование вдоль дуг не дает вклада в напряженность, получаем

$$\int_b^a \mathbf{g} \cdot d\mathbf{l} = \gamma dm \left\{ \frac{1}{L_{qb}} - \frac{1}{L_{qb_1}} + \frac{1}{L_{qb_1}} - \frac{1}{L_{qb_2}} + \dots \right\}$$

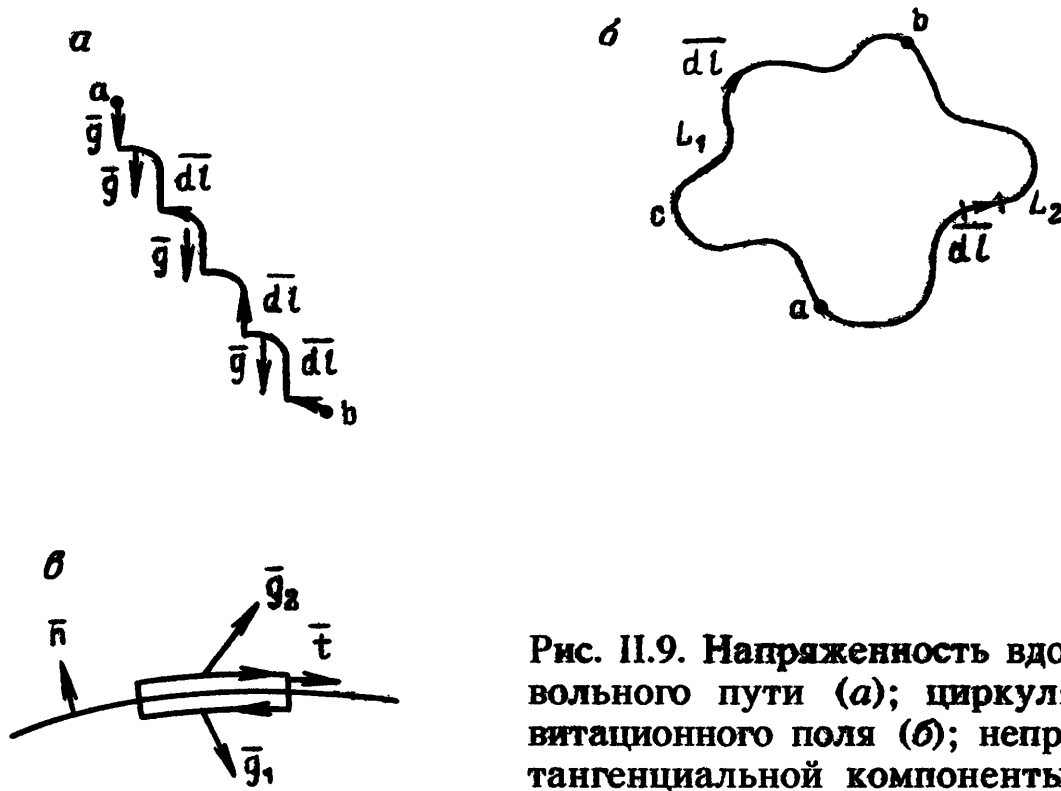


Рис. 11.9. Напряженность вдоль произвольного пути (а); циркуляция гравитационного поля (б); непрерывность тангенциальной компоненты (в)

$$+ \frac{1}{L_{qb_2}} - \frac{1}{L_{qb_3}} + \dots - \frac{1}{L_{qa}} \Big\} = \gamma dm \left\{ \frac{1}{L_{qb}} - \frac{1}{L_{qa}} \right\}, \quad (11.70)$$

где  $L_{qb_i}$  и  $L_{qb_{i+1}}$  — расстояния от элементарных масс до конечных точек соответствующих перемещений вдоль радиуса. Как следует из уравнений (11.69), (11.70), напряженность не меняется при изменении пути интегрирования, однако зависит от положения конечных точек (а, б). Другими словами, напряженность гравитационного поля не зависит от пути. Этот хорошо известный результат следует непосредственно из закона Ньютона и отражает тот факт, что только массы создают гравитационное поле.

Вполне естественно, что эта удивительная черта поля впечатляет. Действительно, предположим, что есть две точки, расположенные на расстоянии 1 м друг от друга. Вычисляя напряженность между ними по прямой линии длиной 1 м, получим значение напряженности. Затем выберем совершенно другой путь между этими же точками длиной в тысячи километров, проходящий через горы, долины и океаны. Конечно, поле меняется по величине и направлению от точки к точке этого пути. Однако, что действительно замечательно, так это то, что в обоих случаях напряженность остается той же самой.

Осталось сделать один шаг, чтобы получить первое уравнение из (11.67). Рассмотрим два произвольных пути  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$  между точками а и б (рис. 11.9, б); благодаря независимости напряженности от пути имеем

$$\int_{\mathcal{L}_1} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathcal{L}_2} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{l}$$



или

$$\int_{acb} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{l} = \int_{adb} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{l}.$$

Поскольку изменение направления  $d\mathbf{l}$  на противоположное приводит к изменению знака напряженности, можно записать, что

$$\int_{acb} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{l} = \int_{bda} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{l}$$

или

$$\int_{acb} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{l} + \int_{bda} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

Окончательно имеем

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{l} = 0, \tag{II.71}$$

где  $\mathcal{L}$  — произвольный замкнутый путь. Тем самым доказано, что для гравитационного поля напряженность вдоль замкнутого пути (циркуляция) всегда равна нулю. Уравнение (II.71) называется первым уравнением поля в интегральной форме. Конечно, этот результат справедлив для произвольного замкнутого пути, который может, в частности, проходить через среды с различными плотностями. Снова подчеркнем, что уравнение (II.71) не требует доказательства, поскольку известно, что гравитационное поле вызывается только источниками (массами).

Теперь, применяя теорему Стокса в окрестности регулярных точек, запишем

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

или

$$\text{rot } \mathbf{g} = 0, \tag{II.72}$$

где  $S$  — произвольная поверхность, окруженная контуром  $\mathcal{L}$ , а направления  $d\mathbf{l}$  и  $d\mathbf{S}$  связаны друг с другом правилом правой руки.

Уравнение (II.72) представляет собой первое уравнение гравитационного поля в дифференциальной форме, которое справедливо в точках внутри и вне масс, где существуют первые производные поля. Если предположить, что существуют поверхностные массы, то необходимо получить поверхностный аналог уравнения (II.72). Это связано с тем, что данное уравнение не может применяться вблизи масс, где нормальная компонента поля  $g_n$  является разрывной функцией согласно (II.63).

Для того, чтобы получить этот аналог, вычислим напряжен-

ность вдоль пути, показанного на рис. II.9, в. Используя уравнения (II.71), получаем

$$g_2 \cdot dl_2 + g_1 \cdot dl_1 = 0, \quad (\text{II.73})$$

поскольку приращение  $dl$  мало, интегралы можно заменить скалярным произведением поля и приращения, тогда как напряженность вдоль пути  $dh$ , перпендикулярного к поверхности, исчезает при стремлении  $dh$  к нулю.

Учитывая, что

$$dl_2 = -dl_1,$$

получаем

$$g_{2t} dt - g_{1t} dt = 0$$

или

$$g_{2t} = g_{1t}, \quad (\text{II.74})$$

где  $g_{1t}$  и  $g_{2t}$  — тангенциальные компоненты поля.

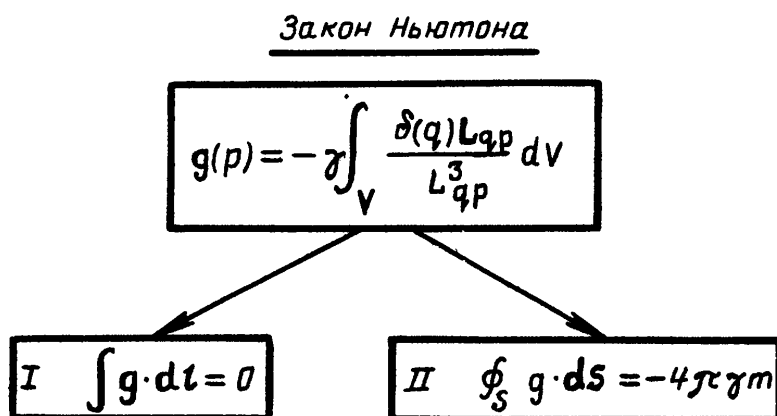
Уравнение (II.74) является поверхностным аналогом первого уравнения гравитационного поля и показывает, что тангенциальная компонента поля  $g$  является непрерывной функцией. Таким образом, получены три формы первого уравнения:

$$\oint g \cdot dl = 0, \quad \text{rot } g = 0, \quad g_{2t} - g_{1t} = 0$$

и все они содержат одну и ту же основную информацию, а именно, что гравитационное поле вызывается массами.

Теперь представим сводную запись системы уравнений гравитационного поля, полученную с помощью закона Ньютона и принципа суперпозиции, как в интегральной, так и в дифференциальной формах.

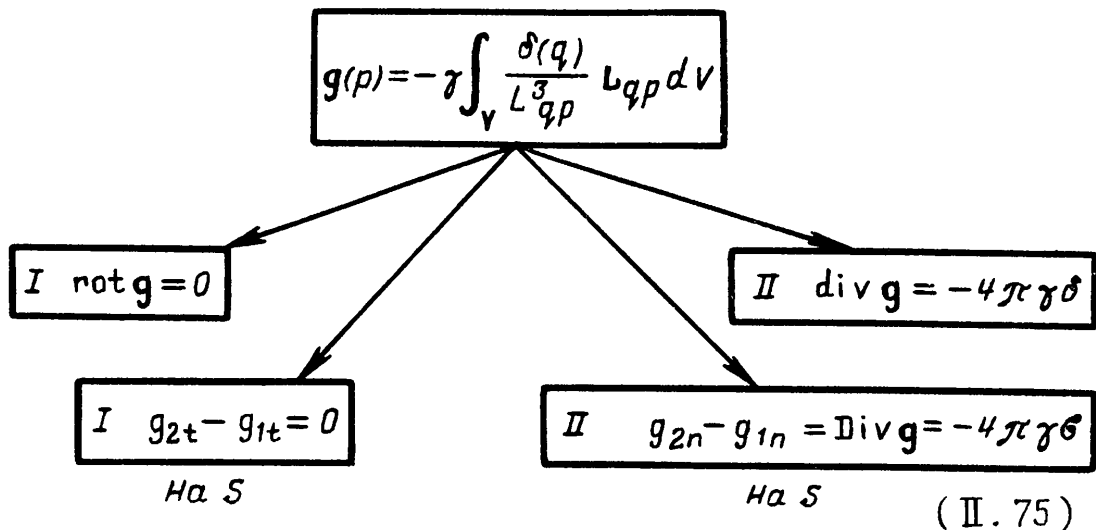
*Интегральная форма уравнений гравитационного поля*



Здесь  $\gamma$  — гравитационная постоянная;  $m$  — масса, сосредоточенная в объеме, окруженном поверхностью  $S$ .

Стрелки показывают, что оба уравнения, выполняемые повсюду, получены из закона Ньютона.

Закон Ньютона



Здесь  $\sigma$  — поверхностная плотность масс, а последняя пара уравнений описывает поведение поля вблизи точек, где присутствуют поверхностные массы.

Поскольку уравнения поля получены из закона Ньютона и принципа суперпозиции, они содержат информации о поле не больше, чем сами эти законы. Однако они позволяют лучше понять некоторые черты поля и, в частности, развить метод подавления геологического шума. С этой целью прежде всего введем новую скалярную функцию, называемую потенциалом гравитационного поля. Это можно сделать, используя первое уравнение в дифференциальной форме. Как было показано в главе I, решение уравнения  $\text{rot } \mathbf{g} = 0$  есть

$$\mathbf{g} = \text{grad } U \tag{II.76}$$

и этот результат проверяется непосредственной подстановкой (II.76) в уравнение (II.72).

Таким образом, векторное поле  $\mathbf{g}$  выражается через скалярную функцию  $U(p)$  с помощью относительно простого оператора (I.64):

$$\mathbf{g} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial U}{\partial x_1} \mathbf{i}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial U}{\partial x_2} \mathbf{i}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial U}{\partial x_3} \mathbf{i}_3, \tag{II.77}$$

где  $h_1, h_2$  и  $h_3$  — метрические коэффициенты;  $x_1, x_2, x_3$  — координаты точки наблюдения;  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$  и  $\mathbf{i}_3$  — единичные векторы координатной системы.

Ясно, что уравнение (II.76) определяет потенциал  $U$  с точностью до постоянной, т. е. бесконечное число потенциалов описывают одно и то же поле  $\mathbf{g}$ . По этой причине естественно трактовать потенциал как вспомогательную функцию, введенную только с одной целью, а именно, для упрощения анализа более сложного векторного поля  $\mathbf{g}$ .

Поскольку поле  $\mathbf{g}$  выражается через потенциал  $U$ , то следует получить уравнение, описывающее его поведение. Первое урав-

нение,  $\text{rot } \mathbf{g} = 0$ , уже использовалось для введения потенциала; теперь, подставляя (II.76) во второе уравнение поля (II.61), получаем

$$\text{div grad } U = -4\pi\gamma\delta$$

или

$$\nabla^2 U = -4\pi\gamma\delta.$$

(II.78)

Таким образом, мы получили уравнение Пуассона, которое, в соответствии с (I.236), в ортогональной системе координат представимо в виде

$$\frac{1}{h_1 h_2 h_3} = \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial U}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial U}{\partial x_3} \right] = -4\pi\gamma\delta.$$

В то же время вне масс уравнение (II.78) упрощается, переходя в уравнение Лапласа

$$\nabla^2 U = \Delta U = 0.$$

(II.79)

Оба соотношения (II.78) и (II.79) описывают поведение потенциала в регулярных точках, где справедливы первое и второе уравнения поля.

Чтобы охарактеризовать поведение потенциала вблизи поверхностных масс, используем уравнение (II.76), в соответствии с которым любая компонента поля вдоль некоторого направления равна производной потенциала в этом направлении, т. е.

$$g_l = \partial U / \partial l,$$

(II.80)

где  $l$  — линия вдоль любого направления. Тем самым, вместо поверхностных аналогов уравнений поля (II.74) и (II.63), получаем

$$\frac{\partial U_2}{\partial t} - \frac{\partial U_1}{\partial t} = 0$$

(II.81)

и

$$\frac{\partial U_2}{\partial n} - \frac{\partial U_1}{\partial n} = -4\pi\gamma\sigma,$$

(II.82)

где  $U_1$  и  $U_2$  — соответственно значения потенциала на задней и передней сторонах поверхности.

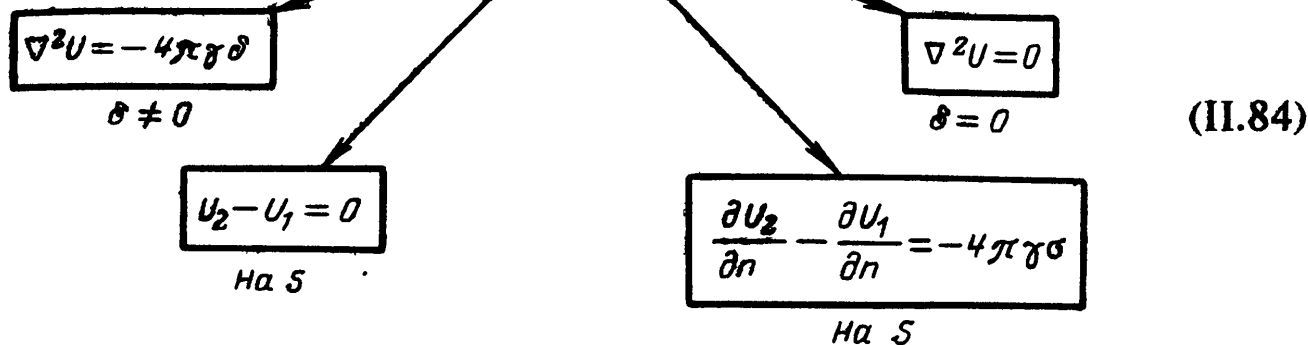
Очевидно, что непрерывность тангенциальных производных потенциала следует из непрерывности самого потенциала; соответственно, уравнение (II.81) можно заменить равенством

$$U_1 = U_2.$$

(II.83)

Таким образом, поведение потенциала описывается системой уравнений, приведенной ниже:

Закон Ньютона



Теперь найдем связь между потенциалом  $U$  и порождающими его массами. Сначала рассмотрим элементарную массу  $dm = \delta dV$ . В соответствии с законом Ньютона имеем

$$\mathbf{g}(p) = -\gamma \frac{dm}{L_{qp}^3} \mathbf{L}_{qp} = \gamma dm \mathop{\text{grad}}^p \frac{1}{L_{qp}}, \quad (\text{II.85})$$

поскольку

$$\frac{\mathbf{L}_{qp}}{L_{qp}^3} = -\mathop{\text{grad}}^p \frac{1}{L_{qp}},$$

где индекс  $p$  означает, что градиент рассматривается в окрестности точки  $p$ .

Сравнивая уравнения (II.76) и (II.85), можно сделать вывод, что функция  $U$ , соответствующая полю, вызванному элементарной массой  $\delta dV$ , расположенной в точке  $p$ , есть величина

$$U(p) = \gamma \frac{m}{L_{qp}} + C, \quad (\text{II.86})$$

поскольку, если градиенты двух функций совпадают, то сами функции в общем случае отличаются на постоянную.

Учитывая тот факт, что поле  $\mathbf{g}$ , вызванное массой  $dm$ , стремится на бесконечности к нулю, естественно предположить, что его потенциал также исчезает при  $L_{qp} \rightarrow \infty$ . Тогда из уравнения (II.86) следует, что  $C = 0$ , т. е.

$$U(p) = \gamma \frac{m}{L_{qp}}. \quad (\text{II.87})$$

Теперь, применяя принцип суперпозиции, получим выражение для потенциала  $U$ , вызванного объемным распределением масс:

$$U(p) = \gamma \int_V \frac{\delta(q) dV}{L_{qp}}. \quad (\text{II.88})$$

Сравнение уравнений (II.5) и (II.88) показывает, что потенциал связан с массами гораздо более простым способом, чем само по-

ле  $g$ , и этот факт является одной из причин, оправдывающих его введение.

Если наряду с объемными массами рассмотрим все другие типы масс, то получим

$$U(p) = \gamma \left[ \int_V \frac{\delta(q) dV}{L_{qp}} + \int_S \frac{\sigma(q) dS}{L_{qp}} + \sum_{i=1} \frac{m_i}{L_{qp}} + \int_{\mathcal{L}} \frac{\lambda(q) dl}{L_{qp}} \right], \quad (\text{II.89})$$

где  $m_i$  — точечные массы;  $\lambda(q)$  — линейная плотность.

Покажем еще одно приложение потенциала. С этой целью рассмотрим изменение  $dU$  этой функции в окрестности некоторой точки. Известно, что  $dU$  можно представить как

$$dU = \frac{\partial U}{\partial l_1} dl_1 + \frac{\partial U}{\partial l_2} dl_2 + \frac{\partial U}{\partial l_3} dl_3, \quad (\text{II.90})$$

где  $dl_1$ ,  $dl_2$  и  $dl_3$  — элементарные приращения вдоль координатных линий  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$ .

Легко видеть, что правую часть этого уравнения можно записать как скалярное произведение двух векторов:

$$dl = dl_1 \mathbf{i}_1 + dl_2 \mathbf{i}_2 + dl_3 \mathbf{i}_3$$

и (II.91)

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial l_1} \mathbf{i}_1 + \frac{\partial U}{\partial l_2} \mathbf{i}_2 + \frac{\partial U}{\partial l_3} \mathbf{i}_3.$$

Здесь

$$dl_1 = h_1 dx_1, \quad dl_2 = h_2 dx_2, \quad dl_3 = h_3 dx_3.$$

Таким образом,

$$dU = dl \cdot \text{grad } U = \mathbf{g} \cdot dl. \quad (\text{II.92})$$

После интегрирования этого уравнения вдоль произвольного пути с конечными точками  $a$  и  $b$  получаем

$$U(a) - U(b) = \int_b^a \mathbf{g} \cdot dl. \quad (\text{II.93})$$

Таким образом, напряженность вдоль некоторого пути выражается через разность потенциалов в конечных точках этого пути. Конечно, гораздо проще найти разность скалярной функции в

двух точках  $U(a) - U(b)$ , чем выполнить интегрирование  $\int_b^a \mathbf{g} \cdot dl$ ,

и этот факт демонстрирует еще одно преимущество использования потенциала.

Вернемся к уравнениям Пуассона и Лапласа, описывающим поведение потенциала внутри и вне масс:

$$\Delta U = -4\pi\gamma\delta \quad \text{и} \quad \Delta U = 0.$$

В то же время мы уже получили явное выражение для потенциала  $U$ , позволяющее найти эту функцию по известным массам (II.88). Это значит, что

$$U(p) = \gamma \int_V \frac{\delta(q) dV}{L_{qp}}$$

является решением уравнения Пуассона внутри масс и удовлетворяет уравнению Лапласа вне их.

Потенциал также полезен при установлении связей между различными компонентами гравитационного поля. В соответствии с уравнением (II.76),

$$g_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad g_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad g_z = \frac{\partial U}{\partial z};$$

учитывая, что

$$L_{qp} = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 + (z_p - z_q)^2},$$

получаем из уравнения (II.88)

$$\begin{aligned} g_x &= \gamma \int_V \delta \frac{x_p - x_q}{L_{qp}^3} dV, & g_y &= \gamma \int_V \delta \frac{y_p - y_q}{L_{qp}^3} dV, \\ g_z &= \gamma \int_V \delta \frac{z_p - z_q}{L_{qp}^3} dV. \end{aligned} \tag{II.94}$$

Конечно, эти уравнения также непосредственно следуют из закона Ньютона.

Затем, взяв соответствующие производные, имеем

$$\frac{\partial g_x}{\partial z} = \frac{\partial g_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial g_x}{\partial y} = \frac{\partial g_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial g_z}{\partial y} = \frac{\partial g_y}{\partial z}. \tag{II.95}$$

Данные уравнения указывают на то, что объем информации об источниках поля, содержащийся в одной компоненте поля, в принципе не может быть увеличен путем измерения другой компоненты. Действительно, этот результат был установлен ранее при рассмотрении поля элементарной массы.

Продемонстрируем еще одно достоинство потенциала, которое является важным для интерпретации гравитационных данных. Предположим, что аномальное поле, измеренное на поверхности Земли, состоит из двух частей: одна из них вызвана относительно глубинными структурами и представляет полезный сигнал, в то время как другая вызвана горизонтальными изменениями плотности породы вблизи поверхности и характеризует геологический шум (рис. II.10, а).

Предположим на минуту, что поле измеряется на различных расстояниях от поверхности Земли. Очевидно, что с увеличением

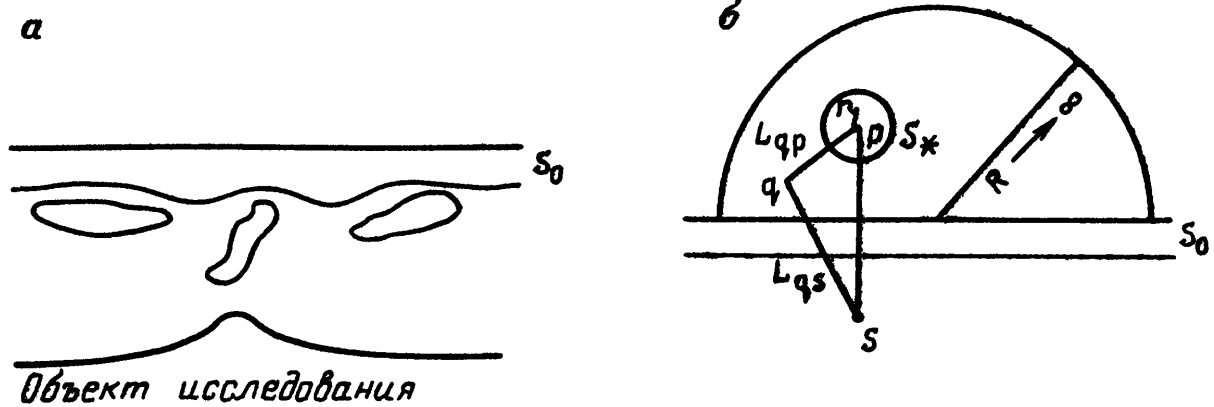


Рис. 11.10. Полезный сигнал и геологический шум (а) и аналитическое продолжение вверх (б)

расстояния обе части поля начнут уменьшаться. Однако существует весьма заметная разница в их поведении. А именно, полезный сигнал уменьшается медленнее, поскольку расстояние между глубинными структурами и точками наблюдения меняется в относительно меньших пределах, в то время как сигнал, вызванный геологическим шумом, изменяется быстрее, поскольку источники этого поля расположены ближе к точкам наблюдения. В результате вклад геологического шума в аномальное поле уменьшается с увеличением высоты точки наблюдения. Эта тенденция наблюдается до тех пор, пока зависимость обоих полей от расстояния до их источников не становится практически одинаковой.

Принимая во внимание указанное поведение полезного сигнала и геологического шума, опишем метод вычисления поля в верхнем полупространстве по известным значениям на поверхности Земли. Ясно, что подобная процедура позволит подавить влияние геологического шума.

Хорошо известно, что в верхнем полупространстве, где массы отсутствуют, потенциал  $U$  удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta U = 0.$$

Предположим, что на поверхности Земли известна вертикальная компонента гравитационного поля, т. е. производная  $\partial U / \partial z$ .

Поскольку рассматривается только аномальное поле, на достаточно большой высоте оно становится малым и, соответственно, можно предположить, что потенциал  $U$  равен нулю на некоторой полусферической поверхности с относительно большим радиусом  $R$  (рис. 11.10, б).

Таким образом, имеем объем  $V$ , окруженный поверхностью Земли, где производная  $\partial U / \partial z$  известна, и полусферической поверхностью с радиусом  $R$ , где потенциал равен нулю. Наша задача состоит в том, чтобы найти как потенциал  $U$ , так и само поле  $g$  в каждой точке этого объема. Это означает, что требуется решить краевую задачу Дирихле (см. главу I), которая единственным образом определяет потенциал  $U$  и поле  $g$ . Эта задача может быть



записана как задача определения поля внутри объема  $V$  по следующим известным соотношениям.

1. Над Землей

$$\nabla^2 U = 0.$$

2. На поверхности Земли

$$\frac{\partial U}{\partial z} = g_z,$$

где  $g_z$  — известная функция.

3.  $U \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ .

Чтобы получить формулы, позволяющие вычислить поле в объеме  $V$ , воспользуемся второй формулой Грина (I.289)

$$\int_V (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) dV = \oint_S \left[ \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right] dS, \quad (\text{II.96})$$

где обе функции  $\varphi(q)$  и  $\psi(q)$  непрерывны вместе со своими первыми производными;  $n$  — единичный вектор, направленный наружу. По существу, уравнение (II.96) является формулой Гаусса и устанавливает связь, с одной стороны, между значениями скалярной функции внутри объема  $V$  и, с другой стороны, со значениями функций и их производных на поверхности  $S$ . По этой причине естественно применить уравнение (II.96) для нахождения потенциала в верхнем полупространстве над земной поверхностью. Следуя выводам главы I, предположим, что функция  $\psi(q)$  — потенциал гравитационного поля  $U(q)$ , и введем обозначения:

$$\psi(q) = U(q) \quad \text{и} \quad \varphi(q) = G(q).$$

Тогда уравнение (II.96) можно переписать в виде

$$\int_V U \nabla^2 G dV = \oint_S \left( U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS, \quad (\text{II.97})$$

поскольку  $\nabla^2 U = 0$  в верхнем полупространстве.

Наша задача состоит теперь в выводе явного выражения для потенциала  $U$  на основе уравнения (II.97), т. е. нужно извлечь функцию  $U$  из-под знака интеграла в этом уравнении. Для осуществления этого плана выберем функцию  $G$ , удовлетворяющую следующим условиям.

1. Всюду внутри объема  $V$  она является решением уравнения Лапласа

$$\nabla^2 G = 0,$$

за исключением точки наблюдения  $p$ .

2. При стремлении к точке  $p$  функция  $G$  имеет особенность  $1/L_{pq}$ , т. е.

$$G(q, p) \rightarrow \frac{1}{L_{qp}} \quad \text{при} \quad q \rightarrow p.$$

3. С увеличением радиуса  $R$  полусферы (рис. II.10, б) функция  $G$  убывает по меньшей мере обратно пропорционально расстоянию  $L_{qp}$ . Другими словами, функция  $G$ , которую часто называют функцией Грина, является гармонической всюду, за исключением точки  $p$ , где вычисляется потенциал.

Поскольку  $G(p, q)$  имеет особенность в точке  $p$ , можно применить формулу Грина (I.97) при условии, что точка  $p$  окружена поверхностью  $S_*$  с очень маленьким радиусом  $r_1$  (см. рис. II.10, б).

Тогда, применяя это уравнение к объему  $V$ , окруженному поверхностями  $S$  и  $S_*$ , и учитывая, что  $\nabla^2 G = 0$ , получаем

$$\oint_S \left( U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS + \oint_{S_*} \left( U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS = 0, \quad (\text{II.98})$$

поскольку объемный интеграл пропадает.

Представим первый член этого уравнения в виде

$$\begin{aligned} \oint_S \left( U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS &= \int_{S_0} \left( U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS + \\ &+ \int_{S_R} \left( U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS, \end{aligned} \quad (\text{II.99})$$

где  $S_0$  — поверхность Земли, ось  $z$  направлена вниз, а  $S_R$  — полусфера радиуса  $R$ .

Поскольку с увеличением радиуса  $R$  обе функции  $U$  и  $G$  уменьшаются как  $1/R$ , то их первые производные  $\partial U/\partial R$  и  $\partial G/\partial R$  стремятся к нулю как  $1/R^2$ . Соответственно, подынтегральное выражение второго интеграла в правой части уравнения (II.99) убывает как  $1/R^3$ . Используя теорему о среднем, получаем

$$\int_{S_R} \left( U \frac{\partial G}{\partial R} - G \frac{\partial U}{\partial R} \right) dS \rightarrow \frac{C}{R^3} \int_{S_R} dS = \frac{C}{R^3} 2\pi R^2 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad R \rightarrow \infty,$$

где  $C$  — некоторая постоянная.

Таким образом, уравнение (II.98) можно переписать в форме

$$\int_{S_*} \left\{ U \frac{\partial G}{\partial z} - G \frac{\partial U}{\partial z} \right\} dS + \oint_{S_0} \left\{ U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right\} dS = 0. \quad (\text{II.100})$$

Теперь рассмотрим интеграл по сферической поверхности  $S_*$  вокруг точки  $p$  радиуса  $r_1$ , который в пределе стремится к нулю. Сделаем два комментария о поведении этого интеграла.

1. Потенциал  $U(q)$  и его нормальная производная на сферической поверхности

$$\frac{\partial U}{\partial n} = - \frac{\partial U}{\partial r} = - g_r$$

имеют конечные значения, поскольку описывают реальное поле.

2. С уменьшением радиуса  $r$  функция  $G(q, p)$  ведет себя как  $1/r$ , а ее производная  $\partial G/\partial n = - \partial G/\partial r$  растет пропорционально  $1/r^2$ .

Снова применяя теорему о среднем, получаем

$$\begin{aligned} \oint_{S_*} \left( U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS &= - \oint_{S_*} U \frac{\partial G}{\partial r} dS + \int_{S_*} G \frac{\partial U}{\partial r} dS = \\ &= U(p) \frac{1}{r_1^2} 4\pi r_1^2 + \frac{1}{r_1} \frac{\partial U(p)}{\partial r} 4\pi r_1^2 = 4\pi U(p) \quad \text{при } r_1 \rightarrow 0. \quad (\text{II.101}) \end{aligned}$$

Таким образом, благодаря тому, что выбранная функция Грина имеет особенность  $1/L_{qp}$  в точке  $p$ , оказалось возможным вынести функцию  $U(p)$  из-под знака интеграла и получить для нее явное выражение.

Действительно, имеем из уравнений (II.100), (II.101)

$$4\pi U(p) = \int_{S_0} \left\{ U(q) \frac{\partial G(q, p)}{\partial z} - G(q, p) \frac{\partial U(q)}{\partial z} \right\} dS$$

или

$$U(p) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \left\{ G(q, p) g_z(q) - U(q) \frac{\partial G(q, p)}{\partial z} \right\} dS, \quad (\text{II.102})$$

поскольку  $g_z = \frac{\partial U}{\partial z}$ .

Таким образом, получена формула для вычисления потенциала поля всюду в верхнем полупространстве, когда на поверхности Земли  $S_0$  известны значения потенциала и вертикальной компоненты гравитационного поля.

Продифференцировав обе части уравнения (II.102), получим выражение для вертикальной компоненты гравитационного поля в точке  $p$ :

$$g_z(p) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \left\{ g_z(q) \frac{\partial G}{\partial z_p} - U(q) \frac{\partial^2 G}{\partial z_p \partial z_q} \right\} dS, \quad (\text{II.103})$$

где  $z_p$  и  $z_q$  указывают, что дифференцирование функции Грина ведется по координате  $z$  вблизи точек  $p$  и  $q$  соответственно.

Можно представить себе бесконечное число функций Грина,

удовлетворяющих условиям, сформулированным выше. Простейшей из них является функция

$$G = \frac{1}{L_{pq}}. \quad (\text{II.104})$$

Действительно, она удовлетворяет уравнению Лапласа всюду, кроме точки  $p$ , поскольку описывает с точностью до постоянной потенциал единичной массы, расположенной в точке  $p$ . Она имеет также особенность в этой точке и обеспечивает нулевое значение поверхностного интеграла по полусфере, когда ее радиус  $R$  стремится к бесконечности. Соответственно, можно записать

$$g_z(p) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \left\{ g_z(q) \frac{\partial}{\partial z_p} \frac{1}{L_{qp}} - U(q) \frac{\partial^2}{\partial z_p \partial z_q} \frac{1}{L_{qp}} \right\} dS. \quad (\text{II.105})$$

Однако это уравнение не применяется на практике, так как потенциал не измеряется на поверхности Земли. Поэтому необходимо выбирать функцию Грина так, чтобы ее производная  $G/z$  на поверхности Земли была равна нулю. В этом случае уравнение (II.102) сильно упрощается:

$$U(p) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} G(q, p) g_z(q) dS, \quad (\text{II.106})$$

где  $g_z(q)$  — измеренная вертикальная компонента поля на земной поверхности;  $G(p, q)$  — неизвестная функция, удовлетворяющая следующим условиям.

1. В верхнем полупространстве ( $z < 0$ ) функция Грина  $G$  является решением уравнения Лапласа

$$\nabla^2 G = 0$$

везде, за исключением точки наблюдения  $p$ .

2. Она имеет особенность типа  $1/L_{qp}$ , т. е. при приближении к точке  $p$

$$G(q, p) \rightarrow \frac{1}{L_{qp}}.$$

3. На полусфере с увеличением радиуса  $R$  она уменьшается по меньшей мере как  $1/R$ .

4. На поверхности Земли производная  $\partial G(p, q)/\partial z$  исчезает:

$$\partial G/\partial n = 0.$$

Как было показано в главе I, определение функции  $G$ , удовлетворяющей всем этим условиям, представляет собой в сущности решение краевой задачи. В соответствии с теоремой единственности эти условия определяют функцию  $G(p, q)$  единственным образом. В общем случае решение этой задачи весьма сложное,

однако существует один важный на практике случай плоской поверхности  $S_0$ , когда найти функцию Грина очень просто.

Введем точку  $s$ , являющуюся зеркальным отражением точки  $p$  относительно плоскости земной поверхности (см. рис. II.10, б), и рассмотрим функцию Грина  $G_1(p, s, q)$ , равную

$$G_1 = \frac{1}{L_{qp}} + \frac{1}{L_{qs}}, \quad (\text{II.107})$$

где  $q$  — точка земной поверхности;

$$L_{qp} = \left\{ (x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2 + (z_q - z_p)^2 \right\}^{1/2};$$

$$L_{qs} = \left\{ (x_q - x_s)^2 + (y_q - y_s)^2 + (z_q - z_s)^2 \right\}^{1/2}.$$

Взяв производную  $\partial G_1 / \partial z$ , получаем

$$\frac{\partial G_1}{\partial z_q} = - \frac{z_q - z_p}{L_{qp}^3} - \frac{z_q - z_s}{L_{qs}^3}.$$

Поскольку в каждой точке земной поверхности  $z_q = 0$  и  $z_p = -z_s$ , но

$$L_{qp} = L_{qs},$$

производная  $\partial G_1 / \partial z_q$  равна нулю.

Очевидно, остальные три условия также выполняются. Таким образом, в соответствии с уравнением (II.106), имеем

$$U(p) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} G_1 g_z(q) dS$$

и

$$g_z(p) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} g_z(q) \frac{\partial G_1}{\partial z_p} dS.$$

(II.108)

Последнее выражение позволяет вычислить вертикальную компоненту поля в верхнем полупространстве, если известно ее значение на поверхности Земли. Это преобразование называется аналитическим продолжением вверх и используется для подавления влияния геологического шума.

## III.1. Закон Кулона

Нормальная компонента электрического поля, вызванного плоским распределением зарядов

Эффект проводника, помещенного в свободное пространство и расположенного в электрическом поле

## III.2. Система уравнений стационарного электрического поля и его потенциал

Интегральная форма уравнений стационарного электрического поля

Дифференциальная форма уравнений стационарного электрического поля

Проводник в свободном пространстве

## III.3. Электрическое поле в присутствии диэлектриков

## III.4. Электрический ток, электропроводность и закон Ома

## III.5. Электрические заряды в проводящей среде

## III.6. Сопротивление

## III.7. Стороннее поле и его электродвижущая сила

## III.8. Работа кулоновских и сторонних сил, закон Джоуля

## III.9. Определение электрического поля в проводящей среде

## III.10. Поведение электрического поля в проводящей среде

В этой главе развивается теория электрических полей, которая используется в различных электрических методах. Теория основана на законах Кулона, Ома и принципе суперпозиции. Начнем с закона Кулона.

### III.1. ЗАКОН КУЛОНА

Экспериментальные исследования, проведенные Кулоном в XIX веке, показали, что сила, действующая на элементарный заряд, помещенный в точку  $p$ , и обусловленная присутствием другого элементарного заряда, расположенного в точке  $q$ , описывается чрезвычайно простым выражением:

$$\mathbf{F}(p) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{de(q) de(p)}{L_{qp}^3} \mathbf{L}_{qp}, \quad (\text{III.1})$$

где вектор

$$\mathbf{L}_{qp} = L_{qp} \mathbf{L}_{qp}^0.$$

Здесь  $L_{qp}$  — расстояние между точками  $q$  и  $p$ ,  $\mathbf{L}_{qp}^0$  — единичный вектор, направленный вдоль линии, соединяющей точки  $q$  и  $p$ ,  $\epsilon_0$  — константа, известная как диэлектрическая проницаемость

или электрическая постоянная свободного пространства. В Международной системе единиц СИ

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \text{ Ф/м.}$$

По определению, элементарные заряды занимают объемы, размеры которых много меньше, чем расстояние  $L_{qp}$  между ними, и

$$de(q) = \delta(q) dV, \quad de(p) = \delta(p) dV,$$

где  $\delta$  — объемная плотность зарядов.

Уравнение (III.1) можно также записать в виде

$$F(p) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{de(q) de(p)}{L_{qp}^2} L_{qp}^0 \quad (\text{III.2})$$

и очевидно, что

$$F(p) = -F(q).$$

Электрическая сила взаимодействия между двумя элементарными зарядами прямо пропорциональна произведению зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. В отличие от гравитационной массы электрические заряды могут быть как положительными, так и отрицательными, поэтому электрическая сила имеет то же самое направление, что и единичный вектор  $L_{qp}^0$ , если заряды имеют один знак, и противоположное направление, когда произведение зарядов отрицательно (рис. III.1, а). Конечно, это простое выражение справедливо только тогда, когда

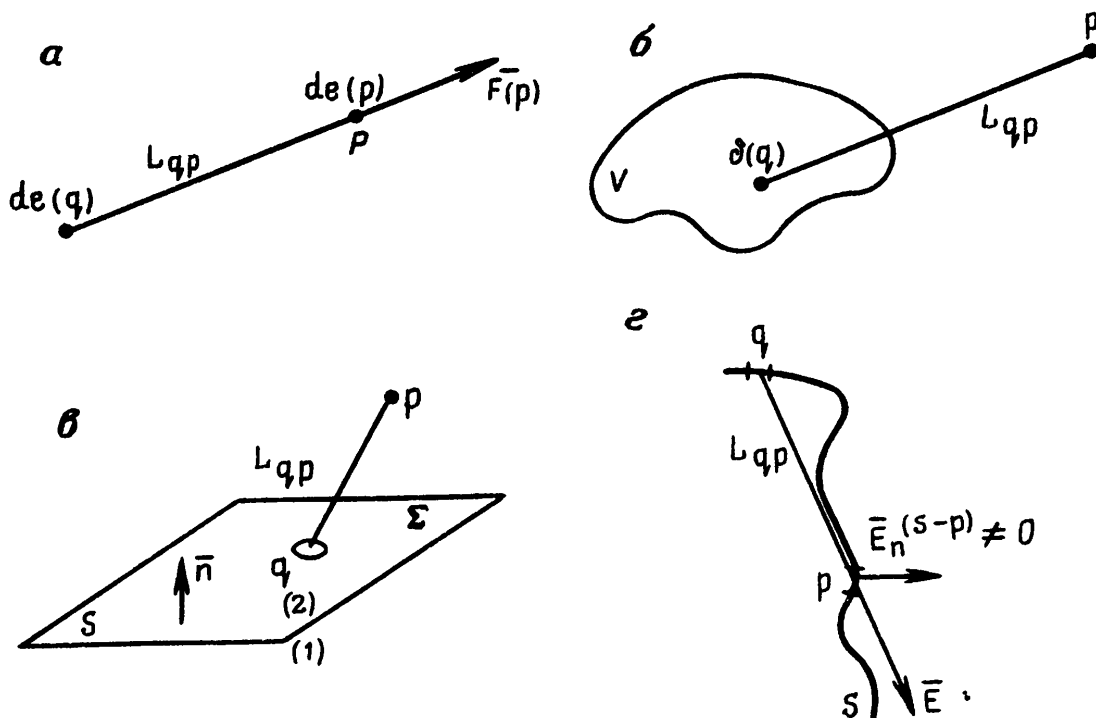


Рис. III.1. Взаимодействие между элементарными зарядами (а); электрическое поле объемных зарядов (б); нормальная компонента зарядов на поверхности: в — плоской, z — произвольной

расстояние между зарядами много больше размеров объема, внутри которого расположены заряды.

Для определения электрической силы взаимодействия между зарядами, один из которых содержится в объеме с размерами, сравнимыми с расстоянием между зарядами, следует использовать принцип суперпозиции, как это было сделано в случае гравитационного поля. В соответствии с этим принципом сила взаимодействия между двумя зарядами не зависит от присутствия других зарядов. Используя этот принцип, можно записать силу взаимодействия между элементарным зарядом  $de(p)$  в точке  $p$  и произвольным объемно распределенным зарядом (рис. III.1, б):

$$F(p) = \frac{de(p)}{4\pi \epsilon_0} \int_V \frac{\delta(q) dV}{L_{qp}^3} L_{qp}. \quad (\text{III.3})$$

Распространяя этот подход на более общий случай, в котором присутствуют все типы зарядов (объемные, поверхностные, линейные и точечные), и снова применяя принцип суперпозиции, получаем следующее выражение для электрической силы взаимодействия между элементарным зарядом  $de(p)$  и совершенно произвольно распределенными зарядами:

$$F(p) = \frac{de(p)}{4\pi \epsilon_0} \left[ \int_V \frac{\delta(q) dV}{L_{qp}^3} L_{qp} + \int_S \frac{\Sigma(q) dS}{L_{qp}^3} L_{qp} + \int_L \frac{\lambda(q) dl}{L_{qp}^3} L_{qp} + \sum \frac{e_i(q)}{L_{qp}^3} L_{qp} \right], \quad (\text{III.4})$$

где  $\delta dV$ ,  $\Sigma dS$ ,  $\lambda dl$  — элементарные объемные, поверхностные и линейные заряды с плотностями  $\delta$ ,  $\Sigma$  и  $\lambda$  соответственно;  $e_i$  — точечный заряд, т. е. элементарный заряд, расположенный в некоторой точке. В отличие от объемных зарядов, другие типы зарядов являются математическими моделями реального распределения зарядов, что во многих случаях решительно упрощает вычисления и анализ.

Теперь определим напряженность электрического поля  $E(p)$  как отношение между силой электрического взаимодействия  $F$  и величиной элементарного заряда (который рассматривается как пробный) в точке  $p$ :

$$E(p) = \frac{F(p)}{de(p)} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{de(q)}{L_{qp}^3} L_{qp}. \quad (\text{III.5})$$

Для удобства напряженность электрического поля обычно сводят к термину «электрическое поле». Поле не имеет той же размерности, что и сила, в системе единиц СИ оно измеряется в вольтах на метр. Электрическое поле  $E$  можно рассматривать как электрическую силу, действующую на пробный заряд  $de$ , поме-



щенный в интересующую нас область, и отнесенную к величине этого заряда. Под действием этой силы положительный заряд двигается в направлении поля, а отрицательный заряд двигается в противоположном направлении. Конечно, если электрическое поле известно, то нетрудно применить уравнение (III.5) для вычисления силы взаимодействия  $F$ . Как следует из (III.1), заряды, имеющие противоположные знаки, притягиваются друг к другу, в то время как одноименные заряды, в отличие от гравитационных масс, отталкиваются. В соответствии с (III.4) выражение для электрического поля можно записать как

$$E(p) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left[ \int_V \frac{\delta dV}{L_{qp}^3} L_{qp} + \int_S \frac{\Sigma dS}{L_{qp}^3} L_{qp} + \int_L \frac{\lambda dl}{L_{qp}^3} L_{qp} + \sum_{i=1} \frac{e_i}{L_{qp}^3} L_{qp} \right]. \quad (III.6)$$

Если задано распределение зарядов, функция  $E$  зависит только от координат точки наблюдения  $p$ . По этой причине функцию  $E$ , так же как и ускорение  $g$ , называют «полем». Здесь следует сделать несколько комментариев.

1. Электрические заряды являются единственными возбудителями электрического поля, которые не меняются со временем.

2. Закон Кулона описывает зависимость поля от зарядов. Необходимо отметить, что электрическое поле, вызванное заданным распределением зарядов, не зависит от физических свойств среды. Другими словами, электрическое поле, обусловленное одним и тем же распределением зарядов, одинаково как в пустом пространстве, так и в неоднородной среде. Это следует из того, что ни диэлектрическая постоянная, ни электропроводность среды не присутствуют в уравнении (III.6).

3. Закон Кулона, подобно закону Ньютона, не выведен из других уравнений, и в этом смысле является фундаментальным физическим законом, который описывает поведение постоянного электрического поля. Следовательно, основные уравнения поля будут получены из закона Кулона.

4. В некоторых условиях, которые важны для геофизических приложений, закон Кулона остается справедливым, даже если электрические поля меняются со временем.

5. Как и в случае гравитационного поля, при известном распределении электрических зарядов вычисление поля  $E$  с использованием уравнения (III.6) не представляет серьезных трудностей. Однако, в отличие от гравитационного поля, в случаях, наиболее часто встречающихся на практике, невозможно узнать все заряды до вычисления и закон Кулона становится бесполезным с практической точки зрения.

Теперь рассмотрим два примера полей, вызванных определенными распределениями зарядов.

*Нормальная компонента электрического поля, вызванного плоским распределением зарядов*

Предположим, что на плоской поверхности задано распределение зарядов с плотностью  $\Sigma(q)$ , как показано на рис. III.1, в. Введем вектор:

$$d\mathbf{S} = dS \mathbf{n},$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, направленный от задней стороны (1) к передней стороне (2) плоскости, на которой распределен заряд. Рассмотрим только нормальную компоненту поля, т. е. компоненту, перпендикулярную поверхности. В соответствии с законом Кулона (III.6) любой элементарный заряд  $\Sigma(q) dS$  создает поле, которое описывается уравнением

$$d\mathbf{E}(p) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{\Sigma(q) dS}{L_{qp}^3} \mathbf{L}_{qp}. \quad (\text{III.7})$$

Соответственно, нормальная компонента поля

$$\begin{aligned} dE_n &= dE \cos(\mathbf{L}_{qp}, \mathbf{n}) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{\Sigma(q) dS}{L_{qp}^2} \cos(\mathbf{L}_{qp}, \mathbf{n}) = \\ &= \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{\Sigma(q) dS \mathbf{L}_{qp}}{L_{qp}^3} \cos(\mathbf{L}_{qp}, \mathbf{n}). \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

Здесь  $(\mathbf{L}_{qp}, \mathbf{n})$  — угол между направлениями  $\mathbf{L}_{qp}^0$  и  $\mathbf{n}$ .

Произведение  $dS \mathbf{L}_{qp} \cos(\mathbf{L}_{qp}, \mathbf{n})$  можно записать как скалярное произведение следующим образом:

$$dS \mathbf{L}_{qp} \cos(\mathbf{L}_{qp}, \mathbf{n}) = (d\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}_{qp}) = - (d\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}_{pq}), \quad (\text{III.9})$$

так как  $\mathbf{L}_{qp} = -\mathbf{L}_{pq}$ . Таким образом, нормальную компоненту электрического поля можно записать как

$$dE_n(p) = - \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{d\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}_{pq}}{L_{pq}^3} \Sigma(q).$$

Поскольку выражение

$$(d\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}_{pq}) / L_{pq}^3$$

представляет собой телесный угол  $d\omega(p)$  видимости элемента  $d\mathbf{S}$  из точки  $p$ , имеем

$$dE_n(p) = - \frac{\Sigma}{4\pi \epsilon_0} d\omega(p). \quad (\text{III.10})$$

Подобным же образом получаем выражение для нормальной компоненты, вызванной всеми поверхностными зарядами:

$$E_n(p) = -\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_S \Sigma(q) d\omega. \quad (\text{III.11})$$

В частности, если заряд распределен на поверхности равномерно ( $\Sigma$  постоянна), то

$$E_n(p) = -\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \Sigma \omega(p), \quad (\text{III.12})$$

где  $\omega(p)$  — телесный угол видимости поверхности  $S$  из точки  $p$ . Как было показано в главе I, телесный угол положительный или отрицательный в зависимости от того, задняя или передняя сторона поверхности видна из точки наблюдения. С увеличением расстояния от поверхности  $S$  телесный угол уменьшается и, соответственно, нормальная компонента поля становится меньше. В противоположном случае с приближением точки  $p$  к плоской поверхности  $S$  телесный угол увеличивается и в пределе становится равным  $-2\pi$  или  $+2\pi$ , если точка наблюдения  $p$  расположена на передней (2) или задней (1) стороне плоской поверхности. Таким образом, имеем следующие выражения для нормальной компоненты электрического поля на каждой стороне поверхности:

$$E_n^{(2)} = \frac{\Sigma}{2\epsilon_0}, \quad E_n^{(1)} = -\frac{\Sigma}{2\epsilon_0}. \quad (\text{III.13})$$

Эти два выражения, как и аналогичные им в случае гравитационного поля, означают, что нормальная компонента электрического поля при прохождении через поверхность  $S$  является разрывной функцией. Изучим поведение нормальной компоненты на разрыве более детально. Нормальную компоненту электрического поля можно записать как сумму двух слагаемых:

$$E_n(p) = E_n^q + E_n^{s-q}, \quad (\text{III.14})$$

где  $E_n^q$  — часть нормальной компоненты, вызванная элементарным зарядом  $\Sigma(q) dS$ , расположенным в ближайшей окрестности точки  $q$ ;  $E_n^{s-q}$  — часть нормальной компоненты, создаваемая всеми остальными поверхностными зарядами. Ясно, что

$$E_n^{s-q}(p) = -\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \sum_{s-q} \int d\omega = -\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \Sigma \omega^{s-q}(p),$$

где  $\omega^{s-q}(p)$  — телесный угол видимости плоской поверхности  $S$  без элемента поверхности  $dS(q)$  из точки  $p$ .

С приближением точки  $p$  к элементарной площадке  $dS(q)$  телесный угол видимости остальной части поверхности  $\omega^{s-q}(p)$  стремится к нулю и нормальная компонента определяется только зарядом, расположенным на элементарной площадке  $dS(q)$ :

$$E_n^{s-q} \rightarrow 0, \text{ если } p \rightarrow q.$$

В то же время телесный угол видимости сколь угодно малого элемента поверхности  $dS(q)$  стремится к  $\pm 2\pi$ , если точка наблюдения приближается к точке  $q$ :

$$\omega^q \rightarrow \pm 2\pi, \text{ если } p \rightarrow q.$$

Таким образом, нормальная компонента поля на каждой стороне поверхности определяется только элементарным зарядом, расположенным в ближайшей окрестности точки  $q$ :

$$E_n^{(2)}(q) = \frac{1}{2\varepsilon_0} \Sigma(q), \quad E_n^{(1)}(q) = -\frac{1}{2\varepsilon_0} \Sigma(q). \quad (\text{III.15})$$

Разница в знаках полей на каждой стороне поверхности отражает тот фундаментальный факт, что вектор электрического поля показывает направление, вдоль которого элементарный положительный заряд будет двигаться под действием поля. Разрыв нормальной компоненты поля, когда точка наблюдения проходит через поверхность, вызывается только элементарным зарядом, расположенным вблизи этой точки. Например, если на поверхности есть отверстие, то нормальная компонента на каждой стороне поверхности равна  $E_n^{s-q}$  и поле непрерывно вдоль линии, проходящей через отверстие.

Можно обобщить эти результаты на случай, когда поверхность, содержащая заряд, не является плоской. Используя тот же подход, основанный на принципе суперпозиции и определении телесных углов, приходим к следующим выражениям для нормальной компоненты на каждой стороне поверхности:

$$E_n^{(2)}(q) = \frac{\Sigma(q)}{2\varepsilon_0} + E_n^{(2), s-q}, \quad (\text{III.16})$$

$$E_n^{(1)}(q) = -\frac{\Sigma(q)}{2\varepsilon_0} + E_n^{(1), s-q}$$

при  $p \rightarrow q$ .

В отличие от предыдущего случая нормальная компонента  $E_n^{s-q}(q)$ , вызванная зарядами, расположенными на поверхности, но вне элемента  $dS(q)$ , не обязательно равна нулю в точке  $q$  (рис. III.1,  $z$ ). Однако можно легко увидеть одну ее очень важную черту. Поскольку заряды расположены на некотором расстоянии от точки  $q$ , их вклад в поле является непрерывной функцией в случае, когда точка наблюдения  $p$  проходит через элемент  $dS(q)$ , т. е.

$$E_n^{(1), s-q} = E_n^{(2), s-q} = E_n^{s-q}. \quad (\text{III.17})$$

Соответственно, уравнения (III.16) можно записать как

$$E_n^{(2)}(q) = \frac{\Sigma(q)}{2\epsilon_0} + E_n^{s-q}, \quad (III.18)$$

$$E_n^{(1)}(q) = -\frac{\Sigma(q)}{2\epsilon_0} + E_n^{s-q}.$$

Это означает, что разрыв нормальной компоненты, как и раньше, равен

$$E_n^{(2)}(q) - E_n^{(1)}(q) = \frac{\Sigma(q)}{\epsilon_0} \quad (III.19)$$

и вызван только зарядами, расположенными на элементарной площадке  $dS(q)$ .

Уравнение (III.19) — фундаментальное уравнение, описывающее поведение электромагнитного поля и справедливо для любой скорости изменения поля со временем. По существу, забегаая вперед, можно сказать, что (III.19) является поверхностным аналогом третьего уравнения Максвелла.

В отличие от гравитационного поля поверхностное распределение зарядов играет существенную роль. В самом деле, в реальных условиях при применении электрических методов встречается практически только данный тип распределения зарядов. Поэтому независимо от того, каким образом возникают поверхностные заряды, уравнения (III.18) и (III.19) будут часто использоваться в данной главе.

*Эффект проводника, помещенного в свободное пространство и расположенного в электрическом поле*

Рассмотрим теперь второй пример, иллюстрирующий электростатическую индукцию. Предположим, что проводящее тело произвольной формы расположено в области влияния электрического поля  $E_0$ , как показано на рис. III.2, а. Под действием поля положительные и отрицательные заряды, находящиеся внутри проводника, двигаются в противоположных направлениях. Вследствие этого движения электрические заряды собираются на обеих сторонах проводника. Осуществляя эти действия, заряды создают вторичное электрическое поле, направленное в сторону, противоположную первичному полю внутри проводника. Наведенные поверхностные заряды распределяются таким образом, чтобы суммарное электрическое поле внутри проводника исчезло, т. е.

$$E_i = 0, \quad (III.20)$$

где  $E_i$  — электрическое поле внутри проводника. Данный процесс называется «электростатической индукцией». Здесь важно сделать два комментария.

1. При описании этого явления была дана очень приблизительная картина процесса, в которой предполагалось наличие только электростатического поля. В действительности процесс накопле-

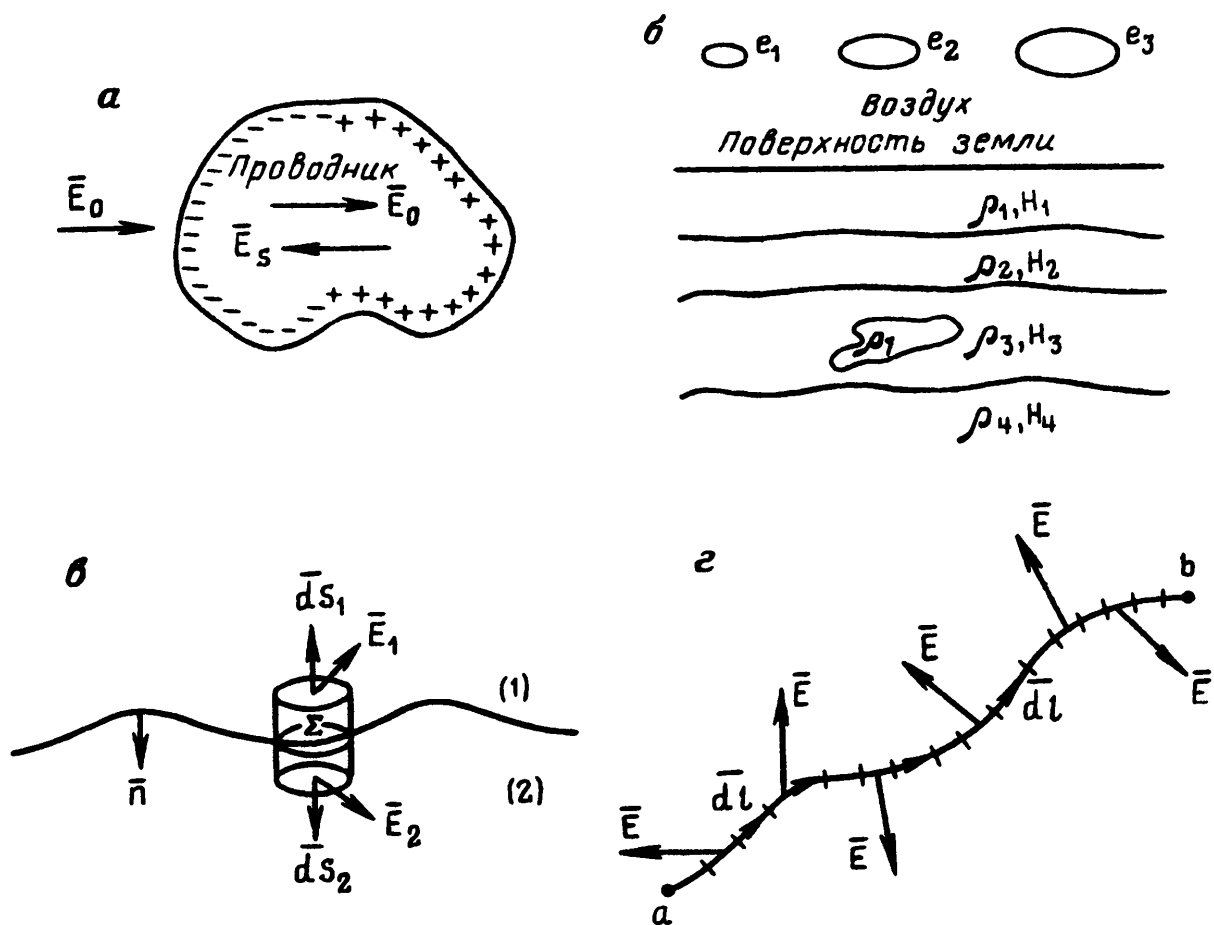


Рис. III.2. Электростатическая индукция (а); влияние зарядов в воздухе (б); поле поверхностных зарядов (в); напряженность электрического поля (г)

ния поверхностных зарядов включает и другие явления электромагнитного поля, и в частности такие, как изменение магнитного поля со временем. Очень часто этот процесс длится относительно короткое время, а затем постоянное электрическое поле снова подчиняется закону Кулона.

2. Явление электростатической индукции наблюдается в любой проводящей среде независимо от электрического удельного сопротивления, при условии, что проводник окружен изолятором и источники электрического поля  $E_0$  расположены вне проводника. Например, проводящее тело может состоять из металла или электролитической жидкости, минералов или пород. Можно показать, что значение удельного сопротивления играет свою роль в определении времени, которое требуется электрическому полю внутри проводника для того, чтобы исчезнуть, но оно не изменяет окончательного результата электростатической индукции, т. е. исчезновения внутреннего электрического поля ( $E_i = 0$ ).

Должно быть очевидно, что вторичное электрическое поле, создаваемое поверхностными зарядами, должно определяться из уравнения

$$E_s(p) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_S \frac{\Sigma(q) dS L_{qp}}{L_{qp}^3}, \quad (\text{III.21})$$

где  $\Sigma(q)$  — поверхностная плотность зарядов. Следовательно, условие (III.20) можно переписать в виде

$$E_0 + \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_S \frac{\Sigma(q) dS}{L_{qp}^3} L_{qp} = 0, \quad (\text{III.22})$$

где  $E_0$  — первичное поле, обусловленное зарядами, расположенными вне проводника;  $S$  — проводящая поверхность;  $q$  — произвольная точка на этой поверхности.

Например, если одиночный точечный заряд  $e$  расположен вне проводника в точке  $a$ , то его электрическое поле в произвольной точке  $b$  внутри проводника

$$E_0(b) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{e}{L_{ab}^3} L_{ab}. \quad (\text{III.23})$$

Здесь получено то же самое выражение, что и при отсутствии проводника. Как было подчеркнуто выше, электрическое поле, вызванное заданной системой зарядов, не зависит от электрических свойств среды; и если поле изменяется, это значит, что изменилось распределение зарядов или появились новые заряды.

В нашем случае на поверхности проводника появляются положительные и отрицательные заряды. В то же время суммарный заряд  $e_s$  проводника, который не был заряжен, остается равным нулю:

$$e_s = 0. \quad (\text{III.24})$$

Другими словами, когда электрическое поле  $E_0$  отсутствует, то внутри каждого элемента  $dV$  и  $dS$  существует равное количество положительных и отрицательных зарядов, так что наличие самого проводника не создает электрического поля внутри или снаружи него. В противном случае благодаря наличию электрического поля  $E_0$  положительные и отрицательные заряды занимают различные части проводящей поверхности, вследствие чего появляется вторичное электрическое поле  $E_s$ , даже если суммарный заряд  $e_s$  остается равным нулю.

Если нам известна плотность поверхностных зарядов, то вычисление электрического поля вне проводника легко произвести с помощью уравнения (III.21). Однако распределение зарядов, вызванное электростатической индукцией, заранее не известно, и этот факт отражает основную разницу между решениями прямых задач гравитационного и электрического полей.

Поскольку нельзя практически использовать закон Кулона, приходится развивать специальные методы вычислений поля, которые не требуют знаний о распределении зарядов. Опишем теперь один из подходов, в котором рассматривается эффект электростатической индукции. С этой целью получим так называемое интегральное уравнение относительно поверхностной плотно-

сти  $\Sigma(q)$ . Зная эту функцию, можно использовать закон Кулона, уравнение (III.21) и вычислить вторичное поле  $E_s$ . Сначала из (III.19) имеем

$$E_n^e(p) - E_n^i(p) = \frac{\Sigma(p)}{\epsilon_0}, \quad (\text{III.25})$$

где  $E_n^e$  и  $E_n^i$  — нормальные компоненты электрического поля с внешней и внутренней сторон проводящей поверхности вблизи точки  $p$  соответственно. Из-за электростатической индукции электрическое поле внутри проводника исчезает и  $E_n^i = 0$ . Как следствие, уравнение (III.25) упрощается:

$$E_n^e(p) = \frac{\Sigma(p)}{\epsilon_0}. \quad (\text{III.26})$$

Применяя принцип суперпозиции, запишем  $E_n^e$  как сумму трех слагаемых:

$$E_n^e = E_n^0 + E_n^p + E_n^{s-p}, \quad (\text{III.27})$$

где  $E_n^0$  — нормальная компонента первичного поля в точке  $p$ ;  $E_n^p$  — нормальная компонента поля, вызванного элементарным поверхностным зарядом  $\Sigma(p) dS$ , расположенным в ближайшей окрестности точки  $p$ ;  $E_n^{s-p}$  — нормальная компонента, создаваемая оставшейся частью поверхностного заряда.

В соответствии с уравнением (III.15)

$$E_n^p = \frac{\Sigma(p)}{2\epsilon_0},$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, направленный с проводящей поверхности наружу. Поскольку

$$E^{s-p} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\Sigma(q)}{L_{qp}^3} \mathbf{L}_{qp} dS \quad \text{при } q \neq p,$$

то

$$E_n^{s-p} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\Sigma(q) (\mathbf{L}_{qp} \cdot \mathbf{n}_p)}{L_{qp}^3} dS \quad \text{при } q \neq p, \quad (\text{III.28})$$

где  $\mathbf{n}_p$  — единичный нормальный вектор в точке  $p$ , а  $\mathbf{L}_{qp} \cdot \mathbf{n}_p$  — скалярное произведение векторов  $\mathbf{L}_{qp}$  и  $\mathbf{n}_p$ :

$$\mathbf{L}_{qp} \cdot \mathbf{n}_p = L_{qp} \cos(\mathbf{L}_{qp}, \mathbf{n}_p).$$

Собирая все слагаемые в (III.27) и учитывая (III.26), получаем

$$\frac{\Sigma(p)}{\epsilon_0} = E_n^0 + \frac{\Sigma(p)}{2\epsilon_0} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \Sigma(q) K(p, q) dS$$



или

$$\Sigma(p) = 2\varepsilon_0 E_n^0 + \frac{1}{2\pi} \int_S \Sigma(q) K(p, q) dS, \quad (\text{III.29})$$

где

$$K(p, q) = \frac{L_{qp} \cdot n_p}{L_{qp}^3} = \frac{\cos(L_{qp}, n_p)}{L_{qp}^2},$$

а  $2\varepsilon_0 E_n^0$  — известные функции.

Уравнение (III.29) представляет собой интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно неизвестной плотности в произвольной точке  $p$  проводящей поверхности. На практике можно мысленно заменить поверхность проводника системой малых ячеек, внутри каждой из которых плотность зарядов практически постоянна. После этого можно записать аппроксимацию интегрального уравнения (III.29):

$$\Sigma(p) \approx 2\varepsilon_0 E_n^0(p) + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^N \Sigma(q) K(q, p) \Delta S \quad \text{при } q \neq p. \quad (\text{III.30})$$

Записав это уравнение для каждой ячейки, получим систему из  $N$  линейных уравнений с  $N$  неизвестными. Если плотность зарядов известна, то с помощью уравнения (III.21) вторичное поле можно определить поверхностным интегралом. Этот пример наглядно показывает, насколько усложняется определение поля с использованием закона Кулона, если некоторые источники неизвестны. Именно поэтому (в отличие от гравитационного поля) мы составляем систему уравнений поля и рассматриваем краевые задачи.

Вернемся к электростатической индукции. Предположим, что рассматривается модель проводящей Земли, которая состоит из совокупности слоев, каждый из которых характеризуется своим собственным удельным сопротивлением (рис. III.2, б). Над поверхностью Земли присутствуют электрические заряды, обусловленные атмосферными процессами. В соответствии с законом Кулона они создают одно и то же поле как в проводящей среде, так и в свободном пространстве. Но благодаря электростатической индукции наведенные заряды появляются на поверхности Земли таким образом, чтобы точно компенсировать первичное поле внутри проводящей среды. Из-за поверхностных зарядов, которые собираются на границе раздела между верхним полупространством и проводящей средой, заряды, расположенные над поверхностью Земли, никак не влияют на электрическое поле внутри Земли, поэтому постоянное поле внутри проводящей среды может вызываться только источниками, существующими внутри самой среды.

К счастью, благодаря электростатической индукции, в геофизике могут использоваться электрические методы, основанные на измерении постоянного электрического поля.

В отличие от проводящей среды, наведенные заряды на поверхности Земли создают в верхнем полупространстве электрическое поле, которое имеет только вертикальную компоненту. Вблизи земной поверхности это поле равно  $100 \text{ В/м} = 105 \text{ мВ/м}$ , что значительно больше, чем горизонтальная компонента поля, измеренная на земной поверхности электрическими методами.

### III.2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ СТАЦИОНАРНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ И ЕГО ПОТЕНЦИАЛА

Благодаря математическому сходству законов Кулона и Ньютона, при получении уравнений стационарного электрического поля пойдем тем же путем, что и в случае гравитационного поля. Начнем со второго уравнения и с этой целью рассмотрим элементарный заряд  $de$  в точке  $q$  и его поле:

$$\mathbf{E}(p) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{de(q)}{L_{qp}^3} \mathbf{L}_{qp}.$$

Тогда поток через элементарную поверхность  $dS(p)$ , вызванный этим полем,

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{de(q)}{4\pi \epsilon_0} \frac{\mathbf{L}_{qp} \cdot d\mathbf{S}}{L_{qp}^3}$$

или

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} de(q) d\omega(q), \quad (\text{III.31})$$

где  $d\omega(q)$  — телесный угол, под которым поверхность  $d\mathbf{S}$  видна из точки  $q$ . Следовательно, для потока через замкнутую поверхность, окружающую заряд  $de(q)$ , получаем

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{de(q)}{\epsilon_0}.$$

Применяя принцип суперпозиции, обобщим это уравнение для произвольного распределения зарядов внутри замкнутой поверхности  $S$ :

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \left[ \int_V \delta dV + \int_S \Sigma dS + \int_L \lambda dl + \Sigma e_i \right], \quad (\text{III.32})$$

где  $\delta$ ,  $\Sigma$ ,  $\lambda$  — объемные, поверхностные и линейные плотности зарядов;  $e_i$  — точечный заряд; все заряды расположены внутри поверхности  $S$ . Поток поля, вызванного зарядами, расположен-

ными вне поверхности, равен нулю; как и в случае гравитационного поля, это следует из поведения телесного угла.

Поскольку в окрестности регулярных точек присутствуют только объемные заряды, уравнение (III.32) упрощается и мы имеем

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \delta dV. \quad (\text{III.33})$$

Это уравнение традиционно называется вторым уравнением поля в интегральной форме и описывает поле в регулярных точках.

Так как внутри объема  $V$  можно ожидать присутствия как положительных, так и отрицательных зарядов, поток электрического поля через замкнутую поверхность, в отличие от гравитационного поля, может быть равен нулю несмотря на присутствие зарядов в объеме. Для более подробного описания распределения зарядов в объеме используем теорему Гаусса. Тогда получим:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \text{div } \mathbf{E} dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \delta dV.$$

Следовательно,

$$\text{div } \mathbf{E} = \delta / \varepsilon_0. \quad (\text{III.34})$$

Это второе уравнение поля в дифференциальной форме, справедливое только для регулярных точек.

Теперь предположим, что дано поверхностное распределение зарядов (рис. III.2, в). Как было показано в предыдущем разделе, нормальная компонента электрического поля при прохождении через поверхностный заряд является разрывной функцией пространственных переменных. Соответственно, производная  $\partial E_n / \partial n$  не существует и уравнение (III.34) использовать нельзя. Тогда, применяя (III.32) к элементарной цилиндрической поверхности, окружающей малый участок поверхности раздела (см. рис. III.2, в), и оставляя только члены, содержащие поверхностный заряд  $\Sigma dS$ , получаем третью форму второго уравнения поля:

$$E_n^{(2)} - E_n^{(1)} = \frac{\Sigma}{\varepsilon_0}. \quad (\text{III.35})$$

Начиная с закона Кулона, мы получили три формы второго уравнения:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{e}{\varepsilon_0}, \quad \text{div } \mathbf{E} = \frac{\delta}{\varepsilon_0}, \quad E_n^{(2)} - E_n^{(1)} = \frac{\Sigma}{\varepsilon_0}. \quad (\text{III.36})$$

Каждое из них характеризует связь между зарядами и электрическим полем. В частности, если в окрестности некоторой точки заряды отсутствуют, то

$$\text{div } \mathbf{E} = 0 \quad \text{и} \quad E_n^{(1)} = E_n^{(2)}.$$

Теперь получим первое уравнение электрического поля.

Поскольку как электрические, так и гравитационные поля вызываются только источниками, можно использовать результаты главы I и написать три формы первого уравнения электрического поля:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0, \quad \text{rot } \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{E}^{(2)} - \mathbf{E}^{(1)}) = 0.$$

Однако, учитывая важность концепции напряжения в теории электрических полей, выведем приведенные выше уравнения. Прежде всего, интеграл

$$\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b E dl \cos \alpha \quad (\text{III.37})$$

является напряжением между точками  $a$  и  $b$ , измеренным вдоль некоторого произвольного пути  $\mathcal{L}$  (см. рис. III.2, б) и вызванным электрическим полем. Здесь  $\alpha$  — угол между вектором электрического поля и касательной к пути  $\mathcal{L}$  в каждой точке. Ясно, что скалярное произведение  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  — это элементарная работа, выполненная электрическим полем по транспортировке единичного положительного заряда вдоль приращения  $d\mathbf{l}$ . Это произведение имеет размерность работы на единицу заряда и в практической системе единиц измеряется в вольтах. Таким образом, интеграл в уравнении (III.37) представляет собой работу (или напряжение), выполненную при перемещении заряда между двумя точками  $a$  и  $b$ . В общем случае переменного электромагнитного поля для заданной функции  $\mathbf{E}$  этот интеграл зависит от выбранного пути интегрирования  $\mathcal{L}$  и от конечных точек пути  $a$  и  $b$ .

Покажем, исходя из закона Кулона, что напряженность электрического поля, вызванного только зарядами, так же как и в случае гравитационного поля, не зависит от пути интегрирования. Предположим, что источником поля является единичный элементарный заряд  $de$ , тогда его электрическое поле

$$\mathbf{E}(p) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{de(q)}{L_{qp}^3} \mathbf{L}_{qp}.$$

Если конечные точки  $a$  и  $b$  расположены на одном радиус-векторе  $\mathbf{L}_{qp}$  и путь интегрирования проходит вдоль этого радиуса (рис. III.3, а), то напряжение между этими точками вычисляется очень просто:

$$V = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{de(q)}{4\pi \epsilon_0} \int_a^b \frac{d\mathbf{l} \cdot \mathbf{L}_{qp}}{L_{qp}^3} = \frac{de(q)}{4\pi \epsilon_0} \int_a^b \frac{dL}{L_{qp}^2},$$

поскольку

$$d\mathbf{l} \cdot \mathbf{L}_{qp} = dl L_{qp} \cos 0 = L_{qp} dL.$$

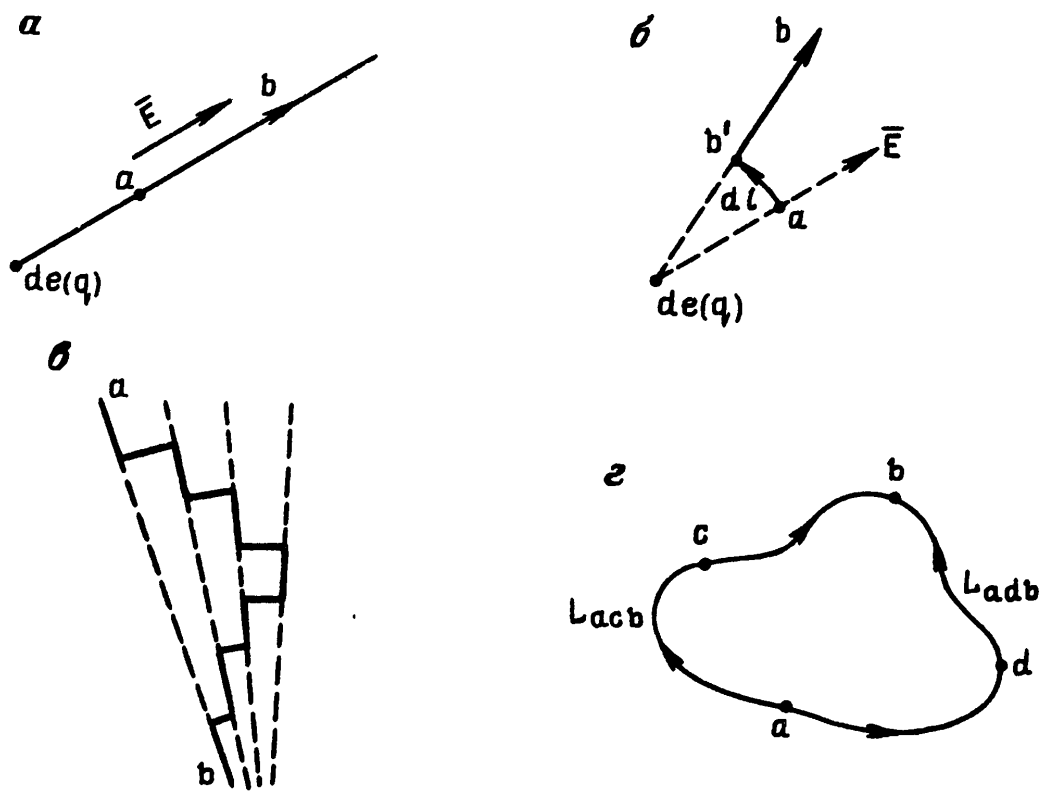


Рис. III.3. Напряженность вдоль: *a* — радиус-вектора, *б* — радиус-вектора и дуги, *в* — произвольного пути; циркуляция (*г*)

Вычисляя этот интеграл, получаем

$$V = \frac{de(q)}{4\pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{L_{qa}} - \frac{1}{L_{qb}} \right). \quad (\text{III.38})$$

Теперь предположим, что точки *a* и *b* расположены на двух различных радиус-векторах  $L_{qa}$  и  $L_{qb}$ , как показано на рис. III.3, б. Выберем путь  $\mathcal{L}_1$ , состоящий из двух частей. Первая часть является просто дугой *ab'*, а второй элемент пути проходит вдоль радиус-вектора  $L_{qb}$ . В этом случае напряжение можно записать как

$$V = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} de(q) \left[ \int_{\text{arc } ab'} \frac{dl \cdot L_{qp}}{L_{qp}^3} + \int_{b'}^b \frac{dl \cdot L_{qp}}{L_{qp}^3} \right].$$

Ясно, что интеграл вдоль дуги *ab'* равен нулю, так как скалярное произведение

$$dl \cdot L_{qp} = 0.$$

Поэтому напряжение между точками *a* и *b* снова равно

$$V = \frac{de(q)}{4\pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{L_{qa}} - \frac{1}{L_{qb}} \right). \quad (\text{III.39})$$

Оно остается тем же самым, несмотря на то, что путь интегрирования изменился. Если вместо пути  $\mathcal{L}_1$  рассмотреть произвольный путь  $\mathcal{L}_2$ , то станет ясно, что его можно представить как сумму дуг и элементов радиус-векторов, как показано на рис. III.3, в.

Все интегралы вдоль элементарных дуг равны нулю, в то время как сумма интегралов вдоль радиус-векторов равна

$$V = \frac{de(q)}{4\pi \varepsilon_0} \left[ \frac{1}{L_{qa}} - \frac{1}{L_{qb_1}} + \frac{1}{L_{qb_1}} - \frac{1}{L_{qb_2}} + \frac{1}{L_{qb_2}} - \dots - \frac{1}{L_{qb}} \right] = \frac{de(q)}{4\pi \varepsilon_0} \left[ \frac{1}{L_{qa}} - \frac{1}{L_{qb}} \right],$$

равная напряжению вдоль пути  $\mathcal{L}_1$ .

Итак, установлена вторая фундаментальная особенность электрического поля, а именно, что напряжение между двумя точками не зависит от пути, вдоль которого выполняется интегрирование, а зависит только от конечных точек. Этот факт может быть записан в виде

$$\int_{\mathcal{L}_1}^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathcal{L}_2}^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \dots = \int_{\mathcal{L}_n}^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (\text{III.40})$$

Используя принцип суперпозиции, этот результат можно обобщить на поле, вызванное любым распределением зарядов. Этот результат справедлив только для электрического поля, созданного постоянными электрическими зарядами; в общем случае он не может применяться к полям, меняющимся со временем. В отличие от гравитационного поля, в теории электрических полей напряжение играет значительно более важную роль, так как основное измерительное устройство — вольтметр измеряет значение интеграла

$$\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l},$$

т. е. напряжение, и если вдоль этого пути поле  $\mathbf{E}$  не меняется, то из значения напряжения можно найти электрическое поле.

Независимость напряжения от пути интегрирования может быть выражена в другой форме. Рассмотрим замкнутый контур  $\mathcal{L}$ , показанный на рис. III.3,  $\mathcal{L}$  и состоящий из двух других контуров  $\mathcal{L}_{acb}$  и  $\mathcal{L}_{bda}$ . В соответствии с уравнением (III.40)

$$\int_{acb} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{adb} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (\text{III.41})$$

В этих интегралах элемент  $d\mathbf{l}$  направлен от  $a$  к  $b$ . Изменяя направление интегрирования в интеграле в правой части (III.41), можно записать:

$$\int_{acb} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{bda} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l},$$

т. е.

$$\int_{acb} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{bda} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

или

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (\text{III.42})$$

Таким образом, напряжение вдоль произвольного замкнутого пути равно нулю.

Иногда величину  $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  называют «циркуляцией» электрического поля или электродвижущей силой. Путь  $\mathcal{L}$  может иметь произвольную форму и пересекать среды с различными физическими свойствами (рис. III.4, а). В частности, он может целиком лежать в проводящей среде. Поскольку электродвижущая сила, обусловленная электрическими зарядами, равна нулю, то кулоновская сила  $E^c$  не может одна вызвать электрический ток. Это обуславливает необходимость введения некулоновских сил, вызывающих течение тока. Данный вопрос будет детально изучен в следующем разделе.

Уравнение (III.42) является первым уравнением электрического поля в интегральной форме. Применяя теорему Стокса для регулярных точек среды, имеем

$$\int_{\mathcal{L}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

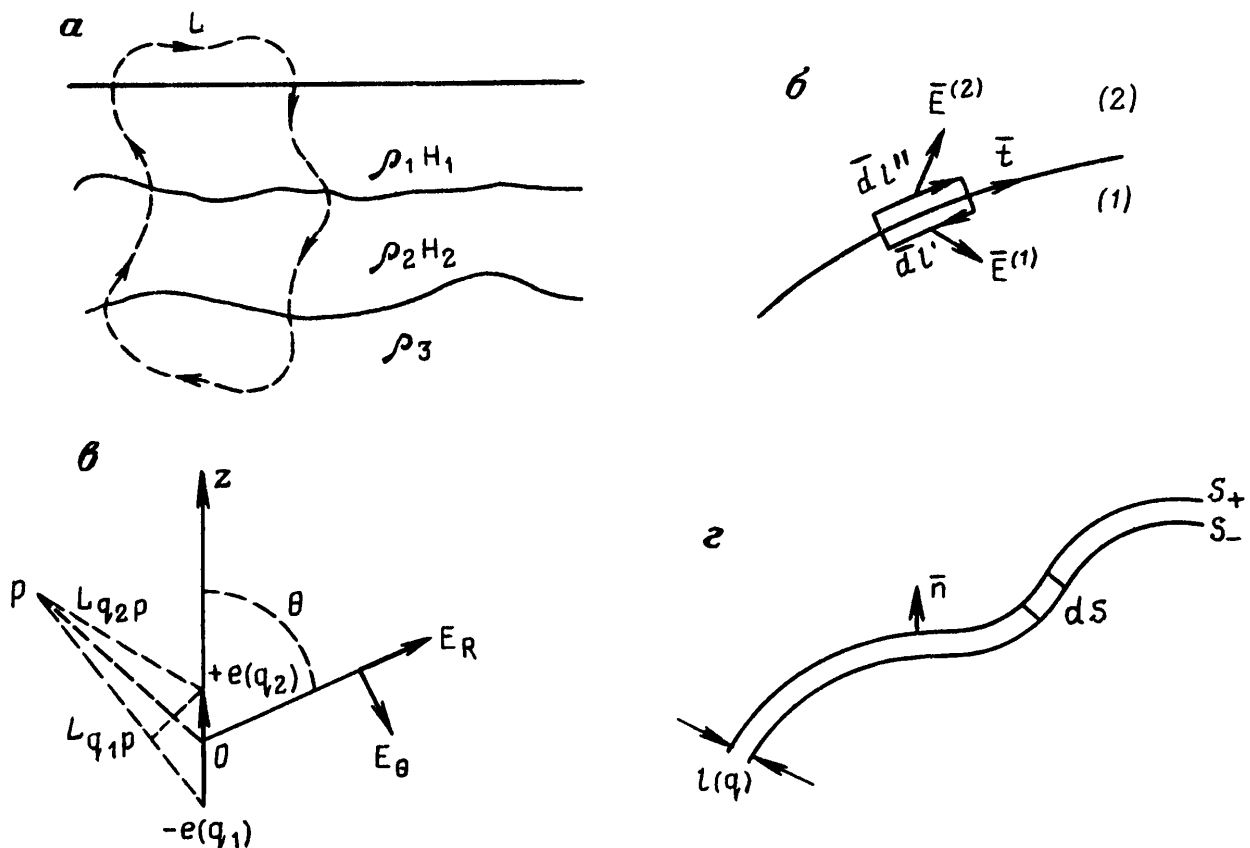


Рис. III.4. Циркуляция в проводящей среде (а); непрерывность тангенциальной компоненты (б); электрический диполь (в); двойной слой (z)

или

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \quad (\text{III.43})$$

Последнее выражение является дифференциальной формой первого уравнения и показывает, что электрическое поле не возбуждается вихрями; его можно применять в тех точках, где существуют первые производные электрического поля.

Для получения дифференциальной формы уравнения (III.42) вблизи поверхностных зарядов, где нормальная компонента  $E_n$  терпит разрыв, применим это уравнение к элементарному пути, показанному на рис. III.4, б. Предположив, что элементы  $dL'$  и  $dL''$  разделены расстоянием  $dh$ , стремящимся к нулю, получаем

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}'' + \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}' + \mathbf{E} \cdot d\mathbf{h} = 0$$

или

$$E_i^{(2)} dl - E_i^{(1)} dl' = 0$$

и, наконец,

$$E_i^{(2)} - E_i^{(1)} = 0 \quad \text{или} \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{E}^{(2)} - \mathbf{E}^{(1)}) = 0. \quad (\text{III.44})$$

Таким образом, тангенциальные компоненты поля непрерывны, когда путь проходит через поверхностный заряд. Однако в одном специальном случае неоднородного двойного слоя тангенциальная компонента  $E_t$  — разрывная функция.

Итак, получены три формы первого уравнения, основанные на законе Кулона:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad E_i^{(2)} = E_i^{(1)}. \quad (\text{III.45})$$

Каждое из этих уравнений выражает один и тот же факт: электродвижущая сила, вызванная электрическими зарядами, равна нулю; другими словами, напряжение между двумя произвольными точками не зависит от пути интегрирования.

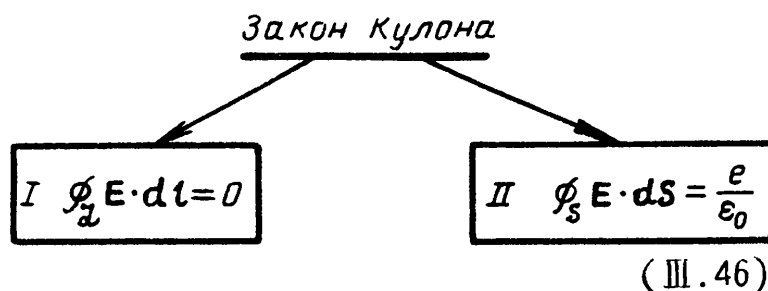
Здесь нужно сделать один важный комментарий, касающийся уравнений (III.45). Когда поле зависит от времени, первые два соотношения не выполняются, так как в них не учтен второй (вихревой) тип возбудителей, т. е. изменение интенсивности магнитного поля во времени. С другой стороны, поверхностный аналог этих уравнений справедлив для любого электромагнитного поля, поскольку при выводе этой частной формы первого уравнения полагалось, что площадь, окруженная путем интегрирования, была нулевой и поток магнитного поля через нее отсутствовал.

Отметим еще одну черту поля. Хотя уравнения  $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$  и  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$  не выполняются для переменных электромагнитных полей, это не означает, что закон Кулона нельзя применять во всех этих случаях.



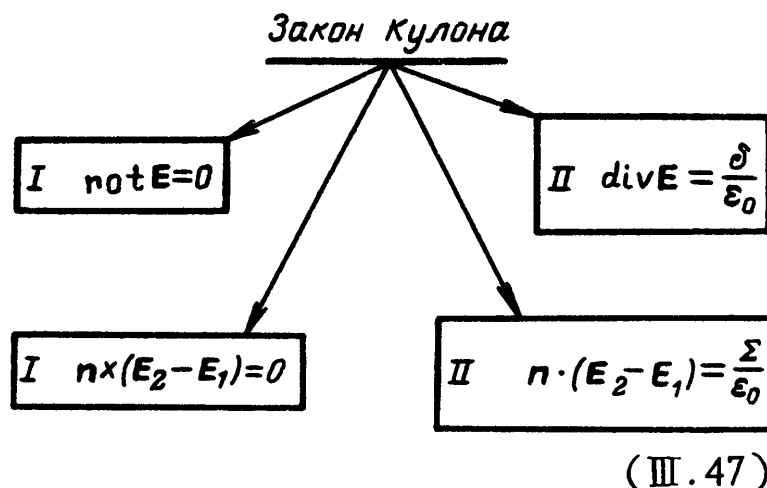
Теперь запишем систему уравнений стационарного электрического поля в двух формах.

*Интегральная форма уравнений стационарного электрического поля*



где  $e$  — суммарный заряд внутри объема  $V$ , окруженного поверхностью  $S$ ;  $\mathcal{L}$  и  $S$  — соответственно произвольные контур и поверхность, которые могут пересекать среды с различными электрическими свойствами.

*Дифференциальная форма уравнений стационарного электрического поля*



Здесь уместно сделать следующие комментарии.

1. Любое электрическое поле, вызванное зарядами, удовлетворяет уравнениям (III.46), (III.47), т. е. является решением системы уравнений поля в интегральной и дифференциальной формах.

2. Эти уравнения содержат такую же информацию о поле, что и закон Кулона, но, как будет показано ниже, позволяют находить поле в тех практических случаях, когда закон Кулона оказывается бесполезным.

3. Сравнение с системой уравнений гравитационного поля показывает, что обе системы идентичны; это происходит из-за того, что данные поля вызываются только источниками. Более того, в соответствии с законами Ньютона и Кулона, в обоих случаях поля обладают одной и той же зависимостью от расстояния при условии, что массы и заряды одинаково распределены в пространстве.

4. Системы (III.46) и (III.47) справедливы всюду и правильно описывают электрическое поле в присутствии любой проводящей и поляризуемой среды. В частности, стационарное электрическое

поле, измеряемое во всех электрических методах, используемых в геофизике, является решением этих систем.

5. Несмотря на идентичность этих систем для гравитационного и электрического полей, существует одно основное различие. В случае гравитационного поля правую часть второго уравнения, т. е. плотность масс, обычно можно определить, в то время как плотность электрических зарядов обычно неизвестна. Есть, однако, одно исключение — когда электрическое поле заданного распределения зарядов рассматривается в свободном пространстве и проводники и диэлектрики отсутствуют. В этом случае для вычисления электрического поля можно использовать закон Кулона (точно так же закон Ньютона применяется для решения прямых задач гравитационного поля). Однако этот случай вряд ли представляет практический интерес для прикладной геофизики. При рассмотрении электрического поля в присутствии проводников и диэлектриков в принципе нельзя определить плотность зарядов до того, как вычислено поле. Пример из предыдущего раздела, описывающий электростатическую индукцию, был придуман специально, чтобы проиллюстрировать эту проблему.

Таким образом, система уравнения поля, например в виде (III.47), содержит несколько неизвестных, таких как электрическое поле  $E$  и плотности зарядов  $\delta$  и  $\Sigma$ . Поэтому представляется необходимым заменить эту систему другой, которая содержит только одну неизвестную, а именно, электрическое поле  $E$ .

Исходя из первого уравнения  $\text{rot } E = 0$ , введем скалярную функцию  $U$ :

$$E = - \text{grad } U, \quad (\text{III.48})$$

поскольку

$$\text{rot grad } U = 0.$$

Скалярная функция  $U$  называется потенциалом электрического поля.

В соответствии с уравнением (III.48) электрическое поле  $E$  совпадает по направлению с направлением максимального уменьшения потенциала, а любая компонента поля может быть выражена в терминах потенциала следующим образом:

$$E_l = \frac{\partial U}{\partial l}. \quad (\text{III.49})$$

Теперь рассмотрим три основные предпосылки введения потенциала  $U$ . Сначала напишем выражение для напряжения с использованием потенциала. Ясно, что

$$dU = \frac{\partial U}{\partial l} dl = dl \cdot \text{grad } U = - E \cdot dl, \quad (\text{III.50})$$

где  $dl = dl i_0$ , а  $i_0$  — единичный вектор.

Интегрируя последнее выражение вдоль любого пути между двумя произвольными точками и учитывая, что напряжение не зависит от пути, получаем

$$\int_p^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_p^b dU = U(p) - U(b). \quad (\text{III.51})$$

Таким образом, напряжение электрического поля вдоль любого пути с конечными точками  $p$  и  $b$  можно записать как разность потенциалов между этими точками, т. е. зная потенциал, очень просто вычислить напряжение. Это и есть первая причина для введения данной функции.

Далее используем (III.51) для определения потенциала, вызванного произвольным распределением зарядов. Из этого уравнения имеем

$$U(p) = V(b) + \int_p^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (\text{III.52})$$

Очевидно, что на больших расстояниях от зарядов поле  $E$  становится очень малым и потенциал исчезает. Устремляя в (III.52)  $b$  к бесконечности и предполагая, что потенциал на этом расстоянии равен нулю, имеем

$$U(p) = \int_p^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (\text{III.53})$$

Предположим, что источником электрического поля является одиночный элементарный заряд  $de$ , расположенный в точке  $q$ . Используя уравнения (III.5) и (III.53), получаем

$$U(p) = \frac{de}{4\pi \epsilon_0} \int_p^{\infty} \frac{dL}{L^2} = \frac{de}{4\pi \epsilon_0 L_{qp}}. \quad (\text{III.54})$$

С помощью принципа суперпозиции для произвольного распределения объемных, поверхностных, линейных и точечных зарядов приходим к следующему выражению для потенциала:

$$U(p) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left[ \int_V \frac{\delta dV}{L_{qp}} + \int_S \frac{\Sigma dS}{L_{qp}} + \int_{\mathcal{L}} \frac{\lambda dl}{L_{qp}} + \sum \frac{e_i}{L_{qp}} \right]. \quad (\text{III.55})$$

Сравнение с уравнением (III.6) ясно показывает, что потенциал  $U$  связан с зарядами более простым образом, чем электрическое поле. Эта простота является второй причиной для его использования. Очевидно, что, если потенциал известен, из (III.49) легко найти электрическое поле. Рассмотрим два примера.

### Пример 1. Потенциал и поле электрического диполя

Предположим, у нас есть два элементарных заряда, равных по величине, но с противоположными знаками, как показано на рис. III.4, в. Тогда потенциал  $U$ , обусловленный этими зарядами,

$$U(p) = \frac{e}{4\pi \varepsilon_0} \left[ \frac{1}{L_{q_2 p}} - \frac{1}{L_{q_1 p}} \right], \quad (\text{III.56})$$

где  $q_1$  и  $q_2$  — точки, в окрестности которых расположены отрицательный и положительный заряды ( $e$ ). Рассмотрим поле только на тех удалениях, которые намного превосходят расстояние между зарядами, т. е. отрезок  $dl$  между зарядами значительно меньше, чем расстояние  $L_{qp}$ , где  $q$  — средняя точка данного отрезка:

$$dl \ll L_{qp}. \quad (\text{III.57})$$

Данная система зарядов называется электрическим диполем. Учитывая неравенство (III.57), разность в правой части (III.56) можно заменить выражением

$$\frac{1}{L_{q_2 p}} - \frac{1}{L_{q_1 p}} = \frac{\partial}{\partial l} \frac{1}{L_{qp}} dl$$

и в соответствии с уравнением (III.50) получить

$$U(p) = \frac{e}{4\pi \varepsilon_0} \frac{\partial}{\partial l} \frac{1}{L_{qp}} dl = \frac{e}{4\pi \varepsilon_0} \mathbf{dl} \cdot \text{grad}^q \frac{1}{L_{qp}}, \quad (\text{III.58})$$

где индекс « $q$ » означает, что меняется только положение точки  $q$ . Поскольку

$$\text{grad}^q \frac{1}{L_{qp}} = \frac{L_{qp}}{L_{qp}^3},$$

то уравнение (III.58) можно представить в виде

$$U(p) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{L}_{qp}}{L_{qp}^3}, \quad (\text{III.59})$$

где  $\mathbf{M} = e \mathbf{dl}$  — момент электрического диполя, являющийся вектором, показывающим направление перемещения положительного заряда по отношению к отрицательному, с величиной, равной произведению положительного заряда на расстояние  $dl$  между ними.

Из уравнения (III.59) имеем

$$U(p) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{M \cos \theta}{L_{qp}^2}, \quad (\text{III.60})$$

где  $\theta$  — угол между направлением момента  $\mathbf{M}$  и радиус-вектором, направленным от центра диполя  $q$  к точке наблюдения  $p$ . В соответствии с уравнением (III.60), потенциал электрического диполя вдоль радиус-вектора уменьшается быстрее, чем потенциал

одиночного заряда, и существенно зависит от угла  $\theta$ . В частности, при  $\theta < \pi/2$  потенциал положителен, так как положительный заряд расположен ближе к точке наблюдения; на экваториальной плоскости  $\theta = \pi/2$  он равен нулю, поскольку расстояние от обоих зарядов до всех точек данной плоскости одинаково; и, наконец, когда  $\theta > \pi/2$ , потенциал отрицателен. Теперь введем сферическую систему координат  $R, \theta, \varphi$  с осью  $z$ , направленной вдоль момента диполя. Тогда потенциал  $U$  можно записать как

$$U(\rho) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{M \cos \theta}{R^2}$$

и с учетом уравнения (III.49) компоненты электрического поля примут вид

$$E_R = \frac{2M \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 R^3}, \quad E_\theta = \frac{M \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 R^3}. \quad (\text{III.61})$$

Таким образом, электрическое поле диполя уменьшается быстрее, чем поле одиночного заряда. Вдоль оси  $z$ , как следует из закона Кулона, поле направлено параллельно моменту диполя независимо от того, чему равен угол  $\theta$  — 0 или  $\pi$ . На экваториальной плоскости поле направлено противоположно моменту диполя. Интересно отметить, что направление вектора  $E$  вдоль заданного радиус-вектора  $\theta = \text{const}$  остается тем же. Действительно, из уравнения (III.61)

$$\text{tg } \varphi = \frac{E_\theta}{E_R} = \frac{1}{2} \text{tg } \theta, \quad (\text{III.62})$$

где  $\varphi$  — угол между полем  $E$  и радиус-вектором  $R$ .

При выводе формул для потенциала и поля электрического диполя было сделано всего два предположения.

1. Сумма зарядов равна нулю.
2. Поле рассматривается на расстояниях, значительно превосходящих расстояние между зарядами.

По этой причине можно сказать, что уравнения (III.60), (III.61) описывают потенциал и поле произвольной, но нейтральной системы зарядов при условии, что точки наблюдения расположены далеко по отношению к размерам объема, содержащего заряды. Например, благодаря электростатической индукции на проводящей поверхности появляются заряды обоих знаков и с увеличением расстояния электрическое поле этих зарядов стремится к полю электрического диполя. Существенно отметить, что поле ведет себя подобным образом независимо от формы и размера проводника.

### Пример 2. Потенциал и поле двойного слоя

Представим себе, что положительные и отрицательные заряды с плотностями

$$\Sigma_+ = \Sigma(q_+) \quad \text{и} \quad \Sigma_- = -\Sigma(q_-) \quad (\text{III.63})$$

распределены на двух поверхностях  $S_+$  и  $S_-$  соответственно, а расстояние  $l$  между ними много меньше расстояния от точки наблюдения до этих поверхностей (рис. III.4, з). Как следует из (III.63), каждая пара поверхностных элементов поверхностей, расположенных напротив друг друга, обладает зарядами, одинаковыми по величине и противоположными по знаку. Подобная система зарядов называется двойным слоем. Двойные слои широко применяются в электроразведке, в теории собственного потенциала и в методах наведенной поляризации.

Для удобства выберем некоторую поверхность  $S$ , расположенную между поверхностями  $S_+$  и  $S_-$ , нормаль  $n$  к которой указывает направление от поверхности  $S_-$  к поверхности  $S_+$ . Рассмотрим некоторую точку  $q$  этой поверхности и два соответствующих заряда, расположенных на расстоянии  $l$  друг от друга:

$$de_2 = de = \Sigma(q) dS \quad \text{и} \quad de_1 = -de = -\Sigma(q) dS.$$

Ясно, что эти заряды образуют электрический диполь с моментом  $dM$ , равным

$$dM = de l \quad \text{или} \quad dM = \Sigma(q) dS l n$$

и

$$dM = \eta(q) dS, \quad (III.64)$$

где

$$\eta(q) = \Sigma(q) l(q) \quad (III.65)$$

характеризует плотность дипольных моментов и называется плотностью двойного слоя. В соответствии с уравнением (III.59) потенциал электрического поля, вызванного этим диполем, представим в виде

$$dU(p) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \eta(q) \frac{dS \cdot L_{qp}}{L_{qp}^3}$$

или

$$dU(p) = -\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \eta(q) \frac{dS \cdot L_{pq}}{L_{qp}^3}, \quad (III.66)$$

где  $dS = dS n$  — элемент срединной поверхности  $S$ . По существу, реальное распределение зарядов на обеих поверхностях  $S_-$  и  $S_+$  мы заменили математической моделью двойного слоя, расположенного на поверхности  $S$ . Очевидно, что если в обоих случаях плотность  $\eta(q)$  одинакова, а точки наблюдения расположены далеко, то эта замена не изменяет поле. Теперь, используя результаты, полученные в главе I, можно следующим образом переписать уравнение (III.66):

$$dU(p) = - \frac{\eta}{4\pi \epsilon_0} d\omega(p), \quad (\text{III.67})$$

где  $d\omega(p)$  — элементарный телесный угол.

Таким образом, для потенциала, вызванного зарядами двойного слоя, получаем

$$U(p) = - \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_S \eta(q) d\omega. \quad (\text{III.68})$$

С учетом того, что процедура вычисления телесного угла известна, уравнение (III.68) позволяет найти потенциал и, соответственно, электрическое поле, созданное произвольным двойным слоем. В частности, если двойной слой является однородным, т. е.  $\eta = \text{const}$ ,

$$U(p) = - \frac{\eta}{4\pi \epsilon_0} \omega(p), \quad (\text{III.69})$$

где  $\omega(p)$  — телесный угол видимости поверхности слоя  $S$  из точки  $p$ . В том случае, когда однородный двойной слой замкнутый, имеем для точек объема, ограниченного поверхностью  $S$ , и точек снаружи, соответственно,

$$U^i(p) = \frac{\eta}{\epsilon_0} \quad \text{и} \quad U^e(p) = 0. \quad (\text{III.70})$$

Поскольку потенциал не меняется, то электрическое поле равно нулю.

Далее изучим поведение потенциала и электрического поля вблизи поверхности двойного слоя, когда его плотность  $\eta(q)$  является произвольной функцией. Потенциал  $U(p)$  в каждой точке можно представить как сумму двух слагаемых:

$$U(p) = U^q(p) + U^{s-q}(p), \quad (\text{III.71})$$

где  $U^q(p)$  — потенциал, вызванный элементом двойного слоя  $dS(q)$  в окрестности точки  $q$ ;  $U^{s-q}(p)$  — потенциал, обусловленный оставшейся частью слоя. Когда точка наблюдения приближается к точке  $q$ , телесный угол видимости поверхности  $dS(q)$  стремится к  $\pm 2\pi$ ; соответственно, потенциал, вызванный этим элементом,

$$U(p) = \pm \frac{\eta(p)}{2\epsilon_0} \quad \text{при} \quad p \rightarrow q.$$

Таким образом, потенциал  $U$  на передней и задней сторонах двойного слоя определяется выражениями

$$U_+(p) = \frac{\eta(p)}{2\epsilon_0} + U_+^{s-p}(p),$$

$$U_-(p) = - \frac{\eta(p)}{2\epsilon_0} + U_-^{s-p}(p) \quad \text{при} \quad p \rightarrow q.$$

Поскольку все заряды, расположенные вне элемента  $dS$ , на-

ходятся на одинаковом расстоянии от точки  $p$ , потенциал  $U^{s-p}$  является непрерывной функцией в окрестности точки  $p$ :

$$U_+^{s-p}(p) = U_-^{s-p}(p).$$

Разность потенциалов на каждой стороне двойного слоя

$$U_+(p) - U_-(p) = \frac{\eta(p)}{\epsilon_0} \quad \text{при } p \rightarrow q. \quad (\text{III.72})$$

Следовательно, потенциал является разрывной функцией при прохождении через двойной слой и этот разрыв определяется плотностью  $\eta$  вблизи точки наблюдения. Отметим, что подобное поведение потенциала является исключением и вызвано только переходом к модели двойного слоя. Если рассмотреть потенциал между поверхностями  $S_-$  и  $S_+$ , то разрыв исчезает.

Дифференцируя обе части уравнения (III.72) в произвольном направлении  $t$ , касательном к двойному слою, получаем

$$\frac{\partial U_+(p)}{\partial t} - \frac{\partial U_-(p)}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

или

$$E_t^+(p) - E_t^-(p) = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \eta}{\partial t}. \quad (\text{III.73})$$

Таким образом, тангенциальная компонента электрического поля является разрывной функцией в тех точках двойного слоя, где плотность  $\eta$  не постоянна.

В отличие от случая, когда заряды распределены на одной поверхности, нормальная компонента поля двойного слоя оказывается непрерывной функцией. Действительно, в соответствии с уравнением (III.15), две элементарные поверхности с зарядами  $-\Sigma(p) dS$  и  $\Sigma(p) dS$  создают внутри двойного слоя поле, равное  $\Sigma(p)/\epsilon_0$ , а вне обеих поверхностей  $S_-$  и  $S_+$  поле равно нулю. В то же время другие элементы двойного слоя, находясь на конечных расстояниях от точки  $p$ , возбуждают поле, являющееся непрерывной функцией вблизи этой точки. Следовательно, нормальная компонента электрического поля имеет одно и то же значение на обеих сторонах двойного слоя:

$$E_n^+ = E_n^-. \quad (\text{III.74})$$

Из уравнений (III.51) и (III.72) имеем

$$U_+(p) - U_-(p) = \int_+^- \mathbf{E}^i \cdot d\mathbf{l} = \frac{\eta(p)}{\epsilon_0}, \quad (\text{III.75})$$

где  $\mathbf{E}^i$  — поле внутри двойного слоя, а индексы «+» и «-» означают, что точки принадлежат поверхностям  $S_+$  и  $S_-$  соответственно.



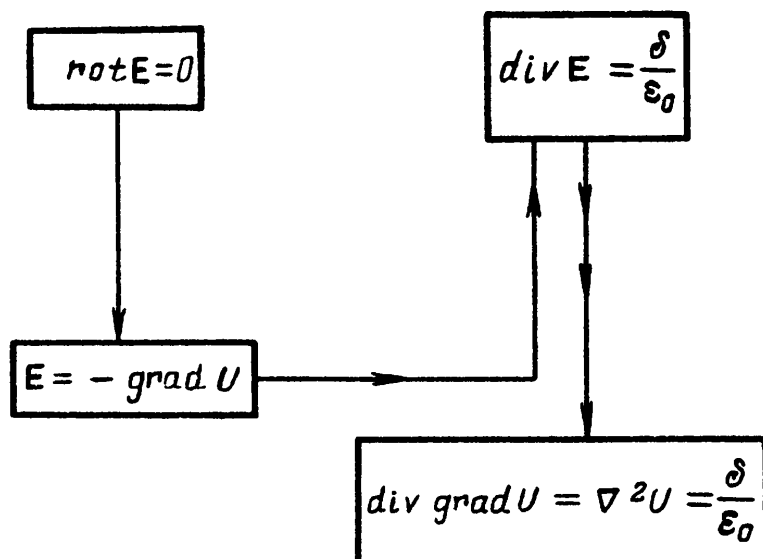
Теперь рассмотрим третью и, возможно, самую важную причину, оправдывающую введение потенциала  $U$ . Из первого уравнения поля  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$  было получено

$$\mathbf{E} = -\text{grad } U.$$

Подставим это выражение во второе уравнение и увидим, что потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона:

$$\nabla^2 U = -\frac{\delta}{\epsilon_0}. \quad (\text{III.76})$$

Процедура вывода этого уравнения показана ниже:



В частности, в окрестности точек, где заряды отсутствуют, потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\nabla^2 U = 0. \quad (\text{III.77})$$

Очевидна аналогия с потенциалом гравитационного поля, вытекающая из факта, что оба поля создаются только источниками.

