ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

В.Н. Груздев

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ В ГЕОФИЗИКЕ

Учебно-методическое пособие к лабораторным работам
для вузов

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2007

Утверждено научно-методическим советом геологического факультета 17 мая 2007 г., протокол № 6

Рецензент А.В. Никитин

Учебно-методическое пособие подготовлено на кафедре геофизики геологического факультета Воронежского государственного университета.

Рекомендуется для студентов геологического факультета Воронежского государственного университета, обучающихся на 2 курсе д/о.

Для специальности: 011200 (020302) – Геофизика

На геологическом факультете ВГУ для студентов 2 курса дневного отделения специализации «Геофизика» по дисциплине «Математические уравнения в геофизике» в соответствии с федеральным стандартом и утвержденной учебной программой даются общие сведения по математическим уравнениям, используемым в теоретических обоснованиях геофизических методов разведки.

Данное методическое пособие содержит задания к лабораторным работам по математическим уравнениям, также в нем излагается порядок их выполнения.

Лабораторная работа 1 (3 часа)

Задание 1. *Нахождение уравнения линии.*

Даны две точки A(x_1, y_1) и B(x_2, y_2). Найти уравнение линии, расстояние точек которой от точки B в k раз больше, чем расстояние от точки A. Значения x_1, x_2, y_1, y_2, k взять из таблицы 1 согласно варианту.

Расстояние между двумя точками A(x_1, y_1) и B(x_2, y_2) определяется по формуле: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Таблица 1

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
x_1	2	4	3	4	2	3	–4	4	–6	7	–3	2	–1	0
x_2	4	5	4	3	1	–4	3	–3	7	–3	4	–1	0	–5
y_1	0	–7	4	5	5	2	1	–4	4	–6	7	–3	2	–1
y_2	4	5	5	2	1	–4	4	–6	7	–3	2	–1	0	2
k	2	2	3	3	4	4	2	2	3	3	4	4	5	5

Номер варианта	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
x_1	–3	–4	3	4	1	–1	–6	–3	–9	8	3	–3	5	–5
x_2	–4	–3	4	3	–1	–6	9	–4	8	3	–3	5	–5	6
y_1	3	4	1	–1	–6	9	–9	8	3	–3	5	–5	6	0
y_2	4	1	–1	–6	9	–9	8	3	–3	5	–5	6	0	–6
k	2	3	3	4	4	5	5	1	2	2	3	3	4	4

Задание 2. *Решение задач, связанных с расположением линии на плоскости.*

Задача 1. Задано уравнение линии $x^2 + y^2 = 25$ и координаты x_1 и y_1 некоторой точки M, определить, лежит ли точка M на данной линии. Значения x_1, x_2 взять из таблицы 1 согласно варианту.

Задача 2. Даны уравнения двух линий: $y = kx^2 + y_2$ и $y = (x_1 + x_2)y_1$. Определить координаты точки пересечения этих линий. Значения x_1, x_2, y_1, y_2, k взять из таблицы 1 согласно варианту.

Правило решения данной задачи: нужно в уравнение этой линии подставить координаты точки М. Если при этом уравнение удовлетворяется, т. е. в результате получается тождество, то точка лежит на данной линии.

Задача 3. Найти точки пересечения окружности $x^2 + y^2 = k^2$ с осями координат. Значение k взять из таблицы 1 согласно заданному варианту.

Правило решения задачи 3: чтобы найти абсциссы точек пересечения данной линии с осью ОХ, необходимо в уравнение этой линии положить $y = 0$ и решить полученное уравнение относительно x, чтобы найти ординаты точек пересечения данной линии с осью ОУ, нужно в уравнение этой линии положить $x = 0$ и решить полученное уравнение относительно y.

Пример 1. Найти уравнение линии, расстояние точек которой от точки B (12, 16) в два раза больше, чем от точки A (3, 4).

Пусть на заданной линии лежит точка M(x, y). По условию: 2AM = BM. Найдем расстояния AM и BM. AM = $\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}$, BM = $\sqrt{(x-12)^2+(y-16)^2}$. Тогда $2\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}=\sqrt{(x-12)^2+(y-16)^2}$. Преобразуем это выражение в виде: $4((x - 3)^2 + (y - 4)^2) = (x - 12)^2 + (y - 16)^2$ или $4x^2 - 24x + 36 + 4y^2 - 32y + 64 = x^2 - 24x + 144 + y^2 - 32y + 256$. Упростим данное выражение и получим уравнение искомой линии: $3x^2 + 4y^2 = 156$.

Пример 2. Найти точку пересечения параболы $y = x^2$ и прямой $y = 4$.

Достаточно совместно решить систему из уравнений этих линий: $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 4 \end{cases}$; $x^2 = 4$, откуда $x_1 = 2$, $y_1 = 4$, $x_2 = -2$, $y_2 = 4$. A(–2, 4) и B(2, 4) – точки пересечения данных линий. Если система не имеет действительных решений, то линии не пересекаются.

Задание 3. *Решение задач, связанных с уравнением прямой линии.*

Задача 4. Даны координаты двух точек $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ и коэффициент k. Требуется определить: а) уравнение прямой линии проходящей через точку $A(x_1, y_1)$ с заданным угловым коэффициентом k; б) уравнение прямой линии проходящей через две заданные точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$; в) записать уравнения прямых, полученных в пунктах а) и б) в общем виде, в виде уравнения с угловым коэффициентом, в виде уравнения в «отрезках»; г) написать уравнения перпендикулярных прямых к линиям, полученным в пунктах а) и б), и проходящих через точку $B(x_2, y_2)$. Значения x_1, x_2, y_1, y_2, k взять из таблицы 1 согласно заданному варианту.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $A(x_1, y_1)$ с заданным угловым коэффициентом, определяется по формуле: $y - y_1 = k(x - x_1)$. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, определяется по формуле: $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$. Уравнение в отрезках имеет вид: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Пусть уравнение прямой линии задано в общем виде: $Ax + By + C = 0$. Тогда уравнение перпендикуляра к этой прямой, проходящего через точку $M(x_1, y_1)$ будет определяться по формуле: $A(y - y_1) - B(x - x_1) = 0$.

Пример 3. Дано A(2, 3), B(–1, 4), k = 4:

а) $y - 3 = 4(x - 2)$; $y = 4x - 5$ – уравнение прямой проходящей через точку A(2, 3) с заданным угловым коэффициентом k = 4;

б) $\frac{y-3}{4-3} = \frac{x-2}{-1-2}$; $y - 3 = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$; $y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$ – уравнение прямой линии, проходящей через две заданные точки A(2, 3) и B(–1, 4);

в) $4x - y - 5 = 0$; $x + 3y - 11 = 0$ – общий вид уравнений прямых; $y = 4x - 5$; $y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$ – уравнения прямых с угловым коэффициентом; $\frac{x}{5/4} + \frac{y}{-5} = 1$; $\frac{x}{11} + \frac{y}{11/3} = 1$ – уравнения прямых в отрезках;

г) $4(y - 4) + (x + 1) = 0$; $y = 1/4x + 15/4$ – уравнение перпендикуляра к прямой $4x - y - 5 = 0$; $(y - 4) - 3(x + 1) = 0$; $y = 3x + 7$ – уравнение перпендикуляра к прямой $x + 3y - 11 = 0$.

Задание 4. *Решение задач, связанных с уравнениями кривых второго порядка.*

Таблица 2

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
A	2	4	3	4	2	3	4	3	6	7	3	2	1
C	8	7	4	5	5	2	1	4	4	6	7	3	2
D	4	5	5	2	1	4	4	3	1	4	3	3	7
E	2	2	3	3	4	4	2	2	3	3	4	4	5
F	–13	–10	–14	–13	–13	–7	–13	–14	–10	–13	–10	–14	–13

Номер варианта	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
A	4	3	3	4	3	4	1	1	6	3	9	8	3	3
C	1	2	4	5	1	1	6	9	9	8	3	3	5	5
D	2	5	4	1	1	6	9	9	8	3	3	5	5	6
E	5	1	2	3	3	4	4	5	5	1	2	2	3	3
F	–13	–7	–8	–7	–6	–9	–14	–8	–14	–8	–9	–6	–9	–9

Задача 5. Дан общий вид уравнения окружности: $Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$. Составить нормальное уравнение окружности, найти координаты центра и радиус. Начертить окружность в системе координат ОХУ. Значения A, D, E, F взять из таблицы 2 согласно варианту.

Нормальное уравнение окружности имеет вид: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, где x_0, y_0 – координаты центра окружности, R – радиус окружности.

Задача 6. Дан общий вид уравнения эллипса: $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Составить каноническое уравнение эллипса, найти полуоси эллипса, координаты вершин, фокусов, центра и эксцентриситет. Начертить эллипс в системе координат ОХУ. Значения A, C, D, E, F взять из таблицы 2 согласно варианту.

Каноническое уравнение эллипса имеет вид: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$, где x_0, y_0 – координаты центра эллипса, a, b – полуоси эллипса. Точки A1(a, 0), B1(0, b), A2(–a, 0), B2(0, –b) – вершины, а F1(c, 0) и F2(–c, 0) – фокусы эллипса, описываемого уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Величина $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ – фокусное расстояние. $\varepsilon = \frac{c}{a}$ – эксцентриситет эллипса.

Задача 7. Дан общий вид уравнения гиперболы: $Ax^2 - Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Составить каноническое уравнение гиперболы, найти полуоси гиперболы, координаты вершин, фокусов и центра, эксцентриситет, уравнения асимптот. Начертить гиперболу в системе координат ОХУ. Значения A, C, D, E, F взять из таблицы 2 согласно варианту.

Канонические уравнения гиперболы: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ и $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = -1$, где x_0, y_0 – координаты центра гиперболы; a – действительная полуось для первого уравнения и мнимая полуось для второго уравнения; b – мнимая полуось для первого уравнения и действительная полуось для второго уравнения. Величина $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ называется фокусным расстоянием. Точки A1(a, 0), A2(–a, 0) – вершины, F1(c, 0) и F2(–c, 0) – фокусы, а $\varepsilon = \frac{c}{a}$ – эксцентриситет гиперболы, описываемой уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Точки B1(0, b), B2(0, –b) – вершины, F1(0, c) и F2(0, –c) – фокусы, а $\varepsilon = \frac{c}{b}$ – эксцентриситет гиперболы, описываемой уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$. $y = \pm\frac{b}{a}x$ – уравнения асимптот гиперболы.

Задача 8. Дан общий вид уравнений парабол: $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$. и $Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Составить канонические уравнение парабол, найти оси симметрии, координаты фокусов и уравнение директрисы. Начертить параболы в системе координат ОХУ Значения A, C, D, E, F взять из таблицы 2 согласно варианту.

Канонические уравнения параболы: $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$ (с вертикальной осью симметрии $x = x_0$) и $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$ (с горизонтальной осью симметрии $y = y_0$), где: p – параметр параболы, точка с координатами x_0, y_0 – вершина параболы. Для параболы, описываемой уравнением $x^2 = 2py$, точка $F(0, \frac{p}{2})$ называется фокусом, а прямая $y = -\frac{p}{2}$ – директрисой. Для параболы, описываемой уравнением $y^2 = 2px$, точка $F(\frac{p}{2}, 0)$ называется фокусом, а прямая $x = -\frac{p}{2}$ – директрисой.

Пример 4. Дан общий вид уравнения эллипса: $2x^2 + 4y^2 + 4x + 8y + 5 = 0$. Составить каноническое уравнение эллипса, найти полуоси эллипса, координаты вершин, фокусов, центра и эксцентриситет.

$2x^2 + 4y^2 + 4x + 8y - 6 = 0 \Leftrightarrow 2(x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1 - 1) + 4(y^2 + 2 \cdot y \cdot 1 + 1 - 1) - 6 = 0 \Leftrightarrow 2(x + 1)^2 - 2 + 4(y + 1)^2 - 4 - 6 = 0 \Leftrightarrow 2(x + 1)^2 + 4(y + 1)^2 = 12 \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{6} + \frac{(y+1)^2}{3} = 1$ – каноническое уравнение эллипса; $a = \sqrt{6}$, $b = \sqrt{3}$ – полуоси эллипса, O(–1, –1) – координаты центра эллипса, $C = \sqrt{6-3} = \sqrt{3}$ – фокусное расстояние, $F1(\sqrt{3}, 0)$, $F2(-\sqrt{3}, 0)$ – фокусы эллипса, $A1(\sqrt{6}, 0)$, $A2(-\sqrt{6}, 0)$, $B1(0, \sqrt{3})$, $B2(0, -\sqrt{3})$ – вершины эллипса. $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \sqrt{0,5}$ – эксцентриситет эллипса.

Задание 5. *Операции с векторами.*

Координаты векторов **a, b** и **c** выбрать из таблицы 3 согласно варианту.

Таблица 3

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
a_x	2	4	3	4	2	3	–4	4	–6	7	–3	2	–1	0
a_y	4	5	4	3	1	–4	3	–3	7	–3	4	–1	0	–5
a_z	0	–7	4	5	5	2	1	–4	4	–6	7	–3	2	–1
b_x	4	5	5	2	1	–4	4	–6	7	–3	2	–1	0	2
b_y	2	2	3	3	4	4	2	2	3	3	4	4	5	5
b_z	5	–4	2	1	–6	–8	9	4	0	–2	8	4	3	5
c_x	3	–4	4	–6	7	1	–4	3	–3	7	–4	3	–3	7
c_y	–4	3	–3	7	–3	3	–4	4	–6	7	7	–3	2	–1
c_z	7	–3	2	–1	0	–4	3	–3	7	–3	3	–4	4	–6

Номер варианта	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
a_x	–3	–4	3	4	1	–1	–6	–3	–9	8	3	–3	5	–5
a_y	–4	–3	4	3	–1	–6	9	–4	8	3	–3	5	–5	6
a_z	3	4	1	–1	–6	9	–9	8	3	–3	5	–5	6	0
b_x	4	1	–1	–6	9	–9	8	3	–3	5	–5	6	0	–6
b_y	2	3	3	4	4	5	5	1	2	2	3	3	4	4
b_z	9	4	0	–2	8	4	3	5	1	5	–4	2	1	–6
c_x	–1	4	–6	9	–4	8	3	4	1	–1	–6	9	–3	–4
c_y	4	1	–1	–6	9	–3	–4	–6	9	–4	8	3	–3	–4
c_z	–3	–4	3	4	4	1	–1	–6	9	–3	–4	9	–4	8

Задача 9. Определить длину векторов **a**, **b**, **c,** их направляющие косинусы и записать координатную форму векторов.

Длина векторов определяется в виде: $|\mathbf{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$. Направляющие косинусы вектора **a** определяются из уравнений: $a_x = |\mathbf{a}| \cos \alpha$, $a_y = |\mathbf{a}| \cos \beta$, $a_z = |\mathbf{a}| \cos \gamma$. Координатная форма векторов имеет вид: $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$.

Задача 10. Умножить векторы **a**, **b**, **c** на скаляр λ = – 3. Найти: сумму векторов **a**, **b**, **c**; разность двух векторов **a** и **b**; скалярное произведение векторов **a** и **b**; скалярный квадрат вектора **c**; косинус угла между векторами **a** и **b**, **a** и **c, b** и **c**.

При умножении вектора на скаляр, координаты вектора умножаются на этот скаляр, т. е. $\lambda\mathbf{a} = \lambda a_x\mathbf{i} + \lambda a_y\mathbf{j} + \lambda a_z\mathbf{k}$. При сложении (или вычитании) векторов их одноименные координаты складываются (или вычитаются), т. е. $\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = (a_x \pm b_x)\mathbf{i} + (a_y \pm b_y)\mathbf{j} + (a_z \pm b_z)\mathbf{k}$. Скалярное произведением двух векторов **a** и **b** определяется по формуле: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$. Скалярный квадрат вектора равен квадрату модуля этого вектора, т. е. $\mathbf{a}^2 = a^2$. Косинус угла между двумя ненулевыми векторами **a** и **b** равен: $\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|a| \cdot |b|}$.

Задача 11. Используя условие коллинеарности, определить, коллинеарны ли векторы **a**, **b**, **c** попарно между собой. Используя условие перпендикулярности векторов, определить, перпендикулярны ли вектора **a**, **b**, **c** попарно между собой. Найти вектора и их модули, которые является векторным произведением соответственно векторов **a** и **b**, **a** и **c, b** и **c**. Найти смешанное произведение трех векторов **a, b** и **c**.

