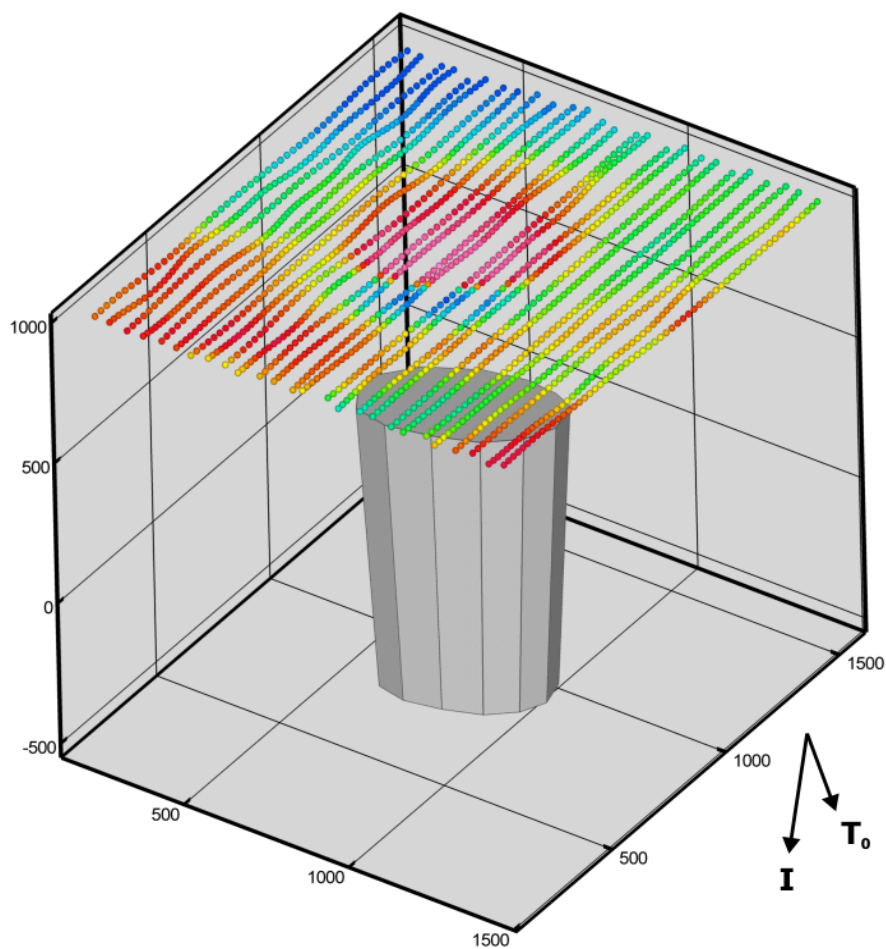


Ю. И. БЛОХ

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ГРАВИТАЦИОННЫХ И МАГНИТНЫХ АНОМАЛИЙ

Учебное пособие для студентов университетов и вузов, обучающихся по специальности 080400
«Геофизические методы поисков и разведки месторождений полезных ископаемых»

(Версия 1.0)



© Ю.И. Блох, 2009

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	Стр. 3
ЧАСТЬ 1. ПРЯМЫЕ ЗАДАЧИ ГРАВИРАЗВЕДКИ И МАГНИТОРАЗВЕДКИ	
Глава 1. Физико-математические основы решения прямых задач	5
§ 1. Интерпретация аномалий и прямые задачи	5
§ 2. Основы решения прямой задачи гравirazведки	12
§ 3. Основы решения прямой задачи магниторазведки	14
§ 4. Эффект размагничивания и применимость интегральных соотношений для решения прямой задачи магниторазведки	20
§ 5. Эквивалентные простые слои при решении прямой задачи магниторазведки ..	23
Вопросы для самоконтроля	25
Глава 2. Решение прямых задач для двумерных моделей	26
§ 6. Комплексные характеристики двумерных гравитационных и магнитных полей	26
§ 7. Представление аномальных полей интегралами типа Коши	29
§ 8. Аномальные поля типовых двумерных моделей	32
§ 9. Качественное определение формы графиков аномалий от двумерных объектов	38
Вопросы для самоконтроля	47
Глава 3. Решение прямых задач для трехмерных моделей	48
§ 10. Гравитационные и магнитные аномалии трехмерных тел	48
§ 11. Аномальные поля однородного материального стержня	50
§ 12. Гравитационные аномалии многоугольной горизонтальной пластинки	52
§ 13. Аномальные поля произвольного многогранника	56
Вопросы для самоконтроля	59
Глава 4. Решение прямой задачи магниторазведки для сильномагнитных геологических объектов.	60
§ 14. Интегральные уравнения для намагниченности.	60
§ 15. Численное решение интегральных уравнений для намагниченности	63
§ 16. Процедура учета попарного взаимовлияния элементов	65
§ 17. Особенности намагничения сильномагнитных объектов	67
Вопросы для самоконтроля	74
ЧАСТЬ 2. МЕТОДЫ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ГРАВИТАЦИОННЫХ И МАГНИТНЫХ АНОМАЛИЙ	
Глава 5. Обратные задачи гравirazведки и магниторазведки	75
§ 18. Основные задачи интерпретации гравитационных и магнитных аномалий ...	75
§ 19. Обратные задачи и их свойства	76
§ 20. Квазирешение обратной задачи	82
§ 21. Основы метода регуляризации	85
Вопросы для самоконтроля	89
Глава 6. Геологически содержательные способы обнаружения и разделения аномалий ..	89
§ 22. Основные подходы к обнаружению аномалий	89
§ 23. Теоретические основы разделения аномалий	94
§ 24. Геологическое редуцирование аномалий	97
§ 25. Корреляционные способы разделения аномалий.	99
Вопросы для самоконтроля	101
Глава 7. Трансформации гравитационного и магнитного полей	102
§ 26. Применение основных типов трансформаций.	102
§ 27. Теоретические трансформации и их частотный анализ.	111
§ 28. Вычислительные схемы трансформаций	119
Вопросы для самоконтроля	125

Глава 8. Аппроксимационные способы разделения аномалий	126
§ 29. Интерполяция и экстраполяция в разделении полей	126
§ 30. Разделение аномалий с помощью тренд-анализа	129
§ 31. Истокообразная аппроксимация при разделении полей	131
Вопросы для самоконтроля	138
Глава 9. Методы моментов	139
§ 32. Гармонические моменты и интегральные характеристики геологических объектов	139
§ 33. Способы определения гармонических моментов	144
Вопросы для самоконтроля	150
Глава 10. Методы особых точек	150
§ 34. Особые точки аналитических функций	150
§ 35. Связь особых точек функций, описывающих гравитационные и магнитные аномалии, с формой их источников	153
§ 36. Локализация особых точек с помощью аппроксимационного продолжения ..	157
§ 37. Локализация особых точек способом нормированных функций	162
§ 38. Локализация особых точек способом отношения производных	164
§ 39. Локализация особых точек с помощью деконволюции Эйлера	167
Вопросы для самоконтроля	169
Глава 11. Методы подбора и регуляризации	170
§ 40. Основы метода подбора	170
§ 41. Решение линейных задач подбора	174
§ 42. Решение линеаризованных задач подбора	180
§ 43. Решение нелинейных задач подбора	184
§ 44. Количественная интерпретация методом регуляризации	196
Вопросы для самоконтроля	202
Глава 12. Комплексование методов количественной интерпретации	203
§ 45. Комплексование методов интерпретации при изучении объектов рудного типа	203
§ 46. Комплексование методов интерпретации при изучении объектов структурного типа	207
§ 47. Моделирование геологических объектов	214
§ 48. Интерпретация данных комплексной магниторазведки при изучении сильномагнитных объектов	218
§ 49. Система интерпретации гравитационных и магнитных аномалий В.Н.Страхова	225
Вопросы для самоконтроля	229
Литература	229

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие подготовлено на основе лекций, которые автор читает с конца 70-х годов прошлого века на геофизическом факультете Московского геологоразведочного института (МГРИ), переименованного позднее в Российский Государственный Геологоразведочный Университет (РГГРУ). Оно написано в соответствии с программой курса «Интерпретация гравитационных и магнитных аномалий», утвержденной для подготовки инженеров-геофизиков по специальности «Геофизические методы поисков и разведки месторождений полезных ископаемых». Ранее, в 1982-1998 годах некоторые части пособия были опубликованы в качестве внутривузовских изданий, но сейчас уже стали библиографическими редкостями.

Курс интерпретации гравитационных и магнитных аномалий читается студентам, изучившим ранее курсы «Гравиразведка» и «Магниторазведка». Программы этих курсов

предусматривают в числе прочего изучение начальных сведений об интерпретации аномальных полей, поэтому данное пособие не содержит подробного описания простейших подходов к их истолкованию. Совместное рассмотрение вопросов интерпретации гравитационных и магнитных полей базируется на близости их физико-математического аппарата и дает возможность, избегая дублирования, сэкономить дефицитное учебное время и приблизиться к современному уровню изложения этого важнейшего раздела разведочной геофизики. Пособие, несомненно, не может претендовать на полноту изложения всех аспектов разносторонней проблемы интерпретации, но оно должно способствовать подготовке студентов к самостоятельному чтению статей и монографий. В основу методологии изложения вопросов интерпретации гравитационных и магнитных аномалий положены элементы системы, разработанной В. Н. Страховым. По мнению автора, пособие должно постепенно подводить читателя к всестороннему пониманию этой системы, поэтому сама она явно излагается лишь в заключительном параграфе.

Основной системой единиц, принятой в пособии, в соответствии с требованиями ГОСТа является система СИ. Автор не является ее приверженцем и разделяет мнение тех физиков, которые считают ее применительно к электромагнитным величинам неудобной. Вместе с тем предлагаемые рядом магниторазведчиков паллиативные приемы, при которых сохраняется вид формул, характерный для системы СГС, по мнению автора, лишь запутывают студентов, да и инженеров-геофизиков. Принципиальные отличия, характерные для системы СГС, указываются в тексте.

Первоначальный, сокращенный вариант пособия был подготовлен автором к печати еще в 2001 году, но в связи с известной ситуацией в стране вообще и в высшем образовании в частности так и не был опубликован. Время шло, но ситуация, по большому счету, к лучшему фактически не менялась. Возможность публикации в развернутом виде в сопровождении цветных иллюстраций автору до сих пор остается недоступной. В связи с этим было принято решение предоставить всем заинтересованным студентам, аспирантам, инженерам и преподавателям данное пособие в электронной форме. Автор надеется на то, что читателям оно будет полезным и поможет им сократить время, требующееся для ознакомления с современным состоянием интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. Данное пособие может быть использовано и инженерами, желающими расширить свои представления об интерпретации. С описанием программных средств, разработанных с участием автора для интерпретации потенциальных полей, которые применялись при подготовке примеров, приведенных в пособии, читатели могут познакомиться на сайте sigma3d.com.

Для удобства читателей в конце каждой главы приведены вопросы для самоконтроля. Выбрав один из приведенных к каждому вопросу ответов, читатель должен просуммировать условные числа, отмеченные в скобках, для выбранных ответов. Если ответы верны, то вычисленная сумма совпадет с контрольной.

Система закладок (Bookmarks – кнопка ) в предлагаемом pdf-файле работает как предметный указатель. Выбрав в окне закладок интересующий термин, читатель может почти мгновенно увидеть тот раздел пособия, где термин поясняется.

В данном пособии, естественно, есть упущения. Автор заранее благодарен читателям за конструктивные критические замечания – они, несомненно, будут учтены в последующих версиях пособия. Просьба присылать их по электронной почте yuri_blokh@mail.ru, не упуская из внимания того, что в адресе между именем и фамилией расположен знак подчеркивания «_».

ЧАСТЬ 1

ПРЯМЫЕ ЗАДАЧИ ГРАВИРАЗВЕДКИ И МАГНИТОРАЗВЕДКИ

ГЛАВА 1. ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РЕШЕНИЯ ПРЯМЫХ ЗАДАЧ

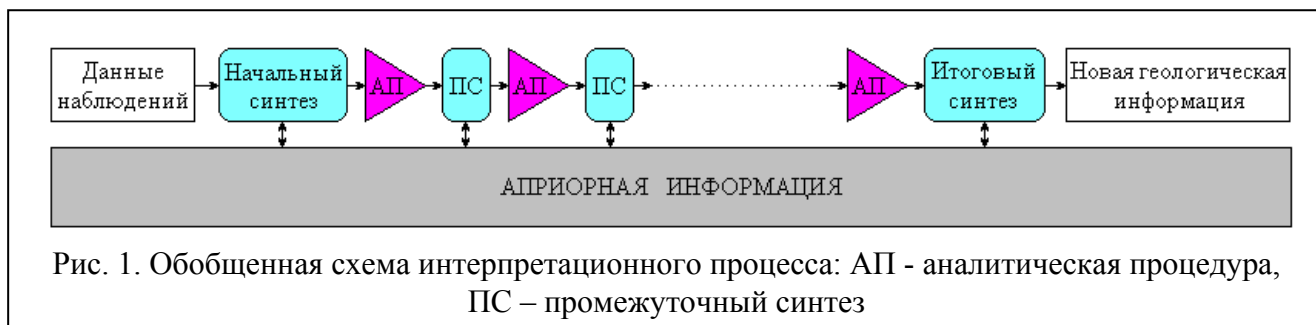
§ 1. Интерпретация аномалий и прямые задачи

Интерпретация гравитационных и магнитных аномалий представляет собой упорядоченную совокупность аналитических и синтетических процедур извлечения информации из данных гравитационных и магнитных наблюдений при заданном объеме априорной информации с целью решения поставленной геологической задачи.

Поясним данное определение. В результате проведенных съемок геофизики получают материалы, в которых в скрытом виде содержится огромная геологическая информация, однако сами по себе карты и графики аномалий геологической информацией не являются. Извлечение этой информации с целью решения некоторой геологической задачи - основное содержание интерпретации. Вместе с тем, не имея никакой дополнительной информации, только из данных съемок можно в лучшем случае получить лишь формальные распределения физических свойств, объясняющие аномальные поля. Таких формальных распределений на самом деле бесконечно много, поэтому для выполнения содержательной интерпретации необходима вся имеющаяся по изучаемому объекту геолого-геофизическая информация. Эту информацию принято называть априорной от латинского выражения *a priori*, что значит "заранее", "независимо от опыта".

В соответствии с данным определением в процессе интерпретации выполняют два типа процедур. Аналитические процедуры представляют собой преобразование одного числового массива в другой. Они обычно формализуются и выполняются автоматически на компьютерах. Синтетические процедуры связаны с обращением к неформализованной априорной информации, поэтому выполняются человеком-интерпретатором. Естественно, при этом также могут использоваться возможности компьютеров: базы данных, банки знаний, геофизические информационные системы (ГИС) и т.п., но ведущая роль в синтезе остается за человеком.

Различают три фазы синтеза. Начальный синтез позволяет сформулировать основные подходы к интерпретации и выбрать процедуры анализа. Промежуточный синтез заключается в соотнесении результатов анализа с априорной информацией и внесении корректив в аналитические процедуры. Наконец, итоговый синтез дает возможность выразить результаты интерпретации в содержательной геологической форме и дать окончательное решение поставленной задачи.



В целом интерпретационный процесс можно представить в виде схемы, показанной на рис. 1. Данная схема изображает последовательное выполнение процедур, но фактически после каждой из синтетических процедур возможно возвращение на любой из предыдущих этапов

вплоть до нового начального синтеза. Другими словами, при решении большинства задач интерпретационный процесс не является жестко заданным, а творчески видоизменяется человеком-интерпретатором в процессе выполнения. Для этого, очевидно, интерпретатор должен быть знающей и творческой личностью, владеющей всеми средствами извлечения геологической информации из данных наблюдений.

Важнейшим в интерпретации является принцип модельности. В соответствии с ним интерпретация неизбежно проводится в рамках определенных модельных представлений. В общем понимании модель - это совокупность принятых интерпретатором упрощений, допущений и т.п. Эти упрощения могут относиться к изучаемому объекту, и тогда говорят о модели объекта. Упрощения могут относиться к характеристикам интерпретируемых элементов полей, и определяют модели полей. Соответственные упрощения приводят также к моделям помех, осложняющих интерпретируемые поля.

Рассмотрим вначале основные типы упрощений при составлении моделей изучаемых объектов.

Модели геологических объектов

Упрощения размерности. Реальные геологические объекты и создаваемые ими гравитационные и магнитные аномалии – трехмерны. Общеупотребительным обозначением такой размерности является 3D: от английского слова *dimension* (размерность).

Однако в интерпретации применяются модели и других размерностей, более того, стихийно сложилась некая система терминов, вообще выходящих за пределы научной обоснованности. Тем не менее, эти «жаргонные» формулировки широко бытуют в специальной литературе, и надо знать, что под ними подразумевают.

Многие геологические образования имеют существенную вытянутость в некотором горизонтальном направлении. К ним можно отнести дайки, зоны разломов, флексуры и т.д. Линейная вытянутость характерна для ряда рудных и нефтяных месторождений. Для таких объектов при условии неизменности их физических свойств по простиранию характерно слабое изменение аномального поля по простиранию вблизи эпицентра. Если длина объекта более чем в 5 раз превышает его мощность, то можно считать, что вблизи эпицентра он практически не создает компоненты аномального поля, направленной вдоль простирания. Такую аномалию и такой объект принято называть двумерными (2D). В этом случае, упрощая задачу и фактически пренебрегая влиянием удаленных масс, считают, что аномалия создается бесконечным цилиндром сложного сечения. Двумерные аномалии можно интерпретировать по одному профилю, ориентированному вкрест простирания объекта.

Сравнительная простота и удобство интерпретации аномалий на профиле являются причинами использования моделей, размерность которых считается как бы промежуточной между 2D и 3D. Если относительная вытянутость объекта не столь велика, то иногда вводят модели с так называемой размерностью 2,5D. Они также представляют собой горизонтальные цилиндры, но ограниченные по простиранию вертикальными плоскостями, перпендикулярными линии простирания. Аномальное поле 2,5-мерных моделей обычно анализируется на профиле, проведенном вкрест простирания над центром модели.

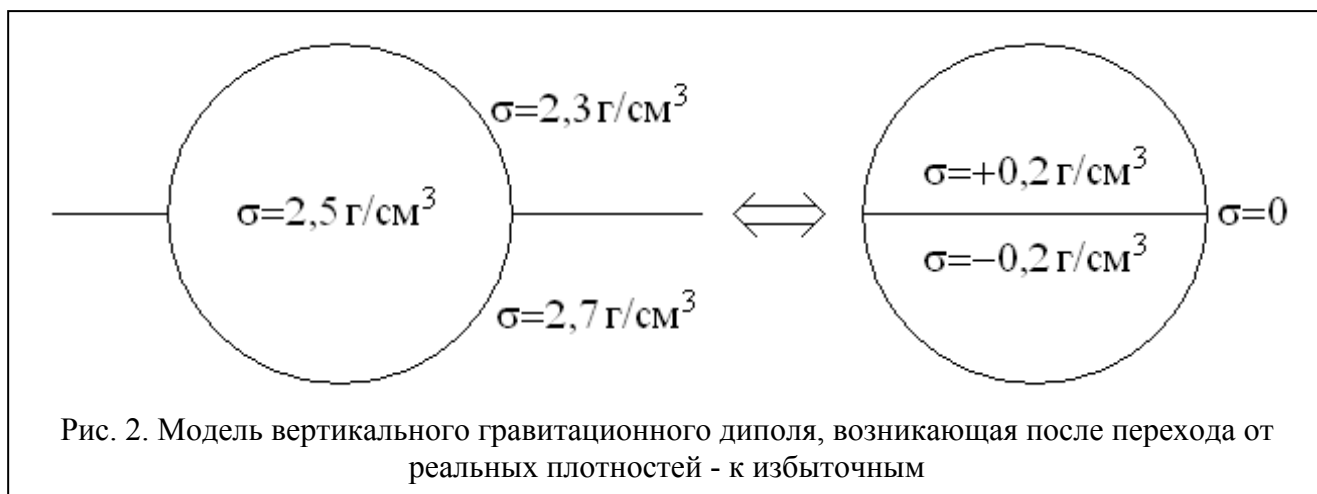
Еще более приближенными к реальным являются модели так называемой размерности $2\frac{3}{4}D$ – это те же 2,5 мерные тела, но анализируемые по полю на профиле, проходящем над центром модели под углом к линии простирания. Строго говоря, и 2,5D и $2\frac{3}{4}D$ модели – это всего лишь частные случаи трехмерных тел.

Описанные упрощения размерности относятся к горизонтальным цилиндрам, и в двумерном случае считается, что их физические свойства зависят от двух координат: x и z . Строго говоря, такие модели следует называть xz -2D. Дело в том, что существуют и применяются на практике и $xу$ -2D модели. Это – вертикальные цилиндры сложного сечения, у которых в некоем горизонтальном слое физические свойства зависят только от координат x и $у$. Такие модели применяют при решении множества задач, особенно, задач комплексной интерпретации, где они вообще в настоящее время превалируют.

Еще большее упрощение свойственно одномерным моделям. Здесь необходимо подчеркнуть, что модели z-1D, то есть горизонтально-слоистые среды, в гравиразведке и магниторазведке не имеют самостоятельного значения, как, например, в сейсморазведке и в задачах интерпретации результатов электрических зондирований. Дело в том, что такие среды в гравиразведке создают постоянные поля и не могут реально интерпретироваться. Зато x-1D модели, то есть среды, у которых в некоем горизонтальном слое физические свойства зависят только от координат x , весьма популярны при интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. Например, отечественная геофизика во многом сложилась при изучении руд Курской Магнитной Аномалии (КМА), и здесь одномерные модели длительное время были основными при проведении интерпретации, поскольку для них она выполняется однозначно.

В последнее время все шире начинают использоваться модели с размерностью 4D. Эти физико-геологические интерпретационные модели учитывают изменение источников и создаваемых ими полей во времени и применяются при изучении данных, полученных в сериях повторных съемок.

Упрощения распределения физических свойств. Геологические объекты неоднородны, но при интерпретации приходится прибегать к упрощениям распределения их свойств. Чаще всего отдельные геологические образования полагают однородными как по плотности, так и по магнитным свойствам: магнитной восприимчивости и естественной остаточной намагниченности. Если же такое допущение чересчур грубо, распределение физических свойств описывают каким-либо простым законом, например, полиномиальным. В частности, при истолковании гравитационных аномалий на платформах часто считают плотность пород изменяющейся с глубиной по линейному или параболическому закону. Например, плотность σ , изменяющуюся линейно с глубиной h , можно описать формулой: $\sigma(h) = p_1 + p_2 h$. Числа p_1 и p_2 , входящие в данную формулу, называются параметрами распределения физических свойств. Количество параметров может быть различным. Если плотность считается параболически изменяющейся с глубиной, она описывается тремя параметрами в соответствии со следующей формулой: $\sigma(h) = p_1 + p_2 h + p_3 h^2$.



Если к предположению однородности модели добавить предположение об однородности вмещающей среды, то можно от исходной модели перейти к эквивалентной, когда в среде с нулевыми плотностью либо намагниченностью, располагается объект с однородной избыточной (эффективной) плотностью или намагниченностью. Эквивалентной называется такая модель, чье аномальное поле совпадает с полем исходной модели или отличается от нее на константу. Для ее получения из плотности (вектора намагниченности) объекта вычитают плотность (вектор намагниченности) вмещающей среды. Понятно, что избыточная плотность может в результате оказаться и положительной и отрицательной. Когда вмещающая среда является горизонтально-слоистой, подобные вычитания производят в каждом из слоев независимо, что иногда приводит к интересным эффектам. На рис. 2 показан однородный шар,

располагающийся в двуслойной среде. После вычитания плотностей каждого из слоев интерпретационная модель оказывается расположенной в среде с нулевой плотностью, зато сама становится неоднородной: верхняя ее часть отличается положительной избыточной плотностью, а нижняя – отрицательной. Другими словами, возникает модель вертикального гравитационного диполя.

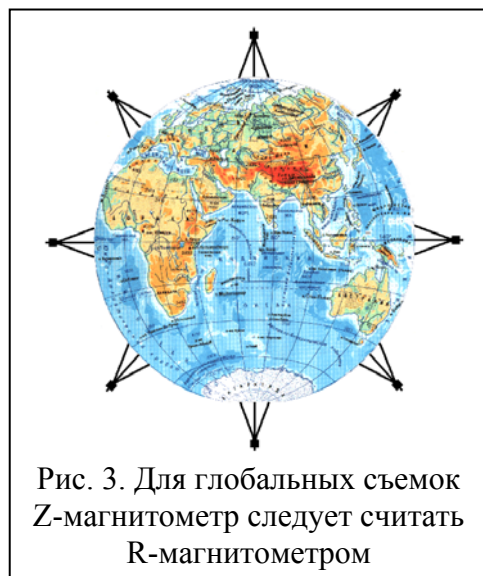
Упрощения формы. При интерпретации сложные по форме геологические объекты по мере возможности аппроксимируют более простыми. Если нельзя представить объект одним телом простой формы, то его представляют состоящим из нескольких простых тел. Естественно, возникает вопрос о том, как оценивать простоту или сложность формы. Это можно сделать, определив число геометрических параметров объекта – чисел, которыми характеризуются его местоположение и форма. Например, форма и местоположение шара описываются четырьмя параметрами: тремя координатами центра и радиусом. Надо отметить, что один и тот же объект можно описать разными способами и различным числом параметров, поэтому мерой сложности его формы должно служить количество параметров при наиболее экономном его описании.

Совокупность принятых упрощений и образует интерпретационную модель. Вначале упрощения формируются в терминах физики и геологии, в результате чего возникает физико-геологическая интерпретационная модель (ФГИМ). Далее упрощения переформируются в физико-математических терминах, и возникает физико-математическая интерпретационная модель (ФМИМ). Это дает возможность последующего выполнения аналитических процедур. Например, модель крутопадающего пласта – это ФГИМ, но для выполнения аналитических процедур она становится параллелограммом с горизонтальными верхней и нижней кромками, и это уже ФМИМ.

Поскольку модель является упрощением природного объекта, процесс ее создания обычно называют аппроксимацией от латинского слова *approximo* (приближаюсь). При этом следует иметь в виду, что в процессе интерпретации ведутся две различные аппроксимации. Первая из них – аппроксимация объекта моделью, а вторая – аппроксимация наблюдаемого аномального поля полем модели. Соотношения между ними ведут к подразделению моделей на адекватные, эквивалентные и смешанные. Адекватной называется такая модель, в которой достигается аппроксимация распределения физических свойств в изучаемом объеме геологической среды с высокой точностью, к тому же ее поле достаточно близко к наблюдаемому, что в совокупности обеспечивает решение целевой задачи интерпретации. Эквивалентная модель заведомо не обеспечивает аппроксимации распределения физических свойств в среде, но обязательно обеспечивает требуемую степень близости ее поля к наблюдаемому. Смешанная модель обеспечивает требуемую степень близости полей и аппроксимацию распределения физических свойств в части объема геологической среды, позволяющую решить целевую задачу интерпретации. В целом построение и использование моделей часто называют моделированием.

Модели полей

Перейдем теперь к основным типам упрощений в моделях аномальных полей. Как известно, гравиметры измеряют компоненту гравитационного поля, нормальную к уровенной (эквипотенциальной) поверхности в точке наблюдения. Поскольку направление нормали в разных точках Земли различно, гравиметры измеряют в них совершенно разные по отношению к декартовым координатам компоненты. Вместе с тем, если наблюдения проводятся на ограниченной площади, где направления нормалей практически одинаковы, то, упрощая задачу, считают, что измеренная гравитационная аномалия – это аномалия вертикальной составляющей гравитационного поля W_z . Если же решаются региональные или глобальные



задачи, где из-за сферичности Земли такое упрощение недопустимо, полагают, что измерена радиальная компонента W_R , но и это в свою очередь является упрощением. Приведенные соображения справедливы и для компонент магнитного поля, измеряемых с помощью оптико-механических и других магнитометров, снабженных уровнями. Так называемый Z-магнитометр, применяемый для региональных и глобальных съемок, правильнее было бы называть R-магнитометром, в чем легко убедиться с помощью иллюстрации на рис. 3.

Для модульных протонных и квантовых магнитометров применяют упрощение, называемое гармоническим приближением для ΔT . Как известно, в районе съемок с нормальными компонентами магнитного поля X_0 , Y_0 , Z_0 аномалия ΔT описывается следующим образом:

$$\Delta T = \sqrt{(X_0 + X)^2 + (Y_0 + Y)^2 + (Z_0 + Z)^2} - \sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2}, \quad (1.1)$$

где X , Y и Z - аномалии соответствующих компонент. Аномалия ΔT не удовлетворяет уравнению Лапласа, то есть не является гармонической функцией. Тем не менее, если $\Delta T \ll T_0$, при анализе аномалий приближенно считают, что ΔT ведет себя как компонента аномального вектора, направленная вдоль вектора нормального поля. Поскольку любая компонента аномального вектора является гармонической функцией, такое допущение и называется гармоническим приближением для ΔT . Проекцию одного вектора на другой легко определить через их скалярное произведение, поэтому аналогом (1.1) в гармоническом приближении будет являться следующее более простое соотношение:

$$\Delta T \approx \frac{X_0 X + Y_0 Y + Z_0 Z}{\sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2}}. \quad (1.2)$$

Различия в аномалиях, рассчитанных по формулам (1.1) и (1.2), составляют примерно 1%. Поэтому обычно считается, что при точности магнитных съемок около 10 нТл, гармоническое приближение можно применять для анализа аномалий ΔT , не превышающих 1000 нТл. В настоящее время точность съемок значительно возросла, а порог чувствительности аэромагнитометров достиг величин порядка 10^{-3} нТл. Отсюда следует, что применимость гармонического приближения при вычислениях ΔT сейчас вообще перестает быть практически допустимой. Однако, для анализа формы графиков ΔT в процессе интерпретации и для некоторых преобразований аномалий эта модель поля до сих пор является важнейшей.

Наконец, при перечислении допущений, лежащих в основе модели поля, нельзя не упомянуть о тех упрощениях, которые определяют вид соответствующих редуций силы тяжести: плоскопараллельный промежуточный слой, нормальный вертикальный градиент и т.п. Эти упрощения подробно рассматриваются в курсе гравиразведки. В ряде разделов интерпретации применяются специфические модели полей, которые впоследствии будут рассматриваться по мере их изложения.

Модели помех

Наблюдаемые значения аномальных геофизических полей осложнены помехами, среди которых обычно преобладают помехи геологического происхождения и аппаратурно-методические помехи.

Аппаратурно-методические помехи в гравиразведке и магниторазведке обычно считаются случайными, некоррелированными и нормально распределенными, поэтому их оценивают в процессе съемок, вычисляя среднеквадратическую погрешность аномальных значений. Эта важнейшая величина входит в состав априорной информации. Необходимо отметить, что помехи данного происхождения принципиально не могут быть снижены до нуля, поскольку к ним следует относить также погрешности округления.

Гораздо сложнее обстоит дело с помехами геологического происхождения. К ним, как правило, относят влияния тех приповерхностных геологических образований, которые не включаются в интерпретационную модель объектов. Ясно, что в разных геологических условиях данные помехи могут быть различными, тем не менее, их свойства следует учитывать

и, по возможности, адекватно, иначе проводимую интерпретацию нельзя считать оптимальной. Однако существуют и достаточно общие модели помех или шумов, на борьбу с которыми ориентируется интерпретатор.

Классической в этом смысле можно считать модель так называемого белого шума. В математической статистике принято различать белые шумы в разных смыслах. Белый шум в широком смысле – это квадратично интегрируемая последовательность некоррелированных случайных величин с нулевыми средними. Если в этом определении добавить еще требование гауссовости (распределения по нормальному закону), то такой шум называют белым шумом в узком смысле, либо белым гауссовским шумом, или же просто белым шумом. В течение длительного времени гравиразведчики и магниторазведчики полагали, что именно такая модель наиболее адекватно отражает встречающиеся на практике ситуации. Соответственно, большинство методов интерпретации фактически были ориентированы на борьбу именно с белым шумом.

Даже представители так называемого статистического направления в интерпретации, которые специально занимались исследованием проблемы оптимизации учета помех, полагали, что ковариационная функция помех обычно является быстро затухающей, то есть имеет весьма малый радиус автокорреляции. Из-за этого в качестве базовой модели шума для решения практических задач они обычно выбирали разновидность стационарного марковского процесса с ковариационной функцией в виде затухающей экспоненты.

Тем временем накопление экспериментальной информации привело к необходимости расширения класса моделей помех, осложняющих геофизические поля. Спектральный анализ помех показал, что они на практике чаще отличаются как раз довольно значительными радиусами автокорреляции, и это побудило к введению моделей фрактальных помех, учитывающих подобные данные.

Наиболее естественной среди моделей помех, обладающих фрактальными (другими словами, самоподобными или автомодельными) свойствами, в настоящее время считается фрактальный гауссовский шум, а он строится на базе случайного процесса, называемого фрактальным броуновским движением. Непрерывный гауссовский процесс B_H с нулевым средним и ковариационной функцией

$$A(s, t) = \frac{1}{2} \left\{ |s|^{2H} + |t|^{2H} - |t-s|^{2H} \right\} \quad (1.3)$$

называется стандартным фрактальным броуновским движением с показателем Хёрста $0 < H \leq 1$. Заметим, что фамилию этого британского ученого (H.E. Hurst) на русском языке воспроизводят также иногда, как Харст. Впервые эти процессы еще в 1940 г. рассмотрел А.Н. Колмогоров, исходя именно из вида ковариационной функции (1.3), причем сам он называл их спиралями Винера. Термин «фрактальное броуновское движение» был введен в 1968 г. в работе Б. Мандельброта и Дж. Ван Несса, которые подошли к данной модели совершенно иным путем.

Последовательность разностей

$$\beta_n = B_H(n) - B_H(n-1), \quad n \geq 1, \quad (1.4)$$

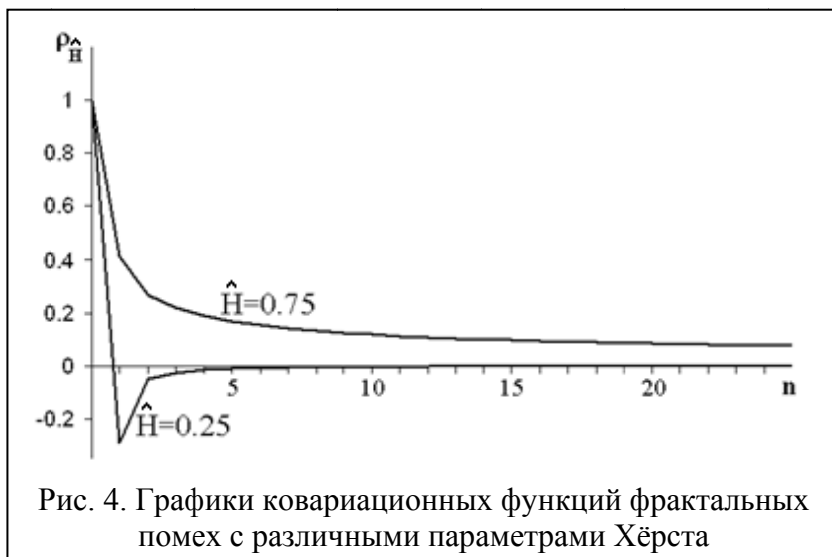
и называют фрактальным гауссовским шумом с параметром Хёрста H , $0 < H \leq 1$. Из (1.3) следует, что ковариационная функция $\rho_H(n)$ имеет следующий вид:

$$\rho_H(n) = \text{Cov}(\beta_k, \beta_{k+n}) = \frac{1}{2} \left\{ |n+1|^{2H} - 2|n|^{2H} + |n-1|^{2H} \right\}, \quad (1.5)$$

и при $n \rightarrow \infty$

$$\rho_H(n) \sim H(2H-1)|n|^{2H-2}. \quad (1.6)$$

Данная модель помехи оказывается весьма гибкой. В частном случае при $\hat{H}=1/2$ ковариация $\rho_{\hat{H}}(n)=0$ для $n \neq 0$, и β_n образует гауссовскую последовательность независимых случайных величин, то есть «белый шум», на борьбу с которым и направлена преимущественно классическая теория интерпретации. Если же $\hat{H} \neq 1/2$ ковариация убывает с ростом n достаточно медленно. При этом если $0 < \hat{H} < 1/2$, то ковариация отрицательна ($\rho_{\hat{H}}(n) < 0$, $n > 0$),



при этом $\sum_{n=0}^{\infty} |\rho_{\hat{H}}(n)| < \infty$. Отрицательность ковариации означает, что вслед за положительными значениями β_n (отрицательными) следует ожидать их отрицательные (положительные) значения – такой шум иногда называют розовым. Если же $1/2 < \hat{H} < 1$, то ковариация положительна $\rho_{\hat{H}}(n) > 0$, $n \geq 0$, при этом $\sum_{n=0}^{\infty} \rho_{\hat{H}}(n) = \infty$. Положительность ковариации соответственно означает, что вслед за положительными значениями β_n (отрицательными) следует также ожидать их положительные (отрицательные) значения – такой шум часто называют черным. Графики ковариационных функций шумов этих типов, вычисленные по формуле (3) при $\hat{H}=0,25$ и при $\hat{H}=0,75$, показаны на рис. 4.



Следует заметить, что визуальный анализ мало помогает при установлении характера помех, в чем легко убедиться с помощью рис. 5, на котором представлены графики разных фрактальных броуновских движений. Только путем специальных расчетов можно оценить параметр Хёрста для той или иной помехи, после чего оптимизировать интерпретационные процедуры на подавление данной помехи.

Прямые задачи

Введенные выше термины дают возможность сформулировать понятие прямой задачи. Прямая задача гравиразведки (магниторазведки) состоит в вычислении в ряде точек пространства модели гравитационного (магнитного) поля, создаваемой заданной моделью объекта. Другими словами, решение прямой задачи представляет собой аналитическую процедуру, с помощью которой модели объекта ставится в соответствие модель поля. Поскольку при решении конкретных прямых задач совокупность упрощений по отношению к вычисляемому полю с очевидностью следует из существа решаемой задачи, мы далее будем писать "поле", имея в виду его конкретную модель.

Прямые задачи - фундамент интерпретации. Благодаря знаниям особенностей решения прямых задач для типовых моделей, интерпретатор получает возможность качественно истолковывать гравитационные и магнитные аномалии, сокращать возможный набор моделей, подлежащих анализу. М.А.Алексидзе образно называл прямую задачу гравиразведки - гравитационной проверкой. Именно решение прямой задачи дает возможность проверить достоверность некоторой модели объекта, а последовательное упорядоченное решение прямых задач лежит в основе одного из ведущих методов количественной интерпретации - метода подбора.

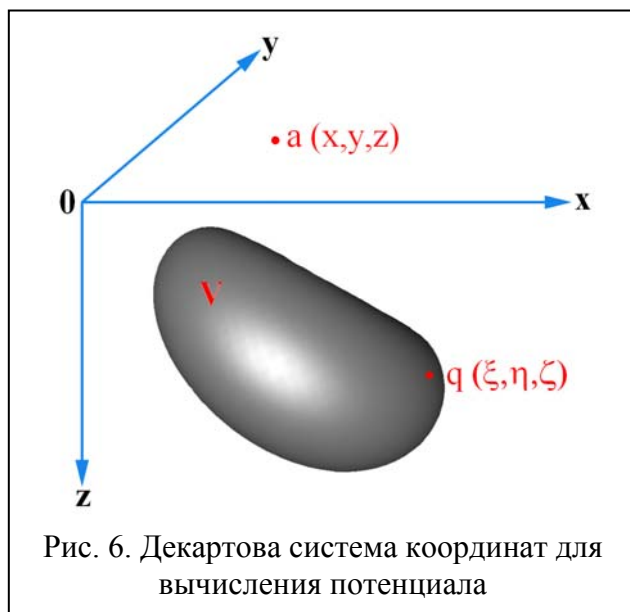


Рис. 6. Декартова система координат для вычисления потенциала

§ 2. Основы решения прямой задачи гравиразведки

Ускорение силы тяжести $\vec{g}$ является напряженностью гравитационного поля и, как следует из теории физических полей, подчиняется в произвольной точке a следующим дифференциальным уравнениям:

$$\text{rot } \vec{g}(a) = 0, \quad \text{div } \vec{g}(a) = -4\pi\sigma(a), \quad (2.1)$$

причем на границах тел оно непрерывно. Здесь σ - плотность, а $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-2} \cdot \text{с}^{-2}$ - гравитационная постоянная (в системе СИ). Первое из этих уравнений, благодаря известному тождеству $\text{rot grad } W \equiv 0$ дает возможность ввести скалярный гравитационный потенциал W соотношением

$$\vec{g}(a) = +\text{grad } W(a). \quad (2.2)$$

Положительный знак перед градиентом связан с тем, что гравитирующие массы притягиваются друг к другу. Характер притяжения точечных масс описывается законом всемирного тяготения И.Ньютона. Масса m_1 , находящаяся в точке a , притягивается к массе m , расположенной в точке q с силой

$$F = \frac{\gamma \cdot m \cdot m_1}{L_{qa}^2}, \quad (2.3)$$

где L_{qa} - расстояние между точками q и a . Поскольку напряженность поля - это сила, действующая на единичную массу, можно вычислить величину ускорения силы тяжести, создаваемого массой m в точке a :

$$g(a) = \frac{\gamma \cdot m}{L_{qa}^2} \quad (2.4)$$

или в векторной форме

$$\vec{g}(a) = -\gamma \frac{m}{L_{qa}^3} \vec{L}_{qa}. \quad (2.5)$$

В этой формуле знак минус появляется в связи с тем, что вектор направлен из точки q в точку a . Из (2.2) и (2.5) следует, что в точке a потенциал точечной массы m , расположенной в точке q , определяется соотношением

$$W(a) = \frac{\gamma \cdot m}{L_{qa}}. \quad (2.6)$$

Данная формула справедлива в любой системе координат. Запишем ее подробно в левой прямоугольной декартовой системе координат, изображенной на рис. 6. Особенность данной системы состоит в том, что ось z направлена вниз. Это отвечает общепринятым представлениям, что положительна та сила тяжести, которая направлена вниз, а также упрощает вид выводимых соотношений. Во введенной системе координат формула (2.6) примет вид

$$W(x, y, z) = \frac{\gamma m}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}}. \quad (2.7)$$

С помощью данной формулы можно получить соотношение для потенциала тела V , учитывая, что в каждой из точек тела $m = \sigma dV = \sigma d\xi d\eta d\zeta$. Интегрируя (2.7) по объему тела, получаем

$$W(x, y, z) = \gamma \int_V \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta) dV}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}}. \quad (2.8)$$

Выведенная формула является основной при решении прямых задач для разных геологических объектов. Дифференцируя ее, можно получать интегральные соотношения для любых элементов гравитационного поля. В частности, компоненты аномального вектора $\vec{g}$ в соответствии с (2.2) выглядят следующим образом:

$$W_x(x, y, z) = \gamma \int_V \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta)(\xi - x) dV}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{3/2}}, \quad (2.9)$$

$$W_y(x, y, z) = \gamma \int_V \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta)(\eta - y) dV}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{3/2}}, \quad (2.10)$$

$$W_z(x, y, z) = \gamma \int_V \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta)(\zeta - z) dV}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{3/2}}. \quad (2.11)$$

Напомним, что при интерпретации гравитационных аномалий на небольшом участке, где не сказывается сферичность Земли, Δg отождествляется с W_z , поэтому наибольшее практическое значение имеет именно последняя формула (2.11). Дальнейшее дифференцирование подынтегральных выражений дает возможность получить соотношения для высших производных гравитационного потенциала, что предоставляется выполнить читателю самостоятельно.

Таким образом, в рамках принятых модельных представлений аномалия ускорения силы тяжести 3-мерных объектов может быть вычислена по формуле (2.11). Эта же формула является

исходной при расчете гравитационных аномалий для 2,5 и $2\frac{3}{4}$ -мерных моделей. Для двумерных моделей она упрощается. Во-первых, для двумерных моделей плотность не меняется вдоль простираения, поэтому вместо $\sigma(\xi, \eta, \zeta)$ в (2.11) можно подставить $\sigma(\xi, \zeta)$. Во-вторых, аномалии двумерных объектов не зависят от y , поэтому, подставив для простоты $y=0$, получим

$$g(x, z) = \gamma \int_V \frac{\sigma(\xi, \zeta)(\zeta - z) dV}{[(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2 + \eta^2]^{3/2}}. \quad (2.12)$$

Учитывая, что $dS = d\xi d\zeta$, сведем тройной интеграл к повторному:

$$g(x, z) = \gamma \int_S \sigma(\xi, \zeta)(\zeta - z) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\eta}{[(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2 + \eta^2]^{3/2}} \right) dS. \quad (2.13)$$

Внутренний интеграл берется с помощью подстановки Эйлера, после чего (2.13) принимает окончательный вид:

$$g(x, z) = 2\gamma \int_S \frac{\sigma(\xi, \zeta)(\zeta - z) dS}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2}. \quad (2.14)$$

Напомним, что для данной модели $\mathbf{g} = \mathbf{W}_z$. Если аналогично рассчитать $\mathbf{W}_x$, получим

$$W_x(x, z) = 2\gamma \int_S \frac{\sigma(\xi, \zeta)(\xi - x) dS}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2}. \quad (2.15)$$

Формулы (2.14) и (2.15) можно рассматривать как результат применения соотношения (2.2) к логарифмическому потенциалу, вводимому выражением

$$W(x, z) = -\gamma \int_S \sigma(\xi, \zeta) \ln[(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2] dS. \quad (2.16)$$

Применим формулу (2.14) для вычисления притяжения горизонтального однородного плоскопараллельного слоя, расположенного между уровнями z_1 и z_2 . При постоянной плотности слоя σ интеграл (2.14) легко вычисляется следующим образом:

$$g(x, z) = 2\gamma\sigma \int_S \frac{(\zeta - z) dS}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} = 2\gamma\sigma \int_{z_1}^{z_2} (\zeta - z) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} \right) d\zeta. \quad (2.17)$$

Внутренний интеграл по ξ равен $\pi/(\zeta - z)$, что после сокращения и взятия интеграла по ζ приводит в итоге к следующей простой формуле:

$$g(x, z) = 2\pi\gamma\sigma(z_2 - z_1). \quad (2.18)$$

Отсюда видно, что гравитационное притяжение данного слоя во всем полупространстве выше него является постоянным. Эта формула широко применяется в гравиразведке, в частности для вычисления поправки Буге.

Соотношения (2.14) - (2.16) дают принципиальную возможность рассчитывать гравитационные аномалии двумерных моделей, но фактически при решении прямой задачи удобнее пользоваться не ими, а их комплексными аналогами, что будет рассмотрено далее в главе 2.

§ 3. Основы решения прямой задачи магниторазведки

Магнитное поле описывается двумя основными характеристиками: напряженностью $\vec{H}$ и индукцией $\vec{B}$, между которыми в системе СИ существует следующее локальное соотношение:

$$\vec{B}(a) = \mu_0 [\vec{H}(a) + \vec{I}(a)], \quad (3.1)$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м - магнитная постоянная, а $\vec{I}$ - намагниченность в рассматриваемой точке a . Из (3.1) следует, что всюду, куда может быть помещен датчик магнитометра (то есть в

немагнитной среде), что справедливо даже для скважин, $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$. В настоящее время принято градуировать приборы в единицах индукции системы СИ - Тесла.

Намагниченность вещества сложным образом зависит от его магнитных свойств и намагничивающего поля, что характеризуется петлей гистерезиса, но магниторазведка изучает слабые магнитные поля - ведь нормальное геомагнитное поле всего около 50 мкТл. В связи с этим в магниторазведке применяют упрощенную модель намагничения: считают горные породы и руды "идеальным ферромагнетиком", что дает возможность следующим образом связать намагниченность с магнитными свойствами

$$\vec{I} = \kappa \vec{H} + \vec{I}_n. \quad (3.2)$$

Здесь κ - безразмерная магнитная восприимчивость, а $\vec{I}_n$ - вектор естественной остаточной намагниченности. Из этой формулы следует, в частности, что размерность намагниченности совпадает с размерностью напряженности: А/м. Подставив (3.2) в (3.1), получим в любой точке пространства

$$\vec{B} = \mu_0 [(1 + \kappa) \vec{H} + \vec{I}_n]. \quad (3.3)$$

Величина в круглых скобках называется относительной магнитной проницаемостью вещества и обозначается μ , тогда $\mu = 1 + \kappa$, и (3.3) можно переписать в следующем виде

$$\vec{B} = \mu_0 (\mu \vec{H} + \vec{I}_n). \quad (3.4)$$

Характеристики $\vec{H}$ и $\vec{B}$ удовлетворяют, как известно из теории физических полей, следующим дифференциальным уравнениям, являющимся частным случаем уравнений Максвелла:

$$\text{rot } \vec{H}(a) = 0; \quad \text{div } \vec{B}(a) = 0. \quad (3.5)$$

Как устанавливается в курсе теории поля, из этих уравнений следует, что на границах тел непрерывны тангенциальная компонента напряженности и нормальная компонента индукции магнитного поля. Нормальная компонента напряженности на границе тела испытывает разрыв, равный нормальной компоненте намагниченности в данной точке. Эти соотношения являются исходными при решении прямой задачи магниторазведки.

Решим с их помощью принципиально важную прямую задачу для однородного полупространства. Пусть полупространство с магнитной восприимчивостью κ и нормальной к границе естественной остаточной намагниченностью $\vec{I}_n$ помещено во внешнее однородное намагничивающее поле с напряженностью $\vec{H}^{\text{прв}}$ (рис. 7).

Очевидно, полупространство в этом случае должно намагничиваться однородно и нормально к границе. Вычислим модуль его намагниченности $\vec{I}$, исходя из условия непрерывности на границе нормальной компоненты индукции. При этом учтем, что в (3.3) и (3.4)

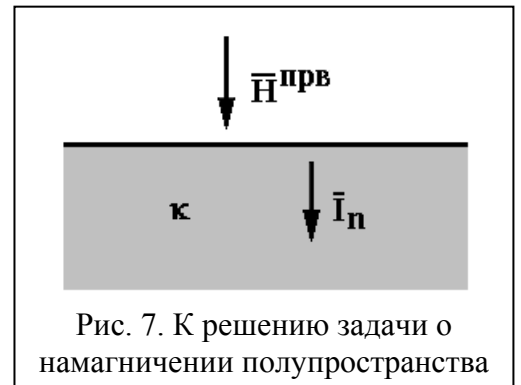


Рис. 7. К решению задачи о намагничении полупространства

$\vec{H}$ - это суммарная напряженность, векторно складывающаяся из первичной $\vec{H}^{\text{прв}}$ и вторичной (аномальной) $\vec{H}^{\text{втр}}$. Для данной задачи аномалию легко определить, поскольку разрыв напряженности на границе должен составлять $\vec{I}$. В силу симметрии модели это может быть только тогда, когда в свободном полупространстве $\vec{H}^{\text{втр}} = 0,5 \vec{I}$, а в полупространстве, занятом магнетиком, $\vec{H}^{\text{втр}} = -0,5 \vec{I}$. Тогда во внешнем полупространстве нормальная компонента индукции в соответствии с (3.3) составляет $\mu_0 (\vec{H}^{\text{прв}} + 0,5 \vec{I})$, а во внутреннем $\mu_0 [(1 + \kappa) (\vec{H}^{\text{прв}} - 0,5 \vec{I}) + \vec{I}_n]$. Приравняв их и решая получающееся уравнение относительно $\vec{I}$, получаем

$$I = \frac{\kappa H^{\text{прв}} + I_n}{1 + 0,5\kappa}. \quad (3.6)$$

Так как при выводе данного выражения удовлетворены и уравнения (3.5) и граничные условия, то в силу теоремы единственности, доказываемой в курсах теории поля, аномалия вертикальной составляющей индукции магнитного поля над вертикально намагниченным полупространством

$$Z = 0,5 \mu_0 I, \quad (3.7)$$

где I определяется выражением (3.6). Горизонтальная составляющая при этом равна нулю.

Обратимся к формуле (3.6). В безграничном пространстве, где отсутствует аномальное поле, намагниченность в соответствии с (3.2), была бы равна

$$I = \kappa H^{\text{прв}} + I_n. \quad (3.8)$$

Сравнивая (3.8) и (3.6), видим, что полупространство намагничивается слабее, нежели пространство, заполненное таким же магнетиком, в $1+0,5\kappa$ раз. Числовой параметр $0,5$ принято называть коэффициентом размагничивания или размагничивающим фактором полупространства и обозначать как N . Дело в том, что вторичное (аномальное) поле направлено внутри полупространства в рассматриваемом случае противоположно первичному, что приводит к уменьшению намагниченности (размагничиванию) полупространства. Данный эффект называется эффектом размагничивания объекта в собственном аномальном поле, а внутреннее аномальное поле часто называют размагничивающим.

Прямая задача для полупространства решается весьма просто, но приемы, примененные при этом - частные. Для объектов более сложных форм необходимо иметь достаточно общий математический аппарат вычисления аномалий. Попытаемся построить его таким же способом, как для гравиразведки, а именно, введя скалярный потенциал, определив его для шара и проинтегрировав по объему изучаемой модели.

Возможность введения скалярного магнитного потенциала U вытекает из первого уравнения в (3.5). Определим его соотношением

$$\vec{H}(a) = -\text{grad } U(a). \quad (3.9)$$

Знак минус перед градиентом в отличие от (2.2) связан с тем, что одноименные магнитные полюса (т.н. магнитные массы) отталкиваются друг от друга. Подставим (3.4) во второе уравнение из (3.5) с учетом (3.9), в результате убедимся, что скалярный магнитный потенциал удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\text{div} (\mu \text{ grad } U) = \text{div } \vec{I}_n. \quad (3.10)$$

Для однородных объектов уравнение упрощается и переходит в уравнение Лапласа:

$$\Delta U = 0. \quad (3.11)$$

На границах тел потенциал удовлетворяет двум граничным условиям. Из непрерывности тангенциальной компоненты напряженности следует, что потенциал на границе непрерывен. Если обозначить потенциал внутри тела как U_i , а вне тела как U_e , то на границе $U_i = U_e$. Данные потенциалы как и поля складываются из потенциалов первичного и вторичного полей: $U = U^{\text{прв}} + U^{\text{втр}}$, следовательно, можно считать, что на границе непрерывен вторичный потенциал, и первое граничное условие принимает вид:

$$U_i^{\text{прв}} = U_e^{\text{втр}}. \quad (3.12)$$

Второе граничное условие вытекает из непрерывности нормальных компонент вектора индукции и в соответствии с этим имеет вид:

$$\frac{\partial U^{\text{прв}}}{\partial n} + \frac{\partial U_e^{\text{втр}}}{\partial n} = \mu \left(\frac{\partial U^{\text{прв}}}{\partial n} + \frac{\partial U_i^{\text{втр}}}{\partial n} \right). \quad (3.13)$$

Решить прямую задачу магниторазведки для любого объекта можно, найдя такие потенциалы внутри и вне него, которые удовлетворяют дифференциальному уравнению и двум граничным условиям. Решим эту задачу для однородного шара.

Пусть шар радиуса a с магнитной восприимчивостью κ помещен в однородное первичное магнитное поле $\vec{H}^{\text{прв}}$, направленное вдоль оси z . Расположим центр шара в начале декартовой системы координат (рис. 8) и определим потенциал первичного поля. С помощью (3.9) легко убедиться, что

$$U^{\text{прв}} = -H^{\text{прв}} z. \quad (3.14)$$

Из курса теории поля известно, что шар в однородном поле поляризуется однородно, а его внешнее поле эквивалентно полю диполя. Убедимся в этом, попытавшись удовлетворить условиям теоремы единственности. Для этого составим выражения для внутреннего и внешнего вторичных потенциалов с неопределенными коэффициентами и найдем их значения из граничных условий. Для удобства расчетов перейдем к сферическим координатам R, θ, φ , вводимым соотношениями:

$$x = R \sin \theta \cos \varphi; y = R \sin \theta \sin \varphi; z = R \cos \theta. \quad (3.15)$$

В сферической системе координат потенциал первичного поля принимает вид

$$U^{\text{прв}} = -H^{\text{прв}} R \cos \theta. \quad (3.16)$$

Внутренний вторичный потенциал будем искать как потенциал однородного поля с неопределенным коэффициентом A :

$$U_i^{\text{прв}} = A H^{\text{прв}} R \cos \theta. \quad (3.17)$$

Внешний вторичный потенциал будем искать в форме потенциала вертикального диполя, расположенного в центре шара, с неопределенным коэффициентом C :

$$U_e^{\text{втр}} = C H^{\text{прв}} \frac{\cos \theta}{R^2}. \quad (3.18)$$

Удовлетворим сначала условие (3.12). При $R=a$ приравняем (3.17) и (3.18), в результате чего получим соотношение $C=a^3 A$. В условии (3.13) вместо дифференцирования по нормали в сферической системе можно дифференцировать по координате R , тогда получим следующее уравнение для определения A : $-1-2A = \mu(-1+A)$ откуда $A=(\mu-1)/(\mu+2)$. Выражения для потенциалов, удовлетворяющие условиям теоремы единственности, примут вид:

$$\begin{aligned} U_i^{\text{прв}} &= \frac{\mu-1}{\mu+2} H^{\text{прв}} R \cos \theta, \\ U_e^{\text{втр}} &= \frac{\mu-1}{\mu+2} H^{\text{прв}} \frac{\cos \theta}{R^2}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Переходя обратно к декартовой системе координат, получим внутри шара

$$U_i^{\text{втр}} = \frac{\mu-1}{\mu+2} H^{\text{прв}} z, \quad (3.20)$$

а вне его

$$U_e^{\text{втр}} = \frac{\mu-1}{\mu+2} a^3 H^{\text{прв}} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (3.21)$$

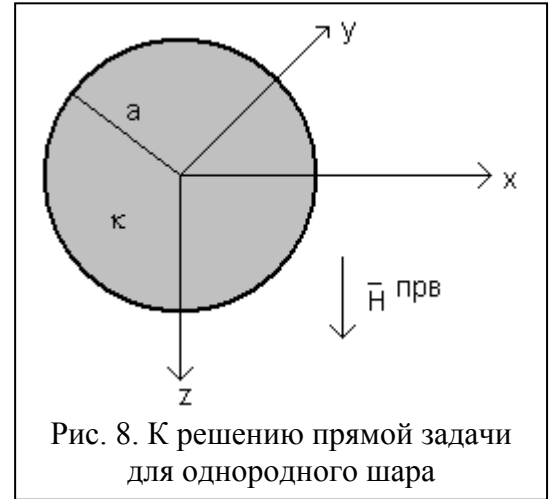


Рис. 8. К решению прямой задачи для однородного шара

Проанализируем полученные выражения. Потенциал вне шара эквивалентен потенциалу диполя, помещенного в его центр, с дипольным моментом, ориентированным по направлению намагничивающего поля. Преобразуем (3.21), умножив и поделив на $4\pi/3$ и учитывая, что $\mu=1+\kappa$. В результате получим

$$U_e^{\text{втр}} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\kappa H^{\text{прв}}}{1 + \frac{1}{3}\kappa} \cdot \frac{4\pi a^3}{3} \cdot \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (3.22)$$

Первый сомножитель в данной формуле возникает из-за применения системы СИ, второй сомножитель представляет собой намагниченность шара, а третий - его объем. Таким образом, потенциал внешнего аномального поля шара можно представить в виде

$$U_e^{\text{втр}} = \frac{1}{4\pi} \cdot IV \cdot \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (3.23)$$

Дипольный момент шара, как видно, совпадает с его магнитным моментом $M=IV$, а намагниченность шара определяется формулой

$$I = \frac{\kappa H^{\text{прв}}}{1 + \frac{1}{3}\kappa}. \quad (3.24)$$

Напомним, что задача решалась при $I_n=0$. Если учесть наличие остаточной намагниченности, направленной так же, как намагничивающее поле, то (3.24) преобразуется к виду

$$I = \frac{\kappa H^{\text{прв}} + I_n}{1 + \frac{1}{3}\kappa}. \quad (3.25)$$

Сравнивая (3.25) и (3.6), можно убедиться, что они имеют одинаковый вид:

$$I = \frac{\kappa H^{\text{прв}} + I_n}{1 + \kappa N}, \quad (3.26)$$

только для полупространства коэффициент размагничивания $N=1/2$, а для шара $N=1/3$.

Анализируя (3.20), можно установить, что потенциал внутреннего поля шара - это потенциал однородного поля с напряженностью

$$\vec{H}_i^{\text{втр}} = -N \vec{I}, \quad (3.27)$$

направленного противоположно намагниченности, следовательно, в данном случае и первичному полю. Из вида полученной формулы становится ясно, почему внутреннее аномальное поле называют размагничивающим, а параметр N - коэффициентом размагничивания.

Выведенные формулы относились к шару, центр которого совпадает с началом координат. Переноса центр в точку $q(\xi, \eta, \zeta)$, получаем

$$U_e^{\text{втр}} = -\frac{1}{4\pi} \cdot IV \cdot \frac{\zeta - z}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{3/2}}. \quad (3.28)$$

Легко убедиться, что данная формула имеет следующую структуру:

$$U_e^{\text{втр}} = -\frac{1}{4\pi} \cdot IV \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{L_{qa}} \right), \quad (3.29)$$

допускающую обобщение на случай произвольно ориентированной намагниченности. Если шар намагничивается в поле, имеющем компоненты напряженности $H_x^{\text{прв}}, H_y^{\text{прв}}, H_z^{\text{прв}}$, а компоненты его вектора остаточной намагниченности соответственно I_{nx}, I_{ny}, I_{nz} , то он приобретает компоненты намагниченности

$$I_x = \frac{\kappa H_x^{\text{прв}} + I_{nx}}{1 + \kappa N}; I_y = \frac{\kappa H_y^{\text{прв}} + I_{ny}}{1 + \kappa N}; I_z = \frac{\kappa H_z^{\text{прв}} + I_{nz}}{1 + \kappa N}. \quad (3.30)$$

Каждая из компонент создает свою часть общего потенциала, который, как следует из (3.29) и принципа суперпозиции полей:

$$U_e^{\text{втр}} = -\frac{V}{4\pi} \left[I_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{L_{qa}} \right) + I_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{L_{qa}} \right) + I_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{L_{qa}} \right) \right]. \quad (3.31)$$

В квадратной скобке содержится скалярное произведение двух векторов: первый - это $\vec{I}$ с компонентами I_x, I_y, I_z , а второй вектор - это $\text{grad}(1/L_{qa})$. Записывая U вместо $U_e^{\text{втр}}$, получаем общее выражение для потенциала в точке a , создаваемого шаром с центром в точке q :

$$U(a) = -\frac{V}{4\pi} \left(\vec{I} \text{grad} \frac{1}{L_{qa}} \right). \quad (3.32)$$

Оператор **grad** в данной формуле берется по координатам точки a . Применяя символический оператор Гамильтона ∇ , (3.32) можно переписать в форме:

$$U(a) = -\frac{V}{4\pi} \left(\vec{I} \nabla^a \frac{1}{L_{qa}} \right), \quad (3.33)$$

а, принимая во внимание, что $\nabla^q = -\nabla^a$, и в альтернативной, имея в виду, что выбор одной из формул зависит от характера решаемой задачи:

$$U(a) = \frac{V}{4\pi} \left(\vec{I} \nabla^q \frac{1}{L_{qa}} \right). \quad (3.34)$$

Полученные выражения дают возможность путем интегрирования по объему модели записать формальные соотношения для потенциала 3-мерного тела V :

$$U(a) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \left(\vec{I}(q) \nabla^a \frac{1}{L_{qa}} \right) dV \quad (3.35)$$

или

$$U(a) = \frac{1}{4\pi} \int_V \left(\vec{I}(q) \nabla^q \frac{1}{L_{qa}} \right) dV. \quad (3.36)$$

Вместе с тем, очевидно, что данные соотношения надо применять с осторожностью, что, в частности, следует из несовпадения намагниченностей пространства, полупространства и шара.

В необходимости корректного применения выведенных соотношений можно дополнительно убедиться, решив прямую задачу для горизонтального кругового цилиндра, вытянутого вдоль оси y . Задача эта решается аналогично задаче для шара, только вычисления проводятся не в сферической, а в цилиндрической системе координат. Предоставляем само решение провести читателю самостоятельно, и приведем лишь конечный результат. Если радиус цилиндра обозначить через a , то потенциал однородного вторичного поля внутри цилиндра при вертикальном намагничении будет

$$U_i^{\text{втр}} = N I_z, \quad (3.37)$$

где $N=1/2$ (как для полупространства), а намагниченность I также вычисляется по формуле (3.26) с данным коэффициентом размагничивания. Внешний аномальный потенциал цилиндра эквивалентен потенциалу вертикального линейного диполя, расположенного на оси цилиндра:

$$U_e^{\text{втр}} = \frac{1}{2\pi} \cdot IS \cdot \frac{z}{x^2 + z^2}, \quad (3.38)$$

где $S=\pi a^2$ - площадь поперечного сечения цилиндра, а произведение IS - его линейный магнитный момент. Формальное интегральное соотношение для магнитного потенциала двумерной модели можно, обобщая (3.38), записать следующим образом:

$$U(x, z) = -\frac{1}{2\pi} \int_S \frac{(\xi - x) I_x(\xi, \zeta) + (\zeta - z) I_z(\xi, \zeta)}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} dS. \quad (3.39)$$

От формулы (3.35), интегрируя потенциал по η (как в гравитационной задаче), также можно формально прийти к (3.39), но значения намагниченности при этом должны, конечно же, остаться такими как для шара, а не как для кругового цилиндра. Для принципиального решения вопроса о применимости полученных выражений надо глубже разобраться в зависимости намагниченности от формы, чему посвящен следующий параграф.

В заключение данного параграфа укажем еще на одно формальное соотношение - так называемое соотношение Пуассона между гравитационным и магнитным потенциалами однородных и однородно намагниченных тел. Если в формулах (2.8), (3.35) и (3.36) положить $\sigma=\text{const}$ и $\vec{I}=\text{const}$, то легко убедиться, что

$$U(a) = \frac{1}{4\pi\gamma\sigma} \left(\vec{I} \cdot \vec{\nabla}^q W(a) \right) = -\frac{1}{4\pi\gamma\sigma} \left(\vec{I} \cdot \vec{\nabla}^a W(a) \right). \quad (3.40)$$

Применимость соотношения Пуассона также определяется характером размагничивания изучаемой модели.

§ 4. Эффект размагничивания и применимость интегральных соотношений для решения прямой задачи магниторазведки

Сложности в применении выведенных формальных соотношений заключаются в том, что намагниченные тела, а также разные части одного тела взаимодействуют друг с другом, создавая дополнительные намагниченности. Рассмотрим этот эффект на простом примере. Пусть на небольшом расстоянии друг от друга расположены два тела, например, шары. Каждый из шаров в земном поле приобретает однородную намагниченность и создает во внешнем по отношению к нему пространстве аномальное поле. При этом получается, что тела намагничиваются не только в земном и собственном аномальном поле, но и в аномальном поле соседнего тела, а это поле - существенно неоднородно. В итоге надо сделать вывод о том, что аномальное поле над моделью, состоящей из двух сближенных тел, не равно сумме их аномальных полей, а их намагниченность - неоднородна даже если каждое из тел, будучи уединенным, намагничивалось бы однородно.

Необходимо четко различать, что в соответствии с принципом суперпозиции полей магнитные поля не взаимодействуют друг с другом, в то время как намагниченные тела - взаимодействуют. Можно сказать, что справедлив принцип суперпозиции полей, но в магнитном поле нет суперпозиции тел, как в гравитационном. Именно из-за этого, строго говоря, неправомерно формально складывать потенциалы тел, а, следовательно, неправомерно проводить и интегрирование потенциалов. Однако, при определенных условиях погрешности, вносимые благодаря взаимовлиянию, оказываются малыми, и интегральные соотношения, рассматриваемые как модели со своими допущениями, - применимыми на практике.

Рассмотрим условия применимости интегральных соотношений. Ранее было показано, что полупространство, шар и круговой цилиндр в однородном поле намагничиваются однородно. Это - уникальное свойство, характерное для узкого класса объектов. Болгарский геофизик Д.П.Зидаров доказал, что помимо полупространства среди односвязных тел таким свойством обладают только эллипсоиды, частными формами которых и являются шар и круговой

цилиндр. Если намагничивающее поле направлено вдоль какой-либо из осей эллипсоида, его намагниченность может быть определена по формуле (3.26), то есть влияние размагничивания может быть учтено введением безразмерного коэффициента размагничивания N , зависящего от формы эллипсоида. Как было отмечено выше, для шара $N=1/3$, а для кругового цилиндра при намагничении перпендикулярно оси - $N=1/2$. В общем случае коэффициенты размагничивания выражаются через эллиптические интегралы, для их определения существуют рассчитанные таблицы и номограммы [10], но коэффициенты размагничивания эллиптических цилиндров вычисляются по элементарной формуле. Если эллиптический цилиндр с полуосями a и b намагничивается в поле, параллельном полуоси a , то его размагничивающий фактор равен:

$$N_a = \frac{b}{a + b}. \quad (4.1)$$

в частности, при $a=b$ для кругового цилиндра $N=1/2$.

Коэффициенты размагничивания эллипсоидов подчиняются определенным специфическим закономерностям. Первая из них состоит в том, что $0 \leq N \leq 1$. Наиболее интересны крайние случаи, присущие вырожденным формам эллипсоидов. При $N=0$ размагничивание отсутствует, а намагниченность определяется по формуле (3.8) для пространства. Этому случаю соответствуют эллипсоиды, вытянутые вдоль поля на бесконечное расстояние, например, эллиптические цилиндры при $a \rightarrow \infty$. Надо сказать, что эллиптические цилиндры любого сечения, будучи вытянуты от $-\infty$ до $+\infty$ вдоль намагничивающего поля, не размагничиваются, поскольку не создают аномального поля. Случай $N=1$ соответствует бесконечному плоскопараллельному слою, намагниченному перпендикулярным к нему полем, например при $b \rightarrow \infty$ в (4.1).

Вторая присущая исключительно эллипсоидам закономерность состоит в том, что сумма коэффициентов размагничивания вдоль всех полуосей: a , b и c - строго равна единице:

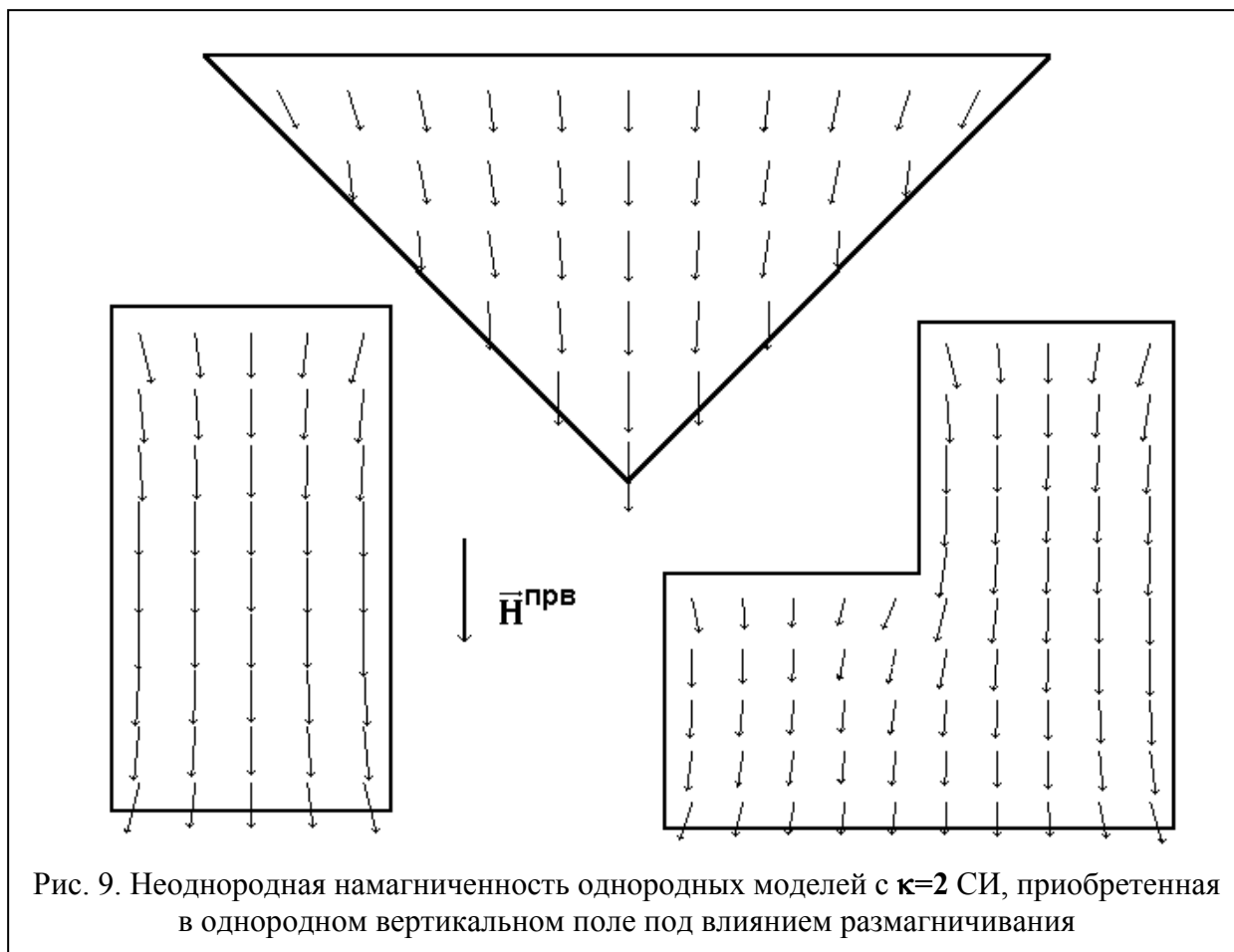
$$N_a + N_b + N_c = 1, \quad (4.2)$$

поэтому в таблицах обычно указывают лишь два из трех коэффициентов. Отметим, что для полупространства аналогичная сумма равна лишь $1/2$, поскольку при намагничении его полем, параллельным границе, размагничивание отсутствует, как и аномальное поле.

Односвязные тела любых форм, отличных от полупространства и эллипсоидов, в однородном поле намагничиваются неоднородно. Неоднородно намагничивается из-за взаимовлияния и совокупность нескольких эллипсоидов. Степень неоднородности намагничения определяется магнитной восприимчивостью тел, точнее говоря их относительной магнитной проницаемостью μ . Обратим внимание, что при $N=1$ знаменатель в (3.26) равен $\mu=1+k$. Оказывается, намагниченность разных частей неэллипсоидального объекта может различаться не более чем в μ раз. К неоднородно намагничивающимся объектам неприменимо понятие коэффициента размагничивания, поскольку в каждой их точке влияние размагничивания различно, и намагниченность меняется как по величине, так и по направлению. На рис. 9 векторами показаны распределения намагниченности внутри некоторых однородных двумерных моделей с магнитной восприимчивостью 2 СИ в вертикальном намагничивающем поле.

Хотя магнитная восприимчивость - безразмерна, значения ее различаются в системах СИ и СГС: $k_{СИ} = 4\pi \cdot k_{СГС}$. Так как знаменатель в (3.26), очевидно, должен быть одинаковым в обеих системах, из-за этого различаются и безразмерные коэффициенты размагничивания. Связь между ними выражается соотношением $N_{СГС} = 4\pi \cdot N_{СИ}$, например, у шара в СГС - $N=4\pi/3$.

Отмеченные особенности проявления эффекта размагничивания указывают на то, что при $k \rightarrow 0$ влияние этого эффекта пренебрежимо мало, поэтому для слабомагнитных объектов магнитный потенциал можно вычислять с помощью интегральных формул. Отметим также, что соотношение Пуассона (3.40), строго говоря, выполняется лишь для эллипсоидов, но при $k \rightarrow 0$ может с определенной погрешностью соблюдаться и для тел неэллипсоидальной формы. В этой ситуации необходим анализ возникающих погрешностей в зависимости от магнитной восприимчивости изучаемых геологических объектов.



Начнем анализ с выбора критерия значимости эффектов, возникающих за счет размагничивания. Наиболее естественным критерием представляется сопоставление со среднеквадратической погрешностью выполненной магнитной съемки. Если по результатам контрольных наблюдений магниторазведчики удостоверились, что погрешности определения магнитных аномалий не превышают определенной величины, упрощения, вносимые при интерпретации, должны быть согласованы с ней. Отсюда следует, что пренебрежимо малой погрешностью упрощений при формировании какой бы то ни было модели может считаться лишь такая, которая заведомо искажает поле модели менее чем на величину среднеквадратической погрешности съемки.

Посмотрим с этой точки зрения на магнитные аномалии, которые связаны с влиянием размагничивания. Ясно, что наибольшие эффекты наблюдаются вблизи поверхности намагниченного объекта, причем различные его части, как было отмечено выше, могут отличаться по намагниченности в μ раз. Аномалии вблизи поверхности тела можно оценить по формуле (3.7) для полупространства. Если подставить в нее сначала намагниченность, вычисленную без учета размагничивания по формуле (3.8), полагая $\mathbf{I}_n=0$, а затем намагниченность (3.26) с $\mathbf{N}=1$, то есть при максимальном размагничивании, и получить разность этих аномалий, то максимальная погрешность в магнитных аномалиях за счет пренебрежения размагничиванием окажется равной

$$\Delta Z = \frac{\kappa^2 T_0}{2(1 + \kappa)}. \quad (4.3)$$

В таблице 1 сведены вычисленные таким способом погрешности при намагничивающем поле $T_0 = 50$ мкТл. Если остаточная намагниченность не равна нулю, то погрешности, как следует из (3.8) и (3.26), могут возрасти. Анализ таблицы показывает, что при величинах κ , характерных

для магнетитовых руд, погрешности сопоставимы с самой наблюдаемой аномалией. С уменьшением κ уменьшаются и погрешности, но лишь при $\kappa < 634 \cdot 10^{-5}$ СИ они не превышают 1 нТл, то есть той точности, которая вполне достижима для современных высокоточных съемок с протонными и квантовыми магнитометрами.

Таблица 1.

κ , ед. СИ	Предельные погрешности за счет размагничивания, нТл
1	12500
0,1	227
0,01	2,48
0,001	0,025

Таким образом, если магнитная восприимчивость изучаемых объектов не превышает $634 \cdot 10^{-5}$ СИ, то при существующем уровне точности магнитных съемок влиянием размагничивания заведомо можно пренебрегать, что дает возможность применять интегральные формулы, а также соотношение Пуассона при решении прямой задачи магниторазведки для сложных моделей. Аномалии компонент магнитной индукции могут вычисляться по формуле, вытекающей из (3.9), а именно:

$$\vec{B} = -\mu_0 \text{ grad } U. \quad (4.4)$$

Аномалии ΔT можно вычислять, зная аномалии компонент, по формулам (1.1) или (1.2). При $\kappa > 634 \cdot 10^{-5}$ СИ необходимо сравнивать предельные погрешности со среднеквадратической погрешностью съемки и, если они превышают ее, корректно учитывать размагничивание. Способы решения прямой задачи магниторазведки для сильномагнитных объектов будут рассмотрены в главе 4.

§ 5. Эквивалентные простые слои при решении прямой задачи магниторазведки

Магнитный потенциал слабомагнитных трехмерных объектов может быть вычислен по формулам (3.35) и (3.36), а двумерных - по формуле (3.39). Вместе с тем эти формулы при определенных условиях могут быть упрощены путем перехода от интегрирования по объему модели к интегрированию по ее поверхности. Воспользуемся возможностями действий с символическим оператором Гамильтона ∇ и проинтегрируем по частям выражение (3.36):

$$U(a) = \frac{1}{4\pi} \int_V \left(\vec{I}(q) \nabla \frac{1}{L_{qa}} \right) dV = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla \vec{I}(q)}{L_{qa}} dV - \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla \cdot \vec{I}(q)}{L_{qa}} dV. \quad (5.1)$$

Поскольку скалярное произведение оператора ∇ на вектор - есть дивергенция этого вектора, результат интегрирования по частям можно записать в виде:

$$U(a) = \frac{1}{4\pi} \int_V \text{div} \frac{\vec{I}(q)}{L_{qa}} dV - \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\text{div} \vec{I}(q)}{L_{qa}} dV. \quad (5.2)$$

Применим к первому из интегралов теорему Остроградского-Гаусса:

$$\frac{1}{4\pi} \int_V \text{div} \frac{\vec{I}(q)}{L_{qa}} dV = -\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\text{Div} \vec{I}(q)}{L_{qa}} dS. \quad (5.3)$$

Поверхностная дивергенция, как известно, представляет собой в каждой точке поверхности разность нормальных компонент намагниченности внутри и вне тела:

$$\text{Div} \vec{I} = I_{\text{nor}}^i - I_{\text{nor}}^e. \quad (5.4)$$

Если модель находится в немагнитном пространстве $I_{\text{nor}}^e = 0$ и, обозначая проекцию намагниченности на внешнюю нормаль просто как I_{nor} , получаем:

$$U(a) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{I_{\text{nor}}(q)}{L_{qa}} dS - \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\text{div } \vec{I}(q)}{L_{qa}} dV. \quad (5.5)$$

Для слабомагнитных объектов можно считать, что они в земном поле намагничиваются однородно, тогда $\text{div } \vec{I}(q) = 0$ и

$$U(a) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{I_{\text{nor}}(q)}{L_{qa}} dS. \quad (5.6)$$

Таким образом, потенциал однородно намагниченного тела эквивалентен потенциалу простого слоя фиктивных магнитных масс, распределенных на поверхности тела, причем, в каждой точке поверхности плотность этих масс равна проекции намагниченности на внешнюю нормаль в данной точке.

Использование эквивалентных простых слоев фиктивных магнитных масс дает возможность не только расчетов, но и быстрого качественного суждения о форме магнитных аномалий различных моделей. Наиболее удобно применение этих представлений к многогранникам, поскольку для каждой из их граней проекция намагниченности на внешнюю нормаль однородна, следовательно, и эквивалентный простой слой на каждой из граней - однороден.

Рассмотрим в качестве примера применение данного подхода к качественному анализу аномального поля одной из наиболее распространенных моделей - вертикального двумерного пласта с неограниченным распространением на глубину. Эту модель применяют при аппроксимации даек, рудных тел и т.п.

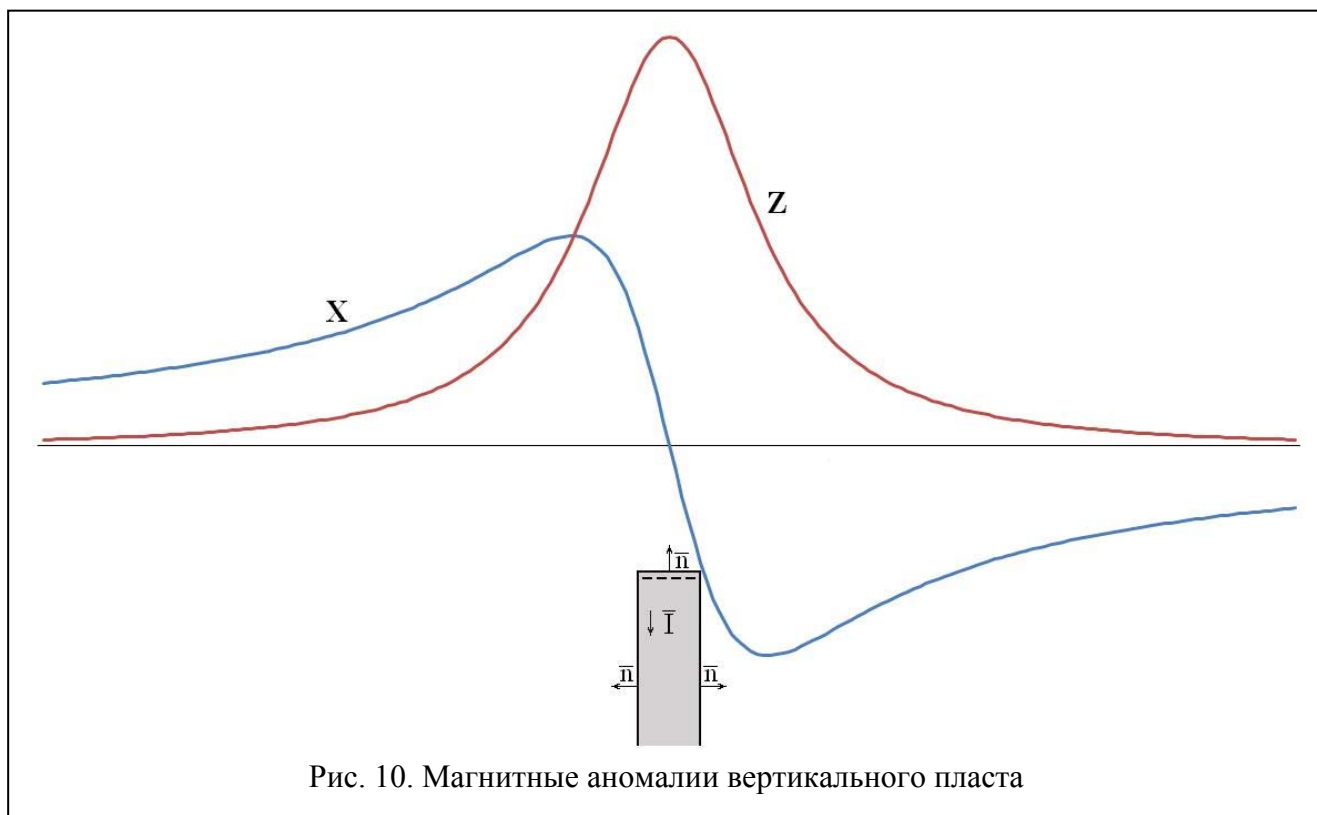


Рис. 10. Магнитные аномалии вертикального пласта

Если пласт намагничен вертикально, его магнитная аномалия эквивалентна притяжению отрицательных фиктивных магнитных масс, сосредоточенных на его верхней кромке и имеющих плотность $-I$ (рис. 10). Знак «минус» возникает в связи с тем, что на верхней кромке

внешняя нормаль направлена противоположно намагниченности. На боковых же кромках внешняя нормаль перпендикулярна намагниченности, поэтому там плотность эквивалентных масс - нулевая, то есть не создающая аномального поля.

Для выяснения характера магнитных аномалий в любой из точек вне тела надо мысленно поместить в эту точку единичную положительную массу и проанализировать силу, с которой притягивает (или отталкивает) ее эквивалентный простой слой. При этом если проекция силы на соответствующую координатную ось совпадает с направлением оси, аномалия этой компоненты считается положительной, если их направления противоположны - отрицательной. В данном случае над пластом наблюдается положительная аномалия вертикальной составляющей Z и знакопеременная аномалия горизонтальной составляющей X , причем слева от пласта $X > 0$, а справа от него $X < 0$. Над серединой его верхней кромки Z максимальна, а $X = 0$. Для выяснения характера аномалий ΔT можно применять тот же подход, рассматривая эту аномалию в соответствии с моделью гармонического приближения (1.2) как компоненту, направленную вдоль вектора нормального геомагнитного поля.

С помощью эквивалентных простых слоев можно вычислять магнитные аномалии разнообразных по форме тел. Вместе с тем, для этого эффективнее воспользоваться специально разработанным математическим аппаратом, излагаемым в следующих главах: как для двумерных, так и для трехмерных объектов.

Вопросы для самоконтроля

1. Сколькими параметрами характеризуется поперечное сечение бесконечного горизонтального треугольного цилиндра?
 - а) тремя (24);
 - б) шестью (27);
 - в) девятью (30).
2. Когда возможно использование плотностных моделей с нижней кромкой на бесконечной глубине?
 - а) возможно всегда (36);
 - б) при интерпретации аномалий ускорения силы тяжести (62);
 - в) при интерпретации аномалий вторых производных гравитационного потенциала (88).
3. Когда размагничиванием объекта в собственном аномальном поле можно пренебречь?
 - а) когда его форма является простой (39);
 - б) когда он однороден по магнитным свойствам (48);
 - в) когда его магнитная восприимчивость мала (57).
4. Возможно ли использование моделей гравитационного либо магнитного полей, в которых отсутствуют помехи?
 - а) невозможно (71);
 - б) возможно иногда при интерпретации материалов высокоточных съемок (72);
 - в) возможно всегда (73).

Контрольная сумма при правильных ответах = 243.

ГЛАВА 2. РЕШЕНИЕ ПРЯМЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ

§ 6. Комплексные характеристики двумерных гравитационных и магнитных полей

При интерпретации линейных аномалий широко применяют двумерные (xz-2D) модели, то есть считают изучаемый объект бесконечным горизонтальным цилиндром, физические свойства которого не меняются по простираанию. Двумерность моделей естественно порождает необходимость работы с упорядоченными парами чисел. Действительно, точка на плоскости вертикального разреза двумерной модели описывается двумя координатами, намагниченность двумерного тела характеризуется двумя компонентами, да и вектор аномального поля имеет только две составляющих, поскольку та из компонент, которая направлена вдоль простираания, в силу симметрии двумерных тел равна нулю. Для работы с упорядоченными парами в математике разработан мощный аппарат теории функций комплексной переменной, который оказался весьма эффективным при интерпретации гравитационных и магнитных аномалий.

Естественность введения комплексных характеристик непосредственно вытекает из вида дифференциальных уравнений, описывающих гравитационное и магнитное поля. Из (2.1) следует, что вне гравитирующих объектов, то есть в точках, где плотность – нулевая, напряженность гравитационного поля $\vec{g}$ подчиняется следующим дифференциальным уравнениям:

$$\operatorname{rot} \vec{g} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{g} = 0. \quad (6.1)$$

В рассматриваемом двумерном случае вектор $\vec{g}$ имеет только две компоненты g_x и g_z , в то время как $g_y = 0$, $\partial g_x / \partial y = 0$ и $\partial g_z / \partial y = 0$. Тогда (6.1) можно представить в виде:

$$\frac{\partial g_z}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_z}{\partial z} = 0. \quad (6.2)$$

Аналогично, дифференциальные уравнения магнитного поля (3.5) в немагнитной среде, где $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, могут быть записаны в форме:

$$\operatorname{rot} \vec{T} = 0; \quad \operatorname{div} \vec{T} = 0. \quad (6.3)$$

Обозначение $\vec{T}$ введено для универсальности и может трактоваться и как напряженность ($\vec{H}$), и как индукция ($\vec{B}$). Чаще результаты измерений магнитного поля рассматривают как компоненты или модуль индукции. Если горизонтальную (вкост простираания) компоненту индукции обозначить как X , а вертикальную - как Z , то для двумерных тел (6.3) можно переписать как

$$\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0. \quad (6.4)$$

Соотношения (6.2) фактически представляют собой условия Коши-Римана аналитичности функции

$$G(u) = g_z(x,z) + i g_x(x,z) \quad (6.5)$$

комплексной переменной

$$u = x + i z, \quad (6.6)$$

а (6.4) - условия аналитичности функции

$$T(u) = Z(x,z) + i X(x,z) \quad (6.7)$$

той же переменной. Таким образом, дифференциальные уравнения полей совершенно естественно определяют комплексные характеристики, относящиеся к узкому и хорошо изученному классу аналитических функций комплексной переменной. Аналитическая функция $G(u)$ впервые была введена в 30-х годах нашего века А.А.Заморевым и получила название

комплексной напряженности гравитационного поля. Функция $T(u)$ называется комплексной индукцией магнитного поля. Использование аппарата теории аналитических функций дает возможность значительно упростить решение прямой задачи для двумерных моделей.

Применяя комплексные переменные, обычно принимают систему координат с осью x , направленной вправо и осью z , направленной **вверх**. При этом над объектом с повышенной плотностью $g_z < 0$, то есть наблюдаемая аномалия $\Delta g = -g_z$. Аналогично наблюдаемая аномалия $\Delta Z = -Z$. Эти факты, вытекающие из вида применяемой системы координат, необходимо постоянно иметь в виду при проведении вычислений по формулам, полученным для комплексной переменной. Текущую точку внутри тела с координатами ξ и ζ опишем комплексной переменной

$$w = \xi + i \zeta. \quad (6.8)$$

Избыточная плотность двумерного тела рассматривается как действительный параметр $\sigma(w)$, а намагниченность - как комплексный параметр, вводимый формулой

$$I(w) = I_x(\xi, \zeta) + i I_z(\xi, \zeta). \quad (6.9)$$

Комплексная напряженность гравитационного поля двумерной модели описывается следующим интегралом по площади ее поперечного сечения S :

$$G(u) = 2i\gamma \int_S \frac{\sigma(w) dS}{w - u}. \quad (6.10)$$

Докажем это, выделив действительную и мнимую части, для чего распишем подробно комплексные переменные и умножим числитель и знаменатель на выражение, комплексно сопряженное к знаменателю:

$$\begin{aligned} G(u) &= 2i\gamma \int_S \frac{\sigma(\xi, \zeta) [(\xi - x) - i(\zeta - z)] dS}{[(\xi - x) + i(\zeta - z)][(\xi - x) - i(\zeta - z)]} = \\ &= 2\gamma \int_S \frac{\sigma(\xi, \zeta)(\zeta - z) dS}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} + i \cdot 2\gamma \int_S \frac{\sigma(\xi, \zeta)(\xi - x) dS}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} = g_z(x, z) + i g_x(x, z). \end{aligned}$$

Таким образом, одна компактная формула (6.10) в комплексных переменных фактически эквивалентна (с учетом разнонаправленности осей z) двум более громоздким формулам в декартовых координатах: (2.14) и (2.15).

Комплексная индукция магнитного поля для двумерной модели описывается следующим интегралом:

$$T(u) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_S \frac{I(w) dS}{(w - u)^2}. \quad (6.11)$$

Доказательство этого утверждения предоставляем провести читателю самостоятельно аналогично тому, как это было проведено для гравитационной задачи. При этом, естественно, надо учесть, что намагниченность является (в отличие от плотности) комплексным параметром, определяемым соотношением (6.9).

Для однородных и однородно намагниченных двумерных тел имеет место комплексное соотношение Пуассона, которое в общем случае имеет вид (3.40). В двумерном варианте, как следует из (6.10) и (6.11), его можно записать следующим образом:

$$T(u) = \frac{\mu_0 I}{4\pi\gamma\sigma} \cdot \frac{dG(u)}{du}. \quad (6.12)$$

Напомним, что это соотношение, как и формула (6.11) справедливы, строго говоря, лишь для эллиптических цилиндров, а для тел других форм могут применяться лишь как приближенные при малой величине магнитной восприимчивости.

Формулы (6.10) и (6.11) дают возможность доказать теоремы, связывающие аномальные поля различных моделей. Применение этих теорем зачастую упрощает решение соответствующих прямых задач.

Теорема вращения для магнитного поля. Если во всех точках двумерной модели S повернуть вектор намагниченности на один и тот же угол φ , не меняя его модуля, то в произвольной внешней точке вектор аномального поля, также, не меняя своего модуля, развернется на такой же угол φ , но в противоположном направлении.

Используя экспоненциальное представление комплексных чисел, условие поворота намагниченности $I_1(\xi, \zeta)$ на угол φ против часовой стрелки можно записать следующим образом:

$$I_2(\xi, \zeta) = e^{i\varphi} I_1(\xi, \zeta). \quad (6.13)$$

Подставляя данное соотношение в (6.11), получим

$$T_2(u) = e^{i\varphi} T_1(u). \quad (6.14)$$

Сопоставив (6.7) и (6.9), легко убедиться, что поскольку горизонтальная компонента намагниченности является действительной частью в I , а горизонтальная компонента поля является мнимой частью T (для вертикальных компонент наоборот), то поворот на угол φ поля осуществляется именно в противоположном направлении, что и требовалось доказать.

Теорема линейного преобразования гравитационного поля. Комплексная напряженность гравитационного поля двумерной модели S_2 , полученной из модели S_1 линейным преобразованием $w_2 = a w_1 + b$, где a и b - комплексные числа, и имеющая ту же однородную плотность σ , связана с комплексной напряженностью модели S_1 соотношением

$$G_2(u) = \bar{a} G_1\left(\frac{u-b}{a}\right). \quad (6.15)$$

Учитывая, что $dS_2 = |a|^2 dS_1 = a \cdot \bar{a} \cdot dS_1$, где черта означает комплексное сопряжение, получаем:

$$G_2(u) = 2i\gamma\sigma \int_{S_2} \frac{dS_2}{w_2 - u} = 2i\gamma\sigma \int_{S_1} \frac{a \bar{a} dS_1}{a w_1 + b - u} = 2i\gamma\sigma \bar{a} \int_{S_1} \frac{dS_1}{w_1 - \frac{u-b}{a}} = \bar{a} G_1\left(\frac{u-b}{a}\right).$$

что и требовалось доказать.

Аналогичная **теорема линейного преобразования магнитного поля** приводит к формуле:

$$T_2(u) = \frac{\bar{a}}{a} T_1\left(\frac{u-b}{a}\right), \quad (6.16)$$

доказательство которой предлагаем читателю провести самостоятельно.

Следствием этого результата является так называемый критерий подобия магнитных полей. Если $b=0$, а a - чисто действительное число, то из (6.16) следует $T_2(u) = T_1(u/a)$. Таким образом, если в условии прямой задачи изменить все линейные размеры, а магнитные свойства оставить неизменными, то магнитные аномалии не изменятся. Критерий подобия часто применяется при интерпретации магнитных аномалий. Для комплексной напряженности гравитационного поля, соответственно, $G_2(u) = a G_1(u/a)$, то есть изменение линейных размеров пропорционально увеличивает силу тяжести, создаваемую моделью. Важно понимать, что это справедливо именно для силы тяжести. Для вторых производных гравитационного потенциала, на что указывает соотношение Пуассона, справедлив тот же критерий подобия, что и для магнитного поля. Эти различия могут служить основанием для применения внутреннего комплексирования в гравиразведке, то есть для комплексной интерпретации данных наблюдений первых и вторых производных потенциала.

Несмотря на свою простоту, представления аномальных полей площадными интегралами - не самые эффективные. В следующем параграфе будет рассмотрен еще более эффективный аппарат, но прежде, чем перейти к его изложению, обратимся к решению прямых задач для масс, распределенных по линиям. В этом случае вместо интегралов по площади, используются линейные интегралы. Пусть $\sigma_{\text{пов}}$ - поверхностная плотность простого слоя масс, распределенных по линии L . Тогда, приняв во внимание, что по определению

$$\sigma_{\text{пов}} = \lim_{l \rightarrow 0} \sigma l, \quad (6.17)$$

где σ - объемная плотность, а l - мощность слоя, комплексную напряженность гравитационного поля можно вычислять по следующей формуле:

$$G(u) = 2i\gamma \int_L \frac{\sigma_{\text{пов}}(w) |dw|}{w - u}. \quad (6.18)$$

Приведем в качестве примера решение прямой задачи для двумерной однородной прямолинейной пластинки, концы которой расположены в точках с комплексными координатами w_1 и w_2 . Введем параметрическое уравнение отрезка прямой, соединяющей эти точки:

$$w = w_1 + (w_2 - w_1) t. \quad (6.19)$$

Изменяя параметр t от 0 до 1, получаем координаты любой из точек отрезка. Подставив (6.19) в (6.18), применим известную формулу интегрального исчисления:

$$\int_L f(w) dw = \int_a^b f[w(t)] w'(t) dt, \quad (6.20)$$

тогда

$$G(u) = 2i\gamma \sigma_{\text{пов}} \int_L \frac{|w_2 - w_1| dt}{w_1 + (w_2 - w_1) - u} = 2i\gamma \sigma_{\text{пов}} \frac{|w_2 - w_1|}{w_2 - w_1} \ln \frac{u - w_2}{u - w_1}. \quad (6.21)$$

Использованный при интегрировании прием широко применяется при решении прямых задач и называется параметрическим представлением носителя. С его помощью достаточно просто вычислять аномалии масс, распределенных и по криволинейным носителям. Для вычисления магнитной аномалии дипольной пластинки с плотностью $I_{\text{пов}}$ достаточно в соответствии с соотношением Пуассона продифференцировать (6.21) по u :

$$T(u) = \frac{\mu_0 i I_{\text{пов}}}{2\pi} \cdot \frac{|w_2 - w_1|}{w_2 - w_1} \cdot \left(\frac{1}{u - w_2} - \frac{1}{u - w_1} \right). \quad (6.22)$$

Обратим внимание, что $I_{\text{пов}}$ - комплексная характеристика, так как определяется следующей формулой:

$$I_{\text{пов}} = \lim_{l \rightarrow 0} \Pi. \quad (6.23)$$

Пластинки часто применяются при интерпретации гравитационных и магнитных аномалий как простые и удобные аппроксимирующие элементы в алгоритмах подбора.

§ 7. Представление аномальных полей интегралами типа Коши

Наиболее эффективными при решении прямых задач для двумерных моделей являются интегральные представления, в которых интегрирование осуществляется не по площади поперечного сечения модели, а по ее границе. Чтобы получить их, надо перейти от рассмотрения координат точки модели x и z к другим независимым координатам: $w = \xi + i\zeta$ и $\bar{w} = \xi - i\zeta$ (черта здесь означает комплексное сопряжение). В свою очередь ξ и ζ легко выразить через w и $\bar{w}$:

$$\xi = \frac{w + \bar{w}}{2}; \quad \zeta = \frac{w - \bar{w}}{2i}. \quad (7.1)$$

В соответствии с этими обозначениями любую функцию $f_1(\xi, \zeta)$ можно также рассматривать в виде $f_2(w, \bar{w})$.

Введем операторы дифференцирования по переменным w и $\bar{w}$:

$$\frac{\partial}{\partial w} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - i \frac{\partial}{\partial \zeta} \right), \quad (7.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{w}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + i \frac{\partial}{\partial \zeta} \right). \quad (7.3)$$

Пусть $F(w) = u(\xi, \zeta) + i v(\xi, \zeta)$ - аналитическая функция. Применим к ней оператор (7.2):

$$\frac{\partial F(w)}{\partial w} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + i \frac{\partial v}{\partial \xi} - i \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right). \quad (7.4)$$

Так как $F(w)$ - аналитична, она удовлетворяет условиям Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial v}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial v}{\partial \xi} = - \frac{\partial u}{\partial \zeta}, \quad (7.5)$$

тогда (7.4) можно выразить в виде

$$\frac{\partial F(w)}{\partial w} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + i \frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{dF(w)}{dw}. \quad (7.6)$$

Таким образом, дифференцирование аналитической функции по w можно проводить формально как дифференцирование функции одной переменной.

Если применить к $F(w)$ оператор (7.3), то с учетом условий (7.5) получим:

$$\frac{\partial F(w)}{\partial \bar{w}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + i \frac{\partial v}{\partial \xi} + i \frac{\partial u}{\partial \zeta} - \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right) = 0. \quad (7.7)$$

Функция $\overline{F(w)}$, комплексно сопряженная к аналитической, называется антианалитической функцией. Для антианалитической функции можно аналогично показать, что

$$\frac{\partial \overline{F(w)}}{\partial w} = 0; \quad \frac{\partial \overline{F(w)}}{\partial \bar{w}} = \overline{\left(\frac{\partial F(w)}{\partial w} \right)}. \quad (7.8)$$

Полученные соотношения позволяют записать формулу Грина для функции двух переменных в комплексной форме. Как известно, формула Грина справедлива для любой области, ограниченной одним или несколькими кусочно-гладкими контурами, и имеет вид:

$$\int_{\Gamma} (P dx + Q dy) = \int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \quad (7.9)$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ - функции, непрерывные вместе с их производными $\partial Q/\partial x$ и $\partial P/\partial y$, а Γ - граница области S . В комплексной форме можно записать две формулы Грина для комплексной функции $F(w, \bar{w}) = u(\xi, \zeta) + i v(\xi, \zeta)$:

$$\frac{1}{2i} \int_{\Gamma} F(w, \bar{w}) dw = \int_S \frac{\partial F(w, \bar{w})}{\partial \bar{w}} dS, \quad (7.10)$$

$$-\frac{1}{2i} \int_{\Gamma} F(w, \bar{w}) d\bar{w} = \int_S \frac{\partial F(w, \bar{w})}{\partial w} dS. \quad (7.11)$$

Основное значение имеет формула (7.10). Докажем ее, предоставив читателю самостоятельно доказать формулу (7.11). Вначале выделим действительную и мнимую составляющие правой части формулы (7.10):

$$\begin{aligned}\int_S \frac{\partial F(w, \bar{w})}{\partial \bar{w}} dS &= \frac{1}{2} \int_S \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + i \frac{\partial v}{\partial \xi} + i \frac{\partial u}{\partial \zeta} - \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right) dS = \\ &= \frac{1}{2} \int_S \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right) dS + \frac{i}{2} \int_S \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) dS.\end{aligned}$$

Теперь применим к действительной и мнимой части формулу Грина (7.9):

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \int_{\Gamma} (v d\xi + u d\zeta) + \frac{i}{2} \int_{\Gamma} (-u d\xi + v d\zeta) &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (u + iv) (-i d\xi + d\zeta) = \\ &= \frac{1}{2i} \int_{\Gamma} (u + iv) (d\xi + i d\zeta) = \frac{1}{2i} \int_{\Gamma} F(w, \bar{w}) dw.\end{aligned}$$

Формула (7.10) доказана. В важном частном случае, когда функция

$$F(w, \bar{w}) = \bar{f}_1(\bar{w}) \cdot f_2(w) \quad (7.12)$$

представляет собой произведение антианалитической функции на аналитическую, (7.10) принимает вид:

$$\frac{1}{2i} \int_{\Gamma} \bar{f}_1(\bar{w}) f_2(w) dw = \int_S \frac{\partial \bar{f}_1(\bar{w})}{\partial \bar{w}} f_2(w) dS. \quad (7.13)$$

Для функций

$$f_1 = w, \quad f_2 = \frac{1}{w - u}, \quad (7.14)$$

которые, очевидно, являются аналитическими, из формулы (7.13), в частности, получим

$$2i \int_S \frac{dS}{w - u} = \int_{\Gamma} \frac{\bar{w} dw}{w - u}, \quad (7.15)$$

откуда непосредственно следует представление решения прямой задачи для однородного двумерного объекта с плотностью σ , занимающего область S :

$$G(u) = \gamma \sigma \int_{\Gamma} \frac{\bar{w} dw}{w - u}. \quad (7.16)$$

Полученное соотношение является представлением комплексной напряженности гравитационного поля двумерного однородного объекта в виде интеграла типа Коши. Оно легко распространяется и на случай переменной плотности $\sigma(w, \bar{w}) = \sigma_1(\xi, \zeta)$. При этом, применяя формулу (7.13), получаем

$$G(u) = \gamma \int_{\Gamma} \frac{\Phi(w, \bar{w}) dw}{w - u}, \quad (7.17)$$

где

$$\Phi(w, \bar{w}) = \int \sigma(w, \bar{w}) d\bar{w}. \quad (7.18)$$

Последнее выражение есть неопределенный интеграл от плотности по $\bar{w}$. Легко убедиться, что при постоянной плотности $\Phi(w, \bar{w}) = \sigma \bar{w}$, и формула (7.17) переходит в формулу (7.16).

Комплексная индукция магнитного поля также может быть представлена контурным интегралом. Для объекта с постоянной намагниченностью $\mathbf{I}$ контурный интеграл можно получить из формулы (7.16) с помощью соотношения Пуассона (6.12):

$$T(u) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\bar{w} dw}{(w - u)^2}. \quad (7.19)$$

Это - представление комплексной индукции в форме производной от интеграла типа Коши. В случае неоднородной намагниченности соответствующее представление, получаемое с помощью комплексной формулы Грина, имеет следующий вид:

$$T(u) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\Psi(w, \bar{w}) dw}{(w - u)^2}, \quad (7.20)$$

где

$$\Psi(w, \bar{w}) = \int I(w, \bar{w}) d\bar{w}. \quad (7.21)$$

Представления комплексных характеристик аномальных полей в виде интегралов типа Коши значительно упрощают решение прямых задач для двумерных моделей.