Уравнения (III.76), (III.77) справедливы только в регулярных точках. По этой причине изучим поведение потенциала вблизи поверхностных зарядов, где нормальная компонента поля терпит разрыв. В соответствии с (III.53) потенциал на каждой из сторон поверхности (рис. III.5, a) равен

$$U(p_1) = \int_{p_1}^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad \text{и} \quad U(p_2) = \int_{p_2}^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

или

$$U(p_2) - U(p_1) = \int_{p_2}^{p_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (\text{III.78})$$

Учитывая, что поле на обеих сторонах поверхности является конечным, а расстояние между точками  $p_1$  и  $p_2$  стремится к нулю, получаем, что разность потенциалов с обеих сторон также стре-

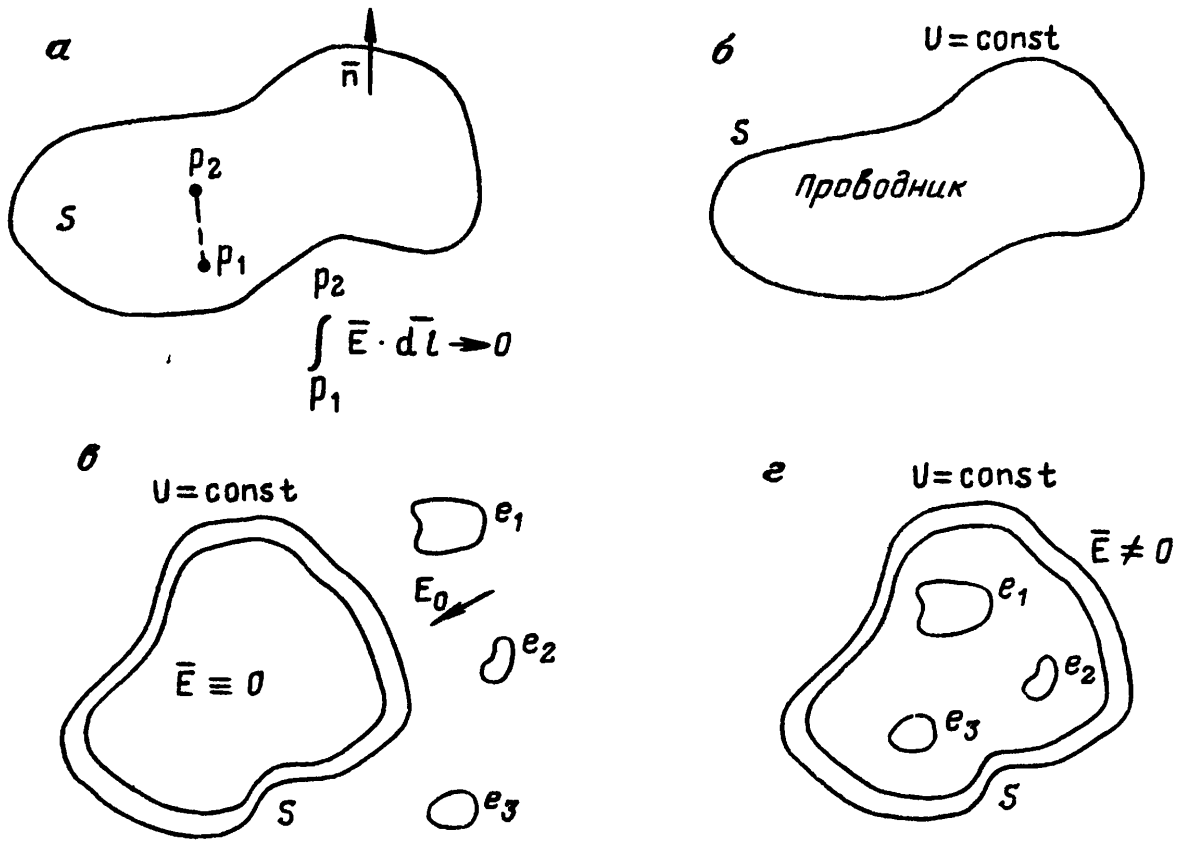
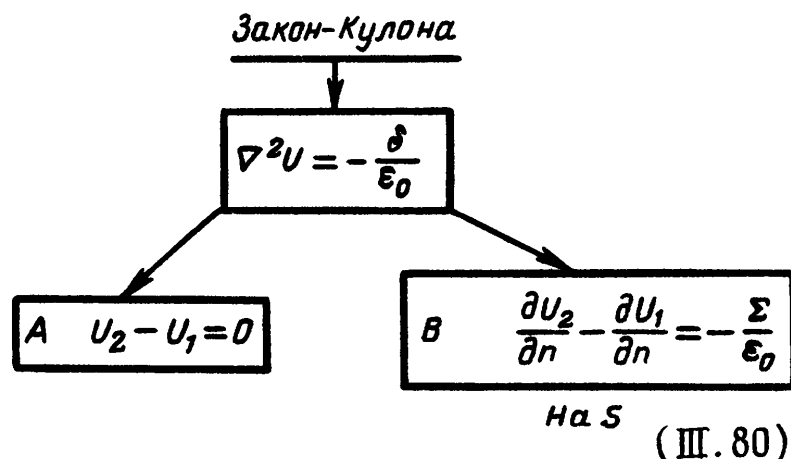


Рис. III.5. Поведение потенциала: *a* — вблизи поверхностных зарядов, *б* — на проводящей поверхности; электростатическое экранирование (*в*); заряды внутри проводящей оболочки (*г*)

мится к нулю. Поэтому потенциал электрического поля при прохождении через любую поверхность, содержащую заряд с плотностью  $\Sigma$ , является непрерывной функцией:

$$U_2 = U_1. \quad (\text{III.79})$$

Теперь заменим систему уравнений поля другой системой, которая описывает поведение потенциала электрического поля.



Здесь уместно сделать несколько комментариев.

1. Система (III.80) состоит из трех частей: одна часть — это уравнение Пуассона, которое описывает поведение потенциала в обычных точках, где существуют первые производные поля, а две другие — характеризуют потенциал в окрестности поверхностных зарядов. Существует одно исключение, а именно, поверхность двойного слоя, где эту систему применять нельзя.

2. В соответствии с уравнением (III.55) потенциал, вызванный объемным распределением зарядов,

$$U(p) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_V \frac{\delta(q) dV}{L_{qp}}. \quad (\text{III.81})$$

С другой стороны, потенциал в регулярных точках описывается уравнениями (III.76), (III.77). Выражение (III.81) является решением уравнений Пуассона и Лапласа внутри и вне объемных зарядов соответственно.

3. Как было показано в главе I, уравнение Пуассона можно записать в виде

$$\frac{6}{h^2} [U(p) - U^{\text{cp}}] = \frac{\delta}{\epsilon_0}, \quad (\text{III.82})$$

поскольку

$$\nabla^2 U = \frac{6}{h^2} [U^{\text{cp}} - U(p)],$$

где  $2h$  — длина стороны элементарного кубического объема, окружающего точку  $p$ ;  $U(p)$  и  $U^{\text{cp}}(p)$  — потенциал и его среднее значение в этой точке.

Как следует из уравнения (III.82), вне зарядов

$$U(p) = U^{\text{cp}} \quad \text{или} \quad \nabla^2 U = 0.$$

Следовательно, потенциал является гармонической функцией. В окрестности точек, где заряд положителен, потенциал превосходит среднее значение:

$$U(p) > U^{\text{cp}},$$

в то время как в местах, где распределены отрицательные заряды, выполняется противоположное неравенство:

$$U(p) < U^{\text{cp}}.$$

4. Условия А и Б в системе (III.80) обеспечивают непрерывность тангенциальной компоненты и разрывность нормальной компоненты электрического поля, соответственно, при прохождении сквозь поверхностные заряды.

5. Система (III.80) идентична системе уравнений для потенциала гравитационного поля, а переход от электрического поля  $E$  к скалярному полю  $U$  часто существенно упрощает решение прямых задач теории электрических методов.

Этот факт определяет третью причину, оправдывающую использование потенциала  $U$ . Однако введение потенциала само по себе не позволяет нам избавиться от основных трудностей в определении поля, таких как отсутствие знаний о наведенных зарядах, если электрическое поле неизвестно. В этом и следующих раз-

делах будут рассмотрены различные ситуации, наглядно иллюстрирующие эту проблему. Начнем со следующей модели среды.

### *Проводник в свободном пространстве*

Предположим, что произвольный проводник помещен в электрическое поле  $E_0$ , вызванное заданным распределением зарядов с плотностью  $\delta$  в свободном пространстве (см. рис. III.5, б). В результате электростатической индукции внутри проводника электрическое поле  $E_i$  исчезает. Соответственно, производная потенциала  $U_i$  в любом направлении внутри проводника также равна нулю:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = 0.$$

Таким образом, потенциал  $U_i$  не меняется и, в частности, проводящая поверхность является эквипотенциальной поверхностью:

$$U_i = C \quad \text{на} \quad S, \quad (\text{III.83})$$

где  $C$  — постоянная, обычно неизвестная.

Запишем потенциал как сумму двух слагаемых:

$$U = U^0 + U^s,$$

где  $U^0$  — потенциал, вызванный заданным распределением зарядов:

$$U^0 = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_V \frac{\delta(q)}{L_{qp}} dV, \quad (\text{III.84})$$

а  $U^s$  — потенциал, обусловленный поверхностными зарядами с плотностью  $\Sigma$ , которые появляются на поверхности проводника:

$$U^s = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_V \frac{\Sigma(q) dS}{L_{qp}}, \quad (\text{III.85})$$

где  $q$  — точка проводящей поверхности.

В этом месте полезно сделать три комментария.

1. Поверхностные заряды с плотностью  $\Sigma$  распределены таким образом, что электрическое поле внутри проводника исчезает.

2. Уравнения (III.84), (III.85) описывают потенциал всюду, как и в случае отсутствия проводника.

3. Конечно, эти уравнения похожи, но есть одно существенное различие, а именно, источники поля  $U_0$  заданы, в то время как плотность  $\Sigma(q)$  неизвестна. При рассмотрении электростатической индукции в предыдущем разделе была установлена связь только между полем  $E_n^e$  на внешней стороне поверхности проводника и плотностью  $\Sigma(q)$ :

$$\Sigma(q) = \frac{E_n^e}{\epsilon_0}, \quad (\text{III.86})$$

но

$$E_n^e = E_n^0(q) + E_n^s(q),$$

где  $E_n^0(q)$  и  $E_n^s(q)$  — нормальные компоненты полей на внешней стороне поверхности проводника, вызванные заданным и неизвестным распределением зарядов соответственно.

Как следует из уравнения (III.85), потенциал  $U^s$  можно найти, если известна плотность наведенных зарядов  $\Sigma$ . С другой стороны, в соответствии с (III.86) эти заряды могут быть определены при условии, что задано электрическое поле:

$$E^s = - \text{grad } U^s.$$

Таким образом, как было подчеркнуто в предыдущем разделе, мы столкнулись с проблемой «замкнутого круга», которая наглядно показывает, что вычисления поля нельзя произвести, используя закон Кулона. Это основная проблема, присущая практически всем полям в прикладных электрических методах. Следовательно, для нахождения электрического поля  $E$  необходимо использовать совершенно другой подход, основанный на теореме единственности, и сформулировать краевые задачи. Поскольку поле внутри проводника известно ( $E^i \equiv 0$ ), обратим наше внимание только на потенциал в объеме свободного пространства, который ограничен проводящей поверхностью  $S$  и сферической поверхностью с очень большим радиусом, в пределе стремящимся к бесконечности. Как известно из главы I, электрическое поле определяется единственным образом, если потенциал  $U$  удовлетворяет следующим условиям:

1. Вне проводника или проводников функция  $U$  является решением уравнения Пуассона в каждой точке свободного пространства:

$$\nabla^2 U = - \frac{\delta}{\epsilon_0},$$

где  $\delta$  — заданная объемная плотность зарядов. Конечно, в окрестности точек, где плотность равна нулю, потенциал является гармонической функцией:

$$\nabla^2 U = 0.$$

2. Поскольку поля, вызванные как объемными, так и поверхностными зарядами, уменьшаются с расстоянием, условие на бесконечности имеет вид

$$U \rightarrow 0, \quad \text{при} \quad L_{qp} \rightarrow \infty.$$

3. На поверхности проводника потенциал должен быть постоянным и в зависимости от типа доступной нам информации иметь следующий вид:

$$U(q) = \varphi_1(q)$$

или

$$\frac{\partial U(q)}{\partial n} = \varphi_2(q)$$

или

$$\oint E_n dS = - \oint \frac{\partial U}{\partial n} dS = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

где  $\varphi_1(q)$  и  $\varphi_2(q)$  — заданные функции;  $Q$  — суммарный заряд на поверхности проводника; в случае нейтрального проводника  $Q = 0$ .

Существуют различные подходы к решению прямой задачи, включая метод подбора (проб и ошибок). В частности, при рассмотрении электростатической индукции была проиллюстрирована идея метода интегральных уравнений. Конечно, все эти методы значительно сложнее, чем прямое применение закона Кулона, однако сам закон является сущим «наказанием», поскольку существенная часть источников, а именно, наведенные заряды на поверхности проводника, неизвестна до вычисления поля.

Теперь покажем применение теоремы единственности при описании эффекта электростатического экранирования. Для начала предположим, что некоторый объем  $V$  окружен проводящей поверхностью  $S$ , например металлической фольгой, и что источники поля  $E_0$  расположены вне этого объема (см. рис. III.5, в).

В силу электростатической индукции на поверхности появляются положительные и отрицательные заряды, распределенные таким образом, что потенциал внутри проводника не меняется. Наша задача — найти поле внутри объема  $V$ . Учитывая, что заряды в этом объеме отсутствуют, а поверхность  $S$  является эквипотенциальной, имеем

$$\nabla^2 U = 0, \quad U = C \quad \text{на } S, \quad (\text{III.87})$$

где  $C$  — неизвестная постоянная.

В соответствии с теоремой единственности (см. главу I) была сформулирована задача Дирихле; соответственно, уравнения (III.87) однозначно определяют поле, даже если постоянная неизвестна. Будем искать решение с помощью метода подбора.

Предположим, что внутри объема  $V$  потенциал также является постоянным и равным  $C$ , т. е.

$$U = C \quad \text{в } V. \quad (\text{III.88})$$

Ясно, что такая функция  $U$  автоматически удовлетворяет как краевым условиям, так и уравнению Лапласа, поскольку уже первая производная постоянной функции равна нулю. Таким образом, найден потенциал внутри объема и других решений этой задачи не существует. Так как потенциал является постоянным, электрическое поле в объеме, окруженном произвольной проводящей поверхностью, исчезает:

Другими словами, выше описан эффект электростатического экранирования и доказательство проведено с помощью теоремы единственности.

Теперь предположим, что источники поля  $E_0$  окружены проводящей поверхностью  $S$ , и изучим поведение поля вне этой поверхности (рис. III.5,  $z$ ). Благодаря электростатической индукции, на внутренней и внешней сторонах поверхности  $S$ , которая становится эквипотенциальной, появляются заряды обоих знаков. Так как электрическое поле внутри проводника равно нулю, суммарный поток поля через любую замкнутую поверхность  $S_i$  проводника также равен нулю:

$$\oint_{S_i} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Это означает, что наведенные заряды на внутренней поверхности проводника равны по величине, но противоположны по знаку зарядам, расположенным в объеме  $V$ . Соответственно, на внешней поверхности появляется такой же заряд, как и в объеме  $V$ . Очевидно, что данная система источников создает вне проводящей поверхности ненулевое поле. Другими словами, электростатическое экранирование не работает в обоих направлениях. Покажем это еще раз с помощью теоремы единственности.

В данном случае потенциал вне проводника удовлетворяет следующим условиям.

1. В регулярных точках  $\nabla^2 U = 0$ .
2. На проводящей поверхности  $U = C$ .
3. На бесконечности потенциал стремится к нулю:  $U \rightarrow 0$ .

Очевидно, что любое постоянное значение потенциала не может одновременно удовлетворить обоим краевым условиям при  $C \neq 0$ , следовательно, потенциал меняется от точки к точке. Таким образом, электрическое поле отличается от нуля, хотя заряды в объеме  $V$  окружены проводящей поверхностью. В то же время, в соответствии с теоремой единственности, если потенциал  $U$  на поверхности  $S$  становится равным нулю в результате заземления, то он исчезает и всюду вне поверхности  $S$ :

$$U = 0. \quad (\text{III.90})$$

Из этого рассуждения следует также, что, окружая некоторый объем  $V$  двумя проводящими поверхностями, соединенными друг с другом, мы без заземления проводим электростатическое экранирование этой области от поля, вызванного внешними источниками. Это происходит благодаря контакту между этими поверхностями, поскольку потенциал на них становится одинаковым. Следовательно, внутри объема потенциал также является постоянной функцией, значение которой совпадает со значением на обеих поверхностях.

### III.3. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ПРИСУТСТВИИ ДИЭЛЕКТРИКОВ

В предыдущем разделе было показано, что любой проводник, помещенный в электрическое поле, вызывает изменение этого поля. Это происходит из-за того, что любой элемент проводника содержит неограниченное количество зарядов, которые под действием электрической силы свободно двигаются в проводнике и, благодаря электростатической индукции, появляются на его поверхности. Теперь рассмотрим другой тип среды, также способной изменить поле. Такая среда называется диэлектриком, и ее влияние можно приблизительно описать следующим образом.

Прежде всего отметим, что любой элемент диэлектрического объема не имеет свободных зарядов, способных как в проводниках преодолевать значительные расстояния, а содержит равное количество положительных и отрицательных зарядов, связанных друг с другом. Это утверждение основано на факте, что молекулы либо области, окружающие ионы, расположенные в узлах кристаллической решетки, являются нейтральными системами зарядов. Под действием внешнего электрического поля связанные заряды могут немного изменить свое положение, но, в отличие от свободных зарядов, они не покидают элементарный объем. При этом положительные и отрицательные заряды двигаются в противоположных направлениях и элементарный объем приобретает момент диполя. Это явление называется поляризацией. Опишем поле, вызванное поляризацией внутри каждого элементарного объема. Суммируя эти поля по всему объему диэлектрика, получаем вторичное поле, которое вместе с первичным (внешним) полем образует суммарное наблюдаемое поле.

Прежде чем идти дальше, подчеркнем, что диэлектрик не является антиподом проводника. В действительности каждая среда имеет свойства как проводимости, так и поляризуемости. Присутствие свободных зарядов не учитывается здесь только для простоты и усиления эффекта поляризации. На самом деле антиподом проводника является изолятор.

Для нахождения вторичного поля сначала рассмотрим элементарный объем  $dV$ , содержащий равное количество положительных и отрицательных зарядов, слегка смещенных друг относительно друга и поэтому обладающих дипольным моментом  $dM$ :

$$dM = P dV, \quad (III.91)$$

где  $P$  — вектор поляризации или поляризация; т. е. момент диполя элементарного объема, отнесенный к этому объему, или иначе — плотность дипольных моментов

$$P = \frac{dM}{dV}.$$

Чем больше количество зарядов и чем больше расстояние между положительными и отрицательными зарядами, тем больше вектор



поляризации, направленный в сторону положительных зарядов. В большинстве случаев можно полагать, что поляризация  $\mathbf{P}$  прямо пропорциональна полю  $\mathbf{E}$ , т. е.

$$\mathbf{P} = \alpha \mathbf{E}, \quad (\text{III.92})$$

где  $\alpha$  — поляризуемость, которая характеризует способность среды проявлять поляризацию, другими словами — число диполей, ориентированных вдоль поля. Поле  $\mathbf{E}$  в правой части уравнения (III.92) — суммарное поле, вызванное всеми источниками, включая диполи в соседних частях диэлектрика. Оно состоит из первичного и вторичного полей:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_s. \quad (\text{III.93})$$

Учитывая, что внутри элементарного объема  $dV(q)$  заряды создают поле, эквивалентное полю электрического диполя, и используя уравнение (III.59), вне поляризованного элемента для потенциала  $dU_s(p)$  получаем

$$dU_s(p) = \frac{d\mathbf{M} \cdot \mathbf{L}_{qp}}{4\pi \varepsilon_0 L_{qp}^3}, \quad (\text{III.94})$$

где  $L_{qp}$  — расстояние от точки  $q$ , определяющей положение элемента  $dV$ , до точки наблюдения  $p$ . Поляризованный диэлектрик в объеме  $V$  возбуждает электрическое поле  $\mathbf{E}_s$ , потенциал которого

$$U_s(p) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{P}(q) \cdot \mathbf{L}_{qp}}{L_{qp}^3} dV. \quad (\text{III.95})$$

Это выражение относительно простое, однако не может быть использовано для вычисления потенциала вторичного поля. С одной стороны, в соответствии с уравнением (III.95), для нахождения потенциала  $U_s$  необходимо знать вектор поляризации  $\mathbf{P}$ . С другой стороны, последний определяется суммарным полем (III.92), включающим вторичное поле  $\mathbf{E}_s = -\text{grad } U_s$ . Таким образом, мы снова столкнулись с проблемой «замкнутого круга», поясненной в предыдущем разделе. Соответственно, система уравнений поля (III.47), описывающая постоянное электрическое поле всюду, включая диэлектрики, содержит три неизвестных: электрическое поле  $\mathbf{E}$  и источники  $\delta$  и  $\Sigma$ . С учетом их взаимозависимости модифицируем систему таким образом, чтобы новая система содержала только одну неизвестную функцию, а именно, поле  $\mathbf{E}$ . С этой целью выполним несколько простых преобразований в правой части (III.95) и введем новый вектор — электрическую индукцию и новое понятие — связанные заряды.

Представим потенциал, обусловленный поляризацией, как

$$U_s(p) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \int_V \mathbf{P}(q) \cdot \nabla^q \frac{1}{L_{qp}} dV, \quad (\text{III.96})$$

ПОСКОЛЬКУ

$$\frac{\mathbf{L}}{L_{qp}^3} = \nabla^q \frac{1}{L_{qp}}.$$

Учитывая, что

$$\mathbf{P}(q) \cdot \nabla^q \frac{1}{L_{qp}} = \nabla^q \frac{\mathbf{P}}{L_{qp}} - \frac{1}{L_{qp}} \nabla^q \mathbf{P},$$

вместо уравнения (III.96) запишем

$$U_s(p) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_V \operatorname{div} \frac{\mathbf{P}}{L_{qp}} dV - \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_V \frac{\operatorname{div} \mathbf{P}}{L_{qp}} dV. \quad (\text{III.97})$$

Для упрощения этого уравнения используем теорему Гаусса и заменим первый интеграл поверхностным интегралом. Предположим, что в объеме  $V$ , окруженном поверхностью  $S$ , существует некоторая поверхность  $S_i$ , где поляризуемость  $\alpha$  или поле  $\mathbf{E}$  или они вместе являются разрывными функциями, и поэтому вектор поляризации  $\mathbf{P}$  также разрывен. Окружив  $S_i$  «безопасной» поверхностью  $S_0$  (рис. III.6, *a*), получим объем  $V_1$ , ограниченный поверхностями  $S$  и  $S_0$ , в котором можно применить теорему Гаусса. Тогда в пределе поверхность  $S_0$  совпадает с передней и задней сторонами  $S_i$ , а объем  $V_1$  стремится к исходному объему  $V$ . Таким образом, объем интегрирования остается тем же, но поверхность

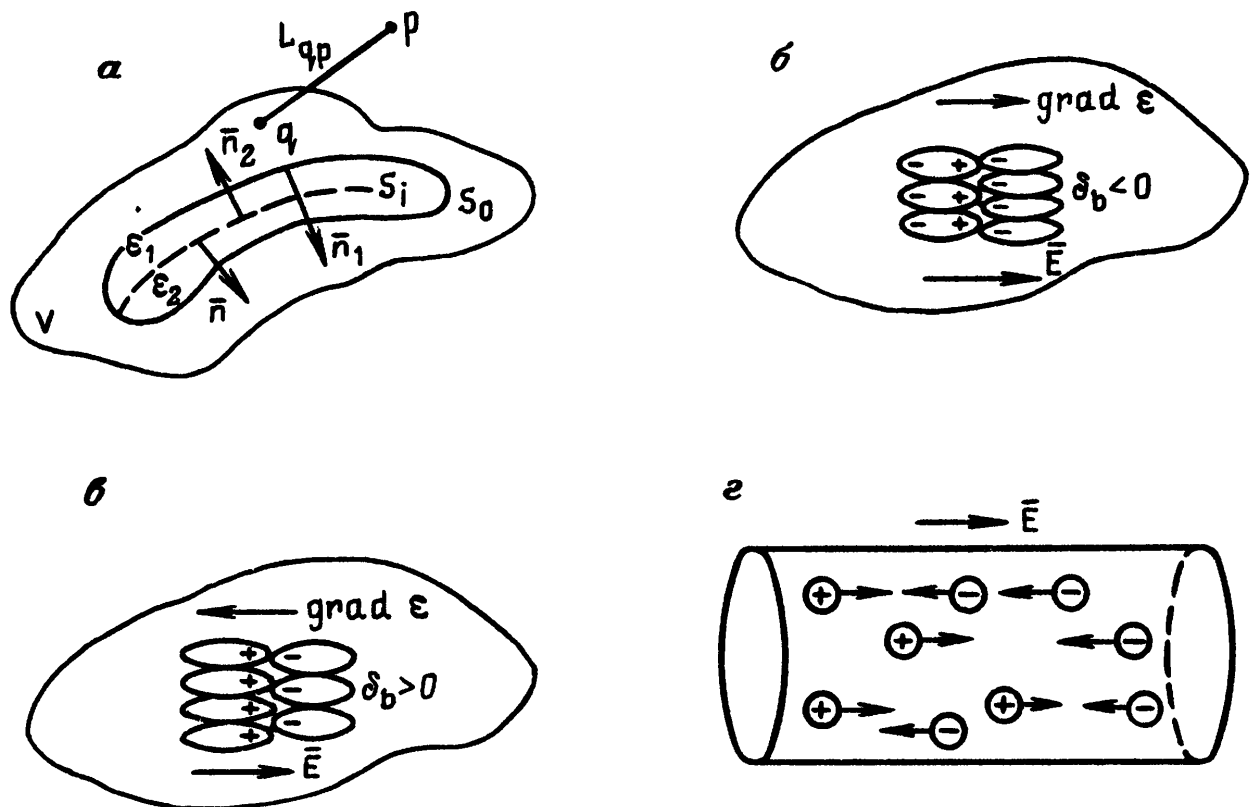


Рис. III.6. Поляризация в диэлектрике (*a*); связанные заряды: *б* — отрицательные, *в* — положительные; движение зарядов в проводнике (*z*)

интегрирования включает поверхность  $S$  и обе стороны  $S_i$ , где вектор  $\mathbf{P}$  является разрывной функцией.

Теперь, применяя теорему Гаусса к первому объемному интегралу в уравнении (III.97), получаем

$$U_s(p) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_{S_1} \frac{\mathbf{P}^{(1)} \cdot d\mathbf{S}}{L_{qp}} + \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_{S_2} \frac{\mathbf{P}^{(2)} \cdot d\mathbf{S}}{L_{qp}} + \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_S \frac{\mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}}{L_{qp}} + \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_V \frac{-\operatorname{div} \mathbf{P}}{L_{qp}} dV, \quad (\text{III.98})$$

где  $\mathbf{P}^{(1)}$  и  $\mathbf{P}^{(2)}$  — векторы поляризации соответственно на задней и передней сторонах поверхности  $S_i$ .

Учитывая, что при интегрировании по поверхностям  $S_1$  и  $S_2$  нормали направлены наружу (рис. III.6, а), получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_{S_1} \frac{\mathbf{P}^{(1)} \cdot d\mathbf{S}}{L_{qp}} + \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_{S_2} \frac{\mathbf{P}^{(2)} \cdot d\mathbf{S}}{L_{qp}} = \\ & = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_{S_i} \frac{\mathbf{P}^{(1)} \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{P}^{(2)} \cdot \mathbf{n}_2}{L_{qp}} dS = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_{S_i} \frac{P_n^{(1)} - P_n^{(2)}}{L_{qp}} dS, \end{aligned} \quad (\text{III.99})$$

где  $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}$ ,  $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}$ , а  $\mathbf{n}$  — нормаль, направленная от задней к передней стороне поверхности  $S_i$ .

Теперь покажем, что интеграл по поверхности  $S$ , которая окружает все возможные диэлектрики, пропадает. В самом деле, на бесконечности электрическое поле и вектор поляризации  $\mathbf{P}$  уменьшаются со скоростью, обратно пропорциональной квадрату расстояния. Следовательно, вводя сферическую поверхность  $S$  очень большого радиуса  $R$  и применяя теорему о главном значении, имеем

$$\int_S \frac{\mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}}{L_{qp}} \rightarrow \frac{C}{R^3} 4\pi R^2 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad R \rightarrow \infty,$$

где  $C$  — некоторая постоянная.

Таким образом, получено новое выражение для потенциала в присутствии диэлектриков:

$$U_s(p) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_V \frac{-\operatorname{div} \mathbf{P}}{L_{qp}} dV + \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_S \frac{-\operatorname{Div} \mathbf{P}}{L_{qp}} dS, \quad (\text{III.100})$$

где

$$\operatorname{Div} \mathbf{P} = P_n^{(2)} - P_n^{(1)} \quad (\text{III.101})$$

— разность нормальных компонент вектора поляризации на обеих сторонах особой поверхности  $S_i$ .

Рассматривая в качестве объема  $V$  все пространство, мы включаем в него все диэлектрики и те части объема, где они отсутствуют. Очевидно, что интегрирование по этим частям не влияет на поле, так как в них  $\mathbf{P} \equiv 0$ .

Уравнения (III.95) и (III.100) описывают один и тот же потенциал, вызванный поляризованными диэлектриками. Однако последнее оказывается более полезным как для понимания распределения зарядов внутри диэлектриков, так и для формулировки краевых задач. Для начала запишем выражения для потенциала, вызванного свободными зарядами, и потенциала, обусловленного поляризацией:

$$U_0 = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_V \frac{\delta_0 dV}{L_{qp}} + \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_S \frac{\Sigma_0 dS}{L_{qp}},$$

$$U_s = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_V \frac{-\operatorname{div} \mathbf{P}}{L_{qp}} dV + \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_S \frac{-\operatorname{Div} \mathbf{P}}{L_{qp}} dS. \quad (\text{III.102})$$

Очевидно поразительное сходство между этими уравнениями. Из их сравнения можно сделать вывод, что благодаря поляризации появляются объемные и поверхностные заряды, а их плотность определяется выражениями

$$\delta_b = -\operatorname{div} \mathbf{P}, \quad \Sigma_b = -\operatorname{Div} \mathbf{P} = P_n^{(1)} - P_n^{(2)}. \quad (\text{III.103})$$

Здесь использован символ « $b$ », чтобы отличить эти заряды от свободных зарядов  $\delta_0$  и  $\Sigma_0$ .

Изучим заряды вызванной поляризации более подробно. Присутствие этого типа зарядов было установлено аналитически в результате преобразования уравнения (III.95), однако к такому же результату можно прийти, рассматривая давление с физической точки зрения. Действительно, если поляризуемость меняется от точки к точке, то плотность момента диполей тоже меняется и, соответственно, можно ожидать появления зарядов. Это явление иллюстрируют рис. III.6, б и в, на которых показаны как положительные, так и отрицательные заряды. Это особенно очевидно на границе между диэлектриком и свободным пространством. Заряды вызванной поляризации в отличие от свободных могут лишь слегка изменять свое положение и поэтому называются связанными зарядами. Разная степень подвижности свободных и связанных зарядов — единственное различие между ними, однако наиболее существенным является тот факт, что как те, так и другие заряды создают электрическое поле одним и тем же способом, т. е. в соответствии с уравнениями (III.102).

Таким образом, в соответствии с уравнениями (III.102), (III.103) можно сказать, что благодаря поляризации в диэлектрическом объеме и на его границах появляются связанные заряды, созда-

ющие электрическое поле  $E_s$ , которое подчиняется закону Кулона. Потенциал и электрическое поле, вызванные свободными и связанными зарядами,

$$U(p) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \int_V \frac{\delta dV}{L_{qp}} + \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \int_{S_i} \frac{\Sigma dS}{L_{qp}}$$

и

(III.104)

$$E(p) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \int_V \frac{\delta L_{qp}}{L_{qp}^3} dV + \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \int_{S_i} \frac{\Sigma dS L_{qp}}{L_{qp}^3},$$

где суммарная плотность зарядов

$$\delta = \delta_0 + \delta_b, \quad \Sigma = \Sigma_0 + \Sigma_b, \quad (III.105)$$

а  $\delta_0$  и  $\Sigma_0$  — заданные объемная и поверхностная плотности свободных зарядов. В общем случае в окрестности некоторых точек могут быть только свободные заряды — например, вне диэлектриков, в то время как в других точках внутри диэлектрика могут существовать как связанные, так и свободные заряды.

Учитывая связанные заряды, приходим, в соответствии с уравнениями (III.104), к тому же выражению для электрического поля, что и для поля в свободном пространстве. В частности, когда существует только объемное распределение зарядов, выражение для электрического поля выглядит следующим образом:

$$E(p) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \int_V \frac{\delta dV L_{qp}}{L_{qp}^3}. \quad (III.106)$$

С математической точки зрения это уравнение в точности совпадает с тем, что было получено в первом разделе только для свободных зарядов. Применяя тот же подход, можно записать уравнения поля в интегральной форме:

$$\oint E \cdot dl = 0, \quad \oint_S E \cdot dS = \frac{e}{\varepsilon_0}, \quad (III.107)$$

где  $e = e_0 + e_b$  — суммарный заряд, включающий как свободные, так и связанные заряды внутри объема  $V$ , окруженного поверхностью  $S$ .

Первое уравнение утверждает, что только источники создают стационарное электрическое поле в присутствии диэлектриков. Второе уравнение показывает, что электрическое поле вызывают как свободные, так и связанные заряды, и это происходит одним и тем же способом. Применяя теперь теоремы Гаусса и Стокса для регулярных точек, получаем дифференциальную форму уравнений (III.107):

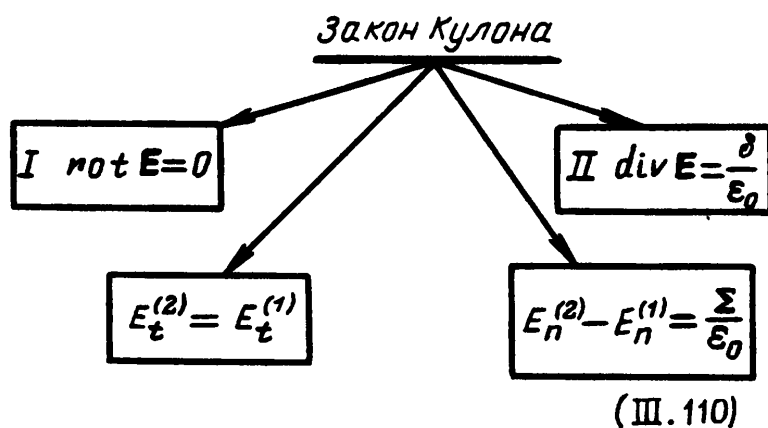
$$\text{rot } E = 0, \quad \text{div } E = \delta/\varepsilon_0. \quad (III.108)$$

При наличии поверхности разрыва, используя тот же подход, что и в предыдущем разделе, имеем

$$E_t^{(1)} = E_t^{(2)}, \quad E_n^{(2)} - E_n^{(1)} = \Sigma / \epsilon_0. \quad (\text{III.109})$$

Тангенциальная компонента электрического поля является непрерывной функцией. При этом разрыв нормальной компоненты при прохождении сквозь поверхность определяется поверхностной плотностью суммарного заряда  $\Sigma$ .

Таким образом, систему уравнений поля можно представить следующим образом:



Эта система верно описывает поле внутри и вне диэлектриков. Однако, как и в случае проводников, правая часть второго уравнения содержит неизвестные плотности связанных зарядов  $\delta_b$  и  $\Sigma_b$ .

Для исключения этих функций из системы уравнений введем новый вектор, связанный с электрическим полем, такой, что эта связь известна для любого диэлектрика. С этой целью представим уравнение

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \delta / \epsilon_0$$

в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\delta_0}{\epsilon_0} + \frac{\delta_b}{\epsilon_0}.$$

Затем, учитывая уравнение (III.103), запишем

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\delta_0}{\epsilon_0} - \frac{\operatorname{div} \mathbf{P}}{\epsilon_0}$$

или

$$\operatorname{div} \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \right) = \frac{\delta_0}{\epsilon_0}. \quad (\text{III.111})$$

Введем вектор

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (\text{III.112})$$

Соответственно, вместо уравнения (III.111) получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \delta_0, \quad (\text{III.113})$$

поскольку  $\epsilon_0$  — постоянная.

Вектор  $\mathbf{D}$  называется вектором электрической индукции. Используя уравнение (III.92), можно выразить его в терминах электрического поля:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \alpha \mathbf{E} = \varepsilon_0 \left( 1 + \frac{\alpha}{\varepsilon_0} \right) \mathbf{E} = \varepsilon_0 (1 + \beta) \mathbf{E}, \quad (\text{III.114})$$

где  $\beta = \alpha/\varepsilon_0$  — диэлектрическая восприимчивость, характеризующая диэлектрик. Вместе с этим параметром введем диэлектрическую постоянную  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \beta) \quad (\text{III.115})$$

и в соответствии с уравнением (III.114) запишем

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}. \quad (\text{III.116})$$

Таким образом, зная диэлектрическую постоянную, легко вычислить вектор электрической индукции по вектору электрического поля и наоборот. В этой связи следует отметить следующее.

Уравнение (III.116) выглядит очень просто и этот факт может произвести ложное впечатление, что оба вектора  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  имеют один и тот же физический смысл, отличаясь друг от друга лишь скалярной величиной  $\varepsilon$ , которая внутри диэлектрика часто постоянна. Однако вектор электрической индукции согласно (III.112) является суммой двух совершенно разных векторов: один из них — это электрическое поле, а другой — плотность момента диполей или вектор поляризации  $\mathbf{P}$ . Более того, из равенства

$$\text{rot } \mathbf{D} = \text{rot } \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon \text{rot } \mathbf{E} + (\text{grad } \varepsilon \times \mathbf{E}) = \text{grad } \varepsilon \times \mathbf{E}$$

следует, что в общем случае поле  $\mathbf{D}$  вызывается как вихрями, так и свободными зарядами. В частности, на поверхности раздела сред с различными диэлектрическими постоянными тангенциальная компонента электрического поля является непрерывной функцией:

$$E_t^{(1)} = E_t^{(2)},$$

а тангенциальная компонента вектора  $\mathbf{D}$  имеет разрыв:

$$\varepsilon_2 E_t^{(2)} \neq \varepsilon_1 E_t^{(1)},$$

что указывает на присутствие вихрей (см. главу I).

После сделанных комментариев продолжим преобразование уравнений (III.110). В соответствии с уравнением (III.103) поверхностный аналог второго уравнения можно представить как

$$E_n^{(2)} - E_n^{(1)} = \frac{\Sigma_0}{\varepsilon_0} + \frac{P_n^{(1)} - P_n^{(2)}}{\varepsilon_0} = \frac{\Sigma}{\varepsilon_0}$$

или

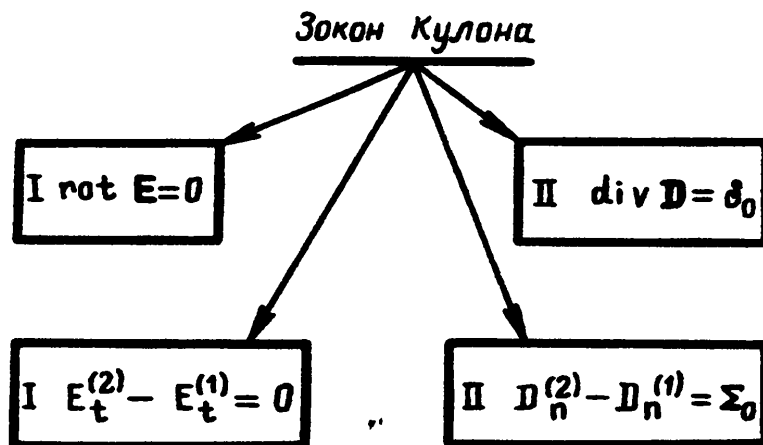
$$\left[ E_n^{(2)} + \frac{P_n^{(2)}}{\varepsilon_0} \right] - \left[ E_n^{(1)} + \frac{P_n^{(1)}}{\varepsilon_0} \right] = \frac{\Sigma_0}{\varepsilon_0},$$

или

$$D_n^{(2)} - D_n^{(1)} = \Sigma_0. \quad (\text{III.117})$$

Таким образом, нормальная компонента вектора  $D$  является разрывной функцией, но в отличие от нормальной компоненты электрического поля этот разрыв определяется только плотностью свободных зарядов.

Теперь можно записать систему уравнений поля, в правой части которых присутствует только плотность свободных зарядов.



В результате система уравнений поля (III.110) модифицирована таким образом, что не содержит больше связанных зарядов. Это оказалось возможным из-за предположения, что существует линейная зависимость между поляризацией и полем и что поляризуемость  $\alpha$  известна.

Для лучшего понимания поведения поля изучим распределение связанных зарядов. В соответствии с уравнениями (III.113) и (III.116) имеем

$$\operatorname{div} \epsilon E = \epsilon \operatorname{div} E + E \cdot \operatorname{grad} \epsilon = \delta_0$$

и, поскольку

$$\operatorname{div} E = \frac{\delta_0 + \delta_b}{\epsilon_0},$$

получаем

$$\delta_0 = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} (\delta_0 + \delta_b) + E \cdot \operatorname{grad} \epsilon$$

или

$$\delta_b = \frac{1 - \epsilon_r}{\epsilon_r} \delta_0 - E \cdot \frac{\operatorname{grad} \epsilon}{\epsilon_r}, \quad (\text{III.119})$$

где  $\epsilon_r = \epsilon / \epsilon_0$  — относительная диэлектрическая постоянная.

Для удобства будем различать два типа связанных зарядов:

$$\delta_b = \delta_b^{(1)} + \delta_b^{(2)}, \quad (\text{III.120})$$



где

$$\delta_b^{(1)} = \frac{1 - \varepsilon_r}{\varepsilon_r} \delta_0 \quad \text{и} \quad \delta_b^{(2)} = -E \cdot \frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon_r}.$$

Первый тип связанных зарядов появляется в окрестности точек, где присутствуют свободные заряды. Поскольку  $\varepsilon_r > 1$ , то такие связанные заряды всегда имеют знак, противоположный знаку свободных зарядов.

Второй тип зарядов может появиться в окрестности точек, где изменяется диэлектрический параметр  $\varepsilon$ . Если существует положительная проекция электрического поля на вектор  $\text{grad } \varepsilon$ , то появляются отрицательные заряды, а если угол между векторами превосходит  $\pi/2$ , то появляются положительные заряды. В частности, в случае, когда электрическое поле перпендикулярно направлению максимального изменения параметра  $\varepsilon$ , данный тип зарядов не возникает.

Теперь рассмотрим поверхностные связанные заряды, исходя из уравнения

$$D_n^{(2)} - D_n^{(1)} = \Sigma_0,$$

которое можно представить как

$$\begin{aligned} D_n^{(2)} - D_n^{(1)} &= \varepsilon_2 E_n^{(2)} - \varepsilon_1 E_n^{(1)} = \\ &= \frac{1}{2} [(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)(E_n^{(2)} - E_n^{(1)}) + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(E_n^{(2)} + E_n^{(1)})] = \Sigma_0. \end{aligned}$$

Поскольку

$$E_n^{(2)} - E_n^{(1)} = \frac{\Sigma_0 + \Sigma_b}{\varepsilon_0},$$

то

$$\frac{1}{2} [(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(\Sigma_0 + \Sigma_b) / \varepsilon_0 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(E_n^{(2)} + E_n^{(1)})] = \Sigma_0$$

или

$$\varepsilon_r^{\text{cp}} (\Sigma_0 + \Sigma_b) + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) E_n^{\text{cp}} = \Sigma_0, \quad (\text{III.121})$$

где

$$\varepsilon_r^{\text{cp}} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_{2r} + \varepsilon_{1r}}{2}, \quad E_n^{\text{cp}} = \frac{E_n^{(1)} + E_n^{(2)}}{2},$$

откуда

$$\Sigma_b = -\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_r^{\text{cp}}} E_n^{\text{cp}} + \frac{1 - \varepsilon_r^{\text{cp}}}{\varepsilon_r^{\text{av}}} \Sigma_0. \quad (\text{III.122})$$

Снова, как и в случае объемного распределения, различаем два типа зарядов.

Проиллюстрируем эти результаты очень простым примером. Предположим, что элементарный свободный заряд с плотностью  $\delta_0$  расположен в однородной среде с диэлектрической постоянной  $\epsilon$ . В соответствии с законом Кулона свободный заряд создает в диэлектрике такое же поле, как и в свободном пространстве:

$$\mathbf{E}_0 = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{\delta_0 L_{qp}}{L_{qp}^3} dV, \quad (\text{III.123})$$

где точка  $q$  характеризует положение свободного заряда.

Поскольку среда является однородной, то существует только один тип связанных зарядов:

$$\delta_b^{(1)} = \frac{1 - \epsilon_r}{\epsilon_r} \delta_0, \quad (\text{III.124})$$

возникающих вокруг свободного заряда, и соответствующее поле имеет вид

$$\mathbf{E}_b = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{\delta_b^{(1)} L_{qp}}{L_{qp}^3} dV = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left( \frac{1 - \epsilon_r}{\epsilon_r} \right) \frac{\delta_0 dV}{L_{qp}^3} L_{qp}. \quad (\text{III.125})$$

Таким образом, суммарное поле, вызванное обоими зарядами,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_b = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left( 1 + \frac{1}{\epsilon_r} - 1 \right) \frac{\delta_0 dV}{L_{qp}^3} L_{qp}$$

или

$$\mathbf{E}(p) = \frac{1}{4\pi \epsilon} \frac{\delta_0 dV}{L_{qp}^3} L_{qp}. \quad (\text{III.126})$$

Сравнивая уравнения (III.123) и (III.126), видим, что если свободный заряд помещен в однородную диэлектрическую среду, то его электрическое поле оказывается в  $\epsilon_r$  раз меньше, чем поле того же заряда в свободном пространстве. Это происходит из-за того, что свободному заряду в диэлектрике сопутствуют связанные заряды, имеющие противоположный знак.

Теперь получим систему уравнений для потенциала. Как и раньше, из первого уравнения  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$  следует

$$\mathbf{E} = - \text{grad } U.$$

Подставляя это выражение во второе уравнение системы (III.118), имеем

$$\text{div } \epsilon \text{ grad } U = - \delta_0$$

или

$$\nabla (\epsilon \nabla U) = - \delta_0. \quad (\text{III.127})$$

Конечно, это уравнение в общем случае не является ни уравнением Пуассона, ни уравнением Лапласа. Однако если в окрест-

ности некоторой точки диэлектрик однородный, то снова получаем уравнение Пуассона:

$$\varepsilon \nabla^2 U = -\delta_0$$

или

$$\nabla^2 U = -\delta_0/\varepsilon. \quad (\text{III.128})$$

Если вдобавок отсутствуют свободные заряды, то в такой точке потенциал становится гармонической функцией:

$$\nabla^2 U = 0.$$

Дифференцируя левую часть уравнения (III.127), получаем

$$\varepsilon \nabla^2 U + \nabla (U \cdot \nabla \varepsilon) = \delta_0$$

или

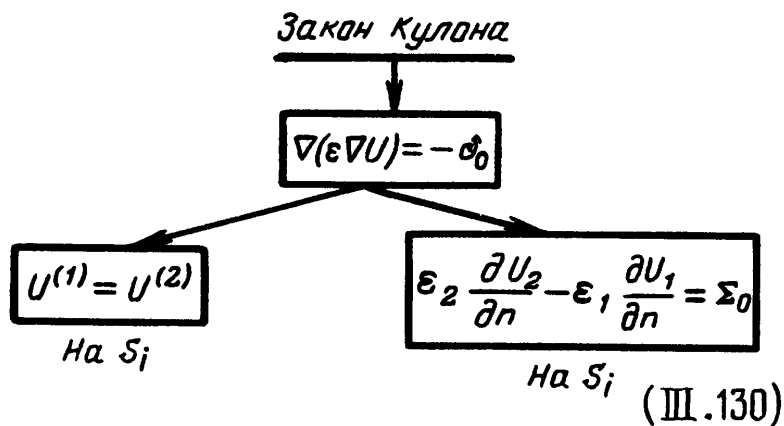
$$\nabla^2 U = -\frac{\delta_0}{\varepsilon} - \frac{\nabla U \cdot \nabla \varepsilon}{\varepsilon} \quad (\text{III.129})$$

и, сравнивая полученное выражение с уравнением (III.121), снова видим, что лапласиан характеризует плотность суммарного заряда, расположенного в окрестности точки.

Поскольку непрерывность тангенциальной компоненты поля обусловлена непрерывностью потенциала с учетом того, что

$$D_n = \varepsilon E_n = -\varepsilon \frac{\partial U}{\partial n},$$

система уравнений для потенциала приобретает следующий вид:



Можно показать, что уравнения (III.130) вместе с краевыми условиями составляют краевые задачи для стационарного электрического поля в присутствии диэлектриков.

В заключение этого раздела сделаем общий комментарий.

Различные типы пород имеют различные диэлектрические постоянные; в частности, параметр  $\varepsilon_r$  для воды равен 81, а нефть приблизительно характеризуется величиной 2—3. Подобная разница в принципе может быть использована для распознавания формаций, которые насыщены нефтью или водой, например, с помощью измерения электрического поля в скважинах. Однако,

благодаря тому, что породы являются одновременно и проводниками, и диэлектриками, невозможно измерить их диэлектрическую постоянную, используя только стационарное электрическое поле. Для иллюстрации предположим, что заряд помещен в непроводящую скважину. Тогда на поверхности скважины появляются наведенные заряды, которые компенсируют первичное электрическое поле в породах (электростатическая индукция). В результате поляризация внутри пород исчезает. В следующем разделе также будет показано, что в случае постоянных токов диэлектрическая постоянная пород не имеет никакого влияния на поведение поля.

### III.4. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК, ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ И ЗАКОН ОМА

При рассмотрении электростатической индукции было установлено, что поле, вызванное зарядами, расположенными вне проводника, таким образом вызывает появление на поверхности проводника зарядов, чтобы суммарное поле в каждой внутренней точке исчезло. Можно также сказать, что поле внешних зарядов не способно вызвать упорядоченное движение как электронов, так и ионов. Следовательно, они двигаются хаотически, как если бы эти заряды отсутствовали.

Теперь предположим, что при наличии других зарядов, расположенных внутри и на поверхности проводника, появляется постоянное электрическое поле, которое в общем случае может изменяться внутри проводника, однако не меняется со временем. Конечно, как и раньше, это поле  $E$  подчиняется закону Кулона. Если бы распределение данных зарядов было известно, то электрическое поле в каждой точке можно было бы вычислить по формуле

$$E(p) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_V \frac{\delta dV}{L_{qp}^3} L_{qp} + \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_S \frac{\Sigma dS}{L_{qp}^3} L_{qp}.$$

Далее будут сформулированы условия, которые гарантируют существование постоянного электрического поля внутри проводящей среды. А сейчас примем этот факт к сведению и начнем изучать движение зарядов по проводнику с постоянной скоростью. Это будет третьим детально изученным явлением после электростатической индукции и поляризации диэлектриков.

Очевидно, что некоторый заряд, подверженный действию постоянного электрического поля, начинает двигаться. Поскольку поле  $E$  не меняется со временем, то наблюдается упорядоченное движение зарядов. Это явление называется электрическим током. В металлах ток — это движение электронов, в то время как в осадочных породах, поры которых насыщены электролитами, ток состоит из ионов. Следовательно, будем различать электронную и ионную электропроводность. Отметим однако, что в обоих слу-

чаях достаточно сложное и хаотическое движение микрочарядов сопровождается упорядоченным движением в некотором направлении, определяемом электрическим полем.

Здесь следует отметить, что движение каждого микрочаряда определяется величиной и направлением электрического поля в окрестности точки его расположения, и в этом смысле такое движение не зависит от поля в других местах проводящей среды.

Движение микрочарядов в породах очень сложное, поскольку породы имеют сложную структуру. Они состоят из элементов, обладающих обоими типами электропроводности различной интенсивности. Для упрощения этого явления представим себе, что все микрочаряды каждого знака одинаковы в окрестности некоторой точки и двигаются с одинаковой скоростью. Такой традиционный способ перехода от микро- к макромасштабу позволяет рассматривать ток как движение зарядов, непрерывно распределенных в некоторых областях проводящей среды. Введем плотность тока  $\mathbf{j}$ , которая характеризует движение зарядов. Этот вектор показывает направление движения зарядов в окрестности точки  $q$ . Он равен количеству зарядов, проходящих в единицу времени через перпендикулярную  $\mathbf{j}$  единичную площадку с центром в точке  $q$ . Ниже приведены три условия определения тока:

- а) площадка имеет единичную площадь;
- б) площадка перпендикулярна направлению движения зарядов;
- в) время имеет единичное значение.

Все эти условия являются необходимыми. Если одно из них не удовлетворяется, вектор плотности тока теряет свое значение.

В соответствии с определением вектор  $\mathbf{j}$  можно записать в виде

$$\mathbf{j}(q) = \frac{de}{dS dt} \mathbf{i}_0(q), \quad (\text{III.131})$$

где  $dS$  — площадка, перпендикулярная направлению движения зарядов (эта площадка достаточно мала, чтобы предположить, что через каждый ее элемент за одно и то же время проходит равное количество зарядов.);  $de$  — заряд, который проходит через площадку за интервал времени  $dt$ ;  $\mathbf{i}_0$  — единичный вектор, показывающий направление движения зарядов.

Очевидно, что размерность плотности тока

$$[\mathbf{j}] = \frac{\text{К}}{\text{м}^2\text{с}}.$$

В соответствии с уравнением (III.131) можно заключить, что направление вектора  $\mathbf{j}$  совпадает с направлением движения положительных зарядов и противоположно направлению отрицательных зарядов, поскольку в этом случае  $de < 0$ .

В общем случае заряды обоих знаков могут двигаться в раз-

личных направлениях, например в противоположных, и суммарный вектор  $\mathbf{j}$  равен

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}^+ + \mathbf{j}^-, \quad (\text{III.132})$$

где  $\mathbf{j}^+$  и  $\mathbf{j}^-$  — плотности тока соответственно положительных и отрицательных зарядов.

Как обычно, векторное поле  $\mathbf{j}$  можно описать с помощью геометрических моделей, введенных в главе I. В данном случае эти модели называются линейными токами, поверхностными токами и токовыми трубками.

Теперь выразим плотность тока  $\mathbf{j}$  положительных и отрицательных зарядов в терминах их плотностей и скоростей. Предположим, что  $dS$  — это поперечное сечение элементарной трубки тока, показанной на рис. III.6,  $z$ , а заряды обоих знаков двигаются вдоль этой трубки. В течение времени  $dt$  заряды, расположенные от  $dS$  на расстояниях, меньших произведения  $Wdt$ , пересекают эту площадку. Здесь  $W$  — скорость зарядов. Количество зарядов

$$de = \delta dV = \delta dS Wdt$$

и в соответствии с уравнением (III.131) плотность тока

$$\mathbf{j} = \delta \mathbf{W}.$$

Из этого выражения видно, что вектор плотности тока и скорость имеют одно и то же направление при  $\delta > 0$ , в то время как они противоположны друг другу при  $\delta < 0$ . В общем случае в движении принимают участие оба типа зарядов, так что имеем

$$\mathbf{j}^+ = \mathbf{W}^+ \delta, \quad \mathbf{j}^- = \mathbf{W}^- \delta^-, \quad \mathbf{j} = \mathbf{W}^+ \delta^+ + \mathbf{W}^- \delta^- \quad (\text{III.133})$$

или

$$\mathbf{j}^+ = \mathbf{W}^+ \delta^+, \quad \mathbf{j}^- = -\mathbf{W}^- |\delta^-|, \quad \mathbf{j} = \mathbf{W}^+ \delta^+ - \mathbf{W}^- |\delta^-|,$$

где  $\delta^+$ ,  $\mathbf{W}^+$  и  $\delta^-$ ,  $\mathbf{W}^-$  — плотности и скорости положительных и отрицательных зарядов соответственно, а  $|\delta^-|$  — абсолютная величина отрицательного заряда.

Сделаем здесь несколько замечаний.

1. Поле  $\mathbf{j}$  не меняется при одновременном изменении знаков скорости и плотности. Например, при замене движения отрицательных зарядов на движение положительных зарядов той же величины, но противоположных по направлению, поле  $\mathbf{j}$  остается тем же. Это показывает, что движение зарядов всегда можно свести к движению только положительных зарядов.

2. В металлах ток образует электроны и  $\mathbf{j} = \mathbf{W}^- \delta^-$ . В электролитах, однако, в противоположном направлении двигаются как положительные, так и отрицательные заряды. Поэтому

$$\mathbf{j} = \{ |W^+| \delta^+ + |W^-| |\delta^-| \} \mathbf{i}_0,$$

где  $\mathbf{i}_0$  — единичный вектор, показывающий направление движения положительных зарядов.

3. В соответствии с уравнением (III.133) плотность тока не равна нулю, если

$$W^+ \delta^+ \neq W |\delta^-|. \quad (\text{III.134})$$

Это значит, что плотность тока  $\mathbf{j}$  может исчезнуть при условии, что оба типа зарядов двигаются в одном направлении, однако равенство  $\mathbf{j} = 0$  не требует, чтобы были равны плотности.

4. Суммарный заряд внутри каждого элементарного объема проводника

$$\delta = \delta^+ + \delta^-.$$

Интересно отметить, что часто в присутствии токового движения суммарный заряд равен нулю. В однородной части металла, например, сумма движущихся электронов и неподвижных положительных зарядов равна нулю. Это также верно и для однородных частей электролитов. Ясно, что в таких случаях эти элементы объемов не создают электрическое поле.

Теперь установим связь между плотностью тока и электрическим полем. Когда поле  $\mathbf{E}$  воздействует на заряды, они начинают двигаться с некоторым ускорением. Однако среда затрудняет их движение, существенно ограничивая возрастание скорости. Механизм, вызывающий это явление, может меняться. В металлах, например, это происходит благодаря столкновению электронов с ионами в кристаллической решетке. Но независимо от этого механизма скорость микрочарядов становится пропорциональной электрическому полю, т. е.

$$\mathbf{W}^+ = u^+ \mathbf{E}, \quad \mathbf{W}^- = -u^- \mathbf{E}, \quad (\text{III.135})$$

где  $u^+$  и  $u^-$  — положительные коэффициенты, называемые подвижностью соответственно положительных и отрицательных зарядов. Отметим, в частности, что в металлах  $u^+ = 0$ .

Подставляя эти выражения в уравнение (III.133), получаем

$$\mathbf{j} = (u^+ \delta^+ + u^- |\delta^-|) \mathbf{E}$$

или

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E} \quad (\text{III.136})$$

и

$$\gamma = u^+ \delta^+ + u^- |\delta^-|. \quad (\text{III.137})$$

Уравнение (III.136) называется законом Ома в дифференциальной форме, а коэффициент пропорциональности  $\gamma$  — электропроводностью среды.

Здесь сделаем следующие замечания:

1. Закон Ома устанавливает связь между двумя совершенно разными полями, а именно, электрическим полем  $E$  и плотностью тока, описывающей движение зарядов.

2. В соответствии с уравнением (III.136) электрическое поле создает поле плотности тока, но не наоборот. Например, в непроводящей среде может быть электрическое поле, в то время как ток отсутствует. Проиллюстрируем этот факт рисунком



Мы видим, что заряды создают электрическое поле  $E$ , а в проводящей среде это поле возбуждает движение зарядов, то есть поле  $j$ .

Уместно отметить, что источники электрического поля обычно никак не связаны с зарядами, составляющими поле плотности тока.

3. Оказывается, что закон Ома в дифференциальной форме может также применяться к переменным электромагнитным полям.

4. В анизотропной среде электропроводность зависит от направления движения зарядов. В этом случае  $\gamma$  является тензором. Однако в этой главе будут рассматриваться только изотропные среды, поэтому  $\gamma$  далее описывается как скалярная функция.

5. Как следует из уравнения (III.137), электропроводность прямо пропорциональна плотности зарядов и их подвижности, характеризующей скорость зарядов. Например подвижность электронов в меди приблизительно равна

$$u^- \approx 4,4 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м/с}}{\text{В/м}}.$$

Это удивительно малая величина, особенно если учесть, что электрическое поле в металлах также очень маленькое. Если предположить, что

$$E = \frac{1 \text{ мВ}}{\text{м}} = 10^{-3} \frac{\text{В}}{\text{м}},$$

то скорость электронов

$$W^- = 4,4 \cdot 10^{-3} \text{ м/с} \approx 4 \cdot 10^{-6} \text{ м/с}.$$

Это показывает, что электрону потребуется около 70 часов, чтобы пройти 1 метр.

Конечно, когда энергия превращается из энергии генератора в энергию нагрузки, она не путешествует по проводам, ибо потребовались бы годы и годы вместо практически мгновенного распространения, наблюдаемого в действительности. Таким образом, высокая электропроводность металлов в основном вызывается высокой плотностью электронов, которая компенсирует их низкую подвижность.



Подвижность ионов электролитов еще меньше, приблизительно  $10^{-9}$  м<sup>2</sup>/(В·с), и это вместе с их низкой плотностью приводит к тому, что электропроводность у электролитов много меньше, чем у металлов.

6. Упорядоченное движение зарядов под действием электрического поля всегда сопровождается хаотическим движением с относительно высокой скоростью:

$$10^2 \text{ м/с} < W < 10^6 \text{ м/с},$$

которая на много порядков превосходит скорость зарядов, образующих ток.

Благодаря этому хаотическому движению, даже при отсутствии электрического поля можно наблюдать очень слабый ток, который называется током флуктуаций. Очевидно, что существование таких токов определяет границы чувствительности устройств, измеряющих ток.

7. Уместно упомянуть вместе с электропроводностью  $\gamma$  и удельное сопротивление  $\rho$ , которое связано с  $\gamma$  соотношением:

$$\rho = 1/\gamma. \quad (\text{III.138})$$

Размерность этих величин следующая:

$$[\gamma] = \frac{\text{К}}{\text{В} \cdot \text{м} \cdot \text{с}} \quad \text{и} \quad [\rho] = \frac{\text{В} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{\text{К}}.$$

Эти единицы можно представить как

$$[\gamma] = \text{Ом}^{-1}/\text{м} \quad \text{и} \quad [\rho] = \text{Ом} \cdot \text{м}.$$

Значения удельных сопротивлений минералов осадочных и других пород представлены в приведенной ниже таблице (Parasnis, 1979). Самой важной особенностью этой таблицы является чрезвычайно широкий диапазон удельных сопротивлений.

Т а б л и ц а III.1

Породы и осадочные отложения	$\rho$ , Ом·м	Руды	$\rho$ , Ом·м
Известняк (мрамор)	$> 10^{12}$	Пирротин	$10^{-5} - 10^{-3}$
Кварц	$> 10^{10}$	Халькопирит	$10^{-4} - 10^{-1}$
Каменная соль	$10^6 - 10^7$	Графитовые сланцы	$10^{-3} - 10^{-1}$
Гранит	$5000 - 10^6$	Пирит	$10^{-4} - 10^{-1}$
Песчаник	$35 - 4000$	Магнетит	$10^{-2} - 10^{-1}$
Морена	$8 - 4000$	Гематит	$10^{-1} - 10^{-2}$
Известняк	$120 - 400$	Галенит	$10^{-2} - 300$
Глины	$1 - 120$	Сфалерит	$> 10^4$

В предыдущем разделе детально были описаны основные особенности электрического поля, вызванного зарядами. Аналогично изучим поведение поля плотности тока.

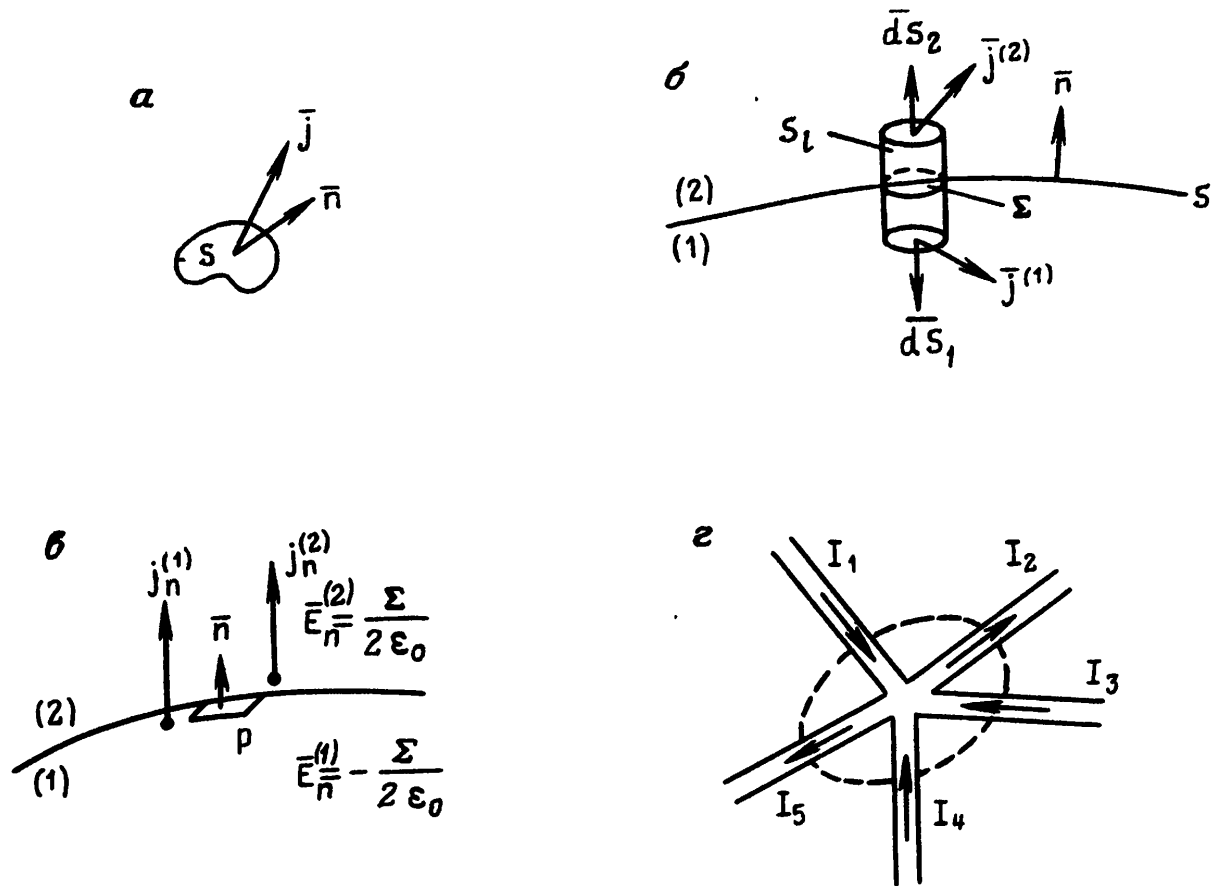


Рис. III.7. Поток плотности тока (а); поток плотности тока вблизи поверхностных зарядов (б); непрерывность нормальной компоненты  $j_n$  (в); закон Кирхгофа (г)

Прежде всего, зная вектор  $\mathbf{j}$ , нетрудно вычислить количество зарядов, проходящих в единицу времени через элементарную поверхность  $dS$ , произвольно ориентированную по отношению к  $\mathbf{j}$ . Как видно из рис. III.7, а, оно определяется соотношением

$$dI = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$$

или

$$dI = j dS \cos(\mathbf{j}, d\mathbf{S}),$$

(III.139)

где  $d\mathbf{S} = dS \mathbf{n}$ ;  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, направленный от задней к передней стороне поверхности  $dS$ . Ясно, что эта величина положительна, если заряды двигаются вдоль нормали  $\mathbf{n}$ , и отрицательна, если заряды проходят через поверхность в противоположном направлении. В частности, если вектор плотности тока направлен по касательной к поверхности, то количество зарядов равно нулю. Как следует из уравнения (III.139), поток вектора  $\mathbf{j}$  или количество зарядов, проходящих через произвольную поверхность  $S$  в единицу времени,

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \int_S j_n dS, \quad (\text{III.140})$$

где  $i_n$  — нормальная компонента плотности тока.

В соответствии с уравнением (III.140) поток  $I$  является ал-

гебраической суммой элементарных потоков через различные части поверхности и называется током. Как следует из определения плотности тока, размерность тока равна

$$[I] = \frac{Kл}{с} = A \text{ (ампер)}.$$

Для того, чтобы лучше представить себе движение зарядов, естественно, как уже подчеркивалось, использовать понятие векторных линий. Каждый вектор или токовая линия показывают направление вектора  $\mathbf{j}$ ; т. е. заряды двигаются в проводящей среде вдоль этих линий. Также следует рассмотреть токовые трубки, горизонтальные поверхности которых называются токовыми поверхностями. По определению, поток плотности тока через токовую поверхность всегда равен нулю, так как вектор  $\mathbf{j}$  является касательным к этим поверхностям. В общем случае поперечное сечение токовой трубки может меняться от точки к точке.

Теперь можно сформулировать основной закон, который характеризует поведение поля плотности тока, а именно, принцип сохранения заряда. Для стационарного поля он имеет вид:

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (\text{III.141})$$

Таким образом, поток плотности тока  $\mathbf{j}$  через любую замкнутую поверхность равен нулю.

Поскольку вектор плотности тока описывает количество движущихся зарядов, то уравнение (III.141) позволяет сделать самый важный вывод об их поведении: количество зарядов, прибывающих в любой объем  $V$ , всегда равно количеству зарядов, покидающих этот объем за то же время; т. е. их сумма равна нулю. Этот факт не зависит от размера и формы поверхности  $S$ , окружающей произвольный объем  $V$ . Он также не зависит от того, однородная или неоднородная среда рассматривается. В частности, поверхность  $S$  может пересекать среды с различными электропроводностями. Более того, уравнение (III.141) практически остается верным для широкого диапазона электромагнитных полей, когда электрические и магнитные поля так же, как и плотность тока, меняются со временем.

Как следует из уравнения (III.141), на любой замкнутой поверхности существуют места, где нормальная компонента  $j_n$  направлена наружу, так же как и такие места, где нормальная компонента направлена внутрь, и это вызывает поток в обоих направлениях.

Предположим на миг, что уравнение (III.141) неверно. В этом случае количество зарядов, прибывающих в объем, не будет равно количеству зарядов, покидающих его. Тогда можно представить себе два случая.

1. Количество положительных зарядов, прибывающих в объем,

превосходит количество покидающих его; т. е. величина отрицательного потока плотности тока больше, чем величина положительного потока. Тогда каждую секунду в объем прибывают новые положительные заряды и прибавляются к тем, что уже имеются. Это означает, что электрическое поле и плотность тока должны меняться со временем.

2. Количество положительных зарядов, покидающих объем, больше, чем количество прибывающих; соответственно, суммарный заряд внутри объема будет уменьшаться. Снова электрическое поле, вызванное этим зарядом, так же как и плотность тока, становятся функциями времени.

Этот анализ наглядно показывает, что уравнение (III.141) должно выполняться, иначе электрическое поле не может оставаться независимым от времени. Это уравнение можно трактовать как второе уравнение векторного поля  $\mathbf{j}$  в интегральной форме, однако обычно его называют принципом сохранения заряда. Существует веская причина для такого названия. В самом деле, если внутри объема есть заряд, тогда в соответствии с (III.141) он остается таким же все время, пока существует стационарное электрическое поле. В частности, этот заряд может быть равен нулю несмотря на наличие потока плотности тока.

Еще раз подчеркнем две основные особенности принципа сохранения заряда (III.141):

1. Поскольку поток вектора  $\mathbf{j}$  через любую замкнутую поверхность  $S$  равен нулю, то в проводящей среде возможно сохранить постоянное электрическое поле и постоянное поле плотности тока.

2. Уравнение (III.141) не означает, что внутри проводящей среды заряды отсутствуют. Это произойдет, если на любой поверхности будет справедливо равенство

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0,$$

однако оно не имеет никакой связи с принципом сохранения заряда.

Теперь получим другие уравнения, описывающие этот принцип. Применяя теорему Гаусса для регулярных точек среды, имеем

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{j} dV$$

Поскольку это выражение справедливо для любого объема, получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (\text{III.142})$$

Это уравнение также выражает принцип сохранения заряда, но его можно применять только в окрестности точек, где существуют первые производные плотности тока. Например, в декартовой системе

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = 0.$$

Для получения поверхностного аналога уравнения (III.142) рассмотрим поток плотности тока через замкнутую цилиндрическую поверхность, показанную на рис. III.7, б и состоящую из трех частей:

$$\int_{S_1} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_2} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_l} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Поскольку  $d\mathbf{S}_1 = -\mathbf{n} dS$ ,  $d\mathbf{S}_2 = \mathbf{n} dS$ , а третье слагаемое исчезает, когда высота цилиндра стремится к нулю, получаем

$$\mathbf{j}^{(2)} \cdot d\mathbf{S}_2 + \mathbf{j}^{(1)} \cdot d\mathbf{S}_1 = 0$$

или

$$j_n^{(2)} - j_n^{(1)} = 0. \quad (\text{III.143})$$

Таким образом, на границе раздела двух сред с различными электропроводностями нормальная компонента плотности тока является непрерывной функцией. Следует подчеркнуть важность этого условия, которое позволяет сохранять стационарное электрическое поле в проводящей среде. Действительно, если бы нормальные компоненты плотности тока не были равны на каждой стороне поверхности раздела, тогда каждую секунду происходило бы увеличение или уменьшение поверхностного заряда и, соответственно, электрическое поле перестало бы быть независимым от времени.

Из уравнения (III.143) также становится очевидным наличие поверхностного заряда. Другими словами, непрерывность нормальной компоненты плотности тока невозможно обеспечить без поля, вызванного этими зарядами; принцип сохранения заряда так же перестал бы выполняться. Чтобы показать это, представим себе, что поверхностные заряды отсутствуют в окрестности некоторой точки  $q$  поверхности раздела между средами с электропроводностями  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  (рис. III.7, в). Тогда в соответствии с законом Ома нормальные компоненты плотности тока равны

$$j_n^{(1)}(q) = \gamma_1 E_n^{(1)}(q), \quad j_n^{(2)} = \gamma_2 E_n^{(2)}(q),$$

где  $E_n^{(1)}$  и  $E_n^{(2)}$  — нормальные компоненты электрического поля, вызванного всеми зарядами, расположенными вне этой поверхности и на ней, исключая точку  $q$ , поскольку по предположению заряд в окрестности этой точки отсутствует. Так как все эти заряды расположены на конечных расстояниях от точки  $q$ , то поле, вызванное ими, является непрерывной функцией на поверхности раздела, т. е.

$$E_n^{(1)}(q) = E_n^{(2)}(q).$$

Учитывая, что  $\gamma_1 \neq \gamma_2$ , приходим к выводу, что невозможно обеспечить непрерывность нормальной компоненты плотности тока в некоторой точке поверхности раздела, если в ее окрестности отсутствуют поверхностные заряды.

Таким образом, получены три формы второго уравнения поля плотности тока и все они выражают принцип сохранения заряда:

$$\oint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad j_n^{(2)} = j_n^{(1)}. \quad (\text{III.144})$$

Рассмотрим также один частный случай распределения тока: проводники в некотором месте соединены друг с другом, как показано на рис. III.7, *г*. Это часто наблюдается в электротехнической практике. Тогда, применяя уравнение (III.141) к поверхности  $S$ , окружающей точку соединения проводников, и учитывая, что поток плотности тока вне проводников исчезает, имеем

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \sum \int_{S_i} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \sum I_i = 0, \quad (\text{III.145})$$

где  $S_i$  — поперечное сечение  $i$ -го проводника, а  $I_i$  — ток в нем.

Как хорошо известно, уравнение (III.145) выражает первый закон Кирхгофа.

Теперь получим первое уравнение поля  $\mathbf{j}$ . Используя закон Ома, имеем

$$\operatorname{rot} \mathbf{j} = \operatorname{rot} \gamma \mathbf{E} = \gamma \operatorname{rot} \mathbf{E} + \nabla \gamma \times \mathbf{E}.$$

Поскольку  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ , то в регулярных точках среды

$$\operatorname{rot} \mathbf{j} = \operatorname{grad} \gamma \times \mathbf{E}. \quad (\text{III.146})$$

Таким образом, вихри поля  $\mathbf{j}$  расположены в местах, где электрическое поле имеет компоненту, перпендикулярную  $\operatorname{grad} \gamma$ .

Учитывая непрерывность тангенциальной компоненты электрического поля и закон Ома для поверхностного аналога уравнения (III.146), имеем

$$E_t^{(2)} = E_t^{(1)} = E_t$$

или

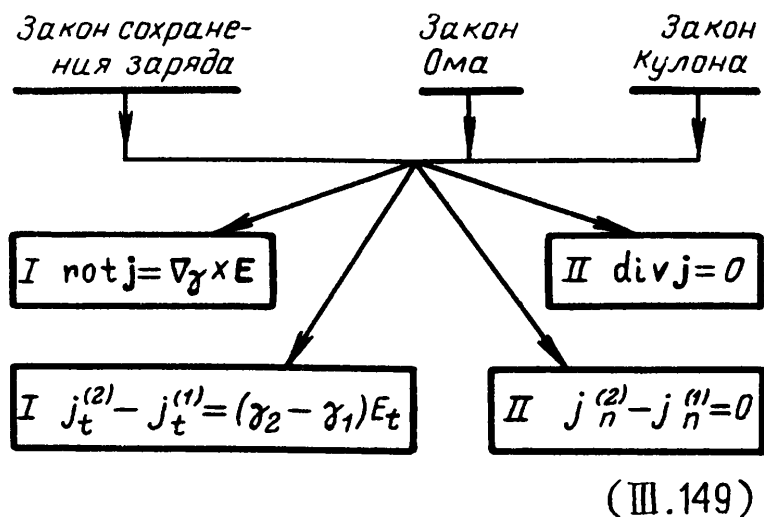
$$j_t^{(2)} / \gamma_2 = j_t^{(1)} / \gamma_1. \quad (\text{III.147})$$

Таким образом,

$$j_t^{(2)} - j_t^{(1)} = (\gamma_2 - \gamma_1) E_t, \quad (\text{III.148})$$

а правая часть этого уравнения характеризует распределение поверхностных вихрей.

В заключение представим систему уравнений поля плотности тока  $\mathbf{j}$  как



Исходя из закона Ома,

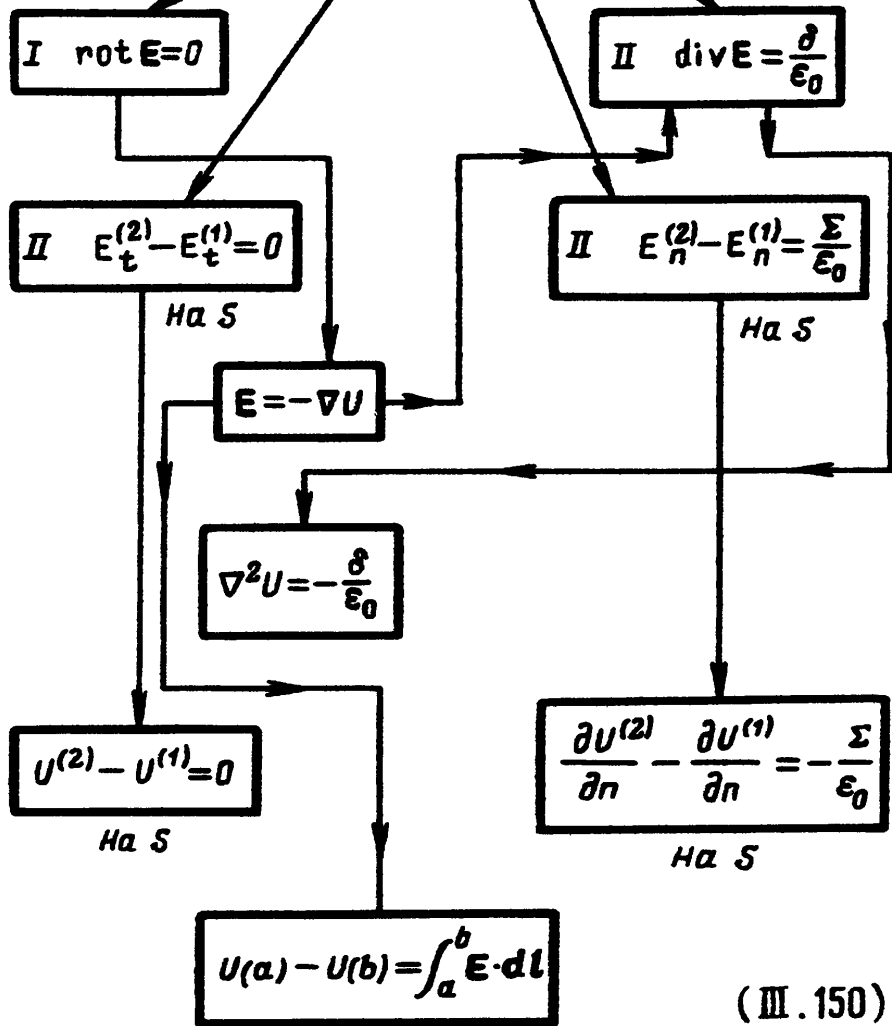
$$\mathbf{j} = -\gamma \operatorname{grad} U$$

и соответственно поле плотности тока является частным случаем вихревого поля, называемого квазипотенциальным полем (глава I).

Таким образом, в подводящей среде одновременно существуют два совершенно разных поля, а именно, электрическое поле, вызванное электрическими зарядами, и поле плотности тока, появляющееся благодаря электрическому полю. Поскольку во всех электрических методах прикладной геофизики изучение электрического поля в проводящей среде представляет большой практический интерес, далее в этой главе рассмотрим это поле более детально.

Учитывая, что поле  $\mathbf{E}$  вызывается только зарядами, используем результаты, полученные в предыдущем разделе. Ниже приведена система уравнений поля и потенциала.

## Закон Кулона



(III.150)

где  $\delta$  и  $E$  — суммарная плотность объемных и поверхностных зарядов, включающая как свободные, так и связанные заряды. В следующем разделе будет изучено их распределение.

### III.5. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЗАРЯДЫ В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

Теперь, когда мы обсудили принцип сохранения заряда, изучим распределение зарядов в проводящей среде, которое всегда сопровождается полем плотности тока. Используя закон Ома, получим для регулярных точек

$$\operatorname{div} j = \operatorname{div} \gamma E = \gamma \operatorname{div} E + E \cdot \operatorname{grad} \gamma = 0. \quad (\text{III.151})$$

Учитывая второе уравнение электрического поля  $\operatorname{div} E = \delta/\epsilon_0$  и подставляя его в уравнение (III.151), получаем выражение для объемной плотности зарядов:

$$\delta = -\epsilon_0 \frac{E \cdot \operatorname{grad} \gamma}{\gamma}. \quad (\text{III.152})$$

Таким образом, объемные заряды появляются только в тех местах, где электропроводность среды меняется и где направление



максимальной скорости ее изменения не перпендикулярно электрическому полю. В соответствии с уравнением (III.152) знак зарядов существенно зависит от угла между полем  $E$  и  $\text{grad } \gamma$ . Наиболее типичной моделью проводящей Земли, используемой в прикладной геофизике, является система однородных формаций, каждая из которых имеет различную электропроводность. В этом случае объемная плотность зарядов равна нулю.

Изучим теперь поверхностные заряды. Будем использовать поверхностный аналог второго уравнения (III.149):

$$j_n^{(2)} - j_n^{(1)} = 0.$$

Снова применяя закон Ома, представим это уравнение в следующем виде:

$$j_n^{(2)} - j_n^{(1)} = \gamma_2 E_n^{(2)} - \gamma_1 E_n^{(1)} = \frac{1}{2} [(\gamma_1 + \gamma_2)(E_n^{(2)} - E_n^{(1)}) + (\gamma_2 - \gamma_1)(E_n^{(2)} + E_n^{(1)})] = 0. \quad (\text{III.153})$$

Поскольку

$$E_n^{(2)} - E_n^{(1)} = \Sigma / \epsilon_0,$$

то из уравнения (III.153) следует, что

$$\Sigma(q) = 2\epsilon_0 \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} E_n^{\text{cp}}(q) = 2\epsilon_0 \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} E_n^{\text{cp}}(q), \quad (\text{III.154})$$

где  $E_n^{\text{cp}}(q)$  — среднее значение нормальной компоненты электрического поля в окрестности точки  $q$ :

$$E_n^{\text{cp}}(q) = (E_n^{(1)}(q) + E_n^{(2)}(q)) / 2.$$

Учитывая (III.13), имеем

$$E_n^{(1)}(q) = E_n^{s-q} - \Sigma(q) / 2\epsilon_0, \quad E_n^{(2)}(q) = E_n^{s-q} + \Sigma(q) / 2\epsilon_0,$$

где  $E_n^{s-q}$  — нормальная компонента, вызванная всеми зарядами, кроме расположенных в окрестности точки  $q$ . Далее получаем

$$E_n^{\text{cp}} = E_n^{s-q}. \quad (\text{III.155})$$

Таким образом, плотность поверхностных зарядов прямо пропорциональна коэффициенту контрастности:

$$K_{12} = (\rho_1 - \rho_2) / (\rho_2 + \rho_1), \quad (\text{III.156})$$

а нормальную компоненту  $E_n^{s-q}$  и уравнение (III.154) можно переписать в виде

$$\Sigma(q) = 2\epsilon_0 K_{12} E_n^{s-q}(q). \quad (\text{III.157})$$

Проведенное исследование показывает, что в случаях, наиболее часто встречающихся на практике, поле  $E$ , измеряемое в электрических методах, в основном вызывается зарядами, появляющи-

мися на границах раздела сред с разными удельными сопротивлениями. Этот факт является физической основой для применения электрических методов в геофизике.

Здесь уместно сделать два замечания.

1. В общем случае в окрестности любой точки проводящей среды естественно различать два типа зарядов:

А. Положительные и отрицательные заряды, например ионы в электролитах, образующие ток идвигающиеся в противоположных направлениях. В металлах, однако, в это движение включены только отрицательные заряды (электроны), в то время как положительные заряды остаются неподвижными. Существенно отметить, что в обоих случаях сумма всех зарядов в каждом элементарном объеме проводника равна нулю; как уже было отмечено, эти заряды не вносят вклад в электрическое поле.

Б. Объемные и поверхностные заряды, которые обычно появляются в окрестности точек, где проводящая среда неоднородна. Если электрическое поле остается постоянным, эти заряды также не меняются со временем и являются единственными источниками электрического поля.

2. Заряды, так же как электрическое поле и поле плотности тока, не появляются мгновенно. Всегда требуется какое-то время для их установления и в течение этого интервала времени поведение поля подчиняется законам электромагнетизма.

Теперь рассмотрим два примера, иллюстрирующие распределение зарядов.

### Пример 1. Токовый электрод в однородной среде

Предположим, что изолированный провод с током  $I$  связан с однородной средой посредством сферического электрода, показанного на рис. III.8, а. Удельные сопротивления электрода и окружающей среды равны  $\rho_0$  и  $\rho$  соответственно. Поскольку обе среды являются однородными, то объемные заряды отсутствуют, но существует поверхность раздела между электродом и окружающей средой, на которой появляются поверхностные заряды. Ясно, что благодаря сферической симметрии плотность тока и электрическое поле имеют только радиальную компоненту и в соответствии с уравнением (III.19)

$$E_r^{(2)} - E_r^{(1)} = \frac{\Sigma}{\epsilon_0}, \quad (\text{III.158})$$

где  $E_r^{(2)}$  и  $E_r^{(1)}$  — радиальные компоненты электрического поля на передней и задней сторонах поверхности электрода соответственно, в то время как  $\Sigma$  — суммарная плотность зарядов на этой поверхности.

Учитывая непрерывность нормальной компоненты плотности тока (III.143) и закон Ома, получаем

$$\rho j_r^{(2)} - \rho_0 j_r^{(1)} = (\rho - \rho_0) j_r = \Sigma / \epsilon_0,$$

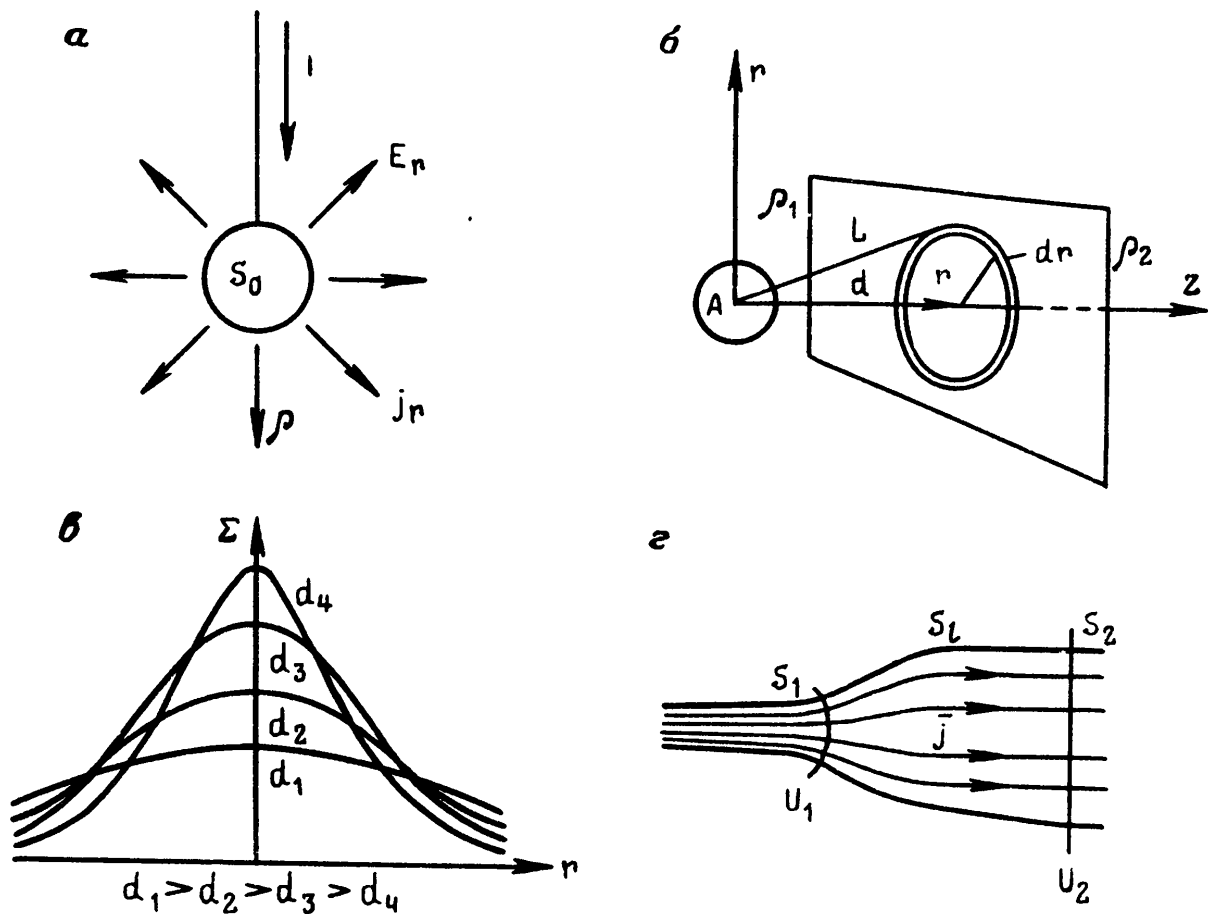


Рис. III.8. Токовый электрод в однородной среде (а); пояснение к вычислению плотности заряда (б); распределение зарядов как функция радиуса (в); токовая трубка (г)

или

$$\Sigma = \varepsilon_0 (\rho - \rho_0) j_r. \quad (\text{III.159})$$

Таким образом, суммарный заряд поверхности электрода

$$e = \int_S \Sigma dS = \varepsilon_0 (\rho - \rho_0) \int_S j_r dS$$

или

$$e = \varepsilon_0 (\rho - \rho_0) I, \quad (\text{III.160})$$

так как весь ток  $I$ , проходящий с провода, выходит через поверхность электрода, за исключением места соединения провода с электродом. В соответствии с законом Кулона этот заряд создает электрическое поле только с радиальной компонентой и его величина может быть представлена в виде

$$E(\rho) = \frac{\rho - \rho_0}{4\pi} \frac{I}{L_{0\rho}^2},$$

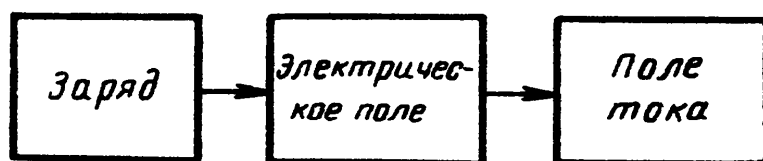
где  $L_{0\rho}$  — расстояние от центра электрода до точки наблюдения  $\rho$ . Поскольку удельное сопротивление среды обычно на несколько порядков больше удельного сопротивления электрода, т. е.  $\rho \gg \rho_0$ , то можно записать

$$e = \varepsilon_0 \rho I \quad \text{и} \quad E(\rho) = \rho I / 4\pi L_{0\rho}^2. \quad (\text{III.161})$$

Таким образом, мы показали, что заряд, расположенный на поверхности электрода и окруженный проводящей средой, создает в точности такое же поле, что и заряд, расположенный в свободном пространстве. Также очевидно, что под действием этого поля независимо от расстояния от электрода, ионы в породах движутся вдоль поля, а плотность тока

$$j = \gamma E = I / 4\pi L_{0\rho}^2. \quad (\text{III.162})$$

Конечно, этот результат прямо следует из симметрии и того факта, что весь ток  $I$  проходит через сферическую поверхность с центром  $O$ , расположенным в середине электрода. По существу были описаны оба поля  $E$  и  $j$  и снова проиллюстрирована известная взаимосвязь:



Очевидно, что потенциал электрического поля имеет вид

$$U(\rho) = \rho I / 4\pi L_{0\rho} \quad (\text{III.163})$$

и, соответственно, эквипотенциальные поверхности являются сферическими, включая поверхность электрода. Таким образом, разность потенциалов, т. е. напряжение между двумя произвольными точками

$$U(a) - U(b) = \frac{\rho I}{4\pi} \left[ \frac{1}{L_{0a}} - \frac{1}{L_{0b}} \right]. \quad (\text{III.164})$$

Теперь разрешим один парадокс. Как следует из уравнения (III.160), заряд на поверхности электрода определяется током  $I$  и удельным сопротивлением среды  $\rho$  ( $\rho \gg \rho_0$ ), но не зависит от ее диэлектрической постоянной. Это означает, что если диэлектрическая постоянная среды меняется, то заряд  $e$  и тем самым электрическое поле  $E$  остаются неизменными. В то же время выражение для плотности (III.159) включает как свободные, так и связанные заряды, и, как было показано в предыдущем разделе, связанные заряды зависят от диэлектрической постоянной. Кажется, что два эти факта противоречат друг другу. Однако, в отличие от изоляторов в проводящей среде, как свободные, так и связанные заряды являются объектом воздействия диэлектрической постоянной и это влияет на заряды таким образом, что суммарная плотность их  $\Sigma$  становится независимой от  $\varepsilon$ .

Покажем это интересное явление наглядно, предположив, что удельное сопротивление электрода мало. Тогда вместо уравнения (III.159) имеем

$$\Sigma = \varepsilon_0 \rho j_r, \quad (\text{III.165})$$

где  $\Sigma = \Sigma_0 + \Sigma_b$  — сумма свободных и связанных зарядов.

Выразим каждый тип заряда через плотность тока  $j_r$  и электрические параметры  $\rho$  и  $\varepsilon$ . В соответствии с уравнением (III.121) имеем для свободных зарядов:

$$\Sigma_0 = \varepsilon_r^{\text{сп}} \Sigma + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) E_r^{\text{сп}},$$

где  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  — диэлектрические постоянные материала электрода и окружающей среды соответственно.

Используя уравнение (III.165), получаем

$$\Sigma_0 = \varepsilon^{\text{сп}} \rho j_r + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) E_r^{\text{сп}}$$

или

$$\Sigma_0 = \varepsilon^{\text{сп}} \rho j_r + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \frac{\rho}{2} j_r = \varepsilon_2 \rho j_r, \quad (\text{III.166})$$

поскольку  $E_r^{\text{сп}} = \rho j_r / 2$ . (III.167)

Таким образом, плотность свободных зарядов зависит только от диэлектрической постоянной окружающей среды. Однако существуют еще связанные заряды и, как следует из (III.122), можно определить

$$\Sigma_b = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon^{\text{сп}}} E_r^{\text{сп}} + \frac{(\varepsilon_0 - \varepsilon^{\text{сп}})}{\varepsilon^{\text{сп}}} \Sigma_0.$$

Или, учитывая уравнения (III.161), (III.167), получаем

$$\begin{aligned} \Sigma_b &= \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon^{\text{сп}}} \frac{\rho j_r}{2} + \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon^{\text{сп}}}{\varepsilon^{\text{сп}}} \varepsilon_2 \rho j_r = \\ &= \frac{\rho j_r}{2\varepsilon^{\text{сп}}} [\varepsilon_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + 2(\varepsilon_0 - \varepsilon^{\text{сп}}) \varepsilon_2] = \frac{\rho j_r}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} [\varepsilon_0 \varepsilon_1 + \\ &+ \varepsilon_0 \varepsilon_2 - 2\varepsilon_2 \varepsilon^{\text{сп}}] = \frac{\rho j_r}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} [\varepsilon_0 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \varepsilon_2] = \\ &= \rho j_r (\varepsilon_0 - \varepsilon_2). \end{aligned}$$

Следовательно,  $\Sigma = \Sigma_0 + \Sigma_b = \varepsilon_0 \rho j_r$ . (III.168)

Таким образом, плотности свободных и связанных зарядов испытывают влияние диэлектрической постоянной окружающей среды, но плотность суммарного заряда, определяющего электрическое поле, зависит только от удельного сопротивления среды данному току. Легко видеть, что этот результат прямо применим к произвольной среде и произвольному расположению токовых электродов. Тот факт, что электрическое поле в проводящей среде не зависит от ее диэлектрической постоянной, имеет большое значение для использования электрических методов в геофизике.

**Пример 2.** Наведенные заряды на плоской поверхности раздела

Предположим, что токовый электрод  $A$  окружен проводящей средой с удельным сопротивлением  $\rho_1$ , а на расстоянии  $d$  нахо-

дится плоская граница с другой средой с удельным сопротивлением  $\rho_2$  (рис. III.8, б). Ток, текущий через электрод, равен  $I$ . Как нам уже известно, на поверхности электрода и на границе раздела появляются заряды и вместе они определяют электрическое поле в каждой точке среды. Ограничимся изучением лишь распределения зарядов. В соответствии с уравнением (III.160), заряд на поверхности электрода имеет величину

$$e_A = \varepsilon_0 \rho_1 I \quad \text{при} \quad \rho_0 \ll \rho_1.$$

Для вычисления зарядов на плоской поверхности раздела воспользуемся уравнением (III.157)

$$\Sigma(q) = 2\varepsilon_0 K_{12} E_n^{s-q}, \quad (\text{III.169})$$

где  $K_{12} = (\rho_2 - \rho_1) / (\rho_2 + \rho_1)$ , а  $E_n^{s-q}$  — нормальная компонента поля, вызванная всеми зарядами, за исключением заряда в окрестности точки  $q$ . Поскольку поверхность раздела является плоской, то это сильно упрощает дальнейшие рассуждения. Как прямо следует из закона Кулона, все наведенные заряды на этой поверхности, расположенные вне точки  $q$ , не создают нормальную компоненту поля в этой точке. Другими словами,  $E_n^{s-q}$  определяется только зарядом на поверхности электрода:

$$E_n^{s-q} = E_n.$$

Выберем цилиндрическую систему координат с началом в центре малого сферического электрода  $A$  и с осью  $z$ , перпендикулярной к поверхности раздела (рис. III.8, б). Тогда в соответствии с законом Кулона нормальная компонента поля в любой точке границы представляется следующим образом:

$$E_n = \frac{e}{4\pi \varepsilon_0 L^2} \frac{d}{L} = \frac{e_A d}{4\pi \varepsilon_0 (r^2 + d^2)^{3/2}}, \quad (\text{III.170})$$

где  $r$  и  $d$  — цилиндрические координаты точки  $q$ .

Соответственно, для поверхностной плотности  $\Sigma$  имеем

$$\Sigma(q) = \frac{K_{12} e_A}{2\pi} \frac{d}{(r^2 + d^2)^{3/2}}. \quad (\text{III.171})$$

Как следует из этого уравнения, максимальная плотность наблюдается в окрестности точки  $r = 0$ , а затем уменьшается с увеличением  $r$ . Сначала, когда  $r < d$ , плотность уменьшается медленно; но позже, когда расстояние  $r$  превосходит  $d$ , этот процесс происходит очень быстро и уменьшается почти как  $1/r^3$ . Из (III.171) также следует, что чем ближе электрод  $A$  подходит к поверхности раздела, тем больше становится плотность в окрестности точки  $r = 0$  и тем быстрее она уменьшается с увеличением  $r$  (рис. III.8, в). Когда токовый электрод расположен на поверхности раздела, плот-

ность в точке  $r = 0$ ,  $z = 0$  стремится к бесконечности и исчезает в других точках.

Теперь вычислим суммарный наведенный заряд на плоской поверхности раздела. Сначала удобно, используя осевую симметрию, вычислить элементарный заряд  $de_s$ , наведенный на кольце радиуса  $r$  и толщины  $dr$ . Так как его площадь

$$dS = 2\pi r dr,$$

имеем

$$de_s = \sum dS = K_{12} e_A d \frac{rdr}{(r^2 + d^2)^{3/2}}.$$

Интегрируя это выражение по переменной  $r$  от нуля до бесконечности, получаем

$$e_s = K_{12} e_A d \int_0^{\infty} \frac{rdr}{(r^2 + d^2)^{3/2}} = K_{12} e_A.$$

Таким образом, суммарный заряд, появляющийся на поверхности раздела, есть величина

$$e_s = K_{12} e_A, \quad (\text{III.172})$$

не зависящая от расстояния от токового электрода до поверхности раздела, влияющего только на распределение зарядов на поверхности. С приближением электрода к поверхности наведенные заряды в основном сосредотачиваются вблизи точки  $r = 0$ . В пределе, когда  $d$  стремится к нулю, заряды  $e_A$  и  $e_s$  располагаются на электроде и их суммарный заряд равен

$$e = e_A + e_s = (1 + K_{12}) e_A, \quad (\text{III.173})$$

в то время как заряд на поверхности раздела пропадает.

В соответствии с уравнением (III.156) коэффициент  $K_{12}$  меняется в пределах

$$-1 \leq K_{12} \leq 1$$

и, следовательно, поверхностный заряд  $e_s$  не может превосходить величину заряда электрода  $e_A$ . Если среда, в которой расположен электрод, является более проводящей, тогда заряды  $e_A$  и  $e_s$  имеют один и тот же знак; в противоположном случае, когда  $\rho_1 > \rho_2$ , они имеют разные знаки. Если вторая среда является либо идеальным проводником ( $\rho_2 = 0$ ), либо изолятором ( $\rho_2 = \infty$ ), то поверхностный заряд равен, соответственно,  $-e_A$  и  $e_A$ . Таким образом, если электрод расположен на поверхности раздела с изолятором, таким как воздух, его заряд удваивается и становится равным

$$e_A = 2\varepsilon_0 \rho_1 I. \quad (\text{III.174})$$

Во всех электрических методах, где токовые электроды расположены на поверхности Земли, их заряды определяются из уравнения (III.174).

### III.6. СОПРОТИВЛЕНИЕ

В этом разделе продолжим изучение электрического поля, поля плотности тока и взаимосвязи между ними. Учитывая, что в геофизике, в отличие от электроники, мы в основном имеем дело с объемными проводниками, подробно обсудим концепцию сопротивления.

Рассмотрим произвольный элемент токовой трубки  $C$ , ограниченный двумя поперечными сечениями  $S_1$  и  $S_2$  и боковой поверхностью  $S_l$  (рис. III.8,  $z$ ). В соответствии с уравнением (III.164) разность потенциалов или напряжение между двумя эквипотенциальными поверхностями  $S_1$  и  $S_2$

$$V_{12} = U(1) - U(2) = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{III.175})$$

или

$$V_{12} = U(1) - U(2) = \int_1^2 \rho \mathbf{j} \cdot d\mathbf{l}.$$

Очевидно, что, поскольку электрическое поле является безвихревым полем, интеграл в правой части уравнения (III.175) не зависит от пути и интегрирование может быть выполнено вдоль любого пути  $l$ , конечные точки которого лежат на поверхностях  $S_1$  и  $S_2$ . Вдоль тех токовых линий  $l$ , которые длиннее и проходят через области среды с более высоким удельным сопротивлением, значение плотности тока меньше, чем вдоль более коротких линий, проходящих через более проводящие области (рис. III.9,  $a$ ). Другими словами, в общем случае плотность тока распределена по поперечному сечению токовой трубки неравномерно.

Представим уравнение (III.175) как

$$U(1) - U(2) = IR_{12}, \quad (\text{III.176})$$

где

$$R_{12} = \int_1^2 \rho \frac{\mathbf{j} \cdot d\mathbf{l}}{I}, \quad (\text{III.177})$$

а  $R_{12}$  называется сопротивлением элемента токовой трубки  $C$  току, идущему с поверхности  $S_1$  на  $S_2$ . Ясно, что размерность  $R$  есть  $[R] = \text{Ом}$ . Теперь сделаем несколько комментариев, проливающих свет на понятие сопротивления.



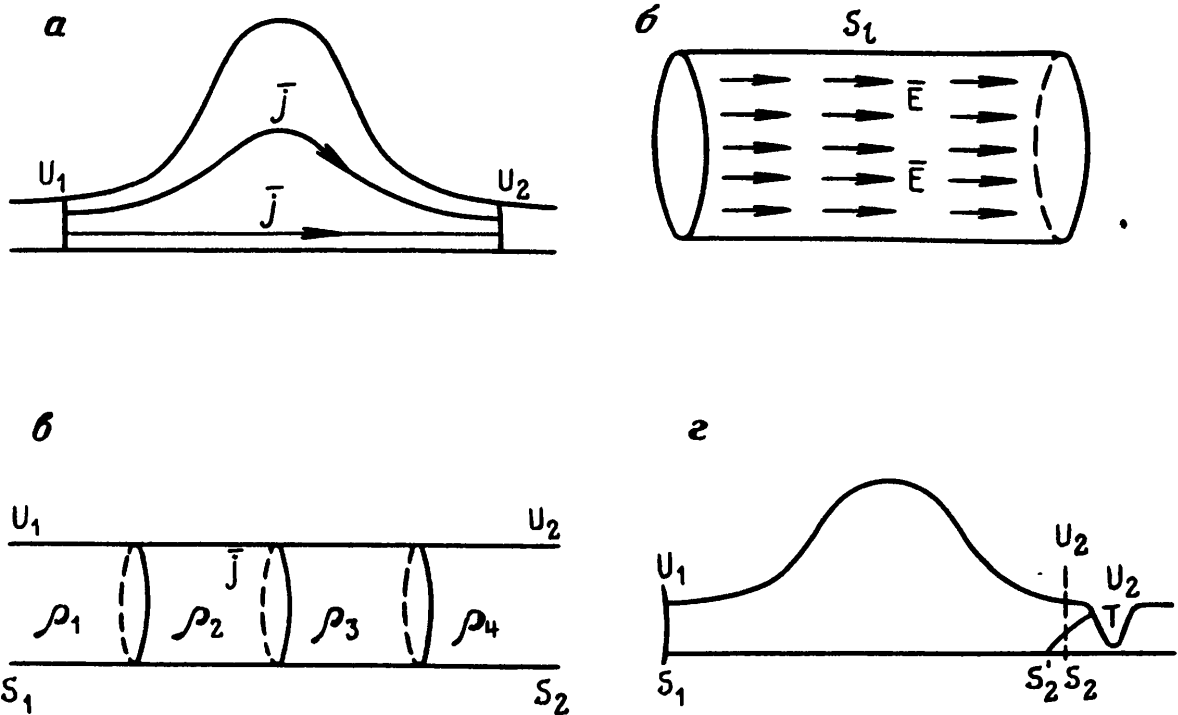


Рис. III.9. Распределение плотности тока в проводнике (а); электрическое поле в однородном цилиндре (б); система однородных цилиндров (в); изменение положения эквипотенциальной поверхности (г)

1. Сопротивление всегда положительно. Когда путь интегрирования  $l$  показывает направление от  $S_1$  к  $S_2$ , предполагается, что  $I > 0$ . Если выбрано противоположное направление, то необходимо изменить знак тока.

2. Сопротивление  $R_{12}$ , определенное уравнением (III.177), имеет физический смысл, если только обе поверхности  $S_1$  и  $S_2$  эквипотенциальные, а  $S_l$  является боковой поверхностью токовой трубки. В самом деле, предположим, что поверхность  $S$  не является эквипотенциальной. Тогда при изменении положения точки «1» на этой поверхности напряжение  $u$ , тем самым, интегральное сопротивление проводника  $S$  тоже должно измениться и величина  $R_{12}$  становится бессмысленной. Это также может случиться, если поверхность  $S_l$  не является боковой, так как в этом случае ток  $I$  зависит от поперечного сечения  $S$  проводника, в то время как в (III.177) предполагается, что ток  $I$  — величина постоянная.

3. Как следует из (III.177), функция  $R_{12}$  характеризует способность проводника  $S$  сопротивляться прохождению тока. Численно она равна разнице потенциалов  $U(1) - U(2)$  при силе тока, равной единице.

4. Для нахождения параметров, определяющих сопротивление  $R_{12}$ , применим теорему единственности. При этом предположим, что проводник однородный. Далее, однако, будет показано, что наши выводы остаются справедливыми даже в общем случае, когда сопротивление произвольно меняется внутри проводника.

Ясно, что потенциал электрического поля удовлетворяет следующим условиям:

а)  $U$  является решением уравнения Лапласа внутри однородного проводника

$$\nabla^2 U = 0;$$

б) на боковой поверхности  $S_1$  нормальная компонента электрического поля равна нулю, поэтому

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad S_1;$$

в) на эквипотенциальных поперечных сечениях  $S_1$  и  $S_2$  потенциалы таковы, что

$$\frac{1}{\rho} \int_{S_1} \frac{\partial U}{\partial n} dS = -I, \quad \frac{1}{\rho} \int_{S_2} \frac{\partial U}{\partial n} dS = -I.$$

Как следует из теоремы единственности, все три условия однозначно определяют электрическое поле  $E$  внутри проводника  $C$ . Другими словами, может существовать только одно распределение поля при заданном токе. Предположим, что ток равен  $I_1$ , соответственно электрическое поле есть  $E_1$  и оно удовлетворяет всем трем условиям. Теперь увеличим ток в  $m$  раз, т. е. положим  $I_2 = m I_1$ . Легко видеть, что это изменение приводит к увеличению значения электрического поля тоже в  $m$  раз в каждой точке проводника, но не меняет его направления. Новое поле

$$E_2 = m E_1.$$

Действительно, потенциал поля  $E_2$  есть величина

$$U_2 = m U_1,$$

а  $U_2$ , как и  $U_1$ , является решением уравнения Лапласа.

В то же время это поле удовлетворяет краевым условиям на боковой поверхности и поперечных сечениях, так как

$$\frac{\partial U_2}{\partial n} = m \frac{\partial U_1}{\partial n}.$$

Таким образом, в соответствии с теоремой единственности можно сказать, что функция  $E_2$  описывает электрическое поле в проводнике  $C$ , если ток, проходящий через его поперечное сечение, равен  $I_2$ . Этот анализ показывает, что отношения

$$E/I \quad \text{или} \quad \rho j/I$$

не зависят от величины тока. Другими словами, поле вектора  $j/I$  в объеме  $V$  целиком определяется его границами  $S_l$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  и распределением удельного сопротивления  $\rho$ . Таким образом, в соответствии с уравнением (III.177) сопротивление  $R$  проводника  $C$  полностью определяется его размерами, формой и удельным сопротивлением. Оно не зависит от тока и любых изменений в

других частях цепи, если поверхности  $S_1$  и  $S_2$  остаются эквипотенциальными. Это означает, что при определении сопротивления  $R_{12}$  подразумевается такой способ введения тока в электрическую цепь, при котором сохраняется постоянный потенциал на этих поверхностях.