Два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их одноименные координаты пропорциональны, т. е. $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$. Два вектора перпендикулярны тогда и только тогда, когда сумма парных произведений их одноименных координат равна нулю, т. е. $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$. Под векторным произведением двух векторов **a** и **b** понимается вектор **c** = **a** x **b** = [**a**, **b**], модуль которого равен площади параллелограмма, построенного на данных векторах, т. е. |c| = ab sin φ, этот вектор перпендикулярен плоскости, построенной на них параллелограмма и векторы **a**, **b** и **c** образуют правую тройку векторов. Если два вектора заданы своими координатами, т. е. **a** = a_x**i** + a_y**j** + a_z**k** и **b** = b_x**i** + b_y**j** + b_z**k**, то векторное произведение таких векторов определяется в виде определителя третьего порядка по формуле: **a** x **b** = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$. Если векторы заданы своими координатами, т. е. **a** = a_x**i** + a_y**j** + a_z**k**, **b** = b_x**i** + b_y**j** + b_z**k** и **c** = c_x**i** + + c_y**j** + c_z**k** то смешанное произведение таких векторов определяется в виде определителя третьего порядка по формуле: **abc** = $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$.

Лабораторная работа 2 (3 часа)

Задание 1. *Задачи на уравнения плоскости и прямой в пространстве.*

Задача 1. Найти: а) уравнение плоскости, проходящей через заданную точку с координатами (x_1, y_1, z_1), перпендикулярно вектору N(A,B,C); б) нормированное уравнение полученной плоскости; в) уравнение плоскости, проходящей через три точки с координатами (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2) и (x_3,y_3,z_3); г) расстояния от точки с координатами (x_2,y_2,z_2) и от начала координат до плоскости, уравнение которой определено в пункте а); д) двугранный угол между двумя плоскостями, уравнения которых получены в пунктах а) и в). Все необходимее данные для решения задачи выбираются из таблицы 4 согласно варианту.

Уравнение плоскости, проходящей через точку M_1(x_1, y_1, z_1) перпендикулярно вектору **N**(A, B, C) определяется по формуле: A(x – x_1) + + B(y – y_1) + C(z – z_1) = 0. Нормированное уравнение плоскости имеет вид: $\frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$= 0. Расстояние от точки M_2(x_2, y_2, z_2) до плоскости, определяется по формуле: d = $\frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Расстояние от начала координат до плоскости определяется в виде: d_0 = $\frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Пусть даны две плоскости $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ с направляющими векторами **N₁**(A_1, B_1, C_1) и **N₂**(A_2, B_2, C_2), тогда двугранный угол между ними равен углу, образованному векторами $\mathbf{N_1}$ и $\mathbf{N_2}$ и косинус его определяется по формуле: $\cos\varphi = \dfrac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right| \cdot \left|\vec{N}_2\right|}$.

Таблица 4

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
A	2	4	3	4	2	3	–4	4	–6	7	–3	2	–1	0
B	4	5	4	3	1	–4	3	–3	7	–3	4	–1	0	–5
C	0	–7	4	5	5	2	1	–4	4	–6	7	–3	2	–1
x_1	4	5	5	2	1	–4	4	–6	7	–3	2	–1	0	2
y_1	2	2	3	3	4	4	2	2	3	3	4	4	5	5
z_1	5	–4	2	1	–6	–8	9	4	0	–2	8	4	3	5
x_2	3	–4	4	–6	7	1	–4	3	–3	7	–4	3	–3	7
y_2	–4	3	–3	7	–3	3	–4	4	–6	7	7	–3	2	–1
z_2	7	–3	2	–1	0	–4	3	–3	7	–3	3	–4	4	–6
x_3	1	–4	3	–3	7	–3	1	4	2	3	–4	4	–6	4
y_3	4	2	3	–4	1	–4	3	–3	7	–3	4	5	5	1
z_3	4	5	5	4	2	3	–4	4	1	–4	3	–3	7	–3

Номер варианта	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
A	–3	–4	3	4	1	–1	–6	–3	–9	8	3	–3	5	–5
B	–4	–3	4	3	–1	–6	9	–4	8	3	–3	5	–5	6
C	3	4	1	–1	–6	9	–9	8	3	–3	5	–5	6	0
x_1	4	1	–1	–6	9	–9	8	3	–3	5	–5	6	0	–6
y_1	2	3	3	4	4	5	5	1	2	2	3	3	4	4
z_1	9	4	0	–2	8	4	3	5	1	5	–4	2	1	–6
x_2	–1	4	–6	9	–4	8	3	4	1	–1	–6	9	–3	–4
y_2	4	1	–1	–6	9	–3	–4	–6	9	–4	8	3	–3	–4
z_2	–3	–4	3	4	4	1	–1	–6	9	–3	–4	9	–4	8
x_3	4	4	5	5	1	2	8	3	–3	5	–5	6	–3	4
y_3	8	3	–3	5	–5	6	–3	4	4	4	5	5	1	2
z_3	–3	4	3	8	3	–3	5	–5	6	–3	4	3	–1	–6

Задача 2. Найти: а) каноническое и параметрические уравнения прямой с направляющим вектором $\mathbf{s}(m, n, p)$ и проходящей через точку с координатами (x_0, y_0, z_0); б) направляющие косинусы вектора. Значения m, n, p, x_0, y_0, z_0 взять из таблицы 5 в соответствии с заданным вариантом.

Параметрические уравнения прямой линии в пространстве: $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$. Если из параметрических уравнений исключить параметр t, то получим так называемое каноническое уравнение прямой линии в пространстве в виде: $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$. Числа m, n и p называются направляющими коэффициентами прямой линии. Обозначим через α, β, γ углы, образованные прямой линией с координатными осями, и учитывая, что cos α, cos β, cos γ являются направляющими косинусами вектора **s**, получим: m = s · cos α, n = s · cos β, p = s · cos γ, где s = $\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}$ – длина вектора **s**. Отсюда получим: cos α = $\frac{m}{s}$, cos β = $\frac{n}{s}$, cos γ = $\frac{p}{s}$.

Таблица 5

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
m	2	4	3	4	2	3	–4	4	–6	7	–3	2	–1	0
n	4	5	4	3	1	–4	3	–3	7	–3	4	–1	0	–5
p	0	–7	4	5	5	2	1	–4	4	–6	7	–3	2	–1
x_0	4	5	5	2	1	–4	4	–6	7	–3	2	–1	0	2
y_0	2	2	3	3	4	4	2	2	3	3	4	4	5	5
z_0	5	–4	2	1	–6	–8	9	4	0	–2	8	4	3	5

Номер варианта	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
m	–3	–4	3	4	1	–1	–6	–3	–9	8	3	–3	5	–5
n	–4	–3	4	3	–1	–6	9	–4	8	3	–3	5	–5	6
p	3	4	1	–1	–6	9	–9	8	3	–3	5	–5	6	0
x_0	4	1	–1	–6	9	–9	8	3	–3	5	–5	6	0	–6
y_0	2	3	3	4	4	5	5	1	2	2	3	3	4	4
z_0	9	4	0	–2	8	4	3	5	1	5	–4	2	1	–6

Задание 2. *Операции, связанные с вектор-функцией.*

Задача 3. Дана вектор - функция: r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k, где t – параметр, x(t) = nt^2, y(t) = t^2 + m, z(t) = pt + m – проекции вектора r(t) на оси координат.

Найти: а) производную вектор-функции r = r(t)и ее модуль в точке t_0 = 2; б) уравнение касательной к пространственной кривой **r(t)** в точке t_0 = 2; в) уравнение нормальной плоскости к пространственной кривой **r(t)** в точке $t_0 = 2$. Значения m, n, p взять из таблицы 5 в соответствии с вариантом.

Под производной вектор – функции **r(t)** = x(t)**i** + y(t)**j** + z(t)**k** понимают вектор, равный $\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t}$. Если функции x(t), y(t), z(t) – дифференцируемые, то при $\Delta t \to 0$ находим $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$.

Вектор $\frac{d\vec{r}}{dt}$ направлен по касательной к кривой в точке M (в сторону возрастания функции). Модуль производной вектор-функции определяется в виде: $\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2}$.

Уравнение касательной плоскости к пространственной кривой **r(t)** = x(t)**i** + y(t)**j** + z(t)**k** в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид: $\frac{x - x_0}{x_0'} = \frac{y - y_0}{y_0'} = \frac{z - z_0}{z_0'}$, где $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, $z_0 = z(t_0)$, $x_0' = x'(t_0)$, $y_0' = y'(t_0)$, $z_0' = z'(t_0)$.

Уравнение нормальной плоскости, т. е. плоскости, проходящей через точку касания перпендикулярно касательной плоскости, имеет вид: $x_0'(x - x_0) + y_0'(y - y_0) + z_0'(z - z_0) = 0$.

Задание 3. *Частные производные и производные по направлению.*

Задача 4. Найти: а) частные производные первого и второго порядка заданных функций двух переменных; б) производную $\frac{\partial z}{\partial l}$ функции $z = 2(x^2 + y^2)^2$ в направлении *l*, заданного вектором **a** = m**i** + n**j** в точке $M_0(x_0, y_0)$. Для выполнения задания а) функции двух переменных дополнительно предоставляются преподавателем, а для выполнения задания б) значения m, n, x_0, y_0 взять из таблицы 5.

Частной производной функции от нескольких переменных по одной из этих переменных называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению рассматриваемой независимой переменной при условии, что последнее стремится к нулю.

Если частная производная вычисляется по x, то вторая независимая переменная y считается постоянной и наоборот.

Рассмотрим отношение частного приращения функции z по переменной x к приращению Δx этой переменной, т. е. $\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$. Предел этого приращения при Δx → 0, если таковой существует, называется частной производной первого порядка функции z = f(x, y) по x и обозначается $\frac{\partial z}{\partial x}$ или $f_x^{/}(x, y)$, т. е. $\frac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$. Аналогично определяется частная производная $\frac{\partial z}{\partial y}$ или $f_y^{/}(x, y)$ от функции z = f(x, y) по y: $\frac{\partial z}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$.

Под производной $\frac{\partial z}{\partial l}$ функции в данном направлении *l* понимается предел отношения приращения функции в этом направлении к величине перемещения при условии, что последнее стремится к нулю, т. е. $\frac{\partial z}{\partial l} = \lim\limits_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l z}{\Delta l} = \frac{\partial z}{\partial x}$ cos α + $\frac{\partial z}{\partial y}$ cos β. Производная $\frac{\partial z}{\partial l}$ дает скорость изменения функции в направлении *l*. Производная $\frac{\partial z}{\partial l}$ функции в направлении *l,* заданного вектором **a** = a_x**i** + a_y**j**, в точке M(x, y) определяется по формуле: $\frac{\partial z}{\partial l}\Big|_{M(x,y)} = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{M)x,y)}$ cosα + $\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{M(x<y)}$ cosβ, где: cosα = $\frac{a_x}{|\vec{a}|}$, cosβ = $\frac{a_y}{|\vec{a}|}$.

Лабораторная работа 3 (3 часа)

Задание 1. *Вычисление неопределенных интегралов.*

Вычислить неопределенные интегралы, результаты проверить дифференцированием. Задание выдается преподавателем согласно варианту.

Таблица производных основных элементарных функций.

1. $(x^n)^{/} = nx^{n-1}$, $(c)^{/} = 0$, $(x)^{/} = 1$, $(x^2)^{/} = 2x$, $(\sqrt{x})^{/} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $(\frac{1}{x})^{/} = -\frac{1}{x^2}$.
2. $(a^x)^{/} = a^x \ln a$, $(e^x)^{/} = e^x$.
3. $(\log_a x)^{/} = \frac{1}{x \ln a}$, $(\ln x)^{/} = \frac{1}{x}$.
4. $(f(x)^{\varphi(x)})^{/} = f(x)^{\varphi(x)}(\varphi(x) \cdot f^{/}(x) + \varphi^{/}(x) \cdot \ln f(x))$.
5. $(\ln y)^{/} = \frac{y'}{y}$.

6. $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\text{tg } x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $(\text{ctg } x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

7. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\text{arctg } x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $(\text{arcctg } x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Если функция задана неявно, т. е. F(x, y) = 0, то для нахождения производной такой функции нужно продифференцировать обе части уравнения, рассматривая y как функцию от x, а затем из полученного уравнения найти производную.

Интегралы от основных элементарных функций.

1. $\int 0dx = C$, $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$, $\int dx = x + C$, $\int xdx = \dfrac{x^2}{2} + C$, $\int \sqrt{x}dx = \dfrac{2\sqrt{x^3}}{3} + C$, $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + C$, $\int \dfrac{1}{x^2}dx = -\dfrac{1}{x} + C$.

2. $\int \dfrac{1}{x}dx = \ln|x| + C$, $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0$, $a \neq 1$, $\int e^x dx = e^x + C$.

3. $\int \sin xdx = -\cos x + C$, $\int \cos xdx = \sin x + C$.

4. $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C$, $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin \dfrac{x}{a} + C = -\arccos \dfrac{x}{a} + C$, $a > 0$, $-a < x < a$.

5. $\int \dfrac{1}{1+x^2}dx = \text{arctg } x + C = -\text{arcctg } x + C$, $\int \dfrac{1}{a^2+x^2}dx = \dfrac{1}{a}\text{arctg } \dfrac{x}{a} + C = -\dfrac{1}{a}\text{arcctg } \dfrac{x}{a}$, $a \neq 0$.

6. $\int \dfrac{1}{x^2-a^2}dx = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$, $a \neq 0$, $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2 \pm a}}dx = \ln\left| x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C$, $a \neq 0$.

7. $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}dx = \text{tg } x + C$, $\int \dfrac{1}{\sin^2 x}dx = -\text{ctg } x + C$, $\int \dfrac{x}{a^2 \pm x^2}dx = \pm\dfrac{1}{2}\ln|a^2 \pm x^2| + C$.

8. $\int \dfrac{x}{\sqrt{a^2 \pm x^2}}dx = \pm\sqrt{a^2 \pm x^2} + C$, $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a} + C$.

9. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \dfrac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$.

Пример 1. Вычислить неопределенный интеграл.

$$\int (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{x^8} + x^4)dx.$$

$$\int(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{x^8}+x^4)dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx+ \int x^{\frac{-1}{3}}dx+ \int x^{-8}dx+ \int x^4 dx =$$

$$=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}+\frac{x^{-7}}{-7}+4x^3+C = \frac{2\sqrt{x^3}}{3}+\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}-\frac{1}{7x^7}+4x^3+C.$$

Пример 2. Вычислить неопределенный интеграл $\int\frac{1}{1-2x}dx$.

$$\int\frac{1}{1-2x}dx = \left|\begin{array}{l} \textit{Замена переменных} \\ t=1-2x, dt=-2dx \\ dx=\dfrac{dt}{-2} \end{array}\right| = \int\frac{dt}{-2t} = \frac{1}{-2}\int\frac{dt}{t} = \frac{1}{-2}\ln|t|+C.$$

Пример 3. Вычислить неопределенный интеграл $\int xe^{-2x}dx$.

$$\int xe^{-2x}dx = \left|\begin{array}{l} \textit{Интегрирование по частям} \\ u=x,\ \ du=dx,\ \ dv=e^{-2x}dx, \\ v=\dfrac{e^{-2x}}{-2} \end{array}\right| = \mathrm{u}\cdot\mathrm{v} - \int vdu = \mathrm{x}\frac{e^{-2x}}{-2} -$$

$$-\int\frac{e^{-2x}}{-2}dx = -\frac{xe^{-2x}}{2}-\frac{e^{-2x}}{4}+C.$$

Интегрированием по частям вычисляются интегралы вида: $\int x\ln x\,\mathrm{dx}$, $\int x\sin x dx$, $\int x\cos x dx$, $\int x\arcsin x dx$, $\int x\ arctg\ dx$ и др.

Пример 4. Вычислить неопределенный интеграл $\int\frac{dx}{x^2-4x+8}$.

$$\int\frac{dx}{x^2-4x+8} = \left|\begin{array}{l} \textit{Если в знаменателе стоит} \\ \textit{квадратный трехчлен, то} \\ \textit{необходимо выделить полный} \\ \textit{квадрат} \end{array}\right| = \int\frac{dx}{(x^2-2x2+4)-4+8} =$$

$= \int\frac{dx}{(x-2)^2+4} = \frac{1}{2}arctg\frac{x-2}{2}+C$. Аналогично вычисляется интеграл вида: $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+7x+15}}$.

