

Л. Д. КНОРИНГ, В. Н. ДЕЧ

Геологу о математике



НЕДРА

Л. Д. КНОРИНГ, В. Н. ДЕЧ

ГЕОЛОГУ О МАТЕМАТИКЕ

СОВЕТЫ ПО ПРАКТИЧЕСКОМУ ПРИМЕНЕНИЮ



ЛЕНИНГРАД
«НЕДРА»
ЛЕНИНГРАДСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
1989

ББК 26.3
К 53
УДК 550:51

Рецензент д-р геол.-минерал. наук *А. И. Айнемер* (ВНИИОкеангеология).

Кноринг Л. Д., Деч В. Н.

К 53 Геологу о математике. Советы по практическому применению.— Л.: Недра, 1989.— 208 с.: ил.

ISBN 5—247—00537—6

Классифицированы, упорядочены и сведены в единую систему основные направления математических исследований в геологии. Главное внимание уделено не формальному математическому аппарату, а построению математических моделей и их интерпретации. Показано, как надо избегать ошибок при использовании математических методов, учитывать ограничения, накладываемые на тот или иной метод в разных ситуациях. Изложение сопровождается примерами решения геологических задач.

Для широкого круга геологов и геофизиков, использующих математику в практической деятельности.

К $\frac{180401000-316}{043(01)-89}$ 41—89

ББК 26.3

ПРОИЗВОДСТВЕННОЕ ИЗДАНИЕ

**Кноринг Лев Давыдович,
Деч Виктор Николаевич**

ГЕОЛОГУ О МАТЕМАТИКЕ

Советы по практическому применению

Редактор издательства Л. Г. Ермолаева
Обложка художника В. Н. Нечаева
Технический редактор Н. П. Старостина
Корректор М. И. Витис

ИБ № 7044

Подписано в печать 18.04.88. М-33200. Формат 60×90¹/₁₆. Бумага офсетная № 2. Гарнитура литературная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 13,0. Усл. кр. отт. 13,5. Уч.-изд. л. 15,12. Тираж 10800 экз. Заказ № 1360/786. Цена 75 коп.

Ордена «Знак Почета» издательство «Недра»,
Ленинградское отделение.

193171, Ленинград, С-171, ул. Фарфоровская, 18.

ПО-3 Ленуприздата, 191104, Ленинград, Литейный пр., 55.

ISBN 5—247—00537—6

©Издательство «Недра», 1989

Введение

Методы математики уже давно и с успехом используются в геологических исследованиях. Им отводится определенная роль в постановке и решении многих задач. Процесс математизации, развития и применения математических моделей в геологии имеет более чем 30-летнюю историю. Но нельзя сказать, что такой промежуток времени является значительным. Если его сравнить с периодом применения математики в физике — в той области знаний, где использование математики по праву считается образцовым и приносящим явный эффект, и при этом допустить, что возникновение физики в ее классическом варианте (собственно теоретической физики) датируется 1687 годом, т. е. тем годом, когда гениальный труд И. Ньютона «Математические начала натуральной философии» увидел свет, то становится понятно, что период в 30 лет против периода в 300 лет является, безусловно, очень коротким.

С другой стороны, такой промежуток времени нельзя считать и совсем малым, ибо очевидно, что темпы и качество внедрения математики в естественнонаучные сферы в XVII, XVIII или XIX столетии были ниже, чем в XX веке, особенно в его второй — компьютеризированной — половине. Поэтому можно было предположить, что ускоренные темпы, накопленные знания, разработанные технологии, приобретенный опыт применения математических методов в очень разных областях естествознания, а также компьютерная техника легко могли быть унаследованы геологией и эффективно использованы при решении многих ее научных вопросов и практических задач. Более того, в начале 60-х годов, когда интенсивность проникновения методов математики в геологию существенно возросла, появились надежды, что использование математики и компьютерной техники в геологии даст существенные плоды. Однако на деле это оказалось далеко не так. Геология, как, впрочем, и другие сложившиеся естественнонаучные дисциплины (биология, экономика, медицина и др.), обладая своей спецификой, традиционными представлениями, багажом аналитических и методологических способов вербального характера, воспринимает «математические начала» с большим, а иногда даже с огромным трудом.

Этому много причин. Основная из них заключается в трудности формирования нового мышления. Этот процесс необычайно сложный, еще плохо познанный (и поэтому неуправляемый), но он определяет многие следствия: недостаточное число специалистов по математической геологии; приход в геологию специалистов узкого математического профиля, не ориентирующихся в геологии и не желающих понять ее проблемы; неудовлетворительную расстановку руководящих кадров; отсутствие специализированного журнала; провал проблемы АСУ-геология и др. Математическая геология мало заботит даже верхние эшелоны науки.

И тем не менее в наш век — век компьютеризации и НТР — многие геологи, как бы априорно полагая, что при изучении сложных геологи-

ческих объектов, явлений и процессов невозможно обойтись без действенной математической методологии, обратились к «науке наук» — к математике. Началось это еще в 40-х годах. Становление процесса применения математических методов в геологии происходит крайне неравномерно и сложно. Новое мышление с трудом пробивает себе дорогу. С одной стороны, получены нетривиальные результаты, достигнутые благодаря использованию в геологии разнообразных методов математики. С другой стороны, есть и негативные результаты, появляются серые безликие работы, имеют место и тупиковые направления. Все это создает нежелательный «информационный шум», который вредно отражается на общем процессе становления математической геологии.

В последние годы возрастает интерес к тому, как именно осуществляется процесс применения математики, как создаются математические модели, как они изучаются и интерпретируются. Теперь при повышающейся сложности геологических исследований уже вряд ли можно надеяться, что удастся ограничиться традиционными методами и вербальным описанием. Математизация геологии становится не просто потребностью, но и жизненной необходимостью. Геология уже не может обойтись без математики.

Однако большинство геологов плохо себе представляют и сами математические методы, и то, что они дают геологии. Чтение узкоспециальных публикаций является для них весьма серьезной проблемой. Существует иная ситуация, когда исследователи-геологи неквалифицированно или просто неправильно применяют математические методы в силу того, что за чисто формальным аппаратом они не улавливают их содержания и смысла. Назрела необходимость в появлении такой книги, которая, с одной стороны, ознакомит бы геолога и геофизика не с формальными, а с логическими и содержательными основами использования математических методов в разных областях геологии, что помогло бы понять и уловить природу и суть этих методов, а с другой стороны, помогла бы исследователю, уже применяющему в своей работе методы математики, избегать ошибок, знать ограничения, накладываемые на тот или иной метод, видеть «подводные камни», препятствующие привлечению тех или иных приемов и способов в той или иной ситуации.

Предлагаемой книге отводится именно эта роль. По своему характеру она несколько необычна, что связано с только что изложенной ее спецификой. В ней упорядочены, классифицированы и сведены в стройную систему, изложенную с единых позиций, методология и основные направления математических исследований в геологии. Каждое направление охарактеризовано спецификой решаемых геологических задач, имеющейся геологической информацией и особенностями перевода соответствующих геологических концепций и представлений на язык математики. Центр тяжести переносится на понимание семантических аспектов математики и предлагаемых ею методов исследования, на осмысление основополагающих математических концепций и на увязку их с геологическими представлениями. Иными словами, основное внимание сосредоточено на построении математических моделей и на их интерпретации. Формальный же математический аппарат исследования моделей излага-

ется лишь на уровне общей идеологии, лежащей в основе методов анализа моделей.

Данная книга не ставит перед собой цель осветить историю развития научных основ и практических методов математизации геологии. Это предмет специального разговора. Нас занимает не история и не оценка вклада тех или иных исследований в строительство здания, которое можно назвать «математика в геологии». Это здание возводилось умом и трудами огромной армии исследователей, и как и во всякой армии, здесь есть свои генералы и солдаты. Назвав одних и забыв о других, мы погрешим против истины. Наша цель — рассказать об этом здании, помочь читателю ориентироваться в нем, видеть его планировку в целом, лестницы и переходы, связывающие отдельные этажи и помещения. Нас интересует не процесс строительства здания и не становление идей, а современный его вид. А если быть более точными, — каким это здание видится авторам. Видится, разумеется, не без помощи всей армии исследователей. Ведь взгляды авторов на тот или иной вопрос складывались в том числе и под влиянием результатов и идей, высказываемых теми или иными исследователями. В этом смысле предлагаемый читателю труд можно считать коллективным.

1. МАТЕМАТИКА В ПРИКЛАДНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

Математика уже давно получила признание в качестве инструмента изучения явлений и процессов реального мира. Стремление геологов использовать математику объяснимо, ибо объекты геологии и процессы, формирующие эти объекты, есть следствие причудливого, очень сложного сочетания законов физики, химии, биологии. Наиболее прозрачное и концентрированное выражение этих законов получается тогда, когда привлекаются термины математики, т. е. термины той науки, которая среди прочих обладает удивительной универсальностью. И действительно, методы математического исследования составляют неотъемлемую часть очень многих областей знаний. Такое неслучайное и тесное взаимоотношение мира реального, осязаемого экспериментально, и мира математического восхищало знаменитых Н. Бурбаки. Они по этому поводу писали следующее [4, с. 4]: «То, что между экспериментальными явлениями и математическими структурами существует тесная связь, это, кажется, было совершенно неожиданным образом подтверждено недавними открытиями современной физики, но нам совершенно неизвестны глубокие причины этого и, может быть, мы их никогда и не узнаем».

Но, пожалуй, самая примечательная особенность любого закона, любой структуры, выраженных в терминах математики, это возможность сделать предсказания, осуществить прогноз, что, безусловно, является необходимой и неотъемлемой чертой любого научного исследования или описания.

У традиционного геолога, когда он слышит такие слова, как формула, закон, математика, обычно создается впечатление о строго формализованном описании, о жестко формальных способах анализа, где нет места методам аналогии, приемам интуитивного и ассоциативного мышления, к которым геолог привык и которыми он довольно плодотворно пользуется в своей практике. Это верно, но лишь отчасти.

Традиционная, или, как ее еще называют, чистая математика, действительно основана на формальных способах анализа и на формальных построениях. Математическая структура — предтеча получения закона и логических следствий — задается системой аксиом. Вопрос о правильности исходных постулатов, их смысловом содержании и интерпретации в явлениях внешнего мира не ставится, он лишен смысла. К системе аксиом кроме требований краткой и лаконичной формулировки предъявляется еще одно требование: система постулатов должна быть богата своими логическими следствиями. На этих постулатах методами дедуктивного мышления и возводится все здание соответствующей математической дисциплины. Система аксиом должна быть к тому же внутренне непротиворечивой. Это значит, что аксиомы должны быть сформулированы так, чтобы из них не могли быть выведены противоречащие друг другу теоремы. Выводы из начальных посылок должны быть однозначны и должны не допускать альтернативных цепочек следствий. В чистой матема-

тике математические положения только тогда приобретают достаточную убедительность, бесспорность и окончательность, когда они сформулированы в форме теорем.

Математические методы, основанные на подобной строгости логических заключений, представляют собой следствия исходных посылок, что сужает возможности этих методов. По этому поводу Н. Бурбаки замечают: «Нанизывание силлогизмов есть только трансформирующий механизм. Он может быть применен к любой системе посылок. Это лишь только внешний признак системы или, если хотите, — ее язык, и он еще не вскрывает самой системы логических построений, задаваемых постулатами» [4, с. 2].

В прикладной математике все обстоит иначе. В подавляющем большинстве прикладных исследований математические рассуждения отнюдь не проводятся на чисто дедуктивном уровне. Они носят не дедуктивный, а рациональный характер. Здесь уже принципиально недостижима доказательность того же уровня, как в чисто математических исследованиях. С этим связано и отсутствие категорического требования о формально-логическом совершенстве. Надо отметить, что это не признак слабости, а источник особой силы прикладной математики.

В прикладной математике могут применяться понятия, вообще не имеющие формального определения или имеющие определение, не обладающее полной логической четкостью. Если чистой математикой такое неформальное понятие, как интуитивная убедительность рассуждения, отвергается при окончательном изложении результатов, то в прикладной математике именно интуитивная убедительность, здравый смысл служат важным критерием правильности.

С другой стороны, к решению прикладных задач предъявляются требования, которые в чисто математических исследованиях считаются второстепенными. Прикладная задача должна быть решена не только правильно, но и своевременно, экономно по затраченным усилиям; решение должно быть доступным для существующих вычислительных средств и пригодным для фактического использования; точность решения должна соответствовать задаче и т. д. Наилучшее выполнение всех этих, порой противоречивых, требований условно называют оптимальностью решения.

Расширение области использования математики при анализе природных объектов, ее применение в новых областях связаны с понятием «модель». Можно сказать, что прикладная математика — это наука о математических моделях; более подробно, — наука о построении, исследовании, интерпретации и оптимизации математических моделей. Обычно в прикладных математических исследованиях можно условно выделить следующие основные этапы моделирования.

1. Выбор исходных теоретических положений; обобщение опыта и наблюдений; предложение гипотезы.
2. Математическая формулировка задачи — собственно построение математической модели, математическое моделирование.
3. Выбор метода исследования сформулированной задачи.
4. Проведение математического исследования модели.

5. Оценка согласованности математической модели с экспериментальной информацией.

6. Анализ и интерпретация модели.

7. Выводы, рекомендации, корректировка модели (или ее переформулировка, перестройка).

Все выделенные этапы тесно связаны между собой. Приведенная дифференциация общего процесса моделирования на этапы в известной мере искусственна. Так, построение математической модели обычно осуществляется с предварительной ориентировкой на предполагаемый математический метод решения задачи. В процессе же исследования или интерпретации модели может возникнуть необходимость в ее корректировке. Это обстоятельство и отражено в последнем этапе, который может быть сопряжен даже с ревизией исходных теоретических предпосылок. Учет дополнительных экспериментальных сведений и новой информации может привести к другой формулировке и постановке математической задачи или к перестройке математической модели.

Наш интерес будет сосредоточен на моделировании. Математическая модель привносит в формальные, строгие логические построения математики неформальные элементы: интуицию, ассоциацию, аналогию. Математическая модель — это продукт и формального и неформального мышления. Формальное и неформальное всегда присутствуют в исследованиях диалектически, одновременно, переплетаясь друг с другом. Даже в чистой математике можно найти неформальные элементы, ими являются исходные посылки, аксиомы. Математика делает однозначными, строго обоснованными лишь следствия из начальных посылок. Сами же посылки возникают как обобщение опыта и наблюдений.

В приложениях математики модель уже не является той исходной посылкой, смысловое содержание которой не имеет значения; именно в модели закодирована вся информация о природе изучаемого процесса. Модель — элемент не менее важный, чем весь последующий анализ, связанный с применением собственно математических методов, т. е. исследование модели. При исследовании модели формулируется определенная алгебра, т. е. создается система процедур, алгоритмов, которые определяют цепочку последовательных действий, основанных уже на формальной манере мышления, что позволяет раскодировать информацию, содержащуюся в модели. Поскольку формальные и неформальные методы анализа очень тесно связаны друг с другом, то формирование системы гипотез (аксиом), т. е. создание модели, нельзя отрывать от методов ее исследования. Говоря о применении математики в геологии, мы будем в дальнейшем понимать этот процесс в таком неразрывном единстве.

Понятие модели прочно вошло в геологию. Дать точное определение модели трудно, но сущность ее мы поясним. Один из этапов процесса познания, следующий за этапом наблюдения, связан с обобщением наблюдений, результатов опыта, а в конечном счете с абстракцией изучаемого явления, с выделением в нем самого существенного. Заканчивается обобщение построением теории. Это обобщение никогда не бывает полным. Наше знание предмета или явления всегда относительно. Эти относительные представления о явлении обычно и называют моделями.

Если модели описываются на языке математики, то их называют математическими моделями. Понятие модели тесно ассоциирует с понятием гипотезы. Очевидно, что любая гипотеза — это вербальная модель изучаемого объекта, явления, процесса. В этом случае на естественном языке (вербально) объясняется и раскрывается суть изучаемого явления.

Модель не всегда представляет собой результат теоретического обобщения экспериментальных данных или наблюдений. Нередки случаи, когда на математическом языке записываются некоторые представления, основанные на каких-то аналогиях или на не очень ясных интуитивных соображениях. Иногда модель формулируется как аксиома; правомерность модели в этом случае не может быть непосредственно проверена на экспериментальных данных и ей даже нельзя дать какую-либо физическую интерпретацию. В основе таких моделей лежит не столько содержательный, предметный материал, сколько некая математическая идея, например, использовать некоторым интуитивно очевидным способом математические соотношения элементов процесса для вывода рабочих формул, которые позволили бы проинтерпретировать результаты эксперимента.

Модель обычно не описывает явление во всей его полноте. Она отражает тот особый, специфический ракурс, в котором мы хотим рассмотреть исследуемую систему. Моделью подчеркиваются отдельные, представляющие интерес для исследователя черты системы и намеренно затушевываются, упрощаются или даже искажаются остальные ее свойства. Реальное явление всегда сложнее модели.

Образное определение модели дано физиком-теоретиком Я. И. Френкелем. «Математическая модель напоминает своеобразную зарисовку явления, воспроизведенную художником-карикуристом. Так, художник должен воспроизвести оригинал не во всех деталях, подобно фотографическому аппарату, но упростить и схематизировать его таким образом, чтобы выявить и подчеркнуть наиболее характерные черты. Фотографической точности можно и следует требовать лишь от теоретического описания простейших систем. Хорошая теория сложных систем должна представлять лишь хорошую «карикутуру» на эти системы, утрирующую те свойства их, которые являются наиболее типичными, и умышленно игнорирующую все остальные, несущественные свойства. Хорошая карикатура на какого-либо человека не может существенно улучшиться от более аккуратного и точного изображения нехарактерных деталей его лица или фигуры» (цит. по [18, с. 9]). Следовательно, математическая модель реального объекта должна описывать лишь существенные в том или ином смысле черты этого объекта, но никогда не должна претендовать на его полное описание. Именно поэтому в прикладной математике принципиально недостижима доказательность того же уровня, как в чисто математических исследованиях.

Существует связь между понятиями закон и модель; эта связь достаточно сложная. Законы не зависят от воли исследователя, они всегда отражают объективную действительность, давая не конкретное, а обобщенное ее описание. Модель более конкретна, она «строится» исследователем тоже для отражения (как и закон) того или иного фрагмента объективной реальности. Модель основывается на определенных зако-

нах, знание которых привлекается исследователем при ее построении. В свою очередь анализ моделей может приводить к выявлению новых законов. Но ни одна модель не может выйти за рамки законов.

Математическое описание, т. е. построение математической модели (моделирование), — процесс не однозначный. Несмотря на объективный характер модели, в деятельности исследователя очень много субъективного. И здесь надо сказать, что не следует увлекаться чрезмерной формализацией. Все-таки цель науки — прояснение истины, а отнюдь не затуманивание ее. Для этого необходимо априорное видение изучаемой реальности, что придает наблюдениям содержательный смысл. Это априорное видение возникает на основе неформальных аналогий с уже известным и виденным, на основе накопленного опыта и знаний, т. е. на основе той самой индуктивной интуиции, которая помогает выйти за пределы уже известного и которая может привести к открытию. А чрезмерная формализация как раз стремится подавить эту интуицию. При построении моделей речь идет не о неизбежной системе утверждений, а лишь о гипотезах.

Важнейшим требованием к математической модели является требование ее адекватности изучаемому процессу или объекту. Под этим понимается правильное качественное и количественное описание процесса (объекта) по выбранным характеристикам. К этому надо добавить следующее. При построении математической модели используются разнообразные соотношения, связывающие интересующие исследователя величины. Некоторые из соотношений выводятся в самом процессе построения модели, но часть из них принимается как исходные постулаты модели без вывода. От «качества» этих постулатов, их адекватности существенно зависит адекватность (согласованность с реальностью) всей модели. Постулаты могут иметь различное происхождение. Одни соотношения непосредственно выводятся из универсальных физических законов, которые не должны нарушаться в модели. Адекватность таких постулатов не вызывает сомнений. Аналогичную роль играют физические законы с ограниченной областью действия, для которых заведомая возможность применения в изучаемой задаче вытекает из универсальных законов.

В некоторых исследованиях приходится пользоваться законами, имеющими иной характер. К их числу, в частности, относятся феноменологические законы (такие как закон Гука, Ома, Бойля—Мариотта), т. е. достаточно хорошо эмпирически обоснованные законы с ограниченной областью действия, установленной тоже эмпирически. В случае привлечения феноменологического закона для построения математической модели одним из центральных становится вопрос о самой возможности применения этого закона (т. е. о попадании изучаемого явления в сферу действия данного закона) и о последствиях возможных отклонений от него.

Используются при построении моделей и полумэмпирические соотношения, которые имеют еще менее универсальный характер. Их обычно получают в результате сочетания соображений размерности и обработки результатов эксперимента. Они могут также выводиться из других соотношений подобного характера. Область применимости таких соотношений, как правило, ограничена узкими рамками условий, при которых

они были получены. Их использование за этими рамками сопряжено с определенным риском.

Адекватность модели повышается с усилением в ней роли не только хорошо проверенных физических законов, но и утверждений геометрии, а также апробированных в изучаемой области способов приложения математического анализа. Отметим, что не существует адекватности вообще. Адекватность рассматривается по определенным признакам. Всякая адекватность лишь относительна. С точки зрения требования адекватности сложные модели предпочтительнее простых, ибо применяя сложную модель, удастся учесть большее число факторов, которые могут так или иначе повлиять на изучаемые характеристики. Но это может привести к громоздким, порой необозримым системам уравнений, не поддающимся решению. Адекватность должна сочетаться с достаточной простотой модели по отношению к выбранной системе ее характеристик.

В общем случае чем выше степень адекватности модели, тем она сложнее, т. е. тем труднее ее анализ, и наоборот, чем модель более простая, тем она менее адекватная. Численная оценка степени адекватности в общем случае затруднена, но в некоторых простых ситуациях она не представляет каких-либо сложностей. Особенно это относится к статистическим задачам. С общими методами проверки адекватности модели связана проблема проверки гипотез, которая является предметом специального обсуждения в математической статистике.

Один и тот же объект исследования может быть представлен несколькими неэквивалентными моделями. Связано это с тем, что исследователь считает приемлемыми несколько рабочих гипотез, каждая из которых имеет некоторую априорную степень правдоподобия, причем эти гипотезы могут не полностью противоречить друг другу, а как бы перекрываться. При дальнейшем исследовании правдоподобность той или иной гипотезы может меняться, ибо изучение моделей дает дополнительную информацию. При этом складывается новый взгляд на ситуацию и, как следствие, осуществляется замена или сужение первоначальных моделей. Таким образом модель «доставляется». В процессе исследования переходят от одних моделей к другим, а иногда параллельно изучают несколько моделей. Сравнение результатов исследования по моделям разного типа (конкуренция моделей) может существенно обогатить познание изучаемого объекта. Наличие нескольких моделей может быть вызвано также различной детализацией описания.

Изучаемые объект, процесс, явление можно описывать с помощью непрерывных или дискретных, детерминированных или стохастических (и т. д.) моделей. Принятие той или иной модели зависит от целей, поставленных исследователем, от фактического уровня науки и в значительной мере от имеющихся средств изучения. Выбор типа модели, естественно, может быть подсказан самой действительностью. Целеустремленность при построении модели чрезвычайно важна. Следует не изучать до деталей все то, что связано с поставленной проблемой, а стараться по возможности экономным путем идти к цели. Исследование модели будет тем успешнее, чем больше основательных соображений о предполагаемых свойствах изучаемого объекта принято во внимание при ее построении. Чтобы найти что-то, надо знать, что ищешь.

После выбора схемы и построения модели возникает задача идентификации модели, определения ее параметров, уточнения структуры и т. п.

На возможности применения математики в геологии, как и в любой другой науке, большое влияние оказало появление и быстрое развитие ЭВМ. Лежащий в основе моделей математический аппарат предопределяет необходимость выполнять массовые, трудоемкие, порой аналогичные друг другу вычисления, что просто не под силу не только одному человеку, но даже целому коллективу. Но необходимо иметь в виду, что если предпринимается попытка использовать математику для анализа сложных геологических систем и для изучения протекающих в них процессов, то первое, что надо сделать, — это построить адекватную математическую модель. Нет такой модели — никакая ЭВМ не поможет познать систему или получить более верные представления о процессах.

Итак, основным понятием прикладной математики (а именно к ней мы обращаемся при исследовании геологических процессов и объектов) является математическая модель. Математическая модель в геологии — это концентрированное выражение геологических знаний на языке математики. Математическое моделирование (создание математической модели) согласуется с общим процессом познания, нацеленного на построение целостной системы представлений.

2. ПРОБЛЕМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Из всего изложенного следует, что построение математической модели является основой основ, центральным этапом исследования. От качества модели зависит судьба всего дальнейшего анализа.

Построение модели — процедура всегда неформальная, неоднозначная, сильно зависящая от возможностей исследователя, его знаний, опыта, интуиции. Несмотря на объективный характер модели, она, как правило, создается на субъективных началах — по воле и представлениям субъекта. Поэтому следует иметь в виду целую гамму обстоятельств, влияющих на выбор модели. И хотя конструирование модели — дело деликатное, однако два обстоятельства при ее создании являются безусловными: от исследователя требуются глубокое знание моделируемого объекта (явления, процесса), его поведения в различных ситуациях и хорошее владение математическими методами. При этом знание изучаемого объекта в нашем случае подразумевает владение не только геологическими основами, но и сопряженными с ними основами физики, химии, биологии и т. п. Ибо мы уже отмечали, что при создании математических моделей в геологии имеет смысл использовать методы, приемы и опыт математического моделирования, накопленные в других науках. В этом опыте есть нечто объективное, что не зависит от конкретной моделируемой ситуации. Речь идет о тех методологических приемах и правилах (принципах), которые выработали эти науки.

2.1. КОНЦЕПЦИИ И СОДЕРЖАНИЕ МОДЕЛИ

Модель должна достаточно верно отражать действительность. В геологической реальности мы видим как бы две ее стороны: внутреннюю (эзотерическую) и внешнюю (экзотерическую). Процессы или явления, протекающие в природе сейчас или протекавшие в геологическом прошлом, — это внутренняя сторона реального мира. Внешняя сторона — это объекты геологии, сформировавшиеся в результате этих процессов. Процессы обусловили совокупность всех признаков и свойств, присущих объектам геологии.

Очевидно, что объекты геологии, их признаки и свойства можно называть следствиями, а процессы, формирующие объекты, — причинами. Разумеется, в реальном мире эти две стороны тесно взаимосвязаны, переплетены, и деление их на эзотерическую и экзотерическую в достаточной мере условно; оно вводится нами для удобства последующего изложения. Во всяком случае, надо иметь в виду, что в моделях может преобладать отражение то одной стороны действительности, то другой. Модель — это в свою очередь определенная концепция.

2.1.1. ВНУТРЕННЯЯ (ЭЗОТЕРИЧЕСКАЯ) СТОРОНА РЕАЛЬНОСТИ

Стремление к математической формализации особенно характерно для тех областей знания, где явления недостаточно изучены, где прямой эксперимент, позволяющий собрать достаточно полную и объективную информацию об исследуемой реальности, практически невозможен. Геология тоже относится к числу таких областей знания. Прямой эксперимент в геологии невозможен. Ни один процесс мы не можем наблюдать в геологическом времени. Мы видим лишь конечный результат наложенных друг на друга, сложным образом переплетенных процессов. Этот результат в каждом конкретном случае может быть различен, особенно если учесть, что даже одни и те же процессы не протекают всегда совершенно одинаково, а несут на себе черты своеобразной индивидуальности. Задача геолога — восстановить эти процессы. Математическое моделирование и является одним из способов такого восстановления.

В геологии представления о процессах обычно формируются на базе наблюдений. Однако только экспериментального материала, как бы хорош он ни был, недостаточно. Нужны определенное обобщение, определенный взгляд на материал, результатом чего и станет определенная концепция. В геологии концепции, как правило, формируются в виде теоретических гипотез. Многие из них родились как догадки, которые лишь позже были подтверждены материалом наблюдений.

Гипотезы, концепции, предположения, догадки, факты и экспериментальные сведения — все это формирует систему определенных взглядов на изучаемый феномен, которые на тот или иной отрезок времени считаются истиной. Систему выработанных концепций коротко называют парадигмой. Но парадигма — это не только система взглядов на объект изучения, это еще и способы и методы его всестороннего и детального изучения. Становление парадигмы — процесс длительный, мучительный и часто необычайно сложный. Установившись, оформившись, парадигма уже может держать в своей власти многие умы, порой незаурядные, но слепо следующие «выработанным концепциям». Однако такое положение, как показывает опыт, не всегда оправданно (но что примечательно — в иных ситуациях то же самое положение бывает и оправданно и целесообразно).

Разрушить сложившуюся парадигму порой бывает труднее, чем ее создать. Это объясняется многими причинами. В частности, играет роль даже то, как изначально формулируется парадигма. В разных областях естественнонаучных знаний это происходит по-разному.

Так, при наличии скудного фактического материала, не вполне корректных или просто неверных идей формируются необоснованные гипотезы, адаптация которых под фактический материал приводит к правдоподобным следствиям. Примером может служить геоцентрическая модель Птолемея строения Солнечной системы. Она, как известно, была в корне неверной. Спасал эту концепцию ряд поправок эмпирического характера, искусственно вводимых для предсказания траектории движения планет (расчеты деферента, эксцента, эпициклов и т. п.). И дей-

ствительно, остроумные, но громоздкие построения позволяли с достаточной для того времени точностью предсказать астрономические явления (например, затмения, положения планет на небесном своде и т. п.).

Известны и другие примеры, когда из совершенно различных гипотез, теорий и методологических подходов к изучению одного и того же объекта исследования вытекали тесно согласующиеся между собой следствия и выводы. Для примера можно сравнить гипотезы и методологии изучения процессов мышления, протекающих в мозге человека, предложенные И. П. Павловым (метод условных рефлексов) и З. Фрейдом (метод толкования снов).

Иногда торжество новых, правильных концепций, сильно меняющих сложившиеся представления, существенно задерживалось из-за индивидуальных, совершенно необъяснимых свойств психологии их автора. Примером могут служить исследования и опыты по физике знаменитого английского ученого Г. Кавендиша, результаты которых, как известно, на десятки лет упредили современную ему научную мысль, но автор не пожелал довести их до научной общественности. То же самое произошло с основами неевклидовой геометрии, которой К. Гаусс владел задолго до того, как ее начала были опубликованы Н. И. Лобачевским и Я. Бояи. Сам К. Гаусс, как известно, не решился на этот шаг.

В геологических исследованиях становление парадигмы, ее торжество и разрушение отличаются определенной своеобразием. Мы уже говорили, что многие гипотезы в геологии не подлежат опытной проверке, и поэтому нельзя убедиться в правильности или ложности бытующих концепций. Вот почему очень часто бывает, что рождающиеся системы взглядов, основанные на слабых предположениях и, как правило, фрагментарных наблюдениях, утрачивают свою актуальность при появлении новых достижений и всяких дополнительных сведений, но затем они вновь могут возродиться при создании новейших способов и методов исследования, появлении других фактических данных или действенных приемов их обработки. Достаточно напомнить о мобилистской концепции А. Вегенера, которая на протяжении лишь одного, еще не завершившегося столетия своего существования пережила рождение, расцвет, полное забвение, новый всплеск, который сейчас опять приглушается справедливыми и аргументированными, на наш взгляд, критическими возражениями.

Вместе с тем следует отметить, что гипотезы в геологии, даже фундаментальные, часто формулируются очень нечетко. Известно, например, что М. М. Тетяев изложил свою геотектоническую концепцию в такой общей, недостаточно ясной, умозрительной, если даже не схоластической, форме, что последующие комментаторы трактовали ее по-разному.

Показательно отношение к гипотезам в геологии академика М. А. Усова, высказанное им в 1913 г., которое не потеряло своей актуальности и в наши дни: «Неудивительно, что геология до самого последнего времени опирается при своих выводах и объяснениях наблюдаемых явлений на целый ряд гипотез. По мере развития наших знаний и ознакомления с тем громадным материалом, с которым приходится иметь дело геологии, эти гипотезы подвергаются проверке: большей частью они изменяются,

некоторые из них совершенно выбрасываются и предлагаются новые. Конечно, нельзя считать, что гипотезы не имеют значения в развитии наук: напротив, благодаря им и движется вперед научная работа, но если таких гипотез много, если возникают они при встрече чуть ли не каждого сложного факта, то часто является неуверенность в правильности выводов и объяснении различных явлений; может даже явиться сомнение в значении геологии как точной науки» [42, с. 16].

Недостатка в гипотезах геология не испытывает. Но чтобы гипотезы можно было использовать для построения моделей, они должны быть определенным образом «доведены» до кондиции. Их необходимо более четко сформулировать, придать им конкретность и стройность, предложить не отдельные отрывочные представления, а стройную систему взглядов, именно систему, все элементы которой были бы определенным образом увязаны друг с другом на основе какого-либо руководящего принципа. Отсутствие внутренней взаимосвязи — характерная черта геологических гипотез. Вряд ли сейчас можно назвать хотя бы одну из фундаментальных гипотез, которая рассматривала бы во взаимосвязи все основные процессы в развитии Земли: тектонические, литологические, геоморфологические, климатические и т. д. Отдельные фрагменты, конечно, получают освещение, но целой, стройной картины не создается. Поэтому математизация геологии по сути дела развивается по пути разработки моделей, описывающих частные явления. Модели, описывающие явления более общие, синтезированные, т. е. системы моделей, в геологии редки.

Эклектичность, фрагментарность геологических знаний всегда беспокоила геологов. Приведем еще одну цитату из уже упоминавшейся работы академика М. А. Усова: «Наука продолжает сохранять описательный характер. Благодаря этому накопилось громадное количество сырого материала, наука оказалась загроможденной массой терминов, фактов, большей частью не связанных между собой; в случае попыток придать некоторую стройность этому материалу, получить общие выводы и т. п. приходится принимать целый ряд гипотез» [42, с. 17].

Разумеется, без гипотез, «догадок» обойтись нельзя. В этом и заключается суть обобщения. Но важно не любое объяснение фактов. Предпочтительнее выглядят те объяснения, которые образуют некоторую формально-логическую схему, наиболее просто и полно интерпретирующую накопленную совокупность фактов. В связи с этим уместно упомянуть о дуалистической оценке «правильности» той или иной теории А. Эйнштейном. По А. Эйнштейну, соответствие теории опыту есть необходимое условие, но отнюдь не достаточное.

Критерий соответствия теории наблюдаемым фактам А. Эйнштейн называл критерием внешнего оправдания. Другой критерий он называл критерием внутреннего совершенства. «Во втором критерии речь идет не об отношении к опытному материалу, а о предпосылках самой теории, о том, что можно было бы кратко, хотя и не вполне ясно назвать «естественностью» или «логической простотой» предпосылок (основных понятий и основных соотношений между ними). Этот критерий, точная формулировка которого представляет большие трудности, всегда играет

большую роль при выборе между теориями и при их оценке» [56, с. 9]. Разумеется, все это сохраняет свою силу и для математической модели. Модель должна быть логически непротиворечивой, естественной и по возможности простой.

Исследования последних лет свидетельствуют [39], что наиболее глубокая и целенаправленная формализация природного процесса (явления) возможна при использовании концепций, приемов и методов системного подхода. Более того, если формализация объекта изучения связана с выработкой математической модели, то такой подход просто необходим. Именно методы и приемы системного подхода могут привести к детальному и всестороннему анализу сложного объекта исследования, позволят подойти к нему с позиций системности, т. е. видеть этот объект и интегрально (целостно) и поэлементно (на всех уровнях и ступенях его развития).

В случае использования методов системного подхода во главу угла, как правило, ставится поиск причин, вызывающих ряд наблюдаемых следствий, или выявление особенностей функционирования природного механизма, лежащего в основе изучаемого процесса. Очевидно, что после того как указанные причины или особенности найдены, существенно облегчается математическое моделирование — построение (конструирование) самой модели объекта изучения.

Говоря о системном подходе, необходимо отметить следующее. С понятием «система» связан целый ряд других терминов, которые получили в геологии широкое распространение. Объясняется это тем, что уже давно осознана необходимость изучения геологических явлений как сложных комплексов (систем). Методом изучения таких систем является системный анализ. В геологической литературе это понятие трактуется в широком и не всегда ясном смысле. В математике же в понятие «системный анализ» вкладывается более узкое содержание. Системный анализ — это совокупность методов, основанных на использовании ЭВМ и ориентированных на исследование сложных явлений. Совокупность методов включает в себя как описание моделей систем, так и создание математического аппарата для анализа изучаемого процесса. Этот анализ невозможен без использования ЭВМ.

За рубежом в термин «системный анализ» вкладывается меньшее содержание. Он понимается как совокупность более или менее простых приемов обработки информации.

С системным анализом часто отождествляют термин «теория систем». Между тем, эти понятия совершенно различны. Теория систем, единое понимание которой отсутствует, занимается поиском того общего, что присуще достаточно сложным организациям материи, сложным явлениям разной природы. В отличие от предмета традиционных (функциональных) методов естествознания, проблемы, исследуемые теорией систем, — это структуры и формы. Таким образом, теория систем является скорее разделом философии, и ее следует относить, видимо, к методологии науки.

О системном же подходе необходимо добавить следующее. Любый исследователь не ограничивается анализом материала. Он всегда стре-

мится создать синтезирующие теории, придать результатам всеобъемлющий характер, объединить в логически непротиворечивую систему различные факты, увязать их с другими явлениями, учесть их взаимную обусловленность. Эта потребность стала проявляться наиболее ярко в последнее время в связи с возросшими возможностями переработки информации, предоставляемыми ЭВМ — инструментом, который обеспечивает стремление исследователя «системно» подойти к структуризации потока фактов. Системный подход стимулируется еще и тем, что нужды практики сейчас требуют анализа проблем междисциплинарного характера, объединения исследований, относящихся к компетенции естественных и общественных наук.

Таким образом, системный подход — это общеметодологический принцип, концепция, идеология и, конечно, парадигма современной междисциплинарной научной деятельности. Теория систем отражает гносеологический аспект этого общего принципа. Системный анализ — это средства, инструмент, рецептурная и аппаратная реализация системного подхода. Иными словами, это прикладная дисциплина, занимающаяся решением конкретных проблем, возникающих в процессе изучения сложнейших природных систем, в частности геологических [39].

2.1.2. ВНЕШНЯЯ (ЭКЗОТЕРИЧЕСКАЯ) СТОРОНА РЕАЛЬНОСТИ

Геология, характеризуя изучаемые ею объекты, говорит об их строении или составе. Концепции, на основе которых создается модель, в этом случае отражают представление об объекте с этих точек зрения. Разумеется, и здесь сохраняется то же требование к модели — отражать действительность. Геология выработала свои традиционные средства отражения строения и состава объекта. Это разного рода графические построения: карты, разрезы, профили, диаграммы, графики зависимости между разными переменными и т. п. Про них можно сказать, что это графические модели. Каждая такая графическая модель строится на основе определенной концепции; к этому геологи уже привыкли.

Построение математической модели тоже всегда опирается на систему гипотез, отражающих понимание исследователем изучаемого объекта. Важно становится не просто описать объект, а выделить наиболее существенные его черты, представляющие первостепенный интерес для решения поставленной задачи. Отношение к объекту, взгляд на него могут быть совершенно разными даже при изучении одного и того же вопроса.

Пусть, например, мы имеем изменение с глубиной пористости пород одного и того же литологического состава. Это изменение отражается графически в виде изрезанной, изломанной кривой. В зависимости от постановки вопроса мы можем смотреть на эту кривую по-разному. Если нас интересует, как в данном конкретном случае пористость меняется с глубиной (это нам важно знать, предположим, для того, чтобы судить, можно ли встретить пористые породы на больших глубинах), то наша концепция сведется к некоторому идеализированному закону убывания пористости с глубиной. Этот закон будет описывать монотонное изменение по-

ристости, так как сильную вариабельность исходной кривой мы не будем принимать во внимание — в данном случае она не представляет для нас интереса.

Совершенно иное дело, если этот вопрос интересует нас с другой точки зрения. Предположим, что, говоря об изменении пористости с глубиной, мы имеем в виду влияние на нее уплотнения пород под действием вышележащей толщи. Тогда, во-первых, мы должны знать не современные глубины, а палеоглубины; во-вторых, важным становится вопрос, восстанавливается ли пористость (и до какой степени) при снятии нагрузки. Два примера — две концепции. В первом случае нас совсем не интересует причина. Во втором мы несколько коснулись внутренней стороны реальности, правда весьма поверхностно, и практически остались в рамках «внешнего» признака, влияющего на пористость, а именно, глубины, но взятой в другой системе отсчета. Этот пример показывает, что, во-первых, внутреннее и внешнее не всегда можно разделить, а во-вторых, что любое описание невозможно дать без определенной концепции. Даже простое вычисление среднего значения требует определенной концепции, в зависимости от которой будет найдено или среднее арифметическое, или средневзвешенное; в противном случае даже вычисление среднего теряет смысл.

При математическом моделировании геологические объекты удобно рассматривать как некие системы. Понятие «система» вообще-то очень нечеткое, расплывчатое. На любой объект можно смотреть то как на систему, то как на элементарную точку. Материальная точка, взаимодействующая, скажем, с гравитационным полем, — это система, не говоря уже об атоме, который является системой элементарных частиц. Часто систему характеризуют составляющими ее элементами, связями и взаимодействиями между ними.

Элементы системы, как видно, могут быть самой разной природы. Так, горная порода — это система минеральных образований. Песчаник — это система, состоящая из определенных элементов: обломков кварца, полевого шпата, слюды, цементирующего вещества. Системой могут быть пачки пластов, комплексы пачек, элементами которых уже будут типы песчаников (аркозовые, кварцевые и т. п.). Почти всегда некоторые группы элементов объединяются и обособливаются внутри системы. Тогда в зависимости от решаемой задачи такие объединения можно определить как подсистемы. Если для решения задачи систему целесообразно подвергать дифференциации, то общую систему укрупняют и в этом случае говорят уже о системах систем. Подсистемы, системы, а тем более, системы систем характеризуются разной степенью сложности, различной структурой, разнообразие которых порой бесконечно и неисчерпаемо точно так же, как неисчерпаем атом или электрон.

Очевидно, что элементы системы редко бывают без связи друг с другом. Связь — это воздействие одного элемента на другой или возникновение (появление) одного элемента в зависимости от другого. В геологии изучению всякого рода связей, зависимостей и тенденций изменения тех или иных геологических показателей по площади и по разрезу уделяется много внимания. Однако графические возможности такого изучения, как правило, ограничены. Зрительно можно охватить только трехмерное пространство, поверхность же листа хорошо отражает лишь двухмерное. Поэтому обычно изучаются только парные связи, ибо проекция на двухмерное пространство большого числа зависимостей существенно осложняет изображение и его восприятие.

Между тем ясно, что изучение связей в системе не может быть сведено к анализу влияния какого-либо одного элемента x на другой y или влияния ряда элементов x_1, x_2, \dots , каждый из которых рассматривается в качестве самостоятельного, воздействующего на элемент y однозначно, независимо от других x_i . Очевидно, что каждый из элементов системы связан со всей совокупностью других ее элементов. Поэтому необходимо рассматривать всю систему в целом.

Характеризуя систему, мы говорим о ее состоянии. Совершенно очевидно, что современное состояние системы есть конечный результат всей совокупности геологических процессов, протекавших и протекающих внутри системы. Характерные связи внутри системы — это связи, сложившиеся в процессе ее развития. Современные объекты изучения — это статические системы, как бы фотографии их на сегодняшний день, т. е. конечный результат функционирования ряда геологических процессов. Если же рассматривать систему, развивающуюся во времени, изменяющую свое состояние, т. е. смотреть на объекты изучения исторически, с позиций эволюции их развития, то такую систему надо считать динамической.

Гипотезы, на которые опирается построение модели, отражают взгляд исследователя на систему, на ее статику или динамику, на характер связей и взаимоотношений составляющих ее элементов, на структуру и сложность ее строения. Всякая графическая модель — это не просто отражение фактов; это — результат определенного отбора фактов, определенной их обработки, определенной формы представления на основе некоторой концепции. Те же соображения относятся и к математической модели.

Существует хорошее выражение, которое здесь уместно привести: за деревьями не видеть леса. Концепция — это тот взгляд на совокупность «деревьев», который позволяет сформулировать определенное представление о «лесе». При описании систем «деревья» не должны заслонять «лес» — целостную совокупность «деревьев». В геологии вопрос о правильном соотношении «леса» и «деревьев» стоял и стоит так же остро, как, скажем, в квантовой физике или биологии. Действительно, принцип исследования, основанный на убеждении, что путь к познанию сложных систем лежит через расчленение этого сложного на составные элементы с последующим изучением природы и свойств этих элементов (принцип редукционизма), очень тесно и комплементарно переплетается с принципом, полагающим, что изучаемая система должна рассматриваться целостно, нерасчлененно, т. е. постулируется невозможность сведения сложного, системного к простому, поэлементному (принцип органицизма). Ведь система сложнее суммы ее элементов.

Два этих принципа в конкретных геологических исследованиях, как правило, используются дисгармонично: один принцип всегда доминирует над другим. Действительно, редко проблемы общей геологии или тектоники гармонично сочетаются с проблемами минералогии, петрографии, литологии — всегда имеется определенный крен в ту или иную сторону. Всегда испытываются значительные трудности при переходе в описании от частного к целому, и наоборот. Дисгармоничность описания элементов

системы и системы как целого в принципе и определяет трудности при создании таких математических моделей, которые бы адекватно отражали изучаемые объекты геологии. При разработке математических моделей очень часто приходится задумываться над проблемами редукционизма и органицизма.

2.2. РОЛЬ НАБЛЮДЕНИЙ И ФАКТОВ

Принято считать, что без обширного материала наблюдений эмпирического характера, со всех сторон освещающего предмет исследования, теоретические построения в геологии возникнуть не могут. Такое категоричное суждение не всегда справедливо, и история геологии имеет примеры, опровергающие это мнение. Очевидно, что наблюдения дают пищу для теоретических построений и служат той основой, на которой возводится здание теории. Однако побуждающим стимулом к созданию новой теории является обычно небольшое число ярких, а точнее фундаментальных, фактов.

Здесь важно подчеркнуть, что для построения моделей сам по себе объем материала наблюдений, по-видимому, не имеет принципиального значения. Построение модели — это формулировка концепции. И все дело в том, что принципиально нового добавляет к нашей концепции увеличение объема материала и насколько это облегчает формулировку новой теоретической концепции. Для получения фундаментальных фактов необходима громадная работа по отбору материала; большая часть первоначального материала может оказаться ненужной, уйти в «производственные отходы». Эти отходы в таком трудном деле, как познание нового, всегда велики. Весь отброшенный материал после того, как концепция сформулирована и модель явления построена, в лучшем случае может быть использован для проверки либо самой модели, либо, что бывает чаще, — для проверки следствий модели. В худшем случае этот материал окажется бесполезным, «пустой породой».

Точно так же, как теория опирается на результаты наблюдений, так и наблюдения несут в себе полезную информацию тогда, когда они увязаны в определенную теоретическую концепцию. Наблюдения как простая совокупность фактов при неверной концепции могут ввести исследователя в заблуждение, что неоднократно случалось в истории науки. Достаточно сослаться на концепцию геоцентризма — ведь она возникла на основе прямых наблюдений за небесными светилами. Наблюдения приобретают содержательный смысл, превращаются в объективную информацию о реальности только при определенном видении этой реальности, т. е. при некоторой концепции.

Известно, что критерием истинности служит практика. Но это положение не надо понимать буквально, слишком прямолинейно. В ряде случаев достоверность сведений, которые дает теория, настолько высока, что они считаются более достоверными, чем результаты наблюдений. Еще раз вспомним, что модель Коперника не согласовывалась с эмпирическими данными и не служила, в отличие от модели Птолемея, нуждам практики. Но Н. Коперник был непоколебим. В дальнейшем выяснилось,

что расхождение с наблюдениями объяснялось эллиптичностью орбит планет; принятая теоретическая модель с круговыми орбитами была слишком груба.

Поскольку хорошая концепция сама должна служить источником новой информации, то определенный скепсис по отношению к реальным фактам не выглядит криминалом. Недоверие к прямому опыту как совокупности чувственно наблюдаемых фактов заставило Декарта сформулировать следующую мысль: «Все эти доказательства настолько достоверны, что хотя бы опыт и показал обратное, однако мы вынуждены придавать нашему разуму больше веры, нежели нашим чувствам».

При описании геологических объектов материал наблюдений служит источником полезных наводящих идей относительно того, какие модели могут отразить содержащуюся в наблюдениях информацию. Иными словами, ценная информация, заключенная в наблюдениях, является средством для построения моделей. Но для этого исходная информация соответственно должна быть преобразована.

Информация навязывает определенную форму модельного описания. Но более типичной является другая ситуация, когда внутренняя логика модели диктует требование к информации, способ и метод ее получения. Необходимая информация не сводится к простой совокупности данных о разнообразных деталях и особенностях изучаемого явления или объекта. Эти сведения должны быть взаимно согласованными. Согласование информации — важнейший момент моделирования. Состав информации — следствие структуры модели. Информация должна быть не только согласованной, но и надежным образом организованной. Каждая модель определяет свою специфическую форму представления материала наблюдений. Уровень представления информации должен упрощать получение необходимых выводов, обеспечивать их надежность и точность и, кроме того, делать модель удобной для исследования.

2.3. ЯЗЫК ОПИСАНИЯ

В модели соответствующие концепции записываются на языке математики. Этот язык удобен тем, что он широко известен, позволяет быстро получить четкие логические выводы после того, как модель сформулирована, причем нет необходимости каждый раз разъяснять и обосновывать правильность выводов. При использовании этого языка можно заимствовать по аналогии цепочки суждений, применяемые при решении других задач, в других областях знаний.

Используя математику как язык, исследователь все же действует не как чистый математик. Здесь все время надо учитывать то, что стоит за теми или иными математическими символами в данном конкретном исследовании. Злоупотребление математикой в геологии, как правило, связано с тем, что с математическими выражениями обращаются так же, как в чистой математике, не задумываясь особенно о том, что собственно стоит за теми или иными записями, облеченными в математические символы и формулы. Отсюда возникают мнения, что, привлекая математику

для описания реально наблюдаемых явлений, можно извлечь такую информацию, которая не содержится ни в результатах наблюдений, ни в тех постулатах, на базе которых строятся исходные модели. Если не обращать внимания на содержание, стоящее за формулами, то можно получить самые невероятные результаты. При интерпретации математически полученных результатов надо постоянно думать о том, что не было записано, а только подразумевается.

Одна и та же ситуация или похожие ситуации могут быть описаны множеством моделей, формулируемых на разных математических диалектах. Пусть, например, предмет нашего изучения — процесс формирования пористости. Этот процесс можно сформулировать на уровне детерминистических представлений и задать строго детерминированной моделью, записывая гипотетический механизм процесса с помощью дифференциальных уравнений. Если же наши знания о механизме изучаемого процесса недостаточны, то приходится ограничиваться обсуждением вопроса в вероятностных терминах. В этом случае возможно говорить на традиционном языке классической математической статистики, привлекая многомерный регрессионный анализ или факторный анализ. Но можно использовать и язык теории информации.

Очевидно, что нельзя предложить критерий, согласно которому можно было бы отдать предпочтение тому или иному математическому диалекту при описании реальной действительности. Более того, нельзя даже указать критерий, по которому позволительно было бы судить, что один диалект вообще приемлем, а другой в принципе неприемлем для описания некоторой ситуации. Даже адекватность описания моделью наблюдаемого явления не определяет язык, на котором получена модель, и не выдвигает эту модель в разряд приемлемых. Этого вопроса мы уже касались в предыдущем разделе при описании материала наблюдений.

Здесь уместно напомнить парадокс Рассела [41]. Допустим, что некто регулярно вызывает такси и строит график, откладывая по оси абсцисс номер дня, а по оси ординат — номер машины. Если будет получена серия наблюдений (k), то их можно будет представить полиномом ($k - 1$)-й степени; при этом кривая, соответствующая полиному, пройдет через все наблюдаемые точки. Модель будет адекватной. Но ясно, что по ней невозможно предсказать номер того такси, которое будет вызвано завтра. Те же экспериментальные данные можно было бы представить как случайный процесс, и тогда задача прогнозирования приобрела бы смысл. Следовательно, вопрос о выборе диалекта, на котором ведется обсуждение задачи, не решается простой проверкой гипотезы адекватности. Повторяем, модель — это результат неформального мышления.

В геологии наиболее широкое применение нашел язык математической статистики. Этот язык стал метаязыком для многообразных экспериментальных наук, к числу которых относится и геология. Привлекательность математической статистики для геолога заключается в том, что она дает теоретические предпосылки для построения стандартных методов обработки результатов массовых наблюдений при изучении природных систем с их элементами случайности. Она позволяет формализовать одну из самых трудных и порой даже мучительных процедур в деятельности

исследователя — процесс принятия решений при экспериментальной проверке моделей. Кроме того, она позволяет организовать процесс обработки результатов наблюдений и показать все его преимущества во многих ситуациях, в том числе когда выдвигается не одна, а множество моделей. Множество математических моделей могут иметь право на одновременное существование. В этом проявляется отличительная особенность математической статистики.

В традиционном представлении возможность математического описания какого-либо явления природы рассматривалась уже как формулировка закона природы. Если на математическом языке записывались две гипотезы, то они рассматривались как конкурирующие и одна из них рано или поздно должна была быть отброшенной. В силу этого традиционные математические методы применялись только для описания хорошо организованных систем, в которых можно было провести четкое разграничение между отдельными явлениями различной физической природы. Большинство геологических явлений и объектов — сложные, диффузные системы, в которых часто не удается или даже в принципе невозможно выполнить четкое разграничение между множеством разнородных по своей природе процессов, протекающих в системе. Модели же математической статистики описывают сложную систему не полностью, а эскизно, причем разные модели описывают различные аспекты сложной системы. Поэтому не возникает задача дискриминации моделей, все модели имеют право на существование. Однако язык математической статистики и ее модели не следует переносить в геологические исследования, не задумываясь об их содержании.

В целом следует подчеркнуть, что поскольку геологические явления носят вероятностный характер, то модели, которыми оперирует геология, как правило, являются стохастическими. Этим, однако, не исключается и детерминированная постановка вопроса и соответственно использование детерминированных моделей при решении тех или иных задач геологии. Вообще говоря, деление на детерминированное и стохастическое описания условно. По-видимому, все реальные объекты и явления носят черты как детерминированного, так и случайного; каждая из этих сторон может проявляться в разных ситуациях в большей или меньшей степени. Но их математические модели могут быть либо детерминированными, либо стохастическими (включающими случайные элементы). При изучении одних вопросов более подходящей является детерминированная модель, при решении других — стохастическая.

2.4. ЦЕЛИ И ДЕТАЛЬНОСТЬ ОПИСАНИЯ

Выбор модели зависит от преследуемых целей. Геология использует вербальное описание, при котором цели определяются обычно словесно и не являются (или редко являются) столь же четко сформулированными, как в физике или технике. Обобщенно можно сказать, что любая научная теория призвана систематизировать некоторый набор фактов, объяснить их с единой точки зрения. В этом и заключается ее цель. Но хорошая теория должна еще уметь предсказывать (прогнозировать) но-

вые факты. Модель должна соответствовать преследуемой цели, она должна давать возможность достичь этой цели. В геологии мирно уживаются различные гипотезы, объясняющие одни и те же факты с различных точек зрения. Очевидно, что моделирование может преследовать цель поиска наиболее «горячих» точек, в которых гипотезы максимально расходятся, с тем чтобы получить именно ту недостающую информацию, которая поставила бы одну из гипотез в критическое положение.

Описание объектов преследует другие цели. Это может быть описание не только одного объекта, но их совокупности, взаимоотношения, в конце концов классификация объектов и определение иерархии связей между ними. Эти цели накладывают свой отпечаток на выбор модели.

От преследуемых целей неотделим вопрос детальности описания, т. е. степени точности модели и ее адекватности. Точность, качество описания определяются прежде всего соответствием модели тем требованиям, которые предъявляются к исследованию, соответствием получаемым с помощью модели результатов наблюдаемому течению процесса. Так, в инженерной деятельности широко используются модели классической механики. Эта теория достаточно точна для достижения соответствующих целей. Однако при изучении движения элементарных частиц, имеющих околосветовые скорости, модель ньютоновской механики уже недостаточно точна. Здесь на арену выступают модели квантовой механики.

Геолог в своей практической деятельности часто обращается к построению карт. Преследуя различные цели, он строит карты разного масштаба и разного назначения. Любая карта дает определенную детальность описания. Так, для глобального взгляда на Землю необходима карта земного шара, а для ориентирования на местности требуется крупномасштабная топографическая карта данной местности. Отсюда следует, что детальность описания и при построении карты, и при построении модели суть вещи одного порядка. Разумеется, точность, о которой идет речь, не надо путать с оценкой неопределенности результата, получаемого в рамках той или иной модели.

Подводя итог данной главе, необходимо отметить следующее. Здесь мы хотели показать, что математика предоставляет возможности неизмеримо большие, чем возможность что-то вычислить или обработать данным. Она дает понятия и выражения, органически присущие изучаемым явлениям, позволяет использовать универсальные принципы, чтобы установить отношения между явлениями. Иными словами, математика открывает путь к пониманию сути изучаемых явлений. Суть явления и находит отражение в его модели. Модель — это мысленно представляемая система, которая отражает или воспроизводит явление таким образом, что исследование модели дает новую информацию об изучаемом явлении.

Математическое описание, т. е. математическое моделирование, превратилось в развитое научное направление. Конечно, в геологии математическое моделирование играет несколько иную роль, чем в физике и технике, где оно является одним из основных методов исследования. В геологии, как и в других плохо формализуемых областях знаний, где использование математики не является традиционным, модель служит

не столько для получения точных количественных характеристик (хотя иногда преследуется и эта цель), сколько для определения качественных особенностей исследуемых процессов, концепций их развития, очерчивания границ наших действий.

Весьма велика роль математических моделей как единого языка описания, позволяющего структурировать и канонизировать усилия исследователей. Применение математики в геологии связано с многозначностью языка математики. Математика не располагает правилами для однозначного выбора моделей, да и не только выбора моделей, но в некоторых ситуациях и способов их анализа. Вероятно, это дело мозга, мыслительного аппарата непосредственно самого человека. Полиморфизм языка математики в этом случае усиливает гибкость языка, подчеркивает его адапционность. Существование определенных степеней свободы в формализованном описании позволяет создавать модели, соответствующие возможностям имеющихся в распоряжении исследователя математических методов и вычислительных средств.

Естественно поставить вопрос: должен ли геолог, желающий использовать математику, знать и ее аппарат? Или же он может разговаривать на языке математики, не зная грамматики и синтаксиса этого языка? Такую картину мы часто наблюдаем в повседневной жизни, когда человек (например, ребенок), не зная правописания, свободно говорит на том или ином языке. Один из крупнейших русских математиков А. М. Ляпунов считал, что если задача физики поставлена, дальше ее следует решать как задачу математики.

Однако теперь провести такое разделение невозможно. Завершение исследования требует использовать на всех этапах неформальные рассуждения. Нельзя забывать о предмете анализа, о содержательном смысле исследования. Проверка качества решения, его соответствия исходной цели представляет важную задачу математики в данном случае. С другой стороны, собственно математические методы имеют свои специфические особенности, игнорирование которых может привести к серьезным ошибкам. Знать их необходимо при использовании того или иного математического аппарата. В идеале создание модели требует от исследователя совмещения знаний профессионального математика и специалиста-геолога, владеющего предметом исследования на профессиональном уровне.

В связи с этим в дальнейшем, учитывая специальную направленность данной книги, мы основное внимание посвятим принципиальным вопросам, связанным с построением моделей. Вопросу же исследования моделей мы уделим меньше внимания. Будут изложены лишь основные идеи, на которых базируются соответствующие методы математики. Без их знания тоже невозможно построить модель.

Подчеркнем еще раз: готовых рецептов для построения математических моделей не существует. Это наполовину наука, наполовину искусство.

3. МОДЕЛИ ПРОЦЕССОВ

Изучаемые процессы можно подразделить на природные процессы и процессы с участием человека. В первом случае объект исследования — геологические явления разного характера. Они развиваются и формируются помимо воли и желания человека. Их изучением и занимается наука, называемая геологией. Однако природные процессы не исчерпывают все то многообразие явлений, с которыми приходится сталкиваться геологу как в научной, так и в практической деятельности. Имеются и такие процессы, в которых геолог принимает непосредственное участие. Это прежде всего геологоразведочные работы — процессы поиска и разведки месторождений полезных ископаемых. Эти процессы организуются и направляются непосредственно человеком, при его активном участии. К организуемым человеком процессам относятся также выполнение наблюдений, трансформация и обработка их результатов с целью извлечения геологической информации. Осуществление этих процессов сопряжено с огромными затратами энергии, времени, денежных средств, поэтому необходим поиск путей их эффективной реализации.

3.1. МОДЕЛИ ПРИРОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Первая задача, возникающая при моделировании геологических процессов, — это задача разработать принципы их математического описания. Можно ли говорить, что такие принципы уже сложились? Все геологические процессы — это процессы физической и химической природы (при появлении биологических существ они дополняются процессами биологической природы). Модели физических процессов отличаются внутренним совершенством и практической надежностью; в этом плане с ними не могут сравниться модели других процессов, например общественных. Поэтому успехи моделирования геологических процессов зависят прежде всего от культуры использования фундаментальных принципов математического описания физических явлений для построения математических моделей изучаемых геологических процессов.

Опыт моделирования, накопленный в физике, несет в себе нечто объективное, что не зависит от моделируемой ситуации. Переоценить его трудно. Используемая методология физики направлена на то, чтобы разрозненные опытные факты сконцентрировать и преподнести их в виде физической задачи, допускающей наглядную интерпретацию; затем продемонстрировать, как из известных физических соображений вытекают определенные математические формулы или соотношения. После этого, следя, чтобы не оторваться от физики явления, от связей между математическим и физическим подходами, стараются использовать лишь математические процедуры абстрактного характера, которые позволяют существенно углубиться в суть решаемой задачи, оценить те следствия, которые первоначально предсказать было достаточно трудно.

Описанный путь изучения объектов реального мира является довольно общим и хорошо известным. Примеров, безусловно, может быть приведено много. Одним из ярчайших является пример того, как физические воззрения М. Фарадея, результаты его предельно наглядных, но довольно разрозненных опытов по физике электромагнетизма были облечены Дж. Максвеллом в математическую форму. Любая формула Дж. Максвелла есть адекватное выражение в математических терминах физических опытов М. Фарадея. Математика в этом случае являет собой как бы квинтэссенцию опыта, его мысленное осуществление. И все же математике здесь нельзя отдать первостепенную роль. Поэтому высказывание Р. Милликена, ставшее крылатым, о том, что Дж. Максвелл «облек плебейски обнаженные представления М. Фарадея в аристократические одежды математики», пожалуй, несколько претенциозно.

Известно, что эти «плебейски обнаженные представления», добытые громадным трудом и талантом искуснейшего экспериментатора, были и остаются настолько наглядными и образными, что до сих пор любой инженер, пользуясь только этими понятиями (линии тока, силовое поле и т. п.), может глубоко проникнуть в суть электромагнетизма. Именно эти представления привели Дж. Максвелла к понятию поля (электромагнитного поля) и облегчили ему создание математических соотношений (по современной терминологии — математических моделей), лежащих в основе теории поля.

Очевидно, чтобы прийти к понятию поля как объекта физики, необходима грандиозная работа нестандартного мозга. Это понятие, ставшее теперь фундаментальным, облеченное в абстрактные символы математики, представленное как математические модели и тесно увязанное с физикой, разом охватило большое число разнообразных и иногда, казалось бы, не связанных опытных фактов по электромагнетизму и свело их в единую стройную систему. Более того, математика позволила взглянуть в те неизведанные области явления, куда экспериментатор проникнуть был не в состоянии.

Аналогичную картину можно проследить, если обратиться и к истории астрономии. Революционные идеи Н. Коперника, вероятно, послужили толчком для сбора результатов исключительно точных для того времени и продолжительных наблюдений за движением планет, которые предпринял Т. Браге. Последующая титаническая вычислительная работа И. Кеплера привела его к формулировке замечательных законов. И. Кеплер понял, что орбиты планет лучше всего описываются эллипсами. Этот факт, сначала считавшийся эмпирическим, после работ И. Ньютона стал фундаментальным. Но даже только этот эмпирический факт дал возможность «привести в порядок» движение планет и позволил осуществлять его прогноз с удивительной для того времени точностью.

Венцом же упорядочения мира планет, безусловно, стало открытие И. Ньютоном закона всемирного тяготения (закона гравитации). Математическая модель, соответствующая этому закону, не только легко объяснила законы Кеплера, оказавшиеся по сути дела следствием закона тяготения, но и стала началом начал той классической механики, того мощного раздела физики, без которого, пожалуй, нельзя обойтись при

исследовании любых физических объектов реального мира. Уместно подчеркнуть, что наряду с законом гравитации И. Ньютоном был сделан и другой не менее важный вклад в науку — разработано дифференциальное исчисление. Именно методы дифференциального исчисления позволили действующие в природе силы (понятие чисто физическое) описать аналитически, т. е. перейти от натуральных физических объектов, осуществляющих движение и (или) взаимодействующих друг с другом, к абстрактным математическим выражениям и соотношениям (моделям), «жизнь» которых может протекать как бы независимо от исследуемых объектов физики. Изучение этих абстракций дало возможность существенно расширить и углубить знания о реальном мире, обобщить многие опытные факты, казавшиеся раньше разрозненными и разобщенными, найти количественные соотношения и связи между ними.

Методы дифференциального исчисления — это наиболее мощный аппарат физики. С его помощью, зная некоторые необходимые параметры или константы, возможно обнаружить любую невидимую планету, рассчитать ее траекторию, определить массу, найти расстояние не только до той или иной планеты, но и до любой звезды, установить особенности формы других объектов астрономии, специфику их изменения, движения и т. п. Конечно, все это может быть достигнуто лишь благодаря определенной гармонии в сочетании законов физики и ее опытных данных с математикой.

Для достижения цели в познании природы физических объектов проводится специфическая итерация (последовательные приближения). Так, сначала физика — ее задачи и проблемы, данные экспериментов — стимулирует поиск адекватной математической модели (теории). Математика, расчленив явление на составные части, углубив его понимание и создав прогностический эффект, либо дает право сформулировать эту же физическую проблему на более высоком уровне, либо дает рекомендации по переформулировке физической задачи и постановке новых физических опытов.

