

**Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации**

**УРАЛЬСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ
ГОРНО-ГЕОЛОГИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ**

В.В.Кормильцев, А.Н.Ратушняк, В.Е.Петряев

Методы моделирования геофизических полей

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

**ЕКАТЕРИНБУРГ
2000**

Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации
Уральская государственная горно-геологическая академия

ОДОБРЕНО
Методической комиссией
геофизического факультета
“ _____ ” _____ 2000
Председатель комиссии:

 (проф. Сквородников И.Г.)

Методы моделирования геофизических полей

Конспект лекций для студентов специализации “Геоинформатика в разведочной геофизике” специальности 080400 “Геофизические методы поисков и разведки месторождений полезных ископаемых”

Методы моделирования геофизических полей. Конспект лекций для студентов специализации “Геоинформатика в разведочной геофизике” специальности 080400 “Геофизические методы поисков и разведки месторождений полезных ископаемых/ В.В.Кормильцев, А.Н.Ратушняк, В.Е.Петряев. Уральская госуд. горно-геол. академия, каф. геоинформатики – Екатеринбург; Изд-во УГГГА, 2000. – 50 с.

Рассмотрены задачи вычисления электромагнитного поля, поля постоянного тока, поля магнетиков, теплового поля и скорости течения Дарси в присутствии неоднородных по физическим свойствам объектов на основе объемных векторных интегральных уравнений. Также рассмотрено математическое моделирование кинематических характеристик упругих волн и принципы физического электромоделирования электрических и других потенциальных полей.

Конспект лекций рассмотрен на заседании кафедры геоинформатики 2 ноября 2000 г. (протокол N 11) и рекомендован для издания в УГГГА.

Рецензенты: д.ф.-м.н., профессор А.Н.Мезенцев, каф. физики;
к.т.-н., доцент И.И.Бреднев, каф. прикладной геофизики.

©Уральская государственная
горно-геологическая академия, 2000

Л е к ц и я 1

ФИЗИКО-ГЕОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СРЕДЫ. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

1. Геометризация геологических тел и структур осуществляется путем построения разрезов, карт и погоризонтных планов. Выделяют границы между различными породами, комплексами пород, возрастными (стратиграфические) границы. Отдельные элементы, такие как зоны дробления, вкрапленности, метасоматических изменений могут не иметь четко очерченных границ при изображении на геологических разрезах и планах.

Физико-геологическая модель (ФГМ) среды должна включать в качестве априорной информации достоверно установленные геологические границы, например, между крупными комплексами пород разного возраста, обычно имеющие характер тектонических контактов или границ стратиграфических несогласий. Обычно эти же границы наиболее интенсивно проявляются в геофизических полях.

При математическом моделировании возникает задача приближенной замены произвольных криволинейных границ и поверхностей, изображаемых на разрезах и планах, многоугольниками, отрезками криволинейных дуг, фрагментами координатных поверхностей в декартовой и криволинейных системах координат. Рассмотрим эту проблему на примере декартовых координат, в которых кривые линии и поверхности заменяются ступенчатыми линиями или рельефом. При уменьшении высоты ступеней можно как угодно приблизиться к геологической границе, однако при этом возрастает число разбиений геологической границы или тела на элементарные отрезки или объемы, что увеличивает продолжительность вычислений. При делении стороны тела в n раз число элементарных объемов возрастает в $n \cdot n \cdot n$ раз. Параметрами ФГМ являются размеры, положение и свойства элементарных объемов. Для эффективного применения вычислительных технологий необходимо обеспечить минимальную параметризацию задачи. Необходимо построить ФГМ, обладающую минимальным числом параметров, т.е. максимально допустимым размером элементарных объемов, но такую, чтобы физическое поле на профиле или плоскости наблюдений не отличалось качественно от истинного и имело бы малые количественные различия. Расчетами показано, что в потенциальных полях это возможно, если диагональ ближайшего из элементарных объемов (параллелепипедов) меньше расстояния до точки наблюдения.

2. По размерности модели различаются на 1-D, 2-D, 3-D и Q3-D модели (dimension – размерность). Одномерные 1-D модели - это модели

слоистых сред. Они обладают наименьшим количеством параметров, которыми являются число слоев, мощность и свойства каждого слоя, и применяются для описания разрезов слабодислоцированных осадочных пород.

Двумерные модели (2-D) имеют самое широкое распространение. Они применяются для описания геологических объектов, сильно вытянутых по простиранию, когда размер по простиранию в три и более раза превышает максимальный размер (диагональ) сечения. Параметрами являются размеры и положение на плоскости XOY сечений бесконечных элементарных призм, вытянутых по оси OY и их свойства.

Трехмерные (3-D) модели позволяют наилучшим образом приблизиться к конфигурации геологического тела произвольной формы. В декартовой системе элементарным объемом является прямоугольный параллелепипед, в частном случае куб. Число параметров 3-D модели является наибольшим.

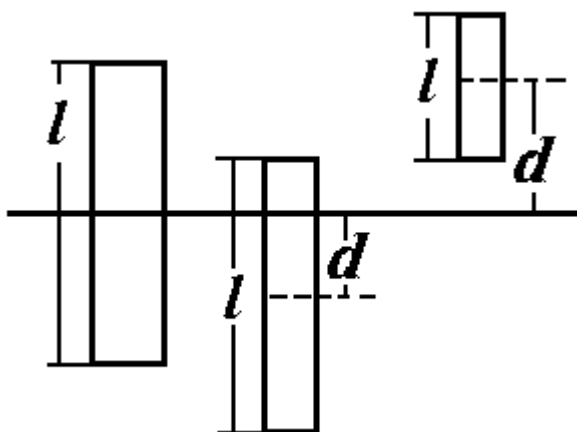


Рис. 1

Промежуточное положение занимают квазитрехмерные Q3-D модели (рис.1), представляющие собой трехмерные модели, ограниченные по оси OY двумя вертикальными плоскостями. Элементарными объемами являются призмы малого сечения, но немалой постоянной фиксированной длины по простиранию. По сравнению с двумерными моделями длина по простиранию (l) является дополнительным параметром. Еще одним параметром может являться расстояние d между плоскостью симметричного сечения и плоскостью профиля вычислений (для тел, расположенных несимметрично по отношению к профилю).

Достоинством Q3-D модели является возможность моделирования аномальных полей от трехмерных тел с учетом боковых влияний при незначительном увеличении числа параметров по сравнению с двумерной моделью. Размер l модели выбирают таким образом, чтобы получить необходимую вытянутость изолиний поля по простиранию. Обычно он близок к большой оси плоской фигуры, ограниченной изолинией со значением, близким к половине максимального.

3. Любая горная порода обладает некоторым диапазоном изменения физических свойств, что связано с колебаниями минерального состава, трещиноватости, пористости, обводненности. Особенно велики колебания магнитной восприимчивости, поскольку для большинства пород она связана с содержанием акцессорного магнетита, а также электропроводности. Плотность и коэффициент теплопроводности меняются значительно меньше. Гидравлическая проницаемость напрямую не связана с минеральным составом, а определяется гранулометрическим составом и степенью нарушенности породы. Для некоторых пород, особенно подвергшихся метаморфическим изменениям, вообще нельзя назвать наиболее вероятного значения, например, магнитной восприимчивости или электропроводности, а возможно указать лишь крайние пределы. Проблема усреднения физических свойств и их распределения по объему геологического тела наиболее важна, поскольку от этого зависит конечный результат моделирования, однако наименее определена. Здесь необходимо использовать всю справочную и экспериментальную информацию о свойствах, помня однако, что любое экспериментальное определение имеет ограниченную представительность.

Перед интерпретацией ни теоретически, ни практически не может быть поставлен вопрос досконального восстановления распределения физических свойств. Такая проблема не имеет даже прикладного значения, поскольку геологическая граница сама во многих случаях является условной. В градиентной среде она лишь частично совпадает с изопараметрической поверхностью какого-либо геохимического или геофизического параметра. Поэтому при решении прямой задачи, как часто называют математическое моделирование, мы также вынуждены оперировать с условной обобщенной моделью. Чем более удален объект, тем более общие черты геологического строения следует учитывать в модели, опуская второстепенные детали. В потенциальных полях близко расположенные объекты создают единую аномалию на расстоянии, равном утроенной мощности. Информативность модели не возрастает, если мы будем дробить ее на элементарные объемы, диагональ которых меньше утроенной глубины. Таким

образом, оптимальное значение диагонали элементарного объема неоднородности составляет от 1 до $1/3$ глубины до него.

При моделировании кинематических характеристик, например годографов в сейсморазведке, используются иные критерии детальности модели, связанные с размером первой зоны Френеля. Дифракция упругих волн накладывает ограничения на размеры неоднородностей либо на рельеф сейсмической границы. Если размеры неоднородности или неровности рельефа меньше первой зоны Френеля, амплитуда отраженной волны падает вплоть до полного исчезновения, а применение лучевых представлений для описания распространения колебаний становится приближенно соответствующим действительности. Поскольку радиус первой зоны Френеля пропорционален корню из времени прихода отражения, то более глубокие границы могут быть исследованы с меньшей детальностью.

4. Источники возбуждения могут быть точечные, распределенные объемные, они могут лежать далеко вне рассматриваемой области среды. Соответственно первичное возбуждающее поле может быть трех- и двумерным неоднородным, плоским неоднородным и однородным. Различают модели статические и динамические. Динамические обычно представляют собой последовательность статических моделей, в которых изменяются параметры источника или среды. Частная модель соответствует одному из геофизических полей. Комплексная модель служит для вычисления нескольких геофизических полей. Она характеризуется общими границами раздела свойств, которые должны иерархически соподчиняться. Например, сейсмических границ может быть меньше, чем плотностных, но все они образуют двойные границы с плотностными. Выделяют региональные модели, в которых аномалиеобразующими объектами являются крупные структуры и комплексы пород.

5. Задачи математического моделирования составляют так называемый блок прямых задач. Основное назначение прямых задач - исследование разрешающей способности геофизических методов, разработка методики поисков и разведки различных полезных ископаемых, определение ожидаемых аномальных эффектов на стадии проектирования и помощь при выборе методики наблюдений, интерпретация методом подбора, разработка исходного (нулевого) приближения для автоматизированных методов интерпретации.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ. МЕТОД АНАЛОГИИ.

Известно шесть стационарных полей, потенциал которых удовлетворяет уравнению Лапласа-Пуассона. Седьмым или, вернее, первым является потенциал притяжения или ньютоновский потенциал.

Ньютонов потенциал является наиболее простым потенциалом, поскольку первоначальные гравитирующие массы не изменяются, если в рассматриваемый объем ввести новые гравитирующие массы. Ньютонов потенциал является интегральной суммой потенциалов притяжения всех масс (материальных точек), не изменяющих своей величины под влиянием взаимного притяжения. Иначе говоря, гравитация не сопровождается поляризацией среды.

В отличие от гравитирующей массы заряд Q , внесенный из вакуума в диэлектрик, вследствие поляризации среды изменяет кулонову силу, с которой он притягивает или отталкивает пробный заряд. В неоднородном диэлектрике под действием первичного заряда возникают вторичные поляризованные заряды разного знака, в сумме равные нулю (рис.2).

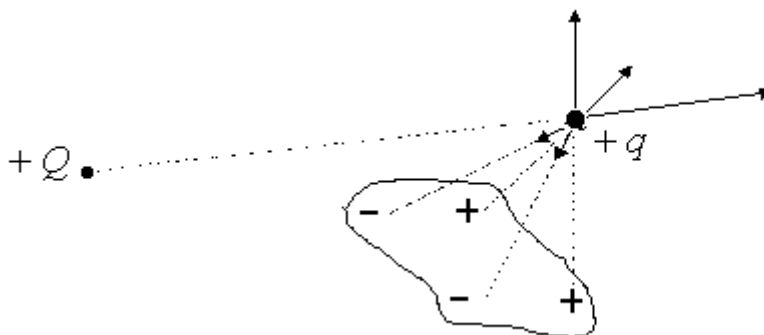


Рис. 2

Однако их действие на пробный заряд q не равно нулю из-за различия расстояний. Напряженность электрического поля в неоднородном диэлектрике уже не равна векторной сумме кулоновых сил, создаваемых первичными зарядами. В общем случае возникает интегральное уравнение, в котором напряженность искомого суммарного поля стоит дважды: первый раз в левой части и второй раз в правой части под знаком интеграла, определяя величину поляризованных зарядов. В этом существенное отличие полей, приводящих к поляризации среды, от гравитационного притяжения.

Все указанные выше шесть полей сопровождаются поляризацией среды, т.е. появлением положительных и отрицательных зарядов или полюсов. Перечислим эти поля.

1. Электростатическое поле в диэлектрике, характеризуемое электростатическим потенциалом U , В, и плотностью потока электрической индукции, Кл/м²,

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E} = -\varepsilon_0 \varepsilon \text{grad} U,$$

\mathbf{E} – напряженность электростатического поля, В/м,

$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ – электрическая постоянная, Кл/В·м=Ф/м,

ε – относительная диэлектрическая проницаемость (безразмерная).

2. Электрическое поле постоянного тока, характеризуемое электрическим потенциалом U , В, и плотностью электрического тока, А/м²,

$$\mathbf{i} = \sigma \mathbf{E} = -\sigma \text{grad} U,$$

\mathbf{E} – напряженность электрического поля, В/м,

σ – электропроводность, 1/Ом·м.