Пример 5. Вычислить неопределенный интеграл $\int\frac{2x+1}{(x-1)^2(x+2)}dx$.

$$\int\frac{2x+1}{(x-1)^2(x+2)}dx = \left|\begin{array}{l} \textit{Используется метод неопределенных} \\ \textit{коэффициентов} \end{array}\right| = \int\frac{A}{(x-1)}dx +$$

$$+\int\frac{B}{(x-1)^2}dx+\int\frac{C}{(x-2)}dx = \int\frac{-1}{(x-1)}dx+\int\frac{-1}{(x-1)^2}dx+\int\frac{1}{(x-2)}dx =$$

$= -\ln|x - 1| + \dfrac{1}{x-1} + \ln|x-2| + C.$

Находятся коэффициенты A, B, C: $\dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{(x-1)^2} + \dfrac{C}{x-2} =$

$= \dfrac{Ax^2 - 3Ax + 2A + Bx - 2B + Cx^2 - 2Cx + C}{(x-1)^2(x-2)}$

$$\frac{A(x-1)(x-2) + B(x-2) + C(x-1)^2}{(x-1)^2(x-2)} \quad \begin{array}{l} x^2 \big| A + C = 0 \\ x^1 \big| -3A + B - 2C = 0 \Rightarrow \\ x^0 \big| 2A - 2B + C = 1 \end{array} \begin{cases} A = -C \\ C + B = 0 \\ -C - 2B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ C = 1 \\ B = -1 \end{cases}.$$

Пример 6. Вычислить неопределенный интеграл: $\int \sin^2 x dx$.

$\int \sin^2 x dx = \int \dfrac{1-\cos 2x}{2} dx = \int \dfrac{1}{2} dx - \int \dfrac{\cos 2x}{2} dx = \dfrac{1}{2} x - \dfrac{1}{4} \sin 2x + C$ (при вычислении аналогичных интегралов используются тригонометрические формулы понижения степени: $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ и $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$).

Пример 7. Вычислить неопределенный интеграл: $\int \dfrac{\sin x}{\cos^3 x} dx$.

$\int \dfrac{\sin x}{\cos^3 x} dx = \int \dfrac{-d(\cos x)}{\cos^3 x} = \dfrac{-\cos^{-2} x}{-2} + C = \dfrac{1}{2\cos^2 x} + C$.

Пример 8. Вычислить неопределенный интеграл: $\int \sin x \cdot \cos x dx$.

$\int \sin x \cdot \cos 3x dx = \dfrac{1}{2} \int (\sin(-2x) + \sin(4x)) dx = \dfrac{-1}{2} \int \sin 2x dx + \dfrac{1}{2} \int \sin 4x dx = \dfrac{1}{4} \cos(2x) -$ $- \dfrac{1}{8} \sin(4x) + C$. При вычислении аналогичных интегралов используются тригонометрические формулы: $\sin x \cdot \cos y = \dfrac{1}{2}[\sin(x - y) + \sin(x + y)]$;

$\sin x \cdot \sin y = \dfrac{1}{2}[\cos(x - y) - \cos(x + y)]$; $\cos x \cdot \cos y = \dfrac{1}{2}[\cos(x - y) + \cos(x + y)]$.

Задание 2. *Вычисление определенных интегралов.*

Вычислить определенные интегралы. Задание выдается преподавателем согласно варианту.

При вычислении определенного интеграла решение записывается в виде формулы Ньютона – Лейбница: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Задание 3. *Вычисление несобственных интегралов.*

Вычислить несобственные интегралы. Задание выдается преподавателем согласно варианту.

Несобственным интегралом $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ от функции f(x) на полуинтервале [a, +∞) называется предел функции при t, стремящемся к + ∞, т. е. $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{t\to+\infty}\int\limits_a^{t} f(x)dx$. Если предел существует и конечен, то собственный интеграл называется сходящимся, в противном случае – расходящимся. Использование несобственных интегралов позволяет определять площадь полубесконечной или бесконечной фигуры.

По аналогии определяется несобственный интеграл на полуинтервале (–∞, b] в виде: $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{b\to-\infty}\int\limits_t^{b} f(x)dx$. Несобственный интеграл на интервале (–∞, + ∞) имеет вид: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$. При этом интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ называется сходящимся. Если хотя бы один из интегралов $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$, $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ называется расходящимся.

Несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{2\pi}$ называется интегралом Эйлера – Пуассона.

Несобственным интегралом $\int\limits_a^{b} f(x)dx$ от функции y = f(x) на полуинтервале [a, b) называется предел $\lim\limits_{\delta\to0+}\int\limits_a^{b-\delta} f(x)dx$, где δ > 0, т. е. $\int\limits_a^{b} f(x)dx = \lim\limits_{\delta\to0+}\int\limits_a^{b-\delta} f(x)dx$. Если предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся, в противном случае – расходящимся.

Аналогично определяется понятие несобственного интеграла от функции y = f(x) непрерывной, но неограниченной на (a, b]: $\int\limits_a^{b} f(x)dx =$ $= \lim\limits_{\delta\to0+}\int\limits_{a+\delta}^{b} f(x)dx$. Если функция не ограничена в некоторой точке c ∈ (a, b), то интеграл $\int\limits_a^{b} f(x)dx$ называется несобственным. В этом случае интеграл $\int\limits_a^{b} f(x)dx = \int\limits_a^{c} f(x)dx + \int\limits_c^{b} f(x)dx$ считается сходящимся, если сходятся два несобственных интеграла, в противном случае интеграл $\int_a^b f(x)dx$ будет расходящимся.

Пример 1. Вычислить несобственный интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$.

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}(-\frac{1}{x})\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}(-\frac{1}{b}+1) = 1.$$

Пример 2. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx$.

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}(2\sqrt{x})\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0}(2\sqrt{1}-2\sqrt{\varepsilon}) = 2.$$

Лабораторная работа 4 (3 часа)

Задание 1. *Вычисления градиента функции.*

Если в каждой точке некоторой области задан некоторый скаляр, то в данной области будет определено скалярное поле. Плоское скалярное поле можно зависать в виде u = f(x, y). Для области, находящейся в пространстве OXУZ, скалярное поле можно записать в виде: u = f(x, y, z).

Если для каждой точки M, принадлежащей некоторой области, задан вектор **a** = **F**(M), то говорят в этой области определено векторное поле, Для случая плоского векторного поля, т. е. область находится на плоскости OXУ, векторная функция определяется в виде **a** = **F**(x, y). Переходя к координатам вектора **a**, получим $a_x = F_x(x, y)$ и $a_y = F_y(x, y)$ Для случая пространственного векторного поля имеем: **a** = **F**(x, y, z) или в координатах: $a_x = F_x(x, y, z)$, $a_y = F_y(x, y, z)$, $a_z = F_z(x, y, z)$.

Множество всех точек M, для которых скалярное поле сохраняет постоянное значение, т. е. f(M) = const, называется поверхностью (или линией) уровня скалярного поля (эквипотенциальная поверхность).

Пусть u = f(x, y) – дифференцируемое плоское скалярное поле. Тогда вектор grad u = $\{\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\}$ называется градиентом поля и определяется по формуле: grad u = $\vec{i}\frac{\partial u}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial u}{\partial y}$, где **i** и **j** – единичные векторы, направленные по осям координат OX и OУ. Аналогично, для пространственного скалярного поля u = f(x,y,z) его градиент есть вектор grad u = $\{\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\}$, определяемый по формуле: grad u = $\vec{i}\frac{\partial u}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial u}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial u}{\partial z}$. Градиент скалярного поля в данной точке M по модулю и направлению равен максимальной

скорости изменения поля в этой точке, т. е. $\max\limits_{l}\frac{\partial u}{\partial l}=|gradu|$ =
= $\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$. Используя градиент, можно определить единичный вектор нормали $\vec{n}^0$ к эквипотенциальной поверхности:

$$\vec{n}^0=\frac{gradu}{|gradu|}=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}}.$$

Основные свойства градиента выражаются следующими формулами: grad(u + v) = gradu + gradv; grad(u · v) = u·gradv + v·gradu; grad(c · u) = = c · gradu.

Задача 1. Найти: а) градиент функции u = $\frac{x^p}{\sqrt{mx^2+ny^2}}$ в точке $M_0(x_0, y_0)$; б) единичный вектор нормали к эквипотенциальной поверхности; в) максимальную скорость изменения поля в точке M_0. Значения m, n, p, x_0,y_0 взять из таблицы 6 согласно варианту.

Таблица 6

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
m	2	4	3	4	2	3	4	4	6	7	3	2	1	0
n	4	5	4	3	1	–4	3	–3	7	–3	4	–1	0	–5
p	0	1	4	2	1	2	1	4	3	2	1	2	1	1
x_0	4	5	5	2	1	–4	4	–6	7	–3	2	–1	0	2
y_0	2	2	3	3	4	4	2	2	3	3	4	4	5	5
z_0	5	–4	2	1	–6	–8	9	4	0	–2	8	4	3	5

Номер варианта	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
m	3	4	3	4	1	1	6	3	9	8	3	3	5	5
n	–4	–3	4	3	–1	–6	9	–4	8	3	–3	5	–5	6
p	3	1	1	1	2	3	3	4	3	3	2	2	1	0
x_0	4	1	–1	–6	9	–9	8	3	–3	5	–5	6	0	–6
y_0	2	3	3	4	4	5	5	1	2	2	3	3	4	4
z_0	9	4	0	–2	8	4	3	5	1	5	–4	2	1	–6

Задание 2. *Вычисление потока вектора через поверхность дивергенции. Применение формулы Остроградского – Гаусса.*

Поток Q вектора **a** через поверхность S представляет собой количество силовых линий, принизывающих эту поверхность. Поток вектора определяется по формулам: Q = $\iint\limits_S \vec{a} \cdot d\vec{S}$ или Q = $\iint\limits_S a_n dS$ или Q = $\iint\limits_S (a_x dydz + a_y dxdz + a_z dxdy)$ или Q = $\iint\limits_S$ ($a_x \cdot \cos(n,x) + a_y \cdot \cos(n,y) +$ $+ a_z \cdot \cos(n,z))dS$, где a_n – проекция вектора **a** на нормаль n и определяется по формуле: $a_n = a_x \cdot \cos(n,x) + a_y \cdot \cos(n,y) + a_z \cdot \cos(n,z)$, cos(n,x), cos(n,y), cos(n,z) – направляющие косинусы нормали к поверхности S.

Если поверхность S замкнутая и Q > 0, т. е. из объема выходит силовых линий больше, чем входит, и поток называется обильностью источника. Если поверхность S замкнутая и Q < 0, т. е. силовых линий выходит меньше, чем входит (отрицательная обильность или сток). Если поверхность S замкнутая и Q = 0, равенство выходящих и входящих силовых линий.

Предел отношения потока вектора через замкнутую поверхность к величине отграниченного объема, когда он стягивается в точку, называется дивергенцией или расходимостью вектора в данной точке и обозначается div **a**, т. е. div **a**(p) = $\lim\limits_{\Delta\tau \to P} \frac{\iint\limits_S \vec{a} \cdot d\vec{s}}{\Delta\tau}$.

Дивергенция – скалярная характеристика векторного поля. Она определяет количество векторных линий, начинающихся в бесконечно малом объеме, т. е. дивергенция имеет смысл плотности истечения векторных линий из точки. Она может быть положительной (в точке находится источник поля), отрицательной (находится сток) или равной нулю (источников и стоков нет). Численная величина дивергенции характеризует плотность источника.

На практике дивергенцию удобнее находить следующим образом: div **a** = $\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$. Поле, в котором div **a** = 0, называется соленоидальным.

Свойства дивергенции: div (**a** + b) = div **a** + div **b**; div (u**a)** = u $\cdot$ div **a** + + gradu $\cdot$ **a**$ div (c**a)** = c $\cdot$ div **a**, где c – константа.

Дивергенция вектора и поток вектора связаны между собой формулой Остроградского – Гаусса. Она гласит: поток вектора **a** через замкнутую поверхность S равен интегралу от дивергенции, взятому по объему V, ограниченному данной поверхностью S, т. е. $\iint\limits_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iiint\limits_V div\vec{a} d\tau$. Формула Остроградского – Гаусса применяется для преобразования интеграла по объему в интеграл по поверхности, ограничивающей этот объем.

Задача 2. Найти значение F_n и поток вектора силы притяжения $\vec{F} = -f\frac{M}{r^3}\vec{r}$ через поверхность сферы радиуса R с центром в начале координат. $f = 6{,}67 \cdot 10^{-8} \dfrac{см^3}{г \cdot c^2}$. $M = |m| \cdot 10^9$г, $r = 10^3 \cdot |p|$, см. Значения, m и p взять из таблицы 6 согласно варианту.

Пример 1. Поток найдем по формуле: $Q = \iint\limits_S a_n dS$, где $a_n = F_n$.

$Q = \iint\limits_S F_n dS$. Нормаль к поверхности сферы совпадает с радиусом, и проекция F_n равна модулю вектора $\vec{F}$, т. е. $F_n = |F| = f\dfrac{M}{R^3}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = f\dfrac{M}{R^2}$, так как на поверхности сферы r = R. Теперь находим поток: $Q = f\dfrac{M}{R^2}\iint\limits_S dS = f\dfrac{M}{R^2}4\pi R^2 = 4\pi fM$.

Задача 3. Вычислить дивергенцию единичного радиуса-вектора в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Значения x_0, y_0, z_0 взять из таблицы 6 согласно варианту.

Пример 2. Вычислить дивергенцию единичного радиуса-вектора в точке $M_0(0, 3, 4)$.

Единичный радиус-вектор имеет вид: $\vec{r}^{\,0} = \dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$, где $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $|\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Для нахождения дивергенции воспользуемся свойством div (ua) = u · div **a** + gradu · **a**, полагая, что $u = \dfrac{1}{|\vec{r}|}$ и $\mathbf{a} = \vec{r}$; div $(\vec{r}^{\,0})$ = div $\dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ = $= \dfrac{1}{|\vec{r}|}\cdot$div $\vec{r}$ + grad$\dfrac{1}{|\vec{r}|}$ · $\vec{r}$; div $\vec{r}$ = div $(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \dfrac{\partial x}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial z} = 3$; grad$\dfrac{1}{|\vec{r}|}$= = grad$(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} = -\dfrac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}2x\vec{i} - \dfrac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}2y\vec{j} - \dfrac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}2z\vec{k} = -\dfrac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$. Найдем скалярное произведение grad$\dfrac{1}{r}$ · $\vec{r}$; grad$\dfrac{1}{|\vec{r}|}$ · $\vec{r}$ = $\dfrac{xx+yy+zz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = -\dfrac{r^2}{r^3} = -\dfrac{1}{r}$. По найденным значениям определяем div $\vec{r}^{\,0} = \dfrac{3}{|\vec{r}|} - \dfrac{1}{|\vec{r}|} = \dfrac{2}{|\vec{r}|}$. Подставляя координаты заданной точки, получим div $\vec{r}^{\,0}(M) = \dfrac{2}{\sqrt{0^2+3^2+4^2}} = \dfrac{2}{5}$.

Задача 4. Вычислить дивергенцию поля $\vec{a} = (mx^2+ny^2)\vec{i} + (py^2+mz^2)\vec{j} + (nz^2+px^2)\vec{k}$ в точке $M(x_0, y_0, z_0)$. Значения m, n, p, x_0, y_0, z_0 взять из таблицы 6 согласно варианту.

Задача 5. С помощью формулы Остроградского – Гаусса найти поток вектора $\vec{a} = (mx^2 + ny^2)\vec{i} + (py^2 + mz^2)\vec{j} + (nz^2 + px^2)\vec{k}$ через поверхность куба со сторонами $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$.

Пример 3. С помощью формулы Остроградского – Гаусса найти поток вектора $\vec{a} = (x^2 + y^2)\vec{i} + (y^2 + z^2)\vec{j} + (z^2 + x^2)\vec{k}$ через поверхность куба со сторонами $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$.

Согласно формуле Остроградского – Гаусса $\iint\limits_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iiint\limits_V div\vec{a} \cdot d\tau$ найдем div $\vec{a}$ по формуле div $\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$. div $\vec{a}$ = $= 2(x + y + z)$. Теперь находим поток: $Q = 2\iiint\limits_V (x + y + z) d\tau =$ $= 2\iiint\limits_V (x d\tau + y d\tau + z d\tau)$. Каждый из трех интегралов решаем по отдельности: $\iiint\limits_V x d\tau = \int\limits_0^1 x dx \iint\limits_S dydz$, где S – поверхность, перпендикулярная оси x. Ее площадь равна произведению сторон, длины которых равны 1, т. е. $\iint\limits_S dydz = 1$. Таким образом, $\iiint\limits_V x d\tau = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}$. Аналогично можно найти и два других интеграла и в результате получим: $Q = 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}) = 3$.