5. Для определения сопротивления необходимо знать поле плотности тока и, в общем случае, это непростая проблема, связанная с решением краевой задачи.

6. Уравнение (III.176) является интегральной формой закона Ома. Таким образом, получены две формы этого закона:

$$\mathbf{i} = \gamma \mathbf{E} \quad \text{и} \quad U(1) - U(2) = R_{12} I.$$

Как будет показано в следующем разделе, эти уравнения справедливы только для так называемых внешних частей электрической цепи.

7. Если вектор  $\mathbf{j}$  имеет одинаковые значения на каждом поперечном сечении проводника, перпендикулярном току, то

$$\mathbf{j} \cdot d\mathbf{l}/I = j dl/I = dl/S$$

и

$$R_{12} = \int_1^2 \rho \frac{dl}{S}. \quad (\text{III.178})$$

В частности, если проводник однородный, то

$$R_{12} = \rho \int_1^2 \frac{dl}{S}. \quad (\text{III.179})$$

Следует отметить, что уравнения (III.178), (III.179) могут использоваться, если только известна геометрия поля плотности тока, так как  $S$  являются сечениями проводника, перпендикулярными вектору  $\mathbf{j}$ .

8. Предположим, что проводник  $C$  является однородным цилиндром произвольной формы, ограниченным боковой поверхностью и двумя поперечными сечениями  $S_1$  и  $S_2$  (рис. III.9, б). В этом случае поведение электрического поля необычайно простое; а именно, оно постоянно внутри проводника и направление поля касательно к его боковой поверхности. В самом деле, потенциал такого поля является линейной функцией и поэтому удовлетворяет как уравнению Лапласа, так и краевым условиям

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad S_l$$

и

$$\gamma \int_{S_1} \frac{\partial U}{\partial n} dS = \gamma \int_{S_2} \frac{\partial U}{\partial n} dS = -I.$$

Таким образом, в соответствии с теоремой единственности эта функция  $E$  является однородным электрическим полем. Соответственно можно заключить, что плотность тока также однородна, а выражение для интегрального сопротивления (III.179) сильно упрощается:

$$R_{12} = \rho \frac{l}{S}, \quad (\text{III.180})$$

где  $l$  и  $S$  — соответственно длина и поперечное сечение цилиндра.

Как следует из предыдущего раздела, электрическое поле  $E$  внутри однородного цилиндра вызывается зарядами, расположенными на его поверхности. Они распределены таким образом, что электрическое поле и поле плотности тока однородны и параллельны боковым поверхностям.

Часто проводник состоит из нескольких частей и каждая из них является однородным цилиндром с длиной, значительно превосходящей размеры его поперечного сечения. Такие элементы цепи называются квазилинейными, а их сопротивление можно вычислить из (III.180) (рис. III.9, в).

9. Ясно, что если удельное сопротивление  $\rho$  цилиндра неизменно на каждом из поперечных сечений, но меняется вдоль проводника, то поле плотности тока  $j$  остается однородным и касательным к боковой поверхности  $S_r$ . В то же время электрическое поле меняется вдоль цилиндра, но остается постоянным на каждом поперечном сечении и прямо пропорциональным удельному сопротивлению:

$$E = \rho j = \rho \frac{I}{S}.$$

Соответственно, вместо (III.178) имеем следующее выражение для сопротивления цилиндрического проводника, ограниченного эквипотенциальными поверхностями  $S_1$  и  $S_2$ :

$$R_{12} = \frac{1}{S} \int_1^2 \rho dl. \quad (\text{III.181})$$

10. Как подчеркивалось ранее, сопротивление проводника  $C$  имеет смысл, если поверхности  $S_1$  и  $S_2$  — эквипотенциальны независимо от любых изменений в других частях цепи. В то же время совсем нетрудно провести такие изменения вне проводника  $C$ , которые приведут к изменению потенциала на поверхностях  $S_1$  и  $S_2$  или на одной из них.

Например, введем неоднородность  $T$ , показанную на рис. III.9, г. Как нам известно, на ее поверхности появляются электрические заряды, создающие поле, которое, конечно, не перпендикулярно поверхности  $S_2$ . Также ясно, что при приближении неоднородно-

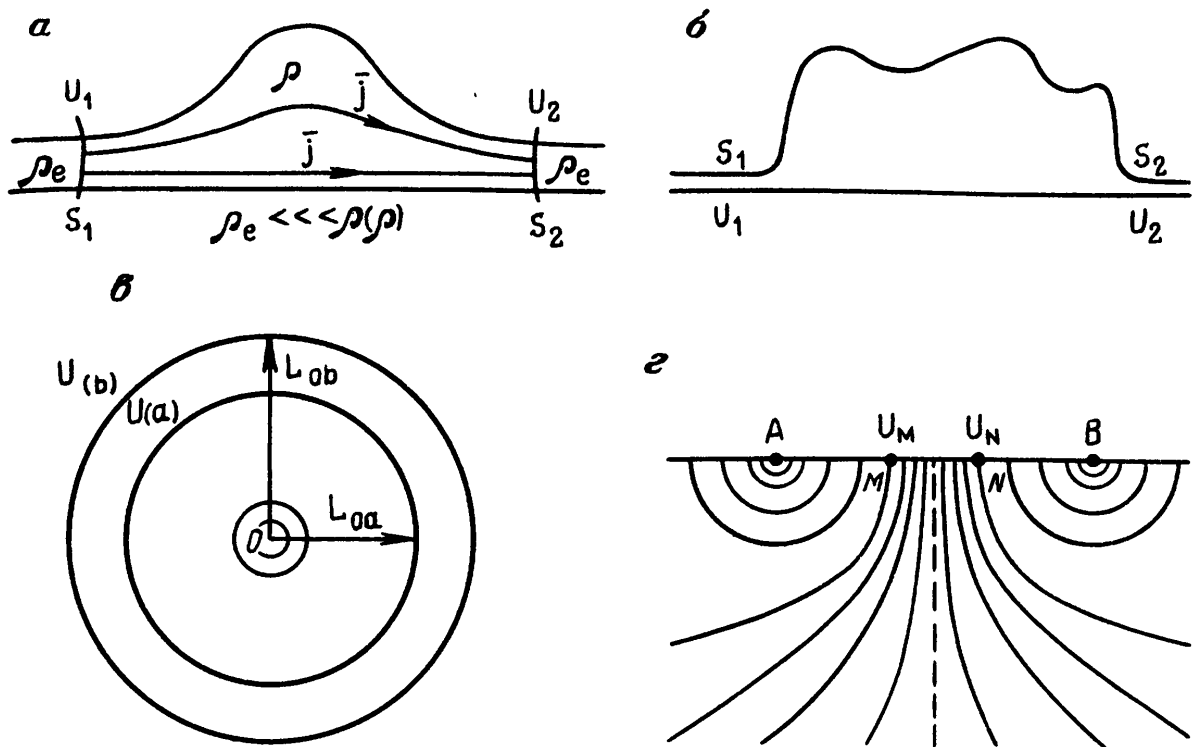


Рис. III.10. Сопротивление объема при наличии контакта его поперечного сечения: *a* — с очень проводящей средой, *б* — с квазилинейными проводниками; пояснение к вычислению сопротивления заземления (*в*); распределение потенциала в однородном полупространстве (*г*)

сти к  $S_2$  ее влияние становится сильнее. Однако существуют случаи, когда поверхности  $S_1$  и  $S_2$  могут быть только эквипотенциальными. Например, это происходит, если они являются или поверхностями идеальных проводников, или поперечными сечениями линейной части цепи, как показано на рис. III.10, *a*, *б*. Конечно, этот вывод остается практически верным и в тех случаях, когда объем  $V$  ограничен проводниками, имеющими высокую электропроводность.

Теперь рассмотрим три примера, иллюстрирующие понятие сопротивления.

### Пример 1. Сопротивление заземления сферического электрода

В предыдущем разделе было показано, что электрическое поле, вызванное зарядом на поверхности электрода, обладает сферической симметрией, а его потенциал в любой точке  $p$

$$U(p) = \rho I / 4\pi L_{0p}. \quad (III.182)$$

Рассмотрим две сферические эквипотенциальные поверхности с радиусами  $L_{0a}$  и  $L_{0b}$  соответственно (рис. III.10, *в*). Разность потенциалов между ними

$$U(a) - U(b) = \frac{\rho I}{4\pi} \left[ \frac{1}{L_{0a}} - \frac{1}{L_{0b}} \right],$$

*a* интегральное сопротивление сферического слоя

$$R_{ab} = \frac{U(a) - U(b)}{I} = \frac{\rho}{4\pi} \left[ \frac{1}{L_{0a}} - \frac{1}{L_{0b}} \right]. \quad (\text{III.183})$$

Оно существенно зависит от толщины слоя, расстояния от электрода и, конечно, от удельного сопротивления  $\rho$ .

Если мысленно представить всю среду вокруг электрода как систему сферических слоев с центром в точке  $O$  (рис. III.10, в) и учесть, что ток  $I$  проходит через все эти слои, то можно сказать, что они соединены параллельно. Сопротивление всей однородной среды току, который течет с электрода, можно представить следующим образом:

$$R_e = \frac{\rho}{4\pi} \left[ \frac{1}{a} - \frac{1}{L_{01}} + \frac{1}{L_{01}} - \frac{1}{L_{02}} + \frac{1}{L_{02}} - \frac{1}{L_{03}} + \frac{1}{L_{03}} - \dots \right]$$

или

$$R_e = \rho/4\pi a, \quad (\text{III.184})$$

где  $a$  — радиус электрода.

Обычно  $R_e$  называют электродным сопротивлением или сопротивлением заземления. Оно никоим образом не характеризует сопротивление материала электрода или сопротивление поверхности между электродом и средой, так как влияние обоих этих факторов очень незначительно. Напротив, сопротивление заземления показывает, как все пространство сопротивляется току, покидающему электрод. (Это очень полезное понятие.)

В соответствии с уравнением (III.184) электродное сопротивление строго возрастает с уменьшением его радиуса. Подобное поведение вполне естественно, поскольку с уменьшением площади поверхности электрода в его окрестности возрастает плотность тока и, соответственно, потенциал уменьшается быстрее вблизи электрода.

Подставляя в уравнение (III.183)  $L_{0a} = a$ , представим сопротивление сферического слоя, ограниченного поверхностью электрода и сферической поверхностью радиуса  $L_{0b}$ , как

$$R = R_e \left( 1 - \frac{a}{L_{0b}} \right). \quad (\text{III.185})$$

Последнее уравнение показывает, что если  $L_{0b} \gg a$ , то сопротивление этой части среды отличается очень незначительно от сопротивления заземления. Например, если  $L_{0b} = 10a$ , то сферический слой вокруг электрода вносит 90% от  $R_e$ , обычно же в прикладной электроразведке толщина подобного слоя не превосходит 1—2 м. Это соображение позволяет понять, что в большинстве случаев применение двухэлектродной расстановки в электрических методах бесполезно. В следующем разделе мы вернемся к этой теме.

Понятие сопротивления заземления было рассмотрено для слу-

чая сферического электрода, помещенного в однородную среду. Конечно, сопротивление заземления появляется и тогда, когда среда неоднородна, а электрод имеет произвольную форму. В частности, если благодаря электрохимическим процессам вокруг поверхности электрода существует тонкий слой с относительно высоким удельным сопротивлением, то он может дать основной вклад в сопротивление заземления.

## Пример 2. Влияние сопротивления заземления на измерение напряжения

До сих пор предполагалось, что электрод является частью цепи, подающей ток  $I$  в проводящую среду. Теперь рассмотрим роль сопротивления заземления при измерении напряжения. Предположим, что требуется определить разность потенциалов между точками  $M$  и  $N$ , расположенными на поверхности Земли:

$$V_{MN} = U_M - U_N.$$

Распределение поля плотности тока и эквипотенциальные поверхности показаны на рис. III.10, г. Для нахождения напряжения в проводящей среде установим в окрестности точек  $M$  и  $N$  два электрода, связанные друг с другом устройством, измеряющим напряжение (вольтметром).

Здесь уместно сделать одно замечание, а именно, что вольтметр измеряет значение интеграла

$$\int_M^N \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (\text{III.186})$$

В то же время напряжение можно описать с помощью разности потенциалов  $U_M - U_N$ .

Поскольку интеграл в уравнении (III.186) не зависит от пути интегрирования, его можно переписать:

$$V_{MN} = \int_M^N E dl, \quad (\text{III.187})$$

где  $E$  — компонента поля, направленная вдоль прямой линии между этими электродами. Очень часто расстояние  $MN$  достаточно мало и можно предполагать, что электрическое поле не меняется внутри этого интервала. Тогда уравнение (III.187) упрощается:

$$V_{MN} = E M N$$

и измеренное значение напряжения электрического поля легко вычисляется.

Теперь продолжим описание распределения потенциала в проводящей среде в присутствии измерительных электродов  $M$  и  $N$ . Как видно из рис. III.10, г, измерительная цепь параллельно свя-

зана с проводящей средой. Вблизи электродов  $M$  и  $N$  одна часть тока идет через эту цепь, в то время как другая часть проходит через проводящую среду. В предыдущем разделе было показано, что если поле плотности тока  $j$  пересекает границу между средами с разными удельными сопротивлениями, то появляются поверхностные заряды. Таким образом, отрицательные и положительные заряды появляются соответственно на поверхностях электродов  $M$  и  $N$ . Это означает, что благодаря току в измерительной цепи потенциал электрода  $M$  уменьшается, увеличиваясь в то же время для электрода  $N$ . Другими словами, присутствие связанных друг с другом измерительных электродов приводит к искажению эквипотенциальных поверхностей в их окрестностях (рис. III.11, а):

$$V_{MN}^* = U_M^* - U_N^* \neq V_{MN} = U_M - U_N, \quad (\text{III.188})$$

где  $U_M^*$  и  $U_N^*$  — потенциалы электродов  $M$  и  $N$  при токе, проходящем через измерительную цепь. Таким образом, в окрестности электродов, когда ток течет из среды к линейному проводнику или, наоборот, наблюдается относительно сильное уменьшение потенциала:

$$U_M - U_M^* \text{ и } U_N^* - U_N.$$

По определению сопротивления (III.176) эти разности можно представить в виде

$$U_M - U_M^* = I_r R_M, \quad U_N^* - U_N = I_r R_N, \quad (\text{III.189})$$

где  $I_r$  — ток в измерительной цепи;  $R_M$  и  $R_N$  — сопротивления заземления электродов  $M$  и  $N$  соответственно, обычно неизвестные. Складывая эти уравнения, получаем

$$U_M - U_N - (U_M^* - U_N^*) = I_r (R_M + R_N)$$

или

$$V_{MN} - V_{MN}^* = I_r (R_M + R_N). \quad (\text{III.190})$$

Таким образом, напряжение  $V_{MN}^*$ , которое является входным для измерительной цепи, и напряжение  $V_{MN}$ , характеризующее поле в проводящей среде, отличаются друг от друга, а их разность пропорциональна сумме сопротивлений заземления.

По этой причине необходимо учитывать влияние сопротивления заземления. По существу, эта задача составляет основу всех методов измерения напряжения в проводящей среде. Для иллюстрации коротко обсудим два таких метода.

### *Первый метод*

Предположим на минуту, что при измерении входного напряжения  $U_{MN}^*$  ток через электроды  $I_r$  равен нулю. Тогда в соответствии с уравнением (III.190) влияние сопротивления заземления пропадает:



$$V_{MN}^* = V_{MN}. \quad (\text{III.191})$$

Для достижения такой компенсации у измерительной цепи есть источник другого тока  $I_c$ , который в момент измерения имеет такую же величину, как  $I_r$ , но противоположное направление. Поэтому этот метод называется методом компенсации.

### *Второй метод*

Представим входное напряжение  $V_{MN}^*$  в виде

$$V_{MN}^* = I_r R,$$

где  $R$  — суммарное сопротивление измерительной цепи, включающее сопротивление провода  $R_\omega$  и внутреннее сопротивление вольтметра:

$$R = R_\omega + R_i.$$

Тогда уравнение (III.190) можно переписать:

$$V_{MN} = I_r (R_i + R_\omega + R_M + R_N), \quad (\text{III.192})$$

где  $I_r R_i$  — напряжение между конечными точками вольтметра.

Если сопротивление  $R_i$  выбрано так, что неравенство

$$R_i \gg R_M + R_N + R_\omega$$

выполняется в диапазоне возможного изменения сопротивления заземления, то

$$V_{MN} = I_r R_i. \quad (\text{III.193})$$

Таким образом, напряжение, измеренное вольтметром, практически равно разности потенциалов между точками  $M$  и  $N$ , так как влияние сопротивления заземления отсутствует. Использование вольтметров с высоким внутренним сопротивлением по существу позволяет исключить эффект  $R_M$  и  $R_N$ .

### **Пример 3. Трехэлектродная расстановка**

Рассмотрим расстановку, состоящую из одного токового электрода  $A$  и двух измерительных электродов  $M$  и  $N$ , помещенных вдоль одной линии (рис. III.11, б). Поскольку через электрод  $A$  проходит ток  $I_A$ , то на его поверхности появляется заряд

$$e_A = \epsilon_0 \rho I_A,$$

который создает в проводящей среде первичное электрическое поле:

$$E_p = \frac{\rho I_A}{4\pi L_{0p}^3} L_{0p},$$

где  $L_{0p}$  — расстояние между токовым электродом и точкой наблюдения  $p$ . Если существуют поверхности раздела между сре-

дами с различными удельными сопротивлениями, то появляются и поверхностные заряды, которые в свою очередь создают вторичное электрическое поле  $E_s$ . Таким образом, суммарное поле в любой точке  $p$  — это сумма первичного и вторичного полей:

$$E = E_p + E_s.$$

Это векторное поле описывается некоторым распределением его потенциала, а точки  $M$  и  $N$  расположены на соответствующих эквипотенциальных поверхностях. Соответственно, напряжение между ними меряется с помощью измерительных электродов расстановки:

$$V_{MN} = U_M - U_N.$$

Для исключения влияния изменения тока  $I_A$  вычисляется отношение

$$\frac{V_{MN}}{I_A} = \frac{U_M - U_N}{I_A},$$

которое в соответствии с законом Ома равно сопротивлению  $R_{MN}$  среды, ограниченной эквипотенциальными поверхностями, проходящими через точки  $M$  и  $N$  соответственно:

$$R_{MN} = V_{MN}/I_A. \quad (\text{III.194})$$

Обобщая этот результат, можно сказать, что любая расстановка в электрических методах измеряет сопротивление среды между эквипотенциальными поверхностями с потенциалами  $U_M$  и  $U_N$ .

Рассмотрим два специальных случая, когда трехэлектродная расстановка играет важную роль при электрическом исследовании скважин.

Сначала предположим, что электрод  $N$  расположен вдали от электрода  $A$ , так что можно положить  $U_N = 0$ . Тогда имеем двухэлектродную расстановку  $AM$ , которую обычно называют нормальной или потенциальной расстановкой. В соответствии с уравнением (III.194) она измеряет сопротивление проводящей среды, ограниченной эквипотенциальной поверхностью

$$U = U_M,$$

проходящей через электрод  $M$ , и сферической поверхностью бесконечно большого радиуса. Конечно, с увеличением расстояния от электрода  $A$  вклад различных частей среды, ограниченных эквипотенциальными поверхностями и имеющими одинаковую толщину, становится меньше.

Рассмотрим противоположный случай, когда расстояние между измерительными электродами достаточно мало, и предположим, что электрическое поле внутри этого интервала практически постоянно. Тогда

$$R_{MN} = \frac{V_{MN}}{I_A} = \frac{MN}{I_A} E. \quad (\text{III.195})$$

Такую расстановку часто называют градиентной.

Следует отметить, что в однородной среде трехэлектродная расстановка измеряет сопротивление сферического слоя толщиной  $MN$  с центром в точке  $A$ , однако в общем случае неоднородной среды форма такого слоя может быть очень сложной.

### III.7. СТОРОННЕЕ ПОЛЕ И ЕГО ЭЛЕКТРОДВИЖУЩАЯ СИЛА

Исходя из закона Кулона и принципа сохранения заряда, было установлено, что в регулярных точках проводящей среды для электрического поля и поля плотности тока имеют место уравнения

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0, \quad \text{div } \mathbf{j} = 0. \quad (\text{III.196})$$

Также было предположено, что всюду в среде выполняется линейное соотношение (закон Ома)

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}. \quad (\text{III.197})$$

В уравнениях (III.196), (III.197)  $\mathbf{E}$  обозначает поле, вызванное только электрическими зарядами, и для того, чтобы подчеркнуть этот факт, будем часто пользоваться индексом «с»:  $\mathbf{E} = \mathbf{E}^c$ .

Изучение этих уравнений показывает, что невозможно поддерживать постоянное движение зарядов в проводящей среде, если электрическое поле вызвано только зарядами. Для объяснения постоянного движения зарядов необходимо изучить стороннее поле. Обсудим эту тему с различных точек зрения. Прежде всего из закона Ома

$$\mathbf{j} = \gamma \text{grad } U$$

следует, что

$$j_l = -\gamma \frac{\partial U}{\partial l}, \quad (\text{III.198})$$

где  $j_l$  — проекция вектора плотности тока на некоторую линию  $l$ . Предположим, что  $l$  совпадает с одной из токовых линий, которая в соответствии с принципом сохранения заряда всегда является замкнутой. Рассмотрим изменение потенциала вдоль этой линии.

Поскольку в этом случае отношение  $j_l/\gamma$  положительно, можно сделать вывод, что потенциал непрерывно уменьшается вдоль токовой линии. Из (III.198) следует, что после одного полного прохода вдоль этой линии потенциал в начальной точке приобретает новое значение. Другими словами, он становится многозначной функцией, что, конечно, противоречит определению потенциала кулоновского поля. Этот результат ясно показывает, что в урав-

нении (III.197) что-то не так, поскольку неразумно предполагать, что неверен фундаментальный физический принцип

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0.$$

Теперь изучим эту проблему с несколько другой точки зрения и покажем, что ненулевое электрическое поле не может одновременно удовлетворять уравнениям (III.196), если закон Ома, записанный в форме  $\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$ , всюду выполняется. Действительно, из уравнения  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$  следует, что электрическое поле не имеет замкнутых векторных линий. Тогда в соответствии с (III.197) можно сделать вывод, что поле плотности тока  $\mathbf{j}$  также не имеет замкнутых векторных линий. С другой стороны, из уравнения  $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$  следует, что поле  $\mathbf{j}$  не может иметь незамкнутых линий, и в соответствии с законом Ома (III.197) это также верно для векторных линий электрического поля. Представим результаты данного анализа в виде табл. III.2.

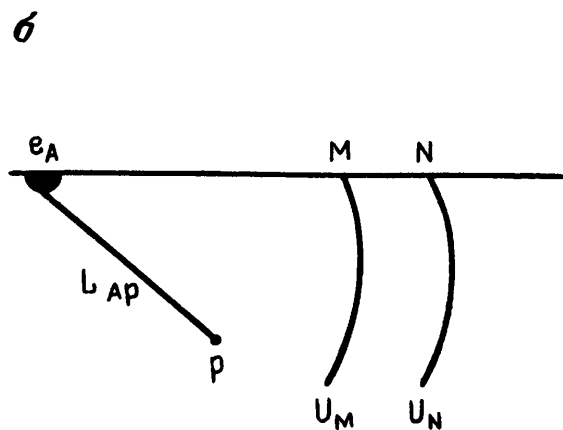
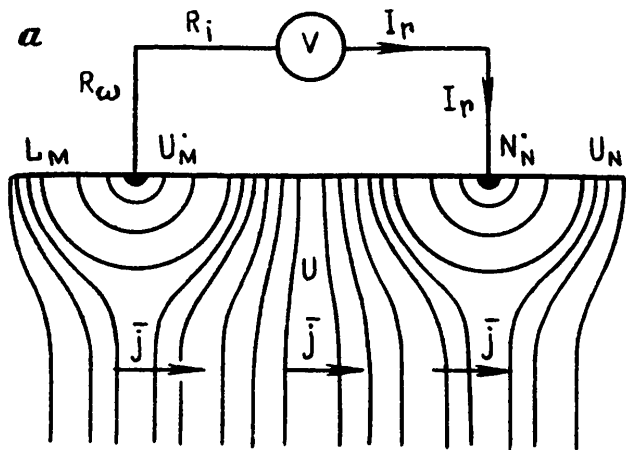
Т а б л и ц а III.2

Поле	Незамкнутая линия	Замкнутая линия
$\mathbf{E}$	нет	нет
$\mathbf{j}$	нет	нет

Приходится сделать вывод, что только нулевое поле может удовлетворять уравнениям (III.176), поскольку отсутствие обоих типов векторных линий просто означает, что поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{j}$  исчезают. С учетом того, что оба уравнения системы (III.196) были получены из физических законов, нам остается только одна возможность, а именно, модифицировать уравнение (III.197). С физической точки зрения этот результат ведет к выводу, что электрическое поле, вызванное только зарядами, не может поддерживать постоянное движение зарядов в проводящей среде.

По существу, мы уже наблюдали это явление при изучении электростатической индукции. Как известно, при размещении зарядов либо внутри проводника, либо на его поверхности, их поле не остается постоянным. Вместо этого оно меняется со временем до тех пор, пока не исчезнет вместе с полем плотности тока. Для того, чтобы внести изменения в уравнение (III.197), представим себе следующий эксперимент. Предположим, что есть резервуар, сделанный из непроводящего материала с двумя параллельными металлическими листами  $P^+$  и  $P^-$ , помещенными на некотором расстоянии друг от друга и порождающими заряды  $e^+$  и  $e^-$  соответственно (рис. III.11, в). Ясно, что эти заряды создают электрическое поле, направленное от листа  $P^+$  к листу  $P^-$ . Поскольку среда между ними непроводящая, то заряды и их электрическое поле остаются постоянными.

Теперь заполним резервуар ионным проводником таким об-



б

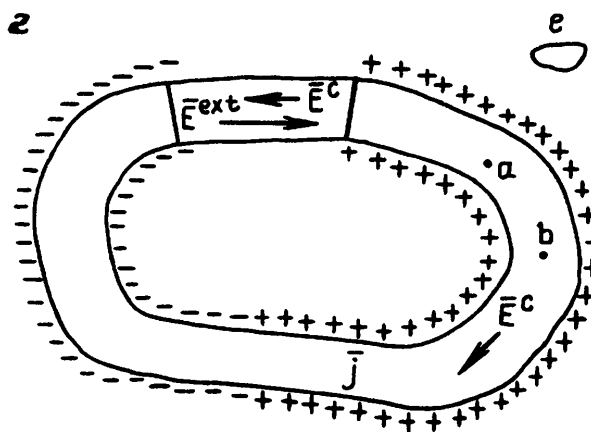
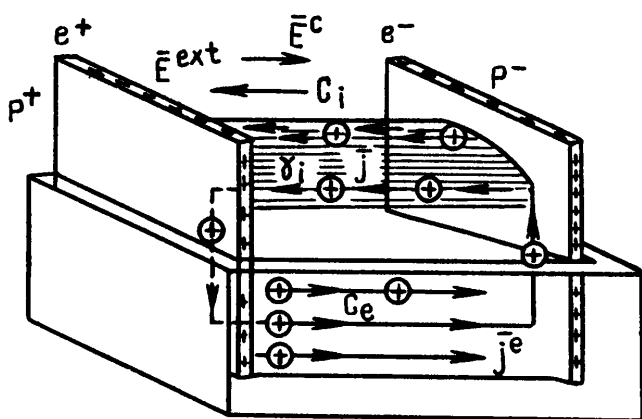


Рис. III.11. Влияние сопротивления заземления на измерения (а); потенциал заряда электрода (б); механизм сторонней силы (в); электрическая цепь (г)

разом, чтобы один из листов был расположен над раствором. При этом электропроводность ионного проводника  $\gamma_e$  значительно меньше, чем электропроводность металлических листов. Благодаря электрическому полю  $E$  в растворе появляется ток и положительные заряды двигаются к листу с отрицательным зарядом, в то время как отрицательные ионы приближаются к листу  $P^+$ , имеющему положительный заряд. Это движение ионов приводит к уменьшению зарядов листов до тех пор, пока электрическое поле и поле плотности тока не исчезнут. Поскольку этот процесс происходит достаточно медленно, его можно описать очень просто. В соответствии с уравнением (III.13) электрическое поле между листами в некоторый момент равно

$$E = \Sigma / \epsilon_0 \quad (\text{III.199})$$

и перпендикулярно листам, так как влияние их краев незначительно. Здесь  $\Sigma$  — плотность зарядов в данный момент времени. Поле  $E$  создает плотность тока  $j$ , которая равна

$$j = \gamma_e \frac{\Sigma}{\epsilon_0}; \quad (\text{III.200})$$

соответственно, ток

$$I_e = \gamma_e \frac{\Sigma}{\epsilon_0} S_e, \quad (\text{III.201})$$

где  $S_e$  — площадь каждого листа, погруженного в раствор;  $I_e$  — количество положительных и отрицательных зарядов, прибывающих в каждую секунду на листы  $P^+$  и  $P^-$  соответственно. Очевидно, что этот процесс ведет к разрядке обоих листов. Для поддержания постоянного тока предположим, что над раствором листы соединены друг с другом посредством проводящей среды  $C_i$  с электропроводностью  $\gamma_i$ . Таким образом, наша модель вместе с двумя листами состоит из раствора  $C_e$  и проводника  $C_i$ . Ясно, что в обоих проводниках кулоновское электрическое поле  $E^c$  направлено одинаково, а именно, от листа  $P^+$  к  $P^-$ .

Теперь предположим, что внутри проводника  $C_i$  вместе с кулоновским полем существует другое поле  $E^{\text{ext}}$ , которое противоположно по направлению, но связано с плотностью тока таким же образом и превышает кулоновское поле по величине

$$|E^{\text{ext}}| > |E^c|. \quad (\text{III.202})$$

Тогда внутри проводника  $C_i$  существуют два поля плотности тока, которые противоположны друг другу:

$$j^{\text{ext}} = \gamma_i E^{\text{ext}}, \quad j^c = \gamma_i E^c;$$

в соответствии с уравнением (III.199) суммарная плотность тока в  $C_i$

$$j = (E^{\text{ext}} - \Sigma/\epsilon_0). \quad (\text{III.203})$$

Это новое поле называют сторонним полем для того, чтобы подчеркнуть, что его возбудители могут иметь любое происхождение (термическое, химическое, механическое), но не могут быть зарядами.

Благодаря этому полю положительные заряды двигаются внутри проводника  $C_i$  против электрического поля  $E^c$  и это позволяет компенсировать разрядку листа  $P^+$  через раствор. В то же время в  $C_i$  отрицательные заряды двигаются в противоположном направлении и увеличивают заряд  $e^-$  на листе  $P^-$ . Далее, однако, наше внимание будет сосредоточено только на положительных зарядах. Ясно, что ток внутри проводника  $C_i$

$$I_i = \gamma_i \left( E^{\text{ext}} - \frac{\Sigma}{\epsilon_0} \right) S_i, \quad (\text{III.204})$$

где  $S_i$  — площадь каждого листа над раствором.

Таким образом, естественно различать две части этой модели течения тока. Первая часть называется внешней и соответствует раствору  $C_e$ , где существует только кулоновское электрическое поле. Это поле направлено от листа  $P^+$  к  $P^-$  и согласно (III.201) создает ток

$$I_e = \gamma_e \frac{\Sigma}{\epsilon_0} S_e,$$

который пытается разрядить листы. Во второй или внешней части — в проводнике  $C_i$  — на заряды действуют как кулоновское, так и стороннее поле, и в соответствии с уравнением (III.202) ток в  $C_i$

$$I_i = \gamma_i \left( E^{\text{ext}} - \frac{\Sigma}{\epsilon_0} \right) S_i$$

и стремится восстановить заряды на листах. Очевидно, что, если токи  $I_e$  и  $I_i$  равны друг другу, заряды на листах не будут меняться со временем и электрическое поле и поле плотности тока останутся постоянными. Другими словами, мы показали, что присутствие стороннего поля необходимо для создания тока, меняющегося со временем.

Поясним связь между этим полем и током. Предположим, поле  $E^{\text{ext}}$  становится больше. Тогда в соответствии с (III.204) ток  $I_i$  также увеличивается и это приводит к увеличению количества зарядов, прибывающих на площадь  $S_i$  листа  $P^+$  и распространяющихся по всему листу. То же самое справедливо и для отрицательных зарядов на листе  $P^-$ . Соответственно, электрическое поле и поле плотности тока тоже уменьшаются в растворе до тех пор, пока ток  $I_e$  не станет равным  $I_i$ . Подобный процесс наблюдается и в случае, когда сторонняя сила уменьшается.

Теперь сделаем несколько комментариев.

1. Кулоновские и сторонние поля отличаются друг от друга некоторыми чертами, а именно:

а) Напряженность стороннего поля  $E^{\text{ext}}$  в отличие от кулоновского поля в общем случае зависит от пути, т. е. напряженность этого поля

$$\int_a^b \mathbf{E}^{\text{ext}} \cdot d\mathbf{l}$$

является функцией контура  $l$ , вдоль которого выполняется интегрирование.

б) Стороннее поле не может быть вызвано стационарными электрическими зарядами и не подчиняется закону Кулона. В то же время, как уже было отмечено, возбудители этого поля могут иметь самую разную природу: термическую, механическую, химическую или электромагнитную.

в) Сторонняя сила, в отличие от кулоновской силы, обычно равна нулю в областях, где отсутствуют ее возбудители. Однако существуют исключения, одним из них является индукция.

г) Сторонние и кулоновские поля могут создавать ток в проводящей среде, однако поддерживать постоянное движение зарядов только с помощью кулоновского поля невозможно.

3. В общем случае любая цепь состоит из внутренней и внешней частей. Во внешней части на заряды действует только кулоновское поле  $E^c$ , в то время как во внутренней части движение зарядов определяют как кулоновское, так и стороннее поле.

4. Существуют случаи, когда обе силы  $E^c$  и  $E^{ext}$  имеют одинаковое направление. Это происходит, например, при зарядке аккумулятора.

5. Кулоновские и сторонние силы имеют только одну общую черту: они связаны с вектором плотности тока одинаковым способом, поэтому

$$j = \gamma (E + E^{ext}) . \quad (III.205)$$

Это уравнение является законом Ома в дифференциальной форме, справедливым во внешней и внутренней частях любой электрической цепи. Очевидно, что для внешней части, где  $E^{ext} = 0$ ,

$$j = \gamma E .$$

В наиболее часто встречающихся в электроразведке случаях мы заинтересованы в изучении поведения поля в тех областях проводящей среды, где сторонние силы отсутствуют и можно пользоваться уравнением (III.197).

6. Напряжение сторонней силы  $E^{ext}$  между конечными точками внешней части цепи

$$\int_{-}^{+} E^{ext} \cdot dl ,$$

вычисленное вдоль токовой линии, называется электродвижущей силой  $\mathcal{E}$ :

$$\mathcal{E} = \int_{-}^{+} E^{ext} \cdot dl . \quad (III.206)$$

Ясно, что  $\mathcal{E}$  характеризует работу, выполненную сторонней силой по продвижению единичного положительного заряда против кулоновского поля.

Теперь рассмотрим несколько примеров.

**Пример 1. Поведение поля и его потенциала в квазилинейной цепи**

Предположим, что внешняя часть цепи, показанной на рис. III.11,  $z$ , — однородный проводник с постоянным поперечным сечением  $S$ , а во внутренней части существует электродвижущая сила, равная  $\mathcal{E}$ . Сначала рассмотрим внешнюю часть, где поле плотности тока является однородным:

$$I = \text{const} \text{ и } S = \text{const} .$$



В соответствии с законом Ома

$$j = \gamma E \quad \text{или} \quad E = \rho j$$

и следует сделать вывод, что внутри проводника электрическое поле также не меняется:

$$E = \text{const}.$$

Это кулоновское поле вызвано зарядами и естественно определить положение этих зарядов. Конечно, они не расположены внутри проводника, так как он однородный (III.152), а сумма зарядов, составляющих ток, равна нулю. Также они не могут собираться только вблизи конечных точек внутренней части цепи, потому что поле, вызванное двумя такими зарядами противоположных знаков, безусловно неоднородно. Невозможно, чтобы источники этого поля были расположены вне цепи, поскольку благодаря электростатической индукции они никак не влияют на поле внутри проводника.

Таким образом, существует только одно место, где могут быть расположены источники однородного электрического поля  $E$ , и это место — поверхность проводника. Как только в цепи появляется ток  $I$ , эти заряды распределяются таким «умным» способом, чтобы электрическое поле везде во внешней части цепи стало однородным. Схематически их распределение показано на рис. III.11, 2.

Как обычно, сделаем несколько замечаний.

1. При изменении положения внешней части цепи в пространстве ток  $I$  не меняется. Это происходит потому, что распределение поверхностных зарядов меняется таким образом, чтобы сохранить то же самое электрическое поле в проводнике.

2. Если поперечное сечение или электропроводность внешней части цепи меняются, то электрическое поле становится в общем случае неоднородным, а его поведение снова управляется зарядами. В частности, если меняется электропроводность, то присутствуют как поверхностные, так и объемные заряды, и они распределяются таким образом, чтобы их электрическое поле обеспечивало тот же ток через любое поперечное сечение проводника.

3. В общем случае существует два типа зарядов на поверхности проводника. Один из них создает электрическое поле внутри, в то время как другой играет совершенно другую, но тоже важную роль — благодаря этому типу зарядов ток в цепи зависит только от электродвижущей силы и сопротивления цепи. Действительно, предположим, что вблизи цепи есть заряд (см. рис. III.11, 2). В соответствии с законом Кулона он создает внутри проводника поле, которое может быть очень сильным, в то время как ток  $I$  совсем не меняется. Это происходит благодаря зарядам, которые появляются на поверхности, а их поле вместе с полем внешнего

заряда создает внутри проводника нулевое поле (электростатическая индукция).

Как нам уже известно, во внутренней части цепи плотность тока определяется как сторонним, так и кулоновским полем. Последнее, однако, вызывается всеми зарядами, которые появляются на всей поверхности проводника, а если проводник неоднороден, то и теми, которые появляются внутри.

Теперь изучим напряжение между двумя произвольными точками  $a$  и  $b$  цепи (рис. III.11,  $z$ ). Если внутри этого интервала сторонние силы отсутствуют, то

$$U(a) - U(b) = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b \rho \mathbf{j} \cdot d\mathbf{l}$$

или

$$U(a) - U(b) = \int_a^b \frac{\rho \mathbf{j} \cdot d\mathbf{l}}{I} = I R_{ab}, \quad (\text{III.207})$$

где  $R_{ab}$  — сопротивление цепи между точками  $a$  и  $b$ . В частности, когда эти точки совпадают с конечными точками внутренней части (источника тока),

$$U_+ - U_- = I R_e, \quad (\text{III.208})$$

где  $R_e$  — сопротивление внешней части цепи.

Теперь предположим, что внутренняя часть с электродвижущей силой  $\mathcal{E}$  расположена где-то между точками  $a$  и  $b$ . Тогда, применяя закон Ома

$$\mathbf{j} = \gamma (\mathbf{E}^c + \mathbf{E}^{\text{ext}}) \quad \text{или} \quad \mathbf{E}^c = \rho \mathbf{j} - \mathbf{E}^{\text{ext}},$$

получим

$$U(a) - U(b) = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = I \int_a^b \frac{\rho \mathbf{j} \cdot d\mathbf{l}}{I} - \int_a^b \mathbf{E}^{\text{ext}} \cdot d\mathbf{l},$$

откуда

$$U(a) - U(b) = I R_{ab} - \mathcal{E}, \quad (\text{III.209})$$

где  $R_{ab}$  состоит из сопротивления внутренней части  $R_i$  и участка внешней части, расположенного между точками  $a$  и  $b$ . При рассмотрении полной цепи, когда  $a = b$ , получаем:

$$\mathcal{E} = IR = I (R_i + R_e) \quad (\text{III.210})$$

где  $R$  — суммарное сопротивление цепи.

Из уравнений (III.208) и (III.210) получаем связь между разностью потенциалов в конечных точках и электродвижущей силой:

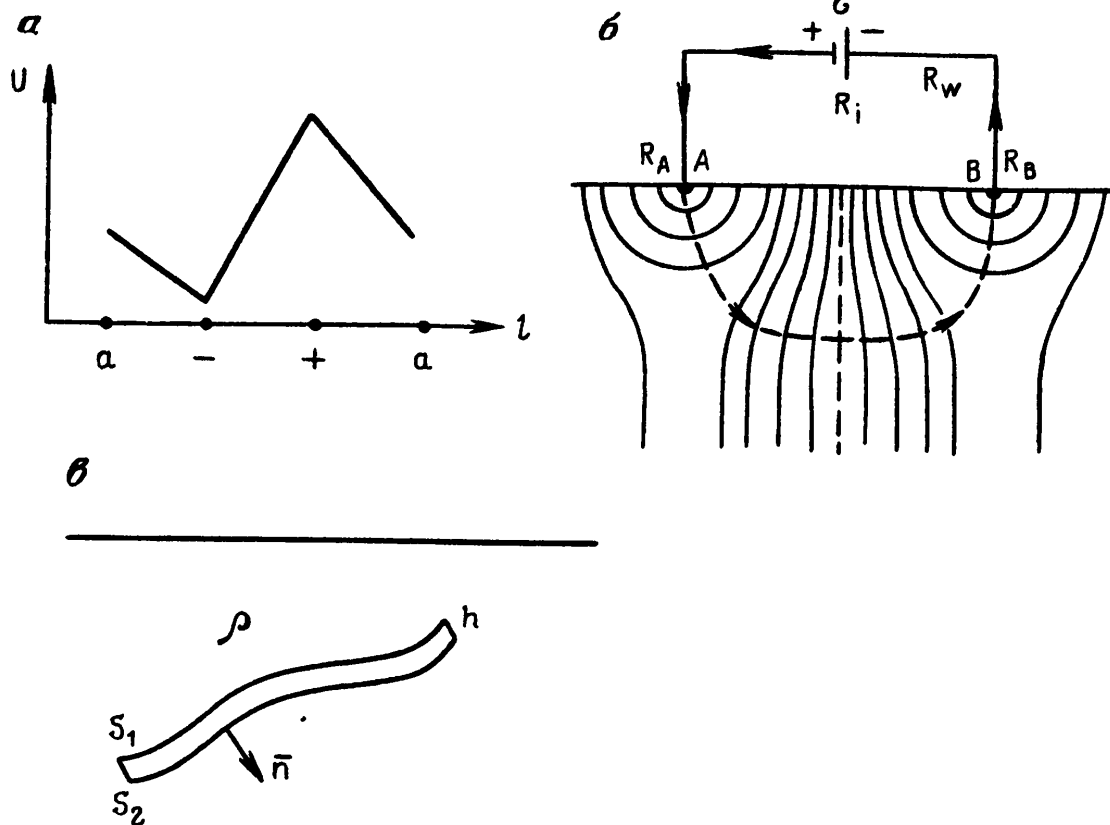


Рис. III.12. Распределение потенциала вдоль цепи (а); двухэлектродная расстановка (б); двойной слой в проводящей среде (в)

$$U_+ - U_- = \frac{\mathcal{E} R_e}{R_i + R_e} = \mathcal{E} \frac{1}{1 + (R_i / R_e)}. \quad (\text{III.211})$$

Таким образом, если сопротивление внешней части цепи намного больше, чем сопротивление внутренней части, то разность потенциалов практически равна электродвижущей силе:

$$U_+ - U_- \approx \mathcal{E} \quad \text{при} \quad R_e \gg R_i. \quad (\text{III.212})$$

Как следует из уравнений (III.207) и (III.209), потенциал уменьшается вдоль токовой линии во внешней части и увеличивается во внутренней части — это поведение показано на рис. III.12, а.

**Пример 2.** Токовый контур для электроразведочной установки

Теперь рассмотрим другой контур, в который включены следующие элементы:

а) внутренняя часть (источник тока) с электродвижущей силой  $\mathcal{E}$ ;

б) линейный проводник (провод) с сопротивлением  $R_\omega$ ;

в) два электрода с сопротивлением заземления  $R_A$  и  $R_B$ , которые обеспечивают контакт с объемным проводником;

г) произвольная среда с удельным сопротивлением  $\rho$ , которое в общем случае может меняться от точки к точке.

В соответствии с законом Ома, ток в такой цепи (рис. III.12, б)

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_\omega + R_i + R_A + R_B}, \quad (\text{III.213})$$

где  $R_i$  — сопротивление источника тока. Как нам известно, сопротивления заземления зависят от распределения удельного сопротивления среды всюду независимо от расстояний от электродов. Другими словами, изменение удельного сопротивления повсюду под поверхностью Земли должно вызвать изменение тока  $I$  и, соответственно, измерения тока с помощью простой двухэлектродной установки могут в принципе дать информацию относительно электрических свойств среды. Однако это верно только в теории, поскольку сопротивление заземления в основном определяется удельным сопротивлением той части среды, которая расположена очень близко к электродам. Размер этой области редко превышает 1 м. Соответственно, ток  $I$  практически нечувствителен к изменению удельного сопротивления вне этого диапазона. По этой причине двухэлектродная расстановка не используется в электрических методах, за исключением некоторых приложений в скважинных методах.

Вместо этого стандартная установка состоит из двух различных частей:

а) токовой линии  $AB$ , включающей электродвижущую силу. Единственная функция этой части — создавать электрическое поле в проводящей среде;

б) измерительной линии  $MN$ , содержащей вольтметр, позволяющий измерять напряжение поля между измерительными электродами, вызванное всеми зарядами среды. Это разделение токовой и измерительной линий цепи является отличительной чертой большинства расстановок электроразведки.

### Пример 3. Электродвижущая сила и электрические заряды

В разделе III.5 изучалось распределение зарядов в проводящей среде в отсутствие электродвижущей силы. Теперь рассмотрим более общий случай, исходя из уравнений

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\delta}{\epsilon_0}, \quad \operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \quad \text{или} \quad E_n^{(2)} - E_n^{(1)} = \frac{\Sigma}{\epsilon_0}, \quad j_n^{(2)} = j_n^{(1)}$$

и закона Ома

$$\mathbf{j} = \gamma (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{ext}}).$$

Повторяя те же выкладки, что и в разделе III.5, получим

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = \operatorname{div} \gamma (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{ext}}) = \operatorname{div} \gamma \mathbf{E} + \operatorname{div} \gamma \mathbf{E}^{\text{ext}} = 0$$

или

$$\gamma \operatorname{div} \mathbf{E} + \mathbf{E} \operatorname{grad} \gamma + \operatorname{div} \gamma \mathbf{E}^{\text{ext}} = 0$$

или

$$\gamma \frac{\delta}{\epsilon_0} + \mathbf{E} \operatorname{grad} \gamma + \operatorname{div} \gamma \mathbf{E}^{\text{ext}} = 0.$$

Откуда объемные заряды, связанные с электродвижущей силой,

$$\delta^{\text{ext}} = -\varepsilon_0 \frac{\text{div } \gamma E^{\text{ext}}}{\gamma}. \quad (\text{III.214})$$

Они расположены во внутренней части цепи и распределение этих зарядов перестает представлять какой-либо интерес для нас, как только определены электродвижущая сила  $\mathcal{E}$  и внутреннее сопротивление  $R_i$ . Более полезно рассмотреть поверхностные заряды, связанные со сторонним полем.

Обобщая уравнение (III.153), получим

$$j_n^{(2)} - j_n^{(1)} = \gamma_2 E_n^{(2)} - \gamma_1 E_n^{(1)} + \text{Div } \gamma E^{\text{ext}} = 0$$

или

$$\frac{1}{2} [(\gamma_2 - \gamma_1)(E_n^{(2)} + E_n^{(1)}) + (\gamma_2 + \gamma_1)(E_n^{(2)} - E_n^{(1)})] + \text{Div } \gamma E^{\text{ext}} = 0.$$

Поскольку

$$E_n^{(2)} - E_n^{(1)} = \frac{\Sigma}{\varepsilon_0},$$

имеем

$$\Sigma^{\text{ext}} = -\varepsilon_0 \frac{\text{Div } \gamma E^{\text{ext}}}{\gamma_{\text{cp}}}. \quad (\text{III.215})$$

Здесь

$$\gamma_{\text{cp}} = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2},$$

$$\text{Div } \gamma E^{\text{ext}} = \gamma_2 E_n^{(2)\text{ext}} - \gamma_1 E_n^{(1)\text{ext}},$$

а  $E_n^{(2)\text{ext}}$  и  $E_n^{(1)\text{ext}}$  — нормальные компоненты сторонней силы на передней и задней сторонах поверхности, где ее нормаль указывает направление вектора плотности тока.

В частности, вблизи конечных точек внутренней части

$$\Sigma_+ = \varepsilon_0 \frac{\gamma_i}{\gamma_{\text{cp}}} E_{n+}^{\text{ext}}, \quad \Sigma_- = \varepsilon_0 \frac{\gamma_i}{\gamma_{\text{cp}}} E_{n-}^{\text{ext}}, \quad (\text{III.216})$$

поскольку поле  $E^{\text{ext}}$  исчезает во внешней части цепи.

Конечно, эти заряды влияют на суммарное электрическое поле как внутри, так и снаружи проводника. Если обе компоненты равны между собой, то заряды имеют одну и ту же величину, но противоположные знаки:

$$\Sigma_+ = \varepsilon_0 \frac{\gamma_i}{\gamma_{\text{cp}}} E_n^{\text{ext}}, \quad \Sigma_- = -\varepsilon_0 \frac{\gamma_i}{\gamma_{\text{cp}}} E_n^{\text{ext}}, \quad (\text{III.217})$$

где

$$E_{n+}^{\text{ext}} = E_{n-}^{\text{ext}} = E_n^{\text{ext}}.$$

Также ясно, что в случае, когда вблизи конечных точек проводник однородный ( $\gamma_i = \gamma_e$ ),

$$\Sigma_+ = \varepsilon_0 E_{n+}^{\text{ext}}, \quad \Sigma_- = -\varepsilon_0 E_{n-}^{\text{ext}}. \quad (\text{III.218})$$

#### Пример 4. Контактная электродвижущая сила

Предположим, что сторонняя сила  $E^{\text{ext}}$  распределена, как показано на рис. III.12, в, внутри очень тонкого слоя толщиной  $h$  с площадью его срединной поверхности  $S$ . Краевые поверхности этого слоя —  $S_1$  и  $S_2$ , а нормаль  $\mathbf{n}$  направлена от  $S_1$  к  $S_2$ . В общем случае электропроводности среды внутри и снаружи слоя различны, а толщина  $h$  может меняться. Также положим, что нормальная компонента сторонней силы положительна, если она имеет такое же направление, что и нормаль  $\mathbf{n}$ , и становится отрицательной, если нормальная компонента сторонней силы и нормаль  $\mathbf{n}$  противоположны друг другу.

Для удобства представим поле плотности тока как систему токовых трубок с достаточно малыми поперечными сечениями. Тогда каждый элемент слоя  $C_i$  играет роль внутренней части соответствующей цепи. Очевидно, что заряды, появляющиеся на поверхностях  $S_1$  и  $S_2$  согласно (III.216), поддерживаются с помощью сторонней силы, в то время как кулоновское поле стремится разрядить их.

Учитывая, что толщина слоя очень мала, естественно предположить, что внутри каждого элемента слоя  $C_i$  сила  $E^{\text{ext}}$  не меняется, т. е.

$$\mathcal{E} = \int_1^2 \mathbf{E}^{\text{ext}} \cdot d\mathbf{n} = h E_n^{\text{ext}}. \quad (\text{III.219})$$

Распределение зарядов в конечных сечениях определяется уравнением (III.217), т. е. элементарные поверхности  $dS_1$  и  $dS_2$  содержат заряды одинаковой величины, но противоположных знаков.

Сделаем еще одно упрощение, основанное на предположении, что толщина слоя очень мала. В этом случае сопротивление  $R_i$  каждого элемента слоя незначительно по отношению к внешнему сопротивлению  $R_e$  соответствующего элемента токовой трубки.

Тогда, в соответствии с уравнением (III.212),

$$U_+ - U_- = \mathcal{E} \quad \text{при} \quad R_e \gg R_i.$$

Таким образом, разность потенциалов на краевых поверхностях равна действующей электродвижущей силе.

Ясно, что заряды, расположенные на поверхностях  $S_1$  и  $S_2$ , создают электрическое поле в проводящей среде, а если точка наблюдения расположена на расстоянии от слоя, значительно пре-

восходящем  $h$ , то эту систему зарядов можно рассматривать как двойной слой. Нетрудно найти связь между электродвижущей силой и плотностью дипольных моментов  $\eta$ . Действительно, из сравнения уравнений (III.72) и (III.212) имеем

$$\eta = \varepsilon_0 \mathcal{E} = \varepsilon_0 h E_n^{\text{ext}}. \quad (\text{III.220})$$

Поскольку поле двойного слоя определяется распределением функции  $\eta$ , рассмотрим предельный случай:

$$h \rightarrow 0 \quad E_n^{\text{ext}} \rightarrow \infty,$$

но дипольный момент остается постоянным. Это означает, что мы пришли к математической модели двойного слоя, когда положительные и отрицательные заряды расположены соответственно на передней и задней сторонах поверхности  $S$ . Тогда, используя результаты, полученные в разделе III.2, получим

$$U_+ - U_- = \mathcal{E}_c, \quad \frac{\partial U_+}{\partial t} - \frac{\partial U_-}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{E}_c}{\partial t} \quad (\text{III.221})$$

и

$$\frac{\partial U_+}{\partial n} = \frac{\partial U_-}{\partial n},$$

где  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_c = \eta/\varepsilon_0$  — называется контактной электродвижущей силой.

Применяя понятие телесного угла, нетрудно вычислить поле двойного слоя в любой точке. Этот подход широко используется в теории методов, основанных на изучении естественных электрических полей.

### III.8. РАБОТА КУЛОНОВСКИХ И СТОРОННИХ СИЛ, ЗАКОН ДЖОУЛЯ

Движение зарядов в проводящей среде (ток) всегда сопровождается выделением тепла. В этом разделе обсуждается зависимость между этим теплом и полями  $E^c$ ,  $E^{\text{ext}}$ ,  $j$ . Сначала предположим, что проводник — это квазилинейная цепь, окруженная свободным пространством, как показано на рис. III.11, г. (Позже изучим более общий случай.)

В предыдущем разделе было показано, что постоянный ток может существовать в проводящей среде, только если существует сторонняя сила, которая имеет любое происхождение кроме кулоновского. Индукция или электромагнитные поля, например, являются очень важным классом сторонних сил, широко использующихся для возбуждения постоянных токов. Сторонние силы также появляются благодаря химическим или физическим неоднородностям в проводниках. Такие силы возникают вблизи контактов различных химических сред (гальванический элемент, аккумулятор) или сред различной температуры (термоэлемент), либо при

наличии градиента концентрации ионов электролита (концентрированный гальванический элемент). Механические силы также могут обеспечивать перемещение зарядов (электростатические генераторы). Так как все эти системы необходимы для существования постоянного тока, они обычно называются источниками тока.

Теперь рассмотрим работу, произведенную источником тока, и распределение его энергии вдоль цепи. В общем случае движущийся заряд подвергается действию как кулоновских, так и сторонних сил (закон Ома), выполняющих работу, которую легко можно вычислить. Действительно, в течение интервала времени  $dt$  количество зарядов, проходящих через каждое поперечное сечение элемента цепи  $C_{12}$ , остается одним и тем же и равным

$$de = I dt, \quad (III.222)$$

где  $I$  — ток.

В частности, количество зарядов, приходящих в элемент  $C_{12}$  и покидающих его, одинаково. Следует отметить, что заряды, равные по величине, но противоположные по знаку, проходят через различные сечения и их скорость чрезвычайно мала. Следовательно, элементарную работу сил вдоль перемещения  $d\mathbf{l}$  можно записать как

$$dA = I dt (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{ext}) \cdot d\mathbf{l}, \quad (III.223)$$

поскольку  $\mathbf{E} = I dt (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{ext})$  — сила, действующая на заряд  $de$ . Соответственно работа, связанная с перемещением заряда между сечениями  $S_1$  и  $S_2$  в течение одной секунды,

$$A = I \int_1^2 (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{ext}) \cdot d\mathbf{l}, \quad (III.224)$$

где вектор  $d\mathbf{l}$  направлен вдоль токовой линии.

Ясно, что  $A$  имеет размерность мощности и в системе СИ измеряется в ваттах:

$$1 \text{ Вт} = 1 \text{ В} \cdot 1 \text{ А}.$$

В соответствии с принципом сохранения энергии эта работа должна быть превращена в некоторую форму энергии  $W$  и количество этой энергии должно быть равным  $A$ :

$$W = I \int_1^2 (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{ext}) \cdot d\mathbf{l}. \quad (III.225)$$

В то же время эксперименты показывают, что эта энергия появляется как теплота  $Q$  внутри элемента  $C_{12}$  в единицу времени:

$$Q = I \int_1^2 (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{ext}) \cdot d\mathbf{l}. \quad (III.226)$$



Другими словами, суммарная работа кулоновских и сторонних сил, выполненная внутри некоторого элемента проводника, превращается в теплоту внутри того же элемента. Уравнение (III.226) по существу является формулировкой закона Джоуля; оно справедливо при условии, что ни химические реакции, ни движение проводника не поглощают энергию источника тока.

В частности, количество тепла, выделяющегося во всей цепи,

$$Q = I \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + I \oint \mathbf{E}^{\text{ext}} \cdot d\mathbf{l} = P, \quad (\text{III.227})$$

так как циркуляция электрического поля исчезает и

$$P = I \mathcal{E} \quad (\text{III.228})$$

есть работа, выполненная источником тока в течение одной секунды.

Таким образом, вся энергия источника постоянного тока в проводнике превращается в тепло.

В заключение сделаем несколько комментариев.

1. Равенство  $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$  означает, что работа, выполненная кулоновской силой вдоль всей цепи, равна нулю. Этот результат можно было ожидать, так как в противном случае в результате уменьшения энергии этого поля было бы невозможно сохранить независимый от времени ток.

2. Во внешней части цепи сторонняя сила отсутствует и, в соответствии с уравнением (III.226),

$$Q = \int_{+}^{-} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (\text{III.229})$$

Это выражение показывает, что каждую секунду работа электрического поля превращается в тепло. Этот факт может служить еще одним аргументом, поясняющим необходимость непрерывного действия сторонней силы.

3. Закон Джоуля (III.226) можно сформулировать в терминах тока  $I$ , сопротивления  $R$  и напряжения электрических и сторонних сил. Действительно, используя закон Ома, получаем

$$Q = I (U_1 - U_2 + \mathcal{E}) = I (I R_{12} + \mathcal{E}), \quad (\text{III.230})$$

где  $R_{12}$  — сопротивление элемента проводника  $C_{12}$ .

Если внутри этого элемента сторонняя сила отсутствует, то

$$Q = I^2 R_{12}. \quad (\text{III.231})$$

Таким образом, количество тепла, которое выделяется каждую секунду, прямо пропорционально сопротивлению и квадрату силы тока. В частности, для внешней части с сопротивлением  $R_e$  получаем

$$Q_e = I (U_+ - U_-) = I^2 R_e. \quad (\text{III.232})$$

4. Во внутренней части цепи количество тепла, которое выделяется каждую секунду,

$$Q_i = I \int_{-}^{+} (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{ext}}) \cdot d\mathbf{l}$$

или

$$Q_i = I \int_{-}^{+} (\mathbf{E}^{\text{ext}} - \mathbf{E}) dl = I \mathcal{E} - I (U_- - U_+), \quad (\text{II.233})$$

поскольку поля  $\mathbf{E}^{\text{ext}}$  и  $\mathbf{E}$  имеют противоположные направления, но  $E^{\text{ext}} > E$ .

Уравнение (III.233) можно записать как

$$P = I \mathcal{E} = I (U_+ - U_-) + Q_i. \quad (\text{III.234})$$

Ясно, что первое слагаемое в правой части уравнения описывает работу в единицу времени кулоновского электрического поля  $\mathbf{E}$ , связанного с движением заряда  $I dt$  вдоль внешней части цепи:

$$A_e = I (U_+ - U_-) = I \int_{+}^{-} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}.$$

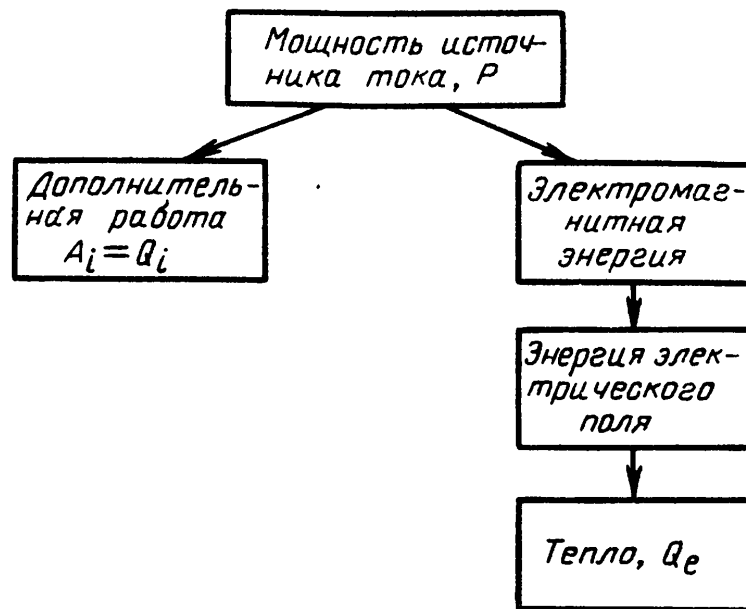
Другими словами, это слагаемое характеризует количество энергии источника тока, требуемое для поддержания постоянного электрического поля  $\mathbf{E}$ . Конечно, источник тока должен выполнять по крайней мере эту работу  $A_e$ , однако, в действительности он также производит дополнительную работу  $A_i$ . Например, в электростатическом генераторе тока значительная часть работы связана с потерями, обусловленными трением между его элементами. Эту дополнительную работу можно описать, если ввести внутреннее сопротивление источника тока  $R_i$ , которое поглощает тепловую энергию таким образом, что

$$Q_i = A_i.$$

Также можно представить себе источник тока, который действительно имеет внутреннее сопротивление. Тогда в соответствии с законом Джоуля количество тепла, которое появляется внутри источника,

$$Q_i = I^2 R_i.$$

5. При рассмотрении переменных полей будет показано, что некоторая часть энергии тока распространяется через окружающую среду как электромагнитная энергия, а внутри внешней части цепи — превращается в энергию электрического поля. Превращение энергии источника в теплоту можно приблизительно представить следующим образом:



6. В общем случае суммарное количество тепла, которое появляется благодаря постоянному току, не совпадает с джоулевой теплотой  $Q$ . Это связано с тем, что вблизи контакта между различными проводниками появляется теплота Пелтиера. Дополнительно при наличии температурного градиента появляется теплота Томсона. Однако в отличие от джоулевой теплоты эти две формы теплоты являются линейными функциями тока и обычно их вклад очень мал.

7. Данный анализ остается справедливым, если вместо квазилинейного проводника рассматривается токовая трубка. Возьмем элементарный объем  $dV = (dS \cdot dl)$ , где  $dS$  — сечение токовой трубки.

Количество зарядов, проходящих через эту поверхность за интервал времени  $dt$ , равно

$$de = (\mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}) dt,$$

а работу, выполненную кулоновскими и сторонними силами, можно представить как

$$(\mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}) \{(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{ext}}) \cdot d\mathbf{l}\} dt.$$

Количество тепла, выделяющегося каждую секунду,

$$dQ = \{\mathbf{j} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{ext}})\} (d\mathbf{S} \cdot d\mathbf{l}) = \{\mathbf{j} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{ext}})\} dV.$$

В то же время работа, выполненная сторонней силой,

$$dP = (\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}^{\text{ext}}) dV.$$

Таким образом, в общем случае в единичном объеме в течение одной секунды происходят два процесса, а именно:

- а) сторонняя сила выполняет работу;
- б) появляется теплота и ее количество задается уравнениями:

$$\frac{dP}{dV} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}^{\text{ext}}, \quad \frac{dQ}{dV} = \mathbf{j} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{ext}}) = \rho j^2, \quad (\text{III.235})$$

где  $\rho$  — удельное сопротивление среды.

В частности, для элементарного объема внешней части токовой трубки имеем

$$\frac{dP}{dV} = 0, \quad \frac{dQ}{dV} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \frac{E^2}{\rho} = \rho j^2. \quad (\text{III.236})$$

### III.9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

В предыдущем разделе мы попытались описать наиболее существенные особенности электрического поля и поля плотности тока в проводящей среде. В частности, были изучены следующие вопросы:

а) поведение электрического поля в регулярных точках и вблизи поверхностей раздела сред с различными удельными сопротивлениями;

б) распределение зарядов в проводящей среде;

в) поле плотности тока и его связь с электрическим полем, закон Ома;

г) роль сторонних сил;

д) электродвижущая сила, сопротивление и т. д.

Теперь обсудим основные вопросы, связанные с решением прямой задачи, а именно, как определить электрическое поле в проводящей среде. Важность этой темы очевидна, так как вычисление электрического поля — краеугольный камень численной интерпретации всех электрических методов.

Как было показано в главе II, решение прямой задачи гравиметрии основано на использовании закона Ньютона (II.5)

$$\mathbf{g}(p) = - \gamma \int_V \frac{\delta(q)}{L_{qp}^3} \mathbf{L}_{qp}$$

и состоит только в численном интегрировании. Плотность масс  $\delta(q)$  является физическим параметром среды и, конечно, не зависит от поля  $\mathbf{g}$  и геометрии модели. Другими словами, как только модель среды выбрана, одновременно определяются источники гравитационного поля, т. е. источники известны до того, как поле будет вычислено. Этот факт позволяет нам использовать закон Ньютона и определить поле  $\mathbf{g}$  наиболее простым способом. Напротив, закон Кулона

$$\mathbf{E}(p) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_V \frac{\delta(q)}{L_{qp}^3} \mathbf{L}_{qp} dV + \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_S \frac{\Sigma(q)}{L_{qp}^3} dS$$

нельзя использовать для определения электрического поля в проводящей среде, потому что плотность электрических зарядов, в отличие от плотности масс, не является физическим параметром среды, который можно непосредственно определить. Вместо этого она зависит от таких факторов, как удельное сопротивление и электрическое поле.

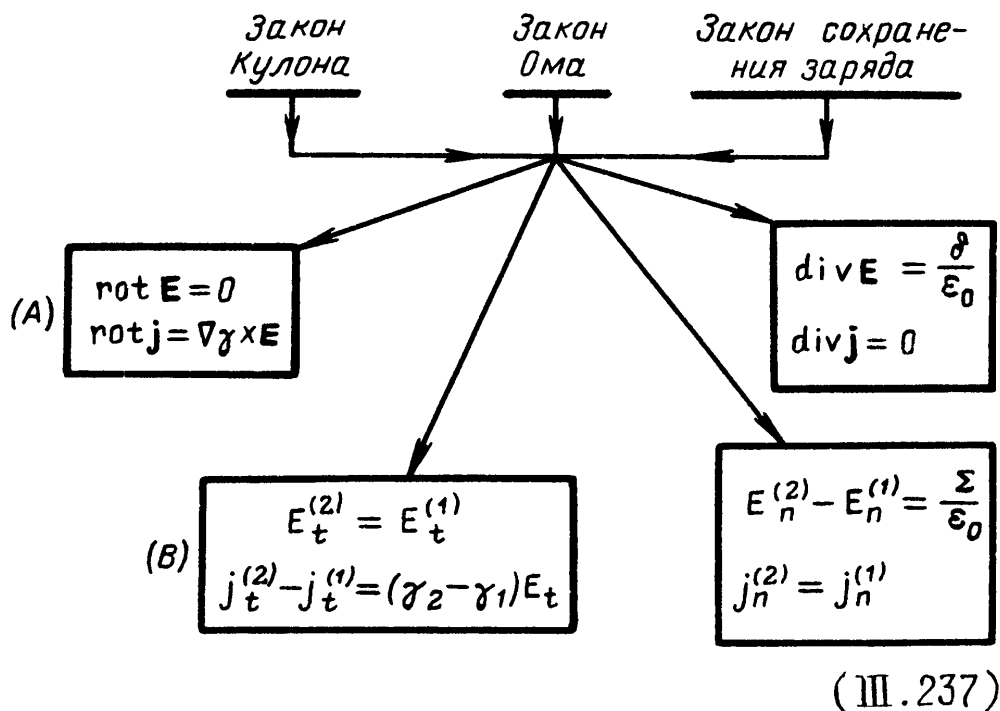
Действительно, в соответствии с уравнениями (III.152) и (III.154),

$$\delta = -\varepsilon_0 \rho \mathbf{E} \cdot \text{grad} \frac{1}{\rho}, \quad \Sigma = 2\varepsilon_0 \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} E_n^{\text{ср}}.$$

Это, в частности, означает, что можно ожидать бесконечного числа распределений зарядов, отвечающих одной и той же модели проводящей среды.

Итак, для вычисления электрического поля  $\mathbf{E}$  необходимо знать плотности зарядов  $\delta$  и  $\Sigma$ . Таким образом, мы снова, как и в случаях электростатической индукции и поляризации диэлектриков, столкнулись с проблемой «замкнутого круга», которая не позволяет нам использовать закон Кулона для вычисления поля. Уже один этот факт требует от нас сформулировать краевые задачи и объясняет основную разницу в подходе к решению прямых задач теории гравитационных и электрических методов. В электрических методах мы вынуждены решать краевые задачи и, конечно, этот подход является более сложным, чем если бы мы знали распределение зарядов и могли прямо применить закон Кулона.

Прежде чем сформулировать краевые задачи, будет уместно представить сводную систему уравнений для полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{j}$ . Обобщая результаты, полученные в предыдущих разделах, получаем



Сделаем несколько замечаний относительно этой системы.

1. Поскольку диэлектрическая постоянная  $\varepsilon$  никак не влияет на электрическое поле в проводящей среде, предположим, что все части среды имеют одну и ту же диэлектрическую постоянную, равную постоянной свободного пространства. Тем самым  $\delta$  и  $\Sigma$  являются объемными и поверхностными плотностями только свободных зарядов.

2. Система (III.237) описывает поля  $E$  и  $j$  во внешней части токовой трубки, где сторонние силы  $E^{\text{ext}}$  отсутствуют. Вряд ли это является недостатком, так как в практике электроразведки внутренняя часть цепи обычно не рассматривается.

3. Система написана для двух полей  $E$  и  $j$ , но последнее поле можно определить лишь при условии, что электрическое поле уже известно. Более того, учитывая, что в электрических методах измеряется только напряжение электрического поля, сконцентрируем наше внимание целиком на поле  $E$ . Как следует из уравнений (III.237) и как было показано раньше, система уравнений электрического поля выглядит так:

$$\text{rot } E = 0, \quad \text{div } E = \frac{\delta}{\epsilon_0}, \quad (\text{III.238})$$

$$E_t^{(1)} = E_t^{(2)}, \quad E_n^{(2)} - E_n^{(1)} = \frac{\Sigma}{\epsilon_0}.$$

Ясно, что эта система совпадает с системой уравнений поля в свободном пространстве. Это неудивительно, так как происхождение постоянного электрического поля остается одним и тем же независимо от типа среды. Однако существует весьма существенная разница. В отличие от свободного пространства, плотность зарядов  $\delta$  и  $\Sigma$  нельзя определить до вычислений. Поскольку  $\delta$  и  $\Sigma$  являются неизвестными величинами в приведенных уравнениях, то естественно заменить их двумя эквивалентными уравнениями, которые описывают принцип сохранения заряда, (III.142) и (III.143). Эти уравнения также содержат информацию о зарядах, однако они не присутствуют в уравнениях в явном виде.

В самом деле, уравнение  $\text{div } j = 0$  можно переписать как

$$\text{div } j = \text{div } \gamma E = \gamma \text{div } E + E \cdot \text{grad } \gamma = 0$$

или

$$\text{div } E = - \frac{E \cdot \text{grad } \gamma}{\gamma}.$$

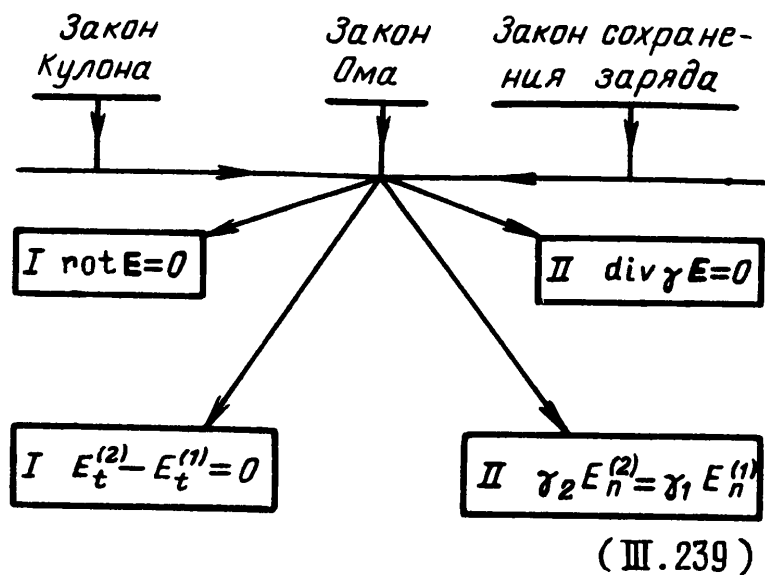
Таким образом, мы снова получаем второе уравнение системы (III.238). К тому же непрерывность нормальной компоненты плотности тока

$$\gamma_2 E_n^{(2)} - \gamma_1 E_n^{(1)} = 0$$

имеет место, только если вблизи этой точки появляется некоторое количество зарядов; т. е. это уравнение устанавливает связь между полем и зарядами так же, как и уравнение

$$E_n^{(2)} - E_n^{(1)} = \Sigma / \epsilon_0.$$

После этой замены получаем систему уравнений постоянного электрического поля в проводящей среде, которая используется для решения прямой задачи в теории электрических методов:



Сделаем в этом месте несколько замечаний.

1. Данная система описывает поведение электрического поля в регулярных точках проводящей среды и на поверхностях раздела сред с различными удельными сопротивлениями.

2. Уравнения поля (III.239) выведены из трех физических законов: закона Кулона, закона Ома и принципа сохранения заряда. По этой причине они содержат в точности ту же информацию, что и указанные законы.

Если представить себе, например, что первое уравнение не выполняется, т. е.

$$\text{rot } \mathbf{E} \neq 0 \quad \text{или} \quad E_t^{(2)} = E_t^{(1)},$$

то это означает, что поле  $\mathbf{E}$  не подчиняется закону Кулона и что оно вызывается как вихрями, так и источниками.

Если поле не удовлетворяет второму уравнению, т. е.

$$\text{div } \mathbf{j} = 0, \quad j_n^{(2)} = j_n^{(1)},$$

то это означает, что заряды непрерывно накапливаются и поэтому поле не может быть независимым от времени.

3. Данная система не описывает поведение поля, вызванного двойным слоем. Этот особый случай был в деталях рассмотрен ранее.

4. Ясно, что любое постоянное электрическое поле, независимо от распределения удельного сопротивления среды и положения первичных источников, является решением системы (III.239). Это происходит потому, что любое стационарное электрическое поле должно подчиняться закону Кулона, закону Ома и принципу сохранения заряда. Можно сказать, что природа этой системы такова, что она имеет бесконечное число решений.

Теперь используем аналогию между полем свободного пространства и полем в присутствии диэлектриков и введем систему уравнений, описывающую потенциал  $U$  в проводящей среде.

Прежде всего, из первого уравнения  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$  следует, что

$$\mathbf{E} = - \text{grad } U.$$

Подставляя это выражение во второе уравнение  $\operatorname{div} j = 0$ , получаем для регулярных точек среды

$$\nabla (\gamma \nabla U) = 0. \quad (\text{III.240})$$

Затем, используя равенство

$$E_t = - \frac{\partial U}{\partial L},$$

запишем условия для электрического поля на границах раздела:

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} = \frac{\partial U_2}{\partial t} \quad \text{и} \quad \gamma_2 \frac{\partial U_2}{\partial n} = \gamma_1 \frac{\partial U_1}{\partial n},$$

где  $U_1$  и  $U_2$  — значения потенциала соответственно на задней и передней сторонах поверхности раздела.

Поскольку обе компоненты электрического поля имеют конечные значения, то потенциал  $U$  является непрерывной функцией на поверхности раздела с некоторой плотностью зарядов  $\Sigma$ . Действительно, из равенства

$$U(p_2) - U(p_1) = \int_{p_2}^{p_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

следует, что при приближении друг к другу точек  $p_1$  и  $p_2$ , расположенных на противоположных сторонах поверхности раздела, потенциалы в этих точках становятся равными:

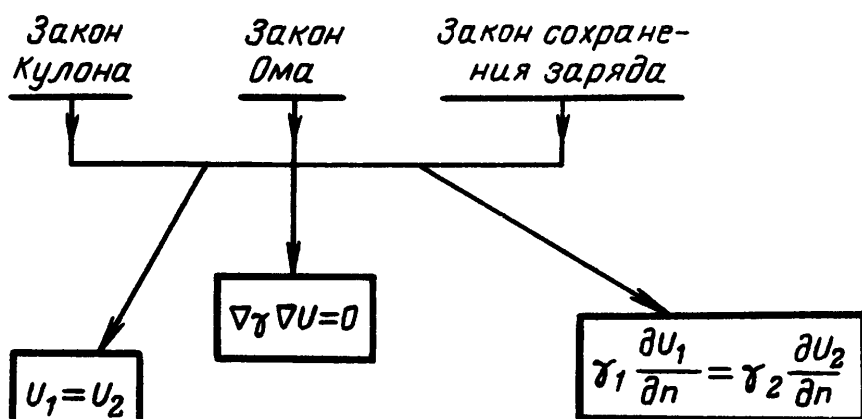
$$U_1 = U_2.$$

Ясно, что если потенциал не меняется при прохождении через поверхность раздела, то его тангенциальные производные на обеих сторонах равны друг другу и условия

$$U_1 = U_2 \quad \text{и} \quad \frac{\partial U_1}{\partial t} = \frac{\partial U_2}{\partial t}$$

эквивалентны.

Обобщая эти результаты, приходим к следующей системе уравнений, описывающей поведение потенциала в проводящей среде:



(III.241)



Как обычно, сделаем несколько замечаний.

1. Поскольку потенциал  $U$  является скалярной функцией, очень часто удобнее решать прямую задачу с использованием уравнений (III.241), чем (III.239).

2. По существу, уравнение (III.240) является уравнением Пуассона. Действительно, дифференцируя его, получаем

$$\nabla (\gamma \nabla U) = \gamma \nabla^2 U + \nabla \gamma \cdot \nabla U = 0$$

или

$$\nabla^2 U = - \frac{\nabla \gamma \cdot \nabla U}{\gamma} = \frac{\nabla \gamma \cdot \mathbf{E}}{\gamma}.$$

Как было показано ранее, правая часть последнего уравнения характеризует плотность зарядов в регулярных точках.

3. В наиболее часто встречающихся в электроразведке и скважинных исследованиях случаях можно предполагать, что проводящая среда является кусочно-однородной и состоит из различных сред, каждая из которых имеет постоянное удельное сопротивление. В этих предположениях уравнение для потенциала существенно упрощается и мы снова приходим к уравнению Лапласа:

$$\nabla^2 U = 0. \quad (\text{III.242})$$

4. Как и в случае системы для электрического поля, уравнения (III.241) не учитывают поведение потенциала, вызванного двойным слоем.

5. Потенциал  $U$  любого постоянного электрического поля является решением системы (III.241) и, соответственно, последняя определяет  $U$  не единственным образом. Более того, уравнение  $\mathbf{E} = - \text{grad } U$  определяет потенциал с точностью до постоянной. Таким образом, система (III.241) имеет бесконечное число решений.

Нашим следующим шагом будет выделение подхода, который позволит в принципе определить постоянное электрическое поле в любой проводящей среде. Поскольку закон Кулона для этой цели нельзя использовать, естественно обратиться либо к системе уравнений поля, либо к системе уравнений для потенциала  $U$ . Однако эти системы сами по себе определяют поле не единственным образом. Поэтому необходимо внести дополнительную информацию. Как известно, эта задача решается с помощью теоремы единственности, важность этой теоремы детально обсуждалась в главе I.

С некоторыми незначительными изменениями, которые учитывают произвольное изменение электропроводности среды, снова опишем эту теорему и сформулируем краевые задачи. Предположим, что потенциал  $U$  рассматривается в объеме  $V$ , который окружен краевыми поверхностями  $S_1$  и  $S_2$ . Также имеется по-

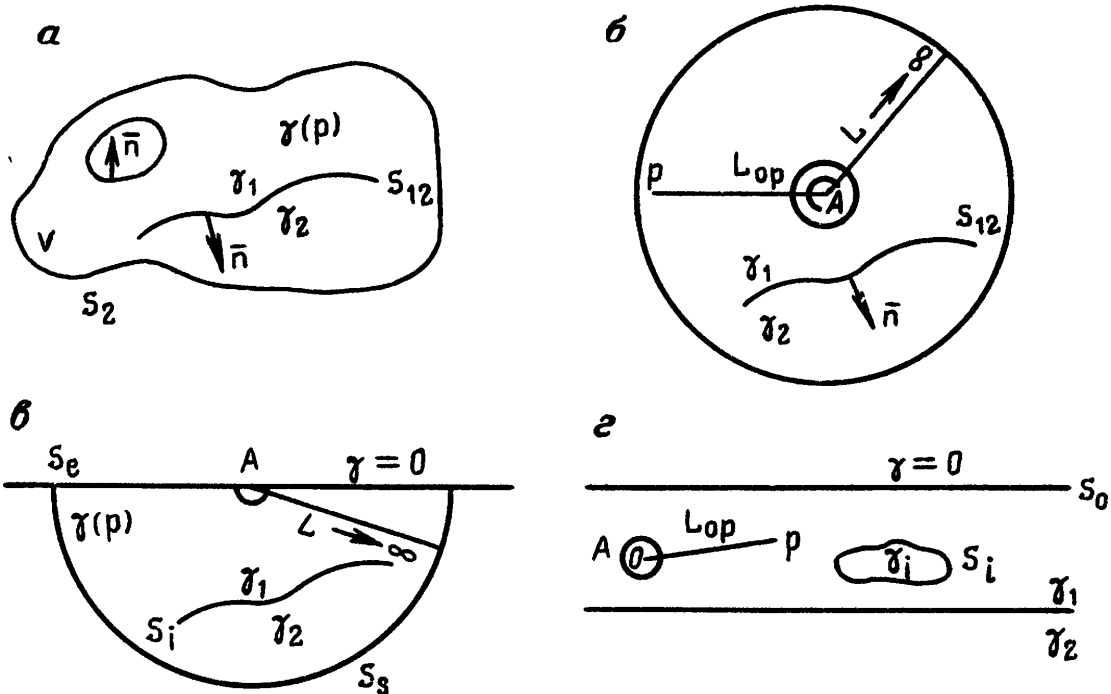


Рис. III.13. Иллюстрация к теореме единственности (а); тип модели среды: б — первый, в — второй; иллюстрация к выводу интегрального уравнения (г)

верхность раздела  $S_{12}$ , где электропроводность имеет различные значения на передней и задней сторонах (рис. III.13, а).

Конечно, потенциал  $U$  внутри этого объема является решением системы (III.241). Уместно отметить, что поверхности  $S_1$  и  $S_2$  обычно различны. Они могут быть поверхностью токового электрода, или поверхностью Земли, или сферической поверхностью бесконечно большого радиуса и т. д.

Для определения условий на краевых поверхностях, которые единственным образом определяют поле, предположим, что существуют два различных решения системы (III.241):  $U^{(1)}$  и  $U^{(2)}$ , т. е.

$$\nabla (\gamma \nabla U^{(1)}) = 0, \quad \nabla (\gamma \nabla U^{(2)}) = 0$$

и

$$U_1^{(1)} = U_2^{(1)}, \quad \gamma_1 \frac{\partial U_1^{(1)}}{\partial n} = \gamma_2 \frac{\partial U_2^{(1)}}{\partial n} \quad (\text{III.243})$$

и

$$U_1^{(2)} = U_2^{(2)}, \quad \gamma_1 \frac{\partial U_1^{(2)}}{\partial n} = \gamma_2 \frac{\partial U_2^{(2)}}{\partial n},$$

где  $\gamma_1$ ,  $U_1$  и  $\gamma_2$ ,  $U_2$  — электропроводности и потенциалы на задней и передней сторонах поверхности раздела  $S_{12}$  соответственно.

Рассмотрим разность этих решений

$$U^{(3)} = U^{(2)} - U^{(1)},$$

которая в соответствии с уравнениями (III.243) удовлетворяет следующим условиям:

$$\nabla (\gamma \nabla U^{(3)}) = 0,$$

$$U_1^{(3)} = U_2^{(3)}, \quad \gamma_1 \frac{\partial U_1^{(3)}}{\partial n} = \gamma_2 \frac{\partial U_2^{(3)}}{\partial n}. \quad (\text{III.244})$$

Затем введем вектор  $\mathbf{X}$ :

$$\mathbf{X} = U^{(3)} \gamma \nabla U^{(3)} \quad (\text{III.245})$$

и воспользуемся теоремой Гаусса:

$$\int_{V^*} \operatorname{div} \mathbf{X} dV = \oint_{S_1} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{S} + \oint_{S_2} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{S} + \oint_{S_0} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{S}, \quad (\text{III.246})$$

где  $S_0$  — поверхность «безопасности», окружающая поверхность раздела  $S_{12}$ , на которой вектор  $\mathbf{X}$  является разрывной функцией, так как электропроводности  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  не равны друг другу. Соответственно, теорема Гаусса применяется к объему  $V^*$ , который ограничен поверхностями  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_0$ .

Подставляя уравнение (III.245) в (III.246) и дифференцируя, получаем

$$\begin{aligned} & \int_{V^*} U^{(3)} \nabla (\gamma \nabla U^{(3)}) dV + \int_{V^*} \gamma (\nabla U^{(3)})^2 dV = \\ & = \oint_{S_1} U^{(3)} \gamma \frac{\partial U^{(3)}}{\partial n} dS + \oint_{S_2} U^{(3)} \gamma \frac{\partial U^{(3)}}{\partial n} dS + \oint_{S_0} U^{(3)} \gamma \frac{\partial U^{(3)}}{\partial n} dS. \end{aligned} \quad (\text{III.247})$$

С приближением  $S_0$  к  $S_{12}$  интегрирование по  $S_0$  сводится к интегрированию по обеим сторонам поверхности  $S_{12}$ . Учитывая, что на задней и передней сторонах этой поверхности

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_0 \quad \text{и} \quad \mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_0,$$

соответственно, имеем

$$\oint_{S_0} U^{(3)} \gamma \frac{\partial U^{(3)}}{\partial n} dS = \int_{S_{12}} \left[ U_1^{(3)} \gamma_1 \frac{\partial U_1^{(3)}}{\partial n} - U_2^{(3)} \gamma_2 \frac{\partial U_2^{(3)}}{\partial n} \right] dS \quad (\text{III.248})$$

и  $V^* \rightarrow V$ .

Теперь, используя (III.244), можно существенно упростить равенство (III.247), в итоге получая:

$$\int_V \gamma (\nabla U^{(3)})^2 dV = \oint_{S_1} \gamma U^{(3)} \frac{\partial U^{(3)}}{\partial n} dS + \oint_{S_2} \gamma U^{(2)} \frac{\partial U^{(3)}}{\partial n} dS. \quad (\text{III.249})$$

Последнее уравнение связывает потенциал и поле на краевых поверхностях  $S_1$  и  $S_2$  с потенциалом и полем внутри объема. Предположим, что поверхностные интегралы в уравнении (III.249) исчезают. Тогда правая часть его также равна нулю:

$$\int_V \gamma (\nabla U^{(3)})^2 dV = 0.$$

Поскольку подынтегральное выражение  $\gamma (\nabla U^{(3)})^2$  положительно ( $\gamma > 0$ ), то отсюда следует, что

$$\text{grad } U^{(3)} = 0. \quad (\text{III.250})$$

Таким образом, функция  $U_3$  не меняется внутри объема  $V$ .

Учитывая, что  $U_3$  является разностью двух решений системы (III.241), можно сказать, что если поверхностные интегралы в (III.249) равны нулю, то два произвольных решения системы (III.241)  $U_1$  и  $U_2$  должны отличаться друг от друга на постоянную величину. Однако поле  $E$  определяется при этом однозначно, так как

$$E = -\text{grad } U = -\text{grad } (U + C).$$

Теперь сформулируем краевые условия таким образом, чтобы поверхностные интегралы в уравнении (III.249) стали равными нулю. Здесь естественно использовать результаты, полученные в главе I. Соответственно приходим к трем видам краевых условий на поверхностях  $S_1$  и  $S_2$ :

1.  $U = \varphi(q),$
2.  $\frac{\partial U}{\partial n} = \psi(q),$  (III.251)
3.  $\oint_S \gamma \frac{\partial U}{\partial n} dS = I;$

здесь  $S$  — эквипотенциальная поверхность, а  $\varphi(q)$ ,  $\psi(q)$  и  $I$  — заданные функции. Существенно, что каждое краевое условие в (III.251) вместе с системой (III.241) однозначно определяет электрическое поле в объеме  $V$ . Это основной результат, полученный из теоремы единственности.

Соответственно, можно сформулировать три краевые задачи.

1. Задача Дирихле:

- а)  $\nabla (\gamma \nabla U) = 0$  в обычных точках,
- б)  $U_1 = U_2, \quad \gamma_1 \frac{\partial U_1}{\partial n} = \gamma_2 \frac{\partial U_2}{\partial n}$  на  $S_{12},$
- в)  $U = \varphi_1(q)$  на  $S_1, \quad U = \varphi_2(q)$  на  $S_2.$

2. Задача Неймана:

- а)  $\nabla (\gamma \nabla U) = 0$  в обычных точках,
- б)  $U_1 = U_2, \quad \gamma_1 \frac{\partial U_1}{\partial n} = \gamma_2 \frac{\partial U_2}{\partial n}$  на  $S_{12},$
- в)  $\frac{\partial U}{\partial n} = \psi_1(q)$  на  $S_1, \quad \frac{\partial U}{\partial n} = \psi_2(q)$  на  $S_2.$

3. Третья краевая задача:

а)  $\nabla (\gamma \nabla U) = 0$  в обычных точках,

б)  $U_1 = U_2, \quad \gamma_1 \frac{\partial U_1}{\partial n} = \gamma_2 \frac{\partial U_2}{\partial n}$  на  $S_{12}$ ,

в)  $\oint_{S_1} \gamma \frac{\partial U}{\partial n} dS = I, \quad \oint_{S_2} \gamma \frac{\partial U}{\partial n} dS = -I,$

где  $S_1$  и  $S_2$  — эквипотенциальные поверхности.

Теперь сделаем несколько замечаний, которые, возможно, помогут уточнить роль теоремы единственности.

1. Теорема единственности не обеспечивает алгоритм для определения поля, вместо этого она формулирует условия, которые единственным образом определяют поле.

2. Каждая краевая задача состоит из двух частей:

а) системы уравнений для потенциала (III.241),

б) одного из краевых условий.

3. Все три краевых условия всегда имеют физический смысл и обычно очень просто их сформулировать.

4. Весьма существенно понимать, что типы краевых условий могут меняться от точки к точке и, конечно, они могут быть различными на различных краевых поверхностях. В то же время важно отметить, что во всех без исключения точках краевых поверхностей должно быть поставлено одно из этих краевых условий.

5. При получении системы уравнений для потенциала (III.241) и формулировании краевых условий было предположено, что модель проводящей среды имеет одну поверхность раздела. Однако очевидно, что наши результаты остаются справедливыми и в общем случае, когда существует несколько поверхностей раздела между средами с различными удельными сопротивлениями. В соответствии с (III.241) на каждой поверхности раздела потенциал и нормальная компонента плотности тока должны быть непрерывными.

6. Несмотря на то, что теорема единственности не предлагает алгоритма для вычисления поля, она формулирует основные шаги решения, которые нужно выполнить для нахождения электрического поля.

В качестве примеров процесса постановки краевых задач рассмотрим две модели проводящей среды, часто используемые в теории электроразведки и электротметрии скважин.

### Пример 1. Первая модель (рис. III.13, б)

Предположим, что ток  $I$  идет в среду через электрод  $A$ , расположенный вблизи точки  $O$ . Среда всюду однородная, за исключением поверхности раздела  $S_{12}$ . Теперь начнем извлекать ин-

формацию о поведении поля, которая необходима для постановки краевой задачи. Прежде всего, в регулярных точках потенциал  $U$  удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2 U = 0,$$

поскольку  $\gamma$  — постоянная.

Затем очевидно, что в соответствии с законом Кулона потенциал, вызванный всеми поверхностными зарядами, стремится к нулю при неограниченном возрастании расстояния  $L_{0p}$  до электрода:

$$U \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad L_{0p} \rightarrow \infty.$$

Другими словами, можно сказать, что на сферической поверхности  $S_2$  с бесконечно большим радиусом потенциал  $U$  равен нулю. Таким образом, мы сформулировали краевую задачу на бесконечности. Что касается поведения потенциала вблизи поверхности раздела  $S_{12}$ , то ясно, что потенциал и нормальная компонента плотности тока должны быть непрерывными:

$$U_1 = U_2, \quad \gamma_1 \frac{\partial U_1}{\partial n} = \gamma_2 \frac{\partial U_2}{\partial n} \quad \text{на} \quad S_{12}.$$

Последнее уравнение можно рассматривать как поверхностный аналог (III.240).

Мы описали поведение потенциала всюду, за исключением поверхности электрода  $S_1$ , которая вместе с  $S_2$  ограничивает объем  $V$ .

Поскольку электропроводность электрода по величине на много порядков превосходит электропроводность окружающей среды, то можно трактовать  $S_1$  как эквипотенциальную поверхность:

$$U(S_1) = \text{const}.$$

Также естественно предположить, что ток  $I$  через поверхность электрода известен, тогда в соответствии с законом Ома он связан с потенциалом  $U$  соотношением

$$\oint_{S_1} \gamma \frac{\partial U}{\partial n} dS = I,$$

где  $n$  — нормаль, направленная внутрь электрода.

Таким образом, краевую задачу в этом случае можно описать с помощью потенциала, удовлетворяющего следующим условиям.

1. На эквипотенциальной краевой поверхности электрода

$$\oint_{S_1} \gamma_1 \frac{\partial U}{\partial n} dS = I. \tag{III.252}$$

2. В регулярных точках среды потенциал является решением уравнения Лапласа:

$$\nabla^2 U = 0.$$

3. Потенциал и нормальная компонента плотности тока с каждой стороны поверхности раздела связаны следующими соотношениями:

$$U_1 = U_2, \quad \gamma_1 \frac{\partial U_1}{\partial n} = \gamma_2 \frac{\partial U_2}{\partial n}.$$

4. На краевой поверхности  $S_2$  с бесконечно большим радиусом потенциал стремится к нулю:

$$U \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad L_{0p} \rightarrow \infty.$$

Как следует из теоремы единственности, эти четыре условия однозначно определяют электрическое поле и потенциал; т. е. можно сказать, что краевая задача поставлена корректно.

Следует отметить, что краевое условие вблизи источника очень часто можно упростить. Предположим, что токовый электрод  $A$  — это малая сфера с радиусом  $a$ , тогда можно представить потенциал  $U$  как сумму:

$$U = U_0 + U_1,$$

где  $U_0$  — потенциал, обусловленный зарядом поверхности электрода, а  $U_1$  — потенциал, вызванный зарядами, появляющимися на поверхности раздела  $S_{12}$ . Используя уравнение (III.163), имеем

$$U = \frac{\rho_1 I}{4\pi L_{0p}} + U_1,$$

где  $\rho_1$  — удельное сопротивление среды, непосредственно окружающей электрод. Если допустить, что радиус электрода достаточно мал, то при приближении к его поверхности потенциал  $U_1$ , вызванный удаленными зарядами, стремится к некоторому конечному значению, а потенциал  $U_0$  становится очень большим. Краевые условия вблизи источника можно переписать в следующем виде:

$$U \rightarrow U_0 = \frac{\rho_1 I}{4\pi L_{0p}} \quad \text{при} \quad L_{0p} > a.$$

Вероятно, следует сделать два комментария.

А. В предельном случае можно заменить поверхностный заряд точечным зарядом. Эта замена не изменит поле вне электрода.

Б. С физической точки зрения ясно, что это упрощение справедливо даже в тех случаях, когда вместо сферического электрода рассматривается малый электрод произвольной формы, а поверхность  $S_1$  расположена на некотором расстоянии от него.

Таким образом, краевую задачу можно представить в следующем виде:

1.  $U_1 \rightarrow U_0 = \frac{\rho_1 I}{4\pi L_{0p}}$  при  $L_{0p} \rightarrow 0$ ;
  2.  $\nabla^2 U = 0$ ;
  3.  $U_i = U_{i+1}$ ,  $\gamma_1 \frac{\partial U_i}{\partial n} = \gamma_{i+1} \frac{\partial U_{i+1}}{\partial n}$  на  $S_i$ ;
  4.  $U \rightarrow 0$  при  $L_{0p} \rightarrow \infty$ .
- (III.253)

Очевидно, что здесь рассмотрен общий случай, т. е. предполагается, что среда содержит несколько поверхностей раздела  $S_i$ .

Конечно, краевое условие  $U \rightarrow U_0$  является более простым, чем уравнение (III.252), однако последнее представляется более общим и, в частности, его следует использовать, если электрод расположен достаточно близко к зарядам, появляющимся на поверхностях раздела.

### Пример 2. Вторая модель (рис. III.13, в)

Данная модель состоит из верхнего непроводящего полупространства и кусочно-однородной проводящей среды, расположенной под поверхностью Земли. Теперь сформулируем краевую задачу для проводящего полупространства, окруженного поверхностью электрода  $S_1$  и краевой поверхностью  $S_2$ , включающей в себя поверхность Земли  $S_0$  и полусферическую поверхность бесконечно большого радиуса  $S_s$ :

$$S_2 = S_0 + S_s.$$

Учитывая, что нормальная компонента плотности тока равна нулю на границе непроводящей среды, нетрудно сформулировать краевое условие на поверхности Земли. Действительно, в соответствии с законом Ома нормальная компонента электрического поля также исчезает на проводящей стороне этой поверхности.

Соответственно, краевая задача формулируется следующим образом:

1.  $\nabla^2 U = 0$ ;
  2.  $U_i = U_{i+1}$ ,  $\gamma_i \frac{\partial U_i}{\partial n} = \gamma_{i+1} \frac{\partial U_{i+1}}{\partial n}$  на  $S_i$ ;
  3.  $U \rightarrow U_0 = \frac{\rho_1 I}{4\pi L_{0p}}$  на  $S_1$ ;
  4.  $\frac{\partial U}{\partial n} \rightarrow 0$  на  $S_0$ ;
  5.  $U \rightarrow 0$  при  $L_{0p} \rightarrow \infty$ .
- (III.254)

Сделаем два пояснения.



1. Поскольку нормальная компонента электрического поля известна во всех точках поверхности Земли ( $E_n \equiv 0$ ), можно определить поле в проводящей среде без учета свободного пространства.

2. В соответствии с уравнением (III.174) потенциал, обусловленный зарядом токового электрода, расположенного на поверхности Земли, равен

$$U_0 = \rho_1 I / 2\pi L_{0p},$$

поэтому краевое условие на поверхности  $S_1$  выглядит следующим образом:

$$U \rightarrow U_0 = \rho_1 I / 2\pi L_{0p}.$$

После того, как были сформулированы краевые задачи для электрического поля в проводящей среде, естественно сделать следующий шаг и рассмотреть методы решения этих задач. Существуют по крайней мере три таких метода.

1. Метод разделения переменных.
2. Метод конечных разностей.
3. Метод интегральных уравнений.

Однако их изучение является предметом прикладной математики и выходит далеко за пределы данной монографии.

Тем не менее в следующем разделе мы несколько раз продемонстрируем применение метода разделения переменных. Использование этого метода ограничено, однако, моделями среды с относительно простыми формами поверхностей раздела сред с различными электропроводностями. Конечно, изучение поведения поля в таких моделях представляет большой практический интерес и, в действительности, эти исследования помогли развить основную теорию электрических методов. В то же время более сложные модели проводящей среды требуют применения подходов более сложных, чем метод разделения переменных, таких как методы интегральных уравнений или конечных разностей. Оба эти метода наглядно показывают, насколько решение прямой задачи в электрических методах сложнее, чем в гравитационных.

Для иллюстрации получим здесь интегральное уравнение для потенциала электрического поля; с этой целью рассмотрим двухслойную среду с произвольной неоднородностью в верхнем слое, как показано на рис. III.13, г. Будем использовать следующие обозначения:  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — электропроводности верхнего и второго слоя соответственно;  $\gamma_i$  и  $S_i$  — электропроводность и поверхность неоднородности;  $S_0$  и  $S_1$  — поверхности Земли и раздела между слоями соответственно.

Для вывода интегрального уравнения будем исходить из формулы Грина

$$\int_V (G \nabla^2 U - U \nabla^2 G) dV = \oint_S \left( G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS, \quad (\text{III.255})$$

где  $n$  — нормаль, направленная наружу от поверхности  $S$ , которая окружает проводящую среду, а  $G$  — произвольная функция Грина. В то же время  $U$  является потенциалом электрического поля и в соответствии с уравнениями (III.254) удовлетворяет следующим условиям.

1. В регулярных точках он является решением уравнения Лапласа

$$\nabla^2 U = 0.$$

2. Вблизи токового электрода он стремится к  $U_0$ ,

$$U \rightarrow \rho_1 I / 4\pi L_{0p} \quad \text{при} \quad L_{0p} \rightarrow 0;$$

здесь электрод расположен в окрестности точки 0.

3. На бесконечности потенциал стремится к нулю, как если бы источник был точечным зарядом:

$$U \rightarrow C / L_{0p} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad L_{0p} \rightarrow \infty,$$

где  $C$  — некоторая неизвестная постоянная.

4. На поверхности раздела между верхним слоем и основанием

$$U_1 = U_2, \quad \gamma_1 \frac{\partial U_1}{\partial n} = \gamma_2 \frac{\partial U_2}{\partial n}.$$

5. На поверхности неоднородности  $S_i$

$$U_1 = U_2, \quad \gamma_1 \frac{\partial U_1}{\partial n} = \gamma_i \frac{\partial U_i}{\partial n}.$$

6. На поверхности Земли нормальная компонента плотности тока равна нулю:

$$\partial U_1 / \partial n = 0.$$

Теперь выберем функцию  $G$  таким образом, чтобы объемный интеграл в уравнении (III.255) исчез, а поверхностный интеграл вычислялся бы только по поверхности неоднородности. С этой целью предположим, что функция Грина  $G$ , которая зависит от двух точек  $q$  и  $p$ , является с точностью до постоянной потенциалом в точке  $q$ , вызванным единичным зарядом, расположенным в точке  $p$  двухслойной среды при отсутствии неоднородности. Соответственно, функция  $G$  удовлетворяет следующим условиям.

1. Внутри верхнего слоя и основания, за исключением точки  $p$ ,

$$\nabla^2 G = 0.$$

2. Вблизи точки наблюдения  $p$

$$G(q, p) \rightarrow \frac{1}{L_{qp}} \quad \text{при} \quad L_{qp} \rightarrow 0.$$

3. На поверхности раздела между верхним слоем и основанием

$$G_1 = G_2 \quad \text{и} \quad \gamma_1 \frac{\partial G_1}{\partial n} = \gamma_2 \frac{\partial G_2}{\partial n}.$$

4. На поверхности неоднородности

$$G_1 = G_i \quad \text{и} \quad \frac{\partial G_1}{\partial n} = \frac{\partial G_i}{\partial n}.$$

5. На поверхности Земли

$$\partial G_1 / \partial n = 0.$$

6. На бесконечности функция  $G$  убывает

$$G \rightarrow \frac{c}{L_{qp}} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad L_{qp} \rightarrow \infty.$$

При применении уравнения (III.255) следует учесть, что оно справедливо только при условии существования первых и вторых производных функций  $U$  и  $G$ . По этой причине окружим токовый электрод и точку  $p$  поверхностями «безопасности»  $S_A$  и  $S_p$  и применим формулу Грина к каждой из однородных частей проводящей среды.

Внутри второго слоя

$$\int_{s_1} \left[ G_2 \frac{\partial U_2}{\partial n_-} - U_2 \frac{\partial G_2}{\partial n_-} \right] dS = 0, \quad (\text{III.256})$$

поскольку  $\nabla^2 G_2 = \nabla^2 U = 0$  и обе функции  $G_2$  и  $U_2$  убывают на бесконечности по крайней мере как  $1/L_{qp}$ . Здесь нормаль  $n_-$  направлена в сторону верхнего слоя.

Применяя формулу Грина к объему, который занимает неоднородность, имеем

$$\oint_{s_i} \left[ G_i \frac{\partial U_i}{\partial n_+} - U_i \frac{\partial G_i}{\partial n_-} \right] dS = 0, \quad (\text{III.257})$$

так как  $\nabla^2 G_i = \nabla^2 U_i = 0$  и  $n_+$  направлена наружу объема. И наконец, вне неоднородности и внутри верхнего слоя получаем

$$\begin{aligned} & \oint_{s_A} \left[ G_1 \frac{\partial U_1}{\partial n} - U_1 \frac{\partial G_1}{\partial n} \right] dS + \oint_{s_0} \left[ G_1 \frac{\partial U_1}{\partial n} - U_1 \frac{\partial G_1}{\partial n} \right] dS + \\ & + \oint_{s_p} \left[ G_1 \frac{\partial U_1}{\partial n} - U_1 \frac{\partial G_1}{\partial n} \right] dS + \oint_{s_i} \left[ G_1 \frac{\partial U_1}{\partial n_-} - U_1 \frac{\partial G_1}{\partial n_-} \right] dS + \\ & + \oint_{s_1} \left[ G_1 \frac{\partial U_1}{\partial n_+} - U_1 \frac{\partial G_1}{\partial n_+} \right] dS = 0. \end{aligned} \quad (\text{III.258})$$

Первые три интеграла можно существенно упростить. Рассмотрим первый интеграл, в котором интегрирование выполняется по сфере вокруг токового электрода, радиус которой в пределе стремится к нулю. При приближении к токовому электроду  $U_1 \rightarrow \rho_1 I / 4\pi R$ , где  $R$  — радиус сферической поверхности. Поэтому

$$\frac{\partial U_1}{\partial R} = \frac{\rho_1 I}{4\pi R^2} \quad \text{или} \quad \frac{\partial U_1}{\partial n} = \frac{\rho_1 I}{4\pi R^2},$$

поскольку направления  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{n}$  противоположны друг другу.

Учитывая, что функция Грина и ее производные имеют конечные значения в окрестности электрода, и используя теорему о среднем значении, получаем:

$$\oint_{S_A} \left[ G_1 \frac{\partial U_1}{\partial n} - U_1 \frac{\partial G_1}{\partial n} \right] dS = \left[ G_1 \frac{\rho_1 I}{4\pi R^2} - \frac{\rho_1 I}{R} \frac{\partial G}{\partial n} \right] \times \\ \times 4\pi R^2 = \rho_1 I G_1(0, p) \quad \text{при} \quad R \rightarrow 0. \quad (\text{III.259})$$

Легко видеть, что правая часть уравнения (III.259) равна  $4\pi U^*$ , где  $U^*$  — потенциал в точке  $p$  горизонтальной слоистой среды без неоднородности:

$$\oint_{S_A} \left[ G_1 \frac{\partial U_1}{\partial n} - U_1 \frac{\partial G_1}{\partial n} \right] dS = 4\pi U^*(p). \quad (\text{III.260})$$

Второй интеграл равен нулю, потому что обе производные  $\partial U_1 / \partial n$  и  $\partial G_1 / \partial n$  на поверхности Земли исчезают:

$$\oint_{S_0} \left[ G_1 \frac{\partial U_1}{\partial n} - U_1 \frac{\partial G_1}{\partial n} \right] dS = 0. \quad (\text{III.261})$$

Наконец, рассмотрим третий интеграл вокруг точки наблюдения  $p$ , приближаясь к которой функция Грина  $G$  стремится к бесконечности  $\infty$  со скоростью, пропорциональной  $1/R$ :

$$G_1 \rightarrow 1/R \quad \text{и} \quad \frac{\partial G_1}{\partial n} = 1/R^2,$$

так как  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{R}$  имеют противоположные направления. Снова применив теорему о среднем значении, получаем

$$\oint_{S_p} \left[ G_1 \frac{\partial U_1}{\partial n} - U_1 \frac{\partial G_1}{\partial n} \right] dS = \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial U_1}{\partial n} - U_1 \frac{1}{R^2} \right] 4\pi R^2 = \\ = -4\pi U_1(p) \quad \text{при} \quad R \rightarrow 0, \quad (\text{III.262})$$

где  $U_1(p)$  — потенциал электрического поля в присутствии неоднородности.