§ 8. Аномальные поля типовых двумерных моделей

Рассмотрим аномальные поля однородных моделей, наиболее часто встречающихся в практике интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. При этом мы используем метод вычисления контурных интегралов, предложенный А.В.Цирульским и заключающийся в записи уравнения границы модели в форме

$$\bar{w} = f(w). \quad (8.1)$$

Это уравнение границы дает возможность избежать появления под интегралом сопряженных переменных и представить комплексную напряженность однородного тела в виде:

$$G(u) = \gamma\sigma \int_{\Gamma} \frac{f(w) dw}{w - u}. \quad (8.2)$$

Рассмотрим вначале гравитационную задачу для двумерного объекта с сечением в форме круга (горизонтальный круговой цилиндр) с центром в начале координат и радиусом R . Как известно, уравнение такой окружности в каноническом виде

$$\xi^2 + \zeta^2 = R^2. \quad (8.3)$$

Учитывая, что $\xi^2 + \zeta^2 = w \bar{w}$, выразим (8.3) в форме Цирульского:

$$\bar{w} = \frac{R^2}{w}. \quad (8.4)$$

Тогда в соответствии с (8.2)

$$G(u) = \gamma\sigma \int_{\Gamma} \frac{R^2 dw}{w(w - u)}. \quad (8.5)$$

Функция R^2/w - аналитична во внешности окружности и непрерывна на самой окружности, следовательно, для нее интеграл типа Коши (8.5) фактически является интегралом Коши, который в общем виде для внешней точки имеет вид:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w) dw}{w - u} = -f(u) + f(\infty). \quad (8.6)$$

где $f(\infty)$ - значение $f(u)$ в бесконечно удаленной точке при $|f(\infty)| < +\infty$. Отсюда

$$G(u) = -\frac{2\pi\gamma\sigma R^2 i}{u}. \quad (8.7)$$

Отметим, что $\pi R^2 \sigma = m$ - линейная масса, которой эквивалентен по своему гравитационному притяжению круговой цилиндр.

Комплексная индукция магнитного поля данного кругового цилиндра вычисляется с помощью соотношения Пуассона и, очевидно, выражается формулой:

$$T(u) = \frac{\mu_0 R^2 i}{2u^2}. \quad (8.8)$$

Перейдем теперь к решению прямой задачи гравиразведки для эллиптического цилиндра, с полуосями **a** и **b**, имеющего каноническое уравнение границы поперечного сечения:

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\zeta^2}{b^2} = 1. \quad (8.9)$$

Выражая ξ и ζ через w и $\bar{w}$ по формулам (7.1) и разрешая полученное квадратное уравнение относительно $\bar{w}$, представим уравнение эллипса в форме Цирульского:

$$\bar{w} = \frac{w(a^2 + b^2) \pm 2ab\sqrt{w^2 - a^2 + b^2}}{a^2 - b^2}. \quad (8.10)$$

Для выбора знака перед корнем доопределим, например, чтобы в точке **a** выполнялось $f(a) = \bar{a}$, так как на контуре тела $\bar{w} = f(w)$. Тогда

$$\bar{w} = \frac{w(a^2 + b^2) - 2ab\sqrt{w^2 - a^2 + b^2}}{a^2 - b^2}. \quad (8.11)$$

Преобразуем данное уравнение к следующему виду:

$$\bar{w} = f^i(w) + f^e(w). \quad (8.12)$$

Функция

$$f^i(w) = \frac{a-b}{a+b} w \quad (8.13)$$

аналитична внутри контура эллипса, а из теоремы Коши следует, что для любой такой функции в произвольной внешней точке

$$\int_{\Gamma} \frac{f^i(w) dw}{w - u} = 0. \quad (8.14)$$

Функция

$$f^e(w) = \frac{2ab}{a^2 - b^2} \left(w - \sqrt{w^2 - a^2 + b^2} \right) \quad (8.15)$$

аналитична вне контура эллипса, и для нее из формул (7.16) и (8.6) следует:

$$G(u) = -\frac{4\pi\gamma\sigma ab i}{a^2 - b^2} \left(u - \sqrt{u^2 - a^2 + b^2} \right), \quad (8.16)$$

поскольку $f^e(\infty) = 0$. Обратим внимание на то, что аналитичность уравнений границ в форме Цирульского как для круга, так и для эллипса, дала возможность при решении прямой задачи фактически избежать интегрирования. Для комплексной индукции магнитного поля эллиптического цилиндра, применяя соотношение Пуассона, получаем:

$$T(u) = -\frac{\mu_0 ab i}{a^2 - b^2} \left(1 - \frac{u}{\sqrt{u^2 - a^2 + b^2}} \right). \quad (8.17)$$

К наиболее популярным моделям, применяемым при аппроксимации двумерных геологических объектов, относятся произвольные многоугольники и их частные формы: пласты, уступы, прямоугольники и т. п. Несколько реже применяются круговые многоугольники - такие, у которых вершины соединяются не прямыми, а дугами окружностей. Применяя аппарат ТФКП, решение прямых задач для них получить весьма просто.

Рассмотрим решение прямой задачи гравиразведки для произвольного однородного N -угольника. Обозначим его вершины как $w_1, w_2, w_3, \dots, w_N$, нумеруя их против часовой стрелки, как показано на рис. 11. Так как многоугольник замкнут, то $w_{N+1} = w_1$. Обратим внимание на то, что многоугольник может быть и невыпуклым - у него лишь не должно быть точек самопересечения.

Представим уравнение отрезка, соединяющего две последовательных вершины многоугольника: w_n и w_{n+1} в форме Цирульского:

$$\overline{w} = a_n w + b_n, \quad (8.18)$$

тогда интеграл (7.16) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} G(u) &= \gamma \sigma \sum_{n=1}^N \int_{w_n}^{w_{n+1}} \frac{(a_n w + b_n) dw}{w - u} = \\ &= \gamma \sigma \sum_{n=1}^N \left[a_n \int_{w_n}^{w_{n+1}} dw + (a_n u + b_n) \int_{w_n}^{w_{n+1}} \frac{dw}{w - u} \right] = \\ &= \gamma \sigma \sum_{n=1}^N \left[a_n (w_{n+1} - w_n) + (a_n u + b_n) \ln \frac{u - w_{n+1}}{u - w_n} \right]. \end{aligned}$$

Найдем значения a_n и b_n из условий

$$\overline{w}_n = a_n w_n + b_n, \quad \overline{w}_{n+1} = a_n w_{n+1} + b_n,$$

тогда

$$a_n = \frac{\overline{w}_{n+1} - \overline{w}_n}{w_{n+1} - w_n},$$

а коэффициент $(a_n u + b_n)$ можно выразить двояко:

$$a_n u + b_n = a_n (u - w_n) + \overline{w}_n = a_n (u - w_{n+1}) + \overline{w}_{n+1}.$$

Подставляя коэффициенты в результаты интегрирования, получим

$$G(u) = \gamma \sigma \sum_{n=1}^N (\overline{w}_{n+1} - \overline{w}_n) + \gamma \sigma \sum_{n=1}^N [a_n (u - w_n) + \overline{w}_n] \ln \frac{u - w_{n+1}}{u - w_n}.$$

Первая сумма в этом выражении для замкнутого многоугольника равна нулю. Во второй же сумме целесообразно перегруппировать слагаемые, собрав под знаком суммы все те выражения, которые относятся к n -ой вершине и расположены в двух соседних слагаемых, ибо в этой вершине сходятся $(n-1)$ -ая n -ая стороны многоугольника:

$$\begin{aligned} G(u) &= \gamma \sigma \sum_{n=1}^N \{ -[a_n (u - w_n) + \overline{w}_n] \ln (u - w_n) + \\ &+ [a_{n-1} (u - w_n) + \overline{w}_n] \ln (u - w_n) \} = \gamma \sigma \sum_{n=1}^N (a_{n-1} - a_n) (u - w_n) \ln (u - w_n). \end{aligned}$$

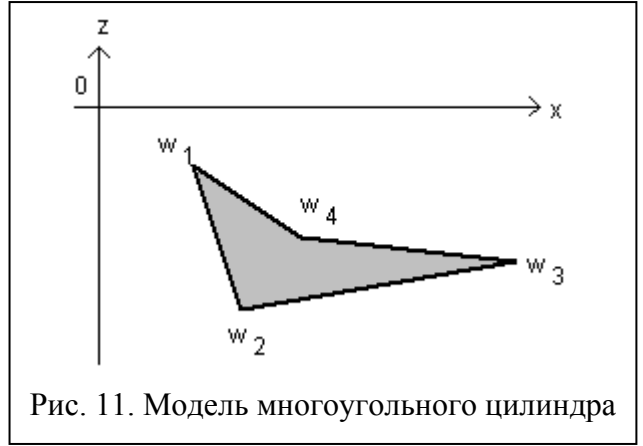


Рис. 11. Модель многоугольного цилиндра

Окончательно

$$G(u) = \gamma\sigma \sum_{n=1}^N K_n (u - w_n) \ln (u - w_n), \quad (8.19)$$

где K_n - комплексная постоянная, относящаяся к n -ой вершине и определяемая соотношением

$$K_n = \frac{\overline{w_n} - \overline{w_{n-1}}}{w_n - w_{n-1}} - \frac{\overline{w_{n+1}} - \overline{w_n}}{w_{n+1} - w_n} = 2 \left(\frac{\xi_n - \xi_{n-1}}{w_n - w_{n-1}} - \frac{\xi_{n+1} - \xi_n}{w_{n+1} - w_n} \right). \quad (8.20)$$

Применяя к полученному выражению соотношение Пуассона, получим комплексную индукцию магнитного поля произвольного многоугольника:

$$T(u) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{n=1}^N K_n \ln (u - w_n). \quad (8.21)$$

Константы в полученном выражении, очевидно, также определяются формулой (8.20).

Завершим рассмотрение типовых двумерных моделей замкнутых тел круговым многоугольником - таким, у которого вершины соединены не прямыми, а дугами окружностей. Пронумеруем вершины кругового многоугольника против часовой стрелки и обозначим их $w_1, w_2, w_3, \dots, w_N$. Поскольку вершины соединяются дугами окружностей, для каждой из таких дуг надо указать комплексную координату центра. Обозначим центр окружности, дуга которой соединяет n -ую и $(n+1)$ -ую вершины как c_n . Уравнение этой окружности можно представить в виде:

$$|w - c_n|^2 = (w - c_n)(\overline{w} - \overline{c_n}) = R_n^2, \quad (8.22)$$

где R_n - ее радиус. Отсюда следует, что уравнение данной окружности в форме Цирульского:

$$\overline{w} = \overline{c_n} + \frac{R_n^2}{w - c_n}. \quad (8.23)$$

Подставляя в (8.2), произведем интегрирование:

$$\begin{aligned} G(u) &= \gamma\sigma \sum_{n=1}^N \left[\overline{c_n} \int_{w_n}^{w_{n+1}} \frac{dw}{w - u} + R_n^2 \int_{w_n}^{w_{n+1}} \frac{dw}{(w - c_n)(w - u)} \right] = \\ &= \gamma\sigma \sum_{n=1}^N \left[\overline{c_n} \ln \frac{w_{n+1} - u}{w_n - u} + \frac{R_n^2}{u - c_n} \left(\ln \frac{w_{n+1} - u}{w_n - u} - \ln \frac{w_{n+1} - c_n}{w_n - c_n} \right) \right]. \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$G(u) = \gamma\sigma \sum_{n=1}^N \left[\overline{c_n} \ln \frac{w_{n+1} - u}{w_n - u} + \frac{R_n^2}{u - c_n} \ln \frac{(w_{n+1} - u)(w_n - c_n)}{(w_n - u)(w_{n+1} - c_n)} \right]. \quad (8.24)$$

Вывод формулы для комплексной индукции магнитного поля с помощью соотношения Пуассона (6.12) предоставляем читателю выполнить самостоятельно.

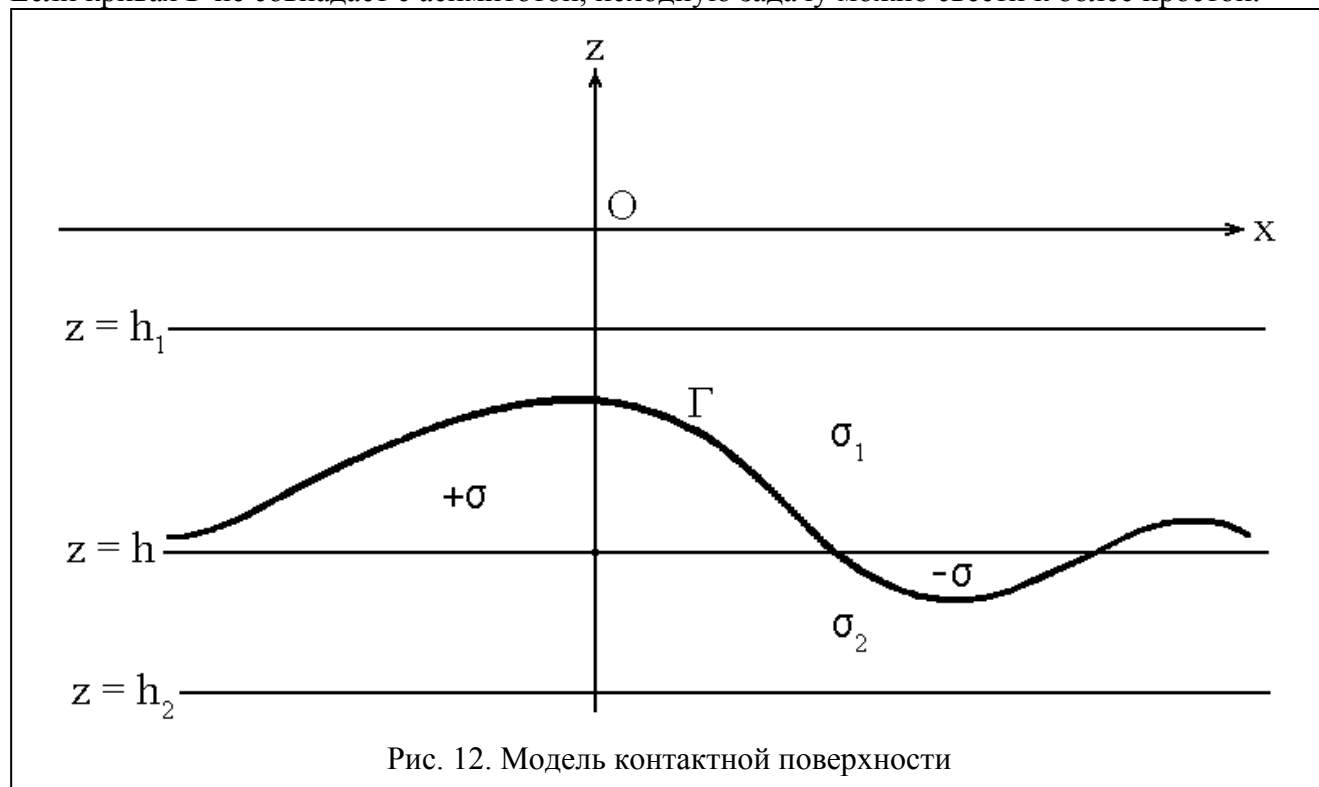
Рассмотренные выше модели относились к замкнутым телам. Важнейшее практическое значение имеют так называемые контактные поверхности, применяемые обычно в структурной геофизике. В.Н.Страхов показал, что и для них весьма удобно применять аппарат теории функций комплексной переменной.

Пусть субгоризонтальная контактная поверхность разделяет два горизонтальных однородных слоя (рис. 12). Верхний слой с плотностью σ_1 расположен между верхней горизонтальной прямой на уровне $z=h_1$ и аналитической кривой Γ , асимптотически стремящейся на бесконечности как слева, так и справа к одной и той же прямой $z=h$. Нижний слой с плотностью σ_2 расположен между кривой Γ и нижней горизонтальной прямой на уровне $z=h_2$. Если бы кривая Γ совпадала с асимптотой $z=h$, то гравитационное поле такого

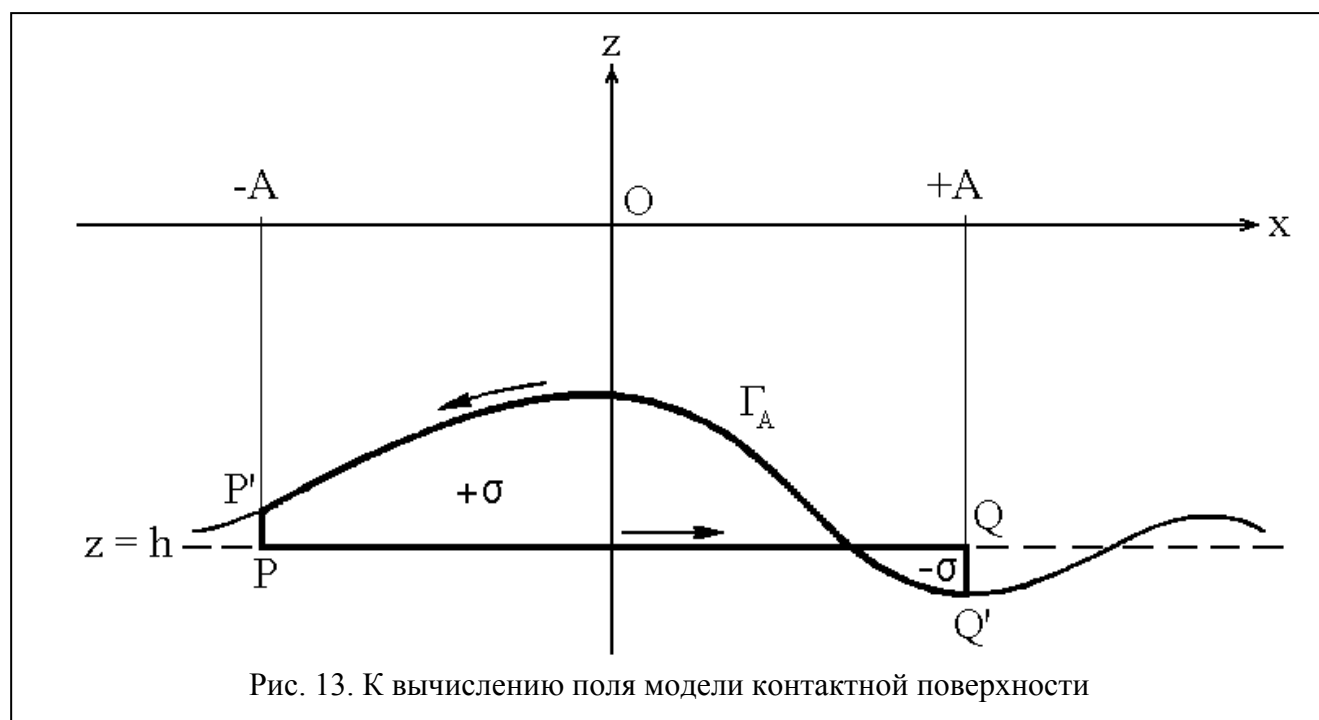
двуслойного объекта было бы постоянным во всем верхнем полупространстве, не зависело бы от глубины залегания слоя и вычислялось бы по формуле, вытекающей из (2.18):

$$g = 2\pi\gamma [\sigma_1 (h_1 - h) + \sigma_2 (h - h_2)]. \quad (8.25)$$

Если кривая Γ не совпадает с асимптотой, исходную задачу можно свести к более простой.



Вычтем поточечно из плотности исходной модели плотность рассмотренной двуслойной модели с горизонтальной контактной поверхностью. Тогда все массы, расположенные выше асимптоты, но ниже кривой Γ приобретут избыточную плотность $\sigma = \sigma_2 - \sigma_1$. Массы, расположенные ниже асимптоты, но выше кривой Γ приобретут избыточную плотность $-\sigma$.



Поле этой более простой модели, очевидно, будет отличаться от поля исходной модели на константу, вычисляемую по формуле (8.25). Для многих интерпретационных задач, где, так или иначе, приходится учитывать постоянный фон, это вообще не имеет принципиального значения.

Выделим часть модели в пределах от $-A$ до $+A$ по горизонтали (рис. 13). Обозначим далее через Γ_A замкнутый контур, состоящий из отрезка PQ прямой $z=h$ между точками с $x=-A$ и $x=+A$, дуги $Q'P'$ кривой Γ в пределах рассматриваемого отрезка и вертикальных отрезков $P'P$ и QQ' . Пусть $G_A(u)$ – комплексная напряженность гравитационного поля избыточных масс, расположенных внутри контура Γ_A . Тогда поле всей модели, очевидно, представит собой следующий предел:

$$G(u) = \lim_{A \rightarrow \infty} G_A(u). \quad (8.26)$$

Чтобы вычислить $G_A(u)$, преобразуем формулу (7.16), прибавив к числителю произвольную аналитическую внутри контура Γ функцию $\phi(w)$. Поскольку по теореме Коши (сравните с формулой (8.14)) во внешних точках

$$\int_{\Gamma} \frac{\phi(w) dw}{w - u} = 0, \quad (8.27)$$

такая добавка не меняет результатов интегрирования, и формула (7.16) примет следующий более общий вид:

$$G(u) = \gamma \sigma \int_{\Gamma} \frac{[\bar{w} + \phi(w)] dw}{w - u}. \quad (8.28)$$

Выберем $\phi(w) = 2ih - w$. Эта функция – аналитическая внутри контура Γ , тогда из (8.28) следует, что $G_A(u)$ может быть представлена в виде:

$$G_A(u) = -\gamma \sigma \int_{\Gamma_A} \frac{w - \bar{w} - 2ih}{w - u} dw. \quad (8.29)$$

Для точек отрезка PQ прямой $z=h$ очевидно $w - \bar{w} - 2ih = 0$, поэтому интеграл по этой части контура Γ_A равен нулю. Интегралы по вертикальным отрезкам $P'P$ и QQ' при $A \rightarrow \infty$ – также нулевые, так как прямая $z=h$ является асимптотой кривой Γ . Интеграл по дуге $Q'P'$ отличается от интеграла по дуге $P'Q'$ только знаком, поэтому после выполнения предельного перехода получим:

$$G(u) = \gamma \sigma \int_{\Gamma} \frac{w - \bar{w} - 2ih}{w - u} dw. \quad (8.30)$$

Подчеркнем, что в этой формуле кривая Γ проходится при интегрировании слева направо. Обозначим превышение точек кривой Γ над асимптотой как $\Delta z(w)$. В комплексных координатах, очевидно,

$$\Delta z(w) = \frac{w - \bar{w}}{2i} - h, \quad (8.31)$$

и комплексную напряженность гравитационного поля контактной поверхности оказывается возможным представить в виде:

$$G(u) = 2\gamma \sigma i \int_{\Gamma} \frac{\Delta z(w)}{w - u} dw. \quad (8.32)$$

Аналогичную формулу для магнитного поля контактной поверхности можно легко получить на основании соотношения Пуассона.

Преобразуем формулу (8.32) таким образом, чтобы с ее помощью стало возможным непосредственно вычислять комплексную напряженность гравитационного поля в точках на самой контактной поверхности Γ . Такие вычисления могут проводиться, например, когда

земная поверхность – не является горизонтальной, и необходимо рассчитывать поправки за рельеф. Обозначим через $\Delta z(u)$ функцию:

$$\Delta z(u) = \frac{u - \bar{u}}{2i} - h \quad (8.33)$$

и воспользуемся известным из теории функций комплексного переменного соотношением:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dw}{w - u} = \begin{cases} 1/2, & u \in S^+ \\ -1/2, & u \in S^- \end{cases} \quad (8.34)$$

Здесь через S^+ обозначена область над кривой Γ , S^- область под ней, а интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Из (8.32) и (8.34) вытекает:

$$G(u) = \begin{cases} 2\gamma\sigma i \int_{\Gamma} \frac{[\Delta z(w) - \Delta z(u)]}{w - u} dw - 2\pi\gamma\sigma\Delta z(u), & u \in S^+ \\ 2\gamma\sigma i \int_{\Gamma} \frac{[\Delta z(w) - \Delta z(u)]}{w - u} dw - 2\pi\gamma\sigma\Delta z(u), & u \in S^- \end{cases} \quad (8.35)$$

но так как

$$G(u) = \frac{\Delta z(w) - \Delta z(u)}{w - u} = \frac{1}{2i} \left(1 - \frac{\overline{w - u}}{w - u} \right) = \frac{1}{2i} (1 - e^{-2i \arg(w-u)}), \quad (8.36)$$

окончательный результат можно представить в виде:

$$G(u) = \begin{cases} \gamma\sigma \int_{\Gamma} (1 - e^{-2i \arg(w-u)}) dw - 2\pi\gamma\sigma\Delta z(u), & u \in S^+ \\ \gamma\sigma \int_{\Gamma} (1 - e^{-2i \arg(w-u)}) dw - 2\pi\gamma\sigma\Delta z(u), & u \in S^- \end{cases} \quad (8.37)$$

Таким образом, теория функций комплексной переменной дает возможность эффективно решать прямую задачу для достаточно сложных двумерных моделей. Решения при этом получаются простыми и легко анализируемыми, что определяет плодотворность их применения при интерпретации гравитационных и магнитных аномалий.

§ 9. Качественное определение формы графиков аномалий от двумерных объектов

Геофизику-интерпретатору весьма важно уметь быстро оценивать форму ожидаемого графика того или иного элемента поля для разных двумерных моделей без проведения расчетов на компьютерах. Гравитационные поля простых моделей представить весьма просто, но и для оценки магнитных полей достаточно освоить всего несколько основных приемов, упрощающих эту операцию. Вначале мы разберем подходы, позволяющие предельно упростить исходную модель, а затем приемы оценки морфологии аномалий от упрощенных моделей. Основное внимание при этом будет уделено магнитным полям.

Декомпозиция исходной модели. Любые сложные модели можно представить в виде совокупности простых. Такой подход называется декомпозицией модели. Его в свою очередь можно подразделить на две части: декомпозиция формы и декомпозиция намагниченности. Теоретической базой данного приема является принцип суперпозиции полей, в соответствии с которым **поля любых объектов не взаимодействуют друг с другом**. В гравиразведке из-за отсутствия поляризации принципиально не взаимодействуют друг с другом и тела. В магниторазведке это не так: при высоких значениях магнитной восприимчивости взаимодействие сильномагнитных тел весьма существенно и сказывается на форме графиков аномального

поля. Особенности намагничения сильномагнитных объектов мы рассмотрим в главе 4, а пока ограничимся рассмотрением аномалий только от слабомагнитных тел. Тогда, поскольку их магнитная восприимчивость - небольшая (как показано в § 4, не превышает $634 \cdot 10^{-5}$ СИ), а эффект размагничивания тел в собственном аномальном поле и в поле соседних тел не проявляется, **для слабомагнитных тел можно с пренебрежимой погрешностью считать, что и они в магнитном поле не взаимодействуют друг с другом.**

Декомпозиция формы состоит в разбиении объекта на простые тела, морфологию аномалий от которых порознь легко определить. Построив примерные графики аномалий от каждого из составляющих объект тел, далее их достаточно графически поточечно сложить и получить итоговый график. При этом важно учитывать, на каких глубинах расположены составляющие тела, поскольку именно глубина залегания при прочих равных условиях определяет амплитуду аномалии. Например, гравитационное поле кругового цилиндра обратно пропорционально глубине его оси, а магнитное - обратно пропорционально квадрату этой глубины.

Декомпозиция намагниченности состоит в ее разложении на компоненты (чаще ортогональные), ориентированные так, чтобы форму аномалии от каждой из компонент (в отсутствии другой компоненты) можно было бы легко определить. Построив примерные графики аномалий, создаваемых телом при намагничении по этим двум направлениям, графическим сложением получают итоговый график.

Замена исходной модели эквивалентной. Один из эффективных приемов упрощения модели основан на том, что форма графиков аномального поля не изменяется, если к ним во всех точках прибавить константу. Постоянные аномалии во всем внешнем полупространстве создает однородное полупространство, поэтому его можно удалять из общей модели, что упрощает задачу, сохраняя неизменными графики аномалий. Точно так же из модели можно удалять однородные горизонтальные пласты. В итоге оказывается возможным разбить весь разрез на горизонтальные слои и в каждом из них учитывать лишь влияние включений. При этом избыточная плотность включения определяется как разность плотностей включения и удаляемого слоя. Намагненность включения определяется как векторная разность исходной намагненности и намагненности удаляемого полупространства или слоя.

На рис. 14 показан пример модели контактной поверхности в магниторазведке, причем подстилающие породы намагничены вертикально вниз. После удаления однородно намагненного полупространства исходная модель заменена на эквивалентное замкнутое включение, намагненное вертикально вверх. Оценить форму графиков аномального поля этой модели гораздо проще.

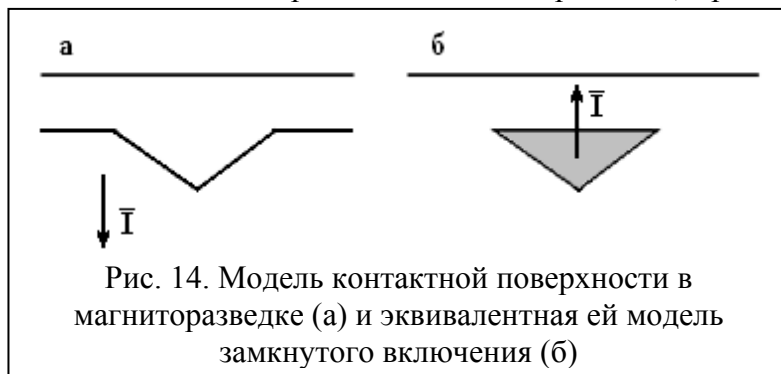


Рис. 14. Модель контактной поверхности в магниторазведке (а) и эквивалентная ей модель замкнутого включения (б)

На рис. 2 в § 1 была показана плотностная модель двумерного объекта, расположенного на границе двуслойной среды, причем плотность верхнего слоя меньше, чем плотность объекта, а плотность подстилающего слоя - больше, чем у него. Переход к эквивалентной модели в данном случае привел к тому, что объект как бы разделился на две части, причем избыточная плотность его верхней части - положительна, а нижней - отрицательна. Фактически гравитационное поле данной модели должно быть близким к полю вертикального диполя, расположенного в его центре: максимум в эпицентре с минимумами по краям, то есть качественно таким же, как магнитная аномалия Z над однородным вертикально намагненным цилиндром (рис. 25).

Применение теоремы вращения для магнитного поля. Применять эту теорему, доказанную в § 6, надо, когда у рассматриваемой модели существует такое направление ее намагничения, для которого решить задачу определения формы магнитной аномалии

значительно проще. Тогда, получив графики компонент аномального поля при этом, более удобном для анализа направлении намагничивания, можно, пользуясь данной теоремой, найти и форму искомых графиков.

Наиболее просто применение теоремы вращения, если угол поворота намагниченности равен 90° . Пусть получены графики вертикальной Z и горизонтальной X компонент аномального магнитного поля объекта при некотором направлении его намагничивания. После поворота вектора намагниченности на 90° **против часовой стрелки** новые компоненты аномального поля Z_1 и X_1 окажутся по теореме вращения связанными со старыми компонентами соотношениями: $Z_1=X$, $X_1=-Z$. После поворота вектора намагниченности на 90° **по часовой стрелке** новые компоненты аномального поля соответственно окажутся связанными со старыми компонентами соотношениями: $Z_1=-X$, $X_1=Z$.

Замена магнитной модели эквивалентным распределением фиктивных магнитных масс. Вместо анализа магнитного поля модели проще и удобнее проводить анализ заменяющего эту модель эквивалентного распределения фиктивных магнитных масс. Этот прием наиболее эффективен при оценке полей однородно намагниченных многоугольников, к которым относятся большинство наиболее употребительных моделей геологических объектов, в том числе пласты, уступы, контактные поверхности и т. п.

Теоретической базой данного приема является следующий факт, доказанный в § 5: магнитная аномалия однородно намагниченного тела совпадает с магнитной аномалией простого слоя фиктивных магнитных масс, распределенных по поверхности этого тела, причем плотность этих масс в каждой точке поверхности равна проекции вектора намагниченности на внешнюю нормаль в данной точке.

Таким образом, исходная модель заменяется на набор простых слоев с разными плотностями. При этом могут встретиться три варианта, показанных на рис. 15. Намагниченная порода во всех вариантах находится слева от границы, соответственно вектор **внешней** нормали направлен направо, то есть во внешнее полупространство. На рис. 15а проекция вектора намагниченности на нормаль положительна, следовательно, на этой границе разделы распределены положительные фиктивные магнитные массы. На рис. 15в проекция вектора намагниченности на нормаль отрицательна, следовательно, на этой границе разделы распределены отрицательные фиктивные магнитные массы. На рис. 15б вектор намагниченности перпендикулярен нормали, следовательно, на этой границе разделы никаких фиктивных магнитных масс нет (плотность их нулевая) и никаких аномалий они не создают.

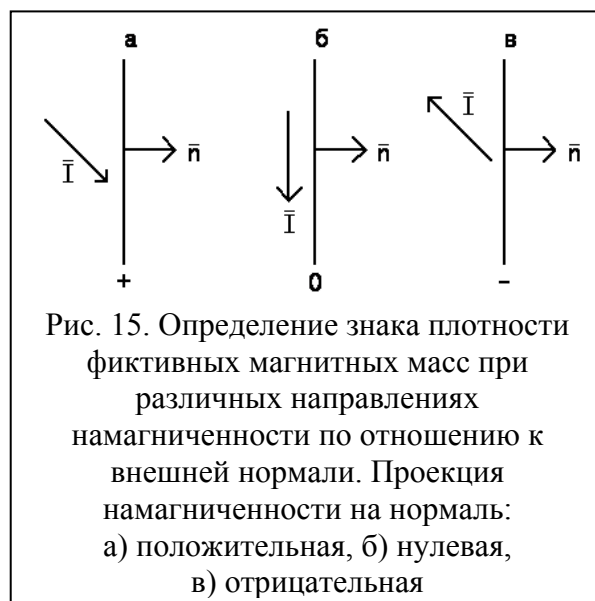


Рис. 15. Определение знака плотности фиктивных магнитных масс при различных направлениях намагниченности по отношению к внешней нормали. Проекция намагниченности на нормаль: а) положительная, б) нулевая, в) отрицательная

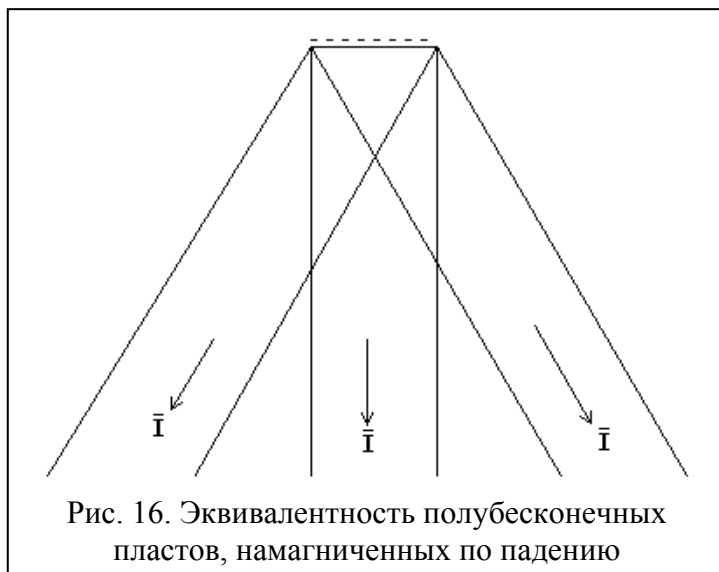


Рис. 16. Эквивалентность полубесконечных пластов, намагниченных по падению

Для моделей крутопадающих пластов с неограниченным распространением на глубину упрощение может быть еще более значительным. На рис. 16 показаны три пласта, верхние кромки которых совпадают, а углы

падения различаются. Каждый из пластов намагничен по падению.

Эквивалентный простой слой отрицательных магнитных масс у каждого из пластов располагается в данном случае только на верхней кромке, следовательно морфологически (без учета амплитуды) аномалии всех трех пластов совпадают. Другими словами, эти пласты создают морфологически эквивалентные магнитные аномалии.

Если развернуть вектор намагниченности этих пластов на 90° , то есть направить его в каждом случае перпендикулярно пласту, из теоремы вращения следует, что эквивалентность аномалий сохранится. Отсюда следует, что **пласты с неограниченным распространением на глубину создают эквивалентные аномалии, если угол между вектором намагничения и пластом одинаков.**

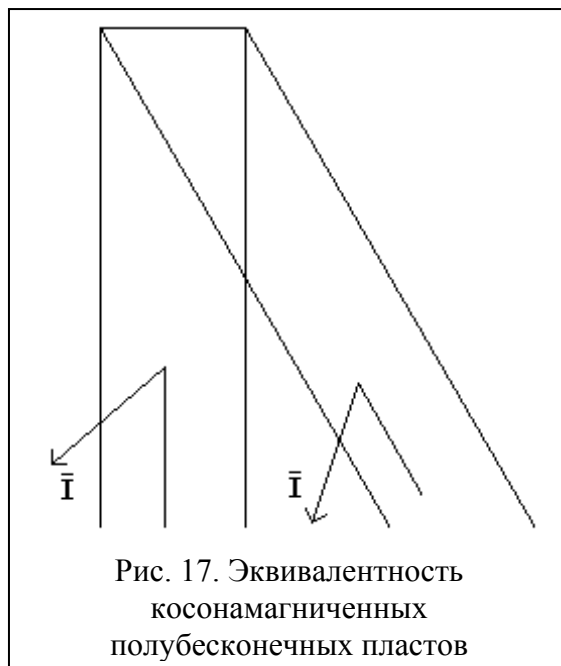


Рис. 17. Эквивалентность косо намагниченных полубесконечных пластов

Таким образом, при оценке формы пластов с неограниченным распространением на глубину их можно заменять эквивалентными вертикальными пластинами, у которых намагниченность направлена под таким же углом к пласту. Сказанное иллюстрирует рис. 17. После данной эквивалентной замены удобно воспользоваться декомпозицией намагниченности, разложив ее на продольную и поперечную по отношению к вертикальному пласту.

Оценка морфологии аномалий. Оценка морфологии гравитационных аномалий достаточно проста, поэтому сосредоточимся на оценке морфологии магнитных полей. Она начинается с определения формы графиков вертикальной Z и горизонтальной X компонент

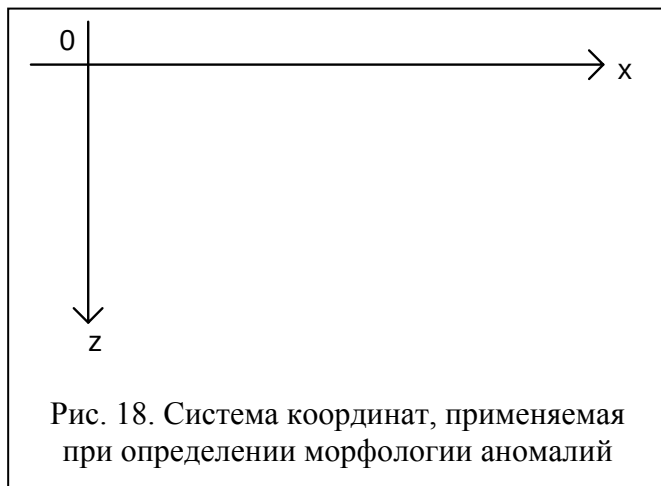


Рис. 18. Система координат, применяемая при определении морфологии аномалий

аномального поля, создаваемого фиктивными магнитными массами. При этом важнейшее значение имеет выбор направления осей принятой декартовой системы координат. При рассмотрении вопросов качественной оценки формы аномалий мы будем пользоваться системой, изображенной на рис. 18. Вертикальная компонента аномального поля Z считается положительной, если направлена вниз, и отрицательной, если направлена вверх. Горизонтальная компонента аномального поля X считается положительной, если направлена вправо, и отрицательной, если направлена влево.

Компоненты Z и X , являются действительной и мнимой частью комплексной индукции аномального поля $T=Z+iX$, представляющей собой для любого объекта аналитическую функцию. Отсюда, в том числе, следует, что они не могут быть одинаковыми или различаться только знаком и т.д. Этот факт надо принимать во внимание при оценке формы их графиков.

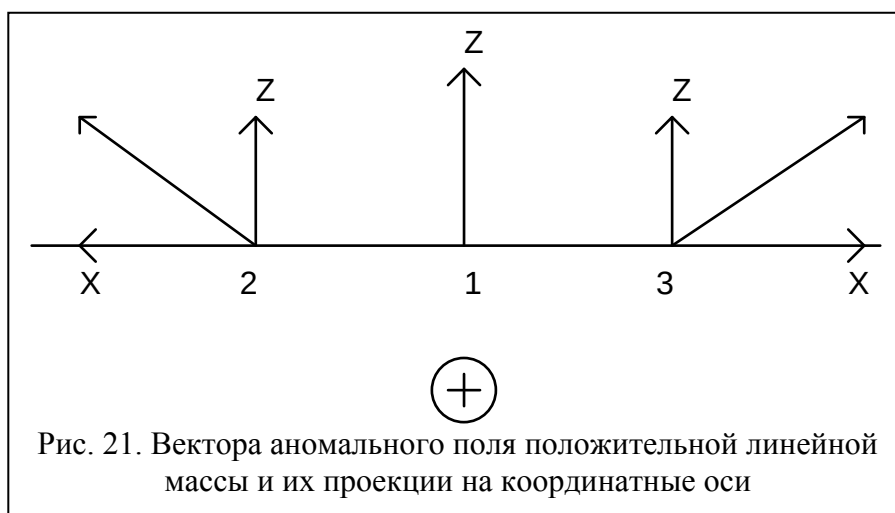
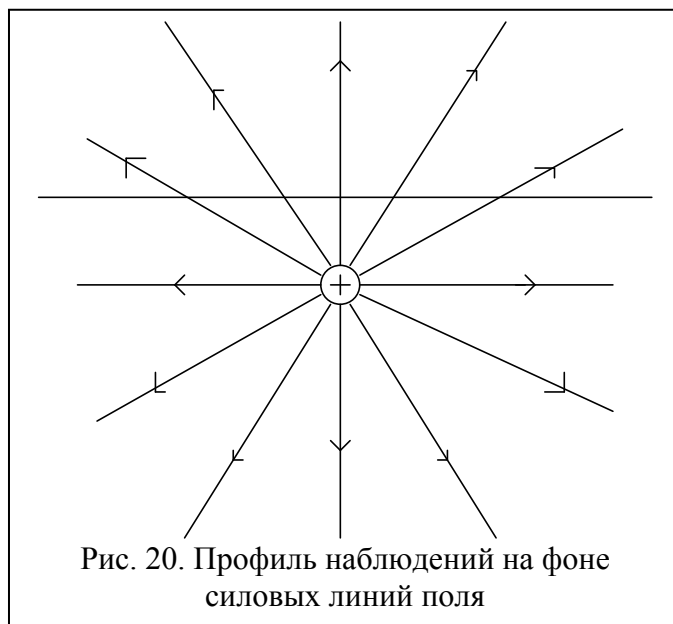
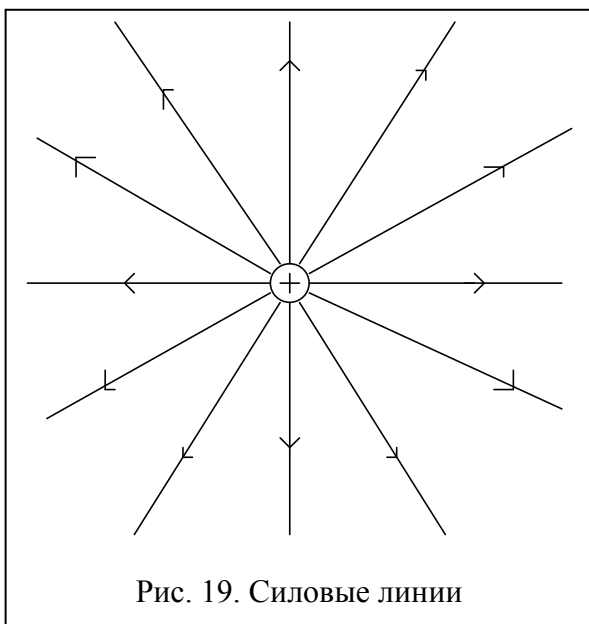
Построение графиков компонент аномального поля с помощью его силовых линий. Силовая линия - это линия, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением поля. Построение графиков с помощью силовых линий сводится к следующим операциям.

- 1) Построение силовых линий от фиктивных магнитных масс в вертикальной плоскости;
- 2) Построение линии профиля;
- 3) Построение касательных к силовым линиям в точках их пересечения с линией профиля (векторов аномального поля);

4) Разложение каждого из векторов на вертикальную и горизонтальную компоненты и оценка величины и знака компонент;

5) Построение графиков Z и X .

Покажем применение этих операций на двух типовых примерах, к которым сводится множество задач: поле линейной массы и поле линейного диполя. На рис. 19 показаны силовые линии поля положительной линейной массы, представляющие собой прямые, исходящие из массы и направленные от нее. Такое поле создает тонкий вертикальный пласт, намагниченный вертикально вверх. Для отрицательной линейной массы силовые линии аналогичны, только направлены они к массе. Проведем горизонтальную линию профиля над массой, в результате получится рис. 20.



Теперь разложим каждый из векторов в точке пересечения с линией профиля на вертикальную и горизонтальную компоненты и определим их знаки. Принципиально достаточно рассмотреть всего три вектора как на рис. 21. В первой точке вектор аномального поля, представляющий касательную к силовой линии, направлен вертикально вверх. В соответствии с принятой системой координат (рис. 18), его вертикальная компонента Z - отрицательна, а горизонтальная компонента $X=0$. Во второй точке и вертикальная, и горизонтальная компоненты аномального поля - отрицательны. В третьей точке вертикальная компонента Z - отрицательна, а горизонтальная компонента X - положительна. При удалении от

массы по профилю на бесконечность обе компоненты аномального поля, естественно, стремятся к нулю.

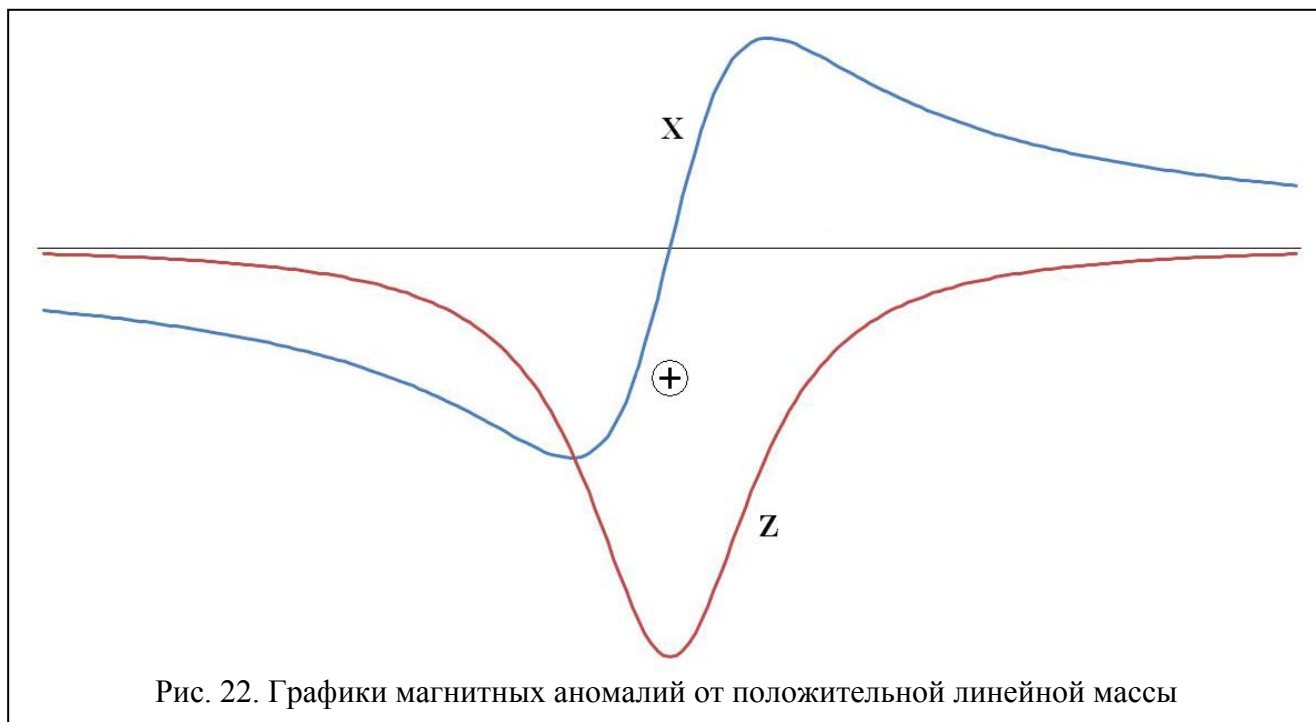


Рис. 22. Графики магнитных аномалий от положительной линейной массы

Полученной информации достаточно для установления морфологии и построения графиков, показанных на рис. 22. График вертикальной компоненты Z - чётно симметричный, а горизонтальной компоненты X - нечётно симметричный. Точного соотношения между амплитудами графиков на качественном уровне получить, очевидно, нельзя, для этого уже надо проводить вычисления. Сравним графики на данном рисунке и на рис. 10 из § 5, где изображены магнитные аномалии над вертикальным и вертикально намагниченным пластом. Поскольку поле над таким пластом практически эквивалентно полю отрицательной линейной массы на его верхней кромке, очевидно, графики имеют одинаковую форму и различаются лишь знаками аномальных полей.

Аномалии типа линейного диполя создают замкнутые изометричные в сечении однородно намагниченные объекты. На рис. 23 показаны эквивалентные простые слои для вертикально намагниченного квадратного цилиндра. На его нижней кромке располагается однородный слой положительных масс, а на верхней - однородный слой отрицательных масс. Фактически это и есть линейный диполь.

Силовые линии диполя начинаются в положительных массах и завершаются в отрицательных, что в итоге дает картину, изображенную на рис. 24.

Если над диполем провести горизонтальную линию профиля и проанализировать направления и знаки компонент векторов поля, касательных к силовым линиям в точках их пересечения с профилем, получатся выводы, приводящие к построению графиков, представленных на рис. 25. График вертикальной компоненты Z - чётно симметричный, а горизонтальной компоненты X - нечётно симметричный. Обратим внимание на то, что на графике вертикальной компоненты максимум над квадратным цилиндром (практически - линейным диполем) обрамляется минимумами, возникающими, когда нижняя кромка вертикально намагниченного объекта расположена на небольшой глубине.



Рис. 23. Эквивалентные фиктивные магнитные массы для квадратного цилиндра

Если намагниченность направить под углом к вертикали - под таким же углом и в том же направлении поворачивается и картина силовых линий, показанная на рис. 24. В итоге во внешних точках вектор поля разворачивается на тот же угол, но в противоположном направлении, что следует и из теоремы вращения для магнитного поля, доказанной в § 6.

Очевидно, линию профиля можно проводить не только над объектом, но и под ним, что соответствует подземным работам. Для качественного анализа графиков магнитных аномалий в скважинах можно проводить соответствующие наклонные и даже вертикальные линии. Приемы качественного анализа при этом остаются теми же.

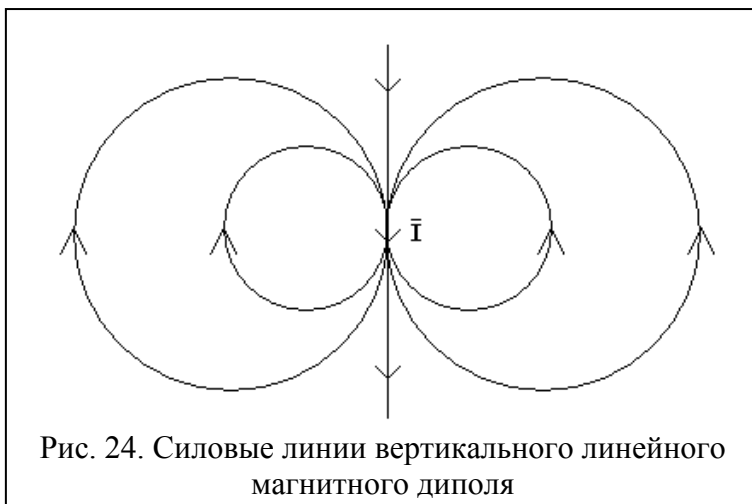


Рис. 24. Силовые линии вертикального линейного магнитного диполя

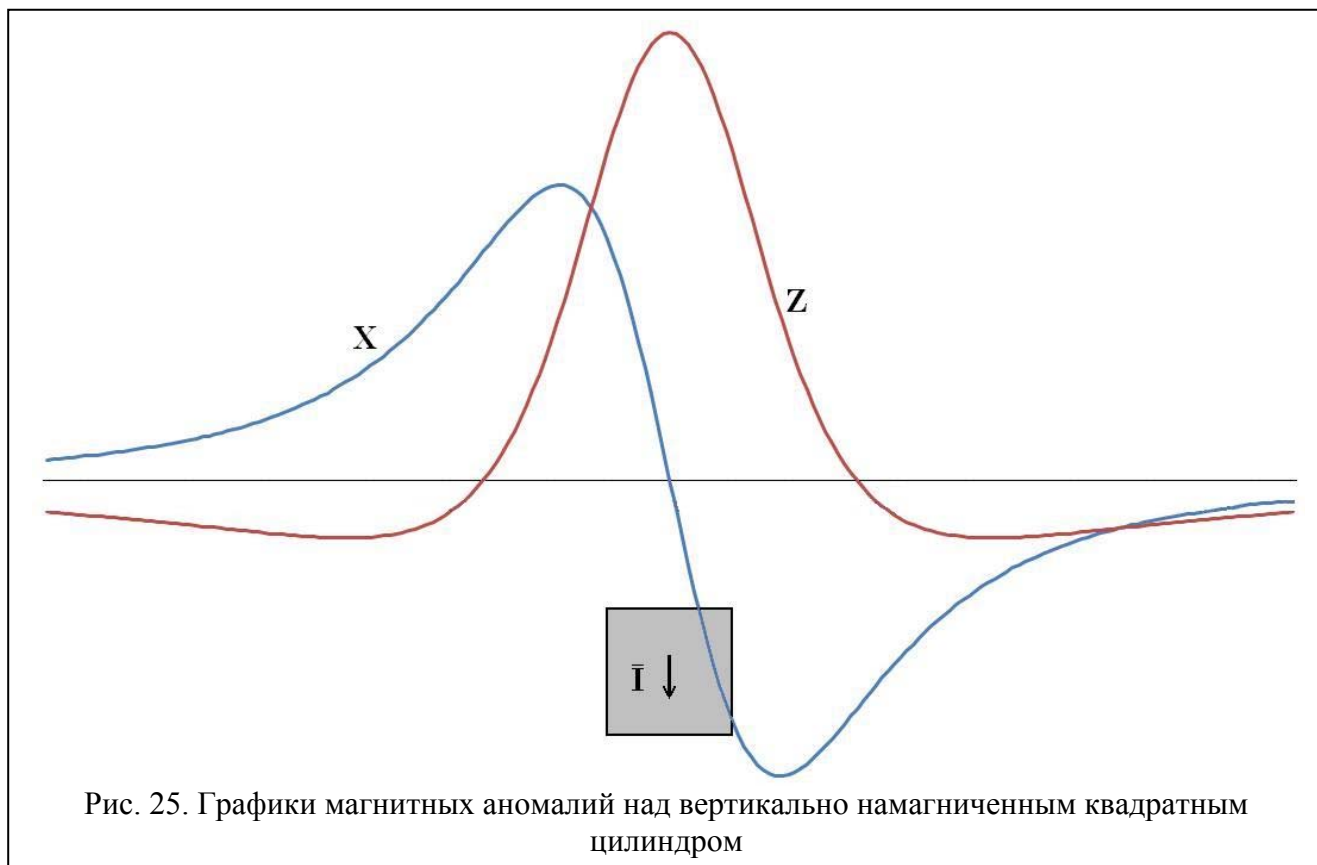


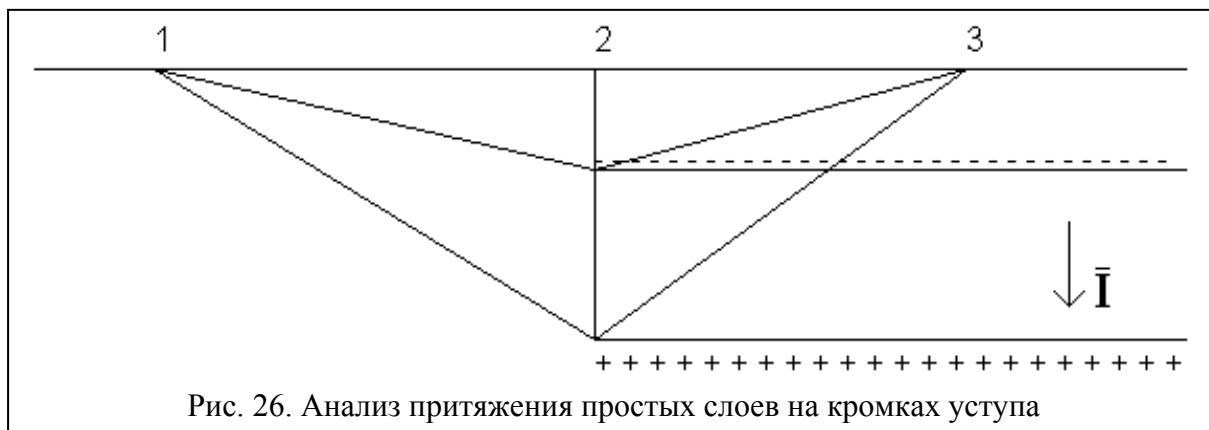
Рис. 25. Графики магнитных аномалий над вертикально намагниченным квадратным цилиндром

Построение графиков компонент аномального поля с помощью поточечного анализа векторов. Зачастую для оценки формы графиков аномалий построение полной картины силовых линий эквивалентного распределения фиктивных магнитных масс не требуется. Оказывается достаточным только построить вектора аномального поля в нескольких точках профиля. Для этого в анализируемую точку мысленно помещают **пробную единичную положительную массу** и рассматривают величину и направление ее притяжения или отталкивания.

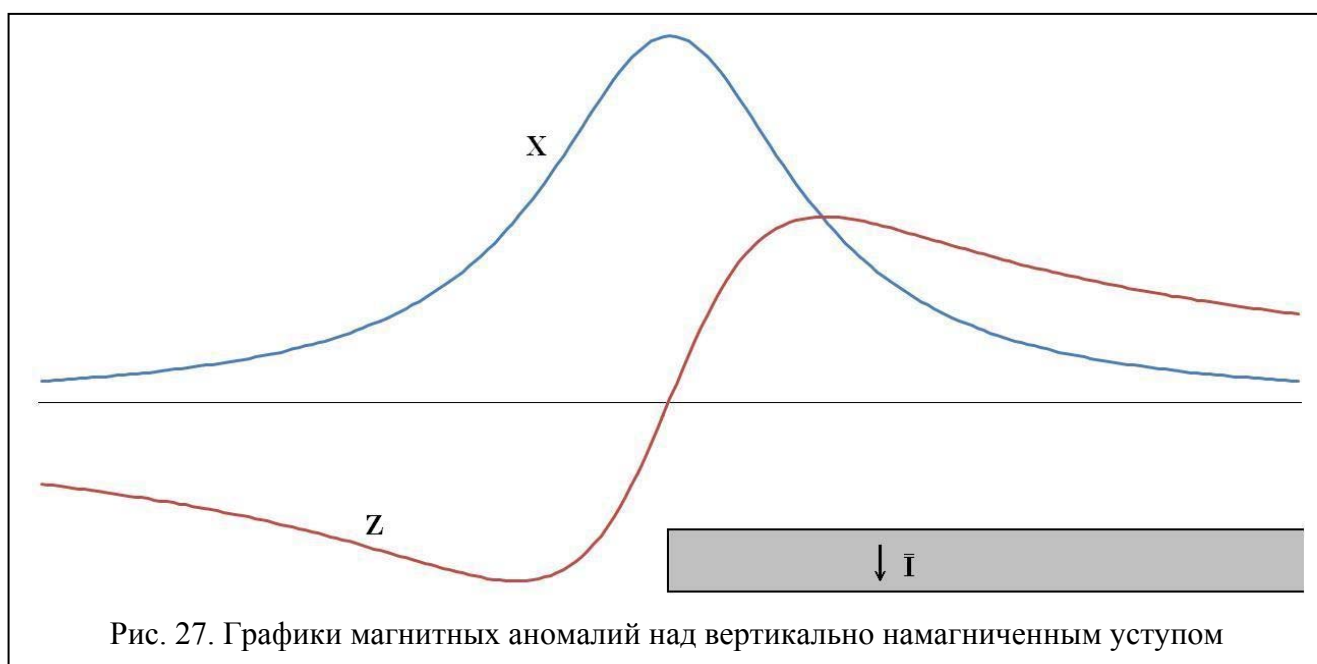
Обратимся вновь к примеру на рис. 21 с положительной линейной массой. К этому рисунку можно прийти и без предварительного построения полной картины силовых линий. Поместим последовательно в три отмеченные точки пробную массу. Поскольку пробная масса

положительна, она отталкивается от анализируемой модели по направлению соединяющей их линии. В итоге данный прием приводит к тому же результату, что и на рис. 21, и, следовательно, к тем же графикам, что и на рис. 22.

При анализе притяжения или отталкивания плоского однородного простого слоя эффективным оказывается анализ угла его видимости из точки наблюдения. Дело в том, что **компонента поля, нормальная к плоскому однородному простому слою, пропорциональна углу его видимости из данной точки**. Для двумерного случая это наиболее наглядно.



Рассмотрим в качестве примера построение графика вертикальной компоненты магнитного поля, создаваемой вертикально намагниченным горизонтальным уступом. Поле этой модели эквивалентно полю двух простых слоев: отрицательного на верхней кромке и положительного - на нижней кромке.



На рис. 26 показаны три точки на профиле наблюдения и углы видимости верхней и нижней кромок из них. Простой слой отрицательных магнитных масс на верхней кромке притягивает положительные пробные массы во всех точках вниз, а простой слой положительных магнитных масс на нижней кромке отталкивает пробные массы в этих же точках вверх. В точке 2 над уступом углы видимости кромок равны, поэтому суммарное их воздействие - нулевое. Угол видимости нижней кромки из точки 1 больше угла видимости верхней кромки, поэтому всюду слева от уступа компонента Z аномального поля отрицательна. Из точки 3 угол видимости верхней кромки больше угла видимости нижней кромки, поэтому всюду справа от уступа

компонента Z аномального поля - положительна. На бесконечности слева и справа поле асимптотически стремится к нулю. В итоге мы приходим к виду графиков аномального поля над вертикально намагниченным уступом, показанным на рис. 27.

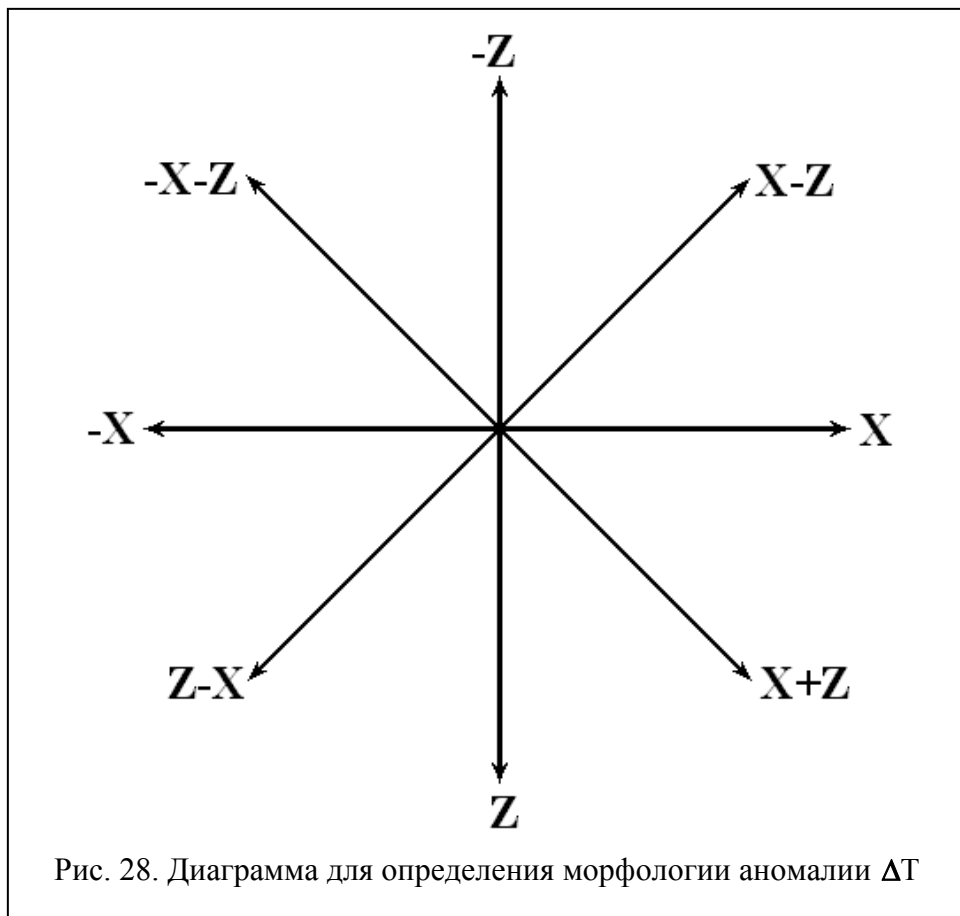
Отметим, что эту же задачу можно было бы решать с применением теоремы вращения, поскольку при горизонтальном намагничении поле этого уступа эквивалентно полю вертикальной пластинки и его легко представить, а затем развернуть намагниченность на 90° .

Построение графика аномалии ΔT . Особенность аномалии ΔT состоит в ее зависимости от нормального геомагнитного поля. Если аномалии вертикальной и горизонтальной компонент аномального поля являются гармоническими функциями и не зависят от района, где проведена магнитная съемка, аномалия ΔT не является гармонической функцией и изменяется в зависимости от местоположения участка съемки.

В случае, когда магнитная аномалия ΔT мала по сравнению с величиной нормального геомагнитного поля, для оценки формы графика наиболее удобно применять представление о гармоническом приближении, рассмотренное в § 1. Гармоническим приближением для ΔT является проекция вектора аномального поля с компонентами Z и X на направление нормального геомагнитного поля $\bar{T}_0$, другими словами, та компонента аномального поля, которая направлена вдоль вектора нормального геомагнитного поля.

Исходными при построении графика ΔT служат графики Z и X . Для перехода к графику ΔT необходимо представить сумму произведений Z и X на соответствующие направляющие косинусы углов между вектором $\bar{T}_0$ и осями координат. В большинстве случаев это также сводится к графическому поточечному сложению (или вычитанию) графиков Z и X . В восьми простейших случаях ориентировки вектора $\bar{T}_0$ характер графика ΔT можно определить с помощью диаграммы, показанной на рис. 28, так как умножение на константу во всех графиках не меняет его формы. Таким образом, при ориентировке $\bar{T}_0$ вертикально вниз график ΔT выглядит так же, как и график Z , а при ориентировке $\bar{T}_0$ вертикально вверх - график ΔT выглядит как график $-Z$ и т.д. Пользуясь приведенной диаграммой легко представить вид графика ΔT и при промежуточных положениях вектора нормального поля.

Изложенные приемы оценки формы графиков применимы тогда, когда не требуется точный анализ аномалий. Детали их формы, очевидно, могут быть получены только после проведения расчетов, но и качественная оценка во многих случаях позволяет



облегчить геологическое истолкование материалов полевых съемок при решении самых разнообразных задач.

Вопросы для самоконтроля

1. Как изменится сила тяжести на поверхности однородного горизонтального кругового цилиндра при увеличении его диаметра в 10 раз и при сохранении плотности?
 - а) никак (24);
 - б) увеличится в 10 раз (27);
 - в) уменьшится в 10 раз (30).
2. Как изменится вертикальный градиент силы тяжести на поверхности однородного горизонтального кругового цилиндра при увеличении его диаметра в 10 раз и при сохранении плотности?
 - а) никак (36);
 - б) увеличится в 10 раз (62);
 - в) уменьшится в 10 раз (88).
3. Как изменится вертикальная компонента аномального магнитного поля на поверхности однородного горизонтального кругового цилиндра при увеличении его диаметра в 10 раз и при сохранении намагниченности?
 - а) никак (39);
 - б) увеличится в 10 раз (48);
 - в) уменьшится в 10 раз (57).
4. Как связаны друг с другом магнитные аномалии ΔT над одинаковыми по форме и магнитной восприимчивости двумерными геологическими объектами широтного простирания, которые индуктивно намагничены в равных по модулю намагничивающих полях, но ориентированных вертикально (как на полюсах) и горизонтально (как на экваторе)?
 - а) совпадают (71);
 - б) являются комплексно сопряженными функциями (72);
 - в) имеют противоположные знаки (73).

Контрольная сумма при правильных ответах – 175.

ГЛАВА 3. РЕШЕНИЕ ПРЯМЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ТРЕХМЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ

§ 10. Гравитационные и магнитные аномалии трехмерных тел

Аномальные поля трехмерных моделей вычисляются путем дифференцирования интегральных соотношений для их потенциалов: (2.8) и (3.35), поскольку в силу (2.2) и (3.9):

$$\vec{g} = \text{grad } W, \quad \vec{B} = -\mu_0 \text{grad } U. \quad (10.1)$$

Принципиально применение этих соотношений дает возможность решения прямых задач для любых объектов. За время развития теории гравиразведки и магниторазведки для некоторых тел выведены десятки принципиально идентичных, но несколько различающихся по виду вычислительных формул. Вместе с тем не все они могут устроить интерпретатора. Одни из этих формул чересчур громоздки и неудобны для программирования на ЭВМ. Другие в силу ряда специфических особенностей позволяют вычислять поле не во всех внешних по отношению к телу точках. Третьи - более универсальны, но требуют при реализации на компьютерах двойной точности представления чисел, что снижает быстродействие программ и т.д. На примере двумерных объектов мы уже убедились в том, что удобный математический аппарат значительно упрощает решение прямых задач. Это ставит задачу вывода формул, дающих возможность наиболее эффективного применения в алгоритмах, реализуемых на компьютерах.

В настоящей главе мы будем пользоваться левой прямоугольной декартовой системой координат, аналогичной той, которая рассматривалась в первой главе. Вместе с тем стандартные обозначения координат: x, y, z или же ξ, η, ζ - применять, вообще говоря, не вполне удобно. В предыдущей главе мы могли упрощать вид аномалий двумерных моделей, используя комплексные координаты. Для трехмерных полей в общем случае столь удобного аппарата, к сожалению, нет, однако, некоторое упрощение могут давать следующие обозначения:

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \\ \xi_1 = \xi, \quad \xi_2 = \eta, \quad \xi_3 = \zeta.$$

Ось x_3 считается направленной вниз. Таким образом, координаты точки расчета поля $a(x_1, x_2, x_3)$, а координаты текущей точки модели - $q(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$.

Во введенных обозначениях потенциал гравитационного поля тела (2.8) выглядит следующим образом:

$$W(x_1, x_2, x_3) = \gamma \int_V \frac{\sigma(\xi_1, \xi_2, \xi_3) dV}{\left[\sum_{k=1}^3 (\xi_k - x_k)^2 \right]^{1/2}}. \quad (10.2)$$

Формулы для компонент аномального гравитационного поля в декартовой системе координат приводились ранее в первой главе: (2.9), (2.10). Во введенных же обозначениях вместо трех формул можно записать одну общую:

$$W_{x_i}(x_1, x_2, x_3) = \gamma \int_V \frac{\sigma(\xi_1, \xi_2, \xi_3) (\xi_i - x_i) dV}{\left[\sum_{k=1}^3 (\xi_k - x_k)^2 \right]^{3/2}}. \quad (10.3)$$

Вторые производные гравитационного потенциала удобно рассматривать в виде квадратной матрицы из 9 элементов, часто называемой тензором вторых производных, элемент ij которой представляет собой производную

$$W_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Эта матрица фактически является матрицей Гессе функции (10.2) в точке наблюдения. Матрица Гессе - симметрична, и ее внедиагональные (при $i \neq j$) элементы вычисляются по следующей формуле:

$$W_{x_i x_j}(x_1, x_2, x_3) = \gamma \int_V \frac{\sigma(\xi_1, \xi_2, \xi_3) (\xi_i - x_i) (\xi_j - x_j) dV}{\left[\sum_{k=1}^3 (\xi_k - x_k)^2 \right]^{5/2}}. \quad (10.4)$$

Диагональные элементы имеют несколько более сложный вид:

$$W_{x_i x_i}(x_1, x_2, x_3) = \gamma \int_V \frac{\sigma(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \left[3(\xi_i - x_i)^2 - \sum_{k=1}^3 (\xi_k - x_k)^2 \right] dV}{\left[\sum_{k=1}^3 (\xi_k - x_k)^2 \right]^{5/2}}. \quad (10.5)$$

Обратим внимание на то, что след этой матрицы (сумма ее диагональных элементов) тождественно равен нулю для любой модели V . Этот факт является следствием гармоничности гравитационного потенциала, так как сумма диагональных элементов - это лапласиан потенциала. Таким образом, из 9 элементов матрицы Гессе вторых производных гравитационного потенциала независимыми фактически являются лишь 5, что упрощает вычисления. Из пяти основных вторых производных могут быть получены все остальные, в том числе и комбинации - такие как кривизна $W_{\Delta} = W_{yy} - W_{xx}$.

Весьма удобно применение матричных представлений и при решении прямой задачи магниторазведки. В первой главе приводилось соотношение Пуассона между гравитационным и магнитным потенциалами однородных и однородно намагниченных тел: (3.40). Рассмотрим соотношение между магнитной индукцией и гравитационным потенциалом таких тел. Для этого воспользуемся вторым выражением в формуле (10.1):

$$\vec{B}(a) = -\mu_0 \text{grad } U(a) = -\mu_0 \overset{a}{\nabla} U(a) \quad (10.6)$$

и применим его к соотношению Пуассона, в результате чего получим:

$$\vec{B}(a) = \frac{\mu_0}{4\pi\gamma\sigma} \overset{a}{\nabla} \left(\vec{I} \cdot \overset{a}{\nabla} W(a) \right). \quad (10.7)$$

Воспользуемся известной формулой векторного исчисления, раскрывающей градиент скалярного произведения векторов:

$$\text{grad} (\vec{P} \cdot \vec{Q}) = \frac{d\vec{P}}{d\vec{r}} \vec{Q} + \frac{d\vec{Q}}{d\vec{r}} \vec{P} + [\vec{P} \times \text{rot } \vec{Q}] + [\vec{Q} \times \text{rot } \vec{P}]. \quad (10.8)$$

Здесь производные $d\vec{P}/d\vec{r}$ и $d\vec{Q}/d\vec{r}$ представляют собой линейные операторы (аффиноры), которые целесообразно выражать в матричной форме. Если, например, $\vec{P} = (X, Y, Z)$, а $\vec{r} = (x, y, z)$, то

$$\frac{d\vec{P}}{d\vec{r}} = \begin{pmatrix} \frac{dX}{dx} & \frac{dY}{dx} & \frac{dZ}{dx} \\ \frac{dX}{dy} & \frac{dY}{dy} & \frac{dZ}{dy} \\ \frac{dX}{dz} & \frac{dY}{dz} & \frac{dZ}{dz} \end{pmatrix}. \quad (10.9)$$

Применяя (10.8) к (10.7), и учитывая, что намагниченность рассматриваемого объекта постоянна, а $\text{rot grad } \mathbf{W}(\mathbf{a}) \equiv \mathbf{0}$, получим:

$$\bar{\mathbf{B}}(\mathbf{a}) = \frac{\mu_0}{4\pi\gamma\sigma} \frac{d\bar{\mathbf{g}}(\mathbf{a})}{d\bar{L}_{qa}} \bar{\mathbf{I}}. \quad (10.10)$$

Аффино́р $d\bar{\mathbf{g}}(\mathbf{a})/d\bar{L}_{qa}$ фактически представляет собой матрицу Гессе функции гравитационного потенциала в точке наблюдения, что и определяет удобство применения матричных записей при анализе магнитных аномалий.

Рассмотрим применение матричного аппарата при решении прямой задачи магниторазведки для шара. Пусть центр шара с намагниченностью $\bar{\mathbf{I}}$ расположен в точке $\mathbf{q}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. В соответствии с (10.10) магнитная индукция данного шара в точке $\mathbf{a}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ будет определяться следующим матричным выражением:

$$\bar{\mathbf{B}}(\mathbf{a}) = \frac{\mu_0}{4\pi} D_3(\mathbf{q}, \mathbf{a}) \bar{\mathbf{I}}, \quad (10.11)$$

где V - объем шара, а $D_3(\mathbf{q}, \mathbf{a})$ - симметричная матрица третьего порядка. Ее удобнее выразить через более простую матрицу $T_3(\mathbf{q}, \mathbf{a})$, элементы t_{ij} которой вычисляются по формуле:

$$t_{ij} = (\xi_i - x_i)(\xi_j - x_j), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (10.12)$$

Тогда

$$D_3(\mathbf{q}, \mathbf{a}) = \frac{1}{L_{qa}^3} \left(\frac{3}{L_{qa}^2} T_3(\mathbf{q}, \mathbf{a}) - E \right), \quad (10.13)$$

где E - единичная матрица третьего порядка, то есть

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (10.14)$$

а

$$L_{qa} = \left[\sum_{k=1}^3 (\xi_k - x_k)^2 \right]^{1/2}. \quad (10.15)$$

Напомним, что в матрице $D_3(\mathbf{q}, \mathbf{a})$ фактически вычисляются не 9, а только 5 элементов, поскольку она симметрична, а сумма ее диагональных элементов равна нулю. Таким образом, матричная запись дает возможность компактного и удобного представления аномалий компонент индукции магнитного поля. Для вычисления аномалий ΔT шара надо определить аномалии компонент и воспользоваться формулой (1.1) или, если аномалии малы по сравнению с нормальным геомагнитным полем, то ее гармоническим приближением (1.2). При этом иметь в виду, что вектор магнитной индукции $\bar{\mathbf{B}}$ аномального поля, вычисляемый по формуле (10.11), имеет компоненты X , Y и Z . Напомним, что относительная погрешность вычисления ΔT в гармоническом приближении составляет около 1%.

§ 11. Аномальные поля однородного материального стержня

Во второй главе были получены выражения, описывающие аномальные поля материальной пластинки. Аналогичная трехмерная модель материального стержня также широко применяется при аппроксимации геологических объектов, к тому же, выражения для полей стержня оказываются весьма полезными при рассмотрении более сложных моделей.

Материальный стержень - это модель, аппроксимирующая тонкий цилиндр конечного простира́ния. Если плотность цилиндра обозначить σ , а площадь его поперечного сечения - S , то линейную плотность аппроксимирующего материального стержня $\sigma_{\text{лин}}$ можно вычислить по формуле:



$$\sigma_{\text{лин}} = \lim_{S \rightarrow 0} \sigma S. \quad (11.1)$$

Рассмотрим вначале стержень, совпадающий с частью оси x_1 , как показано на рис. 29. Координаты его концов обозначим ξ_{11} и ξ_{12} . В принятой системе координат потенциал притяжения в точке $a(x_1, x_2, x_3)$ будет вычисляться по следующей формуле, получаемой из (10.2) после подстановки (11.1):

$$W(x_1, x_2, x_3) = \gamma \sigma_{\text{лин}} \int_{\xi_{11}}^{\xi_{12}} \frac{d\xi_1}{\sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + x_2^2 + x_3^2}}. \quad (11.2)$$

Обозначим расстояния между точкой расчета потенциала и концами отрезка как R_1 и R_2 :

$$R_1 = \sqrt{(\xi_{11} - x_1)^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad R_2 = \sqrt{(\xi_{12} - x_1)^2 + x_2^2 + x_3^2}. \quad (11.3)$$

тогда, интегрируя (11.2) с помощью подстановки Эйлера, можно представить потенциал стержня в следующем виде:

$$W(x_1, x_2, x_3) = \gamma \sigma_{\text{лин}} \ln \frac{\xi_{12} - x_1 + R_2}{\xi_{11} - x_1 + R_1}. \quad (11.4)$$

Преобразуем данное выражение с помощью простого, но весьма эффективного приема, предложенного В.Н.Страховым. Для этого введем обозначения:

$$a = \xi_{12} - x_1 + R_2, \quad b = \xi_{11} - x_1 + R_1 \quad (11.5)$$

и вычислим разность $a-b$:

$$\begin{aligned} a - b &= \xi_{12} - \xi_{11} + R_2 - R_1 = \xi_{12} - \xi_{11} + \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_1 + R_2} = \\ &= \frac{(R_1 + R_2)(\xi_{12} - \xi_{11}) + (\xi_{12} - x_1)^2 - (\xi_{11} - x_1)^2}{R_1 + R_2} = \\ &= \frac{\xi_{12} - \xi_{11}}{R_1 + R_2} (R_1 + R_2 + \xi_{12} - \xi_{11} - 2x_1) = \frac{L}{R_1 + R_2} (a + b). \end{aligned}$$

Здесь $L = \xi_{12} - \xi_{11}$ - длина стержня. Таким образом,

$$c = \frac{a - b}{a + b} = \frac{L}{R_1 + R_2}.$$

Легко проверить, что

$$\frac{a}{b} = \frac{(a + b) + (a - b)}{(a + b) - (a - b)} = \frac{1 + c}{1 - c},$$

с учетом чего из (11.4) следует

$$W(x_1, x_2, x_3) = \gamma \sigma_{\text{лин}} \ln \frac{R_1 + R_2 + L}{R_1 + R_2 - L}. \quad (11.6)$$

Полученная формула не изменяется при любом повороте системы координат, поэтому справедлива не только для стержня, расположенного как на рис. 29, но и для любого материального стержня длиной L .

Дифференцируя (11.6), можно получить выражения для компонент аномального гравитационного поля и матрицу вторых производных. В частности i -ая компонента гравитационного поля стержня, концы которого расположены в точках с координатами $\xi_1(\xi_{11}, \xi_{21}, \xi_{31})$ и $\xi_2(\xi_{12}, \xi_{22}, \xi_{32})$, может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} W_{x_i}(x_1, x_2, x_3) &= \gamma \sigma_{\text{лин}} \left[-\frac{1}{R_1 + R_2 + L} \left(\frac{\xi_{i1} - x_i}{R_1} + \frac{\xi_{i2} - x_i}{R_2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{R_1 + R_2 - L} \left(\frac{\xi_{i1} - x_i}{R_1} + \frac{\xi_{i2} - x_i}{R_2} \right) \right] = \\ &= \frac{2\gamma L \sigma_{\text{лин}}}{(R_1 + R_2 + L)(R_1 + R_2 - L)} \left(\frac{\xi_{i1} - x_i}{R_1} + \frac{\xi_{i2} - x_i}{R_2} \right). \end{aligned} \quad (11.7)$$

Получение элементов матрицы Гессе предоставляем читателю. Укажем лишь на то, что дифференцирование для получения диагональных элементов отличается от дифференцирования для внедиагональных элементов. С помощью матрицы Гессе уже легко вывести выражения для компонент магнитного поля стержня с линейной намагниченностью:

$$\vec{I}_{\text{лин}} = \lim_{S \rightarrow 0} \vec{I}S, \quad (11.8)$$

используя соотношение (10.10).

§ 12. Гравитационные аномалии многоугольной горизонтальной пластинки

В гравиразведке при решении разнообразных геологических задач, связанных с контактными поверхностями, в качестве аппроксимирующих элементов применяются многоугольные горизонтальные пластинки (диски). Дело в том, что геологическая информация о форме поверхности обычно задается в виде карт изогипс. Изогипсы - это линии пересечения поверхности набором горизонтальных плоскостей, расположенных друг от друга на равном расстоянии Δh , называемом сечением изогипс. В связи с этим данный объект естественно аппроксимировать набором горизонтальных дисков, мощность которых Δh , а форма определяется соответствующими изогипсами. Аппроксимируя каждую из изогипс многоугольником, получают модель в виде набора наложенных друг на друга многоугольных горизонтальных пластинок. Решение прямой задачи для такой модели получали М.Тальвани и М.Юинг, Г.Я.Голидра и многие другие геофизики. В данном разделе мы будем следовать решению, данному В.Н.Страховым.

При $\Delta h \ll h$ каждая из пластинок фактически является однородным простым слоем с поверхностной плотностью $\sigma_{\text{пов}} = \sigma \Delta h$. Из формулы (10.2) следует, что потенциал такого простого слоя будет определяться следующим выражением:

$$W(a) = \gamma \sigma_{\text{пов}} \int_S \frac{dS}{L_{qa}}. \quad (12.1)$$

Пусть единственная многоугольная пластинка расположена на глубине $h = |\xi_3 - x_3|$. Рассчитаем ее гравитационный потенциал, преобразовав интеграл (12.1) по площади S в интеграл по контуру многоугольной пластинки - Γ . Для этого удобно воспользоваться второй формулой Грина, которая в частном случае может быть записана следующим образом:

$$\int_S \Delta U(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = \int_{\Gamma} \frac{\partial U(\xi_1, \xi_2)}{\partial n} dl, \quad (12.2)$$

причем внешняя нормаль $\mathbf{n}$ расположена в плоскости пластинки. Удобство применения данной формулы связано с тем, что при $\mathbf{h}=\text{const}$, когда в операторе Лапласа нет надобности дифференцировать по ξ_3 :

$$\frac{1}{L_{qa}} = \Delta \left[L_{qa} - |\xi_3 - x_3| \ln (L_{qa} + |\xi_3 - x_3|) \right]. \quad (12.3)$$

Это соотношение можно проверить непосредственным вычислением. С учетом (12.2) и (12.3) потенциал пластинки, ограниченной контуром Γ , представляется в виде:

$$W(a) = \gamma \sigma_{\text{пов}} \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial L_{qa}}{\partial n} - |\xi_3 - x_3| \frac{\partial}{\partial n} \ln (L_{qa} + |\xi_3 - x_3|) \right] dl. \quad (12.4)$$

Для получения потенциала многоугольной пластинки интеграл по контуру Γ надо представить в виде суммы интегралов по отдельным сторонам данного многоугольника. Поскольку в формулу (12.4) входят дифференциалы по внешней нормали $\mathbf{n}$, вычисление вклада в потенциал W от каждой из N сторон естественно проводить во вспомогательной системе координат, повернутой вокруг оси ξ_3 таким образом, чтобы одна из координатных осей совпала с нормалью. Рассмотрим k -ую сторону многоугольника Γ_k (рис. 30). Повернем горизонтальные оси координат так, чтобы ось x_{k1} (ξ_{k1}) была направлена по внешней нормали к стороне, а ось x_{k2} (ξ_{k2}) была бы параллельна этой стороне. Тогда на Γ_k

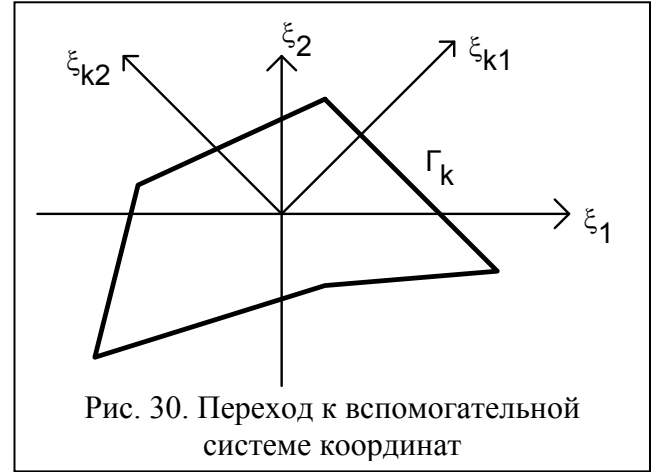


Рис. 30. Переход к вспомогательной системе координат

$$dl = d\xi_{k2}, \quad \partial/\partial n = \partial/\partial \xi_{k1},$$

и суммарный потенциал пластинки можно записать в следующем виде:

$$W(x) = \gamma \sigma_{\text{пов}} \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} \left[\frac{\partial R_k}{\partial \xi_{k1}} - h \frac{\partial}{\partial \xi_{k1}} \ln (R_k + h) \right] d\xi_{k2}, \quad (12.5)$$

где $h = |\xi_3 - x_3|$ и

$$R_k = \sqrt{(\xi_{k1} - x_{k1})^2 + (\xi_{k2} - x_{k2})^2 + h^2}. \quad (12.6)$$

Легко определить, что

$$\frac{\partial R_k}{\partial \xi_{k1}} = \frac{\xi_{k1} - x_{k1}}{R_k} \quad (12.7)$$

и

$$h \frac{\partial}{\partial \xi_{k1}} \ln (R_k + h) = (\xi_{k1} - x_{k1}) \left(\frac{1}{R_k} - \frac{1}{R_k + h} \right). \quad (12.8)$$

С учетом обхода границы многоугольника при интегрировании в положительном направлении (против часовой стрелки) обозначим координату ξ_{k2} начала отрезка L_k как $\xi_{k2н}$. Тогда соответствующая координата конца отрезка $\xi_{k2к} = \xi_{k2н} + L_k$, где L_k - его длина, и выражение для потенциала примет вид:

$$W(x) = \gamma \sigma_{\text{пов}} \sum_{k=1}^N (\xi_{k1} - x_{k1}) \int_{\xi_{k2n}}^{\xi_{k2n} + L_k} \frac{d\xi_{k2}}{R_k + h}. \quad (12.9)$$

Интеграл в этом выражении берется с помощью подстановки Эйлера. Учитывая преобразование, аналогичное сделанному при решении прямой задачи для материального стержня, получим в итоге следующую формулу, определяющую гравитационный потенциал многоугольной горизонтальной пластинки:

$$W(x) = \gamma \sigma_{\text{пов}} \left[\sum_{k=1}^N (\xi_{k1} - x_{k1}) \ln \frac{R_{kн} + R_{kk} + L_k}{R_{kн} + R_{kk} - L_k} - 2h \sum_{k=1}^N \arctg \frac{(\xi_{k1} - x_{k1})(D_{2k} - D_{1k})}{D_{1k} D_{2k} + (\xi_{k1} - x_{k1})^2} \right], \quad (12.10)$$

где в соответствии с (12.6) $R_{kн} = \sqrt{(\xi_{k1н} - x_{k1})^2 + (\xi_{k2н} - x_{k2})^2 + h^2}$ – расстояние от начальной точки отрезка Γ_k до точки x , $R_{kk} = \sqrt{(\xi_{k1к} - x_{k1})^2 + (\xi_{k2к} - x_{k2})^2 + h^2}$ – расстояние от конечной точки отрезка до точки x ,

$$D_{1k} = R_{kн} + h + \xi_{k2н} - x_{k2}$$

и

$$D_{2k} = R_{kk} + h + \xi_{k2н} - x_{k2} + L_k.$$

Вычисление вертикальной (нормальной к пластинке) и горизонтальных (параллельных пластинке) компонент гравитационного поля удобнее проводить по-разному из-за специфического горизонтального положения пластинки. Для непосредственного практического применения в рассматриваемой задаче нужна лишь вертикальная компонента. Горизонтальные же компоненты понадобятся при рассмотрении задачи для многогранника.

Для получения силы тяжести продифференцируем (12.1) по x_3 :

$$g(a) = \frac{\partial W(a)}{\partial x_3} = \gamma \sigma_{\text{пов}} \int_S \frac{\xi_3 - x_3}{L_{qa}^3} dS. \quad (12.11)$$

Умножим числитель и знаменатель в этой формуле на $\xi_3 - x_3$. Так как $\xi_3 - x_3 = \text{const}$ – это глубина пластинки, ее можно вынести за знак интеграла, в результате чего (12.11) можно преобразовать:

$$g(a) = \frac{\gamma \sigma_{\text{пов}}}{\xi_3 - x_3} \int_S \frac{(\xi_3 - x_3)^2}{L_{qa}^3} dS. \quad (12.12)$$

Представление вертикальной производной в такой форме удобно, поскольку, аналогично тому, как это было сделано при вычислении потенциала пластинки, при $\xi_3 - x_3 = \text{const}$ можно воспользоваться следующим легко проверяемым соотношением:

$$\frac{(\xi_3 - x_3)^2}{L_{qa}^3} = |\xi_3 - x_3| \Delta \left[\ln (L_{qa} + |\xi_3 - x_3|) \right]. \quad (12.13)$$

Подставляя (12.13) в (12.12) и применяя формулу Грина (12.2), получим:

$$g(a) = \gamma \sigma_{\text{пов}} \text{sign} (\xi_3 - x_3) \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial}{\partial n} \ln (L_{qa} + |\xi_3 - x_3|) \right] dl. \quad (12.14)$$

Здесь

$$\text{sign} (\xi_3 - x_3) = \frac{|\xi_3 - x_3|}{\xi_3 - x_3} \quad (12.15)$$

знаковая функция, равная (+1) при $\xi_3 > x_3$ и (-1) при $\xi_3 < x_3$. Перейдя к текущей системе координат, связанной с k -ым отрезком, и повторив преобразования как при вычислении потенциала, можно привести (12.14) в тех же обозначениях к следующему виду:

$$\frac{\partial W(a)}{\partial x_3} = \gamma \sigma_{\text{пов}} \sum_{k=1}^N (\xi_{k1} - x_{k1}) \int_{\xi_{k2н}}^{\xi_{k2н} + L_k} \left(\frac{1}{R_k} - \frac{1}{R_k + h} \right) d\xi_{k2}. \quad (12.16)$$

Вычислив интеграл с помощью подстановки Эйлера, получим для вертикальной производной потенциала горизонтальной пластинки (для ускорения силы тяжести):

$$\frac{\partial W(a)}{\partial x_3} = 2\gamma \sigma_{\text{пов}} \text{sign}(\xi_3 - x_3) \sum_{k=1}^N \arctg \frac{(\xi_{k1} - x_{k1})(D_{2k} - D_{1k})}{D_{1k} D_{2k} + (\xi_{k1} - x_{k1})^2}. \quad (12.17)$$

Обозначения в этой формуле такие же, как и в (12.10).

Горизонтальные производные потенциала многоугольной пластинки целесообразно вычислять путем преобразования площадного интеграла в контурный с помощью первой формулы Грина. Эту формулу (7.9) мы уже применяли во второй главе. Для производной по x_1 можно записать:

$$\frac{\partial W(a)}{\partial x_1} = \gamma \sigma_{\text{пов}} \frac{\partial}{\partial x_1} \int_S \frac{dS}{L_{qa}}. \quad (12.18)$$

Как было отмечено в первой главе, $\nabla = -\nabla$, поэтому (12.18) можно представить и так:

$$\frac{\partial W(a)}{\partial x_1} = -\gamma \sigma_{\text{пов}} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \int_S \frac{dS}{L_{qa}}. \quad (12.19)$$

Применяя формулу Грина (7.9), преобразуем интеграл по площади в интеграл по контуру:

$$\frac{\partial W(a)}{\partial x_1} = -\gamma \sigma_{\text{пов}} \int_{\Gamma} \frac{d\xi_2}{L_{qa}}. \quad (12.20)$$

а его - в сумму интегралов по сторонам многоугольной пластинки:

$$\frac{\partial W(a)}{\partial x_1} = -\gamma \sigma_{\text{пов}} \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} \frac{d\xi_2}{L_{qa}}. \quad (12.21)$$

Перейдем для вычисления интеграла в систему координат, связанную с k -ой стороной многоугольной пластинки, в результате чего криволинейный интеграл второго типа в формуле (12.21) преобразуется в интеграл первого типа, аналогичный тому, который вычислялся при определении потенциала материального стержня. Обозначим через c_k косинус угла между осями ξ_2 и ξ_{k2} . Тогда с учетом вышесказанного

$$\frac{\partial W(x)}{\partial x_1} = -\gamma \sigma_{\text{пов}} \sum_{k=1}^N c_k \ln \frac{R_{кн} + R_{кк} + L_k}{R_{кн} + R_{кк} - L_k}. \quad (12.22)$$

Аналогично для другой горизонтальной производной

$$\frac{\partial W(x)}{\partial x_2} = -\gamma \sigma_{\text{пов}} \sum_{k=1}^N d_k \ln \frac{R_{кн} + R_{кк} + L_k}{R_{кн} + R_{кк} - L_k}, \quad (12.23)$$

где d_k - косинус угла между осями ξ_1 и ξ_{k1} .

§ 13. Аномальные поля произвольного многогранника

Наиболее общей моделью, применяемой при моделировании трехмерных геологических объектов, является произвольный многогранник. С помощью набора многогранников удобно аппроксимировать как замкнутые тела, так и контактные поверхности, особенно в магнитных задачах. Последнее утверждение следует из результатов § 5, где было показано, что аномальное поле однородно намагниченного тела эквивалентно полю простого слоя фиктивных магнитных масс, распределенных на поверхности этого тела, причем в каждой точке поверхности плотность масс равна проекции намагниченности на внешнюю нормаль в данной точке. У многогранника каждая из граней имеет однородную плотность эквивалентного простого слоя, так как во всех точках этой грани внешние нормали параллельны друг другу. Таким образом, магнитные аномалии многогранника представляют собой сумму аномальных полей, создаваемых его гранями. Аномальное поле каждой из граней при этом может определяться как притяжение многоугольной пластинки с однородной поверхностной плотностью, равной проекции намагниченности на внешнюю нормаль к данной грани.

В соответствии с изложенным, для расчета магнитного поля однородно намагниченного многогранника можно воспользоваться формулами, полученными в предыдущем параграфе для гравитационного поля горизонтального многоугольной пластинки. При этом для расчета поля каждой из граней необходимо вводить текущую систему координат, ось x_3 (ξ_3) которой направлена вдоль внутренней нормали к данной грани.

Переход от одной трехмерной системы координат к другой осуществляется с помощью матрицы перехода $\mathbf{M}$. Для i -ой грани координаты x и ξ пересчитываются в координаты $x^{(i)}$ и $\xi^{(i)}$ по формулам:

$$x^{(i)} = \mathbf{M}_i x, \quad \xi^{(i)} = \mathbf{M}_i \xi. \quad (13.1)$$

Соответственно, обратный переход производится по формулам

$$x = \mathbf{M}_i^{-1} x^{(i)}, \quad \xi = \mathbf{M}_i^{-1} \xi^{(i)}, \quad (13.2)$$

где $\mathbf{M}_i^{-1}$ - обратная по отношению к $\mathbf{M}_i$ матрица. Матрицы перехода являются ортогональными и обладают одним весьма важным свойством, упрощающим вычисления. Дело в том, что матрица, обратная к ортогональной, совпадает с транспонированной к ней, поэтому в формулах (13.2) вместо $\mathbf{M}_i^{-1}$ можно подставить $\mathbf{M}_i^T$:

$$x = \mathbf{M}_i^T x^{(i)}, \quad \xi = \mathbf{M}_i^T \xi^{(i)}. \quad (13.3)$$

Элементы матрицы перехода представляют собой направляющие косинусы углов между старыми и новыми осями координат. В рассматриваемом случае матрица перехода будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{M}_i = \begin{pmatrix} \cos[x_1^{(i)}, x_1] & \cos[x_1^{(i)}, x_2] & \cos[x_1^{(i)}, x_3] \\ \cos[x_2^{(i)}, x_1] & \cos[x_2^{(i)}, x_2] & \cos[x_2^{(i)}, x_3] \\ \cos[x_3^{(i)}, x_1] & \cos[x_3^{(i)}, x_2] & \cos[x_3^{(i)}, x_3] \end{pmatrix}. \quad (13.4)$$

Определитель этой матрицы равен единице.

В текущей системе координат для вычисления компонент вектора аномального магнитного поля необходимо знать проекцию вектора намагниченности на внешнюю нормаль к данной грани. Для этого также используется формула типа (13.1):

$$\bar{\mathbf{I}}^{(i)} = \mathbf{M}_i \bar{\mathbf{I}}, \quad (13.5)$$

причем плотность эквивалентного простого слоя на этой грани в силу противоположной направленности оси $x_3^{(i)}$ и внешней нормали окажется равной $-\mathbf{I}_3^{(i)}$. Тогда с учетом соотношения Пуассона (3.40) компоненты аномального поля в текущей системе координат будут вычисляться по следующим формулам, вытекающим из (12.22), (12.23) и (12.17):

$$X^{(i)} = -\frac{\mu_0 I_3^{(i)}}{4\pi} \sum_{k=1}^N c_k \ln \frac{R_{kH} + R_{kK} + L_k}{R_{kH} + R_{kK} - L_k}, \quad (13.6)$$

$$Y^{(i)} = -\frac{\mu_0 I_3^{(i)}}{4\pi} \sum_{k=1}^N d_k \ln \frac{R_{kH} + R_{kK} + L_k}{R_{kH} + R_{kK} - L_k}, \quad (13.7)$$

$$Z^{(i)} = \frac{\mu_0 I_3^{(i)}}{4\pi} \text{sign}(\xi_3 - x_3) \sum_{k=1}^N \arctg \frac{(\xi_{k1} - x_{k1})(D_{2k} - D_{1k})}{D_{1k} D_{2k} + (\xi_{k1} - x_{k1})^2}. \quad (13.8)$$

Обозначения здесь соответствуют приведенным в (12.10). Для обратного перехода в исходную систему координат компоненты $X^{(i)}$, $Y^{(i)}$ и $Z^{(i)}$ надо пересчитать в X , Y и Z по формуле типа (13.3). Обратим внимание на то, что данные формулы легко программируются на ЭВМ.

Формулы, описывающие гравитационные аномалии многогранника, получить несколько сложнее. Найдем вначале гравитационный потенциал однородного многогранника:

$$W(a) = \gamma \sigma \int_V \frac{dV}{L_{qa}}. \quad (13.9)$$

Для этого воспользуемся следующим соотношением:

$$\frac{1}{L_{qa}} = \frac{1}{2} \Delta^\xi L_{qa}, \quad (13.10)$$

которое легко проверить непосредственным вычислением. Значок ξ над оператором Лапласа означает, что дифференцирование проводится по координатам ξ (а не по x). Тогда

$$W(a) = \frac{\gamma \sigma}{2} \int_V \Delta^\xi L_{qa} dV \quad (13.11)$$

и, применяя формулу Грина, получим:

$$W(a) = \frac{\gamma \sigma}{2} \int_S \frac{\partial L_{qa}}{\partial n} dS. \quad (13.12)$$

Этот интеграл естественно представить в виде суммы интегралов по граням. Обозначив число граней как Q , перепишем (13.12) в следующем виде:

$$W(a) = \frac{\gamma \sigma}{2} \sum_{i=1}^Q \int_{S_i} \frac{\partial L_{qa}}{\partial n_i} dS. \quad (13.13)$$

Для вычисления интеграла по i -ой грани перейдем, как и в магнитной задаче, в текущую систему координат, ось x_3 (ξ_3) которой направлена вдоль внутренней нормали к этой грани. В такой системе

$$\frac{\partial L_{qa}}{\partial n_i} = \frac{\partial L_{qa}}{\partial \xi_3^{(i)}} = \frac{\xi_3^{(i)} - x_3^{(i)}}{L_{qa}} \quad (13.14)$$

и (13.13) примет вид:

$$W(a) = \frac{\gamma \sigma}{2} \sum_{i=1}^Q [\xi_3^{(i)} - x_3^{(i)}] \int_{S_i} \frac{dS}{L_{qa}}. \quad (13.15)$$

В последней формуле интеграл аналогичен (12.1) - тому, который вычислялся в предыдущем параграфе для многоугольной пластинки. Его окончательный вид легко получить из формулы (12.10), переписав ее во вспомогательной системе координат, связанной с i -ой гранью рассматриваемого многогранника. Сделать это предоставляем читателю.

Для получения компонент гравитационного поля надо продифференцировать выражение для потенциала многогранника. Как показал В.Н.Страхов, удобно применить для этого вспомогательное преобразование. Пусть необходимо вычислить следующий интеграл:

$$\int_V \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi_k} p(\xi) dV. \quad (13.16)$$

Возьмем его по частям, применив к интегралу с произведением функций **f** и **p** - формулу Грина. Тогда (13.16) примет вид:

$$\int_V \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi_k} p(\xi) dV = - \int_V \frac{\partial p(\xi)}{\partial \xi_k} f(\xi) dV + \int_S f(\xi) p(\xi) \cos(n, \xi_k) dS. \quad (13.17)$$

Производная потенциала многогранника по координате x_k может быть, как было указано выше, представлена и в виде производной по ξ_k :

$$\frac{\partial W(a)}{\partial x_k} = \gamma \sigma \int_V \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{L_{qa}} \right) dV = - \gamma \sigma \int_V \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\frac{1}{L_{qa}} \right) dV. \quad (13.18)$$

Применяя к (13.18) формулу (13.17) при **p=1**, получим:

$$\frac{\partial W(a)}{\partial x_k} = - \gamma \sigma \int_S \cos(n, \xi_k) \frac{dS}{L_{qa}}. \quad (13.19)$$

Далее, как и при вычислении потенциала, представим интеграл в виде суммы интегралов по граням и перейдем во вспомогательную систему координат, связанную с **i**-ой гранью. В результате, очевидно, получим:

$$\frac{\partial W(a)}{\partial x_k} = - \gamma \sigma \sum_{i=1}^Q \cos(\xi_3^{(i)}, \xi_k) \int_{S_i} \frac{dS}{L_{qa}}. \quad (13.20)$$

В этой формуле, как и в выражении для потенциала (13.15), присутствует интеграл, вычислявшийся ранее при выводе формулы (12.10).

Таким образом, применив (12.10), можно получить выражения для компонент гравитационного поля однородного многогранника. Общность получаемых выражений для различных элементов гравитационного и магнитного полей многогранника делает выведенные формулы удобными для программирования на компьютерах. При этом следует заметить, что автоматическая параметризация многогранников произвольной формы невозможна, в чем легко убедиться из простого примера. Дело в том, что через 4 точки в пространстве, не расположенные в единой плоскости, можно двояко провести смежные треугольные грани (рис. 31). Какой из вариантов реализуется в интересующем интерпретатора многограннике, компьютер принципиально не может различить, поэтому параметризация произвольных многогранников – это удел человека-интерпретатора, который можно лишь облегчить, предлагая удобную систему визуализации многогранных моделей. В частных случаях, например, для выпуклых многогранников, параметризация может выполняться и автоматически по координатам заданных в произвольном порядке вершин.

