В. С.
379

Проф. А. К. БОЛДЫРЕВ

5902

КРИСТАЛЛОГРАФИЯ

ОНТИ ГОРГЕОНЕФТЕИЗДАТ 1934

ОШИБКИ, ЗАМЕЧЕННЫЕ В ФИГУРАХ

Страница	Фигура	Квадрат	Ошибка
333	355	32	Отсутствует буква C
375	391	—	У вершины угла, имеющего величину 90°, отсутствует C′
418	400	1	Не указано, что квадрат занят
418	400	87	Виргиний обозначается сокращенно не VI, а VI
419	400	53	На внутренней окружности нет отметки *5*.

Ошибки произошли по вине автора.

А. К. БОЛДЫРЕВ

ДОКТОР ГЕОЛОГИЧЕСКИХ НАУК
ПРОФЕССОР ЛЕНИНГРАДСКОГО ГОРНОГО ИНСТИТУТА

КРИСТАЛЛОГРАФИЯ

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ, ИСПРАВЛЕННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

Допущено в качестве учебника для втузов Комитетом по высшему техническому образованию при ЦИК СССР и для университетов Наркомпросом РСФСР

32961

УЧЕБНАЯ БИБЛИОТЕКА ЛЕНИНГРАДСКОГО ГОРНОГО ИНСТИТУТА

ОНТИ · НКТП · СССР 1934

ГОСУДАРСТВЕННОЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ГОРНО-ГЕОЛОГО-НЕФТЯНОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
Ленинград · Москва · Грозный · Новосибирск

ГР — 65-5-2

«Курс кристаллографии» доктора геологических наук, профессора Ленинградского горного института Анатолия Капитоновича Болдырева, является третьим, частично исправленным и дополненным изданием. В нем описываются: формы кристаллов, методы их изучения, геометрическая теория строения и определение вещества по формам его кристаллов; механические, тепловые, рентгенометрические, магнитные, звуковые свойства кристаллов, их рост и растворение; связь их формы и строения с химическим составом, полиморфизм и др. Кроме этого приведено описание универсального столика Е. С. Федорова и склерометра Мартенса с указанием основных приемов работы с ними.

Книга является не только прекрасным учебником для студентов геологоразведочных специальностей, но и ценным руководством для специалистов.

Типография Академии Наук СССР. В. О., 9 линия, 12

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ.

Необходимость срочно выпустить новое издание этой книги не позволила мне переработать ее так, как хотелось бы. Такую значительную переработку я откладываю до 4-го издания. Здесь я ограничиваюсь лишь небольшими поправками, какие допускает стереотипное издание и теми небольшими заново написанными «Дополнениями», которые мне казались особенно необходимыми.

Значительная часть упомянутых поправок сделана по указаниям следующих сотоварищей по педагогической работе: проф. О. М. Аншелеса, Г. Б. Бокия, А. М. Болдыревой, В. В. Доливо-Добровольского, В. И. Михеева, проф. Н. Н. Падурова, Г. М. Попова и И. И. Шафрановского. За эту помощь приношу им свою глубокую благодарность.

А. Болдырев.

Федоровский Институт
25 июля 1934 г.
Ленинград.

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ.

В 1926 году издательством „Кубуч" был выпущен мой литографированный учебник „Основы Кристаллографии", составленный по моим лекциям А. М. Болдыревой и Е. А. Пресняковым.

„Кристаллография", находящаяся пред читателем сейчас, лишь частично может считаться вторым изданием упомянутой выше книжки. Вкратце укажу здесь главные черты этого нового своего курса.

Вся геометрическая часть, опубликованная в литографированном издании, перенесена с небольшими поправками и сюда. Таким образом я по-прежнему не излагаю здесь учения о проекциях, выводя 32 видов и 230 разновидностей симметрии и параллелоэдров. Существенным и большим по объему дополнением к геометрической части курса является здесь часть седьмая — гониометрия кристаллов, где подробно описаны теодолитный гониометр, его поверка, измерение, вычисление и вычерчивание кристаллов и способы точного нахождения символов его граней и ребер.

Наиболее расширена в этой книге по сравнению с „Основами Кристаллографии" физическая часть. Здесь целый ряд вопросов обработан мною не только по сводным сочинениям, но и по журнальной литературе последнего времени.

Значительной (но все же меньшей) проработке подвергся также и третий отдел — химическая кристаллография. Здесь я излагаю преимущественно работы русских авторов.

В результате, если геометрическая и физическая части курса оказались приблизительно равными по объему, то химическая часть оказалась в 3 с лишним раза меньше каждой из двух первых.

Таким образом, хотя я и не достиг пока полного равновесия всех трех ветвей нашей науки в предлагаемом здесь учебнике, но уже приблизился к этому. Современное состояние Кристаллографии этого настоятельно требует.

Блестящий период развития геометрии форм и структуры кристаллов был завершен в конце прошлого и в начале нынешнего столетия работами нашего незабвенного учителя Е. С. Федорова, из которых главными являются: вывод одновременно с А. Шенфлисом 230 разновидностей симметрии, теория параллелоэдров и кристаллохимический анализ.

В начале нынешнего века М. Лауэ совершает свое открытие дифракции рентгенолучей в кристаллах. С этого момента больше, чем когда-либо прежде Кристаллография теснейшим образом соединяется с Физикой и Химией и под знаком этого соединения идет ее дальнейшее развитие на наших глазах. И мы все ясно сознаем, что лишь в этом соединении лежит залог ее грядущих достижений.

Разумеется, при этом нельзя забывать, что право на смысл существования Кристаллографии, как самостоятельной ветви науки, заключается в ее геометрической части. Конечную цель нашей науки мы видим в возможном сведении эмпирических законов физики и химии кристаллов к их геометрии.

Поэтому как морфологии кристаллов, так и геометрической теории их структуры надлежит отводить подобающее место при изложении этой науки, освобождая, однако, этот отдел от излишнего балласта и научной жвачки.

В этом моем взгляде лежит отчасти причина конспективного изложения мною учения о формах кристаллов. При занятиях со студентами эта конспективность легко может быть восполнена каждым преподающим. Другая, более важная причина лежит в невозможности увеличивать объем этого учебника. Более полное и строгое изложение геометрической кристаллографии должно служить темой особого сочинения. В Ленинградском Горном Институте изложение этой темы выделено в особый курс: Дополнительные статьи по Кристаллографии.

Я ясно вижу многие недостатки этой книги. Но их, вероятно, больше, чем я вижу. Всякие указания на такие недостатки со стороны своих товарищей по науке встречу с большой признательностью.

Первую благодарность за это я должен принести здесь своей постоянной помощнице Анне Михайловне Болдыревой за ее указания при ведшейся ею тяжелой работе по корректуре этого курса.

С большой благодарностью я использовал также ряд ценных замечаний, сделанных мне В. В. Доливо-Добровольским и В. Б. Татарским, ознакомившимися частично с книгой по корректурам.

А. Болдырев.

Федоровский Институт
10 марта 1930 г.
Ленинград.

СОДЕРЖАНИЕ.

стр

Предисловие 3

Введение 9

§ 1. Понятие о кристаллографии. 9. § 2. Понятие о кристалле и кристаллическом веществе. 9. § 3. Понятие об аморфном веществе. 10. § 4. Распространенность кристаллического вещества. 10. § 5. Задачи кристаллографии и связь ее с другими науками. 11. § 6. Разделение кристаллографии. 12.

ОТДЕЛ I.

Геометрическая кристаллография.

§ 7. Разделение геометрической кристаллографии. 13.

Часть первая. Кристаллографические проекции 13

§ 8. Предварительные понятия. 13. § 9. Краткое понятие о стереографических проекциях. 14. § 10. Другие виды кристаллографических проекций. 15.

Часть вторая. Учение о симметрии. 15

§ 11. Значение симметрии для кристаллографии. 15. § 12. Предварительные понятия о симметрии. 16. § 13. Основные определения. 16. § 14. Примеры симметрических преобразований. 16. § 15. Типы симметрических преобразований. 17. § 16. Замена симметрических преобразований. 17. § 17. Элементы симметрии. 18. § 18. Частные случаи поворотных осей симметрии. 20. § 19. Частные случаи зеркально-поворотных осей. 20. § 20. Сложение элементов симметрии. 23.

Часть третья. Тридцать два вида симметрии кристаллов, распределение их по шести сингониям и простые формы в них встречаемые 25

§ 21. Виды симметрии кристаллов и разделение их по сингониям. 25. § 22. Понятие о простых формах и комбинациях. 26. § 23. Происхождение кристаллографической номенклатуры. 27. § 24. Триклинная сингония. 27. § 25. Моноклинная сингония. 28. § 26. Ромбическая сингония. 30. § 27. Тетрагональная сингония. 31. § 28. Гексагональная сингония. 35. § 29. Кубическая сингония. 42. § 30. Некоторые общие замечания о простых формах и видах симметрии кристаллов. 45.

Часть четвертая. Эмпирические законы геометрической кристаллографии 47

§ 31. Перечень эмпирических законов кристаллографии. 48. § 32. Закон плоскогранности и прямореберности кристаллов. 48. § 33. Закон постоянства углов в кристаллах. 49. § 34. Закон рациональности отношений параметров. 50. § 35. Закон поясов (Вейса). 53. § 36. Закон кристаллической однородности. 55. § 37. Закон симметрии. 55. § 38. Закон кристаллографических пределов (Федорова). 56. § 39. Законы срастания кристаллов друг с другом. 56. § 40. Срастание кристаллов разнородных веществ. 58.

СТР

Часть пятая. **Кристаллографические символы.** 59

§ 41. Кристаллографические символы граней. 59. § 42. Кристаллографические символы ребер. 61. § 43. Значение символов и способы их определения. 62. § 44. Зависимость между символами граней и ребер кристаллов. 63. § 45. Общие понятия об установке кристалла. 64. § 46. Установка кристаллов кубической сингонии. 65. § 47. Установка кристаллов тетрагональной сингонии. 66. § 48. Установка кристаллов ромбической сингонии. 66. § 49. Установка кристаллов моноклинной сингонии. 67. § 50. Установка кристаллов триклинной сингонии. 67. § 51. Установка кристаллов гексагональной сингонии. 67. § 52. Упражнения в определении символов. 68.

Часть шестая. **Геометрические теории структуры кристаллического вещества** 69

§ 53. Плоские сетки и пространственные решетки. 69. § 54. Выводы эмпирических законов из теории пространственных решеток. 71. § 55. Теория параллелоэдров. 73. § 56. Выводы из теории параллелоэдров. 76. § 57. Понятие о более полной геометрической теории структуры кристаллов. 78.

Часть седьмая. **Гониометрия кристаллов** 86

§ 58. Прикладной гониометр. 86. § 59. Отражательный теодолитный гониометр. 87. § 60. Подробности конструкции теодолитного гониометра Федорова. 89. § 61. Поверка гониометра. 92. § 62. Юстировка кристалла. 95. § 63. Ход измерения кристалла. 97. § 64. Точные методы определения символов. 100. § 65. Метод поясов. 100. § 66. Метод косинусов (разработанный Г. В. Вульфом). 104. § 67. Метод отрезков (метод Аншелеса—Доливо-Добровольского). 106. § 68. Нахождение символов кристаллов гексагональной сингонии. 116. § 69. Вычисление кристаллов. 116. § 70. Метод проэктивных символов. 117. § 71. Метод непосредственных формул (Аншелеса). 136. § 72. Вычерчивание изображений кристаллов. 141.

Часть восьмая. § 73. **Кристаллохимический анализ** 145

ОТДЕЛ II.

Физическая кристаллография.

§ 74. Вопросы, рассматриваемые в физической кристаллографии. 147.

Часть девятая. **Оптика кристаллов.** 148

§ 75. Общие понятия об электромагнитной теории света. 148. § 76. Виды лучистой энергии. 150. § 77. Упрощение представления о световом луче. 150. § 78. Необходимые сведения из элементарной оптики. 151. § 79. Изотропная и анизотропная среда. 152. § 80. Свойства луча прошедшего сквозь кристалл. Устройство николя. 152. § 81. Поверхность световой волны. 153. § 82. Эллипсоид показателей преломления. 154. § 83. Свойства эллипсоида. 155. § 84. Оптические константы вещества. 158. § 85. Типы эллипсоидов и их расположение в кристаллах разных сингоний. 159. § 86. Понятие о дисперсии. 162. § 87. Устройство микроскопа. 162. § 88. Простейшие опыты с кристаллами под микроскопом. 163. § 89. Плеохроизм, спайность и двойники под микроскопом. 165. § 90. Углы погасания. 166. § 91. Причина окраски кристаллов между скрещенными николями. 167. § 92. Исследование кристаллов в сходящемся поляризованном свете. 169. § 93. О вращении плоскости поляризации. 171. § 94. Простейшие случаи определения сингонии кристаллов под микроскопом. 172. § 95. Понятие об «Универсальном методе Федорова». 174. § 96. Микроскопическое исследование непрозрачных кристаллов. 175.

СТР.

Часть десятая. **Рентгенометрия кристаллов.** 177

§ 97. Общие сведения о рентгеновых лучах. 177. § 98. Открытие Лауэ. 178. § 99. Опыты Браггов. 179. § 100. Формула Брагга-Вульфа. 180. § 101. Определение вида структуры кристалла. 181. § 102. Определение абсолютных расстояний атомов в кристаллах по Браггам. 183. § 103. Теория структуры кристаллов по Браггам. 183. § 104. Метод Дебая—Шеррера. 184. § 105. Метод Лауэ. 186. § 106. Значение рентгенометрии кристаллов. 187.

Часть одиннадцатая. **Механические свойства кристаллов.** 188

§ 107. Спайность. 188. § 108. Анизотропия сил сцепления в кристаллах. Значение поверхностного слоя. 191. § 109. Твердость. 192. § 110. Упругость. 195. § 111. Механические сдвиги. 208. § 112. Пластические деформации кристаллов. 209. § 113. Влияние механических воздействий на кристаллы. Оптические аномалии. 210.

Часть двенадцатая. **Тепловые свойства кристаллов.** 210

§ 114. Теплопроводность. 210. § 115. Расширение кристаллов от нагревания. 213.

Часть тринадцатая. **Магнитные свойства кристаллов.** 216

§ 116. Основные понятия из учения о магнетизме. 216. § 117. Полюсы магнита. 218. § 118. Магнитный момент магнита. 218. § 119. Степень намагничения. 220. § 120. Магнитная индукция. Магнитная восприимчивость. 221. § 121. Общие сведения о магнитных свойствах кристаллов. 222. § 122. Опыты В. Фойгта и его сотрудников. 223. § 123. Результаты опытов В. Фойгта и его сотрудников. 227. § 124. Опыты П. Вейсса. 229. § 125. Результаты опытов П. Вейсса. 232. § 126. Опыты Д. Форреста. 234. § 127. Некоторые результаты опытов Д. Форреста. 237. § 128. Понятие о теории магнетизма кристаллов. 239. § 129. a) Влияние магнитного поля на кристаллизацию, b) Пиезомагнетизм и пиромагнетизм кристаллов 240.

Часть четырнадцатая. **Электрические свойства кристаллов** 241

§ 130. План изложения. 241. § 131. Электростатическая индукция кристаллов. 241. § 132. Электропроводность кристаллов 248. § 133. Электролиз кристаллов. 262. § 134. Процессы, возбуждающие электричество у кристаллов. 267. § 135. Пиезоэлектричество. 268. § 136. Пироэлектричество. 284.

ОТДЕЛ III.

Химическая кристаллография.

§ 137. Содержание химической кристаллографии. 288.

Часть пятнадцатая. **Соотношение между химическим составом и кристаллической формой вещества.** 288

§ 138. Приближенный закон П. Грота о соотношении между составом и симметрией кристалла. 288. § 139. Распределение изученных кристаллов по сингониям. 291. § 140. Понятие о морфотропизме. 292.

Часть шестнадцатая. **Химическое и кристаллическое строение.** . . 294

§ 141. Кристаллохимический закон Шубникова. 294. § 142. Вопрос о химической молекуле в кристаллических телах и типы кристаллических решеток с химической точки зрения. 297.

стр.

Часть семнадцатая. **Полиморфия** 300

§ 143. Определение полиморфии. 300. § 144. Примеры полиморфных веществ. 300. § 145. Методы изучения полиморфии. 302. § 146. Полиморфия и закон Стенона-Роме-де-л'Иля. 303.

Часть восемнадцатая. **Образование и разрушение кристаллов**. . . 303

§ 147. Процессы образования кристаллов. 303. § 148. Концентрационные потоки и расслаивание растворов. 304. § 149. Факторы, влияющие на облик кристалла. 306. § 150. Теория минимума поверхностной энергии кристалла. 309. § 151. О скоростях роста граней кристалла и об их измерении. 315. § 152. Фигуры роста. 316. § 153. Растворение кристаллов. 317. § 154. Фигуры травления 317.

Часть девятнадцатая. **Кристаллография и определение химического состава вещества**. 318

§ 155. Способы определения веществ, основанные на кристаллографии. 318. § 156. Кристаллохимический анализ Е. С. Федорова. 319. § 157. Кристаллографический диагноз. 319. § 158. Кристаллооптические методы. 320. § 159. Рентгенометрический способ диагноза. 322. § 160. Рентгено-спектральный анализ. 322.

ДОПОЛНЕНИЯ.

Предисловие к „Дополнениям" 329

К части третьей 330

§ 30а. Рациональные классификация, номенклатура и обозначения 32 видов симметрии. 330.

К части шестой 335

§ 57а. Элементы симметрии пространственных решеток и их положение в ней. 335. § 57б. 14 решеток Браве. 339. § 57в. Связь между пространственными решетками и квадратичными формами. 364. § 57г. Связь межплоскостного расстояния данной серии параллельных плоских сеток с ее индексами. 366. § 57д. Площадь примитивного параллелограмма данной плоской сетки и объем примитивного параллелепипеда пространственной решетки. 383. § 57е. Плотность сетки. Распространение формулы (31) на случаи не гексаэдрической установки пространственной решетки. 386.

К части девятой 401

§ 95а. Описание универсального столика Е. С. Федорова. 401. § 95б. Основные приемы работы теодолитным методом Федорова. 403.

К части одиннадцатой 406

§ 109а. Описание склерометра Мартенса. 406. § 109б. Ход работы со склерометром Мартенса. 407. § 109в. Некоторые результаты работ со склерометром Мартенса. 410. § 109г. Новая литература по определению твердости. 410.

К части пятнадцатой 411

§ 142а. Атомные и ионные радиусы в кристаллах. 411.

Указатель терминов 427

ВВЕДЕНИЕ.

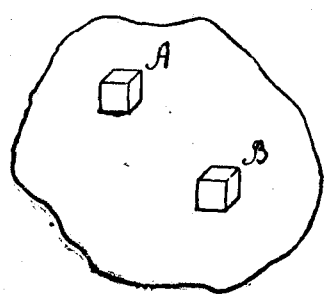
§ 1. Понятие о кристаллографии.

Кристаллография есть наука о кристаллическом веществе. Слово кристаллография состоит из двух греческих корней κρύσταλλος и γράφω. Κρύσταλλος во времена Гомера означало лед. Гомер, описывая осаду Трои греками, говорит, что в первую морозную ночь щиты героев покрылись льдом — κρύσταλλος.

В средние века, по внешнему сходству со льдом, стали так называть горный хрусталь и, наконец, с семнадцатого века это название распространилось на все тела, имевшие многогранную форму, подобно горному хрусталю, которые находили в природе, или получали в лаборатории. Слово γράφω—значит «пишу». Поэтому буквально слово кристаллография означает описание кристаллов.

§ 2. Понятие о кристалле и кристаллическом веществе.

Кристаллами называют тела, находимые в природе или получаемые искусственно (например, в лабораториях), которые под влиянием внутренних физико-химических процессов, присущих самому веществу этого тела, получили форму плоскостных многогранников. То вещество, из которого кристаллы строятся, называется кристаллическим веществом. Оно обладает тремя основными свойствами: 1) однородностью, 2) анизотропностью, 3) способностью самограняться.

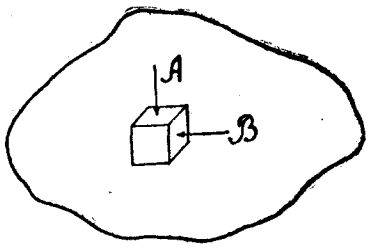


Фиг. 1.

1. Однородность кристаллического вещества состоит в том, что два участка такого вещества совершенно одинаковой формы и одинаково ориентированные в пространстве, вырезанные в разных местах этого вещества, абсолютно одинаковы по всем своим свойствам (фиг. 1 — призмочки A и B обладают одинаковыми свойствами).

2. Анизотропность (неравносвойственность) заключается в том, что все или некоторые свойства анизотропного вещества по различным направлениям различны. Так, если мы в анизотропном веществе вырежем

кубик и захотим его расплющить, то для того, чтобы раздавить его в направлении A (фиг. 2) потребуется сила p, для достижения же того же эффекта в направлении B понадобится сила q, вообще говоря, отличная от p.



Фиг. 2.

3. Способность самограняться заключается в том, что, если мы кусочек кристаллического вещества какой угодно неправильной формы поместим в подходящие условия, в соответствующую среду (например, насыщенный раствор), то этот кусочек обрастет тем же самым веществом и превратится в кристалл.

§ 3. Понятие об аморфном веществе.

Вещество, из которого построен окружающий мир, может и не обладать перечисленными тремя свойствами.

Прежде всего оно может быть неоднородно, например, загрязнено примесями, составлено из аггрегата (совокупности) многих отдельных однородных зерен и т. д.

Кусок такого неоднородного вещества можно расчленить (в действительности или, по крайней мере, мысленно) на однородные части. Поэтому мы будем рассматривать лишь однородное вещество.

Аморфным (бесформенным) веществом называется такое однородное вещество, куски которого не способны самограняться ни при каких условиях.

Типичное аморфное вещество (например, обыкновенное стекло) — изотропно, т.-е. все без исключения свойства его одинаковы по разным направлениям. Но аморфное вещество может быть и анизотропно; например, сжатая или изогнутая стеклянная пластинка имеет разные показатели преломления для лучей, идущих сквозь нее по разным направлениям.

Ограничившись здесь этими формальными сведениями, мы выясним лишь далее, постепенно в чем сущность различия между кристаллическим и аморфным веществом.

§ 4. Распространенность кристаллического вещества.

Твердая материя, вероятно, не менее, чем на половину состоит из типичного кристаллического вещества. Оно принимает участие в строении органического мира, но настоящим его царством является мир неживой природы. Целые горные хребты, песчаные берега морей, рек, озер, огромные участки земной коры почти сплошь состоят из скоплений (аггрегатов), кусков и кусочков кристаллического вещества. Мостовые, тротуары, по которым мы ходим, камни и кирпичи в стенах зданий, в которых мы живем, металлические изделия, которыми мы постоянно пользуемся, соль и сахар, которые мы употребляем в пищу, лед и снег в громадных количествах, наблюдаемые нами в умеренных и холодных поясах земного шара, — все это сплошь состоит из кристаллов и их обломков.

Далее. Большинство исходных материалов, полупродуктов, продуктов и отбросов металлургических и химических заводов также являются веществами кристаллическими. Сюда относятся руды и флюсы, штейны, шпейзы и другие промежуточные продукты металлургии, и, наконец, выплавляемые металлы; и с другой стороны — сода, селитра, квасцы, железный купорос, нафталин и множество других веществ, вырабатываемых химическими заводами и применяемых в технике, медицине, в науке и в повседневной жизни.

Из этого совершенно понятна необходимость изучения свойств кристаллического вещества для каждого, нуждающегося в прочном усвоении основ естествознания, а особенно для того, кто имеет дело в своей деятельности с мертвой природой.

§ 5. Задачи кристаллографии и связь ее с другими науками.

Как и у всякой науки, у кристаллографии можно различить три группы задач.

Первая состоит в собирании отдельных фактов: в описании отдельных кристаллов, в фактическом описании отдельных свойств кристаллического вещества. Сюда относятся, например, зарисовывание форм кристаллов, измерение углов между их гранями, описание оптических свойств, твердости, цвета и т. д. Задача эта проста, ее выполнение вполне доступно рядовым и даже начинающим научным работникам. А между тем, добытый здесь добросовестным и умелым наблюдением или опытом, материал только и может служить прочным фундаментом всякой истинной науки.

Вторая группа состоит в подведении добытых разрозненных фактов под объединяющие их эмпирические (опытные) законности. Таков, например, закон постоянства углов в кристаллах, по которому установлено, что углы между соответственными гранями или ребрами у разных кристаллов одного и того же вещества всегда равны, хотя бы по внешнему виду кристаллы резко отличались друг от друга. Открытие таких законов составляет неувядаемую славу лишь крупных деятелей науки.

Наконец, третья группа задач состоит в объяснении всех накопленных отдельных фактов и эмпирических законов, исходя из немногих основных предположений. В кристаллографии сюда относятся теория структуры кристаллического вещества, т.-е. построения его из отдельных частиц, теория оптических явлений в кристаллах, уже блестяще разработанные, и, может быть, намечающаяся в будущем, общая теория кристаллического вещества. Создание таких теорий — удел лишь гениев человеческой мысли.

В нашем курсе мы будем касаться задач всех трех групп. В то же время мы можем разделить содержание кристаллографии и с другой точки зрения, а именно по характеру тех свойств кристаллов, которых касаются отдельные факты, законы и теории. И в этом отношении мы можем различить 3 группы свойств.

I. Геометрические свойства. Сюда относится прежде всего наиболее бросающееся в глаза и одно из самых важных свойств, — это форма кристаллов, методы ее изучения и описания, законы которым они подчиняется, затем геометрическая теория строения кристаллов из равных

друг другу частиц, определение вещества по формам его кристаллов и другие подобные вопросы.

II. Физические свойства. Таковы механические, тепловые, оптические, рентгенометрические, электрические, магнитные и звуковые свойства и объединяющие их эмпирические законы и теории.

III. Химические и физико-химические свойства. Таковы: вопросы роста и растворения кристаллов, связи их формы и строения с химическим составом, вопросы полиморфии и другие.

Из сказанного совершенно ясна теснейшая связь кристаллографии в особенности с тремя науками: геометрией, физикой и химией. Содержание целых областей этих трех наук неразрывно переплетено с содержанием кристаллографии.

§ 6. Разделение кристаллографии.

Сообразно с вышесказанным кристаллография делится на: a) геометрическую, b) физическую и c) химическую.

ОТДЕЛ I.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ КРИСТАЛЛОГРАФИЯ.

§ 7. Разделение геометрической кристаллографии.

В нашем курсе мы будем изучать (частью подробно, частью весьма кратко) следующие вопросы геометрической кристаллографии:

Часть 1. Кристаллографические проекции.
» 2. Учение о симметрии.
» 3. Формы кристаллов.
» 4. Эмпирические законы геометрической кристаллографии.
» 5. Кристаллографические символы.
» 6. Теория структуры кристаллов.
» 7. Гониометрия кристаллов.
» 8. Кристаллохимический анализ.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

Кристаллографические проекции.

§ 8. Предварительные понятия.

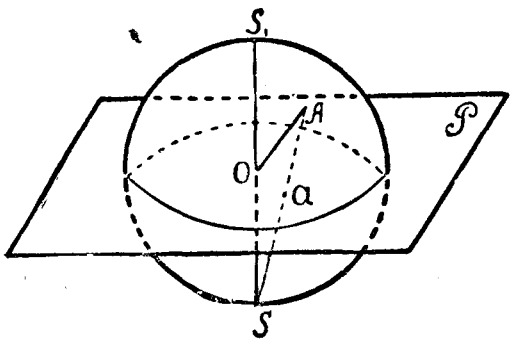
Опыт и теория показывают, что размеры, взаимное расстояние граней и ребер кристалла или их расстояние от какой-либо одной точки, взятой внутри его, не являются существенными признаками его вещества. Они зависят от внешних причин. Существенным признаком для граней и ребер данного кристаллического вещества является лишь взаимный наклон. Поэтому для удобства изучения можно все грани и ребра кристалла переносить мысленно в одну и ту же точку пространства параллельно самим себе.

Совокупность всех граней и ребер кристалла, перенесенных параллельно самим себе в одну и ту же точку O пространства, будем называть кристаллическим пучком, а точку O центром пучка. В тот же центр пучка переносятся параллельно самим себе все направления и плоскости, характеризующие оптические и многие другие физические свойства кристаллов.

Для изучения как геометрических форм, так и всех этих свойств мы должны научиться точно изображать такие пучки плоскостей и направлений на плоскости чертежа, т.-е. должны научиться их проектировать, составлять их проекции. Из множества разных видов проекций, придуманных для разных целей (ортогональные, аксонометрические, картографические и т. д.) для наших целей наиболее подходящими являются так называемые стереографические. Потому что, во-первых, они легко вычерчиваются циркулем и линейкой, и во-вторых, по ним легко находятся истинные углы между плоскостями или направлениями спроектированного пучка, что для нас и является единственно важным в этом случае.

§ 9. Краткое понятие о стереографических проекциях [1]).

Стереографическая проекция пучка плоскостей и прямых получается так. Из центра пучка O (фиг. 3) произвольным радиусом R описываем шар, который называется шаром проекций. Затем проводим диаметральную плоскость P этого шара.



Фиг. 3.

Она называется плоскостью проекций. Проводится диаметр SS_1, перпендикулярный в плоскости проекций, называемый осью проекций. Точка S называется точкой зрения.

Для получения стереографической проекции данного направления (ребра) OA, выход A этого направления на шаре соединяем прямой (лучем зрения) SA с точкой зрения S. Тогда точка a, т.-е. след луча зрения на плоскости проекций и есть стереографическая проекция данного направления OA.

Для получения стереографической проекции данной плоскости ABCD (фиг. 4) все точки окружности ABCD, по которой эта плоскость пересекает шар, соединяются прямыми (лучами зрения) SA, SC, SB и SD, образующими целый конус лучей, с вершиной в точке S, называемый проектирующим конусом. Тогда кривая aBcD, по которой проектирующий конус пересекается с плоскостью проекций, и есть стереографическая проекция данной плоскости.

Одно из главных преимуществ стереографических проекций заключается в том, что эта кривая, изображающая произвольную плоскость, будет всегда окружностью, а потому легко вычерчивается.

---

[1]) Подробное изложение учения о кристаллографических проекциях см. в следующих сочинениях:

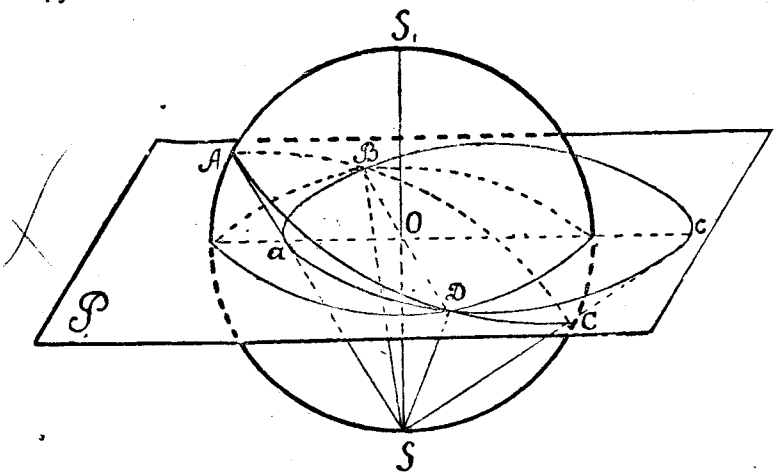
Г. В. Вульф и А. В. Шубников. — Практический курс геометрической кристаллографии. — Гос. Издат. — 1924.

С. М. Романов. — Учение о кристаллографических проекциях. — Баку, 1924.

Н. К. Разумовский. — Стереографические проекции. — Изд. Кубуч. 1927.

Также в курсах геометрической кристаллографии Федорова, Вульфа, Шубникова, Левинсона-Лессинга и Белянкина, Сущинского, Моцока, Шматько.

Таким образом мы видим, что стереографическая проекция направления изображается точкой, а стереографическая проекция плоскости — дугой окружности.



Фиг. 4.

Обычно вычерчивается лишь то, что лежит в плоскости проекций P. Такие чертежи мы и будем ниже применять.

§ 10. Другие виды кристаллографических проекций.

Кроме стереографических проекций в кристаллографии пользуются для изображения пучков линейными (или центральными), гномоническими и гномостереографическими проекциями. Для изображения же кристаллов применяют общеизвестные ортогональные проекции. Всех этих видов проекций мы здесь рассматривать не будем. Об ортогональных проекциях кристаллов будет сказано в части 7.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ.

Учение о симметрии.

§ 11. Значение симметрии для кристаллографии.

Простое внимательное рассматривание кристаллов убеждает нас в том, что они имеют симметричную форму. Углубление в вопросы кристаллографии показало, что симметрия играет чрезвычайно важную роль не только в наружных формах кристаллов, но и в их внутреннем строении. Поэтому точное учение о симметрии, представляющее отдел чистой геометрии, было разработано по преимуществу кристаллографами (Браве, Гадолин, Федоров) или физиками и математиками (Зонке, Шенфлис), но применительно к кристаллам. И в настоящее время это учение является одной из самых существенных частей кристаллографии.

§ 12. Предварительные понятия о симметрии.

Симметрия по-гречески буквально означает соразмерность. Симметричными телами в общежитии называются тела, как бы состоящие из равных частей, например, тело человека, колесо, бабочка и т. д.

§ 13. Основные определения.

Постараемся теперь выяснить сущность симметрии. Сделаем точные определения понятий, основных для учения о симметрии.

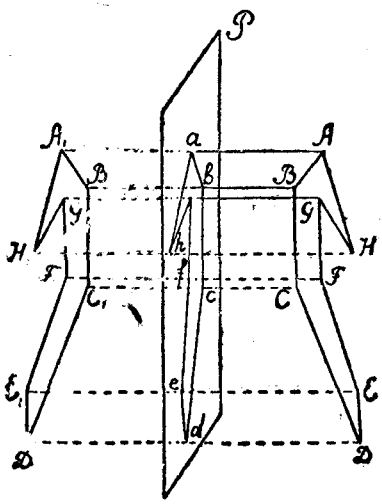
1. Две системы точек называются взаимно симметричными, если расстояние между любыми двумя точками одной из них равно расстоянию между двумя соответственными точками другой.

2. Симметрическим преобразованием называется такое, посредством которого из одной системы мы получаем другую новую, ей симметричную.

3. Самосимметричной системой называется такая, для которой можно так произвести симметрическое преобразование, что полученная новая система будет занимать то же место в пространстве, что и начальная, лишь одни точки, линии и поверхности ее перейдут на место других.

§ 14. Примеры симметрических преобразований.

Теорема I. Отражение в плоскости есть симметрическое преобразование. *Доказательство.* Отражением в плоскости называется такая замена данной системы, при которой каждую данную точку нашей системы мы заменяем новой, лежащей на одном с данной точкой перпендикуляре к плоскости отражения, но только по другую сторону от нее, на расстоянии равном расстоянию данной точки от плоскости (фиг. 5). Из этого построения ясно, что вновь полученная фигура $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1 G_1 H_1$ будет взаимно симметричная с A B C D E F G H, ибо расстояние между произвольными точками A_1 и B_1 новой фигуры равно расстоянию между соответственными точками A и B данной, что легко доказывается наложением прямоугольной трапеции $A_1 B_1 ab$ на трапецию A B a b.



Фиг. 5.

Теорема II. Всякое перенесение данной фигуры (в том числе и поворот вокруг какой-либо оси) есть симметричное преобразование. Ибо при таком перенесении расстояния между точками не меняются.

ГОРНОГО ИНСТИТ

§ 15. Типы симметрических преобразований.

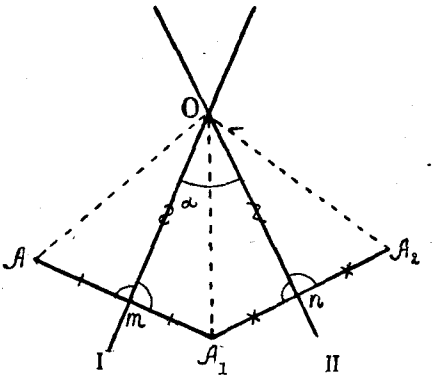
В учении о симметрии доказывается **теорема третья:** любые две взаимносимметричные системы можно вывести друг из друга посредством последовательного отражения либо в 3, либо в 4 плоскостях. Поэтому только эти два типа симметрических преобразований мы и должны изучать.

Однако, ряд последовательных отражений, которым подвергаются точки данной системы, не отличаются наглядностью. Эту операцию трудно себе представить. Поэтому мы должны научиться заменять отражение в нескольких плоскостях более наглядными действиями.

§ 16. Замена симметрических преобразований.

Теорема IV. Два последовательных отражения в каких угодно плоскостях можно заменить, без изменения результатов, одним поворотом вокруг линии пересечения этих плоскостей на угол вдвое больший двугранного угла между плоскостями и при том в направлении от плоскости I-го отражения к плоскости II-го.

Даны две плоскости, пересекающиеся по прямой. Плоскость чертежа (фиг. 6) перпендикулярна к линии пересечения плоскостей, поэтому плоскости отражения изображаются прямыми I и II, а линия их пересечения точкой O. Плоскость чертежа проведена так, что она проходит через произвольную точку A нашей системы. Докажем справедливость теоремы для точки A, а тем самым и для всей системы, к которой точка A принадлежит. Опустим для этого перпендикуляр из точки A на плоскость I и продолжим его по другую сторону плоскости на расстояние равное Am, получим точку A_1. Она не выйдет из плоскости чертежа, т. к. плоскость чертежа перпендикулярна к обеим плоскостям отражения. Отразим точку A_1, в плоскости II; для этого опустим перпендикуляр на II плоскость и, продолжив его по другую сторону плоскости на расстояние равное A_1n, получим точку A_2.



Фиг. 6.

Теперь нам надо доказать: 1) $OA = OA_1 = OA_2$, т. е., что точки A и A_2 лежат на одной окружности, имеющий центр в O, и, значит, что при вращении точка A обязательно придет в точку A_2 и 2) что угол поворота $AOA_2 = 2\alpha$, т. е. вдвое больше угла между плоскостями отражения. Рассмотрим треугольники AOm и A_1Om. Они прямоугольны. Катет Om у них общий. Катет $Am = A_1m$ по построению. Значит $\Delta AOm = \Delta A_1Om$, и потому $AO = A_1O$ (1). Из равенства ΔA_1On и ΔA_2On находим таким же путем, что $A_1O = A_2O$ (2). Откуда $AO = A_1O = A_2O$ (3), т. е. точки A и A_2 лежат на одной и той же окружности с центром в O.

(4) $\angle AOm = \angle mOA_1$ (по равенству $\Delta AOm = \Delta A_1Om$).
(5) $\angle A_2On = \angle nOA_1$ (по равенству $\Delta A_2On = \Delta A_1On$).

Сложим почленно равенства (4) и (5) и получим:

$$\angle AOm + \angle A_2On = \angle mOA_1 + \angle nOA_1 = \alpha.$$

Чтобы получить из точки A точку A_2, нужно повернуть ее вокруг точки O на угол.

$$\angle AOA_2 = \angle AOm + (\angle mOA_1 + \angle A_1On) + \angle nOA_2 = \alpha + \alpha = 2\alpha.$$

Таким образом мы видим, что из точки A, взятой произвольно в нашей системе, можем получить точку A_2 или отражением в двух пересекающихся плоскостях, или поворотом вокруг линии пересечения этих плоскостей на угол вдвое больший, чем угол между плоскостями, независящий, следовательно, от положения взятой точки. Но что справедливо для произвольной точки A, то справедливо и для других точек B, C, D и т. д. нашей системы, а значит и для всей системы.

Теорема V (обратная IV). Поворот вокруг некоторой прямой на угол α можно заменить без изменения результатов последовательным отражением в двух плоскостях, проходящих через данную прямую. При этом плоскость первого отражения проводится произвольно, а плоскость второго отражения проводится под углом $\alpha/2$ к первой по направлению поворота.

Доказательство подобно доказательству прямой теоремы.

Следующие 2 теоремы мы принимаем без доказательства.

Теорема VI. Отражение в трех каких угодно плоскостях можно заменить поворотом вокруг некоторой оси на определенный угол с последующим отражением в плоскости, перпендикулярной к этой оси.

Теорема VII. Отражение в четырех каких угодно плоскостях можно заменить без изменения результатов поворотом вокруг некоторой оси и поступательным движением (параллельным переносом) вдоль этой оси на некоторый отрезок a.

§ 17. Элементы симметрии.

Определение. Вращение вокруг оси, соединенное с отражением в плоскости, перпендикулярной к этой оси, называется зеркально-поворотным симметрическим преобразованием. Ось его называется зеркально-поворотной осью симметрии.

Определение. Вращение вокруг некоторой оси, соединенное с поступательным движением вдоль этой оси называется винтовым симметрическим преобразованием. Ось этого преобразования называется винтовой осью симметрии.

К этим двум типам симметрических преобразований, зеркально-поворотным и винтовым, сводятся все возможные симметрические преобразования. В элементарной кристаллографии, где изучаются многогранники и пучки плоскостей и прямых, из винтовых преобразований рассматривается только тот частный случай, когда поступание равно

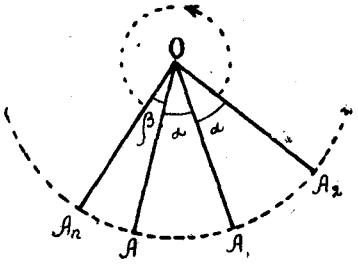
нулю и остается лишь поворот на некоторый угол так, как можно доказать, что упомянутые геометрические системы не могут иметь винтовых осей симметрии с поступанием, не равным 0. Ось, вокруг которой происходит вращение, называется в случае отсутствия поступания поворотной осью симметрии. Таким образом, в элементарной кристаллографии рассматриваются лишь поворотные и зеркально-поворотные оси симметрии.

Определение. Все эти оси называются элементами симметрии.

Рассмотрим эти элементы симметрии подробно. Они отличаются друг от друга только углом поворота, поэтому и введем определение понятия об элементарном угле поворота.

Определение. Наименьший угол поворота, при котором происходит совмещение одной симметричной системы с другой или при котором происходит совмещение самосимметричной системы со своим начальным положением в пространстве, называется элементарным углом поворота данной оси.

Теорема VIII. Для самосимметричных систем элементарный угол поворота всяких осей симметрии составляет всегда целую часть 360°. Докажем теорему только для поворотных осей. (Для зеркально-поворотных осей доказательство несколько сложнее).



Фиг. 7.

Чертеж (фиг. 7) сделан так, что поворотная ось перпендикулярна к плоскости чертежа. Точка O — выход оси. Плоскость чертежа проведена через произвольную точку A нашей системы, α — элементарный угол поворота. Повернем нашу систему на угол α, система совпадет со своим начальным положением в пространстве и точка A займет при этом место соответствующей ей точки A_1. Повернем второй раз на угол α, система опять совместится с первоначальным положением в пространстве, а точка A_1 перейдет в точку A_2, ей соответствующую. Будем производить эту операцию до тех пор, пока точка A_n не приблизится совсем к точке A. При этом могут быть три случая: 1) остаточный угол β как раз равен углу α, тогда значит условия нашей теоремы удовлетворены, 2) остаточный угол β больше α, т. е. поворот произведен не до конца и придется еще повернуть, 3) $\beta < \alpha$ этот случай мы разберем подробно.

Пусть $\beta < \alpha$. Когда наша система повернута так, что точка A пришла в положение A_n, — тогда вся система занимает точно такое же положение в пространстве, как и до всяких поворотов. Повернув систему на угол β мы точку A_n совместим с точкой A и всю систему с исходным положением, которое она занимала в пространстве до всех поворотов. Раз это произошло, то элементарным углом поворота является угол β меньший угла α, чего быть не может, так как по заданию элементарный угол поворота есть угол α. Итак, $\alpha = \frac{360°}{n}$, где $n = 1, 2, 3, 4, 5 \ldots \infty$, где ∞ = сколь угодно большому, но целому числу.

Определение. Это число n, показывающее сколько раз элементарный угол содержится в 360°, или сколько раз фигура совмещается со своим начальным положением в течение полного оборота, — называется наименованием оси симметрии.

§ 18. Частные случаи поворотных осей симметрии.

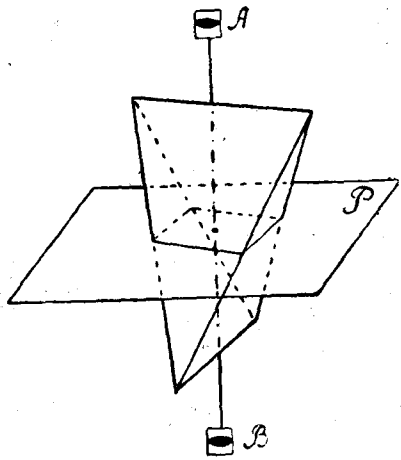
Поворотные оси бывают одинарные ($n=1$), двойные ($n=2$), тройные ($n=3$) и т. д. Особого рассмотрения заслуживают оси, для которых 1) $n=1$, 2) $n=\infty$.

Одинарной поворотной осью симметрии является всякое направление в пространстве, так как при повороте на 360° вокруг любого направления тело совмещается со своим начальным положением.

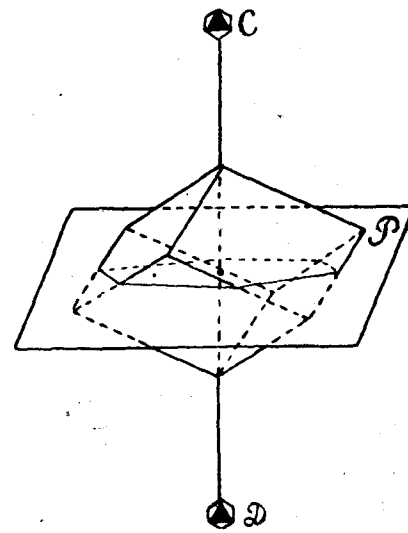
Если же $n=\infty$, то α — бесконечно малая величина, это значит, что во время вращения фигура остается непрерывно в совмещении со своим начальным положением. Геометрические тела, обладающие этим свойством, называются телами вращения, а ось называется осью вращения.

§ 19. Частные случаи зеркально-поворотных осей симметрии.

Прежде чем рассматривать частные случаи зеркально-поворотных осей, поясним на двух примерах их сущность. У тетрагонального



Фиг. 8.



Фиг. 9.

тетраэдра (фиг. 8) прямая AB служит четверной зеркально-поворотной осью, потому что поворот вокруг оси AB на 90° плюс отражение в плоскости P совмещают фигуру с начальным положением. Ромбоэдр (фиг. 9) обладает шестерной зеркально-поворотной осью, так как поворот вокруг CD на 60° плюс отражение в плоскости, перпендикулярной к ней, совмещает фигуру с начальным положением.

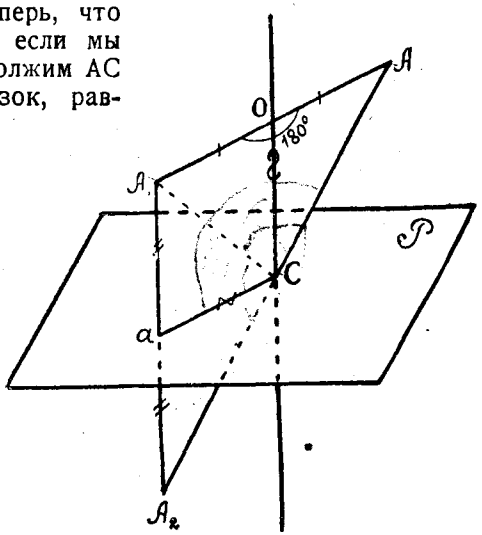
Теперь перейдем к рассмотрению отдельных частных случаев.

1. Одинарная зеркально-поворотная ось симметрии ($n=1$). Наименьший угол ее поворота равен 360°. Поворот на этот *угол можно заменить поворотом* на угол 0° без изменения результатов. Это значит, что для совмещения надо данную систему, без всякого

поворота отразить в некоторой плоскости. Такая плоскость получает название плоскости симметрии.

2. Двойная зеркально-поворотная ось симметрии.

Теорема IX. Всякая двойная зеркально-поворотная ось равнозначна центру инверсии, совпадающему с точкой встречи данной оси с ее плоскостью. Центром инверсии называется такая точка, при соединении с которой любой точки А фигуры вектором АС (фиг. 10) и при продолжении этого вектора на такое же расстояние CA_2 по другую сторону центра, мы встречаем новую соответственную точку нашей фигуры. Возьмем точку А, опустим из нее перпендикуляр АО на ось СО и повернем ее вокруг оси СО на 180°. Так как по заданию ось СО есть двойная и $\alpha = \frac{360^\circ}{2}$; получим точку A_1. Отразим ее в плоскости Р и получим точку A_2. Все эти три точки лежат в одной плоскости с осью ОС, что доказать не трудно. Покажем теперь, что в ту же точку A_2 можно прийти, если мы соединим точку А с точкой С, продолжим АС и отложим на продолжении отрезок, равный АС. Для этого надо доказать, что 1) $CA = CA_2$ и 2) $\angle ACA_2 = 180^\circ$.



Фиг. 10.

Рассмотрим прямоугольные ΔA_1CO и ΔACO; у них сторона СО общая, $OA = OA_1$, и $\angle COA = \angle COA_1 = 90^\circ$ по условиям поворота. Значит, $\Delta A_1CO = \Delta ACO$, а потому и $CA = CA_1$ (1).

Точно также в ΔCA_1a и ΔCA_2a находим, что сторона Са общая, что $A_1a = A_2a$ и $\angle A_1aC = \angle A_2aC = 90^\circ$ по условиям отражения. Значит треугольники равны, а потому $A_1C = A_2C$ (2); сравнивая равенства (1) и (2) находим, что $CA = CA_2$. Далее: $\angle OCA_1 + \angle A_1Ca = 90^\circ$ (3). $\angle OCA = \angle A_1CO$ (по равенству ΔA_1CO и ΔACO) $\angle aCA_2 = \angle aCA_1$ (по равенству ΔA_2Ca и ΔaCA_1), поэтому, складывая два последние равенства почленно и привлекая равенство (3), имеем:

$$\angle A_2Ca + \angle OCA = \angle aCA_1 + \angle A_1CO = 90^\circ.$$

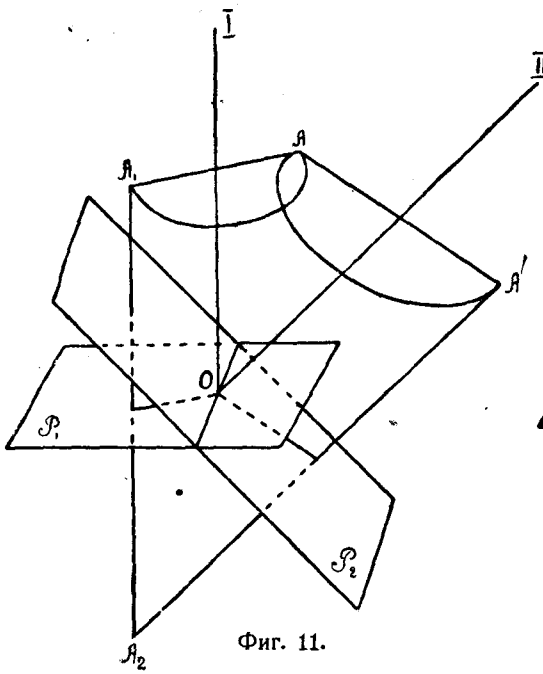
$$\angle ACA_2 = \angle ACO + \angle OCA_1 + \angle A_1Ca + \angle aCA_2 = 180^\circ.$$

Что и требовалось доказать.

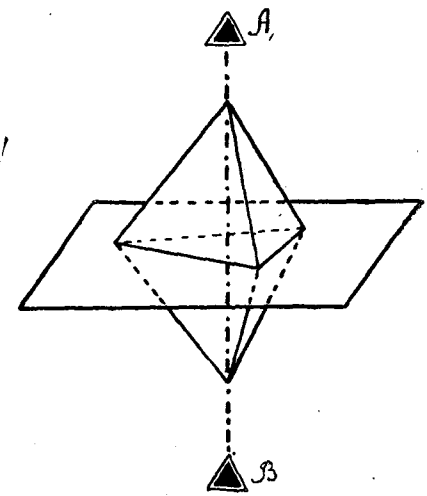
Теорема X. Если существует у фигуры одна двойная зеркально-поворотная ось, то любое направление в пространстве, проходящее через точку встречи данной оси с ее плоскостью, есть тоже двойная зеркально-поворотная ось этой фигуры.

Доказательство (фиг. 11). О—I данная двойная зеркально-поворотная ось и P_1 — связанная с нею плоскость отражения. Посредством их из точки А через точку A_1, выведена точка A_2. Возьмем произвольное напра-

вление O—II, проходящее через точку встречи оси O—I с ее плоскостью P_1. Докажем, что применение направления O—II как двойной зеркально-поворотной оси приведет данную фигуру в то же положение, как и применение данной зеркально-поворотной оси O—I. Этим докажем, что направление O—II есть также двойная зеркально-поворотная ось данной фигуры. По теореме IX действие двойной зеркально-поворотной оси O—I приведет фигуру в такое же положение, как и действие центра инверсии O. По той же теореме применение направления O—II, как двойной зеркально-поворотной оси будет равносильно применению того же центра инверсии O. Итак, поворот и отражение с помощью O—I—P_1 и та же операция с помощью O—II—P_2 равнозначны каждая в отдельности применению одного и того же центра инверсии, а потому эти операции O—I—P_1 и O—II—P_2 равнозначны между собою, т. е. приводят к одному и тому же результату. А так как после применения O—I—P_1



Фиг. 11.



Фиг. 12.

данная фигура совмещается со своим исходным положением, то и после операции O—II—P_2 происходит такое же совмещение, и, следовательно, ось O—II—P_2 есть двойная зеркально-поворотная ось данной фигуры, что и требовалось доказать. Из фиг. 11 видно, как точка A_2 может быть получена из A посредством поворотоотражения O—II—P_2.

3. Бесконечная зеркально-поворотная ось. Для нее $n = \infty$ (элементарный угол поворота—бесконечно-малая величина). Поэтому не трудно сообразить, что бесконечная зеркально-поворотная ось представляет совокупность оси вращения и перпендикулярной к ней плоскости симметрии.

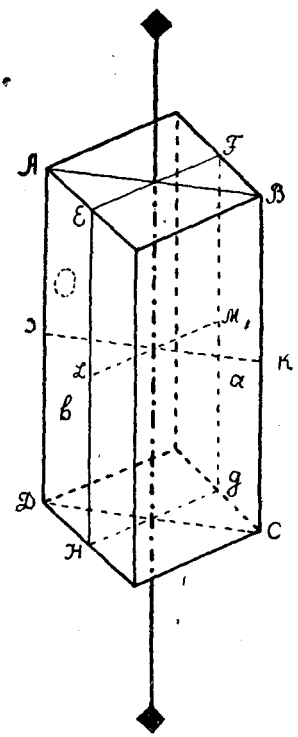
Надо еще заметить, что всякая зеркально-поворотная ось четного наименования является в то же время поворотной осью вдвое меньшего наименования, а всякая зеркально-поворотная ось нечетного наименования будет поворотною осью того же наименования. Теорем, относя-

щихся к этому положению доказывать здесь не будем. Поясним на примерах. У тетрагонального тетраэдра (см. фиг. 8) прямая AB служит четверной зеркально-поворотной осью, так как поворот вокруг нее на 90° плюс отражение в плоскости к ней перпендикулярной, приводят фигуру в совмещение со своим начальным положением в пространстве. Одновременно прямая AB является и двойной поворотной, потому что при повороте на 180° фигура тоже совмещается со своим начальным положением. У тригональной дипирамиды, прямая AB (фиг. 12) будет тройной зеркально-поворотной осью (поворот вокруг нее на 120° плюс отражение в плоскости к ней перпендикулярной совмещают фигуру со своим начальным положением в пространстве). Эта же прямая будет и тройной поворотной осью, т. к. при одном лишь повороте на 120° тоже происходит совмещение фигуры с начальным положением.

§ 20. Сложение элементов симметрии.

Если фигура обладает какими-либо двумя элементами симметрии, то она обладает и третьим, равнодействующим, действие которого приводит фигуру в то же положение, как и последовательное действие первых двух. Эту теорему весьма важную для вывода видов симметрии (см. ниже) мы не будем доказывать в общем виде. Поясним ее одним примером и доказательством одной из простейших частных теорем, сюда относящихся.

Пусть нам дана (фиг. 13) четырехгранная призма, имеющая в сечении квадрат. Если мы повернем ее на 90° вокруг четверной оси, то из заданной грани a получим грань b. Отразив же грань b в плоскости ABCD получим грань O (заднюю). Ту же грань O можно вывести из грани a и другим путем: достаточно отразить грань a в плоскости EFGH. Две симметрические операции: 1) поворот вокруг четверной оси и 2) отражение в плоскости ABCD равнорезультатны одной: отражению в плоскости EFGH. Поэтому отражение в плоскости EFGH есть равнодействующая первых двух операций.



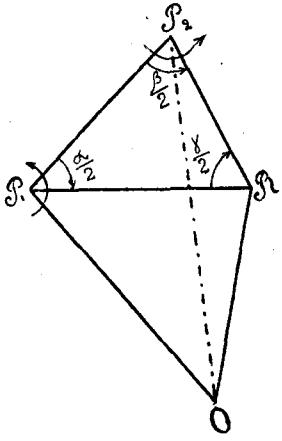
Фиг. 13.

Теорема Эйлера. Равнодействующей двух пересекающихся поворотных осей OP_1 и OP_2 является (фиг. 14) новая поворотная ось, проходящая через точку пересечения данных. Пусть угол поворота вокруг OP_1 равен α, а вокруг OP_2 равен β. Заданные направления этих поворотов отмечены большими стрелками. Каждый из этих поворотов мы можем заменить по теореме V отражением в двух плоскостях, проходящих через соответственную ось, при чем плоскость первого отражения можно провести произвольно, а плоскость второго должна образовать с первой угол равный $\alpha/2$ в направлении вращения.

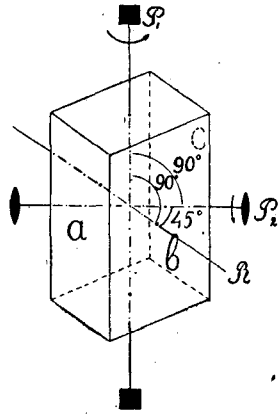
Проведем плоскость через данные оси OP_1 и OP_2. Заменим поворот вокруг OP_1: проведем плоскость первого отражения через OP_1 так, чтобы

она отстояла от плоскости OP_1P_2 на угол $\alpha/2$ в направлении обратном вращению. Тогда плоскость второго отражения сольется с плоскостью OP_1P_2. Заменяя поворот вокруг OP_2, проведем плоскость первого отражения так, чтобы она слилась с плоскостью OP_1P_2. Плоскость же второго отражения для оси OP_2 пройдет тогда под углом $\beta/2$ к OP_1P_2, считая угол по направлению вращения вокруг OP_2 [1]).

Итак, поворот вокруг оси OP_1 плюс поворот вокруг оси OP_2 может быть заменен отражением в плоскостях $OP_1R + OP_1P_2 + OP_2P_1 + OP_2R$. Но отражение в плоскостях OP_1P_2 и OP_2P_1 есть непосредственно следующие друг за другом отражения в одной и той же плоскости. Такая пара отражений возвращает все точки в их исходные места, а потому отражения эти взаимно уничтожаются. Остаются отражения в плоскостях $OP_1R + OP_2R$, а эту операцию можно заменить поворотом вокруг линии их пересечения OR на угол γ, вдвое больший угла между плоскостями



Фиг. 14.



Фиг. 15.

OP_1R и OP_2R. Эта линия OR и есть равнодействующая поворотная ось данных двух поворотных осей. Ее угол поворота равен удвоенному двугранному углу P_1ORP_2. Направление вращения от оси OP_1 к оси OP_2.

Пример. Та же квадратная призма может иллюстрировать нам и эту теорему (фиг. 15). Она имеет четверную поворотную ось симметрии P_1 и двойную P_2; при повороте вокруг P_1 на 90° против часовой стрелки, грань a перейдет на место b. Затем, при повороте вокруг P_2 на 180° грань b перейдет на место c (пунктирная буква). Совершенно того же результата можно достигнуть одним единственным поворотом призмы вокруг оси R на 180°: грань a сразу придет в положение c. Замечаем, что ось R можно найти в пересечении двух плоскостей. Одну из них P_1R надо провести через ось P_1 под углом 45° к плоскости P_1P_2, в которой лежат обе данные оси. А другую P_2R через P_2 под углом 90° к P_1P_2, ибо элементарный угол P_1 есть $\alpha_1 = 90°$ и $\frac{a_1}{2} = 45°$, а для P_2 имеем $\alpha_2 = 180°$ и $\frac{a_2}{2} = 90_o$. Двугранный угол плоскостей P_1R и P_2R будет равен 90_o. Откуда $\frac{a_R}{2} = 90°$, а $\alpha_R = 180_o$, т. е. равнодействующая ось есть двойная.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

Тридцать два вида симметрии кристаллов, распределение их по шести сингониям и простые формы в них встречаемые.

§ 21. Виды симметрии кристаллов и разделение их по сингониям.

Определение. Видом симметрии данной фигуры называется полная пространственная совокупность ее элементов симметрии. Все фигуры, обладающие одними и теми же одинаково расположенными элементами симметрии, принадлежат к одному виду симметрии. Далеко не всякая произвольная совокупность элементов симметрии возможна. Например, из только что сказанного о сложении элементов симметрии мы уже знаем, что не может существовать фигура, обладающая только двумя элементами симметрии: их присутствие неизбежно вызывает присутствие третьего элемента, равнодействующего. Поэтому одной из главнейших задач учения о симметрии является вывод всех возможных видов симметрии. Задача эта была выполнена трудами многих ученых. Оказалось, что для геометрических систем, в частности для геометрических многогранников существует бесконечное, хотя и ограниченное множество видов симметрии. Для кристаллических же многогранников и кристаллического вещества число возможных видов симметрии сравнительно не велико. Это ограничение вызвано тем, что, как мы будем изучать далее, согласно теории и наблюдениям в кристаллах возможны лишь одинарные, двойные, тройные, четверные и шестерные, поворотные и зеркально-поворотные оси симметрии. Никаких других не бывает. Основываясь на этом, впервые немецкий ученый Гессель в 30-х годах прошлого столетия и независимо от него русский ученый Гадолин в 1869 году вывели, что в кристаллографии возможны только 32 вида симметрии. Эти виды симметрии группируются в 6 сингоний [1]): триклинную, моноклинную, ромбическую, тетрагональную, гексагональную и кубическую.

1. Триклинная имеет 2 вида симметрии.
2. Моноклинная » 3 » »
3. Ромбическая » 3 » »

Это три низшие сингонии; они характеризуются тем, что у них нет осей симметрии выше двойной.

4. Тетрагональная имеет 7 видов симметрии, в которых всегда присутствует одна четверная поворотная или зеркально-поворотная ось, кроме осей низшего наименования (т. е. таких, для которых $n \leq 2$).

---

[1]) **Сингония** с греческого значит **сходноугольность**. Группы видов симметрии, объединяемые в одну сингонию, обладают сходными углами между кристаллографическими осями (о которых будет сказано выше) или точнее сходной совокупностью характерных углов.

5. Гексагональная имеет 12 видов симметрии. Характерно для нее присутствие одной тройной или шестерной, поворотной или зеркально-поворотной оси симметрии, кроме низших.

Тетрагональная и гексагональная суть средние сингонии; они характеризуются присутствием одной и притом единственной оси симметрии наименования $n > 2$.

6. Кубическая имеет 5 видов симметрии. Характеризуется тем, что в ее видах симметрии есть больше одной оси высших наименований (для которых $n > 2$).

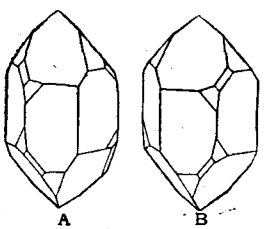
Это высшая сингония.

§ 22. Понятие о простых формах и комбинациях.

Прежде чем приступить к подробному рассмотрению видов симметрии и форм, встречаемых в шести сингониях, дадим несколько определений.

Определение 1. Простой формой называется такой многогранник все грани которого выводятся из одной заданной посредством элементов симметрии этого многогранника.

Определение 2. Комбинацией простых форм называется многогранник, у которого из одной данной грани не все остальные выводятся посредством элементов симметрии многогранника.



Фиг. 16.
A — левый, B — правый кристаллы кварца.

Грань, из которой мы желаем вывести форму, можно задать или перпендикулярно, или параллельно, или косо по отношению к элементам симметрии.

Определение 3. Та форма, которая выводится из грани косо расположенной по отношению к элементам симметрии называется общей формой.

Определение 4. Частной формой называется та, которая выводится из грани, заданной либо параллельно, либо перпендикулярно к оси или плоскости симметрии.

Приведенные определения частной и общей формы не вполне точны, так как в некоторых случаях, задавая, например, грань нормально к биссектриссе угла между равными осями симметрии или нормально к плоскости, соединяющей две оси симметрии, мы получим также не общие, а частные формы, хотя в этих случаях по отношению к элементам симметрии грань расположена косо.

Бывают многогранники, один из которых является отражением другого. Никаким движением их совместить нельзя. Совмещение достигается только при участии отражения в плоскости. Такие формы, совмещающиеся друг с другом только при помощи зеркально-поворотных симметрических преобразований, называются энантиоморфными[1]). В виде энантиоморфных пар могут существовать лишь такие многогранники, которые лишены зеркально-поворотных осей, что вытекает из определения таких фигур. Как пример, приведем правый и левый кристаллы кварца (фиг. 16).

---

[1]) ἐν-αντίος — противоположный, обратный; μορφή — вид, образ, форма.

§ 23. Происхождение кристаллографической номенклатуры.

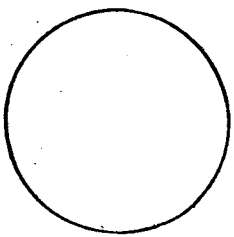
В целях однообразия научной номенклатуры на языках разных стран во многих науках введены латинские или греческие термины. Чтобы сделать понятными термины, применяемые в кристаллографии, мы приведем здесь список греческих числительных и некоторых других греческих слов.

В сложных словах:

1 (единственный) —	μόνος	μόνο- (моно-)	— одно-...
2 —	δύο	δι- (ди-)	— дву-, дважды-...
3 —	τρεῖς	τρι- (три-)	— три-, трех-, трижды-...
4 —	τετταρες	τετρα- (тетра-)	— четыре-, четырех-, четырежды-...
5 —	πέντε	πεντα- (пента-)	— пяти-, пятью-...
6 —	ἕξ	ἑξ, ἑξα- (хекс, хекса-)	— шести-, шестью-...
8 —	ὀκτώ	οκτα- (окта-)	— восьми-, восмью-...
10 —	δέκα	— (дéка).	
12 —	δώδεκα	— (додека).	
	ἕδρα	— (эдра) — грань.	
	γωνία	— (гониа) — угол.	
	συν	— (син) — сходно, согласно (откуда: сингония — сходноугольность).	
	πολύ	— (много).	

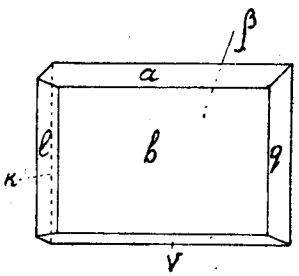
§ 24. I. Триклинная сингония.

Κλίνω — означает «наклоняю»; τρι — три. Триклинной сингонией называется такая, у которой между кристаллографическими [1]) осями все три



Фиг. 17.
Моноэдрический вид симметрии.

Фиг. 18.
Моноэдр.



Фиг. 19.
Двухромово-кислый калий $Cr_2O_7K_2$

угла косые. Сюда относятся два вида симметрии: 1) моноэдрический и 2) пинакоидальный. Вид симметрии получает свое название от той простой формы, которую мы получим, если зададим грань общего поло-

[1]) Кристаллографическими осями называются координатные оси кристалла. подробнее о них будет сказано дальше.

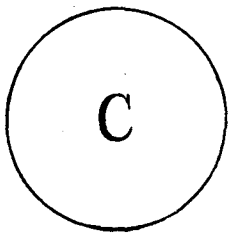
жения и подвергнем ее поворотам и отражениям, какие возможны при наличии данных элементов симметрии.

1. Моноэдрический вид симметрии (фиг. 17)[1]) характеризуется полным отсутствием элементов симметрии, что равнозначно существованию только одинарных поворотных осей симметрии.

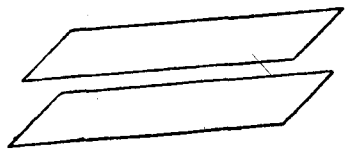
Поэтому, если мы зададим грань общего положения, то никакой иной грани из нее здесь не выведем посредством элементов симметрии, ибо их здесь нет. И мы получим форму, состоящую из одной грани— моноэдр (фиг. 18), откуда и название моноэдрический.

Как пример, приведем кристалл двухромово-кислого калия $Cr_2O_7K_2$ [2]) (фиг. 19), образованный 7 независящими друг от друга моноэдрами.

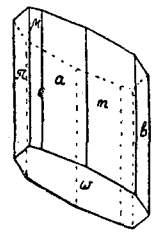
2. Пинакоидальный вид симметрии (фиг. 20) обладает центром инверсии. Если зададим грань общего положения, то получим форму



Фиг. 20.
Пинакоидальный вид симметрии.



Фиг. 21.
Пинакоид.

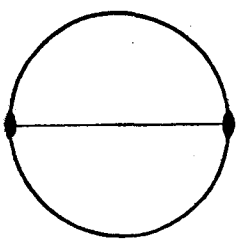


Фиг. 22.
Медный купорос
$CuSO_4\ 5H_2O$

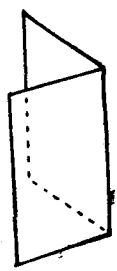
пинакоид, состоящую из двух параллельных граней (фиг. 21), напоминающую доску — πίναξ (пи́накс). Отсюда и название вида — пинакоидальный. В дальнейшем мы не будем так подробно объяснять возникновение названий видов симметрии, — принцип сохраняется везде тот же.

Как пример, приведен кристалл медного купороса (фиг. 22) $SO_4Cu \cdot 5H_2O$, образованный шестью пинакоидами.

§ 25. II. Моноклинная сингония.



Фиг. 23.
Диэдрический осевой (аксиальный) вид симметрии.



Фиг. 24.
Диэдр.

У нее только один угол между кристаллографическими осями косой, два другие прямые; отсюда ее название. Видов симметрии три.

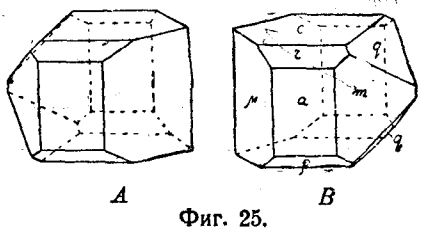
3. Диэдрический осевой (аксиальный) вид симметрии (фиг. 23). Присутствует одна двойная поворотная ось симметрии. Общая форма— диэдр (фиг. 24). Частные формы: пинакоид (фиг. 21), если грань задана параллельно оси, и моноэдр (фиг. 18), если грань задана перпендикулярно оси. В виду отсутствия зеркально-поворотных осей возможны

---

[1]) Элементы симметрии каждого вида мы будем изображать в стереографической проекции (фиг, 17, 20, 23, 26, 28 и т. д.).

[2]) По А. В. Шубникову.

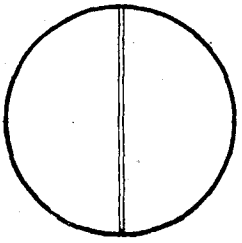
энантиоморфные формы, например, кристаллы правой и левой винной кислоты (фиг. 25) ($C_4H_6O_6$).



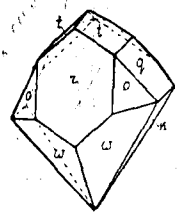
Фиг. 25.
Правая (*B*) и левая (*A*) винная кислота $C_4H_6O_6$.

Они представляют комбинацию четырех пинакоидов c, r, a, p и трех диэдров m, q, μ.

4. Диэдрический безосный (анаксиальный) вид симметрии (фиг. 26) характеризуется присутствием плоскости симметрии. Общая форма — диэдр (фиг. 24). Частные: пинакоид (фиг. 21), — грань задана параллельно, и моноэдр (фиг. 18), — грань задана перпендикулярно плоскости симметрии. Пример: кристалл водного метасиликата натрия $SiO_3\ Na_2 \cdot 5H_2O$ (фиг. 27). Здесь r — моноэдр, o, t, q, ω, k — диэдры.

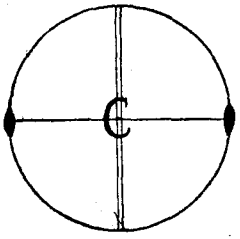


Фиг. 26.
Диэдрический безосный (анаксиальный) вид симметрии.

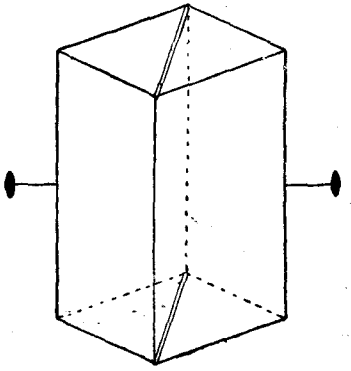


Фиг. 27.
Водный метасиликат натрия $Na_2SiO_3 \cdot 5H_2O$

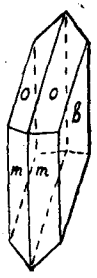
5. Призматический вид симметрии (фиг. 28) имеет двойную поворотную ось, плоскость симметрии перпендикулярную к ней и, как равнодействующий элемент, — центр инверсии. Общая форма — ромбическая призма (фиг. 29). Частные формы: 1) пинакоид (фиг. 21), если грань задана параллельно оси или плоскости симметрии. Пример: кристалл гипса



Фиг. 28.
Призматический вид симметрии.



Фиг. 29.
Ромбическая призма.



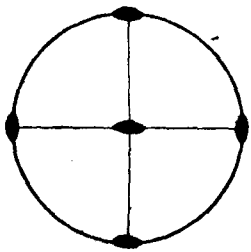
Фиг. 30.
Гипс $CaSO_4 \cdot 2H_2O$

$SO_4Ca \cdot 2H_2O$ (фиг. 30), b — пинакоид, m — одна и o — другая ромбические призмы.

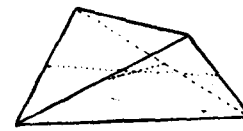
§ 26. III. Ромбическая сингония.

Ромбическая сингония получила свое название от того, что все общие формы, относящиеся к этой сингонии имеют в центральном горизонтальном сечении ромб. Сюда относятся три вида симметрии.

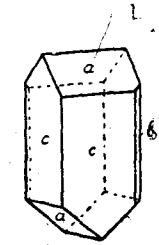
6. Ромбо-тетраэдрический имеет три двойных поворотных, взаимно-перпендикулярных оси симметрии (фиг. 31). Общая форма — ромбический тетраэдр (фиг. 32). Частные формы: 1) ромбическая призма



Фиг. 31.
Ромбо-тетраэдрический вид симметрии.



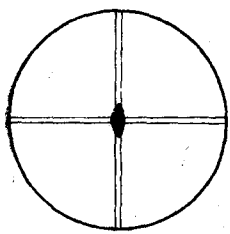
Фиг. 32.
Ромбический тетраэдр (средины каждой пары противолежащих ребер соединяются двойной поворотной осью симметрии).



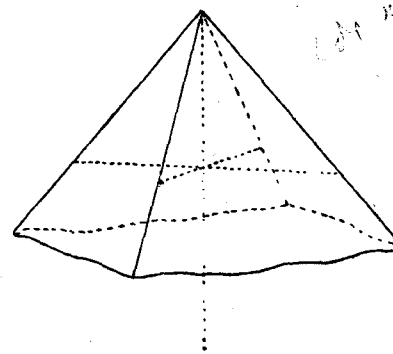
Фиг. 33.
Эпсомит—
$SO_4Mg \cdot 7H_2O$

(фиг. 29), если грань параллельна одной из осей симметрии, и 2) пинакоид (фиг. 21) если грань перпендикулярна оси симметрии. Пример: кристалл эпсомита $SO_4Mg \cdot 7H_2O$, образованный ромбическим тетраэдром (a), ромбической призмой (c) и пинакоидом (b) (фиг. 33).

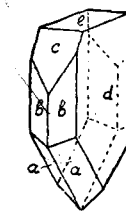
7. Ромбо-пирамидальный вид симметрии имеет две взаимно перпендикулярных плоскости симметрии и в их пересечении двойную поворотную



Фиг. 34.
Ромбопирамидальный вид симметрии.



Фиг. 35.
Ромбическая пирамида. Горизонтальное сечение — ромб.

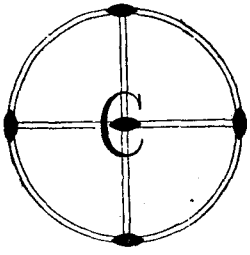


Фиг. 36.
Каламин—
$Si O_4 Zn_2 \cdot H_2O$

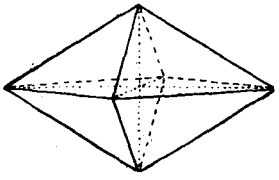
ось, являющуюся их равнодействующей (фиг. 34). Общая форма — ромбическая пирамида (фиг. 35). Частные формы: 1) ромбическая призма (фиг. 29), если заданная грань параллельна оси симметрии, 2) диэдр (фиг. 24) — грань задана перпендикулярно плоскости симметрии, но наклонно к оси, 3) пинакоид (фиг. 21) — грань параллельна плоскости симметрии и 4) моноэдр (фиг. 18) — грань перпендикулярна оси симметрии. Пример: кристалл каламина $Si O_4 Zn_2 \cdot H_2O$, образованный ромбической

пирамидой (a), ромбической призмой (b), диэдром (c) пинакоидом (d) и моноэдром (e) (фиг. 36).

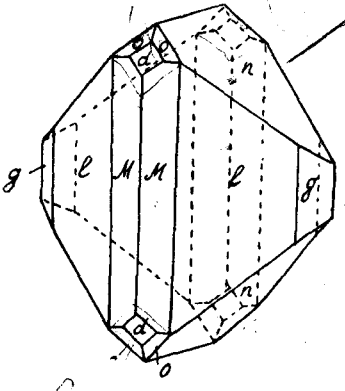
8. Ромбо-дипирамидальный вид симметрии имеет три взаимно-перпендикулярных плоскости симметрии, в их пересечении три двойных поворотных оси и, как результат сложения какой-либо плоскости симметрии с нормальной к ней двойной поворотной осью, — центр инверсии (фиг. 37). Общая форма — ромбическая дипирамида (фиг. 38). Частные формы: 1) ромбическая призма (фиг. 29), — если заданная грань параллельна одной из осей симметрии, и 2) пинакоид (фиг. 21) — грань параллельна плоскости симметрии. Пример: кристалл топаза $Si\,O_4\,Al_2\,(F, OH)_2$, образованный ромбической дипирамидой o и пятью ромбическими призмами (фиг. 39).



Фиг. 37.
Ромбо-дипирамидальный вид симметрии.



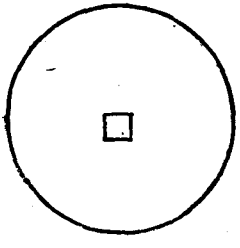
Фиг. 38.
Ромбическая дипирамида.



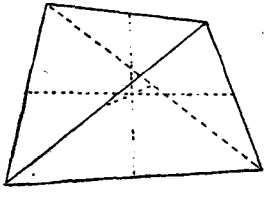
Фиг. 39.
Топаз — $Si\,O_4\,Al_2\,(F, OH)_2$

§ 27. IV. Тетрагональная сингония.

У ее видов симметрии всегда присутствует одна и при том единственная четверная поворотная или зеркально-поворотная ось симметрии. Эта сингония имеет семь видов симметрии. Здесь при выводе частных форм, мы опустим указания, как должна быть задана грань для получения каждой формы, считая, что этот вопрос достаточно выяснен в предыдущих сингониях. Читатель может убедиться, что при заданиях граней частного положения (§ 22) будут выводиться в каждом виде перечисляемые ниже частные формы и никакие другие.



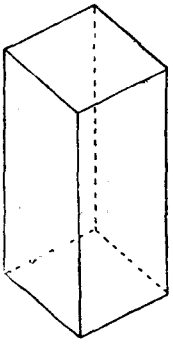
Фиг. 40.
Тетрагонально-тетраэдрический вид симметрии.



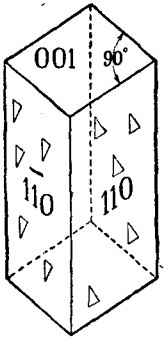
Фиг. 41.
Тетрагональный тетраэдр.

9. Тетрагонально-тетраэдрический вид симметрии. Существует одна четверная зеркально-поворотная ось симметрии (фиг. 40). Общая форма — тетрагональный тетраэдр (фиг. 41). Частные формы: тетрагональная призма (фиг. 42) пинакоид (фиг. 21). До сих пор известен лишь один пример этого вида симметрии — кристаллы алюмосиликата

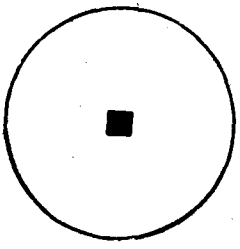
кальция состава: $Si O_7 Al_2 Ca_2$, образованные, кроме изображенных (фиг. 43) граней тетрагональной призмы (110) и пинакоида (001), еще не поддающимися измерению гранями двух тетрагональных тетраэдров, притупляющими его углы и доказывающими отсутствие иных элементов симметрии, кроме четверной зеркально-поворотной оси.



Фиг. 42. Тетрагональная призма.

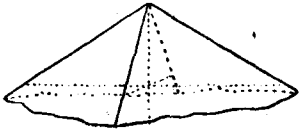


Фиг. 43. Аллюмосиликат кальция $Si O_7 Al_2 Ca_2$

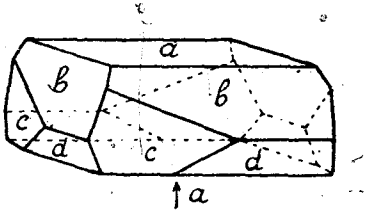


Фиг. 44. Тетрагонально-пирамидальный вид симметрии.

10. Тетрагонально-пирамидальный вид симметрии. Имеется одна четверная поворотная ось (фиг. 44). Общая форма — тетрагональная пирамида (фиг. 45). Частные формы: 1) тетрагональная призма (фиг. 42), 2) моноэдр (фиг. 18). Пример: кристалл — вульфенита $Mo O_4 Pb$ образованный двумя моноэдрами (a и a'), двумя тетрагональными пирамидами (b, d) и тетрагональной призмой (c) (фиг. 46).

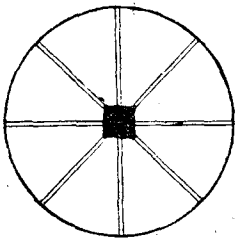


Фиг. 45. Тетрагональная пирамида. Горизонтальное сечение — квадрат.

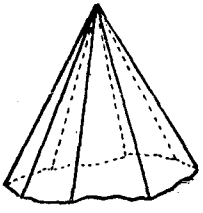


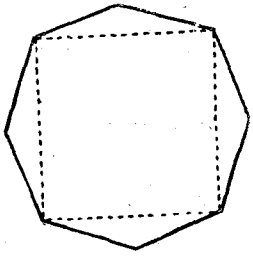
Фиг. 46. Вульфенит — $Mo O_4 Pb$

11. Дитетрагонально-пирамидальный вид симметрии (фиг. 47). Имеется одна четверная поворотная ось и четыре плоскости симметрии,



Фиг. 47. Дитетрагонально-пирамидальный вид симметрии.

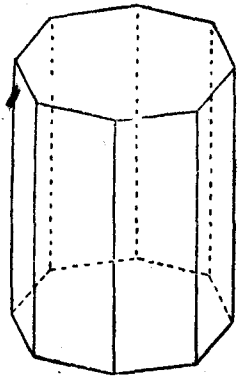




Фиг. 48. Дитетрагональная пирамида. Направо показано сечение, нормальное к L_4 — «дитетрагон».

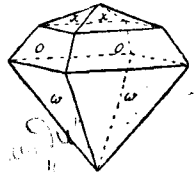
через нее проходящие. Общая форма — дитетрагональная пирамида (фиг. 48). Частные формы: 1) дитетрагональная призма

(фиг. 49), 2) тетрагональная пирамида (фиг. 45), 3) тетрагональная призма (фиг. 42), 4) моноэдр (фиг. 18). Немногие известные кристаллы этого вида симметрии сложены обычно лишь частными формами. Так, например, кристалл $AgF \cdot H_2O$ (фиг. 50) образован тремя тетрагональными пирамидами.

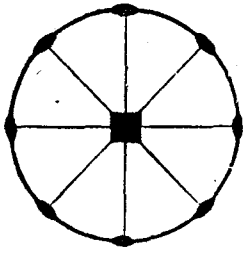


Фиг. 49.
Дитетрагональная призма.

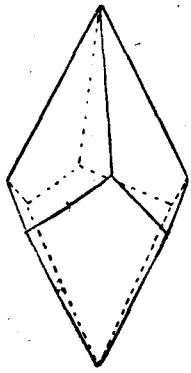
12. Тетрагонально - трапецоэдрический вид симметрии. Существует одна четверная поворотная ось симметрии и четыре двойных поворотных, к ней перпендикулярных (фиг. 51). Общая форма тетрагональный трапецоэдр [1]) (фиг. 52); двойные поворотные оси в нем выходят в середине каждого из 8 ребер, не идущих в верхнюю и нижнюю его вершины. Частные формы: 1) тетрагональная дипирамида (фиг. 53), когда грань задана перпендикулярно к плоскости, проходящей через четверную ось симметрии и двойную, но наклонно к L_4; 2) дитетраго-



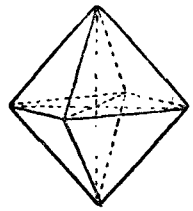
Фиг. 50.
Гидрат фтористого серебра—$AgF \cdot H_2O$.



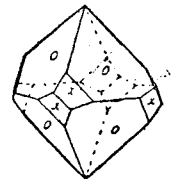
Фиг. 51.
Тетрагонально-трапецоэдрический вид симметрии.



Фиг. 52.
Тетрагональный трапецоэдр.



Фиг. 53.
Тетрагональная дипирамида.



Фиг. 54.
Кислый трихлорацетат калия $CCl_3[CO_2K] \cdot CCl_3[CO_2H]$.

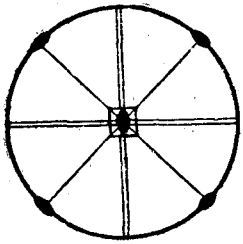
нальная призма (фиг. 49); 3) тетрагональная призма (фиг. 42); 4) пинакоид (фиг. 21). Пример: кристалл монокалий трихлорацетата $CCl_3[CO_2K] \cdot CCl_3[CO_2H]$ (фиг. 54), образованный тетрагональной дипирамидой (o) и тетрагональным трапецоэдром (x).

13. Тетрагонально-скаленоэдрический вид симметрии. Присутствуют: одна четверная зеркально-поворотная ось симметрии (она же двойная поворотная), две взаимно перпендикулярные плоскости симметрии, через нее проходящие, и две двойные поворотные оси, нормальные к четверной и делящие углы между плоскостями пополам (фиг. 55). Общая форма — тетрагональный скаленоэдр [2]) (фиг. 56). Частные формы: 1) тетра-

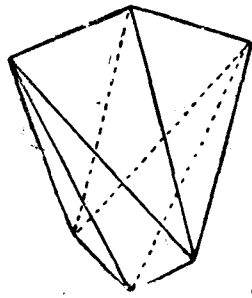
[1]) τράπεζα (сокращенное τέτταρα πέζα) четырехсторонник. Форма эта ограничена четырехсторонниками, у которых все стороны, сходящиеся у верхней и нижней вершины равны друг другу.

[2]) Σκαληνός — неравный: грани фигуры — неравносторонние треугольники.

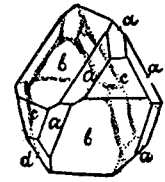
гональная дипирамида (фиг. 53), — грань задана перпендикулярно к плоскости, проходящей через четверную и двойную оси, но косо по отношению к четверной оси, 2) тетрагональный тетраэдр (фиг. 41), — грань задана перпендикулярно к плоскости симметрии, но косо по отношению к чет-



Фиг. 55.
Тетрагонально-скаленоэдрический вид симметрии.



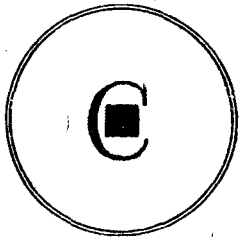
Фиг. 56.
Тетрагональный скаленоэдр.



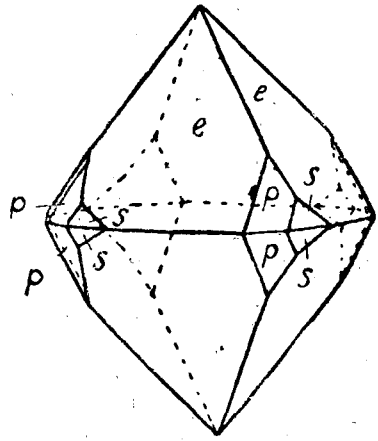
Фиг. 57.
Медный колчедан — FeS_2Cu.

верной оси, 3) дитетрагональная призма (фиг. 49), 4) тетрагональная призма (фиг. 42), 5) пинакоид (фиг. 21). Пример: кристалл медного колчедана FeS_2Cu, образованный тетрагональной дипирамидой (a), двумя тетрагональными тетраэдрами (b, d) и тетрагональной призмой (c) (фиг. 57).

14. Тетрагонально-дипирамидальный вид симметрии. Имеются четверная поворотная ось, плоскость симметрии к ней перпендикулярная и центр инверсии [1]) (фиг. 58). Общая форма — тетрагональная дипирамида (фиг. 53). Частные формы: 1) тетрагональ-



Фиг. 58.
Тетрагонально-дипирамидальный вид симметрии.



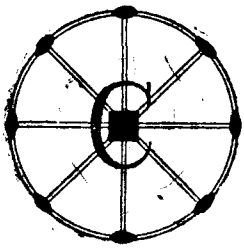
Фиг. 59.
Шеелит — Ca WO_4.

ная призма (фиг. 42) и 2) пинакоид (фиг. 21). Пример — кристалл шеелита WO_4Ca, образованный тремя тетрагональными дипирамидами (фиг. 59).

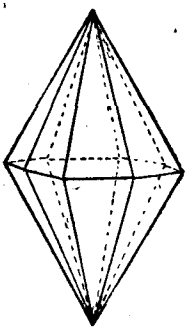
15. Дитетрагонально-дипирамидальный вид симметрии. Существуют (фиг. 60) одна четверная поворотная ось, четыре плоскости сим-

[1]) В этом виде и в следующем четверная поворотная ось является также четверной зеркально-поворотной. В тексте и на чертежах 58 и 60 мы это выпускаем для простоты. Также и далее мы иногда будем выпускать зеркально-поворотные оси, когда они являются следствием других элементов симметрии и не имеют существенного значения.

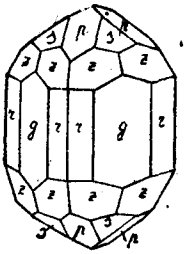
метрии через нее проходящие, одна плоскость симметрии к ней перпендикулярная, четыре двойных поворотных оси и центр инверсии. Общая форма—дитетрагональная дипирамида (фиг. 61). Частные формы: 1) дитетрагональная призма (фиг. 49), 2) тетрагональная дипирамида



Фиг. 60.
Дитетрагонально-дипирамидальный вид симметрии.



Фиг. 61.
Дитетрагональная дипирамида.



Фиг. 62.
Оловянный камень (касситерит) — $Sn\,O_2$.

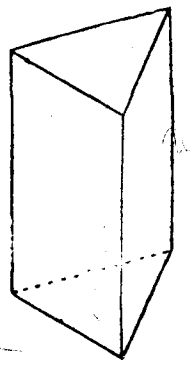
(фиг. 53), 3) тетрагональная призма (фиг. 42) и 4) пинакоид (фиг. 21). Пример—кристалл касситерита (оловянного камня)—SnO_2 (фиг. 62). У него z—дитетрагональная дипирамида, p—тетрагональная пирамида, s—то же, r—дитетрагональная призма и g—тетрагональная призма.

§ 28. V. Гексагональная сингония.

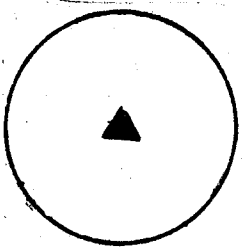
Эта сингония подразделяется на две подсингонии A) тригональную и B) гексагональную.

A. Тригональная подсингония.

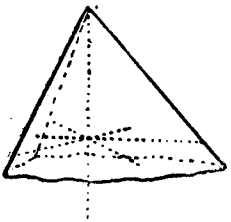
16. Тригонально-пирамидальный вид симметрии. Существует только одна тройная поворотная ось (фиг. 63). Общая форма — тригональная пирамида (фиг. 64). Частные формы: 1) тригональная призма (фиг. 65), 2) моноэдр (фиг. 18). Пример: кристалл шестиводного периодата натрия $J_2O_8Na_2 \cdot 6H_2O$ (фиг. 66), образованный тремя тригональными пирамидами (r, o, t) и одним моноэдром (γ).



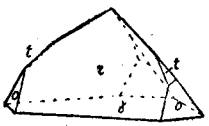
Фиг. 65.
Тригональная призма.



Фиг. 63.
Тригонально-пирамидальный вид симметрии.

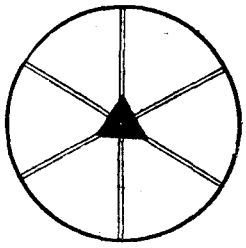


Фиг. 64.
Тригональная пирамида.

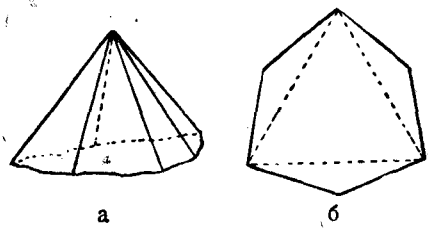


Фиг. 66.
Шестиводный периодат натрия — $Na_2\,J_2O_8 \cdot 6H_2O$.

17. Дитригонально-пирамидальный вид симметрии. Имеется одна тройная поворотная ось и три плоскости симметрии, через нее про-



Фиг. 67.
Дитригонально-пирамидальный вид симметрии.

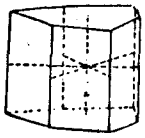


а б

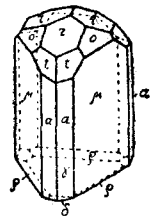
Фиг. 68.
а) Дитригональная пирамида. б) Сечение ее, нормальное к L_3—дитригон.

ходящие (фиг. 67). Общая форма — дитригональная пирамида (фиг. 68). Частные формы: 1) дитригональная призма (фиг. 69), 2) тригональная пирамида (фиг. 64), 3) тригональная призма (фиг. 65), 4) гексагональная пирамида (фиг. 90), 5) гексагональная призма (фиг. 75), 6) моноэдр (фиг. 18).

Пример: кристалл турмалина $Si_8 O_{38} [B \cdot OH]_4 R_3 Al_6$, где $R = Al_2 Mg_3 Fe_3 K_6 Li_6 Na_6 H_6$ (фиг. 70). Он представляет комбинацию: дитригональной пирамиды (t), четырех тригональных пирамид (r, o, ρ, δ), дитригональной призмы (a), тригональной призмы (μ) и моноэдра (γ).

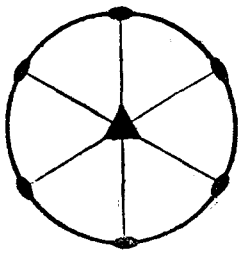


Фиг. 69.
Дитригональная призма.

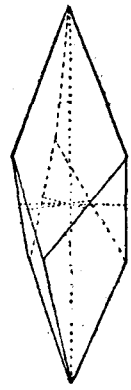


Фиг. 70.
Турмалин — $Si_8 O_{38} [B \cdot OH]_4 R_3 Al_6$; $R = Al_2, Mg_3, Fe_3, K_6, Li_6, Na_6, H_6$.

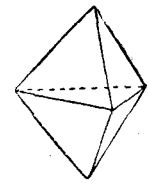
18. Тригонально-трапецоэдрический вид симметрии. Имеются одна тройная поворотная ось и три двойных поворотных, к ней перпендикулярных (фиг. 71) Общая форма — тригональный трапецоэдр (фиг. 72). Частные формы: 1) дитригональная призма (фиг. 69), 2) три-



Фиг. 71.
Тригонально-трапецоэдрический вид симметрии.

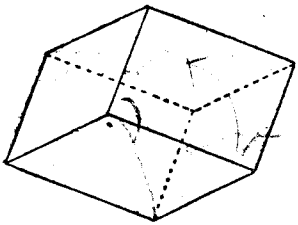


Фиг. 72.
Тригональный трапецоэдр.

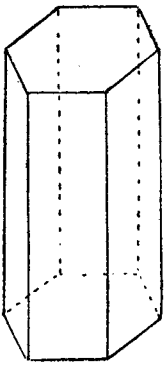


Фиг. 73.
Тригональная дипирамида.

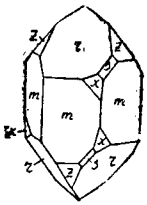
гональная дипирамида (фиг. 73), 3) ромбоэдр (фиг. 74), 4) гексагональная призма (фиг. 75), 5) тригональная призма (фиг. 65), 6) пинакоид (фиг. 21). Пример: кристалл кварца SiO_2 (фиг. 76).



Фиг. 74.
Ромбоэдр.



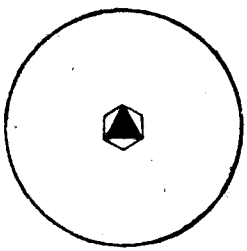
Фиг. 75.
Гексагональная призма.



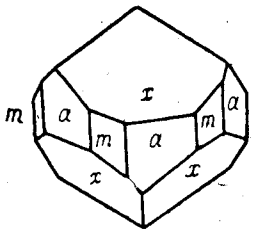
Фиг. 76.
Кварц — SiO_2.

Это комбинация: тригонального трапецоэдра (x), двух ромбоэдров (r и Z), гексагональной призмы (m) и тригональной дипирамиды (s).

19. Ромбоэдрический вид симметрии. Существует тройная поворотная ось, она же шестерная зеркально-поворотная (фиг. 77). Общая форма: ромбоэдр (фиг. 74). Частные формы: 1) гексагональная призма (фиг. 75) и 2) пинакоид (фиг. 21). Пример: кристалл фенакита SiO_4Be_2 (фиг. 78), образованный двумя гексагональными призмами (a, m) и ромбоэдром (x).

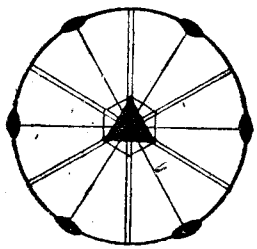


Фиг. 77.
Ромбоэдрический вид симметрии [1]).

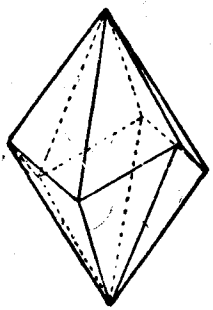


Фиг. 78.
Фенакит — Be_2SiO_4.

20. Дитригонально-скаленоэдрический вид симметрии обладает тройной поворотной осью (она же шестерная зеркально-поворотная ось), тремя плоскостями симметрии, через нее проходящими, и тремя двойными поворотными осями, делящими пополам углы между этими плоско-



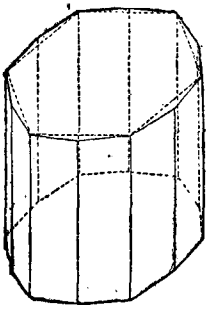
Фиг. 79.
Дитригонально-скаленоэдрический вид симметрии [1]).

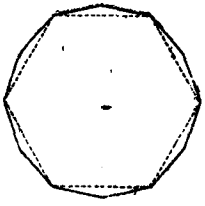


Фиг. 80.
Дитригональный скаленоэдр.

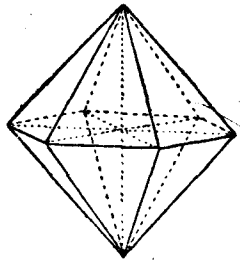
[1]) В видах симметрии 19 и 20 имеется еще центр инверсии.

стями и в то же время перпендикулярными к тройной оси (фиг. 79). Общая форма — дитригональный скаленоэдр (фиг. 80). Частные формы: 1) дигексагональная призма (фиг. 81), 2) гексагональная дипирамида (фиг. 82), 3) ромбоэдр (фиг. 74), 4) гексагональная призма

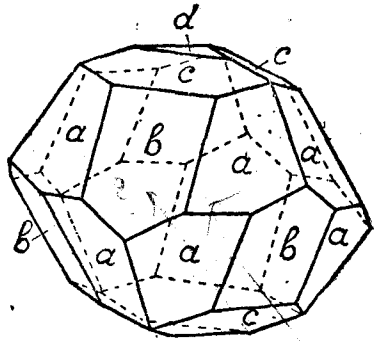




Фиг. 81.
Дигексагональная призма.
Внизу — сечение ее нормальное к L_6, — дигексагон.



Фиг. 82.
Гексагональная дипирамида.

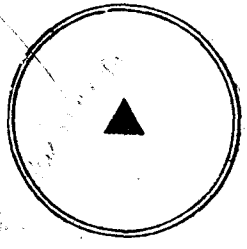


Фиг. 83.
Гематит (железный блеск) — Fe_2O_3.

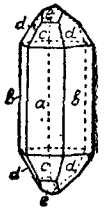
(фиг. 75), 5) пинакоид (фиг. 21). Пример: кристалл гематита — Fe_2O_3 (фиг. 83), образованный дитригональным скаленоэдром (a), двумя ромбоэдрами (b, c) и пинакоидом (d).

B. Гексагональная подсингония.

21. Тригонально-дипирамидальный вид симметрии. Существует одна тройная поворотная ось и плоскость симметрии, к ней перпендикулярная (фиг. 84). Общая форма — тригональная дипирамида (фиг. 73). Частные формы: 1) тригональная призма (фиг. 65) и 2) пинакоид (фиг. 21). Пример: кристалл PO_4Ag_2H, комбинация только частных форм: двух тригональных призм (a, b) и трех тригональных дипирамид (c,d,e,) (фиг. 85),—единственное до сих пор известное вещество этого вида симметрии, и то не вполне изученное кристаллографически.

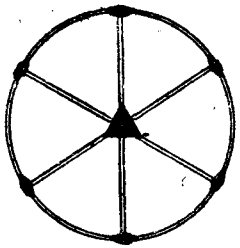


Фиг. 84.
Тригонально-дипирамидальный вид симметрии.

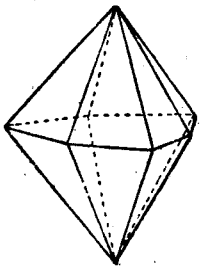


Фиг. 85.
Кислый фосфат серебра—PO_4Ag_2H.

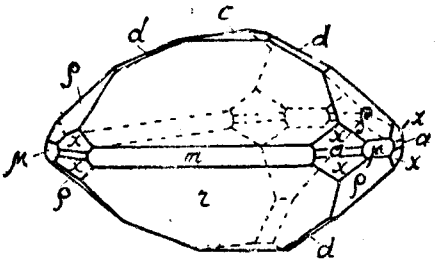
22. Дитригонально-дипирамидальный вид симметрии имеет одну тройную поворотную ось, три плоскости симметрии, через нее проходящие, одну плоскость симметрии, к ней перпендикулярную и, как равнодействующие горизонтальной плоскости с тремя вертикальными, три двойных поворотных оси (фиг. 86). Общая форма — дитригональная дипирамида (фиг. 87). Частные формы: 1) дитригональная призма (фиг. 69), 2) гексагональная призма (фиг. 75), 3) гексагональная дипира-



Фиг. 86.
Дитригонально-дипирамидальный вид симметрии.



Фиг. 87.
Дитригональная дипирамида.

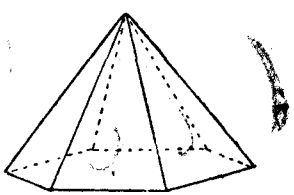


Фиг. 88.
Бенитоит $Si_3 Ti O_9 Ba$.

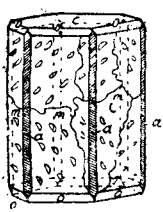
мида (фиг. 82), 4) тригональная дипирамида (фиг. 73), 5) тригональная призма (фиг. 65) и 6) пинакоид (фиг. 21). Одно из двух сейчас известных веществ этого вида симметрии — бенитоит Si_3TiO_9Ba (фиг. 88): χ — дитригональная дипирамида; r, ρ, d — 3 тригональные дипирамиды; m, μ — 2 тригональные призмы; a — дитригональная призма; c — пинакоид.

23. Гексагонально-пирамидальный вид симметрии. Имеется одна шестерная поворотная ось (фиг. 89). Общая форма — гексагональная пирамида (фиг. 90). Частные формы: 1) гексагональная призма

Фиг. 89.
Гексагонально-пирамидальный вид симметрии.



Фиг. 90.
Гексагональная пирамида.

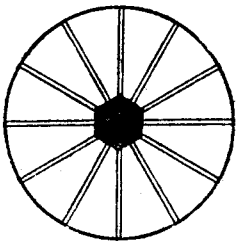


Фиг. 91.
Нефелин — $[Si O_4]_2 Al_2 (Na_2, K_2 Ca)$.

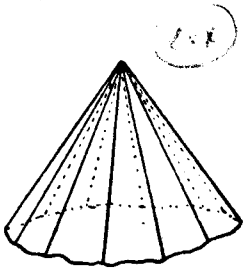
(фиг. 75) и 2) моноэдр (фиг. 18). Как пример, приведем кристалл нефелина $[SiO_4]_2Al_2(Na_2,K_2,Ca)$, который по своим внешним формам удовлетворял бы гораздо более высокому виду симметрии (напр., дигексагонально-дипирамидальному), но штриховатость узких граней и фигуры травления (§ 154) указывают, что никаких элементов симметрии, кроме шестерной поворотной оси нет (фиг. 91).

Изображенный кристалл представляет комбинацию таких простых и притом частных форм: двух гексагональных призм (a, m), одной гексагональной дипирамиды (o) и пинакоида (c).

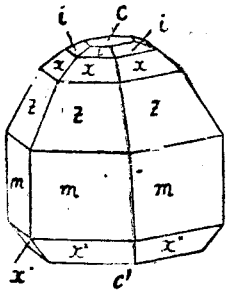
24. Дигексагонально-пирамидальный вид симметрии. Существуют одна шестерная поворотная ось и шесть плоскостей симметрии через нее проходящих (фиг. 92). Общая форма — дигексагональная пирамида (фиг. 93). Частные формы: 1) дигексагональная призма (фиг. 81),



Фиг. 92.
Дигексагонально-пирамидальный вид симметрии.



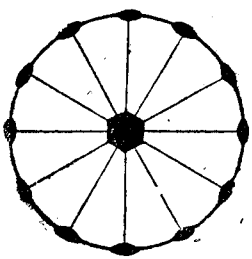
Фиг. 93.
Дигексагональная пирамида.



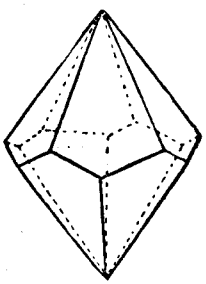
Фиг. 94.
Гринокит CdS.

2) гексагональная пирамида (фиг. 90), 3) гексагональная призма (фиг. 75), 4) моноэдр (фиг. 18). Пример: кристалл гринокита CdS (фиг. 94), ограниченный лишь частными формами: двумя моноэдрами (c, c'), четырьмя гексагональными пирамидами (z, x, i, x') и гексагональной призмой (m).

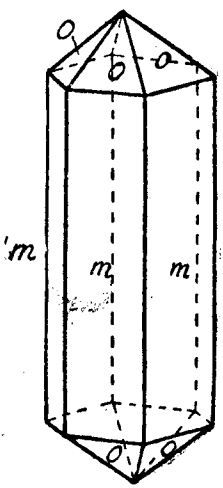
25. Гексагонально-трапецоэдрический вид симметрии обладает одной шестерной осью и шестью двойными поворотными осями, к ней перпендикулярными (фиг. 95). Общая форма: гексагональный трапецоэдр (фиг. 96). Частные формы: 1) дигексагональная призма (фиг. 81), 2) гексагональная дипирамида (фиг. 82), 3) гексагональная призма (фиг. 75) и 4) пинакоид (фиг. 21). Пример — кристалл весемнадцативодного силикомолибдата калия



Фиг. 95.
Гексагонально-трапецоэдрический вид симметрии.



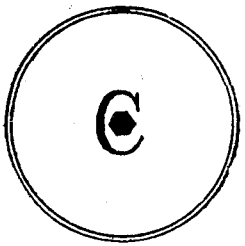
Фиг. 96.
Гексагональный трапецоэдр.



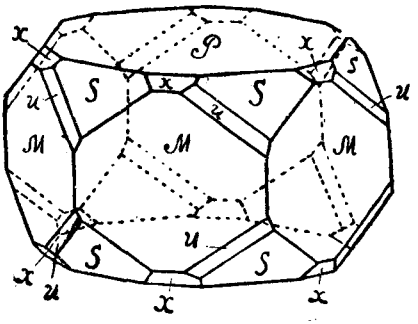
Фиг. 97.
Восемнадцативодный силико-молибдат калия — $Mo_{12}SiO_{40}K_4 \cdot 18H_2O$.

$Mo_{12}SiO_{40}K_4 \cdot 18H_2O$ (фиг. 97). Отсутствие плоскостей симметрии, не противоречащих внешним формам кристалла, определяется по его физическим свойствам (по наличию вращения плоскости поляризации, о котором излагается далее в кристаллооптике). На фигуре 97 имеются лишь частные формы: гексагональная призма (m) и гексагональная дипирамида (o).

26. Гексагонально-дипирамидальный вид симметрии имеет одну шестерную поворотную ось и плоскость симметрии, к ней перпендикулярную (фиг. 98). Общая форма — гексагональная дипирамида (фиг. 82). Частные формы: 1) гексагональная призма (фиг. 75) и 2) пина-



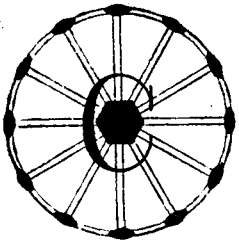
Фиг. 98.
Гексагонально-дипирамидальный вид симметрии.



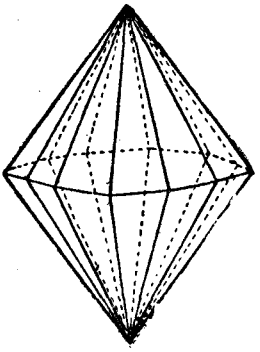
Фиг. 99.
Апатит — $3P_2O_8Ca_3 \cdot Ca(Cl, F, OH)_2$.

коид (фиг. 21). Пример: кристалл апатита—$3P_2O_8Ca_3 \cdot Ca(F,Cl,OH)_2$ (фиг. 99). Здесь 3 гексагональных дипирамиды (x, s, u), 1 гексагональная призма (M) и пинакоид (P).

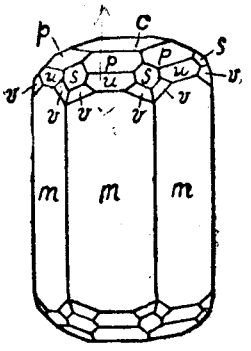
27. Дигексагонально-дипирамидальный вид симметрии. Имеется одна шестерная поворотная ось, плоскость симметрии, к ней перпенди-



Фиг. 100.
Дигексагонально-дипирамидальный вид симметрии.



Фиг. 101.
Дигексагональная дипирамида.



Фиг. 102.
Берилл — $[SiO_3]_6 Al_2 Be_3$.

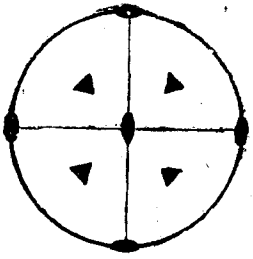
кулярная, шесть плоскостей симметрии, через нее проходящих, и шесть двойных поворотных осей, как результат сложения горизонтальной плоскости симметрии с каждой вертикальной (фиг. 100). Общая форма — дигексагональная дипирамида (фиг. 101). Частные формы: 1) дигексагональная призма (фиг. 81), 2) гексагональная пирамида (фиг. 90), 3) гексагональная призма (фиг. 75), 4) пинакоид (фиг. 21). Пример — кристалл берилла — $(SiO_3)_6Al_2Be_3$ (фиг. 102), m — гексагональная призма, v — дигексагональная дипирамида, u, p, s,—3 гексагональные дипирамиды, c—пинакоид.

§ 29. VI. Кубическая сингония.

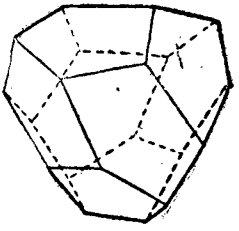
Для кубической сингонии характерно следующее расположение осей: всегда имеются три взаимно перпендикулярных поворотных оси (двойных для первых трех видов симметрии или четверных для остальных двух). Они образуют прямые трехгранные углы, внутри которых под равными углами к их ребрам всегда присутствуют 4 тройные поворотные оси.

Общие замечания о названиях простых форм кубической сингонии. Чтобы лучше понимать приведенные дальше названия этих форм, укажем некоторые общие правила их составления. Исходными являются названия следующих 4 простейших многогранников кубической сингонии: 1) тетраэдр (четырехгранник—фиг. 107); гексаэдр (шестигранник) или куб (фиг. 108); 3) октаэдр (восмигранник — фиг. 120) и 4) додекаэдр (двенадцатигранник—фиг. 109 и 110). Более сложные многогранники этой сингонии имеют общий вид одного из этих четырех простейших, но каждая грань простейшего заменена при этом парой, тройкой, четверкой или шестеркой как бы надстроенных граней. Например, фиг. 106 и 113 имеют общий вид тетраэдра (фиг. 107), но с надстроенными тройками (106) и шестерками (113) граней. Такие многогранники получают названия «тритетраэдр», «гексатетраэдр» и т. под. Если при этом одинаковые названия получают разные многогранники, то впереди прибавляется еще одно слово, отделяемое черточкой и означающее форму грани. Например, фиг. 104, 105, 106 — все тритетраэдры, но у первого из них грани пятиугольники, у второго—четырехугольники, у третьего—трехугольники. Поэтому они и называются соответственно: пентагон-тритетраэдр, тетрагон-тритетраэдр и тригон-тритетраэдр.

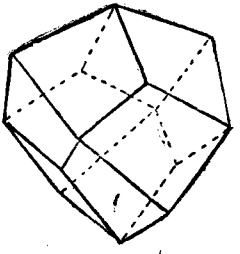
28. **Пентагон-тритетраэдрический** вид симметрии обладает тремя двойными поворотными осями и четырьмя тройными, идущими как ука-



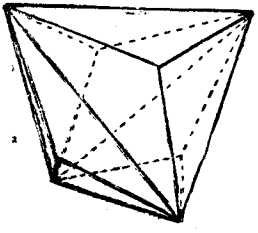
Фиг. 103.
Пентагон-титраэдрический вид симметрии



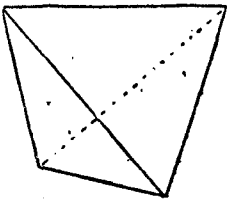
Фиг. 104.
Пентагон-тритетраэдр.



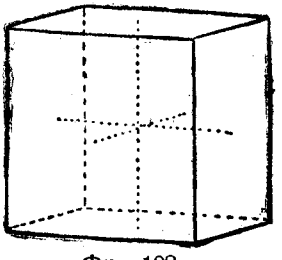
Фиг. 105.
Тетрагон-тритедраэдр.



Фиг. 106.
Тригон-тритетраэдр.

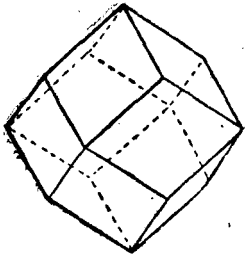


Фиг. 107.
Тетраэдр (правильный)

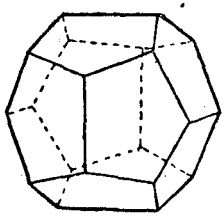


Фиг. 108.
Гексаэдр или куб.

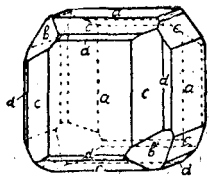
зано выше (фиг. 103). Общая форма—пентагон-тритетраэдр (фиг. 104). Частные формы: 1) тетрагон-тритетраэдр (фиг. 105), 2) тригон-тритетраэдр (фиг. 106), 3) тетраэдр (фиг. 107),



Фиг. 109.
Ромбо-додекаэдр.



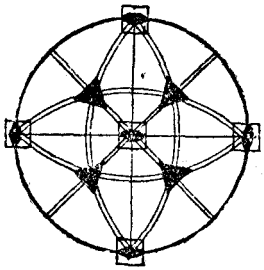
Фиг. 110.
Пентагон-додекаэдр.



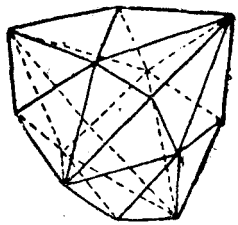
Фиг. 111.
Хлорат натрия—$NaClO_3$.

4) гексаэдр (куб) (фиг. 108), 5) ромбо-додекаэдр (фиг. 109), 6) пентагон-додекаэдр (фиг. 110). Пример: кристалл хлората натрия ClO_3 Na (фиг. 111), образованный гранями куба (a), тетраэдра (b), пентагондодекаэдра (c) и ромбо-додекаэдра (d).

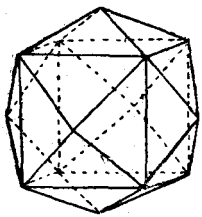
29. Гексатетраэдрический вид симметрии. Существуют три взаимно-перпендикулярных двойных поворотных (они же четверные зерк.-пов.) оси,



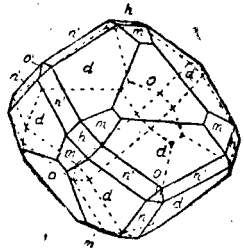
Фиг. 112.
Гексатетраэдрический вид симметрии.



Фиг. 113.
Гексатетраэдр.



Фиг. 114.
Тетрагексаэдр.

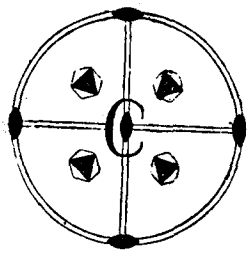


Фиг. 115.
Сфалерит (цинковая обманка) — Zn S.

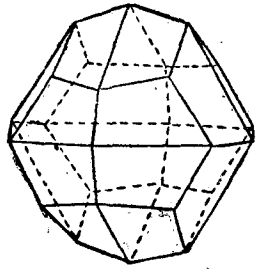
четыре тройных поворотных оси и шесть плоскостей симметрии, проходящих одновременно через одну двойную и две тройных поворотных оси (фиг. 112). Общая форма—гексатетраэдр (фиг. 113). Частные формы: 1) тетрагон-тритетраэдр (фиг. 105), 2) тригон-тритетраэдр (фиг. 106),

3) тетраэдр (фиг. 107), 4) тетрагексаэдр или пирамидальный куб (фиг. 114), 5) гексаэдр или куб (фиг. 108), 6) ромбо-додекаэдр (фиг. 109). Пример: кристалл цинковой обманки (сфалерита)—ZnS (фиг. 115); h — куб; o — тетраэдр; o — другой (отрицательный) тетраэдр; d — ромбо-додекаэдр; m и n'—два тригон-тритетраэдра.

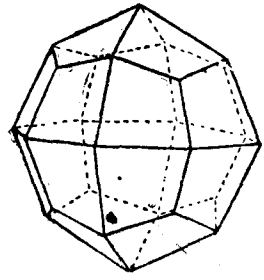
30. Дидодекаэдрический вид симметрии. Имеются три взаимноперпендикулярных плоскости симметрии, три двойных поворотных оси и



Фиг. 116.
Дидодекаэдрический вид симметрии.

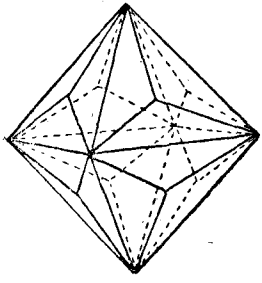


Фиг. 117.
Дидодекаэдр.

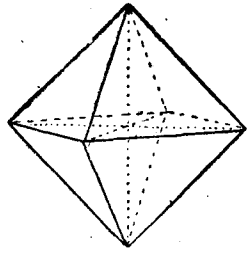


Фиг. 118.
Тетрагон-триоктаэдр.

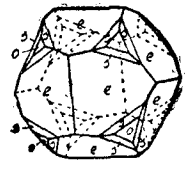
четыре тройных оси (они же шестерные зеркально-поворотные) (фиг. 116). Общая форма—дидодекаэдр (фиг. 117). Частные формы: 1) пентагон-додекаэдр (фиг. 110), 2) ромбо-додекаэдр (фиг. 109), 3) тетрагон-триоктаэдр (фиг. 118), 4) тригон-триоктаэдр (фиг. 119), 5) окта-



Фиг. 119.
Тригон-триоктаэдр.



Фиг. 120.
Октаэдр.



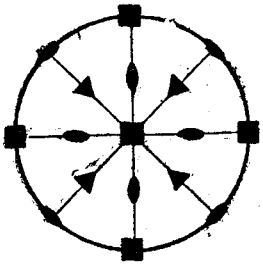
Фиг. 121.
Пирит (серный колчедан) — FeS_2.

эдр (фиг. 120) [1]) и 6) гексаэдр (фиг. 108). Пример: кристалл пирита—FeS_2 (фиг. 121), — комбинация пентагон-додекаэдра e, октаэдра o и дидодекаэдра s.

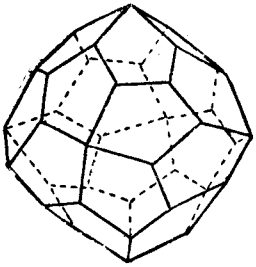
31. Пентагон-триоктаэдрический вид симметрии. Имеются три взаимноперпендикулярные четверные поворотные оси, четыре тройные (проходящие указанным выше образом) и шесть двойных, делящих углы между четверными пополам (фиг. 122). Общая форма — пентагон-триоктаэдр (фиг. 123). Частные формы: 1) тетрагон-триоктаэдр (фиг. 118), 2) тригон-триоктаэдр (фиг. 119), 3) октаэдр (фиг. 120), ромбо-

[1]) Полярное расстояние грани октаэдра, т.-е. угол между нормалью к его грани и четверной осью, $\rho = 54°44'08''$.

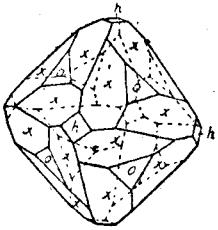
додекаэдр (фиг. 109), 5) гексаэдр (фиг. 108), 6) тетрагексаэдр (фиг. 114). Пример—кристалл куприта—Cu_2O (фиг. 124), образованный комбинацией пентагон-триоктаэдра (x) октаэдра (o) и куба (h).



Фиг. 122.
Пентагон-триоктаэдрический вид симметрии.

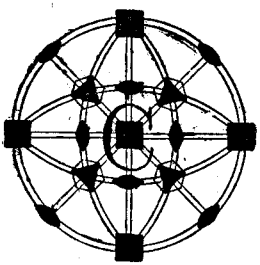


Фиг. 123.
Пентагон-триоктаэдр.

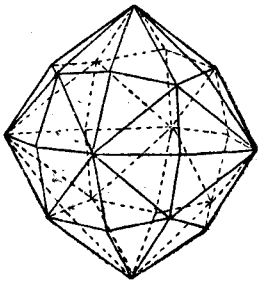


Фиг. 124.
Куприт — Cu_2O.

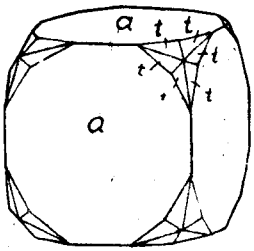
32. Гексоктаэдрический вид симметрии. Имеются три взаимно-перпендикулярные четверные поворотные оси, четыре тройных (они же шестерные зеркально-поворотные), шесть двойных и девять плоскостей симметрии (фиг. 125). Общая форма — гексоктаэдр (сорока восьмигранник) (фиг. 126). Частные формы: 1) тетрагон-триоктаэдр (фиг. 118),



Фиг. 125.
Гексоктаэдрический вид симметрии.



Фиг. 126.
Гексоктаэдр.



Фиг. 127.
Флюорит — CaF_2.

2) тригон-триоктаэдр (фиг. 119), 3) октаэдр (фиг. 120), 4) ромбо-додекаэдр (фиг. 109), 5) тетрагексаэдр (фиг. 114), 6) гексаэдр (фиг. 108). Пример—кристалл плавикового шпата (флюорита) — CaF_2 (фиг. 127),—комбинация куба и гексоктаэдра.

§ 30. Некоторые общие замечания о простых формах и о видах симметрии кристаллов.

Всех простых форм в кристаллографии существует 47 (фиг. 18, 21, 24, 29, 32, 35, 38, 41, 42, 45, 48, 49, 52, 53, 56, 61, 64, 65, 68, 69, 72, 73, 74, 75, 80, 81, 82, 87, 90, 93, 96, 101; и в кубической сингонии: 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 113, 114, 117, 118, 119, 120, 123, 126).

Энантиоморфные (правые и левые, стр. 26) формы возможны в 11 видах симметрии (1, 3, 6, 10, 12, 16, 18, 23, 25, 28 и 31 виды), потому что только в них нет зеркально-поворотных осей симметрии.

Сингонии и подсингонии	Главные оси	Добавочные оси							Главные оси
		$1 = -$	$\dot{1} = C$	$2 = G_2$ [1]	$\dot{2} = P$	$\dot{1}2\dot{2} = CG_2P$	$1 = -$	$2 = G_2$	
Триклинная и моноклинная	I	Моноэдрический	Пинакоидальный	Диэдрический осевой	Диэдрический безосный	Призматический			
Ромбическая	II	—	—	Ромбо-тетраэдрический	Ромбо-пирамидальный	Ромбо-дипирамидальный			
Тригональная	III	Тригонально-пирамидальный	Ромбоэдрический	Тригонально-трапецоэдрический	Дитригонально-пирамидальный	Дитригонально-скаленоэдрический			
Тетрагональная	IV	Тетрагонально-пирамидальный	Тетрагонально-дипирамидальный	Тетрагонально-трапецоэдрический	Дитетрагонально-пирамидальный	Дитетрагонально-дипирамидальный	Тетрагонально-тетраэдрический	Тетрагонально-скаленоэдрический	IV
Гексагональная	VI	Гексагонально-пирамидальный	Гексагонально-дипирамидальный	Гексагонально-трапецоэдрический	Дигексагонально-пирамидальный	Дигексагонально-дипирамидальный	Тригонально-дипирамидальный	Дитригонально-дипирамидальный	VI
Кубическая	$4 \times III$	Тритетраэдрический [2]	Дидодекаэдрический	Триоктаэдрический [2]	Гексатетраэдрический	Гексоктаэдрический			

[1] G_2 = двойная поворотная ось. Буквой G обозначают вообще поворотные оси от введенного P. Niggli термина Gyre = поворотная ось (греческий корень γῦρος — круг).

[2] Приведенные в §§ 28 и 31 названия «пентагон-тритетраэдрический» и «пентагон-триоктаэдрический» рационально сократить для видов симметрии (но не для форм), отбросив слово пентагон (предложение F. Rinne—E. Schiebold'a l. c. S. 5 и 36.

Моноэдры, пинакоиды, призмы, пирамиды и дипирамиды встречаются лишь в низших и средних сингониях. Трапецоэдры и скаленоэдры — лишь в средних. Никаких из этих форм в кубической сингонии не имеется; здесь все формы, за исключением тетраэдра, по названиям резко своеобразны.

Из 32 видов симметрии 11 имеют центр инверсии (2, 5, 8, 14, 15, 19, 20, 26, 27, 30 и 32). У веществ, относящихся к этим видам, всякое свойство (например, скорость растворения), измеренное вдоль любой одной и той же прямой, но по противоположным направлениям, выразится равными величинами. У них, как говорят, все противоположные направления равны. У всех же остальных видов симметрии все или некоторые взаимно-противоположные направления не равны.

Последнее замечание, как и замечание об энантиоморфных фигурах понадобится нам при изучении физических и химических свойств кристаллов.

Изучение форм кристаллов важно во многих отношениях. Укажем, например, на значение его для минералогии: формы кристаллов некоторых минералов так характерны, что нередко достаточно одного беглого взгляда на найденный кристалл, чтобы сразу определить с каким минералом мы имеем дело.

Для более легкого запоминания 32 видов симметрии рекомендуется читателю самому начертить себе, хотя бы от руки, на одной таблице, приведенные выше стереографические проекции элементов симметрии каждого вида с его названием, разбив все их по сингониям. При этом наиболее естественной и удобной является группировка видов симметрии, предложенная Чермаком, Ринне [1]) и Бекке, которую мы и приводим с некоторыми изменениями (см. табл. на стр. 46).

Римские цифры второй вертикальной колонны означают здесь наименование главной поворотной оси для видов симметрии следующих пяти вертикальных колонн. Для предпоследних двух вертикальных колонн главные оси показаны в последней колонне.

Арабские цифры во второй строке означают наименование побочных или добавочных осей симметрии.

Если над римской или арабской цифрой не стоит точка—это ось поворотная, а если точка есть, то это «инверсионная ось», т.-е. такая поворот вокруг которой связан с инверсией.

Комбинируя поворотные оси с инверсионными мы так же можем получить все 32 вида симметрии, как и комбинируя поворотные оси с зеркально-поворотными. Это ясно из того, что одинарная инверсионная ось равнозначна центру инверсии ($\dot{1} = C$), двойная инверсионная ось равнозначна плоскости симметрии ($\dot{2} = P$), четверная инверсионная ось $\dot{4}$ равнозначна четверной зеркально-поворотной, а шестерная инверсионная ось $\dot{6}$ равнозначна совокупности тройной поворотной оси симметрии и нормальной к ней плоскости симметрии, что не трудно понять.

Введение инверсионных осей симметрии взамен зеркально поворотных приводит, как видно из таблицы (стр. 46), к полной аналогии в распределении видов симметрии тригональной подсингонии, тетрагональной сингонии и гексагональной подсингонии.

---

[1]) F. Rinne. Zur Nomenklatur der 32 Kristallklassen. 1929.

ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ.

Эмпирические законы геометрической кристаллографии.

§ 31. Перечень главнейших законов.

В этой главе мы будем изучать, главным образом, законы, которым подчинен ряд фактов, известных о формах кристаллов. Законы эти носят название эмпирических, т.-е. найденных опытом или наблюдением. Перечислим из них следующие:

I. Закон плоскогранности и прямореберности кристаллов.
II. Закон постоянства углов в кристаллах (закон Стенона и Роме де л'Иля).
III. Закон рациональности отношений параметров (закон Аюи).
IV. Закон поясов или зон (закон Вейса).
V. Закон кристаллической однородности.
VI. Закон кристаллографической симметрии.
VII. Закон кристаллографических пределов (закон Федорова).
VIII. Законы срастания кристаллов друг с другом.

§ 32. I. Закон плоскогранности и прямореберности кристаллов.

Первое, что бросается в глаза при рассматривании кристаллов, это то, что они по форме представляют многогранники, при чем грани этих многогранников являются плоскими, а ребра прямыми. Свойство это было подмечено давно. Уже Плиний (79 г. новой эры) упоминает о нем. Формулировать его можно так: грани кристаллов (нормально образованных) суть плоскости, а ребра—прямые линии.

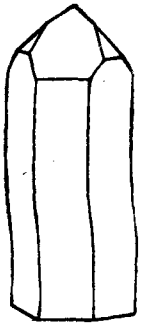
Иногда наблюдаются отступления от этого закона—грани кристалла имеют некоторую кривизну. Ее вызывают причины либо механического характера, либо генетического. Первые связаны с внутреннею неоднородностью кристалла, вторые же могут такой связи не иметь. Примером искривления кристаллов под влиянием механического воздействия служат смятые или изогнутые кристаллы горных пород, наблюдаемые в шлифах под микроскопом. Искажение же форм кристаллов под влиянием вихревых движений, возникающих в растворе, или под влиянием растворения, когда раствор, в котором находится кристалл, ненасыщен, могут служить примером искривлений, вызванных генетическими (физико-химическими) причинами.

У некоторых органических соединений такую роль играют натяжения поверхностных пленок кристаллов. Часто причиной кривогранности служит развитие вициналь ных[1]) граней, т.-е. граней весьма близких по своему положению к главным граням кристалла. Словом, причин, вызывающих кривогранность, много, но все они нисколько не

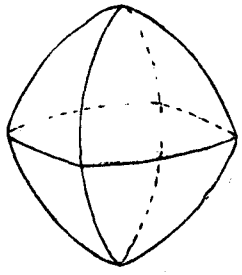
[1]) Vicinus—соседний.

ослабляют значение закона плоскогранности, так как или являются обстоятельствами чисто внешними, не присущими самому кристаллическому веществу, или производят лишь ложную кажущуюся кривогранность.

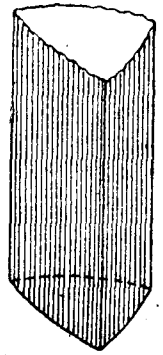
Как примеры, приведем: 1) искривленный кристалл кварца (фиг. 128), 2) округленный кристалл квасцов, подвергшийся растворению в недоста-



Фиг. 128. Кривогранный кристалл кварца.



Фиг. 129. Округленный кристалл квасцов.



Фиг. 130. Схема кристалла турмалина с вицинальными призмами, дающими кривогранный облик.

точно насыщенном растворе (фиг. 129), 3) кривогранный кристалл турмалина, выпуклые боковые грани которого образованы комбинацией многочисленных близких друг к другу призм (фиг. 130).

§ 33. II. Закон постоянства углов в кристаллах.

(Закон Стенона—Ромэ де л'Иля).

Открытие этого закона (в 1669 году) приписывают Николаю Стенону, датчанину, жившему во Флоренции. Он, описывая кристаллы горного хрусталя (SiO_2) и гематита (Fe_2O_3) впервые упоминает, что у этих кристаллов углы между соответственными гранями имеют постоянную величину, число же граней, форма и величина этих граней могут быть какие угодно. При описании других кристаллов он об этом не упоминает. Но зато его современники—датчанин Бартолин и голландец Левенгук, независимо от него, сделали такое же наблюдение, первый—на исландском шпате, второй на гипсе. После того еще ряд ученых высказывался по этому вопросу. Но лишь через 100 лет после Стенона француз Ромэ де л'Иль[1]) изучивший систематически уже множество кристаллов различных веществ и измеривший их углы прикладным гониометром (изобретенным его сотрудником Каранжо[2]), формулировал этот закон совершенно ясно в общем виде[3]).

[1]) Romé de l'Isle.

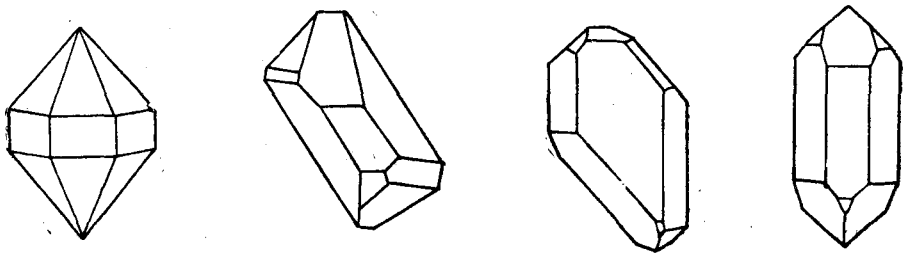
[2]) Описание гониометров см. ниже в «Части седьмой» (стр. 86).

[3]) Это сделано им в его четырехтомной книге: «Кристаллография или описание форм, свойственных всем телам минерального царства в состоянии солеобразном, каменистом или металлическом» II издание, 1783 год, том I стр. 93: «VII. Les faces d'un cristall peuvent varier dans leur figure & dans leurs dlimensions relatives; mais l'inclinaison respective des ces mêmes faces est constante & invariable dans chaque espèce».

Лишь немного уточняя и изменяя для большей ясности его формулировку, мы можем выразить этот закон так.

В различных кристаллах одного и того же вещества величина и форма граней, их взаимное расстояние и даже их число—могут изменяться. Но углы между соответственными гранями и ребрами остаются при этом постоянными.

При измерении углов у реальных кристаллов наблюдаются, разумеется, отклонения от этого закона, но они нисколько не подрывают его, как и отклонения от закона плоскогранности не нарушают последнего. Вызываются они или несовершенством кристаллообразования (развитием вициналъных граней и проч.) или ошибками наблюдений (неточность измерительных приборов, неточность отсчетов и т. д.).



Фиг. 131 — 134.
Различные кристаллы горного хрусталя — SiO_2, иллюстрирующие закон Стенона.

На фиг. 131, 132, 133, 134, взятых из книги Ромэ-де л'Иля, изображены четыре разнообразных кристалла горного хрусталя, при измерении, однако, дающие одинаковые двугранные углы между соответственными гранями и, следовательно, между соответственными ребрами.

§ 34. III. Закон рациональности отношений параметров.

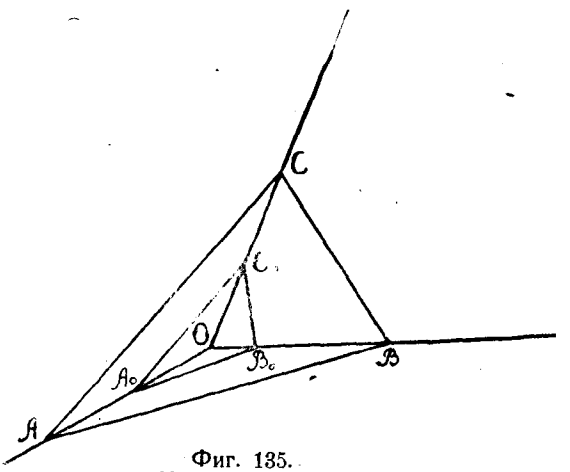
(Закон Аюи).

Этот закон, называемый часто законом целых чисел и выражающий числовые соотношения между отрезками, образованными на кристаллографических (координатных) осях гранями данного кристалла, был открыт аббатом Аюи (Haüy), жившим почти в одно время с Romé de l'Isl'ем в период первой французской революции. Формулировать его можно таким образом. Возьмем в данном кристалле некоторые три грани, не пересекающиеся в параллельных ребрах, за координатные плоскости, а линии их пересечения за координатные оси. Возьмем еще четвертую грань, не параллельную ни одной из координатных осей и назовем ее единичной гранью. Пусть она делает отрезки OA_0, OB_0 и OC_0 на координатных осях (фиг. 135). Если теперь мы возьмем какую угодно пятую грань в этом же кристалле и определим отрезки OA, OB, OC, которые она делает на тех же осях, то двойное отношение $\frac{OA}{OA_0} : \frac{OB}{OB_0} : \frac{OC}{OC_0}$ равно отношению $d_1 : d_2 : d_3$, где d_1, d_2 и d_3 суть целые числа весьма простые, в огромном большинстве случаев не превышающие 10.

То же самое можно выразить несколько иначе, следующим образом: отношение отрезков отсекаемых какою-нибудь гранью

кристалла на трех его ребрах, избранных за координатные оси, равно отношению простых целых чисел, при условии, что отрезки эти измерены особыми единицами для каждой из осей. За единицы измерения принимаются отрезки, делаемые на осях так называемой единичной гранью, за каковую принимают одну из остальных граней кристалла. Отрезки, делаемые на осях, называются параметрами. Отсюда и вытекает вышеприведенное название закона.

Поясним все сказанное на следующем примере. Пусть нам дан кристалл в виде косого параллелепипеда, у которого один из углов срезан двумя маленькими гранями m и o (фиг. 136). Три задние грани примем за координатные плоскости. Грани же o и m, срезающие угол, продол-



Фиг. 135.
К закону Аюи.

жим и увидим, что они, пересекаясь с системой координат, образуют первая — плоскость $a_0\ b_0\ c_0$, а вторая плоскость $a_m\ b_m\ c_m$. Перенесем грань $a_m\ b_m\ c_m$ параллельно самой себе так, чтобы она прошла через точку b_0, тогда она займет положение $a'_m\ b_0\ c'_m$. При этом

$$\frac{Oa'_m}{Oa_m} = \frac{Ob_0}{Ob_m} = \frac{Oc'_m}{Oc_m} = к \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A).$$

Таким перенесением мы достигаем равенства отрезков по одной из осей для обеих граней. Измерения и вычисления для действительных кристаллов показывают, что в таком случае отрезки по другим осям Oa'_m и Oa_0, а также Oc'_m и Oc_0 относятся друг к другу, как весьма простые целые числа. Например, на нашем чертеже Oa'_m содержит в себе $\frac{5}{3}\ Oa_0$, а OC'_m равно $\frac{4}{3}\ Oc_0$. Отсюда мы видим, что

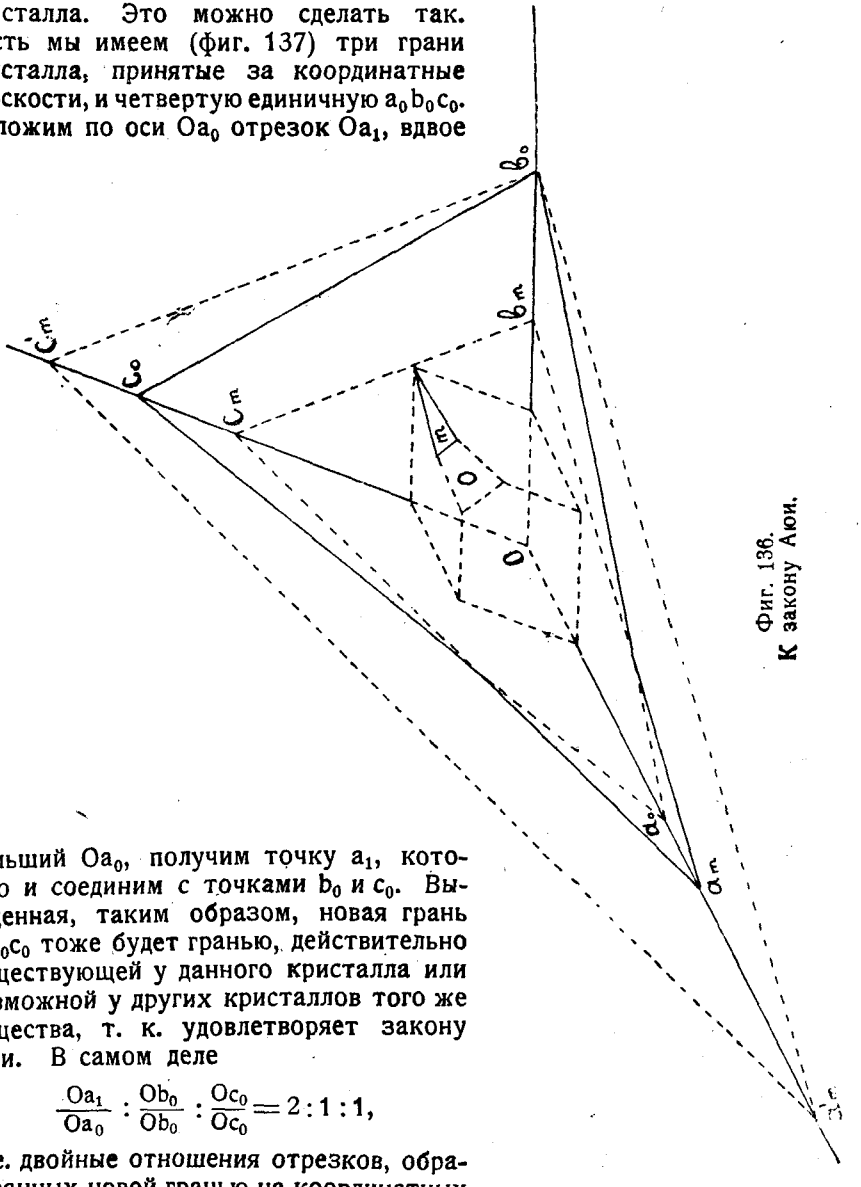
$$\frac{Oa'_m}{Oa_0} : \frac{Ob_0}{Ob_0} : \frac{Oc'_m}{Oc_0} = \frac{5}{3} : \frac{1}{1} : \frac{4}{3} = 5:3:4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (B),$$

а в виду равенства (A) имеем, что и

$$\frac{Oa_m}{Oa_0} : \frac{Ob_m}{Ob_0} : \frac{Oc_m}{Oc_0} = 5:3:4,$$

т. е. отношения отрезков, отсекаемых гранью на осях, суть простые целые числа.

Пользуясь этим законом, мы можем, зная четыре грани кристалла, выбранные указанным выше способом, путем чисто геометрических построений, вывести все возможные грани кристалла. Это можно сделать так. Пусть мы имеем (фиг. 137) три грани кристалла, принятые за координатные плоскости, и четвертую единичную $a_0 b_0 c_0$. Отложим по оси Oa_0 отрезок Oa_1, вдвое



Фиг. 136.
К закону Аюи.

больший Oa_0, получим точку a_1, которую и соединим с точками b_0 и c_0. Выведенная, таким образом, новая грань $a_1 b_0 c_0$ тоже будет гранью, действительно существующей у данного кристалла или возможной у других кристаллов того же вещества, т. к. удовлетворяет закону Аюи. В самом деле

$$\frac{Oa_1}{Oa_0} : \frac{Ob_0}{Ob_0} : \frac{Oc_0}{Oc_0} = 2:1:1,$$

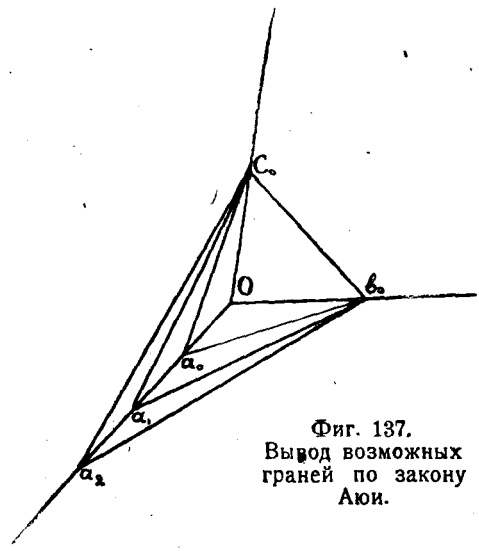
т. е. двойные отношения отрезков, образованных новой гранью на координатных осях, равны отношению целых и притом простых чисел. Путем точно таких же рассуждений убедимся, что и грань $a_2 b_0 c_0$ есть тоже действительная или возможная грань кристалла, т. к.

$$\frac{Oa_2}{Oa_0} : \frac{Ob_0}{Ob_0} : \frac{Oc_0}{Oc_0} = 3:1:1.$$

Производя дальше такие же построения и на других осях, мы выведем весь комплекс возможных граней данного кристалла. Все же такие плоскости, которые не удовлетворяют закону Аюи, не могут наблюдаться в кристаллах. Например, у кристалла, имеющего четыре грани (фиг. 137) Oa_0b_0, Oa_0c_0, Ob_0c_0 и $a_0b_0c_0$ плоскость, отсекающая отрезки Oa_0, Ob_0 и $Oc_0\sqrt{2}$ на координатных кристаллографических осях, — не есть возможная грань кристалла, потому что для нее двойное отношение параметров

$$\frac{Oa_0}{Oa_0} : \frac{Ob_0}{Ob_0} : \frac{Oc_0\sqrt{2}}{Oc_0}$$

равно $1:1:\sqrt{2}$, т. е. иррационально. В этом заключается главное значение закона Аюи. Одним из частных значений его является то обстоятельство, что на основании этого закона были введены в кристаллографию символы. О них поговорим ниже. Закон Аюи аналогичен закону Дальтона в химии, по которому элементы дают соединения не в произвольных соотношениях, а в отношениях целых чисел. Например, О и Н могут входить в химические соединения в весовых количествах P_0 и $P_н$, которые подчиняются соотношению



Фиг. 137.
Вывод возможных граней по закону Аюи.

$$\frac{P_0}{16} : \frac{P_н}{1} = m : n,$$

где m и n целые простые числа. Для воды H_2O имеем: $m=1$, $n=2$ для серной кислоты SO_4H_2 имеем: $m=4$, $n=2$ и т. д. Закон Аюи справедлив для идеальных кристаллов, на практике же часто встречаются отклонения, измеренные отношения

$$\frac{a}{a_0} : \frac{b}{b_0} : \frac{c}{c_0}$$

выражаются не целыми числами, а числами, отличающимися от целых на маленькую дробь. Это обстоятельство вызывается как неточностью измерений, так и возможной кривогранностью кристаллов, вызванной присутствием вициальных граней и т. д.

§ 35. IV. Закон поясов.

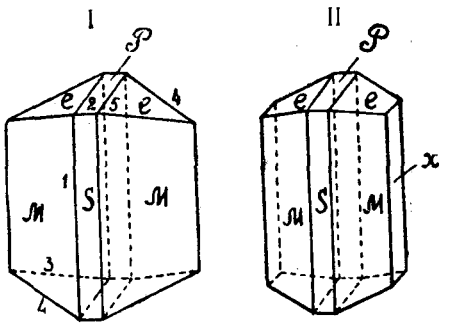
(Закон Вейса).

Раньше чем излагать закон Вейса, введем понятие о возможных гранях и ребрах кристалла.

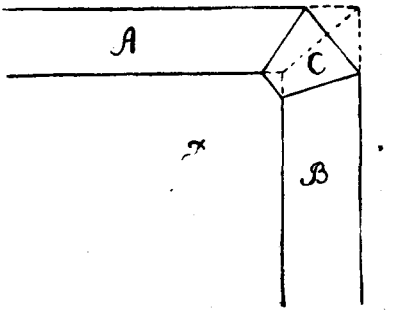
Определение: Возможной гранью или возможным ребром кристалла называется такая грань или ребро, которые не присутствуют на данном кристалле, но могут встретиться на других кристаллах этого же самого вещества.

Закон Вейса состоит в следующем:

Всякая плоскость, параллельная двум каким-либо действительным или возможным ребрам кристалла, не параллельным друг другу, есть возможная грань кристалла, и всякое направление, параллельное линии пересечения двух каких-либо действительных или возможных граней кристалла, есть возможное ребро кристалла. Поясним сказанное чертежами. На фиг. 138 изображены два кристалла роговой обманки. Грань x, не присутствующая на I кристалле и наблюдаемая на II, является для I кристалла возможной гранью. С помощью закона Вейса мы можем предсказать положение возможной грани x, имея только один I кристалл и не имея II. Действительно, плоскость, параллельная ребрам 1 и 2 первого кристалла, есть, по закону Вейса, возможная его грань, а это положение и занимает грань x. На фиг. 139 дан кристалл с гранями A, B и C. Предположим, что этот кристалл растет, при чем грани A и B развиваются, а грань C постепенно зарастает. Тогда



Фиг. 138.
Закон Вейса: для I кристалла x есть возможная грань, т. к. она параллельна ребрам 1 и 2.



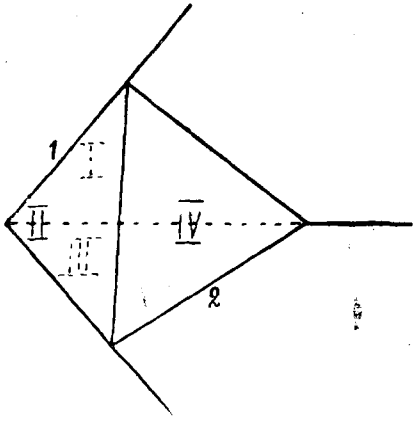
Фиг. 139.
Закон Вейса: косая пунктирная линия есть возможное ребро, т. к. она параллельна линии пересечения двух действительных граней A и B.

линией пересечения граней A и B будет линия, показанная пунктиром, т. е. она сделается действительным ребром нашего кристалла. Пока же кристалл имеет указанную на фиг. 139 форму, мы эту воображаемую пунктирную линию считаем возможным ребром его.

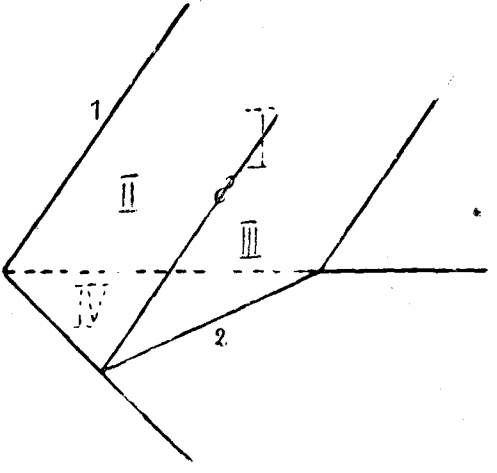
Значение закона Вейса заключается в том, что с помощью его, зная четыре какие-либо грани кристалла, из которых никакие три не пересекаются в параллельных ребрах, мы можем вывести бесконечное множество возможных граней этого кристалла, проводя последовательно все новые и новые плоскости, параллельные каким-либо, сначала действительным, а затем и вновь выведенным возможным ребрам его. Необходимость того, чтобы никакие три грани не пересекались в параллельных ребрах, ясна из следующего. На фиг. 140, где это требование соблюдено, проведя плоскость, параллельную одновременно ребрам 1 и 2, мы получим новую грань, не параллельную ни одной из заданных четырех. На фиг. 141, где заданные грани I, II и III пересекаются в параллельных ребрах (принадлежат одному поясу), проведение плоскости, параллельной какой угодно паре ребер, не дает нам новой грани, например, параллельно 1 и 2 ребру проходит грань III и т. д.

Как было указано в заглавии, закон Вейса называется иначе законом поясов или зон.

Определение. Поясом или зоною в геометрии многогранников называется совокупность всех граней, пересекающихся в параллельных ребрах. Например, на фиг. 138 грани M, S, M, x и четыре им параллельные образуют первый пояс, грани e, P, e, x и четыре им параллельные нижние образуют другой пояс, грани M, e и две им параллельные, пересекающиеся в ребре 3, образуют третий пояс и т. д. Направление, которому параллельны все грани данного пояса, называется осью пояса или зоны. Теперь приведенную выше формулировку закона Вейса можно выразить так: грань, одновременно принадлежащая двум каким-либо поясам кристалла, является



Фиг. 140.
К закону Вейса: четыре грани, из которых можно вывести все действительные и возможные грани того же кристалла.



Фиг. 141.
К закону Вейса: четыре грани, из которых нельзя вывести ни одной новой грани того же кристалла.

всегда действительной или возможной гранью его. Последняя формулировка закона Вейса имеет большое значение при изображении и вычислении кристаллов посредством стереографических проекций.

Таким образом, закон Вейса дает нам на-ряду с законом Аюи второй способ вывода всех возможных граней кристалла по четырем из них, надлежащим образом выбранным. Рассуждения показывают, что оба способа вывода приводят к одному и тому же результату. Так что закон Вейса есть лишь другая формулировка закона Аюи.

§ 36. V. Закон кристаллической однородности.

Определение. Кристаллической однородностью называется такое свойство кристаллического вещества, в силу которого два одинаковые по форме, размерам и ориентировке участка, выделенные в этом веществе, обнаруживают совершенно тождественные свойства по параллельным направлениям. По различным направлениям эти свойства могут быть

и различны (см. введение § 2). В природе идеальных однородных кристаллов нет. В отдельных участках однородность нарушается химическими или физическими примесями. Главное значение этого закона заключается в том, что он является основой всех теорий структуры кристаллов. Изучать эти теории мы будем дальше.

§ 37. VI. Закон симметрии.