Таким образом, вместо (III.158) можно написать:

$$4\pi U^*(p) - 4\pi U_1(p) + \oint_{S_i} \left[ G \frac{\partial U_1}{\partial n_-} - U_1 \frac{\partial G_1}{\partial n_-} \right] dS + \\ + \int_{S_1} \left[ G_1 \frac{\partial U_1}{\partial n_+} - U_1 \frac{\partial G_1}{\partial n_+} \right] dS = 0. \quad (\text{III.263})$$

Теперь умножим уравнения (III.256) и (III.263) на  $\gamma_2$  и  $\gamma_1$  соответственно и сложим их. Получим

$$4\pi \gamma_1 U^*(p) - 4\pi \gamma_1 U_1(p) + \gamma_1 \oint_{S_i} \left[ G_1 \frac{\partial U_1}{\partial n_-} - U_1 \frac{\partial G_1}{\partial n_-} \right] dS + \\ + \gamma_1 \int_{S_1} \left[ G_1 \frac{\partial U_1}{\partial n_+} - U_1 \frac{\partial G_1}{\partial n_+} \right] dS + \gamma_2 \int_{S_1} \left[ G_2 \frac{\partial U_2}{\partial n_-} - U_2 \frac{\partial G_2}{\partial n_-} \right] dS = 0. \quad (\text{III.264})$$

Учитывая, что на поверхности раздела  $S_1$

$$U_1 = U_2, \quad \gamma_1 \frac{\partial U_1}{\partial n} = \gamma_2 \frac{\partial U_2}{\partial n}$$

и

$$G_1 = G_2, \quad \gamma_1 \frac{\partial G_1}{\partial n} = \gamma_2 \frac{\partial G_2}{\partial n}.$$

Поскольку  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$  имеют противоположные направления, то сумма последних двух интегралов в (III.264) равна нулю и, таким образом,

$$4\pi \gamma_1 U^*(p) - 4\pi \gamma_1 U_1(p) + \gamma_1 \oint_{S_i} \left\{ G_1 \frac{\partial U_1}{\partial n_-} - U_1 \frac{\partial G_1}{\partial n_-} \right\} dS = 0.$$

Предположим, что точка  $p$  приближается к поверхности  $S_i$ . Тогда, применяя метод, который использовался при изучении поля двойного слоя, имеем

$$- \oint_{S_i} U_1 \frac{\partial G_1}{\partial n_-} dS = 2\pi U_1(p) - \int_{S_i - p} U_1 \frac{\partial G_1}{\partial n_-} dS.$$

Отсюда

$$4\pi \gamma_1 U^*(p) - 2\pi \gamma_1 U_1(p) + \gamma_1 \oint_{S_i - p} \left\{ G_1 \frac{\partial U_1}{\partial n_-} - U_1 \frac{\partial G_1}{\partial n_-} \right\} dS = 0. \quad (\text{III.265})$$

Затем, рассматривая точку  $p$  внутри неоднородности, можно получить

$$- 4\pi \gamma_i U_2(p) + \gamma_i \oint_{S_i} \left\{ G_1 \frac{\partial U_2}{\partial n_+} - U_2 \frac{\partial G_1}{\partial n_+} \right\} dS = 0.$$

В пределе, когда точка  $p$  стремится к  $S_i$ ,

$$- 2\pi \gamma_i U_2(p) + \gamma_i \int_{S_i-p} \left\{ G_1 \frac{\partial U_2}{\partial n_+} - U_2 \frac{\partial G_1}{\partial n_+} \right\} dS = 0. \quad (\text{III.266})$$

Складывая уравнения (III.265) и (III.266), получаем

$$\begin{aligned} & 4\pi \gamma_1 U^*(p) - 2\pi \{ \gamma_1 U_1(p) + \gamma_i U_2(p) \} + \\ & + \int_{S_i-p} \left\{ \gamma_1 G_1 \frac{\partial U_1}{\partial n_-} + \gamma_i G_1 \frac{\partial U_2}{\partial n_+} \right\} dS - \\ & - \int_{S_i-p} \left\{ \gamma_1 U_1 \frac{\partial G_1}{\partial n_-} + \gamma_i U_2 \frac{\partial G_i}{\partial n_+} \right\} dS = 0. \end{aligned}$$

Поскольку

$$U_1 = U_2 = U \quad \text{и} \quad \gamma_1 \frac{\partial U_1}{\partial n} = \gamma_i \frac{\partial U_2}{\partial n}$$

и одновременно

$$\mathbf{n}_+ = -\mathbf{n}_- = \mathbf{n},$$

то окончательно получаем

$$U(p) = \frac{2\gamma_1}{\gamma_i + \gamma_1} U^*(p) - \frac{\gamma_i - \gamma_1}{\gamma_i + \gamma_1} \frac{1}{2\pi} \oint_{S_i-p} U(q) \frac{\partial G_1(p, q)}{\partial n} dS. \quad (\text{III.267})$$

Выражение (III.267) является интегральным уравнением относительно потенциала  $U$ , так как обе точки  $p$  и  $q$  расположены на поверхности  $S_i$ .

Здесь уместно сделать следующие комментарии.

1. Предполагается, что потенциал  $U^*(p)$  в слоистой среде известен, его легко можно получить, применяя метод разделения переменных.

2. Интегральное уравнение (III.267) остается справедливым, если неоднородность расположена в горизонтальной слоистой среде с  $n$  слоями. В таком случае функция  $G$  должна описывать потенциал в этой слоистой среде.

3. В частности, неоднородность может быть некоторой структурой на одной из поверхностей раздела слоистой среды.

4. При рассмотрении электростатической индукции было показано, что интегральное уравнение относительно зарядов можно рассматривать как систему линейных уравнений. Конечно же, это также справедливо и для уравнения (III.267).

5. Как только потенциал  $U$  становится известным на поверхности  $S_i$ , его можно вычислить в любой точке вне неоднородности.

6. Интегрирование в правой части уравнения (III.267) выполняется по поверхности  $S_i$ , за исключением точки  $p$ , где потенциал  $U(p)$  вычислен.

### III.10. ПОВЕДЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих поведение поля в различных моделях проводящей среды. Эти модели выбраны так, чтобы продемонстрировать применение электрических методов в различных областях геофизики. Наше исследование также будет включать в себя обсуждение разрешающей способности электрических методов, глубину их проникновения, влияние геологического шума и т. д.

#### Пример 1. Влияние неоднородности на электрическое поле

Предположим, что неоднородность с электропроводностью  $\gamma_i$  окружена однородной средой с электропроводностью  $\gamma_e$  (рис. III.14, *a*), а  $E_0$  описывает поведение поля в отсутствие неоднородности. Это поле часто называют первичным полем. Благодаря этому полю на поверхности неоднородности появляются заряды и в соответ-

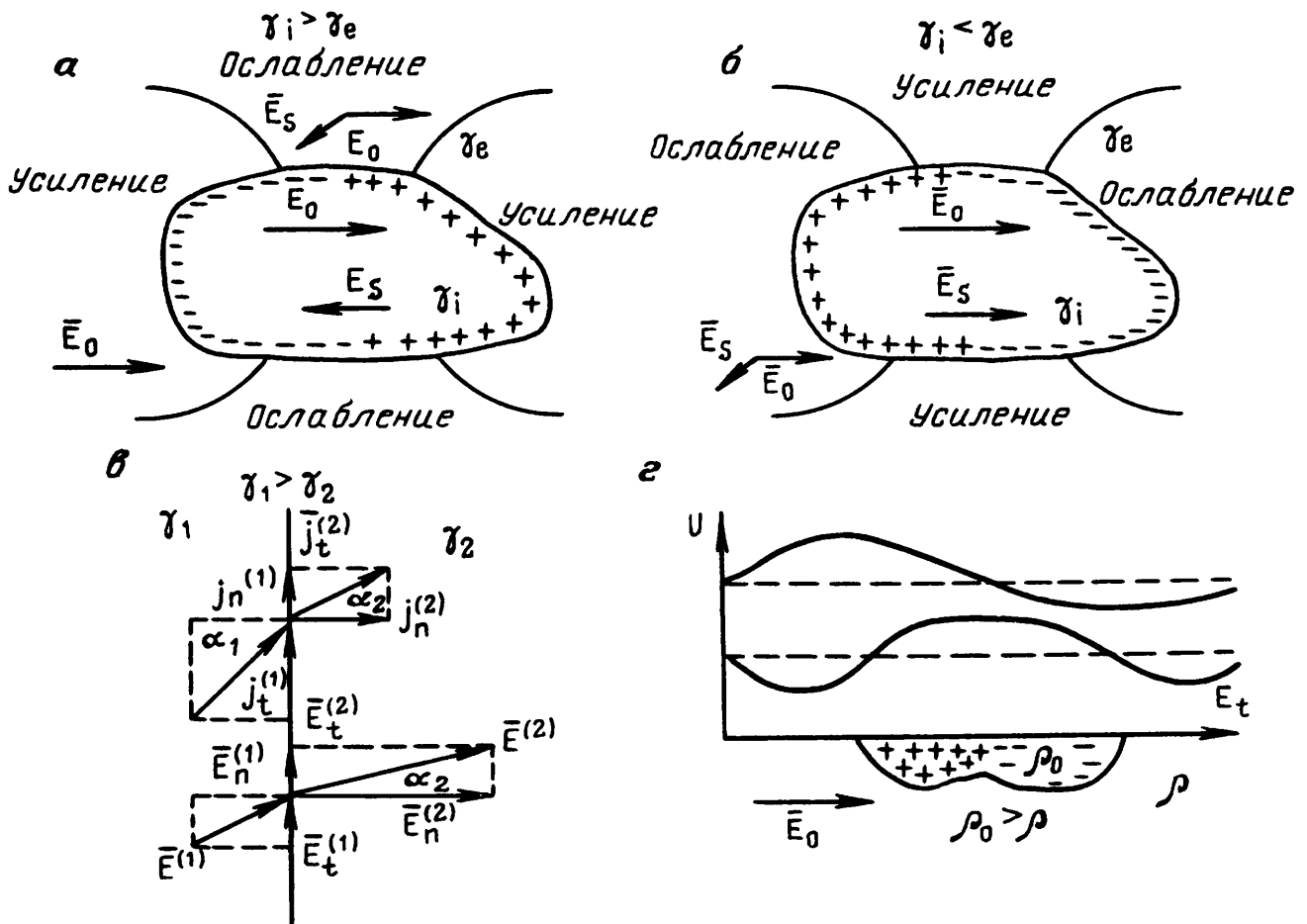


Рис. III.14. Поведение поля: *a* — при  $\gamma_i > \gamma_e$ , *б* — при  $\gamma_i < \gamma_e$ , *в* — в присутствии плохо проводящей неоднородности; *г* — линии электрического поля и плотности тока на поверхности раздела

ствии с уравнением (III.154) их плотность определяется выражением

$$\Sigma = 2\epsilon_0 \frac{\rho_i - \rho_e}{\rho_i + \rho_e} E_n^{\text{ср}}, \quad (\text{III.268})$$

где  $\rho_i$  и  $\rho_e$  — удельные сопротивления неоднородности и окружающей среды соответственно;  $E_n^{\text{ср}}$  — среднее значение нормальной компоненты, а нормаль  $n$  направлена внутрь неоднородности.

Исходя из принципа сохранения заряда следует заключить, что величина и знак  $\Sigma$  меняются таким образом, чтобы суммарное количество поверхностных зарядов было равно нулю. В случаях, наиболее часто встречающихся на практике, это означает, что положительные заряды появляются на одной стороне неоднородности, а отрицательные заряды — на противоположной стороне. Таким образом, существует замкнутая линия точек, вдоль которой плотность  $\Sigma$  равна нулю. Конечно, в общем случае распределение зарядов значительно сложнее. Эти заряды служат источниками вторичного поля  $E_s$ , и соответственно, суммарное поле вне и внутри неоднородности

$$E = E_0 + E_s. \quad (\text{III.269})$$

Здесь следует сделать несколько комментариев.

1. В соответствии с законом Кулона вторичное поле  $E_s$  связано с плотностью зарядов  $\Sigma$  соотношением

$$E_s(p) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\Sigma(q) L_{qp}}{L_{qp}^3} dS,$$

где  $\Sigma(q)$  — неизвестная функция. Это уравнение позволяет вывести несколько полезных свойств поведения поля.

2. В общем случае оба поля  $E_0$  и  $E_s$  имеют различные величины и направления.

3. Очевидно, что только вторичное поле содержит информацию об удельном сопротивлении, форме, размерах и положении неоднородности. Все эти величины, так же как и  $\rho_e$ , обычно называют геоэлектрическими параметрами.

4. Поле потенциала и поле плотности тока можно представить как сумму двух полей:

$$U = U_0 + U_s, \\ j_i = \gamma_i (E_0 + E_s), \quad j_e = \gamma_e (E_0 + E_s)$$

для точек внутри и снаружи неоднородности соответственно.

Предположим, что тело относительно простой формы обладает более высокой электропроводностью, чем окружающая среда ( $\gamma_i > \gamma_e$ ), а первичное электрическое поле направлено от задней стороны неоднородности к передней (см. рис. III.14, *a*). Тогда в



соответствии с (III.268) отрицательные заряды появляются на задней стороне, а положительные — на передней стороне. Действительно, нормальная компонента  $E_n^{cp}$  положительна на задней стороне, но коэффициент контрастности

$$(\rho_i - \rho_e) / (\rho_i + \rho_e)$$

отрицателен и, соответственно,  $\Sigma < 0$ . Напротив, на передней стороне появляются положительные заряды, поскольку  $E_n^{cp} < 0$ .

Теперь рассмотрим поведение компоненты суммарного поля, направленной вдоль первичного поля. Для удобства представим вторичное поле как сумму:

$$E_s = E_s^+ + E_s^-,$$

где  $E_s^+$  и  $E_s^-$  — поля, вызванные положительными и отрицательными зарядами соответственно. Сначала возьмем некоторую точку  $p_1$ , расположенную снаружи и напротив неоднородности. В этом случае поле  $E_s^+$  создает положительную компоненту вдоль поля  $E_0$ , в то время как поле отрицательных зарядов  $E_s^-$  имеет противоположное направление. Учитывая, что количество положительных и отрицательных зарядов одинаково, но последние расположены дальше, можно сказать, что вдоль первичного поля

$$|E_{s0}^+| > |E_{s0}^-|$$

и поэтому, благодаря присутствию неоднородности, поле в точке  $p_1$  возрастает:

$$|E_0 + E_{s0}| > |E_0|, \quad (\text{III.270})$$

где  $E_{s0}$  — векторная компонента вторичного поля в направлении первичного поля.

Затем рассмотрим поведение поля в точке  $p_2$ , также расположенной вне тела и напротив точки  $p_1$ . В этом случае поле отрицательных зарядов  $E_s^-$  направлено в сторону тела и противоположно полю положительных зарядов. Поскольку отрицательные заряды расположены ближе, можно снова заключить, что в этой области поле увеличивается в направлении первичного поля.

Теперь возьмем точку  $p_3$ , также расположенную в окружающей среде, но в окрестности экваториальной плоскости этой модели. Как видно из рис. III.14, а, оба поля  $E_s^+$  и  $E_s^-$  создают векторные компоненты, направления которых противоположны первичному полю:

$$|E_0 + E_{s0}| < |E_0|. \quad (\text{III.271})$$

Обобщая эти результаты, можно выделить следующие три области: спереди и сзади проводящей неоднородности, где поле возрастает в направлении первичного поля, и вокруг экваториальной плоскости, где поле убывает. На границах этих областей компо-

нента вторичного поля, направленная вдоль первичного поля, равна нулю.

Теперь рассмотрим поведение поля внутри неоднородности при  $\gamma_i > \gamma_e$ . Поскольку положительные и отрицательные заряды расположены на передней и задней сторонах неоднородности, их поле создает компоненту, направленную противоположно первичному полю. Соответственно, полное поле в направлении первичного поля уменьшается. С увеличением контраста электропроводностей  $\gamma_i/\gamma_e$  вторичное поле внутри неоднородности также возрастает и в пределе становится равным величине первичного поля. В итоге в случае идеального проводника поле внутри неоднородности исчезает. Как следует из данного рассуждения, с увеличением электропроводности  $\gamma_i$  напряжение между двумя произвольными точками неоднородности уменьшается. Другими словами, чем лучше проводник, тем меньше электрическое поле внутри него. Эта связь до некоторой степени может служить характеристикой проводника.

Перейдем далее к изучению поведения потенциала вторичного поля  $U_s$ . Из уравнения

$$U_s(p) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\Sigma(q) dS}{L_{qp}}$$

следует, что потенциал положителен, если точка  $p$  расположена вблизи передней стороны неоднородности, и отрицателен, если точка наблюдения лежит вблизи задней стороны.

Соответственно, существует поверхность, проходящая через неоднородность, где потенциал  $U_s$  равен нулю. В случае идеального проводника потенциал суммарного поля остается постоянным во всех точках данного тела, даже если потенциал первичного поля меняется.

Наконец, обсудим поле плотности тока. Вне неоднородности поведение поля плотности тока похоже на поведение электрического поля, так как  $\mathbf{j} = \gamma_e \mathbf{E}$ . Внутри тела плотность тока возрастает, несмотря на уменьшение компоненты электрического поля в направлении  $\mathbf{E}_0$ . Поскольку количество зарядов, проходящих через любую элементарную поверхность, не может быть бесконечно большим, то с увеличением электропроводности  $\gamma_i$  плотность тока стремится к некоторому конечному пределу, зависящему от формы и размеров неоднородности. Вектор  $\mathbf{j}$  направлен вдоль первичного поля  $\mathbf{E}_0$ .

До сих пор мы изучали поведение поля в присутствии более проводящей неоднородности. Теперь предположим, что тело обладает более высоким удельным сопротивлением ( $\gamma_i < \gamma_e$ ). Как следует из уравнения (III.268), на задней и передней сторонах тела появляются положительные и отрицательные заряды соответственно (рис. III.14, б). Тем самым, распределение поля проти-

воположно случаю, рассмотренному выше. Например, внутри неоднородности, так же как и в области вокруг экваториальной плоскости, поле возрастает, а спереди и сзади тела оно уменьшается. С увеличением удельного сопротивления  $\rho_i$  электрическое поле внутри постепенно возрастает и в предельном случае изолятора достигает некоторого конечного значения, зависящего от формы и размеров неоднородности. Что касается потенциала  $U_s$ , то его поведение похоже на поведение потенциала в предыдущем случае, однако положение зон с положительными и отрицательными значениями  $U_s$  меняется. Очевидно, что поведение плотности тока вне неоднородности похоже на поведение электрического поля, а внутри при возрастании удельного сопротивления плотность тока стремится к нулю.

В дополнение рассмотрим поведение векторных линий полей  $E$  и  $j$  вблизи поверхности неоднородности. Как следует из уравнений (III.237),

$$E_t^i = E_t^e \quad \text{и} \quad j_n^i = j_n^e, \quad (\text{III.272})$$

где индексы « $i$ » и « $e$ » соответствуют точкам неоднородности и окружающей среды. Затем, применяя закон Ома, получаем

$$\frac{j_t^i}{\gamma_i} = \frac{j_t^e}{\gamma_e} \quad \text{и} \quad \gamma_i E_n^i = \gamma_e E_n^e. \quad (\text{III.273})$$

Учитывая непрерывность тангенциальной компоненты электрического поля и нормальной компоненты плотности тока (III.272), получаем

$$\frac{j_t^i}{\gamma_i j_n^i} = \frac{j_t^e}{\gamma_e j_n^e} \quad \text{и} \quad \frac{E_n^i \gamma_i}{E_t^i} = \frac{E_n^e}{E_t^e} \gamma_e. \quad (\text{III.274})$$

Как видно из рис. III.14, *в*, направление поля вблизи поверхности раздела можно охарактеризовать углом  $\alpha$ , образованным полем  $E$  с нормалью  $n$ . Ясно, что

$$\text{tg } \alpha = E_t / E_n.$$

Тогда уравнения (III.274) можно переписать как

$$\frac{\gamma_i}{\text{tg } \alpha_i} = \frac{\gamma_e}{\text{tg } \alpha_e} \quad \text{или} \quad \frac{\text{tg } \alpha_i}{\text{tg } \alpha_e} = \frac{\gamma_i}{\gamma_e}. \quad (\text{III.275})$$

Конечно, результат получится тот же самый, если исходить из уравнения

$$\text{tg } \alpha = j_t / j_n.$$

В соответствии с уравнениями (III.275) векторные линии полей  $E$  и  $j$  преломляются вблизи границы, это происходит таким образом, что на другой стороне значение  $\text{tg } \alpha$  пропорционально электропроводности среды. В среде с более высоким удельным

сопротивлением эти векторные линии приближаются к нормали, как если бы они пытались сократить длину своего пути через эту среду.

Ясно, что если один из углов равен 0 или  $\pi/2$ , то другой угол имеет такое же значение при условии, что обе электропроводности имеют конечные значения. Другими словами, в этих случаях векторные линии не преломляются, хотя одна из компонент поля терпит разрыв.

Проведенное исследование показывает, что векторные линии поля  $\mathbf{j}$  при  $\gamma_i > \gamma_e$  сгущаются внутри неоднородности, а также спереди и сзади нее. Это сопровождается разрежением линий вблизи боковых частей поверхности тела. В случае среды с более высоким удельным сопротивлением неоднородности векторные линии более разрежены спереди и сзади тела и внутри него. В то же время они сгущаются снаружи вблизи боковых поверхностей. Такое поведение токовых линий создает впечатление, что ток стремится сгуститься в более проводящей среде.

Если неоднородность является идеальным проводником, то его поверхность становится эквипотенциальной поверхностью и тангенциальная компонента поля  $E_e$  равна нулю. Это означает, что векторные линии полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{j}$  перпендикулярны поверхности раздела. Что касается поведения поля внутри тела, то электрическое поле исчезает, так как  $\rho_i = 0$  и векторные линии плотности тока проходят через него непрерывно. В противном случае, когда тело является изолятором ( $\gamma_i = 0$ ), нормальная компонента плотности тока  $j_n^e$  вблизи поверхности раздела равна нулю и  $E_n^e$  также исчезает. Соответственно, векторные линии обоих полей являются касательными к границе изолятора.

Теперь рассмотрим еще одну особенность поля, связанную с влиянием произвольной неоднородности. Поскольку сумма наведенных зарядов на поверхности неоднородности равна нулю, то их поле на расстояниях, существенно превосходящих размеры тела, приближается к полю электрического диполя и в соответствии с уравнением (III.59) потенциал

$$U_s \rightarrow \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{L}_{qp}}{L_{qp}^3}, \quad L_{qp} \rightarrow \infty, \quad (\text{III.276})$$

где  $L_{qp}$  — расстояние между точкой наблюдения и произвольной точкой внутри неоднородности;  $\mathbf{M}$  — дипольный момент, пропорциональный количеству зарядов, имеющих один и тот же знак, и зависящий от первичного поля, формы и размеров неоднородности. В общем случае поле внутри тела неоднородно, но существует одно исключение — когда неоднородность имеет относительно простую форму и первичное поле однородно в ее окрестности. В этом случае момент диполя  $\mathbf{M}$  пропорционален полю  $\mathbf{E}_0$  и имеет либо то же направление при  $\gamma_i > \gamma_e$ , либо противоположное при  $\gamma_i < \gamma_e$ .

Очевидно, что уравнение (III.276) может оказаться полезным при вычислении вторичного поля, когда точки наблюдения расположены на расстояниях, существенно превосходящих размеры неоднородности. Однако часто горизонтальные изменения удельного сопротивления происходят вблизи поверхности Земли и в подобных случаях измерения обычно производятся как внутри, так и снаружи неоднородности. Соответствующее поведение потенциала и тангенциальной компоненты электрического поля, вызванных поверхностными зарядами, показано на рис. III.14, *г*.

В отличие от потенциала нормальная компонента электрического поля на поверхности неоднородности является разрывной функцией и величина этого разрыва определяется из уравнения (III.272):

$$j_n^e = j_n^i \quad \text{или} \quad E_n^e / E_n^i = \gamma_i / \gamma_e.$$

Такие неоднородности могут быть объектом изучения при использовании электрических методов в целях картирования. В то же время в других приложениях они могут представлять геологический шум, серьезно препятствующий применению электроразведки.

До сих пор мы рассматривали влияние произвольной неоднородности на электрическое поле и поле плотности тока. Теперь коротко обсудим случай, когда электрическое поле не искажается присутствием горизонтальных изменений удельного сопротивления.

Как следует из уравнения (III.268), на поверхности неоднородности заряды отсутствуют, если нормальная компонента первичного электрического поля  $E_{n0}$  в каждой точке равна нулю. Действительно, в таких случаях непрерывность нормальной компоненты плотности тока автоматически удовлетворяется без накопления поверхностных зарядов. Например, предположим, что первичное поле  $E_0$  направлено вдоль простирания двумерной дайки, как показано на рис. III.15, *а*. Тогда плотность поверхностных зарядов  $\Sigma$  равна нулю и вторичное поле  $E_s$  отсутствует. Это означает, что электрическое поле везде совпадает с первичным полем и неоднородность обнаружить невозможно. В то же время внутри проводящего тела плотность тока может быть чрезвычайно большой, поскольку

$$j_i = \gamma_i E_0 \gg \gamma_e E_0 \quad \text{при} \quad \gamma_i \gg \gamma_e.$$

Конечно, если существует компонента первичного поля, перпендикулярная поверхности дайки, то появляются заряды, создающие вторичное поле, содержащее информацию о геоэлектрических параметрах тела.

## Пример 2. Распределение зарядов в слоистой среде

Предположим, что среда является системой однородных областей с различными удельными сопротивлениями, а токовый элект-

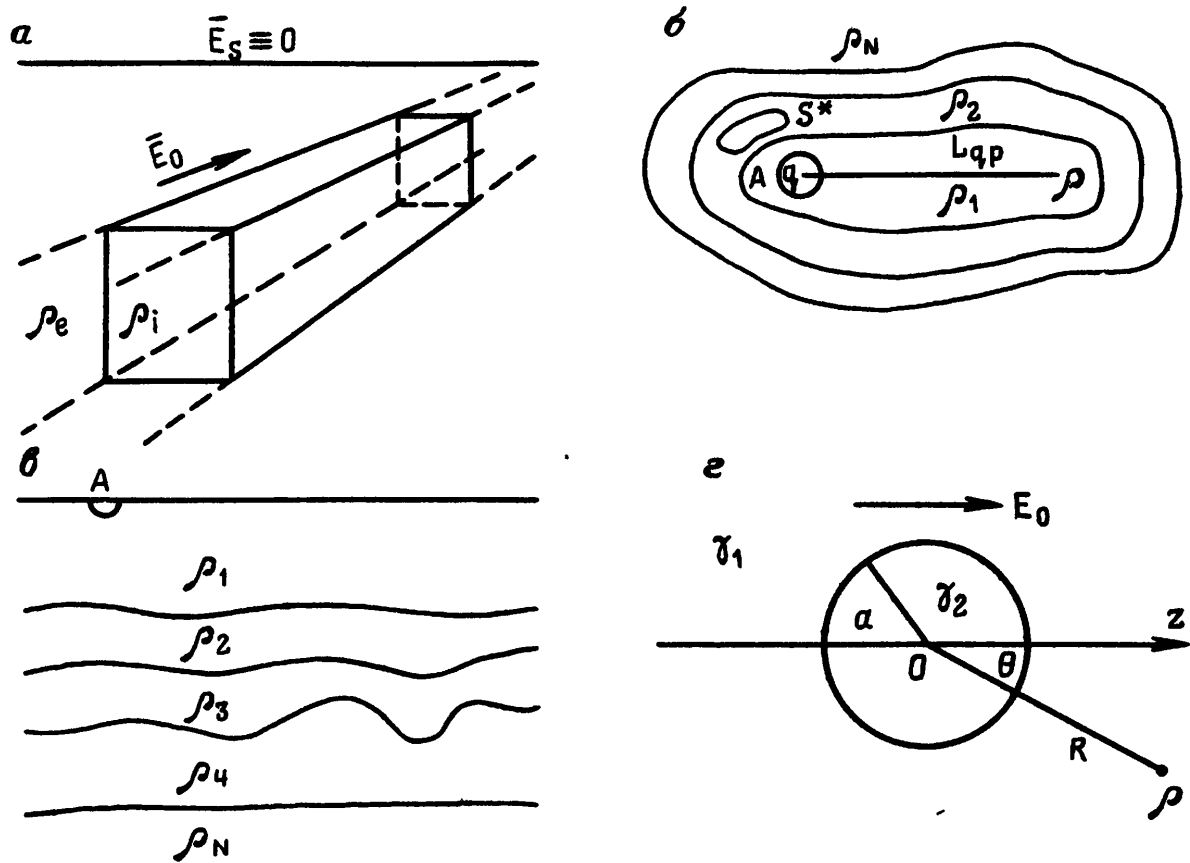


Рис. III.15. Электрическое поле вдоль двумерной модели (а); токовый электрод внутри кусочно-однородной среды (б); модель слоистой среды (в); сфера в однородной среде (г)

род  $A$  расположен во внутренней части этой системы, ограниченной поверхностями  $S_i$ , как показано на рис. III.15, б. Вычислим количество зарядов, появляющихся на каждой поверхности раздела. Прежде всего, заряд электрода

$$e_A = \varepsilon_0 \rho_1 I, \quad (\text{III.277})$$

где  $\rho_1$  — удельное сопротивление среды, окружающей электрод, удельным сопротивлением которого можно пренебречь.

В соответствии с уравнением (III.19), плотность зарядов на поверхности раздела  $S_i$  между средами с удельными сопротивлениями  $\rho_i$  и  $\rho_{i+1}$

$$\Sigma = \varepsilon_0 (E_n^{i+1} - E_n^i)$$

или, согласно закону Ома и принципу сохранения заряда,

$$\Sigma(q) = \varepsilon_0 (\rho_{i+1} - \rho_i) j_n(q), \quad (\text{III.278})$$

где  $q$  — произвольная точка поверхности  $S_i$ .

Так как поверхности  $S_i$  замкнуты вокруг электрода, через каждую из них проходит одинаковое количество зарядов  $I$ . Соответственно, суммарный заряд на поверхности  $S_i$  можно вычислить по формуле

$$e_i = \oint_{S_i} \Sigma dS = \varepsilon_0 (\rho_{i+1} - \rho_i) \oint j_n dS$$

или

$$e_i = \varepsilon_0 (\rho_{i+1} - \rho_i) I. \quad (\text{III.279})$$

Конечно, это очень простое выражение и оно показывает, что количество зарядов, распределенных на поверхности раздела  $S_i$ , прямо пропорционально разности удельных сопротивлений и току.

Прежде чем продолжить, сделаем несколько комментариев.

1. Уравнения (III.278), (III.279) не применяются на поверхности раздела с изолятором, так как  $\rho_{i+1} \rightarrow \infty$ .

2. Знак заряда  $e_i$  определяется разностью удельных сопротивлений. Он положителен, если  $\rho_{i+1} > \rho_i$ , и отрицателен, если  $\rho_{i+1} < \rho_i$ . В то же время знак плотности  $\Sigma$  может меняться от точки к точке.

3. Уравнение (III.279) определяет суммарное количество зарядов, но их распределение остается неизвестным.

Теперь запишем выражения для зарядов, появляющихся на каждой поверхности  $S_i$ , включая токовый электрод:

$$\begin{aligned} e_A &= \varepsilon_0 \rho_1 I, \\ e_1 &= \varepsilon_0 (\rho_2 - \rho_1) I, \\ e_2 &= \varepsilon_0 (\rho_3 - \rho_2) I, \\ e_3 &= \varepsilon_0 (\rho_4 - \rho_3) I, \\ &\dots \dots \dots \\ e_i &= \varepsilon_0 (\rho_{i+1} - \rho_i) I, \\ &\dots \dots \dots \\ e_N &= \varepsilon_0 (\rho_N - \rho_{N-1}) I, \end{aligned}$$

где  $\rho_N$  — удельное сопротивление внешней области.

Суммируя все заряды, которые появляются в среде, получаем

$$e = \sum_{i=1}^N e_i = \varepsilon_0 \rho_N I. \quad (\text{III.280})$$

Это интересный результат, показывающий, что суммарный заряд, появляющийся на всех поверхностях раздела, совпадает с зарядом поверхности электрода, как если бы он был расположен во вмещающей среде с удельным сопротивлением  $\rho_N$ . Как и в случае гравитационных масс, любое распределение объемных или поверхностных зарядов, заключенных внутри некоторого объема  $V$ , создает практически такое же поле, что и поле точечного заряда, если точка наблюдения расположена достаточно далеко и  $e \neq 0$ . Тем самым асимптотическое поведение потенциала полного поля в среде (рис. III.15, б) определяется выражением

$$U(p) \rightarrow \frac{\rho_N I}{4\pi L_{qp}} \quad \text{при} \quad L_{qp} \rightarrow \infty. \quad (\text{III.281})$$

Последний результат имеет большое практическое значение, поскольку показывает, что если токовый и измерительный электроды расположены на поверхности слоистой среды (рис. III.15, в) и расстояние между электродами увеличивается, то глубинность исследования у подобной электроразведочной расстановки также увеличивается. Другими словами, напряжение между измерительными электродами, расположенными в среде с удельным сопротивлением  $\rho_1$ , приближается к напряжению однородного полупространства с удельным сопротивлением  $\rho_N$ . По существу, уравнение (III.281) объясняет одну из наиболее важных черт геометрического зондирования, используемого как в электроразведке, так и в электрометрии скважин.

В дополнение к сказанному заметим следующее.

1. Строго говоря, каждую область слоистой среды не окружают две замкнутые поверхности (см. рис. III.15, в). Однако наши результаты остаются справедливыми, поскольку мы можем мысленно представить себе дополнительные поверхности на бесконечности, делающие каждый слой замкнутым, и такие, что количество зарядов, проходящих через них, равно нулю.

2. Заряды, наведенные на каждой поверхности раздела слоистой среды, не ограничены областью конечных размеров, а распределены по всей поверхности раздела. Однако, как было показано в разделе III.5, их плотность  $\Sigma$  уменьшается достаточно быстро и благодаря этому факту поле этих зарядов стремится к полю точечного источника, как только расстояние от токового электрода становится достаточно большим.

3. Отметим, что количество зарядов в среде не меняется, если существует некоторая область, окруженная поверхностью  $S$ . (см. рис. III.15, б) и расположенная вне токового электрода. Действительно, суммарный заряд, появляющийся на этой поверхности,

$$e_s = \varepsilon_0 (\rho_0 - \rho_i) \oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$$

и в соответствии с принципом сохранения заряда интеграл в правой части равен нулю. Здесь  $\rho_0$  — удельное сопротивление данной области. Это означает, что на поверхности  $S$  появляется равное количество положительных и отрицательных зарядов и с увеличением расстояния их поле стремится к полю электрического диполя. Другими словами, в присутствии подобной неоднородности асимптотическое поведение поля также описывается уравнением (III.281).

**Пример 3. Проводящая сфера в однородном электрическом поле (рис. III.15, г)**

Предположим, что сфера с радиусом  $a$  и электропроводностью  $\gamma_2$  расположена в однородном электрическом поле  $E_0$ . Электропро-



водность окружающей среды равна  $\gamma_1$ . Прежде чем обсудить решение краевой задачи, опишем несколько очевидных особенностей первичного и вторичного полей. Прежде всего, мы уже предположили, что первичное поле является однородным. Конечно, такое поле не может существовать всюду, так как это потребовало бы источника бесконечно большой мощности. Тем не менее, такое приближение очень полезно, если ограничиться изучением поля лишь внутри некоторой конечной области вокруг сферы и предположить, что источники первичного поля расположены на большем удалении от точек наблюдения.

Поскольку поле  $E_0$  пересекает поверхность сферы, то на ней появляются как положительные, так и отрицательные заряды и их сумма равна нулю. Эти заряды являются источниками вторичного поля и благодаря их присутствию можно в принципе обнаружить проводник. Естественно предположить, что распределение зарядов обладает осевой симметрией по отношению к оси, ориентированной вдоль первичного электрического поля и проходящей через центр сферы. По этой причине можно ожидать, что потенциал, так же как и оба поля  $E$  и  $j$ , обладает той же симметрией. Конечно, это только предположение, однако очень скоро с помощью теоремы единственности будет доказана его справедливость, так же как и корректность остальных предположений.

Предположив, что поле является осесимметричным, введем сферическую систему координат  $R, \theta, \varphi$  с началом в центре сферы и с осью  $z$ , направленной вдоль первичного поля. Тогда в соответствии с уравнениями (III.253) краевая задача формулируется следующим образом:

1. В регулярных точках:  $\nabla^2 U = 0$ ;
2.  $U_1 = U_2, \quad \gamma_1 \frac{\partial U_1}{\partial R} = \gamma_2 \frac{\partial U_2}{\partial R} \quad \text{при } R = a;$  (III.282)
3.  $U_1 \rightarrow U_0 \quad \text{при } R \rightarrow \infty,$

где  $U_0$  — потенциал первичного поля.

Краевое условие на бесконечности очевидно, так как вторичное поле наведенных зарядов уменьшается с увеличением расстояния от сферы.

Учитывая относительную простоту задачи, попытаемся найти решение, исходя из нашего понимания поведения поля. Потенциал первичного поля можно легко определить, поскольку поле  $E_0$  имеет только компоненту вдоль оси  $z$ , и таким образом

$$E_0 = - \frac{\partial U_0}{\partial z}, \quad \text{(III.283)}$$

откуда

$$U_0(z) = - E_0 z + C_0.$$

Так как постоянная не существенна для определения поля, положим ее равной нулю. Другими словами, предположим, что потенциал первичного поля исчезает на плоскости  $z = 0$ . Тогда

$$U_0 = -E_0 z = -E_0 R \cos \theta . \quad (\text{III.284})$$

Теперь рассмотрим вторичное поле, вызванное поверхностными зарядами. Как нам известно, суммарный заряд равен нулю и вдали от сферы поле зарядов эквивалентно полю электрического диполя. Теперь предположим, что такое поведение наблюдается везде вне сферы, независимо от расстояния до ее центра. Также предположим, что неизвестный дипольный момент  $M$  направлен вдоль поля  $E_0$ . Тогда потенциал вторичного поля вне проводника имеет вид

$$U_s = \frac{M \cdot R}{4\pi \epsilon_0 R^3} = \frac{M \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 R^2} . \quad (\text{III.285})$$

Таким образом, полный потенциал вне сферы

$$U_1 = -E_0 R \cos \theta + \frac{M \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 R^2} \quad \text{при} \quad R \geq a . \quad (\text{III.286})$$

Наконец, предположим, что заряды распределены таким образом, что внутри сферы они создают однородное поле, направленное вдоль оси  $z$ . Тогда полное поле внутри проводника можно представить как

$$E_2 = C E_0$$

и

$$U_2 = -C E_0 z = -C E_0 R \cos \theta \quad \text{при} \quad R \leq a , \quad (\text{III.287})$$

где  $C$  — также неизвестная постоянная.

С помощью нескольких предположений мы описали потенциал уравнениями (III.286) и (III.287). Теперь самое время проверить, являются ли все эти предположения верными или нет и, если они верны, определить неизвестные  $M$  и  $C$ . Эту задачу можно решить с помощью теоремы единственности. Мы попытаемся, используя уравнения (III.286), (III.287), удовлетворить условия краевой задачи (III.282). Прежде всего ясно, что потенциалы всех электрических полей, вызванные электрическими зарядами и рассматриваемые вне этих зарядов, удовлетворяют уравнению Лапласа. В частности, потенциал однородного поля и потенциал электрического диполя являются его решениями.

В нашем случае достаточно непосредственно подставить потенциалы из (III.286) и (III.287) в уравнение Лапласа. Как следует из уравнения (III.286), условия на бесконечности также удовлетворяются. Теперь выясним, можно ли обеспечить непрерывность потенциала и радиальной компоненты плотности тока на по-

верхности сферы, используя уравнения (III.286), (III.287). В итоге имеем: для потенциала —

$$\left\{ -E_0 a + \frac{M}{4\pi \varepsilon_0 a^2} \right\} \cos \theta = -CE_0 a \cos \theta,$$

для нормальной компоненты плотности тока —

$$\gamma_1 \left\{ -E_0 - \frac{2M}{4\pi \varepsilon_0 a^3} \right\} \cos \theta = -\gamma_2 E_0 C \cos \theta.$$

Получены два уравнения с двумя неизвестными:

$$-E_0 + \frac{M}{4\pi \varepsilon_0 a^3} = -CE_0, \quad (III.288)$$

$$\gamma_1 \left\{ E_0 + \frac{2M}{4\pi \varepsilon_0 a^3} \right\} = CE_0.$$

Как хорошо известно, линейная система двух уравнений с двумя неизвестными не всегда имеет решение, а если система (III.288) не может быть решена, то это означает, что все наши предположения (или часть из них) неверны.

Однако система уравнений (III.288) имеет решение:

$$M = 4\pi \varepsilon_0 \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + 2\gamma_1} a^3 E_0, \quad (III.289)$$

$$C = \frac{3\gamma_1}{\gamma_2 + 2\gamma_1}.$$

Таким образом, вместо уравнений (III.286), (III.287) имеем:

$$U_1 = -E_0 R \cos \theta + \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + 2\gamma_1} a^3 E_0 \frac{\cos \theta}{R^2} \quad \text{при } R \geq a$$

и (III.290)

$$U_2 = -\frac{3\gamma_1}{\gamma_2 + 2\gamma_1} E_0 R \cos \theta \quad \text{при } R < a.$$

В соответствии с теоремой единственности можно сделать вывод, что уравнения (III.290) описывают потенциал электрического поля, вызванного зарядами на поверхности сферы, если первичное поле однородно. Действительно, функции  $U_1$  и  $U_2$  удовлетворяют всем трем условиям краевой задачи (III.282). Более того, как следует из этой теоремы, не существует другого решения, кроме решения, задаваемого уравнениями (III.290).

Этот пример наглядно показывает, что независимо от подхода, который использовался для нахождения поля, и сделанных предположений только теорема единственности определяет, является ли данная функция решением данной задачи.

Теперь опишем некоторые черты вторичного поля внутри и

снаружи сферы. Сначала рассмотрим распределение поверхностных зарядов. Используя уравнение (III.19), имеем

$$\Sigma = \varepsilon_0 (E_{2n} - E_{1n}) = \varepsilon_0 (E_{1R} - E_{2R}), \quad (\text{III.291})$$

так как  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{R}$  направлены внутрь сферы и наружу соответственно. Дифференцируя потенциал по переменной  $R$ , получаем

$$\frac{\partial U_1}{\partial R} = -E_0 \cos \theta - 2 \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + 2\gamma_1} \frac{a^3}{R^3} E_0 \cos \theta$$

и

$$\frac{\partial U_2}{\partial R} = -\frac{3\gamma_1}{\gamma_2 + 2\gamma_1} E_0 \cos \theta.$$

Поскольку

$$E_R = -\frac{\partial U}{\partial R},$$

то

$$\Sigma = \varepsilon_0 \left\{ 1 + 2 \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + 2\gamma_1} - \frac{3\gamma_1}{\gamma_2 + 2\gamma_1} \right\} E_0 \cos \theta$$

или

$$\Sigma = 3\varepsilon_0 \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + 2\gamma_1} E_0 \cos \theta. \quad (\text{III.292})$$

Таким образом, плотность зарядов  $\Sigma$  распределена симметрично относительно оси  $z$  и уменьшается как  $\cos \theta$  с увеличением угла  $\theta$ . Максимальная плотность заряда наблюдается при  $\theta = 0$ , когда первичное поле перпендикулярно к поверхности, а на экваториальной плоскости при  $\theta = \pi/2$  плотность заряда равна нулю. Зависимость плотности зарядов от электропроводностей определяется коэффициентом

$$K_{12} = \frac{(\gamma_2/\gamma_1) - 1}{(\gamma_2/\gamma_1) + 2}, \quad (\text{III.293})$$

изменяющимся между  $-1/2$  и  $1$ , в то время как отношение  $\gamma_2/\gamma_1$  меняется от  $0$  до  $\infty$ .

Ясно, что такая же относительно слабая зависимость от электропроводности свойственна и электрическому полю. Это означает, что разрешающая способность электрических методов, применяемых при разведке месторождений полезных ископаемых, обычно весьма ограничена. Как следует из уравнения (III.293), даже для относительно малых значений  $\gamma_2/\gamma_1$  коэффициент  $K_{12}$  почти равен единице. Таким образом, проводники с совершенно разными электропроводностями могут создать практически одинаковое поле. Други-

ми словами, высокая чувствительность электрических методов позволяет, с одной стороны, обнаружить относительно малые изменения удельного сопротивления, но, с другой стороны, не позволяет определить сами удельные сопротивления этих проводников.

Теперь рассмотрим поведение обоих полей  $E$  и  $j$  внутри сферы. В соответствии с уравнением (III.290) электрическое поле  $E_2$  однородно и направлено, как и первичное поле, вдоль оси  $z$ :

$$E_2 = - \frac{\partial U_2}{\partial R}$$

или

(III.294)

$$E_2 = \frac{3\gamma_1}{\gamma_1 + 2\gamma_2} E_0 = \frac{3}{2 + (\gamma_2/\gamma_1)} E_0.$$

Таким образом, с увеличением электропроводности сферы ( $\gamma_2 > \gamma_1$ ) поле уменьшается и в случае идеального проводника стремится к нулю, в то время как плотность тока

$$j_2 = \frac{3\gamma_2}{2 + (\gamma_2/\gamma_1)} E_0$$

возрастает и приближается к своему пределу, не зависящему от электропроводности сферы и равному

$$j_2 = 3\gamma_1 E_0.$$

В противоположном случае сферы с более высоким удельным сопротивлением электрическое поле  $E_2$  растет с увеличением удельного сопротивления  $\rho_2$ , однако это изменение относительно невелико. Действительно, для сферы-изолятора

$$E_2 = 1,5 E_0.$$

В заключение следует отметить, что проведенный анализ поведения поля полезен для понимания различных аспектов применения электрических методов при разведке полезных ископаемых и в инженерной геофизике, а также при изучении влияния геологического шума в электромагнитных методах, таких как магнитотеллурическое зондирование.

#### Пример 4. Эллиптический цилиндр в однородном электрическом поле

Теперь изучим поле в несколько более сложном случае. Рассмотрим эллиптический цилиндр, расположенный в однородной среде, и первичное поле  $E_0$ , являющееся однородным и перпендикулярным к оси цилиндра (рис. III.16, *a*). При решении краевой задачи (III.253) необходимо обеспечить непрерывность потенциала и нормальной компоненты плотности тока на поверхности цилиндра. Для упрощения этой процедуры введем эллиптическую систему координат  $\xi, \eta$ :

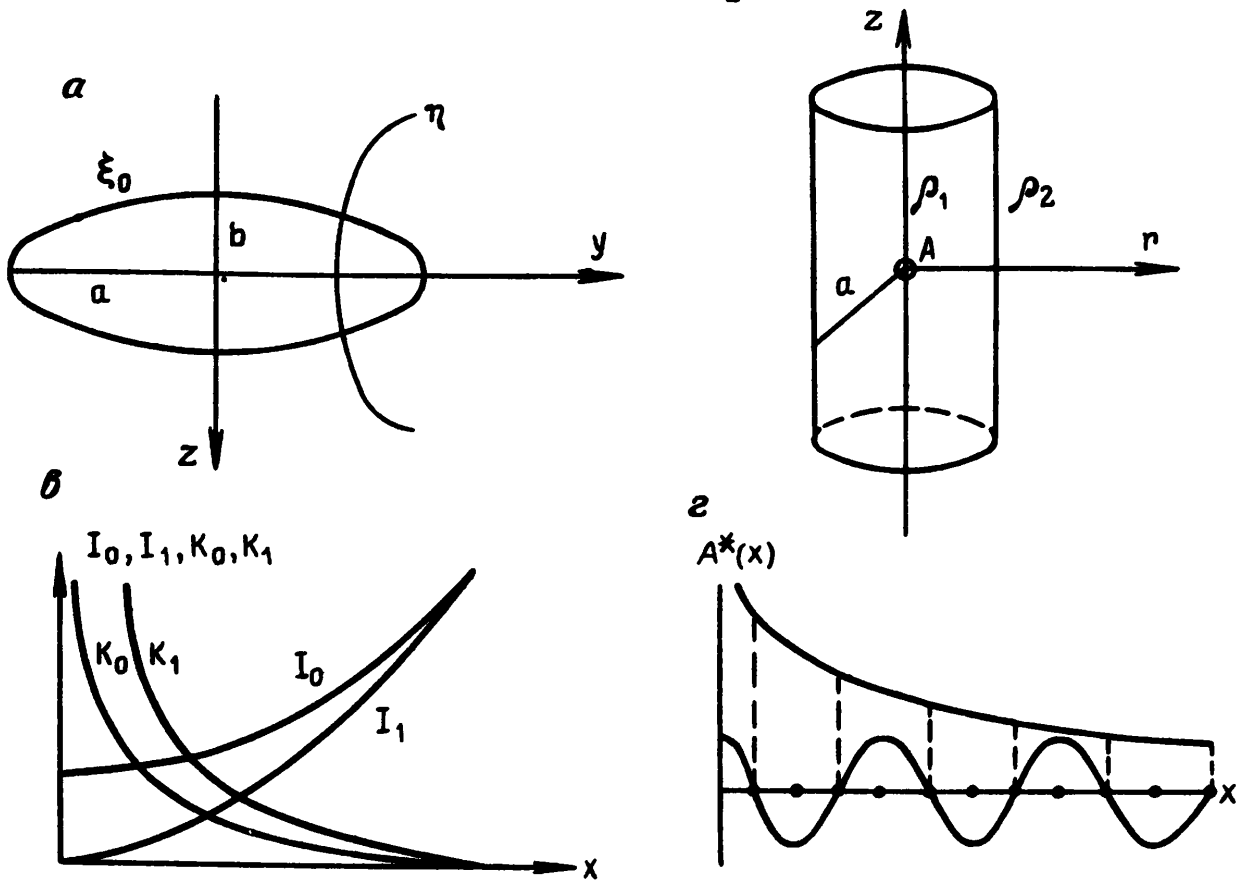


Рис. III.16. Эллиптический цилиндр в однородном поле (а); токовый электрод на оси скважины (б); поведение функций Бесселя (в); поведение подынтегрального выражения в уравнении (III.336) (г)

$$y = a \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \quad z = a \operatorname{sh} \xi \sin \eta, \quad (\text{III.295})$$

где  $a$  и  $b$  — большая и малая полуоси цилиндра соответственно, а  $\alpha = (a^2 - b^2)^{1/2}$  — его эксцентриситет. Данная система определяется двумя семействами эллиптических и гиперболических цилиндров, ортогональных друг другу и имеющих один и тот же фокус в точках

$$y = \pm a, \quad z = 0.$$

Координаты меняются в следующих пределах:

$$0 \leq \xi < \infty, \quad 0 \leq \eta < 2\pi,$$

причем координата  $\eta$  измеряется от оси  $y$ .

Существенно отметить, что поверхность цилиндра совпадает с одной из координатных поверхностей  $\xi = \xi_0$ . В этой системе метрические коэффициенты имеют следующий вид:

$$h_1 = h_2 = a (\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta)^{1/2}$$

и уравнение Лапласа записывается в очень простой форме:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = 0. \quad (\text{III.296})$$

Таким же образом, как и в предыдущем случае, возникает

вторичное поле, обусловленное наведенными зарядами, которые появляются на поверхности цилиндра. Соответственно, потенциал полного поля можно представить в виде

$$\begin{aligned} U_1 &= U_0 + U_s, & \xi &\geq \varepsilon_0, \\ U_2 & & \xi &\leq \varepsilon_0. \end{aligned} \quad (\text{III.297})$$

Поскольку первичное электрическое поле направлено вдоль оси  $y$ , то его потенциал

$$U_0 = -E_0 y = -E_0 a \operatorname{ch} \xi \cos \eta$$

или

$$U_0 = -\frac{E_0 a}{2} (e^\xi + e^{-\xi}) \cos \eta. \quad (\text{III.298})$$

Подставляя уравнение (III.298) в (III.296), легко видеть, что функции типа

$$e^\xi \cos \eta \quad \text{или} \quad e^{-\xi} \cos \eta$$

удовлетворяют уравнению Лапласа.

Теперь сделаем два предположения относительно поведения поля:

а) внутри цилиндра поле остается однородным и направлено вдоль оси  $y$ ;

б) вне цилиндра вторичное поле уменьшается с увеличением расстояния от цилиндра как функция  $\exp(-\xi)$  и имеет такую же зависимость от угла  $\eta$ , как и первичное поле.

Соответственно, можно записать:

$$\begin{aligned} U_1 &= -\alpha E_0 (\operatorname{ch} \xi + A e^{-\xi}) \cos \eta, \\ U_2 &= -\alpha E_0 B \operatorname{ch} \xi \cos \eta. \end{aligned} \quad (\text{III.299})$$

Здесь  $A$  и  $B$  — неизвестные, не зависящие от координат  $\xi$  и  $\eta$ .

Очевидно, что обе функции  $U_1$  и  $U_2$  удовлетворяют уравнению Лапласа, а  $U_1$  — подчиняется на бесконечности граничному условию

$$U_1 \rightarrow U_0 \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow \infty.$$

Из двух условий на поверхности раздела  $\xi = \xi_0$

$$U_1 = U_2, \quad \gamma_1 \frac{\partial U_1}{\partial \xi} = \gamma_2 \frac{\partial U_2}{\partial \xi}$$

получаем систему уравнений, определяющую неизвестные коэффициенты  $A$  и  $B$ . Решая эту систему, получим

$$A = \frac{(1 - \gamma_2 / \gamma_1) \operatorname{sh} \xi_0 e^{\xi_0}}{1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \operatorname{th} \xi_0}, \quad (\text{III.300})$$

$$B = \frac{1 + \operatorname{th} \xi_0}{1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \operatorname{th} \xi_0}. \quad (\text{III.300})$$

Таким образом, функции  $U_1$  и  $U_2$ , задаваемые уравнениями (III.299), (III.300), удовлетворяют всем условиям краевой задачи и описывают потенциал электрического поля. Для компонент поля  $E$  имеем:

$$E_\xi = -\frac{1}{h_1} \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad E_\eta = -\frac{1}{h_2} \frac{\partial U}{\partial \eta}$$

или

$$E_{1\xi} = \frac{E_0}{(\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta)^{1/2}} (\operatorname{sh} \xi - A e^{-\xi}) \cos \eta, \quad (\text{III.301})$$

$$E_{1\eta} = \frac{-E_0}{(\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta)^{1/2}} (\operatorname{ch} \xi + A e^{-\xi}) \sin \eta.$$

Для описания некоторых черт поведения поля учтем, что

$$\operatorname{th} \xi_0 = \frac{b}{a}, \quad \operatorname{sh} \xi_0 = \frac{b/a}{\sqrt{1 - b^2/a^2}},$$

$$\operatorname{ch} \xi_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - b^2/a^2}}, \quad e^{\xi_0} = \sqrt{\frac{1 + b/a}{1 - b/a}}.$$

Сначала рассмотрим распределение заряда как функцию параметров эллиптического цилиндра и электропроводности окружающей среды. Как было показано ранее, поверхностная плотность  $\Sigma$  определяется разрывом нормальной компоненты электрического поля:

$$\Sigma = \varepsilon_0 (E_\xi^e - E_\xi^i).$$

В соответствии с уравнениями (III.301),

$$\Sigma = \varepsilon_0 E_0 \frac{(\gamma_2/\gamma_1 - 1) e^{\xi_0} \operatorname{th} \xi_0 \cos \eta}{\left(1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \operatorname{th} \xi_0\right) (\operatorname{ch}^2 \xi_0 - \cos^2 \eta)^{1/2}}. \quad (\text{III.302})$$

Последнее уравнение показывает, что плотность зарядов имеет конечное значение во всех точках поверхности цилиндра, а при  $\eta = \pm \pi/2$  она равна нулю. Однако она увеличивается с приближением к точкам  $\eta = 0$  и  $\eta = \pi$ , где при выполнении условий

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \frac{b}{a} \ll 1 \cdot \frac{b}{a} \ll 1$$

определяется выражением



$$\Sigma \rightarrow \pm \varepsilon_0 E_0 \left( \frac{\gamma_2}{\gamma_1} - 1 \right).$$

Ранее было показано, что связь между плотностью поверхностных зарядов и полем можно записать как

$$\Sigma(q) = 2\varepsilon_0 K_{12} (E_n^0 + E_n^{s-q}),$$

где  $E_n^0$  и  $E_n^{s-q}$  — нормальные компоненты первичного поля и поля поверхностных зарядов (за исключением заряда, расположенного в точке  $q$ ) соответственно. Как следует из уравнения (III.301), компоненты  $E_n^0$  и  $E_n^{s-q}$  имеют одно и то же направление при  $\gamma_2 > \gamma_1$  и противоположны друг другу, если  $\gamma_2 < \gamma_1$ . По этой причине плотность зарядов и вторичное поле для хорошо проводящего цилиндра с  $a > b$  больше, чем в случае неоднородности изолятора.

Исходя из уравнений (III.301), кратко опишем поведение поля снаружи цилиндра. Прежде всего ясно, что если цилиндр является менее проводящим, чем окружающая среда ( $\gamma_2 > \gamma_1$ ), то электрическое поле слабо зависит от электропроводностей и в основном определяется отношением  $b/a$ . С увеличением  $b/a$  электрическое поле  $E$  также возрастает, потому что точка наблюдения приближается к зарядам. Когда цилиндр характеризуется более высокой, чем у окружающей среды, электропроводностью ( $\gamma_2/\gamma_1 \gg 1$ ) и отношение осей не слишком мало, а точнее,

$$\frac{\gamma_2 b}{\gamma_1 a} \gg 1,$$

то вторичное поле определяется только геометрическими параметрами. Однако для цилиндра, достаточно вытянутого в направлении поля  $E_0$ , т. е. при условиях

$$\frac{\gamma_2 b}{\gamma_1 a} \ll 1, \quad \frac{b}{a} \ll 1 \tag{III.303}$$

поле зарядов хотя и относительно мало ( $E_n^s \ll E_0$ ), но зависит от электропроводности цилиндра как при  $\gamma_2/\gamma_1 > 1$ , так и при  $\gamma_2/\gamma_1 < 1$ .

По существу, неравенства (III.303) определяют условия, при которых влияние вытянутого цилиндра на электрическое поле практически исчезает и цилиндр ведет себя как бесконечный слой толщиной  $2b$ .

Интересно отметить, что отношение величин полей, созданных зарядами на поверхности идеально проводящего цилиндра и цилиндра-изолятора, равно отношению  $a/b$  полуосей цилиндра.

Наконец, рассмотрим поле внутри эллиптического цилиндра, которое можно записать как

$$E_2 = \frac{1 + b/a}{1 + (\gamma_2 b / \gamma_1 a)} E_0$$

или

$$E_2 = \frac{E_0}{1 + (\gamma_2 / \gamma_1 - 1)L} \quad \text{при } a/b > 1, \quad (\text{III.304})$$

где величина

$$L = \frac{b/a}{1 + b/a}$$

часто называется деполаризационным множителем, поскольку она характеризует уменьшение поля внутри проводника при  $\gamma_2/\gamma_1 > 1$ .

Отметим следующие особенности поля  $E_2$ .

1. Поверхностные заряды распределены таким образом, что вторичное поле внутри эллиптического цилиндра и первичное поле являются однородными и имеют одинаковое направление.

2. В случае круглого цилиндра

$$L = 1/2 \quad \text{и} \quad E_2 = \frac{2E_0}{1 + (\gamma_2 / \gamma_1)}.$$

3. С увеличением отношения  $a/b$  влияние зарядов уменьшается и, соответственно,

$$E_2 \rightarrow E_0 \quad \text{при} \quad \frac{\gamma_2 b}{\gamma_1 a} \rightarrow 0.$$

Это показывает, что с увеличением электропроводности цилиндр должен быть более вытянутым, чтобы можно было пренебречь полем, обусловленным поверхностными зарядами.

4. С уменьшением электропроводности окружающей среды  $\gamma_1$  поле внутри цилиндра также уменьшается. Когда  $\gamma_1$  приближается к нулю и окружающая среда становится изолятором, тогда поверхностные заряды становятся столь велики, что их поле полностью компенсирует первичное поле. Таким образом, в этом случае эллиптический цилиндр ведет себя как идеальный проводник независимо от его удельного сопротивления. Конечно, этот вывод справедлив для любого проводника и любого типа первичного поля (электростатическая индукция).

5. Если эллиптический цилиндр является изолятором, то

$$E_2 = \frac{E_0}{1 - L} \quad \text{при} \quad a \geq b$$

и, соответственно, максимальное увеличение поля  $E_2$  наблюдается для круглого цилиндра при  $L = 1/2$ :

$$E_2 = 2E_0.$$

6. В соответствии с законом Ома плотность тока в проводящем цилиндре

$$j_2 = \frac{\gamma_2 E_0}{1 + (\gamma_2 / \gamma_1 - 1) L}.$$

Здесь уместно выделить два случая:

а) сильно вытянутый цилиндр, когда поле  $E_2$  практически равно  $E_0$ . Тогда плотность тока становится прямо пропорциональной электропроводности цилиндра:

$$j_2 = \gamma_2 E_0;$$

б) цилиндр с очень высокой электропроводностью, для которого произведение

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1} L$$

намного больше единицы, даже для относительно вытянутого проводника. В таких случаях плотность тока не зависит от электропроводности цилиндра:

$$j_2 = \frac{\gamma_1 E_0}{L},$$

однако может существенно превосходить значение нормального поля  $j_0$  при  $a \gg b$ .

Мы рассмотрели два примера, в которых сфера или эллиптический цилиндр помещены в однородное поле. В обоих случаях поле внутри проводников также остается однородным. Подобное поведение не является просто совпадением. Действительно, можно доказать, что поле внутри эллипсоида с любым отношением осей  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и произвольной ориентацией по отношению к первичному полю  $E_0$  также остается однородным. Однако в общем случае оно не совпадает с  $E_0$  по направлению.

В частности, если первичное поле направлено вдоль большой оси сфероида, то поле внутри него имеет следующий вид:

$$E_2 = \frac{E_0}{1 + \left( \frac{\gamma_2}{\gamma_1} - 1 \right) L}$$

и

$$L = \frac{1 - e^2}{2e^3} \left( \ln \frac{1 + e}{1 - e} - 2e \right).$$

Здесь

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad \text{и} \quad b = c < a.$$

Например, для вытянутого сфероида выражение для деполяризационного множителя  $L$  упрощается:

$$L \approx \frac{b^2}{a^2} \left( \ln \frac{2a}{b} - 1 \right) \ll 1 \quad \text{при} \quad a/b \gg 1.$$

В следующем примере будет рассмотрена проблема, имеющая фундаментальное значение в задачах электростатики скважин.

### Пример 5. Электрическое поле точечного источника на оси скважины

Предположим, что очень маленький токовый электрод  $A$  помещен на оси скважины (рис. III.16, б). Обозначим:  $a$  — радиус скважины, электропроводности скважины и окружающей среды —  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  соответственно и  $I$  — ток, текущий через электрод. Наша задача — определить электрическое поле внутри скважины. Прежде чем сформулировать краевую задачу, используем результаты, полученные в примере 2, и обсудим распределение зарядов и некоторые основные черты поведения поля. На поверхности электрода появляется заряд

$$e_A = \varepsilon_0 \rho_1 I, \quad (\text{III.305})$$

создающий первичное электрическое поле

$$E_0 = \frac{\rho_1 I}{4\pi L_{0p}^3} L_{0p}, \quad (\text{III.306})$$

где  $L_{0p}$  — расстояние от электрода до точки наблюдения  $p$ . Под действием этого поля электрические заряды также появляются на поверхности раздела между скважиной и внешней средой и, как хорошо известно, их плотность определяется выражением

$$\Sigma(q) = 2\varepsilon_0 \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} E_n^{\text{сп}},$$

где  $E_n^{\text{сп}}$  — нормальная компонента поля, вызванного зарядом  $e_A$  и поверхностными зарядами в окрестности точки  $q$ . Из этого уравнения следует, что поверхностная плотность  $\Sigma$  очень быстро уменьшается с увеличением расстояния от электрода. В соответствии с уравнением (III.278) можно представить плотность  $\Sigma$

$$\Sigma = \varepsilon_0 (\rho_2 - \rho_1) j_n,$$

поскольку нормальная компонента плотности тока является непрерывной функцией.

Интегрируя по всей поверхности скважины, получаем

$$e_s = \varepsilon_0 (\rho_2 - \rho_1) \oint j_n dS = \varepsilon_0 (\rho_2 - \rho_1) I.$$

Таким образом, существует два заряда. Один из них расположен на малой поверхности токового электрода, другой — это заряд, распределенный с определенной плотностью на поверхности скважины. Сумма этих зарядов равна

$$e = e_A + e_s = \varepsilon_0 \rho_1 I + \varepsilon_0 (\rho_2 - \rho_1) I = \varepsilon_0 \rho_2 I.$$

Таким образом, полный заряд совпадает с зарядом на токовом электроде, как если бы тот был расположен в однородной среде с удельным сопротивлением  $\rho_2$ .

Потенциал первичного поля

$$U_0(p) = \rho_1 I / 4\pi L_{0p}, \quad (\text{III.307})$$

в то время как потенциал, вызванный поверхностными зарядами, определяется выражением

$$U_s(p) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \int_S \frac{\Sigma(q) dS}{L_{qp}} = \frac{1}{4\pi} (\rho_2 - \rho_1) \int_S \frac{j_n dS}{L_{qp}}. \quad (\text{III.308})$$

Очевидно, что последнее выражение не может быть использовано для вычисления поля, так как величина  $j_n$  неизвестна, однако оно полезно для наших исследований.

Рассмотрим влияние удельного сопротивления скважины и вмещающей среды на поле вблизи и вдали от электрода. Как следует из уравнений (III.307), (III.308), с приближением к электроду первичное поле становится очень большим, если радиус электрода достаточно мал, в то время как вторичное поле стремится к некоторой постоянной величине, так как расстояние  $L_{0p}$  всегда больше или равно радиусу скважины. Таким образом, вблизи электрода первичное поле преобладает, следовательно, может быть получена информация только об удельном сопротивлении скважины.

В противоположном случае, когда точка наблюдения находится очень далеко от электрода, заряды, распределенные по поверхности скважины, создают практически такое же поле, что и поле элементарного заряда  $e_s$ , расположенного в произвольной точке вблизи токового электрода. Как было отмечено ранее, такое же соответствие наблюдается для гравитационного поля: как только поле рассматривается на достаточно больших расстояниях от других масс или зарядов, так их распределение внутри некоторого объема уже не важно и можно поместить всю массу или заряд в любую точку этого объема. В нашем случае, рассматривая электрическое поле в дальней зоне, можно мысленно заменить поверхностное распределение зарядов элементарным зарядом  $e_s$ , расположенным на электроде вместе с зарядом  $e_A$ . Таким образом, потенциал и электрическое поле на больших расстояниях от токового электрода можно представить в виде

$$U(p) \approx \frac{\rho_1 I}{4\pi L_{0p}} + \frac{(\rho_2 - \rho_1) I}{4\pi L_{0p}} = \frac{\rho_2 I}{4\pi L_{0p}}, \quad (\text{III.309})$$

$$E(p) \approx \frac{\rho_2 I}{4\pi L_{0p}^3} L_{0p} \quad \text{при} \quad L_{0p} \gg a.$$

Эти уравнения показывают, что с увеличением расстояния между токовым электродом и точкой наблюдения  $p$  поле приближается к полю однородной среды с удельным сопротивлением  $\rho_2$ , несмотря на то, что точка  $p$  может быть расположена внутри скважины, имеющей удельное сопротивление  $\rho_1$ . Как следует из рассуждений, приведенных в примере 2, такое же асимптотическое поведение наблюдается в случае, когда между скважиной и вмещающей средой существует зона проникновения с удельным сопротивлением  $\rho_\Delta$ .

После этого качественного анализа поведения поля сделаем следующий шаг и получим точные формулы. Установим с их помощью связь между полем и его потенциалом, с одной стороны, и удельным сопротивлением среды, радиусом скважины и расстоянием от точки наблюдения до токового электрода, с другой стороны.

Сначала выберем цилиндрическую систему координат  $r, \varphi, z$  с осью  $z$ , направленной вдоль оси скважины, и началом, расположенным в центре токового электрода (рис. III.16, б). Учитывая симметрию модели по отношению к оси  $z$  и плоскости  $z = 0$ , где расположен токовый электрод, естественно предположить, что потенциал не зависит от координаты  $\varphi$  и является четной функцией  $z$ :

$$U = U(r, z) = U(r, -z). \quad (\text{III.310})$$

Теперь все готово для постановки краевой задачи, которая в соответствии с уравнением (III.253) следующим образом описывает поведение потенциала.

1. Внутри скважины и вмещающей среды потенциал  $U$  удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\nabla^2 U = 0.$$

2. Вблизи токового электрода потенциал  $U_1$  стремится к потенциалу заряда электрода:

$$U_1 \rightarrow \rho_1 I / 4\pi R \quad \text{при} \quad R \rightarrow 0,$$

где

$$R = \sqrt{r^2 + z^2}.$$

3. С увеличением расстояния  $R$  от токового электрода потенциалы в скважине  $U_1$  и в среде  $U_2$  стремятся к нулю:

$$U_1 \rightarrow 0, \quad U_2 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad R \rightarrow \infty.$$

4. На поверхности скважины потенциал и нормальная компонента плотности тока являются непрерывными функциями:

$$U_1 = U_2, \quad \gamma_1 \frac{\partial U_1}{\partial r} = \gamma_2 \frac{\partial U_2}{\partial r} \quad \text{при} \quad r = a.$$

Будем искать потенциал как функцию, удовлетворяющую всем четырем требованиям. Прежде всего, найдем решение уравнения Лапласа. Учитывая осевую симметрию, представим это уравнение в цилиндрической системе координат:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0, \quad (\text{III.311})$$

поскольку  $\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0$ .

Это — дифференциальное уравнение второго порядка с частными производными, так как потенциал  $U$  зависит от двух координат:  $r$  и  $z$ .

Предположим, что решение этого уравнения можно представить в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одного аргумента:

$$U = T(r) \Phi(z). \quad (\text{III.312})$$

Подставляя уравнение (III.312) в уравнение (III.311), получаем:

$$\Phi \frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{\Phi}{r} \frac{dT}{dr} + T \frac{d^2 \Phi}{dz^2} = 0.$$

Поделив обе части уравнения на  $\Phi T$ , имеем

$$\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{rT} \frac{dT}{dr} + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{dz^2} = 0. \quad (\text{III.313})$$

В левой части уравнения (III.313) естественно выделить два члена:

$$A1 = \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{rT} \frac{dT}{dr},$$

$$A2 = \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{dz^2}.$$

На первый взгляд кажется, что они зависят от аргументов  $r$  и  $z$  соответственно и уравнение (III.313) можно представить в виде

$$A1(r) + A2(z) = 0.$$

Однако подобное равенство невозможно, так как при изменении одного из аргументов, например  $r$ , меняется первый член, в то время как второй остается тем же; соответственно, сумма этих членов не может быть равна нулю для произвольных значений  $r$  и  $z$ .

Таким образом, приходится сделать вывод, что каждый член не зависит от координат и является постоянной величиной. Этот факт — ключевой момент метода разделения переменных, позволяющий описать потенциал в виде произведения двух функций. Для удобства представим эту постоянную в форме  $\pm m^2$ , где  $m$  называется постоянной разделения переменных.

Вместо уравнения Лапласа получим два обыкновенных дифференциальных уравнения второго порядка:

$$\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{rT} \frac{dT}{dr} = \pm m^2, \quad (\text{III.314})$$

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{dz^2} = \mp m^2.$$

Подчеркнем, что замена дифференциального уравнения с частными производными двумя обыкновенными дифференциальными уравнениями — это основная цель метода разделения переменных, так как решение последних уравнений известно.

Для того, чтобы выбрать правильный знак в правой части уравнения (III.314), учтем, что согласно (III.310) потенциал  $U$  является в скважине и вмещающей среде симметричной функцией координаты  $z$ . По этой причине выберем знак минус в правой части уравнения для  $\Phi$  и запишем

$$\Phi''(z) + m^2 \Phi = 0, \quad (\text{III.315})$$

где  $\Phi''(z) = \frac{d^2 \Phi}{dz^2}$ .

Как хорошо известно, последнее уравнение имеет два независимых решения:  $\sin mz$  и  $\cos mz$ ; однако будем использовать только  $\cos mz$ , так как это решение является четной функцией координаты  $z$ .

Таким образом, функцию  $\Phi$  можно записать как

$$\Phi(z, m) = C_m \cos mz, \quad (\text{III.316})$$

где  $C_m$  — произвольная постоянная, не зависящая от  $z$ .

Как следует из (III.314), в правой части уравнения для функции  $T(r)$  имеем знак «+» и, соответственно,

$$T''(r) + \frac{1}{r} T'(r) - m^2 T = 0, \quad (\text{III.317})$$

где

$$T' = \frac{dT}{dr}, \quad T'' = \frac{d^2 T}{dr^2}.$$

Вводя переменную  $x = mr$ , имеем

$$\frac{dT}{dr} = \frac{dT}{dx} \frac{dx}{dr} = m \frac{dT}{dx} \quad \text{и} \quad \frac{d^2 T}{dr^2} = m^2 \frac{d^2 T}{dx^2}.$$

Подставляя эти уравнения в (III.317), получаем

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dT}{dx} - T = 0. \quad (\text{III.318})$$

Это уравнение хорошо известно и часто используется в раз-



личных краевых задачах с цилиндрическими поверхностями раздела. Его решениями являются модифицированные функции Бесселя первого и второго типа нулевого порядка —  $I_0(x)$  и  $K_0(x)$  соответственно. Их поведение показано на рис. III.16, в. Вместе с другими модифицированными функциями Бесселя они хорошо изучены. Также будем пользоваться модифицированными функциями Бесселя первого порядка  $I_1(x)$  и  $K_1(x)$ , которые описывают производные функций  $I_0(x)$  и  $K_0(x)$ . Между ними установлена следующая связь:

$$\frac{dI_0(x)}{dx} = I_1(x), \quad \frac{dK_0}{dx} = -K_1(x). \quad (\text{III.319})$$

Графики этих функций также приведены на рис. III.16, в. Полезно показать асимптотическое поведение этих функций:

$$\begin{aligned} I_0(x) &\rightarrow 1, & K_0(x) &\rightarrow -\ln x & \text{при } x &\rightarrow 0 \\ I_1(x) &\rightarrow x/2, & K_1(x) &\rightarrow 1/x \end{aligned} \quad (\text{III.320})$$

и

$$\begin{aligned} I_0(x) &\rightarrow e^x \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} & K_0(x) &\rightarrow e^{-x} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}, \\ I_1(x) &\rightarrow e^x \frac{1}{2\pi x} & K_1(x) &\rightarrow e^{-x} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \end{aligned} \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

Модифицированные функции Бесселя описаны в многочисленных монографиях, существует множество таблиц их значений, различных представлений этих функций, соотношений между ними, полиномиальных приближений и т. д. Применение этих функций так же удобно, как и применение элементарных функций.

Таким образом, решение уравнения (III.318) можно представить в виде

$$T(x) = DI_0(x) + FK_0(x)$$

или

$$T(mr) = D_m I_0(mr) + F_m K_0(mr), \quad (\text{III.321})$$

где  $D_m$  и  $F_m$  — произвольные постоянные, которые не зависят от  $r$ .

Используя уравнение (III.312), получим для каждого значения  $m$

$$U(r, z, m) = [A_m I_0(mr) + B_m K_0(mr)] \cos mz, \quad (\text{III.322})$$

где  $A_m$  и  $B_m$  — неизвестные коэффициенты, зависящие от  $m$ .

Ясно, что функция  $U(r, z, m)$  удовлетворяет уравнению Лапласа, и можно было бы подумать, что первый шаг в решении краевой задачи уже сделан. Однако это предположение неверно,

поскольку функция  $U(r, z, m)$  зависит от постоянной  $m$ , которая появляется как результат преобразования уравнения Лапласа в два обыкновенных дифференциальных уравнения, в то время как потенциал  $U$ , описывающий электрическое поле в среде, не зависит от  $m$ . Так как функция  $U(r, m, z)$ , задаваемая уравнением (III.322), удовлетворяет уравнению Лапласа для любого  $m$ , представим  $U$  как определенный интеграл:

$$U(r, z) = \int_0^{\infty} [A_m I_0(mr) + B_m K_0(mr)] \cos mz \, dm, \quad (\text{III.323})$$

который не зависит от  $m$ .

Таким образом, мы пришли к общему решению уравнения Лапласа, которое включает бесконечное число решений, соответствующих различным коэффициентам  $A_m$  и  $B_m$ . Теперь можно сделать второй шаг в решении краевой задачи: среди функций  $A_m$  и  $B_m$  выбрать решения, которые подчиняются краевым условиям вблизи электрода и на бесконечности. С этой целью учтем асимптотическое поведение функций  $I_0(mr)$  и  $K_0(mr)$ . Как было показано ранее,  $K_0(mr)$  стремится к бесконечности при приближении аргумента к нулю, тем самым эта функция не может описывать потенциал вторичного поля внутри скважины. В то же время функция  $I_0(mr)$  неограниченно возрастает с увеличением  $r$  и, соответственно, не может описывать поле вне скважины. Поэтому вместо уравнения (III.323) можно записать

$$U_1(r, z) = \frac{\rho_1 I}{4\pi R} + \int_0^{\infty} A_m I_0(mr) \cos mz \, dm \quad \text{при } r \leq a, \quad (\text{III.324})$$

$$U_2(r, z) = \int_0^{\infty} B_m K_0(mr) \cos mz \, dm \quad \text{при } r \geq a.$$

Эти функции удовлетворяют как уравнению Лапласа, так и краевым условиям. Действительно, при приближении к токовому электроду функция  $U_1$  стремится к потенциалу, вызванному зарядом на его поверхности, в то время как с увеличением  $r$  функция  $U_2$ , благодаря присутствию  $K_0(mr)$ , уменьшается. Оба интеграла в уравнениях (III.324) содержат осциллирующий множитель  $\cos mz$ , поэтому функции  $U_1$  и  $U_2$  стремятся к нулю с увеличением расстояния вдоль оси  $z$ . Это асимптотическое поведение рассмотрим позже более подробно.

Теперь удовлетворим последнее требование краевой задачи и найдем коэффициенты  $A_m$  и  $B_m$  такие, что они обеспечивают непрерывность потенциала и нормальной компоненты плотности тока на поверхности скважины. Для упрощения наших преобразований важно представить потенциал первичного поля в терминах

тех же функций, что и вторичное поле. Подобное представление хорошо известно и называется интегралом Зоммерфельда:

$$\frac{1}{R} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_0(mr) \cos mz \, dm, \quad (\text{III.325})$$

где  $R = \sqrt{r^2 + z^2}$  и  $r \neq 0$ .

Тогда выражение для потенциала внутри скважины имеет вид

$$U_1 = \int_0^{\infty} [CK_0(mr) + A_m I_0(mr)] \cos mz \, dm \quad \text{при } r \neq 0, \quad (\text{III.326})$$

где  $C = \rho_1 I / 2\pi^2$ .

Теперь условия на границе  $r = a$  можно записать как

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} [CK_0(ma) + A_m I_0(ma)] \cos mz \, dm = \\ = \int_0^{\infty} B_m K_0(ma) \cos mz \, dm \end{aligned} \quad (\text{III.327})$$

и

$$\begin{aligned} \gamma_1 \int_0^{\infty} [CK'_0(ma) + A_m I'_0(ma)] \cos mz \, dm = \\ = \gamma_2 \int_0^{\infty} B_m K'_0(ma) \cos mz \, dm, \end{aligned}$$

где

$$I'_0(x) = \frac{d I_0(x)}{dx}, \quad K'_0(x) = \frac{d K_0(x)}{dx}.$$

Оба уравнения содержат бесконечное число неизвестных  $A_m$  и  $B_m$  и могут рассматриваться как интегральные уравнения относительно  $A_m$  и  $B_m$ . К счастью, у этих интегралов существует одна замечательная черта, позволяющая их существенно упростить. Действительно, они представляют собой косинус-преобразования Фурье, а из теории этих интегралов следует, что их равенство приводит и к равенству подынтегральных выражений. В результате имеем

$$CK_0(ma) + A_m I_0(ma) = B_m K_0(ma), \quad (\text{III.328})$$

$$\gamma_1 \{-CK_1(ma) + A_m I_1(ma)\} = -\gamma_2 B_m K_1(ma),$$

так как  $I'_0(x) = I_1(x)$ ,  $K'_0(x) = -K_1(x)$ .

Это действительно значительное упрощение, поскольку вместо интегральных уравнений для каждого значения мы получаем систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными  $A_m$  и  $B_m$ , решение которой

$$A_m = (\gamma_1 - \gamma_2) C \frac{K_0(ma) K_1(ma)}{\gamma_2 I_0(ma) K_1(ma) + \gamma_1 I_1(ma) K_0(ma)} \quad (\text{III.329})$$

и

$$B_m = \frac{\gamma_1 C}{ma} \frac{1}{\gamma_2 I_0(ma) K_1(ma) + \gamma_1 I_1(ma) K_0(ma)}.$$

Отметим, что при получении выражения для  $B_m$  использовалось равенство

$$I_1(x) K_0(x) + I_0(x) K_1(x) = \frac{1}{x}.$$

Таким образом, функции  $U_1(r, z)$  и  $U_2(r, z)$ , задаваемые уравнениями (III.324) и (III.329), удовлетворяют всем требованиям теоремы единственности; соответственно, можно сказать, что эти функции описывают потенциал электрического поля, вызванного зарядом электрода и зарядами, распределенными на поверхности скважины.

Поскольку измерения разности потенциалов и электрического поля имеют большое практическое значение при электрометрии скважин, напишем выражения для них в скважине:

$$U(r, z) = \frac{\rho_1 I}{4\pi} \left[ \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} + \frac{2}{\pi} (\gamma_1 - \gamma_2) \times \right. \\ \left. \times \int_0^{\infty} \frac{K_0(ma) K_1(ma) \cdot I_0(mr) \cos mz \, dm}{\gamma_2 I_0(ma) K_1(ma) + \gamma_1 I_1(ma) K_0(ma)} \right], \\ E_z = \frac{\rho_1 I}{4\pi} \left[ \frac{z}{(r^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{2}{\pi} (\gamma_1 - \gamma_2) \times \right. \\ \left. \times \int_0^{\infty} \frac{m K_0(ma) K_1(ma) I_0(mr) \sin mz}{\gamma_2 I_0(ma) K_1(ma) + \gamma_1 I_1(ma) K_0(ma)} \, dm \right], \quad (\text{III.330})$$

так как  $E_z = -\partial U / \partial z$ .

Если измерения выполнены на оси скважины  $r = 0$ , то эти выражения несколько упрощаются, и мы имеем

$$U(0, L) = \frac{\rho_1 I}{4\pi} \left[ \frac{1}{L} + \frac{2}{\pi} (\gamma_1 - \gamma_2) \times \right. \\ \left. \times \int_0^{\infty} \frac{K_0(ma) K_1(ma) \cos mL \, dm}{\gamma_2 I_0(ma) K_1(ma) + \gamma_1 I_1(ma) K_0(ma)} \right], \quad (\text{III.331})$$

и

$$E_z(0, L) = \frac{\rho_1 I}{4\pi} \left[ \frac{1}{L^2} + \frac{2}{\pi} (\gamma_1 - \gamma_2) \times \right. \\ \left. \times \int_0^\infty \frac{m K_0(ma) K_1(ma) \sin mL dm}{\gamma_2 I_0(ma) K_1(ma) + \gamma_1 I_1(ma) K_0(ma)} \right],$$

где  $L$  — расстояние между токовым и измерительным электродами в нормальном и градиентном зондах, которые, как было описано ранее, измеряют потенциал и электрическое поле соответственно. По существу, в обоих случаях меряется разность потенциалов или напряжение. Однако при нормальном зондировании второй измерительный электрод расположен далеко и его потенциал практически равен нулю, в то время как в градиентном зондировании оба измерительных электрода расположены близко друг к другу и можно сказать, что напряжение равно произведению электрического поля на расстояние между электродами.

Здесь уместно сделать два замечания.

1. Алгоритмы для интегрирования и вычисления модифицированных функций Бесселя очень хорошо разработаны, по этой причине определение потенциала и электрического поля из уравнений (III.331) является относительно простой задачей.

2. Применяя уравнения (III.331) и используя принцип суперпозиции, можно решить прямую задачу и для более сложных зондов, образованных из нескольких токовых и измерительных электродов, например для известного семиэлектродного градиентного зонда.

Теперь рассмотрим уравнения (III.331) более детально. Для упрощения введем новые переменные:

$$x = ma, \quad \alpha = \frac{L}{a}, \quad s = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

и, подставив их в уравнения (III.331), получим

$$U(0, L) = U_0 \left[ 1 + (s - 1) \alpha \frac{2}{\pi} \int_0^\infty A_x^* \cos \alpha x dx \right], \quad (III.332)$$

$$E_z(0, L) = E_{0z} \left[ 1 + (s - 1) \alpha^2 \frac{2}{\pi} \int_0^\infty x A_x^* \sin \alpha x dx \right],$$

где  $U_0$  и  $E_{0z}$  — потенциал и электрическое поле на оси  $z$ , которые были бы вызваны зарядом  $e_A$ , если бы он был расположен в однородной среде с удельным сопротивлением  $\rho_1$ :

$$U_0 = \frac{\rho_1 I}{4\pi L}, \quad E_{0z} = \frac{\rho_1 L}{4\pi L^2}$$

и

(III.333)

$$A_x^* = \frac{K_0(x) K_1(x)}{I_0(x) K_1(x) + s I_1(x) K_0(x)}.$$

Отсюда электрическое поле и его потенциал можно представить как произведение:

$$E_z = E_{0z} F_E(\alpha, s), \quad U = U_0 F_U(\alpha, s), \quad (\text{III.334})$$

где функции  $F_E$  и  $F_U$  зависят от двух параметров, а именно, длины зонда, выраженной в единицах радиуса скважины  $\alpha$ , и отношения электропроводностей  $s$ .

Очевидно, что эти функции характеризуют влияние среды и геометрии зонда, поскольку показывают, как поле и его потенциал на оси скважины отличаются от соответствующих функций в однородной среде с удельным сопротивлением скважины  $\rho_1$ . Перепишем уравнения (III.334) в следующем виде:

$$F_E = E_z / E_{0z} \quad \text{и} \quad F_U = U / U_0.$$

Очень часто эти отношения представляют в виде

$$\frac{\rho_a^E}{\rho_1} = \frac{E_z}{E_{0z}} = F_E \quad \text{и} \quad \frac{\rho_a^U}{\rho_1} = \frac{U}{U_0} = F_U, \quad (\text{III.335})$$

где величины  $\rho_a^E$  и  $\rho_a^U$  называются кажущимися сопротивлениями градиентного и нормального зондирования соответственно. Конечно же, можно ввести подобные выражения для кажущегося сопротивления и в более сложных зондированиях.

В качестве примера рассмотрим взаимосвязь между потенциалом  $U$  и геоэлектрическими параметрами среды. С этой целью изучим поведение функции  $F_U$ . В соответствии с уравнениями (III.332) запишем

$$F_U = 1 + (s - 1) \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} A_x^* \cos \alpha x dx, \quad (\text{III.336})$$

где  $A_x^*$  задается уравнением (III.333) и не зависит от параметра  $\alpha$ .

С уменьшением длины зонда отношение  $\alpha$  стремится к нулю и в соответствии с уравнением (III.336) получаем

$$F_U \rightarrow 1 + (s - 1) \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} A_x^* dx \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad \alpha \rightarrow 0.$$

Это означает, что данный потенциал стремится к потенциалу, вызванному только зарядом  $e_A$ , расположенным на поверхности

токового электрода. Конечно, это известный результат, но здесь он получен другим путем. Теперь изучим противоположный случай, в котором длина зонда увеличивается и параметр  $\alpha$  стремится к бесконечности.

Для изучения асимптотического поведения функции  $F_U$  уделим внимание подынтегральному выражению в уравнении (III.336), представленному произведением двух функций:  $A_x^*$  и  $\cos \alpha x$ . Одна из этих функций —  $A_x^*(x)$  постепенно уменьшается без изменения знака, в то время как  $\cos \alpha x$  является осциллирующей функцией. Интервал  $\Delta x$ , в пределах которого она не меняет знак, определяется условием

$$\Delta x = \pi / \alpha .$$

С увеличением параметра  $\alpha$  этот интервал уменьшается и функция  $A_x^*$  становится практически постоянной внутри каждого интервала  $\Delta x$ . Учитывая, что  $A_x^*$  — непрерывная функция  $x$ , можно сказать, что с уменьшением  $\Delta x$  интегралы по соседним интервалам становятся почти равными по величине, но имеют противоположные знаки. Другими словами, они взаимно уничтожаются и с увеличением  $\alpha$  такое поведение проявляется для меньших значений  $x$ . Это означает, что в пределе, когда  $\alpha$  стремится к бесконечности, интеграл в уравнении (III.336) определяется очень малыми значениями  $x$  (рис. III.16,  $z$ ). Учитывая этот факт, упростим выражение для  $A_x^*(x)$ , заменяя функции  $I_0(x)$  и  $I_1(x)$  их асимптотическими формулами [см. уравнение (III.320)]. Тогда вместо уравнения (III.333) получаем

$$A_x^*(x) \rightarrow K_0(x) \quad \text{при} \quad x \rightarrow 0 .$$

Асимптотическое выражение для потенциала примет вид

$$U(0, L) = U_0 \left[ 1 + (s - 1) \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^\infty K_0(x) \cos \alpha x dx \right] \quad \text{при} \quad \alpha \rightarrow \infty$$

и в соответствии с уравнением (III.325)

$$U(0, L) = U_0 \left[ 1 + (s - 1) \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \right] = U_0 s = \frac{\rho_2 I}{4\pi L} \quad \text{при} \quad \alpha \rightarrow \infty .$$

Мы снова показали, что с увеличением длины зонда потенциал в скважине приближается к потенциалу однородного пространства, обладающего удельным сопротивлением вмещающей среды. Применяя тот же подход, можно получить похожие выражения и для электрического поля.

Теперь обсудим результаты вычисления отношения

$$\rho_a / \rho_1 = U / U_0 ,$$

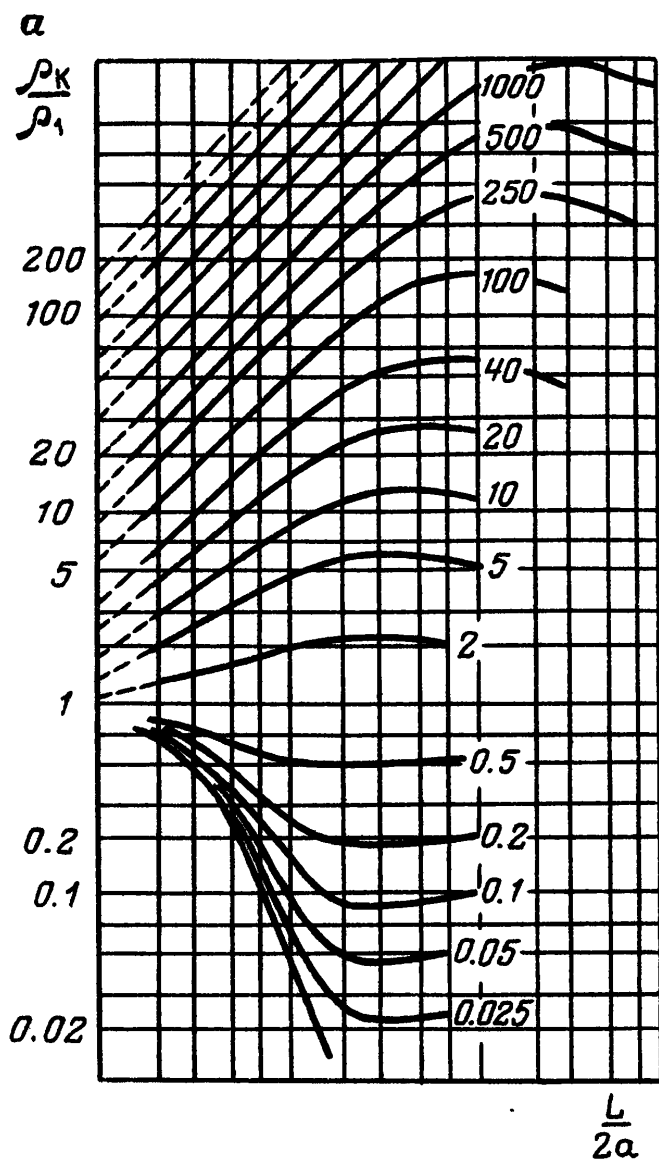
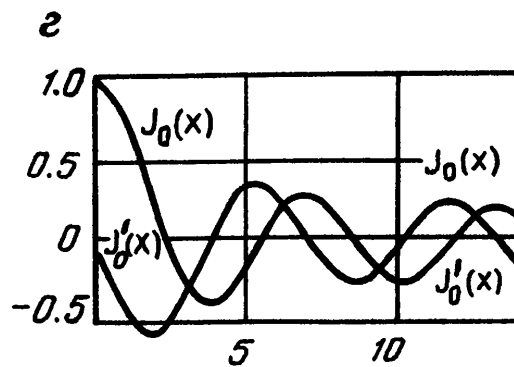
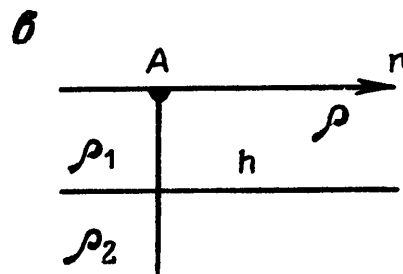
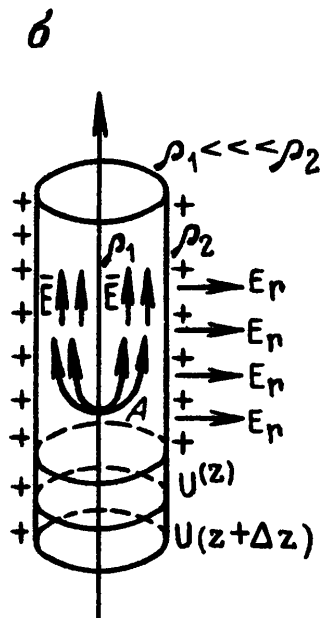


Рис. III.17. Кривые кажущегося сопротивления (а); шифр кривых  $\rho_2/\rho_1$ ; электрическое поле в скважине, окруженной изолятором (б); двухслойная среда (в); функции Бесселя  $J_0$  и  $J'_0$  (г)



представленного в билогарифмическом масштабе на рис. III.17, а. Индекс кривых —  $s = \rho_2/\rho_1$ , а параметр  $a$  откладывается вдоль горизонтальной оси. Функция  $U$  задается уравнением (III.336).



Выделим некоторые важные особенности этих кривых, отражающие поведение потенциала на оси скважины:

1. Все кривые имеют левую и правую асимптоты, соответствующие удельному сопротивлению скважины и среды соответственно.

2. С увеличением удельного сопротивления среды, или точнее  $s$ , выход на правую асимптоту имеет место на большем удалении от токового электрода. Подобное поведение наблюдается и в случае, когда среда является более проводящей.

3. С увеличением разности все кривые пересекают правую асимптоту, достигают максимума и затем убывают, постепенно приближаясь к своим асимптотам. Это указывает на существование области разносов, где потенциал превосходит потенциал в однородной среде с удельным сопротивлением  $\rho_2$  при  $s > 1$ .

4. В случае более проводящей среды кривые кажущегося сопротивления также пересекают правую асимптоту.

5. Чем больше параметр  $s$  отличается от единицы, тем меньше должно быть расстояние между токовым электродом и точкой наблюдения для того, чтобы можно было пренебречь влиянием зарядов на оси скважины.

6. Если среда обладает относительно высоким удельным сопротивлением  $s \gg 1$ , то существует промежуточная зона, в которой кривая кажущегося сопротивления имеет наклон, приблизительно равный  $45^\circ$ . Эта зона становится шире с увеличением  $s$ . Подобное поведение кажущегося сопротивления означает, что потенциал остается практически постоянным. Действительно, из уравнений (III.307) и (III.335) следует, что

$$\rho_a = 4\pi UL \quad \text{или} \quad \log \rho_a = \log 4\pi U + \log L,$$

и это уравнение описывает прямую линию с наклоном в  $45^\circ$  при  $U = \text{const}$ .

Теперь изучим поведение поля внутри этой зоны. В простейшем случае, когда среда является изолятором ( $\rho_2 = \infty$ ), распределение токов в скважине можно представить следующим образом. В очень близкой окрестности электрода  $A$  токовые линии почти радиальны по направлению. С увеличением расстояния они стремятся стать параллельными оси скважины. Соответственно, на достаточно больших расстояниях от электрода  $A$  можно ожидать однородного распределения плотности тока, имеющего только одну  $z$ -компоненту, равную

$$j_z = I/2\pi a^2.$$

Здесь  $I$  — ток, приходящий на электрод с провода,  $a$  — радиус скважины. Введение коэффициента  $1/2$  объясняется тем, что ток  $I$  распределен симметрично по отношению к электроду  $A$ . Применяя закон Ома

$$j_z = E_z/\rho_1,$$

находим, что электрическое поле внутри скважины с удельным сопротивлением  $\rho_1$  равно

$$E_z = \frac{\rho_1 I}{2\pi a^2} = \frac{I}{2S}, \quad (\text{III.337})$$

где  $S$  — интегральная (продольная) проводимость скважины:

$$S = \pi a^2 \gamma_1. \quad (\text{III.338})$$

Уравнение (III.337) описывает электрическое поле, однородное в поперечном сечении скважины и постоянное вдоль оси  $z$ .

Напряжение  $V$ , измеренное между двумя произвольными точками  $M$  и  $N$ ,

$$V = U(M) - U(N) = E_z MN \quad (\text{III.339})$$

остаётся постоянным.

Очевидно, что ток сопровождается появлением поверхностных зарядов, которые создают совершенно другие поля внутри и снаружи скважины. В самом деле, при  $a \gg 1$  внутри скважины согласно (III.337) электрическое поле является однородным и направлено вдоль оси  $z$ , однако снаружи при  $r > a$  заряды создают только радиальное поле.

Другое поведение поля и токов наблюдается, когда окружающая среда — проводящая ( $\rho_2 \neq \infty$ ), поскольку радиальная компонента плотности тока вне скважины не равна нулю. Другими словами, происходит утечка тока из скважины во вмещающую среду. Соответственно, с увеличением расстояния от электрода  $A$  ток в сечении, поперечном скважине, уменьшается. Очевидно, что данное поведение тока вдоль скважины наблюдается из-за того, что вертикальные компоненты плотности тока и электрического поля уменьшаются с расстоянием  $z$ . Ясно, что с увеличением электропроводности среды электрическое поле  $E_z$  будет уменьшаться ещё быстрее.

Это описание позволяет предположить, что внутри промежуточной зоны скважина ведёт себя как линия передачи. Теперь покажем, что наше предположение верно. В соответствии с законом Ома изменение потенциала  $dU$  вдоль произвольного элемента скважины  $dz$  (см. рис. III.17, б) составляет

$$dU = - \frac{I(z) dz}{S'}, \quad (\text{III.340})$$

где  $dz/S'$  — удельное сопротивление элемента скважины  $dz$ ;  $U(z)$  — потенциал в точке  $p$ ;  $I(z)$  — ток через поперечное сечение скважины в точке  $p$ . Знак «минус» введён в уравнение (III.340), поскольку

$$dU = U(z + \Delta z) - U(z) \quad \text{и} \quad U(z) > U(z + \Delta z).$$

Изменение тока вдоль скважины происходит в результате

утечки во вмещающую среду. Другими словами, можно считать, что окружающая среда с удельным сопротивлением  $\rho_2$  соединена со скважиной параллельно. Следовательно, внутри интервала  $dz$  утечка тока равна  $dI_r$  и связана с потенциалом  $U(z)$  следующим образом:

$$U(z) = \frac{T}{dz} dI_r = -\frac{T}{dz} dI(z), \quad (\text{III.341})$$

где  $T$  — поперечное сопротивление (сопротивление радиальному току на единицу длины). Таким образом, уравнения (III.340), (III.341) можно представить как

$$\frac{dU}{dz} = -\frac{1}{S} I(z), \quad \frac{dI}{dz} = -\frac{1}{T} U(z). \quad (\text{III.342})$$

После дифференцирования этой системы получаем

$$\frac{d^2 U}{dz^2} = n^2 U \quad \text{и} \quad \frac{d^2 I}{dz^2} = n^2 I, \quad (\text{III.343})$$

где

$$n = 1/\sqrt{ST}. \quad (\text{III.344})$$

Таким образом, распределение потенциала и тока определяется параметром  $n$  при условии, что наше предположение относительно поведения поля внутри промежуточной зоны верное. Отметим, что  $U(z)$  — потенциал в некоторой точке скважины относительно бесконечности, где значение  $U$  равно нулю. В частности, любая цилиндрическая поверхность с достаточно большим радиусом, расположенная коаксиально со скважиной, имеет практически нулевой потенциал. Как хорошо известно, любое решение уравнений (III.343) имеет вид

$$Ae^{nz} + Be^{-nz},$$

где  $A$  и  $B$  — неизвестные постоянные. В результате утечки ток в скважине при  $z \rightarrow \pm \infty$  стремится к нулю, поэтому

$$I(z) = Be^{-nz} \quad \text{при} \quad z > 0. \quad (\text{III.345})$$

Из-за симметрии относительно электрода  $A$  половина тока идет в одном направлении, в то время как другая половина идет в противоположном направлении. В этом случае начальное условие:

$$I(z) = \frac{I}{2} \quad \text{при} \quad z = 0,$$

поскольку эффектом утечки вблизи от источника можно пренебречь. Соответственно, получаем

$$I(z) = \frac{I}{2} e^{-nz}, \quad (\text{III.346})$$

где  $I$  — ток вблизи электрода.

Используя закон Ома, имеем для электрического поля в любой точке скважины

$$E_z = \rho_1 j_z = \rho_1 \frac{I(z)}{\pi a^2} = \frac{I(z)}{S}$$

или

$$E_z = \frac{I}{2S} e^{-z/\sqrt{ST}}. \quad (\text{III.347})$$

Учитывая, что

$$E_z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

получаем для потенциала

$$U(z) = \frac{I}{2} \sqrt{\frac{T}{S}} e^{-z/\sqrt{ST}}. \quad (\text{III.348})$$

Для сравнения этого результата с кривыми, приведенными на рис. III.17, а, снова введем кажущееся сопротивление, соответствующее уравнению (III.348).

Затем, используя уравнение (III.335), получим

$$\frac{\rho_a}{\rho_1} = \frac{2\pi L}{\rho_1} \sqrt{\frac{T}{S}} e^{-L/\sqrt{ST}}, \quad (\text{III.349})$$

где  $L$  — длина зонда.

Легко видеть, что результаты вычислений с помощью уравнения (III.349) совпадают с данными, приведенными на рис. III.17, а, при условии, что поперечное сопротивление  $T$  равно  $\rho_2$ :

$$T = \rho_2, \quad (\text{III.350})$$

а среда обладает значительно более высоким удельным сопротивлением, чем скважина.

Этот факт строго подтверждает, что внутри промежуточной зоны, где  $\rho_2 \gg \rho_1$ , поведение тока и потенциала описывается уравнением линии передачи тока с проводимостью, равной проводимости скважины. Поперечное сопротивление равно удельному сопротивлению вмещающей среды, если она однородная. Запишем выражения для потенциала, электрического поля и второй производной потенциала:

$$U(z) = \frac{I}{2} \sqrt{\frac{\rho_2}{S}} e^{-z/\sqrt{S\rho_2}},$$

$$E(z) = \frac{I}{2S} e^{-z/\sqrt{S\rho_2}}, \quad (\text{III.351})$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{I}{2S^{3/2}} \sqrt{\gamma_2} e^{-z/\sqrt{S\rho_2}}.$$

Как следует из их сравнения, вторая производная потенциала более чувствительна к удельному сопротивлению среды. В самом деле, в соответствии с уравнениями (III.343) можно заключить, что

$$\gamma_2 = \frac{s}{U(z)} \frac{d^2 U(z)}{dz^2}, \quad (\text{III.352})$$

и так как эти уравнения являются дифференциальными уравнениями, последнее справедливо и когда вмещающая среда является горизонтально слоистой.

В заключение сделаем два замечания.

1. Уравнение (III.352) показывает, что в принципе можно измерять электропроводность среды как через обсадные трубы, так и во время бурения.

2. Сравнение результатов вычислений, полученных с помощью уравнений (III.349), (III.350), с кривыми кажущегося сопротивления, представленными на рис. III.17, а, также показывает, что для относительно проводящей среды ( $10 < s < 1000$ ) эффект утечки, описанный уравнением (III.343), играет очень важную роль.

**Пример 6.** Электрическое поле на поверхности среды с двумя горизонтальными поверхностями раздела (рис. III.17, в)

Предположим, что токовый электрод А помещен на поверхности двухслойной среды. Толщина верхнего слоя —  $h$ , а  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — электропроводности слоя и основания соответственно.

Сначала рассмотрим распределение зарядов, появляющихся только на поверхностях раздела. В соответствии с уравнением (III.173) заряд на поверхности электрода

$$e_A = 2\varepsilon_0 \rho_1 I \quad (\text{III.353})$$

и, следовательно, потенциал и электрическое поле первичного поля имеют вид

$$U_0 = \frac{\rho_1 I}{2\pi R} \quad \text{и} \quad E_0 = \frac{\rho_1 I}{2\pi R^3} \mathbf{R}. \quad (\text{III.354})$$

Благодаря наличию первичного поля на поверхности раздела между слоем и основанием появляются поверхностные заряды. В соответствии с уравнением (III.178) их плотность

$$\Sigma = \varepsilon_0 (\rho_2 - \rho_1) j_n.$$

Учитывая, что ток через эту поверхность равен  $I$ , получаем для полного заряда на поверхности

$$e_s = \int \Sigma dS = \varepsilon_0 (\rho_2 - \rho_1) \int j_n dS$$

или

$$e_s = \varepsilon_0 (\rho_2 - \rho_1) I.$$

(III.355)

Заряды, распределенные по поверхности раздела, затем индуцируют заряды на поверхности Земли. Как было показано в (III.172), каждый элементарный заряд, расположенный в проводящей среде, создает на границе с изолятором поверхностный заряд того же знака и величины. По этой причине на поверхности Земли наведенный заряд  $e_0$  совпадает с зарядом на поверхности основания  $e_s$ , однако он распределен другим способом:

$$e_0 = 2\varepsilon_0 (\rho_2 - \rho_1) I. \quad (\text{III.356})$$

Суммарный поверхностный заряд в среде

$$e = 2\varepsilon_0 \rho_1 I + 2\varepsilon_0 (\rho_2 - \rho_1) I = 2\varepsilon_0 \rho_2 I. \quad (\text{III.357})$$

Это означает, что заряд, появляющийся на всех поверхностях, совпадает с зарядом электрода, расположенного на поверхности однородного полупространства и обладающего удельным сопротивлением основания  $\rho_2$ . Как и в предыдущем примере, данный анализ позволяет установить асимптотическое поведение поля как функции расстояния между токовым и измерительным электродами. В самом деле, представим потенциал в виде суммы:

$$U = \frac{\rho_1 I}{2\pi r} + U_s, \quad (\text{III.358})$$

где  $U_s$  — потенциал, вызванный зарядами подошвы слоя и земной поверхности. Поскольку потенциал  $U_s$  всюду имеет конечное значение, то при приближении к токовому электроду потенциал и электрическое поле в основном определяются зарядом на поверхности электрода:

$$U(r) \rightarrow \frac{\rho_1 I}{2\pi r} \quad \text{и} \quad E_r(r) \rightarrow \frac{\rho_1 I}{2\pi r^2}. \quad (\text{III.359})$$

Другими словами, с уменьшением разноса  $r$  между токовым и измерительным электродами глубина проникновения поля также уменьшается, поскольку поле определяется практически только удельным сопротивлением верхнего слоя  $\rho_1$ . В противоположном случае, когда точка наблюдения расположена вдали от токового электрода, влияние поверхностных зарядов, как и в предыдущем примере, такое же, как если бы суммарный заряд находился на токовом электроде. Тогда в соответствии с уравнением (III.357) получаем

$$U(r) \rightarrow \frac{\rho_2 I}{2\pi r} \quad \text{и} \quad E_r \rightarrow \frac{\rho_2 I}{2\pi r^2}. \quad (\text{III.360})$$

Это означает, что с увеличением разноса  $r$  глубина проникновения также возрастает, несмотря на то, что токовый и измерительный электроды находятся в верхнем слое с удельным сопротивлением  $\rho_1$ . Это происходит из-за того, что электрическое поле и его потенциал становятся функциями только удельного

сопротивления основания  $\rho_2$ , и этот результат не зависит от толщины верхнего слоя. Более того, как следует из исследования распределения зарядов в слоистой среде, данное асимптотическое поведение остается справедливым независимо от числа слоев и присутствия других структур с конечными размерами.

По существу, мы объяснили основную концепцию геометрического зондирования, основанного на измерении напряжения на различных расстояниях (разносах) от токового электрода.

Теперь получим уравнения для потенциала и электрического поля на произвольных расстояниях от токового электрода и с этой целью решим краевую задачу.

С учетом осевой симметрии относительно вертикальной оси, перпендикулярной поверхностям раздела и проходящей через токовый электрод, выберем цилиндрическую систему координат  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$ , как показано на рис. III.17, в.

В соответствии с уравнениями (III.254) краевая задача формулируется следующим образом.

1. Внутри слоя и фундамента потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\nabla^2 U_1 = 0 \quad \text{при} \quad 0 < z < h$$

и

$$\nabla^2 U_2 = 0 \quad \text{при} \quad z > h.$$

2. С приближением к токовому электроду потенциал  $U_1$  стремится к потенциалу, вызванному зарядом токового электрода:

$$U_1 \rightarrow \rho_1 I / 2\pi R \quad \text{при} \quad R \rightarrow 0.$$

где

$$R = \sqrt{r^2 + z^2}.$$

3. На поверхности Земли нормальная компонента плотности тока равна нулю:

$$\frac{\partial U_1}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0.$$

4. С увеличением расстояния  $R$  от токового электрода поле и его потенциал стремятся к нулю:

$$U_1 \rightarrow 0, \quad U_2 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad R \rightarrow \infty.$$

5. На поверхности раздела  $z = h$  потенциал и вертикальная компонента плотности тока являются непрерывными функциями:

$$U_1 = U_2, \quad \gamma_1 \frac{\partial U_1}{\partial z} = \gamma_2 \frac{\partial U_2}{\partial z} \quad \text{при} \quad z = h.$$

Отметим, что поскольку проводящая среда окружена поверх-

ностями, в каждой точке которых определены краевые условия, то рассматривать поле над поверхностью Земли нет необходимости.

Теперь определим потенциал, который удовлетворяет всем этим условиям, начиная с уравнения Лапласа. В соответствии с уравнением (III.311) имеем

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0,$$

поскольку благодаря осевой симметрии потенциал  $U$  не зависит от координаты  $\varphi$ . Применяя метод разделения переменных и представляя потенциал как

$$U(r, z) = T(r) \Phi(z),$$

снова получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{rT} \frac{dT}{dr} = \pm m^2,$$

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{dz^2} = \mp m^2.$$

Если выбрать знак «плюс» в правой части уравнения для  $T(r)$ , как это было сделано в предыдущем примере, то решения будут модифицированными функциями Бесселя  $I_0(mr)$  и  $K_0(mr)$ , обладающими особенностями как на бесконечности, так и на оси  $z$  соответственно. Поскольку все эти особые точки расположены в верхнем слое и основании, то функции  $I_0(mr)$  и  $K_0(mr)$  не могут описывать потенциал, который всюду, за исключением начала координат, имеет конечное значение. По этой причине возьмем знак «минус» в правой части уравнения для  $T(r)$  и получим

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + m^2 T = 0, \quad (III.361)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{dz^2} - m^2 \Phi = 0. \quad (III.362)$$

Решение второго уравнения состоит из экспоненциальных функций

$$\Phi(z) = C_m e^{mz} + D_m e^{-mz}, \quad (III.363)$$

где  $C_m$  и  $D_m$  — неизвестные коэффициенты, не зависящие от  $z$ . Вводя новую переменную  $x = mr$ , можно представить первое уравнение в виде

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dT}{dx} + T = 0. \quad (III.364)$$

Решениями этого уравнения являются функции Бесселя первого и второго типа нулевого порядка  $J_0(x)$  и  $Y_0(x)$  соответственно, которые тщательно изучены и широко используются в



многочисленных теоретических и инженерных задачах. Поскольку функция  $Y_0(mr)$  имеет логарифмическую особенность на оси  $z$ , она не может использоваться для описания поля. Поведение функции  $J_0(x)$  показано на рис. III.17, г. В частности,

$$J_0(x) \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad x \ll 1$$

и

$$J_0(x) \approx \sqrt{2/\pi x} \cos(x - \pi/4) \quad \text{при} \quad x \gg 1.$$

Таким образом, для каждого значения постоянной разделения переменных  $m$  получаем

$$U(r, z, m) = T(r) \Phi(z) = [C_m e^{mz} + D_m e^{-mz}] J_0(mr)$$

и, соответственно, общее решение уравнения Лапласа, не зависящее от  $m$ , имеет вид

$$U(r, z) = \int_0^{\infty} [C_m e^{mz} + D_m e^{-mz}] J_0(mr) dm. \quad (\text{III.366})$$

Мы сделали первый шаг в решении краевой задачи. Теперь удовлетворим другим условиям.