Но не только физика и ее объекты доставляют нам руководящие принципы моделирования. В настоящее время и методология описания биологических процессов также относится к хорошо развитым областям. Созданные там методы годятся для описания некоторых явлений и в геологии, куда они переносятся, как правило, по аналогии. И, конечно, сама математика предоставляет настолько общие конструкции и модели, что иногда они могут быть перенесены в геологию в готовом виде. Принципы математического описания геологических процессов во многом сложились под влиянием методологии моделирования процессов физической, химической и биологической природы.

С точки зрения удобства изложения последующего материала мы расклассифицировали модели по их характеру, по способам и положенным в основу этих способов принципам построения. Таким образом модели природных процессов подразделены на три группы: динамические, структурные и вероятностные.

3.1.1. ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Эти модели следовало бы назвать моделями устойчивого, непрерывного движения. Вынесенное же в заголовок название — это дань геологической традиции. Со словом «динамика» у геолога интуитивно ассоциируется целая гамма вполне определенных представлений, в то время как термин «устойчивость» соответствующих ассоциаций не вызывает. Но дело не только в этом. Название «динамические» говорит еще о связи моделей этого типа с представлениями, на которые опирается классическая динамика. Из всех изменений, происходящих в природе, классическая динамика выделяет только движение. Движению свойственны правильность и неизменность. Образ устойчивого гармонического мира оставался идеалом динамики.

Одна из отличительных особенностей классической динамики — строгий детерминизм (принцип детерминированности Ньютона). Движение описывается такими математическими конструкциями, которые позволяют по заданному начальному состоянию однозначно получить все последующие динамические состояния, т. е. траекторию процесса. Тем самым состояние в любой момент времени — единственное и предопределено состоянием в предшествующий момент. Поведение системы на больших промежутках времени можно предсказать, т. е. неопределенность отсутствует.

Динамические модели — наиболее распространенный класс моделей. Естественно, что движение не надо понимать буквально — только как движение материальной точки. Изменчивость, вариация, динамика, эволюция, течение — вот синонимы движения. Поэтому динамическими моделями описывается движение в более широком смысле этого слова — как изменение, как взаимодействие материальных объектов. Это может быть изменение во времени климата, уровня океана, состава пород и т. п.

Динамические модели в простых задачах часто описывают развитие процесса дифференциальным или разностным уравнением, например, вида

$$\dot{x} = f(x, t), \quad (3.1)$$

где f — непрерывная функция; x — состояние системы в момент t ; t — время или пространственная координата; \dot{x} — скорость изменения состояния.

В более сложных случаях, когда исследуются процессы, протекающие в системе, их развитие описывается системой уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x, y, u, v, t); \\ \dot{y} &= f_2(x, y, u, v, t); \\ \dot{u} &= f_3(x, y, u, v, t); \\ \dot{v} &= f_4(x, y, u, v, t). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь мы уже имеем дело с системой моделей. Эта система и отражает те представления об изучаемом явлении, которые имеются у исследова-

теля, описывает логические и причинно-следственные связи, подчиненные единому принципу.

Написанные соотношения между x , y , u , v (их называют фазовыми переменными) должны обеспечивать замкнутость модели. О модели говорят, что она замкнута, если начальное состояние системы однозначно определяет динамический ряд ее последующих состояний. Только замкнутая математическая модель может служить источником исследований математического характера. Замкнутость модели обеспечивается тем, что из множества возможных допустимых движений она должна описывать единственное. Одним из принципов отбора движений, который сужает их возможное множество, являются законы сохранения (количества движения, энергии, импульса, массы).

Выбор фазовых переменных диктуется возможностью записать с их помощью законы сохранения, т. е. ввести специальные соотношения между фазовыми переменными. Но законы сохранения не выделяют единственного движения и не исчерпывают всех принципов отбора. На то множество траекторий, которое уже отобрано законами сохранения, необходимо наложить дополнительные ограничения, вытекающие из других принципов отбора. В данном случае первостепенное значение надо отвести принципу устойчивости, ибо, как уже отмечалось, здесь наш интерес сосредоточен на реализации таких форм движения, характерное время существования которых достаточно велико. Согласно этому принципу реализуются лишь устойчивые формы движения. Неустойчивые же формы движения, если они возникают, очень быстро разрушаются в силу принципиальной стохастичности естественных процессов, и поэтому они практически не наблюдаются.

Если в результате мы все же не получаем замкнутую модель, то при записи уравнений (3.2) необходимо использовать эмпирические соотношения, выраженные в виде конечных формул. Их примерами могут служить зависимость скорости таяния льда от температуры и давления; зависимость скорости течения реки от перепада высот и т. д. К ним можно добавить и другие принципы отбора, например второй закон термодинамики, согласно которому реализовываться могут лишь те траектории, вдоль которых энтропия не убывает. Этот закон дает также способ проверки получаемых эмпирических соотношений: они не должны нарушать его.

Совершенство модели определяется тем, до какой степени она сужает множество реальных движений. Очень важными здесь становятся различного рода условия (ограничения): граничные, начальные и др. Эти условия определяют диапазон применимости выбранных уравнений.

Те математические модели, которые можно использовать для описания геологических процессов, должны учитывать чрезвычайное разнообразие различных по своему характеру взаимодействий. Кроме того, и исходная информация, как правило, не отличается высокой точностью. К тому же наблюдаемый результат — это итог большого числа локальных и индивидуальных особенностей; движение здесь проявляется в форме общей тенденции. Поэтому по терминологии, которая принята в исследовании операций, уравнения системы (3.2) должны рассматриваться

как уравнения динамики средних. В геологической литературе осредненную динамическую траекторию (тенденцию) чаще называют закономерной составляющей (трендом), а индивидуальные отклонения от нее — случайной составляющей. Нередко, используя радиотехническую терминологию, говорят еще о полезном сигнале и шуме. Можно встретить также деление на полезную и мешающую информацию, эти термины взяты из теории информации.

Примеров динамического моделирования геологических процессов, выполненного на высоком уровне, не очень много, но все же они имеются. Остановимся на модели, описывающей процесс эволюции Земли. Прямая информация об этом процессе отсутствует, и по этой причине исследователи идут по пути его моделирования с теми или иными предположениями об осуществляющих его механизмах и начальных условиях. Лишь совсем недавно эволюция составных элементов Земли и, следовательно, ее целостного облика стала рассматриваться с единых позиций, системно. При этом считается, что наша планета есть целостная система, все элементы которой: ядро, мантия, кора, гидросфера, атмосфера и внешняя космическая оболочка — теснейшим образом взаимосвязаны в своем развитии.

Глубинные процессы, их эволюционное развитие определяют состояние и физические свойства вещества внутри Земли, т. е. внутреннее строение планеты. Внутреннее строение Земли в свою очередь обуславливает ее внешний облик. Поэтому, говоря об эволюции Земли как системы, мы имеем в виду изменения и ее внутреннего строения, и ее внешнего лика. Моделирование процесса эволюции Земли предпринимается уже на протяжении многих лет. Первые исследования, естественно, касались внешнего лика Земли, ее формы.

И. Ньютон первый смог теоретически обосновать, что поверхность Земли не может быть сферой. Действительно, собственные гравитационные эффекты Земли непременно должны искажаться силами, возникающими в результате ее вращения. А. Клеро развил и детализировал эти идеи, показав аналитически, что если бы Земля представляла собой идеальную сферу и распределение в ней плотности было однородным или зависело только от радиуса, то сила притяжения в любой точке вне сферы или на сфере была бы одинакова. Центробежные силы, возникающие вследствие вращения Земли, вызывают отклонение ее фигуры от идеальной сферы. Эффекты гидростатического равновесия приводят к тому, что фигура Земли должна лучше согласовываться с эллипсоидом вращения (сфероидом), чем со сферой.

Данные геодезических измерений и результаты гравитационных наблюдений свидетельствуют в пользу того, что сфероид близок к гидростатическому равновесию и плотность внутри Земли увеличивается от периферии к ее центру. Этот же результат подтверждается при расчете и анализе значения безразмерного момента инерции Земли. Дело в том, что для тел с различным распределением в них плотности момент инерции различен, в чем легко убедиться путем прямых численных расчетов (математическим моделированием). Интересно отметить, что Луна имеет примерно постоянную плотность, не изменяющуюся от центра к перифе-

рии, что подтверждается измерениями ее момента инерции с искусственных спутников и другими независимыми исследованиями [Ботт М. Внутреннее строение Земли. М., Мир, 1974].

Более детальный анализ реальной фигуры Земли свидетельствует о том, что она все же отклоняется и от сфероида. Пожалуй, поверхность фигуры, названной геоидом, меньше отклоняется от реальной поверхности Земли. Математическое описание геоида (математическая его модель) намного сложнее модели сфероида. Геоид, как и сфероид, представляет собой эквипотенциальную поверхность, которая совпадает со средним уровнем гипотетического Мирового океана. Однако геоид отклоняется от сфероида в результате возвышения или погружения рельефа местности и вследствие иррегулярности распределения масс (горы, материки, океаны, породы неодинаковой плотности).

Казалось бы, что в океанических районах, где масса на единицу площади меньше (вода, как известно, имеет меньшую плотность, чем породы материка), эквипотенциальная поверхность геоида окажется ниже сфероида. Напротив, в горных областях, где масса на единицу площади больше, эквипотенциальная поверхность должна возвышаться над сфероидом. Иными словами, уклонение геоида от сфероида должно быть связано с особенностями распределения масс Земли: значения силы тяжести над материками в среднем должны быть выше значений силы тяжести над океанами. Однако реальные измерения силы тяжести такой закономерности не обнаруживают. Присутствие даже высокой горы не вносит дополнительного гравитационного эффекта в наблюдаемые значения силы тяжести. Отсюда было сделано заключение, что континентальные и океанические области изостатически скомпенсированы. Это и есть хорошо известный принцип изостазии.

Итак, модельные аналоги Земли, представляемые в виде сферы, сфероида, геоида, упрощают реальную картину, но в то же время компактное их описание в терминах математики позволяет осуществить довольно углубленный анализ реального объекта. Скажем, для таких тел можно сравнительно легко аналитически получить их количественные гравитационные эффекты. Сравнение модельных гравитационных эффектов с измеренными позволяет понять, чего не хватает до полного описания реально фиксируемого гравитационного поля. Такой путь наводит на разного рода справедливые догадки, на формулировку иной, более правдоподобной, гипотезы и вместе с тем открывает грамотный и эффективный путь ее проверки на базе количественных мер.

Так, именно математический путь позволил расщепить общий гравитационный эффект, создаваемый реальной Землей, на отдельные, хорошо интерпретируемые суммарные (суперпозиционные) эффекты. В частности, легко обнаруживается, что сумма гравитационного эффекта сферы и гравитационного эффекта первого порядка, связанного с вращением Земли и вызывающего ее эллиптичность, равна гравитационному эффекту сфероида. В более сложном случае оказывается, что гравитационный эффект сфероида вместе с добавочным гравитационным эффектом второго порядка, связанным со слабой грушевидностью Земли, вызванной,

вероятно, отклонением реального равновесия от гидростатического, равны гравитационному эффекту геоида.

Такое расщепление оказывается весьма плодотворным, ибо появляется возможность провести раздельный и вместе с тем тщательный анализ эффектов первого и второго порядка, найти ряд количественных параметров, характеризующих фигуру Земли, выяснить причины того, почему этот параметр имеет наблюдаемое значение и что произошло бы, если бы он принял иное значение. Именно величина того или иного параметра позволила вскрыть характерные особенности внутреннего строения Земли (например, оценить поведение плотности с глубиной) и даже утвердиться в том, что изменение плотности самого внешнего слоя Земли носит изостатический (компенсационный) характер. Несмотря на то, что каждая модель не вполне тождественна реальному объекту, сравнение ее с этим объектом вносит позитивный штрих в его познание.

Для описания процесса эволюции Земли одних моделей ее формы, очевидно, недостаточно. Они должны быть дополнены прежде всего моделями внутреннего строения планеты.

Существенный вклад в познание внутреннего строения Земли внесло комплексирование разнохарактерных геофизических данных на основе методологии физики. Так, уравнение Адамса—Вильямсона, явившееся основой для оценки физических свойств различных оболочек недр Земли, связывает изменение с глубиной плотности ρ , ускорения свободного падения (силы тяжести) g и различных видов скорости распространения упругих колебаний (скорости продольных v_p и поперечных v_s волн). В основу вывода уравнения положены физические явления, допускающие наглядную интерпретацию. При этом известные физические законы, выраженные в терминах математики, дают право оценить, каким образом то или иное свойство глубинных оболочек Земли будет меняться от ее периферии к центру.

Например, из законов гидростатики известно, что давление p , которое испытывает вещество, увеличивается с глубиной r пропорционально произведению ускорения свободного падения на плотность:

$$dp/dr = -g(r)\rho(r). \quad (3.3)$$

В то же время при увеличении давления плотность вещества возрастает со скоростью, определяемой модулем всестороннего сжатия k :

$$k = \rho(r)(dp/d\rho).$$

С другой стороны, из сейсмологии известно, что

$$k = [v_p^2 - (4/3)v_s^2]\rho,$$

причем параметр $[v_p^2 - (4/3)v_s^2]$ называют сейсмическим параметром и обозначают его Φ .

Исключив из этих уравнений функции ρ , получим

$$d\rho/\rho(r) = [g(r)/\Phi(r)]dr.$$

Это и есть уравнение Адамса—Вильямсона, которое было положено в основу расчета изменения плотности вещества Земли от ее периферии к центру. Вид уравнения свидетельствует, что его интегрирование легко можно выполнить численными методами, если имеется информация об изменении с глубиной сейсмического параметра Φ , т. е. если оценены скорости продольных и поперечных волн различных оболочек земных недр. Методика извлечения такой информации сравнительно давно разработана сейсмологами.

Конечный результат (распределение плотности вдоль земного радиуса), как понятно, будет существенно зависеть не только от наиболее реалистичной оценки функции Φ , но и от начального значения плотности поверхностного слоя ρ_0 . Однако можно варьировать наиболее правдоподобными функциями Φ и значениями плотности поверхностного слоя ρ_0 , а правильность решения контролировать двумя довольно простыми параметрами, значения которых известны априорно по данным других независимых наблюдений. Это значение массы Земли

$$M = 4\pi \int_0^R r^2 \rho(r) dr$$

и значение момента инерции

$$I = \frac{8}{3}\pi \int_0^R r^4 \rho(r) dr.$$

Значение момента инерции, как мы отмечали, существенно зависит от характера распределения плотности земных недр.

Описанная методика успешно была использована многими геофизиками, занимавшимися вопросами изучения внутреннего строения Земли [13]. В результате были получены наиболее известные и популярные в настоящее время модели изменения с глубиной плотностной характеристики земных недр. Известно, что распределение плотности является ключевой характеристикой для определения изменения других глубинных параметров Земли. В частности, как свидетельствуют приведенные выше формулы, возможно получить функцию изменения с глубиной давления p . Если же известны ρ и p как функции глубины, то тем самым можно найти уравнение состояния земного вещества $p = p(\rho)$. Сравнение этого уравнения с уравнениями состояния различных горных пород и минералов, полученными на основе лабораторных экспериментов, дает право приступить к оценке конкретного вещественного состава земных недр.

Модель эволюции Земли [13] вбирает в себя в качестве составных частей только что рассмотренные модели, описывающие форму и внутреннее строение планеты, кстати сказать, на данный момент времени. В качестве основного предположения в эволюционной модели принято условие однородности состава первоначального вещества нашей планеты в момент ее образования. Это условие вытекает из аккреционной теории происхождения планет О. Ю. Шмидта. Дальнейшая эволюция недр планеты осуществлялась в результате гравитационной дифференциации вещества.

Более того, гравитационная дифференциация, по мнению авторов модели [13], предполагает не только механическое перемещение более плотного вещества к центру планеты, но и воздымание менее плотного вещества вверх. Наряду и одновременно с гравитационной дифференциацией происходят разного рода химико-плотностные превращения. В конечном итоге все это определяет расслоение недр Земли на оболочки, причем более глубокие оболочки состоят из более тяжелых веществ.

Так, если первоначально однородная планета состояла из n веществ с удельными концентрациями c_1, \dots, c_n , плотности которых $\rho_1(p, T), \dots, \rho_n(p, T)$ при любых встречающихся внутри планеты давлениях p и температурах T распределены в порядке $\rho_1(p, T) > \dots > \rho_n(p, T)$, то по завершении процесса дифференциации планета распадается на n оболочек (слоев). Каждая из них будет состоять из одного вещества c_i , а порядок следования оболочек будет соответствовать указанному выше порядку распределения плотностей веществ. Естественно, что ядро будет образовано веществом c_1 с плотностью $\rho_1(p, T)$.

При построении своей модели процесса авторы работы [13] приняли те же исходные положения гидростатики, о которых шла речь выше, т. е. уравнение (3.3), в котором $g = GM/r^2$, где M — масса Земли; r — радиальная координата; G — гравитационная постоянная.

Это уравнение позволяет описать распределение по радиусу Земли давления p и плотности ρ для первоначально однородной планеты, состоящей из n веществ с указанными удельными концентрациями, а затем и для неоднородной планеты, находящейся в некоторой стадии гравитационной дифференциации. Решение уравнения (3.3) отыскивалось в предположении, что зависимость плотности от давления $\rho_i(p)$ для каждого из составных веществ планеты с концентрациями c_i может быть аппроксимирована параболами. Полученное решение дает распределение плотности (соответственно и давления) в каждом из n слоев (оболочек). Однако решение зависит от параметров, определяющих расслоение, которые находятся из условия, что плотность вещества в центре Земли есть величина конечная, давление на поверхности равно нулю, величины p и g на границах слоев не терпят разрыва (хотя плотность вещества на границах оболочек может меняться скачком), а масса каждого слоя по завершении дифференциации равна $c_i M$, где M — масса Земли.

Конкретно авторы рассмотрели модель, состоящую из двух веществ: ядерного с концентрацией c и мантийного с концентрацией $1 - c$. Любая стадия эволюции (гравитационной дифференциации) в этом случае характеризуется долей κ уже отдифференцированного ядерного вещества. Понятно, что κ является еще одним параметром решения (эволюционным параметром). Соответственно ядро состоит из одного вещества и его масса равна κM . Мантийная оболочка состоит из двух веществ: ядерного и мантийного, распределенных в ней с постоянными концентрациями $(1 - \kappa)c/(1 - \kappa c)$ и $(1 - c)/(1 - \kappa c)$. Масса оболочки на этой стадии равна $(1 - c)M$.

В соответствии с полученным решением уравнения (3.3) и значениями тех параметров, которые не зависят от κ (они были найдены из информации о современной структуре планеты на основе излагаемой модели),

можно для каждого значения κ рассчитать радиус ядра и радиус Земли, радиальное распределение плотности (а значит, плотность в центре Земли и скачок плотности на границе ядра), радиальное распределение давления (следовательно, давление в центре и на границе ядра), скорость вращения Земли, энергию, освобождающуюся при гравитационной дифференциации.

Очевидно, что эволюционный параметр κ изменяется во времени от нуля до единицы. Равенство $\kappa = 1$ означает, что процесс дифференциации завершился. Проследивая изменение значения κ во времени (функцию, описывающую это изменение, авторы вывели в предположении, что скорость изменения κ пропорциональна площади поверхности ядра и средней концентрации ядерного вещества в мантии), можно восстановить поведение всех указанных выше величин (параметров структуры планеты) во времени. В частности, для современного состояния недр Земли, т. е. для доли отдифференцированного вещества κ , обусловившего радиус современного ядра, решение уравнения (3.3) очень близко к тому, что дает методика, основанная на уравнении Адамса—Вильямсона.

Авторы работы [13] отмечают, что на тектоническую активность может влиять скорость изменения во времени любого из рассмотренных параметров. В частности, приводятся следующие, полученные из модели результаты, представляющие интерес в геологическом отношении. В процессе эволюции плотности в центре Земли увеличивается медленно, давление же растет быстрее. Скачок плотности на границе ядра растет мало. Скорость вращения Земли за всю историю увеличилась примерно на 14%; радиус Земли сократился на 25 км. Радиус ядра растет как $r_{\text{я}} = \kappa^{1/3}$. Максимум скорости дифференциации был достигнут 1,35 млрд. лет назад. С этим максимумом авторы связывают готскую тектоно-магматическую эпоху, разделяющую ранний и средний рифей, и указывают, что в это время, по-видимому, произошли коренные изменения структурного плана коры и сформировалась система подвижных поясов неогена.

На это же время приходится максимум энерговыделения Земли. В целом для планеты баланс изменений гравитационной энергии положительный за всю историю (при любом времени t) и растет со временем. Однако, если ядро поставляет энергию, то мантия в целом ее поглощает. Наибольший темп энерговыделения единицей объема отмечается в центре Земли, причем своего максимального значения он достиг через 2,5 млрд. лет с момента образования Земли. Большие положительные значения рассматриваемого показателя в течение всего времени приурочены к ядерной зоне, а мантийная область характеризуется его отрицательными значениями.

Таким образом в слое, расположенном над сферической поверхностью с радиусом 4000 км, гравитационная дифференциация всегда сопровождается разуплотнением с поглощением энергии. Наибольшее поглощение энергии происходило на радиусе 5000 км в указанную эпоху максимальной скорости дифференциации. На это же время приходится максимум и еще одного показателя — энерговыделения сферических слоев единичной толщины. Наибольшие значения этого показателя связаны с границей

ядро—мантия (приурочены к ней). Зона, лежащая выше этой границы, всегда характеризуется отрицательными значениями энерговыделения (поглощением энергии). В настоящее время доля уже отдифференцированного ядерного вещества равна $\chi = 0,863$, так что процесс гравитационной дифференциации на Земле недалек от своего завершения; тектонические процессы будут продолжаться еще примерно 1,9 млрд. лет.

В настоящее время имеется много доказательств того, что тектонические процессы на поверхности Земли тесно связаны с конвективными движениями вещества в глубоких слоях мантии. Поэтому авторы цитируемой работы попытались связать конвективный массообмен с эволюционным параметром χ [13]. Для этого была введена характеристика m , отражающая долю массы мантии, прошедшую дифференциацию. Функциональная связь m с χ позволила теоретически обосновать и численно оценить количество тектонических циклов, необходимое для полного завершения процесса гравитационной дифференциации ядерного вещества (42 цикла), а также количество уже завершившихся к настоящему времени тектонических циклов (22 цикла). Сопоставление выведенных теоретически функциональных зависимостей χ от m или от t с фактическими данными, собранными в результате ряда геологических исследований, дает основание считать, что теория как будто бы не противоречит эмпирическим наблюдениям, а следовательно, имеется тесная связь между процессом образования земного ядра и тектоническими движениями на поверхности Земли.

Конкретнее, авторы работы [13] полагают, что все крупномасштабные перемещения земной коры (например, движение литосферных плит) непосредственно зависят от процесса гравитационной дифференциации земного вещества, в результате чего формируются плотное окисножелезное ядро и остаточная силикатная оболочка. Именно такой процесс с неизбежностью порождает в силикатной, частично еще не отдифференцированной оболочке Земли плотностную конвекцию. Причем процесс плотностной конвекции является нестационарным, поскольку он обуславливает необратимые изменения плотности в недрах Земли. Течение этого процесса во времени сопровождается определенными перестройками, вызывающими активизацию тектонических сил.

Тектоническая активизация носит квазипериодический характер, ибо конвективные движения, зарождаясь, совершают определенный цикл. В результате конвективных движений происходит перемещение блоков внешней оболочки Земли (литосферных плит). При этом возможно либо объединение отдельных континентальных плит в единый суперконтинент (например, образование Мегатеи в протерозое или Пангеи в палеозое), либо их дробление с раздвижением материков. Это, в сущности, и определяет концепцию тектоники плит, широко распространенную среди значительной части геологов.

Моменты объединения материков, как понятно, должны сопровождаться проявлением наиболее грандиозных геологических событий, в частности образованием геологических структур глобального масштаба (зон субдукции, вулканизма, активизации тектонических сил и т. п.). Это подтверждается многими геологическими свидетельствами. Например,

показано, что к определенным геологическим периодам тяготеют всплески относительного прироста объема земной коры.

Это находит отражение и в результатах теоретических построений. Так, по аналогии с эволюционным параметром Земли χ введен параметр тектонического развития Земли l , который показывает, какая часть конвективного массообмена в мантии уже завершена. Скорость изменения этого параметра (dl/dt) также есть функция от параметра χ . Зная число осесимметричных конвективных потоков и полярный угол, определяющий положение границы восходящего (нисходящего) конвективного течения в нижней мантии, можно построить кривую изменения тектонической активности Земли во времени. Эта кривая имеет квазипериодический характер и хорошо коррелирует с кривой относительного прироста объема земной коры во времени, полученной по геологическим данным.

Рассмотренная модель, раскрывающая особенности эволюции недр нашей планеты и влияние этих особенностей на формирование внешней оболочки Земли, заимствована из новой области знаний — геодинамики, получившей становление и развитие лишь в последние 20—30 лет. Рождение геодинамики как науки связывается с попыткой обосновать концепцию тектоники плит (дрейфа континентов). Хотя эта концепция и уязвима с точки зрения непримиримых ее оппонентов [13], но все же надо заметить, что ее позиция довольно сильна. С помощью подходов и методов геодинамики уже сейчас становятся объяснимыми многие факты из области геологии, геофизики, палеонтологии и т. п., которые до сих пор трудно поддавались увязке. И все же саму концепцию тектоники плит точнее следует определить как современную геологическую парадигму, а не как строго доказанную и завершенную теорию, ибо, безусловно, имеется немалая вероятность того, что геологические факты, укладываемые в концепцию тектоники плит, могут быть объяснены с позиций иной, не менее правдоподобной гипотезы.

Что оказывается наиболее привлекательным в геодинамике, так это тщательное обоснование модели при ее построении. Эмпирический, теоретический и физический материал — все идет на формирование модели. Такой подход оказывается не только изящным, ибо основой его являются критерии физики и математики, но и наиболее эффективным, ибо модель построена так, чтобы возможно было оценить ее согласованность с реальностью на основе тех данных, которые доставляют геологические наблюдения. Можно сказать, что подходы и методы геодинамики являются действительно системными. Исследователи, говоря словами нобелевского лауреата Ф. Крика, не скрупулезно, «под микроскопом» изучают отдельные шестерни и блоки часов для анализа часового механизма, а вооружившись эвристической концепцией часов как целого (целостного объекта), пытаются оценить особенности функционирования отдельных шестерен и блоков в их тесной взаимосвязи и взаимодействии. Набор букв — это еще не слово, как, впрочем, и набор слов еще не фраза со смысловой нагрузкой. Имей элементы ребуса, необходимо владеть еще и ключом к его разгадке. Этим ключом и является модель. С ее помощью различные элементы ребуса и могут быть увязаны семантически.

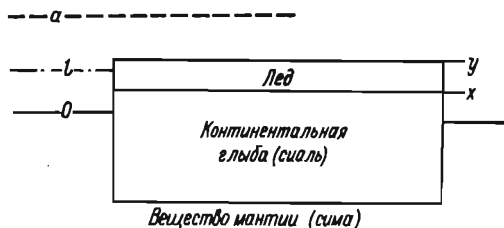


Рис. 3.1. К схеме образования льда.

Интерпретация геологических фактов на основе моделей геодинамики показывает, что эволюция нашей планеты направляется и регулируется законами физики. Например, именно из физических соображений, как показали расчеты по оценке критерия Релея, в мантии маловероятна тепловая конвекция (для ее реализации необходим перепад температур, достигающих 2600°C , что в принципе невозможно), и поэтому наиболее правдоподобной и обоснованной является гипотеза не тепловой дифференциации, а химико-плотностной конвекции — следствия гравитационной дифференциации.

Рассмотрим еще один пример. Исследование, о котором пойдет речь, не затрагивало непосредственно геологических проблем, но оно несет на себе несомненно геологическую нагрузку. Речь идет о вопросе, который всегда привлекал внимание геолога, — происхождение ледниковых периодов. Анализу причин и механизмов, порождающих оледенения, объяснению этого явления на основе математического моделирования посвящена работа В. А. Костицина [31]. Рассмотрев гипотезы, касающиеся происхождения оледенений и их периодичности, В. А. Костицин приходит к выводу, что эти гипотезы являются несостоятельными и что в процессах оледенения большую роль играют локальные механизмы. Один из таких механизмов В. А. Костицин и рассматривает — это механизм типа пружинного маятника. Система его рассуждений сводится к следующему.

Пусть на континентальной глыбе, погруженной в вещество мантии и, следовательно, обладающей способностью к вертикальным движениям, вследствие горообразования или другого локального процесса появляется слой льда толщиной y (рис. 3.1). Буквой l обозначим высоту, ниже которой невозможно образование льда, а выше которой невозможно таяние льда (разумеется, речь идет не о сезонных, а о среднегодовых характеристиках). В качестве рабочей гипотезы полагаем, что интенсивность образования льда на уровне $z > l$ пропорциональна величине $z - l$ и аналогично интенсивность его таяния на уровне $z < l$ пропорциональна $l - z$, т. е. интенсивность процесса определяется расстоянием по вертикали до линии l .

При $x > l$ лед нигде не тает и скорость изменения толщины льда \dot{y} будет

$$\dot{y} = e(x + y - l), \quad x > l. \quad (3.4)$$

При $x < l < x + y$ лед образуется на верхней границе слоя и тает на нижней. Это даст

$$\dot{y} = \epsilon(x + y - l) - k(l - x), \quad x < l < x + y, \quad (3.5)$$

где ϵ и k — интенсивность соответственно образования и таяния льда.

При $x + y < l$ таяние происходит с обеих сторон слоя:

$$\dot{y} = -k(l - x) - k(l - x - y), \quad x + y < l. \quad (3.6)$$

Уравнения (3.4) — (3.6) описывают изменения высоты слоя льда при различных условиях. В соответствии с принципом изостазии дифференциальное уравнение вертикальных перемещений континентальной глыбы под тяжестью накапливающегося льда при учете вязкости и при пренебрежении ускорениями имеет вид

$$\dot{x} = na - nx - \tau y,$$

где a — уровень, соответствующий изостатическому равновесию при отсутствии льда, $a = h[1 - (q/\sigma)]$; h — коэффициент пропорциональности; $n = g\sigma/r$; $\tau = g\eta/r$; q — плотность континентальной глыбы; η — плотность льда; σ — плотность вещества мантии; r — коэффициент сопротивления (трения); g — ускорение свободного падения.

Уравнения (3.4) — (3.6) имеют различные решения. Если осадки довольно обильные (от них зависит коэффициент ϵ), но одновременно и таяние k чрезвычайно интенсивное, то наблюдается периодичность оледенения: появление льда вызывает перегрузку континентальной глыбы и ее погружение в магму. При этом ледяной слой оказывается ниже относительно уровня l и происходит таяние льда. Облегченная континентальная глыба всплывает и достигает высоты, на которой в результате выпадения осадков снова накапливается лед, и т. д. Межледниковый период наступает в том случае, если при погружении глыбы в мантию лед полностью тает за конечное время.

Если осадки обильные, а таяние идет недостаточно быстро, процесс стремится к стационарному оледенению с довольно значительной толщиной льда. Можно предположить, что именно этот случай реализован в Антарктиде и Гренландии. Если климат сухой и резко континентальный (коэффициент ϵ очень мал), то на плоскогорье мы имеем противоположный случай — стационарный режим с бесконечно малой или нулевой высотой ледяного слоя (как в Северной Азии).

Величины ϵ и k могут меняться во времени. Большую роль в этом В. А. Костицин отводит морским течениям (направление которых может меняться вследствие вертикальных движений дна океана), а также колебаниям климата и влиянию самого ледника. Вследствие изменений соотношения между выпадением осадков и таянием льда под действием указанных причин будет реализовываться тот или иной режим оледенения. Таким образом, оледенение по В. А. Костицину связано с действием целого ряда локальных механизмов. Малых изменений известных факторов вполне достаточно, чтобы вызвать явления масштаба четвертичных или пермо-карбонových оледенений.

Рассмотренный механизм возникновения периодических процессов оледенения, основанный на упругих свойствах среды, в которую погружены континентальные плиты, не является единственным. Еще один механизм был проанализирован в 80-е годы братьями В. Я. и С. Я. Сергиными [49]. В полученной этими авторами системе обыкновенных дифференциальных уравнений нашла отражение тщательно продуманная и построенная ими схема причинных связей. Их работа является, видимо, первым примером применения современных методов системного анализа к изучению рассматриваемого явления. Схема изученного ими механизма выглядит примерно следующим образом.

Появление ледника приводит к увеличению отражения солнечной энергии с поверхности Земли, что вызывает общее похолодание, благоприятствующее разрастанию ледника. Это в свою очередь приводит к еще большему уменьшению количества тепла, получаемого от Солнца, и, следовательно, к дальнейшему падению средней температуры планеты и т. д. Однако изменение площади, занимаемой ледником, имеет и другие последствия. В связи с похолоданием уменьшается испарение влаги с поверхности океана, к тому же площадь этой поверхности сокращается из-за понижения уровня океана, что вызвано увеличением площади ледника. В результате климат становится засушливым и, как следствие, осадки начинают выпадать в меньшем количестве.

Это в свою очередь приводит к увеличению числа солнечных дней, и, несмотря на уменьшение средней температуры планеты, лед начинает таять, его площадь сокращается. Наступает межледниковый период. В это время отражение солнечного излучения с поверхности Земли уменьшается, вследствие чего повышается средняя температура и соответственно увеличивается испарение с поверхности океана. Растет влажность климата, начинает выпадать больше осадков, увеличивается число пасмурных дней. В результате количество снега, растаявшего за лето, может оказаться меньше, чем его выпало зимой. Ледники снова начинают наступать, знаменуя окончание межледникового периода. Такова схема периодического цикла.

Но процесс может носить и аperiodический характер. Все зависит от соотношения рассмотренных факторов. Примером аperiodического характера процесса является оледенение Антарктиды: здесь осадков выпадает больше, чем успевает стаять за короткое холодное и влажное лето.

Уравнения, описывающие механизм оледенений, рассмотренный В. Я. и С. Я. Сергиными, мы здесь не приводим ввиду их относительной сложности.

Н. Н. Моисеев в своем обширном комментарии к книге В. А. Костицина [31] отмечает, что история оледенения Антарктиды начиная с олигоцена — это наглядная иллюстрация действия обоих механизмов, изученных В. А. Костициным и В. Я. и С. Я. Сергиными. Механизм, описанный В. А. Костициным, был включен в действие начавшимся в олигоцене оледенением. Механизм, описанный В. Я. и С. Я. Сергиными, вступил в действие в связи с возникновением Антарктического циркумполярного течения, которое полностью отрезало прибрежные воды Антарктиды

от Мирового океана, что привело к увеличению влажности и числа пасмурных дней. Н. Н. Моисеев замечает также, что вместе с ростом антарктического ледника здесь непрерывно повышается аридность климата, что сказывается на климате всего земного шара, и прежде всего субтропических областей Австралии и Африки. В этой связи надо отметить, что В. А. Костицин обратил внимание на то, что когда в пермо-карбоне в Южном полушарии наблюдалось оледенение, в Северном отмечалось значительное усиление аридности климата. Этот факт можно объяснить только в рамках моделей, представляющих процессы влагообразования.

Здесь необходимо отметить следующее. Все наше внимание было сосредоточено на моделях неживой природы. Однако предметом изучения одной из геологических наук — палеонтологии — является эволюция именно живой материи. Более того, на ход многих геологических процессов огромное влияние оказывает живая природа. Согласно учению В. И. Вернадского геологическая история Земли тесно связана с историей живого на ней. Эволюция нашей планеты и развитие жизни глубоко взаимосвязаны. Весь лик Земли, ее атмосфера и гидросфера, толщи осадочных пород, залежи многих полезных ископаемых обязаны своим существованием жизнедеятельности живой материи. Точнее, отмечается взаимообусловленность живой и неживой материи, их коэволюционное взаимодействие.

С этой точки зрения открытие ископаемых организмов, существовавших на Земле около 3,8 млрд. лет назад, имеет огромное значение. Этим устанавливается, что длительность жизни на нашей планете не намного уступает всей истории Земли как геологического тела.

Концепция В. И. Вернадского знаменовала новую важную ступень в развитии естествознания и даже в истории цивилизации. Если И. Ньютон был первым, кто превратил общие идеи о движении в стройную математическую схему и поднял на новый уровень естественнонаучное миропонимание, а Ч. Дарвин был первым, кто перенес идеи движения (эволюции) как объединяющее начало в область живой материи, то В. И. Вернадский первым сформулировал идею единства всех эволюционных процессов, протекающих на Земле, объединив тем самым живое с неживым, и создал новую естественнонаучную дисциплину — биогеохимию, включающую в себя науки о неживой и живой природе. В его концепции ноосферы в один узел оказались завязанными процессы эволюции неживой природы, живой материи и человеческого общества.

Как и в процессах, происходящих в неживой природе, в основе механизмов отбора на биотическом уровне лежат законы сохранения вещества и энергии. Поэтому и здесь процесс моделирования начинается с записи законов сохранения. Но при описании биологических процессов эти законы принимают специфическую форму, будучи выраженными в тех переменных и терминах, которые наиболее характерны для изучаемого явления. Так, при моделировании динамики биологических макросистем основное внимание уделяется процессам метаболизма — переносу вещества и энергии. Поскольку наиболее характерным свойством таких систем является структура потребления пищи, то основную нагрузку в этом процессе несут трофические связи — «кто кого ест и в каком ко-

личестве». Эти связи формируют каналы, по которым происходит обмен веществом и энергией, и определяют основной механизм отбора. Поэтому законы сохранения вещества и энергии должны быть выражены в терминах трофических связей.

Однако и здесь одних законов сохранения для замыкания модели недостаточно. Если в физике замыкание обеспечивалось введением эмпирических замыкающих соотношений, то в биологии эту роль играют функции поведения (система обратных связей). Они тоже получаются в результате опытного изучения. Но здесь они становятся очень опосредованными и сложными. Функции поведения являются следствием стремления организма или сообщества организмов сохранить свою жизнеспособность в данных условиях. Это стремление порождает вполне определенные механизмы отбора реальных движений (поведения), невыводимые из принципов, определяющих течение процессов в неживой природе.

Первые работы по изучению динамики биологической системы связаны с именем знаменитого итальянского математика и естествоведка В. Вольтерра. Разработанные им модели часто называют моделями «хищник—жертва». Они нашли широкое применение не только при моделировании биологических систем. В экономике рассматривается, например, аналогичная схема «затраты—выпуск». В геофизике работа магнитного динамо также описывается в терминах подобных моделей.

Нам неизвестны примеры моделирования геологических процессов, где бы учитывалось взаимодействие процессов, протекающих в живой и неживой природе. Однако имеется большое число работ, где рассматриваются модели биосферы. Эти работы выполнены не для решения геологических проблем, но рассматриваемые в них вопросы имеют непосредственное отношение к пониманию геологической эволюции как истории процессов, протекающих в биосфере. Поэтому мы не можем пройти мимо этих работ и кратко на них остановимся.

Первой работой в этом направлении, видимо, следует считать уже рассмотренное выше выполненное в 30-х годах исследование В. А. Костицина [31], примечательное во многих отношениях. В. А. Костицин — соратник и последователь В. И. Вернадского. Его работа — пример решения задач, которые можно уже отнести к теории ноосферы. Он рассматривает общие проблемы развития атмосферы и биосферы и механизмы, определяющие их динамику. Но В. А. Костицин также соратник и сподвижник еще и В. Вольтерра. Он рассматривает основные моменты эволюции состава атмосферы и роль органической материи в этом процессе.

В частности, В. А. Костицин анализирует круговорот углерода и кислорода. Живая материя, по В. А. Костицину, является фактором, способным производить фундаментальные преобразования атмосферы и земной коры. Роль растений и животного мира в этом круговороте совершенно различны. Растительный мир является автоматическим регулятором, реагирующим на каждое увеличение количества углекислого газа усилением его потребления. Животные же не синтезируют собственного органического вещества, но заимствуют его у растительного мира. Весь углерод, входящий в ткани животных, прямо или косвенно проис-

ходит от растений. В. А. Костицин отмечает, что это «отличие чрезвычайно важно и может породить последовательность интересных биологических и геологических явлений» [31, с. 11].

Для описания процессов, происходящих в атмосфере, В. А. Костицин рассматривает пять фазовых переменных: x — масса свободного атмосферного кислорода (расходуется на дыхание животных и растений и поступает в атмосферу в процессе питания растений); y — общая масса углекислоты в атмосфере и океане (расходуется на питание растений, поступает в атмосферу при дыхании и разложении растений и животных; при этом не учтены другие источники углекислого газа — вулканизм, эрозия и т. д.); v — общая масса кислорода и углерода в растениях (увеличивается в результате усвоения газов при питании растений углекислотой и при дыхании растений кислородом и уменьшается в результате отдачи газов при питании, дыхании и разложении растений, кроме того, уменьшается и по той причине, что животные питаются растениями); u — общая масса кислорода и углерода в животных (растет при дыхании животных и их питании растениями, расходуется при дыхании и разложении животных); s — общая масса кислорода и углерода в остатках растений и животных (газы, потерянные атмосферой, накапливаются в земной коре при разложении растений и животных).

В соответствии с этим В. А. Костицин составил пять уравнений, в которых скорости роста каждой переменной являются линейными функциями тех переменных, которые оказывают на них влияние (перечислены выше в скобках). В результате получена следующая система уравнений:

$$\dot{x} = -a_{13}u - a_{14}v + a_{41}v; \quad (3.7)$$

$$\dot{y} = a_{32}u - a_{24}v + a_{42}v; \quad (3.8)$$

$$\dot{u} = a_{13}u - a_{32}u - a_{35}u + \beta uv; \quad (3.9)$$

$$\dot{v} = a_{14}v - a_{41}v + a_{24}v - a_{42}v - a_{45}v - \beta uv; \quad (3.10)$$

$$\dot{s} = a_{35}u + a_{45}v. \quad (3.11)$$

Сумма всех рассматриваемых переменных остается постоянной, так как система замкнутая. Со временем происходит лишь перераспределение газов (кислорода и углекислоты) между атмосферой, живой природой и земной корой.

В уравнениях (3.9) и (3.10) член βuv отражает тот факт, что животные питаются растениями, причем этот процесс описывается в соответствии со схемой «хищник—жертва». Эти уравнения можно записать более просто:

$$\dot{u} = u(-\lambda + \beta v); \quad (3.12)$$

$$\dot{v} = v(\mu - \beta u); \quad (3.13)$$

где

$$\lambda = a_{32} + a_{35} - a_{13};$$

$$\mu = a_{14} - a_{41} + a_{24} - a_{42} - a_{45}.$$

Уравнения (3.12) и (3.13) и есть не что иное, как классическая схема «хищник—жертва» В. Вольтерра. Уже самим В. Вольтерра было показано, что они имеют периодические решения. Переменные u и v испытывают во времени периодические колебания около средних (стационарных) значений u_c и v_c , зависящих от коэффициентов λ и μ ($u_c = \mu/\beta$; $v_c = \lambda/\beta$), т. е. колебания животной и растительной масс взаимосвязаны. В зависимости от того, каковы соотношения между потреблением, выделением и рассеянием в земной коре кислорода и углекислоты растениями и животными, т. е. каково соотношение между коэффициентами уравнений (3.7) и (3.11), остальные переменные будут испытывать разные изменения во времени. В результате, если пренебречь периодическими колебаниями, то со временем могут наблюдаться различные варианты: кислород накапливается в атмосфере и океане, а углекислый газ выводится, или запас обоих газов в атмосфере и океане уменьшается и т. д.

Таким образом, В. А. Костицин установил, что основной механизм, определяющий круговорот газов в атмосфере и океане и перевод их в материал земной коры, порождается живой материей.

Говоря о модели В. А. Костицина, отметим следующее. Модель отражает существование связей между пятью рассматриваемыми переменными и основана на предположении о наличии линейных и неизменных функций связи точно так же, как модели, построенные по схеме В. Вольтерра, основаны на предположении о существовании неизменных функций рождаемости и смертности биологических видов и неизменных функций «выедания» одного вида другим. Эти схемы отражают сам факт существования взаимодействия в биосфере, но они не дают ответа на вопрос, каково это взаимодействие на самом деле. Поэтому хочется обратить внимание читателя на то обстоятельство, что после основополагающей работы В. А. Костицина предстоял еще огромный труд, связанный с тем, чтобы не только заменить постоянные коэффициенты a_{ij} в уравнениях Костицина на функции исходя из разного рода предположений, но, что еще лучше, вывести их исходя из законов физических и биологических явлений. Напомним, что А. Эйнштейн видел высший долг физиков в поиске элементарных законов, из которых можно было бы строго выводить качественные особенности явлений окружающего мира.

Но хотя работа В. А. Костицина была написана в 30-е годы, т. е. во времена, когда математические методы только начали применяться в экологии, она интересна еще в одном отношении. В. И. Вернадский, рассматривая в единстве и взаимосвязи процессы живой и неживой материи, обнаружил качественное различие их временных масштабов. В. А. Костицин показал, что изменение таких характеристик, как x , y , s , не зависит от периодических колебаний массы растений и животных, а зависит только от средних (стационарных) характеристик u_c и v_c . Таким образом, он изучал быстротекающие процессы на фоне медленно изменяющихся процессов.

В настоящее время фундаментальные исследования по эволюции биосферы, имеющие своей целью развитие математических методов изучения процессов в биосфере, ведутся в Вычислительном центре АН СССР под руководством Н. Н. Моисеева [39]. Эти исследования по своему харак-

теру являются междисциплинарными; они воплощают в себе тот самый системный подход, о котором мы говорили раньше. Эти работы в значительной степени опираются на систему взглядов В. И. Вернадского. Их результатом, как свидетельствуют сами авторы, стала «первая версия глобальной модели биосферы». В ней описаны процессы геофизической и биологической природы.

В качестве составной части в эту систему входит модель (вернее, модели) глобальных биогеохимических циклов. Эта модель, естественно, намного совершеннее и сложнее модели В. А. Костицина. В ней также рассмотрена циркуляция веществ в природе. Кислородный цикл носит равновесный характер. В модели он выполняет лишь контрольные функции. Иначе обстоит дело с углеродным циклом. Здесь цепочка углеродного цикла уже расширена: рассматривается обмен углекислотой между атмосферой и океаном. Анализируется также круговорот азота. Отражение процессов биотической природы основано на принципах описания процессов взаимодействия между биогеоценозами. Эти модели представляют собой сложные имитационные (диалоговые) системы, воплощающие методы системного анализа. Все эти исследования, хотя и имеют к геологии косвенное отношение, но без их учета, вероятно, уже нельзя обойтись при моделировании геологических процессов.

3.1.2. СТРУКТУРНЫЕ МОДЕЛИ

Классическая динамика ничего не говорит о физической структуре реальных объектов и не может претендовать на ее описание. Однако функциональные проблемы, то есть те проблемы, которым до сих пор в физике уделяется основное внимание и которые служили основой для построения динамических моделей, являются не единственной представляющей интерес стороной изучения материального мира. Не менее важно изучение его организации, его структурных особенностей. Формы организации материи многообразны, но они не автономны: функциональные и структурные начала неразрывно связаны между собой.

Первые фундаментальные исследования особенностей структуры материального мира связаны с именем А. А. Богданова. В созданной им теории организации он ввел понятие организации как одно из первичных понятий. Он обнаружил, что при всем разнообразии явлений и процессов материального мира число организационных его форм относительно невелико. А. А. Богданов находит некоторые общие свойства функционирования, присущие организациям различной физической природы. При этом он не только изучает статику, но и прослеживает развитие организации, исследует механизмы отбора — принципы выделения в процессе развития наиболее типичных форм организации. Позднее появился синоним теории организации — теория систем. Эта теория, также занимаемая проблемами структуры, формы объектов реального мира, дополняет арсенал традиционных (функциональных) методов естествознания.

Структурные представления пронизывают геологию на всех уровнях. Мы говорим о структуре горных пород, минералов, кристаллов, о структуре (строении) осадочных и изверженных толщ и формаций, о текто-

нических структурах и т. п. Все эти структуры, как правило, построены иерархически. Среди тектонических структур выделяются структуры различных порядков — от крупнейших структур первого порядка до локальных. Точно так же в строении осадочных толщ выделяются организации разного уровня: формации, толщи, свиты, подсвиты, горизонты, слои и т. п.

Всем иерархическим уровням свойственна определенная повторяемость. В этом смысле даже геосинклинальные циклы тектогенеза тоже можно считать соответствующей формой организации этого процесса, повторяющейся во времени. На повторяемость форм организации явлений и процессов материального мира А. А. Богданов также обращал внимание. Его мысль о бедности организационных форм материального мира находит подтверждение и в объектах геологии. Так, все многообразие пространственных групп симметрии кристаллов выводится, как установил Е. С. Федоров, всего из 32 видов симметрии.

Назвав модели, рассматриваемые в данном разделе, структурными, мы имели в виду прежде всего те модели, которые были построены и исследованы в связи с изучением процесса формирования так называемых диссипативных структур, что имело большое значение для моделирования эволюции биологических систем. Та единственная известная нам модель подобного типа, которая была использована для изучения геологического явления и которая будет рассмотрена ниже, имеет к образованию диссипативных структур лишь косвенное отношение: она базируется на тех же явлениях неустойчивости, с которыми связывалось и формирование диссипативных структур. Этот вопрос заслуживает более подробного изложения.

Как известно, биологическая эволюция связана с появлением все более высокоорганизованных живых организмов, венцом ее является самое высокоорганизованное создание — человек. Тем самым биологическая эволюция есть процесс развития и перехода от простых структур к сложным. Объяснить усложнение структур совсем не просто. Ведь здесь мы сталкиваемся с «нарушением» второго закона термодинамики, согласно которому в закрытых системах эволюция выражается увеличением беспорядка, хаоса, однородности, что находит отражение в увеличении энтропии до тех пор, пока она не достигнет максимального значения. Состояние с максимумом энтропии — это согласно второму началу термодинамики наиболее вероятное состояние системы. Таким образом, система эволюционирует к своему наиболее вероятному состоянию. Примером такой эволюции может служить равномерное распределение газа в закрытом сосуде. Если вначале и наблюдается какое-либо неравенство концентраций, то со временем оно исчезает.

Однако характерной чертой биологических систем является та их особенность, что это системы открытые, диссипативные, они постоянно обмениваются с внешней средой энергией и веществом. Ни о каком термодинамическом равновесии здесь не может быть и речи. И если в равновесных системах диссипативные процессы уничтожают любую упорядоченность и в них устанавливается термодинамическое равновесие, то в открытых системах диссипация выступает в совершенно иной роли. Ее действие приводит к возникновению упорядоченных структур. Сам

термин «диссипативная структура» был введен бельгийским ученым И. Пригожиным, чтобы подчеркнуть ту роль, которую играют диссипативные процессы в ее образовании. Вот как пишет Г. Николис и И. Пригожин о возникающих структурах [43, с. 9]: «Мы будем называть упорядоченные конфигурации... диссипативными структурами... Такие структуры могут существовать вдали от равновесия лишь за счет большого потока энергии и вещества. Диссипативные структуры являют собой поразительный пример, демонстрирующий способность неравновесности служить источником упорядоченности». Возникновение упорядоченности называют самоорганизацией.

В настоящее время идеи самоорганизации проникли в физику, химию, гидродинамику, биологию, экологию и другие науки. В геологии процессы тектогенеза и возникновения тектонических структур уже давно связываются с саморазвитием материи Земли. Об этом говорил, например, М. А. Усов: «Сжатие и расширение земной коры суть не пассивные формы тектогенеза под влиянием каких-то внешних сил, а особые формы притяжения и отталкивания в саморазвитии материи Земли как части космоса» (цит. по [42, с. 119]). М. А. Садовский [48] как бы конкретизирует идеи М. А. Усова о саморазвитии и самоорганизации Земли в целом и ее составной оболочки — земной коры. На основе анализа современных фактических данных он приходит к выводу, что земная кора обладает двумя очень важными свойствами для возникновения самоорганизации.

Первое свойство — это дискретность, которая выражается в том, что земная кора является не сплошным агрегатом, обладающим линейной упругостью, а раздробленным на отдельные разного масштаба — от мельчайших песчинок до континентальных плит. Причем в каждую крупную отдельность вложены более мелкие, а в них — еще более мелкие и т. д. Примечательно, что кривая распределения этих отдельностей по размерам носит полимодальный характер и не зависит от физико-химических свойств пород, обуславливающих отдельности. При этом организуется иерархическая последовательность мод, характерных для кривой распределения: отношение моды, приуроченной к более крупным отдельностям, к последующей за ней моде имеет значение, практически близкое к постоянному, равному $3,5 \pm 0,9$.

Второе свойство — это постоянство движений колебательного типа. При поступлении энергии извне Земля как открытая многокомпонентная система воспринимает (транспортирует) и преобразовывает (трансформирует) эту энергию. Из внешних источников энергии (например, энергии Солнца, поля тяготения и др.) формируются различные виды внутренней энергии планеты: тепловой поток, тектонические движения и т. п. В результате, если акцентировать внимание на механических движениях, возникающих при перераспределении энергии, блоки земной коры испытывают колебательное смещение относительно друг друга, а более мелкие отдельности блоков — своеобразную перегруппировку, переориентацию.

Так формируются различные структуры земной коры, которые по-своему приспособляются для передачи (транспорта) энергии на более

низкие иерархические ступени, вплоть до возникновения некоторого динамического равновесия. Но новая флуктуационная волна энергии, поступающей извне, формирует новое движение, новую организацию. Все это и определяет автомодальные процессы упорядочения структуры, самоорганизацию системы, состоящей из блоков и отдельностей горных пород разного порядка. И поэтому, как полагает М. А. Садовский, горную породу можно рассматривать как часть значительно более широких природных открытых систем, способных к самоорганизации за счет энергии, поступающей извне.

Вероятно, описанный механизм самоорганизации земной коры как некой системы, включающий лишь принципы механики, механического движения, не единственно возможный. К этой категории явлений могут быть отнесены и процессы полиморфных фазовых превращений, при которых изменяются и структуры и химический состав систем (см. раздел 3.1.1). При этом М. А. Садовский подчеркивает, что возможны одновременные действия разных механизмов, но эти трудные вопросы еще требуют специального изучения.

В процессах, развивающихся в условиях, далеких от равновесия, в частности термодинамического; в процессах, для поддержания которых требуется непрерывный поток массы, импульса или энергии; в процессах самоорганизации материи важнейшую роль среди принципов отбора движения играет принцип минимума диссипации энергии или, что то же самое,— принцип минимума роста (или максимума убывания) энтропии. Он заключается в следующем: среди множества форм реализации процесса, согласующихся с законами физики, реализуется та, при которой энтропия системы растет наиболее медленно. В локальных масштабах энтропия может и уменьшаться. Этот принцип выделяет наиболее экономный способ движения, при котором диссипация энергии минимальна.

Возникновение диссипативных структур связывают с потерей устойчивости состояния системы. После возникновения структуры система снова обретает устойчивое состояние. Неустойчивости такого типа изучаются методами теории бифуркаций. Бифуркация, или ветвление,— это изменение числа и устойчивости решений уравнения, описывающего движение. Момент бифуркации является моментом возникновения нового решения уравнения при достижении характеристическим параметром уравнения некоторого критического значения. В этот момент прежнее решение становится неустойчивым, а новое решение — устойчивым. Новое решение может оказаться единственным, но могут иметь место и случаи, когда единственность уступает место множественным решениям. Какое именно из множества решений будет «избрано» системой, остается неясным. В этом случае процесс получает не единственное продолжение, его дальнейшее развитие принципиально непредсказуемо.

Проиллюстрировать возникновение бифуркаций и связанных с ними явлений можно на следующем примере. Представим себе вертикальную колонну, на которую сверху действует нагрузка P . При некотором критическом значении $P_{кр}$ колонна прогнется. Причем она может прогнуться в любую сторону: влево, вправо, вперед, назад и т. д. Предсказать, какое именно из этих положений реализуется,

куда прогнется колонна, мы не можем. Все эти варианты — равноправны. Прежнее устойчивое положение равновесия — вертикальное — в момент перехода нагрузки через $P_{кр}$ стало неустойчивым. Значение $P_{кр}$ является критическим значением параметра. Это и есть точка бифуркации.

Идеи о связи геологических процессов, например процессов тектогенеза, с неустойчивостью равновесия высказывались и в геологии. Для примера сошлемся еще раз на М. А. Усова. Так, при обсуждении своей пульсационной гипотезы он связывал пульсации с весьма неустойчивым характером равновесия между суммарным эффектом сил сжатия и сил растяжения в недрах планеты, при котором «изменение физико-химических условий, по крайней мере, в некоторых горизонтах Земли, достигает критической точки, за которой большая часть вещества этих горизонтов переходит в иное атомистическое состояние» [42, с. 120], т. е. говоря современным языком, идет процесс упорядочения. М. А. Усов в числе многих геологов говорил о скачкообразном развитии материи Земли, отмечая, что в ходе этого развития «происходит ряд качественных ее изменений, сопровождающихся скачками в сжатии и расширении тела Земли, или фазами тектогенеза земной коры» [там же].

Разумеется, не всякая бифуркация имеет своим следствием возникновение структуры. О структуре можно говорить в том случае, если изучаемые величины изменяются не только во времени, но и в пространстве. Моделирование процесса возникновения структур, их усложнения связано с моделированием таких процессов (в частности, кинетики химических реакций), при которых пространственно однородные функции, не имеющие в своем поведении по пространственной координате никакой упорядоченности (т. е. функции, описывающие однородность, равенство концентраций во всех точках пространства), на определенной стадии (вслед за бифуркацией) переходят в функции, в которых легко заметить закономерность. В среде возникает структура — неоднородное по пространству стационарное распределение концентраций.

Та модель, которую мы будем рассматривать ниже как единственный пример использования структурных моделей в геологии, не описывает пространственных взаимоотношений. Она лишь использует механизм бифуркационного типа. С точки зрения конкретного геологического воплощения модели, описываемые в данном разделе, было бы правильно назвать не структурными, а моделями неустойчивого движения, отражающими скачкообразный переход процесса вслед за потерей устойчивости в новое устойчивое состояние. Но в этом случае богатые возможности моделей бифуркационного типа или описания таких важных для геологии вопросов, как структурные или организационные, которые хотя и связаны с функциональными вопросами, но не сводятся к ним, остались бы нераскрытыми.

Итак, рассмотрим конкретный пример. Он касается моделирования критических рубежей в истории Земли [37]. Эти рубежи авторы [37] математически связывают с бифуркационными границами соответствующих дифференциальных уравнений. Ими рассматривается два уравнения:

$$\dot{y} = ky(x - \bar{x});$$

$$\dot{y} = (b/x)y(x - \bar{x}),$$

где $y(x - \tilde{x})$ — количественная характеристика состояния развивающейся системы (например, ее пространственные, временные или энергетические показатели); x — аргумент; \tilde{x} — фазовое смещение переменной y (значение релаксации); k и b — константы.

В обоих уравнениях скорости изменения состояния развивающейся системы (характеристики y) пропорциональны уровню ее состояния, соответствующего значению аргумента, смещенному относительно рассматриваемого на величину релаксации. Понятно, что эти уравнения не описывают какой-либо специфический геологический процесс. Их выбор обоснован лишь теми соображениями, что эти модели в состоянии описать важные классы стадий развития сложных систем, когда сильно сказывается влияние предыстории развития, так что современное состояние системы зависит от ее состояния в более ранние моменты времени (явление памяти, релаксации). Эта зависимость отражена в уравнении учетом релаксации.

Еще одним аргументом для приложения указанных моделей к геологическому исследованию служило то обстоятельство, что характерной особенностью ряда процессов (опять же в общем случае, без геологической спецификации каких-либо процессов) является потеря ими устойчивости при достижении определенных критических значений и скачкообразный переход в новое устойчивое состояние, характеризующееся принципиально другой природой развития. В связи с этим возникает вопрос об определении положения таких критических значений. Рассматриваемые модели как раз и описывают процессы с критическими уровнями (бифуркациями) развития.

Авторы [37] даже не конкретизируют, что именно характеризует переменная y при использовании этих общих моделей для анализа этапности развития Земли. Относительно аргумента x говорится, что он в этом случае характеризует время. Скорее всего, эти уравнения привнесены в геологию по аналогии с изучением развития биологических систем, чем занимаются некоторые из авторов рассматриваемой работы. Они сообщают, что критические уровни развития, полученные на рассматриваемых моделях, соответствуют выявленным экспериментально закономерностям роста биологических систем. Так, в онтогенетическом развитии человека критическими рубежами являются: начало организменного развития (окончание стадии гастрюляции — 18 сут эмбрионального развития), момент рождения (266 сут эмбрионального развития), начало полового созревания (11 лет) и предельная (предположительно) продолжительность жизни (167 лет).

Если бы в написанных уравнениях отсутствовал эффект запаздывания, то их решением явились бы соответственно экспонента и степенная функция. Зависимости первого вида называются экспоненциальными, а второго — аллометрическими. Аллометрические зависимости характерны для долговременных тенденций развития; на отдельных же этапах развитие является экспоненциальным. Аллометрические зависимости являются огибающими последовательности экспоненциальных зависимостей. В связи с этим в процессах развития могут быть представлены не только критические соотношения аллометрического типа, но и более

мелкие, связанные с экспоненциальным характером процессов, из которых складывается аллометрическая зависимость.

Исследуя пределы использования степенных и экспоненциальных зависимостей путем определения областей изменения переменных, обеспечивающих устойчивость траектории развития процессов, авторы [37] дают ответ на вопрос, существуют ли некоторые общие соотношения между параметрами систем, характеризующие переход к новому качеству в момент потери устойчивости, либо такие переходы индивидуальны как по природе, так и по положению критических точек (рубежей)? Ими показано, что соотношение положений последовательных критических значений аргумента при аллометрическом развитии является величиной постоянной, равной

$$x_x/x_0 = e^e = 15,154\dots,$$

где x_x и x_0 — значения аргумента в двух последовательных критических точках на аллометрической кривой, e — основание натурального логарифма.

Соотношение критических значений экспоненциального роста также является величиной постоянной, равной

$$x_x/x_0 = e.$$

Согласно В. И. Вернадскому в процессах развития систем выделяют эволюционный и инволюционный пути развития. При эволюционном развитии происходит уменьшение частоты рубежей с течением времени (примером такого развития является рост от зародыша к зрелому организму), а инволюционный путь связан с обратной тенденцией. Земля, как тело с фиксированной массой, относится к инволюционным системам.

Таким образом, в соответствии с рассматриваемыми моделями в геологической истории Земли должны выделяться переломные этапы (критические рубежи), разделенные такими промежутками времени, что соотношение возрастов последовательных этапов равно e (для сравнительно быстротекущих процессов) или e^e (для более длительных процессов). Причем должно отмечаться учащение рубежей во времени. Кроме этих рубежей, разделенных неравномерными промежутками времени, авторы [37] выделяют (что уже не вытекает из предложенных моделей) рубежи, разделенные равными промежутками времени. Причем равномерные рубежи выделяются нескольких периодов. Продолжительность интервала времени, разделяющего равномерные рубежи данного порядка, синхронизируется с продолжительностью времени, разделяющего два соответствующих соседних неравномерных рубежа, т. е. неравномерными рубежами формируются соответствующие равномерные рубежи.

Сопоставляя выделенные таким образом последовательность неравномерных рубежей и целую серию последовательностей равномерно чередующихся рубежей с наиболее широко распространенными и признаваемыми многими геологами этапными рубежами в истории Земли (орогенные стадии развития геосинклиналей, эпохи метаморфизма, крупные регрессии, появление и смена сообществ фауны и флоры и др.),

авторы [37] пришли к выводу, что примерно в 3/4 случаев рассчитанные по модели и геологические рубежи совпадают.

Заканчивая рассмотрение этого примера, необходимо отметить следующее. Используемая модель не является результатом глубокого содержательного исследования процессов тектогенеза и других геологических процессов, которые служили отражением этапности развития Земли. Ее исходные предпосылки полностью лишены геологической основы. Это лишь математические конструкции, в известной мере абстрактные, преимущество которых заключается в том, что они допускают соответствующий математический анализ бифуркаций. При их формулировке довлеющими оказываются те следствия, которые вытекают из моделей (наличие бифуркаций), но не обоснованность самих построений. Объект изучения в итоге оказался весьма условным, а анализ свелся к соответствующим математическим упражнениям. Эти модели лишь фразеологически оказались близкими к рассматриваемому геологическому вопросу. Следует также добавить, что полученные из модели результаты оказались неверными и с математической точки зрения. При исследовании модели авторы [37] допустили многочисленные ошибки, за что и были подвергнуты резкой критике [12].

Характерно, что примерно тот же авторский коллектив, изучая распределение месторождений нефти и газа по запасам в пределах области нефтегазоаккумуляции (т. е. совсем другой объект), обнаружил и там рубежи, «расстояние» (скачок в величине запасов) между которыми также увеличивается все в той же пропорции (в e раз) [40]. При этом они ссылаются на работу [37], отмечая, что в ней дано аналитическое обоснование связи числа e с рубежами развития. Отсюда, видимо, следует полагать (хотя авторы [40] об этом прямо не говорят), что они имеют в виду общую природу рубежей и в том, и в другом случае. Здесь уместно отметить, что в европейской научной литературе широко обсуждается вопрос об опасности появления так называемых «престижных» работ, в которых задачи прикладной направленности формулируются на языке математики вне связи с реалистичностью их постановки.

3.1.3. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ

До сих пор мы рассматривали, по выражению В. В. Налимова — виднейшего специалиста в области математического моделирования, так называемые «хорошо организованные системы», где «все однозначно управляется действующими в них функциональными связями, например, движения планет управляются законами И. Кеплера» [41, с. 56]. Однако геологические системы, как правило, представляют собой сложные системы, диффузные, обязательно несущие в себе черты и детерминизма и случайности.

Рассмотренные выше процессы — это процессы регулярные, упорядоченные; процессы, в которых возникают структуры. Как правило, ход таких процессов можно предсказать, зная управляющие ими законы. Теперь будут рассматриваться явления другого типа — процессы случайные, хаотические. Они требуют иного — статистического — описа-

ния, позволяющего получить некоторые усредненные характеристики процессов. Следует отметить, что между хаосом и порядком существует глубокая внутренняя связь. Хаос может возникать как сверхсложная организация.

Для описания случайных (стохастических) процессов фундаментальным понятием является понятие функции распределения случайной величины. Случайную величину можно определить как переменную, значение которой зависит от ряда случайных обстоятельств, сопутствующих испытанию. Существует целый ряд теоретических распределений непрерывных случайных величин. Распределение их вероятностей дает наиболее полное представление о поведении случайной величины. Но это распределение трудно обозреть, поэтому очень часто ограничиваются лишь некоторыми его характеристиками (в основном двумя). Абсцисса центра тяжести распределения масс вероятности случайной величины ξ носит название математического ожидания $M\xi$. Мера разброса, или степень рассеивания, массы вероятности около центра группирования случайной величины получила название дисперсии σ_ξ^2 или $D\xi$. Корень квадратный из дисперсии называется стандартом $\sigma = \sqrt{\sigma_\xi^2} = \sqrt{D\xi}$.