3. Магнитное поле магнетиков, характеризуемое магнитным потенциалом U , А, и магнитной индукцией, В·с/м²=Тл,

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H} = -\mu_0 \mu \text{grad} U,$$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ – магнитная постоянная, В·с/А·м=Гн/м,

μ – относительная магнитная проницаемость (безразмерная),

\mathbf{H} – напряженность магнитного поля, А/м.

4. Течение Дарси для несжимаемой жидкости, характеризуемое давлением P , Па, и скоростью течения Дарси, м/с,

$$\mathbf{v} = -\frac{c}{\mu} \text{grad} P,$$

c – гидравлическая проницаемость минерального скелета, м²,

μ – динамическая вязкость флюида, Па·с.

5. Молекулярный перенос теплоты, характеризуемый температурой T , °К, и плотностью теплового потока, Вт/м²,

$$\mathbf{q} = -\lambda \text{grad} T,$$

λ – коэффициент теплопроводности, Вт/м·°К.

6. Диффузия, характеризуемая концентрацией растворенного вещества или электролита C , моль/м³, гэкв/м³, и плотностью потока вещества, моль/м²/с,

$$\mathbf{q} = -D \text{grad} C,$$

D – коэффициент диффузии, м²/с.

Если во всех шести уравнениях вектор слева обозначить символом \mathbf{F} , материальный коэффициент буквой a , а потенциал, температуру, давление

или концентрацию буквой W , то для всех шести полей справедливо уравнение неразрывности

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 0,$$

а потенциал в кусочно-однородной среде удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\operatorname{div}(-a \operatorname{grad} W) = 0 \quad \text{или} \quad \Delta W = 0.$$

Аналогия между дифференциальными уравнениями для полей распространяется и на их решения. Достаточно получить одно решение для какого-либо из полей и по аналогии можно записать остальные.

Вопросы для самопроверки

1. Параметры физико-геологической модели при математическом моделировании. Оптимальные значения геометрических параметров.
2. Понятие о размерности моделирования, виды размерностей.
3. Метод аналогии при моделировании потенциальных полей.
4. Аналогия между электрическим полем постоянного тока и намагничиванием магнетика.
5. Аналогия между электрическим полем постоянного тока и течением Дарси.
6. Аналогия между электрическим полем постоянного тока и молекулярным переносом теплоты.

Л е к ц и я 2

НЬЮТОНОВ ПОТЕНЦИАЛ

Рассмотрение целесообразно начать с потенциала притяжения, что является теоретической основой гравиметрии. Далее будет показано, что и при вычислении других потенциальных полей производные потенциала притяжения играют важную роль.

Сила притяжения. По закону Ньютона, сила притяжения между двумя точечными массами m_1 и m_2 , находящимися на расстоянии r друг от друга, определяется равенством

$$\mathbf{f} = k \frac{m_1 m_2 \mathbf{r}}{r^3},$$

или для модуля силы

$$|f| = k \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где $\mathbf{r} = (\xi - x)\mathbf{i} + (\eta - y)\mathbf{j} + (\zeta - z)\mathbf{k}$, $r^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2$, x, y, z – координаты массы m_1 , а ξ, η, ζ – координаты массы m_2 , k – постоянная тяготения, $k = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3 \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$.

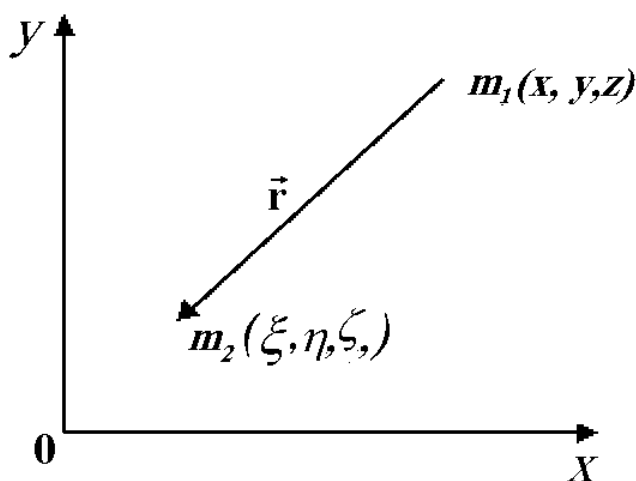


Рис.3

Поскольку $1 \text{ см}/\text{с}^2 = 1 \text{ Гал}$, то иначе $k = 6,67 \cdot 10^{-5} \text{ мГал} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{г}^{-1} = 6,67 \cdot 10^{-3} \text{ мГал} \cdot \text{м}/(\text{г}/\text{см}^3) = 6,67 \text{ мГал} \cdot \text{км}/(\text{г}/\text{см}^3)$. Пусть $m_1 \ll m_2$. Сила притяжения единичной массы $m_1 = 1$, оказываемая какой-либо неточечной массой, распределенной в объеме V

$$\mathbf{F} = k \int_V \frac{\mathbf{r}}{r^3} dm.$$

Поскольку при действии постоянной силы \mathbf{F} масса m_1 приобретает равноускоренное движение $\mathbf{f}=m_1\mathbf{F}=m_1\mathbf{g}$, то величина \mathbf{F} численно равна ускорению \mathbf{g} . Если интегрирование ведется по всему объему Земли, то \mathbf{g} – ускорение свободного падения или ускорение силы тяжести или просто сила тяжести. В декартовой системе при $dm=\sigma dV$, где $\sigma(\xi, \eta, \zeta)$ – плотность вещества, заполняющего объем V

$$\mathbf{g}=\mathbf{F}=g_x\mathbf{i}+g_y\mathbf{j}+g_z\mathbf{k},$$

$$g_x = k \int_V \sigma \frac{\xi - x}{r^3} dV, \quad g_y = k \int_V \sigma \frac{\eta - y}{r^3} dV, \quad g_z = k \int_V \sigma \frac{\zeta - z}{r^3} dV.$$

В частном случае $\sigma=const$ и ее можно вынести за знак интеграла. Вертикалью называется такое положение оси OZ декартовой системы, при котором $g_x=g_y=0$. Пусть земная кора содержит аномальный локальный объем с избыточной плотностью $\Delta\sigma$, который создает аномалию силы тяжести g_{xa} , g_{ya} , g_{za} . Тогда модуль силы тяжести будет равен в пренебрежении малостями второго порядка

$$|g| = \sqrt{g_{xa}^2 + g_{ya}^2 + (g_z + g_{za})^2} \approx g_z + g_{za},$$

а его аномалия

$$|g_a| = |g| - g_z = g_{za}.$$

Таким образом, реально можно измерить лишь вертикальный компонент аномалии силы тяжести.

Потенциал притяжения. Составляющие g_x , g_y , g_z представляют частные производные по координатам x , y , z от функции V , называемой ньютоновым потенциалом или потенциалом притяжения

$$V = k \int_V \sigma \frac{dV}{r}, \quad (1)$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{grad}V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{k}.$$

Потенциал V и его первые производные – однозначные, непрерывные и конечные функции координат притягиваемой точки. Потенциал V – функция регулярная, то есть на бесконечности стремится к нулю. В каждой точке вне притягивающих масс потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \Delta V = 0, \quad (2)$$

а внутри объема V с притягивающими массами – уравнению Пуассона

$$\Delta V = -4\pi k\sigma. \quad (3)$$

Если (2) очевидно, то доказательство того, что (1) удовлетворяет уравнению (3) является непростой задачей, требующей применения аппарата обобщенных функций.

Покажем, что (1) удовлетворяет уравнению Лапласа-Пуассона (2, 3) на примере прямоугольного тела постоянной плотности. Введем обозначения:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = V_{xx} = k\sigma G_{xx}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = V_{yy} = k\sigma G_{yy}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = V_{zz} = k\sigma G_{zz},$$

где G_{xx} , G_{yy} , G_{zz} – производные от координатного множителя в выражении (1). Тогда

$$G_{xx} + G_{yy} + G_{zz} = \begin{cases} 0 & \text{вне} \\ -4\pi & \text{внутри.} \end{cases}$$

Для параллелепипеда

$$G_{xx} = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \right) d\xi d\eta d\zeta = - \operatorname{arctg} \frac{(z - \zeta)(y - \eta)}{(x - \xi)r} \Big|_{\xi_1}^{\xi_2} \Big|_{\eta_1}^{\eta_2} \Big|_{\zeta_1}^{\zeta_2},$$

$$G_{yy} = - \operatorname{arctg} \frac{(z - \zeta)(x - \xi)}{(y - \eta)r} \Big|_{\xi_1}^{\xi_2} \Big|_{\eta_1}^{\eta_2} \Big|_{\zeta_1}^{\zeta_2}, \quad G_{zz} = - \operatorname{arctg} \frac{(x - \xi)(y - \eta)}{(z - \zeta)r} \Big|_{\xi_1}^{\xi_2} \Big|_{\eta_1}^{\eta_2} \Big|_{\zeta_1}^{\zeta_2}.$$

При подстановке пределов получаются очень громоздкие выражения, поэтому далее будем анализировать двумерный случай.

Потенциал притяжения в двумерном случае (логарифмический потенциал).

Рассмотрим двумерный случай. Для того, чтобы перейти к двумерному случаю проинтегрируем ускорение силы тяжести по η . К интегрированию g_z вместо V прибегают для того, чтобы избежать расходимостей, характерных для логарифмического потенциала.

Итак,

$$\begin{aligned}
G_z &= -\int_V \frac{(z-\zeta)}{r^3} dV = -\int_S \frac{(z-\zeta)(\eta-y)}{\left((x-\xi)^2 + (z-\zeta)^2\right) \cdot r} d\xi d\zeta \Big|_{\eta=-a}^{\eta=a} = -\int \frac{(z-\zeta)}{S(x-\xi)^2 + (z-\zeta)^2} \times \\
&\times \left[\frac{a-y}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-a)^2 + (z-\zeta)^2}} - \frac{-a-y}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y+a)^2 + (z-\zeta)^2}} \right] d\xi d\zeta \\
&= -\int \frac{(z-\zeta) d\xi d\zeta}{S(x-\xi)^2 + (z-\zeta)^2} \left[\frac{\eta}{|\eta|} + \frac{\eta}{|\eta|} \right] = -2 \int \frac{(z-\zeta) d\xi d\zeta}{S(x-\xi)^2 + (z-\zeta)^2}
\end{aligned}$$

Теперь можно ввести потенциал

$$\mathbf{g} = \mathbf{grad}U, \quad \mathbf{G} = \mathbf{grad} \frac{U}{\sigma k},$$

$$\frac{U}{\sigma g} = -2 \int_S \ln \rho dS = -\int_S \ln \rho^2 dS, \quad \rho^2 = (x-\xi)^2 + (z-\zeta)^2.$$

В двумерном случае уравнение Пуассона примет вид

$$G_{xx} + G_{zz} = \begin{cases} 0 & \text{вне} \\ -4\pi & \text{внутри} \end{cases}.$$

Здесь вычисления менее громоздки, поэтому проверим, что дают интегральные формулы для бесконечного бруса прямоугольного сечения:

$$\begin{aligned}
-G_{xx} &= 2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\ln r) d\xi d\zeta = 2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{x-\xi}{r^2} d\xi d\zeta = -2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{x-\xi}{r^2} d\xi d\zeta = \\
&= -2 \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \left[\frac{(x-\xi_2)}{(x-\xi_2)^2 + (z-\zeta)^2} - \frac{(x-\xi_1)}{(x-\xi_1)^2 + (z-\zeta)^2} \right] d\zeta = 2 \operatorname{arctg} \frac{z-\zeta}{x-\xi_2} \Big|_{\zeta_1}^{\zeta_2} - \\
&- 2 \operatorname{arctg} \frac{z-\zeta}{x-\xi_1} \Big|_{\zeta_1}^{\zeta_2} = 2 \operatorname{arctg} \frac{z-\zeta_2}{x-\xi_2} - 2 \operatorname{arctg} \frac{z-\zeta_1}{x-\xi_2} - 2 \operatorname{arctg} \frac{z-\zeta_2}{x-\xi_1} + 2 \operatorname{arctg} \frac{z-\zeta_1}{x-\xi_1}
\end{aligned}$$

Поместим центр прямоугольника в начало координат и обозначим $\zeta_{2,1} = \pm m$, $\xi_{2,1} = \pm n$. Воспользуемся формулами приведения тригонометрических функций (Рис.4).