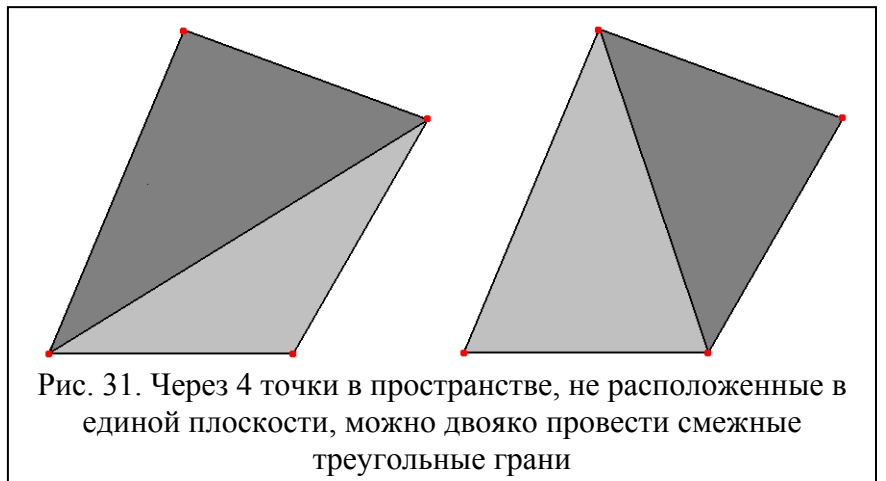


Рис. 31. Через 4 точки в пространстве, не расположенные в единой плоскости, можно двояко провести смежные треугольные грани

Вопросы для самоконтроля

1. Справедливо ли соотношение Пуассона для неоднородных по плотности и намагниченности геологических объектов?
 - а) не справедливо (24);
 - б) справедливо для слабомагнитных объектов (27);
 - в) справедливо всегда (30).
2. Как связаны друг с другом магнитные аномалии на меридиональном профиле, проходящем над центром куба: аномалия Z при однородном намагничении куба по направлению оси x и аномалия X того же куба, однородно намагниченного по направлению оси z ?
 - а) никак (36);
 - б) имеют противоположные знаки (62);
 - в) совпадают (88).
3. Какую по форме магнитную аномалию ΔT создает на меридиональном профиле, проходящем над его центром, однородно и индуктивно намагниченный куб в средних широтах северного полушария Земли?
 - а) максимум, сопровождаемый северным индукционным минимумом (39);
 - б) максимум, сопровождаемый южным индукционным минимумом (48);
 - в) максимум (57).
4. Какую по форме магнитную аномалию ΔT создает на меридиональном профиле, проходящем над его центром, однородно и индуктивно намагниченный куб в средних широтах южного полушария Земли?
 - а) максимум, сопровождаемый северным индукционным минимумом (71);
 - б) максимум, сопровождаемый южным индукционным минимумом (72);
 - в) максимум (73).

Контрольная сумма при правильных ответах – 223.

ГЛАВА 4. РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ МАГНИТОРАЗВЕДКИ ДЛЯ СИЛЬНОМАГНИТНЫХ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

§ 14. Интегральные уравнения для намагниченности

В § 4 первой главы было показано, что для сильномагнитных геологических объектов, т.е. таких, которые сложены горными породами и рудами с магнитной восприимчивостью, превышающей $634 \cdot 10^{-5}$ СИ, при решении прямой задачи магниторазведки необходим корректный учет эффекта размагничивания. Во второй и третьей главах настоящего пособия рассматривались однородно намагниченные модели, допустимые лишь при изучении слабомагнитных объектов. Сильномагнитные же тела, отличающиеся по форме от эллипсоидов, даже будучи однородными по магнитным свойствам, в однородном поле намагничиваются неоднородно, причем намагниченность в различных точках этих тел может различаться в $\mu=1+\kappa$ раз.

В связи с этим основной проблемой при решении прямой задачи магниторазведки для сильномагнитных объектов является расчет намагниченности в них. Этот расчет проводится путем решения интегральных уравнений, описывающих распределение намагниченности по объему изучаемого тела. Для однородных по магнитным свойствам тел вместо распределения намагниченности можно искать плотности эквивалентных простых либо двойных слоев. С этой целью также выведены соответствующие интегральные уравнения. Ниже рассматриваются объемные интегральные уравнения для намагниченности, поскольку с их помощью можно решать прямую задачу магниторазведки как для однородных, так и для неоднородных по магнитным свойствам геологических объектов. Кроме того, эти уравнения дают возможность изучения намагничивания тел как в однородном геомагнитном поле, так и в неоднородных полях источников, применяемых в методах искусственного подмагничивания. Несмотря на то, что уравнения выводятся для изотропных тел, аналогичный подход может быть распространен и на анизотропные по магнитной восприимчивости объекты, в том числе и на железистые кварциты, с которыми связана основная часть мировых запасов железа.

Пусть объект V , который в общем случае может состоять из нескольких тел, помещен в первичное поле $\vec{H}^{\text{прв}}$. В соответствии с принятой моделью намагничивания (3.2) в произвольной точке a этого объекта намагниченность может быть вычислена по формуле:

$$\vec{I}(a) = \kappa(a) \vec{H}(a) + \vec{I}_n(a). \quad (14.1)$$

Напряженность магнитного поля здесь является векторной суммой первичного и вторичного (аномального или размагничивающего) полей. Учитывая это, (14.1) можно представить в следующем виде:

$$\vec{I}(a) = \kappa(a) [\vec{H}^{\text{прв}}(a) + \vec{H}^{\text{втр}}(a)] + \vec{I}_n(a). \quad (14.2)$$

Магнитная восприимчивость объекта κ , его естественная остаточная намагниченность $\vec{I}_n$, как и первичное поле, полагаются здесь в общем случае неоднородными. Обозначим через $\vec{I}_0$ первичную намагниченность - ту, которая была бы у данного объекта без учета размагничивания:

$$\vec{I}_0(a) = \kappa(a) \vec{H}^{\text{прв}}(a) + \vec{I}_n(a), \quad (14.3)$$

тогда вместо (14.2) можно записать

$$\vec{I}(a) = \vec{I}_0(a) + \kappa(a) \vec{H}^{\text{втр}}(a). \quad (14.4)$$

Вторичное поле объекта определяется его намагниченностью и, как следует из (3.9) и (3.35), может быть представлено в виде следующего интеграла по объему:

$$\vec{H}^{\text{втр}}(a) = \frac{1}{4\pi} \nabla^a \int_V \left(\vec{I}(q) \nabla^a \frac{1}{L_{qa}} \right) dV. \quad (14.5)$$

Обратим внимание на то, что при $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{a}$ $\mathbf{L}_{qa} \rightarrow \mathbf{0}$, и интеграл в этой точке имеет особенность (сингулярность), что запрещает менять местами дифференцирование и интегрирование. Подставляя (14.5) в (14.4), получим:

$$\bar{\mathbf{I}}(\mathbf{a}) = \bar{\mathbf{I}}_0(\mathbf{a}) + \frac{\kappa(\mathbf{a})}{4\pi} \nabla^a \int_V \left(\bar{\mathbf{I}}(\mathbf{q}) \nabla^a \frac{1}{L_{qa}} \right) dV. \quad (14.6)$$

Это соотношение представляет собой интегральное уравнение для намагниченности. Поскольку неизвестная функция $\bar{\mathbf{I}}$ в этом уравнении находится как под знаком интеграла, так и отдельно в левой его части, а известная функция $\bar{\mathbf{I}}_0$ выступает в качестве слагаемого, то данное уравнение является интегральным уравнением Фредгольма второго рода.

Интегральное уравнение (14.6) применялось для расчета магнитных полей И.И.Пеккером, Р.В.Шарма, В.В.Соболевым и В.Т.Белоголовым и другими исследователями. Для численного решения данного уравнения предлагалось разбить изучаемый объект на совокупность малых тел, например, многогранников, каждый из которых в силу своей малости считается намагничивающимся однородно. Тогда интеграл в (14.6) можно заменить суммой, в результате чего интегральное уравнение сводится к системе линейных алгебраических уравнений. Если общее число элементарных аппроксимирующих тел равно $\mathbf{M}$, то для $\mathbf{k}$ -го тела в векторной форме

$$\bar{\mathbf{I}}_k = \bar{\mathbf{I}}_{0k} + \frac{\kappa_k}{4\pi} \sum_{j=1}^M \nabla \left(\bar{\mathbf{I}}_j \nabla \frac{1}{L_{jk}} \right) \mathbf{V}_j. \quad (14.7)$$

Данное уравнение, будучи расписано по компонентам, эквивалентно трем линейным алгебраическим уравнениям. Таким образом, при разбиении изучаемого объекта на $\mathbf{M}$ элементов, интегральное уравнение (14.6) сводится к системе $3\mathbf{M}$ линейных алгебраических уравнений с $3\mathbf{M}$ неизвестными. Легко подсчитать, что при аппроксимации объекта всего 1000 элементами и отведении 4 байт на каждое из чисел в памяти ЭВМ, только для хранения матрицы этой системы в оперативной памяти требуется $4 \cdot 3000 \cdot 3000 = 36$ мегабайт. Реальные геологические объекты требуют при аппроксимации значительно больше аппроксимирующих элементов, что наталкивается на ограниченность технических возможностей компьютеров.

Требования к объему памяти при решении интегрального уравнения (14.6) можно было бы сократить, если перейти к решению системы методом последовательных приближений и перевычислять элементы матрицы на каждой итерации. Однако это значительно увеличивает время вычислений, а при очень больших магнитных восприимчивостях может из-за наличия упомянутой особенности в интеграле привести и к тому, что итерационный процесс станет расходящимся. Для преодоления указанных недостатков необходимо преобразовать уравнение (14.6).

Выделим для этого малый шар $\mathbf{V}_a$ с центром в точке $\mathbf{a}$. Тогда уравнение (14.6) преобразуется к виду:

$$\bar{\mathbf{I}}(\mathbf{a}) = \bar{\mathbf{I}}_0(\mathbf{a}) + \frac{\kappa(\mathbf{a})}{4\pi} \nabla^a \int_{V_a} \left(\bar{\mathbf{I}}(\mathbf{q}) \nabla^a \frac{1}{L_{qa}} \right) dV + \frac{\kappa(\mathbf{a})}{4\pi} \nabla^a \int_{V-V_a} \left(\bar{\mathbf{I}}(\mathbf{q}) \nabla^a \frac{1}{L_{qa}} \right) dV. \quad (14.8)$$

Так как шар $\mathbf{V}_a$ - мал, его можно считать намагниченным однородно. При этом, учитывая, что коэффициент размагничивания шара $\mathbf{N} = 1/3$, получим на основании (3.27):

$$\frac{1}{4\pi} \nabla^a \int_{V_a} \left(\bar{\mathbf{I}}(\mathbf{q}) \nabla^a \frac{1}{L_{qa}} \right) dV = -\frac{1}{3} \bar{\mathbf{I}}(\mathbf{a}). \quad (14.9)$$

Подставим (14.9) в (14.8):

$$\bar{I}(a) = \bar{I}_0(a) - \frac{\kappa(a)}{3} \bar{I}(a) + \frac{\kappa(a)}{4\pi} \nabla^a \int_{V-V_a} \left(\bar{I}(q) \nabla^a \frac{1}{L_{qa}} \right) dV. \quad (14.10)$$

Приведя подобные члены, получим

$$\bar{I}(a) = \frac{1}{1 + \frac{\kappa(a)}{3}} \left[\bar{I}_0(a) + \frac{\kappa(a)}{4\pi} \nabla^a \int_{V-V_a} \left(\bar{I}(q) \nabla^a \frac{1}{L_{qa}} \right) dV \right]. \quad (14.11)$$

Поскольку в результате выделения шара V_a особенность (сингулярность) под интегралом ликвидирована, операции дифференцирования и интегрирования можно теперь поменять местами:

$$\bar{I}(a) = \frac{1}{1 + \frac{\kappa(a)}{3}} \left[\bar{I}_0(a) + \frac{\kappa(a)}{4\pi} \int_{V-V_a} \nabla^a \left(\bar{I}(q) \nabla^a \frac{1}{L_{qa}} \right) dV \right]. \quad (14.12)$$

Выражение под интегралом здесь фактически является напряженностью поля шара с центром в точке q . Градиент данного скалярного произведения векторов мы уже вычисляли в § 10. На основании формулы (10.11) можно представить полученное интегральное уравнение в следующем окончательном виде:

$$\bar{I}(a) = \frac{3}{3 + \kappa(a)} \left(\bar{I}_0(a) + \frac{\kappa(a)}{4\pi} \int_{V-V_a} D_3(q, a) \bar{I}(q) dV \right), \quad (14.13)$$

где $D_3(q, a)$ - матрица, определяемая по формуле (10.13).

Для двумерных объектов, принимая во внимание, что коэффициент размагничивания кругового цилиндра в направлении, перпендикулярном его оси, составляет $N=1/2$, можно получить аналогичное уравнение:

$$\bar{I}(a) = \frac{2}{2 + \kappa(a)} \left(\bar{I}_0(a) + \frac{\kappa(a)}{4\pi} \int_{S-S_a} D_2(q, a) \bar{I}(q) dS \right). \quad (14.14)$$

Здесь симметричная матрица второго порядка $D_2(q, a)$ характеризует поле в точке a , создаваемое круговым цилиндром с осью, проходящей через точку q , и выражается в виде:

$$D_2(q, a) = \frac{2}{L_{qa}^2} \left(\frac{2}{L_{qa}^2} T_2(q, a) - E \right). \quad (14.15)$$

где E - единичная матрица второго порядка, а $T_2(q, a)$ - также симметричная матрица второго порядка, элементы которой t_{ij} вычисляются по формуле:

$$t_{ij} = [x_i(q) - x_i(a)][x_j(q) - x_j(a)], \quad i, j = 1, 2. \quad (14.16)$$

Интегральные уравнения (14.13) и (14.14) не содержат особенностей под интегралом и могут решаться методом последовательных приближений. При этом особое внимание следует обращать на соблюдение эквивалентности данных уравнений исходным (в трехмерном случае (14.6)), так как, вообще говоря, практически никакой геологический объект не представляет собой совокупности непересекающихся шаров (или круговых цилиндров).

§ 15. Численное решение интегральных уравнений для намагниченности

Для расчета магнитных аномалий сильномагнитных геологических объектов необходимо иметь эффективный численный метод выведенных интегральных уравнений. С этой целью изучаемый объект надо аппроксимировать совокупностью одинаковых непересекающихся элементов достаточно малого размера, чтобы считать каждый из элементов намагничивающимся однородно как в первичном поле, так и в аномальных полях других элементов.

При аппроксимации объекта в силу специфики выведенных уравнений требуется применение изометричных элементов, заполняющих пространство без промежутков. В двумерном случае таковыми могут служить квадраты и правильные шестиугольники, а в трехмерном - кубы и додекаэдры. Формулы, описывающие аномальные поля этих тел, как можно было убедиться выше, относительно сложны. Значительной экономии машинного времени при вычислениях можно добиться, если рассчитывать поля изометричных элементов по существенно более простым формулам для равновеликих шаров или (в двумерном случае) для круговых цилиндров. Однако, такой подход требует применения определенных приемов, дающих возможность сохранить эквивалентность решаемого интегрального уравнения исходному.

Если поля элементов вычислять по формулам для вписанных шаров или круговых цилиндров, то оптимальными для аппроксимации следует признать в трехмерном случае - додекаэдры, а в двумерном - шестиугольники. Именно для них, заполняющих пространство без промежутков, вписанные шары и круги создают плотнейшую упаковку. Для них отношение объема элемента к объему вписанного шара, или, соответственно, отношение площадей в двумерном случае - меньше, нежели для кубов и квадратов. Вместе с тем аппроксимация кубами или квадратами более технологична, поэтому ниже мы будем применять именно кубические и квадратные элементы.

Рассмотрим возможность вычисления полей кубических элементов по формулам для вписанного шара. Поместим центр куба с длиной ребра 2 м в начало координат. Объем куба, очевидно, составит 8 м^3 . Если в аппроксимирующей конструкции кубы расположены вплотную друг к другу, то центр соседнего куба может оказаться не ближе, чем в 2 метрах от начала координат. Рассчитаем компоненты напряженности поля кубика, расположенного в начале координат, в центрах близрасположенных элементов, при вертикальной намагниченности 1 А/м. Результаты вычислений сведены в таблицу 2. Там же приведены результаты расчетов аналогичных компонент для шара с центром в начале координат, имеющего такой же объем. Анализ таблицы показывает, что различия в полях, превышающие 2 %, наблюдаются только для кубиков, соприкасающихся сторонами. Уже для элементов, соприкасающихся ребрами, они незначительны. Таким образом, вычисление полей кубических элементов по формулам для вписанного шара с поправкой за различие их объемов возможно практически во всех случаях, кроме соседних элементов, соприкасающихся сторонами, когда надо, пользуясь сведениями таблицы 2, ввести соответствующие поправки. Если элементы располагаются не по кубической сетке, а с произвольными сдвигами, поправки вводятся, если расстояние между центрами элементов не превышает 1,5 длины их ребра.

В двумерном случае выводы аналогичны. Вычисление полей квадратных в сечении элементов может проводиться с приемлемой точностью по формулам для вписанного круга с поправкой за различие их площадей, если элементы не соприкасаются сторонами. Иначе необходимо вводить дополнительные поправки.

При аппроксимации изучаемого объекта совокупностью кубических элементов обычно приходится решать вопрос о выборе их размеров. Очевидно, чем меньше размеры элементов, тем выше точность расчетов, но и больше затраты машинного времени на их проведение. Практически целесообразно выбирать размеры элемента равными примерно одной трети минимального расстояния от объекта до точек, где вычисляется аномальное поле. При больших

размерах в аномалиях может резко проявляться влияние того, что намагниченность каждого из них считается однородной.

Таблица 2.

Координаты			Аномалии куба			Аномалии шара		
x	y	z	ΔX	ΔY	ΔZ	ΔX	ΔY	ΔZ
0	0	2	0,00000	0,00000	1,69372	0,00000	0,00000	2,00000
0	0	4	0,00000	0,00000	0,24679	0,00000	0,00000	0,25000
0	0	6	0,00000	0,00000	0,07388	0,00000	0,00000	0,07407
0	2	0	0,00000	0,00000	-0,84686	0,00000	0,00000	-1,00000
0	2	2	0,00000	0,53939	0,17274	0,00000	0,53033	0,17678
0	2	4	0,00000	0,10679	0,12549	0,00000	0,10733	0,12522
0	4	0	0,00000	0,00000	-0,12549	0,00000	0,00000	-0,12500
0	4	2	0,00000	0,10679	-0,36479	0,00000	0,10733	-0,03578
0	4	4	0,00000	0,06639	0,02207	0,00000	0,06629	0,02210
2	0	0	0,00000	0,00000	-0,84686	0,00000	0,00000	-1,00000
2	0	2	0,53939	0,00000	0,17274	0,53033	0,00000	0,17678
2	0	4	0,10679	0,00000	0,12549	0,10733	0,00000	0,12522
2	2	0	0,00000	0,00000	-0,34549	0,00000	0,00000	-0,35355
2	2	2	0,19617	0,19617	0,00000	0,19245	0,19245	0,00000
2	2	4	0,06807	0,06807	0,06852	0,06804	0,06804	0,06804
4	2	0	0,00000	0,00000	-0,08901	0,00000	0,00000	-0,08944
4	2	2	0,06807	0,03384	-0,03426	0,06804	0,03402	-0,03402
4	2	4	0,04948	0,02469	0,01236	0,04938	0,02469	0,01234
4	4	4	0,02408	0,02408	0,00000	0,02406	0,02406	0,00000

При аппроксимации следует соблюдать следующие основные принципы:

- 1) объемы объекта и аппроксимирующей его конструкции должны быть равными;
- 2) центры масс объекта и аппроксимирующей его конструкции должны совпадать;
- 3) аппроксимирующая конструкция должна сохранять угол падения, относительную вытянутость и элементы симметрии объекта.

Соблюдение этих принципов позволяет при сравнительно небольших затратах машинного времени добиться высокой относительной точности вычислений.

Итак, в результате аппроксимации объект заменяется совокупностью $\mathbf{M}$ одинаковых кубических элементов, имеющих объем V . Решение интегрального уравнения (14.13) сводится к решению системы $3\mathbf{M}$ линейных алгебраических уравнений или $\mathbf{M}$ векторных уравнений. Для k -го элемента соответствующее векторное уравнение запишется в виде:

$$\bar{I}(a_k) = \frac{3}{3 + \kappa(a_k)} \left(\bar{I}_0(a_k) + \frac{\kappa(a_k)V}{4\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^M D_3(a_n, a_k) \bar{I}(a_n) \right). \quad (15.1)$$

Для двумерных объектов при площади поперечного сечения каждого из квадратных элементов, равной S , интегральное уравнение (14.14) сведется к системе $2\mathbf{M}$ линейных алгебраических уравнений или $\mathbf{M}$ векторных уравнений. Для k -го элемента соответствующее векторное уравнение может быть представлено следующим образом:

$$\bar{I}(a_k) = \frac{2}{2 + \kappa(a_k)} \left(\bar{I}_0(a_k) + \frac{\kappa(a_k)S}{4\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^M D_2(a_n, a_k) \bar{I}(a_n) \right). \quad (15.2)$$

Как было отмечено выше, решение систем прямыми методами - не экономично, поскольку требует большого объема оперативной памяти применяемой ЭВМ. Более эффективно

применение метода последовательных приближений. При этом решение системы уравнений типа (15.1) или (15.2) ищется в виде ряда:

$$\bar{I}(a_k) = \bar{I}_1(a_k) + \bar{I}_2(a_k) + \dots + \bar{I}_m(a_k) + \dots, \quad (15.3)$$

причем в качестве начального приближения для трехмерных тел принимается

$$\bar{I}_1(a_k) = \frac{3\bar{I}_0(a_k)}{3 + \kappa(a_k)}, \quad (15.4)$$

а для двумерных -

$$\bar{I}_1(a_k) = \frac{2\bar{I}_0(a_k)}{2 + \kappa(a_k)}. \quad (15.5)$$

При расчете начального приближения, как следует из (14.3), учитывается неоднородность магнитных свойств изучаемого объекта, а для методов искусственного подмагничивания также неоднородность первичного намагничивающего поля.

Последующие члены ряда вычисляются по рекуррентным формулам, то есть **m**-ый член ряда для **k**-ого элемента рассчитывается по (**m-1**)-ым членам ряда для всех элементов, исключая **k**-ый. Для трехмерных объектов, как следует из (15.1), рекуррентная формула имеет вид:

$$\bar{I}_m(a_k) = \frac{3\kappa(a_k)V}{4\pi[3 + \kappa(a_k)]} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^M D_3(a_n, a_k) \bar{I}_{m-1}(a_n), \quad (15.6)$$

а для двумерных -

$$\bar{I}_m(a_k) = \frac{\kappa(a_k)S}{2\pi[2 + \kappa(a_k)]} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^M D_2(a_n, a_k) \bar{I}_{m-1}(a_n). \quad (15.7)$$

На каждом этапе элементы матриц **D₂** и **D₃** перевычисляются по формулам для цилиндра и шара с учетом указанных поправок для соприкасающихся элементов. Обратим еще раз внимание на то, что данные матрицы - симметричны, а сумма их диагональных элементов равна нулю. В связи с этим для матрицы **D₃** независимо вычисляются не 9, а только 5 элементов. Для матрицы **D₂** рассчитываются независимо лишь 2 элемента. Вычисления по рекуррентным формулам прерываются на **m**-ом приближении - тогда, когда достигнута наперед заданная точность **ε**:

$$\max_k |\bar{I}_m(a_k)| < \varepsilon. \quad (15.8)$$

§ 16. Процедура учета попарного взаимовлияния элементов

Важное значение при численном решении интегральных уравнений для намагниченности имеет процедура учета попарного взаимовлияния элементов аппроксимирующей конструкции. Во-первых, при проведении расчетов на ЭВМ приходится обрывать итерационный процесс на **m**-ом приближении. Для учета (**m+1**)-го и последующих приближений может быть применена данная процедура. Во-вторых, попарное взаимовлияние может стать основой экспресс-методики учета размагничивания сильномагнитных объектов, если их магнитная восприимчивость не превышает 1 СИ. При этом экспресс-методика, несмотря на сравнительную простоту, оказывается гораздо более эффективной, нежели часто применяющийся прием учета размагничивания, заключающийся в учете всего одной итерации при решении исходного интегрального уравнения.

Пусть объект состоит всего из двух элементов, центры которых расположены в точках **a_k** и **a_n**. Обозначим для общности рассмотрения двумерных и трехмерных задач коэффициенты перед знаками сумм в формулах (15.6) и (15.7) через **K**. Тогда система двух векторных уравнений для двух элементов может быть представлена в следующем виде:

$$\bar{I}(a_k) = \bar{I}_0(a_k) + K(a_k) D(a_n, a_k) \bar{I}(a_n),$$

$$\bar{I}(a_n) = \bar{I}_0(a_n) + K(a_n) D(a_n, a_k) \bar{I}(a_k). \quad (16.1)$$

Данная система легко решается, в результате чего получим:

$$\begin{aligned} \bar{I}(a_k) &= [E - K(a_k) K(a_n) D^2(a_n, a_k)]^{-1} [\bar{I}_0(a_k) + K(a_k) D(a_n, a_k) \bar{I}_0(a_n)], \\ \bar{I}(a_n) &= [E - K(a_k) K(a_n) D^2(a_n, a_k)]^{-1} [\bar{I}_0(a_n) + K(a_n) D(a_n, a_k) \bar{I}_0(a_k)], \end{aligned} \quad (16.2)$$

где показатель степени указывает на матрицу, обратную к той, которая в скобках.

Процедура учета попарного взаимовлияния состоит в суммировании поправок к исходным намагниченностям, полученным при взаимодействии каждого из элементов со всеми остальными. В качестве исходных могут быть приняты как I_0 , так и I_m , полученные после m -ого этапа итерационных вычислений. Вычислительную формулу для расчета вектора поправок при использовании в качестве исходных намагниченностей I_m удобно представить в таком виде:

$$\Delta \bar{I}(a_k) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^M \{ [A(a_n, a_k) \bar{I}_m(a_k) + B(a_n, a_k) \bar{I}_m(a_n)] \}, \quad (16.3)$$

где A и B - матрицы, элементы которых вычисляются по явным формулам. Чтобы упростить эти формулы, введем в трехмерном случае обозначения: пусть L - расстояние между точками a_n и a_k ,

$$Q(a_k) = \frac{3\kappa(a_k)V}{4\pi L^3 [3 + \kappa(a_k)]}, \quad (16.4)$$

$$Q(a_n) = \frac{3\kappa(a_n)V}{4\pi L^3 [3 + \kappa(a_n)]}, \quad (16.5)$$

$$F_1 = \frac{1}{1 - Q(a_k)Q(a_n)}, \quad (16.6)$$

$$F_2 = \frac{1}{1 - 4Q(a_k)Q(a_n)}. \quad (16.7)$$

Тогда

$$A(a_n, a_k) = A(a_k, a_n) = (F_2 - F_1) C_3(a_n, a_k) + F_1 E, \quad (16.8)$$

$$B(a_n, a_k) = Q(a_k) [(2F_2 + F_1) C_3(a_n, a_k) - F_1 E], \quad (16.9)$$

где элементы матрицы $C_3(a_n, a_k)$ определяются соотношением

$$c_{ij} = \frac{1}{L^2} [x_i(a_n) - x_i(a_k)] [x_j(a_n) - x_j(a_k)], \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (16.10)$$

Если объект однороден, то $B(a_n, a_k) = B(a_k, a_n)$, что упрощает вычисления. Отметим также, что в случае элементов, соприкасающихся гранями, $Q(a_k)$ должны вычисляться не по формулам для эквивалентного шара, а непосредственно по формулам для куба. Для простоты, пользуясь данными таблицы 2, можно записать:

$$Q(a_k) = \frac{0,2021729 \kappa(a_k)}{3 + \kappa(a_k)}. \quad (16.11)$$

В двумерном случае также несложно получить явные выражения для элементов матриц A и B . Если обозначить

$$Q(a_k) = \frac{\kappa(a_k)S}{\pi L^2 [2 + \kappa(a_k)]}, \quad (16.12)$$

$$Q(a_n) = \frac{\kappa(a_n)S}{\pi L^2 [2 + \kappa(a_n)]}, \quad (16.13)$$

$$F = \frac{1}{1 - Q(a_k)Q(a_n)}, \quad (16.14)$$

то

$$A(a_n, a_k) = A(a_k, a_n) = FE, \quad (16.15)$$

$$B(a_n, a_k) = FQ(a_k) [2C_2(a_n, a_k) - E], \quad (16.16)$$

где элементы матрицы $C_2(a_n, a_k)$ вычисляются по формуле:

$$c_{ij} = \frac{1}{L^2} [x_i(a_n) - x_i(a_k)][x_j(a_n) - x_j(a_k)], \quad i, j = 1, 2. \quad (16.17)$$

Для соприкасающихся сторонами квадратных элементов, аналогично -

$$Q(a_k) = \frac{0,2951674 \kappa(a_k)}{2 + \kappa(a_k)}. \quad (16.18)$$

Таким образом, процедура учета попарного взаимовлияния элементов с намагниченностями, полученными на m -ой итерации решения интегрального уравнения, дает возможность вычислять эффективную намагниченность элементов не по формуле (15.3), а в соответствии со следующим выражением:

$$\bar{I}(a_k) = \bar{I}_1(a_k) + \bar{I}_2(a_k) + \dots + \bar{I}_m(a_k) + \Delta \bar{I}(a_k), \quad (16.19)$$

где $\Delta \bar{I}(a_k)$ - поправка, определяемая соотношением (16.3). Применение процедуры учета попарного взаимовлияния значительно повышает экономичность алгоритма решения прямой задачи магниторазведки с учетом размагничивания, поскольку дает возможность сократить число итераций, требуемых для достижения заданной точности. В случае, когда магнитная восприимчивость тела не очень велика, рассматриваемая процедура может быть применена непосредственно после вычисления начального приближения. Это означает, что эффективная намагниченность каждого из элементов определяется не по формуле (16.19), а по более простой:

$$\bar{I}(a_k) = \bar{I}_1(a_k) + \Delta \bar{I}(a_k), \quad (16.20)$$

то есть при полном отсутствии итерационных вычислений по рекуррентным соотношениям. Этот прием является сутью экспресс-методики учета размагничивания, показавшей высокую эффективность. Если магнитная восприимчивость объекта не превышает 1 СИ, то экспресс-методика позволяет определить его эффективную намагниченность с относительной погрешностью, не превышающей нескольких процентов от ее среднего для данного объекта значения. Это значит, что по сравнению с упомянутым приемом учета всего одной итерации при решении интегрального уравнения, экспресс-методика при практически том же объеме вычислений дает гораздо большую точность.

§ 17. Особенности намагничивания сильномагнитных объектов

Эффект размагничивания приводит к зависимости распределения намагниченности сильномагнитных объектов от их формы. В § 4 мы рассмотрели характер намагничивания простейших моделей: таких как однородное пространство, полупространство и эллипсоиды.

Они в однородном намагничивающем поле намагничиваются однородно, что позволяет учесть их размагничивание с помощью коэффициента, иными словами, размагничивающего фактора. Тела любых других форм, гомеоморфных эллипсоиду, т.е. переводящихся в эллипсоид непрерывным преобразованием, даже будучи однородными по магнитным свойствам, намагничиваются неоднородно. Внутри таких тел намагниченность изменяется как по величине, так и по направлению, из-за чего описать эффект размагничивания одним коэффициентом (фактором) - принципиально невозможно. Распределение намагниченности в неэллипсоидальных телах можно получить лишь, решая рассмотренные выше интегральные уравнения. Тем не менее, для ряда типовых моделей можно сформулировать общие закономерности их намагничивания.

Первой группой таких моделей являются полубесконечные пласты. Рассмотрим вначале случай, когда намагничивающее поле направлено вдоль них. Тогда по мере удаления от верхней кромки крутопадающего пласта намагниченность асимптотически стремится к той, какая была бы у бесконечного, а не полубесконечного объекта, то есть соответствующей $N=0$ в формуле (3.26). В центре верхней кромки намагниченность стремится к той, какая была бы у нормально намагниченного полупространства, то есть соответствующей $N=1/2$ в формуле (3.26), что следует, в частности, из критерия подобия, полученного в § 6 как следствие из теоремы линейного преобразования магнитных полей. Как известно, если, не изменяя магнитных свойств, пропорционально увеличивать размеры тела, распределение намагниченности в нем не изменится. Очевидно, при увеличении пласта от центра верхней кромки, они стремятся именно к полупространству. Таким образом, намагниченность внутри продольно намагниченного пласта различается в $1+0,5k$ раз и монотонно увеличивается с глубиной, естественно, по-разному для разных моделей. Уменьшение намагниченности вблизи верхней кромки крутопадающих пластов зачастую ошибочно принимают за проявление зоны окисления.

Перейдем теперь к случаю, когда намагничивающее поле направлено поперек пласта. Исходя из тех же соображений, можно определить, что вдали от кромки пласта намагниченность стремится к той, какая была бы у нормально намагниченного слоя, то есть соответствующей $N=1$ в формуле (3.26). В центре верхней кромки намагниченность стремится к той, какая была бы у тангенциально намагниченного полупространства, то есть соответствующей $N=0$ в формуле (3.26). Таким образом, намагниченность внутри поперечно намагниченного пласта различается в $1+k$ раз и уменьшается с глубиной. Как следует из (3.26), - это максимально возможная неоднородность для любых неэллипсоидальных тел. На рис. 32 и 33 показаны графики зависимостей намагниченности I в плоскости симметрии пласта в долях его намагниченности на глубине I_∞ от отношения расстояния до верхней кромки пласта h к его мощности d . Приведенные зависимости получены в результате численного моделирования с помощью изложенных выше алгоритмов. Для каждого из графиков указаны значения магнитной восприимчивости пласта в единицах СИ.

Наиболее общими моделями из тех, которые обычно используют для аппроксимации геологических объектов, являются многоугольные цилиндры и многогранники. Пласты, очевидно, представляют собой их частный случай. При исследовании намагничивания многогранников важнейшее значение имеют условия сопряжения на границах раздела сред с различными магнитными свойствами. В курсах теории поля доказывается, что из уравнения $\text{rot } \vec{H} = 0$ следует непрерывность на гладкой границе тангенциальной компоненты напряженности H_t , а из уравнения $\text{div } \vec{B} = 0$ - непрерывность нормальной компоненты индукции B_n . Рассмотрим поведение поля у вершин и ребер, так как именно оно определяет характер намагниченности многогранников.

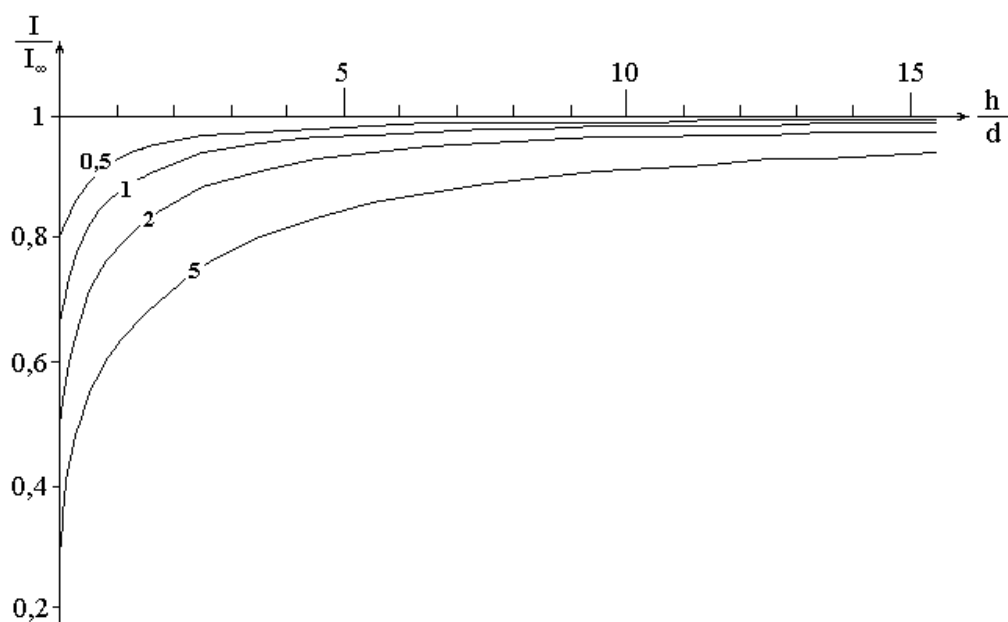


Рис. 32. Относительные намагниченности сильномагнитного пласта в плоскости его симметрии при намагничении в продольном первичном поле. Индексы - значения магнитной восприимчивости в единицах СИ

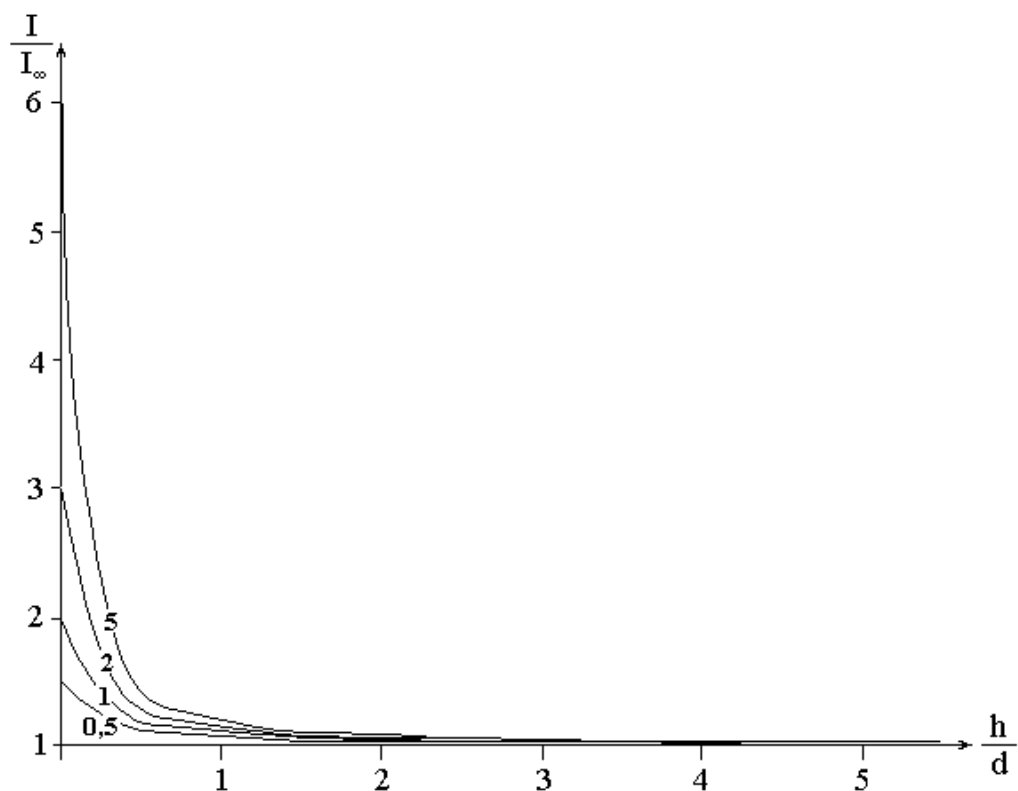


Рис. 33. Относительные намагниченности сильномагнитного пласта в плоскости его симметрии при намагничении в поперечном первичном поле. Индексы - значения магнитной восприимчивости в единицах СИ

Обратимся вначале к двумерной задаче для бесконечного горизонтального многоугольного цилиндра и определим характер магнитного поля у его ребер. Для этого воспользуемся интегральным аналогом дифференциального уравнения $\text{rot } \vec{H} = 0$. Как известно, это уравнение выполняется тогда и только тогда, когда циркуляция вектора $\vec{H}$ по любому плоскому контуру L - нулевая, то есть

$$\oint_L (\vec{H} d\vec{l}) = 0. \quad (17.1)$$

Уравнение (17.1) справедливо во всем пространстве, следовательно, должно выполняться и у ребра многоугольного цилиндра. Поэтому циркуляция $\vec{H}$ по любому плоскому контуру, охватывающему ребро и перпендикулярному к нему, должна быть нулевой.

Вычисляя циркуляцию, можно дробить площадку, ограниченную произвольным исходным контуром, на более мелкие. При этом, в соответствии с условием (17.1), по контурам всех площадок циркуляция $\vec{H}$ также должна быть нулевой. Рассмотрим контур на рис.33а. Убирая из исходной площадки те ее части, которые целиком расположены вне и внутри многоугольного цилиндра и по которым циркуляция, очевидно, нулевая, мы приходим к необходимости анализа циркуляции по многоугольному контуру **ABCDEF**.

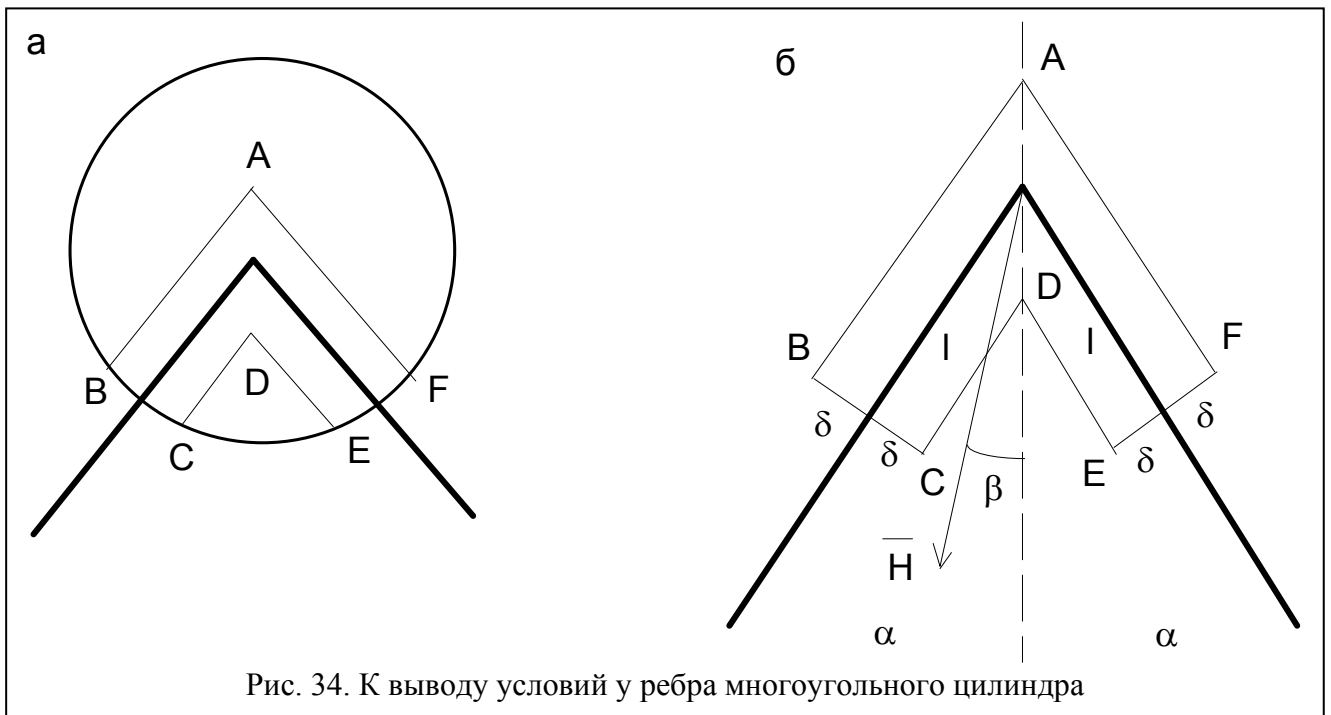


Рис. 34. К выводу условий у ребра многоугольного цилиндра

Отрезки **AB** и **CD** параллельны одной из граней цилиндра и отстоят от нее на малое расстояние δ . Отрезки **AF** и **DE** расположены на таком же расстоянии от другой грани, примыкающей к данному ребру. Если отрезки **BC** и **EF** - перпендикулярны к соответствующим граням, их вкладом в общую циркуляцию можно пренебречь как малой более высокой степени. Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что **BC** и **EF** находятся от рассматриваемого ребра на одинаковом расстоянии l . Дело в том, что для любого прямоугольного контура, вытянутого вдоль границы, циркуляция из-за непрерывности тангенциальной компоненты напряженности H_t - нулевая. Именно на этом базируется доказательство непрерывности H_t на границе. Поэтому, убирая из многоугольного контура, изображенного на рис. 34а, прямоугольные части с нулевой циркуляцией, мы приходим к контуру, показанному на рис. 34б. Угол при рассматриваемом ребре обозначим 2α , а напряженность $\vec{H}$ магнитного поля в вершине внутри цилиндра будем считать отклоняющейся

от биссектральной плоскости на угол β (рис. 34б). Направление обхода примем против часовой стрелки.

Циркуляция по многоугольному контуру **ABCDEF** может быть вычислена как сумма четырех интегралов по отрезкам **AB**, **CD**, **DE** и **FA**. Поскольку рассматривается малая окрестность ребра, напряженность в этом контуре можно считать постоянной и равной ее значению в вершине. При этом, в силу непрерывности $\vec{H}_t$ на гранях, интегралы по внешним отрезкам также могут быть выражены через значение $\vec{H}$ в вершине. В принятых обозначениях

$$\begin{aligned} \int_{AB} (\vec{H} d\vec{l}) &= H \cos(\alpha - \beta) (1 + \delta \operatorname{ctg} \alpha), \\ \int_{CD} (\vec{H} d\vec{l}) &= -H \cos(\alpha - \beta) (1 - \delta \operatorname{ctg} \alpha), \\ \int_{DE} (\vec{H} d\vec{l}) &= H \cos(\alpha + \beta) (1 - \delta \operatorname{ctg} \alpha), \\ \int_{FA} (\vec{H} d\vec{l}) &= -H \cos(\alpha + \beta) (1 + \delta \operatorname{ctg} \alpha), \end{aligned} \quad (17.2)$$

и общая циркуляция окажется равной

$$\oint (\vec{H} d\vec{l}) = 4H\delta \cos(\alpha) \sin(\beta). \quad (17.3)$$

Полученное выражение дает возможность анализа характера поля у ребра, для чего надо рассмотреть условия, при которых циркуляция по контуру может быть равна нулю. Очевидно, таких условий - три: либо $\vec{H}=0$, либо $\cos \alpha=0$, либо $\sin \beta=0$. Условие $\cos \alpha=0$ не представляет интереса, поскольку выполняется при развернутом угле ($2\alpha=\pi$), когда ребро фактически отсутствует. Наибольшее значение имеет условие $\sin \beta=0$. Физически оно означает, что для выполнения уравнения $\operatorname{rot} \vec{H} = 0$ на ребре цилиндра достаточно, чтобы вектор суммарной напряженности был расположен в биссектральной плоскости при этом ребре. Именно этот, энергетически более выгодный вариант, а не вариант $\vec{H}=0$ чаще реализуется в природе, что подтверждают как экспериментальные данные, так и результаты численного моделирования. Если у изотропного многоугольного цилиндра отсутствует естественная остаточная намагниченность, то, в соответствии с (17.3), намагниченность у ребра также должна быть расположена в биссектральной плоскости. Этот факт иллюстрирует рис. 9 из § 4, на котором представлены результаты численного решения интегрального уравнения для однородных многоугольных цилиндров, намагничивающихся в однородном вертикальном поле. Если этого в силу симметрии многогранника и его расположения по отношению к первичному полю достичь невозможно, например, когда поле перпендикулярно биссектральной плоскости, только тогда за счет размагничивания суммарное поле у ребра уменьшается до нуля: $\vec{H}=0$.

Перейдем теперь к рассмотрению намагничивания произвольных многогранников. Оно определяется характером поведения напряженности магнитного поля у ребер и вершин. Поле у ребер многогранника подчиняется той же закономерности, что и для многоугольных цилиндров. Вблизи вершин могут наблюдаться различные ситуации в зависимости от особенностей данного многогранника. Если существует прямая, проходящая через вершину многогранника и образующая с примыкающими гранями одинаковые углы, то вектор напряженности магнитного поля, как следует из рассмотренного условия у ребер, окажется направленным вдоль нее. Такая прямая, выполняющая роль нормали в вершине, непременно существует, если в данной вершине сходятся три или четыре грани. При большем числе примыкающих граней такой прямой может и не быть. В этом случае напряженность в данной вершине должна быть нулевой. В изотропных телах при отсутствии естественной остаточной намагниченности аналогичным закономерностям подчиняется и суммарная намагниченность. В иных случаях направление намагниченности может быть найдено из соотношения (17.3).

Намагниченность симметричных многогранников подчиняется закономерностям, вытекающим из характера поля диполя. Их можно свести к трем основным, указываемым для случая намагничивания однородных изотропных тел в однородном магнитном поле при отсутствии естественной остаточной намагниченности.

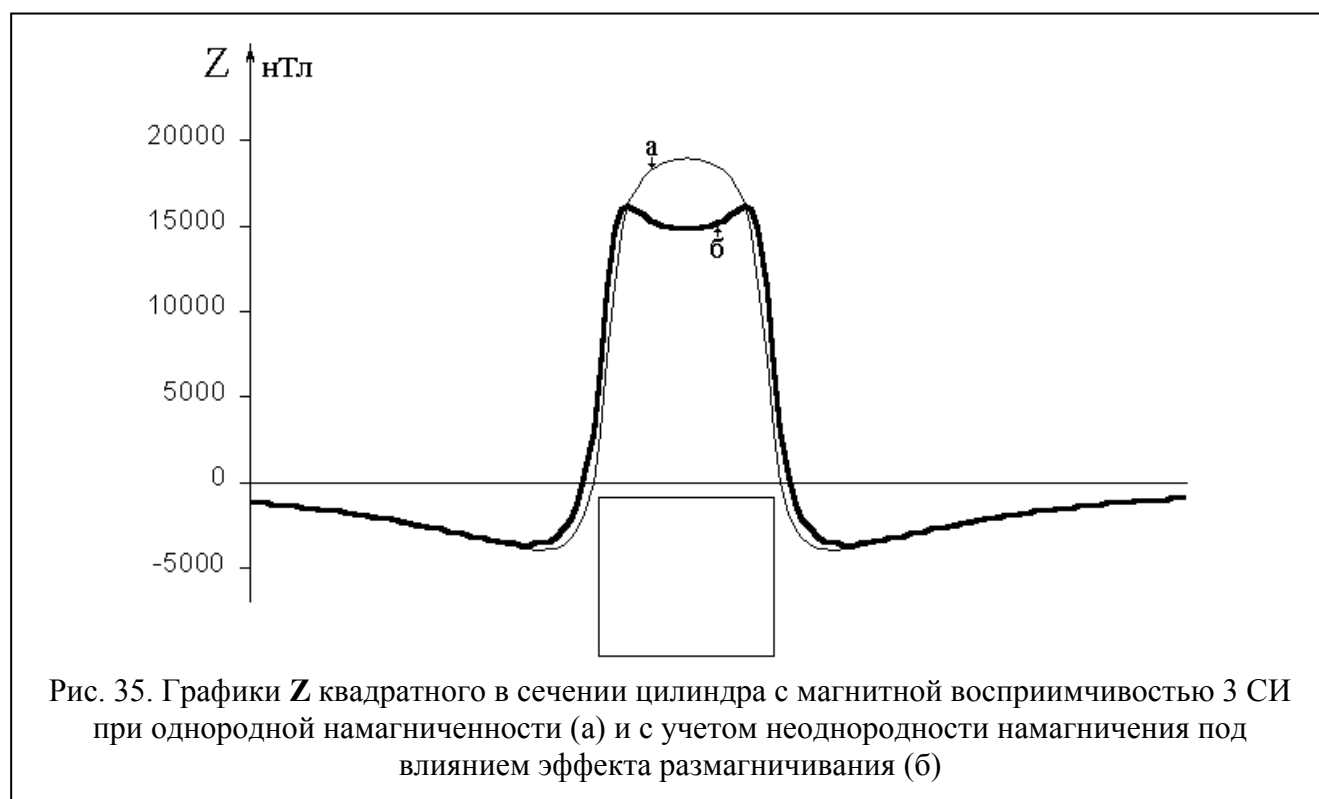
1. Если многогранник имеет центральную симметрию, то при намагничении в произвольно направленном однородном поле намагниченность в его симметричных точках одинакова как по величине, так и по направлению.

2. Если многогранник имеет плоскость симметрии, параллельную однородному намагничивающему полю, то в его симметричных точках намагниченности окажутся зеркальным отображением друг друга в данной плоскости. Это значит, что компоненты намагниченности, параллельные плоскости симметрии, в этих точках будут одинаковыми, а компоненты, перпендикулярные плоскости симметрии - равными по величине и противоположными по направлению.

3. Если многогранник имеет плоскость симметрии, перпендикулярную однородному намагничивающему полю, то в его симметричных точках одинаковыми окажутся компоненты намагниченности, перпендикулярные к плоскости симметрии, а те компоненты, которые параллельны ей, станут равными по величине и противоположными по направлению.

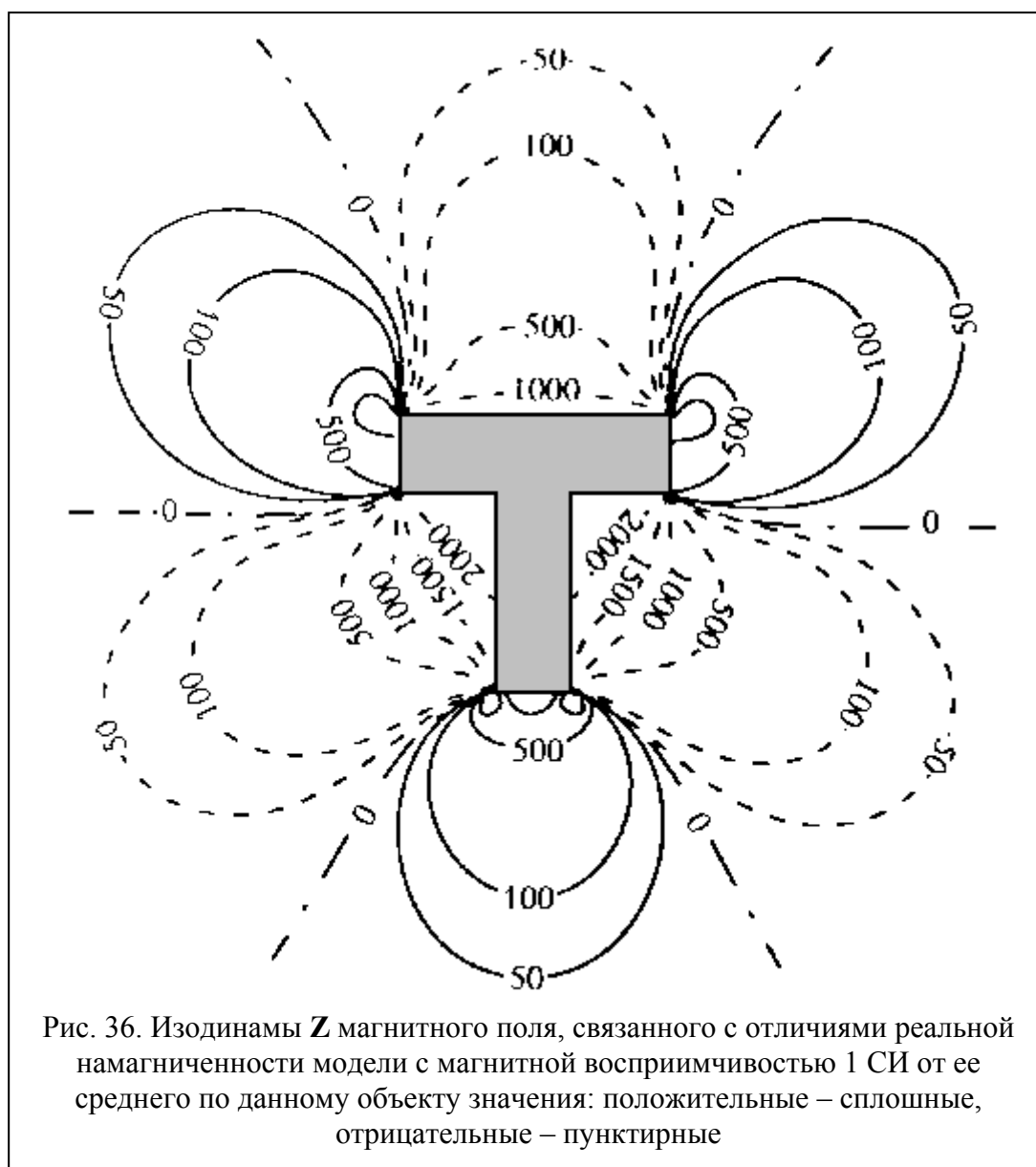
Зная отмеченные закономерности, легко представить качественный характер распределения намагниченности в многоугольных цилиндрах и многогранниках, что бывает необходимо при интерпретации магнитных аномалий.

Неоднородность намагничивания многогранников под влиянием эффекта размагничивания может даже качественно изменять их аномальное поле. На рис. 35 показаны аномалии вертикальной составляющей индукции магнитного поля Z квадратного в сечении цилиндра с магнитной восприимчивостью 3 СИ. Намагничивающее поле здесь направлено вертикально вниз и равно 50 мкТл. На рисунке видно, что неоднородность намагничивания приводит к тому, что непосредственно над центром куба с высокой магнитной восприимчивостью аномалия вертикальной составляющей имеет не единый максимум, как при однородной намагниченности, а осложняется локальным минимумом и приобретает двугорбую форму. Факты такого рода, очевидно, должны приниматься в расчет при геологическом истолковании.



В связи с неоднородностью распределения намагниченности многогранников возникает вопрос о том, на каких расстояниях от объекта можно вычислять аномальные поля, пренебрегая ею. Дело в том, что при вычислении аномалий вдали от сильномагнитного объекта сложной формы, его зачастую считают имеющим однородную намагниченность, оцененную на эквивалентном эллипсоиде. Магнитные аномалии, связанные с неоднородностью намагничивания рассмотренного типа, действительно имеют квадрупольный характер и довольно быстро затухают с удалением от тела. Вместе с тем, пренебрегать влиянием неоднородности намагничивания, строго говоря, можно лишь тогда, когда его проявления в аномальном поле не превышают среднеквадратической погрешности проводимой съемки, составляющей в настоящее время не более нескольких нТл.

В силу критерия подобия магнитных полей при оценке проявлений неоднородности намагничивания имеют значение не абсолютные удаления от тела, а относительные. Численные эксперименты, проведенные на моделях двумерных и трехмерных тел, показали, что пренебрегать влиянием неоднородности намагничивания рассматриваемого типа и использовать традиционные приемы можно лишь тогда, когда расстояние от точки расчета поля до объекта в несколько раз превышает его максимальные линейные размеры.



Приведем в качестве иллюстрации один из типичных примеров. На рис. 36 показаны изолинии Z той части магнитного поля, которая связана с отличиями намагниченности Т-образного многоугольного цилиндра от ее среднего по данному объекту значения. При проведении численного эксперимента многоугольник с магнитной восприимчивостью 1 СИ аппроксимировался 57 квадратными элементами; намагничивающее поле считалось вертикальным и равным 50 мкТл. Эффективная намагниченность элементов определялась путем численного решения интегрального уравнения.

Средняя намагниченность многоугольника из-за его симметрии оказалась вертикальной и равной 28,782 А/м, причем вертикальные компоненты намагниченности элементов изменяются от 21,612 до 34,554 А/м, горизонтальные компоненты достигают 4,958 А/м. Для сравнения укажем, что без учета размагничивания намагниченность этого многоугольника была бы однородной, вертикальной и равной 39,789 А/м. Из намагниченности каждого из элементов затем была вычтена средняя намагниченность объекта, поэтому магнитный момент полученного таким образом распределения намагниченности оказался равным нулю. Его поле характеризует ту магнитную аномалию, которая связана исключительно с неоднородной частью намагниченности, возникшей в результате размагничивания. Изодинамы вертикальной составляющей индукции этой части магнитного поля, и представлены на рис. 36. На нем видно, что при удалении от объекта даже на расстояние, равное его максимальному линейному размеру, аномалии от неоднородной части намагниченности превышают 50 нТл. Очевидно, при увеличении магнитной восприимчивости объекта относительные расстояния, на которых необходимо учитывать неоднородность намагничивания, связанную с размагничиванием, еще более возрастут.

Вопросы для самоконтроля

1. Когда возможен учет размагничивания однородного геологического объекта в собственном аномальном поле с помощью размагничивающих факторов?
 - а) когда внешнее намагничивающее поле однородно (24);
 - б) когда форма объекта представляет собой частный случай эллипсоида (27);
 - в) когда одновременно выполнены условия а) и б) (30).
2. Является ли магнитная аномалия от двух объектов суммой их магнитных аномалий, вычисленных в предположении отсутствия других объектов?
 - а) является всегда (36);
 - б) не является (62);
 - в) является, если эти объекты имеют форму эллипсоидов (88).
3. Может ли полубесконечный пласт при учете размагничивания считаться частным случаем эллипсоида?
 - а) может (39);
 - б) не может (48);
 - в) может, если глубина его верхней кромки превышает мощность (57).
4. С чем совпадает направление вектора намагниченности бесконечного сильномагнитного пласта?
 - а) с направлением намагничивающего поля (71);
 - б) с направлением падения пласта (72);
 - в) ни с тем, ни с другим (73).

Контрольная сумма при правильных ответах – 213.

ЧАСТЬ 2

МЕТОДЫ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ГРАВИТАЦИОННЫХ И МАГНИТНЫХ АНОМАЛИЙ

ГЛАВА 5. ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ГРАВИРАЗВЕДКИ И МАГНИТОРАЗВЕДКИ

§ 18. Основные задачи интерпретации гравитационных и магнитных аномалий

Гравиразведка и магниторазведка применяются на практике для решения огромного количества разнообразных геологических задач, в связи с чем и задачи интерпретации гравитационных и магнитных аномалий также чрезвычайно разнообразны. Наиболее часто интерпретатору приходится решать задачи трех основных типов.

Первый тип геологических задач - это задачи обнаружения геологических объектов. В интерпретации им соответствуют задачи обнаружения аномалий от этих объектов. Иногда искомые аномалии столь велики по амплитуде и по размерам, что легко обнаруживаются не только по картам графиков аномальных полей, но даже и по картам изолиний. В этих случаях обнаружение может быть проведено визуально. Однако многие имеющие практическую ценность геологические объекты создают небольшие аномалии, не проявляющиеся достаточно отчетливо на картах и не обнаруживаемые визуально из-за многочисленных помех геологического происхождения. Для обнаружения таких слабых аномалий и для их выделения на фоне помех разработаны многочисленные, преимущественно статистические способы, нуждающиеся в применении компьютеров.

Второй тип интерпретационных задач - это задачи разделения аномалий и локализации интересующих объектов, способам решения которых посвящена значительная часть настоящего пособия. Распространенность подобных задач определяется тем, что аномальные поля достаточно сложны и связаны с разными геологическими объектами, расположенными как на малых, так и на больших глубинах. При их интерпретации естественно попытаться осуществить декомпозицию, то есть разделить поля от объектов, получить по возможности аномалии от изолированных тел и свести тем самым сложную задачу к совокупности более простых. Необходимо отметить, что в общем виде такая задача не имеет решения, однако в частных постановках при достаточном объеме априорной информации подобные задачи могут успешно решаться.

Третий тип интерпретационных задач - это задачи детального количественного описания аномалий или, как их часто называют, задачи количественной интерпретации. Они заключаются в определении интерпретационной модели, удовлетворяющей как наблюдаемому полю, так и априорной геологической информации.

Приведенная классификация задач интерпретации отражает постановки решаемых геологических задач, а не применяемые методы. В связи с этим многие подходы к решению в задачах разного типа фактически одинаковы. Например, наиболее распространенные способы обнаружения аномалий базируются на применении приемов разделения полей. Некоторые алгоритмы, в частности, алгоритм аналитического продолжения, с успехом применяются при решении задач всех трех типов. Сложность и многоплановость практических интерпретационных задач привели к необходимости отработки основных приемов интерпретации гравитационных и магнитных аномалий на упрощенных моделях, для чего были введены так называемые обратные задачи гравиразведки и магниторазведки.

§ 19. Обратные задачи и их свойства

Обратные задачи составляют фундамент интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. Они заключаются в определении местоположения, формы, размеров, элементов залегания и физических свойств интерпретационных моделей, удовлетворяющих имеющейся априорной информации, по создаваемым ими аномалиям.

Обратные задачи гравиразведки и магниторазведки подразделяют на теоретические и практические. Теоретические обратные задачи заключаются в нахождении интерпретационной модели по ее абсолютно точному полю, заданному на бесконечном множестве точек, называемом множеством единственности. При решении практических обратных задач приходится учитывать конечность числа наблюдений, ограниченность участка съемки и наличие помех. Таким образом, теоретические обратные задачи являются упрощенными моделями практических обратных задач, дающими возможность достаточно глубокого их анализа. Изучение теоретических обратных задач фактически привело не только к пониманию основных особенностей интерпретационного процесса, но и к разработке многих практически важных методов интерпретации. Далее, говоря об обратных задачах вообще, мы будем иметь в виду практические обратные задачи.

Математически обратные задачи сводятся к решению операторных уравнений, при этом интерпретационные модели описываются как элементы некоторых метрических пространств. В теоретических обратных задачах в качестве интерпретационных моделей выступают функции, в то время как в практических обратных задачах они обычно определяются как многомерные векторы. Рассмотрим наиболее распространенную постановку практических обратных задач.

Пусть интерпретационная модель определяется n параметрами. Некоторые из них описывают местоположение объектов, другие характеризуют их форму, размеры, элементы залегания и физические свойства. Упорядоченный список параметров соответствует многомерному вектору или координатам точки в n -мерном евклидовом пространстве R^n . Обозначим эту точку как $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$. Очевидно, не любой набор параметров определяет существующий в природе объект. Приходится признать, что геологические объекты, описываемые этими параметрами, принадлежат множеству P , являющемуся лишь частью пространства R^n ($p \in P \subset R^n$). Обозначим через D оператор решения соответствующей прямой задачи. Применив его к какой-либо модели p , мы получим набор значений гравитационного или магнитного поля в m точках наблюдения. Этот набор значений поля также можно рассматривать как точку u в m -мерном евклидовом пространстве R^m : $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$. В операторной форме решение прямой задачи выглядит так:

$$u = Dp; \quad (19.1)$$

его можно трактовать как отображение точки $p \in P \subset R^n$ в пространство R^m . Если отобразить все точки $p \in P$ в это пространство, то в нем получится множество DP . В этих обозначениях решение обратной задачи представляет собой решение операторного уравнения

$$Dp = u, \quad (19.2)$$

то есть обратное отображение точки u в пространство R^n .

В определении обратных задач особо подчеркнута роль априорной информации при их решении. Фактически различный объем имеющейся до проведения интерпретации информации об одном и том же объекте является источником различных решений обратной задачи. В основе этого - фундаментальные свойства, характеристики обратных задач: существование, единственность и устойчивость их решений. Рассмотрим особенности этих характеристик.

Очевидно, всегда существует природный объект, создавший аномалию, обнаруженную в результате полевых геофизических работ. Вместе с тем, формальное решение уравнения (19.2) может и не существовать. Основанием для такого парадоксального вывода является наличие помех различного происхождения, осложняющих наблюдаемую аномалию.

Во-первых, это погрешности съемки, вызванные несовершенством применяемой при полевых исследованиях аппаратуры и методики. Эти помехи оцениваются в процессе съемки по результатам контрольных измерений, в результате чего интерпретатору известна их среднеквадратическая погрешность. Во-вторых, это помехи геологического происхождения, связанные с влиянием объектов, не представляющих непосредственного интереса для решения поставленной геологической задачи. Их можно отнести к трем основным группам. Первая группа - низкочастотные помехи, вызываемые глубокозалегающими частями Земли и называемые региональным фоном. Вторая группа - высокочастотные помехи, вызываемые неоднородностью верхней части изучаемого разреза. Третья группа - поля соседних объектов, проявляющиеся на изучаемом участке и не представляющие интереса для решаемой геологической задачи. Если соседние объекты известны, их поля можно учесть в процессе интерпретации. Источники и характер регионального фона иногда становятся известными интерпретатору по данным предшествующих геолого-геофизических работ, но чаще информация о них бывает только качественного характера. Свойства же высокочастотных помех в большинстве случаев являются совершенно неизвестными, что заставляет зачастую прибегать к рассмотрению этих помех как случайных и описывать их статистически. Наконец, в-третьих, следует принимать во внимание и погрешности, вызванные округлением результатов съемки, то есть конечным числом значащих цифр в исходных числовых данных.

Следует признать, что помехи в исходных геофизических данных являются принципиально неустранимыми. Их нельзя полностью исключить никакими приемами, можно только несколько ослабить их влияние. Наличие же помех приводит к тому, что в большинстве случаев формальное решение обратных задач может не существовать. На рис. 37 приведена гравитационная аномалия, вызванная влиянием рудного тела в форме шара и осложненная высокочастотной помехой. Очевидно, не существует такого шара, который мог бы создать данную многоэкстремальную аномалию, следовательно, обратная задача определения параметров шара по аномальному полю в данном случае не имеет строгого решения.

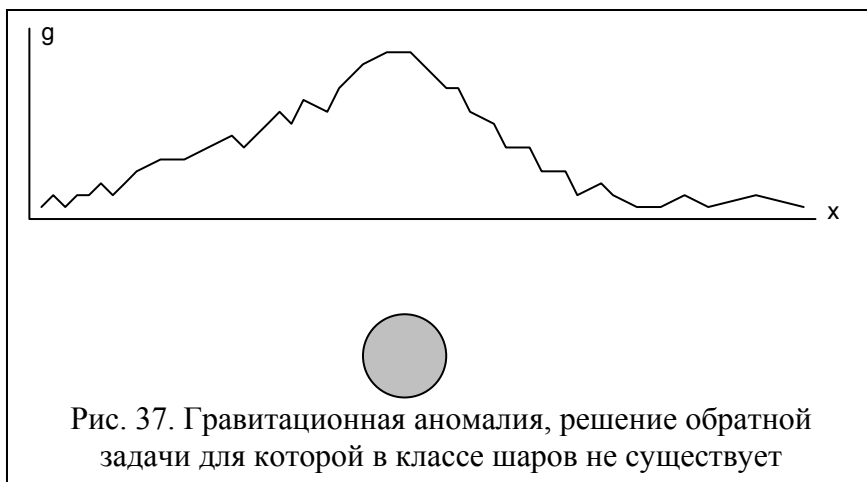


Рис. 37. Гравитационная аномалия, решение обратной задачи для которой в классе шаров не существует

Математическая трактовка этого факта такова. Реальный объект, создающий интересующую нас часть аномалии, можно обозначить как P_T (точное решение). Его образ в R^m есть u_T , который непременно принадлежит множеству DP . Помехи приводят к тому, что вместо u_T в правую часть (19.2) приходится подставлять приближенное значение u_n , то есть решать вместо (19.2) уравнение

$$Dp = u_n. \quad (19.3)$$

Решение же этого уравнения существует не обязательно, поскольку u_n может не принадлежать множеству DP , то есть может не соответствовать ни одному из объектов множества P , что иллюстрирует рис. 38. В этих условиях требуется строго определить, что именно надо найти, решая уравнение (19.3). Различные определения приводят к разным методам, в том числе к методу квазирешений и методу регуляризации.

Допустим, что решение обратной задачи существует. В этом случае возникает вопрос, является ли оно единственным? Под

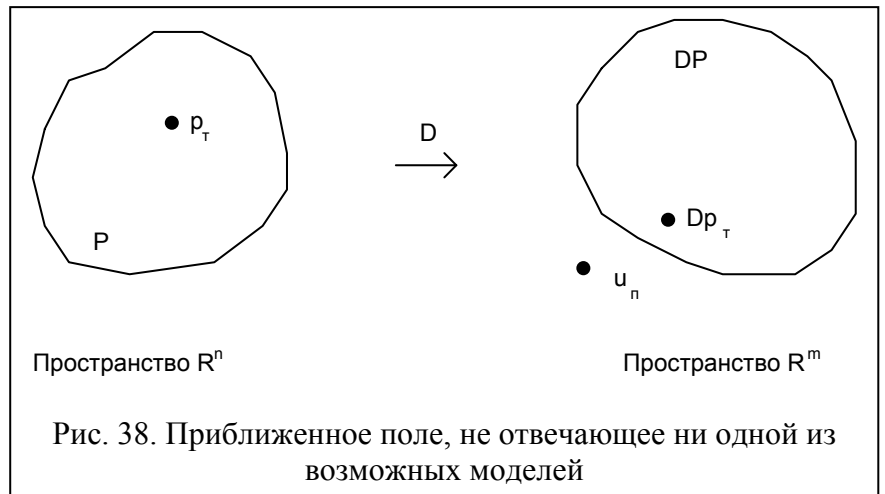
единственностью обычно понимают возможность однозначного нахождения источников по аномальному полю при определенных допущениях об этих источниках. Вообще говоря, разные обратные задачи могут иметь различные степени

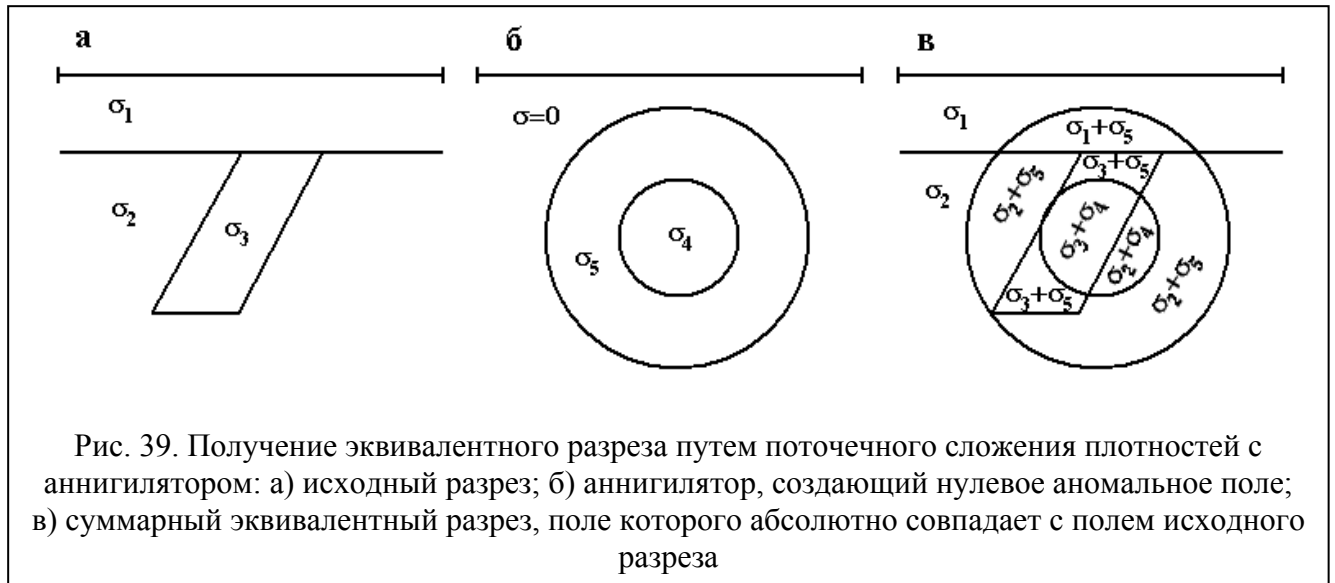
неединственности, поэтому принято различать сильную и слабую (параметрическую) единственность. Если задача имеет единственное решение при условии наличия лишь качественных допущений об источниках аномального поля, то такая единственность называется сильной. Если же для получения единственного решения помимо качественной априорной информации надо привлекать и количественную, то есть задавать заранее некоторые из параметров интерпретационной модели, то такая единственность называется слабой. Существование нескольких решений, соответствующих одному аномальному полю, называют эквивалентностью. Если поля моделей совпадают с абсолютной точностью во всем внешнем пространстве, то эти модели называют теоретически эквивалентными. Можно сказать, что теоретическая эквивалентность порождает отсутствие единственности решения обратных задач. В основе этого явления лежит существование распределений физических свойств, которые не порождают внешних аномальных полей. Такие объекты, которые контрастны по физическим свойствам, но создают нулевое внешнее поле, часто называют аннигиляторами. Их множество образует ядро оператора решения прямой задачи.

Простейшим примером аннигилятора в гравиразведке может служить шар объема V_1 с положительной избыточной плотностью σ_1 , окруженный концентрическим ему сферическим слоем объема V_2 с отрицательной избыточной плотностью σ_2 . Если суммарная избыточная масса данного объекта - нулевая, то есть $\sigma_1 V_1 + \sigma_2 V_2 = 0$, то и его внешняя гравитационная аномалия также будет нулевой, поскольку каждое из составляющих тел создает поле, эквивалентное полю точечной массы в центре.

Предположим, что в результате интерпретации каким-то образом построена плотностная модель, полностью объясняющая наблюдаемую сложную гравитационную аномалию от реального геологического объекта. Если на эту модель наложить неоднородный шар-аннигилятор, то есть поточечно сложить избыточные плотности модели и шара (см. рис. 39), то получится другая модель, но ее поле также будет совпадать с наблюдаемым, поскольку поле добавленного шара - нулевое. Помещая центр шара-аннигилятора в разные точки нижнего полупространства, мы можем получить бесконечное множество распределений плотности, объясняющих одну и ту же наблюдаемую аномалию.

То же явление имеет место и в магниторазведке. Например, шар объема V_1 с намагниченностью $\bar{I}_1$, окруженный концентрическим ему сферическим слоем объема V_2 с намагниченностью $\bar{I}_2$ при условии равенства нулю суммарного магнитного момента $\bar{I}_1 V_1 + \bar{I}_2 V_2 = 0$ будет иметь нулевое внешнее магнитное поле, поскольку каждое из составляющих его тел создает поле, эквивалентное полю диполя в центре. Наложение такого объекта на любую модель не меняет ее аномального магнитного поля.





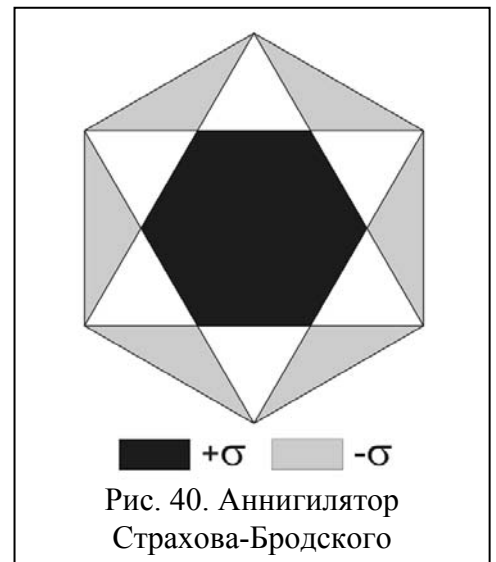
Подобных примеров, как для гравитационного, так и для магнитного полей, построено очень много, причем не только для тел с гладкими границами. На рис. 40 показан двумерный аннигилятор, рассмотренный В.Н.Страховым и М.А.Бродским, который представляет собой совокупность однородных многоугольников с избыточными плотностями, равными по модулю, но отличающимися знаком.

Необходимо подчеркнуть, что в магниторазведке большинство изученных примеров относится к слабомагнитным телам. Однако распространять полученные результаты на сильномагнитные объекты автоматически нельзя, и это легко показать для моделей полубесконечных пластов. В § 9 отмечено, что слабомагнитные пласты с неограниченным распространением на глубину создают теоретически эквивалентные аномалии, если угол между вектором намагничивания и пластом одинаков (рис. 16, 17). Отсюда следует, что по внешнему полю невозможно однозначно определить угол падения таких пластов. Вместе с тем, в § 17 показано, что реальное намагничение сильномагнитных пластов – неоднородное, следовательно, для них отсутствует неединственность решения обратной задачи, свойственная их слабомагнитным аналогам.

Для понимания вопросов единственности большое значение имеет так называемая лемма П.С.Новикова, в соответствии с которой распределение масс, ортогональное к произвольной гармонической функции, не порождает внешнего поля. Приведем ее формулировку полностью. Пусть V - конечный объем, ограниченный достаточно гладкой поверхностью S , и в нем задано распределение масс с плотностью $\sigma(\xi, \eta, \zeta)$. Тогда, если для любой функции $U(\xi, \eta, \zeta)$, удовлетворяющей уравнению Лапласа $\Delta U = 0$ в объеме V и ограниченной на поверхности S , выполняется условие ортогональности

$$\int_V \sigma(\xi, \eta, \zeta) U(\xi, \eta, \zeta) dV = 0, \quad (19.4)$$

то данное распределение масс не порождает внешнего поля. Очевидно, множество таких распределений масс - бесконечно.



В связи с наличием столь широкой теоретической эквивалентности, на практике обычно используют достаточно узкие модельные классы, для которых имеет место единственность решения обратной задачи, хотя бы и слабая. Наиболее простым из них является класс так называемых "рудных" моделей, под которыми понимаются уединенные однородные замкнутые тела. Для разных объектов из этого класса степень неединственности решения обратных задач, вообще говоря, различна. Так В.Н.Страхов и М.А.Бродский доказали единственность обратной задачи гравиразведки в классе однородных многогранников, гомеоморфных шару, то есть таких, которые могут быть трансформированы в шар непрерывным преобразованием. Вместе с тем, для однородных многоугольников в двумерной обратной задаче единственности решения нет, что ясно, в частности, из существования аннигилятора Страхова-Бродского (см. рис. 40). Для решения практических задач важно знать предельную степень неоднозначности в каждом классе. Это позволяет оценить минимальный объем априорной информации, требуемой для заведомого получения единственного решения для любых объектов из этого класса.

Проведенные многими геофизиками исследования показали, что для обратной задачи гравиразведки в классе уединенных однородных замкнутых тел предельно возможна **однопараметрическая неоднозначность**. Это значит, что для получения единственного решения в данном классе **необходимо** иметь следующий объем априорной информации:

- 1) качественную информацию о том, что интерпретируемая аномалия создается уединенным однородным замкнутым телом;
- 2) количественную информацию об **одном** из параметров, например о плотности тела или о расположении одной из точек его границы.

Достаточные условия единственности в этом классе дает теорема П.С.Новикова. Он доказал, что решение обратной задачи гравиразведки единственно в классе уединенных однородных замкнутых тел с известной постоянной избыточной плотностью, звездных относительно заданной точки. Звездным относительно внутренней точки называется тело, если любой луч, проведенный из данной точки, пересекает поверхность тела лишь единожды. Значение этой теоремы велико, поскольку именно к такому классу относятся многие распространенные модели геологических объектов, в том числе, пласты.

Эти результаты могут быть распространены и на обратную задачу магниторазведки. Отличия связаны лишь с тем, что плотность является скаляром, в то время как намагниченность - это вектор. Поэтому для двумерных обратных задач магниторазведки, где намагниченность описывается двумя компонентами, неоднозначность становится двухпараметрической, а для трехмерных обратных задач магниторазведки, соответственно, трехпараметрической. Аналогичное увеличение степени неединственности решения обратной задачи магниторазведки по сравнению с обратной задачей гравиразведки справедливо и в других классах.

Необходимо отметить, что если физические свойства не заданы, всегда можно построить бесконечное семейство тел, создающих эквивалентные внешние поля - так называемое эквивалентное семейство. Случай с многогранником отличается лишь тем, что другие тела в этом эквивалентном семействе - не многогранники, а имеющие гладкие границы. Вообще говоря, при стремлении избыточной плотности или намагниченности к нулю, тела в любых эквивалентных семействах "рудного" класса, увеличиваясь в размерах, стремятся по форме к шару. Этот факт вытекает из условия регулярности потенциала на бесконечности и строго доказан В.К.Ивановым.

Более сложным классом единственности является класс так называемых "структурных" моделей, под которыми понимают разрезы с несколькими субгоризонтальными поверхностями раздела сред, характерные для платформенных условий. Рассмотрим вначале наиболее простой подкласс с единственной контактной поверхностью, разделяющей однородные среды. Даже для него степень неоднозначности решения обратных задач выше, чем для замкнутых тел. В.Н.Страхов доказал наличие двухпараметрической неоднозначности решения двумерной обратной задачи гравиразведки для контактной поверхности в форме конхоиды Слюза. Эта алгебраическая кривая третьей степени с уравнением:

$$(z - a)(x^2 + z^2) = 2rz^2 \quad (19.5)$$

названа по имени исследовавшего ее бельгийского аббата и математика Рене-Франсуа де Слюза (1622-1685). Уравнение (19.5) содержит два параметра: a и r , геометрический смысл которых иллюстрирует следующий рисунок.

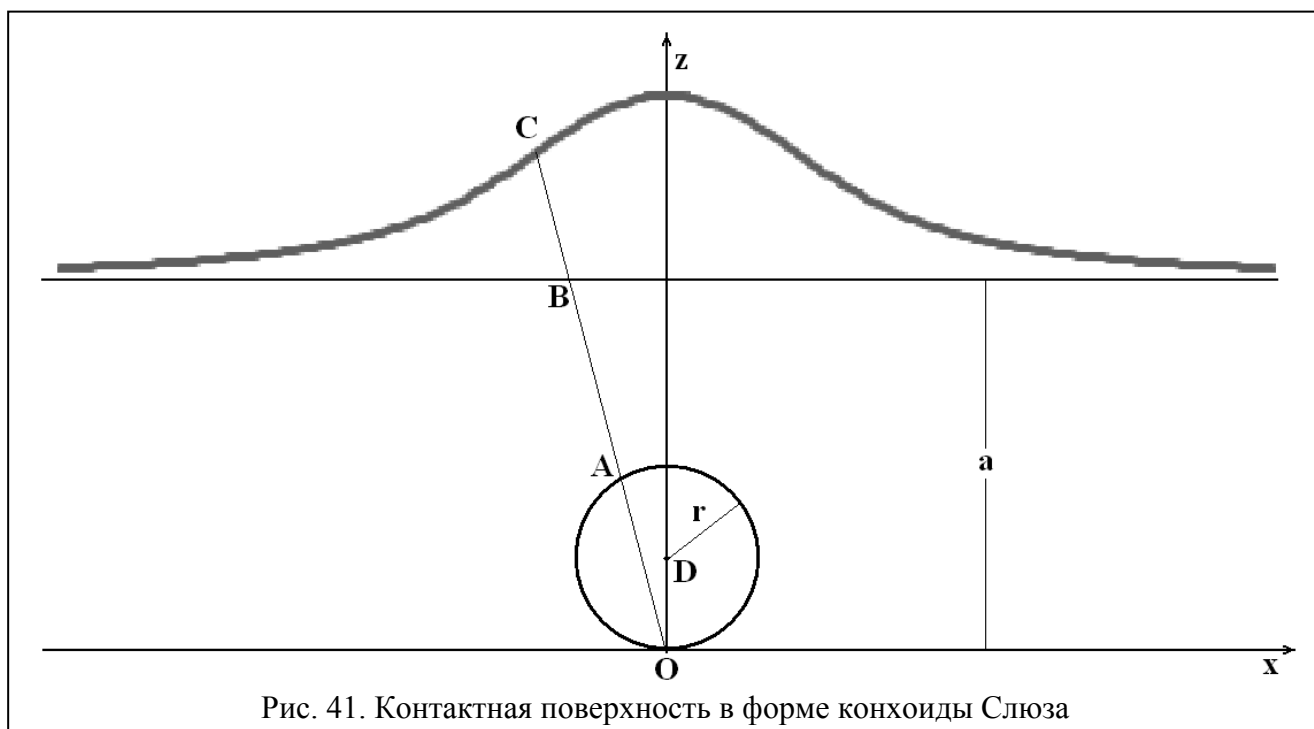


Рис. 41. Контактная поверхность в форме конхоиды Слюза

Он же поясняет способ построения конхоиды. Проведем окружность радиуса r , центр которой поместим в точку D на ось Oz так, чтобы она касалась оси Ox . Эта окружность называется производящей окружностью конхоиды. Далее проведем из начала координат произвольный луч, пересекающий окружность в точке A , а асимптоту конхоиды, параллельную оси Ox и отстоящую от нее на расстояние a , в точке B . Если отрезок OA отложить вдоль луча от точки B ($CB=AO$), то конец этого луча - точка C - будет принадлежать конхоиде. В.Н.Страхов доказал, что гравитационная аномалия конхоиды теоретически эквивалентна полю линейной массы, проходящей через точку D - центр производящей окружности конхоиды. Таким образом, полю одной и той же линейной массы могут быть эквивалентны поля не только круговых цилиндров, но и поля контактных поверхностей в форме конхоиды, причем от каждой из вышележащих асимптот их можно построить бесконечно много.

Из последнего примера вытекает ряд важных выводов. Во-первых, надо признать, что в общем случае по аномальному полю нельзя однозначно сделать вывод о том, чем вызвана аномалия: замкнутым телом или контактной поверхностью. Во-вторых, если даже эта качественная априорная информация имеется, для построения единственной контактной поверхности надо располагать и количественной априорной информацией о нескольких параметрах. Для случая гравиразведки таких параметров требуется два: избыточная плотность на границе и глубина одной из ее точек, либо же глубина двух точек. Для магниторазведки потребность в известных параметрах возрастает в силу векторного характера намагниченности. В-третьих, линейной массе может быть эквивалентен разрез, в котором есть несколько контактных поверхностей в форме конхоиды Слюза. При этом по полю невозможно однозначно определить даже количества контактных поверхностей в разрезе. Наконец, в-четвертых, можно построить разрез из двух эквивалентных конхоид, не порождающий внешнего аномального поля, для чего достаточно, чтобы избыточные плотности были разных знаков. Последний вывод можно распространить на большее число границ.

С практической точки зрения чрезвычайно важна исследованная В.М.Новоселицким модель субгоризонтального слоя с латеральным распределением плотности либо намагниченности. Дело в том, что для такой модели при условии априорного задания формы

верхней и нижней кромок пласта, обратные задачи решаются единственно. Для магнитной задачи при этом дополнительно требуется знать направление вектора намагниченности пород в изучаемом слое. Подобная информация зачастую доступна интерпретатору либо может быть извлечена непосредственно из аномального поля.

Тем не менее, в общем случае обратные задачи не имеют единственного решения, поскольку существуют теоретически эквивалентные модели. Еще гораздо шире развита так называемая **практическая эквивалентность**, когда разные модели создают очень близкие, но не абсолютно совпадающие внешние поля. Практическая эквивалентность, которую еще иногда называют ε -эквивалентностью, продуцирует **неустойчивость** решения обратных задач.

Устойчивой называют такую задачу, решение которой непрерывно зависит от исходных данных. Прежде, чем дать строгое определение, необходимо напомнить, что норма n -мерного евклидова пространства R^n определяется как модуль n -мерного вектора $(p_1, p_2, \dots, p_n)$, то есть

$$\|p\|_{R^n} = \left[\sum_{k=1}^n p_k^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (19.6)$$

Тогда, применительно к рассматриваемой постановке практических обратных задач, математическое определение устойчивости может быть дано следующим образом. Задача определения модели $p \in R^n$ по исходным данным $u \in R^m$ называется устойчивой на пространствах (R^n, R^m) , если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что из неравенства $\|u_2 - u_1\|_{R^m} \leq \delta(\varepsilon)$ следует $\|p_2 - p_1\|_{R^n} \leq \varepsilon$, где $u_1 = Dp_1$ и $u_2 = Dp_2$.

Вообще говоря, обратным задачам всех методов геофизики присуща неустойчивость даже в тех модельных классах, где имеет место единственность их решения. С практической эквивалентностью в отличие от теоретической можно конструктивно бороться, повышая точность съемки, сгущая сети наблюдений и расширяя площадь исследований. Важнейшее значение имеет применение устойчивых методов интерпретации, позволяющих ослабить влияние помех.

В начале XX века Ж.Адамар ввел понятие о корректных и некорректных задачах математической физики. Применительно к рассматриваемым обратным задачам, корректность по Адамару может быть сформулирована следующим образом. Задача определения модели $p \in R^n$ по исходным данным $u \in R^m$ называется корректно поставленной на паре евклидовых пространств (R^n, R^m) , если удовлетворяются следующие требования:

- 1) для всякого $u \in R^m$ существует решение $p \in R^n$;
- 2) решение определяется однозначно;
- 3) задача устойчива на пространствах (R^n, R^m) .

Если задача не удовлетворяет всем этим требованиям, то она называется некорректно поставленной по Адамару.

Возможность решения некорректно поставленных задач базируется на привлечении дополнительной информации. Если имеется количественная априорная информация, позволяющая сузить класс возможных моделей до компактного множества, то для получения устойчивого результата можно применить метод квазирешений. Если такой информации нет, но есть качественная априорная информация о модели, например, о гладкости ее границ раздела, то может применяться метод регуляризации.

§ 20. Квазирешение обратной задачи

Наличие помех геологического происхождения, преимущественно связанных с неоднородностью верхней части изучаемого разреза, приводит к тому, что в большинстве случаев формальное решение обратных задач не существует. В этих условиях необходимо строго определить, что именно требуется найти в результате их решения. Для большинства

интерпретационных задач таким результатом является **квазирешение**. Это понятие введено В.К.Ивановым.

Как было отмечено в § 19, решение операторного уравнения (19.3) может не существовать из-за помех, благодаря которым точка u_n , характеризующая исходные данные, может не принадлежать множеству $DP \in R^m$, то есть может не соответствовать ни одному из объектов множества возможных моделей $P \in R^n$. В этом случае в качестве квазирешения уравнения (19.3) предложено считать такую точку $p \in P \subset R^n$, образ которой $u \in DP \subset R^m$ находится на минимальном расстоянии от u_n . Назовем **невязкой** операторного уравнения $Dp = u$ следующую норму разности: $\|u - Dp\|_{R^m}$. В этих обозначениях квазирешением уравнения $Dp = u$ на множестве $P \in R^n$ называется модель $p \in P \subset R^n$, минимизирующая невязку этого уравнения по норме пространства R^m :

$$\|u - Dp\|_{R^m} = \min. \quad (20.1)$$

Обратим внимание на то, что определяется не абстрактное квазирешение, а квазирешение на конкретном множестве P . В геофизических терминах это значит, что ищется квазирешение на множестве шаров, либо квазирешение на множестве призм, либо квазирешение на множестве контактных поверхностей и т. п. Технологически удобнее искать решение не уравнения (20.1), а его естественного аналога

$$\|u - Dp\|_{R^m}^2 = \min. \quad (20.2)$$

С учетом (19.6) мы фактически приходим к одной из разновидностей метода подбора, называемой методом наименьших квадратов.

Очевидно, метод квазирешений не является всеобъемлющим - с его помощью можно решать лишь ограниченный круг задач. Ответ на вопрос, какие это задачи, дан В.К.Ивановым. Им доказана теорема, суть которой состоит в том, что если множество искомых моделей - компактно в R^n , то при стремлении невязки к нулю квазирешение стремится к точному решению p_t . Другими словами, если уменьшать помеху до нуля, то квазирешение, получаемое методом подбора на некотором множестве моделей, будет стремиться к точному решению лишь тогда, когда это множество компактно в R^n . Напомним, что множество $P \in R^n$ называется **компактным** в R^n , если из всякой последовательности его элементов можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу того же множества P . Множество P компактно в R^n тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено, то есть когда все параметры модели изменяются в конечных пределах. Это, вообще говоря, естественно для многих обратных задач гравиразведки и магниторазведки, что и объясняет причины популярности метода подбора.

Практически задача нахождения приближенного квазирешения на компактном множестве в пространстве R^n заключается в нахождении минимума функции n переменных, каковыми являются искомые параметры. Вид минимизируемой функции $\Phi(p_1, p_2, \dots, p_n)$ определяется условием (20.2), которое в развернутом виде может быть записано следующим образом:

$$\Phi(p_1, p_2, \dots, p_n) = \sum_{k=1}^m [u_k - u_{mk}(p_1, p_2, \dots, p_n)]^2 = \min, \quad (20.3)$$

где u_k и u_{mk} - соответственно наблюдаемое поле и поле модели в k -ой точке наблюдения.

В зависимости от характера решаемой задачи выделяют линейные, линеаризованные и нелинейные задачи подбора. При обнаружении и разделении аномалий основное значение имеют линейные и отчасти линеаризованные задачи, в то время как нелинейные задачи являются преобладающими при детальном количественном описании аномалий.

Линейные задачи отличаются тем, что оператор **D** решения прямой задачи в них фактически является прямоугольной матрицей **A**, имеющей **m** строк и **n** столбцов. Модель **p** и исходные данные **u** при этом понимаются как векторы-столбцы, имеющие соответственно **n** и **m** элементов. Предположим, что интерпретируемое поле **u** в **k**-ой точке с координатами (x_k, y_k, z_k) может быть представлено в следующей форме:

$$u(x_k, y_k, z_k) = p_1 \Gamma_1(x_k, y_k, z_k) + \dots + p_n \Gamma_n(x_k, y_k, z_k), \quad (20.4)$$

где $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ - известные значения, характеризующие в **k**-ой точке вклад соответствующих параметров при их единичной величине. Квазирешение данной задачи может быть найдено путем минимизации квадрата невязки, записанной в виде

$$\Phi(p_1, p_2, \dots, p_n) = \sum_{k=1}^m \left[u(x_k, y_k, z_k) - \sum_{i=1}^n p_i \Gamma_i(x_k, y_k, z_k) \right]^2 = \min. \quad (20.5)$$

При этом в силу линейности оператора прямой задачи определение искомых параметров в вычислительном плане сводится к решению достаточно проработанных проблем линейной алгебры.

Наиболее распространенной при решении линейных обратных задач является ситуация, когда число точек наблюдения превышает число искомых параметров, в результате чего поиск квазирешения сводится к устойчивому решению переопределенной системы линейных алгебраических уравнений. Для минимизации можно воспользоваться необходимыми условиями экстремума функции многих переменных, которые, как известно, заключаются в равенстве нулю частных производных по всем переменным. Запишем эти условия, обозначив выражение в квадратных скобках формулы (20.5) как **R**:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_1} = \sum_{k=1}^m R \Gamma_1(x_k, y_k, z_k) = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_2} = \sum_{k=1}^m R \Gamma_2(x_k, y_k, z_k) = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_n} = \sum_{k=1}^m R \Gamma_n(x_k, y_k, z_k) = 0.$$

Полученная система линейных алгебраических уравнений называется **системой нормальных уравнений** или системой уравнений Эйлера. Она может быть переписана более подробно, при этом для краткости опустим пределы суммирования по **k**, а также аргументы функций Γ и обозначим $u_k = u(x_k, y_k, z_k)$:

$$\begin{aligned} p_1 \sum \Gamma_1^2 + p_2 \sum \Gamma_1 \Gamma_2 + p_3 \sum \Gamma_1 \Gamma_3 + \dots + p_n \sum \Gamma_1 \Gamma_n &= \sum \Gamma_1 u_k \\ p_1 \sum \Gamma_2 \Gamma_1 + p_2 \sum \Gamma_2^2 + p_3 \sum \Gamma_2 \Gamma_3 + \dots + p_n \sum \Gamma_2 \Gamma_n &= \sum \Gamma_2 u_k \\ p_1 \sum \Gamma_3 \Gamma_1 + p_2 \sum \Gamma_3 \Gamma_2 + p_3 \sum \Gamma_3^2 + \dots + p_n \sum \Gamma_3 \Gamma_n &= \sum \Gamma_3 u_k \\ \dots \dots \dots \\ p_1 \sum \Gamma_n \Gamma_1 + p_2 \sum \Gamma_n \Gamma_2 + p_3 \sum \Gamma_n \Gamma_3 + \dots + p_n \sum \Gamma_n^2 &= \sum \Gamma_n u_k \end{aligned} \quad (20.6)$$

К решению этой задачи можно подойти по-другому: как к решению следующей переопределенной ($m > n$) системы линейных уравнений относительно тех же параметров:

[illegible]

$$\mathbf{A} \mathbf{p} = \mathbf{u}, \quad (20.8)$$
$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{p} = \mathbf{A}^T \mathbf{u}. \quad (20.9)$$

Напомним, что транспонированной называется матрица, являющаяся отражением исходной относительно главной диагонали, то есть строки матрицы A являются столбцами матрицы A^T и наоборот. Матрица $A^T A$ является квадратной, симметричной и имеющей размеры $n \times n$. Легко убедиться, что система (20.9) совпадает с системой нормальных уравнений (20.6), полученной путем минимизации невязки. Таким образом, оба рассмотренных подхода приводят к решению одной и той же системы линейных алгебраических уравнений.

§ 21. Основы метода регуляризации

В § 19 мы уже отмечали, что решение операторного уравнения $Dp = u$, у которого вместо точного значения правой части известно лишь приближенное, может и не существовать в классическом смысле. Пусть вместо точного u_T известно такое приближенное значение u_δ , для которого

$$\|u_T - u_\delta\|_{R^m} \leq \delta. \quad (21.1)$$

Числовой параметр δ характеризует погрешность правой части уравнения, поэтому представляется целесообразным находить приближенное решение p_δ с помощью такого оператора, зависящего от параметра, значения которого согласуются с погрешностью δ . Другими словами, естественно потребовать, чтобы та часть поля, которая связана с изучаемым геологическим объектом, воспроизводилась полем модели, а помеха при этом игнорировалась. При $\delta \rightarrow 0$, то есть при стремлении u_δ к u_T по норме пространства R^m , приближенное решение p_δ должно стремиться к точному решению p_T по норме пространства R^n .

Хотя понятие регуляризующего оператора сформулировано А.Н.Тихоновым для любых метрических пространств, мы далее будем рассматривать лишь конечномерные евклидовы пространства, наиболее важные с точки зрения практики решения обратных задач.

Оператор $R(u, \alpha)$, зависящий от параметра α , называется регуляризующим для операторного уравнения $Dp = u$, если он обладает следующими свойствами:

- 1) оператор определен для всякого $\alpha > 0$ и любого u из пространства R^m ;
- 2) если $Dp_T = u_T$, то существует такое $\alpha(\delta)$, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon)$, что если

$$\|u_T - u_\delta\|_{R^m} \leq \delta(\varepsilon), \quad (21.2)$$

то

$$\|p_T - p_\alpha\|_{R^n} \leq \varepsilon, \quad (21.3)$$

где

$$p_\alpha = R(u_\delta, \alpha) \quad (21.4)$$

и $\alpha = \alpha(\delta)$.

Решение, получаемое по формуле (21.4), при α , согласованном с погрешностью определения аномального поля δ , называется регуляризованным решением обратной задачи, а числовой параметр α - параметром регуляризации. Фактически регуляризованное решение является искомым приближенным решением обратной задачи.

Таким образом, получение приближенного решения обратной задачи, устойчивого к помехам в наблюдаемых полях, сводится по А.Н.Тихонову к следующим двум этапам:

- 1) к построению регуляризующего оператора;
- 2) к определению параметра регуляризации по априорной информации.

Этот метод построения приближенных решений и носит название метода регуляризации.

Построение регуляризующего оператора возможно при наличии качественной априорной информации о решении. Например, можно потребовать, чтобы искомое приближенное решение оказалось гладким, наименее уклоняющимся от начальной модели и т.п. Эту информацию формулируют в виде вариационного принципа отбора возможных решений обратной задачи. Для этого составляют функцию $\Omega[p]$, называемую **стабилизатором**, которая должна обладать следующими свойствами:

- 1) элемент p_T , представляющий точное решение обратной задачи, должен принадлежать области его определения P_1 , являющейся подмножеством множества допустимых моделей P , всюду плотным в P ;
- 2) для всякого числа $d > 0$ подмножество P_d элементов $p \in P_1$, для которых $\Omega[p] \leq d$, является компактным в P .

Выбор стабилизатора - неоднозначен и определяется характером решаемой задачи. Например, если модель получается негладкой, ее надо регуляризовать, минимизируя стабилизатор, характеризующий меру негладкости. Фактически стабилизатор является штрафом, который интерпретатор накладывает на решение за его нежелательные свойства, в том числе и негладкость. Эти нежелательные свойства обычно проявляются в процессе численных экспериментов по решению обратных задач для известных моделей, либо при

попытке решить конкретную обратную задачу методом квазирешений. После их выявления и выбора необходимого стабилизатора получение устойчивого решения сводится к решению следующей условно-экстремальной задачи: найти элемент p_δ , минимизирующий стабилизатор при условии, что невязка не превышает заданной величины δ , характеризующей норму помехи. Математически это выглядит так:

$$\begin{aligned} \Omega[p] &= \min, \\ \|u - u_\delta\|_{R^m} &\leq \delta. \end{aligned} \quad (21.5)$$

Найденную модель p_δ можно рассматривать как результат применения регуляризующего оператора.

Для решения условно-экстремальных задач в вариационном исчислении разработан специальный метод, называемый методом неопределенных множителей Лагранжа. Он дает возможность свести условно-экстремальную задачу с ограничением в форме равенства к безусловно-экстремальной задаче. Поясним его применение на простом примере, при этом заметим, что максимумы и минимумы функций ищутся одностипно. Действительно, в точке, где $f(x)$ имеет минимум, $-f(x)$ будет иметь максимум.

Пусть требуется найти стороны прямоугольника максимальной площади, вписанного в окружность с уравнением $x^2 + y^2 = r^2$. Поскольку площадь прямоугольника можно представить в виде $4xy$, задача сводится к нахождению максимума функции

$$f(x, y) = 4xy \quad (21.6)$$

при условии

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0. \quad (21.7)$$

В этом примере, конечно, можно выразить y через x и подставить в максимизируемую функцию, но для реальных задач это зачастую невозможно или затруднительно. Тогда составляют функцию

$$F(x, y) = \varphi(x, y) + \alpha f(x, y), \quad (21.8)$$

где α - неопределенный множитель, и находят искомые параметры из необходимых условий экстремума функции F , другими словами, из системы уравнений Эйлера и условия $\varphi(x, y) = 0$. В нашем примере

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 + 4\alpha xy. \quad (21.9)$$

Дифференцируя эту функцию по x и по y и приравнявая производные нулю, получаем совместно с (21.7) систему

$$\begin{aligned} 2x + 4\alpha y &= 0, \\ 2y + 4\alpha x &= 0, \\ x^2 + y^2 - r^2 &= 0, \end{aligned} \quad (21.10)$$

откуда следует, что искомый минимум дает квадрат, то есть $x = y = r / \sqrt{2}$ и $\alpha = -0,5$.

А.Н.Тихонов доказал, что если метод Лагранжа реализуем для решения исходной условно-экстремальной задачи (21.5), то есть существует такой неопределенный множитель α , при котором

$$\|Dp - u_\delta\|_{R^m} = \delta, \quad (21.11)$$

то задача (21.5) оказывается эквивалентной безусловно-экстремальной задаче поиска минимума следующей функции, которую называют функцией Тихонова:

$$M^\alpha[u_\delta, p] = \|Dp - u_\delta\|_{R^m}^2 + \alpha \Omega[p]. \quad (21.12)$$

Неопределенный множитель α здесь является параметром регуляризации. Таким образом, метод регуляризации сводится к решению задачи

$$\|Dp - u_\delta\|_{R^m}^2 + \alpha\Omega[p] = \min \quad (21.13)$$

и оценке α , согласуемого с погрешностью исходных данных.

Рассмотрим качественно влияние параметра α на результаты минимизации. Если $\alpha=0$, то, чему бы ни был равен стабилизатор, он не оказывает никакого влияния на решение обратной задачи. Подставив это значение в (21.13), легко убедиться, что в данном случае результаты метода регуляризации полностью совпадут с результатами метода квазирешений. Можно сказать, что метод квазирешений есть частный случай метода регуляризации, когда параметр регуляризации - нулевой. Пусть теперь α достаточно велико - тогда минимум функции Тихонова будет определяться лишь минимумом стабилизатора. Поскольку $\Omega[p]$ является своеобразным штрафом, налагаемым на решение за его нежелательные свойства, метод регуляризации при этом будет давать результаты, полностью удовлетворяющие критерию качества, но игнорирующие наблюдаемое поле.

Из изложенного следует, что надо подбирать такую величину параметра регуляризации, которая бы оптимально удовлетворяла обоим условиям в (21.5). Это можно сделать, организовав специальным способом перебор значений α . Практически для выбора оптимального параметра регуляризации используется последовательность его значений в виде убывающей геометрической прогрессии:

$$\alpha_{k+1} = \mu\alpha_k. \quad (21.14)$$

Начальное значение α определяется характером задачи; можно без потери общности считать, что $\alpha_0 = 1$. Величину $\mu < 1$ обычно полагают равной 0,1. Если параметр α фиксирован, решение задачи (21.13) становится решением обычной задачи подбора. В итоге применение метода регуляризации сводится к многократному решению задачи подбора и выбору оптимального параметра регуляризации, исходя из некоторых критериев.