При описании непрерывного распределения кроме этих характеристик часто используют еще медиану и моду. Медианой называют такое значение ξ , при котором функция распределения вероятностей принимает значение равное 0,5. Модой непрерывного распределения называют значение, при котором вероятность $p(\xi)$ достигает максимума.

Если изучается не один какой-либо интересующий нас показатель, а их совокупность, состоящая из m показателей $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$, то вместо случайной величины ξ мы имеем дело со случайным вектором $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$. В этом случае речь идет уже не об одномерном (по оси ξ), а о многомерном (в пространстве, задаваемом рассматриваемыми переменными) распределении вероятностей. Многомерное распределение задает вероятности того, что каждая из величин примет заданное (для каждой величины свое) значение: $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$. Соответственно центр группирования в многомерном случае будет задаваться вектором математического ожидания $M\xi$.

Степень рассеивания изучаемых переменных будет характеризоваться уже не одним числом σ^2 , а дисперсионной или ковариационной матрицей. Конструкция этой матрицы такова: диагональные элементы представляют собой дисперсию каждого показателя (переменной), а недиагональные — соответствующие ковариации:

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_{\xi_1}^2 & \text{cov}(\xi_1, \xi_2) & \dots & \text{cov}(\xi_1, \xi_m) \\ \text{cov}(\xi_1, \xi_2) & \sigma_{\xi_2}^2 & \dots & \text{cov}(\xi_2, \xi_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{cov}(\xi_1, \xi_m) & \text{cov}(\xi_2, \xi_m) & \dots & \sigma_{\xi_m}^2 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Ковариация между переменными ξ_p и ξ_k представляет собой математическое ожидание произведения отклонений ξ_p и ξ_k от их центров, т. е.

$$\text{cov}(\xi_p, \xi_k) = M[(\xi_p - M\xi_p)(\xi_k - M\xi_k)]. \quad (3.15)$$

Ковариация служит простейшей характеристикой линейной связи между случайными величинами ξ_p и ξ_k . Если ковариацию поделить на произведение стандартов величин ξ_p и ξ_k , то получим хорошо известный коэффициент корреляции:

$$r = \text{cov}(\xi_p, \xi_k) / (\sigma_{\xi_p} \sigma_{\xi_k}). \quad (3.16)$$

Коэффициент корреляции является мерой линейной связи между случайными величинами ξ_p и ξ_k .

3.1.3.1. Модели случайного рассеивания

В этом разделе речь пойдет о случайных величинах, о вероятности того, что они примут то или иное значение. При этом время остается неизменным, фиксированным. Тем самым случайная величина рассматривается не в динамике, а в статике. С этой точки зрения предметом нашего изучения является не процесс, так как здесь не анализируется изменение изучаемой переменной во времени (или в пространстве). Однако эти модели мы все же описываем в данной главе, посвященной моделированию природных процессов, по той причине, что мы будем рассматривать природные процессы, определяющие закономерности рассеивания случайной переменной.

Признаки, характеризующие геологические объекты, подвержены варьированию. Они варьируют даже в тех случаях, когда для этого, казалось бы, нет никаких причинных оснований. Их значения, вопреки кажущемуся однообразию, обнаруживают различия в неизменных условиях, в однородных явлениях и событиях. Варьируют размеры зерен кварца в горсти песка. Не одинаковы значения пористости во множестве анализов, к примеру, карбонатных пород, взятых практически в одной точке. Колеблются концентрации любого акцессорного элемента в образцах изверженной породы, отобранных в одном месте определенного массива. Варьирование различных признаков во всех рассмотренных случаях возникает под влиянием многочисленных причин; оно связано со множеством разнообразных факторов определенного вида, которые трудно проконтролировать и проинтерпретировать, и поэтому их действие связывают с влиянием случайных причин. Влияние рассеивающих случайных факторов приводит к характерной картине рассеивания — к отклонению значений признака друг от друга.

Изучением закономерностей рассеивания, относящихся к массовым однородным явлениям или массовым процессам в неизменной обстановке, занимается математическая статистика. Существенным при таком изучении является установление закономерной связи между числовыми значениями варьирующих признаков и вероятностью реализации этих значений в массовом явлении, в больших совокупностях однородных объектов. Несмотря на кажущуюся хаотичность и произвольность поведения каждого объекта в отдельности, в их совокупности тем не менее возникает своеобразные устойчивые закономерности вероятностного типа.

Математическая статистика абстрагирует единичные явления, единичные случаи от их частных различий и объединяет их в группы, сово-

купности в виде одинаковых величин. В отличие от причинных закономерностей, которые утверждают неизбежное получение определенного результата в каждой конкретной ситуации (при соблюдении определенных условий), вероятностная (стохастическая) закономерность ничего не говорит о каждом отдельном случае, она предсказывает лишь средний результат из большого числа случаев. Таким образом, здесь речь идет об исследовании массовых явлений и их взаимоотношений, о нахождении закономерностей, объединяющих эти явления, о количественном описании групп, о прослеживании в их многообразии как постоянного, регулярного, так и того, что меняется вопреки кажущемуся однообразию.

Вследствие того что числовые значения варьирующих признаков закономерно связаны с вероятностью их реализации в массовом явлении, закономерности рассеивания описываются функцией распределения вероятностей данного признака. Об этой функции мы уже говорили ранее. Здесь важно отметить следующее. Теоретическое распределение вероятностей отражает закономерности данного явления. Различным процессам отвечают различные распределения вероятностей характеристик, получающихся в итоге данных процессов. Поэтому все те случаи, когда функция распределения выводится теоретически на основании геологических представлений о механизме формирования случайной величины, должны рассматриваться в данной главе, посвященной моделированию геологических процессов. Теоретических функций распределения вероятностей, полученных при изучении различных явлений, насчитывается множество. Некоторые из них использовались и в геологических исследованиях. Заложенные в эти функции представления могут быть выяснены из следующих наиболее характерных примеров.

Нормальное распределение. Нормальное распределение наиболее часто встречается на практике и теоретически наиболее полно разработано. Закономерность случайного рассеивания, выражаемая нормальным распределением, носит довольно общий (хотя и не универсальный) характер. Нормальное распределение играет центральную роль в статистической теории и широко используется при обработке наблюдений. Нормальное распределение возникает в тех случаях, когда варьирование случайной величины обусловлено воздействием большого числа независимых (или слабозависимых) возмущений, каждое из которых подчинено какому угодно закону распределения и вклад каждого из которых в общую сумму относительно мал. Плотность нормального распределения, т. е. производная функции нормального распределения (напомним, что интеграл от плотности распределения по любому промежутку оси ξ дает вероятность попадания величины Ξ , распределенной по нормальному закону, в этот промежуток), имеет вид

$$f(\xi) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp[-(\xi - a)^2 / (2\sigma^2)],$$

где a и σ — параметры распределения, причем σ положительно.

Нормальное распределение симметрично относительно ординаты, отвечающей значению $\xi = a$. Это значение является математическим ожиданием. Параметр σ — стандартное отклонение распределения; $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$, где σ^2 — дисперсия распределения. Чаще всего, однако, рас-

сматривая величину, подчиненную нормальному закону, переходят от величины Z к вспомогательной линейной функции $Z = (Z - a) / \sigma$. Плотность вероятности Z выражается равенством

$$f(z) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-z^2/2),$$

в котором уже отсутствуют параметры a и σ .

Многомерное нормальное распределение (т. е. распределение случайных величин, каждое значение которых определяется не одним числом, а системой из нескольких величин, что возможно при рассмотрении не одного, а совокупности признаков) характеризуется тем, что исходные плотности одномерных распределений величин, образующих систему, так же как и плотности условного распределения каждой из них при фиксированном значении других, являются нормальными. Параметрами распределения служат вектор математического ожидания и дисперсионная матрица.

Распределение направлений (пространственной ориентировки) плоскостей (например, трещин) или нормализованных единичных векторов (например, векторов естественной остаточной намагниченности горных пород), возникающее в тех же условиях, что и нормальное распределение, т. е. когда отклонения в ориентировке от идеального положения вызываються действием большого числа различных независимых или слабозависимых между собой причин, каждая из которых ведет к малым отклонениям одного порядка, подчиняется распределению Фишера (при определенном значении параметра распределения, отражающего меру концентрации направлений). При указанных условиях распределение Фишера является аналогом нормального распределения.

Логарифмически нормальное распределение. Это распределение получается из нормального логарифмическим преобразованием. Нормально распределена не сама случайная величина Z , а ее логарифм $\ln Z$. Логарифмически нормальное распределение широко используется в технике (в частности, для анализа усталостных разрушений), при анализе расходов воды, паводков и др. А. Н. Колмогоров показал, что при дроблении монолита на мелкие части под воздействием силы размеры осколков распределены логарифмически нормально. Это распределение имеет точное обоснование также в задаче измерения светимости звезд. Плотность распределения равна

$$f(z) = (z^2 \cdot 2\pi)^{-1/2} \exp(-\ln^2 z/2).$$

Рассматриваемое распределение не имеет верхнего предела. Оно асимметрично. Мода, медиана и математическое ожидание соответственно равны:

$$\bar{z} = 1/e < \tilde{z} = 1 < z = e^{1/2},$$

а дисперсия определяется как $\sigma^2 = e(e - 1)$.

Многие исследователи, использующие статистику в своей практической деятельности, считают, что каждое асимметричное распределение

должно быть логарифмически нормальным и поэтому без разбора прибегают к логарифмическому преобразованию.

Распределение Пуассона. Оно нашло особенно широкое применение в теории надежности, в системах массового обслуживания и т. п. Это распределение получено для маловероятных событий, случающихся в длинной серии независимых испытаний некоторое (конечное) число раз. При этом каждое испытание имеет лишь два исключающих друг друга исхода (например, жизнь или смерть).

Примером такого события может служить радиоактивный распад атома. Вероятность наблюдать распад отдельного атома в течение данного сравнительно небольшого промежутка времени крайне незначительна. Однако даже при малом количестве радиоактивного вещества число атомов колоссально. Поэтому за данный промежуток времени в среднем, как правило, распадется некоторое число атомов. Если считать, что распад одного атома не изменяет вероятности распада другого, то мы придем к закону Пуассона. Возможные значения величины ξ , подчиняющейся закону Пуассона, образуют бесконечную последовательность целых чисел 0, 1, 2, ... Распределение Пуассона описывает вероятность того, что в длинной серии испытаний один из двух возможных исходов (например, распад) произойдет ξ раз:

$$f(\xi) = (\lambda^\xi / \xi!) \exp(-\lambda).$$

Математическое ожидание случайной величины, распределенной по закону Пуассона, равно параметру λ этого закона: дисперсия равна тому же параметру λ и численно равна математическому ожиданию (хотя имеет другую размерность).

Логистическое распределение. Это распределение широко используется в исследованиях по дозиметрии, в биологии и в наукометрии. Одно время им сильно злоупотребляли как общим законом роста под влиянием особенно работ Пирла. Это распределение вывел и назвал логистическим П. Ф. Верхулст в предположении, что увеличение логарифма количества населения $x(t)$ данной страны как функции времени t равно некоторой постоянной минус функция, которая увеличивается с ростом населения. Одним из решений его системы уравнений в том случае, когда указанная функция увеличивается пропорционально росту населения, и является логистическая функция. Таким образом, плотность распределения имеет вид

$$f(\xi) = c[1 - F(\xi)]F(\xi);$$

соответственно функция распределения дается выражением

$$F(\xi) = \{1 + \exp[-c(\xi - a)]\}^{-1},$$

где a — модальное значение, а с параметром c связана дисперсия $\sigma^2 = \pi^2 / (3c^2)$.

Логистическое распределение симметричное. Форма распределения похожа на нормальную, и некоторые авторы предпочитают его нормаль-

ному распределению. К тому же логистическое распределение обладает рядом аналитических преимуществ.

Распределение Гомперца. Это распределение получено при изучении продолжительности жизни; является одним из самых распространенных видов предельных экстремальных распределений. К нему приближается распределение экстремальных значений случайной величины при широких предположениях относительно исходного распределения. Распределение Гомперца используется в работах по изучению продолжительности жизни долгожителей, максимальных паводков, при испытании материалов на разного рода усилия. Распределения этого типа применяются также при анализе роста информации и числа публикаций. Т. Гомперц предположил, что интенсивность смертности, т. е. вероятность того, что человек, имеющий возраст ξ , умрет в ближайшем интервале времени $d\xi$, увеличивается как экспоненциальная функция продолжительности жизни ξ . Этому предположению отвечают функция распределения

$$F(\xi) = 1 - \exp[-e^{c(\xi-a)}]$$

и плотность распределения

$$f(\xi) = ce^{c(\xi-a)} \exp[-e^{c(\xi-a)}].$$

Легко видеть, что функция интенсивности действительно возрастает экспоненциально:

$$\mu(\xi) = f(\xi) / [1 - F(\xi)] = ce^{-ca} \exp(c\xi) = \beta \exp(c\xi);$$

здесь мода $\xi = a$; медиана $\xi = a - \ln(\ln 2) / c$; дисперсия $\sigma^2 = \pi^2 / (6c^2)$.

Распределение Гомперца асимметричное: $F(\xi = a) = 1 - (1/e)$. Иногда распределением Гомперца называют также распределение

$$F(\xi) = \exp[-e^{-c(\xi-a)}].$$

Распределение Парето. В. Парето — итальянский экономист. Полученное им распределение используется в экономической статистике, оно описывает распределение дохода. В. Парето предположил, что логарифм относительного числа лиц с доходом больше z уменьшается пропорционально логарифму z . Сущность этого «закона» отражает то, что бедных людей больше, чем богатых. Указанному предположению отвечают функция распределения и плотность вероятности

$$F(z) = 1 - z^{-k}; \quad f(z) = kz^{-k-1}, \quad z \geq 1; \quad k > 0.$$

Здесь величина z представляет собой доход, выраженный в единицах его минимума, т. е. эта величина безразмерная. Распределение Парето не имеет моды. Оно зависит лишь от одного параметра — только от k .

В геологических исследованиях изучению закономерностей случайного рассеивания всегда уделялось большое внимание. В силу того что геологические явления носят стохастический характер, функции распределения вероятностей являются одним из основных объектов исследова-

ния в геологии. Анализ функций распределения концентраций различных химических элементов и содержания различных минералов в горных породах, коллекторских и физических свойств пород, тех или иных характеристик слагающих их зерен посвящено большое число работ. Исследовалось рассеивание и таких показателей, как степень насыщения нефтью, размеры особей того или иного вида, мощность слоев и многие другие. Видимо, без преувеличения можно сказать, что нет ни одного ряда наблюдений количественно измеряемого геологического признака, который не изучался бы в рассматриваемом отношении.

Однако исследований, связанных с построением функций распределения на основе специфических для геологии представлений о механизме явления, вызывающего рассеивание, крайне мало. Здесь прежде всего следует выделить работы А. Б. Вистелиуса. Так, к примеру [9], функция (вернее, набор функций) распределения вероятности мощности слоев им получена исходя из представления, что формирование слоистых структур связано не только с разделением оседающего материала под действием силы тяжести, но и с горизонтальным смещением вод со взмученным осадком относительно дна бассейна. В результате этого на частицу оседающего материала действует не только вертикальная сила тяжести, но и горизонтальная сила, влияющая на способность среды удерживать осадок. При этом надо учитывать, что скорость движения вод в бассейне связана с расстоянием точки наблюдения от дна.

А. Б. Вистелиус предположил, что мощность слоя в i -й момент времени его накопления ξ_i есть функция мощности, достигнутой слоем в $(i-1)$ -й момент времени и равной $h(\xi_{i-1})$ (этим учтена предыстория, инерция процесса), и причины, вызывающей приращение мощности за время от $(i-1)$ -го момента до i -го и имеющей интенсивность η_i . В этом случае

$$\xi_i - \xi_{i-1} = \eta_i h(\xi_{i-1}).$$

При формировании мощности слоя от начального момента накопления ξ_0 до последнего момента накопления ξ_n в предположении, что причины, сказывающиеся на приращении мощности в малые промежутки времени $(i-1, i)$, меняются не сильно, число таких причин велико и каждая из них очень мала, а их дисперсии ограничены, получаем, что величина

$$\sum_{i=1}^n \eta_i = \int_{\xi_0}^{\xi_n} \frac{dx}{h(x)}$$

будет распределена нормально, а мощность слоя будет иметь распределение, зависящее от функции $h(x)$.

В отношении функции $h(x)$ А. Б. Вистелиусом рассмотрены три варианта, связанные с возможными механизмами формирования мощности слоя. Первый из них заключается в том, что условия накопления, приведшие к формированию мощности ξ_{i-1} к $(i-1)$ -му моменту времени, зависят целиком от интенсивности процесса накопления материала в отдельные короткие промежутки времени и совершенно не зависят от

предыстории. Таким образом, функция $h(x) = \text{const}$. В этом случае распределение мощности слоя, т. е. $\xi_0 - \xi_n$, будет подчинено нормальному закону.

Вторая схема формирования мощности слоя заключается в том, что способность среды удерживать осадок во взвешенном состоянии линейно падает со временем. При линейной скорости ослабления во времени транспортирующей силы среды функция $h(x)$, отражающая инерцию процесса, будет линейно возрастающей, т. е. $h(x) = ax + b$, где $a > 0$. В этом случае распределенным нормально оказывается логарифм мощности слоя.

Третья схема учитывает специфику латерального движения воды бассейна с суспензированным осадком. В зависимости от скорости движения воды, набегавшей на берег, способность к удержанию осадка в виде суспензии может сначала увеличиваться, а затем уменьшаться, соответственно скорость выпадения осадка уменьшается или увеличивается. В этой ситуации функция $h(x)$ в первом приближении будет представлять собой синусоиду и нормально будет распределена величина $\ln [\text{tg}(ax + b)]$.

Не менее интересные соображения положены А. Б. Вистелиусом в основу вывода функции распределения вероятностей концентраций фосфора в гранитоидах [7]. Он исходил из того, что концентрация фосфора в локальных распределениях подчинена нормальному закону и между дисперсией и содержанием исследуемого компонента в данной точке имеется корреляция. На этой основе было получено объединенное распределение, т. е. распределение вероятностей концентраций элемента во всех исследуемых точках (в точках изучаемого массива).

А. Б. Вистелиусом предложена следующая схема процесса. Через достаточно большое сечение мигрирует флюид, несущий компонент X . Флюид, проходящий через данную точку за какое-то время τ , несет некоторое количество компонента X (со своим математическим ожиданием и дисперсией). Из флюида, фильтрующегося через рассматриваемую точку в определенный момент времени, выделяется количество компонента X , которое не зависит от количества этого же компонента, выпавшего в это же время в других точках. Все эти порции имеют одинаковое математическое ожидание и одинаковую дисперсию. Допускается, что компонент X осаждается в течение всего времени миграции флюида через рассматриваемую точку, так, что сумма его линейно зависит от времени τ_n , а суммарное количество, выделившееся в рассматриваемой точке за время τ_n , связано линейным соотношением с количеством компонента X , которое несет флюид через рассматриваемую точку за указанное время.

Функция распределения вероятностей концентраций элемента в точках исследуемого массива находится на основе определения вероятности того, что все способное к выделению из флюида количество элемента X потеряно между n -й и $(n - 1)$ -й единицами времени, т. е. при $\tau_{n+1} > \tau > \tau_n$. При нахождении этой вероятности используются указанные выше допущения; кроме того, предполагается, что количество $x(\tau_i)$ элемента X , оставшееся во флюиде после того, как элемент X выделялся в течение

времени от τ_0 до τ_i , в каждый момент i распределено нормально. В результате этих предположений и получено искомое распределение, имеющее довольно сложный вид.

Есть и другие примеры вывода А. Б. Вистелиусом функций распределения исходя из конкретной схемы процесса, порождающего случайное рассеивание. К их числу относится, в частности, вывод функции распределения сульфата кальция [6].

Следует отметить, что при сложных схемах процесса не всегда удастся вывести аналитически функцию распределения в явном виде, т. е. в виде конечной формулы $F(\xi)$. В таких случаях используют специальный метод, названный методом Монте-Карло. Он позволяет определить статистические свойства случайной величины $\xi = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, в том числе и закон ее распределения, если известны законы распределения величин x_1, x_2, \dots, x_n .

Имеется довольно большое число работ, где, хотя и не получено каких-либо специальных функций распределения, соответствующих определенному геологическому механизму рассеивания, но справедливость одного из известных распределений в том или ином конкретном случае подкрепляется вескими соображениями о сходстве механизма формирования значений исследуемой геологической переменной с тем механизмом, которому отвечает это известное распределение. Особенно это касается нормального распределения. Условия, при которых оно возникает (их называют условиями центральной предельной теоремы), имеют место во многих случаях. В таких ситуациях никаких других конкурирующих гипотез выдвинуть не удастся.

Иногда отклонение от нормального распределения или его аналогов используется даже в качестве показателя последующих изменений. Так, Л. Д. Кноринг [24] показал, что колебания в направлении трещин, относящихся к одной системе, определяются с геологической точки зрения условиями центральной предельной теоремы. Нормальному распределению, отвечающему этой теореме, на сфере соответствует распределение Фишера с параметром $k > 4$. Поэтому случаи, когда наблюдаемые частоты не отвечают распределению Фишера, Л. Д. Кноринг объясняет тем, что отдельные трещины системы были неинвариантно смещены под действием пластических деформаций, испытываемых материалом слоя уже после возникновения трещин.

Надо отметить, что очень часто в геологических исследованиях случайное рассеивание изучается на основе аппроксимации эмпирических распределений одним из известных теоретических распределений без какого-либо анализа механизма рассеивания. Используемое в таких случаях теоретическое распределение выбирается на том основании, что оно по внешним признакам неплохо согласуется с эмпирическим. Такое слепое заимствование не имеет, естественно, ничего общего с изучением процесса, формирующего значения исследуемой переменной. Так, к примеру, без необходимого анализа механизма явления накопление запасов нефти и газа описывалось логистическим распределением и распределением Гомперца, а распределение месторождений нефти и газа по величине запасов — распределением Парето.

3.1.3.2. Модели процессов со случайными возмущениями

В этом разделе речь пойдет уже о процессах, так как поведение случайных величин здесь рассматривается во времени. Как известно, функция есть упорядоченное семейство величин, поставленных в соответствие значениям некоторого параметра (аргумента). При этом каждому значению аргумента (неслучайного параметра) соответствует строго определенное значение функции.

Случайной же функцией, вообще говоря, является любая функция, управляемая вероятностными законами. Случайная функция характеризуется тем, что каждому значению некоторого неслучайного параметра (аргумента), например t , ставится в соответствие уже случайная величина $\xi(t)$ с определенным законом распределения и, следовательно, с определенными характеристиками этого закона, такими как математическое ожидание, дисперсия и т. п. Таким образом, случайная функция характеризуется тем, что ее значения описываются с помощью распределения вероятностей. При каждом воспроизведении изучаемого процесса (будь у нас такая возможность) мы получали бы несколько различные функции, или, как принято говорить, различные реализации случайного процесса.

Если детерминированные процессы описывались детерминированными моделями, допускающими точное вычисление будущего поведения объекта, то стохастические процессы требуют для своего описания вероятностных (или стохастических) моделей, позволяющих вычислить вероятность того, что некоторое будущее значение будет лежать в определенном интервале.

Каждому значению t_i аргумента t отвечает распределение вероятностей случайной величины $\xi(t_i)$, их математическое ожидание $M\xi(t_i)$ и дисперсия $D\xi(t_i)$. Таким образом, мы можем определить математическое ожидание случайного процесса $\xi(t)$ как неслучайную функцию $M\xi(t)$, значение которой при каждом $t = t_i$ равно $M\xi(t_i)$. По своему смыслу математическое ожидание случайного процесса представляет собой некоторую функцию, около которой группируются все возможные реализации данного процесса. Точно так же можно определить дисперсию случайного процесса $\xi(t)$ как неслучайную функцию $D\xi(t)$, значение которой при каждом $t = t_i$ равно $D\xi(t_i)$. Дисперсия случайного процесса характеризует величину рассеивания возможных реализаций относительно среднего течения случайного процесса.

Если при рассмотрении случайных величин для их характеристики можно было ограничиться лишь двумя показателями — математическим ожиданием и дисперсией, то для описания случайных процессов этих двух параметров уже недостаточно. Дело в том, что между случайными величинами, отвечающими разным значениям аргумента, может существовать зависимость, а поэтому для суждения об их поведении надо располагать еще и характеристикой этой связи. Во многих случаях такой характеристикой служит ковариационная или корреляционная функция случайного процесса.

Представление об этих функциях можно получить следующим образом. Возьмем два значения аргумента: t_0 и t_1 . Каждому из них соответ-

стует своя случайная величина: $\xi(t_0)$ и $\xi(t_1)$. Связь между этими величинами может быть охарактеризована либо их ковариацией (3.15), либо коэффициентом корреляции (3.16). Таким образом, паре значений аргумента (t_0, t_1) поставлено в соответствие число, равное либо $\text{cov}[\xi(t_0), \xi(t_1)]$, либо $r[\xi(t_0), \xi(t_1)]$. Теперь можно взять другую пару (t_0, t_2) и поставить ей в соответствие $\text{cov}[\xi(t_0), \xi(t_2)]$ или $r[\xi(t_0), \xi(t_2)]$. В итоге каждой паре аргументов (t_i, t_j) соответствует ковариация или коэффициент корреляции между случайными величинами $\xi(t_i)$ и $\xi(t_j)$, отвечающими этим аргументам. Функция, описывающая поведение величин $\text{cov}[\xi(t_i), \xi(t_j)]$ или $r[\xi(t_i), \xi(t_j)]$, аргументом которой являются значения (t_i, t_j) , и будет называться соответственно ковариационной или корреляционной функцией. Каждая из этих функций отражает линейную связь между соответствующими членами ряда $\xi(t)$.

В общем случае модель стохастического процесса может быть записана по аналогии с моделью (3.1) в виде

$$\dot{x} = f(x, t, \xi),$$

где ξ — некоторый случайный вектор с известным законом распределения.

В отличие от моделей вида (3.1), в этом случае нас будут интересовать не отдельные траектории (реализации), а их статистические свойства, например, математическое ожидание $Mx(t)$, дисперсия $Dx(t)$, корреляционная функция. В общем случае стохастические процессы такого типа оказываются нестационарными. В геологии очень многие изучаемые процессы являются нестационарными. Их чаще всего задают моделью вида

$$x(t) = \varphi(t) + \xi(t),$$

где $\varphi(t)$ — некоторая детерминированная функция, которую называют закономерной, эволюционной или трендовой составляющей; $\xi(t)$ — случайная функция с математическим ожиданием равным нулю и с конечной дисперсией.

Заметим, что математической теории нестационарных случайных процессов не существует.

Случайный процесс может быть и стационарным. В узком смысле стохастический процесс является стационарным, если многомерное распределение вероятности его ординат $\xi(t)$ в конечном наборе значений t не изменяется при одновременном сдвиге этих значений t на постоянный отрезок τ . В широком смысле характерной чертой стационарных процессов является то, что они протекают в вероятностном отношении однородно, независимо от параметра t . Это значит, что случайная величина $\xi(t)$ для любого t имеет одно и то же распределение и одинаковые математические ожидания и дисперсии, т. е. для процесса в целом $M\xi(t) = \text{const}$ и $D\xi(t) = \text{const}$, а корреляционная функция зависит только от разности $t_i - t_j = \tau_k$, т. е. является функцией одного параметра τ .

Если стационарный процесс обладает так называемым свойством эргодичности (для этого его корреляционная функция должна стремиться к нулю при $\tau \rightarrow \infty$), то он удобен тем, что для его характеристики

достаточно одной реализации, ибо усреднение одной реализации по всем значениям t дает значение $\bar{\xi}$, которое стремится по вероятности к математическому ожиданию процесса $M\xi(t)$, когда длина реализации велика. То же самое можно сказать и о дисперсии. Аналогично этому и для построения корреляционной функции достаточно определять коэффициенты корреляции между частями одной реализации, сдвигаемыми относительно друг друга на величину τ . В этом случае корреляционная функция показывает, как изменяется корреляция между двумя любыми членами ряда $\xi(t)$ и $\xi(t + \tau)$, разделенными интервалом (или задержкой) τ , по мере увеличения расстояния между ними (величины τ).

Математическая теория стационарных случайных процессов (в дискретном случае — последовательностей) разработана достаточно хорошо. Изучение таких процессов ведется в рамках и корреляционной, и спектральной теории. Именно корреляционная теория показала, что для полного описания случайной стационарной функции (процесса) достаточно знать два первых момента случайной функции: математическое ожидание и дисперсию — и обязательно знать корреляционную (или спектральную) функцию. По этим динамическим функциям сравнительно легко установить, к какому конкретному виду случайных процессов относится тот или иной наблюдаемый процесс. Надежная оценка корреляционной и особенно спектральной функции по выборочным эмпирическим данным имеет свои сложности. Для их преодоления необходимы определенные математические приемы, краткое изложение которых дано в главе 6.

Существует достаточно много частных формальных математических моделей, представляющих случайные стационарные функции (последовательности), обладающих также свойствами эргодичности. Истоки создания этих моделей берут свое начало из физики. Броуновское движение частицы в вязкой среде, характер установившегося процесса диффузии, изменение флуктуаций потока электронов в ламповом генераторе — все эти процессы хорошо моделируются и описываются в рамках теории случайных стационарных процессов. Обнаруженная согласованность стационарных процессов с довольно разнообразным кругом природных процессов повлекла за собой то, что область применения частных моделей случайных функций еще более расширилась.

Этому способствовало и другое обстоятельство. Так, очень часто оказывалось, что достаточно было лишь творчески учесть специфику той предметной области, где предполагалось использовать выбранный тип формальной математической модели случайной функции. Затем уже можно было сравнительно легко адаптировать математическую модель под изучаемый процесс. Вот почему формальные математические модели случайных функций, хорошо поддающиеся анализу с помощью корреляционной или (и) спектральной теории, широко используются для описания процессов экономики, биологии, социологии и, конечно, геологии. Многие геологические процессы (правда, не всегда при достаточных на то основаниях) описаны в литературе как случайные стационарные процессы.

Кроме необходимости анализа случайных функций многие задачи геологии связаны с изучением последовательностей случайных событий. По сути дела поток (последовательность) случайных событий представ-

ляет собой дискретную по ординате случайную функцию, которая при каждом значении абсциссы принимает какое-либо состояние (событие) из счетного и конечного их множества. Многие вопросы, связанные с описанием природных механизмов, определяющих ту или иную последовательность, могут быть решены, если использовать мощный математический аппарат цепей Маркова. Ниже мы проиллюстрируем действенность математического аппарата цепей Маркова при решении некоторых вопросов геологии. Но прежде следует хотя бы кратко коснуться необходимых для дальнейшего изложения терминов и понятий, относящихся к цепям Маркова.

Известна последовательность случайных событий, именуемая последовательностью Бернулли; ее еще называют последовательностью независимых испытаний. Это значит, что при ее реализации появление последующего события совершенно не связано с предшествующими событиями. Очевидно, что если имеются два возможных события A и B и вероятность появления события A равна $P(A) = p$, а вероятность появления события B равна $P(B) = q = (1 - p)$, то в серии N независимых испытаний можно получить последовательность конкретного вида (скажем, $ABVAVABAAB$) и оценить вероятность появления этой последовательности (при известных $P(A)$, $P(B)$ и n — числа появления события A). Очевидно, что при независимых испытаниях эта вероятность равна $p^a q^b p^a q^b p^a q^b p^a q^b = p^n q^{N-n}$.

Если допустить, что вероятность появления события A зависит от того, какие события ему предшествовали (A или B), то естественно, что структура реализованной последовательности при таком зависимом испытании может существенно измениться. Изменится и вероятность возникновения последовательности конкретного (приведенного) вида. Как оценить эту вероятность, если реализованные последовательности отличаются от последовательности Бернулли? Какие есть критерии и признаки, позволяющие отличить имеющуюся эмпирическую последовательность от последовательности Бернулли, и какие еще могут быть последовательности? На все эти вопросы дают ответы методы теории цепей Маркова.

Случайную последовательность событий (событие часто именуют еще и состоянием), где вероятность возникновения состояния в будущем зависит от того, какие состояния ему предшествовали в прошлом, называют цепью Маркова. Если имеется m последовательных моментов времени

$$(t - m), (t - m + 1), \dots, (t - 2), (t - 1),$$

и им соответствуют события

$$A_{I_1}(t - m), A_{I_2}(t - m + 1), \dots, A_{I_{t-2}}(t - 2), A_{I_{t-1}}(t - 1),$$

и вероятность появления события A_{I_k} в момент времени t зависит от всех m событий, то такую случайную последовательность событий (состояний)

называют марковской цепью m -го порядка. Эту вероятность записывают в виде

$$P\{A_{I_m}|A_{I_{m-1}}(t-1), A_{I_{m-2}}(t-2), \dots, A_{I_1}(t-m)\}.$$

В случае, если мы рассматриваем цепь второго порядка, то

$$\begin{aligned} P\{A_{I_2}|A_{I_{2-1}}(t-1), A_{I_{2-2}}(t-2), \dots, A_{I_1}(t-m)\} = \\ = P\{A_{I_2}|A_{I_{2-1}}(t-1), A_{I_{2-2}}(t-2)\}, \end{aligned}$$

т. е. вероятность возникновения события A_{I_k} зависит лишь от двух предшествующих состояний и не зависит от остальной предыстории.

Для наших дальнейших целей достаточно ограничиться понятием стационарных и однородных цепей Маркова порядка не выше первого (цепь первого порядка именуют простой цепью Маркова). Причем известно, что всякую стационарную цепь порядка выше 1 ($m > 1$) можно свести к эквивалентной цепи Маркова порядка $m = 1$ путем увеличения числа состояний. Цепь Маркова нулевого порядка ($m = 0$) есть последовательность независимых испытаний (последовательность Бернулли).

Простая однородная цепь Маркова полностью характеризуется заданием квадратной стохастической матрицы \mathbf{P} переходных вероятностей размером $s \times s$ (где s — число различных состояний марковской цепи) и вектором \mathbf{p}_0 (размером s) начальных состояний. Элемент p_{0i} вектора \mathbf{p}_0 есть вероятность появления каждого состояния i в цепи. Элемент P_{ij} матрицы \mathbf{P} есть вероятность переходов из состояния i в состояние j . (Заметим, что для стационарных цепей Маркова первого порядка ни \mathbf{P} , ни \mathbf{p}_0 не меняются во времени; для однородной цепи Маркова порядка $m = 1$ лишь \mathbf{P} не зависит от t).

Любая матрица \mathbf{P} однородной простой цепи Маркова может быть представлена в виде

$$\mathbf{P} = \mathbf{B} + \sum_{i=2}^s \lambda_i \mathbf{C}_i, \quad (3.17)$$

где \mathbf{B} — матрица для последовательности Бернулли; \mathbf{C}_i — некоторые постоянные матрицы; λ_i — собственные числа матрицы \mathbf{P} .

Среди собственных чисел матрицы \mathbf{P} всегда имеется собственное число $\lambda_1 = 1$. Формула (3.17) является основой для получения высоких степеней матрицы \mathbf{P} , т. е. для получения \mathbf{P}^k , где k может стремиться к бесконечности. Показано [10], что

$$\mathbf{P}^k = \mathbf{B} + \sum_{i=2}^s \lambda_i^k \mathbf{C}_i, \quad (3.18)$$

причем \mathbf{P}^k представляет собой матрицу вероятностей перехода через k шагов.

Представление (3.18), сама формула (3.17), а также анализ собственных чисел матрицы \mathbf{P} важны для классификации структуры эмпирической марковской последовательности, т. е. для установления того факта, является ли марковская цепь эргодической, периодической и т. д.

Приложение методов цепей Маркова в геологических исследованиях неразрывно связано с именем А. Б. Вистелиуса. При этом следует отметить две важные области в геологии, где математический аппарат цепей Маркова эксплуатировался с наибольшим эффектом: в петрологии — при изучении генезиса магматических пород (в частности, гранитов), и в седиментологии — при исследовании механизма слоеобразования и формирования терригенных осадочных толщ [9]. Эти геологические разработки не только принесли практические плоды, но и стимулировали ряд исследований чисто математического характера.

Для иллюстрации мы остановимся на одном примере, который связан с моделированием механизма образования слоев осадочной толщи. А. Б. Вистелиус [9, 10] решает один из кардинальных вопросов седиментологии о соотношении состава слоев в их толще, что определяет терригенный разрез, и о связи состава слоев с их мощностью. Очевидно, что природный механизм, формирующий терригенную осадочную толщу, во-первых, должен определять закономерное чередование слоев (скажем, по причине гравитационной дифференциации). Так, при упрощенной схеме, когда событие A_{I_1} есть слой песка (π), а событие A_{I_2} есть слой глины (γ), чередование составов имеет вид $I_k \in \{\pi, \gamma\}$ ($k = 1, 2$). Во-вторых, этот же механизм каждому слою определенного литологического состава соотносит значение его мощности. Таким образом, есть последовательность слоев $\{I_k\}$, которой отвечает последовательность мощностей $\{\varphi_i\}$: $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$. Возникает вопрос, какая причина определяет специфическую связь между мощностями слоев: то обстоятельство, что составы слоев образуют закономерную последовательность, или эту причину следует искать вне связи с составом слоев?

Если связь между мощностями слоев зависит только от того, что составы слоев связаны в цепь Маркова, то при фиксации состава слоев и расстояния между ними (числа промежуточных слоев) ковариация мощностей должна оказаться равной нулю. В этом случае должно выполняться соотношение

$$M(\varphi_i \varphi_{i+k} | A_i = I_1; A_{i+k} = I_2) - \\ - M(\varphi_i | A_i = I_1; A_{i+k} = I_2) M(\varphi_{i+k} | A_i = I_1; A_{i+k} = I_2) = 0, \quad (3.19)$$

где A — состав слоя вообще, а нижний индекс при A — номер слоя; k — число слоев, на которое сдвигается эмпирическая последовательность слоев для оценки условной ковариации.

Условная ковариация (3.19) может быть рассчитана по данным послыого описания разреза.

Если соотношение (3.19) выполняется, а последовательность состава слоев образует однородную цепь Маркова с двумя состояниями (π, γ) при начальном распределении, равном стационарному: $p_0 = p_{st}$, то возможно возникновение только двух типов ковариационных последовательностей мощностей: типа Б и типа Ф. Доказательство этой теоремы дано в работе [10].

Тип Б характеризуется тем, что коэффициенты ковариационной последовательности имеют один знак и монотонно убывают с ростом числа

слоев k (сдвиг равен τ). Тип Φ представляет собой последовательность коэффициентов ковариации, убывающих с ростом сдвига по абсолютной величине, но знаки этих коэффициентов чередуются ($-$, $+$). Тип B возникает в случае, когда сумма диагональных элементов матрицы P больше единицы, а тип Φ — когда сумма этих же элементов меньше единицы. В случае же равенства этой суммы единице мы имеем дело с последовательностью Бернулли и ковариационная последовательность состоит из одних нулей.

При изучении обширного геологического материала, характеризующего литологический состав и мощность слоев осадочных толщ разного возраста и разной геологической приуроченности (красноцветные толщи Челекена; флиш Северо-Западного Кавказа, Кавказ, Южного Урала), А. Б. Вистелиус обнаружил, что последовательность составов слоев, упорядоченных в разрезе, образует простую однородную цепь Маркова. В то же время отвечающая этой цепи мощность слоев действительно дает указанные специфические ковариационные последовательности (типа B и Φ). А. Б. Вистелиус на эмпирическом материале также показал, что последовательность мощностей слоев фиксированных составов очень часто дает кореллограмму, значения которой близки к нулю. Отсюда было сделано уверенное заключение о том, что наличие связи между мощностями слоев вызвано исключительно тем, что составы слоев связаны в простую однородную цепь Маркова. Это обстоятельство было использовано для подтверждения схемы слоеобразования, предложенной А. Н. Колмогоровым [30]. Остановимся кратко на этом вопросе.

Вначале А. Б. Вистелиусом и О. В. Сармановым была сформулирована самая общая схема слоеобразования, не противоречащая результатам статистического изучения мощностей слоев в геологическом разрезе. Именно эта схема и легла в основу математической задачи, решенной А. Н. Колмогоровым. Суть этой схемы и ее формулировка сводятся к следующему.

Допустим, что в данной точке седиментационного бассейна за некоторый отрезок времени Δt_n происходит накопление осадков определенной мощности κ_n . В последующий промежуток времени $\Delta \theta_n$ происходит их размыв на глубину η_n . Следовательно, за время $\Delta t_n + \Delta \theta_n$, т. е. за один акт накопления — размыв, может возникнуть n -й слой мощностью $\delta_n = \kappa_n - \eta_n$, если $\delta_n > 0$. Если последовательность чередования таких режимов окажется достаточно длительной и если в среднем считать, что мощности накоплений больше, чем глубины размывов, то, хотя и будет в целом формироваться определенная толща слоев, но в зависимости от случая тот или иной накопленный слой, например n -й, непременно подвергается значительному риску быть размытым частично или полностью.

Этот риск возникает вследствие того, что за образованием слоев обязательно идут чередующиеся акты размыва и накопления и глубина одного из размывов случайно может оказаться значительно больше мощности слоев, накопленных выше n -го слоя. Это приведет к тому, что «окончательно» сохранившиеся слои (которые, кстати, и фиксируются в реальных разрезах) будут как бы двух сортов: частично размытые

и полностью сохранившие свою «первозданную» мощность. Очевидно также, что часть слоев вообще выпадет из сформированной толщи в результате их полного размыва.

Это сразу определяет формулировку первого вопроса: оценить вероятность «окончательного» сохранения слоя. Второй же вопрос, очевидно, должен быть связан с оценкой распределения вероятностей «окончательной» мощности слоя, искаженного последующими размывами, при условии предварительно найденной вероятности сохранения слоя.

Для ответа на поставленные вопросы А. Н. Колмогоров ввел ряд допущений. Так, им показано, что решение целесообразно основывать на анализе бесконечной последовательности случайных величин δ_i ($i = 1, 2, \dots, n, \dots$), каждая из которых есть разность между накоплением осадков i -го слоя и глубиной непосредственно следующего за его возникновением размыва, т. е. $\delta_i = \kappa_i - \eta_i$. Если $\delta_i > 0$, то эта разность будет представлять собой первоначальную мощность i -го слоя.

Окончательная мощность n -го слоя будет либо равна δ_n , если этот слой не исказят последующие размывы, либо, в противном случае, будет уменьшена. Очевидно, что это будет зависеть от максимальной глубины размыва за всю бесконечную историю накопления вышележащих слоев. Если максимальный размыв превысит их мощность, то n -й слой будет размыт полностью или частично. Величина размыва определяется суммой

$$\delta_{n+1} + \delta_{n+2} + \dots \text{ Если в какой-то момент } T \text{ сумма } \xi_n^{(T)} = \sum_0^T \delta_{n+k} \quad (k =$$

$= 0, 1, 2, \dots, T, \dots)$ окажется величиной отрицательной или равной нулю, то n -й слой будет размыт полностью. Теперь ясно, что величину «окончательной» мощности n -го слоя можно записать в виде $\varphi_n = \inf(\xi_n^{(0)}, \xi_n^{(1)}, \dots, \xi_n^{(T)}, \dots)$ при условии, что $\varphi_n > 0$. Здесь \inf означает нижнюю границу множества, состоящего из сумм $\xi_n^{(i)}$ ($i = 0, 1, \dots, T, \dots$).

Относительно последовательности $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots$ вводятся следующие аксиомы:

1) случайные величины δ_i взаимно независимы ($\text{cov } \delta_i, \delta_{i+1} = 0$) и имеют один и тот же закон распределения $P\{\delta_i < x\} = G(x)$;

2) математическое ожидание $\bar{\delta} = M\delta_i = \int_{-\infty}^{+\infty} x dG(x)$ положительно, т. е. $\bar{\delta} > 0$;

3) распределение величин δ_i непрерывное и выражается через соответствующую плотность вероятности $g(x)$ по формуле

$$G(x) = \int_{-\infty}^x g(x) dx.$$

При выполнении этих допущений и аксиом можно найти распределение величин φ_n , которые представляют собой нижнюю грань суммы ξ слу-

чайных величин δ_{n+k} ($k = 0, 1, \dots, T$), т. е. $\xi_n^{(T)} = \sum_{k=0}^T \delta_{n+k}$.

Коль скоро распределение величин δ_n непрерывное, то непрерывно и распределение φ_n , и, следовательно, для φ_n существует некоторая плотность распределения $f(x)$, интегрирование которой дает вероятность сохранения окончательных мощностей: $p = \int_0^{\infty} f(x) dx$. Нас же интересу-

ет распределение φ_n при условии, что $\varphi_n > 0$. Оно задается плотностью вероятности

$$f^*(x) = \begin{cases} (1/p)f(x) & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

Это условное распределение f^* можно наблюдать непосредственно для реальных разрезов после эмпирических измерений мощностей слоев, слагающих изучаемую толщу. Аналитически $f^*(x)$ и p отыскиваются путем определения функции $S(x) = (1/p)f(x)$, которая является, как показано А. Н. Колмогоровым, единственным решением интегрального уравнения вида

$$S(x) = g(x) + \int_{-\infty}^0 g(x-y) S(y) dy, \quad (3.20)$$

причем $p = 1 / \int_{-\infty}^{+\infty} S(x) dx$ или $p \int_{-\infty}^{+\infty} S(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$.

Формальное решение уравнения (3.20) записывается в виде

$$S(x) = \sum_{i=0}^{\infty} S_i(x),$$

где функция $S_i(x)$ интегрально связана с функцией $g(x)$.

Таким образом, видим, что для определения $S(x)$ и p необходимо и достаточно знать только функцию $g(x)$, т. е. для практического приложения результатов решенной задачи необходимо располагать плотностью распределения $g(x)$. Явного вида функции $g(x)$, как понятно, мы не знаем. Поэтому возможно либо задаться ее аналитическим видом, основываясь на некоторых геологических предпосылках, либо построить имитационный машинный эксперимент генерации последовательности значений δ_n и соответствующей ей плотности распределения. В последнем случае тоже не обойтись без ряда геологических постулатов и гипотез.

Какой бы из предложенных путей мы ни выбрали, дополнительно необходимо следить за справедливостью аксиом, положенных в основу предложенной модели слоеобразования. Особенно это важно при проверке адекватности модели А. Н. Колмогорова реальным объектам, подвергнутым испытанию. При этом совершенно необходимо знать, как нарушение тех или иных допущений и положений, на которых базируется модель А. Н. Колмогорова, будет сказываться на окончательных геологических выводах.

А. Б. Вистелиус заметил, что аксиомы 2 и 3 не вызывают принципиальных возражений с геологической точки зрения. Однако аксиома 1 требует проверки, которая сводится к следующему. Если последовательность значений φ_n при условии, что $\varphi_n > 0$ (т. е. непосредственно последовательность мощностей слоев в реальных разрезах), согласуется с марковским процессом нулевого порядка, обеспечивающим кореллограмму, все значения которой отвечают схеме Бернулли, то модель слоеобразования А. Н. Колмогорова приемлема. Приведенный выше результат А. Б. Вистелиуса позволяет заключить, что аксиоматика модели А. Н. Колмогорова не противоречит результатам наблюдения.

Таким образом, условия приложимости модели слоеобразования А. Н. Колмогорова к той или иной анализируемой осадочной толще могут быть проверены в каждом случае конкретно, скажем, еще до того, как встает вопрос об аппроксимации функции вида $g(x)$, без которой, как понятно, решение интегрального уравнения (3.20) немыслимо. Конечно, обоснование конкретного вида функции $g(x)$ дело очень сложное. В сущности, знать конкретный вид функции $g(x)$ — это значит знать особенности функционирования механизма слоеобразования. Но имеющихся геологических сведений для этого пока что недостаточно. Поэтому были предприняты попытки априорного задания того или иного вида функции $g(x)$.

В первой из таких работ [53] И. Г. Хановичем и А. И. Айнемером получено выражение для $S(x)$ при условии, что плотность $g(x)$ вероятности величин δ_n отвечает нормальному закону. Найденное распределение, как показано в работе [53], согласуется с распределением мощностей слоев таврического флиша Крыма. В дальнейшем С. И. Романовский [47] предложил три вида функции плотности распределения для величин δ_n : нормальную плотность, смещенный экспоненциальный закон распределения и смещенную плотность Релея. На примере анализа туронских карбонатных флишевых толщ Кавказа им показано, что, по всей видимости, наиболее хорошо с действительностью согласуется нормальная плотность распределения величин δ_n . При этом эмпирическая плотность распределения мощностей реальных слоев действительно представляет собой «урезанную» на нуле функцию распределения, которая диктуется теорией.

В дальнейшем попытка обосновать вид функции $g(x)$, возникающей при некоторых специальных условиях, была предпринята М. Дасеем [57], который конкретизировал некоторые формализмы, предложенные А. Н. Колмогоровым. Так, принимаются и обыгрываются условия того, что χ_n и η_n являются независимыми и одинаково распределенными случайными неотрицательными величинами внутри отдельно взятой последовательности и вместе с тем независимыми друг от друга. Тогда, если χ_n и η_n в непрерывном случае имеют показательное распределение, то затронутые размытыми слоями, сохранившиеся в разрезе, должны быть подчинены такому же (показательному) закону распределения. В отличие от работ И. Г. Хановича с А. И. Айнемером и С. И. Романовского, в публикации М. Дасея, к сожалению, не приводится никакого геологического материала, что не позволяет дать оценку его теоретическим построениям и аксиоматическим допущениям.

В заключение отметим, что модель слоенакопления, представленная в виде интегрального уравнения, где искомой функцией является плотность распределения вероятностей значений мощности слоя, описывает только одну из сторон процесса слоенакопления. Для геологических приложений важно было бы получить описание процесса слоенакопления в терминах стохастического дифференциального уравнения, где фигурировали бы не случайные величины, а случайные функции $\delta(t)$ и $\varphi(t)$, а также скорости их изменения $\dot{\delta}(t)$ и $\dot{\varphi}(t)$. С одной стороны, функции вида $\dot{\delta}(t)$ и $\dot{\varphi}(t)$ по своему определению связывают последующие ординаты исходных функций с предыдущими. С другой стороны, это тем более оправданно, что случайный процесс самого общего вида во многих случаях может быть приведен к схеме процесса без последствия, т. е. к процессам марковского типа, теория и методы которых разработаны достаточно глубоко.

3.2. МОДЕЛИ ПРОЦЕССОВ С УЧАСТИЕМ ЧЕЛОВЕКА

Моделирование таких процессов на основе методов математики и с помощью средств вычислительной техники является важной ступенью в познании особенностей их функционирования. Моделирование процессов с участием человека имеет определенную специфику. Поэтому они вынесены нами в отдельный раздел. Здесь мы рассмотрим модели управляемых процессов и модели процессов без управления.

3.2.1. МОДЕЛИ УПРАВЛЯЕМЫХ ПРОЦЕССОВ

Модель управляемых процессов или управляемых систем сложнее модели неуправляемых систем, так как она содержит не только формализованное описание управляемого объекта (процессов, протекающих в управляемой системе), но и описание на языке математики самого процесса управления или системы управления. Принципы построения модели управляемого объекта (процесса или явления) не отличаются от рассмотренных в предшествующем разделе. Эта модель отображает существо процессов в управляемом объекте и описывает поведение управляемой системы при выбранной системе управления (и при определенных внешних условиях). Что же касается модели системы управления, то на ней мы и остановимся более подробно, ибо именно она определяет специфику и сложность модели управляемых процессов.

Управление — это целенаправленное изменение какого-либо процесса. Поэтому управление подразумевает прежде всего наличие цели управления. В отсутствие цели говорить об управлении вообще не имеет смысла. Цель — это представление о тех мотивах, которыми надо руководствоваться при управлении тем или иным процессом. Формирование цели — это не формальная процедура, она является внешним фактором по отношению к управлению. Итак, для построения модели системы управления надо математически сформулировать, или формализовать, цель управления. Например, цель поисково-разведочных работ можно видеть

в выполнении плана по приросту запасов. Тогда управление этим процессом подразумевает достижение заданной величины запасов Q .

Вторым составным элементом модели управления должно являться формализованное описание способов достижения цели, или стратегий. В теории управления эти способы называют законами управления. Они представляют собой по сути дела принципы отбора тех управляющих воздействий из множества возможных, которые обеспечивают достижение цели управления. Функция, являющаяся формализованным описанием закона управления, может быть функцией времени, фазовых координат, внешних воздействий или может иметь более общий вид. Это «свободная» функция, находящаяся в нашем распоряжении; ее мы можем выбирать по своему усмотрению.

Любой закон управления всегда определяет величину управляющего воздействия как функцию положения системы по отношению к цели управления. В таких случаях говорят, что закон управления реализует общий принцип отрицательной обратной связи. Поскольку цель управления может быть достигнута не одним-единственным способом, то необходимо включить в модель описание множества возможных вариантов или возможных законов управления. К примеру, обеспечить плановый прирост запасов можно различными способами ведения поисково-разведочных работ, т. е. множеством управляющих воздействий. Но каждый способ должен описывать прирост запасов как функцию состояния работ.

Тот факт, что достижение цели возможно многими способами, приводит к проблеме выбора из множества управлений некоторого вполне определенного. Естественно, таким вариантом должен быть лучший. Математическое определение слова «лучший» требует оценки качества управления по некоторому дополнительному критерию. Таким дополнительным критерием может быть, например, минимизация затрат. Лучшим будет то управление, которое достигает цели с минимальными затратами. Наиболее распространенное отношение к критерию качества отражено фразой: добиться максимума производства с минимумом затрат. Строгого научного смысла она не имеет, ибо минимум затрат — это нуль, а при нулевых затратах получить какую-либо продукцию невозможно. Но несмотря на кажущуюся (математическую) бессмысленность, эта фраза правильно отражает тенденции, интересы управления.

Критерий качества управления часто относят к цели управления, придавая ему смысл целевой функции. Тогда говорят о достижении цели при тех или иных условиях, тех или иных ограничениях. В качестве таких ограничений может выступать, например, количество станков, число площадей, подготовленных под поисковое бурение, т. е. некоторый ресурс управления. Превысить имеющийся ресурс нельзя; необходимо рассчитывать лишь на то, что имеется в распоряжении. Качество управления и ограничения позволяют оценивать каждый вариант с точки зрения его соответствия цели управления. С понятием управления тесно связано также понятие информации. Любой принцип отбора основывается на информации о соотношении цели управления и состояния системы.

Таким образом, математическая модель управляемой системы состоит из модели процессов, протекающих в управляемой системе, т. е. процессов, которые используются для выработки и реализации управляющих воздействий, и модели рационального выбора систем управления. Математическая модель рационального выбора варианта системы включает математическое описание цели управления, информации об условиях, в которых предстоит функционировать системе, критерия качества управления (насколько данный вариант отвечает цели управления при существующей информированности об условиях работы системы), а также описание множества возможных вариантов управления и ограничений. В этом и заключается сложность построения математической модели управляемой системы по сравнению с созданием модели неуправляемой системы. Ясно, что рассмотренные ранее принципы описания явлений природы не помогут построить математическую модель рационального выбора системы управления.

Модель рационального выбора системы управления представляет класс математических моделей принятия решений. Исследование ее заканчивается выработкой правила отбраковки одних вариантов и выделения других — рациональных — вариантов. Эти вопросы находятся в компетенции математической теории принятия решений. В этой теории основное внимание обращают на модель принятия решения (рационального выбора) и мало заботятся о качестве математической модели управляемого объекта. Модель принятия решения можно определить как математическую процедуру сравнения вариантов из заранее заданного множества возможных вариантов.

Общую схему математической модели принятия решения можно пояснить следующим образом. Каждому закону управления (варианту решения) при имеющейся информации соответствует определенное состояние управляемого процесса. Наличие цели и критерия качества формально означает, что состояния процесса, отвечающие различным законам управления и различной степени информированности, оказываются эквивалентными — между ними установлены некоторые отношения сравнения. Эти отношения и дают возможность исключить все не выдержавшие сравнения варианты. Таким образом, модель означает формализацию того обстоятельства, что цель управления устанавливает между состояниями управляемого процесса отношения сравнения, т. е. дает правило отбраковки вариантов решения по формальным признакам.

Если состояние процесса однозначно определяется выбором закона управления, что возможно в условиях полной информации, то правилом отбора вариантов схематически изображается критерий оценки соответствия варианта управления цели управления. При неполной информации возникающая неопределенность не дает возможности сравнить варианты. Выбор варианта управления здесь можно охарактеризовать только множеством возможных состояний процесса, отвечающих разным условиям информированности. В этом случае, чтобы исключить неопределенность, варианты сравниваются в среднем, агрегированно по всей совокупности условий информированности, независимо от конкретных

условий. Правила агрегирования и отбора агрегированных вариантов схематически и дают критерий качества системы.

При решении прикладных задач из всего множества моделей принятия решений часто и успешно используются оптимизационные модели. В случае принятия решений в условиях полной информации эти модели выглядят следующим образом. Пусть V — один из элементов множества вариантов решения, т. е. в нашем случае один из законов управления; a — уровень информированности, который известен; x — состояние процесса, которое, естественно, зависит от управления и информации, т. е. $x = \mu(V, a)$. Тогда отношения сравнения, установленные на множестве возможных состояний x , таковы, что критерием качества, или критерием оценки соответствия выбранного варианта цели управления, оказывается значение скалярной функции или функционала * $f(x)$. Чем больше (или меньше) значение $f(x)$, тем лучше данный вариант системы соответствует цели управления. Иными словами, здесь задача выбора формулируется как некоторая оптимизационная задача: из множества вариантов V найти такие (или такой), которые при $x = \mu(V, a)$ обеспечивают выполнение условия

$$f(x) \rightarrow \max. \quad (3.21)$$

Таким образом, цель управления (3.21) здесь сформулирована на языке оптимизации, в терминах максимизации (минимизации) некоторой функции или функционала. Так обстоит дело при принятии решения в условиях полной информации.

При неполной информации значение $f(x)$, т. е. целевая функция, получается заданной не совсем точно, она зависит от неопределенности уровня a . Решая задачу

$$f(x, a) \rightarrow \max,$$

мы можем определить оптимальный способ достижения цели V лишь как функцию a :

$$V = V(a).$$

Если никакой информацией о факторе неопределенности a мы не располагаем, то и результат оптимизации $V(a)$ и $f(x, a)$ будет произвольным, т. е. мы можем найти оптимальный вариант лишь в соответствии с тем или иным уровнем информированности. Если выбор делается многократно, то имеет смысл говорить о среднем результате выбора. Усреднение результата естественно проводить по разным значениям a . Если же выбор делается однократно, а это наиболее типичный случай в управлении, например, геологоразведочными работами, то усреднение не имеет смысла. Здесь с неопределенностью пытаются справиться двумя возможными способами.

Первый способ заключается в поэтапной оптимизации. Идея ее состоит в том, что управление процессом, особенно длительно протекающим,

* Функционал — это отображение множества функций на множество действительных чисел.

разбивается на несколько этапов, различающихся тем, что на каждом этапе получается новая дополнительная информация. Выбор стратегии на каждом этапе проводится на основе имеющейся информации, которая рассматривается как лишенная неопределенности. Второй путь заключается в выборе гарантирующей стратегии, т. е. стратегии, обеспечивающей независимо от неопределенности значение целевой функции, не меньшее некоторой величины f^* , т. е. обеспечивающей гарантированный результат. Число f^* называется гарантированной оценкой. Эта оценка и соответственно гарантирующая стратегия могут быть найдены в том случае, если известно множество значений, которые может принять уровень информированности a . Тогда для каждого a_i , решая оптимизационную задачу

$$f(x, a_i) \rightarrow \max,$$

можно найти стратегию $V^*(a_i)$ и соответствующую ей величину $f^*(a_i) = \max f(x, a_i)$. Выбирая из всех значений $f^*(a_i)$ минимальное, мы получим $f^* = \min f^*(a_i)$ и соответственно значение a^* и стратегию $V^*(a^*)$. Каково бы ни было на самом деле значение a_i (в силу неопределенности мы заранее его не знаем), минимальный результат f^* в этом случае гарантирован.

Таким образом, в модели принятия решения различают две стороны. Одна из них — это формальная процедура сравнения и отбраковки вариантов решения. Другая сторона по своему смыслу является содержательной, ее формализация сталкивается с большими трудностями, эта сторона модели касается формирования цели и использования имеющейся информации в интересах достижения цели.

Процесс принятия решений при экспериментальной проверке гипотез формализован и логически осмыслен с помощью идей и методов математической статистики, которая располагает для этого соответствующими критериями сравнения.

Инструментом, который облегчает достижение цели, поставленной экспериментатором при решении вопросов, как; где и когда проводить измерения изучаемого процесса той или иной природы при определенных ограничениях (денежных затрат, энергии, материалов и т. п.) или как оптимальным образом организовать эксперимент, иными словами, как оптимально управлять изучением процесса, являются статистические методы планирования эксперимента. С развитием этих методов возникла математическая теория планирования эксперимента, базирующаяся в значительной степени на идеях и методах математической статистики. Постановка задач формулируется в терминах математической статистики, а решение их проводится с использованием разнообразных, отнюдь не традиционных статистических методов: линейной алгебры, теории множеств, теории операций, теории игр, теории некорректно поставленных задач и др.

В рамках теории оптимального эксперимента рассматриваются критерии оптимальности планов, способы их сравнения по этому критерию и свойства планов. При этом под планом понимается множество точек в некоторой области, где проводятся наблюдения, с указанием координат

точек и числа наблюдений в этих точках. Критерии оптимальности обычно предъявляют некоторые требования к свойствам планов.

В математической теории планирования экспериментов выделяются два основных направления: планирование экстремальных экспериментов и планирование экспериментов по выяснению механизма явлений. Планирование первого типа заключается в поиске таких условий, при которых изучаемый процесс удовлетворяет некоторому критерию оптимальности, например, получить максимальную скорость бурения геологоразведочных скважин. В качестве условий при этом могут выступать скорость вращения бурового инструмента, осевая нагрузка и т. п.

Планирование экспериментов второго типа связано с выяснением поведения исследуемого объекта, т. е. с определением вида зависимости некоторой величины, характеризующей объект, от соответствующих факторов. На языке математики задача подобного рода формулируется как задача поиска математической модели, описывающей исследуемый объект. Таким образом, планирование второго типа — это планирование экспериментов по определению математической модели исследуемого объекта. Естественно, что планирование как элемент управления имеет смысл лишь в тех случаях, когда сформулирована конечная цель проводимого исследования.

Еще одной концепцией принятия решений является последовательный анализ Вальда [5]. Он касается стратегии шагового (разбитого на этапы) эксперимента. Такой подход дает модель, позволяющую принимать решения о том, когда эксперимент должен быть остановлен (закончен).

Типичным управляемым процессом в геологии является процесс поисков и разведки месторождений полезных ископаемых. Но нам известен лишь один пример моделирования этого процесса как управляемого. На этом примере, выполненном Л. Д. Кнурингом [27], мы и остановимся. Он касается проведения в регионе поисково-разведочных работ на нефть и газ. Моделировался некоторый осредненный агрегированный вариант управления. Сделать это имело смысл по той причине, что средние по годам значения показателей, характеризующих поисково-разведочный процесс, в течение небольших промежутков времени (например, за пятилетку) изменяются без каких-либо ярко выраженных тенденций. Поэтому на указанном отрезке времени процесс рассматривался как стационарный. Такой подход существенно упрощал моделирование, так как в этом случае показатели, характеризующие процесс, не являются функцией времени (в пределах, естественно, рассматриваемого отрезка времени).

Цель поисково-разведочных работ в данном случае определялась как достижение заданного (планового) прироста запасов Q за отрезок времени τ , на котором процесс еще сохраняет свою стационарность. Величина Q — это целевой параметр.

По отношению к управлению поисково-разведочными работами традиционно принято говорить о методике этих работ. Именно этим термином определяют совокупность управляющих воздействий на процесс.

К методическим параметрам следует отнести: число площадей \hat{M}_n и число месторождений \hat{M}_p , на которых в текущем году завершено поисковое и разведочное бурение; число площадей P_n , находящихся в бурении

с целью открытия новых месторождений; число месторождений P_p , находящихся в разведочном бурении; число скважин, затрачиваемых на оценку нефтегазоносности одной площади (N_n) и на разведку одного месторождения (N_p); проходку по скважинам, затраченным на оценку нефтегазоносности одной площади с начала работ (R_n) и по годам (H_n); проходку по скважинам, затраченным на разведку одного месторождения с начала разведочных работ (R_p) и по годам (H_p); продолжительность поисковой оценки одной площади глубоким бурением (T_n); продолжительность разведочных работ на одном месторождении (T_p); число станков, используемых для бурения поисковых (n_n) и разведочных (n_p) скважин в текущем году; число станков, одновременно работающих на одной площади при оценке ее нефтегазоносности (η_n) и на одном месторождении при его разведке (η_p) в текущем году.

Значения методических параметров определяются как состоянием процесса, так и управляющим воздействием. Если все методические параметры в процессе работ выбираются свободно, то все они являются управляющими, т. е. теми самыми законами управления, о которых мы говорили раньше. В данном случае в связи со стационарностью процесса законы управления описываются отдельными параметрами. Если же лишь часть методических параметров может быть выбрана свободно, тогда остальные являются параметрами, характеризующими состояние процесса.

Вопрос о том, могут ли все методические параметры выбираться свободно, а если нет, то какие именно, решается исходя из системы ограничений, наложенных на процесс. Такая система ограничений была сформулирована как требование сбалансированности процесса, т. е. рациональных соотношений между методическими параметрами, их соответствия друг другу. В этом случае одни параметры уже становятся зависимыми от других и не могут быть выбраны свободно, по усмотрению лица, принимающего решение.

Критерием качества, или оценки соответствия выбранного варианта цели управления, служила величина затрат. По ней проводилось сравнение вариантов. Оптимальным считался вариант, соответствующий минимуму затрат.

Таким образом, модель управления поисково-разведочным процессом должна описывать сбалансированность этого процесса. Отсюда необходимо получить ответ на вопрос, какие методические параметры являются управляющими, установить зависимость состояния процесса от управления (зависимость остальных методических параметров от управляющих) и, наконец, представить затраты и запасы как функцию состояния процесса, соответствующего данному варианту управления.