Тогда в центре прямоугольника

$$\begin{aligned}
 -G_{xx} &= 2\operatorname{arctg} \frac{-m}{-n} - 2\operatorname{arctg} \frac{m}{-n} - 2\operatorname{arctg} \frac{-m}{n} + 2\operatorname{arctg} \frac{m}{n} = \\
 &= 2(\pi + \alpha) - 2(\pi - \alpha) - 2(-\alpha) + 2\alpha = 8\alpha = 8\operatorname{arctg} \frac{m}{n}
 \end{aligned}$$

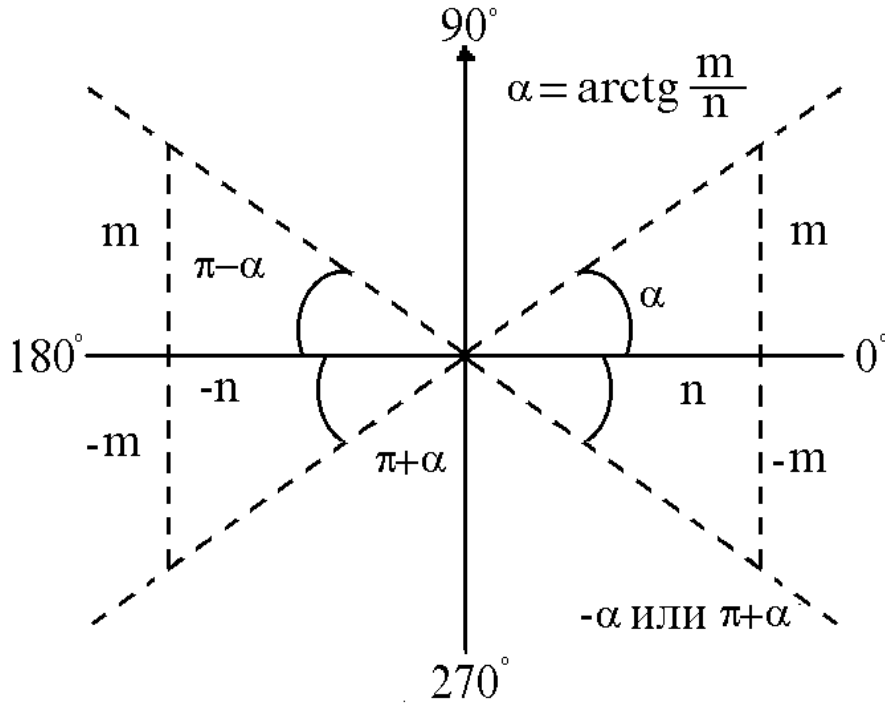


Рис.4

Соответственно,

$$-G_{zz} = 8\operatorname{arctg} \frac{n}{m} \text{ и } -(G_{zz} + G_{xx}) = 8 \left(\operatorname{arctg} \frac{m}{n} + \operatorname{arctg} \frac{n}{m} \right) = 4\pi,$$

поскольку $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

При вычислении аномалии силы тяжести g_{za} нет проблем, задача сводится к простому интегрированию выражения g_z , в котором вместо плотности σ подставлена избыточная плотность или ее дефицит $\pm\Delta\sigma$

$$g_z(x, y, z) = k \sum_n \Delta\sigma_n \int_{V_n} \frac{\zeta - z}{r^3} dV_n.$$

Если $\Delta\sigma$ действительно зависит от координат, объем разбивают на элементарные объемы, в пределах которых плотность постоянна и выносят ее за знак каждого отдельного интеграла

В двумерном случае
$$g_z(x, z) = 2k \int_{V_n} \Delta\sigma(\xi, \zeta) \frac{\zeta - z}{r^2} dS.$$

Гравитационное поле по своей структуре является наиболее простым из потенциальных полей. Добавление какой-либо массы (гравитирующего объема) не изменяет величины и действия прежних масс. Это обстоятельство и выражают две последние формулы. Остальные потенциальные поля являются поляризованными. Добавление неоднородности вызывает перераспределение всех вторичных источников. Выражения для напряженности (силы) оказываются более сложными.

Ньютонов потенциал играет важнейшую роль при вычислении других потенциальных полей, поскольку, как будет показано далее, его производные являются компонентами функции Грина в этих задачах.

Вопросы для самопроверки

1. Сила и потенциал притяжения.
2. Потенциал притяжения и уравнение Лапласа – Пуассона.
3. Логарифмический потенциал.

Л е к ц и я 3

ОБЪЕМНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ.

Напомним некоторые формулы векторного анализа:

$$\operatorname{div}(a\mathbf{F}) = a\operatorname{div}\mathbf{F} + (\mathbf{F} \cdot \operatorname{grad} a), \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_V \operatorname{div}\mathbf{G}dV &= \int_S (\mathbf{G} \cdot \mathbf{n})ds = \int_S G_n ds \\ \int_S \operatorname{div}\mathbf{N}ds &= \int_L (\mathbf{N} \cdot \mathbf{n})dl = \int_L N_n ds. \end{aligned} \right\} \text{теорема Гаусса,} \quad (2)$$

где \mathbf{F} и \mathbf{G} - трехкомпонентные векторы. В частности, в декартовой системе координат:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}, \\ dV &= d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta, \quad \mathbf{G} = G_\xi \mathbf{i} + G_\eta \mathbf{j} + G_\zeta \mathbf{k}, \end{aligned}$$

S - поверхность, \mathbf{n} - нормаль к поверхности,

\mathbf{N} - двухкомпонентный вектор, $\mathbf{N} = N_\xi \mathbf{i} + N_\zeta \mathbf{k}$,

S - площадь сечения, L - контур, \mathbf{n} - нормаль к контуру.

$$\operatorname{grad} a = \frac{\partial a}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial a}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial a}{\partial z} \mathbf{k},$$

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

Потенциал двух сближенных точечных источников или полюсов имеет вид

$$U = \frac{Q}{4\pi r} - \frac{Q}{4\pi r_1},$$

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2},$$

$$r_1 = \sqrt{(x - \xi - d\xi)^2 + (y - \eta - d\eta)^2 + (z - \zeta - d\zeta)^2}.$$

Воспользовавшись разложением по малому параметру, получим

$$U = -\frac{Q \mathbf{dl} \cdot \mathbf{r}}{4\pi r^3},$$

$$\mathbf{dl} = d\xi \mathbf{i} + d\eta \mathbf{j} + d\zeta \mathbf{k},$$

$$\mathbf{r} = (x - \xi) \mathbf{i} + (y - \eta) \mathbf{j} + (z - \zeta) \mathbf{k}.$$

Отсюда потенциал диполя имеет вид

$$U = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{P} \cdot \mathbf{grad}_A(1/r) = \frac{1}{4\pi} \mathbf{P} \cdot \mathbf{grad}_M(1/r),$$

где $\mathbf{P} = Q\mathbf{dl}$ – вектор поляризации, направленный от отрицательного полюса диполя к положительному, Полный вывод этого выражения предоставляем читателю. Расстояние r можно дифференцировать по тем и другим координатам, т.е. по обоим концам вектора \mathbf{r} в точках $A(x, y, z), M(\xi, \eta, \zeta)$, при этом

$$\mathbf{grad}_A(1/r) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad \mathbf{grad}_M(1/r) = \frac{\mathbf{r}}{r^3},$$

т.е. производные, отличаются только знаком.

Пусть $\mathbf{P} = \mathbf{p}dV$, где dV – элементарный объем, \mathbf{p} – вектор поляризации единицы объема, в общем случае зависящий от координат. Тогда для тела объемом V аномальный потенциал, возникающий вследствие его поляризации, равен

$$U = \frac{1}{4\pi} \int_V \mathbf{p}(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{grad}_M(1/r) dV. \quad (3)$$

Скалярное произведение, стоящее под знаком интеграла, может быть представлено согласно формуле (1) в следующем виде:

$$(\mathbf{p} \cdot \mathbf{grad} 1/r) = -\frac{\text{div} \mathbf{p}}{r} + \text{div} \frac{\mathbf{p}}{r} = \text{div}(\mathbf{p}/r).$$

Последнее равенство справедливо, если поляризация однородна и $\text{div} \mathbf{p} = 0$. Воспользовавшись формулой Гаусса (2), имеем

$$U = \frac{1}{4\pi} \int_V \mathbf{p} \cdot \mathbf{grad}_M(1/r) dV = \frac{1}{4\pi} \int_V \text{div} \frac{\mathbf{p}}{r} dV = \frac{1}{4\pi} \int_S p_n \frac{dV}{r}. \quad (4)$$

В частности, если $p_n = I_n$, где \mathbf{I} – намагниченность, то магнитный потенциал однородно намагниченного тела, ограниченного поверхностью S , имеет известный вид:

$$U = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{I_n}{r} ds. \quad (5)$$

При этом напряженность магнитного поля равна:

$$\mathbf{H} = -\mathbf{grad}_A U = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{grad}_A \int_S \frac{I_n}{r} ds = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{I_n \mathbf{r}}{r^3} ds. \quad (6)$$

Рассмотрим объект в виде прямоугольной пластины (рис.5), намагниченной вдоль короткого вертикального ребра ($\mathbf{I} = I_z \mathbf{k}$).

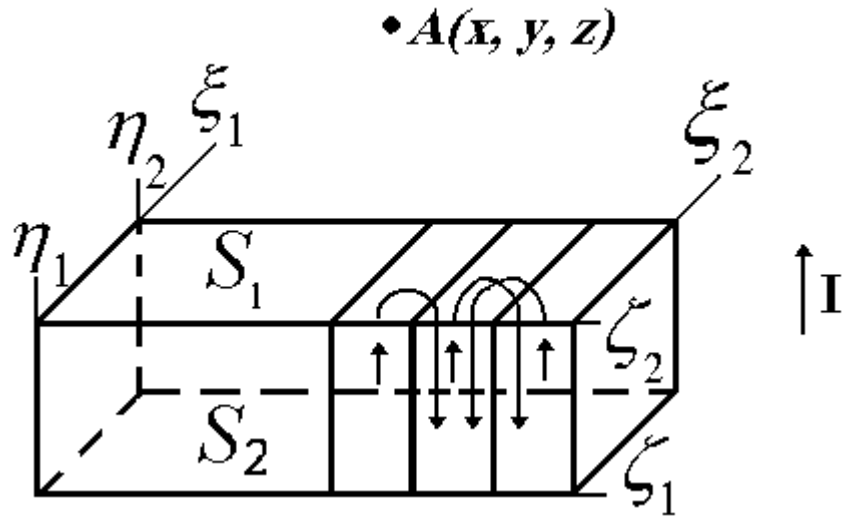


Рис.5

В этом случае для однородной намагниченности, например, вертикальная составляющая равна:

$$\mathbf{H}_z = \frac{1}{4\pi} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{I_z(z - \zeta_2)}{r_2^3} d\xi \cdot d\eta - \frac{1}{4\pi} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{I_z(z - \zeta_1)}{r_1^3} d\xi \cdot d\eta$$

$$r_1^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta_1)^2 ,$$

$$r_2^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta_2)^2 .$$

Однородная намагниченность $\mathbf{I} = \kappa \mathbf{H}$ возникает в однородном намагничивающем поле $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0$. Однако даже в однородном поле объект, обладающий высокой магнитной восприимчивостью κ , намагничивается неоднородно. На рис.3 видно, что размагничивающее поле почти вдвое меньше для крайнего элемента, чем для остальных. Краевые части тела намагничиваются сильнее, и намагниченность перестает быть однородной у однородного по свойствам объекта в однородном намагничивающем поле. Исключение составляют безграничная пластина и тела, ограниченные поверхностями второго порядка.

Для сильно поляризованных тел (хороших магнетиков, высоко электропроводных руд и других контрастных с вмещающей средой образований) необходимо искать другие способы вычисления аномального потенциала и напряженности вместо выражений (4-6).

Выражение (3) имеет самый общий характер. Необходимо лишь найти связь между вектором поляризации \mathbf{P} и суммарным полем, состоящим из первичного поля и поля всех элементарных объемов. Рассмотрим эту проблему на примере электрического поля постоянного тока.

Как известно,
$$E_{ne} - E_n = P_n,$$

E_{ne} - нормальная составляющая напряженности электрического поля с наружной (external) стороны включения, E_n - с внутренней стороны.

На границе непрерывна нормальная составляющая плотности полного тока

$$i_{ne} = i_n, \quad \sigma_e E_{ne} + i_{cne} = \sigma E_n + i_{cn},$$

где i_c и i_{cn} - нормальные составляющие плотности стороннего тока на внешней и внутренней сторонах границы включения. Отсюда

$$E_{ne} = \frac{\sigma}{\sigma_e} E_n + \frac{i_c - i_{ce}}{\sigma_e}$$

и

$$P_n = \left(\frac{\sigma}{\sigma_e} - 1 \right) E_n + \frac{i_c - i_{ce}}{\sigma_e} \quad (7)$$

Если нормальная составляющая вектора поляризации дана выражением (7), то весь вектор равен

$$\mathbf{P} = \left(\frac{\sigma}{\sigma_e} - 1 \right) \mathbf{E} + \frac{\mathbf{i}_c - \mathbf{i}_{ce}}{\sigma_e}$$

Подставляя (8) в (3) и добавляя потенциал первичного поля U_0 , имеем во всем пространстве

$$U = U_0 + \frac{1}{4\pi} \int_V \left[\left(\frac{\sigma}{\sigma_e} - 1 \right) \mathbf{E} + \frac{\mathbf{i}_c - \mathbf{i}_{ce}}{\sigma_e} \right] \mathbf{grad}_M (1/r) dV, \quad (9)$$

Откуда

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \frac{1}{4\pi} \mathbf{grad}_A \int_V \left[\left(\frac{\sigma}{\sigma_e} - 1 \right) \mathbf{E} + \frac{\mathbf{i}_c - \mathbf{i}_{ce}}{\sigma_e} \right] \frac{\mathbf{r}}{r^3} dV, \quad (10)$$

Более строгий вывод уравнения (10) с использованием формулы Грина приведен в статье [7].