Вся совокупность нашего опыта и теория показывают нам, что в кристаллах возможны лишь одинарные, двойные, тройные, четверные и шестерные поворотные и зеркально-поворотные оси симметрии. Но было время, когда предполагали возможность существования и других осей симметрии. Так, например, считали, что пентагон-додекаэдр (фиг. 110), в форме которого кристаллизуется серный колчедан (пирит)—FeS_2, обладает пятерной осью симметрии. И лишь впоследствии было доказано, что этого нет, и что пятиугольники, которыми он ограничен, не являются правильными. Гадолин, основываясь на законе Аюи, в очень ясной и притом вполне общей форме показал, что существование пятерной, семерной и высших осей симметрии невозможно в кристаллах, так как присутствие одной из них влечет за собою существование граней, имеющих иррациональные параметры.

§ 38. VII. Закон кристаллографических пределов.

(Закон Федорова).

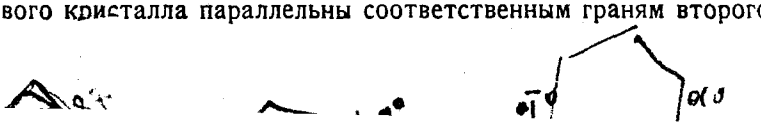
При внимательном изучении огромного числа кристаллов Е. С. Федоров установил, что кристаллы низших сингоний по своим углам приближаются, за редкими исключениями, либо к тетрагональным, либо к гексагональным. Поэтому он разделил царство кристаллов на два типа: 1) тип кубический, т. к. большинство тетрагональных кристаллов очень мало отличаются по своим углам от кубических и 2) тип гексагональный.

Основываясь на этом, Е. С. Федоров создал свой «Кристаллохимический анализ», т. е. способ определять вещество по формам кристаллов, о чем мы скажем ниже.

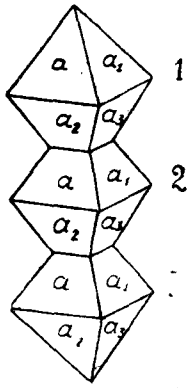
§ 39. VIII. Законы срастания кристаллов друг с другом.

Срастания кристаллов друг с другом можно разделить на закономерные и незакономерные. Незакономерные срастания вызваны обычно случайными причинами, и о них мы поэтому говорить не будем. Что же касается закономерных срастаний, то их можно разделить прежде всего на **срастания кристаллов одного и того же вещества** и срастания кристаллов разнородных веществ. Сначала коснемся первых. Они делятся в свою очередь на 2 категории: a) срастание кристаллов в параллельном положении и b) двойниковые срастания.

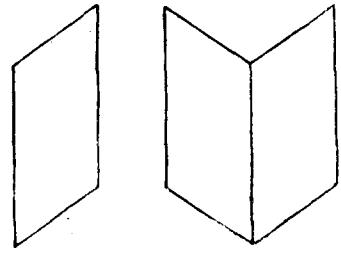
Примером срастания кристаллов в параллельном положении может служить сросток кристаллов квасцов (фиг. 142). У них, как можно видеть, все грани первого кристалла параллельны соответственным граням второго и третьего.



Определение. Двойниковым срастанием или двойником называется такое срастание или такой сросток двух кристаллических индивидов, в котором один индивид выводится из другого путем либо отражения в некоторой плоскости, либо поворотом вокруг некоторой оси на 180°. Та плоскость, при отражении в которой из одного индивида двойника выводится другой, называется двойниковой плоскостью. Направление, при повороте вокруг которого



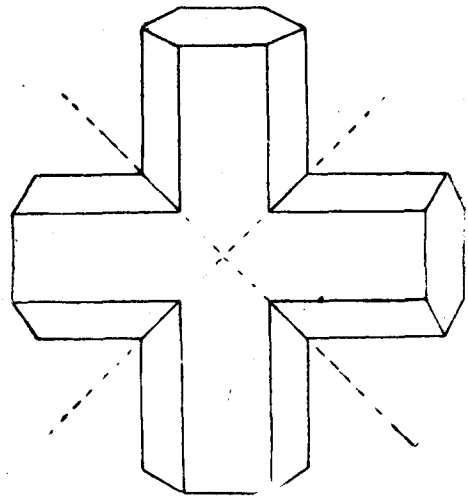
Фиг. 142.
Параллельный сросток октаэдров (квасцы— $[SO_4]_2AlK \cdot 12H_2O$ или аргентит — Ag_2S).



Фиг. 143.
Схема простого кристалла и двойника срастания гипса $SO_4Ca \cdot 2H_2O$.

на 180° из данного индивида двойника выводится другой, называется двойниковой осью.

Двойники разделяются на 1) двойники срастания, 2) двойники прорастания и 3) полисинтетические или многократные двойники. Примером двойников срастания может служить двойник гипса ($CaSO_4 \cdot 2H_2O$), изображенный на фиг. 143 рядом с одиночным кристаллом того же вещества. Здесь, как мы видим, два индивида, слагающие двойник, срослись друг с другом по некоторой плоскости или более сложной поверхности, которая называется поверхностью срастания. Поверхность срастания может и не совпадать с двойниковой плоскостью. Первая из них есть физическая поверхность, отделяющая один индивид от другого. Вторая — есть геометрическая плоскость, отражением в которой какое-либо направление первого индивида двойника дает соответственное направление второго индивида.



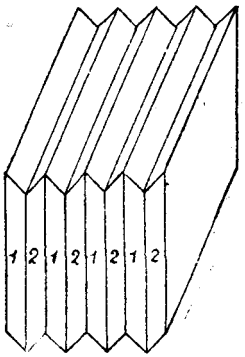
Фиг. 144.
Схема двойника прорастания

На фиг. 144 изображен схематически двойник прорастания. В этом сростке один индивид прорастает насквозь другой. Полисинтетические двойники в большинстве случаев состоят из тонких пластинок, ориентированных через одну параллельно друг другу (фиг. 145). В разрезе

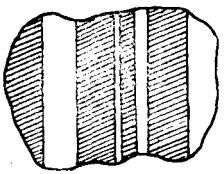
они имеют вид фиг. 146. Здесь соседние пластинки различно ориентированы; расположенные через одну — одинаково. Для непрозрачных веществ, например, металлических сплавов это строение полисинтетических двойников обнаруживается ясно при протравливании кислотами. Для прозрачных веществ, например, в тонких шлифах горных пород та же картина отчетливо наблюдается при исследовании под микроскопом, между скрещенными николями (о микроскопе и николях—ниже в кристаллооптике).

Двойниковой осью служит обычно 1) или направление какого-либо действительного или возможного ребра кристалла, 2) или направление, нормальное к какому-либо ребру кристалла, лежащее в грани, проходящей через это ребро.

Ясно, что двойниковой осью не может быть четная поворотная ось симметрии, потому что, повернувши вокруг такой оси на 180° данный кристалл, мы получим по условиям симметрии совмещение всех направлений нового индивида с соответственными направлениями первоначального индивида. Поэтому каждой грани одного будет отвечать равная и параллельная грань другого и такой сросток ничем не будет отличаться от параллельного сростка.



Фиг. 145. Полисинтетический двойник.


Фиг. 146. Полисинтетический двойник под микроскопом.

Двойниковой плоскостью служит обычно плоскость параллельная какой-либо грани кристалла (действительной или возможной).

Ясно, что двойниковой плоскостью не может быть плоскость симметрии одиночного кристалла, потому что отражением в такой плоскости выводится индивид не в новом положении, а параллельный исходному.

Если у одиночного кристалла есть центр инверсии, то наличие у сростка двойниковой оси влечет существование у него же нормальной к этой оси двойниковой плоскости; и обратно: наличие двойниковой плоскости вызывает существование нормальной к ней двойниковой оси.

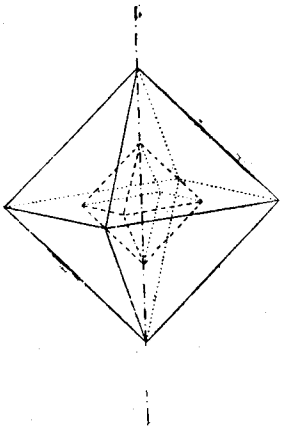
Напр., у одиночного кристалла гипса (фиг. 143) есть центр инверсии. Поэтому правый индивид двойника можно вывести из левого не только отражением в вертикальной плоскости, нормальной к чертежу 143, но и поворотом вокруг перпендикулярной к этой плоскости прямой, т. е. вокруг горизонтальной прямой (при этом выводится кристалл, параллельный правому индивиду двойника).

§ 40. Срастание кристаллов разнородных веществ.

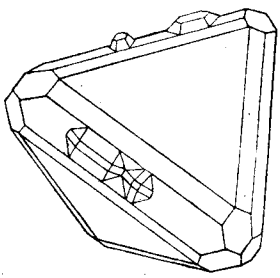
И здесь мы не будем вовсе касаться незакономерных срастаний. Закономерные же мы разделим на 3 категории: 1) срастание кристаллов близких и по химическому составу и по формам (так называемых изоморфных веществ, о которых будем говорить еще в химической кристаллографии); 2) срастание кристаллов с аналогичным химическим составом, но с различными кристаллическими формами; 3) срастание кристаллов разного состава и разных форм. Не вдаваясь в подробности, приве-

дем лишь примеры таких срастаний. 1) Алюмокалиевые—$[SO_4]_2AlK \cdot 12H_2O$ — и хромокалиевые — $[SO_4]_2CrK \cdot 12H_2O$ — квасцы кристаллизуются в октаэдрах или в комбинациях октаэдра, куба, ромбо-додекаэдра и др. форм дидодекаэдрического вида симметрии. Если октаэдр хромовых квасцов опустить в насыщенный раствор алюминиевых, то фиолетовый кристалл первого вещества продолжает обрастать бесцветным слоем второго, сохраняя в точности форму октаэдра (фиг. 147).

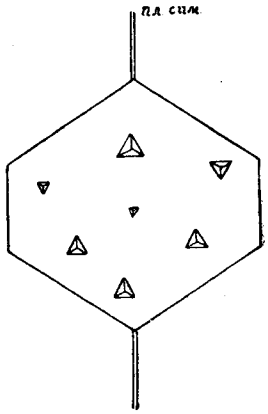
Примером срастаний второй категории могут служить нарастания тетрагонально-тетраэдрических кристаллов халькопирита—$Fe_2S_3Cu_2S$ на гексатетраэдрических (кубической сингонии) кристаллах фальэрца — $Sb_2S_3 \cdot n(Cu_2, Fe)S$. При этом четверные зеркально-поворотные оси халькопирита совпадают с четверными зеркально-поворотными осями фальэрца (фиг. 148). 3) Наконец, укажем на закономерное наростание кристаллов KJ и KBr (и KCl) из насыщенных их растворов на чистых спайных листочках слюды $(K, H)_2Al_2Si_2O_8$. При этом галоидные соли калия кристаллизируются в кубах, которых тройная ось располагается нормально к пластинке слюды (фиг. 149), и часть куба нередко имеет вид трехгранной пирамиды, одна из плоскостей симметрии которой параллельна плоскости симметрии моноклинной слюды.



Фиг. 147.
Октаэдр калийных квасцов — $[SO_4]_2AlK \cdot 12H_2O$, обросший октаэдр хромовых квасцов — $[SO_4]_2CrK \cdot 12H_2O$.



Фиг. 148.
Кристаллики халькопирита—FeS_2Cu, наросшие закономерно на кристалле блеклой руды — $Sb_2S_3 \cdot (3—6)(Cu_2, Ag_2, Fe, Zn)S$.



Фиг. 149.
Кристаллики KJ, закономерно наросшие на пластинке мусковита (калийной слюды) — $(K, H)_2Al_2Si_2O_8$.

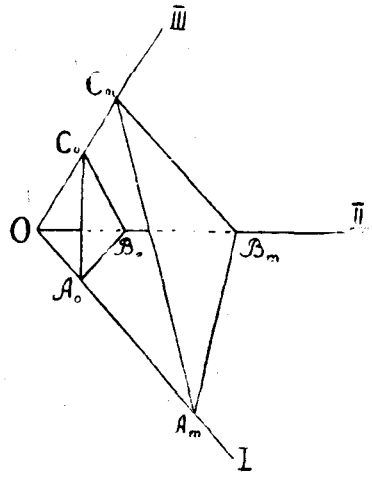
ЧАСТЬ ПЯТАЯ

Кристаллографические символы.

§ 41. Кристаллографические символы граней.

Определение. Кристаллографическими символами называются числа или знаки, вполне точно определяющие положение граней в кристалле.

Существует много различных систем символов. Мы изучим только одну, так называемые символы Миллера. Выберем, как при изложении закона Аюи (§ 34), некоторые три грани I O II, I O III, II O III (фиг. 150) кристалла, не пересекающиеся в параллельных ребрах, (или им параллельные плоскости внутри кристалла) за **координатные** грани. Затем назовем некоторую четвертую грань $A_0B_0C_0$, не параллельную ни одной из координатных осей OI, OII, OIII, **единичной гранью**. Тогда можем сделать такое более детальное **определение**: символом какой-либо грани $A_m B_m C_m$ (фиг. 150) называются три числа $(p_1p_2p_3)$, или в случае гексагональной сингонии четыре числа $(p_0p_1p_2p_3)$ заключенные в круглые скобки и полученные следующим образом: отрезки OA_m, OB_m, OC_m, образованные этою гранью на координатных осях, измеряем каждый соответственно отрезками OA_0, OB_0, OC_0, делаемыми единичною гранью на этих же осях, и затем берем величины, обратные полученным от измерения числам; тогда их отношения и будут символами нашей грани, т. е.



Фиг. 150.

$$\frac{1}{OA_m/OA_0} : \frac{1}{OB_m/BO_0} : \frac{1}{OC_m/OC_0} = p_1 : p_2 : p_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

На основании закона Аюи за числа p_1, p_2, p_3 могут быть всегда выбраны рациональные целые числа. В самом деле. По закону Аюи имеем:

$$\frac{OA_m}{OA_0} : \frac{OB_m}{OB_0} : \frac{OC_m}{OC_0} = k : l : m,$$

где k, l, m — рациональные и целые. Отсюда:

$$\frac{1}{OA_m/OA_0} : \frac{1}{OB_m/OB_0} : \frac{1}{OC_m/OC_0} = \frac{1}{k} : \frac{1}{l} : \frac{1}{m} = \frac{ml}{klm} : \frac{km}{klm} : \frac{kl}{klm} = ml : km : kl.$$

Но если k, l, m — рациональные и целые, то и ml, km, kl — тоже рациональные и целые.

Теперь мы можем еще так видоизменить данное выше **определение**. Символ грани есть совокупность наименьших целых чисел, обратно пропорциональных отрезкам, которые эта грань делает на осях координат, при условии, что для каждой оси существует своя единица измерения.

Если символ грани есть $(p_1\ p_2\ p_3)$, то каждое из чисел p_1, p_2, p_3 в отдельности называется **индексом** данного символа по соответственной оси.

Заметим, что выбор в качестве символов величин, обратно, а не прямо пропорциональных отрезкам, обусловлен тем, что при таком выборе — вычисления кристаллов становятся значительно проще.

В кристаллографии принято систему координат располагать так, чтобы первая ось (I) всегда была направлена к наблюдателю, вторая (II) ему параллельна, а третья (III) вверх (фиг. 151).

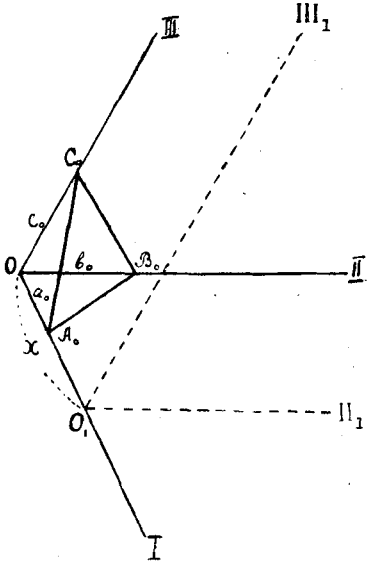
Определим символ единичной грани $A_0 B_0 C_0$. Если для нее мы составим отношение (1), то получим

$$\frac{1}{OA_0/OA_0} : \frac{1}{OB_0/OB_0} : \frac{1}{OC_0/OC_0} = 1 : 1 : 1.$$

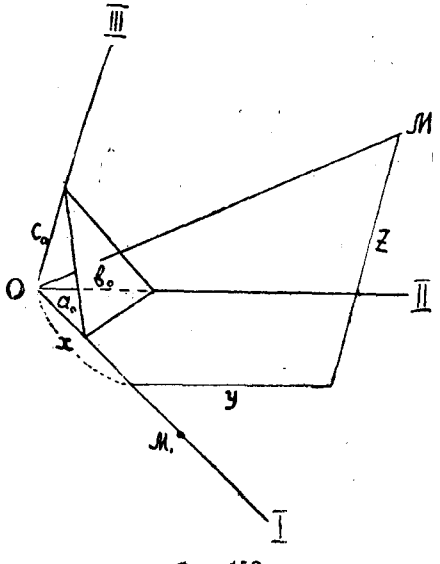
Значит, символ грани $A_0B_0C_0$ (единичной) есть (111). Найдем символ грани II O III (первой координатной плоскости фиг. 151). Для этого отодвинем ее параллельно самой себе на некоторое расстояние. При этом отношение отрезков, делаемых этой гранью на координатных осях, осталось то же, тогда как абсолютная их величина изменилась. Пусть на оси I грань делает в новом положении $II_1O_1III_1$ некоторый отрезок x. Двум же другим осям она при этом параллельна, то-есть пересекается с ними в бесконечности. Поэтому, взяв отношения, мы получим

$$\frac{1}{x/OA_0} : \frac{1}{\infty/OB_0} : \frac{1}{\infty/OC_0} = \frac{OA_0}{x} : 0 : 0$$

или сократив на $\frac{OA_0}{x}$ имеем $1 : 0 : 0$. Значит символ грани II O III будет (100). Точно таким же образом находим, что символ грани I O III (второй координатной плоскости) будет (010) и символ грани I O II (третьей координатной плоскости) будет (001).



Фиг. 151.



Фиг. 152.

§ 42. Кристаллографические символы ребра.

Перейдем теперь к кристаллографическим символам ребер кристаллов.

Определение. Символом ребра называют три числа (или четыре в случае гексагональной сингонии), заключенные в прямые скобки $[r_1\ r_2,\ r_3]$, прямо пропорциональные координатам какой-либо точки этого ребра, измеренным теми же, особыми для каждой оси единицами, которыми измеряются отрезки, делаемые гранями на координатных осях. Поясним это на примере. Пусть мы имеем некоторое ребро OM (фиг. 152) и хотим определить его символ. Заметим, что для определения символа ребра мы всегда можем его пере-

нести (на основании закона Стенона) параллельно самому себе в начало координат. Возьмем на этом ребре некоторую точку M. Пусть координаты ее будут x, y, z, единичная же грань пусть делает по этим осям отрезки a_0 b_0 c_0. Тогда отношение

$$\frac{x}{a_0} : \frac{y}{b_0} : \frac{z}{c_0} = r_1 : r_2 : r_3$$

(где r_1, r_2 и r_3 целые числа) и дает нам символ этого ребра теперь. Доказательство того, что за r_1, r_2, r_3 можно всегда выбрать рациональные целые числа, может быть сделано с помощью аналитической геометрии на основании закона Аюи. Мы это доказательство опустим. Определим теперь символы координатных осей. Для первой оси отношение имеет такой вид:

$$\frac{OM_1}{a_0} : \frac{0}{b_0} : \frac{0}{c_0}$$

или

$$\frac{OM_1}{a_0} : 0 : 0 = 1 : 0 : 0,$$

так как точка M_1 лежит на оси x-ов и координаты ее по оси y-ов и z-ов $= 0$. Итак, символ первой кристаллографической оси будет [100]. Так же находим, что для второй кристаллографической оси символ будет [010] и для третьей [001].

§ 43. Значение символов и способы их определения.

Введение символов в кристаллографию дало способ весьма кратко и в то же время математически точно изображать положение любой грани данного кристалла.

К этому следует добавить, что пользуясь символами мы можем замечать и исправлять неточности измерения и образования исследуемого кристалла. А именно, измерив углы кристалла и определив по ним символы какой-нибудь грани, мы почти всегда получаем числа не вполне целые, хотя и близкие к таковым, напр., 1,02, 2,05. 2,93. По сказанному выше индексы должны быть целыми, если справедлив закон Аюи. Поэтому для подобной грани мы должны принять символ (123). Теперь, определяя обратно по символу углы данной грани с другими или ее угловые (полярные) координаты, мы получим числа, отличные от непосредственно измеренных. Поэтому при всяком исследовании кристаллов приводятся с одной стороны наблюденные углы, с другой — вычисленные. Разница между теми и другими дает нам меру точности наших измерений и меру совершенства образования нашего кристалла.

Из сказанного ясно, что эта возможность проверять опытные данные является собственно заслугой закона Аюи, и символы играют здесь роль лишь посредствующего орудия.

Приблизительное определение символа любой грани данного кристалла можно сделать, определяя на глаз отрезки, отсекаемые ею на координатных осях, деля их на отрезки, отсекаемые на соответственных осях единичной гранью, беря отношение обратных величин, приводя их к целым числам. Для простейших граней, параллельных координатным плоскостям или осям, такое определение может быть часто сделано даже вполне точно.

Второй, более точный метод состоит в измерении углов между гранями кристалла, в составлении стереографической проекции всех граней и в графическом определении по этим проекциям на чертеже всех необходимых отрезков на координатных осях. В дальнейшем поступают, как в первом способе.

Наконец, третий, наиболее точный метод основан на том, что символы Миллера, которые мы изучаем, связаны математическими формулами с полярными координатами соответственных граней. А эти координаты получаются непосредственным измерением данного кристалла на теодолитном гониометре (о чем будет сказано ниже в части седьмой, стр. 87).

Первый способ понятен сам по себе и не требует особых пояснений. Другие же более точные способы нуждаются в более подробном изложении, которое будет дано также в части седьмой.

§ 44. Зависимость между символами граней и ребер кристалла.

Существует много числовых зависимостей, помогающих определять кристаллографические символы. В качестве одного из важнейших примеров мы приведем нижеследующую простую формулу. Если символ грани есть $(p_1\ p_2\ p_3)$, и символ ребра в ней лежащего есть $[r_1\ r_2\ r_3]$, то тогда между этими символами существует соотношение: $p_1 r_1 + p_2 r_2 + p_3 r_3 = 0$. Выведем его. Мы знаем, что уравнение плоскости, параллельной данной грани и проходящей через начало координат имеет вид:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (A),$$

где a, b и c отрезки, отсекаемые данной гранью на осях координат. Уравнения же прямой, параллельной данному ребру и проходящей через то же начало координат, будет:

$$\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (B),$$

где x_0, y_0, z_0 координаты какой-нибудь точки этой прямой. Если данное ребро лежит в данной грани, то прямая (B) лежит в плоскости (A) и координаты точек прямой должны удовлетворять уравнению плоскости; а так как из (B) следует, что $x = x_0 \cdot k$; $y = y_0 \cdot k$; $z = z_0 \cdot k$, где k есть некоторая постоянная для этой прямой величина, то имеем тождество:

$$\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} + \frac{z_0}{c} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (C).$$

Выразим координаты x_0, y_0 и z_0 через символы ребра, а отрезки a, b, c—через символы грани. Для этого прежде всего обозначим отрезки, отсекаемые на координатных осях единичной гранью через a_0, b_0, c_0. Тогда из определения символа ребра (§ 42) мы знаем, что

$$\frac{x_0}{a_0} : \frac{y_0}{b_0} : \frac{z_0}{c_0} = r_1 : r_2 : r_3,$$

откуда

$$r_1 = m\frac{x_0}{a_0};\quad r_2 = m\frac{y_0}{b_0};\quad r_3 = m\frac{z_0}{c_0},$$

или

$$x_0 = \frac{a_0 r_1}{m};\quad y_0 = \frac{b_0 r_2}{m};\quad z_0 = \frac{c_0 r_3}{m},$$

где m есть некоторый коэффициент пропорциональности. С другой стороны из определения символа грани (§ 41) имеем:

$$\frac{1}{a/a_0} : \frac{1}{b/b_0} : \frac{1}{c/c_0} = p_1 : p_2 : p_3$$

откуда

$$p_1 = n \cdot a_0/a;\ p_2 = n \cdot b_0/b,\ p_3 = n \cdot c_0/c,$$

т. е.

$$a = n \cdot \frac{a_0}{p_1};\ b = n \cdot \frac{b_0}{p_2};\ c = n \cdot \frac{c_0}{p_3}.$$

Подставив найденные значения в равенство (С), получим:

$$\frac{a_0 r_1 p_1}{mna_0} + \frac{b_0 r_2 p_2}{mnb_0} + \frac{c_0 r_3 p_3}{mnc_0} = 0.$$

Или, произведя сокращение и отбросив знаменатель, найдем, что

$$r_1\ p_1 + r_2\ p_2 + r_3\ p_3 = 0,$$

что и требовалось доказать.

Это соотношение позволяет нам определить символ грани, если известны символы двух ребер, в ней лежащих, и, наоборот, вычислить символ ребра, если известны символы двух граней, через него проходящих.

Пример. Даны символы двух координатных граней (100) (010). Найти символ ребра их пересечения (третьей координатной оси) $[r_1\ r_2\ r_3]$. Имеем

$$r_1 \cdot 1 + r_2 \cdot 0 + r_3 \cdot 0 = 0 \text{ и } r_1 \cdot 0 + r_2 \cdot 1 + r_3 \cdot 0 = 0,$$

откуда

$$r_1 = 0 \text{ и } r_2 = 0.$$

Следовательно, символ ребра будет $[00r_3]$, или (сокращая на r_3) [001], что было найдено нами и ранее (§ 42).

§ 45. Общие понятия об установке кристалла.

В предыдущей главе мы пояснили, что такое символы граней и ребер кристалла, и видели, что для их определения надо уметь выбрать четыре грани кристалла за основные, т. е. три за координатные плоскости и четвертую за единичную грань. Выбор этот не совсем произволен, он подчинен некоторым правилам и носит название установки кристалла. Мы будем различать установки общепринятую и Федоровскую.

Достоинства общепринятой установки заключаются: 1) в простоте ее правил и 2) в ее распространенности. Главный же недостаток состоит в том, что правила выбора основных граней определяют лишь некоторые условия, которым должны удовлетворять эти грани в данном кристалле, а не определяют выбор таких граней вполне однозначно.

Поэтому два независимых исследователя, измеряющие кристаллы одного и того же вещества, могут получить разные символы для одних и тех же граней. Вторым минусом общепринятой установки является недостаточная связь ее с теорией структуры кристаллов.

Достоинством Федоровской установки является ее однозначность и тесная связь с теорией структуры кристаллов, но зато правила ее очень сложны, и она мало распространена.

В этом курсе мы будем изучать лишь общепринятую установку кристаллов, имея в виду, что Федоровская установка детально изучается в особом курсе Кристаллохимического анализа. Здесь мы укажем некоторые общие положения, действительные как для общепринятой установки, так и для всяких других.

Во-первых, подчеркнем еще раз то, о чем уже выше говорилось: для того, чтобы символы всех граней были рациональными, необходимо за координатные оси и плоскости выбирать действительные или возможные ребра и грани кристалла. Это вытекает из формулировки закона Аюи. Так как в прямоугольной системе координат все построения и вычисления производить легче, то мы всегда будем стремиться выбрать за координатные плоскости три взаимно-перпендикулярные, или по возможности близкие к этому, грани, при чем за единичную грань будем брать при прочих равных условиях такую, которая делает по всем трем осям, по возможности, одинаковые отрезки.

В виду того, что наиболее подходящие для координатной системы плоскости могут не присутствовать на кристалле, нередко приходится выбирать за координатные оси и плоскости возможные ребра и грани его. Для облегчения их выбора полезно знать следующие положения.

Положение I. Нормаль ко всякой плоскости симметрии и всякая ось симметрии кристалла, кроме одинарной поворотной и двойной зеркально-поворотной, есть возможное ребро кристалла.

Положение II. Всякая плоскость симметрии и всякая плоскость нормальная к оси симметрии кристалла, кроме одинарной поворотной и двойной зеркально-поворотной, есть возможная грань кристалла.

Эти положения вытекают из наблюдения и из теории структуры кристаллов.

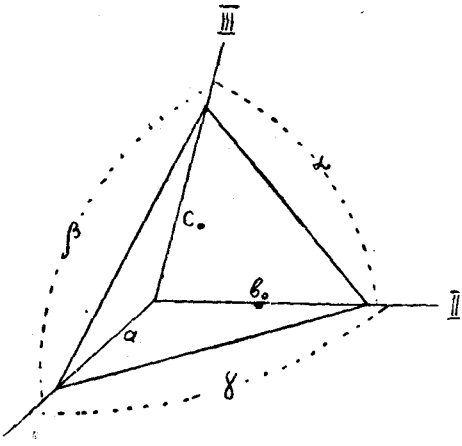
§ 46. Установка кристаллов кубической сингонии.

Согласно вышеприведенным правилам, в кубической сингонии за координатные плоскости выбираем плоскости, нормальные или к четверным (в высших видах) или двойным (в низших видах) взаимно-перпендикулярным осям симметрии. За единичную грань берем ту, которая по всем трем осям делает равные отрезки. Это грань октаэдра или тетраэдра, она одинаково наклонена ко всем трем осям и перпендикулярна к тройной оси. Обратим внимание, что все избранные 4 плоскости, согласно положению II § 45, являются действительными или возможными гранями кристалла, а потому мы их можем взять за основные грани.

Коротко это положение можно написать так:

$$\alpha = \beta = \gamma = 90°;\ a_0 : b_0 : c_0 = 1 : 1 : 1 \quad \ldots\ldots\ldots \text{(A)},$$

где α, β, γ (фиг. 153) — углы между координатными осями; a_0, b_0, c_0 — отрезки, отсекаемые единичною гранью на этих осях. Эти величины вполне определяют весь комплекс граней данного кристалла, согласно тому, что было сказано в § 34 при изложении закона Аюи.



Фиг. 153.
Кристаллографические константы вещества a_0, b_0, c_0, α, β, γ.

В виду того, что нам нужно знать не абсолютные величины отрезков a_0, b_0, c_0, а только их отношение, мы можем всегда разделить все их на b_0, тогда вместо группы величин (А) получим в общем случае, в качестве величин, вполне определяющих комплекс граней данного кристалла, такие: $\angle\alpha$, $\angle\beta$, $\angle\gamma$ и $a:1:c$. Эти 5 величин называются кристаллографическими константами данного вещества. Мы видели выше, что для всех кристаллов кубической сингонии они имеют одно и то же значение (см. (А) на стр. 65).

§ 47. Установка кристаллов тетрагональной сингонии.

В этой сингонии всегда две действительные или возможные грани, параллельные четверной поворотной или зеркально-поворотной оси и взаимно-перпендикулярные, берем за первую (100) и вторую (010) координатные плоскости. Следовательно, здесь направление четверной оси будет служить третьей кристаллографической осью [001]. Действительную же или возможную грань кристалла, перпендикулярную к четверной оси, берем за третью координатную плоскость. Отсюда ясно, что первая и вторая оси будут перпендикулярны к третьей и между собою. Единичною гранью считаем ту, которая по первой и второй оси отсекает равные отрезки. Такая грань в тетрагональных кристаллах всегда будет, что не трудно вывести из наличия четверной оси симметрии. По третьей же оси делаемый ею отрезок может быть какой угодно длины. Поэтому кристаллографические константы для тетрагональной сингонии имеют такие значения:

$$\alpha = \beta = \gamma = 90°;\ 1:1:c.$$

§ 48. Установка кристаллов ромбической сингонии.

В ромбической сингонии, как известно, в двух видах симметрии присутствуют три двойных взаимно-перпендикулярных оси симметрии, а в третьем (ромбопирамидальном) имеется одна двойная поворотная ось и две перпендикулярные к ней и между собою нормали к плоскостям симметрии. Как эти двойные оси, так и нормали являются действительными или возможными ребрами кристаллов (§ 45, положение 1). Их-то мы и принимаем за систему кристаллографических осей. Условий, позволяющих выбрать единичную грань так, чтобы она по каким-либо,

хотя бы двум осям, делала одинаковые отрезки, нет. Поэтому за единичную грань берем грань, делающую по всем трем осям разные отрезки. И кристаллографические константы получают следующие значения:

$$\alpha = \beta = \gamma = 90°;\ a:1:c.$$

§ 49. Установка кристаллов моноклинной сингонии.

В моноклинной сингонии двойную поворотную ось, а если ее нет, то нормаль к плоскости симметрии принимают за в т о р у ю кристаллографическую ось. Плоскость, перпендикулярная к двойной оси, или, во втором случае, плоскость симметрии есть возможная грань кристалла; в ней-то мы и берем две остальные оси. Ее символ будет (010). При этом понятно, что вторая кристаллографическая ось всегда перпендикулярна здесь к первой и третьей. Угол же между первой и третьей кристаллографическими осями может быть какой угодно. Единичные отрезки по всем трем осям различны. Откуда кристаллографические константы:

$$\alpha = \gamma = 90°,\ \beta \neq 90°;\ a:1:c.$$

(β различен у разных веществ).

§ 50. Установка кристаллов триклинной сингонии.

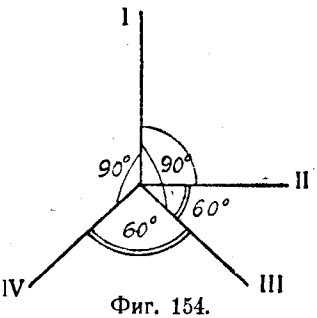
В триклинной сингонии нет таких ребер и граней, углы между которыми должны быть обязательно прямыми, потому все углы между кристаллографическими осями косые и отрезки, делаемые единичной гранью по осям, разной длины. Поэтому $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90°$; $a:1:c$.

Таким образом заметим, что для того, чтобы вывести все возможные грани кристалла в кубической сингонии, надо знать 0 констант, в тетрагональной—1, в ромбической—2, в моноклинной—3, в триклинной—5.

§ 51. Установка кристаллов гексагональной сингонии.

Рассмотрим установку в последней, гексагональной сингонии. Здесь надо различать два отдельных типа установок: 1) когда имеется действительная или приближенная шестерная поворотная ось и 2) когда таковой нет (присутствует лишь тройная поворотная ось).

I у с т а н о в к а. За координатные оси в этом случае берутся четыре ребра. Одно из них вертикальное, совпадает с шестерной осью симметрии, а три остальные перпендикулярны к шестерной оси и идут друг к другу под углом в 60° (фиг. 154). За единичную грань берем такую, которая делает равные отрезки на двух горизонтальных осях, параллельна третьей и отсекает произвольный отрезок на вертикальной. Ясно, что единицы измерения по трем осям, лежащим в горизонтальной плоскости, мы можем здесь всегда взять одинако-

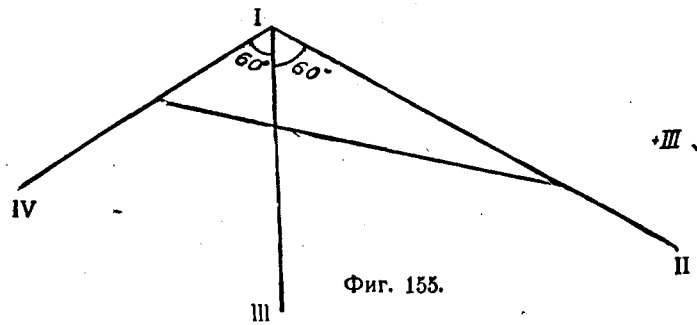


Фиг. 154.
Система кристаллографических осей в гексагональной подсингонии.

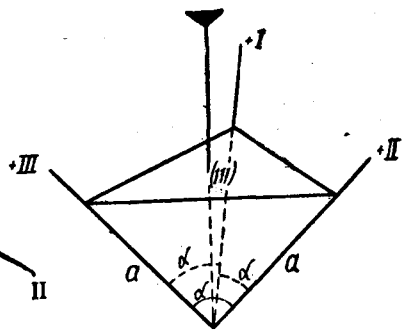
выми, благодаря присутствию шестерной поворотной оси симметрии. При расстановке символов на первом месте ставится символ по вертикальной оси, и в общем случае грань имеет такой символ (p_1 p_2 p_3 p_4). При этом следует заметить, что отрезок, делаемый любой гранью по четвертой оси, вполне определяется отрезками, отсекаемыми по второй и третьей оси. Пользуясь чертежом (фиг. 155), где изображены три горизонтальных оси (под углами 60° друг к другу) и пересекающий их след определяемой грани, легко доказать геометрически, что

$$\frac{1}{c}=\frac{1}{b}+\frac{1}{d},$$

где c отрезок на средней (третьей) оси, a b и d — отрезки на крайних (второй и четвертой) осях. Это дает, что $p_3=p_2+p_4$. Предоставляем это сделать читателю. Кристаллографические константы здесь будут: $\alpha=60°$; $\beta=\gamma=90°$; a : 1 : 1 : 1.



Фиг. 155.



Фиг. 156.
Кристаллографическая система координат для тригональной подсингонии.

II установка. Так как в кристаллах этого типа имеется тройная поворотная ось, то из одного косо-наклоненного к ней ребра мы всегда можем вывести, поворотом на 120°, еще два ему равных. Такие три ребра мы и принимаем за координатные оси (направленные вверх концы — положительны), а действительную или возможную грань I, II, III, перпендикулярную к тройной оси, за единичную (1 1 1). Тогда константы будут $\alpha=\beta=\gamma\neq 90°$; 1 : 1 : 1 (фиг. 156).

Как в I, так и во II установке гексагональной сингонии видим, что для полного вывода комплекса всех граней и ребер необходимо знать лишь 1 константу, разную у разных веществ: отрезок a при I установке или $\angle\alpha$ при второй.

§ 52. Упражнения в определении символов.

Упражнения в определении символов лучше всего производить сначала на деревянных моделях кристаллов и затем на стереографических сетках. Однако, приблизительное определение символов (§ 43) можно часто сделать и по рисункам. Для помощи занимающимся в этом отношении мы приведем здесь символы граней тех кристаллов, которые служили нам иллюстрацией 32 видов симметрии. При этом мы будем приводить символ лишь одной грани каждой формы. Символы остальных граней той же формы будут отличаться знаками у всех или некоторых индексов или перестановкой индексов.

Начнем с кубической сингонии. Фиг. 127: a—(100), t—(421).—Фиг. 124: h—(100), o—(111), x—(968).—Фиг. 121: o—(111), e—(210), s—(321).—Фиг. 115: h—(100), o—(111), o'—(1$\bar{1}$1), d—(110), n'—(2$\bar{1}$1), m—(311).—Фиг. 111: a—(100), b—(1$\bar{1}$1), d—(110) c—(210).

Тетрагональная сингония. Фиг. 43: m—(110), c—(001).—Фиг. 46: a—(001), b—(111), d—(11$\bar{1}$), c—(430).—Фиг. 50: o—(1$\bar{1}$1), ω—(11$\bar{1}$), x—(113).—Фиг. 54: o—(111), x—(311).—Фиг. 57: b—(11$\bar{1}$), d—(111), c—(110), a—(201). Фиг. 59: p—(111), e—(101), s—(311).—Фиг. 62: g—(110), r—(210), s—(111), p—(101), z—(321).

Ромбическая сингония. Фиг. 33: c—(110), a—(1$\bar{1}$1).—Фиг. 36: d—(010), e—(001), c—(301), b—(110), a—(121).—Фиг. 39: M—(110) l—(120), g—(130), n—(021), d—(201), o—(111).

Моноклинная сингония. Фиг. 25: a—(100), c—(001), m—(110), μ—(1$\bar{1}$0), q—(011), r—(101), ρ—(10$\bar{1}$).—Фиг. 27: r—(101), o—(111), ω—(11$\bar{1}$), x—(01$\bar{1}$), q—(011), t—(012).—Фиг. 30: b—(010), m—(110), o—(111).

Триклинная сингония. Фиг. 19: b—(100), ν—(00$\bar{1}$), a—(101), q—(110), l—(2$\bar{1}$0), x—(1$\bar{1}$0), β—($\bar{1}$00).—Фиг. 22: a—(100), m—(110), μ—(1$\bar{1}$0), π—($\bar{1}$30), b—(010), ω—(11$\bar{1}$).

Тригональная подсингония. Фиг. 66: r—(100), o—(11$\bar{1}$), t—(83$\bar{1}$), γ—(1$\bar{1}\bar{1}$).—Фиг. 70: a—(10$\bar{1}$), μ—(11$\bar{2}$), r—(100), o—(11$\bar{1}$), t—(201), γ—($\bar{1}\bar{1}$1), δ—($\bar{1}$01), ρ—(001).—Фиг. 76: r—(1101), z—(110$\bar{1}$), m—(010$\bar{1}$), x—(1$\bar{5}$16), s—(1$\bar{1}$12).—Фиг. 78: x—(100) m—(1$\bar{1}$0), a—11$\bar{2}$).—Фиг. 83: d—(111), b—(100), a—(3$\bar{1}$1), c—(112).

Гексагональная подсингония. Фиг. 85: a—(0110), b—(010$\bar{1}$), c—(1110), d—(120$\bar{2}$), e—(1220).—Фиг. 88: r—(1110), c—(0001), m—(0110), μ—(010$\bar{1}$), a—(02$\bar{1}$1), ρ—(11$\bar{0}$1), x—(12$\bar{1}$1), d—(210$\bar{1}$).—Фиг. 91: c—(0001), m—(01$\bar{0}$1), a—(01$\bar{2}$1), o—(11$\bar{0}$1).—Фиг. 94: c—(0001), m—(01$\bar{0}$1) z—(12$\bar{0}\bar{2}$), x—(11$\bar{0}$1), i—(21$\bar{0}$1), x'—($\bar{1}$10$\bar{1}$).—Фиг. 97: m—(010$\bar{1}$), o—(110$\bar{1}$).—Фиг. 99: P—(0001), M—(010$\bar{1}$), x—(110$\bar{1}$), s—(1121), u—(132$\bar{1}$).—Фиг. 102: m—(010$\bar{1}$), c—(0001), p—(210$\bar{1}$) s—(22$\bar{1}\bar{1}$), u—(110$\bar{1}$), v—(232$\bar{1}$).

ЧАСТЬ ШЕСТАЯ.

Геометрические теории структуры кристаллического вещества.

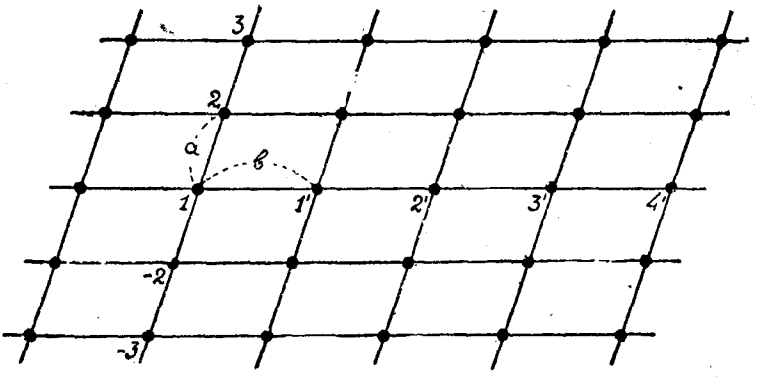
§ 53. Плоские сетки и пространственные решетки.

Теорий структуры кристаллического вещества было создано много. В основе современной теории структуры кристаллов лежат два положения: атомистическая гипотеза и закон кристаллической однородности. 1) Атомистическая гипотеза заключается в том, что все вещество считают состоящим из отдельных частичек или атомов. Кристаллография рассматривает при этом атом, как нечто целое и неделимое. 2) Закон же кристаллической однородности, как мы знаем, заключается

в том, что по параллельным направлениям свойства кристаллического вещества одинаковы, по различным же, вообще говоря, различны.

Однако, этих двух положений мало для создания теории структуры, необходимо еще допустить 3) распространение закона кристаллической однородности на распределение вещества в пространстве, т.-е. считать, что в параллельных направлениях вещество кристалла построено тождественно, а в непараллельных построение его может быть и различно.

Поступим теперь следующим образом. Возьмем какую-либо точку в одном из атомов—для определенности, например, центр тяжести этого атома. Затем выделим центр тяжести второго атома, тождественного с первым и ближайшего к нему. Если вещество наше является не элементом, а химическим соединением, например, $CaCO_3$, то для этих построений мы берем либо все атомы Ca, либо все атомы C, либо по одному соответственному, атому O из каждой их тройки.

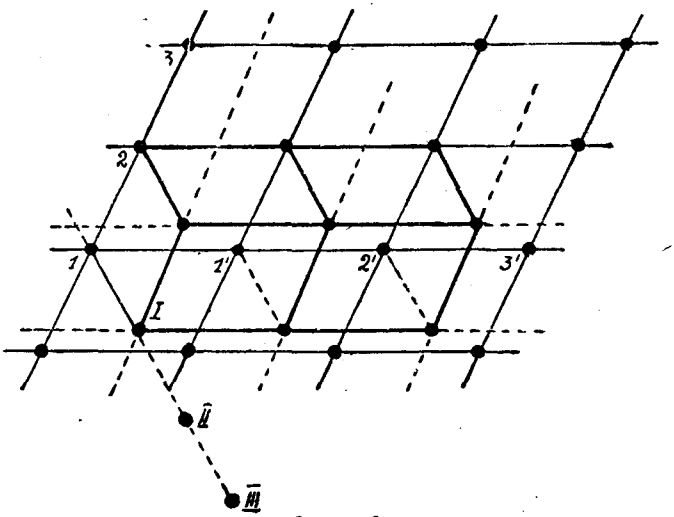


Фиг. 157.
Плоская сетка (или решетка).

Рассуждаем так (фиг. 157): если из точки 1 пойдем по направлению к точке 2, то через промежуток *a* мы встретим 2-ой атом, и, так как мы допустили, что в параллельных направлениях расположение атомов тождественно, то, идя по тому же направлению и дальше, мы через такой же промежуток *a* встретим еще новую точку 3 и т. д. То-есть центры тяжести одинаковых атомов должны располагаться в виде узлов через определенные промежутки на вытянутом шнуре. Но кроме этих атомов в кристаллическом веществе есть еще и другие, одинаковые с ними, но не лежащие в этом ряду. Возьмем один из них, ближайший к 1, пусть это будет 1′, расположенный от 1 на расстоянии *b*. Тогда, в силу однородности строения вещества, раз мы, идя от точки 1 через промежуток *b* встретили атом 1′, то, идя в том же направлении дальше, через тот же промежуток *b* от точки 1′ встретим атом 2′ и т. д. Получим новый ряд: 1, 1′, 2′, 3′ и т. д.

Беря теперь за исходную точку вместо 1 точку 2, затем 3, и т. д. и идя из них параллельно этому второму ряду, с промежутком *b*, мы получим сеть точек, расположенных в углах системы равных параллелограммов (фиг. 157). Эта сеть называется плоской сеткой или плоской решеткой. Но вещество имеет три измерения. Поэтому возьмем еще точку 1, являющуюся центром тяжести атома, тождествен-

ного с 1, и не лежащую в нашей плоской сетке, но ближайшую к 1. Затем, идя от точки 1 к I, выведем тем же способом, что и раньше, целый ряд точек 1, I, II, Ш... (фиг. 158). Проводя из всех точек имеющейся уже плоской сетки ряды точек, параллельные ряду I 1, мы получим сеть параллелепипедов, в вершинах которых расположены центры тяжести тождественных атомов. Эта сеть параллелепипедов называется пространственной решеткой (фиг. 158). Эта теория была создана в начале XIX столетия немецким ученым Франкенгеймом и особенно разработана французским ученым Браве.



Фиг. 158.
Пространственная сетка (или решетка).

§ 54. Вывод эмпирических законов из теории пространственных решеток.

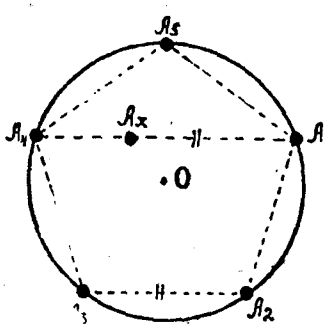
Пользуясь теорией Браве, можно объяснить большинство эмпирических законов геометрической кристаллографии. Мы ограничимся лишь разъяснением связи между этой теорией и законами плоскогранности и прямореберности, постоянства углов и симметрии.

Начнем с первого. Что представляют собою грани и ребра кристалла? С точки зрения теории Браве это суть слои или ряды атомов, *центры тяжести которых образуют плоские сетки и ряды пространственной решетки данного вещества.*

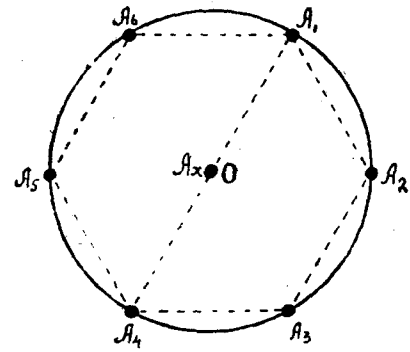
Чтобы объяснить закон Стенона, придется сделать еще такое допущение: каждое кристаллическое вещество имеет свою собственную пространственную решетку, отличающуюся от решеток других веществ. Решетка эта для данного вещества неизменна, хотя бы формы кристалла были различны. Совершенно понятно, что в тождественно построенных пространственных решетках углы между соответственными плоскими сетками или соответственными рядами будут неизменны, в чем и заключается закон Стенона.

Наконец, при помощи теории Браве легко показать, что в кристаллах, кроме одинарных, двойных, тройных, четверных и шестерных осей, никаких других быть не может. Докажем это положение только для пятерной поворотной оси. Для семерной, восьмерной и т. д. доказательство будет аналогично. Немногим лишь сложнее будут доказательства для соответствующих зеркально-поворотных осей.

Предположим, что пятерная поворотная ось симметрии существует в пространственной решетке. Сделаем чертеж перпендикулярно к оси. Выход оси обозначим точкою О (фиг. 159). Возьмем центр атома самого близкого к нашей оси, но на ней не лежащего, и проведем плоскость нашего чертежа через центр этого атома. Тогда он изобразится точкой A_1. После этого повернем всю фигуру на угол в $\frac{360}{5} = 72°$, она совместится со своим начальным положением в пространстве и точка A_1 займет положение A_2. Продолжим эту операцию последовательно пять раз, точка A_1



Фиг. 159.
Пятерная ось не может существовать в пространственной решетке.



Фиг. 160.
Шестерная ось может существовать в пространственной решетке.

опишет полный круг и возвратится в свое исходное положение. И так как точка A_1 ближайшая к оси, то никаких других точек внутри описанного ею круга быть не должно. Но в правильном пятиугольнике $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ (фиг. 159) диагональ $A_1 A_4$ параллельна $A_2 A_3$ и в то же время больше $A_2 A_3$; поэтому, если мы пойдем от точки A_1 к A_4 то, по свойствам плоской решетки, через промежуток $A_1 A_x = A_2 A_3$ мы придем в некоторую точку A_x, расположенную внутри круга, а потому и более близкую к оси, чем наша точка A_1. А этого быть не может, так как точка A_1—есть ближайшая. Следовательно, наше предположение о существовании пятерной поворотной оси не совместимо с расположением точек по пространственной решетке.

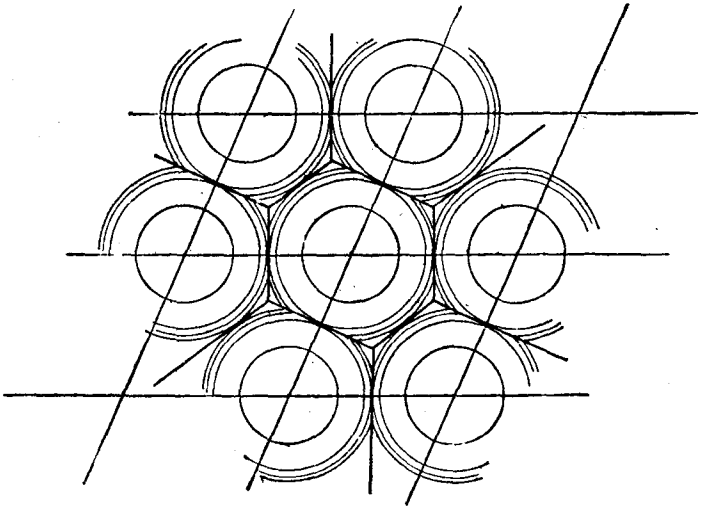
Что же касается шестерной оси, то она всегда возможна, так как проделав тот же ход рассуждений, что и для пятерной оси, увидим, что точка, выводимая из точки A_1 (фиг. 160) по правилам плоской решетки, попадает как раз на шестерную ось, так как в этом случае $A_1 A_x = A_2 A_3$, а потому ее присутствие не будет противоречить условию.

Дальнейшим развитием теории пространственной решетки является теория параллелоэдров, созданная в кристаллографии Е. С. Федоровым в 1885 году и детально им разработанная в ряде работ до 1910 года.

§ 55. Теория параллелоэдров.

Параллелоэдр буквально значит параллельногранник. Сущность теории параллелоэдров сводится к следующему. Представим себе, что пространство, занятое кристаллическим веществом, разделено без остатка между всеми его тождественными атомами, составляющими его пространственную решетку. Деление это совершено так, что области, принадлежащие каждому из этих атомов, совершенно одинаковы и параллельно ориентированы в пространстве.

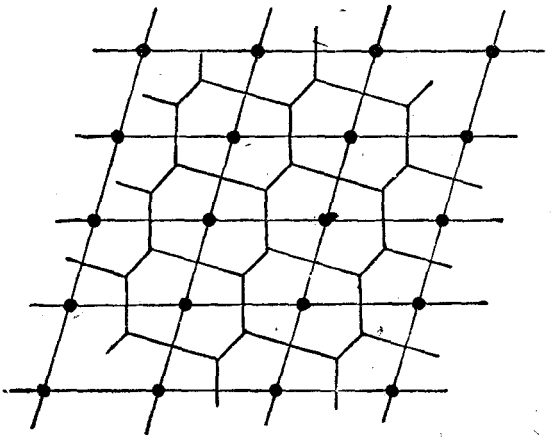
Определение. Такие геометрические тела, которые все равны между собою и выполняют пространство без промежутков в параллельном положении, носят название параллелоэдров. Параллелоэдры могут быть кривогранные и плоско-



Фиг. 161.
Простейший способ образования параллелоэдров из пространственной решетки.

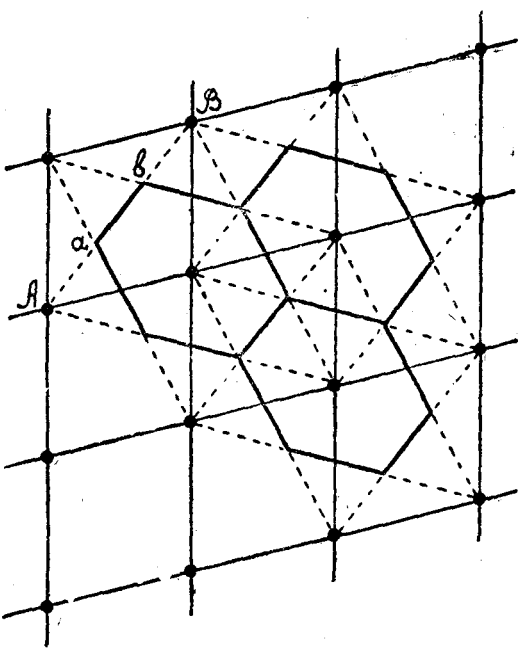
гранные, вогнутые и выпуклые. Мы будем рассматривать только плоскогранные и выпуклые. Их можно строить вокруг атомов одной и той же пространственной решетки различным образом. Простейший способ будет, например, такой. Пусть мы имеем пространственную решетку из центров тяжестей атомов. Начнем около этих центров в один и тот же момент и с одною и тою же скоростью раздувать шары. Шары эти, постепенно увеличиваясь, сперва коснутся друг друга (фиг. 161), потом начнут приминать один другой, отчего образуются плоскости. Плоскости эти при дальнейшем раздувании шаров все увеличиваются, наконец, пересекаются и образуют ребра, сами же при этом превращаются в грани. Таким образом шары постепенно превращаются в многогранники, абсолютно одинаковые, параллельно ориентированные в пространстве и заполняющие его без промежутков. Одинаковые потому, что в силу закона кристаллической однородности точки пространственной решетки располагаются вокруг любой из них абсолютно одинаковым образом, и, перенесясь

из одного раздувающегося шара в другой, мы не заметим никакой разницы в наблюдаемом нами процессе раздувания. Так построенные параллелоэдры имеют грани, перпендикулярные к ребрам пространственной решетки, но вообще не параллельные ее плоским сеткам, что понятно из чертежа (фиг. 162), изображающего сечение системы таких параллелоэдров одной из плоских сеток. Поэтому для этих параллелоэдров, называемых параллелоэдрами Вульфа [1]), связь с пространственной решеткой и, следовательно, со структурой вещества не особенно наглядна.



Фиг. 162.
Разрез системы параллелоэдров Г. Вульфа.

Федоров построил свои параллелоэдры иначе, а именно: он расположил грани их параллельно плоским сеткам пространственной решетки. Пример системы параллелоэдров Федорова в разрезе представлен на фиг. 163 где, например, грань параллелоэдра *ab* параллельна плоской сетке AB и т. д.



Фиг. 163.
Разрез системы параллелоэдров Федорова

Из определения параллелоэдров чисто геометрическим путем выведен целый ряд их свойств, из которых мы укажем лишь следующие:

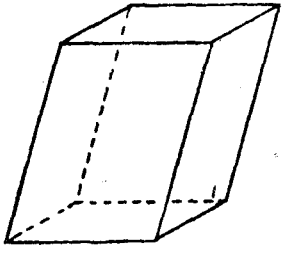
1) Каждый параллелоэдр ограничен попарно равными и параллельными гранями.

2) Гранями его могут быть лишь четырехугольники и шестиугольники.

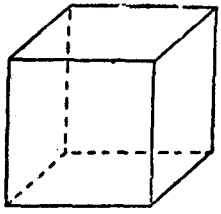
Идя далее, Федоров доказал, что возможны лишь 4 существенно отличных вида параллелоэдров, отличающихся друг от друга по числу пар граней. Виды эти следующие:

[1]) Или областями Дирихле по имени математика, впервые изучавшего их. Г. В. Вульф ввел их в кристаллографию в 1908 году.

I вид — **трипараллелоэдр**; он ограничен тремя парами параллельных граней (фиг. 164). Наиболее симметричным из трипараллелоэдров будет куб (фиг. 165).

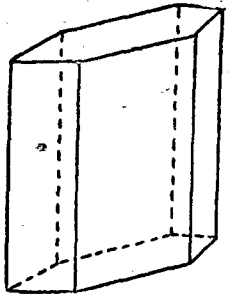


Фиг. 164.
Трипараллелоэдр
(общий случай).

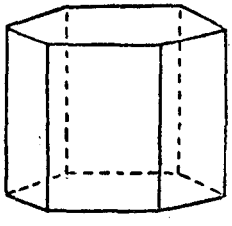


Фиг. 165.
Наиболее симметричный
трипараллелоэдр — куб.

II вид — **тетрапараллелоэдр**, ограничен четырьмя парами параллельных граней (фиг. 166). Наиболее симметричная форма — гексагональная призма с пинакоидом, перпендикулярным шестерной оси (фиг. 167).

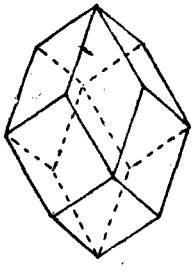


Фиг. 166.
Тетрапараллелоэдр
(общий случай).

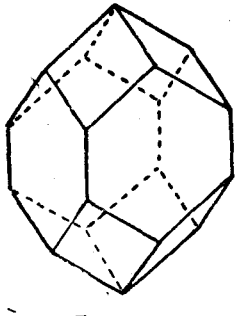


Фиг. 167.
Наиболее симметричный
тетрапараллелоэдр—гексагональная призма с пинакоидом.

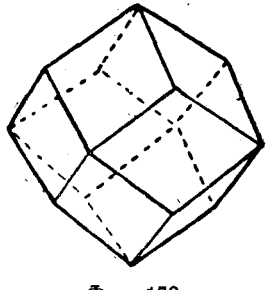
III вид — **гексапараллелоэдр**, ограничен шестью парами параллельных граней (фиг. 168 и 169). Наиболее симметричная форма — ромбододекаэдр (фиг. 170).



Фиг. 168.
Гексапараллелоэдр
(общий случай).

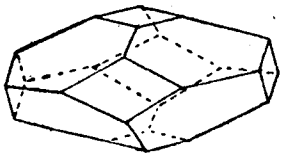


Фиг. 169.
Удлиненный гексапараллелоэдр.

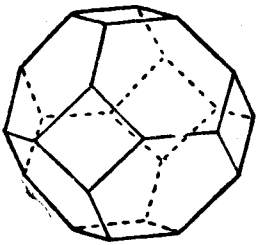


Фиг. 170.
Наиболее симметричный
гексапараллелоэдр—ромбододекаэдр.

1-й вид — гептапараллелоэдр[1]), ограничен семью парами параллельных граней (фиг. 171). Наиболее симметричной формой является особый кубооктаэдр (комбинация куба и октаэдра), у которого все ребра равны друг другу (фиг. 172), тогда как, например, у фиг. 171 две серии



Фиг. 171.
Гептапараллелоэдр (общий случай).



Фиг. 172.
Наиболее симметричный гептапараллелоэдр — особый кубооктаэдр.

ребер: горизонтальные равны между собою, но не равны косым и обратно: косые равны между собой, но не равны горизонтальным [2]).

§ 56. Выводы из теории параллелоэдров.

Получив понятие о теории параллелоэдров, мы должны обратить особенное внимание на то, что эти параллелоэдры являются лишь вспомогательными геометрическими образами, на самом деле в кристалле, конечно, не существующими, но помогающими нам разбираться в его строении. Из этой теории укажем следующие главные выводы:

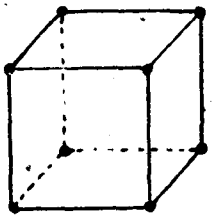
I. Виды структуры кристаллов. Так как существуют лишь четыре вида параллелоэдров, то существуют лишь четыре отвечающих им вида структуры кристаллов: гексаэдрический, призматический, додекаэдрический и октаэдрический. Если бы мы теперь задались вопросом, как расположены тождественные атомы в каждой из этих структур, то, выполнив пространство параллелоэдрами одного из этих видов, мы должны были бы взять соответственные точки всех этих параллелоэдров, например, их центры. Убрать самые параллелоэдры и посмотреть, как, в виде какой решетки, располагаются эти соответственные точки. 1) Для 1 типа (трипараллелоэдров) центры их расположатся в вершинах сети параллелепипедов, совершенно тождественной с сетью самих параллелоэдров, но сдвинутой на половину диагонали одного из них. Если заданный параллелоэдр есть куб, то и центры атомов будут расположены в этом случае в вершинах решетки кубов. Структурной ячейкой будет простой куб (фиг. 173). 2) У тетрапараллелоэдров (фиг. 174) центры образуют решетку (фиг. 175), у которой центры атомов сидят в вершинах и цен-

---

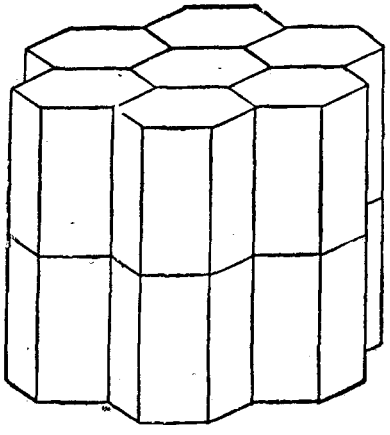
[1]) ἑπτά — семь.

[2]) На плоскости существует лишь 2 типа параллелогонов, т.-е. равных многоугольников, выполняющих всю плоскость в параллельном положении: параллелограмм и шестиугольник с центром инверсии (см. Е. С. Федоров. Курс кристаллографии 1901. 54). В пространстве четырех измерений существует 51 тип образов, аналогичных параллелоэдрам (см. работу Б. Н. Делоне: «Sur la partition réguliére, de l'espace á 4 dimensions». Изв. Ак. Н. СССР. 1929. 79 — 164)

трах оснований шестигранной призмы. 3) В додекаэдрической структуре атомы, взятые в центрах ромбододекаэдров, выполняющих пространство без промежутков, располагаются в вершинах куба и центрах его граней. Это иллюстрировать чертежом трудно, и следует рассмотреть на моделях. Куб такой носит название центрогранного (фиг. 176). Наконец, в октаэдрической структуре имеем в качестве элементарной ячейки пространственной решетки центрированный куб, т.-е. куб с атомами в вершинах и в центре (фиг. 177). Атомы эти являются центрами кубооктаэдров, выполняющих пространство без промежутков.

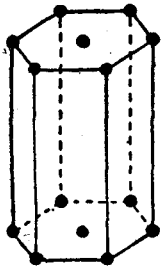


Фиг. 173.
Гексаэдрическая структура (по простому кубу).

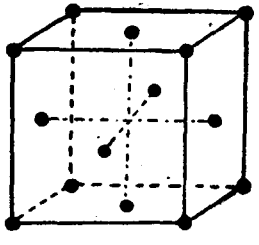


Фиг. 174.
Выполнение пространства тетрапараллелоэдрами.

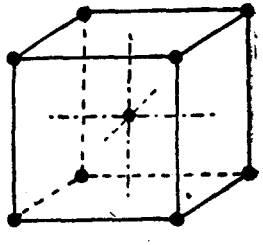
II. Типы кристаллов. Рассмотренные нами 4 структуры разбиваются на 2 группы. К первой, к так называемому кубическому типу, относятся гексаэдрическая, додекаэдрическая и октаэдрическая.



Фиг. 175.
Призматическая структура.



Фиг. 176.
Додекаэдрическая структура (по центрогранному кубу).



Фиг. 177.
Октаэдрическая структура (по центрированному кубу).

Общим для них всех является то, что высшим видом симметрии для каждой из них служит гексоктаэдрический (см. § 29). К кубическому типу принадлежат все кристаллы кубической и тетрагональной сингонии, часть кристаллов тригональной подсингонии и ромбической, моноклинной и триклинной сингоний.

К гексагональному типу относятся кристаллы, имеющие основной параллелоэдр II типа. Высшим видом симметрии служит дигекса-

гонально-дипирамидальный (см. § 28). Сюда принадлежат все кристаллы гексагональной подсингонии и часть кристаллов тригональной подсингонии, ромбической, моноклинной и триклинной сингонии. Отсюда непосредственно вытекает закон кристаллографических пределов (см. § 38).

III. Кристаллохимический анализ. Наконец, на теории параллелоэдров всецело построен, разработанный Е. С. Федоровым способ определять вещество по формам его кристаллов, т.-е. так называемый кристаллохимический анализ. На нем мы остановимся ниже.

§ 57. Понятие о более полной геометрической теории структуры кристаллов. 230 разновидностей симметрии кристаллов.

Вдумавшись внимательно в те три основные положения, на которых мы построили выше теорию пространственной решетки и примыкающую к ней теорию параллелоэдров, мы должны притти к заключению, что возможно и необходимо дальнейшее обобщение и расширение этой теории.

Уточним прежде всего эмпирический закон кристаллической однородности. Он был выше формулирован нами так: «Все свойства кристаллического вещества по параллельным направлениям одинаковы, по непараллельным — вообще различны». Все бесчисленные опыты, на основе которых выведен этот закон, сводятся к измерению различных свойств, как-то: упругости, теплопроводности, электропроводности, различных оптических свойств прошедших сквозь кристалл лучей света и т. д. Такие измерения или по существу своему, или вследствие недостаточной тонкости применяемых приемов, делаются не вдоль избранных математических прямых, а вдоль некоторых, хотя бы и весьма тонких цилиндров или призм, воображаемых или действительно выделенных из вещества.

Из этого следует, что эмпирический закон кристаллической однородности дает нам право утверждать равенство всех свойств кристаллического вещества не для любых математических прямых, проведенных параллельно друг другу в этом веществе, а лишь для весьма тонких, но не бесконечно тонких призм (или цилиндров), выделенных параллельно друг другу в кристаллическом веществе.

Теперь мы должны привести в соответствие с этими разъяснениями и третье положение, лежащее в основе теории структуры кристаллов, а именно, распространение закона кристаллической однородности на распределение кристаллического вещества в пространстве, им занятом. Мы видим, что опытная основа закона кристаллической однородности не требует для своего объяснения, чтобы кристаллическое вещество было одинаково расположено вдоль двух произвольных математических прямых, параллельных друг другу. Необходимо и достаточно лишь, чтобы указанные выше элементарные взаимно-параллельные призмы были построены из вещества совершенно одинаково, т.-е., чтобы они были составлены одинаковым образом из тождественно построенных параллельных друг другу продольных прямых.

То, что сказано в этом § до сих пор, справедливо как при атомистическом строении вещества, так и при сплошном (непрерывном). Теперь мы введем в круг наших рассуждений атомистическую гипотезу.

Всякое вещество, в том числе и кристаллическое, состоит из атомов одного и того же или различных химических элементов. Относи-

тельные количества и химическую роль этих атомов указывает нам химическая формула вещества. Так, например, формула гипса $SO_4Ca \cdot 2H_2O$ или подробнее $\begin{matrix} O \\ O \end{matrix}\!\!>\!S\!<\!\!\begin{matrix} O \\ O \end{matrix}\!\!>Ca \cdot 2H_2O$ указывает нам, что в его состав входят атомы четырех элементов S, O, Ca, H, что атомов кислорода присутствует в нем в шесть раз больше, чем атомов серы или кальция, и что не все атомы кислорода играют одинаковую химическую роль.

В соответствии с этим и роль различных атомов одного и того же элемента в строении кристаллического вещества может быть различна. Введем следующие определения.

Одинаковыми атомами мы будем называть все атомы одного и того же химического элемента, входящие в состав данного кристаллического вещества.

Равными атомами будем называть лишь такие из одинаковых, при совмещении которых друг с другом можно совместить и всю систему атомов, слагающих данное кристаллическое вещество, хотя бы для этого совмещения пришлось данную систему повернуть вокруг некоторой оси или отразить в некоторой плоскости симметрии. Равные атомы играют таким образом одинаковую роль в геометрическом, а следовательно, и химическом строении данного вещества.

Тождественными атомами мы будем называть такие из равных, при поступательном совмещении которых совмещаются целиком сами системы.

Задача теории структуры кристаллов состоит в том, чтобы определить как располагаются в кристаллическом веществе атомы всех родов, входящие в его состав. Задачу эту можно ставить шире и уже в зависимости от того, желаем ли мы выводить и изучать все возможные расположения:

или атомов всех различных элементов, входящих в состав кристаллического вещества,

или разных атомов одного и того же элемента из входящих в состав такого вещества,

или только равных атомов одного элемента,

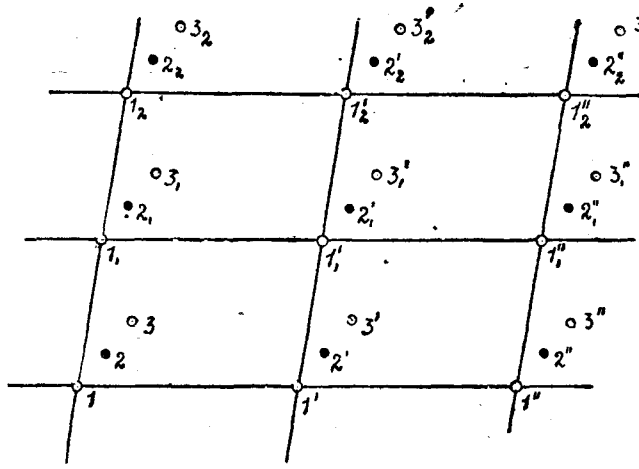
или только лишь тождественных атомов.

Если мы вспомним теперь, как выводили мы теорию пространственной решетки, то мы без большого труда поймем, что узлы этой решетки указывают нам расположение лишь тождественных атомов в кристаллическом веществе, потому что при поступательном совмещении друг с другом сидящих в этих узлах параллельно ориентированных атомов, мы будем совмещать решетки целиком.

Что касается других равных атомов, не тождественных с этой первой системой их, то они должны располагаться как-то между узлами решетки. И при том все они должны разбиваться на серии, образующие пространственные решетки, одинаковые с первой, потому что, по определению тождественных атомов (первой серии), при их поступательном совмещении вся система атомов вещества должна сливаться с начальным положением. Пример такой сложной решетки изображен на фиг. 178; для простоты взята плоская решетка. Здесь мы имеем первую серию тождественных атомов, обозначенных цифрами 1, и затем еще две серии атомов 2 и 3, из которых каждая образует такую же решетку, как и серия 1. Если мы предположим, что атомы всех серий одинаковы, т.-е. принадлежат одному и тому же химическому элементу, то легко

видеть, что атомы серий 1 и 3 равны, хотя и не тождественны между собою, а атомы серий 1 и 2 или 3 и 2 и не тождественны и не равны между собою. Чтобы показать это, докажем, что любые два атома серий 1 и 3, например, атомы 1 и 3′ равны между собою, т.-е., что при их совмещении можно совместить всю систему. Сначала передвинем поступательно 1 в 1′, при этом системы совместятся, ибо 1 тождественно с 1′. Затем повернем всю передвинутую систему вокруг нормали к плоскости чертежа в точке 2′ на 180°. Тогда системы совместятся, а 1 из положения 1′, перейдет в 3.

Из фиг. 178 ясно, что изображенное на ней расположение атомов вполне удовлетворяет и атомистической гипотезе и закону кристаллической однородности, распространенному на структуру, и что хотя это расположение сохранило общие черты плоской (и в трех измерениях



Фиг. 178.
Плоская система точек, состоящая из трех однообразных плоских сеток.

пространственной) решетки, но оно является уже сложной плоской (соответственно — пространственной) решеткой. Отсюда следует недостаточность элементарной теории пространственной решетки, как она была выведена выше, и отсюда ясна необходимость более полной теории структуры.

Задача этой более полной теории заключается в выводе всех возможных теоретически случаев расположения равных атомов в кристаллически однородном веществе. Если мы примем во внимание, что поступательное перемещение есть одинарная винтовая ось симметрии, то мы можем сказать: любая совокупность равных атомов, включая сюда и тождественные, может быть вся выведена из одного атома посредством некоторой совокупности элементов симметрии. А потому задача более полной геометрической теории структуры заключается в выводе всех совокупностей элементов симметрии, какими могут обладать системы равных атомов в кристаллическом веществе. С чисто геометрической точки зрения, бесконечные системы соответственных точек равных атомов называются правильными системами точек. Имея в виду данное выше

определение равных атомов, мы можем теперь дать такое определение правильной системы точек.

Определение. Правильной системой точек называется система, обладающая таким свойством: любые две ее точки можно так совместить друг с другом посредством какого-либо элемента симметрии, что новая система, выведенная из данной посредством этой симметрической операции всеми своими точками совпадает с данной начальной системой.

Задача вывода всех таких систем, или точнее всех возможных совокупностей элементов симметрии, им свойственных, была в полном объеме поставлена и решена независимо друг от друга Федоровым [1]) и Schoenflies'ом [2]). Полный вывод, сделанный ими, не может быть здесь изложен, так как он требует много времени. Результаты этого вывода таковы:

1) Все возможные правильные системы точек, по имеющимся у них совокупностям элементов симметрии, распределяются между теми же 32 видами симметрии, которые были нами изучены для кристаллических многогранников и комплексов (пучков, стр. 13) граней и ребер кристаллов. Для определения вида симметрии данной бесконечной правильной системы точек, надо все винтовые (со включением поворотных) и зеркально-поворотные оси ее, рассеянные по всей системе [3]), перенести в одну точку Тогда сольются все параллельные оси. Винтовые оси надо посчитать при этом за поворотные того же наименования. И мы получим один из известных нам 32 видов симметрии, что можно вполне строго доказать.

2) Если мы будем считать различными такие случаи, когда две системы обладают различными совокупностями элементов симметрии, не принимая, однако, во внимание при этом разницу в длине поступаний и в углах между ними, то окажется, что при этом условии выводится всего **230** различных случаев или разновидностей симметрии бесконечных правильных систем точек.

По отдельным видам симметрии эти разновидности распределяются так:

Виды симметрии и число разновидностей.

I. Триклинная сингония.

1. Моноэдрический вид симметрии	1
2. Пинакоидальный » »	1
	2

II. Моноклинная сингония.

3. Диэдрический анаксиальный	4
3. » аксиальный	3
5. Призматический	6
	13

III. Ромбическая сингония.

6. Ромбо-тетраэдрический	9
7. Ромбо-пирамидальный	22
8. Ромбо-дипирамидальный	28
	59

[1]) Е. С. Федоров. Симметрия правильных систем фигур. Зап. Мин. Общ. 1890.
[2]) A. Schoenflies. Krysrallsysteme und Krystallstruktur. 1893. — 2-е изд.—1923.
[3]) Например на фиг. 178 двойные поворотные оси проходят нормально к чертежу через все точки 2.

IV. Тетрагональная сингония.

9.	Тетрагонально-тетраэдрический	2
10.	» -пирамидальный	6
11.	» -дипирамидальный	6
12.	» -трапецоэдрический	10
13.	» -скаленоэдрический	12
14.	Дитетрагонально-пирамидальный	12
15.	» -дипирамидальный	20
		68

V. Гексагональная сингония.

16.	Тригонально-пирамидальный	4
17.	Дитригонально-пирамидальный	6
18.	Ромбоэдрический	2
19.	Тригонально-трапецоэдрический	7
20.	Дитригонально-скаленоэдрический	6
		25
21.	Тригонально-дипирамидальный	1
22.	Дитригонально- »	4
23.	Гексагонально-пирамидальный	6
24.	Дигексагонально- »	4
25.	Гексагонально-трапецоэдрический	6
26.	« -дипирамидальный	2
27.	Дигексагонально- »	4
		27

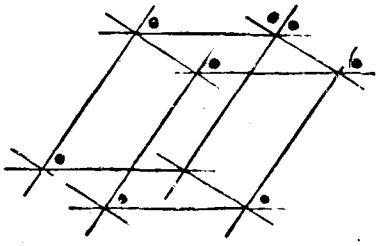
VI. Кубическая сингония.

28.	Пентагон-тритетраэдрический	5
29.	Гексатетраэдрический	6
30.	Дидодекаэдрический	7
31.	Пентагон-триоктаэдрический	8
32.	Гексоктаэдрический	10
		36
	Всего	230

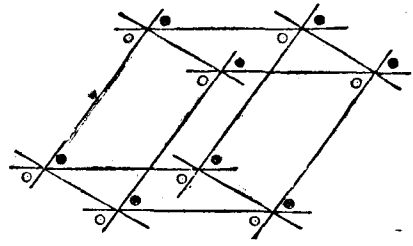
Для примера на фиг. 179 и 180 изображены элементарные участки [1]) правильных систем точек, относящихся к моноэдрическому и пинакоидальному видам симметрии. В первом нет вовсе элементов симметрии, кроме поступаний, во втором есть центр инверсии. На фиг. 181, 182, 183, 184 изображены системы, относящиеся к четырем разновидностям диэдрического анаксиального вида симметрии моноклинной сингонии. У фиг. 181 и 182 имеется серия взаимно-параллельных плоскостей симметрии, идущих к наблюдателю (параллельно правой и левой стенкам параллелепипеда). Отличаются эти две разновидности тем, что на фиг. 181 все точки системы могут быть выведены из одной их пары поступаниями параллельно и перпендикулярно к плоскости симметрии

[1]) Элементарным участком называется такой, параллельным повторением которого мы можем вывести всю систему. — На фиг. 180 — 184 белые точки равнозначны черным.

(вдоль трех ребер параллелепипеда на чертеже), а на фиг. 182 к таким поступаниям, для вывода всех точек симметрии, надо присоединить еще



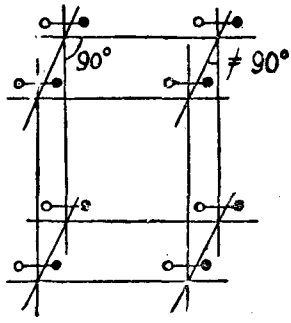
Фиг. 179.



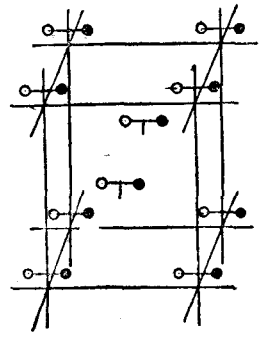
Фиг. 180.

Фиг. 179 — 180.
Разновидности моноэдрического и пинакоидального вида симметрии. 179 = 1s, 180 = 2s.

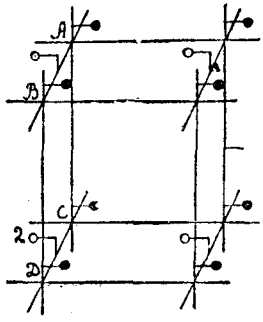
поступание по диагонали одной из прямоугольных сторон параллелепипеда. У фиг. 183 и 184 плоскостей симметрии нет, но есть параллельные



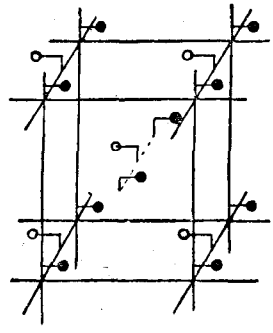
Фиг. 181.



Фиг. 182.



Фиг. 183.

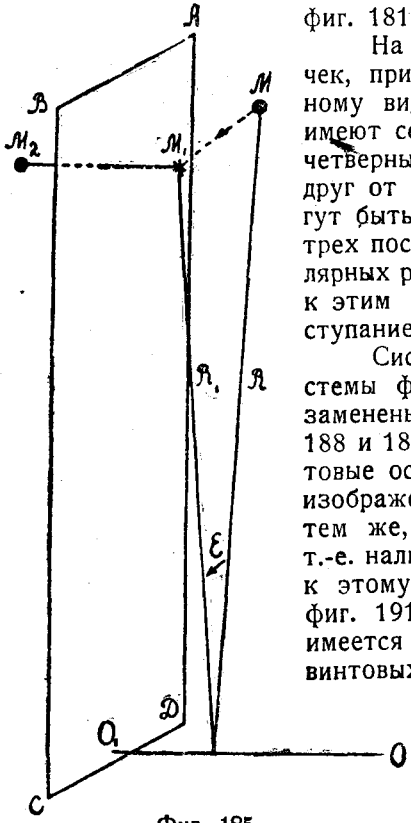


Фиг. 184.

Фиг. 181 — 184.
Разновидности диэдрического анаксиального вида симметрии.
181 = 5s, 182 = 6s, 183 = 1h, 184 = 2h.

боковым стенкам плоскости скольжения. Это элементы симметрии, применяемые так: точку 1 системы (фиг. 183) мы отражаем в этой плоскости ABCD и отражение передвигаем параллельно некоторому направлению в этой плоскости; получаем точку 2. Имея

в виду, что все элементы симметрии можно рассматривать, как винтовые или зеркально-поворотные оси, и припоминая, что плоскость симметрии равнозначна одинарной зеркально-поворотной оси, мы можем понять, что плоскость скольжения равнозначна бесконечной по наименованию зеркально-поворотной оси, лежащей на бесконечности от точек системы. Поясним это. На фиг. 185, если расстояние R точки M данной системы от зеркально-поворотной оси OO′ бесконечно велико, а угол поворота ε весьма мал, то дуга MM_1, по которой движется точка M при вращении вокруг зеркально-поворотной оси, превращается в отрезок прямой, а плоскость ABCD в плоскость скольжения, как она была определена выше.



Фиг. 185.
Плоскость скольжения = лежащей на бесконечности зеркально-поворотной оси бесконечного наименования.

Системы, изображенные на фиг. 183 и 184, отличаются друг от друга тем же, чем системы фиг. 181 и 182.

На фиг. 186—191 изображены системы точек, принадлежащих к тетрагонально-пирамидальному виду симметрии. Системы фиг. 186 и 187 имеют серию вертикальных взаимно-параллельных четверных поворотных осей симметрии, отличаясь друг от друга тем, что на фиг. 186 все точки могут быть выведены из одной четверки при помощи трех поступаний a, b, c вдоль взаимноперпендикулярных ребер тетрагональной призмы, а на фиг. 187 к этим поступаниям надо еще присоединить поступание вдоль диагонали той же призмы.

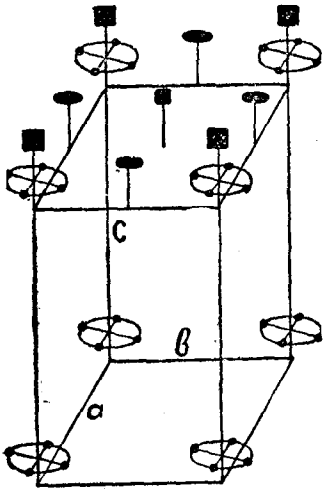
Системы фиг. 188 и 189 отличаются от системы фиг. 186 тем, что поворотные оси здесь заменены винтовыми. Друг от друга системы фиг. 188 и 189 отличаются тем, что у первой все винтовые оси правые, а у второй левые. На фиг. 190 изображена система, отличающаяся от фиг. 188 тем же, чем фиг. 187 отличается от фиг. 186, т.-е. наличием поступания по диагонали. Наконец, к этому же виду симметрии относится система фиг. 191, у которой, также как и у фиг. 188, имеется серия взаимно-параллельных четверных винтовых осей, но здесь они обладают ходом лишь $\frac{\lambda}{2}$, т.-е. равным лишь половине элементарного поступания всей системы вдоль данной оси (половине ребра основного параллелепипеда системы). Эти оси здесь являются в то же время двойными поворотными осями, тогда как на фиг. 188—190 они были двойными лишь винтовыми.

Каждая из 230 разновидностей симметрии обозначается особым знаком. Существуют обозначения Федорова и Schoenflies'a [1]). Приведем примеры этих обозначений для изображенных у нас систем.

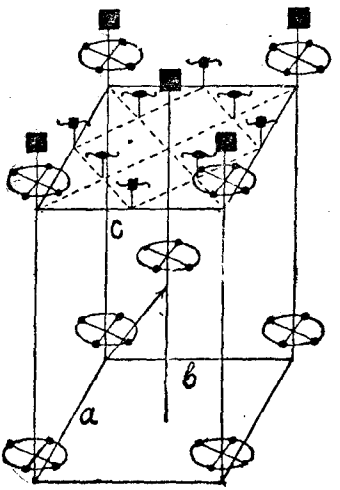
---

[1]) Schoenflies обозначает разновидности симметрии, или, как он их называет, Raumgruppe, различными готическими заглавными буквами с указателями $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{V}_h^4$, $\mathfrak{C}_{3v}^4$ $\mathfrak{D}_{3d}^6$, и т. д.

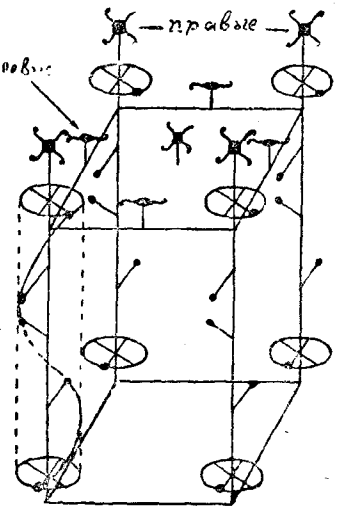
Фигура	179,	180,	181,	182,	183,	184,	186,	187,	188,	189,
об. Федорова	1s	2s	5s	6s	1h	2h	22s	23s	30a	31a
об. Шенфлиса	C_1	C_i	C_s^1	C_s^3	C_s^2	C_s^4	C_4^1	C_4^5	C_4^2	C_4^4



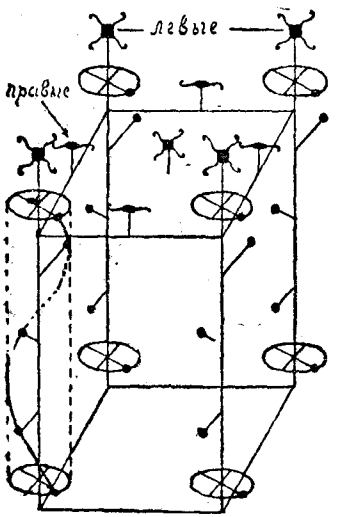
Фиг. 186.



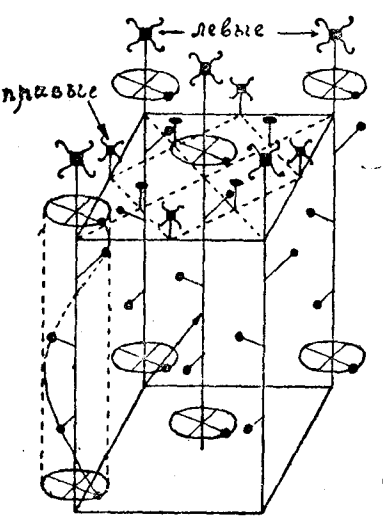
Фиг. 187.



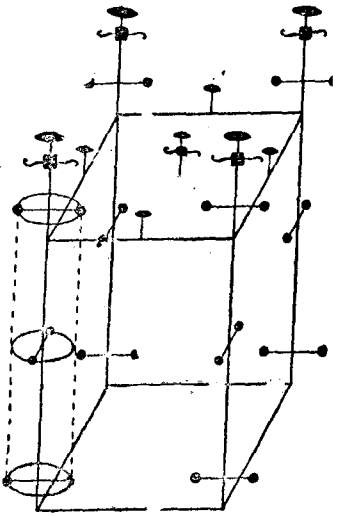
Фиг. 188.



Фиг. 189.



Фиг. 190.



Фиг. 191.

Разновидности тетрагонально-пирамидального вида симметрии, 186 = 22s, 187 = 23s, 188 = 30a, 189 = 31a, 190 = 32a, 191 = 33a.

Фигура	190,	191
об. Федорова	32a	33a
об. Шенфлиса	C_4^6	C_4^3

В последнее время новое изложение системы 230 разновидностей симметрии с выводом всех общих и частных расположений равных точек в них и с полной номенклатурой этих расположений дал Э. Шибольд [1]).

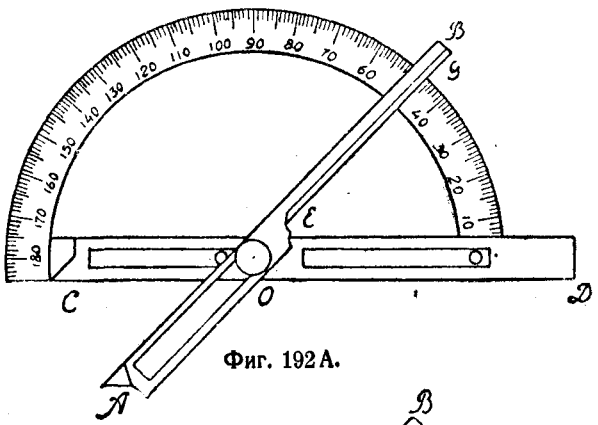
Достаточно полное изложение современного состояния геометрической теории структуры кристаллов с указанием главнейшей литературы, сюда относящейся, можно найти в книге П. Ниггли: «Основные понятия кристаллографии и теории структуры» [2]).

ЧАСТЬ СЕДЬМАЯ.

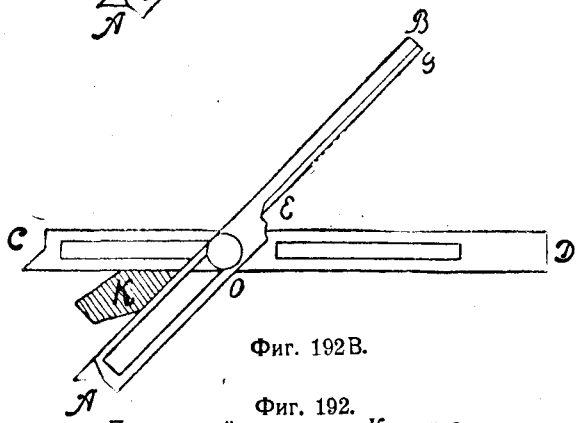
Гониометрия кристаллов.

§ 58. Прикладной гониометр Каранжо.

Как было уже упомянуто (§ 33), первый гониометр, т.-е. инструмент для измерения углов кристалла, был изобретен Каранжо [3]), одним



Фиг. 192 A.



Фиг. 192 B.

Фиг. 192.
Прикладной гониометр Каранжо.

---

[1]) F. Rinne. Zur Nomenklatur der 32 Kristallklassen. E. Schiebold. Über eine neue Herleitung und Nomenklatur der 230 kristallographischen Raumgruppen. Text und Atlas 1929.

[2]) P. Niggli. Kristallographische u. strukturtheoretische Grundbegriffe. 1928.

[3]) Carangeot

из сотрудников Роме-де-л'Иля и изготовлен механиком Вэнсаром [1]). Он изображен на фиг. 192 A и B. Металлические линейки AB и CD снимаются вместе с винтом O со штифта в центре полукруга, прикладываются к измеряемому двугранному или плоскому углу кристалла K (фиг. 192 B) и закрепляются винтом O в этом положении. При этом надо следить, чтобы ребро измеряемого двугранного угла было нормально к плоскости линеек. Затем линейки надеваются отверстием в винте O на штифт в центре полукруга в положении, указанном на фиг. 192 A, и по краю EG, продолжение которого проходит через центр, берется отсчет величины измеренного угла.

Этот гониометр Каранжо применяется и теперь для более крупных кристаллов в особенности, если они имеют матовые грани. Его недостатки: 1) малая точность измерения (обычно не более ½—1°) и 2) невозможность измерять маленькие кристаллы.

§ 59. Отражательный теодолитный гониометр.

Для устранения этих недостатков в 1809 году Волластон воспользовался отражением светового луча от граней кристалла. Не описывая изобретенного им первого отражательного гониометра, мы опишем здесь лишь современное, наиболее усовершенствованное, его видоизменение, а именно: двукружный или теодолитный гониометр. Он был изобретен одновременно и независимо друг от друга Федоровым, Чапским и Гольдшмидтом в 1893 г. На фиг. 193 иллюстрирован принцип устройства всякого отражательного гониометра. Из источника света S направлен луч Sa на ось вращения круга L. И в ту же точку оси вращения направлена оптическая ось зрительной трубы AB. Там же помещается измеряемый кристалл a b c d. Чтобы после отражения от грани кристалла луч Sa попал в трубу BA необходимо и достаточно, чтобы нормаль N_a к грани *a* совпала с биссектрисой угла SaA.

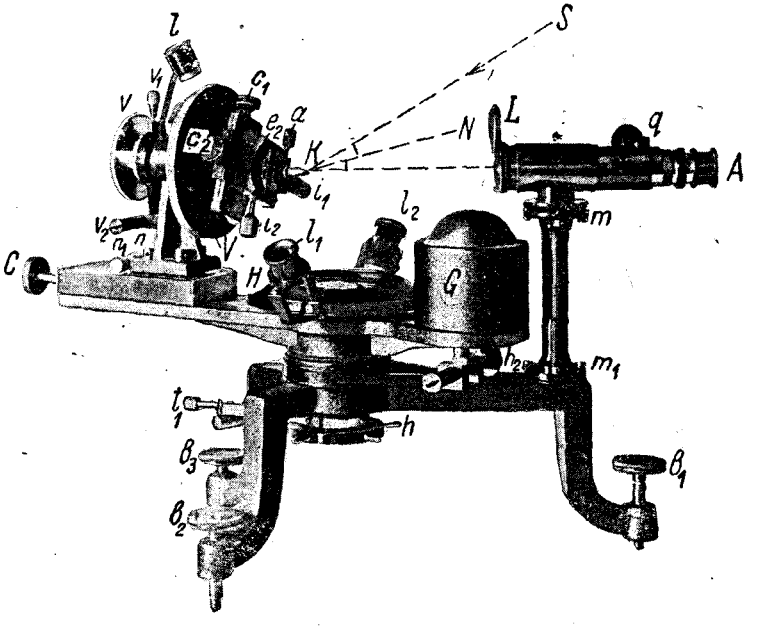
Фиг. 193.
Схема отражательного гониометра.

Гониометр конструируется и устанавливается так, чтобы ось вращения градусного лимба L была нормальна к плоскости SaA. Кристалл ставится в положение, при котором ребро пересечения граней *a* и *b*, угол между которыми измеряют, совпало с осью вращения лимба L. Тогда при вращении круга L вместе с кристаллом по часовой стрелке непременно наступит момент, когда нормаль N_a сольется с биссектрисой угла SaA, как это изображено на фигуре 193. В этот момент глаз увидит в трубу на пересечении ее нитей изображение источника света S. Вращая лимб далее в том же направлении, мы непременно приведем в совмещение с той же биссектрисой нормаль N_b к грани *b*. При этом

[1]) Vinçard.

угол, на который повернется лимб L будет равен углу между нормалями N_a и N_b, который равен $180° - \angle ab$. Итак, измеряя угол поворота лимба посредством нониуса H, узнаем искомый $\angle ab$ между гранями.

Общий вид теодолитного гониометра Федорова изображен на фиг. 194. Здесь зрительная труба обозначена буквой A, горизонтальный лимб H. Источник света находится вдали от гониометра. Если бы мы имели лишь один градусный лимб, как это схематически изображено на фиг. 193, то нам при измерении одного и того же кристалла приходилось бы очень часто переклеивать его на гониометре, потому что для измерения по указанному принципу необходимо, чтобы ребро двугранного угла совпадало (или по крайней мере было бы параллельно) с осью вращения лимба. Чтобы избежать кропотливой работы



Фиг. 194.
Теодолитный (двукружный) отражательный гониометр Федорова.

по переклейке, в гониометре (фиг. 194) имеется второй градусный лимб V, вертикальный, и измерение здесь ведется несколько иначе. Ось вращения лимба V пересекается с осью вращения лимба H и перпендикулярна к ней. Кристалл K с помощью воска или особой пластичной и вязкой мастики укрепляется на ножке, зажимным винтом a. При этом ножка (кристаллоносец) и воск должны быть вместе такой длины, чтобы кристалл K пришелся на оси цилиндрической поверхности e_2, о которой будет сказано ниже. Затем, центрировкой, о которой также будет сказано позже, кристалл K приводится в точку пересечения осей, лимбов V и H, в которой сходятся также луч света и оптическая ось зрительной трубы. Лимб V вместе со своей подставкой и вместе с кристаллом может вращаться вокруг вертикальной оси лимба H.

Наличие двух указанных осей вращения позволяет любое направление в кристалле K, а значит и нормаль к любой его грани привести

в совмещение с биссектрисой N. Действительно, сначала вращаем лимб V. Тогда наша произвольная нормаль будет описывать конус вокруг горизонтальной оси вращения и в некоторый момент непременно придет в плоскость AKS, нормальную к оси лимба H. Прекратив тогда вращение V, станем вращать всю левую часть прибора вместе с лимбом H вокруг вертикальной оси. Тогда будет момент, когда избранная нами произвольная нормаль сольется с биссектрисой N.

Замечая в этом положении отсчеты по обоим лимбам, мы будем точно знать положение нашей нормали, а следовательно и перпендикулярной к ней грани в пространстве. Также можем поступить со всеми остальными гранями. По полученным отсчетам мы можем нанести стереографические проекции всех нормалей на бумагу. А затем по такой проекции графическим путем или вычислениями можем решать самые различные задачи, касающиеся формы данного кристалла. А именно, мы можем:

1) определять сингонию и симметрию кристаллов, даже весьма искаженных ненормальным замедлением роста одних граней и ускорением роста других;

2) определять углы между любыми гранями и ребрами кристалла;

3) определять их символы;

4) определять кристаллографические константы вещества α, β, γ и $a:1:c$ (§ 46).

5) определять символ комплекса (§ 73) и по нему—самое вещество кристалла. И так далее.

Гониометр В. Гольдшмидта отличается от изображенного на фиг. 194 гониометра Федорова, главным образом, наличием, кроме зрительной трубы, еще особой осветительной трубы. Это позволяет приблизить источник света к кристаллу и сделать таким образом освещение ярче, что представляет значительные выгоды.

Вместе с тем, однако, поверка такого гониометра сложнее, чем изображенного на фиг. 194.

§ 60. Подробности конструкции теодолитного гониометра Федорова.

На фиг. 194 отдельными буквами обозначены следующие части, не упомянутые нами ранее. A — окуляр зрительной трубы. L — добавочная линза. На рисунке 194 эта линза представлена выведенной из работы. В таком случае труба установлена на бесконечность, и при надлежащем положении грани кристалла мы видим в трубу изображение отраженного от этой грани источника света S, находящегося достаточно далеко. Если же ввести линзу L, повернув ее вокруг шарнира, скрепляющего ее с трубой, тогда фокусное расстояние трубы укорачивается, и мы видим в нее отчетливо кристалл K.

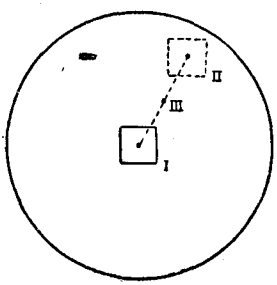
Каждая из двух осей вращения имеет свой закрепляющий винт (h_1[1]) для вертикальной оси с горизонтальным кругом H и v_1 для горизонтальной оси с вертикальным кругом V. После закрепления этих кругов их можно вращать микрометренными винтами (h_2 и v_2 соответственно). Отсчеты по лимбам берутся с помощью луп: l для вертикального лимба V и l_1, l_2 — для горизонтального лимба H. Обычная точность отсчетов

[1]) На фиг. 194 не виден.

с помощью нониусов — 1′. G — противовес, уравновешивающий вертикальный лимб V с его подставкой и с насаженным на него центрирным c_1 c_2 и юстирным i_1 i_2 e_2 а аппаратами, объясненными ниже.

Гониометр устанавливается в темной комнате на маленьком, прочном горизонтальном столике, укрепленном на кронштейнах, наглухо приделанных (вделанных) к капитальной стене здания.

Источник света, напр., сильная матовая электрическая лампа, лучше снабженная удаленной от нее на свое фокусное расстояние большой линзой, заключается в непрозрачную металлическую коробку, чтобы боковой свет от этой лампы не попадал на гониометр и в глаза наблюдателю во время измерений. Лампа эта устанавливается, по возможности, в одной горизонтальной плоскости с горизонтальной осью вращения v гониометра и с оптическою осью его трубы. При этом для возможно меньшего влияния неточности центрировки и толщины кристалла на положение отраженного луча полезно, чтобы гониометр был так повернут по отношению к падающему лучу света SK, чтобы угол AKS был возможно острее, лишь бы голова наблюдателя, смотрящего в окуляр A, не затеняла луча SK. Для того, чтобы уменьшить ошибки наблюдения, зависящие от того, что разные грани кристалла при его вращении не приходят в точности одна на место другой, — необходимо источник света S возможно удалить от кристалла, напр., метров на 6—10. Если размеры комнаты не позволяют этого, — прибегают к помощи зеркал (одного или двух), пуская луч не по прямой линии на кристалл, а по ломаной, которая, как известно, длиннее прямой.



Фиг. 195.
К поверке гониометра.

Как было указано Cc_1c_2 есть центрирный аппарат. Посредством его измеряемый кристалл K приводится в центр обоих вращений: вокруг вертикальной оси и вокруг горизонтальной. Чтобы привести кристалл на горизонтальную ось вращения v ставим ее на глаз по направлению оптической оси трубы. Затем вводим линзу L и кремальеркой q устанавливаем трубу так, чтобы кристалл был ясно виден. Если при этом он оказывается не в центре поля зрения, то винтами c_1 и c_2, двигающими поступательно взаимно-перпендикулярные салазки, мы приводим кристалл в центр поля зрения (на пересечение нитей окулярного креста трубы). Затем поворачиваем лимб V на 180°. Если кристалл находился при этом на оси вращения v, то его изображение в трубе не смещается при этом с окулярного нитяного креста. Если же изображение сместилось (фиг. 195) из положения I в положение II, то это значит, что ось вращения выходит в точке III, расположенной как раз посредине между I и II. Действуя теперь центрирными винтами c_1 и c_2, приводим изображение кристалла в положение III. Расстояние I, III указывает нам, что горизонтальная ось вращения и оптическая ось трубы не пересекаются, и дает нам меру их расхождения. Поправить эту погрешность можно, меняя положение первой оси (v) винтами n, n_1, или положение трубы винтами m и m′. При таких поправках надо замечать положение в поле зрения трубы не целого кристалла, а какой-либо одной точки на нем или на ином предмете, наклеенном вместо него. Обычно, однако, эта погрешность в гониометрах бывает ничтожна.

Чтобы привести затем кристалл на вертикальную ось вращения, поворачиваем всю подвижную часть прибора (VG) вокруг вертикальной

оси в такое положение, чтобы горизонтальная ось вращения стала приблизительно перпендикулярна к оптической оси трубы.

Если при этом мы увидим в трубу (при введенной линзе L), что кристалл помещается не в центре поля зрения, то винтом C приводим его туда, двигая кристалл вместе с лимбом V и его подставкой поступательно или в сторону вертикальной оси круга H или от нее. Повернув затем всю подвижную часть VG на 180° вокруг вертикальной оси, смотрим, насколько и куда сошел кристалл с центра поля зрения.

Середина отрезка этого схождения есть та точка, в которой должно быть изображение кристалла, если он находится на вертикальной оси вращения. Обычно это схождение незначительно, и при центровке достаточно ограничиться уничтожением половины схождения кристалла с вертикальной нити, действуя винтом C. Эта погрешность, если она существует, зависит от того, что гониометр не выверен на взаимное пересечение и перпендикулярность его трех осей, вертикальной, горизонтальной и оптической. Как уже было сказано, эта поверка совершается с помощью винтов nn_1 и mm'.

Кроме центрирного аппарата Cc_1c_2 в гониометре имеется еще так называемый юстирный [1]) аппарат [2]) $i_1i_2e_2(e_1)$. Назначение его состоит в том, чтобы правильно, надлежащим образом устанавливать, или, как принято говорить,—юстировать кристалл по отношению к горизонтальной оси вращения. Юстировка есть такое вращение кристалла, после которого заданное его направление, например, ось призмы или нормаль к какой-либо грани и т. под. становится параллельно горизонтальной оси гониометра. Для этого устроены двое салазок с цилиндрической поверхностью, при чем ось цилиндра одних салазок перпендикулярна к оси цилиндра других салазок. Одни из этой пары салазок e_2 ясно видны на рисунке. При вращении винта i_2 они скользят по поверхности воображаемого цилиндра, часть которого они представляют. При этом кристалл K, с ними скрепленный, наклоняется или свободным концом вверх или свободным концом вниз. Центр подлежащей измерению части кристалла при этом почти или вовсе не сходит с места, так как длина кристаллоносца подобрана так, что этот центр находится на оси цилиндра e_2, о чем было сказано выше. Но для того, чтобы совместить какое-либо ребро или нормаль в кристалле с заданным направлением горизонтальной оси v недостаточно одного вращения (наклонения). Поэтому над салазками e_2 имеются другие салазки e_1, не видимые ясно на рисунке, также цилиндрические, но с осью цилиндра, перпендикулярною к оси салазок e_2. Салазки e_1 приводятся в движение винтом i_1, видимым на фиг. 194 под кристаллом K. С помощью салазок e_1 кристалл можно поворачивать вокруг некоторой внутренней своей точки свободным концом вперед или назад. Действуя салазками e_1 и e_2 последовательно, мы можем уже всегда (по принципу теодолита) избранное направление кристалла совместить с горизонтальной осью прибора. Правда, салазки e_1, e_2 допускают вращения кристалла на небольшие углы, но если при наклейке кристалла на кристаллоносец уже заранее поставить его на глаз правильно, то юстирными салазками затем без труда можно добиться окончательно достаточно точной юстировки. О практических приемах этой операции будет сказано ниже.

---

[1]) От латинского justus — правильный, надлежащий (также законный, справедливый).

[2]) Винт i_1 виден на фиг. 194 под кристаллом K.

Винт t_1 закрепляет неподвижно алидаду с нониусами лимба H, его роль будет далее объяснена. Внизу h — радиальные рукоятки, с помощью которых вращают вертикальную ось. Однако, удобнее вращать за противовес G.

§ 61. Поверка гониометра.

Для точного измерения кристалла необходимо, чтобы гониометр был: 1) правильно конструирован и 2) правильно установлен.

1) Правильная конструкция гониометра заключается:

1а) в одинаковости делений лимбов,

1б) в отсутствии эксцентриситета лимбов,

1в) в отсутствии параллакса нитей трубы.

Затем:

1г) во взаимной перпендикулярности вертикальной и горизонтальной осей вращения прибора,

1д) в приблизительной перпендикулярности оптической оси трубы к вертикальной оси вращения,

1е) в возможно точном схождении вертикальной и горизонтальной осей вращения гониометра и оптической оси трубы в одной точке.

2) Правильная установка гониометра сводится к установке его по отношению к источнику света так, чтобы биссектриса KN угла SKA между падающим лучом и оптическою осью трубы была перпендикулярна к вертикальной оси вращения.

Рассмотрим все эти поверки по порядку.

1а) Совмещая 0 какого-либо одного нониуса последовательно с разными делениями лимба, замечаем, какое еще деление нониуса наилучше совпадает с делением лимба. Техника изготовления лимбов сейчас такова, что обычно при этой поверке никакой разницы в отсчетах не обнаруживается и лишь кое-где она поднимается до 1 деления нониуса. Это означает, что различные деления лимба одинаковы или почти одинаковы друг с другом. А потому эта поверка нужна лишь в случае особо точных работ.

1б) Эксцентриситет лимба уничтожается взятием среднего из отсчетов по двум нониусам. Обычно в не очень изношенных гониометрах и эта погрешность не превосходит одного деления нониуса и в не особенно ответственных работах можно ограничиваться отсчетом по одному нониусу.

1в) Эту поправку достигаем, во-первых, вынимая окуляр из трубы и вдвигая или выдвигая его переднюю линзочку так, чтобы крест нитей был ясно виден нашему глазу, смотрящему через окуляр на свет. Во-вторых, после этого мы должны настолько вдвинуть окуляр в трубу, чтобы нити не съезжали с изображения весьма удаленного предмета, когда мы слегка передвигаем в стороны смотрящий в трубу глаз. В качестве удаленного предмета можно воспользоваться источником света S, рассматривая его изображение в какой-либо хорошо образованной грани кристалла или наклеенной вместо последнего стеклянной пластинке.

Гораздо важнее следующие поверки.

Поверку 1г), т.-е. взаимную перпендикулярность осей вращения лучше производить после поверки 2), т.-е. после установки гониометра).

1д) В гониометре, изображенном на фиг 194 теоретически перпендикулярность оси трубы к вертикальной оси вращения — не обязательна. Однако, она желательна, по крайней мере грубо, так как это облегчает

установку прибора по отношению к сигналу. В виду того, что на фабрике эта перпендикулярность устанавливается в достаточной степени,— можно этой поверки не производить.

1е) Очень точного схождения 3 осей в одной точке—центре прибора также не требуется. Важно лишь, чтобы при вращении кристалл не сходил слишком с центра поля зрения, и во всяком случае не уходил из поля зрения. Для поверки этого наблюдение ведется при введенной лупе L и лучше не над кристаллом, а над кончиком наклеенной вместо кристалла иглы.

Этот конец иглы мы центрируем с помощью винтов C, c_1, c_2, как было описано выше. Если при этом наблюдается в трубу значительное отклонение обоих центров вращения от окулярного креста (см. выше описание центрировки), то сначала исправляем отхождение оптической оси трубы от вертикальной оси вращения: наполовину винтом C, наполовину перемещением трубы (винты m). Затем исправляем отхождение горизонтальной оси вращения от оптической оси трубы: наполовину винтами c_1, c_2, наполовину передвижением горизонтальной оси (винты n_1, n). При этих передвижениях как у винтов m, так и у винтов n стараемся не изменять наклона осей vK и AK, а передвигаем их поступательно, т.-е., оставляя параллельными самим себе, сохраняя движения наклона для более важной поверки на перпендикулярность этих осей к вертикальной оси вращения.

Повторим, что если схождение конца иглы (или замеченной вершины кристалла) не особенно значительно, то лучше этой поправки не производить вовсе до поверки перпендикулярности осей.

2) Теперь переходим к правильной установке гониометра по отношению к источнику света. Она должна быть сделана так, чтобы биссектриса N (фиг. 194) угла между падающим лучом и осью трубы стала перпендикулярно к вертикальной оси вращения. Если стол, на котором стоит гониометр приблизительно горизонтален, опорные его винты b_1, b_2, b_3 приблизительно одинаково вывинчены, в конструкции прибора нет грубых дефектов и источник света S расположен приблизительно в горизонтальной плоскости, проходящей через пересечение трех осей гониометра, — то условие, которое стремится достигнуть эта поверка будет приблизительно выполнено. Нам надо лишь сравнительно небольшими поправками добиться возможно точного выполнения требуемого условия.

Для этого наклеиваем взамен кристалла хорошо отполированное стеклышко параллельно (на глаз) вертикальной оси. Затем вращаем подвижную часть VG прибора вокруг вертикальной оси так, чтобы стеклышко стало приблизительно перпендикулярно к биссектрисе KN. Тогда, выведя в сторону линзу L мы должны увидеть в трубу отраженное от стеклышка изображение источника S, так как труба без линзы L, как было сказано, установлена на бесконечность, т.-е. на ясное видение далекого предмета. Это изображение источника S, видимое в трубе, называется сигналом. Если сигнала не будет видно в поле зрения трубы, то это означает что наши приблизительные установки стеклышка, подвижной части VG и гониометра вообще слишком не точны. Путем их постепенного исправления поворотами вокруг вертикальной и горизонтальной осей прибора добиваемся того, чтобы сигнал появился в поле зрения. После этого юстирными винтами i_1, i_2, изменяющими наклон стеклышка, приводим сигнал, глядя в трубу, на крест ее окуляра и в этом положении закрепляем винтом v_1 горизонтальную ось.

Теперь можно утверждать, что отражающая плоскость стеклянной пластинки строго перпендикулярна к биссектрисе KN. Если бы вертикальная ось гониометра была уже нормальна к KN, то в этот момент стеклянная пластинка была бы строго параллельна вертикальной оси. При повороте вокруг последней на 180° пластинка пришла бы в положение, параллельное своему первоначальному, т.-е. была бы снова нормальна к биссектрисе KN, а потому сигнал снова расположился бы на окулярном кресте. Поэтому поступаем так: берем в первом положении отсчет по лимбу H и затем поворачиваем VG вокруг вертикальной оси ровно на 180°. Если, глядя в трубу, заметим, что сигнал сместился (можем воспользоваться опять фигурой 195) из I во II, то средняя между ними точка поля зрения будет тем положением, из которого сигнал никуда бы не сдвинулся, если бы он там находился до вращения. Приводим его туда юстирными винтами i_1, i_2. После этого пластинка будет приведена в положение, параллельное вертикальной оси. И если мы добьемся того, чтобы сигнал совместился с окулярным крестом, не изменяя взаимного положения 1) пластинки и вертикальной оси и 2) вертикальной оси и оси трубы, то поверка будет выполнена.

Для этого мы, глядя в трубу, 1) наводим сигнал на вертикальную нить окуляра микрометренным движением (h_1 — (невидимый на рисунке) закрепить, h_2 — вращать) вокруг вертикальной оси и 2) приводим сигнал по вертикальной нити в центр окулярного креста, изменяя наклон всего прибора по отношению к неподвижному лучу SK посредством вращения опорного винта b_1, находящегося под трубой.

После этого повторяем всю ту же операцию еще и еще раз: вращаем VG вокруг вертикальной оси обратно на 180°, смотрим, не сошел ли сигнал с креста и т. д., пока не добьемся возможно полного несхождения.

1г) Нам остается теперь описать отложенную нами поверку перпендикулярности горизонтальной оси к вертикальной. Для этого устанавливают горизонтальную ось вращения точно параллельно биссектрисе KN. Если это будет сделано, то тогда горизонтальная ось будет поставлена нормально к вертикальной, потому что:

KN $\perp$ вертикальной оси (по предыдущей поверке), горизонтальная ось $\parallel$ KN.

Следовательно: горизонтальная ось $\perp$ вертикальной оси.

Поступаем так. Переклеиваем стеклянную пластинку так, чтобы она стала приблизительно нормально к кристаллоносцу, а вместе с тем и к горизонтальной оси v. Поворачиваем подвижную часть прибора VG вокруг вертикальной оси так, чтобы горизонтальная ось стала приблизительно параллельно биссектрисе KN. Тогда при удаленной линзе L, глядя в трубу, мы увидим сигнал. Если этого нет, исправляем нашу приблизительную установку вращений v и h небольшими движениями в ту или другую стороны, пока не увидим сигнала. Затем наводим его юстирными винтами i_1, i_2 точно на центр окулярного креста. Закрепив теперь вертикальную ось винтом h_1 (не видимым на рисунке 194), замечаем отсчет на лимбе V, поворачиваем его на 180°. Если бы пластинка была установлена точно нормально к горизонтальной оси v, то положение ее отражающей плоскости от этого вращения не изменилось бы, а следовательно, не изменилось бы и положение сигнала в трубе. В то же время в таком положении нормаль к пластинке будет совпадать с биссектрисой KN.

Если же сигнал сойдет при таком повороте с окулярного креста из положения I в положение II (фиг. 195), то мы сначала приводим его в среднюю точку III юстирными винтами i_1, i_2 и тем устанавливаем пла-

стинку более строго нормально к горизонтальной оси. Затем же винтами n, n_1 доводим сигнал до пересечения нитей и тем устанавливаем ось vK параллельно биссектрисе KN.

Операцию эту также приходится повторить 2—3 раза.

Так как при этом приходится смещать горизонтальную ось, то после этого надо вновь проверить ее пересекание с вертикальной осью и с осью трубы (поверка 1е).

Из всех поверок гониометра наиболее часто приходится проделывать поверку 2, т.-е. поверку его установки по отношению к источнику света, так как самое небольшое сдвигание гониометра или оседание его на опорных винтах или перемещение источника света или промежуточного осветительного зеркала (§ 60 стр. 90) — разверяет установку аппарата.

§ 62. Юстировка кристалла.

Прежде чем измерять кристалл, надо его наклеить, центрировать и юстировать. Уже при наклейке надо знать, как мы хотим его юстировать.

О наклейке и центрировке было достаточно сказано в § 61. Остановимся здесь на юстировке.

Чаще всего кристалл располагают на гониометре так, чтобы или 1) ось какого-нибудь хорошо развитого пояса (в частности ось призмы) совпадала с горизонтальной осью вращения прибора или 2) какая-либо хорошо развитая грань (в частности пинакоид) стала нормально к той же горизонтальной оси вращения. Первый способ есть юстировка по зоне, второй — юстировка по грани. Реже приходится применять юстировку по оси пирамиды или по биссектрисе двугранного угла.

Юстировка по зоне производится так. Наклеив кристалл (по возможности не руками, а пинцетом, чтобы не грязнить граней) возможно точнее (на глаз) на кристаллоносец, вставляем последний в его гнездо при отжатом винте a, так, чтобы одна пара граней зоны, по которой ведется юстировка, стала приблизительно нормально к одному из юстирных винтов, напр., i_1. Закрепляем в этом положении кристаллоносец винтом a. Затем вращением горизонтальной оси v приводим винт i_1 в горизонтальное положение и тем самым — избранную пару граней зоны в вертикальное положение. Тогда, вращая всю подвижную часть VG вокруг вертикальной оси до положения $vK \perp KN$, мы, очевидно, можем привести эту пару граней в положение, нормальное к биссектрисе KN. В этот момент мы увидим в трубу (при выведенной в сторону линзе L) сигнал, отраженный от одной из этих граней зоны. Если не увидим, — то небольшими вращениями вокруг горизонтальной и вертикальной оси добиваемся этого. Закрепляя эти оси винтами v_1 и h_1 (последний на рисунке не виден), приводим затем сигнал точно на пересечение нитей окуляра микрометренными винтами v_2 и h_2. Поворачиваем затем (отпустив винт v_1) кристалл вокруг горизонтальной оси v на 180°, взяв в начале и в конце поворота отсчеты по лимбу v. Если отражавшая грань зоны была строго параллельна горизонтальной оси, то после этого оборота на 180° сигнал не сместится с креста нитей, так как отражать будет теперь новая грань зоны, противоположная и параллельная первоначальной. Обычно это сразу не случается: сигнал сходит, при чем, если гониометр хорошо выверен, то схождение наблюдается при этом только с вертикальной нити, сигнал остается на гори-

зонтальной нити. Тогда юстирным винтом i_1 приводим сигнал на середину между крестом и новым его положением. Этим движением пара отражающих граней ставится параллельно горизонтальной оси вращения. Если мы теперь микрометренным винтом h_2 повернем подвижную часть прибора CVG вокруг вертикальной оси настолько, чтобы сигнал пришел опять в центр креста, то этим движением мы поставим отражающую грань, а следовательно, и лежащие в ней теперь горизонтальную ось вращения vK и ось зоны (ребро призмы) нормально к биссектрисе KN. После этого от поворота вокруг оси vK сигнал не должен смещаться с креста. Обычно такого несхождения удается добиться, повторив 2—3 раза описанную операцию: приведение сигнала на центр + поворот на 180° вокруг vK + устранение смещения сигнала наполовину винтом i_1 (изображен на фиг. 194 под кристаллом K), наполовину винтом h_2.

Теперь надо кристалл наклонить посредством юстирного аппарата так, чтобы поставленная уже правильно пара плоскостей не изменила своего положения, а лежащие в ней ребра, параллельные оси зоны, стали параллельно горизонтальной оси вращения. Для этого надо лишь, не трогая винта i_1, действовать винтом i_2, параллельным паре правильно поставленных граней.

Чтобы знать, насколько и в какую сторону надо вращать винт, воспользуемся таким соображением. Если бы ось зоны уже была параллельна оси vK (которая у нас расположена нормально к KN), то при вращении вокруг этой оси vK все грани юстирующей зоны последовательно приходили бы в положение, нормальное к биссектрисе KN. По этому отраженные от них сигналы последовательно проходили бы через точку пересечения нитей окуляра, идя во время вращения вдоль вертикальной нити. Если мы этого не наблюдаем, то отклонение какого-либо из этих сигналов от пересечения нитей зависит лишь от отклонения оси зоны от оси вращения. Это отклонение мы должны исправить нацело юстирным винтом i_2, приведя им сигнал точно в центр поля зрения (или на вертикальную нить). Лучше при этом из всех сигналов данной юстируемой зоны воспользоваться тем, который получается от грани, возможно близкой к перпендикулярности к винту i_2.

Когда эта операция проделана, тогда при вращении вокруг vK все сигналы зоны должны проходить точно через центр окулярного креста, если только гониометр хорошо выверен, и кристалл образован правильно, т.-е. все грани юстируемой зоны действительно параллельны одному и тому же направлению оси зоны.

Обычно же вполне точного прохождения всех сигналов по вертикальной нити не наблюдается.

Для того, чтобы один из них проходил через крест, надо винт i_2 повернуть больше, для другого сигнала — меньше. Приходится брать на глаз среднее положение между этими крайними. Тогда часть сигналов данной зоны проходит правее нити, часть — левее, кроме тех двух сигналов, с которых мы начинали юстировку, и которые точно идут через центр поля зрения.

Юстировка по грани. Наклеиваем кристалл так, чтобы данная грань была возможно точно (на-глаз) перпендикулярна к оси vK. Отпустив винт h_1 (невидимый на рис. 194), закрепляющий вертикальную ось, вращаем VG вокруг этой оси настолько, чтобы горизонтальная ось Kv стала возможно точно по продолжению биссектрисы NK. В этот момент мы должны увидеть в трубу (без линзы L) сигнал, отраженный от юстируемой грани. Если этого нет, то небольшими движениями вокруг верти-

кальной оси прибора и небольшими вращениями вертикально поставленного юстирного винта i_2 добиваемся этого. Как только увидим сигнал,—приводим его, действуя обоими юстирными винтами i_1, i_2 точно на крест окуляра. В этот момент юстируемая грань точно нормальна к биссектрисе KN.

Закрепляем винтом h_1 вертикальную ось. Вращаем кристалл вокруг горизонтальной оси. Если бы кристалл уже был юстирован правильно, т.-е. отражающая грань стояла бы уже нормально к оси vK, то она при этом вращении не изменила бы своего положения, и сигнал не сдвинулся бы с пересечения нитей. Если же сигнал сдвинется, то при хорошо выверенном гониометре это сдвижение может произойти при повороте на 180° лишь вправо и влево, но не вверх и вниз. Половину этого сдвижения устраняем юстирным винтом i_2, стоящим горизонтально, а другую половину — микрометренным винтом h_2.

Если есть маленькая сдвижка с горизонтальной нити, зависящая, как сказано, от неточностей поверки и установки гониометра, то ее наполовину устраняем другим юстирным винтом i_2. С остающейся половиной погрешности приходится мириться, если она незначительна, а в противном случае надо проделать проверки 2 и 1г.

Здесь, как и в случае юстировки по зоне, приходится обычно повторять операцию поворота на 180° и подкручивание винтов 2-3 раза, чтобы добиться лучших результатов.

§ 63. Ход измерения кристалла.

Когда кристалл наклеен, центрирован и юстирован, — можно приступить к его измерению и нанесению результатов измерения на стереографическую сетку [1]).

Сетку эту следует представлять себе совмещенной своим центром с точкой пересечения всех осей гониометра. Плоскость сетки мыслим нормально к горизонтальной оси вращения.

Тогда эта ось будет совпадать с осью проекций сетки. После юстировки кристалла мы без труда можем привести это направление в совмещение с биссектрисой KN. Для этого при юстировке по грани достаточно поворотом вокруг вертикальной оси совместить сигнал юстированной грани с крестом окуляра. А при юстировке по поясу (зоне) достаточно вокруг вертикальной оси повернуть vG точно на 90° от того положения, при котором был юстирован пояс, т.-е., при котором сигналы граней юстированного пояса проходили все по вертикальной нити при вращении вокруг горизонтальной оси vK.

Если мы теперь заметим отсчет по лимбу H в этом положении, т.-е. при совпадении vK с KN, то любой поворот вокруг вертикальной оси даст нам угол ρ—полярное расстояние того направления в кристалле, которое после поворота совпадает с KN. Беря разность отсчетов по лимбу H до этого поворота (в начальном положении) и после этого поворота мы получаем ρ в градусах и минутах (в наиболее точных гониометрах — даже в секундах).

После этого нетрудно понять, что отсчетами по лимбу V мы непосредственно получаем долготу φ того направления в кристалле, которое

[1]) О стереографических сетках см. литературу, указанную на стр. 14. Вообще при изложении этого отдела я предполагаю знакомство читателя со стереографическими проекциями.

в данном положении прибора совмещено с KN. Начальным меридианом для долгот φ при этом служит меридиан тех направлений, которые приходят последовательно в совмещение с KN при вращении вокруг вертикальной оси тогда, когда отсчет по лимбу V показывает 0°00′00″.

Для того, чтобы и для полярных расстояний ρ не приходилось делать вычитаний двух отсчетов друг из друга, а можно было бы отсчитывать ρ сразу на лимбе H, надо предварительно установить в соответствующее положение нониусы этого лимба. А именно, надо повернуть их вокруг вертикальной оси так, чтобы при начальном положении, когда vK и KN совпадают, отсчет по лимбу H был равен 0°00′00″. Для этого поворота достаточно воспользоваться микрометренным движением алидады: при закрепленном винте t_1 вращаем микрометренный винт t_2 в нарезке, связанной наглухо с задней ножкой гониометра (винт t_2 на рисунке 194 не виден). При этом лимб, а с ним вместе и сигнал стоит на месте, а движутся лишь нониусы круга H. Глядя в лупы l_1 и l_2, подводим нониусы так, чтобы отсчет был равен точно 0°00′00″.

Если такая поправка сделана, то тогда измерение состоит в том, чтобы совмещать с пересечением окулярных нитей сигналы, даваемые различными гранями кристалла и отсчитывать для каждой грани по кругу V долготу φ, по кругу H полярное расстояние ρ. По этим данным стереографическая проекция на сетке составляется без труда.

Иногда грань кристалла, несмотря на тщательную ее установку нормально к KN, не дает сигнала. Такие грани устанавливаются в надлежащее положение (нормальное к KN) по отсвету: задвигается линза L, тогда в трубу видна отражающая грань, а не более удаленный источник света S; по наибольшему блеску отражающей грани заключают о наибольшем приближении ее нормали к биссектрисе KN. Понятно, что наблюдение по отсвету гораздо менее точно, чем по сигналу.

Но и точность наблюдений по сигналам бывает различна, смотря по качествам отражающей грани. Если она представляет совершенную плоскость, то мы видим в трубу один отчетливый сигнал — изображение источника счета. Но нередко бывают вместо этого видны от одной грани 2, 3 и более близко друг к другу расположенных сигнала, что зависит от того, что наблюдаемая грань заменена или сопровождается вицинальными (см. стр. 48) гранями. Иногда сигнал растянут в полосу или превращен в расплывчатое пятно и т. д., что зависит от того, что взамен плоской грани мы имеем сложную поверхность часто с закономерным рельефным рисунком на ней или даже неправильную кривую поверхность.

В виду всего этого, полезно при записях измерений на полях сетки, кроме № грани, ее φ и ρ обозначать еще и категорию ее сигнала и ее величину.

Для оценки сигнала употребляется пятиступенчатая скала (фиг. 196):

Знак на сетке

Фиг. 196.

1 категория — один яркий отчетливый сигнал.

2 » — » тусклый сигнал.

3 » — несколько сигналов или одно или несколько пятен, не выходящих из поля зрения.

┼ 4 категория — то же — выходящие из поля зрения.

• 5 » — сигнала нет, грань устанавливается по отсвету.

Для размеров граней следует также применять пятиступенчатую скалу:

I категория — весьма сильно развитые грани, грань всецело преобладает над другими по величине (грани пинакоида у листоватых и чешуйчатых кристаллов или грани призмы у волосистых и игольчатых кристаллов).

II » — сильно развитые габитусные грани, которые определяют собою габитус (общий вид, облик) кристалла, при одновременном наличии, однако, и других довольно крупных граней (пинакоид у табличатых кристаллов, призма у столбчатых).

III » — средние по величине грани.

IV » — мало развитые грани, мелкие, но заметные простым глазом.

V » — весьма мало развитые — заметные лишь в лупу или в микроскоп.

Из этих пяти категорий чаще всего встречаются средние 3.

При записях полезно вести также зарисовку формы каждой грани, отчетливо видимой в трубу при введении линзы L.

Поочередную установку всех граней нормально к KN (фиг. 194) мы производим для более крупных граней на глаз, а для более мелких пользуемся трубой с введенной линзой L, при чем виден весь кристалл в увеличенных размерах. Чтобы не пропустить какой-либо мелкой или весьма мелкой грани приходится делать систематический обзор кристалла, постепенно меняя φ и поворачивая для каждого φ часть VG так, чтобы изменить ρ для каждого меридиана от $-90°$ через 0 до $+90°$.

В результате описанных в этом параграфе операций мы получаем точную гномо стереографическую проекцию граней кристалла с соответственными записями по такой форме:

№ грани	Размер ее	Форма	Категория сигнала	φ	ρ		
					I нон.	II нон.	Среднее

Если у лимба V, имеются тоже 2 нониуса, то колонку для φ разделяем на такие же 3 части, на какие разделена колонка для ρ.

После этого можно приступить к определению символов.

§ 64. Точные методы определения символов.

Из того, что было изложено в части V (стр. 60) о кристаллографических символах, известно, что для определения символов какой-либо грани данного кристалла мы должны знать взаимное положение трех координатных кристаллографических осей, единичной грани и определяемой грани. Вместо положения трех координатных осей достаточно знать положение трех координатных граней, потому что их пересечение дает координатные оси.

Таким образом, имея в результате измерения кристалла гномостереографическую проекцию его граней, мы должны прежде всего определить сингонию кристалла и установить его, т.-е., руководствуясь правилами установки (§ 45 и след.), выбрать среди его граней координатные (100), (010), (001) и единичную (111). После этого все без исключения остальные грани кристалла получают уже строго определенные символы. Итак, четырем упомянутым граням мы даем символы наперед,— тогда символы всех остальных из этого условия определяются.

Можно доказать (и это будет далее сделано), что для определения символов можно назначить наперед символы не этих именно четырех главных граней (100), (010), (001) и (111), а любых других четырех, но обязательно таких, из которых никакие три не принадлежат одной зоне (см. фиг. 140 и 141 к закону Вейса и объяснения к ним на стр. 54).

Это очень важно, потому что иногда в кристалле не бывает тех граней, которые мы обязаны, согласно правилам установки, выбрать за координатные и единичные.

Эти соображения понадобятся нам при всех способах определения символов.

Таких способов существует много. Одни из них удобнее в одних случаях, другие в других. Здесь будут описаны следующие:

1. Метод поясов.
2. Метод косинусов (метод Вульфа).
3. Метод отрезков (Аншелеса — Доливо-Добровольского.)

Для определения символов надо хорошо знать стереографические проекции, которые мы предполагаем здесь известными [1]).

§ 65. Метод поясов.

Этот способ в значительной мере основан на законе Вейса.

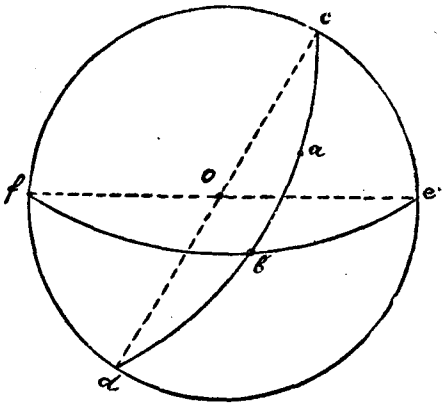
Теорема 1. Если a и b (фиг. 197) суть гномостереографические проекции двух граней кристалла, то дуга большого круга cabd есть гномостереографическая проекция ребра пересечения этих граней.

Доказательство. Если a и b по условию суть гномостереографические проекции граней, то они же суть стереографические проекции нормалей OA и OB к этим граням. Плоскость OcABd, проходящая чрез эти нормали (в пространстве) пройдет чрез центр проекций, а потому ее стереографическая проекция изобразится некоторой опирающейся на диаметр дугой cabd окружности.

Эта проекция плоскости непременно пройдет чрез проекции a и b двух нормалей, лежащих в этой плоскости, потому что проектирующие лучи нормалей будут входить в число лучей конуса, проектирующего плоскость. Теперь заметим, что плоскость OcABd, проходящая через

[1]) См. выноску на стр. 14.

нормали OA и OB к двум данным граням, будет перпендикулярна к каждой из этих граней, следовательно, и к ребру их пересечения. А отсюда следует, что дуга cabd (стереографическая проекция этой плоскости OcABd) есть гномостереографическая проекция ребра пересечения двух граней, коих проекциями являются a и b.



Фиг. 197.

Теорема 2. Если дуги cabd и ebf (фиг. 197) суть гномостереографические проекции двух ребер кристалла, то точка их пересечения есть гномостереографическая проекция действительной или возможной грани того же кристалла, параллельной обоим указанным ребрам.

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы.

Теорема 3. Если $(p_1\ p_2\ p_3)$ — символ одной грани и $(q_1\ q_2\ q_3)$ — символ другой грани, то символ ребра их пересечения $[r_1\ r_2\ r_3]$ найдется так:

$$r_1 : r_2 : r_3 = (p_2 q_3 - p_3 q_2) : (p_3 q_1 - p_1 q_3) : (p_1 q_2 - p_2 q_1) \quad . \ . \ . \ (A).$$

Так как ребро $[r_1\ r_2\ r_3]$ лежит и в той и в другой грани (или параллельно им), то здесь дважды применима теорема стр. 63:

$$p_1 r_1 + p_2 r_2 + p_3 r_3 = 0 \quad \text{и} \quad q_1 r_1 + q_2 r_2 + q_3 r_3 = 0.$$

Определяя из этой системы однородных линейных уравнений отношение: $r_1 : r_2 : r_3$, мы и получим то, что упомянуто в условии.

Теорема 4. Если $[r_1\ r_2\ r_3]$ и $[s_1\ s_2\ s_3]$ суть символы двух ребер кристалла, то символ $(p_1 p_2 p_3)$ грани чрез них проходящей, или им параллельной найдется так:

$$p_1 : p_2 : p_3 = (r_2 s_3 - r_3 s_2) : (r_3 s_1 - r_1 s_3) : (r_1 s_2 - r_2 s_1) \ . \ . \ . \ . \ (B).$$

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы.

Выражения правых частей равенств (A) и (B) удобнее всего получать так (берем для примера равенство A). Пишем один под другим символы данных граней, повторяя в конце два первых индекса и отбрасывая первые.

$$\begin{array}{c|c} p_1 & p_2\ p_3\ p_1\ p_2 \\ & \times\ \times\ \times \\ q_1 & q_2\ q_3\ q_1\ q_2 \end{array}$$

И производим затем перекрестное умножение, беря первое произведение с плюсом, второе с минусом:

$$(p_2 q_3 - p_3 q_2) : (p_3 q_1 - p_1 q_3) : (p_1 q_2 - p_2 q_1).$$

Получаем таким образом вторую часть равенства (A).

Пример. Даны символы двух граней (210) и (340), найти символ ребра их пересечения.

Пишем:

$$\begin{array}{c|c} 2 & 1\ 0\ 2\ 1 \\ & \times\ \times\ \times \\ 3 & 4\ 0\ 3\ 4 \end{array},$$

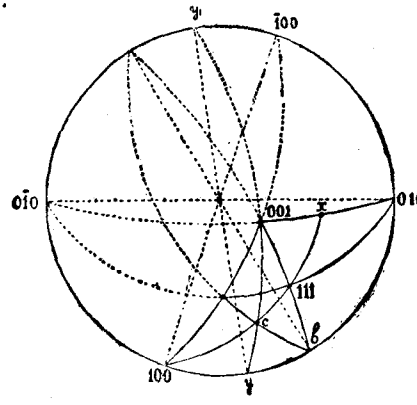
откуда:

$$r_1 : r_2 : r_3 = (1.0 - 0.4) : (0.3 - 2.0) : (2.4 - 1.3) = 0 : 0 : 5 = 0 : 0 : 1.$$

Итак, искомый символ ребра будет [001].

Задача.

Пусть дана гномостереографическая проекция граней кристалла (фиг. 198), на которой изображены 6 граней. Четырем из них мы придаем наперед символы (100), (010), (001) и (111), а символы двух — x и y, требуется определить.



Фиг. 198.
Определение символов методом поясов.

Замечаем, что если мы проведем одну дугу большого круга чрез (100) и (111), а другую чрез (010) и (001), то согласно теореме 1 этого параграфа дуги эти изобразят гномостереографические проекции ребер пересечения соответственных граней, или иначе осей двух поясов, определяемых каждой из упомянутых пар граней. А точка пересечения двух проведенных дуг будет гномостереографической проекцией грани, проходящей через оба ребра, или иначе — принадлежащей обоим поясам. Замечаем, что как раз в этой точке пересечения лежит одна из искомых граней x. Ее символ поэтому определяем так. Сначала находим символы проведенных поясов, или зон (по теореме 1):

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{1} & 0\ 0\ 1\ 0 \\ & \times\ \times\ \times \\ 1 & 1\ 1\ 1\ 1 \end{array} = [0\ \bar{1}\ 1]$$

$$\begin{array}{c|c} 0 & 1\ 0\ 0\ 1 \\ & \times\ \times\ \times \\ 0 & 0\ 1\ 0\ 0 \end{array} = [1\ 0\ 0].$$

Затем находим символ грани x (по теореме 2):

$$\begin{array}{c|c} 0 & \bar{1}\ 1\ 0\ \bar{1} \\ & \times\ \times\ \times \\ 1 & 0\ 0\ 1\ 0 \end{array} = (\mathbf{0\ 1\ 1}).$$

Несколько труднее найти символ грани y, так как здесь приходится проводить больше поясов, пока удается добраться от граней с известными символами к грани с искомыми. А именно, здесь последовательный ход определения будет таков:

1) пояс (100) (001) + пояс (010) (111) = грань a,
2) пояс (001) (111) + пояс (100) (010) = грань b,
3) пояс ab + пояс (100) (111) = грань c,
4) пояс (100) (010) + пояс (001) c = грань y.

1) $\begin{array}{c|l} 1 & 0\,0\,1\,0 \\ 0 & \times\times\times \\ 0 & 0\,1\,0\,0 \end{array} = [0\ \bar{1}\ 0$ $\qquad$ $\begin{array}{c|l} 0 & 1\,0\,0\,1 \\ 1 & \times\times\times \\ 1 & 1\,1\,1\,1 \end{array} = [1\ 0\ \bar{1}]$

$$\begin{array}{c|l} 0 & \bar{1}\,0\,0\,\bar{1} \\ 1 & \times\times\times \\ 1 & 0\,\bar{1}\,1\,0 \end{array} = (101) = \text{грань a.}$$

Аналогично действуя для строчек 2, 3, 4, выписываем здесь эти действия сокращенно

2) $(001)\ (111) = [\bar{1}10]$ $\qquad$ $(100)\ (010) = [001]$

$[\bar{1}10]\ [001] = (110) = $ грань b

3) $(101)\ (110) = [\bar{1}11]$ $\qquad$ $(100)\ (111) = [0\bar{1}1]$

$[\bar{1}11]\ [0\bar{1}1] = (211) = $ грань c

4) $(100)\ (010) = [001]$ $\qquad$ $(001)\ (211) = [\bar{1}20]$

$[001]\ [\bar{1}20] = (\bar{2}\bar{1}0)$

$(210) = $ грань y.

В последнем действии раньше чем написать «грань y» мы изменили у всех полученных индексов знаки на обратные. По этому поводу заметим следующее.

При любом из наших перекрестных умножений знаки индексов результатного символа зависят от того, какой из исходных двух символов мы напишем вверху. Если порядок исходных символов мы переменим, то знаки всех индексов результатного символа изменятся на обратные. Геометрически это означает, что из каждых двух поясов (или ребер) мы можем вывести 2 грани, им параллельные: одну с символом $(p_1\ p_2\ p_3)$ и другую с символом $(\bar{p}_1\ \bar{p}_2\ \bar{p}_3)$, противолежащую первой.

Поэтому в результате вышепроделанных нами действий мы вывели как символ грани y, так и символ грани y_1, ей противолежащей. Чтобы решить, который символ принадлежит грани y, проще всего смотреть на чертеж данной проекции. На фигуре 198, например, мы видим, что проекции координатных граней (100), (010), (001) с противолежащими им $(\bar{1}00)$, $(0\bar{1}0)$ и $(00\bar{1})$ образуют на гемисфере 4, а на всей сфере 8 сферических треугольников. Несложными рассуждениями можно убедиться в том, что все грани, проекции коих попадают в один из таких треугольников, имеют такие же знаки у индексов своего символа, какие имеют над соответственными индексами вершины треугольника. Так, например, если грань попадает в треугольник (100), (010), (001), то все три индекса ее символа будут положительны. А если грань находится в треугольнике (100), $(0\bar{1}0)$, (001), то она будет иметь первый и третий индексы положительные, а второй — отрицательный.

Из этих соображений для грани y фиг. 198 мы должны взять первый и второй индексы положительные, а для y_1 — те же индексы отрицательные.

Следствие из предыдущей задачи. Символ грани x, лежащей в пересечении двух поясов (010), (001) и (100), (111) был нами найден при решении задачи как (011), т.-е. его можно получить почленным сложением символов (010) и (001) — двух граней, между которыми x лежит. Точно то же правило действительно для граней a и b (фиг. 198).

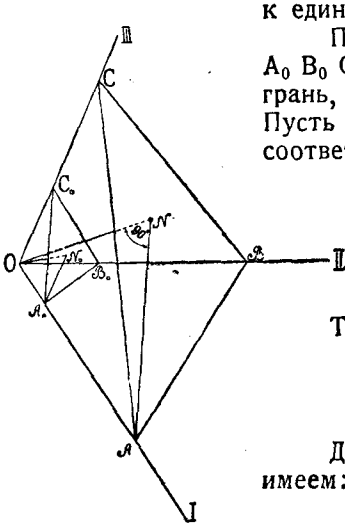
Достоинства и недостатки способа поясов. Этот метод очень хорош, когда наблюденные грани кристалла хорошо укладываются в немногие и быстро получаемые из координатных граней пояса.

Этот способ вполне применим также и тогда, когда нам известно положение не координатных и единичной граней, а любых четырех с какими-угодно символами, лишь бы из этих четырех никакие три не лежали бы в одном поясе (иначе проведением через них поясов мы не сможем вывести ни одной новой грани).

Недостатками способа являются: а) сравнительная сложность черчения, хотя при работе на сетке Вульфа этот недостаток не ощущается; б) сложность построений и подсчетов для граней общего положения, для которых приходится проводить много поясов; в) малая точность для таких граней [1]).

§ 66. Метод косинусов (разработанный Г. В. Вульфом [2]).

Теорема косинусов. Индексы символа грани прямо пропорциональны косинусам углов, которые составляет нормаль к данной грани с соответственными осями координат. При этом, однако, за единицу измерения косинусов для каждой координатной оси надо принимать косинус угла, который образует с данной осью нормаль к единичной грани.



Фиг. 199.
Теорема косинусов.

Пусть (фиг. 199) I, II, III — координатные оси, $A_0\,B_0\,C_0$ — единичная грань с нормалью ON_0, ABC — грань, коей символ ищется, ее нормаль пусть — ON. Пусть углы с координатными осями I, II, III будут соответственно:

для нормали N — $\lambda,\ \mu,\ \nu$
» » N_0 — $\lambda_0,\ \mu_0,\ \nu_0$.

Обозначим, наконец, искомый символ грани ABC чрез $(p_1\,p_2\,p_3)$.

Тогда требуется доказать, что

$$p_1 : p_2 : p_3 = \frac{\cos\lambda}{\cos\lambda_0} : \frac{\cos\mu}{\cos\mu_0} : \frac{\cos\nu}{\cos\nu_0}\,?$$

Доказательство. По определению символа имеем:

$$p_1 : p_2 : p_3 = \frac{1}{\frac{OA}{OA_0}} : \frac{1}{\frac{OB}{OB_0}} : \frac{1}{\frac{OC}{OC_0}} = \frac{OA_0}{OA} : \frac{OB_0}{OB} : \frac{OC_0}{OC} \quad \ldots\ldots\ (1).$$

Выразим отрезки OA, OB, OC через косинусы углов λ, μ, ν, а отрезки OA_0, OB_0, OC_0 через косинусы углов λ_0, μ_0, ν_0.

Из ΔONA, прямоугольного при точке N, имеем:

$$\left.\begin{array}{ll} & OA = ON/\cos\lambda \\ \text{также из } \Delta ONB: & OB = ON/\cos\mu \\ \text{» из } \Delta ONC: & OC = ON/\cos\nu \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ (II).$$

---

[1]) Некоторые подробности о способе поясов можно найти в книге Е. С. Федорова. Курс кристаллографии. 1901 г., стр. 95—103 и 135—138.

[2]) Г. В. Вульф. Руководство по кристаллографии. Варшава, 1904.

Так же имеем:

$$\left.\begin{aligned} OA_0 &= ON_0/\cos\lambda_0 \\ OB_0 &= ON_0/\cos\mu_0 \\ OC_0 &= ON_0/\cos\nu_0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(III)}.$$

Деля почленно (III) на (II), получаем:

$$\left.\begin{aligned} \frac{OA_0}{OA} &= \frac{ON_0}{ON}\cdot\frac{\cos\lambda}{\cos\lambda_0} \\ \frac{OB_0}{OB} &= \frac{ON_0}{ON}\cdot\frac{\cos\mu}{\cos\mu_0} \\ \frac{OC_0}{OC} &= \frac{ON_0}{ON}\cdot\frac{\cos\nu}{\cos\nu_0} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(IV)}.$$

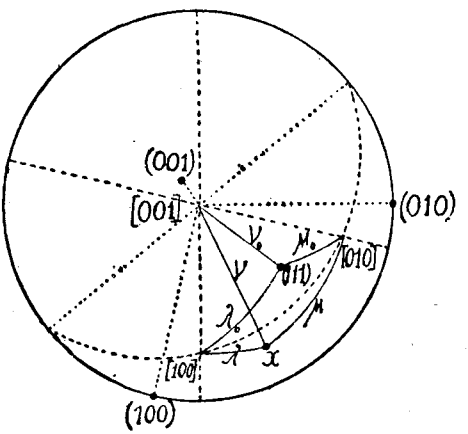
Подставляя значения $\frac{OA_0}{OA}$, $\frac{OB_0}{OB}$, $\frac{OC_0}{OC}$ из (IV) в (I) и сокращая на $\frac{ON_0}{ON}$ имеем:

$$p_1 : p_2 : p_3 = \frac{\cos\lambda}{\cos\lambda_0} : \frac{\cos\mu}{\cos\mu_0} : \frac{\cos\nu}{\cos\nu_0}.$$

Что и надо было доказать.

Определение символов методом косинусов. Пусть (фиг. 200) нам дана проекция кристалла. На ней имеются гномостереографические проекции координатных граней (100), (010) и (001) и единичной (111). Требуется найти символ произвольной грани того же кристалла, если гномостереографическая проекция ее x известна.

В методе косинусов, как это вытекает из предыдущей теоремы, нам надо знать углы, образуемые нормалью к определяемой грани, а также и нормалью к единичной грани с осями координат, т.-е. с ребрами пересечения координатных граней. Стереографическая проекция нормали к данной грани есть x, стереографическая проекция нормали к единичной грани отмечена на фиг. 200 символом (111). Нам надо найти стереографические проекции всех трех координатных осей: I-ой, II-ой, III-ей.



Фиг. 200.
Определение символов методом косинусов.

Для этого строим стереографические проекции трех координатных граней по известным их гномостереографическим проекциям, отмеченным на фиг. 200 символами (100), (010) и (001). Эти стереографические проекции суть дуги больших кругов, коих полюсами являются соответственные гномостереографические проекции. Они показаны на фиг. 200 черточным пунктиром.

Так как точки (100) и (010) лежат на окружности проекций, то отвечающие этим точкам дуги обратятся в диаметры, идущие через центр проекций (дуги бесконечного радиуса). Эти три черточных линии пересекаются в трех точках (что в пространстве отвечает тому, что три координатные плоскости пересекаются в трех координатных осях). Эти три точки и являются стереографическими проекциями координатных осей, что можно доказать аналогично тому, как была выше доказана

теорема 1 (§ 65). А именно проекции (010) и (001) дают в пересечении стереографическую проекцию [100], дуги (100) и (001) — дают [010], и наконец (100) и (010) — дают [001].

Теперь измеряем на проекции углы λ, μ, ν, между нормалью к грани x и тремя координатными осями (измерение легко производится на сетке Вульфа, или при помощи стереографического транспортира на непрозрачных сетках). Затем также измеряем углы λ_0, μ_0, ν_0, между нормалью к грани (111) и теми же координатными осями. Взяв косинусы этих углов и вычислив по таблицам натуральных тригонометрических величин, или по таблицам логарифмов величины этих косинусов, берем затем двойные отношения последних:

$$p_1 : p_2 : p_3 = \frac{\cos\lambda}{\cos\lambda_0} : \frac{\cos\mu}{\cos\mu_0} : \frac{\cos\nu}{\cos\nu_0}.$$

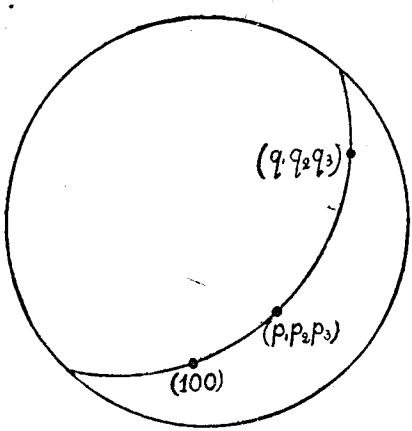
Сократив насколько возможно правую часть на общих множителей, мы получим искомый символ [1]).

Достоинства и недостатки метода косинусов.

Теоретические основания этого способа весьма просты. Если пользоваться заранее приготовленными графиками для вычисления по данным углам α и α_0 отношения $\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_0}$, то и арифметические выкладки при этом способе значительно упрощаются. Существенным недостатком здесь является трудность обратного перехода: от символов грани к ея проекции.

§ 67. Метод отрезков

(метод Аншелеса—Доливо-Добровольского [2]).



Фиг. 201.
Символы показанных на фигуре граней связаны зависимостью: $p_2 : p_3 = q_2 : q_3$.

Лемма. Если две грани с символами $(p_1\ p_2\ p_3)$ и $(q_1\ q_2\ q_3)$ лежат в одном поясе с какой-либо из координатных граней, например, с (100) (фиг. 201), то отношение индексов символа по тем осям, по которым данная координатная грань имеет нули в своем символе, — одинаково для обоих остальных данных граней. Т.-е. в случае фиг. 201, требуется доказать, что

$$\frac{p_2}{p_3} = \frac{q_2}{q_3} \ ?$$

Доказательство. Символ пояса, проекция которого проведена на фиг. 201, находим по общему правилу (стр. 101):

$$\begin{array}{c|c} 1 & 0\ 0\ 1\ 0 \\ & \times\ \times\ \times = [0\ \overline{p_3}\ p_2]. \\ p_1 & p_2\ p_3\ p_1\ p_2 \end{array}$$

---

[1]) Детали применения этого метода и числовые примеры можно найти в книге: Е. Е. Флинт. Практикум по кристаллографии Моск. Акад. Изд. 1924 г. (литографировано).

[2]) Вад. В. Доливо-Добровольский. Простой графический метод определения символов граней кристалла на стереографической проекции. Зап. Гор. Инст., т. VII, вып. 3. 1929

Грань $(q_1\ q_2\ q_3)$ лежит в этом поясе. Следовательно (стр. 63), должно быть удовлетворено равенство:

$$q_1 \cdot 0 + q_2 \overline{p_3} + q_3 p_2 = 0,$$

откуда

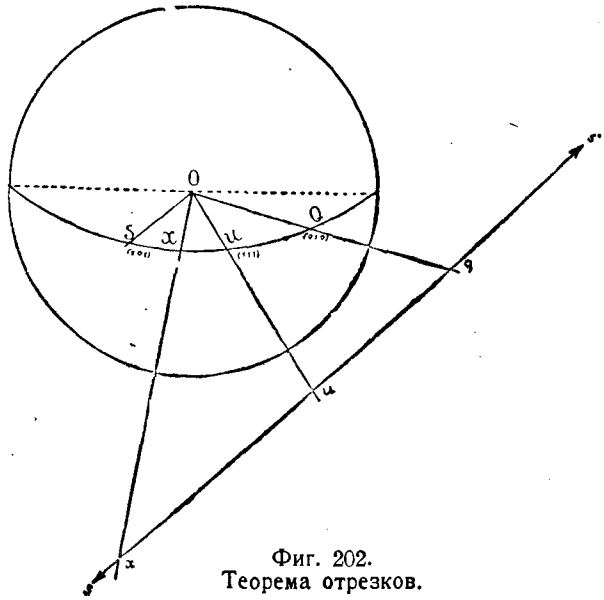
$$q_3 p_2 = q_2 p_3$$

или

$$\frac{p_2}{p_3} = \frac{q_2}{q_3}.$$

Эта теорема, собственно говоря, относится к методу поясов, но она очень облегчает также вывод и применение метода отрезков, почему мы ее здесь и привели.

Теорема 1. (Теорема отрезков). Если даны гномостереографические проекции четырех граней, лежащих в одном поясе, из которых



Фиг. 202.
Теорема отрезков.

одна Q' — координатная, например (010), другая U' — единичная (111), третья S' «нульдвуединичная» (имеющая в символе две единицы и нуль) и четвертая X' — определяемая, с искомым символом $(x_1\ x_2\ x_3)$, — то этот символ можно найти графически так (фиг. 202).

Проведем лучи через центр проекций O и через гномостереографические проекции Q, U, S, X четырех указанных граней.