Прежде чем переходить к построению модели, необходимо отметить, что целевой и методические параметры не исчерпывают описания поисково-разведочного процесса. К ним необходимо добавить показатели, которые можно условно назвать техническими. Они не являются ни управляющими параметрами, ни параметрами состояния. Это параметры ограничения, влияющие на величину затрат. При изменении их значений меняется и выбор оптимального варианта. К числу параметров ограни-

чения относятся: продолжительность строительства одной скважины t ; среднегодовая проходка одним станком h ; стоимость бурового станка с оборудованием (r) и одной скважины (c) в рассматриваемый промежуток времени. Ограничениями эти параметры являются потому, что мы не можем их изменить, а принимаем как заданные величины. Естественно, что на процесс могут быть наложены и другие ограничения, например, связанные с числом станков. Ведь наши возможности в этом отношении не безграничны. Но пока этих ограничений мы касаться не будем.

В основу модели была положена следующая схема ведения поисково-разведочных работ. Если за время τ необходимо прирастить Q запасов, то при средней величине запасов \bar{Q} одного месторождения необходимо к моменту τ разведать $M_p = Q/\bar{Q}$ месторождений; соответственно до этого должно быть опосковано M_n площадей. Поскольку процесс является стационарным, то ежегодно необходимо заканчивать разведкой $\bar{M}_p = M_p/\tau$ месторождений. Чтобы поисково-разведочный процесс протекал во времени не прерываясь, необходимо ежегодно вводить в разведочное бурение столько же месторождений, сколько выводится, т. е. \bar{M}_p . Но тогда надо ежегодно вводить в поисковое бурение столько площадей, сколько ежегодно требуется для последующей постановки разведочных работ на \bar{M}_p новых месторождениях, т. е. $\bar{M}_n = M_n/\tau$.

Таким образом, ежегодно вводится в поисковое и разведочное бурение \bar{M}_n и \bar{M}_p объектов, столько же объектов ежегодно выводится (работы на них завершаются). В этих условиях число площадей P_n , находящихся в бурении с целью открытия новых месторождений, и число месторождений P_p , находящихся в разведочном бурении, остаются постоянными. Если средняя продолжительность поисковой оценки одной площади глубоким бурением равна T_n , то $P_n = \bar{M}_n T_n$. Соответственно при средней продолжительности разведки T_p имеем $P_p = \bar{M}_p T_p$.

Пусть поисковое бурение каждой площади ведется в среднем η_n станками, а разведочное η_p станками, и пусть средняя годовая проходка одним станком (с учетом всех потерь времени) составляет h . Пусть также для поисковой оценки одной площади необходимо затратить N_n скважин, а для разведки одного месторождения N_p скважин. При средней глубине скважины h_c ее бурение (включая испытание) потребует времени $t = h_c/h$ (поскольку h получено при условии учета всех потерь времени). Тогда имеем

$$T_n = (N_n/\eta_n)t; \quad T_p = (N_p/\eta_p)t. \quad (3.22)$$

Общая продолжительность поисково-разведочного бурения на одном объекте составит $T = T_n + T_p$.

Используя выражение (3.22), формулы для P_n и P_p , выведенные ранее, можно записать в виде

$$P_n = \bar{M}_n(N_n/\eta_n)t; \quad P_p = \bar{M}_p(N_p/\eta_p)t. \quad (3.23)$$

Если из общего числа станков n поисковое бурение ведется n_n станками, а разведочное n_p станками, то

$$P_n = n_n/\eta_n; \quad P_p = n_p/\eta_p.$$

Тогда, используя выражение (3.23), получаем

$$n_n = \bar{M}_n N_n t; \quad n_p = \bar{M}_p N_p t. \quad (3.24)$$

Если обозначить годовой объем поискового бурения через H_n , а разведочного — через H_p , то очевидно, что $H_n = P_n \eta_n h$, а $H_p = P_p \eta_p h$. Воспользуемся выражениями (3.23) и найдем, что

$$H_n = \bar{M}_n N_n t h; \quad H_p = \bar{M}_p N_p t h. \quad (3.25)$$

Выведенные соотношения (3.22) — (3.25) отражают характер взаимосвязи между показателями поисково-разведочного процесса. Из них следует, что управление этим процессом может быть обеспечено выбором трех групп показателей: 1) \bar{M}_n и \bar{M}_p ; 2) N_n и N_p ; 3) η_n и η_p . Через них однозначно определяются все остальные методические параметры, а тем самым и ход поисково-разведочного процесса. Выполнение соотношений (3.22) — (3.25) в ходе поисково-разведочных работ свидетельствует о сбалансированности рассматриваемого процесса.

Показатели, составляющие три указанные группы, в свою очередь, однако, не являются независимыми друг от друга. Ниже рассматриваются их взаимоотношения.

Поскольку \bar{M}_n и \bar{M}_p — это множества объектов, то существующие между ними связи можно считать межобъектными. Если учесть, что это еще и объекты, относящиеся к разным этапам (поиски и разведка), то одновременно речь идет и об отношении между этапами.

К любому моменту времени число площадей, на которых завершено поисковое бурение, должно быть больше числа месторождений, на которых закончены разведочные работы, т. е. $M_p < M_n$. Это очевидно, ибо разведка ставится на объекте по завершении на нем поисковых работ, иначе получится, что есть объекты разведанные, но не опоскованные. Если учесть, что в разведку передаются не все M_n площадей, на которых завершено поисковое бурение, а лишь продуктивные, число которых равно kM_n (где k — коэффициент успешности открытия месторождения), то должно выполняться неравенство $M_p \leq kM_n$. Однако не все месторождения одинаковы по своим характеристикам. Среди них есть такие, которые по каким-то причинам не рационально вводить в разведку. Они могут быть законсервированы, чтобы не отвлекать средства от разведки других, более важных, месторождений. К примеру, при открытии крупных и средних месторождений нет смысла разведывать мелкие месторождения. В этом случае имеем

$$\bar{M}_p = k_1 \bar{M}_n, \quad (3.26)$$

где k_1 — коэффициент успешности открытия только тех месторождений, которые будут передаваться в разведку; очевидно, что $k_1 \leq k$.

Показатель k_1 отражает в определенной мере природные условия. Он фиксирует долю тех месторождений, разведка которых оправдана; например, если это крупные и средние месторождения, то k_1 — доля таких месторождений среди всех объектов опоскования. В этом смысле значение k_1 определяет природа, однако оно зависит и от методики

работ. Экономические соображения диктуют правило дифференциации месторождений, правило отнесения месторождения к тому или иному классу (рационально разведывать — нерационально разведывать), хотя экономические соображения и не могут изменить созданные природой соотношения месторождений разных классов. В то же время от качества подготовки структур и от надежности методов прогноза их нефтегазоносности зависит доля «пустых» объектов среди всех объектов опискования, а следовательно, и значение коэффициента успешности открытия месторождений k_1 и связанного с ним показателя k_1 .

Все вышеизложенное показывает, что при данных природных условиях и при данном уровне открытий показатель k_1 регулирует среднюю величину запасов \bar{Q} , приращиваемых разведкой одного месторождения. Вопрос о консервации открытого месторождения или о постановке на нем разведочных работ решается с учетом многих факторов, важнейшую роль среди которых играет величина запасов нефти и газа. Для простоты модели считалось, что отбраковка открытых месторождений проводится исключительно по признаку их богатства: разведочные работы ставятся на наиболее богатых (в данном районе) месторождениях; месторождения с меньшими запасами консервируются.

Тогда получается, что с ростом k_1 (до k включительно) в разведку передается все большая доля открытых месторождений, вследствие чего их число увеличивается. Этот рост происходит в результате вовлечения в разведку месторождений все с меньшими запасами, что приводит к уменьшению средней величины запасов, приходящихся на одно месторождение. Таким образом, при данном числе открытых месторождений рост k_1 означает уменьшение средних запасов одного месторождения из числа подлежащих разведке. Исследование этого вопроса показало, что зависимость средних запасов \bar{Q} , приращиваемых разведкой одного месторождения, от коэффициента k_1 описывается выражением [27]:

$$\bar{Q}(k_1) = (\alpha + \beta k_1) / (\gamma + \epsilon k_1), \quad (3.27)$$

где параметры α , β , γ и ϵ зависят от распределения месторождений по размерам (запасам) в регионе, а также от коэффициента успешности открытия месторождений k .

Ежегодный прирост на одном разведываемом месторождении в среднем составит $\bar{Q}(k_1)/T_p$, а на P_p месторождениях $Q_r = P_p \bar{Q}(k_1) T_p = \bar{M}_p \bar{Q}(k_1)$. Отсюда число месторождений \bar{M}_p , ежегодно заканчиваемых разведкой, должно определяться требуемым приростом запасов Q_r и средней величиной запасов, приращиваемых разведкой одного месторождения $\bar{Q}(k_1)$, а именно:

$$\bar{M}_p = Q_r / \bar{Q}(k_1), \quad (3.28)$$

где $Q_r = Q/\tau$.

Поскольку $\bar{Q}(k_1)$ является функцией k_1 , а число площадей \bar{M}_p , ежегодно заканчиваемых опискованием, согласно выражению (3.26), связано с числом месторождений \bar{M}_p , ежегодно заканчиваемых разведкой, также через показатель k_1 , то, естественно, что все эти показатели при заданном приросте запасов Q будут зависеть от k_1 . Таким образом, про-

веденный анализ взаимосвязи величин \hat{M}_n и \hat{M}_p позволяет заключить, что их выбор определяется выбором показателя k_1 . При этом обеспечивается увязка числа объектов опоскования и числа объектов разведки как между собой, так и с достижением цели — прирастить за требуемый срок запасы на данную величину Q .

Вторая (N_n и N_p) и третья (η_n и η_p) группы показателей, определяющих управление поисково-разведочным процессом, характеризуют работы не в региональном, а в локальном масштабе — внутри одного объекта. Поэтому связи между ними были названы внутриобъектными. Показатели N_n и N_p , как и k_1 , отражают природные геологические условия. Геологическое строение месторождения диктует необходимость бурения определенного числа скважин для получения требуемой информации. Однако их число непосредственно связано и с методикой работ. Экономические же факторы определяют объем требуемой информации применительно к конкретным условиям. Показатели η_n и η_p отражают темпы работ; непосредственно с геологической обстановкой они не связаны и являются, таким образом, чисто методическими.

Число скважин N_n и N_p на одном объекте, необходимое для выполнения задач поисков и разведки, зависит от числа одновременно закладываемых скважин (η_n и η_p). Существование такой зависимости вытекает из последовательной адаптации поисково-разведочного процесса к накапливаемой информации. Действительно, процесс поиска и разведки организован так, что заложение последующих скважин корректируется результатами предыдущих. Заложение одновременно большого числа скважин приводит к тому, что они оказываются пробуренными не в лучших условиях. Вследствие этого для получения необходимого объема информации на объекте бурится больше скважин. В этом находит отражение неопределенность информации, на основании которой закладывалась скважина. В учете зависимости N от η проявляется формализация использования имеющейся информации в интересах достижения цели. Проведенными исследованиями установлен вид указанной зависимости. Так, в ряде конкретных случаев [27]

$$N_n = a_n + b_n(\eta_n - 1); \quad N_p = a_p + b_p(\eta_p - 1). \quad (3.29)$$

Эти выражения определяют лишь попарные взаимосвязи отдельно для поисковых и для разведочных работ, между собой они не связаны. Таким образом, межобъектные связи являются одновременно и межэтапными, а внутриобъектные связи — внутриэтапными.

Выражения (3.22) — (3.29) дают формализованное описание управляемого процесса, состояние которого целиком определяется двумя группами показателей: 1) k_1 ; 2) η_n и η_p . Эти показатели могут быть свободно выбраны по воле субъекта, ведущего поисково-разведочные работы. Тем самым они являются управляющими параметрами.

Построенная модель, естественно, является идеализированной, схематичной. Реальный процесс несколько отличается от процесса, описываемого предложенной моделью. Но надо полагать, что это расхождение не так уж важно. Ведь суть самого процесса отражена моделью доста-

точно четко, модель качественно правильно предсказывает ход процесса.

Итак, модель рационального выбора управляющих параметров включает в себя: значение Q как целевого параметра; множество возможных значений управляющих параметров k_1 , η_n и η_p и соответствующее им множество значений затрат Z как критерия качества управления, а также ограничения, обусловленные как техническими параметрами, так и возможным ресурсом управления (число станков, площадей и т. п.). Оптимизация процесса, связанная с принятием оптимального решения, требует определения оптимальных значений управляющих параметров и в соответствии с ними оптимальных значений остальных методических параметров.

Для определения затрат служит формула

$$Z = C_{n,p}(1 + E_{n,n})^T + E_n K_{n,p}(1 + E_{n,n})^T,$$

где $C_{n,p}$ — эксплуатационные расходы на поиски и разведку; $K_{n,p}$ — соответствующие капиталовложения на поисково-разведочные работы; T — продолжительность поисково-разведочных работ; E_n — нормативный коэффициент, минимальное значение которого для всего народного хозяйства в целом принимается равным 0,12; $E_{n,n}$ — нормативный коэффициент приведения разновременных затрат (принимается равным 0,08).

Для решения оптимизационной задачи необходимо критерий качества — затраты — выразить как функцию состояния процесса. Учитывая соотношения (3.22) — (3.29), выражение для затрат можно записать в виде:

$$Z = (cN_n \bar{M}_n + cN_p \bar{M}_p)(1 + 0,08)^T + 0,12(rn_n + rn_p)(1 + 0,08)^T, \quad (3.30)$$

где c — стоимость одной скважины; r — цена бурового станка с энергетическим и другим оборудованием.

Оптимальными будут те значения управляющих параметров, которые минимизируют затраты (величину Z) на выполнение поставленной задачи (прирастить запасы Q за время τ) при соответствующих ограничениях. Отсюда следует, что не существует одного, на все случаи, оптимального числа скважин, одних оптимальных темпов работ (числа станков, работающих одновременно на одном месторождении), одного оптимального значения k_1 . Если будет поставлена другая задача или даже та же самая задача, но при других исходных данных, то оптимальными будут и другие значения управляющих параметров.

Поиск минимума Z осуществляется в следующем порядке. Для любых произвольно выбранных величин $V = (k_1, \eta_n, \eta_p)$ определяется состояние процесса $x = \mu(V)$, которое выражается последовательностью величин: $\bar{Q}(k_1)$ [выражение (3.27)], \bar{M}_p — [выражение (3.28)], \bar{M}_n [выражение (3.26)], N_n и N_p [выражение (3.29)], T_n и T_p [выражение (3.22)], P_n и P_p [выражение (3.23)], n_n и n_p [выражение (3.24)]. Подчеркнем, что достижение цели — заданного значения Q — здесь обеспечено величиной \bar{M}_p , которая увязана с Q . Если полученные значения x выходят за пределы ограничений (например, величина $n = n_n + n_p$ превышает имеющееся число станков), то этот вариант выбора значений управляющих

параметров V из рассмотрения исключается. Если же значения x лежат в пределах ограничений, то по формуле (3.30) рассчитывается величина Z . Варьируя различные комбинации $V = (k_1, \eta_n, \eta_p)$, в конце концов находят такую комбинацию $V^* = (k_1^*, \eta_n^*, \eta_p^*)$, которой отвечает минимум Z . Значения управляющих параметров, составляющие эту комбинацию, и будут оптимальными. Так будет найден оптимальный вариант управления поисково-разведочным процессом.

Приложение построенной модели к исследованию поисково-разведочных работ за одну из пятилеток в целом по СССР позволило получить ответ на ряд вопросов, которые являются доминирующими в методике поисково-разведочных работ, обсуждаются в печати и по которым единого мнения не достигнуто. Такими вопросами оказались следующие [26]: порядок проведения поискового бурения на площадях, число поисковых скважин на одной площади, продолжительность поисковой оценки одной площади глубоким бурением, темпы разведки, продолжительность разведки одного месторождения, число разведочных скважин на одном месторождении, стратегия поисково-разведочных работ, число структур, вводимых в бурение, соотношение между запасами различных категорий, прогнозирование поисково-разведочного процесса.

Рассмотренный пример касался проведения поисково-разведочных работ в регионе, когда опосредованно и разведывается одновременно некоторая совокупность объектов. В этом случае работы на каждом отдельном объекте подчинены интересам освоения региона в целом. При этом, однако, поисково-разведочные работы на каждом отдельном объекте преследуют и свои определенные цели локального масштаба, которые вытекают и согласуются с целями регионального масштаба. В частном случае такое согласование даже может отсутствовать, тогда цель поисковых и разведочных работ на объекте целиком ограничена интересами изучения данного объекта. В локальном масштабе, следовательно, также возникает задача управления процессом поисков и разведки, но уже в пределах данного объекта. В частности, если говорить о разведочном этапе, то это будет задача разведки месторождения. Поэтому необходимо сказать несколько слов об управлении разведкой месторождений; в качестве примера речь пойдет о разведке месторождений нефти и газа.

Разведка месторождений нефти и газа осуществляется бурением глубоких скважин, с ними связаны основные затраты на разведку. Поэтому управление разведкой мы ограничим лишь решением вопросов, связанных с глубокими скважинами. Впервые задача оптимизации разведки месторождений нефти и газа была поставлена и решена авторами данной книги. В то время задача управления была сформулирована нами как задача определения оптимального числа скважин, оптимальных точек их заложения в пределах известного контура нефтегазоносности и оптимального числа наблюдений в каждой скважине [25].

Предполагалась последовательная шаговая стратегия, когда весь процесс разведки разбит на этапы, на каждом из которых закладывается определенное число скважин; соответственно проблема рационального выбора системы размещения скважин возникает лишь по окончании

предыдущего этапа. Было показано, что решение задачи требует формулировки цели. Цель разведки была определена как получение требуемой информации о месторождении. Было также сформулировано положение о том, что объем получаемой информации зависит не только от числа скважин N , но и от системы их размещения $\epsilon(N)$. Причем эта система не связывалась с какими-либо регулярными сетями, а предполагала указание координат для каждой вновь закладываемой скважины. Критерием оценки и сравнения систем размещения данного числа скважин n (на заданном этапе) служил критерий, оценивающий объем информации, получаемый при данной системе размещения $\epsilon(N)$ вновь закладываемых скважин с учетом уже пробуренных (сумма их равна N). Лучшей считалась та система $\epsilon^*(N)$, которая максимизирует природу информации.

Требуемый объем информации определялся из условия минимизации суммы затрат на разведку и убытков при разработке (предполагалось, что последние обусловлены неполнотой информации, полученной в процессе разведки). Критерием, отвечающим этому условию, является так называемая функция потерь. Конечное число скважин N^* определялось как такое, которое обеспечивает получение информации в требуемом объеме. При этом числе скважин функция потерь минимальна.

Естественно, что такая постановка и решение задачи потребовали формализации таких понятий, как объем информации и функция потерь. При задании меры объема информации мы исходили из того, что все геологические параметры (в том числе и производные от этих параметров — запасы) обнаруживают закономерные изменения по площади продуктивных пластов. Считалось, что аналитический вид функции (поверхности), описывающей эту закономерность, известен:

$$M(z|x, y) = f(x, y, \Theta),$$

где $M(z|x, y)$ — математическое ожидание параметра z в точке (x, y) ; Θ — вектор параметров.

Функция $f(x, y, \Theta)$ является математической моделью изучаемого объекта. Соответствующий ей геометрический образ называют поверхностью отклика. Объем информации можно сопоставить с уменьшением неопределенности восстановления (картирования) этой поверхности по наблюдениям в скважинах. В такой постановке задача о выборе оптимальной системы размещения данного числа скважин становится задачей выбора оптимального плана эксперимента, и в качестве критерия оценки неопределенности картирования можно воспользоваться одним из критериев оптимальности планов, по которому и сравнивать планы размещения данного числа скважин в сумме с пробуренными. Оптимальный план размещения ϵ^* отвечает минимальному значению критерия.

В качестве примера нами были рассмотрены так называемые D -, A - и Q -оптимальные планы. При этом функция $f(x, y, \Theta)$ считалась линейной относительно параметров:

$$f(x, y, \Theta) = \Theta' \varphi(x, y),$$

где $\varphi'(x, y) = (\varphi_1(x, y), \dots, \varphi_m(x, y))$ — набор некоторых функций от координат точек наблюдения (x, y) .

Функция потерь была построена как функция величин N и $\varepsilon(N)$ в виде

$$R(N, \varepsilon(N)) = cN + kL(N, \varepsilon(N)),$$

где $L(N, \varepsilon(N))$ — некоторый функционал, вид которого определяется выбранным способом сравнения вариантов (планов) размещения скважин $\varepsilon(N)$, пробуренных и вновь размещаемых суммарным числом N . Конечное число скважин N^* отвечает минимуму $R(N, \varepsilon(N))$. Напомним, что c — стоимость одной скважины.

Осознание того факта, что сокращение числа скважин может быть достигнуто благодаря более рациональной системе их размещения, привело к тому, что со временем задача об оптимальном размещении скважин стала рассматриваться в качестве самостоятельной. В ее постановку последующие авторы не внесли каких-либо принципиальных изменений. Варьировались лишь конкретная модель, с помощью которой по результатам разведки описывалось поведение признака в поле залежи, и соответственно критерий сравнения или выбора варианта размещения скважин (точек их заложения). Идейная основа этого критерия не менялась. Он по-прежнему носил информационный характер, отражая неопределенность картирования значений признака или ошибки интерполяции.

В существенно другой постановке задача оптимизации управления процессом разведки была рассмотрена Л. Д. Кнорингом [25]. Она была усовершенствована и в большей степени приближена к реальности. Моделировалась разведка не одной залежи, а многопластового месторождения. Соответственно цель разведки была определена как получение информации о месторождении в целом. Из этой цели вытекает необходимость избирательного, не одинакового изучения каждой залежи. Но этим цель разведки не ограничивалась, она была расширена — в сферу разведки была включена задача подготовки месторождения к разработке и частичного совмещения функций разведки и разработки.

В соответствии с этим каждая разведочная скважина оценивалась не только с точки зрения поставляемой ею информации, но и возможностью по окончании разведки использовать эту скважину для других целей, например, как эксплуатационную или нагнетательную. Поэтому критерием сравнения систем размещения скважин служил критерий, учитывающий как прирост информации, получаемой от бурения очередной скважины в данной точке (информативность точки), так и возможность того, что скважина, пробуренная в данной точке, будет выполнять свои полезные функции и по окончании разведки (полезный потенциал точки). Лучшей для заложения одной скважины (или нескольких скважин) считалась та точка (точки), где сумма этих двух показателей, взятая с соответствующими весами, максимальна (если речь идет об одной скважине) или выше, чем в любых других точках (если речь идет о нескольких скважинах).

Прирост информации о месторождении, который можно получить при бурении скважины в данной точке (информативность точки), оценивался как взвешенная сумма прироста информации по всем залежам. Учитывая, что наиболее полно должна быть изучена та группа пластов,

которая является наиболее продуктивной и включает основные запасы нефти и газа, слагаемые данной суммы брались с весами, пропорциональными ожидаемым, предполагаемым или предварительно определенным запасам каждой залежи (смотря по тому, на каком шаге находится разведка) и ее продуктивности. Информативность точки по отношению к каждой залежи оценивалась не только по вкладу скважины, пробуренной в этой точке, в уменьшение неопределенности при оценке поведения параметра по площади данной залежи или в уточнение его величины, например запасов (информация о параметрах залежи), но и вклада в уточнение положения залежи и конфигурации ее контуров (информация о пространственном положении залежи и ее границах), т. е. контур залежи уже не считался заданным.

Полезный потенциал точки определялся в зависимости от расстояния этой точки до вероятного контура нефтеносности (от чего зависит возможность обводнения скважины) и от расстояния точки до уже пробуренной скважины (от чего зависит вероятность, что вновь пробуренная разведочная скважина может использоваться в качестве эксплуатационной).

Была изменена и модель объекта — функция $f(x, y, \Theta)$, что повлекло за собой изменения в формальной оценке получаемого объема информации о параметре и его поведения. Модель уже не была изначально жестко задана. Ее требовалось найти по результатам разведки. Предполагалось, что на каждом этапе разведки можно задать некоторую совокупность моделей, каждая из которых может оказаться «истинной» лишь с определенной вероятностью. Тогда информация оценивается прежде всего с точки зрения дискриминации моделей (наиболее быстрое выявление верной модели и отбрасывание остальных) и только во вторую очередь с позиций уточнения неопределенности того или иного рода, получаемой при оценке данной модели. Такой подход к моделированию оказался более плодотворным, позволяющим лучше учитывать многообразие ситуаций и неполноту знаний о месторождении в период проведения разведки.

Отметим еще одну существенную сторону. В данной постановке задачи и ее решении наряду с формальными процедурами большая роль была отведена и неформальным. Они касались выбора весовых функций при суммировании информации разного типа или при оценке соотношений между всей информацией и полезным потенциалом. Этот выбор определяется изменением требований в процессе разведки и опытом работ.

Оптимизация разведки одного месторождения, естественно, требует ответа на вопрос, сколько скважин рационально закладывать одновременно. Этот вопрос выпадает из поля зрения исследователей, занимающихся оптимизацией размещения разведочных скважин или моделированием процесса разведки. Между тем, поскольку разведка основывается на последовательной, многошаговой стратегии, этот вопрос не менее важен, чем вопрос о рациональном размещении скважин. Ведь с ним связаны и число шагов, и продолжительность разведки со всеми вытекающими отсюда последствиями, которые, кстати, имеют отношение

к затратам. Это и было отражено в работе [27], где впервые даны и постановка и решение этого вопроса в рамках оптимизационной задачи. Там же рассмотрено решение задачи с позиций подчинения интересов разведки отдельного месторождения интересам освоения ресурсов региона в целом.

К приведенным примерам моделирования управляемых процессов и процедуры рационального выбора следует добавить примеры, связанные с принятием решения о прекращении наблюдений (эксперимента) согласно концепции последовательного анализа Вальда, о чем упоминалось раньше.

3.2.2. МОДЕЛИ ПРОЦЕССОВ БЕЗ УПРАВЛЕНИЯ

Выше мы рассматривали модели управляемых процессов, составной частью которых являются модели рационального выбора системы управления. Выбор всегда проводится на основе определенной информации, отражающей состояние процесса и его положение по отношению к цели. В этом смысле рассмотренные процессы — это процессы информационные. В этом разделе мы также будем рассматривать информационные процессы. Но задача управления этими процессами уже не ставится. Мы как бы ограничиваемся ролью наблюдателя. Наша задача — описать процесс в том виде, в каком сложилось его течение во времени, пусть даже это произошло в результате каких-либо управляющих воздействий на него.

Управление формирует новый тип механизма отбора реальных движений, который в общем случае называется обратной связью. Собственно говоря, закон управления — это определенная структура обратной связи. Здесь мы будем рассматривать системы с обратной связью. Из-за сложности этих систем нас будет интересовать лишь следствие управления — следствие, вытекающее из структуры обратных связей, т. е. то, что можно назвать отражением функций поведения. Связи, определяющие функции поведения, в отличие от тех связей, которые рассматривались в предыдущем разделе, настолько сложны и опосредованны (это обусловлено разнообразием и иерархией целей, наличием нескольких уровней управления и т. д.), что опытное изучение их становится чуть ли не единственным способом.

В сочетании с законами сохранения эти функции дают замыкание модели, образуют инструмент, позволяющий изучать динамику сложнейших процессов путем их приближенного описания. Построение соотношений, позволяющих приближенно описывать сложные процессы в виде конечных формул, называется параметризацией процессов. Таким образом, в данном разделе обратные связи параметризуются функциями поведения.

В качестве примера такого процесса рассмотрим динамику накопления запасов нефти и газа в регионе. Она является как следствием системы управления поисково-разведочными работами в масштабе региона, так и следствием структуры ресурсов (наличие месторождений с неодинаковыми запасами, находящихся в определенном взаимоотношении

друг с другом) и характера их распределения по площади региона. В зависимости от системы управления роль природного геологического фактора (структура и распределение ресурсов) сказывается на динамике процесса в большей или меньшей степени.

Моделированием динамики накопления запасов нефти и газа занимались ряд исследователей. Мы рассмотрим модели, сформулированные Л. Д. Кнорингом [28, 29]. Структура моделей такова, что скорость накопления запасов dR/dt зависит от самих же накопленных запасов R и от геологических условий, которые описываются параметром λ :

$$dR/dt = F(R, \lambda).$$

Зависимость от R объясняется тем, что с ростом R возрастают степень изученности региона, объем получаемой информации. На основе получаемой информации осуществляется управление — идет приспособление поисково-разведочных работ к изменяющимся условиям, что находит отражение в размещении определенным образом определенного объема буровых работ на изучаемой территории. Рост запасов служит также основанием для выделения соответствующих ассигнований. Одним словом, величина R определяет адаптацию работ, с чем и связана интенсивность прироста запасов.

В частном случае можно записать

$$dR/dt = kR\lambda,$$

где k — коэффициент пропорциональности.

Параметр λ не есть величина постоянная. Он, естественно, зависит от R , т. е. $\lambda = f(R)$. Дело в том, что рост R вызывает изменение не только в системе управления процессом. С ним связано изменение и геологических условий, в которых ведутся работы. По мере открытия месторождений и накопления запасов R меняется та характеристика, которую можно назвать способностью среды отдавать запасы. Если запасы все же сконцентрированы в крупных месторождениях, то способность отдавать запасы остается высокой. Но после открытия и более мелких месторождений она резко падает. Поэтому параметр λ с ростом R начиная с некоторого момента должен уменьшаться. Можно предположить разный характер снижения величины λ с ростом R , т. е. разный вид зависимости $\lambda = f(R)$. Исследовались три возможных варианта вида функции $f(R)$, при которых модели приобретали следующий вид:

$$\Delta R = kR_{i+1}k_1(b - R_i);$$

$$\Delta R = kR_{i+1}k_1(b - R_i^2); \quad (3.31)$$

$$\Delta R = kR_{i+1}k_1[\exp(-bR_i) - a],$$

где R_{i+1} — запасы, накопленные к $(i+1)$ -му году; $\Delta R = R_{i+1} - R_i$; a, b, k_1 — параметры уравнений.

Эти уравнения отражают появление в процессе работ механизма, сдерживающего прирост запасов. Это простейший механизм самотормо-

жения, который начинает заметно сказываться лишь тогда, когда накопленные запасы R_i становятся достаточно большими. Различаются модели той величиной запасов R , начиная с которой «включается» указанный механизм, и скоростью падения λ с ростом R . В первой модели эта скорость постоянная, во второй изменяется по степенному закону, в третьей — экспоненциально.

Таким образом, были получены три модели, описывающие процесс прироста запасов. Эти модели носят довольно общий характер. Остальные известные модели динамики прироста запасов являются, как показано в работе [28], частными случаями какой-либо одной из моделей (3.31). Эти модели могут быть использованы и для описания других процессов. Аналогичная первой модель используется в биологии при описании роста популяций, в физике при выводе закона поглощения света и радиоактивного распада, в наукометрии при описании роста числа научных публикаций и др.

Читатель, видимо, уже обратил внимание на то, что вместо дифференциальных уравнений в системе (3.31) используются их разностные аналоги. Сделано это преднамеренно для лучшего учета специфики данного процесса. Дело в том, что дифференциальные уравнения отвечают классической концепции непрерывного. Между тем любое детальное исследование неизбежно требует перехода к дискретному описанию. Особенно это стало очевидным при анализе процессов с использованием ЭВМ. Что касается прироста запасов, то они представимы только в дискретном виде, так как фиксируются только через равные интервалы времени (один год). Совокупность наблюдений в этом случае образует временной ряд, в котором наблюдения зависимы между собой. Поэтому здесь на смену методам анализа процессов непрерывной природы приходят способы описания дискретных структур.

Одним из таких способов является анализ временных рядов. Модели временных рядов описывают изучаемые системы с помощью не дифференциальных, а разностных уравнений, в которых дифференциальный оператор заменен разностным оператором. В этом случае говорят о дискретном аналоге дифференциального уравнения. Модели дискретных процессов часто записываются в виде уравнения, отражающего зависимость последующего члена временного ряда от предшествующих (или предшествующего). Это легко сделать и в рассматриваемом случае. Например, из первой модели следует

$$R_{i+1} = R_i / (1 - \alpha + \beta R_i), \quad (3.32)$$

где $\alpha = k k_1 b$; $\beta = k k_1$.

С другой стороны, использование дискретного описания в существенной мере устранило различного рода математические трудности. Поскольку здесь мы не задаемся целью найти аналитический вид функции $R(t)$, постольку одно из чрезвычайно важных, если не решающих, обстоятельств, учитываемых при моделировании, а именно выбор адекватного математического аппарата, не оказывало серьезного влияния на выбор модели.

Может показаться, что наличие трех моделей приводит к произволу в описании процесса накопления запасов нефти и газа. Однако этого не следует опасаться. Формально это означает существование множества возможных законов изменения накопленных запасов. Так оно и есть на самом деле. Все зависит от истории освоения региона. В регионах, прошедших разную историю освоения ресурсов, динамика накопления запасов различна.

Решая полученные уравнения, можно найти вид зависимости $P_{i+1} = f(R_i)$ типа (3.32) и тем самым определить траекторию функции $R(t)$. Построенные модели (3.31) были использованы для описания реально наблюдаемой динамики накопления запасов в ряде регионов СССР. При этом, естественно, были оценены параметры функций, проведена проверка гипотезы адекватности и т. д. Таким образом, из очень просто построенных моделей были получены необходимые логические следствия, позволившие обсуждать сложные ситуации, вытекающие из анализа прироста запасов [28, 29].

4. МОДЕЛИ, ИНТЕРПРЕТИРУЕМЫЕ В ТЕРМИНАХ ПРОЦЕССОВ

В этой главе мы будем рассматривать модели другого типа. Их основное отличие от моделей, рассмотренных в предыдущей главе, заключается в том, что они формулируются и строятся не в терминах процессов физической, химической или биологической природы. Представления о процессах формируются как результат оценки параметров моделей и их интерпретации. Интерпретация проводится уже в терминах геологических процессов. Если в предыдущей главе модель формировалась как результат конкретного представления о механизме явления, то здесь модель формулируется в терминах, дающих лишь математическое описание ситуаций, носящих довольно общий характер.

Иными словами, это модели, отражающие постановку некоторой математической задачи определенного характера. Математическая модель здесь не выводится заново исходя из геологических соображений о свойствах процесса, а принимается в готовом виде. Однако исследование должно основываться на четкой и ясной формулировке соображений, по которым предполагается соответствие модели содержанию задачи.

Постановка и методы решения таких задач носят очень часто специальные названия — факторный анализ, спектральный анализ и т. д. Соответственно здесь рассматриваются модели тех или иных из указанных математических методов анализа. В данной главе будут обсуждаться модели тех методов анализа, суть которых сводится к разложению (расщеплению) исходной информации на составные части.

Уже отмечалось, что в геологии мы наблюдаем лишь конечный результат наложенных друг на друга процессов, сложным образом переплетенных между собой. Поэтому разложение конечного результата на составляющие, каждую из которых можно было бы связать с действием определенного геологического процесса, для геологических исследований представляется одним из инструментов познания. Методы расщепления информации требуют предварительного представления ее в компактном, легко обозримом виде, позволяющем определить, какие именно составляющие являются доминирующими. Поэтому методам разложения часто сопутствуют методы свертки информации. Естественно, что в основе этих методов лежат определенные математические модели.

Общей чертой рассматриваемых методов анализа является то обстоятельство, что они основаны на такой постановке задачи, которая связана с разложением суммарной дисперсии (рассеяния) исходной информации или дисперсионной (корреляционной) матрицы (в случае изучения явления или совокупности явлений, описываемых изменением нескольких признаков) на определенные элементы, привязанные к выделяемым составляющим. Методы разложения и свертки исходной информации, как правило, используют язык математической статистики. Очевидно, что статистика дает возможность лишь формально расщепить на отдельные составные элементы исходную информацию, но никоим образом не позволяет вскрыть причинно-следственные связи.

4.1. МОДЕЛЬ ФАКТОРНОГО (КОМПОНЕНТНОГО) АНАЛИЗА

Первые применения факторного анализа в геологических исследованиях относятся к началу 60-х годов. В настоящее время в силу ряда присущих ему особенностей факторный анализ превратился в один из наиболее известных и широко используемых методов. Он приспособлен для исследования сложных (диффузных) природных систем, формирующихся под воздействием и влиянием разнообразных факторов. Предполагается при этом, что действие указанных факторов вызывает взаимосвязанное изменение показателей, характеризующих изучаемую природную систему. При этом каждый показатель представляет собой случайную величину, распределенную нормально с конечной дисперсией. При интерпретации каждый фактор соотносится с определенным геологическим процессом.

Предпосылкой метода служит представление о том, что корреляция между показателями, характеризующими природную систему, является следствием их линейной зависимости от определенного числа других неизвестных «простых» характеристик, не коррелированных между собой. В некотором смысле эти «простые» (неразложимые) характеристики можно считать «причинами», а наблюдаемые характеристики (показатели) — «следствиями». Суть анализа сводится к поиску этих неизвестных «простых» линейно независимых (ортогональных) показателей, которые и носят название главных компонент или факторов.

Каждая главная компонента (фактор) заметно присутствует только в некоторой совокупности наблюдаемых показателей, формирующейся под действием этой главной компоненты. Вследствие этого между показателями данной совокупности возникают определенные связи. Естественно, что каждый показатель может входить в разные совокупности, если его значение изменяется под воздействием разных факторов. Степень соответствия фактора каждому показателю оценивается коэффициентом корреляции между ними, называемым нагрузкой фактора на показатель. Нагрузки отражают силу влияния фактора на изменение каждого показателя и определяют принадлежность этого показателя к соответствующей совокупности. Наиболее высокие нагрузки присущи тем показателям, изменение которых можно объяснить действием данного фактора и соответственно отнести эти показатели к одной совокупности. Именно по нагрузкам выясняется (интерпретируется) смысл фактора. Знаки нагрузок (плюс или минус) определяют структуру совокупности признаков, порождаемой фактором. Различие знаков означает уменьшение (увеличение) доли одной группы признаков в данной совокупности при увеличении (уменьшении) другой.

Связь факторов со всеми исходными показателями оценивается так называемыми собственными числами корреляционной матрицы $\{\lambda_i\}$. Отношение собственного числа λ_i , соответствующего данному фактору, к сумме всех собственных чисел корреляционной матрицы $\lambda_i / \sum \lambda_i$ называют весом фактора. Вес фактора показывает долю полной дисперсии исходных показателей, которая может быть объяснена действием данного фактора.

Таблица 4.1

Факторная модель процессов седиментации и преобразования осадка

Показатели	Факторы		
	Состав исходных пород и его преобразование в процессе переноса	Фациальная обстановка осадко-накопления	Катагенетическая переработка отложений
Глубина, м			+
Фракция, мм:			
1—0,5	—	—	
<0,01		+	
Медианный размер зерен, мм	—	—	
Информационный коэффициент:			
по гранулометрии	+	+	
по составу обломочной части	+		
по цементу			+
Кварц, %	+		
Полевые шпаты, %	—		—
Глинистые породы, %	—		
Цемент, %:			
глинистый	—	+	—
карбонатный		+	—
кварцевый		—	+
общий		+	—

В основу интерпретации матрицы нагрузок положена модель, выработанная на базе имеющихся представлений о последствиях влияния различных процессов седиментации и преобразования осадка на минеральный состав и структуру терригенных пород. При этом все многообразие и сложность взаимоотношений природных процессов было сведено к трем факторам, которые рассматривались как действующие независимо друг от друга.

Один из факторов отражает влияние состава исходных пород и длительности переноса поступающего в бассейн материала на минеральную и отчасти на гранулометрическую характеристику осадка. Если из области питания поставляется в преобладающем количестве какой-либо один обломочный компонент, то нагрузки фактора на содержание этого минерала должны быть противоположны по знаку нагрузкам на остальные обломочные компоненты породы и должны совпадать по знаку с нагрузкой на показатель однородности состава ее обломочной части.

Чем длительнее перенос обломочного материала, тем больше изменяется его первоначальный характер: уменьшается размер зерен, улучшается их сортировка, увеличивается содержание устойчивых минералов и минералов, возникающих в процессе выветривания; состав отложений становится более однородным. Эти изменения должны найти свое отражение в появлении значимых нагрузок фактора одного знака на такие показатели, как присутствие устойчивых обломочных компонентов (кварц), однородность состава обломочной части, сортировка зерен и их размер, и нагрузок противоположного знака на содержание песчаной

фракции неустойчивых обломочных частиц (полевые шпаты, обломки глинистых пород) и продуктов их разрушения (глинистый цемент). Если учесть, что влияние длительности переноса на изменение характера обломочного материала должно постепенно ослабевать, можно ожидать, что в районах, значительно удаленных от области питания, изменение минерального состава пород не должно сопровождаться изменением их структуры, т. е. рассматриваемый фактор должен иметь незначимые нагрузки на гранулометрические характеристики.

Другой фактор связан с фациальной обстановкой осадконакопления, обуславливающей механическую и химическую дифференциацию материала. В соответствии с законом механического разделения обломочных компонентов по мере удаления от области сноса и понижения гидродинамической активности вод осадки становятся все более мелкозернистыми, сортировка их улучшается, в них увеличивается содержание глинистой фракции и одновременно уменьшается содержание песчаных частиц. Этот процесс должен отразиться в значимости нагрузок соответствующего фактора на гранулометрические показатели, причем нагрузка на содержание песчаной фракции должна быть противоположна по знаку нагрузкам на остальные показатели структуры породы.

Если механическая дифференциация сопровождается химической, то одновременно идет пространственное разделение хемогенных типов цемента, связанное с пелагическим сдвигом в накоплении некоторых легкорастворимых компонентов терригенных толщ. Карбонатный цемент может тяготеть к относительно удаленным от берега отложениям, в то время как кварцевый цемент может обогащать осадки прибрежной зоны вследствие поступления кремнезема в морской бассейн с речными водами. Эти явления найдут свое отражение в значимых, но противоположных по знаку нагрузках фактора на содержание указанных видов цемента. При этом знаки нагрузок на содержание песчаной фракции и кварцевого цемента должны быть одинаковыми. Если же нагрузки на тот или иной вид цемента отсутствуют (незначимы), то это указывает на независимость его образования от действия рассматриваемого фактора.

Для глинистого цемента естественно полагать, что пространственный контроль распределения этого цемента законами механической дифференциации свидетельствует об аллотигенном его происхождении. В этом случае знак нагрузки на глинистый цемент должен быть аналогичен знаку нагрузок на сортировку и медианный размер обломочных зерен, на содержание глинистой фракции и карбонатного цемента.

Третий фактор, определяющий строение и состав изучаемых пород, связан с процессами катагенетической переработки отложений. По данным ряда исследователей, катагенетические преобразования пород, протекающие с возрастанием глубины погружения отложений под влиянием повышенных давлений и температур, агрессивной углекислоты и других факторов, обуславливают структурные и минералогические изменения. В частности, происходит разрушение нестойких минеральных компонентов (например, глинизация полевых шпатов), преобразование обломочных алюмосиликатов и глинистых цементов, нередко с сокращением их объема и высвобождением свободного кремнезема, который, перераспре-

деляясь, фиксируется в виде регенерационных каемок и поровой минерализации, и т. д. В верхней зоне катагенеза часто наблюдается замещение кварца карбонатами, по мере увеличения глубины картина меняется на противоположную.

Эти процессы должны фиксироваться в значимых нагрузках фактора на глубину и на все те показатели, которые изменяются под влиянием катагенеза. При этом нагрузки на глубину и на кварцевый цемент должны быть одного знака, а на карбонатный и глинистый цемент, как замещаемые с глубиной кварцем, — другого знака. Аналогичной последним показателям по своему знаку должна быть нагрузка на полевые шпаты — разрушаемый минеральный компонент. (Учитывая, что процессы диагенеза и катагенеза по своим результатам в ряде случаев различить не удастся, видимо, не следует исключать возможности отражения в указанных нагрузках действия и диагенетических процессов.)

Таким образом, на языке факторов описанная модель седиментации имеет вид, представленный в табл. 4.1, где знаки нагрузок даны условно (если все знаки поменять на противоположные, суть дела не изменится). Порядок факторов здесь произвольный; при обработке фактических наблюдений он определяется весом факторов.

Вес каждого фактора определяет силу его воздействия на изменение от слоя к слою всех рассматриваемых характеристик структуры и состава породы. Фактор, имеющий больший вес, оказывает наибольшее влияние на формирование современного облика пород. Сумма весов факторов показывает, в какой степени (%) особенности состава и строения пород сформировались под совместным их воздействием. Влияние каждого фактора на изменение пористости определяется его нагрузкой. Чем больше значение нагрузки фактора на пористость (по сравнению с другими факторами), тем больше его вклад в формирование наблюдающихся в настоящее время различий в пористости исследуемых пород. Аналогичным образом определяется происхождение цемента в породе: наибольшая нагрузка на цемент присуща тому фактору, под действием которого образовалась основная часть данного цемента.

Если рассматривать изложенную модель с точки зрения стадийности образования породы, то, очевидно, что первый фактор следует связывать только с процессами седиментации, второй — с процессами седиментации и диагенетического (раннекатагенетического) формирования хемогенного цемента, третий — с процессами катагенеза.

Цель исследования заключалась в проверке соответствия модели непосредственным наблюдениям и в определении влияния каждого из факторов на пористость пород. Естественно, что из-за различных неконтролируемых причин точного совпадения реально выделяемых факторов с моделью не будет. Поэтому при «опознавании» соответствующих факторов учитывались наиболее высокие нагрузки и не принимались во внимание хотя и значимые, но малые нагрузки.

Первые три столбца матрицы нагрузок приведены в табл. 4.2. Каждый столбец представлен значениями коэффициентов корреляции между наблюдаемыми показателями и соответствующими главными компонентами, интерпретируемыми как факторы исследуемой модели. Веса факторов

Таблица 4.2
Матрица нагрузок * на первые три фактора

Показатели	Факторы		
	I	II	III
Пористость, %	-0,685		-0,312
Глубина, м			0,578
Фракция, мм:			
I — 0,5	-0,741		
< 0,01	0,641		
Медианный размер зерен, мм	-0,851		
Информационный коэффициент:			
по гранулометрии	0,549		
по составу обломочной части		0,900	
по цементу	0,404		-0,467
Кварц, %		0,779	
Полевые шпаты, %	-0,390	-0,555	-0,221
Кварциты, %		-0,690	
Глинистые породы, %		-0,385	0,594
Цемент, %:			
глинистый		-0,454	-0,474
карбонатный	0,492		
кварцевый	-0,343		0,511
общий	0,626	-0,347	-0,366
Вес факторов, %	24,1	17,5	11,7

* В таблице даны только значимые нагрузки.

даны под матрицей нагрузок. Анализ весов полученных факторов показывает, что их воздействием можно объяснить более 53% изменчивости значений анализируемых показателей.

Выделенные факторы обнаруживают хорошее совпадение с моделью. Наибольшая роль в формировании особенностей состава и структуры пород принадлежит фактору, связанному с фацальной обстановкой осадконакопления (фактор I). Рассматриваемый фактор оказывает доминирующее влияние на пористость изучавшихся пород. Наибольшими значениями пористости обладают отложения периферической (прибрежной) зоны: крупнозернистые плохосортированные разности с невысоким содержанием разнообразного по составу цемента, в котором преобладает кварцевая составляющая и почти отсутствует карбонатная.

На втором месте по силе воздействия на изменение структурно-минералогических характеристик пород стоит фактор, связанный с составом исходных пород и его преобразованием в процессе переноса (фактор II). Этот фактор не влияет на пористость отложений. Изменение пористости пород под влиянием катагенетической переработки отложений (фактор III) происходит в значительно меньшей степени, чем под влиянием фацальной обстановки (фактор I). Развитие вторичного окварцевания пород (основной результат воздействия фактора III) обуславливает уменьшение пористости.

Таким образом, факторный анализ, подтвердив справедливость взглядов, положенных в основу разработки модели, в то же время позволил

количественно оценить степень влияния различных природных факторов на формирование структуры и состава отложений и их пористости.

Факторный анализ является полезным инструментом познания не только геологических процессов, но и структуры взаимоотношений между характеристиками, описывающими геологический объект. С этой целью он используется, пожалуй, чаще всего. В качестве примера можно сослаться на работу авторов [18], где факторный анализ был применен для выявления специфической совокупности петрофизических свойств осадочных горных пород, определяющих основную вариацию данных каротажа. В результате был выявлен, в частности, вклад, вносимый раздельно межзерновой, каверновой и трещинной пористостью, а также глинистостью в показатели различных видов каротажа, характеризующие разрезы карбонатных толщ.

В заключение отметим, что применение факторного анализа в геологических исследованиях не обошлось без явного, ортодоксального преувеличения его возможностей. Это дало вполне серьезные основания для критических выступлений [3] об его использовании в геологии. Разумеется, не следует впадать и в другую крайность — считать, что результаты факторного анализа не допускают генетической интерпретации и решения проблем, связанных с изучением природных процессов. Нельзя распространять неудачные примеры на все работы по использованию факторного анализа в геологии.

4.2. МОДЕЛЬ РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ НА ЕСТЕСТВЕННЫЕ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СОСТАВЛЯЮЩИЕ

Модель, используемая при разложении эмпирических функций, по своей идейной основе аналогична модели факторного анализа. Здесь рассматривается совокупность эмпирических функций, представляющих собой реализации некоторой случайной эмпирической функции ξ и принадлежащих к некоторой статистической совокупности $\{\xi\}$, в которой можно предполагать существование определенного распределения вероятностей. Ортогональные составляющие в этом случае совпадают с собственными векторами ковариационной матрицы, описывающей связь между значениями функций в последовательных точках. Эти составляющие присутствуют во всех исходных функциях, меняется лишь их вклад в эти функции, что отражается в значениях коэффициента разложения.

Условие ортогональности (независимости) составляющих позволяет сопоставить их с действием независимых геологических процессов или разных, но независимых параметров одного процесса. Поскольку никаких предположений о форме составляющих не делается, их называют естественными. Естественные составляющие оптимальны в том смысле, что обеспечивают статистически наибольшую скорость сходимости ортогонального разложения по сравнению со всеми другими разложениями.

Пусть каждая из m функций ξ , принадлежащих совокупности $\{\xi\}$, охарактеризована своими значениями в N точках. Тогда модель есте-

ственного ортогонального разложения функции ξ с номером j запишется в виде

$$\xi_j = a_{1j}u_1 + a_{2j}u_2 + \dots + a_{Nj}u_N,$$

где u_i — собственные векторы ковариационной матрицы; a_{ij} — коэффициенты разложения.

Таким образом, каждая функция оказывается разложенной по соответствующим составляющим. Как и в факторном анализе, о вкладе составляющих в общую дисперсию можно судить по их весу, выраженному отношением собственного числа ковариационной матрицы, соответствующего данной составляющей, к сумме всех собственных чисел. Как видим, здесь общая дисперсия также раскладывается на дисперсии по составляющим, оцениваемые собственным числом матрицы. Сами составляющие выделяются в порядке убывания соответствующих им собственных чисел. Это обстоятельство также позволяет ограничиться небольшим числом составляющих, исчерпывающих значительную долю полной дисперсии. Составляющие с малыми собственными числами не влияют на поведение функции ξ .

Здесь, так же как и в факторном анализе, можно получить разложение корреляционной и дисперсионной матриц по соответствующим составляющим: собственным векторам и собственным числам. Это дает возможность провести «чистку» значений элементов этих матриц от случайных влияний, сопутствующих любым природным наблюдениям. Для этого необходимо оценивать эти элементы по результатам разложения корреляционной матрицы R .

Отличие описанного способа разложения от факторного анализа заключается в следующем. В факторном анализе ковариационная (или корреляционная) матрица составлена из элементов, отражающих связь между исходными показателями x . Здесь же элементы этой матрицы описывают связь не между различными функциями ξ_i , а между последовательными значениями функций ξ_i . В факторном анализе собственные векторы корреляционной матрицы определяли коэффициенты разложения (нагрузки), здесь же они являются самими ортогональными составляющими. Иными словами, ортогональные составляющие и коэффициенты разложения в двух рассматриваемых моделях разложения на составляющие как бы меняются местами.

При наличии всего одной реализации функции ξ она также может быть разложена на естественные ортогональные составляющие с помощью описанного способа при условии, что эта функция стационарна и эргодична. Тогда, как это указывалось ранее, ее значения в различные отрезки времени можно рассматривать в качестве реализации функций данного класса. В частности, такими реализациями могут выступать функции, получаемые из исходной последовательным сдвигом ее относительно самой себя на один шаг.

Метод естественных ортогональных разложений был использован в работе [25] для выяснения механизма, управляющего распределением пористости в карбонатном разрезе. Анализировалось, как изменяются по разрезу карбонатного горизонта в 20 скважинах одной площади

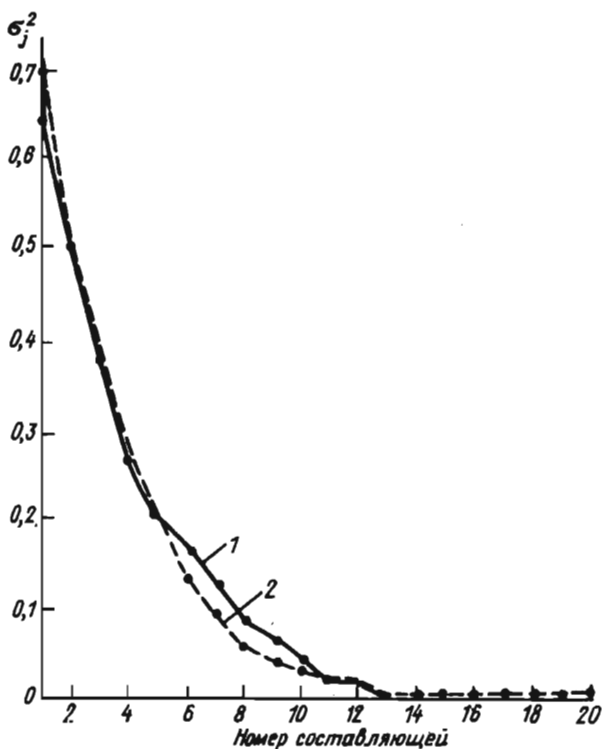


Рис. 4.1. Распределение относительных погрешностей аппроксимации пористости (1) и содержания CaCO_3 (2) в отложениях осинского горизонта (Марково).

содержание карбонатов кальция и пористость, измеренные попарно в одних и тех же точках разреза. На рис. 4.1 приведены распределения остаточных дисперсий

$$\sigma_j^2 = \left(\frac{\sum_{i=j+1}^N \lambda_i}{\sum_{i=1}^N \lambda_i} \right), \quad j = 1, 2, \dots, N$$

по естественным составляющим пористости и содержания CaCO_3 в исследуемых породах.

Как видно из рисунка, эти распределения оказались близкими для двух рассматриваемых признаков. Это позволило высказать предположение, что изменения этих признаков по разрезу обладают сходными закономерностями. Для того чтобы решить, каким составляющим обязана статистическая устойчивость этих характеристик, было принято во внимание не только сходство формы выделенных составляющих, но и наличие связи между коэффициентами разложения при соответствующих составляющих пористости и содержания CaCO_3 . В результате было выяснено,

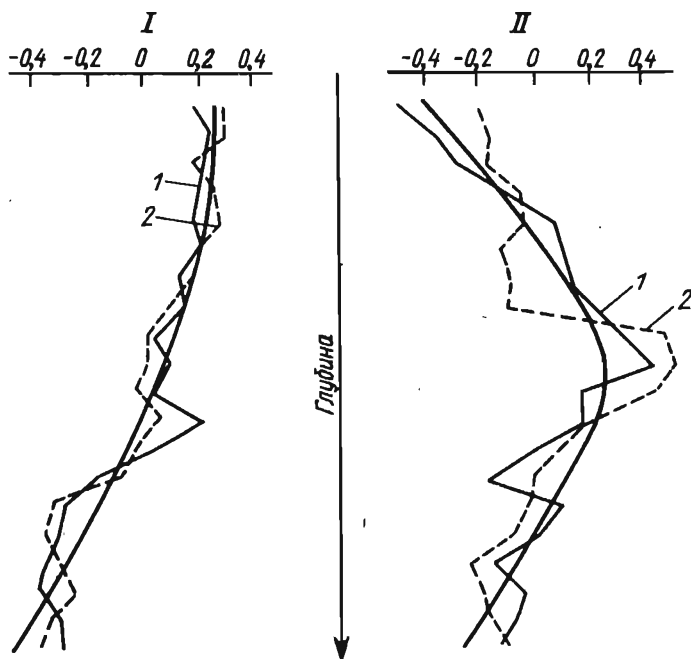


Рис. 4.2. Вид первых двух естественных ортогональных составляющих (I, II) пористости (1) и содержания CaCO_3 (2) в отложениях осинского горизонта (Марково).

что наличие общих черт в распределении по разрезу исследуемых характеристик обеспечивается первыми двумя их составляющими, на долю которых приходится почти 50% всей дисперсии. Выделенные первые две составляющие представлены на рис. 4.2, где хорошо видна аналогия их поведения для двух рассматриваемых характеристик.

Для понимания причин, приведших к подобному сходству, следует обратить внимание на волнообразный характер выделенных кривых. Первая составляющая соответствует волне, период которой превышает мощность анализируемого горизонта в несколько раз. Вторая составляющая отличается меньшим периодом, она достигает максимума примерно в середине анализируемого интервала разреза. Таким образом, на кривых распределения по разрезу пористости и содержания CaCO_3 очень четко проявлены две волны, наложенные друг на друга. Это обстоятельство позволило связать выделенные составляющие с наличием ритмов различного порядка в изменении анализируемых характеристик. Изучаемый горизонт соответствует ритму карбонатного осадконакопления, происходящего в условиях прогрессирующего обмеления бассейна. С этим обстоятельством хорошо согласуется вид первой составляющей, значения которой прогрессивно возрастают вверх по разрезу. Отсюда было сделано заключение, что отмеченная ритмичность связана с условиями осадконакопления.

Наличие общих черт в распределении пористости и содержания CaCO_3 обязано зависимости между пористостью и диагенетической доломитизацией пород. Полученные данные позволили связать это явление с изменением глубины бассейна седиментации. Действительно, изменение глубины бассейна сказывается на его солёности, а отсюда и на интенсивности диагенетической доломитизации, которая протекает более успешно при повышении солёности. В то же время с изменением глубины бассейна меняются интенсивность развития водорослей и структура осадка. Следовательно, меняется и пористость пород, так как она в значительной степени определяется структурным типом осадка. Поскольку колебательные движения, так же как и изменение во времени пористости и содержания CaCO_3 , носят ритмический характер, то, очевидно, можно признать, что изменение во времени глубины бассейна и рельефа дна связано с колебательными движениями, которые в рассматриваемом районе привели к формированию ритмов по крайней мере двух порядков.

Таким образом, был сделан вывод, что зависимость между пористостью и диагенетической доломитизацией пород вызвана тем, что основные изменения обеих этих характеристик вызываются одной и той же причиной — колебательными движениями дна бассейна в период седиментации. Эти движения следует признать основным ведущим механизмом, управляющим распределением пористости в разрезе изучаемого карбонатного горизонта.

4.3. МОДЕЛИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Периодичность является одной из наиболее ярких и распространенных черт многих природных систем. Она свойственна многим геологическим явлениям. Черты периодичности обнаруживаются в тектонических процессах, процессах осадконакопления. С ними мы сталкиваемся при изучении магматизма, рельефообразования, генезиса полезных ископаемых. Периодический характер носят трансгрессии и регрессии в истории Земли. Отмечена периодичность и в развитии биосферы.

Модель детерминированного периодического процесса в самом общем виде может быть представлена как

$$\varphi(t + kT) = \varphi(t), \quad (4.3)$$

где t — временная или пространственная координата; T — период процесса; k — любое целое число (положительное или отрицательное).

Изучение периодичности сводится к решению двух задач. Первая задача — установление самого факта наличия периодичности, т. е. выполнения равенства (4.3). При исследовании периодичности в геологии эта задача несколько модифицируется. Связано это с пониманием периодичности не как повторяемости абсолютной, а как повторяемости «до некоторой степени», «в общих чертах» (эти выражения приняты в геологической литературе) или повторяемости с некоторой тенденцией изменения, на новой основе. Поэтому равенство (4.3) следует заменить

на приближенное $\varphi(t + kT) \approx \varphi(t)$, что в свою очередь приводит к различным постановкам задачи и к различным методам ее решения.

Вторая задача сводится к выявлению вида функции $\varphi(t)$. Зависимость $\varphi(t)$ на интервале $[0, T]$, охарактеризованном наблюдениями, вообще говоря, может принимать произвольный вид, и тем самым класс периодических функций может быть весьма разнообразным. Знать вид функции $\varphi(t)$ — это значит знать закон, по которому происходит изменение изучаемого геологического показателя. Рассмотрение моделей периодических процессов мы начнем с моделей их разложения по составляющим определенного вида, т. е. с моделей определенного вида функции $\varphi(t)$, а уж затем обратимся к моделям, где вид функции $\varphi(t)$ не представляет интереса.

4.3.1. МОДЕЛИ РАЗЛОЖЕНИЯ ИСХОДНОЙ ФУНКЦИИ НА ГАРМОНИЧЕСКИЕ СОСТАВЛЯЮЩИЕ

Из большого класса функций периодической структуры, которыми может быть представлена функция $\varphi(t)$, в данном случае выбран только класс гармонических (синусоидальных) функций. Предполагается, что изучаемый периодический процесс является полициклическим. Основная идея используемого в этом случае гармонического анализа состоит в том, «чтобы выразить неправильности форм и чередования волн при помощи сложения синусоидальных колебаний» [51, с. 99]. Модель периодического процесса в этом случае имеет вид

$$\varphi(t) = A_0 + \sum_{i=1}^m A_i \cos(\omega_i t - \psi_i). \quad (4.4)$$

В этой модели член суммы $A_i \cos(\omega_i t - \psi_i)$ носит название i -й гармоники, аргумент $(\omega_i t - \psi_i)$ называется фазой i -й гармоники. Очевидно, что при $t = 0$ аргумент i -й гармоники равен $(-\psi_i)$; эта величина представляет собой начальную фазу i -й гармоники. Постоянная величина A_i называется амплитудой i -й гармоники. Величина A_0 — это постоянный член, около которого происходит вариация исходной зависимости $\varphi(t)$. Тригонометрическая функция $\cos(\omega_i t - \psi_i)$ является периодической функцией аргумента t с периодом $T_i = 2\pi/\omega_i$ или с частотой гармоники $\omega_i = 2\pi/T_i$; m — число гармоник.

Как видим, эта модель отражает разложение исходной функции на гармонические составляющие. В этом случае еще говорят, что исходная функция представляет собой суперпозицию (наложение) синусоидальных колебаний. Задача исследований состоит, во-первых, в установлении того факта, что исследуемая кривая действительно содержит гармонические компоненты, а во-вторых, в оценке числа составляющих, входящих в исходную кривую, и параметров каждой из этих составляющих.

В зависимости от цели исследования различают две постановки данной задачи: задачу спектрального анализа и задачу выявления скрытых периодичностей. Рассмотрим их последовательно.

4.3.1.1. Первая постановка

Эта постановка задачи имеет место в тех случаях, когда исследователя не интересуют сами гармонические составляющие. Им нельзя придать какого-либо генетического смысла, и вопрос об их интерпретации, следовательно, не ставится. Интерес сосредоточен на выяснении вопроса, гармоники какой частоты вносят наибольший вклад в исследуемый периодический процесс; если смотреть более широко, то не только в процесс, а еще и в некоторую его характеристику.

Если $\varphi(t)$ — детерминированная функция, то такой характеристикой является средняя мощность или интенсивность процесса. Этот термин заимствован из электротехники; на смысле его мы остановимся несколько позже. Таким образом, речь идет о вкладе гармоник в среднюю мощность или о разложении средней мощности на вклады гармоник. Если $\varphi(t) \equiv \xi(t)$ — случайный стационарный процесс, то такой характеристикой является дисперсия процесса и речь идет о ее разложении на частные дисперсии в соответствии с вкладом каждой гармоники.

Интерпретируется распределение указанных характеристик по частотам, приуроченность их к определенным интервалам частот (областям оси частот). Если по оси абсцисс откладывать значения частот гармоник, а по оси ординат — величину, являющуюся мерой вклада гармоники данной частоты в мощность процесса или в его дисперсию, то получим график, изображающий так называемую спектральную функцию, или спектр. Спектр и представляет интерес для интерпретации, по виду спектра делаются соответствующие заключения содержательного характера. По спектру определяют ту область или полосу частот, с которой связаны наиболее значимые гармонические составляющие.

Если $\varphi(t)$ — детерминированная непрерывная функция, заданная на интервале $[0, T]$ и удовлетворяющая определенным условиям (так называемым условиям Дирихле), то ее можно разложить на ряд Фурье. Этот ряд представлен суммой бесконечно большого числа гармонических составляющих, амплитуды которых a_p , называемые коэффициентами Фурье, вычисляются по определенным формулам, а частоты гармоник удовлетворяют определенным требованиям. Эти требования заключаются в том, что частоты образуют последовательность $\omega_p = (2\pi/L)p$ ($p = 0, 1, \dots$), где L — интервал наблюдений ($L = T$). Это значит, что гармоники укладываются на интервале наблюдений целое число раз, частоты их кратны частоте основной гармоники (с периодом T). Следовательно, в данном разложении частоты гармоник заданы. Отметим, что в этом случае гармонические составляющие являются ортогональными, и, значит, здесь мы имеем еще один вариант разложения по ортогональным составляющим.

Зная, к каким номерам p кратных частот $\omega_p = (2\pi/L)p$ относятся вычисленные амплитуды (коэффициенты Фурье), легко построить график распределения $a_p^2/2$ по ω_p , т. е. получить спектр, который в данном случае носит линейчатый дискретный характер. Значение $a_p^2/2$ и характеризует среднюю мощность, соответствующую данной частоте ω_p . Термин этот возник в связи с тем, что если значения $\varphi(t)$ — напряжение тока (в вольт-

тах), то $a^2/2$ — средняя мощность переменного тока (в ваттах). Анализ линейчатого дискретного спектра Фурье затруднений не вызывает: существенные ординаты определяют и число основных гармонических компонент и их частоту.