Выражение (10) для внешних точек является интегральной формулой для вычисления внешней напряженности по значениям внутренней. Для

внутренних точек оно является векторным интегральным уравнением, т.е. компактной записью системы из трех скалярных уравнений относительно компонентов напряженности. При вычислениях сначала необходимо решить интегральное уравнение (10) для внутренних точек. Полученную матрицу внутренних значений E можно использовать как для определения внешней напряженности по той же формуле (10), так и для вычисления потенциала по формуле (9). Если сторонние токи отсутствуют, их плотность следует положить равной нулю. В электроразведке на постоянном токе U_0 и E_0 - это потенциал и напряженность питающих заземлений.

Перейдем от векторной записи (10) к скалярной, опустив для упрощения записи сторонние токи. Тогда

$$\left. \begin{aligned} E_x &= E_{x0} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_V \left(\frac{\sigma}{\sigma_e} - 1 \right) \frac{E_\xi(x-\xi) + E_\eta(y-\eta) + E_\zeta(z-\zeta)}{r^3} dV \\ E_y &= E_{y0} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_V \left(\frac{\sigma}{\sigma_e} - 1 \right) \frac{E_\xi(x-\xi) + E_\eta(y-\eta) + E_\zeta(z-\zeta)}{r^3} dV \\ E_z &= E_{z0} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_V \left(\frac{\sigma}{\sigma_e} - 1 \right) \frac{E_\xi(x-\xi) + E_\eta(y-\eta) + E_\zeta(z-\zeta)}{r^3} dV \end{aligned} \right\} (11)$$

Путем дискретизации объема V система уравнений (11) может быть сведена к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Покажем это на примере разбиения объема V на две малые части V_1 и V_2 , внутри которых $\sigma_1 = const$ и $\sigma_2 = const$, причем в общем случае $\sigma_1 \neq \sigma_2$. Внутри каждой части поле можно считать однородным и равным полю в его центре.

Рассчитаем поля E_1 и E_2 в центре каждого из объемов (рис 6).

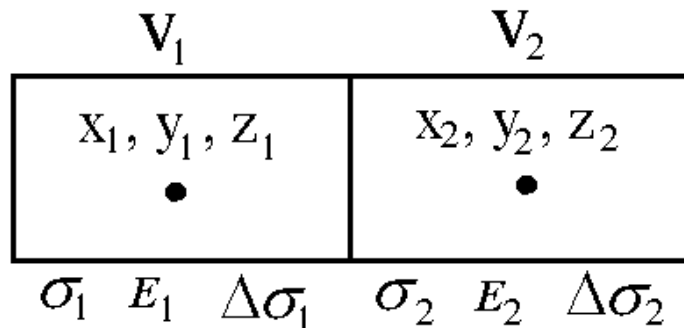


Рис. 6

Введем обозначения:

$$\Delta\sigma_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_e}{\sigma_e}, \quad \Delta\sigma_2 = \frac{\sigma_2 - \sigma_e}{\sigma_e}$$

Вынесем однородные электропроводность и напряженность электрического поля за знак интеграла и введем обозначения:

$$4\pi G_{xx}^{11} = \int_{V_1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x_1 - \xi}{r_1^3} \right) dV, \quad 4\pi G_{xz}^{11} = \int_{V_1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z_1 - \zeta}{r_1^3} \right) dV,$$

$$4\pi G_{yy}^{11} = \int_{V_1} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y_1 - \eta}{r_1^3} \right) dV,$$

$$4\pi G_{xy}^{11} = \int_{V_1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y_1 - \eta}{r_1^3} \right) dV, \quad 4\pi G_{yx}^{11} = \int_{V_1} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x_1 - \xi}{r_1^3} \right) dV,$$

$$4\pi G_{yz}^{11} = \int_{V_1} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z_1 - \zeta}{r_1^3} \right) dV$$

$$4\pi G_{zx}^{11} = \int_{V_1} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{x_1 - \xi}{r_1^3} \right) dV, \quad 4\pi G_{zy}^{11} = \int_{V_1} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{y_1 - \eta}{r_1^3} \right) dV,$$

$$4\pi G_{zz}^{11} = \int_{V_1} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z_1 - \zeta}{r_1^3} \right) dV,$$

$$r_1^2 = (x_1 - \xi)^2 + (y_1 - \eta)^2 + (z_1 - \zeta)^2.$$

Выражения G_{xx}^{11} и т.д. называются компонентами функции Грина (в точке 1 для объема 1). Они являются вторыми производными потенциала притяжения неточечной однородной массы. Заменяем в этих выражениях V_1 на V_2 и получим влияние объема V_2 на точку x_1, y_1, z_1 , введя обозначения G^{12} . Заменяем координаты центра и получим значения G^{21} и G^{22} при $r_2^2 = (x_2 - \xi)^2 + (y_2 - \eta)^2 + (z_2 - \zeta)^2$. Число компонентов функции Грина из-за симметрии может оказаться фактически меньше, но мы не будем здесь заниматься этим анализом. Компоненты функции Грина суть известные величины, если задана модель и координаты элементарных объемов. В итоге получаем, что

$$E_{\xi 1} = E_{x01} - \Delta\sigma_1 \left(E_{\xi 1} G_{xx}^{11} + E_{\eta 1} G_{xy}^{11} + E_{\zeta 1} G_{xz}^{11} \right) - \\ - \Delta\sigma_2 \left(E_{\xi 2} G_{xx}^{12} + E_{\eta 2} G_{xy}^{12} + E_{\zeta 2} G_{xz}^{12} \right)$$

$$E_{\xi 2} = E_{x02} - \Delta\sigma_1 \left(E_{\xi 1} G_{xx}^{21} + E_{\eta 1} G_{xy}^{21} + E_{\zeta 1} G_{xz}^{21} \right) - \\ - \Delta\sigma_2 \left(E_{\xi 2} W G_{xx}^{22} + E_{\eta 2} G_{xy}^{22} + E_{\zeta 2} G_{xz}^{22} \right)$$

$$E_{\eta 1} = E_{y01} - \Delta\sigma_1 \left(E_{\xi 1} G_{yx}^{11} + E_{\eta 1} G_{yy}^{11} + E_{\zeta 1} G_{yz}^{11} \right) - \\ - \Delta\sigma_2 \left(E_{\xi 2} G_{yx}^{12} + E_{\eta 2} G_{yy}^{12} + E_{\zeta 2} G_{yz}^{12} \right)$$

$$E_{\eta 2} = E_{y02} - \dots\dots\dots$$

$$E_{\zeta 1} = \dots\dots\dots$$

$$E_{\zeta 2} = \dots\dots\dots$$

Имеем СЛАУ из 6-ти уравнений с шестью неизвестными компонентами внутренней напряженности по 3 в каждом объеме. При увеличении числа разбиений размерность СЛАУ увеличивается. Общие выражения для произвольного числа M элементарных объемов будет иметь вид:

$$E_{im} = E_{i0m} - \sum_n \Delta\sigma_n \sum_k E_{kn} G_{ik}^{nm} \\ i, k = x, y, z \quad n, m = 1, \dots, M .$$

Поскольку интегральное уравнение (10) является уравнением Фредгольма 2-го рода, то при его дискретизации всегда получается хорошо обусловленная система СЛАУ, которая удовлетворительно разрешается при большом числе переменных. Так в частной форме находит выражение положение о единственности прямой задачи. Есть ряд способов решения системы СЛАУ, из которых наиболее известны итерационный способ и способ исключения Гаусса. Их описание можно найти в соответствующих курсах по методам вычислений.

Вопросы для самопроверки

1. Потенциал и напряженность поля диполя, однородно поляризованное тело, проблемы взаимного влияния частей тела друг на друга.
2. Интегральное уравнение для напряженности электрического поля постоянного тока.
3. Сведение объемного векторного уравнения к системе линейных алгебраических уравнений.

Л е к ц и я 4

ОСОБЕННОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАЗЛИЧНЫХ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ.

В предыдущей лекции было получено базовое интегральное уравнение для напряженности электрического поля токов в безграничном пространстве при наличии локальной области V с неоднородной электропроводностью, объемно распределенных сторонних токов и источников постоянного тока.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \frac{1}{4\pi} \mathbf{grad}_A \int_V \left[\left(\frac{\sigma}{\sigma_e} - 1 \right) \mathbf{E} + \frac{\mathbf{i}_c - \mathbf{i}_{ce}}{\sigma_e} \right] \mathbf{grad}_M \frac{1}{r} dV. \quad (1)$$

Уравнение (1) непосредственно обобщается на произвольное число объемов. Первый сомножитель (в квадратных скобках) является вектором поляризации, величина $1/r$ является функцией Грина. В случае верхнего непроводящего полупространства для вычисления поля в нижнем полупространстве необходимо изменить вид функции Грина таким образом, чтобы $E_z = 0$ при $z = 0$. Тогда

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \frac{I}{4\pi} \mathbf{grad}_A \int_V \left[\left(\frac{\sigma}{\sigma_e} - 1 \right) \mathbf{E} + \frac{\mathbf{i}_{ce} - \mathbf{i}_{ce}}{\sigma_e} \right] \mathbf{grad}_M \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} \right) dV, \quad (2)$$

где $r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2$,
 $r_1^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z + \zeta)^2$.

1. Если объемные сторонние токи отсутствуют, а поле создается точечным источником постоянного тока I , то

$$\mathbf{E} = \frac{I}{4\pi\sigma_e} \left(\frac{\mathbf{R}}{R^3} + \frac{\mathbf{R}_1}{R_1^3} \right) - \frac{1}{4\pi} \mathbf{grad}_A \int_V \left(\frac{\sigma}{\sigma_e} - 1 \right) \mathbf{E} \mathbf{grad}_M \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} \right) dV. \quad (3)$$

R и R_1 – расстояния от точки наблюдения до точечного источника тока и его изображения в границе раздела земля-воздух,

$$\mathbf{R} = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k},$$

$$\mathbf{R}_1 = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z + z_0)\mathbf{k},$$

$x_0, y_0, z_0 \leq 0$ – координаты источника в нижнем полупространстве.

Уравнение (3) является основным для электроразведки на постоянном токе. Подставляя матрицу внутренних значений напряженности \mathbf{E} ,

полученную в результате решения векторного интегрального уравнения (3), можно вычислить электрический потенциал и аномальное магнитное поле тока по формулам:

$$U = \frac{I}{4\pi\sigma_e} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right) + \frac{1}{4\pi} \int_V \left(\frac{\sigma}{\sigma_e} - 1 \right) \mathbf{Egrad}_M \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} \right) dV, \quad (4)$$

$$\mathbf{H}_a = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot}_A \int_V (\sigma - \sigma_e) \left\{ \frac{\mathbf{E}}{r} - \frac{\mathbf{k}(E_\zeta r_1 + \mathbf{E}_1 \mathbf{r}_1)}{r_1 [r_1 - (z + \zeta)]} \right\} dV, \quad (5)$$

где $\mathbf{E}_1 = E_\xi \mathbf{i} + E_\eta \mathbf{j} - E_\zeta \mathbf{k}$.

2. Уравнение (1) в зависимости от природы сторонних токов имеет несколько вариантов. Рассмотрим проводящее нижнее полупространство, в котором установилась стационарная вызванная поляризация. При этом полагают, что $\mathbf{i}_c = -\sigma\eta\mathbf{E}$ и $\mathbf{i}_{ce} = -\sigma_e\eta_e\mathbf{E}$, где η и η_e - установившиеся значения поляризуемости неоднородности и полупространства. Тогда для двухэлектродной питающей установки суммарное поле равно

$$\mathbf{E} = \frac{I}{4\pi\sigma_e(1-\eta_e)} \left[\frac{\mathbf{R}_A}{R_A^3} + \frac{\mathbf{R}_{1A}}{R_{1A}^3} - \frac{\mathbf{R}_B}{R_B^3} - \frac{\mathbf{R}_{1B}}{R_{1B}^3} \right] - \frac{1}{4\pi} \mathbf{grad}_A \int_V \left[\frac{\sigma(1-\eta)}{\sigma_e(1-\eta_e)} - 1 \right] \mathbf{Egrad}_M \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} \right) dV, \quad (6)$$

где \mathbf{R}_A и \mathbf{R}_B - расстояния до питающих электродов,

\mathbf{R}_{A1} и \mathbf{R}_{B1} - до их изображений в границе раздела земля-воздух.

Напряженность поля вызванной поляризации равна $\mathbf{E}_{ВП} = \mathbf{E} - \mathbf{E}(0)$, где $\mathbf{E}(0)$ – решение уравнения (6) при $\eta = \eta_e = 0$, а кажущаяся поляризуемость определяется как

$$\eta_k = \frac{|\mathbf{E}| - |\mathbf{E}(0)|}{|\mathbf{E}|},$$

где $|\mathbf{E}|$ и $|\mathbf{E}(0)|$ - модули горизонтальных векторов $\mathbf{E} = E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j}$ и $\mathbf{E}(0) = E_x(0) \mathbf{i} + E_y(0) \mathbf{j}$, если наблюдения выполнены на дневной поверх-

ности. При этом относительное кажущееся сопротивление может быть определено как

$$\frac{\rho_k}{\rho_e} = \frac{|\mathbf{E}(0)|}{|\mathbf{E}_0|},$$

где \mathbf{E}_0 - первичное поле электродов A и B в однородном полупространстве.