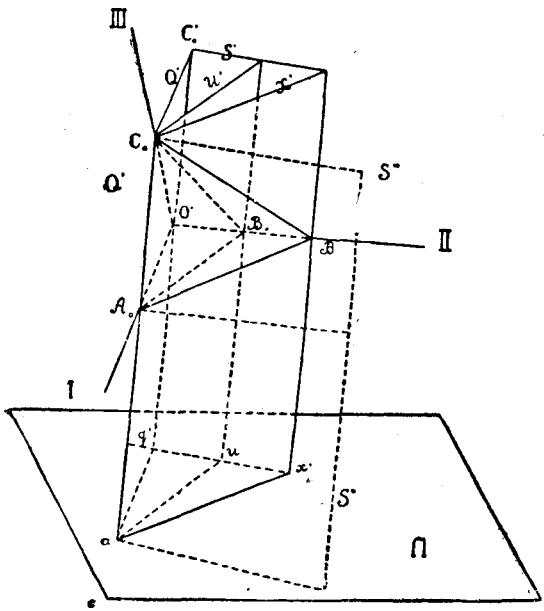
Проводим прямую ss', параллельную лучу OS, идущему чрез проекцию S нульдвуединичной грани. Другие проведенные лучи встречают эту прямую в точках q, u, x. Тогда искомый символ $(x_1\ x_2\ x_3)$ найдется из соотношения:

$$x_1 : x_2 : x_3 = 1 : \frac{qu}{qx} : 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

где $\frac{qu}{qx}$ надо поставить на том месте, на котором стоит единица в символе координатной грани Q [1]).

Доказательство. Изобразим для наглядности упомянутые в условии теоремы четыре плоскости Q′ (координатную), U′ (единичную), S′ (нульдвуединичную), X′ (определяемую) не в стереографической проекции, как на фиг. 202, а в виде перспективного чертежа 203.

Пусть на этом чертеже O′ I II III система кристаллографических осей координат. В ней грань 1O′III обозначим через Q′, ее символ—(010). Пусть грань $A_0 B_0 C_0$ есть единичная грань (111), которую обозначаем через U′. Эти две грани пересекаются в ребре $A_0 C_0$. Все другие грани, принадлежащие к одному поясу с этими двумя упомянутыми, должны проходить через ребро $A_0 C_0$, или быть параллельны ему. Проводим через $A_0 C_0$ грань X′, она же $A_0 B C_0$, которой символ нужно определить. Проведя затем через начало координат O′ прямую $O' C_0'$ параллельно $A_0 C_0$, и через $O' C_0'$ и O′II плоскость S′, мы заметим, что эта плоскость будет иметь символ (101), потому что грань S″, ей параллельная и проходящая чрез $A_0 C_0$, делает по I и III осям отрезки $O'A_0$ и $O'C_0$, т.-е. единичные, а по II оси — отрезок ∞.



Фиг. 203.
Первая часть доказательства теоремы отрезков.

Из этого чертежа сразу находим, согласно определению символа:

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1}{\frac{O'A_0}{O'A_0}} : \frac{1}{\frac{O'B}{O'B_0}} : \frac{1}{\frac{O'C_0}{O'C_0}} =$$

$$= 1 : \frac{O'B_0}{O'B} : 1 \quad . \quad . \quad (2).$$

Эта формула (2) вполне аналогична формуле (1), справедливость которой надо доказать.

Чтобы перейти от перспективной фигуры 203 к проекции (фиг. 202) заметим прежде всего, что плоскость S′, параллельная A_0C_0 пересечется с плоскостями Q′, U′, X′ в ребрах, параллельных A_0C_0, потому что эти ребра лежат в плоскости S′, параллельной A_0C_0 и потому нигде с ребром A_0C_0 не встретятся, это во-первых. И во-вторых каждое из этих ребер лежит с A_0C_0 в одной плоскости. Все эти взаимно параллельные 4 ребра изображены на фиг. 203 в виде идущих сверху вниз прямых.

Далее, для перехода к стереографической проекции, рассечем пояс плоскостей Q′, U′, X′, S′ плоскостью проекций II (фиг. 203), той самой,

---

[1]) Теорема эта была, в несколько ином виде, доказана проф. О. М. Аншелесом, как частный случай одной более общей теоремы, которую мы здесь не приводим. То доказательство, которое мы излагаем ниже, несколько его изменяя, дано В. В. Доливо-Добровольским в цитированной выше работе.

на которой начерчена фиг. 202. И пусть плоскости Q′, U′, X′, S дадут на плоскости проекций П следы:

$$aq',\ au',\ ax' \text{ и } q'x'.$$

Вследствие параллельности прямых

$$O'q' \parallel B_0u' \parallel Bx'$$

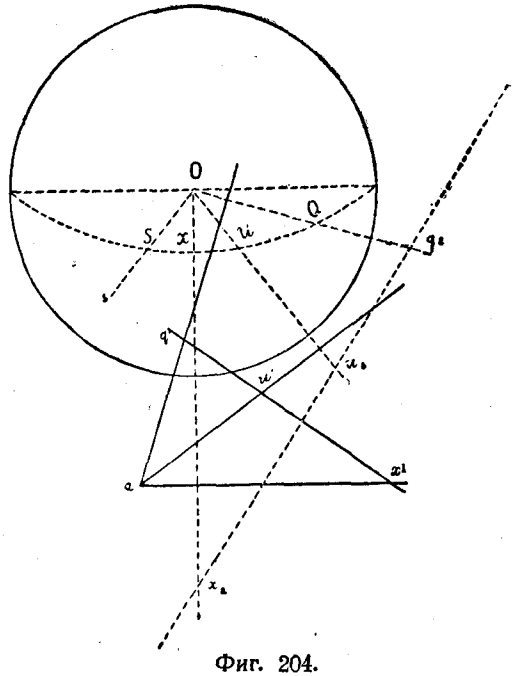
имеем

$$\frac{O'B_0}{O'B} = \frac{q'u'}{q'x'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

И из (2) и (3) :

$$x_1 : x_2 : x_3 = 1 : \frac{q'u'}{q'x'} : 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Итак, для определения символа $(x_1\ x_2\ x_3)$ следовало бы как-либо определить отношение отрезков $q'u' : q'x'$, которые делают следы плоскостей (010), (111), $(x_1x_2x_3)$ на следе $q'\ x'$ плоскости (101). Однако, сделать это непосредственно после измерения кристалла, когда мы имеем обычно сетку с гномостереографическими проекциями граней,—затруднительно. Поэтому заменим раньше отношение $q'u' : q'x'$ некоторым другим, ему равным. Для этого изобразим то, что получается на плоскости П (фиг. 203) не в перспективе, а в том виде, когда плоскость П совмещена с плоскостью чертежа. Тогда на фиг. 204 линии aq′, au′, ax′, x′q′ пусть представляют те же прямые фиг. 203. В плоскости П лежит где-либо центр проекций O (фиг. 204). Опустим из него нормали Oq_2, Ou_2, Ox_2, Os на линии aq′, au′, ax′, x′q′.



Фиг. 204.
Конец доказательства теоремы отрезков и 2-й вариант определения символов методом отрезков.

Если бы мы теперь провели четыре плоскости, параллельные плоскостям Q′, U′, X′, S′, через центр проекций O, то они пересекли бы плоскость проекций по диаметрам, соответственно параллельным следам aq′, au′, ax′, x′q′. Нормали, восставленные из O к этим диаметрам, слились бы тогда с нормалями Oq_2, Ou_2, Ox_2, Os. Поэтому на этих нормалях должны находиться гномостереографические проекции Q, U, X, S соответствующих граней.

Теперь нетрудно доказать, что если мы проведем произвольную прямую $q_2x_2 \parallel OS$, откуда $q_2x_2 \perp q'x'$, так что q_2x_2 пересекает лучи Oq_2, Ou_2, Ox_2 — тогда искомое отношение .

$$\frac{q'u'}{q'x'} = \frac{q_2u_2}{q_2x_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

Это следует из подобия двух пар треугольников:

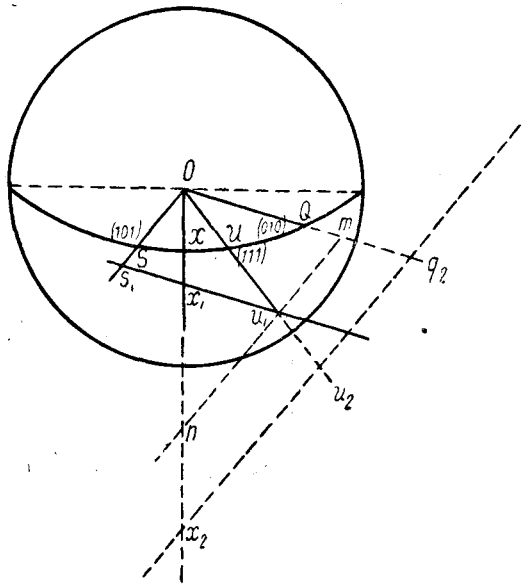
$$\Delta\, Oq_2 u_2 \sim \Delta\, aq' u'$$
$$\Delta\, Ou_2 x_2 \sim \Delta\, au' x'$$

вследствие взаимной перпендикулярности их соответственных сторон.

Из равенства (4) и (5) следует, что

$$x_1 : x_2 : x_3 = 1 : \frac{q_2u_2}{q_2x_2} : 1\ ,$$

что и требовалось доказать (см. форм. (1) стр. 107).



Фиг. 205.
2-й и первый варианты определения символов методом отрезков.

Этот способ нахождения символа называется «2-м вариантом метода отрезков».

Следствие 1. (Первый вариант метода отрезков).

Символ той же грани X можно найти также следующим образом (фиг. 205). Проводим те же лучи OQ, QU, OX, OS через центр проекций O и через данные гномостереографические проекции граней Q, U, X, S. Проводим произвольную прямую $s_1 u_1 \parallel$ $\parallel$ лучу OQ, идущему через проекцию координатной грани Q. Тогда символ грани X найдем так:

$$x_1 : x_2 : x_3 = 1 : \frac{s_1x_1}{s_1u_1} : 1\ . \quad (6).$$

Чтобы это доказать, надо доказать, что

$$\frac{s_1x_1}{s_1u_1} = \frac{q_2u_2}{q_2x_2}$$

Проведем через точку u_1 прямую $mn \parallel q_2x_2$. Тогда

$$\frac{q_2u_2}{q_2x_2} = \frac{mu_1}{mn} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7).$$

Далее вследствие того, что

$$x_1u_1 \parallel Om$$

имеем

$$\frac{mu_1}{mn} = \frac{Ox_1}{On} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8).$$

А вследствие того, что

$$u_1n \parallel Os_1$$

имеем

$$\frac{Ox_1}{On} = \frac{s_1x_1}{s_1u_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9).$$

Окончательно из (7), (8), (9) получаем

$$\frac{q_2u_2}{q_2x_2} = \frac{s_1x_1}{s_1u_1}.$$

Следствие 2. (3-й вариант метода отрезков).

Тот же символ ($x_1\ x_2\ x_3$) можно найти следующим путем (фиг. 206). Проводим те же лучи OQ, OU, OX, OS. Проводим прямую $q_3 x_3 \parallel$ лучу QU, идущему через единичную грань. Тогда

$$x_1 : x_2 : x_3 = 1 : \frac{s_3x_3}{s_3q_3} : 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10).$$

Действительно мы знаем, что

$$x_1 : x_2 : x_3 = 1 : \frac{q_2u_2}{q_2x_2} : 1;$$

где $q_2 x_2 \parallel$ OS (второй вариант). Докажем, что

$$\frac{q_2u_2}{q_2x_2} = \frac{s_3x_3}{s_3q_3}.$$

Вследствие того, что

$$\Delta\, q_2 u_2 O \sim \Delta\, Os_3 q_3,$$

имеем:

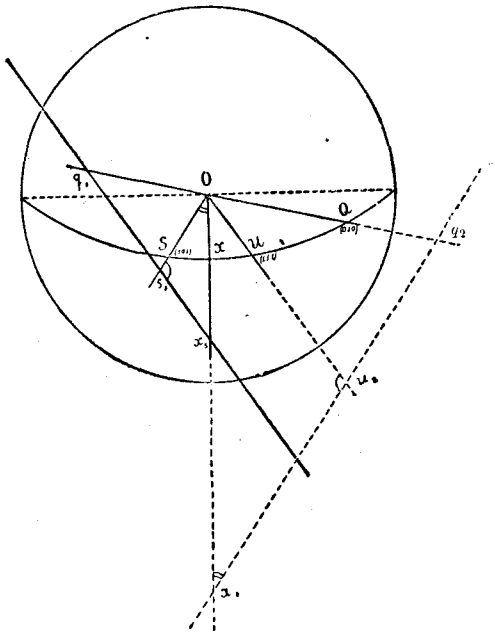
$$\frac{q_2u_2}{Ou_2} = \frac{Os_3}{s_3q_3} \quad \ldots (11).$$

А вследствие того, что

$$\Delta\, Ou_2 x_2 \sim \Delta\, x_3 s_3 O,$$

имеем:

$$\frac{u_2x_2}{Ou_2} = \frac{Os_3}{s_3x_3} \quad \ldots (12).$$



Фиг. 206.
2-й и 3-й варианты определения символо методом отрезков.

Деля почленно (11) на (12), получаем:

$$\frac{q_2u_2}{u_2x_2} = \frac{s_3x_3}{s_3q_3},$$

откуда

$$\frac{q_2u_2}{q_2u_2 + u_2x_2} = \frac{s_3x_3}{s_3x_3 + s_3q_3}.$$

Иначе:

$$\frac{q_2u_2}{q_2x_2} = \frac{x_3s_3}{x_3q_3},$$

что и требовалось.

Замечание 1. Четвертый вариант метода отрезков, когда прямая отрезков проводится параллельно лучу OX, идущему через проекцию определяемой грани, не так удобен для определения символов, как три первые варианта, а потому здесь не излагается.

Замечание 2. Сопоставляя все три варианта, имеем (фиг. 205 и 206).

$$x_1 : x_2 : x_3 = 1 : \frac{s_1 x_1}{s_1 u_1} : 1 = 1 : \frac{q_2 u_2}{q_2 x_2} : 1 = 1 : \frac{x_3 s_3}{x_3 q_3} : 1 \ . \ . \ . \ . \ (13).$$

В частном случае чертежей 205 и 206 имеем:

Фиг. 205.	Фиг. 205.	Фиг. 206.
$s_1 x_1 = 9$ мм	$q_2 u_2 = 19{,}5$ мм	$x_3 s_3 = 11$ мм
$s_1 u_1 = 22{,}5$ мм	$q_2 x_2 = 49$ мм	$x_3 q_3 = 27{,}5$ мм
$s_1 x_1 : s_1 u_1 = 9 : 22{,}5$	$q_2 u_2 : q_2 x_2 = 19{,}5 : 49$	$x_3 s_3 : x_3 q_3 = 11 : 27{,}5$ мм

Следовательно

$$x_1 : x_2 : x_3 = 1 : \frac{1}{2{,}5} : 1 = 5 : 2 : 5 \ .$$

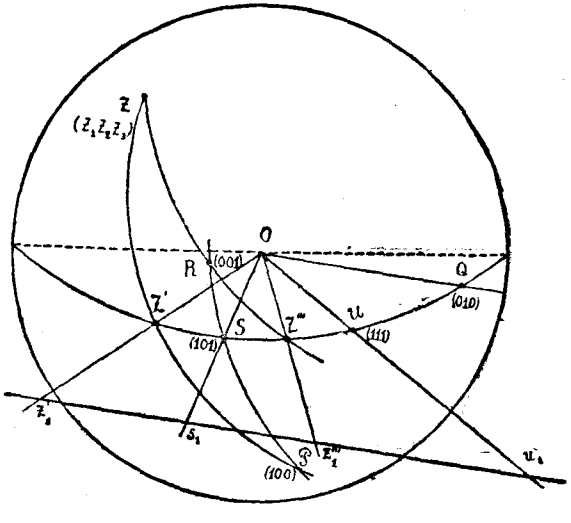
Окончательно, символ грани x будет:

(525).

Формула (13) с фигурами 205 и 206 и служит для определения символов граней пояса QU, идущего через какую-либо координатную грань Q и единичную U.

Для определения же символа (z_1 z_2 z_3) грани общего положения служит изложенная ниже в задаче 1 комбинация леммы, доказанной на стр. 106, и только что изложенного метода.

Замечание 3. Три варианта решения даются здесь потому, что при некоторых расположениях данных 4 проекций граней может оказаться, например, что первый вариант применять или невыгодно, или вовсе нельзя, вследствие того, что точки на прямой пояса, например x_2, на фиг. 205, получаются слишком далеко за пределами бумаги. Тогда следует прибегнуть ко 2-му или 3-му вариантам.



Фиг. 207.
Определение символа грани общего положения методом отрезков.

Задача 1. Определить при помощи метода отрезков символ $(z_1 z_2 z_3)$ грани Z общего положения, когда известны гномостереографические проекции координатных граней P (100), Q (010), R (001), единичной U (111) и определяемой Z.

Для сведения этой задачи к предыдущей теореме прежде всего (фиг. 207) проводим пояс чрез грани Q (010) и U (111), в котором мы уже умеем определять символы.

Затем проводим пояс PR, т.-е. (100) (001). В пересечении поясов QU и PR получаем грань S (101). Символ ее легко получается методом поясов, или таким рассуждением.

Грань S лежит в поясе (100), (001). Но две эти грани пересекаются в [010], следовательно, S чрез нее проходит, а потому будет иметь по этой оси индексом 0. Далее: грань S лежит в поясе (010) (111). Следовательно, по лемме, изложенной на стр. 106, символ грани S $(p_1 p_2 p_3)$ будет иметь отношение $p_1 : p_3$ такое же как у грани (111), т.-е. $p_1 : p_3 = 1 : 1$. Поэтому символ грани S есть (101).

Теперь проводим чрез определяемую грань Z два пояса: один через P (100), другой чрез R (001). Эти пояса, пересекаясь с главным поясом QUS, дадут точки Z', Z'''. Эти две вспомогательные точки суть гномостереографические проекции некоторых двух возможных граней, ибо лежат эти точки в пересечении гномостереографических проекций двух поясов. Если мы обозначим искомый символ грани Z через $(z_1 z_2 z_3)$, то для граней Z' и Z''' на основании леммы стр. 106 будем иметь такие символы:

для Z' . . . . . $(z_3 z_2 z_3)$
» Z''' . . . . . $(z_1 z_2 z_1)$

Потому что, например для грани Z', как лежащей в поясе Z (100), согласно лемме, отношение индексов по II-ой и III-ей оси будет такое же как и у Z, т.-е. $z_2 : z_3$. А так как Z лежит еще в поясе (010) (111) — отношение индексов по I и III оси будут равно 1:1 (как у 111).

Следовательно, отношение всех индексов будет $z_3 : z_2 : z_3$.

Итак, если мы определим символы граней Z' и Z''', то затем легко найдем и искомый символ $(z_1 z_2 z_3)$ грани Z.

Для нахождения же символов граней Z' $(z_3 z_2 z_3)$ и Z''' $(z_1 z_2 z_1)$ мы можем применить один из вариантов метода отрезков, например, 1-ый (фиг. 207). Проводим лучи OQ, OU, OZ''', OS, OZ' и затем прямую пояса $u_1 z_1' \parallel OQ$. Отмечаем ее точки встречи u_1, z_1''', s_1, z_1' с лучами. Тогда найдем символы.

Для Z'

$$z_3 : z_2 : z_3 = 1 : \frac{s_1 z_1'}{s_1 u_1} : 1 .$$

Для Z'''

$$z_1 : z_2 : z_1 = 1 : \frac{s_1 z_1'''}{s_1 u_1} : 1 .$$

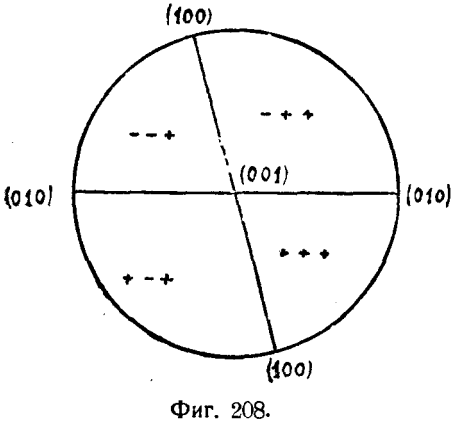
Откуда

для Z
$$z_1 : z_2 : z_3 = \frac{\overline{1}}{s_1 z_1'''} : \frac{\overline{1}}{s_1 u_1} : \frac{1}{s_1 z_1'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

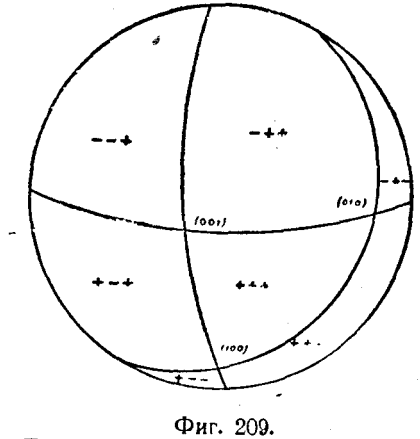
Относительно знаков минус в этих формулах и вообще о выборе знаков в символах граней, можно вывести следующее правило, которое мы примем здесь без доказательств.

Правило знаков в символах. Проведем дуги больших кругов через гномостереографические проекции координатных граней (100), (010), (001) попарно. Если через нормали к координатным граням (100), (010), (001) попарно взятым, мы проведем плоскости, то вся поверхность шара проекций разобьется этими плоскостями на 8 сферических треугольников. На фиг. 208, где (001) находится в центре, видны в стереографической проекции 4 таких треугольника. 4 другие находятся в нижней части полусферы. На фиг. 209 видна проекция одного целого такого треугольника и шести неполных: одна, или две вершины каждого из шести лежат в нижней полусфере.

Теперь каждая грань будет иметь такие знаки у индексов своего символа, какие имеются у вершины того из этих 8 треугольников, внутри которого расположена гномостереографическая проекция данной грани. На фигурах 208 и 209 проставлены комбинации знаков внутри каждого из треугольников.



Фиг. 208.
Правило знаков при определении символов любым методом при центральном положении проекции (001).



Фиг. 209.
Правило знаков при определении символов при произвольном положении проекций.

В нашем частном случае на фиг. 207 путем измерения миллиметровой линейкой находим величины соответственных отрезков:

$$s_1 z_1''' = 18 \text{ мм},$$
$$s_1 u_1 = 46 \text{ мм},$$
$$s_1 z_1' = 20 \text{ мм}.$$

Отсюда имеем по формуле 14:

$$z_1 : z_2 : z_3 = \overline{92} : \overline{36} : 82.8 = \overline{10} : \overline{4} : 9.$$

И искомый символ грани будет: Z $(\overline{10}\cdot\overline{4}\cdot 9)$.

Задача 2. (Обратная первой). Даны гномостереографические проекции координатных граней (100), (010), (001) и единичной (111). И дан символ некоторой пятой грани, например Z $(\overline{10}\cdot\overline{4}\cdot 9)$.

Требуется построить гномостереографическую проекцию этой пятой грани:

Ход решения обратен ходу решения предыдущей задачи 1. А именно: Пусть (фиг. 207) нам даны P, Q, R, U. Строим пояса QU и PR. Получаем в их пересечении точку S. Проводим лучи OQ, OU, OS. Параллельно лучу OQ проводим произвольную прямую и отмечаем на ней точки пересечения u_1, s_1 лучей OU, OS. Пишем формулу (14) для данного случая:

$$\overline{10} : \overline{4} : 9 = \frac{\overline{1}}{s_1 z_1'''} : \frac{\overline{1}}{s_1 u_1} : \frac{1}{s_1 z_1'}.$$

Здесь $s_1 u_1$ мы можем измерить в мм на фиг. 207. Тогда находим из этой формулы:

$$\frac{s_1 u_1}{s_1 z_1'''} = \frac{\overline{10}}{\overline{4}} = \frac{5}{2}$$

или

$$s_1 z_1''' = \frac{2}{5} s_1 u_1.$$

И так же:

$$\frac{s_1 z_1'}{s_1 u_1} = -\frac{4}{9}$$

или

$$s_1 z_1' = -\frac{4}{9} s_1 u_1.$$

Если отрезок $s_1 u_1$, измеренный на фиг. 207, оказался равен, например,

46 мм,

то

$$s_1 z_1''' = \frac{2}{5} s_1 u_1 = 18{,}4 \text{ мм},$$

а

$$s_1 z_1' = -\frac{4}{9} s_1 u_1 = -20{,}4 \text{ мм}.$$

Откладывая эти отрезки от точки s_1 по прямой пояса, а именно $s_1 z_1'''$, как положительный, в ту же сторону, куда отложен $s_1 u_1$, а $s_1 z_1'$ как отрицательный, — в обратную сторону, — получим точки z_1''' и z_1'. Проводим лучи Oz_1''' и Oz_1'. Их пересечения с дугой QUS дадут точки Z''' и Z'. Строя затем пояса $Z'''R$ и $Z'P$, получаем в их пересечении точку Z, которая и является искомой гномостереографической проекцией грани $(\overline{10}\,\overline{4}\,9)$.

Достоинства и недостатки способа. Главным достоинством является его общность: этим способом можно определить символ любой грани, которой гномостереографическая проекция задана. Этим свойством обладает и метод косинусов, но не метод поясов.

Второе достоинство — его обратимость, т.-е. возможность находить как символ по проекции, так и обратно проекцию по символу. Этим свойством оба предыдущие способа не обладают.

Третьим достоинством является то, что из других известных общих и обратимых способов нахождения символов способ отрезков отличается наименьшей сложностью построений и вычислений.

Так называемый способ основного параллелограма, или способ составляющих раза в два с лишним сложнее этого.

Недостатком способа отрезков служит более сложное теоретическое обоснование, чем у методов поясов и косинусов.

Особенностью его служит немногим бо́льшая сложность для граней с большими (например, двузначными) индексами символа, чем для граней с малыми индексами. Это относится и к способу косинусов. Но методом поясов грани с малыми индексами определяются гораздо быстрее, чем грани с большими индексами. В особенности, если под рукой имеется заранее составленная диаграмма, с прочерченными поясами и с проставленными символами граней. Поэтому для граней, проекции которых хорошо укладываются в немногих поясах, проведенных на гномостереографической проекции кристалла, — лучше пользоваться методом поясов. А в общем случае, когда проекция грани довольно далеко лежит от всех поясов — лучше пользоваться методом отрезков. Метод косинусов удобнее в средних и высших сингониях, где заранее заданы стереографические проекции кристаллографических осей, совпадающие с полюсами сетки. Впрочем, в этих условиях и другие способы также значительно упрощаются.

§ 68. Нахождение символов кристаллов гексагональной сингонии.

Все предыдущее изложение в §§ 65—68 применимо ко всем сингониям, где употребляются трехчленные символы. С первого взгляда кажется затруднительным применить изложенные методы к гексагональным кристаллам с четырехчленными символами. Но если мы вспомним, что четвертый индекс у этих символов всегда равен разности «второй минус третий» (стр. 68), то легко поймем, что здесь следует отбросить все четвертые индексы, вести с остальными тремя все операции, как было выше указано для трехчленных символов, а затем, после того как для всех граней будут найдены три первых индекса, вычислить для каждой из них четвертый по той же формуле:

$$p_4 = p_3 - p_2.$$

§ 69. Вычисление кристаллов. Его цель и методы.

Когда кристалл измерен, т.-е. найдены долгота φ и полярное расстояние ρ каждой его грани, мы можем, как было сказано, составить гномостереографическую проекцию его граней. После того по одному из способов — поясов, косинусов или отрезков (§§ 65, 66, 67) можно определить графически символ каждой его грани.

Мы знаем, что согласно закону Гаюи, символы эти должны быть целыми числами. Однако, в большинстве случаев, как показывают и выше приводившиеся числовые примеры, это требование выполняется реальными кристаллами лишь приближенно. Это зависит от погрешностей в кристаллообразовании, в кристаллоизмерении и в графическом определении символов. Чтобы судить о размерах суммы этих погрешностей, необходимо произвести поправку результатов измерения на закон Гаюи, т.-е. определить, каковы должны быть координаты φ и ρ каждой грани изучаемого кристалла, если бы он идеально удовлетворял закону Гаюи (закону целых чисел).

Определить такие идеальные φ и ρ для каждой грани и значит «вычислить кристалл». Результатом такого вычисления в каждом

кристаллографическом исследовании внешних форм кристалла является таблица, содержащая список граней кристалла с показанием рядом для каждой грани измеренных и вычисленных координат φ и ρ. Для примера укажем на таблицу координат граней моноклинных кристаллов минерала чевкинита ($Ce_2\ Ca\ Si_3\ O_{10}$) на стр. 133.

Далее мы будем говорить об этой таблице подробно. Теперь лишь заметим, что если мы нанесем гномостереографические проекции граней чевкинита на одном чертеже по наблюденным координатам, а на другом по вычисленным, и станем находить символы одним из тех методов, какие были изложены выше, ведя и графические операции с большим тщанием, то в первом случае (по наблюденным) символы получатся с невполне точно целыми индексами, а во втором — с вполне точно целыми, отвечающими написанным в предыдущей таблице.

Предложено много способов вычисления кристаллов. Здесь будут изложены 2: метод проективных символов Е. С. Федорова и метод непосредственного перехода от сферических координат граней к символам (формулы О. М. Аншелеса).

§ 70. Метод проективных символов (1-й метод Федорова) [1]).

Замечание 1. Этот метод исходит из следующих соображений. Нахождение теоретических углов между гранями, ребрами и осями кристалла по их символам и обратно встречает главное затруднение в том, что символы по своему определению связаны известной нам зависимостью с отрезками данной грани на кристаллографических, в общем случае косоугольных осях координат. При том же эти отрезки измеряются во всех сингониях, кроме кубической, различными единицами на различных осях:

$$p_1 : p_2 : p_3 = \frac{a_0}{a} : \frac{b_0}{b} : \frac{c_0}{c}.$$

Поэтому формулы, связывающие величины p_1, p_2, p_3 с различными угловыми величинами в кристалле — весьма сложны.

Для кубической же сингонии, где кристаллографическая координатная система прямоугольна, и единицы измерения по всем осям одинаковы, эти формулы весьма упрощаются. Такая координатная система ничем не отличается от обычной прямоугольной системы аналитической геометрии и простые выводы этой науки могут быть непосредственно использованы для кристаллографических вычислений.

Исходя из этого, Е. С. Федоров [2]) разработал такой способ вычислений, при котором сначала по истинному символу граней ($p_1\ p_2\ p_3$) или ребер [$r_1\ r_2\ r_3$] получают так называемые проективные их символы ($p_1'\ p_2'\ p_3'$) и соответственно [$r_1'\ r_2'\ r_3'$], взятые по общим правилам нахождения символа, но не в кристаллографической системе координат, а во вспомогательной прямоугольной, произвольно выбранной и имеющей

---

[1]) Е. С. Федоровым разработан также и 2-й метод: биполярных координат или зональных вычислений, который мы здесь не приводим (см. его сокращ. курс Кристаллографии 1910; стр. 250—254).

[2]) Е. С. Федоров. Этюды по аналитической кристаллографии. Этюд IV. Система кристаллографических вычислений, основанная на проективных свойствах кристаллов. Горный Журнал 1887, № 4. Также в его курсе кристаллографии 1901 г. 225—256 или 1910 г. 231—250.

одинаковые единицы измерения по всем осям. С помощью этих проективных символов и производят все необходимые вычисления по сравнительно простым формулам.

После этих общих замечаний изложим все, сюда относящееся, систематически.

Определение 1. Проективным символом $(p_1'\ p_2'\ p_3')$ данной грани называются три числа, обратно пропорциональные отрезкам, которые данная грань делает на осях некоторой вспомогательной прямоугольной координатной системы.

Замечание 2. Проективные символы выражаются вообще иррациональными числами, так как для их получения мы не измеряем отрезки осей, отсекаемые данной гранью, отрезками тех же осей, отсекаемыми какой-либо другой гранью того же кристалла, как это требуется для закона Гаюи, на котором основана возможность выражать все истинные кристаллографические символы целыми числами.

Фиг. 210.

Связь проективных символов данной грани с косинусами углов нормали с вспомогательными координатными осями.

Теорема 1. Проективные символы $(p_1'\ p_2'\ p_3')$ данной грани прямо пропорциональны косинусам углов, σ, τ, υ, которые образует нормаль к этой грани с теми осями прямоугольных координат, относительно которых взяты проективные символы (фиг. 210).

Доказательство. Требуется доказать, что

$$\frac{p_1'}{p_2'} = \frac{\cos\sigma}{\cos\tau}, \quad \frac{p_1'}{p_3'} = \frac{\cos\sigma}{\cos\upsilon} \quad \ldots\ldots (1).$$

Из определения проективных символов следует, что

$$\frac{p_1'}{p_2'} = \frac{1/a'}{1/b'}, \quad \frac{p_1'}{p_3'} = \frac{1/a'}{1/c'} \quad \ldots\ldots (2).$$

Из $\triangle$ ONA', прямоугольного при N имеем:

$$a' = \frac{NO}{\cos\sigma}$$

И также из $\triangle$ ONB и ONC получим:

$$b' = \frac{ON}{\cos\tau}$$

$$c' = \frac{ON}{\cos\upsilon}.$$

Подставляя эти выражения в уравнения (2), получим сразу уравнения (1).

Теорема 2. Проективные символы $(p_1'\ p_2'\ p_3')$ данной грани прямо пропорциональны координатам какой-нибудь точки нормали к этой грани, взятым в той же вспомогательной прямоугольной системе координат, относительно которой взяты проективные символы.

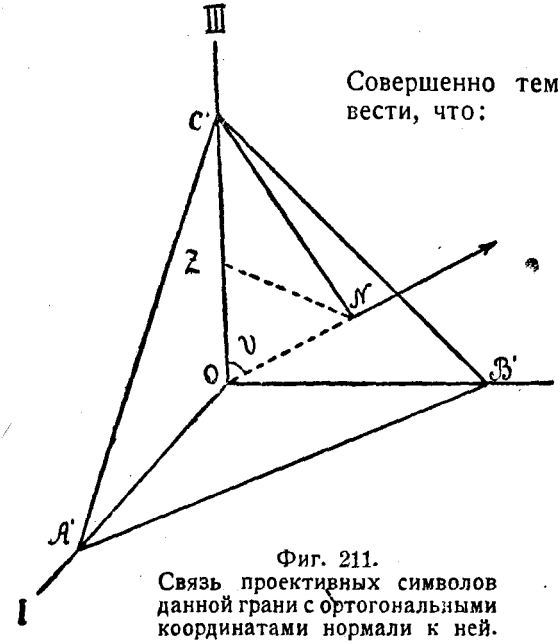
Доказательство. На фиг. 211 N есть точка встречи нормали ON с гранью A′B′C′. Если мы докажем эту теорему относительно точки N, то она будет справедлива и для всякой другой точки нормали ON, так как координаты одной точки всякого направления, идущего через начало координат пропорциональны координатам любой другой точки того же направления.

Для получения координат x, y, z, точки N, надо опустить из N перпендикуляры на оси I, II, III. Для простоты чертежа это проделано лишь для оси III: NZ ⊥ III. Отрезок OZ = z и есть координата точки N по оси III.

Точно также на фиг. 211 обозначен лишь угол υ, образуемый нормалью ON с осью III, а углы σ и τ, с осями I и II не обозначены.

Из △ ONZ с прямым углом при Z имеем:

$$ON \cos \upsilon = z.$$



Фиг. 211.
Связь проективных символов данной грани с ортогональными координатами нормали к ней.

Совершенно тем же способом мы можем вывести, что:

$$ON \cos \tau = y,$$
$$ON \cos \sigma = x.$$

Беря отношение этих равенств почленно, получаем:

$$\frac{\cos\sigma}{\cos\tau} = \frac{x}{y}, \quad \frac{\cos\sigma}{\cos\upsilon} = \frac{x}{z} \quad . \; . \; (3).$$

Сопоставляя равенство (1) и (3), видим, что

$$\frac{p_1'}{p_2'} = \frac{x}{y}, \quad \frac{p_1'}{p_3'} = \frac{x}{z} \quad . \; . \; (4).$$

Что и надо было доказать.

Теорема 3. Если вспомогательная координатная система расположена так, что ее начало координат совпадает с центром стереографической проекции, ось III совпадает с осью проекций и ось II совпадает с начальным диаметром круга проекций, от которого отсчитываются долготы φ, — то проективный символ $(p_1' \; p_2' \; p_3')$ любой грани связан со сферическими координатами φ и ρ ее полюса таким соотношением:

$$\frac{p_1'}{p_2'} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}, \quad \frac{p_1'}{p_3'} = \frac{\sin\varphi}{\operatorname{ctg}\rho} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5).$$

Доказательство. На фиг. 212 точка N есть стереографическая проекция нормали к какой-угодно грани кристалла. I, II, III — стереографические проекции вспомогательных координатных осей. Тогда дуги σ, τ, υ дают углы нормали N с осями I, II, III.

В то же время сферические координаты грани φ и ρ также показаны на рисунке.

Легко выводим такие зависимости, пользуясь формулами сферической тригонометрии.

Прежде всего ясно, что

$$\upsilon = \rho \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

Затем из сферического треугольника OIN, у которого сторона

$$OI = 90°,$$

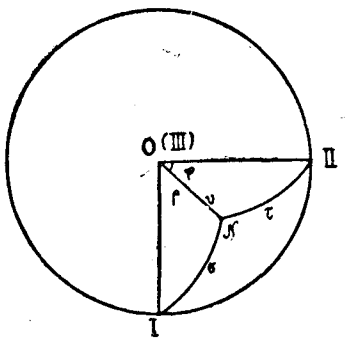
имеем:

$$\mathrm{cs}\,\sigma = \mathrm{sn}\,\varphi\ \mathrm{sn}\,\rho \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7).$$

А из сферического $\triangle$ OIIN, у которого $OII = 90°$, имеем:

$$\mathrm{cs}\,\tau = \mathrm{cs}\,\varphi \,.\, \mathrm{sn}\,\rho \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Беря почленные отношения равенств (6), (7), (8), получаем:



Фиг. 212.
Связь углов σ, τ, υ нормали к грани со сферическими координатами ее φ, ρ.

$$\frac{\mathrm{cs}\,\sigma}{\mathrm{cs}\,\tau} = \frac{\mathrm{sn}\,\varphi}{\mathrm{cs}\,\varphi} = \frac{\mathrm{sn}\,\varphi}{\mathrm{ctg}\,\rho} \quad \ldots\ldots (9).$$

Сопоставляя теперь равенства (1) (стр. 118) и (9) выводим:

$$\frac{p_1'}{p_2'} = \frac{\mathrm{sn}\,\varphi}{\mathrm{cs}\,\varphi} = \frac{\mathrm{sn}\,\varphi}{\mathrm{ctg}\,\rho} \quad \ldots\ldots (5).$$

Теорема доказана.

Следствие. Если мы каким-либо способом найдем проективный символ $(p_1'\ p_2'\ p_3')$ *некоторой грани при вспомогательной координатной системе*, расположенной как указано в этой теореме, — то по уравнениям (5) легко найдем сферические координаты φ и ρ той же грани.

А именно:

$$\frac{\mathrm{sn}\,\varphi}{\mathrm{cs}\,\varphi} = \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{p_1'}{p_2'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

$$\frac{\mathrm{cs}\,\varphi}{\mathrm{ctg}\,\rho} = \frac{p_2'}{p_3'}, \text{ или } \frac{\mathrm{sn}\,\varphi}{\mathrm{ctg}\,\rho} = \frac{p_1'}{p_3'}\ ;$$

откуда:

$$\mathrm{tg}\,\rho = \frac{p_2'}{p_3'\mathrm{cs}\,\varphi} \text{ или, } \mathrm{tg}\,\rho = \frac{p_1'}{p_3'\ \mathrm{sn}\,\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots (11).$$

Итак, теперь необходимо научиться находить проективные символы граней по истинным символам.

Теорема 4. Истинные символы $(p_1\ p_2\ p_3)$ всех граней данного кристалла и их проективные символы $(p_1'\ p_2'\ p_3')$ связаны друг с другом следующими соотношениями

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{k_1 p_1' + l_1 p_2' + m_1 p_3'}{k_2 p_1' + l_2 p_2' + m_2 p_3'} \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

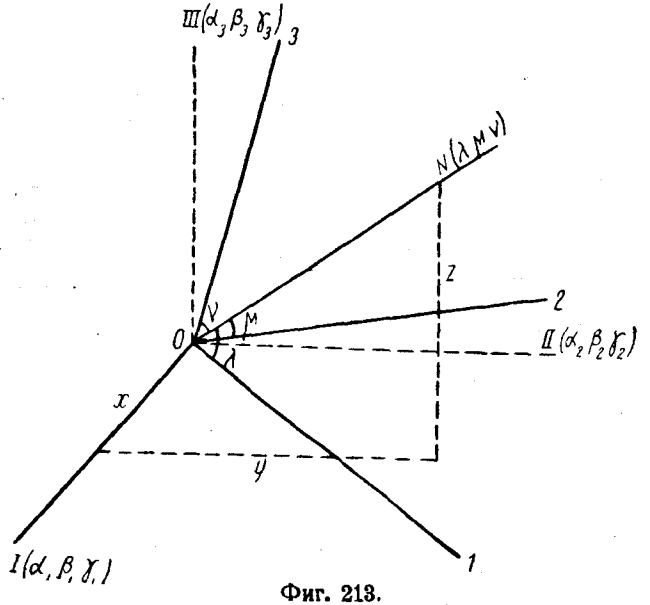
$$\frac{p_2}{p_3} = \frac{k_2 p_1' + l_2 p_2' + m_2 p_3'}{k_3 p_1' + l_3 p_2' + m_3 p_3'}$$

и

$$\frac{p_1'}{p_2'} = \frac{s_1 p_1 + t_1 p_2 + u_1 p_3}{s_2 p_1 + t_2 p_2 + u_2 p_3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13).$$
$$\frac{p_3'}{p_3'} = \frac{s_3 p_1 + t_3 p_2 + u_3 p_3}{s_3 p_1 + t_3 p_2 + u_3 p_3}$$

Здесь коэффициенты k, l, m и s, t, u, с соответствующими указателями постоянны для всех граней данного кристалла.

Доказательство. Мы поведем доказательство так, что сначала докажем равенства (12) и (13) не для проективных символов (p_1' p_2' p_3'), а для составляющих (x, y, z) нормали к взятой грани во вспомогательной координатной системе. А затем, пользуясь теоремой 2, формулой (4) перейдем к проективным символам.



Фиг. 213.
К выводу уравнений проективности.

Пусть (на фиг. 213) O123—кристаллографическая система координат, относительно которой берутся истинные символы граней данного кристалла; ON нормаль к какой-либо из этих граней; она образует углы λ, μ, ν с осями 1, 2, 3. Пусть далее ON_0 — не показанная на фиг. 213 нормаль к единичной грани; она образует углы λ_0, μ_0, ν_0 с теми же координатными осями 1, 2, 3.

Далее пусть O I II III — некоторая новая произвольная система координат. В ней взяты координаты x, y, z какой угодно точки N нормали ON к данной грани. Новые оси образуют следующие углы с осями 1, 2, 3 (см. табл. справа):

Ось вспомогательной системы	Образует углы с осями главной системы		
	1	2	3
I	α_1	β_1	γ_1
II	α_2	β_2	γ_2
III	α_3	β_3	γ_3

Тогда спроектируем замкнутую ломаную ONzyx сначала на ось 1, затем на ось 2 и наконец на 3. Получим:

$$ON \cos\lambda = x\cos\alpha_1 + y\cos\alpha_2 + z\cos\alpha_3,$$
$$ON \cos\mu = x\cos\beta_1 + y\cos\beta_2 + z\cos\beta_3,$$
$$ON \cos\nu = x\cos\gamma_1 + y\cos\gamma_2 + z\cos\gamma_3.$$

Разделим почленно первое равенство на $\cos\lambda_0$, второе — на $\cos\mu_0$, третье на $\cos\nu_0$, где λ_0, μ_0, ν_0 — не показанные на фиг. 213 углы нормали ON_0 единичной грани с осями 1, 2, 3. Получим:

$$ON\frac{\cos\lambda}{\cos\lambda_0}=x\frac{\cos\alpha_1}{\cos\lambda_0}+y\frac{\cos\alpha_2}{\cos\lambda_0}+z\frac{\cos\alpha_3}{\cos\lambda_0}$$
$$ON\frac{\cos\mu}{\cos\mu_0}=x\frac{\cos\beta_1}{\cos\mu_0}+y\frac{\cos\beta_2}{\cos\mu_0}+z\frac{\cos\beta_3}{\cos\mu_0}$$
$$ON\frac{\cos\nu}{\cos\nu_0}=x\frac{\cos\gamma_1}{\cos\nu_0}+y\frac{\cos\gamma_2}{\cos\nu_0}+z\frac{\cos\gamma_3}{\cos\nu_0}$$

Беря отношение левых частей этих равенств друг к другу и приравнивая его сначала согласно теореме косинусов (стр. 104) отношению индексов символа, а затем отношению правых частей, — получим:

$$\frac{\cos\lambda/\cos\lambda_0}{\cos\mu/\cos\mu_0}=\frac{p_1}{p_2}=\frac{x\cos\alpha_1/\cos\lambda_0+y\cos\alpha_2/\cos\lambda_0+z\cos\alpha_3/\cos\lambda_0}{x\cos\beta_1/\cos\mu_0+y\cos\beta_2/\cos\mu_0+z\cos\beta_3/\cos\mu_0}$$
$$\frac{\cos\mu/\cos\mu_0}{\cos\nu/\cos\nu_0}=\frac{p_2}{p_3}=\frac{x\cos\gamma_1/\cos\nu_0+y\cos\gamma_2/\cos\nu_0+z\cos\gamma_3/\cos\nu_0}{\ldots}\quad\ldots\quad(14).$$

Теперь сделаем два замечания.

Во-первых, согласно теореме 2 (формула 4) имеем:

$$x=Kp_1';\quad y=Kp_2';\quad z=Kp_3'\ldots\ldots\ldots(15),$$

где K одинаковый во всех трех равенствах коэффициент пропорциональности. Во-вторых, коэффициенты при x, y, z в равенствах (14) не зависят от положения нормали ON. Они зависят лишь от взаимного расположения обеих координатных систем (углы α, β, γ) и от положения нормали к единичной грани (углы λ_0, μ_0, ν_0).

Эти коэффициенты мы обозначим последовательно буквами k_1, l_1, m_1, $k_2\ldots m_3$. Тогда, подставляя из равенств (15) в (14) и сокращая на K, получим:

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{k_1p_1'+l_1p_2'+m_1p_3'}{k_2p_1'+l_2p_2'+m_2p_3'}$$
$$\frac{p_2}{p_3}=\frac{k_2p_1'+l_2p_2'+m_2p_3'}{k_3p_1'+l_3p_2'+m_3p_3'}\quad\ldots\ldots\ldots(12').$$

Таким образом первая часть теоремы (равенство 12) доказана.

Чтобы доказать вторую, т.-е. формулы (13), решим уравнение (12) относительно p_1', p_2', p_3', найдя отношение этих величин.

Если обозначим коэффициент пропорциональности в уравнениях (12 или 12'), через K_1, то получим из них:

$$k_1p_1'+l_1p_2'+m_1p_3'=K_1p_1,$$
$$k_2p_1'+l_2p_2'+m_2p_3'=K_1p_2,$$
$$k_3p_1'+l_3p_2'+m_3p_3'=K_1p_3.$$

Как известно, решение таких трех уравнений дает следующие значения неизвестных:

$$p_1'=\begin{vmatrix}K_1p_1 & l_1 & m_1\\ K_1p_2 & l_2 & m_2\\ K_1p_3 & l_3 & m_3\end{vmatrix}:D;\quad p_2'=\begin{vmatrix}k_1 & K_1p_1 & m_1\\ k_2 & K_1p_2 & m_2\\ k_3 & K_1p_3 & m_3\end{vmatrix}:D;\quad p_3'=\begin{vmatrix}k_1 & l_1 & K_1p_1\\ k_2 & l_2 & K_1p_2\\ k_3 & l_3 & K_1p_3\end{vmatrix},$$

где

$$D=\begin{vmatrix}k_1 & l_1 & m_1\\ k_2 & i_2 & m_2\\ k_3 & l_3 & m_3\end{vmatrix}=k_1(l_2m_3-l_3m_2)-k_2(l_1m_3-l_3m_1)+k_3(l_1m_2-i_2m_1).$$

И другие определители раскрываются подобным же образом.

Беря отношение неизвестных получим:

$$\frac{p_1'}{p_2'} = \frac{K_1 p_1 (l_2 m_3 - l_3 m_2) - K_1 p_2 (l_1 m_3 - l_3 m_1) + K_1 p_3 (l_1 m_2 - l_2 m_1)}{K_1 p_1 (m_2 k_3 - m_3 k_2) - K_1 p_2 (m_1 k_3 - m_3 k_1) + K_1 p_3 (m_1 k_2 - m_2 k_1)}$$
$$\frac{p_2'}{p_3'} = \frac{K_1 p_1 (k_2 l_3 - k_3 l_2) - K_1 p_2 (k_1 l_3 - k_3 l_1) + K_1 p_3 (k_1 l_2 - k_2 l_1)}{}$$

Сокращая на K_1, меняя знаки у средних членов, получим:

$$\frac{p_1'}{p_2} = \frac{(l_2 m_3 - l_3 m_2) p_1 + (l_3 m_1 - l_1 m_3) p_2 + (l_1 m_2 - l_2 m_1) p_3}{(m_2 k_3 - m_3 k_2) p_1 + (m_3 k_1 - m_1 k_3) p_2 + (m_1 k_2 - m_2 k_1) p_3} \quad . \quad . \quad (13').$$
$$\frac{p_2}{p_3} = \frac{}{(k_2 l_3 - k_3 l_2) p_1 + (k_3 l_1 - k_1 l_3) p_2 + (k_1 l_2 - k_2 l_1) p_3}$$

Так как коэффициенты k, l, m, в равенствах (12) по доказанной первой части теоремы не зависят от положения грани, то и составленные из них коэффициенты при p_1, p_2, p_3, в последнем равенстве также не зависят от положения грани, а зависят лишь от углов α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3, γ_1, γ_2, γ_3, λ_0, μ_0, ν_0.

Этим доказывается вторая часть теоремы.

Определение 2. Уравнения (13), с помощью которых можно по известным истинным символам граней находить их проективные символы, называются уравнениями проективности данного кристалла.

Уравнения (12) называются обратными уравнениями проективности.

Замечание 3. Уравнения проективности (13) содержат 9 коэффициентов, *постоянных для всех граней данного кристалла*. Для того, чтобы иметь возможность посредством этих уравнений (13) определять проективные символы (p_1' p_2' p_3') по истинным (p_1 p_2 p_3) мы должны для каждого данного кристалла выбрать расположение вспомогательной системы координат по отношению к главной и для этого положения, определить все постоянные коэффициенты, входящие в уравнения проективности.

Мы увидим сейчас, что число этих коэффициентов может быть значительно понижено по мере повышения сингонии кристалла.

Из хода вывода уравнений проективности можно выяснить один *способ вычисления постоянных коэффициентов уравнений проективности*. А именно, из сопоставления уравнения (13') с уравнением (13) на стр. 121 видим, что искомые коэффициенты соответственно равны

$$s_1 = l_2 m_3 - l_3 m_2; \; t_1 = l_3 m_1 - l_1 m_3 \text{ и т. д.}$$

Буквами же k_1, l_1, m_1, k_2, ... на стр. 122 (после форм 15) мы условно обозначили

$$k_1 = \frac{\cos\alpha_1}{\cos\lambda_0}, \; l_1 = \frac{\cos\alpha_2}{\cos\lambda_0}; \text{ и т. д. . . . .}$$

Таким образом исходя из углов α_1, α_2 . . . . . между главными и вспомогательными координатными осями и из углов λ_0, μ_0, ν_0, образуемых нормалью к единичной грани и главными координатными осями мы можем определить коэффициенты s_1, t_1, ... уравнений проективности.

Однако, этот путь слишком сложен, и мы им следовать не будем. Мы воспользуемся тем соображением, что уравнения проективности действительны для всех граней данного кристала. Поэтому, беря некоторые грани частного положения, коих проективные символы легко находятся помимо уравнений проективности, и подставляя в последние как проективные, так и истинные символы таких граней, мы получим ряд уравне-

ний, содержащих в качестве неизвестных коэффициенты уравнений проективности. Если уравнения эти будут в достаточном числе, то, решая их, получим значение этих коэффициентов.

Нахождение части коэффициентов проективности может быть сделано таким способом сразу для всех кристаллов данной сингонии, если условиться в этой сингонии располагать вспомогательную систему координат по отношению к главной всегда одинаково. Тогда в каждой сингонии останется определенное количество неизвестных коэффициентов проективности (в каждой сингонии разное), подлежащих определению для каждого кристалла особо.

Итак, мы займемся теперь упрощением уравнений проективности для различных сингоний.

Перепишем их здесь для удобства сначала в самом общем виде (стр. 121 форм. 13).

$$\begin{matrix} p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \end{matrix} = \begin{matrix} s_1p_1+t_1p_2+u_1p_3 \\ s_2p_1+t_2p_2+u_2p_3 \\ s_3p_1+t_3p_2+u_3p_3 \end{matrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13).$$

Прежде всего заметим, что, не нарушая общности этих уравнений, мы можем каждую строчку правой части разделить на один из коэффициентов этой части, напр., на u_3. Тогда получим новые коэффициенты: $\frac{s_1}{u_3}$, $\frac{t_1}{u_3}$, $\frac{u_1}{u_3}$, $\frac{s_2}{u_3}$, ... которые мы обозначим соответственно через a_1, a_2, a_3, a_4 .... И уравнения проективности примут вид:

$$\begin{matrix} p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \end{matrix} = \begin{matrix} a_1p_1+a_2p_2+a_3p_3 \\ a_4p_1+a_5p_2+a_6p_3 \\ a_7p_1+a_8p_2+p_3 \end{matrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

Триклинная сингония. Будем вспомогательную прямоугольную кординатную систему выбирать в триклинной сингонии так, чтобы ось ее III совпала бы с координатной осью 3 главной кристаллографической системы, а плоскость I O III слилась бы с координатной плоскостью 1 O 3 главной системы. Тогда грань (010) будет параллельна осям I и III вспомогательной системы, а потому ее проективный символ (согласно определению этих символов, стр. 118) будет также (010).

Грань с истинным символом (100), проходит теперь чрез [001], т.-е. чрез ось 3, а следовательно, и чрез совпадающую с ней ось III, а потому ее проективный символ будет ($p'_1p'_20$).

Таким образом для этих двух граней можно подставить значения истинных и проективных символов в уравнения проективности; получим:

$$\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} = \begin{matrix} a_10+a_21+a_30 \\ a_40+a_51+a_60 \\ a_70+a_81+0 \end{matrix} \text{ и } \begin{matrix} p'_1 \\ p'_2 \\ 0 \end{matrix} = \begin{matrix} a_11+a_20+a_30 \\ a_41+a_50+a_60 \\ a_71+a_80+0 \end{matrix}.$$

Отсюда:

$$\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} = \begin{matrix} a_2 \\ a_5 \\ a_8 \end{matrix}; \qquad \begin{matrix} p_1' \\ p_2' \\ 0 \end{matrix} = \begin{matrix} a_1 \\ p_41 \\ a_7 \cdot 1 \end{matrix}.$$

Из первого уравнения получаем: $a_2 = a_8 = 0$.

Из второго же: $a_7 = 0$.

Теперь общее уравнение проективности для такой взаимной ориентировки главной и вспомогательной координатных систем примет следующий вид:

$$\begin{matrix} p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \end{matrix} = \frac{a_1p_1 \quad + a_3p_3}{a_4p_1 + a_5p_2 + a_6p_3 \quad p_3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17).$$

Как видим, здесь остаются не определенными 5 коэффициентов a_1, a_3, a_4, a_5, a_6. Это показывает, что для того, чтобы комплекс (совокупность) всех возможных граней триклинного кристалла был точно известен по своему взаимному расположению, необходимо знать пять некоторых констант. Мы приходим здесь к тому же числу кристаллографических констант, к которому приходили и ранее (см. стр. 67).

Моноклинная сингония. При соблюдении тех же, что и в триклинной сингонии, условий взаимного расположения координатных систем главной и вспомогательной, мы получим у моноклинных кристаллов дополнительное условие: ось $2 \perp 3$ и $2 \perp 1$. Поэтому ось 2 совпадает с II, и мы получаем такие соотношения:

Истинный символ	Проективный символ
(010)	(010)
(100)	(100)
(001)	$(p'_1 0 p'_3)$

Подставляя эти данные в уравнения проективности (17), мы замечаем, что первая грань не дает ничего нового, а вторая и третья дадут:

$$\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} = \frac{a_1 1 \quad + a_3 0}{a_4 1 + a_5 0 + a_6 0 \quad 0}$$

отсюда $a_4 = 0$. Затем:

$$\begin{matrix} p'_1 \\ 0 \\ p'_3 \end{matrix} = \frac{a_1 0 \quad + a_3 1}{a_4 0 + a_5 0 + a_6 1 \quad 1}$$

Отсюда $a_6 = 0$.

И уравнения проективности кристаллов моноклинной сингонии для принятой ориентировки главной и вспомогательной системы получают такой вид:

$$\begin{matrix} p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \end{matrix} = \frac{a_1p_1 \quad + a_3p_3}{a_5p_2 \quad p_3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18).$$

Для вычисления такого кристалла, как видим, необходимо знать 3 константы: a_1, a_3, a_5.

Ромбическая сингония. Здесь добавочным условием к условиям моноклинной сингонии служит:

Истинный символ	Проективный символ
(001)	(001)

Подставляя эти значения (p_1, p_2, p_3) и (p'_1, p'_2, p'_3) в уравнения (18), получаем:

$$\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} = \frac{a_1 0 + a_3 1}{a_5 0 \quad 1}$$

Откуда: $a_3 = 0$.

Итак, уравнения проективности ромбических кристаллов для принятого взаимного расположения главной и вспомогательной координатных систем примут такой вид:

$$\begin{matrix} p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \end{matrix} = \begin{matrix} a_1 p_1 \\ a_5 p_2 \\ p_3 \end{matrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19).$$

Здесь для вычисления необходимо для каждого кристалла найти предварительно 2 константы: a_1, a_5.

Тетрагональная сингония. К условиям ромбической сингонии присоединяется здесь то, что грань с истинным символом (110) делает равные отрезки как на главных координатных осях 1 и 2, так и на совпадающих с ними вспомогательных (I и II). Поэтому проективный символ этой грани будет тоже (110).

Подставляя эти значения в (18), получим:

$$\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} = \begin{matrix} a_1 1 \\ a_5 1 \\ 0 \end{matrix}; \text{ откуда } a_1 = a_5.$$

И уравнения проективности тетрагональных кристаллов будут для принятой взаимной ориентировки главной O123 и вспомогательной O I II III координатных систем:

$$\begin{matrix} p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \end{matrix} = \begin{matrix} a_1 p_1 \\ a_1 p_2 \\ p_3 \end{matrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20).$$

Здесь остается одна константа, различная для разных кристаллов.

Наконец, для кубической сингонии мы знаем, что грань (111) делает равные отрезки на всех трех взаимно перпендикулярных осях, почему ее проективный символ будет тоже (111). Вставляя эти значения в (20), получаем:

$$\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} = \begin{matrix} a_1 1 \\ a_1 1 \\ 1 \end{matrix}, \text{ откуда } a_1 = 1.$$

Уравнения проективности получают здесь вид:

$$\begin{matrix} p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \end{matrix} = \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{matrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21).$$

Т.-е. в этом случае проективные символы пропорциональны истинным. В частности их можно принять равными друг другу.

Тригональная подсингония. Пусть на фиг. 214 гномостереографические проекции координатных граней главной системы суть точки, отмеченные символами (100), (010) и (001). В центре проекций находится гномостереографическая проекция грани (111). Оси вспомогательной прямоугольной системы I, II, III выбираем, как указано на рисунке. Теперь выведем проективные символы четырех граней: (111), (100), (010), и (001).

1) (111) параллельна осям I и II и нормальна к III, она делает отрезки на этих осях соответственно $\infty \infty 1$, а потому ее проективный символ будет 001.

2) Для определения проективного символа грани (100) заметим прежде всего, что след этой грани на плоскости проекций будет перпендикулярен к тому меридиану, на котором лежит гномостереографическая проекция этой грани. Если мы отнесем эту грань из центра проекций параллельно самой себе на некоторое произвольное расстояние в сторону точки (100) (фиг. 214), то след этой грани изобразится на чертеже прямой $AC_1 \perp III\ (100)$.

Обозначим отрезки, которые отсекает теперь эта грань на осях I, II, III через a_1, b_1, c. Тогда ее проективный символ, согласно его определению, найдем из соотношения:

$$\frac{p'_1}{p'_2} = \frac{1/a_1}{1/b_1}$$
$$p'_3 \quad\quad 1/c$$

Но из $\triangle AB_1III$, с углом в 30° легко найдем

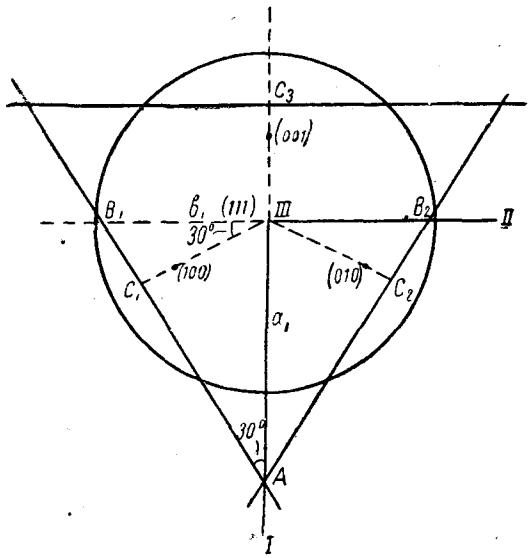
$$b_1 = -a_1 \operatorname{tg} 30° = -a_1 \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Отсюда

$$\frac{p'_1}{p'_2} = \frac{1/a_1}{-\sqrt{3}/a_1} = \frac{1}{-\sqrt{3}} \quad (22)$$
$$p'_3 \quad\quad 1/c \quad\quad a_1/c$$

3) Для грани (010) аналогичным образом будем иметь:

$$\frac{p'_1}{p'_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$
$$p'_3 \quad\quad a_1/c$$



Фиг. 214.
Расположение вспомогательных координатных осей I II III для проективных символов в тригональной подсингонии.

4) Для грани же (001) заметим, что она параллельна оси II, поэтому ее индекс по этой оси будет 0. Отрезок отсекаемый ею на оси III, будет тот же c, что и у граней (100) и (010). Отрезок же III C_3 отсекаемый ею по оси I будет равен по абсолютной величине отрезку III C_1. Но последний легко найдется из $\triangle AC_1III$:

$$IIIC_1 = \frac{1}{2} IIIA = \frac{a_1}{2}.$$

Поэтому для грани (001) имеем:

$$\frac{p'_1}{p'_2} = \frac{-1/a_1/2}{0} = \frac{-2}{0}.$$
$$p'_3 \quad\quad 1/c \quad\quad a_1/c$$

Теперь подставляем найденные значения проективных символов и соответственные истинные символы в общие уравнения проективности:

$$\frac{p'_1}{p'_2} = \frac{s_1p_1 + t_1p_2 + u_1p_3}{s_2p_1 + t_2p_2 + u_2p_3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13).$$
$$p'_3 \quad\quad s_3p_1 + t_3p_2 + u_3p_3$$

Тогда для каждой из четырех указанных граней получаем:
Для (111)

$$\frac{0}{0}=\frac{s_1\cdot 1+t_1\cdot 1+u_1\cdot 1}{s_2\cdot 1+t_2\cdot 1+u_2\cdot 1};$$
$$\frac{}{1}=\frac{}{s_3\cdot 1+t_3\cdot 1+u_3\cdot 1}$$

откуда $s_1+t_1+u_1=0$ и $s_2+t_2+u_2=0$ . . . . . (23 и 24).

Для (100)

$$\frac{1}{-\sqrt{3}}=\frac{s_1\cdot 1+t_1\cdot 0+u_1\cdot 0}{s_2\cdot 1+t_2\cdot 0+u_2\cdot 0};$$
$$\frac{}{a_1/c}=\frac{}{s_3\cdot 1+t_3\cdot 0+u_3\cdot 0}$$

откуда $s_2=-s_1\sqrt{3}$ . . . . . (25).

$$\frac{s_1}{s_3}=\frac{c}{a_1} \quad . \quad . \quad .

Откуда $$s_1 = t_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (31).$$

При наличии этого из (25) и (27) получаем:

$$s_2 = -t_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (32).$$

Подставляя из (31) в (23), получим:

$$s_1 + s_1 + u_1 = 0 \text{ или}$$

$$u_1 = -2s_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (33).$$

Теперь все коэффициенты выражены через k и s_1, в уравнениях (31), (33), (25), (27), + (31), (29), (26_1), (28_1) + (31), (30_1) + (33). Подставляем все эти выражения в уравнения проективности (13) (стр. 121). Находим:

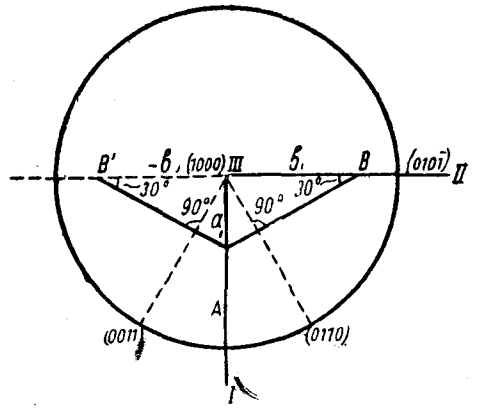
$$\frac{p'_1}{p'_2} = \frac{s_1p_1 + s_1p_2 - 2s_1p_3}{-s_1\sqrt{3}\cdot p_1 + s_1\sqrt{3}p_2 + 0p_3}, \text{ откуда:}$$
$$\frac{p'_3}{p'_3} = \frac{}{ks_1p_1 + ks_1p_2 + ks_1p_3}$$

$$\frac{p'_1}{p'_2} = \frac{p_1 + p_2 - 2p_3}{-\sqrt{3}\cdot p_1 + \sqrt{3}\cdot p_2} \quad \ldots (34).$$
$$\frac{p'_3}{p'_3} = \frac{}{k(p_1 + p_2 + p_3)}$$

Это и есть уравнение проективности тригональных кристаллов при указанном на фиг. 214 взаимном расположении главной и вспомогательной координатной систем [1]).

Гексагональная сингония. Пусть на фиг. 215 точки (1000), (01$\bar{1}$0), (0011) и 0110) суть гномостереографические проекции соответственных граней.

Вспомогательную систему координат I, II, III располагаем так, как показано на рисунке:



Фиг. 215.
Расположение вспомогательных координатных осей I II III для проективных символов в гексагональной подсингонии.

ось I делит пополам угол между нормалями к (0011) и (0110), ось II $\perp$ (01$\bar{1}$0) и ось III $\perp$ (1000), или иначе: I = 3, III = 1 и II = $\perp$ (01$\bar{1}$0).

Истинный символ	Тоже без четвертого индекса	Проективный символ
(1000)	(100)	001
(01$\bar{1}$0)	(010)	010
(0011)	(001)	$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{b_1}$ 0 или $\sqrt{3}$ $\bar{1}$ 0
(0110)	(011)	$\frac{1}{a_1}$ $\frac{1}{b_1}$ 0 или $\sqrt{3}$ 1 0

[1]) Е. С. Федоровым (Курс Кристаллографии 1901 г. стр. 245 или 1910 стр. 245) уравнения проективности тригональных кристаллов выведены для иной взаимной ориентировки координатных систем. При этом получились уравнения более простые, но переход к полярным координатам от проективных символов, вычисляемых по уравнениям Федорова несколько сложнее, чем для выведенных здесь уравнений (34).

Последние два проективных ... ла преобразованы при помощи соотношения:

$$b_1 = a_1 \operatorname{ctg} 30^\circ = a_1 \sqrt{3}\ .$$

Подставляя значение истинных и проективных символов этих граней в общие уравнения проективности (13) (стр. 121) получим:

$$\frac{0}{0} = \frac{s_1}{s_2} = \frac{s_3}{1} \quad \frac{0}{1} = \frac{t_1}{t_2} = \frac{t_3}{0}; \quad \frac{\sqrt{3}}{-1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{u_3}{0} \quad \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{t_1+u_1}{t_2+u_2} = \frac{t_3+u_3}{0};$$

отсюда получаем $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $t_1 = 0$, $t_3 = 0$, $u_3 = 0$,

$$\frac{u_1}{u_2} = -\sqrt{3}; \quad t_3 + u_3 = 0$$

$$\frac{t_1+u_1}{t_2+u_2} = \sqrt{3}.$$

Здесь получается 8 уравнений, но 7-ое из них, при наличии 4-го и 5-го, является тождеством. 8-ое же при наличии 3-го напишется так:

$$\frac{u_1}{t_2+u_2} = \sqrt{3}.$$

Комбинируя теперь 6-ое уравнение с этим преобразованным 8-ым, получим:

$$u_1 = -\sqrt{3}\cdot u_2 \text{ и } u_1 = \sqrt{3}\cdot t_2 + \sqrt{3}\cdot u_2.$$

Откуда $-\sqrt{3}\cdot u_2 = \sqrt{3}\cdot t_2 + \sqrt{3}\cdot u_2$,

или $-u_2 = t_2 + u_2$,

или $t_2 = -2u_2$.

Подставляя найденные значения коэффициентов s_1, t_1, u_1, s_2 .... в ур. (13), получим:

$$\frac{p'_1}{p'_2} = \frac{0+0-\sqrt{3}\cdot u_2\cdot p_3}{0-2u_2p_2+u_2p_3}$$
$$p'_3 = s_3p_1+0+0$$

Деля все члены правой части на u_2 и обозначая $\frac{s_3}{u_2}$ через a, получим окончательно:

$$\frac{p'_1}{p'_2} = \frac{-\sqrt{3}\cdot p_3}{-2p_2+p_3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (35).$$
$$p'_3 = ap_1$$

Здесь содержится опять лишь одна константа a, которую надо пред вычислением определить в каждом отдельном случае.

Пример вычислений кристалла. В качестве численного примера произведем вычисление кристалла чевкинита, относящегося к моноклинной сингонии.

После того как кристалл измерен, т.-е. определены на гониометре полярные координаты φ и ρ его граней, наносят на сетку гномостерео-

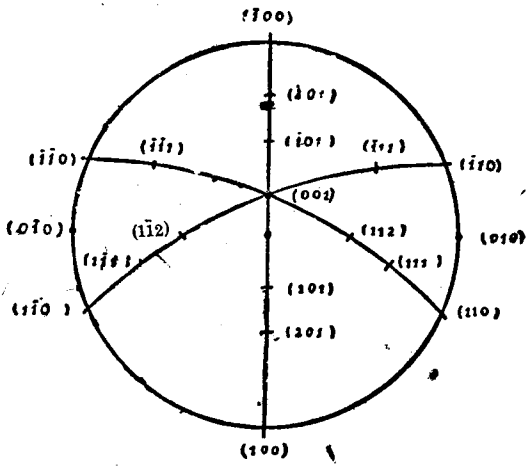
графические проекции этих граней и отыскивают элементы симметрии, сингонию, если можно, то и вид симметрии, а затем и символы всех граней. Заметим, что решение вопроса о виде симметрии и даже о сингонии лишь на основании наблюдаемых граней бывает нередко неопределенно; приходится, кроме наружной формы, изучать и физические свойства кристаллов.

На фигуре 216 представлена для примера гномостереографическая проекция граней кристалла чевкинита (минерал состава $Ce_2CaSi_3O_{10}$). Допустим, что непосредственные измерения кристалла на гониометре дали нам координаты φ и ρ его граней, которые записаны рядом с символами в первых трех колоннах таблицы на стр. 133.

Теперь займемся вычислением идеальных координат φ и ρ граней по их символам с помощью уравнений проективности. Как было указано выше (стр. 116) это вычисление есть ни что иное, как поправка координат на закон Гаюи.

Уравнения проективности моноклинной сингонии, когда вспомогательные координатные оси I = ⊥ (100) II = ⊥ (010) и положительная III направлена в ту же сторону, что и положительная нормаль к (001), имеют вид (стр. 125):

$$\frac{p'_1}{p'_2} = \frac{a_1 p_1 + a_3 p_3}{a_5 p_2} \quad \frac{}{p'_3} = \frac{}{p_3} \quad \ldots(18').$$



Фиг. 216.
Проекция граней кристалла чевкинита.

Чтобы можно было по символу (p_1 p_2 p_3) вычислить проективный символ ($p'_1 p'_2 p'_3$) надо сначала определить 3 коэффициента a_1, a_3, a_5.

Для этого надо непосредственно измеренные координаты φ и ρ некоторых граней принять за окончательные, не подлежащие изменению. По ним с помощью формул (5) (стр. 119) следует найти проективные символы этих граней. Подставляя последние, а также и истинные символы тех же граней в уравнения (18′), мы определим тогда a_1, a_3, a_5, если число таких исходных граней будет достаточно. За эти исходные грани с неизменяемыми координатами обычно берут наилучше образованные, с наилучшими сигналами и достаточно большие грани исследуемого кристалла.

В нашем случае мы возьмем за исходные грани (001) и пару взаимно-симметричных граней (111) и $1\bar{1}\bar{1}$). Прежде всего уравновешиваем координаты этой пары на симметрию. Имеем (фиг. 216 и таблица на стр. 133):

$$\text{среднее } \varphi_{111} = \frac{\varphi_{111} + (180° - \varphi_{1\bar{1}\bar{1}})}{2} = \frac{18°09' - 18°05'}{2} = 18°07';$$

$$\text{среднее } \rho_{111} = \frac{\rho_{111} + \rho_{1\bar{1}\bar{1}}}{2} = \frac{64°11' + 63°59'}{2} = 64°05'.$$

Для грани же (001) имеем прямо из таблиц на стр. 133.

$$\varphi_{001} = 270^\circ \quad \rho_{001} = 10^\circ 08'$$

Итак, имеем из формул (5):

для (001)

$$\frac{p_1'}{p_2'} = \frac{\operatorname{sn}\varphi}{\operatorname{cs}\varphi} = \frac{-1}{\operatorname{ctg}\rho} = \frac{-1}{\operatorname{ctg}\,10^\circ 08'} = \frac{-1}{0};$$

для (111)

$$\frac{p_1'}{p_2'} = \frac{\operatorname{sn}\varphi}{\operatorname{cs}\varphi} = \frac{\operatorname{sn}\,18^\circ 07'}{\operatorname{cs}\,18^\circ 07'} = \frac{\operatorname{sn}\,18^\circ 07'}{\operatorname{ctg}\,64^\circ 05'}.$$

Подставляя эти отношения в (18′) (стр. 131), получаем:

для (001)

$$\frac{-1}{\operatorname{ctg}\,10^\circ 08'} = \frac{a_1 \cdot 0 + a_3 \cdot 1}{a_5 \cdot 0} = \frac{a_1 \cdot 0 + a_3 \cdot 1}{1};$$

для (111)

$$\frac{\operatorname{sn}\,18^\circ 07'}{\operatorname{cs}\,18^\circ 07'} = \frac{a \cdot 1 + a_3 \cdot 1}{a_5 \cdot 1} = \frac{a_1 \cdot 1 + a_3 \cdot 1}{1}.$$

Из этих соотношений вытекает:

$$-\frac{1}{\operatorname{ctg}\,10^\circ 08'} = \frac{a_3}{1};$$

$$\frac{\operatorname{cs}\,18^\circ 07'}{\operatorname{ctg}\,64^\circ 05'} = a_5;$$

$$\operatorname{tg}\,18^\circ 07' = \frac{a_1 + a_3}{a_5}$$

Отсюда:

$$a_1 = a_5 \operatorname{tg}\,18^\circ 07' - a_3$$

$$\lg(-a_3) = \lg\operatorname{tg}\,10^\circ 08' = \bar{1},25219$$

$$\lg a_5 = \lg\operatorname{cs}\,18^\circ 07' + \lg\operatorname{tg}\,64^\circ 05'$$

$$a_3 = -0,17873$$
$$a_5 = 1,95586$$
$$a_1 = 0,81863$$

И уравнения проективности (18′) принимают теперь такой вид:

$$\frac{p_1'}{p_2'} = \frac{0,81863p_1 - 0,17873p_3}{1,95586p_2}$$

Теперь мы можем вычислить проективный символ любой грани нашего кристалла.

Проделаем вычисления для двух граней: $(\bar{1}01)$ и $(\bar{1}\bar{1}1)$.

Для первой имеем:

$$\frac{p_1'}{p_2'} = \frac{-0{,}81863 - 0{,}17873}{0} = \frac{-0{,}99736}{0}$$
$$\frac{p_2'}{p_3'} = \frac{}{1} = \frac{}{1}$$

А для второй

$$\frac{p_1'}{p_2'} = \frac{-0{,}81863 - 0{,}17873}{1{,}95586} = \frac{-0{,}99736}{1{,}95586}$$
$$\frac{p_2'}{p_3'} = \frac{}{1} = \frac{}{1}$$

Подставляем найденные значения в формулы (10) и (11) (стр. 120), чтобы определить полярные координаты этих граней. Тогда получаем:

Для $(\bar{1}01)$:

$$\operatorname{tg} \varphi_{\bar{1}01} = \frac{-0{,}99736}{0} = -\infty,$$

откуда $\varphi_{\bar{1}01} = 270°$,

$$\operatorname{tg} \rho_{\bar{1}01} = \frac{p_1'}{p_3' \cdot \operatorname{sn} \varphi_{\bar{1}01}} = \frac{-0{,}99736}{1.(-1)} = 0{,}99736.$$

Для $(\bar{1}\bar{1}1)$:

$$\operatorname{tg} \varphi_{\bar{1}11} = \frac{-0{,}99736}{1{,}95586};$$

$$\operatorname{tg} \rho_{\bar{1}11} = \frac{1{,}95586}{1 \cdot \cos \varphi_{\bar{1}11}}.$$

Произведя арифметические выкладки найдем:

$$\varphi_{\bar{1}01} = 270°00'$$
$$\varphi_{\bar{1}11} = 332°59'$$
$$\rho_{\bar{1}01} = 44°55'$$
$$\rho_{\bar{1}11} = 65°31'$$

Также точно найдем φ и ρ для всех остальных граней. Все эти вычисленные значения сферических координат приведены в нижеследующей таблице, где они сопоставлены с наблюденными координатами, как это обычно делается при кристаллографических исследованиях.

Грань	Измеренные		Вычисленные		Разница	
	φ	ρ	φ	ρ	φ	ρ
100	90°	90°	90°	90°	0°	0°
201	»	56°09′	»	55°34′	»	− 0°35′
101	»	32°27′	»	32°37′	»	+ 0°10′
*001	270°	10°08′	270°	10°08′	»	0°
$\bar{1}01$	»	40°37′	»	44°55′	»	+ 4°18′
$\bar{2}01$	»	61°07′	»	61°10′	»	+ 0°03′
110	21°54′	88°53′	22°43′	90°	+ 0°49′	1°07′
$\bar{1}10$	157°42′	89°17′	157°17′	90°	− 0°25′	+ 0°43′
*111	18°09′	64°11′	18°07′	64°05′	− 0°02′	− 0°06′
*$\bar{1}\bar{1}1$	161°55′	63°59′	161°53′	»	− 0°02′	+ 0°06′
$\bar{1}11$	333°40′	65°22′	332°59′	65°31′	− 0°41′	+ 0°09′
$\bar{1}\bar{1}1$	206°42′	64°56′	207°01′	»	+ 0°19′	+ 1°04′
112	12°35′	45°00′	13°16′	45°08′	+ 0°41′	+ 0°08′
$\bar{1}12$	168°01′	43°20′	166°44′	»	− 1°17′	+ 1°48′

Звездочки в первой графе этой таблицы означают, что значения φ и ρ соответственных граней [(001) и средние из (111) и $(1\bar{1}1)$] были приняты за исходные (не подлежащие изменениям) при вычислениях.

Из таблицы мы видим, что разница между измеренными и вычисленными в большинстве случаев не достигает 0,5°, но для некоторых граней превосходит 1° и даже для $(\bar{1}01)$ доходит до 4°18′. Это показывает, что кристаллы, результат измерения которых представлен в этой таблице, были сравнительно плохо образованы.

В связи с этим можно так распределить кристаллы в пятиступенчатую скалу по степени совершенства образования.

Категория		Отклонения наблюденных координат от вычисленных
I	Весьма совершенные кристаллы	От 0°00′ до 1′
II	хорошо образованные	» 1′ » 10′
III	средние по совершенству	» 10′ » 30′
IV	плохо образованные	» 30′ » 1°30′ [1]
V	Весьма плохо образованные.	» 1°30′ » и выше

Обратная задача—вычисление символов грани по данным ее координатам решается с помощью метода проективных символов так. Сперва с помощью формулы (5)

$$\frac{p_1'}{p_2'} = \frac{\operatorname{sn}\varphi}{\operatorname{cs}\varphi} \qquad \frac{p_2'}{p_3'} = \frac{\operatorname{cs}\varphi}{\operatorname{ctg}\rho} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

находим по координатам данной грани ее проективный символ. Затем с помощью формулы (12)

$$\frac{p_1'}{p_2'} = \frac{k_1p_1' + l_1p_2' + \operatorname{sn} p_3'}{k_2p_1' + l_2p_2' + m_2p_3'} \qquad \frac{p_2'}{p_3'} = \frac{k_2p_1' + l_2p_2' + m_2p_3'}{k_3p_1' + l_3p_2' + m_3p_3'}$$

можем найти истинный символ (p_1, p_2, p_3), если предварительно определим коэффициенты k_1, l_1, m_1, k_2, ... m_3. Коэффициенты же эти мы можем определить тем же способом, каким мы определяли выше коэффициенты s_1, t_1, u_1, s_2, ... u_3 в уравнениях (13), т.-е. разделив сначала все 9 на m_3 и получив таким образом новое уравнение, аналогичное уравнению (16) стр. 124, а затем подставляя в это уравнение истинные и проективные символы четырех исходных граней. Тогда для каждой сингонии мы получим уравнения, аналогичные (17), (18), (19), (20), (34) и (35), но иные по форме. Их мы не приводим, так как, руководствуясь сказанным, их нетрудно вывести, это во-первых, а во-вторых, мы дадим сейчас те же уравнения в несколько ином, более практическом виде.

А именно. Для вычисления истинных символов по проективным мы можем воспользоваться упомянутыми уравнениями проективности (16),

[1] Отклонение в 1°30′ отвечает смещению сигнала на половину поля зрения трубы гониометра, т.-е. за пределы поля.

(17), (18), (19), (20), (21), (34) и (35) и путем решения их относительно p_1, p_2, p_3 получить обратные уравнения проективности как для общего случая (из ур. 16), так и для различных сингоний в частности. Разница и выгода так полученных уравнений от тех, о которых было сказано, что мы их не приводим, заключается в том, что коэффициенты этих новых уравнений будут просто выражены через коэффициенты $a_1, a_2, a_3, \ldots a_8$, уравнений проективности (16)—(35), а потому будут получены попутно при вычислении последних.

Итак, решая уравнения (16), (17), (18), (19), (20), (21), (34) и (35) относительно p_1, p_2, p_3 после необходимых выкладок получим следующие обратные уравнения проективности.

В общем виде:

$$\begin{matrix} \underline{p_1} \\ \underline{p_2} \\ p_3 \end{matrix} = \frac{\begin{matrix} (a_6a_8 - a_8)\,p_1' + (a_2 - a_3a_8)\,p_2' + (a_3a_5 - a_2a_6)\,p_3' \\ (a_4 - a_8a_7)\,p_1' + (a_3a_7 - a_1)\,p_2' + (a_1a_6 - a_4a_3)\,p_3' \end{matrix}}{(a_7a_5 - a_4a_8)\,p_1' + (a_1a_8 - a_2a_7)\,p_2' - (a_1a_5 - a_4a_2)\,p_3'}$$

Триклинная сингония

$$\begin{matrix} \underline{p_1} \\ \underline{p_2} \\ p_3 \end{matrix} = \frac{\begin{matrix} a_5p_1' - a_3a_5p_3' \\ -a_4\,p_1' + a_1\,p_2' - (a_1a_6 - a_3a_4)\,p_3' \end{matrix}}{a_1a_5p_3'}$$

Моноклинная сингония

$$\begin{matrix} \underline{p_1} \\ \underline{p_2} \\ p_3 \end{matrix} = \frac{\begin{matrix} a_5p_1' - a_3a_5p_3' \\ a_1p_2' \end{matrix}}{a_1a_5p_3'}$$

Ромбическая сингония

$$\begin{matrix} \underline{p_1} \\ \underline{p_2} \\ p_3 \end{matrix} = \frac{\begin{matrix} a_5p_1' \\ a_1p_2' \end{matrix}}{a_1a_5p_3'}$$

Тетрагональная сингония

$$\begin{matrix} \underline{p_1} \\ \underline{p_2} \\ p_3 \end{matrix} = \frac{\begin{matrix} p_1' \\ p_2' \end{matrix}}{a_1p_3'}$$

Кубическая сингония

$$\begin{matrix} \underline{p_1} \\ \underline{p_2} \\ p_3 \end{matrix} = \frac{\begin{matrix} p_1' \\ p_2' \end{matrix}}{p_3'}$$

Тригональная подсингония

$$\begin{matrix} \underline{p_1} \\ \underline{p_2} \\ p_3 \end{matrix} = \frac{\begin{matrix} -k\sqrt{3}\,p_1' + 3kp_2' - 2\sqrt{3}\,p_3' \\ -k\sqrt{3}\,p_1' - 3kp_2' - 2\sqrt{3}\,p_3' \end{matrix}}{2k\sqrt{3}\,p_1' - 2\sqrt{3}\,p_3'}$$

Гексагональная сингония

$$\begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{matrix} = \frac{-2\sqrt{3}\,p_3'}{ap_1' + a\sqrt{3}\,p_2'} \qquad \frac{}{2ap_1'}$$

§ 71. Метод непосредственных формул (метод Аншелеса).

В последнее время проф. О. М. Аншелес [1]) вывел формулы, которые дают искомые координаты φ_X и ρ_X определяемой грани X в функции от ее символа (pqr) и координат φ_P, ρ_P, ρ_Q, φ_R, ρ_R, φ_U, ρ_U, основных граней P,Q,R и единичной U (φ_Q при этом принимается равным 0, т.-е. счет долгот φ ведется от меридиана нормали к грани Q). Формулы эти даны их автором как для самого общего случая, произвольной сингонии и произвольной ориентировки кристалла по отношению к оси проекций, так и для разнообразных частных случаев, чаще встречающихся.

Мы приведем здесь главнейшие из формул Аншелеса, не останавливаясь на их выводе, который может быть сделан, как указал Н. Н. Падуров [2]), из только что изложенных формул метода проективности.

Обозначения. Пусть

P	означает	грань	(100)
Q	»	»	(010)
R	»	»	(001)
U	»	»	(111)

φ_P, φ_Q, φ_R, φ_U, — долготы этих граней, считаемые от меридиана грани Q по часовой стрелке.

ρ_P, ρ_Q, ρ_R, ρ_U, — полярные расстояния тех же граней.

X, φ_X, ρ_X — произвольная грань того же кристалла и ее долгота и полярное расстояние.

(p, q, r) — символ грани X.

Общий случай. Расположение граней P, Q, R, U, X, взаимное и относительно оси проекций,—произвольно. Но относительно первого меридиана весь кристалл повернут так, что грань Q приходится как раз в этом меридиане ($\varphi_Q = 0$).

При этих условиях имеем зависимость:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\operatorname{ctg}\rho_R \cdot \operatorname{sn}\varphi_X - \operatorname{ctg}\rho_X \operatorname{sn}\varphi_R + \operatorname{ctg}\rho_Q \operatorname{sn}(\varphi_R - \varphi_X)}{\operatorname{ctg}\rho_R \cdot \operatorname{sn}\varphi_U - \operatorname{ctg}\rho_U \operatorname{sn}\varphi_R + \operatorname{ctg}\rho_Q \operatorname{sn}(\varphi_R - \varphi_U)} : \\ : \dfrac{\operatorname{ctg}\rho_R \cdot \operatorname{sn}(\varphi_P - \varphi_X) - \operatorname{ctg}\rho_X \operatorname{sn}(\varphi_P - \varphi_R) - \operatorname{ctg}\rho_P \operatorname{sn}(\varphi_R - \varphi_X)}{\operatorname{ctg}\rho_R \cdot \operatorname{sn}(\varphi_P - \varphi_U) - \operatorname{ctg}\rho_U \operatorname{sn}(\varphi_P - \varphi_R) - \operatorname{ctg}\rho_P \operatorname{sn}(\varphi_R - \varphi_U)} : \\ : \dfrac{\operatorname{ctg}\rho_P \operatorname{sn}\varphi_X - \operatorname{ctg}\rho_X \cdot \operatorname{sn}\varphi_P + \operatorname{ctg}\rho_Q \operatorname{sn}(\varphi_P - \varphi_X)}{\operatorname{ctg}\rho_P \operatorname{sn}\varphi_U - \operatorname{ctg}\rho_U \cdot \operatorname{sn}\varphi_P + \operatorname{ctg}\rho_Q (\operatorname{sn}\varphi_P - \varphi_U)} = p : q : r \end{array}\right\} \ldots (1).$$

[1]) О. М. Аншелес. Зависимость между индексами и сферическими координатами граней кристаллов. (Тр. Ленингр. О-ва Ест. т. LV вып. 4. 1925).

[2]) Доклад в Федоровском Институте в 1929 г.

Эта формула годится для вычисления символов p q r любой грани X по координатам граней P, Q, R, U и X, но она совсем неудобна для вычислений φ_X и ρ_X. Однако, ею в этом случае практически пользоваться не приходится, так как кристалл при измерении почти никогда не располагается произвольно по отношению к оси проекций, а почти всегда юстируется в каком-либо специальном положении, для которого некоторые члены этой формулы исчезают, упрощая все выражение. К таким частным формулам мы и переходим далее.

Триклинная сингония.

1-й случай. Кристалл юстирован на гониометре по зоне [001] [1] (см. стр. 95). Следовательно, $\rho_P = \rho_Q = 90°$ ($\varphi_Q = 0$ по прежнему).

Подставляя эти значения в общую формулу (1) этого параграфа и произведя необходимые выкладки получим:

$$p : q : r = \frac{\operatorname{tg}\rho_X \operatorname{sn}\varphi_X - \operatorname{tg}\rho_R \operatorname{sn}\varphi_R}{\operatorname{tg}\rho_U \operatorname{sn}\varphi_U - \operatorname{tg}\rho_R \operatorname{sn}\varphi_R} : \frac{\operatorname{tg}\rho_X \operatorname{sn}(\varphi_P - \varphi_X) - \operatorname{tg}\rho_R \operatorname{sn}(\varphi_P - \varphi_R)}{\operatorname{tg}\rho_U \operatorname{sn}(\varphi_P - \varphi_U) - \operatorname{tg}\rho_R \operatorname{sn}(\varphi_P - \varphi_R)} : 1 \quad \ldots\ldots (2).$$

Затем, решая эти уравнения относительно φ_X и ρ_X, найдем:

$$\operatorname{ctg}\varphi_X = \frac{\overbrace{q \operatorname{tg}\rho_U \operatorname{sn}(\varphi_P - \varphi_U) + (r-q)\operatorname{tg}\rho_R \operatorname{sn}(\varphi_P - \varphi_R)}^{A}}{\operatorname{sn}\varphi_P \underbrace{[p \operatorname{tg}\rho_U \operatorname{sn}\varphi_U + (r-p)\operatorname{tg}\rho_R \operatorname{sn}\varphi_R]}_{B}} + \operatorname{ctg}\varphi_P \quad \ldots\ldots (3)$$

$$\operatorname{tg}\rho_X = \frac{A}{r \operatorname{sn}(\varphi_P - \varphi_X)} = \frac{B}{r \operatorname{sn}\varphi_X} \quad \ldots\ldots\ldots (4).$$

2-ой случай. Кристалл юстирован по грани (001) (см. стр. 96). Следовательно, $\rho_R = 0$, ($\varphi_Q = 0$ по прежнему).

Подставляя эти значения в формулу (1) и упрощая полученные после этого уравнения получаем:

$$p : q : r = \frac{\operatorname{sn}\varphi_X}{\operatorname{sn}\varphi_U} : \frac{\operatorname{sn}(\varphi_P - \varphi_X)}{\operatorname{sn}(\varphi_P - \varphi_U)} : \frac{\operatorname{ctg}\rho_\varphi \operatorname{sn}\varphi_X - \operatorname{ctg}\rho_X \operatorname{sn}\varphi_P + \operatorname{ctg}\rho_Q \operatorname{sn}(\varphi_P - \varphi_X)}{\operatorname{ctg}\rho_P \operatorname{sn}\varphi_U - \operatorname{ctg}\rho_U \operatorname{sn}\varphi_P + \operatorname{ctg}\rho_Q \operatorname{sn}(\varphi_P - \varphi_U)} \quad \ldots\ldots (5).$$

Решая же эти уравнения относительно φ_X и ρ_X найдем:

$$\operatorname{ctg}\varphi_X = \frac{q}{p}\operatorname{ctg}\varphi_U + \left(1 - \frac{q}{p}\right)\operatorname{ctg}\varphi_P \quad \ldots\ldots (6)$$

и $$\operatorname{ctg}\rho_X = \frac{\operatorname{sn}\varphi_X}{p}\left[\frac{(p-r)\operatorname{ctg}\rho_P}{\operatorname{sn}\varphi_P} + \frac{r \operatorname{ctg}\rho_U}{\operatorname{sn}\varphi_U} + (q-r)\operatorname{ctg}\rho_Q(\operatorname{ctg}\varphi_U - \operatorname{ctg}\varphi_P)\right] \quad (7).$$

---

[1] Этот случай отвечает тому, который был взят в соответствующем месте при изложении метода проективных символов (стр. 124).

Моноклинная сингония.

1-й случай. Кристалл юстирован по зоне [001] [1])

$$\rho_P = \rho_Q = 90°;\ \varphi_P = \varphi_R = 90°;\ \varphi_Q = 0.$$

Подставляя эти значения в формулы (2), (3) и (4) триклинной сингонии, получим:

$$p : q : r = \frac{\operatorname{tg}\rho_X \cdot \operatorname{sn}\varphi_X - \operatorname{tg}\rho_R}{\operatorname{tg}\rho_U \cdot \operatorname{sn}\varphi_U - \operatorname{tg}\rho_R} : \frac{\operatorname{tg}\rho_X \cdot \operatorname{cs}\varphi_X}{\operatorname{tg}\rho_U \cdot \operatorname{cs}\varphi_U} : 1 \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

$$\operatorname{tg}\varphi_X = \frac{p}{q}\operatorname{tg}\varphi_U + \frac{(r-p)\operatorname{tg}\rho_R}{q \operatorname{tg}\rho_U \operatorname{cs}\varphi_U} \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

$$\operatorname{tg}\rho_X = \frac{q \cdot \operatorname{tg}\rho_U \operatorname{cs}\varphi_U}{r \operatorname{cs}\varphi_X} = \frac{p \operatorname{tg}\rho_U \operatorname{sn}\varphi_U + (r-p)\operatorname{tg}\rho_R}{r \operatorname{sn}\varphi_X} \quad \ldots\ldots (10).$$

2-ой случай. Юстировка по грани (001)

$$\rho_R = 0°,\ \rho_Q = 90°,\ \varphi_R = \frac{0}{0}\ \ \varphi_P = 90°,\ \varphi_Q = 0°.$$

Подставляем эти значения в (5), (6), (7), тогда получаем:

$$p : q : r = \frac{\operatorname{sn}\varphi_X}{\operatorname{sn}\varphi_U} : \frac{\operatorname{cs}\varphi_X}{\operatorname{cs}\varphi_U} : \frac{\operatorname{ctg}\rho_P \operatorname{sn}\varphi_X - \operatorname{ctg}\rho_X}{\operatorname{ctg}\rho_P \operatorname{sn}\varphi_U - \operatorname{ctg}\rho_U} \quad \ldots\ldots (11)$$

$$\operatorname{ctg}\varphi_X = \frac{q}{p}\operatorname{ctg}\varphi_U \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

$$\operatorname{ctg}\rho_X = \frac{\operatorname{sn}\varphi_X}{p}\left[(p-r)\operatorname{ctg}\rho_P + \frac{r \operatorname{ctg}\rho_U}{\operatorname{sn}\varphi_U}\right] \quad \ldots\ldots\ldots (13).$$

Ромбическая сингония. Юстировка по зоне [001] или (что то же) по грани (001).

$$\rho_P = \rho_Q = 90°;\ \rho_R = 0°;\ \varphi_P = 90°;\ \varphi_Q = 0°;\ \varphi_R = \frac{0}{0}.$$

Подставляя эти значения в формулу (8), (9), (10), или в (11), (12), (13), получаем:

$$p : q : r = \frac{\operatorname{sn}\varphi_X}{\operatorname{sn}\varphi_U} : \frac{\operatorname{cs}\varphi_X}{\operatorname{cs}\varphi_U} : \frac{\operatorname{ctg}\rho_X}{\operatorname{ctg}\rho_U} \quad \ldots\ldots\ldots (14)$$

$$\operatorname{ctg}\varphi_X = \frac{q}{p}\operatorname{ctg}\varphi_U \quad \ldots\ldots\ldots (15)$$

$$\operatorname{ctg}\rho_X = \frac{r \operatorname{ctg}\rho_U \operatorname{sn}\varphi_X}{p \operatorname{sn}\varphi_U} = \frac{r \operatorname{ctg}\rho_U \cdot \operatorname{cs}\varphi_X}{q \operatorname{cs}\varphi_U} \quad \ldots\ldots\ldots (16).$$

---

[1]) Этому случаю отвечает тот, который разобран для моноклинной сингонии при изложении метода проективных символов (стр. 125).

Тетрагональная сингония. Юстировка по зоне [001], или (что то же) по грани R [001].

$$\rho_P = \rho_Q = 90°;\ \rho_R = 0°;\ \varphi_P = 90°;\ \varphi_Q = 0°;\ \varphi_R = \frac{0}{0}.$$

$$\varphi_U = 45°;\ \operatorname{sn}\varphi_U = \operatorname{cs}\varphi_U = \frac{1}{\sqrt{2}};\ \operatorname{ctg}\varphi_U = 1.$$

Подставляем эти значения в (14), (15) и (16); находим:

$$p : q : r = \frac{\operatorname{sn}\varphi_X}{\operatorname{sn}45°} : \frac{\operatorname{cs}\varphi_X}{\operatorname{cs}45°} : \frac{\operatorname{ctg}\rho_X}{\operatorname{ctg}\rho_U} = \operatorname{sn}\varphi_X : \operatorname{cs}\varphi_X : \frac{\operatorname{ctg}\rho_X}{\sqrt{2}\operatorname{ctg}\rho_U} \quad \ldots\ (17)$$

$$\operatorname{ctg}\varphi_X = \frac{q}{p} \quad \ldots\ (18)$$

$$\operatorname{ctg}\rho_X = \frac{r\operatorname{ctg}\rho_U \operatorname{sn}\varphi_X}{p\operatorname{sn}45°} = \frac{r\operatorname{ctg}\rho_U \operatorname{cs}\varphi_X}{q\operatorname{cs}45°} \quad \ldots\ (19)$$

Кубическая сингония. Юстировка по зоне [001] или по грани (001) (что одно и то же).

$$\rho_P = \rho_Q = 90°;\ \rho_R = 0°;\ \varphi_P = 90°;\ \varphi_Q = 0°;\ \varphi_R = \frac{0}{0}$$

$$\varphi_U = 45°;\ \rho_U = 54°44'08'';\ \operatorname{sn}45° = \operatorname{cs}45 = \operatorname{ctg}54°44'08'' = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Подставляя эти значения в формулы тетрагональной сингонии (17), (18), (19) получаем:

$$p : q : r = \operatorname{sn}\varphi_X : \operatorname{cs}\varphi_X : \operatorname{ctg}\rho_X \quad \ldots\ (20)$$

$$\operatorname{ctg}\varphi_X = \frac{q}{p} \quad \ldots\ (21)$$

$$\operatorname{tg}\rho_X = \frac{\sqrt{p^2+q^2}}{r} \quad \ldots\ (22)$$

Заметим, что формула (20) тождественна с формулой (5) § 70 (стр. 119), что понятно из того, что в кубической сингонии проективные символы и истинные совпадают по их определению, а ориентировка кристалла и в формуле (5) стр. 119 и в формуле (20) тождественна. Формулы же (21) и (22) вытекают из (20).

Тригональная подсингония. Юстировка по зоне [111] или по грани (111).

$$\varphi_P = 120°;\ \varphi_Q = 0°;\ \varphi_R = -120°;\ \varphi_U = \frac{0}{0};\ \rho_P = \rho_Q = \rho_R;\ \rho_U = 0°.$$

Здесь приходится воспользоваться лишь самой общей формулой (1) (стр. 136), как исходной. Подставляя в нее приведенные выше числовые значения координат φ_P, φ_Q и т. д. и произведя необходимые упрощения получим:

$$\frac{p}{q} = \frac{\operatorname{tg}\rho_P \operatorname{ctg}\rho_X + 2\operatorname{sn}(\varphi_X - 30°)}{\operatorname{tg}\rho_P \operatorname{ctg}\rho_X + 2\operatorname{cs}\varphi_X} \quad \ldots\ (23)$$

$$\frac{q}{r} = \frac{\operatorname{tg}\rho_P \operatorname{ctg}\rho_X + 2\operatorname{sn}(\varphi_X + 30°)}{\operatorname{tg}\rho_P \operatorname{ctg}\rho_X - 2\operatorname{sn}(\varphi_X + 30°)}$$

$$\operatorname{ctg}\varphi_X = \frac{2q - p - r}{(p - r)\sqrt{3}} \quad \ldots\ (24)$$

$$\operatorname{tg}\rho_X = \frac{\sqrt{p^2+q^2+r^2-pq-pr-qr}}{p+q+r}\ \operatorname{tg}\rho_P \quad \ldots\ (25)$$

Гексагональная подсингония. Юстировка по зоне [1000] или, что то же по грани (1000) (см. фиг. 215). Четвертый индекс при вычислениях углов отбрасываем.

Обозначения граней:

$$P = (1000);\ Q = (01\bar{0}1);\ R = (0011);\ U = (1110).$$

В таком случае:

$$\varphi_P = \frac{0}{0}\quad \varphi_Q = 0;\ \varphi_R = 120°;\ \rho_P = 0;\ \rho_Q = \rho_R = 90°;\ \varphi_U = 60°.$$

Здесь приходится исходить из формул (5), (6) и (7) триклинной сингонии 2-го случая (юстировка по грани). Однако, так как здесь юстировка сделана по (100), а не по (001), то прежде всего в формулах (5), (6), (7) необходимо p, φ_P и ρ_P заменить через q, φ_Q и ρ_Q и обратно. А затем надо подставить вышеприведенные значения φ_P, φ_Q и т. д. Окончательно получим:

$$p : q : r = \frac{\operatorname{ctg}\rho_X}{\operatorname{ctg}\rho_U} : \frac{\operatorname{sn}(60° + \varphi_X)}{\operatorname{sn} 60°} : \frac{\operatorname{sn}\varphi_X}{\operatorname{sn} 60°} \quad \ldots\ldots (26)$$

$$\operatorname{ctg}\varphi_X = \frac{2q - r}{r\sqrt{3}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

$$\operatorname{tg}\rho_X = \frac{\sqrt{q^2 - qr + r^2}}{p} \operatorname{tg}\rho_U \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (28).$$

Достоинства и недостатки метода О. М. Аншелеса. В работе О. М. Аншелеса приведен ряд других формул, представляющих упрощения тех, которые указаны здесь, для различных частных случаев. В конце работы приложены таблицы, очень упрощающие вычисления кубических, тетрагональных и гексагональных кристаллов.

Формулы Аншелеса удобны тем, что посредством их искомые величины находятся непосредственной подстановкой данных величин без всяких промежуточных величин.

Недостатком формул Аншелеса служит то, что в них известными гранями P, Q, R и U, должны быть те, которые имеют символы (100), (010), (001), (111). Между тем нередко оказывается, что этих граней, всех или некоторых, не существует в измеренном кристалле. В таком случае бывает необходимо за данные грани взять некоторые 4 с иными символами, не лежащие по три в одном поясе, временно придать им символы (100), (010), (001), (111), перечислить в этом предположении символы остальных граней и тогда произвести вычисления по формулам.

Эта операция основана на том, что символы в вычислениях играют лишь посредствующую роль.

Перечисление символов из одной установки в другую производится по формулам, аналогичным уравнениям проективности.

$$\frac{p_1}{r_1} = \frac{a_1p + b_1q + c_1r}{a_3p + b_3q + c_3r}\quad \frac{q_1}{r_1} = \frac{a_2p + b_2q + c_2r}{a_3p + b_3q + c_3r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (29).$$

Здесь $(p_1\ q_1\ r_1)$ — новый вспомогательный символ (pqr) — старый (истинный) символ; $a_1\ b_1\ c_1\ a_2 \ldots\ldots c_3$ — коэффициенты пересчета,

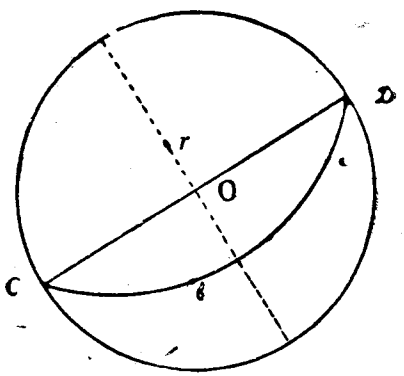
постоянные для всех граней кристалла и вычисляемые путем подстановки истинных и новых символов четырех исходных граней в уравнение (29). Каждая из таких граней дает 2 уравнения, все вместе — 8 уравнений для определения 9 коэффициентов, один из которых мы можем принять равным 1 или произвольному числу, вследствие того, что нам важны, как всегда, отношения индексов, а не абсолютные величины.

§ 72. Вычерчивание изображений кристаллов в ортогональных проекциях.

Гномостереографические проекции кристаллов весьма удобны для точного изображения угловых величин кристаллов и для всевозможных дальнейших графических операций, основанных на этих угловых величинах. Но они не дают нам никакого представления о размерах граней и ребер кристалла и о внешнем виде его.

Чтобы это дать, пользуются обычно ортогональными проекциями, т.-е. такими, где проекция каждой вершины или каждой точки какого-либо ребра кристалла получается как основание перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость проекций (обычный способ начертательной геометрии).

Наиболее простой способ получить правильно построенную ортогональную проекцию кристалла — воспользоваться для этого предварительно составленной гномостереографической проекцией его. Изложим кратко этот способ. Он основан на следующей теореме.



Фиг. 217.
Ортогональная проекция ребра пересечения граней a и b направлена перпендикулярно диаметру CD.

Теорема. Если даны гномостереографические проекции a и b двух граней кристалла (фиг. 217), то ортогональная проекция ребра пересечения этих граней на плоскость той же стереографической проекции будет перпендикулярна к тому диаметру CD, на который опирается дуга большого круга, проходящего через a и b (фиг. 217).

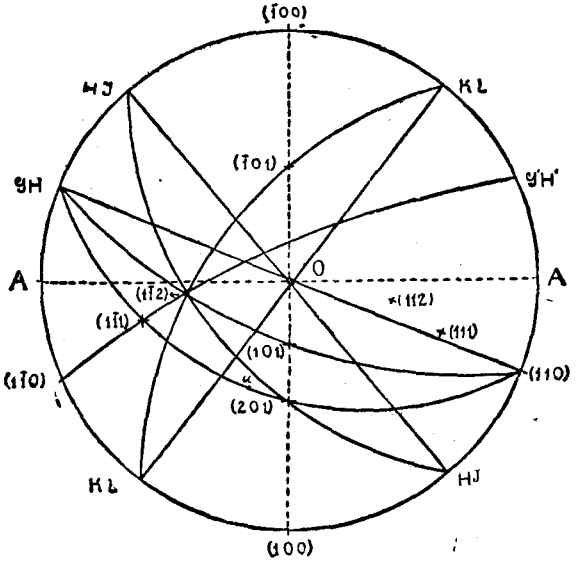
Доказательство. Назовем плоскости, для которых a и b являются гномостереографическими проекциями через P_a и P_b, а нормали к этим плоскостям через N_a и N_b. Ребро пересечения R обеих этих плоскостей будет, очевидно, перпендикулярно к обеим нормалям $R \perp N_a$ и $R \perp N_b$. Следовательно, оно будет перпендикулярно к плоскости, проходящей через эти нормали, изображаемой в стереографической проекции дугой CbaD большого круга, опирающейся на диаметр CD (фиг. 217).

Поэтому стереографическая проекция этого ребра R совпадает с полюсом r этой плоскости, который, как известно, лежит на диаметре, нормальном к CD. Ребро же R в пространстве лежит в плоскости, проходящей через Or нормально к чертежу. Но раз это так, то ортогональная проекция ребра R совпадает с Or. А в чертеже кристалла ортогональные проекции всех ребер параллельных R должны быть параллельны Or. Теорема доказана.

Самый способ вычерчивания изложен в виде следующей задачи, имеющей своим предметом кристалл того же чевкинита, для которого даны примеры на вычисление кристаллов.

Задача. Дана гномостереографическая проекция граней кристалла чевкинита (фиг. 218). Имея перед собой также этот кристалл, вычертим ортогональную его проекцию. Заметим, что на проекции фиг. 218 некоторые грани по сравнению с фиг. 216 опущены для упрощения задачи в смысле количества однообразных построений. Метод решения для большего количества граней остается тем же самым.

Заметим далее, что абсолютные размеры граней обычно не играют существенной роли при описании кристаллов. Поэтому и абсолютные размеры ортогональных проекций этих граней обычно не стараются изо-



Фиг. 218.
Стереографическая проекция кристалла чевкинита с вспомогательными дугами и диаметрами для вычерчивания ортогональной проекции.

бразить с большой точностью, стараясь лишь сохранить их относительную величину на чертеже. Так мы будем сейчас вести вычерчивание, указав, однако, как надо поступать, если требуется точно сохранить относительные размеры всех граней, т.-е. вычертить ортогональную проекцию именно данного экземпляра строго в масштабе. Углы же между ребрами кристалла имеют, как мы знаем, вследствие закона Стенона важное значение, а потому и углы между ортогональными проекциями ребер должны быть вычерчены точно.

Наконец, заметим, что кристаллы обычно бывают несимметрично развиты, хотя бы они обладали элементами симметрии. Обычно же, однако, они вычерчиваются в симметричном виде, если нет специального задания вычертить кристалл в точности, так как он есть.

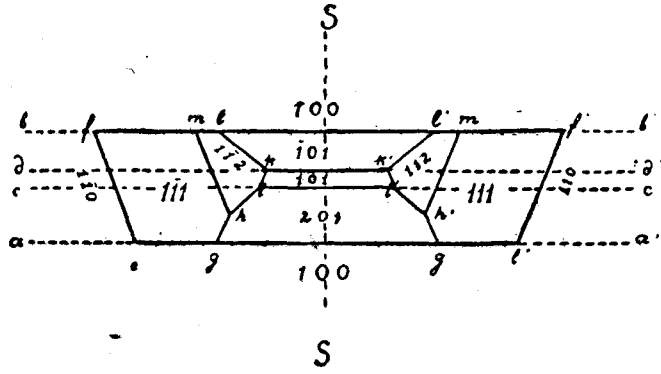
Прежде всего полезно, поставив кристалл так, как он ориентирован на стереосетке, и глядя на него сверху, нарисовать приблизительно,

на-глаз требуемую проекцию, для наглядного руководства таким рисунком при дальнейшем точном вычерчивании.

Заметим, что кристалл чевкинита обладает габитусом (т.-е. общим внешним видом) толстотабличатым по (100). Поэтому, так как эта грань у нас стоит нормально к плоскости проекций, то как она (100), так и ей противоположная ($\bar{1}00$) изобразятся двумя параллельными прямыми aa′ и bb′, которые мы проводим рядом со стереографической проекцией параллельно ее диаметру AA.

Грани (201), (101) и ($\bar{1}01$), принадлежащие к поясу [010] в ортогональной проекции будут иметь вид полосок параллельных AA.

Проекции ребер этих граней, т.-е. границы полосок, мы прочерчиваем или на-глаз, сохраняя приблизительно размеры кристалла, или измерив истинную ширину каждой из трех граней и умножив ее на косинус угла наклона ее к плоскости проекций, вычисляем предварительно



Фиг. 219.
Ортогональная проекция того же кристалла.

точную ширину каждой из этих граней—полосок. Так получаем линии cc′ и dd′. Затем измеряем по кристаллу его размер ee′ [1]) и откладываем его на фиг. 219 на прямой aa′, соблюдая тот же масштаб, что и при отложении ширины проекций граней (201), (101), ($\bar{1}01$).

Обращаемся к грани ($1\bar{1}0$). Она нормальна к плоскости чертежа, поэтому ее проекция есть прямая линия, перпендикулярная к нормали O ($1\bar{1}0$).

Поэтому из точки e проводим ef $\perp$ к радиусу O ($1\bar{1}0$). И также из точки e′ проводим e′f′ $\perp$ к радиусу O ($1\bar{1}0$).

Теперь строим очертания грани (201). Рассматривая кристалл, видим, что кроме ребер c (100) и (101) уже нами построенных, эта грань имеет ребра с гранями ($1\bar{1}1$), ($1\bar{1}2$) и соответственно с (111) и (112).

Эти боковые ребра мы и должны теперь построить. Для этого раньше измеряем на кристалле приблизительно длину ребра (100):(201) и откладываем (в принятом масштабе) это ребро посредине отрезка ee′. Так получаем точки gg′.

---

[1]) Если таких измерений произвести нельзя из-за малости кристалла, берут соответственные размеры на-глаз.

Теперь находим направление проекции ребра (201) : (1$\bar{1}$1), согласно доказанной выше в этом параграфе теореме. Для этого проводим дугу большого круга через проекции этих граней (201) и (1$\bar{1}$1), или, по крайней мере, отмечаем тот диаметр (110) ($\bar{1}$10) (или GH) на который она опирается. Перпендикулярно к этому диаметру и должна пойти искомая проекция gh ребра (201) : (1$\bar{1}$1), как мы ее и проводим из точки g : gh $\perp$ к диаметру ($\bar{1}$10) (110).

Так как из рассматривания кристалла мы усматриваем (как предположено выше), что грань (201) имеет ребро с гранью (1$\bar{1}\bar{2}$), то прямую gh мы не должны доводить до прямой cc'. Какую длину gh мы должны придать этому отрезку мы обычно решаем на-глаз, рассматривая кристалл. Если же требуется большая точность, то измеряем истинную длину ребра gh у кристалла, затем определяем на стереографической сетке угол наклона этого ребра к плоскости проекций.

Так как полюс r [1]) дуги GH (1$\bar{1}$1) (201) (110) есть стереографическая проекция ребра (201) : (1$\bar{1}$1), то искомый угол наклона можно найти отсчитав по сетке угол от r до окружности проекций или равный ему $\angle$Ou. На косинус этого угла помножаем тогда измеренную истинную величину ребра (201) : (1$\bar{1}$1) и откладываем полученную величину в принятом масштабе в виде отрезка gh.

Далее находим направление ребра (201) : (1$\bar{1}\bar{2}$). Для этого проводим дугу большого круга через проекции обеих последних граней, или по крайней мере отмечаем концы диаметра HJ — HJ, на который эта дуга опирается, и проводим hi $\perp$ (HJ — HJ) до встречи с прямой cc'.

Если теперь с правой стороны мы построим отрезки g'h' и h'i' симметричные с gh и hi, и наведем сплошной линией отрезок ii', то очертания проекции грани (201) будут закончены.

Приступаем к грани (101). Рассматривая кристалл мы видим (допустим), что кроме ребер с 201 и ($\bar{1}$01) она граничит непосредственно лишь с (1$\bar{1}\bar{2}$) и с симметричной с этой (112). Поэтому нам надо из точки i построить лишь направление проекции ребра (101) : (1$\bar{1}\bar{2}$). Применяя ту же теорему видим, что направление этой проекции будет опять нормально к диаметру (110) ($\bar{1}$10). Проводим прямую ik $\perp$ (110) (GH), а затем симметричную ей прямую i'k'

Теперь переходим к грани ($\bar{1}$01). Она граничит, кроме граней (101) и ($\bar{1}$00) еще лишь с гранью (1$\bar{1}\bar{2}$) и с симметричной ей (112). Проводим дугу большого круга на сетке через ($\bar{1}$01) и (1$\bar{1}\bar{2}$). Она опирается на диаметр KL — KL. Проводим kl $\perp$ (KL — KL). И затем k'l' симметрично kl.

Нам остается лишь провести проекцию ребра (1$\bar{1}\bar{2}$) : (1$\bar{1}$1). Проводим дугу большого через проекции этих граней, она опирается на диаметр (1$\bar{1}$0) (G'H'). Проводим hm $\perp$ (1$\bar{1}$0) (G'H'). Проводим h'm' симметрично hm.

И построение закончено.

---

[1]) На фиг. 218 не показан.

Другие ортогональные проекции одного и того же кристалла. Однако, ориентировка кристалла на стереопроекции обычно бывает настолько симметрична, что в одной ортогональной проекции, вычерченной, как указано выше, не получается полного наглядного представления о кристалле. Приходится совершенно тем же способом чертить такую же проекцию того же кристалла на другую плоскость, чаще всего нормальную к первой, как в начертательной геометрии, напр., в нашем случае (фиг. 218) на плоскость меридиана АА. А иногда и третью проекцию на плоскость нормальную к первым двум. Чтобы вычертить ортогональную проекцию на плоскость АА, нам надо повернуть всю систему фигуры 218 вокруг диаметра АА на 90° назад. Тогда плоскость АА совместится с плоскостью чертежа, а все проекции граней пойдут вверх, двигаясь по параллелям, пока не пройдут по ним угловое расстояние равное 90°.

После выполнения этой графической операции надо повести построение совершенно так, как было описано.

Ортогональные проекции на плоскости, нормальные к какой-нибудь зоне, или к оси или плоскости симметрии, не отличаются особой наглядностью.

Поэтому очень часто прибегают к изображению кристаллов в несколько косом положении. Для этого поступают так. Поворачивают всю систему стереосетки (фиг. 218) вокруг оси проекций на 20° — 25°, затем наклоняют всю получившуюся систему примерно на 80° верхним концом от наблюдателя. После этого вычерчивают ортопроекцию, как было указано выше. В этом случае уже одна проекция является нередко достаточной для представления о форме кристалла. Кристаллы в большинстве учебников, справочников и в оригинальных статьях изображены именно по этому способу. Однако, переход от ортопроекций к точным размерам ребер и граней кристалла гораздо проще можно сделать при двух или трех симметричных ортопроекциях, аналогичных фиг. 219, чем при одной косой ортопроекции. Кроме того, черчение косых ортопроекций требует предварительных поворотов стереопроекции и является несколько более сложным, хотя нередко, как сказано, дает более наглядные результаты. Надеясь, что ход работы ясен из всего изложенного в этом параграфе, мы на нем более не останавливаемся. Этим мы заканчиваем изложение вопросов, связанных с гониометрией кристаллов.

ЧАСТЬ ВОСЬМАЯ.

§ 73. Кристаллохимический анализ.

Кристаллохимическим анализом называется разработанный Е. С. Федоровым способ определять вещество по формам его кристаллов. Подробно мы его здесь излагать не будем, укажем лишь в чем заключается сущность этого способа. Данный для исследования кристалл сперва измеряют на отражательном гониометре. Затем по измеренным углам кристалла составляют стереографическую проекцию его форм и по этой проекции решают вопрос, к какому он типу ближе подходит по углам: кубическому или гексагональному. Дальше придают кристаллу однозначную Федоровскую установку, т.-е. согласно особым правилам,

выбирают координатные грани и единичную грань и определяют символы остальных. Определив символы, в случае кубического типа, еще определяют вид структуры. Для этого подсчитывают число граней с одним, двумя или тремя нечетными индексами. Если больше граней с двумя нечетными индексами, то структура додекаэдрическая, если больше с тремя, то октаэдрическая и т. д. Эта связь индексов в символах граней с видом структуры может быть доказана, если принять гипотезу Браве о том, что наиболее часто встречающиеся грани суть наиболее густо усаженные атомами плоские сетки. Мы эти доказательства здесь не приводим.

Таким образом решается вопрос о структуре. Наконец, покончив с вопросом о структуре, определяют ряд угловых величин, характеризующих совершенно однозначно весь комплекс граней этого кристалла. Все это вместе взятое составляет так называемый символ комплекса данного кристалла. Например, для моноклинного кристалла ортоклаза этот символ комплекса имеет такой вид:

$$3o;-8$$
$$32.$$
$$-1/2$$

Здесь o указывает, что структура кристалла октаэдрическая, 3 указывает на существование приблизительной тройной оси. Три остальных числа совершенно однозначно характеризуют комплекс граней данного кристалла. Подробнее о них здесь говорить не будем.

Теперь, зная символ комплекса для данного кристалла, отыскиваем подходящий к нему в книге Е. С. Федорова «Das Krystallreich», содержащей в определенном порядке символы комплексов всех кристаллов, изученных к моменту составления этой книги. Смотрим, какому веществу он отвечает, и тем самым определяем наше вещество.

Книга «Das Krystallreich» (царство кристаллов) написана Е. С. Федоровым в сотрудничестве с Д. Н. Артемьевым, Th. Barker'ом, Б. П. Орелкиным и В. И. Соколовым (Зап. Росс. Ак. Наук т. XXXVI, 1920 г.).

Некоторые дополнения к сказанному здесь см. в Отделе третьем, § 156, 157, стр. 319.

Юрий Викторович
ВУЛЬФ
(1863 — 1925).

ОТДЕЛ II.

ФИЗИЧЕСКАЯ КРИСТАЛЛОГРАФИЯ.

§ 74. Вопросы, рассматриваемые в физической кристаллографии.

Приступая к изучению физической кристаллографии, следует указать, что в ней можно различить ряд тех же отделов, на которые распадается физика, но не все они одинаково важны. Особенно важны оптические свойства и рентгенометрия кристаллов, которым посвятим специальные части курса. Из остальных (второстепенных) свойств коснемся механических (спайность, твердость, сдвиги, упругость), тепловых, электрических, магнитных. О некоторых свойствах, например, о звуковых, вовсе не приходится говорить, так как они мало изучены.

Все физические свойства кристалла связаны с его симметрией, так как симметрию мы и определяем не только по геометрической форме, но по совокупности всех свойств кристалла. Вследствие этой связи основательное знакомство с учением о симметрии кристаллов совершенно необходимо для понимания физики кристаллов. Неоднократное исследование физических свойств кристалла указывало, что симметрия его ниже, чем симметрия его внешней формы

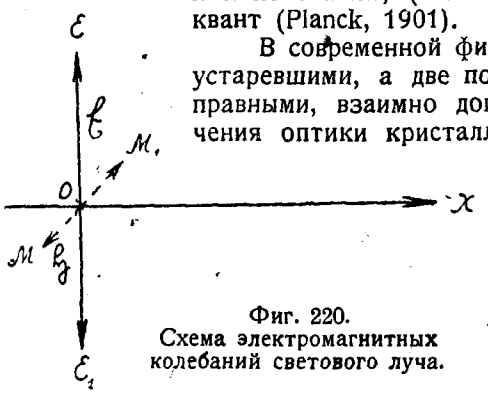
ЧАСТЬ ДЕВЯТАЯ.

Оптика кристаллов.

§ 75. Общее понятие об электромагнитной теории света.

Свет есть один из видов лучистой энергии. Под лучистой энергией мы понимаем такую, которая передается в какой-либо среде или пустоте по прямым линиям—лучам.

Для объяснения механизма передачи лучистой энергии было построено много теорий. Напомним их: 1) теория истечения, разработанная для света Ньютоном (Newton, 1704); 2) теория механических колебаний эфира (Huyghens, 1690, Fresnel, 1819), 3) теория электромагнитных колебаний; (Maxwell, 1873, Hertz, 1888), 4) теория квант (Planck, 1901).



Фиг. 220.
Схема электромагнитных колебаний светового луча.

В современной физике первые две теории считаются устаревшими, а две последние теории признаются равноправными, взаимно дополняющими друг друга. Для изучения оптики кристаллов нам удобнее пользоваться теорией элекромагнитных колебаний. При этом нам достаточно будет взять лишь ее основные положения и значительно схематизировать ее, отослав интересующихся подробным обоснованием этой, чрезвычайно детально разработанной теории к курсам физики.

Согласно электромагнитной теории, лучистая энергия представляет собой электромагнитные колебания, механизм которых вкратце таков. В каждой точке луча, под влиянием источника света, происходит периодическое изменение напряжений электрического и магнитного полей. Если каждое из этих напряжений мы изобразим вектором, то в любой точке O (фиг. 220) луча электрический вектор $\mathfrak{E}$ с течением времени, быстро возрастает от нуля до определенной величины (например OE), затем уменьшается до нуля и потом снова возрастает, но в обратную сторону до $OE_1 = -OE$.

Подобным же образом ведет себя магнитный вектор $\mathfrak{H}$. При этом, в общем случае направление таких колебательных изменений, или, короче,—колебаний того и другого вектора будут меняться в разные моменты, но они оба остаются в изотропной среде все время нормальны к лучу и друг к другу.

Эти электромагнитные колебания передаются вдоль луча от точки к точке, так что напряжение в каждой дальнейшей точке несколько отстает по величине от напряжения в предыдущей точке. Если все векторы (для одного момента времени) отложить параллельно друг другу, то концы их образуют синусоиду. На фиг. 221 показана такая синусоида для данного момента времени t. С возрастанием t вектор 0 начнет уменьшаться, векторы 1, 2, 3, 4 будут расти, векторы 5, 6, 7, 8—убывать (по абсолютной величине), векторы 9, 10, 11, 12 расти (по абсолютной величине) и т. д. Синусоида при этом будет как бы двигаться

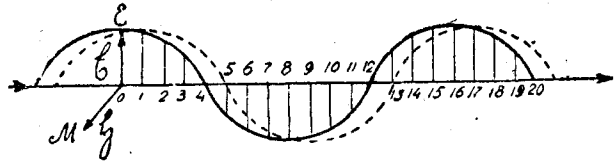
вправо. Вдоль луча побежит электромагнитное волнообразное колебание. В каждом таком колебательном изменении напряжений различаются и изображаются следующие элементы.

1) Направление луча OX, т.-е. то направление, вдоль которого передается энергия.

2) Направление колебаний OE и OM, т.-е. направление векторов электрического $\mathfrak{E}$ и магнитного $\mathfrak{H}$. Эти направления в изотропной среде всегда нормальны к лучу OX и между собою, но в плоскости нормальной к лучу, могут лежать как угодно и в обыкновенном (неполяризованном) луче непрерывно меняются (как бы вращаются). В реальных анизотропных средах, в том числе в кристаллах, направления колебаний чаще не перпендикулярны к лучу, но всегда близки к этому положению.

3) Амплитуда колебаний (OE, OM), т.-е. наибольшее напряжение поля или наибольшая длина, достигаемая вектором при колебании. В световых колебаниях, чем больше амплитуда, тем больше сила света.

4) Фаза колебания, т.-е. состояние колебания в данной точке в данный момент. Фаза вполне характеризуется величиной вектора и хо-



Фиг. 221.
Концы электрических векторов в разных точках луча в один и тот же момент образуют синусоиду.

дом его последующего изменения. Так, колебания точек 0 и 16 находятся в одинаковой фазе, так как векторы их равны по знаку и по величине, и оба имеют тенденцию уменьшаться. Также одинаковы фазы точек 2 и 18, 4 и 20. Напротив, фазы колебаний 0 и 8, 4 и 12 — противоположны.

5) Длина волны λ, т.-е. расстояние по лучу OX между двумя точками, находящимися в одинаковых фазах. Например, 0—16 или 4—20. От длины волны в световых колебаниях зависит цвет луча [1]).

6) Период колебания T, т.-е. время, необходимое для того, чтобы данная точка, находящаяся в некоторый момент в определенной фазе, совершила один полный цикл колебания и пришла опять в ту же самую исходную фазу.

7) Скорость колебания, т.-е. скорость движения конца вектора. Она переменна. Далее она нам не понадобится.

8) Скорость v распространения колебаний вдоль луча. Так как за период T колебание распространяется на длину одной волны λ, то $v = \frac{\lambda}{T}$.

---

[1]) Например, двум желтым спектральным линиям Na (D_1 и D_2) отвечают длины волн $\lambda_1 = 5896,154$ Å и $\lambda_2 = 5890,182$ Å. Главной красной линии лития отвечает $\lambda_{Li} = 6780$ Å (1 Å $= 10^{-8}$ см. См. ниже).

§ 76. Виды лучистой энергии.

Длина волны λ лучистой энергии может быть бесконечно разнообразна. В зависимости же от λ существенно меняется и характер проявления лучистой энергии и характер восприятия ее нами.

Можно думать, что λ может иметь все значения от 0 до ∞. Однако, изучены ныне лишь виды лучистой энергии для определенных интервалов. Укажем эти интервалы, обозначив также соответствующий им вид лучистой энергии. Применяемая здесь единица измерения — онгстрем обозначается знаком Å. 1 Ångström $= 10^{-8}$ сантиметров.

Длина волны λ. от	до	Вид лучистой энергии.
10^{-5} Å	?	Космические лучи.
0,07 Å	1,33 Å	Гамма-лучи радиоактивных веществ.
0,1 Å и больше [1]).	20 Å	Рентгеновы лучи.
136 Å	4000 Å	Ультрафиолетовые лучи с преимущественным химическим действием
4000 Å	7600 Å	Видимые лучи разных цветов (свет).
7600 Å	3.000.000 Å = 0,03 сантим.	Инфракрасные лучи (с преимущественным тепловым действием).
пробел		
0,3 см. до многих километров		Электрические лучи Hertz'a и электромагнитные лучи радиотелеграфии.

В этой главе мы будем говорить о видимых лучах. Далее нам понадобятся приведенные сведения о рентгеновых лучах.

§ 77. Упрощение представления о световом луче.

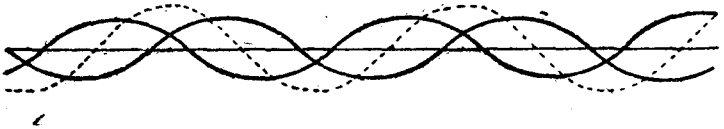
Для того, чтобы сделать понятным все необходимое для нас в дальнейшем, мы не будем изучать здесь взаимной связи между изменениями электрического и магнитного векторов и даже будем обращать внимание лишь на один из этих векторов, именно на электрический, отбросив вовсе магнитный. Это мы вправе сделать, так как, во-первых, такого упрощенного представления нам будет вполне достаточно для наших целей, и так как, во-вторых, по опытам Wiener'a именно электрический вектор производит фотохимическое действие и, вероятно, ощущение света.

---

[1]) В 1927 г. Dauvieliier и его сотрудникам удалось получить и спектрографически измерить рентгенолучи, заполняющие по длине своей волны промежуток от 20Å до ультрафиолетовых лучей. (См. примечание Э. В. Шпольского в книге «У. Г. Брэгг и У. Л. Брэгг. Рентгеновские лучи и строение кристаллов. 1929» стр. 62).

§ 78. Необходимые сведения из элементарной оптики.

Белый свет является сложным, он состоит из всех видимых нами колебаний. Наш глаз воспринимает лучи лишь небольшого промежутка (от 4000Å до 7600Å); ультрафиолетовых, инфракрасных, рентгеновых и радиотелеграфных лучей мы не видим.



Фиг. 222.
Интерференция двух колебаний.

Монохроматическим светом мы называем свет определенной одной длины волны. Такой свет получается, например, при введении в бесцветное пламя газовой горелки соли натрия. (В случае Na мы получаем дублет колебания двух длин волн $D_1 = 5896{,}15$Å и $D_2 = 5890{,}18$Å).

Обыкновенный источник света дает световые колебания, с постоянно меняющейся плоскостью колебаний. Но можно получить свет с колебаниями в одном определенном направлении, как на фиг. 221, так называемый поляризованный свет или луч. Френель (Fresnel) предложил считать плоскостью поляризации плоскость, перпендикулярную к плоскости колебания луча. С точки зрения электромагнитной теории света плоскость поляризации совпадает с плоскостью магнитного вектора, электрический же к ней перпендикулярен. Таким поляризованным лучом мы и будем постоянно пользоваться. В случае одновременного распространения двух лучей по одному направлению (фиг. 222), колебания складываются, и мы получаем явление интерференции лучей. На фиг. 222 два слагающие колебания, происходящие в одной плоскости, изображены сплошными линиями, а результирующее—пунктиром.

Скорость передачи колебаний $v = \frac{\lambda}{T}$ носит название скорости света.

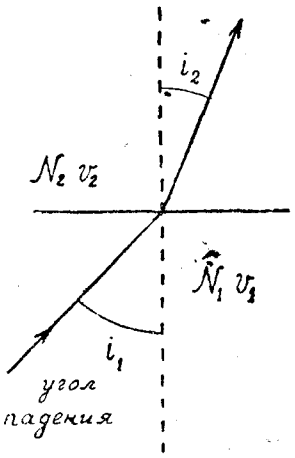
Показатель преломления есть величина обратная скорости света $N = \frac{1}{v}$ (если с одной стороны имеем пустоту) или $\frac{N_1}{N_2} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{\sin i_2}{\sin i_1}$ (при переходе луча из одной среды в другую) (фиг. 223).

Очевидно, показатель преломления, как отношение двух скоростей или двух синусов, есть величина отвлеченная. Для огромного большинства твердых тел, в том числе и для кристаллов, N = от 1,3 до 3,5. Например, для кварца N меняется от 1,544 до 1,553 (для желтых лучей Na).

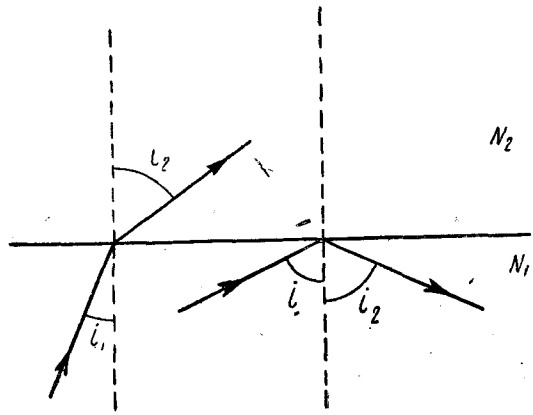
При переходе из более преломляющей среды (среды с меньшей скоростью) в менее преломляющую может получиться явление полного внутреннего отражения: при увеличении угла падения i_1 (фиг. 224) наступает момент, когда i_2 станет равно 90°. В этот момент луч не пройдет во вторую среду и не пойдет по границе обеих сред. Он целиком отразится (фиг. 224 правая). Угол i_1', при котором это проис-

ходит, называется углом полного внутреннего отражения. Он находится из условия: $i_2' = 90°$,

откуда $\frac{N_1}{N_2} = \frac{\sin i_2'}{\sin i_1'} = \frac{1}{\sin i_1'}$ и $\sin i_1' = \frac{N_2}{N_1}$



Фиг. 223.



Фиг. 224.
Схема полного внутреннего отражения.

§ 79. Изотропная и анизотропная среда.

Если мы возьмем светящуюся точку внутри какого-либо тела и отложим от нее по всем направлениям скорости, с которыми свет из этой точки распространяется, то, в случае изотропного тела, получим шар, т.-е. скорости распространения света во всех направлениях равны. В кристаллах этого не получается, кроме кристаллов кубической сингонии, которые по отношению к свету изотропны [1]). Во всех остальных кристаллах по каждому направлению (за исключением направлений лучевых осей, о которых будет сказано ниже) идут два луча, оба поляризованные во взаимно-перпендикулярных плоскостях. Оба эти луча распространяются в кристалле с разной скоростью. Также вообще различны будут скорости лучей, идущих в одном и том же кристалле (не кубической сингонии) по разным направлениям.

Все кристаллы средних и низших сингоний являются таким образом в оптическом отношении анизотропными (неравносвойственными).

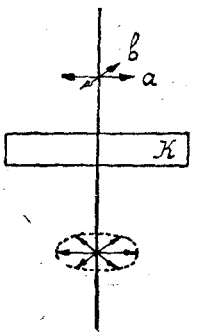
§ 80. Свойства луча, прошедшего сквозь кристалл. Устройство николя.

Возьмем пластинку кристалла К (фиг. 225) и положим ее на столик микроскопа.

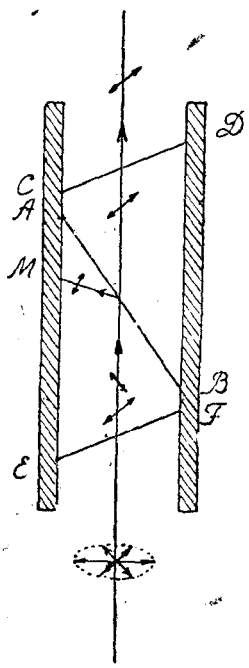
Опыт показывает, как уже было указано, что неполяризованный луч (с постоянно меняющимися направлениями колебаний), идущий

[1]) Но по отношению ко многим другим свойствам—анизотропны.

на чертеже снизу вверх после прохождения через кристалл имеет только два направления колебаний, a и b, взаимно-перпендикулярные. Теперь достаточно одно из этих колебаний погасить, и мы получим поляризованный свет. Оба луча имели в кристалле разную скорость, значит и коэффициенты преломления их были разные. Возьмем кристалл (ромбоэдр) исландского шпата CDEF (фиг. 226, где вертикальные заштрихованные полосы — стенки цилиндрической металлической оправы прибора), разрежем его на две половины по плоскости AB и склеим канадским бальзамом [1]). Если пропустить сквозь такой кристалл луч по направлению одного из ребер, то показатель преломления для одного колебания будет $n_1 = 1{,}536$, а для другого $n_2 = 1{,}658$ (приблизительно). Показатель же преломления канадского бальзама равен $1{,}537 \pm \pm 0{,}004$, т.-е. он примерно равен n_1 и меньше, чем n_2, поэтому плоскость разреза AB можно подобрать так, что колебание n_2 претерпевает полное внутреннее отражение у входа в канадский бальзам и в точке M поглощается черной оправой прибора. Дальше пройдет только один луч, и этот луч будет поляризован. Такой прибор для получения поляризованного света из простого называется призмой Николя или николем.

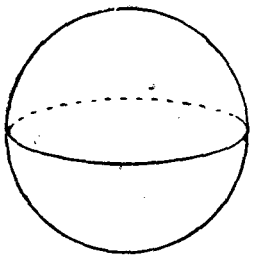


Фиг. 225.
Луч, прошедший сквозь кристалл, поляризован в двух взаимно перпендикулярных плоскостях.



Фиг. 226.
Ход лучей в николе.

§ 81. Поверхность световой волны.



Фиг. 227.
Поверхность скоростей лучей в изотропной среде и в кубических кристаллах.

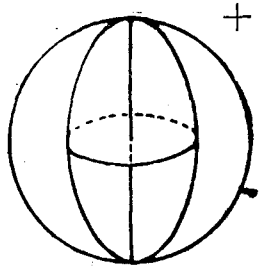
Поверхностью световой волны, или лучше — поверхностью скоростей лучей называется такая поверхность, до которой распространяется свет от данного источника в один и тот же момент времени. Предположим, что светящаяся точка расположена внутри испытуемого вещества. Тогда поверхность световой волны в аморфном веществе будет шаром, так как свет в такой среде распространяется по всем направлениям с одинаковой скоростью. В кристаллах кубической сингонии, как показывает опыт, поверхность волны есть тоже шар (фиг. 227).

В кристаллах гексагональной и тетрагональной сингоний по каждому направлению распро-

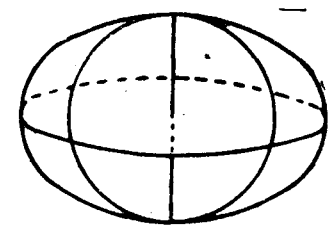
[1]) Канадский бальзам это древесная смола, употребляемая для склеивания в технике оптических приборов и препаратов.

страняются вообще два луча, колеблющихся во взаимно-перпендикулярных направлениях. Один луч, называемый обыкновенным, во всех направлениях идет с одинаковой скоростью, он дает в качестве своей поверхности волны шаровую поверхность. Другой луч идет со скоростью такой же, как и первый, лишь если направление его распространения совпадает с главной осью кристалла (шестерной, четверной или тройной осью симметрии).

По всем другим направлениям этот необыкновенный луч обладает иной скоростью распространения и в качестве поверхности волны дает вытянутый или сплюснутый эллипсоид вращения, около которого описана или в который вписана шаровая поверхность световой волны первого, обыкновенного луча (фиг. 228 и 229).



Фиг. 228.
Поверхность скоростей лучей одноосного положительного кристалла.



Фиг. 229.
Поверхность скоростей лучей одноосного отрицательного кристалла.

Кристаллы нисших сингоний (ромбической, моноклинной и триклинной) дают еще более сложную волновую поверхность, она будет, во-первых, двуполой, так как каждое направление пересекает ее дважды и, во-вторых, с вогнутыми частями в виде четырех воронкообразных углублений. Ее мы не изображаем.

Такими поверхностями нам в постоянной практике неудобно пользоваться, благодаря сложности их построения, хотя для решения многих вопросов кристаллооптики подробное знакомство с ними необходимо. Для одноосных кристаллов поверхность световой волны была выведена впервые Гюйгенсом в 1690 году, а для двуосных Френелем лишь в 1821 году. Мы будем постоянно пользоваться не ими, а эллипсоидом показателей преломления.

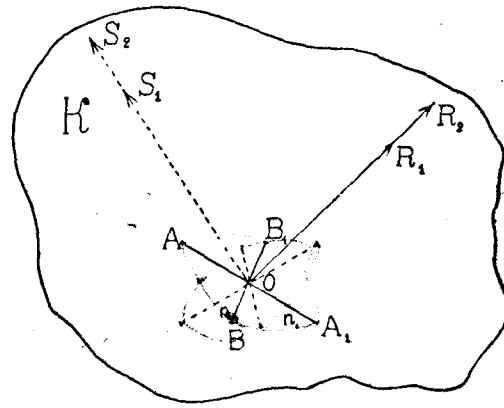
§ 82. Эллипсоид показателей преломления.

(Оптическая индикатриса).

Это также лишь вспомогательная воображаемая поверхность, весьма для нас важная во всем дальнейшем изучении кристаллооптики. Пусть имеем кристаллическое вещество К (фиг. 230). Через некоторую произвольную точку в нем О пропустим луч по некоторому направлению OR_1R_2. Как было указано, в кристаллической среде в общем случае по одному и тому же направлению могут итти два луча со взаимно-перпендикулярными направлениями колебаний ОА и ОВ ($OA \perp OR_1R_2$; $OB \perp OR_1R_2$). Оба эти колебания будут итти вперед в направлении OR_1R_2 с разными скоро-

стями v_1 и v_2, а потому будут обладать разными показателями преломления n_1 и n_2 $\left(n_1 = \frac{1}{v_1},\ n_2 = \frac{1}{v_2}\right)$, которые мы можем определить из опыта.

Отложим в каком-либо масштабе эти показатели преломления n_1 и n_2 каждый в обе стороны от О на направлениях колебаний ОА и ОВ, им соответствующих. Луч OR_1R_2 после этого отбросим. Получим четыре точки. Если мы пропустим через точку О новый луч по другому направлению OS_1S_2, то на направлениях его колебаний в плоскости к нему приблизительно или точно перпендикулярной [1]) получим еще четыре аналогичных точки путем подобного же построения. И теория и опыт показывают, что если мы проделаем такое построение для всевозможных лучей, расходящихся из точки О, то на каждом направлении, проходящем через О, мы получим таким образом две точки по обе стороны от центра и на равных расстояниях. При этом оказывается, что эти точки составят некоторую поверхность, в общем случае, трехосный эллипсоид. В частных случаях эллипсоид этот будет обращаться в эллипсоид вращения и в шар.



Фиг. 230.
Схема, поясняющая построение эллипсоида показателей преломления.

Если мы имеем так построенный эллипсоид показателей преломления, то любой его радиус есть показатель преломления (в некотором масштабе) луча, распространяющегося приблизительно или точно перпендикулярно к нему и колеблющегося в направлении этого радиуса.

§ 83. Свойства эллипсоида.

Эллипсоид есть такое тело, которое ограничено замкнутой поверхностью, дающей во всяком сечении плоскостью эллипс (и в частных случаях — окружность).

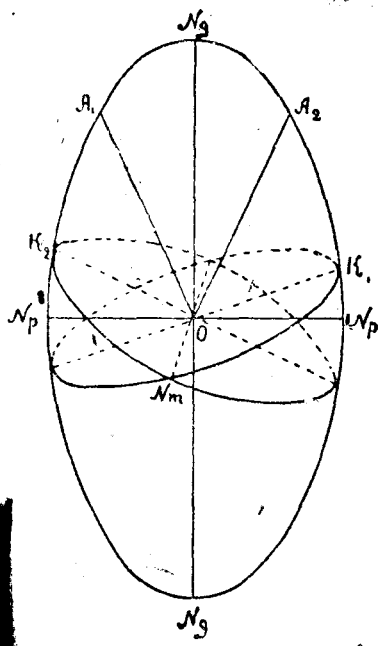
1) Самый общий случай — эллипсоид трехосный (фиг. 231). У него есть один наибольший диаметр N_g и один наименьший N_p, взаимно-перпендикулярные и являющиеся его двойными осями симметрии. Согласно теории симметрии (§ 20, стр. 23), у такого тела есть и третий, равнодействующий элемент симметрии — двойная ось, перпендикулярная двум первым. По величине — это некоторый средний диаметр N_m [2]). Таким образом трехосный эллипсоид как геометрическое тело относится с точки зрения симметрии к ромбической сингонии, ромбо-дипирамидальному

[1]) Как было уже указано, направления световых колебаний в кристаллах иногда точно перпендикулярны к направлению луча, иногда же лишь приближенно. Они всегда точно перпендикулярны к направлению нормали к поверхности волны.

[2]) Обозначения эти введены французскими авторами. Буквы g, p, m означают grande (большая), petite (малая) и moyenne (средняя). Немецкие и английские авторы обозначают те же оси $N_g = \gamma$, $N_m = \beta$, $N_p = \alpha$.

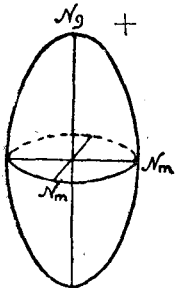
виду симметрии и обладает из элементов симметрии: 3 двойными поворотными осями, 3 плоскостями симметрии и центром инверсии.

Средняя ось N_m, как двойная ось симметрии эллипсоида, будет осью симметрии каждого сечения, проходящего через нее. Другою осью этого сечения (эллипса) будет ось OK_1 или OK_2, нормальная к первой и потому, лежащая в плоскости N_gN_p. При поворачивании плоскости сечения около средней оси N_m эллипсоида, ось OK_1 постепенно изменяется по величине от наибольшей N_g до наименьшей оси N_p. Следовательно, где-то она пройдет через положение, когда будет равна по величине средней оси N_m. Тогда мы получим эллипс, у которого две его оси равны, т.-е. эллипс обратится в окружность ON_mK_1 (фиг. 231). Второе круговое сечение ON_mK_2 мы выведем, повернув эллипсоид около его оси симметрии N_g или N_p на 180°.

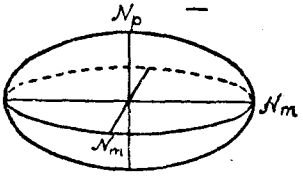


Фиг. 231.
Трехосный эллипсоид показателей преломления.

В кристаллооптике важны нормали к этим круговым сечениям OA_1 и OA_2 — оптические оси кристалла. Как будет указано далее, это суть направления, по которым поляризованная световая волна проходит не изменяясь, т.-е. не разлагаясь на две волны. Круговые сечения эллипсоида показателей преломления называются также изотропными сечениями. Итак, у трехосного эллипсоида есть два круговых сечения, а следовательно, две оптические оси[1]). Теперь перейдем к эллипсоидам вращения.



Фиг. 232.
Одноосный положительный эллипсоид.



Фиг. 233.
Одноосный отрицательный эллипсоид.

2) Растягивая наименьшую ось N_p трехосного эллипсоида до размеров средней оси N_m (фиг. 231), мы увидим, что диаметры OK_1 и OK_2, равные N_m, будут постепенно приближаться по положению к N_p, наконец, совпадут с ней, и мы получим эллипсоид вращения, удлиненный по оси вращения. Его круговое сечение будет к этой оси перпендикулярно (фиг. 232). Сжимая эллипсоид по наибольшей оси до того положения, когда она станет равна средней, получим эллипсоид вращения, укороченный по оси вращения (фиг. 233). Здесь, после доведения оси N_g у эллипсоида фиг. 231 до величины N_m, эллипсоид повернут на 90°, осью вращения N_p вертикально). Удлиненный по оси вращения мы называем положительным, а укороченный — отрицательным.

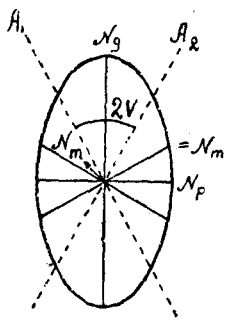
---

[1]) Надо резко различать оптические оси (A_1 и A_2 на фиг. 231) и оси симметрии (N_g, N_m, N_p на фиг. 231).

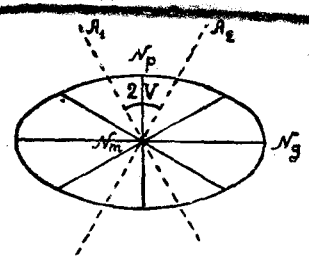
В кристаллооптике оба эти эллипсоида вращения называются одноосными, как обладающие одной оптической осью (а следовательно, и одним изотропным или круговым сечением).

Из элементов симметрии эллипсоиды вращения обладают центром инверсии одной поворотной осью бесконечно большого наименования, бесконечно большим числом плоскостей симметрии, проходящих через нее, плоскостью симметрии, к ней перпендикулярной, бесконечно большим числом двойных поворотных осей, лежащих в последней плоскости.

3) Наконец, из одноосных эллипсоидов (вытягивая отрицательный или сжимая положительный), можем получить еще более частный случай— шар. Теория эллипсоида показателей преломления была создана Френелем в 1818—1819 гг. Строго говоря, это не теория, а эмпирический закон эллипсоида показателей преломления. Нормали к круговым сечениям или оптические оси трехосного эллипсоида обозначаются обычно буквами A_1 и A_2. Угол между этими направлениями называется углом оптических осей и обозначается 2 *V*. Оптические оси всегда лежат в плоскости $N_g N_p$.



Фиг. 234.
Разрез трехосного положительного эллипсоида.



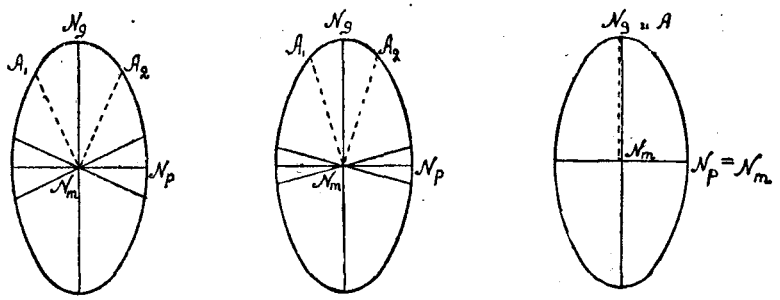
Фиг. 235.
Разрез трехосного отрицательного эллипса.

потому что они всегда перпендикулярны к N_m. На фиг. 234 и 235 изображены сечения $N_g N_p$ двух разных эллипсоидов. Оптические оси, пересекаясь, дают в каждом два угла (острый и тупой). Если биссектрисой острого угла является ось N_g (фиг. 234), то мы условно называем угол положительным, если малая N_p (фиг. 235) — отрицательным. Например, выражение: $2V = +70°$ означает, что оптические оси делают угол в 70°, и биссектрисой этого угла является ось N_g. Этот же случай можно записать и так: $2V = -110°$, что, конечно, будет одно и то же. Обычно измеряют острый угол. Соответственно этому и аналогично тому, что было сказано о положительном и отрицательном эллипсоиде вращения, мы можем ввести такие же понятия и для трехосных эллипсоидов.

Положительным трехосным [1]) эллипсоидом называется такой, у которого биссектрисой острого угла оптических осей служит ось N_g, а отрицательным трехосным эллипсоидом называется такой, у которого биссектрисой острого угла между оптическими осями служит ось N_p. При вытягивании трехосного эллипсоида по оси N_p она постепенно приближается по размерам к N_m, круговые сечения будут тоже по своему положению приближаться к N_p, угол 2 V—уменьшаться.

[1]) В кристаллооптике трехосные эллипсоиды показателей преломления часто называются двухосными, как обладающие двумя оптическими осями.

В некоторый момент, как это ясно видно из фиг. 236, когда N_p станет равным N_m, оба круговые сечения сольются в одно, оптические оси совпадут обе с осью N_g. Мы получим положительный одноосный эллипсоид. Обобщая наше определение, можно сказать, что здесь угол $2V = +0°$,



Фиг. 236.
Переход от трехосного положительного эллипсоида к одноосному положительному.

и его биссектрисой является ось N_g. Также у отрицательного одноосного эллипсоида (фиг. 233) можно считать, что $\angle 2V = -0°$.

§ 84. Оптические константы вещества.

Под оптическими константами или оптическими постоянными величинами вообще понимаем все величины, которые характеризуют оптические свойства кристаллического вещества. Зная константы, мы можем определить вещество. Это один из наиболее распространенных методов определения минералов в горных породах, им широко пользуется петрография. Когда известны N_g, N_m и N_p, то эллипсоид вполне определен, и остальные его константы можно вычислить.

Для характеристики оптических свойств кристаллического вещества особенно важно знать следующие оптические его константы.

N_g — наибольшая ось эллипсоида (наиб. показатель преломления).
N_m — средняя » » (средн. » »).
N_p — наименьшая » » (наим. » »).
$2V$ — угол между оптическими осями.
$N_g - N_p$ — величина наибольшего двупреломления.
$N_g - N_m$, $N_m - N_p$ — второстепенные величины двупреломления.

Как было уже указано (§ 78), показатели преломления кристаллов меняются приблизительно от 1,3 до 3,5 реже 5,5. Угол $2V$ меняется от $+0°$ через $+90°$ до $+180°$, или что тоже от $-180°$ через -90 до $-0°$. $N_g - N_p$ меняется от 0,000 (у изотропных кристаллов) до 1,000 (для антимонита — Sb_2S_3). Для огромного большинства прозрачных кристаллов, однако, N не поднимается выше 2,500 и $N_g - N_p$ не бывает больше 0,200.

Термин «двупреломление» требует пояснения. Дадим его.

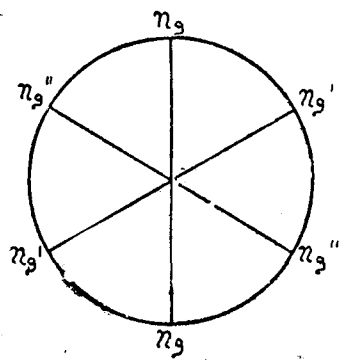
По каждому направлению в кристалле идут два луча с разными показателями преломления. Вследствие этого, если разность показателей преломления достаточна, и если два луча подвергнутся преломле-

нию, то они значительно разойдутся, и при рассматривании предметов через такой кристалл (например, исландского шпата) ясно видно удвоение предмета. Отсюда название разности показателей преломления — двупреломлением.

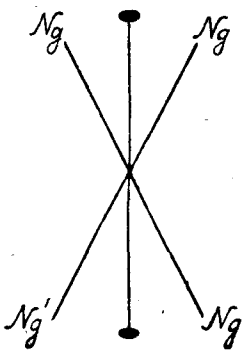
Итак, три главные группы оптических констант, которыми чаще всего определяют вещество, это: 1) показатель (коэффициент) преломления, 2) угол оптических осей и 3) наибольшее двупреломление. Весьма важно знать также расположение (ориентировку) эллипсоида по отношению к кристаллографическим элементам, т.-е. по отношению к осям симметрии, граням и ребрам кристалла. К общим законностям такой ориентировки мы и переходим.

§ 85. Типы эллипсоидов и их расположение в кристаллах разных сингоний.

Теорема 1-ая. Нормально к оси симметрии, наименования выше двух, в оптическом эллипсоиде может располагаться только круговое сечение. Произвольное сечение



Фиг. 237.
Нормально к оси симметрии наименования $n > 2$ расположено всегда круговое сечение эллипсоида.