Если $\varphi(t)$ — эмпирическая детерминированная функция, заданная на интервале $[0, T]$ своими значениями φ_i в конечном числе точек N , отстоящих друг от друга на одно и то же расстояние Δt (в таких случаях говорят о равноотстоящих, или эквидистантных, точках), то она может быть представлена суммой конечного числа гармоник N с частотами ω_p , кратными основной частоте, и с коэффициентами a_p . При этом сумма гармоник в точках наблюдения совпадет с имеющимися значениями φ_i , но между точками неизвестные значения $\varphi(t)$ могут быть определены лишь приближенно. Иными словами, сумма конечного числа гармоник дает приближение к исходной функции $\varphi(t)$. Основная частота в этом разложении соответствует периоду, равному длине интервала наблюдений T , а максимальная — периоду, равному двум интервалам между точками наблюдения, т. е. $2\Delta t$. В связи с ограничением максимальной частоты функции, даваемой суммой гармоник, говорят, что она имеет ограниченную полосу частот.

Детерминированная функция $\varphi(t)$ также может быть разложена по гармоническим компонентам, частоты которых образуют не дискретную последовательность, как при разложении в ряд Фурье, а непрерывный ряд. В этом случае получается не линейчатый спектр, а непрерывный. Этого можно добиться, рассматривая детерминированную функцию $\varphi(t)$, заданную на бесконечном интервале $-\infty \leq t \leq \infty$. Соответствующий подход является предельным случаем только что описанного анализа Фурье, в котором рассматриваются бесконечно длинные ряды наблюдений. В результате расстояния Δt между точками наблюдений и частотные интервалы между соседними гармониками становятся бесконечно малыми, что приводит к непрерывному распределению амплитуд (или их квадратов) по частоте.

На практике в связи с тем, что геологические наблюдения всегда образуют ограниченные ряды, полученные на конечном интервале наблюдения, анализ спектров, найденных методами построения непрерывных спектров, несколько затруднен, так как спектры получаются искаженными: вблизи значимых частот появляются значимые ординаты, указывающие на присутствие определенных гармонических компонент, которых, вообще говоря, в кривой $\varphi(t)$ не содержится.

Все сказанное остается в силе и в том случае, когда функция $\varphi(t)$ осложнена возмущениями случайного характера. Здесь лишь мощности a^2 (или a_p^2) на частотах ω (или ω_p) мы не определяем строго, а имеем их статистические оценки.

Если $\varphi(t) \equiv \xi(t)$ — случайная стационарная функция, то для нее также может быть построен спектр, соответствующий разложению этой функции на гармоники с определенными частотами. В этом случае, как и при использовании других описанных выше методов разложения на составляющие, общая дисперсия функции $\xi(t)$ разлагается на частные дисперсии, вклад которых в общую дисперсию эквивалентен квадрату

амплитуд отдельных гармоник, суперпозиция которых дает функцию $\xi(t)$.

Средством построения спектра (спектральной плотности) является автокорреляционная функция. Если вид автокорреляционной функции известен (в разделе 3.1.3 мы уже указывали, что случайный стационарный процесс задается видом своей корреляционной функции), то может быть получен непрерывный спектр, описывающий непрерывное распределение дисперсий по частотам. Если же оценивается выборочная автокорреляционная функция на основе наблюдений в эквидистантных точках на интервале длиной $[0, L]$, то практически может быть получен лишь дискретный спектр процесса. Причем функция $\xi(t)$ представляется суперпозицией гармоник кратных частот, т. е. так же, как при анализе Фурье.

Интерпретация спектра случайной функции тоже имеет свои особенности. Так, если спектр детерминированной полигармонической функции характеризуется присутствием существенных всплесков, приуроченных к определенным частотам, то спектры случайных стационарных функций не дают такой яркой картины, а характеризуются некоторым «размытым» фоном ординат. В этой области нельзя отдать предпочтения какому-то небольшому числу ординат — все они становятся как бы равноправными. Лишь иногда мы можем отметить, что в довольно широкой области частот среди относительно высоких ординат имеется небольшое число ординат или одна ордината, несколько превышающие остальные. В таких случаях говорят не об этой частоте, отличающейся превалирующей ординатой, а о полосе частот, которую заполняют сравнительно высокие ординаты. Сама случайная функция может быть хорошо аппроксимирована (ее дисперсия в значительной степени исчерпана или объяснена) суперпозицией гармоник из этой полосы частот.

Таким образом, в первой постановке рассматриваемая задача — это задача разложения в ряд Фурье или задача спектрального анализа. Спектральный анализ служит при этом средством свертки информации об анализируемой последовательности наблюдений или сверткой функции $\varphi(t)$. Он позволяет представить ее в таком виде, который отражает структуру функции, ее частотную характеристику, вклад, вносимый в функцию различными гармониками. С его помощью выявляются и интерпретируются такие отличительные черты процесса, как частоты, на которых сосредоточены высокие мощности или большие дисперсии.

Частотная характеристика совокупности процессов, протекающих в системе, не ограничивается набором спектров отдельных процессов. Мы уже говорили, что стационарный случайный процесс может быть адекватно описан с помощью первых (младших) моментов его распределения вероятностей. Эти моменты включают среднее значение, дисперсию, ковариационную (корреляционную) функцию. Теперь к ним нужно добавить спектр. При характеристике многомерных распределений кроме среднего значения и дисперсии важными оказались понятия ковариации и корреляции. Одновременное же рассмотрение нескольких взаимосвязанных случайных стационарных процессов приводит к определению таких понятий, как функция взаимной корреляции и функция взаимного спектра.

Взаимная корреляционная функция описывает изменение силы линейной связи (значения коэффициента корреляции) при сдвиге двух

стохастических функций $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ на величину τ . Функция взаимного спектра показывает, как взаимодействуют гармоники различных частот, обуславливающие структуру двух исследуемых стохастических процессов. В какой-то степени по коспектру (вещественной части функции взаимного спектра) можно судить о взаимозависимости исходных функций $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ на различных частотах. Поскольку мнимая часть взаимного спектра трудно поддается интерпретации, вводят в рассмотрение так называемую функцию когерентности. Эта функция, являясь разверткой квадрата коэффициента корреляции (точно так же, как спектр является разверткой дисперсии) по частоте, отражает степень коррелированности двух исходных функций на каждой из фиксированных частот, вклад гармоник соответствующей частоты в корреляцию между исходными функциями. Дополнительно к функции когерентности полезно определять и рассматривать функцию разности фаз на каждой из частот, что позволяет проследить изменение фазового сдвига между гармониками одной и той же частоты.

Выше при рассмотрении факторного анализа и разложения функций на естественные ортогональные составляющие мы показали, что дисперсионная (ковариационная) \mathbf{D} и корреляционная \mathbf{R} матрицы, описывающие связи между исходными показателями (факторный анализ) или между значениями функций в последовательных точках (разложение на естественные ортогональные составляющие) и их дисперсии, могут быть разложены на соответствующие составляющие. Такие же дисперсионную и корреляционную матрицы можно сформировать и в данном случае. Диагональные ее элементы представляют собой дисперсии рассматриваемых случайных стационарных функций или единицы, а недиагональные — соответствующие им ковариации или корреляции. Поскольку спектр функции дает распределение дисперсии по частоте, а функция когерентности может дать развертку коэффициента корреляции по частоте, пользуясь этими трансформантами, легко получить разложение дисперсионной и корреляционной матриц на составляющие соответствующей частоты.

Таким образом, в целом можно заключить, что задача спектрального анализа — это частотное представление анализируемых процессов, разделение их на различные частотные составляющие.

4.3.1.2. Вторая постановка

В этом случае интерес для исследователя представляют сами периодические компоненты, которым придается определенный смысл: они связываются с какими-либо колебательными процессами, длительность и интенсивность которых оцениваются соответствующими параметрами периодических составляющих. Различные составляющие относят к различным порядкам проявления таких процессов. К примеру, при анализе колебательных движений можно говорить о различном порядке движений, охватывающих соответственно более обширные и менее обширные области.

Модель (4.4) приобретает при такой постановке несколько иной вид:

$$\varphi(t) = A_0 + \sum_{i=1}^m A_i \cos(\omega_i t - \varphi_i) + \xi(t). \quad (4.5)$$

Она включает небольшое число периодических составляющих, которые вместе с членом A_0 определяют закономерную составляющую в изменении значений функции $\varphi(t)$. Регулярное поведение функции $\varphi(t)$ осложнено наличием случайного члена $\xi(t)$. Иногда его называют помехой или компонентой иррегулярного характера. Этот член придает индивидуальные черты данной реализации процесса, как бы затушевывает и тем самым мешает уловить строгую регулярность в поведении полигармонической функции.

Задача исследования в этом случае сводится к определению числа и параметров гармонических составляющих и их интерпретации в терминах геологических процессов. При такой постановке рассматриваемая задача — это задача выявления скрытых периодичностей. Как и задача спектрального анализа, она родственна задаче «выделения полезного сигнала на фоне шумов», сравнительно давно возникшей и детально обсуждавшейся в ряде дисциплин, связанных с передачей и приемом информации (радиотехника, радиофизика, теория информации, астрономия, астрофизика и т. д.).

Спектральный анализ направлен на выделение полосы частот, на которой передается полезный сигнал. В определенном смысле он соответствует ситуации, когда о процессе или исследуемом явлении известно так мало, что нельзя построить модель его полезной, или регулярной (закономерной), части, отделив ее от шума. В данном же случае вводится определенное представление о закономерной составляющей (или по терминологии, связанной с передачей информации, о полезном сигнале) — она состоит из небольшого числа периодических компонент.

Задача выявления скрытых периодичностей не может быть решена методами построения спектра эмпирических детерминированных функций. Эти функции ведь выделяют только гармоники с частотами, кратными основной частоте. Здесь же необходимо вскрыть составляющие, заложенные в структуру исходной функции самой природой. Период искомой периодической компоненты не может быть навязан формально. В этом состоит различие двух рассматриваемых задач.

Решается задача выявления скрытых периодичностей различными методами. Чаще всего решение о периодическом характере функции $\varphi(t)$ выносится на основе анализа автокорреляционной функции. Если последняя содержит периодические компоненты с большим временем корреляции, то функция $\varphi(t)$ — полигармонична. Авторами [18, 19] предложен метод определения значения члена A_0 (оси стационарности), числа периодических составляющих и их периодов, т. е. тех параметров модели (4.5), оценка которых вызывает наибольшие трудности. Наиболее серьезной в решении данной задачи является проблема выявления и оценки параметров составляющих, период которых соизмерим или даже превышает длину интервала наблюдений L . С этими трудностями справляется ограниченное число методов выделения скрытых периодичностей. К их числу принадлежит и предложенный нами метод.

В частном случае скрытые периодические компоненты могут быть обнаружены и методами спектрального анализа. Это возможно тогда, когда частоты искомых составляющих кратны основной частоте, т. е.

равны каким-либо частотам ω_p или хотя бы близки к ним. В этом случае на спектре будет наблюдаться увеличение интенсивности или мощности напротив соответствующей частоты ω_p или в непосредственной близости от нее.

Анализ периодов выявляемых составляющих приводит к построению функции, аналогичной спектру. Эта функция названа периодограммой. Отличия ее от спектра заключаются в следующем. Аргументом функции является период составляющих T . Значения аргумента заданы дискретно и отличаются друг от друга на одну и ту же величину, т. е. период варьирует через определенный шаг. Ординаты тем самым заданы в равноотстоящих точках оси периодов T . Ордината представляет собой меру близости периодической компоненты с данным периодом к функции $\varphi(t)$; мерой близости служит квадратическая мера, аналогичная дисперсии случайного члена $\xi(t)$. Искомым составляющим отвечают минимальные значения ординат.

Примером первой постановки задачи может служить работа [17], где решается задача, связанная с выяснением закономерностей образования осадочной толщи с целью ее расчленения и корреляции на этой основе разрезов осадочных толщ. Ее решение осуществлялось по данным каротажа [метод естественных (собственных) потенциалов (ПС)], характеризующим разрезы глубоких нефтяных скважин, пробуренных на ряде площадей Енисей-Хатангского прогиба. Разрезы, вскрытые скважинами, приурочены к осадочной толще морских отложений, представленных чередованием песчаников, алевролитов и глин. Эта толща, именуемая суходудинской, относится к нижнему мелу и заключена между двумя опорными горизонтами, являющимися реперами: подошвой яковлевской свиты и кровлей нижнехетской свиты. Результаты метода ПС, представляемые в виде диаграммы, обеспечивает контроль изменения общего содержания глинистого материала в пластах.

Обращаясь к результатам анализа геологического строения суходудинской толщи, можно сказать, что оно обусловлено ритмами различного порядка (на что обращал внимание В. Н. Сакс). С учетом ритмичных закономерностей суходудинская свита подразделяется на четыре подсвиты [21]. Каждая подсвита отличается от другой по условиям осадко-накопления.

Так, первая подсвита, охватывающая самые низы суходудинской толщи, характеризуется чередованием глинисто-алевритовых пластов значительной мощности, возникших в сравнительно глубоководных условиях при нормальном морском режиме и при достаточно медленных колебаниях дна бассейна седиментации. Эти условия существовали весь валанжинский век, лишь к его концу наступила регрессия. В разных частях бассейна процесс регрессии шел по-разному. Это определило разную структуру накопления соответствующих толщ.

Когда регрессия наступала достаточно интенсивно, то обмеление моря шло быстро. В такой ситуации конец валанжина и начало готерива отмечаются достаточно быстрыми переходами нормально-морских условий к прибрежно-лагунным, что циклически повторялось, но продолжительность прибрежно-лагунных условий доминировала. Это определило специфическое строение соответствующего интервала разреза на Мессояхской, Северо-Соленинской и Пеляткинской разведочных площадях. Здесь чередуются комплексы (пачки) маломощных слоев, сильно заглинизированных и практически без содержания глинистой фракции. В этом случае диаграммы ПС напоминают кривые, отвечающие режиму маятника.

В случае, когда регрессия наступала сравнительно медленно, формировался ярко выраженный режим перехода нормально-морских условий к лагунно-морским и обратно, повторявшийся циклически несколько раз. Однако нормально-морские условия теперь преобладали над лагунно-морскими. Это определило ритмическую картину строения толщи, похожую на рассмотренную в предыдущем случае, но мощность переслаивающихся песчаных и глинистых пластов здесь оказывается несколько выше. Диаграмма ПС в данной ситуации представляет собой длиннопериодную гармонику значительной амплитуды, осложненную периодической компонентой той же амплитуды, но период которой в 5—7 раз меньше, чем у первоначальной (основной). Такое строение толщи характерно для Озерной площади на границе валанжин—готерив, а для Мессояхской, Северо-Соленинской и Пеляткинской — для готерива.

Поздний готерив знаменует региональную трансгрессию моря, и условия осадконакопления в этот промежуток времени очень близки к ранневаланжинским.

Как уже отмечалось, идентичные механизмы на «выходе» дают реализации таких случайных функций, у которых идентичны функции корреляции и спектральной плотности, если, конечно, случайные функции стационарны и эргодичны. Анализируемые диаграммы ПС в первом приближении можно считать стационарными и эргодичными по той причине, что для всей суходудинской толщи закономерное изменение литологического состава и мощности ее пластов настолько искажено, что можно говорить о случайных последовательностях чередующихся пластов. Очевидно, что с равным успехом можно проводить оценку и анализ как спектров, так и корреляционных функций. Однако язык спектрального анализа в данном случае оказывается более предпочтительным, ибо спектральный анализ непосредственно предназначен для описания случайных последовательностей, характеризующих периодические или квазипериодические явления. Последние обнаруживаются в разрезах суходудинской толщи.

Таким образом, об идентичности или различии условий формирования суходудинской толщи во времени и по площади можно судить по спектрам, взятым от характеристик ПС. С этой целью все диаграммы, характеризующие суходудинскую толщу в интервале от подошвы яковлевской до кровли нижнехетской свиты, были разбиты на интервалы (фрагменты). От каждого фрагмента диаграммы ПС был получен спектр [17]. С помощью классификационного приема, основанного на методе главных компонент, было выявлено три основных типа спектра (рис. 4.3). Образы спектров легко интерпретируются и тесно увязываются с той или иной структурой разреза.

Так, спектр типа А свидетельствует, что диаграмма ПС отражает чередование песчано-глинистых пластов значительной мощности. Действительно, ординаты этого спектра сосредоточены в основном в низкочастотной его области. Такой тип спектра характерен для раннего валанжина и позднего готерива. Условия формирования толщи, отвечающей этому типу спектра, связываются с нормально-морским режимом в сравнительно глубоководных частях бассейна при наличии достаточно медленных вертикальных колебаний дна бассейна седиментации.

Спектр типа В характерен для диаграммы ПС с ярко выраженным периодическим поведением, где на гармонику с периодом 40—45 м наложена другая гармоника — с периодом 7—9 м. Не случайно на спектре

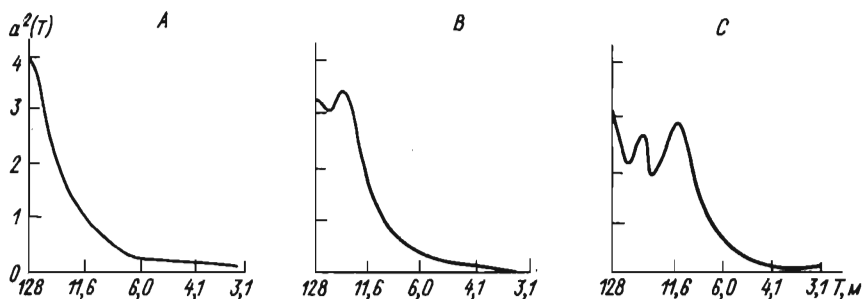


Рис. 4.3. Три основных типа спектра от диаграммы ПС суходудинской толщи.

этого типа улавливаются значительные ординаты в области периода 42,7 м (в среднечастотной области спектра). Такой тип спектра отвечает интервалу толщи, который датируется поздним валанжином — ранним готеривом.

Спектр типа С связывается с наиболее иррегулярными диаграммами ПС. Однако в таких диаграммах улавливаются в основном признаки, характерные для переслаивания маломощных пластов песчаников и глин (3—6 м). Основная спектральная мощность сосредоточена в высокочастотной области спектра. Условия формирования маломощных пластов связываются с лагунно-морским режимом. Этот тип спектра, а следовательно, и условия лагунно-морского режима приурочены также к позднему валанжину — раннему готериву, но проявлялся этот режим не везде — он отсутствует на Озерной площади.

Итак, видим, что по смене спектров того или иного типа возможно установить эволюцию строения разреза, оттенить те условия осадконакопления, которые были характерны для изучаемого фрагмента осадочной толщи в момент его формирования. Примечательно, что схема чередования типов спектров для большинства разрезов (от подошвы до кровли) имеет следующий вид: А—С—В—А. В значительно более редких случаях схема чередования была такова: А—В—С—В—А. Иными словами, глубоководный режим осадконакопления либо сразу сменялся лагунно-морским, либо наблюдался переходный режим, а затем уже лагунно-морской, и вновь трансгрессивные причины обуславливали возврат в переходный и глубоководный режим осадконакопления.

С помощью построения и анализа спектров, интерпретируемых в терминах условий осадконакопления (т. е. в терминах геологических процессов), суходудинская толща расчленяется и коррелируется более эффективно, чем традиционными приемами. Метод позволяет уловить тонкие различия в структурах диаграмм ПС, а следовательно, и различия в строении того или иного разреза. Один режим осадконакопления отделяется от другого на основе анализа спектров более обоснованно, чем при анализе непосредственно диаграммы ПС, которая, как правило, имеет очень сложную трудно интерпретируемую конфигурацию.

Исследование геологических явлений и процессов, связанных со второй постановкой задачи, дает много примеров. Правда, не всегда при этом

Таблица 4.3
Периоды циклов карбонатного осадконакопления

Тектонические структуры	Периоды составляющих разного порядка, м				
	I	II	III	IV	V
Русская платформа					
Балтийская синеклиза	220—300	105—140	65—80	35—45	15—25
Усино-Колвинский вал	220—300	115—135	65—95	35—50	15—25
Сибирская платформа	—	120—150	55—80	30—45	18—25
(Ангаро-Ленская синеклиза)					
Терско-Каспийский передовой прогиб (Терский антиклинорий)	175—220	110—125	75—80	35—50	20
Западная антиклинальная зона Южного Дагестана	270	110—140	75—80	35—50	20

для выделения синусоидальных составляющих применялись математические методы. Но наличие таких составляющих и их связь с ритмами, циклами, колебательными движениями различного порядка всегда подчеркивались. В частности, занимались такими исследованиями и авторы данной книги [18]. Нами изучались колебательные движения в условиях определенного тектонического режима, специфичного для формирования карбонатных отложений. К модели (4.5) мы пришли из следующих соображений.

С колебательными движениями однозначно связаны движения дна бассейна седиментации, а отсюда — и рельеф дна и глубина моря. В свою очередь размер накапливающихся на дне частиц карбонатного материала, как и содержание карбонатов в осадках, зависят от глубины моря. При этом меняется не только количество карбонатного материала, но и его структура. К положительным элементам рельефа тяготеют биоморфные и рифовые накопления, к отрицательным — тонкозернистые карбонаты. Следовательно, движения дна будут приводить к смене структур и состава осадков, накапливающихся в определенной исторической последовательности. Предполагая, что колебательные движения различного порядка описываются соответствующими синусоидальными составляющими, можно было ожидать, что изменение состава и структуры карбонатного осадка во времени будет описываться теми же составляющими. Это значит, что поведение характеристик, отражающих последовательность смены карбонатных слоев различной структуры и состава, во времени должно описываться моделью (4.5).

В качестве таких характеристик были выбраны пористость, нерастворимый остаток, содержание органического и карбонатного (кальцит, доломит) материала, различные геофизические сигналы (диаграммы каротажа). При этом временная шкала была заменена шкалой глубины. Эта замена оказалась возможной благодаря тому, что карбонатонакопление отвечает пассивному тектоническому режиму, при котором за один и тот же отрезок времени откладывается примерно одинаковая по мощности толща осадков. Таким образом, моделью (4.5) описывается изме-

нение выбранной характеристики по разрезу карбонатной толщи. Периоды искоемых составляющих выражаются в метрах, а их амплитуды — в единицах соответствующих характеристик. По соотношению периодов разных составляющих можно сопоставить движения разного порядка, а по соотношению амплитуд можно судить об их размахе.

На основе модели (4.5) исследовались карбонатные толщи широкого возрастного диапазона (от кембрия до позднего мела), формировавшиеся в условиях как платформенного, так и геосинклинального режима и входящие в состав и типичных морских карбонатных, и галогенных формаций. В результате была установлена определенная специфика колебательных движений, отвечающих тому тектоническому режиму, при котором образуются карбонатные толщи. В частности, было выявлено, что эпохи карбонатакопления характеризуются почти полной идентичностью колебательных движений в платформенных и геосинклинальных областях.

Всюду в карбонатных толщах выделяется одинаковое число периодических составляющих. Периоды их соизмеримы и не зависят от возраста отложений, их приуроченности к платформенным или геосинклинальным областям и от условий образования (табл. 4.3). При этом периоды составляющих определенного порядка меняются в соответствии со структурным планом отложений: чем длиннопериоднее составляющая, тем выше порядок структур (тем крупнее структуры), с которыми связано изменение ее периода. В общем сводам поднятий отвечает сокращение периода соответствующей составляющей.

Движения разного порядка устанавливают определенные соотношения между составом карбонатной породы и ее свойствами. При этом сказывается также разница во времени между моментом наступления специфических условий для осаждения данной хомогенной фазы и моментом самого осаждения. Величина такого «запаздывания» в осаждении твердых фаз связана со спецификой проявления колебательных движений в тех или иных условиях.

4.3.2. МОДЕЛИ СЕЗОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Описание периодических явлений моделями этого типа имеет свою специфику. Вид функции $\varphi(t)$ в выражении (4.3) роли не играет. Важен лишь тот факт, что через определенный период значения функции $\varphi(t)$ повторяются, пусть даже с определенными изменениями. Суть моделей заключается в описании зависимости между наблюдениями, разделенными промежутком времени, равным периоду процесса.

В этих моделях функция $\varphi(t)$ представлена в виде дискретного временного ряда, образованного наблюдениями в дискретные равноотстоящие моменты времени. Говорят, что ряд имеет периодичность с периодом s , когда сходные особенности ряда повторяются после s опорных временных интервалов. Опорный временной интервал равен разнице во времени между соседними наблюдениями. Поэтому при периодичности явления 1 год $s = 12$ мес, если опорный временной интервал равен 1 мес, и $s = 4$, если опорный временной интервал равен 3 мес (кварталу).

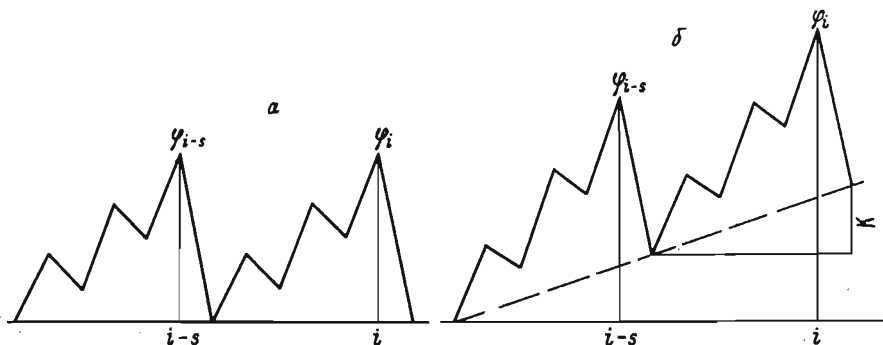


Рис. 4.4. Временной ряд, содержащий периодические компоненты с периодом s .

Сезонные модели описывают временные ряды, обладающие периодическими компонентами, которые могут меняться во времени. При этом временной ряд рассматривается как реализация стохастического процесса. Характерно, что в нестационарных процессах регулярные компоненты (тренды) и другие псевдоустойчивые характеристики, возможно меняющиеся во времени, считаются статистическими, а не детерминированными явлениями. Основная идея моделирования здесь заключается в том, чтобы от изучения исходного нестационарного процесса перейти к изучению стационарного процесса и исследовать его корреляционные свойства тем способом, который вытекает из модели.

В частности, для уничтожения периодической компоненты применяют разностный оператор. Получив таким образом разностное уравнение, которое является аналогом дифференциального уравнения при изучении дискретных функций или временных рядов, находят его решение. Поскольку разностное уравнение в данном случае по своей природе является стохастическим, его решением будет корреляционная функция или спектр. Таким образом, моделью задается теоретическая корреляционная функция или спектр. При этом корреляционная функция представлена дискретной последовательностью коэффициентов корреляции между значениями ряда, отделенными последовательно увеличивающимся числом опорных временных интервалов. Сопоставление выборочной корреляционной функции или выборочного спектра с теоретическими служит средством идентификации, т. е. выбора подходящей модели.

Проиллюстрировать эти идеи можно на следующем простом примере. На рис. 4.4. изображен временной ряд, содержащий периодические компоненты с периодом s . Пусть этот ряд детерминированный, т. е. не осложненный случайной компонентой. В этом случае для ряда, изображенного на рис. 4.4, a , имеем $\varphi_i = \varphi_{i-s}$. Тогда простое взятие разностей $\varphi_i - \varphi_{i-s}$ приводит к уничтожению периодичности. В случае наличия случайной компоненты модель имеет вид

$$\varphi_i - \xi_i = \varphi_{i-s} - \xi_{i-s},$$

где ξ — случайная величина с фиксированным распределением и нулевым средним.

На рис. 4.4.6 изображен тот же ряд, но имеющий линейный тренд. В этом случае, если ряд детерминированный, $\varphi_i - \varphi_{i-s} = K$. Но той же величине K равна и разность $\varphi_{i-1} - \varphi_{i-1-s}$. При осложнении ряда случайной компонентой модель имеет вид

$$(\varphi_i - \varphi_{i-s}) - (\varphi_{i-1} - \varphi_{i-1-s}) = (\xi_i - \xi_{i-s}) - (\xi_{i-1} - \xi_{i-1-s}). \quad (4.6)$$

Таким образом, двойное взятие разностей переводит исходный нестационарный периодический процесс в случайный стационарный процесс. Пока что тренд рассматривался нами как детерминированное явление. Переход к стохастическому тренду осуществляется следующим образом. Мы видели, что при наличии детерминированного линейного тренда разность

$$\varphi_i - K - \xi_i = \varphi_{i-s} - \xi_{i-s}. \quad (4.7)$$

Пусть теперь K — не константа, а случайная величина, пропорциональная помехе ξ_{i-s} , полученной в момент времени $i-s$, т. е. $K = \lambda \xi_{i-s}$. Такое условие есть смысл вводить в тех случаях, когда предполагается, что случайные «сбои» процесса скажутся на нем через период времени s . Но они могут сказаться и в самое ближайшее время, только иначе — будут измеряться другим коэффициентом пропорциональности, не равным λ . Тогда уравнение (4.7) примет вид

$$\varphi_i - \varphi_{i-s} = \xi_i - \alpha \xi_{i-s},$$

где $\alpha = 1 - \lambda$.

Окончательно вместо уравнения (4.6) получим модель

$$(\varphi_i - \varphi_{i-s}) - (\varphi_{i-1} - \varphi_{i-1-s}) = (\xi_i - \alpha \xi_{i-s}) - \beta(\xi_{i-1} - \alpha \xi_{i-1-s}).$$

Таким образом, двойным применением разностного оператора к исходному ряду φ_i последний переведен в ряд

$$Z_i = (\varphi_i - \varphi_{i-s}) - (\varphi_{i-1} - \varphi_{i-1-s}),$$

статистические свойства которого описываются моделью

$$Z_i = (\xi_i - \alpha \xi_{i-s}) - \beta(\xi_{i-1} - \alpha \xi_{i-1-s}),$$

учитывающей зависимость между наблюдениями. Этой модели отвечают корреляционная функция и спектр вполне определенного вида.

В заключение необходимо отметить, что сезонные модели не раскрывают причин возникновения периодичности в изучаемом явлении, они не несут какой-либо информации о природе явления. С этой точки зрения их познавательная способность в значительной степени ограничена, что, однако, не исключает плодотворной интерпретации полученного результата.

Эти модели дают соответствующие рабочие формулы, позволяющие описывать периодичность. Они нашли широкое применение при решении экономических задач, где имеют место сезонные явления типа сезонных изменений цен, спроса на те или иные товары и т. д. При этом сезонный

спрос в этом году действительно зависит от случайных, т. е. неконтролируемых, изменений спроса в прошлогоднем аналогичном сезоне и в предстоящем сезоне текущего года. Рассматриваемые модели в этих условиях служат хорошим средством для прогноза. В этом плане они оказались более эффективными, чем другие методы, например спектральный анализ. Для описания случайных выбросов спектральный анализ требует оценки большого числа параметров. В сезонных же моделях процедура оценки и учета явлений типа выбросов облегчена.

Нам известна только одна работа [19], где сезонные модели использовались в геологии. В этой работе исследовалось такое периодическое явление, как ритмическое строение осадочных толщ. Для описания этого явления мы выбрали несколько моделей сезонного типа, построенных на основе изложенных идей, с необходимыми модификациями, вызванными особенностями ритмичности. Были выделены ритмы разных порядков. Соответственно было учтено, что каждый ритм несет в себе изменения, наложенные на него ритмами другого порядка, поэтому в эволюции ритмов можно ожидать наличия трендовых составляющих, которые могут носить не только детерминированный, но и стохастический характер. Совокупность периодических и аperiodических компонент описывалась в различных модификациях, включающих линейный, квадратичный и другого типа тренды, как детерминированные, так и стохастические, на фоне которых проявляются периодичности. Наиболее интересной оказалась модель

$$\varphi_i = \beta\varphi_{i-s} + \mu + \xi_i. \quad (4.8)$$

С ее помощью было выявлено и описано экспоненциальное затухание ритмичности. Действительно, из модели (4.8) следуют соотношения

$$\varphi_i = \beta\varphi_{i-s} + \mu + \xi_i;$$

$$\varphi_{i+s} = \beta^2\varphi_{i-s} + \mu + \beta\mu + \xi_{i+s} + \beta\xi_i;$$

$$\varphi_{i+2s} = \beta^3\varphi_{i-s} + \mu + \beta\mu + \beta^2\mu + \xi_{i+2s} + \beta\xi_{i+s} + \beta^2\xi_i.$$

где $\beta < 1$.

Это означает, что при изменении ритмов имеет место тренд их среднего уровня. Уровень постепенно повышается, но при этом каждый ритм сдвигается вверх относительно предыдущего все на меньшую и меньшую величину: μ , $\beta\mu$, $\beta^2\mu$, ... Величина сдвига по ординате, как видим, меняется по закону геометрической прогрессии со знаменателем β . Но этим изменения не ограничиваются. Превышение точек, занимающих одинаковое положение в ритме, т. е. точек φ_i , φ_{i+s} , φ_{i+2s} , ..., над средним уровнем также затухает и по тому же закону, образуя последовательность φ_{i-s} , $\beta\varphi_{i-s}$, $\beta^2\varphi_{i-s}$, ... Так как $\beta < 1$, то различия в соседних значениях φ_{i+ks} и φ_{i+ks+1} постепенно сглаживаются.

Если бы процесс продолжался в том же режиме довольно долго, то (без учета случайной компоненты) уровень практически перестал бы

расти, а различия внутри ритма вообще исчезли. Этот вывод следует из того, что $\beta^k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, а отсюда $\varphi_{i+k\Delta t} \rightarrow (\mu + \beta\mu + \dots + \beta^k\mu) \rightarrow \mu[1/(1-\beta)]$. Это значит, что все члены ритмического ряда приняли бы одно и то же постоянное значение $[1/(1-\beta)]\mu$ (без учета случайной компоненты). Таким образом, модель (4.8) описывает процесс затухания, сглаживания и постепенного исчезновения ритмичности.

В конкретно изученной авторами ритмичности терригенных отложений повышение значений φ_i отвечало росту песчаности. Было выявлено, что увеличение содержания песчаного материала в разрезе происходило неравномерно, с постепенным затуханием его привноса. По мере обогащения толщи пород этим материалом различия в составе соседних слоев постепенно исчезали; сглаживалась и ритмичность, толщина становилась все более и более однородной по составу. Эти явления носили экспоненциальный характер. Такой вывод сделан на том основании, что для ординат экспоненты $\varphi(t) = ce^{at}$, разделенных промежутком времени Δt выполняется соотношение $\varphi(t + k\Delta t) = \beta^k \varphi(t)$, где $\beta = e^{a\Delta t}$, $k = 1, 2, 3, \dots$

4.4. МОДЕЛИ АВТОРЕГРЕССИИ

Модели авторегрессии — это стохастические модели, используемые для описания многих встречающихся на практике дискретных временных рядов. Этими моделями текущее значение процесса выражается как конечная линейная совокупность предыдущих значений процесса и случайного возмущения ξ_i :

$$z_i = \beta_1 z_{i-1} + \beta_2 z_{i-2} + \dots + \beta_m z_{i-m} + \xi_i, \quad (4.9)$$

где $z_i = \varphi_i - \mu$; μ — параметр, определяющий средний уровень процесса.

Процесс (4.9) называется процессом авторегрессии порядка m . Такое название объясняется тем, что линейная модель

$$y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_m x_m + \xi,$$

связывающая «зависимую» переменную y с множеством «независимых» переменных x_1, x_2, \dots, x_m плюс член ξ , описывающий случайную компоненту, часто называют моделью регрессии. По терминологии регрессионного анализа говорят, что переменная y регрессирует на x_1, x_2, \dots, x_m . В уравнении (4.9) переменная z_i регрессирует на m своих предшествующих значений, поэтому модель называется авторегрессионной. Иными словами, модель (4.9) описывает тот факт, что состояние системы в данный момент времени зависит от ее состояний в m предшествующих моментов. В этом смысле процесс авторегрессии — это процесс с памятью.

Аналогом модели (4.9) для непрерывного ряда или для непрерывной функции $z(t) = \varphi(t) - \mu$ является линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами порядка m :

$$b_m \frac{d^m z}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} z}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 z(t) = \xi(t). \quad (4.10)$$

В связи с введением стохастического члена $\xi(t)$ уравнение (4.10) называют стохастическим дифференциальным уравнением. Его решением в отличие от случаев, рассмотренных в разделе 3.1, где мы имели дело с обыкновенными дифференциальными уравнениями, уже не будет являться некоторая детерминированная функция $z(t)$. В таких случаях говорят, что через линейную систему пропускают чисто случайный процесс, причем $\xi(t)$ — это вход системы, а $z(t)$ — ее выход. Процесс $z(t)$, определяемый уравнением (4.10), также часто называют процессом авторегрессии порядка m , но непрерывным.

Автокорреляционная функция (последовательность) процесса авторегрессии удовлетворяет разностному уравнению

$$r_i = \beta_1 r_{i-1} + \beta_2 r_{i-2} + \dots + \beta_m r_{i-m},$$

аналогичному уравнению (4.9), которому удовлетворяет сам процесс z_i . В общем эта функция состоит из совокупности затухающих экспонент и затухающих синусоид.

В практических приложениях большое значение имеют процессы авторегрессии второго порядка. Они имеют отношение к периодическим явлениям, чем и определяется их физический смысл. Чтобы проследить эти отношения, остановимся на авторегрессии второго порядка более подробно.

Непрерывный процесс авторегрессии второго порядка можно записать в виде стохастического дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + 2c \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = \xi(t). \quad (4.11)$$

При отсутствии случайного члена, т. е. при равенстве правой части уравнения нулю, имеем

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + 2c \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = 0. \quad (4.12)$$

Уравнение (4.12) является математической моделью колебания пружинного маятника, демпфированного сопротивлением воздуха. (Демпфирование — это успокоение колебаний под влиянием силы трения, которая действует на тело при его движении в той или иной среде.) Параметр c называется коэффициентом затухания, а ω_0 — частотой свободных колебаний системы в отсутствие трения. Решением уравнения (4.12) при $c < \omega_0$ является функция

$$z(t) = A e^{-ct} \cos(\omega_1 t - \psi). \quad (4.13)$$

Параметр ω_1 называется частотой собственных колебаний диссипативной системы, параметр $A e^{-ct}$ — амплитудой затухающих колебаний. Параметры дифференциального уравнения и его решения связаны соотношением $\omega_1^2 - \omega_0^2 = c^2$.

При наличии случайного члена $\xi(t)$ уравнение (4.11) и соответствующее ему уравнение авторегрессии второго порядка для дискретного процесса

$$z_i = \beta_1 z_{i-1} + \beta_2 z_{i-2} + \xi_i \quad (4.14)$$

тоже будут описывать колебательные движения маятника (при условии, что параметры уравнений удовлетворяют определенным требованиям), но не под действием единичного импульса (толчка), а в другой ситуации. Эта ситуация характеризуется тем, что маятник подвергается чисто случайным толчкам через равные промежутки времени в соответствии с чисто случайной последовательностью ξ_i . Это значит, что после действия на маятник первым импульсом, мы, не ожидая пока он остановится, подействуем на него вторым импульсом, а затем третьим и т. д. Импульсы будут следовать через равные промежутки времени, но будут разными по силе и направлению.

Каждый раз в промежутке от импульса до импульса движение маятника описывает какой-то отрезок затухающей синусоиды. При этом меняется амплитуда A синусоиды и колебания начинаются с новой фазы ψ , но частота собственных колебаний маятника ω_1 и коэффициент затухания c остаются постоянными. В общем вместо затухающих колебаний маятник теперь совершает возмущенное периодическое движение. Это движение соответственно отображается искаженной периодической функцией, т. е. ряд эмпирических наблюдений теперь характеризуется псевдопериодическим поведением. Поэтому, если мы изобразим кривую $z(t)$, полученную в результате действия импульсов ξ_i , то не увидим плавной затухающей синусоиды. Вместо детерминированной кривой (4.13) получим стохастическую кривую. В этом и состоит сущность стохастического дифференциального уравнения.

Таким образом, маятник в данном случае представляет собой ту динамическую систему, которая чисто случайную последовательность независимых импульсов ξ_i , поступающих на ее вход, переводит на выходе в последовательность зависимых членов ряда z_i . Свойства этой динамической системы (в данном случае параметры, зависящие от свойств самого маятника, — частота собственных колебаний ω_1 и коэффициент затухания c) представляют самостоятельный интерес. В их выявлении и заложены основы интерпретации модели. С параметрами системы однозначно связаны коэффициенты уравнения (4.14), а корреляционная функция описывается затухающей синусоидой с частотой, равной частоте собственных колебаний системы ω_1 , и с параметром затухания, равным коэффициенту затухания системы c (при непрерывном процессе) или зависящим от него (при дискретном процессе).

Очевидно, что понятие «маятник» в данном случае имеет обобщенный смысл. Имеется в виду некий осциллятор, функционирование которого описывается уравнениями (4.11), (4.12) и (4.14). Так, в геологическом плане можно говорить о вертикальных движениях плавающего в субстрате блока литосферы, колебания которого определяются спонтанно возникающими силами. Спонтанные импульсы в этом случае могут возникать либо как следствие нарушения равновесия, либо в результате преодоления внутренними силами Земли сопротивления со стороны земной коры, либо по причине разрушения горных сооружений процессами денудации и проявления изостазии.

Рассматривая колебательные тектонические движения, осуществляемые по описанному на примере маятника принципу, мы, естественно,

интересуемся тем, в какой степени формирующиеся при таких движениях особенности строения осадочных толщ связаны со свойствами самой динамической системы осадконакопления — с колеблющимся блоком литосферы. Определение его собственных возможностей, параметров его свободных колебаний — это одна из интереснейших задач, имеющая непосредственное отношение к познанию природы процессов осадконакопления да и самих тектонических процессов.

Таким образом, моделью авторегрессии второго порядка при определенных условиях, а именно, когда $\beta_1^2 + 4\beta_2 < 0$, описывается еще один механизм возникновения периодичности, отличный от рассмотренных в разделе 4.3. С этой точки зрения рассматриваемая модель занимает определенное место среди моделей раздела 4.3.

Динамическая система, преобразующая входной чисто случайный процесс $\xi(t)$ или случайную последовательность ξ_i в процесс $z(t)$ или в ряд с зависимыми членами z_i на ее выходе, очевидно, может работать не только по принципу осциллятора, но и на других принципах. Представляет интерес также часто встречаемый на практике процесс — процесс авторегрессии первого порядка. В непрерывном случае его моделью является стохастическое дифференциальное уравнение первого порядка, а в дискретном — уравнение авторегрессии первого порядка:

$$dz/dt + kz(t) = \xi(t); \quad (4.15)$$

$$z_i = \beta_1 z_{i-1} + \xi_i. \quad (4.16)$$

При равенстве правой части уравнений нулю ими описываются экспоненциальные процессы; решением уравнений является экспоненциальная функция

$$z(t) = ce^{-kt}. \quad (4.17)$$

Таким образом, здесь функционирование интересующей нас динамической системы основано не на принципе маятника, а на принципе другой физической системы, состоящей из пружины и буфера. (Одно из назначений такого устройства заключается в том, чтобы двери не хлопали.) Входные случайные импульсы ξ_i в уравнении (4.16) — это смещения пружины под действием сил, приложенных к ней, а выходные z_i — это смещения буферного хомута. После действия единичного импульса смещение буферного хомута экспоненциально затухает. Параметры экспоненты (4.17) зависят от свойств пружины и буфера. Они однозначно связаны с параметрами уравнений (4.15) и (4.16), и, следовательно, на основе наблюдений мы можем получить представление о самой динамической системе.

Развитие многих природных систем происходит с экспоненциальным изменением их характеристик. В геологии процессы авторегрессии тоже должны играть большую роль, так как во многих процессах, особенно литогенетических, отмечено существование затухающих зависимостей. Авторегрессионной моделью первого порядка учитывается давно подмеченное в строении слоистых толщ обстоятельство: вышележащий слой предопределен только его подстилающим слоем, все нижележащие слои

(вся предыстория) влияния практически не оказывают. Автокорреляционная функция рассматриваемого процесса удовлетворяет разностному уравнению первого порядка. Она экспоненциально затухает до нуля, причем монотонно при положительном β_1 и, меняя знак, когда β_1 отрицательно. Отметим, что автокорреляционная функция процесса авторегрессии второго порядка состоит из совокупности затухающих экспонент, когда $\beta_1^2 + 4\beta_2 \geq 0$.

А. Б. Вистелиус [8] при изучении явления фазовой дифференциации в карбонатных отложениях описал механизм формирования пористости с помощью стохастического дифференциального уравнения (4.11) с постоянными коэффициентами второго порядка. В общих чертах суть работы [8] сводится к следующему. А. Б. Вистелиус полагает, что пористость карбонатных пород зависит от первоначального размера частиц, осаждающихся на дно бассейна седиментации, и от их упаковки. Тем самым пористость обусловлена структурой минерального скелета карбонатных пород. Структура в процессе седиментации меняется вследствие изменения глубины осаждения карбонатного материала. Следовательно, претерпевает изменение и пористость пород.

Если предположить, что глубина осаждения карбонатного материала лишь только флуктуирует, но в среднем остается постоянной (компенсированное накопление), то изменение пористости и будет представлять собой случайный стационарный процесс с широким, но ограниченным спектром (типа «белого шума»). Такие флуктуации определяют «вход» дифференциального уравнения. Вместе с тем флуктуации могут воздействовать на колебательную систему и вызывать ее возмущение. В данном случае эта колебательная система есть блок земной коры, на котором покоится ложе бассейна седиментации. Система, возмущенная внешними флуктуационными толчками, обладая «собственными» колебаниями, частоты которых много меньше частот, определяющих флуктуации, тоже начнет испытывать смещения колебательного типа. Эти смещения, по А. Б. Вистелиусу, есть тектонические вертикальные колебания.

Внешние флуктуационные толчки, взаимодействуя с системой, «окрашиваются» (модулируются), и тем самым наблюдаемая кривая пористости, характеризующая карбонатный разрез, в итоге становится адекватной суперпозиции некоторого числа гармоник (в ряде случаев затухающих), искаженных случайными иррегулярностями. При этом считается, что постседиментационные процессы могут изменить лишь абсолютный характер вариации пористости по разрезу, но не относительный. Эти реализации пористости в принципе и наблюдаются. Они анализируются с применением методов корреляционного и спектрального анализ, которые позволяют оценить параметры стохастического дифференциального уравнения и определить параметры улавливаемых гармоник. Полученная информация дает возможность провести детальную реконструкцию формирования пористости изучаемой карбонатной толщи.

Можно заметить, что модель, предложенная А. Б. Вистелиусом, с идейной стороны вопроса очень сильна и полезна. Однако в ней еще много несовершенного. Возникновение тектонических вертикальных движений колебательного характера, как явствует из модели, должно быть обязано

внешним локальным флуктуационным толчком. Причина же их не ясна. Вместе с тем известно, что колебательное возмущение блока земной коры, на котором покоится ложе бассейна седиментации, может вызываться вынужденными глобальными причинами, связанными и с астрономическими явлениями, и с собственными возмущениями глубинных оболочек планеты. Каждая из этих причин определяет «свое» вынужденное колебание, описание которого должно найти место в модели, но, к сожалению, пока что такое описание отсутствует.

Очень может быть, что возникновение наблюдаемых в геологии периодичностей вызвано процессами автоколебательного типа. Автоколебания, как правило, возникают под влиянием непериодических источников энергии и самовозбуждающихся факторов, действующих по принципу обратной связи. Для изучения автоколебательных процессов рамки теории линейных дифференциальных уравнений оказываются узкими. Здесь основное место занимают дифференциальные уравнения нелинейного типа, трудность решения которых общеизвестна. Но эти уравнения адекватно описывают некоторые автоколебательные природные процессы, играющие основную роль в формировании упорядоченных, самоорганизующихся структур, в частности структур периодического характера. Геологическая постановка задачи изучения колебательных явлений с помощью дифференциальных уравнений нелинейного типа частично отражена в работе [19].

Нами модели авторегрессии использовались при изучении широкого круга геологических явлений [18, 19]: ритмичности строения песчано-глинистых угленосных и карбонатных отложений, смены трансгрессий и регрессий, временной структуры геомагнитного поля. Динамические системы, управляющие ходом процессов, были представлены в виде соответствующих дифференциальных уравнений или уравнений авторегрессии. Выяснилось, что эти системы описываются уравнениями не выше второго порядка.

Таким образом, изученные динамические системы работают по принципу маятника или устройства, состоящего из пружины и буфера. Соответственно это либо колеблющиеся, либо экспоненциально развивающиеся (затухающие) системы. Определение параметров систем, генерировавших ряды одного и того же явления, но при разных условиях (например, ритмичность в разрезах разных скважин), позволило судить об особенностях свойств этих систем и об их изменениях в разных условиях. Как правило, спектры рассматриваемых реализаций процесса оказывались низкочастотными. Это означает, что в реализациях процессов преобладают низкочастотные (длиннопериодные) гармонические составляющие. Они и создают тот длиннопериодный, почти периодический тренд, который хорошо прослеживается в наблюдениях; с этим трендом и следует связывать периодичность изучаемых явлений.

5. МОДЕЛИ ОБЪЕКТОВ

В данной главе под объектом имеется в виду, как правило, материальный объект с присущими ему свойствами. В предшествующих главах в качестве объекта изучения выступал тот или иной процесс. Естественно, что каждый объект возникает вследствие действия определенных природных процессов, и поэтому такое разграничение во многом условно. Но здесь мы хотим подчеркнуть, что интерес сосредоточен на описании самого материального объекта, как правило, вне связи с процессами, его сформировавшими. Это и есть та внешняя сторона моделирования, о которой мы говорили раньше. Так, любая геологическая карта дает описание объекта, представление об изменении его свойств. Генетическая информация на такой карте может и не найти отражения.

Разумеется, что хорошее описание объекта не может быть достигнуто в отрыве от причинно-следственных связей явлений, ответственных за формирование облика объекта. Но, давая такое название главе, мы хотим как раз подчеркнуть, что здесь, как правило, рассматриваются такие ситуации, когда информация причинного характера неполна или даже отсутствует, когда глубокий теоретический анализ становится невозможным. В этих условиях отыскивают различные пути, которые помогают найти выход из создавшегося положения. Не пользуясь моделированием, основанным на представлении о процессе, здесь прибегают к чисто описательным средствам. В геологии по этой проблеме возникли свои традиции, свои формальные методы и приемы.

Здесь, за небольшим исключением, применяются уже готовые математические модели, перенесенные из одной научной области в другую лишь в силу того, что исследуемые в этих областях объекты имеют тесную аналогию. Большею частью это модели математической статистики, хорошо зарекомендовавшие себя при анализе массовых, коллективных явлений или явлений, наделенных чертами детерминизма и случайности. Это модели широкого спектра действия. Исследователи с видимой легкостью соглашались использовать такого типа модели лишь потому, что заранее можно полагать, а иногда и быть уверенным, что выбранная модель качественно верно будет описывать объект в силу тех соображений, на которых она зиждется. Иногда, правда, приходится прибегать к таким моделям потому, что нет ничего лучшего на сегодняшний день. Очевидно, что такая позиция довольно шаткая, при этом содержательную концепцию в готовых моделях диктует сам математический метод.

Моделирование в рассматриваемом аспекте преследует цель — уловить определенный порядок, тенденции, закономерности и дать четкое и компактное описание объекта, когда наблюдения, его характеризующие, наделены чертами детерминизма и случайности, проявляющимися одновременно. Тем самым достигается и свертка информации, выражение ее через небольшое число параметров, констант. Отсюда, как правило, вытекает и возможность прогнозирования характеристик объекта. Это обстоятельство играет далеко не последнюю, если не главную, роль при формализованном описании объектов.

5.1. МОДЕЛИ ВАРЬИРОВАНИЯ РАЗМЕРОВ И СВОЙСТВ ОДНОРОДНЫХ ОБЪЕКТОВ

В разделе 3.1.3.1 мы рассматривали случайное варьирование (рассеивание) в массовых явлениях различных геологических показателей. Там это варьирование изучалось с точки зрения процессов, его вызывающих. Здесь мы тоже будем рассматривать вопросы варьирования геологической переменной, но в других ситуациях. Наиболее типичной из них является такая ситуация, когда о механизме, вызывающем рассеивание, из-за слабой изученности ничего определенного сказать нельзя. Поэтому вид функции распределения вероятностей не может быть получен теоретически.

Традиционным выходом из создавшегося положения в геологических исследованиях, да и не только в геологических, является обращение к известным функциям распределения, принятие их априори. Если наблюдаемое, так называемое эмпирическое, распределение симметричное, то его, как правило, считают нормальным; если оно положительное асимметричное, — то логарифмически нормальным. Исследование сводится к проверке соответствия наблюдаемого распределения выбранному теоретическому. При этом выбор того или иного теоретического распределения в качестве модели случайного рассеивания очень часто никак не обосновывается с точки зрения механизма, его определяющего, что, естественно, делает такое исследование сугубо формальным, а иногда и лишённым всякого смысла.

Нормальным и логарифмически нормальным законами описывают распределение содержания металла в пределах рудных месторождений, химических элементов и минералов в горных породах, плотности и пористости горных пород, мощности слоев, показателя окатанности галек, углов падения косой слоистости песчаника, углов наклона морского пляжа, площадей, занимаемых золотоносными отложениями, размеров беспозвоночных ископаемых организмов и многих других геологических характеристик.

В тех случаях, когда логарифмическое преобразование не полностью уничтожает положительную асимметрию, обычно применяют гамма-распределение. Оно используется для описания распределения мощности слоев, соотношения песчаников и сланцев в разрезе, содержания некоторых малых компонентов в породах, показателя окатанности обломков больших размеров и во многих других случаях. Распределение Пуассона привлекается как модель характеристики числа зерен редких минералов, подсчитанных в выборках заданного объема. Используют его и в палеонтологии. В более редких случаях применяются и другие распределения.

К анализу функций распределения вероятностей приходится обращаться и при решении задач другого рода. Одной из них является задача, где стоит вопрос о наличии в пределах какой-либо площади участков преимущественной концентрации, скопления тех или иных изучаемых объектов, т. е. о наличии тенденции к их группированию, или наоборот, о случайном распределении этих объектов на изучаемой территории.

Иными словами, это задача выяснения группирования или случайности расположения точек, где обнаружены эти объекты, на плоскости.

В данной задаче модель строится не для того, чтобы понять процесс, вызывающий рассеивание или скопление точек, а чтобы иметь инструмент для проверки гипотезы их случайного расположения на плоскости. Американские исследователи с этой целью используют модель распределения Пуассона [36], к которой в этом случае приводят предположения, аналогичные тем, для которых это распределение было получено (см. раздел 3.1.3.1). Распределение Пуассона, естественно, не позволяет ничего говорить о группировании точек в тех случаях, когда гипотеза их случайного расположения отвергнута.

Одним из методов изучения пространственной зависимости между точками является так называемый метод ближайшего соседа. Здесь анализируется уже не множество точек, расположенных внутри некоторой заданной области, а расстояния между наиболее близкими парами точек. Функцию распределения расстояний между каждой точкой и ближайшей к ней соседней в условиях их случайного распределения на плоскости находят путем соответствующего преобразования распределения Пуассона. Понятие ближайшей точки к точке, которая выбрана наудачу, можно распространить на последовательность ближайших точек, т. е. говорить о второй ближайшей точке, о третьей и т. д. Получены и соответствующие функции распределения вероятностей.

До сих пор мы рассматривали явления, по отношению к которым понятие вероятности действительно имеет смысл; соответственно можно было говорить о вероятностных закономерностях варьирования размеров и свойств геологических объектов. Это представляется особенно важным в связи с тем, что выводы, которые получены на ограниченном материале имеющихся в нашем распоряжении наблюдений, мы хотим отнести ко всему явлению, процессу или совокупности объектов в целом, а не только к той их части, которая попала в орбиту нашего наблюдения. Горсть песка для нас представляет интерес не сама по себе, а как совокупность точек, песчинок, взаимоотношения между которыми характерны для многих других горстей песка, взятых из той же полосы пляжа, а следовательно, и для всей полосы в целом.

Однако существуют геологические объекты, размеры которых варьируют, но которые трудно отнести к массовым явлениям. Взять хотя бы месторождения нефти и газа, приуроченные к определенной нефтегазовой провинции. Вся их совокупность — это та же одна-единственная горсть песка. Эта совокупность, в отличие от горсти песка, не повторяется в общих чертах в других «горстях». Более того, о ней нельзя судить по отдельным ее представителям — открытым месторождениям, ибо последние могут дать о ней искаженные представления. Истинное же представление может быть получено, если вдуматься, только после изучения всей совокупности, а не выборочных ее представителей. К тому же, в отличие от песчинок, нас интересуют все без исключения месторождения. Эти обстоятельства, естественно, не мешают говорить о распределении месторождений по размерам, имея в виду долю месторождений с той или иной величиной запасов. Аналогия с распределением вероятностей здесь

5.1. МОДЕЛИ ВАРЬИРОВАНИЯ РАЗМЕРОВ И СВОЙСТВ ОДНОРОДНЫХ ОБЪЕКТОВ

В разделе 3.1.3.1 мы рассматривали случайное варьирование (рассеивание) в массовых явлениях различных геологических показателей. Там это варьирование изучалось с точки зрения процессов, его вызывающих. Здесь мы тоже будем рассматривать вопросы варьирования геологической переменной, но в других ситуациях. Наиболее типичной из них является такая ситуация, когда о механизме, вызывающем рассеивание, из-за слабой изученности ничего определенного сказать нельзя. Поэтому вид функции распределения вероятностей не может быть получен теоретически.

Традиционным выходом из создавшегося положения в геологических исследованиях, да и не только в геологических, является обращение к известным функциям распределения, принятие их априори. Если наблюдаемое, так называемое эмпирическое, распределение симметричное, то его, как правило, считают нормальным; если оно положительное асимметричное, — то логарифмически нормальным. Исследование сводится к проверке соответствия наблюдаемого распределения выбранному теоретическому. При этом выбор того или иного теоретического распределения в качестве модели случайного рассеивания очень часто никак не обосновывается с точки зрения механизма, его определяющего, что, естественно, делает такое исследование сугубо формальным, а иногда и лишенным всякого смысла.

Нормальным и логарифмически нормальным законами описывают распределение содержания металла в пределах рудных месторождений, химических элементов и минералов в горных породах, плотности и пористости горных пород, мощности слоев, показателя окатанности галек, углов падения косой слоистости песчаника, углов наклона морского пляжа, площадей, занимаемых золотоносными отложениями, размеров беспозвоночных ископаемых организмов и многих других геологических характеристик.

В тех случаях, когда логарифмическое преобразование не полностью уничтожает положительную асимметрию, обычно применяют гамма-распределение. Оно используется для описания распределения мощности слоев, соотношения песчаников и сланцев в разрезе, содержания некоторых малых компонентов в породах, показателя окатанности обломков больших размеров и во многих других случаях. Распределение Пуассона привлекается как модель характеристики числа зерен редких минералов, подсчитанных в выборках заданного объема. Используют его и в палеонтологии. В более редких случаях применяются и другие распределения.

К анализу функций распределения вероятностей приходится обращаться и при решении задач другого рода. Одной из них является задача, где стоит вопрос о наличии в пределах какой-либо площади участков преимущественной концентрации, скопления тех или иных изучаемых объектов, т. е. о наличии тенденции к их группированию, или наоборот, о случайном распределении этих объектов на изучаемой территории.

Иными словами, это задача выяснения группирования или случайности расположения точек, где обнаружены эти объекты, на плоскости.

В данной задаче модель строится не для того, чтобы понять процесс, вызывающий рассеивание или скопление точек, а чтобы иметь инструмент для проверки гипотезы их случайного расположения на плоскости. Американские исследователи с этой целью используют модель распределения Пуассона [36], к которой в этом случае приводят предположения, аналогичные тем, для которых это распределение было получено (см. раздел 3.1.3.1). Распределение Пуассона, естественно, не позволяет ничего говорить о группировании точек в тех случаях, когда гипотеза их случайного расположения отвергнута.

Одним из методов изучения пространственной зависимости между точками является так называемый метод ближайшего соседа. Здесь анализируется уже не множество точек, расположенных внутри некоторой заданной области, а расстояния между наиболее близкими парами точек. Функцию распределения расстояний между каждой точкой и ближайшей к ней соседней в условиях их случайного распределения на плоскости находят путем соответствующего преобразования распределения Пуассона. Понятие ближайшей точки к точке, которая выбрана наудачу, можно распространить на последовательность ближайших точек, т. е. говорить о второй ближайшей точке, о третьей и т. д. Получены и соответствующие функции распределения вероятностей.

До сих пор мы рассматривали явления, по отношению к которым понятие вероятности действительно имеет смысл; соответственно можно было говорить о вероятностных закономерностях варьирования размеров и свойств геологических объектов. Это представляется особенно важным в связи с тем, что выводы, которые получены на ограниченном материале имеющихся в нашем распоряжении наблюдений, мы хотим отнести ко всему явлению, процессу или совокупности объектов в целом, а не только к той их части, которая попала в орбиту нашего наблюдения. Горсть песка для нас представляет интерес не сама по себе, а как совокупность точек, песчинок, взаимоотношения между которыми характерны для многих других горстей песка, взятых из той же полосы пляжа, а следовательно, и для всей полосы в целом.

Однако существуют геологические объекты, размеры которых варьируют, но которые трудно отнести к массовым явлениям. Взять хотя бы месторождения нефти и газа, приуроченные к определенной нефтегазовой провинции. Вся их совокупность — это та же одна-единственная горсть песка. Эта совокупность, в отличие от горсти песка, не повторяется в общих чертах в других «горстях». Более того, о ней нельзя судить по отдельным ее представителям — открытым месторождениям, ибо последние могут дать о ней искаженные представления. Истинное же представление может быть получено, если вдуматься, только после изучения всей совокупности, а не выборочных ее представителей. К тому же, в отличие от песчинок, нас интересуют все без исключения месторождения. Эти обстоятельства, естественно, не мешают говорить о распределении месторождений по размерам, имея в виду долю месторождений с той или иной величиной запасов. Аналогия с распределением вероятностей здесь

вполне уместна, но только аналогия, и не более.

В нефтяной геологии, да и не только в нефтяной, распределению месторождений по запасам уделяется особое внимание. Объясняется это тем, что по виду распределения при известных его параметрах можно прогнозировать число месторождений, которые предстоит еще открыть, и их запасы, т. е. можно определить структуру прогнозных ресурсов. Вопрос о виде функции распределения обсуждается уже давно, а к единому мнению исследователи так и не пришли. Предлагаются различные функции. Все они имеют только эмпирическое обоснование. Теоретических выводов, подобных изложенным в разделе 3.1.3.1, здесь нет. Поэтому не удивительно, что модели распределения месторождений в большинстве представляют собой заимствование известных аналитических функций распределения вероятностей. К числу таких заимствованных распределений относятся, к примеру, логарифмически нормальное, Парето, гамма-распределение. Ими довольно часто описывают распределение месторождений, особенно пропагандируется распределение Парето [45, 55].

В математической статистике существует понятие выборки. Оно связано с тем, что выбранный материал рассматривается не ради него самого, а лишь как некоторая пробная выборка, представляющая только один из возможных результатов, которые мы могли бы встретить при продолжении наблюдений массового процесса в данной обстановке. Чтобы выборка обладала представительностью, или репрезентативностью, т. е. правильно отражала массовый процесс, используется специальная процедура случайного выбора из «хорошо перемешанных» наблюдений, называемая рандомизацией. Только в этом случае выводы, полученные по выборочным наблюдениям, можно отнести ко всему явлению. При изучении распределения месторождений наблюдения, которыми мы располагаем, — это открытые месторождения. Но они не являются репрезентативной выборкой. Это не случайно отобранные наблюдения и уж тем более не один из возможных результатов наблюдений, так как способа получения других наблюдений не существует.

В этих условиях проверить справедливость той или иной гипотезы о виде функции распределения месторождений по величине их запасов можно, если быть строгим, только после открытия всех месторождений региона. Таких полностью освоенных регионов на сегодняшний день в мире не существует. Все это и служит причиной того, что вопрос о виде функции распределения месторождений нефти и газа по их размерам остается открытым с точки зрения выбора даже аппроксимирующей, не говоря уже о теоретически обоснованной, функции.

Несколько слов следует сказать о работе [40]. В ней предложен иной подход к распределению месторождений по запасам. Авторы отмечают, что распределение нефтяных и газовых месторождений по их размерам в пределах областей нефтегазоносности, как и распределения по размерам обломков, получаемых при взрыве, фрагментов блоков земной коры, фракционного состава пород, не является непрерывным. Наблюдается увеличение числа месторождений некоторых размеров, и наоборот, полное отсутствие месторождений других размеров. Вследствие этого в ряду распределения месторождений в порядке убывания выделяются естествен-

ные рубежи. Эти рубежи авторы объясняют тем, что совокупность месторождений не однородна. Границы однородных совокупностей, по их мнению, связаны с разграничением областей действительных и комплексных значений параметров распределения. При переходе из области действительных значений параметров в область комплексных значений распределение становится неустойчивым и характеризуется большими разбросами.

В качестве модели распределения ими было выбрано гамма-распределение. Отмечается, что расстояние между наиболее часто встречающимися рубежами увеличивается от мелких месторождений к крупным в геометрической прогрессии. Каждый последующий рубеж примерно в $e = 2,718\dots$ раз (по запасам) больше предыдущего. Авторы [40] указывают на связь этого результата с выводом в предыдущей работе [37], где ими (правда, в несколько ином составе авторского коллектива) изучались рубежи в истории развития Земли (эта работа уже рассматривалась нами при обсуждении структурных моделей в разделе 3.1.2) и было дано аналитическое обоснование связи числа e с рубежами развития. Авторы [40] не объясняют, почему ими было выбрано гамма-распределение в качестве модели распределения. Скорее всего, здесь, как и в упомянутой предыдущей работе [37], это связано с удобствами математического характера: при различных значениях параметров плотности гамма-распределения соответствуют кривые разного вида.

Заканчивая данный раздел, следует подчеркнуть, что здесь модели не строят путем дедуктивно-логических выводов из системы исходных посылок, их задают как постулаты, аксиомы. В лучшем случае обоснованием модели служит возможность более или менее приемлемого формализованного описания с ее помощью материалов наблюдения. Такой подход к моделированию характерен для всех ситуаций, рассматриваемых в этой главе. Поэтому глава и названа нами «Модели объектов». Этим мы хотим подчеркнуть отмеченную специфику моделирования, когда какие-либо семантические соображения не могут быть положены в основу построения модели, и, следовательно, она не имеет какой-либо физической интерпретации.

Это обстоятельство, естественно, не означает, что полученные таким образом модели не могут быть использованы для практических целей. Но, применяя такие модели на практике, надо иметь в виду, что простая проверка гипотезы адекватности не решает задачи выбора модели. Тем более, что сколь угодно сильное экспериментальное подтверждение гипотезы никогда не бывает достаточным — гипотеза всегда остается открытой для дальнейшей проверки. Ведь все статистические методы проверки гипотез позволяют только заключить, что модель не опровергается имеющимся материалом. Но даже одного отрицательного результата бывает достаточно, чтобы отбросить гипотезу.