При решении обратных задач встречаются две ситуации, различающиеся тем, известна ли норма помехи δ в исходных данных или нет. Если она известна, то выбор регуляризованного решения P_δ осуществляется по так называемому критерию невязки:

$$\|Dp - u_\delta\|_{R^m} = \delta. \quad (21.15)$$

Это значит, что, перебирая различные значения параметра регуляризации α , надо следить за получаемой невязкой и выбирать в качестве оптимальной такую модель, поле которой воспроизводит интересующую часть аномалии и игнорирует помеху. Чаще, однако, δ бывает неизвестной. Дело в том, что большая часть помехи - это помеха геологического происхождения, связанная с неоднородностью верхней части разреза и с влиянием объектов, не учитываемых в модели. Эти же источники помех лишь в редких случаях доступны анализу и оценке.

Если норма помехи не известна, то для выбора параметра регуляризации применяют квазиоптимальный критерий, предложенный А.Н.Тихоновым и В.Б.Гласко. В соответствии с ним, выбираться должно такое значение параметра регуляризации $\alpha > 0$, которое минимизирует следующую норму:

$$\left\| \alpha \frac{dp_\alpha}{d\alpha} \right\|_{R^n} = \min. \quad (21.16)$$

Если таких значений несколько, в качестве квазиоптимального берут наименьшее из них. Практически при использовании данного критерия следят за изменением параметров модели при изменении параметра регуляризации по закону (21.14) и в качестве регуляризованного решения выбирают такое, для которого такое изменение - минимально. Это критерий обоснован теоретически лишь для некоторых классов задач, но получил весьма широкое распространение на практике. Иногда квазиоптимальный критерий по имени авторов называют критерием Тихонова-Гласко.

В настоящей главе рассмотрены лишь основы методов квазирешений и регуляризации, требуемые при решении задач обнаружения и разделения гравитационных и магнитных аномалий. Фактические их возможности наиболее полно проявляются при решении задач количественной интерпретации, и они далее будут рассмотрены более подробно.

Вопросы для самоконтроля

1. Какая априорная информация требуется для однозначного определения формы поверхности однородного кристаллического фундамента по гравитационному полю в районе, где другие плотностные границы отсутствуют?
 - а) разность плотностей пород фундамента и перекрывающего осадочного чехла (24);
 - б) глубина до фундамента в одной из точек (27);
 - в) то и другое вместе (30).
 2. Можно ли при отсутствии априорной информации определить, чем вызвана гравитационная аномалия: замкнутым изолированным объектом или субгоризонтальной бесконечной контактной поверхностью?
 - а) нельзя (36);
 - б) можно всегда (62);
 - в) можно при наличии материалов крупномасштабной высокоточной съемки (88).
 3. Что является следствием наличия нескольких разных объектов, создающих абсолютно одинаковые аномальные поля?
 - а) отсутствие существования решения обратных задач (39);
 - б) отсутствие единственности решения обратных задач (48);
 - в) отсутствие устойчивости решения обратных задач (57).
 4. Что является следствием наличия нескольких разных объектов, создающих примерно одинаковые аномальные поля?
 - а) отсутствие существования решения обратных задач (71);
 - б) отсутствие единственности решения обратных задач (72);
 - в) отсутствие устойчивости решения обратных задач (73).
- Контрольная сумма при правильных ответах = 187.**

ГЛАВА 6. ГЕОЛОГИЧЕСКИ СОДЕРЖАТЕЛЬНЫЕ СПОСОБЫ ОБНАРУЖЕНИЯ И РАЗДЕЛЕНИЯ АНОМАЛИЙ

§ 22. Основные подходы к обнаружению аномалий

Результаты площадных гравиметрических и магнитометрических съемок представляют в виде карт графиков либо карт соответствующих изолиний. Для данных гравиразведки это обычно карты изоаномал силы тяжести в редукции Буге, для данных магниторазведки - карты изодинам ΔT или ΔZ . Результаты профильных и маршрутных съемок изображают в виде графиков измеряемых элементов полей. Первая из задач, решаемых интерпретатором при геологическом истолковании полученных результатов, состоит в обнаружении на этих картах и графиках достоверных аномалий и их классификации. Эта задача может решаться по-разному в зависимости от конкретных геологических условий, для чего разработаны многочисленные методы. Вместе с тем, в любых условиях вначале производится визуальное обнаружение аномалий и лишь, если уровень помех оказывается столь большим, что визуальное обнаружение оказывается невозможным, интерпретатору приходится прибегать к аналитическим методам обнаружения с применением компьютеров.

Визуальное обнаружение аномалий осуществляется в рамках процедуры, называемой **морфологическим анализом карт и графиков** и включающей два этапа. Первый этап - это оценка достоверности интерпретируемых материалов. При ее проведении надо иметь в виду,

что полевые гравиметрические и магнитометрические съемки являются довольно дорогостоящими. Чтобы оправдать их проведение, в процессе интерпретации должна быть максимально выявлена вся содержащаяся в картах и графиках геологическая информация. Это в частности значит, что интерпретатор обязан обнаружить на картах и графиках **все достоверные аномалии** и, по возможности, без ошибок.

При этом, вообще говоря, принято различать ошибки двух родов. Эти понятия в геофизической литературе, к сожалению, определяются разными авторами по-разному, поэтому рассмотрим их несколько подробнее. Понятия о родах ошибок привнесены в геофизику из математической статистики, где они сформулированы применительно к проверкам статистических гипотез. Как известно, критерий статистической гипотезы – это правило, дающее возможность принять или отвергнуть данную гипотезу на основании имеющейся выборки данных. При этом если проверяемая гипотеза верна, но отвергается согласно критерию – такая ошибка называется ошибкой первого рода. Если же проверяемая гипотеза неверна, но принимается согласно критерию – такая ошибка называется ошибкой второго рода. Для решения задач обнаружения аномалий естественной является проверка гипотезы о существовании аномалии и создающего ее объекта (а не об их отсутствии), поэтому, в соответствии с общим математическим определением, **ошибка первого рода - это ошибка пропуска объекта, а ошибка второго рода - ошибка его ложного обнаружения**. Очевидно, ошибка первого рода наносит гораздо больший вред, поскольку пропущенная аномалия фактически означает потерю возможности обнаружения месторождения, рудного тела и т.п. Таким образом, если у интерпретатора нет полной уверенности в недостоверности какой-либо из аномалий, он должен показывать ее на отчетных схемах. Конечно, если есть возможность заверки данной аномалии, надо провести дополнительные измерения. Когда возможности проверки нет, такую аномалию на схемах целесообразно помечать как сомнительно достоверную.

Недостоверными считаются одноточечные, однопрофильные и одномаршрутные аномалии, которые могут появиться как результат случайных ошибок оператора на рядовых или опорных пунктах, либо погрешностей прибора. Инструкция по гравиразведке устанавливает несколько критериев достоверности. Аномалия силы тяжести считается достоверной, если она выделена не менее чем на трех пунктах различных звеньев и имеет амплитуду, не меньшую сечения изоаномал отчетной карты. В случае корреляции более слабых аномалий на трех и более профилях, они также относятся к достоверным. При обнаружении аномалий по результатам профильной съемки, они считаются достоверными, если подтверждаются тремя и более проконтролированными пунктами. Близкие требования к достоверности аномалий выдвигает и инструкция по магниторазведке. Обнаруживаемую визуально аномалию полагают достоверной, если она отмечается не менее чем по трем соседним точкам, значения поля в которых превышают не менее чем в 3 раза среднеквадратическую погрешность съемки. Для характеристики достоверности более слабых аномалий, обнаруживаемых аналитическими способами, предложены разнообразные статистические критерии.

Второй этап морфологического анализа состоит в обнаружении и классификации региональных и локальных аномалий. **Региональная аномалия** обычно занимает сравнительно большую часть площади исследований и совпадает в плане с одним из крупных геологических структурных элементов. Нередки случаи, когда региональная аномалия выходит и за пределы площади исследований. Границы площадных региональных аномалий обычно связаны с разломами различных масштабов: от глубинных до небольших локальных. Другие **локальные или местные аномалии** связаны со сравнительно небольшими по размерам структурами осадочного чехла или кристаллического фундамента, с отдельными геологическими телами, в том числе, с месторождениями различных полезных ископаемых. В результате второго этапа морфологического анализа составляются так называемые **схемы типов аномалий**, на которые различными условными обозначениями выносят обнаруженные региональные и локальные аномалии.

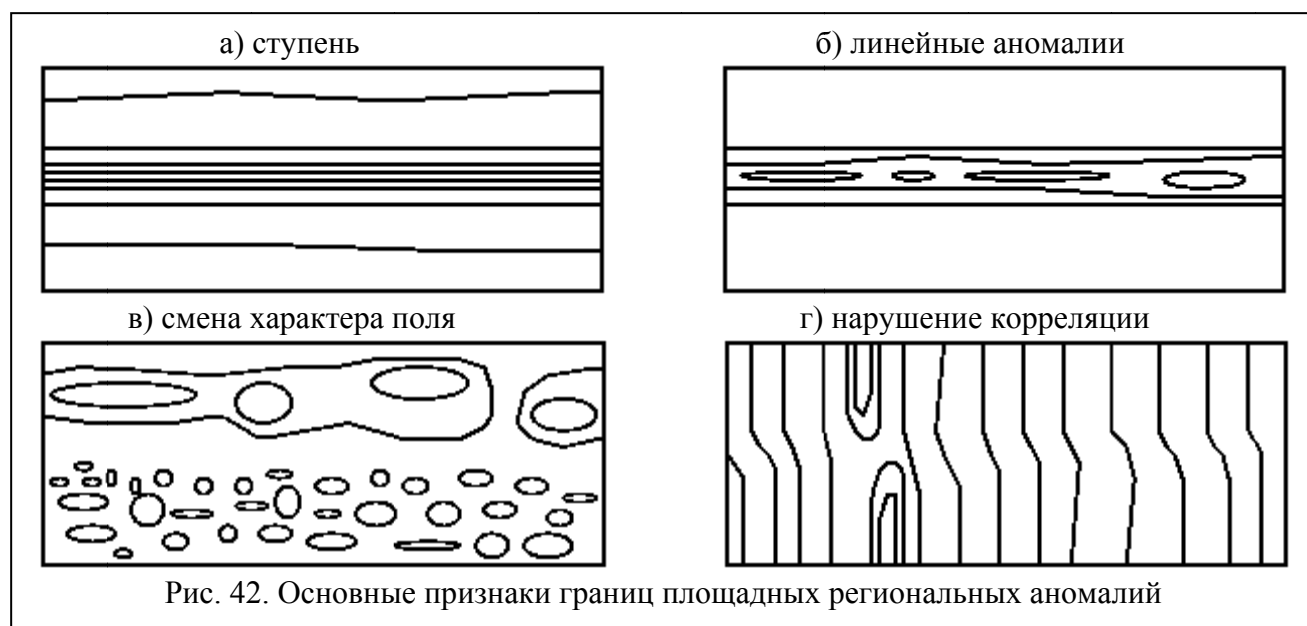
Процесс обнаружения строится по принципу **от общего к частному** и заключается в том, что сначала интерпретатор анализирует структуру аномального поля, выделяет площадные региональные аномалии и лишь затем на их фоне находит локальные аномалии. При этом для обнаружения региональных аномалий, сравнимых по площади с участком исследований, обычно приходится рассматривать карты на гораздо больших площадях, включающих данный участок. В процессе обнаружения основное внимание надо обращать на границы площадных региональных аномалий, преимущественно связанных с разломами, и на выдержанность характера аномального поля в пределах выделяемой региональной аномалии. Существуют четыре основных признака, указывающих на возможное наличие разлома, а, следовательно, и на границы площадных региональных аномалий.

1. Наличие ступени в уровнях аномального поля. Если средние физические свойства пород контактирующих региональных структур резко различаются, на границе между ними возникает аномалия типа ступени. Для нее характерно наличие линейной зоны больших горизонтальных градиентов аномального поля, проявляющихся на карте в виде сгущения изолиний и их вытягивания вдоль какого-либо направления (рис. 42а).

2. Наличие линейных локальных аномалий. Многие разломы, особенно крупные, сопровождаются внедрением в ослабленные зоны интрузий, а также интенсивными процессами метаморфизма. Это приводит к образованию на границе линейных региональных аномалий в виде цепочек максимумов и минимумов (рис. 42б). Максимумы обычно отмечают наличие интрузий основного и ультраосновного состава, в том числе даек, а также зоны скарнирования, сопровождающиеся накоплением магнетита. Минимумы соответствуют интрузиям кислого состава, зонам дробления, катаклаза, милонитизации и т. п.

3. Смена характерных особенностей аномальных полей. Если средние физические свойства пород контактирующих региональных структур не различаются, аномалия типа ступени на границе между ними не возникает. Вместе с тем, поскольку геологическое строение этих структур - различно, характер аномальных полей, в том числе локальных, по обе стороны границы может быть совершенно разным (рис. 42в).

4. Нарушение корреляции аномальных полей. Разломы внутри близких по строению структур могут сопровождаться сдвигами, приводящими к нарушению корреляции полей. Такие линейные зоны потери корреляции также уверенно обнаруживаются на картах изолиний (рис. 42г).



Обнаруженные границы площадных региональных аномалий выносят на схему типов, показывая их принятыми условными обозначениями, которые различны в разных организациях.

Сами площадные региональные аномалии на схеме обычно показывают сплошной раскраской различными цветами. При этом проверяют, что не осталось частей изучаемого участка, не относящихся к какой-либо площадной региональной аномалии, так как не может быть частей участка, не относящихся одной из региональных геологических структур. Выделение площадных региональных аномалий является весьма ответственным этапом, поскольку при дальнейшем геологическом истолковании результатов в пределах одной такой аномалии пользуются принципом аналогии, который нельзя распространять на разные площадные региональные аномалии.

Завершив анализ общей структуры аномального поля и обнаружение региональных аномалий, интерпретатор переходит к обнаружению на их фоне и классификации достоверных локальных аномалий. Большинство локальных аномалий относится к четырем основным морфологическим типам, признаки которых показаны на рис. 43. Контурами замкнутых изолиний обычно отмечают наиболее интенсивные локальные аномалии при слабоградиентном региональном фоне. Если градиент регионального поля достаточно велик, в зависимости от амплитуды локальная аномалия проявляется либо как местный изгиб изолиний, либо как их миндалевидное расширение. Наконец, в виде малых градиентных зон или местных ступеней проявляются на картах небольшие структуры типа флексур, либо местные разломы.

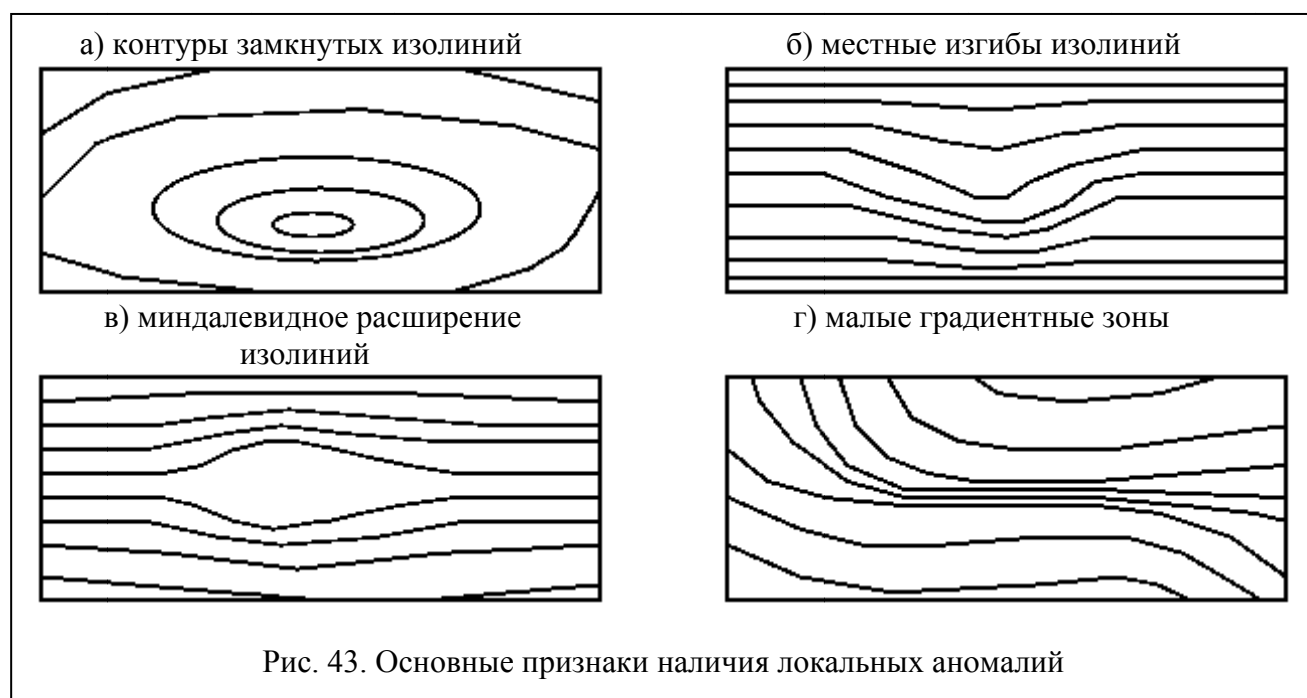


Рис. 43. Основные признаки наличия локальных аномалий

Обнаруженные локальные аномалии показывают на схеме типов различными условными значками. Поскольку сплошной раскраской на этой схеме уже отмечены площадные региональные аномалии, локальные аномалии обычно обозначают контурами различных цветов или черными контурами с бергштрихами, направленными в сторону уменьшения аномального поля. На этом морфологический анализ завершается. Если в комплекс геофизических методов, применяемый для решения поставленной геологической задачи, входят и гравиразведка, и магниторазведка, схемы типов аномалий составляют по данным каждого из методов.

По завершении морфологического анализа интерпретатор переходит к синтезу информации с целью выработки первоначальных представлений о геологическом строении изучаемого участка. Этот этап, как было указано в § 1, называется **начальным синтезом**, и на нем каждой из обнаруженных достоверных аномалий ставится в соответствие какой-либо из возможных в данном районе геологических объектов. В результате составляется **схема вероятных источников аномалий**. Основной работой в процессе синтеза является

сопоставление карт и схем типов аномалий разных полей друг с другом и с геологическими картами и разрезами изучаемого участка.

Рассмотрим более подробно особенности качественного сопоставления гравитационных и магнитных аномалий. Раньше эта процедура проводилась наложением друг на друга карт и схем типов аномалий, изображенных на разных кальках. Сейчас при наличии геоинформационных систем и соответствующего программного обеспечения подобное сопоставление проводят на компьютерах. Основная задача сопоставления состоит в выяснении того, какие гравитационные и магнитные аномалии вызваны одним и тем же геологическим объектом, а какие - разными. Эта задача довольно сложна, поскольку характеры сопоставляемых полей различны. Соотношение Пуассона между гравитационным и магнитным потенциалами указывает на то, что магнитные аномалии в зависимости от направления намагниченности объектов фактически ведут себя как градиенты гравитационного поля Δg . В связи с этим гравитационные и магнитные аномалии обычно не совпадают точно по местоположению, размерам и форме. Магнитные аномалии чаще имеют более сложный характер, нежели гравитационные, и теснее связаны с особенностями геологического строения верхней части объектов. Необходимо отметить, что, работая на компьютере, можно дополнительно применять аналитические методы сопоставления, в частности, базирующиеся на совместном анализе спектров гравитационных и магнитных аномалий. Эти методы будут рассмотрены в главе, посвященной трансформациям.

Сопоставление гравитационных и магнитных аномалий дает во многих случаях возможность сделать выводы об их природе. Для этого рассматривают форму аномалий (максимум; минимум; знакопеременная аномалия дипольного характера; максимум, обрамленный минимумами; минимум, обрамленный максимумами и т. п.), их размеры в плане, а также относительное расположение. Геологическая информация выявляется как в случае принадлежности гравитационных и магнитных аномалий одному объекту, так и в случае несовпадения их источников.

Приведем несколько примеров. В платформенных условиях соответствие интенсивных гравитационных и магнитных аномалий единому источнику может означать, что либо этим источником является блок кристаллического фундамента, либо интрузия, внедрившаяся в осадочный чехол. Отобрать один из этих вариантов зачастую можно, оценивая качественно горизонтальные градиенты полей. Так, если градиенты обоих полей велики, то есть изолинии вблизи границ тел сгущены, это может указывать на небольшую глубину верхней кромки и на вероятность варианта интрузии. Если горизонтальные градиенты - невелики, вероятнее вариант неоднородности в кристаллическом фундаменте. Если коррелирующиеся гравитационные и магнитные аномалии - слабо интенсивны, это может означать, что их источником является рельеф кристаллического фундамента. Тогда, когда локальная гравитационная аномалия не сопровождается магнитной, ее источником, скорее всего, является структура в осадочном чехле. Поскольку для большинства платформенных районов характерно возрастание плотности пород осадочного чехла с глубиной, локальным максимумам подобного вида, вероятно, соответствует антиклиналь, а локальным минимумам - синклиналь. Вместе с тем, там, где плотность нижележащих пород оказывается меньше, чем у перекрывающих, например, в областях развития соляной тектоники, над антиклиналями, над соляными куполами наблюдаются минимумы силы тяжести.

Сделанные на основании сопоставления гравитационных и магнитных полей выводы относительно их природы должны быть отображены специальными обозначениями на составляемой схеме вероятных источников аномалий. Далее на той же схеме отображают информацию, извлеченную в результате сопоставления с данными других геофизических и геохимических методов, и завершают начальный синтез сопоставлением с геологическими данными по изучаемому участку. На момент проведения начального синтеза геологическая информация на участке обычно бывает весьма фрагментарной. Вместе с тем, если по геологическим данным установлена природа одной из локальных аномалий, то другие локальные аномалии того же типа в пределах той же площадной региональной аномалии скорее

всего имеют аналогичную природу. Принцип аналогии дает возможность получить информацию о вероятном происхождении многих локальных аномалий. Составлением схемы вероятных источников завершается визуальное обнаружение аномалий.

В тех случаях, когда высокий уровень геологических помех делает визуальное обнаружение невозможным, интерпретатору приходится прибегать к аналитическим методам обнаружения аномалий с помощью компьютеров. К настоящему времени разработано достаточно много аналитических способов обнаружения, базирующихся на применении аппарата математической статистики. Детальное изучение этих способов, единых для всех геофизических методов, проводится в рамках специального учебного курса "Теоретические основы обработки геофизической информации". Отметим лишь несколько моментов, важных для дальнейшего изложения. В основу большинства способов обнаружения слабых аномалий на фоне интенсивных помех положено весовое осреднение полей в специально задаваемых скользящих окнах. Это роднит способы обнаружения аномалий со способами их разделения, такими как трансформации. Вообще говоря, разделение полей - один из основных приемов, ведущих к обнаружению слабых аномалий. Таким образом, рассматривая методы разделения гравитационных и магнитных аномалий, мы тем самым еще не раз будем возвращаться к задачам обнаружения.

§ 23. Теоретические основы разделения аномалий

На величину гравитационных и магнитных аномалий в каждой из точек наблюдения оказывают влияние все геологические объекты Земли. Аномальные поля из-за этого оказываются достаточно сложными, что не только затрудняет их геологическое истолкование, но во многих случаях мешает даже их визуальному обнаружению. Для упрощения обнаружения и геологической интерпретации естественно прибегнуть к разделению сложных полей на более простые компоненты, истолковать их порознь, а затем, собрав воедино полученные частные модели, синтезировать общую модель изучаемой части Земли. Эта идея, возникнув на ранних этапах развития разведочной геофизики, получила широчайшее распространение, приведя к разработке многих сотен разнообразных приемов разделения аномалий. Вместе с тем, следует отметить, что, несмотря на кажущуюся простоту, задачи разделения фактически оказываются весьма сложными.

Покажем на примерах основные причины возникновения указанных сложностей. Главной из них является рассмотренная в первой главе эквивалентность полей различных объектов, приводящая к отсутствию единственности решения обратных задач. Проявления эквивалентности чрезвычайно разнообразны. Так на рис. 44 представлены два находящиеся друг под другом объекта одинаковой плотности, гравитационные аномалии которых практически эквивалентны. Очевидно, аномалии этих тел разделить невозможно, если не знать исходное поле со столь высокой точностью, которая недоступна для современных гравиметров.

Более того, приведенный ранее пример с контактной поверхностью в форме конхоиды Слюза показывает теоретическую возможность существования объектов, поля которых совпадают абсолютно и, следовательно, их принципиально нельзя разделить. Таким образом, при разделении аномальных полей от объектов, расположенных на разных глубинах, из-за влияния эквивалентности в ряде случаев могут возникать серьезные осложнения.

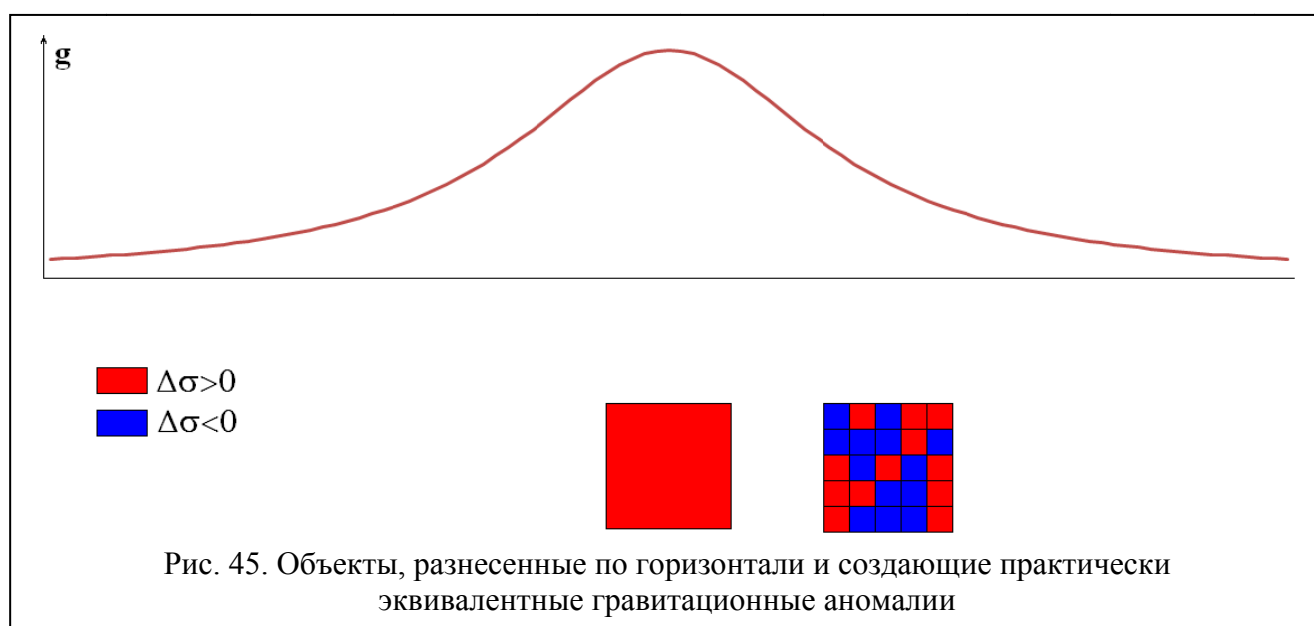
Не столь очевидно, что подобные трудности могут возникать и при разделении аномалий от тел, разнесенных по горизонтали. Довольно распространено заблуждение, сводящееся к тому, что гравитационная аномалия от объекта всегда локализуется непосредственно над ним, но для неоднородных объектов это не так. На рис. 45 показана гравитационная аномалия от неоднородного объекта, состоящего из частей с различными положительными и отрицательными избыточными плотностями, причем экстремум графика находится далеко в стороне от этого объекта. Такую же аномалию создает однородный объект, расположенный непосредственно под экстремумом. Аналогичный пример легко построить и для магнитных аномалий. Теоретически не исключается ситуация, при которой гравитационные и магнитные аномалии объекта локализуются даже в другом регионе за тысячи километров от него.

Очевидно, аномалии и от таких практически эквивалентных объектов крайне сложно разделить.

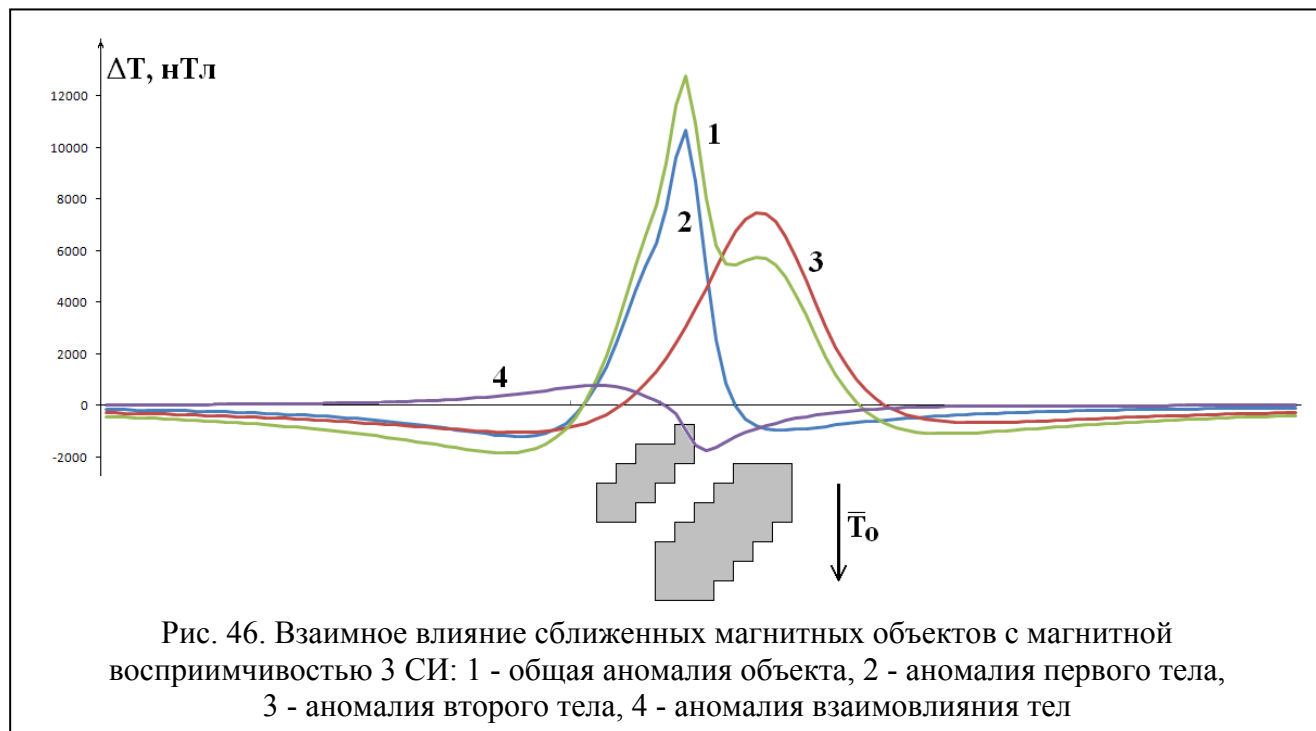


Эквивалентность является препятствием для разделения как гравитационных, так и магнитных полей. Кроме того, разделение магнитных аномалий осложняется за счет взаимного влияния намагниченных тел. Если два магнитных тела расположены близко друг к другу, то каждое из них намагничивается не только в земном магнитном поле и собственном аномальном (размагничивающем) поле, но также и в аномальном поле соседнего тела. В итоге общая аномалия составного объекта U окажется суммой не двух, а трех составляющих:

$$U = U_1 + U_2 + U_{вз}, \quad (23.1)$$



где U_1 и U_2 - поля тел, а $U_{вз}$ - поле взаимовлияния между ними. На рис. 46 показаны эти составляющие для аномалий ΔT модели двух магнетитовых рудных тел с магнитной восприимчивостью 3 СИ. Таким образом, магнитные аномалии, строго говоря, вообще принципиально невозможно разделить, не зная заранее геологического строения. В гравиразведке подобного эффекта нет, поскольку в гравитационном поле отсутствует поляризация тел.



Аномалия взаимовлияния тел определяется их формой, величиной магнитной восприимчивости K и расположением по отношению к намагничивающему полю. Если $K \rightarrow 0$, то и $U_{вз} \rightarrow 0$. В связи с этим для слабомагнитных объектов взаимовлиянием их частей обычно пренебрегают и разделяют магнитные аномалии так же, как гравитационные. Однако, применять такой прием надо с осторожностью, оценивая возможные погрешности, как это делается при решении прямой задачи с учетом размагничивания. Напомним, что $U_{вз}$ заведомо меньше 1 нТл только для объектов, магнитная восприимчивость которых менее $634 \cdot 10^{-5}$ СИ.

Таким образом, строгое разделение гравитационных и магнитных аномалий в общем случае - невозможно. Оно является некорректной операцией и чаще применяется на начальных этапах интерпретации для выделения, выявления в визуально обнаруживаемой форме информации об отдельных составляющих аномального поля. Вместе с тем, в отдельных частных случаях задача разделения поддается решению, для чего интерпретатор должен привлекать всю имеющуюся априорную информацию.

К настоящему времени предложено несколько тысяч способов разделения, основанных на различных идеях извлечения информации и опирающихся на разный объем требуемых для их применения априорных сведений. В зависимости от объема и вида требуемой априорной информации большинство способов можно отнести к четырем основным группам, указанным в таблице 3.

Для исключения из аномального поля составляющих, связанных с известными объектами, применяют геологическое редуцирование. Оно сводится к вычислению поля этих объектов и вычитанию его из наблюдаемого поля, при этом требуется достаточно большой объем априорной информации.

Таблица 3.

Группа способов разделения	Объем требуемой информации
Геологическое редуцирование	Детальные сведения о форме, расположении некоторых из объектов и об их физических свойствах
Корреляционные способы	Сведения о характеристиках некоторых объектов на эталонных профилях или площадях
Трансформации	Сведения о возможном спектральном составе различных составляющих
Аппроксимационные способы	Общие представления о характере возможных источников аномалий

Если столь подробных сведений об изучаемых объектах нет, но есть достоверная информация об аналогичных объектах в исследуемом районе на отдельных эталонных профилях или площадях, для разделения применяют корреляционные способы. Они заключаются в установлении на эталоне корреляционных связей между какой-либо из составляющих поля и параметрами интересующего объекта с последующим применением найденных связей для выделения требуемой составляющей на всей площади исследований.

Эти две группы способов разделения активно опираются на априорную геологическую информацию и всегда дают возможность геологически содержательного истолкования разделяемых компонент. Более формальный характер имеют две другие группы: трансформации и аппроксимационные способы.

Трансформации состоят в подавлении мешающей компоненты поля и наиболее четком выделении интересующей компоненты. Фактически они сводятся к пространственной фильтрации аномального поля в скользящих окнах.

Аппроксимационные способы заключаются в приближении какой-либо из составляющих поля функцией с заданными свойствами. С одной стороны, аппроксимирующими функциями могут быть, например, полиномы, то есть функции, не имеющие строгого геологического соответствия. С другой стороны, для аппроксимации могут применяться и функции, описывающие поля некоторых физических объектов, хотя и не обязательно именно тех, которые реально существуют на исследуемом участке. Среди последних наиболее часто используют поля формальных источников: точечных и линейных масс, диполей, пластинок, стержней и т. п.

§ 24. Геологическое редуцирование аномалий

Геологическое редуцирование - этот способ разделения аномальных полей от известных и неизвестных объектов. Оно состоит в вычислении поля известных объектов, то есть в решении прямой задачи для них, и вычитании рассчитанного поля из наблюдаемого. Естественно, для применения геологического редуцирования требуется иметь полную информацию об этих объектах, то есть знать их местоположение, форму, строение, элементы залегания, физические свойства и т. п. Если такая информация имеется, применение геологического редуцирования для разделения полей является наиболее оправданным, особенно в гравиразведке, где нет взаимовлияния тел.

При решении различных геологических задач применение геологического редуцирования имеет специфические особенности, однако, можно выделить и общие подходы к нему. Обычно геологическое редуцирование начинают с учета верхних границ раздела сред, перекрывающих изучаемый объект. Эти границы достаточно часто бывают известны по данным геологической съемки, по материалам горно-буровых работ, сейсморазведки или электроразведки. Физические свойства пород получают путем измерений на отобранных образцах или по материалам

каротажа. Плотность рыхлых отложений изучают гамма-гамма методом в скважинах, канавах и шурфах, а также путем подземной регистрации космического излучения. Надо отметить, что плотностная граница между рыхлыми и коренными отложениями создает довольно большие гравитационные аномалии, поскольку она находится на небольшой глубине, а плотность рыхлых пород намного меньше, чем у коренных, иногда до 1 г/см^3 .

На рис. 47 показан пример геологического редуцирования гравитационной аномалии рыхлых отложений на полиметаллическом месторождении. Здесь избыточная плотность руд составляет 3 г/см^3 , плотность вмещающей толщи карбонатных пород $2,7 \text{ г/см}^3$, а плотность рыхлых отложений - всего около 2 г/см^3 . Карманы рыхлых отложений над рудой создают значительные помехи, достигающие нескольких десятых долей миллигала, но, после изучения их формы с помощью электроразведки методом ВЭЗ и



Рис. 47. Геологическое редуцирование рыхлых отложений на полиметаллическом месторождении: 1 - наблюдаемая аномалия силы тяжести, 2 - аномалия от рыхлых отложений, 3 - остаточная аномалия от рудного тела

редуцирования, остаточная аномалия от руды становится достаточно простой и допускающей количественное истолкование.

Вторым этапом геологического редуцирования является учет границ раздела, расположенных ниже изучаемого объекта. При изучении осадочного чехла серьезное мешающее влияние оказывает плотностная граница на поверхности кристаллического фундамента. Сведения о ней обычно получают по данным сейсморазведки, структурной электроразведки и глубокого бурения. В районах, где породы осадочного чехла практически немагнитны, иногда прибегают к такому приему: сначала по материалам магниторазведки определяется форма поверхности фундамента, а затем проводится редуцирование ее влияния на гравитационное поле.

Третий этап геологического редуцирования - это учет смежных геологических объектов. При разведке рудных месторождений учитываются известные рудные тела, на ранних стадиях геологоразведочных работ - соседние массивы. Редуцирование влияния таких массивов можно проводить непосредственно по аномальному полю, причем, по гравитационному полю это делать, естественно, удобнее. Вначале непосредственно по карте изолиний или, привлекая схему типов аномалий, определяют границы массивов в плане и аппроксимируют каждый из них вертикальной призмой. Далее решают линейную обратную задачу, определяя плотность (в случае применения магниторазведки - намагниченность) каждого из выделенных массивов. Наконец, проводя геологическое редуцирование полей моделей массивов с подобранными физическими свойствами, выделяют аномальное поле изучаемого участка.

Напомним еще раз, что геологическое редуцирование магнитных аномалий следует проводить с осторожностью, обращая внимание на величину возможных эффектов взаимовлияния. Пример, приведенный на рис. 46, показывает, сколь существенно может быть искажена за счет этого остаточная аномалия у сильномагнитных объектов. Лишь для пород, магнитная восприимчивость которых не превышает $634 \cdot 10^{-5} \text{ СИ}$, эффектом взаимовлияния

можно пренебрегать и считать, что остаточная аномалия представляет собой фактическую магнитную аномалию от неизученных объектов участка.

§ 25. Корреляционные способы разделения аномалий

Корреляционные способы разделения базируются на использовании специфической модели аномального поля в виде суммы трех составляющих. Первая из них, не представляющая непосредственного интереса для решения поставленной геологической задачи и в целом совпадающая с региональным фоном, аппроксимируется некоторой формальной системой функций, обычно алгебраическими полиномами. Вторая составляющая, характеризующая локальные аномалии, считается имеющей тесную корреляционную связь с изучаемыми параметрами, такими как глубина субгоризонтальной контактной поверхности раздела сред или переменные физические свойства горизонтального пласта. Наконец, третья составляющая - это помеха, вызванная погрешностями съемки и неоднородностью верхней части изучаемого разреза. Корреляционные способы нашли наибольшее применение при решении структурных геологических задач и заключаются в установлении на эталонном участке или профиле корреляционных связей между локальной составляющей исходного поля и изучаемыми параметрами объекта с последующим применением найденных связей для выделения требуемой компоненты на всей площади исследований. Корреляционные способы разделения гравитационных и магнитных аномалий имеют общие основы, поэтому в дальнейшем мы будем обозначать элемент интерпретируемого поля стандартно как U .

Рассмотрим применение корреляционных способов разделения на примере решения задачи определения формы контактной поверхности, то есть глубины до нее $h(x,y)$ в ряде точек участка исследований. Во многих районах локальные аномалии, связанные с такой поверхностью, можно с достаточной точностью считать пропорциональными данной глубине, что дает возможность представить их в следующей форме:

$$U_{\text{лок}}(x,y) = bh(x,y), \quad (25.1)$$

где коэффициент пропорциональности b не меняется в пределах изучаемого участка. Региональный фон, осложняющий эти аномалии и связанный с более глубоко залегающими геологическими структурами, можно считать достаточно хорошо аппроксимируемым алгебраическими полиномами - функциями вида $a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 + \dots$, которые в общем виде можно записать как

$$U_{\text{рег}}(x,y) = \sum_{q,s=0}^n a_{qs} x^q y^s, \quad (25.2)$$

где $0 < q+s \leq n$. Метод квазирешений позволяет свести разделение на эталонном участке к решению следующей линейной задачи подбора неизвестных параметров a_{qs} и b :

$$\Phi(a_{qs}, b) = \sum_{k=1}^m \left[U(x_k, y_k) - \sum_{q,s=0}^n a_{qs} x_k^q y_k^s - bh(x_k, y_k) \right]^2 = \min. \quad (25.3)$$

Число точек наблюдения m , где известны значения поля U и глубины изучаемого контакта h , должно быть больше, нежели число определяемых коэффициентов (в данном случае $n+1$), тогда квазирешение получится достаточно устойчивым. Как было показано в § 20, эта задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно a_{qs} и b . Далее во всех точках изучаемого участка, зная эти параметры, можно вычислить региональный фон по формуле (25.2) и найти локальную аномалию:

$$U_{\text{лок}} = U - U_{\text{рег}}, \quad (25.4)$$

по которой остается с помощью (25.1) рассчитать глубины контактной поверхности h .

Рассмотренный способ разделения допускает естественное обобщение на случай, когда коэффициент b в пределах участка изменяется. Такой способ называют корреляционным

способом разделения с учетом неоднородности параметров связи. Представляя коэффициент b в виде полинома, можно вместо (25.1) записать

$$U_{\text{лок}}(x, y) = h(x, y) \sum_{r,t=0}^p b_{rt} x^r y^t, \quad (25.5)$$

где $0 < r+t \leq p$, а b_{rt} - неизвестные коэффициенты, также определяемые на эталонном участке. Заменяя локальную аномалию в условии (25.3), приходим к следующей линейной задаче подбора, имеющей размерность $n+p$:

$$\Phi(a_{qs}, b_{rt}) = \sum_{k=1}^m \left[U(x_k, y_k) - \sum_{q,s=0}^n a_{qs} x_k^q y_k^s - h(x_k, y_k) \sum_{r,t=0}^p b_{rt} x_k^r y_k^t \right]^2 = \min. \quad (25.6)$$

Составляя и решая соответствующую систему нормальных уравнений для эталонного участка, можно найти искомые параметры, после чего провести разделение и определение глубины контактной поверхности на всей изучаемой площади. Таким образом, в рамках принятой модели аномального поля достаточно простыми средствами удастся одновременно решать и задачу разделения полей, и задачу детального количественного описания локальной составляющей.

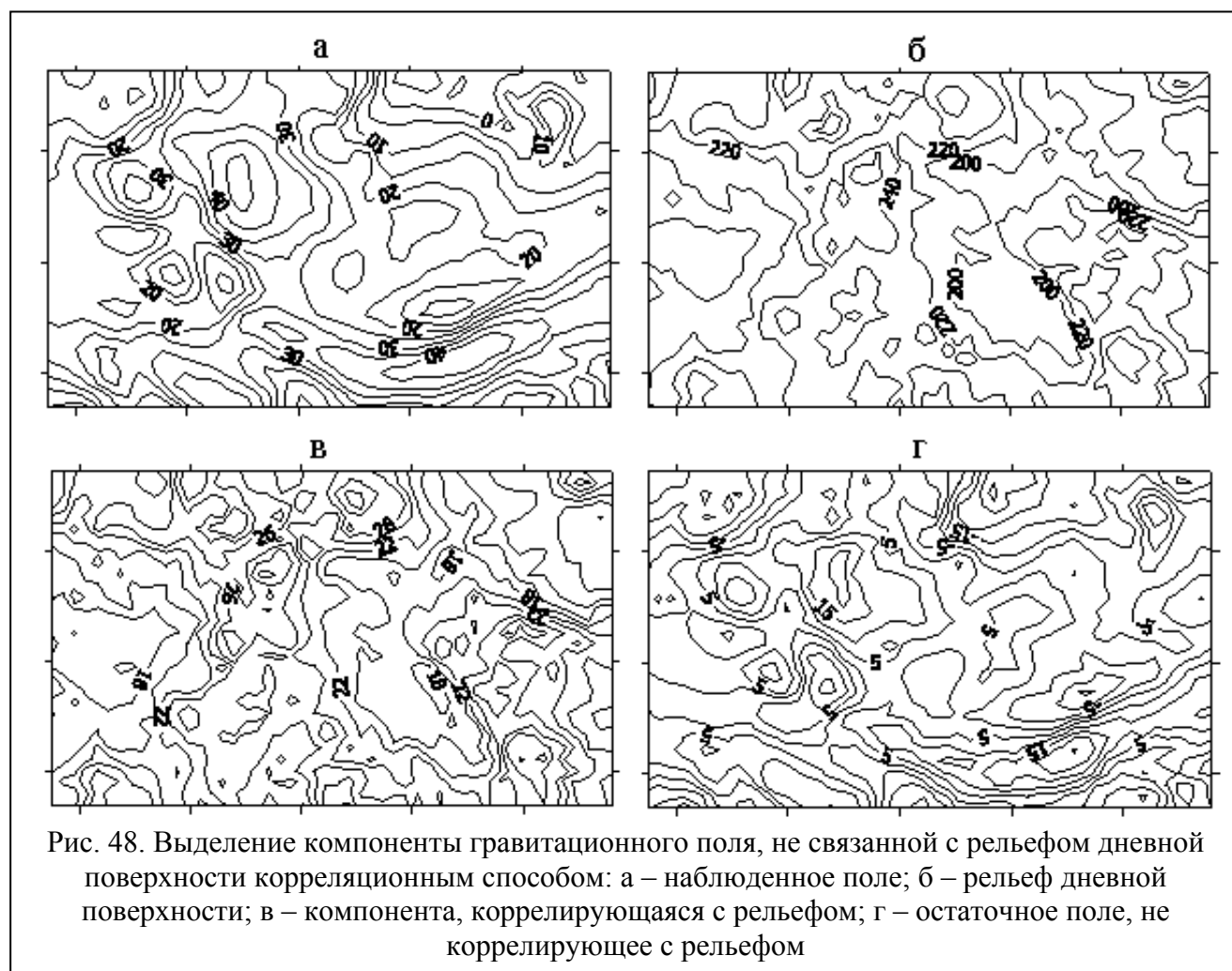


Рис. 48. Выделение компоненты гравитационного поля, не связанной с рельефом дневной поверхности корреляционным способом: а – наблюдаемое поле; б – рельеф дневной поверхности; в – компонента, коррелирующая с рельефом; г – остаточное поле, не коррелирующее с рельефом

Важнейший вопрос применения корреляционных способов разделения связан с выбором оптимальной размерности многочленов, то есть параметров n и p . Для этого разделение проводят несколько раз, используя полиномы разных порядков и выбирая в соответствии с

характером решаемой геологической задачи тот вариант, который удовлетворяет одному из следующих критериев:

- 1) минимум дисперсии выделяемой локальной составляющей;
- 2) минимум модуля коэффициента корреляции между региональной и локальной составляющими;
- 3) минимум погрешности определения изучаемого параметра на независимом контрольном участке или профиле.

Предложены и другие критерии оптимизации размерности многочленов. Более подробно с ними, как и вообще с корреляционными способами разделения, можно познакомиться в монографии В.И.Шрайбмана, М.С.Жданова и О.В.Витвицкого.

Важнейшее значение корреляционные методы имеют для выделения той части или компоненты исходного поля, которое не коррелирует с рельефом дневной поверхности. Как известно, зачастую результаты гравиметровых съемок предоставляются интерпретатору в виде карт изоаномал силы тяжести в редукции Буге с некоторой стандартной плотностью промежуточного слоя, никак не связанной со строением конкретной территории. Тогда возникает необходимость убрать из карт ту компоненту поля, которая коррелирует с рельефом и вызвана погрешностями при вычислении аномалий. Это легко провести корреляционным способом, аналогичным вышеописанному и отличающимся лишь тем, что в (25.1) в качестве h необходимо принимать высоты точек наблюдений над уровнем моря. Локальной аномалией становится часть поля, коррелирующая с рельефом, а в качестве региональной выступает интересующая компонента. На рис. 48 показан пример такого разделения. Остаточное поле, показанное на рис. 48г, можно применять для дальнейшей количественной интерпретации.

Подобное разделение часто проводят и при интерпретации магнитных аномалий в районах, где рельеф сложен магнитными породами.

Вопросы для самоконтроля

1. Какая локальная аномалия при наличии сублинейного регионального фона (как на рис. 43б) проявляется на карте как местный изгиб изолиний в сторону уменьшения значений фона?
 - а) локальный максимум (24);
 - б) локальный минимум (27);
 - в) определить невозможно (30).
2. Может ли какой-либо участок не относиться ни к одной региональной аномалии?
 - а) может (36);
 - б) не может (62);
 - в) может при интерпретации материалов крупномасштабной высокоточной съемки (88).
3. Какой принцип лежит в основе обнаружения аномалий?
 - а) дедуктивный - от общего к частному (39);
 - б) индуктивный - от частного к общему (48);
 - в) разные в зависимости от решаемой задачи (57).
4. Является ли геологическое редуцирование строгим методом разделения?
 - а) является всегда (71);
 - б) является для гравитационных аномалий (72);
 - в) является для магнитных аномалий (73).

Контрольная сумма при правильных ответах = 197.

ГЛАВА 7. ТРАНСФОРМАЦИИ ГРАВИТАЦИОННОГО И МАГНИТНОГО ПОЛЕЙ

§ 26. Применение основных типов трансформаций

Трансформации являются наиболее распространенными способами преобразования и формального разделения полей и сводятся к фильтрации наблюдаемого поля с целью выделения полезной информации и подавления помех. Формальность подобного разделения заключается в том, что составляющие, на которые разделяются поля, фактически могут не иметь никакого геологического смысла. Вместе с тем, при правильно выбранных параметрах трансформаций полученные компоненты могут оказаться весьма близкими к региональным или локальным аномалиям. В настоящей главе рассматриваются лишь трансформации аномальных полей, измеренных на участке с практически плоской дневной поверхностью. Преобразования полей, измеренных на неровном рельефе, более сложны и проводятся обычно аппроксимационными способами, которые будут рассмотрены в следующей главе.

Трансформации, применяемые для решения практических задач, состоят в последовательном выполнении следующих процедур.

1. Интерпретатор выбирает **скользящее окно**, форма и размеры которого обусловлены решаемой задачей.

2. В пределах скользящего окна, в том числе и на его границе, указываются точки, называемые **узлами**, и каждому узлу ставится в соответствие определенное число, которое называется **весовым коэффициентом**.

3. Скользящее окно накладывается на какую-либо часть изучаемого участка, при этом узлы оказываются над точками, где измерено аномальное поле.

4. Вычисляется сумма произведений весовых коэффициентов в узлах скользящего окна на значения аномального поля в точках участка, попавших под эти узлы.

5. Рассчитанное число считается относящимся к одной из точек участка, расположенной, как правило, под центром скользящего окна.

6. Помещая скользящее окно в различные части участка и вычисляя каждый раз соответствующие суммы произведений весовых коэффициентов на значения поля, интерпретатор получает в ряде точек значения, описывающие в совокупности новую функцию на изучаемом участке, называемую **трансформантой**.

7. Поточечное вычитание трансформанты из наблюдаемого поля приводит к определению на этом участке **остаточного поля** или **остаточных аномалий**.

В итоге наблюдаемое поле разделяется на две составляющие: трансформанту и остаточное поле. Обычно одна из них близка к региональному фону, а другая - к локальным аномалиям.

К настоящему времени предложены сотни трансформаций, различающихся формой применяемого скользящего окна, расположением узлов в нем и весовыми коэффициентами в узлах, определяющих смысл получаемых трансформант. Рассмотрим вкратце их основные разновидности.

По форме скользящего окна различаются изотропные и анизотропные трансформации. Скользящие окна изотропных трансформаций чаще всего представляют собой круг или квадрат и применяются для фильтрации изометричных аномалий или аномалий неизвестного простирания. Скользящие окна анизотропных трансформаций - это обычно прямоугольник, эллипс или параллелограмм. Такие трансформации применяются для выделения аномалий с определенным простиранием. Предельным случаем анизотропной трансформации является профильная трансформация, то есть трансформация двумерной аномалии по профилю вкрест ее простирания. Скользящим окном в этом случае является отрезок. Предлагались и другие, более сложные по форме скользящие окна, но широкого распространения они не получили.

Расположение узлов в окне может быть самым разнообразным, но среди этого многообразия можно выделить два основных типа. Первый тип отличается более или менее равномерным расположением узлов по площади скользящего окна, а второй характеризуется

расположением узлов только по его границе. Отметим, что, вообще говоря, принятие скользящего окна некоторой формы вовсе не означает, что узлы должны обязательно размещаться внутри него. Окном может считаться не внутренняя часть, а площадь вне выбранного контура, например, круга. Иногда это более выгодно для разделения полей, и тогда узлы располагают снаружи.

Наиболее существенные особенности придают трансформациям весовые коэффициенты в узлах, определяющие условный физический смысл получаемых трансформант. С этой точки зрения основные трансформации относятся к трем группам:

- 1) способы сглаживания полей;
- 2) способы аналитического продолжения полей;
- 3) способы расчета высших производных наблюдаемых полей.

Рассмотрим вкратце наиболее распространенные задачи, для решения которых применяются эти трансформации, и некоторые приемы вычисления трансформант. При этом мы пока не будем касаться универсального и мощного способа их расчета, связанного с применением тригонометрических полиномов, которому будет посвящен следующий параграф.

Сглаживание применяется для подавления помех, связанных со случайными погрешностями измерений и влиянием неоднородностей верхней части изучаемого разреза. Наиболее популярным способом сглаживания является осреднение, другими словами, вычисление скользящего среднего. Эта трансформация дает возможность выделить региональную аномалию, подавив локальные. Соответственно, остаточное поле, получаемое после вычитания осредненной аномалии из наблюдаемой, будет отражать преимущественно локальные аномалии. Весовые коэффициенты в узлах, расположенных, как правило, равномерно по всей площади скользящего окна, равны $1/N$, где N - число узлов. Таким образом, трансформанта, относящаяся к центру окна, представляет собой среднее арифметическое из значений наблюдаемого поля в точках участка, попавших под узлы. Основными параметрами, определяющими эффективность разделения способом осреднения, являются размеры скользящего окна и расстояние между узлами в нем. Чем они больше, тем более сглаженной оказывается трансформанта. Теоретическое обоснование применения осреднения было проведено в 1945 году А. Н. Тихоновым и Ю. Д. Буланже. Они предложили выбирать оптимальные параметры, исследуя зависимость трансформанты в экстремуме локальной аномалии от указанных параметров и отмечая характерные точки получаемых графиков.

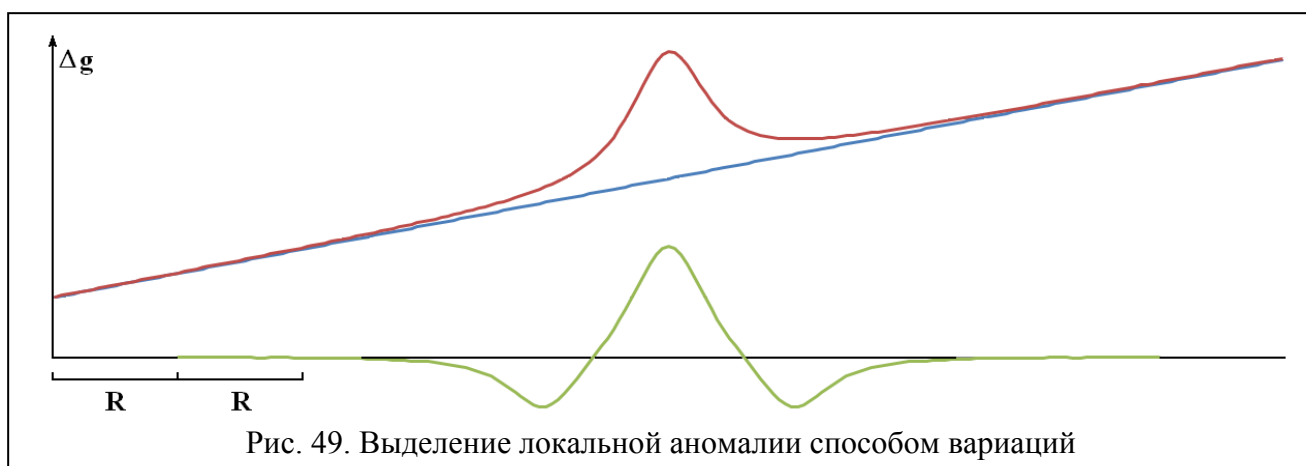
Многие трансформации используют сглаживание в виде осреднения по окружностям. Обозначим среднее значение поля U на окружности радиуса R как $\overline{U(R)}$. Вычисленное таким образом осредненное значение отражает региональные аномалии, но если его вычесть из наблюдаемого значения в центре данной окружности, то в результате получится локальная аномалия. Трансформация, определяемая формулой

$$\delta U(0) = U(0) - \overline{U(R)}, \quad (26.1)$$

называется способом вариаций или способом Андреева-Гриффина. Точка с нулевыми координатами здесь, как и во всех трансформациях обозначает центр скользящего окна, в данном случае - центр круга. Аналогом (26.1) для профильного варианта может служить формула

$$\delta U(x) = U(x) - \frac{U(x - R) + U(x + R)}{2}. \quad (26.2)$$

Ее часто записывают также в виде (26.1). На примере этой простейшей трансформации легко показать некоторые характерные особенности, присущие всем, в том числе и более сложным трансформациям. На рис. 49 показаны результаты пересчета в вариационную функцию аномалии силы тяжести, представляющей собой сумму линейного регионального фона и локального максимума.



Анализ полученных результатов показывает следующее:

1) применение трансформации дало возможность подавить региональный фон и подчеркнуть локальную аномалию;

2) поскольку вычисляемая трансформанта относится к точке в центре скользящего отрезка длиной $2R$, график вариационной функции оказался полученным на более коротком профиле, нежели исходное поле: справа и слева в результате трансформации оказались потерянными отрезки длиной R ;

3) выделенная локальная аномалия оказалась более сложной формы, нежели исходная: вместо максимума выделилась знакопеременная аномалия, причем, если рассматривать ее как аномалию силы тяжести, минимумы по ее краям не отвечают никаким природным объектам (в данном случае полученная локальная аномалия имеет вид, похожий на вертикальную производную исходной локальной аномалии).

Таким образом, своеобразной «ценой» разделения путем трансформирования явились сокращение площади участка, где реально известна трансформанта, и искажение формы выделенной аномалии. Это является общим и неизбежным для любых трансформаций.

Осреднение по окружностям является основой одной из наиболее популярных трансформаций способом Саксова-Ниггарда (называемого также способом осреднения градиентов), которая описывается следующей формулой:

$$F(0) = \frac{1}{R_2 - R_1} [\overline{U(R_1)} - \overline{U(R_2)}]. \quad (26.3)$$

Этот способ дает возможность выделить локальную аномалию, причем, как будет показано ниже, данная трансформация наиболее чувствительна к точечным массам, расположенным на определенной глубине, зависящей от соотношения радиусов окружностей осреднения.

Предложены и другие способы сглаживания, основанные на аппроксимации функции в скользящем окне полиномами невысоких порядков. Рассмотрим один из простейших способов сглаживания данных профильных наблюдений в скользящем окне по пяти узлам. Обозначим координату центра окна как 0 , а остальные узлы расположим симметрично относительно центра в точках с координатами $\pm R$ и $\pm 2R$, где R - расстояние между точками наблюдения. Далее построим сглаживающий полином второй степени $a_0 + a_1x + a_2x^2$, аппроксимирующий наблюденное поле в скользящем окне. Определение трех неизвестных коэффициентов полинома по пяти значениям поля в узлах представляет собой линейную задачу подбора, которая, как было показано, сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. Коэффициент a_0 представляет собой сглаженное поле в центре окна, поэтому результирующую формулу данной трансформации можно записать следующим образом:

$$U_{\text{сгл}}(0) = \frac{1}{35} \{ 17U(0) + 12[U(-R) + U(+R)] - 3[U(-2R) + U(+2R)] \} \quad (26.4)$$

или, введя обозначение

$$\overline{U(R)} = 0,5[U(-R) + U(+R)], \quad (26.5)$$

в типовом виде

$$U_{\text{сгл}}(0) = \frac{1}{35} \{ 17 U(0) + 24 \overline{U(R)} - 6 \overline{U(2R)} \}. \quad (26.6)$$

Таким же путем, определяя коэффициенты аппроксимирующих полиномов в разных скользящих окнах, можно получить множество различных трансформаций сглаживания.

Второй группой трансформаций является аналитическое продолжение полей в верхнее и нижнее полупространства. Область применения этих трансформаций очень велика: от обнаружения слабых аномалий до количественной интерпретации при определении формы контактной поверхности, при локализации особых точек функций, описывающих аномальные поля и т. д. Аналитическое продолжение вверх дает возможность сгладить помехи, подавить локальные аномалии и выделить региональные. Аналитическое продолжение вниз применяется для выделения локальных аномалий на фоне региональных. Теоретической основой аналитического продолжения является интеграл Пуассона, представляющий собой решение внешней задачи Дирихле для плоскости. Если исходная гармоническая, то есть удовлетворяющая уравнению Лапласа, функция U задана на всей бесконечной горизонтальной плоскости, то ее значение в точках верхнего полупространства можно определить с помощью следующей формулы, называемой интегралом Пуассона:

$$U(x, y, z) = \frac{z}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(\xi, \eta, 0) d\xi d\eta}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}}. \quad (26.7)$$

Ось z при этом считается направленной вверх. В двумерном случае, когда исходное поле задано на профиле, осуществив интегрирование по координате η , приходим к следующему виду интеграла Пуассона:

$$U(x, z) = \frac{z}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(\xi, 0) d\xi}{(\xi - x)^2 + z^2}. \quad (26.8)$$

На практике эти интегралы берутся численно, для чего бесконечная плоскость заменяется конечным скользящим окном, а сами интегралы - суммами произведений значений поля в узлах на соответствующие коэффициенты. Для получения достаточно точных результатов пересчета размеры скользящего окна должны быть примерно в 10 раз больше высоты пересчета, а расстояние между узлами - примерно равным этой высоте. Естественно, если поле между узлами резко меняется, результаты пересчета могут оказаться весьма далекими от реального поля на этой высоте. Тем не менее, аналитическое продолжение вверх является устойчивым к случайным помехам.

Чрезвычайно важно понимать аппроксимационную структуру интеграла Пуассона. Дело в том, что формулы (26.7) и (26.8) фактически описывают двухэтапную процедуру. Первый ее этап состоит в представлении наблюдаемого поля полем простого слоя, расположенного на самой поверхности наблюдений. Как известно, компонента поля, нормальная к плоскому простому слою, представляет собой произведение поверхностной плотности этого слоя на угол его видимости из точки наблюдения. Поскольку точка наблюдения в данном случае совпадает с самим простым слоем, угол видимости всюду равен 2π . Тогда в каждой точке поверхностная плотность простого слоя, создающего такое же поле, как наблюдаемое, равна просто $U/2\pi$. Второй этап фактически сводится к решению прямой задачи для эквивалентного простого слоя, что и показывают формулы (26.7) и (26.8).

Формулы (26.7) и (26.8) также являются основой и продолжения поля вниз. При этом их приходится рассматривать как интегральные уравнения, где неизвестная функция (поле вниз) находится под знаком интеграла. Это так называемые интегральные уравнения первого рода, решение которых - неустойчиво. Необходимо отметить, что гармоническая функция, аналитически продолженная в нижнее полупространство, вовсе не совпадает с реальным полем там. В верхнем полупространстве потенциал и элементы гравитационного и магнитного полей являются гармоническими функциями, удовлетворяющими уравнению Лапласа. Аналитическое продолжение поля вниз также представляет собой гармоническую функцию, имеющую непрерывные производные любых порядков. Реальный же потенциал в нижнем полупространстве удовлетворяет уравнению Пуассона, а его вторые производные имеют разрыв на границах тел. Сказанное иллюстрирует рис. 50, на котором показаны изолинии силы тяжести вне и внутри кругового цилиндра и соответствующие изолинии аналитического продолжения. Вне масс они совпадают, внутри - принципиально различаются: изолинии реального поля на границе тела имеют точки излома, а изолинии аналитического продолжения остаются гладкими. Зато в центре круга, являющегося особой точкой (полюсом первого порядка) функции, описывающей внешнее поле данной модели, все изолинии аналитического продолжения пересекаются. Благодаря этому, аналитическое продолжение в нижнее полупространство является основой одной из групп методов количественной интерпретации - методов особых точек.

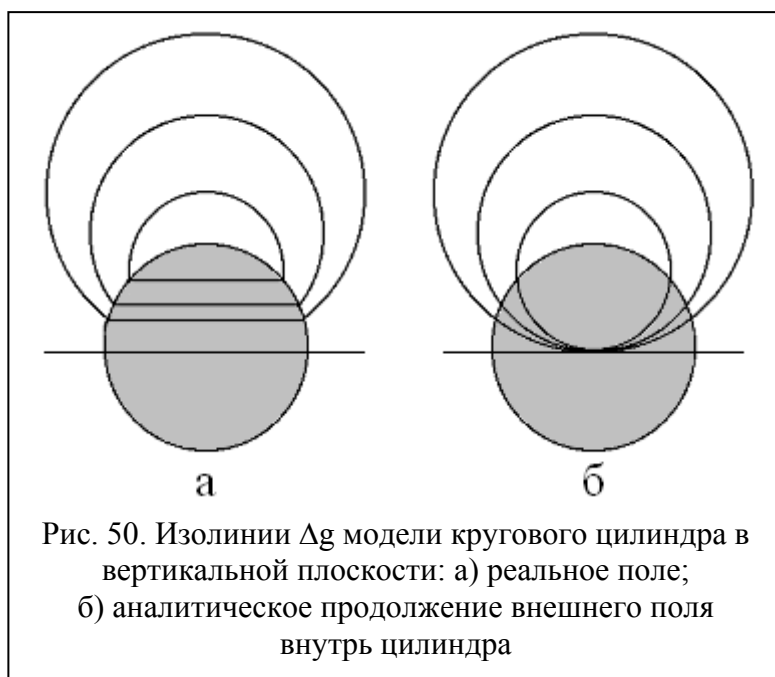


Рис. 50. Изолинии Δg модели кругового цилиндра в вертикальной плоскости: а) реальное поле; б) аналитическое продолжение внешнего поля внутрь цилиндра

Несколько особняком стоят методы аналитического продолжения, основанные на применении сеточной аппроксимации оператора Лапласа. Как известно, лапласиан функции



Рис. 51. Сеточное продолжение поля: а - аппроксимационный шаблон "крест", б - расположение точек сетки в вертикальной плоскости

представляет собой отличие значения функции в некоторой точке от среднего ее значения на малой сфере с центром в этой точке. У гармонической функции, для которой лапласиан всюду равен нулю, эти значения совпадают. В двумерном случае вместо сферы рассматривается цилиндр. Сеточная аппроксимация приводит к дискретной форме уравнения Лапласа и к

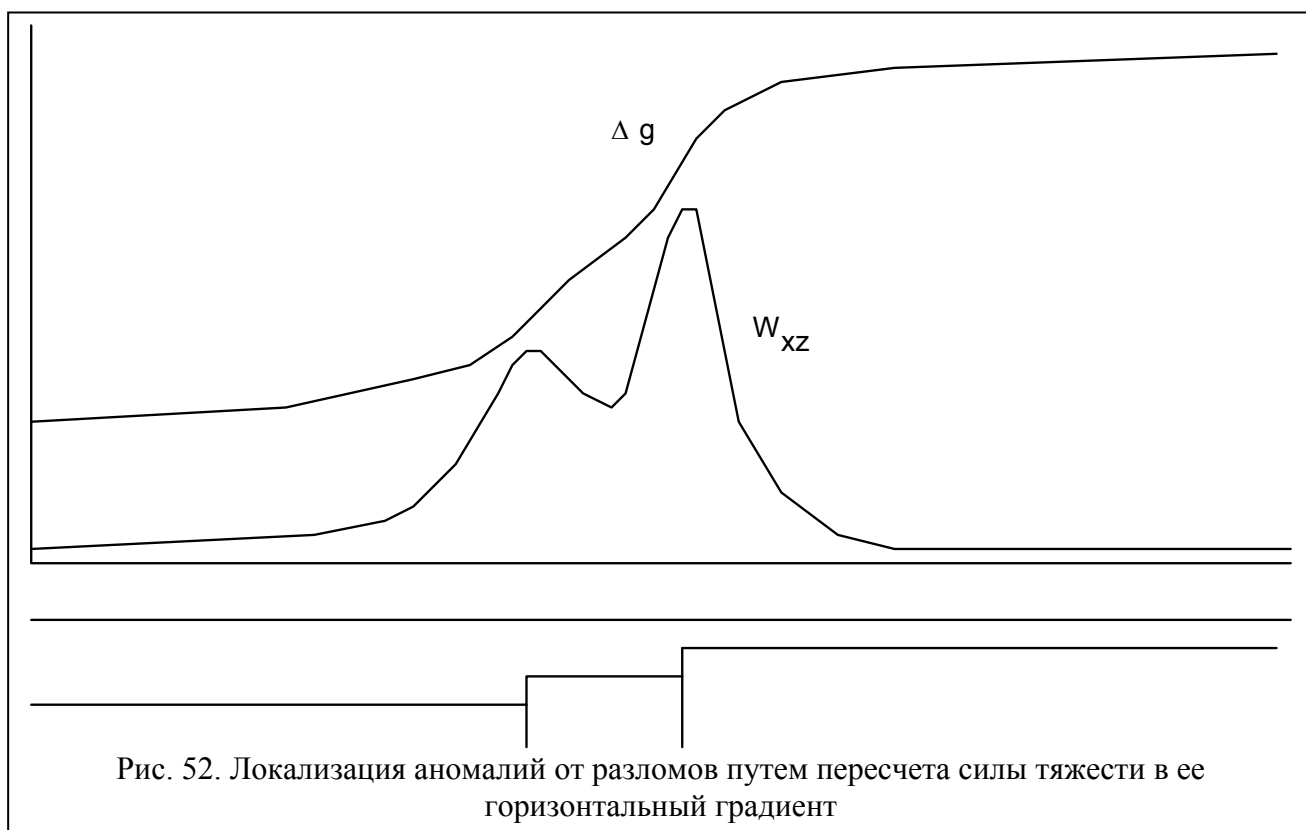
шаблону "крест", показанному на рис. 51а: значение гармонической функции в центре креста является средним из четырех значений в его вершинах. Пусть известны значения гармонической функции в ряде точек на поверхности Земли ($z=0$ на рис. 51б), расстояние

между которыми равно h . С помощью интеграла Пуассона можно вычислить значения этой функции в верхнем полупространстве на высоте h ($z=h$). Тогда значения на уровне $z=-h$ можно получить, используя крестовый шаблон, по формуле

$$U(x, -h) = 4U(x, 0) - U(x - h, 0) - U(x + h, 0) - U(x, h). \quad (26.9)$$

Далее, используя значения функции на уровнях $z=0$ и $z=-h$, с помощью того же шаблона и аналогичной формулы можно продолжить поле на уровень $z=-2h$ и т.д. Пересчет с уровня на уровень можно осуществлять вплоть до той глубины, на которой расположена самая верхняя особая точка этой функции. Эту глубину принято обозначать как H . Попытка продолжить глубже приводит к нереальным результатам, вследствие так называемого эффекта распада поля. Он проявляется в том, что получаемые графики становятся похожими на искаженную синусоиду с большим числом экстремумов. Детально этот эффект разбирается в разделах, посвященных количественной интерпретации методами особых точек. Еще раз подчеркнем, что аналитическое продолжение вниз является неустойчивой операцией, весьма чувствительной к наличию случайных помех.

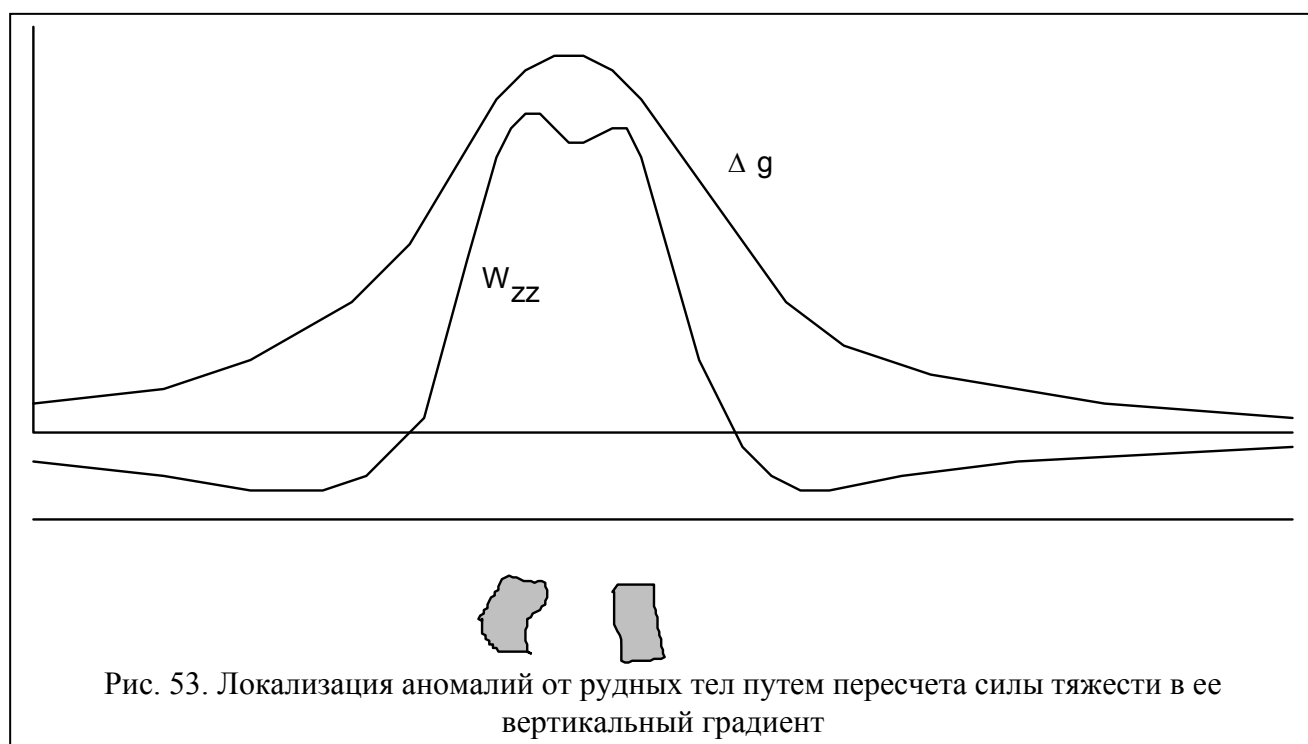
Третьей группой трансформаций являются способы расчета высших производных наблюдаемых полей, применяемые для решения многих задач, основной из которых является выделение локальных аномалий. Если региональный фон близок к полиномиальному, дифференцирование дает возможность его существенного подавления. Пусть результаты гравиметрических или магнитометрических наблюдений представляют собой сумму локальных аномалий и постоянного фона, возникающего обычно из-за ошибок в выборе уровня нормального поля. Для избавления от такого фона достаточно продифференцировать наблюдаемое поле (вычислить его горизонтальный градиент), так как прибавленная константа после дифференцирования становится тождественным нулем. Если региональный фон является полиномом более высокой степени, его можно подавить многократным дифференцированием по горизонтали. При этом, конечно, форма самих локальных аномалий становится более сложной.



Вычисление горизонтальных градиентов играет важную роль в интерпретации гравитационных аномалий типа ступеней, вызываемых дизъюнктивными структурами типа

сброса. График горизонтального градиента подобной структуры имеет такую же форму, как поле силы тяжести, создаваемое пластинкой, которая совпадает с плоскостью сместителя. По графику горизонтального градиента легко качественно оценить направление падения сместителя - это направление, в котором значения медленнее убывают при удалении от экстремума. Разработаны простые методы количественной интерпретации для таких структур по характерным точкам графика горизонтального градиента. Во многих районах разломы располагаются довольно близко друг к другу, что затрудняет их визуальное обнаружение непосредственно по графику силы тяжести. Дифференцирование по горизонтали помогает локализовать отдельные разломы, что иллюстрирует рис. 52.

Вычисление вертикального градиента, то есть дифференцирование по вертикали помогает локализовать аномалии от сближенных тел, расположенных на одной глубине. На рис. 53 показаны аномалии силы тяжести и вертикального градиента над двумя рудными телами. Поскольку расстояние между телами сопоставимо с глубиной их верхней кромки, график силы тяжести над ними имеет один максимум. Если с целью изучения геологической природы этой аномалии задать вертикальную скважину в ее эпицентре, то скважина, пройдя по вмещающим породам, не подтвердит наличия руды. График вертикального градиента имеет два экстремума над телами, поэтому дифференцирование наблюдаемого поля по вертикали поможет избежать подобных ошибок. Вычисление второй вертикальной производной локализует аномалии еще сильнее. Вместе с тем, дифференцирование является неустойчивой операцией, поэтому качество его результатов существенно зависит от наличия помех. Кроме того, следует помнить о возможности неоднозначности интерпретации, что было показано на примере в предыдущей главе.



Высшие производные наблюдаемого поля широко используются для количественной интерпретации в методах особых точек, особенно в двумерном варианте, причем требования к вытянутости аномалий для них - менее строгие. Дело в том, что высшие производные от тел убывают значительно быстрее, чем сила тяжести. Так сила притяжения точечной массы убывает как квадрат расстояния до нее, ее первые производные - как куб, вторые - как четвертая степень расстояния и т.д. В результате аномалию силы тяжести можно интерпретировать с использованием двумерных моделей тогда, когда ее длинная ось, вытянутая вдоль простирания,

не менее чем в 5 раз превышает короткую. Для вторых ее производных, к примеру, практически достаточно, чтобы длинная ось была бы больше лишь в 1,7 раза.

Вычислительные схемы расчета высших производных весьма многочисленны и разнообразны: по-разному вычисляются горизонтальные производные, четные вертикальные производные и нечетные вертикальные производные.

Формулы расчета горизонтальных производных обычно получают дифференцированием различных детально исследованных в численном анализе интерполяционных формул. Принято различать конечно-разностные (интерполяционные) и аппроксимационные формулы. Конечно-разностные формулы для профильных трансформаций в скользящем окне, содержащем n узлов, получают, представляя функцию полиномом $n-1$ степени. Эти формулы при отсутствии помех дают достаточно точные результаты, но при наличии помех являются неустойчивыми. Аппроксимационные формулы получают, представляя функцию в том же окне полиномом более низкой степени, благодаря чему их помехозащищенность выше, чем у конечно-разностных, но точность результатов при испытаниях на полиномиальных функциях - ниже. Для практических расчетов рекомендуется вычисление по формулам разного типа и сопоставление получаемых результатов. Приведем две формулы расчета горизонтального градиента в скользящем окне из пяти точек, расположенным друг от друга на расстоянии Δx . Конечно-разностная формула выглядит так:

$$\frac{\partial U(0)}{\partial x} = \frac{1}{12\Delta x} \{8[U(\Delta x) - U(-\Delta x)] - [U(2\Delta x) - U(-2\Delta x)]\}, \quad (26.10)$$

а аппроксимационная формула

$$\frac{\partial U(0)}{\partial x} = \frac{1}{10\Delta x} \{[U(\Delta x) - U(-\Delta x)] + 2[U(2\Delta x) - U(-2\Delta x)]\}. \quad (26.11)$$

Результаты применения этих формул существенно зависят от правильного выбора расстояния между узлами Δx . Если воспользоваться введенным обозначением глубины, на которой расположена самая верхняя особая точка функции, описывающей поле - H , то для (26.10) оптимальное $\Delta x = (0,5 - 0,7)H$, а для (26.11) оптимальное $\Delta x = (0,2 - 0,4)H$. Вторую горизонтальную производную можно получать двукратным применением этих формул, но удобнее пользоваться специальными формулами таких же типов. С учетом обозначения (26.5) конечно-разностную формулу можно представить в виде:

$$\frac{\partial^2 U(0)}{\partial x^2} = \frac{1}{6\Delta x^2} \{-15U(0) + 16\overline{U(\Delta x)} - 6\overline{U(2\Delta x)}\}, \quad (26.12)$$

а аппроксимационную формулу как

$$\frac{\partial^2 U(0)}{\partial x^2} = \frac{2}{7\Delta x^2} \{-U(0) - \overline{U(\Delta x)} + 2\overline{U(2\Delta x)}\}. \quad (26.13)$$

Вычисление четных вертикальных производных также достаточно просто, так как элементы гравитационного и магнитного полей описываются гармоническими функциями, то есть удовлетворяют следующему уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \quad (26.14)$$

Отсюда следует, что вторая вертикальная производная и, вообще говоря, все четные вертикальные производные выражаются через соответствующие горизонтальные производные. Наиболее проста связь для двумерных полей, у которых производные по направлению простираения y тождественно равны нулю. Тогда

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (26.15)$$

и вторую вертикальную производную оказывается возможным вычислять по формулам (26.12) и (26.13) с переменной результирующего знака. В трехмерном случае для расчетов применяются различные скользящие окна - простейшее из них показано на рис. 54. Его особенность состоит в том, что узлы расположены на квадратной сетке. Если шаг сетки обозначить h , то вторую вертикальную производную оказывается можно вычислять по следующей формуле Розенбаха:

$$\frac{\partial^2 U(0)}{\partial z^2} = \frac{1}{h^2} \{ 6 U(0) - 8 \overline{U(h)} + 2 \overline{U(h\sqrt{2})} \} \quad (26.16)$$

Здесь также черта сверху означает осреднение по окружности соответствующего радиуса - фактически по четырем точкам, находящимся на этой окружности. К настоящему времени предложены десятки подобных формул.

Вычисление нечетных вертикальных производных базируется на использовании интеграла Пуассона. Для этого достаточно продифференцировать интегралы (26.7) и (26.8) по z и подставить $z=0$. Получающиеся соотношения допускают численное интегрирование. Существуют достаточно простые вычислительные формулы для подобных расчетов, однако, на практике вычисление вертикальных градиентов, как и большинство рассмотренных трансформаций осуществляется единообразно на основе аппроксимации тригонометрическими полиномами.

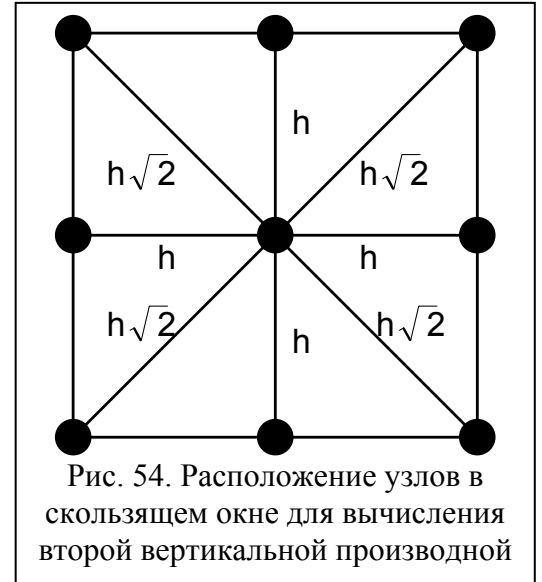


Рис. 54. Расположение узлов в скользящем окне для вычисления второй вертикальной производной

Завершим параграф рассмотрением нескольких специфических трансформаций. Первая из них представляет собой расчет на профиле горизонтальной компоненты поля по данным измерения вертикальной и наоборот. Такие преобразования однозначны, так как эти функции являются комплексно сопряженными и составляют в паре комплексные характеристики, например, комплексную напряженность гравитационного поля $G = g_z + i g_x$ и комплексную индукцию магнитного поля $T = Z + i X$. Расчет горизонтальных компонент по вертикальным, другими словами, мнимых частей комплексных характеристик по действительным производится на основе решения задачи Неймана и сводится к вычислению интеграла. Поскольку эта трансформация чаще применяется в магниторазведке, запишем его для магнитного случая:

$$X(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Z(\xi)}{\xi - x} d\xi. \quad (26.17)$$

На практике этот интеграл берется численно, для чего заменяется суммой произведений в конечном окне. Обратный пересчет горизонтальных компонент в вертикальные проводится по формуле, отличающейся от (26.17) только знаком "минус" перед интегралом.

Для небольших магнитных аномалий $\Delta T \ll T_0$, как рассмотрено в § 1, часто используется их гармоническое приближение, то есть аномалии ΔT рассматриваются как компонента вектора аномального магнитного поля, направленная вдоль вектора нормального поля. Если обозначить компоненты этого вектора как X_0, Y_0, Z_0 , а компоненты вектора аномального поля как X, Y, Z , то

$$\Delta T \approx \frac{X_0 X + Y_0 Y + Z_0 Z}{T_0}. \quad (26.18)$$

У двумерных аномалий $\mathbf{Y}=\mathbf{0}$. Обозначим $c_x = X_0 / T_0$ и $c_z = Z_0 / T_0$, тогда для них (26.18) примет простой вид: $\Delta T = c_x X + c_z Z$. Выражая X через Z по формуле (26.17), придем к интегральному уравнению относительно Z :

$$\Delta T(x) = c_z Z(x) + \frac{c_x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Z(\xi)}{\xi - x} d\xi. \quad (26.19)$$

Численное решение этого уравнения дает возможность рассчитать Z по ΔT .

При интерпретации магнитного поля, измеренного вблизи экватора, иногда используют специфическую трансформацию, называемую редукцией к полюсу. Дело в том, что визуальное обнаружение аномалий от субгоризонтально намагниченных тел сложнее, нежели для случая их вертикального намагничивания. Чтобы упростить вид аномалий, В. Баранов предложил трансформировать наблюдаемое магнитное поле ΔT , приводя его к случаю вертикального намагничивания в вертикально направленном вниз нормальном поле, что соответствует индуктивному намагничиванию в районе северного магнитного полюса. Наиболее просто понять смысл этой трансформации на примере двумерных объектов, воспользовавшись теоремой вращения для магнитного поля. В соответствии с ней, если намагниченность любого двумерного тела повернуть на некоторый угол, то во всех внешних точках вектор аномального поля повернется на такой же угол, но в противоположном направлении. Если принять реальное намагничивание ориентированным вдоль нормального поля, направление которого в пространстве известно, то редукция к полюсу сведется к определению компонент по формулам (26.19) и (26.17) с последующим применением теоремы вращения. Более подробно с этой трансформацией можно познакомиться в книге В. Баранова.

§ 27. Теоретические трансформации и их частотный анализ

Несмотря на разнообразие решаемых задач, все трансформации, как было отмечено в предыдущем параграфе, в итоге сводятся к вычислению сумм произведений значений поля в узлах скользящего окна на соответствующие весовые коэффициенты, что дает возможность построить их общую теорию. Эта теория рассматривает трансформации как пространственную фильтрацию наблюдаемых полей.

В соответствии с ней практические трансформации или вычислительные схемы считаются приближениями идеализированных - так называемых теоретических трансформаций. Они в свою очередь определяются как интегралы свертки двух функций, одна из которых U описывает наблюдаемое поле, а вторая K характеризует вид конкретной теоретической трансформации и называется ее ядром. Для площадного случая теоретическая трансформация может быть представлена в виде

$$U_{\text{тр}}(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta, 0) K(\xi - x, \eta - y, z) d\xi d\eta. \quad (27.1)$$

Для профильного (двумерного) случая, соответственно,

$$U_{\text{тр}}(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} U(\xi, 0) K(\xi - x, z) d\xi. \quad (27.2)$$

Например, интеграл Пуассона (26.8) для аналитического продолжения вверх может рассматриваться как теоретическая трансформация с ядром

$$K(\xi - x, z) = \frac{z}{\pi[(\xi - x)^2 + z^2]}. \quad (27.3)$$

Интеграл (26.17) для расчета горизонтальной компоненты поля по вертикальной также можно считать теоретической трансформацией с ядром

$$K(\xi - x, 0) = \frac{1}{\pi(\xi - x)}. \quad (27.4)$$

Теоретические трансформации удобнее анализировать, переходя от самих функций к их преобразованиям Фурье.

Функция $U(x)$, измеренная на профиле и подчиняющаяся условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} |U(x)|^2 dx < +\infty, \quad (27.5)$$

может быть представлена интегралом Фурье в комплексной форме:

$$U(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \left[\int_{-\infty}^{\infty} U(\xi) e^{-i\omega \xi} d\xi \right] d\omega. \quad (27.6)$$

Этот двойной интеграл фактически сводится к последовательному вычислению двух одинарных:

$$S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U(x) e^{-i\omega x} dx \quad (27.7)$$

и

$$U(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega x} d\omega, \quad (27.8)$$

называемых преобразованиями Фурье. Формула (27.7), являющаяся прямым преобразованием Фурье, определяет комплексную функцию $S(\omega)$ - спектр исходной функции $U(x)$. Аргументом спектра является пространственная частота ω , размерность которой обратна размерности расстояния. На практике размерность пространственной частоты обычно принимают равной км^{-1} . Формула (27.8) характеризует обратное преобразование Фурье.

Удобство перехода к спектрам при анализе трансформаций связано с тем, что в соответствии с известной теоремой преобразование Фурье свертки двух функций равно произведению их преобразований Фурье. Применение формулы (27.7) к обеим частям формулы (27.2), определяющей теоретическую профильную трансформацию, дает следующее основное соотношение:

$$S_{\text{тр}}(\omega) = S(\omega)F(\omega). \quad (27.9)$$

Комплексная функция $F(\omega)$, являющаяся преобразованием Фурье ядра, называется частотной характеристикой теоретической трансформации. Из (27.9) следует, что любая теоретическая трансформация сводится к последовательному выполнению трех операций:

- 1) вычисление спектра исходной функции путем ее прямого преобразования Фурье;
 - 2) вычисление спектра трансформанты путем умножения спектра исходной функции на частотную характеристику трансформации;
 - 3) вычисление трансформанты по ее спектру путем его обратного преобразования Фурье.
- Таким образом, трансформации фактически представляют собой пространственную фильтрацию аномальных полей. Все свойства трансформации полностью определяются ее частотной характеристикой, и **анализ профильных трансформаций сводится к анализу их частотных характеристик.**

Полученные выводы можно распространить и на площадные трансформации. Для функции двух переменных $U(x, y)$, удовлетворяющей условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} |U(x, y)|^2 dx dy < +\infty, \quad (27.10)$$

справедливы следующие соотношения, также называемые преобразованиями Фурье:

$$S(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x, y) e^{-i(ux+vy)} dx dy, \quad (27.11)$$

$$U(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(u, v) e^{i(ux+vy)} du dv. \quad (27.12)$$

В отличие от (27.7) и (27.8) здесь введены две пространственные частоты: u и v , также имеющие размерности км^{-1} . Вместо (27.9) в трехмерном случае можно использовать соотношение

$$S_{\text{тр}}(u, v) = S(u, v) F(u, v). \quad (27.13)$$

Очевидно, что и анализ площадных теоретических трансформаций сводится к анализу их частотных характеристик $F(u, v)$.

Вообще говоря, значение спектрального анализа в гравиразведке и магниторазведке очень велико. Он используется для решения многих разнообразных задач, но здесь мы ограничимся лишь его применением к анализу профильных трансформаций. Прежде, чем рассмотреть их частотные характеристики, необходимо разобраться в том, каковы спектры функций, описывающих аномальные гравитационные и магнитные поля. Спектры аномалий от простых тел могут быть рассчитаны аналитически. В частности спектр аномалии силы тяжести от горизонтального кругового цилиндра радиуса R и с избыточной плотностью σ , расположенного на глубине h под началом координат, можно представить в виде

$$S(\omega) = \gamma \sigma R^2 \pi \sqrt{2\pi} e^{-|\omega|h}, \quad (27.14)$$

где γ - гравитационная постоянная. Похожий вид имеет спектр магнитной аномалии Z от такого цилиндра с вертикальной намагниченностью I :

$$S(\omega) = \frac{\mu_0 I R^2 \sqrt{2\pi}}{4} \omega e^{-|\omega|h}. \quad (27.15)$$

Следует заметить, что данная формула записана применительно к использованию системы СИ, тогда как для системы СГС коэффициент примет вид $I R^2 \pi \sqrt{2\pi}$.

Вообще говоря, спектры полей большинства моделей, расположенных симметрично относительно вертикальной оси, проходящей через начало координат, представляют собой суммы экспонент с показателями, определяемыми глубинами особых точек функций, описывающих эти поля. Если модель смещена от начала координат, спектр ее поля усложняется. Можно доказать, что спектр S_2 смещенной функции $U_2(x) = U_1(x - \xi)$ связан со спектром исходной функции S_1 следующим соотношением:

$$S_2(\omega) = e^{-i\omega\xi} S_1(\omega). \quad (27.16)$$

Как известно, $e^{-i\omega\xi} = \cos(\omega\xi) - i \sin(\omega\xi)$. Отсюда следует, что и действительная и мнимая части спектра функций, описывающих реальные аномалии, должны иметь вид, похожий на экспоненциально затухающие синусоиды.

Более подробного рассмотрения заслуживает вопрос о характере спектров аномальных полей геологических объектов на высоких частотах при $\omega \rightarrow \infty$. В 1956 г. В.К.Иванов доказал, что спектры аномальных гравитационных полей масс, заполняющих **ограниченную** область, должны затухать на бесконечности как экспоненты $e^{-\omega H}$, где параметр H характеризует глубину самой верхней из особых точек функции, описывающей аномальное поле. При этом он не принимал во внимание наличия помех геологического происхождения, которые на самом деле определяют высокочастотную часть спектра, и источники которых содержатся во всей верхней части разреза, за пределами любых ограниченных областей.

Рассмотрим один из практических примеров: на рис. 55б приведен график мнимой части спектра реальной гравитационной аномалии, изображенной на рис. 55а. Очевидно, экспоненциальный характер затухания графиков с увеличением частоты мешает их визуальному анализу, поэтому чаще эти графики строят в логарифмическом масштабе. На рис. 54в показан график логарифма модуля спектра этой аномалии. На нем отчетливо видно, что в спектре аномального поля выделяются три части: низкочастотная, среднечастотная и высокочастотная. Низкочастотная часть, отвечающая аномалиям большой протяженности, преимущественно характеризует региональное поле. Среднечастотная часть соответствует в основном локальным аномалиям. Наконец, самая высокочастотная часть связана с помехами от верхней части разреза и с погрешностями съемки. Если пока не принимать во внимание область помех, можно заметить, что график логарифма амплитудного спектра аппроксимируется на средних частотах наклонной прямой. Угловым коэффициентом этой прямой равен $-H$. Таким образом, по графику логарифма амплитудного спектра можно достаточно легко определить глубину верхней особой точки функции, описывающей аномальное поле. Этот прием весьма распространен при количественной интерпретации гравитационных и магнитных аномалий.

Обратим теперь внимание на самую высокочастотную часть спектра – область помех. В ней наклон графика логарифма амплитудного спектра близок к нулю, и это типично для реальных полей. Дело в том, что у них, в отличие от теоретических моделей, рассмотренных В.К.Ивановым, высокочастотная часть спектра определяется геологическими помехами, имеющими, как уже упоминалось в § 1, фрактальный характер. Чтобы убедиться в этом, достаточно построить график амплитудного спектра не в полулогарифмическом, а в двойном логарифмическом масштабе.

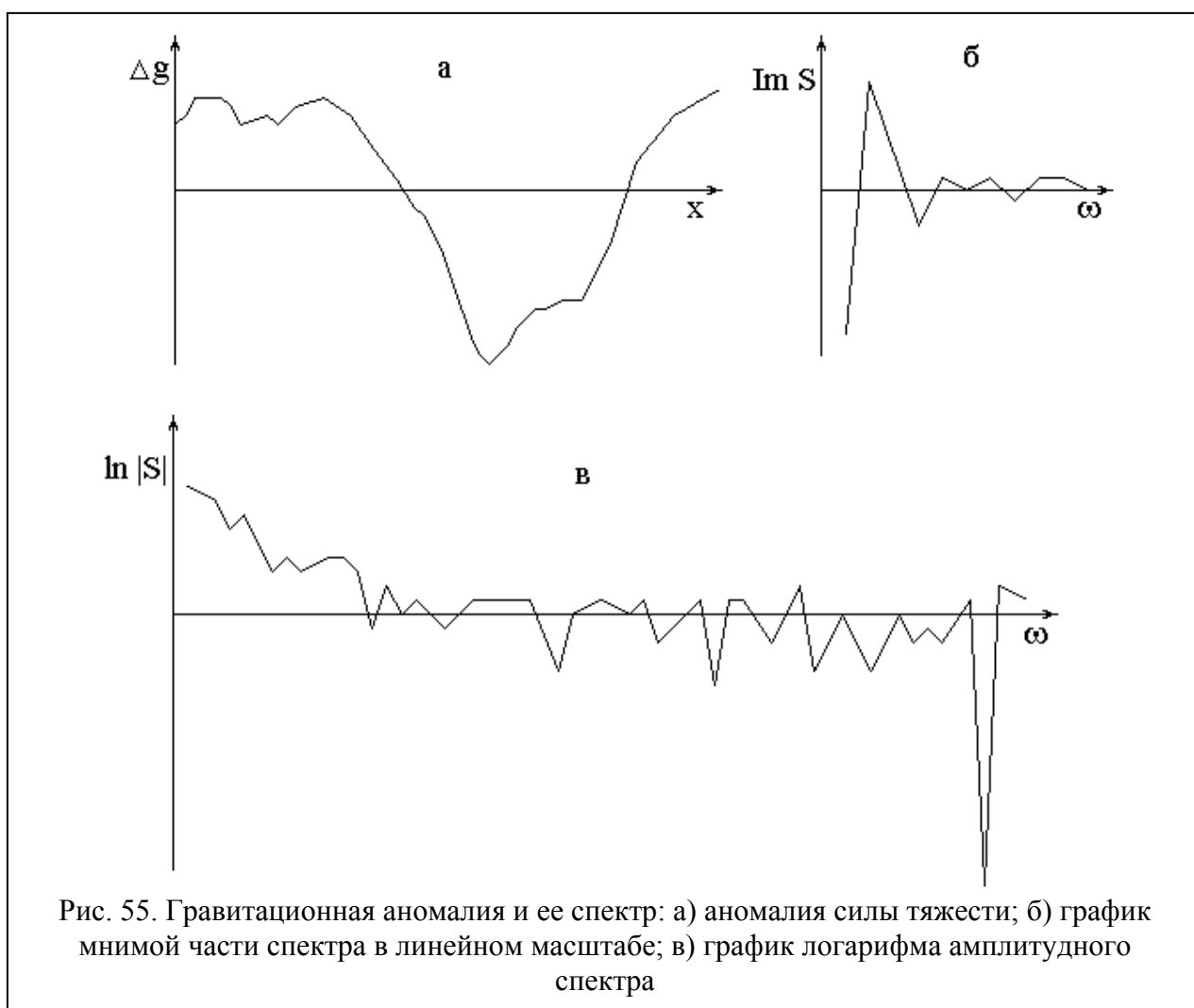


Рис. 55. Гравитационная аномалия и ее спектр: а) аномалия силы тяжести; б) график мнимой части спектра в линейном масштабе; в) график логарифма амплитудного спектра

На рис. 56 изображен такой график для магнитного поля ΔT Московской синеклизы и примыкающих к ней областей. Поскольку съемка здесь выполнялась площадная, и спектр вычислялся двумерный, для большей наглядности он был предварительно радиально осреднен. На графике четко видно, что на высоких частотах график стремится к наклонной асимптоте, т.е. ведет себя не как экспонента, а как степенная функция. Эта ситуация типична для любых регионов Земли, что подтверждает рис. 57. На нем показаны радиально осредненные спектры, вычисленные канадскими геофизиками по результатам магнитной съемки на нескольких участках в пределах Канадского щита. Видно, что все они, будучи изображенными в двойном логарифмическом масштабе, также стремятся к наклонным асимптотам.

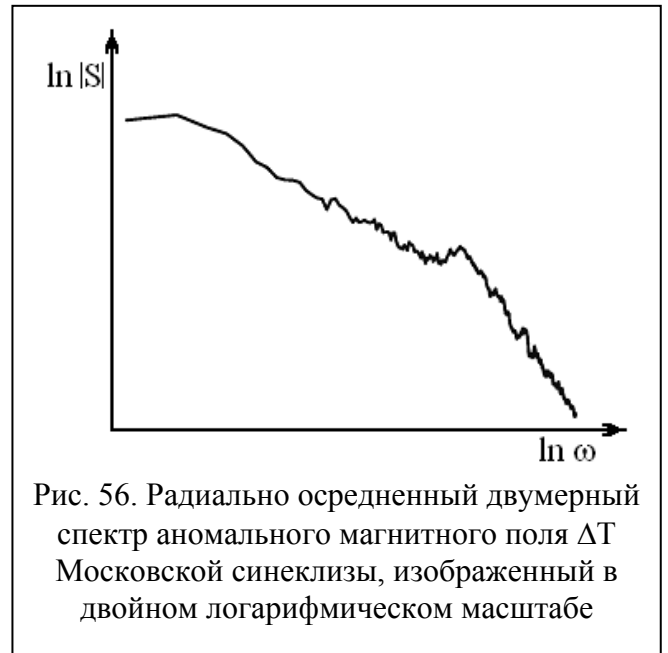


Рис. 56. Радиально осредненный двумерный спектр аномального магнитного поля ΔT Московской синеклизы, изображенный в двойном логарифмическом масштабе

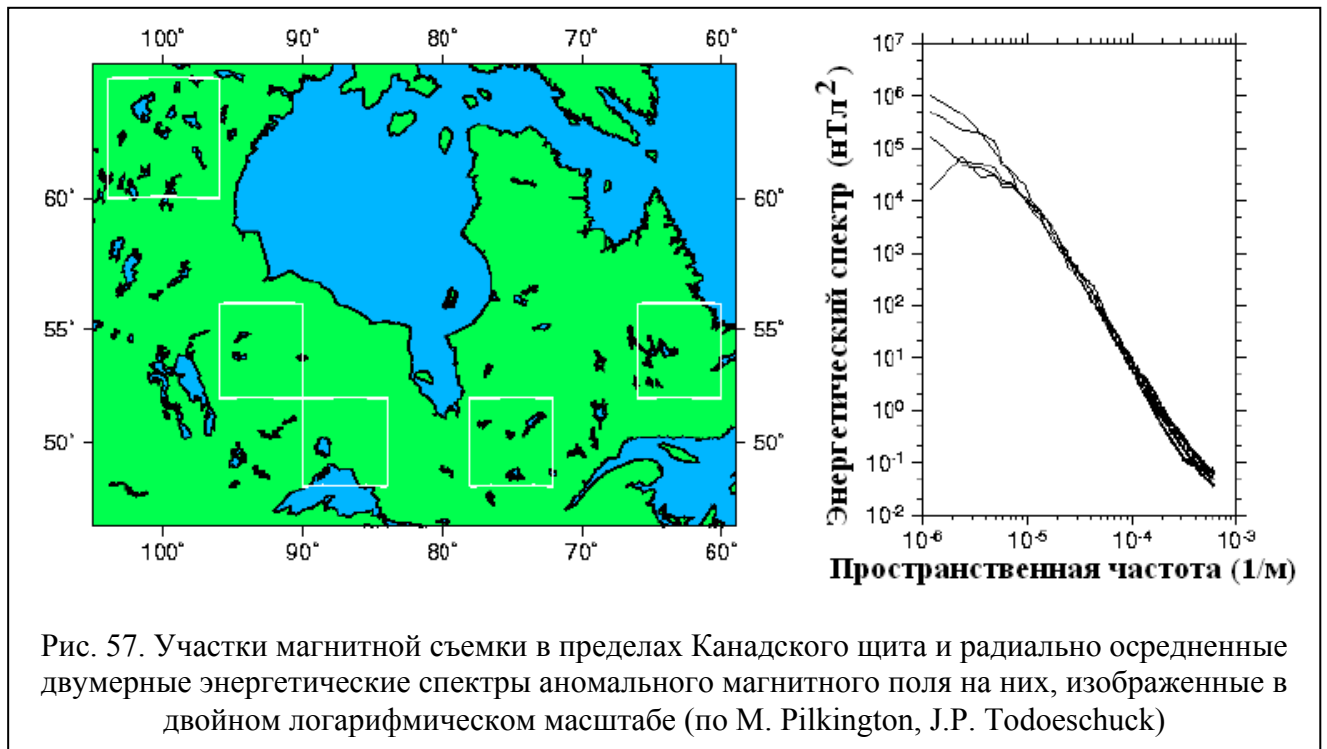


Рис. 57. Участки магнитной съемки в пределах Канадского щита и радиально осредненные двумерные энергетические спектры аномального магнитного поля на них, изображенные в двойном логарифмическом масштабе (по M. Pilkington, J.P. Todoeschuck)

Почему же амплитудные спектры на высоких частотах ведут себя как степенные функции и чем характеризуются их показатели? Для ответа на этот вопрос необходимо снова обратиться к рассмотренной в § 1 модели помех, называемой фрактальным гауссовским шумом.

Напомним, что ковариационная функция $\rho_{\hat{H}}(n)$ фрактального гауссовского шума с параметром Хёрста $0 < \hat{H} \leq 1$ имеет следующий вид:

$$\rho_{\hat{H}}(n) = \text{Cov}(\beta_k, \beta_{k+n}) = \frac{1}{2} \left\{ |n+1|^{2\hat{H}} - 2|n|^{2\hat{H}} + |n-1|^{2\hat{H}} \right\}, \quad (27.17)$$

и при $n \rightarrow \infty$

$$\rho_{\hat{H}}(n) \sim \hat{H}(2\hat{H}-1)|n|^{2\hat{H}-2}. \quad (27.18)$$

Можно показать, что в спектральном представлении

$$\rho_{\hat{H}}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} S_{\hat{H}}(\omega) e^{+i\omega\hat{H}} d\omega, \quad (27.19)$$

соответствующая спектральная плотность фрактального гауссовского шума $S_{\hat{H}}(\omega)$ выражается в виде

$$S_{\hat{H}}(\omega) = \frac{\hat{H} \Gamma(2\hat{H}) \sin(\hat{H}\pi)}{\pi} |e^{i\omega} - 1|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\omega + 2k\pi|^{2\hat{H}+1}}, \quad |\omega| \leq \pi, \quad (27.20)$$

то есть является суммой степенных функций, показатели которых определяются параметром Хёрста $\hat{H}$. Рассмотренные свойства спектров необходимо эффективно учитывать при интерпретации.