3. Для вычисления напряженности электрического поля течения Дарси (фильтрации) необходимо воспользоваться соотношением

$$\mathbf{i}_c = \sigma L \mathbf{grad} P,$$

где P – давление, L – коэффициент потенциала течения, имеющий порядок $10^{-6} - 10^{-8}$ В/Па.

Для вычисления электрического поля диффузии необходимо приравнять

$$\mathbf{i}_c = m \beta \mathbf{grad} C,$$

где C – концентрация симметричного бинарного электролита, которым пользуются для оценки эффекта, m – коэффициент пористости,

$$\beta = RT(v_A - v_K).$$

Здесь R – универсальная газовая постоянная (8.314 В·Кл/моль/ $^{\circ}$ К), T - абсолютная температура ($^{\circ}$ К), $v_A - v_K$ - скорости движения аниона и катиона в единичном электрическом поле, м²/В/с.

4. Воспользуемся аналогией между электрическим полем постоянного тока и намагничиванием магнетика. Заменим в выражении (1) \mathbf{E} на \mathbf{H} , σ на μ и \mathbf{i}_c на \mathbf{I}_{oc} , где \mathbf{I}_{oc} - остаточная намагниченность, А/м. Если магнетик расположен в немагнитном полупространстве, то граница раздела земля-воздух не является физической границей, относительная проницаемость вмещающей среды $\mu_e = 1$, также $\mathbf{I}_{oce} = 0$. Нет необходимости вводить отраженные в границе раздела источники и тогда

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 - \frac{1}{4\pi} \mathbf{grad}_A \int_V [(\mu - 1)\mathbf{H} + \mathbf{I}_{oc}] \frac{\mathbf{r}}{r^3} dV = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_a, \quad (7)$$

В слабых полях $\mu - 1 = \kappa$, где κ – магнитная восприимчивость (в ед. СИ). Здесь \mathbf{H}_0 – напряженность земного магнитного поля, А/м, в общем случае зависящая от координат.

Если намагничивающийся объем невелик (менее 5-10 км в поперечнике), то первичное магнитное поле постоянно по величине и направлению $\mathbf{H}_0 = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$, где X, Y, Z – декартовы составляющие в системе координат с осью OZ , направленной вверх, и осью OY , направленной на север.

Для соответствующих географических широты и долготы по таблицам необходимо найти значения магнитной индукции B_{X0}, B_{Y0}, B_{Z0} в геомагнитной системе координат с осью OZ , направленной вниз, и осью OX , направленной на географический север.

Их следует перевести в значения напряженности в А/м, разделив \mathbf{B} в нТл на $4\pi \cdot 100$. Приняв во внимание различное направление осей в геомагнитной и расчетной системе координат, имеем

$$X = \frac{B_{Y0}}{4\pi \cdot 100}, \quad Y = \frac{B_{X0}}{4\pi \cdot 100}, \quad Z = -\frac{B_{Z0}}{4\pi \cdot 100}.$$

В результате решения интегрального уравнения (7) и расчетов внешнего поля получают значения аномального и суммарного магнитного поля $H_{aX}, H_{aY}, H_{aZ}, H_X, H_Y, H_Z$. Заметим, однако, что в настоящее время по преимуществу выполняют абсолютные измерения модуля полной магнитной силы протонными и квантовыми магнитометрами

$$T = \sqrt{H_X^2 + H_Y^2 + H_Z^2}.$$

Зная значения нормального поля, вычисляют аномалию модуля

$$T_a = T - T_0,$$

где $T_0 = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$. Именно эту аномалию анализируют и сопоставляют с результатами расчетов. Если T и T_0 различаются не более чем на 5%, т.е. $T_a \leq 2$ А/м, ($B_a \leq 2500$ А/м), то справедлива приближенная формула

$$\begin{aligned} T_a &= \sqrt{(X + H_{Xa})^2 + (Y + H_{Ya})^2 + (Z + H_{Za})^2} - \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \approx \\ &\approx \frac{X}{T_0} H_{Xa} + \frac{Y}{T_0} H_{Ya} + \frac{Z}{T_0} H_{Za} \end{aligned} \quad (8)$$

Поскольку в наших широтах $Z / T_0 \approx 0.9-0.95$, то аномалия T_a близка к H_{Za} . Однако, если аномалия H_{Za} симметрична, то аномалия T_a не симметрична в плоскости ZOY из-за влияния составляющей H_{Ya} с весовым коэффициентом $Y/T_0 \approx 0.2$.

Рассмотрим ситуацию, когда произошла малая вариация первичного поля $\delta\mathbf{H}_0$, в результате которой возник малый эффект подмагничивания

$$\delta\mathbf{H} = \delta\mathbf{H}_0 - \frac{1}{4\pi} \mathbf{grad}_A \int_V (\mu - 1) \delta\mathbf{H} \frac{\mathbf{r}}{r^3} dV = \delta\mathbf{H}_0 + \delta\mathbf{H}_a \quad (9)$$

$$\delta\mathbf{H}_0 = \delta X \mathbf{i} + \delta Y \mathbf{j} + \delta Z \mathbf{k}$$

Заметим, что если статическая аномалия (7) связана исключительно с остаточной намагниченностью, то $\delta\mathbf{H}_a = 0$.

Если $\mathbf{H}_a, \delta\mathbf{H}_0$ и $\delta\mathbf{H}_a$ малы, а остаточная намагниченность отсутствует, то согласно (8)

$$T_{a2} = \frac{X}{T_0}(\delta X + H_{xa} + \delta H_{xa}) + \frac{Y}{T_0}(\delta Y + H_{ya} + \delta H_{ya}) + \frac{Z}{T_0}(\delta Z + H_{za} + \delta H_{za})$$

Обозначим прежнее значение поля (8) так T_{a1} и введем обозначения

$$\begin{aligned} \delta T_a &= \frac{X}{T_0} \delta H_{xa} + \frac{Y}{T_0} \delta H_{ya} + \frac{Z}{T_0} \delta H_{za} \\ \delta T_0 &= \frac{X}{T_0} \delta X + \frac{Y}{T_0} \delta Y + \frac{Z}{T_0} \delta Z . \end{aligned} \quad (10)$$

Тогда

$$\delta T_a = T_{a2} - T_{a1} - \delta T_0 \quad (11)$$

В общем случае следует пользоваться выражением

$$\delta T_a = (T_{a2} - T_{02}) - (T_{a1} - T_{01})$$

Величина δT_a может быть экспериментально определена. С другой стороны та же величина может быть вычислена для некоторой модели среды. Это позволяет путем сопоставления ожидаемого эффекта подмагничивания с экспериментально определенным исследовать, с какой намагниченностью связана аномалия – с остаточной или с индуцированной.

К сожалению из-за использования модульных измерений наблюдается ложный эффект подмагничивания, связанный с остаточной намагниченностью. Он может составлять до половины истинного.

Без учета размагничивания, т.е. без учета взаимного влияния намагниченных частей тела, выражение (7) приобретет вид

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 - \frac{1}{4\pi} \mathbf{grad}_A \int_V (\mu - 1) \mathbf{H}_0 \frac{\mathbf{r}}{r^3} dV \quad (12)$$

Сравнивая для одной и той же модели результаты расчетов по формулам (12) и (7) в виде (7а)

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 - \frac{1}{4\pi} \mathbf{grad}_A \int_V (\mu - 1) \mathbf{H} \frac{\mathbf{r}}{r^3} dV \quad (7a)$$

можно оценить погрешность, возникающую в случае, когда формулу (12), приближенно справедливую для слабо намагниченных тел, применяют для вычисления магнитного поля сильно намагниченных тел. Поле, вычисленное по формуле (12), будет всегда больше поля, вычисленного по (7а), по-

скольку (12) не учитывается размагничивание. Только формулы (7) и (7а) справедливы для любых объектов, как слабо, так и сильно намагниченных.

5. Воспользуемся аналогией между давлением и электрическим потенциалом. Найдем градиент давления при течении Дарси, заменив в выражениях (1) и (2) $\mathbf{E} = -\mathbf{grad}U$ на $(-\mathbf{grad}P)$ и σ на c . Тогда согласно (2) имеем

$$\mathbf{grad}P = \mathbf{grad}P_0 - \frac{1}{4\pi} \mathbf{grad}_A \int_V \left(\frac{c}{c_e} - 1 \right) \mathbf{grad}P \mathbf{grad}_M \left(\frac{1}{r} + \frac{K}{r_1} \right) dV \quad (13)$$

Здесь P_0 - давление, развиваемое источниками флюида в однородном полупространстве с гидравлической проницаемостью c_e . При плоской восходящей и нисходящей фильтрации, например,

$$\mathbf{grad}P_0 = \mathbf{k} \partial P_0 / \partial z, \quad \text{причем } \partial P_0 / \partial z = \text{const.}$$

В (13) K - коэффициент, учитывающий гидравлический режим вблизи дневной поверхности при $z=0$. При $K=+1$ $\partial P / \partial z = 0$. Это означает, что на дневной поверхности находится водоупор, препятствующий высачиванию флюида. При $K=-1$ $\partial P / \partial x = \partial P / \partial y = 0$ (т.е. $P=\text{const}$) и дневная поверхность является поверхностью высачивания. Плоское вертикальное течение совместимо с этим режимом.

Если имеется много нагнетательных и добывающих скважин, каждую из которых можно уподобить точечному источнику флюида, то

$$\mathbf{grad}P_0 = \sum_i \frac{\mu Q_i}{4\pi c_e} \mathbf{grad}_A \left(\frac{1}{R_i} + \frac{K}{R_{1i}} \right)$$

где Q_i - дебит i -товой скважины, $\text{м}^3/\text{с}$, в нагнетательных скважинах $Q > 0$, в добывающих $Q < 0$.

$$R_i^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$$

$$R_{1i}^2 = (x - x_{0i})^2 + (y - y_{0i})^2 + (z - z_{0i})^2$$

x_{0i}, y_{0i}, z_{0i} - координаты перфорированной части i -товой скважины в нижнем полупространстве.

Согласно требованиям экологической безопасности алгебраическая сумма частных дебитов равно нулю $\sum_i Q_i = 0$, что означает равенство до-

бываемых и заканчиваемых объемов флюида. В соответствии с законом Дарси

$$\mathbf{v} = -\frac{c}{\mu} \mathbf{grad}P$$

можно определить компоненты скорость и течение флюида и найти, например, горизонтальную скорость движения флюида в пласте

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

по конфигурации изолиний которой можно судить, на сколько эффективен режим заводнения.

6. Воспользовавшись аналогией между потенциалом U и температурой T , между электропроводностью σ и теплопроводностью λ , имеем вместо (2)

$$\mathbf{grad}T = \mathbf{grad}T_0 - \frac{1}{4\pi} \mathbf{grad}_A \int_V \left(\frac{\lambda}{\lambda_e} - 1 \right) \mathbf{grad}T \mathbf{grad}_M \left(\frac{1}{r} + \frac{K}{r_1} \right) dV \quad (14)$$

Здесь K – коэффициент отражения на дневной поверхности. Большинство задач геотермии решается в предположении об изотермическом режиме на дневной поверхности, когда при $K = -1$, $\partial T / \partial x = \partial T / \partial y = 0$ и, таким образом, $T = const$, причем константа равняется среднегодовой температуре. Если отказаться от гипотезы о выравнивании температур под действием конвективных процессов в атмосфере, тогда $K = \frac{\lambda_e - \lambda_0}{\lambda_e + \lambda_0}$, где

λ_e – теплопроводность нижнего полупространства, λ_0 – теплопроводность верхнего полупространства, т.е. воздуха. Теплопроводность воздуха примерно в 80 раз меньше, чем теплопроводность горных пород, потому $K \approx 1$.

Если в качестве $\mathbf{grad}T_0$ принят нормальный геометрический градиент, тогда $\mathbf{grad}T_0 = \mathbf{k} \partial T_0 / \partial \chi$ и $K = -1$, поскольку режим $K = 1$ несовместим с плоским вертикальным потоком тепла.

В случае комбинированного кондуктивного (молекулярного) и конвективного переноса температура T удовлетворяет уравнению

$$\text{div}[-\lambda \mathbf{grad}T + \rho_f c_f \mathbf{v}T] = 0$$

где ρ_f – плотность флюида, кг/м³,

c_f – удельная массовая теплоемкость флюида, Дж/кг/°К,

\mathbf{v} – скорость течения Дарси.