Представляя функцию  $U(r, z)$  в верхнем слое в виде

$$U_1(r, z) = \frac{\rho_1 I}{2\pi R} + \int_0^{\infty} [C_m e^{mz} + D_m e^{-mz}] J_0(mr) dm, \quad (\text{III.367})$$

видим, что  $U_1(r, z)$  удовлетворяет краевому условию вблизи электрода и уравнению Лапласа.

Для того, чтобы удовлетворить условие на поверхности Земли  $\partial U/\partial z = 0$ , продифференцируем потенциал по переменной  $z$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial z} &= -\frac{\rho_1 I_z}{2\pi (r^2 + z^2)^{3/2}} + \\ &+ \int_0^{\infty} m (C_m e^{mz} - D_m e^{-mz}) J_0(mr) dm. \end{aligned} \quad (\text{III.368})$$

Полагая  $z = 0$ , имеем

$$\int_0^{\infty} m (C_m - D_m) J_0(mr) dm = 0. \quad (\text{III.369})$$

Это очень сложное интегральное уравнение относительно неизвестных  $C_m$  и  $D_m$ , однако, к счастью, интегралы типа

$$\int_0^{\infty} \varphi(m) J_0(mr) dm$$

имеют одно замечательное свойство, похожее на свойство интегралов Фурье: из равенства

$$\int_0^{\infty} \varphi_1(m) J_0(mr) dm = \int_0^{\infty} \varphi_2(m) J_0(mr) dm$$

или

$$\int_0^{\infty} [\varphi_1(m) - \varphi_2(m)] J_0(mr) dm = 0 \quad (\text{III.370})$$

следует, что

$$\varphi_1(m) = \varphi_2(m). \quad (\text{III.371})$$

Таким образом, вместо уравнения (III.369) имеем

$$C_m = D_m$$

и, соответственно, выражение для функции  $U_1$  немного упрощается:

$$U_1(r, z) = \frac{\rho_1 I}{2\pi R} + \int_0^{\infty} C_m (e^{mz} + e^{-mz}) J_0(mr) dm. \quad (\text{III.372})$$

В основании, где  $z$  неограниченно возрастает, представим решение уравнения Лапласа в виде

$$U_2(r, z) = \int_0^{\infty} B_m e^{-mz} J_0(mr) dm. \quad (\text{III.373})$$

Такое решение, конечно же, удовлетворяет условию на бесконечности при  $z \rightarrow \infty$ . В силу осциллирующего поведения  $J_0(mr)$  обе функции  $U_1$  и  $U_2$  стремятся к нулю при неограниченном возрастании координаты  $r$ .

Чтобы удовлетворить условия на подошве верхнего слоя, необходимо, как и в примере 5, представить потенциал первичного поля в виде, соответствующем форме представления вторичного поля. С этой целью воспользуемся интегралом Липшица:

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \int_0^{\infty} e^{-m|z|} J_0(mr) dm$$

или

(III.374)

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \int_0^{\infty} e^{-mz} J_0(mr) dm \quad \text{при} \quad z > 0.$$

Подставляя уравнение (III.374) в уравнение (III.372), имеем

$$U_1(r, z) = \int_0^{\infty} [C e^{-mz} + C_m (e^{mz} + e^{-mz})] J_0(mr) dm,$$

где

$$C = \frac{\rho_1 I}{2\pi}.$$

Соответственно, потенциал и нормальная компонента плотности тока непрерывны на поверхности раздела  $z = h$ , если

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} [C e^{-mh} + C_m (e^{mh} + e^{-mh})] J_0(mr) dm = \\ = \int_0^{\infty} B_m e^{-mh} J_0(mr) dm \end{aligned} \quad (\text{III.375})$$

и

$$\begin{aligned} \gamma_1 \int_0^{\infty} [-C e^{-mh} + C_m (e^{mh} - e^{-mh})] m J_0(mr) dm = \\ = -\gamma_2 \int_0^{\infty} B_m e^{-mh} m J_0(mr) dm. \end{aligned}$$

Теперь, снова используя уравнения (III.370), (III.371), приходим к существенному упрощению и получаем для каждого  $m$  два уравнения с двумя неизвестными:

$$C e^{-mh} + C_m (e^{mh} + e^{-mh}) = B_m e^{-mh}, \quad (\text{III.376})$$

$$\gamma_1 [-C e^{-mh} + C_m (e^{mh} - e^{-mh})] = -\gamma_2 B_m e^{-mh}.$$

Отметим здесь, что в обоих случаях — скважины и горизонтально-слоистой среды — мы, по существу, наблюдаем одну из наиболее важных черт так называемых специальных функций, а именно, их ортогональность. Эта черта делает их чрезвычайно полезными для решения многочисленных краевых задач.

Решая систему (III.376), получаем

$$\begin{aligned} C_m = \frac{K_{12} e^{-2mh}}{1 - K_{12} e^{-2mh}} \frac{\rho_1 I}{2\pi}, \\ B_m = \frac{1 + K_{12}}{1 - K_{12} e^{-2mh}} \frac{\rho_1 I}{2\pi}, \end{aligned} \quad (\text{III.377})$$

где

$$K_{12} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}.$$

Таким образом, функции  $U_1$  и  $U_2$ , заданные уравнениями (III.372), (III.373), удовлетворяют всем условиям краевой задачи, если коэффициенты  $C_m$  и  $B_m$  определены уравнением (III.377). Соответственно  $U_1$  и  $U_2$  описывают потенциал электрического поля в ситуации, когда токовый электрод расположен в начале координат. В частности, если точка наблюдения расположена на поверхности Земли, имеем

$$U_1(r) = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \left[ \frac{1}{r} + 2K_{12} \int_0^{\infty} \frac{e^{-2mh}}{1 - K_{12} e^{-2mh}} J_0(mr) dm \right]$$

и (III.378)

$$E_r = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \left[ \frac{1}{r^2} + 2K_{12} \int_0^{\infty} \frac{m e^{-2mh}}{1 - K_{12} e^{-2mh}} J_1(mr) dm \right],$$

где  $E_r = -\partial U/\partial r$  — радиальная компонента электрического поля, а  $J_1(x) = -dJ_0(x)/dx$  — функция Бесселя первого порядка (рис. III.17, з).

Мы получили формулы (III.378) для двухэлектродной расстановки, однако, применяя принцип суперпозиции, нетрудно получить выражение для напряжения на произвольной системе электродов. Используя тот же подход при решении краевой задачи, легко обобщить уравнение (III.378) на случай  $n$ -слойной среды. Алгоритмы для вычисления интегралов, описывающих поле и его потенциал на поверхности горизонтально-слоистой среды, очень хорошо развиты и имеют стандартные программы.

Вводя новую переменную  $x = mr$ , запишем уравнение (III.378) для электрического поля:

$$E_r = \frac{\rho_1 I}{2\pi r^2} \left[ 1 + 2K_{12} \int_0^{\infty} \frac{x e^{-2ax}}{1 - K_{12} e^{2ax}} J_1(x) dx \right]$$

(III.379)

или

$$E_r = E_{0r} F_E(s, \alpha),$$

где  $E_{0r}$  — первичное электрическое поле, а  $F_E$  — функция, зависящая только от двух параметров:

$$s = \rho_2/\rho_1 \quad \text{и} \quad \alpha = h/r.$$

Прежде чем показать результаты вычисления электрического поля, изучим его асимптотическое поведение.

Как следует из уравнения (III.378), с приближением к токовому электроду интеграл стремится к нулю, поскольку  $J_1(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow 0$ , и, соответственно, поле определяется зарядом электрода:

$$E_r \rightarrow E_{0r} = \rho_1 I / 2\pi r^2. \quad (\text{III.380})$$

В противоположном случае, когда расстояние  $r$  увеличивается и  $r/h \gg 1$ , учтем, что благодаря осциллирующему характеру функции Бесселя  $J_1(x)$  интеграл определяется в основном значениями подынтегральных выражений в начальной части области интегрирования. Тогда при стремлении экспонент к единице

$$\frac{m e^{-2mh}}{1 - K_{12} e^{-2mh}} \rightarrow \frac{m}{1 - K_{12}} \quad \text{при} \quad m \rightarrow 0$$

и

$$E_r = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \left[ \frac{1}{r^2} + \frac{2K_{12}}{1 - K_{12}} \int_0^\infty m J_1(mr) dm \right] \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty.$$

Поскольку

$$m J_1(mr) = - \frac{\partial}{\partial r} J_0(mr),$$

то, в соответствии с уравнением (III.374),

$$\frac{1}{r} = \int_0^\infty J_0(mr) dm$$

и поэтому

$$E_r \approx \frac{\rho_1 I}{2\pi} \left[ \frac{1}{r^2} - \frac{2K_{12}}{1 - K_{12}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \right] \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty$$

или

(III.381)

$$E_r \approx \frac{\rho_1 I}{2\pi r^2} \frac{1 + K_{12}}{1 - K_{12}} = \frac{\rho_2 I}{2\pi r^2} \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty,$$

так как

$$K_{12} = (\rho_2 - \rho_1) / (\rho_2 + \rho_1).$$

Таким образом, независимо от отношения удельных сопротивлений, с увеличением разности  $r$  электрическое поле стремится к значению поля в однородном полупространстве, удельное сопротивление которого равно удельному сопротивлению основания. Конечно, обе асимптотики при  $r \rightarrow 0$  или  $r \rightarrow \infty$  были уже получены ранее, исходя из распределения зарядов.

Теперь рассмотрим специальный случай, когда основание яв-

ляется изолятором и разнос  $r$  много больше, чем толщина верхнего слоя  $h$ . Тогда, полагая  $K_{12} = 1$  и  $m \rightarrow 0$ , имеем

$$\frac{m e^{-2mh}}{1 - e^{-2mh}} \rightarrow \frac{m}{2mh} = \frac{1}{2h} \quad \text{при } m \rightarrow 0,$$

поскольку  $e^{-2mh} \approx 1 - 2mh$ .

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} E_r &\approx \frac{\rho_1 I}{2\pi} \left[ \frac{1}{r^2} + \frac{1}{h} \int_0^\infty J_1(mr) dm \right] = \\ &= \frac{\rho_1 I}{2\pi} \left[ \frac{1}{r^2} - \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^\infty J_0(mr) dm \right] = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \left[ \frac{1}{r^2} + \frac{1}{rh} \right] \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Наконец, пренебрегая первым слагаемым, имеем

$$E_r = I / 2\pi S r \quad \text{при } r/h \gg 1, \quad (\text{III.382})$$

где  $S = \gamma_1 h$  — продольная проводимость верхнего слоя.

Уравнение (III.382) показывает, что с увеличением расстояния электрическое поле становится обратно пропорциональным продольной проводимости  $S$  и не зависит отдельно от толщины и удельного сопротивления верхнего слоя. Другими словами, при выполнении измерений поля вдали от токового электрода можно определить продольную проводимость слоя только если  $\rho_2 = \infty$ .

Полезно прийти к уравнению (III.382) другим путем. Как видно из рис. III.18, а, с увеличением  $r$  вектор плотности тока становится практически горизонтальным и не зависит от координат  $r$  и  $z$ . Полный ток через любую боковую поверхность цилиндра радиуса  $r$  и высоты  $h$

$$I = j_r 2\pi r h$$

и с учетом закона Ома  $j_r = \gamma_1 E_r$ , снова получаем уравнение (III.382).

Всегда полезно получить одно и то же уравнение с математической и физической точек зрения. Например, в нашем случае этот подход позволяет понять, что асимптотическое поведение поля, описанное уравнением (III.382), соответствует однородному распределению плотности тока в верхнем слое. Более того, теперь мы можем обобщить уравнение (III.382) на  $n$ -слойную среду при условии, что основание является изолятором (рис. III.18, б).

Поскольку электрическое поле вдали от токового электрода является горизонтальным, то эквипотенциальные поверхности становятся боковыми поверхностями цилиндров с осью  $z$ . Рассмотрим две произвольные эквипотенциальные поверхности, расположенные на расстоянии  $r$  друг от друга. Напряжение между ними можно записать как

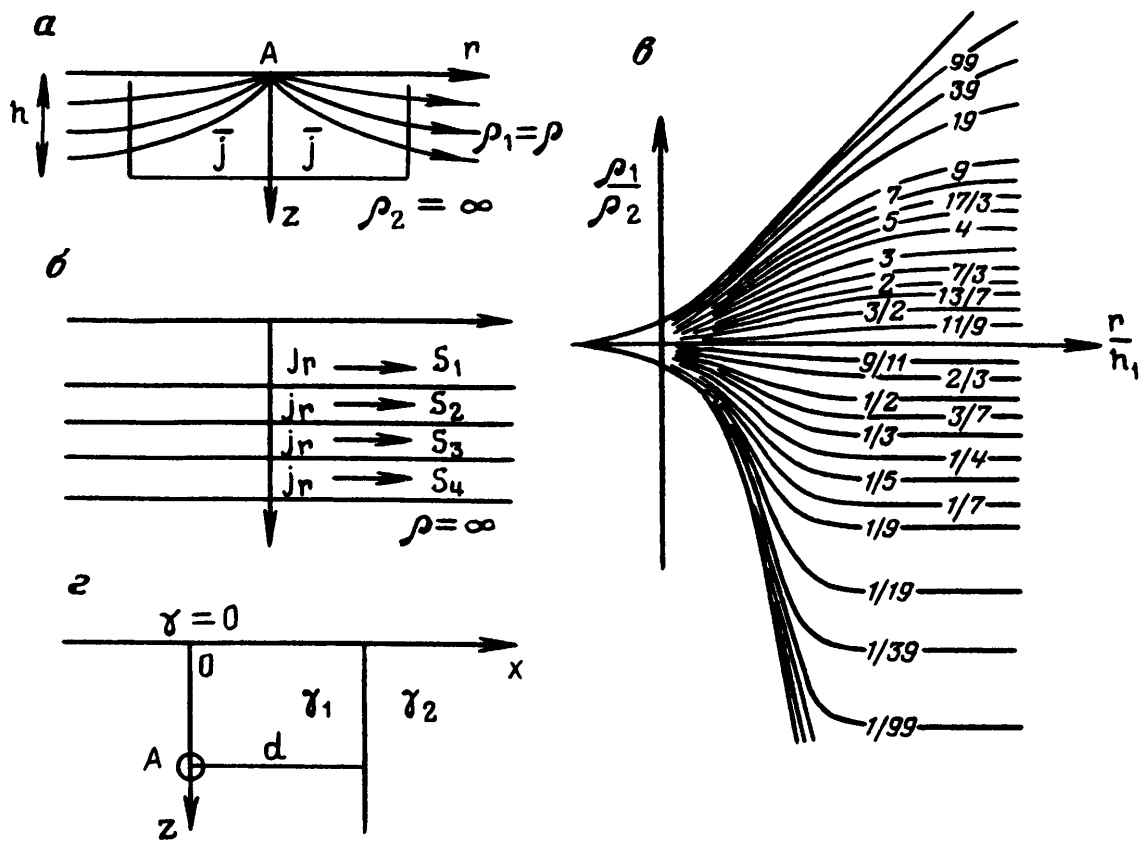


Рис. III.18. Распределение плотности тока в проводящем слое (а); горизонтально-слоистая среда и распределение токов в дальней зоне (б); кривые кажущегося сопротивления (в); шифр кривых  $\rho_2/\rho_1$ ; модель среды с вертикальным контактом (г)

$$V = I_1 R_1 = I_2 R_2 = \dots = I_i R_i = \dots = I_n R_n, \quad (III.383)$$

где  $I_i$  — ток в  $i$ -м слое, а  $R_i$  — интегральное сопротивление цилиндрического слоя мощности  $\Delta r$  и высоты  $h_i$  (являющейся толщиной  $i$ -го слоя). Очевидно, что

$$V = E_r \Delta r \quad \text{и} \quad R_i = \rho_i \Delta r / 2\pi r h_i = \Delta r / 2\pi r S_i,$$

где  $S_i$  — продольная проводимость  $i$ -го слоя. Тогда вместо уравнения (III.383) получаем

$$2\pi r E_r = \frac{I_1}{S_1} = \frac{I_2}{S_2} = \dots = \frac{I_i}{S_i} = \dots = \frac{I_n}{S_n}. \quad (III.384)$$

Учитывая, что вдали от электрода можно предположить, что слои соединены параллельно, имеем

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n \quad (III.385)$$

или

$$I = I_1 + \frac{S_2}{S_1} I_1 + \frac{S_3}{S_1} I_1 + \dots + \frac{S_n}{S_1} I_1.$$

Таким образом,

$$I = I_1 \frac{S}{S_1},$$

(III.386)

где величина

$$S = \sum_{i=1}^n S_i$$

называется суммарной продольной проводимостью системы слоев. Этот параметр часто играет важную роль при интерпретации электрического зондирования.

Наконец из уравнений (III.384) и (III.386) имеем

$$E_r = I_1 / 2\pi r S_1 = I / 2\pi r S \quad \text{при } r/h \gg 1, \quad \rho_{n+1} = \infty, \quad (\text{III.387})$$

что действительно является обобщенным вариантом уравнения (III.382). Область разносов, в которой уравнение (III.387) описывает поле, обычно называется  $S$ -зоной.

Чтобы закончить изучение асимптотического поведения поля, стоило бы исследовать случай, когда основание является идеальным проводником. Подобный анализ, однако, потребовал бы дополнительного изучения некоторых замечательных свойств функций комплексного переменного. По этой причине ограничимся только одним замечанием, а именно, если основание является идеальным проводником, то поле вдали от токового электрода убывает экспоненциально и показатель экспоненты пропорционален отношению  $r/h$ .

Теперь рассмотрим кривые кажущегося сопротивления  $\rho_k/\rho_1$ , вычисленные согласно уравнению (III.379) при условии, что

$$\rho_k/\rho_1 = E_r/E_{0r}$$

и представленные в билогарифмическом масштабе на рис. III.18, в. Индексом кривых является параметр  $s$ , равный  $\rho_2/\rho_1$ .

В соответствии с поведением электрического поля левая асимптота всех кривых равна единице:

$$\rho_k \rightarrow 1 \quad \text{при } r/h \rightarrow 0.$$

С увеличением разноса влияние основания постепенно возрастает и в пределе кривые приближаются к правой асимптоте, равной  $\rho_2/\rho_1$ :

$$\rho_k \rightarrow 2 \quad \text{при } r/h \rightarrow \infty.$$

Как следует из анализа распределения поверхностных зарядов и видно из кривых, с увеличением контраста удельных сопротивлений приближение к правой асимптоте наблюдается на больших разносах. В случае плохо проводящего основания ( $s \gg 1$ ) существует промежуточная область разносов, в которой все кривые приближаются к кривой, соответствующей непроводящему



основанию. Таким образом, внутри этой области кажущееся сопротивление  $\rho_k$  зависит только от одного параметра среды, а именно, продольной проводимости верхнего слоя  $S$ .

Поведение кривых  $\rho_k/\rho_1$ , приведенных на рис. III.18, в, наглядно показывает основную идею геометрического зондирования или зондирования Шлюмберже, которое в основном выполняется с помощью симметричной четырехэлектродной расстановки. Этот метод широко используется в гидрогеологической и инженерной геофизике, а результаты измерений обычно представляются в форме кажущегося сопротивления  $\rho_k$  как функции расстояния между средними точками измерительных и токовых электродов,  $AB/2$ . Заканчивая этот пример, сделаем несколько комментариев, связанных с решением обратной задачи, т. е. с интерпретацией зондирований Шлюмберже.

1. В соответствии с уравнением (III.379) кажущееся сопротивление  $\rho_k$  представим в виде

$$\rho_k = \rho_1 F \left( S, \frac{r}{h} \right).$$

Применяя тот же подход для решения прямой задачи в  $n$ -слойной среде, можно показать, что кажущееся удельное сопротивление имеет аналогичный вид:

$$\rho_k = \rho_1 F \left( \frac{\rho_2}{\rho_1}, \frac{\rho_3}{\rho_1}, \dots, \frac{\rho_{n-1}}{\rho_1}, \frac{h_2}{h_1}, \frac{h_3}{h_1}, \dots, \frac{h_{n-1}}{h_1}, \frac{r}{h_1} \right), \quad (\text{III.388})$$

где  $\rho_i$  и  $h_i$  — удельное сопротивление и мощность  $i$ -го слоя соответственно.

2. Представляя кривые кажущегося удельного сопротивления в билогарифмическом масштабе, имеем

$$\log \rho_k = \log \rho_1 + \log F \left( A, \log \frac{r}{h_1} \right), \quad (\text{III.389})$$

где  $A$  — набор параметров среды  $\rho_i/\rho_1$ ,  $h_i/h_1$ .

Уравнение (III.389) показывает, что изменение удельного сопротивления первого слоя  $\rho_1$  так же, как и мощности  $h_1$ , не меняет формы кривой  $\rho_k$ , но приводит только к параллельному сдвигу. Этот факт существенно упрощает интерпретацию.

3. В теории обратных задач геофизики было доказано, что обратная задача для геометрического зондирования, выполненного на поверхности горизонтально-слоистой среды, имеет единственное решение. Другими словами, только один набор геоэлектрических параметров определяет данную кривую кажущегося удельного сопротивления или соответствующее поле. Это очень важный результат, по существу представляющий собой теоретическое основание интерпретации геометрических зондирований. Однако единственность обратной задачи выполняется при условии, что поле

измеряется абсолютно точно, что, конечно, не соответствует реальным условиям. В самом деле, всегда присутствуют различные факторы, вносящие ошибку в значения кажущегося сопротивления.

Этими факторами являются:

а) ошибки измерения напряжения между измерительными электродами;

б) ошибки в определении расстояний между электродами;

в) присутствие геологического шума, который включает горизонтальные изменения удельного сопротивления, эффект рельефа местности и т. д.; другими словами, все, что приводит к отклонению реальной модели среды от горизонтально-слоистой модели.

Таким образом, всегда существует разница между измеренной кривой кажущегося сопротивления и кривой, вычисленной для горизонтально-слоистой среды. Соответственно, можно сказать, что интерпретация геометрических зондирований является некорректно поставленной задачей.

Это означает, что при сравнении измеренных и теоретических кривых возможно определить лишь некоторые интервалы, в пределах которых лежат искомые параметры, вместо нахождения их точных значений. Как правило, ширина этих интервалов различна для различных параметров. Это можно объяснить следующим образом. Электрическое поле, измеренное на поверхности Земли, вызвано всеми зарядами, распределенными на поверхностях раздела, и, очевидно, что относительный вклад зарядов на верхней и нижней границах некоторого слоя сильно зависит от его удельного сопротивления, мощности и глубины залегания. По этой причине естественно ожидать, что некоторые параметры среды могут быть определены лишь с большой ошибкой, в то время как другие определяются с точностью, достаточной для практических приложений. Можно сказать, что интерпретация данных зондирования состоит в определении параметров, которые характеризуют с относительно высокой точностью некоторые черты горизонтально-слоистой среды. В частности, такими параметрами могут быть продольные проводимости некоторых слоев  $S_i = h_i / \rho_i$  либо поперечные сопротивления  $T_i = \rho_i h_i$  других слоев.

Это рассуждение наглядно показывает некоторую схожесть между интерпретацией гравитационных данных и электрических зондирований.

### **Пример 7. Электрическое поле на поверхности среды с вертикальным контактом**

Рассмотрим поведение электрического поля в присутствии вертикального контакта, показанного на рис. III.18, г. Введем декартову систему координат  $x, y, z$  с началом в центре токового электрода  $A$  и осью  $x$ , направленной перпендикулярно контакту между средами с электропроводностями  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Предположим,

что электрод  $A$  расположен в среде с электропроводностью  $\gamma_1$  на расстоянии  $d$  от контакта.

Ясно, что первичное электрическое поле, вызванное зарядом электрода, приводит к появлению зарядов на контакте. В свою очередь, эти заряды создают электрическое поле, которое вызывает заряды на поверхности Земли. Конечно, распределение зарядов на обеих поверхностях устанавливается в результате их взаимодействия. Потенциал в каждой точке среды есть сумма потенциалов  $U_0$ , вызванного зарядом электрода, и  $U_s$ , вызванного поверхностными зарядами:

$$U = U_0 + U_s.$$

По аналогии с предыдущим примером удобно записать потенциал в проводящей среде в виде

$$U = \begin{cases} U_1 = U_0 + U_s, & x \leq d, \\ U_2, & x \geq d. \end{cases} \quad (\text{III.390})$$

Отметим, что потенциал  $U_2$  — это потенциал суммарного поля, вызванного всеми зарядами.

Теперь в соответствии с уравнением (III.254) сформулируем краевую задачу для точек проводящей среды следующим образом.

1. В регулярных точках потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\nabla^2 U = 0.$$

2. На поверхности Земли ( $z = 0$ )

$$\partial U / \partial z = 0,$$

так как нормальная компонента плотности тока пропадает.

3. Потенциал и нормальная компонента плотности тока в окрестности вертикального контакта являются непрерывными функциями:

$$U_1 = U_2, \quad \gamma_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} = \gamma_2 \frac{\partial U_2}{\partial x}.$$

4. Вблизи токового электрода потенциал стремится к потенциалу первичного поля:

$$U \rightarrow U_0 = \rho_1 I / 4\pi R \quad \text{при} \quad R \rightarrow 0. \quad (\text{III.391})$$

В частности, для токового электрода, расположенного на поверхности Земли,

$$U \rightarrow U_0 = \rho_1 I / 2\pi R.$$

5. С увеличением расстояния от токового электрода потенциал уменьшается:

$$U \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad R \rightarrow \infty,$$

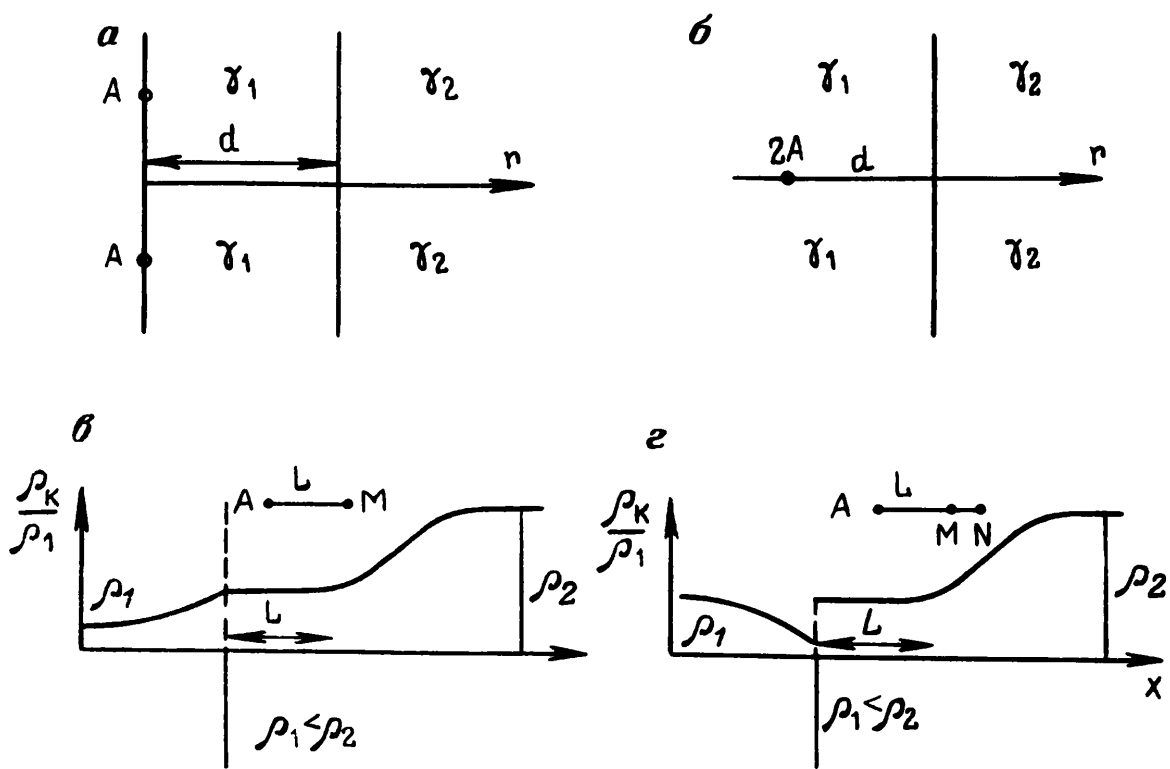


Рис. III.19. Эквивалентные модели: *a* — с двумя токовыми электродами, *б* — когда токовый электрод находится на поверхности Земли; кривые кажущегося сопротивления для расстановок: *в* — двухэлектродной, *г* — трехэлектродной

где

$$R = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}.$$

Все эти условия единственным образом определяют потенциал в проводящей среде, поэтому искать решение над поверхностью Земли нет необходимости.

В отличие от примера б, применение метода разделения переменных для решения этой краевой задачи не позволяет получить простых выражений для потенциала. Это связано с тем, что вертикальный контакт не совпадает ни с одной координатной поверхностью декартовой системы. Однако существует элегантный подход, позволяющий свести эту задачу к другой задаче, решение которой значительно проще.

С этой целью мысленно перенесем в верхнее полупространство зеркальное отражение структуры проводящей среды относительно земной поверхности. После такого преобразования получим новую модель проводящей среды только с одной плоской поверхностью раздела  $x = d$  и двумя токовыми электродами, имеющими равные заряды  $\rho_1 I \epsilon_0 / 4\pi$ , и симметрично расположенными по отношению к плоскости земной поверхности (рис. III. 19, *a*). Далее предположим, что оба электрода приближаются друг к другу. Тогда в пределе разнос между ними стремится к нулю и мы получаем один токовый электрод с зарядом  $e_A \rho_1 I \epsilon_0 / 2\pi$ , расположенный на плоскости  $z = 0$  (рис. III.19, *б*).

Теперь покажем, что потенциал в нижней половине ( $z > 0$ ) полученной модели совпадает с потенциалом исходной модели. Для доказательства этого факта сформулируем краевую задачу для потенциала новой модели при условии, что  $z > 0$ .

1. В регулярных точках потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2 U = 0.$$

2. На плоскости  $z = 0$ , благодаря симметрии относительно оси  $z$ , нормальная компонента электрического поля, вызванного поверхностными зарядами, равна нулю:

$$\partial U / \partial z = 0.$$

3. На поверхности раздела  $x = d$

$$U_1 = U_2, \quad \gamma_1 \frac{\partial U}{\partial x} = \gamma_2 \frac{\partial U_2}{\partial x},$$

где  $U_1$  и  $U_2$  — потенциалы в среде с электропроводностями  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  соответственно.

4. При приближении к токовому электроду

$$U \rightarrow U_0 = \rho_1 I / 2\pi R \quad \text{при} \quad R \rightarrow 0. \quad (\text{III.392})$$

5. На бесконечности потенциал стремится к нулю:

$$U \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad R \rightarrow \infty.$$

Сравнение уравнений (III.391) и (III.392) показывает, что они полностью совпадают. В соответствии с теоремой единственности потенциалы обеих моделей также совпадают. По этой причине достаточно решить краевую задачу для новой модели (рис. III.19, б), которая намного проще. В самом деле, учитывая осевую симметрию модели и потенциала относительно оси  $x$ , следует использовать цилиндрическую систему координат. Тогда, используя результаты, полученные в примере б, выражения для потенциала можно записать в следующем виде:

$$U_1 = \frac{\rho_1 I}{2\pi R} + \int_0^{\infty} A_m e^{mx} J_0(mr) dm, \quad x \leq d, \quad (\text{III.393})$$

$$U_2 = \int_0^{\infty} B_m e^{-mx} J_0(mr) dm, \quad x \geq d,$$

где  $A_m$  и  $B_m$  — неизвестные коэффициенты;  $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ .

Как было показано ранее, обе функции  $U_1$  и  $U_2$  удовлетворяют уравнению Лапласа и краевым условиям. Для обеспечения непрерывности потенциала и нормальной компоненты плотности тока на поверхности раздела  $x = d$  воспользуемся уравнением (III.374) и получим следующую систему для определения  $A_m$  и  $B_m$ :

$$C e^{-md} + A_m e^{md} = B_m e^{-md}, \quad (\text{III.394})$$

$$\gamma_1 \{-C e^{-md} + A_m e^{md}\} = -\gamma_2 B_m e^{-md},$$

где  $C = \rho_1 I / 2\pi$ .

Решая эту систему, имеем

$$A_m = K_{12} C e^{-2md}, \quad (\text{III.395})$$

$$B_m = \frac{2\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} C.$$

Подставляя выражения (III.395) в уравнения (III.393), получаем

$$U_1 = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \left[ \frac{1}{R} + K_{12} \int_0^{\infty} e^{-m(2d-x)} J_0(mr) dm \right] \quad x \leq d \quad (\text{III.396})$$

и

$$U_2 = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \frac{2\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \int_0^{\infty} e^{-mx} J_0(mr) dm \quad x \geq d.$$

Затем, учитывая уравнение (III.374), приходим к чрезвычайно простому выражению для потенциала:

$$U_1 = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \left( \frac{1}{R} + \frac{K_{12}}{R_1} \right) \quad \text{при } x \leq d, \quad (\text{III.397})$$

$$U_2 = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \frac{(1 + K_{12})}{R} \quad \text{при } x \geq d,$$

поскольку

$$1 + K_{12} = \frac{2\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$$

и

$$R_1 = [(2d - x)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}.$$

Таким образом, мы решили краевую задачу и нашли потенциал в присутствии вертикального контакта. Следует снова подчеркнуть, что уравнения (III.397) верно описывают поле только под поверхностью Земли.

Как следует из этих уравнений, поле в среде с электропроводностью  $\gamma_1$  эквивалентно полю, вызванному двумя элементарными зарядами: одним  $e_A$ , расположенным в начале координат 0, и другим  $K_{12} e_A$ , являющимся зеркальным отражением первого относительно контакта. В то же время поле в среде с электропроводностью  $\gamma_2$  совпадает с полем элементарного заряда  $(1 + K_{12}) e_A$ , расположенного на поверхности токового электрода. Другими словами,

присутствие вертикального контакта не меняет геометрии поля в данной части среды. Таким образом, мы показали, что поле поверхностных зарядов, распределенных на контакте, эквивалентно полю элементарного заряда, равного полному поверхностному заряду  $K_{12} e_A$ .

Для иллюстрации рассмотрим поведение потенциала и поля на поверхности Земли вдоль оси  $x$ . В соответствии с уравнением (III.397) имеем

$$U_1 = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \left( \frac{1}{L} + \frac{K_{12}}{2d - L} \right), \quad L \leq d; \quad (\text{III.398})$$

$$U_2 = \frac{\rho_1 I (1 + K_{12})}{2\pi L^2}, \quad L \geq d,$$

где  $L$  — разнос между токовым и измерительным электродами. Соответственно, для электрического поля

$$E_{1x} = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \left[ \frac{1}{L^2} - \frac{K_{12}}{(2d - L)^2} \right], \quad L \leq d; \quad (\text{III.399})$$

$$E_{2x} = \frac{\rho_1 I (1 + K_{12})}{2\pi L^2}, \quad L \geq d,$$

где  $L$  — расстояние от токового электрода до средней точки между измерительными электродами  $M$  и  $N$ , расположенными очень близко друг к другу.

Предположим, что  $\rho_2 > \rho_1$ , и рассмотрим поведение потенциала в точке  $M$ , когда двухэлектродная расстановка  $AM$  с постоянным разном  $L$  движется вдоль оси  $x$ . Если расстановка расположена в среде с удельным сопротивлением  $\rho_1$  вдали от контакта, то влиянием поверхностных зарядов можно пренебречь:

$$U \rightarrow U_0(\rho_1) = \frac{\rho_1 I}{2\pi L}, \quad d \gg L.$$

С приближением к контакту вклад положительных зарядов становится больше. В частности, когда измерительный электрод расположен на контакте, имеем

$$U = \frac{\rho_1 I (1 + K_{12})}{2\pi L}, \quad d = L.$$

Как следует из второго уравнения в (III.398), потенциал остается постоянным, если токовый и измерительный электроды расположены по разные стороны контакта, и равным

$$U = \frac{\rho_1 I (1 + K_{12})}{2\pi L},$$

а ширина этой зоны совпадает с длиной расстановки  $L$ . Наконец, когда вся расстановка  $AM$  расположена в среде с удельным со-

противлением  $\rho_2$ , выражение для потенциала следует прямо из уравнений (III.398) после замены  $\rho_1, K_{12}, 2d - L$  на  $\rho_2, K_{21}, 2d + L$  соответственно, поэтому имеем

$$U = \frac{\rho_2 I}{2\pi} \left( \frac{1}{L} + \frac{K_{21}}{2d + L} \right) = \frac{\rho_2 I}{2\pi} \left( \frac{1}{L} - \frac{K_{12}}{2d + L} \right).$$

Поскольку на контакте появляются отрицательные заряды, то с увеличением расстояния от контакта потенциал постепенно возрастает и приближается к потенциалу однородной среды с удельным сопротивлением  $\rho_2$ :

$$U \rightarrow U_0 = \rho_2 I / 2\pi L, \quad d \gg L.$$

Кривая кажущегося сопротивления для двухэлектродной расстановки:

$$\rho_k / \rho_1 = U / U_0(\rho_1)$$

показана на рис. III.19, в.

Теперь изучим поведение компоненты электрического поля  $E_{1x}$  вдоль прямой  $x$ , когда  $\rho_2 > \rho_1$ . Вдали от контакта, как и в случае потенциала, ее влияние невелико и поэтому

$$E_{1x} \rightarrow E_{0x}(\rho_1) = \frac{\rho_1 I}{2\pi L} \quad \text{при} \quad d \gg L.$$

Так как заряды, расположенные на токовом электроде и на поверхности контакта, положительные, а электрическое поле измеряется в интервале между ними, полное поле  $E_{1x}$  с приближением к контакту уменьшается. В частности, когда точка  $O$  расположена в окрестности контакта,

$$E_{1x} = \frac{\rho_1 I}{2\pi L^2} (1 - K_{12}) \quad \text{при} \quad d \rightarrow L.$$

Как только точка  $O$ , в которой производятся измерения, пересекает контакт, электрическое поле возрастает и становится равным

$$E_{2x} = \frac{\rho_1 I}{2\pi L^2} (1 + K_{12}), \quad d \rightarrow L.$$

Это возрастание вполне естественное, так как электрические поля, вызванные зарядами на токовом электроде и на контакте, имеют одно и то же направление. Таким образом, на контакте происходит разрыв поля  $E_x$  и мы имеем

$$\frac{E_{2x}}{E_{1x}} = \frac{1 + K_{12}}{1 - K_{12}} = \frac{\rho_2}{\rho_1}.$$

Конечно, это уравнение можно получить из непрерывности нормальной компоненты плотности тока. Оно показывает, что электрические методы могут оказаться полезными при определении горизонтальных изменений удельного сопротивления вблизи земной поверхности.



В соответствии с уравнением (III.399) электрическое поле не меняется, когда токовый электрод и точка измерения расположены на разных сторонах контакта, и равно

$$E_x = \frac{\rho_1 I}{2\pi L^2} (1 + K_{12}).$$

Такое поведение электрического поля можно объяснить следующим образом. Когда токовый электрод приближается к контакту, то поверхностный заряд и плотность зарядов вблизи оси  $x$  увеличиваются и, соответственно, электрическое поле также должно возрасти. Однако одновременно возрастает расстояние до точки наблюдения  $O$ , что приводит к уменьшению поля. Как показывают уравнения (III.399), два этих эффекта компенсируют друг друга. Ширина зоны, где электрическое поле постоянно, как и в случае двухэлектродной расстановки, равна  $L$ .

Как только токовый электрод пересекает контакт, появляются отрицательные поверхностные заряды и направление вторичного поля становится противоположным направлению первичного поля. Когда оба электрода расположены в среде с удельным сопротивлением  $\rho_2$ , выражение для электрического поля имеет вид

$$E_x = \frac{\rho_2 I}{2\pi} \left[ \frac{1}{L^2} + \frac{K_{21}}{(2d + L)^2} \right] = \frac{\rho_2 I}{2\pi} \left[ \frac{1}{L^2} - \frac{K_{12}}{(2d + L)^2} \right].$$

С увеличением расстояния от контакта поле постепенно возрастает и приближается к первичному полю  $E_{0x}(\rho_2)$ :

$$E_x \rightarrow E_{0x}(\rho_2) = \rho_2 I / 2\pi L^2.$$

Кривая кажущегося удельного сопротивления

$$\rho_k / \rho_1 = E / E_{0x}(\rho_1)$$

представлена на рис. III.19, *г*.

### Пример 8. Собственный потенциал на оси скважины в однородной среде

До сих пор мы рассматривали примеры поведения поля, когда ток подавался в среду с помощью источников искусственного происхождения. Однако встречаются явления, которые приводят к появлению естественного постоянного поля в Земле. Например, сторонние электрические силы появляются в областях, где происходит фильтрация воды через проницаемые породы, такие как песок и песчаник. В этом случае стороннюю силу электрокинетического происхождения можно представить как

$$E_f = -K_f \text{grad } p,$$

где  $p$  — давление, а  $K_f$  — коэффициент, зависящий от свойств воды и пород и обычно положительный. Сторонние силы появляются также при диффузии раствора через породы, когда анионы

и катионы двигаются с разными скоростями. Тогда такую силу можно записать как

$$E_d = K_d \text{ grad } \log c ,$$

где  $c$  — концентрация раствора, заполняющего поры породы, а  $K_d$  — множитель, зависящий от раствора и структуры породы и являющийся положительным, если средняя скорость анионов больше средней скорости катионов. Другим примером источника тока диффузивной природы является контактная электродвижущая сила

$$\mathcal{E}_0 = K_c (\log C_1 - \log C_2) ,$$

которая появляется на поверхностях раздела растворов с различными концентрациями  $C_1$  и  $C_2$ .

Методы собственного потенциала, основанные на измерении естественных электрических полей, применяются в различных инженерных и гидрогеологических задачах геофизики для поиска месторождений полезных ископаемых и для обнаружения зон повышенной проницаемости в скважинах.

Изучим поведение спонтанно возникшего потенциала на оси скважины, предполагая, что проводящая среда однородна. Это означает, что влиянием зарядов на поверхности скважины, а также в верхней и нижней частях слоя можно пренебречь. В то же время благодаря электрохимическим процессам на этих поверхностях раздела появляются двойные слои, порождающие электрическое поле. Система двойных слоев состоит из двух бесконечных плоских слоев  $S_{21}$  и  $S_{23}$ , расположенных сверху и снизу слоя, и цилиндрических двойных слоев  $S_{01}$ ,  $S_{02}$  и  $S_{03}$ , расположенных на поверхности скважины под слоем, в пределах слоя и над слоем соответственно (рис. III.20, а).

Потенциал в точке наблюдения  $M$  равен сумме потенциалов, вызванных каждым двойным слоем:

$$U = U_{21} + U_{23} + U_{01} + U_{02} + U_{03} . \quad (\text{III.400})$$

В соответствии с уравнениями (III.69) и (III.221) потенциал однородного двойного слоя равен:

$$U = \frac{\omega}{4\pi} \mathcal{E} , \quad (\text{III.401})$$

где  $\omega$  — угол видимости поверхности двойного слоя из точки наблюдения  $M$ , а  $\mathcal{E}$  — напряжение между сторонами двойного слоя.

Для описания поведения потенциала введем цилиндрическую систему координат  $r, \varphi, z$  с началом  $O$ , в котором горизонтальная плоскость середины слоя пересекается осью скважины  $z$ . Будем также использовать следующие обозначения:  $h, d$  и  $z$  — толщина слоя, диаметр скважины и расстояние от точки наблюдения до начала координат соответственно;  $\mathcal{E}_{21}, \mathcal{E}_{23}, \mathcal{E}_{01}, \mathcal{E}_{02}, \mathcal{E}_{03}$  — электродвижущие силы соответствующих двойных слоев или разности потенциалов между поверхностями двойных слоев:

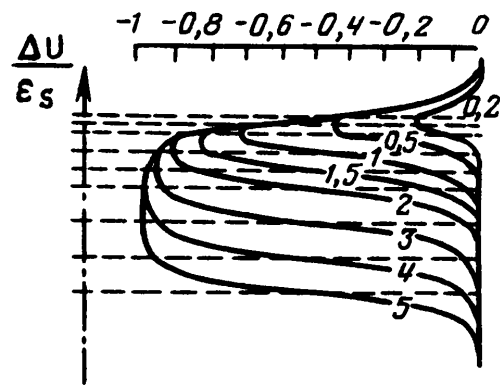
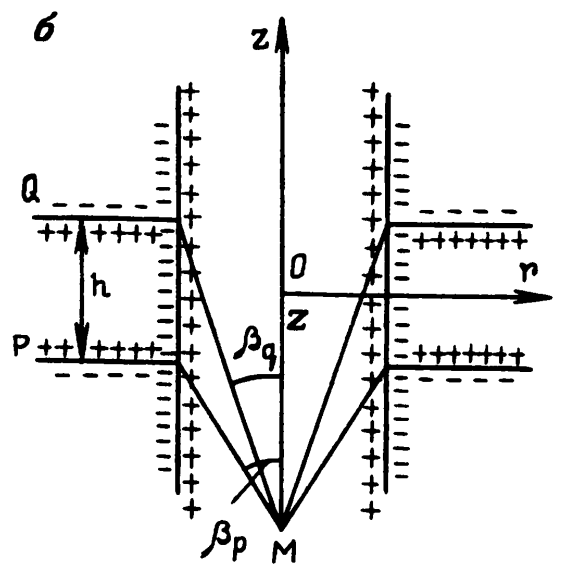
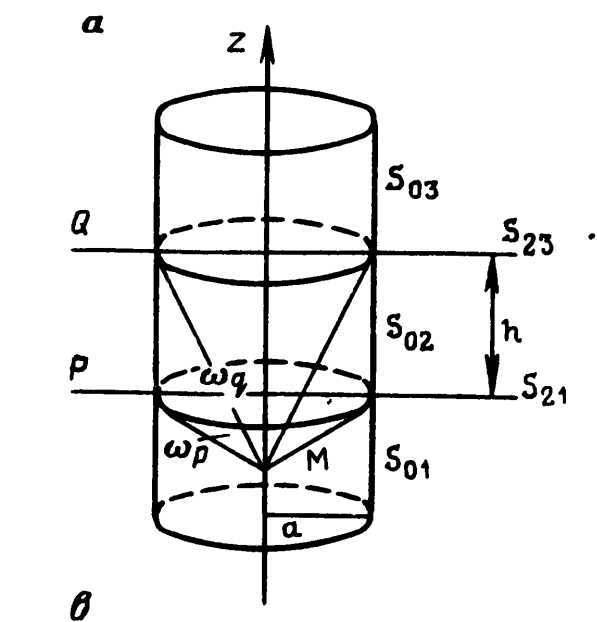


Рис. III.20. Модель скважины, пересекающей слой (а); распределение двойных слоев (б); распределение потенциалов на оси скважины (з); шифр кривых —  $h$

$$\mathcal{E}_{ik} = U(i) - U(k).$$

Как было показано в главе I, телесный угол видимости бесконечной плоскости и замкнутой поверхности равен  $\pm 2\pi$ , либо  $4\pi$ , либо  $0$  в зависимости от положения точки наблюдения относительно поверхности.

Тогда телесные углы для каждого двойного слоя можно представить в виде

$$\begin{aligned} \omega_{21} &= -2\pi + \omega_p, & \omega_{23} &= 2\pi - \omega_q, \\ \omega_{01} &= 4\pi - \omega_p, & \omega_{02} &= \omega_p - \omega_q, \\ \omega_{03} &= \omega_q, \end{aligned} \quad (\text{III.402})$$

где  $\omega_p$  и  $\omega_q$  — телесные углы видимости поперечных сечений скважины с координатами  $z = \mp h/2$  соответственно. Подставляя уравнения (III.401), (III.402) в уравнение (III.400), получаем

$$\begin{aligned} U &= -\frac{2\pi - \omega_p}{4\pi} \mathcal{E}_{21} + \frac{2\pi - \omega_q}{4\pi} \mathcal{E}_{23} + \frac{4\pi - \omega_p}{4\pi} \mathcal{E}_{01} + \\ &+ \frac{\omega_p - \omega_q}{4\pi} \mathcal{E}_{02} + \frac{\omega_q}{4\pi} \mathcal{E}_{03} = \frac{1}{4\pi} [\omega_p (\mathcal{E}_{21} - \mathcal{E}_{01} + \mathcal{E}_{02}) - \\ &- \omega_q (\mathcal{E}_{23} - \mathcal{E}_{03} + \mathcal{E}_{02}) + \frac{\mathcal{E}_{23} - \mathcal{E}_{21}}{2} + \mathcal{E}_{01}]. \end{aligned} \quad (\text{III.403})$$

В соответствии с уравнением (I.48), имеем

$$\omega_p = 2\pi (1 - \cos \beta_p) = 2\pi \left[ 1 - \frac{z - \frac{h}{2}}{\sqrt{\left(z - \frac{h}{2}\right)^2 + \frac{d^2}{4}}} \right],$$

$$\omega_q = 2\pi (1 - \cos \beta_q) = 2\pi \left[ 1 - \frac{z + \frac{h}{2}}{\sqrt{\left(z + \frac{h}{2}\right)^2 + \frac{d^2}{4}}} \right],$$

где  $\beta_p$  и  $\beta_q$  — углы, показанные на рис. III.20, б.

Соответственно, вместо уравнения (III.403) имеем

$$U = \frac{2z + h}{\sqrt{(2z + h)^2 + d^2}} \frac{\mathcal{E}_{23} - \mathcal{E}_{03} + \mathcal{E}_{02}}{2} - \frac{2z - h}{\sqrt{(2z - h)^2 + d^2}} \frac{\mathcal{E}_{21} - \mathcal{E}_{01} + \mathcal{E}_{02}}{2} + \frac{\mathcal{E}_{03} + \mathcal{E}_{01}}{2}. \quad (\text{III.404})$$

Если слой окружен однородной средой и минерализация воды вблизи кровли и подошвы слоя практически одинакова, то  $\mathcal{E}_{21} = \mathcal{E}_{23}$ ,  $\mathcal{E}_{01} = \mathcal{E}_{03}$  и соответственно

$$U = \left[ \frac{2z + h}{\sqrt{(2z + h)^2 + d^2}} - \frac{2z - h}{\sqrt{(2z - h)^2 + d^2}} \right] \times \frac{(\mathcal{E}_{21} - \mathcal{E}_{01} + \mathcal{E}_{02})}{2} + \mathcal{E}_{01}$$

или

$$U = \left[ \frac{2z^* + h^*}{\sqrt{(2z^* + h^*)^2 + 1}} - \frac{2z^* - h^*}{\sqrt{(2z^* - h^*)^2 + 1}} \right] \times \frac{(\mathcal{E}_{21} - \mathcal{E}_{01} + \mathcal{E}_{02})}{2} + \mathcal{E}_{01},$$

где

$$z^* = z/d, \quad h^* = h/d.$$

Как следует из этого уравнения, с увеличением расстояния от слоя потенциал  $U$  стремится к постоянной, равной  $\mathcal{E}_{01}$ :

$$U(\infty) \rightarrow \mathcal{E}_{01}.$$

Поскольку потенциал в точке наблюдения  $M$  измеряется относительно потенциала на бесконечности,

$$\Delta U = U(z^*, h^*) - U(\infty) = -\frac{1}{2} F(z^*, h^*) \mathcal{E}_s, \quad (\text{III.406})$$

где функция

$$F(z^*, h^*) = \frac{2z^* + h^*}{\sqrt{(2z^* + h^*)^2 + 1}} - \frac{2z^* - h^*}{\sqrt{(2z^* - h^*)^2 + 1}} \quad (\text{III.407})$$

характеризует изменение  $U$  вдоль оси скважины, а величина

$$\mathcal{E}_s = \mathcal{E}_{01} - \mathcal{E}_{02} - \mathcal{E}_{21} \quad (\text{III.408})$$

есть алгебраическая сумма электродвижущих сил на поверхностях раздела слоя с окружающей средой и скважиной.

Как видно из рис. III.20, в, кривые, иллюстрирующие зависимость функции  $\Delta U / \mathcal{E}_s$  от координаты  $z^*$ , симметричны относительно начала координат. Индекс кривых — величина  $h^*$ .

В заключение подчеркнем, что несмотря на то, что данное решение является приближенным, так как не учитывает изменений удельного сопротивления, его анализ очень полезен для понимания поведения естественного потенциала на оси скважины.

- IV.1. Взаимодействие токов, закон Био — Савара, магнитное поле
- IV.2. Векторный потенциал магнитного поля
- IV.3. Система уравнений магнитного поля  $\mathbf{B}$ , обусловленного токами проводимости
- IV.4. Определение магнитного поля  $\mathbf{B}$ , обусловленного токами проводимости
- IV.5. Поведение магнитного поля, вызванного токами проводимости
- IV.6. Намагничивание и молекулярные токи: напряженность поля  $\mathbf{H}$  и ее связь с магнитным полем  $\mathbf{B}$
- IV.7. Системы уравнений для полей  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$
- IV.8. Поведение магнитного поля, вызванного токами в Земле
  - Внешняя и внутренняя компоненты нормального поля
  - Поведение вторичного магнитного поля, обусловленного индуцированной намагниченностью
  - Вторичное магнитное поле при слабом взаимодействии молекулярных токов
  - Магнитное поле, обусловленное остаточной намагниченностью

В этой главе мы обсудим теорию магнитного поля, не зависящего от времени, и ее приложения в геофизике.

Как известно, магнитные методы используют для решения различных задач, таких как:

- 1) картирование границы фундамент — осадки в разведке нефти;
- 2) обнаружение различных видов рудных тел в геологоразведке;
- 3) обнаружение металлических объектов в инженерной геофизике;
- 4) картирование разломов фундамента и зон трещиноватости;
- 5) определение зон с различной минерализацией в каротаже и параметров при контроле обсадной колонны;
- 6) изучение магнитного поля Земли.

Часто поведение переменного и постоянного магнитных полей практически совпадает. Следовательно, некоторые результаты, приведенные в этой части, справедливы и для переменных полей.

### IV.1. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТОКОВ, ЗАКОН БИО — САВАРА, МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Ранее мы вводили гравитационное и электрические поля, рассматривая взаимодействия масс и зарядов соответственно. Следуя этому примеру, мы введем магнитное поле, изучая взаимодействие постоянных токов. Действуя так же, как при изучении элект-

рического поля, мы сначала разовьем теорию магнитного поля в вакууме, а затем учтем эффекты среды (магнитных материалов). Многочисленные эксперименты, выполненные в последнем столетии, показали, что токи взаимодействуют друг с другом, так как механические силы действуют на каждый элемент кольца, в котором течет ток. Эти силы зависят от величины тока, направления движения зарядов, формы и размеров кольца с током, так же как и от расстояния и взаимной ориентации колец с током относительно друг друга. Список факторов показывает, что математическое описание этого взаимодействия должно быть более сложной задачей, чем это было для гравитационного и электрического полей. Несмотря на это, Амперу удалось сформулировать выражение для описания взаимодействия токов в относительно простой форме:

$$dF(p) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \frac{dl_1(p) \times [dl_2(q) \times L_{qp}]}{L_{qp}^3}, \quad (IV.1)$$

где  $I_1$  и  $I_2$  — токи в линейных элементах  $dl_1$  и  $dl_2$  соответственно, и направление линейного элемента совпадает с направлением плотности тока;  $L_{qp}$  — расстояние между этими элементами; вектор  $L_{qp}$  направлен от точки  $q$  к точке  $p$ , расположенной в центре каждого из элементов тока;  $\mu_0$  — константа, равная

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м};$$

$\mu_0$  обычно называют магнитной проницаемостью вакуума.

Расстояние между элементами тока должно быть много больше их длины, т. е. должно выполняться

$$L_{qp} \gg dl_1(p), \quad L_{qp} \gg dl_2(q).$$

На рис. IV.1 приведены три примера, поясняющие уравнения (IV.1).

А. Предположим, что элементы  $dl_1$  и  $dl_2$  параллельны и имеют одинаковые направления. Тогда, как следует из определения векторного произведения, сила  $dF(p)$  направлена к элементу  $dl_2$ , и два элемента тока притягиваются друг к другу (рис. IV.1, а).

Б. Если два элемента тока имеют противоположные направления, то сила  $dF(p)$  старается увеличить расстояние между элементами и, следовательно, они отталкиваются один от другого (рис. IV.1, б).

В. Если элементы  $dl_1$  и  $dl_2$  взаимно перпендикулярны, как показано на рис. IV.1, в, то, в соответствии с уравнением (IV.1), сила, действующая на элемент,

$$dF(p) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 dl_1 dl_2 \frac{1}{L_{qp}^2};$$

в то же время сила  $dF(q)$  в точке  $q$  равна нулю. Другими словами, третий закон Ньютона перестает действовать. Этот парадокс воз-

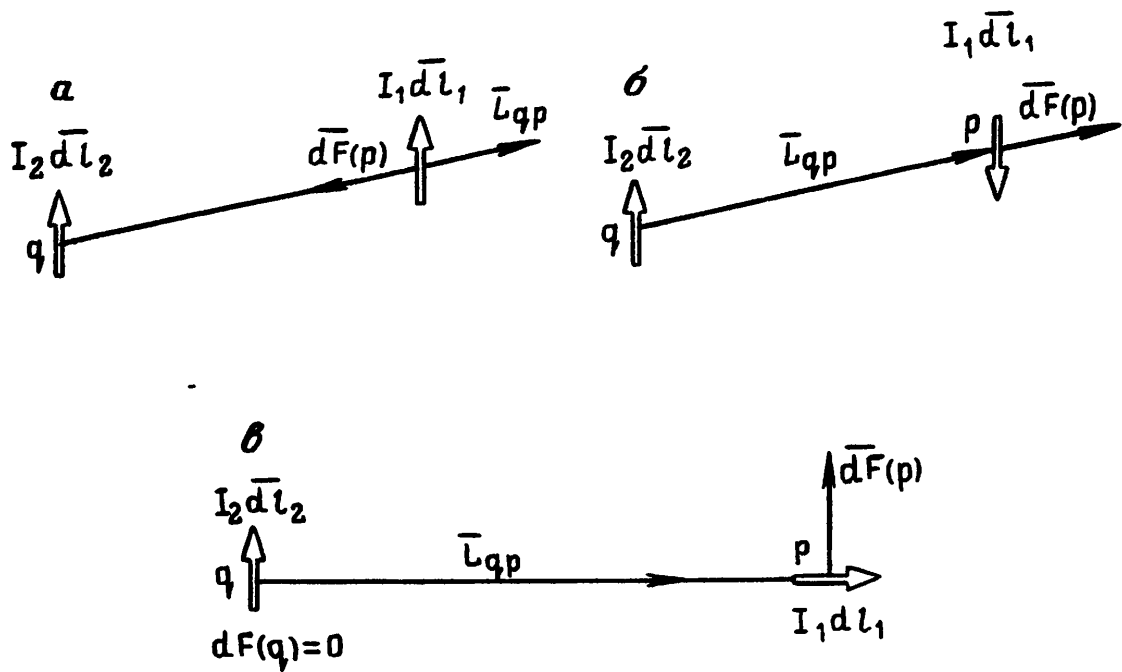


Рис. IV.1. Взаимодействие токов: *а* — текущих в одном направлении, *б* — параллельных, текущих в противоположных направлениях, *в* — взаимно перпендикулярных элементов тока

никает из-за того, что уравнение (IV.1) описывает взаимодействие между элементами токов, вместо того, чтобы рассматривать замкнутые токовые кольца.

Применяя принцип суперпозиции, определим силу взаимодействия между двумя произвольными токами:

$$\mathbf{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \int_{\mathcal{L}_1} \int_{\mathcal{L}_2} \frac{d\mathbf{l}_1(p) \times [d\mathbf{l}_2(q) \times L_{qp}]}{L_{qp}^3}, \quad (\text{IV.2})$$

где  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$  — токовые линии, вдоль которых производится интегрирование;  $p \neq q$ .

Так как эти силы действуют на различные точки контура, существуют различные виды движения. Аналогично движутся массы и заряды под действием гравитационного и электрического полей. В системе единиц СИ сила  $\mathbf{F}$  измеряется в ньютонах.

Поскольку токи взаимодействуют между собой, то по аналогии с гравитационным и электрическим полями естественно предполагать, что токи создают поле, и сила  $\mathbf{F}$ , обусловленная существованием этого поля, действует на другие элементы тока. Естественно назвать это поле магнитным полем; оно может быть введено на основании закона Ампера как

$$d\mathbf{F}(p) = I_1 d\mathbf{l}(p) \times d\mathbf{B}(p). \quad (\text{IV.3})$$

Здесь

$$d\mathbf{B}(p) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\mathbf{l}(q) \times L_{qp}}{L_{qp}^3} \quad (\text{IV.4})$$



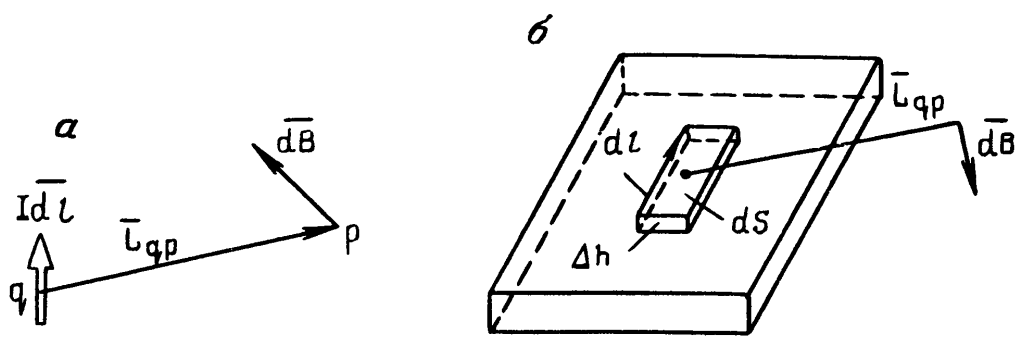


Рис. IV.2. Магнитное поле:  
 а — элемента тока; б — поверхностного тока

и  $dl_1(p) = dl(p)$ ,  $dl_2(q) = dl(q)$ ,  $I_2 = I$ .

Уравнение (IV.4) названо законом Био — Савара и описывает соотношение между элементарным линейным током и магнитным полем  $d\mathbf{B}$ . Вектор  $d\mathbf{B}$  часто называют вектором магнитной индукции и этот вектор характеризует магнитное поле так же, как векторы  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{E}$  описывают гравитационное и электрическое поля соответственно. Согласно уравнению (IV.4) магнитное поле  $d\mathbf{B}$  дается выражением

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I(q) \frac{dl}{L_{qp}^2} \sin(L_{qp}, dl), \quad (\text{IV.5})$$

где  $(L_{qp}, dl)$  — угол между векторами  $L_{qp}$  и  $dl$  и вектор  $d\mathbf{B}$  перпендикулярен к этим векторам, как это показано на рис. IV.2, а. Очевидно, что единичный вектор  $\mathbf{b}_0$ , характеризующий направление поля, определяется выражением

$$\mathbf{b}_0 = \frac{dl \times L_{qp}}{|dl \times L_{qp}|}.$$

В системе СИ магнитная индукция измеряется в теслах и между этой единицей и другими единицами, такими как гаусс или гамма, существует следующее соотношение:

$$1 \text{ тесла} = 10^9 \text{ нТл} = 10^4 \text{ гаусс} = 10^9 \text{ гамма}.$$

Обобщим уравнение (IV.4), учитывая, что наряду с линейными токами существуют токи, текущие по поверхности и в объеме.

Представим произведение  $I dl$  как

$$I dl = j dS dl, \quad j dS dl = j dV, \quad (\text{IV.6})$$

где  $dS$  — площадь поперечного сечения элемента тока;  $j$  — объемная плотность тока.

Если ток сконцентрирован в относительно тонком слое  $dh$ , толщина которого мала по сравнению с расстоянием до точки наблюдения, то удобно заменить этот слой токовой поверхностью. Как ясно из рис. IV.2, б, произведение  $I dl$  может быть преобразовано следующим образом:

$$I dl = j dV = j dh dS = i dS. \quad (\text{IV.7})$$

Здесь  $dS$  — элемент площади поверхности и  $i = j dh$  — поверхностная плотность тока.

На основании принципа суперпозиции для всех трех типов тока и используя уравнения (IV.4), (IV.6), (IV.7), мы получаем обобщенную форму закона Био — Савара:

$$\mathbf{B}(p) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \int_V \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{L}_{qp}}{L_{qp}^3} dV + \int_S \frac{\mathbf{i} \times \mathbf{L}_{qp}}{L_{qp}^3} dS + \sum_{i=1}^N I_i \oint \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{L}_{qp}}{L_{qp}^3} \right]. \quad (\text{IV.8})$$

Отметим здесь следующее.

1. Уравнение (IV.8) позволяет вычислять вектор магнитной индукции везде, включая области внутри объема, в котором текут токи.

2. В отличие от токов, распределенных в объеме, линейные и поверхностные токи являются только математическими моделями реального распределения токов, которые обычно вводятся для упрощения вычисления поля и изучения его поведения. В силу этих соображений уравнение

$$\mathbf{B}(p) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(q) \times \mathbf{L}_{qp}}{L_{qp}^3} dV \quad (\text{IV.9})$$

по существу заключает в себе все возможные случаи распределения тока.

3. В соответствии с законом Био — Савара ток является единственным источником магнитного поля и распределение этого источника характеризуется величиной и направлением вектора плотности тока  $\mathbf{j}$ . Как было показано в главе III, векторные линии  $\mathbf{j}$  всегда замкнуты. Это означает, что магнитное поле обусловлено источниками вихревого типа и, следовательно, мы имеем дело с вихревым полем, в отличие от гравитационного и электрического полей.

4. Все эксперименты, которые привели Ампера к установлению уравнения (IV.1), были проведены с замкнутыми петлями. В то же время уравнение (IV.1), так же, как и уравнение (IV.4), написано для элемента  $d\mathbf{l}$ , где ток не может существовать, если элемент не является частью замкнутой цепи. Другими словами, уравнения (IV.1) и (IV.4) не могут быть доказаны экспериментально, но взаимодействие между замкнутыми петлями с током происходит так, как если бы магнитное поле  $\mathbf{B}$ , обусловленное элементом тока  $I d\mathbf{l}$ , описывалось уравнением (IV.4).

Проиллюстрируем эту неопределенность следующим образом. Предположим, что магнитное поле  $d\mathbf{B}$ , обусловленное элементом  $I d\mathbf{l}$ , дается выражением

$$d\mathbf{B}(p) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\mathbf{l}(q) \times \mathbf{L}_{qp}}{L_{qp}^3} + I \text{grad } \varphi dl,$$

где  $\varphi$  — произвольная непрерывная функция. Тогда магнитное поле, вызванное током в замкнутой петле, имеет вид

$$\mathbf{B}(p) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{l}(q) \times \mathbf{L}_{qp}}{L_{qp}^3} + I \oint \text{grad } \varphi dl,$$

Используя результаты, описанные в главе I, получим

$$\mathbf{B}(p) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{l}(q) \times \mathbf{L}_{qp}}{L_{qp}^3}.$$

Важно подчеркнуть, что эта неоднозначность исчезает, когда рассматривается магнитное поле замкнутой петли с током или взаимодействие замкнутых петель с током. Другими словами, уравнения (IV.8), (IV.9) однозначно определяют магнитное поле  $\mathbf{B}$ .

5. В соответствии с (IV.8) магнитное поле, вызванное заданным распределением токов, зависит только от координат точки наблюдения и не зависит от присутствия других токов. Правая часть уравнения (IV.8) не содержит членов, характеризующих физические свойства среды и, следовательно, поле  $\mathbf{B}$  в точке  $p$ , генерируемое данным распределением токов, останется тем же, если вместо поля в вакууме рассматривать поле в неоднородной проводящей или поляризующейся среде. Например, если кольцо с током поместить внутрь магнитного материала, поле  $\mathbf{B}$ , вызванное этим током, будет таким же, как в вакууме.

Как известно, наличие такой среды приводит к изменению магнитного поля  $\mathbf{B}$ , но это означает, что внутри магнитного материала вместе с данным током существуют другие токи, которые также вызывают магнитные поля. Это заключение непосредственно вытекает из уравнения (IV.8), которое устанавливает, что любое изменение магнитного поля  $\mathbf{B}$  вызывается изменением распределения тока.

Позднее мы рассмотрим индуцирование токов в магнитной среде, но сейчас будем предполагать, что такие среды отсутствуют, и будем рассматривать только токи проводимости.

6. Как следует из уравнений (IV.3) и (IV.6), (IV.7), на линейные, так же, как и на поверхностные и объемные, токи, помещенные в магнитное поле, действует сила, которая определяется выражением

$$\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{F} = (\mathbf{i} \times \mathbf{B}) dS, \quad \mathbf{F} = (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) dV. \quad (\text{IV.10})$$

В то же время силы, обусловленные электрическим и гравитационным полями и действующие на элементарные заряды и массы, имеют вид

$$d\mathbf{F} = \lambda dl \mathbf{E}, \quad d\mathbf{F} = \sum \mathbf{E} dS, \quad d\mathbf{F} = \delta \mathbf{E} dV$$

и (IV.11)

$$d\mathbf{F} = \lambda dl \mathbf{q}, \quad d\mathbf{F} = \sum \mathbf{q} dS, \quad d\mathbf{F} = \delta \mathbf{q} dV.$$

Сравнивая уравнения (IV.10) и (IV.11), можно заключить, что

существует аналогия между векторами  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{q}$ . Действительно, эти три вектора определяют силы, действующие на соответствующие генераторы поля. В этом смысле вектор  $\mathbf{B}$ , описывающий магнитное поле, подобен вектору  $\mathbf{E}$ , который характеризует электрическое поле. Эти поля имеют и другие общие черты, а именно, они обусловлены источниками только одного типа, имеющими ясное физическое значение,— зарядами и токами.

В связи с этим опишем силы, действующие на электрон. Очевидно, что сила электрического поля

$$\mathbf{F}_E = e \mathbf{E}, \quad (\text{IV.12})$$

где  $e$  — заряд электрона.

Рассмотрим элементарный объем и предположим, что токи вызваны движением электронов. Тогда плотность тока  $\mathbf{j}$  можно представить выражением

$$\mathbf{j} = ne \mathbf{v},$$

где  $n$  и  $\mathbf{v}$  соответственно число электронов в этом объеме и их скорости.

Следовательно, сила магнитного поля  $\mathbf{B}$ , действующая на все электроны, имеет вид

$$\mathbf{F}_B = ne (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) dV$$

и, соответственно, на каждый электрон действует сила

$$\mathbf{F}_B = e \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (\text{IV.13})$$

где

$$e < 0.$$

Уравнения (IV.12), (IV.13) вновь демонстрируют подобие полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , определяющих силу, действующую на электрон со стороны электрического и магнитного полей. Заметим, что уравнение (IV.13) было установлено Лорентцем, и  $\mathbf{F}_B$  называется силой Лорентца. До сих пор мы обсуждали аналогию между векторами  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , но необходимо подчеркнуть и их различие. Действительно,  $\mathbf{E}$  является потенциальным полем, созданным зарядами, в то время как магнитное поле является вихревым полем, создаваемым постоянными токами. Следовательно, поведение этих полей существенно различается. Например, электрическое поле  $\mathbf{E}$  вынуждает электрон двигаться вдоль своей векторной линии, в то время как магнитное поле  $\mathbf{B}$  создает силу  $\mathbf{F}$ , перпендикулярную к этому полю.

7. В следующем томе мы покажем, что закон Био — Савара справедлив даже для определенного типа переменного электромагнитного поля. Это также справедливо для закона Кулона.

8. Несмотря на то, что вычисление магнитного поля на основе закона Био — Савара является не очень запутанной процедурой, разумно найти более простой путь определения поля. С этой

целью, по аналогии со скалярным потенциалом гравитационного и электрического полей, введем новую функцию. Кроме того, существует другая причина рассмотрения этой функции, связанная с тем, что закон Био — Савара позволяет определять магнитное поле  $\mathbf{B}$  при условии, что распределение токов задано. Тем не менее, мы будем изучать случаи, когда токи могут быть известными, только если магнитное поле уже определено. Мы обращались к подобной проблеме «замкнутого кольца», когда исследовали электрическое поле в присутствии диэлектриков и проводников. Тогда мы вывели систему уравнений поля и сформулировали краевые задачи, позволившие нам определить электрическое поле. Такой же подход будет развит для поля  $\mathbf{B}$  и окажется, что эта задача существенно упрощается, если сначала мы введем новую функцию, называемую векторным потенциалом магнитного поля.

#### IV.2. ВЕКТОРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Мы будем исходить из закона Био — Савара

$$\mathbf{B}(p) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(q) \times \mathbf{L}_{qp}}{L_{qp}^3} dV. \quad (\text{IV.14})$$

Как было показано в главе I,

$$\frac{\mathbf{L}_{qp}}{L_{qp}^3} = \nabla^q \frac{1}{L_{qp}} = - \nabla^p \frac{1}{L_{qp}}. \quad (\text{IV.15})$$

Подставляя уравнение (IV.15) в (IV.14), получим

$$\mathbf{B}(p) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{j}(q) \times \nabla^q \frac{1}{L_{qp}} dV = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left( \nabla^q \frac{1}{L_{qp}} \times \mathbf{j} \right) dV, \quad (\text{IV.16})$$

так как относительное расположение векторов, образующих векторное произведение, изменено.

Мы можем использовать равенство

$$\nabla^p \times \frac{\mathbf{j}}{L_{qp}} = \nabla^p \frac{1}{L_{qp}} \times \mathbf{j} + \frac{\nabla^p \times \mathbf{j}}{L_{qp}}, \quad (\text{IV.17})$$

которое следует из векторного тождества (I.169)

$$\nabla \times (\varphi \mathbf{a}) = \nabla \varphi \times \mathbf{a} + \varphi \nabla \times \mathbf{a}.$$

Используя уравнение (IV.17), можно переписать (IV.16) как

$$\mathbf{B}(p) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla^p \times \frac{\mathbf{j}}{L_{qp}} dV - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\nabla^p \times \mathbf{j}}{L_{qp}} dV. \quad (\text{IV.18})$$

Плотность тока  $\mathbf{j}$  является функцией точки  $q$  и не зависит от

положения точки наблюдения  $p$ . Следовательно, подынтегральная функция во втором интеграле равна нулю и

$$\mathbf{B}(p) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \text{rot} \frac{\mathbf{j}(q)}{L_{qp}} dV. \quad (\text{IV.19})$$

Поскольку интегрирование и дифференцирование, указанные в (IV.19), производятся для двух различных точек  $q$  и  $p$ , мы можем изменить порядок этих операций и получить

$$\mathbf{B}(p) = \text{rot} \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(q)}{L_{qp}} dV \quad (\text{IV.20})$$

или

$$\mathbf{B}(p) = \text{rot} \mathbf{A}, \quad (\text{IV.21})$$

где

$$\mathbf{A}(p) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(q)}{L_{qp}} dV. \quad (\text{IV.22})$$

Таким образом, магнитное поле  $\mathbf{B}$ , вызванное постоянными токами, может быть выражено при помощи векторного потенциала  $\mathbf{A}$ , определяемого уравнением (IV.22). Сравнивая уравнения (IV.14) и (IV.22), мы видим, что функция  $\mathbf{A}$  выражается через распределение токов намного проще, чем магнитное поле, и, следовательно, причина введения этой функции уже продемонстрирована. В соответствии с уравнением (IV.22), вектор  $\mathbf{A}$  подобен скалярному потенциалу гравитационного и электрического полей, и его величина и направление в каждой точке  $p$  зависят от распределения тока. Установим теперь выражение для векторного потенциала  $\mathbf{A}$ , вызванного поверхностным или линейным током.

Используя равенства

$$\mathbf{j} dV = i dS \quad \text{и} \quad \mathbf{j} dV = I d\mathbf{l},$$

заметим, что из (IV.22) следует

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{idS}{L_{qp}} \quad \text{и} \quad \mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\mathcal{Q}} \frac{d\mathbf{l}}{L_{qp}}. \quad (\text{IV.23})$$

Принимая принцип суперпозиции, получим выражение для вектор-потенциала, вызванного объемным, поверхностным и линейным токами:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}dV}{L_{qp}} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{idS}{L_{qp}} + \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N I_i \oint \frac{d\mathbf{l}}{L_{qp}}. \quad (\text{IV.24})$$

Компоненты вектор-потенциала могут быть непосредственно опре-

делены при помощи этого уравнения. Например, в декартовых координатах имеем

$$\begin{aligned}
 A_x &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \int_V \frac{j_x dV}{L_{qp}} + \int_S \frac{i_x dS}{L_{qp}} + \sum_{i=1}^N I_i \oint \frac{dl_x}{L_{qp}} \right], \\
 A_y &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \int_V \frac{j_y dV}{L_{qp}} + \int_S \frac{i_y dS}{L_{qp}} + \sum_{i=1}^N I_i \oint \frac{dl_y}{L_{qp}} \right], \\
 A_z &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \int_V \frac{j_z dV}{L_{qp}} + \int_S \frac{i_z dS}{L_{qp}} + \sum_{i=1}^N I_i \oint \frac{dl_z}{L_{qp}} \right].
 \end{aligned}
 \tag{IV.25}$$

Подобные выражения можно написать для компонент вектор-потенциала в других системах координат.

Как видно из (IV.25), если ток течет вдоль прямой линии, то вектор-потенциал имеет только одну компоненту, которая параллельна этой прямой. Также очевидно, что если ток протекает в плоскости, то вектор-потенциал  $\mathbf{A}$  в каждой точке параллелен этой плоскости. Позднее мы рассмотрим различные примеры, иллюстрирующие поведение векторного потенциала и магнитного поля  $\mathbf{B}$ , а сейчас приведем два полезных соотношения для функции  $\mathbf{A}$ , благодаря которым значительно упрощается задача получения системы уравнений магнитного поля.

Прежде всего, определим дивергенцию вектор-потенциала  $\mathbf{A}$ . Как следует из уравнения (IV.22),

$$\operatorname{div}^p \mathbf{A} = \operatorname{div}^p \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(q)}{L_{qp}} dV.$$

Так как дифференцирование и интегрирование в этом выражении относятся к различным точкам, можно изменить порядок операций и тогда получим

$$\operatorname{div}^p \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \operatorname{div}^p \frac{\mathbf{j}(q)}{L_{qp}} dV.
 \tag{IV.26}$$

Объем, по которому производится интегрирование, включает все токи  $i$ , следовательно, может быть ограничен поверхностью  $S$ , вне которой токи отсутствуют. Соответственно, нормальная компонента плотности тока к этой поверхности равна нулю:

$$j_n = 0 \quad \text{на} \quad S.
 \tag{IV.27}$$

Подынтегральную функцию в (IV.26) можно представить как

$$\nabla^p \frac{\mathbf{j}}{L_{qp}} = \frac{\nabla^p \mathbf{j}}{L_{qp}} + \mathbf{j} \cdot \nabla^p \frac{1}{L_{qp}} = \mathbf{j} \cdot \nabla^p \frac{1}{L_{qp}},$$

так как плотность тока не зависит от точки наблюдения и

$$\operatorname{div}^p \mathbf{j}(q) = 0.$$

Таким образом,

$$\mathbf{j} \cdot \nabla^p \frac{1}{L_{qp}} = -\mathbf{j} \cdot \nabla^q \frac{1}{L_{qp}} = -\nabla^q \frac{\mathbf{j}}{L_{qp}} + \frac{\nabla^q \mathbf{j}}{L_{qp}} = -\operatorname{div}^q \frac{\mathbf{j}}{L_{qp}} + \frac{\operatorname{div}^q \mathbf{j}}{L_{qp}}.$$

В согласии с принципом сохранения заряда

$$\operatorname{div}^q \mathbf{j}(q) = 0$$

и, следовательно,

$$\mathbf{j} \cdot \nabla^p \frac{1}{L_{qp}} = -\operatorname{div}^q \frac{\mathbf{j}}{L_{qp}}. \quad (\text{IV.28})$$

Уравнение (IV.26) может быть записано как

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \operatorname{div}^q \frac{\mathbf{j}}{L_{qp}} dV. \quad (\text{IV.29})$$

В правой стороне этого уравнения и дифференцирование и интегрирование произведены в одной и той же точке  $q$ , следовательно, мы можем применить теорему Гаусса. Тогда имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \operatorname{div}^q \frac{\mathbf{j}}{L_{qp}} dV = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}}{L_{qp}} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{j_n dS}{L_{qp}}.$$

Учитывая, что нормальная компонента плотности тока  $i_n$  равна нулю на поверхности  $S$ , окружающей все токи, получим

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (\text{IV.30})$$

Это соотношение будет нам полезно при выводе системы уравнений поля. Заметим, что в соответствии с (IV.30) векторные линии поля  $\mathbf{A}$  всегда замкнуты.

В главе III было показано, что потенциал электрического поля  $U$  удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\nabla^2 U = -\frac{\delta}{\epsilon_0}.$$

Это уравнение имеет решение в виде

$$U = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_V \frac{\delta dV}{L_{qp}}.$$



Как следует из уравнения (IV.25), каждая декартова компонента векторного потенциала имеет тот же вид, что и потенциал  $U$ , и, следовательно, по аналогии, также удовлетворяет уравнениям Пуассона, т. е.

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 j_x, \quad \nabla^2 A_y = -\mu_0 j_y, \quad \nabla^2 A_z = -\mu_0 j_z, \quad (\text{IV.31})$$

Умножая каждое из этих уравнений на соответствующий единичный вектор  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  и суммируя, получаем уравнение для векторного потенциала  $\mathbf{A}$ :

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}.$$

Теперь мы готовы вывести систему уравнений магнитного поля, но сначала рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих поведение поля и его векторного потенциала.

### Пример 1. Магнитное поле нити с током (рис. IV.3, а)

Принимая во внимание осевую симметрию задачи, мы выберем цилиндрическую систему координат  $r, \varphi, z$ , начало которой расположено на линии, по которой течет ток. Исходя из закона Био — Савара, мы можем сказать, что магнитное поле имеет только компоненту  $B_\varphi$ , не зависящую от координаты  $\varphi$ . Из принципа

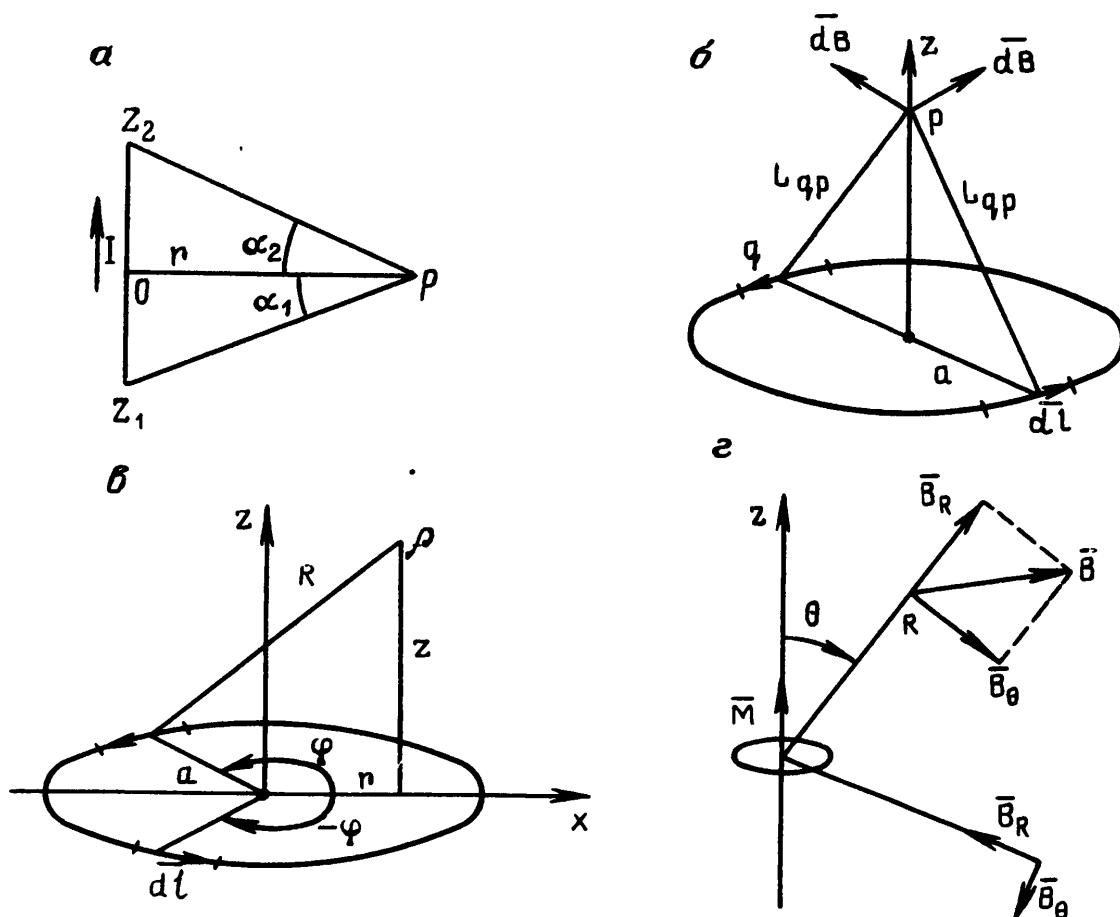


Рис. IV.3. Магнитное поле: а — тока, текущего по прямой линии; б — на оси петли с током; в — петли с током в произвольной точке; г — магнитного диполя

суперпозиции следует, что общее поле является суммой полей токовых элементов  $I dz$ . В таком случае

$$\mathbf{B}_\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz \times \mathbf{L}_{qp}}{L_{qp}^3}, \quad (\text{IV.33})$$

где  $L_{qp} = (r^2 + z^2)^{3/2}$ , а  $z$  — координата элемента  $dz$ . Координатами точки наблюдения являются  $r$  и  $z = 0$ , а  $z_1$  и  $z_2$  — координаты конечных точек линии с током.

Ясно, что абсолютная величина векторного произведения равна  $|\mathbf{dz} \times \mathbf{L}_{qp}| = dz L_{qp} \sin(\mathbf{dz}, \mathbf{L}_{qp}) = dz L_{qp} \sin \beta = dz L_{qp} \cos \alpha$ .

Таким образом,

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{L_{qp}^2} \cos \alpha. \quad (\text{IV.34})$$

Принимая во внимание, что  $z = r \operatorname{tg} \alpha$ , имеем

$$dz = r \sec^2 \alpha d\alpha \quad \text{и} \quad L_{qp}^2 = r^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = r^2 \sec^2 \alpha.$$

Подставляя эти выражения в (IV.34), получим

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos \alpha d\alpha.$$

Таким образом, окончательное выражение для магнитного поля, вызванного током, текущим вдоль прямой линии, имеет следующий вид:

$$B_\varphi(p) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1), \quad (\text{IV.35})$$

где  $\alpha_2$  и  $\alpha_1$  — углы, под которыми из точки  $p$  видны концы линии.

Предположим, что линия, вдоль которой течет ток, имеет бесконечную длину, т. е. углы  $\alpha_2$  и  $\alpha_1$  равны  $\pi/2$  и  $-\pi/2$  соответственно. Тогда

$$B_\varphi(p) = \mu_0 I / 2\pi r. \quad (\text{IV.36})$$

В том случае, когда линия только полубесконечна,  $\alpha_1 = 0$  и  $\alpha_2 = \pi/2$ , имеем

$$B_\varphi(p) = \mu_0 I / 4\pi r. \quad (\text{IV.37})$$

Будем полагать, что  $\alpha_2 = \alpha$  и  $\alpha_1 = -\alpha$ . Тогда в соответствии с (IV.35)

$$B_{\varphi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \sin \alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{l}{(r^2 + l^2)^{1/2}}. \quad (\text{IV.38})$$

где  $2l$  — длина линии с током. Если  $l$  существенно больше, чем расстояние  $r$ , выражение в правой части (IV.38) можно разложить в ряд по степеням  $(r/l)$ . Тогда получим

$$B_{\varphi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r (1 + r^2/l^2)^{1/2}} \approx \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{r^2}{L^2} + \frac{3}{8} \frac{r^4}{L^4} - \dots \right).$$

Мы видим, что если длина линии с током  $2l$  в 4 или 5 раз больше, чем расстояние  $r$ , то результирующее поле практически такое же, как если бы мы рассматривали линию бесконечной длины. Уравнение (IV.35) часто используется в теории электромагнитных методов для вычисления первичного магнитного поля, вызванного током, протекающим в произвольной цепи.

**Пример 2. Векторный потенциал  $A$  и магнитное поле  $B$  тока, текущего в круглой петле**

Предположим сначала, что точка наблюдения расположена на оси петли с радиусом  $a$ , как это показано на рис. IV.3, б. Тогда, в соответствии с (IV.22),

$$A = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{dl}{L_{qp}}.$$

Поскольку расстояние  $L_{qp}$  одинаково для всех точек петли, то

$$A = \frac{\mu_0 I}{4\pi L_{qp}} \oint dl.$$

По определению, сумма элементарных векторов  $dl$  вдоль любого замкнутого пути равна нулю. Следовательно, вектор-потенциал  $A$  на оси  $z$ , создаваемый током в круговой петле, равен нулю.

Вычислим магнитное поле на оси  $z$ . Из закона Био — Савара (IV.8) легко видеть, что в цилиндрической системе координат каждый элемент тока  $I dl$  создает две компоненты поля  $dB_z$  и  $dB_r$ . Всегда возможно найти два токовых элемента  $I dl$ , которые создают в любой точке оси  $z$  одинаковые по величине, но противоположные по знаку горизонтальные компоненты. Следовательно, магнитное поле имеет только вертикальную компоненту вдоль оси  $z$ .

Как можно видеть из рис. IV.3, б,

$$dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{L_{qp}^2} \frac{a}{L_{qp}} = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \frac{dl}{L_{qp}^3},$$

так как  $|dl \times L_{qp}| = L dl$ .

Интегрируя по замкнутому контуру вдоль петли, окончательно получим

$$B_z = \frac{\mu_0 I a 2\pi a}{4\pi (a^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 M}{2\pi (a^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (\text{IV.39})$$

где

$$M = I \pi a^2 = IS.$$

Здесь  $S$  обозначает площадь, ограниченную петлей.

Когда расстояние  $z$  много больше, чем радиус петли  $a$ , мы получаем выражение для магнитного поля, которое играет очень важную роль в изучении магнитного и электромагнитного полей. Пренебрегая  $a$  в сравнении с  $z$ , имеем

$$B_z = \frac{\mu_0 M}{2\pi z^3}, \quad \text{если } z \gg a. \quad (\text{IV.40})$$

В том случае, когда интенсивность поля не зависит отдельно от тока или радиуса петли, а определяется произведением  $M = IS$ , мы говорим, что это поле магнитного диполя. Таким образом, относительно малая петля с током радиуса  $a$ , создает такое же магнитное поле, как магнитный диполь, имеющий момент  $M = \pi a^2 I$ , ориентированный вдоль оси  $z$ . Легко заметить из (IV.39), что когда расстояние  $z$  хотя бы в 5 раз больше, чем радиус  $a$ , замена петли магнитным диполем, расположенным в центре петли, дает результирующую ошибку не более 5%.

До сих пор мы рассматривали векторный потенциал и магнитное поле только вдоль оси  $z$ . Исследуем общий случай и сначала вычислим вектор-потенциал в произвольной точке  $p$ . В силу симметрии, векторный потенциал не зависит от координаты  $\varphi$ . Поэтому для упрощения мы можем выбрать точку  $p$  в плоскости  $x - z$ , где  $\varphi = 0$ . Как можно видеть из рис. IV.3, в, каждая пара элементов с током, имеющая одинаковое расстояние от точки  $p$  и координаты  $\varphi$  и  $-\varphi$ , создает векторный потенциал  $d\mathbf{A}$ , расположенный в плоскости, параллельной плоскости  $x - y$ . Поскольку петля в целом может быть представлена как сумма таких пар, мы заключаем, что векторный потенциал  $\mathbf{A}$ , создаваемый петлей с током, имеет только компоненту  $A_\varphi$ . Поэтому из (IV.22) следует

$$A_\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{dl_\varphi}{R} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^\pi \frac{a \cos \varphi d\varphi}{(a^2 + r^2 + z^2 - 2ar \cos \varphi)^{1/2}}, \quad (\text{IV.41})$$

где  $dl_\varphi$  — компонента вектора вдоль координатной линии и  $dl_\varphi = a \cos \varphi d\varphi$ ,  $R = (a^2 + r^2 + z^2 - 2ar \cos \varphi)^{1/2}$ . Полагая  $\varphi = \pi + 2\alpha$ , имеем

$$d\varphi = 2d\alpha \quad \text{и} \quad \cos \varphi = 2 \sin^2 \alpha - 1$$

и, следовательно,

$$A_{\varphi} = \frac{a I \mu_0}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{(2 \sin^2 \alpha - 1) d \alpha}{[(a+r)^2 + z^2 - 4ar \sin^2 \alpha]^{1/2}}.$$

**Введя новый параметр**

$$k^2 = \frac{4ar}{(a+r)^2 + z^2}$$

**и сделав достаточно простые алгебраические преобразования, получим**

$$A_{\varphi} = \frac{k I \mu_0}{2\pi} \left(\frac{a}{r}\right)^{1/2} \left[ \left(\frac{2}{k^2} - 1\right) \int_0^{\pi/2} \frac{d \alpha}{(1 - k^2 \sin^2 \alpha)^{1/2}} - \frac{2}{k^2} \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \alpha)^{1/2} d \alpha \right] = \frac{I \mu_0}{\pi k} \left(\frac{a}{r}\right)^{1/2} \left[ \left(1 - \frac{k^2}{2}\right) K - E \right], \quad (\text{IV.42})$$

где  $K$  и  $E$  — эллиптические интегралы первого и второго рода:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d \alpha}{(1 - k^2 \sin^2 \alpha)^{1/2}}, \quad (\text{IV.43})$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \alpha)^{1/2} d \alpha.$$

Эти функции детально изучены и существуют стандартные алгоритмы для их вычисления.

Используя соотношение между векторным потенциалом и магнитным полем (IV.21), мы получаем в цилиндрической системе координат

$$B_r = -\frac{\partial A_{\varphi}}{\partial z}, \quad B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_{\varphi}), \quad B_{\varphi} = 0.$$

Как известно, для эллиптических интегралов

$$\frac{\partial K}{\partial k} = \frac{E}{k(1-k^2)} - \frac{K}{k}, \quad \frac{\partial E}{\partial k} = \frac{E}{k} - \frac{K}{k}$$

и

$$\frac{\partial k}{\partial z} = -\frac{zk^3}{4ar}, \quad \frac{\partial k}{\partial r} = \frac{k}{2r} - \frac{k^3}{4r} - \frac{k^3}{4a}.$$

После дифференцирования имеем

$$B_r = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{z}{r [(a+r)^2 + z^2]^{1/2}} \left[ -K + \frac{a^2 + r^2 + z^2}{(a-r)^2 + z^2} E \right], \quad (IV.44)$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{[(a+r)^2 + z^2]^{1/2}} \left[ K + \frac{a^2 - r^2 - z^2}{(a-r)^2 + z^2} E \right].$$

Таким образом, магнитное поле, вызванное током, протекающим в круговой петле, можно выразить в общем случае при помощи эллиптических интегралов.

**Пример 3.** Магнитное поле и потенциал относительно малой петли с током (рис. IV.3, в); магнитный диполь и его момент (рис. IV.3, з)

Предположим, что расстояние от центра петли с током до точки наблюдения  $R_0$  существенно больше, чем радиус петли, т. е.

$$R_0 = (r^2 + z^2)^{1/2} \gg a.$$

Тогда (IV.41) можно упростить, и мы получим

$$A_\varphi \approx \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \varphi d\varphi}{(R_0^2 - 2ar \cos \varphi)^{1/2}} = \frac{Ia \mu_0}{2\pi R_0} \int_0^\pi \frac{\cos \varphi d\varphi}{\left[ 1 - \left( \frac{2ar}{R_0^2} \right) \cos \varphi \right]^{1/2}} \approx$$

$$\approx \frac{Ia \mu_0}{2\pi R_0} \int_0^\pi \left( 1 + \frac{ar}{R_0^2} \cos \varphi \right) \cos \varphi d\varphi =$$

$$= \frac{Ia \mu_0}{2\pi R_0} \int_0^\pi \cos \varphi d\varphi + \frac{Ia^2 \mu_0 r}{2\pi R_0^3} \int_0^\pi \cos^2 \varphi d\varphi, \quad (IV.45)$$

где соотношение

$$\frac{1}{(1+x)^n} \approx 1 - nx$$

использовалось в предположении  $nx \ll 1$ . Первый интеграл в выражении (IV.45) становится равным нулю и, таким образом, мы получаем

$$A_\varphi = \frac{\mu_0 I a^2 r}{4R_0^3}$$

или

$$A = A_\varphi \mathbf{i}_\varphi = \frac{\mu_0 I S r}{4\pi R^3} \mathbf{i}_\varphi, \quad (IV.46)$$

где  $S$  — площадь петли и индекс «0» опущен, т. е.  $R_0 = R$ .

Рассмотрим теперь сферическую систему координат  $R, \theta, \varphi$ , начало и ось  $z$  которой совпадают с началом и осью  $z$  рассмотренной цилиндрической системы координат. Направим ось  $z$  так, что  $z > 0$  будет в том случае, если ток будет выглядеть текущим против часовой стрелки. Тогда (IV.46) можно переписать как

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 IS}{4\pi R^2} \sin \theta \mathbf{i}_\varphi. \quad (\text{IV.47})$$

Затем введем момент петли как вектор, направленный вдоль оси  $z$ , величина которого равна произведению тока в петле и площади петли, т. е.

$$\mathbf{M} = IS \mathbf{z}_0 = M \mathbf{z}_0, \quad (\text{IV.48})$$

где  $M = IS$ .

Важно заметить, что момент  $\mathbf{M}$  и направление тока образуют систему правой руки.

Таким образом, взамен (IV.47) можно записать

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 M}{4\pi R^2} \sin \theta \mathbf{i}_\varphi$$

или

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 \mathbf{M} \times \mathbf{R}}{4\pi R^3} \quad (\text{IV.49})$$

так как

$$\mathbf{M} \times \mathbf{R} = MR \sin \theta \mathbf{i}_\varphi.$$

Уравнение (IV.49) будет использовано для расчета влияния молекулярных токов в магнитных материалах.

Исходя из уравнений (IV.21), (IV.49) и учитывая тот факт, что

$$A_R = A_\theta = 0,$$

получим следующие выражения для магнитного поля в сферической системе координат:

$$B_R = \frac{\mu_0}{R \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta}, \quad B_\theta = -\frac{\mu_0}{R} \frac{\partial (R A_\varphi)}{\partial R}, \quad B_\varphi = 0.$$

Откуда

$$B_R = \frac{2\mu_0 M}{4\pi R^3} \cos \theta, \quad B_\theta = \frac{\mu_0 M}{4\pi R^3} \sin \theta, \quad B_\varphi = 0. \quad (\text{IV.50})$$

Эти уравнения описывают поведение магнитного поля относительно малых петель с током, радиус которых много меньше, чем расстояние от центра петли до точки наблюдения. Это наиболее важное условие применения уравнения (IV.50). В то время как значения радиуса петли и расстояния  $R$  сами по себе не сущест-

венны. Мы будем называть магнитное поле, описанное уравнениями (IV.50), полем магнитного диполя с моментом  $M$ . Здесь необходимо сделать два замечания.

1. Когда мы рассматривали электрическое поле, «диполь» означал комбинацию равных зарядов, имеющих противоположные знаки, когда поле определяется на расстоянии, существенно превосходящем расстояние между зарядами. В то же время понятие «магнитный диполь» не предполагает существования магнитных зарядов, а просто описывает поведение магнитного поля, обусловленного током в относительно малой петле.

2. Магнитное поле любой петли с током, независимо от ее формы, эквивалентно полю магнитного диполя, тогда когда поле определяется на расстоянии, намного превосходящем размеры петли. Другими словами, любая цепь с током создает такое магнитное поле, что на большом расстоянии от токов оно не отличается от поля магнитного диполя.

Основные особенности поля магнитного диполя прямо следуют из уравнения (IV.50):

а) в точках, лежащих на оси диполя  $z$ , поле имеет только одну компоненту  $B_z$ , направленную вдоль этой оси и убывающую обратно пропорционально  $z^3$ :

$$B_z = \mu_0 M / 2\pi z^3; \quad (IV.51)$$

б) в плоскости экватора  $\theta = \pi/2$  радиальная компонента  $B_R$  становится равной нулю и поле имеет направление, противоположное направлению магнитного диполя:

$$B_z = - \mu_0 M / 4\pi z^3; \quad (IV.52)$$

в) вдоль любого радиуса  $\theta = \text{const}$  обе компоненты поля  $B_R$  и  $B_\theta$  убывают обратно пропорционально  $R^3$ . В то же время отношение этих компонент, так же как и ориентация всего вектора, не зависит от радиуса  $R$ . Действительно, согласно уравнению (IV.50) имеем

$$\frac{B_\theta}{B_R} = \frac{1}{2} \text{tg } \theta; \quad (IV.53)$$

интересно заметить, что очень простое поле диполя описывает основную часть магнитного поля Земли. Этот факт важен при изучении палеомагнетизма.

Теперь предположим, что имеется несколько относительно малых петель с различными моментами  $M_i$ . Применяя принцип суперпозиции, получаем для полного момента этой системы

$$M = \sum M_i.$$

Таким образом, мы заменяем систему малых петель с током одной



малой петлей с моментом  $M$ . При непрерывном распределении таких петель с током для полного момента имеем

$$M = \int_V P(q) dV,$$

где  $q$  — произвольная точка в объеме и  $P$  — плотность моментов:

$$P = dM/dV. \quad (IV.55)$$

В соответствии с уравнениями (IV.49) и (IV.55), векторный потенциал  $dA$ , обусловленный током петли, в элементарном объеме  $dV$ , имеет вид

$$dA = \frac{\mu_0 dM \times L_{qp}}{4\pi L_{qp}^3} = \frac{\mu_0 P \times L_{qp}}{4\pi L_{qp}^3} dV, \quad (IV.56)$$

где  $L_{qp}$  — расстояние между элементарным объемом  $dV$  и точкой наблюдения  $p$ .

Используя принцип суперпозиции, получим для вектор-потенциала  $A$ , обусловленного объемным распределением петель с током, следующее выражение:

$$A(p) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{P(q) \times L_{qp}}{L_{qp}^3} dV, \quad (IV.57)$$

которое играет фундаментальную роль в развитии теории магнитного поля  $B$  в присутствии магнитных материалов.

#### Пример 4. Механическая сила и момент вращения

В соответствии с уравнением (IV.2), механическая сила, действующая на контур  $\mathcal{L}$ , помещенный в магнитное поле  $B$ , может быть представлена как

$$F = \oint_{\mathcal{L}} dF = I \oint (\mathbf{dl} \times \mathbf{B}),$$

где  $dl$  — элемент контура, направленный вдоль тока.

В частности, если магнитное поле  $B$  однородно в окрестности контура  $\mathcal{L}$ , то

$$F = -I \oint B \times dl = -I B \times \oint dl.$$

Так как интеграл является суммой векторов  $dl$ , образующих замкнутый многоугольник  $\mathcal{L}$ , то

$$\oint_{\mathcal{L}} dl = 0.$$

Следовательно, полная сила  $F$ , действующая на контур с током в однородном магнитном поле  $B$ , равна нулю.

Как хорошо известно, момент вращения вокруг произвольной точки  $O$  определяется как

$$\mathbf{M}_r = \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{L}_{0q} \times d\mathbf{F} = I \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{L}_{0q} \times (\mathbf{dl} \times \mathbf{B}). \quad (\text{IV.58})$$

Используя тождество

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - \mathbf{c} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}),$$

получаем

$$\mathbf{M}_r = I \oint_{\mathcal{L}} (\mathbf{L}_{0q} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{dl} - I \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} (\mathbf{L}_{0q} \cdot \mathbf{dl}). \quad (\text{IV.59})$$

Если мы опять предположим, что магнитное поле однородно в окрестности контура  $\mathcal{L}$ , то второй интеграл в (IV.59) можно представить как

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} (\mathbf{L}_{0q} \cdot \mathbf{dl}) = \mathbf{B} \oint_{\mathcal{L}} (\mathbf{L}_{0q} \cdot \mathbf{dl}).$$

Применяя теорему Стокса, имеем

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{L}_{0q} \cdot \mathbf{dl} = \int_S \text{rot } \mathbf{L}_{0q} \cdot \mathbf{dS},$$

где  $S$  — площадь, окруженная контуром  $\mathcal{L}$ . Выполняя вычисления  $\text{rot } \mathbf{L}_{0q}$  в сферической системе координат, получаем, что

$$\text{rot } \mathbf{L}_{0q} \equiv 0$$

и, следовательно, вместо (IV.59) имеем

$$\mathbf{M}_r = I \oint_{\mathcal{L}} (\mathbf{L}_{0q} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{dl}. \quad (\text{IV.60})$$

Рассматривая двумерный градиент, в главе I мы вывели равенство

$$\int_S \text{grad}^S T \, dS = \oint_{\mathcal{L}} T \, \mathbf{dl},$$

которое может быть представлено как

$$\int_S \mathbf{dS} \times \nabla T = \oint_{\mathcal{L}} T \, \mathbf{dl}. \quad (\text{IV.61})$$

Затем, используя (IV.61), можно переписать уравнение (IV.60) в виде

$$\mathbf{M}_r = I \int_S \mathbf{dS} \times \nabla (\mathbf{L}_{0q} \cdot \mathbf{B}).$$

Здесь  $\mathbf{dS} = dS \mathbf{n}$  и  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к поверхности  $S$ , образующий вместе с направлением тока правую тройку векторов.

Учитывая однородность магнитного поля, имеем

$$\nabla (\mathbf{L}_{0q} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{L}_{0q} = \mathbf{B}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{M}_r = I \int_S d\mathbf{S} \times \mathbf{B} = -I \mathbf{B} \times \int_S d\mathbf{S} \quad (\text{IV.62})$$

или

$$\mathbf{M}_r = \mathbf{M} \times \mathbf{B},$$

где  $\mathbf{M}$  — магнитный момент контура с током и

$$\mathbf{M} = I \int_S d\mathbf{S} = I \int_S \mathbf{n} dS. \quad (\text{IV.63})$$

Если контур с током лежит в одной плоскости, то уравнение (IV.62) упрощается и мы получаем

$$\mathbf{M}_r = I \mathbf{S} \times \mathbf{B}, \quad (\text{IV.64})$$

где  $\mathbf{S} = S \mathbf{n}$  и  $S$  — общая площадь контура.

Как следует из (IV.64), вектор вращающего момента лежит в плоскости контура с током.

### Пример 5. Поведение тангенциальной компоненты поля $\mathbf{B}$ вблизи поверхностных токов

Предположим, что ток равномерно распределен по плоской поверхности  $S$  и  $i$  — плотность тока (рис. IV.4, *a*). Тогда, в соответствии с законом Био — Савара, магнитное поле, вызванное поверхностными токами, имеет вид

$$\mathbf{B}(p) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{i^{(q)} \times \mathbf{L}_{qp}}{L_{qp}^3} dS. \quad (\text{IV.65})$$

Для того, чтобы найти тангенциальную компоненту поля, умножим левую и правую части уравнения (IV.65) на единичный вектор  $\mathbf{t}$ , параллельный поверхности  $S$ , и получим

$$B_t(p) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{t} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{(\mathbf{i} \times \mathbf{L}_{qp}) \cdot \mathbf{t}}{L_{qp}^3} dS$$

или

$$B_t(p) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{(\mathbf{t} \times \mathbf{i}) \cdot \mathbf{L}_{qp}}{L_{qp}^3} dS. \quad (\text{IV.66})$$

Поскольку оба вектора  $\mathbf{t}$  и  $\mathbf{i}$  — касательные к поверхности  $S$ , векторное произведение в уравнении (IV.66) может быть переписано как

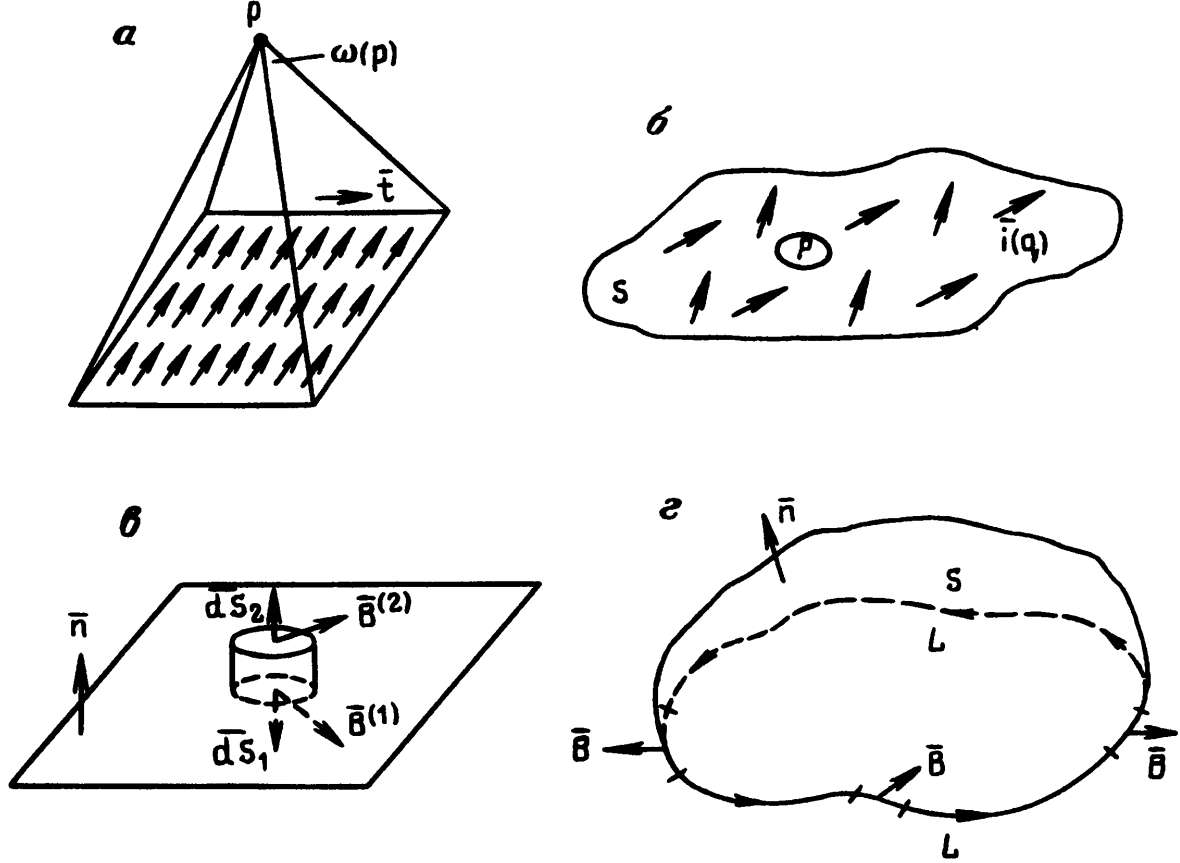


Рис. IV.4. Магнитное поле: *a* — однородного распределения токов на плоскости, *б* — вызванное произвольным распределением поверхностных токов; *в* — нормальная компонента магнитного поля вблизи поверхностных токов; *г* — циркуляция магнитного поля

$$\mathbf{t} \times \mathbf{i} = i \mathbf{n} \cdot \sin(\mathbf{t}, \mathbf{i})$$

где  $i$  — плотность тока;  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, перпендикулярный  $S$ . Соответственно, для тангенциальной компоненты магнитного поля имеем

$$B_t(p) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \sin(\mathbf{t}, \mathbf{i}) \int_S \frac{\mathbf{L}_{qp} \cdot d\mathbf{S}}{L_{qp}^3}$$

или

$$B_t(p) = -\frac{\mu_0}{4\pi} i \sin(\mathbf{t}, \mathbf{i}) \int_S \frac{\mathbf{L}_{pq} \cdot d\mathbf{S}}{L_{qp}^3}, \quad (\text{IV.67})$$

где  $d\mathbf{S} = dS \mathbf{n}$ . Как было показано в главе I, интеграл равен телесному углу  $\omega(p)$ , под которым поверхность  $S$  видна из точки наблюдения  $p$ .