Задание 3. *Вычисление циркуляции вектора, ротора. Применение формулы Стокса.*

Работа вектора по перемещению материальной точки вдоль кривой определяется криволинейным интегралом: $u = \int\limits_L \vec{a} \cdot d\vec{r}$. Этот интеграл называют также линейным интегралом. Скалярное произведение, стоящее под его знаком, можно записать через проекции. Если кривая L замкнутая, то производимая вектором работа называется циркуляцией.

Для вычисления циркуляции можно использовать любую из формул: $u = \oint\limits_L \vec{a} \cdot d\vec{r}$ или $u = \oint\limits_L a_\tau dr$ или $u = \oint\limits_L (a_x dx + a_y dy + a_z dz)$, или $u = \oint\limits_L \vec{a} \cdot \vec{\tau}^0 \cdot ds$,

где a_τ – проекция вектора **a** на касательную к кривой L, $\vec{\tau}^0$ – единичный вектор касательной к кривой L.

При вычислении работы должно быть задано направление обхода по кривой. Для правой системы координат его принимают против часовой стрелки.

Ротором векторного поля называется вектор, проекции которого на каждое направление равны пределу отношения циркуляции поля по контуру плоской площадки, перпендикулярной этому направлению, к величине площадки, когда размеры ее стремятся к нулю, т. е. $\text{rot}_n \mathbf{a} = \lim\limits_{\Delta S \to 0} \frac{\oint\limits_L \vec{a} \cdot d\vec{r}}{\Delta S}$. Сам вектор rot **a**, называется также вихревым полем и его можно записать в виде определителя: $rot\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$ или

rot **a** = $\left(\dfrac{\partial a_z}{\partial y} - \dfrac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\dfrac{\partial a_x}{\partial z} - \dfrac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\dfrac{\partial a_y}{\partial x} - \dfrac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}$.

Ротор представляет собой векторную характеристику векторного поля. Векторное поле, в котором rot **a** = 0, называется безвихревым или потенциальным.

Основные свойства ротора: rot(**a + b**) = rot **a** + rot **b**; rot(u**a**) = u·rot **a** + + gradu x **a**; div(rot **a**) = 0; div(**a** x **b**) = **b** · rot **a – a** · rot **b**; rot(rot **a**) = graddiv **a** – – Δ**a**.

Циркуляция векторного поля связана с его ротором формулой Стокса: $\oint\limits_L \vec{a}\cdot d\vec{r} = \iint\limits_S rot\vec{a}\cdot d\vec{s}$. Циркуляция вектора поля по контуру L равна потоку ротора поля через любую поверхность, ограниченную этим контуром. Формула Стокса позволяет вычислить циркуляцию, не проводя прямых вычислений, а также заменить контурные интегралы поверхностными и наоборот.

Задача 6. Найти rot $\vec{a}$, если $\vec{a}$ = $(mx^py^2z + nx^p)\vec{i}$ + $nx^py^mz^n\vec{j}$ + $(x^3y^p$ + + $pz^2)\vec{k}$. Значения m, n, p взять из таблицы 6 согласно варианту.

Пример 4. Найти rot $\vec{a}$, если $\vec{a}$ = $(3x^2y^2z + 3x)\vec{i}$ + $2x^3yz\vec{j}$ + $(x^3y^2$ + + $3z^2)\vec{k}$.

$$rot\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2y^2z+3x & 2x^3yz & x^3y^2+3z^2 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(x^3y^2+3z^2)}{\partial y} - \frac{\partial(2x_3yz)}{\partial z}\right)\vec{i} +$$

$$\left(\frac{\partial(3x^2y^2z+3x)}{\partial z} - \frac{\partial(x^3y^2+3z^2)}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial(2x^3yz)}{\partial x} - \frac{\partial(3x^2y^2z+3x)}{\partial y}\right)\vec{k} = (2x^3y - 2x^3y)\vec{i} +$$

$$+ (3x^2y^2 - 3x^2y^2)\vec{j} + (6x^2yz - 6x^2yz)\vec{k} = 0.$$

Задача 7. Вычислить работу вектора $\vec{a} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$ вдоль отрезка прямой от точки A(m, n, p) до точки B(x_0, y_0, z_0). Значения m, n, p, x_0, y_0, z_0 взять из таблицы 6 согласно заданному варианту.

Пример 7. Вычислить работу вектора $\vec{a} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$ вдоль отрезка прямой от точки A(1, 2, 3) до точки B(6, 1, 1).

Применим формулу u = $\int\limits_L \vec{a}\cdot d\vec{r}$, расписав ее в виде: $\int\limits_{AB} \vec{a}\cdot d\vec{r}$ = = $\oint\limits_{AB}(a_x dx + a_y dy + a_z dz) = \int\limits_{AB}(yzdx + xzdy + xydz)$. Выразим значения y и z, а также dy и dz через x и dx. Воспользуемся каноническим уравнением прямой:

$\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A}=\dfrac{y-y_A}{y_B-y_A}=\dfrac{z-z_A}{z_B-z_A}$. Подставим координаты точек A и B и составим две пары уравнений: $\dfrac{x-1}{6-1}=\dfrac{y-2}{1-2}=\dfrac{z-3}{1-3}$ и –x + 1 = 5y – 10, y = –1/5x + + 11/5, dy = –1/5dx, –2x + 2 = 5z – 15, z = –2/5x +17/5, dz = –2/5dx.
Подставим полученные данные в исходное выражение и получим искомую работу: $\int\limits_{AB}\vec{a}\cdot d\vec{r} = \int\limits_{AB}(yzdx+xzdy+xydz) =$

$$= \int\limits_1^6((-\frac{x}{5}+\frac{11}{5})(-\frac{2}{5}x+\frac{17}{5})+x(-\frac{2}{5}x+\frac{17}{5})(-\frac{1}{5})+x(-\frac{x}{5}+\frac{11}{5})(-\frac{2}{5}))dx =$$

$$= \frac{1}{25}\int\limits_1^6(6x^2-78x+187)dx = \frac{1}{25}(2x^3-39x^2+187x)\Big|_1^6 = \frac{1}{25}(432 - 1404 + 1122 - 2 +$$

+ 39 – 187) = 0.

Задача 8. По формуле Стокса найти циркуляцию вектора $\vec{a}=mx^2y^p\vec{i}+n\vec{j}+pz\vec{k}$ вдоль окружности $x^2 + y^2 = R^2$. Значения m, n, p взять из таблицы 6 согласно варианту.

Пример 8. По формуле Стокса найти циркуляцию вектора $\vec{a}=x^2y^3\vec{i}+\vec{j}+z\vec{k}$ вдоль окружности $x^2 + y^2 = R^2$.

Согласно формуле Стокса $\oint\limits_L\vec{a}\cdot d\vec{r}=\iint\limits_S rot\vec{a}\cdot d\vec{s}$, необходимо найти поток ротора вектора через замкнутую поверхность S, ограниченную заданной окружностью, т. е. $\iint\limits_S rot\vec{a}\cdot d\vec{S}$. Для этого вначале находим $rot\vec{a}$ по формуле:

$\mathrm{rot}\,\vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k} = (0 - 0)\vec{i} + (0 - 0)\vec{j} + (0 - 3x^2y^2)\vec{k}$. Для удобства интегрирования введем цилиндрические координаты: x = rcos φ, y = rsin φ, dS = rdrd φ.

Теперь проводим интегрирование и находим поток ротора, который и будет равен циркуляции вектора $\vec{a}$: $\iint\limits_S rot\vec{a}\cdot d\vec{S} = -3\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos^2\varphi d\varphi\int\limits_0^R r^5dr =$

$$= \frac{-3R^6}{6}\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos^2\varphi d\varphi = \frac{-3R^6}{6\cdot 4}\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 2\varphi d\varphi = \frac{-3R^6}{6\cdot 4}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4\varphi}{2}d\varphi = \frac{-R^6}{16}(\int\limits_0^{2\pi}d\varphi -$$

$$- \frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi}\cos 4\varphi d(4\varphi)) = \frac{-R^6}{16}(\varphi-\frac{1}{4}\sin(4\varphi))\Big|_0^{2\pi} = \frac{-R^6\pi}{8}.$$

Лабораторная работа 5 (3 часа)

Задание 1. *Определение параметров уравнения прямой линии на плоскости методом наименьших квадратов.*

В геофизике часто приходится пользоваться эмпирическими формулами, составленными на основе наблюдения за определенными величинами. Один из наилучших способов получения таких формул – это метод наименьших квадратов. Рассмотрим случай линейной зависимости между двумя величинами x и y. Зависимость между y и x выражается формулой: y = ax + b, где a и b некоторые постоянные коэффициенты, подлежащие определению. Способ наименьших квадратов состоит в том, что необходимо подобрать коэффициенты a и b так, чтобы сумма квадратов погрешностей была бы возможно меньшей.

Обозначим: $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$, $\bar{y} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$, $\overline{x^2} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}$, $\overline{xy} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i}{n}$.

Рассмотрим систему уравнений: $\begin{cases} b + a\bar{x} = \bar{y} \\ b\bar{x} + a\,\overline{x^2} = \overline{xy} \end{cases}$. Решим данную систему и получим расчетные формулы: a = $\dfrac{\overline{xy} - \bar{x}\cdot\bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}$, b = $\bar{y} - \bar{x}\cdot a$.

Расчеты лучше проводить в таблице

№ п. п.	x_i	y_i	x_i^2	$x_i\, y_i$
1				
2				
…				
n				
$\sum_{i=1}^{n}$				
	$\bar{x} =$	$\bar{y} =$	$\overline{x^2} =$	$\overline{xy} =$

Задача 1. Методом наименьших квадратов определить параметры a и b линейной зависимости y = ax + b. Построить графики экспериментальной зависимости y от x и аппроксимирующей прямой y = ax + b. В соответствии с вариантом выбрать значения x и y в таблице 7.

Таблица 7

Вариант 1	x_i	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
	y_i	0,9	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
Вариант 2	x_i	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6
	y_i	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2
Вариант 3	x_i	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0	4,2
	y_i	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0
Вариант 4	x_i	4,8	5,0	5,2	5,4	5,6	5,8
	y_i	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8
Вариант 5	x_i	6,4	6,6	6,8	7,0	7,2	7,4
	y_i	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5

Вариант 6	x_i	8,0	8,2	8,4	8,6	8,8	9,0
	y_i	4,8	4,9	5,0	5,1	5,2	5,3
Вариант 7	x_i	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1
	y_i	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
Вариант 8	x_i	1,7	1,9	2,1	2,3	2,5	2,7
	y_i	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3
Вариант 9	x_i	3,3	3,5	3,7	3,9	4,1	4,3
	y_i	2,6	2,7	2,7	2,8	2,9	3,0
Вариант 10	x_i	4,9	5,1	5,3	5,5	5,7	5,9
	y_i	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8
Вариант 11	x_i	4,9	5,1	5,3	5,5	5,7	5,9
	y_i	4,8	4,9	5,0	5,1	5,2	5,3
Вариант 12	x_i	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8
	y_i	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
Вариант 13	x_i	5,8	6,0	6,2	6,4	6,6	6,8
	y_i	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3
Вариант 14	x_i	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
	y_i	2,6	2,7	2,7	2,8	2,9	3,0
Вариант 15	x_i	5,2	5,4	5,6	5,8	6,0	6,2
	y_i	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8
Вариант 16	x_i	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0
	y_i	0,9	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
Вариант 17	x_i	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6
	y_i	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2
Вариант 18	x_i	5,2	5,4	5,6	5,8	6,0	6,2
	y_i	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0
Вариант 19	x_i	5,8	6,0	6,2	6,4	6,6	6,8
	y_i	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8
Вариант 20	x_i	7,4	7,6	7,8	8,0	8,2	8,4
	y_i	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5
Вариант 21	x_i	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0
	y_i	7,9	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5
Вариант 22	x_i	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6
	y_i	9,1	9,2	9,3	9,4	9,5	9,6
Вариант 23	x_i	5,2	5,4	5,6	5,8	6,0	6,2
	y_i	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Вариант 24	x_i	5,8	6,0	6,2	6,4	6,6	6,8
	y_i	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
Вариант 25	x_i	7,4	7,6	7,8	8,0	8,2	8,4
	y_i	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5
Вариант 26	x_i	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0
	y_i	1,7	1,9	2,1	2,3	2,5	2,7

Вариант 27	x_i	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6
	y_i	3,3	3,5	3,7	3,9	4,1	4,3
Вариант 28	x_i	5,2	5,4	5,6	5,8	6,0	6,2
	y_i	4,9	5,1	5,3	5,5	5,7	5,9

Задание 2. *Решение систем линейных уравнений методом Крамера.*

Дана система линейных уравнений, причем m = n.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_{2,} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Пусть Δ – определитель матрицы А, составленной из коэффициентов при неизвестных, Δ_1, Δ_2, . . . , Δ_n – определители матриц, получаемые из матрицы А заменой соответствующего столбца коэффициентов при x столбцом свободных членов.

Тогда, если Δ ≠ 0, то система имеет единственное решение, определяемое по формулам: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, . . . , $x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$. Данные формулы и являются формулами *Крамера.*

Задача 2. Решить методом Крамера систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

. Значения a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21},a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, b_1, $b_{2,}$ b_3 взять из таблицы 8 согласно варианту.

Пример 1. Решить методом Крамера систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11. \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

Матрица А, составленная из коэффициентов при неизвестных имеет: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Найдем определитель матрицы А: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$, т. к. Δ ≠ 0, то система имеет единственное решение.

Найдем определитель Δ_1 матрицы, полученной из матрицы А путем замены первого столбца столбцом свободных членов: $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 11 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$

= 3(2 – 1) + 1(22 – 8) + 1(11 – 8) = 3 + 14 + 3 = 20. Найдем определитель Δ_2 матрицы, полученной из матрицы А путем замены второго столбца столбцом свободных членов: $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 11 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 1(22 - 8) - 3(4 - 1) + 1(16 - 11) = 14 - 9 + 5$. Найдем определитель Δ_3 матрицы, полученной из матрицы А путем замены третьего столбца столбцом свободных членов: $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 1(8 - 11) + 1(16 - 11) + 3(2 - 1) = -3 + 5 + 3 = 5$. Тогда решение системы получим в виде:

$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 20/5 = 4$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 10/5 = 2$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 5/5 = 1$.

Таблица 8

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
a_{11}	1	2	1	1	5	1	7	2	1	2	–2	1	1
a_{12}	–1	–3	1	2	8	2	2	1	1	–3	1	2	–1
a_{13}	1	4	–2	3	1	1	3	–1	1	–1	0	3	1
a_{21}	2	3	2	2	3	–2	5	3	3	3	1	2	2
a_{22}	1	4	3	3	–2	3	–3	4	2	4	–2	3	1
a_{23}	1	–2	–7	–4	6	–3	2	0	1	3	–1	–1	1
a_{31}	1	4	5	3	2	3	10	1	1	1	3	3	1
a_{32}	1	2	2	1	1	–4	–11	0	3	1	4	1	1
a_{33}	2	3	1	1	–1	5	5	1	–1	1	–2	–4	2
b_1	3	20	6	2	2	8	15	0	22	–6	–6	6	1
b_2	11	–11	16	–5	–7	–5	15	–6	47	–5	5	4	4
b_3	8	9	16	3	–5	10	36	1	18	–2	13	0	4

Номер варианта	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
a_{11}	1	5	1	7	2	1	2	–2	1	1	2	1	1
a_{12}	2	8	2	2	1	1	–3	1	2	–1	–3	1	2
a_{13}	3	1	1	3	–1	1	–1	0	3	1	4	–2	3
a_{21}	2	3	–2	5	3	3	3	1	2	2	3	2	2
a_{22}	3	–2	3	–3	4	2	4	–2	3	1	4	3	3
a_{23}	–4	6	–3	2	0	1	3	–1	–1	1	–2	–7	–4
a_{31}	3	2	3	10	1	1	1	3	3	1	4	5	3
a_{32}	1	1	–4	–11	0	3	1	4	1	1	2	2	1
a_{33}	1	–1	5	5	1	–1	1	–2	–4	2	3	1	1
b_1	6	14	4	12	2	3	–2	–1	3	2	6	0	12
b_2	1	7	–2	4	7	6	10	–2	5	8	10	–4	2
b_3	5	2	4	4	2	3	3	5	4	8	18	16	10

Задание 3. *Решение систем линейных уравнений методом обратной матрицы.*

Дана система линейных уравнений, причем m = n: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$. Запишем данную систему в матричном виде: A · X = B. Определяется обратная матрица A^{-1}. Тогда решение системы в матричном виде будет иметь вид: $X = A^{-1} \cdot B$, или в развернутом виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & ... & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & ... & A_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ A_{1n} & A_{2n} & ... & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Матрица A^{-1} называется обратной по отношению к квадратной матрице A, если при умножении этой матрицы на данную как справа, так и слева получается единичная матрица, т. е. $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$. Обратная матрица A^{-1} существует и единственная тогда и только тогда, когда определитель исходной матрицы отличен от нуля, т. е. $|A| \neq 0$.