Применительно к трансформациям это можно понимать следующим образом: используя трансформации, интерпретатор может обогатить в спектре трансформанты одну из частей и подавить другие, тем самым выделив (подчеркнув) региональную или локальную компоненту. Конкретное действие теоретической трансформации полностью определяется ее частотной характеристикой. В таблицу 4 сведены частотные характеристики простейших профильных трансформаций, полученные в результате применения преобразования Фурье к их ядрам. Напомним, что вертикальная ось z считается направленной вверх.

Таблица 4.

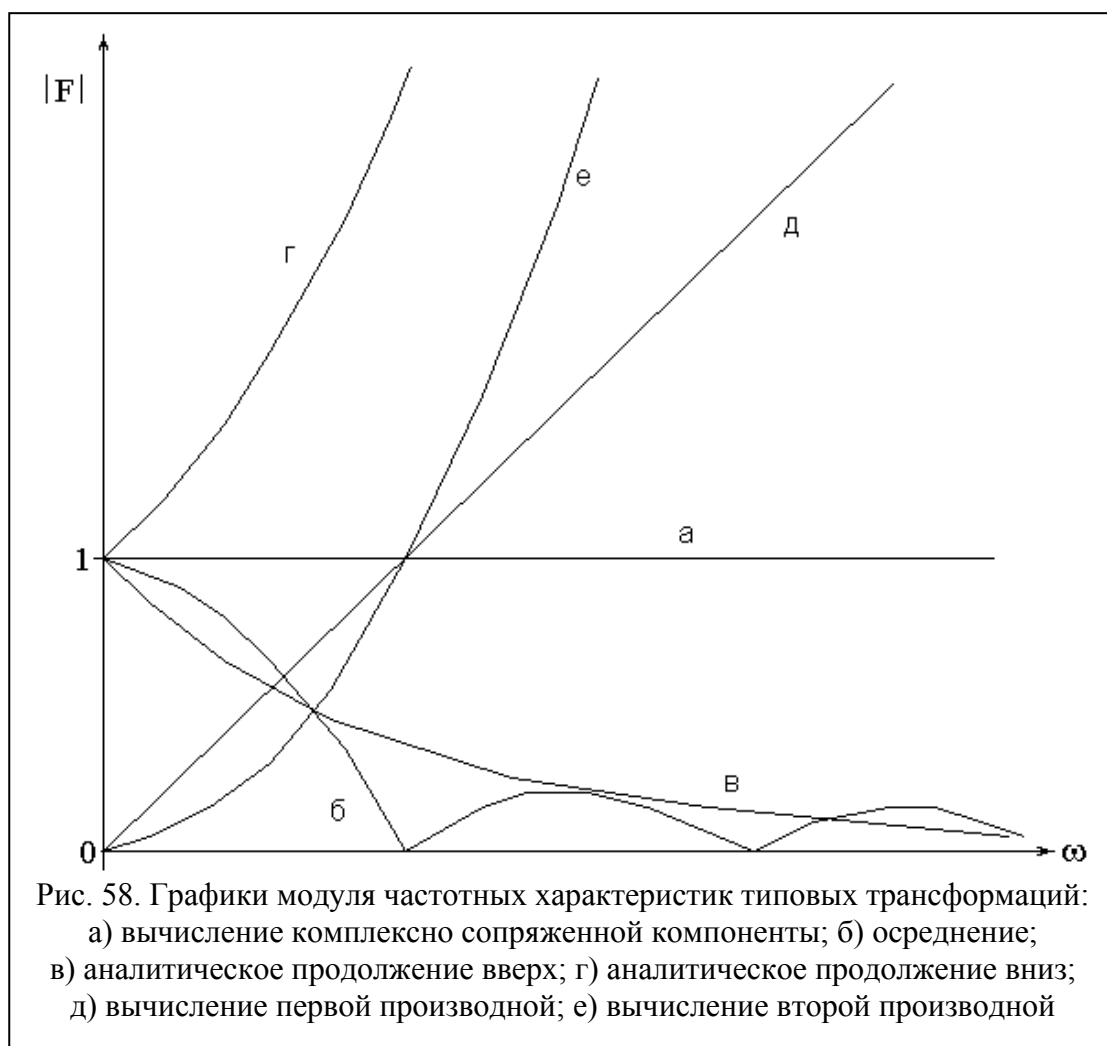
Частотные характеристики типовых теоретических профильных трансформаций.

Трансформация	Частотная характеристика
Интегральное осреднение на интервале $(-l, +l)$	$F(\omega) = \frac{\sin \omega l}{\omega l}$
Аналитическое продолжение вверх на высоту h	$F(\omega) = e^{- \omega h}$
Аналитическое продолжение вниз на глубину h	$F(\omega) = e^{ \omega h}$
Вычисление производной по x	$F(\omega) = i\omega$
Вычисление производной по z	$F(\omega) = - \omega $
Вычисление компоненты X по Z	$F(\omega) = -i \cdot \text{sign } \omega$

Отметим, что частотные характеристики аналитического продолжения полей вверх и вниз могут быть описаны единой формулой:

$$F(\omega) = e^{-|\omega|z}. \quad (27.21)$$

На рис. 58 показаны графики модуля частотных характеристик ряда трансформаций. С его помощью легко представить, что происходит со спектром исходной аномалии после умножения на каждую из этих частотных характеристик в результате трансформирования. В частности, на нем видно, что частотные характеристики некоторых трансформаций, таких как осреднение или аналитическое продолжение вверх, при $\omega \rightarrow \infty$ стремятся к нулю или же не превышают по модулю единицы. Эти трансформации подавляют высокочастотную помеху и являются устойчивыми. Частотные характеристики других трансформаций, таких как аналитическое продолжение вниз или расчет высших производных, при $\omega \rightarrow \infty$ стремятся к бесконечности. Такие трансформации усиливают высокочастотную помеху и являются неустойчивыми, следовательно, некорректными. Естественно, их практическое применение должно сопровождаться защитой от помех, что осуществляется различными способами.

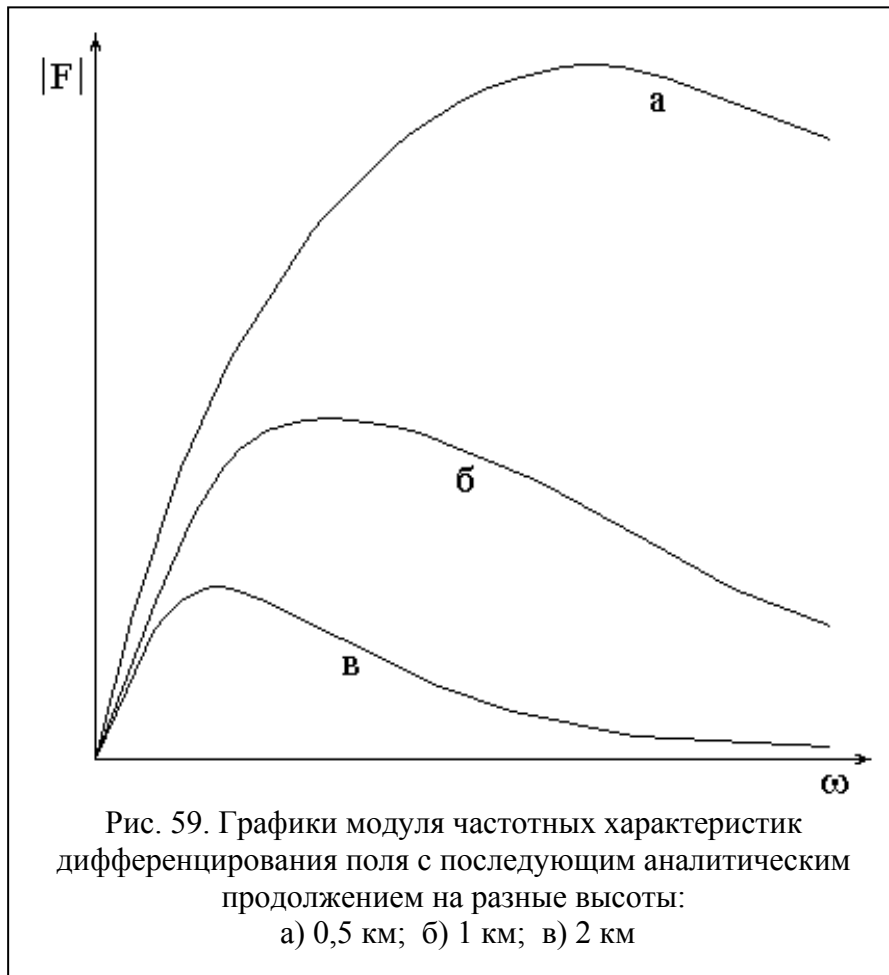


Более сложные трансформации сводятся к последовательному применению нескольких элементарных. При этом из соотношения (27.9) следует, что частотная характеристика такой трансформации представляет собой произведение частотных характеристик составляющих ее трансформаций:

$$F(\omega) = \prod_{i=1}^n F_i(\omega). \quad (27.22)$$

Применение сложных трансформаций расширяет возможности интерпретатора, дает возможность конструировать фильтры с заданными свойствами. На рис. 59 показаны графики модуля частотной характеристики трансформации, представляющей собой вычисление первой производной с последующим аналитическим продолжением вверх. Как видно, эта трансформация подчеркивает среднечастотную часть спектра, причем меняя высоту продолжения можно регулировать частоту, соответствующую экстремуму ее частотной характеристики.

Подобные трансформации, выделяющие среднечастотную часть спектра, интересны тем, что их в определенных условиях можно считать настроенными на подчеркивание аномалий от объектов, лежащих в некотором диапазоне глубин. Будем считать, что двумерное аномальное поле связано исключительно с линейными массами, расположенными на различных глубинах. Тогда в разных интервалах спектра будут преобладать влияния разных масс: на более низких частотах - залегающих на большей глубине, на более высоких - залегающих на меньшей глубине. Аналитическое рассмотрение этой проблемы приводит к понятию глубинной характеристики трансформации $\mathbf{M}(\mathbf{z})$.



Глубинная характеристика трансформации связывается с ее частотной характеристикой на основе преобразования Лапласа следующим образом:

$$M(z) = \int_0^{\infty} F(\omega) \omega e^{-\omega z} d\omega. \quad (27.23)$$

Наиболее простая из теоретических трансформаций - тождественная, преобразующая исходное поле само в себя. Ее частотная характеристика, очевидно, $F(\omega) \equiv 1$, тогда в соответствии с (27.23) ее глубинная характеристика, обозначаемая $M_0(z)$, будет равна

$$M_0(z) = \int_0^{\infty} \omega e^{-\omega z} d\omega = \frac{1}{z^2}. \quad (27.24)$$

Для анализа трансформаций обычно применяют относительную глубинную характеристику, вычисляемую по формуле

$$N(z) = \frac{M(z)}{M_0(z)} = z^2 M(z). \quad (27.25)$$

Построив графики относительных глубинных характеристик типовых трансформаций, можно убедиться, что те из них, которые подчеркивают низкочастотную часть спектра поля, например, осреднение и аналитическое продолжение вверх, более чувствительны к глубокозалегающим массам. Те же, которые подчеркивают высокочастотную часть спектра поля, то есть вычисление высших производных и аналитическое продолжение вниз - более чувствительны к неглубокозалегающим массам. Трансформация, включающая дифференцирование поля и последующее аналитическое продолжение вверх, будет иметь относительную глубинную характеристику с экстремумом на глубине, зависящей от высоты

продолжения. Таким же свойством обладает и площадная трансформация Саксова-Ниггарда (26.3), сводящаяся к вычислению разности средних значений на окружностях с радиусами R_1 и R_2 . Если обозначить $n = R_1/R_2$, то глубину экстремума ее относительной глубинной характеристики можно определить по формуле:

$$z = R_2 \sqrt{\frac{n^{0,8} - n^2}{1 - n^{0,8}}}. \quad (27.26)$$

Трансформации типа Саксова-Ниггарда, имеющие экстремум на графике относительной глубинной характеристики, часто применяют на ранних этапах интерпретации при выборе начальной модели изучаемых объектов. Для этого на интерпретационном профиле проводят эту трансформацию несколько раз с такими параметрами, которые отвечают разным глубинам экстремума ее относительной глубинной характеристики. По результатам вычислений строят разрез и на него под каждой точкой наблюдения помещают несколько точек на глубинах, отвечающих всем этим экстремумам. Точкам ставят в соответствие значения вычисленных трансформант. Другими словами, каждое значение трансформанты относят к точке пространства, расположенной под центром скользящего окна на глубине, равной глубине экстремума относительной глубинной характеристики. Далее на разрезе строят линии равных значений трансформант. Если аномалия действительно вызвана замкнутым локальным объектом, эти изолинии в некоторой степени отражают поведение объекта. Очевидно, таким приемом, как и вообще глубинными характеристиками, следует пользоваться с осторожностью, помня о неединственности решения обратной задачи. Пример с конхоидой Слюза, приведенный в § 19, а также рис. 44 должны напоминать в том, что эквивалентные поля могут создаваться объектами, лежащими на разных и сильно отличающихся глубинах.

Важной областью применения трансформаций является совместный анализ гравитационных и магнитных аномалий. Как было отмечено выше, при геологическом истолковании полей необходимо учитывать, вызваны ли обнаруженные гравитационные и магнитные аномалии одним источником или разными. Соотношение Пуассона, связывающее гравитационный и магнитный потенциалы однородных и однородно намагниченных тел, указывает на то, что в случае единой природы источника магнитная аномалия будет вести себя как линейная комбинация градиентов гравитационной аномалии. Для проверки этого, например, можно построить график следующего отношения:

$$\frac{S_Z^2(\omega)}{\omega^2 S_{\Delta g}^2(\omega)} \quad (27.27)$$

в зависимости от частоты. В знаменателе, как следует из (27.9), фактически располагается квадрат спектра градиента силы тяжести. Поэтому, если аномальные поля удовлетворяют соотношению Пуассона, то есть гравитационная и магнитная аномалии вызваны одним источником, построенный график теоретически должен быть на всех частотах близок к тождественной постоянной. Более подробно с применением спектрального вида соотношения Пуассона для совместного анализа гравитационных и магнитных аномалий можно познакомиться по книге С. А. Сергеева.

§ 28. Вычислительные схемы трансформаций

На практике, очевидно, применяют не теоретические трансформации, а их приближения, то есть вычислительные схемы, которые сводятся к расчету сумм произведений значений поля в узлах скользящего окна на соответствующие весовые коэффициенты. Частотная характеристика вычислительной схемы, естественно, отличается от частотной характеристики аппроксимируемой теоретической трансформации. Отсюда следует необходимость анализа тех искажений, которые каждая из вычислительных схем вносит в теоретическую частотную характеристику и разработки приемов повышения их устойчивости.

Рассмотрим особенности частотных характеристик вычислительных схем профильных трансформаций, предназначенных для фильтрации двумерных полей. Как было отмечено в § 26, большинство таких трансформаций имеет типовой вид: они могут быть описаны единой формулой:

$$U_{\text{тр}}(0) = k_0 U(0) + \sum_{i=1}^N k_i \overline{U(R_i)}, \quad (28.1)$$

где

$$\overline{U(R)} = 0,5[U(-R) + U(+R)] \quad (28.2)$$

означает осреднение по двум точкам, расположенным на расстоянии R слева и справа от центра скользящего окна. Следовательно, и частотные характеристики этих вычислительных схем имеют типовой вид. Если рассматривать формулу (28.2) как трансформацию, она также должна иметь свою частотную характеристику, которую легко вычислить, используя формулу (27.16) для спектра смещенной функции. Поскольку преобразование Фурье суммы двух функций равно сумме их преобразований Фурье, данная частотная характеристика будет следующей:

$$F(\omega) = 0,5(e^{i\omega R} + e^{-i\omega R}) = \cos \omega R. \quad (28.3)$$

Применяя (28.3) к (28.1), легко убедиться, что частотная характеристика профильной трансформации может быть представлена в следующей форме:

$$F(\omega) = k_0 + \sum_{i=1}^N k_i \cos(\omega R_i). \quad (28.4)$$

Из формулы (28.4) следует, что частотные характеристики вычислительных схем являются периодическими функциями и тем самым принципиально отличаются от своих теоретических прототипов. Для того, чтобы разобраться в характере различий, обратимся к примеру. На рис. 60 показаны графики частотных характеристик теоретической трансформации, заключающейся в вычислении второй горизонтальной производной, и четырех представляющих ее вычислительных схем на базе аппроксимационной формулы (26.13). Схемы различаются расстоянием Δx между точками в пятиточечном скользящем окне и, следовательно, размерами окна.



Полученные результаты являются типичными для трансформаций и указывают на следующие закономерности.

1. Частотные характеристики вычислительных схем практически совпадают с частотными характеристиками теоретических трансформаций лишь в пределах некоторого интервала пространственных частот: от нуля до некоторой граничной частоты ω_{Γ} , а вне его - принципиально различаются, являясь периодическими функциями.

2. Изменяя параметры вычислительных схем, можно регулировать ω_{Γ} , а также положение максимумов и минимумов их частотных характеристик в разных диапазонах пространственных частот.

3. Вычислительные схемы могут быть устойчивыми, несмотря на неустойчивость приближаемых ими теоретических трансформаций

4. Для повышения устойчивости трансформаций надо выбирать такие параметры применяемой вычислительной схемы, чтобы интервал помех примерно совпадал с интервалом, где ее частотная характеристика имеет минимум.

Зная отмеченные закономерности и проанализировав спектр трансформируемой аномалии, всегда можно выбрать подходящую вычислительную схему. Обратим внимание на то, что формула (28.4) фактически представляет собой отрезок разложения частотной характеристики теоретической трансформации в ряд Фурье по косинусам. Отсюда следует широко распространенная методика построения вычислительных схем, с помощью которой получено большинство вычислительных формул, в том числе приведенных в § 26. Данная методика включает несколько этапов. Вначале частотная характеристика теоретической трансформации раскладывается в ряд Фурье по косинусам. Затем этот ряд ограничивается несколькими членами, в результате чего определяются расстояния до узлов практической трансформации и весовые коэффициенты в них. Сопоставление теоретической частотной характеристики с частотными характеристиками вычислительных схем, получаемых при разном числе членов ряда и расстояний между узлами, позволяет выбрать ту из них, которая обладает требуемыми свойствами.

В настоящее время трансформации преимущественно выполняются на компьютерах, что позволяет применять более совершенные способы выбора оптимальных параметров вычислительных схем. Основной базой применяемых алгоритмов являются тригонометрические полиномы, то есть отрезки рядов Фурье. Пусть исходное поле задано на профиле длиной L с равномерным шагом. Тогда его можно представить в виде бесконечного ряда Фурье:

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\pi n x}{L} + B_n \sin \frac{\pi n x}{L} \right), \quad (28.5)$$

при этом подразумевается, что за пределами отрезка наблюдений поле периодически повторяется. Дополнительно предположив характер повторения как четно или нечетно симметричный, в (28.5) можно опустить ту часть, которая имеет другой тип симметрии и тем самым упростить вычисления. Коэффициенты разложения рассчитываются по известным формулам

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L U(x) \cos \frac{\pi n x}{L} dx \quad (28.6)$$

и

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L U(x) \sin \frac{\pi n x}{L} dx \quad (28.7)$$

любым численным методом. Если результаты трансформации в дальнейшем не надо использовать при количественной интерпретации, для расчета коэффициентов можно

воспользоваться простейшим и наименее точным способом прямоугольников. Его преимущества в скорости вычислений проявляются особенно ярко в случае применения алгоритмов так называемого быстрого преобразования Фурье. Если же результаты трансформации требуются для количественных оценок, быстрого преобразования Фурье, как и вообще способа прямоугольников лучше избегать и пользоваться медленными, но более точными численными методами.

На практике, очевидно, бесконечное число коэффициентов не может быть определено, поэтому оно ограничивается некоторым номером N :

$$U(x) = \sum_{n=0}^N \left(A_n \cos \frac{\pi n x}{L} + B_n \sin \frac{\pi n x}{L} \right), \quad (28.8)$$

тем самым ряд Фурье превращается в тригонометрический полином. Формулу (28.8) можно рассматривать как результат применения к ряду (28.5) прямоугольного фильтра. Хотя подобная фильтрация уничтожает высокочастотную часть спектра, она не всегда приводит к хорошим результатам, поэтому в (28.8) вводят дополнительные фильтры. Одним из наиболее распространенных является фильтр вида

$$\left(\sin \frac{\pi n}{N} / \frac{\pi n}{N} \right)^2, \quad (28.9)$$

после умножения на него формула (28.8) становится удобной для практических вычислений.

Для получения трансформант коэффициенты в (28.8) умножаются на соответствующие частотные характеристики. Так для аналитического продолжения на высоту z вычислительная формула принимает вид:

$$U(x, z) = \sum_{n=0}^N \left(A_n \cos \frac{\pi n x}{L} + B_n \sin \frac{\pi n x}{L} \right) e^{-\frac{\pi n z}{L}} \left(\frac{\sin \frac{\pi n}{N}}{\frac{\pi n}{N}} \right)^2. \quad (28.10)$$

Если продифференцировать ее по x или по z , легко получить аналогичные формулы для вычисления горизонтального или вертикального градиентов поля на разных высотах, устойчивые к помехам.

Еще более устойчивые вычислительные схемы могут быть построены на базе тригонометрических полиномов с применением метода регуляризации. Допустим для простоты записи, не уменьшающей общности подхода, что подразумеваемое периодическое продолжение исходного поля за пределы интерпретируемого отрезка профиля является нечетно симметричным. Это значит, что для вычисления трансформант мы будем использовать следующий ряд

$$U_{\text{тр}}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi n x}{L}, \quad (28.11)$$

где коэффициенты C_n получены умножением коэффициентов разложения исходного поля B_n на соответствующую частотную характеристику. Если трансформация - неустойчива, и ее частотная характеристика стремится к бесконечности при $\omega \rightarrow \infty$, ряд (28.11) окажется медленно сходящимся или вообще расходящимся. Следовательно, в этом случае ограничение числа членов ряда при переходе к тригонометрическому полиному может привести к большим погрешностям. Для регуляризации получаемого решения C_n заменяют на близкие к ним коэффициенты D_n , быстрее убывающие с ростом номера n .

В соответствии с методом регуляризации это приводит к следующей условно-экстремальной задаче: найти минимум стабилизатора

$$\Omega(D_n) = \sum_{n=1}^N q_n D_n^2 \quad (28.12)$$

при условии, что коэффициенты C_n и D_n близки друг к другу, то есть

$$\sum_{n=1}^N (C_n - D_n)^2 \leq \delta^2. \quad (28.13)$$

Весовые коэффициенты q_n в стабилизаторе (28.12) представляют собой положительные числа, стремящиеся к бесконечности при $n \rightarrow \infty$ как $n^{2+\varepsilon}$, где $\varepsilon \geq 0$. С этими весовыми коэффициентами стабилизатор фактически накладывает на решение штраф за плохую сходимость. В § 21 было рассмотрено, как свести исходную условно-экстремальную задачу к безусловно-экстремальной. Для этого надо найти минимум следующей функции Тихонова:

$$M^\alpha(D_n) = \sum_{n=1}^N (C_n - D_n)^2 + \alpha \sum_{n=1}^N q_n D_n^2. \quad (28.14)$$

Необходимые условия экстремума функции состоят в равенстве нулю всех ее частных производных по искомым параметрам. Таким образом, коэффициент D_n может быть найден из уравнения $D_n - C_n + \alpha q_n D_n = 0$, то есть

$$D_n = \frac{C_n}{1 + \alpha q_n}. \quad (28.15)$$

Поскольку коэффициенты C_n получены умножением коэффициентов разложения исходного поля B_n на частотную характеристику трансформации $F(\omega)$, формулу (28.15) можно трактовать как дискретизацию регуляризированной частотной характеристики трансформации $F_p(\omega)$, представимой в следующем общем виде:

$$F_p(\omega) = \frac{F(\omega)}{1 + \alpha Q(\omega)}. \quad (28.16)$$

Здесь $Q(\omega)$ - весовая функция, стремящаяся к бесконечности при $\omega \rightarrow \infty$ и выполняющая ту же роль, что весовые коэффициенты в (28.15).

К настоящему времени разработано довольно много способов регуляризации этой задачи, различающихся весовыми функциями. А.Н.Тихонов предложил для этой цели весовую функцию в виде квадрата модуля самой частотной характеристики, то есть следующую регуляризированную частотную характеристику:

$$F_p(\omega) = \frac{F(\omega)}{1 + \alpha |F(\omega)|^2}. \quad (28.17)$$

Несколько способов регуляризации предложил В.Н.Страхов, в частности с использованием производных вплоть до n -го порядка (так называемую регуляризацию n -го порядка):

$$F_p(\omega) = \frac{F(\omega)}{1 + \alpha (\text{th}^2 \omega)^n |F(\omega)|^2}, \quad (28.18)$$

а также адаптивную регуляризацию, учитывающую спектр конкретной трансформируемой функции

$$F_p(\omega) = \frac{F(\omega) |S(\omega)|^2}{|S(\omega)|^2 + \alpha |F(\omega)|^2}. \quad (28.19)$$

Все эти способы используют перебор результатов при изменении α по геометрической прогрессии (21.14) и выбор оптимального параметра регуляризации, исходя либо из критерия невязки, либо из критерия Тихонова-Гласко, изложенных в § 21.

Изложенные способы повышения устойчивости вычислительных схем относятся к так называемому детерминистскому направлению в трансформациях потенциальных полей. Другое интенсивно развиваемое направление в трансформациях - вероятностно-статистическое. Оно базируется на представлениях о сложных гравитационных и магнитных аномалиях как о случайных функциях, что позволяет привлечь для их обнаружения и разделения статистическую теорию оптимальной фильтрации. Под оптимизацией понимают построение таких вычислительных схем, которые удовлетворяют некоторому принятому критерию их качества. В настоящее время на практике используют преимущественно три таких критерия:

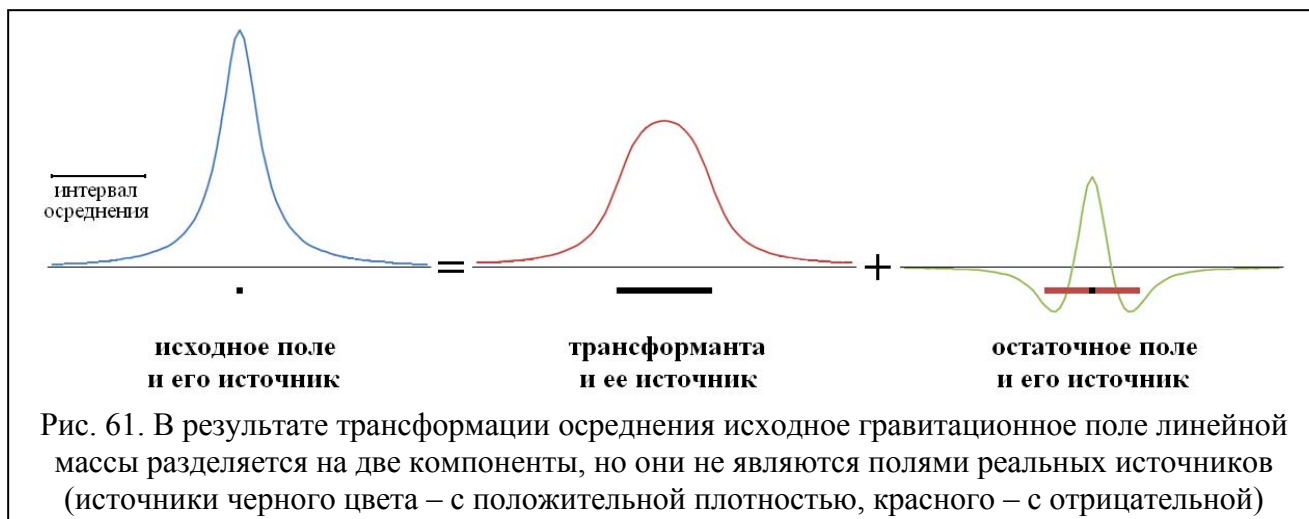
- 1) минимум среднеквадратического отклонения трансформанты от априорно заданной функции (критерий Колмогорова-Винера);
- 2) максимум пикового отношения трансформанты к помехе;
- 3) максимум энергетического отношения трансформанты к помехе.

На базе указанных критериев разработаны многочисленные вычислительные схемы, изучение которых проводится в рамках курса "Теоретические основы обработки геофизической информации". Детально ознакомиться с достижениями вероятностно-статистического направления в трансформациях можно по учебнику А. А. Никитина и по книге С. А. Серкерева.

В заключение главы рассмотрим весьма важный для методологии интерпретации вопрос о физико-геологическом смысле трансформант и остаточных полей. Исчерпывающий теоретический ответ на него был дан А. Н. Тихоновым и Ю. Д. Буланже в 1945 г., и заключается он в следующем: и трансформанта, и остаточное поле принципиально не являются полями какой-либо из частей реальной геологической среды. Другими словами, разделение исходного поля на сумму двух компонент путем применения любой из трансформаций никоим образом **не означает**, что одна из компонент является полем некоторой части источников в реальной среде, а другая компонента является полем тех источников, которые не вошли в первую часть и которые дополняют ее до реальной среды.

Что же на самом деле представляют собой источники разделенных компонент? Оказывается, для гравитационного поля трансформанта является полем абсолютно всех масс, слагающих геологическую среду, но перераспределенных по следующему закону: каждая точечная масса в среде перераспределяется на горизонтальной плоскости, проходящей через нее (т. е. на той же глубине), в пределах проекции скользящего окна на эту плоскость, расположенного так, что центр окна проектируется на рассматриваемую массу. При этом данная точечная масса трансформируется в набор точечных масс под каждым из узлов скользящего окна с массой, пропорциональной весовому коэффициенту в этом узле. То же происходит при трансформациях магнитного поля и с фиктивными магнитными массами.

Проиллюстрируем эту закономерность на простом примере двумерной трансформации осреднения на отрезке. На рис. 61 показано гравитационное поле линейной массы, разложенное путем осреднения на трансформанту, которая в соответствии со сформулированным законом является полем горизонтального отрезка с той же массой и с длиной, равной интервалу осреднения, а также остаточное поле. Последнее, очевидно, является полем сложной модели, состоящей из самой массы и того же отрезка, но с отрицательной массой. Таким образом, исходное поле с реальным физико-геологическим смыслом в результате трансформации оказалось фактически разделенным на две компоненты, каждая из которых является полем нереальных источников.



Чем более замысловатой является примененная трансформация, тем более причудливыми являются отвечающие полученным компонентам нереальные распределения источников. Отсюда следует, что **количественную интерпретацию трансформант и остаточных полей проводить принципиально нельзя, так как они не соответствуют реальным источникам.** Это, естественно, никак не ограничивает грамотного применения трансформаций для обнаружения и разделения полей.

Вопросы для самоконтроля

1. Какая из трансформаций применяется для усиления проявления глубинных геологических объектов?
 - а) сглаживание (24);
 - б) аналитическое продолжение вверх (27);
 - в) и та, и другая в зависимости от решаемых задач (30).
2. Какая из трансформаций применяется для усиления проявления сравнительно неглубоко залегающих геологических объектов?
 - а) расчет вертикального градиента (36);
 - б) аналитическое продолжение вниз (62);
 - в) и та, и другая в зависимости от решаемых задач (88).
3. Означает ли наличие максимума на графике относительной глубинной характеристики трансформации, что получаемые с ее помощью результаты несут основную информацию именно о тех глубинах, к которым приурочен этот максимум?
 - а) означает всегда (39);
 - б) не означает (48);
 - в) означает, если эта глубина достаточно велика (57).
4. На что направляется оптимизация вычислительных схем трансформаций?
 - а) на максимальное совпадение их частотных характеристик с теоретическими (71);
 - б) на подавление конкретных помех (72);
 - в) на ускорение вычислений (73).

Контрольная сумма при правильных ответах – 238.

ГЛАВА 8. АППРОКСИМАЦИОННЫЕ СПОСОБЫ РАЗДЕЛЕНИЯ АНОМАЛИЙ

§ 29. Интерполяция и экстраполяция в разделении полей

Способы, базирующиеся на детально разработанных в численном анализе методах интерполяции и экстраполяции функций, весьма широко используются для разделения гравитационных и магнитных аномалий. Интерполяционные способы применяют для разделения региональных и локальных аномалий, когда размеры их в плане существенно различаются, и локальные аномалии находятся на столь большом расстоянии друг от друга, что между ними оказываются промежутки, где наблюденное поле фактически представлено одним региональным фоном. В этом случае на некоторой площади: большей, чем площадь локальной аномалии, но значительно меньшей площади регионального фона, последний может быть достаточно точно аппроксимирован алгебраическим или тригонометрическим полиномом невысокой степени. Там, где заведомо нет локальных аномалий и интенсивных помех, выбирают несколько узловых точек и определяют коэффициенты полинома, строго проходящего через эти точки. Вычисление значений этого интерполяционного полинома в точках участка, где есть локальная аномалия, дает функцию, близкую к региональному фону. Вычитая эти значения из наблюденных, интерпретатор получает локальные аномалии.

Недостатком подобных способов разделения является их слабая помехозащищенность, связанная с требованием строгого прохождения полинома через узловые точки. Если в этих точках есть помехи, они могут оказать пагубное влияние на результаты. Для их подавления до интерполяции зачастую проводят предварительное сглаживание исходного поля.

Построение алгебраического интерполяционного полинома, то есть функции вида $a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 + \dots$, сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно его коэффициентов. Эта система получается из условия совпадения значений полинома со значениями исходной функции в заданных узлах. Естественно, число определяемых коэффициентов, характеризующее степень многочлена, должно быть равно числу узлов. Аналогично строится и тригонометрический интерполяционный полином.

Наиболее просто построение алгебраического интерполяционного полинома для профильных наблюдений. Здесь широко применяется методика, предложенная Лагранжем и дающая возможность получить решение в явном виде, обойдясь без решения системы уравнений. В соответствии с ней через $n+1$ узловую точку проводится следующий многочлен n -ой степени:

$$U_{\text{рег}}(x) = L_1(x)U(x_1) + L_2(x)U(x_2) + \dots + L_{n+1}(x)U(x_{n+1}), \quad (29.1)$$

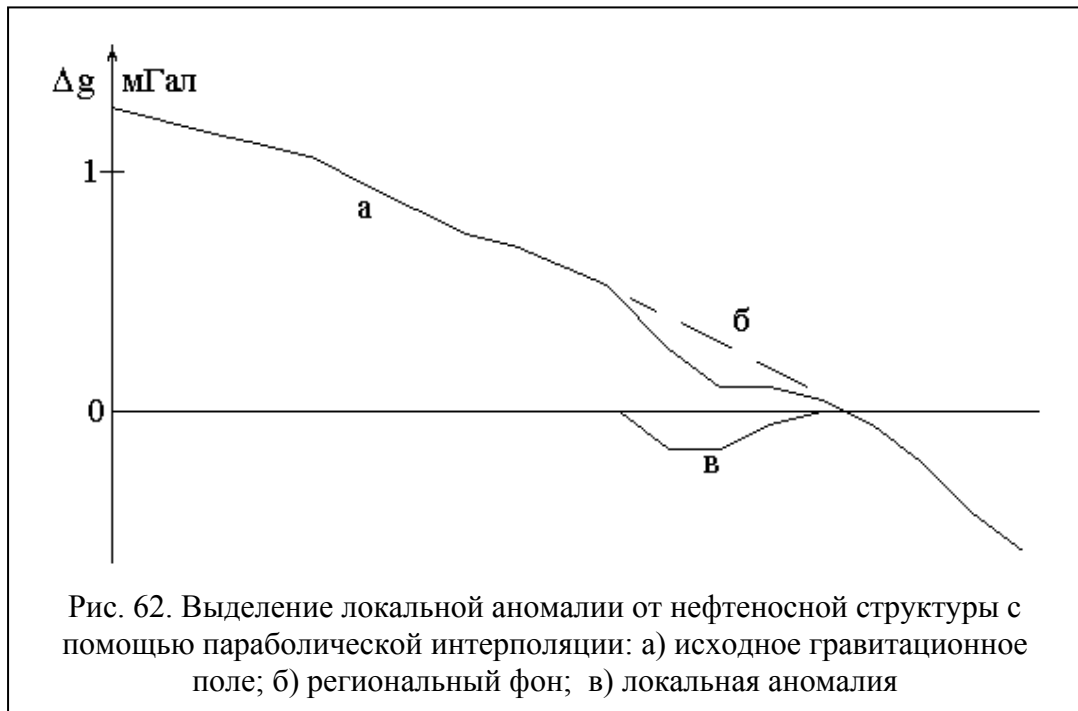
где x_i - координаты заданных узловых точек, $U(x_i)$ - значения наблюденного поля в них, а $L_i(x)$ - фундаментальный полином Лагранжа n -ой степени для i -ой узловой точки, вычисляемый по формуле

$$L_i(x) = \frac{(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_{n+1})}{(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_{n+1})}. \quad (29.2)$$

Напомним, что график любого алгебраического многочлена называют параболой, поэтому интерполяцию с помощью алгебраических полиномов часто называют параболической интерполяцией. На рис. 62 показан пример выделения локального гравитационного минимума, связанного с нефтеносной структурой, с помощью параболической интерполяции.

Параболическая экстраполяция применяется в случаях, когда требуется получить значения поля на продолжении профилей или площадей измерений. Это может, например, понадобиться, если измерения на интерпретируемом профиле обрываются у препятствия: у

озера, у реки, у берега моря и т.д. Вместе с тем, методы, базирующиеся на формальной полиномиальной аппроксимации, - не вполне точны. Гораздо лучшие результаты дают способы, учитывающие гармоничность экстраполируемых функций. Ряд таких способов интерполяции и экстраполяции предложил Ю. В. Антонов.



Предположим, что наблюдаемое поле задано на отрицательной половине оси абсцисс при $-\infty < x \leq 0$ и требуется экстраполировать его на положительную половину оси. Для этого на некоторой высоте h над профилем определим гармоническую функцию $U(x, h)$, которая, будучи аналитически продолжена вниз на уровень наблюдений, совпадет на отрицательной полуоси с исходным полем. Как было рассмотрено ранее, аналитическое продолжение поля вверх сводится к вычислению интеграла Пуассона (26.8), который в требуемых обозначениях можно переписать как

$$U(x, h) = \frac{h}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(\xi, 0) d\xi}{(\xi - x)^2 + h^2}. \quad (29.1)$$

Пересчет вниз может быть проведен с помощью этого же соотношения, которое надо рассматривать как интегральное уравнение, поскольку неизвестная функция находится под знаком интеграла. Решение уравнения для точки в начале координат может быть получено в следующем виде:

$$U(0, 0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(x, h) K(x, h) dx, \quad (29.2)$$

где

$$K(x, h) = \int_0^{\infty} e^{\omega h} \cos(\omega x) d\omega. \quad (29.3)$$

Подставим в (29.2) вместо $U(x, h)$ его выражение из (29.1):

$$U(0, 0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{h}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(\xi, 0) d\xi}{(\xi - x)^2 + h^2} \right] K(x, h) dx. \quad (29.4)$$

Интеграл в квадратных скобках можно представить в виде суммы интегралов:

$$U(0,0) = \frac{h}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^0 \frac{U(\xi,0)d\xi}{(\xi-x)^2+h^2} + \int_0^{\infty} \frac{U(\xi,0)d\xi}{(\xi-x)^2+h^2} \right] K(x,h)dx, \quad (29.5)$$

причем первый из них является интегралом от известной функции на отрицательной части полуоси, а второй содержит искомую ее часть. Тем самым соотношение (29.5) является интегральным уравнением, с помощью которого можно решать задачу экстраполяции гармонических функций. Для его численного решения интегралы аппроксимируются суммами, в результате интегральное уравнение сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов получающихся квадратурных формул. С деталями изложенного подхода можно познакомиться по книге Ю. В. Антонова. На рис. 63 показан взятый из этой книги пример экстраполяции аномалии силы тяжести, проведенной изложенным способом, в сравнении с реально наблюдаемым полем. Поле, наблюдаемое на отрицательной половине оси абсцисс было экстраполировано на положительную половину оси. Полученное поле достаточно близко к реально наблюдаемому там, что свидетельствует об эффективности данного подхода.

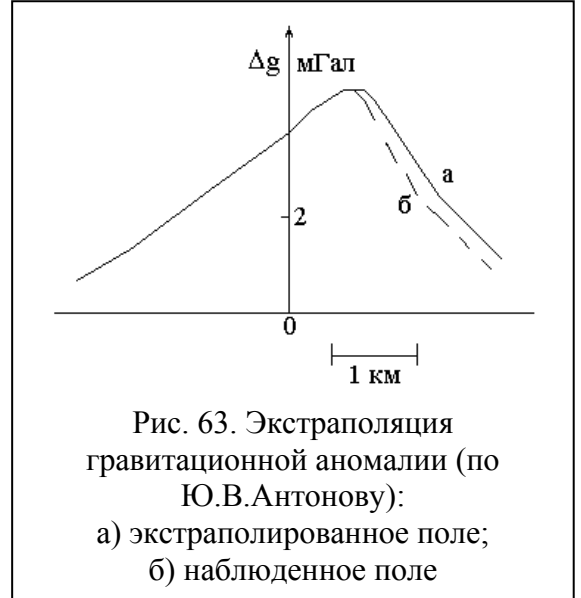


Рис. 63. Экстраполяция гравитационной аномалии (по Ю.В.Антонову):
а) экстраполированное поле;
б) наблюдаемое поле

Экстраполяция гармонических функций с помощью данного алгоритма может проводиться не только в горизонтальном направлении, но также в вертикальном и наклонном, что приводит к многочисленным способам разделения полей. Ю. В. Антонов предложил для этого следующую процедуру. Пусть некоторый элемент исходного поля задан на бесконечном горизонтальном профиле. Тогда с помощью интеграла Пуассона его можно аналитически продолжить вверх, причем, достаточно устойчиво. Следовательно, по исходным данным можно вычислить само поле, либо какие-либо другие его элементы, например, высшие производные, на вертикальных полуосях. Экстраполируя эти функции вниз, при определенных условиях можно получить информацию о распределении источников поля. Надо отметить, что экстраполированная вниз функция не совпадает ни с реальным полем, ни с аналитическим продолжением.

Пусть наблюдаемое поле представляет собой, например, сумму гравитационных аномалий g_z двух изолированных объектов, разнесенных по горизонтали, и требуется разделить эти аномалии. Выберем на профиле точку в промежутке между ними и проведем через нее вертикальную ось, не пересекающую ни один из объектов. Такую точку часто можно выбрать, анализируя само поле и его трансформанты, в частности, градиенты. Если объекты очень близки друг к другу, для выбора точки требуется априорная информация. Вычислим g_z на вертикальной оси, для чего в верхней ее части воспользуемся аналитическим продолжением, а в нижней - экстраполяцией сверху. Эта функция является суммой аномалий g_z от каждого из тел.

Далее на той же вертикальной оси аналогично вычислим комплексно сопряженную к g_z функцию g_x . Поскольку ось расположена между объектами, и их притяжение направлено в разные стороны, эта функция является разностью аномалий g_x от каждого из тел. Ее можно трансформировать, пересчитав назад в g_z , но теперь пересчитанная функция, унаследовав свойства g_x , также будет представлять собой разность аномалий g_z от каждого из тел.

Таким образом, в результате указанных операций в каждой точке вертикальной оси можно определить сумму и разность аномалий g_z от каждого из тел, что позволяет разделить их, решая систему двух уравнений. Очевидно, с точки зрения описанных пересчетов вертикальная и горизонтальная оси - равноправны. Это значит, что, зная аномалии от объектов на вертикальной оси, обратным пересчетом можно определить их и на исходной горизонтальной оси, тем самым завершив разделение. Так же можно разделять и магнитные аномалии, конечно, с учетом перечисленных в § 23 условий.

Таблица 5.

Коэффициенты $C_i^j \cdot 10^4$ для вычислительной схемы (29.6) при $H/h=1/3$

$i \setminus j$	-5	-4	-3	-2	-1	0
-5	68	71	72	68	56	18
-4	125	127	124	114	88	22
-3	223	218	199	164	99	-37
-2	275	213	102	-62	-308	-742
-1	-1096	-1526	-2162	-3020	-4221	-6064
0	-1672	-1300	-612	436	2077	5000
1	2788	3132	3556	4124	4932	6064
2	393	436	486	558	658	742
3	15	21	30	42	55	37
4	-17	-15	-10	-6	-2	-22
5	-17	-15	-10	-6	-4	-18

Опробование изложенного способа на моделях показало, что оптимальной для разделения является оцифровка исходных данных с шагом, равным одной трети глубины залегания центра масс системы объектов h . В итоге все требуемые преобразования сведены Ю. В. Антоновым к единой квадратурной 11-точечной формуле:

$$g_z^B(-j) = \sum_{i=-5}^{+5} C_i^j g_z(i). \quad (29.6)$$

Коэффициенты C_i^j в зависимости от отношения H/h , где H - глубина верхней кромки объектов, сведены в таблицы. Формула (29.6) позволяет вычислить аномалию от правого объекта (расположенного в квадранте **В**) в центре (при $j=0$) и в пяти точках слева от центра (над объектом в квадранте **А**). Для вычисления аномалии от объекта из квадранта **А** в точках квадранта **В** знаки перед i и j в формуле (29.6) меняются на противоположные, то есть коэффициенты в схеме разворачиваются в обратном порядке. Другая компонента в точках рассчитывается вычитанием полученных данных из наблюдаемых, после чего из четырех частей соединением крест накрест получаются два графика разделенных аномалий. Благодаря простоте, этот способ широко применяется для экспресс-разделения в полевых условиях. В таблице 5 представлены коэффициенты для одного из вариантов при $H/h=1/3$. Таблицы для других параметров можно найти в книге Ю. В. Антонова и в справочнике «Гравиразведка».

§ 30. Разделение аномалий с помощью тренд-анализа

Одной из наиболее популярных групп аппроксимационных способов разделения гравитационных и магнитных аномалий является так называемый тренд-анализ. Он заключается в аппроксимации регионального фона на всем участке наблюдений единой функцией из некоторого класса - трендом или регрессионной поверхностью. После вычитания этого фона из наблюдаемого поля получаются близкие к локальным остаточные аномалии.

Наиболее распространено применение в качестве тренда алгебраических полиномов невысокой степени.

Будем считать, что региональный фон, связанный с глубоко залегающими геологическими структурами, в пределах всей изучаемой площади достаточно хорошо аппроксимируется алгебраическим полиномом вида

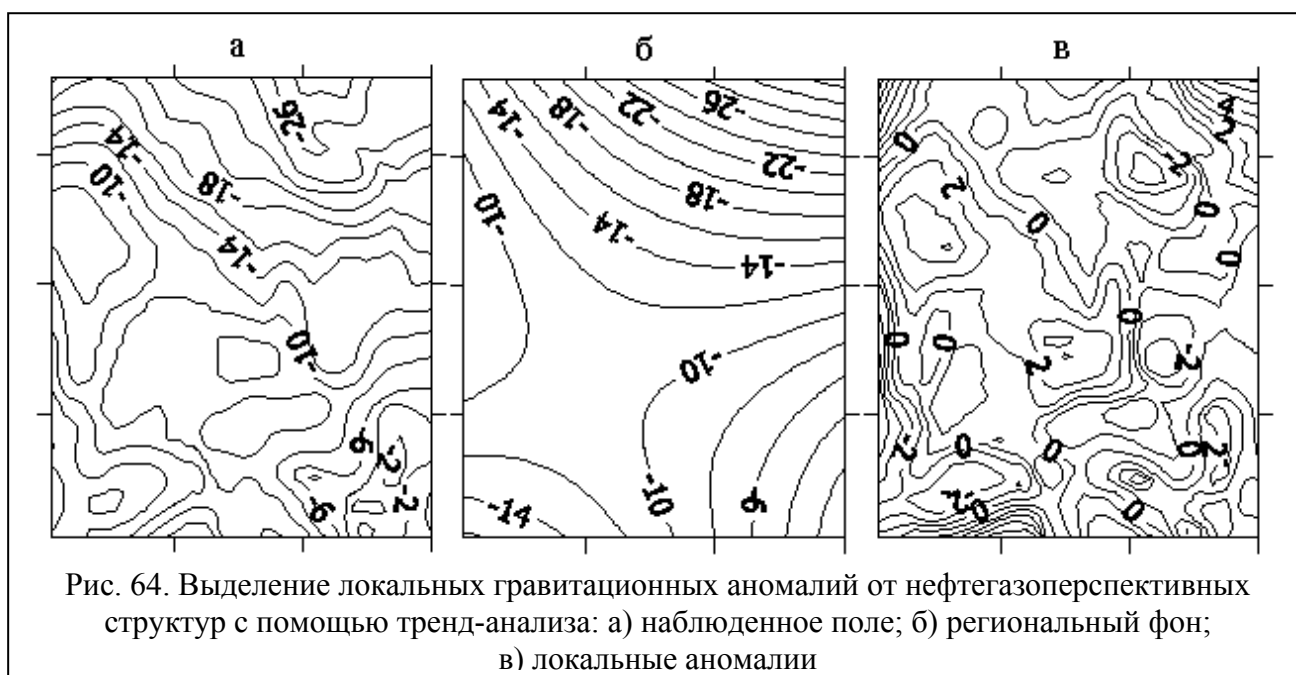
$$U_{\text{рег}}(x, y) = \sum_{q,s=0}^n a_{qs} x^q y^s, \quad (30.1)$$

где $0 < q+s \leq n$. Определим коэффициенты этого полинома a_{qs} с помощью метода квазирешений из условия минимума квадрата невязки:

$$\Phi(a_{qs}) = \sum_{k=1}^m \left[U(x_k, y_k) - \sum_{q,s=0}^n a_{qs} x_k^q y_k^s \right]^2 = \min. \quad (30.2)$$

Чтобы квазирешение получилось достаточно устойчивым, число определяемых коэффициентов (в данном случае $n+1$) должно быть значительно меньше числа точек наблюдения m , где известны значения поля U . Как было показано в § 20, эта задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно a_{qs} . Далее, зная эти параметры, можно во всех точках изучаемого участка вычислить региональный фон по формуле (30.2) и найти локальную аномалию: $U_{\text{лок}} = U - U_{\text{рег}}$.

Важнейшим в тренд-анализе является вопрос о выборе оптимальной степени аппроксимирующего многочлена, то есть величины n . Обычно такое разделение проводят несколько раз, увеличивая размерность полинома и анализируя получающиеся локальные аномалии. Если разделение производится исключительно в целях обнаружения локальных аномалий, достаточно визуального контроля результатов. Если же выделенные аномалии предполагается анализировать более тщательно, можно пользоваться рядом критериев, среди которых, как и в корреляционных способах разделения, преобладают связанные с минимумом дисперсии локальной составляющей. Особенности дисперсионного анализа трендов изучаются в курсе "Теоретические основы обработки геофизической информации".



Сечение изоаномал карты составляет 2 мГал. Региональный фон здесь был аппроксимирован полиномом второй степени, что привело к результатам, показанным на рис. 64б. Вычитание этого фона седлообразной формы из наблюдаемого поля позволило выделить локальные аномалии от перспективных структур, схематически изображенные на рис. 64в. Для большей наглядности карта локальных аномалий построена с сечением 1 мГал.

Одной из разновидностей тренд-анализа является так называемый метод главных компонент. Он базируется на разложении наблюдаемого поля в сумму естественных ортогональных составляющих, ранжированных по убыванию дисперсии, создаваемой ими в исходном поле. Наиболее часто в качестве регионального фона используется первая главная компонента.

Представим наблюдаемое поле U в виде прямоугольной матрицы, каждая из N строк которой является набором значений поля на профиле, состоящем из n пикетов, другими словами, каждое из значений поля будем рассматривать как элемент u_{ij} матрицы U . Вычислим для всех возможных пар профилей ковариации

$$b_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \hat{u}_{ik} \hat{u}_{jk}, \quad (30.3)$$

где

$$\hat{u}_{ik} = u_{ik} - \bar{u}_{ik} = u_{ik} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_{ik}, \quad (30.4)$$

и составим из них квадратную ковариационную матрицу B N -го порядка. Далее найдем максимальное собственное значение $\lambda_{\max}$ этой матрицы из уравнения

$$|B - \lambda_{\max} E| = 0, \quad (30.5)$$

где E - единичная матрица, а также соответствующий этому значению собственный вектор ковариационной матрицы $\bar{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1N})$, для чего решим систему линейных алгебраических уравнений

$$(B - \lambda_{\max} E) \bar{a}_1 = 0. \quad (30.6)$$

Чтобы исходные данные не изменяли своего масштаба, этот вектор нормируется из условия

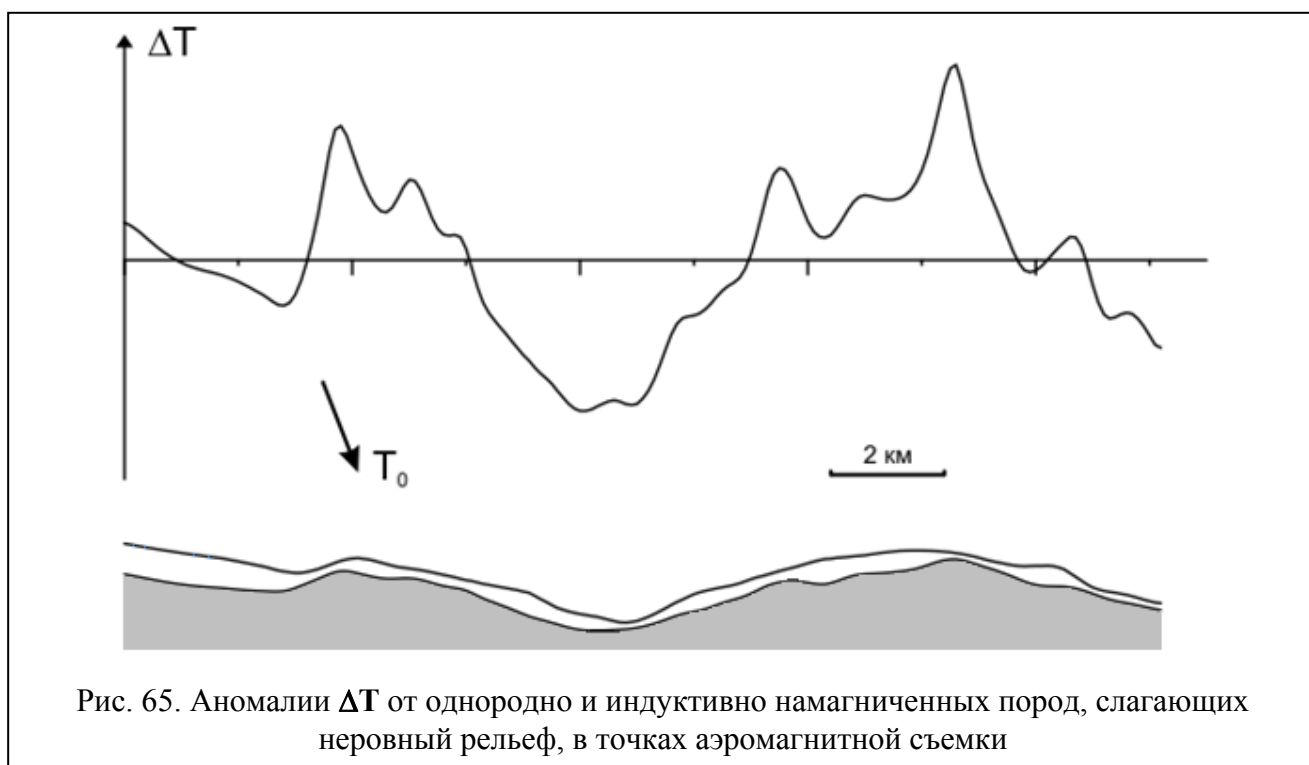
$$\sum_{i=1}^N a_{1i}^2 = 1. \quad (30.7)$$

Для получения первой главной компоненты Y_1 вектор $\bar{a}_1$ умножается слева на исходную матрицу поля: $Y_1 = \bar{a}_1 U$, что дает требуемые весовые коэффициенты. В итоге элементы матрицы регионального фона вычисляются как произведение вектора-столбца Y_1 на вектор-строку $\bar{a}_1$, причем к каждому элементу образующейся матрицы прибавляется среднее значение поля по профилю. После вычитания этого фона из наблюдаемого поля получают остаточные аномалии, к которым этот алгоритм можно применить повторно и т.д., получая тренды более высоких порядков. Более подробно метод главных компонент изучается в курсе "Теоретические основы обработки геофизической информации".

§ 31. Истокообразная аппроксимация при разделении полей

Рассмотренные ранее способы разделения гравитационных и магнитных аномалий (за исключением геологического редуцирования) применимы, строго говоря, лишь тогда, когда рельеф поверхности наблюдений представляет собой горизонтальную плоскость. На практике же интерпретатору приходится учитывать как неровности дневного рельефа, так и

разновысотность пунктов наблюдений. Неровности дневного рельефа в гравиразведке, как известно, учитываются введением соответствующей поправки, но полученные таким образом



аномалии все равно относятся к реальным пунктам наблюдений. Высота пунктов различна, следовательно, различны и расстояния от них до источников аномалий, что, несомненно, требует адекватного учета при интерпретации. В магниторазведке ситуация обычно еще более сложна, поскольку, с одной стороны, магнитное поле в силу своей природы более чувствительно к изменениям расстояний до источников, а, с другой стороны, традиционные наземные съемки зачастую вообще не сопровождаются приемлемыми по точности измерениями высот пунктов наблюдений. При интерпретации данных аэромагнитных съемок, которые в отличие от наземных сопровождаются прецизионными определениями всех трех координат, приходится учитывать неровности как рельефа поверхности наблюдений, так и дневного рельефа. На рис. 65 показан результат совместного влияния двух указанных факторов на примере реальной аэромагнитной съемки, выполненной с генеральным обтеканием дневного рельефа в горной местности, где высоты пунктов наблюдений изменяются более, чем на километр. Если считать породы, слагающие верхнюю часть разреза, однородно намагниченными по направлению современного геомагнитного поля T_0 , на данном маршруте они должны создавать аномалии ΔT , график которых приведен на рисунке. Амплитуда аномалий, естественно, тем больше, чем сильнее намагничены эти породы.

Еще одним, к сожалению, весьма часто недооцениваемым фактором, который ограничивает возможности рассмотренных ранее методов разделения, является необходимость для многих из них, особенно для трансформаций, в предварительном приведении поля к регулярной прямоугольной сети точек. Дело в том, что реальные гравитационные и магнитные съемки преимущественно выполняются по нерегулярным сетям, и в результате плановое расположение пунктов наблюдений оказывается весьма причудливым. Для примера на рис. 66 представлен фрагмент схемы расположения точек гравиметрической съемки масштаба 1:200000, где видно, что производственные организации вели съемку по-разному, при этом часть территории осталась неизученной в данном масштабе, образовав в сети пропуски или лакуны (от латинского слова *lacuna* - углубление, впадина). Чтобы построить карты и выполнить трансформации, результаты подобных съемок редуцируют с помощью разнообразных программных средств на регулярную сеть, а это - сама по себе весьма

некорректная операция, даже если не принимать во внимание на то, что при этом обычно никак не учитывается и разновысотность пунктов.

Программные продукты, предназначенные для приведения данных к регулярным сетям, включают множество различных способов, большинство из которых имеет модификации. Например, восьмая версия популярного уже в течение 20 лет пакета «Surfer» компании «Golden Software» предлагает пользователю на выбор 12 основных способов редуцирования в регулярную сеть, не скрывая, что каждый из них обладает своими специфическими

недостатками. Некоторые из них даже получили собственные имена, в частности, фигурирующие в фирменной документации к пакету ложные аномалии типа «бычий глаз». В шестой версии пакета «Oasis Montaj» компании «Geosoft» пользователю предоставляется выбор из 6 основных методов. Очевидно, каждый из алгоритмов продуцирует свою сеть значений, причем получаемые результаты довольно заметно различаются даже в рамках одной модификации при изменении параметров.

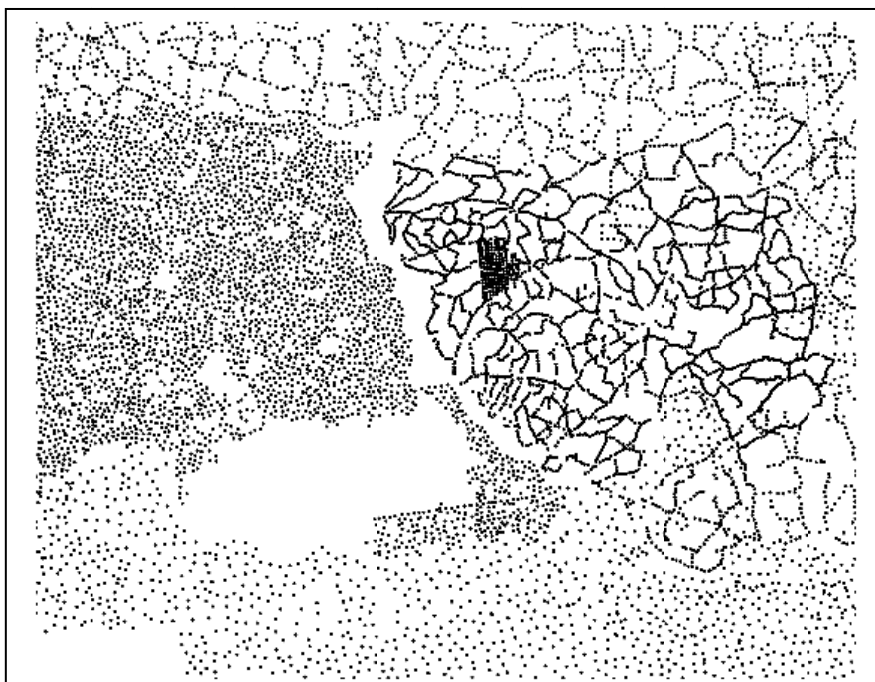


Рис. 66. Фрагмент схемы расположения точек гравиметрической съемки масштаба 1:200 000

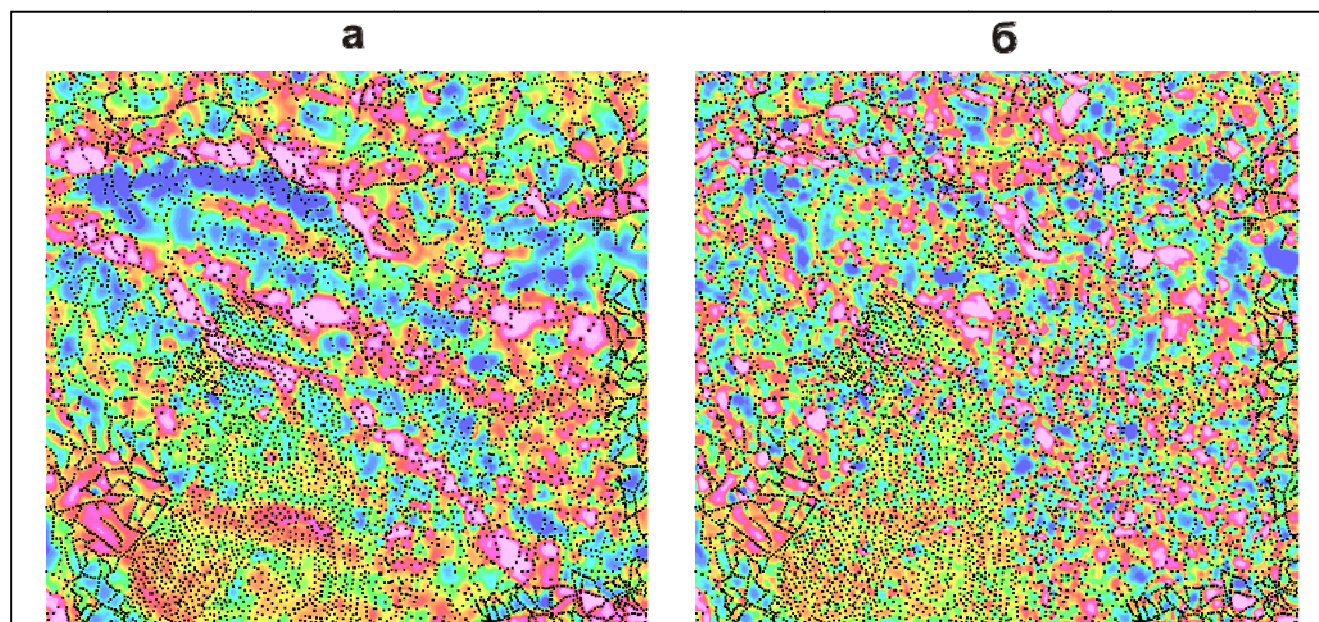


Рис. 67. Карты разностей значений гравитационного поля, полученных при интерполяции разными методами в одни и те же точки квадратной сети (исходная сеть наблюдений – нерегулярная, пункты съемки отмечены точками): а) между значениями, полученными методами «минимальной кривизны» и «обратных расстояний»; б) между значениями, полученными методами «минимальной кривизны» и «крайгинга»

Среди наиболее популярных методов интерполяции, применяемых при построении карт, следует отметить «метод минимальной кривизны», «метод обратных расстояний» и «метод Криге» (по имени южноафриканского горного инженера Даниэля Криге - Daniel Gerhardus Krige), который в России называют также «крайгингом» или «кригингом». На рис. 67 показаны различия в результатах редуцирования на регулярную квадратную сеть, полученных этими тремя методами. В качестве исходных данных здесь использовались материалы Государственной гравиметрической съемки масштаба 1:200 000, выполненной по нерегулярной сети. Рисунки демонстрируют, что полученные разности вовсе не являются «белым шумом». Наоборот, они вполне регулярны, четко коррелируются и в принципе схожи с аномалиями от реальных геологических структур, однако, понятно, ни с какими реальными объектами не связаны.

На рис. 68 аналогичные различия демонстрируются для данных аэромагнитной съемки, которая выполнялась по маршрутам, то есть по квазирегулярной сети. Тем не менее, здесь разности между интерполированными значениями, полученными методами «минимальной кривизны» и «крайгинга», также являются вполне регулярными и допускающими «псевдогеологическое истолкование». Необходимо отметить, что погрешность интерполяции здесь фактически в несколько раз превышает среднеквадратическую погрешность самой съемки. Другими словами, переход от исходных данных к интерполированным неминуемо ведет к тому, что усилия съемщиков в значительной степени оказываются потраченными напрасно.

Таким образом, пренебрежение неровностями рельефа и нерегулярностью съемочных сетей может приводить к существенным ошибкам в истолковании разделенных полей, поэтому интерпретатору требуются такие способы разделения, которые учитывают отмеченные факторы. К тому же, если съемочная сеть не только нерегулярная, но и редкая, и содержит, как на рис. 66, лакуны, интерпретация даже по исходным данным в конкретных пунктах наблюдения может содержать специфические погрешности. В этом случае при работе с неподходящими алгоритмами в интерпретационной модели может начать проявляться структура сети наблюдения, никак не связанная с геологией изучаемого участка. На это также необходимо обращать серьезное внимание и применять методики, устойчиво действующие даже на редких съемочных сетях. Здесь также существует много разнообразных подходов, и большинство из них базируется на аппроксимации наблюденного поля полем некоторых формальных источников, таких как точечные и линейные массы, диполи, пластинки и т.п.

Одной из самых мощных и универсальных можно назвать методику, разработанную под руководством А. В. Цирульского, в соответствии с которой интерпретацию проводят в два этапа. На первом этапе наблюденное поле аппроксимируется полем нескольких формальных источников (в двумерном случае обычно используют пластинки, а в трехмерном - стержни), что сводится к решению нелинейной задачи подбора их геометрических параметров и физических свойств. Чтобы получить соответствующее квазирешение, вначале проводят

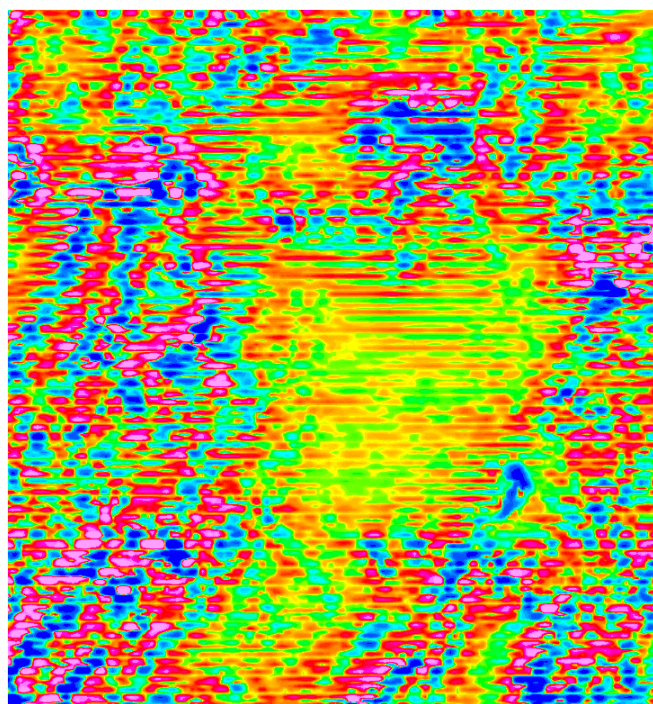


Рис. 68. Карта разностей значений магнитного поля, полученных при интерполяции методами «минимальной кривизны» и «крайгинга» в одни и те же точки квадратной сети

подбор наблюдаемого поля полем одного источника. Если точность подбора недостаточна, его повторяют с двумя источниками и т.д. На втором этапе осуществляется интерпретация полученных результатов. При этом одни из формальных источников считаются создающими региональный фон, а другие - локальные аномалии. Поскольку параметры эквивалентных источников определены, можно непосредственно вычислить значения фона и локальных аномалий в точках наблюдения, решая прямую задачу для этих источников. Не составляет проблемы и вычисление поля источников на некоторой горизонтальной плоскости, расположенной над ними, тем самым осуществляется редуцирование наблюдаемого поля на плоскость.

Данный подход наиболее эффективен, когда задача разделения полей решается совместно с задачей их детального количественного описания. Геологическое истолкование результатов подбора основано на возможности построения эквивалентных семейств замкнутых тел или контактных поверхностей, создающих такое же поле, как одна или несколько пластинок. С помощью этой процедуры интерпретатор может достаточно быстро построить множество геологически содержательных моделей, создающих точно такое же поле, как и подобранные формальные источники. Априорная информация позволяет выбрать из этого множества удовлетворяющую ей модель, что и решает задачу интерпретации. Практический пример данного подхода будет рассмотрен в § 45.

В описанном подходе аппроксимация поля сводится к решению достаточно трудоемкой нелинейной задачи подбора. Вместе с тем, аппроксимацию можно осуществлять и на основе решения линейной задачи подбора. Для этого достаточно задать геометрические параметры формальных источников, то есть фиксировать их положение в пространстве, и определять лишь физические свойства источников так, чтобы сумма их полей оказалась практически совпадающей с наблюдаемым полем. Подобранные на дневной поверхности поле, очевидно, как сумма гармонических функций само является гармонической функцией во всем верхнем полупространстве. Следовательно, всюду выше поверхности наблюдений любой элемент данного поля может быть вычислен путем решения соответствующей прямой задачи для набора аппроксимирующих формальных источников. Эта идея легла в основу многих способов разделения потенциальных полей.

Наиболее распространена аппроксимация наблюдаемой аномалии полем простого или двойного слоя, расположенного на некоторой глубине под дневной поверхностью. В некоторых случаях эффективнее оказывается аппроксимация несколькими слоями на разных глубинах. Для практических вычислений в гравиразведке простой слой часто заменяется набором точечных масс (в двумерном случае - линейных масс), а в магниторазведке вместо двойного слоя используется набор диполей (в двумерном случае - линейных диполей). Определение массы или магнитного момента каждого из формальных источников может осуществляться разными способами, но в результате все они сводятся к решению системы линейных алгебраических уравнений.

Самым простым, но достаточно эффективным является способ определения физических параметров формальных источников, предложенный В. И. Ароновым и сводящийся к применению метода последовательных приближений. В соответствии с ним n -мерный вектор искомых параметров $\mathbf{p}$ определяется путем решения следующей системы:

$$\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{u}, \quad (31.1)$$

где $\mathbf{u}$ - m -мерный вектор исходного поля, а матрица $\mathbf{A}$ составлена из полей каждого формального источника в каждой точке наблюдения. Для решения системы (31.1) применяется следующая итерационная схема:

$$\mathbf{p}^{(k+1)} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{p}^{(k)} + \mathbf{u}, \quad (31.2)$$

где

$$\mathbf{p}^{(k+1)} = \mathbf{p}^{(k)} + \delta^{(k)}, \quad (31.3)$$

$$\delta^{(k)} = \mathbf{u} - \mathbf{A}\mathbf{p}^{(k)}, \quad (31.4)$$

а E - единичная матрица. Многолетний опыт расчетов по этой схеме показал, что итерационный процесс сходится достаточно быстро.

На рис. 69 показан взятый из книги В. И. Аронова пример применения данного способа для пересчета аномалии силы тяжести, измеренной на неровном рельефе, в аномалию ее вертикального градиента на выбранной плоскости относимости. Исходная аномалия была обнаружена в Закавказье над неглубоко залегающим рудным телом. Для его локализации требовался вертикальный градиент, но попытка его расчета с помощью стандартной трансформации оказалась неудачной из-за разновысотности пунктов наблюдений и привела к результатам, изображенным на рис. 69. Аппроксимационный способ оказался значительно более эффективным. Полученная с его помощью аномалия вертикального градиента не содержит интенсивных помех и допускает дальнейшее детальное количественное описание.

Определение физических параметров формальных источников методом квазирешений может оказаться неустойчивым из-за большой размерности получающейся системы и сильной корреляции между параметрами. Если приведенный итерационный алгоритм не устраивает интерпретатора, приходится прибегать к методу регуляризации, причем в качестве стабилизатора оказывается достаточно взять квадрат евклидовой нормы искомого вектора p . Это приводит к следующей безусловно-экстремальной задаче:

$$\|Ap - u_\delta\|_{R^m}^2 + \alpha \|p\|_{R^n}^2 = \min. \quad (31.5)$$

Фактически минимизация сводится к многократному решению системы линейных алгебраических уравнений и выбору оптимального из них по критерию невязки или по критерию Тихонова-Гласко.



Построение эквивалентного простого или двойного слоя может осуществляться не только на горизонтальной поверхности, но и на замкнутых телах: таких как многогранники в трехмерном случае и многоугольные цилиндры - в двумерном. Эта идея, восходящая к работам А. Пуанкаре по выметанию масс, лежит в основе методики разделения гравитационных и магнитных аномалий, разработанной под руководством А. А. Непомнящих.

Как известно, поле точечной массы совпадает с полем однородного простого слоя сферической формы, причем центр этой сферы находится в точке расположения массы. Очевидно, таких теоретически эквивалентных слоев можно построить бесконечно много. Данный факт можно трактовать следующим образом: эквивалентный простой слой можно рассматривать как результат выметания точечной массы на сферу с сохранением ее внешнего поля. Подобное выметание точечной массы можно осуществлять на любую охватывающую ее замкнутую поверхность. Следовательно, массу любого конечного гравитирующего объекта можно вынести на произвольную полностью охватывающую его замкнутую поверхность, причем поле вне этой поверхности останется неизменным. В двумерном случае определение плотности эквивалентного простого слоя поверхностных масс $\sigma_{\text{пов}}$ в каждой его точке по наблюдаемому гравитационному полю сводится к решению следующего интегрального уравнения:

$$g(x_j, z_j) = -2f \oint_L \sigma_{\text{пов}}(x_i, z_i) \frac{z_j - z_i}{(x_j - x_i)^2 + (z_j - z_i)^2} dl. \quad (31.6)$$

Зная плотность эквивалентного простого слоя, можно вычислять любые производные гравитационного поля во внешнем по отношению к нему пространстве. Тем самым решается задача изучения пространственного распределения поля вокруг изучаемого единичного объекта.

Если наблюдаемое поле представляет собой сумму аномалий от нескольких изолированных объектов, данный подход позволяет провести разделение и получить пространственное распределение поля вокруг них. Для этого вначале каждый из объектов на базе априорной информации о них должен быть охвачен своим контуром (в трехмерном случае - поверхностью). Далее задаваемые контуры разбивают на малые отрезки, в пределах каждого из которых плотность $\sigma_{\text{пов}}$ считают постоянной. Тем самым построение простых слоев сводится к решению линейной задачи подбора. Использование метода регуляризации позволяет найти устойчивое решение данной задачи, для чего применяют стабилизатор, минимизирующий отклонение $\sigma_{\text{пов}}$ каждого из отрезков от среднего в каждом из заданных контуров. В процессе решения определяется и постоянный региональный фон, что не выводит исходной задачи из линейных. Фактически проводится многократное решение системы линейных алгебраических уравнений и отбор оптимального из них по критерию невязки или по критерию Тихонова-Гласко.

А. А. Непомнящих доказал, что, если контуры выметания действительно охватывают каждый из объектов, описанный процесс однозначно разделяет поля от них. Для проверки правильности задания контуров рекомендуется повторить разделение с немного измененными контурами. Если они не отсекают части соседних тел, разделенные поля практически не изменятся. Изменение компонент может свидетельствовать о неверном исходном задании и о необходимости корректировки контуров. Аналогичная методика разделения может применяться и для магнитных аномалий, только при этом строят не простые, а двойные слои.

Как было отмечено выше, если съемочная сеть редкая, и содержит лакуны, истокообразное разделение даже по исходным данным в конкретных пунктах наблюдения может содержать специфические погрешности. В этом случае при работе с неподходящими алгоритмами в интерпретационной модели может начать проявляться структура сети наблюдения, никак не связанная с геологией изучаемого участка. На это также необходимо обращать серьезное внимание и применять регуляризованные методики, устойчиво

действующие даже на редких съемочных сетях. Как правило, применение аппроксимационных методов сопровождается вычислением поля подобранных источников на некотором горизонтальном уровне, например, проходящем через самую высокую отметку дневного рельефа, другими словами, редуцированием наблюденного поля на горизонтальную плоскость. Если не применять при аппроксимации регуляризованные методики, поле в точках наблюдения может аппроксимироваться с высокой точностью, но это не дает гарантии адекватности редуцированного поля.

Вопросы для самоконтроля

1. Можно ли с высокой устойчивостью количественно интерпретировать локальные гравитационные аномалии, выделенные аппроксимационными методами?
 - а) можно, если региональный фон был аппроксимирован путем полиномиальной интерполяции (24);
 - б) можно, если региональный фон был аппроксимирован путем тренд-анализа (27);
 - в) можно, если региональный фон был аппроксимирован истокообразной функцией (30).
2. Можно ли считать, что введение поправки за рельеф при гравиметрической съемке дает возможность при интерпретации не учитывать различия высот пунктов наблюдений?
 - а) нельзя (36);
 - б) можно для мелкомасштабных съемок (62);
 - в) можно всегда (88).
3. Является ли карта изодинам ΔT , получаемая путем формальной интерполяции без учета различий высот пунктов наблюдений, адекватным отражением изучаемого поля, допускающим после оцифровки его устойчивую количественную интерпретацию?
 - а) не является (39);
 - б) является для мелкомасштабных съемок (48);
 - в) является всегда (57).
4. Означает ли высокоточная аппроксимация исходного поля в точках наблюдения то, что поле аппроксимирующей конструкции, вычисленное между пунктами наблюдения, также воспроизводит там реальное поле с высокой точностью?
 - а) не означает (71);
 - б) означает в равнинных областях при малых изменениях высот пунктов наблюдений (72);
 - в) означает всегда (73).

Контрольная сумма при правильных ответах = 176.

ГЛАВА 9. МЕТОДЫ МОМЕНТОВ

§ 32. Гармонические моменты и интегральные характеристики геологических объектов

Обратные задачи, вообще говоря, не имеют единственного решения. Одно и то же аномальное поле могут вызывать совершенно различные геологические объекты. Это значительно затрудняет истолкование полей и требует наличия обширной априорной информации. Вместе с тем, существуют две системы параметров, определяемые по полю единственным образом и без априорной информации: это гармонические моменты объектов и особые точки функций, описывающих аномальные поля. Существование данных систем, разумеется, никак не противоречит установленным фактам отсутствия единственности решения обратных задач. По этим параметрам в общем случае невозможно построить единственное решение, но можно значительно сократить область неопределенности, как бы создать каркас искомого решения. В данной главе мы рассмотрим возможности методов интерпретации, базирующихся на определении гармонических моментов.

Гармоническим моментом гравитирующего объекта V называется интеграл вида

$$m_{n,k} = \int_V \sigma(\xi, \eta, \zeta) H_{n,k}(\xi, \eta, \zeta) dV, \quad k = 1, 2, \dots, 2n + 1, \quad (32.1)$$

где σ - плотность, а $H_{n,k}(\xi, \eta, \zeta)$ - гармонический, то есть удовлетворяющий уравнению Лапласа, полином n -ой степени. Аналогичное выражение можно записать и для намагниченных объектов. Гармонические моменты взаимно однозначно связаны с коэффициентами разложения поля в ряд по сферическим функциям. В двумерном случае они связаны с коэффициентами разложения поля в ряд Лорана.

Воспользуемся представлением комплексной напряженности гравитационного поля в виде интеграла по площади поперечного сечения двумерного объекта, полученным в § 6:

$$G(u) = 2i\gamma \int_S \frac{\sigma(w) dS}{w - u}. \quad (32.1)$$

Для намагниченных объектов там же получено следующее представление комплексной индукции магнитного поля:

$$T(u) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int_S \frac{I(w) dS}{(w - u)^2}, \quad (32.2)$$

Разложим знаменатель в интеграле (32.1) в ряд, для чего воспользуемся известной формулой для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}. \quad (32.3)$$

Этот ряд абсолютно и равномерно сходится при условии $|q| < 1$. С учетом (32.3) получим:

$$\frac{1}{w - u} = - \frac{1}{u \left(1 - \frac{w}{u}\right)} = - \frac{1}{u} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w}{u}\right)^n = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{u^{n+1}}. \quad (32.4)$$

Данный ряд сходится при $|w| < |u|$. Подставив при этом условие (32.4) в (32.1), проинтегрировав ряд почленно и вынеся u за знак интеграла, получим следующее разложение:

$$G(u) = -2i\gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n(0)}{u^{n+1}}, \quad (32.5)$$

где

$$m_n(0) = \int_S \sigma(w) w^n dS - \quad (32.6)$$

- комплексный гармонический момент гравитирующих масс n -го порядка относительно начала координат. Условие сходимости этого ряда $|w| < |u|$ имеет следующий смысл: геометрическое место точек сходимости ряда - внешность окружности с центром в начале координат, охватывающей весь объект S , то есть ряд (32.5) является рядом Лорана.

Разложение в ряд Лорана комплексной индукции магнитного поля можно провести аналогично, но проще применить следующий прием. Поскольку при условии $|w| < |u|$ ряд (32.4) абсолютно и равномерно сходится, его можно почленно продифференцировать, в результате чего получится:

$$\frac{1}{(w-u)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)w^n}{u^{n+2}}. \quad (32.7)$$

Подставив (32.7) в (32.2), проинтегрировав ряд почленно и вынеся u за знак интеграла, получим следующее разложение:

$$T(u) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)M_n(0)}{u^{n+2}}, \quad (32.8)$$

где

$$M_n(0) = \int_S I(w) w^n dS - \quad (32.9)$$

- комплексный гармонический момент намагниченных масс n -го порядка относительно начала координат. Область сходимости ряда (32.8), очевидно, совпадает с областью сходимости ряда (32.5) - она часто называется окрестностью бесконечно удаленной точки.

В полученных рядах центр разложения совпадает с началом координат. В общем случае, когда центр разложения помещен в точку u_0 , ряды Лорана и формулы, описывающие гармонические моменты, преобразуются путем переноса начала координат. В результате для гравитационного поля в общем случае получим

$$G(u) = -2i\gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n(u_0)}{(u-u_0)^{n+1}}, \quad (32.10)$$

где

$$m_n(u_0) = \int_S \sigma(w)(w-u_0)^n dS - \quad (32.11)$$

- комплексный гармонический момент гравитирующих масс n -го порядка относительно точки u_0 . Для магнитного поля

$$T(u) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)M_n(u_0)}{(u-u_0)^{n+2}}, \quad (32.12)$$

где

$$M_n(u_0) = \int_S I(w)(w - u_0)^n dS - \quad (32.13)$$

- комплексный гармонический момент намагниченных масс n -го порядка относительно точки u_0 . Ряды Лорана (32.10) и (32.12), очевидно, сходятся во внешности окружности с центром в точке u_0 , охватывающей все источники.

Полученные разложения аномальных полей приводят к следующим основным выводам.

1. Аномальные поля и системы комплексных гармонических моментов связаны взаимно однозначным соответствием. С одной стороны, по аномальному полю могут быть без какой-либо априорной информации **единственным образом** определены все гармонические моменты. С другой стороны, зная все комплексные гармонические моменты, можно однозначно вычислить аномальное поле во внешности окружности, где сходится ряд. Из этого следует, что если внешние поля двух различных источников совпадают, то совпадают и все их комплексные гармонические моменты и наоборот.

2. Устойчивость определения гармонических моментов по полю - различна. Наибольший вклад в аномальное поле вносят нулевые моменты, следовательно, они определяются по полю наиболее устойчиво. С ростом номера n модуль знаменателя в (32.10) и (32.12) резко возрастает, и устойчивость определения гармонических моментов по полю уменьшается.

В процессе интерпретации часто приходится переопределять гармонические моменты, найденные относительно одной точки, к другой точке. Для этого применяется формула пересчета моментов. Поскольку соотношения (32.11) и (32.13), характеризующие моменты, однотипны, формула пересчета моментов едина для обоих полей. Выведем ее для гравитирующих масс, то есть определим комплексный гармонический момент $m_n(u_1)$ через известные моменты относительно точки u_0 . Из (32.11) следует, что

$$m_n(u_1) = \int_S \sigma(w)(w - u_1)^n dS = \int_S \sigma(w)[(w - u_0) + (u_0 - u_1)]^n dS. \quad (32.14)$$

Преобразуем выражение в квадратных скобках по формуле бинома Ньютона:

$$m_n(u_1) = \int_S \sigma(w) \sum_{i=0}^n C_n^i (u_0 - u_1)^{n-i} (w - u_0)^i dS, \quad (32.15)$$

где

$$C_n^i = \frac{n!}{i! (n-i)!} - \quad (32.16)$$

- биномиальные коэффициенты. После почленного интегрирования и выноса за пределы интеграла сомножителей, не зависящих от w , получим

$$m_n(u_1) = \sum_{i=0}^n C_n^i (u_0 - u_1)^{n-i} \int_S \sigma(w)(w - u_0)^i dS, \quad (32.17)$$

в итоге формула пересчета моментов примет следующий вид:

$$m_n(u_1) = \sum_{i=0}^n C_n^i (u_0 - u_1)^{n-i} m_i(u_0). \quad (32.18)$$

Таким образом, для того чтобы вычислить $m_n(u_1)$, надо знать не только $m_n(u_0)$, но и все моменты меньших порядков относительно точки u_0 . Нулевые моменты, как следует из (32.11) и (32.13), одинаковы относительно любых точек, поэтому их обычно записывают просто как m_0

и M_0 , опуская указание комплексной координаты центра разложения, относительно которого они определены.

При интерпретации гравитационных и магнитных аномалий чаще используются не сами комплексные гармонические моменты, а их комбинации, называемые интегральными характеристиками объектов. Рассмотрим физический смысл наиболее устойчиво определяемых интегральных характеристик, связанных с начальными гармоническими моментами. При этом для простоты будем считать, что плотность и намагниченность объектов однородны.

Для двумерных гравитирующих объектов при $\mathbf{n}=\mathbf{0}$ из (32.11) следует

$$m_0 = \sigma \int_S dS = \sigma S, \quad (32.19)$$

где S - площадь поперечного сечения объекта. Это произведение характеризует избыточную массу единицы длины (линейную избыточную массу) двумерного объекта. Если избыточная плотность объекта - нулевая, то есть его плотность не отличается от плотности вмещающей среды, то нулевой момент равен нулю, так же как и гравитационная аномалия. Для двумерных намагниченных объектов соответственно из (32.13) вытекает

$$M_0 = IS. \quad (32.20)$$

Нулевой гармонический момент намагниченного объекта оказывается равным избыточному магнитному моменту единицы его длины (линейному магнитному моменту).

В трехмерном случае имеют место аналогичные соотношения:

$$m_0 = \sigma V, \quad (32.21)$$

$$M_0 = IV, \quad (32.22)$$

где V - объем объектов. Таким образом, в трехмерном случае нулевые моменты оказываются равными соответственно избыточной массе и избыточному магнитному моменту объектов. Знание этих интегральных характеристик чрезвычайно важно при оценке запасов месторождений по создаваемым ими гравитационным и магнитным аномалиям. Напомним, кстати, что нулевой момент наиболее устойчиво определяется по аномальному полю.

Рассмотрим интегральную характеристику, представляющую собой отношение первого комплексного гармонического момента к нулевому. При $\mathbf{n}=\mathbf{1}$ из (32.11) для двумерных однородных гравитирующих объектов следует:

$$\frac{m_1(0)}{m_0} = \frac{\int_S w dS}{S} = \frac{\int_S \xi dS}{S} + i \frac{\int_S \zeta dS}{S} = x_c + iz_c = u_c. \quad (32.23)$$

Действительная и мнимая части этой комплексной интегральной характеристики соответственно представляют собой по определению горизонтальную X_c и вертикальную Z_c координаты центра масс объекта. Очевидно, то же соотношение справедливо и для намагниченных объектов. Таким образом, отношение первого комплексного гармонического момента к нулевому является комплексной координатой центра масс объекта u_c , однозначно определяемой по полю без привлечения априорной информации.

Для бесконечных объектов типа контактной поверхности формула (32.23) - не справедлива. В этом легко убедиться из примера теоретической эквивалентности аномальных полей контактной поверхности в форме конхоиды Слюза и линейной массы, проходящей через центр ее производящей окружности. Формула (32.23), очевидно, характеризует именно центр производящей окружности, расположенный значительно глубже самой поверхности. Это связано с тем, что для бесконечных объектов ряды Лорана (32.10) и (32.12) непосредственно не применимы, поскольку окружность, охватывающая массы, вне которой ряды сходятся, должна иметь бесконечный радиус. Тем не менее, разложения в ряды Лорана оказываются весьма

полезными при анализе полей контактных поверхностей. С этими применениями рядов можно познакомиться в книге А.В.Цирульского.

Второй комплексный гармонический момент, определенный относительно центра гравитирующих масс, приводит к интегральным характеристикам, вводимым формулами:

$$v = \sqrt{\left| \frac{m_2(u_c)}{m_0} \right|}, \quad (32.24)$$

$$\theta = \frac{1}{2} \arg \frac{m_2(u_c)}{m_0}. \quad (32.25)$$

Аналогичные формулы справедливы и для намагниченных масс. Для однородных объектов (при их постоянной избыточной плотности или намагниченности) интегральная характеристика θ представляет собой угол между осью Ox и длинной осью объекта, отсчитываемый против часовой стрелки. Тем самым θ характеризует направление и угол падения объекта. Интегральная характеристика v является мерой относительной вытянутости объекта вдоль длинной оси, причем для изометричного объекта она равна нулю. В частности, для прямоугольника со сторонами L и l ($L > l$)

$$v = \sqrt{\frac{L^2 - l^2}{12}}, \quad (32.26)$$

для эллипса с полуосями a и b ($a > b$)

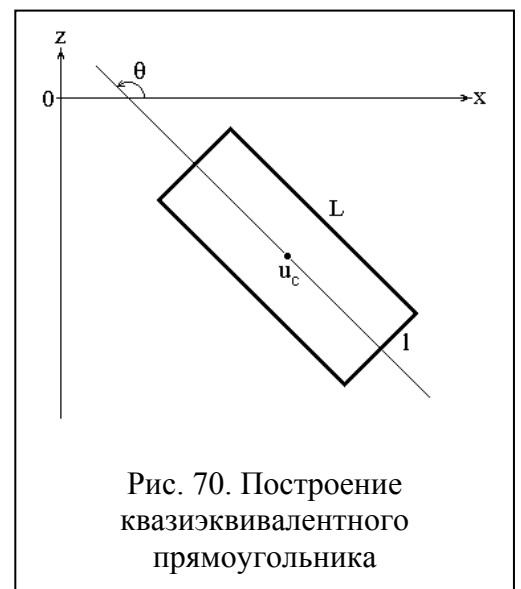
$$v = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2}. \quad (32.27)$$

Третий комплексный гармонический момент характеризует степень отличия формы поперечного сечения двумерного объекта от тела с двумя осями симметрии, параллельными осям координат и т.д. Выше было отмечено, что устойчивость определения моментов по аномальному полю резко уменьшается с ростом их номера. Фактически даже третий момент по полю пока не определяют с достаточной точностью, поэтому на практике обычно ограничиваются нулевым и первым, реже вторым моментами.

Физический смысл первых гармонических моментов был рассмотрен нами преимущественно для однородных объектов. Если плотность либо намагниченность – не однородны, то второй, третий и последующие моменты приобретают более сложный характер, зависящий как от формы тела, так и от распределения физических свойств в нем.

Наиболее удобной формой представления результатов определения гармонических моментов является квазиэквивалент. Квазиэквивалентом n -го порядка называют тело простой формы, у которого моменты с нулевого по n -ый совпадают с соответствующими моментами изучаемого объекта. В качестве квазиэквивалента первого порядка обычно используют круг или квадрат, в качестве квазиэквивалента второго порядка – эллипс или прямоугольник. Рассмотрим в качестве примера построение квазиэквивалентного прямоугольника по интегральным характеристикам гравитирующего объекта (рис. 70). Для намагниченных объектов эти построения практически аналогичны.

Вначале по формуле (32.23) найдем положение центра масс квазиэквивалента u_c , затем, зная интегральную характеристику θ , определим направление



и угол его падения. Для окончательного построения остается определить лишь его стороны L и l , однако сделать это единственным образом без априорной информации об избыточной плотности невозможно. Действительно, для определения сторон прямоугольника мы располагаем двумя интегральными характеристиками: m_0 и v , которые дают систему уравнений, следующую из (32.19) и (32.26):

$$\sigma l L = m_0, \quad L^2 - l^2 = 12 v^2. \quad (32.28)$$

Без знания избыточной плотности, очевидно, можно построить лишь бесконечное семейство квазиэквивалентных прямоугольников, вытянутых вдоль найденного направления. Тем самым мы убеждаемся, что существование системы гармонических моментов, однозначно определяемых по аномальному полю, никак не противоречит отсутствию единственности решения обратных задач. Еще раз подчеркнем, что по этим параметрам в общем случае невозможно построить единственное решение, но можно значительно сократить область неопределенности и создать каркас искомого решения. Когда избыточная плотность известна, стороны прямоугольника определяются по следующим формулам, являющимся решениями системы (32.28):

$$L = \sqrt{\sqrt{36v^4 + \frac{m_0^2}{\sigma^2}} + 6v^2},$$

$$l = \sqrt{\sqrt{36v^4 + \frac{m_0^2}{\sigma^2}} - 6v^2}. \quad (32.29)$$

Если избыточная плотность мала, квазиэквивалентный прямоугольник стремится к квадрату с большой площадью, так что может даже выступать над дневной поверхностью. Если она велика, прямоугольник вырождается в тонкую пластинку. В процессе количественной интерпретации квазиэквиваленты часто употребляются в качестве начального приближения для последующей оптимизации методами подбора.

§ 33. Способы определения гармонических моментов

Методы количественной интерпретации, базирующиеся на использовании гармонических моментов, называют методами моментов. К настоящему времени предложено довольно много способов определения гармонических моментов по наблюдаемому аномальному полю. Их можно разделить на следующие три группы:

- 1) интегральные способы,
- 2) спектральные способы,
- 3) аппроксимационные способы.

Интегральные способы интерпретации гравитационных и магнитных аномалий впервые были предложены Ф. А. Слудским еще в XIX веке, но, не найдя в то время применения, оказались забытыми и переоткрыты в 30-х годах XX века Г. А. Гамбурцевым, А. П. Казанским и А. А. Заморевым. Их суть состоит в вычислении несобственных интегралов от произведения аномального поля и его трансформант на гармонические полиномы. Известны многие десятки интегральных соотношений, например, для хз-двумерной задачи гравиразведки получены следующие формулы:

$$m_0 = \frac{1}{2\pi\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta g(x) dx, \quad (33.1)$$

$$\text{Re } m_1(0) = x_c m_0 = \frac{1}{2\pi\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} x \Delta g(x) dx, \quad (33.2)$$

$$\text{Im } m_1(0) = z_c m_0 = \frac{1}{2\pi\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} [x^2 W_{zz}(x) - x g_x(x)] dx. \quad (33.3)$$

Для **xz**-двумерной задачи магниторазведки применительно к системе единиц СИ, в частности, имеют место такие соотношения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} Z(x) dx = 0, \quad (33.4)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(x) dx = 0, \quad (33.5)$$

$$\text{Re } M_0 = I_x S = -\frac{2}{\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} x Z(x) dx, \quad (33.6)$$

$$\text{Im } M_0 = I_z S = -\frac{2}{\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} x X(x) dx. \quad (33.7)$$

Формулы (33.4) и (33.5), хотя и не связаны с интегральными характеристиками, имеют большое практическое значение, так как при изучении замкнутых тел могут быть применены для выбора уровня нормального поля. Численное интегрирование подобных соотношений, то есть определение площади между графиками этих функций и осью абсцисс, может проводиться самыми разнообразными способами, наиболее часто для этого применяется достаточно простой способ трапеций.

Интегральные способы определения гармонических моментов устойчивы к высокочастотным помехам, но не устойчивы к низкочастотным помехам и фоновым. Рассмотрим соотношение (33.1) и предположим, что уровень фона гравитационной аномалии определен с небольшой ошибкой ϵ , то есть вместо Δg в эту формулу подставляется $\Delta g + \epsilon$. Тогда интеграл в (33.1) станет расходящимся. Поскольку наблюдаемое поле измерено на конечном интервале, результаты численного интегрирования, естественно, дадут конечное значение момента, но оно может быть весьма далеким от истинного. Ограниченность участка съемки и наличие сложного рельефа местности, где эта съемка проводится, также требуют учета. Преодоление отмеченных недостатков интегральных способов достигается за счет предварительного редуцирования наблюдений с неровного рельефа на горизонтальную плоскость и введения специальных поправок.

Рассмотрим один из способов введения поправки за конечность профиля наблюдений для двумерных тел, предложенный Е.Г.Булахом. Если аномалия ускорения силы тяжести - квазисимметрична, то за пределами профиля она может быть аппроксимирована полем линейной массы, расположенной под экстремумом аномалии. Поместим начало координат в эпицентр аномалии и будем считать, что профиль расположен симметрично относительно этой точки в пределах от $-a$ до $+a$. Линейная масса выбирается так, чтобы ее гравитационная аномалия совпала с наблюдаемой в двух точках: в экстремуме и на правом краю профиля в точке $+a$ (или в точке $-a$ при вычислении поправки для левого края). Поле аппроксимирующей линейной массы можно представить в следующем виде:

$$\Delta g(x) = \frac{\Delta g_{\max} h^2}{x^2 + h^2}, \quad (33.8)$$

где h - глубина ее залегания. Так как поле в точке $+a$ известно и равно $\Delta g(a)$, можно найти глубину аппроксимирующей массы и подставить ее в (33.8). В результате получим

$$\Delta g(x) = \frac{a^2 \beta \Delta g_{\max}}{x^2 (1 - \beta) + a^2 \beta}, \quad (33.9)$$

где

$$\beta = \frac{\Delta g(a)}{\Delta g_{\max}}. \quad (33.10)$$

Вычислим интегралы от (33.9) в бесконечных и конечных пределах:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta g(x) dx = 2 \int_0^{\infty} \Delta g(x) dx = \pi a \Delta g_{\max} \sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}}, \quad (33.11)$$

$$\int_{-a}^{+a} \Delta g(x) dx = 2 \int_0^a \Delta g(x) dx = \pi a \Delta g_{\max} \sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-\beta}{\beta}}. \quad (33.12)$$

Отсюда следует, что поправка за правый край при расчете нулевого момента интегральным способом (33.1) должна определяться по формуле

$$\int_{+a}^{+\infty} \Delta g(x) dx = a \Delta g_{\max} \sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-\beta}{\beta}} \right). \quad (33.13)$$

Аналогично находится и поправка для левого края, при этом параметр β определяется по значению поля на левом краю профиля в точке $-a$. В итоге интеграл в бесконечных пределах будет являться суммой двух поправок и интеграла в пределах профиля:

$$Q(a) = \int_{-a}^{+a} \Delta g(x) dx, \quad (33.14)$$

вычисляемого любым численным методом, например, методом трапеций. При этом можно показать, что, зная m_0 и $Q(a)$, легко рассчитать глубину центра масс гравитирующего объекта по формуле

$$z_c = a \cdot \operatorname{ctg} \frac{Q(a)}{4\gamma m_0}. \quad (33.15)$$

На практике для повышения точности расчетов целесообразно проводить эти вычисления при нескольких значениях a и усреднять полученные результаты.

Для учета постоянного регионального фона Е. Г. Булахом также предложен достаточно простой способ, применимый к квазисимметричным аномалиям. В этом способе определение нулевого момента и глубины центра масс проводится по разностям максимального значения гравитационной аномалии и значений в текущих точках. Очевидно, при вычислении разностей постоянный фон подавляется.

Закрепим начало координат в экстремуме аномалии. Тогда для произвольной точки a справедливо следующее соотношение:

$$\Delta g_{\max} - \Delta g(a) = \frac{2\gamma a^2 m_0}{z_c(z_c^2 + a^2)}. \quad (33.16)$$

Для другой точки b аналогично

$$\Delta g_{\max} - \Delta g(b) = \frac{2\gamma b^2 m_0}{z_c(z_c^2 + b^2)}. \quad (33.17)$$

Решая совместно (33.16) и (33.17), получим

$$z_c = \sqrt{\frac{b^2 - pa^2}{p-1}}, \quad (33.18)$$

где

$$p = \frac{b^2 [\Delta g_{\max} - \Delta g(a)]}{a^2 [\Delta g_{\max} - \Delta g(b)]}. \quad (33.19)$$

Нулевой момент m_0 определяется из (33.16) или (33.17) при подстановке Z_c , рассчитанного по формуле (33.18). Разумеется, такие вычисления целесообразно проводить по нескольким парам точек для повышения устойчивости к помехам в аномальном поле.

Спектральные способы базируются на соотношениях между спектрами гравитационных и магнитных аномалий и их моментами относительно начала координат. Как известно из § 27, спектр функции, измеренной на профиле, является комплексной функцией пространственной частоты ω , измеряемой в 1/км, и вычисляется по следующей формуле, представляющей собой прямое преобразование Фурье:

$$S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U(x) e^{-i\omega x} dx. \quad (33.20)$$

Преобразуем с помощью этой формулы интегральное соотношение, описывающее гравитационную аномалию g_z от произвольного двумерного объекта на дневной поверхности, то есть при $\mathbf{z}=\mathbf{0}$. Поскольку ось $\mathbf{Oz}$ здесь считается направленной вверх, это соотношение имеет следующий вид:

$$g_z(x) = 2\gamma \int_S \frac{\sigma(\xi, \zeta) \zeta dS}{(\xi - x)^2 + \zeta^2}. \quad (33.21)$$

Подставив (33.21) в (33.20) и поменяв порядок интегрирования, получим

$$S(\omega) = \frac{2\gamma}{\sqrt{2\pi}} \int_S \sigma(\xi, \zeta) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta e^{-i\omega x} dx}{(\xi - x)^2 + \zeta^2} \right] dS. \quad (33.22)$$

Так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta e^{-i\omega x} dx}{(\xi - x)^2 + \zeta^2} = \pi e^{-(|\omega|\zeta + i\omega\xi)}, \quad (33.23)$$

в результате придем к следующему выражению для спектра гравитационного поля произвольного $\mathbf{xz}$ -двумерного объекта:

$$S(\omega) = \gamma \sqrt{2\pi} \int_S \sigma(\xi, \zeta) e^{-(|\omega|\zeta + i\omega\xi)} dS. \quad (33.24)$$

При $\omega=0$

$$S(0) = \gamma \sqrt{2\pi} \int_S \sigma(\xi, \zeta) dS, \quad (33.25)$$

откуда с учетом (32.11) следует, что нулевой момент $\mathbf{xz}$ -двумерного гравитирующего объекта может быть определен по формуле:

$$m_0 = \frac{S(0)}{\gamma \sqrt{2\pi}}. \quad (33.26)$$

На практике значение $S(0)$ не рассчитывается, поэтому вычислительная формула для спектра наблюдаемой функции Δg ($\Delta g = -g_z$) принимает вид:

$$m_0 = -\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{S(\omega)}{\gamma \sqrt{2\pi}}. \quad (33.27)$$

Таким образом, для определения момента достаточно экстраполировать спектр до оси ординат. Общую формулу для моментов гравитирующих объектов относительно начала координат получил В.Н.Страхов:

$$m_n(0) = -\frac{i^n}{\gamma\sqrt{2\pi}} \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{d^n S(\omega)}{d\omega^n}. \quad (33.28)$$

Аналогичные формулы получены и для моментов намагниченных объектов. Моменты относительно других точек могут быть определены с помощью формулы пересчета (32.18). Поскольку экстраполяция спектра до оси ординат и дифференцирование являются неустойчивыми процедурами, даже моменты второго порядка таким путем практически не определяются.

Наиболее эффективными для определения гармонических моментов являются аппроксимационные способы. С их помощью можно определять моменты по полю, измеренному на ограниченных профилях, по неравномерной сети, на неровном рельефе, к тому же осложненному региональным фоном. Из полученных в предыдущем параграфе разложений аномальных полей в ряды Лорана следует, что если внешние поля двух различных источников совпадают, то совпадают и все их комплексные гармонические моменты и наоборот. Этот вывод дает возможность свести задачу определения моментов к подбору наблюдаемого поля с помощью некоторой аппроксимирующей конструкции.

В зависимости от типа аппроксимирующей конструкции рассматриваемые способы подразделяются на две разновидности, в которых используется:

- 1) аппроксимация отрезками ряда Лорана;
- 2) аппроксимация формальными источниками.