Определяя вектор поляризации из неразрывности нормальной составляющей полного потока тепла, получим

$$\mathbf{grad}T = \mathbf{grad}T_0 + \frac{1}{4\pi} \mathbf{grad}_A \int_V \left(\frac{c \mathbf{grad}P}{\mu \chi_1} \mathbf{grad}T - \frac{c_e \mathbf{grad}P_0}{\mu \chi_1} \mathbf{grad}T_0 \right) \cdot \left(\frac{1}{r} + \frac{K}{r_1} \right) dV + \frac{1}{4\pi} \mathbf{grad}_A \int_V \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_e} \right) \mathbf{grad}T \mathbf{grad}_M \left(\frac{1}{r} + \frac{K}{r_1} \right) dV, \quad (15)$$

$$T = T_0 + \frac{1}{4\pi} \int_V \left(\frac{c \mathbf{grad} P}{\mu \chi_e} \mathbf{grad} T - \frac{c_e \mathbf{grad} P_0}{\mu \chi_e} \mathbf{grad} T_0 \right) \cdot \left(\frac{1}{r} + \frac{K}{r_1} \right) dV + \frac{1}{4\pi} \int_V \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_e} \right) \mathbf{grad} T \mathbf{grad}_M \left(\frac{1}{r} + \frac{K}{r_1} \right) dV. \quad (16)$$

Здесь $\chi_e = \lambda_e / \rho_f c_f$ – коэффициент, подобный температуропроводности, м²/с, $\mathbf{grad} P$ – матрица внутренних значений, полученная при решении уравнения (13). Выражение (15) (16) представляют собой пример решения сопряженной задачи, когда градиенты давления при течении Дарси являются источниками при вычислении температуры и ее градиента. Поскольку флюид (обычно это вода) обладает большой теплоемкостью, ничтожные скорости движения флюида 1 мм/год или 1 см/год оказывают значительное влияние на распределение температур. Подробности о конвективном теплопереносе можно найти в статье [8].

7. Приведем также интегральное уравнение в двумерном случае, аналогичное, например, трехмерному уравнению (7).

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 - \frac{1}{2\pi} \mathbf{grad}_A \int_S (\mu - 1) \mathbf{H} \frac{\mathbf{r}}{r^2} dS. \quad (17)$$

Здесь в плоскости XOZ

$$\mathbf{H}_0 = H_{0x} \mathbf{i} + H_{0z} \mathbf{k}, \quad \mathbf{grad}_A = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}, \quad dS = d\xi d\zeta$$

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (z - \zeta)^2.$$

Вопросы для самопроверки

1. Интегральное уравнение для напряженности электрического поля в нижнем проводящем полупространстве в присутствии точечного источника тока и локального неоднородного по проводимости объекта.
2. Вычисление кажущейся поляризуемости и кажущегося сопротивления с использованием интегрального уравнения для напряженности электрического поля.
3. Вычисление напряженности электрического поля течения Дарси и диффузии.
4. Интегральное уравнение для напряженности магнитного поля магнетика в двумерном и трехмерном случаях.

5. Вычисление аномалии модуля магнитной индукции (полной магнитной силы).
6. Вычисление эффекта подмагничивания вариацией магнитного поля.
7. Оценка погрешности вследствие неучета эффекта размагничивания.
8. Исследование скорости течения флюида в пласте коллектора и проблем законтурного заводнения.
9. Интегральное уравнение для градиента температуры.
10. Интегральное уравнение для градиента температуры при наличии конвекции флюида.

Л е к ц и я 5

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕМЕННОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ. МЕТОД ФУНКЦИИ ГРИНА

1. Введем дельта-функцию Дирака, определяемую следующими соотношениями [6]

$$\begin{aligned}\delta(x-a) &= 0 && \text{при } x \neq a, \\ \delta(x-a) &= \infty && \text{при } x = a, \\ \int_{x_1}^{x_2} \delta(x-a) dx &= 1 && \text{при } x_1 < a < x_2.\end{aligned}$$

Основное свойство дельта-функции состоит в том, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a).$$

Для трехмерной дельта-функции $\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$ справедливо выражение

$$\int f(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)dV = f(\mathbf{r}_0). \quad (1)$$

2. Пусть мы имеем дифференциальное уравнение

$$\hat{Q}\varphi(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}), \quad (2)$$

где \hat{Q} - линейный дифференциальный оператор,

$\varphi(\mathbf{r})$ - искомая функция (отклик),

$f(\mathbf{r})$ - некоторая заданная функция (воздействие).

Введем функцию Грина или функцию влияния $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, являющуюся решением уравнения

$$\hat{Q}g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Она представляет собой отклик на воздействие дельтаобразной функцией с особенностью в точке \mathbf{r}' . Тогда имеем частное решение уравнения (2) в виде

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')f(\mathbf{r}')dV'. \quad (3)$$

Действительно, подставляя решение (3) в дифференциальное уравнение (2), имеем

$$\int \hat{Q}[g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')]f(\mathbf{r}')dV' = \int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')f(\mathbf{r}')dV' = f(\mathbf{r}).$$

Как известно, общее решение неоднородного уравнения состоит из суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного. Рассмотрим однородное уравнение, соответствующее неоднородному уравнению (2), обозначив его решение как $\varphi_0(\mathbf{r})$. Тогда

$$\hat{Q} \varphi_0(\mathbf{r}) = 0, \quad \varphi(\mathbf{r}) = \varphi_0(\mathbf{r}) + \int g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') dV'. \quad (4)$$

Действительно

$$\hat{Q} \varphi(\mathbf{r}) = \hat{Q} \varphi_0(\mathbf{r}) + \hat{Q} \int \dots = 0 + f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}).$$

Введение функции Грина позволяет свести решение уравнения (2) к решению двух более простых

$$\hat{Q} \varphi_0(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{и} \quad \hat{Q} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

$$\hat{Q} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

3. В качестве примера применения метода функции Грина рассмотрим вывод интегрального уравнения для постоянного тока, которое уже было выведено во второй лекции другим методом.

Напомним две часто используемые формулы векторного анализа

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} \equiv 0, \quad \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi \equiv 0. \quad (5)$$

Из уравнения неразрывности

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = \operatorname{div}(\sigma \mathbf{E}) = 0$$

следует, что

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \operatorname{div} \left(\frac{\sigma_0 - \sigma}{\sigma_0} \mathbf{E} \right) = \operatorname{div} \mathbf{E} - \frac{\operatorname{div} \sigma \mathbf{E}}{\sigma_0} = \operatorname{div} \mathbf{E} + 0.$$

Поскольку на постоянном токе $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$, в соответствии с (5) можно ввести потенциал, а именно $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} U$.

Тогда

$$\Delta U = -\operatorname{div} \left(\frac{\sigma_0 - \sigma}{\sigma_0} \mathbf{E} \right).$$

Определим функцию Грина из уравнения

$$\Delta g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Для основных видов дифференциальных уравнений в частных производных функции Грина хорошо изучены. В частности, этому уравнению удовлетворяет функция

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{1}{4\pi R}.$$

Здесь \mathbf{r} и \mathbf{r}_0 - радиусы-векторы, проведенные из начала координат в точку измерения и в точку внутри неоднородности, $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ - расстояние между этими точками.

Тогда согласно (3) и (4)

$$U = U_0 + \frac{1}{4\pi} \int_V \operatorname{div} \left(\frac{\sigma_0 - \sigma}{\sigma_0} \mathbf{E} \right) \frac{dV}{R}.$$

Преобразуем подинтегральное выражение в соответствии с уже использованным во второй лекции (формула (1)) соотношением

$$a \operatorname{div} \mathbf{F} = \operatorname{div}(a\mathbf{F}) - \operatorname{grad} a \cdot \mathbf{F}.$$

Тогда

$$U = U_0 - \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\sigma_0 - \sigma}{\sigma_0} \mathbf{E} \operatorname{grad}_M \frac{1}{R} dV + \frac{1}{4\pi} \int_V \operatorname{div} \left(\frac{\sigma_0 - \sigma}{\sigma_0} \frac{\mathbf{E}}{R} \right) dV.$$

Последний интеграл равен нулю. Преобразуем в поверхностный по формуле Гаусса

$$\int_V \operatorname{div} \left[(\sigma_0 - \sigma) \mathbf{E} \frac{1}{R} \right] dV = \int_V \operatorname{div} \left[(\mathbf{j}_0 - \mathbf{j}) \frac{1}{R} \right] dV = - \int_S \frac{j_n^a}{R} dS \equiv 0.$$

Поскольку любой даже самый большой проводник окружен изолятором, на поверхности $S_1 > S_n$, выполняется условие $j_n = 0$. Между поверхностями S_1 и S аномальный ток отсутствует, поэтому и в области S интеграл равен нулю.

Имеем окончательно уже известные выражения

$$U = U_0 + \frac{1}{4\pi} \int_V \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} - 1 \right) \mathbf{E} \operatorname{grad}_M \frac{1}{R} dV, \quad (6)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \frac{1}{4\pi} \operatorname{grad}_A \int_V \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} - 1 \right) \mathbf{E} \operatorname{grad}_M \frac{1}{R} dV. \quad (7)$$

Далее рассмотрим более сложный случай переменного электромагнитного поля.

4. Приведем вид уравнений макроскопической электродинамики (уравнений Максвелла) для комплексных амплитуд в случае зависимости от времени вида $e^{i\omega t}$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{j}_\Pi = \mathbf{j} + i\omega \mathbf{D}, & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -i\omega \mathbf{B}, \\ (H_{t2} - H_{t1} &= 0), & (E_{t2} - E_{t1} &= 0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho, \\ (B_{n2} - B_{n1}) &= 0, & (D_{n2} - D_{n1}) &= \rho_{\text{пов}}, \end{aligned}$$

а также уравнение непрерывности полного тока. Ниже приведены его различные формы

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{j}_{\text{п}} &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{j} &= -i\omega\rho, \\ (j_{n2} - j_{n1}) &= 0, & (j_{n2} - j_{n1}) &= -i\omega\rho_{\text{пов}}, \\ \int_S (j_{\text{ст}})_n dS &= I. \end{aligned}$$

Уравнения связи между векторами $\mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{H}, \mathbf{j}$ имеют вид

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{j}_{\text{п}} = \sigma \mathbf{E} + \sigma \mathbf{E}_{\text{ст}}.$$

В скобках даны поверхностные аналоги уравнений, выполняющие роль граничных условий. Здесь

\mathbf{D}, D_n – вектор электрической индукции и его нормальная составляющая, Кл/м²;

\mathbf{E}, E_t – вектор напряженности электрического поля и его тангенциальная составляющая, В/м;

$\mathbf{E}_{\text{ст}}$ – вектор сторонней напряженности, В/м;

$\omega = 2\pi f$ – круговая частота, с⁻¹;

t – время;

$i = \sqrt{-1}$;

$\omega \mathbf{D}$ – вектор плотности тока смещения, А/м²;

\mathbf{j}, j_n – вектор плотности тока проводимости и его нормальная составляющая, А/м²;

$\mathbf{j}_{\text{п}}$ – вектор плотности полного тока, А/м²;

$\mathbf{j}_{\text{ст}}, (j_{\text{ст}})_n$ – вектор плотности стороннего тока и его нормальная составляющая, А/м²;

$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}$ – электрическая постоянная, Ф/м;

ε – диэлектрическая проницаемость, безразмерная;

σ – удельная электропроводность, Ом⁻¹·м⁻¹;

ρ – объемная плотность зарядов, Кл/м³;

$\rho_{\text{пов}}$ – поверхностная плотность зарядов, Кл/м²;

\mathbf{B}, B_n – вектор магнитной индукции и его нормальная составляющая, Тл;

\mathbf{H}, H_n – вектор напряженности магнитного поля и его нормальная составляющая, А/м;

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ – магнитная постоянная, Гн/м;

μ – магнитная проницаемость, безразмерная;

I – ток, стекающий с заземлителя, А;

S, dS – поверхность, охватывающая заземлитель, и элемент этой поверхности, м².

5. В немагнитной проводящей среде в пренебрежении токами смещения (в так называемом квазистационарном приближении) уравнения Максвелла приобретают вид

$$\text{I. } \mathbf{rot}\mathbf{H} = \sigma\mathbf{E} = \mathbf{j}, \quad \text{II. } \mathbf{rot}\mathbf{E} = -i\omega\mu_0\mathbf{H},$$

$$\text{III. } \mathit{div}\mathbf{H} = 0, \quad \text{IV. } \mathit{div}\mathbf{E} = -\frac{\rho}{\varepsilon}.$$

Четвертое уравнение имеет вспомогательное значение. С его помощью вычисляют заряды, появляющиеся вследствие неоднородности среды. Более важным является уравнение неразрывности, родственное уравнению I. Поскольку для любого вектора $\mathit{div}\mathbf{rot}\mathbf{E} \equiv 0$, то из I следует

$$\left. \begin{aligned} \mathit{div}\mathbf{j} = \mathit{div}(\sigma\mathbf{E}) = 0 \\ \mathit{div}\mathbf{E} = \mathit{div}\left(\frac{\sigma_0 - \sigma}{\sigma_0}\mathbf{E}\right) \end{aligned} \right\} \text{V.}$$

Удовлетворяя уравнению III, введем вектор-потенциал \mathbf{A} такой, что

$$\mathbf{H} = \mathbf{rot}\mathbf{A}. \quad (8)$$

Тогда, удовлетворяя уравнению II

$$\mathbf{rot}(\mathbf{E} + i\omega\mu_0\mathbf{A}) = 0,$$

имеем $\mathbf{E} + i\omega\mu_0\mathbf{A} = -\mathbf{grad}U$, поскольку ротор любого градиента равен нулю. Тогда

$$\mathbf{E} = -i\omega\mu_0\mathbf{A} - \mathbf{grad}U. \quad (9)$$

Подставим (8) и (9) в I

$$\mathbf{rot}\mathbf{rot}\mathbf{A} = -i\omega\mu_0\sigma\mathbf{A} - \sigma\mathbf{grad}U = \mathbf{grad}\mathit{div}\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A}. \quad (10)$$

Здесь Δ - оператор Лапласа, примененный к вектору.