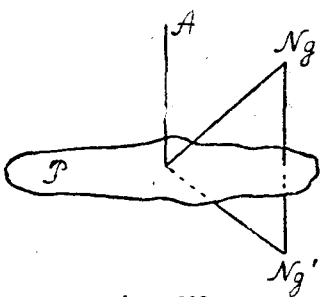
Фиг. 238.
Ось эллипсоида не может располагаться косо к двойной оси симметрии.

эллипсоида плоскостью есть эллипс. Если мы предположим, что нормально к какой-либо оси симметрии наименования $n > 2$ расположен такой эллипс, то у него будет один единственный наибольший диаметр n_g и один единственный наименьший диаметр n_p. Возьмем наибольший, n_g. Поворотом около оси симметрии выведем n_g' и n_g'' равные n_g (фиг. 237), т.-е. получим в случае тройной оси три равных наибольших оси. Этого не может быть. Чтобы этого не случилось мы должны иметь перпендикулярно к оси симметрии наименования $n > 2$ не эллипс, а круг.

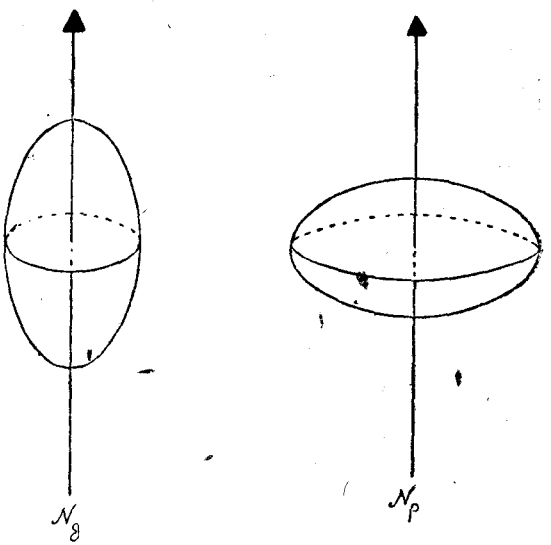
Теорема 2-ая. С любой двойной осью симметрии кристалла в случае трехосного эллипсоида должна всегда совпадать одна из главных осей эллипсоида. Действительно, если бы с двойною осью, ось N_g делала бы косой угол (фиг. 238), то поворотом около двойной оси мы вывели бы ось N_g', равную N_g, что не-

возможно, ибо наибольшая ось у эллипсоида лишь одна. Следовательно, ось N_g должна или совпадать с осью симметрии, или лежать в плоскости к ней перпендикулярной. То же самое относится и к оси N_p. Таким образом, или одна из них совпадает с осью симметрии, а две другие оси эллипсоида будут по этой причине лежать в плоскости к ней перпендикулярной, или же и N_g и N_p обе нормальны к двойной оси симметрии, тогда N_m с нею совпадает. И теорема доказана.

Теорема 3-ья. С нормалью к любой плоскости симметрии кристалла, в случае, если его оптические свойства характеризуются трехосным эллипсоидом, должна непременно совпадать одна из трех главных осей этого эллипсоида. Действительно ось N_g может либо совпадать с нормалью А (фиг. 239) к плоскости симметрии Р кристалла, либо лежать в плоскости Р. Иначе посредством плоскости симметрии выведется вторая ось N_g', что невозможно. То же можно сказать о N_p. Итак, или одна из этих главных осей N_g или N_p совпадает с нормалью А, или обе они лежат в плоскости Р. В последнем случае с А должна совпадать ось N_m, которая перпендикулярна к плоскости N_gN_p.



Фиг. 239.
Ось эллипсоида не может проходить косо к плоскости симметрии.



Фиг. 240.
В сингониях гексагональной и тетрагональной — эллипсоид показателей преломления есть положительный (слева) или отрицательный (справа) эллипсоид вращения (или одноосный).

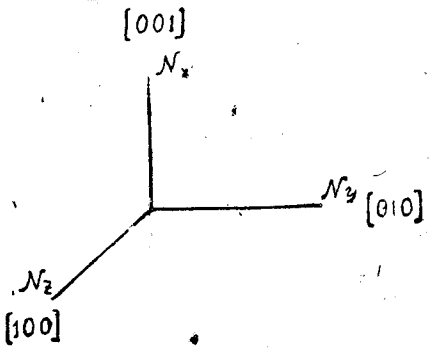
После этих теорем, переходим к типам и положению эллипсоида в сингониях.

I. Кубическая сингония. Имеются четыре тройные оси. Перпендикулярно каждой из них расположено по теореме I этого параграфа круговое сечение. Очевидно, что этому может удовлетворять только шар, так как трехосный эллипсоид имеет лишь 2 круговых сечения, а одноосный — одно.

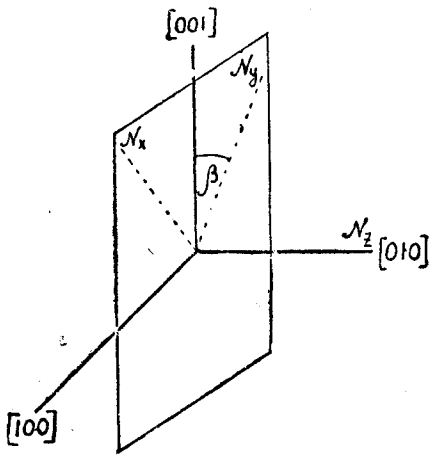
II. Гексагональная и тетрагональная сингонии. Имеется одна ось высшего наименования (тройная, шестерная или четверная поворотная или зеркально-поворотная). Нормально к ней, по теореме I расположено круговое сечение, ось высшего наименования совпадает с оптической осью. Поэтому, если бы мы предположили здесь трехосный эллипсоид, то N_g его не могла бы совпадать с осью высшей симметрии и не могла бы быть

к ней перпендикулярна. Посредством этой оси высшей симметрии мы сейчас же вывели бы еще диаметры эллипсоида, равные N_g, что невозможно. Значит, мы имеем одноосный эллипсоид (эллипсоид вращения) положительный или отрицательный фиг. 240. В частном случае это может быть шар, но следует иметь в виду, что тогда как для кристаллов кубической сингонии шар показателей преломления остается шаром, как бы мы не меняли длину волны луча, температуру, всестороннее давление,— здесь, в тетрагональной и гексагональной, может быть и бывает в действительности, что кристалл обладает шаром показателей преломления (т.-е. является изотропным) лишь для лучей определенной волны (напр., для зеленых), а для других лучей то же вещество оказывается оптически одноосным, положительным или отрицательным. При изменении температуры и давления оно может потерять изотропность и стать одноосным и для зеленых лучей.

У кристаллов ромбической, моноклинной и триклинной сингоний мы имеем трехосный эллипсоид. Нам надо выяснить, как он ориентирован здесь по отношению к кристаллографическим осям.



Фиг. 241.
Расположение осей трехосного эллипсоида в ромбической сингонии.



Фиг. 242.
Расположение осей трехосного эллипсоида в моноклинной сингонии.

III. Ромбическая сингония. Мы всегда имеем в ней три взаимно-перпендикулярные кристаллографические оси, которые являются или осями симметрии или нормалями к плоскостям симметрии. С каждой из них должна совпадать ось эллипсоида, по теоремам 2 и 3, но какая именно с какою, это решается наблюдением для каждого вещества особо (фиг. 241).

IV. Моноклинная сингония. Вторая кристаллографическая ось [010], которая является здесь или двойной поворотной осью симметрии или нормалью к плоскости симметрии, должна совпадать с одной из главных осей эллипсоида N_z. Две другие N_x и N_y лежат в плоскости (010) — второго пинакоида, но при этом в разных веществах они образуют разные углы с кристаллографическими осями [100] и [001] (фиг. 242). Угол β между одною из них N_y (обычно большею) и [001] называется главным углом погасания моноклинных кристаллов. Это тоже весьма важная константа. Объяснение этому названию мы дадим ниже (§ 90). Для большинства моноклинных амфиболов и пироксенов, например, со второю осью [010] совпадает ось N_m, и главный угол погасания измеряют между [001] и N_g.

V. Триклинная сингония. Нет элементов симметрии или есть только центр инверсии. Потому нет и никаких правил, регулирующих положение эллипсоида. В кристаллах триклинной сингонии положение оптического эллипсоида по отношению к кристаллографическим осям является весьма разнообразным, но для каждого вещества определенным.

§ 86. Понятие о дисперсии.

Световые лучи бывают разных длин волн (красные, зеленые, синие, желтые и т. д.) Их показатели преломления различны, и потому различны их эллипсоиды. Дисперсия элементов оптического эллипсоида есть расхождение эллипсоидов для лучей разной длины волны. Для разных лучей в кристаллах одного и того же вещества не только различны показатели преломления, т.-е. длины осей эллипсоида (что возможно для всех сингоний), но нередко различны и знаки эллипсоида, и углы оптических осей, и наименования осей, совпадающих с той или иною кристаллографическою осью, и даже положение осей эллипсоида (в моноклинной и триклинной сингонии).

Наиболее часто изучается в описаниях кристаллов и минералов дисперсия угла оптических осей. Кратко она обозначается так:

$\rho > \upsilon$ — угол оптических осей для красных лучей больше, чем для фиолетовых, $\rho < \upsilon$ — обратный случай [1]).

§ 87. Устройство поляризационного микроскопа.

Для исследования оптических свойств кристаллического вещества применяется так называемый поляризационный микроскоп (фиг. 243). Он состоит (фиг. 243а): 1) из осветительного зеркала S, направляющего лучи вдоль трубы микроскопа, 2) столика T, на котором помещают изучаемый препарат, 3) тубуса R — зрительной трубы с двумя системами линз: одна из них — Ob объектив помещается внизу над столиком, другая же — Ok, окуляр — в верхнем конце тубуса, и 4) двух николей P и A. Николи служат для получения и изучения поляризованного света. Нижний P, расположенный под столиком микроскопа, называется поляризатором. Он пропускает только лучи, колеблющиеся в плоскости, перпендикулярной к плоскости симметрии микроскопа. Верхний A, лежащий над столиком — анализатор; он может, смотря по надобности, вдвигаться в трубу или выдвигаться из нее, и пропускает лишь лучи, колеблющиеся в плоскости симметрии микроскопа [2]).

При указанном выше расположении поляризатора и анализатора, когда их плоскости колебаний взаимно-перпендикулярны, николи называются скрещенными. Реже исследование ведется при параллельных николях, с параллельно поставленными плоскостями колебаний.

Исследовать под микроскопом можно как отдельный маленький кристаллик, так и шлифы горных пород. Последние приготовляются следующим образом: от горной породы или минерала отбивают или вырезают особой машиной возможно плоский кусочек и шлифуют его на наждачном круге, смачивая водой. Когда одна сторона станет достаточно отшлифованной, наклеивают кусочек его на предметное стекло подогретым

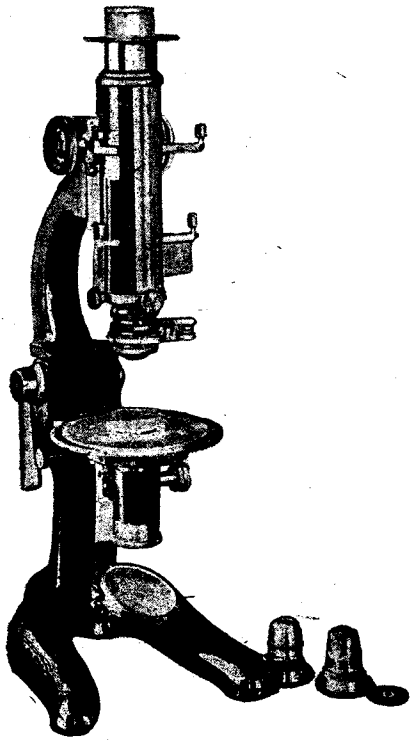
---

[1]) ῥόδεος — розовый, ὑακίνθινος — фиолетовый.

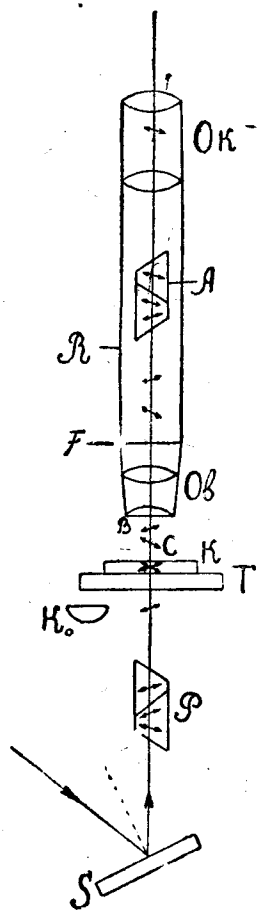
[2]) Реже устраивают микроскопы с обратным расположением колебаний поляризатора и анализатора.

канадским бальзамом, переворачивают стеклом вверх и опять шлифуют до тех пор, пока не получат тонкой пленки, толщиною около 0,02 мм, которую и покрывают тонким покровным стеклышком. Шлиф готов.

В таких шлифах минералы бывают: 1) совершенно прозрачные и бесцветные, 2) прозрачные, но окрашенные в разные цвета и 3) непрозрачные.



Фиг. 243.
Поляризационный микроскоп.



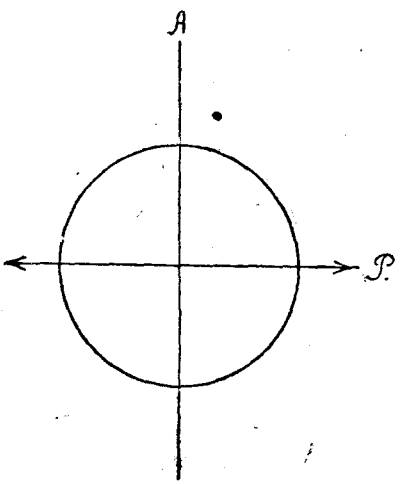
Фиг. 243-а.
Схема устройства поляризационного микроскопа.

§ 88. Простейшие опыты с кристаллами под микроскопом.

Положим кристаллик (или шлиф) в центр столика микроскопа, выдвинем подвижной николь и, вращая осветительное зеркало, добьемся того, что поле зрения будет ярко освещено. Дальше, передвигая вверх и вниз тубус при помощи больших винтов — кремальер (показаны на фиг. 243 в месте сочленения трубы и штатива), устанавливаливаем всю систему на фокус, т.-е. достигаем того, что кристалл (или шлиф) становится ясно виден. Предположим, что задвинувши анализатор мы увидим, что кристалл темный, как и все поле зрения. Начнем вращать столик микро-

скопа вокруг его оси и заметим, что темнота сохраняется все время. Это может быть в трех случаях (для прозрачных кристаллов).

1) Для так называемых изотропных кристаллов, принадлежащих кубической сингонии, это будет всегда, как бы не пришелся разрез такого кристалла, плоскостью шлифа. Чтобы понять это, вспомним, что они имеют оптический эллипсоид в виде шара, который в сечении плоскостью, перпендикулярной лучу (как и всякой другой), даст круг. Круговое же сечение пропускает всякие колебания без изменения, в частности и колебания, совершающиеся в плоскости нормальной к плоскости симметрии микроскопа (т.-е. те, которые пропускает к кристаллу К поляризатор Р). Анализатор, пропускающий только лучи, колеблющиеся в плоскости симметрии микроскопа, их гасит, потому что они не могут дать составляющей, способной пройти через анализатор (фиг. 244).



Фиг. 244.
Луч идет нормально к рисунку снизу вверх. P — направление колебаний, пропускаемых поляризатором. A — направление колебаний, пропускаемых анализатором.

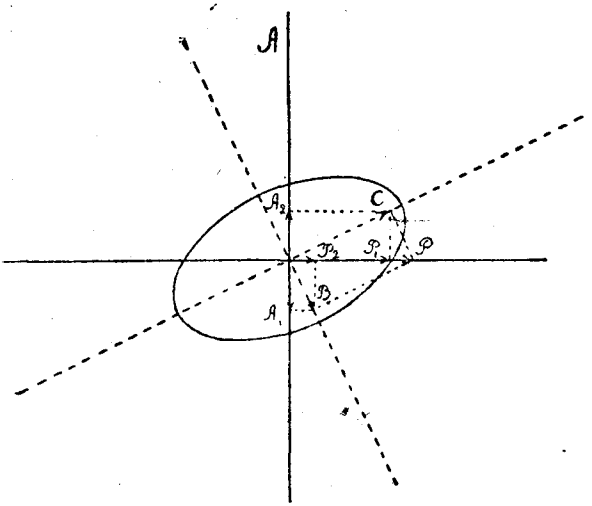
2) Подобное же явление будет наблюдаться у кристаллов тетрагональной и гексагональной сингонии (у так называемых одноосных кристаллов, имеющих оптический эллипсоид в виде эллипсоида вращения), если мы рассечем их перпендикулярно оси вращения.

3) Наконец, у кристаллов низших сингоний, имеющих трехосный эллипсоид, будет тоже сохраняться темнота при вращении их вокруг оси микроскопа, при условии, что они рассечены шлифом по одному из двух, имеющихся у них, круговых сечений. Круговые сечения очень важно уметь находить в кристаллах, так как перпендикулярно к ним лежат оптические оси, дающие очень важную константу, т.-е. постоянную величину для данного кристаллического вещества, а именно угол оптических осей (угол 2 V).

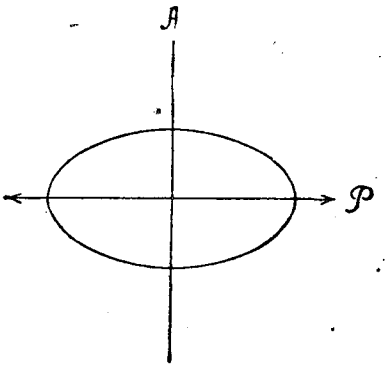
В общем же случае, когда мы рассечем шлифом кристалл не перпендикулярно к оптической оси и задвинем николь, то увидим, что кристалл освещён и нередко окрашен в какой-нибудь цвет, поле же зрения, не занятое кристаллом, остается темным. Будем теперь вращать столик микроскопа вокруг оптической оси последнего, тогда мы увидим, что кристалл в некоторый момент погаснет, повернем далее — кристалл снова осветится. При дальнейшем вращении кристалл попеременно будет то гаснуть, то освещаться и таких погасаний при повороте на 360° мы заметим четыре. Отчего это происходит? Не трудно понять из способа построения эллипсоида показателей преломления (§ 82), что свойства луча, прошедшего через кристалл, можно вывести из характера сечения эллипсоида показателей преломления плоскостью, нормальной к этому лучу. В общем случае сечение это будет эллипсом, и кристалл способен пропускать лишь такие лучи, колебания которых происходят по осям этого эллипса.

В начале нашего опыта этот эллипс был расположен произвольно (фиг. 245, где луч, точнее нормаль к поверхности волны, идет перпендикулярно к чертежу в его центре, снизу вверх). Колебания P, пропущенные

поляризатором, подойдя к кристаллу, не могут более пройти через него в неизмененном виде. Кристалл их разлагает на 2 составляющие колебания: одно B по малой оси своего эллипса и другое C по большой оси того же эллипса. Таким образом, далее вверх в кристалле идут уже 2 колебания, два луча. (Сравни также фиг. 243-а). Подойдя к анализатору, который пропускает лишь колебания, совершающиеся по направлению A (фиг. 245), колебания B и C сквозь него пройти не могут без изменения. Они разлагаются каждое на две составляющие: B на A_1 и P_2, а C на A_2 и P_1. Составляющие P_1 и P_2 гасятся анализатором, а составляющие A_1 и A_2 через него проходят, доходят до глаза (фиг. 243), и мы видим свет. Когда же мы, повернув столик микроскопа, совместим большую ось эллипса, нормального к лучу (фиг. 246) с направлением пропускаемых поляризатором колебаний, то колебания эти P проходят без изменения и через кристалл. Дойдя же до анализатора, будут им погашены. То же явление наблюдается и при совпадении малой оси с направлением колебаний поляри-



Фиг. 245.
Объяснение четырехкратного погасания кристалла в скрещенных николях при вращении на 360° вокруг оси микроскопа. Положение посветления.



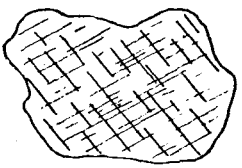
Фиг. 246.
То же, что на фиг. 245, одно из 4 положений затемнения.

затора, а так как полуосей у эллипса 4, то при повороте на 360° четыре раза и происходит совмещение их с плоскостью колебаний поляризатора, а значит, появляется каждый раз через 90° темнота.

§ 89. Плеохроизм, спайность и двойники под микроскопом.

Плеохроизм. Положим шлиф горной породы на столик микроскопа, выдвинем верхний николь (анализатор) и поместим в центр поля зрения какое-либо окрашенное зернышко шлифа, если таковое имеется. Затем будем вращать препарат вместе со столиком. Нередко можно заметить, что окраска зернышка при этом меняется или по густоте или по оттенкам и даже цветам. Происходит это оттого, что под направление колебаний луча, идущего из поляризатора, попадает то одна ось эллипса, то другая. Поглощения же различных частей спектра по этим осям разные, вследствие анизотропности кристалла, а потому и окраска проходящих лучей оказывается различной. Если удалить не только

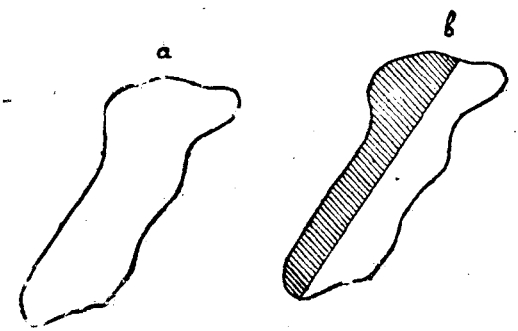
верхний, но и нижний николь, то этого явления мы не видим: при вращении столика микроскопа наше кристаллическое зернышко будет обладать неменяющейся средней окраской, потому что луч, вступающий в зерно снизу, будет неполяризованным, т.-е. совершающим свои колебания по всевозможным направлениям.



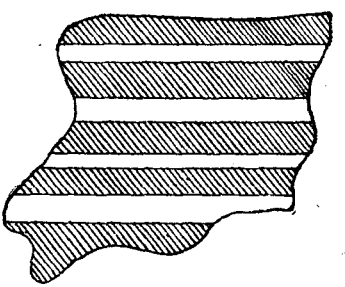
Фиг. 247.
Спайность под микроскопом.

Спайность, т.-е. способность кристалла колоться по определенным плоскостям, под микроскопом выражается параллельными черточками, проведенными по зерну, как бы рейсфедером (фиг. 247). Иногда наблюдается только одна система параллельных линий, иногда две, реже три. Степень совершенства этих черточек указывает на степень совершенства спайности.

Двойники. Если в шлифе имеется простой двойник, то без анализатора он имеет вид однородного зерна, в большинстве случаев ничем не выдающего своего двойникового строения (фиг. 248-a). После введения анализатора (т. е. в скрещенных николях) зерно распадается на два участка (фиг. 248-b), разделенные чаще всего прямолинейной границей. Оба эти участка обладают разной интерференционной окраской и разновременно гаснут при вращении столика микроскопа вокруг вертикальной оси. Это



Фиг. 248.
Простой двойник под микроскопом, a — без анализатора, b — с поляризатором и с анализатором.



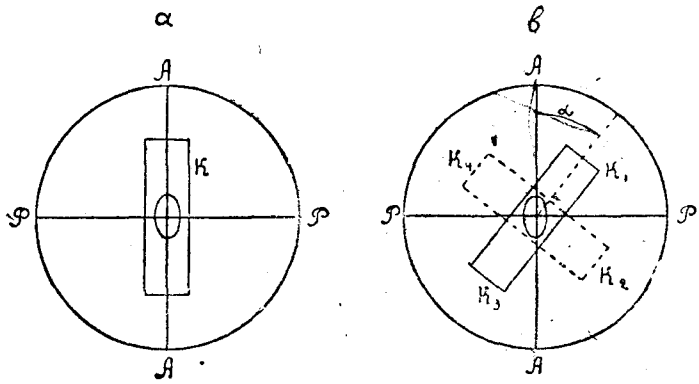
Фиг. 249.
Полисинтетический двойник под микроскопом между скрещенными николями.

происходит потому, что эллипсоид одного индивида выводится из эллипсоида другого отражением в некоторой двойниковой плоскости или поворотом на 180° вокруг некоторой двойниковой оси, т.-е. эллипсоиды эти различно ориентированы, а потому в разрезе их шлифом мы получаем различные по форме и с разно ориентированными осями эллипсы. Полисинтетические двойники по той же причине имеют вид, в скрещенных николях, показанный на фиг. 249.

§ 90. Углы погасания.

Углом погасания данного кристалла называется угол между каким-либо кристаллографическим направлением, лежащим в плоскости, нормальной к оси микроскопа, и плоскостью колебаний одного из скрещенных (§ 87) николей в тот момент, когда кристалл погасает под микроскопом при вращении вокруг оси последнего.

Кристаллографическим направлением, по отношению к которому измеряется угол погасания, может быть направление вытянутости кристалла, черточка спайности в препарате, след какой-либо грани на плоскости разреза кристалла шлифом и т. под. Пусть на фигуре 250 окружности изображают границу поля зрения микроскопа, AA и PP нити окуляра, параллельные плоскостям колебаний анализатора и поляризатора. K — кристалл. Допустим, что в положении фиг. 250-a, кристалл кажется светлым. Мы знаем, что при вращении столика микроскопа с кристаллом вокруг оси микроскопа, нормальной к чертежу 250, наступит четыре раза погасание кристалла (§ 88) в положениях K_1, K_2, K_3, K_4, отстоящих друг от друга на 90°. Угол α, который составляет направление вытянутости кристалла в один из моментов погасания с ближайшей к нему нитью окуляра, и будет углом погасания по отношению к удлинению.



Фиг. 250.
a) Прямое погасание; b) косое погасание под $\angle \alpha$.

Если бы кристаллик погасал в положении 250-a — мы бы сказали, что угол его погасания равен 0°, или что он обладает прямым погасанием. Если же кристалл погасает в положении 250-b — то его погасание косое, и угол погасания в данном его сечении есть α.

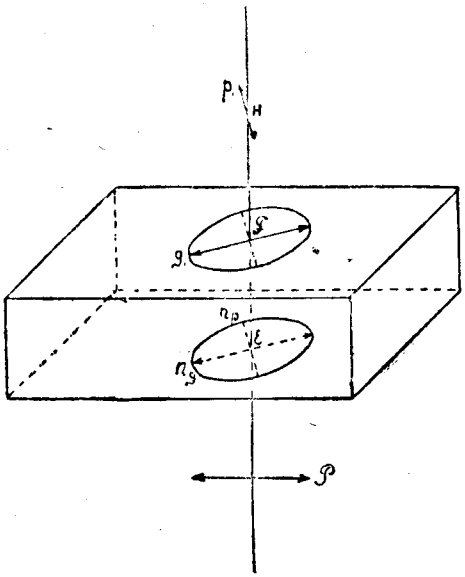
В первом случае (при прямом погасании), согласно § 88, одна из осей эллипса показателей преломления данного сечения кристалла совпадала бы с осью удлинения кристалла, как это и показано на фиг. 250-a. А во втором случае, при косом погасании (фиг. 250-b), одна из осей эллипса показателей делает угол α с удлинением.

§ 91. Причина окраски кристаллов между скрещенными николями.

Говоря о плеохроизме (§ 89), мы указали, что нередко кристаллы в проходящем свете имеют ту или иную окраску, даже когда мы их рассматриваем простым глазом (без микроскопа и без николей) на свет. Эта окраска вызывается неравномерным поглощением в кристалле разных лучей спектра. Если, например, кристалл особенно сильно поглощает красные лучи, то он кажется окрашенным в дополнительный зеленый цвет

в проходящем свете. Такую естественную окраску кристаллов наблюдают или без николей (под микроскопом или простым глазом), или же с одним лишь николем (§ 89). При скрещенных же николях наступают более сложные явления интерференции двух, прошедших сквозь кристалл, поляризованных лучей. Эти явления вызывают свою интерференционную окраску даже у бесцветных кристаллов. При наличии же естественной окраски у кристалла, последняя соединяется с интерференционной, давая некоторую новую, результирующую.

Не излагая здесь подробно теорию интерференционной окраски кристаллов, укажем без доказательств лишь некоторые подробности. Цвет интерференционной окраски бывает разнообразен, иногда весьма ярок. Он зависит от разности хода тех двух колебаний B и C, которые выходят из кристалла (фиг. 243-а и 245).



Фиг. 251.

Разностью хода называется то расстояние, на которое одно колебание B в кристалле (фиг. 243-а) опережает другое C, происшедшее вместе с B от разложения одного и того же колебания P, пропущенного поляризатором (фиг. 245). Разность хода (опережение) вызывается разными скоростями распространения обоих колебаний в кристалле, вследствие его анизотропности (§ 79).

Как уже было выяснено в § 88, колебания поляризатора P (фиг. 251), подойдя к кристаллу, в точке E разлагаются на два: n_g и n_p, по большой и малой оси эллипса, нормального к лучу сечения эллипсоида. В кристалле эти два колебания имеют разные показатели преломления, равные осям эллипса, n_g и n_p, а потому и разные скорости $V_g = \frac{V}{n_g}$ и $V_p = \frac{V}{n_p}$ [1]). Поэтому, когда колебание n_g только еще дойдет до положения g_1 в верхней плоскости кристалла, колебание n_p обгонит его на отрезок FH и будет в положении p_1. Этот отрезок FH и называется разностью хода. Далее вверх при ходе в воздухе оба колебания идут с одинаковой скоростью V, и разность их хода FH сохраняет постоянную величину. Ясно, что величина разности хода тем больше: 1) чем больше разность скоростей продвижения, а следовательно, и чем больше разность показателей преломления $n_g - n_p$ обоих колебаний в кристалле; и 2) чем больше длина пути лучей в кристалле EF, т.-е. толщина исследуемого кристалла.

Установлено теоретически и эмпирически, что при постепенном увеличении разности хода интерференционная окраска бесцветного кристалла меняется в нормальном случае в главных чертах так:

---

[1]) V — скорость света в воздухе.

Разность хода	Интерференц. окраска	Разность хода	Интерференц. окраска	Разность хода	Интерференц. окраска
0 μμ[1])	черная	575 μμ[1])	резкая фиолетовая	1100 μμ[1])	нежная фиолетовая
150 μμ	синевато-серая	600 μμ	синяя	1150 μμ	синяя
230 μμ	зеленовато-белая	800 μμ	зеленая	1350 μμ	зеленая
275 μμ	желтая	900 μμ	желтая	1450 μμ	зеленовато-желтая
536 μμ	красная	1000 μμ	красная	1550 μμ	розово-красная
				И так	далее

Таким образом, в общем, по мере возрастания разности хода цвета периодически повторяются. Однако, чем дальше, тем более блеклыми они становятся; при очень большой разности хода интерференционная окраска переходит в светло-сероватую, с чуть заметными радужными оттенками.

Интерференционные цвета, отвечающие малым разностям хода, называются низкими, а отвечающие большим — высокими. Если кристалл окрашен между скрещенными николями в один из низких цветов, — это указывает или на малую толщину кристалла, или на его малое двупреломление $n_g - n_p$ (см. § 84), или на то и другое вместе. И наоборот, при высоких цветах интерференции—кристалл толст, или имеет большую величину $n_g - n_p$, или и та и другая причины складываются.

Явлением интерференционной окраски пользуются в кристаллооптике для точного определения одной из важнейших оптических констант (§ 84), — величины наибольшего (главного) двупреломления $N_g - N_p$ кристаллов, посредством особых приборов — компенсаторов.

§ 92. Исследование кристаллов в сходящемся поляризованном свете.

Та картина явлений, какая была нами описана в предыдущих §§ 88—91, наблюдается лишь тогда, когда оптические системы микроскопа так расположены, что глаз видит изображение кристалла. При этом, для наибольшей отчетливости всех этих явлений, необходимо, чтобы лучи, идущие от зеркала микроскопа, были строго или, по крайней мере, приблизительно параллельны друг другу. Такой метод исследования кристаллов называется исследованием в параллельном свете.

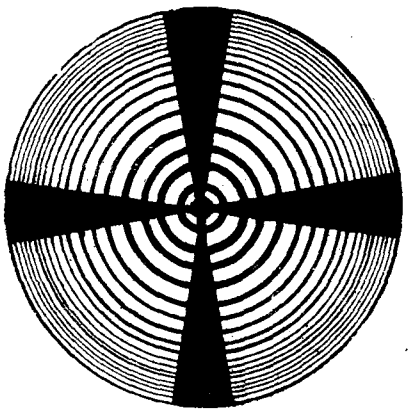
Другой не менее важный для познания вещества оптический метод есть метод исследования в сходящемся свете. Аппаратура для его осуществления может варьировать. При пользовании описанным выше поляризационным микроскопом (фиг. 243) мы переходим к способу сходящегося света, посредством введения в его систему двух добавочных линз: конденсора (K_0 на фиг. 243-а) и линзы Бертрана, (расположенной между анализатором A и окуляром Ок). Первая предназначена для превращения

[1]) μμ означает „микромикрон“, т.-е. одна миллионная доля миллиметра.

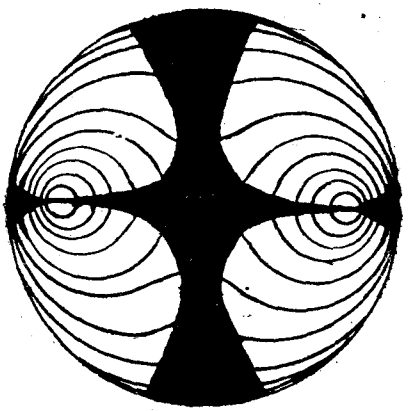
параллельного пучка лучей в сходящийся, а вторая для того, чтобы глаз видел не кристалл К, а особую интерференционную фигуру, получающуюся в главной фокусной плоскости F объектива Ob.

Мы не будем здесь приводить вывода получающихся интерференционных фигур для различных сечений одноосных и двуосных кристаллов. Дадим лишь рисунки, изображающие эти фигуры для простейших случаев.

1) Если пластинка К вырезана из одноосного кристалла, перпендикулярно к его оптической оси, то интерференционная фигура (фиг. 252) имеет вид концентрических колец, пересеченных темным крестом, параллельным плоскостям колебаний николей. В центре поля зрения, в точке выхода оптической оси будет темное пятно, что и понятно, потому что по оптической оси луч идет, не изменяясь, и гасится анализатором (§ 88, п. 2). В случае применения монохроматического (одноцветного) света, например, желтого, — кольца эти попеременно светлые (в нашем примере — желтые) и темные (черные).



Фиг. 252.
Интерференционная фигура одноосного кристалла в сходящемся свете. Препарат вырезан нормально к оптической оси.



Фиг. 253.
Схема интерференционной фигуры двуосного кристалла в сходящемся свете. Препарат вырезан нормально к острой биссектрисе. Плоскость оптических осей параллельна плоскости колебаний одного из николей.

В случае же применения белого света кольца эти цветные, при чем от центра к периферии цвета эти меняются в том самом порядке, какой указан в таблице интерференционных цветов в § 91. Это показывает, что чем дальше от центра фигуры направление лучей выходит на фокусную плоскость, т.-е., чем больший угол оно делает с осью микроскопа, тем больше разность хода идущих по этому направлению лучей, что не трудно понять, так как чем более наклонен луч к оси микроскопа, тем больше путь, проходимый им в кристалле, и тем больше разность $n_g - n_p$ в перпендикулярном к этому лучу сечении эллипсоида кристалла.

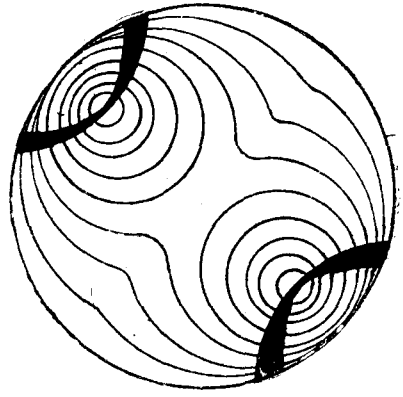
При вращении столика с кристаллом вокруг оси микроскопа фигура эта не меняется.

2) Если пластинка К (фиг. 253) вырезана из двуосного кристалла перпендикулярно к оси N_g или N_p, т.-е. к одной из биссектрис угла между обеими оптическими осями (§ 83), то интерференционная фигура имеет вид рисунка 253. Здесь в точках выходов обеих оптических осей

(в центрах кружков) будут темные пятна. Они будут окаймлены сначала овальными кривыми, а затем лемнискатами (особый вид кривых, напоминающих по форме цифру 8). Эти кривые будут темными и светлыми в монохроматическом свете и цветными при пользовании белым светом. Наконец, вся фигура будет пересечена темным крестом, параллельным плоскостям колебаний николей.

Такова будет картина, если плоскость оптических осей будет совпадать с плоскостью колебаний поляризатора. Но лишь только мы станем вращать столик вместе с кристаллом вокруг оси микроскопа—темные точки оптических осей, а вместе с ними овалы и лемнискаты повернутся также (фиг. 254). Что же касается темного креста, то он разорвется и превратится в 2 ветви гиперболы, ассимптотами которой служат нити окуляра, т.-е. направления колебаний поляризатора и анализатора.

В случае косых сечений картины эти сложнее, но почти всегда, даже в случае весьма мелких зернышек до 0,001 мм в поперечнике, мы можем по интерференционным фигурам в сходящемся свете быстро отличить одноосный кристалл от двуосного, т.-е. узнать относится ли он к средним или низшим сингониям, и тем самым получить одно из свойств, по которым оптически определяются кристаллические вещества.



Фиг. 254.
То же, что на фиг. 253, но после поворота плоскости оптических осей вокруг оси микроскопа на 45°.

§ 93. О вращении плоскости поляризации.

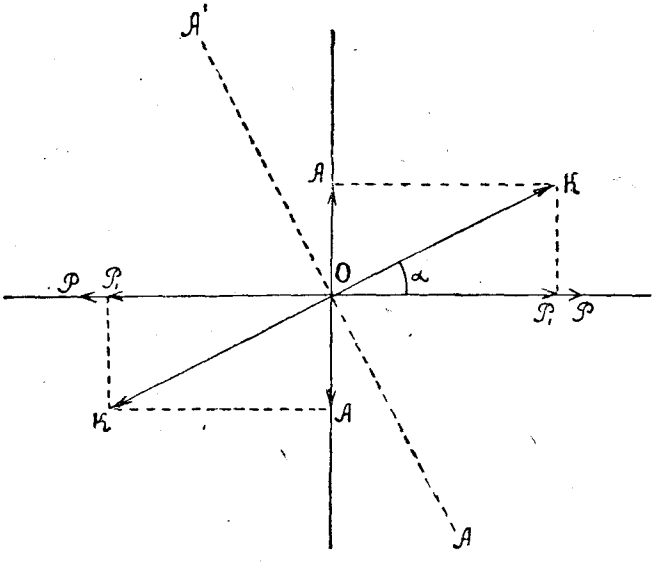
Выше в § 88 п. 2 было сказано, что пластинка, вырезанная из одноосного кристалла, перпендикулярно к его оптической оси и положенная под микроскоп между скрещенными николями, — представляется темной, если исследование идет в параллельном свете.

Однако, бывают случаи, когда такая пластинка кажется освещенной. И освещение это не исчезает и не меняется, т.-е. пластинка не гаснет при вращении ее вокруг оси микроскопа вопреки тому, что было сказано в § 88 во второй его половине. Это происходит потому, что такой кристалл не разлагает колебание, пропущенное поляризатором на 2, а поворачивает его плоскость, а вместе с тем и нормальную к ней плоскость поляризации луча на некоторый угол α, зависящий от вещества и от толщины пластинки. На фиг. 255, вычерченной перпендикулярно к лучу O, —P колебания, пропущенные поляризатором, K—колебания, выходящие из кристалла. Они повернуты по отношению к P на $\angle \alpha$. Дойдя до анализатора, эти колебания K разлагаются и дают составляющие—P_1, которая анализатором гасится, и A, которая проходит сквозь анализатор. И потому мы видим свет. Если бы кристалл не повернул колебания P, оно было бы целиком погашено анализатором.

Чтобы убедиться в том, что здесь действительно имеет место вращение плоскости поляризации, мы должны применить монохроматический свет, напр., ввести в пламя спиртовки NaCl и получить так желтый свет

натрия. Стоит теперь повернуть анализатор в положение A′ на угол α, и мы увидим, что кристалл погаснет, ибо колебания K не могут теперь дать составляющей на перпендикулярном к ним направлении A′ колебаний анализатора в его новом положении.

Вращением плоскости поляризации обладают только такие кристаллические вещества, которые принадлежат к видам симметрии, не имеющим зеркально-поворотных осей. Припомним, что в таких видах симметрии возможны так называемые энантиоморфные формы (стр. 26, фиг. 16). Припомним, что эти формы бывают правые и левые. Оказывается, что если одно из этих видоизменений вещества вращает плоскость поляризации по часовой стрелке (вправо), то другое—против часовой стрелки (влево).



Фиг. 255.
При вращении кристаллом плоскости колебаний P на угол α, надо для получения темноты повернуть анализатор в ту же сторону на тот же угол (из A в A′).

К числу минералов, вращающих плоскость поляризации, принадлежат, например: кварц SiO_2, киноварь HgS — оба тригонально-трапецоэдрического вида симметрии. Из искусственных соединений тем же свойством обладает, например, винная кислота $C_4H_6O_6$ диэдрического осевого вида симметрии. Следует заметить, что и растворы некоторых веществ, например, сахара обладают способностью вращения плоскости поляризации.

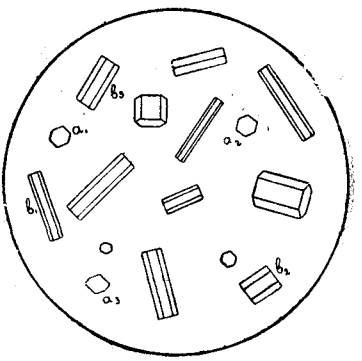
§ 94. Простейшие случаи определения сингонии кристаллов под микроскопом.

В предыдущих параграфах содержатся уже все главнейшие сведения, необходимые для такого определения. Здесь мы дадим решение для нескольких конкретных задач подобного рода.

1) Допустим, что в шлифе горной породы мы видим много многоугольных зернышек весьма сходных друг с другом по форме, по цвету

(без анализатора), по резкости очертаний, по отсутствию спайности и другим свойствам. При введении анализатора все эти зерна становятся темными и остаются такими же при вращении столика микроскопа. В таком случае определяемые кристаллы — изотропны, и их сингония — кубическая. При этом, однако, мы должны быть уверены, что все эти кристаллы в нашем шлифе не лежат параллельно друг другу, и что при том разрез всех их не пришелся случайно нормально к оптической оси.

2) При некоторой химической реакции мы получили кристаллический осадок, имеющий вид фиг. 256. Уже внешняя форма кристалликов говорит в этом случае за гексагональную сингонию. Для полной уверенности мы должны задвинуть анализатор в скрещенном положении. Тогда все поле зрения станет темным. Если сингония здесь действительно гексагональная, то кристаллы — шестиугольники (a_1, a_2, a_3), т.-е. призмочки, стоящие на пинакоиде, должны также оказаться темными и не просветляться при вращении, так как их оптическая ось совпадает с осью микроскопа (§ 88). Кристаллики же b_1, b_2, b_3..., т.-е. призмы, лежащие на боковой грани должны обладать прямым погасанием (§ 90). Если кристаллики a просветляются при вращении или кристаллики b гаснут косо (§ 90), то мы имеем дело с одной из низших сингоний.



Фиг. 256.
Осадок кремнефтористоводородного натрия — SiF_6Na_2 под микроскопом.

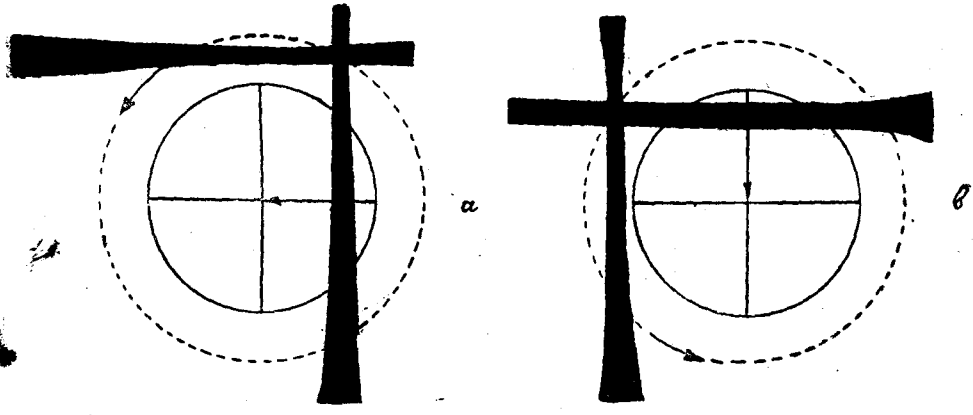
3) Если мы имеем в препарате игольчатые или призматические кристаллы с прямым погасанием, то чаще всего они относятся к гексагональной, тетрагональной или ромбической сингонии. Реже они могут быть моноклинные. Лишь как очень редкое исключение сингония их может быть триклинная.

4) Если игольчатые или призматические кристаллы гаснут косо, то они или моноклинные или триклинные. Ибо направление вытянутости совпадает у гексагональных, тетрагональных и ромбических кристаллов непременно с одной из поворотных осей симметрии, или с одной из нормалей к плоскостям симметрии. А следовательно, с одной из главных осей оптического эллипсоида (по § 72), почему погасание относительно вытянутости будет прямое.

5) Если кристаллы наши имеют вид пластинок (слюда) или чешуек неправильных очертаний, то мы можем воспользоваться сходящимся светом, введя конденсор и линзу Бертрана (§ 92). Если при этом толщина и двупреломление пластинки достаточны и пластинка нормальна к одной из осей N_g или N_p, то мы увидим одну из фигур 252, 253 или 254 и по ним непосредственно узнаем одноосный (252) или двуосный (253 и 254) кристалл мы имеем. В первом случае—сингония гекса- или тетрагональная, во втором—одна из трех низших.

Если пластинка нормальна к N_g или N_p, но толщина ее или двупреломление недостаточны, то мы не увидим цветных колец и кривых, а увидим лишь темные полосы, пересекающие светлое поле зрения. При вращении столика микроскопа вместе с кристаллом темные полосы или будут оставаться неподвижными в виде вертикально-горизонтального креста (кристалл одноосный), либо будут то сходиться в крест, то расходиться в виде гиперболы (фиг. 254) (кристалл двуосен).

Если препарат не перпендикулярен к оси N_g или N_p, то центр интерференционной фигуры (252, 253) смещается в сторону и иногда располагается даже вне поля зрения. Тогда в случае одноосного кристалла (фиг. 257), при вращении его вместе со столиком микроскопа, мы видим темные полосы креста, пробегающие по полю зрения попеременно, параллельно то вертикальной нити (фиг. 257-a), то горизонтальной нити (фиг. 257-b) окуляра.



Фиг. 257.
Перемещение темного креста при вращении одноосного кристалла вокруг оси микроскопа в сходящемся свете (в случае сечения не перпендикулярного к оптической оси).

В случае же двуосного кристалла мы увидим при вращении темные ветви гиперболы, косо пробегающие по полю зрения.

Все описанные здесь приемы различения одноосных и двуосных кристаллов, а, следовательно, средних от низших сингоний, в сходящемся поляризованном свете, применимы, конечно, не только для пластинчатых кристаллов, но и для всяких кристаллических зернышек. Хорошие микроскопы допускают при этом исследование весьма мелких зернышек почти до 0,001 мм в поперечнике.

§ 95. Понятие об „Универсальном методе Федорова".

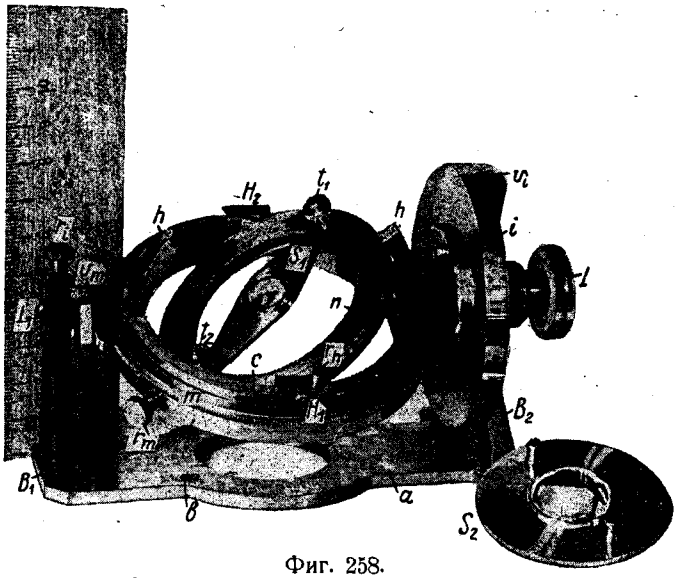
Как мы видели выше, если плоскость препарата приходится как раз по изотропному сечению исследуемого одноосного или двуосного кристалла, то при вращении обыкновенного столика микроскопа вместе с такими препаратами они не отличимы друг от друга и от изотропных кристаллов в параллельном поляризованном свете. Для отличия надо было бы такой препарат наклонить и тем вывести данное изотропное сечение из перпендикулярности к оси микроскопа, поставив на его место некоторое другое сечение.

И для многих других целей возникает необходимость наклонять препарат при кристаллооптических исследованиях, например, для определения угла оптических осей, максимального двупреломления, главного угла погасания и т. д.

Чрезвычайно важное значение этой задачи понял и ее блестяще разрешил Е. С. Федоров, придумавший для этого особый «универсальный столик» (фиг. 258). Столик этот привинчивается к обычному столику поляризационного микроскопа. Препарат кладется на стекло универсаль-

ного столика и может наклоняться вокруг нескольких осей последнего так, что любое направление в кристалле может быть совмещено с осью микроскопа или поставлено к ней перпендикулярно.

Это изобретение послужило основанием для особой ветви современной кристаллооптики, называемой: «Универсальный кристаллооптический метод Федорова». Этим способом мы можем в любом кристаллическом зерне определить если не все, то большинство его оптических констант, а вместе с тем можем почти всегда определить и самое вещество. Метод Федорова, разработанный, главным образом, им самим и его ближайшим сотрудником и учеником В. В. Никитиным [1]), полу-



Фиг. 258.
Универсальный столик Е. С. Федорова.

чил большое значение в кристаллографии, минералогии, химии и петрографии и широко распространился в настоящее время как в Союзе С. С. Республик, так и в других странах.

§ 96. Микроскопическое исследование непрозрачных кристаллов.

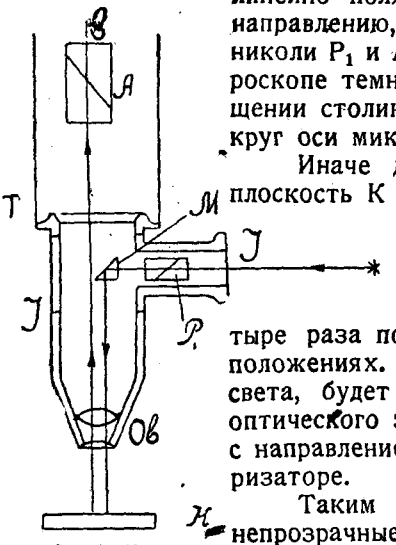
Непрозрачные кристаллы исследуются в отраженном свете. Этот метод приобретает все большее значение как при изучении рудных месторождений (потому что большинство руд тяжелых металлов—непрозрачны даже в очень тонких шлифах), так и в металлографии, где этим способом изучаются полированные шлифы сплавов и разнообразных других металлических продуктов.

Чтобы воспользоваться этим методом, необходимо обычный поляризационный микроскоп дополнить особым небольшим прибором: поляризационным вертикальным иллюминатором (осветителем) *JJ*

[1]) В. В. Никитин. Универсальный метод Федорова. Вып. I, II, III. 1911—1923 г.г.

(фиг. 259). Он ввинчивается между нижним концом трубы микроскопа T и объективом Ob. Осветительное зеркало S и нижний поляризатор микроскопа P (фиг. 243-а) теперь бездействуют. Свет дает теперь сильная электрическая лампа (дуговая или полу-ваттная лампа накаливания в 1 000 — 1500 свечей) — S_1 (фиг. 259). Луч идет чрез поляризатор P_1, где поляризуется, попадает в призму M, отражается и идет вниз. Здесь он падает нормально на полированный шлиф кристаллического вещества или на грань кристалла K. Отражаясь теперь обратно вверх, луч проходит частью мимо призмы M, занимающей лишь часть поля зрения микроскопа. Свойства отраженного таким образом луча мы изучаем далее, как обычно, посредством анализатора A и других приспособлений. Выясним некоторые из этих свойств.

Поляризованный луч, падающий вертикально на полированную поверхность изотропного вещества, дает отраженный луч, также прямолинейно поляризованный, с колебаниями по тому же направлению, что и у падающего луча. Поэтому, если николи P_1 и A (фиг. 259) скрещены, — мы увидим в микроскопе темноту. Темнота эта не нарушится при вращении столика микроскопа вместе с пластинкой K вокруг оси микроскопа.



Фиг. 259. Вертикальный поляризационный иллюминатор.

Иначе дело будет обстоять, если полированная плоскость K есть оптически анизотропное сечение какого-либо кристалла. Тогда при вращении столика микроскопа вместе с этим кристаллом, при скрещенных P_1 и A мы заметим в течение полного оборота четыре раза погасание и просветление в промежуточных положениях. Погасание, как и в случае проходящего света, будет происходить в моменты совпадения осей оптического эллипса, лежащего в плоскости препарата, с направлением колебаний луча в анализаторе и поляризаторе.

Таким образом мы можем отличить изотропные непрозрачные кристаллы (кубические) от анизотропных.

Если мы пользуемся для освещения белым светом, то анизотропное зерно представляется при этом окрашенным, при чем цвет окраски зависит для одного и того же вещества от ориентировки того сечения в кристалле, по которому пришелся шлиф и при вращении шлифа оттенок окраски меняется. Поэтому, если мы имеем не единый кристалл, а аггрегат (собрание) кристаллических зерен, различно ориентированных, как это всегда и бывает у руд и различных металлургических продуктов, то при исследовании описанным методом каждое отдельное зернышко будет резко отличаться от остальных. Поэтому мы можем, применяя поляризационный вертикальный иллюминатор, наблюдать и изучать структуру (строение) непрозрачных веществ, что очень важно как в минералогии и учении о рудных месторождениях, так и в металлографии и металлургии.

Необходимо заметить, что причины описанной выше видимой окраски анизотропных непрозрачных пластинок, гораздо сложнее, чем причины (интерференционной) окраски прозрачных препаратов в проходящем свете (§ 91). В случае непрозрачных шлифов кристаллов окраска зависит как от величины двупреломления исследуемой пластинки, так и от

неодинакового поглощения двух отраженных от нее колебаний и от возникающей отсюда так называемой эллиптической поляризации отраженного луча [1]).

ЧАСТЬ ДЕСЯТАЯ.

Рентгенометрия кристаллов.

§ 97. Общие сведения о рентгеновых лучах.

Рентгенометрия кристаллов это область, особенно тесно связывающая кристаллографию с физикой и химией, развившаяся на наших глазах в несколько лет и ныне постепенно занимающая доминирующее значение, как в области изучения кристаллического вещества, так и в ряде вопросов практического значения.

Немецкий физик Рентген (Röntgen) открыл в 1895 году особый род лучей, называемых теперь его именем. На фиг. 260 изображена рентгеновская трубка—полый стеклянный сосуд с тремя впаянными в него отростками. Из трубки выкачан воздух, т.-е. получено в ней сильно разреженное пространство. Сквозь отростки введены проводники, включенные в цепь постоянного тока. Пластинка Р, соединенная с отрицательным полюсом — катод. О — антикатод, пластинка из отполированного металла (платина, медь и др.). Благодаря разреженному пространству, для прохождения тока через такую трубку требуется весьма большое напряжение (десятки и даже сотни тысяч вольт). При этом сила тока в трубке и во всей цепи весьма мала (несколько миллиампер). При таких условиях от катода трубки исходит показанный на рисунке пучок так называемых катодных лучей. Катодные лучи—это мельчайшие частицы отрицательного электричества (электроны), несущиеся с колоссальной скоростью и ударяющие в антикатод. Под влиянием этих постоянных ударов антикатод становится центром лучеиспускания новых, особых, рентгеновых лучей, изображенных на фиг. 260 пунктирными линиями.

Условия прозрачности для рентгеновых лучей совсем иные, чем для световых, что нашло применение в медицине и в ряде других областей. Эти лучи способны проходить через многие тела, непрозрачные для обык-

---

[1]) Интересующимся этим вопросом укажем следующие руководства:

J. Koenigsberger. Ueber einen Apparat zur Erkennung und Messung optischer Anisotropie undurchsichtiger Substanzen und dessen Verwendung.—Centralblatt für Mineralogie etc. 1901, стр. 195; 1908, стр. 565—597; 1909, стр. 245; 1910, стр. 712.

H. Schneiderhöhn. Anleitung zur mikroskopischen Bestimmung und Untersuchung von Erzen und Aufbereitungsprodukten besonders im auffalenden Licht. 1922, 292 стр.

F. Wright. Polarized light in the study of ores and metals (Proceedings of the American Philosophical Society vol. LVIII № 7, 1919, стр. 401—447).

F. Wright. Examination of ores and metals in polarized light. (Mining and Metallurgy, 1920, № 158, 12 стр.).

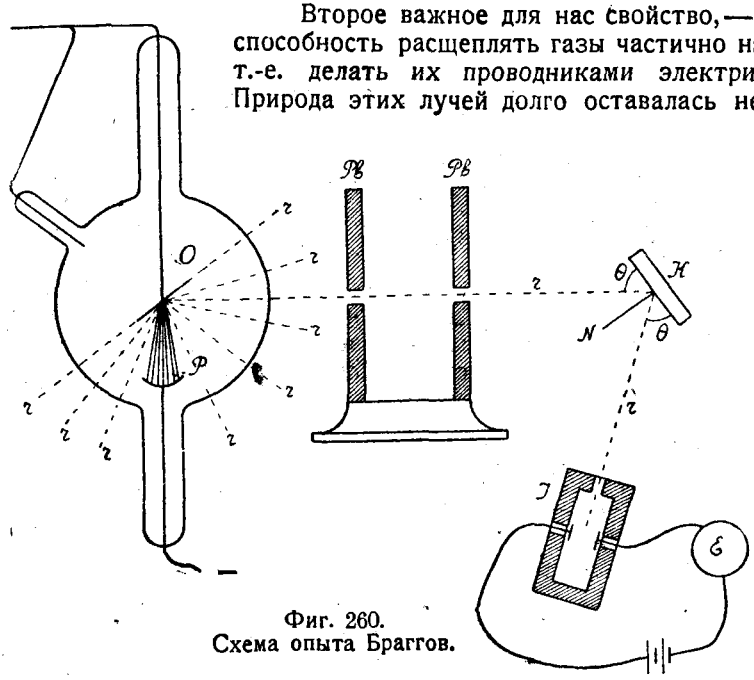
H. Hanemann. Metallmikroskopie mit Anwendung polarisierten Lichtes (Stahl und Eisen, 1914, стр. 1797; или Zeitschrift für anorg. Chem. 1914, 88, стр. 265—268.

J. Orcel. Les méthodes d'examen microscopique des minerais métalliques (Bulletin de la Société Franç. de Mineralogie, т. XLVIII, 1925, стр. 272—361).

И. Ф. Григорьев. Минераграфическое исследование руд. (Изв. Геол. Ком. 1926 . т. XLV, № 1, стр. 31—42).

новенных световых лучей, например, через тонкие пластинки алюминия, через человеческое тело, дерево и т. д. И наоборот, они задерживаются, например, прозрачным для света свинцовым стеклом.

Второе важное для нас свойство, — это их способность расщеплять газы частично на ионы, т.-е. делать их проводниками электричества. Природа этих лучей долго оставалась неясной:



Фиг. 260.
Схема опыта Браггов.

одни считали, что это электромагнитные колебания, подобные световым, другие — что это полет каких-то частиц вроде α или β лучей радиоактивных веществ. Первое предположение требовало существования для рентгеновых лучей явлений отражения, преломления, диффракции, интерференции и т. д., чего долго никто не мог доказать.

§ 98. Открытие Лауэ.

В 1912 году, другой немецкий физик, Laue вместе с сотрудниками Friedrich'ом и Knipping'ом доказали опытом, что рентгеновы лучи претерпевают явления диффракции и интерференции. Этот опыт, произведенный с помощью кристаллов, сделал вполне очевидным, что все неудачи прежних исследователей и все отличия рентгеновых лучей от видимых сводятся лишь к их разнице в длине волны. В то время, как лучи видимого света обладают длиной волны от 4 000 до 8 000 Å [1]), у рентгеновых лучей длина волны гораздо меньше: от 0,17 до 20 Å и несколько больше [2]). Длина волны рентгеновых лучей зависит от источника излучения (вещества антикатода) и разности потенциалов у зажимов рентгеновской трубки (см. дополнительные сведения ниже § 160).

Из приведенных выше цифр следует, что длина волны рентгеновых лучей в среднем (грубо) в 10 000 раз меньше длины волны видимого света.

---

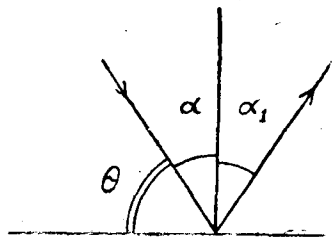
[1]) 1 Å (один онгстрём) $= 10^{-8}$ сантиметра. См. стр. 150.

[2]) См. выноску на стр. 150.

Гениальное открытие Лауэ имело два значения: 1) оно помогло разобраться в природе этих лучей и, кроме того, 2) дало ключ к познанию строения кристаллов. Метод Лауэ, однако, легче будет нам понять потом. Мы остановимся сначала на схеме позднейших опытов.

§ 99. Опыт Браггов.

Английские ученые Вильям и Лоренц Брагги (отец и сын) поставили опыт по схеме, изображенной на фиг. 260. Узкий пучок рентгеновых лучей выделялся посредством отверстий в двух свинцовых ширмах Pb, Pb (свинец при толщине более 6—7 мм для рентгеновых лучей непрозрачен). Кристалл K ставился под некоторым углом к лучу. Если последний отражается, то при этом должны быть соблюдены все условия отражения: 1) отраженный луч находится в плоскости падения и 2) угол падения α равен углу отражения α_1 (Брагг брал для вычислений не угол падения α, а его дополнение до 90°, угол отблеска θ (фиг. 261). Чтобы узнать, произошло ли отражение, исследуют то место, где должен пройти отраженный луч, при помощи ионизационной камеры *j*. Это свинцовая камера, наполненная SO_2, или другим газом, с алюминиевым окошком для впуска рентгеновых лучей (Алюминий для рентгеновых лучей в тонких пластинках проницаем). Если луч действительно отразился, то он попадает в камеру и в ней ионизирует газ SO_2, т.-е. разложит часть молекул его на ионы, электроположительные и электроотрицательные. Благодаря этому газ из не проводника сделается проводником. Тогда в цепи, показанной на фиг. 260, пойдет от включенного в нее источника ток, и гальванометр E покажет этот ток. Выяснилось, что вообще лучи не отражаются, но при некоторых углах отражение происходит. Измерение таких углов отблеска θ при отражении от грани куба кристалла NaCl, дали следующие результаты.



Фиг. 261.
α = угол падения, θ = угол отблеска
$\alpha = 90° - \theta$.

$\theta_1 = 10°40'$.
$\theta_2 = 21°41'$.
$\theta_3 = 33°40'$.

По таблицам натуральных тригонометрических величин и затем путем простых арифметических подсчетов отсюда находим:

$\sin\theta_1 = 0{,}185 = 1 \times 0{,}185 = 1 . \sin\theta_1$
$\sin\theta_2 = 0{,}370 = 2 \times 0{,}185 = 2 . \sin\theta_1$
$\sin\theta_3 = 0{,}555 = 3 \times 0{,}185 = 3 . \sin\theta_1$

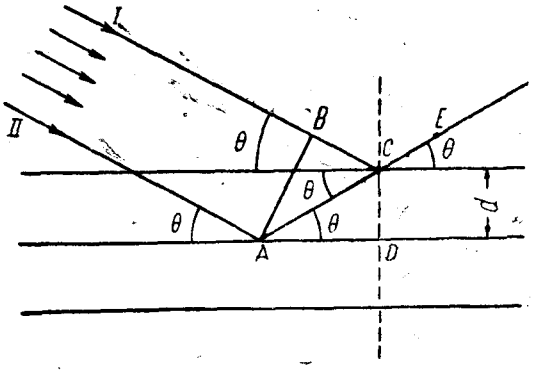
т.-е. синусы всех последующих углов, при которых происходит отражение рентгенова луча от одной и той же грани кристалла, равны синусу первого, наименьшего угла, дающего отражение, умноженному соответственно на последовательный ряд целых чисел. Это — эмпирический

закон, выведенный еще раньше проф. Г. В. Вульфом на основании данных опытов Лауэ. Теоретическое обоснование этого закона выводилось разно, — проще и изящнее других обосновал его Брагг.

§ 100. Формула Брагга-Вульфа.

Брагг предположил, что кристаллическая пластинка состоит из ряда плоских сеток (на фиг. 262 это представлено в сечении).

Обозначим расстояние между плоскими сетками через d. Часть лучей проходит сквозь первую сетку и отражается от второй (третьей и т. д.). Среди множества падающих лучей найдется и такой луч II, который, после отражения от второй плоской сетки, пойдет по тому же самому направлению, что и луч I после отражения от сетки первой. Таким образом, после отражения по каждому направлению пойдут два луча (три и больше), которые будут интерферировать. Вычислим разность хода этих лучей. Проведем поверхность волны AB. Тогда за один и тот же промежуток времени луч I пройдет BC, отразится и пройдет CE, луч II отразится в A и пройдет AC. Разность хода Δ будет равна AC — BC. Треугольник ABC прямоугольный.



Фиг. 262.
К выводу формулы Брагга-Вульфа.

$$BC = AC \cdot \cos 2\theta$$

$$AC - BC = AC\ (1 - \cos 2\theta) = 2AC \cdot \sin^2\theta.$$

$$AC = \frac{CD}{\sin\theta} = \frac{d}{\sin\theta}.$$

$$\Delta = AC - BC = 2d \cdot \sin\theta.$$

Амплитуда каждого отдельного колебания рентгенова луча слишком мала, чтобы этот луч мог быть обнаружен ионизационной камерой и гальванометром. Лишь тогда, когда целый ряд таких колебаний, взаимно налагаясь и интерферируя, усилят друг друга, энергия полученного суммарного луча будет в силах ионизировать газ в камере. А из теории интерференции света известно, что взаимно усиливаются интерферирующие лучи тогда, когда их разность хода равна целому числу волн. Поэтому мы должны заметить появление тока в гальванометре и, следовательно, появление отраженного рентгенова луча лишь тогда, когда $\Delta = n\lambda$, где λ — длина волны тех рентгеновых лучей, которыми мы пользуемся, а n — целое число ($n = 1, 2, 3, 4. \ldots$). Соединяя эту формулу с предыдущей, получим для углов θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 и т. д., при которых происходит отражение, следующую формулу Брагга-Вульфа.

$$\Delta = n\lambda = 2d \sin\theta.$$

В этом случае фазы (§ 75) совпадают и колебания складываются; при всех остальных положениях, т.-е. при $2d\sin\theta \neq n\lambda$ происходит затухание колебаний, и мы отраженного луча не наблюдаем. Из формулы Брагга-Вульфа, мы, зная λ, можем найти d, расстояние между плоскими сетками в кристалле и обратно, так как θ (угол, при котором происходит отражение) измеряется опытным путем, а взяв θ наименьшее, получим $n=1$. Эту формулу таким образом мы можем привести к уравнению с двумя неизвестными: λ и d.

§ 101. Определение вида структуры кристалла.

Имея возможность из опыта, с помощью только что выведенной формулы, определять расстояние d, мы можем применить все это к определению структуры кристаллов. Однако, здесь мы уже должны выйти из области чистого опыта и воспользоваться теорией структуры кристаллов.

Чтобы разобраться в этом сложном вопросе, мы изложим сначала на простейшем конкретном примере меди, состоящей целиком из атомов одного сорта (Cu) и кристаллизующейся в наиболее симметричной—кубической сингонии, как можно определять структуру кристалла методом Браггов, получая из опыта лишь величины углов отблеска отраженных рентгеновских лучей.

Возьмем одну и ту же рентгеновскую трубку и при том дающую монохроматические (§ 78) лучи, чтобы во время опыта λ была постоянна. Будем измерять наименьшие углы отблеска θ, при которых происходит отражение от разных граней кристалла меди: от грани куба (100), ромбо-додекаэдра (110) и октаэдра (111). Пусть оказалось, что $\theta_{100}=9°24'$; $\theta_{110}=13°18'$; $\theta_{111}=8°00'$.

Обозначим расстояние между соседними плоскими сетками, параллельными грани куба, затем ромбо-додекаэдра и, наконец, октаэдра соответственно через d_{100}, d_{110}, d_{111} и составим формулу Брагга-Вульфа для отражения от (100), (110) и (111), принимая в ней $n=1$, ибо мы измеряем углы θ наименьшие, т.-е. для первого отражения.

Получим: $\lambda=2d_{100}\cdot\sin\theta_{100}$; $\lambda=2d_{110}\cdot\sin\theta_{110}$; $\lambda=2d_{111}\cdot\sin\theta_{111}$.

Так как λ при всех трех опытах остается, как сказано, неизменным, то можно написать: $d_{100}\cdot\sin\theta_{100}=d_{110}\cdot\sin\theta_{110}=d_{111}\cdot\sin\theta_{111}$.

$$\text{Отсюда: } \frac{1}{d_{100}}:\frac{1}{d_{110}}:\frac{1}{d_{111}}=$$

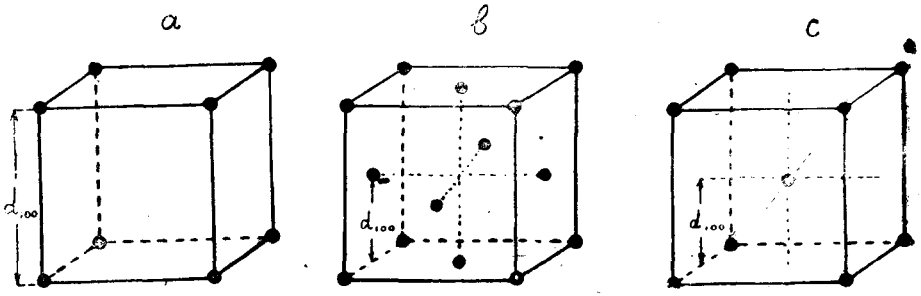
$$=\sin\theta_{100}:\sin\theta_{110}:\sin\theta_{111}=\sin 9°24':\sin 13°18':\sin 8°00'=1:1{,}41:0{,}85.$$

Итак, опытным путем мы установили отношение $\frac{1}{d_{100}}:\frac{1}{d_{110}}:\frac{1}{d_{111}}$ для кристаллов меди.

Вспомним теперь то, что мы изучали в теории структуры кристаллов, в частности в теории параллелоэдров.

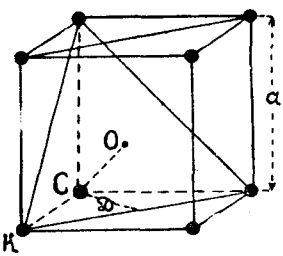
Мы имеем четыре вида параллелоэдров (см. §§ 55 и 56): три-, тетра-, гекса- и гептапараллелоэдр. К кубическому типу относятся из них три: первый, третий и четвертый. Только один из них и может выражать структуру кристаллов меди, кристаллизующейся в кубической сингонии. Задача состоит в том, чтобы определить теперь отношение $\frac{1}{d_{100}}:\frac{1}{d_{110}}:\frac{1}{d_{111}}$ чисто геометрически для каждой из этих трех структур и затем

установить, какому из них равно то же отношение, определенное для меди выше из опыта. Знаем (см. § 56), что трипараллелоэдру отвечает такая структура, при которой атомы расположены в вершинах куба (фиг. 263-а), элементарная ячейка здесь будет простой куб. Соответственно для гексапараллелоэдра — центрогранный куб (фиг. 263-b) и для гептапараллелоэдра — центрированный куб (фиг. 263-с).



Фиг. 263.
a — гексаэдрическая, b — додекаэдрическая, c — октаэдрическая структуры.

Расстояние между сетками граней куба, очевидно, для структуры «по кубу» (фиг. 263-а) равно ребру куба $d_{100} = CK = a$ (фиг. 264). d_{110} — расстояние между сетками ромбического додекаэдра, равно половине диагонали квадрата: $d_{110} = CD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Легко убедиться, что d_{111} (расстояние между сетками октаэдра) равно $^1/_3$ диагонали куба т.-е. $d_{111} = CO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.



Фиг. 264.
Расстояние между плоскими сетками, параллельными грани куба

$CK = d_{100} = a;$

$d_{110} = CD = a\frac{\sqrt{2}}{2};$

$d_{111} = CO = a\frac{\sqrt{3}}{3}.$

Подставим полученные числа в искомые отношения и получим:

$$\frac{1}{d_{100}} : \frac{1}{d_{110}} : \frac{1}{d_{111}} =$$

$$= 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3} = 1 : 1{,}41 : 1{,}73.$$

Аналогично, хотя и несколько сложнее, можно получить:

для центрированного куба:

$$\frac{1}{d_{100}} : \frac{1}{d_{110}} : \frac{1}{d_{111}} : = 1 : \frac{\sqrt{2}}{2} : \sqrt{3} = 1 : 0{,}71 : 1{,}73.$$

для центрогранного куба:

$$\frac{1}{d_{100}} : \frac{1}{d_{110}} : \frac{1}{d_{111}} = 1 \quad : \sqrt{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 : 1{,}41 : 0{,}87.$$

Сравним теперь с этими цифрами найденное ранее из опыта для кристалла меди отношение:

$$\frac{1}{d_{100}} : \frac{1}{d_{110}} : \frac{1}{d_{111}} = 1 : 1{,}41 : 0{,}85.$$

Отсюда без труда делаем заключение, что кристаллы меди построены по центрогранному кубу.

§ 102. Определение абсолютных расстояний между атомами в кристаллах по Браггам.

Зная структуру кристалла, легко определить и истинные расстояния между сетками. Подсчитаем количество вещества в элементарном кубе. Обозначим: n — число атомов меди в одном элементарном кубе, M — атомный вес меди, m — абсолютный вес одного атома водорода в граммах. Тогда вес вещества в одном элементарном кубике (фиг. 236-b) будет равен n. M. m. Вес атома водорода измерен в физике разными методами и принимается равным $1{,}64.10^{-24}$ грамма. Атомный вес меди M = 63,6. Число атомов n можно подсчитать, если мы знаем структуру. Для этого мы должны помнить, что кубы, построенные для меди, как на фиг. 263-b, приложены друг к другу вплотную со всех сторон. Тогда 1) каждый атом в вершине куба относится к восьми соприкасающимся здесь кубам, т.-е. к каждому из кубов принадлежит одна восьмая каждого из этих атомов. По числу вершин куба (восемь) это дает нам 1 атом, 2) каждый атом в центре грани относится к двум смежным по этой грани кубам, всего этих атомов 6, что дает 3 атома. Итого на элементарный куб при центрогранной структуре приходится 4 атома вещества.

Подсчитаем вес вещества в кубе иным путем: a — ребро куба, a^3 — его объем, ρ — плотность кристаллической меди, равная 8,96

Очевидно:

$$nMm = a^3\rho$$

Откуда:

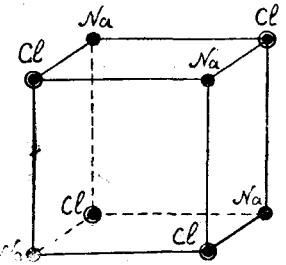
$$a = \sqrt[3]{\frac{n.\,M.\,m.}{\rho}} = 2d_{100}.$$

$$d_{100} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{4\cdot 63{,}57\cdot 1{,}64\cdot 10^{-24}}{8{,}96}} = 1{,}80\cdot 10^{-8}\ см = 1{,}8\text{Å}$$

Итак, абсолютное расстояние между ближайшими друг к другу плоскими сетками, параллельными грани куба в кристаллах меди, равно 1,8Å = 0,000 000 018 *см*. Отсюда не трудно вычислить расстояние между центрами тяжести любой пары атомов, изображенными на фиг. 263-b).

§ 103. Теория структуры кристаллов по Браггам.

В случае более сложных соединений и менее симметричных сингоний задача определения структуры кристаллов значительно усложняется. Целый ряд опытов и теоретических рассуждений привел W. и L. Bragg'ов к заключению, что в узлах пространственных решеток или правильных систем точек в кристаллах сидят не химические молекулы, а отдельные атомы. На фиг. 265 приведен пример структуры NaCl по Браггам.



Фиг. 265.
Структура соли NaCl по Браггам.

Здесь, в случае таких простых структур, мы видим, что понятие о химической молекуле, как обособленной единице. в кристаллическом веще-

стве в значительной мере теряется, так как, например, для NaCl, о каждом атоме Na мы не можем сказать, с каким именно из ближайших к нему атомов Cl он связан. В этом резкое расхождение современной рентгенометрической кристаллографии с классической химией. Большинство химиков держится и теперь еще того взгляда, что именно молекулы, например (NaCl), являются обособленными друг от друга единицами, слагающими как газообразные и жидкие, так и твердые тела.

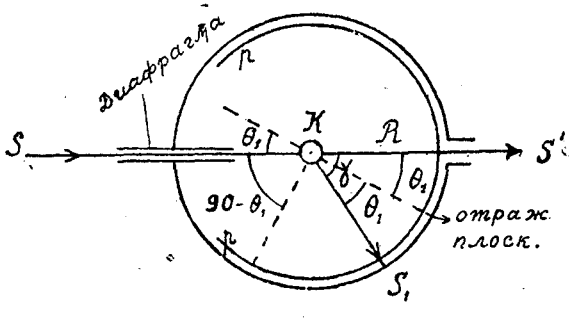
Приведем еще некоторые примеры структуры кристаллов. Кристаллическое строение меди, золота и серебра отвечает центрогранному кубу (фиг. 263-b). В кристаллическом железе при обыкновенной температуре (так называемое α-железо) атомы расположены по центрированному кубу (фиг. 263-c), при 800 — 870° (β-железо) — так же. При $t = 1000°$ (так называемое γ-железо) — атомы располагаются уже по центрогранному кубу (фиг. 263-b). При этом расстояния между атомами у различных металлов различны.

Ребро куба для Cu = 3,60Å, для Ag = 4,08Å, для Au = 4,07Å, для α-Fe = 2,86, для β-Fe = 2,90Å, для γ-Fe = 3,63Å.

Другие примеры структур, определенных с помощью рентгенометрии будут даны далее (§ 142).

§ 104. Метод Дебая и Шеррера.

Debye и Scherrer дали способ исследовать рентгенометрически кристаллическое вещество и даже определять его структуру и абсолютные расстояния атомов (в простейших случаях) тогда, когда это вещество имеется в тонко раздробленном виде. Поэтому метод их имеет большое значение там, где мы не имеем крупных кристаллических индивидов, что часто бывает, как при научных исследованиях, так и в технике.



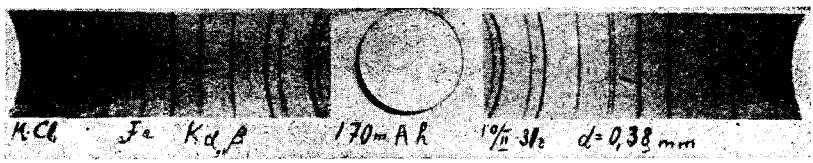
Фиг. 266.
Горизонтальный разрез камеры Дебая-Шеррера.

Схема постановки опыта такова. Узкий пучок S монохроматических рентгеновых лучей направляют на столбик K измельченного в порошок вещества. Столбик K помещен в цилиндрическую свинцовую камеру, изображенную на фиг. 266 в поперечном разрезе. Значительная часть пучка S проходит через порошок, не претерпев отражения. Так как порошок следует представлять в виде весьма большого числа осколков кристаллического вещества, то эти осколки будут ориентированы во всех возможных положениях.

Если мы обратим внимание на какую-либо серию плоских сеток, отстоящих друг от друга на расстоянии d и параллельных одной и той же возможной грани, скажем (100), в каждом из этих маленьких осколков, то такая плоская сетка в разных осколках будет делать разные углы отблеска θ с падающим рентгеновым лучом S. И среди огромного множества осколков всегда найдутся такие, которые будут ориентированы как раз так,

что угол θ_{100} и расстояние d будут в точности удовлетворять формуле $n\lambda = 2d \sin \theta_{100}$. Такие осколки будут давать отраженные рентгеновы лучи. Так как подходящих осколков будет в порошке весьма много, то даже эти подходящие будут разно ориентированы, т.-е. нормаль к отражающей плоской сетке, составляющая $\angle 90 - \theta_1$ (фиг. 266) с падающим лучом у различных из них будет лежать не только в плоскости чертежа, но и вне ее, так что эти нормали для множества подходящих осколков дадут целый конус с углом растворения $2(90 - \theta_1)$ вокруг падающего луча. Ось этого конуса есть KS′, а одна из образующих KS_1. Соответственно с этим и отраженные лучи S_1 от этой серии осколков дадут целый конус с углом растворения $2\gamma_1 = 4\theta_1$ вокруг проходящего луча S′.

Для другой плоской сетки (грани) кристалла требуется иной угол θ_2 и потому получится другой конус отраженных лучей с другим углом растворения $2\gamma_2 = 4\theta_2$ и т. д. Так как явственные отражения дают лишь наиболее плотные грани, т.-е. наиболее густо усаженные атомами, то таких конусов получается сравнительно немного.



Фиг. 267,
Дебаеграмма KCl (Снимок Г. А. Ковалева. Fe — антикатод. Экспозиция 170 миллиампер-часов. Диаметр столбика = 0,38 *мм*).

Итак, отраженный луч бывает направлен под углом $\gamma = 2\Theta$ к начальному положению. На экране pp (цилиндрическом) из светочувствительной пленки эти конуса будут сфотографированы в виде частей колец. Так получается рентгенограмма Дебая (фиг. 267).

Одна и та же грань у разных кристалликов даст ряд конусов от отражений, отвечающих $\sin \theta_1$, $2 \sin \theta_1$, $3 \sin \theta_1 \ldots$ при чем соответственные дужки будут постепенно убывать в интенсивности. Следующие грани дадут серии $\sin \theta_2$. $2 \sin \theta_2 \ldots$; $\sin \theta_3$, $2 \sin \theta_3 \ldots$ и т. д., при чем отчетливость линий будет понижаться с понижением плотности грани и с повышением порядка отражения, т.-е. коэффициента 1, 2, 3... при θ. Проявив и зафиксировав после опыта фото-пленку, мы можем развернуть ее и весьма просто определить углы отблеска. Например, измеряя линейкой на фигуре 267 расстояние s в миллиметрах между двумя дужками одного и того же конуса, находим, что на фиг. 266 это расстояние будет отвечать удвоенный длине дуги между лучами S′ и S_1: $s = 2 \cup S'S_1$, откуда:

$$\frac{S_1S'}{2\pi r} = \frac{2\theta}{360^\circ}.$$

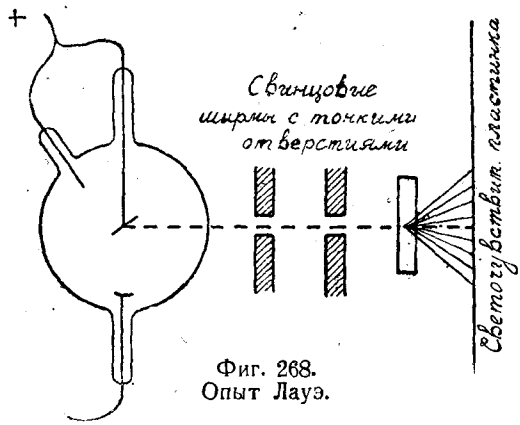
Откуда.

$$\theta = \frac{S_1S'}{\pi r} \cdot 90^\circ.$$

Если радиус камеры r известен, то найти отсюда $\angle \theta$ в градусах не представляет труда. По ряду таких углов, отвечающих разным дужкам дебаеграммы, можно судить о расстояниях плоских сеток и, далее, о структуре изученных кристаллов.

§ 105. Метод Лауэ.

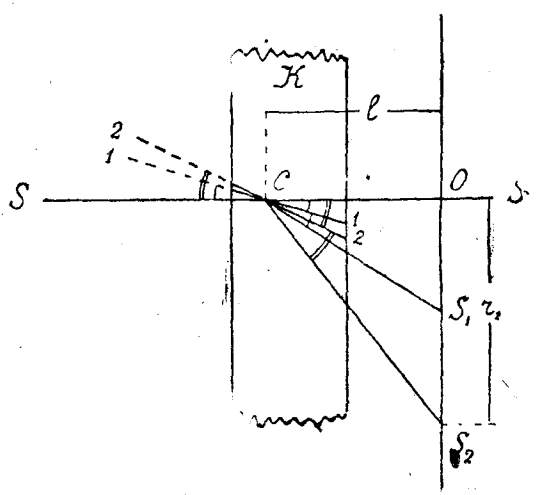
Метод Laue интересен прежде всего тем, что по схеме этого метода были поставлены первые опыты Friedrich'ом и Knipping'ом, положившие в 1912 г. начало рентгенометрическим исследованиям кристаллов.



Фиг. 268.
Опыт Лауэ.

Laue брал пластинку кристалла и пропускал сквозь нее пучок рентгеновых лучей (фиг. 268). Так как кристаллическое вещество можно представить состоящим из ряда разно расположенных и разной плотности плоских сеток, то отражение может произойти от каждой серии взаимно-параллельных сеток, как это ясно из описания способа Браггов (§ 99). Так как здесь взаимное положение падающего луча и каждой такой серии плоских сеток является строго определенным, а следовательно, угол отблеска θ здесь задан и не может быть изменен, то, чтобы удовлетворялась формула Брагга-Вульфа $n\lambda = 2d \sin\theta$, т.-е., чтобы отраженные от серии параллельных сеток лучи не уничтожали, а усиливали друг друга (при каком условии мы их только и можем обнаружить), — следует брать «белый» рентгеновский свет, т.-е., состоящий из большого ряда колебаний с разнообразной длиной волны. Тогда для каждой сетки 1—1 (фиг. 269) в пучке SC найдется луч, который даст соответствующее изображение S_1 («зайчик») на фотографической пластинке OS_1S_2.

При достаточной выдержке (порядка 25 миллиамперчасов при диаметре камеры в 40 — 50 *см*) после проявления негатива, мы получим на снимке целую серию пятен. На фиг. 270 вверху приведена лауэграмма кристалла MgO [1]) гексоктаэдрического вида симметрии. Необходимые пояснения сделаны в подписи к фигуре.



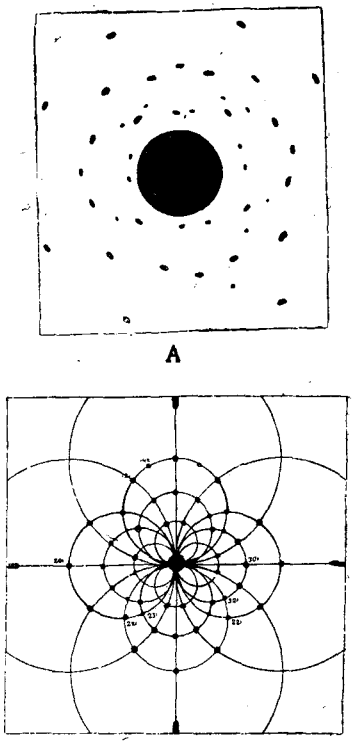
Фиг. 269.
Механизм получения лауэграммы. SC — падающий «белый» рентгенолуч. CS′ — проходящий луч. CS_1 — отраженный от плоской сетки 1 — 1 луч. CS_2 — луч, отраженный от 2 — 2. K — кристалл. OS_1S_2 — фотопластинка. S_1, S_2 — зайчики от отраженных лучей.

[1]) R. W. G. Wyckoff. The structure of crystals 1924, p. 122.

Можно доказать, что пятна, получившиеся от плоских сеток, принадлежащих одному кристаллографическому поясу, будут расположены по эллипсам, параболам и гиперболам. Если пластинка кристалла была вырезана перпендикулярно к оси или плоскости симметрии, то и рентгенограмма будет иметь этот элемент симметрии.

Более плотным граням будут соответствовать более явственные пятна. Редко усаженные атомами плоские сетки вовсе не дают заметных отпечатков. А так как сетки с наибольшею плотностью атомов являются для кристалла наиболее важными в структурном отношении (параллельны плоскостям ограничения, спайности, двойникования), то на рентгенограммах Лауэ мы имеем своеобразные проекции этих плоскостей.

Зная расстояние l от кристалла до экрана (фиг. 269) и расстояние r_1 от следа первичного луча (прошедшего без отражения) до какого-либо пятна, мы можем вычислить из $\triangle OS_2C$ угол $2\theta_2$, т.-е. будем знать угловые положения наиболее плотных плоских сеток. Однако, при опыте Лауэ мы имеем, что в формуле $n\lambda = 2d \sin\theta$ для каждого пятна остаются неизвестными 2 величины: λ и d. Поэтому метод Лауэ применяется обычно вместе с методом Дебая или Брагга.



A

B

Фиг. 270.
Лауэграмма кристалла MgO гексоктаэдрического вида симметрии. Плоскость снимка нормальна к L_4. A — фотография, B — полученная из нее геометрическим построением циклограмма, где точки отвечают зайчикам граней, а окружности — поясам граней.

§ 106. Значение рентгенометрии кристаллов.

Рентгенометрия кристаллов приобретает все большее и большее значение как в теоретических, так и в практических исследованиях.

Повторим здесь еще раз, что этот метод:

1) выяснил природу рентгеновых лучей;

2) дал способы измерения длины волн их;

3) позволил изучить рентгеновские спектры различных элементов, путем помещения их в качестве антикатода трубки и определения длины получаемых таким путем рентгеновых волн с помощью какого-либо кристалла, для которого d заранее известно (см. далее § 158);

4) указал для простейших случаев наиболее надежные способы определения кристаллической структуры веществ;

5) позволил нам впервые точно определять расстояние между атомами в кристаллах в абсолютных единицах (сантиметрах или ангстрёмах);

6) указал, что кристаллическая решетка весьма часто (хотя и не всегда) построена отдельными атомами, а не молекулами;

7) установил (методом Дебая) кристаллическую природу многих тонко раздробленных веществ, считавшихся аморфными;

8) дал особые способы рентгенометрического анализа вещества: или путем определения их структуры, или, наконец, путем чисто эмпирического сравнения рентгенограмм неизвестного вещества с рентгенограммами, заранее изученных известных веществ (см. ниже § 157 — 258).

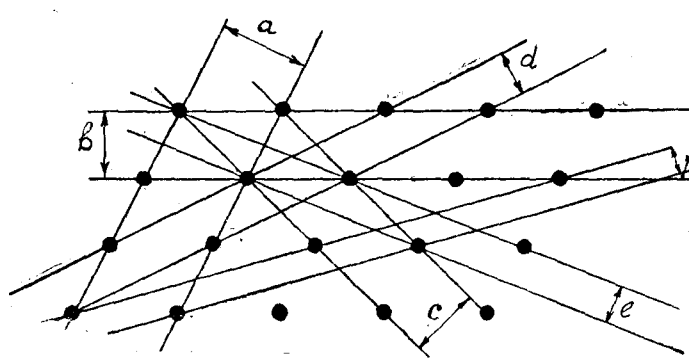
Поэтому неудивительно, что современная научная литература по физике и кристаллографии переполнена новыми работами по рентгенометрии кристаллов. В значительной степени этот метод исследования проник уже и в химию, минералогию, керамику, рудологию, металлографию. Область его применения быстро развивается на наших глазах.

ЧАСТЬ ОДИННАДЦАТАЯ.

Механические свойства кристаллов.

§ 107 Спайность.

Спайность есть способность кристаллов раскалываться по плоскостям определенного направления. Этим свойством кристаллы обладают далеко не в одинаковой степени. Так как это свойство является весьма



Фиг. 271.
В плоской сетке ряды, более густо усаженные частицами, расположены ближе друг к другу a > c > b > d > e > f.

характерным для каждого данного кристаллического вещества, то оно является одним из важных диагностических признаков, помогающих отличить одно вещество от другого. Чтобы им пользоваться, необходимо прежде всего различать степень совершенства спайности. Мы будем разделять, по степени совершенства, спайность на 5 ступеней.

I. Спайность весьма совершенная (напр., слюда, некоторые хлориты). Кристалл способен делиться на тончайшие листочки. Получить излом весьма трудно.

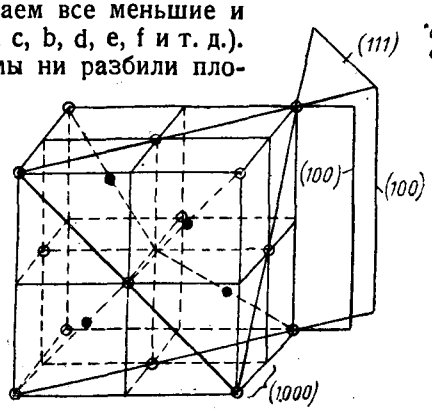
II. Спайность совершенная (напр., кальцит, многие шпаты). При ударе молотком по кристаллу очень трудно получить неровный излом, а почти всегда получаются выколки по спайности, ограниченные плоскостями. Так, напр., кальцит дает искаженные или нормальные ромбоэдры (искаженные — в смысле размеров граней и ребер, но не углов).

III. Спайность средняя (напр., полевой шпат, авгит, роговая обманка). На кусках минерала отчетливо наблюдаются как плоскости спайности, так и изломы.

IV. Спайность несовершенная (напр., апатит). Плоскостей спайности почти не видно, излом кусков неровный. В апатите, перпендикулярно граням призмы, заметна спайность, иногда искривленная.

V. Спайность весьма несовершенная (напр., кварц). Спайность только с величайшим трудом может быть замечена искусным исследователем, или даже вовсе не наблюдается. Всегда получаем излом, обычно раковистый.

Как можно объяснить это явление? Укажем некоторые теоретические обоснования этого явления. Плоские сетки пространственной решетки, наиболее густо усаженные частицами, являются и наиболее удаленными друг от друга. В плоскости это относится не к сеткам, а к рядам точек. На фиг. 271 изображена одна плоская сетка. Из построения видно, что ряды, наиболее плотно усаженные точками, являются наиболее удаленными. По мере перехода к рядам более редким получаем все меньшие и меньшие расстояния между ними (a, c, b, d, e, f и т. д.). Это вытекает из того, что как бы мы ни разбили плоскую сетку на систему параллелограммов,—площадь пустого параллелограмма [равная произведению из расстояния между точками (x) на расстояние между параллельными рядами (a, b, c, ...)] остается постоянной: $X_a a = X_b b = X_c c = \ldots$ Браве, создатель теории пространственной решетки, первый высказал предположение, что плоскости спайности это и есть наиболее удаленные друг от друга плоские сетки, или, что то же, сетки, наиболее густо усаженные частицами.



Фиг. 272.
Структура цинкобманки — ZnS.

Явление это, однако, усложняется рядом причин. На одну из них укажем.

Теперь на основании рентгенометрических исследований предполагают, что в точках пространственной решетки расположены не молекулы, а атомы.

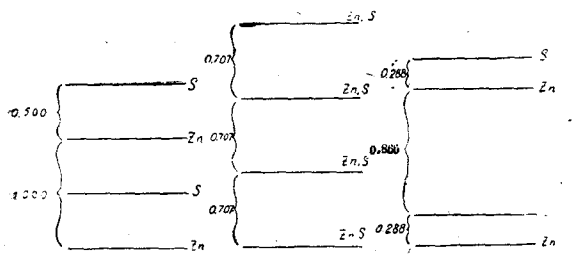
Г. В. Вульф, проверяя гипотезу Браве на ряде кристаллов, структура которых стала нам известна на основании рентгенометрии их, пришел к заключению, что в гипотезу Браве следует ввести поправку на силы химического сцепления. Теорию Г. В. Вульфа разъясним на следующем примере.

Фиг. 272. изображает элементарную ячейку кристаллического строения цинковой обманки, — минерала кубической сингонии состава ZnS со средней спайностью по (110).

Из чертежа мы видим, что атомы S расположены по центрогранному кубу, а атомы Zn занимают центры четырех накрест лежащих из восьми малых кубов: двух в верхнем этаже и двух в нижнем. Из последовательно приставленных друг к другу множества так построенных кубов и состоит кристалл цинкобманки.

Примем ребро малого куба за единицу 1,000 и определим, на каком расстоянии будут находиться друг от друга и какие атомы будут заключать в себе плоские сетки, параллельные сначала грани (100) затем — грани (110) и, наконец, — (111).

Не трудно сообразить, рассматривая чертеж 272, что если мы сделаем его разрезы перпендикулярно к каждой из этих трех граней, то получим соответственно фиг. 273. В первом случае мы видим, что плоские сетки, идущие параллельно грани (100) располагаются все на расстоянии 0,500 друг от друга, при чем заключают в себе попеременно или только атомы Zn или только атомы S. Во втором случае, — параллельно (110) плоские сетки располагаются также равномерно, но каждая включает в себе как атомы Zn, так и атомы S. Наконец, в третьем случае плоские сетки располагаются попеременно, — то ближе, то дальше одна от другой и атомный состав их опять чередуется. Если бы гипотеза Браве была для всех случаев справедлива, то спайность в цинкобманке наблюдалась бы по октаэдру (111), ибо именно параллельно этой грани имеются наиболее удаленные друг от друга (0,866) плоские сетки. Но здесь необходимо принять во внимание поправку Г. В. Вульфа. Плоские сетки, находящиеся на расстоянии 0,886 друг от друга, содержат разные атомы: одна Zn другая S, которые связаны друг с другом силами химического сродства и потому трудно разделимы. Плоские же сетки, параллельные грани (110), содержат каждая атомы и Zn и S, взаимно насыщающие друг друга в пределах одной сетки. Поэтому здесь должно легко происходить расщепление соседних плоскостей. И действительно, как было сказано, цинкобманка имеет спайность по (110).



Фиг. 273.
Разрезы структуры ZnS (фиг. 272) нормально к граням куба (100), ромбо-додекаэдра (110) и октаэдра (111).

Дальнейшим подтверждением этой теории служит следующее. Алмаз имеет ту же структуру, что и цинкобманка (фиг. 272), лишь на месте черных и светлых кружков у него находятся одинаковые атомы углерода С. В этом случае нетрудно понять из фиг. 273, что спайность его должна итти по грани октаэдра (111), как это и есть в действительности. Г. В. Вульф подтвердил свою теорию на хлористом натрии ($NaCl$), флюорите (CaF_2), кальците ($CaCO_3$) и сере (S), кроме указанных выше.

Следует, однако, заметить, что соображения Браве с дополнениями Г. В. Вульфа лишь отчасти проливают свет на явления спайности. Они не объясняют существования спайности по нескольким не равнозначным плоскостям у одного и того же кристалла, что нередко наблюдается.

Например, у кристаллов гипса ($CaSO_4 \cdot 2H_2O$), относящихся к моноклинно-призматическому виду симметрии (см. фиг. 29), имеются следующие спайности: 1) по второму пинакоиду (010) — весьма совершенная, 2) по призме ($\bar{1}11$) — средняя и 3) по первому пинакоиду (100) — несовершенная.

Повидимому, спайность наблюдается в кристалле по тем плоскостям, по нормалям к которым сила сцепления частиц, слагающих кристалл зна-

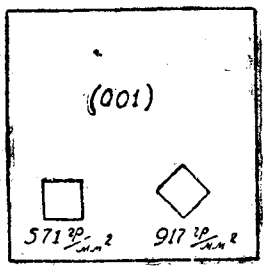
чительно меньше, чем по всем направлениям, близким к этим нормалям. Нормали к плоскостям спайностей суть направления относительных минимумов сил сцепления в кристалле.

Однако, мы имеем в настоящее время слишком мало опытных данных, измеряющих силы сцепления в кристаллах, чтобы составить прочно суждение по этому вопросу [1]).

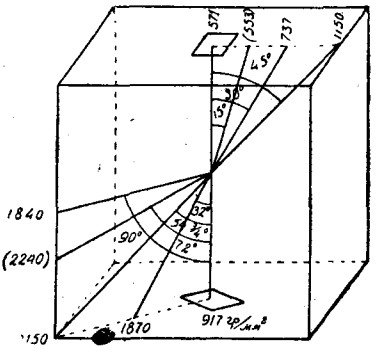
§ 108. Анизотропия сил сцепления в кристаллах. Значение поверхностного слоя.

Силы сцепления можно приблизительно измерять, определяя наименьшее напряжение, разрывающее призму, вырезанную из кристалла по данному направлению. Напряжением в данном случае называется сила, деленная на площадь поперечного сечения призмы. Систематические опыты в этом отношении производились лишь В. Фойгтом [2]) и при том лишь для кристаллов одного вещества — каменной соли.

Опыты эти, произведенные с квадратными призмами каменной соли обнаружили, что разрывающее усилие зависит не только от направления,



Фиг. 274.
Левая призмочка, вырезанная из куба каменной соли, разрывается при напряжении 571 грамм на кв. мм, — правая лишь при 917 гр. на кв. мм (по В. Фойгту).



Фиг. 275.
Изменение разрывающего напряжения с изменением направления в кристалле каменной соли.

по которому расположена ось призмы в кристалле, из которого она вырезана, но и от ориентировки боковых граней призмы. На фиг. 274 представлен вид сверху на кубический кристалл каменной соли, из которого вырезаны две совершенно одинаковые вертикальные призмы, но с различно ориентированными боковыми гранями. Та, у которой боковые грани параллельны (100) и (010) кристалла, разрывается при напряжении 571 гр. на 1 *мм*², а та, у которой боковые грани параллельны (110) и (1$\bar{1}$0) кристалла, разрывается лишь при 917 гр. на 1 *мм*².

На фигуре же 275 показано, как изменяется разрывающее напряжение с изменением направления оси призмы в кристалле той же каменной соли. При этом верхний веер направлений отвечает призмам с ориентировкой одной из боковых граней параллельно (100), а нижний веер — парал-

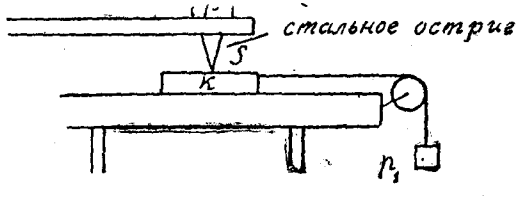
[1]) В недавнее время о спайности писал J. Beckenkamp: Atomanordnung u. Spaltbarkeit (Z. f. Kr. 58. 7 — 40).
[2]) W. Voigt. Lehrbuch der Kristallphysik, 1910. S. 946—950.

лельно (110). Из цифр фигуры 275 видим, что напряжение резко меняется с направлением: от 571 и 917 гр. на *мм*² для ⊥ (001), до 1150 и 1840 для ⊥ (110) и до 2150 для ⊥ (111). Это один из нагляднейших примеров анизотропности кристаллического вещества.

Влияние ориентировки боковых граней на величину наименьшего разрывающего напряжения В. Фойгт объяснял тем, что нарушение прочности всегда начинается с поверхности, а затем уже прогрессирует внутрь кристалла. В последнее время русскому ученому А. Ф. Иоффе[1]) с сотрудницами удалось подтвердить этот взгляд весьма остроумным опытом разрыва призм каменной соли в горячей воде. При этом вода непрерывно растворяла разрушающийся поверхностный слой, и усилие действовало все время на почти неразрушенный с поверхности стержень. При этом оказалось: 1) что ориентировка боковых граней не влияет заметно на предел прочности (т.-е. на разрывающее напряжение) и 2) что это напряжение при таких условиях несравненно больше, чем при разрыве в воздухе, достигая в разных опытах цифр в 30 000, 150 000 и 160 000 грамм на кв. мм. (взамен 571 гр. по Фойгту).

§ 109. Твердость.

Наиболее простым приемом для определения твердости является способ Моса, где 10 ступеней твердости определяются сравнением с эталонами. За эталоны приняты следующие минералы, составляющие так называемую 10-ти ступенчатую скалу Моса: 1) тальк $4SiO_2.3MgO.H_2O$, 2) каменная соль NaCl или гипс $CaSO_4.2H_2O$, 3) кальцит (известковый шпат) $CaCO_3$, 4) плавиковый шпат (флюорит) CaF_2, 5) апатит $[PO_4]_3Ca_5F$, 6) ортоклаз $K_2Al_2Si_6O_{16}$, 7) кварц SiO_2, 8) топаз $SiO_4Al_2F_2$, 9) корунд Al_2O_3, 10) алмаз C. Сравнение производим, наблюдая, кто кого царапает. Например: исследуемый минерал царапает апатит, а сам царапается ортоклазом, значит, его твердость между 5 и 6.

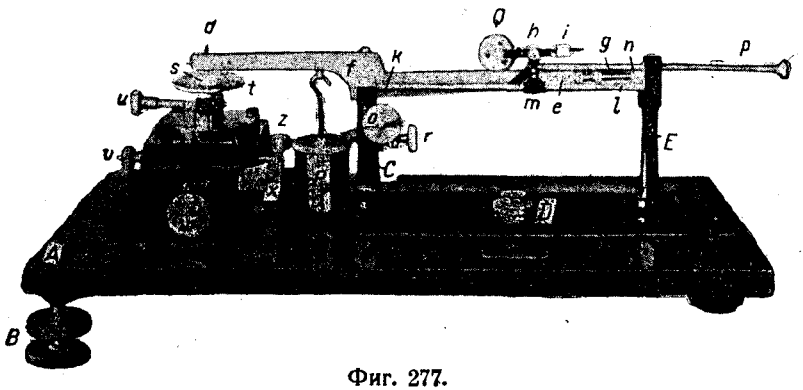


Фиг. 276.
Склерометр Зеебека (схема).

Более точные исследования показали, что хотя скала эта и весьма удобна на практике, но ступени ее крайне неравномерны. Для точного определения было предложено много способов и сконструировано несколько приборов на различных принципах: одни из них определяют твердость царапания (как и в способе Моса), другие — твердость шлифовки, третьи — сверления, давления и т. д. Способы эти дают не всегда согласные результаты, так как при разных видах механических усилий, в состав которых входит давление на элементы поверхности испытуемого вещества, сопротивление этого вещества разрушению будет различно. Для более точного определения твердости царапания Зеебек сконструировал особый прибор — склерометр. На фиг. 276 видно, что здесь кристалл протягивается силою груза p_1 под стальным острием, которое надавливает на него под влиянием определенного груза p. Увеличивая последний, мы находим

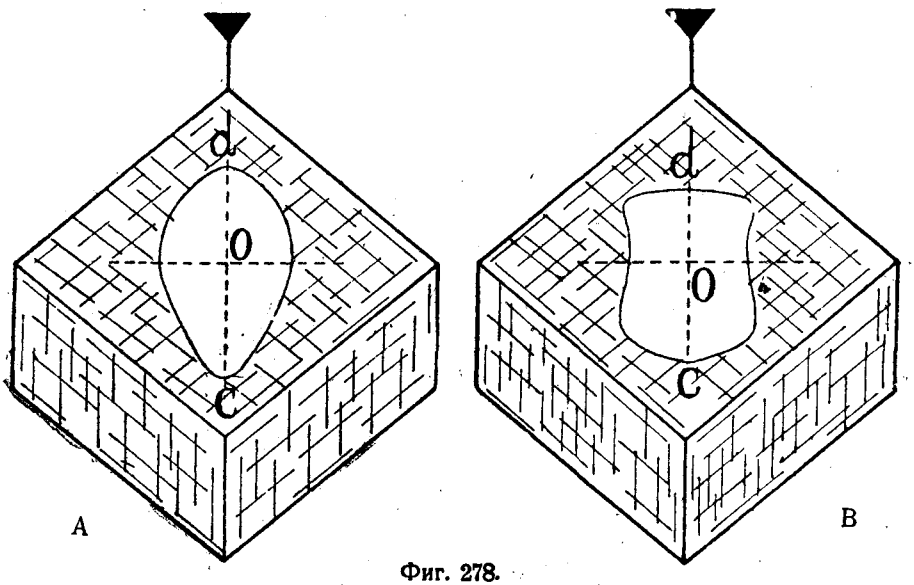
[1]) А. Ф. Иоффе, М. В. Кирпичева, М. А. Левицкая. „Деформация и прочность кристаллов". Журн. Р. Ф.-Х. О. LVI. 5—6. 488—503. 1924.

нагрузку, при которой начинается явление царапания. Для твердых минералов пришлось бы взять вместо стального алмазное острие.



Фиг. 277.
Склерометр Мартенса.

Видоизменением этого прибора является прибор Мартенса (фиг. 277), которым определяют нагрузку P, дающую не начало царапания, а бороздку шириною 0,01 *мм* при острие с углом 90° [1]).



Фиг. 278.
ривые твердости на грани спайного омбоэдра у двух различных кристаллов кальцита — $CaCO_3$.

В этих методах твердость выражается в граммах.

Определения твердости царапания посредством подобных приборов дали результаты, которые хорошо иллюстрируются фигурой 278, составленной по данным Рейса и Циммермана. Здесь изображены так называемые

[1]) A. Reis und L. Zimmermann. Über Härte und Härteanisotropie — Zeitschr f. Kr. LVII, 5. 449—493.

кривые твердости царапания на грани спайного ромбоэдра двух разных кристаллов кальцита (CO_3Ca). Кривые эти построены так: определена прибором Мартенса твердость царапания по разным направлениям на спайной грани каждого из кристаллов и полученная величина твердости отложена в известном масштабе от какой-либо точки по направлению, по которому чертило острие прибора. Получен по каждому направлению вектор определенной длины. Концы таких векторов, соединенные линией, и дают кривую твердости царапания. Такие кривые твердости изучены для многих кристаллов. Фиг. 278 устанавливает следующие существенные законности.

1) Твердость царапания на гранях кристаллов в общем случае анизотропна, т.-е. различна по разным направлениям.

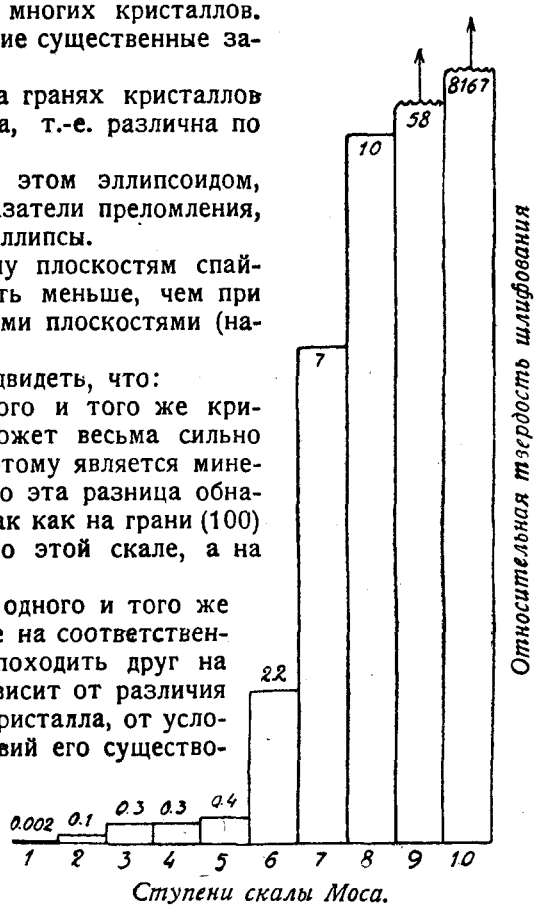
2) Она не выражается при этом эллипсоидом, как например, выражаются показатели преломления, ибо кривые твердости не суть эллипсы.

3) При царапании навстречу плоскостям спайности (направление od) твердость меньше, чем при царапании по пути со спайными плоскостями (направление oc) [1].

Из этих данных легко предвидеть, что:

4) На разных гранях одного и того же кристалла твердость царапания может весьма сильно отличаться. Резким примером этому является минерал кианит (Al_2SiO_5), у которого эта разница обнаруживается даже скалой Моса, так как на грани (100) твердость у него равна 4 — 5 по этой скале, а на грани (010) — равна 7.

5) Для разных кристаллов одного и того же вещества кривые твердости даже на соответственных гранях могут сильно не походить друг на друга (фиг. 278-A и B). Это зависит от различия примесей к главному веществу кристалла, от условия его образования и от условий его существования после кристаллизации (резкие колебания температуры и сильные давления влияют на твердость). Метод царапания является для кристаллографии самым важным из всех методов определения твердости, так как здесь наиболее ясно выступает различие величины твердости с изменением направления.



Фиг. 279.
Сравнение твердости царапания (по способу Моса) с твердостью шлифования (по способу Розиваля).

Rosival определял твердость шлифованием. Испытываемый минерал шлифовался плоской своей поверхностью на стеклянном или металлическом круге, отвешенным количеством карборундума [2]) до тех пор, пока изнашивание минерала не прекращалось. По потере в весе p можно было

[1]) У кальцита — спайность по плоскостям ромбоэдра (фиг. 278), у которого двугранные углы, сходящиеся на тройной оси тупые.

[2]) Порошок для шлифования, состава SiC.

вычислить потерю в объеме $v = \frac{p}{\delta}$, где δ удельный вес вещества. Твердость же шлифования тем больше, чем меньше потеря объема

$$H = \frac{1}{v} = \frac{\delta}{p}.$$

Розивалем были получены таким путем цифры твердости шлифования. Эти цифры Розиваля для наглядности пересчитаны нами так, чтобы твердость кварца (условно) равнялась 7 (как и в скале Моса), и после этого изображены на диаграмме фиг. 279 [1]). Из этой диаграммы ясно видна резкая неравномерность ступеней скалы Моса. Необходимо заметить, что определения твердости разными способами дают разные даже относительные цифры. Например, апатит (по Мосу равняется 5) оказывается по Гольмквисту (шлифование) и по Пешлю (царапание) в среднем мягче флюорита, твердость которого по Мосу = 4.

§ 110. Упругость кристаллов.

а) Понятие об упругости.

Теория упругости анизотропных тел была разработана Коши, Пуассоном, Грином, Сен-Венаном, У. Томсоном в период с 1822 по 1882 год. Подробное и строго-математическое изложение этой теории, пополненное рядом собственных исследований дал в 1910 году немецкий физик В. Фойгт [2]). Из русских ученых этими вопросами занимался последние время П. Бехтерев [3]).

Упругостью называется свойство тел под влиянием приложенных к ним (не превосходящих известных пределов) сил, деформироваться внешне и внутренне так, что по удалении указанных сил тела эти вновь возвращаются в первоначальное, не деформированное состояние.

б) Упругость изотропных тел. Закон Гука.

Остановимся сначала на упругости изотропных тел. В 1675 году Роберт Гук (R. Hooke) формулировал для этих тел следующий закон, названный его именем: величина деформации твердого тела пропорциональна величине вызывающего его усилия.

Для случая растяжения закон Гука можно пояснить и формулировать математически так:

На фиг. 280 AB — стержень испытуемого вещества, укрепленный вверху и растягиваемый снизу силой (грузом) P.

Длина растягиваемой части — L.
Поперечное сечение ее — S.
Удлинение всего стержня — ΔL.

Удлинение каждой единицы длины (относительное удлинение) —

$$\frac{\Delta L}{L} = \varepsilon.$$

---

[1]) Более совершенны, но менее полны исследования твердости шлифования, произведенные Гольмквистом (Zeitschr. f. Kristallographie, LV. 98—99).

[2]) W. Voigt. Lehrbuch der Kristallphysik.

[3]) Аналитическое исследование обобщенного закона Гука. 1925, ч. I и II. Также — Журн. Р. Ф.-Х. Общ. 1925, LVII. 3/4. 359 — 391.

Растягивающее напряжение (т.-е. сила, приходящаяся на единицу площади поперечного сечения стержня) —

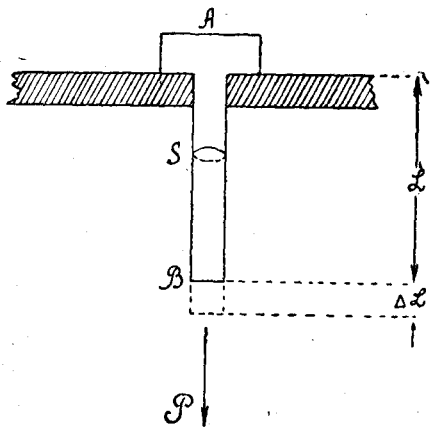
$$\frac{P}{S} = \sigma.$$

Тогда закон Гука для этого случая напишется так:

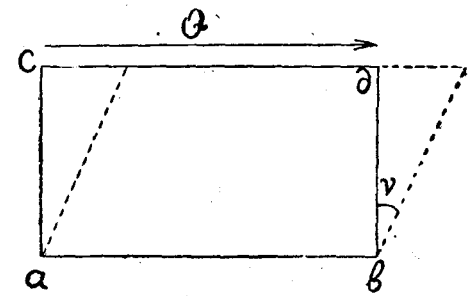
$$\varepsilon = \sigma e \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I).$$

Т.-е. относительное удлинение прямо пропорционально растягивающему напряжению. Число e называется коэффициентом линейного растяжения (или сжатия). Величина ему обратная $E = \frac{1}{e}$ называется модулем упругости или модулем Юнга. Формулу I через E можно выразить так:

$$\sigma = E\varepsilon \quad \ldots\ldots (I').$$



Фиг. 280.
Относительное удлинение ΔL стержня AB пропорционально напряжению P/s.



Фиг. 281.
Закон Гука в случае сдвига: $\nu = n \cdot T$, где n — коэффициент сдвига, T — скалывающее напряжение (сила Q деленная на площадь cd).

Если бы мы здесь ε положили равным 1, то для этого случая $E = \sigma_1$. Это показывает, что модуль упругости вещества численно равен тому напряжению, которое необходимо, чтобы растянуть стержень данного вещества на величину, равную его первоначальной длине, ибо когда $\varepsilon = 1$, то $\frac{\Delta L}{L} = 1$ и $\Delta L = L$. Известно, что для твердых тел, в том числе и для кристаллов, подобные упругие растяжения практически не исполнимы: тело разрывается или дает остающуюся (не упругую) деформацию при столь значительных нагрузках.

Уже это обстоятельство показывает, что закон Гука справедлив лишь, как было сказано выше, пока напряжение не переходит определенной величины так называемого предела упругости особого для каждого вещества. Больше того, даже когда этот предел не перейден, деформации у целого ряда веществ оказались возрастающими не по формуле $\varepsilon = e\sigma$, а по иным эмпирическим формулам, напр.: $\varepsilon = a\sigma + b\sigma^2 + c\sigma^3$ и другим. Поэтому в учении о сопротивлении материалов различают тела, подчиняющиеся закону Гука, и тела, ему не подчиняющиеся. Можно принять, что для последних закон Гука справедлив для весьма малых напряжений σ, когда величинами σ^2, σ^3 и т. д. мы можем пренебречь в сравнении с σ.

Для случая сдвига закон Гука можно пояснить так (фиг. 281). Представим себе параллелепипед abcd твердого вещества. Грань ab его пусть удерживается неподвижно в своем положении, а на грань cd действует в ее плоскости сила Q (тангенциальная или скалывающая сила), распределенная по всей площади этой грани. Сила, приходящаяся на единицу площади, называется здесь *скалывающим напряжением*. Если площадь грани cd обозначим через S_1, то скалывающее напряжение будет $\frac{Q}{S_1}=\tau$. Обозначим еще *угол сдвига* (фиг. 281), т.-е. угол, на который отклоняется нормаль к плоскости, вдоль которой происходит сдвиг,— буквой ν. Тогда по закону Гука имеем:

$$\nu = n \cdot \tau \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II)},$$

где n — *коэффициент сдвига*, постоянный для данного вещества при данной температуре и данном давлении. Обратная величина $N=\frac{1}{n}$ называется *модулем сдвига*. Таким образом из II имеем:

$$\tau = N \cdot \nu \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II')}.$$

О пределах применимости формулы II и II' следует сказать то же, что было сказано о (I) и (I').

В учении об упругости твердых тел и в прикладной механике применяют, кроме коэффициентов и модулей растяжения и сдвига, много других так называемых *практических констант упругости*. Здесь нет надобности их перечислять. Следует лишь указать, что независимых констант, которые вполне характеризуют упругое состояние деформированного изотропного твердого тела, существуют две; остальные можно вывести из такой пары констант, принятых за независимые, посредством связывающих их формул.

в) Понятие о теории упругости кристаллов. Обобщенный закон Гука.

Перейдем теперь к кристаллам. Явления упругости усложняются здесь анизотропностью вещества: константы, отвечающие здесь модулям растяжения и сдвига или коэффициентам этих деформаций, различны в различных направлениях. Теория идеально упругих анизотропных тел и опыты с реальными однородными анизотропными телами показывают далее, что у них при растяжении их внешней силой, действующей в одном лишь направлении, появляются в общем случае не только деформации растяжения в этом направлении и деформации сжатия в нормальных к силе направлениях (сужение поперечного сечения), но и деформации сдвига. При действии на прямоугольный параллелепипед, вырезанный из такого тела в произвольной ориентировке, равномерного всестороннего давления, осуществляемого, напр., погружением кристалла в сжимаемую жидкость, параллелепипед не только уменьшается в объеме, но и меняет свои углы. Однако, доказано [1]), что у всякого такого тела, а следовательно, и у каждого идеально-упругого кристалла существует три взаимно-перпендикулярных направления, обладающих тем свойством, что прямо-

[1]) W. Voigt. Lehrbuch der Kristallphysik 1910. Стр. 571 — 572 и 167 — 171. Также см. Е. С. Федоров. — Курс кристаллографии. 1901. стр. 318.—320.

угольный параллелепипед из этого тела с ребрами, параллельными таким направлениям, при равномерном всестороннем давлении лишь сжимается, но не меняет своих углов. Эти направления называются **главными осями упругости**.

Упругие свойства всякого твердого тела мы будем знать в самом общем виде, если по заданным напряжениям будем уметь вычислять все те упругие деформации (растяжения или сжатия и сдвиги), которые тело осуществляет под влиянием этих напряжений. А также обратно: по деформациям будем уметь находить напряжения, их вызывающие.

Теоретическое изучение вопроса показывает следующее. В том случае, когда нам дано определенное идеально-упругое тело, подвергнутое воздействию сжимающих, скручивающих и других механических усилий, уравновешенных упругими силами этого тела,—тогда все эти усилия вполне однозначно определяются для каждой точки 6-ю следующими напряжениями или **компонентами напряжений** в той же точке, отнесенными к главным осям упругости данного тела.

1. σ_x — напряжение, сжимающее (или растягивающее) вдоль оси x.
2. σ_y — тоже вдоль оси y.
3. σ_z — » » » z.
4. τ_x — напряжение, скалывающее по плоскости xy в направлении оси y, или по плоскости x*z* в направлении оси *z*. Другими словами, это есть скалывающее (тангенциальное) напряжение, стремящееся повернуть бесконечно малый элемент тела, находящийся в данной точке, вокруг оси x.
5. τ_y — тоже для оси y.
6. τ_z — » » » z.

Необходимость и достаточность этих 6 компонентов вытекает из того, что все силы, а следовательно, и все напряжения (т.-е. силы, отнесенные к единице площади) приложенные к бесконечно-малому твердому параллелепипеду, выделенному мысленно из данного твердого тела, приводятся в общем случае к одной силе и одной паре, что известно из механики. Как эта сила, так и эта пара сил будут вполне известны по величине и направлению, если будут известны их составляющие по трем каким-либо координатным осям. Этими составляющими и являются для равнодействующей силы—напряжения σ_x, σ_y, σ_z, а для равнодействующей пары—напряжения τ_x, τ_y, τ_z.

В соответствии с этим, какие-угодно упругие деформации, испытываемые **данным** телом в точке (x, y, z) можно вполне однозначно определить, зная для той же точки следующие 6 основных деформаций (или **компонентов деформаций**), отнесенных к главным осям упругости.

1. ε_x — относительное удлинение по оси x.
2. ε_y — » » » » y.
3. ε_z — » » » » z.
4. ν_x — приращение прямого двугранного угла с ребром, параллельным оси x, и с гранями параллельными положительным полуосям $+$y и $+$z.
5. ν_y — то же с ребром, параллельным оси y и с гранями параллельными $+$z и $+$x.
6. ν_z — то же с ребром параллельным оси z, и с гранями, параллельными полуосям $+$x и $+$z.

Как было уже сказано, упругие свойства данного тела мы будем знать, если будем уметь по данным напряжениям σ_x, σ_y, σ_z, τ_x, τ_y, τ_z находить деформации ε_x, ε_y, ε_z, ν_x, ν_y, ν_z.

Зависимость между напряжениями и деформациями для изотропных тел, как мы видели, формулируется законом Гука (стр. 195): напряжение пропорционально деформации и обратно.

Частные случаи этого закона представляются формулами I и I′, II и II′ (стр. 196 и 197).

Для анизотропных тел та же зависимость формулируется о б о б щ е н н ы м з а к о н о м Г у к а [1]): компоненты напряжений в данной точке суть однородные линейные функции шести компонентов деформаций в той же точке и обратно. Математически этот закон выражается так:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= A'_{11}\varepsilon_x + A'_{12}\varepsilon_y + A'_{13}\varepsilon_z + A'_{14}\nu_x + A'_{15}\nu_y + A'_{16}\nu_z.\\
\sigma_y &= A'_{21}\varepsilon_x + A'_{22}\varepsilon_y + A'_{23}\varepsilon_z + A'_{24}\nu_x + A'_{25}\nu_y + A'_{26}\nu_z.\\
\sigma_z &= A'_{31}\varepsilon_x + A'_{32}\varepsilon_y + A'_{33}\varepsilon_z + A'_{34}\nu_x + A'_{35}\nu_y + A'_{36}\nu_z.\\
\tau_x &= A'_{41}\varepsilon_x + A'_{42}\varepsilon_y + A'_{43}\varepsilon_z + A'_{44}\nu_x + A'_{45}\nu_y + A'_{46}\nu_z.\\
\tau_y &= A'_{51}\varepsilon_x + A'_{52}\varepsilon_y + A'_{53}\varepsilon_z + A'_{54}\nu_x + A'_{55}\nu_y + A'_{56}\nu_z.\\
\tau_z &= A'_{61}\varepsilon_x + A'_{62}\varepsilon_y + A'_{63}\varepsilon_z + A'_{64}\nu_x + A'_{65}\nu_y + A'_{66}\nu_z.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \text{(III)}$$

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= a'_{11}\sigma_x + a'_{12}\sigma_y + a'_{13}\sigma_z + a'_{14}\tau_x + a'_{15}\tau_y + a'_{16}\tau_z\\
\varepsilon_y &= a'_{21}\sigma_x + a'_{22}\sigma_y + a'_{23}\sigma_z + a'_{24}\tau_x + a'_{25}\tau_y + a'_{26}\tau_z\\
\varepsilon_z &= a'_{31}\sigma_x + a'_{32}\sigma_y + a'_{33}\sigma_z + a'_{34}\tau_x + a'_{35}\tau_y + a'_{36}\tau_z\\
\nu_x &= a'_{41}\sigma_x + a'_{42}\sigma_y + a'_{43}\sigma_z + a'_{44}\tau_x + a'_{45}\tau_y + a'_{46}\tau_z\\
\nu_y &= a'_{51}\sigma_x + a'_{52}\sigma_y + a'_{53}\sigma_z + a'_{54}\tau_x + a'_{55}\tau_y + a'_{56}\tau_z\\
\nu_z &= a'_{61}\sigma_x + a'_{62}\sigma_y + a'_{63}\sigma_z + a'_{64}\tau_x + a'_{65}\tau_y + a'_{66}\tau_z
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \text{(IV)}$$

В этих уравнениях коэффициенты A'_{hk} и a'_{hk} являются постоянными для данного тела (при неизменной температуре). Это суть к о н с т а н т ы у п р у г о с т и данного вещества. Коэффициенты A'_{11}, A'_{12} . . . . . аналогичны модулю Юнга E (форм. I) и называются [2]) м о д у л я м и у п р у г о с т и. Коэффициенты a'_{11}, a'_{12} . . . . . аналогичны коэффициенту e (форм. I) и называются к о э ф ф и ц и е н т а м и д е ф о р м а ц и й.

Из уравнений III видно, что кристалл какого-либо вещества имеет в общем случае 36 констант упругости A'_{hk} (уравнения IV суть следствия уравнений III и константы a'_{hk} суть функции констант A'_{hk}). Однако, Г р и н и В. Т о м с о н с помощью термодинамики и учения о потенциале доказали, что с о п р я ж е н н ы е константы, отличающиеся друг от друга лишь перестановкой указателей, равны между собою:

$$A'_{hk} = A'_{kh} \text{ и } a'_{hk} = a'_{kh}.$$

Присматриваясь к уравнениям III, не трудно после этого понять, что число независимых констант в самом общем случае сведется к 21: все константы, стоящие выше диагонали A'_{11} A'_{66} будут равны сопряженным константам, расположеным ниже ее.

В частных случаях, а именно в присутствии элементов симметрии, еще некоторые константы становятся равными друг другу или даже нулю,

---

[1]) См. цитированную раньше работу П. Б е х т е р е в а.

[2]) По Б е х т е р е в у.

и уравнения III и IV еще упрощаются и при том тем больше, чем выше симметрия, как это мы увидим из нижеследующей таблицы. При этом те виды симметрии, для которых уравнения III и IV принимают аналогичный вид, объединяются в одну и ту же группу по упругости.

г) Разделение кристаллов на группы по упругости.

Прежде всего соединяются вместе все виды, отличающиеся друг от друга присутствием центра инверсии, потому что упругие свойства всегда одинаковы в обоих направлениях одной и той же прямой. Добавление центра инверсии к видам симметрии, его не имеющим, как нетрудно вывести, разобьет 32 вида симметрии на 11 групп.

Дальнейшее изучение показывает, что 2 группы гексагональной подсингонии следует слить в одну[1]). Также и 2 группы кубической сингонии. Итак, в отношении упругости все кристаллы разбиваются на 9 групп. Присоединяя изотропные тела, получаем следующую таблицу.

ТАБЛИЦА 10 ГРУПП,

на которые разбиваются кристаллы и изотропные тела в отношении упругости.

Группа	Сингония (и виды симметрии)	Число видов симметрии	Число независимых констант упругости
I	Триклинная сингония	2	21
II	Моноклинная сингония	3	13
III	Ромбическая сингония	3	9
IV	Тригональная подсингония, ромбоэдрическая группа. (Тригонально-пирамидальный и ромбоэдрический виды симметрии)	2	7
V	Тригональная подсингония, скаленоэдрическая группа. (Тригонально-трапецоэдрический, дитригонально-пирамидальный, дитригонально-скаленоэдрический виды симметрии)	3	6
VI	Тетрагональная сингония, тетрагонально-дипирамидальная группа: (Тетрагонально-тетраэдрический, » -пирамидальный, » -дипирамидальный виды симметрии).	3	7
VII	Тетрагональная сингония, дитетрагонально-дипирамидальная группа. (Остальные виды симметрии тетрагональной сингонии)	4	6
VIII	Гексагональная подсингония	7	5
IX	Кубическая сингония	5	3
		32	—
X	Изотропные тела	—	2

[1]) Шестерная поворотная ось симметрии и шестерная инверсионная ось симметрии (см. стр. 47) являются бесконечными поворотными осями для упругих свойств. Это неприменимо для тройной и четверной поворотных осей и для шестерной зеркально-поворотной оси.

д) Физическое значение констант упругости. Модуль Юнга у кристаллов.

Физическое значение констант упругости, т.-е. коэффициентов A'_{hk} в уравнениях (III) и a'_{hk} в уравнениях (IV), можно выяснить приемом, примененным нами на стр. 196 для выяснения физического смысла модуля упругости изотропных тел. При этом оказывается, что модули упругости A'_{hk} численно равны некоторым большим напряжениям, а коэффициенты деформаций a'_{hk} численно равны некоторым деформациям. Ниже мы вкратце познакомимся с методами их определения и с примерами их численных значений для некоторых конкретных кристаллов. А теперь укажем, что между константами упругости, входящими в уравнение III и IV и практическими константами упругости (модулем Юнга, коэффициентом Пуассона, модулем сдвига и др.), существует определенная алгебраическая связь. Чтобы выразить, например, важнейшую практическую константу, модуль Юнга, через коэффициенты A'_{hk} или a'_{hk}, мы заметим прежде всего из формулы $\sigma = E\varepsilon$ (I′, стр. 196) следует, что модуль Юнга E есть коэффициент, на который надо умножить относительное удлинение ε по некоторому направлению, чтобы получить напряжение σ, действующее по тому же направлению и вызывающее деформацию ε. Затем заметим, что вследствие анизотропии кристаллов модуль Юнга в них меняется с направлением.

Если теперь из некоторого кристалла мы вырежем стержень по оси z, подвергнем его растяжению вдоль этой оси напряжением σ'_z, а другие компоненты напряжений при этом будут равны 0, то уравнения IV обратятся тогда в такие

$$\begin{aligned}
\varepsilon'_x &= a'_{13}\,\sigma'_z \\
\varepsilon'_y &= a'_{23}\,\sigma'_z \\
\varepsilon'_z &= a'_{33}\,\sigma'_z \\
\nu'_x &= a'_{43}\,\sigma'_z \\
\nu'_y &= a'_{53}\,\sigma'_z \\
\nu'_z &= a'_{63}\,\sigma'_z
\end{aligned}$$

Из третьяго уравнения имеем:

$$\sigma'_z = \frac{1}{a'_{33}}\,\varepsilon'_z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (V).$$

Уравнение (V) указывает нам, что модуль Юнга по оси z, т.-е. E_z есть величина, обратная коэффициенту деформации a'_{33}:

Так же найдем:

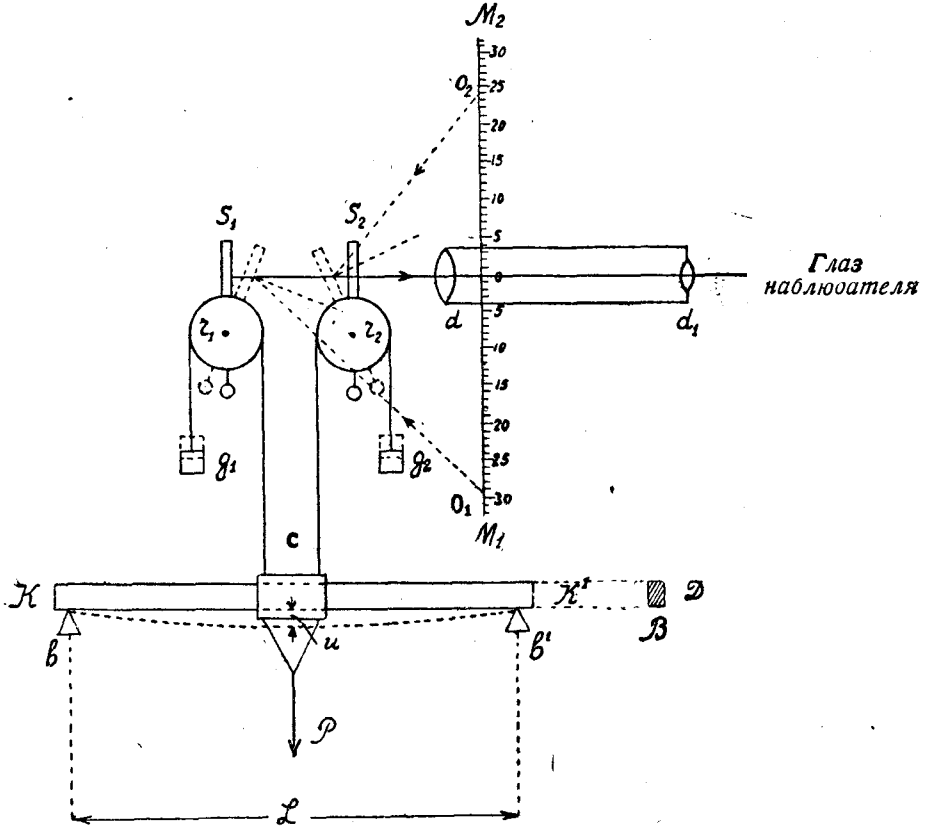
$$\left.\begin{aligned}
E_z &= \frac{1}{a'_{33}} \\
E_y &= \frac{1}{a'_{22}} \\
E_x &= \frac{1}{a'_{11}}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (VI).$$

е) Эмпирические определения констант упругости.

Переходя теперь к методам определения числовых значений, констант упругости A'_{hk} и a'_{hk} кристаллов, следует сказать, что методы эти довольно сложны. Эти константы не могут быть определены непосред-

ственно из опыта. Опыты дают лишь вспомогательные величины, из которых затем по довольно сложным формулам вычисляются константы A'_{hk} и a'_{hk}. Число опытов для одного и того же кристаллического вещества, необходимое для определения всех его независимых констант (см. таблицу на стр. 200) обычно должно превосходить число определяемых констант. Так что для триклинного вещества необходимо произвести свыше 21 опыта.

Наилучшими опытами, которыми для этого пользуются, служат взаимно дополняющие друг друга изгиб и скручивание кристаллических стержней.



Фиг. 282.
Схема установки В. Фойгта для определения коэффициента изгиба стержней из кристаллов.

Познакомимся с постановкой опытов по изгибу стержней. В. Фойгт поступал следующим образом (фиг. 282).

Стержень KK', вырезанный из кристалла, помещался на остроребериые опоры b и b^1. Строго посредине между этими опорами посредством особого валика c, не показанного на рисунке, давит на стержень груз P, вследствие чего стержень KK' прогибается. Стрела прогиба u есть величина непосредственно измеряемая. Для большей точности измерение производится зеркальным способом. Опускание валика c влечет за собою посредством двух тонких проволок поворачивание блоков r_1 и r_2 и наклон зеркал S_1 и S_2 в противоположном направлении, как показано пунктиром

(шарики под блоками — противовесы зеркалам). Если стержень КК′ не деформирован, то зеркала S_1 и S_2 стоят вертикально и параллельно друг другу. При этом на горизонтальной нити окуляра в трубе dd_1 видно деление 0 скалы M_1 M_2, отраженное и от S и от S_1. Если же валик с опустился на стрелу u, блоки повернутся, зеркала наклонятся, и на горизонтальной нити в трубе мы увидим отражения не деления 0, а делений 0_1 и 0_2 (29 и 24).

Если предварительно проградуировать прибор, давши середине стержня определенный значительный прогиб, то потом по отсчетам 0_1 и 0_2 можно очень точно измерить стрелу прогиба.

Примем обозначения:

u — измеренная стрела прогиба.
P — изгибающий груз.
L — длина стержня между b и b′.
B — ширина стержня (нормальная к длине L и толщине D.
D — толщина стержня (вдоль силы P).
a'_{33} — коэффициент изгиба, он же коэффициент деформации, отвечающий a'_{33} уравнений IV (стр. 199), если стержень вырезан так, что длинная ось его есть ось z.

Тогда оказывается, что коэффициент изгиба a'_{33} связан со стрелой прогиба таким уравнением:

$$u = \frac{PL^3 a'_{33}}{4BD^3}\ ^1),$$

откуда:

$$a'_{33} = \frac{4BD^3}{PL^3}\, u \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(VII)}.$$

Таким путем можно определить коэффициент деформации a'_{33}, т.-е. коэффициент изгиба или коэффициент растяжения (стр. 196).

Из него по формуле (VI, стр. 201)

$$E_z = \frac{1}{a'_{33}}$$

можно получить модуль Юнга.

ж) Числовые примеры общих констант упругости кристаллов.

Приведем теперь определенные такими методами числовые значения констант упругости для некоторых кристаллов.

При этом заметим, что в формулах III и IV коэффициенты a'_{hk}, а также относительные удлинения ε суть числа отвлеченные, деформации сдвига ν — суть углы, выражаемые в радианах; все напряжения σ и τ и аналогичные им по своему измерению модули упругости A'_{hk} мы условимся выражать в *кг* на *кв. мм*. Тогда коэффициенты деформаций a'_{hk} будут иметь размер $\frac{см^2}{кг}$. При этих условиях будем иметь такие значения констант упругости a'_{hk} и A'_{hk} (число независимых констант см. в таблице на стр. 200).

---

[1]) Из этой формулы видно, что стрела прогиба при одной и той же силе и одних и тех же размерах стержня измеряется коэффициентом a'_{33}, который поэтому и носит название «коэффициента изгиба» для стержня, вырезанного по оси z.

№	Кристалл	Сингония	Коэффициенты деформаций a'_{hk} Если напряжения меряются в *кг/мм²*, то все приведенные величины надо умножить на 10^{-5} *мм²/кг*									
			a'_{11}	a'_{12}	a'_{13}	a'_{14}	a'_{22}	a'_{23}	a'_{33}	a'_{44}	a'_{55}	a'_{66}
1	Каменная соль NaCl	Кубическая	23,82	−5,17	$=a'_{12}$	0	$=a'_{11}$	$=a'_{12}$	$=a'_{11}$	77,29	$=a'_{44}$	$=a'_{44}$
2	Кварц SiO_2	Тригональная	12,73	−1,63	−1,49	−4,23	$=a'_{11}$	$=a'_{13}$	9,71	19,66	$=a'_{44}$	$=2(a'_{11}-a'_{12})$
3	Барит Ba SO_4	Ромбическая	16,13	−8,80	−1,88	0	18,57	−2,46	10,42	82,3	34,2	35,3

№	Кристалл	Сингония	Модули упругости A'_{hk} Если напряжения меряются в *кг/мм²*, то все приведенные величины надо умножить на 10^3 *мм²/кг*									
			A'_{11}	A'_{12}	A'_{13}	A'_{14}	A'_{22}	A'_{23}	A'_{33}	A'_{44}	A'_{55}	A'_{66}
1	Каменная соль NaCl	Кубическая	4,77	4,57	$=A'_{12}$	0	$=A'_{11}$	$=A'_{12}$	$=A'_{11}$	3,45	$=A'_{41}$	$=A'_{44}$
2	Кварц SiO_2	Тригональная	8,68	0,71	1,44	1,72	$=A'_{11}$	$=A'_{13}$	10,75	5,82	$=A'_{44}$	$=1/2(A'_{11}-A'_{12})$
3	Барит Ba SO_4	Ромбическая	9,07	4,68	2,75	0	8,00	2,73	10,7	1,22	2,93	2,83

Если напряжения σ и τ при опытах измеряются в граммах на квадратный сантиметр, то значения величин a'_{hk} из первой таблички надо умножить на 10^{-5}, а значения всех A'_{hk} из второй — на 10^5, что следует из формул:

$$\varepsilon = \Sigma a\sigma$$
$$\sigma = \Sigma A\varepsilon$$

Таким образом, если принять во внимание множители, указанные в заголовках каждой из этих двух таблиц, то при измерении напряжений в $гр/см^2$ цифры в колоннах первой таблицы надо будет помножить на $10^{-5} \times 10^{-5} = 10^{-10}$ $см^2/гр$ а цифры в колоннах второй таблицы на $10^3 \times 10^5 = 10^8$ $гр/см^2$.

з) Числовые примеры модулей Юнга для кристаллов

Как уже было упомянуто, упругие свойства различных материалов на практике характеризуются обычно другими так называемыми «практическими константами упругости». Наиболее употребительна из них — модуль Юнга (стр. 196 и 201), входящий в формулу такого вида:

$$\sigma'_z = E_z \varepsilon'_z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (V),$$

где σ'_z — растягивающее напряжение по направлению z (при отсутствии каких-либо иных компонентов напряжений), а ε'_z — обнаруживаемое телом при действии напряжения σ_z относительное удлинение по тому же направлению z.

Если предположить, что приложенное напряжение σ'_z имеет такую величину σ''_z, что относительное удлинение,

$$\varepsilon'_z = \frac{\triangle L}{L} = 1,$$

т.-е., что абсолютное приращение длины $\triangle L$ равно первоначальной длине тела L,—то из формулы (V) получим: $\sigma''_z = E_z \cdot 1$, т.-е. модуль Юнга, как это уже указывалось (стр. 196), равен численно такому напряжению, которое вызвало бы удлинение стержня, равное его исходной длине, если бы формула (V) (т.-е. закон Гука) была бы справедлива беспредельно.

Поэтому модуль Юнга выражается, как напряжение в единицах силы на единицу площади.

Для того, чтобы сравнивать упругие свойства кристаллов с упругими свойствами других более обычных материалов, мы приведем сначала значения модуля Юнга для последних.

Материал	Модуль Юнга в $кг$ на $мм^2$
Иридий	несколько > 52 000
Сталь	22 000
Медь мягкая . . .	10 520
Ель ∥ волокнам . .	1 113
» ⊥ волокнам . .	31
Каучук	0,1

Переходя к кристаллам следует указать, что модуль Юнга определен в настоящее время лишь для немногих из них, а именно приблизительно для 20 естественных кристаллов (минералов) и для 3 искусственных Однако, для многих из этих кристаллов определения сделаны для разных направлений, а для некоторых из них определения повторены несколькими авторами.

Вот некоторые примеры.

№ [1])	Кристалл	Вид симметрии и группа по упругости (стр. 200)	Направление испытания	Модуль Юнга в *кг/мм²*
1	Корунд (Al_2O_8)	Дитриг.-скаленоэдрический . . V.	[111]	52 000 [2])
8	Флюорит [3]) (CaF_2)	Гексоктаэдрический . . . . . IX.	[100]	14 730
			[110]	10 080
11	Кварц (SiO_2)	Триг.-трапецоэдрический . . V.	$\parallel L_6$	10 300
			$\perp L_6$	7 850
18	Каменная соль (NaCl)	Пентагон-триоктаэдрический . IX.	[100]	4 187
			[110]	3 490
			[111]	3 026
23	Лед (H_2O)	Дигексаг.-пирамидальный . . VIII.	$\perp L_6$	383 [4])
			$\parallel L_6$	182 [4])

и) Графические изображения упругих свойств кристаллов.

В заключение упомянем еще о графическом изображении упругих свойств кристаллов. Подобно тому, как изменение оптических свойств кристаллов с изменением направления мы изображаем, строя эллипсоид показателей преломления, поверхность волны и другие поверхности, так точно изображают и упругие свойства посредством различных поверхностей, достигая этим той же цели: наглядности в распределении этих свойств по разным направлениям в кристалле.

Мы видели, что существует много различных констант, характеризующих упругие свойства кристаллов, и любые из них можно было бы положить в основу графических изображений.

Обычно пользуются для этого или модулем Юнга E_a или величиной ему обратной a_a:

$$a_a = \frac{1}{E_a},$$

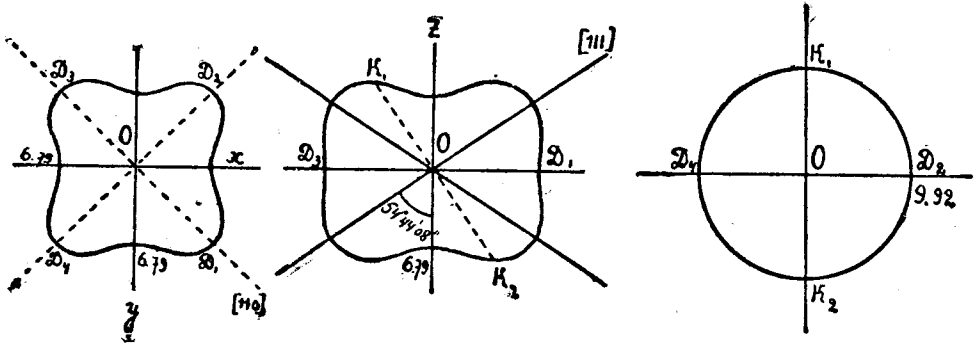
---

[1]) Здесь приведенны №№, под которыми числятся эти кристаллы в более полной таблице, мною составленной.

[2]) Каждую из цифр этого столбца, как сказано выше, можно получить из соответственных коэффициентов деформаций (стр. 204) посредством формулы: $E = 1 : a'$. Напр., для кварца имеем: $E_{\parallel L_6} = 1 : a'_{33} = 1 : (9{,}71 \times 10^{-5}) = 10\,300$ и $E \perp L_6 = 1 : a'_{11} = 1 : (12{,}73 \times 10^{-5}) = 7\,850$. (Последние цифры в этих числах округлены).

[3]) Или плавиковый шпат.

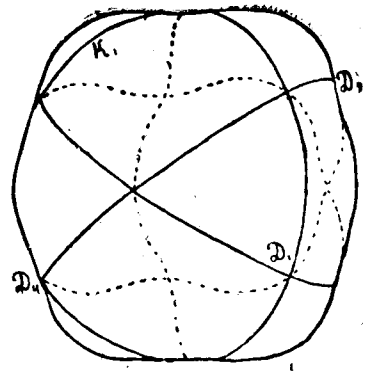
[4]) t = от 0° до −1°.



Сечение по (001) Сечение по (110) Сечение по (111)

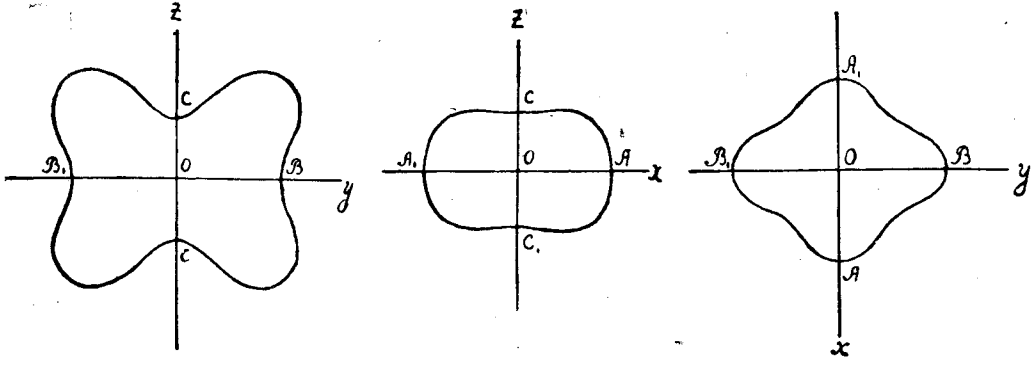
Фиг. 283.

Сечения поверхности коэффициентов растяжения для флюорита — CaF_2. Указанные здесь размеры надо умножить на 10^{-5}; тогда они выразят, как было указано, относительные удлинения при растягивающем напряжении в 1 *кг.* на 1 *кв. мм*



Фиг. 284.

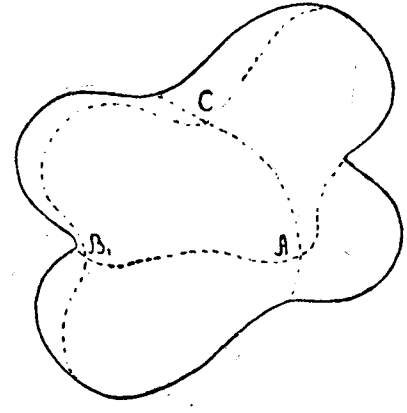
Общий вид поверхности коэффициентов растяжения для флюорита.



Сечение по (100) Сечение по (010) Сечение по (001)

Фиг. 285.

Сечения поверхности коэффициентов растяжения для барита — $BaSO_4$.
$OA = 16{,}13 \times 10^{-5}$ *мм²/кг.* $OB = 18{,}57 \times 10^{-5}$ *мм²/кг.* $OC = 10{,}42 \times 10^{-5}$ *мм²/кг.*



Фиг. 286.

Общий вид поверхности коэффициентов растяжения для барита.

где d обозначает то направление, по которому определены величины a_d или E_d (см. стр. 201). Как было указано выше, константу a_d называют коэффициентом изгиба (так как ей пропорциональна стрела прогиба стержня, вырезанного вдоль направления d), или коэффициентом растяжения, так как он равен численно тому удлинению, которое испытывает стержень длиною в единицу при напряжении, равном единице, что следует из формулы: $\varepsilon_d = a_d \sigma_d$ или $\frac{\Delta L}{L} = a_d \sigma_d$ или $\frac{\Delta L}{1} = a_d \cdot 1$.

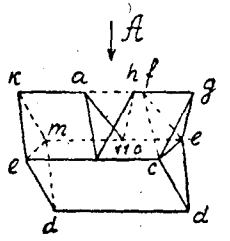
Приведем по В. Фойгту и Ф. Гроту рисунки поверхностей этого коэффициента растяжения для кристаллов двух веществ: кубического флюорита (плавикового шпата — CaF_2) и ромбического барита ($BaSO_4$). При этом заметим, что поверхности эти строятся так: берется какая-либо точка и от нее по каждому направлению откладывается в некотором масштабе величина коэффициента растяжения, определенного по этому направлению, в кристалле; концы всех полученных таким образом векторов при соединении их и дают искомую поверхность.

к) Поверхности коэффициентов растяжения.

Указанные на фиг. 283 размеры должны быть умножены на 10^{-5}, тогда они выразят, как было указано, относительные удлинения при растягивающем напряжении в 1 *кг* на 1 *кв мм*. Для флюорита эта поверхность (фиг. 283 и 284) представляет как бы куб с вдавленными гранями и округленными ребрами и вершинами. При этом центральные сечения ее, перпендикулярные к тройным осям, т.-е. параллельные граням октаэдра, суть круги.

§ 111. Механические сдвиги.

Под влиянием одностороннего давления в кристаллах иногда появляются механические сдвиги. Особенно поучителен в этом отношении опыт Баумгауэра (Baumhauer), состоящий в следующем. Если взять ромбоэдр кальцита, поставить его на ребро одного из его тупых двугранных углов (фиг. 287) и надавить лезвием ножа поперек верхнего ребра, параллельного первому (где двугранный угол тоже тупой), то кристалл под влиянием такого давления дает сдвиги с образованием двойников по плоскости ромбоэдра (110). Нож постепенно, входя в кристалл, переводит часть его в двойниковое положение cegh. При этом происходит скольжение слоев кальцита по плоскости (110) = ceml, и таким образом получается двойник скольжения.



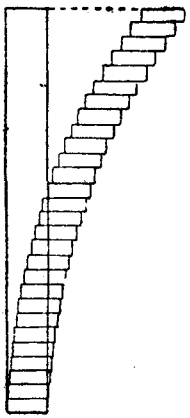
Фиг. 287.
Опыт Баумгауэра: получение двойника сдвига у кальцита.

Нередко механическое воздействие может вызывать у кристаллов скольжение по определенным плоскостям без образования двойников. Такими плоскостями скольжения, например, являются: у каменной соли (NaCl) — (110), у ромбического сурьмяного блеска (Sb_2S_3) — (001), у гексагонального льда — (1000), у кубического золота — (111), у гексагонального цинка — (1000) и т. д.

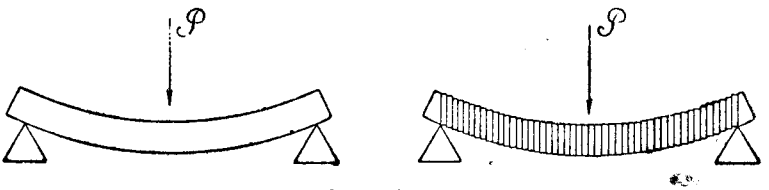
§ 112. Пластические деформации кристаллов.

Только что рассмотренные явления механических сдвигов и вообще скольжения играют большую роль в так называемых пластических деформациях кристаллов и их аггрегатов, т.-е. в явлениях остающегося изгиба, вытягивания без разрыва, «течения» некоторых кристаллических тел через отверстия под влиянием давления и т. п.

Рентгенометрические исследования А. Ф. Иоффе и его сотрудниц показали, что в изогнутых под влиянием механических усилий кристаллах каменной соли пятна рентгенограмм Лауэ, отвечающие (110) остаются на месте, пятна же других граней смещаются, вытягиваются, раздваиваются. Это показывает, что изгиб здесь осуществляется за счет скольжения отдельных мельчайших участков кристалла по плоскостям формы (110). Также точно скольжение по (001) дает изгиб кристаллов сурьмяного блеска (фиг. 288), скольжение по (1000) — прогиб ледяного бруска (фиг. 289). При ковке, прокатке и вальцовке металлов мелкие кристаллы их располагаются так, что свойственные им плоскости скольжения располагаются параллельно плоскости ковки или вальцовки, и дальнейшая деформация осуществляется в значительной степени за счет микросдвигов кристаллитов (мельчайших кристаллов) металла [1]).