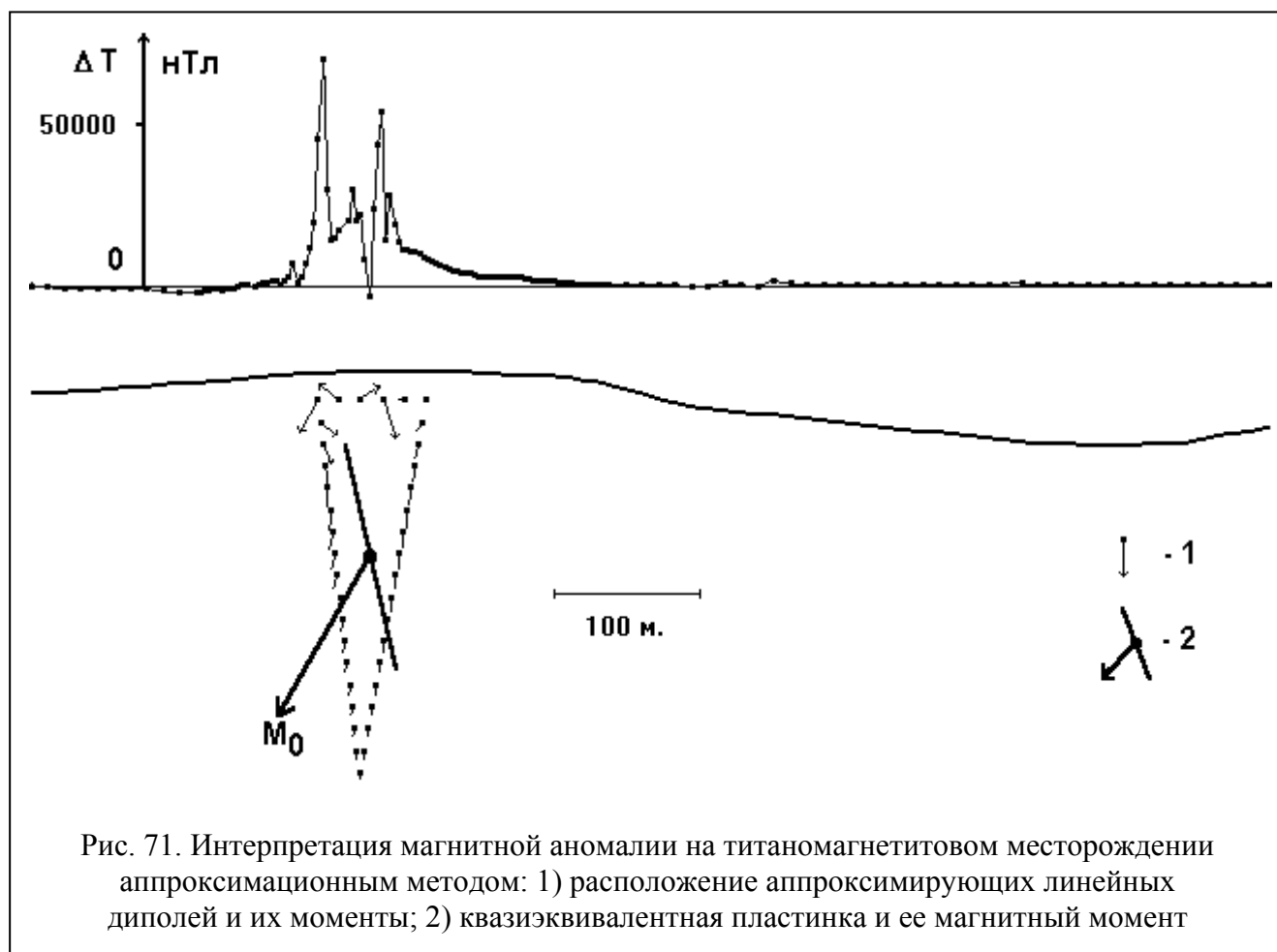
Пусть известны значения аномалий силы тяжести $\Delta g(u_k)$ в m точках на поверхности Земли. Определим N комплексных гармонических моментов относительно заданной опорной точки $u_{оп}$ из условия минимума среднеквадратической погрешности отличия наблюдаемого поля от функции, представляющей собой отрезок ряда Лорана (32.10) с N членами. С учетом того, что $\Delta g = -g_z$, это условие может быть записано следующим образом:

$$\sum_{k=1}^m \left[\Delta g(u_k) - 2\gamma \cdot \operatorname{Re} \sum_{n=0}^N \frac{i \cdot m_n(u_{оп})}{(u_k - u_{оп})^{n+1}} \right]^2 = \min. \quad (33.29)$$

В этом выражении все величины за исключением моментов являются известными. Задача их определения является линейной задачей подбора относительно N комплексных гармонических моментов и, как показано в § 20, сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. Очевидно, ход решения задачи (33.29) не зависит от того, измерено ли поле на горизонтальном профиле или на неровном рельефе. Если наблюдаемое поле осложнено региональным фоном, его можно параметризовать, например, в виде полинома и находить коэффициенты полинома одновременно с моментами, что не нарушает линейности задачи. Алгоритмы решения таких задач будут подробно рассмотрены в главе, посвященной методам подбора. Определение моментов намагниченных объектов проводится аналогично, только вместо отрезка ряда (32.10) используется соответствующий отрезок ряда (32.12).

Вторая из разновидностей аппроксимационных способов включает два этапа. На первом этапе наблюдаемое поле подбирается полем некоторой системы формальных источников таких как линейные массы, диполи, пластинки, многоугольники и т.п. При этом не ставится задача определения геологического строения изучаемого участка, то есть никакого геологического смысла полученному набору источников не придается - они даже могут накладываться друг на друга или пересекаться. Требуется лишь достаточно точное совпадение наблюдаемого и подобранного полей. В отличие от первой разновидности задача подбора может решаться как линейная, когда формальные источники закреплены в пространстве и требуется найти только их нулевые моменты, так и нелинейная, когда сами источники в процессе подбора могут

перемещаться. Региональный фон учитывается так же, как и в первой разновидности. На втором этапе по строгим формулам вычисляются суммарные моменты формальных источников, которые, как следует из разложения в ряд Лорана, равны соответствующим моментам изучаемого объекта.



На рис. 71 показан пример применения одного из аппроксимационных способов при интерпретации двумерной магнитной аномалии на титаномагнетитовом месторождении. Магнитная аномалия ΔT амплитудой свыше 70 мкТл, измеренная на неровном рельефе в горном районе, была аппроксимирована полем 39 линейных диполей, расположенных равномерно на треугольном каркасе, заданном интерпретатором. Моменты каждого из диполей были найдены с помощью метода регуляризации. Суммарные моменты дали возможность построить квазиэквивалентную пластинку, определить направление и угол падения рудных тел, глубину центра масс и нижней кромки, а также направление вектора намагниченности руд. Рисунок демонстрирует, что сама по себе аппроксимирующая конструкция не несет геологической информации - моменты диполей ориентированы по-разному и меняются от диполя к диполю более чем на порядок. Тем не менее, суммарные моменты четко отражают изучаемый объект. Зная модуль намагниченности руд, легко построить квазиэквивалентный прямоугольник, который может послужить стартовой моделью для дальнейшей оптимизации.

Вопросы для самоконтроля

1. Можно ли использовать гармонические моменты для определения координат центра масс бесконечных объектов типа контактной поверхности?
 - а) нельзя (36);
 - б) можно (62);
 - в) можно при наличии материалов высокоточных съемок на большой территории (88).
2. Можно ли определить гармонические моменты изучаемого объекта по гравитационной аномалии, осложненной нелинейным региональным фоном?
 - а) нельзя (71);
 - б) можно интегральными способами (72);
 - в) можно аппроксимационными способами (73).
3. Какие из параметров замкнутых объектов определяются по полю наиболее устойчиво?
 - а) избыточная масса (24);
 - б) относительная вытянутость (27);
 - в) глубина центра масс (30).
4. Можно ли единственным образом определить общее направление вектора намагниченности объекта без априорных сведений о его физических свойствах?
 - а) нельзя (39);
 - б) можно всегда (48);
 - в) можно лишь по данным высокоточных крупномасштабных съемок (57).

Контрольная сумма при правильных ответах = 181.

ГЛАВА 10. МЕТОДЫ ОСОБЫХ ТОЧЕК**§ 34. Особые точки аналитических функций**

Второй системой параметров, однозначно определяемых по аномальному полю без привлечения какой-либо априорной информации, является система особых точек функций, описывающих аномальные поля. Понятие особенности как точки, в которой функция теряет свою аналитичность, известно из курса теории функций комплексной переменной. Оказывается, особые точки функций, описывающих гравитационные и магнитные аномалии, теснейшим образом связаны с создающими их объектами и могут нести информацию об их местоположении и форме. Концепция особых точек для интерпретации гравитационных и магнитных аномалий впервые предложена В.Н.Страховым и независимо, но несколько позднее Г.Я.Голиздой. В дальнейшем ее развитии участвовали многие отечественные и зарубежные геофизики. В отличие от рассмотренной в предыдущей главе системы гармонических моментов, между особыми точками и аномальным полем нет взаимно-однозначного соответствия. Особые точки в принципе однозначно определяются по полю, однако, поле ими полностью не определяется. Напомним вначале ряд основных понятий, необходимых для дальнейшего изложения.

Функция $f(u)$ называется регулярной в точке a , если она представляется степенным рядом:

$$f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (u - a)^n, \quad (34.1)$$

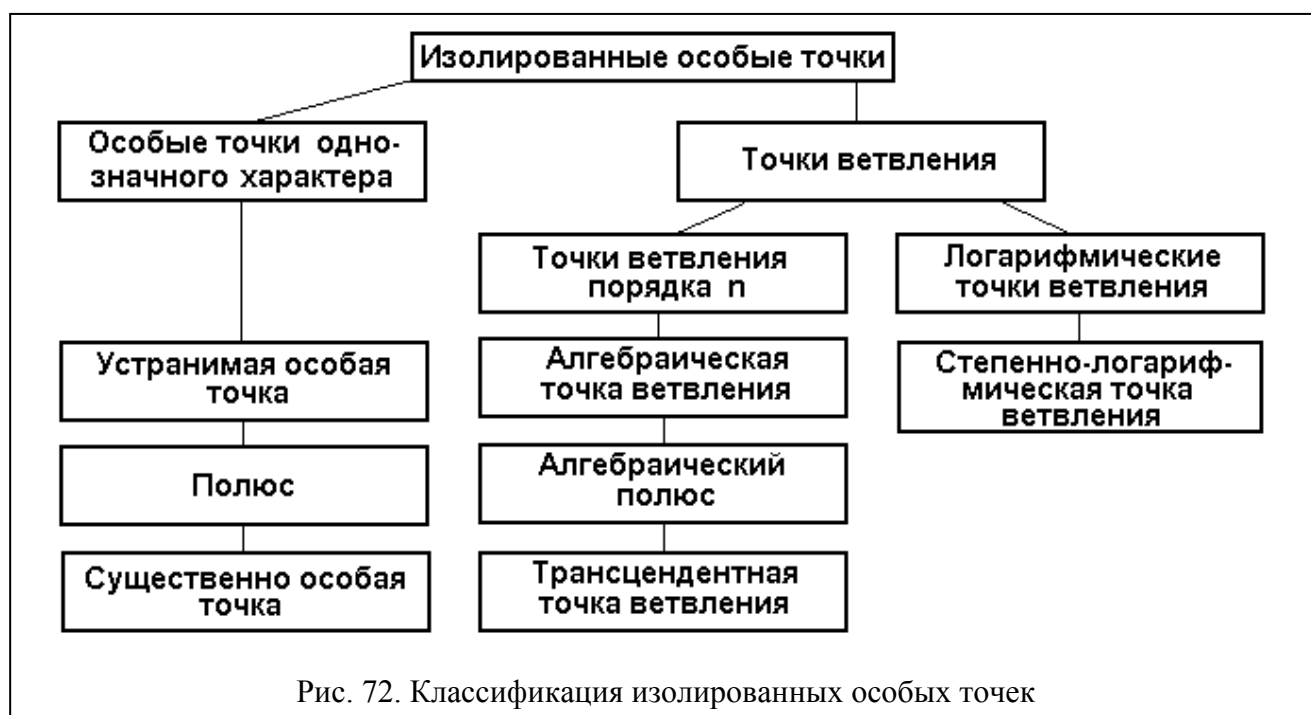
сходящимся в какой-либо окрестности этой точки. Функция $f(u)$ называется регулярной в области D , если она регулярна в каждой ее точке. Характерная особенность регулярных функций, выясняемая теоремой единственности, состоит в том, что если функцию, регулярную в некоторой области, можно продолжить с сохранением регулярности в более широкую область, то это можно сделать только одним способом. Таким путем определяется понятие аналитической функции, при этом основным аппаратом является аналитическое продолжение.

Пусть в точке u_1 некоторой малой области D задана регулярная функция $f(u)$, называемая исходным элементом. По определению, $f(u)$ может быть представлена рядом (34.1). Областью сходимости этого ряда является внутренняя область круга $|u - u_1| < R_1$, где R_1 - радиус сходимости ряда. Выберем в пределах этого круга точку u_2 и составим степенной ряд со своим радиусом сходимости R_2 . Круг $|u - u_2| < R_2$ может выходить за пределы исходного круга и т.д. Указанным путем часто можно продолжить исходный элемент за пределы области D . Если это сделать по всем возможным направлениям во все возможные точки, получим аналитическую (иногда говорят полную аналитическую) функцию, впервые введенную К.Вейерштрассом. Может случиться так, что в результате аналитического продолжения мы вернемся в исходную точку. Если при этом полученные значения не совпадают с исходными, это свидетельствует о многозначности функции в области, через которую она была продолжена. К многозначным аналитическим функциям относится большинство функций, описывающих гравитационные и магнитные аномалии.

Пусть заданы аналитическая функция $F(u)$, порожденная исходным элементом $f_q(u)$ в точке q , и кривая L , идущая из точки q в точку a . Если исходный элемент можно аналитически продолжить вдоль кривой L в любую ее точку, кроме конца - точки a , то точка a называется особой точкой аналитической функции $F(u)$.

Значение особых точек для исследования аналитических функций и для интерпретации аномалий определяется теоремой Ж.Лиувилля, которая формулируется следующим образом. Если функция аналитична во всей плоскости и ограничена, то она является постоянной. Из теоремы следует, что любая аналитическая функция, отличная от тождественной постоянной, должна иметь особые точки. Другими словами, если потенциальное поле отлично от тождественной постоянной, то есть содержит аномалии, то функция, описывающая его, должна иметь особые точки.

Наиболее важным классом особенностей являются изолированные особые точки. В зависимости от того, как ведет себя функция в окрестности особой точки, выделяются особенности различных типов. На рис. 72 приводится классификация изолированных особых точек, наиболее часто встречающихся в практике интерпретации.



Различают изолированные особые точки однозначного и многозначного характеров (точки ветвления). Если функция $f(u)$ регулярна в некотором кольце $0 < |u - a| < r$, и точка a является ее особой точкой, то говорят, что точка a - изолированная особая точка однозначного характера для функции $f(u)$. В зависимости от поведения $f(u)$ в окрестности точки a выделяют три типа изолированных особых точек однозначного характера. Для этого надо рассмотреть предел $\lim_{u \rightarrow a} f(u)$.

1. Если данный предел существует и конечен, то a называется устранимой особой точкой. Примером может служить точка $u=0$ для функции

$$f(u) = \frac{\sin(u)}{u}. \quad (34.2)$$

2. Если данный предел - бесконечен (то есть $|f(u)| \rightarrow \infty$ при $u \rightarrow a$), то точка a называется полюсом. Различают полюса различных порядков. В полюсе n -го порядка функция $f(u)$ представима в виде

$$f(u) = \frac{A(u)}{(u - a)^n} + B(u), \quad (34.3)$$

где $A(u)$ и $B(u)$ - функции, регулярные в точке a .

3. Если данный предел не существует, точка a называется существенно особой точкой. Для нее справедлива следующая теорема Ю.В.Сохоцкого. Если a - существенно особая точка $f(u)$, то для любого комплексного числа C существует последовательность точек $u_k \rightarrow a$ такая, что $\lim_{k \rightarrow \infty} f(u_k) = C$. Примером может служить точка $u=0$ для функции

$$f(u) = e^{1/u}. \quad (34.4)$$

Для нее при $u_k = 1/k$ предел бесконечный, при $u_k = -1/k$ - предел нулевой, а другие пределы C могут достигаться при $u_k = 1/(\ln C + 2k\pi i)$.

Пусть $f(u)$ - функция, аналитическая в каком-либо кольце $0 < |u - a| < r$. Если она многозначна в этом кольце (не является регулярной), то точка a называется изолированной особой точкой многозначного характера. Такие особенности часто называют точками ветвления.

Если число различных элементов в каждой точке кольца бесконечно, то точка a называется логарифмической точкой ветвления. Примером такой точки может являться точка $u=0$ для функции $f(u) = \ln u$. Напомним, что комплексный логарифм является многозначной функцией и определяется как

$$\ln u = \ln |u| + i \arg u + 2k\pi i, \quad (34.5)$$

где k - произвольное целое число.

Среди логарифмических точек ветвления выделяют степенно-логарифмические точки ветвления n -го порядка - такие, в которых функция $f(u)$ представима в виде:

$$f(u) = (u - a)^n \ln(u - a) A(u) + B(u), \quad (34.6)$$

где $A(u)$ и $B(u)$ - функции, регулярные в точке a .

Если число различных элементов $f(u)$ в каждой точке кольца конечно и равно n , то точка a называется точкой ветвления порядка n . Среди них также различают несколько типов. Если в кольце все ветви при $u \rightarrow a$ стремятся к одному и тому же конечному или бесконечному пределу, то точка a называется алгебраической точкой ветвления. В частности, бесконечный предел характеризует алгебраическую точку ветвления, называемую алгебраическим полюсом. Если же предел $f(u)$ при $u \rightarrow a$ не существует, то a называют трансцендентной точкой ветвления n -го порядка. Примером функции, имеющей конечное число ветвей, может являться радикал. В

точке $u=0$ следующие функции имеют точки ветвления n -го порядка: функция $\sqrt[n]{u}$ - алгебраическую точку ветвления, функция $\frac{1}{\sqrt[n]{u}}$ - алгебраический полюс, функция $\exp \frac{1}{\sqrt[n]{u}}$ - трансцендентную точку ветвления.

Таким образом, зная аналитическое выражение функции, достаточно легко установить, где ее особые точки и какого они типа.

§ 35. Связь особых точек функций, описывающих гравитационные и магнитные аномалии, с формой их источников

Интерпретация гравитационных и магнитных аномалий методами особых точек базируется на знании связей между особыми точками функций, описывающих различные элементы аномальных полей, и формой их источников. При этом важно понимать, как ведет себя изучаемая функция в окрестности особенностей различных типов. Рассмотрим типовые модели, наиболее часто встречающиеся на практике, и начнем с простейшего из объектов - кругового цилиндра. Его поперечное сечение имеет форму круга.

Пусть центр круга совпадает с началом координат, тогда в произвольной точке на вертикальной плоскости $u=x+iz$ комплексная напряженность гравитационного поля будет иметь вид:

$$G(u) = -\frac{2\pi\gamma\sigma R^2 i}{u}, \quad (35.1)$$

где σ - плотность модели, f - гравитационная постоянная, а R - радиус круга. Эта функция является однозначной и имеет полюс первого порядка в центре круга при $u=0$. Изолинии аналитического продолжения силы тяжести $\Delta g = -g_z$, имеют в вертикальной плоскости форму окружностей, касающихся друг друга и оси абсцисс в особой точке. На рис. 50 в § 26 показан вид этих изолиний, а также изолиний силы тяжести, имеющих излом на границе. Еще раз подчеркнем, что внутреннее поле и аналитическое продолжение внешнего поля внутрь тела - принципиально различаются.

Комплексная индукция магнитного поля такого же круга имеет вид

$$T(u) = \frac{\mu_0 i I R^2}{2u^2}, \quad (35.2)$$

где μ_0 - магнитная постоянная в системе СИ, а I - комплексная намагниченность. Эта функция также является однозначной и имеет полюс второго порядка в центре круга при $u=0$. Изолинии ее компонент пересекаются в особой точке, что отражает рис. 73. Градиенты магнитного поля, как следует из (35.2), имеют полюс третьего порядка в центре круга и т.д.

Формулы (35.1) и (35.2) связаны соотношением Пуассона, которое в комплексной форме для однородных и слабомагнитных двумерных тел, напомним, выглядит следующим образом:

$$T(u) = \frac{\mu_0 I}{4\pi\gamma\sigma} \cdot \frac{dG(u)}{du}. \quad (35.3)$$

При анализе полей и особых точек



соотношение Пуассона играет важную роль. Из него, в частности, следует, что функция $G'(u)$, описывающая вторые производные гравитационного потенциала, имеет те же особые точки, что и магнитная аномалия слабомагнитного тела.

В общем случае имеет место следующая закономерность: **при дифференцировании аналитической функции особые точки не меняют своего местоположения, а меняют лишь свой тип.** Эта закономерность является весьма ценной для локализации особенностей. Дело в том, что особые точки некоторых типов удобны для локализации с помощью аналитического продолжения вниз, то есть в сторону источников, а других типов - не удобны. В рассмотренном примере полюса первого порядка - неудобные, а полюса второго и третьего порядков - удобные. Это значит, что для локализации центров изометричных тел по гравитационным аномалиям удобно продолжать их градиенты. Для магнитных же аномалий можно продолжать сами наблюдаемые функции. Удобство особых точек при продолжении заключается в том, что изолинии вблизи них пересекаются, подходя к особенности почти вертикально, что дает возможность не продолжая функцию в саму точку, где она теряет аналитичность, экстраполировать изолинии вниз до пересечения. На этой операции основан предложенный В.Н.Страховым способ локализации особых точек, часто называемый аппроксимационным продолжением в горизонтальный слой, который будет подробно рассмотрен ниже.

Особые точки элементов гравитационного и магнитного полей круга являются точками однозначного характера, но у большинства моделей геологических объектов функции, описывающие поля, имеют особенности типа точек ветвления. Так комплексная напряженность гравитационного поля пластинки (тонкого пласта), выведенная в § 6, имеет вид:

$$G(u) = 2i\gamma\sigma_{\text{пов}} \frac{W_2 - W_1}{W_2 - W_1} \ln \frac{u - W_2}{u - W_1}. \quad (35.4)$$

где W_1 и W_2 - комплексные координаты краев пластинки, а $\sigma_{\text{пов}}$ - ее поверхностная плотность. Края пластинки совпадают с логарифмическими точками ветвления функции, описывающей ее гравитационную аномалию. Изолинии гравитационного поля пластинки являются дугами окружностей, опирающихся на пластинку как на хорду, что иллюстрирует рис. 74. У градиентов гравитационных аномалий, а также у компонент и модуля магнитного поля особые точки на краях пластинки являются полюсами первого порядка.

Комплексная напряженность гравитационного поля однородного многоугольника с вершинами в точках w_n выражается также полученной в § 6 формулой:

$$G(u) = \gamma\sigma \sum_{n=0}^N K_n (u - w_n) \ln(u - w_n), \quad (35.5)$$

где K_n - комплексная постоянная, относящаяся к n -ой вершине и определяемая соотношением

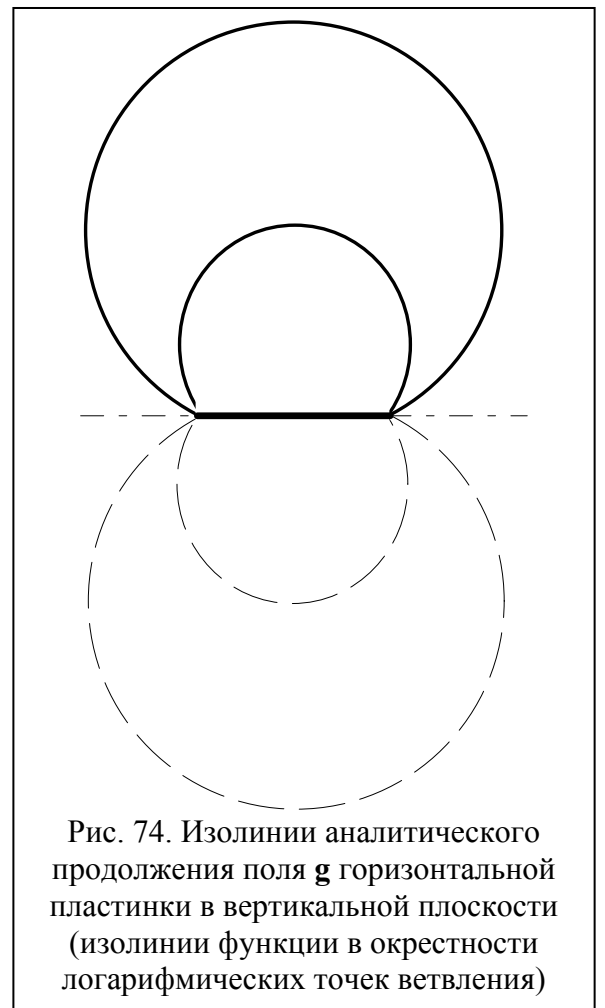


Рис. 74. Изолинии аналитического продолжения поля g горизонтальной пластинки в вертикальной плоскости (изолинии функции в окрестности логарифмических точек ветвления)

$$K_n = \frac{\bar{w}_n - \bar{w}_{n-1}}{w_n - w_{n-1}} - \frac{\bar{w}_{n+1} - \bar{w}_n}{w_{n+1} - w_n} = 2 \left(\frac{\xi_n - \xi_{n-1}}{w_n - w_{n-1}} - \frac{\xi_{n+1} - \xi_n}{w_{n+1} - w_n} \right). \quad (35.6)$$

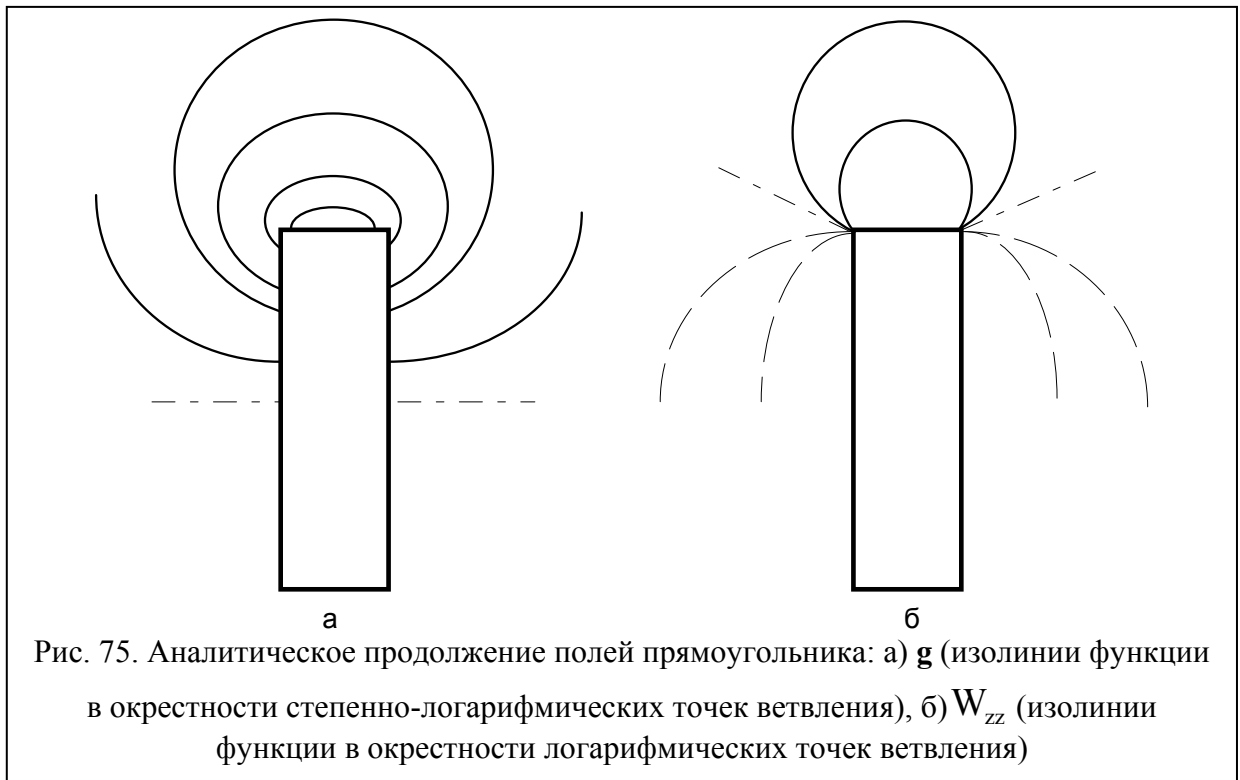
Применив к полученному выражению соотношение Пуассона, получим комплексную индукцию магнитного поля произвольного многоугольника:

$$T(u) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{n=1}^N K_n \ln(u - w_n). \quad (35.7)$$

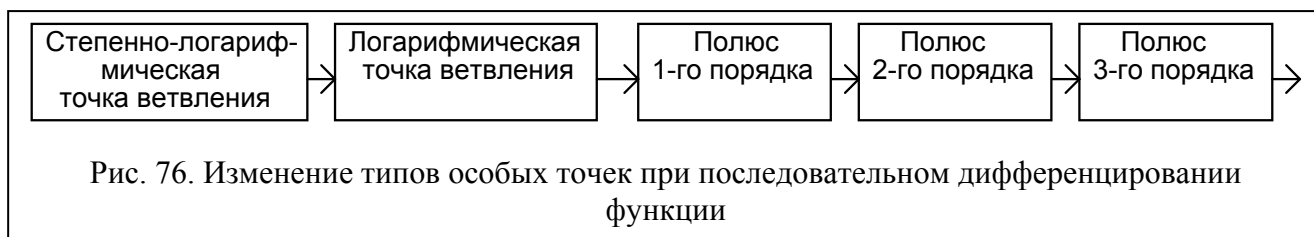
Анализ формул приводит к выводу о том, что у многоугольника особые точки совпадают с его вершинами. Для гравитационного поля они являются степенно-логарифмическими точками ветвления первого порядка, для его градиентов и для компонент и модуля магнитного поля - логарифмическими точками ветвления. Характер изолиний аналитического продолжения функций в окрестностях этих точек показан на рис. 75.

Алгебраические точки ветвления отмечаются у эллипса и совпадают с его фокусами. Для гравитационного поля в фокусах - предел конечен, для магнитного поля и для градиентов гравитационного - бесконечен, то есть эти точки для магнитного поля являются алгебраическими полюсами. На практике точки такого типа встречаются крайне редко. Это же можно отнести и к трансцендентным точкам ветвления.

Подводя итоги, можно сделать вывод о тесной связи местоположения и типа особых точек функций, описывающих гравитационные и магнитные аномалии, с формой их источников. Для локализации особых точек можно аналитически продолжить поле или его производные на ряд уровней в вертикальной плоскости и, экстраполировать их до пересечения вниз. При этом выбирается для продолжения такой элемент поля, для которого ожидаемый тип особенностей будет удобен. К удобным для локализации таким особым точкам относятся: полюса второго и третьего порядков, логарифмические точки ветвления и алгебраические полюса. К неудобным для локализации особым точкам относятся: полюса первого порядка, степенно-логарифмические точки ветвления первого порядка и алгебраические точки ветвления. Если для наблюдаемого поля тип особых точек - неудобен, надо продолжать ее производные.



Последовательное дифференцирование функции приводит к закономерной смене типов ее особых точек, в то время как их местоположение остается неизменным. Закономерность смены типов особенностей можно представить в виде схемы, показанной на рис. 76. Из этой схемы следует, что функции, описывающие гравитационные и магнитные аномалии наиболее часто встречающихся на практике моделей, после нескольких дифференцирований становятся мероморфными, то есть имеющими особенности только типа полюсов различных порядков. Этот факт используется в способе локализации особых точек, предложенном Г. А. Трошковым. Отметим, что алгебраические точки ветвления в этой схеме отсутствуют, поскольку они в результате дифференцирования функции остаются алгебраическими особенностями, только после некоторого числа дифференцирований (для гравитационной аномалии эллипса - уже после первого) становятся алгебраическими полюсами.



Интерпретатор должен четко понимать, что, хотя особые точки, невзирая на отсутствие априорной информации, локализуются по полю вполне объективно - истолкование результатов их локализации так же неоднозначно, как неоднозначно и решение обратной задачи. Найденный полюс первого порядка может указывать и на то, что гравитационная аномалия вызвана круговым цилиндром, и на то, что она связана с контактной поверхностью в форме конхоиды Слюза. Логарифмические точки ветвления могут быть связаны не только с краями тонкого пласта и с эквивалентной ему контактной поверхностью, но и с замкнутым объектом (называемым "мудрецоидой"), имеющим гладкую границу, внешне похожую на эллипс, но описываемую трансцендентной функцией. Степенно-логарифмические точки ветвления могут характеризовать вершины многоугольника, но могут оказаться и внутри эквивалентного ему замкнутого тела с гладкой границей и т.п. Конкретное геологическое истолкование локализованных особенностей, естественно, должно опираться на априорную информацию, тем не менее, знание местоположения и типа особых точек значительно упрощает работу интерпретатора, особенно на ранних стадиях геологоразведочных работ.

Очевидно, для однозначного определения местоположения и типа особенностей необходимо знать абсолютно точное, с бесконечным числом значащих цифр интерпретируемое поле в бесконечном числе точек. На практике конечно абсолютной точности достичь нельзя, поэтому важнейшее значение приобретают вопросы устойчивости локализации особенностей. Известно, что, вообще говоря, обратные задачи - неустойчивы: даже бесконечно малая помеха в исходных данных может приводить к существенным погрешностям в решении. При локализации особых точек неустойчивость может приводить не только к погрешностям в определении их местоположения, но и к изменению типа.

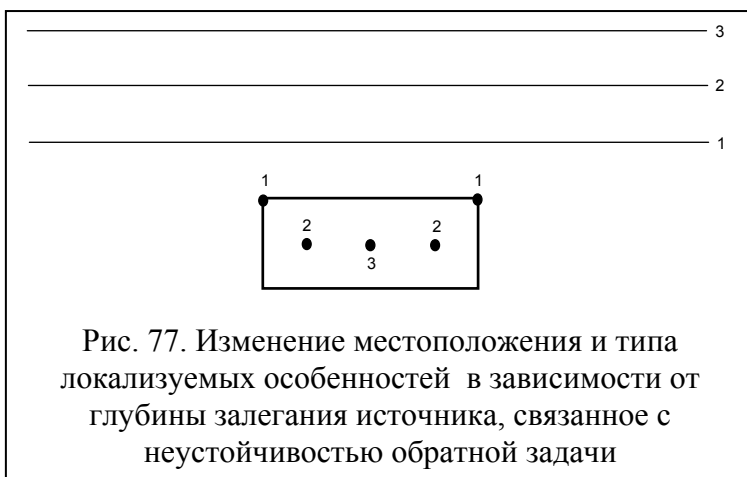
Рассмотрим несколько примеров. Пусть источник аномального поля представляет собой правильный многоугольник с большим числом сторон. Особые точки его аномальных полей располагаются в вершинах и являются для гравитационного поля степенно-логарифмическими, а для магнитного - логарифмическими точками ветвления. Если многоугольник расположен на достаточно большой глубине, его аномальные поля чрезвычайно близки к полю равновеликого круга. У круга же особенность расположена в центре и является полюсом: для гравитационного поля - первого порядка, а для магнитного - второго. Естественно, при интерпретации наблюдаемых аномалий, осложненных помехами различного происхождения, локализуются не истинные особенности, а полюса в центре масс эквивалентного круга. Этому также способствует фильтрация, применяемая для подавления помех. У эллипса особенности располагаются в фокусах и являются алгебраическими точками ветвления. Если же эллипс

лежит на относительно большой глубине, вместо этих точек также локализуется полюс в центре масс.

Это явление справедливо для любых замкнутых тел. При их залегании на большой глубине информация о деталях строения тел в аномальном поле как бы стирается и локализуются лишь особенности наиболее простых моделей, практически эквивалентных по полю исходному сложному объекту. Данная закономерность может быть конструктивно использована при локализации. Дело в том, что устойчиво локализуются по аномальному полю лишь верхние особые точки. Вместе с тем, пересчитывая исходное поле на некоторую высоту, мы можем как бы стирать более слабые верхние особенности и определять местоположение центров масс отдельных тел в разрезе. Таким путем добиваются локализации более глубоких особенностей, например, в методе Г. А. Трошкова.

Пусть исходный объект представляет собой прямоугольник, изображенный на рис. 77. Если уровень наблюдения его аномального поля отвечает небольшой глубине залегания (помеченной на рисунке цифрой 1), то достаточно устойчиво локализуются особенности в его вершинах на верхней кромке, являющиеся для гравитационного поля степенно-логарифмическими, а для магнитного - логарифмическими точками ветвления. На рисунке они также отмечены цифрами 1. Если уровень наблюдения аномального поля прямоугольника отвечает большей глубине его залегания (помеченной на рисунке цифрой 2), то локализуются особенности на уровне центра масс, отвечающие краям эквивалентной пластинки и обозначенные цифрой 2. Для гравитационного поля они являются логарифмическими точками ветвления, а для магнитного - полюсами первого порядка. Наконец, с уровня, помеченного цифрой 3, для которого глубина залегания объекта сопоставима с его видимой мощностью, устойчиво локализуется лишь точка в центре масс (обозначенная на рисунке цифрой 3). Для гравитационного поля это полюс первого порядка, а для магнитного - полюс второго порядка.

Знание отмеченных закономерностей изменения местоположения и типа особых точек в процессе пересчета вверх помогает при синтезе результатов локализации и при построении модели изучаемого объекта.



§ 36. Локализация особых точек с помощью аппроксимационного продолжения

Рассмотренные в предыдущем параграфе примеры показывают, что местоположение и тип особых точек функций, описывающих гравитационные и магнитные аномалии, могут быть определены по поведению изолиний аналитического продолжения наблюдаемого поля или его производных в сторону источников. На этой базе В.Н.Страховым разработан способ локализации особых точек путем аналитического продолжения в горизонтальный слой, включающий все верхнее полупространство и часть нижнего полупространства до глубины H ближайшей к дневной поверхности особой точки.

В § 27 мы разобрали, что аналитическое продолжение функционально заданных потенциальных полей в верхнее и нижнее полупространства, как и любых трансформаций, удобно проводить в спектральной форме, переходя от самих функций к их преобразованиям Фурье. Если ось z считать направленной вверх, частотная характеристика аналитического продолжения вверх и вниз может быть выражена в виде:

$$F(\omega) = e^{-|\omega|^z}. \quad (36.1)$$

Применение спектров при локализации особых точек удобно еще и потому, что по ним достаточно легко оценить параметр **H**, то есть глубину ближайшей к дневной поверхности особой точки, определяющей нижнюю границу слоя, в который наблюдаемое поле можно аналитически продолжить путем пересчетов на горизонтальные уровни. Это определение базируется на использовании следующего соотношения, доказанного В.К.Ивановым в 1956 г. для масс, заполняющих ограниченную область:

$$H = - \lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \sup \frac{\ln |S(\omega, 0)|}{|\omega|}. \quad (36.2)$$

Оно означает, что график логарифма амплитудного спектра для полей таких моделей при $|\omega| \rightarrow \infty$ стремится к наклонной асимптоте с уравнением $y = c - H|\omega|$. В § 27 отмечалось, что у реальных полей самая высокочастотная часть спектра характеризуется помехами, поэтому фактически определение параметра **H** ведется по среднеполосной части спектра.

На практике, естественно, поля задаются не функционально, а в виде значений в конечном числе точек, что заставляет от преобразований Фурье переходить к тригонометрическим полиномам, то есть к отрезкам рядов Фурье. Пусть исходное поле задано на профиле длиной **L** с равномерным шагом. Тогда его можно представить в виде бесконечного ряда Фурье:

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\pi n x}{L} + B_n \sin \frac{\pi n x}{L} \right), \quad (36.3)$$

при этом подразумевается, что за пределами отрезка наблюдений поле периодически повторяется. Дополнительно предположив характер повторения как четно или нечетно симметричный, в (36.3) можно опустить ту часть, которая имеет другой тип симметрии и тем самым упростить вычисления. Коэффициенты разложения рассчитываются по известным формулам:

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L U(x) \cos \frac{\pi n x}{L} dx \quad (36.4)$$

и

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L U(x) \sin \frac{\pi n x}{L} dx \quad (36.5)$$

любым численным методом, например, методом трапеций. Отметим, что алгоритмы быстрого преобразования Фурье при решении задачи локализации особых точек не эффективны, так как базируются на самом неточном методе интегрирования - методе прямоугольников.

Бесконечное число коэффициентов ряда, очевидно, не может быть определено, поэтому практически оно ограничивается некоторым номером **N**:

$$U(x) = \sum_{n=0}^N \left(A_n \cos \frac{\pi n x}{L} + B_n \sin \frac{\pi n x}{L} \right), \quad (36.6)$$

тем самым ряд Фурье превращается в тригонометрический полином. Формулу (36.6) можно рассматривать как результат применения к ряду (36.3) прямоугольного фильтра. Хотя подобная фильтрация уничтожает высокочастотную часть спектра, она не всегда приводит к хорошим результатам, поэтому в (36.6) вводят дополнительные фильтры. Одним из наиболее распространенных является фильтр вида

$$\left(\sin \frac{\pi n}{N} / \frac{\pi n}{N} \right)^2, \quad (36.7)$$

после умножения на него формула (36.12) становится удобной для практических вычислений.

Будем считать исходную функцию периодической и нечетной. Если при этом она на краях профиля равна нулю, ряд синусов сходится быстрее. Этого можно добиться, вычитая региональный фон вида

$$f(x) = U(0) + \frac{U(L) - U(0)}{L}x, \quad (36.8)$$

поскольку вычитание из исходного поля линейной функции не меняет местоположения и типа искомых особенностей. После этого для произвольной точки при условии $z > -H$ вычислительная формула аналитического продолжения поля принимает вид:

$$U(x, z) = \sum_{n=1}^N B_n \sin \frac{\pi n x}{L} e^{\frac{-\pi n z}{L}} \left(\frac{\sin \frac{\pi n}{N}}{\frac{\pi n}{N}} \right)^2. \quad (36.9)$$

Если продифференцировать ее по x и по z , легко получить аналогичные формулы для вычисления горизонтального или вертикального градиентов поля на разных высотах, устойчивые к помехам:

$$W_{xz}(x, z) = \frac{\pi}{L} \sum_{n=1}^N n B_n \cos \frac{\pi n x}{L} e^{\frac{-\pi n z}{L}} \left(\frac{\sin \frac{\pi n}{N}}{\frac{\pi n}{N}} \right)^2, \quad (36.10)$$

$$W_{zz}(x, z) = -\frac{\pi}{L} \sum_{n=1}^N n B_n \sin \frac{\pi n x}{L} e^{\frac{-\pi n z}{L}} \left(\frac{\sin \frac{\pi n}{N}}{\frac{\pi n}{N}} \right)^2. \quad (36.11)$$

Полученные формулы являются основой алгоритма, реализуемого на компьютерах для локализации особых точек. Необходимо отметить, что, строго говоря, из-за наличия фильтрации он не является алгоритмом аналитического продолжения. В связи с этим В. Н. Страхов предложил называть подобные алгоритмы алгоритмами аппроксимационного продолжения.

Локализация особых точек начинается с оценки параметра H , для чего предложено несколько различных способов. Наиболее удобно оценивать его непосредственно по спектру с помощью соотношения (36.2). Вместе с тем, практическое применение этого соотношения требует учета изменения свойств спектра из-за того, что мы от интеграла Фурье перешли к тригонометрическому полиному. На рис. 55 в § 27 показаны реальная гравитационная аномалия и ее спектр, в частности на рис. 55в представлен график логарифма модуля спектра этой аномалии. На нем отчетливо выделяются три части: низкочастотная, среднечастотная и высокочастотная. Низкочастотная часть, отвечающая аномалиям большой протяженности, преимущественно характеризует особенности регионального поля. Среднечастотная часть характеризует в основном локальные аномалии и их особые точки. Наконец, самая высокочастотная часть связана с помехами от верхней части разреза и с погрешностями съемки. Легко заметить, что график логарифма амплитудного спектра аппроксимируется на средних частотах наклонной прямой. Угловым коэффициентом этой прямой и равен $-H$. Таким образом, по графику логарифма амплитудного спектра можно достаточно легко определить глубину верхней особой точки функции, описывающей аномальное поле. Аппроксимируя прямой

низкочастотную часть графика, можно оценить и глубину более низких особенностей на нижней кромке или в центре масс изучаемых объектов.

При интерпретации результатов площадных съемок аналогичные определения производятся по графику логарифма радиально осредненного энергетического спектра. Поскольку работы В.К.Иванова 1956 г. за рубежом остались неизвестными, подобную технологию там обычно называют методом А.Спектора и Ф.Гранта, которые воспроизвели ее в 1970 г. Эта технология в том или ином виде присутствует во всех интерпретационных системах. На рис. 78 показан вид графиков, формируемых при подобных определениях системой «Oasis montaj» канадской фирмы GEOSOFТ:

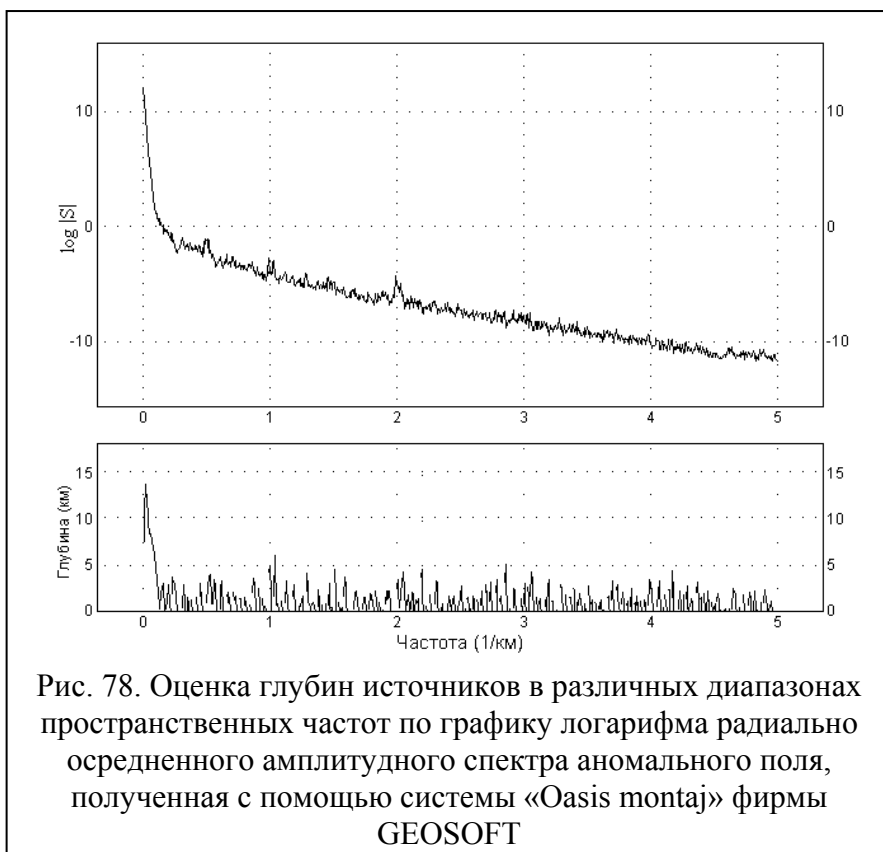


Рис. 78. Оценка глубин источников в различных диапазонах пространственных частот по графику логарифма радиально осредненного амплитудного спектра аномального поля, полученная с помощью системы «Oasis montaj» фирмы GEOSOFТ

системой «Oasis montaj» канадской фирмы GEOSOFТ: под графиком логарифма энергетического спектра помещается оценка глубин в разных частотных диапазонах. Анализ данных графиков, вычисленных по результатам аэромагнитной съемки, показывает, что узкая полоса частот в низкочастотной части спектра связана с глубокозалегающими источниками, особые точки которых соответствуют глубинам свыше 10 км. Наибольшая из отмеченных глубин составляет 13 км, таким образом, судя по спектру, содержащаяся в аномальном магнитном поле информация относится к верхнему слою земной коры мощностью около 13 км. Средняя и высокочастотная части спектра описывают источники, содержащиеся в верхних частях разреза, от поверхности Земли до глубин менее 5 км, в среднем составляя около 3 км.

Вторым этапом локализации особых точек является выбор продолжаемого элемента поля. При этом на основе морфологического анализа графика наблюдаемого поля с привлечением априорной информации надо определить ожидаемый тип локализуемых особенностей и подобрать такой элемент поля, продолжая который искомые точки удобно локализовать. Принципы такого выбора описаны в предыдущем параграфе. На практике для продолжения используют обычно либо само поле, либо его горизонтальные или вертикальные градиенты.

На следующем этапе выбранный элемент с помощью описанного алгоритма продолжают на несколько уровней вверх и вниз, причем общее число уровней должно быть не меньше 5. Так как параметр H определен с некоторой погрешностью, продолжение вниз обычно проводят вплоть до глубины, равной $0,7H$. По результатам продолжения строят изолинии выбранного элемента в вертикальной плоскости интерпретационного профиля.

Завершающим этапом локализации является экстраполяция изолиний вниз вплоть до пересечения. Точки пересечения изолиний и являются особыми точками функции, описывающей аномальное поле. Если тип особых точек интерпретируемой функции отличается от ожидаемого, эта операция может оказаться неустойчивой, тогда надо изменить продолжаемый элемент поля и повторить локализацию.

На рис. 79 представлены результаты локализации особых точек функции, описывающей гравитационную аномалию, показанную на рис. 55 в § 27, с помощью продолжения ее

вертикального градиента. Гравитационный минимум в платформенных условиях может наблюдаться как над синклиналью, если плотность пород возрастает с глубиной, так и над антиклиналью. В данном случае местоположение, глубина и тип особенностей, расположенных в точках излома контактной поверхности, свидетельствуют о наличии антиклинальной

структуры, причем плотность перекрывающих пород больше, чем у подстилающих. Эти признаки с большой вероятностью указывают на наличие соляного купола.

Аппроксимационное продолжение элементов потенциальных полей в горизонтальный слой теоретически возможно вплоть до глубины **H**. Формально описанный алгоритм дает возможность вычислить функции и ниже этого уровня, но попытки такого вычисления наталкиваются на препятствие в виде так называемого эффекта распада поля. Оказывается, при дальнейшем продолжении поле как бы распадается на чередующиеся максимумы и минимумы, практически никак не связанные с геологическим строением. Пример проявления эффекта показан на рис. 80. Частота этой осцилляции тем больше, чем большее число гармоник **N** используется для гармонического синтеза элементов поля. Хотя эффект распада поля и мешает определению более глубоких особенностей, он может конструктивно использоваться для контроля правильности определения параметра **H**.

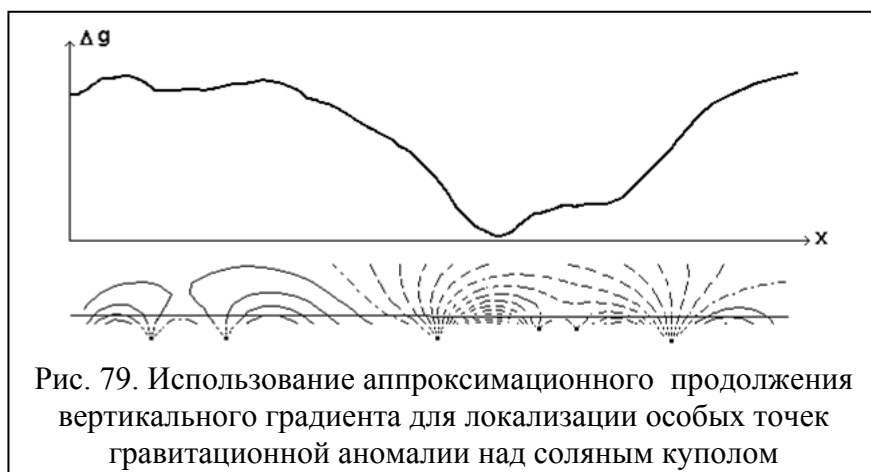


Рис. 79. Использование аппроксимационного продолжения вертикального градиента для локализации особых точек гравитационной аномалии над соляным куполом

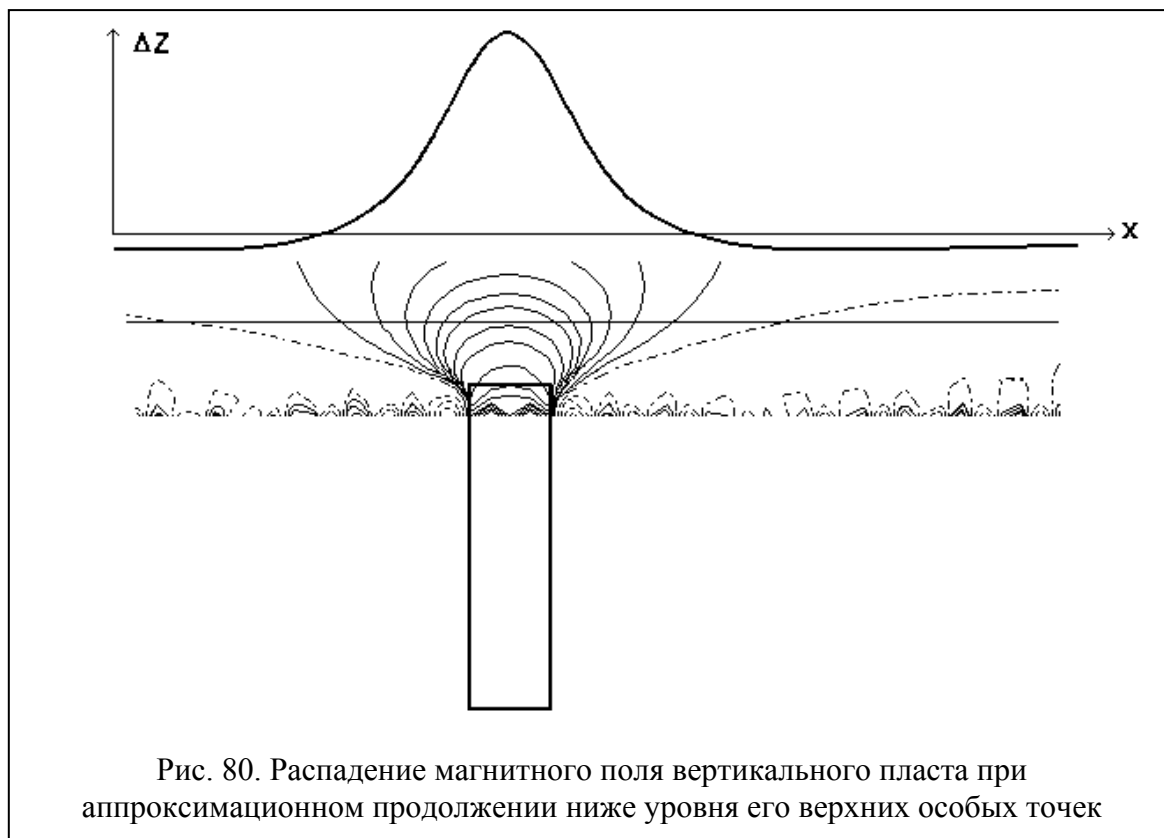


Рис. 80. Распадение магнитного поля вертикального пласта при аппроксимационном продолжении ниже уровня его верхних особых точек

В настоящее время помимо аппроксимационного продолжения в горизонтальный слой разработаны методики продолжения в квадрант слева или справа от заданной вертикальной линии, а также во внешность окружности, охватывающей источники. Эти методики позволяют локализовать особые точки, характеризующие боковую, а в благоприятных условиях даже нижнюю кромку тел. Разумеется, устойчивость определения этих особенностей меньше, нежели верхних, однако, несмотря на это, информация о них чрезвычайно полезна для решения самых разнообразных геологических задач.

§ 37. Локализация особых точек способом нормированных функций

При локализации особых точек с помощью аппроксимационного продолжения приходится экстраполировать изолинии элементов полей. Точность выполнения этой операции в значительной степени зависит от опыта интерпретатора, что побуждает к разработке таких способов локализации, которые в ней не нуждаются. Одним из таких способов является способ нормированных функций, предложенный В.М.Березкиным и теоретически обоснованный В.Н.Страховым.

В способе В.М.Березкина производится продолжение вниз двух компонент магнитного поля (горизонтальной и вертикальной), либо двух соответствующих компонент градиента гравитационного поля. На нескольких уровнях вычисляется модуль магнитного поля, либо модуль градиента гравитационного поля, после чего полученная функция нормируется, то есть в каждой из точек делится на среднее ее значение на данном уровне. Эти операции проводятся не только при $z > -H$, но и на больших глубинах, в том числе и в области, занятой источниками, куда невозможно осуществить аналитическое продолжение в его строгом понимании, но где элементы поля можно формально вычислить по приведенным в предыдущем параграфе формулам. Выражение для нормированного модуля градиента гравитационного поля

G_n , который часто называют полным нормированным градиентом силы тяжести, имеет следующий вид:

$$G_n(x, z) = \frac{\sqrt{W_{xz}^2(x, z) + W_{zz}^2(x, z)}}{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sqrt{W_{xz}^2(x_i, z) + W_{zz}^2(x_i, z)}}, \quad (37.1)$$

а для нормированного модуля магнитного поля -

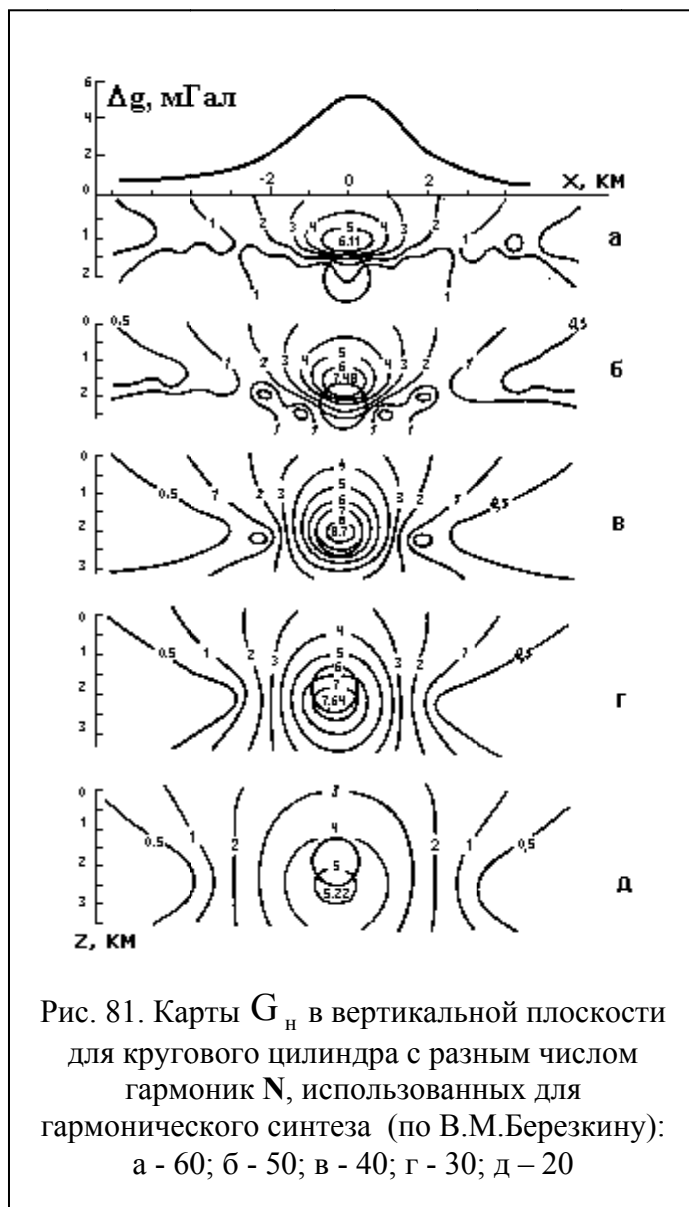


Рис. 81. Карты G_n в вертикальной плоскости для кругового цилиндра с разным числом гармоник N , использованных для гармонического синтеза (по В.М.Березкину): а - 60; б - 50; в - 40; г - 30; д - 20

$$T_n(x, z) = \frac{\sqrt{X^2(x, z) + Z^2(x, z)}}{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sqrt{X^2(x_i, z) + Z^2(x_i, z)}}, \quad (37.2)$$

где M - число точек наблюдений на интерпретационном профиле.

Характерной особенностью данных нормированных функций является негармоничность, то есть их лапласиан не равен нулю. Из-за этого они могут иметь максимумы и минимумы в области продолжения, что невозможно для гармонических функций в силу так называемого принципа максимума. Оказывается, эти экстремумы при правильно выбранных параметрах продолжения совпадают с особыми точками поля, причем эффект распада поля для модулей практически не проявляется. На положение экстремумов существенно влияет число гармоник N в формулах (36.9) - (36.11), что иллюстрирует рис. 81. На нем показаны карты изолиний полного нормированного градиента силы тяжести в вертикальной плоскости при разных N для кругового цилиндра. При увеличении числа гармоник положение максимума смещается вверх, а при уменьшении - вниз. Вместе с тем, на рис. 81 можно отметить эмпирически обнаруженный факт, состоящий в том, что при правильно выбранном числе гармоник значение нормированной функции в экстремуме - наибольшее (рис. 81в). Этот факт носит название принципа автофокусировки при выборе числа гармоник. Множество подобных примеров приведено в монографии В. М. Березкина. Надо отметить, что принцип автофокусировки на практике выполняется не всегда, а теоретическое исследование этого вопроса затруднительно. Часто выбор оптимального числа гармоник для района проводимых работ осуществляют на объектах с известным строением, после чего используют это значение на смежных участках.

Наибольшее применение способ В.М.Березкина нашел при интерпретации гравитационных

аномалий на месторождениях нефти и газа. На рис. 82 показан пример локализации рифовой структуры, с которой связаны месторождения нефти и газа в Волго-Уральской области. Сложность локализации этой структуры состоит в наличии интенсивной помехи, связанной с влиянием поверхности кунгурских отложений, расположенных на сравнительно небольшой глубине (100-300 м) и имеющих большую избыточную плотность (до 0,3-0,5 г/см³) по сравнению с вышележащими породами. Несмотря на влияние этой границы, также показанной на рис. 82, с помощью данного

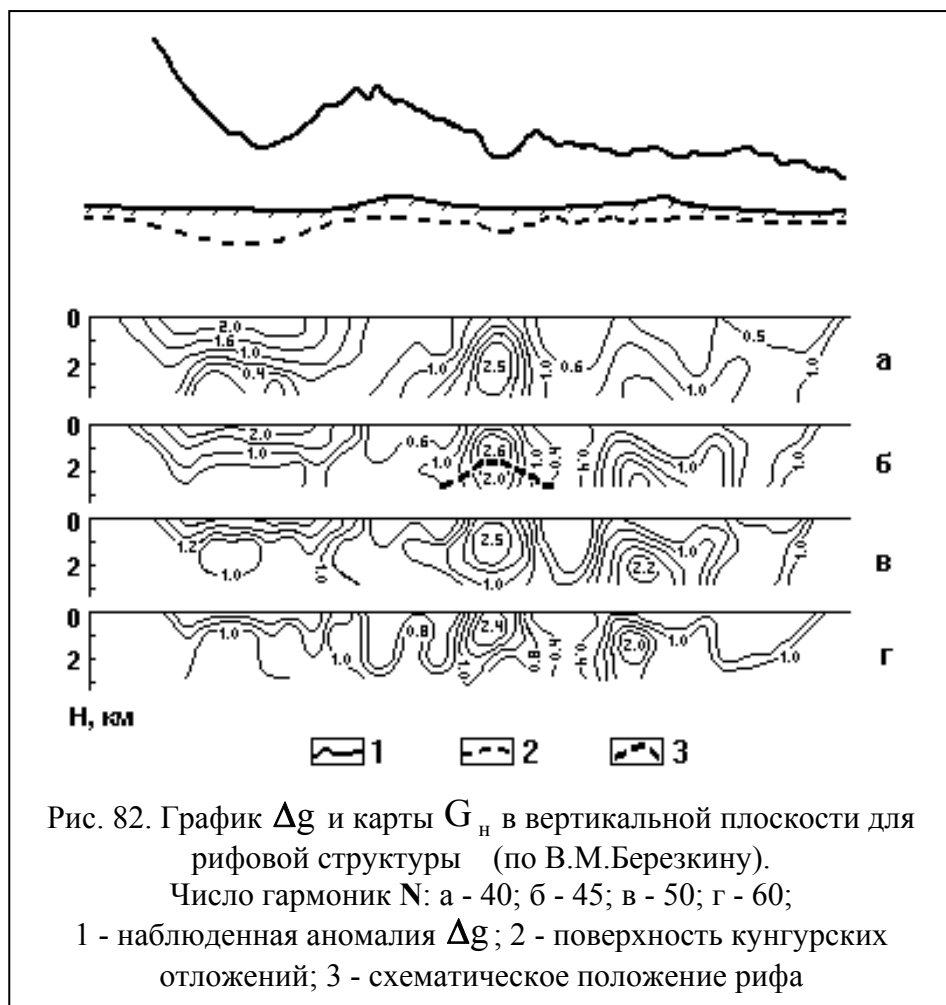


Рис. 82. График Δg и карты G_n в вертикальной плоскости для рифовой структуры (по В.М.Березкину).

Число гармоник N : а - 40; б - 45; в - 50; г - 60;

1 - наблюдаемая аномалия Δg ; 2 - поверхность кунгурских отложений; 3 - схематическое положение рифа

способа удалось уверенно локализовать рифовую структуру на глубине 1,5 км. В настоящее время способ весьма широко применяется как для решения задач нефтегазовой геофизики, так и для поисков рудных месторождений.

§ 38. Локализация особых точек способом отношения производных

Способ отношения производных, предложенный Г.А.Трошковым, базируется на рассмотренной в § 35 и проиллюстрированной на рис. 76 закономерности изменения типов особых точек при последовательном дифференцировании функций, описывающих гравитационные и магнитные аномалии. Дело в том, что функции, характеризующие поля наиболее часто встречающихся на практике моделей, после нескольких дифференцирований становятся мероморфными, то есть имеющими особенности только типа полюсов различных порядков.

Представим себе, что в изучаемом разрезе присутствуют многоугольники, тонкие пластины и круги, либо эквивалентные им объекты. Это значит, что функция, описывающая гравитационную аномалию данного разреза, имеет особые точки следующих типов: степенно-логарифмические точки ветвления первого порядка, логарифмические точки ветвления и полюса первого порядка. Соответственно, функция, описывающая магнитную аномалию разреза, содержит логарифмические точки ветвления, а также полюса первого и второго порядков. После двукратного дифференцирования функции, описывающей гравитационную аномалию, особые точки, не изменив местоположения, изменят свой тип:

степенно-логарифмические точки ветвления первого порядка станут полюсами первого порядка;

логарифмические точки ветвления станут полюсами второго порядка;

полюса первого порядка станут полюсами третьего порядка.

Аналогично после однократного дифференцирования функции, описывающей магнитную аномалию, особые точки изменят свой тип следующим образом:

логарифмические точки ветвления станут полюсами первого порядка;

полюса первого порядка станут полюсами второго порядка;

полюса второго порядка станут полюсами третьего порядка.

Обозначим мероморфную функцию, полученную после двукратного дифференцирования гравитационной аномалии либо после однократного дифференцирования магнитной аномалии, как $F(u)$. Для разреза рассматриваемого типа она представима в общем виде как

$$F(u) = \sum_{k=1}^n \frac{B_k}{(u - w_k)^p}, \quad (38.1)$$

где n - общее число полюсов в разрезе, w_k - комплексная координата k -го полюса, p - его порядок, а B_k - комплексный коэффициент, который можно рассматривать как "мощность" данного полюса. Порядок полюса фактически указывает на тип особой точки исходного поля и несет важнейшую информацию о его источнике. Примеры, рассмотренные в §35, говорят о том, что

если $p=1$, данная особая точка, вероятно, соответствует вершине многоугольника, точке излома геологической границы;

если $p=2$, данная особая точка, вероятно, соответствует краю тонкой пластины, пласта;

если $p=3$, данная особая точка, вероятно, соответствует центру изометричного объекта, центру масс локального тела.

Для локализации особых точек и определения их параметров Г.А.Трошков предложил использовать следующий прием. Рассмотрим скользящее окно, включающее часть точек на исследуемом профиле. Поскольку вклад каждой из особенностей в общее поле (38.1) существенно зависит от расстояния точек до окна, будем считать, что в пределах сравнительно небольшого скользящего окна практически весь наблюдаемый эффект можно объяснить

влиянием всего одной, самой близкой к центру окна особой точки. Это значит, что в окне вместо (38.1) можно использовать следующее приближенное соотношение:

$$F(u) \approx \frac{B_1}{(u - w_1)^p}. \quad (38.2)$$

Смещая окно вдоль профиля и определяя параметры эквивалентных особенностей, можно изучить все верхние особые точки. Для изучения более глубоких особенностей над центром скользящего окна на некоторой высоте задается так называемая опорная точка u_0 и все вычисления ведутся именно для нее. Если она находится на небольшой высоте, изучается верхняя особенность, при увеличении высоты в соответствии с результатами, приведенными в § 35, большее влияние будут оказывать эквивалентные особенности на уровне центров масс объектов. Помимо этого, введение опорной точки даже на небольшой высоте помогает повышать устойчивость локализации, поскольку при пересчете вверх подавляются высокочастотные помехи.

Найдем производную функции (38.2) по u

$$F'(u) \approx -\frac{pB_1}{(u - w_1)^{p+1}} \quad (38.3)$$

и разделим (38.2) на (38.3). В результате оказывается, что при известном порядке полюса комплексная координата ближайшей особенности может быть определена по отношению последовательных производных:

$$w_1 \approx u + \frac{pF(u)}{F'(u)}. \quad (38.4)$$

Все параметры этой особенности, то есть w_1 , B_1 и p могут быть теоретически найдены с помощью выведенных Г. А. Трошковым предельных соотношений по трем последовательным производным при стремлении порядка производной к бесконечности.

Алгоритм локализации сводится к следующему. Вначале по исходному полю $U(x)$ определяют комплексные значения интеграла

$$R(m) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(x)dx}{(x + u_0)^m}, \quad (38.5)$$

с точностью до множителя представляющего собой производную $(m-1)$ -го порядка от исходной функции в опорной точке u_0 . Фактически этот интеграл берется численно в пределах скользящего окна, расположенного симметрично относительно горизонтальной координаты выбранной опорной точки. Далее по отношениям трех последовательных производных $R(m)$, $R(m+1)$ и $R(m+2)$ при $m \rightarrow \infty$ вычисляют параметры ближайшей к опорной точке особенности. Фактически вместо предельных соотношений при этом пользуются следующими приближенными формулами Г. А. Трошкова:

$$p \approx \frac{m|R(m+1)|^2 - (m-1)(m+1)|R(m)||R(m+2)|}{(m+1)|R(m)||R(m+2)| - m|R(m+1)|^2}, \quad (38.6)$$

$$w_1 \approx \frac{m+p-1}{m} \cdot \frac{R(m)}{R(m+1)} - u_0, \quad (38.7)$$

$$|B_1| \approx \frac{(p-1)!}{2\pi} \cdot \frac{(m-1)! R(m) |w_1 + u_0|^{m+p-1}}{(m+p-1)!}, \quad (38.8)$$

после чего сдвигают окно (а, следовательно, и опорную точку) вдоль профиля и повторяют вычисления. Когда требуется находить особенности при разных высотах опорной точки над уровнем наблюдения, определения в скользящем вдоль профиля окне повторяют несколько раз.

В качестве примера на рис. 83 показаны результаты применения изложенного способа на одном из месторождений железистых кварцитов юга Якутии. Рудные тела здесь представляют собой мощные крутопадающие пласты, верхняя кромка которых расположена на глубине несколько метров. При этом значительная часть намагниченности руд является остаточной, резко изменяется от одного пласта к другому как по величине, так и по направлению и вызвана, вероятно, ударами молний, что усложняет морфологию аномалий и мешает установлению границ отдельных пластов. Тем не менее, в этих сложных условиях способ отношения производных дал возможность достаточно хорошо локализовать особые точки, а по ним определить искомые границы.

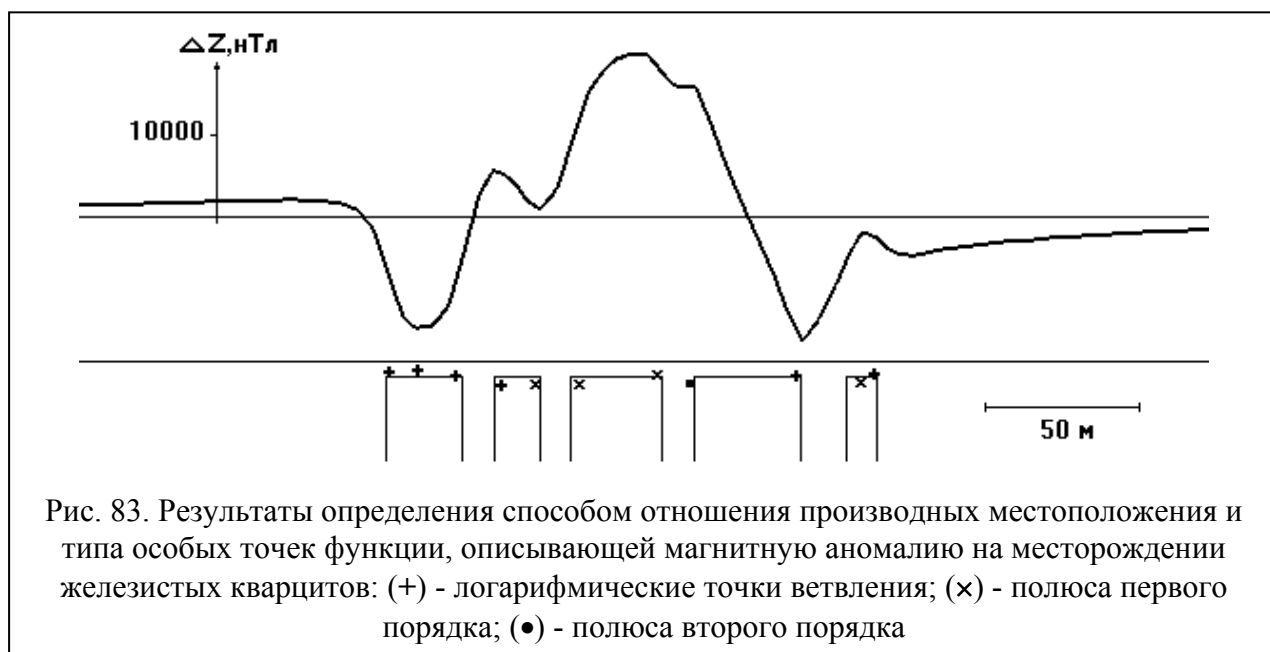


Рис. 83. Результаты определения способом отношения производных местоположения и типа особых точек функции, описывающей магнитную аномалию на месторождении железистых кварцитов: (+) - логарифмические точки ветвления; (x) - полюса первого порядка; (•) - полюса второго порядка

Для более сложных полей данный способ не всегда проявляет себя достаточно устойчиво. Это, конечно, связано с тем, что в пределах скользящего окна практически весь наблюдаемый эффект объясняется влиянием одной, самой близкой к центру окна особой точки. В таких условиях наиболее естественно локализовать особые точки несколькими способами, подчеркивая сильные стороны каждого из методов и преодолевая присущие каждому из них недостатки. С этой целью создаются интегрированные системы, в которых результаты всех определений синтезируются в специальных интерфейсах.

Вышерассмотренные методы локализации, в частности, синтезированы в системе СИНГУЛЯР, разработанной Ю. И. Блохом, О. Н. Коняевым и Д. В. Каплуном. На рис. 84 показан вид экрана, сформированный системой СИНГУЛЯР в процессе решения одной из практических задач по полю ΔT , измеренному в процессе аэромагнитной съемки в Западной Сибири. Здесь требовалось изучить морфологию палеозойского складчатого основания, причем нормированный модуль поля был вычислен в слое мощностью 10 км. На выявление этих особенностей был, в частности, настроен метод Страхова. Тем не менее, на рисунке четко видно, что особые точки функции, описывающей поле, вообще говоря, характеризуют три структурных этажа. Помимо фундамента, кровля которого расположена на глубине около 5 км, методом Березкина здесь выявляется уровень на глубине примерно 2,5 км. Он связан с верхней

кромкой блоков осадочных пород, намагниченность которых была изменена мигрировавшими углеводородами. Методом Трошкова здесь выявляются особенности на глубинах менее 1 км.

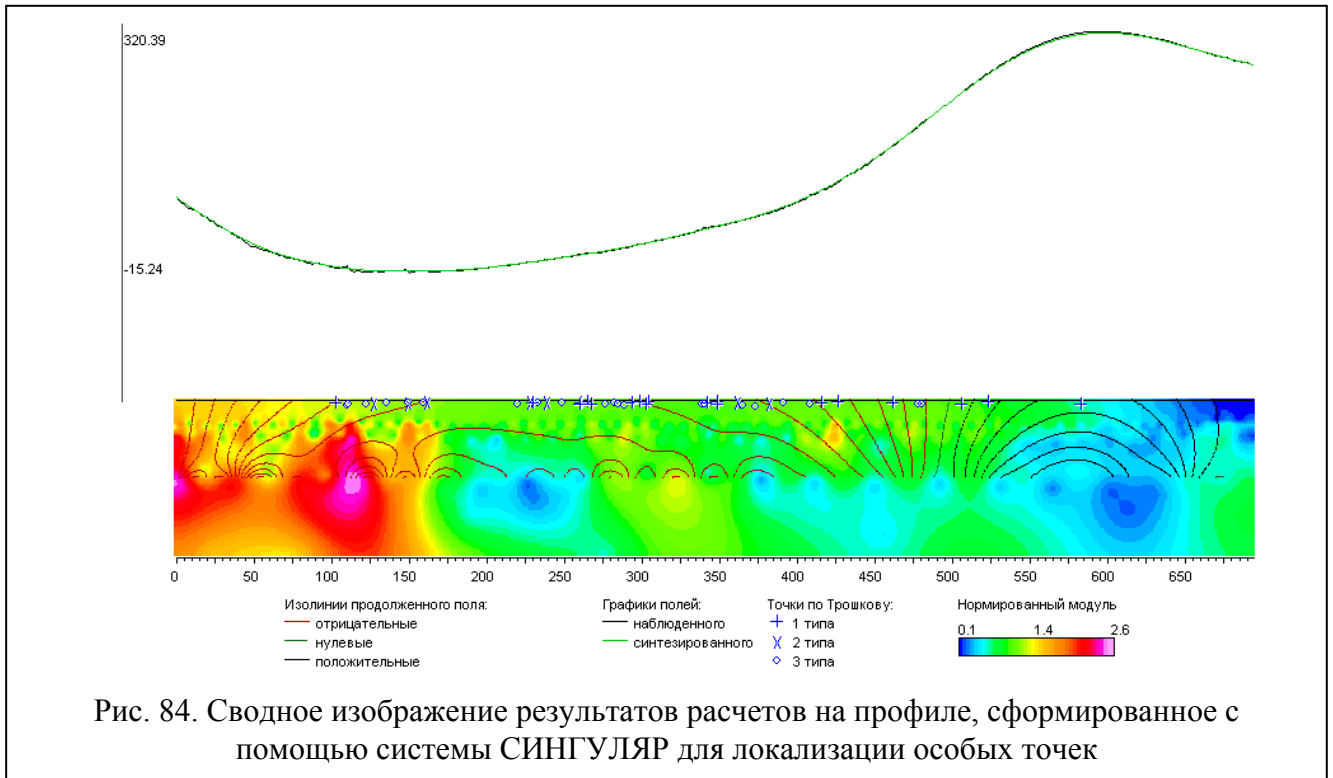


Рис. 84. Сводное изображение результатов расчетов на профиле, сформированное с помощью системы СИНГУЛЯР для локализации особых точек

§ 39. Локализация особых точек с помощью деконволюции Эйлера

Способ локализации особых точек, получивший название деконволюции Эйлера, впервые предложен американцем Д. Томпсоном в 1982 г. в профильном варианте. В 1990 г. британскими геофизиками во главе с А. Рэйдом разработан ее трехмерный вариант, нашедший широкое практическое применение. Основой методики является так называемое уравнение Эйлера для однородных функций.

Функцию $f(x, y, z)$ называют однородной функцией степени N , если для нее справедливо следующее соотношение: $f(tx, ty, tz) = t^N \cdot f(x, y, z)$. Рассмотрим, например, достаточно характерную для гравиразведки и магниторазведки функцию вида

$$f(x, y, z) = \frac{K}{r^N}, \quad (39.1)$$

где $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, $N=1,2,3,\dots$, а K не зависит от координат. Она, очевидно, является однородной функцией степени $-N$. Можно доказать, что для однородной функции степени N справедливо следующее уравнение Эйлера:

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = Nf. \quad (39.2)$$

Д. Томпсон предложил применять это уравнение для локализации особых точек функций, описывающих гравитационные и магнитные аномалии, в скользящем окне. Обозначим интерпретируемую функцию как U и предположим (как и в способе отношения производных), что в пределах небольшого окна ее поведение преимущественно объясняется ближайшей особой точкой, координаты которой суть x_0 , y_0 и z_0 . Тогда уравнение Эйлера можно преобразовать к виду:

$$(x - x_0) \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y} + (z - z_0) \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z} = N[F - U(x, y, z)], \quad (39.3)$$

где F – постоянный региональный фон, а N – так называемый структурный индекс. Обратим внимание на то, что структурный индекс N при данной записи соответствует степени однородности функции, равной $-N$.

Структурные индексы связаны со степенью затухания поля от источника изучаемого типа, который, в свою очередь, определяется типом искомой особенности. Например, из формулы (39.1) следует, что для линейных масс $N=1$, для точечных масс и дипольных линий $N=2$, для диполей $N=3$. Понятно, что наблюдаемое поле даже в небольшом окне описывается значительно более сложной функцией, нежели в формуле (39.1), поэтому, строго говоря, структурный фактор может рассматриваться только как некоторый эффективный параметр. В связи с этим на практике применяют и другие структурные факторы, в том числе $N=0,5$ и даже $N=0$. Последнее значение возникает в магниторазведке для модели типа наклонного уступа при некоторых сочетаниях параметров, а также в гравиразведке для моделей типа тонких пластов, в том числе, даек и силлов. В этом случае формулу (39.3) приходится заменять на следующую:

$$(x - x_0) \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y} + (z - z_0) \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z} = A, \quad (39.4)$$

где A – неопределенная константа, соответствующая F в формуле (39.3).

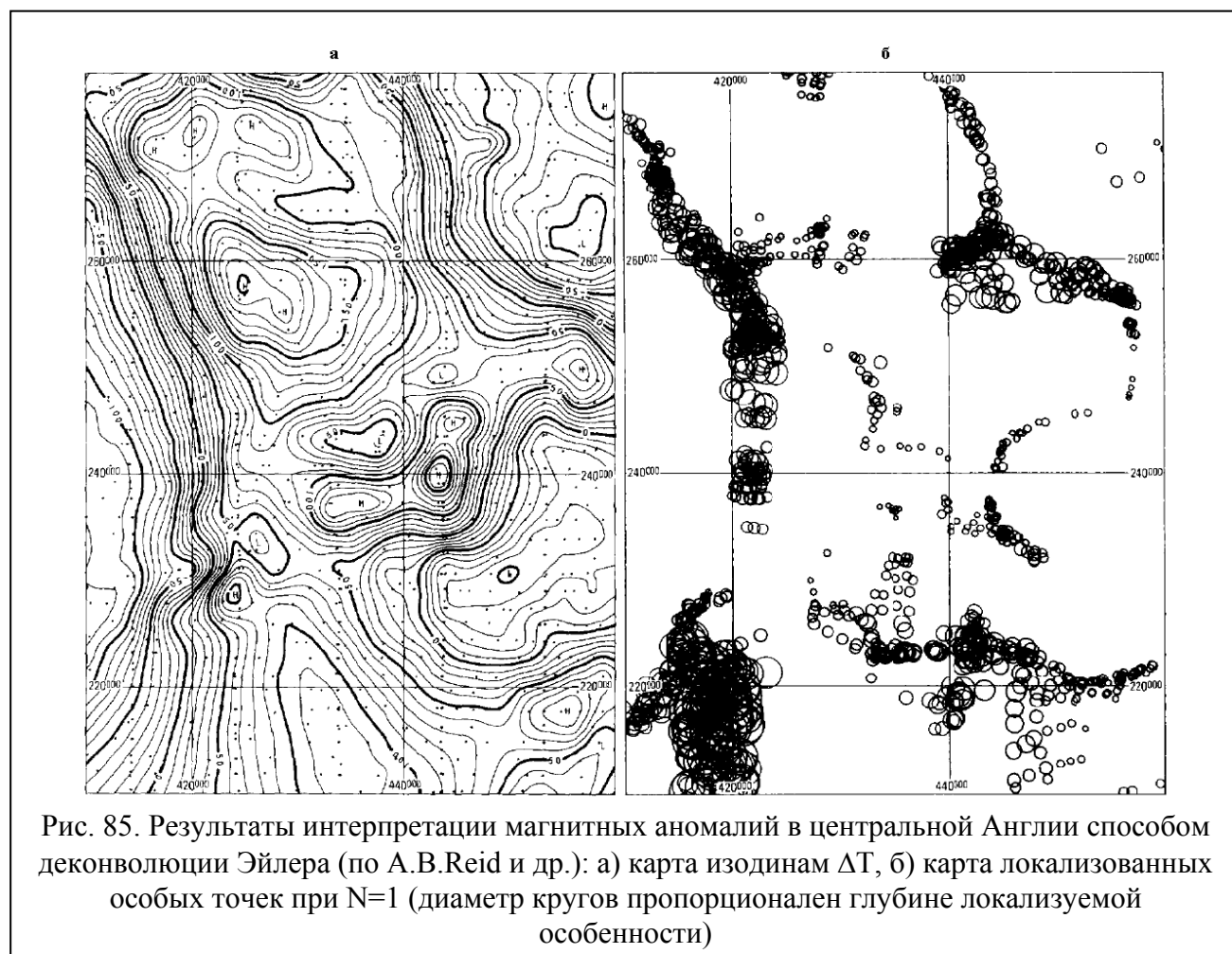


Рис. 85. Результаты интерпретации магнитных аномалий в центральной Англии способом деконволюции Эйлера (по A.B.Reid и др.): а) карта изодинам ΔT , б) карта локализованных особых точек при $N=1$ (диаметр кругов пропорционален глубине локализуемой особенности)

Будем считать, что уравнения (39.3) или (39.4) достаточно точно описывают поведение аномального поля в пределах небольшого скользящего окна. На практике обычно расчеты проводят по интерполированной квадратной сети и выбирают окно размерами 10×10 точек. Предварительно известными способами для всех возможных точек исходной сети рассчитываются значения всех трех производных наблюдаемого поля: $\partial U / \partial x$, $\partial U / \partial y$ и $\partial U / \partial z$. Тогда локализация особой точки с помощью деконволюции Эйлера при заданной величине

структурного индекса сводится к решению линейной обратной задачи, следующей из уравнений (39.3) или (39.4), относительно четырех неизвестных: x_0 , y_0 , z_0 и фона. При каждом расположении скользящего окна локализуется одна из особенностей, и в совокупности они образуют в плане множество точек, по которым можно судить о возможной природе источников аномального поля. Как правило, локализация выполняется для набора разнообразных структурных индексов, а полученные результаты синтезируются. Точность определения глубин источников данным методом оценивается примерно в 15%.

На рис. 85 показаны аномальное магнитное поле ΔT на одном из участков в центральной Англии и результаты его интерпретации способом деконволюции Эйлера при структурном индексе $N=1$. Локализованные особенности на карте показаны кругами, диаметр которых пропорционален глубине эквивалентных источников. Современные средства визуализации предусматривают представление результатов также в виде цветных точек, цвет которых характеризует глубину источника. На рисунке видно, что локализованные особенности преимущественно группируются в районах градиентных зон интерпретируемого поля, что в целом достаточно типично для данного способа.

Таким образом, способ деконволюции Эйлера является достаточно простым и легко реализуемым на современных компьютерах, что и послужило причиной его широкого распространения для решения разнообразных геологических задач. К рассмотренной методике в некотором смысле близка так называемая деконволюция Вернера, впервые предложенная С.Вернером в 1953 г. для определения параметров тонких пластин и в дальнейшем модифицировавшаяся многими исследователями. Она также фактически сводится к решению линейной обратной задачи при аппроксимации поля в скользящем окне выражениями типа рациональных дробей. М. Набигян и Р. Хансен указали на возможность унификации этих двух методик для трехмерных моделей.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие из особых точек функций, описывающих аномальные поля, определяются наиболее устойчиво?
 - а) в районе центра масс изучаемого объекта (36);
 - б) на верхней кромке изучаемого объекта (62);
 - в) на нижней кромке изучаемого объекта (88).
2. Как надо учитывать рельеф поверхности наблюдений при локализации особенностей?
 - а) не надо никак (71);
 - б) надо предварительно редуцировать поле на горизонтальную плоскость (72);
 - в) надо предварительно вычесть поле, коррелирующее с рельефом (73).
3. Какие особые точки имеются у функции, описывающей ускорение силы тяжести модели двумерного объекта с сечением в форме сегмента эллиптического цилиндра?
 - а) алгебраические точки ветвления в фокусах эллипса (24);
 - б) логарифмические точки ветвления в точках пересечения прямой с эллипсом (27);
 - в) те и другие (30).
4. Какие производные гравитационного потенциала целесообразно использовать при локализации особых точек для многоугольных объектов с помощью аппроксимационного продолжения в горизонтальный слой?
 - а) сам потенциал (39);
 - б) ускорение силы тяжести (48);
 - в) вторые производные гравитационного потенциала (57).

Контрольная сумма при правильных ответах – 221.

ГЛАВА 10. МЕТОДЫ ПОДБОРА И РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

§ 40. Основы метода подбора

Наиболее популярным методом интерпретации гравитационных и магнитных аномалий является метод подбора. Он заключается в построении интерпретационной модели, принадлежащей некоторому классу единственности, удовлетворяющей априорной информации и создающей поле, которое в некотором смысле является минимально отличающимся от наблюдаемого во всех точках или в некоторых из них. Применение метода подбора связано с разрешением трех взаимосвязанных проблем:

- 1) формирование содержательного класса единственности, учитывающего априорную информацию о возможном решении;
- 2) выбор критерия качества подбора наблюдаемого поля полем модели из заданного класса;
- 3) разработка алгоритма оптимизации модели в соответствии с выбранным критерием качества подбора.

В течение некоторого времени независимо развивались два основных направления применения метода подбора для решения обратных задач: детерминистское и статистическое. Характерные особенности этих направлений сводятся к следующему. Детерминистское направление рассматривает модели объектов и поля как элементы некоторых функциональных метрических пространств, в результате параметризации преобразующихся в точки многомерных евклидовых пространств. Конкретные модели помех при этом не вводятся, характеризуются лишь их нормы в метриках соответствующих пространств. Статистическое направление исходит из четкого определения моделей помех. Указанные направления удачно дополняют друг друга. Так решение первой из отмеченных проблем, а именно формирование класса единственности, производится почти исключительно в рамках детерминистского направления. В то же время вторая проблема - выбор критерия качества подбора - гораздо более проработана в рамках статистического направления. Третья проблема решается в обоих направлениях фактически однотипно. В настоящее время происходит синтез этих направлений: переход при подборе к моделям, обладающим как детерминистскими, так и статистическими чертами.

Детерминистский подход. В основе детерминистского подхода к решению обратных задач методом подбора лежит понятие квазирешения, предложенное В.К.Ивановым и приведенное выше в § 20. Напомним, что квазирешением уравнения $Dp = u$ на множестве $P \in R^n$ называется модель $p \in P \subset R^n$, минимизирующая невязку этого уравнения по норме пространства R^m :

$$\|u - Dp\|_{R^m} = \min. \quad (40.1)$$

Подчеркнем еще раз, что определяется не абстрактное квазирешение, а квазирешение на конкретном множестве P . В геофизических терминах это значит, что ищется квазирешение на множестве шаров, либо квазирешение на множестве призм, либо квазирешение на множестве контактных поверхностей и т.п.

Технологически удобнее искать решение не уравнения (40.1), а его естественного аналога:

$$\|u - Dp\|_{R^m}^2 = \min. \quad (40.2)$$

С учетом определения евклидовой нормы (19.6) мы фактически приходим к одной из разновидностей метода подбора, называемой методом наименьших квадратов.

В § 20 было указано, что с помощью метода квазирешений можно решать лишь ограниченный круг задач. В.К.Ивановым доказана теорема о том, что если множество искомых моделей - компактно в R^n , то при стремлении невязки к нулю квазирешение стремится к

точному решению P_T . Иначе говоря, если уменьшать погрешность подбора до нуля, то квазирешение, получаемое методом подбора на некотором множестве моделей, будет стремиться к точному решению лишь тогда, когда это множество компактно в R^n . Напомним, что множество $P \in R^n$ называется компактным в R^n , если из всякой последовательности его элементов можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу того же множества P . Множество P компактно в R^n тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено. Можно сказать, что метод квазирешений эффективен, если параметров модели немного и они изменяются в конечных пределах. Это, вообще говоря, естественно для обратных задач гравиразведки и магниторазведки, что и объясняет причины популярности метода подбора.

Практически задача нахождения приближенного квазирешения на компактном множестве в пространстве R^n заключается в нахождении минимума функции n переменных, каковыми являются искомые параметры. Вид минимизируемой функции $\Phi(p_1, p_2, \dots, p_n)$ определяется условием (40.2), которое в развернутом виде может быть записано следующим образом:

$$\Phi(p_1, p_2, \dots, p_n) = \sum_{k=1}^m [u_k - u_{mk}(p_1, p_2, \dots, p_n)]^2 = \min, \quad (40.3)$$

где u_k и u_{mk} - соответственно наблюдаемое поле и поле модели в k -ой точке наблюдения. В зависимости от характера решаемой задачи выделяют линейные, линеаризованные и нелинейные задачи подбора, особенностям решения которых будут посвящены следующие три параграфа.

Исторически первыми способами, использующими подбор для решения обратных задач, были так называемые "способы характерных точек", которые, видимо, правильнее называть способами подбора по характерным точкам. Затем были развиты методики подбора с помощью альбомов теоретических кривых и палеток, дающие возможность учитывать при подборе все наблюдаемые значения. Подбор стал осуществляться не только по графикам исходных полей, но и по графикам различных преобразований этих полей, например по амплитудному спектру, по автокорреляционной функции и т.п. С развитием электронно-вычислительной техники подбор все более автоматизировался и в настоящее время выполняется преимущественно на компьютерах. Тем не менее, простейшие оценки параметров элементарных моделей до сих пор могут оказаться полезными, особенно при формировании стартовых приближений интерпретационных моделей. Рассмотрим в качестве примеров несколько простейших способов подбора.

Одной из популярнейших интерпретационных моделей в гравиразведке является двумерный вертикальный уступ или, как его иначе называют – вертикальная ступень. Эта модель изображена на рис. 86. Она характеризуется четырьмя параметрами: глубиной верхней кромки $z=h$, глубиной нижней кромки $z=H$, координатой боковой кромки $x=d$ и избыточной плотностью, вычисляемой как разность плотностей пород справа и слева от уступа: $\sigma = \sigma_{\text{пр}} - \sigma_{\text{лев}}$.

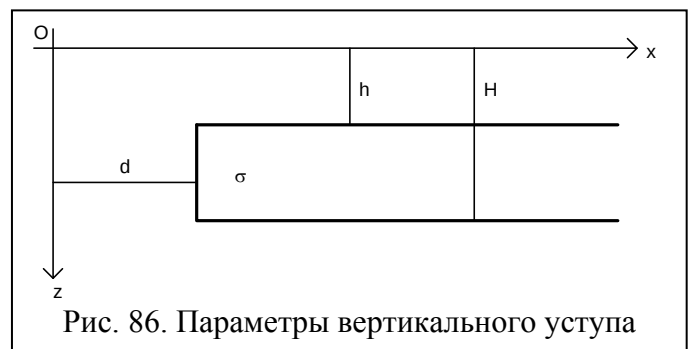


Рис. 86. Параметры вертикального уступа

Примем дневную поверхность плоской и совпадающей с осью абсцисс, тогда в каждой из точек наблюдения x поле уступа можно (с учетом направления оси z вниз) представить как частный случай поля произвольного многоугольника. Это приводит к следующей формуле для ускорения силы тяжести уступа:

$$g(x) = \gamma\sigma \left[\pi(H-h) + 2H \operatorname{arctg} \frac{x-d}{H} - 2h \operatorname{arctg} \frac{x-d}{h} + (x-d) \ln \frac{H^2 + (x-d)^2}{h^2 + (x-d)^2} \right]. \quad (40.4)$$

Продифференцировав (40.4), легко получить формулу для горизонтального градиента W_{xz} над уступом:

$$W_{xz}(x) = \gamma\sigma \ln \frac{H^2 + (x-d)^2}{h^2 + (x-d)^2}. \quad (40.5)$$

Вид графиков элементов гравитационного поля над вертикальным уступом показан на рис. 87.

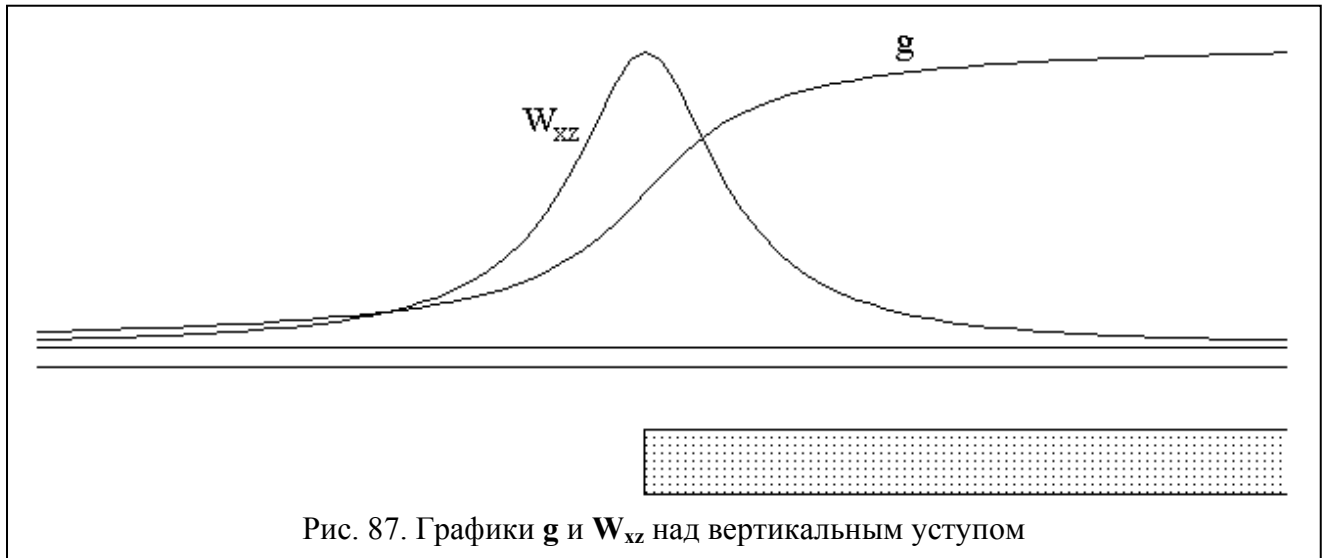


Рис. 87. Графики g и W_{xz} над вертикальным уступом

Популярность модели вертикального уступа базируется на том, что для нее имеет место единственность решения обратной задачи гравиразведки, то есть, если интерпретатор заранее знает, что наблюдаемое поле вызвано вертикальным уступом, все четыре параметра определяются непосредственно по этому полю. Покажем, как это можно сделать по характерным точкам графиков полей, причем, подчеркнем, что поле W_{xz} над уступом измерять не обязательно, его можно получить трансформацией исходного поля силы тяжести. Подход к решению этой частной задачи, вообще говоря, типичен для способов характерных точек.

Найдем вначале экстремум W_{xz} , приравняв к нулю производную от выражения (40.5):

$$W_{xxx}(x) = 2\gamma\sigma(x-d) \left[\frac{1}{H^2 + (x-d)^2} - \frac{1}{h^2 + (x-d)^2} \right] = 0. \quad (40.6)$$

Отсюда следует, что экстремум графика горизонтального градиента наблюдается при $x=d$, то есть непосредственно над уступом. В этом экстремуме

$$W_{xz}^{\max}(x) = 2\gamma\sigma \ln \frac{H}{h}. \quad (40.7)$$

Теперь найдем абсциссы точек графика W_{xz} , в которых значения равны половине максимального. Эти точки принято обозначать $x_{1/2}$, и элементарные вычисления показывают, что $x_{1/2} = \pm\sqrt{hH}$. Таким образом, в результате анализа графика W_{xz} мы получили три уравнения, связывающих параметры уступа с его характерными точками. Четвертое уравнение можно получить из анализа амплитуды графика g . Очевидно, при $x \rightarrow -\infty$ $g \rightarrow 0$, а при $x \rightarrow \infty$ $g \rightarrow 2\pi\gamma\sigma(H-h)$. Решив эту систему, можно получить все параметры уступа. На практике зачастую применяется еще одна характерная точка графика W_{xz} , в которой значение равно четверти максимального - ее обозначают как $x_{1/4}$. Введем обозначение

$$p = \frac{x_{1/4}^2 - x_{1/2}^2}{2x_{1/2}}, \quad (40.8)$$

с его помощью параметры h , H и σ представляются в следующем простом виде:

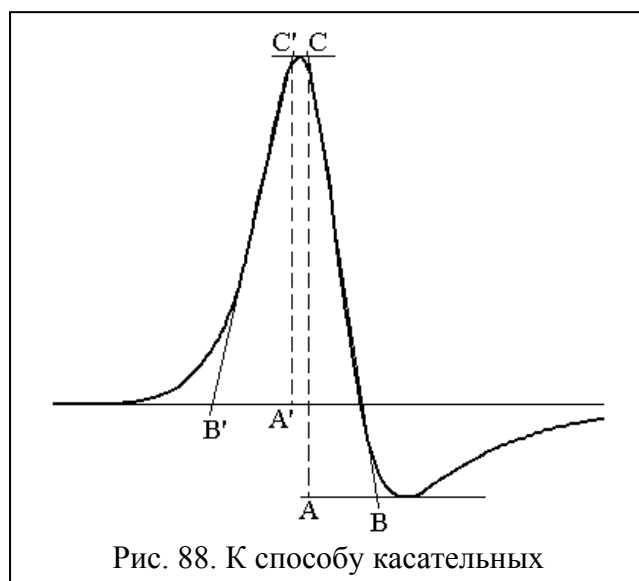
$$h = p - \sqrt{p^2 - x_{1/2}^2}, \quad (40.9)$$

$$H = p + \sqrt{p^2 - x_{1/2}^2}, \quad (40.10)$$

$$\sigma = \frac{W_{xz}^{\max}}{2\gamma \ln \frac{H}{h}}. \quad (40.11)$$

Для повышения точности определения параметров их на практике обычно находят, усредняя, по нескольким разным соотношениям.

В магниторазведке параметры элементарных моделей часто оценивают так называемым способом касательных, идея которого была впервые предложена Л.Петерсом. Существует большое количество его разновидностей, и одна из самых популярных – следующая. На графике магнитной аномалии проводят, как показано на рис. 88, касательные в экстремумах, точках перегиба, а также отмечают асимптоту. При этом характерные отрезки AB или $A'B'$ оказываются пропорциональными глубине залегания модели, а коэффициент пропорциональности – зависящим от ее формы. В частности, для продольно намагниченного тонкого пласта при интерпретации по аномалии Z глубина залегания его верхней кромки h



связана с характерным отрезком AB соотношением $h = 3\sqrt{3}AB/8 \approx 0,65 \cdot AB$. Для ряда других тел Ю.К.Грачевым, В.К.Пятницким и другими исследователями также вычислены соответствующие коэффициенты.

Компьютерные технологии, базирующиеся на детерминистском подходе, будут детально рассматриваться в следующих параграфах.

Статистический подход. Этот подход к решению обратных задач базируется, главным образом, на методе максимального правдоподобия, который при решении частных задач использовался еще с конца XVIII века, а в начале XX века был обобщен Роналдом Фишером (1890-1962). Пионерами разработки статистической концепции в теории решения обратных задач геофизики в нашей стране стали Ф.М.Гольцман и Т.Б.Калинина. За рубежом это направление развивалось в работах Дж.Франклина, А.Тарантолы, Б. Валетта и др.

В соответствии с методом максимального правдоподобия в качестве оценок искомых параметров источников надо принимать такие, при которых вероятнее всего получить именно тот набор значений полей, который наблюдался в действительности. Для этого, очевидно, необходимо задавать конкретные модели помех.

Обычно при статистическом подходе помеха, осложняющая, наблюдения, полагается аддитивной, то есть в принятых ранее обозначениях решаемое операторное уравнение принимает вид $u = Dp + \delta$, где δ – вектор помехи, считающейся в общем случае коррелированной. При профильных наблюдениях с равномерным шагом поведение помехи характеризуется ковариационной матрицей помех R (другими словами, матрицей вторых моментов

распределения вектора помех) размерами $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$, где $\mathbf{n}$, как и прежде, - число точек наблюдения. Р.Фишер предложил применительно к рассматриваемой задаче называть условную плотность распределения помехи функцией правдоподобия. В данном случае плотность распределения $\mathbf{L}(\delta)$ имеет следующий вид:

$$L(\delta) = 2\pi^{-n/2} |\mathbf{R}|^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \delta_k^T \mathbf{R}^{-1} \delta_k\right), \quad (40.12)$$

где $\delta_k = \mathbf{u}_n(\mathbf{x}_k) - \mathbf{Dp}(\mathbf{x}_k)$, $|\mathbf{R}|$ определитель ковариационной матрицы $\mathbf{R}$, а $\mathbf{R}^{-1}$ – матрица, обратная к ней. Практически удобнее искать максимум не самой $\mathbf{L}(\delta)$, а ее логарифма, при этом, понятно, коэффициенты на положение экстремума никак не влияют, и решение задачи сводится к виду:

$$-\sum_{k=1}^n \delta_k^T \mathbf{R}^{-1} \delta_k = \max. \quad (40.13)$$

Если здесь поменять знак в формуле, максимум, очевидно, станет минимумом, и аналог (40.13) примет следующий вид:

$$\sum_{k=1}^n \delta_k^T \mathbf{R}^{-1} \delta_k = \min. \quad (40.14)$$

Обратим внимание, что для некоррелированной помехи $\mathbf{R}^{-1}$ с точностью до множителя, определяемого дисперсией этой помехи, является единичной матрицей, и для этого частного случая критерий подбора (40.14) станет таким:

$$\sum_{k=1}^n \delta_k^T \delta_k = \min, \quad (40.15)$$

то есть полным аналогом соответствующего критерия в детерминистском подходе. Таким образом, детерминистский метод квазирешений с точки зрения статистики является оптимальным только для некоррелированных помех. Наличие же корреляции помех с точки зрения максимального правдоподобия делает метод квазирешений неоптимальным. На практике, однако, реальные статистические свойства помехи, осложняющей гравитационные и магнитные наблюдения, как правило, неизвестны, что в силу центральной предельной теоремы все равно заставляет статистиков чаще всего прибегать к модели некоррелированных помех, а, следовательно, и к тому же критерию подбора. Тем не менее, ранее в процессе интерпретации привлекались некоторые формальные модели помех, а в последнее время подобные разработки ведутся применительно к их фрактальным моделям, рассмотренным в § 1.

§ 41. Решение линейных задач подбора

Многие интерпретационные задачи гравиразведки и магниторазведки приводят к необходимости решения линейных задач подбора. Эти задачи, как было отмечено в § 20, отличаются тем, что оператор $\mathbf{D}$ решения прямой задачи в них фактически является прямоугольной матрицей $\mathbf{A}$, имеющей $\mathbf{m}$ строк и $\mathbf{n}$ столбцов. Модель $\mathbf{p}$ и исходные данные $\mathbf{u}$ при этом понимаются как векторы-столбцы, имеющие соответственно $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$ элементов.

Линейные задачи подбора обычно встречаются в процессе количественной интерпретации, когда требуется найти физические свойства совокупности объектов заданной формы и местоположения. Например, при моделировании геологических объектов по данным гравиразведки и магниторазведки часто бывает, что рассчитанное поле детально изученного участка не совпадает с наблюдаемым, причем характер различия полей указывает на возможность погрешностей в заданных значениях избыточной плотности или намагниченности. В этих случаях на некоторых эталонных участках или профилях приходится решать линейную задачу подбора, уточняя данные о физических свойствах.

Линейные задачи подбора являются важным элементом решения и нелинейных задач. Одна из методик интерпретации заключается в неформальном переборе вариантов геометрии объектов, совмещенном с решением для каждого из вариантов линейных задач относительно физических свойств и проверки получаемых результатов на непротиворечивость априорной информации. Еще шире применяется прием линеаризации, когда нелинейная задача сводится к решению последовательности линейных задач относительно поправок к предыдущему приближению.