Поскольку выбор \mathbf{A} и U произволен, введем калибровку

$$\mathit{div}\mathbf{A} = -\sigma_0 U, \quad (11)$$

тогда $\Delta\mathbf{A} - i\omega\mu_0\sigma_0\mathbf{A} = -(\sigma - \sigma_0)\mathbf{E}$.

Величина $i\omega\mu_0\sigma_0 = k_0^2$ называется квадратом волнового числа во вмещающей среде.

Итак

$$\Delta \mathbf{A} - k_0^2 \mathbf{A} = -(\sigma - \sigma_0) \mathbf{E}. \quad (12)$$

На основании (9) и (11) имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = -i\omega\mu_0 \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta U = k_0^2 U - \Delta U,$$

откуда

$$\Delta U - k_0^2 U = -\operatorname{div} \mathbf{E}. \quad (13)$$

Для функции Грина в случаях (12) и (13) имеем одно и то же уравнение

$$\Delta g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - k_0^2 g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

имеющее известное решение

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{-k_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{-k_0 R}}{R}.$$

С его помощью решения уравнений (12) и (13) могут быть записаны в виде

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \frac{1}{4\pi} \int_V (\sigma - \sigma_0) \mathbf{E} \frac{e^{-k_0 R}}{R} dV, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} U &= U_0 + \frac{1}{4\pi} \int_V \operatorname{div} \mathbf{E} \frac{e^{-k_0 R}}{R} dV = U_0 + \frac{1}{4\pi} \int_V \operatorname{div} \left(\frac{\sigma_0 - \sigma}{\sigma_0} \mathbf{E} \right) \frac{e^{-k_0 R}}{R} dV = \\ &= U_0 + \frac{1}{4\pi} \int_V \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} - 1 \right) \mathbf{E} \operatorname{grad}_M \left(\frac{e^{-k_0 R}}{R} \right) dV + \frac{1}{4\pi} \int_V \operatorname{div} \left(\frac{\sigma_0 - \sigma}{\sigma_0} \mathbf{E} \frac{e^{-k_0 R}}{R} \right) dV \end{aligned} \quad (15)$$

Последний интеграл в формуле (15) как и в случае постоянного тока равен нулю. Тогда, подставляя (14) и (15) в (9), имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -i\omega\mu \mathbf{A}_0 - i\omega\mu_0 \frac{1}{4\pi} \int_V (\sigma - \sigma_0) \mathbf{E} \frac{e^{-k_0 R}}{R} dV - \\ &- \operatorname{grad} U_0 - \frac{1}{4\pi} \operatorname{grad}_A \int_V \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} - 1 \right) \mathbf{E} \operatorname{grad}_M \left(\frac{e^{-k_0 R}}{R} \right) dV \end{aligned}$$

Окончательно получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - k_0^2 \frac{1}{4\pi} \int_V \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} - 1 \right) \mathbf{E} \frac{e^{-k_0 R}}{R} dV - \frac{1}{4\pi} \mathbf{grad}_A \int_V \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} - 1 \right) \mathbf{E} \mathbf{grad}_M \left(\frac{e^{-k_0 R}}{R} \right) dV, \quad (16)$$

которое при $\omega = 0$ (т.е. при $k = 0$) переходит в уравнение постоянного тока (7).

Заметим, что

$$\mathbf{H} = \mathbf{rot} \mathbf{A} = \mathbf{rot} \mathbf{A}_0 + \frac{1}{4\pi} \mathbf{rot} \int_V (\sigma - \sigma_0) \mathbf{E} \frac{e^{-k_0 R}}{R} dV. \quad (17)$$

Выражениями (16) и (17) не исчерпывается в общем случае переменное электромагнитное поле неоднородности. Они отражают одну сторону явления - возбуждение неоднородности электрическим полем, что справедливо на низкой частоте, в случае резкого преобладания электрического возбуждения над магнитным (например, при заряде в неоднородность), в случае, когда неоднородность представлена слабо контрастным проводником или плохо проводящим объектом.

Для хороших проводников следует учитывать возбуждение магнитным полем, при котором каждый элемент объема уподобляется магнитному диполю (малому витку с током). В данном курсе мы не приводим соответствующих интегральных уравнений, ограничившись в качестве примера электрическим возбуждением.

Вопросы для самопроверки.

1. Метод функции Грина при решении линейных неоднородных дифференциальных уравнений.
2. Вывод интегрального уравнения для постоянного тока методом функции Грина.
3. Уравнение Максвелла в квазистационарном приближении и вывод интегрального уравнения для переменного электрического поля (электрическое возбуждение).

Лекция 6.

МОДЕЛИРОВАНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК УПРУГИХ ВОЛН

Существует два подхода к решению прямых задач – кинематический и динамический [9]. В первом используются временные свойства упругих волн, описываемые уравнением эйконала. Второй – более эффективный, но и более сложный, основан на уравнении Ламе и использует как временные, так и амплитудные характеристики волн. Мы ограничимся моделированием кинематических характеристик.

Поле времен. Если в среде распространяется упругая волна, то каждой точке $M(x', y', z')$ соответствует значение скалярной величины $t=t(x', y', z')$, где t - время прихода либо фронта, либо некоторой фазовой поверхности упругой волны. Таким образом, в среде существует скалярное поле, называемое полем времен. Его можно охарактеризовать семейством уровневых поверхностей вида $t_i=t(x', y', z')$, называемых поверхностями изохрон или просто изохронами. Изохрона представляет собой поверхность, с которой в момент времени t_i совпадает фронт волны. В отличие от эквипотенциальных поверхностей изохроны могут пересекаться друг с другом, например, при отражении от вогнутых поверхностей. Сечение изохрон плоскостью наблюдений называется поверхностным годографом или картой изохрон. Сечение изохрон профилем наблюдений называется линейным годографом или просто годографом. Линии, ортогональные изохронам и совпадающие по направлению с градиентом поля времен, называются сейсмическими лучами. Вдоль них распространяется энергия волны. Скорость распространения волны вдоль луча называют лучевой скоростью. Построение фронтов и лучей выполняется на основе принципов Гюйгенса и Ферма.

Существует много типов волн: продольные, поперечные, отраженные, рефрагированные и обменные. Принадлежность волны к продольным или поперечным определяет различия в скоростях. Принадлежность к отраженным, рефрагированным или обменным определяет характер траектории луча, который необходимо рассчитать. Для каждого типа волны следует построить свою совокупность лучей и свои фронты волны.

Принцип Гюйгенса и уравнение поля времен. Согласно принципу Гюйгенса каждую точку фронта можно считать источником элементарной сфе-

рической волны, а положение фронта в последующие моменты времени соответствует огибающей поверхностям элементарных фронтов. Принцип Гюйгенса в дифференциальной форме может быть записан как

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} t = 1, \quad (1)$$

где $\mathbf{v}(x', y', z')$ - значение скорости в среде. Поскольку

$$\mathbf{grad} t = \frac{\partial t}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial t}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial t}{\partial z} \mathbf{k},$$

определим квадрат модуля как

$$|\mathbf{grad} t|^2 = \mathbf{grad} t \cdot \mathbf{grad} t = \left(\frac{\partial t}{\partial x'} \right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial y'} \right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial z'} \right)^2.$$

Отсюда, в соответствии с принципом Гюйгенса (1) получим дифференциальное уравнение поля времен в виде [9-10]

$$\left(\frac{\partial t}{\partial x'} \right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial y'} \right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial z'} \right)^2 = \frac{1}{v^2(x', y', z')} \quad (2)$$

Оно называется иначе уравнением эйконала и связывает время пробега (эйконал) фронта волны и локальную скорость его распространения. Решением уравнения эйконала является функционал Ферма.

Принцип Ферма и построение сейсмических лучей. Время пробега волны вдоль луча от одной точки до другой минимально по сравнению с другими возможными путями. Такова наиболее простая формулировка принципа Ферма.

В соответствии с принципом Гюйгенса

$$|\mathbf{grad} t| = \frac{dt}{dl} = \frac{1}{v},$$

откуда получается выражение для функционала Ферма

$$t = \int_l \frac{dl}{v(x', y', z')}, \quad (3)$$

где dl - элемент сейсмического луча l .

В градиентных средах применение принципа Ферма сводится к решению вариационной задачи отыскания экстремума функционала Ферма (3). Это делают методами вариационного исчисления, что приводит к необходимости решения так называемого дифференциального уравнения Эйлера. При помощи уравнения Эйлера находят уравнение семейства лучей в параметрической форме, например в виде

$$x' = x'(p) \quad y' = y'(p) \quad z' = z'(p),$$

где p - параметр. Затем определяют время пробега вдоль луча $t = F(x', y', z')$, что позволяет перейти к изохронам. В слоисто-однородных (кусочно-однородных) средах нахождение луча на основе принципа Ферма приводит к задаче отыскания экстремума времени t как функции m переменных в двумерном случае и $2m$ переменных в трехмерном случае, где m - число точек излома луча. Внутри однородного изотропного пространства ($v = \text{const}$) или какой-либо его части сейсмические лучи являются прямыми линиями, а уравнение поля времен согласно (3) имеет вид

$$vt = \int_l dl = |r| = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2} \quad (4)$$

или

$$v^2 t^2 = (x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2,$$

где x_0, y_0, z_0 - координаты источника, в том числе координаты любой точки, которой уже достигло возмущение.

В слоистой среде время распространения волны от источника (x_0, y_0, z_0) до точки наблюдения ($x = x_{m+1}, y = y_{m+1}, z = z_{m+1}$) согласно (4) может быть выражено суммой [10]

$$t = \sum_{k=1}^{m+1} \frac{\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2 + (z_k - z_{k-1})^2}}{v_k} = \sum_{k=1}^{m+1} \frac{r_k}{v_k} \quad (5)$$

Здесь x_k, y_k, z_k ($k=1, 2, \dots, m$) - координаты точек преломления и отражения или образования головной волны, v_k - скорости на отрезках пути между точками с индексами k и $k-1$. Координаты x_k, y_k, z_k связаны между собой зависимостями $z_k = f_k(x_k, y_k)$, выражающими принадлежность точек граничной поверхности с индексом k .

Путь волны, т.е. координаты x_k, y_k, z_k следует искать, используя принцип Ферма. Условия экстремума времени выражения (5) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{x_k - x_{k-1}}{r_k v_k} - \frac{x_{k+1} - x_k}{r_{k+1} v_{k+1}} + \left(\frac{z_k - z_{k-1}}{r_k v_k} - \frac{z_{k+1} - z_k}{r_{k+1} v_{k+1}} \right) \frac{\partial z_k}{\partial x_k} &= 0 \\ \frac{y_k - y_{k-1}}{r_k v_k} - \frac{y_{k+1} - y_k}{r_{k+1} v_{k+1}} + \left(\frac{z_k - z_{k-1}}{r_k v_k} - \frac{z_{k+1} - z_k}{r_{k+1} v_{k+1}} \right) \frac{\partial z_k}{\partial y_k} &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

$$k=1, 2, 3, \dots, m$$

Система уравнений (6) представляет собой закон преломления–отражения (закон Снеллиуса) для m точек $(x_k, y_k, z_k = z(x_k, y_k))$. Рассматривая ее как систему $2m$ уравнений относительно неизвестных координат x_k, y_k , получим решение прямой задачи для фиксированной точки наблюдения x_{m+1}, y_{m+1} .

Наиболее простым способом решения системы уравнений является метод итераций. Для его применения систему (6) нужно представить в виде

$$\begin{aligned} x_k &= \left\{ \frac{x_{k+1}}{r_{k+1}v_{k+1}} + \frac{x_{k-1}}{r_k v_k} - \left(\frac{z_k - z_{k-1}}{r_k v_k} - \frac{z_{k+1} - z_k}{r_{k+1}v_{k+1}} \right) \frac{\partial z_k}{\partial x_k} \right\} \left((r_k v_k)^{-1} + (r_{k+1}v_{k+1})^{-1} \right)^{-1} \\ y_k &= \left\{ \frac{y_{k+1}}{r_{k+1}v_{k+1}} + \frac{y_{k-1}}{r_k v_k} - \left(\frac{z_k - z_{k-1}}{r_k v_k} - \frac{z_{k+1} - z_k}{r_{k+1}v_{k+1}} \right) \frac{\partial z_k}{\partial y_k} \right\} \left((r_k v_k)^{-1} + (r_{k+1}v_{k+1})^{-1} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (7)$$

Начальное приближение задают следующим образом (рис.7). Координаты $x_k^{(0)}, y_k^{(0)}$ соответствуют среде без промежуточных границ. В случае отраженных волн сначала определяют координаты точки отражения $x_u^{(0)}, y_u^{(0)}$, где $u = 0.5(m+1)$. На рисунке $u = 0,5 \cdot 6 = 3$. Затем находят координаты точек преломления $x_k^{(0)}, y_k^{(0)}$, как координаты точек пересечения прямых лучей с криволинейными границами (см. рис.7).