Фиг. 288.
Схема изгиба кристалла, путем скольжения.



Фиг. 289.
Схема изгиба ледяного бруска путем скольжения.

Пластические деформации (изгибы) и явные сдвиги кристаллов нередко наблюдаются в горных породах при изучении их препаратов под микроскопом. Обычно эти явления служат указанием на сильные механические давления, которые испытала данная горная порода. Такие указания имеют иногда большое значение для понимания происхождения и истории исследуемой горной породы. Вероятно, затем, что сдвиги кристаллов и способность их изгибаться играют заметную роль среди причин пластичности горных пород, т.-е. способности этих огромных каменных масс изменять свою форму, например, давать разнообразные складки, надвиги и т. д.

Следует, однако, иметь в виду, что далеко не всякая деформация кристалла осуществляется, как серия многочисленных микросдвигов. Под влиянием механического давления или под влиянием неоднородности вещества возможны и плавные искажения пространственной решетки кристалла, т.-е. искривление ее рядов и плоских сеток [2]).

---

[1]) См. напр., исследования С. Т. Конобеевского о вальцовке Al и Zn (Ж. Прикладн. Хим. 1928).

[2]) Исследованием пластических деформаций кристаллов занимался в последнее время целый ряд исследователей. Кроме упомянутой уже выше статьи А. Ф. Иоффе укажем здесь работу F. Rinne. Über das Fliessen fester Stoffe, insbesondere der natürlichen Salze (Z. f. Kr. **61**. 5—6. 1925. 389—424).

Упругие деформации, изученные нами выше, являются одним из видов этих плавных деформаций.

§ 113. Оптические аномалии.

Механические напряжения частично отражаются на пространственной решетке. Это искажение нормальной структуры проявляется между прочим в аномальности оптических свойств. Изотропные кристаллы и даже аморфные изотропные тела (например, стекло), под влиянием одностороннего давления становятся анизотропными и, при исследовании под микроскопом в поляризованном свете, обнаруживают нередко двупреломление. Это аномальное двупреломление в кристаллах кубической сингонии проявляется по всему сечению кристалла шлифом или лишь в некоторых участках этого сечения.

Кристаллы одноосные под влиянием таких же механических воздействий могут становиться двуосными и, вообще, все кристаллы могут в разных своих участках обнаруживать различные оптические свойства (разные показатели преломления, разные углы оптических осей, разные углы погасания и т. д.). Все эти уклонения от изученных нами выше нормальных оптических свойств кристаллов называются оптическими аномалиями.

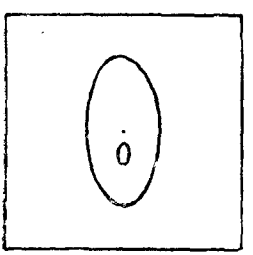
Из наиболее обыкновенных минералов очень часто оптические аномалии наблюдаются, например, у кварца, зерна которого под микроскопом нередко оказываются неоднородными в оптическом отношении и обладают неоднородным или так называемым волнистым (облачным) погасанием, что указывает на неодинаковую ориентировку оптического эллипсоида в различных частях даже одного и того же зерна.

Следует, однако, заметить, что оптические аномалии не всегда вызываются внешними механическими воздействиями, но иногда и другими причинами, напр., неоднородностью химического состава кристалла.

ЧАСТЬ ДВЕНАДЦАТАЯ.

Тепловые свойства кристаллов.

§ 114. Теплопроводность.



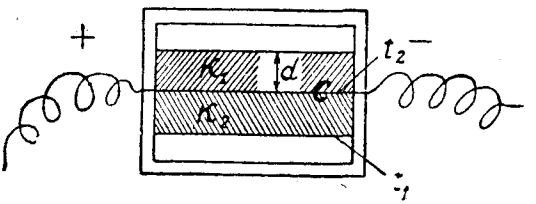
Фиг. 290.
Опыт Сенармона для получения эллипса теплопроводности на грани кристалла.

Из тепловых свойств кристаллов упомянем два: теплопроводность и расширение кристаллов от нагревания. Теплопроводность кристаллов изучалась различными методами. Sénarmont ставил опыт так: пластинка кристалла (фиг. 290) покрывалась воском. В некоторой точке O к ней прикасалась нагретая проволока. Пластинка защищалась от лучистой теплоты, исходящей от проволоки, так что передача тепла воску могла происходить лишь путем теплопроводности кристаллической пластинки. Поэтому, по форме того участка, на котором воск подвергался расплавлению, можно было судить о скорости передачи

тепла по разным направлениям данного кристалла. В общем случае получался эллипс. По ряду сечений можно построить таким образом эллипсоид теплопроводности данного кристалла [1]).

Из более новых и точных опытов упомянем опыты Эуккена (Eucken) в Германии. Ближайшей целью их было возможно точное измерение коэффициента теплопроводности кристаллов, т.-е. количества тепла, передаваемого через 1 кв. см. поперечного сечения в течение 1 секунды при падении температуры в 1° на 1 *см*.

Метод Эуккена состоял в следующем (фиг. 291). Две пластинки K_1 и K_2 испытуемого кристалла, толщиною d, прикладывались к медной пластинке c. При пропускании тока сквозь медную пластинку, — она нагревалась и отдавала теплоту кристаллам. На внешней поверхности последних поддерживалась постоянная температура t_1. Когда устанавливалось равновесие, то, очевидно, теплота, получаемая с проводника, равнялась теплоте, которая удалялась с поверхности кристалла. Обозначим:



Фиг. 291.
Схема опыта Eucken'a по определению теплопроводности кристаллов.

q — количество тепла выделяемого медной пластинкой в единицу времени.

ω — площадь медной пластинки, соприкасающаяся с кристаллами.

d — толщина кристаллических пластинок.

Получим: $q = k\omega \frac{t_2 - t_1}{d} \cdot 2$ или коэффициент теплопроводности $k = \frac{q \cdot d}{2\omega (t_2 - t_1)}$ (2 потому, что пластинок К две).

Эуккен работал при температурах от + 100° до — 253° С. Им установлен при этом ряд законностей, из которых приведем следующие:

а) Теплопроводность кристаллов, как общее правило, выше, чем соответственных аморфных веществ. Это ясно видно из следующей таблицы: теплопроводность кристаллов кварца больше, чем у сплавленного SiO_2 приблизительно в 3 — 70 раз.

Вещество	Коэффициент теплопроводности $k\left(\frac{\text{кал.}}{\text{см. сек. гр.}}\right)$			
	t° C = 100°	0°	— 78°	— 190°
	T° = 373°	273°	195°	83°
Кристалл кварца SiO_2 . . . . . $\parallel L_6$	0,021	0,032	0,047	0,117
» » SiO_2 . . . . . $\perp L_6$	0,013	0,017	0,024	0,059
Стекло SiO_2	0,0046	0,0033	0,0028	0,0016

[1]) Математическое обоснование эллипсоида теплопроводности было дано G. G. Stokes'ом в 1851 г. Его теория, приложимая в одинаковой мере и к электропроводности, изложена кратко ниже в § 119.

b) Теплопроводность кристаллов приблизительно обратно пропорциональна абсолютной температуре T. В то же время теплопроводность аморфных тел убывает при убывании T. Это правило иллюстрируется той же таблицей.

c) Приблизительно можно сказать, что чем сложнее состав вещества кристалла, тем меньше его теплопроводность. Это правило имеет, однако, много исключений. Эуккен считает, что если объединить в группы кристаллы, содержащие приблизительно одно и то же число разных атомов в своем составе, то внутри этих групп теплопроводность изменяется параллельно с твердостью. Он иллюстрирует это такой таблицей.

Группа	Кристалл	Сингония или подсингония	Состав	Твердость	k при 0° C
Одна или две составных части в решетке.	Алмаз	Кубическая	C	10	0,41
	Цинкобманка	»	ZnS	4	0,04
	(Искусств.)	»	NaF	3,2	0,025
	Сильвин	»	KCl	2,3	0,025
	(Искусств.)	»	RbBr	2,2	0,009
	»	»	AgCl	1,3	0,0026
От 3 до 5 составных частей в решетке.	Кварц	Тригональная	SiO_2	7	0,0325
	Флюорит	Кубическая	CaF_2	4	0,025
	Кальцит	Тригональная	$CaCO_3$	3	0,0137
	К-селитра	Моноклинная	KNO_3	2	0,0055
Более 5 составных частей в решетке, а также изоморфные смеси.	Берилл	Гексагональная	$6\,SiO_2 \cdot Al_2O_3 \cdot 3\,BeO$	8,0	0,022
	Турмалин	Тригональная	$12\,SiO_2\,(6—8)\,Al_2O_3 \cdot (8—15)\,(Fe,Mg,Na_2,H_2)O$	7,3	0,0117
	Калиевый полевой шпат	Моноклинная	$KAlSi_3O_8$	6,0	0,0108
	Горькая соль	Ромбическая	$MgSO_4 \cdot 7\,H_2O$	2,3	0,006
	Изоморфная смесь	Кубическая	$KCl \cdot KBr$	2,3	0,006
	Квасцы	»	$KAl\,[SO_4]_2 \cdot 12H_2O$	2—2,5	0,005

Однако, сложность состава и твердость не исчерпывают факторов, указывающих на положение кристалла в ряду по величине его теплопроводности. Так, чистые металлы, обладающие простым составом и малой твердостью должны были бы по только что указанному правилу иметь малую теплопроводность, а в действительности k для них очень велико:

При 0°.

Металл	Cu	Au	Al	Zn	Fe	Pb	Hg
$k\left(\frac{\text{кал.}}{\text{см. сек. град.}}\right)$	0,94	0,74	0,50	0,27	0,21	0,08	0,02

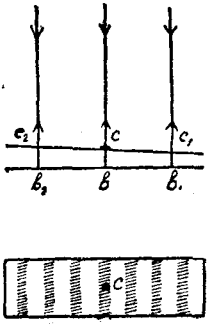
Цифры эти отвечают обычным металлам, состоящим из тонко-кристаллических аггрегатов. Отдельные кристаллы металлов должны иметь еще более высокую теплопроводность, по крайней мере по некоторым направлениям.

Для оценки приведенных выше значений коэффициента теплопроводности кристаллов приведем, кроме только что указанных значений k для металлов, еще значение k для одного из худших проводников, для пробки $k = 0{,}0001$.

Наконец, упомянем об эмпирическом выводе Жаннета: теплопроводность кристаллов значительно больше в направлениях, параллельных спайности, чем в перпендикулярных к ней.

§ 115. Расширение кристаллов от нагревания.

Изучение расширения кристаллов от нагревания может производиться разными способами. Один из более совершенных приборов для этого был сконструирован Аббе и усовершенствован Пульфрихом (1898) и Бейном (1912) [1]). Этот прибор основан на наблюдении интерференционных полос, которым пользовался еще Физо в 1864 г. Способ Физо в принципе заключается в следующем. Если мы имеем две гладко отполированные плоскости b и c (фиг. 292), принадлежащие одной или двум разным прозрачным пластинкам и пустим на них однородный (с длиной волны λ) луч сверху вниз, то луч этот отразится как от первой из них c, так и от второй b. Оба отраженные луча пойдут снизу вверх и будут интерферировать друг с другом. При этом в тот момент, когда первый луч уже отразится от точки C и пойдет вверх, второй луч еще должен будет проделать путь $cbc = 2\,cb$. Поэтому разность хода обоих интерферирующих лучей будет равна удвоенному расстоянию между плоскостями. Если плоскости будут не строго параллельны между собою, то разность хода будет увеличиваться от одного края пластинок (от правого на рисунке) к другому (к левому):



Фиг. 292. Принцип интерференционного способа измерения малых расстояний.

$$2\,b_2\,c_2 > 2\,bc > 2\,b_1\,c_1.$$

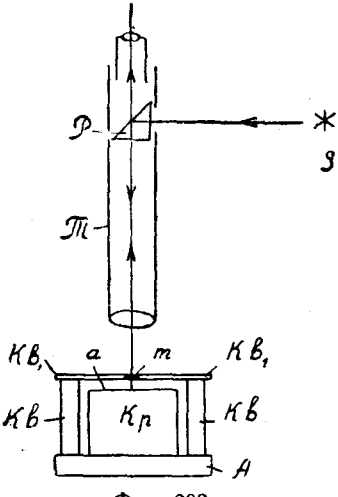
При этом будут и такие лучи, для которых разность хода будет как раз равна нечетному числу полуволн $\frac{\lambda}{2}$, $3\frac{\lambda}{2}$, $5\frac{\lambda}{2}$, . . . примененного

[1]) Некоторые подробности об аппаратуре и литературу можно найти в следующих книгах.
О. О. Хвольсон. Курс физики, т. III. 1923, стр. 81 — 83 и
W. Voigt. Lehrbuch der Kristallphysik 1910. S. 280.

светового луча. В этих местах пластинок получатся темные полосы, как показано в нижней части той же фигуры.

Если теперь расстояние между обеими отражающими плоскостями будет меняться, то полосы эти будут перемещаться. Если при начале опыта в центре поля зрения против постоянной метки с на пластинке стояла полоса 0, а затем к той же метке подошла соседняя полоса 1, то это означает, что разность хода интерферирующих лучей в направлении с изменилась как раз на λ, а следовательно, расстояние bc изменилось на $\frac{\lambda}{2}$. Зная длину волны λ и число n темных полос, прошедших чрез отметку c, можно очень точно вычислить изменение d расстояния bc между отражающими плоскостями: $d = n\frac{\lambda}{2}$ [1]).

Схема прибора Аббе изображена на следующей фигуре 293.



Фиг. 293.
Схема прибора Аббе для определения коэффициента расширения твердых тел.

Здесь A — подставка. Кв — Кв — кварцевое цилиндрическое кольцо в разрезе вдоль его оси. Кр — изучаемый кристалл, внизу и вверху плоско отполированный. $Кв_1$ — $Кв_1$ — кварцевая отполированная пластинка. T — зрительная труба, S — источник монохроматического света, от которого луч идет через боковое отверстие в трубу и отражается вниз от стеклянной призмы P. Выходя из трубы, он отражается от нижней поверхности пластинки $Кв_1$ — $Кв_1$ и от верхней поверхности испытуемого кристалла Кр. Отражение от верхней поверхности пластинки $Кв_1$ — $Кв_1$ отводится в сторону тем, что эта поверхность делается слегка непараллельной двум ранее указанным плоскостям.

Если L высота кристалла Кр (фиг. 293) и β его искомый коэффициент линейного расширения [2]) в направлении этой высоты, и если L_0 и β_0 соответственные величины для кварцевого цилиндрического кольца Кв, то имеем приращение толщины промежутка a:

$$d = (L_0\beta_0 - L\beta)(t - t_0).$$

А по формуле, данной выше: $d = n\frac{\lambda}{2}$.

Следовательно:

$$(L_0\beta_0 - L\beta)(t - t_0) = n\frac{\lambda}{2}$$

---

[1]) Е. С. Федоров. (Курс Кристаллографии 1901 г. 338) предложил воспользоваться для измерения приращения размеров кристалла от нагревания наблюдением смещения лучей, отраженных от тонкой диффракционной решетки, нанесенной на грани кристалла.

Там же у Е. С. Федорова изложены некоторые соображения по теории термического расширения кристаллов.

[2]) Напомним, что коэффициент линейного расширения β есть отношение приращения δl длины тела от нагревания его на 1° к первоначальной его длине l_0, т.-е. $\beta = \frac{\delta l}{l_0}$. Если длина тела после нагревания от t_1 до t оказалась l_t, а при температуре t_1 была l_{t_1}, то: $l_t = l_{t_1}[1 + \beta(t - t_1)]$. Более полная формула имеет вид:

$$l_t = l_{t_1}[1 + a(t - t_1) + b(t - t_1)^2 + c(t - t_1)^3].$$

λ, L_0, β_0 известны заранее. L, t, t_0 определяются для каждого опыта особо. Также просчитывается число темных полос n, проходящее через метку m при повышении температуры от $t_0°$ до t°. После этого β вычисляется из последней формулы.

Измерения, сделанные этим прибором и другими методами, дали ряды численных значений коэффициента β для разных направлений в различных кристаллах. Познакомимся с наиболее важными выводами общего характера из этих цифр:

а) β меняется у кристаллов с температурой, как и у аморфных тел.

б) β меняется у кристалла в общем случае с изменением направления, как это иллюстрируется следующими цифрами [1]).

Кристалл	Сингония или подсингония	Температура	Коэффициент линейного расширения β
Кварц [2]) $(SiO_2) \parallel L_3$	Тригональная . .	20° C	$7{,}5 \times 10^{-6}$
» $\perp L_3$	» . .	20° »	$13{,}7 \times 10^{-6}$
Кальцит $(CaCO_3) \parallel L_3$	» . .	20° »	$25{,}6 \times 10^{-6}$
» $\perp L_3$	» . .	20° »	$-5{,}5 \times 10^{-6}$
Арагонит $(CaCO_3)$ [100]	Ромбическая . . .	40° »	$10{,}2 \times 10^{-6}$
» [010]	» . . .	40° »	$17{,}2 \times 10^{-6}$
» [001]	» . .	40° »	$34{,}6 \times 10^{-6}$

в) Из приведенных выше цифр для кальцита следует, что у некоторых кристаллов по некоторым направлениям β имеет отрицательное значение, т.-е. по этим направлениям такие кристаллы при нагревании сжимаются, а не расширяются. В то же время у них происходит по другим направлениям расширение.

г) Плоскогранный кристалл при нагревании остается таковым же. При этом грани его (и ребра), параллельные между собою до нагревания остаются параллельными и после нагревания.

д) Вследствие разного расширения кристаллов по разным направлениям углы между их гранями (и между ребрами) вообще меняются с температурой. Лишь в некоторых частных случаях этого изменения не происходит напр., когда прямые углы предопределены симметрией.

е) Из двух предыдущих пунктов следует, что куб, вырезанный из кристалла, превратится при нагревании в общем случае в косой параллелепипед. Можно доказать, исходя из этого, что шар, выточенный из такого кристалла, после нагревания превратится в эллипсоид.

ж) Кристалл при нагревании сохраняет свой вид симметрии, если не происходит превращения его в другую полиморфическую модификацию [3]) (видоизменение) того же химического состава. Следова-

[1]) Подробные цифровые данные, как о перечисленных здесь, так и о других кристаллах можно найти в справочнике Landolt-Börnstein. Physikalisch-chemische Tabellen. 1923. II 1221 — 1241.

[2]) Коэффициент линейного расширения аморфной SiO_2 (кварцевого стекла) гораздо меньше: примерно $0{,}54 \times 10^{-6}$, что делает этот материал весьма ценным для химической посуды (не растрескивается при резких колебаниях температуры) и для многих физических приборов.

[3]) Об этих изменениях будет сказано ниже в отделе III, посвященном химической кристаллографии (§§ 143 — 146).

тельно, все оси симметрии, как поворотные, так и зеркально-поворотные сохраняют свое положение и наименование.

з) Отсюда следует, что направления, которые были в кристалле равными (в смысле симметрии) до нагревания, имеют равные коэффициенты расширения. Поэтому эллипсоид, получающийся из кристаллического шара в результате нагревания, будет обладать всеми элементами симметрии данного кристалла.

и) Из пункта з вытекает, что для этих эллипсоидов термического расширения в каждой сингонии мы будем иметь тот же вид и то же расположение относительно элементов симметрии, как и для оптических эллипсоидов (но, конечно, не те же относительные размеры осей). То-есть, в кристаллах кубической сингонии эллипсоид термического расширения будет шаром; в гексагональной и тетрагональной — эллипсоидом вращения, положительным или отрицательным; наконец, в ромбической, моноклинной и триклинной сингониях — эллипсоидом трехосным. О положении их см. стр. 160 [1]).

ЧАСТЬ ТРИНАДЦАТАЯ.

Магнитные свойства кристаллов.

§ 116. Основные понятия из учения о магнетизме.

Общие начальные сведения о магнитных явлениях я буду здесь предполагать имеющимися у читателя. Напомню здесь кратко лишь определения главнейших понятий, которые нам в дальнейшем понадобятся.

У каждого естественного или искусственного магнита существуют два полюса: северный (положительный) и южный (отрицательный). Одноименные полюсы двух магнитов отталкиваются, разноименные притягиваются. Величина силы притяжения или отталкивания при прочих равных условиях зависит от магнитного состояния самих магнитов. Для измерения этого состояния введено условное понятие о количестве магнетизма или магнитной массе m. Таким образом магнитная масса не есть какое-либо реальное вещество, а это есть величина, служащая мерой мощи данного магнита или мерой интенсивности магнитных явлений им возбуждаемых.

Магнитные массы, присущие северному полюсу считаются положительными, а южному—отрицательными.

Две магнитные массы m_1 и m_2, находящиеся на расстоянии r друг от друга, взаимно притягиваются или отталкиваются с силой f, при чем

$$f = C \cdot \frac{m_1 \; m_2}{\mu \; r^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Из этой формулы следует, что силы отталкивания будут положительны, а силы притяжения—отрицательны, так как первые будут существовать при одинаковых знаках у m_1 и m_2, а вторые при разных.

---

[1]) Из новых работ, где трактуются тепловые свойства кристаллов см. W. M. Cohn, Ueber Wärmeleitfähigkeit, Wärmeausdehnung, spezifische Wärme und einige andere thermische Eigenschaften von Mineralien und keramischen Massen (Ber. d. deutsch. keramischen Ges. IX. 5, 1928, 239—299).

В этой формуле C есть коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора единиц измерения, а μ есть коэффициент, зависящий от среды, в которой магнитные массы m_1 и m_2 находятся.

Коэффициент μ в формуле (1) называется магнитной проницаемостью (Permeabilität) среды. Для пустоты принимают $\mu = 1$. Одни тела имеют $\mu > 1$. Они называются парамагнитными. Для других $\mu < 1$; это тела диамагнитные.

Если формулу (1) для пустоты ($\mu = 1$) написать так:

$$C = \frac{f r^2}{m_1 m_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

и выбрать магнитные массы m_1 и m_2 так, чтобы $m_1 = m_2 = m_0$ и чтобы они при этом, находясь в пустоте на расстоянии 1 *см* ($r = 1$ *см*), действовали бы друг на друга с силою, равною 1 дину, то

$$C = \frac{1}{m_0^2}.$$

Принимая теперь такую магнитную массу m_0 за единицу измерения всех магнитных масс, будем иметь $C = 1$, и формула (1) при таком выборе единицы для m получит вид:

$$f = \frac{m_1 m_2}{\mu r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Магнитная масса m_0, действующая в пустоте с силою, равной одному дину, на такую же другую магнитную массу m_0, находящуюся от первой на расстоянии 1 *см*,—называется электромагнитной CGS единицей магнитных масс.

Магнитным полем называется пространство, в котором мы изучаем магнитные явления.

Напряжением H магнитного поля в данной его точке называется та сила, которая действует в этой точке на единицу массы положительного магнетизма. Эта сила вызывается присутствующими на достаточно близком расстоянии от данной точки магнитными массами (или электрическими токами). Если таковых нет, то $H = 0$.

Магнитное поле называется равномерным, если во всех его точках напряжение H одинаково по величине и параллельно по направлению. В противном случае поле неравномерно.

Хотя численно напряжение магнитного поля равно силе и может выражаться в динах, но по существу $H = f/m$, т.-е. это есть сила, отнесенная к магнитной массе. Размер величины H иной, чем размер величины f. Поэтому за единицу измерения напряжений H принимают гаусс, представляющий такое напряжение поля, при котором на CGS единицу магнитной массы действует сила, равная одному дину.

Напряжение H выражается вектором, так как оно имеет не только определенную величину, но и определенное направление.

Легко понять, что векторы эти направлены от северного полюса того магнита, который создает поле, к южному, так как единица положительного магнетизма от северного полюса отталкивается, а к южному притягивается.

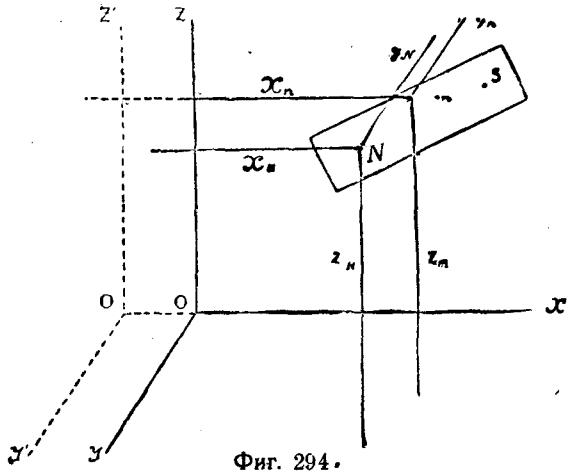
§ 117. Уточним теперь понятие о полюсах магнита.

Северным полюсом магнита называется такая его точка, которая служила бы центром тяжести всех положительных магнитных масс его, если бы эти массы имели вес, им пропорциональный. В том же смысле южным полюсом магнита называется центр тяжести всех отрицательных магнитных масс его.

Положение полюсов, подобно положению центра тяжести, находится по следующим формулам:

$$x_N = \frac{\Sigma x_n m_n}{\Sigma m_n}, \quad y_N = \frac{\Sigma y_n m_n}{\Sigma m_n}, \quad z_N = \frac{\Sigma z_n m_n}{\Sigma m_n}$$
$$x_S = \frac{\Sigma x_s m_s}{\Sigma m_s}, \quad y_S = \frac{\Sigma y_s m_s}{\Sigma m_s}, \quad z_S = \frac{\Sigma z_s m_s}{\Sigma m_s} \quad \ldots\ldots (4).$$

Здесь x_N, y_N, z_N — координаты северного полюса
x_S, y_S, z_S — » » южного полюса
$x_n\ y_n\ z_n$ — координаты любой точки магнита, в которой находится положительная магнитная масса m_n.
$x_s\ y_s\ z_s$ — то же для точки с отрицательной магнитной массой—m_s.



Фиг. 294.

Как известно, центр тяжести у каждого весомого тела один, и его положение, определяемое формулами, аналогичными только что приведенным, не зависит от выбора системы координат. То же следует сказать о северном и южном полюсах магнита порознь.

§ 118. Теперь введем понятие о магнитном моменте магнита.

Магнитным моментом M′ данного магнита по некоторому направлению a называется сумма произведений $\Sigma m_i a_i$, где m_i бесконечно малые магнитные массы (положительные и отрицательные), расположен-

ные во всех точках данного магнита, а a_i расстояния тех же точек по направлениям параллельным а до какой-либо плоскости, перпендикулярной к а.

С первого взгляда кажется, что магнитный момент, меняющийся в зависимости от направления а и положения плоскости А, к нему перпендикулярной, есть величина слишком непостоянная для данного магнита, а потому и мало полезная. Однако, можно доказать о нем ряд теорем, выясняющих весьма важные свойства этого понятия.

Докажем прежде всего теорему 1-ю, что магнитный момент данного магнита не меняется, если плоскость, до которой берутся расстояния, передвигается параллельно сама себе.

Пусть, например, магнитный момент магнита NS (фиг. 294) по направлению OX относительно плоскости YOZ есть M_x. По определению $M_x = \Sigma m_i x_i$. Передвинем плоскость YOZ параллельно самой себе в положение Y'O'Z' и вычислим магнитный момент M'_x того же магнита относительно новой плоскости. Имеем:

$$M'_x = \Sigma m_i (x_i + \Delta) = \Sigma m_i\ x_i + \Delta \Sigma m_i$$

Но так как в каждом магните имеется столько же положительного магнетизма, сколько и отрицательного, то

$$\Sigma m_i = 0 \text{ и } M'_x = \Sigma m_i\ x_i = M_x$$

Докажем теперь теорему 2-ую, что магнитный момент данного магнита по заданному направлению не меняется, если предположить все его положительные магнитные массы $\Sigma m_n = m_N$ сосредоточенными в северном его полюсе N, а все отрицательные магнитные массы $\Sigma m_s = m_S$ — сосредоточенными в южном полюсе S. (При этом $m_N = -m_S$).

Для доказательства вычислим магнитный момент M''_x того же магнита (фиг. 294) по тому же направлению OX в только что указанном предположении. Так как магнитные массы при этом присутствуют только в двух точках, то $\Sigma m_i x_i$ содержит теперь только 2 члена:

$$M''_x = m_N\ x_N - m_S\ x_S$$

Подставляя сюда значения x_N и x_S из уравнений (4) и значения $m_N = \Sigma m_n$ и $m_S = \Sigma m_s$, получим:

$$M''_x = \Sigma m_n \cdot \frac{\Sigma x_n\ m_n}{\Sigma m_n} - \Sigma m_s \cdot \frac{\Sigma x_s\ m_s}{\Sigma m_s} =$$

$$= \Sigma x_n m_n - \Sigma x_s m_s = \Sigma m_i x_i = M_x$$

Окончательно $M''_x = M_x$.

Так как положение центра тяжести (а следовательно, и полюсов магнита) не зависит от системы координат, то формулы (4), а следовательно, и наше доказательство годится не только для направления OX и плоскости YOZ, но и для любого направления и для любой плоскости, для которых берутся магнитные моменты.

Далее докажем теорему 3-ю: магнитный момент M_0 данного магнита по направлению прямой NS, соединяющей его полюсы, выражается формулой:

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{m}_N l = -\mathbf{m}_S l \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5),$$

где $l = NS$—есть расстояние между полюсами. Это легко доказывается если через полюс S проведем плоскость, нормальную к линии NS, и до нее будем вычислять момент M_0 по направлению NS:

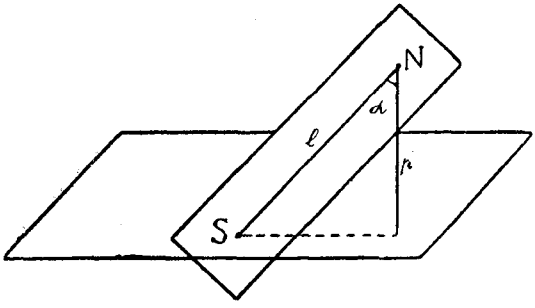
$$M_0 = m_N l - m_s 0 = m_N l$$

Определение: Магнитный момент M_0 данного магнита по направлению линии NS, соединяющей его полюсы, называется его главным магнитным моментом.

Теорема 4-я. Магнитный момент M_p по произвольному направлению p, составляющему угол α с направлением NS, равен главному магнитному моменту, умноженному на $\cos\alpha$:

$$\mathbf{M}_p = \mathbf{M}_0 \cos\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

Действительно (фиг. 295), $M_p = m_N p - m_S 0 = m_N l \cos\alpha = M_0 \cos\alpha$



Фиг. 295.
Магнитный момент по произвольному направлению p равен проекции главного магнитного момента на это направление: $M_p = M_0 \cdot \cos\alpha$.

Из этой теоремы вытекает важное следствие: если мы будем изображать магнитные моменты данного магнита по разным направлениям векторами соответственной величины, отложенными от какой-либо точки пространства, то, чтобы узнать величину магнитного момента этого магнита по какому-либо направлению, достаточно получить составляющую вектора главного магнитного момента M_0 данного магнита на новом направлении.

Другими словами, магнитные моменты можно выразить векторами, которые можно так же геометрически разлагать и складывать (по правилам параллелограмма и параллелепипеда), как это делается в механике с векторами, изображающими силы.

§ 119. Теперь введем понятие о степени намагничения J.

Степенью намагничения J_p данного магнита по данному направлению p называется отношение

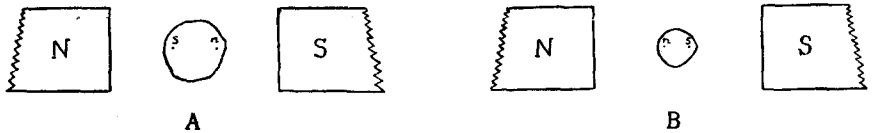
$$J_p = \frac{M_p}{V} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7),$$

где M_p—его магнитный момент по тому же направлению p, а V—объем магнита. Понятно, что теорема 4 и ее следствие, выведенные для магнитных моментов, вполне применимы и к степени намагничения J, т.-е. ве-

личины J мы можем изображать векторами, которые мы можем геометрически складывать и разлагать по правилам параллелограмма и параллелепипеда. При этом по направлению NS мы будем иметь максимальную (или главную) степень намагничения J_0, при чем $J_0 = \frac{M_0}{V}$.

§ 120. Магнитная индукция. Магнитная восприимчивость x.

Если мы в магнитном поле, коего напряжение H не равно 0, поместим какое-либо тело, то оно намагничивается, т.-е. становится более или менее сильным магнитом. Это явление называется магнитной индукцией. При этом в парамагнитных телах ($\mu > 1$) полюсы оказываются обращенными к разноименным полюсам магнита, создающего поле, а в диамагнитных—наоборот (фиг. 296).



Фиг. 296.
A — намагничивание парамагнитного тела.
B — то же для диамагнитного тела.

Одноименные полюсы отталкиваются, а разноименные притягиваются. Поэтому, если мы придадим испытуемому телу удлиненную форму, и способность вращаться вокруг оси O нормальной к линии, соединяющей N и S, то тело (стержень) займет продольное положение при парамагнитном и поперечное при диамагнитном веществе (фиг. 297).

Парамагнитный изотропный стержень

Диамагнитный изотропный стержень

Фиг. 297.
Положение изотропных стержней в магнитном поле.

Намагниченное тело имеет свой магнитный момент M_0 и свою степень намагничивания $J_0 = M_0/V$. Направление векторов M_0 и J_0, т.-е. направление линии полюсов ns намагничиваемого тела в случае его изотропности совпадает с направлением напряжения H намагничивающего поля. Как увидим дальше, для анизотропных тел такого совпадения в общем случае не будет. J_0 зависит от напряжения H намагничивающего поля, так что имеем равенство:

$$J_0 = \varkappa H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Все вещества распадаются довольно резко при этом на две группы. Одни намагничиваются сильно, для них $\varkappa$ сравнительно велико, для всех положительно, но при этом непостоянно (зависит от H). Это тела ферромагнитные или сильно-магнитные.

Таких тел сравнительно немного: железо, сталь, никкель, кобальт, из минералов—магнитный железняк (Fe_3O_4), магнитный колчедан ($FeS \cdot nS$), и немногие другие тела.

Другую группу составляют слабо-магнитные тела; для них $\varkappa$ относительно мало, но зато с достаточной точностью может быть принято постоянным (от H независящим).

Для слабо-магнитных тел $\varkappa$ может быть как положительно, так и отрицательно.

Определение. Коэффициент $\varkappa$ называется коэффициентом магнетизации или магнитной восприимчивостью (Susceptibilität) данного тела.

Для слабо-магнитных тел он, также как магнитная проницаемость μ, служит одной из констант, характеризующих их магнитные свойства. Для ферромагнитных тел эти величины характеризуют магнитные свойства лишь отчасти, т. к. не являются константами.

Между величинами μ и $\varkappa$ существует зависимость:

$$\mu = 1 + 4\pi\varkappa \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9).$$

Из этой формулы видно, что при $\mu > 1$ имеем $\varkappa > 0$ и, наоборот, при $\mu < 1$ выводим, что $\varkappa < 0$. Т.-е. для парамагнитных тел $\varkappa$ положительна, для диамагнитных—отрицательна.

§ 121. Общие сведения о магнитных свойствах кристаллов.

Теперь переходим к магнитным свойствам кристаллов.

Над теоретическим и экспериментальным изучением этих свойств работали Пуассон (1824), Плюккер (1847), Фарадей (1849), В. Томсон (1850), П. Вейсс (1896), В. Фойгт (1907) [1]), В. Педди, Д. Форрест (1926) [2]) и др. Изложим кратко главнейшие результаты этих исследований.

Одним из основных свойств кристаллического вещества, отличающим его от аморфного, является, как мы знаем, его анизотропность.

В отношении магнетизма это общее положение получает следующую частную и при том более конкретную формулировку.

Магнитная восприимчивость $\varkappa$ (а следовательно, и магнитная проницаемость μ) кристаллического вещества вообще различна по различным направлениям.

Однако, вопрос о том, как понимать величину $\varkappa$ для кристаллов, усложняется следующим обстоятельством. Мы видели (стр. 221), что при намагничивании изотропных тел через индукцию направление главного магнитного момента таких тел совпадает с направлением напряжения H намагничивающего поля. Для анизотропных тел, в том числе и для кристаллов, эти направления J и H расходятся (фиг. 298). Здесь N и S полюсы магнита, создающего индуктирующее поле. H—напряжение этого поля. Кривым контуром показан индуктируемый кристалл, n и s — обра-

---

[1]) W. Voigt. Lehrbuch der Kristallphysik 1910. Здесь содержится подробное изложение опытов автора и его сотрудников, а также П. Вейсса и имеется сверх того краткий исторический очерк этой области кристаллофизики (стр. 468 и след.).

[2]) J. Forrest. Magnetic quality in crystals (Trans. Roy. Soc. of Edinburg LIV. III. № 14, 1926).

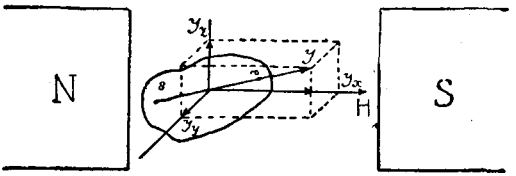
зовавшиеся вследствие индукции его полюсы. J—вектор его степени намагничения. Как и прежде, $J = M/V$, $M = ml$, где m—магнитная масса в каждом из полюсов n и s, l—расстояние между этими полюсами, V—объем кристалла.

Вектор степени намагничения J мы можем, как было указано (стр. 221), разложить на составляющие J_x, J_y, J_z. Если возьмем при этом за направление оси X направление намагничивающего поля H, а две другие оси как-либо к нему перпендикулярно, и напишем уравнение:

$$J_x = \varkappa_x H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

аналогичное формуле (8), то коэффициент $\varkappa_x$ мы можем считать магнитной восприимчивостью кристалла в направлении Ox

Однако, для полной характеристики магнитной восприимчивости кристаллического вещества при заданном направлении намагничивающего поля H необходимо знать, кроме составляющей J_x в направлении H, также обе поперечные составляющие J_y и J_z по некоторым двум осям, перпендикулярным к H и между собою.



Фиг. 298.
У анизотропных тел при намагничении линия полюсов ns расходится с направлением напряжения H намагничивающего поля.

Теория магнитной индукции в слабомагнитных анизотропных телах была разработана В. Томсоном и позднее В. Фойгтом. Мы не можем останавливаться на ее изложении [1]) и рассмотрим лишь главнейшие результаты экспериментальных работ В. Фойгта, П. Вейсса и Д. Форреста.

§ 122. Опыты Фойгта и его сотрудников.

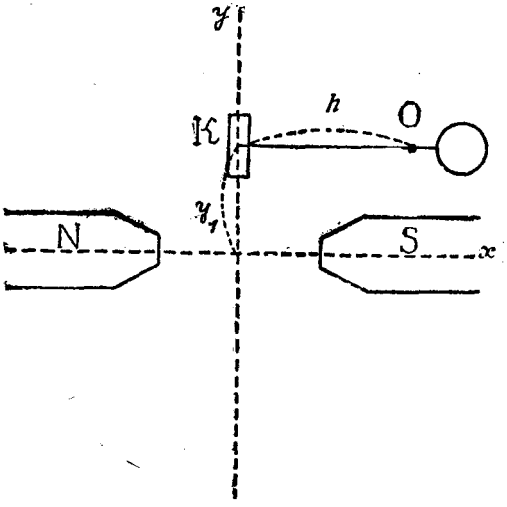
В. Фойгт и Киношита в Гёттингене определяли абсолютные величины магнитной восприимчивости $\varkappa$ для различных кристаллов по разным направлениям следующим образом (фиг. 299).

Полюсы N и S электромагнита создавали вокруг себя неравномерное магнитное поле, т.-е. такое, напряжение которого H меняется от точки к точке.

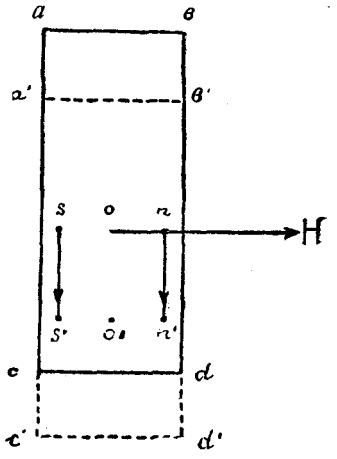
Назовем ось электромагнита осью x, а перпендикулярно к ней и притом горизонтально проведем ось y. На этой оси y названные исследователи помещали маленький диск K, вырезанный из данного кристалла так, что его плоскость располагалась нормально к испытуемому направлению. Размеры диска K были: диаметр 5—5,5 *мм*, толщина 1 *мм*. Диск прикреплялся нормально к плечу h чувствительных крутильных весов, имевших на другом плече противовес. За точку O коромысло этих весов подвешивалось на нити, перпендикулярной к чертежу. В начале, пока ток в электромагниты не был пропущен, коромысло KO посредством соответственного кручения верхней части нити O устанавливалось, так, что было $OK \perp y$. Затем пускался ток, появлялось магнитное поле,

[1]) Краткое изложение можно найти у О. Д. Хвольсона. (Курс Физики IV. 783, 1923), а более подробное у W. Voigta (Lehrbuch der Kristallphysik 1910, 468).

кристалл индуктировался, в нем появлялись положительные и отрицательные магнитные массы, которые мы можем, согласно вышесказанному (стр. 219), считать сосредоточенными в их «центрах тяжести»—полюсах n и s. Вследствие этого диск К притягивался (в случае парамагнитности, т.-е. при расположении полюсов n и s, как на фиг.300) или отталкивался (в случае его диамагнитности) с силою F. При этом коромысло крутильных весов поворачивалось вокруг точки О, пока момент силы притяжения не уравновешивался кручением нити весов. Закручиванием верхнего конца нити О в обратную сторону диск К приводился в начальное положение и необходимый для этого угол закручивания α отсчитывался по лимбу и указателю, приделанному к головке нити. Для небольших скру-



Фиг. 299.
Схема установки В. Фойгта для определения магнитной восприимчивости кристаллов по различным направлениям.



Фиг. 300.
Кристалл-диск К к фигуре 299 в увеличенном виде.

чиваний момент кручения нити пропорционален углу кручения. Если весы заранее калибрированы, и известно, что кручению нити в 1° отвечает скручивающий момент q, а плечо рычага OK = h, — то имеем:

$$Fh = \alpha q, \text{ откуда}$$

$$F = \frac{\alpha q}{h} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11).$$

Таким образом из опыта определялась сила притяжения (или отталкивания) F, очевидно, зависящая только от магнитных свойств вещества К, если магниты, окружающая среда, форма и объем диска и его положение в магнитном поле будут оставаться неизменными для различных кристаллов. Выведем связь между магнитной силой F (притяжения или отталкивания), действующей на наш кристалл К и его магнитной восприимчивостью $\varkappa_x$ по направлению оси X, т.-е. нормально диску К.

Пусть W—потенциальная энергия нашего кристалла К в том месте данного магнитного поля, в котором его центр имеет координаты $x = 0$, $y = y_1$.

Тогда работа магнитной силы F при перемещении dy вдоль ее направления будет Fdy.

Взятая с обратным знаком эта работа должна равняться приращению потенциальной энергии:

$$-Fdy = dW, \text{ откуда } F = -\frac{dW}{dy} \quad \ldots\ldots\ldots (12).$$

Пусть далее m и $-m$ — магнитные массы, индуктируемые соответственно в полюсах n и s нашего кристалла, при положении его центра в точке $x = 0$, $y = y_1$.

v_n, v_s — величины магнитных потенциалов в точках n и s данного магнитного поля. Напомним, что потенциалом магнитных сил в данной точке мы называем ту работу, которую надо произвести, чтобы перенести положительную единицу массы магнетизма из бесконечности в эту точку.

v'_n, v'_s — значения потенциала в точках n′ и s′.

При перемещении n и s в n′ и s′ (фиг. 300) индуктированные магнитные массы m и $-m$ изменяются в $m + dm$ и $-(m + dm)$. Но в виду малости величин dy и dm мы можем принять для выражения совершаемой при этом передвижении работы магнитные массы кристалла K постоянными и равными $\pm\left(m + \frac{dm}{2}\right)$.

Тогда приращение потенциальной энергий dW_n для полюса n при перемещении его в n′ выразится так:

$$dW_n = \left(m + \frac{dm}{2}\right)\left(v'_n - v_n\right) = \left(m + \frac{dm}{2}\right) \cdot d\,v_n = m dv_n + \frac{dm}{2} \cdot d\,v_n.$$

Пренебрегая бесконечно-малой второго порядка, имеем:

$$dW_n = m\,d\,v_n.$$

Так же получим:

$$dW_s = -m\,dv_s.$$

Полное приращение потенциальной энергии кристалла K при перемещении $(-dy)$ будет:

$$dW = dW_n + dW_s = m\,(d\,v_n - d\,v_s) = m\,d\,(v_n - v_s) \quad \ldots\ldots (13).$$

Обозначим:

M — главный магнитный момент кристалла K в положении, вычерченном на фиг. 300 сплошными линиями.

l — расстояние ns (M и l положительны в случае парамагнитности и отрицательны при диамагнитности).

V — объем кристалла K (фиг. 299).

H — напряжение магнитного поля в точке o. Вследствие малых размеров кристалла мы можем на всем его протяжении это напряжение принимать постоянным.

Тогда мы получим из формул (5), (7) и (8)

$$m_1 = \frac{M}{l} = \frac{VJ_x}{l} = \frac{\varkappa_x VH}{l}.$$

Однако, при передвижении кристалла K на dy на его месте остается воздух, который также способен намагничиваться через индукцию, при чем для объема воздуха, расположенного в первоначальном месте кристалла, имеем $m_0 = \frac{\varkappa_0 VH}{l}$, где $\varkappa_0$ — магнитная восприимчивость воздуха. Таким образом при передвижении кристалла в этом движении участвуют не массы m_1, — m_1 магнетизма, а массы $m_1 - m_0$ и $-(m_1 - m_0)$, где

$$m = m_1 - m_0 = \left(\varkappa_x - \varkappa_0\right)\frac{V}{l} H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Затем:

$$v_n - v_s = -Hl \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

потому что в левой части этого равенства мы имеем работу, которую надо совершить для перенесения единицы положительного электричества из точки s в точку n, а в правой — работу магнитных сил при этой операции, взятую с обратным знаком, ибо магнитная сила, действующая на единицу положительного электричества в магнитном поле есть напряжение H этого поля, а путь от s до n есть l. Необходимость знака — ясна из того, что Hl (фиг. 300) положительно, а $v_s > v_n$ (см. определение потенциала).

Подставляя теперь из (14) и (15) в (13), имеем

$$dW = \frac{(\varkappa_x - \varkappa_0)\, V\, H}{l} \cdot (-l\, dH) = -(\varkappa_x - \varkappa_0)\, V\, H\, dH \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

Сравнивая (12) и (16), получаем:

$$F dy = (\varkappa_x - \varkappa_0)\, VH\, dH$$

или

$$F = (\varkappa_x - \varkappa_0)\, V\, H \frac{dH}{dy} = \frac{1}{2}(\varkappa_x - \varkappa_0)\, V \frac{dH^2}{dy} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17).$$

В этой формуле F измерялось посредством крутильных весов (см. выше формулу 11); V — объем диска-кристалла K определялся измерением. Затем H^2 измерялось посредством плоской висмутовой спирали, имевшей площадь равную площади K и помещавшуюся центром своим как в точке o (фиг. 300) в положении диска K, так и в ряде ближайших точек вдоль оси y. Измеряя электрическое сопротивление такой спирали, можно по особым таблицам найти по этому сопротивлению квадрат напряжения (H^2) соответственной точки магнитного поля, а вместе с тем и производную этой величины по y, т.-е. $\frac{dH^2}{dy}$ [1]).

Наконец, магнитная восприимчивость воздуха $\varkappa_0 = 0{,}31 \times 10^{-7}$ — известна.

§ 123. Результаты опытов В. Фойгта и его сотрудников.

Приведем теперь числовые значения $\varkappa$, найденные по этому способу В. Фойгтом, С. Киношитой и В. Финком (см. табл. на стр. 227).

Из цифр этой таблицы сделаем следующие заключения.

1. Кристаллы кубической сингонии по данным В. Фойгта, С. Киношита и В. Финка оказались магнитно-изотропными. Далее мы увидим, что дальнейшие более чувствительные опыты это опровергли.

---

[1]) Точнее писать здесь $\frac{\partial H^2}{\partial y}$, так как мы имеем здесь дело с частной производной H^2 по y.

Таблица числовых значений магнитной восприимчивости $\varkappa$ некоторых кристаллов по W. Voigt, S. Kinoshita и W. Finke [1]).

Сингония	Вещество	Состав	Направление	Магнитная восприимчивость $\varkappa$
Кубическая	Пирит	$Fe\ S_2$	Произв.	$+33{,}7 \times 10^{-7}$
	Каменная соль	$Na\ Cl$	»	$-\ 8{,}16 \times 10^{-7}$
	Квасцы	$[SO_4]_2\ AlK \cdot 12\ H_2O$	»	$-10{,}14 \times 10^{-7}$
	Флюорит . . .	$Ca\ F_2$	»	$-\ 20{,}0 \times 10^{-7}$
	Галенит . . .	$Pb\ S$	Произв.	$-26{,}3 \times 10^{-7}$
Гексагональная подсингония	Берилл	$[Si\ O_3]_6\ Al_2\ Be_3$	$\parallel L_6$	$+10{,}4 \times 10^{-7}$
			$\perp L_6$	$+\ 3{,}86 \times 10^{-7}$
	Апатит	$3\ P_2O_8Ca_3 \cdot Ca\ (F, Cl)_2$	$\parallel L_6$	$-\ 8{,}45 \times 10^{-7}$
			$\perp L_6$	$-\ 8{,}45 \times 10^{-7}$
Тригональная подсингония	Турмалин . .	$Si_4B_2Al_3O_{21}H_{11}$ где H замещается частью Mg, Fe и Na, Li	$\parallel L_3$	$+23{,}2 \times 10^{-7}$
				$+34{,}7 \times 10^{-7}$
	Доломит . . .	$CO_3Ca \cdot CO_3Mg$	$\parallel L_3$	$+35{,}0 \times 10^{-7}$
			$\perp L_3$	$+22{,}6 \times 10^{-7}$
	Кальцит . . .	$CO_3\ Ca$	$\parallel L_3$	$-11{,}0 \times 10^{-7}$
			$\perp L_3$	$-\ 9{,}87 \times 10^{-7}$
	Кварц	$Si\ O_2$	$\parallel L_3$	$-12{,}4 \times 10^{-7}$
			$\perp L_3$	$-12{,}2 \times 10^{-7}$
Тетрагональная	Рутил	$Ti\ O_2$	$\parallel L_4$	$+88{,}9 \times 10^{-7}$
			$\perp L_4$	$+83{,}3 \times 10^{-7}$
	Циркон	$Zr\ Si\ O_4$	$\parallel L_4$	$+33{,}7 \times 10^{-7}$
			$\perp L_4$	$-\ 7{,}84 \times 10^{-7}$
Ромбическая	Целестин . . .	$SO_4\ Sr$	[100]	$-13{,}5 \times 10^{-7}$
			[010]	$-12{,}5 \times 10^{-7}$
			[001]	$-14{,}2 \times 10^{-7}$
	Арагонит . . .	$CO_3\ Ca$	[100]	$-11{,}5 \times 10^{-7}$
			[010]	$-11{,}4 \times 10^{-7}$
			[001]	$-13{,}0 \times 10^{-7}$
	Топаз	$Si\ O_4\ [Al\ F]_2$	[100]	
			[010]	$-14{,}7 \times 10^{-7}$
			[001]	

[1]) В этой таблице содержатся лишь минералы (кроме сахара). Для некоторых искусственных кристаллов значение $\varkappa$ можно найти у Landolt-Börnstein — Phys.-chem. Tab. 1923. II. 1198.

Сингония	Вещество	Состав	Направление	Магнитная восприимчивость $\varkappa$
Моноклинная	Авгит	$[Si\,O_3]_3\,(Mg_3, Fe_3, Co_3, Al_2)$	$\varkappa_2 \parallel [010]$	$+ 794{,}5 \times 10^{-7}$ [1]
			$\varkappa_1$ — в пл. (010) под углом $+ 83°0'$ к [001]	$+ 451{,}5 \times 10^{-7}$ [1]
			$\varkappa_3$ — в пл. (010) под углом $- 7°0'$ к [001]	$+ 931{,}0 \times 10^{-7}$ [1]
	Адуляр (полевой шпат) . .	$Si_6\,O_{16}\,Al_2\,K_2$	$\varkappa_2 \parallel [010]$	$- 52{,}7 \times 10^{-7}$ [1]
			$\varkappa_1$ — в пл. (010) под углом $+ 76°40'$ к [001]	$- 64{,}0 \times 10^{-7}$ [1]
			$\varkappa_3$ — в пл. (010) под углом $- 13°20'$ к [001]	$- 71{,}2 \times 10^{-7}$ [1]
	Сахар тростниковый или свекловичный . .	$C_{12}\,H_{22}\,O_{11}$	$\varkappa_2 \parallel [010]$	$- 9{,}06 \times 10^{-7}$ [1]
			$\varkappa_1$ — в пл. (010) под углом $+ 88°10'$ к [001]	$- 9{,}54 \times 10^{-7}$ [1]
			$\varkappa_3$ — в пл. (010) под углом $- 1°50'$ к [001]	$- 8{,}74 \times 10^{-7}$ [1]

2. Кристаллы других сингоний оказались магнитно-анизотропными, как и следовало ожидать: числовые значения $\varkappa$ по разным направлениям у одного и того же кристалла отличаются друг от друга и иногда довольно резко.

3. Указать, какова симметрия магнитных свойств кристаллов различных сингоний на основании этих опытов нельзя, так как наблюдения, во-первых, недостаточно чувствительны и во-вторых, недостаточно разнообразны по направлениям. Нельзя, например, утверждать, что магнитная восприимчивость по разным направлениям выражается эллипсоидом.

4. Среди изученных указанными авторами кристаллов имеются как парамагнитные ($\varkappa > 0$), так и диамагнитные ($\varkappa < 0$). Крайними значениями $\varkappa$ являются для них $+ 931{,}0 \times 10^{-7}$ (авгит) и $- 71{,}2 \times 10^{-7}$ (адуляр). Некоторые кристаллы (циркон) оказываются парамагнитными по одному направлению и диамагнитными по другому.

5. Для кристаллов моноклинной сингонии $\varkappa_1$ $\varkappa_2$ и $\varkappa_3$ означают три главных коэффициента магнитной восприимчивости, относящихся соответственно к трем взаимно перпендикулярным главным осям магнитной восприимчивости. Эти оси обладают тем свойством, что если направление индуктирующего магнитного поля H совпадает с направлением какой-либо из них, то индуктированный в кристалле главный магнитный момент M_0 совпадает также с направлением этой оси, т.-е. линия полюсов ns кристалла совпадает с направлением поля H. Мы не останавливаемся здесь на способах отыскания этих направлений.

---

[1]) Эти цифры получены мною из цифр, определенных W. Finke (см. W. Voigt, Lehrb. d. Kristallphys. 501) путем умножения их соответственно на уд. вес адуляра 2,56, авгита 3,5 и тростникового сахара 1,59.

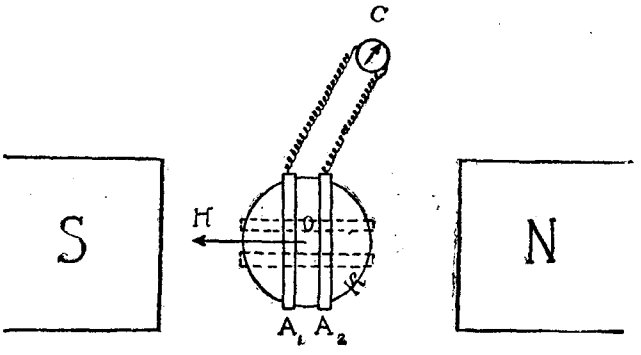
§ 124. Опыты П. Вейсса.

Переходим к опытам P. Weiss'a по определению $\varkappa$ для кристаллов магнетита (Fe_3O_4), которые относятся к сильномагнитным (ферромагнитным) телам, тогда как все кристаллы, изученные Фойгтом и его сотрудниками, суть тела слабомагнитные.

П. Вейсс и его сотрудники определяли не $\varkappa$, а степень намагничивания J, откуда, впрочем, $\varkappa$ легко получается, если известно напряжение поля H, а именно:

из (8) или (10): $\varkappa = \frac{J}{H}$.

Гораздо существеннее то, что эти ученые не ограничились определением одной лишь так называемой продольной составляющей величины J вдоль направления поля H, а определяли также и одну из поперечных составляющих, перпендикулярных к H. Будем обозначать продольную



Фиг. 301.
Схема установки П. Вейсса для определения степени намагничивания J магнетита Fe_3O_4.

составляющую чрез J_l (longitudinal; в опытах В. Фойгта мы называли ее J_x), а поперечную чрез J_t (transversal). Чтобы понять, какую именно поперечную составляющую определял П. Вейсс, надо заметить, что он брал для опыта, подобно В. Фойгту, маленькие диски [1]), вырезанные из кристаллов магнетита параллельно граням сначала куба (100), затем — ромбододекаэдра (110), затем — октаэдра (111). Но диски эти располагал так, что их плоскость была не перпендикулярна к полю H, а параллельна ему (диск K на фиг. 301). Диск мог при этом вращаться вокруг оси O. В каждом положении диска определялась степень магнетизации по двум направлениям в его плоскости: параллельно H (J_l) и перпендикулярно к H (J_t).

Для самого определения П. Вейсс воспользовался не силой притяжения, как В. Фойгт, а появлением индуктированного электрического тока в обмотках A_1 A_2 (окаймляющих диск K) при вращении диска.

Как известно, в замкнутом проводнике, находящемся в магнитном поле, электрический ток появляется всякий раз тогда, когда меняется

[1]) Диаметр около 2 *см*, толщина около 0,3 *мм*.

поток магнитной индукции, пронизывающий контур этого проводника. Поток магнитной индукции в равномерном поле равен

$$\psi = \mu H \omega \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (18),$$

где ω площадь, ограниченная контуром проводника; в неравномерном поле $\psi = \int \mu H d\omega$.

Если бы наш диск К (фиг. 301) был изотропен, то при вращении его вокруг О не менялась бы ни одна величина в правой части формулы (18), следовательно, ψ оставалось бы также постоянным и тока в обмотках A_1 и A_2 не появлялось бы. В случае же магнитной анизотропности диска К при его вращении магнитная проницаемость его μ по направлению перпендикулярному к плоскости обмоток изменяется, а потому меняется ψ и гальванометр G показывает появление тока.

Выведем формулы, связывающие продольную J_l и поперечную J_t, слагающие степени намагничения с величиной тока, обнаруживаемого в гальванометре G.

Электродвижущая сила e, появляющаяся в замкнутом проводнике при изменении пронизывающего его контур потока индукции ψ прямо пропорциональна этому изменению в единицу времени:

$$e = c \frac{d\psi}{dt}$$

Здесь c есть постоянный для данной установки коэффициент, зависящий от выбора единиц измерения e, ψ и t.

Но $e = wi$, где w — сопротивление проводника, а i — сила тока, возникающего в нем. Отсюда:

$$wi = c \frac{d\psi}{dt}$$

и

$$wi\,dt = c\,d\psi$$

Вычислим теперь все количество электричества, прошедшее по обмоткам A_1 и A_2 (фиг. 301) вследствие вращения диска из некоторого начального положения в другое. Имеем:

$$w \int_0^t i\,dt = c \int_{\psi'}^{\psi''} d\psi,$$

откуда:

$$w\,\Sigma i = c\,(\psi'' - \psi') \quad \ldots \ldots \ldots \quad (19).$$

Здесь Σi условно обозначает суммарную силу тока, протекшего по обмоткам A_1 A_2 за время вращения. Это суммарное количество электричества измеряется особым, так называемым баллистическим гальванометром G (фиг. 301).

В формуле 18 мы можем коэффициент проницаемости μ выразить через магнитную восприимчивость $\varkappa$ по формуле (9). Тогда получим:

$$\psi = (1 + 4\pi\varkappa) H\omega$$

Если во время вращения диска К (фиг. 301) напряжение поля H не меняется, то так как и площадь контура обмоток ω не меняется, — мы можем из (19) написать:

$$w\,\Sigma i = c\,\omega H [1 + 4\pi\varkappa'' - 1 - 4\pi\varkappa'] = c\,\omega H 4\pi (\varkappa'' - \varkappa') =$$
$$= c_1 (\varkappa'' H - \varkappa' H)$$
$$w\,\Sigma i = c_1 (J_l'' - J_l')$$

Здесь J_l'' и J_l' означают продольные (вдоль H) составляющие степени намагничивания диска K. Предыдущее равенство напишем так:

$$J_l'' - J_l' = c_2 \Sigma i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (20),$$

где c_2 постоянный для данной установки коэффициент равный $\frac{w}{c_1}$.

Формула (20) показывает, что разности продольных составляющих прямо пропорциональны суммарной силе тока Σi, определяемой по баллистическому гальванометру.

Таким образом, быстро вращая диск от некоторого исходного положения (J_l') последовательно на какие-либо угловые промежутки, напр., на 30° или 45°, и наблюдая всякий раз соответственную Σi, мы определим ряд чисел пропорциональных разностям $J_l' - J_l'$, $J_l''' - J_l'$, $J_l'''' - J_l'$ и т. д., каковые и можем отложить в известном масштабе от какой-либо точки параллельно соответственным направлениям в плоскости кристаллического диска K.

Если же мы будем знать в том же масштабе J_l', то вместо вышеупомянутых разностей можем отложить самые величины J_l', J_l'', J_l'''.

Чтобы определить соответственное число, пропорциональное J_l', Вейсс поступал так. Оставляя диск K в покое, он поворачивал вокруг той же оси o (фиг. 301) обмотки A_1 A_2 на 180°.

В этом случае из формулы (19) и следующей будем иметь:

$$w \Sigma i_1 = c \left[(1 + 4\pi\varkappa') \cdot H\omega - (1 + 4\pi\varkappa') \cdot (-H)\omega\right],$$

потому что здесь $\varkappa'$ сохранит свою величину для обоих положений диска, начального и конечного, а знак напряжения H по отношению к контуру проводника (A_1 A_2) изменится на противоположный. Отсюда выводим:

$$w \Sigma i_1 = 2c\omega H + 2c\omega 4\pi\varkappa' H = 2c\omega H + 2c_1 J_l' \quad \ldots\ldots\ldots (21).$$

Отсюда видно, что показание гальванометра Σi дает нам в этом случае сумму двух факторов: изменения положения обмоток по отношению к полю H и по отношению к диску K. Первое слагаемое $2c\omega H$ легко определить отдельно, если убрать диск K и произвести опять быстрый поворот обмоток A_1 A_2 на 180°, заметив показание баллистического гальванометра. Так как в этом случае $\mu = 1$, ибо внутри обмоток находится воздух, то формулы (19) и (18) теперь дают:

$$w \Sigma i_2 = c\left[H\omega - (-H)\omega\right] = 2cH\omega \quad \ldots\ldots\ldots (22).$$

Из этого уравнения и из (21) получаем: $w \Sigma i_1 = w \Sigma i_2 + 2c_1 J_l'$; откуда:

$$J_l' = \frac{1}{2} \frac{w}{c_1} (\Sigma i - \Sigma i_2).$$

И окончательно:

$$J_l' = c_2 \frac{\Sigma i_1 - \Sigma i_2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (23).$$

Т.-е., взяв из опыта отсчеты Σi_1 и Σi_2 и поделив разность их пополам, мы получим число, пропорциональное искомой продольной составляющей J_l', при чем коэффициент пропорциональности $c_2 = \frac{w}{c_1}$ будет тот же, что и для разностей $J_l'' - J_l'$, $J_l''' - J_l'$ и т. д. в форм. (20).

Прибавляя теперь последовательно значения этих разностей к найденному значению J'_t, мы получим значения J''_t, J'''_t и т. д., точнее числа им пропорциональные. Можем каждое из них получить и непосредственно, тем же методом, каким получали сейчас J'_t. Откладывая все эти значения от одной точки по тем направлениям, для которых они были измерены в плоскости диска, мы получим кривую продольных составляющих J_t степени намагничения. Это суть внешние кривые на фиг. 302. Так как $J_t = \varkappa_t H$, то те же кривые, только в другом масштабе, выражают продольные составляющие $\varkappa_t$ магнитной восприимчивости.

Если мы повернем обмотки A_1 A_2 (фиг. 301) вокруг оси o в пунктирное положение, т.-е. так, чтобы нормаль к их плоскости пришлась перпендикулярно к H, то мы можем теми же методами, какими определялись сейчас J_t, определить теперь J_t, т.-е. поперечную составляющую степени намагничивания. При магнитно-изотропном веществе диска K величина J_t равна нулю, так как в этом случае, как было уже сказано, при намагничивании линия ns (фиг. 300), а, следовательно, и направления главного магнитного момента $M = \mathfrak{m}l$ и степени намагничения $J = \frac{M}{V}$ располагаются параллельно напряжению H (фиг. 301). Если мы, принимая за исходное положение обмоток A_1A_2 то, которое изображено на фиг. 301 пунктиром, повернем обмотки быстро на 180° (фиг. 301), то никакого тока Σi баллистический гальванометр при этом не покажет.

В случае же, если диск K анизотропен, направление ns, а следовательно, и совпадающие с ним направления M и J—не будут в общем случае параллельны H. Разложим теперь степень намагничения J на три взаимноперпендикулярные составляющие: 1) по направлению H (J_l), 2) по направлению, нормальному к H и лежащему в плоскости диска (J_t) и 3) по направлению нормальному к обоим предыдущим: 1 и 3 составляющие лежат в плоскости обмоток A_1 и A_2 при их пунктирном положении на фиг. 301, а потому не влияют на поток индукции, пронизывающий контур этих обмоток. Но «поперечная составляющая» J_t теперь в общем случае не равна 0. Поэтому, повернув обмотки быстро на 180°, мы обнаружим в баллистическом гальвнометре ток Σi_1. Так как, при удалении диска K поток индукции ψ будет итти вдоль направления H и, следовательно, в плоскости обмоток в их пунктирном (фиг. 301) положении,—то в этом случае Σi_2 формулы (22) будет равна 0: в правой части этой формулы H для этого случая будет равно 0, так как под H здесь следует разуметь составляющую напряжения на направлении нормали к плоскому контуру обмоток. Поэтому формула (23) здесь примет такой вид:

$$J'_t = c_2 \frac{\Sigma i_1}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (24).$$

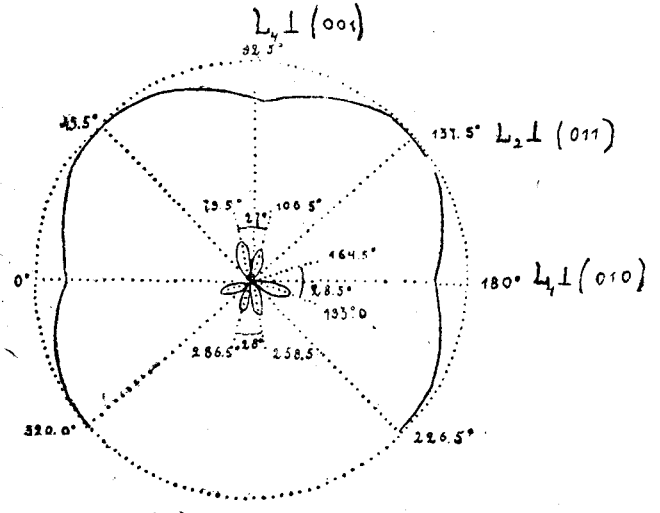
где $c_2 = \frac{w}{c_1} = \frac{w}{4\pi\omega c}$, а значения величин w, ω, c смотрите выше.

§ 125. Результат опытов П. Вейсса.

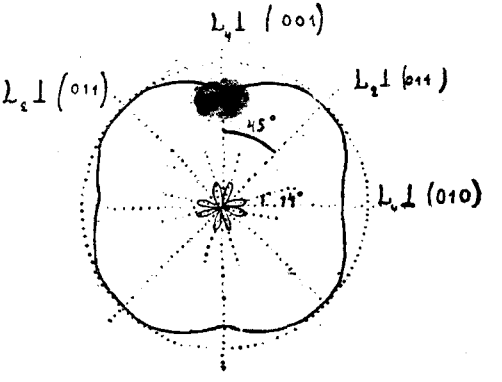
В то время как В. Фойгт и его сотрудники изучали магнитные свойства слабомагнитных кристаллов, П. Вейсс, как уже сказано, подверг исследованию по своему способу сильномагнитные («ферромагнитные») кристаллы: магнетит или магнитный железняк (Fe_3O_4) и пирротин или магнитный колчедан ($Fe_n S_{n+1}$). Мы остановимся лишь на результатах

исследования кристаллов первого вещества, относящихся к кубической сингонии.

П. Вейсс исследовал диски диаметром около 2 *см*, и толщиною около 0,3 *см*, вырезанные из кристаллов магнетита параллельно трем различным граням: куба (100) ромбододекаэра (110) и октаэдра (111).

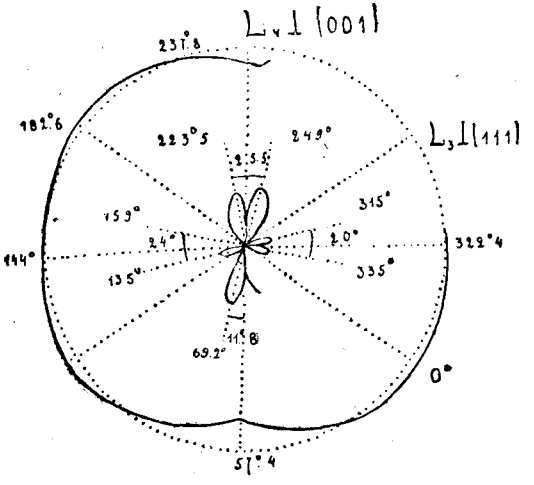


а) Реальные кривые.

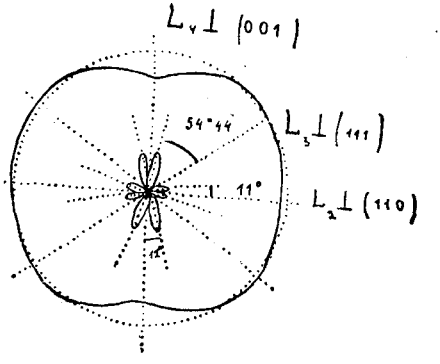


б) Идеальные кривые.

А) На грани куба.



а) Реальные кривые.



б) Идеальные кривые.

В) На грани ромбододекаэдра.

Фиг. 302.

Кривые П. Вейсса для магнетита Fe_3O_4. — Радиусы наружной кривой равны относительному значению продольной составляющей J_l степени намагничения. Радиусы внутренней отвечают поперечной составляющей J_t.

Результаты своих измерений относительных величин продольной J_l и поперечной J_t составляющих степени намагничивания П. Вейсс изобразил графически для каждой из этих граней. Для этого из одной

какой-либо точки чертежа по каждому направлению, параллельно которому определялась J_l и отвечающая ей J_t, откладывались эти величины, и концы отложенных векторов соединялись кривой линией. Таким образом, для каждой из трех граней получались две кривые, одна для J_l и другая для J_t (фиг. 302-А и 302-В).

Для грани октаэдра кривая J_l оказалась окружностью соответственно чему внутренняя кривая J_t обращалась в точку.

Из этих кривых следует сделать такие выводы.

1. Кристаллы магнетита, относящиеся к кубической сингонии, являются в магнитных свойствах своих анизотропными.

2. Лишь в плоскости нормальной к тройной оси симметрии эти кристаллы оказываются изотропными.

3. Вид поверхности, изображающей изменение по всем направлениям продольной составляющей J_l степени намагничения J кристаллов магнетита,—совершенно аналогичен виду поверхности коэффициента продольного растяжения или коэффициента изгиба a_{hh} для кристаллов флюорита (также кубического). Последняя поверхность изображалась нами в учении об упругости кристаллов (стр. 207 фиг. 283 и 284).

4. Общий вид поверхности, образованной концами векторов, равных относительным значениям поперечной составляющей J_t можно приблизительно представить так. Если представим себе некоторый гексоктаэдр (фиг. 126, стр. 45) сделанным из эластичной пленки и затем вдавим его поверхность до самого центра во всех его вершинах, т.-е. по направлению всех (четверных, тройных и двойных) поворотных осей симметрии,—тогда получим тело с 26 вдавленностями (минимумами $J_t = 0$) и 48 выпуклостями (максимумами), соединенными друг с другом перемычками—седловинами.

5. Отклонения реальных кривых от идеальных обусловливаются неоднородностью материала.

§ 126. Опыты Дж. Форреста [1]).

Экспериментальная часть работы этого исследователя является в известном смысле продолжением описанных опытов П. Вейсса. Дж. Форрест, подобно П. Вейссу определял продольные и поперечные составляющие J_l и J_t по разным направлениям на разных гранях различных кристаллов. Но в то время, как П. Вейсс исследовал лишь сильномагнитные кристаллы (магнетит и пирротин), Дж. Форрест изучил слабомагнитные кристаллы, как парамагнитные, так и диамагнитные.

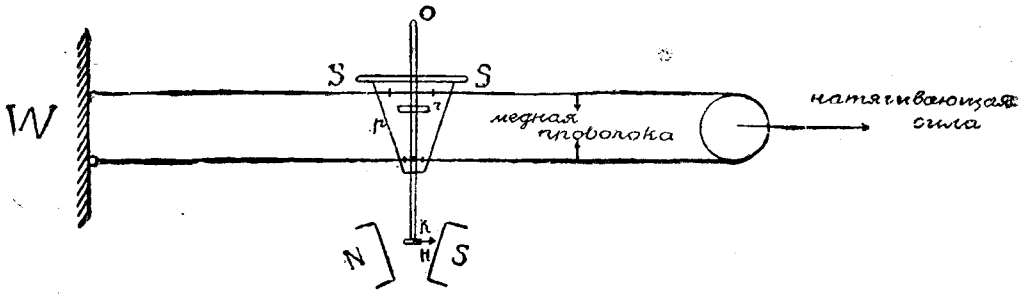
Установка Дж. Форреста также значительно отличалась от установки П. Вейсса, приближаясь скорее по основам своим к аппаратуре В. Фойгта.

Для определения J_l Дж. Форрест применял устройство, изображенное на фиг. 303 в плане. Здесь блок, изображенный справа, натягивает тонкую проволоку, укрепленную обоими концами в стене W. На проволоке укреплена легкая картонная платформа p, несущая на себе легкую бумажную же ось OK. На ней кристаллический диск K в неравномерном поле электромагнита NS и легкий уравновешивающий рейтер r. Углы поворота диска K вокруг оси OK можно измерять по скале ss. Диаметр диска K брался от 2 до 4 *мм*, его толщина от 0,5 до 1,0 *мм*.

---

[1]) См ссылку на стр. 222.

Когда в электромагнит NS пущен ток, кристаллический диск индукционно намагничивается и вследствие неравномерности поля втягивается



Фиг. 303.
Устройство Дж. Форреста для определения относительной величины продольной составляющей J_l степени намагничения J кристаллического диска К по разным направлениям.

по направлению ОК. Платформа р, а с нею и проволока перемещается горизонтально (а на нашем чертеже книзу). Величина смещения проволоки, наблюдаемая в микроскоп, не показанный на рисунке, пропорциональна притягивающей силе. А эта сила, как это было выведено для установки В. Фойгта (форм. 17, стр. 226), связана с магнитной восприимчивостью $\varkappa_x$ по направлению, совпадающему с направлением напряжения внешнего поля в точке, занимаемой центром диска, такою зависимостью:

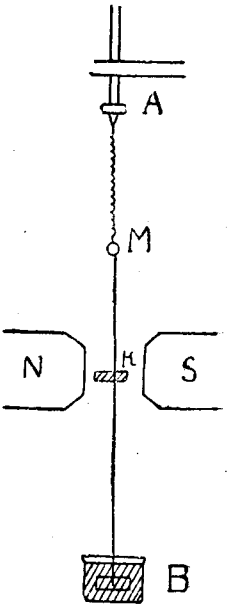
$$F = V(\varkappa_x - \varkappa_0) H \frac{dH}{dy}$$

Или

$$F = V(J_l - J_0) \frac{dH}{dy} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25),$$

откуда

$$J_l = \frac{F}{V \frac{dH}{dy}} + \varkappa_0 H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26).$$



Фиг. 304.
Схема установки Дж. Форреста для определения поперечной составляющей J_t степени намагничения кристаллического диска К по разным направлениям.

Как это было объяснено при описании опытов В. Фойгта (стр. 226), мы можем отсюда получить величину $\varkappa_x$ или $J_l = \varkappa_x H$ для каждого диаметра диска К, поставленного вращением вокруг оси ОК в продольное положение к направлению поля Н.

После этого можно построить в плоскости диска кривую J_l, как это делал П. Вейсс.

Экспериментируя с дисками, вырезанными по разным направлениям, Дж. Форрест дал эти кривые для разных граней различных кристаллов.

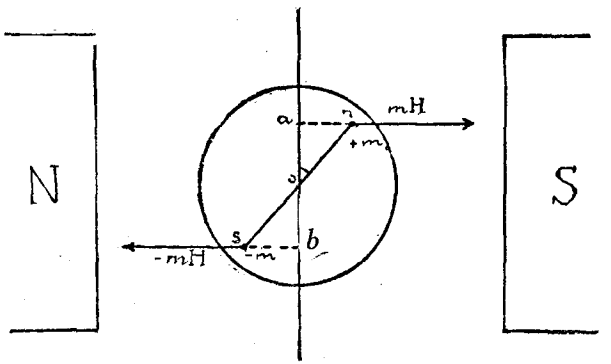
Для измерения поперечной составляющей J_t Дж. Форрест применял установку, схематически изображенную на фиг. 304.

Здесь кристаллический диск К подвешен на тонкой проволоке, укрепленной в точке А, так, что его плоскость располагается горизонтально. При этом К помещается между полюсами N и S электромагнита. На конце В той же проволоки укреплена пластинка, погруженная в масло для более быстрого тушения коле-

баний проволоки и кристалла. M — зеркальце, с помощью которого производят измерение угла кручения проволоки, а следовательно, и крутящего момента, приложенного к кристаллу. Измерение угла вращения зеркала производят при этом по методу трубы и шкалы, подобно тому, как в опыте с упругостью на фиг. 282 (стр. 202).

Теперь покажем, что крутящий момент прямо пропорционален поперечной составляющей J_t степени намагничивания J диска K. Для этого изобразим диск K и полюсы N и S в плане (фиг. 305).

Вследствие индукции в диске появится некоторый магнитный момент. Составляющую его в плоскости диска мы обозначим через M. Можно M представить в виде произведения $M = ml$, где m есть величина магнитных масс, находящихся в каждом из полюсов n и s диска, а l—расстояние между этими полюсами. Тогда на полюсы n и s в направлении поля



Фиг. 305.
Кристаллический диск K фигуры 304 в плане в увеличенном виде. Линия полюсов ns вследствие анизотропности не совпадает с направлением напряжения поля H.

будут действовать соответственно силы $+mH$ и $-mH$. Момент этой пары сил, вращающей диск, будет равен:

$$P = mH \cdot ab.$$

Если угол между l и ab обозначим через α, то $ab = l \cdot \cos \alpha$ и

$$P = mHl\cos\alpha = ml\cos\alpha \cdot H = M\cos\alpha\ H$$

Но $M = JV$, где J—степень магнетизации и V—объем диска. Поэтому:

$$P = J\cos\alpha \cdot V\,H = J_t \cdot V\,H$$

Эта формула означает, что крутящий момент в установке фиг. 304 при постоянном объеме диска и постоянном напряжении прямо пропорционален поперечной составляющей J_t.

Измеряя крутящий момент наблюдением угла поворота зеркальца, Форрест определял относительные значения J_t и получал для грани данного кристалла, параллельно диску кривые J_t, также как это делал П. Вейсс (см. выше).

§ 127. Некоторые результаты опытов Дж. Форреста.

Этот автор исследовал ряд кристаллов различных сингоний. А именно:

Кубическая сингония.

1. Квасцы $[SO_4]_2$ $Fe[NH_4]$ $12H_2O$.
2. „ $[SO_4]_2$ Al K $12H_2O$.
3. „ $[SO_4]_2$ Cr K $12H_2O$.
4. Пирит—Fe S_2.
5. Кобальтин—CoAsS.
6. Медь—Cu.
7. Хлористый натрий—$NaCl$.
8. Флюорит—CaF_2.

Тетрагональная сингония.

9. Сернокислый никкель шестиводный — $NiSO_4 \cdot 6H_2O$.

Тригональная подсингония.

10. Сурьма—Sb.
11. Висмут—Bi.
12. Кварц—SiO_2.
13. Кальцит—$CaCO_3$.

Ромбическая сингония.

14. Сернокислый калий—K_2SO_4.
15. Сернокислый никкель семиводный—$NiSO_4 \cdot 7H_2O$.

Моноклинная сингония.

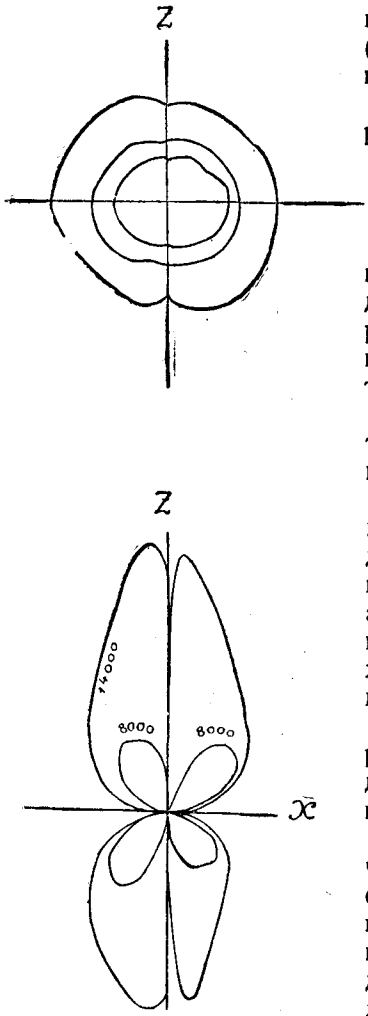
16. Феррициановый калий—$K_3Fe(CN)_6$.
17. Ферроциановый калий—$K_4Fe(CN)_6$.
18. Сернокислый никкель-аммоний—$[SO_4]_2$ Ni $[NH_4]_2 \cdot 6H_2O$.

Триклинная сингония.

19. Медный купорос—$CuSO_4 \cdot 5H_2O$.
20. Двухромовокислый калий—$K_2Cr_2O_7$.

В качестве примера на фиг. 306 приведены 2 серии кривых, полученные на диске, вырезанном параллельно грани (010) из кристалла красной кровяной соли—$K_3Fe[CN]_6$. Первая серия кривых (фиг. 306 верхняя) показывает относительную величину продольной составляющей J_l степени намагничения по разным направлениям, лежащим в плоскости диска; а вторая серия (фиг. 306 нижняя)—дает величину поперечной составляющей J_t. Разные кривые фиг. 306 верхней относятся к установкам прибора

на разные степени чувствительности, а разные кривые фиг. 306 нижней отвечают разным напряжениям намагничивающего поля: H = 8000 гаусс и 14000 гаусс.



Фиг. 306.
Кривые намагничивания кристаллов красной кровяной соли $K_3Fe[CN]_6$ (моноклинной сингонии) на грани (010). Вверху — продольная составляющая J_l; внизу — поперечная составляющая J_t. — По J. Forrest'y.

Отчетливо намечаются 2 минимума J_l вдоль оси Z на первых кривых и 4 минимума (нулевые значения) J_t вдоль осей X и Z на вторых кривых.

Укажем здесь прежде всего на некоторые общие чисто экспериментальные выводы из наблюдений Форреста.

1. Этот ученый показал, что, применяя достаточно сильные поля (до 30000 гаусс) и достаточно чувствительные приборы, можно получать кривые Вейсса для слабомагнитных кристаллов так же хорошо, как и для сильномагнитных со сравнительно слабыми полями и менее чувствительными приборами.

2. Им была доказана магнитная анизотропия перечисленного выше ряда кристаллов кубической сингонии.

3. При этом было обнаружено, что для квасцов, подобно тому как у П. Вейсса для магнетита и для железа, минимумы J_l получались на грани (100) в направлении L_4, а максимумы J_l — в направлении L_2. Для кристаллов же пирита, кобальтина, меди, хлористого натра и флюорита расположение минимумов и максимумов было обратным.

4. Экспериментальные данные Дж. Форреста показали, что теория магнитной индукции кристаллов, развитая Thomson'ом [1]) не оправдывается опытом.

Вкратце теория В. Томсона заключалась в следующем. В каждом кристалле есть три взаимно перпендикулярных направления, для которых, если направить по какому-либо из них магнитное поле H, то индуктированный им магнитный момент M будет совпадать по направлению с H. Обозначая магнитные восприимчивости по этим трем главным магнитным осям через $\varkappa_I$, $\varkappa_{II}$ и $\varkappa_{III}$ и строя на осях $\frac{1}{\sqrt{\varkappa_I}}$, $\frac{1}{\sqrt{\varkappa_{II}}}$ и $\frac{1}{\sqrt{\varkappa_{III}}}$ эллипсоид, В. Томсон получал его уравнение:

$$\varkappa_I x^2 + \varkappa_{II} y^2 + \varkappa_{III} z^2 = \pm 1$$

Согласно теории В. Томсона, из этого эллипсоида при заданных величине и направлении поля H можно было бы вывести направление и

[1]) Изложение этой теории см. у О. Д. Хвольсона. Курс физики IV. 783 или более подробно, у W. Voigt'a. Lehrb. d. Kristallphysik 1910. 471.

величину индуктированного магнитного момента следующим образом. Надо провести вектор r эллипсоида в направлении H заданного поля. Через конец этого вектора провести касательную к эллипсоиду плоскость. Опустить из центра нормаль n на эту плоскость. Направление этой нормали будет направлением искомого момента M, а величина его будет пропорциональна величине $\frac{1}{rn}$.

Из этих правил ясно, что для кубических кристаллов $\varkappa_I = \varkappa_{II} = \varkappa_{III}$ (вследствие наличия тройной оси симметрии, а также из опытов П. Вейсса и Дж. Форреста). Следовательно, для них эллипсоид магнитной индукции по В. Томсону превратится в шар, и эти кристаллы окажутся магнитно-изотропными, что противоречит опытам П. Вейсса и Дж. Форреста [1]).

§ 128. Понятие о теории магнетизма кристаллов.

Теорией магнитных явлений в кристаллах занимались последнее время П. Вейсс, В. Педди и Дж. Форрест. Не останавливаясь на теории П. Вейсса, краткое изложение которой интересующиеся найдут в современных курсах физики [2]), скажем несколько слов о теории В. Педди, развитой и приложенной к опытам его последователем Дж. Форрестом [3]).

В. Педди рассматривает кристалл как совокупность весьма малых молекулярных магнитов («магнитных дублетов»), центры которых расположены в узлах кристаллической решетки. Решетки эти могут отвечать разным видам структуры. Для кубических кристаллов, например, могут существовать структуры по простому кубу, или по центрированному, или по центрогранному. Под влиянием достаточно сильного внешнего поля H все магнитные дублеты данного кристалла могут быть кооориентированы, т.-е. займут параллельное друг другу положение. Направление их при этом определяется двумя факторами: 1) внешним полем и 2) их взаимодействием или внутренним полем. Последнее зависит от их взаимного расположения, т.-е. от структуры той решетки, в узлах которой они сидят.

Зная кристаллографические константы вещества и задаваясь разными возможными видами структуры, В. Педди и Дж. Форрест определяли условия равновесия соответственной системы магнитных дублетов и отсюда выводили соотношение между продольными и поперечными составляющими намагничения.

Оказалось, что при одних и тех же кристаллографических константах вещества положение максимумов и минимумов этих составляющих, а также порядок их по величине для разных кристаллографических осей меняется в зависимости от принятия той или иной структуры для данного вещества. Так, например, для центрогранно-кубовой (додекаэдрической) и центрированно-кубовой (октаэдрической) структур кубических кристаллов максимумы продольной составляющей на грани (100) должны располагаться вдоль L_2 (диагоналей грани куба), а минимумы вдоль L_4 (сторон грани куба). А при структуре по простому кубу (гексаэдрической) расположение должно быть обратное.

Отсюда понятно, что если эта теория справедлива, то можно, определивши опытом вид кривых намагничения, указать на основании их

---

[1]) См. еще более новую работу J. Forrest'a. Magnetic anisotropy of cubic crystals (Phil. Mag. (7). **3**. 464—476, 1927 № 14).

[2]) О. Д. Хвольсон. Курс физики IV. 791.

[3]) См. ссылку на стр. 222.

какова «магнитная решетка» данного кристалла. Это делает Дж. Форрест для всех вышеперечисленных исследованных им кристалов.

Следует заметить, что выводимые им таким способом «магнитные решетки» не всегда совпадают по своему характеру с определенными рентгенометрически решетками тех же кристаллов. Так, в кристаллах меди атомы, как нам известно (стр. 182), расположены по центрогранному кубу. «Магнитная же решетка» Дж. Форреста для этих кристаллов оказывается построена по простому кубу.

§ 129. О других магнитных свойствах кристаллов.

а) Влияние магнитного поля на кристаллизацию.

Это влияние тесно связано с подробно изложенными выше явлениями магнитной индукции в кристаллах. Недавно Джиованни Роазио [1]) опытным путем при кристаллизации ряда водных сульфатов и хлоридов Fe, Ni, Co и Mn показал, что достаточно сильное магнитное поле всегда имеет влияние на те вещества, которые в нем кристаллизуются. Влияние это выражалось в его опытах двояко.

Во-первых, при образовании в сильном магнитном поле кристаллы ориентируются по определенным направлениям, которые не всегда совпадают с направлением кристаллографических осей. Углы, которые оси образуют с направлением внешнего поля H меняются с веществом, но остаются неизменными для одного и того же вещества.

Во-вторых, габитус кристаллов при этих условиях их образования меняется. Они удлиняются по определенным направлениям, коих угол с направлением поля H всегда один и тот же для одного и того же вещества, но меняется с веществом, которое кристаллизуется.

б) Пьезомагнетизм и пиромагнетизм кристаллов.

Пьезомагнетизмом [2]) вообще и кристаллов в частности называется свойство физических тел возбуждать в себе магнитный момент или изменять уже существующий в них магнитный момент под влиянием механических деформаций, напр., сжатия или растяжения.

Обратное явление—механические деформации (в частности расширение или сжатие) физических тел, в том числе и кристаллов под влиянием помещения их в магнитное поле или под влиянием изменения того магнитного поля, в котором они находятся, — называется магнитострикцией [3]).

Пиромагнетизмом [4])—называется свойство физических тел получать магнитный момент или менять уже существующий у них магнитный момент под влиянием изменения температуры.

Вследствие того, что эти свойства кристаллов изучены сравнительно мало, мы ограничимся здесь лишь этим кратким упоминанием о них.

Соответствующие электрические явления мы изложим далее более подробно.

---

[1]) Zeitschr. f. Krist. **59**, 88.

[2]) W. Voigt l. c. 938—949.

[3]) О. Д. Хвольсон l. c. IV 722—726 (*о магнитострикции вообще*). О магнитострикции кристаллов в последнее время появились следующие работы:

Yoshio Masiyama. On the magnetostriction of a single cristal of nickel—Sc. Reports Tôhoku Univ. **17**. 945—961 1928. № 5. (Реф. Phys. Berichte 1929, 2, 160).

N. Akulov. Über die Magnetostriktion der Eiseneinkristalle.—Z. f. Phys. **52**, 389—405, 1928 № 5/6. См. также стр. 280, выноску [2]) в этой книге.

[4]) W. Voigt, l. c. стр. 261—267.

ЧАСТЬ ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ.

Электрические свойства кристаллов.

§) 130. План изложения.

В кристаллофизике изучаются следующие электрические свойства кристаллов и вопросы, связанные с этими свойствами:

1) электроиндукция, 2) электропроводность, 3) электролиз кристаллов, 4) пиезоэлектризация, 5) пироэлектризация, 6) другие причины электризации кристаллов.

Первые пять пунктов мы изложим более подробно, указывая интересующимся литературу. Преимущественно будем останавливаться на опытных данных. О последнем пункте упомянем лишь вкратце перед пунктом 4.

§) 131. Электростатическая индукция кристаллов.

а) Основные понятия.

Подобно тому, как в магнитоиндукции мы имели в качестве основной формулы равенство (1) § 116, так и здесь имеется аналогичная формула (1), выражающая так называемый закон Кулона (Coulomb):

$$f = C_e \frac{e_1 e_2}{\varepsilon r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Здесь f — сила отталкивания двух количеств электричества e_1 и e_2, находящихся друг от друга на расстоянии r; ε — есть коэффициент, зависящий от среды, окружающей заряды e_1 и e_2, и постоянный для данной среды (если она изотропна). C_e — коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора единиц, которыми измеряются величины f, e и r. Принимая для пустоты $\varepsilon = 1$, получим для пустоты:

$$f = C_e \frac{e_1 e_2}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Если мы теперь примем за единицу измерения количеств электричества такое его количество, которое отталкивает равное ему количество одноименного положительного или отрицательного электричества, находящегося от него на расстоянии 1 *см*, с силою, равною одному дину, то, применяя формулу 2, будем иметь: $f = 1$; $e_1 = e_2 = 1$; $r = 1$, откуда:

$$1 = C_e \frac{1 \times 1}{1^2}, \text{ т.-е. } C_e = 1.$$

Только что принятая единица для измерения e называется электростатической CGS [1]) единицей количества электричества. Так как она практически мала, то на практике применяют чаще другую единицу — кулон:

1 кулон $= 3 \times 10^9$ э.-ст. CGS единиц колич. электрич.

---

[1]) CGS — система единиц измерения, в основу которой положены сантиметр, грамм и секунда.

Таким образом при единицах измерения дин, сантиметр и электростатическая CGS единица, мы получаем из формулы (1) следующую:

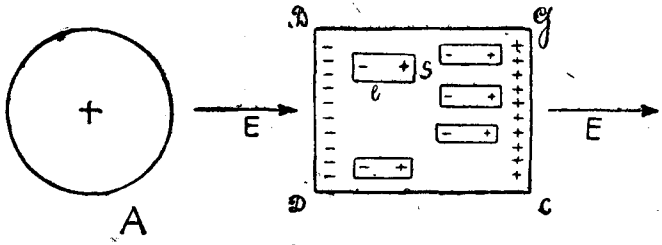
$$f = \frac{e_1 e_2}{\varepsilon r^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Если вместо э.-ст. CGS единицы для измерения e, мы выражаем заряды в кулонах, то ε мы должны уменьшить в этой формуле в $(3 \times 10^9)^2 = 9 \times 10^{18}$ раз.

Величина ε, как было сказано, зависит от среды. Для данной изотропной среды она постоянна (не зависит от e и r) в кристалле — постоянна для данного направления [1]). ε называется диэлектрической постоянной среды. Как видим, она совершенно аналогична магнитной проницаемости μ (§ 116).

Если мы имеем в пространстве ряд электрических масс или количеств электричества e_1, e_2, e_3, ... то они создают вокруг себя электрическое поле.

Напряжением поля E в данной его точке называется сила, действующая на единицу положительного электричества, расположенную в этой точке.



Фиг. 307.
Схема электроиндукции диэлектрика BDCG, под влиянием заряда A.

Если в электрическом поле, например, созданном наэлектризованным шаром A (фиг. 307) поместим какое-либо тело BC, то оно электризуется: в той части его поверхности, где напряжение поля E направлено внутрь тела, можно обнаружить присутствие отрицательного электричества, а на противоположной стороне тела, где напряжение E направлено наружу — скопляется положительное электричество. Это явление называется электростатической индукцией. Если мы имеем дело с непроводником электричества (диэлектриком), то явление электростатической индукции в нем происходит аналогично описанному выше (стр. 221) явлению магнитной индукции: в каждом участке, выделенном из этого тела можно обнаружить взаимно равные количества положительного и отрицательного электричества, расположенные на противоположных концах выделенного куска. Это явление носит название поляризации диэлектрика. Если мы такой участок возьмем (фиг. 307) в виде призматического тела с длиною l параллельной напряжению E поля, и с основаниями S, перпендикулярными к нему; и если при этом обозначим количества электричества на двух его основаниях — e и + e, — то величина

$$P = el \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

[1]) По сведениям полученным мною от В. П. Вологдина у некоторых кристаллов ε меняется в зависимости не только от направления, но и от e_1, e_2, иногда очень сильно.

называется электрическим моментом выделенного участка, а величина

$$\Pi = \frac{P}{V} = \frac{el}{V} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

называется степенью поляризации или величиной поляризации диэлектрика аналогично степени намагничения J (см. часть XIII форм. 7). Здесь V означает объем взятого участка диэлектрика.

Аналогично формуле $J = \varkappa H$ для магнитной индукции (§ 120, форм. 8) мы имеем здесь:

$$\Pi = \gamma E^{1}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6),$$

где E напряжение электрического поля, а γ — постоянный для данного диэлектрика коэффициент, называемый электрической восприимчивостью данного диэлектрика. Далее имеем:

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\gamma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

совершенно аналогично формуле (9) части XIII.

Для количественного изучения явлений электростатической индукции в диэлектриках измеряют величины или 1) диэлектрической постоянной (электрической проницаемости) ε или 2) электрической восприимчивости γ.

Для более ясного представления о физическом значении диэлектрической постоянной ε остановимся здесь на этом вопросе.

1. Мы определили ε, как коэффициент в формуле (3):

$$f_{\Sigma} = \frac{e_1 e_2}{\varepsilon r^2}.$$

Для пустоты имеем: $\varepsilon = 1$, и

$$f_1 = \frac{e_1 e_2}{r^2},$$

откуда

$$\varepsilon = \frac{f_1}{f_\varepsilon}$$

Т.-е. ε показывает во сколько раз сила притяжения одних и тех же количеств электричества e_1, e_2 при одном и том же расстоянии r между ними меньше в диэлектрике, чем в пустоте (или приблизительно — чем в воздухе).

2. Можно также доказать, что

$$\varepsilon = \frac{q_\varepsilon}{q_1},$$

т.-е., что ε показывает, во сколько раз емкость конденсатора с данным диэлектриком между его прокладками больше емкости его с пустотой (воздухом) между прокладками.

3. Наконец, укажем, что по теории Maxwell'a

$$\varepsilon = n^2, \text{ где}$$

n — есть показатель преломления лучей с бесконечно большой длиной волны в той же среде, для которой берется диэлектрическая постоянная ε.

---

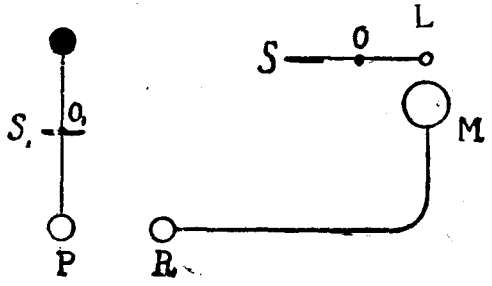
[1]) Следует заметить, что точные исследования последнего времени показали, что γ меняется в зависимости от E (см. выноску на стр. 242).

Эти соотношения кладутся в основу практических методов определения величины ε как у изотропных тел, так и у кристаллов. Мы ограничимся, однако, описанием лишь простейшего из этих методов, где указанные соотношения применяются лишь косвенно.

б) Методы определения диэлектрической постоянной ε.

Для определения ε одним из простейших, но менее точным, является метод Л. Больтцмана [1]). Он состоит в следующем (фиг. 308).

Шарик L из испытуемого кристалла укрепляется на одном конце коромысла крутильных весов, подвешенных в точке O на нити, идущей нормально к чертежу. На другом конце того же коромысла укреплено зеркальце S, посредством которого меряется угол отклонения коромысла SL вокруг O. Металлическому шару M сообщается некоторый заряд, создающий вокруг себя электрическое поле и индуктирующий электричество в испытуемом диэлектрическом шарике L. Последний тогда притягивается к M. Сила притяжения при малых углах кручения весов SOL прямо пропорциональна углу кручения α, определяемому, как указано, посредством наблюдения в трубу делений освещенной скалы в зеркальце S (см. описание фиг. 282). Таким образом имеем $f = c \cdot \alpha$. Если испытуемый шарик L заменим равным ему шариком из какого-либо проводника и, не меняя заряда шара M, снова измерим угол кручения α_0, то будем иметь для этого случая $f_0 = c \cdot \alpha_0$. Отсюда



Фиг. 308.
Схема опыта Больтцмана для определения диэлектрической постоянной ε кристаллического шарика L.

$$\frac{f}{f_0} = \frac{\alpha}{\alpha_0}$$

Но можно показать, что если опыт ведется в воздухе, и если диэлектрическая постоянная испытуемого шарика L по направлению линии центров LM равна ε, то

$$\frac{f}{f_0} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}$$

Сравнивая последние 2 уравнения, находим

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{\alpha}{\alpha_0};$$

или:

$$\alpha_0 \varepsilon - \alpha_0 = \alpha\varepsilon + 2\alpha, \text{ откуда: } (\alpha_0 - \alpha)\ \varepsilon = 2\alpha + \alpha_0.$$

И окончательно:

$$\varepsilon = \frac{3\alpha}{\alpha_0 - \alpha} + 1 = \frac{3}{\frac{\alpha_0}{\alpha} - 1} + 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8).$$

Левая часть аппарата фигуры 308 служит для измерения относительной величины заряда шара M. Шар R — проводник и связан метал-

[1]) О. Д. Хвольсон. Курс физики 1923. IV. 303.

лически с M, следовательно, потенциалы их равны. Шар R индуктирует проводящий шарик P и притягивает его. Угол кручения нити O_1 измеряется с помощью зеркальца S_1. Во сколько раз *больше при* двух разных опытах (при разных зарядах шаров M и R) угол кручения нити O_1, во столько же раз больше будет и угол кручения нити O. Поэтому для сравнимости двух или нескольких разных опытов с разными шариками L надо прежде всего определить углы кручения β, β', β'' и т. д. нити O_1 при этих опытах и затем каждый из измеренных соответственных углов кручения $\alpha, \alpha', \alpha'' \ldots$ нити O привести к одному и тому же заряду, например, тому, при котором была получена пара углов первого опыта α и β. Тогда, например, если α' и β' соответствуют второму опыту (со вторым шариком) при заряде, отличном от заряда при первом опыте, мы так найдем угол α'_0, на который повернулось бы коромысло O при том же заряде, что и в первом опыте:

$$\frac{\alpha'_0}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'}, \qquad \text{откуда:} \qquad \alpha'_0 = \frac{\beta \cdot \alpha'}{\beta'}$$

Больтцман производил свои измерения над шариком из монокристалла [1]) серы (ромбической сингонии). Поворачивая его последовательно по направлениям [100], [010] и [001] к шару M, он определял диэлектрические постоянные ε_1, ε_2 и ε_3 кристалла серы по этим трем направлениям.

Другие методы основаны на изменении емкости конденсатора в зависимости от диэлектрической постоянной того диэлектрика, который находится между его обкладками (Curie, Schmidt). Третьи — на самоустановке в определенное положение кристаллических дисков и палочек, подвешенных между пластинами заряженного конденсатора (Fellinger).

Следует указать на то, что точное определение величин ε и γ встречает ряд экспериментальных трудностей, отсутствующих при определении соответственных величин μ и $\varkappa$ для магнитной индукции. Одна из главных трудностей зависит от наличия в диэлектриках некоторой проводимости. Вследствие проводимости положительное электричество в диэлектрике BC (фиг. 307) под влиянием внешнего поля E при указанном на фиг. 307 расположении будет перемещаться вправо, а отрицательное — влево. (Если бы в качестве тела BC был взят не диэлектрик, а проводник, то все индуктированное электричество скопилось бы на его поверхности, и внутри его никакой диэлектрической поляризации не существовало бы).

Поэтому количества электричества $+e$ и $-e$, которые можно обнаружить на сторонах CG и BD диэлектрика (фиг. 307) будут с начала опыта с течением времени увеличиваться до некоторого предела. Следовательно, согласно формуле (5) будет увеличиваться кажущаяся величина поляризации Π, а потому, по формуле (6) будет увеличиваться γ, а также по формуле (7) и ε.

По этой причине, например, способом Больтцмана в описанном выше виде мы определим всегда значения ε больше истинных, если только проводимость испытуемого кристалла (или вообще вещества) будет достигать сколько-нибудь заметной величины.

Чтобы избежать этой погрешности пользуются не постоянным электрическим полем, а переменным. Так как поляризация всего диэлектрика наступает и исчезает мгновенно, то при перемене знака

[1]) Монокристаллом называют кусок кристаллического вещества с наружными гранями или без них, принадлежащий одному индивиду, в отличие от поликристалла, т.-е. агрегата нескольких или многих монокристаллов.

заряда у шара A (фиг. 307) моментально изменятся знаки зарядов диэлектрической поляризации на гранях BD и CG, и диэлектрик BDCG будет попрежнему притягиваться к шару A. При этом, если перемены знаков зарядов шара A будут достаточно часты, например, 40 раз и более в секунду, то сила притяжения будет зависеть только от диэлектрической поляризации, так как проводимость будет действовать после каждой перемены заряда в обратную сторону, и дополнительные заряды проводимости не будут успевать скапливаться на концах диэлектрика.

Переменным полем в своих опытах пользовались: Больцман, Кюри, Феллингер. Штарке (Starke) применял даже электрические колебания для поляризации диэлектрика.

Переходим к результатам всех этих определений.

в) Цифровые результаты определения диэлектрической постоянной ε.

Напомним, что мы имели следующие аналогии:

	Магнитная	Электрическая
Восприимчивость	$\varkappa$	γ
Проницаемость	μ	ε
Зависимость между ними	$\mu=1+4\pi\varkappa$	$\varepsilon=1+4\pi\gamma$

Как мы видели в части XIII, в настоящее время имеются довольно детальные измерения величины $\varkappa$ для ряда кристаллов, и ход изменения $\varkappa$ по разным направлениям в одном и том же кристалле довольно отчетливо выясняется кривыми П. Вейсса и Дж. Форреста (фиг. 302 и 306).

Можно думать, что ход изменения величины γ с направлением является для кристаллов аналогичным.

Если это так, то из этого можно, например, заключить, что кристаллы кубической сингонии не являются в отношении диэлектрической индукции изотропными, а для кристаллов низших сингоний нельзя вывести величину γ по любому направлению, зная величины γ_1, γ_2, γ_3 по трем главным осям диэлектрической индукции и построив на них эллипсоид, как это полагал У. Томсон.

Однако, пока мы имеем для кубических кристаллов лишь определение в каждом случае одного значения ε в предположении их диэлектрической изотропности, а для других кристаллов — лишь определения значения ε по двум (для средних сингоний) или по трем (для низших сингоний) главным направлениям.

Приведем здесь несколько примеров [1]), чтобы иметь представление о цифровых значениях этих величин. При этом для суждения о степени точности приводимых данных мы приведем результаты измерений, произведенных для одних и тех же кристаллов различными способами.

---

[1]) Наиболее полная сводка этих данных имеется у Landolt-Börnstein Phys.-chem.m. Tabellen 1923. II. 1042.

Кристалл	Сингония	Автор	Диэлектрическая постоянная ε		
Галит	Кубическая	Кюри [1]	5,85		
NaCl		Штарке [1]	6,29		
		Шмидт [1]	5,55		
		Рубенс-Никольс [1]	4,55		
		Рубенс [1]	4,8		
Берилл	Гексагональная		$E \parallel L_6$ [2]	$E \perp L_6$	
$[SiO_3]_6Al_2Be_3$		Штарке	7,44	7,85	
		Феллингер	6,08	7,02	
		Кюри	6,05	7,10	
		Либиш-Рубенс [1]	6,0	5,9	
		»	5,8	6,0	
Рутил	Тетрагональная		$E \parallel L_4$ [2]	$E \perp L_4$	
TiO_2		Шмидт	173	89	
Сера	Ромбическая		E ‖ [100]	E ‖ [010]	E ‖ [001]
S		Больтцман [1]	3,81	3,97	4,77
		Борель	3,65	3,85	4,66
		Шмидт	3,62	3,85	4,66
Гипс	Моноклинная		ε_I $E \perp [010]$ $\angle E:[001]=102°,5$ [3]	ε_{II} $E \parallel [010]$	ε_{III} $E \perp [010]$ $\angle E:[001]=12°,5$
$CaSO_4 2H_2O$		Шмидт-Дубберт	5,04	5,15	9,92

[1]) П. Кюри пользовался изменением емкости конденсатора при возможно менее продолжительном электростатическом заряде. Г. Штарке — также конденсатором, но при переменном токе. В. Шмидт — тоже емкостью конденсатора, но заряжаемого очень быстрыми электрическими колебаниями. Рубенс — электрическими лучами. Рубенс и Никольс — вычисляли ε с помощью формулы $\varepsilon = n^2$ (стр. 243) из оптических данных, так же как и Либиш и Рубенс. Больтцман определял ε вышеописанным способом (стр. 244).

[2]) E — напряжение электрического поля, L_6, L_4 — шестерная или четверная поворотные оси симметрии.

[3]) Эти углы считаются в сторону тупого угла между [001] и [100].

К этой таблице сделаем следующие дополнительные замечания.

а) У изученных кристаллов величина ε колеблется, примерно от 3,28 (лимонная кислота || [001]) до 173 (рутил || L_4).

б) Если судить по кремневой кислоте (SiO_2), то у кристаллов ε выше, чем у аморфных тел того же состава: для кварца $\varepsilon = 4{,}27$ до 5,06; для сплавленного кварца $\varepsilon = 3{,}20$ до 3,78.

в) Колебания определений ε у одного и того же вещества разными методами пока настолько велики, что преждевременно говорить о точных законностях, связывающих величину ε с изменением направления в одном и том же кристалле.

г) При диэлектрической поляризации кристаллов (и вообще анизотропных веществ) направление поляризации P не совпадает в общем случае с направлением индуктирующего электрического поля E (стр. 242).

д) Повидимому, если направление E идет вдоль какой-либо оси симметрии (кроме двойной зеркально-поворотной), то направление поляризации P или П совпадает с E.

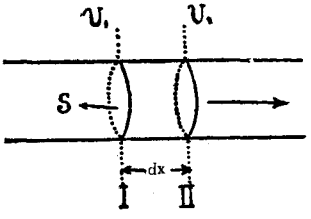
е) В моноклинной сингонии имеются три взаимно перпендикулярные главные оси диэлектрической индукции, обладающие тем свойством, что если напряжение E направлено вдоль какой-либо из них, то возникающая поляризация P совпадает с этим направлением. Одна из этих главных осей направлена вдоль [010], а две другие лежат в (010), при чем их положение здесь меняется от температуры и давления и различно у различных веществ (подобно аналогичным осям оптического эллипсоида).

§ 132. Электропроводность кристаллов.

а) Основные понятия.

Электропроводностью называется способность физического тела проводить электрический ток. Основным уравнением в учении об электрическом токе является следующее:

$$de = \sigma \frac{dv \cdot s}{dx} dt \quad \ldots\ldots\ldots (1).$$



Фиг. 309.

Здесь (фиг. 309) de — количество электричества, протекающее чрез проводник;

σ — коэффициент пропорциональности, зависящий лишь от вещества проводника, но не зависящий от его формы и от приложенной к нему разности потенциалов;

$dv = v_1 - v_2$ — разность потенциалов между двумя бесконечно близкими сечениями I и II проводника.

dx — бесконечно малая длина этого участка проводника.

s — площадь его поперечного сечения в этом бесконечно коротком участке.

dt — бесконечно малый промежуток времени, в течение которого измеряется de.

Коэффициент σ, зависящий от вещества проводника, и называется удельной электропроводностью данного вещества в направлении x. Если на протяжении x проводника потенциал падает равномерно, сечение s не изменяется, и физические свойства вещества, а следова-

тельно, и σ, — также не меняются, то диференциальная формула (1) превращается в конечную:

$$e = \sigma \frac{(v_2 - v_1)s}{x} \cdot t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Эти уравнения (1) и (2) показывают, что количество электричества, протекающее в единицу времени, прямо пропорционально разности потенциалов и площади поперечного сечения проводника и обратно пропорционально длине проводника.

Ставя опыт так, чтобы $v_2 - v_1 = 1, s = 1, x = 1$, мы получим:

$$I_0 = \frac{e_0}{t} = \sigma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Эта формула показывает, что численно **удельная проводимость** (или удельная электропроводность) равна силе тока, т.-е. количеству электричества, пропускаемому в единицу времени сквозь проводник, сделанный из данного вещества, когда 1) поперечное сечение его, 2) длина его и 3) разность потенциалов, приложенных у его концов, равны все порознь единице.

Величина ρ, обратная σ, называется **удельным сопротивлением** данного вещества:

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{v_2 - v_1}{e/t} \cdot \frac{s}{x},$$

или

$$\rho = \frac{v_2 - v_1}{I} \cdot \frac{s}{x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Если мы напишем последнее уравнение так:

$$\left(\frac{x}{s} \cdot \rho\right) I = v_2 - v_1$$

или

$$RI = E \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5),$$

то мы получаем так называемый **закон Ома**, гласящий, что электродвижущая сила E равна произведению силы тока I на сопротивление проводника R. Так как при этом:

$$R = \frac{x}{s} \cdot \rho,$$

то это значит, что сопротивление прямо пропорционально длине проводника и обратно пропорционально площади поперечного сечения его (при постоянном s по всей длине x).

Если проводник имеет $x = 1$ и $s = 1$, то $R_0 = \rho$. Следовательно, удельное сопротивление ρ данного вещества есть сопротивление его отрезка длиною в 1 *см* и поперечным сечением в 1 *кв. см*.

Из уравнения (4) теперь видим, что при $s = 1$ и $x = 1$

$$\rho = \frac{v_2 - v_1}{I}$$

За единицу измерения сопротивлений принимается сопротивление такого проводника, в котором при разности потенциалов в 1 вольт течет ток в 1 ампер. Эта единица называется **ом**. Беря в качестве эталон-

ного вещества ртуть, установили, что ом есть сопротивление ртутного столба при 0° с поперечным сечением в 1 *мм*² и длиною в 106,3 *см*.

Удельная проводимость σ, а следовательно, и удельное сопротивление ρ варьируют для разных веществ в широких пределах. Тела, хорошо проводящие электричество, для которых, следовательно, σ велика и ρ мало,— называются проводниками.

Тела, очень плохо проводящие или почти не проводящие электрического тока,— называются непроводниками. Резкой границы между ними нет. Непроводники иначе называются диэлектриками.

Простой зависимости между диэлектрической постоянной ε вещества и его удельным сопротивлением ρ не существует. Но приблизительно можно считать, что с уменьшением ρ увеличивается ε, т.-е. приблизительно, чем лучше тело проводит ток, тем больше его диэлектрическая постоянная. Для проводников диэлектрическая постоянная может быть принята равной бесконечности.

б) Два рода электропроводности.

В кристаллах, как и в других телах различают:

1) проводимость металлическую или электронную и 2) проводимость электролитическую или ионную.

Типичными проводниками первого рода или первого класса являются металлы, а второго — растворы большинства солей.

В первом случае заметного изменения вещества проводника не происходит, и заряд переносится электронами, бегущими сквозь проводник от катода к аноду.

Во-втором случае электричество переносится посредством ионов, т.-е. заряженных атомов или групп атомов, на которые разложена часть нейтральных молекул проводника (напр., $CuSO_4$ в водном растворе разложен частью на катионы Cu^{++} и анионы SO_4^{--}).

Под влиянием приложенной к концам проводника разности потенциалов катионы движутся к катоду, а анионы — к аноду, перенося с собою заряды.

В этом параграфе излагается далее чисто геометрическая теория проводимости, исходящая: 1) из закона анизотропности кристаллов и 2) из некоторого простого (хотя и произвольного) обобщения закона Ома, и не включающая в себе никаких иных недоказанных опытом гипотез. Поэтому эта теория применима, как к электронной, так и к ионной проводимости. К последней, однако, лишь при правильном ее понимании, о чем будет сказано в следующих параграфах.

в) Различие между электропроводностью изотропных и анизотропных веществ.

Основное различие между этими двумя видами веществ заключается в том, что у изотропных в отношении электропроводности тел это свойство, а следовательно, и удельное сопротивление одинаково по всем направлениям, у анизотропных—меняется с направлением.

Представим себе некоторый проводник в виде бесконечного плоского слоя, толщиною n, изображенного в поперечном сечении ABCD на фиг. 310. Предположим что на плоскости AC мы поддерживаем постоянный во времени потенциал v_1, а на плоскости BD — потенциал v_2 (также постоянный). Если вещество слоя физически однородно, то как при его изо-

тропности, так и при анизотропности падение потенциала вдоль нормали GG' к AC и BD будет равномерно и притом совершенно одинаково для любой нормали. Поэтому поверхности равных потенциалов (или изопотенциальные) внутри слоя ABCD будут представлять плоскости, параллельные AC и BD.

Падение потенциала на единицу длины обозначим через v.

Вдоль нормали это падение $v_n = \frac{v_1 - v_2}{n}$ будет, очевидно, максимальным, так как (фиг. 310):

$$v_d = \frac{v_1 - v_2}{d} = v_n \cos \delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

В изотропной среде удельное сопротивление одинаково по всем направлениям.

Заметим также, что в изотропной среде сила тока по закону Ома вполне определяется напряжением и сопротивлением, а именно из формулы 5 имеем:

$$I = \frac{E}{R};$$

или обозначая чрез s поперечное сечение проводника, чрез ρ — его удельное сопротивление и далее $\frac{I}{s}$ чрез i, из формулы (4) получаем

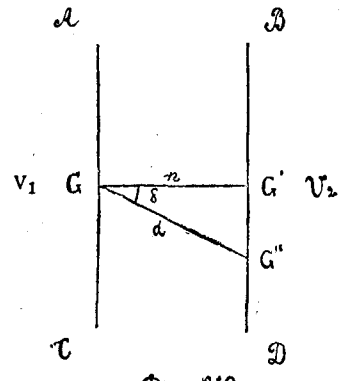
$$i = \frac{I}{s} = \frac{v_1 - v_2}{x} \cdot \frac{1}{\rho},$$

или

$$i = \frac{v}{\rho} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7),$$

где

$$v = \frac{v_1 - v_2}{x}$$



Фиг. 310.

есть падение потенциала на единицу расстояния. Так как $v = \frac{v_1 - v_2}{x}$ имеет, согласно вышесказанному, во всяком однородном слое ABCD (фиг. 310) наибольшую величину по направлению нормали n, то для изотропной среды сила тока на единицу поперечного сечения проводника $i = \frac{I}{s}$ будет наибольшая по направлению n (фиг. 310).

В анизотропной среде удельное сопротивление ρ различно в разных направлениях, и потому максимальная сила тока может наблюдаться не при максимуме v и, следовательно, направление максимума силы тока не совпадает в общем случае с нормалью к изопотенциальным поверхностям.

г) Понятие о геометрической теории электропроводности анизотропной среды [1]).

Закон изменения силы тока i в анизотропной среде по направлению и величине в зависимости от направления и величины напряжения v нам

[1]) Излагаемая здесь теория в равной мере применима и к тепловодности, о чем было уже сказано на стр. 211.

в точности неизвестен. Стокес (Stokes) [1]) подошел (в 1851 г.) к выяснению его следующим образом.

Из формулы 7 имеем для изотропных тел:

$$v = \rho i.$$

Если изобразим v и i векторами, то оба они пойдут по одному направлению. Разложив каждый из них на составляющие векторы по какой-либо прямоугольной системе координат XYZ, получим соответственно v_x, v_y, v_z, и i_x, i_y, i_z. При этом в виду тождества направлений v и i будем иметь:

$$v_x = \rho i_x,\ v_y = \rho i_y,\ v_z = \rho i_z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8).$$

Для случая анизотропного вещества Стокес предположил следующую (линейную) зависимость между слагающими:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \rho_{11} i_x + \rho_{12} i_y + \rho_{13} i_z \\ v_y &= \rho_{21} i_x + \rho_{22} i_y + \rho_{23} i_z \\ v_z &= \rho_{31} i_x + \rho_{32} i_y + \rho_{33} i_z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9).$$

Принятие этого предположения подразумевает: 1) что векторы v и i в общем случае не совпадают по направлению, так как иначе мы имели бы зависимость (8); 2) что с увеличением i пропорционально увеличивается v (и обратно), так как, если i увеличим в n раз, то его слагающие обратятся в ni_x, ni_y, ni_z, следовательно, слагающие напряжения (из форм. 9) обратятся в nv_x, nv_y, nv_z, и значит вектор напряжения обратится в nv. При этом направление v не меняется, если не меняется направление i.

Зависимость (9), как линейная, есть простейшая, удовлетворяющая только что указанным условиям. Она аналогична как бы обобщенному закону Гука, о котором мы узнали в главе об упругости кристаллов, и может быть названа обобщенным законом Ома.

Как это мы делали в главе об упругости, мы можем решить систему уравнений (9) относительно i_x, i_y, i_z. Тогда получим систему такого вида:

$$\left.\begin{aligned} i_x &= \sigma_{11} v_x + \sigma_{12} v_y + \sigma_{13} v_z \\ i_y &= \sigma_{21} v_x + \sigma_{22} v_y + \sigma_{23} v_z \\ i_z &= \sigma_{31} v_x + \sigma_{32} v_y + \sigma_{33} v_z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9\text{-а})$$

При этом коэффициенты σ_{mn} найдутся из коэффициентов ρ_{mn}, как известно из метода решения линейных систем уравнений, так:

$$\sigma_{11} = \frac{\begin{vmatrix} \rho_{22} & \rho_{23} \\ \rho_{32} & \rho_{33} \end{vmatrix}}{\Delta};\ \sigma_{12} = \frac{\begin{vmatrix} \rho_{23} & \rho_{21} \\ \rho_{33} & \rho_{31} \end{vmatrix}}{\Delta};\ \sigma_{13} = \frac{\begin{vmatrix} \rho_{21} & \rho_{22} \\ \rho_{31} & \rho_{32} \end{vmatrix}}{\Delta}$$

и т. д.

Здесь

$$\Delta = \begin{vmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} \end{vmatrix}$$

Коэффициенты ρ_{11}, ρ_{12} ... называются коэффициентами сопротивления, а σ_{11}, σ_{12} ... коэффициентами проводимости.

---

[1]) См. Ch. Sorret. Elements des cristallographie physique. 1893. 483. Также W. Voigt l. c. 305 и след. и 340, 370

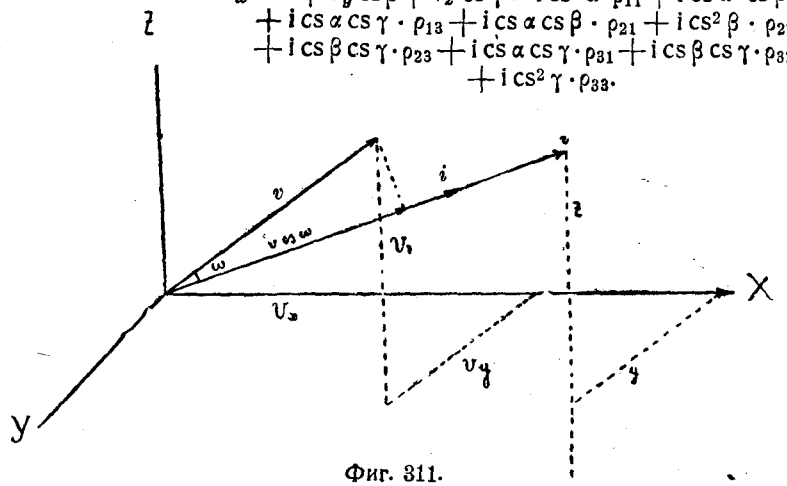
Чтобы сделать зависимость между напряжением поля v и силой тока i более наглядной, перейдем от их составляющих к самим векторам v и i. Что v есть напряжение поля,—следует из определения потенциала v (стр. 225) и напряжения E (стр. 242).

Для этого умножим равенства 9 соответственно на cs α, cs β, cs γ, где α, β, γ суть углы вектора i с осями координат. В то же время заменим:

$$\begin{aligned} i_x &\text{ через } i \cos\alpha \\ i_y &\text{ » } i \cos\beta \\ i_z &\text{ » } i \cos\gamma. \end{aligned}$$

После этого почленно сложим полученные равенства. Тогда окажется:

$$\begin{aligned} v_x \cos\alpha + v_y \cos\beta + v_z \cos\gamma = {} & i\cos^2\alpha\cdot\rho_{11} + i\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\rho_{12} + \\ & + i\cos\alpha\cos\gamma\cdot\rho_{13} + i\cos\alpha\cos\beta\cdot\rho_{21} + i\cos^2\beta\cdot\rho_{22} + \\ & + i\cos\beta\cos\gamma\cdot\rho_{23} + i\cos\alpha\cos\gamma\cdot\rho_{31} + i\cos\beta\cos\gamma\cdot\rho_{32} + \\ & + i\cos^2\gamma\cdot\rho_{33}. \end{aligned}$$



Фиг. 311.

v — вектор максимального падения напряжения. i — вектор максимальной силы тока. r — вектор корня квадратного из проводимости $r = \sqrt{\sigma_i}$.

Имея в виду, что в левой части этого равенства содержится проекция ломаной $v_x v_y v_z$ (фиг. 311) на направление вектора i, заменяем ее проекцией замыкающей эту ломанную v на то же направление:

$$\begin{aligned} v\cos\omega = i\{ & \rho_{11}\cos^2\alpha + \rho_{12}\cos\alpha\cos\beta + \rho_{13}\cos\alpha\cos\gamma + \rho_{21}\cos\alpha\cos\beta + \rho_{22}\cos^2\beta + \\ & + \rho_{23}\cos\beta\cos\gamma + \rho_{31}\cos\alpha\cos\gamma + \rho_{32}\cos\beta\cos\gamma + \rho_{33}\cos^2\gamma \} \quad . \quad . \quad . \quad (10). \end{aligned}$$

Отсюда

$$i = \frac{1}{\{\ \}} v_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Здесь { } есть многочлен, заключенный в предыдущей формуле в скобки, а v_i — падение напряжения на единицу длины вдоль вектора i [1]).

---

[1]) Изопотенциальные поверхности в однородном бесконечном слое (фиг. 310) будут, как сказано выше, плоскостями, нормальными к вектору v. Поэтому, если такую плоскость проведем на расстоянии = 1 вдоль вектора v, то она отсечет на направлении i отрезок $= \frac{1}{\cos\omega}$. На этом отрезке падение потенциала вдоль i будет такое же как вдоль направления v на отрезке = 1, т.-е. v. А на единицу длины вдоль вектора i падение потенциала будет равно $v_i = \frac{v}{\frac{1}{\cos\omega}} = v\cos\omega$.

Формула (11), выведенная для анизотропных веществ аналогична формуле (7) для изотропных: $i = \frac{1}{\rho} v = \sigma v$ . . . (7). Следует, однако, помнить, что формула (11) справедлива лишь: 1) при относительно небольших отклонениях свойств среды от изотропности, когда $\angle \omega$ расхождения векторов i и v невелик, и изопотенциальные поверхности в пределах этого угла могут быть приняты за плоскости; 2) при сделанных нами выше произвольных допущениях (формулы 9).

Теперь мы видим, что величина $\{\ \} = \rho_i$ аналогична удельному сопротивлению ρ изотропных веществ, а следовательно $\frac{1}{\{\ \}}$, которую мы обозначим через σ_i, аналогична удельной проводимости σ в направлении вектора i.

Однако, ρ_i и σ_i меняются здесь с изменением направления i, так как величина $\{\ \}$ зависит от α, β, γ, т.-е. от углов, составляемых i с осями координат.

Наша ближайшая задача и заключается в том, чтобы вывести математическую (аналитическую и геометрическую) зависимость проводимости σ_i от направления, т.-е. от α, β, γ.

Введем обозначение:

$$\frac{1}{\{\ \}} = \pm \sigma_i = \pm r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12),$$

откуда: $r^2 \{\ \} = \pm 1$.

Здесь знак $+$ берется тогда, когда величина $\{\ \}$ положительна, а знак $-$, — когда она отрицательна. Это необходимо потому, что удельная проводимость σ_i всегда положительна. В обратном случае из формулы 11 видно, что i и v_i имели бы разные знаки, т.-е. ток шел бы в сторону, обратную падению потенциала, что невозможно. При этом условии выбора знака вектор r будет всегда иметь реальное значение.

Будем теперь представлять r в виде вектора, отложенного вдоль i (фиг. 311).

Тогда из формул (12) и (10) получаем:

$$\rho_{11} r^2 \cos^2\alpha + \rho_{12} r^2 \cos\alpha \cos\beta + \rho_{13} r^2 \cos\alpha \cos\gamma + \rho_{21} r^2 \cos\alpha \cos\beta + \rho_{22} r^2 \cos^2\beta + \rho_{23} r^2 \cos\beta \cos\gamma + \rho_{31} r^2 \cos\alpha \cos\gamma + \rho_{32} r^2 \cos\beta \cos\gamma + \rho_{33} r^2 \cos^2\gamma = \pm 1.$$

Имеем в виду (фиг. 311), что $r\cos\alpha = x$, $r\cos\beta = y$, $r\cos\gamma = z$ где, x, y, z — координаты конца любого переменного вектора r, делающего углы α, β и γ с осями координат. Тогда получаем:

$$\rho_{11} x^2 + \rho_{12} xy + \rho_{13} xz + \rho_{21} xy + \rho_{22} y^2 + \rho_{23} yz + \rho_{31} xz + \rho_{32} yz + \rho_{33} z^2 = \pm 1.$$

Или:

$$\rho_{11} x^2 + \rho_{22} y^2 + \rho_{33} z^2 + (\rho_{12} + \rho_{21}) xy + (\rho_{23} + \rho_{32}) yz + (\rho_{13} + \rho_{31}) xz = \pm 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Это уравнение (13) есть уравнение некоторой поверхности второго порядка с центром в начале координат (в виду отсутствия членов первых степеней относительно неизвестных). Назовем ее поверхностью проводимости кристалла. Эта поверхность аналитически может быть лишь эллипсоидом или гиперболоидом (но не параболоидом, так как параболоид центра не имеет). Можно показать, что в данном конкретном физическом случае это будет эллипсоид.

Для этого напомним, что, согласно нашему условию (12), каждый радиус-вектор r поверхности (13) есть корень квадратный из удельной проводимости кристалла в направлении r, когда в этом направлении идет ток. Из этого ясно, что поверхность (13) для данного кристалла не зависит от того, как мы выбираем оси координат для составления ее уравнения.

С другой стороны при выводе уравнения поверхности (13) мы не ставили осям координат никаких ограничений.

Поэтому при любой системе координатных осей, напр., при некоторой $x'\,y'\,z'$, вид уравнения поверхности проводимости, так же как и вид зависимостей v_x, v_y, v_z от i_x, i_y, i_z будет сохраняться. Лишь коэффициенты ρ_{11}, $\rho_{12}\ldots$ и σ_{11}, $\sigma_{12}\ldots$ будут получать новые значения, напр.,

$$\rho'_{11},\ \rho'_{12}\ldots,\ \sigma'_{11},\ \sigma'_{12}\ldots$$

Выберем новую координатную систему $x_0\,y_0\,z_0$ так, чтобы коэффициенты при x_0y_0, y_0z_0, x_0z_0 в соответствующем уравнении поверхности проводимости, аналогичном уравнению (13), каждый порознь обратились в 0. Другими словами возьмем за новые оси координат $x_0\,y_0\,z_0$ главные оси поверхности (13). Тогда получим:

$$\rho^0_{12}+\rho^0_{21}=0;\ \rho^0_{23}+\rho^0_{32}=0;\ \rho^0_{13}+\rho^0_{31}=0$$

и

$$\rho^0_{11}\,x_0^2+\rho^0_{22}\,y_0^2+\rho^0_{33}\,z_0^2=\pm 1\ \ldots\ldots\ldots\ (14).$$

Для выяснения физического смысла коэффициентов ρ^0_{11}, ρ^0_{22} ρ^0_{33} в этом уравнении поверхности проводимости, обратимся к зависимостям (9), из которых мы исходили, и которые теперь примут такой вид:

$$\begin{aligned}
v_{x_0} &= \rho^0_{11}\,i_{x_0}+\rho^0_{12}\,i_{y_0}+\rho^0_{13}\,i_{z_0}\\
v_{y_0} &= \rho^0_{21}\,i_{x_0}+\rho^0_{22}\,i_{y_0}+\rho^0_{23}\,i_{z_0}\\
v_{z_0} &= \rho^0_{13}\,i_{x_0}+\rho^0_{32}\,i_{y_0}+\rho^0_{33}\,i_{z_0}
\end{aligned}$$

Пусть ток I в кристалле направляется по оси x_0. Назовем его i_I. Тогда $i_{x_0}=i_I$; $i_{y_0}=i_{z_0}=0$, и мы получаем из этих трех уравнений:

$$v_{x_0}=\rho^0_{11}\,i_I;\ v_{y_0}=\rho^0_{21}\,i_I;\ v_{z_0}=\rho^0_{31}\,i_I.$$

Первое из трех последних равенств показывает, что

$$\rho^0_{11}=\frac{v_{x_0}}{i_I}=\frac{1}{i_I/v_{x_0}}=\frac{1}{\sigma_I}$$

Здесь $\sigma_I=\dfrac{i_I}{v_{x_0}}$, согласно формулам (11) и (12), есть ни что иное, как удельная проводимость кристалла по направлению оси x_0.

Также точно найдем, что

$$\rho^0_{22}=\frac{1}{\sigma_{II}}\ \text{и}\ \rho^0_{33}=\frac{1}{\sigma_{III}},$$

где σ_{II} и σ_{III} суть удельные проводимости кристалла по осям y_0 и z_0, т.-е. по двум остальным осям симметрии его поверхности проводимости (13) или (14).

Тот же результат мы можем получить и проще следующим рассуждением.

Уравнение (14) напишем так:

$$\frac{x_0^2}{1/\rho_{11}^0}+\frac{y_0^2}{1/\rho_{22}^0}+\frac{z_0^2}{1/\rho_{33}^0}=\pm 1 \quad \ldots\ldots\ldots (15).$$

Отсюда видно, что величины $1/\rho_{11}^0$, $1/\rho_{22}^0$, $1/\rho_{33}^0$ суть квадраты полуосей поверхности (14). А полуоси ее суть ее радиусы-векторы, а квадрат каждого радиуса-вектора этой поверхности, согласно ее построению (форм. 12) равен удельной проводимости кристалла в направлении этого радиуса. Следовательно:

$$1/\rho_{11}^0=\sigma_I;\ 1/\rho_{22}^0=\sigma_{II};\ 1/\rho_{33}^0=\sigma_{III}$$

Теперь заметим, что удельные проводимости σ_I, σ_{II}, σ_{III} в реальных, кристаллах всегда положительны. Чтобы это пояснить, перепишем здесь формулу (11) [при наличии формулы (12)] в таком виде:

$$i=\sigma_i\ v_i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (16).$$

А так как $v_i = v \cos\omega$ (фиг. 311), то

$$i=\sigma_i\ v\cos\omega.$$

Или

$$\sigma_i=\frac{i}{v\cos\omega}$$

Величины i и v по существу своему положительны. Поэтому σ_i может быть отрицательна лишь при $\cos\omega$ отрицательном, т.-е. при $270^\circ > \omega > 90^\circ$. Однако, такого сильного расхождения между векторами i и v (фиг. 311) не может быть, так как это обозначало бы, что ток идет в сторону обратную падению потенциала, т.-е. от потенциала низшего к высшему, что невозможно.

Положительные знаки у σ_I, σ_{II}, σ_{III}, т.-е. у всех знаменателей в левой части формулы (15), показывают, что в правой ее части для нашего случая (электропроводности) следует взять знак + у единицы, ибо лишь в таком случае все координаты x_0, y_0, z_0 любой точки поверхности (15), а следовательно, и все ее радиусы-векторы будут реальны. Тогда уравнение поверхности проводимости примет окончательно такой вид:

$$\frac{x_0^2}{\sigma_I}+\frac{y_0^2}{\sigma_{II}}+\frac{z_0^2}{\sigma_{III}}=1. \quad \ldots\ldots\ldots (17).$$

Это есть уравнение эллипсоида (при $\sigma_I > 0$, $\sigma_{II} > 0$ и $\sigma_{III} > 0$).

Относительно вида и положения этого эллипсоида в кристаллах различных сингоний сохраняются, конечно, в силе правила, указанные нами ранее для эллипсоида показателей преломления.

д) Опытные данные об электропроводности кристаллов.

Для измерения удельной проводимости в кристалле по определенному направлению пропускают ток по тонкому стержню, вырезанному из него в этом направлении.

В таком случае (фиг. 312) направление тока i параллельно длине стержня. Поверхности же равных потенциалов ($v = \text{const}$), не перпендикулярны к i, как в изотропных веществах, но наклонены к нему под косым углом, и соответственно этому вектор v, которым мы изображали выше максимальное падение потенциала на единицу длины, составляет здесь некоторый угол с вектором i.

Прилагая теперь к концам стержня AB разность потенциалов $v_2 - v_1$, мы будем иметь падение потенциала на единицу длины по направлению AB, т.-е. по направлению тока i:

$$v_{AB} = \frac{v_2 - v_1}{l},$$

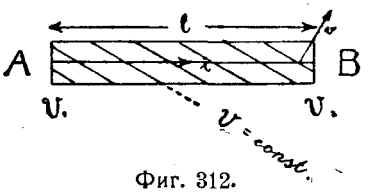
где l длина стержня AB.

Зная v_1 и v_2 и измеряя силу тока i_{AB}, идущего при взятой разности потенциалов по стержню, мы определим сопротивление стержня, а следовательно, и обратную ему величину — линейную проводимость в направлении AB по формуле (16), выражающей закон Ома:

$$i_{AB} = \sigma_{AB} \cdot v_{AB},$$

откуда

$$\sigma_{AB} = \frac{i_{AB}}{v_{AB}}$$



Фиг. 312.
Изопотенциальные поверхности $v = \text{const}$ в анизотропном стержне не перпендикулярны к направлению тока i.

Вырезая такие стержни вдоль трех главных осей эллипсоида проводимости (17), мы можем определить непосредственно из опыта величины его полуосей σ_I, σ_{II}, σ_{III}, чем будет определен весь эллипсоид, и после чего, следовательно, можно будет вычислить проводимость по любому заданному направлению.

При этом наличие симметрии в кристалле упрощает эти определения. Так, мы знаем, что

для кубической сингонии $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$
» тетрагональн. и
» гексагональной » $\sigma_I = \sigma_{II} \neq \sigma_{III}$
» ромбической » $\sigma_I \neq \sigma_{II} \neq \sigma_{III}$

Направление осей эллипсоида в кристаллах этих сингоний, как мы знаем уже из части IX (*кристаллооптики*), заранее известно, и потому выбор направлений, по которым необходимо вырезать стержни для этих опытов, не представляет затруднений.

У моноклинных кристаллов известно заранее положение лишь одной из осей эллипсоида, а у триклинных — ни одной. Здесь необходимо определение σ_i по некоторым произвольным направлениям, а затем уже вычисление полуосей эллипсоида проводимости по формулам.

Стерженьками для определения проводимости пользовались Маттеучи для висмута и Г. Бекстрём [1]), для дитригонально-скаленоэдрического гематита — Fe_2O_3, кристаллическими пластинками, зажатыми между электродами, — Ж. Кюри [2]) и А. Ф. Иоффе [3]).

---

[1]) Ch. Matteucci (1885) и H. Bäckström (1888) См. W. Voigt. I. c. 343.
[2]) J. Curie. Sur le pouvoir inducteur specifique et la conductibilité des corps cristallisés. — Ann. ch. ph. XVII 1889. 402.
[3]) А. Ф. Иоффе. Физика кристаллов. 1929. 74.

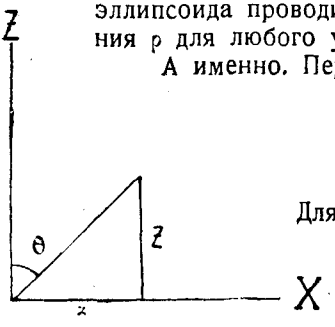
Изложим кратко сначала результаты измерений Бекстрёма. Он применял стерженьки длиною от 1 до 3 *см* и с прямоугольным поперечным сечением площадью от 2 до 3 *кв. мм.*

При этом прежде всего было установлено, что удельная проводимость этих кристаллов возрастает, а удельное сопротивление уменьшается с повышением температуры t:

t	ρ_I	ρ_{III}
0	0,408	0,808
17°	0,351	0,687
100°	0,183	0,331

Здесь ρ_I и ρ_{III} выражены в омах и дают, согласно определению, сопротивление стерженька кристалла в 1 *см* длины и сечением в 1 *см*^{2}. При этом $\rho_I \perp Л_6$, а $\rho_{III} \parallel Л_6$ гематита (Fe_2O_3) ($Л_6$ — шестерная зеркально-поворотная ось).

Для проверки развитой выше геометрической теории электропроводности Бекстрём определил ρ также для ряда стержней, вырезанных под различными углами θ к $Л_6$. Зная ρ_I и ρ_{III} и имея уравнение (17) эллипсоида проводимости, можно вычислить теоретические значения ρ для любого угла θ.



Фиг. 313.

А именно. Перепишем уравнение (17):

$$\frac{x_0^2}{\sigma_I}+\frac{y_0^2}{\sigma_{II}}+\frac{z_0^2}{\sigma_{III}}=1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17).$$

Для кристаллов не ниже ромбической сингонии, у которых направления σ_I и ρ_I, σ_{II} и ρ_{II}, σ_{III} и ρ_{III} по-парно совпадают, уравнение это можно написать так:

$$\rho_I x_0^2+\rho_{II} y_0^2+\rho_{III} z_0^2=1 \quad . \quad . \quad . \quad (18).$$

потому что $\rho=\frac{1}{\sigma}$, если ρ и σ взяты для одного и того же направления.

Для кристаллов гексагональной (и тетрагональной) сингонии, в том числе и для Fe_2O_3, $\rho_I=\rho_{II}$, следовательно:

$$\rho_I x_0^2+\rho_I y_0^2+\rho_{III} z_0^2=1$$

В сечении этого эллипсоида координатной плоскостью $y=0$ получим эллипс

$$\rho_I x_0^2+\rho_{III} z_0^2=1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19).$$

Радиусы-векторы r этого эллипса, как и все вообще радиусы векторы эллипсоида проводимости, связаны с проводимостью σ по тому же направлению зависимостью [см. форм. (12)]:

$$r^2=\sigma=\frac{1}{\rho}$$

В то же время имеем (фиг. 313)

$$x=r\sin\theta;\quad z=r\cos\theta.$$

Подставляя в (19):

$$\frac{1}{r^2} = \rho_I \sin^2\theta + \rho_{III} \cos^2\theta$$

или

$$\rho_\theta = \rho_I \sin^2\theta + \rho_{III} \cos^2\theta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (20)$$

По формуле (20), зная ρ_I, ρ_{III} и θ без труда определим ρ_θ.

Опытные определения и вычисления Бекстрёма дали следующие цифры (при температуре 17°):

θ	ρ_θ	Наблюд.	Вычисл.
0°	ρ_{III}	0,687 ом	0,6825 ом [1])
27°50′	ρ'	0,605 »	0,6097 »
38°06′	ρ''	0,547 »	0,5554 »
90°	ρ_I	0,351 »	0,3486 » [1])

Как видим, наблюденные и вычисленные величины близки друг другу. В пределах точности метода их можно считать совпадающими.

Аналогично для кристаллов дитригонально-скаленоэдрического висмута Л. ван-Эвердинген [2]) нашел:

θ	ρ_θ	Наблюд.	Вычисл.
0°	ρ_{III}	$3{,}48 \times 10^{-4}$ ом	$3{,}62 \times 10^{-4}$ ом
60°	ρ'	$2{,}72 \times 10^{-4}$ »	$2{,}65 \times 10^{-4}$ »
90°	ρ_I	$2{,}23 \times 10^{-4}$ »	$2{,}32 \times 10^{-4}$ »

Совпадение наблюденных и вычисленных ρ и здесь можно считать удовлетворительным.

Эти немногие наблюдения как будто показывают, что теория эллипсоида проводимости отвечает фактам.

Однако, Ж. Кюри [3]) уже в 1889 году показал, что проводимость кристаллов, во-первых, меняется для одного и того же вещества от образца к образцу, и, во-вторых, не остается постоянной по мере прохождения тока. Первое обстоятельство зависит от существования неоднородностей и примесей физических и химических, вообще различных в различных кристаллах одного и того же вещества. Второе — зависит частью также от примесей, частью же от электролиза кристаллов, о котором будет сказано в следующем параграфе.

То, что причиной неодинаковой проводимости у разных кристаллов одного и того же вещества являются, кроме случайных физических неоднородностей, примеси, — было доказано А. Ф. Иоффе и М. В. Кирпичевой [4]). Беря различные кристаллы аммониевых квасцов $[SO_4]_2\,Al\,[NH_4] \cdot 12\,H_2O$ с начальной проводимостью, отличавшеюся друг от друга во много (до 36) раз, и очищая их перекристаллизацией, т. е., последовательно растворяя

---

[1]) Наблюденные и вычисленные значения не только для ρ' и ρ'', но также для ρ_I и ρ_{III} здесь не совпадают потому, что Бекстрём при вычислениях за исходные величины принимал не только наблюденные им ρ_I и ρ_{III}, но все наблюденные ρ, т.-е. ρ_I, ρ', ρ'', ρ_{III}, и вычислил наиболее вероятную систему значений всей этих ρ, удовлетворяющих эллипсу.

[2]) L. van Everdingen (1901) цитируется по W. Voigt'y l. c. 345.

[3]) J. Curie. l. c. Также: Recherches sur la conductibilité des corps cristallisés. Ann. de ch. et phys. 6 XVIII. 1889. 203.

[4]) А. Ф. Иоффе. Физика кристаллов. 1929. 87.

и вновь кристаллизуя их, сливая всякий раз прочь маточный раствор с посторонними примесями, эти исследователи получили после 3-й кристаллизации одинаковую проводимость у всех исследованных образцов.

Из этих опытов Ж. Кюри и А. Ф. Иоффе следует, что вышеприведенные цифры Бекстрёма и ван Эвердингена нельзя признать достаточными для окончательного доказательства теории эллипсоида проводимости в кристаллах, так как при получении этих цифр результаты опытов Иоффе-Кирпичевой не могли быть приняты во внимание, и понятие об истинной удельной проводимости было недостаточно выяснено.

Существенным противоречием теории эллипсоида проводимости служил бы опыт Ф. Брауна [1]) с кристаллами каменной соли (NaCl), относящимися к кубической сингонии. По этим опытам проводимость этих кристаллов по направлениям нормалей к (100), (110) и (111) оказывались различной, следовательно, не выражалась шаром.

Однако, опыты Ж. Кюри [2]) над тем же NaCl и Иоффе-Кирпичевой [3]) над аммониевыми квасцами и опять над хлористым натром дали равенство проводимостей по всем этим направлениям. Повидимому, результаты Брауна зависели от кристаллографически-закономерных неоднородностей в изучавшихся им кристаллах, например, включений рассола, располагавшихся по определенным кристаллографическим направлениям.

Второе существенное противоречие теории эллипсоида электропроводности кристаллов представляет констатированное в некоторых случаях наличие у некоторых кристаллов так называемой *униполярной проводимости*, т. е. различие проводимости в некоторых прямо противоположных направлениях.

Так, по опытам Пирса [4]) кристаллы карборунда (SiC — тригональной подсингонии) обладают проводимостью в одном направлении в 4000 раз большею, чем в прямопротивоположном. Подобные же свойства обнаружили кристаллы молибденита (MoS_2—гексагональный, м. б. ромбический), анатаза (TiO_2 — дитетрагонально-дипирамидальный), брукита (TiO_2 — ромбо-дипирамидальный), пирита (FeS_2 — дидодекаэдрический), галенита (PbS — гексоктаэдрический), а также полукристаллического (плотного или лучисто-жилковатого) псиломелана ($Mn_2O_3 \cdot nMnO_2 \cdot mH_2O$). Это явление униполярной проводимости находит себе применение в радиотелеграфии, где некоторыми «кристаллами», точнее аггрегатами кристалликов некоторых минералов, пользуются для выпрямления переменного тока, вследствие существования у них униполярной проводимости. Однако, вопрос о том, — насколько такая проводимость связана с кристаллическим строением и насколько с различными другими факторами, — примесями, закономерными физическими неоднородностями, строением аггрегатов из отдельных не-униполярных кристаллов и т. д. — пока нельзя считать выясненным [5]).

---

[1]) F. Braun. Über das elektrische Verhalten des Steinsalzes. Ann. d. Phys. N. F. 31. 855. 1887.

[2]) Ann. d. ch. et. ph. 1889. 233.

[3]) L. c., 90.

[4]) См. О. Д. Хвольсон. Курс физики 1923 г. IV. 528.

[5]) Из более новых работ по этому вопросу упомянем работу Schleede u. Ruggisch. — Zur Frage der Richtung des «gleichgerichteten Stromes beim Kristalldetector». Phys. Z. XXVIII. 1927. 174.

См. также E. T. Wherry. Radio-Detektor minerals. — Am. Mineralogist. 1925. V. 10. № 2. 28.

К этому добавим,, что измерения Ж. Кюри [1]) а также С. П. Томпсона и О. Д. Лоджа [2]), произведенные над турмалином (дитригонально-пирамидальным, следовательно, с кристаллографически не равными концами тройной оси) дали одинаковую величину проводимости по прямо противоположным направлениям тройной оси кристалла.

Относительно числовых значений удельного сопротивления кристаллов, кроме приведенных уже выше цифр для полупроводника — гематита (Fe_2O_3) ($\rho =$ прибл. 0,5 ома) и проводника—висмута ($\rho =$ прибл. 3×10^{-4} ома) укажем здесь, что для диэлектриков (непроводников) ρ значительно больше. Так, для кварца (SiO_2—тригонально-трапецоэдрический) Ж. Кюри [3]) дает, как средние величины:

$$\rho \parallel L_3 = 1{\cdot}2 + 10^{14} \text{ ома},$$
$$\rho \perp L_3 = 3{\cdot}3 + 10^{16} \text{ »}$$

Как видим, вдоль главной оси симметрии кварц проводит электричество почти в 300 раз лучше, чем перпендикулярно к ней. Этот коэффициент еще значительно возрастает по мере прохождения тока.

е) Влияние температуры на электропроводность кристаллов.

Электропроводность кристаллов, как и других тел, — тонко кристаллических аггрегатов и аморфных веществ, вообще меняется при повышении температуры, нередко весьма резко.

Выше (на стр. 258) были приведены цифры Бекстрёма, показывающие что электропроводность гематита (Fe_2O_3) возрастает, а удельное сопротивление падает более, чем в 2 раза с повышением температуры от 0° до 100°. Для кварца вдоль оси L_3 по измерениям Ж. Кюри [4]) имеем:

t	ρ_{III}
20°	$1{,}2 \times 10^{14}$ ома
100°	$8{,}2 \times 10^{11}$ »
300°	$5{,}6 \times 10^{7}$ »

т. е. при повышении температуры от 20° до 100° удельное сопротивление уменьшается почти в 150 раз, а для интервала 20°—300° даже более чем в 2000000 раз.

Убывание удельного сопротивления с возрастанием температуры констатировано Ж. Кюри также для кристаллов слюды $[(KH)_2Al_2Si_2O_8]$ каменной соли (NaCl), флюорита (CaF_2), кальцита ($CaCO_3$). А. Ф. Иоффе [5]) и его сотрудники установили то же для ряда нитратов и сульфатов.

Иоффе на основании своих опытов дает такую эмпирическую формулу:

$$\lg \sigma = -\frac{a}{T} + \beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21).$$

---

[1]) L. c. 238.

[2]) S. P. Thompson and O. J. Lodge (1879) см. W. Voigt l. c. 366.

[3]) L. c. 256. Как увидим дальше, кажущееся сопротивление кварца возрастает по мере прохождения тока. Здесь приведены значения удельного сопротивления через 1 минуту после замыкания цепи.

[4]) L. c. 215. Оригинальные цифры Ж. Кюри дают удельную электропроводность в CGS электростатических единицах. Приведенные здесь цифры получаются делением 9×10^{11} на цифры Ж. Кюри.

[5]) L. c. 92.

или

$$\sigma = e^{-\frac{\alpha}{T}+\beta}$$

Здесь σ—удельная электропроводность кристалла, T—абсолютная температура, α и β—константы, особые для каждого вещества. Для температуры от 600° до 800° для NaCl формула (21) оказывается [1]) малопригодной и может быть заменена такой:

$$\lg \sigma = at + b,$$

или

$$\sigma = e^{at+b}.$$

Однако, известно, что металлы обладают обратным свойством: их удельное сопротивление с повышением температуры возрастает.

Кёнигсбергер и его сотрудники [2]) указали своими измерениями, что у многих кристаллических минералов удельное сопротивление имеет минимум при некоторой температуре, так что возрастание или убывание сопротивления при повышении температуры зависит от того, в какую сторону от 0° лежит этот минимум.

Для пирита (FeS_2), напр., минимум ρ наблюдается приблизительно в промежутке от 0° до 20°, в обе стороны от этой температуры ρ увеличивается, при том в сторону охлаждения—быстрее.

Для магнетита (Fe_3O_4) минимум ρ наблюдается при 229°, поэтому при нагревании ρ будет уменьшаться до этой точки, а затем увеличиваться.

Кёнигсбергер дает такую приближенную эмпирическую формулу:

$$\rho = A\ (1 + at + bt^2)\ e^{\frac{c}{T}}$$

Как видим, вопрос зависимости сопротивления от температуры не является пока достаточно выясненным. Возможно, что электронная проводимость металлов и ионная (электролитическая) проводимость солей и вообще гетерополярных [3]) кристаллов подчиняются различным законностям, и в ряде кристаллов те и другие налагаются друг на друга и усложняют это явление.

Дальнейшие усложнения должны вносить в изучение электропроводности при изменении температуры явления пироэлектричества, которые будут описаны далее.

§ 133. Электролиз кристаллов.

а) Краткое напоминание сущности электролиза.

На стр. 250 было указано, что различают два вида электропроводности: электронную (металлическую) и ионную (электролитическую). При электронной (напр., у металлов) атомы и молекулы проводника

[1]) Н. С. Усатая и Б. М. Гохберг. Докл. Ак. Н. 1927. 57.

[2]) Koenigsberger, Reichenheim, Schilling (1906–1910). См. О. Д. Хвольсон. Курс физики V. 44, 52. 1923.

[3]) Состоящих из электроположительных и электроотрицательных атомов или групп атомов.

не смещаются, заряды переносятся электронами. При ионной (например, в растворах большинства солей) заряды переносятся ионами, т.-е. заряженными атомами или группами атомов вещества проводника. В последнем случае движутся, следовательно, под влиянием разности потенциалов частицы вещества проводника. Так, в растворе $CuSO_4$ при пропускании через него тока ионы $Cu++$ и So_4-- на которые диссоциирована часть молекул $CuSO_4$, движутся соответственно первый к катоду (катион), второй к аноду (анион). Там они отдают свой заряд и или выделяются в свободном состоянии (медь на катоде) или вступают в реакцию с веществом электрода или растворителя (SO_4 с цинком анода). В то же время в растворе образуются взамен удаленных током новые соответственные количества ионов $Cu++$ и SO_4-- чрез диссоциацию нейтральных молекул $CuSO_4$. И процесс продолжается во все время прохождения тока.

Этот процесс прохождения тока, сопровождающийся переносом составных частей вещества проводника к электродам или вещества одного электрода к другому, называется электролизом. А проводник, в котором этот процесс происходит, называется электролитом [1]).

Количество веществ, выделяемых электролизом или электролитом, определяется по законам Фарадея, которые формулируются так: весовое количество каких-либо ионов, выделяемых электролизом, пропорционально: 1) количеству протекшего электричества и 2) атомному или молекулярному весу этого иона:

$$Q = \frac{1}{F} \cdot e\,A \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24).$$

Здесь Q количество выделенного вещества (напр., Cu), $\frac{1}{F}$ постоянный для всех случаев коэффициент, зависящий от выбора единиц измерения веса Q и количества протекшего электричества e, при чем $e = It$ (I—сила тока в цепи, t—время опыта), A—молекулярный или атомный вес выделяющегося вещества. Если Q—в граммах, e—в кулонах, то $F = 96490$ [2]).