Окончательно имеем

$$B_t(p) = -\frac{\mu_0 i}{4\pi} \sin(\mathbf{t}, \mathbf{i}) \omega(p). \quad (\text{IV.68})$$

Например, в направлении, перпендикулярном току, получим тангенциальную компоненту

$$B_t(p) = -\frac{\mu_0 i}{4\pi} \omega(p), \quad (\text{IV.69})$$

так как  $\sin(i, t) = 1$ .

Как было показано в главе I, величина телесного угла возрастает, когда  $p$  приближается к поверхности  $S$  как с внешней, так и с внутренней стороны:

$$\omega^+(p) = -2\pi \quad \text{и} \quad \omega^-(p) = 2\pi$$

соответственно. Следовательно, тангенциальная компонента поля поблизости от плоской поверхности  $S$  имеет вид

$$B_t^+(p) = \mu_0 i / 2, \quad B_t^-(p) = -\mu_0 i / 2. \quad (\text{IV.70})$$

Здесь  $B_t^+(p)$  и  $B_t^-(p)$  — общие тангенциальные компоненты магнитного поля с внешней и внутренней сторон  $S$  соответственно.

Из уравнения (IV.70) следует, что, как правило, тангенциальная компонента  $B_t$  является разрывной функцией в любой точке поверхности  $S$  и разрыв функции обусловлен током в этой точке:

$$B_t^+(p) - B_t^-(p) = \mu_0 i(p). \quad (\text{IV.71})$$

Предположим теперь, что поверхность  $S$  является бесконечной плоскостью. Тогда, в соответствии с (IV.69), тангенциальная компонента  $B_t$  с обеих сторон плоскости постоянна и равна

$$B_t = \pm \mu_0 i / 2 \quad (\text{IV.72})$$

независимо от положения точки наблюдения.

В то же время нормальная компонента  $B_n$  становится равной нулю в силу симметрии.

Теперь мы будем изучать поведение тангенциальной компоненты  $B_t$  вблизи произвольной поверхности  $S$  тогда, когда плотность тока  $i$  является некоторой функцией точки  $q$  (рис. IV.4, б). Очевидно, что поле  $B_t(p)$  можно представить в виде суммы двух полей:

$$B_t(p) = B_t^q(p) + B_t^{s-q}(p), \quad (\text{IV.73})$$

где  $B_t^q(p)$  и  $B_t^{s-q}(p)$  — тангенциальные компоненты поля, генерируемого элементом тока  $i dS(q)$  и остальными токами.

Рассматривая поведение поля вблизи точки  $q$ , можно заметить, что поле  $B_t^{s-q}$  является непрерывной функцией, так как его генераторы расположены на одинаковом расстоянии от этой точки. В то же время, когда  $p$  приближается к поверхности ( $p \rightarrow q$ ), телесный угол, под которым виден элемент  $dS(q)$ , стремится к  $\pm 2\pi$ . Следовательно, можно записать

$$B_t^+(p) = \frac{\mu_0 i(p)}{2} + B_t^{s-q}(p), \quad (\text{IV.74})$$

$$B_t^-(p) = -\frac{\mu_0 i(p)}{2} + B_t^{s-q}(p).$$

Позднее мы покажем, что разрывность тангенциальной компоненты в любой точке токовой поверхности всегда определяется только плотностью тока в этой точке и равна

$$B_i^+(p) - B_i^-(p) = \mu_0 i(p). \quad (\text{IV.75})$$

Это уравнение часто называют поверхностной аналогией первого уравнения поля, и оно может быть переписано как

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{i} \quad (\text{IV.76})$$

или

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{B}^+ - \mathbf{B}^-) = \mu_0 \mathbf{i},$$

где  $\mathbf{B}^+$  и  $\mathbf{B}^-$  — магнитные поля с внешней и обратной сторон поверхности с током соответственно.

Следует заметить, что уравнение (IV.76) также остается действительным для широкой области применения электромагнитных полей в геофизических методах.

### IV.3. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В, ОБУСЛОВЛЕННОГО ТОКАМИ ПРОВОДИМОСТИ

В принципе закон Био — Савара позволяет определить магнитное поле, если токи известны. Однако во многих случаях распределения тока в неоднородных проводящих средах такой подход является крайне громоздким и применять его практически тяжело. Более того, как будет показано в следующем разделе, в присутствии магнитных материалов невозможно определить некоторые из токов, если поле  $\mathbf{B}$  неизвестно. Мы опять столкнулись с проблемой «замкнутого кольца». Следовательно, так же, как и для электрического поля, естественно формулировать систему уравнений поля и краевые задачи.

Прежде всего, используя уравнение (IV.21), докажем, что дивергенция поля  $\mathbf{B}$  равна нулю. Действительно,

$$\text{div } \mathbf{B} = \text{div rot } \mathbf{A}. \quad (\text{IV.77})$$

Как хорошо известно, правая часть (IV.77) тождественно равна нулю. Следовательно,

$$\text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (\text{IV.78})$$

Это означает, что магнитное поле не имеет источников и, следовательно, векторные линии магнитного поля  $\mathbf{B}$  замкнуты. Затем, применяя теорему Гаусса, получим интегральную форму этого уравнения:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (\text{IV.79})$$

Таким образом, общий поток поля  $\mathbf{B}$  через любую замкнутую

поверхность всегда равен нулю. Сейчас мы определим на поверхности условия, аналогичные уравнению (IV.78), и с этой целью рассмотрим очень тонкий слой с плотностью тока  $\mathbf{j}$ . Вычисляя поток поля через элементарную цилиндрическую поверхность (рис. IV.4, в), получим

$$\mathbf{B}^{(2)} \cdot d\mathbf{S}_2 + \mathbf{B}^{(1)} \cdot d\mathbf{S}_1 + \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_\bullet = 0, \quad (\text{IV.80})$$

где

$$d\mathbf{S}_2 = dS \mathbf{n}; \quad d\mathbf{S}_1 = -dS \mathbf{n};$$

$d\mathbf{S}_\bullet$  — боковая поверхность цилиндра.

Затем, уменьшая толщину слоя  $l$  таким образом, что полный ток сохраняется, получим в пределе ( $l \rightarrow 0$ ) поверхностный ток с плотностью  $\mathbf{i}$  и уравнение (IV.80) в более простой форме:

$$B_n^{(2)} dS - B_n^{(1)} dS = 0$$

или

$$B_n^{(2)} = B_n^{(1)}. \quad (\text{IV.81})$$

Итак, нормальная компонента магнитного поля  $\mathbf{B}$  всегда является непрерывной функцией пространственных переменных. Такое поведение отличается от поведения нормальной компоненты электрического поля, и это показывает, что поверхностные магнитные заряды, так же, как и объемные заряды, не могут существовать. Мы имеем три формы первого уравнения, которое описывает магнитное поле, вызванное постоянными токами:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \text{div } \mathbf{B} = 0 \quad B_n^{(2)} - B_n^{(1)} = 0. \quad (\text{IV.82})$$

Каждая из них выражает факт отсутствия магнитных зарядов.

Заметим следующее.

1. Уравнения (IV.82) были получены в предположении, что поле  $\mathbf{B}$  вызвано токами проводимости. Тем не менее они остаются справедливыми в присутствии магнитных материалов, когда поле также генерируется молекулярными токами.

2. Эти уравнения были получены из закона Био — Савара для постоянного тока, однако они остаются справедливыми и для переменных магнитных полей и представляют собой четвертое уравнение Максвелла.

Получим теперь второе уравнение для магнитного поля. Используя (IV.21)

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$$

и тождество

$$\text{rot rot } \mathbf{M} = \text{grad div } \mathbf{M} - \nabla^2 \mathbf{M},$$

имеем

$$\text{rot } \mathbf{B} = \text{grad div } \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} .$$

Учитывая, что

$$\text{div } \mathbf{A} = 0 ,$$

и принимая во внимание (IV.32), получим

$$\text{rot } \mathbf{B} = - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j} .$$

Таким образом, второе уравнение для магнитного поля имеет вид

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} . \quad (\text{IV.83})$$

Следовательно, вне токов

$$\text{rot } \mathbf{B} = 0 . \quad (\text{IV.84})$$

Ясно, что уравнение (IV.83) отражает тот факт, что токи являются генераторами вихревого типа и создают магнитное поле.

Применяя теорему Стокса, получим интегральную форму второго уравнения Максвелла:

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$$

или

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I , \quad (\text{IV.85})$$

где  $I$  — ток, текущий через поверхность  $S$ , ограниченную путем  $\mathcal{L}$  (рис. IV.4,  $d$ ). Взаимная ориентация векторов  $d\mathbf{l}$  и  $d\mathbf{S}$  не является произвольной, а определяется правилом правой руки. Таким образом, циркуляция магнитного поля определяется током  $I$ , пронизывающим поверхность, ограниченную контуром  $\mathcal{L}$ , и не зависит от токов, текущих вне периметра этой области. Должно быть очевидно, что из равенства нулю циркуляции не следует равенство нулю магнитного поля в каждой точке вдоль  $\mathcal{L}$ . Конечно, путь  $\mathcal{L}$  может проходить сквозь среды с различными физическими свойствами. Рассмотрим проводящий слой (рис. IV.5,  $a$ ). Применяя (IV.85), так же, как приближение, использованное при выводе (IV.81), имеем

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B_i^{(2)} dt - B_i^{(1)} dt + \{B_n(q_2) - B_n(q_1)\} \Delta h = j \Delta t \Delta h ,$$

где  $q_2$  и  $q_1$  — точки, локализованные в элементах пути  $\mathcal{L}$ , перпендикулярных к слою.

Рассматривая слой, толщина которого стремится к нулю, и принимая во внимание конечное значение реальной объемной плотности тока, получим

$$B_i^{(2)} - B_i^{(1)} = 0 \quad \text{при} \quad \Delta h \rightarrow 0 . \quad (\text{IV.86})$$



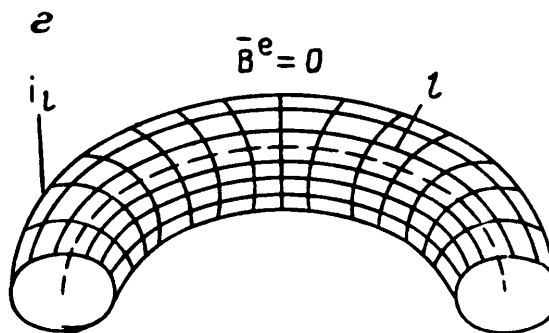
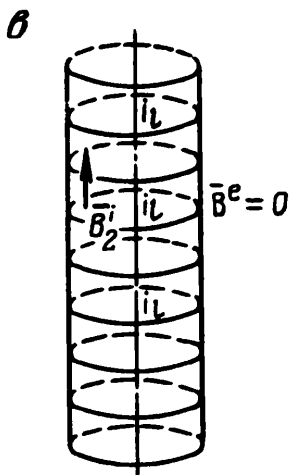
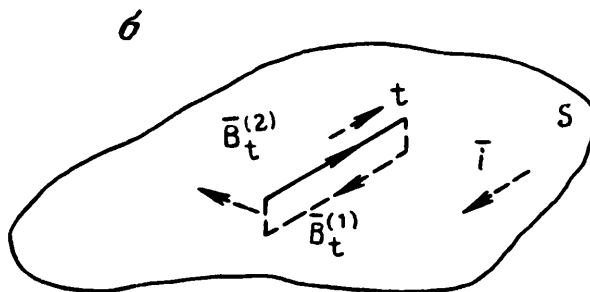
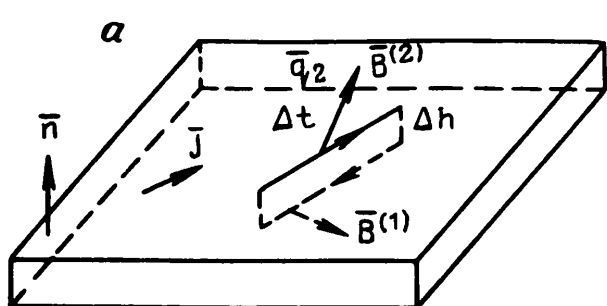


Рис. IV.5. Циркуляция внутри проводящего слоя (а); тангенциальная компонента  $B_t$  вблизи токовой поверхности (б); магнитное поле:  $v$  — цилиндрического соленоида,  $z$  — тороидального соленоида

В соответствии с (IV.86), тангенциальная компонента магнитного поля является непрерывной функцией положения.

Таким образом, мы вывели три формы второго уравнения для магнитного поля постоянного тока, показывающие, что циркуляция магнитного поля определяется потоком тока через произвольную поверхность, ограниченную путем интегрирования, и токи являются вихрями магнитного поля. Эти формы имеют вид

$$\int_{\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I, \quad \text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad B_t^{(2)} - B_t^{(1)} = 0. \quad (\text{IV.87})$$

Последнее из этих уравнений справедливо для произвольного переменного поля и обычно рассматривается как поверхностная аналогия второго уравнения Максвелла. Бывают случаи, когда удобно предполагать, что существует поверхность тока с плотностью  $i$  у нескольких стыков (рис. IV.5, б). Тогда, повторяя рассуждения, приведенные выше, мы получим, что тангенциальная компонента магнитного поля разрывна на поверхности и

$$B_t^{(2)} - B_t^{(1)} = \mu_0 i_l, \quad (\text{IV.88})$$

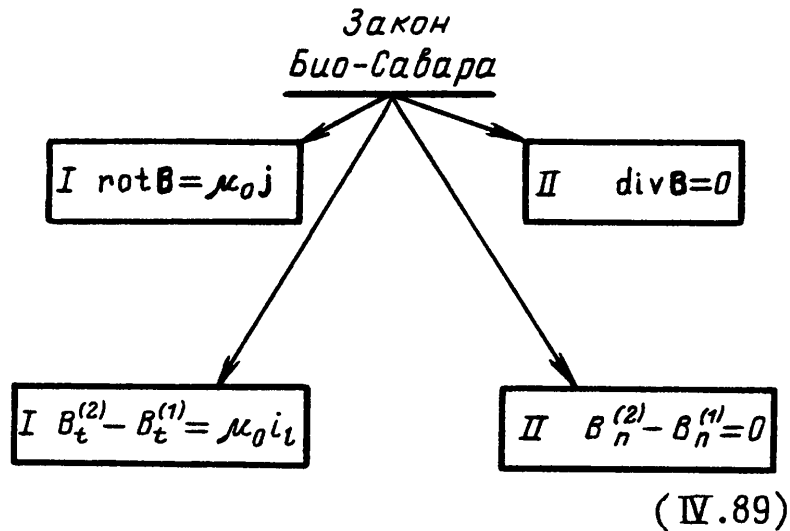
где  $t$  и  $l$  — взаимно перпендикулярные направления, тангенциальные к поверхности.

Несмотря на то, что первые два уравнения в (IV.87)

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \quad \text{и} \quad \text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

были выведены из выражений для магнитного поля постоянного тока, они остаются справедливыми для квазистационарных полей, которые широко используются в электромагнитных методах.

Суммируем полученные результаты и представим систему уравнений магнитного поля, вызываемого токами проводимости, в дифференциальной форме.



Здесь будут уместны несколько замечаний по поводу уравнений (IV.89).

1. Эта система была выведена из закона Био — Савара, подобно тому как уравнения для гравитационного и электрического полей были получены из законов Ньютона и Кулона соответственно.

2. Закон Био — Савара и система (IV.89), вместе с граничными условиями, содержит всю информацию о магнитном поле. Магнитное поле, описанное уравнением (IV.89), является классическим примером вихревого поля. Источниками поля являются токи, характеризующиеся полем плотности тока  $\mathbf{j}$ .

3. На поверхностях, где плотность тока  $\mathbf{i}$  равна нулю, и нормальная и тангенциальная компоненты магнитного поля являются непрерывными функциями.

4. Система (IV.89) характеризует поведение поля как в вакууме, так и в проводящей среде. Более того, уравнения (IV.89) справедливы даже в присутствии среды, влияющей на поле (магнитные материалы), при условии, что правая часть первого уравнения

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

включает также молекулярные токи внутри магнитных материалов.

5. Уместно также отметить, что система (IV.89) описывает переменные магнитные поля, вызываемые токами проводимости. Ранее было показано, что, когда расстояние от токов возрастает,

магнитное поле описывается полем магнитного диполя и, следовательно, стремится к нулю на бесконечности:

$$\mathbf{B} \rightarrow 0. \quad (\text{IV.90})$$

В соответствии с результатами, полученными в главе I, можно сказать, что уравнения (IV.89), (IV.90) однозначно определяют магнитное поле. Это заключение не является неожиданным. Действительно, как следует из закона Био — Савара, коль скоро токи известны, магнитное поле однозначно определяется их распределением. Другими словами, существует только одно магнитное поле, которое соответствует данному полю плотности тока  $\mathbf{j}$ . В связи с этим естественно вновь поднять следующий вопрос: почему необходимо выводить и изучать систему уравнений поля, если поле  $\mathbf{B}$  может быть вычислено непосредственно из закона Био — Савара? В сущности мы уже ответили на этот вопрос, однако приведем здесь дополнительные замечания, поясняющие вопрос.

а) Принимая во внимание тот факт, что токи появляются везде в проводящей среде и что они могут быть определены, мы не должны рассматривать краевые задачи для объемов конечной размерности. Другими словами, мы будем исследовать магнитное поле, вызванное всеми токами в проводящей среде.

б) Существует определенное подобие между вычислением гравитационного поля и магнитных полей, вызванных токами проводимости, несмотря на их различную природу. В обоих случаях распределение источников можно найти прежде определения поля и, следовательно, поля могут быть вычислены на основании либо закона Ньютона либо закона Био — Савара.

в) В то же время уместно подчеркнуть существенное различие вычислений магнитного и электрического полей, когда последние рассматриваются в присутствии проводников. Это связано с проявлением неизвестных индуцированных зарядов на поверхностях проводников. Как будет показано позднее, это различие полностью исчезает, когда магнитное поле изучается в присутствии магнитных материалов.

г) Несмотря на относительную простоту вычисления гравитационного поля с использованием закона Ньютона, были развиты различные методы, которые сильно упростили эту процедуру. Некоторые из них описаны в главе I. Следовательно, полезно изучить подобные подходы и для магнитного поля, особенно принимая во внимание относительно сложную форму закона Био — Савара и необходимость выполнения интегрирования по всему проводящему пространству. Вот почему в следующем разделе мы будем использовать векторный и скалярный потенциалы, так же как и некоторые преобразования, которые позволяют облегчить определение магнитного поля. В описании этих подходов удобнее исходить из (IV.89), чем использовать закон Био — Савара, хотя, конечно, система уравнений была выведена из этого закона.

Прежде чем мы продолжим изучение этого предмета, рассмотрим применение системы (IV.89) для определения поля соленоида. Будем рассматривать цилиндрическую токовую поверхность постоянного сечения, показанную на рис. IV.5, в. Плотность тока имеет только компоненту  $i_\varphi$ , которая является постоянной величиной:

$$i_\varphi = i_\varphi \varphi_0 \quad \text{и} \quad i_\varphi = \text{const},$$

где  $\varphi_0$  — единичный вектор, касательный к поверхности. Соленоид имеет бесконечную длину вдоль оси  $z$ .

Предположим, что поле  $B_i$  внутри соленоида однородно, направлено вдоль оси  $z$  и равно

$$B_z^i = \mu_0 i_\varphi, \quad (\text{IV.91})$$

в то время как вне соленоида поле равно нулю:

$$B_z^e = 0. \quad (\text{IV.92})$$

Легко видеть, что эти функции, даваемые уравнениями (IV.91), (IV.92), удовлетворяют системе уравнений поля (IV.89) и условиям на бесконечности. Следовательно, в соответствии с теоремой единственности, они описывают магнитное поле соленоида.

Конечно, это очень простое поведение, однако этот результат нельзя рассматривать как очевидный. Прежде всего, трудно предсказать, что поле внутри соленоида ( $B_z^i$ ) однородно во всем поперечном сечении, в то время как поле одиночной петли с током сильно меняется. Нелегко также предсказать, не проводя вычислений, что поле вне соленоида равно нулю. Можно заключить, что если цилиндрический соленоид имеет конечную протяженность вдоль оси  $z$ , то поле соленоида практически однородно в его центральной части. Подобное использование теоремы единственности для определения поля было продемонстрировано несколько ранее в главе III, когда мы исследовали электрическое поле в присутствии проводников. Например, электростатическое экранирование, так же как и однородное распределение токов через поперечное сечение цилиндрического проводника, было установлено с помощью теоремы единственности.

Рассмотрим также тороидальный соленоид, показанный на рис. IV.5, г. Плотность тока

$$i_\varphi = i_\varphi \varphi_0.$$

Используя интегральную форму первого уравнения (IV.85):

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$$

и принимая во внимание осевую симметрию, получаем

$$B_i 2\pi r = \mu_0 I, \quad (\text{IV.93})$$

где  $\mathcal{L}$  — окружность радиуса  $r$ , расположенная в горизонтальной плоскости с центром на оси тора;  $I$  — ток, протекающий через поверхность, ограниченную окружностью  $\mathcal{L}$ . В силу осевой симметрии магнитное поле имеет только компоненту  $B_l$ . В соответствии с уравнением (IV.93) можно заключить, что

а) магнитное поле вне соленоида равно нулю:

$$B_l^e = 0;$$

б) внутри соленоида поле  $B_l^i$  не однородно и равно

$$B_l^i = \mu_0 I / 2\pi r. \quad (\text{IV.94})$$

Таким образом, поле возрастает при приближении к оси тора. Это свидетельствует о том, что компонента  $i_\varphi$  изменяется на поверхности тороида;

в) с возрастанием отношения радиуса тороида  $R$  к радиусу его поперечного сечения  $r_0$  поле  $B_l^i$  становится более однородным;

г) если тороид имеет произвольное, но постоянное поперечное сечение и

$$i_\varphi = i_\varphi \Phi_0,$$

то мы можем использовать (IV.93). Это означает, что вне тороида поле  $B_l$  равно нулю, в то время как внутри поле легко вычисляется при помощи (IV.94).

#### IV.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В, ОБУСЛОВЛЕННОГО ТОКАМИ ПРОВОДИМОСТИ

Рассмотрим метод, позволяющий упростить вычисления магнитного поля. Начнем с векторного потенциала  $\mathbf{A}$ . В предыдущем разделе эта функция была введена как

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (\text{IV.95})$$

$$\text{и } \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(q)}{L_{qp}} dV, \quad (\text{IV.96})$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}, \quad \text{div } \mathbf{A} = 0.$$

Уравнения (IV.95), (IV.96) справедливы везде, включая объемы, в которых текут токи.

Как было отмечено ранее, соотношение между током и векторным потенциалом много проще, чем между током и магнитным полем. Следовательно, проще найти векторный потенциал, а затем, используя (IV.95), определить магнитное поле.

Иногда возможно описать магнитное поле с помощью двух или даже одной компоненты векторного потенциала, и это также упрощает вычисление поля  $\mathbf{B}$ .

В соответствии с уравнением (IV.89) для поверхностного тока получим

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{B}^{(2)} - \mathbf{B}^{(1)}) = \mu_0 \mathbf{i} \quad \text{и} \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}^{(2)} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}^{(1)}$$

или, принимая во внимание (IV.95),

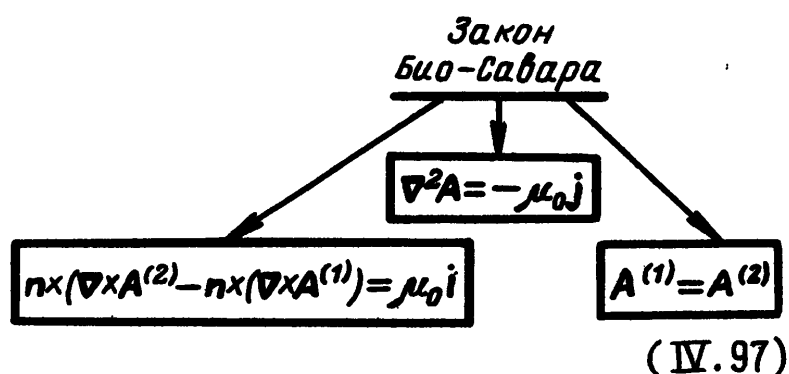
$$\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{A}^{(2)}) - \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{A}^{(1)}) = \mu_0 \mathbf{i},$$

$$(\nabla \times \mathbf{A}^{(2)})_n = (\nabla \times \mathbf{A}^{(1)})_n.$$

Поскольку нормальная компонента  $(\nabla \times \mathbf{A})_n$  включает производные только в направлениях, тангенциальных к поверхности, последнее равенство остается справедливым, если мы потребуем непрерывности векторного потенциала:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2.$$

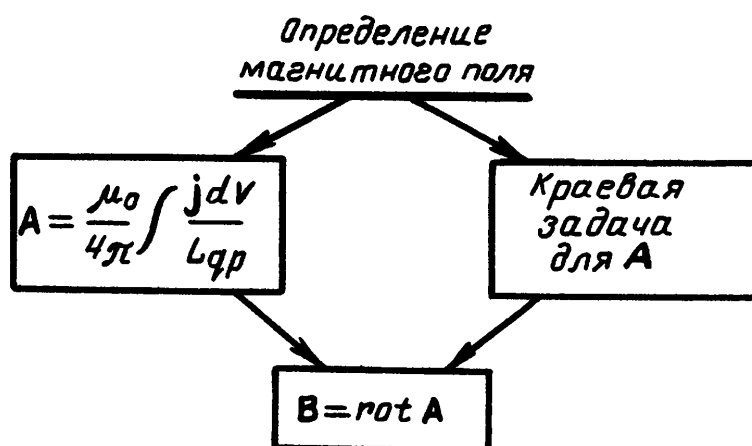
Соответственно, система уравнений для векторного потенциала имеет вид



Как следует из поведения магнитного поля на бесконечности, векторный потенциал также стремится к нулю подобно полю магнитного диполя (IV.57):

$$\mathbf{A} \rightarrow \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(\mathbf{M} \times \mathbf{L}_{qp})}{L_{qp}^3}, \quad \text{если} \quad L_{qp} \rightarrow \infty. \quad (\text{IV.98})$$

В согласии с результатами, полученными в главе I, уравнения (IV.97), (IV.98) после некоторых модификаций совместно с граничными условиями на бесконечности образуют краевую задачу, которая однозначно определяет поле  $\mathbf{B}$ . Таким образом, исходя из векторного потенциала, мы можем определить магнитное поле двумя путями, которые демонстрируются ниже.



До сих пор мы рассматривали векторный потенциал  $\mathbf{A}$ , определенный уравнением (IV.96), когда его дивергенция равна нулю:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0.$$

Однако мы можем представить бесконечное количество векторных потенциалов, описывающих одно и то же магнитное поле. Действительно, введем новый векторный потенциал  $\mathbf{A}_*$ , связанный с  $\mathbf{A}$  следующим образом:

$$\mathbf{A}_* = \mathbf{A} + \operatorname{grad} \varphi, \quad (\text{IV.99})$$

где  $\varphi$  — скалярная функция, непрерывная вместе со своими первыми производными.

Подставляя (IV.99) в (IV.95), получим

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{rot} \mathbf{A}_* - \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi$$

или

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}_*,$$

так как

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0.$$

Заметим, что при изменении функции  $\varphi$  в (IV.99) поле  $\mathbf{B}$  не изменяется и эта гибкость в выборе векторного потенциала оказывается очень полезной при решении краевых задач.

В соответствии с (IV.96) и (IV.99) запишем выражение для  $\mathbf{A}_*$  как

$$\mathbf{A}_* = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(q)}{L_{qp}} dV + \operatorname{grad} \varphi. \quad (\text{IV.100})$$

Вычисляя дивергенцию в правой и левой стороне (IV.99), получим

$$\operatorname{div} \mathbf{A}_* = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla^2 \varphi,$$

так как  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ . Таким образом, в общем случае дивергенция вектора  $\mathbf{A}_*$  не равна нулю. В то же время, если функция  $\varphi(q)$  гармоническая, т. е.  $\nabla^2 \varphi = 0$ , то мы опять получим

$$\operatorname{div} \mathbf{A}_* = 0.$$

Векторный потенциал удовлетворяет векторной аналогии уравнения Пуассона

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j},$$

в то время как потенциал  $\mathbf{A}_*$  является обычно решением различных уравнений. Действительно, используя определение (IV.99), получаем

$$\nabla^2 (\mathbf{A}_* - \mathbf{L}) = -\mu_0 \mathbf{j},$$

где

$$\mathbf{L} = \text{grad } \varphi$$

или

$$\nabla^2 \mathbf{A}_* = -\mu_0 \mathbf{j} + \nabla^2 \mathbf{L}. \quad (\text{IV.101})$$

Подбирая надлежащим образом функцию  $\varphi(q)$ , можно преобразовать это уравнение в однородное.

Упростим систему уравнений поля, предполагая, что точки наблюдения расположены вне областей, в которых присутствуют токи проводимости. Этот случай представляет большой практический интерес для геофизических методов, базирующихся на измерении магнитного поля.

В соответствии с уравнениями (IV.89) система уравнений поля вне источников существенно упрощается и имеет вид

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{B} &= 0, & \text{div } \mathbf{B} &= 0, \\ B_i^{(2)} - B_i^{(1)} &= 0, & B_n^{(2)} - B_n^{(1)} &= 0 \end{aligned}$$

или

$$\text{rot } \mathbf{B} = 0, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (\text{IV.102})$$

поскольку магнитное поле является непрерывной функцией в области, в которой отсутствуют поверхностные токи. Как мы знаем (см. главу I), это поле гармоническое и может быть выражено при помощи скалярного потенциала. Действительно, из первого уравнения

$$\text{rot } \mathbf{B} = 0$$

следует, что

$$\mathbf{B} = -\text{grad } U, \quad (\text{IV.103})$$

где  $U$  — потенциал, описывающий магнитное поле в окрестности любой точки, в которой плотность тока равна нулю.

Подставляя (IV.103) во второе уравнение системы (IV.102), получим

$$\nabla^2 U = 0. \quad (\text{IV.104})$$

Таким образом, потенциал  $U$  является гармонической функцией.

Естественно, система уравнений (IV.102) задана в определенной части пространства, там, где отсутствуют токи. Например, это может быть полупространство выше земной поверхности. Это означает, что если уравнения (IV.102) являются единственным источником информации о магнитном поле, то мы не знаем распределения токов и, следовательно, не можем применить закон Био — Савара. В то же время поле  $\mathbf{B}$  можно найти, если в системе (IV.102) либо нормальная, либо тангенциальная компоненты



заданы на граничной поверхности. Другими словами, магнитное поле можно определить, решив краевую задачу. В частности, для верхнего полупространства над земной поверхностью  $S_0$  можно сформулировать две задачи.

1. Первая задача

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

$$B_t = \varphi_1(q) \quad \text{на} \quad S_0$$

и  $\mathbf{B} \rightarrow 0$  на бесконечности.

Вторая задача

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

$$B_n = \varphi_2(q) \quad \text{на} \quad S_0$$

и  $\mathbf{B} \rightarrow 0$  на бесконечности.

Здесь  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — заданные функции, которые можно получить при измерении магнитного поля на земной поверхности. Конечно, эту задачу можно решить, используя уравнения Лапласа и формулируя соответствующие условия на граничных поверхностях. Как и в случае электрического и гравитационного полей, граничные условия однозначно определяют гармоническое магнитное поле.

На практике это означает, что, зная поле на земной поверхности, мы можем вычислить это поле в любой точке пространства над землей. Это называется продолжением вверх. Необходимо заметить, что над земной поверхностью гравитационное, магнитное и электрическое поля могут быть определены с помощью скалярного потенциала, и это упрощение объясняется тем, что поля рассматриваются вне источника поля.

В качестве примера применения скалярного потенциала найдем выражение для потенциала поля, вызванного током в относительно малой петле с дипольным моментом  $\mathbf{M}$ . В соответствии с (IV.49)

$$\mathbf{B}(p) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{L}_{qp})}{L_{qp}^3}. \quad (\text{IV.105})$$

Для того, чтобы выразить магнитное поле как градиент некоторой функции, преобразуем правую часть выражения (IV.105).

Используя равенство

$$\nabla \times (\varphi \mathbf{a}) = \varphi \operatorname{rot} \mathbf{a} + \nabla \varphi \times \mathbf{a},$$

получим

$$\mathbf{B}(p) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{1}{L_{qp}^3} \operatorname{rot} (\mathbf{M} \times \mathbf{L}_{qp}) - (\mathbf{M} \times \mathbf{L}_{qp}) \times \nabla \frac{1}{L_{qp}^3} \right\}. \quad (\text{IV.106})$$

Поскольку

$$\nabla \frac{1}{L_{qp}^3} = - \frac{3\mathbf{L}_{qp}}{L_{qp}^5},$$

то второй член в (IV.106) можно представить как

$$\begin{aligned} & - (\mathbf{M} \times \mathbf{L}_{qp}) \times \nabla \frac{1}{L_{qp}^3} = \frac{3}{L_{qp}^5} ((\mathbf{M} \times \mathbf{L}_{qp}) \times \mathbf{L}_{qp}) = \\ & = \frac{3}{L_{qp}^5} \{ \mathbf{L}_{qp} (\mathbf{M} \cdot \mathbf{L}_{qp}) - \mathbf{M} L_{qp}^2 \} = 3 \frac{(\mathbf{M} \cdot \mathbf{L}_{qp}) \mathbf{L}_{qp}}{L_{qp}^5} - \frac{3\mathbf{M}}{L_{qp}^3}. \end{aligned}$$

Здесь было использовано равенство

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - \mathbf{c} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).$$

Рассмотрим затем член

$$\text{rot} (\mathbf{M} \times \mathbf{L}_{qp}),$$

который легко найти, если вычислить его декартовы компоненты. Для декартовой компоненты  $x$  имеем

$$\text{rot}_x (\mathbf{M} \times \mathbf{L}_{qp}) = \frac{\partial}{\partial y} (M_x y - x M_y) - \frac{\partial}{\partial z} (M_z x - z M_x) = 2M_x,$$

так как дипольный момент  $\mathbf{M}$  не зависит от координат точки наблюдения.

Аналогично,

$$\text{rot}_y (\mathbf{M} \times \mathbf{L}_{qp}) = 2M_y$$

и

$$\text{rot}_z (\mathbf{M} \times \mathbf{L}_{qp}) = 2M_z$$

и, следовательно,

$$\text{rot} (\mathbf{M} \times \mathbf{L}_{qp}) = 2\mathbf{M}.$$

Таким образом, вместо (IV.106) мы получили выражение

$$\mathbf{B} = - \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{3 (\mathbf{M} \cdot \mathbf{L}_{qp}) \mathbf{L}_{qp}}{L_{qp}^5} - \frac{\mathbf{M}}{L_{qp}^3} \right\}. \quad (\text{IV.107})$$

Сравнение членов в правой части этих уравнений показывает, что магнитное поле может быть представлено как

$$\mathbf{B} = - \text{grad } U, \quad (\text{IV.108})$$

где

$$U = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{L}_{qp}}{L_{qp}^3}. \quad (\text{IV.109})$$

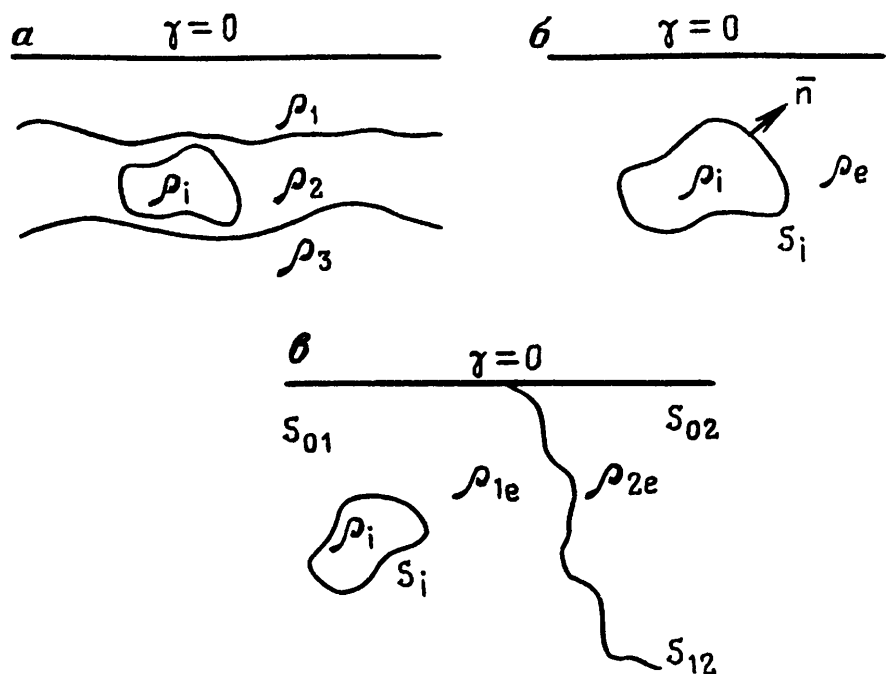
Действительно, вычисляя градиент потенциала  $U$  и используя равенство

$$\text{grad} (\varphi_1 \varphi_2) = \varphi_1 \cdot \text{grad } \varphi_2 + \varphi_2 \cdot \text{grad } \varphi_1,$$

мы возвращаемся к выражению (IV.107).

Предположим теперь, что распределение дипольных момен-

Рис. IV.6. Модели кусочно-однородной среды



тов малых петель с током в объеме  $V$  характеризуется вектором  $\mathbf{P}$ :

$$\mathbf{P} = d \mathbf{M} / dV.$$

Используя принцип суперпозиции, получаем выражение для потенциала  $U$ , обусловленного системой петель, в виде

$$U(p) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{L}_{qp}}{L_{qp}^3} dV. \quad (\text{IV.110})$$

Эти уравнения играют очень важную роль в теории магнитных методов, которую мы детально рассмотрим позднее.

Обсудим общий подход к вычислению магнитного поля, вызванного токами в неоднородной проводящей среде. Модель кусочно-однородной среды показана на рис. IV.6, а. Определение магнитного поля в такой модели обычно включает три этапа:

1. Решение прямой задачи для электрического поля, т. е. определение поля  $\mathbf{E}$  в каждой точке среды.

2. Использование (IV.96) для вычисления векторного потенциала  $\mathbf{A}$ .

3. Вычисление магнитного поля из уравнения

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}.$$

Второй шаг этой процедуры предполагает интегрирование по объему во всем пространстве и, так как величина и направление вектора плотности тока  $\mathbf{j}$  изменяются от точки к точке, определение векторного потенциала обычно очень затруднительно и громоздко. Это особенно заметно в относительно простых моделях, когда электрическое поле может быть выражено в явном виде. Для упрощения вычислений магнитного поля опишем подход, позволяющий в уравнении (IV.96)

$$\mathbf{A}(p) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(q)}{L_{qp}} dV$$

заменить интегрирование по объему интегрированием по поверхности.

Рассмотрим модель среды, когда неоднородность с проводимостью  $\gamma_i$  находится под земной поверхностью, а проводимость окружающей среды  $\gamma_e$  (рис. IV.6, б). Часть векторного потенциала, вызванная токами, текущими вне неоднородности, имеет вид

$$\mathbf{A}_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_i} \frac{\mathbf{j}(q)}{L_{qp}} dV = \frac{\mu_0 \gamma_i}{4\pi} \int_{V_i} \frac{\mathbf{E}(q) dV}{L_{qp}} = - \frac{\mu_0 \gamma_i}{4\pi} \int_{V_i} \frac{\nabla U(q)}{L_{qp}} dV, \quad (\text{IV.111})$$

так как  $\mathbf{j}(q) = \gamma_i \mathbf{E}(q) = -\gamma_i \nabla U(q)$  и  $V_i$  — объем, занимаемый неоднородностью.

Исходя из равенства

$$\nabla^q \frac{U}{L_{qp}} = U \nabla^q \frac{1}{L_{qp}} + \frac{1}{L_{qp}} \nabla^q U,$$

имеем

$$\mathbf{A}_i(p) = - \frac{\mu_0 \gamma_i}{4\pi} \int_{V_i} \nabla^q \frac{U}{L_{qp}} dV + \frac{\mu_0 \gamma_i}{4\pi} \int_{V_i} U(q) \nabla^q \frac{1}{L_{qp}} dV, \quad (\text{IV.112})$$

где индекс « $q$ » означает, что переменная рассматривается в произвольной точке  $q$  объема  $V$ . Ввиду того, что

$$\nabla^q \frac{1}{L_{qp}} = - \nabla^p \frac{1}{L_{qp}},$$

мы можем поменять порядок интегрирования и дифференцирования во втором интеграле в (IV.112). Тогда получим

$$\frac{\mu_0 \gamma_i}{4\pi} \int_{V_i} U(q) \nabla^q \frac{1}{L_{qp}} dV = - \frac{\mu_0 \gamma_i}{4\pi} \nabla^p \int_{V_i} \frac{U(q)}{L_{qp}} dV.$$

Другими словами, этот интеграл является градиентом некоторой функции и, следовательно, не влияет на магнитное поле. Соответственно, мы будем рассматривать векторный потенциал  $\mathbf{A}_i$  в виде

$$\mathbf{A}_i = - \frac{\mu_0 \gamma_i}{4\pi} \int_{V_i} \nabla^q \frac{U}{L_{qp}} dV. \quad (\text{IV.113})$$

Используя равенство

$$\int_V \text{grad } T dV = \int_S T d\mathbf{S},$$

получаем

$$\mathbf{A}_i = - \frac{\mu_0 \gamma_i}{4\pi} \int_{S_i} \frac{U(q)}{L_{qp}} dS, \quad (\text{IV.114})$$

где  $S_i$  — поверхность, ограничивающая объем  $V_i$ ;  $d\mathbf{S} = dS \mathbf{n}$ , где  $\mathbf{n}$  направлена вне неоднородности.

Аналогично, векторный потенциал, обусловленный токами в окружающей среде, можно представить как

$$\mathbf{A}_e = - \frac{\mu_0 \gamma_e}{4\pi} \int_{S_i} \frac{U(q)}{L_{qp}} dS_* - \frac{\mu_0 \gamma_e}{4\pi} \int_{S_0} \frac{U(q)}{L_{qp}} dS, \quad (\text{IV.115})$$

где  $dS_*$  — элемент поверхности  $S_i$ , при условии, что нормаль направлена внутрь неоднородности, т. е.  $d\mathbf{S} = -dS \mathbf{n}$ . В то же время  $S_0$  — земная поверхность с нормалью, направленной наружу.

Суммируя выражения (IV.114), (IV.115), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(p) &= \mathbf{A}_i(p) + \mathbf{A}_e(p) = \\ &= \frac{\mu_0 (\gamma_e - \gamma_i)}{4\pi} \int_{S_i} \frac{U(q)}{L_{qp}} dS + \frac{\mu_0 \gamma_e}{4\pi} \int_{S_0} \frac{U(q)}{L_{qp}} dS. \end{aligned} \quad (\text{IV.116})$$

Таким образом, мы заменили объемные интегралы поверхностными, вычисление которых обычно много проще. Более того, подобно электрическому полю, подынтегральные функции в этих поверхностных интегралах содержат потенциал  $U$ , что также облегчает вычисления. Применяя подобный подход, очень легко обобщить (IV.116) для более сложных моделей. Например, если окружающая среда состоит из двух частей с проводимостями  $\gamma_{1e}$  и  $\gamma_{2e}$  соответственно (рис. IV.6, в), то

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(p) &= \frac{\mu_0 (\gamma_{1e} - \gamma_i)}{4\pi} \int_{S_i} \frac{U(q)}{L_{qp}} dS - \frac{\mu_0 \gamma_{1e}}{4\pi} \int_{S_{01}} \frac{U(q)}{L_{qp}} dS + \\ &+ \frac{\mu_0 (\gamma_{2e} - \gamma_{1e})}{4\pi} \int_{S_{12}} \frac{U(q)}{L_{qp}} dS - \frac{\mu_0 \gamma_{2e}}{4\pi} \int_{S_{02}} \frac{U(q)}{L_{qp}} dS, \end{aligned} \quad (\text{IV.117})$$

где  $S_{12}$  — граница раздела сред с проводимостью  $\gamma_{1e}$  и  $\gamma_{2e}$ ; направление  $dS_{12}$  показано на рис. IV.6, в.

Векторный потенциал  $\mathbf{A}(p)$ , определяемый этим выражением, отличается на градиент некоторой скалярной функции от потенциала (IV.96), однако это не влияет на магнитное поле. Также заметим следующее:

а) уравнения (IV.116), (IV.117) не учитывают векторный потенциал  $\mathbf{A}$ , вызванный токами в проводниках, но эту часть магнитного поля можно легко вычислить;

б) применяя равенство

$$\int_S \text{grad}^s T dS = \oint_{\mathcal{L}} T v dl,$$

можно вывести поверхностную аналогию выражения (IV.117).

Наконец, рассмотрим подход, основанный на одновременном определении электрического и магнитного полей. Исходя из результатов, полученных как в предыдущих главах, так и в этой главе, можно представить систему уравнений электрического и магнитного полей следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{I} \quad \text{rot } \mathbf{E} &= 0, & \text{II} \quad \text{div } \mathbf{E} &= 0, \\ \text{III} \quad \text{rot } \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j}, & \text{IV} \quad \text{div } \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{IV.118})$$

Сначала введем скалярный и векторный потенциалы.

Как следует из уравнений I и IV системы (IV.118),

$$\mathbf{E} = -\text{grad } U \quad \text{и} \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (\text{IV.119})$$

Подставляя определения (IV.119) в уравнение III системы (IV.118) и принимая во внимание закон Ома, получим

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = -\mu_0 \gamma \text{grad } U.$$

Так как

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} = -\nabla^2 \mathbf{A},$$

имеем

$$\text{grad div } \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \gamma \text{grad } U. \quad (\text{IV.120})$$

Используем теперь тот факт, что бесконечное количество потенциалов описывает одно и то же поле, и выберем такую пару  $\mathbf{A}$  и  $U$ , которая упрощает уравнение (IV.120). Например, предположим, что

$$\text{div } \mathbf{A} = -\mu_0 \gamma U, \quad \text{если} \quad \gamma \neq 0. \quad (\text{IV.121})$$

Тогда вместо уравнения (IV.120) получим векторную форму уравнения Лапласа:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = 0 \quad (\text{IV.122})$$

и, согласно (IV.119),

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\mu_0 \gamma} \text{grad div } \mathbf{A}, \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (\text{IV.123})$$

Таким образом, мы выразили оба поля при помощи только векторного потенциала и вывели уравнение (IV.122), описывающее поведение функции  $\mathbf{A}$  в тех точках, где нет источников поля.

В формулировку краевой задачи необходимо включить граничные условия вблизи токовых электродов и линии тока, уходящие

от них в бесконечность. К тому же надо определить поведение векторного потенциала на границе сред с различными сопротивлениями. Это поведение векторного потенциала следует из непрерывности тангенциальной компоненты электрического и магнитного полей, если  $\dot{i} = 0$ , а также нормальной компоненты плотности тока и магнитного поля.

Теперь рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих поведение поля в проводящей среде.

#### IV.5. ПОВЕДЕНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ, ВЫЗВАННОГО ТОКАМИ ПРОВОДИМОСТИ

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих поведение магнитного поля в различных моделях проводящей среды. Этот анализ интересен с двух точек зрения. Прежде всего, он имеет практическое значение, так как многие геофизические методы, например метод заряженного тока, основаны на изучении поля  $\mathbf{B}$ , вызванного постоянным током, хотя практически измеряются низкочастотные поля. Во-вторых, во многих случаях постоянное магнитное поле описывает асимптотическое поведение переменных полей, широко используемых в электромагнитных методах.

##### Пример 1. Токовый электрод в однородной среде

Предположим, что токовый электрод находится в однородной среде с удельным сопротивлением  $\rho$  (рис. IV.7, *a*). Тогда, как было показано в главе III, электрическое поле так же, как и плотность тока, имеет только радиальную компоненту и

$$\mathbf{E} = \frac{\rho I}{4\pi R^2} \mathbf{R}_0, \quad \mathbf{j} = \frac{I}{4\pi R^2} \mathbf{R}_0,$$

где  $I$  — ток;  $\mathbf{R}_0$  — единичный вектор.

В соответствии с законом Био — Савара каждый элемент тока создает магнитное поле, и нашей целью является нахождение поля, вызванного всеми токами в проводящей среде в любой точке  $p$ .

Для определения поля  $\mathbf{B}$  рассмотрим плоскость, проходящую через электрод и точку наблюдения  $p$ . Как видно из рис. IV.7, *a*, всегда можно найти два симметрично расположенных на плоскости элемента тока. Используя закон Био — Савара, можно легко увидеть, что их магнитные поля равны нулю в любой точке этой плоскости. Учитывая произвольную ориентацию плоскости, заключаем, что магнитное поле, вызванное всеми токами в однородной среде, равно нулю:

$$\mathbf{B} \equiv 0. \quad (\text{IV.124})$$

Этот интересный результат был получен при помощи очень

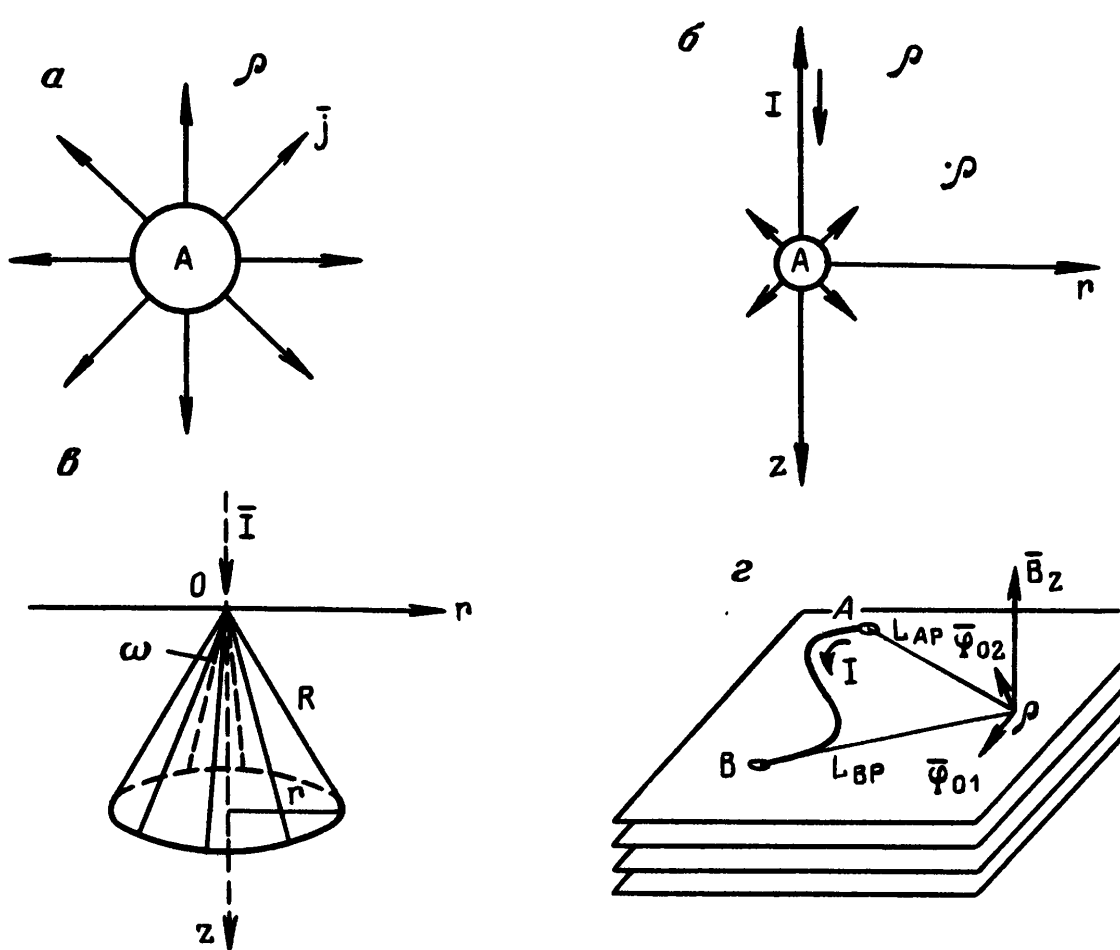


Рис. IV.7. Токовый электрод в однородной среде (а); токовый электрод и токовая линия в однородной среде (б); магнитное поле: *v* — под земной поверхностью, *z* — на земной поверхности горизонтально-слоистой среды

простого подхода, однако здесь осталась одна проблема. Действительно, из первого полевого уравнения

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

следует, что с точностью до коэффициента пропорциональности  $\mu_0 \text{rot } \mathbf{B}$  равен плотности тока в этой точке. Однако в нашем случае в соответствии с (IV.124)  $\text{rot } \mathbf{B}$  равен нулю в окрестности любой точки. Для понимания этого парадокса вспомним, что постоянное магнитное поле генерируется замкнутыми токами, однако в этом примере заряды движутся в радиальном направлении от токового электрода к бесконечности; это означает, что линии тока не являются замкнутыми. Следовательно, уравнения, описывающие магнитное поле, нельзя применить в этом случае. Предположим, что ток возвращается к электроду по проволоке, как показано на рис. IV.7, б, и, следовательно, векторные линии плотности тока замкнуты. Магнитное поле можно представить как сумму двух полей:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2,$$

где  $\mathbf{B}_1$  — поле, вызванное током в проволоке, и  $\mathbf{B}_2$  — поле, обусловленное радиальным распределением токов в однородной среде. В соответствии с (IV.124)  $\mathbf{B}_2$  равно нулю и, следовательно,

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1.$$



Для определения поля  $\mathbf{B}_1$  введем цилиндрическую систему координат  $r, \varphi, z$ , начало  $O$  которой совмещено с центром электрода. Тогда в соответствии с (IV.35) имеем

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right) \varphi_0. \quad (\text{IV.125})$$

Покажем что, в отличие от предыдущего случая, поле  $\mathbf{B}$ , даваемое выражением (IV.125), удовлетворяет первому полевому уравнению. С этой целью перепишем (IV.125) в сферической системе координат с тем же началом:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R \sin \theta} (1 - \cos \theta) \varphi_0. \quad (\text{IV.126})$$

Учитывая, что в сферической системе координат

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{i}_R & R\mathbf{i}_\theta & R \sin \theta \mathbf{i}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ 0 & 0 & R \sin \theta B_\varphi \end{vmatrix}, \quad (\text{IV.127})$$

и подставляя (IV.126) в (IV.127), получим

$$\text{rot}_R \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} = \mu_0 \mathbf{j}_R, \quad \text{rot}_\theta \mathbf{B} = \text{rot}_\varphi \mathbf{B} = 0$$

или  $\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ .

### Пример 2. Токовый электрод на поверхности горизонтально-слоистой среды

Сначала мы рассмотрим случай, когда электрод находится на поверхности однородного полупространства и ток поступает в электрод по вертикальной проволоке (рис. IV.7, в). Как было показано в части III, электрическое поле в каждой точке проводящей среды

$$\mathbf{E} = \frac{\rho I}{2\pi R^2} \mathbf{R}_0$$

и, следовательно, вектор плотности тока равен

$$\mathbf{j} = \frac{1}{2\pi R^2} \mathbf{R}_0. \quad (\text{IV.128})$$

Так как магнитное поле  $\mathbf{B}$ , вызванное линейным и объемным токами, имеет осевую симметрию, можно показать, что в цилиндрической системе координат

$$B_r = B_z = 0, \quad \mathbf{B} = B_\varphi \varphi_0$$

и

$$\partial B_\varphi / \partial \varphi = 0. \quad (\text{IV.129})$$

Поэтому естественно использовать первое уравнение поля в интегральной форме

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_S, \quad (\text{IV.130})$$

где  $I_S$  — ток, текущий через любую поверхность, ограниченную контуром  $\mathcal{L}$ . В этом примере систему уравнений поля можно применить, так как линии тока замкнуты. Кроме того, приняв во внимание осевую симметрию поля, мы можем упростить уравнение (IV.130) и записать

$$2\pi r B_\varphi = \mu_0 I_S,$$

откуда

$$B_\varphi = \mu_0 \frac{I_S}{2\pi r}, \quad (\text{IV.131})$$

где  $\mathcal{L}$  — окружность с радиусом  $r$ , расположенная в горизонтальной плоскости, центр которой находится на оси  $z$ .

Как следует из этого уравнения, на земной поверхности и над ней

$$B_\varphi = \mu_0 I / 2\pi r, \quad \text{если } z \leq 0. \quad (\text{IV.132})$$

Это выражение совпадает с выражением для бесконечно длинной токопроводящей линии. Согласно (IV.125), если  $z = 0$ , ток в бесконечно длинной полулинии, находящейся над земной поверхностью, создает на этой поверхности магнитное поле

$$B_\varphi = \mu_0 I / 4\pi r.$$

Следовательно, токи в проводящей среде, текущие от электрода, также генерируют поле  $\mathbf{B}$ . Тангенциальная компонента  $B$  равна

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} - \frac{\mu_0 I}{4\pi r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}, \quad \text{если } z = 0. \quad (\text{IV.133})$$

Интересно заметить, что эти объемные токи создают такое же поле, как и половина бесконечно длинной проволоки, направленной вертикально вниз, в которой течет ток  $I$ . Также важно подчеркнуть, что магнитное поле на земной поверхности, вызванное токами, стекающими с электрода в горизонтально-слоистую среду, не зависит от последовательности проводимостей слоев. Это прямо следует из осевой симметрии, которая позволяет применять (IV.132).

Исследуем магнитное поле в однородном полупространстве под земной поверхностью и с этой целью используем (IV.131). Так как вектор плотности тока имеет только радиальную компоненту  $j_R$ , ток  $I_S$ , протекающий через сферическую поверхность  $S$  и ограниченный кругом  $\mathcal{L}$  с радиусом  $r$  (см. рис. IV.7, в), равен

$$I_S = j_R S.$$

Принимая во внимание, что

$$j_R = \gamma E_R = I/2\pi R^2 \quad \text{и} \quad S = \omega R^2,$$

имеем

$$I_S = \omega I/2\pi, \quad (\text{IV.134})$$

где  $\omega$  — телесный угол, под которым поверхность  $S$  видна из электрода. В соответствии с (I.48) телесный угол в этом случае равен

$$\omega = 2\pi (1 - \cos \alpha), \quad (\text{IV.135})$$

где

$$\alpha = \sin^{-1} \frac{r}{R}.$$

Подставляя (IV.134), (IV.135) в (IV.131), получим

$$B_\varphi = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right). \quad (\text{IV.136})$$

Это уравнение описывает магнитное поле, вызванное как объемными токами, так и током в вертикальной проволоке.

**Пример 3.** Ток, текущий в проволоке, заземленной на поверхности горизонтально-слоистой среды (рис. IV.7, з)

Используя принцип суперпозиции, эту модель протекания тока можно представить так.

1. Токи, стекающие с электрода  $A$  в проводящую среду.
2. Токи, вытекающие из проводящей среды и втекающие в электрод  $B$ .
3. Ток  $I$  в проволоке, соединяющей электроды.

В соответствии с формулой (IV.133), магнитное поле, обусловленное токами в проводящей среде, на земной поверхности имеет вид

$$\mathbf{B}_t(\rho) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_A \rho} \varphi_{01} + \frac{\mu_0 I}{4\pi r_B \rho} \varphi_{02}, \quad (\text{IV.137})$$

где  $r_A$  и  $r_B$  — расстояния от электродов  $A$  и  $B$  до точки наблюдения соответственно, а  $\varphi_{01}$  и  $\varphi_{02}$  — единичные векторы, как определено на рис. IV.7, з. Ясно, что поле  $\mathbf{B}_t$  — касательное к земной поверхности и не зависит от параметров горизонтально-слоистой среды. Поэтому магнитное поле постоянных токов не используется для изучения геоэлектрических параметров такой среды.

Теперь мы будем изучать третий и последний элемент системы, т. е. ток, текущий в проволоке, соединяющей электроды и расположенной на земной поверхности. Согласно закону Био — Савара,

ЭТОТ ТОК В ТОЧКАХ НА ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ВЫЗЫВАЕТ ТОЛЬКО ВЕРТИКАЛЬНУЮ КОМПОНЕНТУ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \mathbf{k} \int_B^A \frac{dl}{L_{qp}^2} \sin(\mathbf{dl}, L_{qp}), \quad (\text{IV.138})$$

где  $\mathbf{k}$  — единичный вектор, перпендикулярный к земной поверхности;  $d\mathbf{l}$  — элемент линии с током и  $L_{qp}$  — расстояние между элементом  $dl$  и точкой наблюдения.

Формулы (IV.137), (IV.138) полностью описывают магнитное поле заземленной токовой линии, лежащей на поверхности горизонтально-однородной проводящей однородной среды.

Предположим, что поле  $\mathbf{B}$  наблюдается на расстояниях значительно больших, чем расстояние между электродами  $A$  и  $B$ , и ток течет от  $A$  к  $B$  по прямой линии. Тогда система зарядов, возникающих на поверхности электродов, соединенных проволокой  $AB$ , может быть представлена как электрический диполь с моментом

$$\mathbf{M} = \frac{\rho I}{2\pi} AB \mathbf{l}_0, \quad (\text{IV.139})$$

где  $\mathbf{l}_0$  — единичный вектор, направленный вдоль линии  $BA$  (рис. IV.8, *a*).

При выводе приближенных выражений для магнитного поля из формул (IV.137), (IV.138) будем использовать следующие обозначения:  $r$  — расстояние от середины диполя до точки наблюдения,

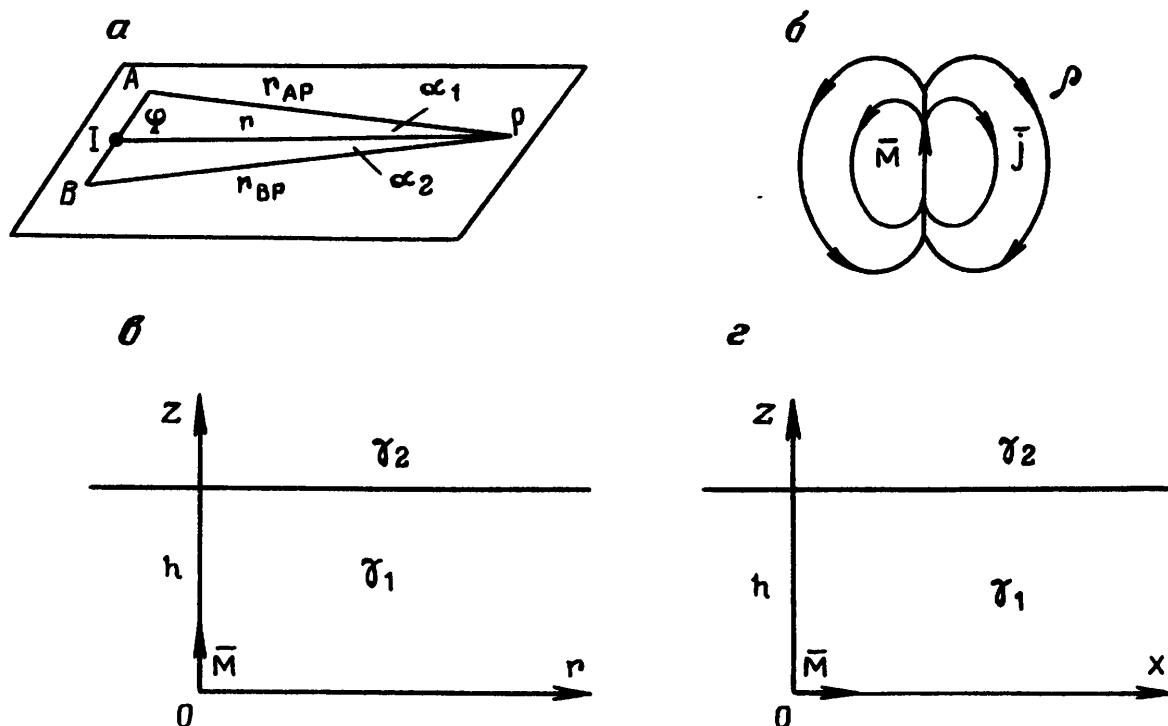


Рис. IV.8. Электрический диполь: *a* — на земной поверхности, *б* — в однородной среде; *в* — вертикальный диполь при наличии горизонтальной поверхности раздела сред; *г* — горизонтальный диполь при наличии горизонтальной поверхности раздела сред

$\varphi$  — угол между моментом диполя и радиус-вектором  $r$ . Как можно видеть из рис. IV.8, а, справедливы следующие соотношения:

$$r_{A_p} = \left[ r^2 + \left( \frac{AB}{2} \right)^2 - AB r \cos \varphi \right]^{1/2},$$

$$r_{B_p} = \left[ r^2 + \left( \frac{AB}{2} \right)^2 + AB r \cos \varphi \right]^{1/2}, \quad (\text{IV.140})$$

$$\frac{AB}{2r_{A_p}} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \varphi}, \quad \frac{AB}{2r_{B_p}} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \varphi}.$$

Полагая, что  $r \gg AB$ , имеем

$$r_{A_p} \approx r - \frac{AB}{2} \cos \varphi, \quad r_{B_p} \approx r + \frac{AB}{2} \cos \varphi$$

и

$$\sin \alpha_1 \approx \frac{AB \sin \varphi}{2 \left( r - \frac{AB}{2} \cos \varphi \right)},$$

$$\sin \alpha_2 \approx \frac{AB \sin \varphi}{2 \left( r + \frac{AB}{2} \cos \varphi \right)}$$

или  $\sin \alpha_1 \approx \sin \alpha_2 \approx \frac{AB}{2} \sin \varphi$ .

Используя формулу (IV.137), получаем выражение для тангенциальной компоненты поля в цилиндрической системе координат:

$$B_r = - \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \sin \alpha - \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \sin \alpha = - \frac{\mu_0 2I}{4\pi r} \frac{AB}{2r} \sin \varphi = - \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \sin \varphi$$

и

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_{A_p}} \cos \alpha - \frac{\mu_0 I}{4\pi r_{B_p}} \cos \alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( \frac{1}{r_{A_p}} - \frac{1}{r_{B_p}} \right),$$

так как  $\cos \alpha = 1$ .

Таким образом,

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 I AB}{4\pi r^2} \sin \varphi.$$

Как следует из формулы (IV.138), вертикальная компонента магнитного поля диполя равна

$$B_z = \frac{\mu_0 I AB}{4\pi r^2} \sin \varphi.$$

В результате магнитное поле электрического диполя на земной поверхности имеет вид

$$B_r = -\frac{\mu_0 I AB}{4\pi r^2} \sin \varphi, \quad B_\varphi = \frac{\mu_0 I AB}{4\pi r^2} \cos \varphi, \quad B_z = \frac{\mu_0 I AB}{4\pi r^2} \sin \varphi. \quad (\text{IV.141})$$

Формулы (IV.141) ярко иллюстрируют тот факт, что измерения магнитного поля диполя на земной поверхности не дают никакой информации о распределении удельных сопротивлений в горизонтально-слоистой среде. Однако это заключение справедливо в случае, когда магнитное поле измерено ниже земной поверхности. Измерения магнитного поля на земной поверхности тем не менее могут быть полезны для обнаружения негоризонтальных структур, что особенно интересно в разведке.

Используя принцип суперпозиции, мы можем представить магнитное поле, вызванное током, текущим в линии конечной длины и произвольной формы, как сумму полей, описываемых формулами (IV.141).

Эти выражения играют важную роль при исследовании переменных магнитных полей, вызываемых током в заземленных проводах. Они применимы, если электромагнитная индукция не особенно существенна.

#### Пример 4. Электрический диполь в однородной среде

Предположим, что электрический диполь с моментом  $\mathbf{M}$  находится в однородной среде с удельным сопротивлением  $\rho$  (рис. IV.8, б). Очевидно, векторный потенциал магнитного поля можно представить в виде следующей суммы:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_+ + \mathbf{A}_- + \mathbf{A}_l,$$

где  $\mathbf{A}_+$  и  $\mathbf{A}_-$  — векторные потенциалы, вызванные токами в среде, текущими от электрода  $A$  и в электрод  $B$  соответственно, в то время как  $\mathbf{A}_l$  — векторный потенциал, генерируемый током в проводе. Так как распределение тока в однородной среде является суперпозицией двух систем радиальных токов, их магнитное поле равно нулю. Соответственно, векторные потенциалы  $\mathbf{A}_+$  и  $\mathbf{A}_-$  могут быть представлены как градиенты. В частности, они могут быть равны нулю. Следовательно, векторный потенциал электрического диполя с точностью до градиента от некоторой функции такой же, как и векторный потенциал элемента тока  $d\mathbf{l}$ , т. е.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_l = \mu_0 I d\mathbf{l} / 4\pi L_{qp}. \quad (\text{IV.143})$$

Используем сферическую систему координат  $R, \theta, \varphi$ , начало которой находится в середине диполя, а ось  $z$  направлена вдоль вектора момента диполя.

Тогда формулу (IV.143) можно записать в виде

$$\mathbf{A} = A_z \mathbf{k} = (\mu_0 I dz / 4\pi R) \mathbf{k}, \quad (\text{IV.144})$$

где  $\mathbf{k}$  — единичный вектор, характеризующий направление момента диполя. В соответствии с (IV.144) векторный потенциал  $\mathbf{A}$  имеет одну компоненту  $A_z$  и зависит только от расстояния  $R$ . Теперь можно легко определить магнитное поле.

### Пример 5. Вертикальный электрический диполь в среде с одной горизонтальной границей

Поместим вертикальный электрический диполь в среду с проводимостью  $\gamma_1$  на расстоянии  $h$  от границы раздела сред. Проводимость верхнего пространства равна  $\gamma_2$ . Учитывая осевую симметрию распределения тока, введем цилиндрическую систему координат таким образом, чтобы центр диполя совпадал с ее началом и ось  $z$  была направлена вверх (рис. IV.8, в).

Как было показано в главе III, плотность тока легко вычисляется в каждой точке проводящей среды и, следовательно, магнитное поле, вызываемое этими токами, можно определить, исходя из закона Био — Савара. Однако эта процедура требует интегрирования по всему пространству. Поэтому используем подход, основанный на одновременном определении электрического и магнитного полей, который был описан в предыдущем разделе. В соответствии с (IV.121), (IV.123)

$$\nabla^2 \mathbf{A} = 0,$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\mu_0 \gamma} \text{grad div } \mathbf{A}, \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$$

и (IV.145)

$$\text{div } \mathbf{A} = -\mu_0 \gamma U.$$

Для того, чтобы облегчить решение граничной задачи, будем полагать, что векторный потенциал магнитного поля, так же, как и электрический диполь в однородной среде, имеет только вертикальную компоненту. Тогда с учетом осевой симметрии уравнения (IV.145) упрощаются, и мы имеем

$$\nabla^2 A_z = 0, \quad \frac{\partial A_z}{\partial z} = -\mu_0 \gamma U,$$

$$E_r = \frac{1}{\mu_0 \gamma} \frac{\partial^2 A_z}{\partial r \partial z}, \quad E_z = \frac{1}{\mu_0 \gamma} \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2},$$

$$E_\varphi = 0$$

и

$$B_r = B_z = 0, \quad B_\varphi = -\frac{\partial A_z}{\partial r}. \quad (\text{IV.146})$$

Теперь мы готовы сформулировать краевую задачу для векторного потенциала  $A$ , который представим в виде

$$A_r = A_\varphi = 0,$$

но

$$A_z = \begin{cases} A_{1z}, & \text{если } z \leq h \\ A_{2z}, & \text{если } z \geq h \end{cases} \quad (\text{IV.147})$$

и

$$A_{1z} = \frac{\mu_0 I dz}{4\pi r} + A_{1z}^s, \quad (\text{IV.148})$$

где  $dz$  — расстояние между электродами;  $R = \sqrt{r^2 + z^2}$  и  $A_{1z}^s$  — часть векторного потенциала, возникающая вследствие неоднородности среды. Таким образом, исходя из системы уравнений для электрического и магнитного полей, заключаем, что векторный потенциал должен удовлетворять следующим условиям.

1. В точках без источников векторный потенциал является решением уравнения Лапласа

$$\nabla^2 A_z = 0,$$

которое в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} = 0, \quad (\text{IV.149})$$

так как  $A_z$  не зависит от координаты  $\varphi$ .

2. Потенциал  $A_z$  стремится к нулю на бесконечности:

$$A_z \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad R \rightarrow \infty. \quad (\text{IV.150})$$

3. Около диполя функция  $A_z$  ведет себя как потенциал электрического диполя в однородной среде:

$$A_z \rightarrow A_{0z} = \mu_0 I dz / 4\pi R, \quad \text{когда} \quad R \rightarrow 0. \quad (\text{IV.151})$$

4. На границе раздела сред с различными проводимостями компоненты  $j_z$ ,  $E_r$  и  $B_\varphi$  — непрерывны и, следовательно, из формул (IV.146) получаем

$$\frac{1}{\gamma_1} \frac{\partial^2 A_{1z}}{\partial r \partial z} = \frac{1}{\gamma_2} \frac{\partial^2 A_{2z}}{\partial r \partial z}, \quad \frac{\partial^2 A_{1z}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 A_{2z}}{\partial z^2} \quad (\text{IV.152})$$

и

$$\frac{\partial A_{1z}}{\partial r} = \frac{\partial A_{2z}}{\partial r}.$$

Из первого уравнения поля, записанного в интегральной форме,

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_S$$



следует, что непрерывность нормальной компоненты плотности тока приводит к непрерывности тангенциальной компоненты магнитного поля. Следовательно, последние два равенства в формулах (IV.152) можно заменить одним и тогда условия на границе раздела примут вид

$$\frac{1}{\gamma_1} \frac{\partial^2 A_{1z}}{\partial r \partial z} = \frac{1}{\gamma_2} \frac{\partial^2 A_{1z}}{\partial r \partial z}, \quad \frac{\partial A_{1z}}{\partial r} = \frac{\partial A_{2z}}{\partial r}.$$

Другое упрощение связано с тем фактом, что непрерывность функции на некоторой поверхности обеспечивает непрерывность ее тангенциальных производных и, следовательно, взамен формул (IV.152) имеем

$$A_{1z} = A_{2z} \frac{1}{\gamma_1} \frac{\partial A_{1z}}{\partial z} = \frac{1}{\gamma_2} \frac{\partial A_{2z}}{\partial z}, \quad \text{если } z = h. \quad (\text{IV.153})$$

Таким образом, мы описали поведение векторного потенциала  $A$  в любой точке и в то же время сформулировали граничную задачу, имеющую единственное решение.

Будем искать решение уравнения Лапласа. Применяя метод разделения переменных и используя результаты, полученные в главе III, представим векторный потенциал как

$$A_{1z} = \frac{\mu_0 I dz}{4\pi R} + \frac{\mu_0 I dz}{4\pi} \int_0^\infty (C_m e^{mz} + D_m e^{-mz}) J_0(mr) dm$$

и (IV.154)

$$A_{2z} = \frac{\mu_0 I dz}{4\pi} \int_0^\infty (E_m e^{mz} + F_m e^{-mz}) J_0(mr) dm.$$

Учитывая, что векторный потенциал стремится к нулю на бесконечности, полагаем

$$D_m = E_m = 0.$$

Формулы (IV.154) упрощаются, и мы получаем

$$A_{1z} = \frac{\mu_0 I dz}{4\pi R} + \frac{\mu_0 I dz}{4\pi} \int_0^\infty C_m e^{mz} J_0(mr) dm, \quad \text{если } z \leq h$$

и (IV.155)

$$A_{2z} = \frac{\mu_0 I dz}{4\pi} \int_0^\infty F_m e^{-mz} J_0(mr) dm, \quad \text{если } z \geq h.$$

Эти функции удовлетворяют всем условиям граничной задачи, кроме условий на границе раздела, когда  $z = h$ .

Для того, чтобы удовлетворить условиям (IV.153), будем следовать точно такой же процедуре, как и в случае электронного поля (глава III), и представим векторный потенциал электрического диполя в однородной среде как

$$\frac{\mu_0 I dz}{4\pi R} = \frac{\mu_0 I dz}{4\pi} \int_0^{\infty} e^{-m|z|} J_0(mr) dm. \quad (\text{IV.156})$$

Следовательно, выражение для векторного потенциала в среде с проводимостью  $\gamma_1$  можно записать в форме

$$A_{1z} = \frac{\mu_0 I dz}{4\pi} \int_0^{\infty} [e^{-m|z|} + C_m e^{mz}] J_0(mr) dm.$$

Учитывая это выражение и подставляя (IV.155) в (IV.153), получаем два линейных уравнения с двумя неизвестными:

$$\begin{aligned} e^{-mh} + C_m e^{mh} &= F_m e^{-mh}, \\ \rho_1 \{-e^{-mh} + C_m e^{mh}\} &= -\rho_2 F_m e^{-mh}, \end{aligned}$$

так как из равенства этих интегралов следует равенство подынтегральных функций.

Решив эту систему, получим

$$C_m = -K_{12} e^{-2mh}, \quad F_m = \frac{2\rho_1}{\rho_1 + \rho_2}, \quad (\text{IV.157})$$

где

$$K_{12} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}.$$

Итак, векторный потенциал  $A$  дается выражениями

$$\begin{aligned} A_{1z} &= \frac{\mu_0 I dz}{4\pi R} - \frac{\mu_0 I dz}{4\pi} K_{12} \int_0^{\infty} e^{-(2h-z)m} J_0(mr) dm, \quad \text{если } z \leq h; \\ A_{2z} &= \frac{\mu_0 I dz}{4\pi} (1 - K_{12}) \int_0^{\infty} e^{-mz} J_0(mr) dm, \quad \text{если } z \geq h, \end{aligned} \quad (\text{IV.158})$$

и, так как  $A_{1z}$  и  $A_{2z}$  удовлетворяют всем условиям граничной задачи, они однозначно определяют магнитное поле.

Используя равенство (IV.156), выразим векторный потенциал через элементарные функции:

$$A_{1z} = \frac{\mu_0 I dz}{4\pi R} - \frac{\mu_0 I dz}{4\pi} \frac{K_{12}}{R_1}, \quad \text{если } z \leq h, \quad (\text{IV.159})$$

$$A_{2z} = \frac{\mu_0 I dz}{4\pi R} (1 - K_{12}), \quad \text{если } z \geq h,$$

где

$$R_1 = \sqrt{(2h - z)^2 + r^2}.$$

Приведем несколько комментариев, освещающих поведение поля.

1. Потенциал  $A_{1z}$  в среде с проводимостью  $\gamma_1$  является суммой двух членов, которые называются потенциалом первичного поля  $A_{0z}$  и вторичного поля  $A_{1z}^s$ . Последний совпадает с векторным потенциалом фиктивного вертикального диполя, расположенного в точке с координатами  $0, 2h$ . Другими словами, эта точка является зеркальным отражением точки начала координат, в которой находится электрический диполь. Ток фиктивного диполя равен

$$I_f = -K_{12}I. \quad (\text{IV.160})$$

2. Векторный потенциал во второй среде  $A_{2z}$  совпадает с векторным потенциалом электрического диполя, расположенного в начале координат, с током, равным сумме токов реального и фиктивного диполей.

3. Если вторая среда имеет большее удельное сопротивление, то моменты двух диполей направлены противоположно, но если верхняя среда имеет меньшее удельное сопротивление, то моменты диполей направлены одинаково.

4. Это исследование показывает, что в нашем примере можно применять метод зеркальных изображений, который также используется для определения электрических полей. Другими словами, вторичное магнитное поле эквивалентно полю фиктивного вертикального диполя, расположенного либо в начале координат, там где находится реальный диполь, либо в зеркально отраженной относительно границы раздела точке.

5. Согласно формуле (IV.159), в верхнем непроводящем пространстве и на границе  $z = h$  векторный потенциал  $A_{2z}$  равен нулю. Это означает, что магнитное поле, вызванное вертикальным электрическим диполем, зануляется на земной поверхности и над ней:

$$B_\varphi \equiv 0, \quad \text{если } z \geq h \quad \text{и} \quad \rho_2 = \infty. \quad (\text{IV.161})$$

Этот результат также следует из осевой симметрии поля. Действительно, применяя первое уравнение магнитного поля

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_s,$$

имеем для любой горизонтальной окружности с центром на оси  $z$

$$B_\varphi 2\pi r = 0, \quad \text{если } z \geq h,$$

так как ток в непроводящей среде отсутствует. Обусловленная

осевой симметрией формула (IV.161) остается справедливой в однородной по простиранию среде. Обобщая этот результат, можно сказать, что вторичное магнитное поле на земной поверхности и над ней, вызываемое вертикальной компонентой всех токов в горизонтально-слоистой среде, равно нулю независимо от распределения тока.

6. Под земной поверхностью вторичное магнитное поле эквивалентно полю вертикального электрического диполя, расположенного в точке  $r = 0$ ,  $z = 2h$ , момент которого равен по величине и противоположен по направлению моменту реального диполя. Как следует из формулы (IV.159), первичное и вторичное поля не зависят от проводимости и содержат информацию только о положении диполя.

7. При приближении электрического диполя к земной поверхности магнитное поле убывает и на поверхности равно нулю.

8. Заметим, что из условий калибровки [формула (IV.121)]

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = -\mu_0 \gamma U$$

очень просто определить электрическое поле. Действительно, потенциал  $U_1$  в проводящей среде

$$U_1 = -\frac{1}{\mu_0 \gamma_1} \frac{\partial A_{1z}}{\partial z}$$

или

$$U_1(r, z) = \frac{Mz}{4\pi \varepsilon_0 R^3} + \frac{K_{12} M (2h - z)}{4\pi \varepsilon_0 R_1^3}, \quad (\text{IV.162})$$

где  $M = \varepsilon_0 \rho_1 I dz$  — дипольный момент.

Таким же образом получим

$$U_2(r, z) = M (1 - K_{12}) z / 4\pi \varepsilon_0 R^3. \quad (\text{IV.163})$$

**Пример 6. Горизонтальный электрический диполь в среде с однородной горизонтальной границей**

Рассмотрим горизонтальный электрический диполь, расположенный на глубине  $h$  под горизонтальной границей. Используем систему координат Декарта, поместив диполь в ее начало и направив дипольный момент  $\mathbf{M}$  вдоль оси  $z$  (рис. IV.8,  $z$ ).

Как следует из предыдущего примера, наличие горизонтальной границы требует рассмотрения вертикальной компоненты векторного потенциала  $A_z$ . Учитывая, что первичный векторный потенциал имеет компоненту вдоль оси  $x$

$$A_{0x} = \mu_0 I dx / 4\pi R, \quad (\text{IV.164})$$

будем искать решение при помощи двух компонент  $A_x$  и  $A_z$ .

При формулировке краевой задачи для векторного потенциала

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_z \mathbf{k}$$

будем исходить из уравнений (IV.145). Условия, образующие эту задачу, заключаются в следующем.

1. В точках без источников векторный потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \mathbf{A} = 0$$

или

$$\nabla^2 A_x = 0 \quad \text{и} \quad \nabla^2 A_z = 0. \quad (\text{IV.165})$$

2. Вблизи источника векторный потенциал стремится к векторному потенциалу электрического диполя в однородной среде с проводимостью  $\gamma_1$ :

$$\mathbf{A} \rightarrow A_x \cdot \mathbf{i} = \frac{\mu_0 I dx}{4\pi R} \mathbf{i} \quad \text{при} \quad R \rightarrow 0, \quad (\text{IV.166})$$

где

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

3. На бесконечности поле исчезает и, следовательно,

$$\mathbf{A} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad R \rightarrow \infty \quad (\text{IV.167})$$

4. Прежде чем сформулировать условия на границе  $z = h$ , выразим поле через векторный потенциал  $\mathbf{A}$ . Полагая, что компонента  $A_y$  отсутствует ( $A_y \equiv 0$ ), и используя уравнения (IV.145), получим

$$E_x = \frac{1}{\mu_0 \gamma} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \mathbf{A}, \quad E_y = \frac{1}{\mu_0 \gamma} \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} \mathbf{A}, \quad E_z = \frac{1}{\mu_0 \gamma} \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \mathbf{A}, \quad (\text{IV.168})$$

где

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{IV.169})$$

и

$$B_x = \partial A_z / \partial y, \quad B_y = \partial A_x / \partial z - \partial A_z / \partial x, \quad B_z = -\partial A_x / \partial y. \quad (\text{IV.170})$$

Для обеспечения непрерывности компонент  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $j_z$ ,  $B_x$ ,  $B_y$  и  $B_z$  на границе  $z = h$  должны быть справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma_1} \operatorname{div} \mathbf{A}_1 &= \frac{1}{\gamma_2} \operatorname{div} \mathbf{A}_2, \\ \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \mathbf{A}_1 &= \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \mathbf{A}_2, \\ A_{1z} &= A_{2z}, \quad \partial A_{1x} / \partial z = \partial A_{2x} / \partial z, \\ A_{1x} &= A_{2x}, \quad \text{если} \quad z = h. \end{aligned} \quad (\text{IV.171})$$

Заметим, что мы опять используем то, что непрерывность функции на поверхности влечет за собой непрерывность ее тангенциальных производных. Зная также, что непрерывность тангенциальных компонент магнитного поля обеспечивает непрерывность нормальной компоненты плотности тока, получаем условия для векторного потенциала на границе:

$$A_{1x} = A_{2x}, \quad \partial A_{1x} / \partial z = \partial A_{2x} / \partial z$$

(IV.172)

и

$$A_{1z} = A_{2z}, \quad \frac{1}{\gamma_1} \operatorname{div} \mathbf{A}_1 = \frac{1}{\gamma_2} \operatorname{div} \mathbf{A}_2, \quad \text{если } z = h.$$

Эта относительно сложная группа равенств имеет одну замечательную черту. Действительно, равенства (IV.172) можно разделить на две группы. В одну из них входят условия только для компоненты  $A_x$ :

$$A_{1x} = A_{2x}, \quad \partial A_{1x} / \partial z = \partial A_{2x} / \partial z,$$

в то время как другая группа формулирует условия для компоненты  $A_z$ , но также содержит  $A_x$ . Такое разделение условий на границе позволяет значительно упростить вычисления полей. Это происходит потому, что мы можем формулировать краевые задачи для компонент векторного потенциала отдельно. Действительно, из уравнений (IV.165) — (IV.172) получаем

$$\nabla^2 A_x = 0,$$

$$A_{1x} \rightarrow A_{0x} = \mu_0 I dx / 4\pi R \quad \text{при } R \rightarrow \infty, \quad \text{(IV.173)}$$

$$A_{1x} \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow \infty,$$

$$A_{1x} = A_{2x}, \quad \partial A_{1x} / \partial z = \partial A_{2x} / \partial z, \quad \text{если } z = h,$$

и

$$\nabla^2 A_z = 0$$

$$A_z \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow \infty \quad \text{(IV.174)}$$

$$A_{1z} = A_{2z}, \quad \frac{1}{\gamma_1} \operatorname{div} \mathbf{A}_1 = \frac{1}{\gamma_2} \operatorname{div} \mathbf{A}_2.$$

Необходимо заметить, что согласно теореме единственности, уравнения (IV.173), (IV.174) однозначно определяют компоненты  $A_x$  и  $A_z$  соответственно.

Таким образом, решение краевой задачи состоит из двух этапов, а именно:

а) определения горизонтальной компоненты  $A_x$  из уравнений (IV.173);

б) определения вертикальной компоненты  $A_z$  из уравнения (IV.174) при известной компоненте  $A_x$ .

На первом этапе, исходя из уравнения (IV.173), мы найдем

компоненту  $A_x$ . Как следует из уравнений (IV.156) и (IV.166), векторный потенциал первичного магнитного поля можно представить как

$$A_{0x} = \frac{\mu_0 I dx}{4\pi} \int_0^{\infty} e^{-m|z|} J_0(mz) dm. \quad (\text{IV.175})$$

Следовательно, по аналогии с предыдущим примером, решения уравнения Лапласа  $\nabla^2 A_x = 0$ , удовлетворяющие условиям на бесконечности и вблизи диполя, даются выражениями

$$A_{1x} = \frac{\mu_0 I dx}{4\pi} \int_0^{\infty} [e^{-mz} + C_m e^{mz}] J_0(mr) dm, \quad \text{если } z \leq h,$$

$$A_{2x} = \frac{\mu_0 I dx}{4\pi} \int_0^{\infty} D_m e^{-mz} J_0(mr) dm, \quad \text{если } z \leq h.$$

Здесь  $C_m$  и  $D_m$  — неизвестные коэффициенты, зависящие от  $m$ . Используя условия (IV.173), на границе  $z = h$  получим

$$\begin{aligned} e^{-mh} + C_m e^{mh} &= D_m e^{-mh}, \\ -e^{-mh} + C_m e^{mh} &= -D_m e^{-mh}. \end{aligned} \quad (\text{IV.177})$$

Решив эту систему, найдем

$$C_m = 0, \quad D_m = 1.$$

Другими словами, горизонтальная компонента векторного потенциала  $A_x$  не подвержена влиянию горизонтальной поверхности раздела сред и, соответственно,

$$A_x = A_{1x} = A_{2x} = \mu_0 I dx / 4\pi R. \quad (\text{IV.178})$$

Этот результат непосредственно следует из (IV.173), так как эти формулы не содержат проводимости и, следовательно, можно полагать, что среда однородная. Легко показать, что для любой горизонтально-однородной среды горизонтальная компонента векторного потенциала  $A_x$  горизонтального электрического диполя не зависит от параметров среды, т. е.

$$A_x = A_{0x}.$$

Соответственно, принимая во внимание последнее выражение в (IV.170)

$$B_z = -\partial A_x / \partial y,$$

мы должны заключить, что вертикальная компонента магнитного поля горизонтального диполя не подвержена влиянию проводи-

мостей в горизонтально-слоистой среде. Применяя принцип суперпозиции, можно показать, что этот результат остается верным, если вместо диполя мы рассматриваем токнесущий горизонтальный провод произвольной длины.

Теперь перейдем ко второму этапу и, исходя из уравнений (IV.174), определим компоненту  $A_z$ . Для нахождения  $A_z$  используем последнее равенство из (IV.174), которое следует из непрерывности тангенциальных компонент электрических полей:

$$\frac{1}{\gamma_1} \operatorname{div} A_1 = \frac{1}{\gamma_2} \operatorname{div} A_2, \quad \text{если } z = h,$$

$$\frac{1}{\gamma_1} \left( \frac{\partial A_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial A_{1z}}{\partial z} \right) = \frac{1}{\gamma_2} \left( \frac{\partial A_{2x}}{\partial x} + \frac{\partial A_{2z}}{\partial z} \right). \quad (\text{IV.180})$$

В соответствии с уравнениями (IV.175) и (IV.178) имеем

$$\frac{\partial A_{1x}}{\partial x} = \frac{\partial A_{2x}}{\partial x} = \frac{\partial A_{0x}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x}. \quad (\text{IV.181})$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{\partial J_0(mr)}{\partial r} = -m J_1(mr) \quad \text{и} \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \cos \varphi,$$

уравнение (IV.181) можно представить как

$$\frac{\partial A_{1x}}{\partial x} = \frac{\partial A_{2x}}{\partial x} = -\frac{\mu_0 I dx}{4\pi} \cos \varphi \int_0^{\infty} e^{-m|z|} J_1(mr) dm,$$

где  $\varphi$  — угол между осью  $x$  и радиусом  $r$ , в то время как  $J_1(mr)$  — функция Бесселя первого рода.

Равенство (IV.180) выполняется независимо от величины  $r$  и  $\varphi$ , и, следовательно, члены, содержащие компоненту  $A_z$ , выглядят подобно тому, как выглядят члены для  $\partial A_x / \partial x$ . Соответственно, можно описать компоненту  $A_z$  как

$$A_{1z} = \frac{\mu_0 I dx}{4\pi} \cos \varphi \int_0^{\infty} E_m e^{mz} J_1(mr) dm, \quad \text{если } z \leq h, \quad (\text{IV.182})$$

$$A_{2z} = \frac{\mu_0 I dx}{4\pi} \cos \varphi \int_0^{\infty} F_m e^{-mz} J_1(mr) dm, \quad \text{если } z \geq h.$$

В отличие от компоненты  $A_x$ , функции  $A_{1z}$  и  $A_{2z}$  зависят от азимутальной переменной  $\varphi$  и являются решением уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = 0. \quad (\text{IV.183})$$



Подставляя выражения (IV.182) в уравнение (IV.183), убеждаемся, что обе функции  $A_{1z}$  и  $A_{2z}$  удовлетворяют уравнению Лапласа. Также ясно, что они удовлетворяют условиям на бесконечности.

Окончательно, подставляя выражения (IV.182) в равенства

$$A_{1z} = A_{2z}, \quad (\rho_1 - \rho_2) \frac{\partial A_{0x}}{\partial x} = \rho_2 \frac{\partial A_{2z}}{\partial z} - \rho_1 \frac{\partial A_{1z}}{\partial z} \quad \text{при } z = h,$$

имеем

$$\begin{cases} E_m e^{mh} = F_m e^{-mh}, \\ (\rho_2 - \rho_1) m e^{-mh} = -m \rho_2 F_m e^{-mh} - m \rho_1 E_m e^{mh}. \end{cases}$$

При этом

$$E_m = -K_{12} e^{-2mh}, \quad F_m = -K_{12}, \quad (\text{IV.184})$$

где

$$K_{12} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} A_{1z} &= -\frac{\mu_0 I dx}{4\pi} K_{12} \cos \varphi \int_0^{\infty} e^{-2mh} e^{mz} J_1(mr) dm, \quad \text{если } z \leq h, \\ A_{2z} &= -\frac{\mu_0 I dx}{4\pi} K_{12} \cos \varphi \int_0^{\infty} e^{-mz} J_1(mr) dm, \quad \text{если } z \geq h. \end{aligned} \quad (\text{IV.185})$$

Поскольку эти функции удовлетворяют уравнениям (IV.174), они описывают векторный потенциал магнитного поля, возбужденного горизонтальным электрическим диполем, расположенным под горизонтальной границей.

Используя равенство

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} J_1(\beta x) dx = \frac{\sqrt{a^2 + \beta^2} - a}{\beta \sqrt{a^2 + \beta^2}},$$

выразим компоненту  $A_z$  с помощью элементарных функций:

$$A_{1z} = -\frac{\mu_0 I dx}{4\pi} K_{12} \cos \varphi = \frac{\sqrt{r^2 + (2h - z)^2} - (2h - z)}{r \sqrt{r^2 + (2h - z)^2}}$$

и

$$A_{2z} = -\frac{\mu_0 I dx}{4\pi} K_{12} \cos \varphi \frac{\sqrt{r^2 + z^2} - z}{r \sqrt{r^2 + z^2}}. \quad (\text{IV.186})$$

Таким образом, мы находим решение краевой задачи и определяем векторный потенциал  $A$ :

$$A_{1x} = -\frac{\mu_0 I dx}{4\pi R}, \quad (\text{IV.187})$$

$$A_{1z} = \frac{\mu_0 I dx}{4\pi} K_{12} \cos \varphi = \frac{\sqrt{r^2 + (2h - z)^2} - (2h - z)}{r \sqrt{r^2 + (2h - z)^2}}, \quad \text{если } z \leq h,$$

и

$$A_{2x} = -\frac{\mu_0 I dx}{4\pi R}, \quad (\text{IV.188})$$

$$A_{2z} = -\frac{\mu_0 I dx}{4\pi} K_{12} \cos \varphi = \frac{\sqrt{r^2 + h^2} - z}{r \sqrt{r^2 + h^2}}, \quad \text{если } z \geq h.$$

Теперь компоненты магнитного поля можно легко определить с помощью формул (IV.170).

В качестве примера рассмотрим случай, когда диполь и точка наблюдения расположены на земной поверхности:  $K_{12} = 1$ ,  $z = 0$ ,  $h = 0$ .

Тогда

$$A_x = A_{1x} = A_{2x} = -\frac{\mu_0 I dx}{4\pi r}, \quad (\text{IV.189})$$

$$A_z = A_{1z} = A_{2z} = -\frac{\mu_0 I dx}{4\pi r} \cos \varphi.$$

Горизонтальная компонента векторного потенциала  $A_x$  возбуждена элементом тока  $I dx$  и, согласно закону Био — Савара, генерирует на земной поверхности вертикальную компоненту магнитного поля

$$B_z = \frac{\mu_0 I dx}{4\pi r^2} \sin \varphi. \quad (\text{IV.190})$$

В то же время вертикальная компонента векторного потенциала связана с токами в проводящей среде, которые генерируют горизонтальные компоненты поля  $B$ . Используя цилиндрическую систему координат с вертикальной осью  $z$ , получаем из уравнения  $B = \text{rot } A$ :

$$B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi}, \quad B_\varphi = \partial A_z / \partial r$$

или

(IV.191)

$$B_r = \frac{\mu_0 I dx}{4\pi r^2} \sin \varphi, \quad B_\varphi = \frac{\mu_0 I dx}{4\pi r^2} \cos \varphi.$$

Естественно, что формулы (IV.190), (IV.191) и (IV.141) для компонент поля совпадают.

В заключение приведем несколько замечаний.

1. Применяя такой же подход, мы можем получить формулы,

описывающие поведение магнитного поля в горизонтально-слоистой среде.

2. Исходя из формул (IV.187), (IV.188) и принципа суперпозиции, мы можем вывести формулы для поля в том случае, когда вместо диполя мы имеем токнесущую горизонтальную линию конечной длины.

3. Так как произвольно ориентированный диполь может быть представлен как сумма вертикального и горизонтального диполей, результаты, полученные в этом разделе, могут быть использованы для определения поля, возбужденного произвольным распределением токов.

### Пример 7. Горизонтальный электрический диполь в проводящем полупространстве вблизи вертикального контакта

Предположим, что горизонтальный электрический диполь расположен в проводящей среде с вертикальным контактом, разделяющим две однородные части с проводимостями  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  (рис. IV.9, а).

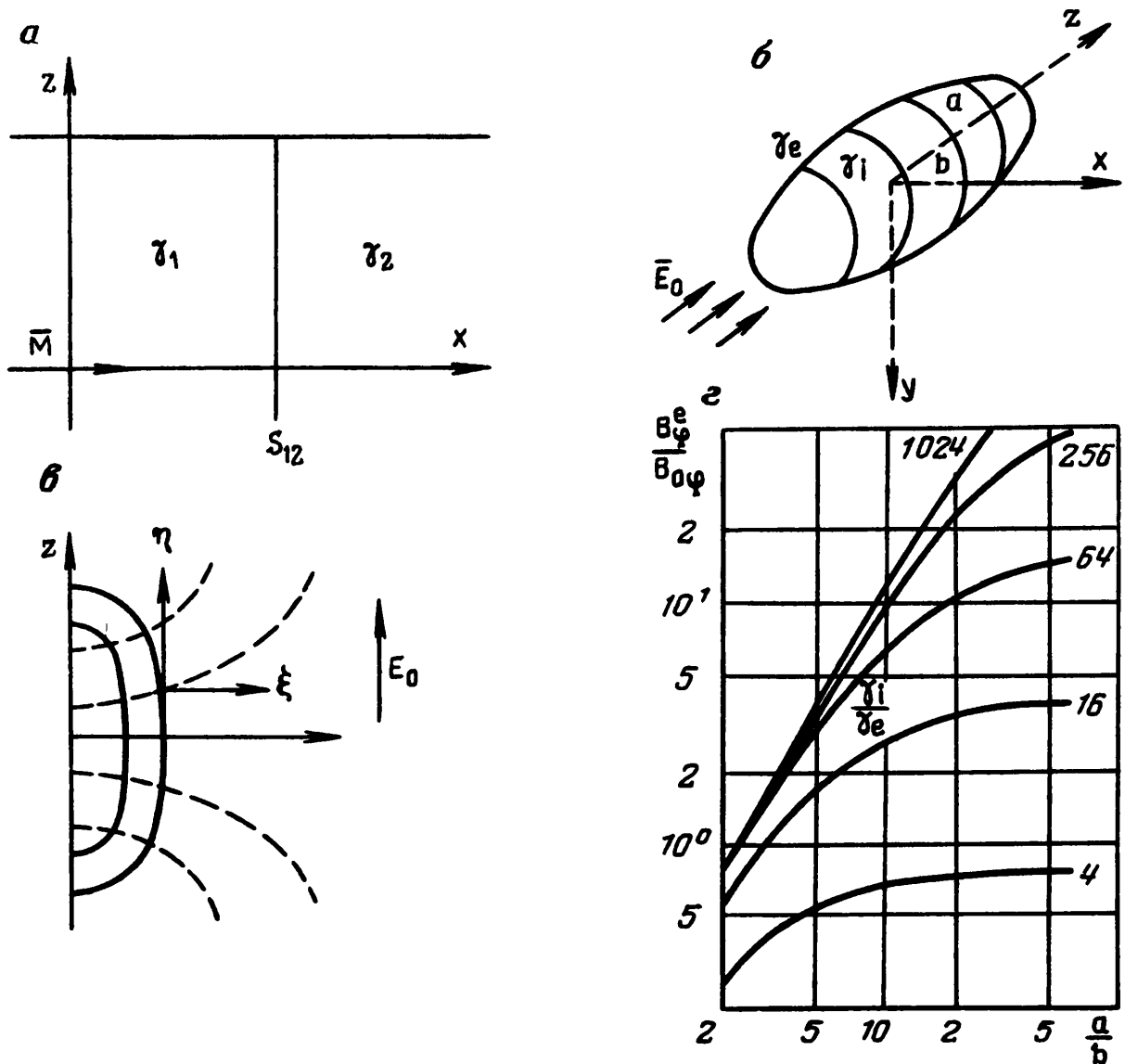


Рис. IV.9. Горизонтальный электрический диполь вблизи вертикального контакта сред (а); эллипсоид вращения в однородном электрическом поле (б); система координат вытянутого эллипсоида вращения (в); графики отношения  $V_{\phi}^e / V_{d\phi}$  (г)

Выберем декартову систему координат, поместив диполь в ее начало и направив ось  $x$  перпендикулярно контакту  $S_{12}$ , а ось  $z$  — вверх. Прежде всего, выведем уравнения для векторного потенциала, возбуждаемого токами в проводящей среде, так как первичный векторный потенциал  $A_{0x}$  известен:

$$A_{0x} = \frac{\mu_0 I dx}{4\pi R}.$$

В соответствии с (IV.117) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(p) = & -\frac{\mu_0 \gamma_1}{4\pi} \int_{S_{01}} \frac{U_1(q)}{L_{qp}} dS_0 - \frac{\mu_0 \gamma_2}{4\pi} \int_{S_{02}} \frac{U_2(q)}{L_{qp}} dS_0 + \\ & + \frac{\mu_0 (\gamma_2 - \gamma_1)}{4\pi} \int_{S_{12}} \frac{U(q)}{L_{qp}} dS, \end{aligned} \quad (\text{IV.192})$$

где  $L_{qp}$  — расстояние между произвольной точкой  $q$  на поверхностях  $S_0$  и  $S_{12}$  и точкой наблюдения  $p$ ;  $S_{01}$  и  $S_{02}$  — части земной поверхности  $S_0$ , ограничивающие среды с проводимостями  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  соответственно;

$$S_0 = S_{01} + S_{02};$$

$U_1(q)$ ,  $U_2(q)$  и  $U(q)$  — потенциалы электрического поля, возбужденного зарядами, которые появляются на всех поверхностях, включая поверхности электродов диполя.

Из результатов, полученных в главе III, видно, что  $U_1(q)$  и  $U_2(q)$  в общем случае являются потенциалами либо четырех, либо двух горизонтальных электрических диполей, которые симметричны относительно земной поверхности и контакта.

Как следует из (IV.192), интегрирование по земной поверхности дает вертикальную компоненту векторного потенциала, в то время как интегрирование по поверхности контакта дает горизонтальную компоненту. Таким образом,

$$A_x = \frac{\mu_0 (\gamma_2 - \gamma_1)}{4\pi} \int_{S_{12}} \frac{U(q)}{L_{qp}} dS, \quad A_y = 0, \quad (\text{IV.193})$$

$$A_z = -\frac{\mu_0 \gamma_1}{4\pi} \int_{S_{01}} \frac{U_1(q)}{L_{qp}} dS - \frac{\mu_0 \gamma_2}{4\pi} \int_{S_{02}} \frac{U_2(q)}{L_{qp}} dS.$$

Здесь уместны два замечания.

1. Векторный потенциал, даваемый (IV.192), может отличаться от решения уравнения Пуассона

$$A(p) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{j(q)}{L_{qp}} dV$$

на градиент некоторой функции, но это не влияет на магнитное поле, так как  $\text{rot grad } \varphi \equiv 0$ .

2. В предыдущих примерах мы показали, что особенности векторного потенциала вызваны только током в проводе, соединяющем электроды диполя. Этот факт позволяет нам представить  $A(p)$ , генерируемый токами в проводящей среде, только при помощи интегралов по земной поверхности и по контакту. Другими словами, мы рассматриваем вторичный векторный потенциал, в то время как полный потенциал имеет вид

$$A_{\text{tot}} = \frac{\gamma_1 \mu_0 M}{4\pi \varepsilon_0 R} + A,$$

где  $M = \varepsilon_0 \rho_1 \cdot I dx \cdot i$  — дипольный момент.

В принципе, численное интегрирование дает нам возможность определить векторный потенциал в любой точке проводящей среды. Однако для нахождения магнитного поля  $B$  мы вычисляем производные, которые составляют  $\text{rot } A$ . По этим причинам удобно использовать формулу (IV.192) для нахождения магнитного поля.

Рассмотрим интеграл

$$N(p) = \int_S \frac{U(q)}{L_{qp}} \mathbf{n} dS, \quad (\text{IV.194})$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, перпендикулярный к поверхности  $S$ . Вычисляя  $\text{rot}^p N$  от обеих частей этого равенства, имеем

$$\text{rot}^p N = \nabla^p \times \int_S \frac{U(q)}{L_{qp}} \mathbf{n} dS$$

или

$$\text{rot}^p N = \int_S U(q) \nabla^p \times \frac{\mathbf{n}}{L_{qp}} dS, \quad (\text{IV.195})$$

так как интегрирование и дифференцирование применяются для различных точек. Известно, что

$$\text{rot } \varphi a = \varphi \text{rot } a + \text{grad } \varphi \times a.$$

Следовательно,

$$\nabla^p \times \frac{\mathbf{n}}{L_{qp}} = -\mathbf{n} \times \text{grad}^p \frac{1}{L_{qp}} = \frac{\mathbf{n} \times L_{qp}}{L_{qp}^3},$$

поскольку  $\mathbf{n}$  не зависит от точки  $p$  и

$$\text{grad}^p \frac{1}{L_{qp}} = - \frac{\mathbf{L}_{qp}}{L_{qp}^3}.$$

Следовательно, в соответствии с (IV.192), имеем для магнитного поля ( $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ )

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(p) = & - \frac{\mu_0 \gamma_1}{4\pi} \int_{S_{01}} \frac{U_1(q)}{L_{qp}^3} (\mathbf{k} \times \mathbf{L}_{qp}) dS - \frac{\mu_0 \gamma_2}{4\pi} \int_{S_{02}} \frac{U_2(q)}{L_{qp}^3} (\mathbf{k} \times \mathbf{L}_{qp}) dS + \\ & + \frac{\mu_0}{4\pi} (\gamma_2 - \gamma_1) \int_{S_{12}} \frac{U(q)}{L_{qp}^3} (\mathbf{i} \times \mathbf{L}_{qp}) dS. \end{aligned} \quad (\text{IV.196})$$

Введем обозначение:

$$\mathbf{L}_{qp} = \Delta x \mathbf{i} + \Delta y \mathbf{j} + \Delta z \mathbf{k},$$

где

$$\Delta x = x_p - x_q, \quad \Delta y = y_p - y_q, \quad \Delta z = z_p - z_q.$$

Вспоминая, что

$$\mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{k}, \quad \mathbf{k} = \mathbf{i} \times \mathbf{j}, \quad \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{i},$$

имеем

$$\begin{aligned} B_x = & \frac{\mu_0 \gamma_1}{4\pi} \int_{S_{01}} \frac{U_1(q)}{L_{qp}^3} \Delta y dS + \frac{\mu_0 \gamma_2}{4\pi} \int_{S_{02}} \frac{U_2(q)}{L_{qp}^3} \Delta y dS, \\ B_y = & - \frac{\mu_0 \gamma_1}{4\pi} \int_{S_{01}} \frac{U_1(q)}{L_{qp}^3} \Delta x dS - \frac{\mu_0 \gamma_2}{4\pi} \int_{S_{02}} \frac{U_2(q)}{L_{qp}^3} \Delta x dS - \\ & - \frac{\mu_0 (\gamma_2 - \gamma_1)}{4\pi} \int_{S_{12}} \frac{U(q)}{L_{qp}^3} \Delta z dS \end{aligned} \quad (\text{IV.197})$$

и

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} (\gamma_2 - \gamma_1) \int_{S_{12}} \frac{U(q)}{L_{qp}^3} \Delta y dS.$$

Уравнения (IV.197) позволяют вычислять компоненты магнитного поля в каждой точке проводящей среды, включая земную поверхность. Покажем, что вертикальную компоненту магнитного поля можно выразить с помощью элементарных функций, если диполь и точка наблюдения расположены на земной поверхности.

Принимая во внимание (IV.193), рассмотрим

$$A_x = \frac{\mu_0(\gamma_2 - \gamma_1)}{4\pi} \int_{S_{12}} \frac{U(q)}{L_{qp}} dS. \quad (\text{IV.198})$$

Предположим, что горизонтальный электрический диполь расположен на расстоянии  $l$  от вертикальной границы сред с проводимостями  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Как следует из уравнения (IV.117), выражение для векторного потенциала  $A_x^*$  в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} A^* &= A_x^* \mathbf{i} = \frac{\mu_0(\gamma_2 - \gamma_1)}{4\pi} \mathbf{i} \int_S \frac{U^*(q)}{L_{qp}} dS = \\ &= \frac{\mu_0(\gamma_2 - \gamma_1)}{2\pi} \mathbf{i} \int_{S_{12}} \frac{U^*(q)}{L_{qp}} dS, \end{aligned} \quad (\text{IV.199})$$

где  $U^*(q) = \frac{1}{2} U(q)$ , так как диполь находится в однородной среде с проводимостью  $\gamma_1$ .