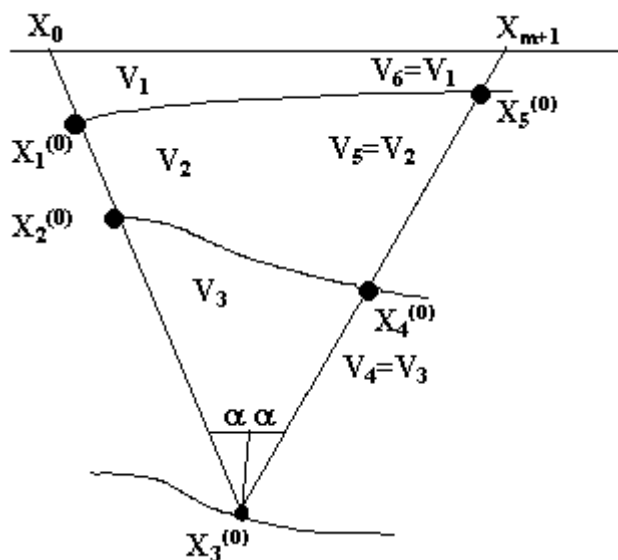


Рис. 7

Итерации продолжаются, пока не будет выполнено условие

$$|t_{\text{посл}} - t_{\text{пред}}| \leq \varepsilon,$$

где t - время, найденное по формуле (5) для последующей и предыдущей итерации. Если это условие не достигнуто на заданное число шагов, дополняют метод итераций методами нелинейного программирования, в частности, методом сопряженных градиентов.

На рис.7 представлен расчет траектории луча отраженной волны. Этим же методом можно рассчитать траекторию луча преломленной волны, включая случай градиентной по скорости среды. Для этого необходимо заменить градиентную среду многослойной со значительным количеством слоев, мало различающихся по скорости. Наиболее простой схема расчета выглядит для прямой волны, например, волны, распространяющейся в пространстве между скважинами или между скважиной и поверхностью земли. Этот случай имеет большое значение для лучевой томографии.

Вопросы для самопроверки.

1. Принципы Гюйгенса и Ферма. Уравнение поля времен в однородной среде.
2. Построение сейсмического луча в слоистой среде на основе минимизации функционала Ферма.

Л е к ц и я 7
(для самостоятельного изучения)
ЭЛЕКТРОМОДЕЛИРОВАНИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ.

Трёхмерное моделирование в баке. Трёхмерное моделирование связано со значительными затратами на изготовление и замену моделей. Имеются трудности в подборе материалов, пригодных для создания объёмных моделей с заданной контрастностью свойств. Наиболее простым видом моделирования в баке является изучение идеальных проводников, изготовленных из металла и помещённых в крепкий раствор соли. Соответственно область применения такого моделирования ограничивается проблемами наземной и скважинной рудной электроразведки. Чаще всего исследуют электрический потенциал. Для решения вопросов, связанных с глубиной и разрешающей способностью, например, метода заряда нет необходимости добиваться совпадения величины потенциала при полевых и лабораторных измерениях. Достаточно изучить относительный вид кривых. Приняв за масштабную единицу какой-либо размер, например, глубину заряда h , выражают все остальные расстояния и размеры в единицах этой глубины. Рассмотрим проблему на примере нормального потенциала точечного заземления на поверхности проводящего полупространства

$$U = \frac{I}{2\pi\sigma_0} \frac{1}{\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + h^2\right]^{1/2}},$$

x_0, y_0 – координаты проекции питающего заземления на дневной поверхности или поверхности водного зеркала бака.

Вынесем глубину заземления из-под корня.

$$U = \frac{I}{2\pi\sigma_0 h} \frac{1}{\left[(\bar{x} - \bar{x}_0)^2 + (\bar{y} - \bar{y}_0)^2 + 1\right]^{1/2}},$$

где величины с чертой, например, $\bar{x} = x / h$ – относительные расстояния. Приведем теперь сам потенциал к относительному виду, приняв за масштабную единицу его максимальное значение $U_{\max} = I / 2\pi\sigma_0 h$ в точке $\bar{x} = \bar{x}_0, \bar{y} = \bar{y}_0$. Для этой величины

$$U / U_{\max} = \left[(\bar{x} - \bar{x}_0)^2 + (\bar{y} - \bar{y}_0)^2 + 1\right]^{-1/2}$$

не важно ни то, где выполнены измерения в поле или в баке, ни каков ток I или значения электропроводности σ_0 и глубины в абсолютных единицах. Необходимо лишь, чтобы относительные расстояния, а при наличии электропроводности в виде идеального проводника его относительные размеры

были одинаковыми в поле и в баке. Электропроводность раствора в баке выбирают исключительно из соображений стабильности при случайном незначительном разбавлении. Абсолютные размеры модели согласуют с конструкцией измерительных электродов. Силу тока выбирают такой, чтобы не происходило нагревания, а измерения потенциала были надежными при существующем уровне помех.

Все сказанное в равной степени справедливо при моделировании относительного кажущегося сопротивления, измеряемого четырех- и трех-электродными установками,

$$\rho_k / \rho_0 = \Delta U / \Delta U_0,$$

где ρ_k – кажущееся сопротивление,

ρ_0 – удельная электропроводность вмещающей среды в поле или в баке,

ΔU – разность потенциалов в присутствии неоднородности или ее модели,

ΔU_0 – разность потенциалов в однородной среде.

2. Двумерное моделирование на электропроводной бумаге. Реализуется на установке МУСГ-1 [11]. Плоскую модель составляют из большого листа бумаги с накладками в виде n -слоев (до десяти) той же бумаги или кусочка металлической фольги в форме сечения неоднородности. Плоская модель и заданное на ней плоское первичное поле моделируют объемную двумерную структуру, поляризуемую поперек ее простирания. Заметим, что точечное заземление на поверхности листа эквивалентно линейному электроду, параллельному простиранию двумерной структуры. Рассмотрим эту проблему подробнее. Если I , А, - ток, подводимый к заземлению, то электрический потенциал на поверхности листа

$$U = -\frac{I}{2\pi S} \ln \frac{r}{r_0},$$

здесь r_0 – расстояние от заземления до точки, в которой потенциал принят за нуль, S - продольная проводимость бумаги, Ом⁻¹. Можно придать иной смысл величине I , считая, что это ток, стекающий с единицы длины линейного электрода I , А/м. При этом численное значение проводимости бумаги S совпадает с удельной электропроводностью среды σ_0 и тогда

$$U = -\frac{I}{2\pi\sigma_0} \ln \frac{r}{r_0}.$$

Для определения электропроводности бумаги разместим на поверхности большого листа трехэлектродную установку $AMN(B\infty)$, тогда

$$S = \frac{I}{2\pi\Delta U_{MN}} \ln \frac{r_{AN}}{r_{AM}}$$

Проводимость накладки из той же бумаги $S_M = nS$, из трех сортов бумаги $S_M = n_1S_1 + n_2S_2 + n_3S_3$, где n_i – число слоев каждого сорта. Отрезав верхнюю часть листа, получим границу раздела земля-воздух. С помощью бумажных накладок можно моделировать наносы переменной мощности, вертикальный и наклонный контакты слабоконтрастных пород, зоны околорудных изменений, а с помощью фольги – сами рудные тела. Таким образом, можно на качественном уровне исследовать многие проблемы электроразведки в двумерных средах, делая поправку на то, что модельное поле соответствует возбуждению среды линейными электродами вместо точечных.

3. Электромоделирование неэлектрических величин. Рассмотрим два примера, а именно искажение нормального геотермического градиента неоднородностью теплопроводности и намагничивание магнетика земным магнитным полем. В каждом из этих случаев напряженность первичного поля может считаться однородной

$$\mathbf{grad}T_0 = \frac{\partial T_0}{\partial z} \mathbf{k} = const \quad \text{и} \quad H_0 = H_{0z} \cdot \mathbf{k} = const.$$

Для тепловой модели необходимо создать однородное поле в области накладки и границы раздела земля-воздух. Обычно задачу рассматривают при изотермическом режиме на дневной поверхности ($T_0 = const$ при $z = 0$), то есть верхняя половина листа должна быть покрыта металлической фольгой. Ток, вводимый по периферии нижней половины листа через множество точечных заземлений, следует выровнять так, чтобы напряженность электрического поля E_{0z} оказалось постоянной в области, куда впоследствии будет помещена накладка. Для магнетика граница раздела земля-воздух не является физической границей и накладку следует поместить в середине однородного листа, подсоединив верхний и нижний периметры к разным полюсам источника тока и проверив однородность поля.

Поскольку коэффициент теплопроводности неоднородности λ мало отличается от λ_0 для вмещающей среды, накладки следует делать из той же бумаги. Относительная магнитная проницаемость μ еще менее отличается от единицы, поэтому накладки следует делать из бумаги меньшей электропроводности. В тепловой задаче измеряют как потенциал (темпера-

туру), присоединив постоянно один из измерительных электродов к металлической фольге, так и градиент потенциала (градиент температуры) с помощью двух сближенных измерительных электродов, включая измерения внутри контура накладки. В случае магнетика меряют обычно напряженность электрического поля, но можно изучить и магнитный потенциал, отождествляя его с электрическим.

При отождествлении результатов электрических измерений с неэлектрическими величинами используют отношения

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{\lambda}{\lambda_0} = \mu \quad \frac{E_i}{E_{i0}} = \frac{\text{grad}_i U}{\text{grad}_i U_0} = \frac{\text{grad}_i T}{\text{grad}_i T_0} = \frac{H_i}{H_{0i}}$$

$i = x$ или y , причем $E = \Delta U_{MN} / MN$.

Переход от измерений электрического потенциала к измерениям температуры можно осуществить следующим образом. Пусть глубина до нижней кромки накладки 2 км. Этому уровню при нормальном геотермическом градиенте соответствует температура $T_0 = 60^\circ$. Измеренный (без накладки) на этом уровне электрический потенциал относительно потенциала фольги составляет, например, $U_0 = 150$ мВ. Тогда для перехода от потенциала к температуре на глубинах 0–2 км можно воспользоваться пропорцией

$$T = \frac{60^\circ}{150} U.$$

Разумеется, здесь изложен принцип перехода. Конкретные значения T , U и глубины могут быть другими.

Вопросы для самопроверки

1. Особенности моделирования в баке.
2. Принципы моделирования на электропроводной бумаге.
3. Электромоделирование распределения температуры.
4. Электромоделирование намагничивания магнетика.

Список рекомендуемой литературы

1. Овчинников И.К. Теория поля. Изд. 2-ое. М., Недра, 1979. 352 с.
2. Вычислительная математика и техника в разведочной геофизике. Справочник геофизика. Изд. 2-ое. М., Недра, 1990. 498 с.

3. Магниторазведка. Справочник геофизика. М., Недра, 1990. 470 с.
4. Электроразведка. Справочник геофизика. Кн. 1. М., Недра, 1989. 438 с.
5. Будаков Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. М., Наука, 1972. С. 347-348.
6. Савельев И.В. Основы теоретической физики. Том 2. М., Наука, 1977. С. 341-349.
7. Кормильцев В.В., Ратушняк А.Н. Векторные интегральные уравнения для градиента потенциала геофизических полей. Российский геофизический журнал, 1995, № 5-6. С. 4-10.
8. Кормильцев В.В., Ратушняк А.Н. Объемные векторные интегральные уравнения для стационарного переноса тепла в фильтрующей среде. Екатеринбург, 1996, 21 с. Деп. в ВИНТИ № 1849-В96.
9. Сейсморазведка. Справочник геофизика. Кн.1. М., Недра, 1990. 336 с.
10. Бондарев В.И. Сейсморазведка, ч. 1. Екатеринбург, (УГГГА), 1995. 174 с.
11. Авдевич М.М., Фокин А.Ф. Электромоделирование потенциальных полей. СПб., Недра, 1992. 112 с.
12. Кормильцев В.В., Ратушняк А.Н. Моделирование геофизических полей при помощи объемных векторных интегральных уравнений. Изд.2-е, Екатеринбург, 2000. 98 с. (РФФИ – УрО РАН).

Оглавление

Лекция 1. Физико-геологическая модель среды. Цели и задачи математического моделирования 3
Лекция 2. Ньютонов потенциал	10
Лекция 3. Объёмные векторные интегральные уравнения при моделировании потенциальных полей 16
Лекция 4. Особенности моделирования различных потенциальных полей 24
Лекция 5. Моделирование переменного электромагнитного поля 33
Лекция 6. Моделирование кинематических характеристик упругих волн40
Лекция 7. Электромоделирование потенциальных полей45
Список рекомендуемой литературы49

Методы моделирования геофизических полей

Конспект лекций для студентов специализации “Геоинформатика в разведочной геофизике” специальности 080400 “Геофизические методы поисков и разведки месторождений полезных ископаемых”.

Кормильцев Валерий Викторович,
профессор кафедры геоинформатики,
доктор геол.-мин. наук, заведующий
лабораторией электрометрии ИГф УрО
РАН, выпускник ГФФ СГИ 1959 г.

Ратушняк Александр Николаевич,
кандидат геол.-мин. наук, старший
научный сотрудник ИГф УрО РАН,
выпускник ГФФ СГИ 1981 г.

Петряев Валерий Евгеньевич,
доцент кафедры геоинформатики
УГГГА, кандидат геол.-мин. наук,
выпускник ГФФ СГИ 1975 г.

Корректурa кафедры геоинформатики УГГГА

Подписано к печати

Формат бумаги 60 x 84,1/16

Печ. л. Уч.-изд.. л.

Тираж Заказ N

Лаб. множительной техники УГГГА
620144, Екатеринбург, Куйбышева, 30