При пропускании тока через электролит может быть 2 случая: или при неизменной разности потенциалов $v_1 - v_2$ у электродов сила тока не меняется, или сила тока при этом с течением времени изменяется, в большинстве случаев уменьшается. Это явление происходит оттого, что вследствие электролиза природа электродов меняется: на их поверхности отлагаются или образуются новые вещества,—продукты химических реакций, идущих в электролите под влиянием тока. Эти новообразования или меняют проводимость электродов или в соприкосновении с электролитом развивают новую электродвижущую силу e, обратную той, которая приложена к электродам.

Явление убывания тока, пропускаемого через электролит при постоянной внешней разности потенциалов,—называется электролитической поляризацией или поляризацией электродов. А обратная электродвижущая сила e, развивающаяся при этом в системе электролит-электроды, называется электродвижущей силой поляризации. Ее можно обнаружить, если выключить источник тока и включить между электродами вместо него гальванометр: он покажет ток, идущий в обратном направлении.

---

[1]) Нередко электролитом называют лишь растворенное вещество и говорят: «раствор электролита».

[2]) О. Д. Хвольсон. I. с. IV. 517.

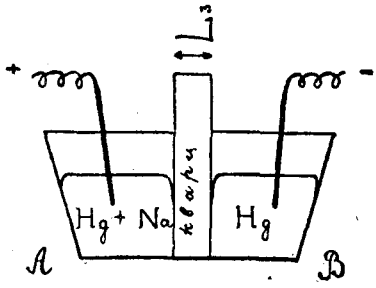
Как известно, этим явлением электролитической поляризации пользуются для устройства (заряжения) аккумуляторов.

Первоначально явления электролиза были открыты и изучены в жидких электролитах (растворах и расплавах). Но затем те же явления были установлены и в твердых телах.

б) Первые экспериментальные работы по электролизу кристаллов.

Начало этим работам было положено Э. Варбургом и Ф. Тегетмейером [1]).

Прежде всего, они обнаружили, что если через пластинку кварца, вырезанную перпендикулярно к оси L_3, пропускать ток, то он постепенно убывает, вследствие возникновения в кристалле электродвижущей силы поляризации, обратно направленной по сравнению с приложенной извне. Эту электродвижущую силу поляризации можно обнаружить так же, как это было описано выше для электролитической поляризации: если убрать источник тока и замкнуть электроды через чувствительный указатель тока. Последний покажет тогда обратный ток.



Фиг. 314.
Перенос ионов Na электрическим током сквозь кварцевую пластинку в ртутной ванне (опыт Варбурга и Тегетмейера).

Схема другого важного их опыта изображена на фиг. 314.

Сосуд AB разделен на две изолированные части кварцевой пластинкой, вырезанной перпендикулярно к тройной оси симметрии L_3. В каждое отделение сосуда налита ртуть, в которую опущены электроды. К той ртути, в которой анод, добавлено некоторое количество растворенного в ней Na. После пропускания тока ($t = 200° — 300°$) оказывается, что катодная ртуть содержит некоторое количество Na, пропорциональное количеству всего протекшего электричества, как это требует закон Фарадея для электролиза.

При этом сила тока с течением времени не убывала. Если же Na не был примешан к ртути, то ток постепенно убывал.

Почти одновременно с работами Э. Варбурга—Ф. Тегетмейера появились, упоминавшиеся выше, работы Ж. Кюри. Он установил своими многочисленными опытами для целого ряда кристаллов-диэлектриков наличие как постепенного спадания тока, так и обратного тока при выключении источника, замыкании электродов внешнею по отношению к кристаллу цепью и измерении идущего в этой цепи тока особым весьма чувствительным электрометром.

Ж. Кюри установил диэлектрическую постоянную и изучил электропроводность следующих кристаллов: кварца (SiO_2), слюды $(HK)_2\ Al_2\ Si_2O_8$, кальцита ($CaCO_3$), турмалина (боро-силикат Mg, Fe, K, Cs, Li), берилла ($Be_3Al_2Si_6O_{18}$), топаза ($Al_2\ (OH,F)_2\ SiO_4$), серы (S), гипса ($CaSO_4 \cdot 2H_2O$), галита (NaCl), квасцов ($K\ Al[SO_4]_2 \cdot 12H_2O$), флюорита ($CaF_2$).

Он обнаружил, кроме других, частью уже упоминавшихся явлений, что при более высокой температуре спадание заряжающего тока идет медленнее, чем при более низкой. Затем он указал, что если кварц на-

[1]) E. Warburg und F. Tegetmeier. Ann. d. Phys. N. F. **32**, 442. 1887 и **35**. 455. 1888.

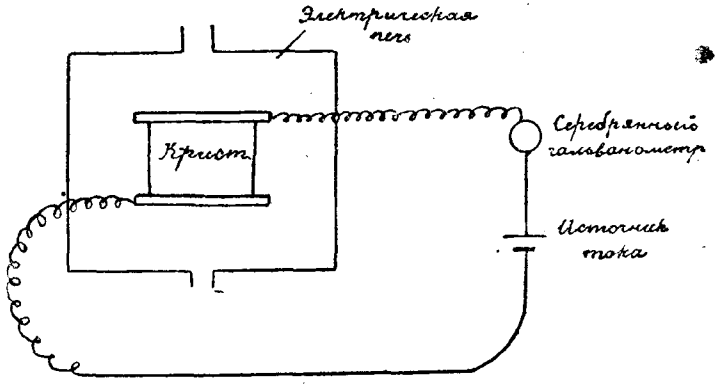
греть до каления красного или белого, то он теряет свою сравнительно значительную электропроводность вдоль оси L_3.

В качестве объяснения всех этих явлений Кюри выдвинул представление о возникающей при зарядке диэлектриков, в том числе и диэлектрических кристаллов, обратной электродвижущей силе, постепенно нарастающей и сводящей постепенно заряжающий ток *или к 0 или к* некоторому постоянному миниумму.

В возникновении этой обратной электродвижущей силы Ж. Кюри приписывал ошибочно главную роль воде, пропитывающей по его представлению кристаллы.

в) Новые работы по электролизу кристаллов.

В последнее время был произведен ряд важных экспериментальных работ, проливших много света на только что описанные в этом параграфе явления. Остановимся вкратце на этих работах.



Фиг. 315.
Схема прибора для изучения электролиза кристаллов. — По П. И. Лукирскому, С. А. Щукареву и О. Н. Трапезниковой.

П. И. Лукирский, С. А. Щукарев и О. Н. Трапезникова [1]) своими опытами над кристаллами NaCl, KCl и $CaCO_3$ дали наиболее наглядное и непосредственное доказательство электролиза кристаллов в том самом смысле, в каком мы его разумеем для жидких электролитов. Схема их опыта изображена на фиг. 315.

Кристалл NaCl величиною от 2 до 4 *кб. см.* помещался между серебряными электродами в электрическую печь, и опыт велся при температурах 300°—600°. Как мы уже знаем, повышение температуры значительно увеличивает электропроводность кристаллов-диэлектриков, при этом относительное влияние примесей на электропроводность самого вещества кристалла значительно понижается и, кроме того, ток, его эффект, а следовательно, и точность наблюдений усиливаются. К электродам подводился ток порядка нескольких десятых миллиампера, и количество всего протекшего за время опыта электричества измерялось включенным в цепь гальванометром. После пропускания тока электроды и кристалл взвеши-

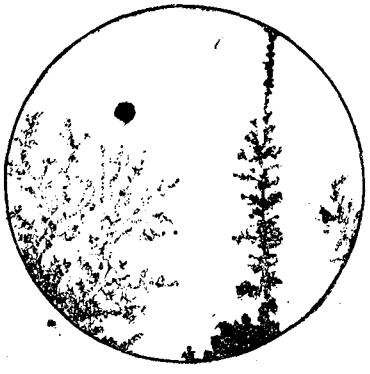
[1]) Электролиз кристаллов. Журн. Р. Физ.-Хим. Общ. **56** 5/6 1924. 453—461.

вались и изучались под микроскопом, и производились необходимые количественные химические их анализы.

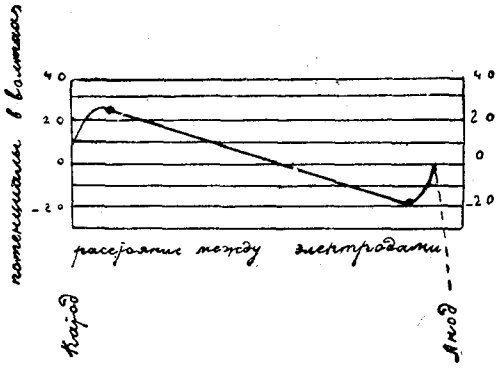
Оказалось, что серебряный анод уменьшался в весе, а катод прибывал. У анода видны были под микроскопом втеки в кристалл сплава $AgCl + NaCl$. На катоде, во-первых, обнаружено присутствие NaOH, Na_2CO_3 и окисление его поверхности за счет Na_2O_2; во-вторых, в кристалле близ катода замечены вростки-дендриты (1—2 *мм*) металлического Na (дендриты эти бурно растворяются водой) (фиг. 316).

По мере роста дендритов проводимость кристалла все увеличивается. Наконец, происходит пробой. Тогда видна непрерывная жилка металлического натрия от катода до анода толщиною в 0,2—0,5 *мм*.

Количества выделившегося на катоде Na и связанного хлором Ag анода оказались как раз такими, какие требуются законами Фарадея для того тока, какой был в каждом опыте пропущен и измерен гальвано-



Фиг. 316.
Дендриты металлического натрия в кристалле NaCl близ катода после электролиза. — По Лукирскому и сотр.



Фиг. 317 [1]).
Распределение потенциала по длине кристалла кварца между электродами после его зарядки и заземления электродов.

метром установки. Таким образом наглядно видно, что перенос электричества идет здесь ионами, т.-е. частицами вещества. При этом авторы полагают, что движутся здесь ионы Na от анода к катоду, а ионы Cl образуются и остаются у анода неподвижными.

Микронаблюдения показывают, что по всему пути прохождения тока кристалл мутнеет. Муть состоит из «очагов разрушения» кристаллической решетки в виде полукруглых лунок.

Авторы так представляют себе здесь механизм прохождения тока. В кристалле, вследствие тепловых движений ионы могут попадать в такие места внутреннего электрического поля (вызванного самой кристаллической структурой), что обратно в прежнее положение равновесия они не возвращаются. Пропускание тока заставляет эти ионы двигаться в определенном направлении.

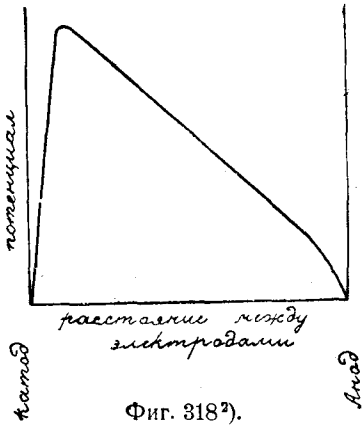
Весьма существенные вопросы проявления поляризационной электродвижущей силы в диэлектрических кристаллах освещены А. Ф. Иоффе

---

[1]) А. Ф. Иоффе. Физика кристаллов. 108.

и его сотрудниками [1]). Ими установлены два типа диэлектрических кристаллов в этом отношении. В кварце и слюде заряд, создающий обратный (т.-е. поляризационный) ток, накопляется более или менее равномерно: у положительного электрода при зарядке скопляется отрицательный заряд, а у отрицательного — положительный, падение потенциала от катода к аноду — постепенное (фиг. 317).

У кальцита же — весь скачек потенциала распределяется лишь на весьма тонкий слой от 1 до 2 микронов у катода, где и сосредоточен положительный заряд, уменьшающий силу тока при зарядке кристалла и дающий обратный ток при замыкании кристалла на себя (фиг. 318).



Фиг. 318 [2]).

Распределение потенциала по длине кристалла кальцита между электродами после его зарядки и заземления электродов.

§ 134. Процессы, возбуждающие электричество у кристаллов.

Из разнообразных источников, возбуждающих электричество у физических тел вообще, многие электризуют в том числе и кристаллы, а некоторые исключительно в кристаллах вызывают появление электрических зарядов.

Перечислим здесь причины электризации кристаллов:

1) Трение, вызывающее появление так называемого *трибоэлектричества*. Для кристаллов изучалось Н. А. Гезехусом [3]), установившим между прочим, что некоторые кристаллы можно расположить в ряд, в котором при трении двух входящих в него кристаллов каждый предидущий заряжается положительно, а каждый последующий отрицательно. Притом в этом ряду твердость убывает от более электроположительных к более электроотрицательным. Вот этот ряд Гезехуса: (+) алмаз (тв. 10), топаз (тв. 8), горный хрусталь (тв. 7), гладкое стекло (тв. 5), слюда (тв. 3), кальцит (тв. 3), сера (тв. 2), воск (тв. < 1) (—).

2) Механические деформации, напр., сжатие и растяжение, возбуждающие так называемое *пиезоэлектричество*.

3) Изменение температуры (нагревание и охлаждение), дающее *пироэлектричество*.

4) Освещение лучами от инфракрасных через видимые до ультрафиолетовых также электризует некоторые кристаллы по наблюдениям Ганкеля [4]).

В одних случаях (напр., у горного хрусталя) при этом заряды + и — распределяются на кристалле так же, как и пироэлектричество при охлаждении. В этих случаях наиболее действующими являются инфракрасные лучи. Появляющееся при этом электричество Ганкель назвал *актиноэлектричеством*.

---

[1]) А. Ф. Иоффе, Д. К. Синельников и Б. М. Гохберг. Высоковольтная поляризация в диэлектриках.—Ж. Р. Ф. О. **58**. 2. 1926. 105—113.

[2]) А. Ф Иоффе. Физика кристаллов, стр. 119.

[3]) О. Д. Хвольсон. Курс физики IV. 207. 1923.

[4]) Там же стр. 220.

В других случаях [напр., у окрашенных (особенно в зеленый цвет) флюоритов—CaF_2] положительные и отрицательные заряды распределяются на кристалле так, как пироэлектричество при нагревании. В этих случаях наиболее сильно действуют ультрафиолетовые лучи. Такие заряды Ганкель называет *фотоэлектричеством* [1]).

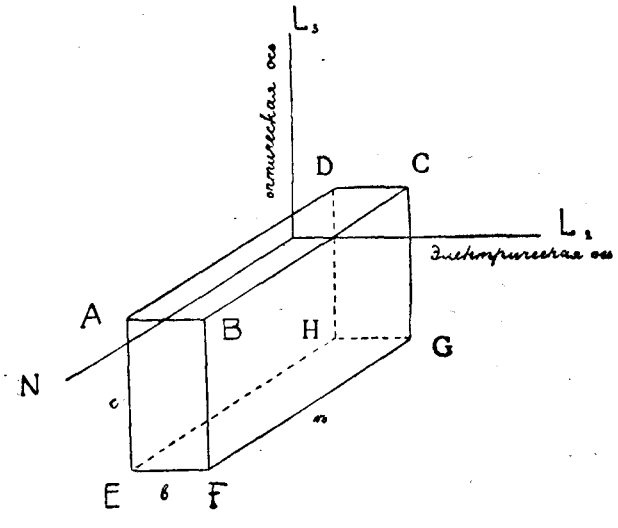
5) Нагреванием места соприкосновения двух различных кристаллов, как и многих других физических тел, можно иногда получить так называемое *термоэлектричество*. Такие пары тел называются, как известно, термоэлементами или термопарами [2]).

О явлениях электризации при трении и при освещении и о кристаллических термопарах мы ограничимся лишь сказанным здесь. Явления же пиезоэлектричества и пироэлектричества рассмотрим несколько подробнее.

§ 135. Пиезоэлектричество кристаллов.

а) Выделение электричества кристаллом кварца при давлении или растяжении.

Первые указания на пиезоэлектричество у кристаллов кальцита встречаются у Гаюи. Однако, лишь в 1880 г. братья Пьер и Жак Кюри [3]) открыли и изучили это явление, по-видимому, независимо от прежних о нем сведений. Очень ясно выражены и наиболее подробно изучены эти явления у кристаллов кварца (SiO_2)



Фиг. 319.
Схема обозначений для пиезоэлектрических свойств кварца.

Этот минерал кристаллизуется в тригонально - трапецоэдрическом виде симметрии; его кристаллы изображены на фиг. 16 (стр. 26) и 76 (стр. 37). Они обладают тройной поворотной осью и тремя перпендикулярными к ней двойными поворотными осями. Зеркально-поворотных осей, в том числе плоскостей симметрии и центра инверсии, у них нет. Поэтому они способны давать правые и левые (энантиоморфные, стр. 26) кристаллы. Все направления в них, нормальные к какой-либо из двойных осей являются

---

[1]) О четвертой упомянутой категории явлений, также как о предполагаемом выделении электричества и обусловливаемом им свечении при кристаллизации можно найти краткие указания с соотв. литературой у О. Д. Хвольсона. Курс физики IV. 1923. 220 и 212.

[2]) Там же стр. 623.

[3]) J. et P. Curie. Comptes rendus 1880 и 1881. Journal de Phys. 1882. Также цитированные выше работы J. Curie (см. стр. 257, 259). Кроме того, Comptes rendus. 1888, p. 1287 и Journ. de Phys. 25. 8. 1889. 149—168.

обратимыми, т.-е. разные концы одного и того же направления выводятся один из другого посредством элементов симметрии, а потому обладают одинаковыми свойствами. Все же остальные направления, т.-е. не перпендикулярные ни к одной из двойных осей симметрии, — необратимы, т.-е. разные концы каждого из них обладают разными свойствами.

Если из кристалла кварца вырезать прямоугольный параллелепипед A B C D E F G H (фиг. 319) так, чтобы одна система ребер (AE, BF, . . .) была параллельна оптической оси L_3, другая (AB, BF, ...)— одной из двойных осей L_2, называемых в этом случае, электрическими осями и, наконец, ребра третьей серии были бы нормальны одновременно к ребрам первых двух серий, — то при сжатии или растяжении такой препарат будет обнаруживать следующие свойства.

1) Сжимающая сила $f \parallel L_2$. При ее действии появляется электричество $+q$ и $-q$ на гранях, нормальных к электрической оси L_2. При этом количество q не зависит от размеров пластинки кварца. Оно равно

$$q_{L_2} = Kf \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Здесь K есть пиезоэлектрическая постоянная кварца. Из формулы видно, что численно она равна тому количеству электричества, которое выделяется при указанных условиях, если сила $f = 1$. О числовом значении константы K будет сказано дальше.

2) Сжимающая сила $f \parallel L_3$. Никакого выделения электричества не происходит: $q_{L_3} = 0$. Также и при растягивании.

3) Сжимающая сила $f \perp L_2$ и $f \perp L_3$. В этом случае, как и в первом, образуется заряд на тех же гранях, нормальных к оси L_2, но знак заряда будет обратный тому, какой получается в первом случае. Количество выделяемого на каждой из обеих граней электричества q теперь выражается такой формулой:

$$q_N = K \frac{n}{b} f \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26),$$

Здесь K — та же самая пиезоэлектрическая константа, что и в формуле (25), f — сжимающая (или растягивающая) сила, b — размер параллелепипеда вдоль электрической оси L_2 (фиг. 319) и n — размер его же вдоль силы f, т.-е. вдоль N ($N \perp L_3$ и $N \perp L_2$).

Когда вместо сжатия применяется растягивание, т.-е., когда f в формуле (26) меняет знак, то q меняет знак, т.-е. на той грани, где появлялся при сжатии положительный заряд, — появляется при растягивании отрицательный и наоборот.

б) Удлинение и укорочение кварца при его электризации.

Изменение размеров различных тел (в особенности диэлектриков) под влиянием электрического поля известно в физике под названием электрострикции [1]). Когда явления пиэзоэлектризации кристаллов были открыты братьями Кюри, тогда М. Липпманн, исходя из общих принципов термодинамики, предсказал явления электрострикции кварца. Согласно этим теоретическим соображениям, можно было ожидать, что если двум противолежащим граням кварцевого параллелепипеда фиг. 319

---

[1]) См. О. Д. Хвольсон l. c. IV. 258.

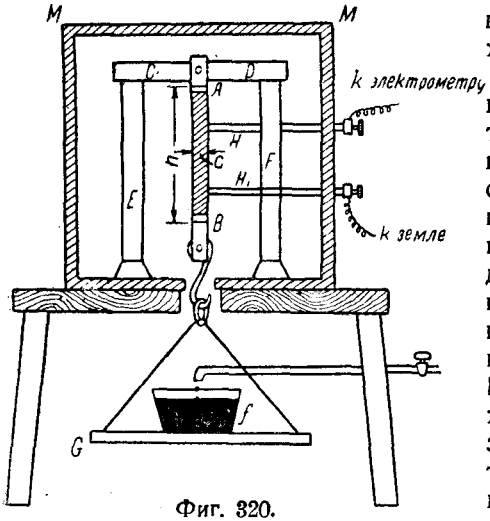
нормальным к электрической оси его L_2, сообщить разность потенциалов v, то параллелепипед вдоль разных своих ребер получит следующие удлинения:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \text{вдоль электрической оси } L_2 \ldots\ldots \delta_{L_2} = Kv. \\ 2)\ \text{вдоль оптической оси } L_3 \ldots\ldots\ldots \delta_{L_3} = 0 \\ 3)\ \text{» нормали } N\ (N \perp L_2,\ N \perp L_3)\ \delta_N = -K\frac{n}{b} \cdot v \end{array}\right\} \ldots (27).$$

В этих формулах δ обозначает удлинение по направлению, параллельному указателю при этой букве, v — приложенная разность потенциалов, остальные буквы имеют те же значения, что и в формулах (25) и (26).

в) Опыты братьев Кюри с пиезоэлектричеством кварца.

Эти опыты, во-первых, имели целью обнаружить пиезоэлектричество, во-вторых, они привели к выводу основных количественных законов (25) и (26) пиезоэлектричества, в третьих, — этими опытами было определено числовое значение пиезоэлектрической константы K.



Фиг. 320.
Аппарат П. и Ж. Кюри для опытов с пиезоэлектричеством.

Главная часть установки применявшейся ими в этих опытах изображена схематически на фиг. 320.

Здесь AB — испытуемая пластинка (параллелепипед) кварца. Две противолежащие грани этой пластинки посеребрены или к ним приклеены листочки олова, показанные на фиг. 320 штриховкой. Верхняя часть кварцевой пластинки укреплена в перекладине CD, поддерживаемой стойками E и F. К нижней части прикреплен крючок с платформой G, на которую помещают груз f (на чертеже — ртуть). К посеребренным граням кварца прижаты контакты H и H_1. Один из них заземлялся, другой соединялся с электрометром, которым можно было измерить выделившееся на грани кварца количество q пиезоэлектричества. Кварцевая пластинка заключена в металлический ящик MM, пространство, в котором старательно осушалось, так как по опытам Кюри влажность сильно влияет на электрические свойства кварца.

Этим прибором и были установлены те законы, которые выражаются формулами (25) и (26), показывающими, что количество электричества, выделяемого на грани кварца, нормальной к L_2, при действии силы f вдоль L_2, пропорционально нагрузке f и не зависит от размеров кварцевого параллелепипеда; а при действии силы f вдоль N, нормально к L_2 и к L_3, — тоже прямо пропорционально нагрузке f, но также прямо пропорционально размеру n кварца вдоль направления N и обратно пропорционально размеру b кварца вдоль электрической оси L_2.

При тех же опытах была определена численная величина пиезоэлектрической константы K кварца. Напомним формулу (25): $q_{L_2} = Kf$. Оказа-

лось, что, если q измерить электростатической CGS единицей количества электричества [1]), а f — дином, то

$$K = 6{,}32 \times 10^{-8}\ ^{2}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (28).$$

Из формул

$$q_{L_2} = Kf,$$

$$q_N = K\frac{n}{b} f$$

вытекает, что при заданной f и при действии ее вдоль L_2 мы получим от любого кварцевого параллелепипеда **независимо от его размеров** всегда одно и то же количество пиезоэлектричества $q\,L_2$.

При действии же f вдоль N, количество выделяемого пиезоэлектричества можно изменять, изменяя размеры n (вдоль N) и b (вдоль L_2) пластинки (фиг. 319). Если мы желаем, чтобы наш «пиезоэлектрический кварц» выделял при одной и той же силе f возможно больше электричества, мы должны возможно увеличивать размер пластинки вдоль N и возможно уменьшать ее толщину вдоль L_2. Придавая пластинке (фиг. 319 и 320) вдоль оси L_2 толщину $b = 0{,}5$ *мм* и вдоль оптической оси L_3 ширину $c = 20$ *мм*, можно доводить нагрузку f до 5 *кг*. В то же время такая пластинка дает чувствовать на электрометре при надлежащей установке нагрузку в 0,5 *г*. Таким образом наименьшая и наибольшая измеримые этим прибором величины относятся друг к другу как 1 : 10 000.

Если этот прибор раз навсегда проградуировать каким-либо способом, т.-е. определить, какое количество пиезоэлектричества выделяется его кварцем на 1 *г* нагрузки f, то тогда в нем мы имеем очень постоянный, чувствительный и простой вспомогательный прибор для быстрого определения целого ряда электрических свойств тел: емкостей, диэлектрических постоянных, малых проводимостей и потенциалов. Соединяя один из контактов H или H_1 градуированного пиезоэлектрического кварца Кюри (фиг. 320) с тем же электрометром, с которым соединено испытуемое тело, необходимо подобрать нагрузку на платформе G так, чтобы электрометр не дал бы отклонения своего указателя. Тогда искомый заряд тела будет равен и противоположен по знаку заряду q, выделенному пиезокварцем. А заряд q определяется по нагрузке f, лежащей на чашке G:

$$q = K\frac{n}{b} f = Cf,$$

где C — постоянный для данного прибора коэффициент, определяемый градуировкой. Именно с помощью такого пиезоэлектрического кварца Жак Кюри измерял диэлектрические постоянные и удельные электропроводности кристаллов, о чем говорилось в параграфах 131, 132, 133.

---

[1]) Эл.-стат. CGS единица количества электричества есть такое колич. эл., которое отталкивает равное ему и одноименное с ним колич. эл., находящееся от него на расстоянии в 1 *см* с силою равною 1 дину.

1 эл.-ст. CGS единица кол. эл. $= \frac{1}{3 \times 10^9}$ кулона (см. стр. 241).

1 дин $= 1{,}019 \times 10^{-3}$ *г*.

[2]) Более поздние определения дали числа:
$6{,}45 \times 10^{-8}$ (Riecke и Voigt, 1892), $6{,}94 \times 10^{-8}$ (Röntgen 1913).
См. О. Д. Хвольсон l. c. 219.

г) Опыты братьев Кюри по электрострикции кварца [1]).

Повторим здесь прежде всего формулы (27):

$$\left.\begin{aligned} \delta_{L_2} &= K\,v \\ \delta_{L_3} &= 0 \\ \delta_N &= -K\,\frac{n}{b}\,v \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27\text{-bis})$$

Из них мы видим, что при одном и том же v удлинение δ_{L_2} не зависит от размеров взятого кварцевого параллелепипеда. Зная, что $K = 6{,}32 \times 10^{-8}$ [2]) (см. выше форм. 28), мы можем вычислением показать, что удлинение δ_{L_2} имеет ничтожную величину даже для сравнительно высоких потенциалов. Например, для разности потенциалов

$$v = 6\,000 \text{ вольт} = 20 \text{ эл.-ст. ед. потенц.}$$

$$\delta_{L_2} = 6{,}32 \times 10^{-8} \times 20\ см = 126{,}4 \times 10^{-8}\ см = 1{,}264 \times 10^{-6}\ см.$$

Имея в виду, что длина волны видимых лучей спектра колеблется приблизительно в пределах от $0{,}4 \times 10^{-4}$ *см* до $0{,}8 \times 10^{-4}$ и в среднем равна $0{,}6 \times 10^{-4}$ *см*, видим, что удлинение δ в этом случае в $\frac{0{,}6 \times 10^{-4}}{1{,}264 \times 10^{-6}}$ или приблизительно в 50 раз меньше длины волны видимого света. Чтобы его констатировать и измерить, недостаточно чувствительны даже оптические методы, один из которых был указан, напр., при описании прибора Аббе по определению расширения кристаллов от нагревания (стр. 214). Поэтому Кюри конструировали особый пресс с пиезоэлектрическим манометром, который и будет ниже описан.

Далее, последняя из формул (27-bis) показывает, что удлинение δ_N вдоль N ($N \perp L_3$, $N \perp L_2$) мы можем увеличивать, беря размер n пластинки вдоль N возможно больше, а размер b вдоль электрической оси L_2 возможно меньше. Если мы возьмем, напр., отношение $\frac{n}{b} = 100$, то при той же разности потенциалов $v = 6\,000$ вольт, которую мы брали в предыдущем числовом примере (лишь с обратным знаком), получится удлинение δ_N в 100 раз больше, чем вычисленное там δ_{L_2}, т.-е.

$$\delta_N = 100\,\delta_{L_2} = 100 \times 1{,}264 \times 10^{-6}\ см = 1{,}264 \times 10^{-4}\ см.$$

Т.-е. получаем, что δ_N в этом случае несколько больше $^1/_{1000}$ *мм* или 1 микрона, т.-е. приблизительно равняется 2 длинам волн средних лучей видимого света. Такое удлинение можно измерить более непосредственным способом, чем δ_{L_2}, и Кюри измеряли его особым прибором с увеличивающим рычагом и микроскопом.

Опишем оба эти прибора.

---

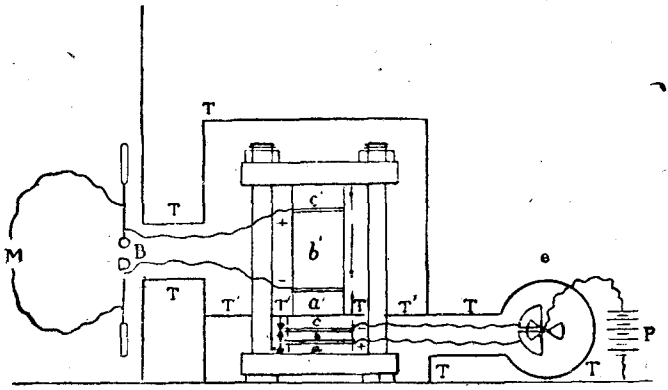
[1]) Journ d. Phys. 1889. 149—168.

[2]) Это значение K имеет в электро-статич. CGS системе единиц, т.-е., когда δ_{L_2} измерено в сантиметрах, а v в эл.-стат. CGS единицах потенциалов. 1 эл.-стат. ед. потенциала = 300 вольт.

1. Пресс с пиезоэлектрическим манометром изображен на фиг. 321.

Здесь a′ b′ c′ параллелепипеды кварца, которых электрострикция изучается. Электрическая ось каждого из них направлена вертикально, но при этом (a′) и (b′), (b′) и (c′) расположены прямо-противоположно друг другу, так что b′ и c′ приложены друг к другу теми гранями, которые требуют положительного заряда для возбуждения расширения, а b′ и a′ сложены теми гранями, которые для расширения этих кристаллов требуют отрицательного заряда. Между кварцевыми параллелепипедами c′, b′, a′—металлические пластинки. К ним присоединены провода от электрической машины Гольца M. Разность потенциалов v, до которой машина M заряжает металлические прокладки между c′, b′, a′, измеряется величиной искрового промежутка B.

Ниже верхней кварцевой колоны c′ b′ a′ находится металлическая заземленная прокладка T′, а под ней вторая кварцевая колонна c b a, устроенная совершенно так же как и верхняя. Эта колонна сжи-



Фиг. 321.
Пресс с пиезоэлектрическим манометром братьев Кюри.

мается действием верхней колонны при зарядке последней. От сжатия нижняя колонна c b a выделяет пиезоэлектричество, которое с верхней и нижней грани колонны отводится в землю, а с внутренних граней между c и b, b и a отводится проводами к квадрантному электрометру e, отклонения стрелки которого пропорциональны сообщенной его квадрантам разности потенциалов v. Электрометр заряжается от батареи P. Таким образом нижняя колонна c b a есть совокупность трех пиезоэлектрических кварцев, предназначенная для измерения удлинения кварцевой колонны c′ b′ a′, или, точнее говоря, не удлинения, а того давления, которое развивает колонна c′ b′ a′ вследствие своего стремления удлиниться. Для того, чтобы это давление могло передаться от верхней колонны c′ b′ a′ к нижней c b a, обе они плотно зажаты во время измерения показанными на чертеже гайками в прессе.

Вертикальные размеры верхних кварцев a′ b′ c′ больше вертикальных размеров нижних кварцев a, b, c, потому, что верхние подвержены высоким разностям потенциалов и при недостаточной толщине могли бы пробиваться искрой.

T T T—металлический чехол, предохраняющий всю установку от влажности и возможной индукции.

Работа с прибором ведется так. Сперва надо удостовериться, что заземление пластинки T′ T′, отделяющей верхнюю колонну кварцев от нижней действует хорошо. Для этого, не зажимая пресса, пускают машину M и заряжают прокладки верхней колонны. Это не должно оказать никакого действия на нижнюю колонну, и соединенный с последней электрометр e должен остаться неподвижным.

Затем сильно сжимают пресс посредством гаек. Появляются пиезозаряды во всех прокладках обеих колонн. Электрометр отклоняется от нуля. Дают установиться упругому равновесию во всех кварцах и прессе. После того снимают заряды, электрометр падает на нуль и остается на нем.

Теперь начинают самый опыт. Установив искровой промежуток на определенное расстояние (в опытах Кюри 1, 2, 3, 4, 5 или 6 *мм*), пускают машину M, постепенно повышая даваемый ею потенциал. Тогда кварцы c′, b′, a′, расширяются и давят на кварцы c, b, a. Последние выделяют пиезоэлектричество, и электрометр e все более и более отклоняется. Когда в B проскочит искра, тогда потенциал заряда прокладок между верхними кварцами известен. В этот момент берут отсчет электрометра.

В результате подобных опытов Кюри приводят такую табличку:

Искровой промежуток (*мм*)	Отвечающая ему разность потенциалов v (эл.-стат. CGS ед.)	Отклонения электрометра Δ делений	$\frac{\Delta}{v}$
1	14,8	21,5	1,45
2	25,6	38,7	1,51
3	36,1	54	1,49
4	45,7	69,5	1,52
5	55,1	84	1,52
6	65,3	105	1,60

Так как отношение $\frac{\Delta}{v}$ приблизительно, в пределах точности наблюдения, сохраняет здесь постоянную величину, то можно заключить, что отклонения электрометра пропорциональны разности потенциалов, приложенной к прокладкам кварцев a′, b′, c′.

А так как отклонения электрометра пропорциональны разности потенциалов пиезозарядов кварцев a, b, c, а эти разности потенциалов пропорциональны самим пиезозарядам, а пиезозаряды пропорциональны, согласно формуле $q = Kf$, сдавливающей силе f, а сила f пропорциональна удлинению верхних кварцев, — то отклонения электрометра пропорциональны расширению верхних кварцев.

Из этих рассуждений и из данных вышеприведенной таблицы следует, что удлинение кварца вдоль электрической оси пропорционально разности потенциалов, приложенной к граням нормальным к той же оси: $\delta_{L_2} = c \cdot v$.

Однако, эти опыты не доказывают, что коэффициент c есть та же самая пиезоэлектрическая константа K, которая фигурирует в уравнении (25): $q_{L_2} = Kf$.

Чувствительность этого аппарата весьма велика.

Нижние кварцы с электрометром, как видно из описания их действия, являются пиезоэлектрическим манометром.

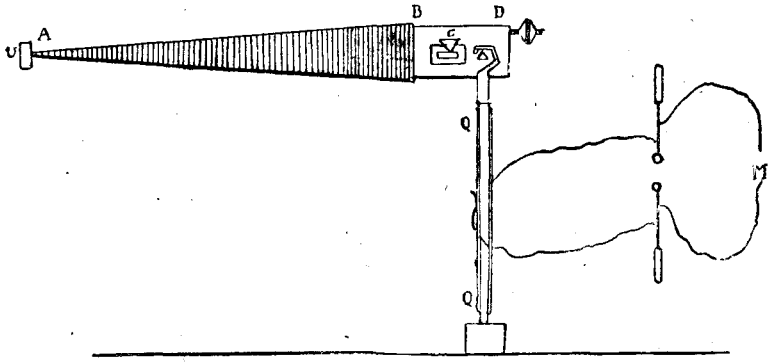
2. Увеличивающий рычаг с микроскопом дает возможность измерять удлинения в абсолютных мерах, но как было сказано, удлинения эти должны быть более крупными, чем удлинения пиезокварца вдоль электрической оси.

Рычаг изображен на фиг. 322.

Здесь исследуемый кварц QQ представляет тонкую пластинку, вытянутую вдоль направления N ($N \perp L_3$, $N \perp L_2$). Грани этой пластинки, нормальные к электрической оси L_2 покрыты двумя листочками олова и к последним прикасаются контакты, соединенные с полюсами электрической машины Гольца.

На фиг. 322 показан также искровой промежуток этой машины.

Кварц QQ внизу прочно укреплен в подставке, а вверху оканчивается металлическим крючком, опирающимся на острие, вделанное



Фиг. 322.
Прибор П. и Ж. Кюри для изучения электрострикции с помощью рычага и микроскопа.

в балансир увеличивающего рычага ABCD, часть BD которого сделана из эбонита, а длинная стрелка BA из прочного тонкого и легкого картона. В эбонитовую часть врезано второе острие C, которым рычаг опирается на неподвижную площадку, подобно коромыслу весов. На конце стрелки BA укреплено тонкое стеклышко V, с нанесенным на нем тонким штрихом, наблюдаемым в микроскоп, не показанный на рисунке.

Работа ведется так. Прежде всего определяют все размеры b, c и n кварцевой пластинки QQ. Затем отношение плеч рычага от штриха на стекле V до острия C и от C до острия, на которое опирается крючок кварца.

Затем устанавливают на определенное расстояние шарики искрового промежутка машины M и пускают машину. Тогда потенциал постепенно возрастает, кварц QQ начинает удлиняться или укорачиваться, и рычаг начинает наклоняться вокруг точки опоры C или против часовой стрелки или по часовой стрелке. В микроскопе, с помощью особого окулярмикрометра мы можем измерить, на какое расстояние d в сантиметрах отклонился штрих на стекле V. Умножая d на отношение плеч рычага $\frac{r}{R}$, узнаем насколько удлинился кварц QQ. Отсчет в микро-

скопе надо взять в тот момент, когда проскочит искра в искровом промежутке. Тогда потенциал заряда пластинки будет известен, и мы получим все данные для определения зависимости удлинения δ от потенциала и размеров пластинки.

Кюри дают результаты своих измерений для трех различных пластинок. Для всех трех удлинение мерялось по направлению N ($N \perp L_2$, $N \perp L_3$). Вот вкратце эти результаты:

Пластинки кварца:	I	II	III
1. Длина олова на пластинке (n) (приблизительно)	2,8 *см*	4,0 *см*	4,0 *см*
2. Толщина пластинки (b)	0,24 »	0,065 »	0,112 »
3. Пиезоэлектрическая постоянная кварца K = ...	$6{,}32 \times 10^{-8}$		
4. Длина искры, при которой взят отсчет в микроскопе	6 *мм*	1 *мм*	1 *мм*
5. Отвечающая ей разность потенциалов (v эл.-стат. CGS единиц) .	65,2	14,8	14,8
6. Вычисленное удлинение $\delta_N = K\frac{n}{b} v$	$4{,}9 \times 10^{-5}$ *см*	$5{,}8 \times 10^{-5}$ *см*	$3{,}3 \times 10^{-5}$ *см*
7. Наблюденное удлинение (δ'_N) . .	$5{,}0 \times 10^{-5}$ »	$6{,}0 \times 10^{-5}$ »	$3{,}1 \times 10^{-5}$ »

Как видим, совпадение вычисленных по формуле (27) и наблюденных посредством прибора Кюри величин δ_N и δ'_N весьма удовлетворительное, что и служит опытным подтверждением закона электрострикции кварца, выражаемого формулой (27).

Для избежания разрядов по поверхности пластинки QQ (вследствие применяемых здесь высоких разностей потенциалов) приходилось пластинки покрывать канифолью или слюдой и канадским бальзамом. Вследствие этого вычисленные значения δ_N были не особенно точны. Поэтому Кюри определяли для каждой из трех пластинок коэффициент $K_1 = K\frac{n}{b}$ путем измерения выделяемого при растягивании определенным грузом каждой пластинкой пиезоэлектричества. Зная q_N и f они вычисляли $K_1 = K\frac{n}{b}$ из формулы (26): $q_N = K\frac{n}{b} f$. Затем, зная $K\frac{n}{b}$ и потенциал при опыте по электрострикции той же пластинки в приборе фиг. 322, они вычисляли удлинение δ_N по формуле (27): $\delta_N = K\frac{n}{b} v$. Так вычисленные величины δ_N мало отличались от приведенных выше. А именно, они были соответственно: $4{,}8 \times 10^{-5}$ *см*, $5{,}8 \times 10^{-5}$ *см*, $3{,}3 \times 10^{-5}$ *см*.

д) Пиезоэлектрический бикварц Кюри.

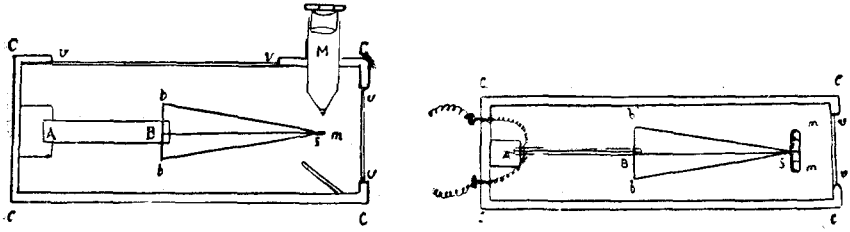
Полезно познакомиться также с этим очень остроумным и очень чувствительным прибором.

Пиезоэлектрический бикварц состоит из двух весьма тонких (0,03 — 0,12 *мм*) и довольно длинных (до 8 *см*) кварцевых пластинок, вырезанных так, чтобы плоскость пластинки была нормальна к электрической оси L_2, длинная ее сторона была параллельна N ($N \perp L_3$, $N \perp L_2$), а короткая параллельна оптической оси L_3. Плоскости этих пластинок, нормальные к L_2 посеребрены. Затем одной парой этих плоскостей обе пластинки склеены канадским бальзамом в параллельном положении. Если теперь

наружные посеребренные поверхности такого бикварца соединить с землей, а внутреннему посеребренному слою дать некоторый потенциал v, то одна из пластинок бикварца будет удлиняться, а другая — укорачиваться. Вследствие этого пиезоэлектрический бикварц изогнется. Проградуировав его заблаговременно, мы можем, измеряя как-либо изогнутие бикварца, находить разность потенциалов, его вызвавшую.

На фиг. 323-а (разрез) и 323-б (план) представлен сконструированный Кюри и Верленом электрометр с пиезоэлектрическим бикварцем.

Здесь AB — бикварц. Конец A — заделан наглухо. В B приделана bbs очень легкая стрелка из четырех стеклянных весьма тонких нитей, расположенных, как боковые ребра тетрагональной пирамиды. m — микромасштаб. S — острие стрелки. M — микроскоп для наблюдений качания стрелки bbs. Снизу масштабик m освещается зеркальцем (фиг. 323).



а) Вертикальный разрез. б) План.

Фиг. 323.
Электрометр с пиезоэлектрическим бикварцем (по Кюри).

Этот электрометр при изменении размеров пластинки может быть приспособлен для измерения различных разностей потенциала, преимущественно для высоких. По Кюри при толщине пластинки около $^1/_8$ *мм* инструмент пригоден для разностей потенциалов от 5 до 1 000 или 1 500 вольт. При b = 1 *мм* им можно мерять напряжения от 200 до 50 000 вольт.

е) Исследования пиезоэлектрических явлений в кристаллах после Кюри.

Кроме кварца Кюри изучали пиезоэлектрические свойства турмалина (боросиликат Mg, Fe и щелочей, дитригонально-пирамидального вида симметрии).

После них другие исследователи, во-первых, уточнили их опыты над кварцем и турмалином, во-вторых, изучили ряд других кристаллов с точки зрения их пиезоэлектрических свойств, в-третьих, разрабатывали теорию этих явлений, в-четвертых, ввели ряд весьма важных технических приложений тех научных открытий, которые были сделаны в этой области.

Мы не имеем возможности останавливаться на всех этих вопросах [1]). Изложим лишь вкратце важнейшие практические приложения пиезоэлектрических свойств кварца, сделанные в последнее десятилетие.

---

[1]) Изложение результатов, достигнутых до 1910 г. см. W. Voigt'a, l. c. 801—937. Там же о пиезомагнетизме 938—941.
Важнейшие более поздние работы указаны ниже.

ж) Общие основания технических приложений пиезоэлектрических свойств кварца.

Выше мы изучили явление электрострикции кварца (стр. 269 и 275). Оно состоит в том (фиг. 319 стр. 268), что при приложении к граням ADHE и BCGF, нормальным к L_2 двух равных и противоположных по знаку зарядов пластинка расширяется в направлении этой оси (и укорачивается в направлении N, нормальном к L_2 и к L_3). Если знаки приложенных зарядов изменить на обратные, то пластинка сожмется вдоль L_2 (и расширится вдоль N). Если теперь такую пластинку включить в цепь, в которой проходит переменный ток, то пластинка будет одновременно с изменением направления тока то расширяться вдоль L_2, то сжиматься, т.-е. вибрировать.

Теперь заметим, что в теории упругости дается формула, связывающая размеры и упругие свойства стержня (или пластинки, отвечающей укороченному стержню) со свойственным ему периодом стоячих продольных колебаний, если на обоих концах стержня находятся пучности звуковой волны, а узел ее лежит в середине стержня:

$$N=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{Eg}{\rho}}\ ^{1}).$$

Здесь N — число продольных колебаний стержня в секунду, l — длина его в направлении колебаний в сантиметрах, E — модуль упругости (см. стр. 196) в том же направлении, ρ — плотность вещества стержня, $g = 981$ *см/сек.*² — ускорение силы тяжести. Та же формула действительна и для того случая, когда у концов стержня, т.-е. у широких граней нашей кварцевой пластинки получаются узлы стоячей полуволны, а у середины ее толщины l — пучность.

Отсюда, напр., для кварцевой пластинки толщиною $l = 1$ *см*, для которой $\rho = 2{,}65$, $E_{L_2} = 7\,850$ *кг/мм*² [2]) $= 7\,850 \times 10^5$ *т/см*²

$$N=\frac{1}{2\times 1}\sqrt{\frac{7\,850\times 10^5\times 981}{2{,}65}}=269\,531 \text{ колебание в секунду.}$$

Таким образом, хотя эти колебания вполне аналогичны по своему характеру звуковым, но вследствие своей большой частоты они находятся за пределами слышимости, так как наше ухо воспринимает, как звук, лишь колебания с частотою от 20 до 40 000 колебаний в секунду.

Заметим, что кроме стоячих волн «основного тона» каждый стержень способен давать стоячие волны «добавочных тонов», при которых длина стержня разбивается не на одну полуволну $\frac{\lambda}{2}$, а вообще на нечетное число полуволн, при условии, что оба конца стержня свободны, и в них находятся пучности стоячих волн. Тогда числа колебаний, которые может в этих случаях дать такой стержень будут относиться друг к другу как ряд нечетных целых чисел:

$$N : N_1 : N_2 : N_3 = 1 : 3 : 5 : 7$$

---

[1]) О. Д. Хвольсон. Курс физики, II. 1923, 56.
[2]) См. таблицу на стр. 206.

Для кварцевой пиезоэлектрической пластинки следует еще принимать возможные колебания по направлению N, нормальному к L_3 L_2. После этих замечаний представим себе, что пиезокварцевая пластинка некоторой определенной толщины, включена в цепь, в которой проходит переменный ток. Если число периодов этого тока (число колебаний) не будет отвечать ни одному из указанных выше собственных периодов механических колебаний пластинки, то производимые такими зарядами ее механические колебания будут затухать настолько быстро, что практически пластинка вибрировать не будет. Если же числа периодов воздействующих электрических колебаний и механических колебаний пластинки будут одинаковы, или как говорят будут в резонансе друг с другом, тогда вибрация пластинки достигает максимальной амплитуды (размаха).

з) Главнейшие технические применения пиезокварца.

Одним из важнейших в настоящее время практических приложений пиезокварцевых пластинок является применение их в радиотехнике.

Это применение основано на том, что пиезокварцевая пластинка (т.-е. вырезанная нормально к пиезоэлектрической оси L_2 кристалла), включенная надлежащим образом в колебательный контур, посылающий, или принимающий радиоволны, приводит период колебаний этого контура в соответствие со своим собственным периодом механических вибраций.

Особенно важным при этом является стабилизация (установление постоянства) периода колебаний (а следовательно, и длины волны) данного радиоаппарата: вибратор, т.-е. аппарат, снабженный пиезокварцевой пластинкой, способен посылать весьма постоянные по длине волны. И точно также резонатор (принимающий аппарат) с пиезокварцем способен принимать (т.-е. обнаруживать появлением в нем тока и связанным с этим звучанием микрофона, или зажиганием, или погасанием лампы) лишь волны строго определенной длины.

Пиезокварцевые вибраторы и резонаторы в радиотехнику были впервые введены американским профессором В. Дж. Кади[1]), затем способ включения пиезокварцевых пластинок в колебательный контур вибратора и резонатора видоизменялся целым рядом исследователей: Дж. Пирсом[2]), А. Мейсснером[3]), Дж. Р. Гаррисоном[4]) и другими. Ряд авторов изучал эти явления теоретически и применял их для различных целей: для градуировки электрических волномеров, для измерения емкости и т. д. [5]).

---

[1]) W. G. Cady — New Methodes for Maintainig Constant Frequency in High-Frequency Circuits.—Phys. Rev. 1921 XVII и XVIII II. № 2. 142—143.

[2]) G. W. Pirce. Piezoelectric crystal resonators and crystal oscillators applied to the precision calibration of wavemeters. — Proc. Am. Ac. of Arts a. Sc. **59**. № 4 1923. 81—106.

[3]) A. Meissner. Über piezoelektrische Kristalle bei Hochfrequenz—Z. f. techn. Phys. 1926. 12. 585 и 1927. 2. 74.

[4]) J. R. Harrisson. Piezo-elektric oscillator circuits with four electrode tubes.— Proc. Inst. Radio Eng. 16. 1455. 1928. № 11. (Реф. Phys. Berichte 1929. H. 3. 345).

[5]) Литература по этим вопросам довольно быстро растет. Приводим список некоторых относящихся сюда новейших работ (сверх упомянутых выше).

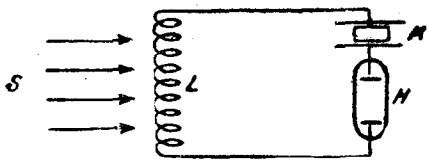
а) Shôgo Namba und Sadao Matsumura. General properties of piezo-electric quartz and value of a quartz oscillator as a frequency standard. — Res. Electrot. Labor. Tokyo № 248. 45. 195.

б) E. Giebe и A. Scheibe. Z. f. Hochfr. Techn. **30**. 1927. 32.

в) W. Schneider. Prüfung einiger Krystallarten auf piezoelektrischen Effektiv.— Z. f. Phys. 51. 263—267. 1928. № 3/4.

Для иллюстрации того, как можно обнаруживать пиезоэлектрический резонанс радиоволн, приведем одну из тех простых установок, (фиг. 324), которые описывает А. Мейсснер [1]).

Здесь последовательно с катушкой L, принимающей волны S, включен пиезоэлектрический кварц K и разрядная трубка H, обладающая свойством светиться при прохождении через нее тока.



Фиг. 324.
Схема одной из установок А. Месснера для обнаружения явлений резонанса пиезокварца K и радиоволн S.

Пока длина волны и связанный с ней период колебаний лучей S не отвечает периоду механических колебаний пиезокварца K, напряжения в цепи, изображенной на фиг. 324 недостаточно для прохождения тока через лампу H. Но как только колебания S находятся в резонансе с пиезокварцем K, последний начинает сильно вибрировать, т.-е. расширяться и сжиматься, что вызывает, как и насильственное его растягивание и сжатие, появление переменных пиезозарядов, значительно увеличивающих напряжение электрических колебаний в контуре LKH и трубка H начинает светиться. Подобными устройствами удается устанавливать длину волны радиолучей с точностью $^1/_{100000}$ и более [2]).

Далее ультразвуковые волны, посылаемые вибрирующей пиезокварцевой пластинкой были применены французским физиком Ланжевеном [3]) для обнаружения присутствия в воде препятствий их распространению,

---

г) S. Strout. The temperature coefficient of quartz crystal oscillators. — Phys. Rev. (2) **32**. 829. 1928. № 5.

д) A. Hund. Note on a piezoelectric generator for audio frequencies S.—A. Bur. of Stand. Journ. of Res. 2. 355—358. 1929. Res. Par. № 40.

е) A. M. Skelett. A. visual method for studying modes of vibration of quartz plates.—Journ. Opt. Soc. Amer. **17**. 308—317. 1928. № 4.

ж) Ecarle M. Terry. The dependence of the frequency of quartz piezoelectric oscillators upon circuit constants. — Proc. Inst. Radio Eng. **16** 1486—1506. 1928. № 11. (Реф. Phys. Ber. 1929. **3**. 245).

з) K. S. van Dyke. The piezoelectric resonator and its equivalent network.— Proc. Inst. Radio Eng. **16**. 742—764. 1928. № 6. (Реф. Phys. Ber. 1929. 4. 313).

и) Seikichi jimbo. Standardization of frequency.—Res. Electrot. Lab. Tokyo. № 236. III. 53. 1928.

к) P. Vigouereux. Development of Formulae for the Constants of the Equivalent Electrical Circuit of a Quartz Resonator in Terms of the Elastic and Piezo-Electric Constants.—Phil. Mag. (7) **6** 1140—1153. 1928. № 40.

л) K. Kixtus, F. Regler.—Kontaktdetector und Schwingkristall.—Phys. Z. 1928. 952, 953, 954.

м) G. A. Kjandsky. Über Kapazitätsmessung mittelst piezoelektrischer Oszillatoren und Resonatoren. — Z. f. Phys. **52**. 743—745. 1928 № 9/10. (Реф. Phys. Ber. 1929. 7. 578).

н) Ю. Кобзарев. Параметры пиезо-кварцевых пластинок. (Ж. Прикл. Физ. VI. 2. 1929, стр. 17—37).

о) А. В. Шубников и Б. К. Бруновский. О пиезоэлектричестве аморфных и кристаллических тел в электрическом поле. — Изв. Ак. Н. 1928. 367—374.

[1]) Z. f. techn. Phys. 1926.

[2]) В последнее время описаны также вибраторы, основанные не на электрострикции, а на магнитострикции. Однако, эти вибраторы, не являются кристаллами, и их изучение не относится к области кристаллографии.

См. G. W. Pierce. Magnetostriction oscillators. Ptoc. Am. Ac. of Arts a. S'c. **63**—1. 1928.

[3]) P. Langevin. Sondage par le son. Publ. spec. № 3. 1924. Цит. по В. Я. Альтбергу. Природа 1928. № 4. 325.

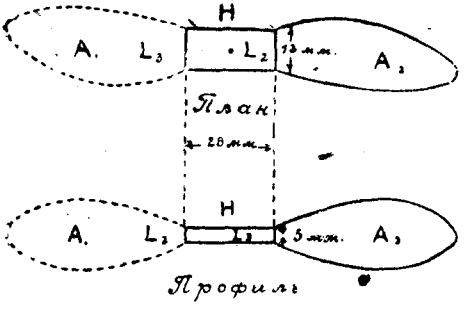
от которых происходит отражение этих волн. Таким образом Ланжевену удалось сконструировать прибор, обнаруживающий невидимые неприятельские подводные лодки. Другое применение пиезокварца в военном деле было сделано Дж. Ц. Карчером [1]), а именно для определения мгновенного давления в пушках.

и) Воздушные потоки у вибрирующего пиезокварца.

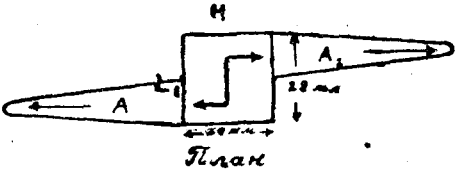
Явления воздушных потоков у вибрирующего пиезокварца было открыто и описано А. Мейсснером [2]); оно заключается в следующем. Если пиезоэлектрическую пластинку кварца сделать несколько большего размера вдоль оптической оси кристалла L_3, например, придать ей размеры

$$L_3 = 13\ мм,\ L_2 = 5\ мм \text{ и } H = 28\ мм \text{ (фиг. 325)}$$

и заставить ее вибрировать вдоль L_2, включив в колебательный контур с отвечающим ей периодом колебаний, — то у граней нормальных к H [т.-е. параллельных одновременно оптической (L_3) и электрической (L_2) осям] появляются сильные токи воздуха A_1 и A_2, идущего от кристалла в обе стороны. Их можно



Фиг. 325.
Расположение воздушных потоков у вибрирующего пиезокварца (по А. Мейсснеру).



Фиг. 326.
То же, что на фиг. 325 при бо́льшем размере кварцевой пластинки вдоль L_3.

обнаружить, посыпая в этих местах легкий порошок, например, семя растения плауна, которое относится от кристалла, или поднося сюда пламя свечи, которое гаснет. Если размер пластинки вдоль оптической оси L_3 сделать еще больше, например, до 28 *мм* (фиг. 326), то можно обнаружить, что эти воздушные токи расположены не прямо противоположно друг другу, а так, как показано на фиг. 326. Вследствие этого такая кристаллическая пластинка имеет тенденцию вращаться подобно сегнерову колесу. Если кристалл насадить на легкую и подвижную ось, то это вращение и осуществляется.

При этом, если взять две тождественных пластинки, одну из правого кварца (см. стр. 26), а другую из левого, если обе расположить вверх тою плоскостью, которая электризуется при сдавливании отрицательно, и привести их в вибрацию,—то правый кварц будет вращаться по часовой

---

[1]) C. Karsher. On the Determination of Instantaneous Pressures in Guns by Means of a Piezoelectric Gage and a Ballistic Galvanometer Phys. Rev. 1921. XVIII. № 2. 107.

[2]) A. Meissner Z. f. techn. Phys. 1926. № 12. 588—590.

стрелке (верхняя сторона фиг. 326 двинется вправо), а левый — против часовой стрелки (верхняя сторона фиг. 326 двинется влево) [1]).

Мейсснер осуществил на описанных основаниях особый прибор, названный им «кристаллмотором».

к) Ультразвуковые волны, идущие от вибрирующего пиезокварца.

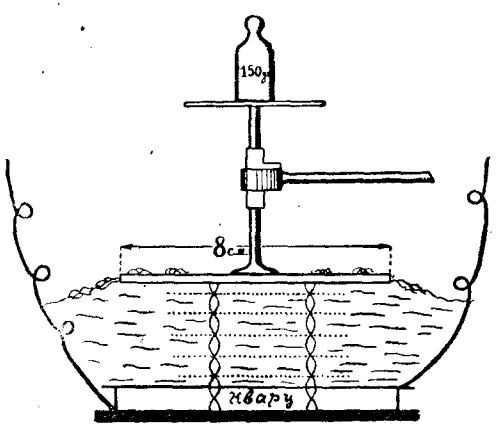
Продольные колебания большой частоты, совершаемые электрически возбуждаемой кварцевой пластинкой передаются ею и окружающей среде.

Выше было уже указано, что этим явлением воспользовался Ланжевен для своей «звуковой разведки» под водою.

В 1927 году Р. В. Вуд и А. Л. Лумис [2]) опубликовали работу, в которой они описали ряд чрезвычайно интересных опытов, обнаруживающих с полною ясностью эти продольные волны большой частоты по разнообразным их действиям. Эти авторы применяли пиезокварцевые пластинки толщиною от 7 до 14 *мм*, чему отвечают частоты колебаний от 100 000 до 700 000 в секунду. Пластинки эти возбуждались напряжением в 50 000 вольт, будучи положены вместе со своими электродами в масляную баню.

1-я серия опытов. Давление ультразвуковых волн на поверхность масла и вспучивание этой поверхности над пиезокварцем.

При вибрации пиезокварца, как в теле пластинки, так и между верхней ее поверхностью и поверхностью масла образуются стоячие ультразвуковые волны схематически изображенные на фиг. 327 [3]). Длина каждой такой волны в кварце равна толщине пластинки, в масле она еще короче. Период колебаний здесь весьма короткий: как было указано частота колебаний была от 100 000 до 700 000 в секунду. Поэтому, хотя абсолютное перемещение



Фиг. 327.
Над вибрирующим пиезокварцем образуются стоячие ультразвуковые волны, давление коих уравновешивается грузом.

[1]) На фиг. 326 воздушные токи AA_2 изображены для пластинки из оптически-правого кварца, а пара сил ошибочно для оптически-левого кварца.

[2]) R. W. Wood and A. L. Loomis. The Phisical and Biological Effects of High frequency Sound-waves of Great Intensity. — Phil. Mag. 1927. (7) IV. 417—436. — На русском языке см. об этой работе статью В. Я. Альтберга. — Мощные ультракороткие звуковые волны и их действие. — Природа. 1928. № 4. 313—328.

О связи пиезоэлектрических явлений с звуковыми имеется также работа G. W. Pierce'a в Proc. Inst. Radio Engineers. Vol. 60. № 5. 1925.

[3]) Надо помнить, что эти колебания продольные, как и звуковые. Поэтому изображенные на фиг. 327 узлы и пучности надо понимать лишь как график амплитуд в каждой точке луча, а не как увеличенное изображение этих амплитуд.

частиц жидкости (т.-е. амплитуда) при колебаниях — ничтожно, порядка длины волны света, т.-е. 0,000400 — 0,000750 *мм* — энергия таких колебаний относительно весьма велика. Она обнаруживается различными действиями. Прежде всего описанные ультразвуковые волны производят на поверхность масла в области над вибрирующим пиезокварцем давление, которое можно измерить поместив здесь, как указано на фиг. 327 стеклянный диск, поддерживаемый сверху стержнем способным двигаться вертикально в направляющей муфте. Под влиянием давления снизу поверхность масла поднимает диск, и чтобы это давление уравновесить,—на диск необходимо поместить груз. При диаметре диска в 8 *см.* (при том же или несколько большем диаметре пиезокварца), давление снизу выдерживает груз в 150 *гр.* Если диск убрать то над пиезокварцем появляется масляный бугор, из которого извергаются, как из вулкана мелкие капли масла. Повышая мощность возбуждающих кварц электрических колебаний удавалось довести высоту масляного бугра до 7 *см*, а высоту взлетания капель до 30 — 40 *см* хотя кварцевая пластинка оставалась видимо неподвижной. При еще бо́льшем увеличении мощности колебаний, пиезокварцевая пластинка разбилась на осколки.

2-я серия опытов. Нагревание твердых и жидких тел.

Пробирка с водою помещалась в сосуд, наполненный водой с плавающим в ней льдом. Этот последний сосуд погружался в масляную баню над вибрирующим кварцем. Тогда термометр, опущенный в пробирку показывал быстрое возрастание температуры: приблизительно на $^1/_3{}^\circ$ в секунду, несмотря на ледяную воду, окружающую пробирку. Это возрастание температуры зависело от перехода энергии ультразвуковых колебаний в теплоту. Они проходят при этом через масло, дно первого сосуда, ледяную воду и дно пробирки.

Стеклянная нить, толщиною в конский волос, с шариком на конце зажималась крепко между пальцами и погружалась шариком в масло над вибрирующим пиезокварцем. При этом вскоре на пальцах появлялся ожог в месте соприкосновения их с нитью; ожог этот не заживал несколько недель.

Если стеклянный стерженек диаметром в 0,5 *мм* вытянуть из горла конической стеклянной колбы и погрузить эту колбу дном вниз в масло над вибрирующим пиезокварцем, при чем посредством микрометренного движения подобрать расстояние между верхней поверхностью пиезокварца и дном колбы так, чтобы между ними заключалось целое число порождаемых кварцем ультразвуковых волн, то такая колба может служить как бы коллектором (собирателем) энергии этих колебаний. Если теперь к концу стержня прижать сухую сосновую щепку, то она дымит, дает искры и быстро прожигается насквозь. Если прижать стеклянную пластинку, то она также продырявливается.

3-я серия опытов. Действие ультразвуковых волн на организмы.

Упомянем еще, что мелкие рыбки и лягушки убиваются этими волнами в течение одной или двух минут. Мыши — не умерщвляются. Бактерии также выдерживают действие этих волн [1]). Кровяные шарики — разрушаются.

---

[1]) В новой работе Harvey a. Loomis установили, что светящиеся бактерии погибают (см. реферат А. А. Садова в „природе“ 1929. № 12. 1066.

Ограничиваясь этими сведениями об этих важных опытах, мы отсылаем интересующихся за многими другими подробностями к оригинальной работе, указанной нами в выноске выше.

§ 136. Пироэлектричество кристаллов.

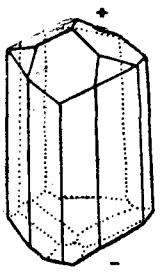
а) Предварительные замечания.

Пироэлектричество есть то электричество, которое появляется в кристалле, когда температура его меняется. Свойство кристаллов электризоваться при нагревании было замечено гораздо раньше, чем электризация их от давления, а именно еще в начале XVIII века и затем изучалось рядом ученых, из которых назовем Эпинуса (1756), Бергмана (1768), Гаюи (1801), Ж. и П. Кюри (1880), Кундта (1883), Коленко (1889), Фойгта (1910), Богуславского (1914).

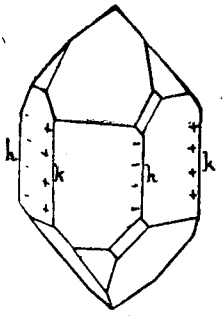
Остановимся кратко на сущности этих явлений [1]).

б) Первые наблюдения над пироэлектричеством.

Раньше всего пироэлектрические свойства были обнаружены у турмалина. Этот минерал кристаллизуется в дитригонально-пирамидальном виде симметрии, следовательно разные концы его тройной поворотной оси не равнозначны. Если кристалл турмалина (фиг. 328) нагревать, то пока температура поднимается можно обнаружить, что один конец кристалла заряжается положительным электричеством (аналогичный полюс: изменение температуры положительно и заряд положителен), а другой конец кристалла заряжается отрицательно (антилогичный полюс). Ниже мы опишем весьма наглядный метод Кундта для обнаружения этих зарядов.



Фиг. 328. Электризация турмалина при нагревании. Вверху аналогичный полюс, внизу антилогичный.



Фиг. 329. Распределение пироэлектричества у кварца.

Если эти заряды снять, и затем держать температуру постоянной, хотя бы повышенной, то новой электризации не наступает.

Если затем дать кристаллу охлаждаться, то он вновь во время охлаждения электризуется, при чем знаки зарядов оказываются обратными.

У тригонально-трапецоэдрического кварца (фиг. 329) заряды концентрируются по ребрам гексагональной призмы, т.-е. у выходов двойных осей симметрии, при чем эти ребра попеременно получают одно—положительный, другое ближайшее—отрицательный заряд, как показано на рисунке.

---

[1]) Подробное изложение, основанное на работах до 1910 г. можно найти у W. Voigt'a в Lehrbuch der Kristallphysik, 1910 или второе издание, недавно вышедшее. Довольно подробно этот отдел изложен у Ch. Soret в его Elements de Cristallographie physique 1893, откуда мною заимствованы фигуры 328 и 329. О более новых работах см. у О. Д. Хвольсона. Курс физики. IV. 1923. 215.

в) Связь пироэлектрических явлений с симметрией кристалла.

Наиболее ясно пироэлектрические свойства обнаруживают кристаллы, лишенные центра инверсии, как это и есть в обоих разобранных выше случаях. У таких кристаллов всегда имеются необратимые направления с двумя не равными концами. Таковы L_3 у турмалина и L_2 у кварца (у последнего L_3 обратима, так как нормально к ней расположены двойные оси, поворот вокруг каждой из которых переводит один конец L_3 в другой). При нагревании или охлаждении разные концы необратимого направления получают противоположные по знаку и одинаковые по абсолютной величине заряды.

Однако, и в кристаллах, обладающих центром инверсии иногда наблюдается пироэлектричество. При этом разноименные заряды образуются не на разных концах одного и того же направления, а на концах некоторых неравных друг другу геометрически направлений. В особенности пироэлектризация таких кристаллов может проявляться при неравномерном нагреве.

г) Простейшие количественные законности пироэлектрических явлений.

Потенциал пироэлектрического заряда кристалла турмалина падает от выхода тройной оси по направлению к плоскости, нормальной к этой оси, так что экваториальная плоскость кристалла не обнаруживает заряда.

Величина заряда пропорциональна площади поперечного сечения кристалла, и не зависит от его длины (Gaugain 1856)

$$q = ks .$$

Кроме того, количество выделившегося электричества тем больше, чем больше разница между начальной и конечной температурой опыта. В. Фойгт ввел на основании этого понятие о пироэлектрической постоянной или пироэлектрическом моменте для данного направления в кристалле:

$$\gamma = \frac{e}{t_1 - t}.$$

Здесь e—заряд, выделяющийся на 1 *кв. см* плоскости, нормальной к данному направлению в кристалле, t_1—конечная, а t—начальная температура опыта.

д) Метод Кундта [1]).

А. Кундт для обнаружения пироэлектрических зарядов применил метод опыления уже ранее применявшийся в экспериментах с электричеством Лихтенберже. Кроме того, А. Кундт сконструировал удобный и простой прибор для опытов с пироэлектричеством кристаллов. Прибор этот изображен на фиг. 330.

На треногом штативе aa укреплен массивный усеченно-конический кусок меди cc, в который вставлен термометр, показанный на рисунке

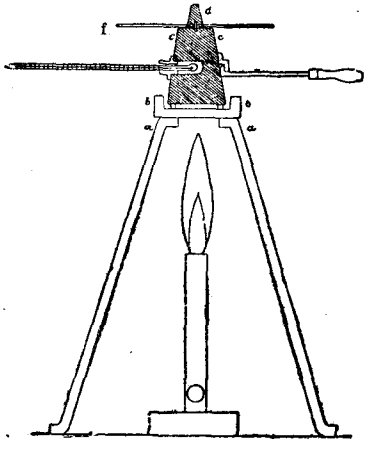
---

[1]) A. Kundt. Wied. Ann. 20. 1883. 592 — A. Kundt und E. Blasius. Bemerkungen über Untersuchung der Pyroelectricität der Krystalle. Ann. d. Phys. u Ch. 1886. № 6. 145—153.

слева. На нем помещается слюдяный кружок f, над которым—небольшая также металлическая подставка d, на которую кладется нагреваемый кристалл.

Справа видна рукоятка, посредством которой можно снять конус cc с треноги aa.

Опыт ведется так. Сначала удаляют верхний конус d и слюду f и нагревают пламенем горелки конус cc выше необходимой температуры, которую определяют термометром. Потом рукояткой снимают горячий конус cc с треноги (или удаляют горелку) и ставят его на каменную плиту. Накладывают на него слюду f и конус d и ожидают, пока температура не упадет до опытом установленного значения, безопасного в смысле растрескивания испытуемой пластинки. Тогда кладут пластинку кристалла на конус d и, выждав некоторое время, опыляют из резинового баллона-пульверизатора, у которого отверстие трубки затянуто сетчатой бумажной тканью, порошком желтой серы (S) с красным суриком (Pb_3O_4). При прохождении сквозь ткань сера электризуется отрицательно, а сурик — положительно, поэтому положительно заряженные участки кристалла покрываются желтым порошком, а отрицательно заряженные — красным. В случае отсутствия зарядов — порошок не пристает к поверхности кристалла.



Фиг. 330.
Прибор А. Кундта для наблюдения пироэлектричества кристаллов.

Назначение слюдяной пластинки — предохранить горячий большой металлический конус cc от опыления: сера при этом могла бы расплавиться и испортить конус.

e) Метод Мейсснера и Бехмана [1]).

В последнее время названные авторы дали новый простой метод количественного изучения этих явлений и развили их теорию.

Схема их установки изображена на фиг. 331. Здесь исследуемый кристалл лежит между двумя электродами A и B. Нижний электрод A—заземлен. Верхний же B—соединен с электрометром E (прибором указывающим и измеряющим электрические заряды). Электрод A представляет медную пластинку в два милиметра толщиной, имеющую продолжение C, обернутое асбестом (для изоляции) и обвитое проволокой, по которой можно пропускать ток от источника D. Этим током производится нагревание электрода CA. Регулируя реостатом R нагревающий ток, сила которого указывается амперметром J, можно электроду CA и испытуемой пластинке сообщить температуру от 20° до 300°.

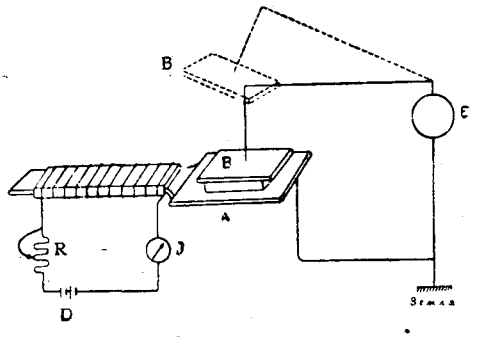
Сначала левая часть прибора градуируется в том отношении, чтобы по показаниям амперметра J можно было судить, до какой температуры нагревается электрод A и кристалл. Градуировка эта делается калориметрически.

---

[1]) A. Meissner und R. Bechmann.—Untersuchungen und Theorie der Pyroelektrizität.—Zeitschr. f. techn. Physik. 1928. 5. 175–186.

Если прибор градуирован, то опыт ведется так. Замыкается цепь JDR. Кристалл нагревается. Если он пироэлектричен, то в нем появляются заряды, при чем нижняя и верхняя части его электризуются противоположно по знаку. Заряд верхней части кристалла, допустим положительный, индуктирует в прилежащем к нему электроде. В равный и противоположный по знаку (следовательно, отрицательный) заряд, а потому электрометр E заряжается одноименно с верхней частью кристалла, т.-е. положительно, что мы и замечаем, отмечая также и величину заряда.

Мейсснер и Бехман показали также [1]), что посредством их аппаратуры можно устанавливать наличие или отсутствие пироэлектрических (а следовательно, и пиезоэлектрических) свойств не только у достаточно крупных одиночных кристаллов, но и у кристаллического порошка. Для этого порошок помещается между электродами вместо кристалла и подвергается сначала «формированию» путем приложения к электродам разности потенциалов от 100 до 1000 вольт. Затем это «формирующее» поле убирается, и производится нагревание электрода A, как было описано выше. Если вещество способно пироэлектризоваться, то электрометр E во время нагревания покажет заряд. Если опыт такого нагревания предварительно формированного порошка повторять, то с каждым разом доставляемый им пироэлектрический заряд будет убывать. Это убывание можно существенно замедлить путем сцементования порошка каким-либо хорошим непроводником (смолы, воск, асфальт, сера). Таким путем Мейсснер и Бехман приготовляли искусственные пиро-пиезоэлектрические пластинки, которых пиезоэлектрическая постоянная была в 50 — 70 раз больше, чем у монокристаллического кварца. Эти пластинки применялись авторами для пиезоэлектрических микрофонов [2]).



Фиг. 331.
Аппарат Мейсснера и Бехмана для изучения пироэлектричества кристаллов.

[1]) A. Meissner u. R. Bechmann. Erregung und Untersuchung nichtkristalliner piezoelektrischen Stoffe.—Z. f. techn. Phys. 1928. II. 430.

[2]) A. Meissner. Untersuchungen über Pyro-und Piezoelektricität.—Naturwissenschaften 17. 1929 № 2. 25—31.

ОТДЕЛ III.

Химическая Кристаллография.

§ 137. Содержание Химической Кристаллографии.

К этому отделу нашей науки относятся все те ее вопросы, которые стоят на границе с общей и физической химией. Из них мы рассмотрим вкратце лишь следующие.

I. Соотношение между химическим составом вещества и его кристаллической формой.
II. Химическое и кристаллическое строение.
III. Полиморфизм.
IV. Процессы образования и растворения кристаллов.
V. Кристаллография и определение химических веществ.

ЧАСТЬ ПЯТНАДЦАТАЯ.

Соотношение между химическим составом и кристаллической формой вещества.

§ 138. Приближенный закон П. Грота [1]) о соотношении между составом и симметрией кристалла.

Законность эта может быть формулирована так: чем проще химический состав вещества, тем в большинстве случаев выше его симметрия. Правило это имеет много исключений, но в общем выражаемая им тенденция выдерживается.

Приведем сначала факты его подтверждающие, а затем укажем на некоторые отклонения.

---

[1]) P. v. Groth. Elemente der physikalischen u. chemischen Krystallographie 1921. 274.

Наиболее простыми по составу веществами являются химические элементы. На стр. 290 изображена таблица Менделеева (фиг. 332) с показанием сингонии, а иногда и кристаллической структуры (где она известна) химических элементов.

См. рис. 332 на стр. 290.

Из этой таблицы и из пояснений к ней усматриваем следующее. Из 92 возможных элементов периодической системы нам известно 89 (пустые места — 61, 85, 87). Из них в кристаллическом состоянии известно 60. По сингониям они распределяются так:

	Только в одной сингонии		В нескольких сингониях
В кубической сингонии	27	+	3
» гексагональной »	8	+	4
» той и другой »	13	+	1
» тетрагональной »	1		
» ромбической »	3		
	52	+	8

Мы видим, что самые простые по составу химические тела кристаллизуются в подавляющем большинстве случаев в двух самых высших сингониях.

Следует при этом, однако, заметить, что некоторые из элементов, кроме кубических или гексагональных, дают еще кристаллы низших сингоний. (С этим явлением, когда одно и то же по валовому составу вещество оказывается способным давать два или несколько сортов существенно различных по углам и по своим решеткам кристаллов, — мы познакомимся дальше подробнее в главе о полиморфии).

Напр.: 1) олово—Sn дает в зависимости от условий образования кристаллы или кубические, или тетрагональные, или ромбические; 2) сера — S, кроме гексагональных дает и притом чаще кристаллы ромбические и моноклинные; 3) кислород O, кроме гексагональной сингонии, кристаллизуется еще в ромбической сингонии.

Как видим, отклонений от формулированного выше правила среди элементов немного.

Следующие по сложности химические тела это соединения, состоящие из двух элементов, типа $A_n B_m$. Из них весьма многие кристаллизуются в кубической и гексагональной сингониях. Приведем ряд примеров.

а) Кубическая сингония.

Окислы: MgO, CaO, SrO, BaO, MnO, NiO, CoO, CdO, CO, CO_2 CeO_2, UO_2, As_2O_3 (псевдокубический) Sb_2O_3 (тоже) Bi_2O_3, Cu_2O, Ag_2O, N_2O.

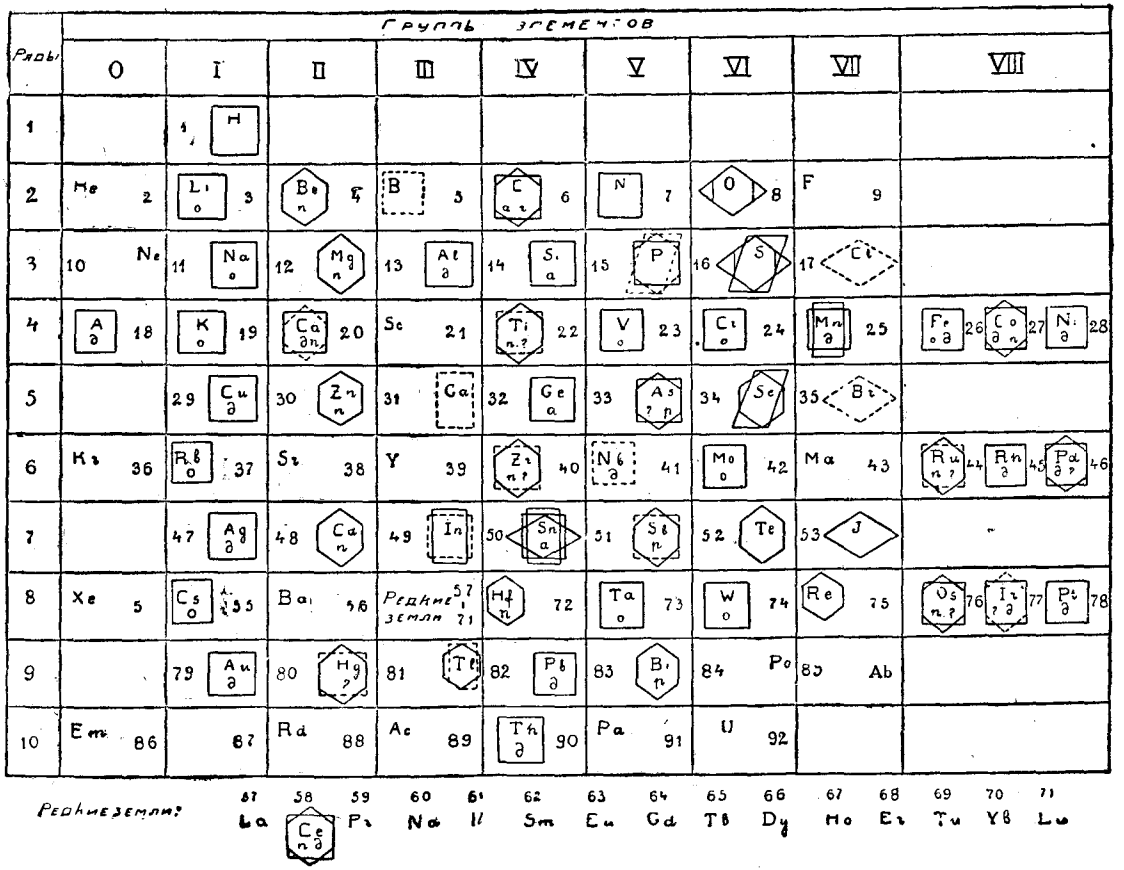
Сульфиды: Li_2S, Cu_2S, Cu_2Se, Cu_2Te, Ag_2S, Ag_2Se, Ag_2Te, Au_2Te, MgS, CaS, SrS, BaS, MnS, MnSe, FeS, NiS, ZnS, ZnSe, ZnTe, HgS, HgSe, HgTe, PbS, PbTe, MnS_2, FeS_2, RuS_2.

Галоиды: LiF, LiCl, LiBr, LiJ, NaF, NaCl, NaBr, NaJ, KCl, KBr, KJ, RbCl, RbBr, RbJ, CsCl, CsBr, CsJ, CuCl, CuBr, CuJ, AgCl, AgBr, AgJ (в смесях), TlCl, TlBr, TlJ, CaF_2, $CaCl_2$, $MnCl_2$, CCl_4, CBr_4, CJ_4, SiJ_4, TiJ_4, SnJ_4, IrJ_4.

Углеводороды: CH_4, C_2H_2, $C[CH_3]_4$, C_6H_{12}.

Ряд подобных же простых соединений кристаллизуется также в гексагональной сингонии.

Кристаллические структуры химических элементов



Фиг. 332.
Симметрия и структура кристаллов химических элементов.
Пояснения см. на стр. 291.

Пояснения к таблице фиг. 332 на стр. 290.

Сингонии	Структуры
Кубическая	В кубической сингонии
	o — октаэдрическая (или по центрированному кубу)
Гексагональная	*d* — додекаэдрическая (или по центрогранному кубу)
	a — структура алмаза
Тетрагональная	В гексагональной сингонии
Ромбическая	*n* — наиболее плотная гексагональная структура
	p — ромбоэдрическая структура
Моноклинная	*z* — структура графита.

Для элементов, не обведенных никакими контуром, ни сингония, ни структура пока неизвестны. Отсутствие буквы для структуры или вопрос на ее месте указывают, что структура пока не изучена [1]).

Однако, существует довольно большое число сравнительно сложных по составу соединений, которые дают кристаллы также кубической или гексагональной сингонии. Таковы, например, кубические: кремнефтористый калий SiF_6K_2, хлороплатинат калия $PtCl_6K_2$, квасцы $[SO_4]_2$ Al K. $12H_2O$ и другие; и гексагональные: гексагидрат кремнефтористого магния SiF_6 Mg. $6H_2O$, минерал берилл $[SiO_3]_6$ Al_2Be_3 и другие [2]).

§ 139. Распределение изученных кристаллов по сингониям.

До известной степени подтверждением той же закономерности служат цифры, указывающие, как распределяются все изученные кристаллы по отдельным сингониям [3]). Приведем их:

Сингония	Число изученных кристаллов	
	Абсолютное	В % %
Кубическая	516	7,62
Гексагональная . . .	493	7,27
Тетрагональная . . .	343	5,06
Ромбическая	1922	28,32
Моноклинная	2844	41,93
Триклинная	665	9,80
Всего . .	6783	100,00

[1]) Эта таблица (фиг. 332) составлена мною по следующим источникам:
а) P. P. Ewald. Kristalle und Röntgenstrahlen. 1923. 155—291 и след.
б) P. Groth. Elemente der physikalischen und chemischen Krystallographie. 1921. 274—276.
в) Таблицы физических констант под ред. А. Ф. Иоффе. 1928. 49—56 и след.
г) L. Vegard. — Nature 1929. V. 124, p. 267 (аргон) и 337 (азот).
д) F. V. Wolff. — Die Kristallstrukturen der Elemente und ihre Beziehungen zum periodischen System. — N. Jahrb. f. Min. A. B.-B. LVIII. I. hälfte 265--286. 1928.
е) G. R. Levi. — Phys. Ber. 1929. H. 7. 569 (Талий).

(Конец выноски [1]) и выноски [2]) и [3]) см. на след. стр.).

Как видим из этой таблички, почти $^4/_5$ всех изученных кристаллов приходится на 3 низшие сингонии и только $^1/_5$ на 2 средних и одну высшую сингонии. Так как с другой стороны более простых соединений существует меньше, чем более сложных, то отсюда можно видеть параллелизм в относительном числе простых химических тел и более симметричных кристаллов.

Что сложных химических тел существует больше, чем простых, ясно из того, что если элементов известно 89, то соединений этих элементов по 2, a priori мыслимо и действительно существует гораздо больше, по три — еще больше и т. д.; однако, такое увеличение должно продолжаться лишь до некоторого предела, после которого, с дальнейшим усложнением состава, известные нам соединения становятся уже немногочисленными. Отчасти этим, отчасти, может-быть, трудностью отличить многие триклинные кристаллы от моноклинных, повидимому, объясняется меньшее число изученных триклинных кристаллов по сравнению с моноклинными.

§ 140. Понятие о морфотропизме.

Μορφή — форма; τροπή — перемена.

Морфотропизм — изменение формы в зависимости от изменения химического состава. Изменяя в химическом соединении лишь часть его компонентов, например, беря Na_2SO_4, K_2SO_4, Rb_2SO_4 мы замечаем, что эти перемены отражаются закономерно на кристаллической форме. Как пример морфотропного ряда возьмем следующий ряд двойных солей:

		a : b : c	β
шёнит	$[SO_4]_2\ Mg\ K_2 \cdot 6H_2O$	0,7413 : 1 : 0,4994	104°48′
буссинготит	$[SO_4]_2\ Mg\ (NH_4)_2 \cdot 6H_2O$	0,7400 : 1 : 0,4918	107°06′
	$[SO_4]_2\ Fe\ K_2 \cdot 6H_2O$	0,7377 : 1 : 0,5020	104°32′
соль Моора	$[SO_4]_2\ Fe\ (NH_4)_2 \cdot 6H_2O$	0,7466 : 1 : 0,5020	106°48′
цианохроит	$[SO_4]_2\ Cu\ K_2 \cdot 6H_2O$	0,7490 : 1 : 0,5088	104°28′

Все они кристаллизуются въ моноклинной сингонии, для кристаллографической характеристики которой надо знать следующие константы: отношение осей a : b : c и угол между осями a и c, равный β. Замечаем, что замена калия аммонием заметно отражается на угле β, замена магния железом или медью на этом угле почти не отражается. В изменении отношения осей тоже можно заметить некоторые закономерности.

Нередки случаи гораздо более значительных изменений соответственных углов или относительных длин единичных отрезков — до $^1/_3$, а иногда и более, по той или другой оси.

ж) J. C. Mc. Lennan and. J. O. Wilhelm, — Phil. Mag. [7] 3, 83—89. 1927. (Кислород).

з) V. M. Goldschmidt. — „Природа" 1929 № 5. 456. (Рении).

и) Сводную работу теоретического характера написал также в последнее время J. Beckenkamp: «Zur Feinstruktur der chemischen Elementen». — Centralblatt f. Min. 1929. № 2. 65—78.

[2]) Подробности см. в следующих сочинениях:

P. Groth. Elemente der physikalischen und chemischen Krystallographie 1921. 274—276.

P. P. Ewald. Krystalle und Röntgenstrahlen 1923. 155—291 и след.

[3]) А. М. Болдырева. Новый подсчет количества изученных кристаллов Зап. Мин. Общ. 1926 LV I. 69 — 73.

Когда изменения незначительны, то явление носит название изоморфизма (равноформности). Изоморфизм это частный случай морфотропизма. Изоморфизмом называется свойство веществ, близких или родственных по химическому составу, кристаллизоваться в близких формах.

Под изоморфизмом понимаются явления двух сортов:

1) Изоморфизмом совершенным (изоморфизмом в тесном смысле слова), мы будем называть такой, когда два изоморфных вещества могут давать изоморфные однородные кристаллы переменного состава, промежуточного между ними.

2) Под изоморфизмом несовершенным (изоморфизмом в широком смысле слова) мы будем понимать такой, когда таких промежуточных по составу кристаллов не получено.

Классический пример изоморфизма—ряд углекислых солей щелочноземельных металлов:

		угол α
магнезиальный шпат	CO_3Mg (магнезит)	$103^0\ 21^1/_2'$
известковый шпат	CO_3Ca (кальцит)	$101^0\ 55'$
цинковый шпат	CO_3Zn (смитсонит)	$103^0\ 28'$
кадмиевый шпат	CO_3Cd	$102^0\ 30'$
марганцевый шпат	CO_3Mn (родохрозит)	$102^0\ 50'$
железный шпат	CO_3Fe (сидерит)	$103^0\ 04'$

Все эти вещества кристаллизуются гексагонально — в скаленоэдрическом или в ромбоэдрическом виде симметрии. Формы их кристаллов довольно разнообразны. В частности кальцит является веществом, обладающим наибольшим богатством известных его кристаллических форм по сравнению со всеми остальными изученными кристаллами: у него известно свыше 175 различных форм.

Однако, кристаллы всех этих веществ имеют совершенную спайность по ромбоэдру, которому придается символ (100). Каждый ромбоэдр (фиг. 74) можно исчерпывающе охарактеризовать одним углом α между «полярными» его ребрами, т-.е. теми, которые сходятся у него на тройной оси. Как видно из приведенной выше таблицы, углы α у всех веществ перечисленного ряда весьма близки. Исследования показывают, что магнезит и кальцит дают только одно вещество промежуточного состава: $[CO_3]_2\ MgCa$— доломит; магнезит и сидерит дают через брейнериты и пистомезиты $CO_3\ (Fe, Mg)$ — сплошной непрерывный ряд. Первая пара является несовершенными, а—вторая совершенными изоморфами.

Совершенные изоморфы обладают обычно близкими молекулярными объемами [1]), а несовершенные — более отличающимися друг от друга мол. объемами (Вульф, Госнер, Баркер и др.).

Натровая селитра NO_3Na кристаллизуется в таких же ромбоэдрах, у нее угол $\alpha = 102^0\ 41^1/_2'$. Но смешанных кристаллов она с веществами ряда кальцита не дает. Однако, кристалл CO_3Ca, помещенный в раствор NO_3Na продолжает наростать дальше. Это типичный пример несовершенного изоморфизма. Некоторые авторы подобное явление называют изогонизмом (равноугольностью).

---

[1]) Молекулярный объем есть число, которому пропорционален объем одной молекулы вещества. Это число получается от деления молекулярного веса на плотность данного химического вещества.

С точки зрения теории структуры кристаллов **изоморфизм** состоит в том, что структура всех членов изоморфного ряда остается одинаковой, лишь на места всех или некоторых атомов одного элемента (напр. Mg в магнезите) становятся атомы другого элемента (напр. Fe в сидерите), имеющего иной атомный объем, а потому несколько меняющего углы и единичные отрезки в кристалле.

Существенно иной характер имеет другая категория веществ переменного состава, а именно **твердые растворы**. Кристаллы NH_4Cl способны впитывать в себя $FeCl_3$ в количестве до 7% при окрашивании в густобурый цвет, при чем они остаются однородными. Это явление, аналогичное растворению сахара в воде, можно объяснить только так: **в промежутках пространственной решетки главного вещества распределяется вещество растворенное**, не нарушая строения или лишь немного изменяя размеры элементарной структурной ячейки главного вещества. Так как эти промежутки ограничены, то и это явление растворения или пропитывания может итти лишь до некоторого предела.

Такими явлениями объясняются в некоторых случаях, например, окрашивания кристаллов: бесцветный NaCl (каменная соль) дает от примеси повидимому тонко-дисперсного металлического Na синие участки; белый сидерит под влиянием окисления дает коллоидальную Fe_2O_3, окрашивающую его в бурый цвет и т. д. Это окрашивание зависит часто от совершенно ничтожных количеств примесей, выражаемых нередко в долях процента.

ЧАСТЬ ШЕСТНАДЦАТАЯ.

Химическое и кристаллическое строение.

Уже в предыдущей части мы не ограничивались иногда (например, в вопросах изоморфизма и др.), рассмотрением связи химического состава с формой кристаллов, а затрагивали вопрос о соотношении химической структуры с кристаллической структурой. Здесь остановимся несколько подробнее на некоторых сведениях об этом соотношении.

§ 141. Кристаллохимический закон Шубникова [1].

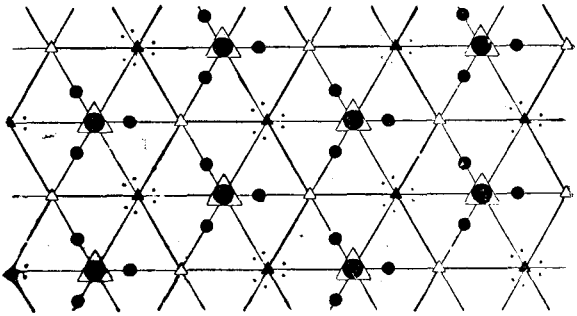
После того, как рентгенометрическими исследованиями было выяснено, что элементом строения кристалла является в общем случае атом, а не молекула, А. В. **Шубников** обратил внимание на то, что между симметрией каждого кристаллического вещества и его химической формулой должна существовать определенная связь. Для уяснения этого обратимся к фиг. 333.

Здесь изображена одна из 230 разновидностей симметрии бесконечных правильных систем фигур. Сеть прямых линий, образующая крупные треугольники, изображает здесь нормальные к чертежу плоскости симметрии. Меньшие треугольники в узлах упомянутой сети изображают тройные поворотные оси симметрии, также нормальные к чертежу. Видим,

[1] А. В. **Шубников**. Основной закон кристаллохимии. Изв. Ак. Н. 1922. 515—524.

что их три серии, обозначенные разными треугольничками. Оси одной и той же серии (например, более крупные белые треугольнички с черной точкой в середине) суть равные оси, т.-е. выводящиеся друг из друга посредством элементов симметрии, системы. Оси какой-либо из остальных серий невозможно вывести из осей первой серии ни поворотами, ни отражениями, приводящими всю систему в совмещение, а можно вывести лишь как равнодействующие плоскостей симметрии. В этой разновидности симметрии имеются еще плоскости скольжения (см. стр. 83—84), проходящие параллельно каждой серии плоскостей симметрии посредине между ними. Эти плоскости скольжения на рисунке не показаны для простоты.

Нетрудно видеть, что вся система следов осей и плоскостей симметрии на плоскости чертежа может быть различным образом разбита на равные и параллельные друг другу области. Например, так, как проведены толстые линии, система распределяется без остатка на равные и параллельные шестиугольники, при совмещении которых поступанием, т.-е. параллельным перенесением вся система совмещается со своим начальным положением.



Фиг. 333.
Разновидность симметрии 40s (по Федорову) или $\mathfrak{C}_{3r}^{1}$ (по Шенфлису) дитригонально-пирамидального вида симметрии.

Представим себе, что, кроме изображенных и описанных здесь элементов симметрии, система эта имеет еще поступание на некий отрезок a вдоль тройных осей. Тогда пространственная система окажется построенной из тождественных и параллельных друг другу гексагональных призм с пинакоидом, каждую из которых мы назовем элементарной ячейкой системы. Такая разновидность симметрии относится, что нетрудно понять (см. стр. 81) к дитригонально-пирамидальному виду симметрии. По Федорову она обозначается 40s, по Шенфлису $\mathfrak{C}_{3r}^{1}$.

Если теперь в этой разновидности симметрии присутствует какой-либо атом, то посредством элементов симметрии системы из него выведется бесчисленное множество равных ему атомов. От положения начального атома зависит, какое относительное количество всех равных ему атомов будет присутствовать в данной системе. Если мы обратим внимание на элементарные ячейки, имеющие в нашем случае форму гексагональной призмы с пинакоидом, то заметим, что из заданного атома мы можем получить внутри одной ячейки или всего (вместе с заданным) 6 равных атомов (мелкие точки на фиг. 333) или 3 (средние точки) или 1 атом (крупные точки). Никаких других количеств равных атомов в одной ячейке мы получить в этой разновидности симметрии не можем.

Зададим себе такой вопрос: если какое-либо химическое соединение имеет бинарную форму, $A_n B_m$, т.-е. состоит из равнозначных атомов двух элементов, и кристаллизуется в этой разновидности симметрии, то каково может быть тогда отношение между числами n и m?

Понятно, что для куска данного кристалла, содержащего весьма большое число элементарных ячеек системы фиг. 333, отношение n : m будет или совсем такое же, как в одной ячейке или весьма близкое к нему. Поэтому нам достаточно разобрать возможные значения отношения n : m для элементарной ячейки. Здесь же на основании вышесказанного

$$\begin{aligned} n : m = 1 &: 1 \text{ или} \\ 1 &: 3 \text{ или} \\ 1 &: 6 \text{ или} \\ 3 &: 6 \end{aligned}$$

Итак, в этой разновидности симметрии могут кристаллизоваться лишь такие бинарные соединения, которые имеют одну из следующих формул A_1B_1, A_1B_3, A_1B_6 и A_3B_6. Тройные соединения этой разновидности симметрии могут иметь лишь такие формулы:

$$A_1B_1C_1,\ A_1B_1C_3,\ A_1B_1C_6,\ A_1B_3C_3,\ A_1B_3C_6,\ A_1B_6C_6,\ (A_3B_3C_3),$$
$$A_3B_3C_6\ (=A_1B_1C_2),\ A_3B_6C_6\ (=A_1B_2C_2),\ (A_6B_6C_6)$$

Таким образом можно теоретически вывести все типы четырех компонентных, пяти компонентных и т. д. химических соединений, которые могут кристаллизоваться в данной разновидности симметрии.

Также можно решить обратную задачу: предсказать в каких разновидностях симметрии может кристаллизоваться химическое соединение данного типа. Например, оказывается, что соединение типа A_1B_{16} может кристаллизоваться лишь в разновидностях дитетрагонально-дипирамидального и гексоктаэдрического видов симметрии.

Если пересмотреть все разновидности симметрии, так же, как мы сделали с приведенной на фиг. 333 системой 40 s, то окажется, что относительные числа геометрически равных (т.-е. выводимых друг из друга элементами симметрии) атомов в кристаллических веществах могут быть равны лишь какому либо набору из следующего ряда чисел:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 16,\ 24,\ 48.$$

При этом следует заметить, что не всякая комбинация этих чисел возможна. Например, не может быть кристаллического соединения постоянного состава с формулой A_3B_{16}, потому что нет такого вида симметрии, где совместно возможно было бы существование двух видов атомов в количествах, относящихся друг другу, как

$$3 : 16\ (=6 : 32 = 9 : 48).$$

Для правильного понимания излагаемых здесь идей А. В. Шубникова следует заметить, что под буквами A, B, C в приводимых нами формулах химических соединений следует понимать лишь геометрически равные атомы (см. стр. 79 и 295), а не вообще одинаковые (стр. 79) атомы, т.-е. не вообще атомы одного и того же химического элемента. Это лучше всего разъясняется следующим примером.

Согласно сказанному выше, соединения с формулой, например, A_2B_5 не возможны в кристаллическом состоянии. Между тем в химии известны в твердом виде такие соединения, как P_2O_5, As_2O_5, Sb_2O_5, а аналогичные

им V_2O_5, Ta_2O_5, Nb_2O_5, получены даже в кристаллах, подвергшихся гониометрическому и оптическому исследованию. Это является лишь видимым противоречием излагаемому кристаллохимическому закону, так как существование этих кристаллов указывает лишь, что не все атомы кислорода равны у них геометрически, а следовательно, не все они играют одинаковую химическую роль. Таким образом, их формулу надо писать иначе, например, $P_2O_3O_2$ или $O_2V_2O_3$ и т. п.

После всего сказанного мы можем формулировать кристаллохимический закон Шубникова так [1]):

Если мы напишем химическую формулу какого-либо кристаллического вещества постоянного состава в виде $A_aB_bC_c \ldots Q_q$ при чем атомы, играющие одинаковую структурную, а, следовательно, и химическую роль будем обозначать одинаковыми буквами, а атомы, играющие разную роль, хотя бы и принадлежащие одному и тому же элементу,—обозначим разными буквами,—то относительные числа a,b,c, . . . q, различных атомов, не могут в этой формуле быть вполне произвольными. Возможные их значения определяются законом кристаллографической симметрии (стр. 56) и следствиями из него.

Это есть существенное ограничение закона Дальтона в химии.

Формулируем 2 главнейших следствия из этого закона, объясненные выше.

Следствие I. В каждой данной разновидности симметрии могут кристаллизоваться лишь такие химические соединения постоянного состава, в формуле которых $A_a\ B_b\ C_c \ldots . Q_q$ числа a, b, . . . q отвечают возможным для этой разновидности относительным числам геометрически равных атомов.

Следствие 2. Каждое химическое соединение постоянного состава с формулой $A_a\ B_b\ C_c \ldots . Q_q$ может кристаллизоваться лишь в одной (или нескольких) из таких разновидностей симметрии, в которых возможны относительные числа равных атомов, отвечающие a, b, c . . . q.

§ 142. Вопрос о химической молекуле в кристаллических телах и типы кристаллических решеток с химической точки зрения.

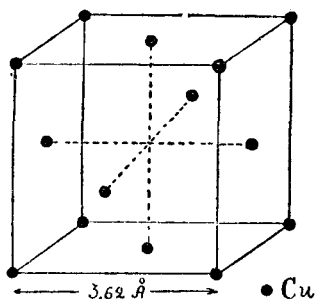
Мы видели выше (стр. 183), что рентгенометрические исследования кристаллов NaCl и KCl привели Браггов к такому представлению о кристаллической структуре этих соединений, при котором понятие о химической молекуле в кристалле теряется. Каждый атом Na (фиг. 265 стр. 183) окружен шестью равноотстоящими от него атомами Cl, и обратно: каждый атом Cl окружен шестью равноотстоящими от него атомами Na. При таком строении нет причин, по которым следовало бы считать, что некоторый атом Na как-либо особенно прочно связан с одним из 6 ближайших к нему атомов Cl в обособленную химическую молекулу.

Химической молекулы, как обособленной группы атомов, в этих кристаллах таким образом не существует.

---

[1]) Автор придает ему 2 иные формулировки.

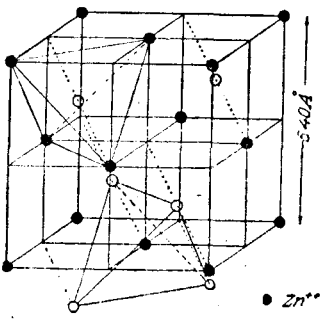
Однако, дальнейшие рентгеноисследования показали, что кристаллические решетки разделяются в этом отношении на несколько групп. Перечислим их [1]).



Фиг. 334.
Атомная решетка меди — Cu.

1) Атомная решетка. Пример: медь—Cu (фиг. 334). Здесь узлы обычной центрогранной кубической решетки заняты центрами тяжести отдельных атомов.

2) Ионная решетка. Пример: хлористый натрий — NaCl (фиг. 265, стр. 183) или цинкобманка ZnS (фиг. 335). Здесь вещество ионизировано в кристалле. В узлах центрогранной кубической решетки здесь сидять попеременно катионы Zn и анионы серы S [2]). Первые (Zn) образуют центрогранную кубическую решетку. Вторые (S) сидят в центрах 4 из 8 малых кубов, на которые разделяется большой куб. Они тоже образуют центрогранную кубическую решетку, что не особенно трудно понять, если приставить к кубу, изображенному на фиг. 335, такие же кубы во все стороны. Интересно, что в этом случае каждый анион цинка окружен равноотстоящими от него катионами серы, располагающимися в вершинах правильного тетраэдра центром которого служит Zn-ион. И также каждый катион S тетраэдрически окружен четырьмя анионами Zn. Два таких тетраэдра показаны на фиг. 335.

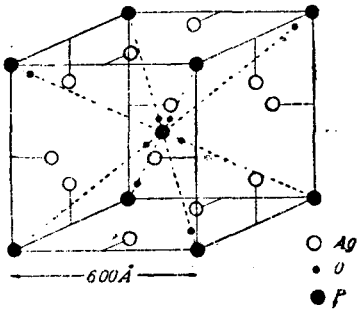


Фиг. 335.
Ионная решетка цинкобманки — ZnS.

В такой структуре, как мы видим, обособленной молекулы нет.

3) Радикал-ионая решетка. Пример: фосфат серебра—Ag_3PO_4 (фиг. 336).

В ней имеются обособленные группы атомов, составляющие радикал (анион) PO_4''' фосфорной кислоты, при чем каждая из этих групп окружена равноотстоящими от нее 12-ю катионами Ag.



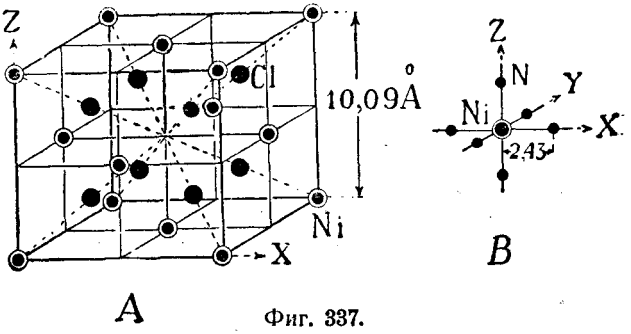
Фиг. 336.
Радикал-ионная решетка Ag_3PO_4.

4) Комплекс-ионная решетка. Пример: хлористый никкельгексамин $\{Ni[NH_3]_6\}Cl_2$. Здесь двухвалентный электроположительный комплекс $\{Ni[NH_3]_6\}^{++}$ образует центрогранную кубическую ре-

[1]) А. К. Болдырев. Эволюция учения о кристаллическом состоянии вещества. (Зап. Мин. Общ. 1929). **58**. 249.

[2]) Напомним, что ионизация состоит в отнятии или придании к электрически-нейтральному атому одного или нескольких электронов (электрон—наименьшая порция отрицательного электричества). В первом случае атом становится положительно-заряженным (катион), а во втором—отрицательно (анион).

шетку, а анионы Cl занимают центры всех восьми малых кубов, на которые разделяется большой куб. Чтобы не усложнять чертежа на левой фиг. (337A) показаны лишь атомы Ni и Cl, а на правой (337B) показано строение комплекса $Ni[NH_3]_6$: атомы азота занимают вершины октаэдра, в центре которого сидит Ni. Вокруг каждого N располагаются по 3 атома H, но точно расположение последних неизвестно, так как в виду весьма малой массы атомов H они являются пока трудно уловимыми для рентгенометрического метода.

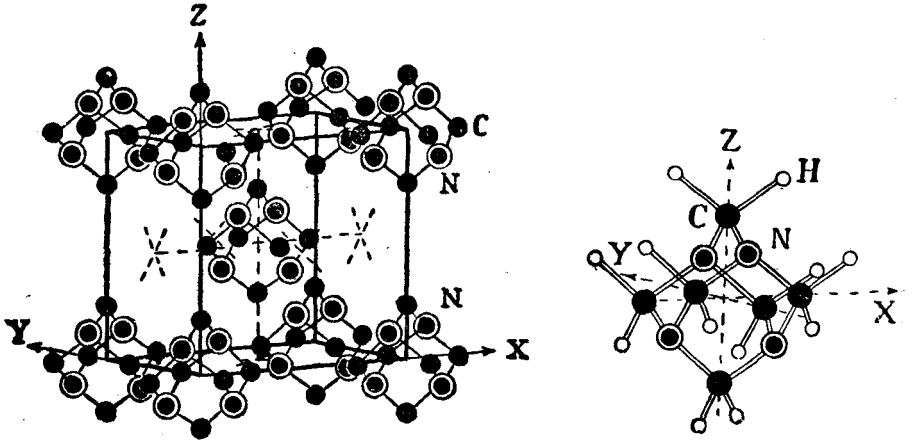


Фиг. 337.

Комплекс-ионная решетка $[Ni[NH_3]_6]Cl_2$.

В 3 и 4 типе решеток, как видим, уже имеются обособленные группировки атомов.

5) В последнем типе—**молекулярной решетки** мы уже имеем ясно обособленные друг от друга молекулы. Пример: органическое соединение гексаметилен-тетрамин[1]) $C_6H_{12}N_4$ или $[CH_2]_6N_4$, кристаллизующееся



Фиг. 338.

Молекулярная решетка гексаметилен-тетрамина — $C_6H_{12}N_4$.

в ромбододекаэдрах[2]). Структура его показана на фиг. 338. Полные обособленные молекулы его сидят здесь в узлах центрированной кубической решетки.

---

[1]) Метиленом называется в органической химии двувалентная группа — CH_2. Амином — группа NH_3. В описываемом соединении мы имеем 4 аминовых группы, у которых 12 H замещены 6 метиленами.

[2]) Н. Н. Падуров. Зап. Мин. Общ. 1929, стр. 5.

ЧАСТЬ СЕМНАДЦАТАЯ.

Полиморфия.

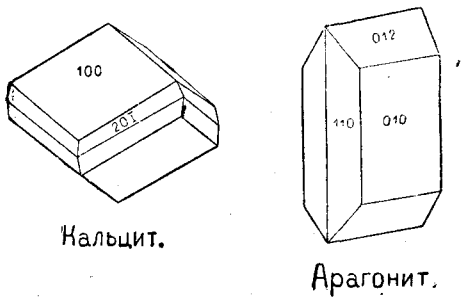
§ 143. Определение полиморфии.

Πολύ—много, μορφή — форма. Полиморфизм (или полиморфия) в буквальном смысле слова значит—многоформность.

Полиморфизмом называется свойство некоторых веществ кристаллизоваться в двух или нескольких различных по кристаллографическим константам формах, часто принадлежащих даже к различным сингониям.

§ 144. Примеры полиморфных веществ.

1) Упоминавшийся уже нами пример углекислого кальция—$CaCO_3$ является характерным и здесь. Это вещество встречается в природе в виде двух кристаллических видоизменений или, как говорят, двух полиморфических модификаций: кальцита (гексагональной сингонии) и арагонита—минерала того же химического состава, но обладающего совершенно отличным от кальцита комплексом кристаллических форм ромбической сингонии (фиг. 339).



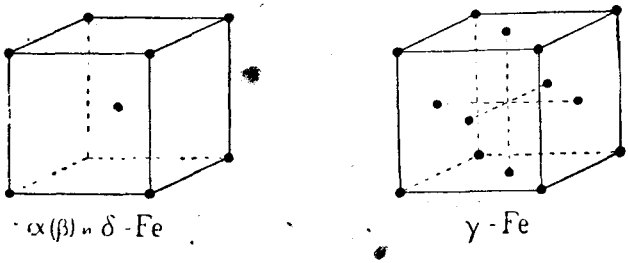
Фиг. 339.
Характерные формы кристаллов кальцита (гексагонального) и арагонита (ромбического), имеющих один и тот же химический состав: $CaCO_3$.

Другие карбонаты гексагонального ряда, упомянутые выше, при изложении изоморфизма, не образуют кристаллов ромбической сингонии.

Зато карбонаты некоторых металлов, там не фигурировавших, являются исключительно ромбическими. Таковы, например, CO_3Ba—витерит, CO_3Sr—стронцианит, CO_3Pb—церуссит. Они изоморфны с арагонитом, при чем смесимость их или незначительна или у некоторых пар вовсе отсутствует.

2) Вторым примером может служить железо. Оно образует несколько модификаций, которые обозначаются греческими буквами α, β, γ, δ. Вторая из них β отличается от α лишь магнитными и некоторыми другими

физическими свойствами, но не структурой, и потому не может считаться особой полиморфической модификацией. Рентгенометрическими исследованиями установлено, что α и δ-железо построены оба по центрированному кубу (фиг. 340), отличаясь друг от друга лишь размерами ребра



Фиг. 340.
Структуры различных полиморфических модификаций железа.

этого куба ($a = 2{,}86$ Å для α-Fe и $a = 2{,}93$ Å для δ-Fe). А γ-железо построено по центрогранному кубу (фиг. 340), при чем ребро этого куба равно 3,63Å.

3) Явление полиморфии распространено весьма широко. Приведем здесь еще ряд примеров, частью уже упоминавшихся (стр. 289 и 290).

Состав вещества	Полиморфические модификации	
	Название	Сингония
C	Алмаз	Кубической сингонии
»	Графит	Гексагональной »
S	α-сера	Ромбической »
»	β- »	Моноклинной »
»	γ- »	Моноклинной »
»	δ- »	Моноклинной (?) » (псевдогексагональной) сингонии
»	ε- »	Гексагональной сингонии
ZnS	Сфалерит	Кубической »
»	Вуртцит	Гексагональной »
TiO_2	Рутил	Тетрагональной »
»	Анатаз	Тетрагональной сингонии, но с иным, чем у рутила, комплексом форм.
»	Брукит	Ромбической сингонии

§ 145. Методы изучения полиморфии.

1. Кристалломорфологический метод состоит в измерении кристаллов различных модификаций данного вещества и в установлении принадлежности их к различным сингониям или к различным видам симметрии одной и той же сингонии. Могут быть также случаи, как для рутила и анатаза среди приведенных выше примеров, когда данное вещество (напр. TiO_2) дает кристаллы двух сортов, хотя и принадлежащие к одному и тому же виду симметрии, но настолько различные по наблюдаемым у них формам, что формы одной их категории не связаны законом рациональности параметров с формами другой их категории.

С этим отличием связаны в таких случаях более или менее резкие отличия во всех физических и химических свойствах. Это иллюстрируется следующей табличкой:

Свойство	Рутил	Анатаз
Спайность	(110)—соверш. (100)—средн. (111)—несоверш.	(111)—соверш. (001)—средн.
Удельный вес	4.2 до 4.3	3.8 до 3.9
Оптический знак	+	—
Показатели преломления (для лучей Na):		
N_g	2.903	$= N_m$
N_m	2.616	2.562
N_p	$= N_m$	2.489
Двупреломление: $N_g - N_m$ . . .	0.287	0
$N_m - N_p$ . . .	0	0.073

2. Кристаллофизические методы. Измерение кристаллов является весьма надежным методом, но обладает тем недостатком, что для его применения необходимо, чтобы вещество имелось в виде годных для измерения кристаллов, что не всегда бывает. Этого недостатка лишены кристаллофизические методы. Сюда следует отнести:

1) кристаллооптический метод, состоящий в определении оптических констант данных веществ;

2) рентгенометрический метод, состоящий в снятии рентгенограмм данных веществ по одному из способов, изложенных в части X курса;

3) другие физические методы, состоящие в измерении других физических констант данных веществ, как то: твердостей, удельных весов, магнитных, электрических и др. свойств.

При всех этих методах, если при одном и том же химическом составе вещества оказывается, что вещество из одной его партии обладает одними физическими свойствами, а из другой—другими,—мы можем считать, что имеем дело с двумя полиморфическими модификациями этого вещества.

3. Физико-химические методы. Эти методы исследования полиморфических веществ состоят: 1) в выяснении физико-химических усло-

вий устойчивости существования каждой из модификаций одного и того же вещества, 2) в определении условий перехода одной модификации в другую.

Изложение этих методов выходит за пределы нашего курса. Укажем лишь, что одним из обычных факторов, переводящих одну модификацию в другую, является повышение температуры. Так при постепенном нагревании железа при обыкновенном давлении получаются последовательно все выше перечисленные его модификации при таких температурах:

Модификации Fe:	$\alpha \rightleftarrows$	$\beta \rightleftarrows$	$\gamma \rightleftarrows$	δ
Точки перехода от	759°	875°	1401°	
Точки перехода до	774°	917°	1411°	

Двойные стрелки указывают здесь на то, что здесь процесс протекает как слева направо (при нагревании), так и справа налево (при охлаждении). Такие точки перехода называются энантиотропными, в противоположность монотропным, где переход удается осуществить лишь в одном направлении.

Заметим, что переход вещества из одной модификации в другую совершается либо с поглощением, либо с выделением энергии (тепла). В этом отношении полиморфическое превращение аналогично переходу вещества из одного состояния в другое, т.-е. плавлению — отвердеванию или испарению—сжижению. С точки зрения физической химии различные полиморфические модификации одного и того же состава представляют разные твердые его фазы, наравне с его жидкой и газообразной фазой.

§ 146. Полиморфия и закон Стенона—Роме-де-л'Иля.

Как мы видели на примере железа первопричина полиморфии заключается в том, что атомы данного вещества оказываются способными складываться при образовании твердой фазы двумя или несколькими разными способами. Таким образом, кристаллические решетки разных полиморфических модификаций одного и того же состава оказываются различными.

Поэтому в данную нами формулировку закона постоянства углов кристаллов необходимо внести уточнение в том смысле, что у полиморфных веществ постоянство углов есть свойство всех кристаллов одной и той же полиморфической модификации каждого вещества. Это свойство не распространяется в случае наличия полиморфии на все кристаллы одного и того же химического состава.

ЧАСТЬ ВОСЕМНАДЦАТАЯ.

Образование и разрушение кристаллов.

§ 147. Процессы образования кристаллов.

Существуют следующие пути образования кристаллов.

1 А. Кристаллизация из раствора (водного или безводного), вследствие уменьшения растворимости вещества кристалла. Уменьшение растворимости может быть вызвано различными причинами, а именно:

а) изменением температуры (охлаждением, реже — нагреванием раствора);

b) изменением давления;
c) примешиванием к раствору веществ, понижающих растворимость вещества получаемых кристаллов.
1 B. Удалением достаточной части растворителя, напр., выпариванием воды или спирта из водного или спиртового раствора.

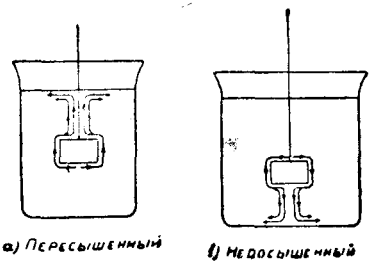
2. Кристаллизация из расплава вещества кристалла вследствие охлаждения до точки его затвердевания (или изменением давления до такой величины, которая достаточна, чтобы вызвать затвердевание расплава при данной температуре).

3. Кристаллизация непосредственно из парообразного состояния (возгонка) при резком понижении температуры или при резком изменении (увеличении) давления.

Наиболее доступными для наблюдения и эксперимента являются способы пункта 1-го, а из них—кристаллизация из раствора вследствие охлаждения или вследствие испарения растворителя.

§ 148. Концентрационные потоки и расслаивание растворов.

При данных физико-химических условиях, вещество кристалла растворяется в веществе растворителя лишь до известного предельного содержания. Раствор, обладающий этим предельным содержанием, называется насыщенным раствором данного вещества. При более низком содержании растворенного вещества, мы имеем недосыщенный раствор, при более высоком, которое в некоторых случаях удается получить, образуется пересыщенный раствор.



Фиг. 341.
Концентрационные потоки в пересыщенном и недосыщенном растворах.

Кристаллы могут расти лишь в насыщенных (при дальнейшем их сгущении) или в пересыщенных растворах.

Если подвесить кристалл в насыщенном растворе и медленно пересыщать его испарением растворителя или надлежащим изменением температуры, то можно заметить, что от кристалла вверх начинают итти струи в жидкости (фиг. 341-a). Появление этих струй зависит от того, что при погружении кристалла в пересыщенный раствор он начинает расти, т.-е. из окружающего его слоя раствора частицы растворенного вещества начинают оседать на кристалл; раствор здесь становится легче и поднимается наверх.

Это явление концентрационных потоков при образовании кристаллов было открыто Леманном, подробно изучено Г. В. Вульфом [1]).

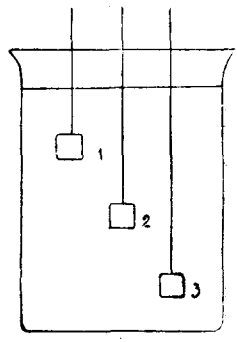
В дополнение к этим наблюдениям мне удалось подметить явление концентрационных потоков при растворении кристаллов (фиг. 341-b). Причина этих потоков также ясна: при растворении кристалла в недосыщенном растворе слой раствора вокруг кристалла становится более кон-

[1]) Г. В. Вульф. К вопросу о скоростях роста и растворения кристаллических граней.—Варш. Унив. Изв. 1895. Та же статья в Z. f. Kr. **34**. 1901. 449 и след.

центрированным и потому более тяжелым, чем окружающая жидкость, почему и появляются спускающиеся вниз струи.

Пользуясь концентрационными потоками можно легко узнать с каким раствором, пересыщенным или недосыщенным мы имеем дело.

Концентрационные потоки оказывают сильное влияние на внешний вид или облик (габитус) растущих кристаллов: нижняя часть их растет сильнее, чем верхняя, вследствие того, что свежий более концентрированный раствор притекает к кристаллу снизу взамен удаляющихся вверх концентрационных потоков, уносящих менее концентрированные части раствора, осадившие на кристалл весь свой избыток растворенного (кристаллизуемого) вещества.



Фиг. 342
Опыт П. А. Земятченского для доказательства расслаивания растворов.

Здесь же следует упомянуть об открытом П. А. Земятченским[1]) расслаивании растворов, в которых идет кристаллизация.

Подвешивая кристаллы квасцов, хлорноватокислого натра и других веществ в соответственных пересыщенных растворах на разных глубинах (фиг. 342) и определяя через несколько дней вес каждого кристалла автор установил, что в то время, как нижний кристалл непрерывно рос, средний и в особенности верхний кристалл сначала рос (хотя и медленнее нижнего), а затем начинал растворяться. Например, для квасцов получились такие данные:

№ кристалла	Вес кристалла до опыта	Привес через	
		4 суток	6 суток
1	3,897 гр.	— 6,5%	— 14,8%
2	2,974 »	+ 1,7%	— 2,5%
3	2,238 »	+14,7%	+18,1%

Как видим, в то время, как нижние слои раствора остались пересыщенными во все время опыта, верхний, а затем и средний слой в течении опыта перешел из пересыщенного в недосыщенное состояние.

Следует упомянуть, что у других исследованных веществ явление это наблюдалось не так резко, а именно у $NaClO_3$ меньше, чем у алюмокалиевых квасцов, у $CuSO_4 \cdot 5\,H_2O$ еще меньше, а у хромовых квасцов $[SO_4]_2CrK$ расслаивания не наблюдалось вовсе.

Прямыми определениями удельного веса раствора в разных слоях указанные выше результаты были подтверждены.

Причина описанного расслаивания была исследована В. И. Михеевым[2]) по моему предложению. Был определен на трех разных горизонтах сосуда удельный вес в двух первоначально тождественных слегка пересыщенных растворах. В одном из них были подвешены кристаллы и шла кристаллизация, в другом кристаллов не было. Для первого расслоение получилось, примерно, такое же, как в вышеописанном опыте П. А.

[1] П. А. Земятченский. Этюды по кристаллогенезису IV. Расслаивание пересыщенных растворов. — Зап. Ак. Н. XXXIII. 5. 1914.

[2] В. И. Михеев. Причины расслаивания пересыщенных растворов. Зап. Мин. Общ. 59. 1930. 303.

Земятченского. Для второго — у В. И. Михеева получилось даже обратное расслоение: вверху раствор оказался слегка тяжелее, чем внизу, что можно объяснить испарением верхнего слоя.

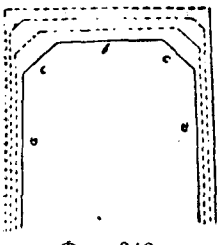
§ 149. Факторы, влияющие на облик кристалла.

Кроме концентрационных потоков, на облик кристаллов, растущих в растворе, влияют также, как доказано опытами, следующие факторы.

1) Ретикулярная (т.-е. сетчатая) плотность граней. Впервые Браве, создатель теории пространственной решетки, высказал гипотезу [1]), что на кристаллах преимущественно развиваются те грани, которые наиболее густо усажены частицами. Если представлять себе строение кристалла в виде пространственной решетки, то степень густоты расположенных в ней частиц вещества можно измерять так называемой ретикулярной плотностью — d, которая есть ни что иное, как число узлов плоской сетки, приходящееся на единицу ее поверхности. Так как на каждый элементарный (т.-е. не заключающий внутри себя узлов) параллелограмм плоской сетки приходится 1 узел (ибо каждый узел (фиг. 157) распределяется между четырьмя смежными параллелограммами), то

$$d = \frac{1}{\omega},$$

где ω есть площадь элементарного параллелограмма. Таким образом, гипотезу Браве можно формулировать так: «чем больше ретикулярная плотность данной плоской сетки, тем чаще она встречается в качестве реальной грани на кристаллах данного вещества».



Фиг. 343.
Схема роста кристалла с различными скоростями роста у разных граней.

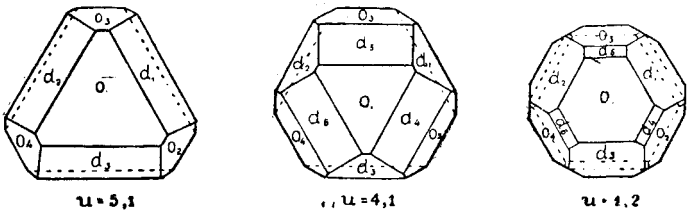
Эта гипотеза равнозначна со следующей: скорость роста каждой грани, т.-е. скорость отодвигания ее параллельно самой себе от начальной точки роста кристалла, будет в первом приближении тем меньше, чем выше ее ретикулярная плотность. На фиг. 343 схематически показан ход роста кристалла. Предположим, что наиболее плотная грань есть a, за ней следует b, наименьшей ретикулярной плотностью пусть обладает c. Согласно сказанному выше, грань a будет расти медленно, b — быстрее, c — еще быстрее. Вследствие этого, как легко усмотреть из чертежа грань c будет зарастать и исчезнет. То же случится и с другими быстро растущими гранями. В результате кристалл окажется ограниченным лишь несколькими гранями с наибольшими ретикулярными плотностями. Это объяснение, однако, годится лишь в том случае, когда грани, окружающие грань c (с малой плотностью) образуют при продолжении многогранный угол с внешней стороны грани c. Если же, наоборот, — с внутренней, — то грань c с малой плотностью не будет зарастать и будет присутствовать в качестве элемента ограничения кристалла.

Этот закон имеет гипотетический характер. Опытным подтверждением его служит тот факт, что в кубической сингонии наиболее частыми

---

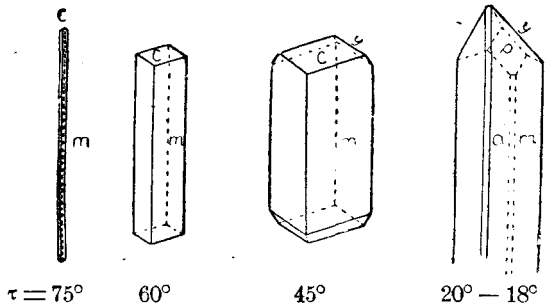
[1]) A. Bravais. Études cristallographiques. 1886, стр. 166 и след. См. также: Е. С Федоров. Сокращенный курс кристаллографии 1910 стр. 256. И. Г. В. Вульф. К вопросу о скоростях роста и растворения и т. д. — l. c. стр. 111

формами являются куб (100), ромбододекаэдр (110), октаэдр и тетраэдр (111) и другие с простыми символами. Можно показать, что именно эти грани обладают наибольшими ретикулярными плотностями. При этом в гексаэдрической структуре (по простому кубу) максимальную плотность имеют грани (100), в додекаэдрической (по центрогранному кубу)—(111),



Фиг. 344.
Кристаллы калийных квасцов $[SO_4]_2AlK \cdot 12\,H_2O$, выпавшие из растворов с возрастающей степенью пересыщения u граммов этой соли на 100 *куб. см* насыщенного раствора. o — октаэдр, d — ромбододекаэдр.

в октаэдрической (по центрированному кубу)—(110), что можно вывести чисто геометрически из фиг. 173, 176, 177. С другой стороны известно, что одни из веществ кубической сингонии встречаются преимущественно в кубах или с кубическим обликом, другие в октаэдрах, третьи в ромбододекаэдрах, четвертые в тетраэдрах. В этих случаях можно косвенно заключать на основании гипотезы Браве о виде структуры таких кристаллов. Подобные же заключения по формам кристаллов об их структуре (об их параллелоэдре) можно делать и для остальных сингоний. Этот прием является одним из существенных оснований кристаллохимического анализа Федорова (стр. 145).



Фиг. 345.
Габитус кристаллов $MgSO_4 \cdot 6\,H_2O$, полученных при различной температуре.

Систематической поверки этой гипотезы Браве на кристаллах, коих структура уже изучена рентгеновыми лучами, пока не производилось.

2) Степень пересыщения раствора, т.-е. избыточное количество вещества в граммах, содержащееся в 100 *куб. см* насыщенного раствора. А. В. Шубников [1]) показал, что, чем меньше степень пересыщения раствора, тем богаче гранями и тем изометричнее выпадающие из него кристаллы. Фиг. 344 иллюстрирует сказанное.

3) Температура, при которой идет кристаллизация. Изучением влияния этого фактора занимался последнее время В. В. Доливо-Добровольский [2]), кристаллизуя шестиводный гидрат серно-кислого магния. Фиг. 345, заимствованная из его работы, показывает достаточно

[1]) А. В. Шубников. Влияние степени пересыщения раствора на внешний вид выпадающих из него кристаллов квасцов (Изв. Ак. Н. 1913. 817).

[2]) В. В. Доливо-Добровольский. Кристаллы шестиводного сернокислого магния (гексагидрита) ($MgSO_4 \cdot 6\,H_2O$)—(Зап. Мин. Об. LVIII. 3—63. 1929).

роль температуры. Для четырех изображенных обликов концентрации были соответственно: 1) несколько меньше, чем 5:1 (5 весовых частей соли на 1 весов. часть воды); 2) 4:1; 3) несколько меньше, чем 3:1; 4) 3:1.

Уменьшение степени пересыщения раствора приводило к укорочению кристаллов по [001], к развитию c=(001) и к большему богатству их формами (что согласуется с выводами А. В. Шубникова о квасцах).

Как видим, здесь высоко-температурные кристаллы обладают игольчатым обликом, понижение температуры в общем делает их более изометрическими. Известны и другие отдельные факты, свидетельствующие то же; но общего значения это правило, повидимому, не имеет. Несомненным является лишь факт влияния (иногда весьма сильного) температуры на облик образующихся кристаллов.

Однако, известны наблюдения и обратного характера. Например, NaCl кристаллизуется из чистых водных растворов в кубах, как при низких температурах, так и из нагретых растворов (до 100°).

4) Сорастворенные вещества. Из русских ученых влияние этого фактора подробно изучал на опыте П. А. Земятченский [1]), дающий в начале своей работы сводку литературы, а затем излагающий собственные многочисленные наблюдения и выводы из них.

Еще Роме-де-л'Иль (1783 г.) заметил, что NaCl, кристаллизующийся из чистых водных растворов в форме кубов, выпадает из растворов, к которым прибавлена мочевина, в форме октаэдров.

С того времени было установлено во многих случаях влияние примесей к растворам на облик выделяющихся из этих растворов кристаллов. Приведем несколько примеров.

Исследования Франкенгейма, Леммана, Орлова, Кёрбса и др. установили целый ряд других примесей, влияющих подобным же образом на облик кристаллизующегося NaCl. В качестве примеров упомянем NaOH и $CaCl_2$.

Фатер, Фридель и Саразен установили влияние примеси щелочных силикатов и $CaCl_2$ на облик кристаллов кальцита $CaCO_3$.

Гауэр показал, что хлорноватокислый натр $NaClO_3$ из чистого водного раствора выпадает в кубах, а в присутствии $NaSO_4$ — в тетраэдрах.

Целый ряд исследователей занимался изучением кристаллизации квасцов $[SO_4]_2$ AlK $12H_2O$ с этой точки зрения. Из чистых водных растворов это вещество кристаллизуется или в октаэдрах или в кристаллах, где октаэдр преобладает, а грани (110) и (100) являются подчиненными по своей величине. Однако, прибавляя к раствору в надлежащих количествах некоторые примеси, можно вызывать появление или кубо-октаэдрических кристаллов квасцов с примерно равным развитием той и другой формы или даже заставить их кристаллизоваться в чистых кубах. Квасцы в кубах получаются:

1) из насыщенного раствора их, предварительно прокипяченного с известью (Sieffert),

2) при предварительном добавлении KOH (H. Löwel) или NH_4OH (V. Hauer) до тех пор, пока образующийся осадок Al $[OH]_3$ еще растворяется,

3) при добавке Na_2CO_3 (A. Polis, v. Foullon),

4) при добавлении буры $Na_2B_4O_7 \cdot 10H_2O$ (Земятченский),

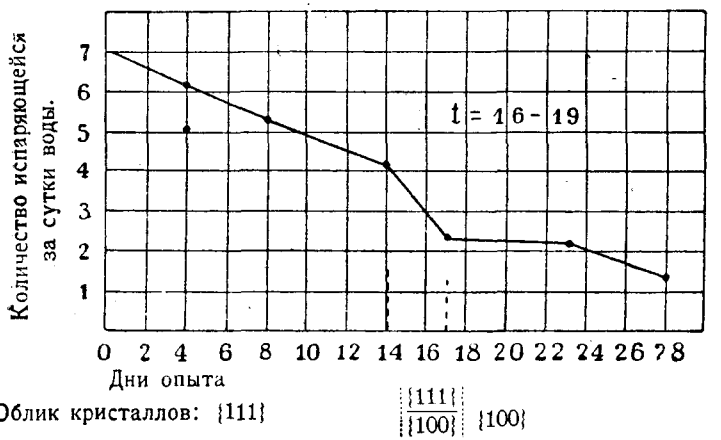
5) также в присутствии ряда других примесей.

---

[1]) П. А. Земятченский. Этюды по кристаллогенезису. I, II, III и IV. — Зап. Ак. Н. XXIV, 8 1909; XXX. 3. 1911; XXXIII. 4. 1914.

Примесь HCl или HJ в надлежащем количестве вызывает появление граней пентагондодекаэдра (210) на выделяющихся кристаллах квасцов (Beudant, Jannettaz, Земятченский).

Многочисленные опыты П. А. Земятченского установили: 1) что, для появления, под влиянием сорастворенных веществ, новых форм на выпадающих из раствора кристаллах, необходимо не только присутствие данной примеси, но присутствие ее в определенных относительных количествах; 2) что раствор с надлежащей примесью, способный выделять кристаллы необычного облика, выделяет их в большинстве случаев не сразу: сначала идет выделение обычных кристаллов, затем переходного облика, наконец, — нового облика в чистом виде (фиг. 346), в чем сказывается влияние концентрации; 3) что, повидимому, всегда то вещество, сорастворение которого влияет на облик кристаллов главного кристал-



Фиг. 346.
Ход кристаллизации квасцов $[SO_4]_2AlK12H_2O$ в присутствии буры $Na_2B_4O_7 \cdot 10H_2O$.
В начале опыта имелось 300 *кб. см.* насыщенного раствора квасцов (31 гр), содержащего 5 гр. буры. На 14 день валовое отношение веса буры к квасцам в растворе было равно 1,38

лизуемого вещества, вступает в химическое взаимодействие с растворенным телом или с растворителем, давая новые химические соединения; без такого химического взаимодействия влияние на облик кристаллов, согласно опытам П. А. Земятченского, не может быть осуществлено.

§ 150. Теория минимума поверхностной энергии кристалла, находящегося в равновесии с раствором.

Эта теория была впервые высказана П. Кюри (1885) и затем развита Г. В. Вульфом (1895) [1].

Для понимания ее необходимы некоторые сведения из учения о свойствах поверхностного слоя физических тел.

[1]) Г. В. Вульф. Основы кристаллографии. 1926, стр. 44. Также смотри выноску на стр. 306.

Это учение разработано, главным образом, для жидкостей.

Из элементарной физики известно, что поверхностный слой какого-либо объема жидкости отличается по своим свойствам от ее внутренних частей. Он представляет собою как бы пленку, в каждой точке которой действует равномерное во все стороны поверхностное натяжение. Он оказывает, кроме того, давление, направленное перпендикулярно к поверхности, для которого Лаплас дал формулу:

$$P = K + \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

где R_1 и R_2 — радиусы кривизны двух главных нормальных сечений поверхности, α — постоянный коэффициент, зависящий лишь от характера взятой жидкости и той среды, от которой ее отделяет поверхность раздела. Значение этого коэффициента будет выяснено ниже. K получается из условия $R_1 = R_2 = \infty$; т.-е. K есть нормальное давление в случае, когда поверхность раздела есть плоскость.

Из наличия нормального давления следует, что поверхностный слой жидкости обладает некоторым запасом потенциальной энергии, который при прочих равных условиях будет тем больше, чем большую поверхность имеет жидкость.

Из этого следует, что увеличение поверхности жидкости требует затраты энергии. Это выражается формулой Гаусса:

$$dw = \alpha dS \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Здесь dw — бесконечно-малое приращение поверхностной энергии, получаемое в результате бесконечно-малого увеличения dS площади внешней поверхности жидкости. Коэффициент α — постоянен, если постоянна данная жидкость и соприкасающаяся с нею среда. Можно показать [1]), что постоянная α — одна и та же, как в формуле Гаусса, так и в формуле Лапласа.

Из формулы Гаусса следует, что α есть та энергия, которую надо затратить, чтобы увеличить поверхность на 1, или та потенциальная энергия, которой обладает 1 *кв. см* поверхностного слоя жидкости при данных условиях.

В то же время можно показать, что α численно равняется силе натяжения поверхностного слоя, отнесенной к 1 длины плоской линии, начерченной на поверхности жидкости [2]).

Для константы α применяют различные названия: 1) 1-ая капиллярная постоянная; 2) поверхностное натяжение; 3) удельная поверхностная энергия. Существуют многочисленные способы опытного определения этой величины, выражаемой в миллиграммах на миллиметр длины (или что то же в миллиграмме-миллиметрах на квадратный миллиметр площади).

Из формулы (2) видно, что полная поверхностная энергия (потенциальная) данного объема жидкости будет

$$w = \alpha S \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

где S — поверхность этого объема. Если форма поверхности жидкости может меняться под влиянием молекулярных сил, то она стремится стать

---

[1]) О. Д. Хвольсон. Курс физики 1. 1923, стр. 459.
[2]) Там же, стр. 477.

такою, чтобы энергия поверхностного слоя W была наименьшей. Из формулы (3) видно, что для этого поверхность S должна стать наименьшей. В известном опыте Плато, где капля жидкости (масла) погружена в другую жидкость равного удельного веса (чтобы уничтожить действие силы тяжести), указанный только что принцип наименьшей энергии выражается в том, что капля принимает форму шара, потому что из всех тел равного объема шар обладает наименьшей поверхностью.

Теперь обратимся к твердым телам и в частности к кристаллам.

П. Кюри предположил, что у твердых тел, в том числе и у кристаллов, имеется также особый поверхностный слой [1]), обладающий поверхностной энергией, подобно поверхностному слою жидкостей. Эта энергия пропорциональна поверхности данного тела. Для увеличения поверхности тела надо затратить энергию, пропорциональную этому увеличению:

$$dw = kdS \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Здесь (как раньше α) k есть та энергия, которую надо затратить, чтобы увеличить поверхность разграничения данного тела от данной среды на единицу. Кюри называет ее «капиллярной постоянной», Вульф предпочитает термин «удельная поверхностная энергия».

Если тело изотропно, — k постоянно независимо от направления элемента поверхности dS, или нормали к ней n. В кристаллах же k меняется с направлением dS или n, оставаясь постоянным во всех точках одной и той же грани, если состав соприкасающегося с ней раствора во всех этих точках одинаков.

Обозначим удельные поверхностные энергии разных граней кристалла по отношению к раствору данного состава через $k_1, k_2, k_3, \ldots k_m$, а площади тех же граней соответственно чрез $s_1, s_2, s_3 \ldots s_m$. Тогда полная поверхностная энергия кристалла будет

$$w = k_1 s_1 + k_2 s_2 + k_3 s_3 + \ldots k_m s_m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Если принять, как это делает Кюри, что принцип наименьшей энергии действителен и здесь, то растущий в растворе кристалл будет стремиться принять такую форму, при которой функция w (формула 5) получает наименьшее значение при данном объеме кристалла.

Вопрос о равновесной форме кристалла в насыщенном растворе разрешается теоремой Г. В. Вульфа, к изложению которой мы и приступаем.

Сам Г. В. Вульф [2]) доказал ее лишь для нескольких частных случаев, а для общего случая дал нестрогое доказательство. Впоследствии она была доказана Г. Гильтоном [3]) и независимо от него Г. Либманом [4]).

Мы приведем это доказательство с пропуском одной его части, хотя и весьма существенной, но отсутствие которой не мешает пониманию общего хода его.

---

[1]) Это, повидимому, подтверждается опытами А. Ф. Иоффе с его сотрудниками (см. § 108, стр. 192).

[2]) См. выноску на стр. 306.

[3]) H. Hilton. — Mathematical Crystallography 1903. 105.

[4]) H. Liebmann Der Curie-Wulff'sche Satz über Combinationsformen von Krystallen. — Zeitschr. f. Kr. 1914. **53**. 171.

Теорема Г. В. Вульфа. Если кристаллический многогранник находится в равновесии со своим насыщенным раствором, то форма его удовлетворяет условию:

$$x_1 : x_2 : x_3 : \ldots : x_m = k_1 : k_2 : k_3 \ldots : k_m \quad \ldots\ldots\ldots (6).$$

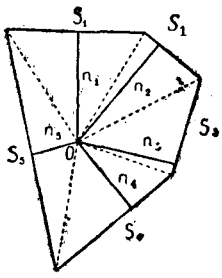
где $k_1, k_2, \ldots k_m$ — удельные поверхностные энергии отдельных граней кристалла в данном растворе, а $x_1, x_2, \ldots x_m$ длины нормалей, опущенных из некоторой вполне определенной точки пространства на соответственные грани.

Перед доказательством сделаем несколько предварительных замечаний.

Под кристаллическим многогранником мы разумеем подчиняющийся закону Стенона—Роме-де-л'Иля, т.-е. такой, у которого форма и размеры могут меняться лишь передвижением каждой грани параллельно самой себе.

Под равновесием разумеем здесь отсутствие изменений, как объема, так и формы кристаллического многогранника.

Под насыщенным раствором разумеется такой, в котором кристалл растворенного вещества не изменяет своего веса и объема, а может лишь изменять свою форму.



Фиг. 347.

Доказательство. Если объем кристалла постоянен,

$$V = C \text{ (const)},$$

то

$$dV = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (7).$$

Условие (7) можно развить так. Объем кристалла можно найти, как сумму объемов пирамид, получаемых, если из какой-либо точки O внутри кристалла опустим нормали на все его грани и соединим O со всеми его вершинами. Фиг. 347, представляющая разрез такого кристалла чрез точку O плоскостью, нормальной к пяти его граням одного пояса, поясняет сказанное.

Итак,

$$V = \frac{1}{3}(s_1 n_1 + s_2 n_2 + \ldots + s_m n_m) \quad \ldots\ldots\ldots (8).$$

Если $s_1, s_2, \ldots s_m$ бесконечно мало изменятся, то получим

$$V + dV = \frac{1}{3}\Big\{(s_1 + ds_1)(n_1 + dn_1) + (s_2 + ds_2)(n_2 + dn_2) + \ldots + (s_m + ds_m)(n_m + dn_m)\Big\} \quad \ldots\ldots\ldots (9).$$

Отсюда, вычитая (8) из (9), находим dV, отбрасывая бесконечно-малые второго порядка.

$$dV = \frac{1}{3}\Big\{(s_1 dn_1 + s_2 dn_2 + \ldots + s_m dn_m) + (n_1 ds_1 + n_2 ds_2 + \ldots + n_m ds_m)\Big\} \quad (10).$$

Другим способом dV можно найти как сумму бесконечно-тонких пластинок, построенных на каждой грани кристалла с основанием s и толщиной dn; при этом в подсчет объема не войдут бесконечно-малые

второго порядка, составляющие призмочки вдоль ребер, у которых два размера будут бесконечно-малы. При таком подсчете получим:

$$dV = s_1 dn_1 + s_2 dn_2 + \ldots + s_m d_m \quad \ldots\ldots\ldots (11).$$

Из (10) и (11) путем вычитания получаем:

$$2dV = n_1 ds_1 + n_2 ds_2 + \ldots + n_m ds_m \quad \ldots\ldots\ldots (12).$$

Теперь условие (7) получает такой вид:

$$n_1 ds_1 + n_2 ds_2 + \ldots + n_m ds_m = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (13).$$

Это есть условие, которому должны удовлетворять бесконечно-малые изменения ds площадей граней кристаллического многогранника для того, чтобы объем его не менялся.

Теперь выразим математически условие Кюри. Полная поверхностная энергия равновесного кристалла имеет минимальное значение

$$w = \min,$$

при условиях:

$$dw = 0,\ d^2w > 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (14).$$

Оставляя пока в стороне условие $d^2w > 0$, определяющее именно минимум, а не максимум функции, развернем условие $dw = 0$. Для этого дифференцируем функцию w (ур. 5, стр. 311):

$$dw = k_1 ds_1 + k_2 ds_2 + k_3 ds_3 + \ldots + k_m ds_m = 0 \quad \ldots\ldots (15).$$

Итак, всякий кристаллический многогранник, который удовлетворяет одновременно трем условиям: (13), (15) и $d^2w > 0$, будет в равновесии с насыщенным раствором.

Нетрудно построить один из многогранников, удовлетворяющих условиям (13) и (15). Для этого из произвольной точки x по данным направлениям нормалей к граням кристалла откладываем отрезки $x_1, x_2, x_3, \ldots x_m$, пропорциональные соответственно $k_1, k_2, k_3, \ldots k_m$, и чрез концы этих отрезков проводим плоскости, к ним нормальные. Эти плоскости вырежут вокруг точки x из пространства некоторый многогранник, при чем некоторые из плоскостей могут оказаться вне этого многогранника. Если такой многогранник подчинить условию постоянства объема (ур. 13), то он будет удовлетворять и условию (15). Действительно для него по построению

$$x_1 : x_2 : x_3 : \ldots : x_m = k_1 : k_2 : k_3 : \ldots : k_m, \quad \ldots\ldots (16).$$

откуда

$$x_1 = ck_1;\ x_2 = ck_2;\ x_3 = ck_3; \ldots x_m = ck_m.$$

Если (13) справедливо, то подставляя туда вместо общих выражений нормалей $n_1, n_2, \ldots n_m$ значения нормалей для этого случая $x_1, x_2, \ldots x_m$, получаем:

$$ck_1 ds_1 + ck_2 ds_2 + \ldots + ck_m ds_m = 0,$$

откуда убеждаемся в том, что для этого многогранника удовлетворяется условие (15).

Далее можно доказать, что так построенный многогранник является единственно-возможным решением, удовлетворяющим одновре-

менно условиям (13) и (15). Доказательство этого мы здесь опускаем [1]). Если это принять, то теорема Г. В. Вульфа является доказанной.

Теперь следует сказать об условии $d^2w > 0$. Вместо того, чтобы выводить знак второго дифференциала функции w мы докажем, что, изменяя форму кристаллического многогранника при условии $V = \text{const}$, мы всегда можем сделать значение величины этой функции w больше какого-угодно большого числа A, и что, следовательно, эта функция не может иметь максимума.

Имеем (фиг. 347):

$$w = k_1 s_1 + k_2 s_2 + \ldots + k_m s_m \quad \ldots\ldots\ldots (17)$$

и

$$V = \frac{1}{3}(n_1 s_1 + n_2 s_2 + \ldots + n_m s_m) = \text{const}.$$

Заметим, что, не изменяя величины объема V, мы можем у нашего кристаллического многогранника как угодно увеличить площадь одной из его граней, например, сделать $s_g > \frac{A}{k_g}$, где A сколь угодно большое число, а k_g — удельная поверхностная энергия грани s_g. Для сохранения постоянства объема при этом было бы лишь необходимо соответственно уменьшать n_g, сплющивая многогранник по грани s_g.

Тогда, для измененного многогранника сумма в правой части уравн. (17) уменьшится, если в нее вместо s_g вставим $\frac{A}{k_g}$. И для этого многогранника будем иметь:

$$w > (k_1 s_1 + k_2 s_2 + k_g \frac{A}{k_g} + k_4 s_4 + \ldots + k_m s_m).$$

Так как по своему физическому смыслу все k положительны, то все незамененные члены правой части лишь увеличат абсолютную величину члена $k_g \frac{A}{k_g}$, а потому и подавно будем иметь

$$w > k_g \frac{A}{k_g}, \text{ или } w > A.$$

Итак, функция w не может иметь максимума.

Замечание об удельной поверхностной энергии граней кристалла. Эта величина имеет пока чисто теоретическое значение. В то время как существует много способов измерения удельной поверхностной энергии для жидкостей, — мы не имеем пока способа для измерения аналогичной величины для твердых тел. Были попытки измерять ее для кристаллов косвенно, чрез определение скоростей роста граней (см. следующий параграф). Но они основаны на недоказанных допущениях.

---

[1]) См. цитированные выше работы Г. Либмана и Г. Хилтона. Доказательства эти состоят в отыскании минимума функции $w = ks_1 + \ldots + k_m s_m$, при чем величины s связаны 4 условиями: $n_1 s_1 + \ldots + n_m s_m = 3V$, $a_1 s_1 + \ldots + a_m s_m = 3V$; $b_1 s_1 + \ldots + b_m s_m = 3V$; $c_1 s_1 + \ldots c_m s_m = 3V$, где все n,a,b,c суть нормали из четырех произвольных точек N,A,B,C внутри многогранника на все его грани. Эти четыре условия вытекают из постоянства объема данного многогранника. Уравнения подобного же вида для всех других точек пространства являются следствиями этих четырех. Таким образом, задача сводится к отысканию так называемого относительного минимума функции w. Она решается в курсах дифференциального исчисления. В данном случае она приводит к формуле Г. В. Вульфа (16), чем доказывается, что только многогранник, удовлетворяющий формуле (16) служит решением задачи.

§ 151. О скоростях роста граней кристалла и об их измерении.

Скоростью роста данной грани называется то расстояние по нормали к ней, на которое эта грань отодвигается в единицу времени при росте кристалла.

Можно предполагать, что скорость роста грани (как и ее удельная поверхностная энергия k) не зависит от ее величины, а зависит лишь от физико-химических условий процесса роста, т.-е. от концентрации раствора, отсутствия или наличия и характера посторонних примесей к раствору, температуры, давления и т. д.

Измерением относительных скоростей роста кристаллов занимался Г. В. Вульф [1]). Он помещал заранее приготовленный кристалл соли $Zn\,[NH_4]_2\,[SO_4]_2 \cdot 6H_2O$ в раствор изоморфной с нею Моровской соли — $Fe\,[NH_4]_2\,[SO_4]_2 \cdot 6H_2O$. Тогда кристалл цинковой соли обрастал коркой железной соли. Отношение толщины этой коры на разных гранях кристалла давало отношение скоростей роста соответственных граней. При этом оказалось, что скорости роста разных граней довольно резко отличаются друг от друга, а именно в среднем:

Символ грани	{201}	{110}	{001}	{011}
Относительная скорость роста . .	0,94	1,73	2,08	2,38

Если мы обозначим начальную точку роста кристалла буквой O (фиг. 347), то легко понять, что согласно определению, данному вначале этого параграфа, скорости роста будут пропорциональны нормалям, опущенным на грани кристалла из этой начальной точки роста O:

$$v_1 : v_2 : \ldots : v_m = n_1 : n_2 : \ldots : n_m$$

Раньше мы видели, что если справедлив принцип Кюри (о наименьшей поверхностной энергии), то в кристалле, растущем в растворе бесконечно-мало пересыщенном, всегда имеется такая точка X, что нормали, опущенные из нее на все грани кристалла, пропорциональны удельным поверхностным энергиям:

$$x_1 : x_2 : \ldots : x_m = k_1 : k_2 : \ldots k_m.$$

Было высказано предположение, что точка X непременно должна совпадать с точкой O, и что таким образом удельные поверхностные энергии $k_1, k_2, \ldots k_m$ всегда прямо пропорциональны скоростям роста $v_1, v_2, \ldots v_m$ соответственных граней. Если бы это было так, то, измеряя относительные скорости роста, мы бы знали отношение удельных поверхностных энергий $k_1, k_2, \ldots k_m$, а следовательно, знали бы и форму равновесного кристаллического многогранника.

Однако, как показывает наглядно фиг. 348 точки O и X могут не совпадать. Здесь O начальная точка роста, ABCD — кристаллический многогранник для некоторого первого момента времени. Согласно сказанному, для любого другого момента времени кристалл получит форму

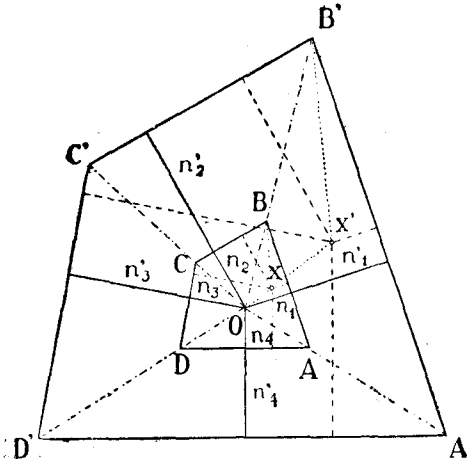
---

[1]) См. выноску на стр. 306. Также «О скоростях роста кристаллических граней» 1895. См. также связанную с этим статью П. Павлова. О некоторых свойствах кристаллов с точки зрения термодинамики. Z. f. Kr. 1905 XI. 189—205.

многогранника A′B′C′D′, подобного ABCD, с центром подобия в O. Если при этом точка X, нормали из которой к граням пропорциональны удельным поверхностным энергиям $k_1, \ldots k_m$, лежит там, где она показана на фиг. 348, то положение аналогичной точки X′ в бо́льшем многограннике легко найдется по правилам подобия (на луче OX и на линии $B'X' \parallel BX$). Вследствие подобия, нормали, опущенные на грани из X″, будут пропорциональны нормалям, опущенным из X:

$$x_1' : x_2' : \ldots : x_m' = x_1 : x_2 : \ldots : x_m = k_1 : k_2 : \ldots : k_m$$

Таким образом, для точек X, X′, X″ .... будет сохраняться пропорциональность нормалей величинам k_1, $k_2 \ldots k_m$, а для нормалей из точки O пропорциональность скоростям v_1, $v_2, \ldots v_m$. Но пропорциональности нормалей x нормалям n очевидно здесь не будет.



Фиг. 348.
Иллюстрирующая различное положение начальной точки роста O и точки Г. В. Вульфа X в кристалле.

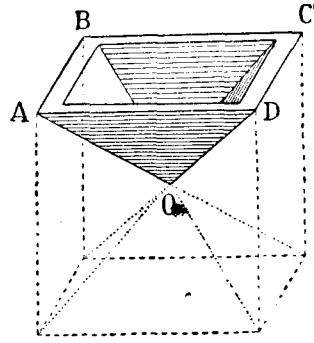
§ 152. Фигуры роста.

Если образование кристалла идет достаточно медленно и при том в достаточно подвижной среде, то обычно кристалл вырастает в виде сплошного выпуклого многогранника.