Сравнение формул (IV.198) и (IV.199) показывает, что

$$A_x = A_x^*.$$

Следовательно, мы можем использовать (IV.159) для вычисления поля  $B_z$  при наличии контакта. Изменяя направления осей координат, имеем

$$A_{1x} = \frac{\mu_0 I dx}{4\pi} \left( \frac{1}{R} - \frac{K_{12}}{R_1} \right), \quad \text{если } x \leq l.$$

Полагая  $z = 0$  и вычисляя производную  $\partial A_x / \partial y$ , получаем следующее выражение для вертикальной компоненты магнитного поля горизонтального электрического диполя:

$$\begin{aligned} B_{1z} &= \frac{\mu_0 I dx}{4\pi} y \left[ \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{K_{12}}{[(x - 2l)^2 + y^2]^{3/2}} \right], \quad \text{если } x \leq l, \\ B_{2z} &= \frac{\mu_0 I dx (1 - K_{12}) y}{4\pi (x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad \text{если } x \geq l, \end{aligned} \quad (\text{IV.200})$$

где  $l$  — расстояние между диполем и контактом;  $x = x_p$ ,  $y = y_p$  — координаты точки наблюдения.

Как видно из формул (IV.200), значение вертикальной компоненты поля, возбуждаемого токами в среде, постепенно возрастает при приближении к контакту и затем начинает убывать, если  $y \neq 0$ .

В заключение сделаем два замечания.

1. Представление магнитного поля при помощи поверхностных интегралов позволяет вычислять  $\mathbf{B}$  для произвольно ориентированного токнесущего провода, находящегося в проводящей среде, при условии, что потенциал электрического поля известен

на границе с изолятором и на других поверхностях раздела сред.

2. Изучение магнитного поля часто применяется при картировании горизонтальных изменений проводимости вблизи земной поверхности.

### Пример 8. Проводящий эллипсоид вращения в однородном электрическом поле

Изучим влияние ограниченной неоднородности на магнитное поле. Для этого рассмотрим эллипсоид вращения с полуосями  $a$  и  $b$  и проводимостью  $\gamma_1$ , помещенный в однородную проводящую среду с проводимостью  $\gamma_2$ . Первичное электрическое поле однородно и направлено вдоль главной оси  $2a$  (рис. IV.9, б). Как известно, на поверхности эллипсоида возникают электрические заряды, возбужденные первичным полем  $E_0$ , и вызывают вторичное электрическое поле. Плотность зарядов в точке  $p$  поверхности эллипсоида описывается формулой

$$\Sigma(p) = 2 \varepsilon_0 \frac{\gamma_i - \gamma_e}{\gamma_i + \gamma_e} E_n^{\text{ср}}(p),$$

где  $E_n^{\text{ср}}$  — средняя величина нормальных компонент полного электрического поля на внутренней и внешней сторонах поверхности в окрестности точки  $p$ . Возникают обусловленные вторичным электрическим полем изменения распределения плотности тока и, следовательно, вторичное магнитное поле.

Для понимания поведения поля  $B$  рассмотрим сначала электрическое поле. Почти очевидно, что с увеличением длины главной полуоси  $a$  плотность зарядов на боковой поверхности эллипсоида убывает и вторичное поле этих зарядов становится меньше. Другими словами, мы можем надеяться, что эллипсоид, заметно удлиненный в направлении первичного поля, не будет существенно искажать электрическое поле. В сущности, такой случай соответствует бесконечно длинному цилиндру с осью  $b$ . Учитывая относительно простую форму проводника, используем метод разделения переменных и найдем электрическое поле. Зная плотность тока внутри и вне эллипсоида, можно определить магнитное поле. Таким образом, наш первый шаг заключается в решении краевой задачи для потенциала электрического поля  $U$ . С этой целью введем систему координат вытянутого эллипсоида вращения  $\zeta, \eta, \varphi$ , связанную с цилиндрическими координатами (рис. IV.9, в) соотношениями

$$r = c [(1 - \zeta^2)(\eta^2 - 1)]^{1/2}, \quad z = c \zeta \eta, \quad (\text{IV.201})$$

где  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$  и  $-1 \leq \zeta < +1$ ,  $1 \leq \eta \leq \infty$ .

В частности, поверхность эллипсоида вращения с полуосями  $a$  и  $b$  является координатной поверхностью  $\eta_0 = \text{const}$  и

$$a = c \eta_0, \quad b = c (\eta_0^2 - 1)^{1/2}. \quad (\text{IV.202})$$



## Метрические коэффициенты этой системы

$$h_1 = c \left( \frac{\eta^2 - \zeta^2}{1 - \zeta^2} \right)^{1/2}, \quad h_2 = c \left( \frac{\eta^2 - \zeta^2}{\eta^2 - 1} \right)^{1/2}, \quad h_3 = r. \quad (\text{IV.203})$$

Так как поле обладает осевой симметрией относительно оси  $z$ , уравнение Лапласа для потенциала запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ (1 - \zeta^2) \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ (\eta^2 - 1) \frac{\partial U}{\partial \eta} \right] = 0. \quad (\text{IV.204})$$

Удобно представить потенциал внутри и вне эллипсоида как

$$U(\zeta, \eta) = \begin{cases} U_i, & \text{если } \eta \leq \eta_0, \\ U_e = U_0 + U_e^s, & \text{если } \eta \geq \eta_0, \end{cases} \quad (\text{IV.205})$$

где  $U_0$  и  $U_e^s$  — потенциалы первичного и вторичного полей соответственно. При возрастании расстояния от эллипсоида поле поверхностных зарядов убывает и граничные условия на бесконечности имеют вид

$$U(\zeta, \eta) \rightarrow U_0. \quad (\text{IV.206})$$

На поверхности эллипсоида потенциал и нормальная компонента плотности тока являются непрерывными функциями и условия на границе раздела сред имеют вид

$$U_i = U_e, \quad \gamma_i \frac{\partial U_i}{\partial \eta} = \gamma_e \frac{\partial U_e}{\partial \eta}. \quad (\text{IV.207})$$

Как известно, уравнения (IV.204) — (IV.207) однозначно определяют электрическое поле. Прежде всего, применяя метод разделения переменных, найдем решение уравнения Лапласа. Представив потенциал  $U$  как

$$U(\zeta, \eta) = T(\eta)\Phi(\zeta)$$

и подставив это выражение в уравнение (IV.204), получим два дифференциальных уравнения второго порядка:

$$\frac{d}{d\zeta} \left[ (1 - \zeta^2) \frac{d\Phi}{d\zeta} \right] + n(n+1)\Phi = 0, \quad (\text{IV.208})$$

$$\frac{d}{d\eta} \left[ (\eta^2 - 1) \frac{dT}{d\eta} \right] - n(n-1)T = 0,$$

где  $n$  — целое. Эти уравнения очень хорошо известны: они называются уравнениями Лежандра. Их решениями являются функции Лежандра первого и второго рода  $P$  и  $Q$ . Поэтому

$$T_n(\eta) = A_n P_n(\eta) + B_n Q_n(\eta), \quad (\text{IV.209})$$

$$\Phi(\zeta) = c_n P_n(\zeta) + D_n Q_n(\zeta).$$

Функции Лежандра являются примером ортогональных специальных функций и широко применяются в математике и прикладной физике.

Ниже приведены в качестве иллюстрации функции  $P_n(x)$  и  $Q_n(x)$  для первых трех значений  $n$ :

$$\begin{aligned}
 P_0(x) &= 1, & P_1(x) &= x, & P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\
 Q_0(x) &= \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}, & Q_1(x) &= \frac{1}{2} x \ln \frac{x+1}{x-1} - 1, \\
 Q_2(x) &= \frac{1}{4}(3x^2 - 1) \ln \frac{x+1}{x-1} - \frac{3x}{2}.
 \end{aligned}
 \tag{IV.210}$$

Таким образом, общее решение уравнения Лапласа дается суммой

$$U(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n P_n(\eta) + B_n Q_n(\eta)] [c_n P_n(\xi) + D_n Q_n(\xi)].
 \tag{IV.211}$$

Перед продолжением поисков решения краевой задачи представим потенциал первичного поля при помощи функции Лежандра. Так как  $E_0$  однородно и направлено вдоль оси  $z$ ,

$$E_0 = -\frac{\partial U_0}{\partial z} \quad \text{или} \quad U_0 = -E_0 z.$$

Используя (IV.201) и (IV.210), получим

$$U_0(\xi, \eta) = -E_0 c P_1(\eta) P_1(\xi),
 \tag{IV.212}$$

Таким образом, потенциал первичного поля выражен с помощью функций Лежандра первого рода и первого порядка. Заметим, что функция  $P_1(\xi)$  описывает изменение потенциала на любой координатной поверхности, где  $\eta = \text{const}$ , и, в частности, на поверхности эллипсоида  $\eta = \eta_0$ . Следовательно, естественно полагать, что потенциал вторичного поля зависит от координаты  $\xi$  таким же образом. Вспоминая, что

$$Q_1(\eta) = \frac{\eta}{2} \ln \frac{\eta+1}{\eta-1} - 1$$

убывает с возрастанием расстояния, представим потенциал вне эллипсоида как

$$U_e(\xi, \eta) = -E_0 c [P_1(\eta) + A Q_1(\eta)] P_1(\xi), \quad \text{если} \quad \eta \geq \eta_0.
 \tag{IV.213}$$

Будем полагать, что поле внутри эллипсоида остается однородным и направленным вдоль оси  $z$ , т. е.

$$U_i(\xi, \eta) = -E_0 c B P_1(\eta) P_1(\xi), \quad \text{если} \quad \eta < \eta_0,
 \tag{IV.214}$$

где  $A$  и  $B$  — неизвестные коэффициенты.

Очевидно, функции  $U_i$  и  $U_e$  подчиняются уравнению Лапласа и  $U_e$  удовлетворяет условиям на бесконечности. Выберем коэффициенты  $A$  и  $B$  таким образом, чтобы  $U_i$  и  $U_e$  удовлетворяли условиям на поверхности эллипсоида  $\eta = \eta_0$ . В соответствии с (IV.207) это требование ведет к системе двух уравнений с двумя неизвестными:

$$P_1(\eta_0) + AQ_1(\eta_0) = BP_1(\eta_0), \quad (IV.215)$$

$$\gamma_e \{P_1'(\eta_0) + AQ_1'(\eta_0)\} = \gamma_i BP_1'(\eta_0), \quad \text{если } \eta = \eta_0,$$

где  $P_1'(\eta_0)$  и  $Q_1'(\eta_0)$  — первые производные функции Лежандра по  $\eta$  —

$$P_1'(\eta_0) = 1,$$

$$Q_1'(\eta_0) = \frac{1}{2} \ln \frac{\eta_0 + 1}{\eta_0 - 1} - \frac{\eta_0}{\eta_0^2 - 1}.$$

Решив эту систему, получим

$$A = \frac{\left(\frac{\gamma_i}{\gamma_e} - 1\right) \eta_0 (\eta_0^2 - 1)}{1 + \left(\frac{\gamma_i}{\gamma_e} - 1\right) (\eta_0^2 - 1) \left[\frac{\eta_0}{2} \ln \frac{\eta_0 + 1}{\eta_0 - 1} - 1\right]}, \quad (IV.216)$$

$$B = \frac{1}{1 + \left(\frac{\gamma_i}{\gamma_e} - 1\right) (\eta_0^2 - 1) \left[\frac{\eta_0}{2} \ln \frac{\eta_0 + 1}{\eta_0 - 1} - 1\right]}.$$

Ясно, что функции  $U_i$  и  $U_e$ , данные формулами (IV.213), (IV.214) и (IV.216), удовлетворяют всем условиям краевой задачи и, следовательно, описывают потенциал электрического поля в случае, когда проводящий эллипсоид вращения помещен в однородное поле  $E_0$ , направленное вдоль главной оси эллипсоида.

Условимся выразить коэффициенты  $A$  и  $B$  через параметр  $e$ :

$$e = \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)^{1/2} = \frac{c}{a}.$$

Как следует из (IV.201),

$$a = c \eta_0, \quad b = c (\eta_0^2 - 1)^{1/2}$$

и

$$\eta_0 + 1 = \frac{a}{c} (1 + e), \quad \eta_0 - 1 = \frac{a}{c} (1 - e), \quad \eta_0^2 - 1 = \frac{b^2}{c^2},$$

откуда

$$A = \frac{\left(\frac{\gamma_i}{\gamma_e} - 1\right) ab^2}{c^3 \left(1 + \left(\frac{\gamma_i}{\gamma_e} - 1\right) L\right)}$$

и (IV.217)

$$B = \frac{1}{1 + \left(\frac{\gamma_i}{\gamma_e} - 1\right) L},$$

где  $L$  — геометрический фактор, равный

$$L = \frac{1 - e^2}{2e^3} \left[ \ln \frac{1 + e}{1 - e} - 2e \right]. \quad (IV.218)$$

В соответствии с (IV.217), однородное электрическое поле внутри эллипсоида

$$E_i = BE_0 = \frac{E_0}{1 + (\gamma_i / \gamma_e - 1) L}, \quad (IV.219)$$

где функция  $L$  характеризует эффект поверхностных зарядов. Например, для значительно вытянутого эллипсоида ( $e \rightarrow 1$ )

$$L = \frac{b^2}{a^2} \left( \ln \frac{2a}{b} - 1 \right).$$

Как следует из формулы (IV.219), когда главная ось  $2a$  увеличивается, электрическое поле  $E_i$  приближается к первичному полю  $E_0$ . Однако при возрастании отношения  $\gamma_i / \gamma_e$  эллипсоид должен вытягиваться, для того, чтобы его поле совпадало с полем бесконечно длинного цилиндра. В частности, в случае изолирующей окружающей среды вторичное поле всегда равно первичному полю внутри эллипсоида независимо от его линейных размеров, но имеет противоположное направление (явление электростатической индукции).

Как следует из формулы (IV.219), плотность тока в эллипсоиде

$$j_z = \frac{\gamma_i E_0}{1 + (\gamma_i / \gamma_e + 1) L}. \quad (IV.220)$$

Для относительно малого отношения проводимостей и для  $L \ll 1$  увеличение проводимости эллипсоида вызывает увеличение плотности тока и интенсивности магнитного поля прямо пропорционально  $\gamma_i$ , так же, как и в случае бесконечно длинного цилиндрического проводника. Однако при дальнейшем возрастании проводимости  $\gamma_i$  вторичное электрическое поле возрастает и полное электрическое поле  $E_i$  становится меньше. Когда  $(\gamma_i / \gamma_e) L \gg 1$ , плотность тока и магнитное поле практически не зависят от про-

водимости эллипсоида, а пропорциональны проводимости окружающей среды:

$$j_z = \gamma_e E_0 / L. \quad (\text{IV.221})$$

Конечно, это уравнение также описывает плотность тока в случае идеального проводника, когда электрическое поле  $E_i$  равно нулю. Если сопротивление эллипсоида больше и отношение  $a/b$  относительно мало, плотность тока пропорциональна проводимости эллипсоида.

Выведем выражения для магнитного поля на плоскости  $z = 0$ . Ясно, что обладающее осевой симметрией поле имеет только компоненту  $B_\varphi$ . Для нахождения вторичного магнитного поля будем исходить из первого уравнения поля в интегральной форме

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r B_\varphi = \mu_0 I. \quad (\text{IV.222})$$

Сначала найдем вторичный ток, протекающий через круг радиуса  $b$ . Как следует из (IV.219),

$$I_i = \gamma_i \pi b^2 B E_0 - \gamma_e \pi b^2 E_0. \quad (\text{IV.223})$$

Вторичный ток через элементарное кольцо с радиусом  $r$  и шириной  $dr$ , расположенное на плоскости  $z = 0$  вне эллипсоида, равен

$$dI_e = \gamma_e E_{1z}^e 2\pi r dr, \quad (\text{IV.224})$$

где  $E_{1z}^e$  — разность между общим и первичным электрическими полями, равная

$$E_{1z}^e = -\frac{1}{h_1} \frac{\partial(U_e - U_0)}{\partial \xi}, \quad \text{если } \eta = 0.$$

Принимая во внимание (IV.203) и (IV.213), имеем

$$E_{1z}^e = A E_0 \frac{Q_1(\eta)}{\eta}, \quad (\text{IV.225})$$

где

$$\eta = \frac{1}{c} (r^2 + a^2 - b^2)^{1/2}.$$

Подставляя (IV.225) в (IV.224) и интегрируя, получаем

$$I_e = \pi \gamma_e E_0 A c^2 \left( \frac{\eta^2 - 1}{2} \ln \frac{\eta + 1}{\eta - 1} - \eta - \frac{\eta_0^2 - 1}{2} \ln \frac{\eta_0 + 1}{\eta_0 - 1} + \eta_0 \right),$$

так как  $r dr = c^2 \eta d\eta$ .

Соответственно, полный ток

$$I_i + I_e = \pi \gamma_e E_0 c^2 A \left( \frac{\eta^2 - 1}{2} \ln \frac{\eta + 1}{\eta - 1} - \eta - \frac{\eta_0^2 - 1}{2} \ln \frac{\eta_0 + 1}{\eta_0 - 1} + \eta_0 \right) + \gamma_i \pi b^2 B E_0 - \gamma_e \pi b^2 E_0.$$

Используя уравнение (IV.215)

$$\gamma_e \{1 + A Q'_1(\eta_0)\} = \gamma_i B$$

и соотношение

$$\eta_0^2 - 1 = b^2/c^2,$$

получаем

$$I = I_i + I_e = \pi \gamma_e E_0 A (a^2 - b^2) \left( \frac{\eta^2 - 1}{2} \ln \frac{\eta + 1}{\eta - 1} - \eta \right).$$

Затем, применяя уравнение (IV.222), получаем следующее выражение для вторичного магнитного поля:

$$B_\varphi^e = \frac{\mu_0 (a^2 - b^2) E_0}{2r} \gamma_e A \left\{ \frac{\eta^2 - 1}{2} \ln \frac{\eta + 1}{\eta - 1} - \eta \right\}$$

или

$$\frac{B_\varphi^e}{B_{0\varphi}} = \frac{a^2 - b^2}{r^2} A \left\{ \frac{\eta^2 - 1}{2} \ln \frac{\eta + 1}{\eta - 1} - \eta \right\}, \quad (\text{IV.226})$$

где  $B_{0\varphi} = \frac{\gamma_e r}{2} E_0$

— первичное магнитное поле, при условии, что оно обладает осевой симметрией.

Соотношение между магнитным полем и параметрами, описывающими среду, иллюстрируются кривыми  $B_\varphi^e/B_{0\varphi}$  на рис. IV.9, г. Левая асимптота этих кривых соответствует случаю сферического проводника ( $a = b$ ), когда влияние зарядов на электрическое поле относительно сильное, особенно для больших величин  $\gamma_i/\gamma_e$ . Когда главная ось увеличивается, это влияние становится меньше и кривые приближаются к правой асимптоте, которая характеризует магнитное поле токов в бесконечно длинном цилиндре.

Определив факторы, которые обеспечивают эквивалентность магнитных полей, вызванных токами в эллипсоиде и в бесконечно длинном цилиндре, рассмотрим двумерные модели более детально. Предположим, что цилиндрический проводник с произвольным поперечным сечением расположен в однородном электрическом поле  $E_0$ , направленном вдоль оси цилиндра. Так как поле  $E_0$  касательное к поверхности проводника, электрические заряды не возникают. Следовательно, вторичное электрическое поле отсутствует, независимо от проводимости среды. Другими словами, в таких моделях поля и среды, называемых  $E$ -поляризованными, невозможно обнаружить наличие неоднородностей, измеряя электрическое поле. Тем не менее, плотность тока отличается от  $j_z^0$  внутри цилиндра и мы имеем

$$j_z^s = (\gamma_i - \gamma_e) E_{0z}, \quad (\text{IV.227})$$

где  $j_z^s$  — вторичная плотность тока.

Мысленно деля поперечное сечение неоднородности на большое число элементарных площадок, можно сказать, что вторичное магнитное поле является суммой полей, возбужденных токовыми нитями, направленными вдоль оси  $z$ . Применяя принцип суперпозиции и уравнение (IV.36), получим

$$\mathbf{B}(p) = \frac{\mu_0 (\gamma_i - \gamma_e)}{2\pi} \int_S \frac{\mathbf{k} \times L_{qp}}{L_{qp}^2} dS, \quad (\text{IV.228})$$

где  $q$  — произвольная точка поперечного сечения;  $\mathbf{k}$  — единичный вектор, направленный вдоль оси  $z$ ;  $S$  — произвольное поперечное сечение двумерного цилиндра.

#### IV.6. НАМАГНИЧИВАНИЕ И МОЛЕКУЛЯРНЫЕ ТОКИ: НАПРЯЖЕННОСТЬ ПОЛЯ $\mathbf{H}$ И ЕЕ СВЯЗЬ С МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ В

В главе III мы рассматривали поведение электрического поля в присутствии диэлектриков. Прежде чем исследовать влияние магнитных материалов на магнитное поле, полезно суммировать основные результаты этого изучения. Прежде всего, в объеме и на поверхности диэлектрика появляются связанные заряды, обусловленные поляризацией. Поэтому закон Кулона, описывающий электрическое поле внутри и вне диэлектрика, записывается в виде

$$\mathbf{E}(p) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left[ \int_V \frac{\delta_0 + \delta_b}{L_{qp}^3} L_{qp} dV + \int_S \frac{\Sigma_0 + \Sigma_b}{L_{qp}^3} L_{qp} dS \right], \quad (\text{IV.229})$$

где  $\delta_0$  и  $\Sigma_0$  — плотности свободных зарядов, в то время как  $\delta_b$  и  $\Sigma_b$  — плотности связанных зарядов. Независимо от диэлектрической проницаемости среды коэффициент в правой части уравнения (IV.229)  $1/4\pi\epsilon_0$  остается тем же.

К этому уравнению сделаем несколько дополнительных замечаний.

1.  $dV$  и  $dS$  — соответственно элементарный объем и площадь элементарной поверхности; т. е. размеры их много больше размеров молекул. Другими словами, области с объемом  $dV$  или поверхностью  $dS$  содержат практически неограниченное количество молекул. В то же время размеры элементарных объемов и поверхностей много меньше, чем расстояние  $L_{qp}$  между ними и точкой наблюдения  $p$ .

2. Каждый атом в диэлектрике либо имеет дипольный момент, либо приобретает его в присутствии электрического поля. Обусловленные действием этого поля диполи выстраиваются в линию вдоль поля и их распределение внутри элементарного объема или

поверхности характеризуется плотностью дипольного момента  $\mathbf{P}$ . Такая замена атомных диполей одним диполем является пространственным усреднением микроскопических величин (дипольных моментов отдельных атомов). Следовательно, плотность дипольных моментов  $\mathbf{P}$  элементов  $dV$  и  $dS$  является макроскопической величиной, которая равна средней микроскопической плотности атомных моментов внутри этих элементов в присутствии электрического поля.

3. При изменении положения точки наблюдения микроскопическое поле  $\mathbf{E}_{\text{micr}}$  также изменится, однако электрическое поле  $\mathbf{E}$ , определенное на основании закона Кулона, является макроскопическим полем, полученным усреднением микроскопических полей внутри элементов  $dV$  и  $dS$ .

4. Рассматривая вектор поляризации  $\mathbf{P}_e$ , мы ввели связанные заряды с плотностями  $\delta_b$  и  $\Sigma_b$  и нашли соотношения между ними и вектором  $\mathbf{P}_e$ :

$$\delta_b = -\operatorname{div} P_e, \quad \Sigma_b = -\operatorname{Div} P_e. \quad (\text{IV.230})$$

Поскольку распределение связанных зарядов неизвестно, закон Кулона не может быть использован для определения поля  $\mathbf{E}$ ; это замечание также применимо к системе уравнений поля:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{E} &= (\delta_0 + \delta_b)/\epsilon_0, \\ \operatorname{Rot} \mathbf{E} &= 0, & \operatorname{Div} \mathbf{E} &= (\Sigma_0 + \Sigma_b)/\epsilon_0, \end{aligned} \quad (\text{IV.231})$$

так как правая сторона второго уравнения содержит неизвестные величины  $\delta_b$  и  $\Sigma_b$ .

5. Для того, чтобы преодолеть эту трудность, мы проделали следующие операции:

а) используя соотношение между связанными зарядами и вектором поляризации [формула (IV.230)], систему уравнений поля модифицировали и ввели новый вспомогательный вектор  $\mathbf{D}$ . Вместо уравнений (IV.231) получили

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \delta_0/\epsilon_0, \quad (\text{IV.232})$$

$$\operatorname{Rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{Div} \mathbf{D} = \Sigma_0/\epsilon_0,$$

где

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 (\mathbf{E} + \mathbf{P}_e).$$

Существенно отметить, что правая сторона новой системы известна.

б) исходя из экспериментальных данных, установили соотношение между вектором поляризации  $\mathbf{P}_e$  и полем  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{P}_e = \alpha \mathbf{E}, \quad (\text{IV.233})$$

где  $\alpha$  — диэлектрическая восприимчивость среды, которая предполагается известной.



Подставив выражение (IV.233) в уравнения (IV.232), мы получили систему уравнений поля, в которой неизвестно только электрическое поле:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \varepsilon \mathbf{E} = \delta_0 / \varepsilon_0, \quad (\text{IV.234})$$

$$\operatorname{Rot} \mathbf{E} = 0 \quad \operatorname{Div} \varepsilon \mathbf{E} = \Sigma_0 / \varepsilon_0,$$

где

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \alpha)$$

— диэлектрическая проницаемость.

Зная параметр среды  $\varepsilon$ , мы учитываем наличие связанных зарядов без явного использования их для вычисления электрического поля. Здесь уместно заметить, что система (IV.234) сложнее, чем исходная, так как диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$  является в общем случае функцией положения.

Подобный подход был использован при выводе системы уравнений для электрического поля в проводящей среде.

Теперь мы готовы описать влияние материалов на магнитное поле  $\mathbf{B}$ . Будем следовать тем же путем, как и в случае диэлектриков. Хорошо известно, что некоторые материалы, например железо, будучи помещенными в магнитное поле  $\mathbf{B}$ , заметно изменяют это поле, в то время как другие материалы оказывают предельно малое влияние. Это происходит из-за намагниченности, которая проявляется в различной степени у всех материалов. Следовательно, с качественной точки зрения мы можем рассматривать намагниченность подобно поляризации диэлектриков. Тем не менее, существуют фундаментальные различия. В частности, в отличие от большинства диэлектриков, которые деполяризуются, когда внешнее поле становится равным нулю, существует такая группа магнитных материалов, чья намагниченность остается, даже если внешнее поле  $\mathbf{B}$  исчезает. Наличие этих материалов, называемых ферромагнетиками, очень важно для магнитных методов в геофизике.

Учитывая наши цели, опишем намагниченность следующим образом. Предположим для простоты, что магнитный материал является изолятором и, следовательно, токи проводимости отсутствуют. Однако в каждой молекуле существуют различные типы движения электронов, которые можно приблизительно представить как молекулярный ток. Следовательно, каждый элементарный объем содержит практически не ограниченное количество молекулярных токов. Если постоянная намагниченность отсутствует, то эти токи распределены случайно и их суммарное магнитное поле равно нулю. В противоположном случае, при наличии намагниченности, молекулярные токи в основном систематически ориентированы и, следовательно, они создают магнитное поле внутри и вне магнитных материалов. Если среда также обладает

проводимостью, будем различать два типа токов — токи, называемые токами проводимости, которые описывают перенос зарядов через среду, и молекулярные токи, замкнутые внутри микроскопически малых объемов. Для вычисления магнитного поля  $\mathbf{B}$ , вызванного молекулярными токами, будем усреднять эти токи по каждому элементарному объему. Другими словами, система этих токов в таком объеме заменяется распределением соосных макроскопических токов с плотностью  $\mathbf{j}_m$ , замкнутых в элементарном объеме. Подобное усреднение также проводится для проводимости и обоих типов поверхностных токов. Тогда для общей плотности токов в объеме и на поверхности имеем

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_c + \mathbf{j}_m, \quad \mathbf{i} = \mathbf{i}_c + \mathbf{i}_m.$$

Соответственно, закон Био — Савара записывается в виде

$$\mathbf{B}(p) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \int_V \frac{(\mathbf{j}_c + \mathbf{j}_m) \times L_{qp}}{L_{qp}^3} dV + \int_S \frac{(\mathbf{i}_c + \mathbf{i}_m) \times L_{qp}}{L_{qp}^3} dS \right]. \quad (\text{IV.235})$$

Это выражение описывает магнитное поле  $\mathbf{B}$  в каждой точке внутри и вне магнитного материала. По аналогии со случаем немагнитной среды получим выражение для векторного потенциала  $\mathbf{A}$  ( $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ ):

$$\mathbf{A}(p) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \int_V \frac{\mathbf{j}_c + \mathbf{j}_m}{L_{qp}} dV + \int_S \frac{\mathbf{i}_c + \mathbf{i}_m}{L_{qp}} dS \right], \quad (\text{IV.236})$$

которое можно легко вывести из формулы (IV.235).

Необходимо подчеркнуть, что

а) закон Био — Савара определяет макроскопическое поле  $\mathbf{B}$ , которое является средним микроскопическим полем внутри каждого элементарного объема или поверхности;

б) коэффициент в правой стороне формулы (IV.236)  $\mu_0/4\pi$  не зависит от магнитных материалов. Другими словами, закон Био — Савара, так же, как и закон Кулона в присутствии диэлектриков, корректно описывает поле  $\mathbf{B}$  в любых магнитных материалах при условии, что все токи учтены;

в) так как распределение молекулярных токов неизвестно, закон Био — Савара нельзя использовать для вычисления поля при наличии магнитных материалов и, следовательно, мы обращаемся к системе уравнений поля. В этом смысле аналогия с законом Кулона очевидна;

г) несмотря на то, что обе величины  $\mathbf{j}_m$  и  $\mathbf{i}_m$  являются макроскопическими плотностями токов, мы называем их молекулярными токами, так как хотим подчеркнуть их отличие от токов проводимости.

Система уравнений поля в немагнитной среде [уравнения (IV.89)] была выведена из закона Био — Савара

$$\mathbf{B}(p) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}_c \times \mathbf{L}_{qp}}{L_{qp}^3} dV.$$

Сравнивая последнюю с уравнениями (IV.235) и принимая во внимание уравнения (IV.89), можно прийти к заключению, что система уравнений поля при наличии магнитных материалов имеет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mu_0 (\mathbf{j}_c + \mathbf{j}_m), & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{Rot} \mathbf{B} &= \mu_0 (\mathbf{i}_c + \mathbf{i}_m), & \operatorname{Div} \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{IV.237})$$

С точки зрения теории, эта система не отличается от уравнений (IV.89). Действительно, обе системы описывают вихревое поле. Однако есть одно существенное отличие, а именно: правая сторона первого уравнения последней системы содержит неизвестную плотность молекулярных токов. Для преодоления этого препятствия мы прежде всего преобразуем первое уравнение этой системы таким образом, чтобы его правая часть содержала только плотность токов проводимости, которые не зависят от поля  $\mathbf{B}$ . Для решения этой задачи используем подход, подобный подходу, примененному при рассмотрении диэлектриков. Условимся исходить из того очевидного факта, что замкнутые молекулярные токи внутри каждого элементарного объема создают поле  $\mathbf{B}$ , которое совпадает с полем магнитного диполя с тем же моментом  $d\mathbf{M}$ . Принимая во внимание уравнения (IV.55) — (IV.57), векторный потенциал, создаваемый молекулярными токами, можно записать как

$$A_m(p) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{P}(q) \times \mathbf{L}_{qp}}{L_{qp}^3} dV, \quad (\text{IV.238})$$

где

$$\mathbf{P}(q) = d\mathbf{M}/dV. \quad (\text{IV.239})$$

Вектор  $\mathbf{P}(q)$  называется вектором намагниченности и характеризует величину и ориентацию дипольного момента  $d\mathbf{M}(q)$ . Ясно, что направление вектора  $\mathbf{P}(q)$  перпендикулярно плоскости, в которой локализованы токи с плотностью  $\mathbf{j}_m$ , и векторы  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{j}_m$  образуют правую систему векторов (рис. IV.10, *a*). Как следует из определения момента диполя, единицей измерения вектора намагниченности является ампер на метр:

$$[P] = \frac{\text{А}}{\text{М}}.$$

Существует сходство между вектором электрической поляризации  $\mathbf{P}_e$  и вектором намагниченности  $\mathbf{P}$ , и это естественно, так как оба характеризуют распределение генераторов поля.

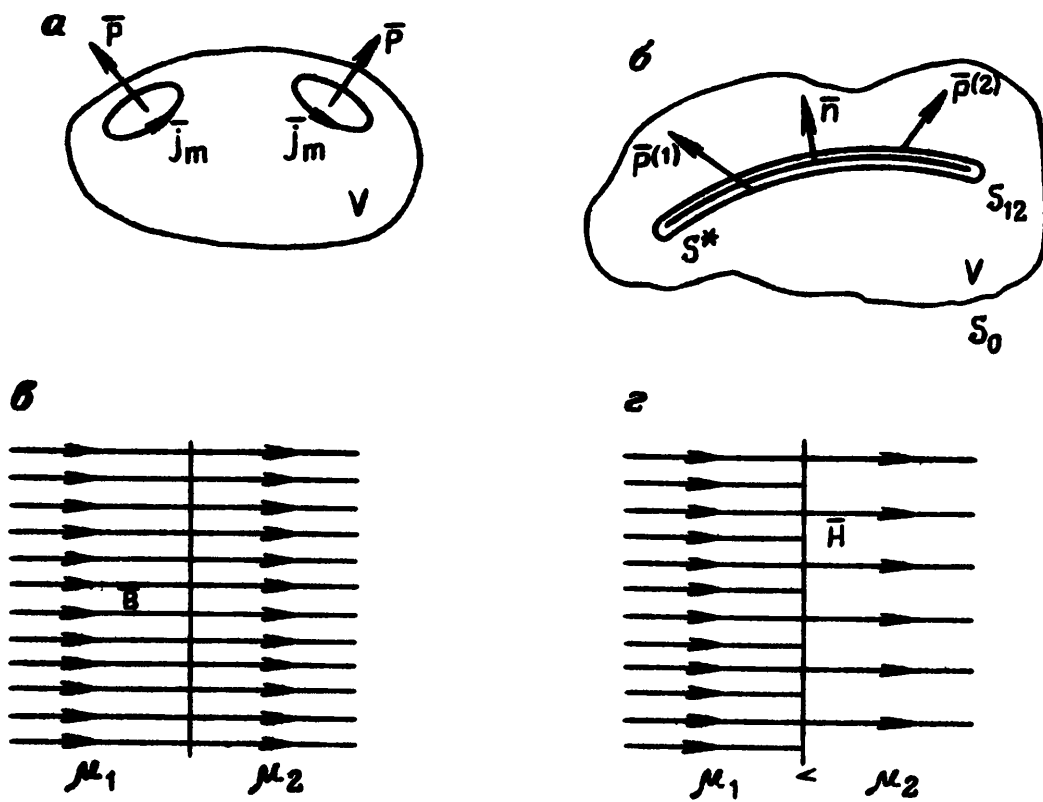


Рис. IV.10. Поляризация и молекулярные токи (а); иллюстрация происхождения векторного потенциала молекулярных токов (б); поведение поля В (в); поведение поля Н (г)

В главе III мы установили, что

$$\operatorname{div} \mathbf{P}_e = -\delta_b \quad \text{и} \quad \operatorname{Div} \mathbf{P}_e = -\Sigma_b,$$

и это также логически определяет подобные соотношения между векторами  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{j}_m$ .

Учитывая, что

$$\frac{L_{qp}}{L_{qp}^3} = \nabla^q \frac{1}{L_{qp}},$$

представим формулу (IV.238) как

$$A_m(p) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{P}(q) \times \nabla^p \frac{1}{L_{qp}} dV. \quad (\text{IV.240})$$

Затем, используя равенство

$$\operatorname{rot} \varphi \mathbf{a} = \varphi \operatorname{rot} \mathbf{a} + \operatorname{grad} \varphi \times \mathbf{a},$$

получим

$$A_m(p) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\operatorname{rot} \mathbf{P}}{L_{qp}} dV - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \operatorname{rot} \frac{\mathbf{P}}{L_{qp}} dV. \quad (\text{IV.241})$$

Второй интеграл по объему можно заменить интегралом по поверхности, так как

$$\int_V \text{rot } \mathbf{a} \, dV = \oint_{S_0} \mathbf{n}_0 \times \mathbf{a} \, dS,$$

где  $S_0$  и  $\mathbf{n}_0$  — поверхность, окружающая объем, и ее единичная нормаль, направленная наружу.

Следовательно, получаем

$$A_m(p) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\text{rot } \mathbf{P}}{L_{qp}} \, dV - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_0} \frac{\mathbf{n}_0 \times \mathbf{P}}{L_{qp}} \, dS. \quad (\text{IV.242})$$

Векторный потенциал  $A_m(p)$  обусловлен всеми молекулярными токами, включая те, которые локализованы далеко от точки наблюдения. Следовательно, можно пренебречь поверхностным интегралом в формуле (IV.242). Действительно, когда расстояние  $L$  от любой системы петель с током возрастает, магнитное поле системы приближается к полю магнитного диполя, т. е. начинает убывать как  $1/L^3$ . Соответственно, вектор намагниченности должен убывать таким же образом и

$$\frac{\mathbf{n}_0 \times \mathbf{P}}{L_{qp}} \rightarrow k \frac{1}{L^4} \quad \text{при } L \rightarrow \infty,$$

где  $k$  — коэффициент.

Применяя теорему о среднем, получаем

$$\left| \oint \frac{\mathbf{n}_0 \times \mathbf{P}}{L_{qp}} \, dS \right| \rightarrow k \frac{1}{L^4} 4\pi L^2 \rightarrow 0, \quad \text{если } L \rightarrow \infty.$$

Таким образом, вместо (IV.242) имеем

$$A_m(p) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\text{rot } \mathbf{P}}{L_{qp}} \, dV. \quad (\text{IV.243})$$

Как следует из (IV.236), векторный потенциал может быть также записан в обычном виде:

$$A_m(p) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}_m \, dV}{L_{qp}}. \quad (\text{IV.244})$$

Сравнивая два последних уравнения, получаем соотношение между объемной плотностью молекулярных токов  $\mathbf{j}_m$  и вектором намагниченности  $\mathbf{P}$ :

$$\mathbf{j}_m = \text{rot } \mathbf{P}. \quad (\text{IV.245})$$

Рассмотрим более сложную модель магнитной среды с некоторой границей раздела  $S_{12}$ , где вектор намагниченности  $\mathbf{P}$  является разрывной функцией (рис. IV.10, б). В этом случае проведем такие же преобразования формулы (IV.240), как прежде, но

предварительно необходимо окружить поверхность  $S_*$  другой поверхностью  $S_{12}$  и затем применить формулу (IV.241) в объеме  $V$ , окруженном поверхностями  $S_0$  и  $S_*$ . Необходимость этой процедуры связана с тем, что  $\text{rot } \mathbf{P}$  не существует на поверхности  $S_{12}$ . Таким образом, взамен (IV.242) получим

$$\mathbf{A}_m(p) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\text{rot } \mathbf{P}}{L_{qp}} dV - \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S_*} \frac{\mathbf{n}_* \times \mathbf{P}}{L_{qp}} dS - \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{\mathbf{n}_0 \times \mathbf{P}}{L_{qp}} dS, \quad (\text{IV.246})$$

где  $\mathbf{n}_*$  — единичный вектор, перпендикулярный к поверхности  $S_*$  и направленный во внешнюю сторону от объема  $V$  (см. рис. IV.10, б).

В пределе, когда  $S_*$  стремится к  $S_{12}$ , пренебрегая последним интегралом, так как  $S_0$  удалена в бесконечность, имеем

$$\mathbf{A}_m(p) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\text{rot } \mathbf{P}}{L_{qp}} dV - \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S_*} \frac{\mathbf{n}_* \times \mathbf{P}}{L_{qp}} dS.$$

Учитывая, что интегрирование по поверхности  $S_*$  состоит в интегрировании по лицевой и обратной сторонам границы раздела  $S_{12}$ , получаем

$$\oint_{S_*} \frac{\mathbf{n}_* \times \mathbf{P}}{L_{qp}} dS = \oint_{S_{12}} \frac{(\mathbf{n}_* \times \mathbf{P})_1 + (\mathbf{n}_* \times \mathbf{P})_2}{L_{qp}} dS,$$

где индексы «1» и «2» отмечают лицевую и обратную стороны границы раздела  $S_{12}$  соответственно. Как видно из рис. IV.10, б,

$$\mathbf{n}_{*1} = \mathbf{n}, \quad \mathbf{n}_{*2} = -\mathbf{n},$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, нормальный к поверхности  $S_{12}$ . Следовательно, мы получаем следующее выражение для векторного потенциала, вызванного объемными и поверхностными молекулярными токами:

$$\mathbf{A}_m(p) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\text{rot } \mathbf{P}}{L_{qp}} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \times \int_{S_{12}} \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)}{L_{qp}} dS, \quad (\text{IV.247})$$

где  $\mathbf{P}_2$  и  $\mathbf{P}_1$  — векторы намагниченности на лицевой и обратной сторонах границы раздела соответственно. Сравнивая формулы (IV.247) и (IV.236), видим, что

$$\mathbf{i}_m = \mathbf{n} \times (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) = \text{Rot } \mathbf{P}, \quad (\text{IV.248})$$

т. е. разность тангенциальных компонент вектора намагниченности на двух сторонах границы раздела определяет плотность молекулярных токов  $\mathbf{i}_m$ . Таким образом, мы установили соотношения между средней плотностью молекулярных токов и вектором  $\mathbf{P}$ , которые вместе с подобными соотношениями для электрической поляризации имеют вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{P} = \mathbf{j}_m, \quad \operatorname{Rot} \mathbf{P} = \mathbf{i}_m, \quad (\text{IV.249})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{P}_e = -\delta_b, \quad \operatorname{Div} \mathbf{P}_e = -\sum_b.$$

Теперь мы подготовлены к тому, чтобы сделать первые шаги в выводе системы уравнений поля  $\mathbf{B}$  при наличии магнитных материалов. Действительно, используя уравнения (IV.249), можно переписать уравнения (IV.237):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mu_0 (\mathbf{j}_c + \operatorname{rot} \mathbf{P}), & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{Rot} \mathbf{B} &= \mu_0 (\mathbf{i}_c + \operatorname{Rot} \mathbf{P}), & \operatorname{Div} \mathbf{B} &= 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} (\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{P}) &= \mu_0 \mathbf{j}_c, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{Rot} (\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{P}) &= \mu_0 \mathbf{i}_c, & \operatorname{Div} \mathbf{B} &= 0. \end{aligned}$$

Вводя новый вектор  $\mathbf{H}$

$$\mu_0 \mathbf{H} = \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{P}, \quad (\text{IV.250})$$

окончательно получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{j}_c, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{Rot} \mathbf{H} &= \mathbf{i}_c, & \operatorname{Div} \mathbf{B} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{IV.251})$$

где первая часть первого уравнения содержит только известную плотность токов проводимости.

Этот результат говорит о том, что мы продвинулись в выводе системы уравнений поля. Однако осталось еще одно препятствие, которое необходимо преодолеть: а именно, необходимо установить соотношение между векторами  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$ . В связи с этим сделаем некоторые комментарии.

1. В соответствии с (IV.250) имеем

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{P}. \quad (\text{IV.252})$$

Таким образом,  $\mathbf{H}$  является разностью двух полей совершенно различной физической природы. Действительно, одно из них, умноженное на постоянную  $\mu_0$ , описывает магнитное поле, в то время как другое характеризует распределение молекулярных токов. Такую комбинацию трудно объяснить с физической точки зрения. Позднее мы покажем, что, в общем, фиктивные источники вместе с токами проводимости создают это поле. Это еще раз показывает, что  $\mathbf{H}$  является вспомогательным полем, которое только позволяет нам вывести систему уравнений поля.

2. В окрестности точек, где вектор намагниченности  $\mathbf{P}$  равен нулю, поля  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  различаются только на постоянную:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H},$$

однако они фундаментально отличны друг от друга.

3. Поле  $H$  часто называется магнитным полем и с исторической точки зрения такая терминология легко может быть оправдана. Тем не менее, здесь оно будет называться полем  $H$ .

4. Поле  $H$  так же, как вектор намагниченности  $P$ , измеряется в амперах на метр; и эта единица связана с соответствующей единицей в системе Гаусса соотношением

$$1 \frac{A}{m} = 4\pi \cdot 10^{-3} \text{ эрстед}$$

или

$$1 \text{ эрстед} \approx 79,6 \frac{A}{m}.$$

В системе уравнений (IV.251) мы имеем соотношение между вектором намагниченности и полем  $H$ . Экспериментальное изучение показало, что это соединение много сложнее, чем такое же для большинства диэлектриков, и может быть записано в форме

$$P = \chi(H) H + P_r,$$

где  $\chi(H)$  является функцией, которая в общем случае зависит от напряженности поля и от прошлой истории материала;  $P_r$  — остаточная намагниченность, которая остается, даже когда магнитное поле становится равным нулю. Однако мы будем использовать приблизительное соотношение

$$P = \chi H + P_r, \tag{IV.254}$$

где  $\chi$  — постоянная характеристика материала, которая не зависит от поля и называется магнитной восприимчивостью.

Ясно, что параметр  $\chi$  безразмерный. Приведем здесь несколько замечаний по формуле (IV.254).

1. Существуют три основные группы магнитных материалов:

- а) диамагнетики,
- б) парамагнетики,
- в) ферромагнетики.

2. В диамагнитных веществах  $\chi$  крайне мало ( $\approx 10^{-5}$ ) и отрицательно, т. е. намагниченность очень слабая.

3. Восприимчивость парамагнитных материалов положительна и равна примерно  $10^{-4}$ .

4. Остаточная намагниченность отсутствует в этих обеих группах магнитных материалов и вместо (IV.254) имеем

$$P = \chi H.$$

5. Ферромагнетики обычно характеризуются большой восприимчивостью и способны поддерживать намагниченность в отсутствие внешнего магнитного поля.

6. Восприимчивость горных пород в основном определена наличием ферромагнетиков, таких как магнетит, титаномагнетит и



ильменит. В табл. IV.1 (данные Парасниса, 1979 г.) приводятся значения восприимчивости горных пород.

Т а б л и ц а IV.1

Материал	Восприимчивость ( $\times 10^6$ )	Материал	Восприимчивость ( $\times 10^6$ )
Графит	—100	Пегматит	3000—75 000
Кварц	—15,1	Габбро	3800—90 000
Ангидрид	—14,1	Доломит (с приме- сями)	20 000
Соль	—10,3	Пирит (чистый)	35—60
Мрамор	—9,4	Пирит (руда)	100—5000
Доломит (чистый)	—12,5 — +44	Пирротин	$10^3$ — $10^5$
Гранит (без маг- нетита)	10—65	Гематит (руда)	420—10 000
Гранит (с маг- нетитом)	25—50 000	Ильменит (руда)	$3 \times 10^5$ — $4 \times 10^6$
Базальт	1500—25 000	Магнетит (руда)	$7 \times 10^4$ — $14 \times 10^6$
		Магнетит (чистый)	$1,5 \times 10^7$

7. Уравнение (IV.254) применимо для одного типа ферромагнетиков, называемых мягкими магнитными материалами, и с некоторой ошибкой оно справедливо в определенном диапазоне напряженностей магнитного поля.

8. Существует температура, называемая точкой Кюри, выше которой ферромагнитные свойства исчезают. Например, магнетит становится парамагнетиком при температуре выше  $580^\circ \text{C}$ . Падение температуры ниже точки Кюри приводит к восстановлению ферромагнитных свойств веществ. Легко заметить, что из-за возрастания температуры с глубиной среда на расстоянии свыше 20 км от земной поверхности становится практически немагнитной.

9. Остаточная намагниченность  $I_r$  может быть сравнима с индуцированной намагниченностью  $P_{\text{инд}}$ :

$$P = \chi H$$

или быть больше  $P_{\text{инд}}$ . Для некоторых ферромагнетиков  $I_r$  может достигать  $10^6$  А/м или больше, в то же время в горных породах она варьируется от 10 до 100 А/м.

10. В общем случае индуцированная и остаточная намагниченность имеют различные направления.

11. Намагниченность возникает вследствие действия магнитного поля  $B$  на электроны. Следовательно, было бы более естественным вместо (IV.254) рассматривать уравнение

$$P = k B + P_r.$$

Однако, отдавая дань традиции, будем использовать (IV.254).

Теперь установим связь между векторами  $B$  и  $H$ . Подставляя (IV.254) в (IV.250), имеем

$$B = \mu_0 (H + P) = \mu_0 (H + \chi H + P_r)$$

или

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{P}_r, \quad (\text{IV.255})$$

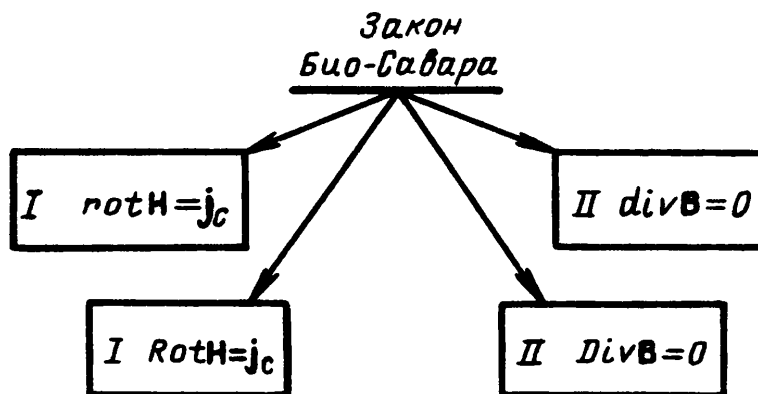
где

$$\mu = \mu_r \mu_0 \quad \text{и} \quad \mu_r = 1 + \chi. \quad (\text{IV.256})$$

Параметр  $\mu$  называется магнитной проницаемостью материала. В то же время  $\mu_r$  является относительной магнитной проницаемостью и, очевидно, для диамагнитных и парамагнитных материалов  $\mu_r$  около единицы, в то время как в ферромагнитных материалах она может быть очень большой. Например, в ферритах, часто используемых в катушках радиоприемника, относительная магнитная проницаемость достигает нескольких тысяч. В практической системе единиц параметр  $\mu$  измеряется в генри на метр.

#### IV.7. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ПОЛЕЙ $\mathbf{B}$ И $\mathbf{H}$

В предыдущем разделе мы вывели четыре уравнения, содержащие как поле  $\mathbf{B}$ , так и поле  $\mathbf{H}$  [уравнения (IV.251)] и установили связь между ними [уравнение (IV.254)]. Эти результаты можно объединить в следующем виде:



и

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{P}_r. \quad (\text{IV.257})$$

В то же время, используя эту систему для определения магнитного поля, мы полагаем, что магнитная проницаемость  $\mu$ , остаточная намагниченность  $\mathbf{P}_r$  и плотность токов проводимости  $\mathbf{j}_c$  и  $\mathbf{i}_c$  известны. Например, распределение этих токов определяется электрическим полем, но оно не зависит от постоянного магнитного поля  $\mathbf{B}$ .

Принимая во внимание различную природу полей  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  и относительно сложное соотношение между ними, предпочтительнее рассматривать системы уравнений для этих полей отдельно. Начнем с магнитного поля  $\mathbf{B}$ . Как следует из уравнений (IV.257),

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} - \frac{\mu_0}{\mu} \mathbf{P}_r. \quad (\text{IV.258})$$

Подставляя (IV.258) в первое уравнение системы (IV.257), получаем систему уравнений магнитного поля при наличии магнитной среды:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \frac{\mathbf{B}}{\mu} &= \mathbf{j}_c + \mu_0 \operatorname{rot} \frac{\mathbf{P}_r}{\mu}, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{Rot} \frac{\mathbf{B}}{\mu} &= \mathbf{i}_c + \mu_0 \operatorname{Rot} \frac{\mathbf{P}_r}{\mu}, & \operatorname{Div} \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{IV.259})$$

Очевидно, что уравнения (IV.259) базируются на законе Био — Савара и на соотношении между полями  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$ : и закон Био — Савара и связь полей  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  были получены в результате экспериментального изучения. Конечно, из системы уравнений следует, что источники магнитного поля отсутствуют и что токи проводимости и молекулярные токи являются единственными генераторами поля  $\mathbf{B}$ .

Ниже изучим распределение молекулярных токов, которое, в соответствии с первым уравнением системы (IV.259), зависит от  $\mathbf{P}_r$  и поля  $\mathbf{B}$ . Рассмотрим поведение молекулярных токов в обычной точке среды.

Используя равенство

$$\operatorname{rot} \varphi \mathbf{a} = \varphi \operatorname{rot} \mathbf{a} + (\operatorname{grad} \varphi \times \mathbf{a}),$$

имеем

$$\operatorname{rot} \frac{\mathbf{B}}{\mu} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{B} + \left( \operatorname{grad} \frac{1}{\mu} \times \mathbf{B} \right)$$

и

$$\operatorname{rot} \frac{\mathbf{P}_r}{\mu} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{P}_r + \left( \operatorname{grad} \frac{1}{\mu} \times \mathbf{P}_r \right).$$

Тогда первое уравнение поля может быть переписано как

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu \mathbf{j}_c - \mu \left( \operatorname{grad} \frac{1}{\mu} \times \mathbf{B} \right) + \mu_0 \operatorname{rot} \mathbf{P}_r + \mu \mu_0 \left( \operatorname{grad} \frac{1}{\mu} \times \mathbf{P}_r \right).$$

Так как

$$\operatorname{grad} \frac{1}{\mu} = -\frac{1}{\mu^2} \operatorname{grad} \mu,$$

то

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mu \mathbf{j}_c + \frac{1}{\mu} (\operatorname{grad} \mu \times \mathbf{B}) + \mu_0 \operatorname{rot} \mathbf{P}_r - \\ &- \frac{\mu_0}{\mu} (\operatorname{grad} \mu \times \mathbf{P}_r). \end{aligned} \quad (\text{IV.260})$$

В то же время первое уравнение системы (IV.237) имеет вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{j}_c + \mathbf{j}_m).$$

Сравнивая два предыдущих уравнения, заключаем, что объемная плотность молекулярных токов равна

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_m = & \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \mathbf{j}_c + \frac{1}{\mu \mu_0} (\text{grad } \mu \times \mathbf{B}) + \text{rot } \mathbf{P}_r - \\ & - \frac{1}{\mu} (\text{grad } \mu \times \mathbf{P}_r). \end{aligned} \quad (\text{IV.261})$$

Таким образом, в общем случае имеется четыре типа молекулярных токов. Первый тип

$$\mathbf{j}_m = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \mathbf{j}_c \quad (\text{IV.262})$$

возникает в окрестности точек, в которых плотность токов проводимости не равна нулю и векторы  $\mathbf{j}_c$  и  $\mathbf{j}_m$  одинаково направлены, если  $\mu > \mu_0$ .

Второй тип

$$\mathbf{j}_{2m} = \frac{1}{\mu \mu_0} (\text{grad } \mu \times \mathbf{B}) \quad (\text{IV.263})$$

появляется там, где компонента поля, перпендикулярная направлению максимального изменения магнитной проницаемости, не равна нулю. Третий тип

$$\mathbf{j}_{3m} = \text{rot } \mathbf{P}_r \quad (\text{IV.264})$$

полностью определяется поведением остаточной намагниченности и возникает в окрестности точек, в которых  $\text{rot } \mathbf{P}_r \neq 0$ .

И наконец, четвертый тип плотности тока

$$\mathbf{j}_{4m} = -\frac{1}{\mu} (\text{grad } \mu \times \mathbf{P}_r) \quad (\text{IV.265})$$

появляется там, где вектор остаточной намагниченности и  $\text{grad } \mu$  не параллельны.

Рассмотрим теперь распределение поверхностных молекулярных токов. Подставляя (IV.258) в уравнение

$$\text{Rot } \mathbf{H} = \mathbf{i}_c,$$

получаем

$$\mathbf{n} \times \left( \frac{\mathbf{B}_2}{\mu_2} - \frac{\mathbf{B}_1}{\mu_1} \right) = \mathbf{i}_c + \mu_0 \mathbf{n} \times \left( \frac{\mathbf{P}_{2r}}{\mu_2} - \frac{\mathbf{P}_{1r}}{\mu_1} \right). \quad (\text{IV.266})$$

Здесь  $\mathbf{B}_2$ ,  $\mathbf{P}_{2r}$  и  $\mathbf{B}_1$ ,  $\mathbf{P}_{1r}$  — векторы поля и остаточной намагниченности на лицевой и обратной стороне границы раздела.

Используя равенство

$$\left( \frac{\mathbf{a}_2}{\alpha_2} - \frac{\mathbf{a}_1}{\alpha_1} \right) = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{\alpha_2} - \frac{1}{\alpha_1} \right) (\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1) + \left( \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_1} \right) (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1) \right],$$

представим уравнение (IV.266) как

$$\text{Rot } \mathbf{B} = \frac{1}{\beta^{\text{cp}}} \mathbf{i}_c - \frac{\Delta \beta}{\beta^{\text{cp}}} \mathbf{n} \times \mathbf{B}^{\text{cp}} + \mu_0 \text{Rot } \mathbf{P}_r + \mu_0 \frac{\Delta \beta}{\beta^{\text{cp}}} \mathbf{n} \times \mathbf{P}_r^{\text{cp}},$$

где

$$\beta^{\text{cp}} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_1} \right), \quad \Delta \beta = \frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1},$$

$$\mathbf{B}^{\text{cp}} = \frac{\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2}{2}, \quad \mathbf{P}_r^{\text{cp}} = \frac{\mathbf{P}_{1r} + \mathbf{P}_{2r}}{2}.$$

Как следует из уравнений (IV.237),

$$\text{Rot } \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{i}_c + \mathbf{i}_m).$$

Следовательно, поверхностная плотность молекулярных токов равна

$$\mathbf{i}_m = \left( \frac{1}{\mu_0 \beta^{\text{cp}}} - 1 \right) \mathbf{i}_c + 2 \frac{K_{12}}{\mu_0} \mathbf{n} \times \mathbf{B}^{\text{cp}} + \text{Rot } \mathbf{P}_r - 2K_{12} \mathbf{n} \times \mathbf{P}_r^{\text{cp}}, \quad (\text{IV.267})$$

где

$$K_{12} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1}. \quad (\text{IV.268})$$

По аналогии с объемной плотностью мы различаем четыре типа поверхностных токов. Первый тип

$$\mathbf{i}_{1m} = \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{2 \mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} - \mu_0 \right) \mathbf{i}_c \quad (\text{IV.269})$$

встречается поблизости от токов проводимости на границах раздела сред с различными магнитными проницаемостями.

Плотность тока второго типа имеет вид

$$\mathbf{i}_{2m} = \frac{2K_{12}}{\mu_0} \mathbf{n} \times \mathbf{B}^{\text{cp}} \quad (\text{IV.270})$$

и прямо пропорциональна коэффициенту контрастности  $K_{12}$  и среднему значению тангенциальных компонент поля. Важно отметить, что в соответствии с (IV.74) функция  $\mathbf{n} \times \mathbf{B}^{\text{cp}}$  является тангенциальной компонентой магнитного поля в некоторой точке  $q$  поверхности раздела. Эта компонента обусловлена всеми токами, исключая токи в окрестности этой точки.

Третий тип поверхностной плотности имеет вид

$$\mathbf{i}_{3m} = \text{Rot } \mathbf{P}_r \quad (\text{IV.271})$$

и определяется разностью между тангенциальными компонентами остаточной намагниченности.

И наконец, четвертый тип токов возникает в тех областях

поверхности раздела, где средняя тангенциальная компонента вектора  $\mathbf{P}_r$  отлична от нуля:

$$\mathbf{i}_{4m} = -2K_{12} \mathbf{n} \times \mathbf{P}_r^{\text{cp}}. \quad (\text{IV.272})$$

Выведем систему уравнений для поля  $\mathbf{H}$ .

Подставляя (IV.258) во второе уравнение системы (IV.257), получим

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}_c \quad \text{div } \mu \mathbf{H} = -\mu_0 \text{div } \mathbf{P}_r, \quad (\text{IV.273})$$

$$\text{Rot } \mathbf{H} = \mathbf{i}_c \quad \text{Div } \mu \mathbf{H} = -\mu_0 \text{Div } \mathbf{P}_r.$$

Следовательно, генераторами поля  $\mathbf{H}$  являются токи проводимости и фиктивные источники. Для описания последних будем исходить из того, что дивергенция какого-либо поля характеризует плотность его источников. Поэтому введем плотность фиктивных источников поля  $\mathbf{H}$  как

$$\delta_m = \text{div } \mathbf{H} \quad \text{и} \quad \Sigma_m = \text{Div } \mathbf{H}. \quad (\text{IV.274})$$

Рассмотрим их распределение в регулярных точках среды. Поскольку

$$\text{div } \varphi \mathbf{a} = \varphi \text{div } \mathbf{a} + \mathbf{a} \text{grad } \varphi,$$

то

$$\text{div } \mu \mathbf{H} = \mu \text{div } \mathbf{H} + \mathbf{H} \text{grad } \mu = -\mu_0 \text{div } \mathbf{P}_r,$$

или [при использовании (IV.274)]

$$\delta_m = -\frac{\mathbf{H} \cdot \text{grad } \mu}{\mu} - \frac{\mu_0 \text{div } \mathbf{P}_r}{\mu}. \quad (\text{IV.275})$$

Таким образом, имеем два типа источников. Один из них

$$\delta_{1m} = -\frac{\mathbf{H} \cdot \text{grad } \mu}{\mu} \quad (\text{IV.276})$$

«возникает» в окрестностях точек, в которых не равна нулю компонента поля вдоль  $\text{grad } \mu$ . Следовательно, источники этого типа равны нулю, если поле  $\mathbf{H}$  перпендикулярно направлению максимального изменения магнитной проницаемости. Также  $\delta_{1m}$  равен нулю там, где среда однородна.

Второй тип источника

$$\delta_{2m} = -\frac{\mu_0}{\mu} \text{div } \mathbf{P}_r \quad (\text{IV.277})$$

связан только с поведением остаточной намагниченности.

Рассмотрим распределение фиктивных поверхностных источников, введенных формулами (IV.274):

$$\Sigma = \mathbf{H}_{2n} - \mathbf{H}_{1n}.$$

Так как

$$\operatorname{Div} \mu \mathbf{H} = \mu_2 H_{2n} - \mu_1 H_{1n} = \frac{1}{2} [(\mu_2 - \mu_1)(H_{2n} + H_{1n}) + (\mu_2 + \mu_1)(H_{2n} - H_{1n})] = -\mu_0 \operatorname{Div} \mathbf{P}_r,$$

то

$$\sum_m = -2K_{12} H_n^{\text{ср}} - \frac{\mu_0}{\mu^{\text{ср}}} \operatorname{Div} \mathbf{P}_r. \quad (\text{IV.278})$$

Следовательно, существуют два типа фиктивных источников на поверхности, а именно

$$\sum_{1m} = -2K_{12} H_n^{\text{ср}} \quad (\text{IV.279})$$

и

$$\sum_{2m} = -\frac{\mu_0}{\mu^{\text{ср}}} \operatorname{Div} \mathbf{P}_r.$$

Один из них «расположен» в окрестностях тех точек, где средняя нормальная компонента поля  $\mathbf{H}$  отлична от нуля. Другой тип определяется поведением нормальной компоненты остаточной намагниченности.

Теперь мы готовы сравнивать поля  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$ . Для выполнения этой задачи будет полезно рассмотреть их совместно с электрическим полем  $\mathbf{E}$  и вектором электростатической индукции  $\mathbf{D}$ . Помня, что поведение полей определено их генераторами, опишем основные особенности этих полей.

1. Магнитное поле  $\mathbf{B}$  вызывается только вихрями, и эти вихри включают как токи проводимости, так и молекулярные токи.

2. В общем случае поле  $\mathbf{H}$  имеет два различных типа генераторов, токи проводимости и фиктивные источники. Существенно, что молекулярные токи, возникающие вследствие намагниченности, не оказывают никакого влияния на поле  $\mathbf{H}$ .

3. Магнитное поле подчиняется закону Био — Савара, но этот закон не описывает поведение поля  $\mathbf{H}$ .

4. Сила, действующая на движущийся электрический заряд, определяется магнитным полем  $\mathbf{B}$ , но не полем  $\mathbf{H}$ .

5. В сущности, поле  $\mathbf{H}$  является вспомогательным полем, которое было введено для модификации системы уравнений для магнитного поля  $\mathbf{B}$ .

6. Электрическое поле  $\mathbf{E}$  является полем, имеющим источники поля, и возбуждается свободными и связанными зарядами.

7. В общем случае поле  $\mathbf{D}$  имеет два типа генераторов, а именно, свободные заряды и фиктивные вихри, однако связанные заряды не имеют какого-либо влияния на поле  $\mathbf{D}$ .

8. Поведение электрического поля определяется законом Кулона, однако поле  $\mathbf{D}$  не подчиняется этому закону.

9. Сила, действующая на заряд, определяется электрическим полем, а не полем  $\mathbf{D}$ .

10. Вектор электрической индукции  $D$  был введен для представления системы уравнений поля  $E$  таким образом, чтобы правая сторона второго уравнения содержала только свободные заряды, которые в случае непроводящих диэлектриков могут быть определены.

Итоги этого сравнения иллюстрируются в табл. IV.2.

Таблица IV.2

Поле	Источники	Вихри	Физический закон	Сила, действующая на заряд
$B$	—	Токи проводимости и молекулярные	Закон Био — Савара	—
$H$	Фиктивные источники	Токи проводимости	Вспомогательное поле	—
$E$	Свободные и связанные заряды	—	Закон Кулона	$e E$
$D$	Свободные заряды	Фиктивные вихри	Вспомогательное поле	—

Этот анализ показывает, что существует очевидная аналогия между электрическим и магнитным полями. Действительно, поля  $E$  и  $B$  определяют силы, действующие на заряд. Они также возбуждаются реальными генераторами и их поведение определяется физическим законом. Конечно, существуют различия между ними, так как электрическое поле начинается на источниках, в то время как магнитное поле генерируется вихрями.

Таким же образом мы можем провести аналогию между полями  $D$  и  $H$ . Действительно, оба поля генерируются источниками и вихрями, но один из этих генераторов не имеет физического смысла. Эти поля являются вспомогательными, и они играют одинаковую роль, позволяя нам вывести систему уравнений электрического и магнитного полей.

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих различие в поведении полей  $B$  и  $H$ .

### Пример 1. Поведение полей $B$ и $H$ в среде с плоской границей раздела

Предположим, что существует плоская граница раздела двух сред, имеющих магнитные проницаемости  $\mu_1$  и  $\mu_2$  соответственно (рис. IV.10, *в*). Предполагается, что однородное магнитное поле перпендикулярно к этой границе, а остаточная намагниченность и токи проводимости отсутствуют:

$$P_r = 0, \quad j_c = i_c = 0.$$

Прежде всего ясно, что в такой модели вихри магнитного поля отсутствуют. Действительно, как следует из уравнений (IV.261) и (IV.267), объемные и поверхностные плотности молекулярных



токов равны нулю. В то же время магнитное поле не имеет источников:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{Div} \mathbf{B} = 0$$

и, следовательно, его векторные линии всегда замкнуты. В частности, они не разрываются на границах. Учитывая, что поле  $\mathbf{B}$  перпендикулярно границе, заключаем, что плотность его векторных линий остается одинаковой в обеих средах. С теоретической точки зрения такое поле вызывается генераторами, находящимися в бесконечности.

Однако поле  $\mathbf{H}$  ведет себя иначе. Действительно,  $\mathbf{H}$  связано с  $\mathbf{B}$  соотношением

$$\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$$

и, следовательно, однородно, но имеет различное значение в каждой среде. Например, в среде с большей магнитной проницаемостью поле  $\mathbf{H}$  меньше. Следовательно, векторные линии этого поля разрывны на границе (рис. IV.10, *г*) и на границе появляются фиктивные источники. В соответствии с (IV.279) их плотность равна

$$\sum_{1m} = -2K_{12} H_n^{\text{сп}}$$

или

$$\sum_{1m} = \left( \frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1} \right) B_n, \quad (\text{IV.280})$$

где нормальная компонента положительна, если она направлена от среды с магнитной проницаемостью  $\mu_1$  к среде с проницаемостью  $\mu_2$ . Например, если  $\mu_2 > \mu_1$ , на границе раздела появляются отрицательные источники с постоянной плотностью. В то же время, вследствие однородности каждой части магнитной среды, объемная плотность фиктивных зарядов равна нулю.

В заключение можно сказать, что мы были вынуждены ввести фиктивные источники поля  $\mathbf{H}$  для того, чтобы обеспечить непрерывность нормальной компоненты магнитного поля на границе раздела сред с разными проницаемостями.

### Пример 2. Поведение полей $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ внутри тороида с щелью

Предположим, что однородная магнитная среда имеет форму тороида с очень малой щелью и окружена немагнитной средой (рис. IV.11, *а*). Предположим также, что ранее на среду действовало магнитное поле и что теперь среда обладает постоянной (остаточной) намагниченностью и векторное поле  $\mathbf{P}$ , однородно и направлено вдоль оси тороида.

Так как токи проводимости отсутствуют и каждый элементарный объем однородной среды имеет ту же намагниченность,

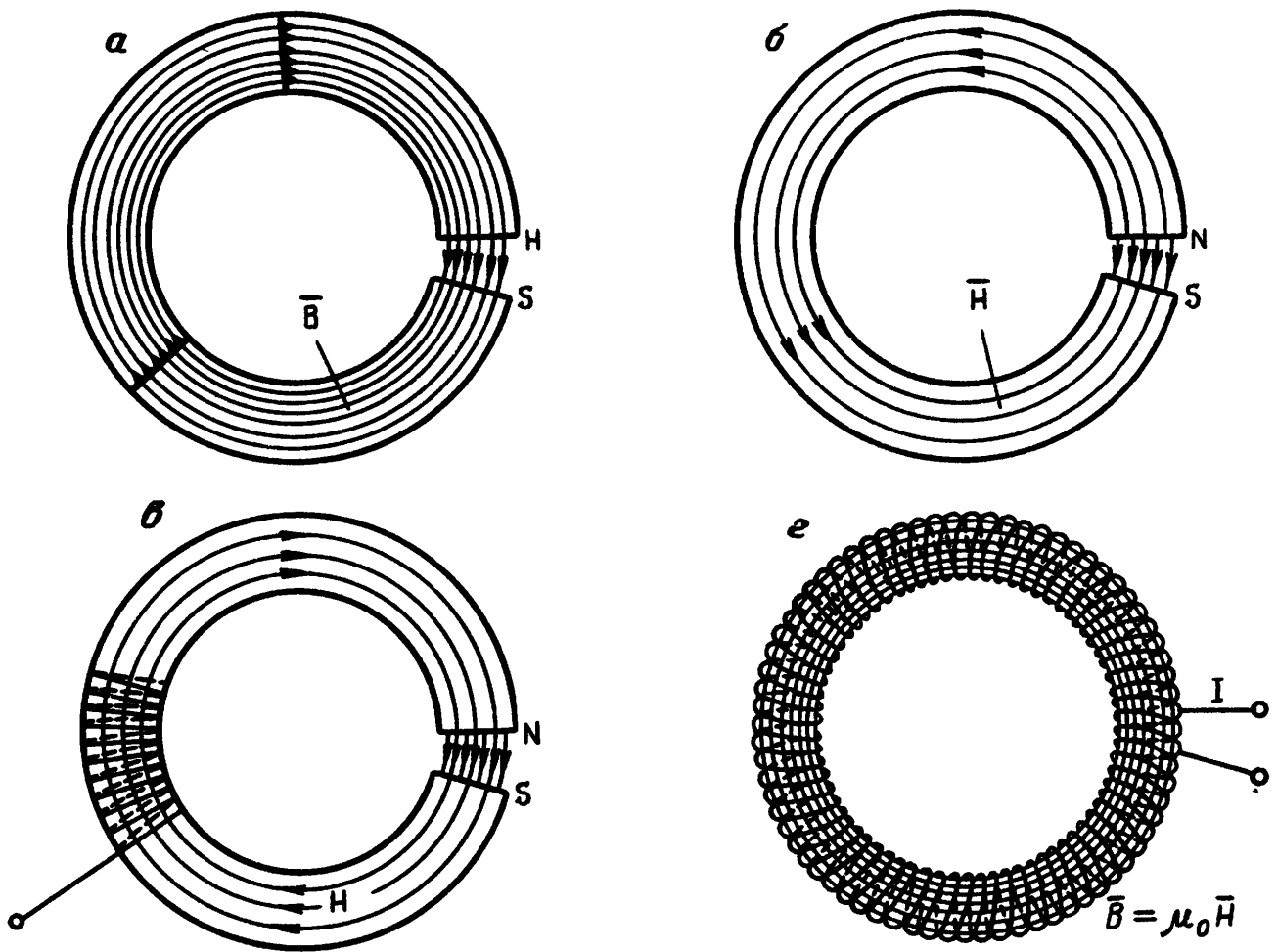


Рис. IV.11. Поля:

*a* —  $\vec{B}$  внутри магнитного тороида, *б* —  $\vec{H}$  внутри магнитного тороида, *в* —  $\vec{H}$  внутри магнитного тороида с поверхностными токами проводимости, *г* —  $\vec{H}$  и  $\vec{B}$  внутри соленоида с  $\mu = \mu_0$

объемная плотность молекулярных токов равна нулю [уравнение (IV.261)]. На боковой поверхности тороида плотность молекулярных токов не равна нулю. Действительно, учитывая, что  $P_{2r} = 0$ , и используя уравнения (IV.271), (IV.272), получаем

$$i_{3m} = -n \times P_r, \quad i_{4m} = -n \times K_{12} P_r$$

и

$$i_{3m} = i_{4m} = -n \times (1 + K_{12}) P_r = -\frac{2\mu_0}{\mu_0 + \mu} n \times P_r.$$

Как видно из рис. IV.11, *a*, векторы поверхностной плотности токов  $i_m$  и намагниченности  $P_r$  ориентированы в соответствии с правилом правой руки. Эти токи образуют систему токовых колец, распределенных с той же плотностью по боковой поверхности тороида. Очевидно, что такие токи создают практически однородное магнитное поле внутри магнита, которое вместе с вектором намагниченности направлено вдоль оси тороида. На боковой поверхности тангенциальная компонента магнитного поля изменяется от ее величины внутри магнита до очень малой величины, близкой к нулю; таким образом

$$B_{2t} - B_{1t} = -B.$$

Как следует из (IV.270), эта разрывность означает, что существует другой тип плотности поверхностного тока

$$i_{2m} = \left( \frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \mathbf{n} \times \mathbf{B},$$

который также описывает систему петель с током той же величины. Следовательно, можно сказать, что магнитное поле постоянного магнита, имеющего только поверхностные молекулярные токи, эквивалентно магнитному полю соленоида с таким же распределением токов проводимости. Легко предвидеть, что если ширина щели мала по сравнению с диаметром тора, то векторные линии  $\mathbf{B}$  почти параллельны друг другу. Это означает, что внутри тороида и в щели поле  $\mathbf{B}$  остается одним и тем же.

Рассмотрим поведение поля  $\mathbf{H}$ .

Как следует из (IV.257),

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{P}_r. \quad (\text{IV.281})$$

Таким образом,  $\mathbf{H}$  однородно и направлено вдоль оси тороида. Следовательно, фиктивные источники на боковой поверхности магнита отсутствуют [уравнения (IV.278)].

Плотность токов проводимости также равна нулю. Тем не менее, источники поля  $\mathbf{H}$  возникают на двух границах между тороидом и его щелью. В соответствии с (IV.279) имеем

$$\sum_{1m} = 2 \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} H_n^{\text{ср}}, \quad \sum_{2m} = \frac{2\mu_0}{\mu_0 + \mu} P_n.$$

Принимая во внимание, что

$$H_{1n} = \frac{B_n - \mu_0 P_n}{\mu} \quad \text{и} \quad H_{2n} = \frac{B_n}{\mu_0},$$

легко видеть, что положительные источники возникают на границе, там, где магнитное поле направлено из магнита к щели и наоборот.

Граница с положительными источниками обычно называется северным полюсом, в то время как противоположная сторона щели является южным полюсом. Векторные линии какого-либо поля, по определению, начинаются на положительном источнике и заканчиваются на отрицательном. Следовательно, внутри тороида поля  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  имеют противоположные направления, а в щели они одинаково направлены и отличаются друг от друга на постоянную  $\mu_0$  (рис. IV.11, б)

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}.$$

Предположим, что тороид не имеет щели и, однако, магнитное поле и вектор намагниченности касательны к его боковой поверхности.

Так как токи проводимости отсутствуют, мы заключаем, что поле  $\mathbf{H}$  внутри твердого тороида, так же, как и вне его, равно нулю:

$$\mathbf{H} \equiv 0.$$

Следовательно, внутри этого постоянного магнита формула (IV.281) упрощается и мы имеем

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{P}_r,$$

но вне тороида

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}_r = 0.$$

### Пример 3. Поведение полей $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ внутри соленоида

Рассмотрим соленоид, имеющий такие же размеры, как и тороид с щелью, как показано на рис. IV.11, г. Внутри соленоида магнитная среда отсутствует и, следовательно, поле  $\mathbf{B}$  вызывается только токами проводимости в катушке. Так как ширина щели мала по сравнению с диаметром соленоида, магнитное поле практически однородно внутри соленоида и в щели. Поле  $\mathbf{H}$  также генерируется только током в катушке и в соответствии с (IV.281)

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H},$$

т. е. поле  $\mathbf{H}$  однородно и имеет то же направление, что и поле  $\mathbf{B}$ .

Предположим, что плотность тока в катушке имеет величину и направление такие, что магнитные поля в щели для соленоида и тороида совпадают. Вследствие однородности этих полей мы можем констатировать, что внутри соленоида и тороида они также равны. Это происходит несмотря на то, что в одном случае поле вызвано токами проводимости, в то время как в другом молекулярные токи являются единственными возбудителями магнитного поля. Это иллюстрирует эквивалентность токов как возбудителей поля  $\mathbf{B}$ .

Сравним теперь поле  $\mathbf{H}$  в обеих моделях. Ясно, что внутри щелей постоянного магнита и соленоида поля  $\mathbf{H}$  равны друг другу, так как магнитные поля совпадают. Тем не менее, внутри тороида и катушки поведение поля  $\mathbf{H}$  не имеет общих черт. Действительно, внутри соленоида

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B},$$

но внутри тороида  $\mathbf{H}$  вызвано фиктивными источниками в окрестности полюсов и направлено противоположно магнитному полю  $\mathbf{B}$ .

### Пример 4. Поведение полей $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ внутри магнитного соленоида

Предположим, что тороид обмотан катушкой с током, как показано на рис. IV.11, г, и токи проводимости и поверхностные молекулярные токи имеют одинаковое направление. Соответ-

ственно, магнитное поле становится сильнее. Если ток в катушке достаточно большой, то поле  $\mathbf{H}$  в основном определяется этим током и, следовательно, поля  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  имеют одинаковые направления внутри тороида.

Вернемся к системе уравнений поля (IV.259) и рассмотрим различные модели среды, где эта система существенно упрощается.

### Случай 1. Немагнитная среда

В этой простейшей модели токи проводимости являются единственными генераторами поля  $\mathbf{B}$ , и из уравнений (IV.259) мы опять приходим к системе (IV.89):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j}_c, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{Rot} \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{i}_c & \operatorname{Div} \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{IV.282})$$

В то же время система уравнений для поля  $\mathbf{H}$  имеет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{j}_c, & \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0, \\ \operatorname{Rot} \mathbf{H} &= \mathbf{i}_c & \operatorname{Div} \mathbf{H} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.283})$$

и поля отличаются на постоянную  $\mu_0$ :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}.$$

Очевидно, что в этом случае магнитное поле определяется непосредственно из закона Био — Савара.

### Случай 2. Однородная магнитная среда

Предположим, что среда всюду однородна и магнитная проницаемость равна  $\mu$ . Тогда, в соответствии с уравнениями (IV.259) и (IV.273), имеем

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu \mathbf{j}_c, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (\text{IV.284})$$

и

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}_c \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \quad (\text{IV.285})$$

Сравнение с предыдущим случаем показывает, что магнитное поле  $\mathbf{B}$  возрастает в однородной магнитной среде и это возрастание прямо пропорционально проницаемости  $\mu$ . Такое поведение очень легко объяснить. Действительно, так как среда однородна, плотность молекулярных токов отличается от нуля только в окрестности токов проводимости и, как следует из (IV.262),

$$\mathbf{j}_{1m} = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \mathbf{j}_c.$$

Соответственно, общая плотность тока вблизи токов проводимости имеет вид

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_c + \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \mathbf{j}_c = \frac{\mu}{\mu_0} \mathbf{j}_c$$

и, следовательно, магнитное поле  $\mathbf{B}$  возрастает прямо пропорционально  $\mu$ , однако поле  $\mathbf{H}$  не изменяется и это происходит потому, что:

а) предполагается, что распределение токов проводимости остается таким же, как и в случае немагнитной среды;

б) фиктивные источники не появляются вследствие однородности среды;

в) молекулярные токи не генерируют поле  $\mathbf{H}$ .

Заметим, что в однородной магнитной среде поля  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  имеют вихревую природу.

### Случай 3. Индуцированная намагниченность отсутствует

Будем предполагать, что распределение молекулярных токов определяется только остаточной намагниченностью  $\mathbf{P}_r$  и известно. В то же время токи проводимости отсутствуют и можно пренебречь индуцированной намагниченностью  $\mathbf{P}_{in}$ , т. е.

$$\mathbf{P}_{in} = \chi \mathbf{H} = 0. \quad (\text{IV.286})$$

Поскольку вектор  $\mathbf{P}_{in}$  также равен нулю в немагнитной среде, так как  $\chi = 0$ , можно сказать, что молекулярные токи имеются в среде с магнитной проницаемостью  $\mu$ , равной  $\mu_0$ . Соответственно, (IV.281) можно записать как

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{P}_r). \quad (\text{IV.287})$$

Следует заметить, что магнитное поле изменяет распределение молекулярных токов и, в соответствии с уравнениями (IV.261) и (IV.267), их плотность равна

$$\mathbf{j}_m = \text{rot } \mathbf{P}_r \quad \text{и} \quad \mathbf{i}_m = \text{Rot } \mathbf{P}_r, \quad (\text{IV.288})$$

так как можно полагать  $\mu = \mu_0$ .

Приведенный анализ показывает, что в этом случае поле  $\mathbf{B}$  в магнитной среде совпадает с полем в немагнитной среде при условии, что в обеих средах одинаковое распределение токов. Принимая во внимание тот факт, что все молекулярные токи известны, магнитное поле можно определить непосредственно из закона Био — Савара и, следовательно, нет необходимости решать краевую задачу.

В предположении, что  $\mu = \mu_0$ , уравнение (IV.259) значительно упрощается, и мы получаем

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{B} &= \mu_0 \text{rot } \mathbf{P}_r, & \text{div } \mathbf{B} &= 0, \\ \text{Rot } \mathbf{B} &= \mu_0 \text{Rot } \mathbf{P}_r, & \text{Div } \mathbf{B} &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно, в регулярных точках среды

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{P}_r + \text{grad } \varphi)$$

и на границе раздела

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = \mathbf{n} \times (\mathbf{P}_{2r} - \mathbf{P}_{1r}),$$

т. е. разрыв тангенциальных компонент векторов  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{P}_r$  одинаков.

Как следует из уравнений (IV.273), система уравнений для поля  $\mathbf{H}$  имеет вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = -\operatorname{div} \mathbf{P}_r, \quad (\text{IV.289})$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0, \quad \mathbf{n} \cdot (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{P}_{1r} - \mathbf{P}_{2r})$$

и, в отличие от магнитного поля,  $\mathbf{H}$  имеет источники. В соответствии с уравнениями (IV.275) и (IV.278) эти источники равны

$$\delta = -\operatorname{div} \mathbf{P}_r, \quad \Sigma = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{P}_{1r} - \mathbf{P}_{2r}). \quad (\text{IV.290})$$

В следующем разделе мы рассмотрим соотношения между полем  $\mathbf{H}$  и его источниками.

**Случай 4. Магнитное поле, обусловленное остаточной и индуцированной намагниченностью, в то время как  $\mathbf{j}_c = \mathbf{i}_c = 0$**

Рассмотрим более запутанный случай, когда токи проводимости где-либо отсутствуют, но магнитное поле, обусловленное данным распределением остаточной намагниченности, приводит к появлению новых молекулярных токов. Другими словами, оба типа намагниченности создают генераторы поля  $\mathbf{B}$  и поэтому мы не можем полагать, что магнитная проницаемость среды равна  $\mu_0$ . Следовательно, система уравнений поля имеет вид

$$\operatorname{rot} \frac{\mathbf{B}}{\mu} = \mu_0 \operatorname{rot} \frac{\mathbf{P}_r}{\mu}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

$$\operatorname{Rot} \frac{\mathbf{B}}{\mu} = \mu_0 \operatorname{Rot} \frac{\mathbf{P}_r}{\mu}, \quad \operatorname{Div} \mathbf{B} = 0 \quad (\text{IV.291})$$

и, как следует из уравнений (IV.261), (IV.267), плотность токов, генерируемых этим полем, равна

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu\mu_0} (\operatorname{grad} \mu \times \mathbf{B}) + \operatorname{rot} \mathbf{P}_r - \frac{1}{\mu} (\operatorname{grad} \mu \times \mathbf{P}_r), \quad (\text{IV.292})$$

$$\mathbf{i} = 2 \frac{K_{12}}{\mu_0} \mathbf{n} \times \mathbf{B}^{\text{cp}} + \operatorname{Rot} \mathbf{P}_r - 2K_{12} \mathbf{n} \times \mathbf{P}_r^{\text{cp}}.$$

Ясно, что первый член в выражениях для объемной и поверхностной плотностей токов не может быть определен, если поле  $\mathbf{B}$  неизвестно. Мы опять сталкиваемся с проблемой «замкнутого круга». Закон Био — Савара нельзя использовать для вычисления магнитного поля, и вместо него мы формулируем краевую задачу. В связи с этим полезно рассмотреть систему уравнений для поля  $\mathbf{H}$ . В соответствии с уравнениями (IV.273), получаем

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{div} \mu \mathbf{H} = -\mu_0 \operatorname{div} \mathbf{P}_r, \quad (\text{IV.293})$$

$$\operatorname{Rot} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{Div} \mu \mathbf{H} = -\mu_0 \operatorname{Div} \mathbf{P}_r.$$

Как и в предыдущем случае, поле  $\mathbf{H}$  начинается на источнике и распределение его источников определено уравнениями (IV.275) — (IV.278). Конечно, один тип фиктивных источников зависит от поля  $\mathbf{H}$  и этот факт также требует формулировки краевой задачи. Таким образом, определение магнитного поля может быть в принципе выполнено двумя путями. Один из них основан на решении системы (IV.291), в то время как другой позволяет найти поле  $\mathbf{H}$  и затем, используя (IV.258), определить  $\mathbf{B}$ . Так как поле  $\mathbf{H}$  возбуждается источником, второй вариант предпочтительнее, поскольку позволяет ввести скалярный потенциал  $U$ , при помощи которого существенно упрощается вычисление поля.

**Случай 5. Отсутствуют как остаточная намагниченность, так и токи проводимости**

Предположим, что магнитное вещество поместили во внешнее магнитное поле  $\mathbf{B}_0$ . Поле  $\mathbf{B}$  известно. Тогда возникают молекулярные токи, обусловленные индуцированной намагниченностью, и генерируют вторичное магнитное поле  $\mathbf{B}_s$ . Следовательно, общее магнитное поле состоит из двух частей:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_s.$$

Так как токи проводимости и остаточная намагниченность отсутствуют, система уравнений поля значительно упрощается и мы имеем

$$\operatorname{rot} (\mathbf{B}/\mu) = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (\text{IV.294})$$

$$\mathbf{n} \times \left( \frac{\mathbf{B}_2}{\mu_2} - \frac{\mathbf{B}_1}{\mu_1} \right) = 0, \quad \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0.$$

Поэтому объемная и поверхностная плотности молекулярных токов имеют вид

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu \mu_0} (\operatorname{grad} \mu \times \mathbf{B}), \quad \mathbf{i} = 2 \frac{K_{12}}{\mu_0} \mathbf{n} \times \mathbf{B}^{\text{ср}} \quad (\text{IV.295})$$

и могут быть определены, если поле  $\mathbf{B}$  известно. Это изучение показывает, что в общем случае даже в регулярных точках поле имеет вихревое происхождение.

Как следует из уравнений (IV.273), система уравнений для  $\mathbf{H}$  имеет вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{div} \mu \mathbf{H} = 0, \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0 \quad \mathbf{n} \cdot (\mu_2 \mathbf{H}_2 - \mu_1 \mathbf{H}_1) = 0 \quad (\text{IV.296})$$

и источниками поля являются



$$\delta_m = - \frac{H \cdot \text{grad } \mu}{\mu}, \quad \sum_m = - 2K_{12} H_n^{\text{cp}}. \quad (\text{IV.297})$$

Как и в случае 4, очевидно, что поле  $\mathbf{B}$  можно определить двумя путями. Более естественным путем является формулировка краевой задачи для поля  $\mathbf{H}$  и нахождение затем магнитного поля, исходя из соотношения  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ . Это связано с природой поля  $\mathbf{H}$ . В то же время для кусочно-однородной среды оба подхода эквивалентны. Действительно, системы уравнений для полей  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  имеют вид

$$\text{rot } \mathbf{B} = 0, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (\text{IV.298})$$

$$\mathbf{n} \times \left( \frac{\mathbf{B}_2}{\mu_2} - \frac{\mathbf{B}_1}{\mu_1} \right) = 0, \quad \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0,$$

и

$$\text{rot } \mathbf{H} = 0, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0, \quad (\text{IV.299})$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0, \quad \mathbf{n} \cdot (\mu_2 \mathbf{H}_2 - \mu_1 \mathbf{H}_1) = 0.$$

Следовательно, объемные молекулярные токи отсутствуют и оба поля можно выразить при помощи скалярного потенциала, несмотря на то, что магнитное поле обусловлено вихрями на поверхности.

Мы рассмотрели различные случаи, когда систему уравнений поля можно упростить. В общем случае магнитное поле  $\mathbf{B}$  можно представить как сумму трех полей:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^{(1)} + \mathbf{B}^{(2)} + \mathbf{B}^{(3)}$$

и каждое из них удовлетворяет одной из следующих систем:

$$\text{rot } \frac{\mathbf{B}^{(1)}}{\mu} = \mathbf{j}_c, \quad \text{div } \mathbf{B}^{(1)} = 0,$$

$$\text{Rot } \frac{\mathbf{B}^{(1)}}{\mu} = \mathbf{i}_c, \quad \text{Div } \mathbf{B}^{(1)} = 0,$$

$$\text{rot } \frac{\mathbf{B}^{(2)}}{\mu} = \text{rot } \frac{\mathbf{P}_r}{\mu}, \quad \text{div } \mathbf{B}^{(2)} = 0,$$

$$\text{Rot } \frac{\mathbf{B}^{(2)}}{\mu} = \text{Rot } \frac{\mathbf{P}_r}{\mu}, \quad \text{Div } \mathbf{B}^{(2)} = 0$$

и

$$\text{rot } \frac{\mathbf{B}^{(3)}}{\mu} = 0, \quad \text{div } \mathbf{B}^{(3)} = 0,$$

$$\text{Rot } \frac{\mathbf{B}^{(3)}}{\mu} = 0, \quad \text{Div } \mathbf{B}^{(3)} = 0.$$

Очевидно, что, сравнивая  $\mathbf{B}^{(1)}$  и  $\mathbf{B}^{(2)}$ , можно различить поля, вызванные заданным распределением токов проводимости и остаточной намагниченностью, и эти поля можно непосредственно вычислить, применяя закон Био — Савара.

Как хорошо известно, магнитное поле, измеренное выше и ниже земной поверхности, можно представить как сумму двух полей:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_N + \mathbf{B}_S. \quad (\text{IV.300})$$

Здесь  $\mathbf{B}_N$  — нормальное магнитное поле, обусловленное в основном токами проводимости в земном ядре, а  $\mathbf{B}_S$  — вторичное, или аномальное, поле, генерируемое молекулярными токами в верхней части Земли. Молекулярные токи возникают вследствие концентрации ферромагнитных веществ в формациях различных типов, включая фундамент, интрузивные вулканические породы, магнитные рудные тела и так далее. Главной целью магнитных методов, применяемых в разведочной геофизике, является изучение различных геологических структур, имеющих разную магнитную восприимчивость. Эти методы базируются на измерении вторичного магнитного поля. В данном разделе мы применим наши знания теории магнитного поля и рассмотрим поведение этого поля, вызванного токами проводимости и молекулярными токами в земле. Наш подход будет подобен тому, что был использован в главах II и III.

Прежде всего отметим, что нормальное поле  $\mathbf{B}_N$  сложнее, чем гравитационное  $q_N$ . В то время как последнее практически не меняет направления и его изменения со временем относительно предсказуемы, поле  $\mathbf{B}$  на земной поверхности сильно изменяется как по величине, так и по направлению. Более того, магнитное поле имеет относительно большую переменную компоненту, которая зависит от времени и неизвестна заранее. Мы будем рассматривать только постоянную часть этого поля, которое, в принципе, обусловлено токами как внутри Земли, так и токами проводимости в ионосфере. Очевидно, что определение относительного вклада этих токов в нормальное магнитное поле  $\mathbf{B}_N$  необходимо для понимания его природы. Поэтому здесь уместно описать решение этой проблемы, данное впервые Гауссом.

#### *Внешние и внутренние компоненты нормального поля*

Предположим, что нормальное поле  $\mathbf{B}_N$  известно на земной поверхности, и эта информация получена при измерении  $\mathbf{B}_N$  различными магнитными станциями. Мы также полагаем, что токи проводимости между земной поверхностью и ионосферой отсутствуют. Это предположение подтверждается многочисленными экспериментами, которые в основном базируются на использовании первого уравнения поля в интегральной форме

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I,$$

где  $I$  — ток, протекающий через область, ограниченную конту-

ром  $\mathcal{L}$ . Эксперименты показали, что циркуляция магнитного поля вдоль любого контура  $\mathcal{L}$ , находящегося на земной поверхности и выше, равна нулю. Следовательно, током между земной поверхностью и ионосферой можно пренебречь. Система уравнений для поля  $\mathbf{B}$  над землей имеет вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

и на земной поверхности нормальная и тангенциальная компоненты поля — непрерывные функции:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0, \quad \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0,$$

если

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_0.$$

Таким образом,  $\mathbf{B}$  является гармоническим полем и может быть выражено при помощи скалярного потенциала  $U$ , удовлетворяющего уравнению Лапласа

$$\nabla^2 U = 0, \tag{IV.301}$$

где

$$\mathbf{B} = -\operatorname{grad} U.$$

Выберем сферическую систему координат  $R, \theta, \varphi$  с началом координат в центре Земли. Предполагая осевую симметрию поля, уравнение (IV.301) запишем как

$$\frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \frac{\partial U}{\partial R} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) = 0. \tag{IV.302}$$

Применяя метод разделения переменных, представим потенциал  $U$  в виде

$$U(R, \theta) = T(R) F(\theta). \tag{IV.303}$$

Подставляя выражение (IV.303) в уравнение (IV.302), получаем

$$F \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \frac{\partial T}{\partial R} \right) + \frac{T}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) = 0$$

или

$$\frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \frac{\partial T}{\partial R} \right) + \frac{1}{F \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) = 0. \tag{IV.304}$$

Легко видеть, что оба члена в левой стороне этого уравнения не зависят от  $R$  и  $\theta$  и, следовательно, мы получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$\frac{d}{dR} \left( R^2 \frac{dT}{dR} \right) = mT \tag{IV.305}$$

и

$$\frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dF}{d\theta} \right) + mF \sin \theta = 0. \quad (\text{IV.306})$$

Решение первого уравнения

$$T_n(R) = A_n R^n + B_n R^{-n-1}, \quad (\text{IV.307})$$

где

$$m = n(n+1).$$

Легко убедиться, что функции  $T_n(R)$  удовлетворяют уравнению (IV.305). Соответственно, уравнение (IV.306) принимает вид

$$\frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dF_n}{d\theta} \right) + n(n+1)F_n = 0. \quad (\text{IV.308})$$

Решениями этого уравнения являются функции Лежандра первого и второго рода  $P_n(\theta)$  и  $Q_n(\theta)$ , которые даются формулами (IV.210). Поскольку функции  $Q_n(\theta)$  имеют особенность на оси  $z$ ,  $\theta = 0$ , их нельзя использовать для описания поведения этого поля. Таким образом, исходя из уравнений (IV.303) и (IV.307), находим, что потенциал  $U(R, \theta)$  имеет вид

$$U(R, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n R^n + B_n R^{-n-1}) P_n(\cos \theta). \quad (\text{IV.309})$$

Существенно отметить, что правая часть формулы (IV.309) состоит из двух членов. Один из них

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n R^{-n-1} P_n(\cos \theta),$$

убывает с возрастанием расстояния от земного центра, в то время как другой

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n R^n P_n(\cos \theta)$$

становится больше с возрастанием  $R$ . По этим причинам естественно интерпретировать первый и второй члены как потенциалы магнитных полей, вызванных токами, соответственно, в земле и ионосфере. Из уравнения (IV.301)

$$\mathbf{B} = -\text{grad } U$$

имеем

$$B_R = -\frac{\partial U}{\partial R}, \quad B_\theta = -\frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial \theta}, \quad B_\varphi = 0$$

и, следовательно,

$$B_R = \sum_{n=1}^{\infty} [-nA_n R^{n-1} + (n+1)B_n R^{-n-2}] P_n(\cos \theta),$$

$$B_\theta = - \sum_{n=1}^{\infty} [A_n R^{n-1} + B_n R^{-n-2}] \frac{\partial}{\partial \theta} P_n(\cos \theta),$$

$$B_\varphi = 0.$$

Вводя обозначения, используемые в геомагнетизме,

$$Z = -B_R \quad \text{и} \quad X = -B_\theta,$$

получаем для точек, находящихся на земной поверхности,

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} [nA_n R_0^{n-1} - (n+1)B_n R_0^{-n-2}] P_n(\cos \theta), \quad (\text{IV.310})$$

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n R_0^{n-1} + B_n R_0^{-n-2}] \frac{\partial}{\partial \theta} P_n(\cos \theta),$$

где  $R_0$  — радиус Земли;  $\theta$  — широта точки наблюдения.

Таким образом, мы представили вертикальную и горизонтальную компоненты магнитного поля на земной поверхности как комбинацию сферических гармоник, каждая из которых является суммой двух членов, характеризующих токи выше и ниже земной поверхности. Это представление имеет важное значение для разделения полного поля на две части, генерируемые внешними и внутренними токами.

Предположим, что мы выполнили сферический гармонический анализ измеренных величин  $Z$  и  $X$ . Тогда

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n P_n(\cos \theta)$$

и (IV.311)

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} X_n \frac{\partial}{\partial \theta} P_n(\cos \theta),$$

где  $Z_n$  и  $X_n$  — значения сферических гармоник, которые определены этим анализом. Подобный подход используется тогда, когда какие-либо экспериментальные данные аппроксимируются при помощи полиномов или рядов Фурье.

Сравнивая (IV.310), (IV.311) и учитывая ортогональность сферических функций, получаем два линейных уравнения с двумя неизвестными  $A_n$  и  $B_n$ :

$$Z_n = nA_n R_0^{n-1} - (n+1) B_n R^{-n-2}, \quad (IV.312)$$

$$X_n = A_n R_0^{n-1} + B_n R_0^{-n-2}.$$

Решая эту систему, получаем для амплитуд сферических гармоник, описывающих поля внешних и внутренних токов, следующие выражения:

$$A_n = \frac{(n+1) X_n + Z_n}{(2n+1) R_0^{n-1}}, \quad (IV.313)$$

$$B_n = \frac{n X_n - Z_n}{(2n+1) R_0^{n+2}}.$$

Выполнив этот анализ, Гаусс продемонстрировал, что поле, обусловленное внешними токами, пренебрежимо мало и что амплитуды первой гармоники  $X_1$  и  $Z_1$  по меньшей мере в 5 раз больше амплитуд других гармоник. Таким образом, это исследование позволяет установить, что главная часть нормального магнитного поля  $B_N$  ведет себя подобно полю магнитного диполя:

$$Z = -\frac{2B_1}{R^3} \cos \theta, \quad X = -\frac{B_1}{R^3} \sin \theta$$

или

$$Z = \frac{2\mu_0 M}{4\pi R^3} \cos \theta, \quad X = \frac{\mu_0 M}{4\pi R^3} \sin \theta, \quad (IV.314)$$

так как

$$n = 1, \quad P_1(\cos \theta) = \cos \theta, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} P_1(\cos \theta) = -\sin \theta$$

и момент  $M$  направлен с севера на юг вдоль оси вращения Земли, поскольку влияние долготы не учитывалось. Векторные линии этого поля показаны на рис. IV.12, *a*. Мы должны оценить простоту метода Гаусса, позволяющего установить фундаментальные особенности поля  $B_N$ .

Как мы знаем, магнитное поле, описываемое формулой (IV.310), обусловлено петлей с током, диаметр которой много меньше расстояния между петлей и точкой наблюдения. По этой причине принимается модель, согласно которой нормальное магнитное поле  $B_N$  обусловлено токами проводимости, текущими в центральной части Земли и ориентированными в плоскости, почти перпендикулярной оси вращения. Как следует из (IV.314), обе компоненты поля варьируются на земной поверхности и, в частности, вблизи полюса вертикальная компонента достигает  $60 \cdot 10^3 \gamma$ . Полагая  $\theta = 0$ , мы видим, что момент

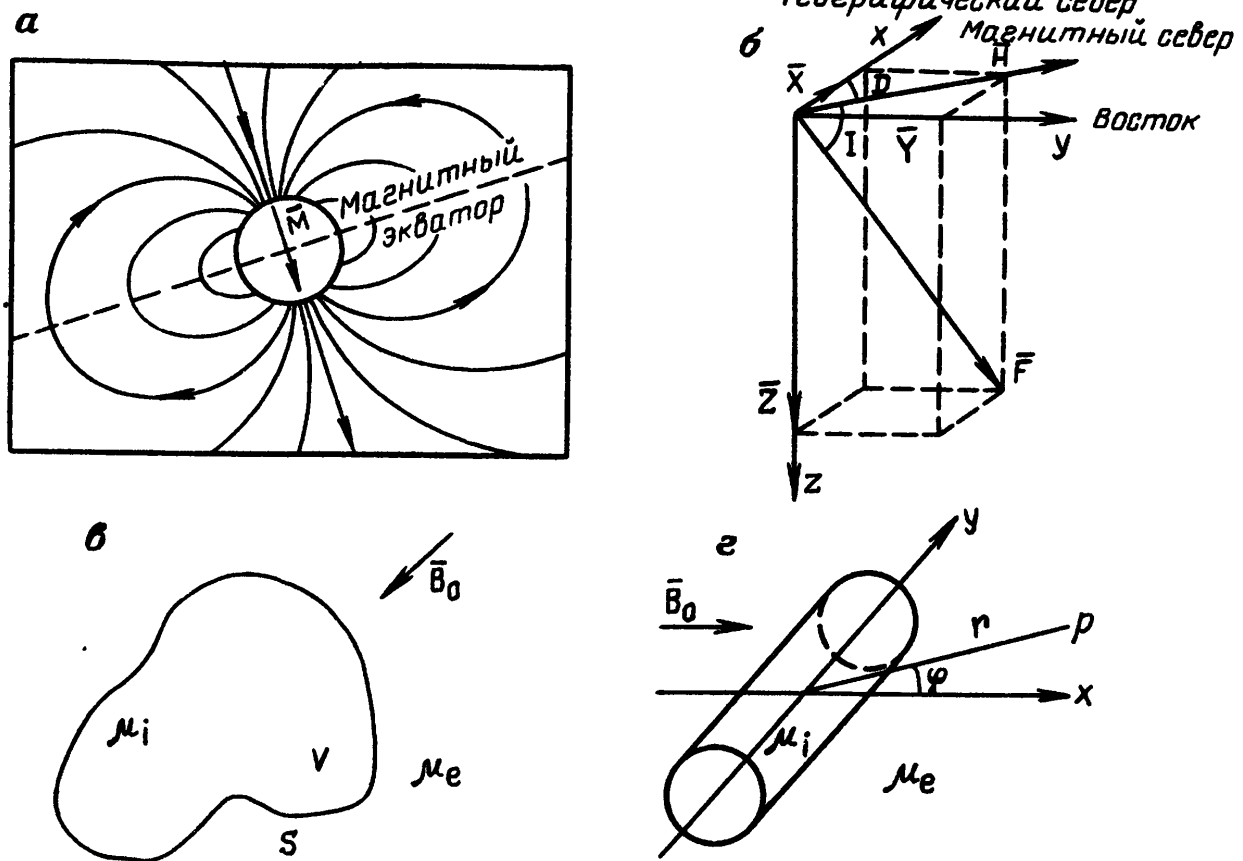


Рис. IV.12. Магнитное поле Земли (а); компоненты магнитного поля Земли (б); магнитная неоднородность в магнитном поле  $\vec{B}_0$  (в); магнитный цилиндр в однородном магнитном поле (г)

$$M \approx 10^{23} \text{ Ам}^2.$$

Если мы предположим, что радиус этой токовой системы около 1000 км, то общий ток

$$I = 3 \times 10^{10} \text{ А.}$$

Это действительно сильный ток.

Изучение остаточной намагниченности пород — основа палеомагнетизма, позволяющего реконструировать историю магнитного поля Земли. Удивительно, что теория палеомагнетизма базируется, в принципе, на использовании очень простых уравнений (IV.314), которые описывают поле магнитного диполя. Действительно, направление магнитного поля Земли, которое существовало в то время, когда порода была образована при охлаждении, определяет направление остаточной намагниченности. Таким образом, зная ориентацию образца породы, так же как и время ее формирования, и измерив остаточную намагниченность, можно определить направление магнитного поля внутри определенного промежутка времени в прошлом. В частности, эти исследования позволили открыть обращение направления поля  $B_N$ . Это явление имеет большое значение как для теории геомагнетизма, так и для хронологии геологических событий.

Более того, если мы предположим, что в течение всей истории Земли ее магнитное поле ведет себя подобно полю магнитного диполя, то можно определить кажущееся положение полюсов в различные времена. Действительно, как следует из (IV.314), отношение

$$\frac{X}{Z} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \theta$$

определяет угол  $\theta$ , который образован радиус-вектором  $\mathbf{R}$ , характеризующим положение образца породы, и направлением момента диполя. Проведя линию к земной поверхности вдоль этого направления, мы определим положение полюса. Имея в своем распоряжении результаты такого изучения, основанного на (IV.314), геофизики открыли, что полюса блуждают по земной поверхности и траектории этого движения наблюдаются на различных континентах, существенно отличных друг от друга. Этот факт — веское подтверждение движения континентов, и можно только удивляться, что такие простые уравнения дают так много для развития современных концепций, таких, как тектоника плит.

В заключение заметим, что магнитное поле на земной поверхности обычно характеризуется величиной  $T$ , наклоном  $I$  и склонением  $D$ : эти величины связаны с компонентами поля, как показано на рис. IV.12, б, при помощи соотношений

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{H^2 + Z^2} = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \\ H &= T \cos I, \quad Z = T \sin I, \quad X = H \cos D, \quad Y = H \sin D, \\ \operatorname{tg} I &= Z/H, \quad \operatorname{tg} D = Y/H. \end{aligned}$$

В следующих двух частях этого раздела мы опишем вторичное магнитное поле  $\mathbf{B}_S$ , обусловленное восприимчивостью породы.

#### *Поведение вторичного магнитного поля, обусловленного индуцированной намагниченностью*

В этой части будем изучать влияние кусочно-однородной магнитной среды, помещенной во внешнее поле  $\mathbf{B}_0$ . Этим полем может быть, к примеру, нормальное поле Земли  $\mathbf{B}_N$ . Пример такой среды показан на рис. IV.12, в. В среде возникают молекулярные токи, обусловленные полем  $\mathbf{B}_0$ , и эти токи генерируют вторичное магнитное поле  $\mathbf{B}_S$ . Поэтому общее поле в каждой точке представимо в виде

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_S.$$

Объемная плотность молекулярных токов равна нулю, так как среда кусочно-однородна, и поле  $\mathbf{B}_S$  генерируется только поверхностными молекулярными токами. Конечно, плотность этих токов обычно не известна перед вычислением поля, так как их распределение зависит от общего магнитного поля  $\mathbf{B}_S$ . Другими сло-



вами, взаимодействие может быть значимым. Поэтому в общем случае для определения вторичного поля  $B_s$  необходимо решить краевую задачу. При формулировании этой задачи будем исходить из системы уравнений поля, которая в соответствии с уравнениями (IV.298) имеет вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (\text{IV.315})$$

$$\frac{B_{2t}}{\mu_2} - \frac{B_{1t}}{\mu_1} = 0, \quad B_{2n} - B_{1n} = 0,$$

так как отсутствуют остаточная намагниченность и токи проводимости.

Подобно тому, как это делается в случае электрического поля, введем скалярный потенциал  $U$ . В самом деле, из первого уравнения

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = 0$$

следует, что

$$\mathbf{B} = -\operatorname{grad} U. \quad (\text{IV.316})$$

Заметим, что выбор знака в этом равенстве не важен и мы выбрали минус только по аналогии с электрическим полем.

Подставляя (IV.316) во второе уравнение

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

получаем уравнение Лапласа

$$\nabla^2 U = 0. \quad (\text{IV.317})$$

Соответственно, условиями на границе раздела сред с различными магнитными проницаемостями являются

$$\frac{1}{\mu_2} \frac{\partial U_2}{\partial t} - \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial U_1}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial U_2}{\partial n} - \frac{\partial U_1}{\partial n} = 0$$

или

$$\frac{U_2}{\mu_2} = \frac{U_1}{\mu_1}, \quad \frac{\partial U_2}{\partial n} = \frac{\partial U_1}{\partial n}, \quad (\text{IV.318})$$

так как из непрерывности функции  $U/\mu$  следует непрерывность производных в направлении касательной к границе раздела. Таким образом, системой уравнений для скалярного потенциала, описывающей его поведение в кусочно-однородной среде, является следующая:

$$\nabla^2 U = 0, \quad \frac{U_2}{\mu_2} - \frac{U_1}{\mu_1} = 0, \quad \frac{\partial U_2}{\partial n} - \frac{\partial U_1}{\partial n} = 0, \quad (\text{IV.319})$$

Очевидно, что если имеется несколько границ раздела сред, то условия непрерывности функций  $U/\mu$  и  $\partial U/\partial n$  обеспечиваются на каждой из границ.

Полезно переписать здесь систему уравнений для потенциала электрического поля в кусочно-однородной проводящей среде. Из уравнений (II.241) имеем

$$\nabla^2 U = 0, \quad U_2 - U_1 = 0, \quad \gamma_2 \frac{\partial U_2}{\partial n} - \gamma_1 \frac{\partial U_1}{\partial n} = 0. \quad (\text{IV.320})$$

Сравнивая уравнения (IV.319), (IV.320), видим, что и в том и в другом случае потенциал является гармонической функцией и этот факт очевиден, так как в окрестности регулярных точек однородной среды объемная плотность как зарядов, так и молекулярных токов равна нулю. В то же время поведение этих потенциалов на границах раздела сред существенно различно и это можно легко объяснить. В самом деле, в случае электрического поля возникают поверхностные заряды и потенциал является непрерывной функцией, в то время как нормальная компонента электрического поля  $-\partial U/\partial n$  терпит разрыв на границе. В противоположность этому, существование поверхностных молекулярных токов ведет к разрывности тангенциальной компоненты магнитного поля и, следовательно, потенциал  $U$  терпит разрыв.