Алгоритм вычисления обратной матрицы.

1. Находится определитель исходной матрицы |A|. Если $|A| \neq 0$, то обратная матрица существует.
2. Находится матрица A^T, транспонированная к исходной матрице A.
3. Находятся алгебраические дополнения элементов транспонированной матрицы A_{ij}^T и составляется из них присоединенная матрица $A^п$, элементы которой равны: $a_{ij}^п = A_{ij}^T$.
4. Вычисляется обратная матрица по формуле: $A^{-1} = 1/|A| \cdot A^п$
5. Проверяется правильность вычисления обратной матрицы A^{-1}, исходя из ее определения: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.

Задача 3. Решить методом обратной матрицы систему линейных уравнений: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$. Значения a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21},a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, b_1, b_2, b_3 взять из таблицы 8 согласно заданному варианту.

Пример 2. Решить методом обратной матрицы систему линейных уравнений: $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$.

Матрица A, составленная из коэффициентов при неизвестных имеет:

$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$. Найдем определитель матрицы А: $\Delta = \begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix} = 5$. Найдем обратную матрицу к данной матрице. $|A| = 5$, следовательно, обратная матрица существует.

Находим матрицу A^T: $A^T = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

Находим алгебраические дополнения элементов матрицы A^T:

$A_{11}{}^T = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$, $A_{12}{}^T = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} = -(-2 - 1) = 3$;

$A_{13}{}^T = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} = -1 - 1 = -2$, $A_{21}{}^T = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} = -(4 - 1) = -3$;

$A_{22}{}^T = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$, $A_{23}{}^T = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix} = -(1 - 2) = 1$;

$A_{31}{}^T = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$, $A_{32}{}^T = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix} = -(1 + 1) = -2$;

$A_{33}{}^T = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix} = 1 + 2 = 3$.

Находим присоединенную матрицу: $A^п = \begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -3 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}$. Вычисляем обратную матрицу: $A^{-1} = 1/|A| \cdot A^п = 1/5 \cdot \begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -3 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/5 & 3/5 & -2/5\\ -3/5 & 1/5 & 1/5\\ 1/5 & -2/5 & 3/5\end{pmatrix}$.

Проверяем правильность вычисления обратной матрицы:

$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix}1/5 & 3/5 & -2/5\\ -3/5 & 1/5 & 1/5\\ 1/5 & -2/5 & 3/5\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Используя обратную матрицу, находим решения системы в виде: $X = A^{-1} \cdot B$

Запишем решение системы в развернутом виде:

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/5 & 3/5 & -2/5\\ -3/5 & 1/5 & 1/5\\ 1/5 & -2/5 & 3/5\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\\ 11\\ 8\end{pmatrix}.$$

Решения системы будут иметь вид:

$x_1 = 1/5 \cdot 3 + 3/5 \cdot 11 - 2/5 \cdot 8 = 4$,

$x_2 = -3/5 \cdot 3 + 1/5 \cdot 11 + 1/5 \cdot 8 = 2$,

$x_3 = 1/5 \cdot 3 - 2/5 \cdot 11 + 3/5 \cdot 8 = 1$.

Задание 4. *Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.*

Дана система линейных уравнений, причем m = n.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Метод Гаусса заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого вида. Переход системы к равносильной ей системе называется прямым ходом Гаусса. Нахождение значения переменных из системы называется обратным ходом Гаусса. Преобразования Гаусса удобно проводить не с самими уравнениями, а с расширенной матрицей вида: $A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_n \end{array}\right)$

Задача 4. Решить методом Гаусса систему линейных уравнений: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$. Значения a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21},a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, b_1, b_2, b_3 взять из таблицы 8 по варианту.

Пример 3. Решить методом Гаусса систему линейных уравнений: $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$. Расширенная матрица имеет вид: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right)$.

Преобразуем данную матрицу к ступенчатому виду: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Перейдем к системе уравнений:

$$\begin{cases} x = 4, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Лабораторная работа 6 (3 часа). Решение обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядков

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее искомую функцию одной или нескольких переменных, эти переменные и производные различных порядков. Если искомая функция зависит от одной переменной, то дифференциальное уравнение называется обыкновенным, если от нескольких переменных, то дифференциальное уравнение называется уравнением в частных производных.

Обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид: $F(x, y, y^{/}, y^{//}, \ldots y^{(n)}) = 0$.

Порядок дифференциального уравнения равен порядку старшей производной. Степенью дифференциального уравнения называется степень старшей производной.

Решением дифференциального уравнения называется любая функция $y = \varphi(x)$, которая, будучи подставлена в это уравнение, обращает его в тождество. Общим решением дифференциального уравнения n-го порядка называется такое его решение $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ которое является функцией переменной x и n произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Частным решением дифференциального уравнения называется решение, получаемое из общего решения при некоторых конкретных значениях постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Если решение дифференциального уравнения задано неявно, т. е. в виде: $\varphi(x, y) = 0$, то оно называется интегралом дифференциального уравнения.

Задание 1. *Решение дифференциальных уравнений первого порядка.* Задание выдается преподавателем согласно варианту.

Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной имеют вид: $y^{/} = f(x, y)$.

Дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными – это такое дифференциальное уравнение, которое может быть представлено в виде: $dy/dx = f(x)g(x)$ или в виде: $M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0$, где: $f(x)$, $M(x)$, $P(x)$ – некоторые функции переменной x, а $g(y)$, $N(y)$, $Q(y)$ – функции переменной y.

Однородное дифференциальное уравнение первого порядка – это такое дифференциальное уравнение, которое может быть представлено в виде: $y^{/} = g(y/x)$, где: g – некоторая функция. Введение вспомогательной функции $z = y/x$ позволяет свести это уравнение к уравнению с разделяющимися переменными.

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка – это такое дифференциальное уравнение, которое имеет вид: $y^{/} + f(x)y = g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ – некоторые непрерывные функции переменной x. Решение линейного дифференциального уравнения ищется в виде: $y(x) = u(x) \cdot v(x)$. Одна из данных функций выбирается произвольно, а другая –

определяется из уравнения $y' + f(x)y = g(x)$. Продифференцировав решение $y = uv$, получим: $y' = u'v + uv'$. Подставив значения y и y' в исходное уравнение, получим: $u'v + uv' + f(x)uv = g(x)$. Сгруппировав слагаемые в левой части, будем иметь: $(u'v + f(x)uv) + uv' = g(x)$. Вынося общий множитель v за скобки, получим: $(u' + f(x)u)v + uv' = g(x)$. Находим частное решение
$u = u(x)$ из уравнения $u' + f(x)u = 0$, которое есть уравнение с разделяющимися переменными. Подставляя полученное значение u в уравнение $(u'v + f(x)uv) + uv' = g(x)$, получим уравнение с разделяющимися переменными, из которого находим общее решение v. Далее определяется значение в виде: $y = uv$.

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{y^2+1}\,dx = xydy$.

Разделим левую и правую части уравнения на выражение x $\sqrt{y^2+1}$ (при $x \neq 0$), приходим к равенству $\frac{dx}{x} = \frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}}$. Интегрируя, получим: $\int\frac{dx}{x} = \int\frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}}$ или $\ln|x| = \sqrt{y^2+1} + C_1$. Запишем решение в виде: $x = \pm e^{C1} e^{\sqrt{y^2+1}}$ или $x = C e^{\sqrt{y^2+1}}$.

Пример 2. Решить уравнение $(x + 2y)y' = 1$.

При решении такого уравнения оно приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой переменной $z = ax + by + c$, где a, b и c – некоторое число. Положим $z = x + 2y$. Тогда $z' = 1 + 2y'$, откуда $y' = \frac{1}{2}(z' - 1)$. Исходное уравнение приводится к виду: $1/2z(z' - 1) = 1$, который допускает разделение переменных.

Пример 3. Решить уравнение $y' = \frac{x+2y}{x}$.

Так как $\frac{x+2y}{x} = 1 + 2y/x$, то уравнение примет вид: $y' = 1 + 2y/x$. Положим $z = y/x$, тогда $y = zx$ и $y' = z'x + z$. Получим уравнение $z'x + z = 1 + 2z$ или $z'x = 1 + z$ – это уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные, получим: $\frac{dz}{1+z} = \frac{dx}{x}$. Интегрируя почленно последнее равенство, получим: $\ln|1 + z| = \ln|Cx|$, откуда $1 + z = Cx$. Возвращаясь к первоначальным переменным, получим: $1 + y/x = Cx$, откуда $y = (Cx - 1)x$ – решение исходного дифференциального уравнения.

Пример 4. Решить уравнение: $xy' - 2y = 2x^4$.

Разделим левую и правую части на x, получим линейное дифференциальное уравнение вида $y' - \frac{2}{x}\cdot y = 2x^3$. Пусть $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$. Исходное уравнение примет вид: $u'v + uv' - \frac{2}{x}\cdot uv = 2x^3$, или

$(u'v - \frac{2}{x} \cdot uv) + uv' = 2x^3$. Откуда $(u' - \frac{2}{x}u)v + uv' = 2x^3$. Положим $u' - \frac{2}{x}u = 0$, следовательно, $\frac{du}{u} = \frac{2dx}{x}$, откуда, проинтегрировав данное уравнение, получим частное решение уравнение, т. е. $\ln|u| = 2\ln|x|$. Откуда $u = x^2$. Подставим значение u в уравнение $(u'v - \frac{2}{x} \cdot uv) + uv' = 2x^3$, получим $v'x^2 = 2x^3$, или $v' = 2x$. Решая данное уравнение с разделяющимися переменными, получаем $u = x^2 + C$. Тогда окончательное решение будет иметь вид $y = uv = (x^2 + C)x^2 = x^4 + Cx^2$.

Задание 2. *Решение дифференциальных уравнений второго порядка, допускающие понижения порядка.* Задание выдается преподавателем в соответствии с вариантом.

Дифференциальное уравнение второго порядка, допускающее понижение порядка, может быть сведено к последовательному решению двух дифференциальных уравнений первого порядка. Если дифференциальное уравнение имеет вид $y'' = f(x)$, то оно решается последовательным интегрированием. Если в запись дифференциального уравнения не входит искомая функция y, т. е. оно имеет вид $G(x,y',y'') = 0$, то такое уравнение решается путем введения вспомогательной функции $z = y'$. Если в уравнение не входит переменная x, т. е. оно имеет вид: $G(y,y',y'') = 0$, то порядок уравнения можно понизить, если за независимую переменную взять y, а за неизвестную функцию взять $z = y'$.

Пример 5. Решить уравнение $xy'' + y' = 0$.

Положим $z = y'$, тогда $y'' = z'$. Подставив значения y' и y'' в исходное уравнение, получим уравнение вида: $xz' + z = 0$. Откуда $\frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x}$. Интегрируя данное уравнение, приходим к решению: $z = C_1/x$. Возвращаясь к первоначальной функции, получаем уравнение $y' = C_1/x$ или $\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{x}$. Интегрируя данное уравнение, получаем: $y = C_1\ln|x| + C_2$.

Пример 6. Решить уравнение $2yy'' = (y')^2 + 1$.

Положим $z = z(y) = y'$, тогда $y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z'(y)z$. Исходное уравнение примет вид: $2yzz' = z^2 + 1$. Это уравнение с разделяющимися переменными. Преобразуем его к виду: $\frac{2zdz}{z^2+1} = \frac{dy}{y}$ или $\frac{d(z^2+1)}{z^2+1} = \frac{dy}{y}$. Выполняя интегрирование, получаем: $\ln(z^2 + 1) = \ln|yC|$ или $z^2 + 1 = yC$. Откуда следует $z = \pm\sqrt{yC-1}$. Так как $z = y'$, то приходим к следующему уравнению относительно y(x): $y' = \pm\sqrt{yC-1}$ или $\frac{dy}{\sqrt{yC-1}} = \pm dx$. Выполняя интегрирование, получаем $\pm\sqrt{yC-1} = C(x + C_1)/2$ или $Cy - 1 = C^2(x + C_1)^2/4$.

Откуда $y = \frac{C^2(x+C_1)^2}{4C} + \frac{1}{C}$ – решение исходного дифференциального уравнения.

Задание 3. *Решение линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.* Задание выдается преподавателем в соответствии с вариантом.

Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид: $y'' + py' + qy = f(x)$, где p, q – некоторые действительные числа, f(x) – некоторая функция.

Если $f(x) = 0$, то дифференциальное уравнение $y'' + py' + qy = 0$ называется однородным, если $f(x) \neq 0$, то дифференциальное уравнение $y'' + py' + qy = f(x)$ называется неоднородным.

Рассмотрим решение линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка, т. е. уравнений вида: $y'' + py' + qy = 0$.

Составляется характеристическое уравнение вида: $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. Если характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня λ_1 и λ_2, тогда общее решение однородного дифференциального уравнения имеет вид: $y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$, где C_1 и C_2 – некоторые числа. Если характеристическое уравнение имеет два одинаковых действительных корня λ, то общее решение однородного дифференциального уравнения имеет вид: $y = e^{\lambda x}(C_1 + xC_2)$. Если характеристическое уравнение имеет комплексные сопряженные корни $\alpha + i\beta$ и $\alpha - i\beta$, то общее решение однородного дифференциального уравнения имеет вид: $y = e^{\alpha x}(C_1\sin\beta x + C_2\cos\beta x)$.

Пример 7. Найти общее решение дифференциального уравнения: $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Составим характеристическое уравнение $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$. Находим корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Так как корни характеристического уравнения действительные и разные числа, то общее решение однородного дифференциального уравнения имеет вид: $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$.

Пример 8. Найти общее решение дифференциального уравнения: $y'' - 2y' + y = 0$.

Составим характеристическое уравнение вида: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$. Находим корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Так как корни характеристического уравнения действительные и одинаковые числа, то общее решение однородного дифференциального уравнения имеет вид: $y = e^x(C_1 + C_2x)$.

Пример 9. Найти общее решение дифференциального уравнения: $y'' - 2y' + 2y = 0$.

Составим характеристическое уравнение вида: $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$. Находим корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = \frac{2-\sqrt{4-8}}{2} = \frac{2-2i}{2} = 1-i$

и λ_2 = $\frac{2+\sqrt{4-8}}{2} = \frac{2+2i}{2}$ = 1 + i. Так как корни характеристического уравнения комплексные, сопряженные числа, при чем $\alpha = 1$ и $\beta = 1$, то общее решение однородного дифференциального уравнения имеет вид: $y = e^x(C_1\sin x + C_2\cos x)$.

Задание 4. *Решение линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, т. е. уравнений вида:* $y'' + py' + qy = f(x)$. Задание выдается преподавателем согласно варианту.

Данное уравнение можно решить методом вариации произвольных постоянных. Вначале находится общее решение однородного дифференциального уравнения $y'' + py' + qy = 0$ в виде: $y = C_1y_1 + C_2y_2$. Затем решение неоднородного дифференциального уравнения находят в виде: $y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$, т. е. предполагается, что постоянные C_1 и C_2 являются функциями переменной x. При этом $C_1(x)$ и $C_2(x)$ могут быть найдены как решения системы: $\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x). \end{cases}$

Наиболее распространен другой подход при решении неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Вначале находят общее решение однородного дифференциального уравнения ($\bar{y}$), а затем по виду правой части уравнения, находят частное решение неоднородного дифференциального уравнения ($\tilde{y}$).

Рассмотрим порядок записи частного решения ($\tilde{y}$) по виду правой части исходного дифференциального уравнения.