Существует, наконец, достаточно общая задача определения физических свойств в кусочно-однородных сеточных моделях, сводящаяся к решению линейных задач подбора. Предположим, из априорной информации следует, что все источники аномального поля сосредоточены в некотором конечном объеме. В этом случае, разделяя формально этот объем на ряд тел простой формы, например, призм, можно свести решение обратной задачи к определению физических свойств этих тел, форма которых и положение в пространстве известны с абсолютной точностью. При решении этой задачи в общем случае встречаются существенные трудности, смысл которых рассмотрим ниже, но в ряде частных ситуаций, когда тела разнесены по горизонтали, этот подход может давать положительные результаты. К примеру, в районах неглубокого залегания кристаллического фундамента с крутопадающими пластами горных пород этот подход, называемый иногда методом сеток, дает возможность значительного упрощения интерпретации для xy -двумерных сред.

Чрезвычайно важно отметить, что к линейным задачам подбора относятся задачи определения физических свойств пород по аномалиям, осложненным региональным фоном. Если параметризовать фон в виде алгебраического полинома невысокой степени, то при решении обратной задачи можно найти одновременно и коэффициенты этого полинома, совместив разделение аномалий с их детальным количественным описанием.

Рассмотрим в качестве примера решение линейной задачи подбора по данным гравиразведки в следующей детерминистской постановке. Пусть известны значения гравитационной аномалии в m точках на поверхности Земли, при этом, вообще говоря, безразлично, является ли дневная поверхность горизонтальной или имеет сложную форму. Аномалии будем считать осложненными линейным региональным фоном, описываемым функцией $ax+by+c$ с неизвестными коэффициентами a , b , c . На основании априорной информации выбраны n гравитирующих объектов известной формы, плотности которых требуется определить.

Поле интерпретационной модели в k -ой точке с координатами (x_k, y_k, z_k) может быть с учетом линейного регионального фона представлено в форме $u_m(x_k, y_k, z_k) = ax_k + by_k + c + \sigma_1 \Gamma_1(x_k, y_k, z_k) + \dots + \sigma_n \Gamma_n(x_k, y_k, z_k)$, где $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ - известные значения, характеризующие в k -ой точке гравитационные поля заданных объектов с единичными избыточными плотностями. Квазирешение данной задачи может быть найдено путем минимизации квадрата невязки, записанной в соответствии с (40.3) в виде

$$\Phi(a, b, c, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = \sum_{k=1}^m \left[g(x_k, y_k, z_k) - ax_k - by_k - c - \sum_{i=1}^n \sigma_i \Gamma_i(x_k, y_k, z_k) \right]^2 = \min. \quad (41.1)$$

При этом в силу линейности оператора решения прямой задачи определение искомых параметров в вычислительном плане сводится к решению достаточно проработанных проблем линейной алгебры.

Наиболее распространенной при решении линейных обратных задач является ситуация, когда число точек наблюдения превышает число искомых параметров, в результате чего задача сводится к устойчивому решению переопределенной системы линейных алгебраических уравнений. Вместе с тем, иногда, когда интерпретационная модель оказывается столь сложной,

Рассмотрим вначале типовой случай, когда число точек наблюдения больше числа определяемых параметров, в нашем примере $m > n + 3$. Тогда, как было изложено в § 20, квази-решение можно получить, решая систему нормальных уравнений (20.6), которая получается из необходимых условий экстремума функции (41.1). Опустим для краткости обозначений пределы суммирования по $\mathbf{k}$, а также аргументы функций Γ и обозначим $g_k = g(x_k, y_k, z_k)$, тогда система для нашей задачи примет следующий вид:

Матрица коэффициентов системы является симметричной, на ее главной диагонали расположены заведомо положительные числа. Решая систему стандартными методами, например, методом исключения Гаусса, получим значения избыточных плотностей объектов и коэффициенты, описывающие региональный фон.

$$ax_m + by_m + c + \sigma_1 \Gamma_1(x_m, y_m, z_m) + \dots + \sigma_n \Gamma_n(x_m, y_m, z_m) = g(x_m, y_m, z_m).$$

где $\mathbf{A}$ - прямоугольная матрица размерами $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$. Для ее решения надо умножить обе части матричного уравнения слева на матрицу $\mathbf{A}^T$, транспонированную к матрице $\mathbf{A}$:

Напомним, что транспонированной называется матрица, являющаяся отражением исходной относительно главной диагонали, то есть строки матрицы $\mathbf{A}$ превращаются в столбцы матрицы $\mathbf{A}^T$ и наоборот. Матрица $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ является квадратной симметричной матрицей размерами $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$ и имеющей тот же ранг, что и матрица $\mathbf{A}$. Легко убедиться, что система (41.5) и есть система нормальных уравнений, получаемая в результате минимизации невязки уравнения (41.4). В нашем примере система уравнений (41.2) фактически есть частный случай системы (41.5). Таким образом, оба рассмотренных подхода приводят к решению одной и той же системы линейных алгебраических уравнений.

К решению этой же системы фактически сводится решение линейной задачи подбора в рамках статистического направления. В случае некоррелированной помехи, распределенной по нормальному закону и имеющей нулевое математическое ожидание, метод максимального правдоподобия также приводит к необходимости получения оптимального решения из системы (41.5). Матрицу коэффициентов системы нормальных уравнений $A^T A$, каждый элемент которой поделен на дисперсию помехи ϵ^2 , в рамках статистического направления принято называть информационной матрицей параметров или матрицей Фишера. Важнейшим достижением статистического подхода является априорная оценка качества интерпретации, проводимая путем построения ковариационной матрицы параметров B , являющейся обратной к информационной матрице, то есть

$$B = \epsilon^2 (A^T A)^{-1}. \quad (41.6)$$

Ковариационная матрица B является квадратной симметричной матрицей с элементами B_{ij} , причем i и j изменяются от 1 до n . Диагональные элементы ковариационной матрицы B_{ii} имеют смысл дисперсии оценки i -го параметра, а квадратный корень из B_{ii} соответственно характеризует среднюю квадратическую погрешность его оценки. Внедиагональные элементы ковариационной матрицы $B_{ij} = B_{ji}$, где $i \neq j$, характеризуют корреляционные связи между оценками i -го и j -го параметров. Они показывают, насколько устойчиво определяются данные параметры. Если их изменения влияют на аномальное поле почти одинаково, то они по этому полю будут определяться неустойчиво, так как изменение поля из-за вариации одного из параметров может компенсироваться вариацией второго. Для количественной оценки данного эффекта вводят нормированные коэффициенты корреляции:

$$b_{ij} = \frac{B_{ij}}{\sqrt{B_{ii}} \sqrt{B_{jj}}}. \quad (41.7)$$

Если b_{ij} близок к нулю, то i -ый и j -ый параметры определяются совместно достаточно устойчиво. Если же модуль нормированных корреляционных коэффициентов близок к единице, то совместное определение данных параметров, основанное на выявлении различий их влияния на аномальное поле, становится затруднительным. Таким образом, ковариационная матрица параметров позволяет выяснить, какие из параметров определяются устойчиво, а какие неустойчиво, а также оценить предельно возможную точность оценки параметров. Вычисление элементов ковариационной матрицы с помощью обращения информационной матрицы Фишера может осуществляться любыми из известных способов, разработанных в линейной алгебре.

Рассмотрим решение линейной задачи подбора на одном из примеров. В пределах Московской синеклизы на одном из интерпретационных профилей длиной около 12 км была проведена гравиметровая съемка с шагом 100 м. График аномалий Буге, определенных по данным этой съемки, показан на рис. 89. Амплитуда аномалии составила около 10 мГал. Данная форма полученной аномалии качественно может объясняться как погружением кристаллического фундамента, расположенного в пределах изучаемого участка на глубинах около 1 км, так и систематическим изменением плотности пород фундамента при практически неизменной глубине его залегания. Применение методов особых точек, рассмотренных в предыдущей главе, доказало, что поверхность фундамента здесь практически горизонтальна. При этом особые точки отметили местоположение границ блоков в фундаменте, на основе чего была предложена x -одномерная интерпретационная блочная модель, изображенная на рис. 83. Плотность базового блока была принята нулевой, а избыточные по отношению к нему плотности 5 блоков и постоянный фон были подобраны вышеописанным способом. Среднеквадратическая погрешность подбора поля составила 0,27 мГал, график подобранного

поля также показан на рис. 78. Подобранные параметры и нормированные коэффициенты корреляции между ними сведены в таблицы 6 и 7.

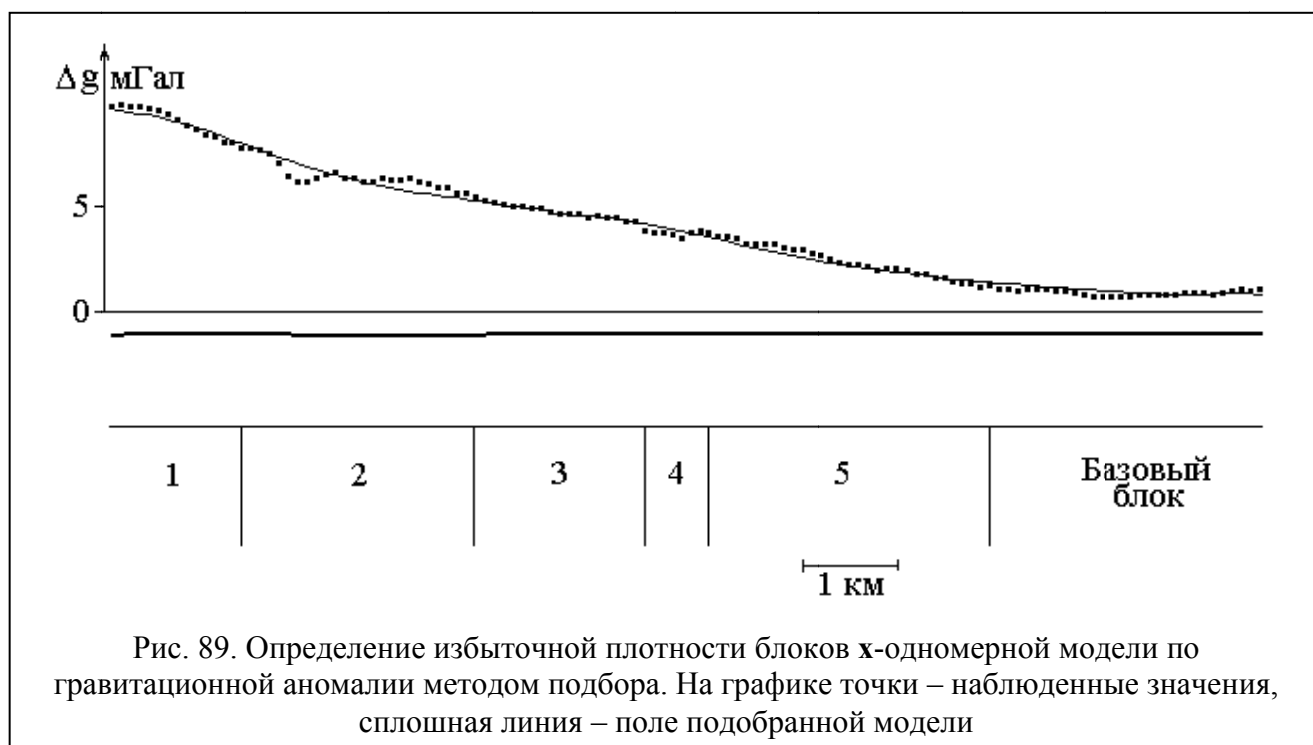


Таблица 6.

Подобранные избыточные плотности блоков и постоянный фон

$\Delta\sigma_1$	$0,195 \pm 0,003 \text{ г/см}^3$
$\Delta\sigma_2$	$0,055 \pm 0,005 \text{ г/см}^3$
$\Delta\sigma_3$	$0,073 \pm 0,009 \text{ г/см}^3$
$\Delta\sigma_4$	$0,089 \pm 0,022 \text{ г/см}^3$
$\Delta\sigma_5$	$0,010 \pm 0,004 \text{ г/см}^3$
Фон	$0,81 \pm 0,08 \text{ мГал}$

Таблица 7.

Матрица нормированных коэффициентов корреляции между параметрами

	$\Delta\sigma_1$	$\Delta\sigma_2$	$\Delta\sigma_3$	$\Delta\sigma_4$	$\Delta\sigma_5$	Фон
$\Delta\sigma_1$	*	0,6	0,4	0,3	0,3	0,4
$\Delta\sigma_2$	0,6	*	0,6	0,4	0,0	0,1
$\Delta\sigma_3$	0,4	0,6	*	0,8	0,4	0,2
$\Delta\sigma_4$	0,3	0,4	0,8	*	0,6	0,2
$\Delta\sigma_5$	0,3	0,0	0,4	0,6	*	0,7
Фон	0,4	0,1	0,2	0,2	0,7	*

Полученные результаты показывают, что все параметры за исключением избыточной плотности 4-го блока определяются достаточно устойчиво. Плотность же 4-го блока из-за его небольшой видимой мощности определяется значительно менее точно сама и, кроме того, в условиях сильной корреляции с плотностью 3-го блока уменьшает точность определения последней. Таким образом, для повышения устойчивости интерпретации целесообразно объединить 3-й и 4-й блоки, после чего повторить подбор.

Чрезвычайно важной для понимания сущности метода подбора является упомянутая задача определения физических свойств в кусочно-однородных сеточных моделях. В ее решении наиболее ярко проявляется тот факт, что подбор аномального поля полем некоторой модели в общем случае вовсе не гарантирует, что полученное в результате распределение физических свойств является именно тем, которое создало данное поле. Рассмотрим пример, построенный А.И.Кобруновым. На рис. 90а показана аномалия силы тяжести двумерного тела с сечением в форме квадрата. Избыточная плотность тела составляет $0,6 \text{ г/см}^3$. Для определения его формы по полю попробуем применить метод сеток. Будем считать, что изучаемое тело заведомо расположено внутри показанного на том же рисунке контура. Разбивая область, ограниченную данным контуром, на 25 и даже на 100 квадратных клеток и решая линейную задачу подбора для определения избыточных плотностей в каждой из них, мы, достаточно хорошо аппроксимируя поле, тем не менее не получаем ожидаемого распределения плотностей. Нам кажется, что в тех клетках, где расположено реальное тело, мы должны получить избыточные плотности $0,6 \text{ г/см}^3$, а избыточная плотность внешних по отношению к телу клеток должна быть равна нулю. На самом деле распределение избыточных плотностей внутри контура оказывается таким, как показано на рис. 90б, то есть абсолютно не совпадающим с реальным. Теоретическое объяснение этого факта дано А.И.Кобруновым, В.Н.Страховым, С.М.Оганесяном и А.С.Маргулисом. Они доказали, что минимум невязки для сеточных моделей достигается на проекциях гармонических функций на заданную сетку. Как известно, гармонические, то есть удовлетворяющие уравнению Лапласа, функции могут достигать своих максимальных и минимальных значений только на границе области своего определения. Именно это мы и видим на рис. 90б.

Рассмотренный пример показывает, что сеточная модель весьма близка к такому множеству, которое не является компактным в R^n . В силу этого реальное решение, то есть распределение избыточной плотности масс внутри сетки $\sigma(x, z)$, оказывается представимым в виде суммы двух распределений:

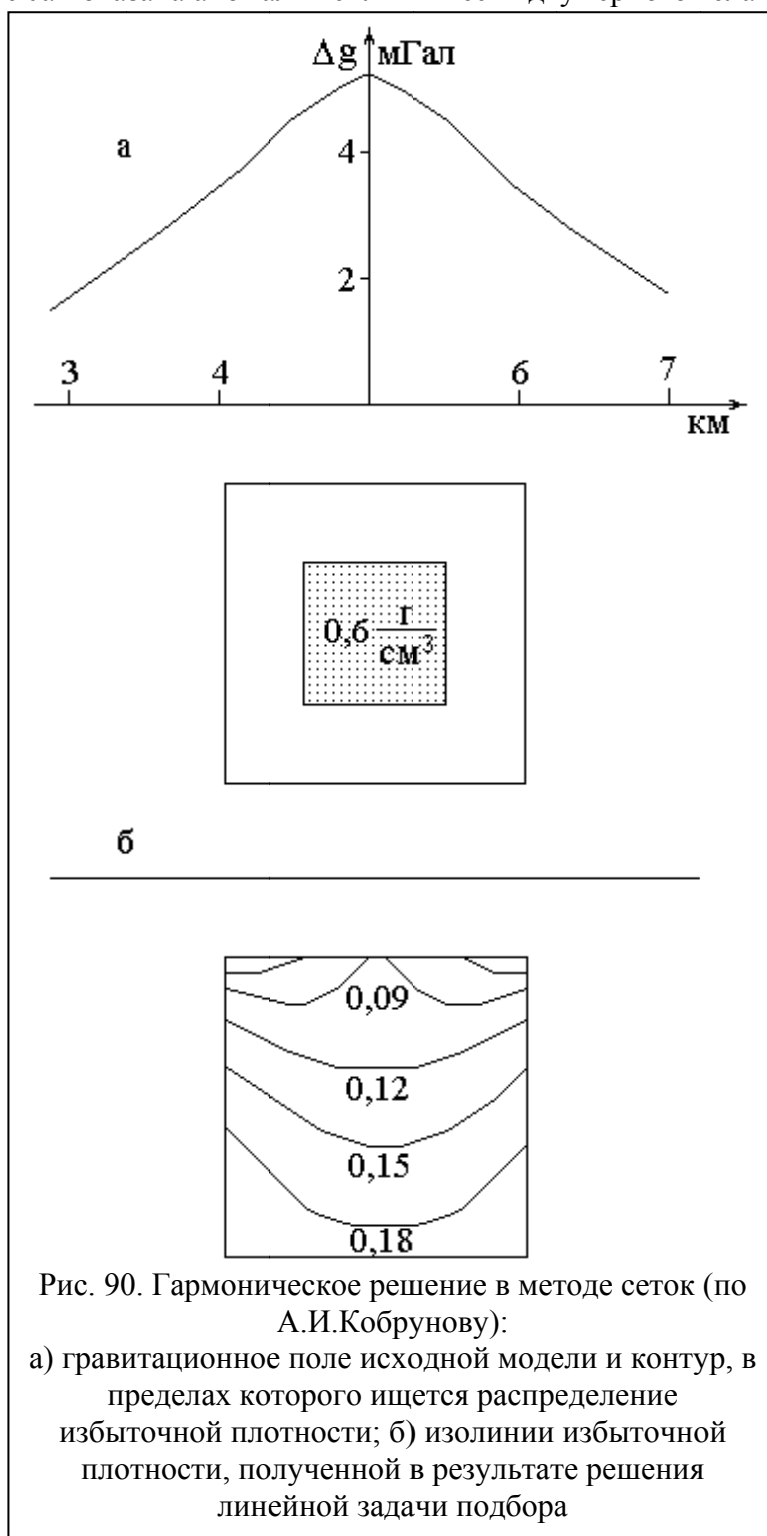


Рис. 90. Гармоническое решение в методе сеток (по А.И.Кобрунову):

а) гравитационное поле исходной модели и контур, в пределах которого ищется распределение избыточной плотности; б) изолинии избыточной плотности, полученной в результате решения линейной задачи подбора

$$\sigma(x, z) = \sigma_1(x, z) + \sigma_2(x, z). \quad (41.8)$$

Здесь $\sigma_1(x, z)$ - гармоническое распределение плотности внутри заданного контура: такое, что $\Delta\sigma_1(x, z) = 0$, а $\sigma_2(x, z)$ - распределение плотности, не создающее внешнего аномального поля, другими словами, аннигилятор. В результате решение линейной задачи подбора с минимальной невязкой оказывается гармоническим. Таким образом, при решении с помощью метода подбора обратных задач на априорно формируемых сложных и гибких модельных конструкциях надо весьма осторожно относиться к получаемым результатам. Может оказаться так, что минимум невязки достигается на геологически бессодержательных объектах. Это относится как к линейным, так и к нелинейным задачам подбора. Преодолеть этот эффект можно лишь используя метод регуляризации.

Подводя итоги рассмотрения линейных задач подбора, отметим, что эти задачи имеют важное значение. Для их устойчивого решения необходимо, чтобы объекты, физические свойства которых определяются, не располагались друг над другом как в методе сеток, дабы не появлялась возможность компенсационных эффектов, результатом которых окажется бессмысленность получаемой модели. Наилучшие результаты при этом получаются, естественно, при интерпретации в рамках x -одномерных и xz -двумерных моделей. Число определяемых параметров должно быть менее числа точек, чтобы система нормальных уравнений получалась совместной. Случай, когда число точек наблюдения меньше числа определяемых параметров будет рассмотрен в следующем параграфе при изучении линеаризованных задач подбора, где он имеет большее значение.

§ 42. Решение линеаризованных задач подбора

Нелинейные задачи подбора являются наиболее распространенными. Необходимость в их решении возникает обычно тогда, когда требуется определить форму источника аномального поля из заданного компактного класса единственности. Особенность решения нелинейных задач подбора состоит в том, что их квазирешение трудно находить из системы нормальных уравнений так, как это делается при решении линейных задач. Дело в том, что нормальные уравнения, получаемые из необходимых условий экстремума функции многих переменных, обычно являются нелинейными и даже трансцендентными, а для решения таких систем нет столь же простых средств, как для систем линейных алгебраических уравнений. В связи с этим решение нелинейных задач обычно осуществляется путем построения минимизирующей последовательности моделей, то есть выбирается начальное приближение, которое затем модифицируется вплоть до получения минимума невязки. В настоящее время известно достаточно много способов построения подобных последовательностей, ряд из них будет рассмотрен в следующем параграфе. Здесь же мы разберем один из наиболее популярных подходов, сводящийся к линеаризации оператора решения прямой задачи и применению для построения минимизирующей последовательности развитого аппарата решения линейных задач.

Суть данного подхода состоит в сведении решения исходной нелинейной задачи к последовательному решению линейных задач определения поправок к предыдущему приближению. Пусть задано начальное приближение p_0 , и нам требуется найти поправку $\Delta p = p - p_0$ к нему, такую, чтобы невязка уравнения $Dp = u$ в точке p была бы меньше, нежели в точке p_0 . Если нас устраивает, что шаг продвижения к квазирешению будет маленьким, а количество таких шагов будет большим, мы иногда можем пренебречь нелинейностью и считать, что на каждом этапе решается линейная задача для этих поправок:

$$A\Delta p = u - Dp_0 \quad (42.1)$$

или

$$A\Delta p = \Delta u. \quad (42.2)$$

Оператор A представляет собой матрицу размерами $m \times n$, элементы которой фактически являются частными производными функции, описывающей поле начальной модели, в i -ой точке наблюдения по j -ому параметру. В большинстве обратных задач построение линеаризованного оператора A по точному D не представляет сложности. Более того, линеаризованный оператор зачастую может быть построен даже тогда, когда точный оператор невозможно представить в явном виде, например, когда он задается как результат решения интегрального уравнения. Наиболее актуально это для задач магниторазведки сильномагнитных тел с учетом эффекта размагничивания.

Для решения системы (42.2) предложено большое число разнообразных методов. Если число точек наблюдения m больше числа искомых параметров n , ее можно решать способами, изложенными в предыдущем параграфе. Если же $m < n$, то получаемая система, очевидно, оказывается имеющей бесконечно много решений. В этом случае для отбора из множества решений требуемого квазирешения необходимо введение дополнительных условий. Наиболее естественным может считаться условие, заключающееся в требовании минимальной нормы искомого квазирешения в пространстве R^n . Действительно, если уж мы пошли на линеаризацию и на продвижение к квазирешению малыми шагами, то и надо потребовать, чтобы последующее приближение минимально отличалось от предыдущего. Введение такого условия приводит к методу решения линеаризованных задач, называемому методом Бэкуса-Гильберта. Дж.Бэкус и Ф.Гильберт предложили этот метод в 1967 году для решения обратных задач сейсмологии, позже он применялся для решения обратных задач в разных геофизических методах. Вместе с тем, анализ показывает, что метод Бэкуса-Гильберта фактически является частным случаем предложенного в 1920 году Е.Муром и независимо, но позже Р.Пенроузом так называемого метода псевдообращения. Именно метод псевдообращения является в настоящее время ведущим при решении линеаризованных задач подбора, а его основой является построение псевдообратной матрицы.

Как известно, для квадратной и невырожденной матрицы A можно построить обратную матрицу A^{-1} . Если же A - прямоугольная матрица размеров $m \times n$ ($m \neq n$) или квадратная, но вырожденная, то она не имеет обратной, и символ A^{-1} для нее не имеет смысла. Вместе с тем для нее можно построить псевдообратную матрицу A^+ , которая обладает некоторыми свойствами обратной матрицы. Более того, если матрица A квадратная и невырожденная, то ее псевдообратная матрица совпадает с обратной.

Рассмотрим следующее матричное уравнение:

$$AXA = A. \quad (42.3)$$

Если A - квадратная и невырожденная матрица, то это уравнение имеет единственное решение $X = A^{-1}$. Если же A - прямоугольная матрица размеров $m \times n$, то искомое решение X имеет размеры $n \times m$. Оно определяется неоднозначно, так как в общем случае (42.3) имеет бесконечное множество решений. Однако, среди них имеется лишь одно, отличающееся тем, что его строки и столбцы являются линейными комбинациями соответственно строк и столбцов транспонированной матрицы A^T . Это решение называется псевдообратной матрицей для A и обозначается A^+ . Отметим, что определение дано для матриц с вещественными элементами - если же элементы являются комплексными числами, то в определении транспонированную матрицу надо заменить на сопряженную.

Важнейшим свойством псевдообратной матрицы является то, что она представляет собой наилучшее с точки зрения метода наименьших квадратов приближенное решение матричного уравнения

$$AX = E, \quad (42.4)$$

где E - единичная матрица m -го порядка. Именно в силу этого свойства получаемое с помощью псевдообратной матрицы решение уравнения (42.2), а именно

$$\Delta p = A^+ \Delta u, \quad (42.5)$$

имеет минимальную норму в пространстве R^n .

Для построения псевдообратной матрицы можно воспользоваться так называемым скелетным разложением матрицы A . Если матрица A размеров $m \times n$ имеет ранг r , то она может быть представлена в виде произведения $A=BC$, где B - матрица размеров $m \times r$, а C - соответственно матрица размеров $r \times n$, причем ранги этих матриц также равны r . Для этого в качестве столбцов B достаточно, например, взять r линейно независимых столбцов исходной матрицы A . Тогда коэффициенты линейных комбинаций, образующих столбцы матрицы A из столбцов B , будут являться столбцами матрицы C . Поскольку B и C имеют максимально возможный ранг, то квадратные матрицы $B^T B$ и CC^T являются невырожденными, и для них существуют обратные матрицы $(B^T B)^{-1}$ и $(CC^T)^{-1}$. Но тогда легко получить псевдообратные матрицы для B и C :

$$\begin{aligned} B^+ &= (B^T B)^{-1} B^T, \\ C^+ &= C^T (CC^T)^{-1}, \end{aligned} \quad (42.6)$$

после чего очевидно, что

$$A^+ = C^+ B^+ = C^T (CC^T)^{-1} (B^T B)^{-1} B^T. \quad (42.7)$$

Чрезвычайно важно подчеркнуть, что несмотря на многовариантность разложений $A=BC$, псевдообратная матрица A^+ определяется формулой (42.7) однозначно.

Неоднозначность скелетного разложения $A=BC$ заставляет искать среди возможных разложений наиболее эффективное, каковым оказывается так называемое сингулярное разложение. Известно, что все собственные числа симметричной матрицы вещественны, а из ее собственных векторов в евклидовом пространстве можно составить ортонормальный базис. Ортогональные матрицы в данном случае ценны тем, что обратные к ним совпадают с транспонированными, и это значительно упрощает построение псевдообратной матрицы.

Сингулярное разложение произвольной прямоугольной матрицы A размеров $m \times n$ может быть записано в виде

$$A = B \Sigma C^T, \quad (42.8)$$

где B - ортогональная матрица размеров $m \times m$, C - ортогональная матрица размеров $n \times n$, а матрица Σ размеров $m \times n$ является диагональной, причем первые r элементов ее главной диагонали (r - ранг матрицы A) являются положительными сингулярными числами, а остальные равны нулю. Для нахождения матриц B , C и Σ необходимо решить следующую систему матричных уравнений:

$$\begin{aligned} AC &= B \Sigma, \\ A^T B &= B \Sigma^T. \end{aligned} \quad (42.9)$$

Умножая обе части первого из этих уравнений слева на A^T , а обе части второго уравнения слева на A , получим

$$\begin{aligned} A^T A C &= C \Sigma^2, \\ A A^T B &= B \Sigma^2. \end{aligned} \quad (42.10)$$

Отсюда следует, что столбцы матрицы C являются собственными векторами матрицы $A^T A$, а столбцы матрицы B - собственными векторами матрицы $A A^T$. Сингулярные числа представляют собой квадратные корни из собственных чисел матриц $A^T A$ и $A A^T$. Отметим, что ненулевые собственные значения этих матриц всегда совпадают. В связи с ортогональностью матриц B и C из (42.7) следует, что псевдообратная матрица может быть представлена в виде

$$A^+ = C\Sigma^{-1}B^T, \quad (42.11)$$

причем диагональная матрица Σ^{-1} размеров $\mathbf{n} \times \mathbf{m}$ имеет в качестве первых $\mathbf{r}$ элементов главной диагонали числа, обратные к сингулярным.

Таким образом, для решения уравнения (42.2) необходимо получить сингулярное разложение матрицы $\mathbf{A}$, являющейся линейризованным оператором решения соответствующей прямой задачи, и, вычислив по формуле (42.11) псевдообратную матрицу A^+ , найти поправку $\Delta \mathbf{p}$ к начальному приближению $\mathbf{p}_0$ по формуле

$$\Delta \mathbf{p} = A^+ (\mathbf{u}_0 - D\mathbf{p}_0), \quad (42.12)$$

причем полученная поправка $\Delta \mathbf{p}$ будет иметь минимальную норму в R^n . При удачном выборе начального приближения через несколько шагов можно найти искомое квазирешение.

Сингулярное разложение дает возможность получения важной информации о решении, для чего анализируются сингулярные числа. Следует отметить, что сингулярное разложение обычно представляется в таком виде, что сингулярные числа располагаются по главной диагонали матрицы Σ в порядке убывания. Максимальное сингулярное число является квадратичной нормой матрицы $\mathbf{A}$:

$$\sigma_{\max}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_2, \quad (42.13)$$

оно показывает, насколько максимально может увеличиться норма произвольного вектора после умножения на него слева матрицы $\mathbf{A}$. Норму псевдообратной матрицы определяет, очевидно, минимальное сингулярное число матрицы $\mathbf{A}$. Отношение максимального сингулярного числа к минимальному называют числом обусловленности матрицы $\mathbf{A}$:

$$c(\mathbf{A}) = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}}. \quad (42.14)$$

Оно важно тем, что характеризует устойчивость решения к возмущениям правой части решаемого уравнения, то есть к помехам:

$$\frac{\|\Delta \mathbf{p}\|}{\|\mathbf{p}\|} \leq c(\mathbf{A}) \frac{\|\Delta \mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|}. \quad (42.15)$$

Если число обусловленности велико, то даже небольшая помеха в исходном поле может приводить к большому изменению решения, то есть к его неустойчивости.

Число обусловленности объясняет, почему нормальные уравнения метода наименьших квадратов $A^T A \mathbf{p} = A^T \mathbf{u}$ так трудно решать. Дело в том, что число обусловленности $c(A^T A)$, как следует из (42.10), является квадратом числа обусловленности $c(\mathbf{A})$. Таким образом, даже при $\mathbf{m} > \mathbf{n}$ для решения линейных и линейризованных задач подбора гораздо лучше использовать сингулярное разложение исходной матрицы $\mathbf{A}$, нежели формировать систему нормальных уравнений и решать ее методом Гаусса. Конечно, применение сингулярного разложения при этом не снимает проблем, связанных с неоднозначностью и с возможным получением гармонических решений. Возможность получения гармонических решений не исключена и при решении линейризованных задач. Эта проблема еще ожидает своего конструктивного разрешения.

Анализ сингулярных чисел дает также возможность улучшения параметризации решаемой задачи. Если ранг $\mathbf{r}$ матрицы $\mathbf{A}$ оказывается меньшим, нежели число искомых параметров $\mathbf{n}$, то часть из этих параметров оказывается связанной, и они не могут быть найдены независимо от других. Это свидетельствует о неудачной параметризации и о необходимости ее корректировки. Иногда для введения новой параметризации пользуются линейными комбинациями исходных параметров, вводимыми формулой

$$\mathbf{p}^* = C^T \mathbf{p}. \quad (42.16)$$

Эти комбинации фактически представляют собой результаты весового осреднения исходных параметров, причем в качестве весов принимаются собственные векторы матрицы $A^T A$. Однако, столь формальный подход не всегда эффективен. Целесообразнее заново параметризовать задачу, учитывая возможности определения каждого из параметров.

Применение сингулярного разложения дает возможность повышения устойчивости поиска квазирешения за счет "загрубления" псевдообратной матрицы. Дело в том, что малые собственные значения соответствуют наименее устойчиво определяемым поправкам к искомым параметрам. Общая стратегия поиска линеаризованного решения подсказывает в этом случае для сохранения минимальных отличий от предыдущего приближения вообще отказаться от корректировки неустойчиво определяемых параметров. Для этого малые сингулярные числа округляются до нуля, в результате чего уменьшается ранг матрицы A . Если рассмотреть числа обусловленности исходной и "загрубленной" матриц, можно убедиться, что число обусловленности "загрубленной" матрицы из-за отбрасывания минимальных сингулярных чисел уменьшилось, то есть данный прием действительно повышает устойчивость. На следующем этапе задача снова решается для всех параметров, но не исключено, что снова потребуются "загрублять" псевдообратную матрицу, хотя и за счет отказа от корректировки других параметров модели. В целом данный прием позволяет повысить устойчивость построения минимизирующей последовательности, уменьшить число требуемых итераций. В случае неудачной исходной параметризации указанный прием может также помочь в выявлении неустойчиво определяемых параметров и изменении параметризации.

Таким образом, применение псевдообращения при решении линеаризованных задач подбора во многих случаях дает возможность достаточно удобно и эффективно находить искомое квазирешение.

§ 43. Решение нелинейных задач подбора

Применение линеаризации при решении нелинейных задач подразумевает, как мы убедились, стратегию продвижения от начального приближения к искомому квазирешению небольшими шагами за большое число итераций, что далеко не всегда устраивает интерпретатора. В связи с этим множество методов решения нелинейных задач направлено на уменьшение числа итераций за счет выбора иных стратегий построения минимизирующей последовательности. Рассмотрим сначала методы поиска квазирешения, не учитывающие возможных ограничений на параметры.

Основной идеей, заложенной в методы решения нелинейных задач, является сведение поиска минимума функции многих переменных к последовательному поиску минимума на прямых в R^n , то есть к определению минимума функции одной переменной. Для этого необходимо определить направление прямой, задаваемое n -мерным вектором w , и расстояние l , на которое мы должны переместиться в R^n от точки начального приближения по направлению w , чтобы найти минимум на данной прямой. Математически это можно выразить так: переход от k -го приближения p^k к $(k+1)$ -ому приближению p^{k+1} осуществляется по формуле:

$$p^{k+1} = p^k - l_k w^k. \quad (43.1)$$

Знак "минус" в формуле поставлен из-за того, что направление w обычно задается как направление возрастания минимизируемой функции. Для каждого из определяемых параметров $p_1, p_2, \dots, p_n$ можно соответственно записать:

$$\begin{aligned} p_1^{k+1} &= p_1^k - l_k w_1^k, \\ p_1^{k+1} &= p_1^k - l_k w_1^k, \\ &\dots\dots\dots \\ p_1^{k+1} &= p_1^k - l_k w_1^k. \end{aligned} \quad (43.2)$$

Многочисленные методы поиска функций многих переменных включают в себя идентичные блоки. Фактически для описания алгоритма минимизации надо изложить следующие его элементы:

- 1) выбор направления поиска $(k+1)$ -го приближения по k -ому;
- 2) определение расстояния от k -го приближения до $(k+1)$ -го;
- 3) критерии прерывания построения минимизирующей последовательности.

Рассмотрим вначале основные методы определения направления поиска минимума, которые можно подразделить на три группы:

- а) методы, не использующие вычисления производных (иногда их называют прямыми методами);
- б) методы, использующие первые производные минимизируемой функции;
- с) методы, использующие первые и вторые производные минимизируемой функции.

Простейшим из методов, не использующих производных, является метод покоординатного спуска. Он заключается в том, что сначала функция минимизируется по параметру p_1 , причем другие переменные считаются фиксированными. Далее фиксируются все параметры, кроме p_2 , по которому минимизируется функция и т.д. После того, как минимизация по всем переменным завершена, можно повторить подобный цикл еще один или несколько раз.

Неоднократно предлагались различные усовершенствования этого метода. В частности, можно из исходной точки попытаться осуществить спуск во всех возможных направлениях координатных осей, выбирая в качестве следующего приближения то, где уменьшение невязки наибольшее. Метод покоординатного спуска обладает рядом существенных недостатков, в частности, может остановиться в точке, где минимизируемая функция имеет ребро, не совпадающее по направлению ни с одной из координатных осей. Вместе с тем, его простота постоянно привлекает к себе внимание геофизиков.

Среди методов, не использующих производных, в гравиразведке и магниторазведке для решения разнообразных задач наиболее широко применяется метод Нелдера-Мида или, как его часто называют, метод деформируемого многогранника. Он заключается в следующем. Для обнаружения минимума в пространстве R^n вначале выбирают $n+1$ точку, расположенные так, чтобы они образовали в R^n небольшой по размерам многогранник, называемый симплексом.

Точку, координаты которой в R^n являются средними арифметическими из соответствующих координат симплекса, называют центроидом. Решая для каждой из $n+1$ вершин симплекса прямую задачу и вычисляя невязку, выбирают ту из точек, где невязка максимальна. Прямая от центроида к этой точке характеризует направление максимального возрастания минимизируемой функции, следовательно, поиск следующего приближения надо вести от центроида в противоположном направлении. Найдя точку минимума на этой прямой, добавляют ее к симплексу и отбрасывают ту точку исходного симплекса, где невязка была максимальной. В результате снова остается симплекс из $n+1$ точек, причем только в единственной, вновь добавленной точке надо решать прямую задачу и вычислять невязку. Таким образом, последующие приближения рассчитываются примерно в $n+1$ раз быстрее, нежели первое.

Наиболее популярным среди методов, использующих расчет первых производных минимизируемой функции, является градиентный метод скорейшего спуска. В нем направление поиска выбирается как противоположное направлению вектора градиента минимизируемой функции в точке предыдущего приближения. Если обозначить градиент как вектор-столбец $\nabla\Phi(p^k)$, то есть

$$\nabla\Phi^T(p^k) = \left[\frac{\partial\Phi}{\partial p_1^k}, \frac{\partial\Phi}{\partial p_2^k}, \dots, \frac{\partial\Phi}{\partial p_n^k} \right], \quad (43.3)$$

то направление W^k определяется как

$$W^k = \frac{\nabla\Phi(p^k)}{\|\nabla\Phi(p^k)\|_{R^n}}. \quad (43.4)$$

Существует множество разновидностей этого метода, различающихся способами одномерной минимизации на каждом из шагов. Вместе с тем, все эти модификации для многих задач характеризуются довольно медленной сходимостью. Для ускорения сходимости, если возможно, целесообразно использовать и вторые производные минимизируемой функции.

Классическим методом, использующим вторые производные минимизируемой функции, является метод Ньютона. Он базируется на обращении матрицы вторых производных, называемой матрицей Гессе или гессианом и обозначаемой как $\nabla^2\Phi(p)$. Матрица Гессе, с которой мы уже встречались при решении прямых задач, является симметричной матрицей n -го порядка, элементы которой представляют собой вторые производные минимизируемой функции по i -ому и j -ому параметрам:

$$\nabla^2\Phi(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2\Phi}{\partial p_1^2} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial p_1\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial^2\Phi}{\partial p_1\partial p_n} \\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial p_2\partial p_1} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial p_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2\Phi}{\partial p_2\partial p_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial p_n\partial p_1} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial p_n\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial^2\Phi}{\partial p_n^2} \end{pmatrix}. \quad (43.5)$$

Идея метода Ньютона состоит в замене функции Φ в окрестности точки p^k ее квадратичной аппроксимацией:

$$Q(p) = \Phi(p^k) + \nabla\Phi^T(p^k)(p - p^k) + 0,5(p - p^k)^T \nabla^2\Phi(p^k)(p - p^k). \quad (43.6)$$

Тогда, если минимум Q существует, а это может быть лишь тогда, когда матрица Гессе является положительно определенной, то в качестве следующего приближения естественно выбрать именно точку минимума Q . В этой точке $\nabla Q(p^{k+1}) = 0$, что приводит к линейной системе

$$\nabla\Phi(p^k) = -\nabla^2\Phi(p^k)(p - p^k), \quad (43.7)$$

из которой получается итерационная формула, реализующая метод Ньютона:

$$p^{k+1} = p^k - [\nabla^2\Phi(p^k)]^{-1} \nabla\Phi(p^k). \quad (43.8)$$

Отметим, что здесь определены и направление, и шаг продвижения к следующему приближению. Метод Ньютона интересен тем, что, если минимизируемая функция является строго выпуклой и квадратичной, он позволяет найти квазирешение за одну итерацию.

Применение метода Ньютона к произвольным функциям не всегда удобно, поэтому его обычно модифицируют, вводя управляемый шаг перемещения l . С его учетом итерационная формула преобразуется к виду

$$p^{k+1} = p^k - l_k [\nabla^2\Phi(p^k)]^{-1} \nabla\Phi(p^k). \quad (43.9)$$

Шаг l_k можно, например выбирать так, чтобы он был не слишком велик, как это делается при решении линеаризованных задач. Можно также выбирать его путем одномерной минимизации функции Φ на прямой, направление которой задается формулой (43.9) и т.д.

Таким образом, существенным ограничением для применения метода Ньютона является требование положительной определенности матрицы Гессе. Естественная модификация метода состоит в аппроксимации матрицы, обратной к матрице Гессе, положительно определенной матрицей H_k , дающей направление перемещения, исходя из градиента $\nabla\Phi(p^k)$. Эта идея приводит к квазиньютоновским методам или методам переменной метрики, характеризующимся следующей итерационной формулой:

$$p^{k+1} = p^k - l_k H_k \nabla\Phi(p^k). \quad (43.10)$$

Матрица H_k , очевидно, на каждой итерации должна модифицироваться таким образом, чтобы для любой функции вида

$$Q(p) = 0,5p^T A p + b^T p + c. \quad (43.11)$$

с положительно определенной матрицей A , матрицы H_k сходились к обращению A^{-1} гессиана функции Q . В зависимости от способов модификации матрицы H_k на каждой из итераций различают довольно много методов переменной метрики. Наиболее мощным из них является метод Бройдена-Флетчера-Гольдфарба-Шанно или, как его кратко обозначают по первым буквам фамилий авторов, **BFGS**. Его особенностью является то, что в нем аппроксимируется сам гессиан, а не его обращение, что позволяет понизить требования к точности одномерной минимизации на каждой из итераций. Поскольку в методах переменной метрики гессиан фактически не вычисляется, а только аппроксимируется, модифицируясь от шага к шагу на основе информации о поведении первых производных, эти методы следует относить к группе, использующей лишь первые производные минимизируемой функции.

Алгоритм **BFGS** может быть изложен следующим образом. Вначале выбирается точка p^0 и произвольная положительно определенная матрица H_0 . В качестве таковой чаще выбирают единичную матрицу n -го порядка. На k -ой итерации сначала определяется направление поиска

$$w^k = -H_k \nabla\Phi(p^k), \quad (43.12)$$

после чего методами одномерного поиска определяется минимум на этой прямой - точка p^{k+1} .

Далее корректируется матрица H_k , для чего вычисляются $\delta_k = p^{k+1} - p^k$, $\gamma_k = \nabla\Phi(p^{k+1}) - \nabla\Phi(p^k)$ и подставляются в следующую основную формулу:

$$H_{k+1} = H_k + \left[1 + \frac{\gamma_k^T H_k \gamma_k}{\delta_k^T \gamma_k} \right] \frac{\delta_k \delta_k^T}{\delta_k^T \gamma_k} - \frac{\delta_k \gamma_k^T H_k + H_k \gamma_k \delta_k^T}{\delta_k^T \gamma_k}. \quad (43.13)$$

После этого либо прерывается поиск минимума, либо итерация повторяется.

Мы рассмотрели наиболее распространенные алгоритмы определения направления поиска минимума и убедились, что в большинстве из них на каждой итерации требуется решение одномерной задачи, то есть определение расстояния l по выбранному направлению от p^k до p^{k+1} . Эта задача также может решаться разнообразными способами. Прежде, чем перейти к их рассмотрению, укажем общую формулировку одномерной задачи. Итак, мы выбрали направление w , в котором должны продолжать поиск. Пусть w - это направление спуска. Тогда решение одномерной задачи сведется к определению числа $l \geq 0$, минимизирующего функцию $f(l) = \Phi(p^0 + lw)$.

Если функция $f(l)$ является дважды дифференцируемой, то для определения шага l можно применить итерационный метод Ньютона-Рафсона. В соответствии с ним производная $f'(l)$ в

точке l_k , полученной на предыдущем этапе, аппроксимируется своей касательной, а точка l_{k+1} выбирается как пересечение этой прямой с осью абсцисс, то есть

$$l_{k+1} = l_k - \frac{f'(l_k)}{f''(l_k)}. \quad (43.14)$$

Если исходная функция f - квадратичная, то алгоритм, очевидно, сходится за одну итерацию. Недостатком метода является необходимость вычисления второй производной, что не всегда возможно. Вместе с тем, вторую производную можно аппроксимировать простейшей формулой:

$$f''(l_k) = \frac{f'(l_k) - f'(l_{k-1})}{l_k - l_{k-1}}, \quad (43.15)$$

подставляя которую в (43.14), получим

$$l_{k+1} = l_k - \frac{f'(l_k)(l_k - l_{k-1})}{f'(l_k) - f'(l_{k-1})}. \quad (43.16)$$

Эта формула реализует так называемый метод секущих или метод хорд.

Существуют методы одномерного поиска, вообще не использующие вычисления производных. Для их применения требуется знать отрезок прямой, в пределах которого расположен единственный минимум функции $f(l)$. Простейший из таких методов - метод дихотомии или деления отрезка пополам. Пусть минимум расположен на отрезке $[a, b]$. Решив прямую задачу для этих точек и вычислив в них невязки, мы ищем точку $l_1 = 0,5(a + b)$, а затем еще две точки: $l_2 = 0,5(a + l_1)$ и $l_3 = 0,5(l_1 + b)$, где проводим те же вычисления. В результате получим 5 точек, расположенных на отрезке через равные интервалы. Поскольку на отрезке функция $f(l)$ - унимодальна, то есть имеет один экстремум, всегда возможно отбросить два из четырех интервалов, на которые разбит исходный отрезок, и продолжать поиск на вдвое меньшем отрезке. При этом на его краях и в центре невязки уже определены. Далее подобные итерации повторяются. Если невязка вычисляется в K точках, длину отрезка, локализирующего минимум, можно сократить в $2^{0,5(K-3)}$ раз.

Стремление максимально сократить длину отрезка, локализирующего минимум, за K вычислений невязки приводит к так называемому методу Фибоначчи. В 1202 году Леонардо Пизанский, известный под псевдонимом Фибоначчи, впервые рассмотрел последовательность чисел F_k , названных позднее его именем. Она вводится следующими соотношениями: $F_1 = F_2 = 1$, $F_k = F_{k-2} + F_{k-1}$. Эта последовательность имеет чрезвычайно широкое применение в самых разнообразных областях, в том числе и в математическом программировании. Применение метода начинается с определения числа проб, за которые достигается заданная точность локализации минимума - ε . Для этого надо найти номер K минимального из чисел, удовлетворяющих неравенствам:

$$\frac{c}{F_{k+2}} \leq \varepsilon < \frac{c}{F_{k+1}},$$

$$F_{k+1} < \frac{c}{\varepsilon} \leq F_{k+2}, \quad (43.17)$$

где $c=b-a$ - длина первоначального отрезка. Определенное таким образом число проб K характеризует метод Фибоначчи K -го порядка. Поиск минимума на отрезке $[a, b]$ по этому методу начинается с выбора двух точек

$$l_1 = a + \frac{F_k}{F_{k+2}}(b - a),$$

$$l_2 = a + \frac{F_{k+1}}{F_{k+2}}(b - a) = a + b - l_1, \quad (43.18)$$

расположенных на отрезке $[a, b]$ симметрично, и вычисления $f(l_1)$ и $f(l_2)$. Если $f(l_1) \leq f(l_2)$, то для дальнейшего поиска полагаем:

$$a^* = a; b^* = l_2; l_2^* = l_1; l_1^* = a^* + b^* - l_2^* = a + l_2 - l_1 \quad (43.19)$$

и вычисляем $f(l_1^*)$. Если же $f(l_1) > f(l_2)$, полагаем:

$$a^* = l_1; b^* = b; l_1^* = l_2; l_2^* = a^* + b^* - l_1^* = l_1 + b - l_2 \quad (43.20)$$

и вычисляем $f(l_2^*)$. Структура последовательности чисел Фибоначчи такова, что на K -ом этапе точки l_1 и l_2 совпадут. Это и будет искомая точка минимума, причем можно доказать, что не существует другой стратегии одномерного поиска, позволяющей найти эту точку за K проб с большей точностью.

Изложенные методы одномерного поиска ориентированы на достаточно детальную локализацию точки минимума на прямой. Вместе с тем, такие алгоритмы, как **BFGS** или градиентный метод скорейшего спуска могут работать и с приближенными, но зато быстродействующими методами одномерного поиска. Для таких методов должны соблюдаться следующие условия выбора шага l :

1) шаг не должен выбираться чересчур большим, иначе невязка станет уменьшаться от шага к шагу немонотонно, то есть алгоритм начнет осциллировать;

2) шаг не должен выбираться слишком малым, иначе алгоритм будет сходиться слишком медленно.

Предложено довольно много таких, как их называют, экономичных методов. Рассмотрим в качестве примера метод Голдстейна.

Для проверки первого из указанных условий в методе Голдстейна вводится соотношение

$$f(l) \leq f(0) + m_1 l f'(0), \quad (43.21)$$

где $0 < m_1 < 1$ - эмпирический коэффициент, который часто полагают равным 0,1. Второе условие обеспечивается соотношением

$$f(l) \geq f(0) + m_2 l f'(0), \quad (43.22)$$

где $m_1 < m_2 < 1$ - также эмпирический коэффициент, определяющий точность локализации минимума. Вначале полагают $l_{\min} = 0$, $l_{\max} = +\infty$, определяют многомерный градиент минимизируемой функции и проектируют его на направление поиска, то есть вычисляют $\mathbf{f}'(0)$. Зная эту величину, находят любым способом первую тестируемую точку l и вычисляют $\mathbf{f}(l)$. Если оно не удовлетворяет условию (43.21), то полагают $l_{\max} = l$ и переходят к новой итерации. Если условие (43.21) выполняется, то проверяют условие (43.22). Если и оно выполняется, то поиск прерывается, иначе полагают $l_{\min} = l$ и переходят к новой итерации. При использовании методов переменной метрики алгоритм Голдстейна и ему подобные зачастую сходятся в окрестности минимума невязки в R^n всего за одну итерацию, благодаря чему их и называют экономичными.

Последним элементом описания методов решения нелинейных задач подбора является критерий прерывания построения минимизирующей последовательности. Оказывается, естественного критерия, по которому процесс минимизации должен прерываться, когда невязка

станет меньше наперед заданной величины, характеризующей точность подбора, недостаточно.

Дело в том, что функция $\Phi(\mathbf{p})$ в $\mathbf{R}^n$ обычно является полимодальной, то есть имеет несколько точек минимума. Квазирешение дает наиболее глубокий, так называемый глобальный минимум. В отличие от него другие минимумы называют локальными. Многие методы минимизации, такие, например, как градиентный метод скорейшего спуска, обнаруживают именно такие локальные минимумы, ближайшие к заданной точке начального приближения. В локальных минимумах невязка может оказаться больше, чем задано для прерывания подбора указанным критерием, поэтому при использовании только этого критерия процесс подбора может стать бесконечным. Необходимо распознавать такие ситуации, для чего обычно вводят еще один критерий прерывания процесса минимизации. В соответствии с ним, минимизация прерывается, если относительное уменьшение невязки за одну итерацию не превышает заданной величины, как правило 1% или 2%. Совокупность этих двух критериев дает возможности прерывания минимизации и, если сработал второй критерий, установления факта попадания в локальный минимум. Существуют формальные методы минимизации полимодальных функций, такие как метод оврагов и т. п., но их применение далеко не всегда эффективно, поскольку интерпретатор никогда заранее не знает свойств минимизируемых функций. Наиболее распространенным и по сути самым правильным способом выхода из локального минимума является выбор новой точки начального приближения.

Таким образом, необходимо подчеркнуть, что эффективность решения нелинейных задач подбора во многом определяется правильностью выбора начального приближения или стартовой интерпретационной модели. Именно в силу этого факта, к выбору стартовой модели надо подходить исключительно ответственно, базируясь на результатах определения тех параметров, которые находятся по аномальному полю единственным образом без привлечения дополнительной, априорной информации, другими словами, моментов и особых точек.

В качестве примера практической методики подбора рассмотрим наиболее распространенный способ определения формы xz -двумерных объектов по их гравитационным аномалиям в отсутствие регионального фона, предложенный Е.Г.Булахом. В его основу положена аппроксимация гравитирующих объектов набором вертикальных уступов. Эта аппроксимация удобна тем, что с ее помощью можно подбирать и замкнутые тела, и контактные поверхности, и их совокупности. Весьма эффективна она также при исследовании разрезов с контактирующими телами. Универсальность данной методики обеспечила ей широкое применение при решении самых разнообразных геологических задач. Аналоги этой методики существуют и для интерпретации магнитных аномалий.

При рассмотрении способа Е.Г.Булаха будем ось Oz направлять вниз, а ось Ox - вправо. Как было отмечено в § 40, каждый из уступов характеризуется четырьмя параметрами (рис. 86): глубиной верхней кромки $z=h$, глубиной нижней кромки $z=H$, координатой боковой кромки $x=d$ и избыточной плотностью, вычисляемой как разность плотностей пород справа и слева от уступа: $\sigma = \sigma_{\text{пр}} - \sigma_{\text{лев}}$. Е.Г.Булах предложил изменять в процессе подбора лишь параметры d , сохраняя другие неизменными. Другими словами, подбор осуществляется путем перемещения уступов по горизонтали. В результате общее число определяемых параметров оказывается равным числу уступов в модели.

Примем дневную поверхность плоской, тогда в каждой из точек наблюдения X_k ускорение силы тяжести от модели из n уступов можно представить как обобщение (40.4):

$$g_m(x_k) = f \sum_{i=1}^n \sigma_i \left[\pi (H_i - h_i) + 2H_i \arctg \frac{x_k - d_i}{H_i} - \right. \\ \left. - 2h_i \arctg \frac{x_k - d_i}{h_i} + (x_k - d_i) \ln \frac{H_i^2 + (x_k - d_i)^2}{h_i^2 + (x_k - d_i)^2} \right]. \quad (43.23)$$

В соответствии с формулой (40.3) неизвестные значения координат боковых кромок уступов можно найти из условия

$$\Phi(d_1, d_2, \dots, d_n) = \sum_{k=1}^m [g(x_k) - g_m(x_k)]^2 = \min, \quad (43.24)$$

где m - число точек наблюдения, которое должно быть больше числа определяемых параметров n . Для нахождения неизвестных Е.Г.Булах предложил использовать градиентный метод скорейшего спуска.

В соответствии с вышеизложенным, для проведения подбора необходимо вначале задать начальную модель p_0 со стартовыми параметрами $d_1^0, d_2^0, \dots, d_n^0$. Продифференцируем выражение (43.24) по d_i с учетом (43.23) и получим в результате следующее явное выражение для i -ой компоненты градиента:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial d_i} = 2f\sigma_i \sum_{k=1}^m \left\{ [g(x_k) - g_m(x_k)] \ln \frac{H_i^2 + (x_k - d_i)^2}{h_i^2 + (x_k - d_i)^2} \right\}. \quad (43.25)$$

Тогда параметры следующей в минимизирующей последовательности модели p_1 должны определяться по формуле

$$d_i^1 = d_i^0 - \lambda \frac{\partial \Phi(p_0)}{\partial d_i} \quad (43.26)$$

при $i=1, 2, \dots, n$. Параметр λ характеризует координату точки на прямой, проходящей через вектор градиента. В процессе поиска на этой прямой точки с минимальной невязкой используется метод касательных, то есть приближенное значение $\lambda_{пр}$ вычисляется по формуле

$$\lambda_{пр} = \frac{\Phi(p_0)}{\sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial \Phi(p_0)}{\partial d_i} \right]^2}. \quad (43.27)$$

Вместе с тем, если именно это значение подставить в (43.26) и продолжать подбор, сходимость минимизирующей последовательности из-за приближенности λ может оказаться немонотонной: невязка может в течение нескольких итераций возрасти и лишь затем уменьшится. Этот крайне нежелательный эффект осцилляции можно в значительной степени подавить за счет более точного определения λ , для чего Е.Г.Булах предложил следующий прием. Он предположил на основании экспериментальных данных, что минимизируемая функция Φ на этой прямой имеет форму, близкую к параболической, что позволяет представить ее в виде

$$\Phi(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c. \quad (43.28)$$

Для нахождения коэффициентов параболы надо знать невязку в трех точках на этой прямой, причем в двух точках: при $\lambda = 0$ и при $\lambda = \lambda_{пр}$ она уже известна. В качестве третьей точки можно принять $\lambda = 2\lambda_{пр}$, тогда получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} c &= \Phi(0), \\ a\lambda_{пр}^2 + b\lambda_{пр} + c &= \Phi(\lambda_{пр}), \\ 4a\lambda_{пр}^2 + 2b\lambda_{пр} + c &= \Phi(2\lambda_{пр}), \end{aligned} \quad (43.29)$$

решив которую найдем искомые коэффициенты. Чтобы отыскать точку, где невязка минимальна, надо продифференцировать (43.28) и приравнять производную нулю, в результате чего оптимальный параметр $\lambda_{опт}$ окажется равным

$$\lambda_{\text{опт}} = -\frac{b}{2a}. \quad (43.30)$$

Подставляя значения **a** и **b**, найденные при решении системы (43.29), окончательно получаем

$$\lambda_{\text{опт}} = \frac{4\Phi(\lambda_{\text{пр}}) - \Phi(2\lambda_{\text{пр}}) - 3\Phi(0)}{2[2\Phi(\lambda_{\text{пр}}) - \Phi(2\lambda_{\text{пр}}) - \Phi(0)]} \lambda_{\text{пр}}. \quad (43.31)$$

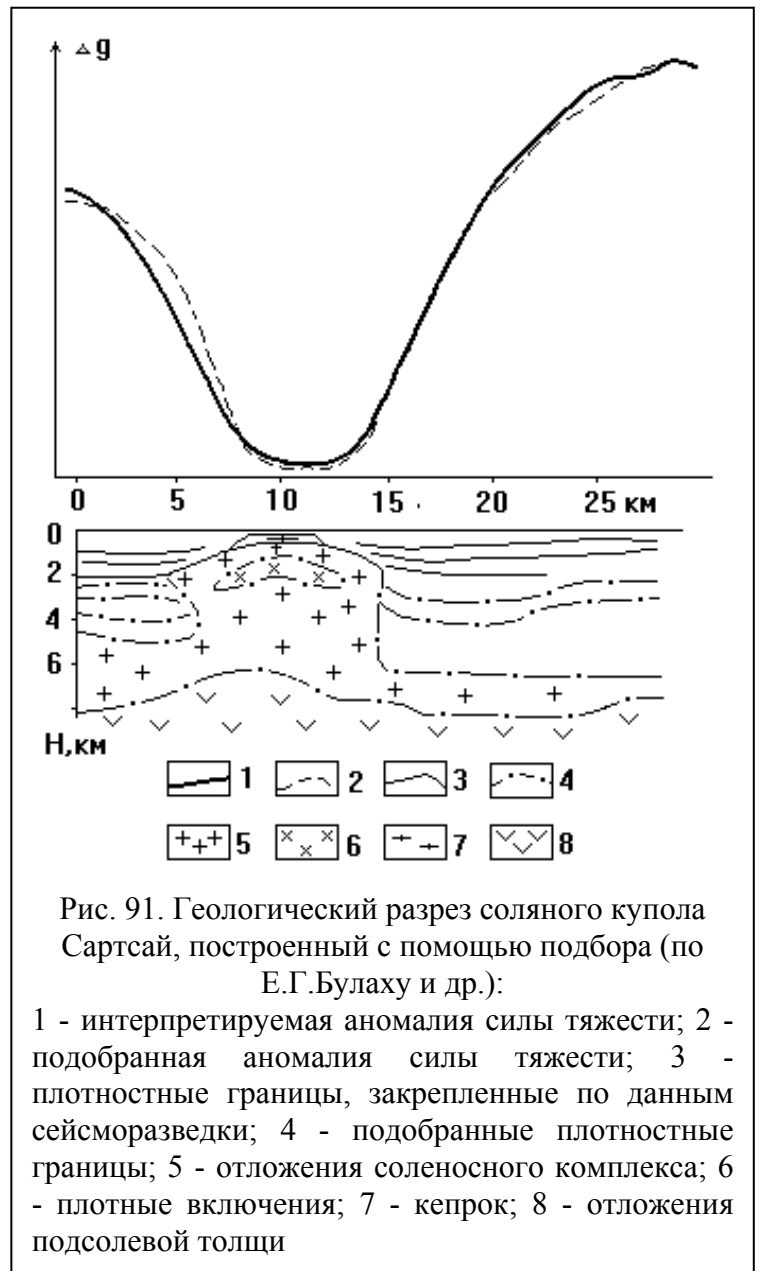
Приведенные формулы описывают алгоритм поиска следующей в минимизирующей последовательности модели. Этот поиск повторяется до тех пор, пока либо невязка станет меньше заданной, либо уменьшение невязки за один шаг станет меньше порогового.

Если на основании априорной информации известна часть изучаемого разреза, некоторые из уступов можно закрепить и, проведя геологическое редуцирование, вычестить их влияние из наблюдаемого поля, что позволяет подбирать лишь неизвестные детали интерпретационной модели.

На рис. 91 приведен пример практического применения способа Е.Г.Булаха для определения формы соляного купола. В процессе интерпретации часть плотностных границ была закреплена по данным сейсморазведки, а часть подбиралась, что позволило построить разрез, удовлетворяющий и сейсмическим и гравиметрическим данным.

Модели в виде совокупности прямых уступов, используемые Е.Г.Булахом, позволяют наглядно продемонстрировать возможность наличия у минимизируемой функции нескольких экстремумов в пространстве R^n . На рис. 92а показаны гравитационные аномалии от двух моделей, каждая из которых является совокупностью двух уступов с избыточной плотностью 1 г/см^3 . Если принять в качестве интерпретируемого - поле от модели 1 и построить изолинии среднеквадратической погрешности подбора этого поля аномалиями различных моделей из двух уступов с теми же глубинами верхней и нижней кромок и избыточными плотностями, то в пространстве R^2 , где координаты d_1 и d_2 характеризуют горизонтальные положения уступов, эти изолинии образуют картину, представленную на рис. 92б. Очевидно, функция невязки в пространстве R^2 в данном случае имеет два минимума.

Первый из них – глобальный - соответствует исходной модели 1, и, естественно, погрешность подбора в этой точке для данного примера равна нулю. Второй же локальный минимум соответствует модели 2, и погрешность в нем составляет 2,8 мГал.



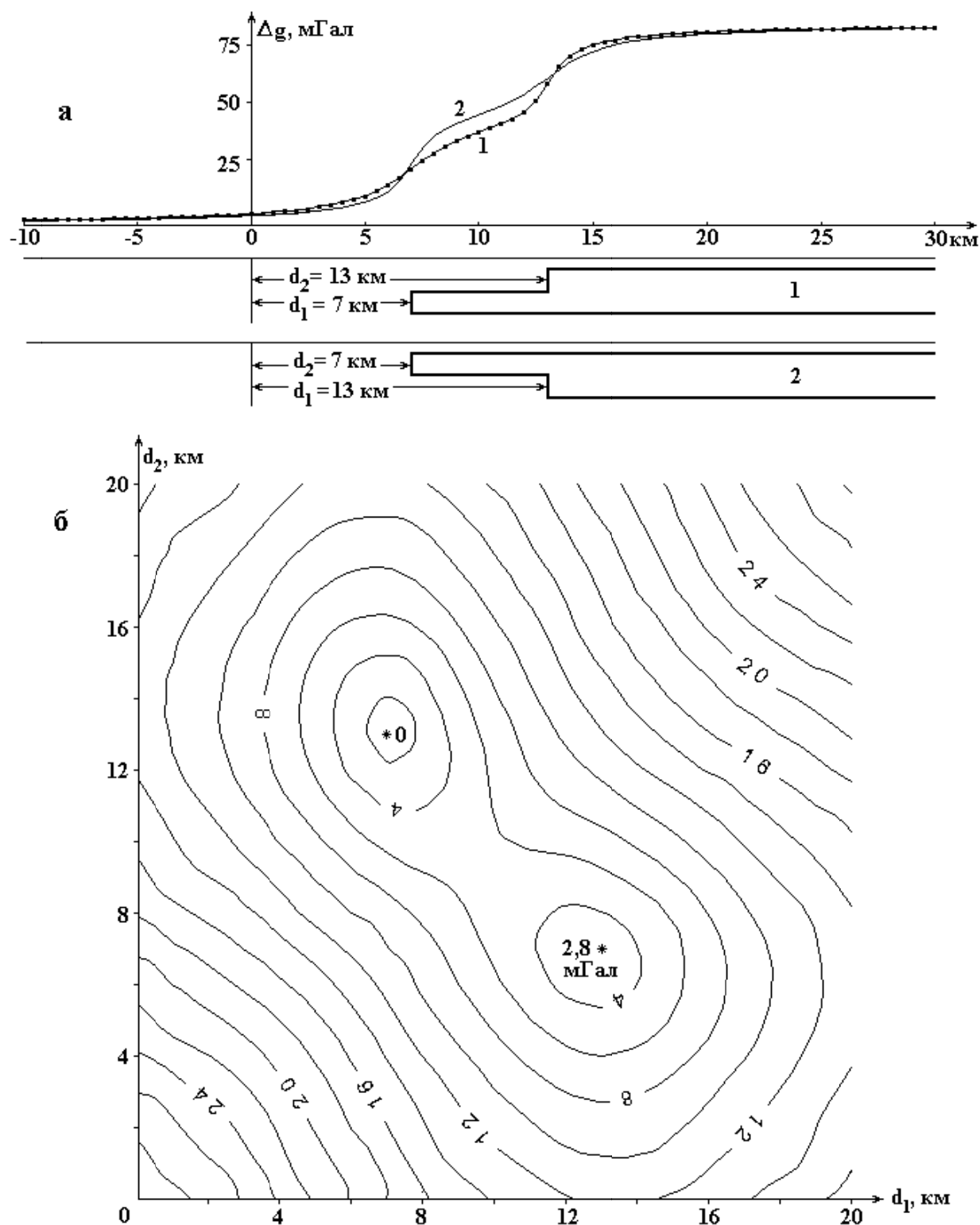


Рис. 92. Возможность наличия у минимизируемой функции нескольких экстремумов (по Е.Г.Булаху): а) практически эквивалентные модели из двух уступов (1 и 2) и их гравитационные аномалии; б) изолинии двухэкстремальной функции невязки (в мГал) в пространстве $\mathbf{R}^2$, где координаты точек определяются параметрами моделей d_1 и d_2

Одним из естественных путей повышения устойчивости решения обратных задач является введение ограничений на искомые параметры, исходя из количественных априорных сведений о них. Ранее рассмотренные методы относились к безусловн-экстремальным задачам, теперь

мы перейдем к изучению условно-экстремальных задач или задач на поиск минимума с ограничениями, условиями.

При решении обратных задач гравиразведки и магниторазведки используют ограничения трех типов. Первый тип - ограничения в виде равенств. Они часто возникают, когда требуется введение сложных моделей с контактирующими телами. Если такие тела аппроксимировать многогранниками, то требование отсутствия пересечений между ними математически может быть сформулировано как совокупность равенств между некоторыми параметрами или их комбинациями. Например, у смежных многогранников могут совпадать грани, ребра или вершины. Второй тип - ограничения в виде неравенств. Довольно часто априорная информация включает сведения о возможных интервалах изменения искомых параметров: как физических свойств, так и геометрических характеристик. Наконец, третий тип - это ограничения в виде экстремумов функций от параметров. Условия этого типа обычно описывают качественную априорную информацию о решении и будут рассмотрены в следующем параграфе, так как они составляют базу метода регуляризации. Здесь мы ограничимся рассмотрением условий двух первых типов, которые в общем виде могут быть записаны как совокупность нестрогих неравенств:

$$q_i(p) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, t. \quad (43.32)$$

Одним из наиболее простых, но в то же время весьма эффективных методов учета ограничений является метод замены переменных, который дает возможность сведения условно-экстремальных задач к безусловно-экстремальным. Так, во множестве обратных задач гравиразведки и магниторазведки встречаются двусторонние ограничения на параметры, то есть параметры моделей считают принадлежащими некоторым отрезкам:

$$a_k \leq p \leq b_k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (43.33)$$

Для учета таких ограничений каждый из параметров p_k можно, например, с помощью преобразования

$$p_k = a_k + (b_k - a_k) \sin^2 p_k^* \quad (43.34)$$

заменить на неограниченно изменяющийся параметр p_k^* . Определение этих модифицированных параметров можно вести методами, рассмотренными в предыдущих параграфах.

Если ограничения заданы в виде равенств, метод замены переменных также позволяет иногда свести условно-экстремальную задачу к безусловно-экстремальной. Такой прием особенно эффективен, когда все функции $q_i(p)$ являются линейными. Тогда, выражая одни переменные через другие, можно не только осуществить требуемое сведение, но и понизить размерность решаемой задачи, поскольку часть из параметров оказывается линейной комбинацией других параметров.

Вообще говоря, введение ограничений означает, что поиск минимума функции Φ надо вести не во всем пространстве R^n , а только в его части, границы которой определяются заданными условиями. В связи с этим большинство предложенных методов решения задач подбора с ограничениями фактически представляет собой модификации методов, рассчитанных на решение безусловно-экстремальных задач. Для этого ищут возможное направление спуска, то есть направление, в котором функция Φ строго убывает, но проверяют, что малое перемещение в этом направлении не выводит за границы области, задаваемой ограничениями. Рассмотрим в качестве примера метод проекционного градиента, наиболее эффективный в случае линейных ограничений на параметры. Отметим, что на практике ограничения на параметры в значительном большинстве оказываются именно линейными: как в виде равенств, так и в виде неравенств.

Пусть задача состоит в том, чтобы найти минимум функции Φ при условиях

$$a_k p \leq b_k, \quad k = 1, 2, \dots, t_1,$$

$$a_k p = b_k, \quad k = 1, 2, \dots, t_2. \quad (43.35)$$

Найдем направление перемещения w , которое позволяет максимально возможно уменьшить $\Phi(p)$, а значит делает $\nabla \Phi^T(p)w$ минимальным, но которое, по крайней мере для малых шагов, дает возможность оставаться в области, задаваемой ограничениями. В точке решения условия в виде равенств требуют выполнения соотношения $a_k w = 0, \quad k = 1, 2, \dots, r$ или в векторной форме

$$Aw = 0. \quad (43.36)$$

Тогда можно доказать, что если A^0 - матрица размерами $r \times n$ ранга $r \leq n$, состоящая из строк матрицы A , удовлетворяющих условия типа равенств, то оптимальное решение задачи

$$\nabla \Phi^T(p)w = \min; \quad A^0 w = 0; \quad \|w\| = 1, \quad (43.37)$$

есть $w = y / \|y\|$, где y - проекция вектора $-\nabla \Phi(p)$ на область, задаваемую условиями. Она вычисляется по формуле $y = -P^0 \nabla \Phi(p)$, а матрица P^0 называется матрицей проектирования и может быть представлена в виде:

$$P^0 = I - A^{0T} [A^0 A^{0T}]^{-1} A^0. \quad (43.38)$$

В соответствии с этим, алгоритм проекционного градиента сводится к следующему. Пусть на k -ой итерации мы находимся в точке p^k . Вначале определим множество ограничений типа равенств для этой точки и выберем из матрицы A все строки, содержащие эти ограничения. По сравнению с предыдущей итерацией число r таких строк, то есть число условий, которые мы пытаемся удовлетворить, может увеличиться лишь на единицу. Пусть A^0 - матрица, строки которой отвечают этим ограничениям, тогда можно вычислить матрицу проектирования по формуле (43.38) и определить $y^k = -P^0 \nabla \Phi(p^k)$. Затем, если $y^k \neq 0$, осуществляется максимально возможный спуск по этому направлению, удовлетворяющий всем ограничениям, после чего итерации повторяются. Минимальность различий между матрицами проектирования на k -ой и $(k+1)$ -ой итерациях дают возможность сократить объем вычислений за счет корректировки предыдущей матрицы и делают этот метод достаточно экономичным.

Таким образом, учет ограничений, которые для обратных задач гравиразведки и магниторазведки носят преимущественно линейный характер, сравнительно несложен и может быть в большинстве случаев решен путем замены переменных и сведения условно-экстремальной задачи к задаче без ограничений. В тех же случаях, когда такой прием затруднителен, можно воспользоваться одной из модификаций методов возможных направлений, приспособленных для работы с ограничениями. С подробным изложением таких методов можно познакомиться в многочисленных книгах, посвященных математическому программированию. Для устойчивого решения обратных задач гораздо важнее учесть качественную априорную информацию о решении, которая приводит к методу регуляризации.

§ 44. Количественная интерпретация методом регуляризации

Рассмотренные в предыдущих параграфах модификации метода подбора применимы для получения квазирешения исключительно в тех случаях, когда множество возможных решений

R является компактным в пространстве R^n . Однако, для ряда важных с практической точки зрения обратных задач множество возможных решений может и не быть компактным.

Вообще говоря, метод подбора дает достаточно хорошие результаты лишь тогда, когда число определяемых параметров небольшое, а сами они не коррелируют друг с другом, чтобы не проявлялись компенсационные эффекты, подобные рассмотренному для метода сеток. Когда число искомых параметров велико, а интерпретационная модель становится достаточно гибкой, чтобы подбирать не только ту часть аномального поля, которая представляет интерес, но и помеху, метод подбора начинает давать неестественные результаты. Требование минимизации невязки приводит к тому, что точность подбора достигается за счет сильных искажений модели. Например, если гравитационную аномалию от шара, осложненную случайной помехой (рис. 37), подбирать не в классе шаров, а в классе контактных поверхностей, то в принципе можно достичь полного совпадения наблюдаемого поля с полем модели. Однако, полученная в итоге контактная поверхность окажется настолько изломанной, что геологическое истолкование результата окажется бессмысленным. Такие задачи называют существенно некорректными, и для их решения А.Н.Тихонов предложил метод регуляризации, основы которого рассмотрены выше в § 21.

По А.Н.Тихонову получение устойчивого решения сводится к решению следующей условно-экстремальной задачи: найти элемент p_δ , минимизирующий стабилизатор $\Omega[p]$ при условии, что невязка решаемого операторного уравнения $Dp=u$ не превышает заданной величины δ , характеризующей норму помехи. Математически это выглядит так:

$$\begin{aligned} \Omega[p] &= \min, \\ \|u - u_\delta\|_{R^m} &\leq \delta. \end{aligned} \quad (44.1)$$

Найденную модель p_δ можно рассматривать как результат применения регуляризующего оператора. Применив метод неопределенных множителей Лагранжа, А.Н.Тихонов свел условно-экстремальную задачу (44.1) к эквивалентной безусловно-экстремальной задаче поиска минимума следующей функции, которую теперь называют функцией Тихонова:

$$M^\alpha[u_\delta, p] = \|Dp - u_\delta\|_{R^m}^2 + \alpha \Omega[p]. \quad (44.2)$$

Неопределенный множитель α здесь является параметром регуляризации. Таким образом, метод регуляризации сводится к решению задачи

$$\|Dp - u_\delta\|_{R^m}^2 + \alpha \Omega[p] = \min \quad (44.3)$$

и оценке α , согласуемого с погрешностью исходных данных.

Напомним, как влияет α на результаты минимизации. Если $\alpha=0$, то чему бы ни был равен стабилизатор, он не оказывает никакого влияния на решение обратной задачи. Подставив это значение в (44.3), мы убеждаемся, что все будет определяться лишь точностью совпадения наблюдаемого поля с полем модели, то есть при $\alpha=0$ результаты метода регуляризации полностью совпадут с результатами метода квазирешений. Можно сказать, что метод квазирешений есть частный случай метода регуляризации, когда параметр регуляризации - нулевой.

Если α достаточно велико, минимизация функции Тихонова будет осуществляться фактически лишь путем минимизации стабилизатора. Поскольку $\Omega[p]$ является своеобразным штрафом, налагаемым на решение за его нежелательные свойства, то метод регуляризации будет при этом давать результаты, полностью удовлетворяющие критерию качества, но

игнорирующие наблюдаемое поле. Например, если решается обратная задача гравиразведки для контактной поверхности, результаты при большом α будут представлять собой горизонтальную прямую, каким бы ни было аномальное поле.

Отсюда следует, что надо подбирать такую величину α , которая бы оптимально удовлетворяла обоим условиям в (44.1). Это можно сделать, организовав специальным образом перебор значений α . Практически для выбора оптимального параметра регуляризации организуется последовательность значений α в виде убывающей геометрической прогрессии:

$$\alpha_{k+1} = \mu \alpha_k. \quad (44.4)$$

Начальное значение α определяется характером задачи, можно без потери общности считать, что $\alpha_0 = 1$. Величину $\mu < 1$ обычно полагают равной **0,1**. Если параметр α фиксирован, решение задачи (44.13) становится решением обычной задачи подбора. В итоге применение метода регуляризации сводится к многократному решению задачи подбора и выбору оптимального параметра регуляризации, исходя из некоторых критериев.

Помимо приведенных в § 21 критерия невязки (21.15) и квазиоптимального критерия Тихонова-Гласко (21.16) при решении задач количественной могут применяться и другие. Так, для выбора параметра регуляризации при отсутствии информации о норме помехи, П.Н.Заикиным и А.С.Меченовым предложен так называемый способ отношения норм. В соответствии с ним выбираться должно наименьшее из значений $\alpha > 0$, при которых достигается локальный минимум следующего отношения:

$$\frac{\left\| \alpha \frac{dp_\alpha}{d\alpha} \right\|_{R^n}^2}{\left\| Dp_\alpha - u \right\|_{R^m}^2} = \min. \quad (44.5)$$

Данный критерий хорошо зарекомендовал себя в задачах обработки физических экспериментов.

Вообще говоря, к выбору критериев следует подходить конструктивно. Вдумаемся, в чем состоит конструктивный смысл критерия невязки. Легко понять, что он направлен на получение решения, поле которого, будучи вычтено из наблюдаемого, дает остаток с заданной нормой. Критерий Тихонова-Гласко направлен на получение решения, которое остается стабильным при значительном изменении параметра регуляризации и т.д. Конструктивный взгляд на проблему выбора параметра регуляризации дает возможность создавать эффективные алгоритмы интерпретации, оптимизированные для решения конкретных геологических задач.

Перейдем к рассмотрению особенностей применения различных стабилизаторов. Как отмечено выше, выбор стабилизатора определяется характером решаемой задачи и преследует цель подавления различных проявлений неустойчивости. Большинство применяемых стабилизаторов относится к следующим трем группам:

- 1) стабилизаторы, характеризующие дифференциальные свойства искомого решения;
- 2) стабилизаторы, характеризующие степень близости искомого решения к заданному начальному приближению;
- 3) стабилизаторы, характеризующие структурные свойства искомого решения.

Стабилизаторы первого типа применяют, когда известно, что искомое решение, выраженное в виде некоторой непрерывной функции, должно обладать высокой степенью гладкости. Так, если решение представляет собой функцию $f(s)$, заданную на отрезке $[a, b]$, за меру гладкости можно принять значения следующего функционала:

$$\Omega[f] = \int_a^b \left\{ \sum_{k=0}^K q_k(s) \left(\frac{d^k f}{ds^k} \right)^2 \right\} ds, \quad (44.6)$$

где $q_k(s) > 0$ - непрерывные весовые функции. Естественно, на практике искомую функцию все равно приходится заменять на ее конечномерную аппроксимацию, а от функционала качества переходить к функции. Число K , определяющее количество используемых производных, называют порядком стабилизатора.

Рассмотрим в качестве примера простейший стабилизатор нулевого порядка для модели, описываемой n параметрами. Если пренебречь весовыми коэффициентами, то этот стабилизатор фактически становится квадратом нормы решения в пространстве R^n :

$$\Omega[p] = \|p\|_{R^n}^2. \quad (44.7)$$

Применение такого стабилизатора означает, что ищется решение обратной задачи, отличающееся минимальной нормой. Мы уже встречались с подобным требованием при рассмотрении линейаризованных задач подбора. Действительно, такое же условие накладывается на решение, получаемое методами псевдообращения и Бэкуса-Гильберта, только там регуляризация проводится в неявном виде с помощью сингулярного разложения. В этом смысле методы псевдообращения и Бэкуса-Гильберта также являются частными случаями метода регуляризации, отличающимися применением стабилизатора нулевого порядка. Если оператор решения прямой задачи линеен и его можно представить в виде матрицы A , применение метода регуляризации сведется к минимизации следующей функции:

$$\|Ap - u\|_{R^m}^2 + \alpha \|p\|_{R^n}^2 = \min. \quad (44.8)$$

Дифференцируя ее по всем переменным за исключением параметра регуляризации α и приравнявая производные нулю, мы приходим к следующей форме системы уравнений Эйлера:

$$(A^T A + \alpha E)p = A^T u, \quad (44.9)$$

где E - единичная матрица n -ого порядка. В процессе перебора значений α каждый раз надо решать линейные системы, отличающиеся лишь диагональными элементами матрицы. Поскольку большая часть вычислений связана с формированием матрицы $A^T A$ и столбца свободных членов $A^T u$, а это, как видно из (44.9), требуется сделать только один раз, применение метода регуляризации в данной задаче не приводит к существенному увеличению времени расчетов.

На практике обычно ограничиваются применением стабилизаторов первого порядка. При решении обратных задач гравиразведки и магниторазведки для модели контактной поверхности, задаваемой уравнением $z=z(x,y)$, используют в качестве стабилизатора следующий функционал, накладывающий ограничения на негладкость границы:

$$\Omega[z] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left(\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y^2} \right)^2 \right\} dx dy. \quad (44.10)$$

Если же решается двумерная обратная задача для звездного относительно центра масс замкнутого тела, граница которого в полярных координатах (r, φ) с центром в этой же точке имеет уравнение $r=r(\varphi)$, стабилизатор можно выбрать в форме

$$\Omega[p] = \int_0^{2\pi} |r'(\varphi)|^2 d\varphi. \quad (44.11)$$

При практическом применении эти функционалы, как было отмечено выше, становятся функциями, зависящими от конечного числа параметров, с помощью которых аппроксимируются искомые функции $z(x,y)$ или $r(\varphi)$. Другими словами, применение метода регуляризации при этом также сводится к многократному упорядоченному решению задачи подбора в пространстве R^n без ограничений и выбору оптимального параметра регуляризации.

На рис. 93 приведен пример применения метода регуляризации для интерпретации гравитационной аномалии на газовом месторождении Уртабулак, расположенном в Бухарской области Узбекистана. Исходная аномалия силы тяжести, заданная на неровном рельефе, была пересчитана на горизонтальный уровень, проходящий через верхнюю точку рельефа с абсолютной отметкой 306 м. Затем было выполнено геологическое редуцирование, заключающееся в вычитании поля известной верхней части разреза. По остаточной аномалии с помощью метода регуляризации определена форма контактной поверхности, с точностью около 3 % совпадающей с кровлей рифогенных известняков, являющихся коллектором газа.

Вторая группа стабилизаторов задает требование минимального отличия искомой модели от стартовой, то есть обратная задача сводится к небольшой корректировке стартовой модели, например, относительно опорного разреза. В этом случае стабилизаторы могут иметь такой вид:

$$\Omega[p] = \|p - p_0\|_{R^n}^2. \quad (44.12)$$

Если оператор решения прямой задачи линеен и представим в виде матрицы A , метод регуляризации приводит к задаче

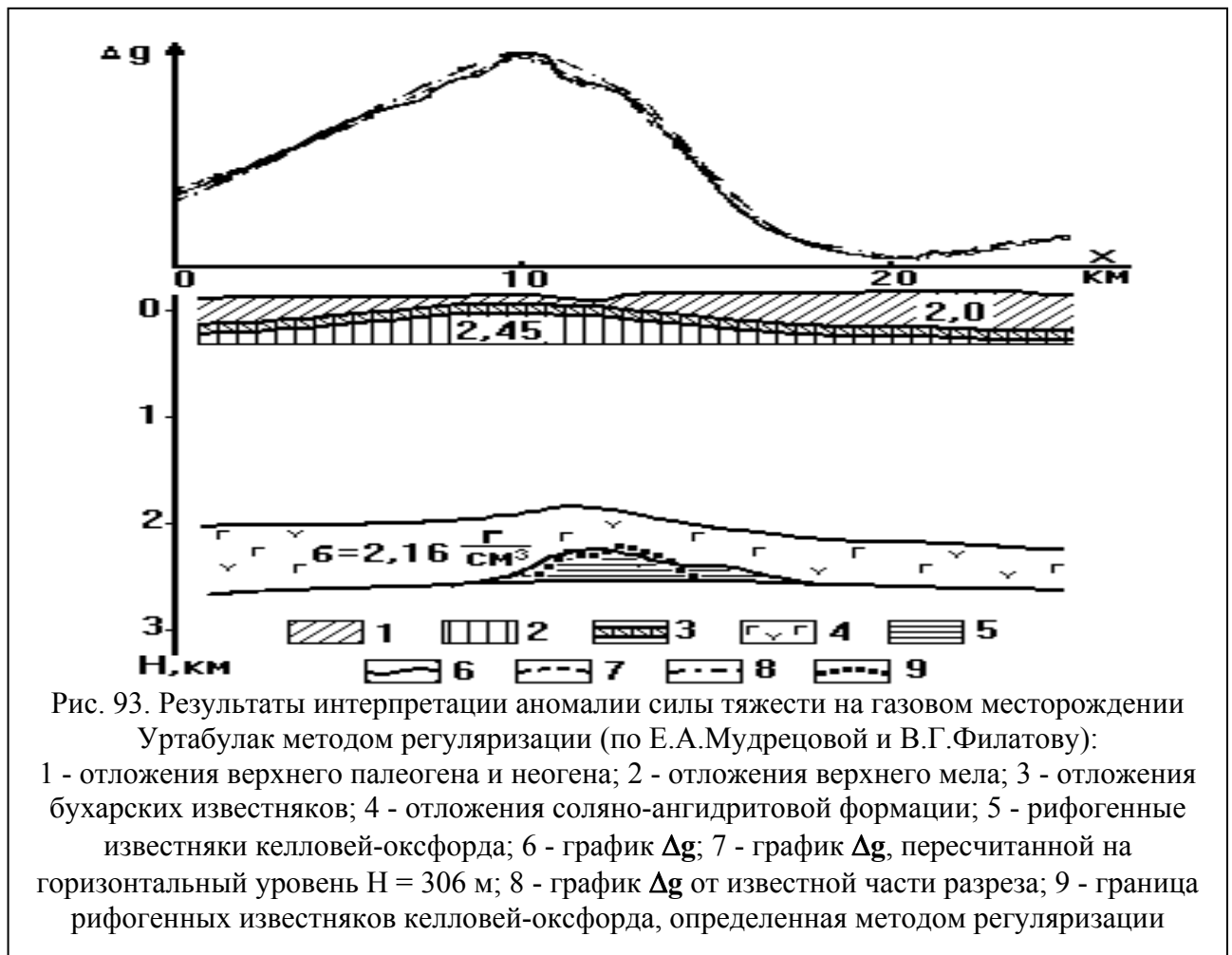


Рис. 93. Результаты интерпретации аномалии силы тяжести на газовом месторождении Уртабулак методом регуляризации (по Е.А.Мудрецовой и В.Г.Филатову):

1 - отложения верхнего палеогена и неогена; 2 - отложения верхнего мела; 3 - отложения бухарских известняков; 4 - отложения соляно-ангидритовой формации; 5 - рифогенные известняки келловей-оксфорда; 6 - график Δg ; 7 - график Δg , пересчитанной на горизонтальный уровень $H = 306$ м; 8 - график Δg от известной части разреза; 9 - граница рифогенных известняков келловей-оксфорда, определенная методом регуляризации

$$\|Ap - u\|_{R^m}^2 + \alpha \|p - p_0\|_{R^n}^2 = \min. \quad (44.13)$$

Легко убедиться, что для фиксированного α система нормальных уравнений или уравнений Эйлера примет при этом следующий вид:

$$(A^T A + \alpha E)p = A^T u + \alpha p_0. \quad (44.14)$$

Как видно из данной формулы, введение стабилизаторов этого типа для линейных и линеаризованных задач также незначительно усложняет вычислительные процедуры.

Наконец, третья группа стабилизаторов определяет структурные свойства искомого решения. Эти стабилизаторы часто применяются для адаптивной регуляризации - такой, которая настраивается на конкретные свойства решения. В качестве примера рассмотрим методику регуляризации решения в методе сеток, предложенную А.А.Непомнящих и В.С.Ли. Как было отмечено в § 41, применение метода подбора для сеточных моделей приводит к гармоническому решению, которое с точки зрения геолога - бессмысленно. Для подавления этого эффекта была применена адаптивная регуляризация со стабилизаторами нулевого порядка. Пусть требуется решить двумерную обратную задачу гравиразведки для сетки, состоящей из n клеток в отсутствие регионального фона, то есть найти $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$. Тогда стабилизатор можно выбрать в такой форме:

$$\Omega[\sigma] = \sum_{i=1}^n q_i \sigma_i^2, \quad (44.15)$$

где q_i - весовые коэффициенты. Решение задачи производится за несколько этапов.

На первом этапе ищутся гармонические моменты источника и определяются координаты центра масс, а также при заданном значении избыточной плотности вычисляется площадь поперечного сечения объекта. Поскольку об определении формы источника на первом этапе речь не идет, нас может пока удовлетворить и гармоническое решение. Фактически на первом этапе сетка используется как достаточно гибкая модель в аппроксимационном способе определения моментов. Для исключения получения модели с большим разбросом значений σ_i целесообразно ввести условие минимальности нормы решения, поэтому на первом этапе все $q_i = 1$. По полученным данным вычисляются координаты центра масс и радиус квазиэквивалентного круга R с площадью, равной площади изучаемого объекта.

На втором этапе путем выбора весовых коэффициентов q_i в стабилизаторе (44.15) подавляется стремление решения к гармоническому. Гармоническое решение характерно тем, что минимальные и максимальные значения избыточной плотности клеток располагаются по границе сетки (рис. 90б). Чтобы не допустить этого, весовые коэффициенты в стабилизаторе должны быть тем больше, чем больше расстояние i -ой клетки от центра масс. Однако, если ограничиться только этим условием, объект может стянуться в точку. Таким образом, на втором этапе весовые коэффициенты выбираются в зависимости от расстояния d_i между центром i -ой клетки и центром масс по следующим правилам:

$$\begin{aligned} \text{если } d_i \leq R, \text{ то } q_i &= 1, \\ \text{если } d_i > R, \text{ то } q_i &= d_i/R. \end{aligned} \quad (44.16)$$

Штраф, накладываемый стабилизатором на решение, оказывается тем большим, чем больше избыточная плотность i -ой клетки и чем дальше она от защитного круга, радиус R которого определен на первом этапе. В результате на втором этапе решение уже не будет гармоническим, но останется резко неоднородным, причем на границах сетки могут сохраниться клетки с малыми избыточными плотностями.

С целью выравнивания плотностей внутри тела и стремления избыточной плотности к нулю вне его, на третьем этапе производится перераспределение плотностей. Для этого проводят несколько итераций, причем в качестве начального приближения принимают результаты второго этапа, а оптимальный параметр регуляризации выбирают лишь один раз во время первой итерации. Весовые коэффициенты выбираются по следующим правилам:

$$\begin{aligned} \text{если } \sigma_i < 0,1\sigma_{\max}, \text{ то } q_i &= 500, \\ \text{если } 0,1\sigma_{\max} \leq \sigma_i < 0,2\sigma_{\max}, \text{ то } q_i &= 8, \end{aligned}$$

$$\text{если } 0,2\sigma_{\max} \leq \sigma_i < 0,3\sigma_{\max}, \text{ то } q_i = 5, \quad (44.17)$$

$$\text{если } 0,3\sigma_{\max} \leq \sigma_i < 0,5\sigma_{\max}, \text{ то } q_i = 2,$$

$$\text{если } 0,5\sigma_{\max} \leq \sigma_i, \quad \text{то } q_i = 1.$$

Процесс перераспределения прерывается, когда структура получаемого решения удовлетворит интерпретатора, обычно для этого требуется 2-3 итерации.

Таким образом, выбор весовых коэффициентов в достаточно простом по виду стабилизаторе (44.15) дает возможность управлять структурой получаемого решения. Обратим внимание на то, что на всех этапах при этом приходится решать следующую систему нормальных уравнений:

$$(A^T A + \alpha Q)p = A^T u, \quad (44.18)$$

где Q - диагональная матрица коэффициентов q_i , поэтому на пересчет матрицы системы требуется в каждом случае минимальное время.

На рис. 94 показан пример применения адаптивно регуляризованного метода сеток для определения формы одного из хромитовых рудных тел, расположенных в пределах Кемпирсайского ультраосновного массива. На нем видно, что полученное решение не является гармоническим и достаточно хорошо совпадает с реальным рудным телом.

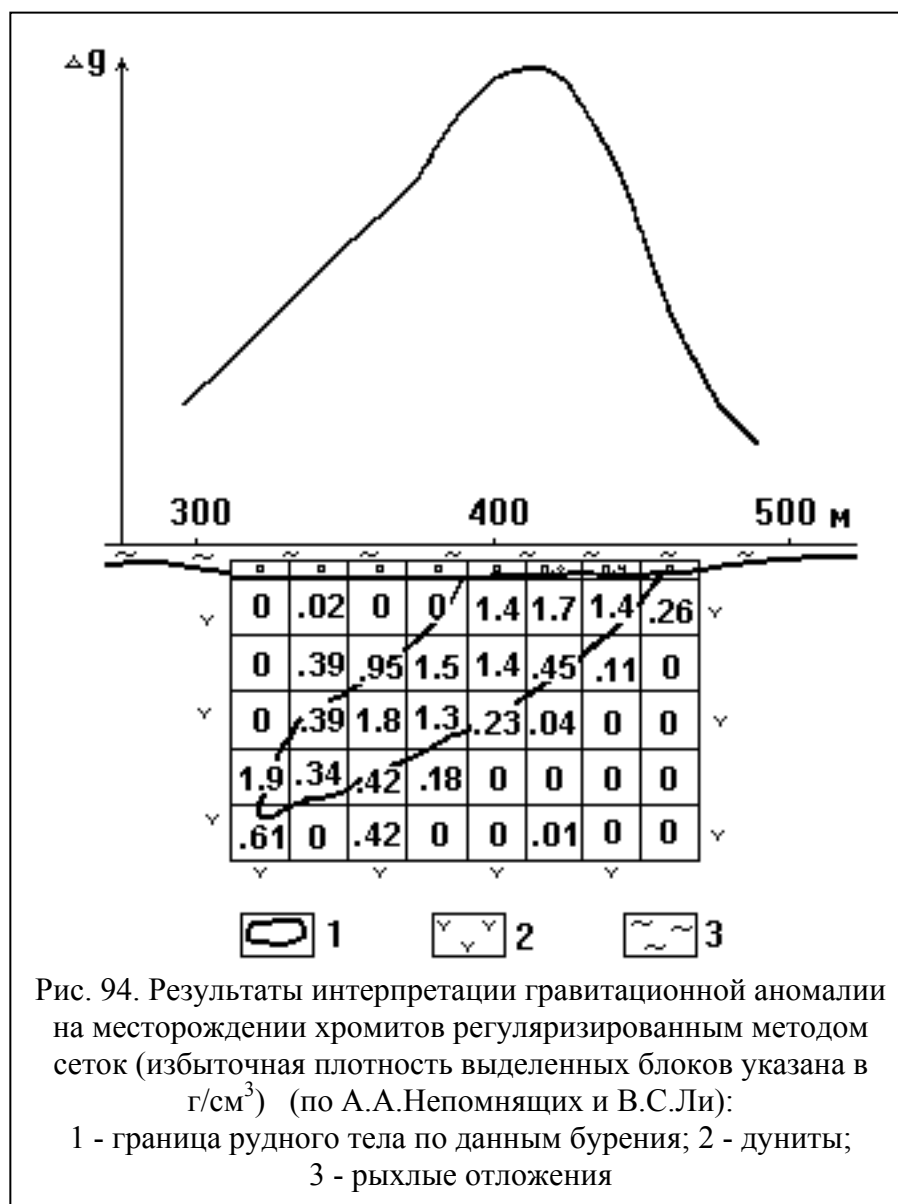


Рис. 94. Результаты интерпретации гравитационной аномалии на месторождении хромитов регуляризованным методом сеток (избыточная плотность выделенных блоков указана в г/см³) (по А.А.Непомнящих и В.С.Ли):

1 - граница рудного тела по данным бурения; 2 - дуниты;
3 - рыхлые отложения

Подводя итоги рассмотрения метода регуляризации, отметим следующие его особенности.

1. Метод регуляризации является наиболее общим методом устойчивого решения обратных задач. Метод подбора, в том числе такие его модификации как псевдообращение и метод Бэкуса-Гильберта являются частными формами метода регуляризации.

2. Основным преимуществом метода регуляризации перед методами подбора является возможность получения устойчивого решения на множествах моделей, которые не являются компактными в пространстве R^n .

3. Выбор стабилизатора в методе регуляризации дает возможность конструктивно управлять структурой решения, учитывать не только количественную, но и качественную априорную информацию.

Вопросы для самоконтроля

1. Можно ли при интерпретации методом подбора использовать модель, число параметров которой превышает число точек наблюдения, по которым проводится подбор?

а) нельзя (24);

б) можно, если точки наблюдения характеризуют все экстремумы и точки перегиба интерпретируемой аномалии (27);

в) можно всегда (30).

2. Необходимо ли при интерпретации методом подбора предварительно применять трансформации для подавления регионального фона?

а) необходимо всегда (39);

б) желательно (48);

в) надо стремиться избегать использования трансформации, определяя параметры фона в процессе подбора (57).

3. Возможно ли, применяя методы подбора и регуляризации определить и форму объекта и его физические свойства?

а) возможно всегда (36);

б) возможно в редких случаях при выполнении условий единственности (62);

в) невозможно (88).

4. Что преодолевается в методе регуляризации путем введения стабилизатора?

а) отсутствие существования решения обратной задачи (71);

б) отсутствие единственности решения обратной задачи (72);

в) отсутствие устойчивости решения обратной задачи (73).

Контрольная сумма при правильных ответах = 216.

ГЛАВА 12. КОМПЛЕКСИРОВАНИЕ МЕТОДОВ КОЛИЧЕСТВЕННОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

§ 45. Комплексирование методов интерпретации при изучении объектов рудного типа

Выше рассмотрены основные методы интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. Эти методы и их многочисленные модификации применяются для решения самых разнообразных геологических задач на всех стадиях геологоразведочных работ. К сожалению, еще у многих геофизиков до сих пор существует стремление проводить количественную интерпретацию каким-либо одним методом. В условиях чрезвычайно разнообразной геолого-геофизической обстановки при таком подходе неминуемо проявляются присущие в той или иной мере каждому из способов недостатки, после чего позитивное отношение к нему сменяется, причем зачастую совершенно необоснованно, негативным. Сейчас уже можно считать очевидной бесперспективность построения достаточно гибких технологий интерпретации на базе одного единственного метода. Только комплексное применение ряда методов, основанных на различных концепциях извлечения информации и объединенных в интерпретационную систему, дает возможность создания действительно эффективных инструментов интерпретации.

Рассмотрим вначале объекты рудного типа. Они встречаются не только при изучении рудных месторождений, но и при исследовании других геологических объектов, для которых характерно наличие замкнутых тел, таких как интрузии, неструктурные ловушки нефти и газа, пространственные ореолы осадочных пород, измененных в результате миграции углеводородов и т.п. Напомним, что если объект рудного типа изолирован, однороден и находится в однородной вмещающей среде, для него при решении обратной задачи гравиразведки возможна предельно однопараметрическая неоднозначность. При решении трехмерной обратной задачи магниторазведки для него возможна предельно трехпараметрическая неоднозначность из-за того, что намагниченность является вектором, а не скаляром, как плотность. Для xz -двумерных задач в магниторазведке однородные рудные объекты характеризуются предельной двухпараметрической неоднозначностью.

Разумеется, в некоторых частных случаях степень неоднозначности может понижаться вплоть до наличия единственности, что упрощает интерпретацию. Например, если двумерное тело имеет в сечении вид выпуклого многоугольника, оно теоретически определяется по аномальному полю однозначно. Это вытекает из единственности локализации вершин многоугольника по особым точкам функций, описывающих поля, и единственности возможности соединения найденных точек прямыми с сохранением выпуклости объекта. Если же замкнутый объект или вмещающая его среда – не однородны, степень неоднозначности, наоборот, повышается, что дополнительно усложняет интерпретацию.

Продемонстрируем возможности комплексирования на примере численного эксперимента определения формы однородного изолированного гравитирующего объекта. Именно на модельных примерах, где изучаемый объект детально известен, наиболее наглядно проявляются достоинства и недостатки методов интерпретации. Для максимальной простоты и иллюстративности будем рассматривать xz -двумерную модель интрузива, верхняя кромка которого расположена на глубине 300 м, видимая мощность 900 м, а подводящий канал распространяется до глубины 1100 м. Избыточную плотность интрузива примем равной $0,3 \text{ г/см}^3$. Аномальное поле модели, вычисленное с точностью до 0,01 мГал на профиле длиной 5 км с шагом 100 м, показано на рис. 95. Эта изолированная аномалия используется для интерпретации несколькими способами, описанными в предыдущих главах.

Начнем с определения гармонических моментов и интегральных характеристик объекта аппроксимационными методами. На рис. 95 представлены результаты подбора исходной аномалии полем линейной массы. Среднеквадратическая погрешность подбора составила 0,036 мГал при амплитуде аномалии 1,97 мГал. Местоположение подобранной линейной массы совпадает с центром масс интрузии, расположенным на глубине около 600 м. Вычислив при заданной избыточной плотности радиус квазиэквивалентного кругового цилиндра (квазиэквивалента первого порядка) и определив площадь его поперечного сечения, можно убедиться, что она отличается от истинной менее чем на 2 %.

На рис. 96 показаны результаты подбора исходной аномалии полем пластинки и квазиэквивалентный прямоугольник.

Среднеквадратическая погрешность подбора здесь еще меньше и составляет 0,029 мГал. Сопоставление результатов демонстрирует, что центр масс, как и площадь поперечного сечения объекта определяются достаточно точно обоими способами. Результаты вычисления интегральных характеристик важны, но не решают еще задачи определения формы интрузии. Более того, они показывают степень сложности решаемой задачи, так как информация об отличии формы истинного объекта от квазиэквивалентов заключена в «полосе» амплитудой в несколько сотых долей миллигала. Тем не менее, поскольку эти отличия – систематические, а не случайные, решать такие задачи вполне возможно.

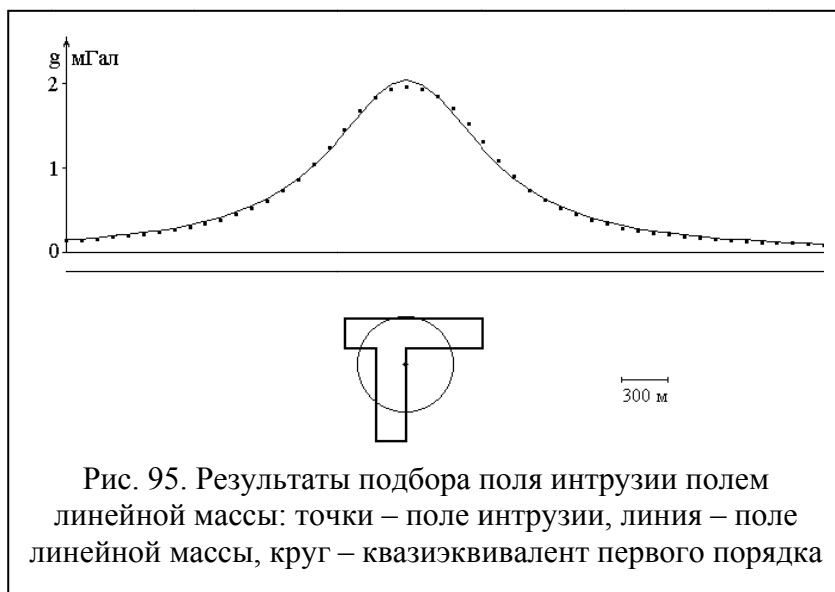


Рис. 95. Результаты подбора поля интрузии полем линейной массы: точки – поле интрузии, линия – поле линейной массы, круг – квазиэквивалент первого порядка

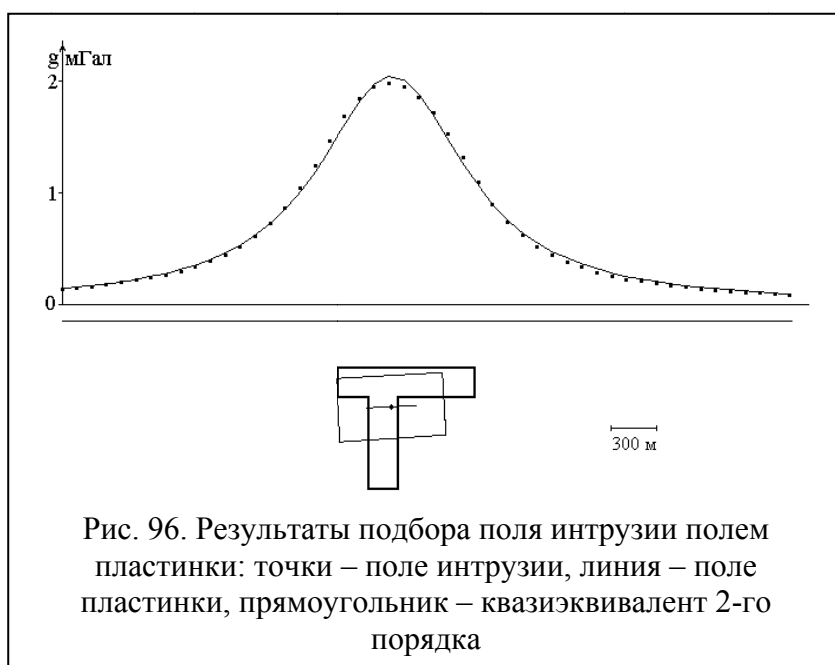


Рис. 96. Результаты подбора поля интрузии полем пластинки: точки – поле интрузии, линия – поле пластинки, прямоугольник – квазиэквивалент 2-го порядка

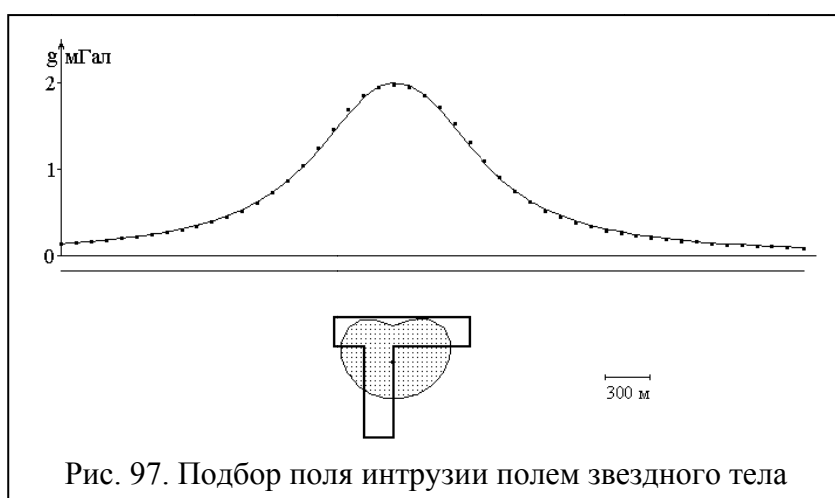


Рис. 97. Подбор поля интрузии полем звездного тела

Попробуем определить форму объекта методом подбора в классе тел, звездных относительно центра масс. Результаты такого подбора показаны на рис. 97; при этом среднеквадратическая погрешность подбора составила всего 0,019 мГал. Очевидно, несмотря на высокую точность воспроизведения поля, подбор не дал возможности определить форму интрузии. Дело в том, что данная модель, несмотря на кажущуюся простоту формы, на самом деле чрезвычайно сложна для интерпретации, так как фактически состоит из двух частей, причем верхняя субгоризонтальная часть практически эквивалентна по своему гравитационному действию компактному телу, расположенному на большей глубине. Это следует, в частности, из рассмотренного в § 19 примера с конхоидой Слюза. Для устойчивого решения этой сложной задачи непременно надо привлечь информацию об особых точках функции, описывающей исходную гравитационную аномалию.