Поскольку поверхностные токи не создают в окрестности поверхности нормальной компоненты  $B_n$ , то  $\partial U/\partial n$  остается всюду непрерывной функцией. Несмотря на это различие, система (IV.319) может быть легко трансформирована в систему (IV.320). Подразумевая эту цель, введем функцию  $U^*$ , которая отличается от потенциала магнитного поля в каждой регулярной точке среды постоянным множителем:

$$U^* = \frac{1}{\mu} U.$$

Тогда система (IV.319) может быть переписана как

$$\nabla^2 U^* = 0, \quad U_2^* = U_1^* = 0, \quad \mu_2 \frac{\partial U_2^*}{\partial n} - \mu_1 \frac{\partial U_1^*}{\partial n} = 0. \quad (\text{IV.321})$$

Подобие уравнений (IV.320), (IV.321) очевидно. Соответственно, в обоих случаях краевую задачу можно сформулировать одинаковым образом. Следовательно, определение магнитного поля, обусловленного поверхностными токами в кусочно-однородной среде, состоит в выполнении следующих шагов.

1. Решение уравнения Лапласа

$$\Delta U = 0.$$

2. Выбор гармонических функций, удовлетворяющих следующим условиям на границе раздела:

$$U_2/\mu_2 - U_1/\mu_1 = 0, \quad \partial U_2/\partial n - \partial U_1/\partial n = 0.$$

3. Выбор среди этих функций такой, которая удовлетворяет граничным условиям. Как и в случае электрического поля, для

этого необходимо знание либо потенциала, либо его нормальной производной на поверхностях, ограничивающих среду, где изучается поле  $\mathbf{B}$ .

Тогда из теоремы единственности следует, что потенциал  $U$ , определенный так, как описано выше, однозначно определяет магнитное поле.

Уместно заметить, что функция  $U^*$ , введенная ранее, является потенциалом поля  $\mathbf{H}$ .

Ниже рассмотрим примеры, иллюстрирующие как решение краевой задачи, так и поведение магнитного поля.

### Пример 1. Цилиндр в однородном поле

Предположим, что цилиндр с радиусом  $a$  и магнитной проницаемостью  $\mu_i$  помещен в однородное магнитное поле  $\mathbf{B}_0$ , перпендикулярное оси цилиндра (рис. IV.12,  $z$ ). Магнитная проницаемость окружающей среды равна  $\mu_e$ . Так как среда однородна внутри и вне цилиндра, намагниченность не приводит к появлению объемных молекулярных токов. В то же время поверхностная плотность этих токов не равна нулю и в согласии с (IV.270)

$$i = \frac{2K_{12}}{\mu_0} \mathbf{n} \times \mathbf{B}^{\text{cp}},$$

где

$$K_{12} = (\mu_e - \mu_i) / (\mu_e + \mu_i)$$

и  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, нормальный к поверхности цилиндра и направленный во внешнюю сторону.

Так как первичное поле  $\mathbf{B}_0$  однородно и имеет только компоненту  $B_{0x}$ , вектор плотности тока ориентирован вдоль оси цилиндра и не изменяется в этом направлении. Другими словами, вторичное поле  $\mathbf{B}_s$  обусловлено линейными токовыми нитями, находящимися на цилиндрической поверхности.

Для определения этого поля начнем с решения уравнения Лапласа. Прежде всего выберем цилиндрическую систему координат  $r, \varphi, y$  таким образом, что ось  $y$  совпадает с осью цилиндра. Тогда уравнение Лапласа можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (\text{IV.323})$$

так как поле и его потенциал не зависят от координаты  $y$ . Вновь применим метод разделения переменных и представим потенциал магнитного поля в виде

$$U(r, \varphi) = T(r) F(\varphi). \quad (\text{IV.324})$$

Подставляя (IV.324) в уравнение (IV.323) и умножая все члены на функцию

$$r^2 / TF,$$

получаем

$$\frac{r^2}{T(r)} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{r}{T(r)} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{F} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (\text{IV.325})$$

Легко видеть, что сумма двух первых членов, так же как и последний член, не зависит от координат  $r$  и  $\varphi$  и, следовательно, вместо уравнения (IV.325) получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$\frac{1}{F} \frac{d^2 F}{d\varphi^2} = \pm n^2, \quad (\text{IV.326})$$

$$\frac{r^2}{T} \frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{r}{T} \frac{dT}{dr} = \mp n^2.$$

Для выбора подходящего знака в правой части этих уравнений используем тот факт, что поле  $V$  является периодической функцией аргумента  $\varphi$  с периодом  $2\pi$ . В противном случае поле будет описываться многозначной функцией. По этой причине выберем отрицательный знак в правой части первого уравнения системы и получим

$$\frac{d^2 F}{d\varphi^2} + n^2 F = 0.$$

Это хорошо известный гармонический осциллятор, и решением этого уравнения является

$$F_n = A_n^* \sin n \varphi + B_n^* \cos n \varphi, \quad (\text{IV.327})$$

где  $F_n$  — частное решение для данного номера  $n$ . Если же выбирать положительный знак, то функция  $F$  не будет периодической, так как в этом случае

$$F_n = A_n^* e^{n\varphi} + B_n^* e^{-n\varphi}.$$

Этот анализ также показывает, что в правой части второго уравнения (IV.326) необходимо выбрать положительный знак и, следовательно,

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} - \frac{n^2}{r^2} T = 0.$$

Последнее является обыкновенным дифференциальным уравнением, оно также детально изучено и его решение

$$T_n = C_n^* r^n + D_n^* r^{-n}. \quad (\text{IV.328})$$

Следовательно, общим решением уравнения Лапласа, представленным в виде суммы частных решений, является

$$U(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (C_n^* r^n + D_n^* r^{-n}) (A_n^* \sin n \varphi + B_n^* \cos n \varphi). \quad (\text{IV.329})$$

Для удовлетворения других условий краевой задачи введем потенциал первичного магнитного поля, направленного вдоль оси  $x$ . Тогда

$$\mathbf{B}_0 = -\text{grad } U \quad \text{или} \quad B_0 = -\partial U_0 / \partial x,$$

где

$$U_0 = -B_0 x + C.$$

Полагая  $C$  равным нулю, получаем

$$U_0 = -B_0 x = -B_0 r \cos \varphi. \quad (\text{IV.330})$$

Представим потенциал полного магнитного поля внутри и вне цилиндра как

$$U(r, \varphi) = \begin{cases} U_i, & r < a, \\ U_e = U_0 + U_s, & r > a. \end{cases} \quad (\text{IV.331})$$

Здесь  $U_i$  содержит потенциалы первичного и вторичного полей, но  $U_s$  является потенциалом поля, обусловленного поверхностными токами, вне цилиндра.

Так как вторичное магнитное поле всюду конечно и убывает с увеличением расстояния от цилиндра, функции  $U_i$  и  $U_e$  имеют вид

$$U_i(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n^i \sin n \varphi + B_n^i \cos n \varphi) r^n, \quad (\text{IV.332})$$

$$U_e(r, \varphi) = -B_0 r \cos \varphi + \sum_{n=0}^{\infty} (A_n^e \sin n \varphi + B_n^e \cos n \varphi) r^{-n}.$$

Заметим, что  $U_i$  и  $U_e$ , данные выражениями (IV.332), удовлетворяют уравнению Лапласа и граничным условиям на бесконечности, так как

$$U_e(r, \varphi) \rightarrow U_0(r, \varphi) \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty.$$

Определим неизвестные коэффициенты  $A_n$  и  $B_n$  и с этой целью используем условия на цилиндрической поверхности

$$\frac{U_e}{\mu_e} = \frac{U_i}{\mu_i} \quad \text{и} \quad \frac{\partial U_e}{\partial r} = \frac{\partial U_i}{\partial r}, \quad \text{если} \quad r = a.$$

Из формул (IV.332) следует, что

$$\begin{aligned} & -\frac{B_0 a \cos \varphi}{\mu_e} + \frac{1}{\mu_e} \sum_{n=0}^{\infty} (A_n^e \sin n \varphi + B_n^e \cos n \varphi) a^{-n} = \\ & = \frac{1}{\mu_i} \sum_{n=0}^{\infty} (A_n^i \sin n \varphi + B_n^i \cos n \varphi) a^n \end{aligned} \quad (\text{IV.333})$$

и

$$\begin{aligned}
 & - B_0 a \cos \varphi - \sum_{n=0}^{\infty} n (A_n \sin n \varphi + B_n \cos n \varphi) a^{-n-1} = \\
 & = \sum_{n=0}^{\infty} n (A_n^i \sin n \varphi + B_n^i \cos n \varphi) a^{n-1}.
 \end{aligned}$$

Одной из наиболее замечательных черт тригонометрических функций  $\sin n \varphi$  и  $\cos n \varphi$  является их ортогональность, поэтому справедливы равенства

$$\int_0^{2\pi} \sin m \varphi \sin n \varphi d \varphi = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n, \end{cases} \quad (\text{IV.334})$$

$$\int_0^{2\pi} \cos m \varphi \cos n \varphi d \varphi = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n, \end{cases}$$

и

$$\int_0^{2\pi} \cos m \varphi \sin n \varphi d \varphi = 0.$$

Здесь  $m$  и  $n$  — произвольные целые.

Умножая обе стороны (IV.333) на  $\sin m \varphi$  и интегрируя по  $\varphi$  от нуля до  $2\pi$ , получаем

$$\begin{aligned}
 A_m^e a^{-m} / \mu_e & = A_m^i a^m / \mu_i, \\
 - m A_m^e a^{-m-1} & = m A_m^i a^m,
 \end{aligned} \quad (\text{IV.335})$$

где  $m$  — произвольное целое число, не равное нулю. Ясно, что система (IV.335) имеет только нулевое решение, т. е.

$$A_m^e = A_m^i = 0.$$

Аналогично можно убедиться, что

$$B_m^e = B_m^i = 0, \quad \text{если } m \neq 1.$$

Мы продемонстрировали, что вторичное поле внутри и вне цилиндра описывается так же, как и первичное поле, только первой цилиндрической гармоникой. Конечно, это важный результат. В соответствии с уравнениями (IV.333) амплитуды этих гармоник  $B_1^e$  и  $B_1^i$  определяются из системы

$$\frac{1}{\mu_e} \{- B_0 a + B_1^e a^{-1}\} = \frac{1}{\mu_i} B_1^i a - B_0 - B_1^e a^{-2} = B_1^i,$$

где

$$B_1^e = K_{21} a^2 B_0 = \frac{\mu_i - \mu_e}{\mu_i + \mu_e} a^2 B_0$$

и

$$B_1^i = - \frac{2\mu_i}{\mu_i + \mu_e} B_0.$$

Таким образом, мы вывели следующие выражения для потенциала:

$$U_e = - B_0 r \cos \varphi + \frac{\mu_i - \mu_e}{\mu_i + \mu_e} \frac{a^2}{r} B_0 \cos \varphi, \quad \text{если } r > a, \quad (\text{IV.336})$$

$$U_i = - \frac{2\mu_i}{\mu_i + \mu_e} B_0 r \cos \varphi, \quad \text{если } r < a.$$

Эти решения удовлетворяют всем требованиям краевой задачи и описывают магнитное поле этой модели.

Так как

$$B_r = - \frac{\partial U}{\partial r} \quad \text{и} \quad B_\varphi = - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi},$$

вторичное поле вне цилиндра описывается выражениями

$$B_r^e = \frac{\mu_i - \mu_e}{\mu_i + \mu_e} B_0 \frac{a^2}{r^2} \cos \varphi, \quad (\text{IV.337})$$

$$B_\varphi^e = \frac{\mu_i - \mu_e}{\mu_i + \mu_e} B_0 \frac{a^2}{r^2} \sin \varphi.$$

Сравнение потенциала  $U_i$  с потенциалом первичного поля показывает, что магнитное поле внутри цилиндра остается однородным и направленным вдоль оси  $x$ . Как следует из второго уравнения (IV.336), это поле равно

$$B_x^i = \frac{2\mu_i}{\mu_e + \mu_i} B_0, \quad \text{если } r < a \quad (\text{IV.338})$$

Опишем некоторые характерные черты поведения поля и распределения поверхностных токов. В соответствии с (IV.322)

$$i_y = \frac{K_{12}}{\mu_0} (B_\varphi^e + B_\varphi^i), \quad (\text{IV.339})$$

так как

$$\mathbf{n} = \mathbf{i}_r, \quad \mathbf{i}_r \times \mathbf{i}_r = 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{i}_r \times \mathbf{i}_\varphi = \mathbf{i}_y.$$

Здесь  $\mathbf{i}_r$ ,  $\mathbf{i}_\varphi$ ,  $\mathbf{i}_y$  — единичные векторы вдоль координатных линий. Как следует из уравнений (IV.336),

$$B_\varphi^e = - B_0 \sin \varphi + K_{21} B_0 \sin \varphi,$$

$$B_\varphi^i = - \frac{2\mu_i}{\mu_i + \mu_e} B_0 \sin \varphi, \quad \text{если } r = a,$$

и, соответственно, плотность поверхностных токов

$$i_y = - \frac{2K_{12}}{\mu_0} B_0 \sin \varphi$$

или

$$i_y = \frac{2}{\mu_0} \frac{\mu_i - \mu_e}{\mu_i + \mu_e} B_0 \sin \varphi. \quad (\text{IV.340})$$

Следовательно, токи, генерируемые вторичным магнитным полем, распределены таким образом, что на одной половине поверхности

$$0 \leq \varphi \leq \pi$$

они направлены вдоль оси  $y$ , если  $\mu_i > \mu_e$ , в то время как на другой части

$$\pi < \varphi < 2\pi$$

токи имеют противоположное направление. В частности, плотность тока достигает максимального значения вдоль двух линий на плоскости  $x = 0$  и становится равной нулю при  $z = 0$ .

Плотность тока прямо пропорциональна первичному магнитному полю. В то же время зависимость плотности тока от магнитной проницаемости среды определяется коэффициентом контраста

$$K_{12} = (\mu_i - \mu_e) / (\mu_i + \mu_e),$$

который изменяется от  $-1$  до  $1$ .

Рассмотрим поведение магнитного поля, вызванного этими токами. В соответствии с формулой (IV.338) поле внутри цилиндра однородно и его направление совпадает с направлением первичного поля. С возрастанием магнитной проницаемости  $\mu_i$  ( $\mu_i > \mu_e$ ),  $B_x^i$  также возрастает и для больших значений отношения  $\mu_i / \mu_e$

$$B_x^i \approx 2B_0, \quad \text{если} \quad \mu_i / \mu_e \gg 1.$$

Таким образом, поле поверхностных токов практически совпадает с  $B_0$ .

В противоположном случае, когда окружающая среда имеет большую магнитную проницаемость ( $\mu_e > \mu_i$ ), поверхностные токи имеют такое направление, что первичное и вторичное поля противоположны друг другу внутри цилиндра. Соответственно, общее поле  $B_x^i$  меньше, чем первичное, и, в частности, при  $(\mu_i / \mu_e) \ll 1$  почти равно нулю.

Также полезно определить вектор индуцированной намагниченности. По определению,

$$\mathbf{P} = \chi_i \mathbf{H}^i = \frac{\chi_i}{\mu_i} \mathbf{B}^i = \frac{1}{\mu_0} \left( 1 - \frac{\mu_0}{\mu_i} \right) \mathbf{B}^i,$$



так как

$$\mu_i = \mu_0 (1 + \chi_i) .$$

Учитывая (IV.338), имеем

$$\mathbf{P} = \frac{2(\mu_i - \mu_0)}{\mu_0(\mu_i + \mu_e)} \mathbf{B}_0 . \quad (\text{IV.341})$$

Таким образом, плотность дипольных моментов, определенных первичным и вторичным полями, однородно распределена внутри цилиндра. Поэтому объемная плотность молекулярных токов равна нулю. Уместно отметить, что вектор индуцированной намагниченности имеет такое же направление, как и поле  $\mathbf{B}_0$ , в то время как ориентация поверхностных токов зависит от отношения  $\mu_i / \mu_e$ .

Предположим теперь, что магнитная восприимчивость среды много меньше единицы:

$$\chi_e \ll 1 \quad \text{и} \quad \chi_i \ll 1 .$$

Как видно из таблицы (см. раздел IV.6), этот случай очень интересен в магнитной разведке. Подставляя  $\chi$  в (IV.341), имеем

$$\mathbf{P} = \chi_i \mathbf{B}_0 / \mu_0 \left[ 1 + \frac{\chi_i + \chi_e}{2} \right] . \quad (\text{IV.342})$$

Принимая во внимание то, что

$$\frac{\chi_i + \chi_e}{2} \ll 1 ,$$

и разлагая выражения в правой части формулы (IV.342) в ряд, получаем

$$\mathbf{P} = \frac{\chi_i \mathbf{B}_0}{\mu_0} - \frac{\chi_i(\chi_i + \chi_e)}{2\mu_0} \mathbf{B}_0 + \dots$$

Ясно, что второй и последующие члены ряда очень малы и могут быть опущены.

Тогда

$$\mathbf{P} = \frac{\chi_i}{\mu_0} \mathbf{B}_0 , \quad \text{если} \quad \chi \ll 1 . \quad (\text{IV.343})$$

Это означает, что в данном приближении плотность дипольных моментов определяется только первичным полем. Другими словами, мы предполагаем взаимодействие между молекулярными токами пренебрежимо малым.

Их плотность

$$i_y = \chi_i \frac{B_0}{\mu_0} \sin \varphi , \quad \chi \ll 1 . \quad (\text{IV.344})$$

Обратившись к общему случаю, заметим, что с возрастанием восприимчивости  $\chi_i$  соотношение

$$P = \frac{\chi_i}{\mu_i} B^i$$

упрощается и в пределе

$$P = \frac{1}{\mu_0} B^i, \quad \text{если } \chi_i \gg 1.$$

Интересно сравнить поведение магнитного и электрического полей внутри магнитного и проводящего цилиндров соответственно. Сравнение с результатами, полученными в главе III, показывает, что параметры  $\gamma$  и  $1/\mu$  играют подобные роли. Действительно, с возрастанием проводимости цилиндра  $\gamma$  относительно проводимости окружающей среды поле внутри ( $E^i$ ) стремится к нулю. В противоположном случае ( $\gamma_i \ll \gamma_e$ ) поле приближается к пределу  $2E_0$ . Как следует из (IV.338), аналогия между  $\gamma$  и  $1/\mu$  или  $\rho$  и  $\mu$  очевидна.

Рассмотрим поведение вторичного поля вне цилиндра. В соответствии с (IV.337)

$$B_r^e = \frac{\mu_i - \mu_e}{\mu_i + \mu_e} \frac{a^2}{r^2} \cos \varphi,$$

$$B_\varphi^e = \frac{\mu_i - \mu_e}{\mu_i + \mu_e} \frac{a^2}{r^2} \sin \varphi.$$

Полезно определить декартовы компоненты поля. Имеем

$$B_z = B_r \sin \varphi + B_\varphi \cos \varphi,$$

$$B_x = B_r \cos \varphi - B_\varphi \sin \varphi,$$

где

$$\sin \varphi = \frac{z}{r}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{r},$$

$$r = \sqrt{x^2 + z^2}.$$

Следовательно,

$$B_z^e = 2 \frac{\mu_i - \mu_e}{\mu_i + \mu_e} a^2 \frac{xz}{(x^2 + z^2)^2},$$

(IV.345)

$$B_x^e = \frac{\mu_i - \mu_e}{\mu_i + \mu_e} a^2 \frac{x^2 - z^2}{(x^2 + z^2)^2}.$$

В качестве примера на рис. IV.13, а показано поведение этих компонент вдоль профиля  $z = z_0$ . Особенности этих кривых характеризуют положение и параметры цилиндра. Например, точка наблюдения, в которой  $B_z = 0$  и  $B_x$  имеет максимальное значение,

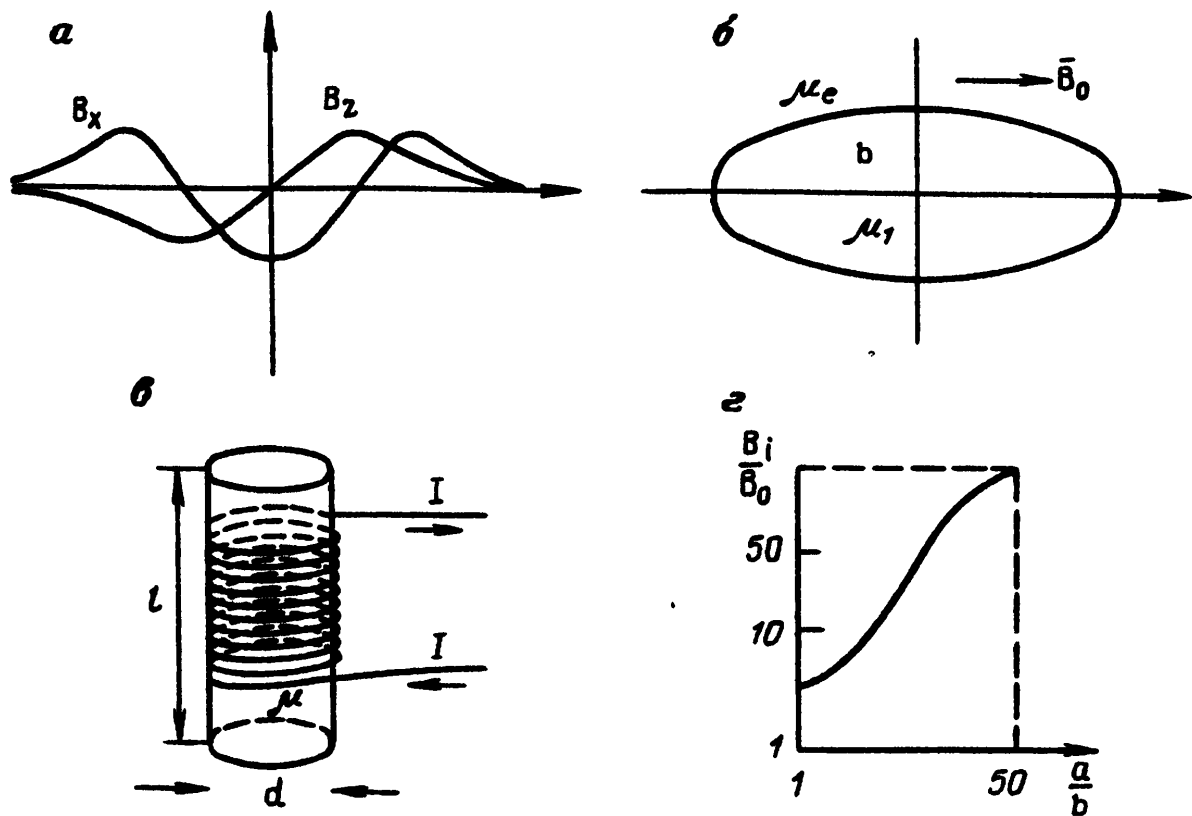


Рис. IV.13. Компоненты  $B_x$  и  $B_z$  вторичного магнитного поля (а); эллиптический цилиндр в однородном магнитном поле (б); приемная катушка с магнитным сердечником (в); зависимость  $B_i / B_0$  от отношения  $a/b$  (г)

находится над центром цилиндра. В то же время  $x$  — координата точки, в которой горизонтальная компонента  $B_x^e$  изменяет знак, равна расстоянию  $z_0$  между линией профиля и центром цилиндра.

Покажем теперь, что поле  $B^e$ , вызванное поверхностными молекулярными токами, эквивалентно полю двух линейных нитей с током противоположных направлений, расположенных в окрестности центра цилиндра, в плоскости  $x = 0$ . Предположим, что поле рассматривается в некоторой точке на оси  $z$ . Как было показано ранее, поле  $B_x$ , генерируемое линейным током, текущим через точку  $x = 0$ ,  $z = \Delta z/2$  и направленным вдоль оси  $y$ , равно

$$B_x^+ = \frac{\mu_0 I}{2\pi (2 - \Delta z/2)}.$$

Соответственно, поле, обусловленное вторым линейным током с координатами  $x = 0$ ,  $z = -\Delta z/2$  и имеющим противоположное направление, равно

$$B_x^- = - \frac{\mu_0 I}{2\pi \left( z + \frac{\Delta z}{2} \right)}.$$

Следовательно, общее поле, вызванное обоими токами,

$$B_x = B_x^+ + B_x^- = \frac{\mu_0 \Delta z I}{2\pi \left( z^2 - \frac{\Delta z^2}{4} \right)}$$

и, в предположении, что расстояние от точки наблюдения до центра цилиндра много больше расстояния между этими токами, имеем

$$B_x = \mu_0 I \Delta z / 2\pi z^2 .$$

Сравнивая последнее выражение с компонентой  $B_\varphi$  из (IV.337), когда  $\varphi = \pi/2$ , мы видим, что они совпадают, если

$$\mu_0 I \Delta z = 2\pi \frac{\mu_i - \mu_e}{\mu_i + \mu_e} a^2 B_0 .$$

Легко обобщить этот результат и показать, что такая эквивалентность имеет место для обеих компонент поля в любой точке наблюдения вне цилиндра. Такая система токов часто называется линейным диполем; в нашем случае диполь расположен в плоскости, перпендикулярной первичному магнитному полю.

В отличие от гравитационного поля направление нормального магнитного поля Земли  $B_0$  изменяется на земной поверхности. По этой причине одинаковая неоднородность (например, горизонтальный цилиндр), расположенная на той же глубине, но в другой части Земли обычно создает совершенно другое поле.

Предположим, что восприимчивости обеих сред малы. Тогда из (IV.337) имеем

$$B_r^e = \frac{\chi_i - \chi_e}{2} B_0 \frac{a^2}{r^2} \cos \varphi , \tag{IV.346}$$

$$B_\varphi^e = \frac{\chi_i - \chi_e}{2} B_0 \frac{a^2}{r^2} \sin \varphi .$$

Рассмотрим пример, иллюстрирующий вторичное поле. Предполагая, что

$$\chi_i - \chi_e = 10^{-3} , \quad \frac{r}{a} = 3 \quad \text{и} \quad B_0 = 50\,000\gamma ,$$

и используя формулы (IV.346), видим, что значение поля может достигать  $2,5\gamma$ , но это составляет только очень малую часть нормального поля. В практике магнитных методов иногда измеряют даже более слабые поля.

До сих пор мы рассматривали случай, когда первичное поле  $B_0$  перпендикулярно оси цилиндра. Предположим теперь, что поле  $B_0$  ориентировано вдоль оси. Для определения влияния такого цилиндра на магнитное поле используем следующий подход.

Нормальное магнитное поле  $B_0$  сопровождается полем

$$H_0 = B_0 / \mu_e .$$

Наличие цилиндра не изменяет это поле. Действительно, в предыдущем разделе мы продемонстрировали, что поле  $H$  может быть вызвано токами проводимости, а также фиктивными источниками. Учитывая, что цилиндр однороден, вектор  $H_0$  везде касателен к

боковой поверхности, и используя уравнения (IV.276) и (IV.279), заключаем, что объемные и поверхностные источники равны нулю. Также отсутствуют и токи проводимости. Следовательно, внутри и вне цилиндра

$$\mathbf{H}^e = \mathbf{H}^i = \mathbf{H}_0 = \mathbf{B}_0 / \mu_e.$$

Поэтому мы заключаем, что вне цилиндра магнитное поле не изменяется и равно первичному:

$$\mathbf{B}_e = \mu_e \mathbf{H}^e = \mathbf{B}_0.$$

Однако внутри цилиндра поле  $\mathbf{B}$  изменяется и

$$\mathbf{B}^i = \mu_i \mathbf{H}^i = \frac{\mu_i}{\mu_e} \mathbf{B}_0.$$

Таким образом, вторичное магнитное поле  $\mathbf{B}_s$  можно записать как

$$\mathbf{B}_s = \begin{cases} \left( \frac{\mu_i}{\mu_e} - 1 \right) \mathbf{B}_0, & \text{если } r < a, \\ \mathbf{0}, & \text{если } r > a. \end{cases} \quad (\text{IV.347})$$

Очевидно, этот результат легко обобщается для цилиндра с произвольным поперечным сечением.

Как следует из (IV.322), плотность поверхностных токов, генерирующих это поле, дается выражением

$$\mathbf{i}_\varphi = \frac{1}{\mu_0} \frac{\mu_e - \mu_i}{\mu_e + \mu_i} (B^i + B_0) (\mathbf{i}_r \times \mathbf{i}_y)$$

или

(IV.348)

$$\mathbf{i}_\varphi = \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{\mu_i - \mu_e}{\mu_e} \right) B_0,$$

так как

$$\mathbf{i}_r \times \mathbf{i}_y = -\mathbf{i}_\varphi \quad \text{и} \quad B^i + B_0 = \left( \frac{\mu_i}{\mu_e} + 1 \right) B_0.$$

Следовательно, поверхностные молекулярные токи образуют систему замкнутых петель с током, находящихся в плоскостях, перпендикулярных оси  $y$ . Их плотность везде одинакова. Такое распределение токов может создать очень сильное магнитное поле внутри цилиндра, если  $\mu_i \gg \mu_e$ . Аналогия с соленоидом здесь очевидна. Наоборот, если магнитная проницаемость среды много больше магнитной проницаемости цилиндра, то поле этих токов  $\mathbf{B}_s^i$  почти уничтожает нормальное поле  $\mathbf{B}_0$ . Соответственно, полное поле внутри  $\mathbf{B}^i$  стремится к нулю, если  $\mu_e \gg \mu_i$ .

**Пример 2.** Эллипсоид вращения в однородном магнитном поле  $\mathbf{B}_0$

Предположим, что вытянутый эллипсоид вращения с полуосями  $a, b$ , ( $a > b$ ) и магнитной проницаемостью  $\mu_i$  помещен в од-

нородное магнитное поле  $B_0$ , направленное вдоль главной оси (рис. IV.13, б). Магнитная проницаемость окружающей среды  $\mu_e$ . Как и в предыдущем примере, на поверхности эллипсоида возникают молекулярные токи, обусловленные индуцированной намагниченностью  $\mu_e$ , и эти токи создают вторичное магнитное поле. Для нахождения этого поля опять введем потенциал  $U$ :

$$\mathbf{B} = - \text{grad } U$$

и сформулируем краевую задачу.

Принимая во внимание форму неоднородности, условимся использовать эллипсоидальную систему координат, описанную в разделе IV.5 этой главы (пример 8). Представляя потенциал как

$$U(\xi, \eta) = \begin{cases} U_e = U_0 + U_s^e, & \eta > \eta_0, \\ U_i, & \eta < \eta_0, \end{cases}$$

видим, что он должен удовлетворять следующим условиям.

1. В регулярных точках

$$\Delta U = 0.$$

2. На поверхности эллипсоида

$$\eta = \eta_0,$$

$$U_e / \mu_e = U_i / \mu_i, \quad \partial U_e / \partial \eta = \partial U_i / \partial \eta.$$

3. На бесконечности

$$U_e \rightarrow U_0, \quad \text{если } \eta \rightarrow \infty,$$

где  $U_0$  — потенциал первичного магнитного поля  $B_0$ .

Применяя подход, использованный в разделе IV.5, полагаем, что потенциал вне эллипсоида описывается одной сферической гармоникой. Внутри тела магнитное поле однородно и направлено вдоль главной оси. В соответствии с (IV.211), выражения для потенциала имеют вид

$$\begin{aligned} U_e(\xi, \eta) &= -B_0 c [P_1(\eta) + A Q_1(\eta)] P_1(\xi), \quad \text{если } \eta > \eta_0, \\ U_i(\xi, \eta) &= -B_0 c D P_1(\eta) P_1(\xi), \quad \text{если } \eta < \eta_0, \end{aligned} \quad (\text{IV.349})$$

где коэффициенты  $A$  и  $D$  неизвестны,  $P_1(x)$  и  $Q_1(x)$  — функции Лежандра, данные формулами (IV.210), и

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Ясно, что  $U_i$  и  $U_e$  удовлетворяют уравнению Лапласа и  $U_e$  стремится к  $U_0$  при удалении от эллипсоида. Для определения коэффициентов  $A$  и  $D$  используем условия на границе  $\eta = \eta_0$  и получим

$$\frac{1}{\mu_e} \{P_1(\eta_0) + A Q_1(\eta_0)\} = \frac{1}{\mu_i} D P_1(\eta_0),$$

$$P_1'(\eta_0) + A Q_1'(\eta_0) = D P_1'(\eta_0).$$

Решая эту систему и используя уравнения (IV.217), (IV.218), получаем

$$A = - \frac{\left(\frac{\mu_i}{\mu_e} - 1\right) ab^2}{c^3 \left[1 + \left(\frac{\mu_i}{\mu_e} - 1\right) L\right]}, \quad (IV.350)$$

$$D = \frac{\frac{\mu_i}{\mu_e}}{1 + \left(\frac{\mu_i}{\mu_e} - 1\right) L},$$

где

$$L = \frac{1 - e^2}{2e^3} \left( \ln \frac{1 + e}{1 - e} - 2e \right)$$

и

$$e = c/a.$$

Сравним потенциалы электрического и магнитного полей в присутствии либо проводящего, либо магнитного эллипсоида.

Сравнение показывает, что эти поля одинаково зависят от геометрических параметров и координат точки наблюдения. Более того, вне эллипсоида электрическое поле и проводимость связаны таким же образом, как магнитное поле и магнитная проницаемость. Однако влияние этих параметров внутри эллипсоида различно. В соответствии с (IV.348), (IV.349) однородное магнитное поле  $\mathbf{V}^i$  имеет вид

$$\mathbf{V}^i = \frac{\mu_i / \mu_e}{1 + (\mu_i / \mu_e - 1) L} \mathbf{V}_0, \quad \text{если } \frac{a}{b} > 1, \quad (IV.351)$$

и направлено вдоль главной оси.

Как было показано в разделе IV.5, для заметно вытянутого эллипсоида функция  $L$  может быть представлена в виде

$$L \approx \frac{b^2}{a^2} \ln \frac{2a}{b} \quad (IV.352)$$

и с возрастанием отношения  $a/b$  быстро стремится к нулю. Поэтому в пределе, когда эллипсоид совпадает с бесконечно длинным цилиндром, поле внутри ( $\mathbf{V}^i$ ) опять равно

$$\mathbf{V}^i = \frac{\mu_i}{\mu_e} \mathbf{V}_0.$$

В то же время, в соответствии с формулами (IV.349), поле вне цилиндра становится равным нулю.

То, что магнитное поле внутри эллипсоида, вытянутого вдоль

поля, может быть намного сильнее, чем первичное, играет фундаментальную роль в измерениях, так как позволяет существенно увеличить момент приемных катушек. Рассмотрим катушку с магнитным сердечником, имеющим форму цилиндра, как показано на рис. IV.13, в.

Такие катушки применяют для измерения переменных магнитных полей, так как электродвижущая сила, возбужденная в катушке, прямо пропорциональна скорости изменения этого поля во времени. Следовательно, увеличение поля  $B$  внутри катушки, обусловленное наличием сердечника катушки, существенно увеличивает чувствительность приемника.

Поведение поля  $B^i$ , как функции отношения полуосей, показано на рис. IV.13, г. Понятно, что правая асимптота этой кривой соответствует случаю бесконечно длинного цилиндра, когда наблюдается максимальное возрастание поля  $B^i$ . Сердечники обычно изготавливают из ферритов с относительной магнитной проницаемостью, достигающей нескольких тысяч. Например, если мы предположим, что  $\mu_i/\mu_e = 5000$ , то тогда, как это видно из рис. IV.13, г, почти достигается максимальное возрастание поля  $B^i$  при условии, что

$$a/b > 400 .$$

Для выполнения этого неравенства обычно необходим длинный сердечник, неудобный при геофизических съемках. Поэтому применяют более короткие сердечники, которые все-таки обеспечивают сильное возрастание поля  $B^i$ . Например, если  $\mu_i/\mu_e = 5000$  и  $a/b = 20$ , то

$$B_i/B_0 = 100 .$$

Одно дополнительное замечание: результаты вычислений поля внутри вытянутого эллипсоида можно применить к центральной части относительно длинных цилиндров.

Рассмотрим поведение поля  $B^i$ , когда эллипсоид преобразован в сферу с радиусом  $a$ . Учитывая, что параметр  $e$  стремится к нулю при  $a \rightarrow b$ , и используя разложение в ряд, упростим формулу (IV.218) и получим

$$\ln \frac{1+e}{1-e} \approx 2e + \frac{2}{3}e^3 + \dots ,$$

$$L = 1/3 .$$

Следовательно,

$$B^i = \frac{3\mu_i}{2\mu_e + \mu_i} , \tag{IV.353}$$

т. е. даже для сферы поле  $B^i$  может быть почти в 3 раза больше первичного поля.

Ранее мы продемонстрировали, что потенциал  $U$  не зависит от координаты  $\varphi$  и, следовательно, компонента поля  $B$  в этом



направлении равна нулю. Это означает, что поверхностные токи имеют только азимутальную компоненту  $i_\varphi$ , и из (IV.322) имеем

$$i_\varphi = \frac{K_{12}}{\mu_0} i_\eta \times i_\xi (B_\xi^e + B_\xi^i).$$

Так как

$$K_{12} = \frac{\mu_e - \mu_i}{\mu_e + \mu_i}, \quad i_\varphi = i_\eta \times i_\xi$$

и

$$B_\xi = -\frac{1}{h_1} \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad h_1 = c \left( \frac{\eta^2 - \xi^2}{1 - \xi^2} \right)^{1/2}$$

плотность тока

$$i_\varphi = \frac{(\mu_i - \mu_e)(1 - \xi^2)^{1/2}}{c \mu_0 (\mu_i + \mu_e)(\eta^2 - \xi^2)^{1/2}} \frac{\partial}{\partial \xi} (U_e + U_i), \quad \text{если } \eta = \eta_0.$$

Подставляя выражение для потенциала, получаем

$$i_\varphi = \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{\mu_i}{\mu_e} - 1 \right) \frac{B_0 \eta_0 (1 - \xi^2)^{1/2}}{[1 + (\mu_i / \mu_e - 1)L] (\eta_0^2 - \xi^2)^{1/2}}.$$

Таким образом, плотность тока достигает максимального значения на плоскости  $x = 0$ , а затем постепенно убывает, когда  $\xi$  приближается либо к  $+1$ , либо к  $-1$ .

### Пример 3. Поле вертикального магнитного диполя на оси скважины

Предположим, что центр малой горизонтальной петли с током  $I$  находится на оси скважины (рис. IV.14, а). Магнитная проницаемость скважины и окружающей среды равна  $\mu_i$  и  $\mu_e$  соответственно. Радиус скважины  $a$ . Влияние среды на магнитное поле можно описать следующим образом.

В окрестности петли и на поверхности скважины возникают молекулярные токи, обусловленные первичным полем петли с током. Магнитное поле в каждой точке состоит из первичного поля и вторичного поля, возбуждаемого молекулярными токами. Плотность токов на поверхности скважины определяется полным магнитным полем [формула (IV.322)]. Поэтому мы должны сформулировать краевую задачу для определения поля  $B$ . С этой целью введем цилиндрическую систему координат  $r, \varphi, z$  и представим потенциал  $U$  ( $B = -\text{grad } U$ ) как

$$U = \begin{cases} U_1 = U_0 + U_s, & r < a, \\ U_e, & r > a, \end{cases} \quad (\text{IV.354})$$

где  $U_0$  — потенциал первичного поля, возбужденного петлей с током в однородной среде с магнитной проницаемостью  $\mu_i$ .

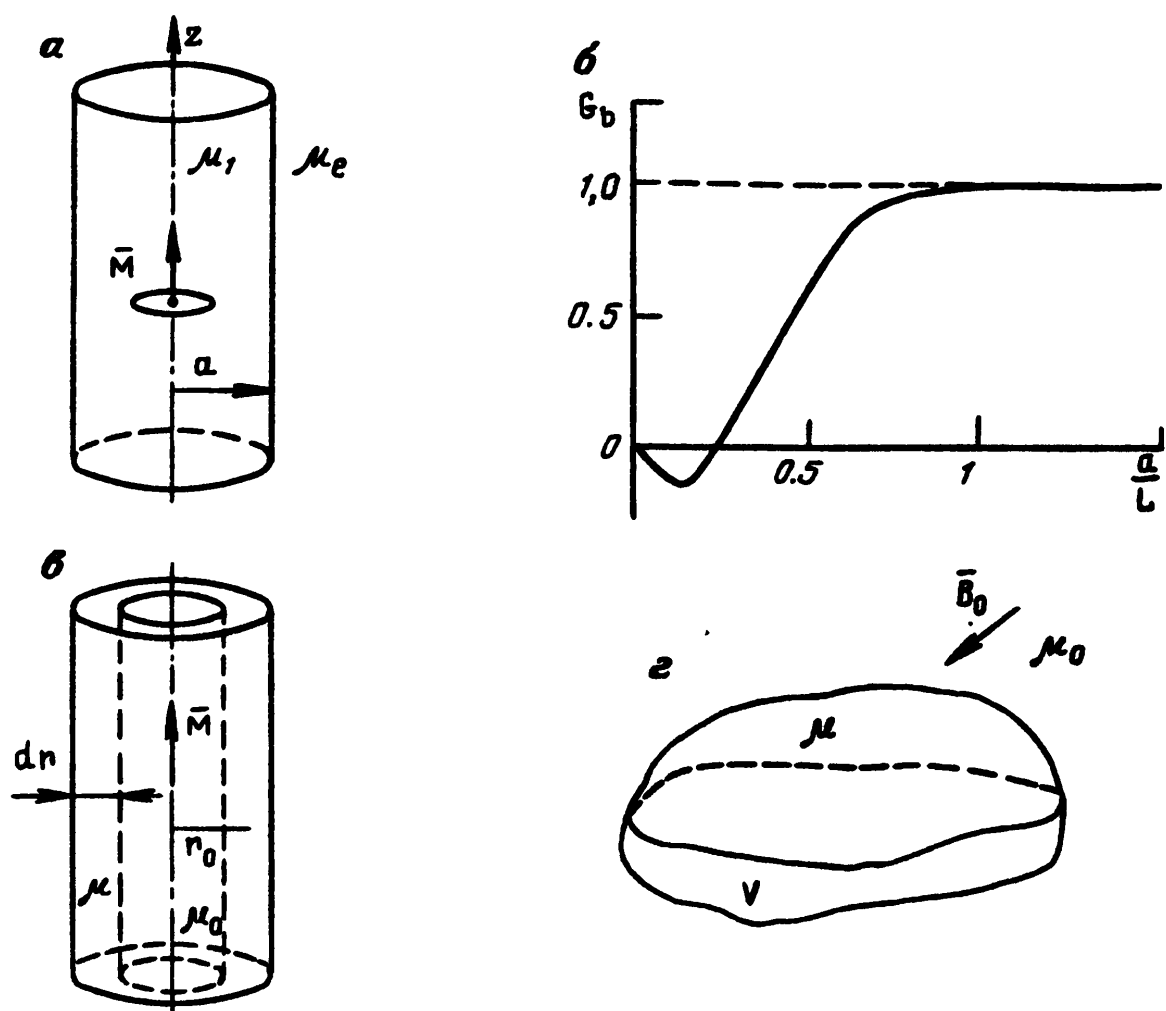


Рис. IV.14. Вертикальный магнитный диполь на оси скважины (а); геометрический фактор скважины (б); вертикальный магнитный диполь на оси цилиндрической оболочки (в); магнитная среда в первичном поле  $B_0$  (г)

Таким образом, потенциал  $U$  должен удовлетворять следующим условиям.

1. В регулярных точках среды

$$\Delta U = 0.$$

2. Вблизи петли с током

$$U_i \rightarrow U_0, \quad \text{если } R \rightarrow 0.$$

3. На поверхности скважины

$$U_i/\mu_i = U_e/\mu_e, \quad \partial U_i/\partial r = \partial U_e/\partial r, \quad \text{если } r = a.$$

4. На бесконечности

$$U \rightarrow 0, \quad \text{если } R \rightarrow \infty.$$

Для решения этой краевой задачи используем результаты, полученные в разделе III.10 (пример 5).

Для упрощения вычисления производных учтем осевую симметрию поля и его потенциала. Другими словами,  $U$ , так же, как и поле  $B$ , не зависит от координаты  $\varphi$ , и, следовательно,

$$\partial U/\partial \varphi = 0.$$

Сначала найдем решение уравнения Лапласа, которое в цилиндрических координатах имеет вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

Применяя метод разделения переменных и используя уравнения (III.315) и (III.317), получаем общее решение:

$$U(r, z) = \int_0^{\infty} (A_m^* I_0(mr) + B_m K_0(mr)) \times \\ \times (C_m^* \sin mz + D_m^* \cos mz) dm. \quad (\text{IV.355})$$

Прежде, чем мы продолжим, представим потенциал  $U_0$  в том же виде, что и функцию  $U(r, z)$ . В соответствии с (IV.109),

$$U_0 = \frac{\mu_i M \cos \theta}{4\pi R^2}, \quad (\text{IV.356})$$

где  $M = I \cdot S$ ;  $\cos \theta = r/R$ ;  $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ ;  $S$  — площадь сечения катушки.

Перепишав  $U_0$  в виде

$$U_0 = - \frac{\mu_i M}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{R}$$

и используя интеграл Зоммерфельда (IV.325)

$$\frac{1}{R} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_0(mr) \cos mz dm,$$

получим

$$U_0(r, z) = \frac{\mu_i M}{2\pi^2} \int_0^{\infty} m K_0(mr) \sin mz dm, \quad (\text{IV.357})$$

Затем, учитывая поведение модифицированной функции Бесселя, получаем выражения для потенциала, удовлетворяющие условиям на бесконечности и в окрестности петли с током:

$$U_1 = \frac{\mu_0 M}{2\pi^2} \int_0^{\infty} m \left[ \frac{\mu_i}{\mu_0} K_0(mr) + A_m I_0(mr) \right] \sin mz dm, \quad (\text{IV.358})$$

$$U_e = \frac{\mu_0 M}{2\pi^2} \int_0^{\infty} m D_m K_0(mr) \sin mz dm,$$

где  $A_m$  и  $D_m$  — неизвестные коэффициенты. Применяя условия на

поверхности скважины, получаем два уравнения с двумя неизвестными:

$$\frac{1}{\mu_0} K_0(ma) + \frac{1}{\mu_i} A_m I_0(ma) = \frac{D_m K_0(ma)}{\mu_e},$$

$$-\frac{\mu_i}{\mu_0} K_1(ma) + A_m I_1(ma) = -D_m K_1(ma),$$

так как

$$I_0(ma) = I_1(ma), \quad K'_0(ma) = -K_1(ma).$$

Решением этой системы являются

$$A_m = \frac{\mu_i}{\mu_0} \frac{(\mu_i - \mu_e) K_0 K_1}{\mu_i I_1 K_0 + \mu_e I_0 K_1}$$

и

$$D_m = \frac{\mu_i \mu_e}{\mu_0} \frac{(I_0 K_1 + I_1 K_0)}{(\mu_i I_1 K_0 + \mu_e I_0 K_1)}.$$

Поскольку

$$I_0(ma) K_1(ma) + I_1(ma) K_0(ma) = \frac{1}{ma},$$

то окончательно имеем

$$A_m = \frac{\mu_i}{\mu_0} \left( \frac{\mu_i}{\mu_e} - 1 \right) \frac{ma K_0(ma) K_1(ma)}{1 + \left( \frac{\mu_i}{\mu_e} - 1 \right) ma K_0(ma) I_1(ma)},$$

(IV.359)

$$D_m = \frac{\mu_i}{\mu_0} \frac{1}{1 + \left( \frac{\mu_i}{\mu_e} - 1 \right) ma K_0(ma) I_1(ma)}.$$

Таким образом, мы решили краевую задачу для потенциала. Компоненты магнитного поля, обусловленные всеми токами, равны

$$B_r = -\frac{\partial U}{\partial r}, \quad B_z = -\frac{\partial U}{\partial z}, \quad B_\varphi \equiv 0.$$

Как следует из (IV.322), поверхностный ток имеет только азимутальную компоненту  $i_\varphi$ , плотность которой

$$i_\varphi = \frac{1}{\mu_0} \frac{\mu_i - \mu_e}{\mu_i + \mu_e} (B_z^e + B_z^i),$$

так как

$$\mathbf{n} = \mathbf{i}_r, \quad \mathbf{i}_r \times \mathbf{i}_z = -\mathbf{i}_\varphi.$$

Принимая во внимание уравнения (IV.357), (IV.358), получаем

$$i_{\varphi} = -\frac{M}{2\pi^2} \frac{\mu_i}{\mu_0} \left( \frac{\mu_i}{\mu_e} - 1 \right) \int_0^{\infty} m^2 \frac{K_0(ma) \cos mz \, dm}{1 + \left( \frac{\mu_i}{\mu_e} - 1 \right) ma K_0(ma) I_1(ma)}.$$

Ясно, что поверхностные токи формируют систему петель с током, расположенных симметрично плоскости  $z = 0$ , плотность которых зависит от координат  $r$  и  $z$ .

Рассмотрим поведение поля на оси скважины. По определению,

$$B_r = -\partial U / \partial r$$

и, так как  $I_1(0) = 0$ , поле  $B$  имеет только вертикальную компоненту  $B_z$ . Конечно, это также следует из симметрии распределения тока.

В соответствии с (IV.356) первичное магнитное поле

$$B_z^0 = \mu_i M / 2\pi z^3, \quad \text{если } r = 0.$$

Применив уравнения (IV.358), (IV.359), полное магнитное поле на оси скважины можно представить как

$$B_z = \frac{\mu_i M}{2\pi} \left[ \frac{1}{L^3} - \left( \frac{\mu_i}{\mu_e} - 1 \right) \frac{1}{\pi a^3} \int_0^{\infty} \frac{x^3 K_0(x) K_1(x) \cos ax \, dx}{1 + x \left( \frac{\mu_i}{\mu_e} - 1 \right) I_1(x) K_0(x)} \right], \quad (\text{IV.360})$$

где  $x = ma$ ;  $a = L/a$  и  $L = z$  — расстояние между катушкой и точкой наблюдения, обычно называемое длиной зонда. Принято нормировать общее поле на первичное  $B_z^0$ . В результате получаем

$$b_z = \frac{B_z}{B_z^0} = 1 - \left( \frac{\mu_i}{\mu_e} - 1 \right) \frac{a^3}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x^3 K_0(x) K_1(x) \cos ax \, dx}{1 + x (\mu_i / \mu_e - 1) I_1(x) K_0(x)}. \quad (\text{IV.361})$$

Функция  $b_z$  зависит только от двух параметров:  $\mu_i / \mu_e$  и  $a$ .

Кратко изучим асимптотическое поведение поля как функции от  $a$ . Когда параметр  $a$  возрастает, интеграл в правой части формулы (IV.361) стремится к некоторой константе и, следовательно,

$$b_z \rightarrow 1, \quad \text{если } a \rightarrow 0.$$

Другими словами, в ближней зоне поле  $B_z^0$  совпадает с полем в однородной среде с магнитной проницаемостью скважины  $\mu_i$ . Это поле вызвано токами проводимости в петле и молекулярными токами, возникающими на ее поверхности. В то же время влияние токов, появляющихся на поверхности скважины, незначительно. Для нахождения асимптотического выражения для поля в проти-

воположном случае, когда длина зонда много больше, чем радиус скважины, используем подход, описанный в разделе III.9 (пример 5). Он основан на том, что, когда параметр  $\alpha$  становится очень большим, интеграл в формуле (IV.361) в основном определен малыми значениями аргумента  $x$ . Учитывая, что

$$I_1(x) \rightarrow x/2, \quad K_0(x) \rightarrow -\ln x, \quad K_1(x) \rightarrow 1/x, \quad \text{если } x \rightarrow 0,$$

получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{x^3 K_0(x) K_1(x) \cos \alpha x dx}{1 + \left(\frac{\mu_i}{\mu_e} - 1\right) x I_1(x) K_0(x)} &\rightarrow \int_0^{\infty} x^2 K_0(x) \cos \alpha x dx = \\ &= -\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \int_0^{\infty} K_0(x) \cos \alpha x dx. \end{aligned}$$

Из

$$\int_0^{\infty} K_0(x) \cos \alpha x dx = \frac{\pi}{2\sqrt{1+\alpha^2}} = \frac{\pi}{2\alpha}, \quad \text{если } \alpha \gg 1,$$

следует, что

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \int_0^{\infty} K_0(x) \cos \alpha x dx = \frac{\pi}{\alpha^3}, \quad \text{если } \alpha \gg 1. \quad (\text{IV.362})$$

Подставив этот результат в (IV.361), имеем

$$b_z \approx 1 + \left(\frac{\mu_i}{\mu_e} - 1\right) \approx \frac{\mu_i}{\mu_e}.$$

Таким образом, в далекой зоне,  $\alpha \gg 1$ , магнитное поле подвержено влиянию магнитной проницаемости окружающей среды.

Предположим, что обе восприимчивости  $\chi_i$  и  $\chi_e$  очень малы. Тогда, пренебрегая вторым членом в знаменателе подынтегральной функции в (IV.361), получим

$$b_z = 1 - (\chi_i - \chi_e) \frac{\alpha^3}{\pi} \int_0^{\infty} x^3 K_0(x) K_1(x) \cos \alpha x dx$$

или

$$B_z = B_z^p + B_z^s = \frac{\mu_0 M}{2\pi L^3} [1 + \chi_i(1 - G_f) + \chi_e G_f], \quad (\text{IV.363})$$

где  $B_z^p = \mu_0 M / 2\pi L^3$  — поле, генерируемое только током в петле,

в то время как  $B_z^s$  — вторичное поле, вызванное поверхностными токами:

$$B_z^s = \frac{\mu_0 M}{2\pi L^3} [\chi_i (1 - G_f) + \chi_e G_f] \quad (\text{IV.364})$$

и

$$G_f = \frac{a^3}{\pi} \int_0^\infty x^3 K_0(x) K_1(x) \cos ax \, dx. \quad (\text{IV.365})$$

Перепишем формулу (IV.364) как

$$B_z^s = \frac{\mu_0 M}{2\pi L^3} (\chi_i G_b + \chi_e G_f), \quad (\text{IV.366})$$

где

$$G_b + G_f = 1.$$

Функции  $G_b$  и  $G_f$  обычно называются геометрическими факторами скважины и пласта соответственно. Согласно (IV.366) вторичное поле состоит из двух полей, при условии, что вызванная намагниченность определяется только первичным магнитным полем  $B_z^p$ . Другими словами, взаимодействие между молекулярными токами незначительно и по этой причине каждый член в скобках в формуле (IV.366) является произведением восприимчивости соответствующего геометрического фактора. Члены, содержащие произведения восприимчивостей  $\chi_i$  и  $\chi_e$ , отсутствуют.

Как следует из (IV.365), геометрический фактор скважин зависит только от параметра  $a$ . Его поведение показано на рис. IV.14, б. Принимая во внимание формулу (IV.362), находим асимптотическое поведение функции  $G_b$ :

$$G_b(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \rightarrow 0, \\ 0, & \text{если } a \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (\text{IV.367})$$

Следовательно, с возрастанием длины зонда влияние скважины убывает и поле приближается к полю, соответствующему однородной среде с восприимчивостью  $\chi_e$ .

В заключение сделаем два замечания.

1. Применяя принцип суперпозиции и пренебрегая взаимодействием молекулярных токов, легко можно обобщить формулу (IV.366) для модели с несколькими коаксиальными цилиндрическими границами раздела. В этом случае

$$B_z^s = \frac{\mu_0 M}{2\pi L^3} \sum_{i=1}^N \chi_i G_i,$$

где  $\chi_i$  и  $G_i$  — соответственно, восприимчивость и геометрический

фактор  $i$ -го цилиндрического слоя. Функция  $G_i$  выражается как геометрический фактор скважины.

2. При использовании двухкатушечного зонда магнитное поле обычно генерируется переменным током. Однако частота тока выбирается таким образом, чтобы влияние электромагнитной индукции было очень малым и мы могли бы использовать теорию постоянного магнитного поля.

#### Пример 4. Поле вертикального магнитного диполя на оси тонкой цилиндрической поверхности

Предположим, что вертикальный магнитный диполь с моментом  $M$  расположен на оси тонкой цилиндрической оболочки с магнитной проницаемостью  $\mu$  и толщиной  $\Delta r$ . Окружающая среда немагнитная, и эта модель может служить моделью скважины и пласта. Как видно из рис. IV.14, в, внутренний и внешний радиусы оболочки равны

$$r_1 = r_0 - \frac{\Delta r}{2} \quad \text{и} \quad r_2 = r_0 + \frac{\Delta r}{2}.$$

В этом случае имеются две границы раздела и естественно ожидать, что решение краевой задачи более громоздко, чем в предыдущем примере. Однако, учитывая, что толщина оболочки много меньше, чем ее радиус:

$$\frac{\Delta r}{r_0} \ll 1,$$

определение поля можно заметно упростить. С этой целью выведем приближенные граничные условия на поверхностях оболочки, предполагая, что хотя  $\Delta r$  стремится к нулю, произведение  $\mu \Delta r$  остается постоянным.

Запишем уравнения поля в интегральной форме:

$$\oint_{\mathcal{L}} \frac{\mathbf{B} \, d\mathbf{l}}{\mu} = 0, \quad \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Применив первое уравнение, на элементарном пути  $\mathcal{L}$ , показанном на рис. IV.14, в, получим

$$\frac{B_z^i \Delta z}{\mu_0} - \frac{B_z^e \Delta z}{\mu_0} + \frac{B_r \left( z + \frac{\Delta z}{2} \right) \Delta r}{\mu} - \frac{B_r \left( z - \frac{\Delta z}{2} \right) \Delta r}{\mu} = 0,$$

где  $B_z^i$  и  $B_z^e$  — поля в скважине и во внешней среде соответственно;  $B_r$  — поле внутри оболочки.

Так как радиальная компонента  $B_r$  является непрерывной функцией, последнее уравнение можно переписать как

$$\frac{B_z^i \Delta z}{\mu_0} - \frac{B_z^e \Delta z}{\mu_0} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial B_r^i}{\partial z} \Delta r \Delta z = 0$$



или

$$B_z^i - B_z^e = \frac{\mu_0}{\mu} \Delta r \frac{\partial B_r}{\partial z}.$$

Следовательно, в пределе  $\Delta r \rightarrow 0$ , получим

$$B_z^i(r_1) = B_z^e(r_2), \quad \text{если } \Delta r \rightarrow 0. \quad (\text{IV.368})$$

Таким образом, тангенциальные компоненты поля  $B_z$  на обеих сторонах такой оболочки равны. По определению, из (IV.368) следует непрерывность потенциала:

$$U_i(r_1) = U_e(r_2). \quad (\text{IV.369})$$

Рассмотрим теперь поток магнитного поля через замкнутую поверхность  $S$ , окружающую элемент оболочки (рис. IV.14, в). Тогда

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = B_r^e(r_2) r_2 \Delta \varphi \Delta z - B_r^i(r_1) r_1 \Delta \varphi \Delta z + \\ + B_z \left( z + \frac{\Delta z}{2} \right) r_0 \Delta \varphi \Delta r - B_z \left( z - \frac{\Delta z}{2} \right) r_0 \Delta \varphi \Delta r = 0$$

или

$$B_r^e(r_2) r_2 - B_r^i(r_1) r_1 + \frac{\partial B_z}{\partial z} r \Delta r = 0. \quad (\text{IV.370})$$

Полагая  $r_1 = r_2 = r_0$  и учитывая, что тангенциальная компонента поля  $\mathbf{H}$  является непрерывной функцией на каждой поверхности оболочки:

$$H_z = \frac{B_z}{\mu} = \frac{B_z^i}{\mu_0} = \frac{B_z^e}{\mu_0},$$

получаем

$$B_r^e - B_r^i = - \frac{\mu \Delta r}{\mu_0} \frac{\partial B_z^e}{\partial z}. \quad (\text{IV.371})$$

Следовательно, разрыв радиальной компоненты поля прямо пропорционален параметру

$$n = \mu \Delta r / \mu_0 \quad (\text{IV.372})$$

и скорости изменения вертикальной компоненты  $B_z$  вдоль оси скважины.

Используя потенциал, уравнение (IV.370) можно записать как

$$\frac{\partial U_e}{\partial r} - \frac{\partial U_i}{\partial r} = - n \frac{\partial^2 U_e}{\partial z^2}. \quad (\text{IV.373})$$

Уравнения (IV.369) и (IV.373) определяют приближенные граничные условия для потенциала. Существенно, что потенциал поля внутри оболочки в эти уравнения не входит. Поэтому нет необ-

ходимости в определении поля  $B$  внутри магнитной среды, и этот факт значительно упрощает решение краевой задачи. По существу, мы заменяем цилиндрическую оболочку с конечной толщиной  $\Delta r$  на бесконечно тонкую поверхность, имеющую тот же радиус  $r_0$  и параметр  $n$ .

Теперь мы готовы сформулировать краевую задачу. Понятно, что потенциал  $U$  должен быть решением уравнения Лапласа вне цилиндрической поверхности, стремиться к нулю при возрастании расстояния от диполя и удовлетворять условиям (IV.369) и (IV.373). Используя уравнения (IV.357), (IV.358), потенциал внутри и вне магнитной поверхности запишем в виде

$$U_i(r, z) = \frac{\mu_0 M}{2\pi^2} \int_0^{\infty} m [K_0(mr) + A_m I_0(mr)] \sin mz \, dm, \quad r \leq r_0,$$

$$U_e(r, z) = \frac{\mu_0 M}{2\pi^2} \int_0^{\infty} m C_0 K_0(mr) \sin mz \, dm, \quad r \geq r_0. \quad (\text{IV.374})$$

Затем, применяя условия (IV.369) и (IV.373), получим систему уравнений с неизвестными  $A_m$  и  $C_m$ :

$$K_0(mr_0) + A_m I_0(mr_0) = C_m K_0(mr_0),$$

$$-C_m K_1(mr_0) + K_1(mr_0) - A_m I_1(mr_0) = nmC_m K_0(mr_0).$$

Решив эту систему, получим для коэффициента  $A_m$ , характеризующего поле в скважине,

$$A_m = - \frac{n r_0 m^2 K_0^2(mr_0)}{1 + n r_0 m^2 I_0(mr_0) K_0(mr_0)}. \quad (\text{IV.375})$$

С учетом формул (IV.374) вертикальная компонента магнитного поля на оси скважины примет вид

$$B_z(L) = \frac{\mu_0 M}{2\pi L^3} + \frac{\mu_0 n_1 M}{2\pi^2 r_0^3} \int_0^{\infty} \frac{x^4 K_0^2(x) \cos ax}{1 + n_1 x^2 I_0(x) K_0(x)} dx,$$

где

$$n_1 = \frac{\mu}{\mu_0} \frac{\Delta r}{r_0}, \quad a = \frac{L}{r_0}$$

( $L$  — длина зонда).

Итак, измеряя магнитное поле на оси скважины, можно, в принципе, изучить изменение параметра оболочки  $n_1$ , который определен ее толщиной, радиусом и магнитной проницаемостью. Заметим также, что вследствие осевой симметрии молекулярные токи имеют только азимутальную компоненту  $i_\phi$  и их направления на обеих сторонах поверхности противоположны.

До сих пор мы изучали поведение поля  $\mathbf{B}$  в относительно простых моделях сред и это позволяло нам применять метод разделения переменных при решении краевых задач. Теперь рассмотрим более общий случай, когда магнитное тело произвольной формы и с постоянной магнитной проницаемостью  $\mu$  помещается в первичное магнитное поле  $\mathbf{B}_0$  (рис. IV.14,  $z$ ). Окружающая среда не магнитна. Сначала будем предполагать, что токи проводимости и остаточная намагниченность отсутствуют. Ясно, что на поверхности тела возникают молекулярные токи, обусловленные индуцированной намагниченностью, и эти токи генерируют вторичное магнитное поле. Еще раз подчеркнем, что плотность этих токов [формула (IV.322)] определяется общим магнитным полем  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_s$$

и, следовательно, в общем случае, необходимо решить краевую задачу.

Для определения магнитного поля выведем интегральное уравнение для потенциала магнитного поля  $U$ , применив такой же подход, как и в случае электрического поля в проводящей среде [уравнение (III.267)]. Потенциалы электрического и магнитного полей — гармонические функции. Однако их поведение на границах раздела сред различно. К примеру, потенциал электрического поля является непрерывной функцией, в то время как потенциал магнитного поля имеет разрыв. В то же время сравнение потенциалов полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  показывает полное подобие уравнений, описывающих функции  $U_E$  и  $U_H$ . Действительно, из уравнений (III.241) и (IV.296) получим

$$\begin{aligned} \nabla^2 U_E &= 0, & U_{1E} &= U_{2E}, & \gamma_1 \frac{\partial U_{1E}}{\partial n} &= \gamma_2 \frac{\partial U_{2E}}{\partial n}, \\ \nabla^2 U_H &= 0, & U_{1H} &= U_{2H}, & \mu_1 \frac{\partial U_{1H}}{\partial n} &= \mu_2 \frac{\partial U_{2H}}{\partial n}. \end{aligned}$$

Эта тождественность позволяет использовать интегральное уравнение, выведенное для потенциала электрического поля. Полагая окружающую среду однородной с магнитной проницаемостью  $\mu_0$  и заменяя  $\gamma$  на  $\mu$  в уравнении (III.267), получаем

$$U_H(p) = U_{0H}(p) + \frac{\mu_i - \mu_0}{4\pi \mu_0} \cdot \oint_S U_H(q) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{L_{qp}} dS, \quad (\text{IV.376})$$

где  $S$  — обозначает поверхность, окружающую тело;  $U_{0H}$  — потенциал поля  $\mathbf{H}_0$ , которое сопровождает первичное магнитное поле  $\mathbf{B}_0$ ;  $L_{qp}$  — расстояние между точкой  $p$  и произвольной точкой  $q$  поверхности  $S$ ;  $U_H$  — потенциал полного поля  $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{H} = -\text{grad } U_H.$$

Из уравнений

$$\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}_0 = - \operatorname{grad} U \quad \text{и} \quad \mathbf{H}_0 = - \operatorname{grad} U_{0H}$$

следует, что

$$U_0 = \mu_0 U_{0H}.$$

Следовательно, уравнение (IV.376) можно переписать как

$$U_H(p) = \frac{U_0}{\mu_0} + \frac{\mu_i - \mu_0}{4\pi \mu_0} \oint_S U_H(q) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{L_{qp}} dS. \quad (\text{IV.377})$$

Если точка  $p$  находится на поверхности  $S$ , то уравнение (IV.377) является интегральным уравнением для функции  $U_H$ .

Используя решение этого уравнения, можно определить  $U_H$  в каждой точке поверхности  $S$ . Затем можно найти потенциал магнитного поля  $U$  в любой точке наблюдения  $p$  вне или внутри неоднородности, используя вновь уравнение (IV.377). Действительно,

$$U(p) = U_0(p) + \left( \frac{\mu_i - \mu_0}{4\pi} \right) \oint_S U_H \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{L_{qp}} dS. \quad (\text{IV.378})$$

Вычислив производные по координатам точки наблюдения в левой и правой частях уравнения (IV.378), можно вычислить компоненты магнитного поля  $\mathbf{B}(p)$ .

### *Вторичное магнитное поле при слабом взаимодействии молекулярных токов*

Предположим, что восприимчивость среды очень мала и вектор наведенной намагниченности  $\mathbf{P}_{in}$  определяется только первичным магнитным полем:

$$\mathbf{P}_{in} = \frac{\chi}{\mu_0} \mathbf{B}_0. \quad (\text{IV.379})$$

Другими словами, мы полагаем, что первичное поле много больше вторичного:

$$\mathbf{B}_0 \gg \mathbf{B}_s.$$

Как хорошо известно, в большинстве практических случаев, когда применяются магнитные методы, это равенство справедливо.

Принимая во внимание, что вектор  $\mathbf{P}_{in}$  характеризует дипольный момент молекулярных токов

$$d\mathbf{M} = \mathbf{P}_{in} dV,$$

и используя уравнения (IV.109) и (IV.379), имеем

$$dU(p) = \chi(q) \frac{\mathbf{B}_0(q) L_{qp}}{4\pi L_{qp}^3} dV. \quad (\text{IV.380})$$

Здесь  $dU(p)$  — потенциал магнитного поля, возбужденного молекулярными токами в элементарном объеме  $dV$ .

Применяя принцип суперпозиции, получим для потенциала вторичного магнитного поля  $B_s$

$$U(p) = \frac{1}{4\pi} \int_V \chi(q) \frac{B_0 L_{qp}}{L_{qp}^3} dV. \quad (IV.381)$$

Так как нормальное магнитное поле Земли  $B_0$  не изменяется внутри магнитной неоднородности, формулу (IV.381) можно переписать как

$$U(p) = \frac{1}{4\pi} \chi \int_V \frac{B_0 L_{qp}}{L_{qp}^3} dV = \frac{\chi B_0}{4\pi} \int_V \frac{L_{qp} dV}{L_{qp}^3}. \quad (IV.382)$$

Таким образом, определение вторичного поля ( $B_s = -\text{grad } U$ ) сводится к вычислению объемного интеграла, который в свою очередь может быть заменен поверхностным интегралом. Такое значительное упрощение решения прямой задачи имеет большое практическое значение в магнитных методах. В этом смысле очевидна аналогия с теорией гравитационных методов.

Используя формулу (IV.382), мы полагаем, что восприимчивость магнитного тела постоянна, хотя в реальных условиях это предположение обычно не выполняется. Действительно, вторичное магнитное поле в основном обусловлено породами, которые содержат ферромагнитные частицы, находящиеся внутри почти немагнитной среды. То есть, проводя вычисления поля, мы мысленно заменяем реальную неоднородную среду на такую однородную, которая возбуждает такое же вторичное поле.

Для иллюстрации этой процедуры допустим, что малые сферические частицы с магнитной проницаемостью  $\mu$  и радиусом  $a$  распределены внутри немагнитной среды (рис. IV.15, *a*). Кроме того, предполагаем, что индуцированная намагниченность в каждой сфере не зависит от влияния других частиц, т. е. взаимодействие между ними пренебрежимо мало. Рассмотрим внутреннюю часть сферического тела с радиусом  $R_0$ , которое содержит  $N$  частиц. Используя результаты, полученные в примере 2 этого раздела, можно представить потенциал, обусловленный токами в каждой частице, в виде

$$U_i(p) = \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0} \frac{a^3}{R_i^2} B_0 \cos \theta_i,$$

где  $R_i$  — расстояние между точкой наблюдения  $p$  и центром сферы (частицы);  $\theta_i$  — угол, образуемый первичным полем и радиус-вектором  $R_i$ .

Предположим, что расстояние  $R$  от точки  $p$  до центра сферического тела много больше радиуса тела  $R_0$ : ( $R \gg R_0$ ), тогда

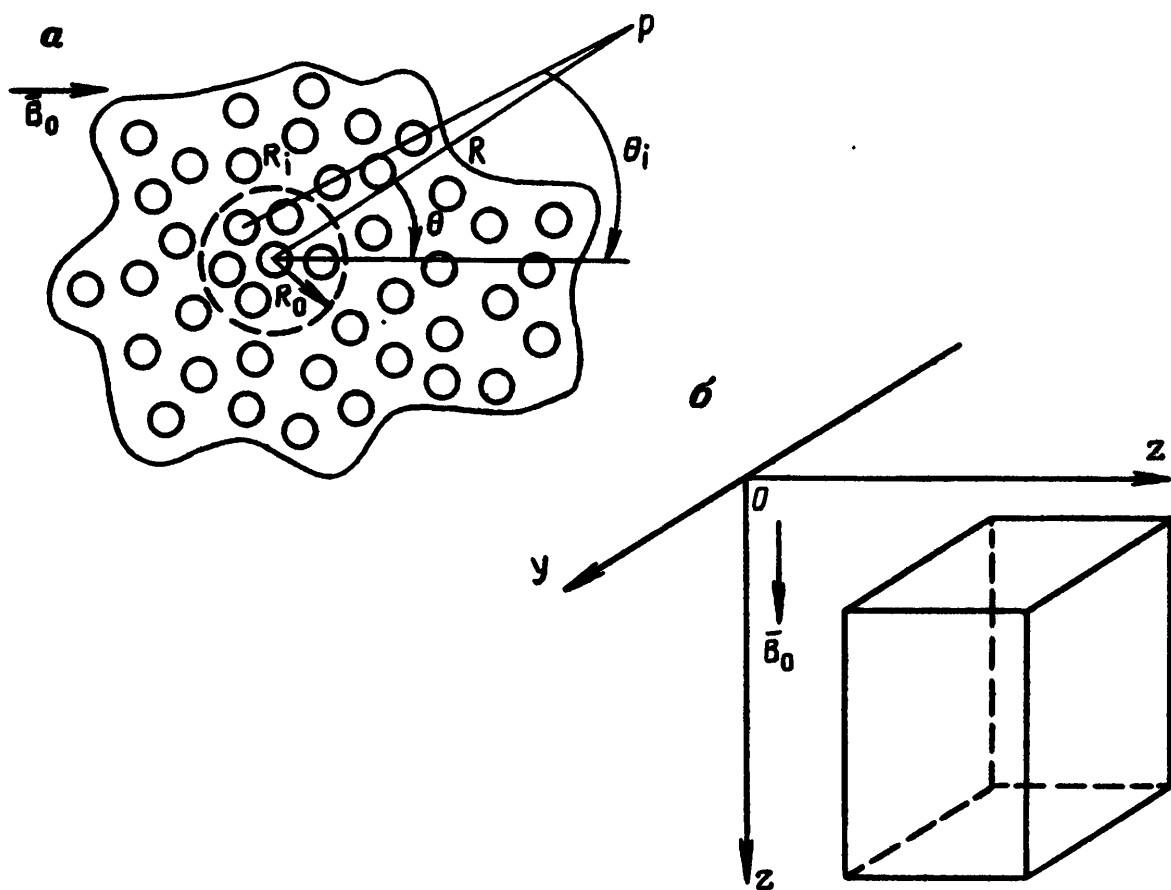


Рис. IV.15. Система магнитных частиц (а) и иллюстрация происхождения вторичного магнитного поля (б)

потенциал, обусловленный всеми  $N$  частицами, находящимися в объеме,

$$U(p) = N \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0} \frac{a^3}{R^2} B_0 \cos \theta, \quad (\text{IV.383})$$

так как  $R_i \approx R$  и  $\theta_i \approx \theta$ , но  $\theta$  является углом между векторами.

Будем полагать, что сферическое тело представлено однородной средой с магнитной проницаемостью  $\mu_*$  такой, что ее молекулярные токи генерируют такое же магнитное поле, как и исходная модель. Ясно, что потенциал такого поля имеет вид

$$U(p) = \frac{\mu_* - \mu_0}{\mu_* + 2\mu_0} B_0 \frac{R_0^3}{R^2} \cos \theta. \quad (\text{IV.384})$$

Сравнивая правые части формул (IV.383), (IV.384), определяем эквивалентную магнитную проницаемость  $\mu_*$ :

$$\frac{\mu_* - \mu_0}{\mu_* + 2\mu_0} R_0^3 = N \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0} a^3. \quad (\text{IV.385})$$

Введем новый параметр

$$V = \frac{N a^3}{R_0^3} = \frac{\frac{4\pi}{3} a^3 N}{\frac{4\pi}{3} R_0^3},$$

который характеризует объем, занятый частицами в единице объема. Решив уравнение (IV.385), получим

$$\mu_* = \mu_0 \frac{1 + 2VK_{12}^*}{1 - VK_{12}^*}. \quad (\text{IV.386})$$

Здесь

$$K_{12}^* = \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0} = \frac{\chi}{3 + \chi}.$$

Поскольку член  $VK_{12}^*$  обычно очень мал, мы можем переписать формулу (IV.386) в виде

$$\mu_* \cong \mu_0 (1 + 3VK_{12}^*) \quad (\text{IV.387})$$

или

$$\chi_* = \frac{V\chi}{1 + \chi/3}.$$

Например, если магнетит занимает один процент объема и его восприимчивость равна единице, то эквивалентная однородная среда имеет восприимчивость немного меньше, чем  $10^{-2}$ . Как следует из (IV.387), параметр  $\chi_*$  часто прямо пропорционален восприимчивости ферромагнитных частиц и относительному объему, занимаемому ими ( $\chi < 1$ ).

Мы вывели формулу (IV.387) в предположении, что все частицы имеют сферическую форму и не взаимодействуют. В то же время естественно ожидать, что восприимчивость эквивалентной однородной среды  $\chi_m$  зависит от формы, размеров и взаимной ориентации частиц, так же, как и от их восприимчивости. Например, если вытянутые частицы не ориентированы в одном направлении, то вызванная намагниченность различна для различных частиц. Следовательно, в отличие от случая сферических частиц, вторичное поле представляется векторной суммой полей, вызванных каждой частицей. Это показывает, что восприимчивость эквивалентной среды  $\chi_*$  является функцией ориентации первичного поля  $B_0$ .

Покажем теперь, что вторичное поле и его потенциал можно выразить через поверхностный интеграл.

Поскольку

$$\frac{L_{qp}}{L_{qp}^3} = \text{grad}^q \frac{1}{L_{qp}},$$

формулу (IV.382) можно представить как

$$U(p) = \frac{1}{4\pi} \chi B_0 \int_V \text{grad}^q \frac{1}{L_{qp}} dV.$$

Используя равенство

$$\int_V \text{grad } \varphi dV = \oint_S \varphi dS,$$

окончательно получаем

$$U(p) = \frac{1}{4\pi} \chi \oint_S \frac{B_0 dS}{L_{qp}}$$

или

$$U(p) = \frac{1}{4\pi} \chi \oint_S \frac{B_{0n} dS}{L_{qp}}, \quad (\text{IV.388})$$

где  $S$  — поверхность неоднородности и  $B_{0n}(q)$  — нормальная компонента первичного поля  $B_0$ . Простота формул (IV.388) очевидна, и в то же время они играют фундаментальную роль в решении прямой задачи тогда, когда восприимчивость существенно мала.

Как следует из (IV.388), вторичное магнитное поле имеет вид

$$B_s = - \frac{1}{4\pi} \chi \text{grad}^p \oint_S \frac{B_{0n}(q)}{L_{qp}} dS$$

или

$$B_s = \frac{1}{4\pi} \chi \oint_S B_{0n}(q) \frac{L_{qp}}{L_{qp}^3} dS, \quad (\text{IV.389})$$

так как

$$\text{grad}^p \frac{1}{L_{qp}} = - \frac{L_{qp}}{L_{qp}^3}$$

и  $B_{0n}$  не зависит от точки наблюдения  $p$ .

В частности, горизонтальные и вертикальная компоненты поля  $B_z$  даются выражениями

$$B_x = \frac{1}{4\pi} \chi \oint_S B_{0n} \frac{L_{qp} \cdot i}{L_{qp}^3} dS,$$

$$B_y = \frac{1}{4\pi} \chi \oint_S B_{0n} \frac{L_{qp} \cdot j}{L_{qp}^3} dS,$$

(IV.390)

$$B_z = \frac{1}{4\pi} \chi \oint_S B_{0n} \frac{L_{qp} \cdot k}{L_{qp}^3} dS.$$

Рассмотрим пример, в котором магнитное тело является прямоугольной призмой, образованной координатными поверхностями декартовой системы координат, и первичное поле имеет



только компоненту  $B_{0z}$  (рис. IV.15, б). Тогда для компоненты  $B_z$  имеем

$$B_z = \frac{\chi}{4\pi} B_{0z} \left[ \int_{S_2} \frac{L_{qp} d\mathbf{S}}{L_{qp}^3} - \int_{S_1} \frac{L_{qp} d\mathbf{S}}{L_{qp}^3} \right], \quad (\text{IV.391})$$

где  $S_1$  и  $S_2$  — поверхности, находящиеся в плоскости  $xz$ ;  $d\mathbf{S}_2 = = dS_2 \mathbf{k}$ ;  $d\mathbf{S}_1 = dS_1 \mathbf{k}$ ;  $B_{0n}(S_2) = B_{0z}$  и  $B_{0n}(S_1) = -B_{0z}$ .

Последнее выражение можно переписать как

$$B_z = \frac{\chi}{4\pi} B_{0z} \left[ \int_{S_1} \frac{L_{pq} \cdot d\mathbf{S}}{L_{pq}^3} - \int_{S_2} \frac{L_{pq} \cdot d\mathbf{S}}{L_{pq}^3} \right].$$

Интегралы в этой формуле хорошо известны, и они описывают телесный угол  $\omega(p)$ , стягиваемый соответствующей поверхностью. Следовательно,

$$B_z(p) = \frac{\chi}{4\pi} B_{0z} [\omega_2(p) - \omega_1(p)]. \quad (\text{IV.392})$$

В заключение уместен комментарий. Часто, в основном по традиции, поле  $\mathbf{H}$  используют для описания влияния неоднородностей на магнитное поле. В соответствии с (IV.389),

$$\mathbf{H}_s(p) = \frac{\chi}{4\pi \mu_0} \oint_S B_{0n}(q) \frac{L_{pq} dS}{L_{pq}^3}$$

или

$$\mathbf{H}_s(p) = \frac{\chi}{4\pi \mu_0} \oint \frac{\Sigma(q) L_{qp}}{L_{qp}^3} dS, \quad (\text{IV.393})$$

где

$$\Sigma(q) = \chi B_{0n}$$

— плотность фиктивных источников, которые создают вспомогательное поле  $\mathbf{H}$ .

Как следует из формулы (IV.393), соотношения между электрическими и фиктивными магнитными зарядами и соответствующими полями одинаковы. Понятно, однако, что поле  $\mathbf{H}$  и его источники не имеют физического смысла. Таким образом, процедура определения поля  $\mathbf{B}_s$  состоит в использовании закона Кулона для вычисления поля  $\mathbf{H}_s$  и умножении полученного поля на  $\mu_0$  для получения  $\mathbf{B}_s$ .

*Магнитное поле, обусловленное остаточной намагниченностью*

Опять ограничимся случаем однородного тела с магнитной проницаемостью  $\mu$ , окруженного немагнитной средой. Предположим также, что вектор  $\mathbf{P}$ , известен, но токи проводимости отсутствуют.

Естественно начать изучение поведения поля с рассмотрения системы уравнений (IV.291):

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \operatorname{rot} \mathbf{P}_r, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (\text{IV.395})$$

$$\mathbf{n} \times \left( \frac{\mathbf{B}_2}{\mu_2} - \frac{\mathbf{B}_1}{\mu_1} \right) = - \frac{\mu_0}{\mu} \mathbf{n} \times \mathbf{P}_r, \quad \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0,$$

так как

$$\mathbf{P}_{2r} = 0, \quad \mathbf{P}_{1r} = \mathbf{P}_r, \quad \mu_2 = \mu_0, \quad \mu_1 = \mu.$$

В соответствии с (IV.192) объемная и поверхностная плотности молекулярных токов равны

$$\mathbf{j} = \operatorname{rot} \mathbf{P}_r$$

и

$$\mathbf{i} = 2 \frac{K_{12}}{\mu_0} \mathbf{n} \times \mathbf{B}^{\text{сп}} + \operatorname{rot} \mathbf{P}_r - 2K_{12} \mathbf{n} \times \mathbf{P}_r^{\text{сп}}, \quad (\text{IV.396})$$

где

$$K_{12} = \frac{\mu_0 - \mu}{\mu_0 + \mu}.$$

Итак, даже в однородной среде объемная плотность молекулярных токов может отличаться от нуля. Поэтому в нашем случае нельзя ввести скалярный потенциал  $U$ , так как

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} \neq 0.$$

Следовательно, удобнее использовать источник поля  $\mathbf{H}$ . Затем, применяя соотношения

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{P}_r,$$

можно вычислить магнитное поле.

В общем случае вектор  $\mathbf{P}_r$  является произвольной функцией координат, но мы полагаем, что он удовлетворяет условиям

$$\operatorname{rot} \mathbf{P}_r = 0. \quad (\text{IV.397})$$

Конечно, это условие выполняется, если поле  $\mathbf{P}_r$  однородное. Соответственно, объемная плотность токов становится равной нулю и вторичное магнитное поле генерируется только поверхностными токами. Как следует из (IV.396), два типа этих токов определяются остаточной намагниченностью и, следовательно, могут быть точно определены. Их общая плотность

$$\mathbf{i}_p = - \mathbf{n} \times \mathbf{P}_r - K_{12} \mathbf{n} \times \mathbf{P}_r$$

или

$$\mathbf{i}_p = - \frac{2\mu_0}{\mu + \mu_0} \mathbf{n} \times \mathbf{P}_r. \quad (\text{IV.398})$$

### Третий тип токов

$$\mathbf{i}_B = 2 \frac{K_{12}}{\mu_0} \mathbf{n} \times \mathbf{B}^{\text{ср}} \quad (\text{IV.399})$$

возникает вследствие индуцированной намагниченности и, следовательно, не известен, если не определено поле. Для нахождения поля  $B$  мы должны решить краевую задачу. Используя (IV.395) и соотношение  $\mathbf{B} = -\text{grad } U$ , можно сформулировать эту задачу следующим образом.

1. В регулярных точках

$$\Delta U = 0.$$

2. На поверхности неоднородности

$$\frac{U_2}{\mu} = \frac{U_1}{\mu_0} = -\frac{\mu_0}{\mu} U_M, \quad \frac{\partial U_2}{\partial n} = \frac{\partial U_1}{\partial n},$$

где  $U_2$  и  $U_1$  — потенциалы вне и внутри магнитного тела, в то время как  $U_M$  связан с вектором  $\mathbf{P}_r$ :

$$\mathbf{P}_r = -\text{grad } U_M. \quad (\text{IV.400})$$

Последнее вытекает из (IV.397).

3. С возрастанием расстояния от неоднородности потенциал  $U_2$  стремится к нулю:

$$U_2(p) \rightarrow 0, \quad \text{если } L_{qp} \rightarrow \infty.$$

Для иллюстрации поведения поля, вызванного остаточной намагниченностью, рассмотрим опять вытянутый эллипсоид вращения, показанный на рис. IV.13, б. Предположим, что вектор  $\mathbf{P}_r$  направлен вдоль главной оси и не изменяется внутри тела. Используя результаты, полученные в примере 2 этого раздела, представим потенциалы  $U_1$  и  $U_2$ , так же, как и функцию  $U_M$ , следующим образом:

$$\begin{aligned} U_1(\xi, \eta) &= Dc P_1(\eta) P_1(\xi), \\ U_M(\xi, \eta) &= -P_r c P_1(\eta) P_1(\xi), \quad \text{если } \eta < \eta_0, \\ U_2(\xi, \eta) &= Ac Q_1(\eta) P_1(\xi), \quad \text{если } \eta > \eta_0, \end{aligned} \quad (\text{IV.401})$$

где

$$P_r = |\mathbf{P}_r|.$$

Очевидно, что функции  $U_2$  и  $U_1$ , даваемые формулами (IV.401), удовлетворяют уравнению Лапласа и что  $U_e$  стремится к нулю, когда расстояние от эллипсоида возрастает. Учитывая поведение потенциала на поверхности эллипсоида  $\eta = \eta_0$ , получаем

$$\frac{A Q_1(\eta_0)}{\mu_0} - \frac{D P_1(\eta_0)}{\mu} = \frac{\mu_0}{\mu} P_r P_1(\eta_0),$$

$$A Q_1'(\eta_0) = D P_1'(\eta_0) = D,$$

так как

$$P_1(\eta) = 1.$$

Решив эту систему, получим

$$A = \mu_0 P_r \frac{\eta_0 (\eta_0^2 - 1)}{(\mu / \mu_0) Q_1(\eta_0) - \eta_0 Q_1'(\eta_0)},$$

$$D = \mu_0 P_r \frac{(\eta_0^2 - 1) \eta_0 Q_1'(\eta_0)}{(\mu / \mu_0) Q_1(\eta_0) - \eta_0 Q_1'(\eta_0)}.$$

Поскольку

$$Q_1(\eta_0) = \frac{\eta_0}{2} \ln \frac{\eta_0 + 1}{\eta_0 - 1} - 1,$$

$$Q_1'(\eta_0) = \frac{1}{2} \ln \frac{\eta_0 + 1}{\eta_0 - 1} - \frac{\eta_0}{\eta_0^2 - 1},$$

$$\eta_0 = \frac{a}{c}, \quad \eta_0^2 - 1 = \frac{b^2}{c^2}, \quad e = \frac{c}{a},$$

коэффициенты  $A$  и  $D$  можно представить в виде

$$A = \mu_0 P_r \frac{ab^2}{c^3 \left[ 1 + \left( \frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) L \right]},$$

$$D = \mu_0 P_r \frac{ab^2}{c^3} \frac{\frac{1}{2} \ln \frac{1+e}{1-e} - \frac{ac}{b^2}}{1 + \left( \frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) L},$$

(IV.402)

где  $L$  дана формулой (IV.218).

Как следует из (IV.401), поле внутри эллипсоида однородно и направлено, как и вектор  $P_r$ , вдоль оси  $x$ . Действительно,

$$B_x = - \frac{\partial U}{\partial x} = \mu_0 P_r \frac{a^2}{c^2} \frac{1 - \frac{b^2}{2ac} \ln \frac{1+e}{1-e}}{1 + \left( \frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) L}$$

и

$$1 > \frac{b^2}{2ac} \ln \frac{1+e}{1-e}, \quad \text{если } a > b.$$

Для сильно вытянутого эллипсоида

$$B_x \approx \mu_0 P_r \frac{1}{1 + \left( \frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \frac{b^2}{a^2} \ln \frac{2a}{b}}$$

и в пределе

$$B_x = \mu_0 P_r, \quad (\text{IV.403})$$

если

$$\left( \frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \frac{b^2}{2a^2} \ln \frac{2a}{b} \ll 1.$$

Таким образом, внутри бесконечно длинного цилиндра магнитное поле равно остаточной намагниченности, умноженной на  $\mu_0$ . Сравнение формулы (IV.403) с соотношением

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{P},$$

показывает, что поле  $\mathbf{H}$  равно нулю; этот результат очевиден, так как отсутствуют токи проводимости и фиктивные источники.

Рассмотрим потенциал магнитного поля вне эллипсоида. В соответствии с (IV.401), (IV.402)

$$U_2(\zeta, \eta) = \mu_0 P_r \frac{ab^2}{c^2} \frac{\frac{\eta}{2} \ln \frac{\eta+1}{\eta-1} - 1}{1 + \left( \frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) L} \xi.$$

Здесь  $x = c \zeta \eta$ ,  $r = c [(1 - \zeta^2)(\zeta^2 - 1)]^{1/2}$  — цилиндрические координаты точки наблюдения.

С возрастанием расстояния от эллипсоида координата  $\eta$  также возрастает, и в пределе получаем

$$r \approx c \eta (1 - \zeta^2)^{1/2} \quad \text{и} \quad x = c \zeta \eta$$

и, следовательно,

$$R = \sqrt{r^2 + x^2} = c \eta (1 + \xi^2 - \xi^2)^{1/2} = c \eta,$$

$$\cos \theta = \frac{x}{R} = \frac{c \xi \eta}{c \eta} = \xi.$$

Учитывая, что

$$\frac{\eta}{2} \ln \frac{\eta+1}{\eta-1} = \frac{\eta}{2} \ln \frac{1+1/\eta}{1-1/\eta} \approx 1 + \frac{1}{3\eta^2},$$

находим асимптотическое выражение для потенциала  $U_2$ :

$$U_2 = U_0 P_r \frac{ab^2}{3} \frac{\cos \theta}{\left\{ 1 + \left( \frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) L \right\} R^2}$$

или

$$U_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{R}}{R^3}, \quad \text{если} \quad R \rightarrow \infty, \quad (\text{IV.404})$$

где

$$M = \frac{4\pi ab^2 P_r}{3 \left\{ 1 + \left( \frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) L \right\}}$$

— дипольный момент поверхностных токов.

Предположим теперь, что отношение  $a/b$  неограниченно возрастает. Тогда, в соответствии с (IV.402), поле  $B_2$  вне эллипсоида убывает и в случае бесконечно длинного цилиндра становится равным нулю:

$$B_2 \equiv 0, \quad \text{если} \quad a/b \rightarrow \infty.$$

В этом предельном случае поверхностные токи зависят только от вектора  $P_r$ . Действительно, подставив (IV.403) в (IV.396), получим

$$i = K_{12} n \times P_r + \text{Rot } P_r - K_{12} n \times P_r = \text{Rot } P_r.$$

Здесь будут уместны следующие замечания.

1. Мы предположили, что остаточная намагниченность однородна внутри эллипсоида. Такое простое поведение вектора  $P_r$  наблюдается, когда эллипсоид с постоянной магнитной проницаемостью  $\mu$  и полуосями  $a$ ,  $b$ ,  $c$  помещен в однородное магнитное поле. Если первичное поле направлено вдоль одной из этих осей, то поле  $B_1$  также однородно и имеет то же направление. В более общем случае, когда первичное поле произвольно ориентировано относительно эллипсоида, поле внутри является суммой однородных полей, направленных вдоль соответствующих осей.

2. Магнитное поле внутри эллипсоида  $B_1$  меньше, чем такое же поле в случае бесконечно длинного цилиндра ( $\mu > \mu_0$ ). Подобное явление наблюдалось, когда мы изучали электрическое поле при наличии диэлектриков и проводников. Было установлено, что электрические заряды, возникающие на поверхности неоднородности, создают вторичное поле так, что его направление противоположно направлению первичного поля, если  $\epsilon_1 > \epsilon_2$  или  $\gamma_1 > \gamma_2$ . Поэтому полное электрическое поле внутри тела всегда меньше, чем поле в случае бесконечно длинного цилиндра.

Тем не менее, молекулярные токи на поверхности магнитных эллипсоида и бесконечно длинного цилиндра имеют одинаковое направление. В то же время при приближении к заостренному концу эллипсоида ток, так же как и площадь петель с током, уменьшается. Такое поведение поверхностных токов — единственная причина того, что поле внутри бесконечно длинного цилиндра больше, чем поле внутри эллипсоида.

3. Изучение магнитного поля, в принципе, может быть осуществлено при помощи поля  $H$ , причиной появления которого являются фиктивные источники. Они «возникают» на поверхности

эллипсоида таким образом, что вектор  $\mathbf{H}$  противоположен  $\mathbf{P}_r$ . Отношение  $H/P_r$ , обычно называемое фактором размагничивания, косвенно характеризует различие между магнитными полями, генерируемыми токами на поверхностях эллипсоида и бесконечно длинного цилиндра.

4. Относительная простота формы эллипсоида позволила нам использовать метод разделения переменных. Однако в более общем случае произвольного тела поле вычисляется либо с помощью метода интегральных уравнений, либо с помощью конечно-разностных методов.

Будем теперь предполагать, что только остаточная намагниченность определяет распределение молекулярных токов. Другими словами, влияние индуцированной намагниченности пренебрежимо мало и, следовательно, можно сказать, что магнитная проницаемость тела равна  $\mu_0$ . Тогда, по определению, дипольный момент каждого элементарного объема

$$d\mathbf{M} = \mathbf{P}_r dV. \quad (\text{IV.405})$$

Поэтому потенциал магнитного поля  $\mathbf{B}$ , вызванного всеми молекулярными токами внутри произвольной неоднородности,

$$U(p) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{P}_r L_{qp}}{L_{qp}^3} dV.$$

Используя равенство

$$\int_V \text{grad } \varphi dV = \oint_S \varphi dS$$

и полагая вектор  $\mathbf{P}_r$  постоянным, получим

$$U(p) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{P}_r \oint_S \frac{dS}{L_{qp}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{P_{nr}}{L_{qp}} dS, \quad \text{если } \chi \ll 1. \quad (\text{IV.406})$$

Как следует из формулы (IV.388), потенциал вторичного магнитного поля, которое возникает в результате действия нормального поля  $\mathbf{B}_0$  и остаточной намагниченности  $\mathbf{P}_r$ ,

$$U(p) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{(\chi B_{0n} + \mu_0 P_{nr})}{L_{qp}} dS, \quad \text{если } \chi \ll 1. \quad (\text{IV.407})$$

Следовательно, обобщая формулу (IV.389), получаем вторичное магнитное поле

$$\mathbf{B}(p) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\chi B_{0n} + \mu_0 P_{nr}}{L_{qp}^3} L_{qp} dS, \quad \text{если } \chi \ll 1.$$

Это уравнение играет фундаментальную роль в интерпретации магнитных аномалий. Качество интерпретации зависит, как и в

случае гравитационных и электрических методов, от различных факторов (таких, как точность измерений, влияние геологического шума и выбор модели магнитного тела). Кроме того, в большинстве случаев мы должны иметь достаточно информации о величине и направлении остаточной намагниченности.



# СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

## К ГЛАВЕ I

*Альпин Л. М.* Теория поля.— М.: Недра, 1966.

*Stratton J. A.* Electromagnetic Theory.— McGraw — Hill, 1941.\*

## К ГЛАВЕ II

*Garland G. D.* Introduction to Geophysics.— W. B. Saunders, Philadelphia, 1965.

*Grant F. S. and West G. F.* Interpretation Theory in Applied Geophysics.— McGraw — Hill, New York, 1965.

*Green R.* The use of the subtended solid angle for calculating the magnetic anomaly over structurally complex bodies//Geoexploration.— 1986.— V. 24.— P. 61—69.

*Parasnis D. S.* Principles of Applied Geophysics 3e.— Chapman and Hill, 1979.

## К ГЛАВЕ III

*Альпин Л. М.* Теория поля.— М.: Недра, 1966.

*Бурсиан В. Р.* Теория электромагнитных полей, применяемых в геофизике.— Л.: Недра, 1972.

*Дахнов В. Н.* Электрические и магнитные методы исследования скважин.— М.: Недра, 1967.

*Тамм И. Е.* Основы теории электричества.— М.: Наука, 1987.

*Уэйт Дж. Р.* Геоэлектромагнетизм.— М.: Недра, 1987.

*Kaufman A. A.* The electric field in a borehole with casing//Geophysics.— 1990.— V. 55:1.

*Smithe W. R.* Static and dynamic electricity. 3d ed.— McGraw — Hill: New York, 1968.

## К ГЛАВЕ IV

*Бурсиан В. Р.* Теория электромагнитных полей, применяемых в электроразведке.— Л.: Недра, 1972.

*Зильберман Г. Е.* Электричество и магнетизм.— М.: Наука, 1970.

*Тамм И. Е.* Основы теории электричества.— М.: ГИТТЛ, 1946.

*Яновский В. М.* Земной магнетизм.— Л., 1944.

*Parasnis D. S.* Principles of Applied Geophysics.— Chapman and Hill, 1979.

*Parkinson W. D.* Introduction to Geomagnetism.— Elsevier, 1982.

*Premiere serie.* Inst. Geol. al Rom. Studii tehnice si economic, 1929.

*Sabba S. Stefanescu.* Etudes theoriques sur la prospection electrique du sousol, 1922.

*Smythe W. R.* Static and dynamic electricity. 3d ed., McGraw — Hill, 1968.

---

\* Перевод на русский язык: Стрэттон Дж. А. Теория электромагнетизма.— М.: Гостехиздат, 1948.

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Безвихревое поле 76, 104, 124  
Био-Савара закон 371, 374—375  
Буге поправка 164
- Ватт 282
- Векторное произведение 13—15  
Векторное произведение двойное 15  
Векторные поля 43—46  
    скалярные и векторные компоненты, вблизи поверхности и  
    линии 16—17
- Векторные линии 43  
Векторный потенциал 127—128  
Вектор электрической индукции 232, 457  
Вертикальный магнитный диполь 491—498  
Вертикальный электрический диполь 417—422  
Вихри 75, 76  
Вихревое поле 75, 125—136  
Возбудители поля 62  
Восприимчивость магнитная 450
- Гармонические поля 87—103  
Гармонический осциллятор 478  
Гаусса теорема 55, 56, 293  
Геологический шум 172, 185—186  
Геомагнетизм 473  
Горизонтальный электрический диполь 422  
Гравитационная постоянная 137  
Гравитационное поле 137—191  
    элементарная масса 144  
    на поверхности 144, 145  
Градиента линии 42, 43, 74  
Градиентное зондирование 268  
Грина формула 88, 111, 300  
Грина функция 111, 118—119, 189, 300
- Декартова система координат 19, 52  
Дивергенция 49—58  
Дирихле краевая задача 99, 117  
Дипольный момент 226, 502, 513  
Дипольного момента плотность 441  
Диэлектрическая проницаемость 192, 443  
Джоуля закон 283, 284  
    теплота 284
- Единичный вектор 62

Закон сохранения заряда 242, 248  
Заряда плотность 434  
Заряда сохранение 124  
Источники 75, 121  
Кажущееся сопротивление 336, 342  
Квазипотенциальное поле 67, 71  
Кирхгофа формула 119  
Контактная электродвижущая сила 280, 281, 363  
Коэффициент контрастности 307, 482  
Краевая задача 85  
Криволинейная система координат 18—20  
Круговой токовый контур 381—384  
Кулона закон 192—204, 286—298  
Кулона поле 272—276  
Кюри точка 451  
Лапласа уравнение 87, 92—99, 181, 184, 186, 300, 435  
Лежандра уравнения 435, 436  
Липшица интеграл 348  
Лоренца сила 374  
Магнитная проницаемость 452  
Магнитный диполь 384, 386  
Магнитный соленоид 462  
Магнитная восприимчивость 449—451  
Метод разделения переменных 329  
Молекулярные токи 443, 446  
    типы токов 454—456  
Намагниченность 410, 450  
Намагниченности вектор 410, 447  
    объемная плотность молекулярного тока 447  
    поля  $H$  449—450  
Напряжение  
    вдоль произвольного контура 59, 60  
    вдоль произвольного пути 88, 177, 178, 207, 209  
    вдоль радиус-вектора 207, 208  
    гармонического поля 87, 88  
    поля источников 105  
    стороннего поля 272, 273  
    токовый электрод 252  
    число нормальных поверхностей 59  
Неймана краевая задача 101, 114, 115  
Некорректно поставленная задача 162  
Ньютона закон притяжения 137—154  
Обратная задача теории гравитационного поля 158, 159  
Объемные заряды 279—281

Ома закон 124  
Ориентированные линии 17—20  
Ориентированные поверхности 17—20  
Остаточная намагниченность 450, 451  
Палеомагнетизм 473, 474  
Пелтиера теплота 285  
Поляризации вектор 442  
Поляризация 226  
Потенциальное поле 77  
Поверхностная плотность 144  
Поверхностный ток 389, 390  
Поток 46—57  
Поправка за рельеф 163—164  
Плотности тока вектор 245, 447  
Плотность поверхностных масс 144  
Постоянная разделения 329  
Правило правой руки 17—19  
Проводимости токи 443  
Проводник 199—204  
Проводящая сфера 314—319  
Проводящий сфероид 434—441  
Пуассона уравнение 122, 181, 184  
Радиус-вектор 12, 13  
Ротор 58, 64—71  
S-зона 354  
Скалярное произведение векторов 13  
Смешанное произведение векторов 15  
Сопrotивление 243, 258—269  
Стокса теорема 70—71  
Сферическая система 20  
Сферический электрод 263—265  
Сфероид 487—489  
Тектонические плиты 473  
Телесный угол 20—29  
Тесла 371  
Теорема единственности 83, 291, 292, 294  
Ток 279  
Тока плотность 238—241, 374  
Токовая линия 277, 278  
Токовый контур 383—387  
Токовый электрод 411—413  
Токовый элемент 378—381  
Томпсона теплота 285  
Тороид 398—399  
Третья краевая задача 295

Трехмерное тело 170—172  
Удельная электропроводность 243  
Уравнения поля 71—86  
Ферромагнетики 443  
Фредгольма интегральное уравнение 203  
Цилиндр, однородное магнитное поле 477—487  
Цилиндрическая система координат 19, 329  
Циркуляция 56—58  
Электрическая сила взаимодействия 193—195  
Электрическая проницаемость 193  
Электрические заряды 278—280  
Электрический диполь 418  
Эллиптический цилиндр в однородном электрическом поле 319—326  
Электрическое поле 192—367  
Электрического поля потенциал 313  
Электрической индукции вектор 233, 457  
Электродвижущая сила 274  
Электронов подвижность 242  
Электропроводность скважины 340  
Электроразведочная установка 277—278  
Электростатическая индукция 200—203  
Электростатическое экранирование 224  
Элементарные массы 225  
Эллиптическая система координат 319

Кауфман Александр А.

**ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ МЕТОДОВ.  
Часть I. ГРАВИТАЦИОННЫЕ, ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ  
И МАГНИТНЫЕ ПОЛЯ**

Заведующий редакцией *Т. К. Рубинская*  
Редактор издательства *А. И. Вороновская*  
Переплет художника *К. В. Голикова*  
Художественный редактор *В. С. Поплавский*  
Технический редактор *Л. Н. Фомина*  
Корректор *Е. И. Микрякова*  
Н/К

---

Лицензия ЛР № 0101145 от 24 декабря 1992 г.  
Подписано в печать 18.09.95. Формат 60×90<sup>1/16</sup>. Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Усл. печ. л. 33,00.  
Уч.-изд. л. 36,6. Тираж 1000 экз. Заказ № 1050/4377-2.

---

Издательство «Недра», 125047 Москва, Тверская застава, 3.

Смоленская областная ордена «Знак Почета» типография им. Смирнова. 214000, г. Смоленск,  
пр. им. Ю. Гагарина, 2.

**РУССКО-АНГЛИЙСКИЙ  
СЛОВАРЬ  
ПО РАЗВЕДОЧНОЙ  
ГЕОФИЗИКЕ**

Содержит около 8500 терминов, используемых в гравиразведке, магниторазведке, радиометрии, сейсморазведке, электроразведке и каротаже. Особое внимание уделено теории сейсморазведки и обработке сейсмических данных.

Словарь составлен на основе изучения русскоязычной и англоязычной геофизической литературы, изданной в период с 1981 по 1994 г.

*Словарь распространяет автор  
канд. техн. наук А. В. Череповский  
адрес: Москва 123585  
ул. Тухачевского, д. 32, к. 2, кв. 65  
т е л е ф о н: (095) 192 15 07*

## **ВНИМАНИЮ СПЕЦИАЛИСТОВ!**

**В издательстве «Недра» имеются в продаже книги по следующей тематике:**

### *Нефтегазопромысловая геология, полевая и промысловая геофизика*

1. *Андреев В. И.* Моделирование геологических образований методами пространственной гравиметрии.
2. *Англо-русский словарь терминов по автоматизированной интерпретации данных сейсморазведки/Под редакцией О. А. Потапова.*
3. *Арабаджи М. С.* Решение геологических задач на персональных компьютерах.
4. *Геология и геохимия нефти и газа. Учебник для вузов/А. А. Бакиров, В. И. Ермолкин, А. К. Мальцева и др.*
5. *Геолого-технологические исследования скважин/Л. М. Чекалин, А. С. Моисеенко, И. Г. Мельников и др.*
6. *Голошубин Г. М., Епинатьева А. М.* Комбинированный метод сейсморазведки.
7. *Изотова Т. С., Денисов С. В., Вендельштейн Б. Ю.* Седиментологический анализ данных промысловой геофизики.
8. *Карасик В. М.* Изучение скоростей сейсмических волн комплексом методов.
9. *Кутьина О. Г., Кутьин А. Б.* Прослеживание сейсмических границ.
10. *Корягин В. В.* Сейсморазведка нефтегазоносных структур малого размера.
11. *Ломтадзе В. В.* Программное и информационное обеспечение геофизических исследований.
12. *Липаев А. А.* Теплофизические исследования в петрофизике.
13. *Маловичко А. К., Костицын В. И.* Гравиразведка. Учебник для вузов.
14. *Нагля В. В., Заяц А. П., Бугаенко А. В.* Радиометрическая и ядерно-физическая аппаратура и оборудование. Учебное пособие для техникумов.
15. *Нефтегазоносность глубокопогруженных горизонтов Русской плиты/И. Н. Капустин, Л. Н. Кирюхин, С. М. Камалов и др.*
16. *Нестеров И. И., Васильев В. В.* Теория и практика нефтегазоразведочных работ. Учебник для вузов.
17. *Трофимов В. А.* Сейсморазведка МОГТ при изучении строения докембрийского фундамента востока Русской плиты.
18. *Фишман В. П.* Пароль серебряных струй.
19. *Экономика, организация и планирование геологоразведочных работ. Учебник для техникумов/Э. А. Азроянц, В. Т. Борисович, З. М. Назарова и др.*



1. *Агаев С. Г.* Системный подход к повышению эффективности проводки скважин.

2. *Бурение специальных скважин в мерзлых горных породах*/Б. Р. Ракишев, Б. Ф. Шерстюк, Е. К. Ястребов и др.

3. *Булатов А. И., Аветисов А. Г.* Справочник инженера по бурению. Кн. 1, кн. 2 (кн. 3 — 1995 г.).

4. *Булатов А. И., Пальчиков В. В.* Англо-русский словарь по бурению и заканчиванию скважин (можно заказать по тел. 251-31-77).

5. *Махмудов С. А., Абузерли М. С.* Монтаж, обслуживание и ремонт погружных электронасосов (справочн. изд.).

6. *Морские шельфовые и речные гидротехнические сооружения*/М. П. Дубровский, П. И. Яковлев, Е. А. Князев, В. Т. Бугаев.

7. *Сулакшин С. С.* Бурение геологоразведочных скважин. Учебник для вузов.

8. *Спивак А. И., Попов А. Н.* Разрушение горных пород при бурении скважин. Учебник для вузов.

*Разработка и эксплуатация нефтяных, газовых  
и газоконденсатных месторождений*

1. *Абрамович В. Н., Уринсон Г. С. Экономика разработки месторождений сложного состава газа.*

2. *Гриценко А. И., Клапчук О. В., Харченко Ю. А. Гидродинамика газожидкостных смесей в скважинах и трубопроводах.*

3. *Зорин Л. З., Трутнев А. Н. Сургутский вариант.*

4. *Зайцев Е. К. Противозатратный механизм в системах обслуживания нефтегазодобывающей сферы.*

5. *Кучин Б. Л., Седых А. Д., Павлов С. Н. Макромодели в газовой промышленности.*

6. *Лившиц Л. С., Левин С. Н. Стали для оборудования нефтяной и газовой промышленности.*

7. *Максимов В. М. Основы гидротермодинамики пластовых систем.*

8. *Микаэлян Э. А. Эксплуатация газотурбинных газоперекачивающих агрегатов компрессорных станций.*

9. *Разработка нефтегазоконденсатных месторождений Прикаспийской впадины/Под ред. В. Ф. Перепеличенко.*

1. Куликов В. Д., Шибнев А. В., Яковлев А. Е. Промысловые трубопроводы.
2. Нефтегазовое строительство. Техническое обслуживание и ремонт машин. Справочник/В. И. Бармин, А. И. Ломов, В. А. Власов и др.
3. Сооружение подводных трубопроводов/Б. В. Самойлов, Б. И. Ким, В. И. Зоенко, В. И. Кленин.
4. Техника и технология транспорта и хранения нефти и газа. Учебник для вузов./Ф. Ф. Алиева, Р. А. Алиев, В. Ф. Новоселов и др.
5. Эксплуатационная надежность магистральных трубопроводов./В. Д. Чернов, Э. М. Ясин, В. Х. Галюк и др.
6. Алиев З. С., Шеремет В. В. Определение производительности горизонтальных скважин, вскрывших газовые и газонефтяные пласты.
7. Детков С. П., Детков В. П., Астахов В. А. Охрана природы осваиваемых газовых районов.

Книги можно приобрести в издательстве «Недра» по адресу:  
125047, Россия, г. Москва, Тверская застава, д. 3.  
Тел. 251-29-61, 251-31-77.