5.2. МОДЕЛИ ВЗАИМОСВЯЗИ СВОЙСТВ ОБЪЕКТА

В этом разделе рассматриваются модели, связанные с анализом изменения одних геологических показателей под влиянием изменения других. Причем влияющие факторы действуют одновременно, что затруд-

няет определение роли каждого из них. Обычно решаемая здесь задача — это задача выбора наиболее важных факторов и оценка их влияния. Решается она не на основе физических соображений (они не позволяют аналитически вывести интересующие нас связи), а иным путем. Именно поэтому соответствующие модели занимают свое место в этой главе. В данном случае рассматривается взаимосвязь геологических признаков, показателей, испытывающих случайное рассеивание. Соответственно методы решения указанной задачи являются статистическими. Эти методы нашли широкое применение в самых разнообразных областях геологии. Они хорошо отвечают потребностям исследователей, имеющих в своем распоряжении большой статистический материал и желающих его грамотно обработать, чтобы их выводы о наличии изучаемых связей и форме этих связей были бы статистически обоснованными. Эти методы пользуются у геологов широкой популярностью, некоторые из них к тому же не требуют сложных вычислительных средств.

Влияние действующих факторов может быть выявлено и учтено различными путями. Здесь целесообразно различать три основных аспекта рассматриваемой задачи: первый — установить факт изменения средних значений данного показателя (или группы показателей) с изменением значений действующих на него (на них) факторов; второй — найти уравнение, статистически связывающее значения данного показателя (показателей) со значениями влияющих на него (на них) факторов; третий — решить вопрос о сохранении или изменении вида полученного уравнения в различных условиях.

Трем указанным аспектам задачи отвечают соответственно дисперсионный, регрессионный и ковариационный анализы. В дисперсионном анализе все факторы исследуются качественно, в регрессионном — количественно, в ковариационном — одни факторы исследуются качественно (это те факторы, которые мы отнесли к различным условиям), а другие — количественно.

В основе всех трех видов анализа лежит одна и та же математическая модель, отражающая ту исходную посылку, что одновременно действуют различные факторы, и их влияние, как и сами они, осложнено вариациями случайного характера:

$$y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_m x_m + \xi, \quad (5.1)$$

где y — показатель, изменяющийся под влиянием действующих на него факторов; $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ — неизвестные постоянные; x_1, x_2, \dots, x_m — в зависимости от модификации анализа либо известные постоянные коэффициенты, либо известные переменные или функции от них.

В дисперсионном анализе величины $\{x_i\}$ (фигурными скобками обозначается множество величин, указанных в скобках, т. е. в данном случае множество, состоящее из x_1, x_2, \dots, x_m) являются целыми числами, равными 0 или 1, которые указывают на присутствие или отсутствие влияния различных факторов β_i в условиях, при которых получены наблюдения. В регрессионном анализе $\{x_i\}$ пробегает непрерывное множество значений, причем эти значения могут быть и сконструированы определенным образом, например $x^2, \ln x, e^x$ и т. д. В ковариационном анализе среди

$\{x_i\}$ есть переменные обоих видов. В уравнении (5.1) ξ — это случайные величины, наименьшие предположения о которых состоят в том, что эти величины некоррелированные, их математическое ожидание равно нулю и они имеют одинаковые дисперсии.

5.2.1. ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

Дисперсионный анализ — это группа статистических методов, целью которых является оценка изменчивости, связанной с различными причинами, или же изучение различий между средними в выборочных совокупностях. В зависимости от числа изучаемых факторов различают однофакторный, двухфакторный и т. д. дисперсионный анализ. Так, к двухфакторному анализу приводит схема, в которой сравниваемые совокупности наблюдений расклассифицированы по двум признакам, анализируется же поведение третьего признака. Например, исследуется влияние на пористость осадочных пород их литологического (первый фактор) и гранулометрического (второй фактор) состава. В этих условиях каждое измерение пористости y_{ij} относят к одному из классов i литологического состава пород и к одному из классов j их фракционного состава. Числа y_{ij} рассматриваются как значения случайных величин, математическое ожидание которых зависит от их положения в принятой системе классификации. В результате модель имеет вид

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \xi_{ij},$$

где μ — математическое ожидание всей совокупности наблюдений (значений пористости); α_i — эффект воздействия на пористость гранулометрического состава; β_j — результат воздействия на пористость литологического состава.

Таким образом, α_i и β_j рассматриваются как случайные величины, причем α_i представляет собой отклонение выборочного среднего значения пористости при i -м литологическом составе пород от генерального среднего μ . Величина β_j есть отклонение оценки средней пористости при j -м гранулометрическом составе пород от генерального среднего μ . Математическое ожидание наблюдений, соответствующих i -му классу литологического состава и j -му классу гранулометрического состава, равно $\mu + \alpha_i + \beta_j$. Таким образом, эмпирические значения y_{ij} рассматриваются как суммарный результат действия на генеральное среднее μ двух факторов — литологического и гранулометрического состава пород. Кроме того, учитывается и влияние случайного фактора, что выражается в добавлении к сумме значений ξ_{ij} .

В математической статистике разработана формализованная процедура дисперсионного анализа. Она сводится к проверке гипотез относительно влияния рассматриваемых факторов. Гипотеза выдвигается как предположение об отсутствии указанного влияния. Так, в двухфакторном дисперсионном анализе проверяемыми гипотезами являются $\alpha_i = 0$ и $\beta_j = 0$. Иначе говоря, гипотеза утверждает, что все средние $\{\mu + \alpha_i\}$ различных классов (уровней) гранулометрического состава равны, т. е. что все классы дают один и тот же эффект. Аналогично для литологиче-

ского состава все средние $\{\mu + \beta_j\}$ равны, т. е. все классы тоже дают один и тот же эффект.

Если гипотеза отвергнута, то математическая статистика предлагает методы дальнейшего исследования, позволяющие определить те эффекты α_i или β_j , которые ответственные за отбрасывание гипотезы, а следовательно, и оценить влияющие факторы или причины (источники) изменчивости анализируемой переменной y_{ij} . Таким образом, дисперсионный анализ можно рассматривать как метод предварительного исследования, позволяющий в принципе ответить на вопрос, сказывается ли влияние на изучаемую переменную рассматриваемых факторов или это влияние на имеющемся материале уловить не удастся.

С процедурной точки зрения (процедура проверки гипотез) дисперсионный анализ основан на разложении общей дисперсии изучаемой совокупности эмпирических наблюдений, обусловленной совместным действием факторов, на составные части, соответствующие каждому из факторов. Применяемые критерии позволяют одновременно изучать различия как в средних значениях, так и в дисперсиях. Проверка гипотез осуществляется в предположениях, что случайные величины ξ_{ij} распределены нормально, независимы между собой и имеют равные дисперсии.

В реальных задачах эти предположения, которые введены только для облегчения математических выводов, как правило, нарушаются. Мы чаще всего имеем дело с выборками «загрязненного» характера, когда к наблюдениям из одной генеральной совокупности примешано некоторое количество наблюдений, взятых из генеральной совокупности с иными параметрами. Оценки, вполне пригодные по отношению к чистым выборкам, могут оказаться совсем плохими по отношению к «загрязненным». В связи с этим в реальных задачах стали учитывать такое свойство оценок, как робастность (от английского слова *robust* — устойчивый, крепкий) — нечувствительность к нарушению исходных предпосылок. Методы дисперсионного анализа (по крайней мере некоторые из них) являются корректными в том смысле, что статистические выводы, сделанные по ним, не очень сильно изменяются при нарушении указанных предположений, справедливость этих выводов практически остается в силе.

В случае сильного отклонения реальных эмпирических наблюдений от теоретических предположений в геологии получили широкое развитие разного рода преобразования переменных для приведения эмпирического распределения к нормальному или хотя бы к симметричному виду и для стабилизации дисперсии. Нередко, в силу определенных геологических законов, неоднородность дисперсий обусловлена наличием связи между средними и дисперсиями. В этих случаях находят преобразование, которое делает эти величины независимыми.

Дисперсионный анализ широко применяется в геологии. Объясняется это тем, что здесь этот вид исследований предопределен уже самой моделью. Исследователь заранее знает, какие источники изменчивости он будет оценивать или какие интересующие его показатели будут участвовать в сравнении. Выбор модели определяет также структуру наблюдений. В геологических исследованиях применяются всевозможные модели

дисперсионного анализа: однофакторные, многофакторные, с многими уровнями изменчивости, гнездовые, латинские квадраты и др. Соответствующие примеры можно найти во многих монографиях, посвященных статистическому анализу геологических данных.

5.2.2. РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

Регрессионный анализ — это метод изучения стохастической связи между переменными. Мы уже говорили ранее, что стохастическая связь тем отличается от функциональной, что одна из изменяемых случайных величин реагирует на изменение другой (или других) изменением своего закона распределения. Наиболее важная особенность стохастической связи, в частности, находит выражение в тех изменениях, какие испытывает центр условного распределения одной величины при изменении другой (или других).

Если дано совместное распределение $m + 1$ случайных величин y, x_1, x_2, \dots, x_m , то регрессией одной из них, например y , на остальные m величин x_1, x_2, \dots, x_m называется функция $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$, представляющая статистическую зависимость, т. е. зависимость математического ожидания y от x_1, x_2, \dots, x_m :

$$M(y|x_1, x_2, \dots, x_m) \equiv f(x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Аргументы x_1, x_2, \dots, x_m , вообще говоря, могут рассматриваться и как не случайные величины, принимающие в каждом наблюдении вполне определенные значения. Величина же y всегда предполагается случайной, т. е. имеет смысл говорить о законе ее распределения, о вероятности, с которой встречаются те или иные ее значения при фиксированных значениях аргументов в той или иной их комбинации. Таким образом, допускается, что величина y испытывает не только функционально обусловленные, но и случайные воздействия. Переменные x_1, x_2, \dots, x_m называют независимыми переменными — либо предсказателями, либо регрессорами, а переменную y — зависимой переменной — либо предсказуемой, либо регрессируемой.

Модель регрессионного анализа имеет вид

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_m x_m + \xi. \quad (5.2)$$

Роль аргументов x_1, x_2, \dots, x_m могут играть различные простые функции от некоторых из них, например $x^2, e^{kx}, \cos(\omega x)$ и т. д. Их видом и определяется функция $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$. При этом случайная компонента ξ предполагается нормально распределенной переменной с центром равным нулю и с постоянной дисперсией σ^2 , причем для любых наблюдений y, y^2, \dots величины $\{\xi_i\}$ предполагаются независимыми.

В случае линейной регрессии, т. е. когда регрессия величины y на остальные m величин x_1, x_2, \dots, x_m аппроксимируется линейной функцией и тем самым в модели регрессионного анализа (5.2) аргументы представлены только своими значениями, а не простыми функциями от них, мерой стохастической связи между y и x_1, x_2, \dots, x_m является коэффициент

корреляции. Эта мера характеризует пригодность величин x_1, x_2, \dots, x_m для предсказания значений y . В случае простой линейной модели, т. е. когда функция y определяется всего одним аргументом x , мы имеем дело с обычным коэффициентом корреляции.

В условиях общей линейной модели используется с указанной целью так называемый множественный, или сводный, коэффициент корреляции. Это обычный коэффициент корреляции между величиной y и линейной функцией $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$, где $f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_m x_m$. Если случайные величины y и $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$ совместно распределены нормально, то регрессия y на x_1, x_2, \dots, x_m прямолинейна, т. е. нормальная регрессия прямолинейна.

Существует еще один тип коэффициента корреляции, который также используется в различных практических приложениях. Это так называемый частный, или очищенный, коэффициент корреляции. Этот коэффициент измеряет корреляцию между двумя случайными величинами y и x_1 , к примеру, x_1 после устранения линейных изменений, вызванных влиянием величин x_2, x_3, \dots, x_m . Необходимость в этом возникает в тех случаях, когда переменные x_2, x_3, \dots, x_m действуют на y и x_1 так, что затушевывают возможности x_1 для предсказания значений y .

Собственно регрессионный анализ начинается с того момента, когда выбрана форма зависимости между изучаемыми величинами, т. е. определен вид функции $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$. Между тем выбор типа регрессии является центральным вопросом всего анализа. Решается он на рациональном уровне. Решение о выборе функции, аппроксимирующей регрессию, приходится принимать, учитывая все соображения, не формулируемые на языке математики. При этом принимают во внимание цель исследования (нельзя забывать об этом), существующие разумные традиции в данной области знания и т. д.

Самые грубые решения возникают при подборе эмпирических зависимостей (а только с такими зависимостями мы имеем дело в данном разделе) и в других сходных ситуациях, когда предполагается наличие причинной связи между переменными, но форма ее остается неизвестной. В этих случаях часто прибегают к графическому изображению исходных данных, надеясь проникнуть в их структуру и подобрать аппроксимирующее уравнение к ним. При этом рассчитывают, что подобранное таким образом уравнение поможет прояснить существующие соотношения или же точно описать форму зависимости переменных. При этом чаще всего пользуются формулами простой структуры; скажем при одномерной регрессии полагают

$$f = \beta_0 + \beta_1 x; \quad f = \beta_1 x + \beta_2 x^2;$$

$$f = \beta x^b; \quad f = \beta e^{\beta x}; \quad f = \beta_1 + \beta_2(1/x).$$

При выборе определенной структуры из числа указанных иногда привлекают соображения, которые с известной оговоркой можно назвать теоретическими. Они связаны с анализом поведения функции f при $x \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$ и т. п.

Во всех случаях надо иметь чувство меры. Аппроксимирующие формулы нельзя строить, ориентируясь только на взаимное расположение

экспериментально наблюдаемых точек. Всегда надо учитывать содержание, стоящее за наблюдениями, хотя оно очень часто не может быть ясно сформулировано. И уж конечно нет смысла аппроксимировать наблюдения нарочито сложно. Подбирая очень сложным образом регрессию, можно в конце концов добиться того, что аппроксимирующая функция будет все точнее и точнее удовлетворять значениям y при заданных x_1, x_2, \dots, x_m . Однако отсюда совершенно не следует, что при этом будет повышаться «качество» выбираемой функции как регрессии. Дело в том, что при излишне точной аппроксимации полученная функция будет слишком жестко определяться исходными данными и потому будет следовать за всеми случайными невоспроизводимыми отклонениями. Применение таких функций становится нецелесообразным.

Особенно это относится к решению задач прогноза по данным регрессионного анализа. Прогнозирование — это экстраполяция за область тех значений x_1, x_2, \dots, x_m , при которых была найдена форма связи с ними значений y . При удалении от этой области могут быть получены принципиально другие результаты. Необоснованное распространение формул с исходного интервала на существенно более широкие интервалы может приводить к вопиющим ошибкам. К сожалению, имеется много примеров того, как формальная экстраполяция с помощью линейной функции, экспоненты и других простейших функций, в основе которой лежит предположение (не всегда явно высказываемое) о постоянстве тех или иных решающих факторов, приводила к безответственным выводам или прогнозам.

Функция, аппроксимирующая регрессию, дает лишь некоторое рациональное описание истинной зависимости. И это описание может иметь различную степень достоверности: от высокой до очень низкой. В частности, при подборе аппроксимирующей функции «вслепую», когда глубокий анализ реального смысла зависимости подменяется анализом взаимного расположения точек, всегда есть опасность, что выбранное уравнение регрессии представляет реальные результаты в сильно искаженном виде.

В практических исследованиях используются различные виды функций, аппроксимирующих регрессию. Чаще всего (в том числе и в геологических задачах) применяется полиномиальная аппроксимация. В случае одной независимой переменной она заключается в том, что в качестве приближающей функции используется сумма целых степеней этой переменной:

$$f(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 \dots \quad (5.3)$$

Максимальная степень m , использованная в полиномиальном уравнении (5.3), называется степенью полинома. При $m = 1$ имеем уравнение прямой линии. Оправданием столь широкого применения полиномиальной регрессии могут служить следующие соображения. Как известно, всякую достаточно гладкую функцию, имеющую производные до высокого порядка включительно, можно разложить в ряд Тейлора. Этот ряд представляет собой полином высокой степени с коэффициентами, зависящими от производной соответствующего порядка. Нам же аналитический вид функции неизвестен. Поэтому уравнение полиномиальной регрессии мож-

но интерпретировать как отрезок ряда Тейлора для функции неизвестного аналитического вида. Коэффициенты же полинома, которые находят из наблюдений, можно интерпретировать как производные от неизвестной функции $f(x)$.

То же самое можно сказать о регрессии тригонометрического полинома, имеющего вид

$$f(x) = \alpha_0/2 + \alpha_1 \cos x + \beta_1 \sin x + \alpha_2 \cos 2x + \beta_2 \sin 2x + \dots \quad (5.4)$$

В разделе 4.3 мы уже обсуждали вопрос о разложении функции в ряд Фурье. Тригонометрический полином (5.4) является отрезком этого ряда для функции неизвестного аналитического вида. Соответственно коэффициенты тригонометрического полинома, найденные по наблюдениям, можно рассматривать как значения коэффициентов Фурье. Тригонометрические полиномы в задачах регрессии применяются значительно реже.

В случае двух независимых переменных функция $f(x_1, x_2)$ задает некоторую поверхность. В геологии такие поверхности, как известно, обычно изображают в изолиниях. Здесь же они описываются некоторым уравнением $f(x_1, x_2)$. Для описания поверхностей двумерной регрессии также очень часто используют полиномы, но уже от двух переменных. Причина их широкого распространения та же, что и в одномерном случае, — истинный вид функции $f(x_1, x_2)$ неизвестен и ее пытаются приблизить с помощью полинома. В геологических исследованиях нашла применение особая модификация полиномиального уравнения — полином стоит под знаком экспоненты:

$$f(x_1, x_2) = \exp [P(x_1, x_2)], \quad (5.5)$$

где $P(x_1, x_2)$ — полином соответствующей степени от x_1, x_2 .

В этом случае функция $f(x_1, x_2)$ описывает поверхность, которая асимптотически приближается к плоскости x_1, x_2 , но не пересекает ее. Это условие в некоторых случаях оказывается существенным. Однако чаще всего в качестве модели двумерной, а тем более многомерной регрессии исследователи предпочитают линейную модель.

В качестве примера использования указанной выше более сложной модели (5.5) можно сослаться на работу [25]. В ней изучалась зависимость пористости от гранулометрического состава песчано-алевритовых пород. В качестве характеристик состава были выбраны медианный размер зерен (медиана) Me и информационный коэффициент (избыточность Шеннона) I , являющийся мерой отличия распределения от равномерного. В данном случае коэффициент I применялся для измерения степени сортированности осадка. В случае равномерного распределения зерен по всем фракциям информационный коэффициент равен нулю, а в тех случаях, когда осадок представлен всего одной фракцией, этот коэффициент равен единице.

Введение информационного коэффициента в качестве меры сортированности удобно в том отношении, что, отражая пропорцию между всеми фракциями, он не зависит от того, на долю какой именно фракции (или фракций) приходится преобладающее количество зерен и как велико расстояние между преобладающими фракциями. Фракции могут быть соседними или, наоборот, могут находиться на противоположных концах

распределения. (В качестве примечания надо отметить, что различного рода информационные меры, используемые в геологических исследованиях, оказываются полезными.)

Очевидно, что для исследования связи пористости с гранулометрическим составом можно было бы поступить следующим образом. В системе координат (I, Me) фиксировать положение каждого образца, в котором проведены соответствующие наблюдения. У каждой точки указать значение пористости, определенное в данном образце. Затем через определенный интервал провести изолинии пористости. Но поверхность, сечения которой представлены полученными таким образом изолиниями, содержит локальные изменения, связанные с различными случайными воздействиями на пористость. Они затемняют картину и мешают выявлению ее диагностической части, характеризующей основные закономерности в распределении значений изучаемого параметра как функции указанных переменных.

Для объективного построения поверхности и устранения эффекта чисто местных иррегулярных явлений наблюдаемые значения пористости аппроксимировались экспоненциальной поверхностью, выражаемой следующим соотношением:

$$y(I, Me) = \exp [P(I, Me)] + \xi,$$

где $y(I, Me)$ — наблюдаемые значения пористости; $P(I, Me)$ — полином соответствующей степени; так как локальная неоднородность была проявлена очень сильно, то в качестве $P(I, Me)$ был выбран полином четвертой степени.

После выбора модели регрессии, которая, напомним, не редко постулируется, а иногда и подкрепляется теми или иными соображениями общего характера, решается задача собственно регрессионного анализа. Она заключается в получении оценок неизвестных параметров или в проверке тех или иных гипотез относительно этих параметров по результатам наблюдений.

В основе процедуры оценки коэффициентов регрессии $\{\beta_i\}$ лежат следующие предположения. Модель (5.2) действительно описывает зависимость математического ожидания величины y от значений x_1, x_2, \dots, x_m . Если при каждом фиксированном значении (x_1, x_2, \dots, x_m) проведено n_i измерений y_i зависимой (предсказуемой) переменной y при выборочном среднем такой серии \bar{y}_i , то дисперсия $\sigma_{\xi_i}^2$ величины ξ_i в такой серии из n_i измерений равна дисперсии $\sigma_{y_i}^2$ величины y_i и может быть постоянной или зависимой от набора значений (x_1, x_2, \dots, x_m) . (Отметим, что дисперсия выборочного среднего $\sigma_{\bar{y}_i}^2$ связана с дисперсией единичного наблюдения $\sigma_{y_i}^2$ соотношением $\sigma_{\bar{y}_i}^2 = \sigma_{y_i}^2/n_i$.) Предполагается также, что различные значения величины y_i в серии измерений при фиксированном наборе (x_1, x_2, \dots, x_m) взаимно независимы или, что то же самое, статистически независимы флуктуации ξ_i . Кроме того, условное распределение вероятности y_i при заданном наборе (x_1, x_2, \dots, x_m) нормальное.

При этих предположениях можно получить оценки параметров $\{\beta_i\}$, удовлетворяющие всем необходимым требованиям. Следует особо подчеркнуть, что предъявляемые к оценкам требования будут удовлетво-

рены, вообще говоря, только в том случае, если в модель включены и в правильной форме записаны все независимые переменные (результаты непосредственных наблюдений x_1, x_2, \dots, x_m или какие-либо функции от них: логарифмы, обратные величины и т. д.), от которых зависит величина y . В практических задачах, как правило, далеко не все возможные и реально существующие независимые переменные включаются в математическую модель. Многие из них оказываются невключенными, уже хотя бы потому, что априорная информация о влияющих факторах отсутствует. В этом случае оценки коэффициентов регрессии могут не соответствовать действительности. Отклонения могут быть столь сильными, что результаты регрессионного анализа теряют всякий смысл.

Оценка коэффициентов регрессии $\{\beta_i\}$ является не единственной целью регрессионного анализа. В его задачу, как уже указывалось, входит и проверка гипотез. Одной из наиболее важных из числа проверяемых является гипотеза об адекватности модели, о ее соответствии наблюдениям или об удовлетворительном описании моделью экспериментальных (наблюденных) данных. Эта гипотеза может быть проверена только при такой системе проведения наблюдений, когда для каждого фиксированного набора (x_1, x_2, \dots, x_m) возможно получить несколько значений y_i , т. е. при наличии повторных данных. При этом, кроме того, предполагается, что дисперсия σ_{ξ}^2 величины ξ (или y_i) постоянна и не зависит от набора (x_1, x_2, \dots, x_m) . Все остальные ранее высказанные предположения сохраняют свою силу.

Для проверки этой гипотезы используется одна из модификаций дисперсионного анализа. С этой целью общая дисперсия разлагается на составляющие. Среди них выделяются две составляющие, которые могут служить каждая в отдельности оценками дисперсии $\sigma_{y_i}^2$. Одна из них служит мерой рассеивания наблюдений при фиксированном наборе (x_1, x_2, \dots, x_m) , т. е. мерой отклонений внутри серий, а другая связана с отклонением среднего \bar{y}_i от эмпирической линии регрессии и характеризует меру эффективности модели или неточность подгонки модели — ее неадекватность наблюдениям. Отношение этих дисперсий распределено определенным образом, что и позволяет построить критерий для проверки гипотезы адекватности модели наблюдениям. Надо отметить, что при практических исследованиях мы редко располагаем повторными наблюдениями, и причина этого лежит главным образом не в организации сбора наблюдений, а в том, что природа не всегда повторяет свои эксперименты. Поэтому проверку гипотезы адекватности в такой постановке не всегда удается осуществить.

В качестве примера проверки рассматриваемой гипотезы сошлемся на работу [24]. В ней ставилась задача определения возможной формы связи густоты трещин и мощности слоя. Было выдвинуто предположение, что если связь между густотой трещин и мощностью слоя существует, то она, скорее всего, близка к линейной между логарифмами указанных переменных. Выяснение рассматриваемой зависимости проводилось для трещин каждой системы отдельно, в слоях одного литологического состава, в пределах однородных участков структуры.

С целью проверки гипотезы линейности наблюдения были организо-

ваны таким образом, что в указанных однородных условиях каждому значению мощности слоя (или небольшого интервала ее изменения) отвечала целая серия измерений густоты трещин. Всего было осуществлено 23 таких проверки (для разных условий). Число серий колебалось от 4 до 17, а общее число наблюдений изменялось от 12 до 82. В 21 случае из 23 гипотеза линейности связи логарифма густоты трещин и логарифма мощности слоя не была опровергнута наблюдениями.

Другая проверяемая в регрессионном анализе гипотеза касается оценки значимости некоторых из коэффициентов $\{\beta_i\}$. Она имеет непосредственное отношение к проблеме отсеивания, исключения тех или иных регрессоров из модели или, наоборот, включения, добавления новых регрессоров в модель, т. е. к проблеме видоизменения, а следовательно, и построения модели. Гипотеза сводится к тому, что некоторые коэффициенты β_i равны нулю. В частности, можно проверить наличие регрессии, т. е. все $\beta_i=0$, кроме β_0 .

Для отсеивания тех или иных регрессоров из полной (первоначальной) модели используется одна из форм дисперсионного анализа. Она основана на определении эффекта, получаемого при последовательном исключении из модели тех или иных регрессоров либо их группы. Если анализируемые переменные извлекают небольшую часть дисперсии регрессируемой переменной y , то гипотеза равенства нулю соответствующих этим переменным коэффициентов β_i не опровергается и их можно безболезненно удалить из модели. Гипотеза проверяется в тех же предположениях, что и предыдущая, но каждому набору (x_1, x_2, \dots, x_m) может соответствовать всего одно наблюдение y .

При проверке гипотезы значимости одного или нескольких регрессоров надо быть в какой-то мере осторожными. Вклад, вносимый в модель регрессором x_k , в действительности может зависеть от некоторого регрессора x_l , который даже не включен в модель, но сильно коррелирован с x_k . Поэтому здесь имеет значение порядок исключения регрессоров, в зависимости от чего вообще могут получаться разные результаты.

Пример формирования модели в ходе отсеивания незначимых регрессоров можно найти в работе [18]. Там рассматривается оценка пористости по данным различных геофизических методов исследования скважин (методов каротажа): потенциалов собственной поляризации (естественного электрического поля) ПС, нейтронного гамма-каротажа НГМ, гамма-каротажа ГМ, потенциал-зонда ПЗ, градиент-зонда ГЗ. Поскольку данные НГМ и метода ПС контролируют изменение пористости и глинистости, а данные ГМ — в основном изменение глинистости, и поскольку пористость очень часто зависит от мощности пласта h_n , была принята линейная модель:

$$K_n = \beta_1 \Delta U_{\text{ПС}} + \beta_2 J_{\text{НГМ}} + \beta_3 J_{\text{ГМ}} + \beta_4 \Phi_{\text{ПЗ}} + \beta_5 \Phi_{\text{ГЗ}} + \beta_6 h_n.$$

Член β_0 здесь отсутствует по той причине, что авторы оперировали нормированными значениями регрессируемой переменной (пористость) и регрессоров (данные геофизических методов). Оставляя в модели все 6 членов, затем 5, 4 и т. д., последовательно проверяли гипотезу о равенстве соответствующих $\{\beta_i\}$ нулю: сначала β_6 , затем β_5 и β_6 и т. д. В ре-

зультате было выяснено, что значимый вклад в модель вносят только первые три члена, ибо исключение трех последних членов к изменению дисперсии регрессируемой переменной (в статистическом смысле) не приводит. Таким образом, первоначальная модель

$$K_n = 0,682\Delta U_{\text{ПС}} - 0,628J_{\text{НГМ}} - 0,207J_{\text{ГМ}} - 0,006q_{\text{ПЗ}} + 0,227q_{\text{ГЗ}} + 0,071h_n$$

без ущерба могла быть заменена моделью

$$K_n = 0,529\Delta U_{\text{ПС}} - 0,547J_{\text{НГМ}} - 0,375J_{\text{ГМ}}$$

Расчеты показали, что первые три члена модели исчерпывают 84,4% дисперсии пористости K_n , первые два — 80,8, а один первый — 62,4, в то время как все шесть — 86,4. Соответственно, если один первый член исчерпывает 62,4% дисперсии K_n , то второй — 18,4, а третий — 3,6.

Отсюда можно проверить значимость уже не всех трех оставшихся в уравнении членов модели, а каждого в отдельности. Подтвердилось при этом, что каждый из этих членов приводит к значимому уменьшению дисперсии K_n , и, следовательно, должен быть включен как регрессор в модель. Таким образом, в данном случае практически только результаты ГМ, НГМ и ПС несут информацию о пористости.

Вопрос о построении модели, ее видоизменении можно поставить и иначе. Его можно свести к принятию решения о том, какой из списка заранее определенных регрессоров (или простых функций от них) целесообразно ввести в модель. Очевидно, что тот или те, в которых лучше всего отражаются значения предсказуемой переменной. На первый взгляд, кажется, что достаточно было бы вычислить парные коэффициенты корреляции между y и теми величинами, которые предполагается включить в уравнение регрессии. Затем те переменные, которые с регрессируемой (y) образуют нулевые или малые коэффициенты корреляции, отбросить, и тем самым вопрос об информативности регрессоров будет решен. Подобным образом рассматриваемая задача решается многими исследователями.

Однако подобная процедура может привести к серьезным ошибкам. Мы уже говорили о том, что корреляция двух величин может быть следствием того, что обе они коррелированы с третьей. Поэтому, принимая решение, какой из регрессоров следует ввести в модель, целесообразно опираться на частный коэффициент корреляции, отражающий корреляцию между y и x_i , очищенную от влияния других $\{x_k\}$. Заметим, что по величине частный коэффициент корреляции может существенно отличаться от обычного.

В работе [18] указывается, что коэффициент корреляции между пористостью и данными НГМ равен $-0,43$, а частный коэффициент корреляции между этими же величинами при фиксированной глинистости равен уже $-0,78$. Коэффициент корреляции между пористостью и данными метода ПС и частный коэффициент корреляции между ними при фиксированной глинистости (при фиксированных данных ГМ) равны соответственно $0,79$ и $0,70$. Как видим, в первом случае частный коэффициент

корреляции резко возрос по сравнению с обычным, в то время как во втором случае практически остался без изменения.

На последовательном отборе информативных регрессоров основан так называемый шаговый регрессионный метод. Он состоит в последовательном включении каждого из регрессоров в модель и проведении на каждом этапе проверки, является ли добавляемая переменная значимой. Сначала в модель включается регрессор с наибольшим частным коэффициентом корреляции. Затем в модель добавляется второй регрессор, который имеет наибольший частный коэффициент корреляции среди оставшихся, и т. д. Каждый раз перед включением в модель очередного регрессора проверяется значимость соответствующего ему частного коэффициента корреляции и значимость изменения дисперсии зависимой переменной y при добавлении очередного регрессора.

Надо отметить, что шагвая регрессия эффективна в том случае, когда переменные — регрессоры независимы. Тогда порядок включения или отсеивания регрессоров не играет роли. При использовании зависимых переменных различные исходные модели могут привести к различным окончательным уравнениям. Может оказаться при этом, что со статистической точки зрения некоторые модели получатся адекватными друг другу и каждая из них будет иметь право на существование.

Процедуру проверки гипотезы о значимости добавляемых членов можно распространить на члены более высоких степеней в уравнении полиномиальной регрессии. С ее помощью можно выяснить, приводит ли повышение степени полинома к значительному улучшению качества аппроксимации. Значимость добавляемого члена проверяется точно таким же образом, как и для регрессоров. Мы уже говорили о том, что при повышении степени полинома можно добиться того, что кривая, соответствующая полиному, пройдет сколь угодно близко от наблюдаемых точек, вплоть до того, что она пройдет через все точки, если степень полинома увеличить до числа, равного числу точек за минусом единица. При этом мы отмечали, какими отрицательными последствиями оборачивается столь жесткая аппроксимация. Регрессионный анализ позволяет увеличивать степень полинома только до тех пор, пока это увеличение имеет статистические основания.

Регрессионный анализ нашел широкое применение в геологических исследованиях. Его роль неуклонно растет, особенно в решении многомерных задач. Постепенно начинает выявляться и обратная сторона его популярности — это формальный выбор модели без углубленного анализа действующих связей и формальное же исследование моделей в ущерб содержательной предметной стороне.

5.2.3. КОВАРИАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ

Ковариационный анализ введен как метод совместного учета факторов, которые принимают различные значения в наблюдениях. Ведь различия в значениях регрессируемой переменной в тех или иных условиях могут быть вызваны различиями в значениях регрессоров, а не влиянием изменения качественных условий. В этом плане можно сказать, что ко-

вариационный анализ проводится с целью устранить различия между значениями y , которые возникают за счет регрессии, и учесть различия, связанные с качественным изменением условий. Тем самым ковариационный анализ является комбинацией дисперсионного и регрессионного анализов. Соответственно математическая модель ковариационного анализа представляет собой комбинацию моделей, связанных с двумя указанными типами исследования. Математическое ожидание переменной y , изменяющейся под действием анализируемых факторов, равно сумме двух выражений: первое рассматривается в дисперсионном анализе, второе — в регрессионном. Первое выражение представляет собой сумму

$$\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_k x_k,$$

где $\{\beta_i\}$ — эффекты, рассматриваемые в дисперсионном анализе; $\{x_i\}$ принимают значения 0 либо 1.

Второе выражение дается суммой вида

$$\gamma_1 z_1 + \gamma_2 z_2 + \dots + \gamma_m z_m,$$

где $\{z_i\}$ — значения регрессоров.

Конкретная структура модели зависит от характера задачи. Предположим, что необходимо выяснить, различается ли трещиноватость пород в зависимости от их литологического состава. Если бы густота трещин не зависела от мощности слоя, то этот вопрос можно было бы решить, проведя исследования по схеме однофакторного дисперсионного анализа (при прочих одинаковых качественных условиях). Но поскольку условие независимости не выполняется, необходимо учесть регрессию густоты трещин на мощность слоя. Сведя регрессию к линейной путем соответствующего преобразования, получим модель однофакторного ковариационного анализа с одним регрессором в виде

$$y_i = \beta_i + \gamma z + \xi, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где y_i — логарифм густоты трещин в слое i -го литологического состава; z — логарифм мощности слоя.

Случайные величины ξ независимы, нормально распределены с нулевым средним и с постоянной дисперсией σ^2 . Обращает на себя внимание независимость параметра регрессии γ от типа пород. Тем самым при ковариационном анализе полагают, что прямые регрессии, соответствующие различным литологическим типам пород, параллельны друг другу. Более трещиноваты те типы пород, для которых линия регрессии занимает более высокое положение (коэффициент β_i по величине больше, чем у других прямых).

Таким образом, в общем случае при ковариационном анализе проверяется гипотеза о том, совпадают ли (в статистическом смысле) кривые регрессии, соответствующие различным качественным условиям, или они параллельны. На языке математики эта гипотеза состоит в равенстве друг другу соответствующих $\{\beta_i\}$, т. е. $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k$. Проверяется гипотеза при указанных выше предположениях относительно распределе-

ния ξ и независимости $\{\gamma_i\}$ от изменения качественных условий. При проверке используется все та же идея, связанная с разложением общей дисперсии на составляющие, соответствующие различным причинам изменчивости. Если гипотеза равенства друг другу $\{\beta_i\}$ отвергнута, то можно выяснить, из-за каких $\{\beta_i\}$ это произошло. Для этого проводится сравнение кривых регрессии. В зависимости от имеющихся соображений сравнение можно выполнять попарно или группами.

Другой проверяемой гипотезой является гипотеза наличия регрессии, т. е. $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = 0$. С этой целью строят доверительные интервалы для $\{\gamma_i\}$.

Рассмотрим следующий пример. Изучалась возможность определения пористости песчано-алевритовых пород по данным акустического каротажа [18]. С этой целью строилась регрессия пористости на интервальное время продольной волны. Учитывая невысокие требования к точности предсказания, в первом приближении регрессия была принята прямолинейной. Изучаемые породы были разделены на три группы: глинистые, малоглинистые и карбонатные. Из общего числа 226 наблюдений первая группа была представлена 69 наблюдениями, вторая — 117 и третья — 40.

По наблюдениям были получены оценки коэффициентов $\{\beta_i\}$ в каждой группе: $\beta_1 = 211,2$; $\beta_2 = 181,5$ и $\beta_3 = 165,2$. Гипотеза $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3$ при проверке методами ковариационного анализа была отвергнута. Исходя из значений β_2 и β_3 , можно было предполагать, что их отличие друг от друга является случайным, статистически незначимым, и что не из-за них была отвергнута указанная гипотеза. С целью выяснения этого вопроса были вычислены критерии сравнения β_2 и β_3 . В итоге стало ясно, что $\beta_2 > \beta_3$, т. е. прямая регрессии для малоглинистых песчаников расположена выше, чем для карбонатных. Отсюда было сделано заключение, что интерпретацию данных акустического каротажа следует проводить на основе уравнений регрессии, построенных отдельно для каждой из трех указанных групп пород.

В заключение следует отметить, что примеров применения ковариационного анализа в геологических исследованиях насчитывается не так уж много.

5.3. МОДЕЛИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ИЗМЕНЧИВОСТИ СВОЙСТВ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Пространственная изменчивость означает, что результат наблюдения (значение соответствующего свойства) рассматривается как функция положения точки наблюдения в пространстве, т. е. имеется в виду изменчивость свойств по площади, профилю, разрезу и т. д. Система координат, в которой определяется положение точки наблюдения, может быть задана географическими координатами, глубиной или высотой и может быть произвольно ориентирована в пространстве.

В геологии сложились традиционные методы изучения пространственной изменчивости. Они основаны на построении различного рода кривых, отражающих изменение изучаемого свойства по профилю, разрезу, с глубиной и т. д. (в одномерном случае), и на построении карт (в двумерном случае). Такого рода графическим построениям уделяется большое внимание. Они являются компактным, эффективным и наглядным средством выражения пространственных зависимостей. Графические построения,

особенно создание карт, — своего рода искусство, в котором проявляется талант исследователя. Каждая карта несет в себе результат интерпретации исследователем первичных данных, индивидуальные его взгляды, т. е. на ней сказывается влияние персонального фактора.

Математические методы анализа пространственной изменчивости препятствуют действию персонального фактора. В этом их сила и слабость. Повышая объективность построений (хотя субъективные суждения и здесь оказываются необходимыми, в чем мы сможем убедиться ниже), они в то же время не всегда могут учесть те индивидуальные соображения, которыми пользуется опытный и знающий геолог. Тем не менее в большинстве случаев математические методы позволяют получить выводы, основанные на более объективном материале.

Современная математика дает в руки геологов арсенал методов (и их ассортимент все время возрастает), позволяющих решать широкий круг задач, связанных с анализом пространственной изменчивости свойств геологических объектов и с использованием результатов такого анализа в различных целях. Особенно значительно эти методы развивались в связи с построением и анализом карт. Картирование как отражение изменчивости по площади, т. е. в двумерном пространстве, представляет собой более общий случай по сравнению с изображением изменчивости в одномерном пространстве, поэтому на картировании и будет в основном сосредоточено наше внимание.

В методах математического анализа, привлекаемых при решении задач, связанных с геологическим картированием, с нашей точки зрения, целесообразно различать два направления, которые не исключают друг друга. Первое из них — это исследовательские задачи, второе — оценочные. Названия эти условны, как, впрочем, и само разделение на направления. Но вводя такое разделение направлений, мы хотим подчеркнуть принципиально важные их различия по отношению и к самому картированию, и к пониманию его задач.

5.3.1. МОДЕЛИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ИЗМЕНЧИВОСТИ ПРИ РЕШЕНИИ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ ЗАДАЧ

Здесь речь пойдет о моделях и математических методах, используемых не столько для построения карт (хотя такая задача тоже решается), сколько для их анализа и интерпретации. Зависимости, изучаемые по карте, почти всегда изображаются с помощью точек. Подавляющее большинство карт представляет собой оценки некоторых непрерывных функций (поверхностей) или функций, имеющих разрывы, по результатам наблюдений в дискретных точках. При решении многих геологических задач типичной является ситуация, когда наблюдаемый результат рассматривается как следствие двух геологических факторов или групп факторов, один (одна) из которых отражает региональную, или общую, геологическую обстановку, а второй (вторая) — мелкие локальные отклонения от региональных закономерностей. В таких случаях обычно говорят о систематической и случайной компонентах. В геофизике более привычны понятия региональный тренд и локальные аномалии.

Анализ и интерпретация карт как раз и основываются на разделении результатов наблюдений на указанные две (или более) части. Одни из этих частей отражают тенденции в поведении свойства или признака по всей закартированной территории, другие же характеризуют случайные флуктуации, несущественно влияющие на систематическую изменчивость. Региональные закономерности и локальные отклонения, характер их поведения порождают у геолога определенные представления, доставляя необходимую информацию о предмете исследования. Такой анализ облегчает поиск определенных зон, представляющих интерес в геологическом отношении. К ним, например, могут быть приурочены нефтяные месторождения, области повышенной концентрации тех или иных рудных полезных ископаемых, структуры определенного типа и т. д. Поэтому такой подход мы и назвали исследовательским.

Понятия «региональный» и «локальный» весьма субъективны и относительны. Они зависят от размеров изучаемой площади и от цели исследования. Так, закономерности, выявляемые на локальных структурах, следует рассматривать как локальные аномалии, если изучаются более крупные структуры данной области, и как региональный тренд, если интерес сосредоточен на данной структуре.

Математические методы разделения двух компонент: систематической и случайной — получили в геологии название тренд-анализ или анализ поверхностей тренда. Само слово «тренд» применяется в геологии в различном смысле. Вообще оно означает любые систематические изменения, которые замечены на карте изучаемого признака. Карту, отображающую поведение систематической (региональной, закономерной) составляющей, называют картой тренда; поведение же локальной (нерегулярной, остаточной) составляющей отображается картами локальных (остаточных) аномалий.

Тренд описывается с помощью различных моделей. Ниже мы рассмотрим основные из них. Напомним еще раз, что здесь рассматриваются те ситуации (кстати, наиболее типичные), когда исследователь не располагает априорными сведениями о виде функции, аппроксимирующей тренд. Природа геологических процессов остается неизвестной и может быть описана соответствующими моделями только приближенно.

5.3.1.1. Регрессия

Регрессионные модели наиболее широко используются для описания тренда. Многие исследователи рассматривают построение поверхности тренда как задачу регрессии, считая тем самым тренд-анализ разделом регрессионных методов. К тому, что говорилось раньше о регрессии, здесь необходимо добавить следующее.

В большинстве случаев из всех регрессионных моделей используются полиномиальные модели. С их применением очень часто ассоциируется тренд-анализ. Иногда берут сокращенные полиномы. В этом случае смешанные произведения в полиномах не принимаются во внимание. Однако этот метод может быть хоть как-то оправдан только тогда, когда направление профилей наблюдений параллельно направлению тренда. Имеются

работы, показывающие, что решающее значение в уравнении полинома имеют только некоторые смешанные произведения.

При наблюдениях по правильной геометрической сети (что в геологии является скорее исключением, чем правилом) прибегают к построению ортогональных полиномов. Аппроксимация ими имеет то замечательное преимущество, что улучшение аппроксимации путем добавления нового члена полинома не меняет ранее вычисленных коэффициентов. В связи с этим можно говорить о частных компонентах тренда, относя их к соответствующим членам ортогонального полинома, и о полном тренде. Такой подход демонстрируется в некоторых работах. Заметим, что ортогонализация возможна и для неравномерно расположенных точек, но ее преимущества в этом случае исчезают.

Ортогональными являются и члены тригонометрического полинома. Но двойные ряды Фурье (вернее, отрезки этих рядов) в качестве аппроксимирующих функций для поверхности тренда (поверхности регрессии) используются довольно редко. Кроме стремления разделить изменчивость на крупно- и мелкомасштабную здесь еще и предпринимаются попытки дать физическую интерпретацию более значимым двумерным гармоникам. Ряды Фурье оказываются более подходящими аппроксимирующими функциями, чем степенные ряды, в тех случаях, когда данные содержат пространственно повторяющиеся элементы. Так, некоторая периодичность и регулярность проявляется в поведении концентраций металлов в пределах рудных зон, в размещении рудных тел в пределах металлогенических провинций, в расположении систем разломов в больших блоках земной коры. В этих случаях применение двойных рядов Фурье позволило сделать некоторые предсказания о местоположении других возможных месторождений.

Задача тренд-анализа, вообще говоря, не аналогична задаче регрессии. Напомним, что регрессионный анализ основан на определенных допущениях, которые касаются случайной компоненты. Одно из них — требование независимости друг от друга отклонений от поверхности регрессии, полученных в разных точках. По смыслу же тренд-анализа локальная компонента не является случайной, а ее значения могут быть коррелированы друг с другом. Очень часто в геологическом отношении представляют интерес как раз области коррелированных остатков или одиночные точки с большими отклонениями. Поэтому правильнее было бы записывать модель поверхности тренда в следующем виде:

$$z_{ij} = f(x_i, y_j) + \eta_{ij} + \xi_{ij},$$

где $f(x_i, y_j)$ — регрессия; η_{ij} — локальная компонента; ξ_{ij} — случайная компонента.

На практике последние два члена совмещаются и исследуются в совокупности. При изучении литологических и геохимических данных, которые, как правило, характеризуются высокой дисперсией, локальная компонента η_{ij} пренебрежимо мала по сравнению со случайной компонентой ξ_{ij} , поэтому первой можно при анализе пренебречь. Кроме того, в связи с возможностью получения в каждой точке целой серии наблюдений

случайная компонента (вернее, ее дисперсия) может быть определена независимым путем.

Совсем другая ситуация возникает при подборе поверхности тренда к структурным данным (отметкам кровли или подошвы пласта). Случайную компоненту здесь нельзя отделить от локальной, так как повторные изменения невозможны. Более того, в связи с тем, что структурные поверхности обычно характеризуются плавными изменениями, можно считать, что случайная компонента мала по сравнению с локальной. Поэтому в большинстве случаев отклонения структурной поверхности от регрессионной отражают не величину случайной компоненты ξ_{ij} , а величину локальной компоненты η_{ij} . По этой причине обычные критерии значимости регрессии в этом случае неприменимы — здесь явно нарушены основные предположения. Их нарушение, естественно, сказывается и на оценке коэффициентов регрессии. Но в этом случае сама регрессия обычно представляет побочный интерес, а все внимание сосредоточено на локальной компоненте, на поиске областей отклонения от регрессионной модели в определенных направлениях.

Среди других факторов, влияющих на результаты анализа, наиболее существенным является неравномерность расположения точек наблюдения. Эта проблема причиняет особое беспокойство геологам-нефтяникам, так как скважины наиболее густо расположены в пределах уже известных нефтяных зон. Дело в том, что методы регрессии применяются ко всем обрабатываемым данным. Следовательно, на значения трендовой составляющей на каждом участке оказывают влияние все данные, в том числе и находящиеся далеко от этого участка. Поэтому, если число точек на одних участках в несколько раз превышает их число на остальных, то влияние «густонаселенных» участков на регрессию окажется решающим и на остальных участках будет по сути дела проводиться экстраполяция.

Так, если точки в основном сгруппированы в центре карты, то экстраполяция вдоль границ карты приводит к так называемому краевому эффекту. При полиномиальной регрессии полученные экстраполяцией результаты вблизи краев карты могут достигать совершенно невероятных значений. Однако в ряде работ показано, что методы регрессии (в том числе и полиномиальной) более устойчивы относительно группирования точек наблюдения, чем это обычно предполагается.

5.3.1.2. Сглаживание

Методы сглаживания (здесь имеется в виду сглаживание локальных колебаний) применяются при проведении наблюдений через равные интервалы (в одномерном случае) или по равномерной сети (в двумерном случае). В геофизике процесс сглаживания называют фильтрацией. При этом используется ряд терминов, заимствованных из электротехники. О систематической составляющей говорится как о сигнале, а о локальной — как о помехе или шуме. Шум — это короткодействующая составляющая, сигнал — большей частью долгодействующая составляющая исходных данных. В электротехнике создан ряд методов выделения сигнала на фоне шума.

Для сглаживания данных существует много методов, однако все они основаны на оценке систематической компоненты (сигнала) \hat{z} как среднего или взвешенного среднего по наблюдениям на перекрывающихся участках. Среднее значение приписывается узлу сети, находящемуся в центре скользящего окна, которое имеет форму прямоугольника или квадрата (в зависимости от формы сети) и охватывает несколько (n) узлов сети. Общую модель любого метода сглаживания можно записать в следующем виде:

$$\hat{z}_k = \sum_i^n w_i z_i. \quad (5.6)$$

Вид весовой функции w_i изменяется от одной схемы сглаживания к другой. Наиболее простой способ сглаживания — это метод скользящего среднего. Здесь все веса равны между собой и составляют $1/n$, т. е. вычисляется обычное среднее по значениям наблюдений в узлах сети, попавших в скользящее окно.

Уравнение (5.6), используемое для получения сглаженных оценок изучаемой пространственной переменной, называют фильтром, а веса, приписываемые наблюдениям, — откликом фильтра. В настоящее время предложено несколько сглаживающих фильтров. Они обладают разными свойствами при устранении шума и предназначаются для выполнения различных функций. Наиболее известны (в одномерном случае) сглаживающие формулы Шепарда, Спенсера и т. д. В этих формулах заданы веса фильтра. Различаются они характером убывания весов при удалении от оцениваемой точки.

Используя готовые сглаживающие фильтры, надо иметь в виду, что они получены при определенных представлениях о структуре данных. Так, в частности, указанные выше для одномерного случая сглаживающие формулы выведены при условии, что вблизи оцениваемой точки региональная компонента описывается полиномом определенной степени. Различия в весах, приписываемых наблюдениям, и различия в числе членов в уравнениях сглаживания связаны с различиями степени полинома и длины отрезка, на котором учитываются наблюдения.

Таким образом, процедура сглаживания проводится в условиях, когда при переходе к очередной оцениваемой точке порядок полинома сохраняется, но коэффициенты его могут меняться в связи с изменением значения наблюдений, участвующих в сглаживании (веса не зависят от значения коэффициентов). Тем самым наблюдение в каждой точке в зависимости от ее положения по отношению к оцениваемой точке рассматривается как принадлежащее разным кривым, разным систематическим составляющим (они описываются одним и тем же полиномом, но с разными коэффициентами).

Точно так же вычисление скользящего среднего подразумевает, что наблюдения в оцениваемой точке и в точках, ближайших к ней, по которым оценивается среднее, не образуют тренда, принадлежат одной совокупности, т. е. систематическая составляющая на этих точках горизонтальна. Но опять же, наблюдение в каждой точке, участвуя в оценке различных средних (в зависимости от разных оцениваемых точек),

оказывается относимым к разным совокупностям, разным горизонтальным линиям. Из-за всего этого смысл процедуры сглаживания остается неясным. Выбор соответствующей сглаживающей формулы равносильна выбору степени полинома точечной аппроксимации и числа точек, участвующих в сглаживании.

Среди геофизиков распространен подход к выделению полезного сигнала, основанный на представлении, что полезный сигнал и помеха являются реализациями случайных стационарных процессов, удовлетворяющих условию эргодичности. В этом случае иногда удается найти оптимальный фильтр, обеспечивающий наилучшее выделение полезной компоненты из суммарного сигнала. Согласно теории оптимальной фильтрации он определяется своей частотной характеристикой, зависящей от спектральных плотностей сигнала и помехи. Следовательно, здесь необходимо знать автокорреляционную функцию и полезного сигнала, и помехи. Обычно они аппроксимируются некоторыми известными функциями.

При этих допущениях, найдя оптимальный фильтр, можно выбрать достаточно хороший интервал, или, как чаще говорят, радиус осреднения, т. е. число точек, по которым проводится осреднение. Однако надо иметь в виду, что гипотеза стационарности и эргодичности по отношению к геологическим данным, изучаемым с исследовательскими целями, вряд ли справедлива. Проверить ее по эмпирическим данным, как правило, невозможно. Поэтому применять такие методы следует с большой осторожностью, тем более, если учесть, что оптимальным фильтр является лишь в статистическом смысле, в среднем для всей изучаемой площади, и возможности оптимальной фильтрации при существенном перекрытии спектров полезного сигнала и помехи ограничены.

5.3.2. МОДЕЛИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ИЗМЕНЧИВОСТИ ПРИ РЕШЕНИИ ОЦЕНОЧНЫХ ЗАДАЧ

С известной условностью можно сказать, что модели, рассматриваемые в этом разделе, используются скорее для более точного построения карт, чем для их интерпретации. Во всяком случае существенным элементом здесь является определение значений картируемого признака в точках или областях, расположенных между точками наблюдений. Интерес в основном сосредоточен именно на этой проблеме, хотя при этом и не исключается возможность выделения региональной и локальной составляющих.

Проблема эта возникает в связи с решением задач разведки месторождений полезных ископаемых и с оценкой их запасов. Для этого, естественно, необходимо стремиться к тому, чтобы значения концентраций в рудном теле или линейных запасов в пределах нефтеносной площади вне точек наблюдения были восстановлены как можно более точно. При этом важно не только восстановить неизвестные значения пространственной переменной вне точек наблюдения, но и указать вероятную погрешность, присущую полученным оценкам. С решением этих задач связана и

задача выбора точек опробования или мест заложения разведочных скважин. Такого рода задачи мы и назвали оценочными.

Модели, используемые для описания пространственной изменчивости геологических признаков с целью определения их значений вне точек наблюдения, несмотря на все их разнообразие, имеют одну общую черту. Они не задаются обычной непрерывной функцией, хотя и считается, что переменная изменяется от одной точки наблюдения к другой непрерывно. Все модели основаны на том принципе, что значение признака в оцениваемой точке определяется по его значениям в точках наблюдения, но при этом существенно то, что влияние, оказываемое наблюдением на оценку, зависит от расстояния между оцениваемой точкой и точкой наблюдения. Наблюдения в далеко расположенных точках входят в оценку с очень малым весом. Чаще всего учитываются наблюдения только в ближайших к оцениваемой точках.

Все используемые здесь методы в той или иной степени можно рассматривать как методы взвешенного скользящего среднего, где среднее относится не к точке наблюдения, а к точке, где наблюдения отсутствуют (но с таким же успехом может быть отнесено и к точке наблюдения).

При разведке нефтяных и рудных залежей и при оценке их запасов используются отличающиеся друг от друга модели изменчивости свойств геологических объектов. Своим различием модели обязаны как определенной геологической специфике объектов, так и специфике получения данных в процессе разведки. Разведка нефтяных месторождений проводится глубокими скважинами, число которых резко ограничено и которые не размещаются по правильной геометрической сети. Разведка же рудных залежей связана с получением наблюдений в гораздо большем числе точек, и часто опробование проводится по правильной сети. Поэтому есть смысл эти модели разграничить.

5.3.2.1. Модели, используемые в нефтяной геологии

В основу описания изменчивости здесь положены определенные идеи. Чтобы их легче было понять, рассмотрим следующую ситуацию. Пусть на некоторой горизонтальной площадке по равномерной сети расставлены столбы с фонарями. Каждый столб имеет координаты $x_k = k\Delta x$ и $y_j = j\Delta y$, где Δx и Δy — расстояния между соседними столбами по осям x и y . Соответственно k и j пробегает значения $k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$; $j = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Естественно, что наиболее освещенным оказывается пространство непосредственно под фонарем.

С удалением от фонаря, освещенность, ему обязанная, падает. Закон этого ослабления задан. Он описывается некоторой функцией $S_{kj}(x, y)$, показывающей освещенность в точке (x, y) в зависимости от ее расстояния от столба, т. е. $S_{kj}(x, y) = S(x - x_k, y - y_j)$. Для каждого фонаря это одна и та же функция. Меняются лишь координаты фонарей, т. е. функции $S_{kj}(x, y)$ получаются последовательным сдвигом от фонаря к фонарю. Однако каждый фонарь имеет свою лампу яркостью a_{kj} . Соответственно освещенность, даваемая каждым фонарем, изменяется как $a_{kj}S_{kj}(x, y)$. Освещенность каждой точки площадки, в том числе и непосредственно

под фонарями, создается всеми фонарями, т. е. равна сумме освещенностей от каждого фонаря: $z(x, y) = \sum_k \sum_j \alpha_{kj} S_{kj}(x, y)$.

Аналогичным образом описывается пространственная изменчивость геологических признаков. Каждой точке правильной сети с координатами (x_k, y_j) поставлена в соответствие своя функция $S_{kj}(x, y) = S(x - x_k, y - y_j)$, описывающая как бы уменьшение влияния значения признака, присущего этой точке, с удалением от нее. Эта функция достигает максимального значения в той точке правильной сети, которой она соответствует, т. е. в точке (x_k, y_j) . С удалением от точки соответствующая ей функция убывает. Вся совокупность функций $S_{kj}(x, y)$ получается последовательным сдвигом от одной точки правильной сети к другой (соседней). Каждой точке сети с координатами (x_k, y_j) также приписан некоторый постоянный коэффициент α_{kj} . Значение признака в каждой точке изучаемой площади складывается под влиянием значений во всех точках правильной сети. Отсюда имеем модель

$$z(x, y) = \sum_k \sum_j \alpha_{kj} S_{kj}(x, y). \quad (5.7)$$

Это есть представление неизвестной функции $z(x, y)$ в виде разложения по системе функций $S_{kj}(x, y)$. Придавать какой-либо содержательный смысл членам разложения, за редким исключением (типа освещенности от фонарей), не следует, ибо они не имеют геологической интерпретации. Такое представление связано с целым рядом удобств математического характера, о которых мы поговорим позже. Пока же заметим, что здесь мы имеем дело с некоторым интуитивно очевидным способом учета расстояний. Вблизи точки наблюдения скорее всего можно ожидать значения признака, близкое к наблюдаемому. С удалением от точки наблюдения отклонения будут возрастать. С приближением к другой точке значения признака уже будут близки к наблюдению в этой точке. В точке же, находящейся между точками наблюдения, можно ожидать нечто среднее между ними.

Очевидно, что эти рассуждения справедливы при плавном характере пространственной изменчивости признака и при отсутствии заметных флуктуаций. К этому следует еще добавить, что расстояния между точками наблюдения должны быть согласованы со сложностью изменчивости признака.

Если каждая из функций $S_{kj}(x, y)$ выбрана так, что ее максимальное значение, достигаемое в точке (x_k, y_j) , равно единице, а в остальных точках правильной сети ее значения равны нулю, то роль коэффициентов α_{kj} будут играть значения функции z_{kj} в точках правильной сети. В этом случае выражение (5.7) интерполирует значения z_{kj} функции $z(x, y)$ в узлах сети. Если бы наблюдения были проведены по правильной сети, т. е. были известны значения z_{kj} в ее точках, то задача была бы решена.

В математике задача интерполяции ставится как задача, при которой неизвестная функция координат $z(x, y)$ задана дискретно в точках наблюдения (x_k, y_j) . Требуется найти непрерывную функцию координат (ее называют интерполирующей функцией) такую, чтобы ее значения в точках наблюдения совпадали с наблюдаемыми значениями (значениями вос-

становливаемой функции), а в остальных точках области интерполяции отклонения интерполирующей функции от восстанавливаемой были минимальны. Кроме указанной интерполяционной постановки задачи встречается и аппроксимационная постановка. В ней требование совпадения в точках наблюдения значений интерполирующей функции с наблюдаемыми значениями уступает место требованию, чтобы их расхождение не превышало заданного предела.

Модель (5.7) является моделью интерполирующей функции. Она может и хорошо соответствовать восстанавливаемой функции, и весьма существенно отклоняться от нее (вне точек наблюдения). Задача как раз и заключается в поиске такой интерполирующей конструкции, которая приводила бы к наилучшему восстановлению неизвестной функции, о которой мы можем судить только по ее значениям в точках наблюдения.

Как видим, модель (5.7) основана на детерминированных принципах. Неизвестными же здесь являются коэффициенты α_{kj} , которые находятся по наблюдениям. Если ориентироваться только на исходные наблюдения, то задача интерполяции становится неопределенной. Ее решение возможно, если известны некоторые свойства восстанавливаемой функции. Обычно такими свойствами и задаются априорно. От того, насколько эти априорные соображения отвечают действительности, будет зависеть точность всех последующих построений. Поэтому выбор класса интерполирующих функций в определенной мере произволен.

В задачах поиска интерполирующей функции, наиболее точно представляющей восстанавливаемую функцию, центральное место занимает теорема Котельникова. Она гласит, что интерполирующая функция, представленная разложением в так называемый ряд Котельникова [для простоты будем рассматривать функцию одной переменной $y(x)$]

$$y(x) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} y_i \frac{\sin[(\pi/\Delta x)(x-x_i)]}{(\pi/\Delta x)(x-x_i)}, \quad x_i = i\Delta x, \quad i=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.8)$$

совпадает с восстанавливаемой функцией, если последняя имеет ограниченный спектр (т. е. не содержит гармоник с малыми периодами, начиная с некоторого T), а точки наблюдения x_i (их называют исходными узлами) расположены равномерно и промежуток между ними Δx вполне определенный (зависит от величины T). Обратим внимание, что число членов ряда равно бесконечности, т. е. число наблюдений бесконечно велико.

Композиционная функция

$$S_i = \frac{\sin[(\pi/\Delta x)(x-x_i)]}{(\pi/\Delta x)(x-x_i)}$$

с удалением от точки x_i убывает не монотонно, а с симметрично уменьшающимися всплесками. Она достигает своего максимального значения, равного единице, в точке x_i и равна нулю во всех остальных узлах x_j ($j \neq i$). Вес узла определен его удалением от данной точки. Это приводит к тому, что наблюдения в далеко отстоящих точках мало влияют на восстанавливаемое значение в данной точке.

Если восстанавливаемая функция $y(x)$ имеет неограниченный спектр, то по формуле (5.8) однозначно может быть восстановлена только целая ее часть $y(x)$ — некоторая функция с ограниченным спектром, совпадающая в узлах интерполяции с исходными значениями. Эта целая часть также будет определяться промежутком Δx между точками наблюдения.

На практике, когда мы имеем дело с ограниченным числом наблюдений в пределах ограниченной области, точно восстановить даже целую часть функции с помощью разложения Котельникова не представляется возможным. Конечно, вследствие малого веса узлов, далеко отстоящих от данной точки x , при достаточном числе наблюдений можно найти такое число узлов N , когда замена бесконечной суммы в формуле (5.8) на конечную от $-N$ до N не вызовет существенной ошибки и ею в этом случае можно будет пренебречь.

Однако это возможно не для всех точек x , а только для достаточно удаленных от границ области интерполяции. Для точек x , расположенных вблизи этих границ, просто не найдется по N узлов слева и справа от них. Поэтому при интерполяции также имеет место краевой эффект, на который мы указывали при обсуждении тренд-анализа. Но при равномерном расположении наблюдений учет всех данных при расчете трендовых составляющих с точки зрения уменьшения краевого эффекта превращается скорее в достоинство, чем в недостаток, чего нельзя сказать про интерполяцию, где учитываются только ближайшие наблюдения.

В геологической практике в силу целого ряда причин интерполяция при помощи разложения Котельникова не нашла широкого применения. Это связано прежде всего с тем, что наблюдения (скважины) располагаются по нерегулярной сети. В этом случае наибольшее значение S_i может значительно возрасти, причем максимум достигается в интервале между точками наблюдения. Сами композиционные функции становятся слишком сложными. Кроме того, точное совпадение интерполирующего ряда и измеренных значений, достигаемое в этом случае, не позволяет учесть случайные флуктуации (ошибки измерений). Поэтому используются другие конструкции. При интерполяции любыми другими функциями к ошибкам, связанным с принципиальной невозможностью восстановить искомую функцию рядом Котельникова (или с возможностью восстановить только ее целую часть), надо добавить ошибки, связанные с расхождением между конкретной интерполирующей функцией $\tilde{y}(x)$ и той целой функцией $\bar{y}(x)$, которая может быть восстановлена при помощи разложения Котельникова.

Один из методов интерполяции, нашедший применение при решении оценочных задач в геологии, заключается в представлении интерполирующей функции в виде разложения по системе линейно независимых, так называемых гармонических функций [2]. Этот метод оказывается эффективным при условии, что восстанавливаемая функция принадлежит к классу H . Функции класса H обладают целым рядом свойств. Важно то, что из свойств функций этого класса следует, что восстанавливаемая функция может быть представлена в виде

$$z(x, y) = \lambda^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S(x-h, y-\tau, \lambda) \alpha(h, \tau) dh d\tau.$$

Интерполирующая функция является конечным аналогом написанного интеграла (т. е. получена путем замены интеграла на сумму)

$$z(x, y) = \lambda^2 \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_{kj} S(x - k\Delta x, y - j\Delta y, \lambda). \quad (5.9)$$

Этим, собственно говоря, и обусловлена эффективность метода для приближения функции $z(x, y)$, ибо при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ интерполирующая функция стремится к восстанавливаемой. В конкретном случае гармоническая функция представлена выражением

$$S(x - k\Delta x, y - j\Delta y, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda}{[(x - k\Delta x)^2 + (y - j\Delta y)^2 + \lambda^2]^{3/2}}.$$

Тем самым это есть метод интерполяции, в котором наблюдения берутся с весами, обратно пропорциональными их расстоянию от точки вычислений.

Выдвигаемые условия, которым удовлетворяют функции класса H , оказываются весьма удобными для получения оценок точности интерполяции при равномерной сети наблюдений. Эти оценки удается получить потому, что условиями задается определенная информация о спектре восстанавливаемой функции, а именно: для преобразования Фурье принадлежащей этому классу функции имеет место экстремальная оценка. Что касается расхождения между интерполирующей функцией (5.9) и целой функцией, восстанавливаемой рядом Котельникова, то в принципе расхождения может не быть: интерполирующая функция может тождественно совпадать с целой функцией, определяемой разложением Котельникова. Иными словами, рассматриваемый метод позволяет проводить восстановление функции класса H с точностью, определяемой рядом Котельникова. Но возможно это при определенных значениях параметра λ .