Иногда же наблюдается, что кристаллизующееся вещество принимает форму кристаллического скелета.

Так, например, снежинки представляющие собою фигуры роста льда, кристаллизующегося в гексагональной синго-

Фиг. 349.
Формы снежинок. (Фиг. роста льда) [1].



Фиг. 350.
Схема пирамиды роста поваренной соли.

нии, имеют вид не сплошных кристаллов, а разнообразных шестилучевых скелетов, три из которых изображены в виде примера на фиг. 349.

Нередко фигуры роста имеют вид сложных узоров (ледяные узоры на окнах), в других случаях наблюдаются так называемые дендриты,

[1]) Из V. Goldschmidt. Atlas der Krystallformen. 1916. B. III.

т.-е. древовидные или веточковидные образования. Таковы, например, дендриты самородной меди или самородного серебра.

На фиг. 350 изображена схема пирамиды роста поваренной соли (кристаллизующейся в кубической сингонии): при быстром испарении вместо обычных для нее кубиков получаются полые пирамидки OABCD (фиг. 350) с квадратом ABCD в основании и с вершиною O в центре куба, построенного на этом основании. Стенки такой пирамидки иногда являются ступенчатыми и сложенными как бы из мелких кубиков, сросшихся между собою в параллельном положении. Наблюдаются и другие фигуры роста.

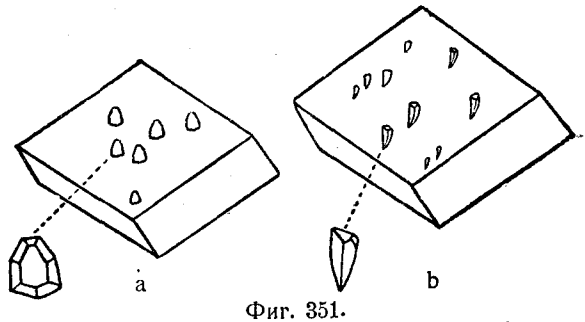
§ 153. Растворение кристаллов.

Если кристалл погружен в недосыщенный раствор, он подвергается растворению. При этом его вершины и ребра округляются и грани его становятся постепенно выпуклыми (см. фиг. 129 на стр. 49). Таким образом, округленность кристалла нередко (но далеко не всегда) является признаком того, что он подвергался растворению.

Одновременно с вершинами и ребрами растворяются также и грани. Г. В. Вульф [1]) своими измерениями на кристаллах Моровской соли $[SO_4]_2$ Fe $[NH_4] \cdot 6H_2O$ показал, что скорости растворения разных граней — почти одинаковы в пределах точности наблюдения. В этом скорости растворения резко отличаются от скоростей роста. Последние, как мы уже знаем иногда сильно различны для разных граней одного и того же кристалла. Объяснение такой одинаковости скоростей растворения граней будет приведено несколько ниже.

§ 154. Фигуры травления.

Если мы возьмем спайный осколок известкового шпата, погрузим одну из граней спайного ромбоэдра на короткое время (2 — 5 секунд) в разбавленную соляную кислоту и затем, вынув, быстро вытрем смоченную грань пропускной бумагой, то или простым глазом, или в лупу мы заметим, что на этой грани местами появились углубления правильной, многогранной формы (фиг. 351-a), эти углубления называются фигурами травления.



Фиг. 351.
Фигуры травления на грани спайного ромбоэдра у кальцита (a) и доломита (b). У первого фигуры с вертикальною плоскостью симметрии, у второго без таковой.

Для доломита $[CO_3]_2$ CaMg фигуры травления получаются иные (фиг. 351-b), без плоскости симметрии.

На этом основании кальцит следует причислить к дитригонально-скаленоэдрическому виду симметрии, а доломит — к ромбоэдрическому. Вообще фигуры травления служат хорошим признаком для уточнения

[1]) К вопросу о скор. роста и раств. кристаллич. граней. Варш. Универс. Изв. 1895, стр. 82 — 84.

вопроса о виде симметрии в тех случаях, когда исследуемые кристаллы обладают слишком простой комбинацией и при том частных форм, встречающихся в разных видах симметрии [1]).

Условия получения фигур травления в каждом отдельном случае различны. При всякой комбинации растворителя и протравляемого кристалла необходимо опытом установить наиболее благоприятную концентрацию растворителя (напр., HCl для кальцита) и продолжительность его действия.

В большинстве случаев фигуры травления представляют как бы отрицательный кристалл, ограниченный гранями, параллельными действительным или возможным граням данного кристалла.

Теперь мы можем привести то объяснение, которое дал Г. В. Вульф своему наблюдению почти одинаковой растворимости разных граней кристалла. Он полагает, что при растворении всякая грань покрывается сплошь мелкими фигурами травления, при чем эти фигуры оказываются ограниченными приблизительно одними и теми же гранями независимо от того, на какой грани кристалла они появились. Если это принять, то после образования таких фигур растворимость всех граней должна выравняться.

ЧАСТЬ ДЕВЯТНАДЦАТАЯ.

Кристаллография и определение химического состава вещества.

§ 155. Способы определения веществ, основанные на кристаллографии.

Перечислим все методы сюда относящиеся.

А. Кристалло-морфологические.

1. Кристаллохимический анализ Федорова.
2. Кристаллографический диагноз, разрабатываемый в настоящее время в Федоровском Институте в Ленинграде.

В. Кристаллооптические.

1. Теодолитный метод Федорова.
2. Коноскопический метод.
3. Иммерсионный «

С. Рентгенометрические.

1. Методы сравнения рентгенограмм определяемого вещества с рентгенограммами уже известных веществ.
2. Спектральный анализ рентгенолучей, испускаемых испытуемым веществом, нанесенным на антикатод рентгенотрубки.

Д. Кристаллохимические.

1. Микрохимический анализ.

Остановимся кратко на этих методах.

---

[1]) Классической работой по фигурам травления является сочинение: H. Baumhauer. Die Resultate der Ätzmethode in der kristallographischer Forschung. Leipzig 1894

§ 156. Кристаллохимический анализ Е. С. Федорова.

В своей сущности он был изложен выше (стр. 145), почему мы здесь на нем останавливаться не будем [1]).

§ 157. Кристаллографический диагноз, разработанный группой членов Федоровского Института [2]).

Так же как и предыдущий метод, это есть способ определять вещество кристалла помощью измерения его на гониометре. Если всякий вообще систематический способ определения кристаллического вещества с помощью измерения его кристаллов гониометром мы назовем кристаллографическим диагнозом, то Федоровский кристаллохимический анализ есть 1-й его вид, а обсуждаемый здесь способ — 2-й его вид. Возможны и иные, кроме этих, виды кристаллографического диагноза. Существенными отличиями описываемого здесь 2-го метода от кристаллохимического анализа служит полное отсутствие во 2-м методе разнообразных теоретических представлений и связанных с ними посредствующих графических или вычислительных операций, которые в первом методе производятся между гониометрическим измерением и определением вещества по таблицам «Das Krystallreich».

2-й метод таким образом состоит лишь в измерении кристалла на гониометре и в отыскании непосредственно по измеренным углам соответствующего вещества по предварительно составленному карточному каталогу всех когда-либо измеренных кристаллов.

Упомянутый карточный каталог разделен на 6 сингоний, при чем гексагональная сингония разделяется на 2 группы: тригональную с видимой тройной осью и гексагональную с видимой шестерной осью; карточки сомнительных кристаллов помещены и в той и в другой группе.

Для примера мы приведем здесь карточку одного из веществ тригональной группы [3]):

Бензил $= C_6H_5 \cdot CO \cdot CO \cdot C_6H_5$

Триг.-трап.	Т. плавл. = 95°	6 · 1
$10\bar{1}0$ $1\bar{0}10$	Уд. вес = 1,23	$a : c = 1 : 1{,}6322$
$10\bar{1}1$ $000\,1$	Двупрел. +	$\alpha = 78°13'$
$(01\bar{1}1)$ $(0\bar{1}11)$	$N_m = 1{,}6583$ (Na)	
$(01\bar{1}2)$ $(0\bar{1}12)$	$N_g = 1{,}6784$ (Na)	$10\bar{1}1 = 62°03'$
Сп. по (0001) сов.;	Вращ. пл. поляр. $\alpha = 25°$ (Na)	$01\bar{1}1 = 62°03'$
по $(10\bar{1}0)$ и $(11\bar{2}0)$ — несов.	Оптич. аномалии (разделение на поля).	$01\bar{1}2 = 43°18'$
	Фиг. травления на призматич. гранях — нессиметричн.; на (0001) — тригоны 2-го рода.	
	G. V. 200. F. 16	

[1]) См. мои «Комментарии к раб. Е. С. Федорова: Das Krystallreich».— Изд. Ак. Н. 1926.

[2]) А. К. Болдырев. Принципы нового метода кристаллографического диагноза вещества. — Зап. Мин. Общ. LIII. 251. См. также заметки А. К. Болдырева и В. В. Доливо-Добровольского в журнале „Сообщ. о научно-технич. работах в Республике XXIII 1928, 26.

[3]) Составлена Е. Е. Флинтом и А. Н. Лямином.

Мы видим, что карточка разделена на 3 части. В левой содержатся комбинации форм: каждый столбец символов отвечает одной из встреченных у кристаллов данного вещества комбинаций. Формы преобладающие (габитусные) напечатаны жирно, формы мелкие или случайные — взяты в скобки. В этой же левой части содержатся вспомогательные кристаллографические признаки: вид симметрии, спайность и др.

В средней части содержатся физические свойства.

В правой части, которая является главной из всех трех, содержатся углы, по которым ведется определение сначала. Для кристаллов тетрагональной и гексагональной сингоний такими определяющими углами служат полярные расстояния ρ косых граней, считая от главной оси кристалла. Углы ρ косых граней выписываются в правой части карточки в столбец в приблизительном порядке частоты присутствия соответственной грани на кристаллах данного вещества. Если наблюдалось у кристаллов данного вещества несколько косых граней (напр., у бензила на приведенной выше карточке — 3), то заготавливается столько же карточек этого вещества, у которых в правой части верхним в столбце стоят по очереди каждая из косых граней со своим углом ρ. Карточки в определителе каждой из этих сингоний подобраны в порядке возрастания первого угла ρ.

Определение ведется так. Измерив ρ для всех косых граней определяемого кристалла, мы берем ρ_a для наиболее развитой из них, напр., а и ищем в стопке карточек соответствующей сингонии такие, у которых на первом месте в правой части стоит грань с подходящим ρ, отличающимся от наблюденного ρ_a не свыше возможной ошибки измерения, напр., 15′ — 30′. Таким путем из стопки карточек выделяется от 1 до 5 — 6 подходящих по ρ карточек, из которых окончательный выбор делается по комбинациям, второстепенным кристаллографическим признакам (габитусу, спайности, двойникам и проч.) и по физическим признакам. Найдя вполне подходящую для определяемого кристалла карточку, читаем в ее заглавии название вещества и его химическую формулу.

Для низших сингоний (ромбической, моноклинной, триклинной) в правой части содержится больше углов, и способ отыскания подходящей карточки несколько сложнее.

В кубической сингонии углы между соответственными гранями в разных кристаллах одинаковы. Например, всегда

$$\rho_{100} = 0°$$
$$\rho_{110} = 45°$$
$$\rho_{111} = 54° 44′ 8″$$
и т. д.

независимо от того, какому веществу принадлежат кристаллы. Отсюда видим, что как излагаемым здесь методом, так и кристаллохимическим анализом Федорова и вообще методом, основанным на гониометрии различить друг от друга вещества кубической сингонии почти невозможно. Лишь отчасти здесь можно воспользоваться для такого различения наблюдениями комбинаций, габитуса, двойников, спайности, фигур травления и затем физических свойств.

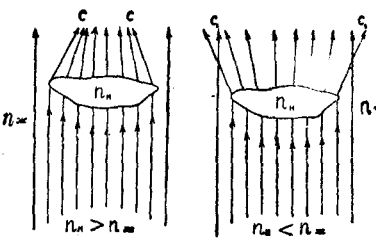
§ 158. Кристаллооптические методы.

Сущность их состоит в определении тех или иных оптических постоянных (констант) данного кристаллического вещества и в отыскании затем по справочникам веществ, имеющих оптические константы, тожде-

ственные или весьма близкие с наблюденными у определяемого вещества. Найдя подходящие по оптическим свойствам вещества, сверяем затем другие свойства (физические или химические), с помощью чего делаем окончательное определение.

Из трех упомянутых выше кристаллооптических методов теодолитный (или универсальный) метод Федорова был кратко описан в § 95 (стр. 174), коноскопический метод или метод сходящегося света — в § 92 (стр. 169). Остается сказать несколько слов об иммерсионном методе, получившем большое распространение в последнее время, благодаря выпущенному Э. Ларсеном [1]) определителю.

Подобно тому, как в кристаллографическом диагнозе главной опорной константой при определении являются углы кристаллов, так здесь главной определяющей константой являются показатели преломления неизвестного вещества.



Фиг. 352.
Элементарное объяснение полоски Ф. Бекке.

Метод этот основан на явлении, называемом полоской Бекке (F. Becke). Явление это состоит в том, что если мелкий кусочек вещества (кристаллического или аморфного) мы погрузим в жидкость и будем такой препарат рассматривать под микроскопом, слегка поднимая и опуская его трубу, то у краев зерна или кусочка мы будем видеть светлую полоску (полоску Бекке), перемещающуюся или внутрь зерна или удаляющуюся от него наружу.

Пусть:

$n_к$ — показатель преломления зернышка,
$n_{ж}$ — » » одной жидкости,
$n'_{ж}$ — » » другой »

Пусть:

$$1)\ n_к > n_{ж} \text{ и } 2)\ n_к < n'_{ж}.$$

Если мы будем поднимать тубус (трубу) микроскопа, то при параллельном или приблизительно параллельном освещении зернышка снизу, мы увидим, что в первом случае ($n_к > n_{ж}$) полоска Бекке бежит внутрь кристалла, а во втором случае ($n_к < n'_{ж}$) — светлая полоска Бекке побежит от кристалла наружу. Элементарное объяснение этому явлению можно дать с помощью фиг. 352. Зернышко определяемого вещества обычно к краям тоньше, чем в средине, и может рассматриваться, как выпуклая линза. Если показатель преломления такой линзы больше показателя преломления окружающей среды ($n_к > n_{ж}$ левая фиг. 352), — линза действует на лучи света, как собирательная. Если наоборот ($n_к < n'_{ж}$ — правая фиг. 352),—линза действует, как рассеивающая. При поднимании трубы микроскопа, мы увидим сгущение световых лучей (светлую полоску) в первом случае в местах с — с (внутри зернышка), а во-втором случае в местах $c_1 — c_1$ (вне зернышка).

Заранее зная показатель преломления $n_{ж}$ жидкости и наблюдая движение полоски Бекке, мы можем сказать имеем ли мы $n_к > n_{ж}$ или $n_к < n_{ж}$.

---

[1]) E. S. Larsen. The mikroskopic determination of the nonopaque minerals. 1921.

Для работы этим методом надо иметь набор жидкостей с заранее известными показателями преломления. Погружая зернышки определяемого вещества последовательно в ряд таких жидкостей и наблюдая полоску Бекке, устанавливаем пределы, между которыми заключен искомый показатель преломления.

У кристаллов, как мы знаем, показатель преломления вообще (кроме кубической сингонии) меняется с направлением. Поэтому в них определяют главные показатели преломления: три для трехосного эллипсоида (N_g, N_m, N_p) и два для одноосного (N_m и N_g для положительных или N_m и N_p для отрицательных кристаллов).

Нахождение зернышек, у которых в плоскости препарата лежат две из этих осей, и у которых, следовательно, плоскость препарата нормальна к какой-либо оси эллипсоида, — делается помощью коноскопического метода.

Точность определения показателей преломления этим методом приблизительно 0,002. Пределы применимости обусловливаются верхним пределом показателя у известных жидкостей (или газов), т.-е. от 1 (воздух) до 1,800 (раствор серы — S в иодистом метилене — CH_3J). Для веществ с еще более высокими показателями преломления применяют легкоплавкие вещества: серу S, селен Se, смесь селена с селенистым мышьяком и др., которые позволяют повысить предел применимости метода до 3,2 [1].

§ 159. Рентгенометрический способ диагноза

посредством сравнения рентгенограмм состоит в том, что снимается рентгенограмма определяемого кристаллического вещества одним из уже известных нам способов [1) метод Лауэ, 2) метод Дебая-Шеррера, 3) метод кристалловращения, представляющий как бы комбинацию двух предыдущих], и затем эта рентгенограмма сравнивается с заранее известными рентгенограммами ряда определенных веществ. Если рентгенограммы совершенно сходны, то вещества тождественны, если же рентгенограммы различны, то и вещества различны.

Во всем объеме этот метод неразработан, но в частных случаях применяется уже широко, в особенности путем сравнения дебаеграмм.

Задачи, стоящие здесь пред кристалло-рентгенометрией те же, какие уже в значительной мере разрешены кристаллооптикой и гониометрией: необходимо составление систематического каталога рентгенограмм всех известных кристаллов и разработка методов безошибочного и возможно быстрого отыскания в этом каталоге карточек, подходящих к снятой рентгенограмме определяемого неизвестного вещества.

§ 160. Рентгено-спектральный анализ.

Если все до сих пор изложенные в этой части методы определения веществ имеют своей целью определение вещества в целом, без его разложения, — то следующий (и в то же время последний) метод более сходен с обычными способами химического анализа: он определяет отдельные элементы, входящие в состав исследуемого вещества.

---

[1]) На русском языке см. руководство Д. С. Белянкина. Кристаллооптика (Изд. Кубуч. 1928, стр. 15), и его же: Таблицы светопреломления минералов 1926.

Метод рентгено-спектрального анализа основан на том, что всякое вещество, взятое в качестве антикатода, или даже помещенное на поверхность антикатода, — при ударе катодных лучей испускает рентгеновы лучи определенной длины λ, так называемые характерные для химических элементов, входящих в состав исследуемого вещества. Для этого необходимо лишь, чтобы напряжение, приложенное к электродам рентгенотрубки, было не ниже известного минимума, особого для каждого элемента.

Здесь происходит явление, аналогичное тому, которое происходит при накаливании веществ при производстве обычного спектрального анализа, причем напряжение в данном случае аналогично температуре при спектральном анализе: в каждом случае для возбуждения характерных видимых лучей (определенной длины волны) какого-либо элемента необходимо поднять температуру настолько, чтобы получить этот элемент в газообразном состоянии и полученный газ накалить. Если температура недостаточна, то мы или не получим видимых лучей вовсе или получим «белые лучи», состоящие из смеси лучей разных длин волн.

Аналогично этому, если напряжение, приложенное к электродам рентгенотрубки, недостаточно, то антикатод дает «белые» рентгенолучи, т.-е. совокупность рентгенолучей с разными длинами волн.

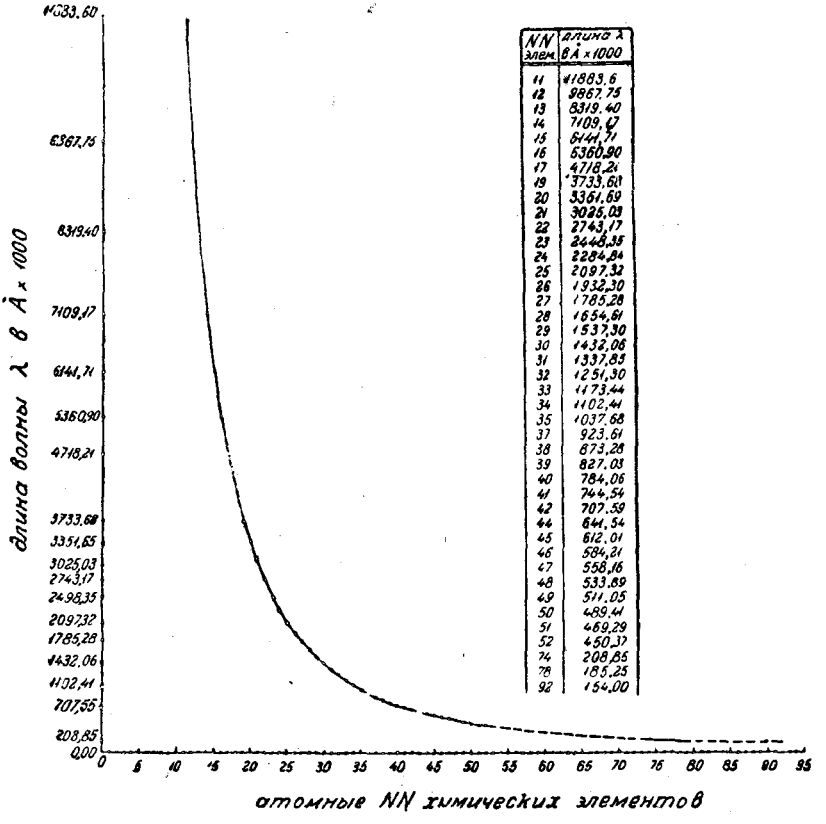
Приведем в качестве примера те минимальные напряжения, ниже которых не должна спускаться разность потенциалов у зажимов трубки для того, чтобы некоторые перечисленные ниже элементы, из которых, обычно, делаются антикатоды рентгеновых трубок, дали свои характерные рентгенолучи [1]).

Материал антикатода	Минимальное напряжение, возбуждающее характерные лучи
U	160 000 вольт
Pt	120 000
W	95 000
Ag	33 000
Zn	9 650 — 11 280
Cu	8 860 — 11 680
Ni	8 290 — 10 750
Fe	7 100 — 9 600
Cr	5 980 — 7 320
Al	1 200
C	410

Для того, чтобы количество характерных монохроматических лучей по отношению к испускаемым совместно с ними «белым» лучам было возможно больше, необходимо держать напряжение в несколько (3—6) раз выше этого минимума.

[1]) Левые цифры взяты из книги H. Mark. Die Verwendung der Röntgenstrahlen in Chemie u. Technik. 1926, 90. Правые — у Г. Кея. Рентгеновские лучи. Пер. Э. В. Шпольского, 1928. 170.

Подобно тому, как каждый накаленный элемент дает несколько спектральных линий в спектроскопе, т.-е. испускает лучи двух, трех или более различных длин волн, так же точно каждый элемент при достаточном напряжении в трубке испускает рентгенолучи нескольких различных длин волн. Самая жесткая (с наименьшей λ) серия этих лучей объединяется у всех элементов обозначением K [1]), далее идут серии L, M и N (с наибольшей длиной волны). В каждой серии различается несколько спек-



Фиг. 353.

Длины волн линии K_{α_1} характерных рентгенолучей, испускаемых различными химическими элементами.

тральных линий. В серии K наиболее интенсивная линия (наиболее яркий луч) обозначается у каждого элемента K_{α_1}.

На фиг. 353 приведен график, показывающий длину рентгеноволны для линии K_{α_1} различных химических элементов [2]).

Если длины волн разных линий различных элементов известны, то получив, как было указано выше (стр. 323), характерные рентгенолучи

---

[1]) Напомним, что спектральные линии видимого света обозначаются буквами от A (на краю красного конца спектра) до H (на краю фиолетового конца спектра).

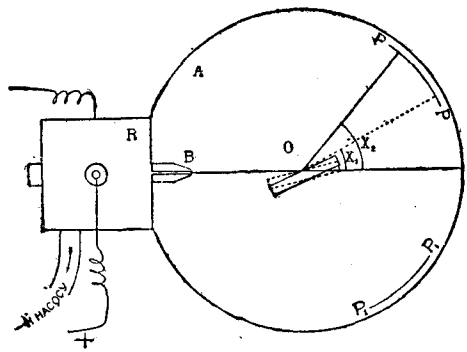
[2]) График составлен по цифрам M. Зигбана и его сотрудников (см. M. Siegbahn. Spektroskopie der Röntgenstrahlen. 1924, 101—102).

анализируемого вещества, мы должны для определения его состава уметь лишь измерить длины волн этих характерных рентгенолучей.

Для измерения длин волн рентгеновых лучей служат особые спектрографы, один из которых, а именно вакуум-спектрограф Зигбана [1]) мы здесь кратко опишем, указав принцип его действия.

Он состоит из низкого металлического цилиндра A (на фиг. 354 он показан в разрезе, нормальном к его оси). С цилиндром соединена герметически металлическая рентгенотрубка R. Во время опыта из этой аппаратуры непрерывно выкачивается газ (воздух), так же как из всяких металлических трубок. Цель откачки из самого спектрографа та, чтобы свести к минимуму поглощение рентгенолучей на пути от трубки до фотопластинки и тем самым получить возможно более четкие линии.

В центре спектрографа (цилиндра) располагается кристалл с точно известным заранее расстоянием d между плоскими сетками, параллельными той его грани, с помощью которой ведется измерение. В качестве



Фиг. 354.
Схема рентгеновского вакуум-спектрографа Зигбана.

такого кристалла применяют, например, каменную соль Na Cl или кальцит $CaCO_3$. Кристалл этот приводится во вращательное колебательное движение часовым механизмом вокруг оси цилиндра O, так что угол скольжения θ луча S, падающего на кристалл K непрерывно меняется в небольших пределах. Вследствие этого лучи разных длин волн, выходящие из щели B, отразятся при подходящих θ и дадут отпечатки в виде прямых линий вдоль образующей цилиндра A на фотопластинке PP. Зная углы X_1 и X_2 (как в методе Дебая-Шеррера, см. стр. 184) мы найдем $\theta_1 = \frac{X_1}{2}$; $\theta_2 = \frac{X_2}{2}$ и т. д. А затем по формуле Брагга-Вульфа: $n\lambda = 2d \sin \theta$, найдем λ, так как d кристалла, как сказано выше, нам заранее известно, а n (порядок отражения) мы берем $= 1$, наблюдая первое отражение.

Для более точного измерения углов X, наблюдение повторяют при кристалле, повернутом в положение симметричное относительно линии B O, так чтобы отраженные лучи попали на фотопластинку P_1 P_1.

Рентгеноспектральный анализ применяется не только как качественный метод (для констатирования присутствия или отсутствия данного элемента в анализируемом веществе), но и как количественный. В послед-

[1]) Там же стр. 62 и след.

нем случае сравниваются интенсивности линий, полученных от двух веществ: с неизвестным содержанием данного элемента и с заранее известным его содержанием.

Рентгеноспектральный анализ оказывает особенно ценные услуги там, где химический анализ весьма труден, как например, в случае определения редких земель, которые очень трудно химическим путем отделить друг от друга. В таком случае, выделив редкие земли, можно их далее подвергнуть исследованию посредством только что описанного метода и по интенсивности линий каждого элемента судить об относительных их количествах в анализируемом материале.

Точность количественных определений в этом случае при анализе чистых окисей доходит до 0,1%, а при анализе в сыром минерале до 1% [1]).

---

[1]) V. M. Goldschmidt und L. Thomassen. Geochemische Verteilungsgesetze der Elemente.—III. Röntgenspektrographische Untersuchungen über die Verteilung der seltenen Erdmetalle in Mineralien. 1924 S. 13.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ДОПОЛНЕНИЯМ.

Дополнения эти приурочены к параграфам основного текста. При этом параграфы дополнений имеют №№ соответственных параграфов основного текста с буквой. Параграфы с буквой могут читаться непосредственно вслед за соответственными параграфами без букв.

Что касается содержания дополнений, то в них вошли:

1) новая классификация, номенклатура и обозначения 32 видов симметрии, предложенная Федоровским институтом (предварительный вариант);

2) теория пространственной решетки;

3) описание универсального столика Федорова и основных методов работы с ним;

4) описание склерометра Мартенса и работы с ним;

5) учение об атомных и ионных радиусах.

Несколько случайный выбор этих отделов для дополнения объяснен в предисловии к этому изданию в начале книги.

Все же кажется, что заполненные здесь пробелы основного текста являются первоочередными. Главный упор в этих дополнениях сделан на структурную кристаллографию. Несомненно, что наступило время, когда даже самый элементарный курс Кристаллографии не может более обходить или держать на втором плане учение о структуре кристаллов по сравнению с учением об их внешних формах. Разумеется там, где одной из главных целей изучения кристаллографии является ее помощь минералогии, и опирающимся на нее петрографии и учению о месторождениях полезных ископаемых, — мы не можем пренебрегать учением о формах, этим весьма важным диагностическим признаком минералов. Но даже и в этих (геологических) вузах учение о структуре кристаллов в связи с блестящими и разнообразными успехами рентгенометрии приобрело большое значение, и с каждым годом это значение все возрастает. Отчетливые сведения по рентгенометрии кристаллов становятся все более необходимыми минералогу и геологу-разведчику, так же как они необходимы физику, химику, металлургу. А отчетливое понимание выводов рентгенометрии невозможно без основательной проработки математической теории структуры кристаллических веществ. Вот те соображения, которые лежали в основе выбора мною тем для предлагаемых ниже дополнений.

Ленинград,
23 июля 1934 г.

А. Болдырев.

К ЧАСТИ ТРЕТЬЕЙ.

§ 30а. Рациональные классификация, номенклатура и обозначения 32 видов симметрии.

В §§ 21, 24—30 приведена классификация и номенклатура 32 видов симметрии кристаллов по Федорову-Гроту. В этом виде они являются широко принятыми в настоящее время.

Однако, несмотря на широкое (хотя и не всеобщее) признание, эта классификация и эта номенклатура обладают крупными недостатками.

В классификации существенным недостатком является то, что в тригональную подсингонию попадают виды симметрии с шестерной зеркально-поворотной осью, а в гексагональную подсингонию — виды симметрии без шестерной поворотной и без шестерной зеркально-поворотной осей.

В номенклатуре видов симметрии, приведенной в §§ 24—30, существенным недостатком является то, что они называются не по элементам симметрии (которые являются единственным существенным для них признаком), а по формам (стр. 27, § 24). Отсюда проистекает большая путаница, особенно трудно преодолимая для изучающих кристаллографию впервые: представляется весьма неудачным то, что например ромбоэдр, взятый сам по себе, относится не к ромбоэдрическому, а к скаленоэдрическому виду симметрии, что тетрагональная пирамида принадлежит не тетрагонально-пирамидальному, а дитетрагонально-пирамидальному виду.

С целью устранить эти и ряд других неудобств и недостатков Федоровским институтом разработаны приведенные ниже (фиг. 355) классификация, номенклатура и обозначения 32 видов симметрии [1]).

В основу их положена, во-первых, замена зеркально-поворотных осей так называемыми инверсионными осями (см. стр. 47). Это нововведение устраняет один из главных недостатков общепринятой пока классификации, приведенной в §§ 24—30, — несоответствие главной оси у некоторых видов симметрии названию той сингонии, к которой они относятся. Это ясно из того, что шестерная зеркально-поворотная ось заменяется в новой трактовке тройной инверсион-

[1]) А. К. Болдырев и В. В. Доливо-Добровольский. Классификация, номенклатура и символика 32 видов симметрии кристаллов. — Зап. Горн. инст., т. VIII, 1934.

ной, а совокупность тройной поворотной оси с нормальной к ней плоскости симметрии заменяется теперь шестерной инверсионной осью.

Во-вторых, в основе классификации, изображенной на фиг. 355, лежит выделение из всех элементов данного вида симметрии так называемых порождающих, т. е. таких, задание которых необходимо и достаточно для вывода всех остальных. Так, например, для тетрагонально-трапецоэдрического вида симметрии необходимо и достаточно задать одну четверную и одну нормальную к ней двойную оси симметрии. Остальные 3 двойные найдутся как равные и равнодействующие.

Одна из порождающих осей берется за главную; в таблице фиг. 355 она обозначена буквой G (гира — см. выноску [2] на стр. 46) с указателем, дающим наименование оси. Другие порождающие оси считаются добавочными; это будут двойные поворотные оси и двойные и одинарные инверсионные оси; последние две равнозначны соответственно плоскости симметрии и центру инверсии. Эти три элемента симметрии обозначаются а, р и с. Каждая строка видов симметрии отвечает в фиг. 355 одной и той же главной оси: $G_0 = G_1$, G_2, G_3, G_4 и G_{4i}, G_6 и G_{6i}.

Каждая колонна таблицы отвечает одним и тем же добавочным элементам симметрии: первая — отсутствию добавочных элементов, затем с, р, а, ар. Последние две колонны содержат виды симметрии с инверсионными главными осями.

Названия и обозначения всех видов симметрии слагаются из перечисления главного и добавочных порождающих элементов симметрии. Например: тетрагирно-планальный вид симметрии $= G_4$р; или: дигирно-планаксиальный вид симметрии $= G_2$ар.

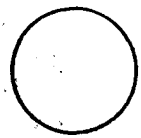
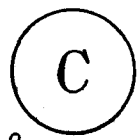
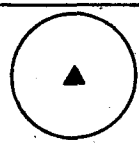
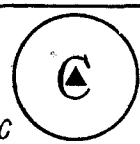
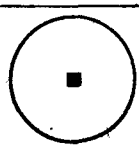
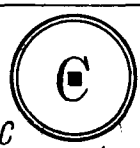
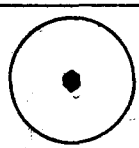
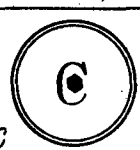
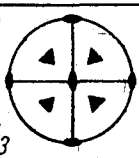
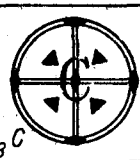
Виды симметрии с несколькими осями высшего наименования объединяются в последней строке в полигирную сингонию.

Виды симметрии без осей высшего наименования разбиваются на 3 сингонии. У первых двух видов в качестве главной оси можно взять только одинарную ось, потому что двойных осей симметрии ни поворотных ни инверсионных (= плоскостей симметрии) они не имеют. Эти два вида относим к агирной (безосной) сингонии (см. фиг. 355). У следующих трех видов симметрии за главную ось с равным основанием можно принять как одинарную, так и двойную ось. По разным соображениям, из которых упомянем желательность не расходиться с общепринятой во всей мировой литературе ориентировкой относящихся сюда кристаллов, мы устанавливаем в этих трех видах вертикально моногиру. Существующие здесь двойные поворотные оси и плоскости симметрии явятся тогда добавочными элементами симметрии. Эту сингонию называем моногирной (см. фиг. 355).

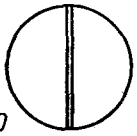
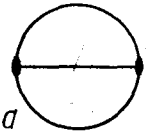
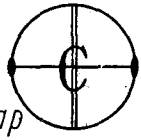
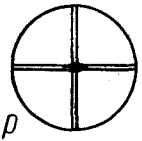
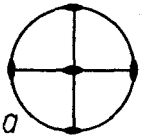
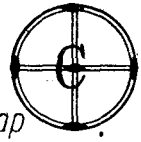
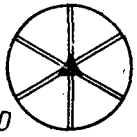
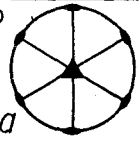
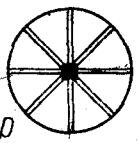
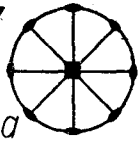
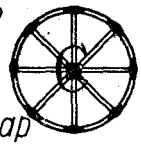
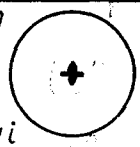
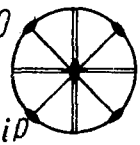
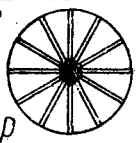
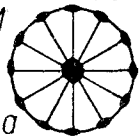
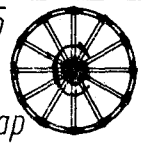
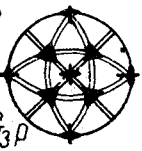
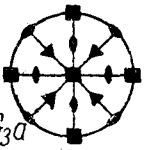
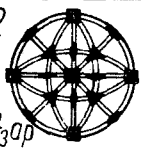
Наконец, у остальных трех видов симметрии без осей высшего наименования мы неизбежно должны считать за главную ось дигиру,— это дигирная (= ромбическая) сингония (фиг. 355).

Названия простых форм, приведенные в §§ 24, 25, 26, 27, 28, 29, остаются при этом неизменными. Поэтому имеем, например: ромбическая дипирамида (а не дигирная дипирамида), дигексагональная призма (а не дигексагирная) и т. д.

В заключение этого параграфа приводим сопоставление номенклатуры Федорова-Грота и новой, только что изложенной.

Главные оси (гиры)	Добавочные оси / Виды симметрии / Сингонии	$(G_1=)$ – Примитивный	$(G_{1i}=)c$ Центральный
G_0 или G_1	Агирная / Моногирная	1  G_0	2  G_0c
G_2	Дигирная	см. 4	см. 5
G_3	Тригирная	9  G_3	10  G_3c
G_4	Тетрагирная	14  G_4	15  G_4c
G_6	Гексагирная	21  G_6	22  G_6c
G_3G_3	Полигирная	28  G_3G_3	29  G_3G_3c

Фиг. 355. Новая классификация, номенклатура и обозна

$(G_{2i}=)\ p$	$(G_2=)\ a$	$(G_2=)\ a$ $(G_{2i}=)\ p$	$(G_1=)-$	$(G_2=)\ a$ или $(G_{2i}=)\ p$	Главные оси (гироиды)
Планальный	Аксиальный	План-аксиальный	Гироидо-примитивный	Гироидо-планальный	
3  G_1p	4  G_1a	5  G_1ap			
6  G_2p	7  G_2a	8  G_2ap			
11  G_3p	12  G_3a	13 G_3ap			
16  G_4p	17  G_4a	18  G_4ap	19  G_4i	20  G_4ip	G_{4i}
23  G_6p	24  G_6a	25  G_6ap	26 G_6i	27 G_6ip	G_{6i}
30  G_3G_3p	31  G_3G_3a	32  G_3G_3ap			

чения 32 видов симметрии кристаллографии.

Номенклатура Федорова-Грота [1]) (по общим формам)	Новая номенклатура (по элементам симметрии)
Сингонии	
I. Триклинная	Агирная
II. Моноклинная	Моногирная
III. Ромбическая	Дигирная
IV. Тригональная	Тригирная
V. Тетрагональная	Тетрагирная
VI. Гексагональная	Гексагирная
VII. Кубическая	Полигирная
Виды симметрии	
1. Моноэдрический	Агирно-примитивный — G_0
2. Пинакоидальный	„ центральный — G_0c
3. Диэдрический анаксиальный	Моногирно-планальный — G_1p
4. „ аксиальный	„ аксиальный — G_1a
5. Моноклинно-призматический	„ планаксиальный — G_1ap
6. Ромбо-пирамидальный	Дигирно-планальный — G_2p
7. „ тетраэдрический	„ аксиальный — G_2a
8. „ дипирамидальный	„ планаксиальный — G_2ap
9. Тригонально-пирамидальный	Тригирно-примитивный — G_3
10. Ромбоэдрический	„ центральный — G_2c
11. Дитригонально-пирамидальный	„ планальный — G_3p
12. Тригонально-трапецоэдрический	„ аксиальный — G_3a
13. Дитригонально-скаленоэдрический	„ планаксиальный — G_3ap
14. Тетрагонально-пирамидальный	Тетрагирно-примитивный — G_4
15. „ дипирамидальный	„ центральный — G_4c
16. Дитетрагонально-пирамидальный	„ планальный — G_4p
17. Тетрагонально-трапецоэдрический	„ аксиальный — G_4a
18. Дитетрагонально-дипирамидальный	„ планаксиальный — G_4ap
19. Тетрагонально-тетраэдрический	Тетрагироидо-примитивный — G_{4i}
20. „ скаленоэдрический	„ планальный — $G_{4i}p$
21. Гексагонально-пирамидальный	Гексагирно-примитивный — G_6
22. „ дипирамидальный	„ центральный — G_6c
23. Дигексагонально-пирамидальный	„ планальный — G_6p
24. Гексагонально-трапецоэдрический	„ аксиальный — G_6a
25. Дигексагонально-дипирамидальный	„ планаксиальный — G_6ap
26. Тригонально- „	Гексагироидо-примитивный — G_{6i}
27. Дитригонально- „	„ планальный — $G_{6i}p$
28. Пентагон-тритетраэдрический	Полигирно-примитивный — G_3G_3
29. Дидодекаэдрический	„ центральный — G_3G_3c
30. Гексатетраэдрический	„ планальный — G_3G_3p
31. Пентагон-триоктаэдрический	„ аксиальный — G_3G_3a
32. Гексоктаэдрический	„ планаксиальный — G_3G_3ap

[1]) С небольшими изменениями, принятыми в основном тексте этой книги.

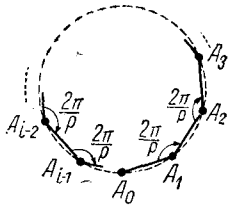
К ЧАСТИ ШЕСТОЙ.

§ 57а. Элементы симметрии пространственных решеток и их положение в ней.

Замечание 1. В этом параграфе и в следующих мы выясним некоторые из важнейших свойств пространственных решеток, имеющих большое значение при изучении структуры кристаллов.

Понятие о пространственной решетке было дано на стр. 71. Формулируем его здесь в виде следующего определения.

Определение 1. Пространственной решеткой или параллелепипедальной системой точек (réseau parallélipipédique, Raumgitter, space lattice) называется бесконечная совокупность точек, расположенных в вершинах равных и параллельных друг другу параллелепипедов, смежных по целым граням.



Фиг. 356.
Две равные и параллельные оси симметрии дают в решетке i равных им осей по ребрам правильной i-гранной призмы.

Следствие 1. Так как пространственная решетка мыслится нами как бесконечная система точек, то при изучении ее симметрии мы не можем довольствоваться поворотными и инверсионными осями симметрии, а должны рассматривать и винтовые оси. При этом поворотные оси являются частным случаем винтовых (стр. 18—19), когда поступание вдоль оси равно нулю. Другой частный случай винтовой оси представляет поступание, или трансляция, когда угол поворота винтовой оси равен нулю или 360°.

Трансляция, как элемент симметрии, играет важную роль в пространственных решетках.

Другим своеобразным элементом симметрии здесь является плоскость скольжения, которую можно рассматривать как частный случай зеркально-поворотной или инверсионной оси симметрии (см. стр. 83—84).

Следствие 2. Из определения 1 и из определения правильной системы точек (стр. 81) следует, что всякая пространственная решетка есть частный случай правильной системы точек.

Это ясно из следующего рассуждения. Пространственная решетка совмещается со своим начальным положением в пространстве, если мы подвергнем ее трансляции так, чтобы одна из ее точек A_0 совпала с другой A_1. Так как трансляция есть симметрическое преобразование, то, следовательно, пространственная решетка вполне удовлетворяет определению правильных систем точек, данному на стр. 81 этой книги.

Теорема 1. В пространственной решетке возможны лишь оси симметрии наименований 1, 2, 3, 4, 6 и никакие другие.

На стр. 72 было приведено доказательство этой важной теоремы, но не вполне строгое и притом действительное лишь для поворотных осей.

Здесь дадим общее и строгое ее доказательство [1]).

---

[1]) Е. С. Федоров. Симметрия правильных систем фигур. Зап. Минер. общ. 1890.

Пусть имеем в пространственной решетке винтовую или инверсионную ось наименования p; обозначим ее A_0 и сделаем чертеж (фиг. 356) к ней перпендикулярно.

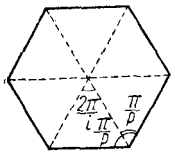
Так как решетка совмещается со своим начальным положением в пространстве при совмещении одной из ее точек с другой посредством трансляций, и так как при этом ось A_0 будет переходить в новые положения, параллельные прежним, то, следовательно, мы будем иметь в данной решетке бесчисленное множество осей симметрии, равных и параллельных A_0.

Берем ближайшую из них к A_0, обозначим ее A_1 (фиг. 356). Поворачивая вокруг нее A_0 на ее элементарный угол $\frac{2\pi}{p}$, выведем новую равную им ось A_2. Поворачивая затем A_1 вокруг A_2 на тот же угол $\frac{2\pi}{p}$, выведем такую же ось A_3 (фиг. 356) и т. д.

Если эти оси не поворотные, а винтовые или инверсионные, то после поворота на угол $\frac{2\pi}{p}$ их надо будет в первом случае продвинуть каждую вдоль ее направления, а во втором инверсировать через центр, на ней лежащий. И в том и в другом случае это не отразится на положении оси в пространстве.

Выведенные нами оси A_0, A_1, A_2, A_3, . . расположатся на поверхности кругового цилиндра как ее образующие. Через некоторое число поворотов мы приблизимся поэтому к исходной оси A_0 и наконец, после некоторого числа i поворотов, должны опять попасть на ось A_0. Если бы этого не случилось, то мы попали бы новой осью между A_0 и A_1, что невозможно, ибо ось A_1 есть, по условию, ближайшая (из равных) к A_0.

Таким образом мы получим при этой операции всего i равных осей. Следы их на плоскости чертежа образуют правильный i-угольник (фиг. 357), для которого имеем:



Фиг. 357. Наименование осей симметрии в решетке может быть лишь n = 1, 2, 3, 4 и 6.

$$\frac{2\pi}{i}+\frac{\pi}{p}+\frac{\pi}{p}=\pi,$$

откуда

$$\frac{2}{i}+\frac{2}{p}=1$$

или

$$p=\frac{2i}{i-2}.$$

В этой формуле i и p должны быть целыми и положительными числами.

Даем последовательные значения для i и определяем p.

$i=1$	$p=-2$ не годится.
$i=2$	$p=\infty$
$i=3$	$p=6$
$i=4$	$p=4$
$i=5$	$p=\frac{10}{3}$ не годится.
$i=6$	$p=3$
$i=6+k$, где k целое = от 1 до $+\infty$	p = дробное от 3 до 2 не годится.
$i=\infty$	$p=2$

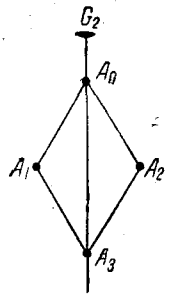
Итак, p может иметь значения лишь 2, 3, 4, 6 и ∞. Последнее отвечает углу поворота, равному нулю, а это означает при винтовой оси простое поступание вдоль нее, а при инверсионной — простую инверсию, что можно рассматривать как одинарную винтовую (в частности поворотную) и одинарную инверсионную оси.

Теорема доказана.

Теорема 2. Если ось симметрии проходит через точку пространственной решетки, то она проходит через ряд таких точек.

Теорема не относится к одинарной поворотной и к одинарной инверсионной осям.

Сначала докажем теорему для винтовых осей с поступанием не равным нулю, затем для поворотных и затем для инверсионных.



Фиг. 358. Поворотная ось симметрии четного наименования, проходящая через одну точку решетки, проходит через ряд ее точек.

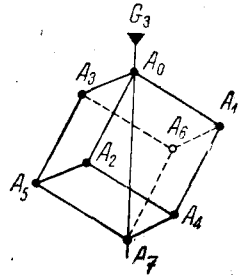
Если винтовая ось симметрии проходит через точку A_0 решетки и поступание этой оси не равно нулю, то после поворота вокруг оси точка A_0 не сойдет с нее, а потому после поступания вдоль оси мы выведем на ней новую точку A_1. Две точки на оси A_0 и A_1 определят собою на ней бесконечный их ряд, что и доказывает теорему для винтовых осей.

Это доказательство не годится, если поступание равно нулю, т. е. для поворотных осей.

Для четных поворотных осей — доказательство следующее.

Всякая четная поворотная ось есть в то же время и двойная поворотная ось.

Пусть она проходит через некоторую точку A_0 (фиг. 358). Пусть где-нибудь вне оси (и не на перпендикуляре к ней из точки A_0) лежит другая точка A_1 той же решетки. Поворотом на 180° из нее выведем точку A_2, тоже принадлежащую решетке. Из этих трех точек, строя параллелограмм, обнаружим точку A_3, лежащую на данной оси симметрии. А раз на оси симметрии лежат две точки A_0 и A_3, то в обе стороны от них через промежутки, равные A_0A_3, лежат бесчисленные другие точки. И для четных поворотных осей теорема доказана.



Фиг. 359. Тройная поворотная ось симметрии, проходящая через одну точку решетки, проходит через ряд ее точек.

Для тройной поворотной оси доказательство таково.

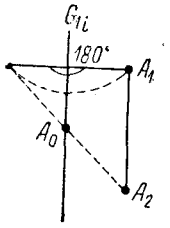
Пусть ось G_3 проходит через точку A_0 решетки (фиг. 359). Пусть вне этой оси (и не на перпендикуляре к ней из точки A_0) имеется точка A_1. Поворотом на 120° вокруг G_3 выведем точки решетки A_2 и A_3. По точкам A_0, A_1, A_2, A_3 строим сначала параллелограммы, а затем и параллелепипед (ромбоэдр). Докажем, что точка A_7 лежит на оси G_3.

При повороте вокруг G_3 на 120° точки A_0, A_1, A_2, A_3 совмещаются или сами с собой (A_0) или друг с другом (A_1, A_2, A_3). Поэтому должен совмещаться со своим начальным положением и выводимый из этих четырех точек параллелепипед (ромбоэдр). При этом точки A_4, A_5, A_6 совместятся друг с другом. Следовательно, точка A_7 совместится сама с собою, т. е. не изменит своего положения в пространстве. Но если при вращении вокруг некоторой оси какая-либо точка не смещается, значит она лежит на этой оси.

Теорема 2 этим доказана и для тройной поворотной оси.

К одинарной инверсионной оси эта теорема не относится, так как эта ось равнозначна центру инверсии, и направление оси может быть взято произвольно.

Переходим к двойной инверсионной оси. Пусть G_{1i} на фиг. 360 такая ось. Центр ее совпадает с точкой A_0 решетки. Пусть A_1—некоторая другая точка той же решетки, не лежащая ни на оси G_{1i} ни на перпендикуляре к ней из точки A_0. После поворота точки A_1 вокруг G_{1i} на 180° и инверсии чрез A_0 мы через точку a_2 придем к точке A_2, принадлежащей той же решетке. При этом ряд A_1A_2 будет параллелен G_{1i}, что не трудно доказать. Отсюда по свойствам решетки следует, что на прямой G_{1i} через промежутки, равные A_1A_2 в обе стороны от A_0 расположатся бесчисленные точки решетки, что и требовалось доказать.



Фиг. 360. Инверсионная одинарная ось (= нормаль к плоскости симметрии), у которой центр совпадает с точкой решетки, —сама совпадает с рядом этой решетки.

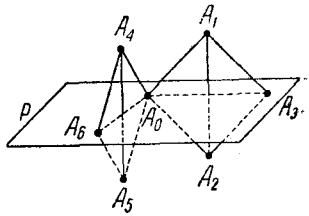
Что касается четверной и шестерной инверсионных осей, то они являются в то же время соответственно двойной и тройной поворотными осями, а потому теорема справедлива и для них.

Таким образом, теорема 2 доказана полностью.

Теорема 3. Если плоскость симметрии проходит через одну из точек пространственной решетки, то она проходит через целую плоскую сетку ее.

Пусть плоскость симметрии **P** проходит через точку A_0 решетки (фиг. 361). Берем какую-либо другую точку A_1 той же решетки, отражением в плоскости **P** получаем новую точку A_2, а построением параллелограмма $A_0A_1A_2A_3$ — еще точку A_3, которая будет лежать в плоскости **P**, что не трудно доказать.

Так как точки пространственной решетки не лежат в одной плоскости $A_0A_1A_2A_3$, то мы можем взять новую точку A_4 вне этой плоскости и из нее так же, как раньше из A_1, найти новую точку A_6, лежащую в плоскости **P**. Три же точки A_0, A_3, A_6 определяют собою плоскую сетку.



Фиг. 361. Плоскость симметрии, проходящая через одну точку решетки, содержит целую плоскую сетку таких точек.

Теорема 4. Если ось симметрии пространственной решетки не проходит через ее точку, то она параллельна какой-либо серии взаимно-параллельных рядов ее точек.

Эту теорему нетрудно доказать методом, аналогичным доказательству теоремы 2.

Замечание. Этими теоремами мы пользовались без доказательства (как эмпирическими фактами) при изучении установки кристаллов (стр. 65). Теоремой 2 мы воспользуемся далее при выводе 14 решеток Браве.

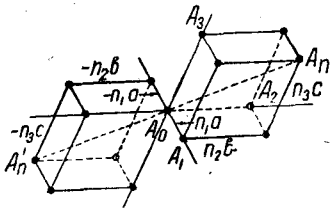
Теорема 5. В каждой точке A_0 любой пространственной решетки всегда располагается один из бесчисленных ее центров инверсии.

Чтобы это доказать, надо доказать, что из любой точки A_n решетки путем инверсии через A_0 мы получим точку A'_n, также принадлежащую решетке.

Если точка A_n принадлежит решетке, то она выводится из A_0 путем последовательных трансляций n_1a, n_2b, n_3c (фиг. 362). Точка A'_n, получаемая инверсией из A_n через начало координат A_0, может быть выведена очевидно путем последовательных трансляций той же величины, но обратного знака: $-n_1a$, $-n_2b$ и $-n_3c$. Так как каждая из этих трансляций переводит точку A_0 в некоторую новую точку системы, то и после всех их точка A_0 перейдет в новую точку системы. Следовательно A'_n будет также принадлежать данной решетке и в A_0 будет находиться ее центр инверсии.

Следствие. В середине каждого отрезка, соединяющего любые две точки пространственной решетки, имеется также центр инверсии.

Докажем это. Отрезок, соединяющий две любые точки A_0 и A_1, пространственной решетки определяет собою одну из ее трансляций A_0A_1. Сложим эту трансляцию с центром инверсии, сидящим в одной из данных точек, например в A_0. Трансляцию заменяем последовательным отражением в паре плоскостей 2 и 3, нормальных к этой трансляции, и одна из которых, например 2, проходит через A_0, а другая — на половине расстояния A_0A_1.



Фиг. 362.
В любой точке A_0 решетки имеется центр инверсии.

Центр инверсии равнозначен двойной зеркально-поворотной оси (стр. 21). Так как направление двойной зеркально-поворотной оси, проходящей через A_0, мы можем брать произвольно (стр. 21, теорема X), то мы вправе взять ее так, чтобы она совпала с трансляцией A_0A_1. Тогда ее плоскость отражения, которую мы обозначим 1, совпадет с плоскостью 2.

Предположим теперь, что первым применен центр инверсии, а затем — трансляция. Тогда этот ряд из двух симметрических операций может быть заменен таким:

Поворот вокруг A_0A_1 на 180° + отражение 1 + отражение 2 + отражение 3.

Последовательное отражение в совпадающих плоскостях 1 и 2 взаимно уничтожатся. Окажется, что этот ряд равнозначен такому ряду операций:

Поворот вокруг A_0A_1 + отражение 3,

т. е. двойной зеркально-поворотной оси с центром как раз в середине отрезка A_0A_1, а такая ось равнозначна центру инверсии в середине отрезка A_0A_1, что и требовалось доказать.

§ 57б. 14 решеток Браве.

Теперь займемся выводом всех возможных разновидностей (групп) симметрии пространственных решеток, т. е. (стр. 81) полных пространственных совокупностей элементов симметрии, которые могут быть свойственны пространственным решеткам.

Теорема 6. Всякое симметрическое преобразование G пространственной решетки S, после которого она совпадает со своим начальным положением, можно

заменить такой совокупностью: 1) поворотное или зеркально-поворотное преобразование, при котором определенная, заранее выбранная точка A_0 решетки остается на месте, плюс 2) трансляция, при которой A_0 переходит в некоторую новую точку A_1.

Имеем некоторую пространственную решетку S. Выбираем в ней некоторую точку и отмечаем ее буквой A_0. Обозначаем также и все остальные ее точки буквами $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Допустим, что эта пространственная решетка S подвергнута какому угодно симметрическому преобразованию G, после которого она превратилась в систему S_1, но заняла то же положение в пространстве, какое занимала до преобразования.

Пусть тогда точка A_0 перешла в место, занимавшееся сначала точкой A_1 в системе S. В общем случае остальные точки системы S при этом будут совпадать с узлами первоначальной пространственной решетки S, но так, что все или некоторые ряды точек перейдут в положение, не параллельное первоначальному.

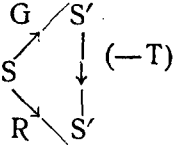
Произведем теперь такую трансляцию системы S_1, чтобы точка A_1 перешла обратно, в положение A_0, и обозначим вновь полученную систему через S′. Обозначим эту трансляцию знаком (— T). Все точки системы S′ будут совпадать с точками системы S, но эти системы не будут тождественны, так как некоторые точки, например A_k одной системы будут совпадать не с A_k, а например с A_m другой системы.

Система S′ выведена из S двумя последовательными симметрическими преобразованиями: G + (— T). Поэтому они взаимносимметричны и, следовательно, могут быть выведены друг из друга одной единой равнодействующей симметрической операцией, которую мы обозначим знаком R. Таким образом

$$G + (-T) = R.$$

Каково должно быть симметрическое преобразование R? Заметим, что после G точка A_0 перешла в положение A_1, а после (— T) вернулась в положение A_0 обратно. Следовательно у систем S и S′ точка A_0 общая, т. е. при преобразовании R точка A_0 остается на месте. Это означает, что преобразование R отвечает или зеркально-поворотной оси симметрии, у которой точка встречи оси и плоскости совпадает с A_0, или поворотной оси симметрии, проходящей через A_0, но ни в коем случае не винтовой оси с поступанием, не равным нулю.

Итак имеем ряд преобразований, дающий нам цикл систем:



Теперь ясно, что если мы систему S′ подвергнем трансляции T, обратного направления по отношению к трансляции (— T), то получим из нее систему S_1.

Отсюда следует, что систему S_1 можно вывести из исходной S двумя последовательными симметрическими преобразованиями R + T, т. е. G = R + T, что и требовалось доказать.

Определение 2. Полная совокупность элементов симметрии,

применение которых оставляет одну точку пространства на месте, называется точечной группой симметрии.

Следствие. Точечные группы симметрии для пространственных решеток суть не что иное как известные нам 32 вида симметрии кристаллов; потому что у пространственных решеток возможны оси симметрии лишь наименований $n = 1, 2, 3, 4, 6$.

Теорема 7. Для полного задания разновидности (группы) симметрии данной пространственной решетки достаточно задать два фактора: 1) полную совокупность (группу) поворотных и зеркально-поворотных осей симметрии этой решетки, проходящих через одну из ее точек A_0 и 2) три трансляции A_0A_1, A_0A_2, A_0A_3, составляющие ребра одного из примитивных параллелепипедов решетки.

Поясняющее определение 3. Примитивным [1]) параллелепипедом решетки называется такой, который имеет восемь ее точек своими вершинами, но не имеет, кроме них, ни одной точки решетки ни внутри себя, ни на своих гранях, ни на ребрах. Трансляции A_0A_1, A_0A_2, A_0A_3, дающие в совокупности примитивный параллелепипед решетки, будем называть сопряженными трансляциями [2]).

Чтобы доказать теорему 7, надо доказать, что любой элемент симметрии решетки может быть выведен как равнодействующий из заданных ее элементов симметрии, перечисленных в условии теоремы.

По теореме 6 любой элемент симметрии данной решетки есть равнодействующий некоторой ее поворотной или зеркально-поворотной оси симметрии, проходящей через точку A_0, и некоторой трансляции, действительной для решетки.

По условию теоремы 7 все поворотные и зеркально-поворотные оси симметрии решетки, проходящие чрез точку A_0, нам заданы. Что же касается необходимой трансляции, то она определяется по величине и направлению перемещением точки A_0 в некоторую другую точку решетки A_n.

Строя теперь на трех заданных трансляциях OA_1, OA_2, OA_3 примитивный параллелепипед и повторяя затем эти трансляции во всевозможных сочетаниях, мы получим все без исключения точки данной решетки в вершинах системы параллелепипедов, равных и параллельных первому, построенному на A_0A_1, A_0A_2, A_0A_3. В том числе будет выведена и точка A_n, потому что иначе она оказалась бы или внутри одного из примитивных параллелепипедов, или внутри его грани, или внутри его ребра.

Следовательно, трансляция A_0A_n есть равнодействующая трансляций $n_1 \cdot A_0A_1$, $n_2 \cdot A_0A_2$, $n_3 \cdot A_0A_3$, где n_1, n_2, n_3 — некоторые целые числа.

Итак любой элемент симметрии решетки есть равнодействующий четырех заданных, что и требовалось доказать.

Определение 4. Полные совокупности (группы) элементов симметрии двух систем мы будем считать равнозначными [3]), если они будут отличаться лишь величиной сопряженных трансляций A_0A_1, A_0A_2, A_0A_3 или углами между ними.

Если же группы симметрии двух решеток будут отличаться осями симметрии или тем, что у одной примитивные трансляции будут

---

[1]) P. Niggli. Kristallographische und strukturtheoretische Grundbegriffe. 1928, 6.

[2]) Е. С. Федоров. Симметрия правильных систем фигур. — Зап. Минер. общ. 1890, стр. 19.

[3]) Е. С. Федоров. Симметрия правильных систем фигур.—Зап. Мин. общ. 1890, стр. 17.

совпадать с направлением одних осей, а у другой с направлением других осей симметрии или итти мимо их, то такие группы мы будем считать различными.

Следствие. Из теоремы 7 и определения 4 вытекает следующее: для того, чтобы вывести все различные виды (группы) симметрии пространственных решеток, необходимо и достаточно: 1) вывести сначала все возможные для пространственных решеток виды (или точечные группы) симметрии, т. е. такие совокупности элементов симметрии, которые оставляют одну точку решетки на месте; затем 2) скомбинировать всеми возможными способами с этими видами (точечными группами) симметрии три сопряженные трансляции решетки, и наконец 3) получить из 1) и 2) все равнодействующие элементы симметрии для каждого случая.

Займемся сначала первой задачей.

Теорема 8. Все возможные точечные группы (виды) симметрии пространственных решеток, оставляющие одну из ее точек на месте, заключаются в числе тех 11 из 32 кристаллографических видов симметрии, которые имеют центр инверсии.

Во-первых, заметим, что у точечных групп симметрии не может быть винтовых осей симметрии.

Во-вторых, заметим, что по теореме 1 у пространственных решеток могут существовать поворотные и инверсионные оси лишь наименований: 1, 2, 3, 4, 6 и никаких других.

Следовательно все искомые точечные группы должны заключаться среди 32 уже известных нам видов симметрии кристаллических многогранников.

Но на основании теоремы 5 в каждой точке любой пространственной решетки существует центр инверсии. Следовательно из 32 кристаллографических видов симметрии для пространственных решеток могут быть пригодны только все или некоторые из тех, у которых есть центр инверсии.

Перебирая последовательно все 32 вида симметрии, отбираем из них следующие 11 с центром инверсии.

1. Агирная сингония . .	G_0c	7. Тетрагирная сингония	G_4ap
2. Моногирная „ . .	G_1ap	8. Гексагирная „	G_6c
3. Дигирная „ . .	G_2ap	9. „ „	G_6ap
4. Тригирная „ . .	G_3c	10. Полигирная „	G_3G_3c
5. „ „ . .	G_3ap	11. „ „	G_3G_3ap
6. Тетрагирная „ . .	G_4c		

Этим теорема 8 доказана.

Подчеркнем, что эта теорема не утверждает, что все эти 11 точечных групп могут существовать у пространственных решеток. Она лишь доказывает, что никакие иные не могут быть свойственны этим решеткам.

Замечание. Далее мы убедимся, что из этих 11 точечных групп (видов) симметрии в точках пространственных решеток возможны лишь 7, отвечающие высшим видам семи уже известных нам сингоний. Это заключение получится у нас попутно при выводе всех возможных пространственных групп симметрии пространственных решеток, к которому мы сейчас и переходим.

Вывод 14 групп симметрии пространственных решеток.

План этого вывода примем следующий. Будем последовательно брать каждую из 11 указанных выше точечных групп и добавлять к ним всеми возможными способами три сопряженные трансляции (определение 3), т. е. дающие примитивный параллелепипед решетки. В одних случаях при этом будет получаться решетка, обладающая в каждой своей точке точечной группой, тождественной с исходной, а в других случаях будет получаться решетка с более симметричными точечными группами, чем исходные. В последних случаях мы должны будем соответственные исходные точечные группы отбросить, как не могущие существовать в пространственных решетках.

1] G_3G_3ap (полигирно-планаксиальный или гексоктаэдрический вид симметрии). В этом случае существуют 3 взаимно-перпендикулярные и равные друг другу [1]) G_4, пересекающиеся в точке A_0 решетки. Согласно теореме 2, с каждой из них должен совпадать ряд пространственной решетки, причем примитивные промежутки этих рядов должны быть равны вследствие наличия тригир, при вращении вокруг которых тетрагиры совмещаются одна с другой.

Задавая вдоль одной из G_4 примитивное [2]) поступание A_0A_1, мы получим равные ему поступания по всем трем G_4. Поэтому из точки A_0 мы получим на положительных концах этих осей 3 ближайшие (по этим осям) к A_0 точки: A_1, A_2, A_3 (фиг. 374).

Четыре точки A_0, A_1, A_2, A_3 определят примитивный параллелепипед в форме куба, трансляциями которого получится некоторая решетка (фиг. 374).

Применением всех элементов симметрии исходной точечной группы (фиг. 125 или 355) никаких новых точек мы не выведем, потому что из точки A_0 будет выводиться лишь она сама, а из точки A_1 выведутся еще 5 точек $\bar{A}_1$, A_2, $\bar{A}_2$, A_3, $\bar{A}_3$ на разных концах трех G_4, причем все они будут принадлежать уже выведенной решетке.

Теперь надо доказать, что выведенная решетка не обладает никакими проходящими через A_0 избыточными элементами симметрии, не входящими в точечную группу (вид) симметрии G_3G_3ap. Это сразу следует из того, что в пространственных решетках могут существовать лишь 32 кристаллографические точечные группы, из них же G_3G_3ap является самой полной по элементам симметрии из тех, которые имеют G_3G_3.

Итак: 1) эта точечная группа возможна для пространственных решеток и 2) 1 пространственная группа симметрии пространственных решеток, определяемая точечной группой G_3G_3ap и тремя равными сопряженными трансляциями вдоль трех взаимно перпендикулярных тетрагир этой группы, нами выведена.

---

[1]) Т. е. выводимые одна из другой симметрическими операциями.

[2]) Примитивной трансляцией (или примитивным поступанием) мы называем наименьшую вдоль данного направления трансляцию, при которой происходит совмещение системы.

Е. С. Федоров (l. c. стр. 19) называет такую трансляцию промежутком или параметром ряда, или еще (l. c. стр. 24) элементарным поступанием.

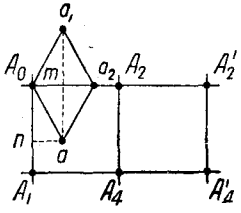
С. А. Богомолов (Вывод правильных систем по методу Федорова, ч. I. 1932, стр. 70, опред. 22) придает этому понятию термин первообразный перенос.

В целях интернационализации терминов я считаю более целесообразным термин примитивная трансляция.

Примитивный параллелепипед отвечающей ей решетки изображен на фиг. 374.

2] Предыдущая решетка выводится в том случае, если мы будем считать три примитивные трансляции A_0A_1, A_0A_2, A_0A_3 (фиг. 374) сопряженными (определение 3), т. е. будем считать, что ни на ребрах, ни на гранях, ни внутри построенного на них параллелепипеда (куба) нет точек решетки.

Теперь попробуем отказаться от этого ограничения, т. е., приняв одну из этих трансляций, например A_0A_1, за исходную и получив неизбежно из нее трансляции A_0A_2 и A_0A_3 (причем точки A_1, A_2, A_3 суть ближайшие на соответственных осях к A_0), — мы предположим, сначала, что уже в плоскости $A_1A_0A_2$ трансляция A_0A_2 не является сопряженной с A_0A_1, т. е. что внутри параллелограмма $A_0A_1A_2A_4$ есть точки решетки (на ребрах A_0A_1 или A_0A_2 точек не может быть, так как A_1 и A_2 — ближайшие по условию). Нетрудно понять, что для такой внутренней точки возможно лишь одно место — центр параллелограмма (здесь квадрата) $A_0A_1A_2A_4$.



Фиг. 363.
Добавочная точка a_1 должна иметь координату $A_0m = \frac{1}{2} A_0A_1$, чтобы не вызвать точки a_2 между A_0 и A_2.

В самом деле, можно доказать, что для такой внутренней точки координата по любой из осей A_0A_1 или A_0A_2 должна равняться $^1/_2$ A_0A_1 или соответственно $^1/_2$ A_0A_2. Докажем это для оси A_0A_2. Пусть (фиг. 363) a — внутренняя точка. Посредством поворота на 180° вокруг тетрагиры A_0A_2 выведем точку a_1 в плоскости параллелограмма $A_0A_1A_2A_4$. Строя на точках A_0a_1a параллелограмм, выведем точку a_2. Эта точка должна совпасть с уже имеющимися на прямой A_0A_2 точками решетки, ибо по условию A_2 есть ближайшая к A_0 на этой прямой, и промежуток A_0A_2 есть для этого ряда примитивный. Поэтому A_0m должно равняться $^1/_2$ A_0A_2. При $A_0m < {}^1/_2$ A_0A_2 точка a_2 попадет между A_0 и A_2, при $A_0m > {}^1/_2$ A_0A_2 точка a_2 попадет между A_2 и A'_2.

Так же можно доказать, что координата A_0n для внутренней точки должна равняться $^1/_2$ A_0A_1. Из этого следует, что внутренняя точка может располагаться только в центре параллелограмма $A_0A_1A_2A_4$.

Итак в плоскости $A_1A_0A_2$ при наличии в точке A_0 группы G_3G_3ap мы можем задать в качестве сопряженных трансляций A_0A_1 и A_0A_8 (фиг. 375). Из полученных таким образом точек $A_0A_1A_8$ посредством тригиры A_0A_7 мы выведем точки A_2, A_3, A_{10}, A_9, из которых по закону построения пространственной решетки мы легко построим остальные точки фиг. 375.

Применением всех других элементов симметрии точечной группы G_3G_3ap, совпадающей своим центром с A_0, мы получим еще 7 таких же кубов во всех октантах системы координат A_0A_1, A_0A_2, A_0A_3.

Повторением же трансляций A_0A_1, A_0A_2, A_0A_3 мы выведем из этих кубов некоторую бесконечную систему точек. Эта система точек будет подчиняться исходной точечной группе симметрии G_3G_3ap, сидящей своим центром в A_0, потому что при действии ее элементов симметрии будут совмещаться 8 кубов, равных фиг. 375, расположенных вокруг A_0, из которых вся система выведена трансляциями.

Теперь надо доказать, что эта система точек есть пространственная решетка, т. е. может быть выведена посредством трех сопряженных трансляций из одной точки A_0.

За такие сопряженные трансляции мы можем взять здесь A_0A_1, A_0A_8 и A_0A_9. Тогда легко понять, рассматривая и — если неясно — дополняя чертеж 375, что повторением этих поступаний мы: 1) выведем все точки нашей системы и 2) не выведем ни одной лишней.

Наконец необходимо удостовериться, что выведенная пространственная решетка не обладает никакими избыточными сверх группы G_3G_3ap элементами симметрии, проходящими через точку A_0. Совершенно так же, как у I выведенной нами решетки (фиг. 374), это ясно из того, что не существует точечной группы симметрии, которую можно было бы получить из G_3G_3ap путем добавки каких-либо элементов симметрии.

Итак, нами выведена II пространственная группа симметрии пространственных решеток, определяемая той же точечной группой G_3G_3ap и тремя сопряженными трансляциями, из коих одна A_0A_1 идет вдоль одной из тетрагир, а две другие (A_0A_8 и A_0A_9) идут к центрам двух квадратов, построенных на трансляциях $A_0A_1 = A_0A_2$ и $A_0A_1 = A_0A_3$, идущих вдоль трех тетрагир.

3] Заметим, что при исходной трансляции A_0A_1 взять сопряженные с нею трансляции в координатных плоскостях $A_1A_0A_2$, $A_1A_0A_3$ или $A_2A_0A_3$ — невозможно никаким иным способом, кроме уже примененных при случаях 1 и 2. Привлечение к рассмотрению трансляции A_0A_{10} (в плоскости $A_2A_0A_3$), как одной из сопряженных трансляций, не даст ничего нового по сравнению со II случаем (фиг. 375).

Поэтому нам остается, беря за исходную примитивную трансляцию A_0A_1, попытаться в качестве сопряженной с нею трансляции взять какую-либо направленную внутрь куба.

По основаниям, изложенным в случае 2, конечная точка такой трансляции должна иметь своими координатами одновременно $^1/_2\ A_0A_1$, $^1/_2\ A_0A_2$ и $^1/_2\ A_0A_3$, т. е. находиться в центре куба, построенного на A_0A_1, A_0A_2, A_0A_3. Таким образом сопряженной с A_0A_1 трансляцией, идущей внутрь куба, может быть лишь A_0A_{14} (фиг. 376).

Третьей трансляцией, сопряженной с A_0A_1 и A_0A_{14}, может быть a priori или одна из трансляций A_0A_2 и A_0A_3 (вдоль тетрагир), или одна из трансляций A_0A_8, A_0A_9, A_0A_{10} (фиг. 375). Последний случай сведется к фиг. 374, т. е. к гексаэдрической структуре с вдвое меньшими размерами примитивного куба по сравнению с кубом $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ (фиг. 376). Так как изменение длины сопряженных трансляций не дает нам нового вида (группы) симметрии пространственной решетки (определение 4), а расположение их здесь относительно элементов симметрии остается тем же, что и в группе 1 (фиг. 374), то этот случай надо отбросить.

Если же тройкой сопряженных трансляций будет A_0A_1, A_0A_2, A_0A_{14} (или, что все равно, A_0A_1, A_0A_3, A_0A_{14}), то из наличия их мы выведем фиг. 376 — куб с точками по вершинам и в центре.

Рассуждая совершенно подобно тому, как и при выводе II группы (фиг. 375), мы убедимся: 1) в том, что из фиг. 375 посредством точечной группы G_3G_3ap с центром в A_0 и посредством повторения принятых сопряженных трансляций мы получим систему точек, являющуюся пространственной решеткой, и 2) в том, что эта решетка в точке A_0 обладает точечной группой симметрии G_3G_3ap.

Так выводим III пространственную группу симметрии пространственных решеток, определяемую точечной группой G_3G_3ар и сопряженными трансляциями, из коих две $A_0A_1 = A_0A_2$ направлены по тетрагирам, а третья идет от центра точечной группы к центру куба, построенного на трех трансляциях $A_0A_1 = A_0A_2 = A_0A_3$, идущих вдоль тетрагир.

Замечание 1. Мы видим, что пространственные группы I, II. III дают нам три структуры — фиг. 374, 375 и 376, которые уже были изучены нами в следствиях из теории параллелоэдров (стр. 77, фиг. 173, 176, 177). Там же были объяснены применяемые нами на фиг. 374, 375, 376 названия этих структур.

Изображенные на фиг. 375 и 376 участки пространственных решеток (кубы) уже не являются примитивными (пустыми внутри куба, внутри граней и внутри ребер) параллелепипедами своей решетки. Они являются (определение 5) наименьшими параллелепипедами решетки, имеющими ее точки в своих вершинах и обладающими симметрией той точечной группы, которой обладает и решетка в своих точках; такие параллелепипеды мы будем называть элементарными [1]).

4] С точечной группой G_3G_3ар мы покончили. Переходим к группе G_3G_3с. Она отличается от G_3G_3ар прежде всего тем, что вместо $3G_4$ она имеет $3G_2$.

Теперь замечаем, что при выводе структур фиг. 374, 375, 376 мы применяли из элементов симметрии лишь G_3, а осями G_4 пользовались лишь как направлениями и как двойными осями (повороты на 180° при доказательстве того, что добавочные точки в фиг. 375 и 376 должны сидеть либо в центрах квадратов, либо в центрах кубов). В остальном все три выведенные структуры могут быть получены из кубов фиг. 374, 375, 376 трансляциями, а не элементами симметрии точечной группы с центром в A_0. А так как в рассматриваемой новой точечной группе G_3G_3с имеются все четыре G_3 предыдущей группы, и направления прежних тетрагир являются здесь осями G_2, то, присоединяя к этой новой точечной группе всеми возможными способами сопряженные трансляции, мы можем полностью повторить рассуждения, сделанные для группы G_3G_3ар, а потому мы получим в результате те же три пространственных решетки (фиг. 374, 375, 376).

Однако здесь последний этап вывода будет иной. А именно: там было показано, что полученные решетки обладают в исходной точке A_0 той самой точечной группой элементов симметрии G_3G_3 ар, из которой мы исходили, а не какой-либо более высокой; здесь же это будет, очевидно, несправедливо, ибо раз решетки получились те же, то они имеют в точке A_0 ту же группу элементов симметрии G_3G_3 ар, а не исходную для этого случая G_6G_3 с. Это происходит потому, что начальные точки A_0 A_1 мы вынуждены брать здесь в частном положении (на осях симметрии), а не в общем.

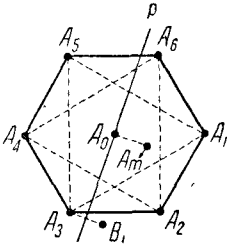
Итак, точечная группа G_3G_3 с не может существовать в пространственных решетках.

---

[1]) E. Schiebold правильно подчеркивает необходимость строгого разграничения терминов „элементарный“ и „примитивный“ параллелепипед. („Методы определения тонкой структуры материалов“. — Перевод на русский язык С. С. Зильберштейн в сборнике: „Рентгенотехника и испытание материалов“ 1933 в серии „Успехи физики“.)

5] Переходим к гексагирной сингонии. Начинаем с планаксиального вида (группы) симметрии G_6 ар.

Здесь в точке A_0 (фиг. 377) мы имеем гексагиру G_6 и нормально к ней плоскость симметрии П. По теореме 2 ось G_6 должна быть рядом решетки, а по теореме 3 плоскость симметрии есть плоская сетка решетки. Пусть примитивное поступание вдоль оси G_6 будет A_0A_7. Выберем далее в плоскости симметрии, проходящей чрез A_0 нормально к G_6, точку A_1 решетки, ближайшую к A_0. Посредством G_6, трансляции A_0A_7 и плоскости симметрии, перпендикулярной к G_6, мы выведем из точек A_0, A_1, A_7 все точки, изображенные на фиг. 377, расположенные в вершинах гексагональной призмы и в центрах ее оснований, и еще 7 точек, дополняющих фигуру в виде такой же призмы снизу.



Фиг. 364.
Плоскость симметрии p должна проходить через ближайшие к A_0 точки A_1 или A_2 или A_3 ... или как раз посредине между ними.

Имеющиеся в группе G_6 ар элементы симметрии сверх G_6 и П не могут дать никаких новых точек. Докажем это.

Плоскости симметрии p и оси a этой группы должны проходить либо вдоль рядов A_0A_1, A_0A_2, A_0A_3, либо как раз посредине между ними. Если бы одна из них проходила косо (p на фиг. 364), то из ближайшей к ней точки A_3 вывелась бы отражением (или поворотом в случае оси a) точка B_1, причем A_3B_1 было бы меньше, чем $A_3A_2 = A_0A_1$. Тогда, идя из A_0 по направлению $\| A_3B_1$, мы получили бы точку A_m внутри шестиугольника $A_1A_2A_3$..... Т. е. точка A_m оказалась бы ближе к A_0, чем A_1, что противоречит условию.

Но при доказанном сейчас расположении применение всех шести добавочных дигир a и шести добавочных плоскостей симметрии p не даст никаких новых точек сверх уже выведенных.

Нетрудно теперь видеть, что выведенная система точек есть пространственная решетка. В самом деле, возьмем за сопряженные трансляции A_0A_1, A_0A_3 и A_0A_7 (фиг. 377). Они дают примитивный параллелепипед $A_0A_1A_2A_3A_7A_8A_9A_{10}$, имеющий в основании ромб с углами 120° и 60° (он очерчен на фиг. 377 жирными линиями). Теперь видно, что повторением этих трансляций мы: 1) получим все точки, выведенные элементами симметрии группы G_6 ар с центром в точке A_0, и 2) не получим ни одной лишней.

Наконец заметим, что выведенная решетка обладает в точке A_0 элементами симметрии точечной группы G_6 ар и никакими добавочными; последнее — потому, что в пространственных решетках не существует точечной группы с G_6, имеющей какие-либо избыточные (по сравнению с G_6 ар) элементы симметрии.

Итак, мы вывели IV пространственную группу симметрии пространственных решеток, принадлежащую уже гексагирной сингонии.

6] Пространственную решетку фиг. 377 мы вывели в предположении, что для A_0A_1 сопряженными трансляциями являются выводимая из него поворотом на 120° вокруг G_6 трансляция A_0A_3 и примитивная трансляция вдоль G_6 A_0A_7. Теперь, подобно тому как это мы делали в полигирной сингонии, мы попытаемся расположить две сопряженные с A_0A_1 трансляции как-либо иначе, имея при этом

в виду, что решетка, изображенная на фиг. 377, независимо от этого выбора должна существовать как часть новой более густой решетки, потому что она выведена посредством элементов симметрии из наличия кратчайших трансляций A_0A_1 — в плоскости П и A_0A_7 — вдоль оси G_6. Другими словами, — иначе выбранные сопряженные трансляции должны давать добавочные точки системы. Эти точки вследствие того, что трансляции A_0A_1, A_0A_2, A_0A_7 сохраняют силу, будут повторены во всех примитивных параллелепипедах решетки, изображенной на фиг. 377, в том числе и в параллелепипеде $A_0A_1A_2A_3A_7A_8A_9A_{10}$. Где бы ни находилась в нем такая добавочная точка B_1 она будет ближе к оси G_6, чем точка A_1. Из точки B_1 посредством G_6 мы сейчас же выведем шестиугольник точек $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$, любая сторона которого, например B_1B_2, будет давать нам некоторую трансляцию новой решетки и будет короче, чем A_0A_1, потому что сторона B_1B_2 равна расстоянию от вершины его B_1 до центра, т. е. до оси вращения; а выше было указано, что B_1 ближе к G_6, чем A_1. В таком случае из A_0 трансляцией, параллельной B_1B_2, мы выведем новую точку A_m в плоскости симметрии, более близкую к A_0, чем A_1, что противоречит условию.

Отсюда следует, что при точечной группе G_6ар нельзя брать сопряженные трансляции иначе, чем они взяты на фиг. 377.

7] Займемся теперь точечной группой G_6с. Заметим, что эта группа имеет также плоскость симметрии П, перпендикулярную к G_6. Поэтому все наши рассуждения, проделанные при выводе решетки фиг. 377 из группы G_6ар, остаются справедливыми. Как мы видели, элементы симметрии группы G_6ар, избыточные по сравнению с G_6с, не играли никакой роли при выводе решетки фиг. 377. Отсюда следует, что решетка, выводимая при наличии группы G_6с, обладает в точке А всеми элементами точечной группы G_6ар, а потому группа G_6с в пространственных решетках существовать не может.

8] Переходим к тригирной сингонии. Сначала к группе G_3ар. Возьмем исходную трансляцию A_0A_1 (фиг. 378) так, чтобы она шла от точки A_0 к точке A_1, которая: 1) лежит вне оси G_3 и вне плоскости, нормальной к G_3 в точке A_0, 2) наиболее близка к оси G_3 и 3) из всех удовлетворяющих условиям 1 и 2 — наиболее близка к A_0.

Поворотом вокруг G_3 выведем из A_1 точки A_3 и A_5, следовательно из трансляции A_0A_1 — трансляции A_0A_3 и A_0A_5. Строя на выведенных трансляциях параллелепипед, получим точки $A_2A_4A_6A_7$, из коих последняя будет лежать на оси G_3. Понятно, что этот параллелепипед будет ромбоэдром. Он будет непременно примитивным в решетке, потому что если бы внутри его (но не на G_3) лежала какая-нибудь точка решетки, то она была бы ближе к G_3, нежели A_1, что противоречит условию выбора нами точки A_1. Если бы такая внутренняя точка B_0 (не показанная на чертеже) лежала на G_3, то следовало бы различить 2 случая.

1) B_0 не лежит ни в плоскости $A_1A_3A_5$, ни в плоскости $A_2A_4A_6$. Тогда расстояние от нее до одной из точек A_1 или A_4 (или до той и другой), например B_0A_1, было бы меньше A_0A_1.

Тогда, проводя трансляцию $A_0B_1 \parallel = B_0A_1$, мы придем к точке B_1, причем $A_0B_1 < A_0A_1$, что противоречит условию выбора исходной трансляции A_0A_1 (за которую взята наименьшая из всех, соединяющих A_0 с точками, ближайшими к оси G_3).

2) B_0 лежит или в плоскости $A_1A_3A_5$, или в плоскости $A_2A_4A_6$, например в первой из них. Тогда в этой плоскости выведется плоская сетка в виде правильного шестиугольника с точкой в центре, которую можно иллюстрировать например точками $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ фиг. 377. Тогда по правилам построения пространственной решетки в плоскостях, нормальных к G_3 и проходящих на рис. 378: 1) через A_0, 2) через $A_1A_3A_5$, 3) $A_2A_4A_6$, 4) через A_7 и т. д., отстоящих друг от друга через $\frac{A_8A_7}{3}$, мы получим совершенно тождественные плоские сетки, выводимые друг из друга трансляцией $\frac{A_3A_7}{3}$ вдоль G_3.

Таким образом в этом случае выведется решетка типа фиг. 377, т. е. гексагирная нами уже рассмотренная.

Поэтому мы должны оба эти случая отбросить и рассматривать лишь примитивный (пустой) ромбоэдр фиг. 378.

Применив теперь центр инверсии, имеющийся в точке A_0 (по теореме 5), получим ниже этой точки ромбоэдр, не изображенный на фиг. 378, но равный и параллельный ему.

Имеющиеся в группе G_3ap элементы симметрии сверх G_3 и c, проходящие через A_0, не могут дать никаких новых точек. Докажем это. Три плоскости симметрии p, проходящие через G_3, должны проходить здесь через трансляции A_0A_1, A_0A_5 и A_0A_3, потому что иначе они приведут к точкам, лежащим ближе к оси G_3, чем A_1. Чтобы в этом убедиться, воспользуемся фиг. 364, принимая, что она изображает проекцию вершин ромбоэдра $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ фиг. 378. Если плоскость p не идет ни через одну из вершин ромбоэдра, кроме A_0 и A_7, то из ближайшей к ней вершины, например A_3, выведется отражением в ней точка B_1. Тогда из вершин $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ ромбоэдра фиг. 378 всегда можно выбрать такую (в нашем примере это будет A_4), что из нее трансляцией A_4B_m, равной и параллельной A_3B_1, выведется точка B_m (не показанная на фиг. 364), лежащая внутри примитивного ромбоэдра фиг. 378 и потому более близкая к G_3, чем A_1, что противоречит условию выбора A_1.

Итак три плоскости симметрии p должны проходить через трансляции A_0A_1, A_0A_5, A_0A_3.

Ясно, что отражение в этих плоскостях не может дать новых точек ни в верхнем ромбоэдре, изображенном на фиг. 378, ни в нижнем, не изображенном на этой фигуре.

Три дигиры a точечной группы G_3ap (фиг. 79 или 355) будут направлены из A_0 по биссектрисам углов между плоскостями p. Как известно, каждая из этих дигир является равнодействующей для нормальной к ней плоскости симметрии и центра инверсии в A_0. Поэтому поворотами вокруг этих дигир на 180° будут выводиться те же точки, что и последовательным применением отражения в соответственной плоскости p и инверсии через точку A_0: из верхнего ромбоэдра будет выводиться нижний и обратно, т. е. никаких новых точек мы дигирами a также не выведем.

Теперь, беря за сопряженные трансляции A_0A_1, A_0A_5 A_0A_3, мы выведем из ромбоэдра фиг. 378 пространственную решетку, которая будет обладать всеми элементами симметрии точечной группы G_3ap с центром в A_0.

Таким образом мы вывели новую V пространственную группу симметрии пространственных решеток.

9] Как явствует из хода вывода V пространственной группы, трансляции A_0A_5 и A_0A_3, получаемые из исходной A_0A_1, с помощью тригиры G_3, являются непременно сопряженными с A_0A_1. Поэтому, в противоположность полигирной сингонии, здесь невозможно иначе задавать сопряженные трансляции, например в центр грани ромбоэдра или в центр самого ромбоэдра.

Это ясно еще и из того, что если бы, например, мы сверх трансляций, изображенных на фиг. 378, задали бы еще трансляцию A_0D_1 в центр грани $A_0A_1A_2A_3$, то тригира G_3 дала бы нам сейчас же равные ей трансляции A_0D_2, A_0D_3 в центры граней $A_0A_1A_6A_5$ и $A_0A_3A_4A_5$. Точки D_1, D_2, D_3 лежали бы ближе к G_3, чем $A_1A_2A_3$, и следовательно мы по принятым нами выше трем правилам должны были бы взять за исходную трансляцию не A_0A_1, а A_0D_1, и примитивным параллелепипедом решетки был бы тогда ромбоэдр, построенный на трансляциях A_0D_1, A_0D_2, A_0D_3. Тип решетки остался бы тот же самый и пространственная группа симметрии получилась бы равнозначная с только что выведенной V (см. определение 4 равнозначных и различных групп).

10] Переходим к точечной группе G_3c. При выводе пространственной группы V из точечной G_3ap, мы пользовались для вывода примитивного ромбоэдра фиг. 378 исключительно G_3 и c. Мы видели, что добавочные дигиры a и плоскости симметрии p не давали нам новых точек.

Поэтому из новой точечной группы G_3c мы получим буквально те же результаты. Это означает, что при наличии точечной группы G_3c с центром в точке A_0 выводится решетка, обладающая в этой точке более высоким видом (точечной группой) симметрии, а именно G_3ap. А потому нет пространственных решеток, обладающих в своих точках точечными группами симметрии G_3c, и последнюю мы должны отбросить.

11] Теперь рассмотрим группы тетрагирной сингонии. Сначала G_4ap. Ось этой группы G_4 является рядом решетки (теорема 2). Берем точку A_4 (фиг. 379), ближайшую на ней к A_0. С плоскостью симметрии П, нормальной в точке A_0 к оси G_4, совпадает плоская сетка точек (теорема 3). В ней берем точку A_1, ближайшую в этой сетке к A_0. Из последней поворотом на 90° вокруг G_4 выводится точка A_2. Если мы примем теперь трансляцию A_0A_1 за исходную, а трансляции A_0A_2 и A_0A_4 за сопряженные с нею и построим на них параллелепипед (квадратную призму) $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$, то повторением этих трансляций получим из этого параллелепипеда некоторую пространственную решетку.

Докажем, что никакими элементами симметрии точечной группы G_4ap с центром в A_0 мы не получим никаких новых точек сверх точек этой решетки.

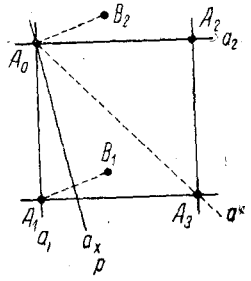
Ось G_4 и нормальная к ней в точке A_0 плоскость П дадут из параллелепипеда фиг. 379 прилегающие к нему равные и параллельные ему параллелепипеды в остальных семи октантах координатной системы $A_0A_1A_2A_4$. Непосредственно очевидно, что вершины всех их будут совпадать с точками решетки, выведенными уже путем трансляций.

Что касается добавочных дигир a_1, a_2, a', a'' и проходящих через них и через G_4 плоскостей симметрии, то эти дигиры должны непременно совпадать с рядами A_0A_1, A_0A_2 или с биссектрисами между

ними A_0A_3. Потому что, если бы этого совпадения не было (фиг. 365), то из A_1 вывелась бы B_1 и из полученной трансляции $A_1B_1 < A_1A_3$ вывелась бы трансляция $A_0B_2 < A_0A_1$, что противоречит условию выбора нами трансляции A_0A_1.

При доказанном же положении добавочных дигир и плоскостей симметрии они, очевидно, не дадут никаких излишних точек в решетке, уже выведенной трансляциями.

Остается указать, что выведенная решетка не может обладать никакими избыточными элементами симметрии, сверх входящих в состав G_4ар. Это потому, что в тетрагирной сингонии не существует точечной группы с элементами симметрии, избыточными по сравнению с группой G_4ар, а вполне допустимое отличие по величине трансляции A_0A_4 от трансляции A_0A_1 предохраняет эту совокупность элементов симметрии от обязательного перехода в группы полигирной сингонии.



Фиг. 365.
Плоскость симметрии p или дигира a_x группы G_4ар не может не проходить через точки A_1 и A_2, ближайшие к A_0, или как раз посредине между ними (через A_3).

Итак, мы вывели VI пространственную группу симметрии пространственных решеток (фиг. 379).

12] Далее мы должны исследовать, нельзя ли вывести при наличии той же точечной группы G_4ар новую пространственную группу, если взять сопряженные трансляции, не совпадающие с A_0A_1, A_0A_2, A_0A_4 и с их равнодействующими, вроде A_0A_3 (фиг. 379).

Заметим, что трансляции A_0A_1 и A_0A_2 это такие, которые соединяют точку A_0 с ближайшими к ней в плоскости П точками A_1 и A_2, а трансляция A_0A_4 — примитивная вдоль G_4.

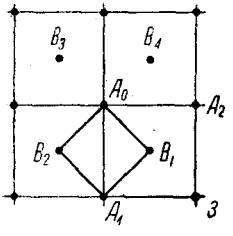
Итак, принимая A_0A_1 за исходную трансляцию, спрашиваем себя, можем ли мы в плоскости П, нормальной к G_4 в точке A_0, взять за сопряженную с A_0A_1 трансляцию, какую-либо не принадлежащую плоской сетке $A_0A_1A_2A_3$. Если бы могли это сделать, то это было бы равносильно добавке новой точки, помещающейся на сторонах или внутри квадрата $A_0A_1A_2A_3$. Но на сторонах добавлять точки не возможно, потому что они будут ближе к A_0, чем A_1. Внутри же нельзя добавлять точку потому, что ее координаты должны быть $^1/_2$ A_0A_1, по одной оси и $^1/_2$ A_0A_2 по другой, иначе, как это было доказано при выводе полигирных решеток (фиг. 363), добавленная внутри точка вызовет существование новой точки и на стороне. Значит внутри квадрата $A_0A_1A_2A_3$ добавочную точку можно было бы взять лишь в центре этого квадрата. Но тогда она была бы ближе к A_0, чем A_1, что невозможно.

Фиг. 366 поясняет, что в случае присутствия такой добавочной точки B_1 нам следовало бы выбрать в качестве исходной и сопряженной с нею трансляции не A_0A_1 и A_0A_2, а A_0B_1 и A_0B_2, и мы получили бы пространственную группу (и решетку), отличающуюся от выведенной VI-й только размерами трансляций, но не расположением их относительно элементов симметрии, а потому эта пространственная группа и решетка не были бы различны по отношению к уже выведенной.

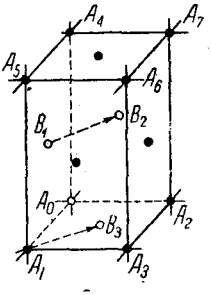
Итак, для кратчайшей трансляции A_0A_1 мы должны брать в качестве сопряженной с нею в плоскости П трансляцию A_0A_2 (фиг. 379 и 366).

Теперь попытаемся за сопряженную с плоскостью П трансляцию взять не A_0A_4 (вдоль G_4, фиг. 379), а какую-либо иную. Чтобы не вызывать новых точек на рядах A_0A_4, A_0A_1 и A_0A_2, добавочная точка должна иметь координаты по этим осям или 0 или $^1/_2$ A_0A_4, $^1/_2$ A_0A_1 и $^1/_2$, A_0A_2, т. е. она должна располагаться или в центрах боковых граней призмы фиг. 379 (фиг. 367) или в центре самой призмы (фиг. 380).

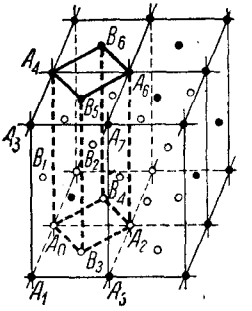
Если добавочные точки расположатся в центрах боковых граней квадратной призмы, то они вызовут сейчас же существование добавочной точки и в центре основания призмы, что ясно из фиг. 367, где трансляция A_1B_3 проведена параллельно B_1B_2. Отсюда видно, что случай фиг. 367 мы должны отбросить как несовместимый с нашими условиями выбора исходной трансляции A_0A_1 в качестве кратчайшей в плоскости П. Для фиг. 367 за исходную мы должны выбрать трансляцию A_0B_3. Ниже для большей ясности мы еще остановимся на этом случае, а теперь продолжим рассмотрение случая фиг. 380.



Фиг. 366.
В случае наличия точки B_1, за сопряженные трансляции должны быть взяты A_0B_1, A_0B_2, а не A_0A_1, A_0A_2.



Фиг. 367.
Наличие точек B_1, B_2 в центрах боковых граней тетрагонального элементарного параллелепипеда влечет наличие точки B_3 и в центре его оснований.



Фиг. 368.
Центрогранная решетка тетрагирной сингонии может рассматриваться и как центрированная при повороте горизонтальных координатных осей на 45°.

Рассуждениями, аналогичными сделанным при выводе VI пространственной группы, мы можем убедиться, во-первых, в том, что повторением трансляций A_0A_1, A_0A_2 и A_0A_4 мы выведем из фиг. 380 систему точек, которая будет пространственной решеткой с сопряженными трансляциями A_0A_1, A_0A_2 и A_0A_8; во-вторых, в том, что добавочные элементы симметрии группы 4р, 4а и с не добавят никаких новых точек к этой решетке; и в-третьих, в том, что выведенная решетка не обладает в точке A_0 никакими избыточными элементами симметрии сверх элементов точечной группы G_4ар.

Из этого следует, что фиг. 380 представляет элементарный параллелепипед пространственной решетки тетрагирной сингонии, отвечающий VII пространственной группе симметрии пространственных решеток.

13) Теперь вернемся к случаю фиг. 367, т. е. к случаю додекаэдрической решетки в тетрагирной сингонии. Можно убедиться методами, нами уже несколько раз примененными, что повторением трансляций A_0A_1, A_0A_2, A_0A_4 мы выведем из элементарного параллелепипеда фиг. 367 систему точек, которую можно рассматривать как простую пространственную решетку, например с сопряженными транс-

ляциями A_0A_1, A_0B_3, A_0B_1. Добавочные элементы симметрии группы G_4ap, т. е. 4a, 4p и c не дадут новых точек сверх принадлежащих этой решетке, изображенной на фиг. 368.

Казалось бы, что это будет новая пространственная группа, отличная от VII, только что выведенной (фиг. 380). Но из фиг. 368 видно, что если мы возьмем (как это было выше указано) за сопряженные трансляции в плоскости П отрезки A_0B_3 и A_0B_4 и построим на них и на примитивной вдоль оси G_4 (но не сопряженной с A_0B_3 и A_0B_4) трансляции A_0A_4 элементарный (не примитивный) параллелепипед $A_0B_3B_4A_2A_4B_5B_6A_6$, то, во-первых, в центрах граней этого параллелепипеда точек не будет; во-вторых, в его объемном центре окажется точка B_2; и в-третьих, повторением трансляций A_0B_3, A_0B_4, A_0A_4 из этого параллелепипеда выведутся все точки этой решетки.

Отсюда видим, что всякая центрогранная (додекаэдрическая) решетка тетрагирной сингонии является в то же время и объемноцентрированной (октаэдрической), если надлежащим образом избрать ребра элементарного параллелепипеда. Этим подтверждается и уясняется тот вывод, что случай центрогранной тетрагирной решетки не дает новой пространственной группы симметрии.

14] Переходя к точечной группе G_4c, следует сказать, что она даст нам решетку, обладающую всеми элементами симметрии группы G_4ap, только что разобранной. Мы не будем останавливаться на подробном доказательстве этого, так как оно совершенно аналогично таковым же для групп G_6c и G_3c, уже нами разобранных.

15] Теперь займемся дигирной (ромбической) сингонией. Здесь для пространственных решеток возможна лишь точечная группа G_2ap.

Возьмем примитивные трансляции на осях G_2, a_1 и a_2 (фиг. 381). Это значит, что точки A_1, A_2 и A_4 — ближайшие к A_0 вдоль тех осей, на которых каждая из них лежит. Построим на них параллелепипед. Этот параллелепипед может быть примитивным (имеющим точки решетки только в своих вершинах) или не примитивным.

В первом случае получаем фиг. 381. Здесь трансляции A_0A_1, A_0A_2, A_0A_4 являются сопряженными. Повторением их выведем некоторую пространственную решетку. Применением всех элементов симметрии точечной группы G_2ap с центром в A_0 никаких добавочных точек не получим. Выведенная решетка в общем случае, когда $A_0A_1 \neq A_0A_2 \neq A_0A_3$, не будет обладать в точке A_0 никакими добавочными элементами симметрии сверх имеющихся в группе G_2ap.

Таким образом мы получили новую VIII пространственную группу симметрии пространственных решеток (фиг. 381).

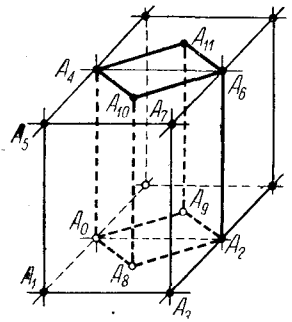
16] Далее предположим, что параллелепипед фиг. 381 не примитивный. Добавочные точки могут находиться на его гранях и внутри него, но не на ребрах, так как мы выбрали на осях G_2, a_1 и a_2 примитивные (т. е. пустые) трансляции за его ребра.

Возьмем сначала случай, когда при исходной трансляции A_0A_1 трансляция A_0A_4 является сопряженной с плоской сеткой $A_0A_1A_2$, т. е. ни на боковых гранях ни внутри параллелепипеда $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ добавочных точек нет. А трансляция A_0A_2 с ними не сопряжена, т. е. внутри параллелограмма $A_0A_1A_2A_3$ точки есть.

Согласно доказанному ранее (фиг. 363), такая точка может быть только в одном положении: в центре прямоугольника $A_0A_1A_2A_3$ (фиг. 369). Мы получим тогда элементарный параллелепипед в виде

призмы $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ с центрированными (A_8, A_{10}) основаниями. Повторением трансляций A_0A_1, A_0A_2, A_0A_4 выведем из этого параллелепипеда систему точек, которая будет простой пространственной решеткой с сопряженными трансляциями, например A_0A_1, A_0A_8, A_0A_4. Применением всех элементов симметрии точечной группы G_2ap с центром в A_0 никаких новых точек не получится.

Таким образом нами выведена новая IX пространственная группа симметрии пространственных решеток. В этой группе за сопряженные трансляции можно взять (фиг. 369) A_0A_8, A_0A_9 и A_0A_4. Тогда примитивный параллелепипед $A_0A_8A_2A_9A_4A_{10}A_6A_{11}$ (фиг. 369 и 382) будет в то же время и элементарным (см. Определение 5 в п. 4]). И в то же время такая трактовка будет согласована со знакомыми нам из теории параллелоэдров четырьмя типами структур; но иногда полезно эту решетку изображать и в виде параллелепипеда $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ с центрированными основаниями A_8A_9 (фиг. 369).



Фиг. 369.
Прямоугольный параллелепипед $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ с центрированными (A_8, A_{10}) основаниями дает ту же решетку, что и примитивный прямой параллелепипед $A_0A_8A_2A_9A_4A_{10}A_6A_{11}$ с ромбом в основании.

17] Если непримитивность параллелепипеда фиг. 381 будет выражаться тем, что будет центрирована одна пара его боковых граней, но не будут центрированы ни вторая пара боковых граней, ни его основания, — то этот случай ничем существенным не будет отличаться от предыдущего, так как все три дигиры точечной группы G_2ap ничем по существу друг от друга не отличаются.

18] Случай, когда будут центрированы две какие-либо пары граней параллелепипеда фиг. 381, например боковые, сведется к случаю, когда центрированы все три пары граней. Доказательство этого аналогично тому, которое было дано для тетрагирной сингонии (фиг. 367). А случай прямоугольного параллелепипеда с центрированными всеми гранями мы рассмотрим немедленно вслед за этим.

19] Он представлен на фиг. 383. Повторением трансляций A_0A_1, A_0A_2, A_0A_4 мы выведем из изображенного там прямоугольного параллелепипеда систему точек, которая является простой пространственной решеткой, за примитивные трансляции которой можно например взять A_0A_1, A_0A_8 и A_0A_9. Нетрудно убедиться, что повторением этих трансляций мы выведем все точки той же системы и никаких новых.

Далее нетрудно понять, что все элементы симметрии точечной группы G_2ap с центром в A_0 не дадут нам никаких новых точек, сверх выведенных трансляциями. Наконец, ясно, что выведенная здесь система точек не может обладать никакими добавочными элементами симметрии, проходящими через A_0, сверх тех, которые имеются у точечной группы G_2ap, так как иначе мы перейдем в одну из групп средних или полигирной сингоний.

Итак фиг. 383 иллюстрирует нам новую X пространственную группу симметрии пространственных решеток.

20] Примитивность параллелепипеда фиг. 381 может нарушаться наличием добавочной точки в его центре (фиг. 384). В этом случае выведется решетка, сходная с VII тетрагирной сингонии (фиг. 380)

с той разницей, что основанием прямого параллелепипеда здесь будет прямоугольник, а там был квадрат. Заметим, что в тетрагирной сингонии решетка октаэдрическая (фиг. 380) ничем существенным не отличалась от решетки додекаэдрической (фиг. 367), что пояснялось фиг. 368. Здесь, в дигирной сингонии это будет несправедливо, эти решетки будут существенно различны, и отвечающие им пространственные группы симметрии будут также различны (определение 4). Чтобы в этом убедиться, проделаем построение, аналогичное фиг. 368. Мы действительно из центрогранного параллелепипеда фиг. 383 получим параллелепипед, центрированный точкой A_{12} (фиг. 383). Но в основании этого параллелепипеда будет ромб, в то время как в основании центрированного параллелепипеда фиг. 384 имеется прямоугольник. В этом отличие решеток. Соответственно этому и обе пространственные группы симметрии различны. У фиг. 383, рассматриваемой, как объемно-центрированная точкой A_{12} решетка, горизонтальные сопряженные трансляции идут по диагоналям прямоугольника, построенного на трансляциях вдоль осей симметрии, а у фиг. 384 эти сопряженные трансляции идут вдоль осей симметрии. Этот признак показывает, что обе пространственные группы симметрии различны (определение 4).

Итак, фиг. 384 иллюстрирует новую XI пространственную группу симметрии пространственных решеток.

21] Наконец, надо упомянуть об a priori мыслимых случаях, когда примитивность параллелепипеда фиг. 381 нарушается а) одновременным присутствием добавочных точек в его центре и в центрах оснований (сочетание фиг. 384 и 369) или б) одновременным присутствием добавочных точек в его центре и в центрах всех его граней (сочетание фиг. 384 и 383). Небольшие рассуждения, однако, показывают, что в случае „а" мы приходим к решетке (а следовательно и пространственной группе) фиг. 369, 382, лишь с вдвое меньшей трансляцией по G_2, а в случае „б" мы приходим к решетке фиг. 381, с вдвое уменьшенными сопряженными (а следовательно и остальными) трансляциями.

Таким образом эти случаи не дают новых решеток или пространственных групп их элементов симметрии.

На этом дигирная (ромбическая) сингония полностью заканчивается.

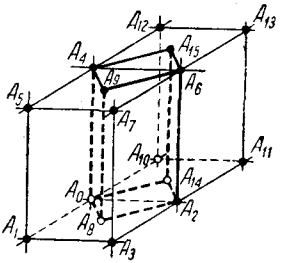
22] Моногирная (моноклинная) сингония. Точечная группа G_1ap. Трансляцию A_0A_2 вдоль дигиры a берем за исходную. Для построения элементарного параллелепипеда (фиг. 385) берем две трансляции A_0A_1 и A_0A_4 в плоскости симметрии, которая обязательно совпадает с плоской сеткой, а потому содержит бесконечное множество трансляций. Построенный на трансляциях A_0A_1, A_0A_4, A_0A_2, параллелепипед может быть примитивным или непримитивным.

В первом случае из него выведем повторением трансляций вдоль его ребер простую пространственную решетку, обладающую в точке A_0 элементами симметрии точечной группы G_1ap и никакими иными. Следовательно эта решетка и отвечающая ей пространственная группа симметрии будет новой. Назовем ее XII.

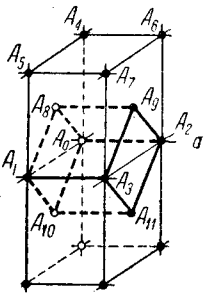
23] Непримитивность параллелепипеда фиг. 384 может зависеть от наличия добавочных точек на его гранях или внутри него. Точки эти могут располагаться по доказанному (фиг. 363) лишь в центрах граней и в объемном центре параллелепипеда.

Начнем с того, что предположим добавочную точку лишь в центре оснований параллелепипеда (фиг. 370).

Этот случай будет совершенно аналогичен соответственному случаю дигирной сингонии, разобранному нами в пункте 16 и иллюстрированному фиг. 369 и 382. Поэтому нам нет надобности разбирать снова подробности. Мы констатируем, что здесь мы получаем новую XIII пространственную группу симметрии пространственных решеток. Мы можем выбрать в ней за сопряженные трансляции A_0A_8, A_0A_{14} и A_0A_4. Элементарный (он же и примитивный) параллелепипед, построенный на этих сопряженных трансляциях, изображен отдельно на фиг. 386. Он имеет в основании ромб, по одной диагонали которого идет дигира, а по нормальной к ней диагональной плоскости — плоскость симметрии. От ромбической призмы фиг. 382 эта ромбическая призма (фиг. 386) отличается тем,



Фиг. 370.
Моногирный параллелепипед $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ с центрированным основанием (A_8,A_9) заменяется примитивным параллелепипедом $A_0A_8A_2A_{14}A_4A_9$ A_6A_{15} с ромбом в основании.



Фиг. 371.
Моногирный параллелепипед $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$, центрированный по паре граней (A_8, A_9) можно заменить примитивным параллелепипедом $A_0A_8A_1A_{10}A_2A_9A_3A_{11}$.

что та — прямая, а эта — косая ($\angle\beta \neq 90°$), но имеющая плоскость и двойную ось симметрии.

24] Если бы мы центрировали не основания $A_0A_1A_3A_2$ и $A_4A_5A_7A_6$ параллелепипеда фиг. 385, а его переднюю ($A_1A_3A_7A_5$) и заднюю ($A_0A_2A_6A_4$) грани, — мы получили бы случай, ничем существенным от предыдущего не отличающийся, потому что по существу ряды A_0A_1 и A_0A_4 в моногирной сингонии ничем друг от друга не отличаются, и любой из них мы можем поставить вертикально.

25] При центрировке левой и правой грани фиг. 385 мы придем обратно к случаю фиг. 385 — т. е. к простой гексаэдрической решетке. Это ясно из фиг. 371.

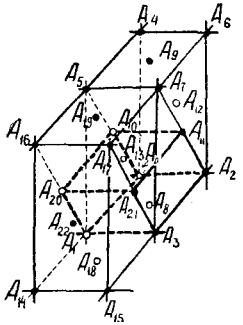
26] При одновременной центрировке двух каких-либо пар граней параллелепипеда фиг. 385, как мы уже знаем (пункт 12, фиг. 367), оказывается центрированной и третья пара граней. Поэтому и переходим к этому случаю. Рассмотрение фиг. 372 показывает, что этот случай центрогранного моноклинного параллелепипеда сводится к случаю параллелепипеда с центрированным основанием. Надпись при этой фиг. 372 достаточно это поясняет.

27] Если грани параллелепипеда фиг. 385 не центрированы, но добавочная точка A_8 находится в центре этого параллелепипеда $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ (фиг. 373), то в системе точек, из него выводимой,

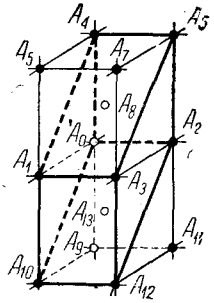
можно с равным правом за элементарный параллелепипед взять вместо упомянутого—другой: $A_0A_2A_6A_4A_1A_3A_{12}A_{10}$. У последнего окажутся центрированными основания, и этот случай сведется к случаю 23 (фиг. 370 и 386).

28] Наконец, последнее возможное предположение: параллелепипед фиг. 385 центрирован сразу и в гранях и в объеме. В этом случае и без чертежа легко понять, что он разобьется на восемь малых равных между собою примитивных (пустых) параллелепипедов. И этот случай сведется обратно к случаю 22, фиг. 385.

На этом моногирная сингония заканчивается. Для нее мы вывели всего лишь 2 различных пространственных группы симметрии про-



Фиг. 372.
Моногирную (моноклинную) решетку с элементарным центрогранным параллелепипедом $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9A_{10}A_{11}A_{12}A_{13}$ можно рассматривать, как имеющую элементарный параллелепипед с центрированным основанием $A_0A_1A_2A_3A_{10}A_{20}$.



Фиг. 373.
Моногирную (моноклинную) решетку с элементарным центрированным параллелепипедом $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ можно рассматривать как имеющую элементарный параллелепипед с центрированным $A_0A_2A_6A_1A_8A_1A_3A_{12}A_{10}A_{13}$.

странственных решеток или 2 отвечающие им решетки („решетки Браве“) XII (фиг. 385) и XIII (фиг. 386).

Переходим к агирной (триклинной) сингонии.

29] Агирная сингония. Точечная группа G_0с. Имеется только центр инверсии. Здесь как бы мы ни взяли три сопряженные трансляции, идущие из начальной точки A_0, мы всякий раз получим равнозначные (определение 4) пространственные группы симметрии, так как они будут отличаться одни от других лишь длиной трансляций или углами между ними, но не расположением их относительно других элементов симметрии в точке A_0, потому что в последней имеется только один центр инверсии и ничего более.

Таким образом здесь имеется всего одна XIV пространственная группа симметрии пространственных решеток (фиг. 387).

Обозначения групп симметрии 14 решеток Браве.

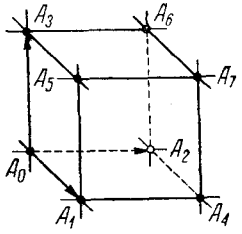
На таблице фиг. 374—387 сгруппированы все выведенные нами 14 решеток Браве, которые, как это было выяснено нами ранее, можно рассматривать как пространственные группы симметрии пространственных решеток.

Теперь заметим, что пространственные решетки являются част-

14 решеток

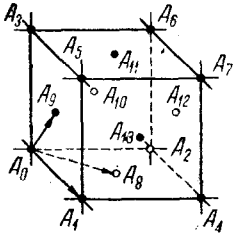
1. Полигирная (кубическая) сингония

I. Гексаэдрическая решетка Γ_c



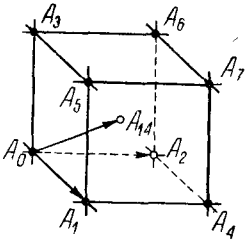
Фиг. 374.

II. Додекаэдрическая решетка Γ_c'''



Фиг. 375.

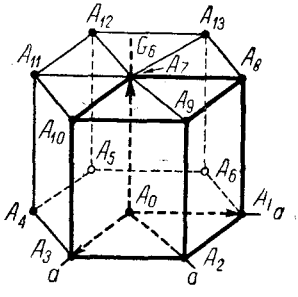
III. Октаэдрическая решетка Γ_c''



Фиг. 376.

2. Гексагирная (гексагональная) сингония

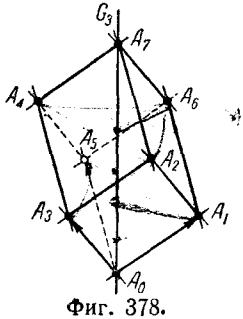
IV. Призматическая решетка Γ_h



Фиг. 377.

3. Тригирная (тригональная) сингония

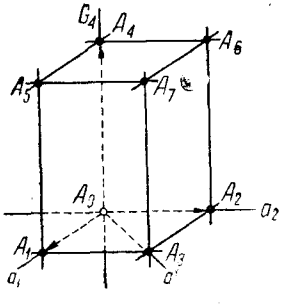
V. Гексаэдрическая (ромбоэдрическая) решетка Γ_{rh}



Фиг. 378.

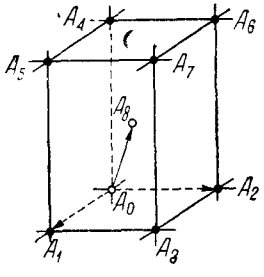
4. Тетрагирная (тетрагональная) сингония

VI Гексаэдрическая решетка Γ_t



Фиг. 379

VII. Октаэдрическая решетка Γ_t''

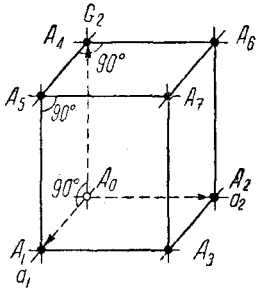


Фиг. 380.

А. Браве.

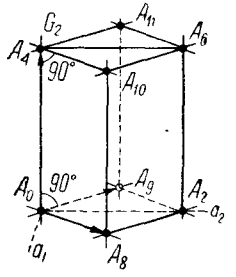
5. Дигирная (ромбическая) сингония

VIII. Гексаэдрическая решетка с прямоугольным основанием Γ_o



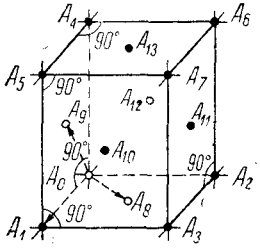
Фиг. 381.

IX. Гексаэдрическая решетка с ромбическим основанием Γ'_o



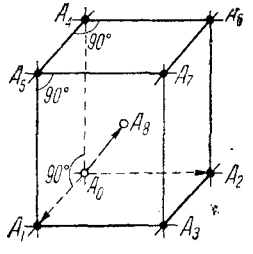
Фиг. 382.

X. Додекаэдрическая решетка Γ'''_o



Фиг. 383.

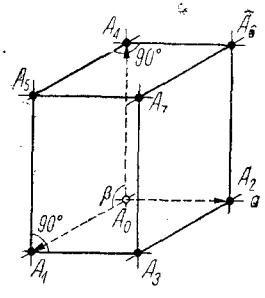
XI. Октаэдрическая решетка Γ''_o



Фиг. 384.

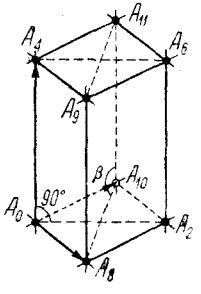
6. Моногирная (моноклинная) сингония.

XII. Гексаэдрическая решетка с прямоугольным основанием Γ_m



Фиг. 385.

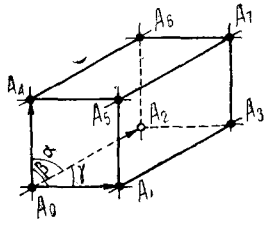
XIII. Гексаэдрическая решетка с ромбическим основанием Γ'_m



Фиг. 386.

7. Агирная (триклинная) сингония

XIV. Гексаэдрическая решетка Γ_{tr}



Фиг. 387.

ным случаем правильных систем точек (см. следствие 2 из определения 1 § 57-а).

Из этого вытекает, что выведенные нами 14 пространственных групп (разновидностей) симметрии пространственных решеток должны заключаться среди 230 групп (разновидностей) симметрии, выведенных для правильных систем точек (стр. 80—86) [1]).

Дадим здесь таблицу, указывающую обозначения Федорова и Шёнфлиса для тех 14 пространственных групп, которые выше выведены нами для пространственных решеток и которые отвечают 14 решеткам Браве (см. таблицу на стр. 361).

Обозначения пространственных групп (разновидностей) симметрии приведены в двух предпоследних колонках этой таблицы. О последней колонке скажу ниже.

Отыскание соответственных пространственных групп среди 230 [2]) облегчается тем, что все группы симметрии пространственных решеток относятся к так называемым симморфным, т. е. выводящимся из точечных групп симметрии путем добавления к ним трех сопряженных трансляций (а не каких-либо других элементов симметрии, не проходящих через центр точечной группы). Это явствует из хода нашего вывода. Затем, как это тоже явствует из нашего вывода, все выведенные группы принадлежат к планаксиальным видам симметрии во всех сингониях.

При отборе соответственных из 230 пространственных групп оказывается, что каждая из симморфных групп планаксиальных видов симметрии всех сингоний отвечает какой-либо из 14 решеток Браве. Единственное исключение составляет тригирная сингония. В ней симморфных групп в планаксиальном (дитригонально-скаленоэдрическом) виде симметрии имеется 3 (55s, 56s, 57s) [3]). Из них только одна 57s отвечает решетке Браве тригирной сингонии. Остальные дают решетку гексагирной сингонии. Это является одним из доводов в пользу того, чтобы считать, как это делал Федоров, что все виды симметрии с тройной или шестерной осью составляют одну гексагональную сингонию, которая делится на тригирную и гексагирную подсингонии.

Теперь нам следовало бы еще вывести для каждой из 14 групп все равнодействующие элементы симметрии, дав таким образом для каждой из них полную пространственную совокупность элементов симметрии.

Однако, подобный вывод занял бы много места и времени. Поэтому мы ограничимся приводимой таблицей обозначений всех 14 групп по Федорову и Шёнфлису.

Пользуясь этими обозначениями, нетрудно отыскать соответственную группу в указанных выше книгах, посвященных выводу 230 групп симметрии, и найти там указания или полные перечисления [4]) равнодействующих элементов симметрии.

---

[1]) Кроме упомянутой на стр. 80 и 86 литературы о 230 правильных системах точек и их пространственных группах (разновидностях симметрии) см. также недавно вышедшие две книжки проф. С. А. Богомолова. Вывод правильных систем по методу Федорова. Часть I, 1932, часть II, 1934.

[2]) Лучше всего по книгам Е. С. Федорова или С. А. Богомолова.

[3]) Е. С. Федоров. Симметрия прав. сист. фигур. Стр. 61—62 или С. А. Богомолов, l. c, II, стр. 114—115.

[4]) Например, у E. Schiebold'a (см. сноску на стр. 86).

№	Сингония	Вид симметрии	Элементарная клетка решетки	Обозначения		
				Полной пространственной группы симметрии		Трансляционной группы
				По Федорову	По Шёнфлису	
I	Полигирная	G_3G_3ap	Простой куб	71s	O_h^1	Γ_c
II	„	„	Центрогранный куб . .	73s	O_h^5	Γ_c'''
III	„	„	Центрированный куб .	72s	O_h^9	Γ_c''
IV	Гексагирная	G_6ap	Гексагональная призма с центрированными основаниями	58s	D_{6h}^1	Γ_h
V	Тригирная	G_3ap	Ромбоэдр	57s	D_{3d}^5	Γ_{rh}
VI	Тетрагирная	G_4ap	Простая тетрагональная призма	36s	D_{4h}^1	Γ_t
VII	„	„	Центрированная тетрагональная призма . .	37s	D_{4h}^{17}	Γ_t''
VIII	Дигирная	G_2ap	Простой прямоугольный параллелепипед .	18s	V_h^1	Γ_o
IX	„	„	Прямоугольный параллелепипед с центрированным основанием (001) (или простой прямой параллелепипед с ромбом в основании)	19s	V_h^{19}	Γ_o'
X	„	„	Центрогранный прямоугольный параллелепипед	21s	V_h^{23}	Γ_o'''
XI	„	„	Центрированный прямоугольный параллелепипед	20s	V_h^{25}	Γ_o''
XII	Моногирная	G_1ap	Простой прямой параллелепипед (две пары граней прямоугольники, одна пара — параллелограммы) . .	7s	C_{2h}^1	Γ_m
XIII	„	„	Прямой параллелепипед с центрированной одной из прямоугольных граней (001) (или моногирный параллелепипед с ромбом в основании) . .	8s	C_{2h}^3	Γ_m'
XIV	Агирная	G_0c	Простой косой параллелепипед	2s	S_2	Γ_{tr}

Теперь необходимо пояснить последнюю колонку приведенной таблицы.

Очень важное значение при изучении структуры кристаллов и ее определении методами рентгенометрии имеют так называемые трансляционные группы симметрии 14 типов пространственных решеток. Чтобы разъяснить, что такое „трансляционная группа“, уточним поня-

тие о группе симметрии вообще и о подчиненных ей понятиях: пространственная группа (разновидность) и точечная группа (вид) симметрии.

Определение 6. Группой симметрии называется такая совокупность симметрических преобразований, которая заключает в себе всякое равнодействующее преобразование любой пары своих членов.

Следствие 1. Пространственные группы (разновидности) симметрии суть группы симметрии правильных систем точек. Их существует 230.

Следствие 2. Точечные группы (виды) симметрии суть такие группы симметрии, которые оставляют одну точку пространства на месте. Их существует бесчисленное множество. Всякая геометрическая система конечных размеров (например замкнутый многогранник) может обладать лишь точечной группой симметрии. Частным случаем точечных групп являются 32 вида симметрии кристаллов [построенные из поворотных и зеркально-поворотных (или поворотных и инверсионных) осей симметрии наименования лишь $n = 1, 2, 3, 4, 6$].

Определение 7 (повторение, см. следствие 1 из определения 1). Трансляция есть винтовая ось симметрии наименования $n = 1$, т. е. с углом поворота $\alpha = 360°$.

Определение 8. Такая группа симметрии, которая состоит только из трансляций, называется трансляционной группой.

Следствие 1. Одна трансляция с заданным направлением и отрезком a определяет собою целую трансляционную группу или группу трансляций вдоль того же направления на отрезки $+a$, $+2a$, $+3a$, $\ldots +\infty$ (целое) и $-a, -2a, -3a, \ldots -\infty$ (целое).

Так как все эти трансляции идут вдоль одного направления, то мы можем назвать эту группу линейной трансляционной группой.

Это ясно из того, что если геометрическая система совмещается сама с собой после какой-либо симметрической операции, то она совместится сама с собой и при ее повторении и при обратной операции.

Следствие 2. Две трансляции с заданными не параллельными (не коллинеарными) направлениями A и B и с отрезками a и b определяют собою плоскую трансляционную группу, члены которой легко находятся как векторы, соединяющие любые две вершины системы параллелограммов, построенной на заданных трансляциях.

Следствие 3. Три трансляции с заданными не параллельными одной плоскости (не компланарными) направлениями A, B, C и отрезками a, b, c определяют собою пространственную трансляционную группу, все члены которой легко находятся как векторы, соединяющие две вершины системы параллелепипедов (пространственной решетки), построенной на трех заданных трансляциях.

То же по существу, что содержится в следствиях 1—3 из определения 8, выражается следующей теоремой и ее следствиями.

Теорема 9. Совокупность трансляций, равных и параллельных всем векторам, соединяющим любую пару точек пространственной решетки, есть трансляционная группа симметрии.

Чтобы это доказать, надо доказать, что равнодействующий элемент симметрии для любых двух трансляций данной совокупности тоже содержится в этой совокупности.

Возьмем две какие угодно трансляции пространственной решетки,

например одну от ее точки M_1 до ее точки M_2, а другую от ее точки N_1 до ее точки N_2. Подвергнем какую-либо ее точку, например A_0, последовательно этим двум трансляциям: сначала на отрезок, параллельный и равный M_1M_2 (получим точку A_1 решетки), затем на отрезок, параллельный и равный N_1N_2,— получим точку A_2 заданной решетки. Того же окончательного результата (параллельного перенесения точки A_0 в точку A_2) мы можем достигнуть сразу одной трансляцией A_0A_2, которая таким образом является равнодействующим элементом двух взятых произвольно трансляций A_0A_1 и A_1A_2 или равных и параллельных им трансляций M_1M_2 и N_1N_2.

Но эта трансляция A_0A_2 соединяет две точки данной пространственной решетки, следовательно она содержится в данной совокупности трансляций.

Отсюда следует, что равнодействующая двух произвольных трансляций данной совокупности их является также членом этой совокупности. Что и требовалось доказать.

Следствие. Так как плоская сетка и равно промежуточный ряд точек являются частными случаями пространственной решетки (когда одна или две заданных трансляции обращаются в 0), то эта теорема справедлива и для них.

Выяснив достаточно понятие о трансляционной группе, мы можем теперь объяснить, что каждая из 14 решеток Браве имеет свою трансляционную группу. Этим 14 трансляционным группам приданы Шёнфлисом особые обозначения, приведенные в последней колонке таблицы обозначений групп симметрии этих решеток.

Общий принцип этих обозначений ясен. Указатель внизу кратко обозначает сингонию; поясним, что o — взято от слова orthorhombisch — орторомбический, как иногда называют ромбическую сингонию для более резкого отличия ромбоэдрической (тригирной) сингонии, которая обозначается буквами rh, для отличия от триклинной — tr. Штрихи вверху обозначают:

Отсутствие штриха — простой параллелепипед.
′ — параллелепипед с центрированным основанием (001).
″ — » объемно-центрированный.
‴ — » с центрированными всеми гранями.

Далее мы укажем, в чем заключается главное значение этих трансляционных групп, а теперь остановимся еще на понятии о „подгруппе симметрии".

Определение 9. Подгруппой данной группы симметрии называется часть симметрических операций данной группы, так выделенная, что ее элементы симметрии составляют друг с другом также группу.

Следствие 1. Примером подгрупп среди точечных групп может служить моногирно-планаксиальный вид симметрии, как подгруппа дигирно-планаксиального, или тетрагирно-центральный вид, как подгруппа тетрагирно-планаксиального.

Следствие 2. Трансляционная группа какой-либо пространственной решетки есть подгруппа полной пространственной группы симметрии той же решетки.

Связь трансляционных групп пространственных решеток с видами структуры их по Федорову

При изучении теории параллелоэдров Федорова (стр. 73—78) мы видели, что „видов структуры кристаллов“ (по терминологии Федорова), т. е. видов пространственных решеток, существует 4: гексаэдрическая (h), додекаэдрическая (d), октаэдрическая (o) и призматическая (p) (стр. 77). Имеем такое соответствие:

решетка Γ отвечает гексаэдрической структуре;
„ Γ' „ „ „ в моноклинной и ромбической сингониях, однако с прямым углом между (110) и $(1\bar{1}0)$ [1] а не между (100) и $(0\bar{1}0)$, как обычно;
„ Γ'' „ октаэдрической структуре;
„ Γ''' „ додекаэдрической структуре;
„ Γ_h „ призматической „ [2]).

Ниже мы вернемся еще к этим пяти типам решеток, когда займемся для каждой из них выяснением связи между ретикулярными плоскостями (стр. 306) и индексами различных плоских сеток в них.

§ 57в. Связь между пространственными решетками (параллелепипедальными системами точек) и квадратичными формами.

Замечание. В этом параграфе мы выведем аналитическую зависимость между длиной отрезка, соединяющего произвольную точку пространственной решетки с началом координат, с одной стороны, и кристаллографическими координатами (индексами) этой точки — с другой стороны.

Эту зависимость полезно знать при различных вычислениях структурной кристаллографии.

Определение 10. Числовыми координатами [3]) любой точки пространственной решетки будем называть 3 числа, показывающие, сколько раз примитивные отрезки рядов решетки, взятых за координатные оси, содержатся в геометрических координатах этой точки.

Теорема 10. Если за координатные оси выбраны три сопряженных ряда пространственной решетки, то числовые координаты любой точки этой решетки суть целые числа.

Даны три сопряженных (опред. 3) ряда OI, OII, OIII простран-

---

[1]) Это так называемые „модальности II рода“ по Федорову. См. „Das Krystallreich“, S. XXVI. Также см. мои «Комментарии к работе Е. С. Федорова „Das Krystallreich“». Изд. Ак. наук. 1926, стр. 24.

[2]) Более полно связь между параллелоэдрами и 14 решетками Браве изучил Б. Н. Делоне в работе: Neue Darstellung der geometrischen Kristallographie. Z. f. Krist. 1932. 84, 1/2, 109–149.

[3]) Coordonnées numeriques по A. Bravais (Memoire sur les systèmes formés par des points distribués régulièrement sur un plan ou dans l'espace. Journ. de l'école polytechnique. 1850. XIX. 36).

ственной решетки (фиг. 388). Примитивные (наименьшие) промежутки на этих рядах суть OA_0, OB_0, OC_0.

Дана произвольная точка M той же решетки с координатами OA, OB, OC.

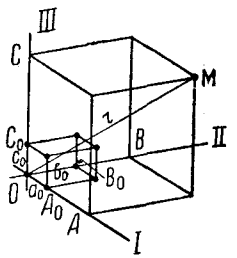
Требуется доказать, что числовые координаты точки m_1, m_2, m_3, где

$$m_1 = \frac{OA}{OA_0}, \quad m_2 = \frac{OB}{OB_0}, \quad m_3 = \frac{OC}{OC_0}$$

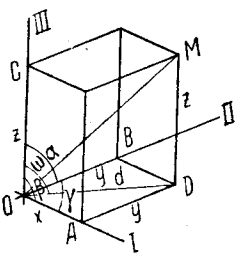
суть целые числа.

Доказательство. Если ряды OI, OII, OIII, а следовательно и трансляции OA_0, OB_0, OC_0 — сопряженные, то все точки пространственной решетки будут сидеть в вершинах сети параллелепипедов, выведенных повторением примитивного параллелепипеда $OA_0B_0C_0$.

Никаких точек решетки на гранях или внутри этих параллелепипедов быть не может. Следовательно и точка M будет сидеть



Фиг. 388.
Координаты точки M суть кратные сопряженных примитивных трансляций a_0. b_0, c_0.



Фиг. 389.
К выводу квадратичной формы пространственной решетки.

в одной из вершин этой сети. Поэтому между плоскостью IOII и параллельной ей плоскостью MC будет заключаться непременно целое число слоев примитивных параллелепипедов, а следовательно $\frac{OC}{OC_0}$ будет равно некоторому целому числу m_3. Так же точно между парами параллельных плоскостей IOIII и MB, затем IIOIII и MA будут заключаться целые числа слоев, равные

$$m_2 = \frac{OB}{OB_0} \quad \text{и} \quad m_1 = \frac{OA}{OA_0}.$$

И теорема доказана.

Следствие. Координаты любой точки пространственной решетки можно выразить числами m_1a_0, m_2b_0, m_3c_0, где a_0, b_0, c_0 — любые три примитивные сопряженные трансляции данной решетки, а m_1, m_2, m_3 — три некоторые целые числа, особые для каждой точки.

Определение 11. Три целые числа m_1, m_2, m_3, показывающие, сколько раз примитивные отрезки соответственных сопряженных координатных рядов содержатся в координатах данной точки пространственной решетки, называются индексами данной точки.

Теорема 11. Если углы между координатными осями равны α, β, γ (фиг. 389), а координаты некоторой точки M суть x, y, z, то расстояние r точки M от начала координат выражается так:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\alpha + 2zx\cos\beta + 2xy\cos\gamma.$$

Доказательство. Из $\triangle MOD$:

$$OM^2 = z^2 + d^2 + 2zd\cos\omega \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

А из $\triangle OAD$:

$$d^2 = x^2 + y^2 + 2xy\cos\gamma \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Проектируя ломаную ODA на ось OIII, получим:

$$d\cos\omega = x\cos\beta + y\cos\alpha \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Подставляя из (2) и (3) в (1), находим:

$$OM^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy\cos\gamma + 2zx\cos\beta + 2zy\cos\alpha \quad \ldots (4)$$

Теорема доказана.

Замечание. Выражение $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dyz + Ezx + Fxy$, где A, B, C, D, E, F — постоянные, а x, y, z — переменные, называется квадратичной формой переменных x, y, z.

Следствие. Расстояние любой точки M пространственной решетки (фиг. 388) выражается квадратичной формой ее числовых координат. Действительно, на основании определения 10 имеем:

$$x = m_1a_0; \quad y = m_2b_0; \quad z = m_3c_0$$

и следовательно:

$$r^2 = (a_0^2)\,m_1^2 + (b_0^2)\,m_2^2 + (c_0^2)\,m_3^2 + (2a_0b_0\cos\gamma)\,m_1m_2 + (2a_0c_0\cos\beta)\,m_1m_3 + (2b_0c_0\cos\alpha)\,m_2m_3 \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Мы видим, что в этом выражении коэфициенты, взятые в скобки, суть постоянные для одной и той же решетки. Следовательно правая часть равенства (5) есть квадратичная форма числовых координат (в частности и индексов) m_1, m_2, m_3 любой точки M пространственной решетки.

Замечание. Выражения вида (5) играют очень существенную роль в структурной кристаллографии.

§ 57г. Связь межплоскостного расстояния данной серии параллельных плоских сеток с ее индексами.

Замечание. Те соотношения между расстоянием $d_{h_1h_2h_3}$ двух ближайших взаимно-параллельных плоских сеток и индексами h_1, h_2, h_3 параллельной им грани, которые будут выведены в этом параграфе, являются одной из важнейших основ расчета структуры кристаллов при рентгенометрическом ее исследовании.

Теорема 12. Если за координатные оси взяты сопряженные ряды пространственной решетки с примитивными промежутками a_0, b_0, c_0, то любая плоская сетка той же решетки отсекает на этих координатных осях отрезки n_1a_0, n_2b_0, n_3c_0, где n_1, n_2, n_3 суть рациональные числа.

Замечание. Эта теорема есть ограниченное выражение закона Гаюи. Ограничение состоит в том, что здесь мы берем за координатные оси сопряженные ряды, тогда как можно эту же теорему доказать для общего случая, когда за координатные оси взяты какие угодно ряды решетки.

Доказательство. Уравнение любой плоскости в каких угодно осях координат:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

где a, b, c — отрезки, отсекаемые плоскостью на осях x, y, z.

Если мы условимся, что это будет уравнение некоторой плоской сетки, то в ней должны лежать некоторые точки пространственной решетки, координаты которых должны удовлетворять уравнению плоскости.

Но по следствию из теоремы 10 координаты всякой точки пространственной решетки выражаются числами m_1a_0, m_2b_0, m_3c_0, где m_1, m_2, m_3 — некоторые целые числа (индексы взятой точки), а a_0, b_0, c_0 — примитивные промежутки на сопряженных координатных рядах. Подставляя m_1a_0, m_2b_0, m_3c_0 вместо x, y, z в уравнение плоскости (6) будем иметь:

$$\frac{m_1a_0}{a}+\frac{m_2b_0}{b}+\frac{m_3c_0}{c}=1.$$

Выразим отрезки, которые делает такая плоская сетка на координатных осях, в примитивных отрезках:

$$a=n_1a_0, \quad b=n_2b_0, \quad c=n_3c_0.$$

При этом о коэффициентах n_1, n_2, n_3 пока нам ни чего неизвестно Подставляя эти значения в предыдущее уравнение и сокращая на a_0, b_0, c_0, найдем:

$$\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}+\frac{m_3}{n_3}=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Этому уравнению должно удовлетворять множество точек пространственной решетки. Возьмем 3 из них, не лежащие на одной прямой, с координатами $(m_1'm_2'm_3')$, $(m_1''m_2''m_3'')$, $(m_1'''m_2'''m_3''')$. Подставляя, получим систему трех уравнений:

$$\left.\begin{aligned} m_1'\frac{1}{n_1}+m_2'\frac{1}{n_2}+m_3'\frac{1}{n_3}&=1\\ m_1''\frac{1}{n_1}+m_2''\frac{1}{n_2}+m_3''\frac{1}{n_3}&=1\\ m_1'''\frac{1}{n_1}+m_2'''\frac{1}{n_2}+m_3'''\frac{1}{n^3}&=1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

Здесь все m — целые. Решая эти уравнения относительно $\frac{1}{n_1}$, $\frac{1}{n_2}$, $\frac{1}{n_3}$, мы найдем [1]):

---

[1]) Символ

$$\begin{vmatrix} m_1' & m_2' & m_3' \\ m_1'' & m_2'' & m_3'' \\ m_1''' & m_2''' & m_3''' \end{vmatrix}$$

есть так называемый определитель. Он равен $m_1'(m_2''m_3''' - m_3''m_2''') - m_1''(m_2'm_3''' - m_3'm_2''') + m_1'''(m_2'm_3'' - m_3'm_2'')$. Определители, стоящие в числителях, раскрываются

$$\frac{1}{n_1}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & m_2' & m_3' \\ 1 & m_2'' & m_3'' \\ 1 & m_2''' & m_3''' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m_1' & m_2' & m_3' \\ m_1'' & m_2'' & m_3'' \\ m_1''' & m_2''' & m_3''' \end{vmatrix}};\quad \frac{1}{n_2}=\frac{\begin{vmatrix} m_1' & 1 & m_3' \\ m_1'' & 1 & m_3'' \\ m_1''' & 1 & m_3''' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m_1' & m_2' & m_3' \\ m_1'' & m_2'' & m_3'' \\ m_1''' & m_2''' & m_3''' \end{vmatrix}};\quad \frac{1}{n_3}=\frac{\begin{vmatrix} m_1' & m_2' & 1 \\ m_1'' & m_2'' & 1 \\ m_1''' & m_2''' & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m_1' & m_2' & m_3' \\ m_1'' & m_2'' & m_3'' \\ m_1''' & m_2''' & m_3''' \end{vmatrix}}$$

Так как в правых частях все числа рациональны, то и левые части рациональны. Но если рациональны $\frac{1}{n_1}$, $\frac{1}{n_2}$, $\frac{1}{n_3}$, то рациональны и n_1, n_2, n_3.

Однако они могут быть как целыми, так и дробными.

Теорема доказана.

Замечание. На стр. 60 было дано определение символа и индексов грани кристалла.

Здесь мы введем новые понятия об индексах плоской сетки и индексах серии параллельных плоских сеток.

Определение 12. Индексами данной плоской сетки называются три числа e_1, e_2, e_3, обратные числам n_1, n_2, n_3 примитивных промежутков, отсекаемых этой сеткой на каждом из координатных рядов.

Замечание. Величиною обратной а называется величина $\frac{1}{a}$.

Поэтому

$$e_1=\frac{1}{n_1},\quad e_2=\frac{1}{n_2},\quad e_3=\frac{1}{n_3}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(9)$$

Следствие. Так как числа n_1, n_2, n_3 по предыдущей теореме 12 рациональны, то и индексы всякой плоской сетки e_1, e_2, e_3 (при сопряженных рядах в качестве координатных осей [1]) — также рациональны.

Однако, в отличие от изучавшихся нами ранее индексов граней (стр. 60), индексы плоских сеток могут быть дробными и не взаимно-простыми, потому что те были пропорциональны $\frac{1}{n_1}$, $\frac{1}{n_2}$, $\frac{1}{n_3}$, а эти равны тем же величинам.

Сказанное поясняет фиг. 390.

Теорема 13. Для каждой плоской сетки существуют три такие целые, взаимно-простые и притом единственные числа h_1,

---

так же, только взамен всякого m, на месте которого в определителе стоит 1, надо и при раскрытии поставить 1.

Уравнения (8) можно, впрочем, решить и без помощи определителей методом уравнивания коэффициентов при неизвестных и вычитанием их после этого друг из друга. Результат получится тот же самый.

[1]) Это будет справедливо и при несопряженных рядах в качестве координатных осей; но в целях избежать излишней для нас громоздкости доказательств мы даем вполне строгое доказательство при указанном ограничении, намеренно опуская ненужный нам более общий случай.

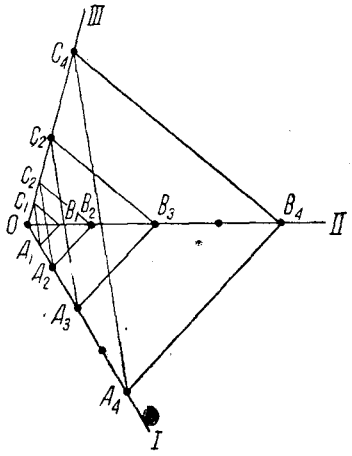
h_2, h_3, которые обратно пропорциональны числам n_1, n_2, n_3 примитивных отрезков, отсекаемых этой плоской сеткой на координатных рядах.

Доказательство. По теореме 12 числа отрезков n_1, n_2, n_3 рациональны. Они могут быть целыми или дробными. Составим выражения:

$$h_1 = \frac{K}{n_1}, \quad h_2 = \frac{K}{n_2}, \quad h_3 = \frac{K}{n_3}. \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

Если n_1, n_2, n_3 — целые, то, взявши за K наименьшее кратное этих чисел, мы получим значения для h_1, h_2, h_3, вполне удовлетворяющие требованиям теоремы.

Если n_1, n_2, n_3 — дробные, то за K мы можем взять сначала наименьшее кратное числителей этих дробей, тогда выражения $\frac{K}{n_1}, \frac{K}{n_2}, \frac{K}{n_3}$ будут целыми, но, может быть, не взаимно-простыми. Сократив их на общего множителя, получим новые три числа, также обратно пропорциональные числам n_1, n_2, n_3, но уже взаимно-простые. Таким образом, теорема справедлива и для этого случая.



Фиг. 390.
Индексы плоских сеток: пл. $A_1B_1C_1$—(224), пл. $A_2B_2C_2$—(112), пл. $A_3B_3C_3$—$(\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 1)$, пл. $A_4B_4C_4$ $(\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4})$.

Определение 13. Индексами h_1, h_2, h_3 серии параллельных плоских сеток или сериальными индексами данной плоской сетки будем называть то же, что и индексами грани кристалла, т. е. три целых и взаимно-простых числа, обратно пропорциональных числам примитивных отрезков, отсекаемых какой-либо из плоских сеток на координатных осях.

Теорема 14. Все точки данной плоской сетки с индексами ее $(e_1\ e_2\ e_3)$ и с индексами ее серии $(h_1\ h_2\ h_3)$ удовлетворяют уравнениям

$$e_1m_1 + e_2m_2 + e_3m_3 = 1 \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

$$h_1m_1 + h_2m_2 + h_3m_3 = K. \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

Здесь m_1, m_2, m_3 — индексы (определение 11) взятой точки, а K — некоторое целое число.

Оба эти уравнения легко получаются из уравнения (7) путем подстановки из (9) и (10) величин:

$$\frac{1}{n_1} = e_1, \quad \frac{1}{n_2} = e_2, \quad \frac{1}{n_3} = e_3$$

и

$$\frac{1}{n_1} = \frac{h_1}{K}, \quad \frac{1}{n_2} = \frac{h_2}{K}, \quad \frac{1}{n_3} = \frac{h_3}{K}.$$

То, что K есть число целое, непосредственно видно из уравнения (12), в котором левая часть сплошь состоит из целых чисел.

Замечание. Доказавши, что индексы точек любой плоской

сетки $(h_1 h_2 h_3)$ удовлетворяют уравнению (12), где K — целое, мы докажем теперь обратную теорему.

Теорема 15. При любом целом K в уравнении

$$h_1 m_1 + h_2 m_2 + h_3 m_3 = K \quad \ldots\ldots\ldots (13)$$

с целыми и взаимно-простыми коэффициентами h_1, h_2, h_3 всегда найдется такая плоская сетка из серии с символом $(h_1 h_2 h_3)$, индексы m_1, m_2, m_3 всех точек которой будет удовлетворять этому уравнению.

Доказательство этой теоремы сводится к доказательству того, что если в уравнении (13) постоянные коэффициенты h_1, h_2, h_3 — какие угодно целые и взаимно-простые, а постоянное число K — какое угодно целое, то переменные m_1, m_2, m_3 могут иметь все одновременно целые значения. Это покажет, что плоскость (13) проходит через точки решетки, т. е. что она есть плоская сетка.

Применим здесь обычный способ решения неопределенных уравнений в целых числах.

Пусть в уравнении (13) $h_3 > h_2 > h_1$.

Имеем:

$$m_1 = \frac{K - h_2 m_2 - h_3 m_3}{h_1}.$$

Исключаем целую часть из этой дроби:

$$m_1 = \frac{K - h_2 m_2 - h_3 m_3}{h_1} = k_1 - k_2 m_2 - k_3 m_3 + \frac{k_4 - k_5 m_2 - k_6 m_3}{h_1} \quad \ldots (14)$$

Здесь k_4, k_5, k_6 — остатки от деления K, h_2, h_3 на h_1, а потому:

$$h_1 > k_4, \quad h_1 > k_5, \quad h_1 > k_6.$$

Чтобы m_1 было целым, надо, чтобы $\frac{k_4 - k_5 m_2 - k_6 m_3}{h_1}$ было целым. Полагаем:

$$\frac{k_4 - k_5 m_2 - k_6 m_3}{h_1} = u \text{ (целое)} \quad \ldots\ldots\ldots (15)$$

откуда: $k_4 - k_5 m_2 - k_6 m_3 = h_1 u$.

Если при этом, кроме $h_1 > k_5$, еще и $k_5 > k_6$, то выразим теперь неизвестную m_2 через обе остальные:

$$m_2 = \frac{k_4 - k_6 m_3 - h_1 u}{k_5} = k_7 - k_8 m_3 - k_9 u + \frac{k_{10} - k_{11} m_3 - k_{12} u}{k_5} \quad (16)$$

$$k_5 > k_{10}, \quad k_5 > k_{11}, \quad k_5 > k_{12}$$

$$\frac{k_{10} - k_{11} m_3 - k_{12} u}{k_5} = t \text{ (целое)} \quad \ldots\ldots\ldots (17)$$

откуда: $k_{10} - k_{11} m_3 - k_{12} u = k_5 t$.

Пусть $k_{12} > k_{11}$ (оба меньше k_5, см. выше).

$$m_3 = \frac{k_{10} - k_{12} u - k_5 t}{k_{11}} = k_{13} - k_{14} u - k_{15} t + \frac{k_{16} - k_{17} u - k_{18} t}{k_{11}} \quad \ldots (18)$$

Эту операцию последовательного выражения одного неизвестного чрез другие мы можем вести и далее по выше приведенному образцу. Выгода ее заключается в том, что фигурирующие здесь це-

лые коэффициенты k постепенно уменьшаются. В особенности это существенно для знаменателей. Из предыдущего мы можем написать такой ряд неравенств:

$$h_1 > k_5 > k_{11}.$$

Заметим, что эти k суть остатки от деления коэффициентов при неизвестном на предыдущий член этого ряда знаменателей.

При достаточном продолжении описанной операции исключения целого числа можно различить 2 случая.

Первый. Процесс последовательного уменьшения коэффициентов k у остаточных членов с неизвестными дойдет до того, что один из них, например k_{18} (формула 18), окажется равным 1. Тогда взамен (18) получим:

$$m_3 = k_{13} - k_{14}u - k_{15}t + \frac{k_{16} - k_{17}u - t}{k_{11}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18')$$

И далее по прежнему пути:

$$\frac{k_{16} - k_{17}u - t}{k_{11}} = s \text{ (целое)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

откуда $k_{16} - k_{17}u - t = k_{11}s$, а отсюда:

$$t = k_{16} - k_{17}u - k_{11}s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Теперь, благодаря тому что остаточный коэффициент при t оказался равен 1, t оказалось выраженным в виде целой функции других вспомогательных неизвестных. Делая теперь последовательные подстановки, двигаясь в обратном порядке от уравнения (20) к уравнению (14), мы найдем целые решения для m_1, m_2, m_3, как целые функции u и s. Проследим теперь ниже сделанные выкладки.

Подставляем из (20) и (19) в (18′):

$$m_3 = k_{13} - k_{14}u - k_{15}(k_{16} - k_{17}u - k_{11}s) + s = (k_{13} - k_{15}k_{16}) - (k_{14} - k_{15}k_{17})u + (k_{15}k_{11} + 1)s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18'')$$

Подставляя (18″) и (20) чрез (17) в (16), получим

$$m_2 = k_7 - k_8[(k_{13} - k_{15}k_{16}) - (k_{14} - k_{15}k_{17})u + (k_{15}k_{11} + 1)s] - k_9u + k_{16} - k_{17}u - k_{11}s = (k_7 - k_8k_{13} + k_8k_{15}k_{16} + k_{16}) + (k_8k_{14} - k_8k_{15}k_{17} - k_9 - k_{17})u - (k_8k_{15}k_{11} + k_8 + k_{11})s \quad . \quad . \quad (16')$$

Наконец, подставляя из (18″) и из (16′) в (14), найдем:

$$m_1 = k_1 - k_2[(k_7 - k_8k_{13} + k_8k_{15}k_{16} + k_{16}) + (k_8k_{14} - k_8k_{15}k_{17} - k_9 + k_{17})u - (k_8k_{15}k_{11} + k_8 + k_{11})s] - k_3[(k_{13} - k_{15}k_{16}) - (k_{14} - k_{15}k_{17})u + (k_{15}k_{11} + 1)s] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14')$$

Обозначим для краткости свободные члены в уравнениях (18″), (16′), (14′) через P_3, P_2, P_1, коэффициенты при u соответственно через Q_3, Q_2, Q_1, а коэффициенты при s — через R_3, R_2, R_1, причем заметим, что все эти числа целые, так как из формул (18″), (16′), (14′) видно, что они суть целые функции целых чисел k. Тогда получим результат в более ясном виде:

$$m_1 = P_1 + Q_1u + R_1s$$
$$m_2 = P_2 + Q_2u + R_2s$$
$$m_3 = P_3 + Q_3u + R_3s.$$

Придавая переменным u и s какие угодно целые значения, мы будем получать из этих уравнений для m_1, m_2, m_3 для всех одновременно целые значения, удовлетворяющие исходному уравнению (13). Этих целых решений будет бесчисленное множество, так как целых значений u и s мы можем взять сколько угодно: каждое из обоих этих чисел $= -\infty$ (целое), . . . , —3, —2, —1, 0, +1, +2, +3, . . . , $+\infty$ (целое).

Итак, для первого случая теорема доказана.

Второй случай состоит в следующем. Доведение коэффициента при одной из переменных до 1 может не произойти, и тогда указанный выше вывод окажется недействительным. Исследуем, при каких условиях это может случиться.

Как мы видели, новые коэффициенты k получались у нас как остатки от деления коэффициентов при переменных на один из ранее полученных коэффициентов. При происходящем при этом неуклонном уменьшении этих остатков они могут миновать значение 1 лишь в том случае, если при значении >1, например 2, или 3, или более, при исключении целого числа из дроби они разделятся без остатка на знаменатель. Например, пусть уравнение (18) при решении численной задачи получило такой вид:

$$m_3 = \frac{12 - 15u - 10t}{5} = 2 - 3u - 2t + \frac{2}{5}.$$

Как видим, в таком случае мы приходим к дробной части, не содержащей переменных, и мы уже не можем эту дробную часть приравнять новой переменной, подчинив последнюю условию быть целым числом. Весь развитый выше прием для этого случая не годится.

Если бы в этом случае и свободный член разделился нацело на 5, то это означало бы благоприятный конец всей операции, так как m_3, а за ним и m_2 и m_1 оказались бы целыми функциями целых чисел и следовательно имели бы ряд целых значений.

Нам необходимо разобрать, при каких условиях будет происходить это деление нацело на знаменатель как коэффициентов при переменных без свободного члена, так и вместе с ним.

Пусть уже в уравнении (16) k_6 нацело делится на k_5, так что

$$k_6 = k_8 k_5 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16A)$$

и

$$k_{11} = 0.$$

Тогда взамен (16) будем иметь:

$$m_2 = \frac{k_7 - k_6 m_3 - h_1 u}{k_5} = k_7 - k_8 m_3 - k_9 u + \frac{k_{10} - k_{12} u}{k_5} \quad . \quad . \quad (16a)$$

$$k_5 > k_{12}$$

И далее:

$$\frac{k_{10} - k_{12} u}{k_5} = t; \quad k_{10} - k_{12} u = k_5 t;$$

$$u = \frac{k_{10} - k_5 t}{k_{12}} = k_{13} - k_{14} t + \frac{k_{15} - k_{16} t}{k_{12}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17a)$$

$$k_{12} > k_{16}.$$

И далее:

$$\frac{k_{15} - k_{16}t}{k_{12}} = s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18a)$$

$$k_{15} - k_{16}t = k_{12}s;\ t = \frac{k_{15} - k_{12}s}{k_{16}}.$$

Если дальнейшим исключением целого числа мы приведем остаточный коэффициент при неизвестном к 1, то этот случай ничем не будет по существу отличаться от первого случая. Поэтому здесь мы должны рассматривать тот случай, когда этот остаточный коэффициент, минуя 1, сразу обращается в 0, т. е. когда в одном из дробных выражений типа $u = \frac{k_{10} - k_{7}t}{k_{12}}$ коэффициент при переменном нацело делится на знаменатель. Пусть это будет в дробном выражении для t:

$$t = \frac{k_{15} - k_{12}s}{k_{16}} = k_{17} - k_{18}s \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19a)$$

Тогда можно написать:

$$k_{12} = k_{18} \cdot k_{16}.$$

И далее, поднимаясь назад

из (17a): $k_5 = k_{14} \cdot k_{12} + k_{16} = k_{14} \cdot k_{18} \cdot k_{16} + k_{16} = (k_{14} \cdot k_{18} + 1)\, k_{16}$;

из (16a): $h_1 = k_9 k_5 + k_{12} = k_9 (k_{14} \cdot k_{18} + 1)\, k_{16} + k_{18} \cdot k_{16} = (k_9 k_{14} k_{18} + k_9 + k_{18})\, k_{16} = K_1 k_{16}$;

из (16A): $k_6 = k_8 k_5 = (k_8 k_{14} k_{18} + k_8)\, k_{16}$;

из (14): $h_2 = k_2 h_1 + k_5 = k_2 (k_9 k_{14} k_{18} + k_9 + k_{18})\, k_{16} + (k_{14} k_{18} + 1) k_{16} = K_2 k_{16}$

и

$$h_3 = k_3 h_1 + k_6 = k_3 (k_9 k_{14} k_{18} + k_9 + k_{18})\, k_{16} + (k_8 k_{14} k_{18} + k_8)\, k_{16} = K_3 k_{16}.$$

Здесь K_1, K_2, K_3, как суммы целых чисел, суть целые. Таким образом, видим, что наш случай второй, когда остаточные коэффициенты при переменных минуют единицу и сразу обращаются в 0, может наступить лишь при условии, что индексы h_1, h_2, h_3 все одновременно имеют общего делителя. А это исключено условием теоремы.