Если правая часть неоднородного дифференциального уравнения имеет вид: $e^{\alpha x}P(x)$, где P(x) – многочлен n-ой степени и α не является корнем характеристического уравнения однородного дифференциального уравнения, то существует частное решение вида: $\tilde{y} = e^{\alpha x}M(x)$, где $M(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_nx^n$. Если α является корнем характеристического уравнения кратности к (к = 1 или к = 2), то существует частное решение вида: $\tilde{y} = x^к e^{\alpha x}M(x)$.

Если правая часть линейного уравнения с постоянными коэффициентами может быть представлено в виде: $e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + P_m(x)\sin\beta x)$, где $P_n(x)$ и $P_m(x)$ – многочлены степени n и m соответственно и $z = \alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, то существует частное решение вида: $\tilde{y} = e^{\alpha x}(M_k(x)\cos\beta x + N_k(x)\sin\beta x)$, где $M_k(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_kx^k$, $N_k(x) = B_0 + B_1x + B_2x^2 + \ldots + B_kx^k$, k = max(n, m). Если же $z = \alpha + i\beta$ является корнем характеристического уравнения, то существует частное решение вида: $\tilde{y} = xe^{\alpha x}(M_k(x)\cos\beta x + N_k(x)\sin\beta x)$.

Пример 10. Решить уравнение: $y'' - 3y' + 2y = e^x$.

Решим соответствующее однородное дифференциальное уравнение $y'' - 3y' + 2y = 0$. Составим характеристическое уравнение $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$. Находим корни характеристического уравнения $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Так как корни характеристического уравнения действительные и разные числа, то общее решение однородного дифференциального уравнения имеет вид: $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$. Находим: $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$, $y_1' = e^x$, $y_2' = 2e^{2x}$.

Полагая, что C_1 и C_2 функции переменной x, находим первые производные этих функций, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{2x} = 0, \\ C_1'(x)e^x + C_2'(x)2e^{2x} = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'e^x + C_2'e^{2x} = 0, \\ C_1'e^x + C_2'2e^{2x} = e^x \end{cases}.$$

Вычитаем из второго уравнения первое, получим: $C_2'e^{2x} = e^x$, $C_2' = e^x/e^{2x} = e^{-x}$.

Найдем C_1' в виде: $C_1'e^x + e^{-x}e^{2x} = 0$; $(C_1' + 1)e^x = 0$; $C_1' = -1$. Получили два уравнения с разделяющимися переменными: $C_2' = e^{-x}$ и $C_1' = -1$.

Решим эти уравнения.

$dC_2/dx = e^{-x}$, $dC_2' = e^{-x}dx$, откуда: $C_2 = -e^{-x} + C_3$,

$dC_1/dx = -1$, $dC_1 = -dx$, откуда: $C_1 = -x + C_4$,

где C_3 и C_4 – некоторые постоянные числа. Окончательное решение примет вид: $y = (-x + C_4)e^{-x} + (-e^{-x} + C_3)e^{2x} = C_4e^{-x} + C_3e^{2x} - xe^{-x} - e^x$ – общее решение неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка.

Пример 11. Найти общее решение уравнения: $y'' - 3y' = 1 + 6x$.

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения будем искать в виде: $y = \bar{y} + \tilde{y}$.

Найдем общее решение однородного дифференциального уравнения: $y'' - 3y' = 0$. Составим характеристическое уравнение $\lambda^2 - 3\lambda = 0$ и найдем корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$. Так как корни характеристического уравнения действительные и разные числа, то общее решение однородного дифференциального уравнения имеет вид: $\bar{y} = C_1e^{0x} + C_2e^{3x} = C_1 + C_2e^{3x}$.

Исходя из правой части исходного уравнения, запишем полный вид правой части: $1 + 6x = e^{0x}(1 + 6x)$. $\lambda = 0$ – является корнем характеристического уравнения и $P_1(x) = 1 + 6x$ – многочлен 1-й степени. Следовательно, частное решение неоднородного дифференциального уравнения будет иметь вид: $\tilde{y} = x(A + Bx)$.

Найдем значения параметров A и B. $\tilde{y}' = A + Bx + Bx = A + 2Bx$. $\tilde{y}'' = 2B$. Подставим значения $\tilde{y}'$ и $\tilde{y}''$ в исходное уравнение, получим: $2B - 3A - 6Bx = 1 + 6x$, или $(2B - 3A) - 6Bx = 1 + 6x$. Данное уравнение равносильно системе уравнений: $\begin{cases} 2B - 3A = 1, \\ -6B = 6. \end{cases}$ Решая эту систему, находим, что $A = B = -1$.

Тогда искомое частное решение неоднородного уравнения будет иметь вид: $\tilde{y} = x(-1 - x)$.

А общее решение исходного дифференциального уравнения будет иметь вид: $y = C_1 + C_2e^{3x} + x(-1 - x)$.

Пример 12. Найти общее решение дифференциального уравнения: $y^{//} - 3y^{/} + 2y = 2e^{3x}$.

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения будем искать в виде: $y = \bar{y} + \tilde{y}$.

Найдем общее решение однородного дифференциального уравнения: $y^{//} - 3y^{/} + 2y = 0$. Составим характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$. Найдем корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Так как корни характеристического уравнения действительные и разные числа, то общее решение однородного дифференциального уравнения имеет вид: $\bar{y} = C_1e^x + C_2e^{2x}$.

Исходя из правой части исходного уравнения, запишем полный вид правой части: $2e^{3x}$, где $\lambda = 3$ не является корнем характеристического уравнения, $P_0(x) = 2$ – многочлен нулевой степени. Тогда частное решение неоднородного дифференциального уравнения будет иметь вид: $\tilde{y} = Ae^{3x}$.

Найдем значения параметра A. $\tilde{y}^{/} = 3Ae^{3x}$. $\tilde{y}^{//} = 9Ae^{3x}$. Подставим значения $\tilde{y}^{/}$ и $\tilde{y}^{//}$ в исходное уравнение, получим: $9Ae^{3x} - 9Ae^{3x} + 2Ae^{3x} = 2e^{3x}$, отсюда следует: $2A = 2$, или $A = 1$. Искомое частное решение неоднородного уравнения будет иметь вид: $\tilde{y} = e^{3x}$. Тогда общее решение неоднородного дифференциального уравнения будет иметь вид: $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + e^{3x}$.

Пример 13. Найти общее решение дифференциального уравнения: $y^{//} - 2y^{/} + 5y = \sin 2x$.

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения будем искать в виде: $y = \bar{y} + \tilde{y}$.

Найдем общее решение однородного дифференциального уравнения: $y^{//} - 2y^{/} + 5y = 0$.

Составим характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$. Найдем корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = 1 + 2i$, $\lambda_2 = 1 - 2i$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$. Так как корни характеристического уравнения комплексные и сопряженные числа, то общее решение однородного дифференциального уравнения имеет вид: $\bar{y} = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$.

Исходя из правой части исходного уравнения $\sin 2x$, запишем полный вид правой части: $e^{0x}(0 \cdot \cos 2x + 1 \cdot \sin 2x)$, где $\lambda = 0 + 2i$ – не является корнем характеристического уравнения, $P_0(x) = 0$, $Q_0(x) = 1$ – многочлены нулевой степени.

Тогда частное решение неоднородного дифференциального уравнения будет иметь вид: $\tilde{y} = e^{0x}(A\cos 2x + B\sin 2x) = A\cos 2x + B\sin 2x$.

Найдем значения параметров A и B. $\tilde{y}' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$, $\tilde{y}'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$. Подставим значения $\tilde{y}'$ и $\tilde{y}''$ в исходное уравнение, получим: $-4A\cos 2x - 4B\sin 2x + 4A\sin 2x - 4B\cos 2x + 5A\cos 2x + 5B\sin 2x = \sin 2x$, отсюда следует $A\cos 2x + B\sin 2x + 4A\sin 2x - 4B\cos 2x =$ $= \sin 2x$, или $(A - 4B)\cos 2x + (B + 4A)\sin 2x = \sin 2x$. Перейдем к равносильной системе уравнений: $\begin{cases} A - 4B = 0, \\ B + 4A = 1. \end{cases}$ Решая данную систему, получим: A = 4/17, B = 1/17. Искомое частное решение неоднородного уравнения будет иметь вид: $\tilde{y} = (4/17)\cos 2x + (1/17)\sin 2x$.

Тогда общее решение неоднородного дифференциального уравнения будет иметь вид: $y = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + (4/17)\cos 2x + (1/17)\sin 2x$.

Лабораторная работа 7 (3 часа). Числовые ряды

Задание 1. *Исследование сходимости числовых рядов с положительными членами.* Задание выдается преподавателем согласно варианту.

Числовым рядом называется ряд вида: $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, где $u_1, u_2, u_3, \ldots$ члены ряда, u_n – общим членом ряда. Сумма n = первых членов ряда S_n называется n-ой частичной суммой ряда.

Ряд называется сходящимся, если S_n при $n \to \infty$ стремится к конечному пределу, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, в противном случае ряд называется расходящимся. Число S называют суммой ряда.

Признаки сходимости рядов с положительными членами.

Признак сравнения. Пусть даны два ряда с положительными членами:

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ (1),

$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$ (2),

причем каждый из членов ряда (1) не превосходит соответствующего члена ряда (2), т. е. $u_n \le v_n$, тогда из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1), а из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2).

Для сравнения используются эталонные ряды:

1. геометрический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ – сходится при $|q| < 1$, расходится при $|q| \ge 1$;
2. гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – расходится;

3. обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ – сходится при $\alpha > 1$, расходится при $\alpha \le 1$.

Пример 1. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^{n-1}}$.

Сравним данный ряд со сходящимся геометрическим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}$, его q = $\frac{1}{3}$< 1. Так как члены исходного ряда, начиная со второго, меньше членов сходящегося геометрического ряда, т. е. $\frac{1}{6}<\frac{1}{3}$, $\frac{1}{27}<\frac{1}{9}$, . . . , $\frac{1}{n\cdot 3^{n-1}}<\frac{1}{3^{n-1}}$, то на основании признака сравнения исходный ряд сходится.

Предельный признак сравнения. Пусть даны два ряда с положительными членами: $\sum_{n=1}^{\infty}u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ и $\sum_{n=1}^{\infty}v_n = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$

Если существует конечный и отличный от нуля предел $\lim(\frac{u_n}{v_n}) = k$, то оба ряда одновременно сходятся или одновременно расходятся.

Пример 2. Исследовать сходимость ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+5}{n^3}$.

Сравним данный ряд с расходящимся гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Так как $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}(\frac{2n^2+5}{n^3}:\frac{1}{n}) = 2 \ne 0$, то исходный ряд, так же как и гармонический ряд, расходится.

Признак Даламбера. Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ с положительными членами существует предел отношения (n + 1)-го члена к n-члену, т. е. $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = k$, то ряд сходится, если k < 1, и ряд расходится, если k > 1, если же k = 1, то вопрос о сходимости ряда остается нерешенным.

Пример 3. Исследовать сходимость рядов: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$.

а) так как $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}(\frac{n+1}{2^{n+1}}:\frac{n}{2^n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1$, то по признаку Даламбера исходный ряд сходится;

б) так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} : \frac{3^n n!}{n^n}) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n \cdot 3n!(n+1)n^n}{(n+1)^n(n+1)3^n \cdot n!} =$ $= 3 \cdot \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1})^n = \frac{3}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{3}{e} > 1$, то по признаку Даламбера ряд расходится.

Интегральный признак сходимости. Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, члены которого положительные и не возрастают, т. е. $u_1 \ge u_2 \ge \ldots \ge u_n \ge \ldots$, а функция f(x), определенная при $x \ge 1$, непрерывная, не возрастающая и $f(1) = u_1$, $f(2) = u_2, \ldots, f(n) = u_n \ldots$ Тогда для сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ необходимо и достаточно, чтобы сходился несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$.

Пример 4. Исследовать сходимость обобщенного гармонического ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$.

Пусть $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$. Функция f(x) при $x \ge 1$ положительная и не возрастающая. Поэтому сходимость ряда равносильна сходимости несобственного интеграла $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$. Имеем $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_1^{b}\frac{dx}{x^{\alpha}}$. Если $\alpha = 1$, то $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_1^{b}\frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim\limits_{b\to\infty}(\ln|x|)\Big|_1^b = \lim\limits_{b\to\infty}(\ln|b| - \ln 1) = \infty$. Если $\alpha > 1$, то $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_1^{b}\frac{dx}{x^{\alpha}} =$ $= \lim\limits_{b\to\infty}(\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1})\Big|_1^b = \frac{1}{1-\alpha}\lim\limits_{b\to\infty}(b^{1-\alpha} - 1) = \frac{1}{\alpha-1}$. Итак, данный ряд сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

Задание 2. *Исследование сходимости знакочередующихся рядов.* Задание выдается преподавателем согласно варианту.

Под знакочередующимся рядом понимается ряд, в котором члены попеременно то положительные, то отрицательные.

Теорема Лейбниц (Признак Лейбница). Если члены знакочередующегося ряда убывают по абсолютной величине, т. е. $u_1 > u_2 > \ldots > u_n > \ldots$, и предел его общего члена при $n \to \infty$ равен нулю, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то ряд сходится, а его сумма не превосходит первого члена, т. е. $S \le u_1$.

Погрешность при приближенном вычислении суммы сходящегося знакочередующегося ряда, удовлетворяющего условиям теоремы Лейбница, по абсолютной величине не превосходит абсолютной величины первого отброшенного члена ряда.

Знакочередующийся ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится как сам ряд, так и ряд, составленный из абсолютных величин его членов.

Знакочередующийся ряд называется условно сходящимся, если сам ряд сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится.

Абсолютно сходящийся ряд сходится в основном в силу того, что их члены быстро убывают. Условно сходящийся ряд сходится в результате того, что положительные и отрицательные слагаемые уничтожают друг друга.

Пример 5. Исследовать сходимость ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

Так как члены данного знакочередующегося ряда убывают по абсолютной величине, т. е. $1 > \frac{1}{2^2} > \frac{1}{3^2} > \ldots > \frac{1}{n^2} > \ldots$, и предел общего члена равен 0. т. е. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0$, то по признаку Лейбница ряд сходится.

Так как ряд, составленный из абсолютных величин членов данного знакочередующегося ряда, т. е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, сходится, то исходный знакочередующийся ряд сходится абсолютно.

Задание 3. *Исследование сходимости степенных рядов.* Задание выдается преподавателем согласно варианту.

Ряды, членами которых являются степенные функции, называются степенными рядами. Они имеют вид: $c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx_n + \ldots$, где c_0, c_1, c_2, …, c_n – коэффициенты степенного ряда.

Совокупность тех значений x, при которых степенной ряд сходится, называется областью сходимости степенного ряда.

Теорема Абеля. Если степенной ряд сходится при значении $x = x_0 \neq 0$, то он сходится, притом абсолютно, при всех значениях x таких, что $|x| < |x_0|$. Если степенной ряд расходится при $x = x_1$, то он расходится при всех значениях x таких, что $|x| > |x_1|$.

Из теоремы Абеля следует, что существует такое число $R \geq 0$, что при $|x| < R$ ряд сходится, а при $|x| > R$ – расходится. Число R называется радиусом сходимости, а интервал $(–R; R)$ – интервалом сходимости степенного ряда. На концах интервала сходимости, т. е. при $x = –R$ и $x = R$, ряд может как сходится, так и расходится.

Радиус сходимости степенного ряда определяется по формуле: $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$. Если $R = 0$, то интервал сходимости вырождается в точку. Если $R = \infty$, то интервал сходимости охватывает всю числовую ось.

Пример 6. Найти область сходимости степенного ряда: $1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$

Данный ряд является геометрическим рядом со знаменателем $q = x$. Ряд сходится, если $|x| < 1$. Отсюда, областью сходимости ряда является интервал $(-1; 1)$.

Пример 7. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{(2n+1)^2\sqrt{3^n}}$.

Находим радиус сходимости степенного ряда: $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| =$

$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^n}{(2n+1)^2\sqrt{3^n}} : \frac{2^{n+1}}{(2(n+1)+1)^2\sqrt{3^{n+1}}}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+3)^2}{(2n+1)^2}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Тогда $|x| < R$, откуда получим интервал сходимости ряда: $(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

На левом конце при $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ данный степенной ряд примет вид следующего знакочередующегося числового ряда: $1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} + \ldots$ Этот ряд сходится по признаку Лейбница. Причем, знакочередующийся ряд сходится абсолютно.