При практическом использовании метода центральным становится вопрос о справедливости отнесения функций, описывающих пространственную изменчивость геологических признаков, к классу H . Кроме того, надо иметь в виду, что оценки точности интерполяции получены при теоретическом исследовании функций, когда за основу была принята интерполяционная постановка задачи, отвечающая предположению, что исходные значения функции заданы точно. Для практического определения оценок надо априорно знать некоторые параметры. Ошибка в их выборе повлечет за собой искажение теоретически полученных оценок. К этому следует добавить все то, что говорилось раньше об ограниченном числе наблюдений и о вытекающих отсюда последствиях, связанных с увеличением ошибок интерполяции, особенно у границ области интерполяции.

Наконец, существенно и то, что все выводы получены для равномерной сети наблюдений. Правда, автор работы [2] предполагает, что полученные оценки точности интерполяции будут справедливы и в случае произвольного расположения наблюдений, если в качестве величины про-

межутка между наблюдениями принять максимальный из них. При этом оговаривается, что колебания значений промежутка должны быть не слишком большими. При разведке нефтяных и газовых месторождений такое условие практически не выполняется.

Практическая реализация метода связана с определением коэффициентов разложения α_k . Если задача решается в интерполяционной постановке, эти коэффициенты находятся из условия равенства значений интерполирующей функции наблюдаемым значениям. Если задача решается в аппроксимационной постановке, расхождения не должны превышать заданного предела. Наибольшие трудности в определении коэффициентов α_k связаны с неравномерностью сети исходных данных. Это обстоятельство вынуждает заменить интерполяционную постановку задачи на аппроксимационную. Чтобы обеспечить устойчивость расчетов в условиях нерегулярной сети исходных данных, предлагается в формуле (5.9) величины Δx и Δy выбирать равными среднему расстоянию между точками наблюдений $\bar{\Delta x}$ и $\bar{\Delta y}$. Параметр λ является регуляризирующим параметром, и соответствующий его выбор повышает устойчивость решаемых систем уравнений. Исползуется метод последовательных приближений, при котором одновременно с решением задачи интерполяции осуществляется фильтрация случайных ошибок измерений.

Рассматриваемый метод использован при изучении вопроса об оптимальном размещении разведочных скважин [1]. В главе 3 говорилось, что этот вопрос решается на основе различных моделей, описывающих пространственную изменчивость изучаемых геологических показателей. В данном случае решение основано на обсуждаемой модели (5.9). Задача заключается в определении места заложения очередной скважины. Решается она на основе критерия, представляющего собой произведение двух функций. К обсуждаемой модели имеет отношение лишь одна из функций. На ней мы и остановимся, тем более, что вопрос со второй функцией нельзя считать решенным.

Предложенный критерий сравнения вариантов размещения очередной скважины (первая функция) вычисляется как разность двух величин. Первая из них (уменьшаемое) — это сумма весов $C_i^*(n)$, с которыми значение интерполирующей функции в каждой точке (x_k, y_k) рассчитывается как среднее взвешенное по наблюдениям в n точках (x_i, y_i) . Суммируются веса по всем точкам (x_k, y_k) , их располагают по равномерной правильной сети. Вторая величина в разности (вычитаемое) — это та же сумма весов $C_i^*(n+1)$, но вычисленная в предположении, что очередная скважина пробурена (число наблюдений увеличилось на единицу) в данной точке, принадлежащей равномерной сети, т. е. в одной из точек (x_k, y_k) . Выбирается под заложение очередной скважины та из точек (x_k, y_k) правильной сети, для которой величина критерия максимальна. Кроме указанного предлагается и несколько иной критерий. Отличие его заключается в том, что оперируют не с весами, а с произведениями веса наблюдения на его значение.

Первый критерий, по мнению автора рассматриваемой работы, характеризует влияние проектной скважины, если она будет пробурена в данной точке, на подсчет запасов и на ошибки интерполяции в условиях

заданной структуры уже пробуренных скважин и имеющихся расстояний между ними. Он не зависит от наблюдений, а определяется лишь числом и взаимным расположением точек наблюдения. Вторым критерием учитывается влияние размещения скважин не только на ошибку подсчета запасов, но и на саму величину запасов, т. е. оценивается относительный вклад очередной скважины в прирост запасов (имеется в виду, что наблюдения — это величина линейных запасов).

По нашему мнению, вычисление указанных критериев неявно подразумевает следующее. После бурения n скважин изменчивость описывается суммой, состоящей из n слагаемых несколько иного, по сравнению с рассмотренным, типа, а именно $a_i S(x - x_i, y - y_i, \lambda)$, где индекс i относится не к узлам, а к пробуренным скважинам, расположенным неравномерно. Неизвестные коэффициенты a_i (их число также равно n) определяются из наблюдений уже в условиях данной модели, причем в интерполяционной постановке задачи. Зная их, действительно можно найти значения интерполирующей функции указанного вида (сумма n слагаемых) в точках правильной сети (x_k, y_k) . Определение этих значений через взвешивание наблюдений — это всего лишь другая форма записи той же процедуры.

Вычисление вычитаемого в критерии подразумевает, что интерполирующая функция представлена уже $n+1$ слагаемыми, т. е. изменена модель; соответственно неизвестные $n+1$ коэффициентов $\{a_i\}$ определяются уже $n+1$ наблюдениями, где к реальным n наблюдениям добавлено несуществующее наблюдение. Оно определено как значение в данной точке (x_k, y_k) интерполирующей функции предыдущего шага, т. е. состоящей из n слагаемых. Используемая другая форма записи сути дела не меняет, ибо определение новых весов подразумевает именно эту процедуру.

Таким образом, второй критерий — это разность между величинами запасов, найденными по первой модели интерполирующей функции и по второй модели при условии, что запасы определяются суммой значений интерполирующей функции в точках (x_k, y_k) равномерной сети. При этом при использовании второй модели в качестве добавочного $(n+1)$ -го наблюдения берется значение в данной точке (x_k, y_k) предшествующей интерполирующей функции. Под заложение скважины выбирается та точка (x_k, y_k) , при использовании интерполирующего значения в которой наблюдается наибольшее расхождение в величинах запасов, определяемых двумя моделями. Первый критерий — это то же расхождение, но отнесенное к значению интерполирующей функции в данной точке (x_k, y_k) .

Как видим, к ошибкам интерполяции и к ошибкам подсчета запасов эти критерии отношения не имеют. Они определяют выбор того значения интерполирующей функции (и выбор точки, к которой оно относится) из числа полученных в точках правильной сети (по n наблюдениям), которое, будучи использованным в качестве $(n+1)$ -го наблюдения, приведет к максимальному расхождению запасов или суммы весов (с которыми наблюдения взвешиваются во всех точках правильной сети), рассчитанных на основе двух моделей (соответственно с n и $n+1$ членами разложения). К этому следует добавить, что коэффициенты a_i (а следовательно, и веса наблюдений, и значения интерполирующей функции) вычисляются

так, как будто исходные скважины расположены по правильной сети. При неравномерном расположении скважин коэффициенты α_i оказываются стоящими при несоизмеримых величинах. Все это приводит к искажению результата.

Еще одним методом интерполяции, нашедшим применение при решении оценочных задач в нефтяной геологии, является интерполяция с помощью так называемых сплайнов. Если раньше функции $S_{kf}(x, y)$ были заданы одной формулой, одним математическим выражением, сохраняющим свою силу во всей области интерполяции, то теперь в качестве $S_{kf}(x, y)$ будут рассматриваться функции, заданные не одним, а двумя или несколькими выражениями. Во многих случаях математическое описание с помощью формул, действующих на различных интервалах или на различных участках изучаемой области, оказывается удобнее, и не только при наличии разрывов. Это относится и к гладким поверхностям, определенным на сравнительно больших площадях (длинных интервалах) и не поддающихся описанию с приемлемой точностью единой формулой достаточно простой структуры. В этом случае широко применяются кусочно-полиномиальные функции, в том числе так называемые сплайны. В нефтяной геологии, особенно в связи с решением оценочных задач, картирование с помощью сплайн-функций развивалось наиболее интенсивно геологами Западной Сибири [11].

В этом методе интерполирующая функция (ее называют сплайном) также представлена в виде разложения по системе функций, называемых базисными сплайнами. Эта система тоже выражена однотипными функциями, полученными последовательным сдвигом на расстояние Δx или Δy , равное расстоянию между узлами сетки, т. е. каждому узлу (x_k, y_l) поставлен в соответствие свой базисный сплайн $S_{kf}(x, y)$. Последний также достигает максимума в узле (x_k, y_l) , которому он соответствует, и его значения при удалении от узла уменьшаются. Они могут уменьшаться не монотонно и обращаться в нуль в остальных узлах, при этом максимум равен единице.

Особенность базисных сплайнов заключается в том, что они не заданы единым математическим выражением. На интервале между данным узлом и смежным с ним базисный сплайн определяется одной функцией, на интервале до следующих ближайших узлов — другой функцией и т. д. Эти функции для одномерного сплайна совпадают с полиномом третьей степени. Иногда с целью учета лишь наблюдений в близко расположенных узлах (локальные интерполянты) значения базисного сплайна в точках, удаленных от данного узла на расстояние $2\Delta x$ и более, задают равными нулю. Выражения для отрезков базисных сплайнов (полином третьей степени) подбирают так, чтобы обеспечивались указанный вид базисного сплайна (убывание его значений при удалении от узла, которому он соответствует), непрерывность самого базисного сплайна, первой, а нередко и второй его производных.

Итак, модель одномерного сплайна для сетки из n узлов имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k S_k(x),$$

где $\{\alpha_k\}$ — коэффициенты сплайн-функции; $S_k(x)$ — k -й базисный сплайн.

К примеру, в случае локальных интерполянтов, где выполняется требование непрерывности самого сплайна и только первой его производной, k -й базисный сплайн задается следующим набором формул:

$$S_k(x) = \begin{cases} [x - (k-2)\Delta x]^3 - [x - (k-2)\Delta x]^2, & (k-2)\Delta x \leq x \leq (k-1)\Delta x; \\ [x - (k-1)\Delta x] - 2[x - (k-1)\Delta x]^2 + 2[x - (k-1)\Delta x]^3, & (k-1)\Delta x \leq x \leq k\Delta x; \\ 1 - (x - k\Delta x) + (x - k\Delta x)^3 - (x - k\Delta x)^2, & k\Delta x \leq x \leq (k+1)\Delta x; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Переход к двумерным базисным сплайнам задается равенством

$$S_{kj}(x, y) = S_k(x)S_j(y).$$

Это равенство справедливо для внутренних узлов. На границах области базисные сплайны задаются несколько другим путем.

Удобство сплайнов заключается в том, что пространство их линейно. Это позволяет легко вычислить производные и интегралы. Поскольку коэффициенты α_{kj} — постоянные величины, то производные и интегралы берутся только от базисных сплайнов.

Через сплайн-функции выражаются такие свойства поверхностей, как кривизна, градиенты падения и простираения в точках, средние значения на тех или иных участках и т. д. Это позволяет построить карты, удовлетворяющие определенным требованиям. Кроме требования заданной степени расхождения между наблюдениями и значениями сплайна можно выдвинуть требование минимума кривизны, максимума совпадения по форме изучаемой и уже известной поверхностей (например, вышележащего горизонта) и т. д. Можно также предъявить требование, чтобы построенная карта обладала некоторым определенным набором свойств. Эти свойства могут быть заданы и из физических соображений.

Все эти требования могут быть удовлетворены в различной мере, ибо одно достигается за счет другого. Поэтому задачу построения карты можно рассматривать как оптимизационную задачу, где выдвигаемые требования удовлетворяются в разумных соотношениях. Для этого надо прежде всего определить цель, ради которой строится карта. Исходя из этих требований и определяются весовые коэффициенты.

Модели сплайн-аппроксимации также использовались для решения задачи об оптимальном размещении скважин. В основе решения задачи лежит оценка погрешности построения карт (ошибки аппроксимации поверхностей сплайном). Скважины размещают в точках, где ошибки максимальны. Ошибка аппроксимации в каждой точке области картирования определяется произведением двух членов. Один из них не зависит от значений картируемого признака, а определяется расположением и плотностью скважин. Это обстоятельство и является главным для решения задачи. Второй член зависит от сложности поведения картируемой функции. Поскольку информация об этом априорно не может быть получена, то, строго говоря, оценка ошибки невозможна.

На практике ошибка аппроксимации заменяется другим показателем, где второй член связывают не с неизвестной картируемой функцией, а

с соответствующей сплайн-функцией. Тем самым учитывается только та сложность изменчивости, которая описывается данным сплайном. Она может весьма существенно отличаться от реальной. При ограниченном числе точек наблюдения вообще используют лишь априорные оценки второго члена. К привлечению апостериорных оценок переходят лишь тогда, когда число точек наблюдения оказывается достаточным для удовлетворительной аппроксимации картируемого параметра.

Заканчивая рассмотрение моделей, используемых в нефтяной геологии для решения оценочных задач, подчеркнем, что они, с нашей точки зрения, ориентированы на детальное картирование и поэтому плохо соответствуют задачам разведки. Не отвечают они и специфике разведки. При проведении разведки большую роль играют аналогия и конкуренция различных гипотез; представление об изучаемом объекте создается не только последовательным бурением новых скважин. Подходы, учитывающие эту сторону дела, мы рассматривали в главе 3. Там пространственная изменчивость при решении задач разведки описывалась веером моделей и разведка преследовала цель не только оценить параметры модели для повышения точности картирования, но и в не меньшей, если не в большей, степени оценить дискриминацию моделей.

5.3.2.2. Модели, используемые в рудной геологии

Оценивание рудных залежей связано с наличием гораздо большего числа наблюдений, которые к тому же, как правило, расположены по правильной сети. Это дает возможность существенно изменить и расширить круг используемых моделей, согласующихся с указанными особенностями. Если в нефтяной геологии моделирование основано на детерминированных представлениях, то здесь существенное место отводится моделям, основанным на понятиях теории случайных функций.

В связи с расположением наблюдений по правильной сети наиболее широкое распространение получили модели, представляющие восстанавливаемую функцию рядом Фурье. Предполагается, что восстанавливаемая функция обладает необходимыми для этого свойствами (см. раздел 4.3.1). При наличии $2n+1$ равноотстоящих точек наблюдения (для простоты будем рассматривать функцию одной переменной) интерполирующая функция имеет вид

$$y(x) = a_0 + \sum_{k=-n}^n [a_k \cos(\omega_k x) + b_k \sin(\omega_k x)]. \quad (5.10)$$

Кривая (5.10) совпадает с восстанавливаемой кривой в точках наблюдения и некоторым образом уклоняется от нее в промежутках между точками. Это связано с заменой бесконечной суммы разложения в ряд Фурье конечной. Вследствие этого коэффициенты Фурье, определяемые из наблюдений, отличаются от их истинных значений. Но дело не только в этом. Гармоники с периодами, превышающими удвоенное расстояние между последовательными наблюдениями, остаются невыявленными. Об

этом и свидетельствует теорема Котельникова, которая уже упоминалась нами ранее.

Для оценки указанных уклонений и для полного восстановления изучаемой функции одних только наблюдений, естественно, недостаточно. Нужна дополнительная информация. Последняя выражается в виде определенных априорных предположений. Таковым, к примеру, может быть предположение о том, что восстанавливаемая функция имеет ограниченный спектр. Но чаще всего априорно задают вид спектра — некоторую функцию, описывающую его изменение. Это позволяет по ограниченному спектру, полученному по наблюдениям, восстановить весь спектр полностью. Соответственно восстанавливается и картируемая функция.

Нередки случаи, когда (не всегда на достаточных основаниях) предполагают, что картируемая функция представляет собой реализацию случайного стационарного процесса, удовлетворяющего условию эргодичности. При этом реальные автокорреляционные функции аппроксимируют какой-либо моделью. Тем самым априорно задается и спектр. Знания спектра оказывается достаточно, чтобы установить зависимость погрешности картирования от конфигурации и плотности разведочной сети. Иногда задаются раздельно спектром высоких и низких частот. Это позволяет решить задачу отделения низкочастотных составляющих от высокочастотных как задачу выделения полезного сигнала на фоне помех подобно тому, как это делается при оптимальном линейном сглаживании стационарных случайных последовательностей (см. раздел 5.3.1).

Широкое распространение получили также модели, основанные на тех или иных методах взвешенного скользящего среднего. Они связаны с оценкой значения картируемой переменной по прилегающим значениям, которые берутся с определенными весами. К этому же типу моделей можно отнести и модели, используемые в нефтяной геологии. Различие заключается в способе нахождения весов. Как и в моделях, используемых в нефтяной геологии, допускается, что значение в данной точке некоторым образом связано со значениями в точках, расположенных на некотором расстоянии. При этом предполагается, что влияние более удаленных точек сказывается меньше, чем влияние близлежащих точек. Но это влияние задается или оценивается другими способами. Большей частью эти способы основаны не на детерминированных (как в нефтяной геологии) принципах, а на статистических связях.

Одним из таких методов является крайгинг (кригование), названный так в честь его создателя южноафриканского геолога и статистика Д. Г. Криге *. Наиболее элементарная процедура крайгинга основана на некоторых предположениях о вероятностной структуре картируемого поля [35]. Наблюдения рассматриваются как реализация случайного однородного процесса со стационарными приращениями, т. е. процесса, у которого постоянное и равное нулю математическое ожидание разности наблюдений в любых двух точках, а дисперсия разностей зависит только от расстояния между точками наблюдений. Отметим, что класс процессов

* В различных русских переводах фамилию исследователя (Krigе) пишут то как Криге, то как Крайг. Соответственно метод называют «кригование» или «крайгинг».

со стационарными приращениями более широк, чем класс стационарных процессов; у стационарного процесса стационарны не только разности значений, но и сами его значения.

Кроме того, картируемое поле считается изотропным, в нем, все направления на плоскости равноправны, распределение разностей зависит лишь от расстояния между точками опробования. При этом наиболее важной представляется локальная изменчивость, поэтому процедура ограничена рассмотрением лишь локальных свойств процесса. Процесс считается однородным только на сравнительно небольших участках, в пределах которых изменение математического ожидания приращений практически несущественно.

Задача картирования ставится как задача определения неизвестных значений картируемой переменной z_k в точках (x_k, y_k) при условии, что в точках наблюдения $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_i, y_i), \dots, (x_n, y_n)$ ($i \neq k$) переменная приняла известные значения $z_1, z_2, \dots, z_i, \dots, z_n$ ($i \neq k$). Известные значения уже не рассматриваются как случайные, они считаются аргументами, от которых зависит математическое ожидание z_k . Вся случайность «сосредоточена» между точками наблюдений. Условное математическое ожидание, как мы знаем, дается уравнением регрессии. Из указанных свойств поля следует, что уравнение регрессии должно иметь вид уравнения взвешенного скользящего среднего:

$$z_k = \sum w_i z_i, \quad i \neq k; \quad (5.11)$$

при этом сумма весов w_i должна быть равной единице.

Если стационарный процесс полностью определяется математическим ожиданием и ковариационной функцией, то важнейшей характеристикой процесса со стационарными приращениями является структурная функция

$$v(\tau) = M[z(t) - z(s)]^2 = v(|t - s|).$$

Значение $v(\tau)$ равно, как видим, среднему квадрату первых разностей при расстоянии между наблюдениями $\tau = |t - s|$. У однородного процесса структурная функция определяет дисперсию приращений пространственной переменной в точках, отстоящих на расстояние τ .

Для стационарного процесса математическое ожидание квадрата приращений [обозначим эту величину через $v(\tau)$ по аналогии с однородным процессом] связано с дисперсией наблюдений $\sigma^2 = \text{cov}(0)$ и с ковариацией между ними $\text{cov}(\tau)$ простым соотношением: $(1/2)v(\tau) = \text{cov}(0) - \text{cov}(\tau)$.

В геологической литературе структурную функцию называют вариограммой (иногда полудисперсией). Типичная вариограмма обнаруживает тенденцию к возрастанию по мере увеличения τ . Возрастание может происходить до определенного предела. Расстояние между наблюдениями $\hat{\tau}$, при котором $v(\hat{\tau})$ практически становится равным предельному значению [т. е. если исходный процесс рассматривать как стационарный, связь между наблюдениями становится слишком малой: $\text{cov}(\hat{\tau}) \approx \approx 0$; $(1/2)v(\tau) = \text{cov}(0)$], называется рангом. Его можно охарактеризовать как расстояние, за пределами которого наблюдения можно считать

независимыми друг от друга. Ранг определяет максимально допустимое расстояние между точками опробования в крайгинге. Если расстояние между точками опробования вдвое превышает ранг, то между ними появляется точка, в которой невозможно по крайгингу провести оценку, так как эта точка независима от двух граничных точек опробования*.

Эмпирическая вариограмма (а она может быть построена по наблюдениям), как правило, сглаживается некоторой кривой. Для этого нередко используются такие уравнения: $v(\tau) = 3\alpha \log \tau$ и $v(\tau) = \alpha\tau^\beta$. Первое из них называется моделью де Вийса или де Вейса (в разных русских переводах фамилию De Wijs пишут по-разному), а второе — моделью со степенной структурной функцией (при $\beta = 1$ — линейной моделью). Поскольку речь идет о картировании на плоскости, необходимо рассматривать вариограммы по разным направлениям. Для изотропного поля эти вариограммы совпадают.

Определение весов w_i в уравнении (5.11) основано на учете структуры данных, т. е. значений вариограммы, соответствующих расстояниям между оцениваемой точкой и точками наблюдений в пределах исследуемой области. Вариограмма задается априорно (выбирается по аналогии с другими хорошо изученными территориями). Этот шаг представляет наибольшие трудности в практическом применении крайгинга, так как выбор правильной вариограммы очень важен и в то же время он определяется только интуитивными соображениями.

Веса w_i , которые надо приписать в модели (5.11) каждой из n точек наблюдения (x_i, y_i) , окружающих оцениваемую точку (x_k, y_k) , находятся из условия, добавляемого к уже указанному: сумма весов должна равняться единице. Второе же условие предусматривает, что веса должны быть подобраны так, чтобы дисперсия условного распределения z_k , т. е. дисперсия оценки z_k по модели (5.11), была минимальной. Таким образом, крайгинг является оптимальным (в смысле минимизации дисперсии) оцениванием картируемой переменной в точках отсутствия наблюдений. Из указанных условий вытекает определенное соотношение связей между оцениваемой точкой и точками наблюдения:

$$v(x_k - x_i) = \lambda + \sum_{i=1}^n w_i v(x_j - x_i).$$

В этом уравнении $v(x_j - x_i)$ представляет собой значение структурной функции, соответствующее расстоянию τ , равному расстоянию между точками наблюдения (x_j, y_j) и (x_i, y_i) . Аналогично $v(x_k - x_j)$ является значением структурной функции, соответствующим расстоянию между точкой наблюдения (x_j, y_j) и оцениваемой точкой (x_k, y_k) . Как видим, мы здесь имеем аналогичное ранее рассмотренным моделям интерполяции разложение функции (в данном случае структурной) на систему базисных, или композиционных, функций, привязанных к наблюдениям. Имеется всего n уравнений этого вида, по одному для каждой точки наблюдения

* В этом случае оценку получают методами вариационной статистики, где наблюдения рассматриваются как независимые случайные величины, принадлежащие генеральной совокупности.

($j=1, 2, 3, \dots, n$). Этих данных оказывается достаточно как для определения значений картируемой переменной в оцениваемых точках, так и для оценки ошибки величины z_k .

Все это становится возможным только благодаря тому, что имеющаяся информация не ограничивается наблюдениями. Дополнительно к ним предполагается знание вариограммы — всех указанных значений $v(\tau)$. Существенные ограничения практического использования этого метода вытекают из условий, наложенных на свойства картируемой переменной. Должны выполняться и указанные выше свойства вариограмм, в частности наличие ранга. Это возможно, если в структуре случайных функций, описывающих изменчивость геологических параметров, отсутствуют периодические составляющие. Естественно, что при достаточном числе наблюдений можно использовать вариограмму, полученную уже непосредственно по наблюдениям. Но ее оценка требует густой сети наблюдений, особенно если сеть неравномерная. Если это условие не выполняется, то априорно выбранная вариограмма даже не может быть скорректирована в процессе получения новых данных (например, в процессе разведки).

Нередко крайгинг используют как метод подсчета запасов в том или ином блоке по запасам в окружающих его блоках. В этом случае крайгинг позволяет избежать резких завышений запасов в отдельных блоках, что могло бы произойти из-за того, что на них пришлось редко встречаемые пробы с исключительно высоким содержанием. Уравнение (5.11) здесь играет все ту же роль — оно служит для минимизации влияния относительно высокой дисперсии выборочных значений.

Еще один метод уточнения запасов в блоках, основанный на том же уравнении взвешенного скользящего среднего, имеет в своей основе другую схему определения весов. Другой смысл имеют и переменные z_k и z_i . Этот метод используется для предсказания добычи по данным разведки [16]. Оценка содержания полезного компонента в руде z_k , которая будет добыта из блока k , дается на основании разведочных проб z_i , взятых в блоках i ($i=1, 2, \dots, k, \dots, n$), включая и блок k . Здесь z — добыча, а z_i — среднее значение содержания полезного компонента для блока i , полученное по разведочным пробам.

Идея метода заключается в том, что для отработанной части месторождения, где имеются результаты разработки, строится уравнение регрессии \hat{z}_k относительно z_1, \dots, z_n . Оно дает оценку содержания полезного компонента в центральной блоке (оценку уточненную, так как она основана на данных разработки) по средним значениям разведочных проб, взятых из окружающих блоков (включая и сам центральный). Если постоянный член уравнения регрессии β_0 записать как $\beta_0 = \beta'_0 \bar{z}$, где \bar{z} — среднее из $\{z_i\}$, то коэффициенты регрессии можно считать весами. Поскольку в уравнении регрессии благодаря замене β_0 на $\beta'_0 \bar{z}$ учтено общее среднее по блокам, это уравнение можно использовать и на других площадях, несмотря на отличие среднего значения по этим новым площадям. Полученное уравнение регрессии используется в качестве скользящего среднего для неотработанной части месторождения; оно применяется последовательно к различным блокам в этой части.

Успех применения метода зависит от двух условий. Во-первых, от того, насколько хорошо уравнение регрессии выражает содержание полезного компонента в уже освоенной части месторождения, т. е. от качества аппроксимации моделью регрессии результатов разработки. Во-вторых, от сходства условий в отработанной и неотработанной частях, т. е. от возможности переноса уравнения регрессии на неотработанную часть. К этому следует добавить влияние на оценку коэффициентов β_0 (или w_i) размеров блоков, их взаимного расположения и количества проб в них.

Подводя итог рассмотрению моделей пространственной изменчивости свойств геологических объектов, можно заключить, что в исследовательских задачах используют главным образом модели, основанные на аппроксимации наблюдений тем или иным аналитически заданным классом функций от двух независимых переменных с постоянными на всей области задания функции коэффициентами. Соответственно учитываются все имеющиеся данные, которые и оказывают влияние на оценку коэффициентов. Локальная компонента сама по себе представляет интерес. В задачах оценивания используются модели, учитывающие в основном локальные свойства поля. На оценку оказывают влияние лишь ближайшие наблюдения. Это модели интерполяции типа взвешенного скользящего среднего. Отметим, что взвешенные скользящие средние нередко рассматриваются как один из вариантов тренд-анализа. В этих случаях различают поверхности тренда типа двумерных регрессий и типа скользящих средних.

5.4. МОДЕЛИ КЛАССИФИКАЦИИ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Классификация, как известно, служит средством упорядочения и систематизации исследуемого материала. Здесь речь пойдет о классификации геологических объектов на количественной основе. Подобные задачи чаще всего возникают в геологии в связи с проблемой выбора критериев, поисковых признаков и т. п., обуславливающих отличие объектов, представляющих геологический интерес (месторождения, залежи, нефтегазоносные горизонты, рудоносные объекты и т. д.), от других объектов, не представляющих интереса. Выделение перспективных объектов из общего их числа по системе информативных признаков служит мощным средством прогноза, поиска месторождений, их предварительной оценки и решения других аналогичных вопросов. Классификация здесь решает задачи диагностики объектов, их идентификации.

Классификация заключается в отнесении рассматриваемых объектов к определенным классам. Проводится она по комплексу признаков, которыми охарактеризован каждый объект. Описание объекта совокупностью значений признаков называют его образом. Принадлежность объекта (образа) тому или иному классу может получить отражение в ряде признаков. Их выделение и выбор — одна из главных проблем методов классификации. Основной вопрос, который возникает при этом, — какие

признаки уместны, какие из них действительно позволяют проводить классификацию.

С одной стороны, признаки желательно выбирать так, чтобы они отражали действительно существенное, закономерное в разделении объектов на классы, связанное с представлениями об их природе. Но, с другой стороны, сделать это, как правило, не удастся, так как чаще всего задача заключается в классификации по косвенным признакам. Важность признаков определяется целью исследования. Разным целям могут отвечать разные наборы признаков. Поэтому выбору признаков предшествуют качественный анализ материала и определение цели классификации.

Естественно, что формализованных методов ответа на вопросы, связанные с выбором исходного набора признаков, не существует. Здесь так или иначе используются априорные знания, интуиция исследователя, метод проб и ошибок, накопленный опыт и т. д. Важно, чтобы в минимальном наборе признаков была сконцентрирована максимальная информация о различии классифицируемых объектов. Иными словами, существенным является то обстоятельство, чтобы объекты, принадлежащие одному классу, по набору характеризующих их признаков, несмотря на свойственную этим признакам изменчивость, действительно были отнесены к одному классу. Для этого признаки должны быть репрезентативными.

5.4.1. ХАРАКТЕРИСТИКА МОДЕЛЕЙ

В зависимости от специфики задачи используются признаки множества типов. Если признаки имеют детерминированную природу, то они легко поддаются определению и легко интерпретируются. Применение методов классификации в геологии, как правило, связано с такими признаками. В качестве примера можно отметить признаки, характеризующие состав пород, продуктивные и пустые структуры, нефтеносные и водоносные горизонты и т. д. Однако приходится сталкиваться и с более сложными признаками. Классификация каротажных диаграмм при сопоставлении разрезов, классификация разного рода геологических процессов требуют признаков, основанных на форме, структуре, статистических связях, разложении в ряд исходных данных и т. д. С этой целью проводится предварительная обработка исходных данных, например, выделение факторов, оценка связей и т. д. В качестве признаков в этом случае могут быть использованы соответствующие параметры, оцененные по наблюдениям, или различного рода линейные комбинации из заданных признаков.

Мы уже упоминали о том, что очень часто цель исследования состоит в отыскании тех признаков, которые порождают различия между классами. В этом случае стоит задача выделения и исключения без ущерба для классификации из первоначального набора признаков тех из них, которые не дают существенного эффекта при диагностике. Эта задача может быть решена уже формальными методами. В геологических исследованиях признаки чаще всего рассматриваются как статистические величины. Соответственно для выделения из исходного набора признаков наиболее важных используют различного рода статистические критерии

оценки адекватности набора признаков. Если признаки можно рассматривать как производные элементы и их отношения, то для анализа привлекают лингвистические методы. Эти методы редко применяются в геологических исследованиях.

Задача выделения наиболее информативной комбинации признаков имеет прямое отношение к центральной проблеме методов классификации, а именно: до каких пор можно ожидать выигрыша от увеличения числа признаков. Этой проблеме в геологических исследованиях уделено мало внимания. Дело в том, что большое число признаков увеличивает трудоемкость сбора данных и затрудняет процесс их обработки (в том числе и на ЭВМ). Но, с другой стороны, если к малому набору признаков добавить новые, раздвигая сила множества признаков может увеличиться и соответственно улучшится качество классификации.

Однако это не может продолжаться до бесконечности. Возможен противоположный эффект, ведь увеличение числа признаков означает увеличение числа параметров, требующих оценивания. Вследствие этого ошибки оценивания будут возрастать, что может привести к понижению качества классификации. Таким образом, существует оптимальный набор признаков. Однако проблема заключается в том, что вряд ли возможно на основе вышеупомянутых формальных методов выбрать оптимальное множество признаков из числа исходных, так как эти методы не учитывают ошибок оценивания параметров.

В большинстве задач классификации классы считаются дискретными, т. е. объект либо является, либо не является элементом некоторого класса. Применительно к таким классам существенным является то обстоятельство, что по выбранному множеству признаков образы одного класса в результате классификации действительно должны быть отнесены к одному классу. Иными словами, объекты, принадлежащие одному и тому же классу, несмотря на варьирование значений их признаков, должны быть сходными, в то время как объекты, принадлежащие разным классам, должны быть разнородными (несходными). Это означает также, что исходные признаки, характеризующие объекты одного класса, эквивалентны (хотя и различны) относительно соответствующего образа. На языке теории множеств в этом случае говорится, что на множестве объектов одного класса должно существовать некоторое отношение эквивалентности.

При выполнении некоторых условий такие понятия, как изменчивость объектов одного класса и различия между объектами разных классов, можно определить строго. Чаще всего для этого используют многомерное пространство. Дело в том, что набор признаков, которыми охарактеризованы объекты, задает многомерное пространство, каждая координата которого представляет один признак (признаковое пространство). В таком случае каждый объект задается некоторой точкой этого пространства. Понятия сходства и разнородности, очевидно, можно связать с тем, чтобы объекты попадали в один класс, если расстояние (отдаленность) между соответствующими точками «достаточно мало», и, наоборот, попадали в разные классы, если расстояние между точками «достаточно велико».

С этой целью вводят понятие расстояния. В качестве функций расстоя-

ния используют евклидово расстояние, метрику абсолютных значений, расстояние Махаланобиса (его можно интерпретировать как евклидово расстояние между классами, взятое с весами, определяемыми дисперсией разности средних значений признаков) и др. Используют также различные эвристические меры отдаленности — коэффициент дивергенции, меру Джефриса—Матуситы и др. В терминах расстояний объекты, находящиеся на небольшом расстоянии друг от друга, считаются сходными, а разделенные расстоянием — разными. Кроме мер расстояния вводят также меры сходства. К их числу относятся различные коэффициенты ассоциации, сходства, сопряженности и т. д. Мерой линейного сходства очень часто служит коэффициент корреляции. В геологических исследованиях нередко применяют функцию от евклидова расстояния — потенциальную функцию.

Решение задачи классификации зависит от положения классов в многомерном пространстве признаков. Объекты, обладающие малой изменчивостью, т. е. малыми вариациями значений признаков, определяются небольшим характеристическим объемом в пространстве признаков (центром этого объема служат средние значения признаков). Чаще всего предполагается, что все объекты данного класса располагаются в пределах малого характеристического объема (гипотеза компактности). Сильная изменчивость ведет к увеличению этого объема. Очевидно, что наиболее просто задача классификации решается в том случае, когда различные классы далеко отстоят друг от друга и занимают непересекающиеся характеристические объемы. Однако практически эти объемы часто не являются малыми, а области, занимаемые объектами разных классов, пересекаются. К этому следует добавить, что сам процесс классификации приводит к получению плохо определенных областей.

Не все методы классификации ограничиваются использованием свойств многомерного пространства. Как уже отмечалось, эти методы касаются дискретных классов. Однако существуют (что характерно и для геологии) и так называемые нечеткие классы. В этом случае каждый объект характеризуется принадлежностью к одному или нескольким классам. Функция принадлежности классу может принимать любое значение в диапазоне 0—1. Подходы, основанные на нечетких понятиях, преследуют цель квантифицировать и формализовать всякого рода неопределенные и интуитивные утверждения типа «теплый климат» или «существенная перестройка земной коры». Климат может быть элементом множества жарких климатов со значением принадлежности 0,8 и одновременно элементом множества холодных климатов со значением 0,1 (сумма этих двух значений не обязательно должна быть равна единице). В теории нечетких множеств вводятся новые определения для объединения и пересечения множеств. Объект классифицируется с учетом всех возможных классов.

Особое место занимают лингвистические методы классификации. Здесь признаками служат непроеизводные элементы, а также отношения между ними, характеризующие структуру объекта. Для описания объектов через непроеизводные элементы и их отношения используется некий «язык» объектов. Правила такого языка, позволяющие характеризовать объект

непроизводными элементами, называются грамматикой. Каждый объект представляется некоторым предложением в соответствии с действующей грамматикой. Синтезировать грамматику можно, опираясь на априорные сведения об объектах и их принадлежность тому или иному классу либо на результаты анализа некоторого конечного множества репрезентативных объектов (вывод грамматики).

Среди подходов к классификации можно выделить два наиболее существенных. Они получили название распознавания образов соответственно с учителем и без учителя. Первый из них характеризуется тем, что в распоряжении исследователя имеется множество объектов, охарактеризованных соответствующими признаками; при этом известен класс, которому принадлежит каждый объект. Такое множество объектов называют обучающим множеством. Говорят, что классификация в этом случае проводится с учителем, который знает, к каким классам на самом деле относятся те или иные объекты. В процессе обучения необходимо научиться относить имеющиеся объекты в их «правильные» классы. Обучающее множество должно быть репрезентативно относительно всех возможных объектов, входящих в данные классы, с тем чтобы другие объекты, не вошедшие в обучающее множество, относились в результате классификации к «правильным» классам.

Случай распознавания без учителя возникает, если неизвестна принадлежность объектов, подлежащих анализу, к тому или иному классу. Часто неизвестно и число классов, что связано с неясностью отличия некоторых классов друг от друга. Для решения таких задач используются методы кластерного анализа. В геологической литературе задачи, связанные с первым подходом, часто называют задачами разделения или дискриминации, а связанные со вторым подходом — задачами классификации, а методы их решения — методами численной таксономии.

Методы классификации, как с учителем, так и без учителя, имеют в своей основе определенную математическую процедуру классификации (принятия решения), которая позволяет классифицировать вновь предъявляемые незнакомые объекты. Такую процедуру называют решающим или классифицирующим правилом. Обычно считается, что задано некоторое множество решающих правил и задача заключается в том, чтобы найти в этом множестве лучшее в некотором смысле правило. С этой целью вводят определенный критерий оптимальности, которому должна удовлетворять классификация. С точки зрения используемых решающих правил методы классификации имеет смысл подразделить на три группы: статистические, нечеткие и лингвистические.

5.4.2. СТАТИСТИЧЕСКИЕ (АНАЛИТИЧЕСКИЕ) МЕТОДЫ

Статистические методы имеют много аспектов. Они предполагают наличие определенных априорных сведений, касающихся возможных плотностей распределения значений признаков, адекватности признаков и т. д. Естественно, что в этом случае значения признаков рассматриваются как случайные переменные, а области в признаковом пространстве,

соответствующие тому или иному классу, — как плотности распределения образов. В качестве исходных данных используется некоторое множество объектов, каждый из которых охарактеризован определенным набором признаков (их значениями).

Таким образом, под статистической моделью для задачи классификации (отсюда — статистические методы классификации) понимается ситуация, при которой каждый класс идентифицируется с k -мерной случайной величиной. Предполагается, что имеется конечное число $p \geq 2$ совокупностей (p случайных k -мерных величин) с функциями распределения $F_1(\mathbf{x}), \dots, F_p(\mathbf{x})$; информация о совокупностях составляется из тех или иных априорных допущений о функциях $F_i(\mathbf{x})$ и из наблюдений $\mathbf{x}_1^i, \dots, \mathbf{x}_{n_i}^i$ [здесь $\mathbf{x}_1^i, \dots, \mathbf{x}_{n_i}^i$ — выборка объемом n_i из генеральной совокупности i с распределением $F_i(\mathbf{x})$ в k -мерном пространстве]; имеется наблюдение \mathbf{z} над одной из совокупностей \mathbf{x}_i ($i=1, 2, \dots, p$).

Задача классификации — указать критерий для определения, к какой совокупности относится наблюдение \mathbf{z} . Среди статистических методов наиболее известны дискриминантный и кластерный анализ (в последнем модель несколько видоизменяется).

5.4.2.1. Дискриминантный анализ

Дискриминантный анализ имеет целью построение оптимальной поверхности (дискриминантной функции) в пространстве признаков, разделяющей все пространство на области, соответствующие объектам разных классов. Эти поверхности (функции) служат границами между областями и обеспечивают оптимальное разделение объектов, относящихся к разным классам, т. е. оптимальную классификацию объектов с неизвестной классовой принадлежностью. Правило классификации в этом случае заключается в определении по величине дискриминантной функции принадлежности неизвестного объекта \mathbf{z} к той или иной из выделенных областей. Принадлежность к соответствующей области означает принадлежность соответствующему классу.

Формирование дискриминантной функции, разделяющей два или несколько классов объектов, основывается на учете некоторого критерия, который можно назвать критерием качества решающего правила. Наиболее распространенным критерием является ошибка классификации. Лучшим будет то правило, такая дискриминантная функция, которая минимизирует эту ошибку. Ошибка классификации представляет собой вероятность неправильной классификации произвольного объекта. В более общем случае минимизируют потери, или средний риск, связанные с неправильной классификацией. Минимизация ошибки основывается на оценке плотностей распределения образов. В зависимости от способов оценивания плотности распределения выделяется ряд методов построения дискриминантной функции, параметры которой в свою очередь являются функциями от параметров распределений соответствующих совокупностей. Так, разделение на основе использования плотностей нормального распределения проводится с помощью линейной и квадратичной дискриминантных функций.

При решении реальных задач параметры распределения оцениваются по обучающему множеству. Квадратичная разделяющая функция сводится к линейной при равенстве ковариационных матриц классов. При линейной дискриминации (в случае нормального распределения и равенства ковариационных матриц) вероятность правильной классификации очень просто определяется через уже упомянутое расстояние Махаланобиса — «обобщенное расстояние» между совокупностями. Если ковариационные матрицы не равны (квадратичная дискриминантная функция), то связь между обобщенным расстоянием и вероятностью ошибочного отнесения объекта не выражается простой формулой, а имеет более сложный вид.

Если различия между классами [между распределениями $F_i(x)$] обусловлены больше различием в средних, чем в ковариационных матрицах, линейные функции оказываются предпочтительнее, так как они более устойчивы к нарушению предположений о нормальности распределения. Как линейная, так и квадратичная дискриминантные функции достаточно полно учитывают коррелированность признаков, что сильно повышает их классификационную способность и тем самым уменьшает долю неверных классификаций. Это делает особенно необходимым и желательным их применение к геологическим задачам, где альтернативные классы трудноразличимы.

Линейная и квадратичная дискриминантные функции являются оптимальными, если истинные распределения нормальны. С другой стороны, гиперплоскость, гиперсфера и гиперповерхность второго порядка являются оптимальными границами не только для нормального, но и для некоторых других распределений, в частности, для распределений Пирсона типов II и VII. Поскольку эти распределения могут служить хорошим приближением для широкого класса распределений, область применимости указанных дискриминантных функций оказывается достаточно обширной.

Линейные дискриминантные функции широко применяются при решении геологических задач, связанных с классификацией объектов. Это наиболее известный и популярный метод. Использовался этот метод и в наших исследованиях в связи с изучением зависимости коллекторских свойств от литолого-петрографических характеристик пород [25] и в связи с диагностикой газо- и водоносных пластов по комплексу геофизических данных [18]. Значительно меньше примеров насчитывает применение квадратичной дискриминантной функции. Нам известно лишь небольшое число таких исследований, например [34].

Изложенные методы часто называют интегральными; в них предположения о классифицируемых распределениях $F_1(x), \dots, F_p(x)$ настолько сильны, что вид распределения $F_i(x)$ (всюду или только в окрестности поверхности деления), как правило, конкретизируется с точностью до конечного числа параметров. Эти методы различаются как характером предположений о распределении $F_i(x)$, так и набором поверхностей, используемых для разделения.

Если вид классифицируемых распределений неизвестен и нельзя сделать о нем каких-либо обоснованных предположений, кроме самых общих,

то используются локальные (непараметрические) критерии классификации. Локальные методы основаны на непараметрических оценках в точке z плотностей $f_i(z)$. Основной принципиальный недостаток локальных методов заключается в неполном использовании информации при оценке $f_i(z)$. Фактически учитываются лишь точки, входящие в окрестность z , причем эта окрестность сужается с ростом числа наблюдений. Локальный подход к тому же более громоздкий, так как требует запоминания всей обучающей последовательности. Вместе с тем локальные методы имеют колоссальное преимущество универсальности и состоятельности. Поскольку эти методы не ограничены видом распределения, про них говорят, что они свободны от вида распределения признаков.

В геологических исследованиях из непараметрических методов наиболее широкое применение нашел последовательный статистический анализ Вальда в модификации Е. В. Гублера и А. А. Генкина [15]. В качестве примера можно указать на нашу работу [18], где этот метод использован для распознавания газо- и водоносных пластов по комплексу геофизических данных.

Надо иметь в виду, что в модифицированном методе основу составляют не последовательно появляющиеся наблюдения, а последовательность признаков. Соответственно роль наблюдений в k -мерной совокупности выполняют сами признаки, которые должны быть независимыми. Тем самым здесь не принимаются во внимание различия между совокупностями, обязанные коррелированности признаков. Требование независимости сводит задачу о влиянии совокупности признаков к учету влияния каждого отдельного признака, изолированно от всей их совокупности. Результат, кроме того, в существенной мере зависит от требуемой этим методом градации значений признаков. Неоднозначность результата особенно усиливается при малом числе наблюдений. Зависит результат и от порядка рассмотрения признаков, а также, естественно, и от их количества. Метод практически неприменим в случаях, когда распределения по каждому из признаков не пересекаются.

Во многих применяемых на практике методах дискриминантного анализа не используется описанный выше принцип минимизации ошибки, основанный на интегральных или локальных оценках плотности распределения. Критерии, заложенные в этих методах, часто непосредственно связаны с имеющимися исходными данными. Эти критерии называют эвристическими. Они требуют меньше априорной информации о плотности распределения или используют другие априорные сведения. Известно большое число эвристических методов, различающихся критерием среднего риска (минимизируемой функцией), требуемыми априорными сведениями, числом оцениваемых параметров и вычислительной сложностью. Мы остановимся на трех, представляющих наибольший интерес методах (вернее, на группах методов).

Одним из них является метод (или процедура) классификации, получивший название правила ближайшего соседа. Согласно ему объект зачисляется в тот класс, которому принадлежит его ближайший сосед из обучающего множества (правило ближайшего соседа) или большинство из его L ближайших соседей (правило L ближайших соседей). В

большинстве случаев мерой близости точки в k -мерном пространстве к другой точке или конечному множеству точек служит задаваемая на пространстве исходных признаков функция, зависящая от расстояния между точками. Ее называют потенциалом или потенциальной функцией. Естественно, что потенциальные функции могут быть заданы по-разному, что приводит к многообразию этих методов.

Разделяющая поверхность отыскивается путем организации рекуррентной процедуры. На каждом шаге классифицируемое наблюдение индексируется знаком плюс (+) или минус (-) в зависимости от того, к какому классу оно относится (для простоты рассматриваются всего два класса). Принадлежность же к классу определяется тем, к какому множеству точек (или к какой точке) данная точка ближе в смысле введенной потенциальной функции. В качестве очередного приближения разделяющей функции на этом шаге принимается суммарный потенциал (потенциальное поле), определяемый через разность мер близости данной точки к одному и другому классу и соответствующий предъявляемым объектам (наблюдениям). Разделяющая функция находится как поверхность, на которой суммарный потенциал принимает нулевое значение. Недостаток этого метода заключается в том, что все обучающие объекты должны использоваться при получении каждого классификационного решения.

Этот метод часто называют методом потенциальных функций. Под таким названием он вошел и в геологическую литературу. Используется метод в геологических исследованиях сравнительно редко; примеры можно найти в работе [34].

Следующей группой являются методы, основанные на оптимизации разделяющей поверхности по какому-либо критерию ошибки. Эти эвристические методы сводятся к оптимизации параметров выбранной разделяющей функции (линейной, квадратичной или иного вида). В качестве критерия ошибки используют различные оценки. Простейшая возможность заключается в подсчете числа неправильно классифицированных объектов из обучающего множества. Эта оценка является «оптимистической».

Другая оценка связана с разделением совокупности объектов на обучающую и контрольную (метод утаивания имеющейся информации). Обучающая совокупность используется при этом для построения разделяющей функции, а контрольная служит для оценки ее качества. Эта оценка является «пессимистической» по отношению к разделяющей функции, построенной на основе полной совокупности объектов, так как качество последней в среднем выше качества разделяющей функции, сформированной на основе одной только обучающей совокупности.

Компромиссом является метод, который иногда называют методом скользкого контроля или методом исключения из обучения и контроля по одному объекту. Он предусматривает исключение из обучающего множества лишь одного объекта, который затем используется для оценки качества разделяющей функции. Процедура последовательно повторяется для всех объектов обучения. В этом случае оценка классификационной ошибки получается почти несмещенной. Возможны также варианты изъятия и использования для контроля нескольких объектов.

В качестве критерия ошибки можно использовать не только число неправильно классифицированных объектов. Таковым может являться, например, среднее или «взвешенное» расстояние между обучающим множеством и разделяющей функцией.

Иногда вместо ошибки имеет смысл минимизировать ожидаемый эмпирический риск. Этот принцип реализуют алгоритмы, основанные на вычислении оценок (сокращенно АВО). Алгоритмы этого класса построены на естественном эвристическом принципе, которым человек часто пользуется в своей практической деятельности, а именно, на принципе прецедентности или частичной прецедентности, лежащем в основе принятия решения по аналогии: в сходных ситуациях можно действовать аналогично. В качестве исходных признаков здесь рассматриваются не сами признаки, а различные их сочетания. Тем самым учитывается информация, заключенная в комбинации признаков, что повышает «различающую» способность процедур, так как опыт свидетельствует, что основная информация о различии объектов заключена в сочетании признаков, в их определенной комбинации.

При использовании АВО вычисляются приоритеты (оценки сходства) или функции принадлежности объекта тому или иному классу, характеризующие близость распознаваемого объекта к объектам разных классов по системе различных сочетаний признаков, входящих в описание объекта. Для вычисления оценок, определяющих принадлежность распознаваемого объекта одному из заданных классов, имеются простые аналитические формулы, заменяющие сложные переборные процедуры. При вычислении оценок можно учитывать различия в представительности или важности признаков. С этой целью вводятся числовые коэффициенты — веса признаков и веса объектов. Способы введения таких весов чаще всего задаются из эвристических соображений.

Функционал качества классификации и соответственно решающее правило могут принимать различные формы. В частности, классифицируемый объект может быть отнесен к классу, которому соответствует максимальная оценка либо оценка, превышающая оценки всех остальных классов не менее, чем на определенную пороговую величину. Критерием может служить и отношение соответствующей оценки к сумме оценок всех остальных классов. Пороговое значение этого отношения также может быть задано.

Среди АВО наибольшую известность приобрели так называемые тестовые алгоритмы. Одним из них является алгоритм «Кора». Из-за вычислительной сложности (объема перебора) в нем ограничиваются конъюнкциями сложности три. Этот алгоритм плодотворно использован при разделении по промыслово-геофизическим данным нефте- и водоносных пластов [14]. Различные подклассы АВО, в том числе и тестовые, нашли применение в различных областях геологии, в основном при изучении и сравнении месторождений различного типа [33].

Методы классификации в целом получили название методов распознавания образов. Естественно, что возникает вопрос о выборе наилучшего из них, в том числе и лучшего из обсуждаемых методов дискриминантного анализа. Мы до сих пор говорили лишь о выборе наилучшего

алгоритма из их множества в пределах определенной модели по экстремуму функционала качества. Такой выбор позволяет решать успешно многие задачи, но каждую из них отдельно. Стоит вопрос о выборе наилучшего алгоритма для решения того или иного класса задач. Здесь уже речь идет о принципах, на основе которых может строиться множество алгоритмов стандартным образом. Предложен ряд подходов, позволяющих выбирать корректные алгоритмы для некоторых подклассов задач. Однако универсального подхода к решению задач распознавания пока не существует; его поиск, возможно, бессмыслен. Для большинства задач, относящихся к достаточно обширным направлениям, общих решений не существует.

В качестве некоторого выхода из затруднений предлагается использовать адаптивные разделяющие функции, видоизменяемые в процессе решения задачи. Изменения в основном вносятся в значения параметров. Этой же цели служит последовательное распознавание, когда на тех или иных этапах исследования изменяются объекты обучения или алгоритм распознавания. Причем результаты предыдущего шага учитываются на последующем. Процедуры последовательного распознавания использовались для описания нефтяных месторождений [20]. К этим же приемам относится сочетание дискриминантного анализа с последовательной процедурой Вальда.

Главным из всех затруднений распознавания является, однако, проблема выбора признаков. Мы уже говорили о том, что выбор первоначальных признаков — это неформализованная процедура. Но существуют методы выбора наиболее важных признаков из исходного набора. Этих методов много, и они очень часто связаны с изложенными выше методами построения разделяющей поверхности. Известно несколько критериев выбора признаков. Естественным является критерий оценки ошибки классификации, связанной с тем или иным набором признаков.

Одним из наиболее часто используемых является критерий, основанный на отношении внутриклассовой дисперсии признаков и межклассовой. Применение этого критерия эффективно в тех случаях, когда различия между классами вызываются главным образом различиями средних значений. Метод требует перебора всех вариантов разбиения изучаемого набора признаков на две части — на информативные и неинформативные. Теоретические вопросы таких методов излагались и в геологических работах, например [34].

В качестве одномерного критерия разделяющей силы признаков часто используют критерий Фишера. В геологических исследованиях он служит для упорядочения признаков, играя роль оценки их информативной емкости [25]. Однако в этом методе выбора наиболее важных признаков не учитываются связи между ними. Не учитываются связи и в модифицированном последовательном анализе, где для установления степени различия используется мера информативности Кульбака. Ею устанавливается различие между распределениями признаков, а не только различия средних значений.

Для учета связей между признаками используют многомерные критерии. Наиболее распространенным из них является расстояние Маха-

ланобиса. Наиболее информативными считаются те признаки, которые вносят максимальный вклад в величину этого критерия. Этот способ оценки дискриминативности признаков требует много вычислений, так как после исключения из первоначального набора признаков наименее ценного относительная ценность отдельных признаков в оставшемся наборе становится иной. Удобством отличается вычисление информационных весов признаков в АВО.

Следует заметить, что вопрос об отборе наиболее информативных признаков оказался намного сложнее, чем это можно было предполагать. Кардинального решения этой задачи еще нет. Применяя различные методы, можно в соответствии с тем или иным критерием определить и отбросить плохие признаки, сформировав тем самым меньший набор лучших признаков. Но при этом могут быть упущены и хорошие признаки. И уж тем более нельзя с помощью этих процедур найти новые хорошие признаки.

Не следует думать, что дискриминантный анализ решает только задачи классификации. К задачам классификации сводятся многие другие задачи, для которых не удается синтезировать модели традиционными математическими средствами из-за недостатка имеющейся информации. В геологических исследованиях это находит отражение в том, что на основе определения информативности признаков и их сочетаний для объектов разных классов выносятся суждения о процессах, предопределивших различие изучаемых природных объектов. Так, в работе [25] методы дискриминантного анализа позволили установить процессы, влияющие на пористость терригенных пород, и оценить степень воздействия таких процессов, как диагенез и катагенез, выветривание, транспортировка (длина пути переноса), скорость переноса и захоронения осадков.

5.4.2.2. Кластерный анализ

Кластерным называется анализ множества объектов, классовая принадлежность которых неизвестна. Его задача заключается в разбиении заданного множества объектов на некоторое число классов (кластеров) так, чтобы каждый объект принадлежал одному и только одному классу. Иными словами, это есть задача идентификации классов в заданном множестве объектов. Построение кластеров можно рассматривать как задачу распознавания образов без учителя. Полученные в результате кластеризации классы могут не представлять собой множество объектов определенного типа, отвечающих определенной системе классификации. Это может быть просто некоторая аналитическая группировка на формально-количественной основе. Все зависит от цели анализа. В зависимости от цели выделение кластеров может быть сведено к выделению групп с высокой плотностью распределения и низкой дисперсией или к обнаружению связанных точечных структур и т. д.

До сих пор нет точного определения кластерного анализа. Одной из причин этого является широкое использование кластерного анализа в совершенно разных областях знания, в связи с чем важное значение в решении задач кластеризации имеет их специфика. Здесь большую роль

играет инициатива исследователя. В литературе описаны сотни методов кластерного анализа. Многообразие их проистекает из того, что выявление кластеров во многих отношениях является «искусством». Многие из тех, кто использует приемы этого анализа, сами создают новый метод. Разновидности кластерного анализа определяются многими причинами. Они связаны как с характером анализируемых данных, так и с приемами образования групп по количественному сходству.

Среди показателей количественного сходства следует в первую очередь выделить меру сходства или меру расстояния между объектами либо кластерами. На этой мере построено большинство алгоритмов кластеризации. В этом случае классифицируемые образы задаются в виде числовых векторов. Кроме подхода, основанного на понятии расстояния, используются и другие. В частности, возможен теоретико-графовый подход, связанный с использованием ряда фундаментальных понятий теории графов.

В литературе описано много мер сходства, в основу которых положено понятие расстояния. Кластеры выбираются так, чтобы расстояния между отдельными образами в каждом кластере минимизировались, а расстояния между образами, относящимися к двум разным классам, были как можно больше. Эти меры основаны на геометрических особенностях кластеров в многомерном пространстве и могут быть охарактеризованы расстоянием между центрами кластеров, количеством образов, вошедших в каждый кластер, внутрикластерными и межкластерными дисперсиями, ближайшим и наиболее удаленным от центра кластера образами, минимальным и максимальным расстояниями между кластерами и т. д.

Критерии кластеризации весьма разнообразны, что порождает в свою очередь множество методов анализа. Критерии кластеризации либо воспроизводят некие эвристические соображения, либо основываются на минимизации (или максимизации) какого-либо показателя качества. В кластерном анализе не существует однозначного количественного критерия, подобного ошибке классификации в дискриминантном анализе. При эвристическом подходе решающую роль играют интуиция и опыт. При таком подходе предусматривается задание набора правил, которые обеспечивают использование выбранной меры сходства для отнесения образов к одному из кластеров. Евклидово расстояние хорошо приспособлено для подобного подхода.

Этими правилами, например, может диктоваться отнесение двух объектов к одному классу, если расстояние между ними не превышает некоторой пороговой величины, которая тем самым определяет максимально допустимый диаметр подмножества, образующего кластер. Может быть также использовано правило, согласно которому среди всех возможных объединений кластеров (а ими могут быть и отдельные объекты) выбираются такие два, что максимальное расстояние между точками одного кластера и точками другого минимально (алгоритм максиминного расстояния). Таких примеров можно привести много.

Подход к кластеризации, предусматривающий использование показателя качества, связан с разработкой процедур, которые обеспечивают минимизацию или максимизацию выбранного показателя качества. Од-

ним из наиболее популярных является показатель, который определяет общую сумму квадратов отклонений характеристик всех образов, входящих в некоторый кластер, от соответствующих средних значений по кластеру (сумма квадратов ошибок).

Другим критерием качества может служить мода распределения. Идея методов, основанных на отыскании моды распределения, состоит в том, что кластеры соответствуют максимумам плотности распределения данных. Поэтому необходимо оценивать плотность распределения и отыскивать все ее максимумы (моды). Каждый максимум плотности распределения соответствует некоторому кластеру. Результаты кластеризации в этом случае тесно связаны со способами оценивания плотности распределения. Если число кластеров известно, в качестве критерия можно использовать отношение внутрикластерной дисперсии к межкластерной.

Существуют и другие показатели качества. Вот некоторые широко распространенные показатели: среднее квадратов расстояний между образцами в кластере; среднее квадратов расстояний между образцами, входящими в разные кластеры; показатели, основанные на понятии матрицы рассеяния; минимум и максимум дисперсии. Нередко используются алгоритмы, основанные на совместном привлечении эвристического подхода и показателя качества.

Существенную роль в разнообразии методов кластеризации играют также принципы процедур кластеризации. Эти принципы могут предусматривать либо объединение единичных образов в кластеры, либо разделение всей совокупности объектов на кластеры. Почти во всех руководствах по кластерному анализу описывается итеративный самоорганизующийся метод анализа данных — ИСОМАД. Он основан на комбинации показателя качества со вспомогательными эвристическими процедурами. В основу метода положена идея, что объекты принадлежат кластеру с наиболее близким средним значением, т. е. алгоритм минимизирует показатель качества, определенный как сумма квадратов расстояний всех точек, входящих в кластерную область, до центра кластера.

Процедура начинается со случайного (произвольного) разбиения объектов на кластеры, но так, чтобы центры кластеров были окружены объектами. В качестве таких центров выбираются некоторые объекты из заданного их множества. На втором шаге процедуры проводится отнесение объектов к тем кластерам, центры которых находятся от них ближе всего. После этого подсчитываются новые средние значения для кластеров и выполняется второй шаг процедуры. Эта процедура быстро сходится. Результат кластеризации может зависеть от выбора начальных средних значений для кластеров: различное значение исходных средних может привести к различным результатам кластеризации. Если число кластеров априори не известно, процедуру следует повторить для разного числа кластеров.

При объединении отдельных объектов в кластеры наиболее часто используется иерархическая схема кластеризации. При ее применении обычно вначале каждый объект рассматривается как отдельный кластер. Затем два ближайших (наиболее похожих) кластера объединяются. Этот шаг повторяется вплоть до получения единственного кластера. В

результате строится некоторая разновидность дерева, называемая часто дендрограммой. Она отражает процесс последовательного объединения кластеров с учетом соответствующей меры кластеризации.

Различие процедур вызвано не только различием мер кластеризации, но и выбором, к примеру, начальных (начальной) точек кластеризации. Это может быть случайный выбор как одной, так и нескольких точек. В качестве начальной может выбираться и не случайная, а так называемая «типическая» точка. Для определения «типических» точек часто пользуются статистикой потери информации.

Задача разбиения (объединения) объектов на некоторое (заданное или не заданное) число непересекающихся подмножеств, которое удовлетворяет некоторому критерию кластеризации (оптимальному значению целевой функции), может решаться так называемым методом полного перебора, заключающимся в полном переборе всех возможных разбиений (объединений) на то или иное число кластеров и выбора из них оптимального. Практически этот метод трудноосуществим даже для небольшого числа кластеров и наблюдений. В качестве альтернативы полного перебора предложены другие методы, составляющие содержание так называемого математического программирования. Заметим, что большинство из перечисленных выше методов кластеризации дает оптимальное решение в классе, меньшем, чем класс всех возможных разбиений (кластеров), поэтому нет гарантии, что найденное решение будет оптимальным и в классе всех разбиений.

В геологических исследованиях кластерный анализ, как правило, называют анализом групп, особенно в переводной литературе. В качестве меры сходства чаще всего берут коэффициент корреляции. Значительно реже кластеризация основывается на евклидовом расстоянии. В силу разномасштабности признаков исходные данные до вычисления расстояний подвергают стандартизации. В противном случае расстояние определялось бы переменной, имеющей наибольшее значение. Характерной особенностью геологических исследований является то обстоятельство, что кластерному анализу подвергаются не только объекты, но и признаки, т. е. выделяются группы взаимосвязанных (близких) признаков.

Процедуры группировки (кластеризации), используемые в геологических исследованиях, также основаны на разных принципах. Группы могут формироваться так, чтобы корреляция между всеми входящими в одну группу переменными (или объектами) была не ниже некоторого эвристически заданного уровня или чтобы высокая корреляционная зависимость наблюдалась между членами одной и той же группы, а между каждым из ее объектов и любым не принадлежащим этой группе образом зависимость была бы слабой.

Часто прибегают к построению дендрограмм. Объединение начинают с объектов, имеющих наибольшее сходство; после объединения двух объектов в одну группу их мера сходства со всеми другими объектами усредняется; так продолжается до полной классификации. Иногда вместо группового объединения пользуются наивысшим коэффициентом сходства между некоторым фиксированным объектом и любым объектом группы. Подмечено, что методы группового объединения дают обычно результаты

лучше, чем любой из методов простого объединения. Но четкого ответа на вопрос, какой из множества несколько различающихся по результатам методов предпочтительнее, в геологических исследованиях также не получено.

Кластерный анализ использовался при изучении осадочных и изверженных пород, при геоморфологических исследованиях, в палеонтологии и во многих других областях геологии [16, 32, 36].

5.4.3. НЕЧЕТКИЕ МЕТОДЫ

Выше мы уже касались нечетких множеств. Понятие нечеткого множества было введено американским ученым Л. Заде. Он полагал, что человеческие приемы принятия решений и способы рассуждений, опирающиеся на естественный язык, не могут быть описаны в рамках традиционных математических формализмов, ибо все, что связано с использованием естественного языка, имеет многозначную интерпретацию, а традиционной математике присуща строгая однозначность интерпретации.

Программа Заде состояла в построении нечеткой математики, способной моделировать человеческие рассуждения, человеческие способы решения задач и приемы принятия решений. Ставилась цель создать новую математическую дисциплину, основанную не на классической теории множеств, а на теории нечетких множеств, включающей в себя нечеткие аналоги всех основных математических понятий и необходимый формальный аппарат. Программа построения нечеткой математики, позволяющей формально описывать и исследовать нечетко определенные объекты, оперировать нестрогими, нечеткими понятиями, использовать расплывчатые утверждения, быстро нашла отклик среди исследователей из разных стран мира. Сейчас это одно из интенсивно развивающихся направлений.

Применение теории нечетких множеств к распознаванию образов расширяет возможности распознавания. В формализации нечеткости выделяются два основных подхода. Первый предполагает отказ от основного утверждения классической теории множеств о том, что некоторый элемент может либо принадлежать, либо не принадлежать множеству. При этом вводится специальная характеристическая функция множества — так называемая функция принадлежности, которая базируется на обобщении понятий принадлежности элемента множеству. Такое обобщение приводит к размыванию границ множества, а в предельном случае к появлению объекта с неопределенными границами.

В работах Заде функция принадлежности, указывающая на принадлежность некоторого элемента одному из множеств, может принимать любое значение в диапазоне 0—1. В более общем способе формализации нечеткости предполагается, что характеристическая функция множества изменится более сложным образом. Второй подход в формализации нечеткости предполагает описание нечеткости с помощью иерархии — семейства упорядоченных четких множеств.

Применительно к распознаванию образов нечеткость множества означает прежде всего, что мы имеем дело с классификацией нечетких объектов, когда принадлежность объектов обучающего множества к тому

или иному классу может быть указана нечетко, т. е. один и тот же объект может относиться к разным классам. Так, локальная структура определенного типа (морфология, строение разреза, условия формирования и пр.) может соответствовать нескольким разновидностям нефтяных месторождений (хотя бы по величине запасов), но также может быть и «пустой». Это обстоятельство находит отражение в значениях принадлежности ко всем указанным классам.