Итак, при любом K и любых взаимно-простых индексах h_1, h_2, h_3 уравнение $h_1 m_1 + h_2 m_2 + h_3 m_3 = K$ выражает некоторую плоскую сетку с индексами ее точек m_1, m_2, m_3. Теорема 15 доказана.

Теорема 16. Если h_1, h_2, h_3 — индексы некоторой серии параллельных плоских сеток, то уравнению

$$h_1 m_1 + h_2 m_2 + h_3 m_3 = 1$$

удовлетворяют индексы m_1, m_2, m_3 точек той плоской сетки данной серии, которая является ближайшей к началу координат, в том случае если за координатные оси взяты сопряженные ряды пространственной решетки.

Введем в уравнение (13) примитивные промежутки координатных осей:

$$\frac{h_1}{a_0} \cdot m_1 a_0 + \frac{h_2}{b_0} \cdot m_2 b_0 + \frac{h_3}{c_0} \cdot m_3 c_0 = K.$$

Заметим, что m_1a_0, m_2b_0, m_3c_0 суть геометрические (обычные) координаты точек плоской сетки. Обозначим их через x, y, z и преобразуем предыдущее уравнение так:

$$\frac{x}{K\frac{a_0}{h_1}} + \frac{y}{K\frac{b_0}{h_2}} + \frac{z}{K\frac{c_0}{h_3}} = 1.$$

Мы видим, что это есть уравнение плоскости, отсекающей на координатных осях отрезки $K\frac{a_0}{h_1}$, $K\frac{b_0}{h_2}$, $K\frac{c_0}{h_3}$.

Ясно, что чем меньше абсолютная величина K, тем меньше по абсолютной величине эти отрезки и тем ближе эта плоскость к началу координат. Так как для всех плоских сеток, согласно теореме 14 уравнения (12), K должно быть целым и, согласно теореме 15, оно может быть каким угодно целым числом, то минимальным его значением будет 1, чем и доказывается наша теорема.

Следствие. Целое число K в уравнении $13(h_1m_1 + h_2m_2 + h_3m_3 = K)$ есть не что иное, как порядковый нумер плоской сетки с сериальным символом $(h_1h_2h_3)$ при гексаэдрической установке пространственной решетки.

Замечание 1. Обратим особое внимание на заключительную фразу в формулировке теоремы 16 о необходимости сопряженных рядов в качестве координатных осей. Она добавлена потому, что все наши рассуждения в этом параграфе применимы лишь к тому случаю, когда числовые координаты m_1, m_2, m_3 всех точек плоской сетки суть целые числа, т. е. являются их индексами. А они обязательно будут таковыми в силу теоремы 10 лишь тогда, когда за координатные оси взяты сопряженные ряды.

Таким образом, выводимые здесь соотношения справедливы лишь для случая такой установки пространственной решетки, когда элементарный параллелепипед ее (определение 5), т. е. построенный на наименьших трансляциях координатных осей, является в то же время и примитивным (определение 3), т. е. не имеющим точек ни внутри ни на гранях. Это справедливо лишь для гексаэдрической структуры. Для решеток октаэдрической, додекаэдрической и центробазисной (см. выше решетки Браве IX и XIII) нам необходимо будет в дальнейшем сделать особые дополнения к излагаемым сейчас выводам.

Замечание 2. Изучив ряд свойств плоских сеток, а главное отчетливо выявив ближайшую к началу координат плоскую сетку при гексаэдрической установке, т. е. при выборе за координатные оси сопряженных рядов, мы введем теперь в наши суждения новое важное понятие — межплоскостное расстояние $d_{h_1h_2h_3}$.

Определение 14. Межплоскостным расстоянием $d_{h_1h_2h_3}$ в серии взаимно-параллельных сеток с индексами серии $(h_1h_2h_3)$ мы будем называть расстояние между двумя ближайшими плоскими сетками этой серии.

Замечание. Теперь ход вывода необходимой нам зависимости между $d_{h_1h_2h_3}$ и h_1, h_2, h_3 будет заключаться в том, что:

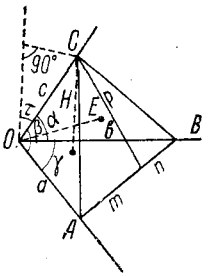
1) мы найдем объем тетраэдра OABC (фиг. 391), отсекаемого на координатных осях плоскостью ABC, причем этот объем OABC вы-

разим в функции отрезков OA, OB, OC и углов α, β, γ между координатными осями;

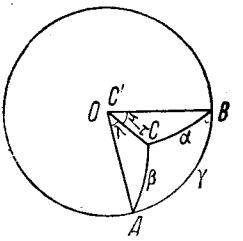
2) затем найдем площадь F_{ABC} треугольника ABC (фиг. 391), вырезаемого координатными осями на любой плоскости; площадь эта должна быть выражена через те же величины OA = a, OB = b, OC = c и α, β, γ;

3) потом найдем расстояние той же плоскости ABC от начала координат: $d_{ABC} = \dfrac{V_{OABC}}{\frac{1}{3}F_{ABC}}$;

4) наконец, перейдем от произвольных плоскостей к плоским сеткам и выразим это расстояние не через a, b, c, α, β, γ, но через примитивные отрезки координатных рядов a_0, b_0, c_0, затем через те же углы α, β, γ и через сериальные индексы взятой плоской сетки $h_1h_2h_3$.



Фиг. 391.
Вывод объема V_{OABC}, площади F_{ABC} и расстояния $OE = d_{ABC}$ в функции от a, b, c, α, β, γ.



Фиг. 392.
Связь между углами α, β, γ и τ.

Теорема 17. Объем V_{OABC} тетраэдра с ребрами a, b, c и противолежащими им плоскими углами α, β, γ выражается формулой:

$$V^2_{OABC} = \frac{1}{36}a^2b^2c^2(1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma).$$

Доказательство. По фиг. 391 имеем:

$$V^2_{OABC} = \frac{1}{3}\text{ площ. }OAB\cdot H = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}ab\sin\gamma\cdot c\cdot\cos\tau. \quad \text{Отсюда:}$$

$$V^2_{OABC} = \frac{1}{36}a^2b^2c^2\cdot\sin^2\gamma\cdot\cos^2\tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Теперь задача состоит в том, чтобы выразить $\cos\tau$ в виде функции от α, β и γ.

Для этого изображаем направления OA, OB, OC и OC′ (фиг. 391) в виде стереографической проекции с центром O и плоскостью проекций AOB (фиг. 392).

Здесь из сферического $\triangle$ AOC имеем:

$$AO = 90^\circ \quad \text{и} \quad \sin\tau = \frac{\cos\beta}{\cos\lambda} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22a)$$

Так же из сферического $\triangle$ BOC:

$$BO = 90^\circ \quad \text{и} \quad \sin\tau = \frac{\cos\alpha}{\cos\mu} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22b)$$

Кроме того: $\lambda + \mu = \gamma$ . . . . . (22c)

В формулах (22a), (22b), (22c) мы имеем три уравнения с тремя неизвестными τ, λ, μ. Из них найдем τ. Сначала из (22a) и (22b) получаем:

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\mu} = \frac{\cos\beta}{\cos(\gamma - \mu)},$$

откуда последовательно находим μ:

$$\cos\alpha\cos\gamma\cdot\cos\mu + \cos\alpha\sin\gamma\sin\mu = \cos\beta\cos\mu$$

$$\cos\alpha\cdot\sin\gamma\cdot\operatorname{tg}\mu = \cos\beta - \cos\alpha\cdot\cos\gamma$$

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\cos\beta - \cos\alpha\cdot\cos\gamma}{\cos\alpha\cdot\sin\gamma} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

Теперь возводим (22b) в квадрат:

$$\sin^2\tau = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\mu}.$$

Так как $\cos^2\mu = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\mu}$, то из предыдущего уравнения получается:

$$\sin^2\tau = \cos^2\alpha\,(1 + \operatorname{tg}^2\mu).$$

Подставляя сюда $\operatorname{tg}\mu$ из (23), получим:

$$\sin^2\tau = \cos^2\alpha + \left(\frac{\cos\beta - \cos\alpha\cdot\cos\gamma}{\sin\gamma}\right)^2 =$$

$$= \frac{\cos^2\alpha\cdot\sin^2\gamma + \cos^2\beta + \cos^2\alpha\cdot\cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}{\sin^2\gamma}$$

И далее:

$$\sin^2\tau = \frac{\cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}{\sin^2\gamma} \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

Итак, τ выражен через α, β и γ.

Возвращаемся к уравнению (21): $V^2_{OABC} = \dfrac{1}{36}\,a^2b^2c^2\sin^2\gamma\cos^2\tau$ и подставляем в него вместо $\cos^2\tau = 1 - \sin^2\tau$ значение синуса из (24):

$$V^2_{OABC} = \frac{1}{36}a^2b^2c^2(\sin^2\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2\beta + 2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma).$$

И окончательно:

$$V^2_{OABC} = \frac{1}{36}a^2b^2c^2(1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma) \quad (25)$$

Теорема 18. Пусть дана система координат с углами между α, β, γ (фиг. 391).

Если теперь некоторая плоскость пересекает эти оси в точках

ABC и отсекает при этом на них отрезки a, b, c, то площадь $\triangle ABC$ выражается в функции от a, b, c, α, β, γ так:

$$(\text{пл. } \triangle ABC)^2 = \frac{1}{4}[a^2b^2\sin^2\gamma + a^2c^2\sin^2\beta + b^2c^2\sin^2\alpha + 2a^2bc(\cos\beta\cdot\cos\gamma - \cos\alpha) + 2ab^2c(\cos\alpha\cdot\cos\gamma - \cos\beta) + 2abc^2(\cos\alpha\cdot\cos\beta - \cos\gamma)].$$

Пользуемся фигурой 391.

Проследим следующие выкладки:

$$\text{пл. } \triangle ABC = \frac{1}{2}AB\cdot p$$

$$AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

AB выражен через a, b, γ. Теперь стремимся определить p через a, b, c, α, β, γ.

$$\left.\begin{array}{l} p^2 = AC^2 - m^2 \\ p^2 = BC^2 - n^2 \\ m + n = AB \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (26)$$

Мы получили 3 уравнения с тремя неизвестными p, m, n, потому что как AB (см. выше), так и AC и BC легко выражаются через a, b, c, α, β, γ:

$$AC^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$BC^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Из уравнений (26) стремимся выразить p сначала через AB, AC, BC:

$$m^2 - n^2 = AC^2 - BC^2.$$

Деля это уравнение на последнее из (26):

$$m + n = AB,$$

получим:

$$m - n = \frac{AC^2 - BC^2}{AB}.$$

Из двух последних уравнений посредством их сложения найдем

$$m = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB}.$$

Подставляя это в первое из уравнений (26), имеем:

$$p^2 = AC^2 - \left(\frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB}\right)^2 =$$

$$= \frac{4AB^2AC^2 - AB^4 - AC^4 - BC^4 - 2AB^2AC^2 + 2AB^2BC^2 + 2AC^2BC^2}{4AB^2}.$$

Возвращаемся к площади $\triangle$ ABC (см. выше):

$$\text{пл. } \triangle ABC = \frac{1}{2}AB\cdot p;$$

следовательно:

$$(\text{пл. } \triangle ABC)^2 = \frac{1}{4} AB^2 \cdot p^2 = \frac{1}{16} (-AB^4 - AC^4 - BC^4 + 2AB^2AC^2 + 2AB^2BC^2 + 2AC^2BC^2) \quad (27)$$

Вспомним (см. выше), что

$$AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$
$$AC^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$BC^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Подставляем эти значения в уравнение (27):

$$(\text{пл. } \triangle ABC)^2 = \frac{1}{16} (-a^4 - b^4 - 4a^2b^2 \cdot \cos^2\gamma - 2a^2b^2 + 4a^3b \cdot \cos\gamma + 4ab^3 \cdot \cos\gamma - a^4 - c^4 - 4a^2c^2 \cdot \cos^2\beta - 2a^2c^2 + 4a^3c \cdot \cos\beta + 4ac^3 \cdot \cos\beta - b^4 - c^4 - 4b^2c^2 \cdot \cos^2\alpha - 2b^2c^2 + 4b^3c \cdot \cos\alpha + 4bc^3 \cdot \cos\alpha + 2a^4 + 2a^2c^2 - 4a^3c \cdot \cos\beta + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 - 4ab^2c \cdot \cos\beta - 4a^3b \cdot \cos\gamma - 4abc^2 \cdot \cos\gamma + 8a^2bc \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 - 4a^2bc \cdot \cos\alpha + 2b^4 + 2b^2c^2 - 4b^3c \cdot \cos\alpha - 4ab^3 \cdot \cos\gamma - 4abc^2 \cdot \cos\gamma + 8ab^2c \cdot \cos\alpha \cdot \cos\gamma + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 - 4a^2bc \cdot \cos\alpha + 2b^2c^2 + 2c^4 - 4bc^3 \cdot \cos\alpha - 4ab^2c \cdot \cos\beta - 4ac^3 \cdot \cos\beta + 8abc^2 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta).$$

Сделав приведение подобных членов, находим:

$$(\text{пл. } \triangle ABC)^2 = \frac{1}{16} (4a^2b^2 + 4a^2c^2 + 4b^2c^2 - 4a^2b^2 \cdot \cos^2\gamma - 4a^2c^2 \cdot \cos^2\beta - 4b^2c^2 \cdot \cos^2\alpha - 8a^2bc \cdot \cos\alpha - 8ab^2c \cdot \cos\beta - 8abc^2 \cdot \cos\gamma + 8a^2bc \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma + 8ab^2c \cdot \cos\alpha \cdot \cos\gamma + 8abc^2 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta).$$

Отсюда, вводя небольшие преобразования в правую часть предыдущего равенства, получаем:

$$(\text{пл. } \triangle ABC)^2 = (F_{ABC})^2 = \frac{1}{4} [a^2b^2\sin^2\gamma + a^2c^2\sin^2\beta + b^2c^2\sin^2\alpha + 2a^2bc(\cos\beta \cdot \cos\gamma - \cos\alpha) + 2ab^2c(\cos\alpha \cdot \cos\gamma - \cos\beta) + 2abc^2(\cos\alpha \cdot \cos\beta - \cos\gamma)] \quad (28)$$

Требуемая формула выведена.

Теорема 19. Расстояние $OE = d_{ABC}$ (фиг. 391) плоскости ABC от начала координат выражается через отрезки a, b, c, отсекаемые ею на координатных осях, и через углы α, β, γ между координатными осями следующей формулой:

$$d^2_{ABC} = \frac{a^2b^2c^2(1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma}{a^2b^2\sin^2\gamma + a^2c^2\sin^2\beta + b^2c^2\sin^2\alpha + 2a^2bc(\cos\beta \times \cos\gamma - \cos\alpha) + 2ab^2c(\cos\alpha \cdot \cos\gamma - \cos\beta) + 2abc^2(\cos\alpha \cdot \cos\beta - \cos\gamma)} \quad (29)$$

Доказательство. Если у тетраэдра OABC (фиг. 391) рассматривать ABC как основание, а O — как вершину, то его объем

$$V_{OABC} = \frac{1}{3} F_{ABC} \cdot OE,$$

откуда

$$OE = d_{ABC} = \frac{3V_{OABC}}{F_{ABC}}$$

и

$$d^2_{ABC} = \frac{9\,V^2_{OABC}}{F^2_{ABC}}.$$

Подставляя сюда значение V^2_{OABC} из формулы (25) и значение F^2_{ABC} из формулы (28), получим формулу (29).

Теорема 20. Если за координатные оси взяты сопряженные ряды пространственной решетки, то расстояние $Kd_{h_1h_2h_3}$ K той по счету плоской сетки с сериальным символом $(h_1h_2h_3)$ от начала координат выражается формулой:

$$Kd_{h_1h_2h_3} = \frac{K^2a_0^2\,b_0^2\,c_0\,(1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma)}{h_1^2\,b_0^2\,c_0^2\sin^2\alpha + h_2^2\,a_0^2\,c_0^2\sin^2\beta + h_3^2\,a_0^2\,b_0^2\sin^2\gamma + 2\,h_2h_3a_0^2\,b_0c_0} \quad (30)$$

$$\overline{(\cos\beta\cdot\cos\gamma - \cos\alpha) + 2h_1h_3a_0b_0^2\,c_0\,(\cos\alpha\cdot\cos\gamma - \cos\beta) + 2h_1h_2a_0b_0c_0^2 \times}$$

$$\overline{(\cos\alpha\cdot\cos\beta - \cos\gamma)}$$

Доказательство. Мы можем для наглядности пользоваться и здесь фиг. 391. Уравнение плоской сетки с сериальными индексами $(h_1h_2h_3)$, согласно теореме 14, будет

$$h_1m_1 + h_2m_2 + h_3m_3 = K.$$

Здесь m_1, m_2, m_3 — индексы точек плоской сетки, а K — порядковый нумер плоской сетки в данной серии, считая от начала координат (следствие из теоремы 16). Для перехода к обычным геометрическим координатам умножаем почленно левую часть на $\frac{a_0}{a_0}$, $\frac{b_0}{b_0}$, $\frac{c_0}{c_0}$, где a_0, b_0, c_0 — примитивные отрезки координатных рядов. Получаем:

$$\frac{h_1}{a_0}m_1a_0 + \frac{h_2}{b_0}m_2b_0 + \frac{h_3}{c_0}m_3c_0 = K,$$

или, обозначая m_1a_0 через x, m_2b_0 через y, m_3c_0 через z, можем написать:

$$\frac{x}{K\frac{a_0}{h_1}} + \frac{y}{K\frac{b_0}{h_2}} + \frac{z}{K\frac{c_0}{h_3}} = 1.$$

Последнее уравнение показывает, что наша плоская сетка делает на координатных осях отрезки

$$a = K\frac{a_0}{h_1},\quad b = K\frac{b_0}{h_2},\quad c = K\frac{c_0}{h_3}.$$

Подставляя теперь эти значения в формулу (29) и имея в виду, что в числителе $a^2b^2c^2 = K^6 \frac{a_0^2 b_0^2 c_0^2}{h_1^2 h_2^2 h_3^2}$, а в знаменателе мы можем после подстановки вынести за скобки $\frac{K^4}{h_1^2 h_2^2 h_3^2}$, мы получим в результате формулу (30).

Теорема 21. Если за координатные оси взяты сопряженные ряды пространственной решетки, то межплоскостное расстояние $d_{h_1h_2h_3}$ для серии плоских сеток с символом $(h_1h_2h_3)$ выражается через индексы h_1, h_2, h_3 через примитивные трансляции по координатным осям a_0, b_0, c_0 и через углы α, β, γ между этими осями так:

$$d^2_{h_1h_2h_3} = \frac{a_0^2 b_0^2 c_0^2 (1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma)}{b_0^2 c_0^2 \sin^2\alpha\, h_1^2 + a_0^2 c_0^2 \sin^2\beta\, h_2^2 + a_0^2 b_0^2 \sin^2\gamma\, h_3^2 + 2a_0 b_0 c_0^2 (\cos\alpha \cdot \cos\beta - \cos\gamma)\, h_1h_2 + 2a_0 b_0^2 c_0 (\cos\alpha \cdot \cos\gamma - \cos\beta)\, h_1h_3 + 2a_0^2 b_0 c_0 (\cos\beta \cdot \cos\gamma - \cos\alpha)\, h_2h_3}. \quad (31)$$

Доказательство. По свойствам пространственной решетки расстояния между любой парой смежных плоских сеток одной и той же параллельной серии их есть величина постоянная, потому что, совместив какой-либо трансляцией нулевую сетку с первой, мы можем повторением той же трансляции совместить первую сетку со второй и т. д.

Поэтому межплоскостное расстояние $d_{h_1h_2h_3}$ есть не что иное как расстояние OE от начала координат плоской сетки, ближайшей к этому началу.

По теореме же 16 для такой плоскости $K = 1$. Подставляя это значение в формулу (30), получим формулу (31).

Замечание. Формула (31) и является конечной целью этого параграфа. Повторяю, что она является одной из важнейших формул структурной кристаллографии и служит одним из оснований всех расчетов структуры кристаллов при рентгенометрическом ее определении.

Как это было несколько раз упомянуто, она была выведена нами в предположении, что h_1, h_2, h_3 в ней суть индексы грани, или, что то же, индексы серии параллельных ей плоских сеток, т. е. три целые и взаимно-простые числа, обратно пропорциональные отрезкам, отсекаемым какой-нибудь из этих сеток на координатных осях.

Чтобы при таком значении h_1, h_2, h_3 формула 31 была справедлива, необходимо, чтобы координатные ряды с примитивными трансляциями a_0, b_0, c_0, и углами α, β, γ, входящими в эту формулу, были сопряженными рядами сетки.

Теперь распространим эту формулу на случай, когда за координатные оси взяты несопряженные ряды.

Теорема 22. Если за координатные оси взяты несопряженные ряды пространственной решетки, то межплоскостное расстояние $d_{h_1h_2h_3}$ некоторой плоской сетки выражается также формулой (31), если только

вместо индексов грани h_1, h_2, h_3 мы подставим индексы p_1, p_2, p_3 ближайшей к началу координат плоской сетки данной серии.

Доказательство. Мы имели для расстояния d_{ABC} какой угодно плоскости ABC от начала координат формулу (29). В ней a, b, c суть отрезки, отсекаемые данной плоскостью на координатных осях.

Выражаем эти отрезки через примитивные трансляции a_0, b_0, c_0 координатных рядов:

$$a = n_1 a_0, \quad b = n_2 b_0, \quad c = n_3 c_0,$$

где n_1, n_2, n_3 суть некоторые (вообще не целые) числа.

Формула (29) и три последние равенства справедливы для всяких плоскостей, в том числе для плоской сетки, ближайшей к началу координат из всех параллельных друг к другу сеток данной серии.

Примем, что величины a, b, c и n_1, n_2, n_3 в этих формулах относятся именно к этой сетке.

Пусть теперь p_1, p_2, p_3 суть индексы этой плоской сетки, ближайшей к началу координат из всей данной серии параллельных сеток. По определению 12 индексов плоской сетки имеем:

$$p_1 = \frac{1}{n_1}, \quad p_2 = \frac{1}{n_2}, \quad p_3 = \frac{1}{n_3}.$$

Эти индексы могут быть и не целыми. Из этих и из предыдущих равенств получаем:

$$a = \frac{a_0}{p_1}; \quad b = \frac{b_0}{p_2}; \quad c = \frac{c_0}{p_3}.$$

Подставляя эти выражения в формулу (29), легко получаем:

$$d^2_{p_1p_2p_3} = \frac{a_0^2 b_0^2 c_0^2 (1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma)}{(b_0^2 c_0^2 \sin^2\alpha) p_1^2 + (a_0^2 c_0^2 \sin^2\beta) p_2^2 + (a_0^2 b_0^2 \sin^2\gamma) p_3^2 +} \quad (31')$$

$$+ 2a_0^2 b_0 c_0 (\cos\beta \cdot \cos\gamma - \cos\alpha) p_2 p_3 + 2a_0 b_0^2 c_0 (\cos\alpha \cdot \cos\beta) p_1 p_3 +$$

$$+ 2a_0 b_0 c_0^2 (\cos\alpha \cdot \cos\beta - \cos\gamma) p_1 p_2$$

Здесь попрежнему a_0, b_0, c_0 — примитивные трансляции на координатных осях (сопряженных или несопряженных рядах); α, β, γ — углы между этими осями; p_1, p_2, p_3 — индексы плоской сетки, ближайшей к началу координат из всех сеток данной серии.

Эти индексы могут быть дробные или целые, не имеющие или имеющие общего делителя. Наконец $d_{p_1p_2p_3}$ — расстояние этой плоской сетки от начала координат, или, что то же, межплоскостное расстояние данной серии сеток.

Замечание. Эта формула совершенно аналогична формуле (31), но, как мы видим, ее вывод несравненно проще. Для вывода формулы (31) нам необходимо было доказать предварительно теоремы 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 и 21, тогда как для вывода формулы (31) оказалось достаточным доказать лишь теоремы 17, 18, 19 и 22.

Однако весьма важным преимуществом формулы (31) перед формулой (31') является то, что в первой числа h_1, h_2, h_3 — заведомо

целые, тогда как во второй числа p_1, p_2, p_3 могут быть и нецелыми. Они должны быть рациональными, что, однако, требует доказательств, которых мы здесь не приводим, так как это свойство индексов p_1, p_2, p_3 нам не понадобится.

Следствие. Формулы (31) и (31′) действительны для всякой пространственной решетки, первая — лишь при гексаэдрической установке решетки, т. е. в том случае, если за координатные оси выбраны ее сопряженные ряды; а вторая при каких угодно рядах в качестве координатных осей.

При этом величины a_0, b_0, c_0, α, β, γ могут быть какие угодно, т. е. формулы (31) и (31′) годятся для триклинной сингонии.

Чем выше сингония, тем значительнее упрощения, которые эти формулы получают.

При расчетах структуры удобнее применять не $d_{h_1h_2h_3}$, а $\frac{1}{d_{h_1h_2h_3}}$. Поэтому мы вычислим ниже эту последнюю величину для всех 7 сингоний.

Агирная (триклинная) сингония.

$$\frac{1}{d^2_{h_1h_2h_3}} = \frac{b_0^2c_0^2\sin^2\alpha\cdot h_1^2 + a_0^2c_0^2\sin^2\beta\cdot h_2^2 + a_0^2b_0^2\sin^2\gamma\cdot h_3^2 + 2a_0b_0c_0^2\times}{a_0^2b_0^2c_0^2(1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma)} \quad (32)$$
$$\frac{\times(\cos\alpha\cdot\cos\beta-\cos\gamma)h_1h_2 + 2a_0b_0^2c_0(\cos\alpha\cdot\cos\gamma-\cos\beta)\times}{\times h_1h_3 + 2a_0^2b_0c_0(\cos\beta\cdot\cos\gamma-\cos\alpha)h_2h_3}$$

Моногирная (моноклинная) сингония. $\alpha=\gamma=90°$.

$$\frac{1}{d^2_{h_1h_2h_3}} = \frac{h_1^2}{a_0^2\sin^2\beta} + \frac{h_2^2}{b_0^2} + \frac{h_3^2}{c_0^2\sin^2\beta} - \frac{2h_1h_3\cos\beta}{a_0c_0\sin^2\beta} \quad \ldots \quad (33)$$

Дигирная (ромбическая) сингония. $\alpha=\beta=\gamma=90°$.

$$\frac{1}{d^2_{h_1h_2h_3}} = \frac{h_1^2}{a_0^2} + \frac{h_2^2}{b_0^2} + \frac{h_3^2}{c_0^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

Тетрагирная (тетрагональная) сингония. $\alpha=\beta=\gamma=90°$; $a_0=b_0$.

$$\frac{1}{d^2_{h_1h_2h_3}} = \frac{h_1^2+h_2^2}{a_0^2} + \frac{h_3^2}{c_0^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

Полигирная (кубическая) сингония. $\alpha=\beta=\gamma=90°$; $a_0=b_0=c_0$.

$$\frac{1}{d^2_{h_1h_2h_3}} = \frac{h_1^2+h_2^2+h_3^2}{a_0^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

Тригирная (тригональная) сингония. $\alpha=\beta=\gamma$; $a_0=b_0=c_0$.

$$\frac{1}{d^2_{h_1h_2h_3}} = \frac{(h_1^2+h_2^2+h_3^2)\sin^2\alpha + 2(h_1h_2+h_1h_3+h_2h_3)(\cos^2\alpha-\cos\alpha)}{a_0^2(1-3\cos^2\alpha+2\cos^3\alpha)} \quad (37)$$

Гексагирная (гексагональная) сингония. За координатные оси берем три трансляции (фиг. 377) $A_0A_1 = a_0$, $A_0A_3 = a_0$, $A_0A_7 = c_0$. Тогда: $\alpha = \beta = 90°$; $\gamma = 120°$; $a_0 = b_0$.

$$\frac{1}{d^2_{h_1h_2h_3}} = \frac{h_1^2 a_0^2 c_0^2 + h_2^2 a_0^2 c_0^2 + h_3^2 a_0^2 a_0^2 \sin^2 120° - 2h_1h_2 a_0^2 c_0^2 \cos 120°}{a_0^2 a_0^2 c_0^2 \sin^2 120°}$$

$$\sin 120° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \text{откуда:} \quad \sin^2 120° = \frac{3}{4};$$

$$\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}.$$

Подставляя, получаем:

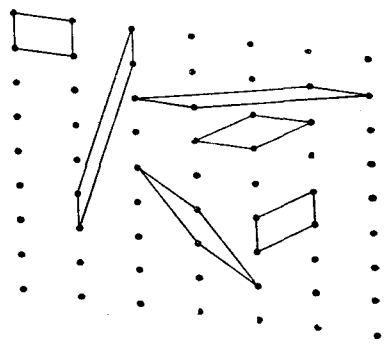
$$\frac{1}{d^2_{h_1h_2h_3}} = \frac{4}{3}\frac{h_1^2 + h_2^2 + h_1h_2}{a_0^2} + \frac{h_3^2}{c_0^2} \quad \ldots\ldots\ldots (38)$$

§ 57д. Площадь примитивного параллелограмма данной плоской сетки и объем примитивного параллелепипеда пространственной решетки.

Замечание. Отчетливые представления об указанных в заглавии этого параграфа понятиях весьма полезны при изучении структуры кристаллов. Остановимся вкратце на них и на их связи с межплоскостными расстояниями. Все это мы применим далее при распространении формулы (31) и выводимых из нее (32)—(38) на иные (не гексаэдрические) установки пространственных решеток.

Теорема 23. Площадь $F_{h_1h_2h_3}$ примитивного параллелограмма данной плоской сетки есть величина постоянная.

На фиг. 393 изображены различные примитивные (не имеющие точек решетки ни внутри ни на сторонах) параллелограммы. Данную плоскую сетку мы можем составить путем параллельного прикладывания друг к другу равных параллелограммов каждого из всех этих сортов. При этом число этих параллелограммов будет равно числу точек плоской сетки: каждая точка одновременно принадлежит четырем смежным параллелограммам, сходящимся в этой точке (в этой вершине); всех вершин 4; следовательно на каждый параллелограмм приходится $4 \times \frac{1}{4} = 1$ точка. Число же точек плоской сетки остается, конечно, одно и то же независимо от того, на какие примитивные параллелограммы мы эту сетку разбиваем. Итак, разбивая плоскую сетку на разные примитивные параллелограммы, мы одну и ту же площадь плоской сетки делим на одно и то же число равных частей. При равных делимых и при равных делителях мы



Фиг. 393.
Площадь примитивного параллелограмма данной плоской сетки есть величина постоянная.

получим и равные частные. Следовательно площади разных примитивных параллелограммов будут равны, что и надо было доказать.

Теорема 24. Объем V_0 примитивного параллелепипеда данной пространственной решетки есть величина постоянная.

Доказательство совершенно аналогично доказательству предыдущей теоремы. На фиг. 394 изображены три взаимно-параллельных плоских сетки (A_1, B_1, C_1, D_1), (A_2, B_2, C_2, D_2) и (A_3, B_3, C_3, D_3) некоторой пространственной решетки и показано 5 различных примитивных параллелепипедов этой решетки. Объемы всех равны друг другу.

Замечание. О выведенных в теоремах 23 и 24 соотношениях вкратце мы уже говорили на стр. 189 и отчасти 306.

Следствие. Произведение из площади примитивного параллелограмма какой-либо плоской сетки на межплоскостное расстояние ее серии есть величина постоянная.

Это произведение, как нетрудно понять, равно объему примитивного параллелепипеда:

$$d_{h_1h_2h_3} \cdot F_{h_1h_2h_3} = V_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (39)$$

Величина же V_0 по теореме 24 постоянна для данной пространственной решетки.

Формула (39) весьма важна. Между прочим она показывает, что межплоскостное расстояние $d_{h_1h_2h_3}$ для серии параллельных сеток с символом $(h_1h_2h_3)$ обратно пропорционально площади примитивного параллелограмма одной из этих сеток, чем мы пользовались (стр. 189) при изучении спайности.

Замечание. Свяжем теперь формулу (39) с формулами (31) и (31′). Для этого нам нужно доказать предварительно следующие теоремы 25 и 26.

Теорема 25. Объем тетраэдра OABC (фиг. 391 или 395) равен $^1/_6$ объема параллелепипеда OABFCEDG, построенного на трех ребрах тетраэдра:

$$V_{OABC} = \frac{1}{6} V_{OABFCEDG}$$

Из чертежа 395 ясно, что

$$V_{OABFCEDG} = 2V_{OABCDE} = 2\,(V_{OABC} + V_{CEDB} + V_{ABCE}).$$

Замечаем, что $V_{OABC} = V_{CEDB}$, так как тетраэдры OABC и CEDB имеют равные основания ($\triangle$ OAB $=$ $\triangle$ CED) и равные высоты H. Так же точно $V_{ABCO} = V_{ABCE}$, потому что у этих двух тетраэдров основание ABC общее, а вершины O и E равно удалены на отрезки OE_2 и EE_1 от основания ABC, как концы равных друг другу половин диагонали OE, средина которой лежит в плоскости ABC.

Итак имеем:

$$V_{OABFCEDG} = 2 \cdot 3V_{OABC} = 6V_{OABC} \quad \ldots\ldots\ldots (40)$$

Теорема доказана.

Теперь мы можем доказать следующую теорему.

Теорема 26. Объем V_0 примитивного параллелепипеда пространственной решетки равен:

$$V_0 = a_0b_0c_0\,(1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma). \quad (41)$$

Ясно, что эта теорема есть непосредственное следствие формул (25) и (40). Объем v_0 тетраэдра OABC (фиг. 395), у которого вместо произвольных ребер a, b, c будут взяты ребра a_0, b_0, c_0 (примитивные трансляции координатных рядов), соответственно формуле (25) будет:

$$v_0^2 = \frac{1}{36} a_0^2 b_0^2 c_0^2 (1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma).$$

Теперь, согласно предыдущей теореме 24, можем объем V_0 примитивного параллелепипеда выразить так:

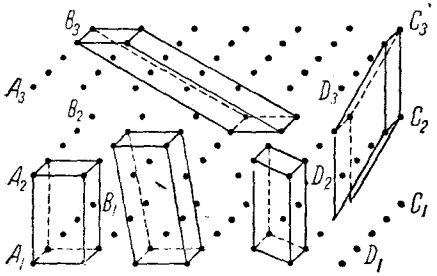
$$V_0 = 6v_0$$

или

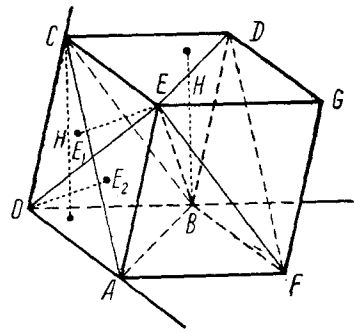
$$V_0^2 = 36 v_0^2,$$

откуда и получаем формулу (41).

Следствие. В формулах (31) и (31′) числитель есть объем V_0 примитивного параллелепипеда пространственной решетки, а знаменатель — площадь примитивного параллелограмма: а) в форм. (31) — плоской сетки с сериальным символом $(h_1h_2h_3)$ при условии, что за координатные оси взяты сопряженные ряды, и b) в форм. (31′) — плоской сетки с индексами p_1, p_2, p_3.



Фиг. 394.
Объем примитивного параллелепипеда данной пространственной решетки есть величина постоянная.



Фиг. 395.
Объем параллелепипеда $V_{OABFCEGD}$ равен 6 объемам тетраэдра V_{OABC}.

Первое утверждение (о числителе) сразу становится очевидным при сличении формулы (31) с формулой (41).

Второе же ясно из следующих сопоставлений:

$$d^2_{h_1h_2h_3} = \frac{V_0^2}{\text{знаменатель}} \quad \ldots \quad (31) \text{ (повторение)}$$

$$d^2_{h_1h_2h_3} = \frac{V_0^2}{F^2_{h_1h_2h_3}} \text{ (из формулы 39).}$$

Левые части равны, значит и правые равны. В последних равны числители, значит равны и знаменатели, т. е.

$$F^2_{h_1h_2h_3} = b_0^2 c_0^2 \sin^2\alpha \cdot h_1 + a_0^2 c_0^2 \sin^2\beta \cdot h_2 + a_0^2 b_0^2 \sin^2\gamma \cdot h_3 + 2a_0 b_0 c_0^2 \times$$
$$\times (\cos\alpha \cdot \cos\beta - \cos\gamma) h_1 h_2 + 2a_0 b_0^2 c_0 (\cos\alpha \cdot \cos\gamma - \cos\beta) h_1 h_3 +$$
$$+ 2a_0^2 b_0 c_0 (\cos\beta \cdot \cos\gamma - \cos\alpha) h_2 h_3 \ldots \ldots \ldots (42)$$

Повторим еще раз, что здесь $F_{h_1h_2h_3}$ — площадь примитивного параллелограмма плоской сетки с сериальным индексом $(h_1h_2h_3)$, a_0, b_0, c_0 — примитивные трансляции на координатных осях, α, β, γ — углы между координатными осями. Формула (42) выведена в предположении, что за координатные оси взяты сопряженные ряды пространственной решетки.

Совершенно аналогичные рассуждения действительны и для формулы (31'), кроме того, что в последней за координатные оси могут быть взяты и несопряженные ряды.

Замечание. Формула (42) нами выведена через межплоскостное расстояние $d_{h_1h_2h_3}$. Можно, однако, итти и обратным путем: раньше вывести площадь примитивного параллелограмма $F_{h_1h_2h_3}$, а затем через нее уже перейти к $d_{h_1h_2h_3}$.

Так поступает например А. Браве[1]), который доказывает здесь среди других замечательную теорему (у него № XXXVIII, стр. 47): „В системе параллельных плоских сеток, имеющих [сериальный] символ (ghk) и коих производящий [= примитивный] параллелограмм имеет площадь ω, треугольник, высеченный сопряженными осями в плоскости

$$gx + hy + kz = 1$$

[x, y, z — индексы точек сетки], имеет площадь, равную частному от деления $\frac{1}{2}\omega$ на произведение ghk индексов, а площадь треугольника, вырезанного теми же самыми осями в плоскости

$$gx + hy + kz = ghk$$

имеет величину произведения $\frac{1}{2}\omega$ на ghk".

(Здесь слова, вставленные в [ ], добавлены мною.)

Понятно, что, имея эти теоремы, нетрудно вычислить сначала площадь $\triangle ABC$ как в первой, так и во второй из плоскостей, для которых выше приведены уравнения. А затем, соответственно умножая или деля на ghk, можно получить и площадь примитивного параллелограмма.

§ 57e. Плотность сетки. Распространение формулы (31) на случаи не гексаэдрической установки пространственной решетки.

Определение 15. Плотностью D сетки [или ретикулярной (сетчатой) плотностью грани] называется количество точек плоской сетки, приходящееся на единицу ее поверхности.

Следствие. Так как на каждый примитивный параллелограмм данной плоской сетки приходится одна ее точка, то плотность $D_{h_1h_2h_3}$ сетки может быть выражена формулой

$$D_{h_1h_2h_3} = \frac{1}{F_{h_1h_2h_3}},$$

[1]) A. Bravais. Mémoire sur les systèmes formés par des points etc. (см выше), p. 36 — 50.

где $F_{h_1h_2h_3}$ — площадь примитивного параллелограмма данной плоской сетки.

Замечание 1. Понятие о плотности сеток (densité du réseau или densité réticulaire) было введено А. Браве[1]).

Замечание 2. Относительные плотности сеток, получаемые при условном принятии за 1 плотности одной из сеток данной решетки, играют большую роль в кристаллохимическом анализе (стр. 145). Ее определению посвящен ряд работ[2]).

При современных исследованиях структуры кристаллов это понятие применяется редко, гораздо чаще пользуются связанным с ним понятием межплоскостного расстояния $d_{h_1h_2h_3}$, входящим в формулу Брагга-Вульфа (стр. 180), служащую главной основой всех расчетов структуры. Нетрудно понять, что $d_{h_1h_2h_3}$ прямо пропорционально плотности.

$$D_{h_1h_2h_3} = \frac{1}{F_{h_1h_2h_3}} = \frac{1}{V_0/d_{h_1h_2h_3}} = \frac{d_{h_1h_2h_3}}{V_0} \quad \ldots\ldots (43)$$

V_0 — здесь объем примитивного параллелепипеда данной решетки, т. е., как мы это уже знаем, — величина постоянная.

Ввиду такой тесной связи между $d_{h_1h_2h_3}$ и $D_{h_1h_2h_3}$ многое из изложенного в перечисленных работах весьма полезно не только для кристаллохимического анализа, но и для структурной кристаллографии вообще.

Основные теоремы о плотностях сеток дал уже сам А. Браве и притом в весьма ясной и изящной форме. Позднейшие авторы разрабатывали методику определения плотностей, форму изложения и некоторые другие детали этой темы.

Мы воспользуемся здесь некоторыми выводами Браве для того, чтобы распространить формулу (31) для $d_{h_1h_2h_3}$ на случаи не гексаэдрической установки пространственной решетки.

Замечание 3. При выводе 14 решеток (трансляционных групп) Браве, кроме 1) гексаэдрической решетки, мы имели еще 2) октаэдрическую (центрированную), 3) додекаэдрическую (центрогранную), 4) центрированную по одной грани и 5) гексагонально-призматическую. Именно на 2, 3 и 4 мы должны распространить формулу (31).

Докажем для этого ряд теорем.

(Гексагонально-призматическую решетку при выводе формулы (38) мы свели к гексаэдрической решетке с примитивным элементарным параллелепипедом, а потому она не требует дополнительных пояснений.)

Теорема 27. Любую пространственную решетку мы можем так установить, т. е. так выбрать ее координатные оси, что после этого

---

[1]) A. Bravais. Mémoire sur les systèmes etc., p. 20.

[2]) A. Bravais. Etudes cristallographiques, 1851. 156.

Е. С. Федоров. Изображение структуры кристалла векториальными кругами. Зап. Горн. инст. I, вып. 4, 279.

В. И. Соколов и Д. Н. Артемьев. Определение плотностей сеток кристаллических граней без помощи построения. Зап. Горн. инст. 11, вып. 5, 333—340.

А. К. Болдырев. Комментарии к работе Е. С. Федорова: Das Krystallreich Изд. Ак. н. 1926. 7—8, 23—24, 43—57.

О. М. Аншелес. Определение относительной ретикулярной плотности граней кристаллов. Тр. Ленингр. общ. естеств. XXXIX, вып. 4, 135—193.

Н. Н. Падуров. Кристаллохимический анализ и методы геометрической кристаллографии. 1931. 153—173.

она приобретет любой из перечисленных выше в замечании 5 видов (при этом, однако, координатные оси вообще не будут совпадать с осями симметрии, а в 5-м типе элементарной ячейкой будет не гексагональная, а гексагоналоидная, т. е. косая шестигранная призма).

Это можно понять из следующих рассуждений.

Пусть мы имеем некоторую обыкновенную гексаэдрическую решетку с сопряженными трансляциями a_0, b_0, c_0. Найдем в ней такие три несопряженные ряда, которые надо выбрать за координатные оси, чтобы наша решетка приобрела один из четырех остальных более сложных видов, перечисленных выше в замечании 3, например 3-й (додекаэдрический).

Для этого возьмем вспомогательную произвольную додекаэдрическую решетку. Пусть в ней за координатные ряды взяты e_1, f_1, g_1. Согласно изложенному при выводе решеток Браве в этой вспомогательной решетке всегда найдется тройка сопряженных трансляций, посредством которых выведутся все точки системы, разбивающейся при этом на примитивные параллелепипеды, построенные на этих трех трансляциях. Назовем ряды, вдоль которых идут эти сопряженные трансляции, e_0, f_0, g_0. Если их взять за координатные оси, то наша вспомогательная система точек приобретет вид простой гексаэдрической решетки. После этого ряды e_0, f_0, g_0 получат у вспомогательной решетки символы [100], [010] и [001] с определенной на каждом из них трансляцией (единичным отрезком). В этой новой установке прежние координатные ряды e_1, f_1, g_1 будут иметь вполне определенные символы, пусть $[p_1q_1r_1]$ $[p_2q_2r_2]$ $[p_3q_3r_3]$.

Теперь обратимся к данной гексаэдрической решетке. Ее сопряженным трансляциям a_0, b_0, c_0 придадим символы [100], [010], [001] и найдем в ней ряды с символами $[p_1q_1r_1]$ $[p_2q_2r_2]$ $[p_3q_3r_3]$. Вследствие полного соответствия любых двух гексаэдрических решеток нетрудно понять, что если во вспомогательной решетке ряды с последними тремя символами, взятые за координатные оси, придавали решетке додекаэдрический вид; то и в данной гексаэдрической решетке, если мы возьмем ряды с такими же символами за координатные оси, она приобретет вид додекаэдрической.

Замечание. Свойства пространственных решеток, изложенные в этой теореме, наглядно показаны между прочим Н. Н. Падуровым в его работе „Сопряжение пространственных решеток“ [1]) для решеток гексаэдрической, додекаэдрической и октаэдрической.

Теорема 28. Если мы объемно центрируем все параллелепипеды данной пространственной решетки, то все ее плоские сетки с двумя нечетными индексами серии уменьшат площадь $F_{h_1h_2h_3}$ своего примитивного параллелограмма вдвое, а у остальных сеток эта площадь останется прежней.

Доказательство. На фиг. 396, взятой из упомянутой работы О. М. Аншелеса, представлена некоторая пространственная решетка. За координатные оси здесь выбраны ряды O1, O2, O3. Они несопряженные: элементарные параллелепипеды, построенные на их примитивных трансляциях Oa, Ob, Oc, не являются пустыми: в центрах их сидят точки.

Заметим, что такую сложную пространственную решетку можно

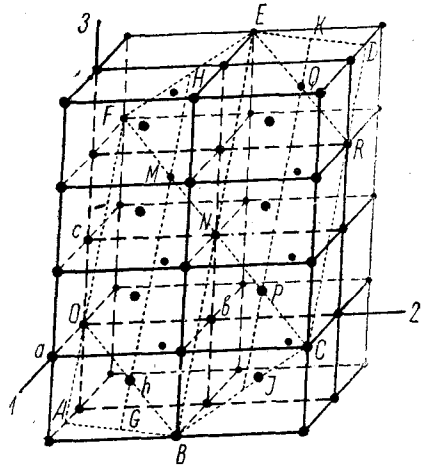
[1]) Н. Н. Падуров. Зап. Мин. общ. 1931, LX. № 1, 71—77. Также: Кристаллохимический анализ. 1931, 133—143.

рассматривать как две тождественных простых (гексаэдрических), вставленных друг в друга. Одна из них будет составлена точками, сидящими в вершинах сети элементарных параллелепипедов, а другая — точками в их центрах.

Обе эти решетки будут находиться в параллельном положении. Поэтому плоским сеткам с любым символом ($h_1h_2h_3$) в первой решетке будет отвечать параллельная им серия плоских сеток с тем же символом во второй решетке, и обратно.

Таким образом во второй решетке не будет ни одной серии плоских сеток, которой бы не было в первой.

Этого мало; любая сетка, проходящая через смешанные точки (частью вершинные, частью центральные), будет параллельна какой-либо из сеток первой решетки. Это потому, что сразу ясно, что она содержит бесчисленное множество точек по крайней одной из решеток, а следовательно является плоской сеткой этой решетки. Итак, в заданной сложной решетке не будет ни одной плоской сетки, не параллельной какой-либо сетке, первой составляющей решетки (из вершинных точек).



Фиг. 396.
В объемно-центрированной решетке плоские сетки с $h_1+h_2+h_3$ четным — удваивают свою плотность, остальные не изменяют по сравнению с простой решеткой.

Будем рассматривать плоские сетки, идущие через начало координат O, за которое взята одна из вершинных точек. Рассматривая фиг. 396, видим, что некоторые плоские сетки проходят только через точки первой решетки (вершинные), например координатные сетки 1O2, 1O3, 2O3, а другие проходят через точки и первой и второй решетки (и через вершинные и через центральные), например 3OB.

Выведем теперь условия, которым должен удовлетворять символ грани, чтобы параллельные ей плоские сетки проходили а) через точки одной первой решетки (параллельные им, но с ними не совпадающие, будут проходить через точки только второй решетки), и б) через точки обеих решеток.

По теореме 14, формуле (12) имеем уравнение любой плоской сетки:

$$h_1m_1 + h_2m_2 + h_3m_3 = K,$$

где h_1, h_2, h_3 — индексы грани (взаимно-простые целые числа), m_1, m_2, m_3 — индексы любой точки сетки, K — целое число, показывающее нумер сетки из всей серии, считая от начала координат.

Если мы будем рассматривать сетки, идущие через начало координат, то предыдущее уравнение превратится в такое:

$$h_1m_1 + h_2m_2 + h_3m_3 = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (44)$$

При этом все точки первой решетки (вершинные) имеют в качестве m_1, m_2, m_3 — всевозможные целые числа. Точки же второй

(центральной) решетки имеют в качестве координат числа такого вида:

$$m_1+\frac{1}{2},\ m_2+\frac{1}{2},\ m_3+\frac{1}{2},$$

где m_1, m_2, m_3 — какие угодно целые числа попрежнему.

Для того чтобы плоская сетка (44) проходила и через эти точки, координаты их должны удовлетворять уравнению (44):

$$h_1\left(m_1+\frac{1}{2}\right)+h_2\left(m_2+\frac{1}{2}\right)+h_3\left(m_3+\frac{1}{2}\right)=0$$

или:

$$h_1m_1+h_2m_2+h_3m_3+\frac{h_1+h_2+h_3}{2}=0.$$

Первые три члена здесь целые, следовательно и последний член должен быть целым, т. е. $h_1+h_2+h_3$ должно нацело делиться на 2. А это возможно лишь, если один из индексов будет четный, а два другие — нечетные (все три четные не могут быть, ибо это не символ сетки, а символ грани, состоящий из взаимно-простых индексов).

Итак, лишь сетки с двумя нечетными индексами пройдут через точки обеих решеток, а остальные лишь через точки одной из решеток.

Первая часть доказательства закончена.

Из нее следует прежде всего, что площадь примитивного параллелограмма всех плоских сеток с одним или тремя нечетными индексами у октаэдрической решетки остается та же, что и у гексаэдрической, с теми же кристаллографическими константами a_0, b_0, c_0, α, β, γ.

Что же касается сеток с двумя нечетными индексами, проходящих через точки обеих решеток, то площадь примитивного параллелограмма для них уменьшится. Определим, во сколько раз?

Понятно, что если такая сетка $(h_1h_2h_3)$ прошла через одну какую-либо точку второй решетки, то она пройдет через целую плоскую сетку центральных точек. При этом, ввиду тождественности и параллельности первой и второй решеток, плоская сетка, имеющая в первой решетке сериальный символ $(h_1h_2h_3)$, во второй решетке будет иметь тот же символ, а следовательно и ту же площадь примитивного параллелограмма, стало быть и ту же плотность.

Таким образом мы видим, что в октаэдрической решетке плоская сетка с символом $(h_1h_2h_3)$ с двумя нечетными индексами будет заключать в себе сразу плоские сетки с таким же символом двух гексаэдрических решеток (и вершинной и центральной). Поэтому ее плотность будет ровно в 2 раза больше, чем у гексаэдрической решетки, с теми же a_0, b_0, c_0, α, β, γ. А площадь примитивного параллелограмма будет в 2 раза меньше.

Теорема доказана.

Теорема 29. Объем примитивного параллелепипеда октаэдрической решетки с трансляциями a_0, b_0, c_0 вдоль ребер элементарного параллелепипеда и с углами α, β и γ между этими ребрами в 2 раза меньше объема примитивного параллелепипеда гексаэдрической решетки с теми же константами.

Доказательство. Это следует из того, что в каждый параллелепипед первой решетки (фиг. 396) вставлена одна добавочная точка (в центре). Так как в первой решетке на параллелепипед

$a_0b_0c_0\alpha\beta\gamma$ приходилась одна точка, то после вставки центральных точек на тот же параллелепипед будет приходиться две точки. Поэтому на одну точку теперь будет приходиться вдвое меньший объем. А объем, приходящийся на одну точку пространственной решетки, и равен объему примитивного ее параллелепипеда. Отсюда следует, что объем примитивного параллелепипеда после вставки центральных точек будет в два раза меньше объема примитивного параллелепипеда $a_0b_0c_0\alpha\beta\gamma$ до вставки.

Теорема доказана.

Теорема 30. В октаэдрической решетке с константами a_0, b_0, c_0, α, β, γ, межплоскостные расстояния $d''_{h_1h_2h_3}$ для граней с одним или тремя нечетными индексами будут вдвое меньше, чем для тех же граней в гексаэдрической решетке с теми же константами. Для граней же с двумя нечетными индексами межплоскостные расстояния в том и в другом случае будут одинаковы.

Доказательство. Пусть означают:

$d_{h_1h_2h_3}$ — межплоскостное расстояние сетки $(h_1h_2h_3)$ в гексаэдрической решетке с константами a_0, b_0, c_0, α, β, γ.

$F_{h_1h_2h_3}$ — площадь примитивного параллелограмма той же сетки в той же решетке.

V_0 — объем примитивного параллелепипеда той же решетки.

$d''_{h_1h_2h_3}$, $F''_{h_1h_2h_3}$, V''_0 — соответственные величины для плоской сетки $(h_1h_2h_3)$ в октаэдрической решетке с теми же константами.

По следствию из теоремы 24 имеем:

$$\left.\begin{aligned} d_{h_1h_2h_3} &= \frac{V_0}{F_{h_1h_2h_3}} \\ \text{и} \\ d''_{h_1h_2h_3} &= \frac{V''_0}{F''_{h_1h_2h_3}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (45)$$

По теореме же 29 имеем:

$$V_0 = 2V''_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (46)$$

и затем по теореме 28 а) для сеток с одним или тремя нечетными индексами:

$$F_{h_1h_2h_3} = F''_{h_1h_2h_3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (47)$$

и б) для сеток с двумя нечетными индексами:

$$F_{h_1h_2h_3} = 2F''_{h_1h_2h_3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (48)$$

Подставляя из (46), (47), (48) в (45), получим:

Для случая а)

$$d''_{h_1h_2h_3} = \frac{\frac{1}{2}V_0}{F_{h_1h_2h_3}} = \frac{1}{2}d_{h_1h_2h_3}$$

и для случая б)

$$d''_{h_1h_2h_3} = \frac{\frac{1}{2}V_0}{\frac{1}{2}F_{h_2h_2h_3}} = d_{h_1h_2h_3}$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Изложенное в теоремах 28, 29 и 30 можно видеть на фиг. 396.

Здесь плоская сетка aOc, имеющая символ (010), с одним нечетным индексом, проходит только через точки первой гексаэдрической решетки (вершинные) и имеет ту же площадь примитивного параллелограмма, что и до вставки центральных точек, но вдвое меньшее межплоскостное расстояние.

Плоская же сетка abN (параллельная оси O3), имеющая символ (110), с двумя нечетными индексами, проходит как через вершинные, так и через центральные точки, имеет вдвое меньшую площадь примитивного параллелограмма, чем до вставки центральных точек, но то же межплоскостное расстояние, что и до вставки.

Для сетки более общего положения, например OAGBCRQEHFO (фиг. 396) мы находим прежде всего символ. Для этого удобнее всего начало координат перенести в точку b. Тогда видно, что эта сетка сделает на координатных осях отрезки $\frac{1}{2}, -1, 1$, следовательно ее символ $(2\bar{1}1)$ будет иметь два нечетных индекса.

Видим на чертеже, что она проходит и через вершинные и через центральные точки. Ее примитивный параллелограмм до вставки центральных точек был OBNF, а после вставки стал $OhMF = \frac{1}{2}$ OBNF. Ближайшая к этой сетке параллельная ей сетка пройдет (если следить по плоскости 103) через точку с независимо от того, вставлены центральные точки или нет. Поэтому межплоскостное расстояние для этой точки не изменится.

Замечание 2. Теорему 30 можно формулировать несколько иначе.

В октаэдрической решетке с константами a_0, b_0, c_0, α, β, γ межплоскостное расстояние $d_{h_1h_2h_3}$ 1) для каждой грани с четной суммой $(h_1+h_2+h_3)$ имеет ту же величину, что и для грани с тем же символом в гексаэдрической решетке с теми же константами, и 2) для каждой грани с нечетной суммой $(h_1+h_2+h_3)$ межплоскостное расстояние вдвое меньше, чем для грани с тем же символом в гексаэдрической решетке с теми же константами.

Теорема 31. В додекаэдрической решетке с примитивными трансляциями по координатным осям a_0, b_0, c_0 и с углами между этими осями α, β, γ площадь $F_{h_1h_2h_3}$ примитивного параллелограмма плоской сетки $h_1h_2h_3$ в случае трех нечетных индексов вчетверо, а в случае одного или двух нечетных — вдвое меньше, чем площадь примитивного параллелограмма гексаэдрической решетки с теми же константами.

Доказательство. На фиг. 397 изображена додекаэдрическая решетка. Примитивные трансляции (единичные отрезки) на координатных осях суть $Oa = a_0$, $Ob = b_0$, $Oc = c_0$.

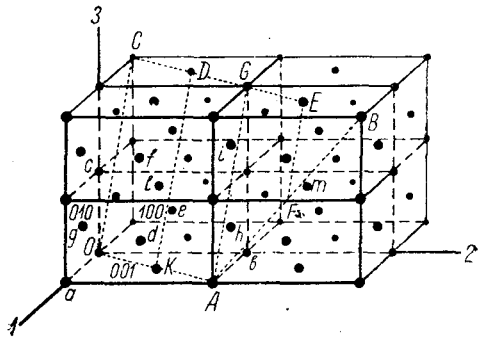
Каждый элементарный параллелепипед имеет, кроме вершинных точек, еще точки в центрах граней. Например, параллелепипед, построенный на трансляциях Oa, Ob, Oc, центрирован по граням точками d, e; g, h; K, l.

Эти вставленные точки можно разбить на 3 отдельные (добавочные) пространственные решетки, равные и параллельные гексаэдрической решетке вершинных точек.

Будем считать решетку вершинных точек за первую. Их координаты будут иметь вид $x = m_1a_0$, $y = m_2b_0$, $z = m_3c_0$, а числовые координаты будут

$$m_1,\ m_2,\ m_3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

где все три m суть целые числа. Тогда точки, центрирующие грани, параллельные координатной плоскости 2O3, — точки d, e и др., дадут вторую решетку, равную и параллельную первой и в нее вставленную.



Фиг. 397.
В гране-центрированной решетке плоские сетки со всеми нечетными индексами учетверяют свою плотность, а со смешанными индексами удваивают по сравнению с простой решеткой.

Их числовые координаты будут иметь вид:

$$m_1,\ m_2+\frac{1}{2},\ m_3+\frac{1}{2}, \ldots\ldots (II)$$

где m_1, m_2, m_3 — произвольные целые числа.

Точки, сидящие в центрах граней, параллельных плоскости 1O3, — точки g, h и им аналогичные, дадут третью решетку, равную и параллельную первой и второй и в них вставленную.

Их числовые координаты будут иметь вид:

$$m_1+\frac{1}{2},\ m_2,\ m_3+\frac{1}{2}, \ldots\ldots\ldots (III)$$

где m_1, m_2, m_3 — произвольные целые числа.

Наконец, точки, находящиеся в центрах граней, параллельных плоскости 102, — точки k, l и им аналогичные, дадут четвертую решетку, равную и параллельную трем предыдущим и в них вставленную.

Их числовые координаты будут иметь вид:

$$m_1+\frac{1}{2},\ m_2-\frac{1}{1},\ m_3 \ldots\ldots\ldots (IV)$$

Здесь опять m_1, m_2, m_3 — произвольные целые числа.

Так же, как для октаэдрической решетки, мы можем здесь сказать, что плоские сетки серии $(h_1h_2h_3)$ будут параллельны друг другу во всех четырех решетках, вследствие равенства и параллельного положения последних.

Рассмотрим теперь так же, как мы это сделали для октаэдрической решетки, какие из плоских сеток первой (вершинной) решетки будут содержать точки других решеток и в каком числе.

Для этого рассмотрим те плоские сетки первой решетки, которые проходят через начало координат O (фиг. 397).

Всякая из них будет иметь своим уравнением:

$$h_1n_1 + h_2n_2 + h_3n_3 = 0,$$

где h_1, h_2, h_3 — целые и взаимно-простые индексы грани, ей параллельной, а n_1, n_2, n_3 — числовые координаты точек плоской сетки, которые могут быть в сложной (не гексаэдрической) решетке как целыми, так и дробными.

Имеем следующие условия для того, чтобы в эту плоскость попадали точки каждой из 4 гексаэдрических решеток, слагающих сложную додекаэдрическую решетку (фиг. 397).

I) Чтобы попадали точки первой решетки:

$$h_1m_1 + h_2m_2 + h_3m_3 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (I')$$

II) Чтобы попадали точки второй решетки:

$$h_1m_1 + h_2\left(m_2 + \frac{1}{2}\right) + h_3\left(m_3 + \frac{1}{2}\right) = 0$$

или

$$h_1m_1 + h_2m_2 + h_3m_3 + \frac{h_2 + h_3}{2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (II')$$

III) Чтобы попадали точки третьей решетки:

$$h_1\left(m_1 + \frac{1}{2}\right) + h_2m_2 + h_3\left(m_3 + \frac{1}{2}\right) = 0$$

или

$$h_1m_1 + h_2m_2 + h_3m_3 + \frac{h_1 + h_3}{2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (III')$$

IV) Чтобы попадали точки четвертой решетки:

$$h_1\left(m_1 + \frac{1}{2}\right) + h_2\left(m_2 + \frac{1}{2}\right) + h_3m_3 = 0$$

или

$$h_1m_1 + h_2m_2 + h_2m_3 + \frac{h_1 + h_2}{2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (IV')$$

Во всех этих уравнениях как h_1, h_2, h_3, так и m_1, m_2, m_3 — целые числа. Поэтому сумма $h_1m_1 + h_2m_2 + h_3m_3$, также всегда целое число. Поэтому, чтобы уравнения (II'), (III'), (IV') были удовлетворены, надо, чтобы последние члены их $\frac{h_2 + h_3}{2}$, $\frac{h_1 + h_3}{2}$, $\frac{h_1 + h_2}{2}$ были целыми, т. е. чтобы соответственные суммы $(h_2 + h_3)$, $(h_1 + h_3)$, $(h_1 + h_2)$ были четными числами.

Исследуем теперь три единственно возможных случая:

а) один из трех индексов h_1, h_2, h_3 нечетный;

б) два индекса нечетные;

в) три индекса нечетные.

(Нуль нечетных индексов не может быть потому, что тогда все они были бы четными, т. е. все имели бы общего делителя 2, а по условию они взаимно-простые.)

В случае а) из трех сумм: (h_2+h_3), (h_1+h_3) и (h_1+h_2) только какая-нибудь одна будет четным числом. Следовательно в такую плоскость, кроме точек первой, решетки попадут точки только одной из остальных трех решеток. Площадь примитивного параллелограмма таких плоских сеток будет поэтому в два раза меньше, чем у сеток с тем же символом в гексаэдрической решетке с теми же константами a_0, b_0, c_0, α, β, γ.

В случае б), когда два индекса нечетные, будем иметь тот же результат, что нетрудно сообразить.

В случае в), когда все три индекса h_1, h_2, h_3 нечетные, все три суммы (h_2+h_3), (h_1+h_3), (h_1+h_2) будут четными. В такие плоские сетки будут попадать, кроме точек первой решетки, точки и всех трех добавочных решеток. После того, что было сказано в соответственном месте для октаэдрической решетки, нетрудно понять, что каждая добавочная решетка будет добавлять в такие плоскости с тремя нечетными индексами ровно столько же точек, сколько их принадлежит этой плоской сетке от первой решетки (вследствие равенства и параллельности всех добавочных решеток с исходной). Поэтому на один примитивный параллелограмм исходной (первой) решетки теперь придется четыре точки. Следовательно плотность по сравнению с простой гексаэдрической решеткой увеличится для этого случая в четыре раза, а площадь примитивного параллелограмма уменьшится в четыре раза.

Теорема 31 доказана.

Теорема 32. Объем примитивного параллелепипеда додекаэдрической решетки V_0''' в четыре раза меньше, чем объем примитивного параллелепипеда гексаэдрической решетки с теми же константами a_0, b_0, c_0, α, β, γ.

Доказательство. Это следует из того, что додекаэдрическая решетка составлена вставленными друг в друга четырьмя гексаэдрическими (см. выше) с теми же константами, что и додекаэдрическая. Поэтому на один и тот же объем будет приходиться в додекаэдрической решетке в четыре раза больше точек, чем в соответственной гексаэдрической. И обратно, на одну точку в додекаэдрической решетке будет приходиться в четыре раза меньший объем, чем в соответственной гексаэдрической. Но объем, приходящийся на одну точку, равен объему примитивного параллелепипеда данной решетки.

Этим теорема доказана.

Теорема 33. В додекаэдрической решетке с константами a_0, b_0, c_0, α, β, γ межплоскостные расстояния $d'''_{h_1h_2h_3}$ для всякой грани с одним или двумя нечетными индексами уменьшатся вдвое по сравнению с таковыми для грани с теми же индексами в гексаэдрической решетке с теми же константами; а межплоскостные расстояния для любой грани с тремя нечетными индексами будут те же, что и в соответственной гексаэдрической решетке.

Доказательство. Пусть в додекаэдрической решетке с константами a_0, b_0, c_0, α, β, γ буква V_0''' означает объем примитивного параллелепипеда; $F'''_{h_1h_2h_3}$ — площадь примитивного параллелограмма плоской сетки с граневым (или сериальным) символом $(h_1h_2h_3)$; и наконец $d'''_{h_1h_2h_3}$ — межплоскостное расстояние для той же серии плоских сеток. И пусть V_0, $F_{h_1h_2h_3}$ и $d_{h_1h_2h_3}$ — соответственные величины в гексаэдрической ре-

шетке с теми же константами. По предыдущим теоремам имеем два случая.

1) Один или два индекса нечетные.

$$d'''_{h_1h_2h_3} = \frac{V'''_0}{F'''_{h_1h_2h_3}} = \frac{\frac{1}{4}V_0}{\frac{1}{2}F_{h_1h_2h_3}} = \frac{V_0}{2F_{h_1h_2h_3}} = \frac{1}{2}d_{h_1h_2h_3}.$$

2) Три индекса нечетные.

$$d'''_{h_1h_2h_3} = \frac{V'''_0}{F'''_{h_1h_2h_3}} = \frac{\frac{1}{4}V_0}{\frac{1}{4}F_{h_1h_2h_3}} = \frac{V_0}{F_{h_1h_2h_3}} = d_{h_1h_2h_3}.$$

Этим теорема 33 доказана.

Замечание 1. Изложенное в теоремах 31, 32, 33 можно видеть конкретно на фиг. 397. Здесь плоская сетка aOc, имеющая символ (010) с одним нечетным индексом, проходит только через точки первой (вершинной) и третьей решетки. Площадь ее примитивного параллелограмма будет вдвое меньше параллелограмма гексаэдрической решетки, построенного на трансляциях Oa и Oc. Межплоскостное расстояние для этой серии плоских сеток, как видно на фиг. 397, уменьшится вдвое по сравнению с гексаэдрической решеткой вершинных точек.

Второй пример. Плоскость abG (фиг. 397). Имеет символ (110) (два нечетных индекса). Содержит точки первой и четвертой решетки. Площадь примитивного параллелограмма вдвое меньше, чем она была бы в случае присутствия точек только первой решетки, в вершинах сети параллелепипедов, построенных на Oa, Ob, Oc. Межплоскостное расстояние для этой серии в додекаэдрической решетке тоже вдвое меньше, чем в гексаэдрической с теми же константами.

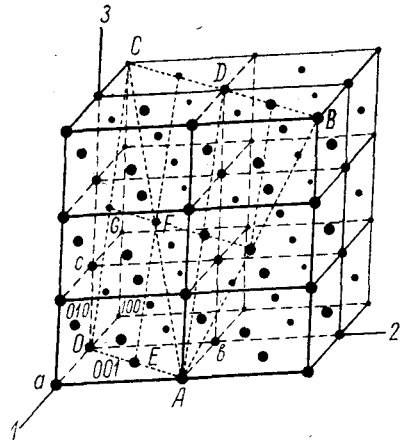
Третий пример. Плоскость abc с символом (111) — с тремя нечетными индексами. В нее, кроме вершинных точек (первой решетки), попадают точки g, K, e всех трех добавочных решеток. Нетрудно рассмотреть, что примитивным треугольником в этой сетке в одной первой (гексаэдрической) решетке будет $\triangle abc$. Он будет заключать в себе 4 равных примитивных треугольника додекаэдрической решетки: $\triangle agK + \triangle gce + \triangle geK + \triangle Keb$. Поэтому площадь примитивного параллелограмма этой сетки в додекаэдрической решетке будет в 4 раза меньше площади примитивного параллелограмма той же сетки в гексаэдрической (первой) решетке.

Наконец замечаем также, что в этой серии плоских сеток точки всех добавочных решеток все целиком попадают в сетки первой гексаэдрической решетки с вершинными точками, а потому не вызывают новых плоских сеток в серии. Следовательно межплоскостные расстояния сохраняют свою величину после добавки точек в центры всех граней элементарного параллелепипеда.

В справедливости доказанных теорем можно также убедиться и на гранях более общего положения OABC (фиг. 397) с символом $(2\bar{2}1)$ и OABC (фиг. 398) с символом $(3\bar{3}1)$.

Замечание 2. Теорему 33 можно формулировать несколько иначе:

В додекаэдрической решетке с константами a_0, b_0, c_0, α, β, γ межплоскостное расстояние 1) для каждой грани со смешанными (четными и нечетными) индексами — вдвое меньше, чем для грани с тем же символом в гексаэдрической решетке с теми же константами, и 2) для каждой грани со всеми нечетными индексами имеет ту же величину, что и для грани с тем же символом в гексаэдрической решетке с теми же константами.



Фиг. 398.
В гране-центрированной решетке плоские сетки со всеми нечетными индексами учетверяют свою плотность, а со смешанными индексами удваивают по сравнению с простой решеткой.

Замечание 3. Нам осталось рассмотреть случай решетки, элементарный параллелепипед которой центрирован по одной паре граней.

Ввиду полной аналогии в доказательствах с предыдущими случаями мы ограничимся лишь формулировкой теорем, опуская доказательства.

Теорема 34. В решетке с элементарным параллелепипедом, центрированным по одной паре граней, пусть по (001), при константах a_0, b_0, c_0, α, β, γ площадь $F'_{h_1h_2h_3}$ примитивного параллелограмма:

1) для всякой сетки с h_1+h_2 нечетным сохраняет ту же величину, что и в гексаэдрической решетке с теми же константами; $F'_{h_1h_2h_3}=F_{h_1h_2h_3}$; 2) а для всякой сетки с h_1+h_2 четным уменьшается вдвое; $F'_{h_1h_2h_3}=\frac{1}{2}F_{h_1h_2h_3}$.

Теорема 35. В решетке с элементарным параллелепипедом, центрированным по одной паре граней, объем примитивного параллелепипеда в 2 раза меньше, чем объем примитивного параллелепипеда в гексаэдрической решетке с теми же константами a_0, b_0, c_0, α, β, γ.

Теорема 36. В решетке с элементарным параллелепипедом, центрированным по одной паре граней, пусть по (001), межплоскостное расстояние $d'_{h_1h_2h_3}$:

1) для случая h_1+h_2 четное — сохраняет ту же величину, что для грани с тем же символом ($h_1h_2h_3$) в гексаэдрической решетке с теми же константами;

2) для случая h_1+h_2 нечетное — $d'_{h_1h_2h_3}$ уменьшается вдвое по сравнению с таковым же в гексаэдрической решетке.

Замечание 1. Сопоставим теперь для удобства обзора и пользования все полученные в этом параграфе результаты.

Пусть имеются четыре решетки: 1) гексаэдрическая Г, 2) центрированная по одной паре граней Г′, 3) центрированная по объему (октаэдрическая) Г″ и 4) центрированная по всем граням (додекаэдрическая) Г‴.

Пусть наименьшие промежутки a_0, b_0, c_0, между точками по координатным осям этих решеток будут у всех их одни и те же, равно как и углы α, β, γ между этими координатными осями.

Тогда имеем следующие соотношения:

Решетка	Характер индексов грани	Объем примитивного параллелепипеда V	Площадь примитивного параллелограмма серии сеток $(h_1 h_2 h_3)$ F	Межплоскостное расстояние той же серии сеток $(h_1 h_2 h_3)$ d
Г (простая)	Безразличен.	V_0	$F_{h_1h_2h_3}$	$d_{h_1h_2h_3}$
Г′ (центробазисная)	В предположении, что центрированы грани (001) [1] а) $(h_1 + h_2)$ нечетное. б) $(h_1 + h_2)$ четное.	$V_0' = \frac{V_0}{2}$	$F'_{h_1h_2h_3} = F_{h_1h_2h_3}$ $F'_{h_1h_2h_3} = \frac{F_{h_1h_2h_3}}{2}$	$d'_{h_1h_2h_3} = \frac{d_{h_1h_2h_3}}{2}$ $d'_{h_1h_2h_3} = d_{h_1h_2h_3}$
Г″ (центрообъемная)	а) $(h_1 + h_2 + h_3)$ нечетное (иначе — один или три индекса нечетные). б) $(h_1 + h_2 + h_3)$ четное (иначе — два индекса нечетные).	$V_0'' = \frac{V_0}{2}$	$F''_{h_1h_2h_3} = F_{h_1h_2h_3}$ $F''_{h_1h_2h_3} = \frac{F_{h_1h_2h_3}}{2}$	$d''_{h_1h_2h_3} = \frac{d_{h_1h_2h_3}}{2}$ $d''_{h_1h_2h_3} = d_{h_1h_2h_3}$
Г‴ (центрогранная)	а) Смешанные индексы (иначе — один или два нечетных индекса). б) Все индексы нечетные.	$V_0''' = \frac{V_0}{4}$	$F'''_{h_1h_2h_3} = \frac{F_{h_1h_2h_3}}{2}$ $F'''_{h_1h_2h_3} = \frac{F_{h_1h_2h_3}}{4}$	$d'''_{h_1h_2h_3} = \frac{d_{h_1h_2h_3}}{2}$ $d'''_{h_1h_2h_3} = d_{h_1h_2h_3}$

Таким образом по формуле 31 и по ее частным случаям (форм. 32—38) следует вычислять непосредственно все межплоскостные расстояния $d_{h_1h_2h_3}$ лишь для гексаэдрической решетки. Для иных же решеток, надо принимать во внимание эту таблицу и в случаях а) вычисленное по названным формулам $d_{h_1h_2h_3}$ делить пополам.

Однако, при этом надо иметь в виду, что если мы знаем индексы p_1, p_2, p_3 ближайшей к началу координат плоской сетки из данной параллельной серии, то по формуле (31′) мы можем вычислять расстояния d во всех случаях без всяких поправок. Поэтому задержимся еще немного на формуле (31′).

Замечание 2. Выше было указано, что формула (31′), действительная для несопряженных координатных осей, обладает по сравнению с (31) тем недостатком, что входящие в первую индексы ближайшей сетки p_1, p_2, p_3 могут быть дробными, тогда как индексы грани h_1, h_2, h_3 в формуле (31) всегда целые. Это весьма существенно для рентгенометрических методов расчета структуры кристаллов.

[1] В случае центрировки по грани (100) надо брать сумму $(h_2 + h_3)$; при центрировке по (010) — сумму $(h_1 + h_3)$.

Поэтому докажем здесь об индексах p_1, p_2, p_3 для случаев объемно-, гране- и базисно-центрированных решеток небольшую теорему, которая совершенно уничтожает этот недостаток формулы (31′).

Теорема 37. Индексы p_1, p_2, p_3 плоской сетки P, ближайшей к началу координат из серии ей параллельных, в решетках базисно-, объемно- и гране-центрированных или равны индексам h_1, h_2, h_3 серии этих сеток или соответственно в 2 раза больше их.

Доказательство. Сначала найдем по индексам h_1, h_2, h_3 отрезки a_Q, b_Q, c_Q, отсекаемые на координатных осях той сеткой Q данной серии, которая была бы ближайшей к началу координат, если бы решетка была гексаэдрической, т. е. с пустым параллелепипедом a_0, b_0, c_0, α, β, γ.

Имеем по теореме (16) уравнение ближайшей к началу координат плоской сетки Q данной серии в случае гексаэдрической установки:

$$h_1m_1 + h_2m_2 + h_3m_3 = 1.$$

Здесь m_1, m_2, m_3 — индексы любой точки этой сетки Q.

Переходим от индексов m_1, m_2, m_3 точки к ее геометрическим координатам x, y, z.

Полагая $m_1\,a_0 = x$, $m_2b_0 = y$, $m_3c_0 = z$, и подставляя в предыдущее уравнение, получим:

$$\frac{h_1}{a_0}x + \frac{h_2}{b_0}y + \frac{h_3}{c_0}z = 1.$$

Отсюда:

$$\frac{x}{a_0/h_1} + \frac{y}{b_0/h_2} + \frac{z}{c_0/h_3} = 1.$$

Это есть обычное геометрическое уравнение плоскости нашей плоской сетки Q с обычными геометрическими координатами x, y, z.

Уравнение это приведено к такому виду, что отрезки, отсекаемые этой плоскостью сетки Q на осях координат, в нем сразу видны. Это будут:

$$a_Q = \frac{a_0}{h_1},\quad b_Q = \frac{b_0}{h_2},\quad c_Q = \frac{c_0}{h_3}.$$

Теперь заметим, что согласно теоремам 30, 33 и 36 или согласно сводной таблице в замечании 1 после теоремы 36, — расстояние от начала координат до плоской сетки P или равно таковому же для Q или вдвое меньше его.

Следовательно и отрезки a_P, b_P, c_P, отсекаемые плоскостью P, или 1) те же, что и для Q, или 2) вдвое меньше их.

В случае 1) имеем:

$$a_P = a_Q = \frac{a_0}{h_1};\quad b_P = b_Q = \frac{b_0}{h_2};\quad c_P = c_Q = \frac{c_0}{h_3}.$$

В случае 2) имеем:

$$a_P = \frac{a_Q}{2} = \frac{a_0}{2h_1};\quad b_P = \frac{b_Q}{2} = \frac{b_0}{2h_2};\quad c_P = \frac{c_Q}{2} = \frac{c_0}{2h_1}.$$

Далее из определения индексов плоской сетки (определение 12) следует:

$$p_1 = \frac{1}{a_P/a_0} = \frac{a_0}{a_P} \quad \text{и соответственно}$$

$$p_2 = \frac{b_0}{b_P}$$

$$p_3 = \frac{c_0}{c_P}.$$

Поэтому для случая 1) получаем:

$$p_1 = h_1, \quad p_2 = h_2, \quad p_3 = h_3;$$

а для случая 2) находим:

$$p_1 = 2h_1; \quad p_2 = 2h_2; \quad p_3 = 2h_3.$$

Теорема доказана.

Следствие. Для случаев базисно-, объемно- или гране-центрированной решетки, индексы p_1, p_2, p_3 в формуле (31′) суть целые числа.

Замечание 1. Упомянем еще раз, что все изложенные здесь выводы приобрели в наше время большое значение, так как без знания их невозможно научиться определять или даже понимать ход определения структуры кристаллов методами рентгенометрии.

Замечание 2. Изложенные нами до сих пор сведения по теории пространственных решеток нередко излагаются с помощью понятия о так называемой обратной [1]) или полярной [2]) решетке и с помощью векториального исчисления. Предыдущее изложение показывает, что без этих понятий можно обойтись, ничуть не теряя в строгости доказательств. Сокращение многих доказательств при указанных в этом замечании методах достигается лишь за счет предварительной затраты времени на знакомство с теорией обратной решетки и с теорией векторов.

Но ввиду того, что та и другая теория несомненно полезны при изучении пространственных решеток, а следовательно и структуры кристаллов вообще, а также ввиду того, что эти методы имеют сейчас широкое применение в кристаллографической литературе, мы рекомендуем интересующимся с ними познакомиться [3]).

---

[1]) Reciproke Gitter немецких авторов.

[2]) Assemblage polaire А. Браве.

[3]) По теории обратной решетки на русском языке см. работы, упомянутые по поводу плотности сеток (Е. С. Федоров, В. И. Соколов и Д. Н. Артемьев, О. М. Аншелес. С последней надо начинать). На иностранных языках см. A. Bravais. Sur les systèmes etc. (ссылку см. выше). — Он же. Etudes cristallographiques (см. выше). — P. P. Ewald. Das reciproke Gitter. Z. f. Kr. 56. 129. (1921). — Он же. Kristalle und Röntgenstrahlen. 1923. 246. — H. Mark. Die Verwendung der Röntgenstrahlen in Chemie und Technik. 1926. 272.

Упомяну здесь же недавно вышедшую книжку, с которой я к сожалению пока не мог познакомиться: R. Pribram. Raumgittertheorie. 1934.

Для знакомства с векториальным исчислением можно рекомендовать курс Н. Е. Кочин. Векториальное исчисление. 1933.

Применение векториального исчисления к теории решеток изложено у P. P. Ewald'a и H. Mark'a в упомянутых выше книгах.

К ЧАСТИ ДЕВЯТОЙ.

§ 95а. Описание универсального столика Е. С. Федорова.

Своей нижней пластинкой ab (фиг. 258, стр. 175) столик Федорова накладывается на кругоформный столик T (фиг. 243-а, стр. 163) обычного поляризационного микроскопа и привинчивается к T двумя винтами, проходящими через отверстия a и b, из коих одно видно на фиг. 258.

На пластинке ab укреплены наглухо стойки B_1 и B_2, поддерживающие горизонтальную ось вращения $I—I_1$ с зажимным винтом r_i, лимбом i, разделенным на градусы, и нониусом v_i, дающим точность до 5′.

Во время большинства операций при работе Федоровским методом пластинка ab, стойки B_1, B_2 и направление оси I остаются неподвижными. Отсюда происходит название оси I (immobile Axe — неподвижная ось).

На этой оси укреплена и может вращаться (наклоняться) совокупность всех остальных частей столика.

Здесь имеется прежде всего кольцо m. Оно состоит, точнее говоря, из двух колец, вставленных друг в друга и соприкасающихся одно с другим по цилиндрической поверхности. Наружное, сквозь которое проходит зажимной винт r_m, наглухо скреплено с осью I. Внутреннее может в наружном вращаться в собственной плоскости вокруг воображаемой оси M (не показанной на чертеже), перпендикулярной к общей плоскости обоих колец. Верхняя поверхность внутреннего кольца имеет закраину, покрывающую верхнюю поверхность наружного кольца и снабженную мелкими ребрышками, видимыми на фиг. 258, за которые берут пальцами для вращения этого кольца. На той же верхней поверхности этой закраины нанесен разделенный на градусы лимб, по которому отсчитываются углы поворота вокруг оси M. Точность отсчета может быть повышена до 5′ с помощью нониуса v_m.

Ось M при большинстве операций во время оптического исследования кристаллов движется вследствие наклонов вокруг оси I. От этого происходит название оси M (mobile Axe — подвижная ось).

К внутреннему кольцу m прикреплена в небольших подшипниках H_1 и H_2 третья ось, обозначаемая буквой H (Hilfsaxe — вспомогательная ось) и имеющая зажимной винт r_h. Как видно из фиг. 258, она лежит в плоскости кольца m. Вокруг этой оси может вращаться (наклоняться) более внутренняя часть аппарата — кольцо n. Для измерения двугранного угла наклона плоскости кольца n по отношению к плоскости кольца m служат дужки h, h, которые поставлены в плоскости линейного угла того двугранного, который образован плоскостями колец m и n. На дужках h нанесены градусные деления. По ним можно измерять углы наклона от 0° до 70°; в измерении больших наклонений надобности не встречается.

Добавим еще, что дужки h складные: на фиг. 258 видны шарниры вращением вокруг которых одна половина каждой дужки приложена к другой. Это делается для того, чтобы они меньше затрудняли доступ к препарату, лежащему на столике. Во время измерения

угла больше 40° соответствующая дужка распрямляется вокруг своего шарнира.

Упомянутое кольцо n, так же как и кольцо m — двойное: наружное наглухо скреплено с осью H, а внутреннее, в которое вставлено стекло, может в нем вращаться вокруг воображаемой оси N (normale Axe), нормальной к плоскости колец n, следовательно к плоскости стекла столика и следовательно всегда (при всех возможных движениях частей столика) нормальной к плоскости исследуемой кристаллической пластинки (шлифа).

На внутреннем кольце имеется черточка c, а на наружном лимб, разделенный на градусы. Нониуса эта ось не имеет.

Итак, столик Федорова имеет следующие оси: I, M, H, N. Если к этому присоединить еще ось вращения A столика T (фиг. 243-а) обычного микроскопа, вокруг которой можно вращать весь аппарат фиг. 258, — то получается всего 5 осей вращения.

Как уже сказано, на упомянутое стекло кладется исследуемый препарат, вырезанный из кристалла или из аггрегата многих кристаллов (из горной породы) в форме тонкой (0,01 — 0,03 *мм*, реже толще) пластинки, которая получается из кусочка исследуемого вещества разрезанием и затем шлифованием до необходимой толщины (поэтому такие пластинки называются шлифами). Ввиду хрупкости эти пластинки наклеивают канадским бальзамом (легкоплавкой смолой, твердой при обычной температуре) на предметное стекло (толщиною в 1 — 2 *мм*) и покрывают покровным стеклом гораздо более тонким (приблизительно в 0,1 *мм*).

Шлиф удерживается в неподвижном положении на стекле столика, во-первых, прилипанием, так как нижняя поверхность препарата смачивается глицерином, а во-вторых, стеклянным шаровым сегментом в металлической оправе s_1, привинчиваемым к кольцу n винтами t_1, t_2. Снизу на стекло столика наклеивается глицерином другой, нижний стеклянный сегмент тоже в металлической оправе s_2.

Назначение этих сегментов заключается в следующем. Главное преимущество столика Федорова в том, что на нем мы можем исследовать свойства луча, идущего не только вдоль нормали к шлифу, но и под углом к этой нормали. Чем больше при этом доступный нам угол отклонения луча от этой нормали, тем лучше. Между тем, при наклоне столика и препарата луч, идущий до шлифа вдоль оптической оси микроскопа, входя в препарат преломляется и приближается к нормали к шлифу. При показателе преломления кристалла $n = 2{,}0$ и при максимальном угле наклона столика с препаратом, например в 70°, нормаль к препарату отклонится от направления падающего снизу луча тоже на 70°; это будет угол i_1 падения луча в воздухе. В кристалле же луч преломится и приблизится к нормали (ср. фиг. 223), образуя с ней угол преломления $i_2 < i_1$, причем $\sin i_2 = \frac{1}{n} \sin i_1$. Если показатель преломления n кристалла будет равен 2,0, а угол $i_1 = 70°$, то по этой формуле вычисляется $i_2 = 28^1/_2°$.

Это обстоятельство весьма суживало бы величины возможных углов наклонения к нормали к препарату тех направлений, по которым мы могли бы фактически пропускать лучи в кристалле, т. е. значительно противодействовало бы главной цели Федоровского метода.

Это противодействие существенно ослабляется и даже может быть уничтожено применением сегментов.

Принцип их действия состоит в следующем. Представим себе, что центр шаровой поверхности верхнего и нижнего сегментов совпадает с точкой пересечения всех осей столика, которая приходится внутри кристалла. Тогда, как бы мы ни наклоняли столик, — идущий снизу луч будет падать на поверхность нижнего сегмента нормально к ней, а потому пройдет в сегмент без преломления. Если теперь показатель стекла сегмента будет 1,6, и угол наклона нормали к шлифу от оси микроскопа, т. е. от направления падающего луча, будет по-прежнему $i_1 = 70°$, то синус угла преломления в кристалле будет $\sin i_2 = \frac{1,6}{2,0} \sin 70°$, откуда $i_2 = 49°$, т. е. уже на $20^1/_2°$ больше прежних $28^1/_2°$. При меньших показателях преломления кристалла это уменьшение угла i при преломлении убывает, и если показатель кристалла равен показателю сегмента, то $i_1 = i_2$, и мы получаем возможность пропускать луч в кристалле под тем же углом к нормали к шлифу, под каким мы только можем наклонять столик от его исходного положения (пока металлические части не станут закрывать поле зрения).

§ 95б. Основные приемы работы теодолитным методом Федорова.

Выяснив полностью устройство столика Федорова, покажем на нескольких примерах, как им пользуются.

Основным приемом при работе с Федоровским столиком является нахождение осей симметрии эллипсоида показателей преломления в испытуемой пластинке кристалла.

Для этого прежде всего вращением всего столика вокруг оси A ставят ось I вдоль направлений колебания анализатора. Обычно это направление перпендикулярно к плоскости симметрии микроскопа. Ось H ставят, вращая кольцо m, перпендикулярно к оси I. Это положение столика, будем называть основным.

Докажем теперь следующую весьма важную для Федоровского метода теорему:

Если при основном положении столика и при скрещенных николях с осью I совмещена одна из осей симметрии эллипсоида показателей испытуемого кристалла, то при наклонах вокруг оси I кристалл будет оставаться все время темным („темнота будет сохраняться").

Доказательство. Заметим, что любая ось симметрии эллипсоида N_g, N_m или N_p является всегда осью симметрии и для любого сечения, проходящего чрез эту ось, потому что раз весь эллипсоид совмещается сам с собою при повороте вокруг оси N_x на 180°, то и плоское его сечение, проходящее чрез эту ось, тоже совместится при этом повороте само с собою. Раз это так, то ось N_g или N_m или N_p является всегда одной из осей эллипса сечения, ибо только оси эллипса суть его двойные оси симметрии.

Теперь заметим, что если одна из осей эллипсоида, пусть N_p, совмещена с осью I, совпадающей с направлением колебаний поляризатора, то при вращении (наклонении) кристалла вокруг этой оси ось N_p остается все время совмещенной с направлением колебаний падающего на препарат луча.

Вспомним теперь, что свойства луча, идущего сквозь кристалл,

можно вывести из характера и положения эллипса, полученного от пересечения эллипсоида показателей этого кристалла плоскостью, нормальной к идущему лучу.

В первом приближении при не очень больших углах наклона и при употреблении описанных выше сегментов мы можем пренебречь отклонением преломленного луча в кристалле от падающего луча, идущего вдоль оптической оси микроскопа. И можем считать, что сечение, нормальное к лучу в кристалле, нормально и к падающему лучу. А так как ось I тоже стоит перпендикулярно к падающему лучу, то эллиптическое сечение, характеризующее свойства луча, идущего в микроскоп, будет проходить все время при всяких наклонах препарата вокруг I чрез ось I и следовательно чрез совмещенную с нею ось эллипсоида, в нашем примере N_g. На основании сказанного выше эта ось будет непременно осью всякого эллипса сечения, чрез нее проходящего, значит и осью всякого эллипса, характеризующего свойства луча, идущего чрез наш кристалл.

Итак, при наклонах вокруг I исследуемый кристалл будет подставлять нормально к лучу различные эллипсы своего эллипсоида, но все они будут иметь одну из своих осей совпадающей с осью I и следовательно с плоскостью колебаний анализатора.

На странице же 165, при объяснении четырехкратного погасания было выяснено, что такое совпадение есть достаточное условие для того, чтобы кристалл оказался темным.

Так как при наклонах вокруг I совпадение оси N_g с осью I не будет нарушаться, то не будет при этой операции нарушаться и темнота. Что и требовалось доказать.

Эта теорема дает нам в руки прием для отыскания положений всех осей N_g, N_m и N_p двуосного или положения оси вращения одноосного кристалла. Делается это следующим образом.

Будем считать для простоты изложения, что микроскоп наш стоит вертикально, что его штатив не отогнут назад на своем шарнире, закрепляющая рукоятка которого видна слева на уровне столика на фиг. 243 (это наклонение всего микроскопа, кроме нижней части штатива, делается для того, чтобы можно было работать с ним сидя).

Итак, микроскоп стоит вертикально. Столик в основном (см. выше) положении. Совместим кольца n и m столика друг с другом и, вращая их вокруг I, поставим их общую плоскость горизонтально, установив по лимбу оси I отсчет в 0°.

Если мы имеем препарат, произвольно вырезанный из двуосного кристалла и помещенный в произвольном положении на столик микроскопа, т. е. на плоскость колец n и m, стоящую горизонтально, то некоторая ось эллипсоида, например N_g, окажется в совершенно произвольном положении по отношению и к оси микроскопа и к оси I.

Чтобы эту ось N_g совместить с осью I, надо сначала повернуть вокруг оси N столика на некоторый угол φ препарат в его собственной плоскости до тех пор, пока ось N_g не придет в плоскость меридиана оси I, перпендикулярную к оси H. Затем надо наклонить препарат вокруг оси H на некоторый угол $(90° - \rho)$ для того, чтобы ось N_g совпала с I. Задача следовательно состоит в том, чтобы каким-то

образом, исходя из некоторого определенного положения столика с препаратом (отсчет по лимбу оси I = 0°, по лимбу оси M = 90°, по лимбу оси H = 0°; по лимбу оси N тоже 0°), — отыскать те углы φ и (90° — ρ), на которые надо повернуть и наклонить столик с препаратом, чтобы совместить с осью I сначала N_g, затем N_m и наконец N_p или по крайней мере две из них, если третья слишком близка к нормали к шлифу и потому не может быть совмещена с I.

Отыскание этих углов, т. е. отыскание положения совмещения какой-либо оси N_x с осью I, делается на основании только что изложенной теоремы путем систематического приближения вращением вокруг N и наклоном вокруг H к такому положению препарата, при котором темнота в нем сохраняется при всевозможных наклонах вокруг I.

Начинаем с того, что при горизонтальном положении столика вращаем препарат в собственной плоскости, пока он не потемнеет. Затем наклоняем его вокруг I в одну какую-либо сторону, скажем так, чтобы верхняя нормаль к нему отклонилась от наблюдателя. При этом в общем случае кристалл осветится. Тогда устраняем это просветление наклоном вокруг H, но лучше не нацело, а приблизительно на половину (принцип половинного исправления ошибок при выверке инструментов). Затем наклоняем вокруг I в другую сторону (верхняя нормаль к шлифу наклоняется теперь к наблюдателю). Исследуемый кристалл опять просветляется. Это просветление мы устраняем поворотом вокруг N (также не вполне). Потом повторяем наклон от наблюдателя и исправление наполовину наклоном вокруг H и т. д. Постепенно просветление становится все меньше и меньше и, наконец, мы добиваемся того, что при наклонах вокруг I просветления больше не наступает. В этом положении одна из осей эллипсоида совпадает с осью I. Беря после этого отсчеты по лимбам осей N и H, мы и находим те углы φ и (90° — ρ), которые характеризуют положение данной оси в полярной системе координат, и по которым мы можем нанести положение этой оси на стереографическую сетку.

Возвращая затем столик снова в горизонтальное положение, мы ставим препарат вращением вокруг N на другую темноту, — на 90° от той темноты, из которой мы исходили при отыскании первой оси. Далее ведем операцию как и при отыскании первой оси. При небольшом навыке мы придем при этом к новой второй оси (не собьемся опять на первую ось). Так же, как первую, мы нанесем ее на стереографическую сетку. Зная, что третья ось нормальна к двум остальным, мы можем найти ее проекцию на сетке, взять там ее координаты, поставить по ним отсчеты на лимбах, удостовериться, что при этом третьем положении темнота тоже будет сохраняться и, если понадобится, исправить ее положение наблюдением, нанеся ее по этим наблюденным данным обратно на сетку.

После этого необходимо уравновесить проекции всех трех осей (или, если третья недоступна, — то двух) на взаимную перпендикулярность.

Так находится положение осей симметрии двуосного эллипсоида показателей.

С помощью столика Федорова можно определить координаты плоскостей спайности или внешнего ограничения кристалла, если они присутствуют, и нанести их на ту же сетку. После того можно определить положение осей эллипсоида по отношению к таким важным граням кристалла, какими являются плоскости спайности и ограничения. Это дает указания на сингонию.

Мы ограничимся здесь этим примером и указаниями, что рядом различных приемов на Федоровском столике можно определять самые разнообразные свойства и оптические константы кристаллов: наименование найденных осей эллипсоида, угол оптических осей, величину трех главных двупреломлений, можно производить отличение изотропных, одноосных и двуосных кристаллов друг от друга (с этого исследование обычно начинается), находить углы погасания, величины показателей преломления, толщину шлифа и т. д.

Подробное изложение можно найти в упомянутой на стр. 175 классической работе В. В. Никитина, которая однако представляет теперь, к сожалению, библиографическую редкость. В меньшем объеме, но с некоторыми нозовведениями последнего времени универсальный метод недавно изложен А. К. Подногиным [1]).

К ЧАСТИ ОДИННАДЦАТОИ.

§ 109а. Описание склерометра Мартенса.

Этот прибор (фиг. 277, стр. 193) укреплен на деревянной доске A, которая перед работой с ним приводится в горизонтальное положение посредством трех установочных винтов B и уровня D.

Винты B опираются в лунки плоских шайб, свободно лежащих на столе.

На стойке C укреплен рычаг склерометра ed, устроенный подобно рычагу весов: ребром вделанной в него стальной призмочки f он опирается в специальном желобке на колонку C. Рычаг способен качаться вокруг этой линии опоры так же, как качается рычаг весов. O — служит для него при этом арретирным устройством, подобным таковому же у химических весов. Винт r создает упор для невидимого на чертеже отростка рычага ed, идущего против f вниз. Этот отросток, упираясь в винт r, препятствует рычагу слишком наклониться влево и тем предохраняет острие на нижнем конце штифта d от повреждения ударом о кристалл s или столик t.

Испытуемый кристалл s помещается на горизонтальном круглом металлическом столике t под царапающим алмазным или стальным острием, находящимся на нижнем конце штифта d, укрепленного в левом конце рычага ed.

Для осуществления необходимого давления острия на кристалл служит груз P, который легко может быть снят с рычага, например при переноске или пересылке прибора.

Для того, чтобы менять давление острия до желаемой величины, служит ролик Q, свободно опирающийся на рычаг ed. Ось вращения этого ролика укреплена на левом конце маленького рычажка с точкой опоры (осью вращения) в h. На правом конце того же рычажка, имеющем вид мелкого винта, сидит небольшая гайка с контргайкой i, служащая противовесом для ролика. Назначение ее будет далее объяснено.

Ось h, связанная с роликом Q, поддерживается небольшими двумя стоечками m, которые внизу сделаны в форме цилиндрических ползунков, способных двигаться влево и вправо по цилиндрическим

[1]) А. К. Подногин. Микроскопическое исследование породообразующих минералов по методу Е. С. Федорова, 1934.

горизонтальным штангам, из которых одна, передняя — kl — видна на рисунке, а другая, задняя — не видна. Передвижение ползунков с роликом по этим штангам совершается с помощью третьей горизонтальной штанги p подобно тому, как передвигается рейтер у химических весов.

На правом конце рычага ed имеется идущий горизонтально по продолжению рычага штифт g, который в левой своей части имеет винтовую нарезку, а в правой кончается острием, отвечающим стрелке весов. Вдоль нарезки ходят маленькие гайка и контргайка, которые на снимке ясно видны в раздвинутом положении (что неправильно: они должны быть плотно соединены, чтобы закреплять друг друга). Острие g при качании рычага ed ходит вверх и вниз против черточки n, указывающей нулевое положение острия.

На правой части рычага ed имеется 100 делений с обозначениями от 0 до 50. Против этих делений ходит черточка, нанесенная на пластинке, соединенной со стойками m, и следовательно фиксирующая положение ролика Q на рычаге ed склерометра.

Остается сказать о левой части прибора — о его столике.

На пластинке t столика кристалл (или вообще испытуемый образец) s укрепляется воском или пластелином. Кремальерой u столик t может подниматься и опускаться (движение по оси Z). Микрометренной кремальерой w, сделанной в виде барабана с делениями на его цилиндрической поверхности, вся выше этого микрометра лежащая часть столика может двигаться от наблюдателя и к нему (движение по оси X) на измеряемые доли *мм*, отсчитываемые на барабане.

Кремальерой v столик движется по оси Y (справа налево и обратно).

С правым концом винта кремальеры v скрепляется посредством винтика z рукоятка x, торчащая к наблюдателю. Двигая рукой вправо или влево эту рукоятку, мы можем двигать вправо и влево столик, так же как и кремальерой v, но быстрее и притом в строго определенном интервале, ограниченном краями паза, в котором ходит рукоятка x, и который вырезан в пластинке, выделяющейся своим белым цветом на фиг. 277. Размер прибора около 0,5 *м* в длину, считая по доске.

§ 109б. Ход работы со склерометром Мартенса.

1. Перед работой склерометр надо правильно установить.

2. Прежде всего посредством винтов B и уровня D доска прибора приводится в горизонтальное положение.

3. Опускаем кремальерой u столик t до отказа, чтобы избежать случайных ударов острия d о столик.

4. Снимаем груз P, если он был навешен.

5. Приподнимая ролик Q, отпускаем арретир O, после чего рычаг должен притти в качательное движение.

6. Если нужно, подвинчиваем упор r, чтобы качание влево вниз не было чрезмерным, но чтобы острие g все же могло подниматься выше индекса n нулевого положения.

7. Если при этом рычаг не устанавливается в положение равновесия, т. е. стрелка (острие) g не устанавливается после затухания качаний против черточки n, то мы подвинчиваем в нужную сторону гайку с контргайкой, сидящие на штифте g, как это делается при выверке химических весов с гаечками на их коромысле.

8. После этого арретируем коромысло ed поворотом головки O против часовой стрелки, опускаем ролик Q на рычаг ed, тащим этот ролик рукояткой p в крайнее правое положение. При этом индекс ролика на пластинке, скрепленной со стойками m, станет против нулевого деления на коромысле ed.

9. Теперь навешиваем груз P и отпускаем снова арретир O. Коромысло начинает колебаться.

10. После затухания колебаний стрелка g снова должна остановиться против черточки n. Если этого не будет, то подвинчиванием в нужную сторону гайки и контргайки i на рычажке ролика Q мы добиваемся равновесного положения, т. е. приводим стрелку к указателю n.

11. Закрепив арретир O и снова отпустив его, убеждаемся, что это не влияет на достигнутое нами положение равновесия. Повторяем это 2—3 раза. Затем арретируем коромысло.

12. После этого переходим к испытуемому образцу.

Образец, твердость которого надо определить, полируется и шлифуется.

13. Он укрепляется воском или пластелином на предметном стекле так, как это делается при рефлектометрических исследованиях (стр. 175—176) непрозрачных минералов под микроскопом в отраженном свете (образец вдавливается своей нижней неровной поверхностью в пластелин особым ручным прессом со строго параллельными плоскостями).

Таким образом верхняя полированная поверхность образца устанавливается строго параллельно нижней поверхности предметного стекла.

14. Так подготовленный образец кладется на опущенную до отказа пластинку t столика, причем наблюдаем, чтобы под острие попало желательное место площадки, и чтобы ориентировка кристалла была подходящей (в имеющемся в Федоровском институте приборе вращение столика вокруг вертикальной оси невозможно, что является серьезным дефектом при исследовании анизотропных веществ; Мартенс предназначал свой прибор для испытания технических материалов, в особенности металлов, т. е. более или менее однородных тонко- и микро-кристаллических аггрегатов).

15. Теперь, двигая штангой p ролик Q влево, ставим его указатель на то деление коромысла, которое равно числу граммов желательной для нас нагрузки на острие d.

16. Затем отпускаем арретир O. Груз P теперь тянет левое плечо d коромысла вниз, потому что ролик, сдвинутый вправо, не уравновешивает груза P.

Но ввиду наличия упора r острие d не доходит до кристалла. Стрелка g на правом конце коромысла уйдет вверх от черточки n.

17. Кремальерой v осторожно подводим кристалл s к острию и, медленно поднимая тот и другое, заставляем стрелку g опускаться, постепенно приводя ее к совмещению с черточкой n. Прибор так рассчитан, что в этот момент острие давит на кристалл с силою, равною тому числу граммов, какое указывает индекс ролика на коромысле склерометра.

18. Теперь двигаем рукояткой x столик с кристаллом от одного края паза до другого. В это время острие проводит первую царапину на кристалле.

19. Медленно опуская кремальерой u столик, мы размыкаем кристалл и острие.

20. Микрометренной кремальерой w двигаем столик с кристаллом от наблюдателя на определенную долю ($^1/_4 — ^1/_2$) *мм*, подводя тем самым под острие новое место кристалла.

21. Далее повторяем те же операции по пунктам 17, 18. Получаем вторую царапину, параллельную первой, при той же нагрузке.

22. Теми же приемами получаем третью царапину, параллельную двум первым.

23. Далее следует заметить, что мыслимы два принципа определения твердости этим прибором: а) мерой твердости может служить ширина царапины на разных веществах при одной и той же нагрузке, или б) мерой твердости служит нагрузка, вызывающая царапину определенной ширины.

Для того, чтобы избежать влияния формы острия на результаты определения даже относительной твердости, рекомендуется применять метод „б".

Разновидностью его является подбор наименьшей нагрузки, вызывающей чуть заметную царапину на кристалле.

24. Для измерения ширины царапин препарат переносится на столик микроскопа, снабженного иллюминатором (фиг. 259, стр. 176) для непрозрачных объектов. Взамен обычного окуляра вставляют окуляр-микрометр, нити которого могут двигаться, причем величина их передвижения отсчитывается с точностью до 0,01 *мм* на барабане. В зависимости от употребляемого объектива меняется точность измерения ширины трещины. При объективах с фокусным расстоянием 10 — 20 *мм* эта точность доходит до 0,0001 — 0,0005 *мм*.

25. Подобрав с данным окуляр-микрометром и данным опак-иллюминатором возможно сильный объектив, при котором царапины совершенно отчетливо видны, мы должны определить при взятой оптической системе цену одного деления барабана окуляр-микрометра путем промера им какого-либо точного миллиметрового эталона. Такие эталоны прилагаются к хорошим микроскопам, нанесенные на стеклянных пластинках.

26. Задаваясь целью измерять твердость нагрузкой на острие, необходимой для проведения черты шириною в 10 μ = 0,010 *мм*, мы проводим на испытуемом образце, действуя по пунктам 1 — 22, три царапины при нагрузке, скажем, в 20 *г*.

27. Измеряя ширину всех трех царапин и беря среднее для них, мы найдем например, что эта ширина равна 0,020 *мм*.

28. Тогда уменьшаем нагрузку, скажем, до 10 *г*, передвигая ролик Q вправо. И снова проводим 3 царапины.

29. Снова измеряем их ширину. Если она окажется больше 0,010 *мм*, уменьшаем нагрузку, если меньше, — увеличиваем. Действуем так до тех пор, пока не подберем с желаемой точностью нагрузку, дающую царапину условленной ширины в 0,010 *мм* — 10 μ.

30. Практичнее сразу проводить несколько троек царапин при разных нагрузках и находить нужную нагрузку интерполированием после измерения ширины царапин.

§ 109в. Некоторые результаты работ со склерометром Мартенса.

Работы определения твердости кристаллов этим склерометром со стальным острием были произведены в довольно большом масштабе Рейсом и Циммерманом (см. выноску на стр. 193).

Определение твердости эталонных минералов скалы Моса было сделано в Федоровском институте Г. Б. Бокием [1]).

Им получены следующие результаты:

Минерал	Нагрузка в *г*, вызывающая царапину шириной 0,010 *мм*
1. Тальк	0,25
2. Гипс	0,50
2а. Каменная соль	0,75 хорошо
3. Кальцит	1,5 „
4. Флюорит	8 плохо
5. Апатит	8 „
6. Ортоклаз	20 „
7. Кварц	32,5 хорошо
8. Топаз	(39)
9. Корунд	(48)

Пометки „хорошо“, „плохо“ указывают качество промера ширины царапины.

На последние цифры, повидимому, нельзя особенно полагаться.

Следует заметить, что мои определения твердости стекла тем же прибором и методом дали цифру 33 *г*, т. е. больше цифр ортоклаза и даже кварца, полученных Г. Б. Бокием. Причиной этих расхождений, повидимому, являлся износ алмаза.

На последнее следует особенно обращать внимание при работе с этим прибором. Ни в коем случае не следует царапать этим склерометром сильно разнородные в смысле твердости препараты [например: хромит (тв. 6,5) в змеевике (тв. 2,5)], так как это влечет за собою скалывание алмаза. Повидимому, работа с весьма твердыми объектами, начиная с кварца, сильно изнашивает алмаз, и после нее склерометр начинает давать показания, отличающиеся от тех, какие он давал до этого.

Вообще можно сказать, что для твердых веществ с твердостью выше кварца пока нет достаточно практичного прибора для точного определения их твердости царапания.

§ 109г. Новая литература по определению твердости.

В 1932 г. вышла весьма ценная книга В. Д. Кузнецова [2]), в которой содержится много полезных и интересных сведений по некоторым отделам кристаллофизики, взятых как из новейшей литературы, так и из собственных работ автора и его школы.

---

[1]) Г. Б. Бокий. Определение твердости минералов скалы Моса склерометром Мартенса с алмазным острием. Зап. Мин. Общ. 1932. Ч. LXI, стр. 282 — 287.

[2]) В. Д. Кузнецов. Физика твердого тела. Томск. 1932, стр. 1 — 504.

Среди других материалов здесь имеется специальная глава V (стр. 182—230) „Твердость кристаллов".

Кроме описания ранее известных методов определения твердости автор рассматривает здесь некоторые теоретические вопросы, связанные с твердостью (например, вопрос о связи твердости со структурой, о связи твердости со свойствами поверхностного слоя в кристалле и др.). Затем автор дает здесь описание нового метода определения твердости, называемого им методом затухающих колебаний.

Принцип этого метода состоит в следующем. Маятник, опирающийся острием на кристалл, отводится на определенный угол и так приводится в качание. Стальное острие начинает под влиянием своих качаний и тяжести маятника врезаться в кристалл. При этом трение начинает тормозить маятник. Чем мягче кристалл, тем быстрее затухнут колебания. Скорость затухания колебаний, которую легко учесть секундомером, служит в этом методе мерою твердости.

Автор описывает ряд сконструированных им на этом принципе приборов и ряд произведенных ими измерений твердости кристаллов [не выше твердости Fe (= по Мосу 4,5), так как острие — стальное].

Здесь, очевидно, мы имеем дело с новым видом твердости.

В книге интересующиеся найдут перечень работ по определению и теоретическим исследованиям твердости вообще и твердости кристаллов в частности.

К ЧАСТИ ПЯТНАДЦАТОЙ.

§ 142а. Атомные и ионные радиусы в кристаллах.

1. Кривая относительных объемов атома Лотара Мейера.

На фиг. 265 (стр. 183), 272 (стр. 189), 334—338 (стр. 298—299), 301 (стр. 340) изображены структуры некоторых кристаллов. Точками на этих фигурах обозначены условно центры тяжести атомов или ионов, слагающих кристалл.

Рентгенометрическими исследованиями мы можем в настоящее время находить расстояния между этими центрами тяжести с большой точностью — до 0,01 Å, а в случаях особо тщательных измерений — даже до 0,001 Å.

Не касаясь пока строения атомов, условимся считать, что в кристаллической решетке отдельные атомы не перекрывают друг друга, что каждому из них свойствен свой обособленный объем.

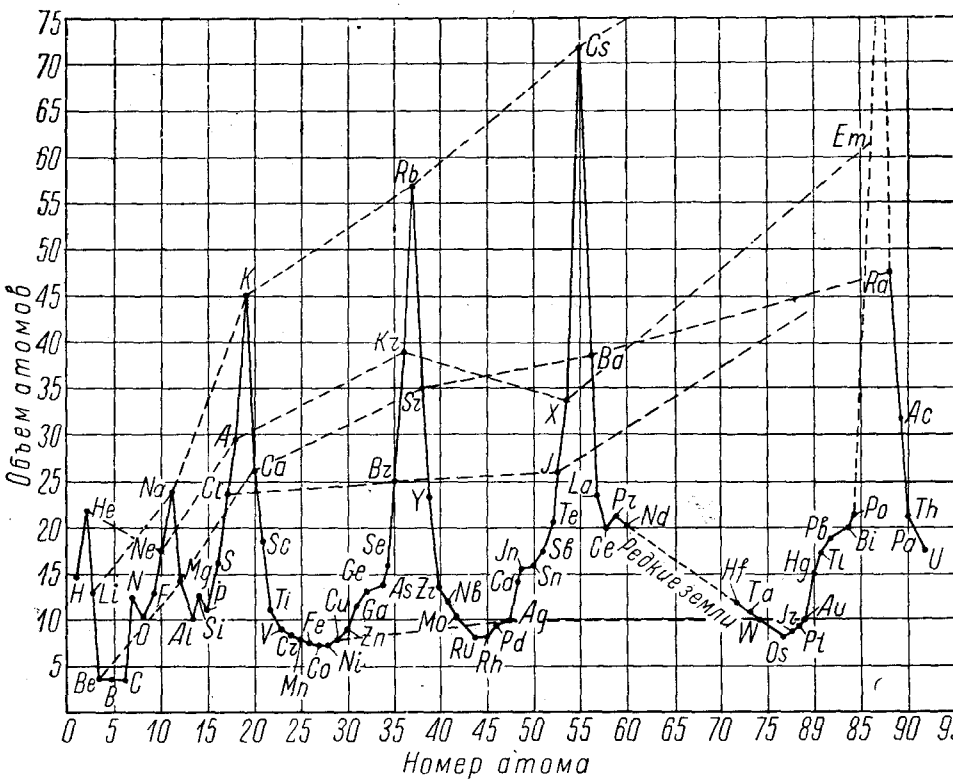
Совершенно естественно тогда поставить вопрос о том, не является ли этот объем постоянным для атома данного химического элемента в кристаллических решетках всех тех веществ, в состав которых этот элемент входит.

Вопрос этот возник еще задолго до создания рентгенометрического метода исследования структуры кристаллов. Еще в 1870 г., в годы создания периодической системы элементов, немецкий химик Лотар Мейер занялся вычислениями относительных объемов атомов всех известных тогда элементов. Относительным объемом атома данного элемента называется его атомный вес (т. е. вес атома элемента, при принятии веса атома кислорода условно за 16), деленный на удельный вес этого элемента.

Для совершенно отчетливого понимания этого вычислим для примера относительный объем атомов алюминия и свинца.

	Атомный вес A	Удельный вес δ	Относительный атомный объем $v = \frac{A}{\delta}$
Al	26,97	2,7	9,99
Pb	207,2	11,34	18,3

Так вычисленные относительные атомные объемы химических элементов были сопоставлены Лотаром Мейером в виде кривой,



Фиг. 399.
Кривая относительных атомных объемов по Лотару Мейеру.

которая с небольшими изменениями и дополнениями воспроизведена на фиг. 399. Изменение состоит в том, что по оси абсцисс здесь отложены не атомные веса, как это было у Л. Мейера, но атомные номера элементов.

Из этой кривой видна ясно периодичность изменения объемов атомов элементов с повышением их нумеров.

Из нее также видно, что максимальными атомными объемами обладают щелочные металлы: Na, K, Rb, Cs. За ними следуют благородные газы—He, Ne, A, Kr, X, Em, с одной стороны, и щелочноземельные металлы — Mg, Ca, Sr, Ba, Ra — с другой.

Минимальными объемами обладают атомы тяжелых металлов как 1-й колонны таблицы Менделеева — Cu, Ag, Au, так и VIII-й (Fe, Co, Ni), (Ru, Rh, Pd), (Os, Ir, Pt).

Кривая Л. Мейера служит одной из ярких иллюстраций периодичности свойств химических элементов.

В последнее время ею воспользовались геохимики для изучения некоторых законностей в распространении химических элементов в земной коре [1]).

После описанного выше вычисления объема атома каждого элемента можно было поставить вопрос: сохраняется ли у атома данного элемента так вычисленный объем во всех его соединениях или же он подвержен в них каким-либо изменениям?

Нетрудно сразу же дать отрицательный ответ на этот вопрос. Мы уже знаем о том, что один и тот же элемент может кристаллизоваться в нескольких полиморфических модификациях (стр. 289, 290, 300—303). В этих различных модификациях атомный вес A элемента остается постоянным, удельный же вес вещества δ — меняется. Следовательно, меняется и атомный объем v, если, как это мы выше делали, его вычислять по формуле $v = \frac{A}{\delta}$. Такое вычисление предполагает, что под атомным объемом мы разумеем ту часть объема, занятого данным веществом, которая приходится на долю одного атома интересующего нас элемента. Разумеется этот атомный объем (будем его называть формальным объемом атома) может существенно отличаться от истинного объема, занятого веществом атома.

Они совпадали бы лишь в том случае, если бы атомы занимали без пустых промежутков и без взаимных перекрытий весь объем, занятый тем веществом, в состав которого эти атомы входят.

Таким образом уже задолго до рентгенометрических исследований было известно, что: 1) атомные объемы химических элементов подвержены периодической законности, периодической зависимости от атомного веса и 2) что атомные объемы элементов не вполне постоянны и зависят от структуры кристалла, который слагается соответственными атомами.

2. Первые работы о радиусах атомных сфер. (В. Л. Брагг, Ф. В. Г. Вайкофф).

После того как значительное число кристаллических структур было изучено рентгеновыми лучами, В. Л. Брагг впервые [2]) указал на то, что в кристаллических структурах в первом приближении атомные радиусы можно считать постоянными. При этом он условно представлял атомы в кристаллических структурах в виде шаров, не

---

[1]) V. M. Goldschmidt. Geochemische Verteilungsgesetze der Elemente. II. Beziehungen zwischen den geochemischen Verteilungsgesetzen und dem Bau der Atome. 1924, Taf. I.

G. Berg. Vorkommen und Geochemie der mineralischen Rohstoffe, 1929.

Русск. перевод Е. В Казариновой и Н. Н. Граве под редакцией Е. М. Яншевского: Геохимия месторождений полезных ископаемых. 1933, стр. 40. Отсюда взята с небольшими исправлениями и изменениями наша фиг. 399.

А. Е. Ферсман. Геохимия. 1933, стр. 56.

[2]) W. L. Bragg. Atomic Arrangement in Crystals. Phil. Mag. 40. 169.

проникающих друг в друга, но касающихся один другого. При таком представлении можно, зная например структуру меди (фиг. 334, стр. 298) и зная длину ребра элементарного куба этой структуры $a = 3{,}62$ Å (стр. 298 и 183), вычислить расстояние между центрами тяжести ближайших атомов $x = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{3 \cdot 62}{\sqrt{2}} = 2{,}56$ А. Отсюда получается абсолютный радиус атомной сферы

$$r_{Cu} = \frac{x}{2} = 2{,}56 = 1{,}28 \text{ Å}.$$

Сделаем так же точно еще вычисление r_{Na}, который нам понадобится далее.

Из таблицы, приведенной на стр. 290, мы видим, что металлический Na кристаллизуется в полигирной (кубической) сингонии с октаэдрической структурой (для наглядности можно воспользоваться фиг. 340 левой, стр. 301). Ребро куба при этом для Na равно $a_{Na} = 4{,}30$ А [1]). Отсюда имеем $r_{Na} = \frac{a_{Na}\sqrt{3}}{4} = 1{,}86$ А.

Вычисляя таким же образом радиусы атомных сфер для других элементов из таких структур, где атомные сферы одного и того же элемента можно было предполагать касающимися друг друга, В. Л. Брагг получил значения радиусов атомных сфер для ряда элементов, но не для всех, ибо структуры не всех элементов были известны, а в химических соединениях атомы одного и того же элемента сравнительно редко касаются друг друга (S в пирите FeS_2, O в кальците CO_3Ca и др.). Но, зная радиусы атомных сфер одних элементов, можно определить эти радиусы для других из структур их соединений, если предполагать постоянство радиуса данного элемента во всех его соединениях (что, впрочем, как увидим дальше, справедливо лишь отчасти).

Для примера найдем радиус r_{Cl} атомной сферы для Cl из структуры CuCl и из только что нами вычисленного $r_{Cu} = 1{,}28$ Å.

По исследованиям Т. Барта и Г. Лунде [2]) хлористая медь (как минерал она называется нантокит) кристаллизуется в полигирной сингонии со структурой, аналогичной таковой же цинкобманки (фиг. 335, стр. 298). Ребро большого куба при этом $a_{CuCl} = 5{,}41$. Отсюда вычисляем расстояние x между центрами тяжести атомов Cu и Cl.

$$x = \frac{a_{CuCl}\sqrt{3}}{4} = 2{,}34 \text{ Å}.$$

Вычитая отсюда $r_{Cu} = 1{,}28$ Å, получим $r_{Cl} = 2{,}34 - 1{,}28 = 1{,}06$ А. Пользуясь этим приемом, оказалось возможным вычислить радиусы атомных сфер почти всех элементов.

Эти радиусы были сопоставлены В. Л. Браггом в виде гра-

---

1) P. P. Ewald u. C. Hermann. Strukturbericht, 1931. 16. Или Н. Я. Селяков и М. И. Корсунский. Кристаллы. Кристаллические структуры, стр. 56. — Таблицы физич. констант, в обработке Я. Г. Дорфмана под редакцией А. Ф. Иоффе. 1928.

2) T. Bart, G. Lunde, цит. по P. P. Ewald u. C. Hermann. Structurarbericht, 1931, S. 110.

фика [1]), где по оси абсцисс отложены атомные номера, как и в графике Л. Мейера (фиг. 399), а по оси ординат — радиусы атомных сфер или, по терминологии Браггов, — „радиусы соединений". При этом получилась кривая, аналогичная кривой Лотара Мейера, с периодическими максимумами и минимумами.

Но уже в этих своих работах Бragги указали, что получаемые значения радиусов зависят от того, из каких соединений они вычисляются. Убедимся в этом на примере.

Нами выше был вычислен радиус атомной сферы натрия $r_{Na} = 1{,}86$ Å. С другой стороны, нам хорошо известна структура NaCl (фиг. 265, стр. 183). Ребро куба этой структуры $a_{NaCl} = 2{,}81$ Å [2]). Если атомы Na и Cl представить себе здесь в виде касающихся шаров, то $a_{NaCl} = r_{Na} + r_{Cl} = 2{,}81$ Å. Вычитая отсюда известный уже нам $r_{Na} = 1{,}86$ Å, получим $r_{Cl} = 0{,}95$ Å.

Видим, что это число резко отличается от полученного из Cu и CuCl $r_{Cl} = 1{,}06$, именно на 0,11 Å, тогда как точность измерений, как было выше указано, не ниже 0,01 Å.

Поэтому уже в графике Браггов почти для всех элементов даны две точки: одна отвечает атомному „радиусу самого элемента", а другая атомному „радиусу соединения", т. е. тому радиусу, который имеет атомная сфера этого элемента в его соединениях.

При этом авторы отмечают, что некоторые элементы в разных соединениях несомненно имеют разные радиусы.

Позднее в 1923 г. американский рентгенокристаллограф Р. М. Г. Вайкофф [3]) произвел систематические подсчеты радиусов атомных сфер, идя от соединения к соединению, и установил, что примерно лишь в половине случаев известных структур, использованных им для подсчета, наблюдается большее или меньшее постоянство атомных радиусов. В другой половине случаев отклонения далеко выходили за пределы ошибки измерений.

3. Новые работы об атомных и ионных радиусах. (В. М. Гольдшмидт, Л. Паулинг).

С 1923 года начала появляться серия работ норвежского рентгенокристаллографа и геохимика В. М. Гольдшмидта и его сотрудников и учеников, носящая общее объединяющее заглавие (не вполне впрочем отвечающее содержанию всех работ): „Геохимические законы распространения элементов".[4]) В ней и в ряде связанных с нею работ, напечатанных в разных изданиях, автор главным образом занимается вопросами кристаллохимии, базируясь в их изучении на рентгенометрическом исследовании структуры кристаллов.

---

[1]) У. Г. и У. Л. Брэгг. Рентгеновские лучи и строение кристаллов. Перевод Ю. В. Вульфа и Э. В. Шпольского. 1929. 152. Тот же график воспроизведен мною в статье:

А. К. Болдырев. Строение кристаллического вещества. Приложение к десятому изданию „Основ химии" Д. И. Менделеева, 1931, стр. 463.

[2]) У. Г. и У. Л. Брэгг, l. c., стр. 85.

[3]) R. M. G. Wykoff. The Structure of Crystals, 1924.

[4]) V. M. Goldschmidt u. Mitarbeiter. Geochemische Verteilungsgesetze der Elemente. В этой серии вышли I-VIII выпусков 1923—1927.

Атомные (без знака) и ионные (со знаком + или —) радкусы, найденные ционным

По V. M. Gold

I	II	III	IV	V
H^- 1,54				
Li 1,56	Be 1,05		C 0,77	Na 0,71
Li^+ 0,78	Be^{2+} 0,34			
			Si^{4-} 1,98	
Na 1,86	Mg 1,62	Al 1,43	Si 1,13	
Na^+ 0,98	Mg^{2+} 0,78	Al^{3+} 0,57	Si^{4+} 0,39	
K 2,23	Ca 2,21	Sc 1,51	Ti 1,49	V 1,32
			Ti^{3+} 0,69	V^{3+} 0,65
K^+ 1,33	Ca^{2+} 1,06	Sc^{3+} 0,83	Ti^{4+} 0,64	V^{4+} 0,61
Cu 1,27	Zn 1,33	Ga 1,33	Ge 1,22	As 1,16
	Zn^{2+} 0,83	Ga^{3+} 0,62	Ge^{4+} 0,44	As^{3+} 0,69
			Zr 1,62	Nb 1,43
$R b^+$ 1,49	Sr^{2+} 1,27	Y^{3+} 1,06	Zr^{4+} 0,87	Nb^{4+} 0,69
				Nb^{5+} 0,69
			Sn^{4-} 2,15	
Ag 1,44	Cd 1,49	In 1,45	Sn 1,40	Sb 1,34
Ag^+ 1,13	Cd^{2+} 1,03	In^{3+} 0,92	Sn^{4+} 0,74	Sb^{3+} 0,90
		TR	Hf 1,66	Ta 1,42
Cs^+ 1,65	Ba^{2+} 1,43			
			Pb^{4-} 2,15	
Au 1,44	Hg 1,49	Tl 1,99	Pb 1,74	Bi 1,46
		Tl^+ 1,49	Pb^{2+} 1,32	
	Hg^{2+} 1,12	Ti^{3+} 1,05	Pb^{4+} 0,84	
			Th 1,82	
			Th^{4+} 1,10	

		Ce 1,83		
La^{3+} 1,22		Ce^{3+} 1,18	Pr^{3+} 1,16	Nd^{3+} 1,15
		Ce^{4+} 1,02	Pr^{4+} 1,00	
Gd^{3+} 1,11		Tb^{3+} 1,09	Dy^{3+} 1,07	Ho^{3+} 1,05
		Tb^{4+} 0,89		

[1]) Эта таблица приводится с небольшими изменениями в том виде, как ее дает

эмпирически (последние — в решетках типа NaCl, т. е. с координа-числом 6)

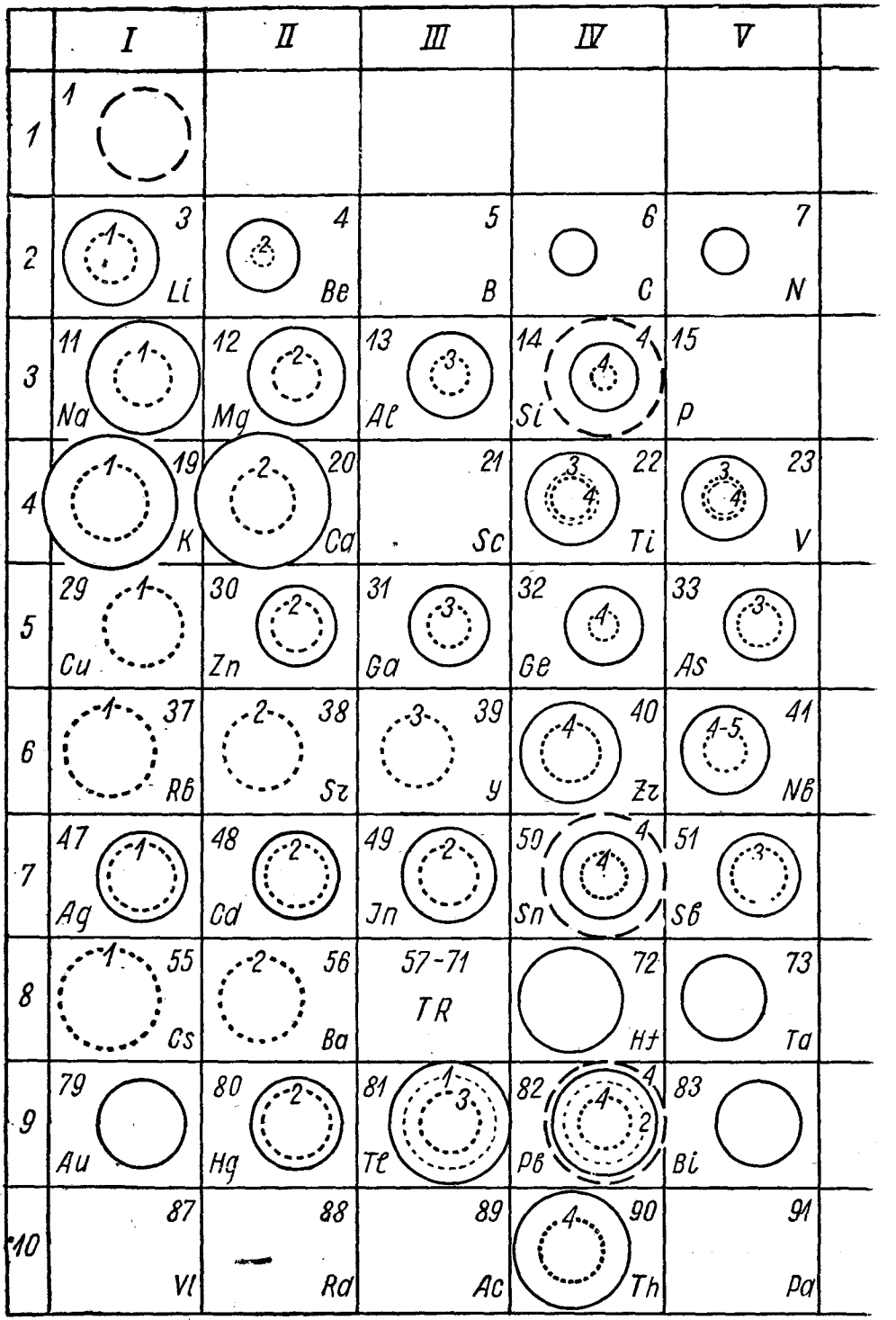
schmidt'y (1926)[1])

VI	VII	VIII		
O 0,60				
O^{2-} 1,32	F^- 1,33			
S^{2-} 1,74	Cl^- 1,81			
S 1,04	Cl 1,07			
S^{6+} 0,34				
Cr 1,25	Mn 1,29	Fe 1,26	Co 1,26	Ni 1,24
	Mn^{2+} 0,91	Fe^{2+} 0,83	Co^{2+} 0,82	Ni^{2+} 0,78
Cr^{3+} 0,65	Mn^{3+} 0,70	Fe^{3+} 0,67		
Cr^{6+} 0,3—0,4	Mn^{4+} 0,52			
Se^{2-} 1,91	Br^- 1,96			
Se 1,13	Br 1,19			
Se^{6+} 0,3—0,4				
Mo 1,36		Ru 1,30	Rh 1,34	Pd 1,37
Mo^{4+} 0,68		Ru^{4+} 0,65	Rh^{3+} 0,68	
Te^{2-} 2,11	J^- 2,20			
Te 1,33	J 1,36			
Te^{4+} 0,89	J^{5+} 0,94			
W 1,37		Os 1,31	Ir 1,35	Pt 1,38
W^{4+} 0,68		Os^{4+} 0,67	Ir^{4+} 0,66	
U^{4+} 1,05				

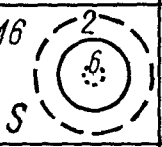
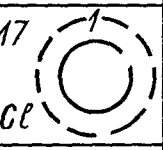
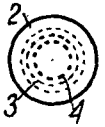
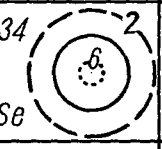
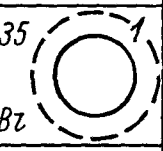
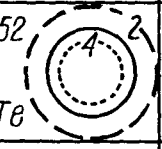
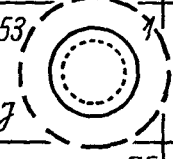
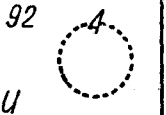
Jl^{3+2} Sm^{3+} 1,13 Eu^{3+} 1,13

Er^{3+} 1,04 Tu^{3+} 1,04 Jb^{3+} 1,00 Cp^{3+} 0,99

[1]) O. Hassel (Kristallchemie. 1924. S. 12).



Фиг. 400. Атомные и ионные радиусы, найденные

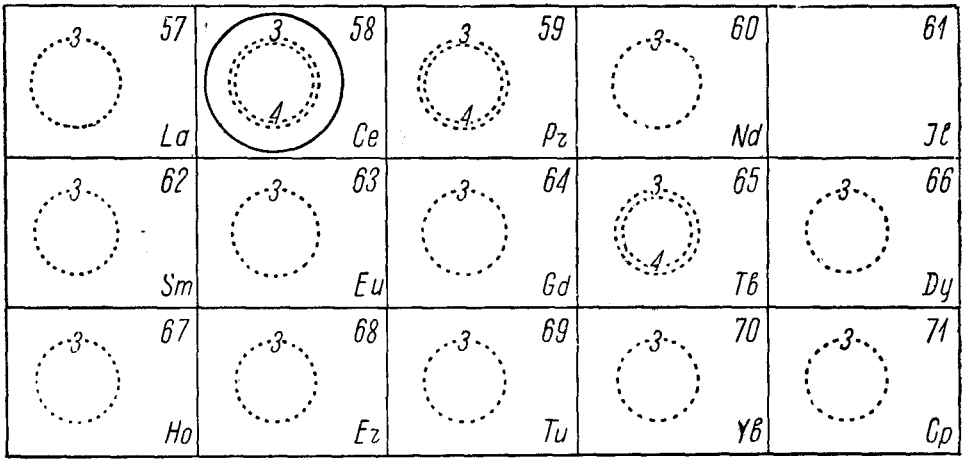
	VI	VII	VIII		
					
					
					
		43 Ma			
					
		75 Re			
	84 Po	85 Ab			
					

эмпирически (по цифрам В. М. Гольдшмидта).

В наших дополнениях мы не имеем возможности отвлечься для изложения всех главнейших кристаллохимических идей автора. Интересующиеся могут найти на русском языке частью переводы, частью изложение многих из этих работ в ряде книг [1]).

Мы же ограничимся лишь одним вопросом. Мы даем здесь прежде всего таблицу атомных и ионных радиусов по В. М. Гольдшмидту, кратко резюмирующую его выводы в этой области, а затем, опираясь на работы того же автора [2]) и ряда других [3]), вкратце сформулируем главнейшие имеющиеся у нас в настоящее время сведения из учения об атомных и ионных радиусах.

Уже частью в этих формулировках, частью же на основании их далее будут даны пояснения и по поводу таблицы В. М. Гольдшмидта. Таким образом сейчас ее следует подвергнуть лишь предва-



Фиг. 400а.

Добавление к фиг. 400. Масштаб фиг. 400а несколько крупнее (25:22), чем фиг. 400.

рительному просмотру, имея в виду, что в дальнейшем она еще будет нами обсуждаться.

Для большей наглядности я счел полезным изобразить атомные и ионные радиусы предыдущей таблицы в масштабе на Менделеевской таблице (фиг. 400 и 400а).

Здесь сплошными кругами показаны кажущиеся сферы нейтральных атомов, точечными кругами — сферы катионов и черточными — сферы анионов.

Теперь перейдем к краткой формулировке главнейших выводов учения об атомных и ионных радиусах.

---

[1]) И. И. Танатар. Геохимия как основа учения о полезных ископаемых, 1932.
Г. Берг (см. выше).
А. Е. Ферсман (см. выше).
Работы по геохимии В. М. Гольдшмидта 1911 — 1930 гг. — сборник „Основные идеи геохимии" под ред. А. Е. Ферсмана. 1933.

[2]) Кроме упомянутых, см. как одну из позднейших его сводок: V. M. Goldschmidt. Kristallchemie. Fortschr. der Miner. XV. 2. 1931, Ss. 79 — 146.

[3]) Сводку новейшей литературы сделал недавно O. Hassel. Kristallchemie. 1934. 1 — 114.

1. Если представлять себе условно атомы как непроницаемые шары, касающиеся друг друга в кристаллических структурах, то радиус такой сферы для одного и того же элемента значительно меняется в разных веществах.

2. Такие радиусы можно вычислять из рентгенометрически изученных структур как два слагаемые расстояния между центрами тяжести пары соседних атомов.

3. Так находимые радиусы можно называть кажущимися или эффективными радиусами атомов и ионов.

4. Размеры кажущихся радиусов атомов одних и тех же элементов зависят от ряда причин.

5. Эти причины следующие:

а) атомный номер химического элемента,

б) наличие или отсутствие ионизации атома,

в) координационное число данного атома в структуре, т. е. число ближайших атомов другого элемента, окружающих данный атом,

г) характер окружающих атомов, главным образом их поляризующая способность, т. е. способность их уменьшать (реже увеличивать — деполяризовать) размеры кажущегося радиуса данного атома.

Мы перейдем далее к рассмотрению этих причин, но раньше сделаем ряд замечаний общего характера.

6. Кажущиеся радиусы атомов, выводящиеся как два слагаемые расстояния между центрами тяжести атомов, определяемого опытным путем в структурах кристаллов, неизбежно должны целиком определяться физической природой атомов.

7. По общепринятой в настоящее время теории Бора атом состоит из положительно заряженного ядра со сложным строением и отрицательно заряженных частиц — электронов (внешних), движущихся вокруг ядра по орбитам различных размеров.

8. Неионизированный атом электрически нейтрален: заряд ядра, измеряемый в электронных единицах, равен в точности числу внешних электронов.

9. Ионизация состоит в отнятии или в добавке одного или нескольких электронов к атому.

10. Число отнятых или добавленных электронов определяет собою химическую валентность данного атома.

11. Напомнив себе эти сведения из физики атома, мы можем приступить к краткому рассмотрению перечисленных выше причин, влияющих на кажущиеся размеры атомов в кристаллах.

12. Атомный номер. Как уже упоминалось при изложении относящихся сюда работ В. Л. Брагга, последовательное увеличение атомного номера влечет за собою периодические колебания кажущегося радиуса атома в кристаллических структурах. Глядя на таблицу В. М. Гольдшмидта или на построенную на основании его цифр мною фиг. 400 и следя за кругами одного рода, например сплошными, т. е. за кажущимися объемами нейтральных атомов, — видим это периодическое уменьшение по длинным периодам таблицы Менделеева. Максимумы радиусов сфер приходятся, как и в таблице Л. Мейера (фиг. 399), на колонну щелочных металлов Na, K, Rb, Cs, а минимумы в верхней строке на O (и вероятно F), во второй — на Al, а в следующих строчках на металлы VIII колонны: триады (Fe, Co, Ni), (Ru, Rh, Pd), (Os, Ir, Pt).

13. Влияние ионизации в общем сказывается таким образом, что

отнятие электронов (превращение атома в к а т и о н) уменьшает кажущийся объем (и радиус) атома. А добавление электрона увеличивает радиус атома. Это наглядно видно на фиг. 400, где все точечные круги (катионы) помещаются внутри сплошных (нейтральных атомов), а все черточные круги (а н и о н ы) расположены вне сплошных. Кроме того на той же фиг. 400 для многих элементов мы видим по несколько кругов одинакового пунктира. Они обозначают и о н ы одного и того же знака, но разной валентности, обозначенной на соответственном круге цифрою. Например у № 26 Fe мы имеем два круга с цифрами 2 и 3, отвечающие катионам двух- и трехвалентного железа $Fe^{\cdot\cdot}$ и $Fe^{\cdot\cdot\cdot}$, также у №№ 22 и 23 имеем по два точечных круга, отвечающих анионам трех- и четырехвалентных Ti и V. И т. д.

Во всех этих случаях мы видим, что чем больше валентность катиона, т. е. чем больше у атома отнято электронов, тем меньше его кажущийся радиус.

Для анионов действительно подобное же правило: чем больше валентность аниона, т. е. чем больше к атому добавлено электронов, тем больше его кажущийся радиус. Однако в случае анионов это не так резко выражено, потому что связанное с увеличением валентности увеличение заряда как катиона, так и аниона, кроме геометрического уменьшения объема у первого и увеличения у второго, влечет за собою увеличение электростатического притяжения этих ионов к соседним, противоположно заряженным. А это притяжение сокращает расстояние между центрами тяжестей ионов, а следовательно, уменьшает и кажущиеся их радиусы. Это действие усиливает геометрическое уменьшение объема катиона, но ослабляет геометрическое увеличение аниона, которое поэтому и сказывается слабее.

14. К о о р д и н а ц и о н н ы м ч и с л о м по предложению А. В е р н е р а[1]) называется число атомов, или атомных групп, окружающих центральный атом в комплексах комплексных соединений. Например, в соединении $\{Fe[CN]_6\}''''K_4$ координационное число для Fe будет 6, а в хлораурате калия $[Au\,Cl_4]'K$ координационное число для Au будет 4.

При изучении структуры кристаллов рентгенометрией это понятие было распространено и на эту область, но приобрело здесь несколько иной смысл.

Под к о о р д и н а ц и о н н ы м ч и с л о м в современном учении о структуре кристаллов понимают количество смежных с данным (ближайших к нему) одинаковых атомов. Например в структуре ZnS (фиг. 335 стр. 298) атомы как Zn, так и S будут четырехкоординированными или имеют координационное число 4. В структуре $\{Ni[NH_3]_6\}Cl_3$ (фиг. 337 стр. 299) атомы Ni имеют координационное число по отношению к $[NH_3]$ 6; атомы Cl по отношению к комплексу $\{Ni[NH_3]_6\}$ имеют координационное число 4, потому что (см. фиг. 337) Cl сидит в центре тетраэдра, в вершинах которого сидят указанные комплексы.

И вот оказалось, что в одинаково построенных структурах, где атом или ион данного элемента подчинен одному и тому же координационному числу, он имеет п р и б л и з и т е л ь н о один и тот же кажущийся радиус. В структурах же разного типа кажущиеся радиусы одного и того же элемента — различаются и иногда весьма резко.

С этой точки зрения кристаллические структуры можно разде-

---

[1]) A. W e r n e r. Neuere Anschauungen auf dem Geblete der anorganischen Chemie. 1909.

лить на несколько типов. Прежде всего на гомеополярные, в которых присутствуют нейтральные атомы, и гетерополярные, или ионные, с разно заряженными атомами. Первые дают атомные решетки (стр. 298), а вторые — ионные (там же). Молекулярные решетки являются с этой точки зрения смешанными.

Гомеополярными являются прежде всего решетки элементов. Затем к ним приближаются по размерам атомов по Гольдшмидту решетки типа ZnS (фиг. 335), почему Гольдшмидт не считает решетку ZnS типичной ионной.

К этой же группе можно по Гольдшмидту причислить и некоторые другие типы решеток: вуртцита (гексагональной модификации ZnS), куприта (Cu_2O) и др.

Типичными гетерополярными Гольдшмидт считает решетки типа NaCl (фиг. 265, стр. 183). В структурах этого типа кристаллизуется большое число соединений NaF, NaCl, NaBr, NaJ, такие же галлоидные соли Li, K, Rb, NH_4 (кроме NH_4F), Ag (кроме AgJ), CsF. Затем ряд окислов: MgO, CaO и подобные же окислы Sr, Ba, Cd, Mn, Fe, Ni. Ряд сульфидов типа MgS следующих металлов: Ca, Sr, Ba, Pb, Mn. Далее ряд селенидов, теллуридов, нитридов (типа TiN), карбидов (типа TiC), наконец LiH[1]).

Атом одного и того же элемента, входящий в разные из этих соединений, оказывается обладающим почти одним и тем же кажущимся радиусом.

Сравнимые с ними величины радиусов дают и некоторые другие типы структуры. Таковы: 1) тип CsCl (Cs — в центре куба, Cl — по вершинам), 2) тип флюорита (Ca — в центрогранной кубической решетке, F — в центрах всех восьми малых кубов).

Все они дают сравнимые друг с другом кажущиеся радиусы ионов, но не сравнимые с радиусами, полученными из структур группы ZnS.

Таким образом нельзя говорить об ионных радиусах как постоянных величинах для данного элемента вообще. Они постоянны лишь в пределах одного типа структуры и более или менее постоянны в структурах других типов, но относящихся к той же группе.

Здесь вспомним в качестве примера произведенное нами выше вычисление ионного радиуса Cl из NaCl и из CuCl и то, что последнее вещество имеет структуру ZnS, не сравнимую по Гольдшмидту с NaCl. При этих вычислениях мы получили сильно отклоняющиеся друг от друга значения r_{Cl}: 1,06 Å и 0,95 Å.

Теперь понятно, почему ионные радиусы даны в приведенной выше таблице В. М. Гольдшмидта применительно к структуре NaCl, с координационным числом 6 [из фиг. 265 легко понять, что каждый ион Na (или Cl) окружен шестью равно от него удаленными ионами Cl (соответственно Na)].

При переходе к структурам с другим координационным числом необходимо вводить поправки в ионные радиусы, содержащиеся в таблице В. М. Гольдшмидта.

В. Х. Захариасен[2]) дал таблицу поправочных коэффициентов, на которые надо умножать междуионные расстояния в структурах со стандартным координационным числом 6 (тип NaCl), при переходе к струк-

---

[1]) P. P. Ewald u. C. Hermann. Structurbericht. 1931, 73 — 74.
[2]) O. Hassel. Kristallchemie. Стр. 31.

турам с иным координационным числом (от 2 до 12). По этой таблице такие коэффициенты колеблются от 0,793 (для координационного числа 2) до 1,160 (для коорд. числа 12) для элементов строки Не (колебания очень значительные). Для более тяжелых элементов колебания эти несколько меньше. Для строки X (ксенона) соответственные цифры равны 0,919 и 1,056.

15. Поляризацией атомов называется смещение их электрических зарядов под влиянием электрического поля. Это электрическое поле может вызываться различными причинами, в том числе соседством заряженных других атомов. Это явление влечет за собой изменение формы атомов и изменение кажущегося радиуса поляризуемого иона. Действие этой причины на размеры кажущегося радиуса весьма значительно. Иногда под влиянием взаимной поляризации междуионное расстояние уменьшается настолько, что оно оказывается меньше, чем нормальный кажущийся радиус иона даже одного из взятых элементов. Например, в структуре кальцита CO_3Ca междуионное расстояние C—O равно 1,23 Å, тогда как кажущийся ионный радиус одного только кислорода O в структурах типа NaCl по Гольдшмидту равен 1,32 Å (см. выше таблицу).

16. Заметим еще по поводу таблицы В. М. Гольдшмидта, что исходными данными для всех вычислений радиусов послужили радиусы $F = 1{,}33$ Å и $O = 1{,}32$ Å, определенные И. А. Вазастиерна на основании рефрактометрических исследований [1]).

17. Теперь необходимо вкратце упомянуть о том, что в 1927 году Л. Паулинг [2]), основываясь на волновой механике Шредингера теоретически вычислил кажущиеся ионные радиусы почти всех элементов. Исходными цифрами для этих вычислений послужили междуионные расстояния, определенные из опыта у NaF, KCl, RbBr, CsJ и Li_2O.

Разница путей В. М. Гольдшмидта и Л. Паулинга весьма существенна. В то время как первый, исходя из r_F и r_O, каждый новый радиус получал из найденных опытом междуионных расстояний в реальных кристаллических структурах определенного типа, — второй (Л. Паулинг), исходя из опытных междуионных расстояний пяти перечисленных соединений щелочных металлов, все радиусы нашел чисто теоретическими вычислениями, не привлекая больше ни одной реально изученной структуры.

18. Мы приводим здесь цифры, полученные Л. Паулингом, в виде таблицы, взятой нами из упоминавшейся уже книги О. Гасселя (см. ссылку выше). По ходу своих вычислений Паулинг получает сначала цифры, поставленные в скобки, которые показывают, каковы были бы кажущиеся радиусы ионов всех элементов, если бы все они были одновалентны. От этих цифр в скобках он переходит затем к настоящим кажущимся радиусам с помощью формулы

$$R_z = R_1 z^{-\frac{2}{n-1}},$$

где

z — действительная валентность данного элемента в данной структуре, а n — число, связанное с конфигурацией электронных оболочек (со строками Менделеевской таблицы), а именно для ионов

---

[1]) V. M. Goldschmidt. Krystallchemie.—Fortschr. d. Min. XV. 1931. 84.
[2]) L. Pauling. Journ. of Amer. chem. Soc. 1927. 49. 165

Ионные радиусы, теоретически вычисленные

(по Л. Паулингу, 1927) [1])

0	I	II	III	IV	V	VI	VII
	H^- 2,08 (2,08)			C^{4-} 2,60 (4,14)	N^{3-} 1,71 (2,47)	O^{2-} 1,40 (1,76)	F^- 1,36 (1,36)
He (0,93)	Li^+ 0,60 (0,60)	Be^{2+} 0,31 (0,44)	Be^{3+} 0,20 (0,35)	C^{4+} 0,15 (0,2э)	N^{5+} 0,11 (0,25)	O^{6+} 0,09 (0,22)	F^{7+} 0,07 (0,19)
				Si^{4-} 2 71 (3,84)	P^{3-} 2,12 (2,79)	S^{2-} 1,84 (2,19)	Cl^- 1,81 (1,81)
Ne (1,12)	Na^+ 0,95 (0,95)	Mg^{2+} 0,65 (0,82)	Al^{3+} 0,50 (0,72)	Si^{4+} 0,41 (0,65)	P^{5+} 0,34 (0,59)	S^{6+} 0,29 (0,53)	Cl^{7+} 0,26 (0,49)
Ar (1,54)	K^+ 1,33 (1,33)	Ca^{2+} 0,99 (1,18)	Sc^{3+} 0,81 (1,06)	Ti^{4+} 0,68 (0,96)	V^{5+} 0,59 (0,88)	Cr^{6+} 0,52 (0,81)	Mn^{7+} 0,46 (0,75)
				Ge^{4-} 2,72 (3,71)	As^{3-} 2,22 (2.85)	Se^{2-} 1,98 (2,32)	Br^- 1,95 (1,95)
	Cu^+ 0,96 (0,96)	Zn^{2+} 0,74 (0,88)	Ga^{3+} 0,62 (0,81)	Ge^{4+} 0,53 (0,76)	As^{5+} 0,47 (0,71)	Se^{6+} 0,42 (0,66)	Br^{7+} 0,39 (0,62)
Kr (1,69)	Rb^+ 1,48 (1,48)	Sr^{2+} 1,13 (1,32)	Y^{3+} 0,93 (1,20)	Zr^{4+} 0,80 (1,09)	Nb^{5+} 0,70 (1,00)	Mo^{6+} 0,62 (0,93)	
				Sn^{4-} 2,94 (3,70)	Sb^{3-} 2,45 (2,95)	Te^{2-} 2,21 (2,5ν)	J^- 2,16 (2,16)
	Ag^+ 1,26 (1,26)	Cd^{2+} 0,97 (1,14)	In^{3+} 0,81 (1,04)	Sn^{4+} 0,71 (0,96)	Sb^{5+} 0,62 (0,89)	Te^{6+} 0,56 (0,82)	J^{7+} 0,50 (0,77)
Xe (1,90)	Cs^+ 1,69 (1,69)	Ba^{2+} 1,35 (1,53)	TR				
	Au^+ 1,37 (1,37)	Hg^{2+} 1,10 (1,25)	Tl^{3+} 0,95 (1,15)	Pb^{4+} 0,84 (1,06)	Bi^{5+} 0,74 (0,98)		
			La^{3+} 1,15 (1,39)	Ce^{4+} 1,01 (1,27)			

[1]) Цифры в скобках — вспомогательные (при вычислениях) радиусы ионов в предположении, что все они — одновалентны.

с конфигурацией He . . . . . n = 5
„ „ Ne . . . . . n = 7
„ „ Ar (и Cu^{+}) . . . n = 9
„ „ Kr (и Ag^{+}) . . . . n = 10
„ „ X (и Au^{+}) . . . . n = 12

Например, для Ti имеем (см. табл. ионных радиусов по Паулингу): $R_1 = 0{,}96$, $z = 4$, $n = 9$ (потому что Ti стоит в строке Ar). Отсюда

$$R_4 = 0{,}96 \times 4^{-\frac{2}{9-1}} = 0{,}96 \times 4^{-\frac{2}{8}} = 0{,}68 \text{Å},$$

что отвечает цифре у Ti^{+4} без скобок (см. табл. на стр. 425).

19. Теоретические цифры Л. Паулинга довольно близко стоят к эмпирическим цифрам В. М. Гольдшмидта и тем самым показывают, что их автору удалось правильно построить теорию кажущихся ионных радиусов. Однако следует сказать, что все же в ряде случаев отклонения эти далеко выходят за пределы ошибок опыта. Примерами могут служить цифры для Li (разница $\Delta = 0{,}18$ Å), для Mg ($\Delta = -0{,}13$), для Ag ($\Delta = -0{,}13$) и др.

20. После Л. Паулинга теоретическим вычислением ионных радиусов занимался В. Х. Захариасен[1]), которому удалось для ряда элементов, коих атомы принадлежат к строкам благородных газов, получить результаты, более согласующиеся с эмпирическими междуионными расстояниями, чем цифры Л. Паулинга и даже В. М. Гольдшмидта.

21. Подводя итоги, мы можем сказать, что работами В. Л. Брагга, В. М. Гольдшмидта, Л. Паулинга и др. собран обширный фактический материал по кажущимся междуионным радиусам в кристаллах как элементов, так и разнообразных их соединений, и создана теория, позволяющая их рассчитывать и предвидеть.

Однако, можно думать, что в этой области еще не все сделано, как в отношении эксперимента, так и в отношении теории, ибо полного схождения тех и других данных пока добиться не удалось. Здесь возможны новые обобщения и уточнения в связи с накоплением положительных знаний строения атомов отдельных элементов и сил, скрепляющих их в постройку кристаллической структуры.

22. Чтобы закончить, нам остается сказать, что значение этого отдела новейшей кристаллохимии весьма велико. Помимо расширения наших общих представлений о деталях структуры кристаллов, накопленные сведения о кажущихся ионных радиусах: а) значительно облегчают определение структуры кристаллов, так как позволяют приблизительно предвидеть возможные междуатомные или междуионные расстояния; б) порождают существенно новые точки зрения на полиморфию, морфотропию и изоморфию; в) в связи с расширением и уточнением наших знаний в области изоморфии, — учение об ионных радиусах получает важное значение в вопросах парагенезиса (совместного присутствия) химических элементов, что является чрезвычайно существенным как для химии, так и для геохимии, минералогии, петрографии, учения о месторождениях полезных ископаемых и в других науках, с этим связанных.

---

[1]) W. M. Zachariasen. Z. f. Krist. 1931, 80. 137. Цитирую по O. Hassel. Kristallchemie. 29 — 34.