На правом конце при $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ получаем числовой ряд с положительными членами: $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \ldots + \frac{1}{(2n+1)^2} + \ldots$, представляющий собой обобщенный гармонический ряд при $\alpha = 2$, у которого все члены с четными номерами равны нулю. Этот ряд сходится.

Итак, область сходимости данного ряда будет иметь вид: $[-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}]$.

При исследовании сходимости ряда на концах интервала сходимости применять признак Даламбера не имеет смысла, так как в этом случае всегда будем получать $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 1$. В этом случае рекомендуется рассматривать другие признаки сходимости.

***Задание 4**. Ряд Маклорена и его применение.* Задание выдается преподавателем, согласно варианта.

Если функция $f(x)$ определена и n раз дифференцируемая в окрестности точки $x = 0$, то она может быть представлена в виде суммы степенного ряда, т. е. может быть разложена в степенной ряд вида:

$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \ldots + c_nx^n + \ldots$ Выразим коэффициенты ряда через f(x): $c_0 = f(0)$, $c_1 = f'(0)$, $c_2 = \frac{f''(0)}{2!}$, $c_3 = \frac{f'''(0)}{3!}$.

Рядом Маклорена называется ряд вида:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

Разложение в ряд Маклорена некоторых элементарных функций.

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$ Область сходимости ряда $(-\infty; \infty)$.

2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$ Область сходимости ряда $(-\infty; \infty)$.

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$ Область сходимости ряда $(-\infty; \infty)$.

4. $(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{m(m-1)(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots$, где m – любое действительное число. Интервал сходимости ряда $(-1; 1)$ (на концах интервала при $x = 1$ и $x = -1$ сходимость ряда зависит от конкретных значений m).

5. $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \ldots$ Область сходимости ряда $(-1; 1)$.

Пример 8. Разложить в ряд функцию $y = \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}$.

Воспользуемся формулой: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$ Заменим в этой формуле x на $(-x^2)$, получим: $e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \ldots$, тогда $1 - e^{-x^2} = x^2 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{n!} + \ldots$, и наконец получим: $\frac{1-e^{-x^2}}{x^2} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{n!} + \ldots$

Пример 9. Разложить в ряд функцию: $y = \ln\frac{1+x}{1-x}$.

Воспользуемся разложением: $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \ldots$ Заменим x на (–x), получим: $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^{n+1}}{n+1} - \ldots$, тогда $\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \ldots) - (-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^{n+1}}{n+1} - \ldots) = 2(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots \frac{x^{2n+1}}{2n-1} + \ldots)$.

Пример 10. Вычислить приближенное значение интеграла $\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx$ с точностью до 0,0001.

В разложении: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$, заменим x на (–x), тогда: $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \ldots$ Умножая данный ряд на $\sqrt{x}$, получим: $\sqrt{x}\ e^{-x} = x^{\frac{1}{2}}e^{-x} = x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{n+\frac{1}{2}}}{n!} + \ldots$ Почленно интегрируя ряд, получим: $\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}dx - \int_0^1 x^{\frac{3}{2}}dx + \ldots + \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{n+\frac{1}{2}}}{n!}dx + \ldots$

$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1 + \ldots + \frac{1}{(n+\frac{3}{2})}\frac{x^{n+\frac{3}{2}}}{n!}\Big|_0^1 + \ldots = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \ldots + \frac{(-1)^n 2}{(2n+3)n!} + \ldots = 0,66667 -$
$- 0,40000 + 0,14286 - 0,03704 + 0,00758 - 0,00128 + 0,00018 - \ldots \approx 0,37897 \approx$
$\approx 0,3790$.

Задания к лабораторной работе 7

Вариант 1.

Задание 1. Исследовать сходимость числовых рядов с положительными членами: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+6}{100n-1}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(1+n^2)}}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{3^n}$.

Задание 2. Исследовать сходимость знакочередующихся рядов: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(3n)^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^3+4}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{n^3+2}$.

Задание 3. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$.

Задание 4. Разложить в ряд Маклорена функцию: $y = \frac{e^x - 1}{x}$.

Задание 5. Вычислить приближенно значение интеграла с точностью 0,001: $\int_o^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

Вариант 2.

Задание 1. Исследовать сходимость числовых рядов с положительными членами: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7n+2}{17n-1}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3(2+n^2)}}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+5)}{6^n}$

Задание 2. Исследовать сходимость знакочередующихся рядов: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{(4n+1)^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 4}{(2n-1)2^{2n-1}}$.

Задание 3. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{5}x^{2n}$.

Задание 4. Разложить в ряд Маклорена функцию: $y = \cos^2 x$.

Задание 5. Вычислить приближенно значение интеграла с точностью 0,001: $\int_0^{1/2} e^{-x^2}dx$.

Лабораторная работа 8 (3 часа). Ряды и интегралы Фурье

Задание 1. *Разложение функций в ряд Фурье.* Задание выдается преподавателем согласно варианту.

Пусть f(x) есть периодическая функция с периодом 2π. Тригонометрический ряд вида: $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ называется *рядом Фурье функции f(x).* Коэффициенты a_0, a_n, b_n называются *коэффициентами Фурье функции f(x)* и определяются по формулам: $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$, $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$.

Если ряд сходится, то его сумма есть периодическая функция f(x) в интервале (π, π) с периодом 2π. Сумма полученного ряда S(x) равна значению функции f(x) в точках непрерывности функции. В точках разрыва функции f(x) сумма ряда равняется среднему арифметическому пределов функции f(x) справа и слева, т. е. если x = c – точка разрыва функции, то $S(x)_{x=c} = \frac{f(c-0)+f(c+0)}{2}$.

Если в ряд Фурье разлагается нечетная функция, то $a_0 = 0$, $a_n = 0$, $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx$. Если в ряд Фурье разлагается четная функция, то $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx$, $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx$, $b_n = 0$.

Пример 1. Дана периодическая функция f(x) = x, –π < x ≤ π. Разложить функцию f(x) в ряд Фурье.

По формуле $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$, находим $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$.

По формуле $a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx$, находим $a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\cos nxdx =$

$= \frac{1}{\pi}[x\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx] = 0.$

По формуле $b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx$, находим $b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin nxdx =$

$= \frac{1}{\pi}[-x\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx] = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}$.

Таким образом, получаем разложение функции в ряд Фурье:

$f(x) = 2[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots (-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} + \ldots].$

Пусть f(x) есть периодическая функция с периодом 2l. Ряд Фурье для периодической функции с периодом 2l имеет вид: $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x + b_n\sin\frac{n\pi}{l}x)$, где: $a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx$, $a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos n\frac{\pi}{l}xdx$, $b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin n\frac{\pi}{l}xdx$.

Пример 2. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию f(x) = |x| с периодом 2*l* на отрезке [–*l*; *l*].

Так как рассматриваемая функция четная, то $a_0 = \frac{2}{l}\int\limits_0^l xdx = l$,

$a_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l x\cos\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2l}{\pi_2}\int\limits_0^{\pi} x\cos nxdx = \begin{cases} 0, \text{ при } k \text{ четном}, \\ -\frac{4l}{\pi^2 k^2}, \text{ при } k \text{ нечетном}, \end{cases}$ $b_n = 0.$

Следовательно, разложение в ряд Фурье имеет вид:

$$|x| = \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}\left[\frac{\cos\frac{\pi}{l}x}{1} + \frac{\cos\frac{3\pi}{l}x}{3^2} + \ldots + \frac{\cos\frac{(2p+1)\pi}{l}x}{(2p+1)^2} + \ldots\right].$$

Задание 2. *Вычисление интегралов Фурье.* Задание выдается преподавателем согласно варианту.

Пусть функция f(x) определена на бесконечном интервале (-∞; +∞) и абсолютно интегрируема на нем, т. е. существует интеграл: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx = Q$. (1)

Если функция f(x) кусочно-монотонная на каждом конечном интервале ограничена на бесконечном интервале и удовлетворяет условию (1), то при $l \to \infty$: $f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt)d\alpha$. (2)

Стоящее справа выражение называется интегралом Фурье для функции f(x). Данное равенство имеет место для всех точек, где функция непрерывна. В точках разрыва выполняется равенство

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt\right)d\alpha = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Преобразуем интеграл, стоящий в правой части равенства (2), раскрывая cosα(t – x): cosα(t – x) = cos αt cos + sin αt sin αx.

Вынося cos αx и sinαx за знак интегралов, где интегрирование производится по переменной t, получим:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt\right)\cos\alpha x\,d\alpha + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\alpha t\,dt\right)\sin\alpha x\,d\alpha. \quad (3)$$

Каждый из интегралов по t, стоящий в скобках, существует, так как функция f(t) абсолютно интегрируема в интервале (–∞; +∞), и, следовательно, абсолютно интегрируема и функция f(t)cos αt и f(t)sinαt.

Рассмотрим частные случай формулы (3):

1. Пусть f(x) – четная функция. В этом случае f(t)cos αt – функция четная, а f(t)sinαt – нечетная. Тогда получаем: $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt = 2\int_{0}^{\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt$, а $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\alpha t\,dt = 0$. Формула (3) в этом случае примет вид:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{0}^{\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt\right)\cos\alpha x\,d\alpha. \quad (4)$$

2. Пусть f(x) – нечетная функция. В этом случае f(t)cos αt – функция нечетная, а f(t)sin αt – четная. Тогда получаем: $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\alpha t\,dt = 2\int_{0}^{\infty} f(t)\sin\alpha t\,dt$, а $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt = 0$. Формула (3) в этом случае примет вид:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{0}^{\infty} f(t)\sin\alpha t\,dt\right)\sin\alpha x\,d\alpha. \quad (5)$$

В точках разрыва вместо выражения f(x) в левых частях равенств следует писать $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

В выражении (3) интегралы, стоящие в скобках, являются функциями от α. Введем обозначения: $A(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt$, $B(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\alpha t\,dt$. Тогда формулу (3) можно записать в виде:

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}\left(A(\alpha)\cos\alpha x + B(\alpha)\sin\alpha x\right)d\alpha. \quad (6)$$

Формула (6) дает разложение функции f(x) на гармоники с непрерывно меняющейся от 0 до ∞ частотой α. Закон распределения амплитуд и начальных фаз в зависимости от частоты α выражается через функции A(α) и B(α).

В формуле (4) положим F(α) = $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty} f(t)\cos\alpha t$ dt. (7) Тогда формула (4) примет вид: f(x)= $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty}$ F(α)cos αx dα. (8)

Функция F(α) называется косинус-преобразованием Фурье для функции f(x). Если в равенстве (7) считать F(α) заданной, а f(t) искомой функцией, то оно является интегральным уравнением для функции f(t). Формула (8) дает решение этого уравнения.

На основании формулы (5) можем написать следующие равенства:

Ф(α) = $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty} f(t)\sin\alpha t$ dt. (9) f(x)= $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty}$ Ф(α)sin αx dα. (10)

Функция Ф(α) называется синус-преобразование Фурье.

Пример 3. Пусть f(x) = $e^{-\beta x}$, β > 0, x ≥ 0.

По формуле (7) определяем косинус-преобразование Фурье:

F(α) = $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty} e^{-\beta t}\cos\alpha t\, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\beta}{\beta^2+\alpha^2}$. По формуле (9) определяем синус-преобразование Фурье: Ф(α) = $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty} e^{-\beta t}\sin\alpha t\, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha}{\beta^2+\alpha^2}$

По формулам (8) и (10) находим взаимные соотношения

$\frac{2\beta}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\cos\alpha x}{\beta^2+\alpha^2}d\alpha = e^{-\beta x}$, x ≥ 0, $\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\alpha\sin\alpha x}{\beta^2+\alpha^2}d\alpha = e^{-\beta x}$, x > 0.

Пример 4. Представить интегралом Фурье функцию:

$$f(x)=\begin{cases}1,\ 0<x<1,\\ \frac{1}{2},\ \ x=0\ \ и\ \ x=1,\\ 0,\ x<0\ \ и\ \ x>1.\end{cases}$$

Данная функция является кусочно-гладкой, так как она состоит из трех гладких частей: y = 0 на (–∞, 1), y = 1 на (0, 1) и y = 0 на (1, ∞) и имеет две точки разрыва первого рода при x = 0 и x = 1. Эта функция абсолютно интегрируема на всей числовой оси, так как вне отрезка [0, 1] она равна нулю, и интеграл от нее по всей числовой оси сведется к интегралу по отрезку [0, 1].

Следовательно, такая функция может быть представлена интегралом Фурье. По формуле f(x)=$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt\right)d\alpha$ имеем:

f(x) = $\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt\right)d\alpha = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\left(\int\limits_0^1 1\cdot\cos\alpha(t-x)\,dt\right)d\alpha.$ =

$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin\alpha(t-x)}{\alpha}\Big|_0^1 d\alpha = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin\alpha(1-x)+\sin\alpha x}{\alpha}\,d\alpha = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha(1-2x)}{2}}{\alpha}\,d\alpha$

.

В точках x = 0 и x = 1, где f(x) терпит разрыв, полученное представление сохраняется, так как в этих точках $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \frac{1}{2} =$ = f(x).

В частности, при x = 0 получим: f(0) = $\frac{1}{2} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\alpha}\,d\alpha =$ $= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,d\alpha$, что равносильно равенству $\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{\pi}{2}$.

Пример 5. Представить интегралом Фурье функцию $f(x) = \begin{cases} 1-\frac{x}{2},\ 0\le x\le 2, \\ 0,\ x>2. \end{cases}$ продолжив ее четным образом для отрицательных значений.

Заданная четная функция удовлетворяет условиям представления в виде интеграла Фурье, поэтому к ней можно применить формулу f(x) = $\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\left(\int\limits_0^{\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt\right)\cos\alpha x\,d\alpha$, в которой интегрировать функцию f(t) надо только по отрезку [0, 2], так как вне этого отрезка она равна нулю. Имеем f(x) = $\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\left(\int\limits_0^{2}(1-\frac{t}{2})\cos\alpha t\,dt\right)\cos\alpha x\,d\alpha$.

Вычислим отдельно внутренний интеграл по частям: $\int\limits_0^2(1-\frac{t}{2})\cos\alpha t\,dt = (1-\frac{t}{2})\frac{\sin\alpha t}{\alpha}\Big|_0^2 + \frac{1}{2\alpha}\int\limits_0^2\sin\alpha t\,dt = (0-0) - \frac{1}{2\alpha^2}\cos\alpha t\Big|_0^2 =$ $= \frac{1-\cos 2\alpha}{2\alpha^2} = \frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}$, следовательно, f(x) = $\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}\cos\alpha x\,d\alpha$, в частности, при x = 0 имеем: f(0) = 1 = $\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}\,d\alpha$, т. е. $\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}\,d\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Задание 3. *Вычисление интегралов Фурье в комплексной форме.* Задание выдается преподавателем согласно варианту.

f(x)=$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\alpha(t-x)}\,dt\right)d\alpha$ – интеграл Фурье в комплексной форме.

Эту формулу можно переписать так: f(x) = $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\alpha t}\,dt\right)e^{-i\alpha x}d\alpha$.

На основании последнего равенства можно написать: $F^*(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\alpha t}dt$, (1) тогда: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F^*(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha$.

Функция $F^*(\alpha)$ называется преобразованием Фурье для функции f(t) или спектральной плотностью функции f(t). Модуль $|F^*(\alpha)|$ называется амплитудным спектром функции f(t). Функция f(t) называется обратным преобразованием Фурье для функции $F^*(\alpha)$. Эти преобразования отличаются знаком при i.

Пример 6. Представить функцию f(x) комплексной формой интеграла Фурье. Найти спектральную функцию и амплитудный спектр функции f(x).

$f(x) = \begin{cases} e^{-0.2x}, & при\ x > 0, \\ 0, & при\ x < 0. \end{cases}$ По формуле (1) находим спектральную плотность функции, учитывая, что при t < 0 f(t) = 0: $F^*(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-0.2t}e^{i\alpha t}dt$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-0.2t+i\alpha t}dt = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}(0,2-i\alpha)}e^{-(0.2-i\alpha)t}\Big|_0^\infty = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(0,2-i\alpha)}.$$

Амплитудный спектр $|F^*(\alpha)|$ определяем в виде:

$$|F^*(\alpha)| = \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}(0,2-i\alpha)}\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,|0,2-i\alpha|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(0,04+\alpha^2}}.$$

Комплексная форма интеграла Фурье имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{0.2-i\alpha}e^{-i\alpha x}d\alpha.$$

Задания к лабораторной работе 8

Вариант 1.