На рис. 98 представлены результаты аппроксимационного продолжения в горизонтальный слой вычисленной с помощью алгоритма, описанного в § 36, функции W_{zz} . Изолинии W_{zz} экстраполированы вниз до пересечения в особых точках, которые в данном случае фиксируют положение верхней кромки интрузии с достаточно высокой точностью. Необходимо,

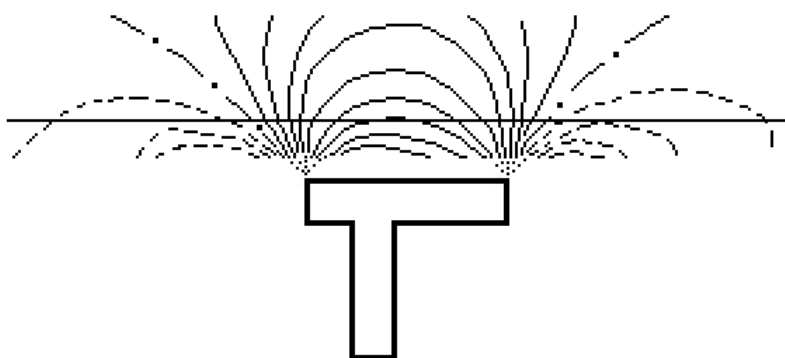


Рис. 98. Определение верхней кромки интрузии с помощью аппроксимационного продолжения

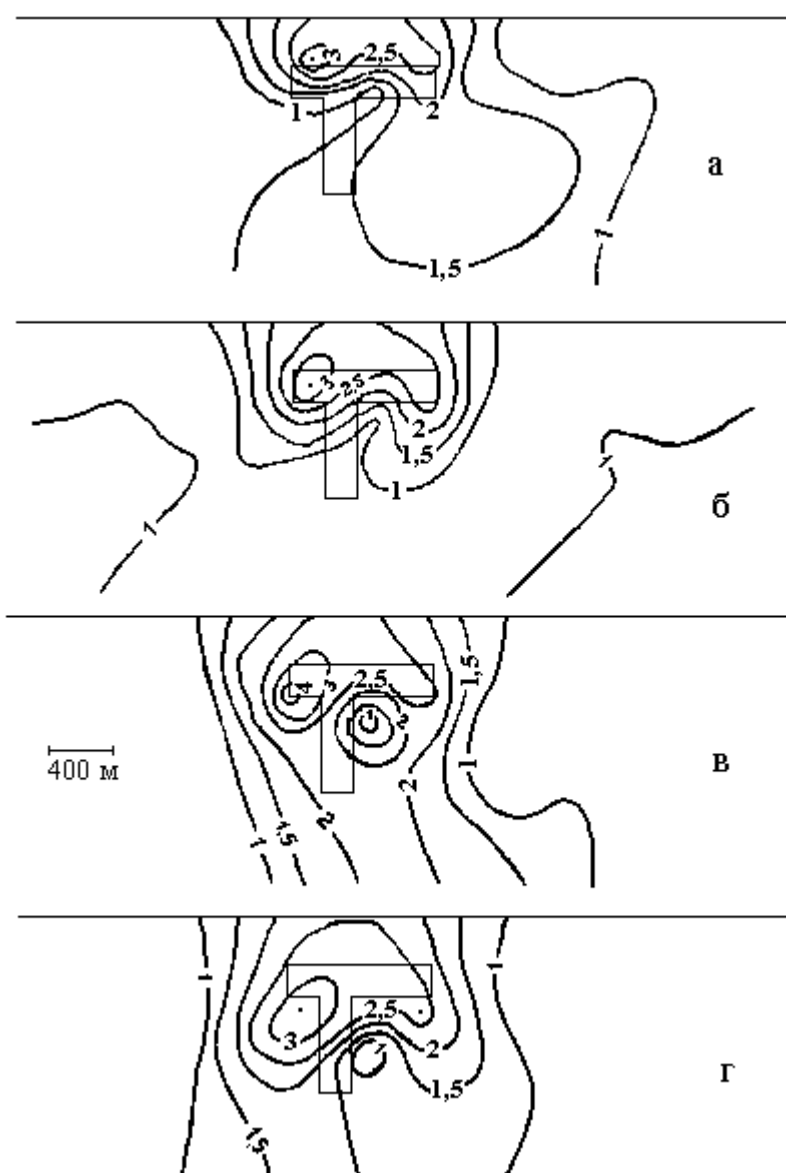


Рис. 99. Карты полного нормированного градиента в вертикальной плоскости:

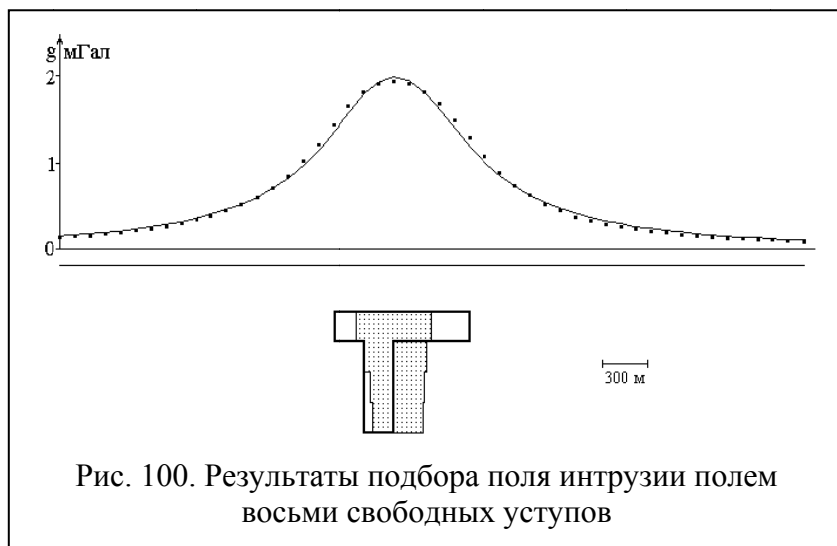
а – $N=35$; б – $N=30$; в – $N=25$; г – $N=20$

правда, еще раз отметить, что эффективность применения этого метода в значительной мере зависит от квалификации и опыта интерпретатора. Укажем также, что полученной информации о положении особых точек самой по себе мало для суждения о форме объекта.

На рис. 99 показаны карты изолиний полного нормированного градиента силы тяжести в вертикальной плоскости при разном числе гармоник N , использованных для гармонического синтеза. Отметим, что принцип автофокусировки для выбора оптимального значения N , изложенный в § 37, в данном случае явно не эффективен. Согласно этому принципу глубина верхней кромки интрузива должна составлять 500 м, а $N_{\text{опт}}=25$ (рис. 99г), в то время как истинная глубина равна 300 м. В то же время горизонтальные координаты особых точек определены достаточно точно. Привлечение полученной информации об особых точках может резко улучшить качество подбора.

Воспользуемся для подбора формы интрузии способом Е. Г. Булаха. Определенные методами особых точек глубина и видимая мощность верхней кромки интрузии, а также найденная аппроксимационными способами моментов глубина центра масс позволяют выбрать в качестве начального приближения прямоугольник. Его верхняя кромка находится на глубине 300 м, а боковые кромки соответствуют положению особых точек, горизонтальные координаты которых и по результатам продолжения в горизонтальный слой и по картам полного нормированного градиента определяются с достаточно высокой точностью. Для грубой оценки глубины нижней кромки можно к глубине центра масс прибавить расстояние от него до верхней кромки. В итоге полученное значение 1000 м всего на 100 м, то есть на расстояние между «точками наблюдения» отличается от истинного. Для выяснения возможностей данного способа подбора пренебрежем этим несущественным (менее 10 %) различием и зафиксируем нижнюю кромку прямоугольника на истинной глубине 1100 м.

Разобьем каждую из боковых кромок стартового прямоугольника на четыре уступа амплитудой 200 м и подберем их горизонтальные координаты каждого из них при заданной избыточной плотности. Результаты подбора, среднеквадратическая погрешность которого оказалась равной 0,041 мГал, показаны на рис. 100. Сопоставление с истинной моделью показывает, что в процессе градиентного спуска был найден локальный минимум, а положение особых точек подобранной модели не соответствует найденному в результате аппроксимационного продолжения. Это явление типично, так как приближенное квазирешение, полученное методом подбора, не сохраняет местоположение и тип особенностей истинного объекта. Это же мы видели по результатам подбора в классе звездных тел.



Повышение эффективности подбора возможно за счет закрепления тех параметров интерпретационной модели, которые известны по данным методов особых точек. В данном случае, закрепив положение двух верхних уступов по особым точкам и проведя подбор местоположения остальных шести уступов, удастся получить удовлетворительное решение практически при такой же среднеквадратической погрешности подбора – 0,037 мГал (рис. 101). Естественно, в условиях численного эксперимента можно продолжить подбор и до лучшего совпадения интерпретируемой аномалии с полем подбираемой модели, однако на практике в силу наличия разнообразных помех чрезмерное увеличение точности подбора нецелесообразно. Подбор, проведенный в классе звездных относительно центра масс тел, с более высокой

точностью без закрепления особых точек дал худшие результаты. Поэтому подчеркнем, что в данном случае к позитивному результату приводит не подбор с максимальной точностью, а именно комплексирование методов интерпретации. Подчеркнем еще раз: повышение требований к точности подбора при работе с достаточно гибкими моделями может повлечь за собой качественное ухудшение результата, так как в методе квазиразностей может достигаться только путем подбора помехи.

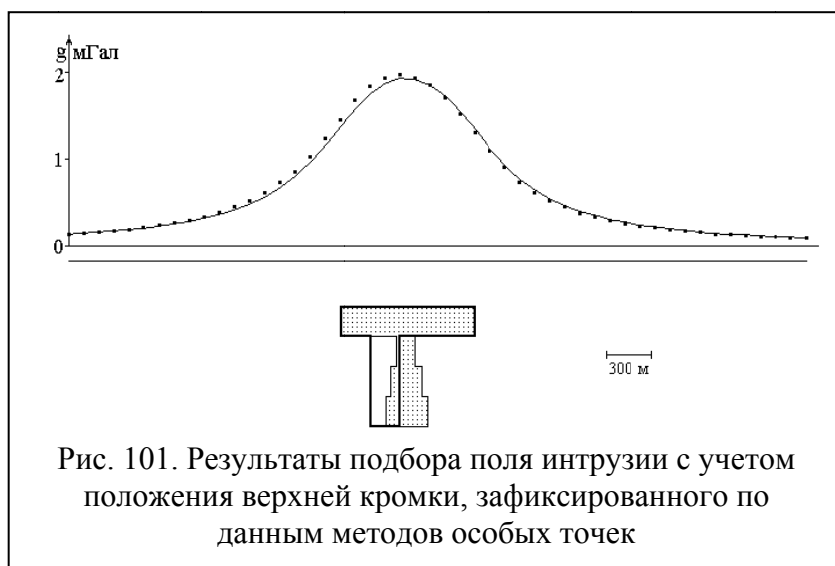


Рис. 101. Результаты подбора поля интрузии с учетом положения верхней кромки, зафиксированного по данным методов особых точек

Рассмотренный пример еще раз иллюстрирует неустойчивость обратных задач и показывает, что, лишь комбинируя методы интерпретации, можно получать решения геологических задач рудного типа в сложных ситуациях. Комплексирование позволяет преодолевать специфические недостатки каждого из методов и в полной мере реализовать их возможности. Естественно, комплексироваться должны методы, основанные на разных концепциях извлечения информации. Технология интерпретации лишь тогда эффективна, когда она включает алгоритмы, основанные и на вычислении гармонических моментов и интегральных характеристик, и на локализации особых точек, и на методах подбора и регуляризации.

§ 46. Комплексирование методов интерпретации при изучении объектов структурного типа

Объекты структурного типа встречаются преимущественно в региональных исследованиях, а также при поисках и разведке нефтяных и газовых месторождений. Вместе с тем, они имеют важное практическое значение и при изучении многих типов рудных месторождений, приуроченных к субгоризонтальным контактными поверхностями раздела сред.

Как было рассмотрено § 19, обратная задача гравиразведки в классе уединенных однородных контактных поверхностей теоретически характеризуется предельно двухпараметрической неоднозначностью. Для единственности ее решения необходимо априорное знание глубины одной из точек и избыточной плотности либо глубин в двух точках. При увеличении числа контактных поверхностей степень неоднозначности обратной задачи еще более возрастает из-за возможности появления разрезов-аннигиляторов, вообще не создающих внешнего аномального поля. Увеличивается степень неоднозначности и в магнитной разведке из-за векторного характера намагниченности.

Тем не менее, реальные геологические структуры, как правило, не являются гладкими из-за наличия разрывных нарушений и неоднородностей физических свойств вблизи границ. Вследствие этого на контактных поверхностях возникают логарифмические точки ветвления и другие особенности, однозначно локализуемые методами особых точек. Поэтому на практике интерпретация потенциальных полей над контактными поверхностями обычно осуществляется комплексом, включающим методы подбора, регуляризации и особых точек. Подчеркнем еще раз, что гармонические моменты для решения задач этого типа непосредственно привлекать нельзя, поскольку модели контактных поверхностей – бесконечны. Для них коэффициенты разложения в ряды Лорана имеют совершенно иной физический смысл, нежели для замкнутых

тел. Например, центр масс, определенный по аномальному полю конхоиды Слюза, фактически будет располагаться гораздо глубже, а именно, в центре ее производящей окружности.

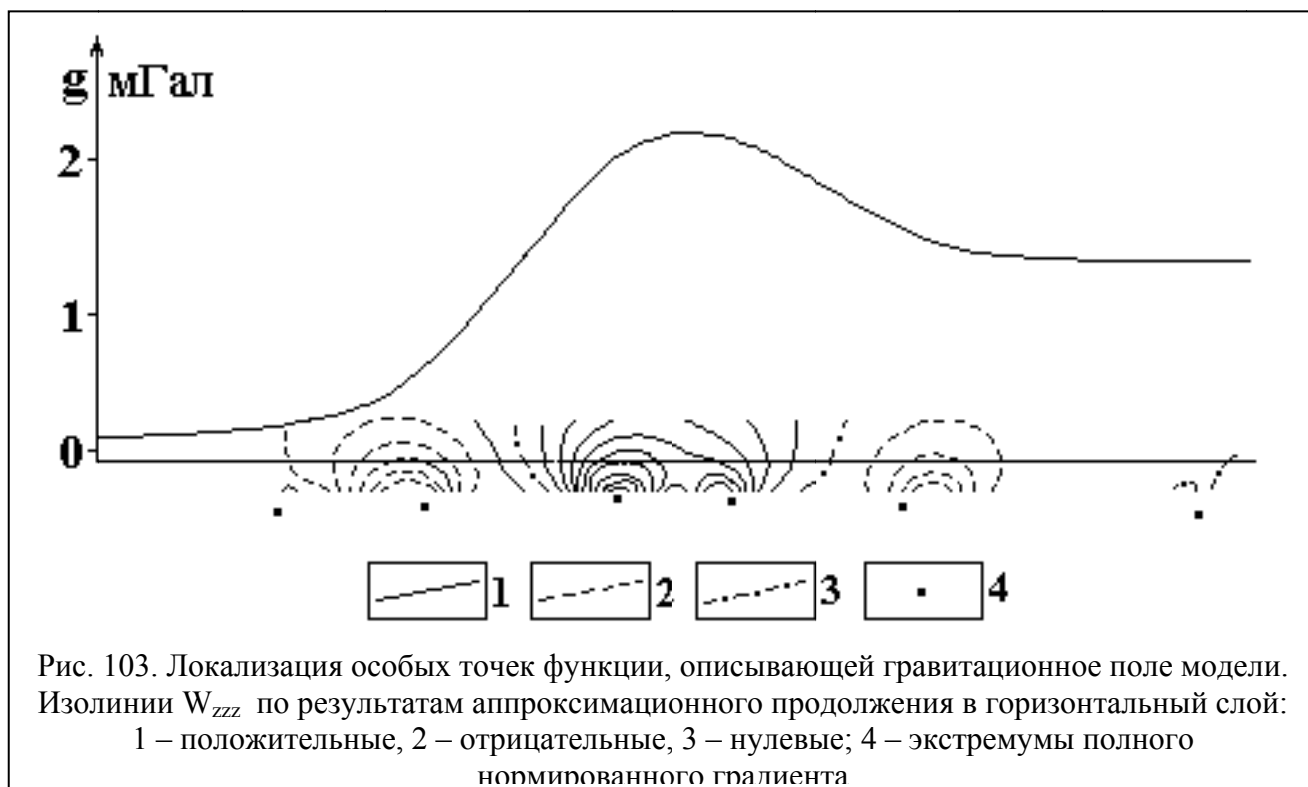
Простейшая методика определения формы контактной поверхности по данным гравиразведки в условиях наличия вертикальных разрывных нарушений базируется на применении модели вертикального уступа. В § 40 было показано, что для данной модели имеет место слабая единственность решения обратной задачи гравиразведки. Если интерпретатор заранее знает, что наблюдаемое поле вызвано вертикальным уступом, все его параметры, в том числе и избыточная плотность, определяются непосредственно по этому полю. В связи с этим в благоприятных геолого-геофизических условиях интерпретаторы выделяют из общего графика гравитационной аномалии локальные области с аномалиями типа ступени и оценивают параметры отдельных вертикальных уступов, что после синтеза полученных результатов зачастую дает неплохую оценку формы изучаемой контактной поверхности.

Рассмотрим простой численный пример, иллюстрирующий возможности комплекса методов подбора и особых точек. На рис. 102 показана двумерная модель однородной контактной поверхности, содержащей точки излома, и гравитационная аномалия над ней. Избыточная плотность на контакте составляет $0,3 \text{ г/см}^3$. Гравитационное поле модели вычислено с шагом 100 м на профиле длиной 11 км.



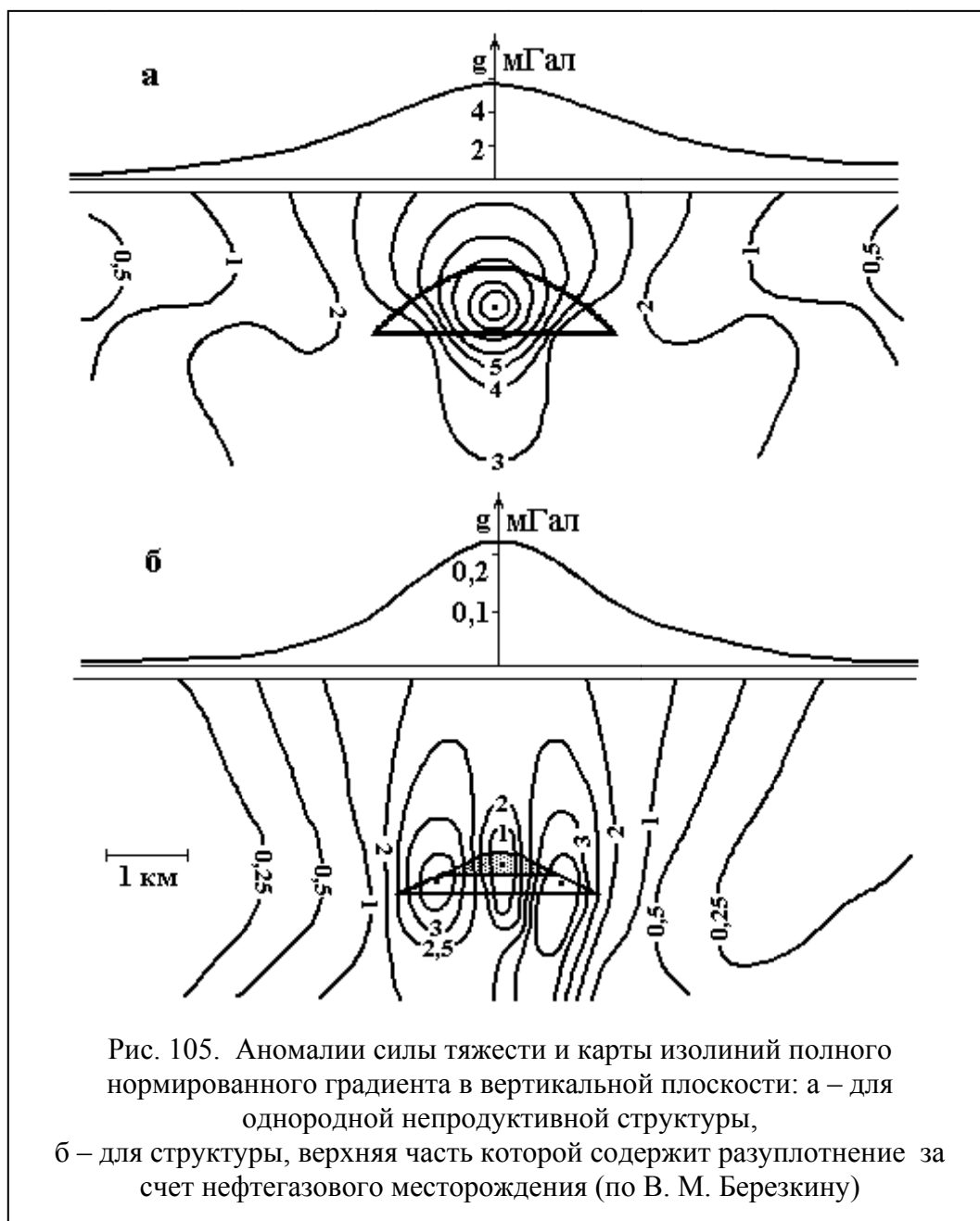
На рис. 103 представлены результаты локализации особых точек функции, описывающей гравитационное поле данной модели, способами аппроксимационного продолжения в горизонтальный слой и нормированных функций. Рисунок позволяет увидеть, что особенности, связанные с точками излома контактной поверхности, определяются обоими способами вполне устойчиво.

Результаты локализации особенностей позволяют в данном случае осуществить определение формы контактной поверхности без априорной информации. Методом квазиразностей ищется такая поверхность, которая минимально уклоняется от локализованных особых точек. При этом удастся определить и избыточную плотность на контакте. На рис. 104 показаны результаты подобной интерпретации. Среднеквадратическая погрешность подбора составила $0,018 \text{ мГал}$, избыточная плотность была оценена в $0,33 \text{ г/см}^3$ при реальной величине $0,3 \text{ г/см}^3$. Форма определенной контактной поверхности достаточно хорошо совпадает с истинной, отличаясь от нее менее чем на 100 м, то есть меньше, чем расстояние между точками, где задавалось модельное поле. Таким образом, и в случае объектов структурного типа комплексирование методов дает интерпретатору большие возможности.

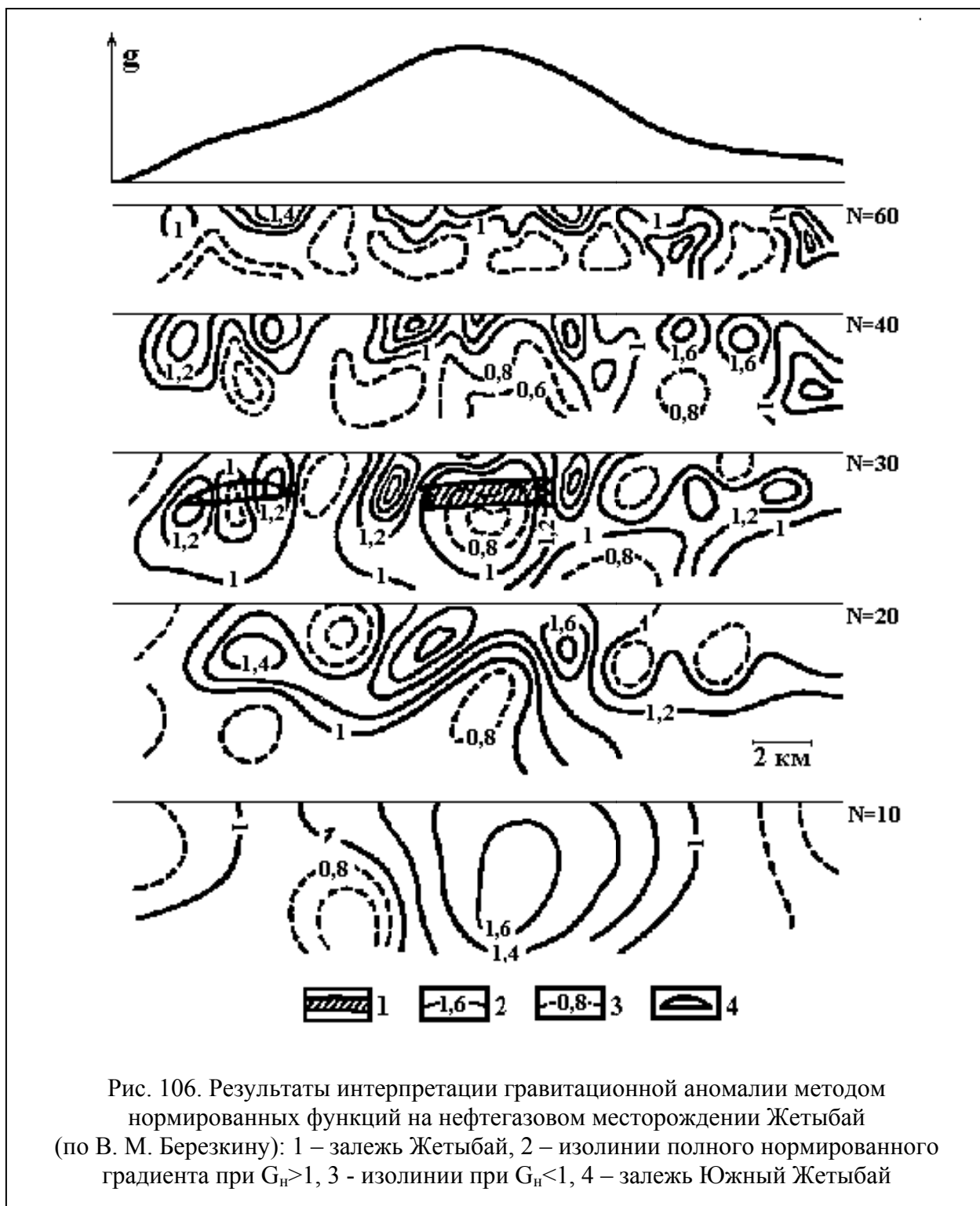


При изучении объектов структурного типа методы особых точек позволяют решать весьма тонкие задачи. В. М. Березкиным была разработана методика прямых поисков нефти по данным гравиразведки в благоприятных условиях, базирующаяся на предложенном им способе нормированных функций. Эта методика широко и достаточно успешно применяется на практике в течение нескольких десятилетий. На рис. 105 изображены карты изолиний полного нормированного градиента над моделями непродуктивной структуры и нефтегазового месторождения. Несмотря на то, что графики ускорения силы тяжести для этих моделей качественно не отличаются друг от друга, результаты применения методов особых точек для них существенно различаются. Для однородной непродуктивной структуры особая точка, локализованная способом нормированных функций, располагается примерно в ее центре масс. Для неоднородной структуры, верхняя часть которой содержит нефть или газ, разуплотнение приводит к изменению карты полного нормированного градиента в вертикальной плоскости.

Между двумя максимумами, характеризующими структуру, появляется минимум, связанный с разуплотнением. Конечно, разуплотнение может быть связано и с неоднородностью самой структуры, но это практически повсеместно приводит к осложнению графика аномалии силы тяжести локальным минимумом. Таким образом, в соответствии с методикой В. М. Березкина перспективными на обнаружение месторождений нефти и газа являются структуры, отмечающиеся локальными максимумами ускорения силы тяжести и проявлением разуплотнения в картах полного нормированного градиента.

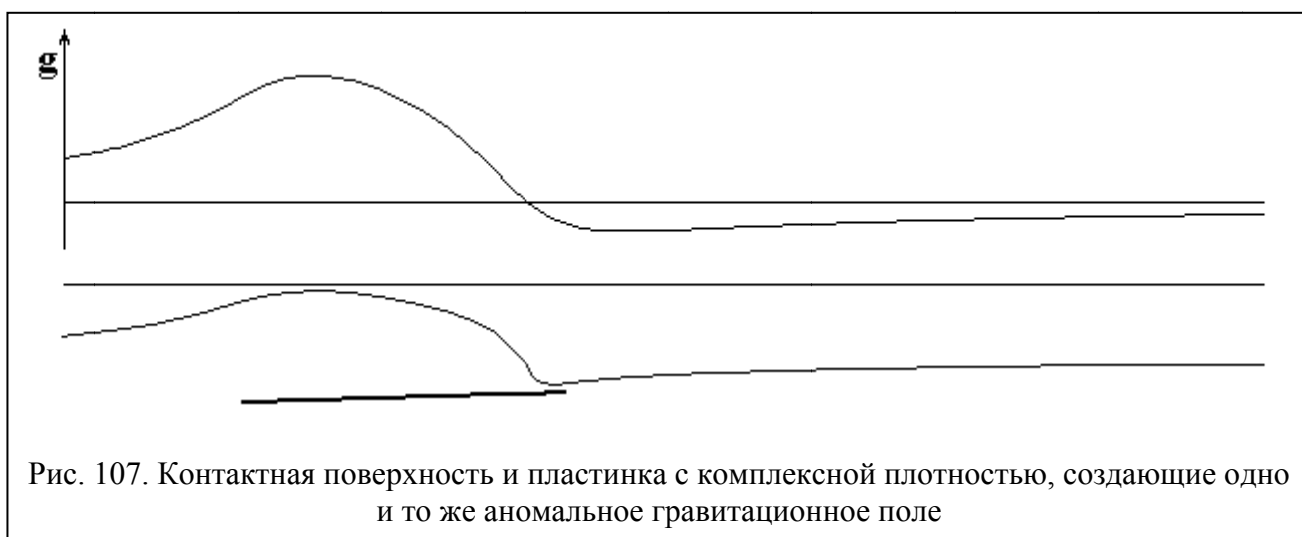


На рис. 106 представлены результаты применения данной методики на нефтегазовом месторождении Жетыбай, расположенном в Казахстане на юге Мангышлака. Здесь на одном из центральных профилей была встречена ситуация, аналогичная приведенной на рис. 105б. При числе гармоник, используемых для гармонического синтеза, $N=30$ в области известной залежи наблюдается минимум полного нормированного градиента, обрамленный по краям максимумами. Вместе с тем, слева видна еще одна подобная область. Проверка ее бурением привела к открытию нового месторождения – Южный Жетыбай.

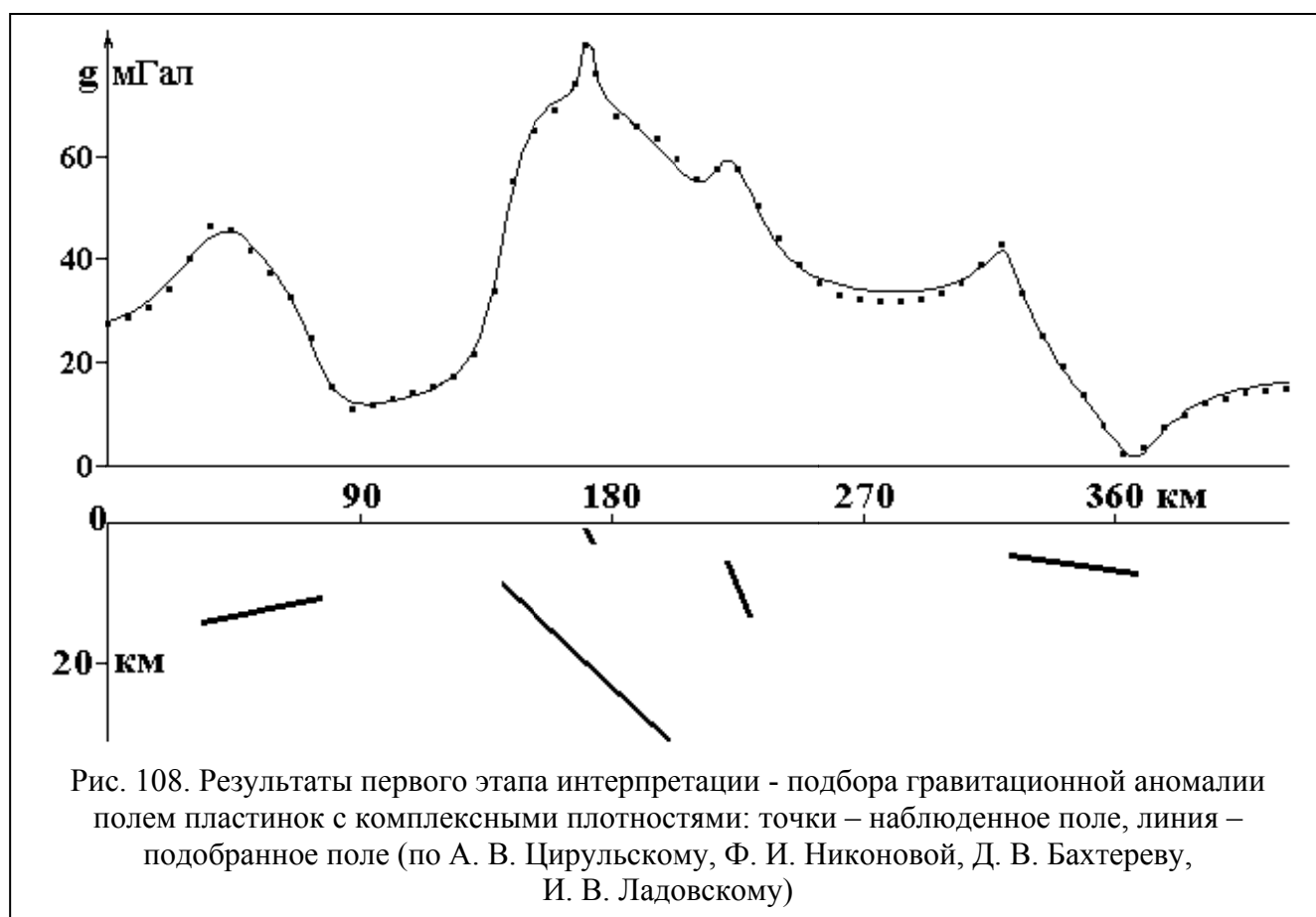


А. В. Цирульский, Ф. И. Никонова и Н. В. Федорова предложили двухэтапную методику изучения объектов структурного типа, базирующуюся на позитивном использовании эквивалентности разнообразных объектов. В соответствии с ней на первом этапе аномальное поле подбирается совокупностью полей сингулярных источников, например, нескольких пластинок с комплексными плотностями. Ими доказано, что поля таких пластинок теоретически эквивалентны полям контактных поверхностей специального вида, удобных для аппроксимации реальных границ раздела сред. В качестве примера на рис. 107 изображены одна из таких поверхностей, эквивалентная ей пластинка и создаваемое ими гравитационное

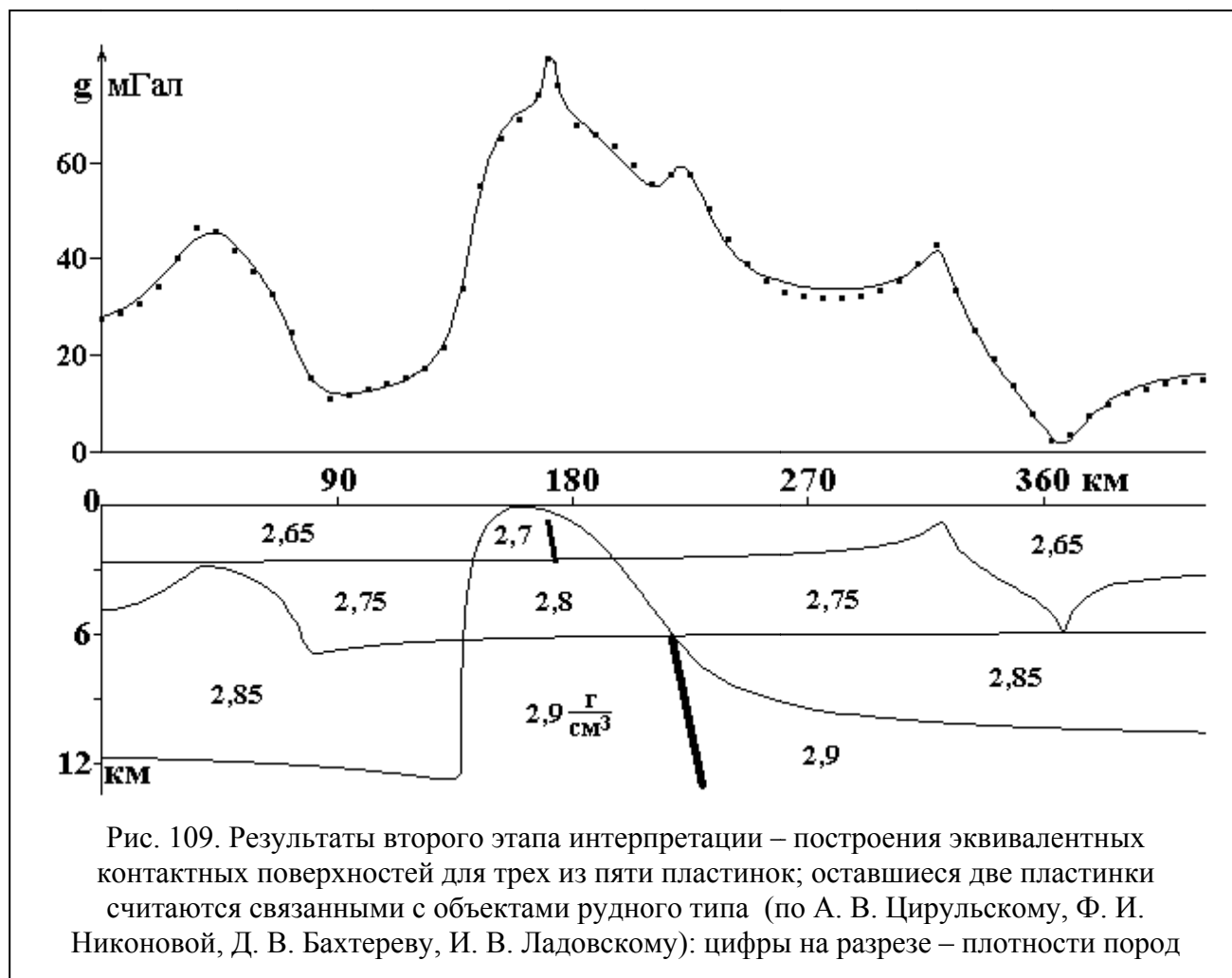
поле. Подчеркнем, что это только одна из возможных поверхностей раздела, принадлежащих бесконечному двухпараметрическому эквивалентному семейству.



Подбор начинается с одной пластинки, затем, если аппроксимация наблюдаемого поля недостаточно точна, число пластинок постепенно увеличивается. Когда исходное поле подобрано достаточно точно, интерпретатор переходит ко второму этапу. На нем для отдельных пластинок или их совокупностей при весьма незначительных затратах машинного времени строят теоретические эквивалентные семейства контактных поверхностей с разными избыточными плотностями и от разных асимптот, что позволяет в итоге выбрать модель, наиболее отвечающую всем предъявляемым к ней требованиям.



На рис. 108 представлены результаты первого этапа интерпретации региональной гравитационной аномалии. Как видно, достаточно сложную аномалию удалось подобрать полем всего пяти пластинок. По мнению интерпретаторов, поля трех из этих пластинок аппроксимируют региональную часть поля, а двух – локальные объекты рудного типа. Для каждой из первых трех пластинок построены эквивалентные контактные поверхности с заданными избыточными плотностями и положениями асимптот. Пересечение контактных поверхностей образует достаточно сложный разрез, показанный на рис. 109. Если задать плотность каких-либо пород, например выходящих на дневную поверхность, можно по избыточным плотностям восстановить истинные плотности, которые отмечены на разрезе. Итак, с помощью трех пересекающихся контактных поверхностей на основе двухэтапной методики удалось аппроксимировать достаточно сложный структурный объект.



Аналогичная методика широко применяется и в магниторазведке, особенно при интерпретации региональных магнитных аномалий.

Рассмотренные выше примеры относились к двумерным моделям, однако, и реальные трехмерные объекты изучаются с помощью подобных подходов. Следует еще раз подчеркнуть, что только комплексное применение различных методик может приводить к эффективному решению реальных геологических задач. Наиболее эффективно применение интегрированных систем, включающих различные методы, в том числе методы особых точек, подбора и регуляризации.

§ 47. Моделирование геологических объектов

При решении сложных геологических задач широко применяется так называемая методика моделирования. Она заключается в построении объемных моделей изучаемых объектов, удовлетворяющих как наблюдаемым полям, так и всей имеющейся в распоряжении интерпретатора априорной геолого-геофизической информации с последующим применением полученных моделей для получения требуемых геологических выводов.

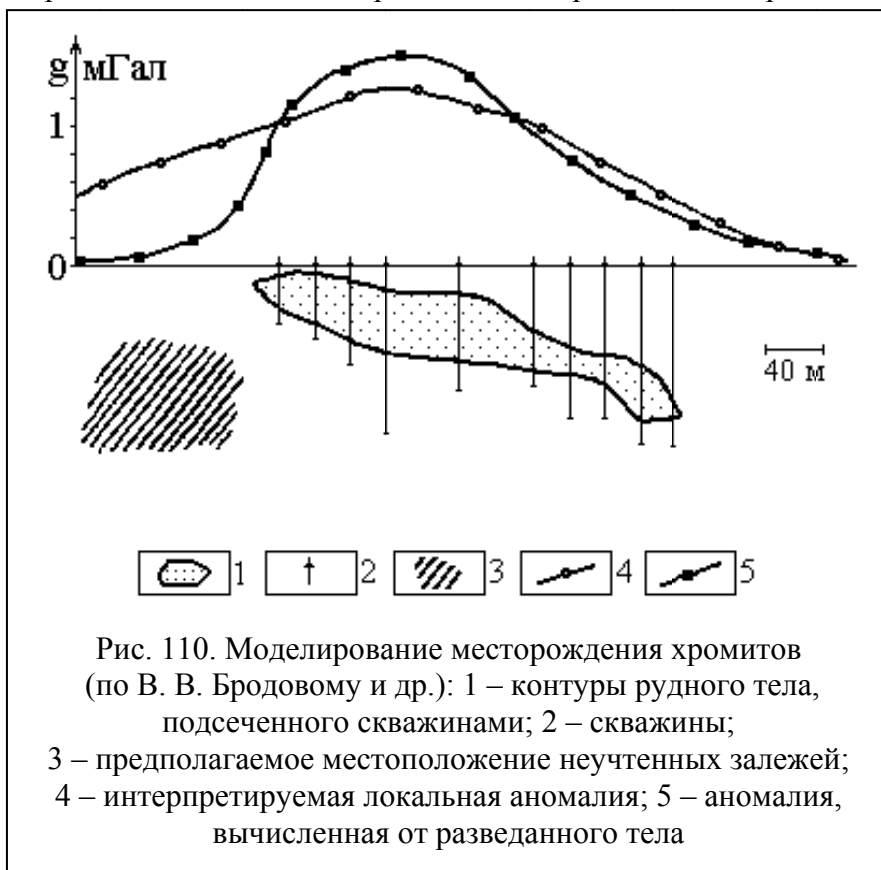
В настоящее время моделирование проводится в трех режимах, различающихся базовыми процедурами построения согласованных интерпретационных моделей:

- 1) режим решения прямых задач;
- 2) режим решения линейных обратных задач;
- 3) режим решения нелинейных обратных задач.

Режим моделирования, базирующийся на процедуре решения прямых задач, начал применяться на практике ранее других и получил наибольшее распространение на стадии разведки месторождений. По определению М. А. Алексидзе, этот режим является гравитационной либо магнитной проверкой, то есть, решая прямые задачи, интерпретатор фактически проверяет проведенные геологические построения. Это дает возможность оценивать степень разведанности месторождений, повышать достоверность подсчета запасов и прогнозных ресурсов, оптимизировать поисковые и разведочные работы. На рис. 110

изображен пример моделирования в данном режиме на месторождении хромитов. Как видно, гравитационная аномалия, вычисленная от разведанного рудного тела, на фланге оказалась примерно на 0,5 мГал меньше наблюдаемой. Интерпретаторы сделали вывод о возможности связи различий в полях с глубоко залегающим рудным телом, расположенном в заштрихованной области. Проверка данной области бурением подтвердила выводы интерпретаторов и привела к значительному увеличению разведанных запасов хромитов.

Второй режим моделирования базируется на решении линейных обратных



задач. Основными областями его применения являются региональные и поисковые работы в условиях, когда нет достаточно достоверных сведений о физических свойствах изучаемых объектов. При этом моделирование часто сводится к неформализованному перебору возможных форм и решению линейной обратной задачи для оценки возможных плотностей либо намагниченностей пород с последующим их анализом на непротиворечивость с априорными сведениями. Такое моделирование иногда называют эквивалентным, поскольку условия единственности решения обратной задачи при этом могут оказаться невыполненными.

Достоверность моделирования в данном режиме значительно повышается, если изучаемые объекты имеют блоковое x -двумерное строение. Дело в том, что границы блоков

обычно достаточно надежно определяются методами особых точек, что позволяет вполне уверенно разбить изучаемый объект на практически однородные блоки. Те же методы особых точек дают возможность оценить и глубины верхней и нижней кромок блоков, после чего остается определить лишь их физические свойства. Подобная задача теоретически имеет единственное решение.

При интерпретации региональных магнитных аномалий часто делается предположение о направлении вектора намагниченности изучаемых пород по направлению современного геомагнитного поля. Другими словами, намагниченность пород считается преимущественно индуктивной, и это позволяет определять для каждого из выделенных методами особых точек блоков лишь модуль намагниченности, сокращая размерность решаемой задачи. Обратим внимание на то, что при интерпретации результатов модульных съемок, то есть при истолковании аномалий ΔT , определение намагниченности, строго говоря, является нелинейной задачей. Лишь для слабоинтенсивных магнитных аномалий может применяться модель гармонического приближения для ΔT , линейризирующая задачу определения намагниченностей блоков. Если изучаемые объекты заведомо имеют значительную естественную остаточную намагниченность, не совпадающую с направлением современного геомагнитного поля, для каждого из них приходится определять все три компоненты намагниченности.

Рассмотрим пример применения подобного моделирования на раннем этапе интерпретации данных магниторазведки. На рис. 111а показана карта изодинам ΔT , полученная по материалам аэромагнитной съемки, на площади около 7500 км². В связи со сравнительно небольшой величиной выявленных аномалий от пород кристаллического фундамента, для моделирования был применен режим решения линейной обратной задачи.

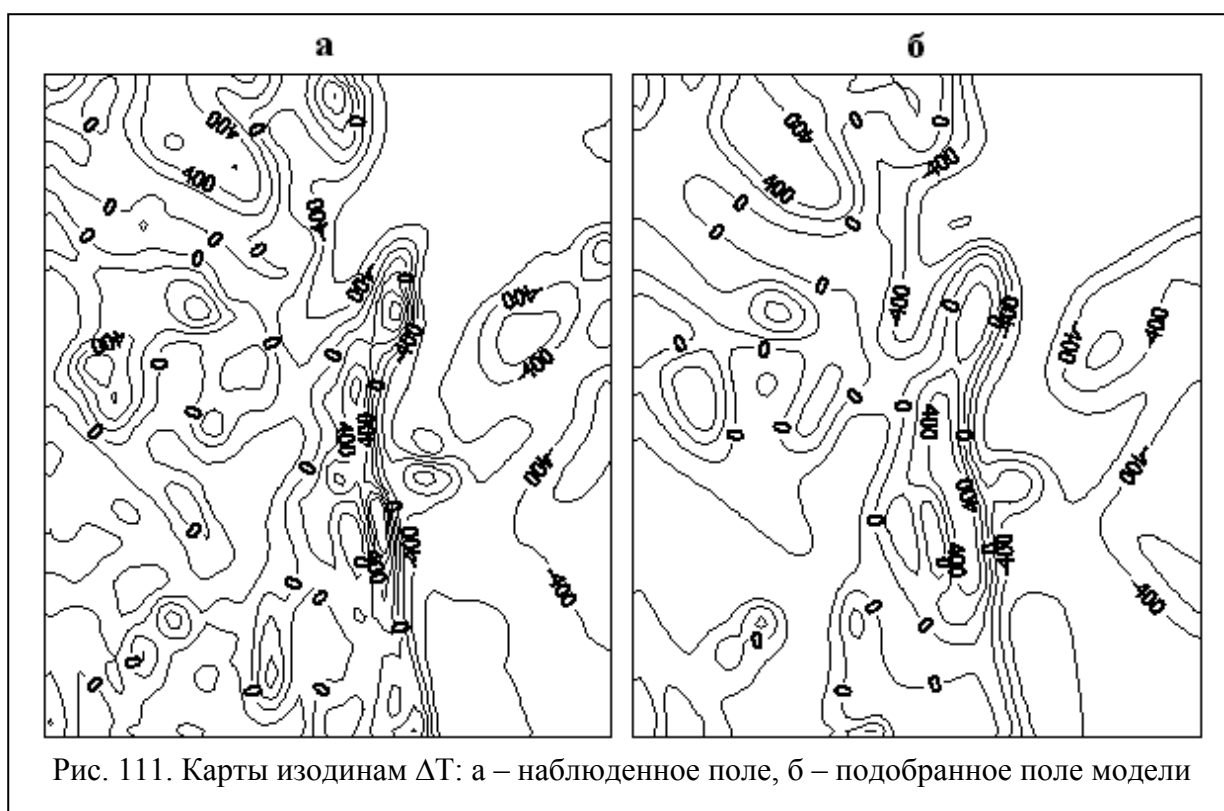
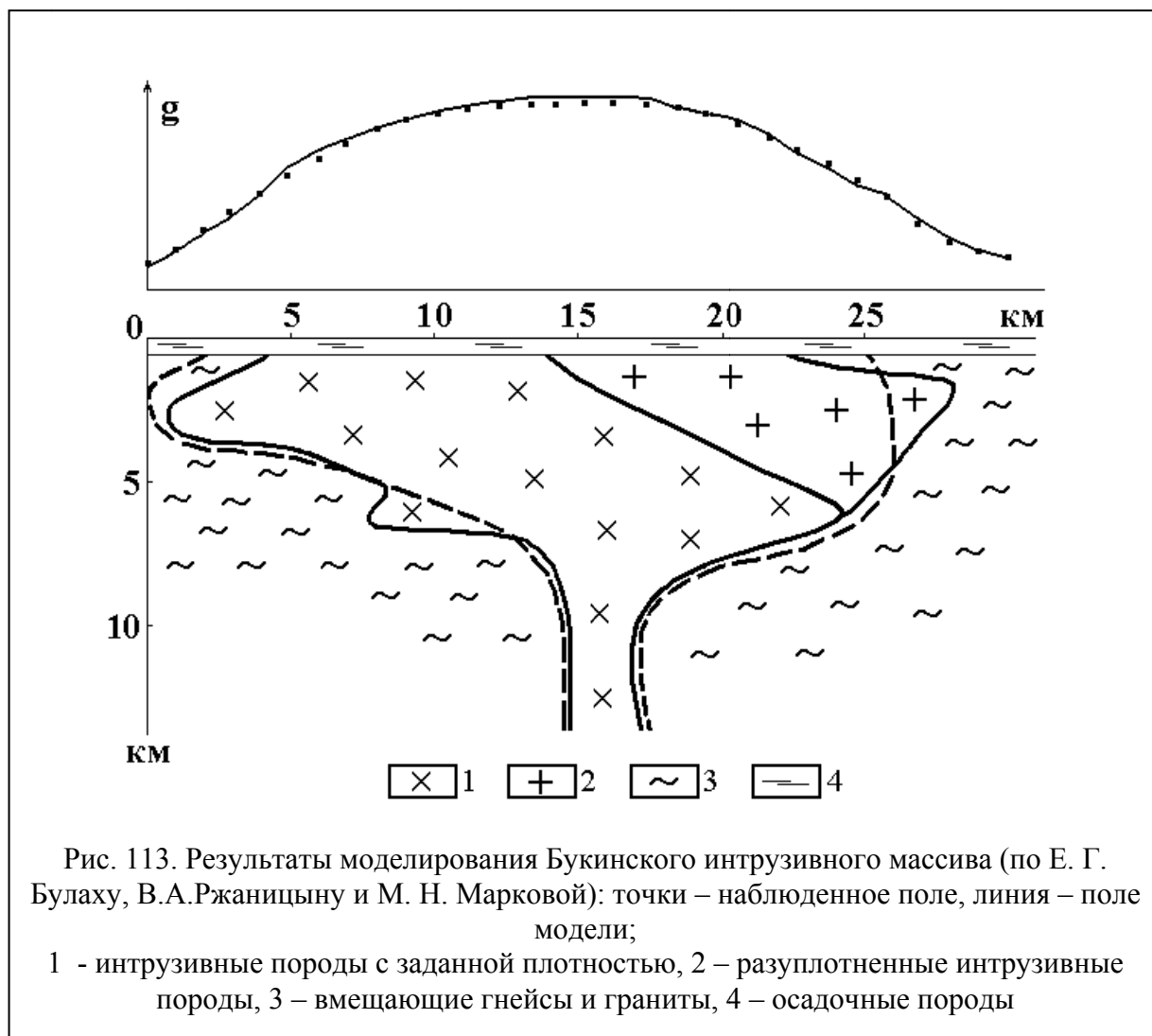


Рис. 111. Карты изодинам ΔT : а – наблюдаемое поле, б – подобранное поле модели

Вначале по результатам интерпретации методами особых точек изучаемый район был разбит на 50 блоков, разделенных вертикальными границами, причем, один из них был выбран базовым. Глубина верхней кромки намагниченных объектов оказалась близкой к 2300 метрам и была принята как единая для всех блоков, нижняя кромка блоков была выбрана равной 10 км. Расположение блоков в плане показано на рис. 112, причем для уменьшения граничных

Третий режим базируется на решении нелинейных обратных задач. В моделировании он чаще рассматривается как вспомогательный и применяется для небольшой коррекции ранее

построенных и весьма близких к оптимальным моделям. В качестве примера можно рассмотреть моделирование Букинского интрузивного массива на Волыни по данным гравиразведки. Эта практическая задача соответствует теоретическому примеру, рассмотренному в § 45. Букинский массив сложен в основном монцонитами, кварцевыми монцонитами, а также габброидами и сиенитами; вмещающими породами являются гнейсы и граниты. Первоначальный этап моделирования был проведен в режиме решения прямой задачи, и по его результатам был сделан вывод о возможной неоднородности массива. На рис. 113 показаны контуры стартовой и итоговой моделей по одному из интерпретационных профилей. Итоговая модель с учетом разуплотнения была получена в режиме решения нелинейной обратной задачи способом Е. Г. Булаха, изложенным в § 43, и рисунок показывает, что оптимизация достаточно заметно изменила первоначальную форму модели.



Моделирование геологических объектов во всех режимах рассчитано на максимально активное вовлечение человека-интерпретатора в синтез имеющейся информации. Это требует от интерпретатора высокой квалификации и весьма трудоемкой работы по формированию моделей. Зато обычно этот подход дает возможность справиться со столь сложными геологическими задачами, которые в настоящее время пока еще не поддаются решению в полностью автоматическом режиме.

§ 48. Интерпретация данных комплексной магниторазведки при изучении сильномагнитных объектов

Интерпретация магнитных аномалий при изучении сильномагнитных геологических объектов отличается несколькими специфическими особенностями. В первую очередь, здесь необходимо учитывать эффект размагничивания тел как в их собственном аномальном поле, так и в аномальных полях соседних тел. Это требует, с одной стороны, корректного решения прямой задачи и, с другой стороны, максимально широкого комплексирования методов интерпретации при моделировании. Дело в том, что различные методы количественной интерпретации в разной мере чувствительны к влиянию эффекта размагничивания.

Максимально чувствительны к проявлениям размагничивания методы подбора и регуляризации, что, очевидно, связано с зависимостью намагниченности в сильномагнитных объектах от их формы. В несколько меньшей степени эффект размагничивания влияет на результаты определения интегральных характеристик объектов, в частности, на определение местоположения центров масс. Наконец, еще меньше сказывается специфика сильномагнитных объектов при локализации особых точек функций, описывающих их магнитные аномалии. Более того, из-за изложенного в § 17 характера намагничения многоугольных цилиндров, особые точки, расположенные в их вершинах, локализуются даже устойчивее, нежели для слабомагнитных тел.

Другой специфической особенностью интерпретации магнитных аномалий при изучении сильномагнитных геологических объектов является необходимость достаточно достоверных знаний и о магнитной восприимчивости, и о естественной остаточной намагниченности горных пород и руд. Эту информацию весьма сложно получить даже на основе изучения образцов, извлеченных из объектов. Дело в том, что при бурении и при отборе образцов из геологических обнажений приходится прикладывать большие механические усилия, в результате которых исходные магнитные свойства сильномагнитных пород и руд могут существенно искажаться. Наиболее подвержена искажению естественная остаточная намагниченность, так как значительная ее часть у сильномагнитных руд является вязкой и динамической. В этих условиях гораздо предпочтительнее использование комплексной магниторазведки.

Комплексная магниторазведка представляет собой геофизический комплекс, в котором классическую магниторазведку дополняют методы, отражающие лишь влияние индуктивной намагниченности пород и не зависящие от их естественной остаточной намагниченности.

Зарождение комплексной магниторазведки началось с привлечения к интерпретации магнитных аномалий данных магнитовариационных исследований. Такими экспериментами, базирующимися на изучении изменений амплитуды вариаций над рудами, многие геофизики занимались еще с конца XIX века, но наиболее последовательно данный подход был обоснован Б. М. Яновским. Основным недостатком вариационного метода являются помехи магнитотеллурического происхождения, усиливающиеся в зонах повышенной проводимости, тем не менее, целый ряд исследователей продолжал его разработку и практическое применение.

В 1957 г. В. Д. Стадухин и О. А. Соловьев независимо друг от друга предложили и опробовали новый метод исследования магнитных геологических объектов, названный методом искусственного подмагничивания (МИП). В этом методе изучаемый объект индуктивно намагничивается искусственным источником, представляющим собой петлю достаточно больших размеров из изолированного провода, по которому пропускают сильный постоянный электрический ток. Индуцированное поле измеряется на поверхности Земли с помощью высокоточного магнитометра, и по его аномальной части делается вывод о величине магнитной восприимчивости. МИП применялся преимущественно на Урале и в Казахстане в районах с достаточно спокойным рельефом. Теория метода была весьма глубоко проработана благодаря усилиям В. А. Филатова, А. В. Цирульского, П. С. Мартышко, В. Н. Страхова и других исследователей.

Наиболее широкого практического применения комплексной магниторазведки удалось добиться за счет вовлечения в комплекс низкочастотных индуктивных методов

электроразведки. Впервые соображения об их применении при изучении магнитных геологических объектов высказал С.Уорд, но, судя по опубликованным данным, его соображения за границей не были практически реализованы. Отечественные работы в этом направлении начали систематически проводиться с 1965 года. Первый шаг в данном направлении был сделан в Московском геологоразведочном институте Ю. В. Якубовским и И.А. Доброхотовой, позже к ним присоединились Е. М. Гаранский, И. В. Ренард и автор.

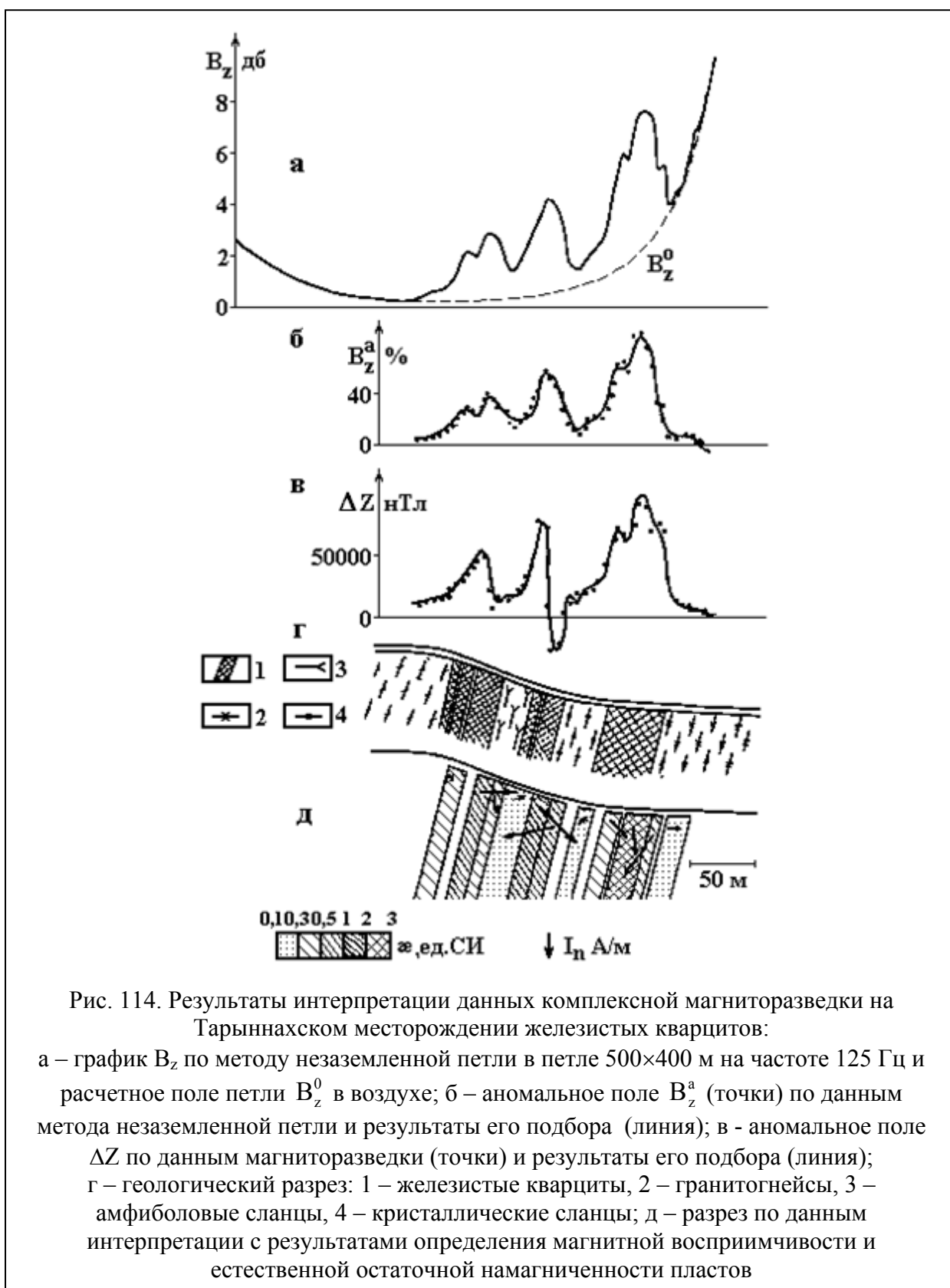
В низкочастотной индуктивной электроразведке производятся наблюдения индукции магнитной составляющей переменного гармонически меняющегося электромагнитного поля, создаваемого искусственными источниками. В качестве источников могут использоваться незаземленные петли различных конфигураций, питаемые низкочастотным переменным током от генератора, заземленные длинные кабели, магнитные диполи и их комбинации и т.п. Приемниками обычно служат магнитоиндукционные датчики или широкополосные индукционные преобразователи, э.д.с. которых измеряется с помощью микровольтметров. Высокая помехозащищенность аппаратуры достигается за счет фильтрации, чего нельзя добиться в методе искусственного подмагничивания на постоянном токе. Важнейшей особенностью низкочастотной индуктивной электроразведки является возможность проведения многочастотных измерений. В комплексной магниторазведке наиболее часто используется одна из модификаций низкочастотной индуктивной электроразведки, называемая методом незаземленной петли (НП). Детально метод НП рассматривается в курсе электроразведки, поэтому здесь приведем лишь краткое и упрощенное описание тех его методических основ, без которых нельзя понять, как он помогает в истолковании магнитных аномалий.

Для изучения сильномагнитных объектов на дневной поверхности раскладывают квадратную или прямоугольную в плане петлю из изолированного провода с размерами сторон от первых сотен метров до нескольких километров. Размеры сторон выбираются в зависимости от геолого-геофизических особенностей изучаемой территории и, как правило, в несколько раз превышают изучаемые объекты. Через эту петлю пропускают стабилизированный переменный ток частотой от долей Гц до нескольких кГц - столь низкой, чтобы электрическая проводимость руд и вмещающих пород оказывала минимальное влияние на получаемые результаты. Таким образом, петля создает в пространстве переменное магнитное поле низкой частоты, которое, поляризует изучаемый объект в зависимости от его размеров, формы и магнитной восприимчивости. Естественная остаточная намагниченность пород и руд из-за переменности тока в данных метода НП вообще не проявляется. Аномальное поле, возникшее под влиянием поляризации, изучают с помощью магнитоиндукционных датчиков по профилям, проходящим внутри петли. Наиболее часто измеряется вертикальная компонента переменного магнитного поля петли B_z .

На рис. 114а показаны результаты измерения B_z на одном из профилей Тарыннахского месторождения железистых кварцитов в Южной Якутии. На рисунке видно, что график представляет собой сумму нормального поля петли B_z^0 , похожего в ее центре на параболу, и аномалий от железистых кварцитов. Детально зная форму петли, разложенной на неровном рельефе, можно в каждой из точек наблюдения вычислить B_z^0 и определить аномалию B_z^a по формуле:

$$B_z^a = \frac{B_z - B_z^0}{B_z^0}. \quad (48.1)$$

Эта аномалия обычно выражается в процентах. На рис. 114б показан график B_z^a , а на рис. 114в – график ΔZ по данным магниторазведки. Качественное сопоставление графиков показывает, что по результатам метода НП выявляются три пачки железистых кварцитов. Они же проявляются и по данным магниторазведки, но при этом средняя пачка имеет значительную субгоризонтальную остаточную намагниченность, под влиянием которой график ΔZ над этой пачкой приобретает знакопеременный характер. Таким образом, даже качественное сопоставление графиков B_z^a и ΔZ дает важную информацию о природе магнитных аномалий.



Количественная интерпретация данных комплексной магниторазведки начинается, как правило, с локализации особых точек функций, описывающих B_z^a и ΔZ . В случае объектов типа железистых кварцитов это сразу дает информацию о глубине и видимой мощности крутопадающих пластов. Угол падения и магнитные свойства каждого из пластов определяются

методом подбора, при этом по данным метода НП находят кажущуюся магнитную восприимчивость пластов. Так как намагниченность их верхней части под влиянием размагничивания уменьшается, метод подбора, базирующийся на моделях однородно намагниченных пластов, систематически занижает величину α . Учет эффекта размагничивания дает возможность получить неискаженные величины магнитной восприимчивости. Далее по данным магнитной съемки с учетом размагничивания получают компоненты вектора суммарной намагниченности каждого из пластов. Поскольку нормальное геомагнитное поле в районе работ известно, остается вычислить компоненты индуктивной намагниченности каждого из пластов, вычесть их из суммарных и найти компоненты вектора естественной остаточной намагниченности. Результаты подобной интерпретации представлены на рис. 114. Отметим, что естественная остаточная намагниченность руд здесь в верхней части пластов преимущественно связана с ударами молний, поэтому только по данным комплексной магниторазведки удастся уверенно картировать рудные пласты.

В природе встречаются самые разнообразные соотношения между индуктивной и естественной остаточной намагниченностями пород и руд, что можно продемонстрировать на реальных примерах. На рис. 115 представлены результаты комплексной магниторазведки на Мурском участке в Среднем Приангарье. Здесь магнитной съемкой была обнаружена аномалия ΔZ амплитудой 50 мкТл, которую предположительно связывали с наличием железных руд. Аномалия ΔZ , выраженная в процентах к нормальному полю, близка к 100 %. Метод незаземленной петли выявил аномалию B_z^a амплитудой всего 4 %, следовательно, магнитная аномалия практически полностью связана с естественной остаточной намагниченностью пород трапповой формации. Дальнейшие петрофизические исследования подтвердили, что в зоне окварцевания и ороговикования долеритов вблизи контакта с известковистыми песчаниками ордовика незначительно возросла концентрация магнетита и уменьшился размер его зерен, что привело к резкому локальному увеличению естественной остаточной намагниченности. Таким образом, интенсивная магнитная аномалия на Мурском участке оказалась «безрудной».

Другая ситуация встретила на месторождении магнетитовых руд Кумдыколь в Казахстане. На рис. 116 представлены данные комплексной магниторазведки на одном из профилей этого месторождения. Здесь естественная остаточная намагниченность руд - термоостаточная и направлена противоположно современному геомагнитному полю. В результате оказалось, что большая часть руд имеет суммарную намагниченность, направленную практически вверх и создающую отрицательные магнитные аномалии амплитудой свыше 10 мкТл. В наиболее же мощном рудном теле суммарная намагниченность является почти нулевой, то есть индуктивная и остаточная намагниченности руды компенсировали друг друга. Соответственно, над этим магнетитовым рудным телом и аномалия ΔZ оказалась практически нулевой. Подчеркнем парадоксальность данной ситуации: оказалось,

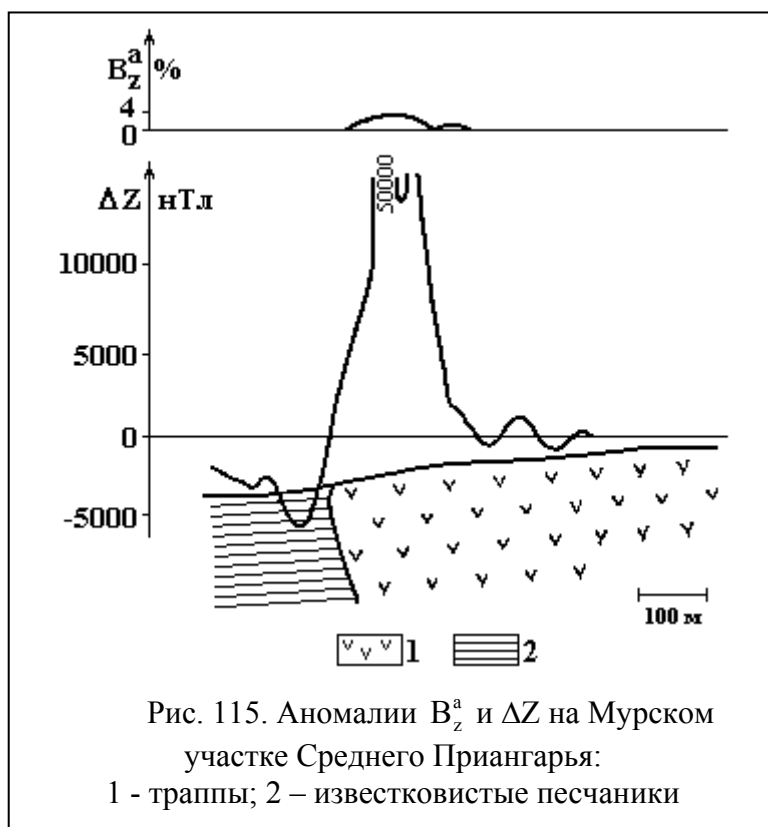


Рис. 115. Аномалии B_z^a и ΔZ на Мурском участке Среднего Приангарья:
1 - траппы; 2 – известковистые песчаники

что над сильномагнитными рудами нет магнитной аномалии. На месторождении Кумдыколь только данные метода НП дают возможность картировать рудные залежи.

Приведенные примеры показали, что над сильномагнитными пластами могут наблюдаться магнитные аномалии ΔZ самого различного вида. Таким образом, лишь комплексная магниторазведка позволяет полноценно вести их исследование.

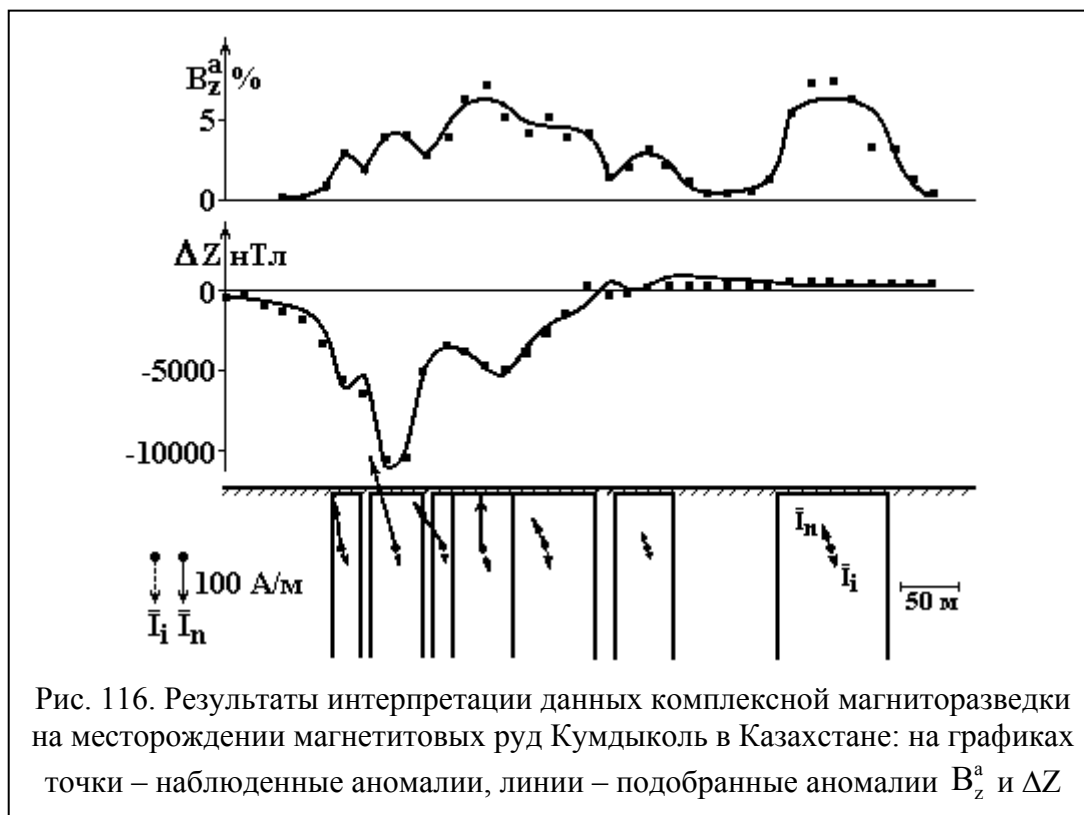
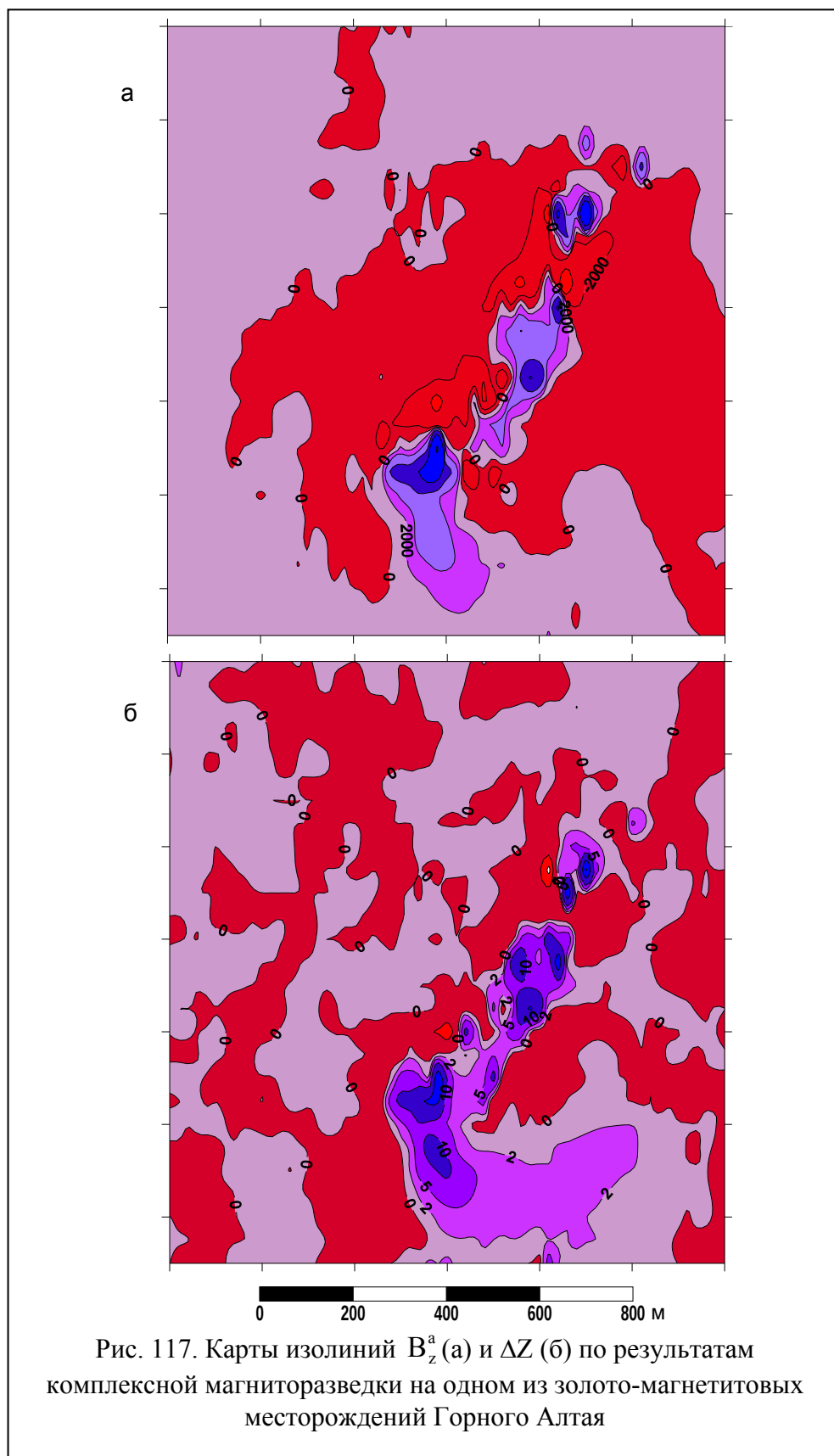


Рис. 116. Результаты интерпретации данных комплексной магниторазведки на месторождении магнетитовых руд Кумдыколь в Казахстане: на графиках точки – наблюдаемые аномалии, линии – подобранные аномалии B_z^a и ΔZ

Рассмотренные примеры относились к относительно простым объектам пластового типа. Для объектов сложной формы интерпретация еще более усложняется, и приходится привлекать весь арсенал методов истолкования магнитных аномалий. На рис. 117 показаны карты изодинам ΔZ по результатам магнитной съемки масштаба 1:5000 и изолиний B_z^a по данным низкочастотной индуктивной электроразведки методом незаземленной петли (НП), выполненной в том же масштабе на одном из золото-магнетитовых месторождений Горного Алтая. Магнитное поле ΔZ изменяется на участке в пределах от -8445 до +54950 нТл, а аномалии B_z^a - в пределах от -11,4 до +36,8 % от нормального поля петли. Качественное сопоставление карт показывает практическую идентичность морфологии аномалий, что свидетельствует о преимущественно вертикальном направлении намагниченности руды. Минимумы, обрамляющие максимумы и связанные с рудой, в свою очередь говорят о том, что нижняя кромка рудных тел расположена на небольшой глубине.

Для получения количественных данных на месторождении было проведено комплексное моделирование. Вначале на всех профилях были локализованы особые точки функций, описывающих аномальные поля. Далее аппроксимационным методом были найдены первые гармонические моменты и вычислены координаты центров масс рудных тел. Затем на нескольких интерпретационных профилях, где измерения проводились с шагом 5 м, были построены двумерные модели рудных тел, на базе которых составлена стартовая трехмерная модель месторождения.



На рис. 118 представлены результаты интерпретации данных метода НП на одном из таких профилей. Локализованные особенности отмечены на рисунке точками на фоне подобранного с учетом размагничивания разреза. Квазиквивалентная пластинка и вектор нулевого гармонического момента также показаны на рис. 118. Ступенчатый вид модели связан с тем, что для учета размагничивания аппроксимирующим элементом является кубик.

Рисунок еще раз иллюстрирует, насколько полезно при моделировании в условиях дефицита априорной информации использование объективной информации об особых точках и интегральных характеристиках.

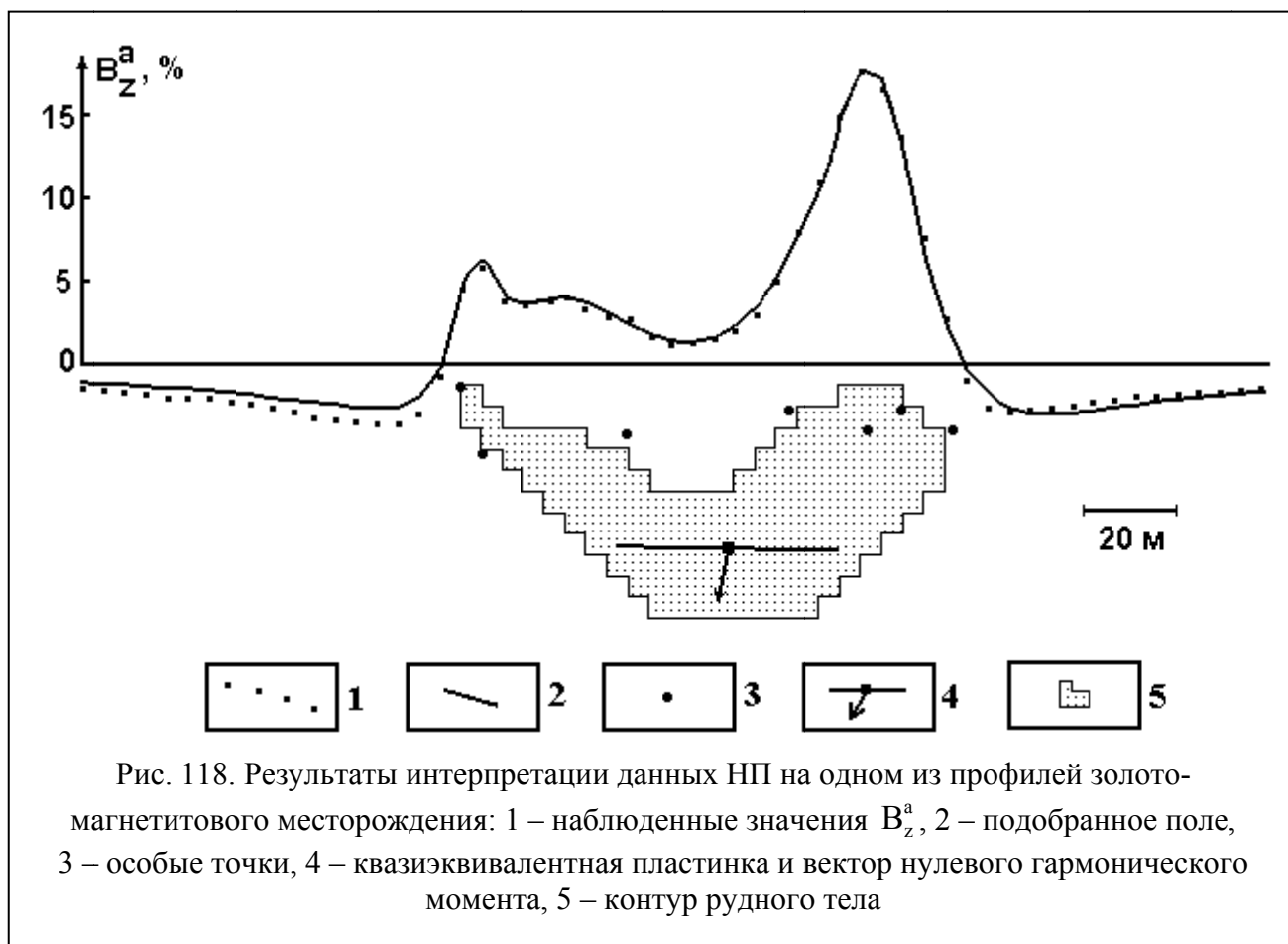


Рис. 118. Результаты интерпретации данных НП на одном из профилей золото-магнетитового месторождения: 1 – наблюдаемые значения B_z^a , 2 – подобранное поле, 3 – особые точки, 4 – квазиэквивалентная пластинка и вектор нулевого гармонического момента, 5 – контур рудного тела

Завершающим этапом явилось построение трехмерной модели рудных тел, показанной на рис. 119 и состоящей из 2135 кубиков с длиной ребра 10 м. На том же рисунке показаны 1586 точек наблюдения, расположенные на реальной земной поверхности и отражающие достаточно сложный рельеф участка. В процессе оптимизации модели вычисленные от нее поля сравнивались с измеренными в этих точках, а полученные остаточные аномалии использовались для корректировки. В итоге поле B_z^a было подобрано со среднеквадратической погрешностью 1,51%, близкой к погрешности съемки. Подбор осуществлялся с учетом размагничивания и неоднородности поля намагничивающей петли. Вообще говоря, решив линейную обратную задачу, можно определить кажущуюся магнитную восприимчивость руды, и она оказывается равной $0,636 \pm 0,011$ СИ. На самом деле реальная магнитная восприимчивость руды, найденная с учетом размагничивания, составляет $0,79 \pm 0,02$ СИ. Суммарная кажущаяся намагниченность руды, определенная по результатам моделирования магнитного поля, оказалась вертикальной и равной $38,3 \pm 1,3$ А/м. Средняя естественная остаточная намагниченность руд после учета размагничивания оказалась равной $10,1 \pm 1,4$ А/м. Вместе с тем, среднеквадратическая погрешность подбора магнитного поля, определенная при однородной остаточной намагниченности руд оказалась равной 2340 нТл. Учет локальных изменений остаточной намагниченности руд позволил подобрать магнитное поле с погрешностью менее 100 нТл. Часть из этих изменений оказалась связанной с последствиями удара молний, но, другая была обязана своим происхождением гидротермальному процессу, в итоге которого магнетитовое месторождение стало золото-магнетитовым. По локальным

участкам изменения остаточной намагниченности можно судить о наличии в магнетитовых рудах зон, обогащенных золотом.

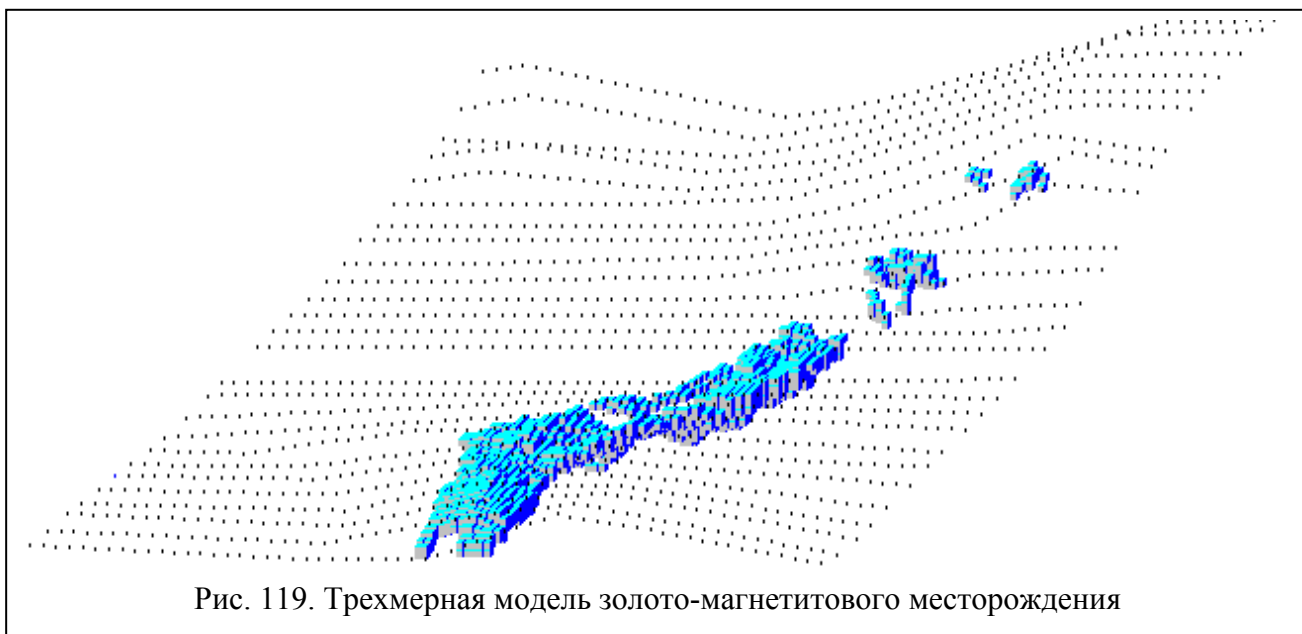


Рис. 119. Трехмерная модель золото-магнетитового месторождения

Таким образом, применение комплексной магниторазведки, корректный учет эффекта размагничивания и использование разнообразных методов интерпретации дают возможность эффективно решать сложные геологические задачи при изучении сильномагнитных геологических объектов.

§ 49. Система интерпретации гравитационных и магнитных аномалий В. Н. Страхова

Методологической базой настоящего учебного пособия являются принципы, разработанные преимущественно в трудах В. Н. Страхова. Большая часть из них в той или иной форме уже встречалась в предыдущих разделах, но только после усвоения основного объема знаний у читателя появляется реальная возможность провести «итоговый синтез» и полностью осознать современные основы интерпретации. Это в свою очередь даст возможность не только эффективно применять уже имеющиеся интерпретационные технологии, но и творчески включиться в их разработку.

Современная методология интерпретации гравитационных и магнитных аномалий понимается как система, то есть совокупность взаимосвязанных элементов. Эти элементы разделяются на две части. Первая часть – это ядро системы. В нее входят базовые геологические или, другими словами, теоретико-познавательные направления развития геофизики, фундаментальные ориентиры совершенствования теории и практики интерпретации и критерии оценки значимости результатов, получаемых в процессе этого развития. Вторую или функциональную часть системы образуют следующие основные элементы:

- 1) общеметодологические или рабочие принципы;
- 2) методообразующие идеи;
- 3) классификация интерпретационных задач по их информационной сущности;
- 4) концепции интерпретационного процесса и интерпретационных моделей;
- 5) концепция стадийности и иерархии исследований;
- 6) понятийно-терминологическая база.

С большей частью этих элементов читатель уже знаком, поэтому сосредоточимся на рабочих принципах и методообразующих идеях. В. Н. Страхов сформулировал 22 основных

общеметодологических принципа теории и практики интерпретации геофизических данных и предложил разбить их на четыре группы.

Первая группа (I) включает 6 принципов.

I₁. Принцип целенаправленности. В соответствии с ним интерпретация всегда осуществляется ради достижения некоторых геологических и экономических целей.

I₂. Принцип системности, суть которого состоит в непременном использовании всех непосредственных и опосредованных связей между элементами интерпретационной системы.

I₃. Принцип определяющей роли интерпретации в геофизических исследованиях. Он утверждает, что все этапы геофизических исследований должны быть ориентированы на эффективную интерпретацию результатов съемок («Интерпретационный процесс начинается на этапе проектирования экспериментальных исследований» В. Н. Страхов).

I₄. Принцип формализации, то есть требование максимально строгих определений используемых понятий и рабочих процедур.

I₅. Принцип модельности. Он утверждает, что решение всех задач интерпретации происходит в рамках принятых упрощений и допущений о геологической среде и о геофизических полях, другими словами, является конвенциональным.

I₆. Принцип использования обратных связей, дающий возможность корректировки и достижения максимально возможной адекватности интерпретационных моделей.

Вторая группа (II) также включает 6 принципов.

II₁. Принцип адекватности. В соответствии с ним рабочие методы и реализующие их компьютерные технологии не должны базироваться на допущениях и идеализациях, противоречащих природным условиям и экспериментальной информации об изучаемых полях.

II₂. Принцип максимальной простоты и общности вновь создаваемых аналитических средств и рабочих методов, помогающий избегать ситуаций, ведущих к построению систем типа «вавилонской башни».

II₃. Принцип ориентации на разработку искусственного интеллекта, то есть на постепенный переход от интерактивных автоматизированных систем к полностью автоматическим.

II₄. Принцип максимально широкого использования имитационного моделирования. Именно моделирование должно на этапе проектирования работ обеспечивать их правильную организацию, а на заключительном этапе – оценку надежности и точности результатов интерпретации.

II₅. Принцип создания и использования специальных методов изучения свойств помех, что дает возможность оптимизировать рабочие методы на подавление конкретной помехи.

II₆. Принцип линеаризации. В соответствии с ним нелинейные задачи могут быть зачастую эффективно сведены к последовательности простых и хорошо проработанных линейных процедур.

Третья группа (III) включает 7 принципов.

III₁. Принцип исключения известного. Он направлен на упрощение сложных задач путем геологического редуцирования.

III₂. Принцип учета априорных корреляционных связей. Его суть состоит в обязательном учете известных корреляционных связей между определяемыми параметрами.

III₃. Принцип параметризации: решение любой интерпретационной задачи должно быть сведено к нахождению конечной и минимальной совокупности числовых параметров.

III₄. Принцип оптимизации. В любой из интерпретационных задач ценны только те решения, которые оптимальны по некоторой системе критериев: либо априорных, либо вырабатываемых в процессе интерпретации. При этом наилучшая форма оптимизации состоит в постановке и решении некоторой экстремальной задачи.

III₅. Принцип регуляризации. Он признает, что подавляющее большинство решаемых задач являются сильно некорректными и требует специальных регулярных методов для нахождения искомых приближенных решений.

III₆. Принцип упрощения задач за счет использования эквивалентных источников. В соответствии с ним при решении интерпретационных задач может быть целесообразным применение формальных источников, не отвечающих природным соотношениям.

III₇. Принцип редукции к системам линейных алгебраических уравнений. Он утверждает, что линейные или линеаризованные задачи могут и должны редуцироваться к нахождению устойчивых приближенных решений систем линейных алгебраических уравнений.

Наконец, четвертая группа (IV) включает 3 важнейших принципа.

IV₁. Принцип адаптации. Каждая интерпретационная задача по-своему уникальна, и поэтому успех интерпретации преимущественно определяется тем, в какой степени при построении интерпретационной модели удастся распознать определяющие черты природной ситуации (компоненты уникальности) и учесть их.

IV₂. Принцип многостадийности. Адекватная интерпретация достигается только путем установления иерархии интерпретационных моделей, получаемых на различных стадиях изучения крупных регионов.

IV₃. Принцип геологической содержательности. Его суть заключается в двух положениях. Во-первых, модельные представления о среде должны быть геологически содержательными. Во-вторых, интерпретация должна непременно включать геологическую трактовку всех компонент в описании аномальных полей и распределений физических параметров, ответственных за поле в изучаемом объеме природной среды.

Следующая группа элементов системы интерпретации гравитационных и магнитных аномалий - это методобразующие идеи, которые имеют иерархическое строение и относятся к четырем уровням:

- 1) фундаментальные идеи;
- 2) концептуальные идеи;
- 3) принципиальные идеи;
- 4) рабочие идеи.

Ограничимся рассмотрением фундаментальных методобразующих идей, которых В.Н.Страхов выделяет пять.

Первая из них – идея аналитической аппроксимации, которая может использоваться в четырех формах.

а) в форме полевых метрологических аппроксимаций, то есть аналитических аппроксимаций элементов изучаемых полей по экспериментальным данным без привлечения существенных представлений об их источниках;

б) в форме полевых интерпретационных аппроксимаций, то есть аналитических аппроксимаций элементов изучаемых полей по экспериментальным данным с привлечением существенного объема априорной информации об их источниках;

в) в форме аппроксимации распределения физических параметров в процессе решения обратных задач,

г) в форме аналитической аппроксимации связей либо между элементами полей (например, соотношение Пуассона), либо между элементами полей и распределениями физических параметров (например, корреляционные связи).

Вторая из методобразующих идей - идея критериальности. Ее суть состоит в том, что решения любых интерпретационных задач должны быть оптимальными в соответствии с некоторой априорно заданной системой критериев.

Третья из методобразующих идей - идея алгебраизации. В соответствии с ней целесообразно и эффективно приводить интерпретационные задачи к решению систем линейных алгебраических уравнений или к последовательности решения таких систем.

Четвертая из методобразующих идей - идея согласования множества допустимых решений. Из-за наличия помех и неопределенности в априорных знаниях их свойств в любой интерпретационной задаче имеется множество допустимых приближенных решений, которые удовлетворяют как наблюдаемому полю, так и имеющейся априорной информации. В связи с этим выбор окончательного, оптимального решения должен осуществляться с помощью

специальной процедуры согласования этих решений (например, иногда может применяться процедура весового усреднения решений).

Пятая из методообразующих идей - идея использования распознавания образов. В соответствии с ней решение интерпретационных задач сугубо математическими средствами зачастую невозможно, поэтому интерпретационные технологии должны включать специальные процедуры анализа ситуации и принятия решений, основанные на методах распознавания образов.



Таким образом, согласно В.Н.Страхову, интерпретация сводится к построению интерпретационных моделей и решению аппроксимационных задач в рамках принятых моделей. Общая схема интерпретационного процесса в прикладной геофизике показана на рис.120. На нем видно, что начальное построение интерпретационной модели ведется параллельно по двум линиям: по линии сбора априорных данных и по линии решения вспомогательных задач. После выбора модели основное значение придается устойчивым процедурам аппроксимационной оптимизации в сочетании с методами распознавания образов.

Вопросы для самоконтроля

1. Целесообразно ли использование технологий интерпретации, основанных на каком-либо одном способе?
 - а) нецелесообразно (24);
 - б) целесообразно при необходимости уменьшения затрат на интерпретацию (27);
 - в) целесообразно всегда (30);
2. Воспроизводят ли приближенное квазирешение, полученное методом подбора, и регуляризованное решение местоположение и тип особых точек истинного объекта?
 - а) воспроизводят (39);
 - б) не воспроизводят (48);
 - в) воспроизводят при интерпретации данных высокоточных измерений (57).
3. Можно ли с помощью моделирования преодолеть отсутствие единственности решения обратных задач?
 - а) можно (36);
 - б) нельзя (62);
 - в) можно с помощью совершенных автоматизированных систем интерпретации (88).
4. В чем основная характерная черта автоматизированных систем интерпретации?
 - а) широкое использование компьютеров (71);
 - б) максимально полное использование априорной информации (72);
 - в) оптимизация комплекса интерпретационных методик (73).

Контрольная сумма при правильных ответах – 207.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексидзе М.А. Приближенные методы решения прямых и обратных задач гравиметрии. М: Наука. 1987. 336 с.
2. Алексидзе М.А., Гелашвили М.С., Картвелишвили К.М. Исследование некоторых вопросов трансформации потенциальных полей. Тбилиси: АН ГССР. 1972. 284 с.
3. Антонов Ю.В. Разделение сложных аномалий силы тяжести. Воронеж: ВГУ. 1985. 212 с.
4. Аронов В.И. Обработка на ЭВМ значений аномалий силы тяжести при произвольном рельефе поверхности наблюдений. М: Недра. 1976. 131 с.
5. Аронов В.И. Методы построения карт геолого-геофизических признаков и геометризация залежей нефти и газа на ЭВМ. М: Недра. 1990. 301 с.
6. Блох Ю.И. Количественная интерпретация гравитационных аномалий. М: Издательство МГРИ. 1982. 92 с.
7. Блох Ю.И. Решение прямых задач гравиразведки и магниторазведки. М: Издательство МГГА. 1993. 79 с.
8. Блох Ю.И. Обнаружение и разделение гравитационных и магнитных аномалий. М: Издательство МГГА. 1995. 80 с.
9. Блох Ю.И. Количественная интерпретация гравитационных и магнитных аномалий. М: Издательство МГГА. 1998. 88 с.
10. Блох Ю.И., Гаранский Е.М., Доброхотова И.А., Ренард И.В., Якубовский Ю.В. Низкочастотная индуктивная электроразведка при поисках и разведке магнитных руд. М: Недра. 1986. 192 с.
11. Баранов В. Потенциальные поля и их трансформации в прикладной геофизике. М: Недра. 1980. 151 с.
12. Березкин В.М. Метод полного градиента при геофизической разведке. М: Недра. 1988. 188 с.
13. Булах Е.Г. Интегральные соотношения для интерпретации гравитационных аномалий. Киев: Наукова думка. 1965.

14. Булах Е.Г., Ржаницын В.А., Маркова М.Н. Применение метода минимизации для решения задач структурной геологии по данным гравirazведки. Киев: Наукова думка. 1976. 219 с.
15. Вычислительная математика и техника в разведочной геофизике. Справочник геофизика. М: Недра. 1990. 498 с.
16. Глазнев В.Н. Комплексные геофизические модели литосферы Фенноскандии. Апатиты: ЗАО «КаэМ». 2003. 252 с.
17. Голиздра Г.Я. Комплексная интерпретация геофизических полей при изучении глубинного строения земной коры. М: Недра. 1988. 252 с.
18. Гольдшмидт В.И. Региональные геофизические исследования и методика их количественного анализа. М: Недра. 1979. 219 с.
19. Гольдшмидт В.И. Оптимизация процесса количественной интерпретации данных гравirazведки. М.: Недра. 1984. 185 с.
20. Гольцман Ф.М. Статистические модели интерпретации. М.: Наука. 1971. 327 с.
21. Гольцман Ф.М., Калинина Т.Б. Статистическая интерпретация магнитных и гравитационных аномалий. Л: Недра. 1983. 248 с.
22. Гравirazведка. Справочник геофизика. М: Недра. 1990. 607 с.
23. Демидова М.А., Каламкаров Л.В. Использование преобразований гравитационного поля для изучения нефтегазоносных районов. М: Недра. 1978. 215 с.
24. Долгаль А.С. Компьютерные технологии обработки и интерпретации данных гравиметрической и магнитной съемок в горной местности. Абакан: ООО «Фирма «Март». 2002. 188 с.
25. Жданов М.С. Теория обратных задач и регуляризации в геофизике. М: Научный мир. 2007. 712 с.
26. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М: Наука. 1978. 205 с.
27. Каратаев Г.И. Корреляционная схема геологической интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. Новосибирск: Наука. 1966. 135 с.
28. Кобрунов А.И. Теория интерпретации данных гравиметрии для сложнопостроенных сред. Киев: УМК ВО. 1989. 100 с.
29. Кобрунов А.И. Теоретические основы решения обратных задач геофизики. Ухта: Издательство УИИ. 1995. 226 с.
30. Кобрунов А.И. Математические основы теории интерпретации геофизических данных. М: ЦентрЛитНефтеГаз. 2008. 288 с.
31. Колюбакин В.В., Лапина М.И. Обзор способов решения прямой и обратной задач магнитной разведки. Труды ИФЗ АН СССР. 1960. № 13 (180). 362 с.
32. Любимов Г.А., Любимов А.А. Методика гравимагнитных исследований с использованием ЭВМ. М: Недра. 1988. 303 с.
33. Магниторазведка. Справочник геофизика. М: Недра. 1990. 470 с.
34. Маловичко А.К., Костицын В.И., Тарунина О.Л. Детальная гравirazведка на нефть и газ. М: Недра. 1989. 224 с.
35. Маловичко А.К., Тарунина О.Л. Высшие производные гравитационного потенциала и их применение при геологической интерпретации аномалий. М: Недра. 1972. 151 с.
36. Мудрецова Е.А., Варламов А.С., Филатов В.Г., Комарова Г.М. Интерпретация данных высокоточной гравirazведки на неструктурных месторождениях нефти и газа. М: Недра. 1979.
37. Непомнящих А.А., Овчаренко А.В., Ли В.С., Соколов Л.В. Интерпретация гравитационных аномалий на основе пространственного изучения и разделения полей. Алма-Ата: Каз ПТИ. 1978. 86 с.
38. Никитин А.А. Теоретические основы обработки геофизической информации. М: Недра. 1986. 342 с.
39. Серкерев С.А. Спектральный анализ гравитационных и магнитных аномалий. М: Недра. 2002. 437 с.

40. Серкерев С.А. Гравиразведка и магниторазведка. Основные понятия, термины, определения. М: ООО «Недра-Бизнесцентр». 2006. 479 с.
41. Старостенко В.И. Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. Киев: Наукова думка. 1978. 228 с.
42. Старостенко В.И., Манукян А.Г., Загоротко А.Н. Методика решения прямых задач гравиметрии и магнитометрии на шарообразных планетах. Киев: Наукова думка. 1986. 112 с.
43. Страхов В.Н. Методы интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. Пермь: ПГУ. 1984. 72 с.
44. Тарунина О.Л. Структурно-картировочные возможности гравиразведки в комплексе геолого-геофизических исследований. Пермь: ПГУ. 1993. 200 с.
45. Тафеев Г.П., Соколов К.П. Геологическая интерпретация магнитных аномалий. Л: Недра. 1981. 327 с.
46. Теребиж В.Ю. Введение в статистическую теорию обратных задач. М: ФИЗМАТЛИТ. 2005. 376 с.
47. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М: Наука. 1986. 288 с.
48. Трошков Г.А., Грознова А.А. Математические методы интерпретации магнитных аномалий. М: Недра. 1985. 151 с.
49. Тяпкин К.Ф., Кивелюк Т.Т. Изучение разломных структур геолого-геофизическими методами. М: Недра. 1982. 239 с.
50. Цирульский А.В. Функции комплексного переменного в теории и методах потенциальных геофизических полей. Свердловск: УрО АН СССР. 1990. 132 с.
51. Шрайбман В.И., Жданов М.С., Витвицкий О.В. Корреляционные методы преобразования и интерпретации геофизических аномалий. М: Недра. 1977. 237 с.
52. Яновская Т.Б., Порохова Л.Н. Обратные задачи геофизики. Л: ЛГУ. 1983. 212 с.

Версия учебного пособия от 20 августа 2009 года.