Надо иметь в виду, что значения принадлежности соответствуют «возможностям», но не вероятностям. Кроме того, включение таких сомнительных случаев в обучающее множество делает его более репрезентативным, что ведет за собой более точный результат классификации. Значения принадлежности для всех классов можно рассматривать как окончательный результат процесса распознавания, что повышает гибкость описания реальной ситуации. Возникающую в этом случае неопределенность можно устранить, относя объект к тому классу, которому соответствует наибольшее вычисленное значение принадлежности. Можно также доверить вынесение окончательного решения человеку.

В теории нечетких множеств объекты классифицируются по виду области значений функции принадлежности. При этом нечеткими могут быть и сами операторы агрегирования нечеткой информации, когда применяются различные операции объединения, пересечения и дополнения множеств.

Кроме нечетких множеств в распознавании используются нечеткие отношения. Они позволяют моделировать плавное, постепенное изменение свойств, а также неизвестные функциональные связи, выраженные в виде качественных зависимостей, особенно когда необходим качественный анализ с учетом различия в силе связей между объектами системы. При распознавании особый интерес представляют отношения сходства и различия, упорядочения или порядка. Понятия нечетких множеств и нечетких отношений находят применение в задачах кластерного анализа при экспертных оценках силы сходства.

Неопределенным может быть и само решение об отнесении объекта к одному из двух классов. С неопределенностью подобного рода связан так называемый показатель размытости нечеткого множества, который является показателем внутренней неопределенности, двусмысленности, противоречивости, что обусловлено неполной, частичной принадлежностью объектов множеству. Этот показатель отражает неопределенность, возникающую при выборе в плохо определенной ситуации.

Нечеткой может быть и сама мера, связывающая параметры объектов с тем или иным классом. Допускается также использование нечетких алгоритмов, описывающих приближенные рассуждения. Они являются полезным инструментом для приближенного анализа классифицируемых объектов и принятия решения.

Для нас интерес представляют нечеткие алгоритмы обучения. Мы уже говорили, что обучающие системы решают следующие задачи: построение образа в пространстве признаков, поиск критерия отбора признаков, принятие решения на основе определенного критерия. При обучении необходимо отвлечься от различий внутри классов и сосредоточить внимание

на отличии одного класса от другого. Известны различные группы нечетких алгоритмов обучения. Они основаны на получении разного рода рекуррентных соотношений. Критерий оценки выбирается так, чтобы его минимизация или максимизация отражала свойства классификации. Например, одна из моделей обучения формируется следующим образом. Предполагается, что в распоряжении классификатора имеется множество дискриминантных функций нескольких переменных. Система выбирает лучшее решение, которое выделяет то множество дискриминантных функций, которое дает минимум нераспознавания среди множества дискриминантных функций для данного множества образов.

В геологических исследованиях нечеткие методы могут оказаться весьма перспективными, так как неопределенность описания объектов системой признаков, возможность их отнесения к разным классам являются ситуацией довольно типичной. Однако в отличие от «классических» методов, указывающих принадлежность точно к одному классу, нечеткие методы пока не нашли применения в геологии. На них могут основываться так называемые экспертные системы; они содержат набор фактов (знания экспертов) и эвристические приемы, которыми пользуются эксперты. На одну из таких систем указывается в работе [50]. Отмечается, что с помощью этой системы было открыто месторождение молибдена. Любопытно, что геологи не согласились с выводами системы, однако эти выводы были подтверждены бурением.

5.4.4. ЛИНГВИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Лингвистические методы используют понятия теории формальных языков. Их также часто называют синтаксическими, структурными, методами теории формальных грамматик. Они представляют относительно новый и многообещающий подход к распознаванию образов.

Возникновение теории формальных языков в середине 50-х годов связано с именем Н. Хомского, которому принадлежат первые публикации по математическим моделям грамматик при исследовании естественных языков. Н. Хомский ставил перед собой совершенно определенную задачу создать формальные методы порождения грамматик, способных описывать естественные языки, правила построения синтаксически правильных фраз. Была надежда, что в случае удачи будет легко научить машину понимать естественные языки при машинном переводе и решении задач. Работа Н. Хомского сразу вызвала поток исследований, очень быстро выплеснувшихся из лингвистики. И хотя надежды, по общему признанию, пока не оправдались, побочные результаты этих исследований оказали важное влияние на другие области, в частности на распознавание образов.

Почти все рассмотренные выше аналитические методы распознавания отличаются строго количественным подходом к образам, почти полностью игнорирующим взаимосвязи между компонентами образа. Лингвистическим методам свойственно непосредственное использование структуры образов в процессе распознавания. Существование «структуры» необходимо для успешного применения этих методов.

В лингвистическом подходе образ составляется из признаков, принадлежащих некоторому конечному множеству, называемых терминалами или непроеизводными символами (элементами). Отношения между непроеизводными элементами характеризуют структуру образа. Для описания образа через непроеизводные элементы и их отношения используется некоторый «язык» образов, где каждый образ рассматривается как цепочка или предложение. Грамматикой языка задаются правила, позволяющие составить образы из непроеизводных элементов. Иначе говоря, грамматикой порождается язык, состоящий из предложений (образов).

Использование грамматики в целях классификации образов связано с созданием такой грамматики, чтобы порождаемый ею язык состоял из предложений (образов), принадлежащих исключительно одному из двух рассматриваемых классов. Очевидно, что классификация заданной цепочки проводится простым определением того, может ли данная цепочка порождаться указанной грамматикой. Если может, то объект принадлежит соответствующему классу, если не может, то объект автоматически приписывается другому классу. Процедура, используемая для определения, является или не является цепочка предложением, грамматически правильным для данного языка, называется грамматическим разбором.

Таким образом, для классификации некоторого объекта необходимо в первую очередь определить его непроеизводные элементы и отношения между ними, а затем провести грамматический разбор, чтобы установить, согласуется ли описание образа с грамматикой, которая могла бы его породить.

6. ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ

Мы уже отмечали, что исследование модели неотделимо от ее построения. Исследование модели является неотъемлемой частью моделирования. Но если построение модели связано с неформальным мышлением, то исследование модели проводится уже формальными средствами математики. Собственно говоря, математический аппарат, вся его мощь используется именно при исследовании модели. С момента построения модели в действие вступают формальные методы математики. Исследование моделей в зависимости от их специфики проводится с разной степенью детальности и с разными целями. С этих точек зрения здесь можно выделить три основных направления: исследование дифференциальных уравнений, оценка динамических характеристик моделей стохастического типа, оценка параметров моделей.

6.1. ИССЛЕДОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В главе 3 мы рассматривали модели, записанные в виде дифференциальных уравнений или их систем. Исследование таких моделей сводится к получению решения и качественной его оценке. Здесь интерес сосредоточен на принципиальном поведении функции решения. В связи с тем что наблюдения носят фрагментарный характер или даже вообще отсутствуют, именно по поведению решения и по вытекающим из него следствиям судят о том, насколько модель качественно верно описывает процесс.

Для простых легко интегрируемых дифференциальных уравнений решение может быть получено аналитически в виде определенной функции. Никаких проблем здесь не возникает. Другое дело, когда дифференциальные уравнения могут быть решены лишь численными методами с помощью ЭВМ. Исследование, проводимое в этом случае, условно можно подразделить на три этапа.

Первый этап сопряжен с собственно математическим исследованием построенной модели. Как правило, исследования начинают с качественного анализа решений дифференциальных уравнений, впервые введенного еще Пуанкаре, затем дополненного важными идеями и концепциями А. М. Ляпуновым и позже развиваемого многими математиками [38, 39]. Качественный анализ имеет принципиальное значение для уравнений линейного, нелинейного, детерминированного, стохастического типов. Он позволяет, не прибегая к окончательным решениям уравнений, на качественном уровне охарактеризовать общее поведение решений, выявить такие их свойства, как устойчивость, периодичность, возможность появления бифуркаций, наличие асимптот, т. е. позволяет установить, достижимы ли какие-либо области решения, а коль достижимы, то при каких приблизительно временах и параметрах.

Второй этап исследования модели сопряжен с ее представлением в дискретном варианте. Это обстоятельство связано с тем, что для численной реализации модели требуется обращение к ЭВМ. Поскольку ЭВМ являются устройствами дискретного типа, непрерывные аналоги дифференциальных уравнений, в которых записана модель, необходимо представить в дискретном виде. В этом случае поиск решения численными методами ограничивается областью задания конечного числа точек. Такое множество точек называется сеткой, а сами точки — узлами сетки. Запись дифференциальных уравнений в узлах сетки называется разностными схемами.

Построение оптимальной сетки, т. е. аппроксимация непрерывной модели ее дискретным аналогом, является самостоятельной и довольно сложной математической задачей, входящей в арсенал методов вычислительной математики. Здесь мы имеем дело с моделями моделей и основной целью является достижение адекватного соответствия одной модели другой. При этом, казалось бы, чем больше узлов сетки, тем решение должно быть точнее! Но это не всегда так. Большое число узлов, участвующих в расчетах, определяет накопление ошибок и обуславливает значительные затраты времени для решения задачи. Необходим компромисс, который и достигается с помощью ряда математических исследований.

Два описанных этапа исследования модели заканчиваются построением вычислительного алгоритма получения решения дифференциального уравнения (или их системы) с необходимой точностью и за минимальное число арифметических и логических операций ЭВМ. Такой эффективный алгоритм реализуется на ЭВМ в виде соответствующей программы или пакета программ.

Третий этап связан с получением многовариантных результатов решений дифференциальных уравнений (или их систем) на ЭВМ. Для этого в определенном диапазоне варьируют ряд «входных» параметров модели и наблюдают, что будет происходить на ее «выходе», т. е. как бы проигрывают модель в разных вариантах.

Вся эта процедура получила название машинного (вычислительного) эксперимента. Действительно, здесь мы испытываем модель подобно тому, как это бывает при постановке эксперимента.

Сравнение результатов вычислительного эксперимента позволяет зримо оценить, следствием изменения каких параметров и как формируется развитие изучаемой системы в пространственных и временных координатах; в каких ситуациях и когда могут быть достигнуты те или иные характерные решения; при каких условиях решение получает стационарное, периодическое, бифуркационное и прочее развитие.

Здесь следует отметить, что вычислительный эксперимент используется не только в связи с численным решением дифференциальных уравнений на ЭВМ. В более общем случае он связан с реализацией на ЭВМ разного рода имитационных процессов. Принципы имитации лежат в основе нового подхода к изучению крупномасштабных, гиперсложных явлений и процессов. Понятие математической имитации значительно шире понятия математического моделирования. Математическое моделирование в определенной мере является составным звеном имитации. Действительно,

собственно математическая модель, как мы уже знаем, это есть тоже имитация — приближение объекта изучения к реальности. Собственно имитационная система разрабатывается в случае, когда совсем или в значительной степени отсутствует информация о процессе, нет экспериментальных или эмпирических сведений, способных показать степень согласованности модели с реальностью, или эти сведения настолько скудны и отрывочны, что увязать их возможно только в случае, когда будет проведен имитационный эксперимент и получены соответствующие этому эксперименту результаты.

Основой имитационной системы тоже является математическая модель. Средством, реализующим имитационный процесс, служит ЭВМ. Реализация имитационной системы на ЭВМ — это по сути дела и есть машинный (вычислительный) эксперимент. В ходе машинного эксперимента осуществляется просчет (проигрывание) большого множества вариантов имитационной системы. В итоге можно добиться той реализации процесса, которая интересует исследователя и которая тесно согласуется с имеющимися данными. Если данные носят фрагментарный характер, то эти фрагменты удается увязать между собой. Особенно важно, что машинный эксперимент дает возможность исследовать процесс в той области, где нет никаких экспериментальных или эмпирических сведений.

Обращаясь к примерам, приведенным в главе 3, отметим, что решение модели биосферы (3.7) — (3.11) В. А. Костицина получено аналитически, а решение модели А. С. Мониной и др. — путем имитации на ЭВМ. Получению решения предшествовал качественный анализ уравнений.

6.2. ОЦЕНКА ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МОДЕЛЕЙ СТОХАСТИЧЕСКОГО ТИПА И ПАРАМЕТРОВ СТАТИСТИЧЕСКИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Как отмечалось, случайные стационарные процессы однозначно определяются корреляционной и спектральной функциями. Простые однородные марковские последовательности событий полностью могут быть охарактеризованы матрицами переходных вероятностей и вектором начального распределения. На практике все перечисленные характеристики (функции, векторы, матрицы) в какой-то мере можно считать динамическими, ибо от значения к значению они претерпевают определенное изменение. Эти характеристики являются функциями от исходных эмпирических наблюдений, и их коротко называют статистиками. Как правило, статистики оцениваются эмпирическим путем и сравниваются с теоретическими статистиками, которые могут быть получены аналитически.

Здесь очень кратко мы затронем вопросы об оценке этих характеристик (параметров) по наблюдениям. Очевидно, что эти оценки являются статистическими, т. е. согласие их с истинными значениями должно пониматься в статистическом (вероятностном) смысле. Понятно, что оценки, получаемые по выборкам случайных величин, сами оказываются случайными величинами. Поэтому необходимы приемы и методы построения оценок, близких к истинным, а также рецепты и принципы, дающие право

проводить отбор из ряда оценок, полученных разными способами, и позволяющие останавливаться на таких оценках, которые наименее отклонились бы от истинных.

Именно математическая статистика разработала и хранит в своем арсенале ряд действенных рецептурных приемов и методов построения по экспериментальным выборочным данным так называемых «хороших» оценок, т. е. таких, которые тесно согласуются с истинными. Более того, в определенной степени истинность оценок может быть даже гарантирована. Для этого, как показывает математическая статистика, искомые оценки должны удовлетворять ряду требований. Этими требованиями могут определяться принципы, по совокупности которых может осуществляться отбраковка оценок и выбираться из них наиболее предпочтительная. К таким требованиям относятся несмещенность оценок, их эффективность, состоятельность и достаточность. Если оценки отвечают всем перечисленным требованиям, то такие оценки называют оптимальными.

Оценка считается асимптотически несмещенной, если ее среднее значение (математическое ожидание) стремится к истинному значению искомого параметра (характеристики) с ростом числа результатов эксперимента (наблюдений). Эффективной оценкой полагают такую, которая среди прочих (полученных, скажем, на основе других методических приемов) обладает наименьшей дисперсией. Естественно, что чем меньше дисперсия, тем устойчивее оценка. Устойчивость может улучшаться с ростом числа наблюдений. Тогда говорят об асимптотической эффективности, которая сопряжена с числом наблюдений, необходимых для достижения оценки параметра с заданной точностью. Низкая эффективность оценки требует проводить дополнительные наблюдения; при высокой эффективности эти наблюдения, скорее, окажутся лишними.

Если оценка обладает асимптотическими несмещенностью и эффективностью, то оцениваемый параметр сколь угодно мало может отличаться от истинного при увеличении числа экспериментальных (наблюденных) данных. В таких случаях говорят об асимптотической состоятельности оценки. Следовательно, состоятельной оценка будет тогда, когда она стремится к истинному своему значению при увеличении объема экспериментальной выборки. Однако не следует полагать, что асимптотическая несмещенность влечет за собой асимптотическую эффективность, а выполнение двух перечисленных требований — асимптотическую состоятельность. Все эти требования, вообще говоря, автономны и не зависят друг от друга.

Существенным также является понятие достаточности оценки. Грубо говоря, оценка считается достаточной, если она подытоживает всю содержащуюся в выборке информацию относительно параметра. Достаточная оценка дает максимум информации для искомого параметра. Так, для оценки коэффициента корреляции между двумя выборками из генеральной нормальной совокупности $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$, если эта оценка вычисляется по формуле (3.16), необходимо определить следующие пять компонент статистики: Σx_i ; Σy_i ; Σx_i^2 ; Σy_i^2 ; $\Sigma x_i y_i$. Можно показать, что в этом

случае не существует достаточной статистики с размерностью меньше чем пять.

Известно, что наиболее предпочтительным методом для оценок многих статистических характеристик, и в частности динамических, является метод максимального правдоподобия. Этот метод (см. раздел 6.3.1.2) во многих ситуациях позволяет получить оценки, удовлетворяющие требованиям состоятельности, несмещенности, эффективности и достаточности. Но при этом все же не следует полагать, что метод максимального правдоподобия (особенно при малых объемах эмпирических выборок) обязательно приводит к таким оценкам. Например, при определении коэффициента корреляции, необходимого для построения корреляционной функции случайного стационарного последовательности (временного ряда), метод максимального правдоподобия дает смещенную в сторону уменьшения оценку (правда, незначительную), но асимптотически эффективную и состоятельную. Это смещение можно устранить, введя определенную поправку [22, 23]. При большом объеме выборки можно считать, что оценка коэффициента корреляции, даваемая, скажем, формулой (3.16), является состоятельной, т. е. близкой к истинной.

Намного сложнее обстоит дело с оценкой спектра случайного стационарного и однородного процесса (последовательности). Известно, что все применяемые оценки спектра приводят либо к несмещенным, но неэффективным оценкам, либо, наоборот, к смещенным, но неэффективным. Короче, при оценке спектра одновременные требования несмещенности и эффективности в принципе противоречат друг другу. Дело в том, что корреляционная функция r_t и функция спектральной плотности $S(\omega)$ (графики этих функций называют соответственно коррелограммой и спектром) друг с другом связаны следующими взаимоотношениями:

$$r_t = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} S(\omega) \cos(\omega t) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega; \quad (6.1)$$

$$S(\omega) = 1 + 2 \sum_{t=1}^{\infty} r_t \cos(\omega t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} r_t e^{i\omega t}.$$

Таким образом, чтобы получить спектр, необходимо знать корреляционную функцию, которая может быть найдена непосредственно по эмпирическому ряду наблюдений, скажем, с помощью первой формулы (6.1). Если при оценке значений r_t можно добиться состоятельности, то теоретически показано [22, 23], что добиться эффективности оценки $S(\omega)$ путем только увеличения длины эмпирического ряда наблюдений в принципе нельзя — с ростом объема (длины) выборки случайного стационарного процесса дисперсия спектра не стремится к нулю.

Эта ситуация породила целое направление в оценке спектра. Так, полагалось, что если строить функцию спектральной плотности, не обращаясь к коррелограмме, а используя непосредственно исходный центрированный ряд наблюдений y_t путем вычисления оценок коэффициентов Фурье

$$a(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N\pi}} \sum_{t=1}^N y_t \cos(\omega t); \quad b(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N\pi}} \sum_{t=1}^N y_t \sin(\omega t),$$

то после составления суммы вида $a^2(\omega) + b^2(\omega) = I(\omega)$ можно показать, что функция $I(\omega)$, которую называют периодограммой, равна спектральной плотности с точностью до постоянного множителя, а именно:

$$I(\omega) = (\sigma^2/\pi)S(\omega).$$

Однако и такой путь не дает эффективной оценки спектра. Во всех случаях, и последний не исключение, получается одна и та же картина: ординаты спектра случайно и резко флуктуируют из-за того, что они не коррелированы. Флуктуационная картина осложняет интерпретацию спектра.

Все попытки найти оптимальную оценку спектра свелись в основном к трем техническим приемам, каждый из которых имеет свои преимущества и недостатки. Особое внимание в этих приемах уделялось поиску компромисса между несмещенной и эффективной оценками спектра. Если при построении спектра используется корреляционная функция, то ее флуктуирующие ординаты предварительно пытаются сгладить. Для этого при построении корреляционной функции вводится определенный фильтр, носящий название корреляционного окна. Если при построении спектра берут непосредственно исходные эмпирические результаты наблюдений, то предварительно эти данные, если они носят сильно флуктуирующий характер, фильтруют путем введения так называемого временного окна. Третий путь — это сглаживание непосредственно ординат эмпирического спектра путем введения спектрального окна, т. е. спектральные ординаты заменяются взвешенной суммой соседних значений. От конкретного вида окна того или иного назначения (корреляционного, временного, спектрального) существенно зависит состоятельность оценки.

С математической точки зрения все перечисленные оценки спектра практически идентичны. С точки зрения вычислительных аспектов более предпочтительны два последних направления, ибо с появлением дискретного метода быстрого преобразования Фурье вычисление спектра непосредственно по исходным эмпирическим данным занимает гораздо меньше времени, чем способ с построением коррелограммы.

Совсем недавно появился еще один способ оценки спектра, который осуществляется с помощью метода максимальной энтропии. В. Ф. Писаренко [44] показал, что имеется, вообще говоря, бесчисленное множество функций $S(\omega)$, удовлетворяющих формуле (6.1). Поэтому для выбора из бесконечной серии функций $S(\omega)$ какой-либо одной строится конструкция

$$\int_{-\infty}^{\infty} \log S(\omega) d\omega = \max,$$

позволяющая выбрать такую функцию $S(\omega)$, которая имеет максимально возможную энтропию. Таким свойством обладает оценка спектра, вычисляемая путем Фурье-трансформации последовательности коэффициентов β уравнения авторегрессии m -го порядка (см. главу 4). Чем выше порядок уравнения авторегрессии, аппроксимирующего исходный ряд наблюдений, тем лучше разрешающая способность спектра.

Более того, оценка спектра по методу максимальной энтропии, в от-

личие от периодограммных оценок, оптимально сглаживает резкие всплески в спектре, очень чувствительно реагирует на присутствие в исходном эмпирическом ряду наблюдений длиннопериодных гармонических компонент, позволяет уловить наличие гармоник, близких по периоду. Эти качества дали право назвать оценку спектра, получаемую методом максимальной энтропии, оценкой высокой разрешающей способности. Особенно важна роль этой оценки при выделении низкочастотных гармонических составляющих. Впрочем, при этом эффективна и оценка, предложенная авторами [18, 19], которая использует идеи регуляризации (см. раздел 6.3.1.1); она названа оценкой спектра, получаемой на основе принципа «обучения с учителем».

Что касается оценок характеристик марковских последовательностей событий, то их состоятельность в целом зависит от длины эмпирической последовательности. Иными словами, чем длиннее серия испытаний, тем надежнее и точнее будут оценки значений начального распределения и значений переходных вероятностей, ибо в этом случае будут выполнены требования несмещенности, эффективности и состоятельности. Иное дело, когда требуется оценить порядок марковости. Так, в работе [10] эмпирически показано, что корректная идентификация цепей Маркова порядка не выше пяти на двух состояниях достигалась при объеме выборки 1000 наблюдений. Естественно, что при проверке порядка марковости и оценке начальных и переходных вероятностей последовательность наблюдений должна быть тем больше, чем выше порядок цепи и чем больше в ней состояний.

В главе 3 мы встречались с типичной ситуацией, где исследование геологических процессов было основано на анализе той или иной функции распределения характеристики, контролирующей изучаемый процесс. После вывода функции распределения задача ее исследования сводится к тому, чтобы, во-первых, установить, как тесно выборочные эмпирические данные согласуются с теоретическим распределением и, во-вторых, по этой же выборке оценить неизвестные параметры распределения, интерпретация значений которых может свидетельствовать об особенностях течения изучаемого геологического процесса.

Эти две задачи, и особенно вторая, могут решаться также с помощью метода максимального правдоподобия. Однако в ряде случаев при работе с довольно простыми по форме аналитическими распределениями получить конечные результаты с помощью метода максимального правдоподобия оказывается гораздо сложнее, чем путем использования ряда других методов: метода моментов, семинвариантов, минимума хи-квадрат [22, 23]. И хотя перечисленные методы дают не лучшие (хотя иногда и аналогичные) по сравнению с методом максимального правдоподобия оценки, но в конкретных ситуациях, и в частности при оценке неизвестных параметров распределения, они оказываются более предпочтительными.

6.3. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛЕЙ

Большинство моделей, обсуждаемых в этой книге, представляют собой разного рода математические трансформации одной функции (функций) в другую (другие). При этом любая трансформация функции с точки зрения функционального анализа определяет оператор A , который ставит в соответствие любому решению $\beta \in B$ (где B — пространство решений) набор функций $y \in Y$ (где y — элемент пространства наблюдений). Иными словами, большой круг моделей может быть записан так, что он будет эквивалентен операторному уравнению

$$A\beta = y. \quad (6.2)$$

Кстати сказать, многие дифференциальные, интегральные, интегродифференциальные уравнения с помощью конечно-разностных аппроксимаций легко сводятся к виду (6.2).

Если оператор A отождествить с матрицей $X = \{x_{ij}\}$, а y и β считать векторами, то это приведет нас к рассмотрению системы линейных алгебраических уравнений

$$X\beta = y. \quad (6.3)$$

В этом случае $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$ будет представлять собой вектор параметров модели размерностью m , а $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ — вектор наблюдений размерностью n . Задача оценки параметров заключается в определении вектора параметров β .

Если число уравнений в системе (6.3) равно числу неизвестных (т. е. $m=n$) и элементы матрицы X и вектора наблюдений y заданы точно, то при некоторых оговорках система имеет единственное решение:

$$\beta = X^{-1}y.$$

Практически эти условия никогда не выполняются, что приводит к многозначности решения системы (6.3). Однако единственное решение в этом случае все же может быть получено. Условно можно выделить два направления, два подхода к отысканию единственного решения из множества возможных. Один из них назовем детерминированным, а другой — статистическим. Эти два подхода используются не только по отношению к линейной системе (6.3), но и к нелинейной системе (системе нелинейных уравнений), операторная форма которой имеет также вид (6.2).

6.3.1. МОДЕЛИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

6.3.1.1. Детерминированный подход

В этом случае считается, что матрица X и вектор y заданы неточно, с некоторой погрешностью. В оценке параметров модели, т. е. вектора β , фундаментальную роль играет матрица $X^T X$. Многозначность решения системы (6.3) возникает в случаях, когда определитель матрицы $X^T X$ равен нулю. Но коль скоро матрица $X^T X$ задается с определенной погреш-

ностью, то трудно однозначно установить (особенно когда численное значение определителя матрицы $X^T X$ близко к нулю), какая причина обуславливает равенство определителя нулю — погрешность вычисления или действительное положение вещей («скрытая» эквивалентность уравнений, образующих исходную систему). К этому надо добавить, что незначительные вариации (отклонения) элементов матрицы X от точных их значений существенно сказываются на оценке элементов обратной матрицы $(X^T X)^{-1}$. И наконец, задание вектора y с погрешностью может также привести к неверному результату решения.

В итоге часто оказывается, что малому изменению известных данных (X и y) соответствует неоправданно большое изменение решения. В этом случае говорят о неустойчивости решения. Кстати, повышение точности исходных данных совершенно не улучшает решение; при этом даже не обнаруживается сходимости к точному решению. Вследствие этого задача определения параметров β делается некорректно поставленной. Согласно Ж. Адамару [52] считалось, что задача поставлена корректно (корректно — по Адамару), если решение уравнения (6.3) существует, если оно единственное и устойчивое. Невыполнение хотя бы одного из перечисленных требований определяло задачу как поставленную некорректно. Считалось, что исследование таких задач вообще лишено смысла.

Получение устойчивого решения некорректно поставленных задач связано с именем советского математика А. Н. Тихонова [52]. Его заслуга заключается в формализации ограничения класса решений указанных задач. Это ограничение формируется путем не только выбора решения, наименее уклоняющегося от экспериментальных результатов и согласованного с погрешностью измерений (таких решений все же может оказаться достаточно много, и они будут далеки от истинного решения задачи). Этого оказывается недостаточно. Поэтому и введены принципы отбора возможных решений.

Основой формирования отбора решений является дополнительная априорная информация о решении, имеющая количественный или качественный характер. Эта априорная информация превращает недоопределенную задачу в доопределенную, что и позволяет получать устойчивое приближенное ее решение. После такого доопределения решаемая задача по существу становится корректной. Основой такого решения является сформулированное А. Н. Тихоновым фундаментальное понятие регуляризирующего алгоритма, важнейшую роль в реализации которого выполняет стабилизирующий функционал [52]. В нем как раз и находят отражение на языке математики те априорные сведения и дополнительные требования, о которых мы говорили раньше.

Под регуляризирующим алгоритмом понимают некий оператор A , который каждой паре $(\tilde{y}_\delta, \delta)$ ставит в соответствие элемент $\tilde{\beta}_\delta \in B$, стремящийся к точному решению β при δ , стремящемся к нулю. Здесь δ — погрешность, с которой измеряется \tilde{y} . Элемент $\tilde{\beta}$ определяется с помощью оператора A , зависящего от некоторого параметра, значение которого берется согласованным с точностью исходных данных \tilde{y}_δ .

Построение оператора A эквивалентно введению в рассмотрение некоторого функционала, называемого функционалом Тихонова или сгла-

живающим функционалом. Обобщенное его выражение имеет следующий вид:

$$L^{\alpha}(\beta) = \varrho_{\gamma}^2(A\beta, \tilde{y}_{\delta}) + \alpha\Omega(\beta), \quad (6.4)$$

где $\varrho_{\gamma}^2(A\beta, \tilde{y}_{\delta})$ — мера близости модели к наблюдениям (функция невязки); $\Omega(\beta)$ — стабилизирующий функционал.

Решением системы (6.3) является один из векторов β , минимизирующих этот функционал. Поиск минимума функционала $L^{\alpha}(\beta)$ эквивалентен решению задачи на условную минимизацию: отыскать минимум стабилизатора $\Omega(\beta)$ при условии минимума функции невязки вида $\varrho_{\gamma}^2(A\beta, \tilde{y}_{\delta})$. Среди всех векторов β , минимизирующих функционал (6.4), приближенным решением системы (6.3) является такой вектор β^* (вектор искоемых параметров), который дает невязку $\varrho_{\gamma}^2(A\beta, \tilde{y}_{\delta}) = \delta$.

Как было показано в главе 5, метод регуляризации использовался при сплайн-аппроксимации поверхностей с целью построения разного рода карт в изолиниях. Там стабилизирующий функционал конструировался исходя из содержания конкретных формулировок. Но очевидно, что возможности такого подхода гораздо шире [52].

6.3.1.2. Статистический подход

При статистическом подходе считается, что наблюдения осложнены случайной компонентой ξ и модель, аналогичная модели (6.3), имеет следующий вид:

$$X\beta + \xi = y. \quad (6.5)$$

Оценка ее параметров — решение уравнения (6.5), так же как и при использовании метода регуляризации, осуществляется путем ограничения класса возможных решений, что и определяет получение устойчивых оценок. Требование к оценкам, выработанное в математической статистике (эффективность, несмещенность, состоятельность и достаточность), тоже, по сути дела, ограничивает класс возможных решений. Это как бы априорные сведения, которым должны удовлетворять искомые оценки параметров, т. е. своеобразное доопределение условий задачи, чтобы она оказалась корректной.

В статистическом анализе матрицу $X^T X$ называют информационной матрицей или матрицей Фишера. Матрица, обратная матрице $X^T X$, является матрицей ковариаций (с точностью до постоянного множителя) оценок элементов вектора β .

Вид распределения помехи специфично влияет на оценку параметров. Одним из методов оценки параметров модели (6.5), учитывающим это обстоятельство, является метод максимального правдоподобия. Он заключается в построении функции правдоподобия.

$$L(y, \beta) = \prod_{i=1}^n f(y_i, \beta), \quad (6.6)$$

где $f(y_i, \beta)$ — плотность распределения случайной компоненты ξ .

В качестве оценки β выбирается такая, которая максимизирует функцию (6.6).

Часто можно считать, что функция распределения случайной компоненты подчинена нормальному закону с нулевым математическим ожиданием ($M\xi_i=0$) и с конечной дисперсией σ_ξ^2 . В этом случае оценки модели (6.5), получаемые по методу максимального правдоподобия, совпадают с оценками, определяемыми с помощью метода наименьших квадратов.

Метод наименьших квадратов — это еще один метод, который позволяет оценить параметры модели (6.5). Этот метод восходит ко временам А. Лежандра (1806 г.) и К. Гаусса (1809 г.). Характерно для метода наименьших квадратов то, что для получения оценок неизвестных параметров модели (6.5) этот метод, в отличие от других подобных статистических методов оценивания, не апеллирует к априорной информации о виде распределения помех. Это очень важно, ибо исследователь редко располагает указанной информацией. Метод основан на принципе наименьших квадратов, который гласит, что в качестве решения уравнения (6.5) может быть принят вектор β^* , минимизирующий сумму квадратов случайной компоненты, т. е. функционал вида

$$L(\beta) = \sum_i [y_i - \sum_{x_{ij}} \beta^*]^2. \quad (6.7)$$

В этом случае оценкой β^* параметра β является решение системы нормальных уравнений

$$X^T X \beta^* = X^T y.$$

Поэтому, если определитель матрицы $X^T X$ не равен нулю, т. е. $\det X^T X \neq 0$ (невыврожденная линейная модель), то β^* определяется явно:

$$\beta^* = (X^T X)^{-1} X^T y.$$

Естественно, что модель (6.5) может оказаться и вырожденной, т. е. $\det X^T X = 0$, или плохо обусловленной, свидетельствуя о том, что определитель матрицы $X^T X$ близок к нулю. Оценки параметров модели в этом случае либо вообще отсутствуют, либо становятся неустойчивыми, что в принципе делает анализ результатов на основе модели несостоятельным. При этом безусловной минимизации отмеченной формы (6.7) для получения устойчивого решения недостаточно. Получение устойчивого решения задачи требует ряда дополнительных условий, которые и определил А. Н. Тихонов, предложив регуляризованный метод наименьших квадратов (РМНК).

Математическая статистика также предлагает ряд способов оценки параметров модели в случае плохой обусловленности матрицы $X^T X$. Как правило, потеря устойчивости решений связана с тем, что случайная компонента ξ не согласуется с нормальным распределением. Одним из методов, который в этом случае дает устойчивые оценки параметров (в иных обстоятельствах они оказываются эффективными, состоятельными и достаточными), является метод робастного оценивания, предложенный Т. Хубером.

Он исходил из предположения, что функция плотности распределения случайной компоненты $f(y_i, \beta)$ неизвестна, но известен некоторый класс функций плотности $\{f\}$ (трансляционное семейство), к которому эта функция и принадлежит. Из этого класса выбирается наименее благоприятное распределение $f^*(y_i, \beta) \in \{f\}$, обладающее, например, наименьшей фишеровской информацией [58], и это распределение используется для отыскания оценки параметров по методу максимального правдоподобия. Метод робастных оценок в определенной мере аналогичен методу регуляризации А. Н. Тихонова. Если при использовании метода регуляризации отбор вектора искомых параметров (вектора решений) из множества возможных согласован с погрешностью наблюдений, то при робастном оценивании отбор согласован с дисперсией случайной компоненты (помехи) ξ .

Мы видели, что при получении оценок моделей тем или иным способом (методы максимального правдоподобия, семиинвариантов, хи-квадрат) очень важно знать конкретный вид распределения помехи, осложняющей испытываемую модель. Очевидно, что ориентироваться на какой-либо теоретический вид распределения помехи (гауссовый, равномерный, экспоненциальный и т. п.) не всегда целесообразно — это может привести к большим ошибкам. Логично все же исследовать и определить, с каким видом распределения помехи практически нам приходится иметь дело и как этот реальный вид распределения помехи влияет на оценку искомых параметров.

Методом, позволяющим по выборочным данным ограниченного объема восстанавливать реальный вид распределения, является метод бутстрепа [58]. Это типичный компьютерный метод, использующий все возможности ЭВМ: быстроедействие, большую оперативную память, возможность работать с огромными числовыми массивами. В основе метода бутстрепа лежит идея имитационного размножения выборочных данных. Имеющиеся данные, по которым нет смысла даже строить какую-либо оценочную гистограмму распределения, тиражируются огромное число раз. С помощью приемов рандомизации на основе датчика случайных чисел извлекается множество выборок заданного объема. Естественно, что все выборки будут статистически различаться. Выборочные статистики также будут различаться, но как раз это обстоятельство и дает возможность изучить свойства оценок искомых параметров, определить, насколько они эффективны, состоятельны и устойчивы.

Кроме того, возможно найти интервалы, в которых оцениваемые параметры заключены, причем без постулирования закона о распределении помехи, что как раз и искажает оцениваемые параметры испытываемой модели. Закон распределения помехи восстанавливается эмпирически по выборке того ограниченного размера, которой располагает исследователь. Это очень важное обстоятельство. По смыслу оно родственно восстановлению изображения по голограмме. Известно, что каждый фрагмент голограммы содержит всю информацию об объекте, но чем этот фрагмент по своим размерам больше, тем богаче по фактуре воспроизводимое изображение: начинают проглядывать нюансы, тонкости и более точные детали объекта.

Очень близки к методу бутстрепа и другие методы — складного ножа (джакнайф) и перекрестного испытания (кроссвалидейшн). В каждом из этих методов используется та же идея имитации исходного множества его фиктивным аналогом. Затем по имитированной выборке огромного объема оцениваются параметры модели. Большое число фиктивных выборок позволяет определить изменчивость статистического параметра и тем самым установить пределы его вариации. Причем следует особо подчеркнуть, что для оценки интервала вариации параметров нет необходимости делать какие-либо теоретические предположения о характере распределения помехи [58].

В последнее время предложен новый подход к решению уравнения (6.5). Он представляет собой проецирование методов регуляризации на стохастические задачи [46]. Здесь в рассмотрение вводится некоторый оператор A . Его действие на уравнение (6.5) приводит это уравнение к виду

$$Ay = AX\beta + A\xi.$$

Введя оператор $R = AX$, получим

$$Ay = R\beta + (AX - R)\beta + A\xi.$$

Задача по оценке вектора β формулируется так: построить такой оператор (матрицу) A , чтобы при минимальной норме матрицы $(AX - R)$ выражение $\|A\xi\|^2$ оставалось бы ограниченным некоторым числом ϵ , т. е. $M\|A\xi\|^2 \leq \epsilon$. Нормой матрицы $C = AX - R$ называется число $\|C\| = (\sum_i \sum_j C_{ij}^2)^{1/2}$, а $M\|A\xi\|^2 = \sum_i \sum_j \text{cov} [(A\xi)_i, (A\xi)_j]$. Считается, что матрицы X , R и ковариационная матрица случайной компоненты $D = \{\text{cov}(\xi_i, \xi_j)\}$ известны.

Легко провести аналогию между излагаемым методом оценки параметров и методом регуляризации А. Н. Тихонова. Здесь матрица $(AX - R)$ как бы играет роль стабилизирующего функционала, где априорная информация сосредоточена в матрице R , а аналогом невязки выступает выражение $A\xi$, которое связано уже не с погрешностью наблюдений, а с ковариационной матрицей случайной компоненты. Для нахождения оценок вектора β необходимо найти условный минимум, на сей раз минимум нормы матрицы $(AX - R)$. Решение такой задачи наиболее эффективно может быть организовано на ЭВМ в интерактивном режиме. Для этого может быть сформирована серия пробных операторов A . Из этой серии выбирается тот, который определяется указанным условным минимумом.

6.3.2. МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Выше идеи исследования моделей демонстрировались на примере моделей, линейных по своим параметрам. Однако многие процессы и системы в геологии, скорее, должны характеризоваться моделями нелинейного вида. Поиск параметров таких моделей осуществляется тем же

путем, что и для линейной модели. Так, в случае строго детерминированной системы нелинейных уравнений

$$y_i - \eta_i(x_i, \beta) = 0 \quad (6.8)$$

(y_i — наблюдение, соответствующее значению x_i аргумента; η — нелинейная функция; β — вектор параметров) рассматривают положительно определенную квадратичную форму

$$L(\beta) = \sum_i [y_i - \eta_i(x_i, \beta)]^2. \quad (6.9)$$

Видно, что если в это выражение подставить решение из системы (6.8), то $L(\beta) = 0$. Следовательно, значения β_1^* , β_2^* , ..., β_m^* , для которых $L(\beta^*) = 0$, являются решением системы нелинейных уравнений. Таким образом, если система (6.8) имеет единственное решение, задача его определения сводится к нахождению координат единственного глобального минимума функции $L(\beta)$ в m -мерном пространстве. Может оказаться, что система нелинейных уравнений имеет несколько решений. Тогда проблема их определения сводится к проблеме нахождения координат глобальных минимумов, число которых будет равно числу решений системы (6.8).

Если же система нелинейных уравнений стохастическая, то

$$y_i = \eta_i(x_i, \beta) + \xi_i.$$

т. е. модель осложнена помехой случайного характера ξ_i .

Для оценки параметров модели β привлекаются те же идеи, что и в случае линейной модели. Используют метод наименьших квадратов, т. е. минимизируют функцию вида (6.9), либо образуют функцию правдоподобия (6.6) и стараются ее максимизировать. Возможно также использовать методы регуляризации, робастного оценивания и др. Конечно, по сравнению с линейными моделями оценка параметров нелинейных моделей, как правило, осложняется, причем существенно. Очень часто, особенно в случае стохастических моделей, трудно что-либо определенное сказать об устойчивости оцениваемых параметров. Эти оценки могут оказаться несостоятельными и неэффективными [54].

Таким образом, задачи по оценке параметров моделей линейного и нелинейного видов в принципе сводятся к типовому образцу (будь то методы регуляризации, максимального правдоподобия, наименьших квадратов, робастные и т. п.). Строится функционал, зависящий от исходных наблюдений и параметров модели, экстремум которого доставляет искомые оценки. Функционалы имеют разный аналитический вид. Метод регуляризации приводит к одному виду функционала, метод максимального правдоподобия — к другому, метод наименьших квадратов — к третьему. Вид функционала отражает идею устранения многозначности решения, принципы отбора единственно правильного из множества решений.

В заключение этого раздела необходимо коснуться двух обстоятельств, имеющих непосредственное отношение к оценке параметров моделей.

Одно из них связано с планированием эксперимента. Дело в том, что

добиться наиболее надежных оценок помогает не только грамотная обработка результатов исходных наблюдений, но и хорошо организованная система их сбора. Оценки вектора β зависят от того, где и в каком количестве взяты наблюдения. Стремление получить «хорошие» оценки параметров модели и к тому же добиться наиболее эффективных и содержательных результатов всего исследования определяет идеологическую сторону методов планирования эксперимента (сбора первоначальных наблюдений).

В начале 60-х годов стратегия экспериментирования в ситуации, когда исследователь сталкивается с изучением многофакторных (многопараметрических) систем, существенно изменилась. Глубокие теоретические исследования, выполненные к этому времени в области обработки опытных данных, привели экспериментаторов к мысли, что если до постановки эксперимента не провести ряд необходимых мероприятий по его планированию, то получить устойчивые оценки параметров модели и надежно проинтерпретировать результаты вряд ли удастся. Наоборот, если эксперимент спланирован разумно, то даже при минимальном числе экспериментальных данных возможно добиться желаемого результата.

Более того, оказалось, что нет необходимости придерживаться известной стратегии однофакторного эксперимента, занимавшей твердые позиции в прошлом веке. Современная стратегия проведения эксперимента показала, что возможно одновременно варьировать значительным числом переменных (определенным образом, в определенной последовательности и в определенных наиболее информативных точках) и тем не менее получать максимальную точность оценок параметров модели, корректные, эффективные результаты, интерпретация которых оказывается намного проще и содержательнее. Можно сказать, что подтвердилось мнение одного из видных основоположников прикладной математической статистики Р. Фишера, высказанное им в 30-х годах нашего столетия. Он утверждал, что если эксперимент поставлен плохо, то никакая детальная математическая обработка опытных данных не приведет к содержательным результатам. Исследователь-интерпретатор не должен ограничивать свою роль лишь этапом обработки данных; ему следует вмешиваться в сам процесс постановки опыта, эксперимента или обследования объекта изучения.

Второе обстоятельство, имеющее отношение к оценке параметров моделей, касается поиска экстремальных значений функций и функционалов. Выше мы отмечали, что оценка параметров модели сопряжена с поиском разного рода экстремумов. Задача поиска экстремумов имеет отношение и к решению непосредственно задач оптимизации (см. главу 3). Можно считать, что задача оценки параметров также является оптимизационной задачей, где отыскивается экстремум критерия оптимальности, в качестве которого выступают введенные выше функционалы или функции (сглаживающий функционал, функция правдоподобия, сумма квадратов отклонений и т. д.). В этом смысле оценки параметров можно считать оптимальными.

Найти экстремум аналитическим путем — с помощью известных методов математического анализа (исследование на экстремум) — удается

только в самых простых ситуациях. В большинстве же случаев используются численные методы минимизации или максимизации: методы линейного и нелинейного программирования, градиентные методы, классические методы вариационного исчисления (метод множителей Лагранжа), ряд статистических методов случайного поиска экстремумов, итерационные методы (метод Ньютона и различные его модификации) и др.

Разные методы требуют иногда выполнения ряда жестких условий, и поэтому тот или иной конкретный метод способен работать лишь в ограниченных ситуациях. Вообще методы поиска экстремума довольно «капризны», и для их практического применения необходима достаточно богатая информация об исследуемой на экстремум функции (функционале): линейная или нелинейная, дифференцируемая или нет, имеет ли точки разрыва, унимодальная или полимодальная и т. п. В зависимости от указанной информации выбирается и метод (алгоритм) минимизации (максимизации).

Так, симплекс-метод (метод линейного программирования) совершенно не подходит для решения задач нелинейного программирования, т. е. для поиска экстремума нелинейных функций (ограниченного или неограниченного типа). Градиентным методом нельзя определить экстремум, если в точке экстремума функция терпит разрыв первого рода или если функция имеет много экстремумов (т. е. является полимодальной). Классический метод вариационного исчисления (метод множителей Лагранжа) применим в случае, когда функционал, экстремум которого определяется, является всюду дифференцируемым.

Существуют и многие вычислительные проблемы решения минимаксных задач. Так, метод градиентов, даже при правильном его использовании (при наличии строго выпуклой или вогнутой функции), имеет слабое звено — очень часто бывает трудно определить шаг сканирования для поиска экстремума. Слишком большой шаг может привести к пропуску точки экстремума; неоправданное же уменьшение шага потребует значительных затрат машинного времени. В такой ситуации не спасают и методы случайного поиска экстремума (особенно для полимодальных функций и функционалов), ибо, как правило, нет жестких гарантий, что найденная координата соответствует именно глобальному экстремуму.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, мы видим, что построение модели и ее исследование определяют целую цепочку довольно трудоемких действий. Во всяком случае, требований и сложных шагов при математическом моделировании гораздо больше, чем при традиционном исследовании объектов геологии. Здесь необходимы четкая формулировка задачи (каузальный сценарий); разработка собственно модели, когда требуется владение математикой; структурирование модели с целью выработки алгоритма, реализуемого на ЭВМ; особый сбор экспериментального и эмпирического материала; сложное исследование построенной модели на предмет ее адекватности изучаемой природной ситуации. На протяжении всей книги мы старались раскрыть, почему такой подход при изучении сложных природных систем оказывается более предпочтительным, почему наряду с описательной парадигмой, долгое время являвшейся основной при геологических исследованиях, получила развитие парадигма математического моделирования.

При математическом моделировании необходимо предварительно иметь четкую формулировку задачи. С одной стороны, четкая формулировка задачи важна сама по себе, ибо она существенно обнажает те цели, которые могут быть достигнуты по мере решения задачи. С другой стороны, при четкой формулировке задачи круг достигаемых целей, как правило, ограничивается. Использование концепций математики при формулировке задачи позволяет добиться ясности исследуемых вопросов, зримо охватить не только достижимые цели, но и те цели, которые без математики (математических моделей) в принципе достигнуты быть не могут. При этом описательно-гуманитарные принципы математическим подходом не исключаются. Такие чисто гуманитарные понятия, как ассоциации, параллели, аналогии, естественно, только способствуют более ясной формулировке задачи, позволяя рассмотреть ее со многих точек зрения, определяя тем самым системность исследования.

Постановка задачи находит отражение в своеобразном сценарии, где кратко и сжато характеризуется внутренний механизм процесса. При этом стараются уловить, а затем контрастно охарактеризовать некую первопричину, которая либо определяет функционирование сложной многофакторной геологической системы (иными словами, порождает геологический процесс), либо вызывает изменчивость ряда контролируемых свойств и характеристик этой системы. Вскрыть первопричину и компактно ее описать — задача необычайно сложная, и эта сложность оказывается прямо пропорциональной сложности объекта исследования.

Формирование сценария начинается как бы с поиска основных, ключевых фрагментов картины реального процесса, логичное «склеивание» которых обеспечивает в конечном итоге целостность объекта изучения. Причем стараются отобрать как можно меньшее число таких фрагментов. Для этого предварительно рассматривают большое их множество, оставляя только те, которые несут основную смысловую нагрузку, делая сценарий информативно насыщенным. Очевидно, что все это возможно осу-

ществить лишь в случае трудоемкой исследовательской работы, где первоосновой являются знание, опыт и интуиция естествоиспытателя, его нестандартный взгляд на картину реального объекта изучения, умение найти объективные факты, уловить взаимосвязи и взаимодействия между переменными, характеризующими систему.

На этом этапе целесообразно отбросить ряд частных, деталей, несущественных подробностей функционирования системы, которые придают ей лишь видимость неповторимости, своеобразия и индивидуальности. Помня, что разнообразие следствий сводится к малому числу причин, сценарий полезно создавать, вообще говоря, при минимуме необходимых «изобразительных» средств. Лишь только в этом случае сценарий оказывается содержательным, представляет собой вербальную зарисовку исследуемой системы, причем концентрированного вида, которая, облекаясь в математическую форму, становится математической моделью.

Имея хороший каузальный сценарий, можно осуществить адекватный перевод его на математические рельсы, т. е. создать модель. Это часто бывает трудно сделать, ибо построение модели — процесс, как правило, неформализованный, он является скорее искусством. Здесь нет рецептов или методологически хорошо обоснованных приемов. Помощь оказывают законы физики, химии, биологии.

Физика раньше и лучше других наук поняла возможности математики и с максимальной эффективностью эксплуатирует их при разработке и конструировании своих моделей (законов физики). Аналитический аппарат математики позволяет получать ряд необходимых выводов и следствий из фундаментальных законов (моделей) физики. В свою очередь фундаментальные законы физики во многих случаях выполняют роль «лакмусовой бумажки» при обосновании более сложных математических моделей, синтезирующих в себе уже совокупность законов физики. Так, законы сохранения (вещества, энергии, импульса), играющие в физике основополагающую роль, часто прямо указывали, как составлять уравнения (модели), следствия из которых оказывались чрезвычайно глубокими. Но, безусловно, не только законы сохранения позволяют создавать различные конструкции математических моделей. Разного рода принципы физики (наименьшего действия, Ле Шателье, минимума роста энтропии и др.) также дают возможность формировать равенства и уравнения, которые связывают функции, их производные, функционалы. Этим и определяется вид ряда конкретных геологических моделей.

При построении моделей, отражающих явления биологического характера, стараются учесть принципы уже не физики или химии, а биологии, в частности принципы эволюции Ч. Дарвина. Описание процессов и объектов геологии на основе моделей, учитывающих принципы эволюционного развития биологических систем — изменчивость, наследственность, отбор, дало импульс для построения моделей и в геологии.

Безусловно, геологические объекты и процессы крайне сложны. Это в какой-то мере может объяснить, почему мы имеем неоправданно скромное число математических моделей, адекватных объектам геологии и ее процессам. К тому же до сих пор отсутствуют общие принципы построения моделей геологических процессов и объектов. Такие принципы

мы старались упорядочить и сформулировать, а также дать ряд общих приемов и подходов моделирования. Чтобы можно было лучше усвоить специфику моделирования, активно использовать принципы, на которых оно основано, мы старались привести как можно больше примеров построения математических моделей, отражающих непосредственно геологические явления и процессы.

Кроме научных исследований и изысканий, способствующих построению сценария и конструкции собственно модели, необходимы эмпирические полевые наблюдения, специализированные эксперименты и их результаты. Лишь только натурные наблюдения позволяют проверить, насколько модель соответствует действительности. Если критерий согласованности свидетельствует о совпадении математической модели с результатами наблюдений или о том, что модель не противоречит им, то такая модель принимается в качестве рабочей. К сожалению, не всегда возможно организовать и получить в геологии экспериментальные данные и эмпирические сведения такие, которые бы удовлетворяли специфике математического моделирования и позволяли корректно произвести испытание созданной модели, выполнить ее тщательное исследование. Здесь традиции сбора и накопления фактического материала очень часто не согласуются с требованиями, предъявляемыми математическим моделированием, заставляющим формировать эмпирический и экспериментальный материал в соответствии с решаемой задачей.

Значительные трудности при исследовании той или иной разработанной модели на ее адекватность связаны с тем, что геологическая информация об объекте исследования может быть крайне скудной, а постановка натурального эксперимента по реализации геологического процесса в принципе невозможна (кроме разве реализации ряда фрагментов), ибо ни временные соотношения геологического характера, ни глобальные пространственные масштабы моделированию вообще не поддаются. В этом случае целесообразно осуществить машинную имитацию изучаемой системы (машинный эксперимент), что в какой-то мере снимает остроту вопроса о постановке прямого эксперимента по реализации изучаемого процесса.

При дефиците информации об изучаемом процессе в объект исследования превращается непосредственно математическая модель, имитирующая реальность. В этом случае, как показывали подобранные примеры, именно математическое моделирование становится «движущей силой» для раскрытия механизма наиболее сложных природных процессов. Имитационный подход в геологии только еще формируется, возможности его лишь раскрываются. Но смысл и логика этого подхода достаточно сильны.

Очень важно и то обстоятельство, что именно математика выработала целую методологию со своими способами и приемами, позволяющими убедиться в адекватности созданных моделей реальному объекту исследования. Центральным моментом здесь являются исследование модели и оценка ее параметров. Предлагаемые методы направлены на устранение многозначности решения, на разработку принципов отбора единственно правильного из множества решений.

В целом можно сказать, что математика играет роль объединяющего начала. Проникая в различные естественнонаучные сферы, она лишней раз позволяет убедиться, что природа едина. Математика может взять на себя роль метаязыка, дающего право увязать и согласовать информацию различного содержания, осуществить симбиоз законов физики, химии и биологии, совокупность которых и определяет развитие сложнейших процессов (динамических систем), каковыми являются и объекты геологии.

Иначе говоря, именно математика и, следовательно, математическое моделирование позволяют провести исследование геологических объектов с различных точек зрения, т. е. системно, не боясь междисциплинарных перегородок, которые неминуемо возникают при изучении таких сложных систем, требующих держать в поле зрения эффекты и физики, и химии, и биологии. Именно математическое моделирование в значительной степени определяет наиболее глубокий и всесторонний подход к исследованию объектов геологии — системный подход. Эта сторона вопроса и является самой привлекательной, ибо системный подход дает наиболее эффективные результаты.

Вместе с тем математическое моделирование, его принципы и методология, его системная направленность обуславливают современную парадигму исследования объектов геологии. Становление этой парадигмы, конечно, испытывает свои трудности. Вероятно, это временное, хотя и затянувшееся явление. Тем не менее видно, что методология математического моделирования существенно расширяет свой плацдарм. С него гораздо легче внедряться в анализ явлений и процессов, где необходимы междисциплинарные знания, синтез частных дисциплин — физики, химии, биологии. Если еще недавно моделирование и математические модели были прерогативой одной лишь физики (механики, оптики, электричества), то теперь область математического моделирования необычайно разрослась, охватив многие естественнонаучные и общественно-социальные сферы — биологию, химию, экономику, социологию, экологию и, конечно, геологию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аронов В. И.* Об оптимальном размещении разведочных скважин.— В кн.: Математические методы решения задач нефтяной геологии на ЭВМ. М., 1979, с. 3—13. (ВНИГНИ).
2. *Аронов В. И., Гордин В. М., Ширгинова А. И.* К вопросу о построении графиков и карт изолиний в геологии и геофизике с помощью ЭЦВМ.— В кн.: Математические методы и ЭЦВМ в геологии. М., 1971, с. 71—124. (ВНИГНИ).
3. *Аронов В. И., Страхов В. Н.* О применении факторного анализа в геологии.— Геология и геофизика, 1985, № 8, с. 202—206.
4. *Бурбаки Н.* Очерки по истории математики. М., Иностранная литература, 1963. 45 с.
5. *Вальд А.* Последовательный анализ. М., Физматгиз, 1960. 328 с.
6. *Вистелиус А. Б.* Сульфаты кальция в палеозойских отложениях востока Русской платформы.— Тр. ВНИГРИ. Нов. сер., 1949, вып. 28, с. 142—158.

7. Вистелиус А. Б. О функциях распределения вероятностей концентраций фосфора в гранитоидах Швейцарии, Гвианы и Экваториальной Африки.— Докл. АН СССР, 1963, т. 152, № 6, с. 1449—1452.
8. Вистелиус А. Б. Фазовая дифференциация палеозойских отложений Среднего Поволжья и Заволжья. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1963. 203 с.
9. Вистелиус А. Б. Красноцветные отложения полуострова Челекен. М.—Л., Наука, 1966. 304 с.
10. Вистелиус А. Б. Основы математической геологии. М.—Л., Наука, 1980. 389 с.
11. Волков А. М. Решение практических задач геологии на ЭВМ. М., Недра, 1980. 224 с.
12. Волькенштейн М. В., Лифшиц М. А., Лысов Ю. П. О всеобщем законе развития.— Журн. общ. биологии, 1983, т. 44, № 4, с. 569—571.
13. Геофизика океана. Т. 2. Геодинамика / Ред. О. Г. Сорохтин. М., Наука, 1979. 416 с.
14. Губерман Ш. А. Использование обучающих программ для решения геологических задач.— Тр. МИНХ и ГП, 1964, вып. 62, с. 3—15.
15. Гублер Е. В., Генкин А. А. Применение непараметрических критериев статистики в медико-биологических исследованиях. Л., Медицина, 1973. 141 с.
16. Девис Дж. Статистика и анализ геологических данных. М., Мир, 1977. 568 с.
17. Деч В. Н. Интерпретация данных каротажа на основе двух методов: теории случайных функций и главных компонент с целью корреляции разрезов скважин.— Геология нефти и газа, 1977, № 8, с. 59—66.
18. Деч В. Н., Кноринг Л. Д. Нетрадиционные методы комплексной обработки и интерпретации геолого-геофизических наблюдений в разрезах скважин. Л., Недра, 1978. 192 с.
19. Деч В. Н., Кноринг Л. Д. Методы изучения периодических явлений в геологии. Л., Недра, 1985. 255 с.
20. Дмитриев А. Н., Красавчиков В. О. Процедуры математической обработки описания нефтяных месторождений.— Геология и геофизика, 1976, № 11, с. 85—96.
21. Карцева Г. Н., Ронкина З. З., Шаровская Н. В. Сопоставление юрских и меловых отложений западной и восточной частей Енисей-Хатангского прогиба.— В кн.: Енисей-Хатангская нефтегазоносная область. Л., 1974, с. 33—37. (НИИГА).
22. Кендалл М. Дж., Стьюарт А. Статистические выводы и связи. М., Наука, 1973. 699 с.
23. Кендалл М. Дж., Стьюарт А. Многомерный статистический анализ и временные ряды. М., Наука, 1976. 736 с.
24. Кноринг Л. Д. Математические методы при изучении механизма образования тектонической трещиноватости. Л., Недра, 1969. 86 с.
25. Кноринг Л. Д. Основы теории оптимизации разведки нефтяных месторождений. Л., Недра, 1980. 209 с.
26. Кноринг Л. Д. Оптимизация поисков и разведки месторождений нефти и газа глубоким бурением.— Сов. геология, 1981, № 9, с. 19—31.
27. Кноринг Л. Д. Оптимизация управления процессом поисков и разведки месторождений нефти и газа глубоким бурением.— Сов. геология, 1983, № 6, с. 23—32.
28. Кноринг Л. Д. Моделирование динамики накопления запасов нефти и газа.— Сов. геология, 1986, с. 9—17.
29. Кноринг Л. Д. О прогнозировании динамики прироста запасов нефти и газа.— Геология нефти и газа, 1986, № 12, с. 10—14.
30. Колмогоров А. Н. Теория вероятностей и математическая статистика. М., Наука, 1986. 536 с.
31. Костицин В. А. Эволюция атмосферы, биосферы и климата. М., Наука, 1984. 96 с.
32. Крамбейн У., Грейбилл Ф. Статистические модели в геологии. М., Мир, 1969. 396 с.
33. Кренделев Ф. П., Дмитриев А. Н., Журавлев Ю. И. Сравнение геологического строения зарубежных месторождений докембрийских конгломератов с помощью дискретной математики.— Докл. АН СССР, 1967, т. 173, № 5, с. 1149—1152.

34. *Математические методы в геологии* / Ред. Д. А. Родионов, В. Н. Бондаренко, А. Б. Вистелиус, Ю. В. Прохоров. М., Наука, 1968. 172 с.
35. *Матерон Ж.* Основы прикладной геостатистики. М., Мир, 1968. 407 с.
36. *Миллер Р. Л., Кан Дж. С.* Статистический анализ в геологических науках. М., Мир, 1965. 482 с.
37. *Моделирование критических рубежей в развитии систем и периодизация истории Земли* / А. В. Жирмунский, В. И. Кузьмин, В. Д. Наливкин, Б. С. Соколов. Владивосток, 1980. 68 с. (Ин-т биологии моря ДВНЦ АН СССР).
38. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М., Наука, 1981. 400 с.
39. *Моисеев Н. Н.* Математические задачи системного анализа. М., Наука, 1981. 480 с.
40. *Наливкин В. Д., Кузьмин В. И., Лукьянова В. Г.* Естественные границы в ряду распределения месторождений нефти и газа по запасам.— Докл. АН СССР, 1982, т. 266, № 4, с. 947—951.
41. *Налимов В. В.* Теория эксперимента. М., Наука, 1971. 207 с.
42. *Научное наследие М. А. Усова и его развитие.* Новосибирск, Наука, 1984. 185 с.
43. *Николис Г., Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных системах. М., Мир, 1979. 512 с.
44. *Писаренко В. Ф.* Спектральная оценка максимальной энтропии и ее использование для определения частот гармоник.— В кн.: Интерпретация данных сейсмологии и неотектоники. М., Наука, 1977, с. 83—119.
45. *Прогноз месторождений нефти и газа* / А. Э. Конторович, Э. Э. Фотиади, В. И. Демин и др. М., Наука, 1981. 350 с.
46. *Пытьев Ю. П.* Задачи редукции в экспериментальных исследованиях.— *Мат. сб.*, 1982, т. 118 (60), № 1 (5), с. 97—103.
47. *Романовский С. И.* Седиментологические основы литологии. Л., Недра, 1977. 408с.
48. *Садовский М. А.* Автомодалность геодинамических процессов.— *Вест. АН СССР*, 1986, №8, с. 3—12.
49. *Сергин В. Я., Сергин С. Я.* Системный анализ проблемы больших колебаний климата и обледенения Земли.— В кн.: Моделирование планетарной системы «ледник—океан—атмосфера». Владивосток, 1976, с. 5—51. (ДВНЦ АН СССР).
50. *Симонс Дж.* ЭВМ пятого поколения: компьютеры 90-х годов. М., Финансы и статистика, 1985. 173 с.
51. *Слуцкий Е. Е.* Избранные труды. М., 1960. 291 с. (АН СССР).
52. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Д.* Методы решения некорректных задач. М., Наука, 1986. 288 с.
53. *Ханович И. Г., Айнемер А. И.* Приложение модели слоенакопления А. Н. Колмогорова к исследованию статистических характеристик геологических разрезов.— *Геология и геофизика*, 1968, № 7, с. 44—54. (СО АН СССР).
54. *Химмельблау Д.* Анализ процессов статистическими методами. М., Мир, 1973. 957 с.
55. *Шпильман В. И.* Количественный прогноз нефтегазоносности. М., Недра, 1982. 215 с.
56. *Эйнштейн и современная физика.* М., Гостехиздат, 1956. 37 с.
57. *Dacey M. F.* Models of bed formation.— *Intern. Assoc. Math. Geol. J.*, 1979, vol. 11, iss. 6, p. 655—668.
58. *Ejron B.* Computers and the theory of statistics: thinking the unthinkable.— *SIAM Rev.*, 1979, vol. 21, N 4, p. 460—480.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
1. Математика в прикладных исследованиях	6
2. Проблемы моделирования	13
2.1. Концепции и содержание модели	—
2.1.1. Внутренняя (эзотерическая) сторона реальности	14
2.1.2. Внешняя (экзотерическая) сторона реальности	18
2.2. Роль наблюдений и фактов	21
2.3. Язык описания	22
2.4. Цели и детальность описания	24
3. Модели процессов	27
3.1. Модели природных процессов	—
3.1.1. Динамические модели	30
3.1.2. Структурные модели	47
3.1.3. Вероятностные модели	54
3.1.3.1. Модели случайного рассеивания	56
3.1.3.2. Модели процессов со случайными возмущениями	64
3.2. Модели процессов с участием человека	74
3.2.1. Модели управляемых процессов	—
3.2.2. Модели процессов без управления	90
4. Модели, интерпретируемые в терминах процессов	94
4.1. Модель факторного (компонентного) анализа	95
4.2. Модель разложения функций на естественные ортогональные составляющие	102
4.3. Модели периодических процессов	106
4.3.1. Модели разложения исходной функции на гармонические составляющие	107
4.3.1.1. Первая постановка	108
4.3.1.2. Вторая постановка	111
4.3.2. Модели сезонных процессов	117
4.4. Модели авторегрессии	121
5. Модели объектов	127
5.1. Модели варьирования размеров и свойств однородных объектов	128
5.2. Модели взаимосвязи свойств объекта	131
5.2.1. Дисперсионный анализ	133
5.2.2. Регрессионный анализ	135
5.2.3. Ковариационный анализ	143
5.3. Модели пространственной изменчивости свойств геологических объектов	145
5.3.1. Модели пространственной изменчивости при решении исследовательских задач	146
5.3.1.1. Регрессия	147
5.3.1.2. Сглаживание	149
5.3.2. Модели пространственной изменчивости при решении оценочных задач	151
5.3.2.1. Модели, используемые в нефтяной геологии	152
5.3.2.2. Модели, используемые в рудной геологии	161
5.4. Модели классификации геологических объектов	166
5.4.1. Характеристика моделей	167

5.4.2. Статистические (аналитические) методы	170
5.4.2.1. Дискриминантный анализ	171
5.4.2.2. Кластерный анализ	177
5.4.3. Нечеткие методы	181
5.4.4. Лингвистические методы	183
6. Исследование моделей	185
6.1. Исследование дифференциальных уравнений	—
6.2. Оценка динамических характеристик моделей стохастического типа и параметров статистических распределений	187
6.3. Оценка параметров моделей	192
6.3.1. Модели линейных систем	—
6.3.1.1. Детерминированный подход	—
6.3.1.2. Статистический подход	194
6.3.2. Модели нелинейных систем	197
Заключение	201
Список литературы	204

Геологу о математике

Что и как можно сказать о предмете геологического исследования на языке математики?

Чем математическое описание отличается от традиционного словесного изложения?

Чего можно достичь в геологических исследованиях с помощью математики?

Ответы на эти вопросы можно найти в предлагаемой книге.