Задание 1. Разложить следующую функцию в ряд Фурье: f(x) = x + 1, на $(-\pi, \pi)$.

Задание 2. Вычислить интеграл Фурье: $\int\limits_0^\infty e^{-4x}\sin 3x\cos 2x dx$.

Задание 3. Представить следующую функцию комплексной формой интеграла Фурье, найти спектральную характеристику и амплитудный спектр: $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,a), \\ 0, & x \notin (0,a). \end{cases}$

Вариант 2.

Задание 1. Разложить следующую функцию в ряд Фурье: f(x) = $\dfrac{\pi - x}{2}$, на (0, 2π).

Задание 2. Вычислить интеграл Фурье: $\int\limits_0^\infty e^{-3x}\cos 3x \cos 4x dx$.

Задание 3. Представить следующую функцию комплексной формой интеграла Фурье, найти спектральную характеристику и амплитудный спектр: f(x) = $\begin{cases} 2e^{-ax} & x \in (0,\infty), \\ 0, & x \in (-\infty,0), \end{cases}$ $a > 0$.

Вариант 3.

Задание 1. Разложить следующую функцию в ряд Фурье: f(x) = |x+1|, на (–π, π).

Задание 2. Вычислить интеграл Фурье: f(x) = $\begin{cases} 1, & 0 < x < 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$

Задание 3. Представить следующую функцию комплексной формой интеграла Фурье, найти спектральную характеристику и амплитудный спектр: f(x) = $\begin{cases} 2 - x^2, & -1 \le x \le 1, \\ 1, & 1 < |x| \le 2, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases}$

Вариант 4.

Задание 1. Разложить следующую функцию в ряд Фурье: f(x) = $\begin{cases} 0, & -\pi < x \le 0, \\ x, & 0 < x < \pi. \end{cases}$.

Задание 2. Вычислить интеграл Фурье: f(x) = $\begin{cases} \cos x, & 0 < x < 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$

Задание 3. Представить следующую функцию комплексной формой интеграла Фурье, найти спектральную характеристику и амплитудный спектр: f(x) = $\begin{cases} 1, & x \in [-1,1], \\ 0, & x \notin [-1,1]. \end{cases}$.

Лабораторная работа 9 (3 часа). Уравнения в частных производных

Задание 1. *Простейшие дифференциальные уравнения первого порядка в частных производных.* Задание выдается преподавателем согласно варианту.

Пример 1. Найти функцию z = z(x, y), удовлетворяющую дифференциальному уравнению $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 1$.

Интегрируем данное уравнение по x, получим: $\int \partial z = \int \partial x \Leftrightarrow$ z = x + + φ(y), где φ(y) – произвольная функция. Это есть общее решение данного дифференциального уравнения.

Пример 2. Решить уравнение $\frac{\partial z^2}{\partial y^2} = 6y$, где z = z(x, y).

Дважды интегрируем это уравнение по y. Получаем $\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 + \varphi(x)$, $z = y^3 + y\,\varphi(x) + \psi(x)$, где φ(x) и ψ(x) – произвольные функции.

Пример 3. Решить уравнение $\frac{\partial z^2}{\partial x \partial y} = 0$, где z = z(x, y).

Интегрируем данное уравнение по x, получим $\frac{\partial z}{\partial y} = f(y)$.

Интегрируем полученный результат по y, получим z = $\int f(y)dy$ + φ(x).

Задание 2. *Дифференциальные уравнения первого порядка линейные относительно частных производных.* Задание выдается преподавателем согласно варианту.

Рассмотрим дифференциальное уравнение $X\frac{\partial z}{\partial x} + Y\frac{\partial z}{\partial y} = Z$, где X, Y и Z – функции x, y, z. Предварительно решим систему обыкновенных дифференциальных уравнений $\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}$. Пусть решение этой системы определяется равенствами $\omega_1(x, y, z) = C_1$, $\omega_2(x, y, z) = C_2$. Тогда общий интеграл исходного дифференциального уравнения будет иметь вид: $\Phi(\omega_1(x, y, z), \omega_2(x, y, z)) = 0$, где $\Phi(\omega_1, \omega_2)$ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Пример 4. Найти общий интеграл уравнения $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$.

Рассмотри систему обыкновенных дифференциальных уравнений $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$. Решим уравнение $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$, получим $\ln|y| = \ln|xC_1|$ или $y = xC_1$, $\frac{y}{x} = C_1$. Решим уравнение $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z}$, получим $\ln|z| = \ln|xC_2|$ или $z = xC_2$, $\frac{z}{x} = C_2$.

Общий интеграл заданного уравнения будет иметь вид: $\Phi(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}) = 0$ или $\frac{z}{x} = \varphi(\frac{y}{x})$, т. е. $z = x\,\varphi(\frac{y}{x})$, где φ – произвольная функция.

Пример 5. Найти общий интеграл уравнения $(x^2 + y^2)\frac{\partial z}{\partial x} + 2xy\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

Запишем систему уравнений $\frac{dx}{x^2+y^2}=\frac{dy}{2xy}=\frac{dz}{0}$. Воспользуемся свойством пропорции и представим уравнение $\frac{dx}{x^2+y^2}=\frac{dy}{2xy}$ в виде $\frac{dx+dy}{x^2+2xy+y^2}=\frac{dx-dy}{x^2+y^2-2xy}$ или в виде $\frac{d(x+y)}{(x+y)^2}=\frac{d(x-y)}{(x-y)^2}$. Интегрируем данное равенство, получим $-\frac{1}{x+y}=-\frac{1}{x-y}+C$, $\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}=C$, $\frac{2y}{x^2-y^2}=C$. Последнее равенство можно записать в виде $\frac{y}{x^2-y^2}=C_1$.

Второе уравнение из системы уравнений имеет вид dz = 0. Отсюда $z = C_2$.

Общий интеграл имеет вид: $\Phi(\frac{y}{x^2-y^2}, z) = 0$ или $z = \varphi(\frac{y}{x^2-y^2})$.

Задание 3. *Уравнение колебания конечной струны.* Задание выдается преподавателем согласно варианту.

Дифференциальное уравнение свободных малых поперечных колебаний однородной струны с закрепленными концами имеет вид $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ с граничными условиями u(0, t) = u(l, t) = 0 ($-\infty < t < +\infty$) и начальными условиями u(x, 0) = φ(x), $u'_t(x, 0) = \psi(x)$, $(0 \le x \le l)$.

Решение этого уравнения u(x, t), дающее отклонение точек струны с абсциссой x в момент времени t, выражается рядом Фурье u(x, t) = $=\sum_{k=1}^{+\infty}(A_k\cos\frac{k\pi at}{l}+B_k\sin\frac{k\pi at}{l})\sin\frac{k\pi x}{l}$, где $A_k=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx$, $B_k=\frac{2}{k\pi a}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx$, k = 1, 2, 3, …

Уравнение колебаний бесконечной струны имеет вид $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ с начальными условиями u(x, 0) = φ(x), $u'_t(x, 0) = \psi(x)$, $(-\infty \le x \le +\infty)$. Граничные условия отсутствуют, так как струна бесконечная. Для решения задач математической физики в случае бесконечных сред применяют интегральное преобразование Фурье. При этом заменяют данное дифференциальное уравнение уравнением для Фурье – образов его частей. Находят из этого уравнения (обычно более простого) Фурье – образ искомого решения, а затем с помощью обратного преобразования Фурье получают само решение.

Пример 6. Однородная струна, закрепленная на концах x = 0 и x = *l,* имеет в начальный момент времени форму параболы φ(x) = x(*l* – x). Определить смещение точек струны от прямолинейного положения равновесия, предполагая, что начальные скорости отсутствуют.

Задача сводится к решению уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при граничных условиях u(0, t) = u(l, t) = 0 и начальных условиях u(x, 0) = φ(x) = x(l – x), $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}$ = ψ(x) = 0.

Вычисляем коэффициенты A_k и B_k:

$$A_k = \frac{2}{l}\int_0^l (lx - x^2)\sin\frac{k\pi x}{l}dx = -\frac{2}{k\pi}(lx - x^2)\cos\frac{k\pi x}{l}\Big|_0^l + \frac{2}{k\pi}\int_0^l (l-2x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx =$$

$$= \frac{2l}{k^2\pi^2}(l-2x)\sin\frac{k\pi x}{l}\Big|_0^l + \frac{4l}{k^2\pi^2}\int_0^l \sin\frac{k\pi x}{l}dx = \frac{-4l^2}{k^3\pi^3}\cos\frac{k\pi x}{l}\Big|_0^l = \frac{4l^2}{k^3\pi^3}(1-\cos k\pi) =$$

$$= \frac{4l^2}{k^3\pi^3}(1-(-1)^k) = \begin{cases} 0, & \text{при } k \text{ четном}, \\ \dfrac{8l^2}{\pi^3 k^3}, & \text{при } k \text{ нечетном}. \end{cases}$$

$B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^l 0\cdot\sin\frac{k\pi x}{l}dx = 0$. Поэтому искомое решение будет иметь вид:

$$u(x, t) = \frac{8l^2}{\pi^3}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos\frac{(2k+1)\pi at}{l}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}}{(2k+1)^3}.$$

Пример 7. Дана струна, закрепленная на концах x = 0 (точка 0) и x = l (точка B). Пусть в начальный момент времени форма струны имеет вид ломаной линии OAB, точка A(l/2,h). Найти форму струны для любого момента времени t, если начальные скорости отсутствуют. Выписать несколько членов ряда Фурье.

Угловой коэффициент прямой OA равен $\frac{h}{l/2}$, т. е. $\frac{2h}{l}$,

следовательно, уравнение этой прямой есть u = $\frac{2h}{l}$x. Прямая AB отсекает на осях координат отрезки l и 2h, значит уравнение этой прямой имеет вид

$\frac{x}{l} + \frac{u}{2h} = 1$ или u = $\frac{2h}{l}$(l – x). Итак, $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{2h}{l}x, & \text{при } 0 \le x \le \frac{l}{2}, \\ \frac{2h}{l}(l-x), & \text{при } \frac{l}{2} \le x \le l, \end{cases}$ $\psi(x) = 0$.

Находим A_k и B_k. $A_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx = \frac{4h}{l^2}\int_0^{l/2} x\sin\frac{k\pi x}{l}dx +$

$$+\frac{4h}{l^2}\int_{l/2}^l (l-x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx = |\text{ интегрируем по частям }| =$$

$$= \frac{-4h}{k\pi l}x\cos\frac{k\pi x}{l}\Big|_0^{l/2} + \frac{4h}{k\pi l}\int_0^{l/2}\cos\frac{k\pi x}{l}dx - \frac{4h}{k\pi l}(l-x)\cos\frac{k\pi x}{l}\Big|_{l/2}^l - \frac{4h}{k\pi l}\int_{l/2}^l \cos\frac{k\pi x}{l}dx =$$

$= \frac{-2h}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2} + \frac{4h}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi x}{l}\Big|_0^{l/2} + \frac{2h}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2} - \frac{4h}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi x}{l}\Big|_{l/2}^{l} = \frac{4h}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2} +$
$\frac{4h}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2} = \frac{8h}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2}$. $B_k = 0$.

Следовательно, u(x, t) = $\frac{8h}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\sin\frac{k\pi}{2}\sin\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{k\pi a t}{l}$.

Выпишем несколько членов ряда: u(x,t) = $\frac{8h}{\pi^2}(\sin\frac{\pi x}{l}\cdot\cos\frac{\pi a t}{l} -$
$- \frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi x}{l}\cdot\cos\frac{3\pi a t}{l} + \frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi x}{l}\cdot\cos\frac{5\pi a t}{l} - \frac{1}{7^2}\sin\frac{7\pi x}{l}\cdot\cos\frac{7\pi a t}{l} + \ldots)$.

Пример 8. Пусть начальные отклонения струны, закрепленной в точке x = 0 и x = l, равны нулю, а начальная скорость выражается формулой $\frac{\partial u}{\partial x} = \begin{cases} v_0(const), & при\ \ |x - l/2| < h/2, \\ 0, & при\ \ |x - l/2| > h/2. \end{cases}$. Определить форму струны для любого момента времени t.

Здесь φ(x) = 0, а ψ(x) = v_0 в интервале ((l – h)/2, (l + h)/2) и ψ(x) = 0 вне этого интервала.

Следовательно, $A_k = 0$, $B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_{(l-h)/2}^{(l+h)/2} v_0\sin\frac{k\pi x}{l}dx =$
$= -\frac{2v_0}{k\pi\alpha}\cdot\frac{l}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi x}{l}\Big|_{(l-h)/2}^{(l+h)/2} = \frac{2v_0 l}{k^2\pi^2 a}\cdot[\cos\frac{k\pi(l-x)}{2l} - \cos\frac{k\pi(l+h)}{2l}] =$
$= \frac{4v_0 l}{k^2\pi^2\alpha}\cdot\sin\frac{k\pi}{2}\cdot\sin\frac{k\pi h}{2l}$. Отсюда, u(x, t) = $\frac{4v_0 l}{\pi^2 a}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\sin\frac{k\pi}{2}\sin\frac{k\pi h}{2l}\sin\frac{k\pi a t}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}$.

Выпишем несколько членов ряда: u(x, t) = $\frac{4v_0 l}{\pi^2 a}(\sin\frac{\pi h}{2l}\ \sin\frac{\pi a t}{l}\ \sin\frac{\pi x}{l} - \frac{1}{3^2}$
$\sin\frac{3\pi h}{2l}\ \sin\frac{3\pi a t}{l}\ \sin\frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5^2}\ \sin\frac{5\pi h}{2l}\sin\frac{5\pi a t}{l}\ \sin\frac{5\pi x}{l} - \ \ldots)$.

Задания к лабораторной работе 9

1. Найти функцию z = z(x, y), удовлетворяющую дифференциальному уравнению $\frac{\partial z}{\partial x} = 2$.

2. Решить уравнение $\frac{\partial z^2}{\partial y^2} = 6y$, где z = z(x, y).

3. Решить уравнение $\frac{\partial z^2}{\partial x\partial y} = 1$, где z = z(x, y).

4. Найти общий интеграл уравнения $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2z$.

5. Найти общий интеграл уравнения $(x^2 + y^2)\frac{\partial z}{\partial x} - 2xy\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

6. Однородная струна, закрепленная на концах x = 0 и x = 2, имеет в начальный момент времени форму параболы φ(x) = x(2 – x). Определить

смещение точек струны от прямолинейного положения равновесия, предполагая, что начальные скорости отсутствуют.
7. Дана струна, закрепленная на концах x = 0 (точка 0) и x = 2 (точка B). Пусть в начальный момент времени форма струны имеет вид ломаной линии OAB, точка A(1, 0, 2). Найти форму струны для любого момента времени t, если начальные скорости отсутствуют. Выписать несколько членов ряда Фурье 8. Пусть начальные отклонения струны, закрепленной в точке x = 0 и x = l, равны нулю, а начальная скорость выражается формулой $\frac{\partial u}{\partial x} = \begin{cases} 1, & при \ |x - 1/2| < 0{,}1, \\ 0, & при \ |x - 1/2| > 0{,}1. \end{cases}$ Определить форму струны для любого момента времени t.

Литература

1. Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики : учеб. пособие для вузов / Б.П. Демидович, В.А. Кудрявцев. – М. : Всирель ; АСТ, 2001. – 656 с.
2. Жданов М.С. Электроразведка : учебник для вузов / М.С. Жданов. – М. : Недра, 1986. – 316 с.
3. Смирнов В.И. Курс высшей математики / В.И. Смирнов. – М. : Наука, 1974. – 656 с.
4. Тихонов А.Н. Уравнение математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М. : Наука, 1977. – 736 с.

Учебное издание

Груздев Владислав Николаевич

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ В ГЕОФИЗИКЕ

Учебно-методическое пособие к лабораторным работам для вузов

Подписано в печать 06.08.07. Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 3,5.
Тираж 50 экз. Заказ 1465.

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета.
394000, г. Воронеж, пл. им. Ленина, 10. Тел. 208-298, 598-026 (факс)
http://www.ppc.vsu.ru; e-mail: pp_center@typ.vsu.ru

Отпечатано в типографии Издательско-полиграфического центра
Воронежского государственного университета.
394000, г. Воронеж, ул. Пушкинская, 3. Тел. 204-133.